

# Capítulo 3

## Mapa Logístico Perturbado

O mapa Logístico Perturbado é um mapa semelhante ao exposto no capítulo 2. No entanto, ele apresenta um termo aditivo que é introduzido somente de  $t$  em  $t$  iterações. Este novo mapa pode apresentar o mesmo cenário de bifurcação de Feigenbaum, entretanto, por haver a coexistência de mais de um atrator, há interrupções abruptas no cenário de duplicação de período. Mostramos que essas interrupções abruptas geram um novo tipo de crise denominada crise de transferência, diferente das usuais apresentadas no capítulo anterior, por não poder ser associada a nenhuma colisão entre pontos fixos instáveis e atratores caóticos.

Além disso, este novo mapa apresenta cruzamento de trajetórias periódicas, em diagramas de bifurcações. Esses cruzamentos aparecem sempre que um dos pontos da trajetória periódica passa pelo ponto superestável do mapa  $X_n = 0.5$ .

Crise interior e crise de fronteira aparecem neste mapa, sendo que esta última poderá ou não acontecer, dependendo para isso da condição inicial. Mostramos para que condições a crise de fronteira pode ocorrer. Identificamos que, quando existirem órbitas periódicas, o período correspondente destas órbitas será sempre um múltiplo do período  $t$  com que introduzimos a perturbação no sistema. Essa observação é verificada através do estudo analítico do polinômio cuja solução determina as órbitas periódicas. Por fim, identificamos que a intermitência presente nesse mapa perturbado é do tipo I, idêntica à verificada no mapa não perturbado. Parte desses resultados aparecem nas referências [9] e [10].

### 3.1 Mapa Logístico Perturbado

O mapa Logístico Perturbado corresponde ao mapa Logístico [1] adicionando-se a este um termo constante de amplitude  $q$  e período  $t$ ,

$$X_{n+1} = bX_n(1 - X_n) + q\delta_{n,t} \quad (3.1)$$

onde  $\delta_{n,t} = 1$  se  $\frac{n}{t}$  é um inteiro e 0 se não. Como para o mapa Logístico, a equação (3.1) só é válida para o intervalo dado por.

$$0 < X_n < 1 \quad (3.2)$$

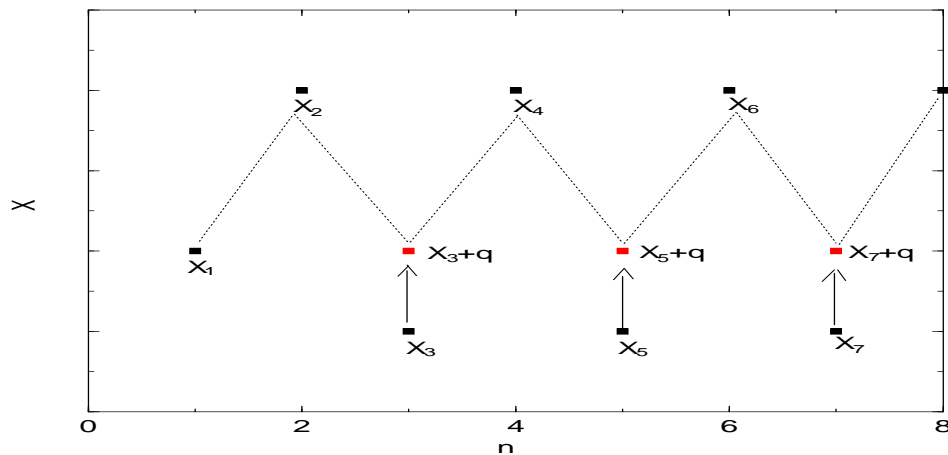


Figura 3.1: Trajetória do mapa Logístico Perturbado, para uma perturbação com período  $t=2$  e amplitude  $q$ . A trajetória resultante é, neste caso, periódica e apresenta período  $p=2$ .

Apresentamos na figura 3.1 uma representação de como estamos introduzindo a perturbação  $q$  ao sistema a cada  $t=2$  iterações. Neste caso, a trajetória obtida, que pode ser vista acompanhando a linha pontilhada, tem período  $p=2$ . Assim, em vermelho, estamos indicando os pontos que, após terem sido perturbados, vão fazer parte da trajetória. Os pontos abaixo dos pontos em vermelho ( $X_3, X_5, X_7$ ) são descartados da série de dados. Numericamente, supondo a equação (3.1) ser representada pela letra  $F$ , o procedimento segue os seguintes passos,

$$\begin{aligned}
X_2 &= F(X_1, b) \\
X_3 &= F(X_2, b) + q \\
X_4 &= F(X_3, b) \\
X_5 &= F(X_4, b) + q \\
X_6 &= F(X_5, b) \\
X_7 &= F(X_6, b) + q \\
X_8 &= F(X_7, b) \dots
\end{aligned}$$

Para uma análise mais detalhada da equação (3.1), o mapa de retorno, da figura 3.2, que nada mais é do que o gráfico da função  $X_{n+1} \times X_n$ , para uma série de  $n$  pontos (obtidos para  $t=5$ ,  $b=3,7$ ,  $q=0,05$  e  $X_0 = 0,20$ ) da qual foi descartado o transiente. Nesta figura podemos analisar como a trajetória dentro do atrator evolui após uma iteração. Assim, vemos na figura 3.2 a trajetória visita duas regiões distintas, uma indicada por pontos em vermelho (parte superior) e a outra indicada por pontos em preto (parte inferior).

Essas duas regiões formam nesta figura um único atrator caótico, cuja parte indicada em vermelho é visitada a cada 5 iterações já que  $t=5$ . Pode-se ver como, para dois valores diferentes de  $X_n$ , obtemos o mesmo valor em  $X_{n+1}$ ; de fato,  $F(X_1) = F(X_2) + q$ . Assim, diferentemente do mapa Logístico, este novo mapa pode apresentar, para uma determinada trajetória dois ou mais pontos iguais. Isso é a causa do aparecimento de cruzamento de trajetórias periódicas vistas em diagramas de bifurcação, caso que será analisado adiante.

## 3.2 Bacias de Atração

Define-se por bacia de atração o conjunto de todas as condições iniciais que levam a trajetória de um sistema para um determinado atrator. No caso do mapa Logístico (seção 2.1), a bacia de atração do atrator é o seu próprio intervalo de validade do mapa,  $[0, 1]$ . Entretanto, o mesmo não é verdade para a equação (3.1) que apresenta diferentes bacias de atração.

Isso significa que, para os mesmos parâmetros ( $b$ ,  $q$  e  $t$ ), diferentes condições iniciais irão dirigir as trajetórias da equação (3.1) para diferentes tipos de atratores. Por exemplo, na figura 3.3 vemos a evolução temporal de duas trajetórias da equação (3.1) para um mesmo conjunto de parâmetros ( $b=3,42$ ,  $q=0,075$  e  $t=2$ ) e diferentes condições iniciais. Assim, em

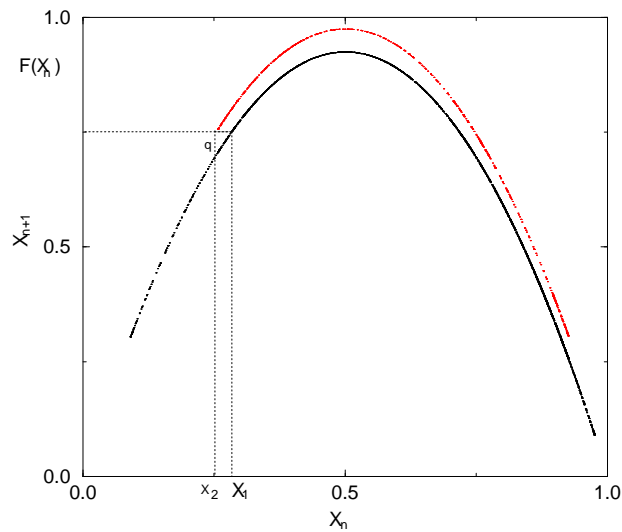


Figura 3.2: Mapa de retorno da equação (3.1) para os parâmetros  $b=3,7$ ,  $q=0,05$ ,  $X_0=0,20$  e  $t=5$ . Os pontos em vermelho, na curva superior, correspondem a pontos obtidos através de (3.1) quando  $\delta_{n,t} \neq 0$ .

(A) para a condição inicial  $X_0=0,20$ , a trajetória oscila caoticamente. No entanto, para uma condição inicial diferente, para  $X_0=0,45$ , a trajetória se comporta periodicamente, com período  $p=2$ .

Com esse exemplo, vemos que a condição inicial  $X_0=0,20$  faz parte da bacia de atração do atrator caótico da figura 3.3A, enquanto que  $X_0=0,45$  faz parte da bacia de atração do atrator periódico visto em (B). Neste capítulo não entraremos em detalhes acerca da questão de como surgem estas diferentes bacias e tampouco apresentaremos todo o conjunto que forma uma bacia.

É necessário, por enquanto, estar consciente da existência de diferentes bacias e da existência de diferentes atratores para um mesmo conjunto de parâmetros  $b$ ,  $q$  e  $t$ .

### 3.3 Órbitas Periódicas

O período de uma órbita periódica está estritamente relacionado ao período da perturbação  $t$ . Como estamos introduzindo uma perturbação de período  $t$  ao sistema (3.1), este só poderá ter uma trajetória com um período que seja múltiplo de  $t$ . Assim, podemos

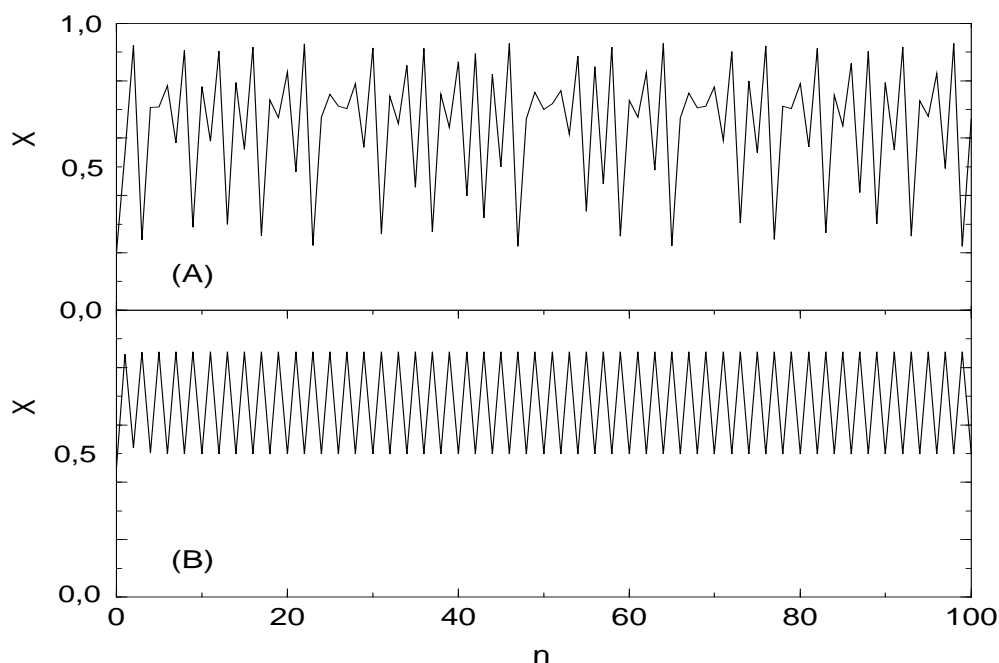


Figura 3.3: Evolução temporal de duas trajetórias da equação (3.1) para os parâmetros  $b=3,42$ ,  $q=0,075$ ,  $t=2$ . Em (A)  $X_0 = 0,20$  e em (B)  $X_0=0,45$

escrever que

$$p = Nt, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.3)$$

Embora a equação (3.3) represente o período de qualquer órbita periódica descrita pela equação (3.1), uma maneira mais dinâmica de apresentar os possíveis períodos das órbitas é considerando a criação de órbitas periódicas através do cenário de duplicação de período. Assim, supondo que haja uma órbita de período  $p$ , dada pela equação (3.3), o período  $p'$ , proveniente das bifurcações seguintes pode ser expresso por

$$p' = 2^M p, \quad \text{onde } M = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4)$$

Essa equação expressa a rota para o caos via duplicação de período.

Podemos obter os pontos de uma órbita periódica analisando a equação polinomial cuja solução nos dá os pontos fixos para a equação (3.1). Assim, para se determinar os pontos

fixos de uma órbita periódica de período  $p$ , obtida iterando a equação (3.1) com  $t$ , devemos resolver a seguinte equação,

$$F^t(X_n) + q = X_n. \quad (3.5)$$

Uma órbita periódica, de período  $p = 2t$ , pode ser determinada, resolvendo-se o seguinte polinômio

$$F^t(F^t(X_n) + q) + q = X_n. \quad (3.6)$$

Generalizando, nós podemos escrever os polinômios para determinar a trajetória de uma órbita de período  $p = Nt$  através de um polinômio de grau  $2^{Nt}$ .

### 3.4 Crise de Fronteira e Destruição do Atrator

A crise de fronteira acontece quando o atrator caótico tem sua bacia de atração destruída. No caso do mapa Logístico isso acontece para  $b=4,0$ , situação em que a função (2.1) pode atingir os valores máximos permitidos dentro do seu intervalo de validade  $[0, 1]$ . Sabemos que para a função (2.1) o seu valor máximo possível é  $F(\frac{1}{2}) = \frac{b}{4} = 1,0$ . Para valores do parâmetro  $b$  ligeiramente maiores que  $b=4,0$ , a equação (2.1) não tem um atrator finito.

No caso da equação (3.1) a crise pode acontecer para valores do parâmetro  $b$  menores que 4,0, já que o valor máximo permitido,  $F_{\text{máx}} = 1,0$ , pode ser atingido quando for satisfeita a seguinte condição,

$$\frac{b}{4} + q = 1,0. \quad (3.7)$$

Assim, a crise de fronteira pode ocorrer quando  $b$  e  $q$  são tais que, aplicados na condição (3.7), fazem a parte esquerda desta equação assumir um valor infinitesimalmente maior do que a unidade.

Apesar da crise de fronteira poder ocorrer para

$$\frac{b}{4} + q > 1,0, \quad (3.8)$$

isto não significa que a crise irá ocorrer.

Supondo que a equação (3.1) seja representada por uma função  $F(X, b, q) = bX(1-X)+q$ , graficamos na figura 3.4 duas situações desta equação, para  $q=0$  (gráfico em preto) e para  $q=0,1$  (gráfico em vermelho). Vemos que a função  $F(X, b = 3,7, q = 0)$  tem um máximo igual a  $F(\frac{1}{2}, b=3,7, q=0) = X_1 = \frac{b}{4}$  que não é maior do que a unidade, e, conseqüentemente, não será o responsável pela destruição do atrator, tornando-o não finito.

No entanto, quando consideramos  $q \neq 0$  (neste caso  $q = 0,1$ ), a função  $F(X, b = 3,7, q = 0,1)$  apresenta um máximo em  $F(\frac{1}{2}, b=3,7, q=0,1) = X_2 = \frac{b}{4} + q$  que é maior do que a unidade.

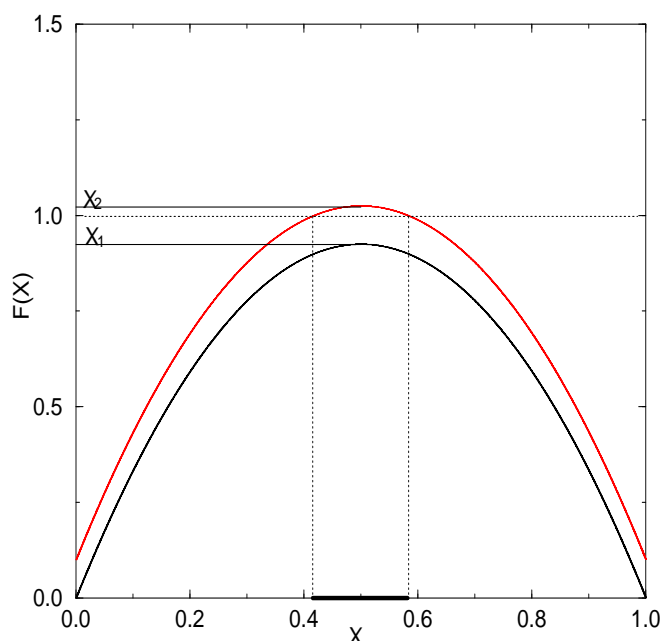


Figura 3.4: Função  $F(X)$  graficada em preto e  $F(X)+q$  em vermelho para os parâmetros  $b=3,7$ ,  $q=0,1$  e  $X_0=0,2$ .

O ponto  $X = \frac{1}{2}$  não é o único ponto que faz a função (3.4) atingir um valor maior do que a unidade, mas há um intervalo de valores de  $X$ ,

$$\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{b}{4(q-1)}}\right] > X > \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{b}{4(q-1)}}\right], \quad (3.9)$$

representado na figura 3.4 por uma linha grossa, na região de  $X = \frac{1}{2}$ , que faz a função atingir um valor maior do que a unidade, tornando-a um atrator não limitado (apêndice B), não finito.

Neste caso para o qual a condição (3.8) é otimamente satisfeita, ou seja, a parte esquerda desta equação é razoavelmente maior do que a unidade, não dizemos que poderá haver uma

Tabela 3.1: Condições para a destruição do atrator da equação (3.1).  $W$  corresponde ao intervalo definido pela equação (3.9) e  $I$  à parte esquerda da condição (3.8).

	Atrator limitado	Crise de fronteira	Atrator não limitado
$I < 1$	sempre que $x_0 = [0, 1]$	—	—
$I = 1$	$x_n \in W$ e $\delta_{n,t} = 0$ $x_n \ni W$	$x_n = \frac{1}{2}$ e $\delta_{n,t} \neq 0$	$x_n = \frac{1}{2}$ e $\delta_{n,t} \neq 0$
$I > 1$	$x_n \in W$ e $\delta_{n,t} = 0$ $x_n \ni W$	—	$x_n \in W$ e $\delta_{n,t} = 1$

crise de fronteira, mas sim que poderá haver uma destruição do atrator tornando-o não limitado.

A crise de fronteira só pode ocorrer, e isso é uma condição necessária mas não suficiente, quando a parte esquerda da equação (3.8) apresentar um valor infinitesimalmente maior do que a unidade.

Assim, quando a equação (3.8) é satisfeita e quando a equação (3.1) apresenta um valor  $X$  no intervalo (3.9), o mapa Logístico Perturbado poderá não apresentar um atrator limitado.

A condição para que o atrator continue a ser limitado mesmo quando a condição (3.8) é satisfeita, é que a trajetória não se dirija para o intervalo (3.9) (o que pode acontecer devido a existência de diferentes bacias de atração) ou que, quando a trajetória atingir o intervalo (3.9), a perturbação não esteja sendo aplicada, ou seja,  $\delta_{n,t} = 0$ .

Para facilitar a compreensão do assunto desta seção, organizamos em forma de tabela as informações aqui discutidas. Denominando o intervalo (3.9) de  $\mathbf{W}$ , e a parte esquerda da equação (3.8) de  $\mathbf{I}$ , vemos na tabela 3.1 como pode acontecer a destruição do atrator da equação (3.1).

### 3.5 Crises e Intermitência

Vimos, nas seções 2.5 e 2.6, que o mapa Logístico pode apresentar crise de fronteira e interior e intermitência do tipo I. Veremos que o mapa descrito pela equação (3.1) pode apresentar os mesmos tipos de crise e intermitência. No entanto, esse mapa pode apresentar



um novo tipo de crise associado com a existência de mais de um atrator.

Para analisar este novo tipo de crise, vamos examinar as figuras 3.5A-B, que são dois diagramas de bifurcação obtidos através da equação (3.1) para  $t=2$ ,  $b=3,42$  e para a amplitude da perturbação variando no intervalo  $0,00 < q < 0,15$ . Em (A) consideramos a condição inicial  $X_0=0,20$  e em (B)  $X_0=0,45$ .

Quatro regiões estão indicadas na figura 3.5A:  $q_1 \approx 0,0568$ ,  $q_2 \approx 0,0603$ ,  $q_3 \approx 0,0844$  e  $q_4 \approx 0,10568$ . Estas quatro regiões são importantes para avaliarmos a natureza do fenômeno que analisaremos a seguir.

As diferenças entre figuras 3.5A-B são devido às suas condições iniciais diferentes, já que os outros parâmetros são os mesmos.

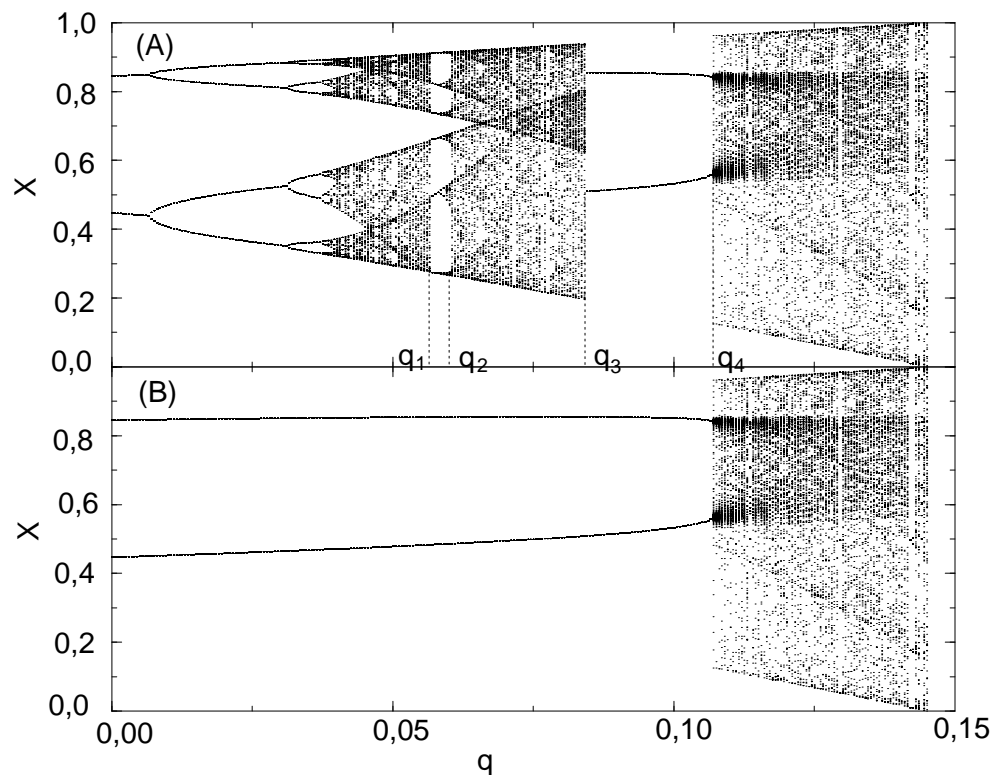


Figura 3.5: Diagrama de bifurcação para  $b=3,42$  e  $t=2$  onde são graficados 500 valores de  $q$ . Em (A)  $X_0=0,20$  e em (B)  $X_0=0,45$ .

Assim, identificamos dois tipos diferentes de atratores não complementares que se tornam

um só para  $q > q_3$ . Para valores de  $q < q_3$  temos um atrator periódico com  $p=2$  na figura 3.5B e outro atrator, na figura 3.5A, que pode ser ou periódico ou caótico, dependendo do valor de  $X_0$ .

Na figura 3.5(A), identificamos um cenário de rota para o caos, similar ao de Feigenbaum (através de duplicação de período), além de janelas periódicas, onde a mais visível (para  $q > q_1$ ) inicialmente tem período  $p=6$ . Para  $q$  ligeiramente menor do que  $q = q_1$  o mapa (3.1) apresenta intermitência do tipo I e para  $q = q_2$  acontece uma crise interior.

A crise de fronteira pode ser identificada quando o atrator caótico, desta mesma figura, toca a reta  $X = 1, 0$ , como acontece no mapa Logístico. No entanto, muitos novos fenômenos estão presentes neste novo mapa. Como, por exemplo, temos a crise de transferência em  $q = q_3$

Como se vê na figura 3.5, a equação (3.1) apresenta dois atratores, para a região  $q < q_3$ . O que acontece é que a bacia de atração do atrator da figura 3.5A torna-se parte do atrator periódico da figura 3.5B. O fenômeno acontece de tal maneira que poderíamos pensar que nesta região estaríamos lidando com o aparecimento de uma janela periódica de período  $p=2$ . Mas isso não é verdade. Em primeiro lugar, existe um processo intermitente, cuja fase laminar é muito pequena. É como se o sistema estivesse se aproximando do ponto de retorno (região onde acontece a bifurcação tangente), mas muito antes de atingi-lo acontece a crise de transferência, na qual a bacia de atração de um atrator é transferida para a bacia de atração do outro atrator.

Para  $q > q_3$  temos um único atrator com  $p=2$ , que abruptamente se transforma em caótico para  $q > q_4$  (quando o ponto fixo de período  $p=2$  perde a estabilidade), diferente do mapa Logístico que atinge comportamento caótico através do cenário de Feigenbaum. Além disso, para  $q > q_4$ , a equação (3.1) apresenta intermitência do tipo I, mas nesse caso a fase laminar média diminui com o aumento do parâmetro  $q$ .

As razões que levam o atrator periódico a ser abruptamente destruído, gerando um atrator caótico, ficarão mais claras no capítulo seguinte, no qual faremos uma análise da perda da estabilidade da equação (3.1) para  $t=2$ .

Outro fenômeno presente neste novo mapa é que, para casos como o da região  $q \approx q_4$ , nenhum dos dois pontos da fase laminar da intermitência aparece na região das bordas do atrator (no limite da região caótica).

Para analisar a intermitência do mapa consideramos, como parâmetros críticos, o valor do parâmetro onde acontece a bifurcação tangente, ou, no caso da crise de transferência, o parâmetro crítico para o qual ocorre a crise. Assim, podemos ter tanto  $b$  quanto  $q$  como

parâmetros críticos. Como neste novo mapa a fase laminar média diminui tanto se afastando do parâmetro crítico, quanto se aproximando, devemos considerar a distância ao parâmetro como,

$$\epsilon_b = |b - b_c| \quad \epsilon_q = |q - q_c|. \quad (3.10)$$

Assim, na figura 3.5 os parâmetros  $q_1$ ,  $q_3$  e  $q_4$ , devem ser vistos como os parâmetros críticos. Embora, para  $q = q_3$ , a equação (3.1) esteja longe do ponto de retorno (onde acontece a bifurcação tangente), é para este valor que ocorre a crise de transferência.

Para demonstrar a existência da bifurcação tangente para  $q = q_4$ , graficamos  $F^2(X) + q = 3,42X(1 - X) + 0,1068$  (figura 3.6) a fim de verificar que  $F^2(X)' = +1$ , como esperado para a bifurcação tangente de uma órbita de período  $p=2$ . Isso pode ser visto, comparando a função (em preto) com a inclinação da reta identidade (em vermelho), cuja inclinação é 45 graus, definindo um derivada de valor +1.

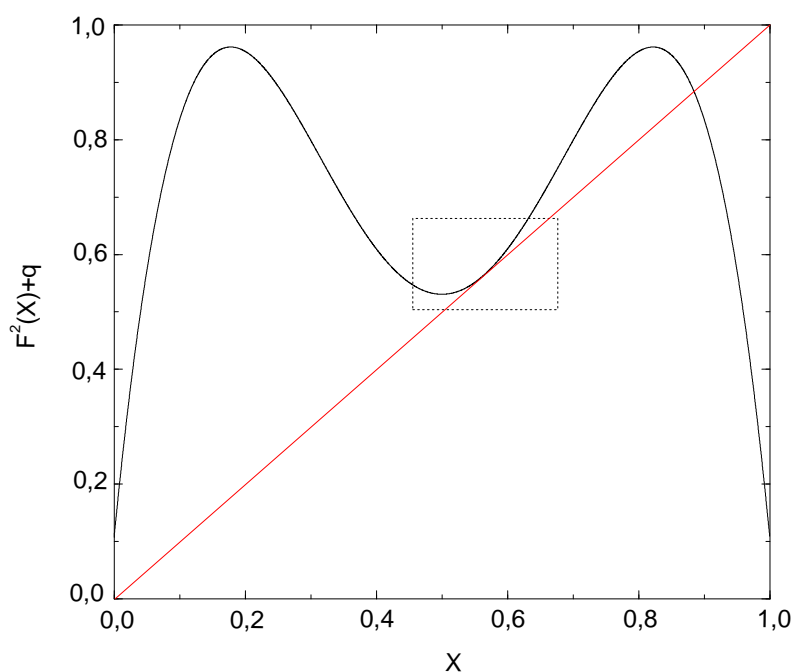


Figura 3.6: Função  $F^2(X) + q$  em função de  $X$ , para os parâmetros  $b=3,42$ ,  $t=2$  e  $q=0,1068$ .

Na figura 3.7, analisamos cinco casos críticos da equação (3.1), para diferentes valores de  $b$  e  $q$  indicados na figura. Vemos que, para dois casos indicados na figura por quadrados

e losangos, a inclinação da reta ajustada do gráfico (que é um gráfico  $\log \times \log$ , indicando a existência de uma lei de potência) é diferente dos outros dois casos, cujas inclinações são próximas de meio (0,5).

Esses dois casos são referentes a regiões em que acontecem crises de transferência e, portanto, não podem ser tratados como casos em que ocorrem intermitência do tipo I. No entanto, existe um processo que poderíamos chamar de intermitência fracamente laminar, ou seja a fase laminar média, além de ser curta em comparação com a fase caótica, pouco varia em relação à distância  $\epsilon$ .

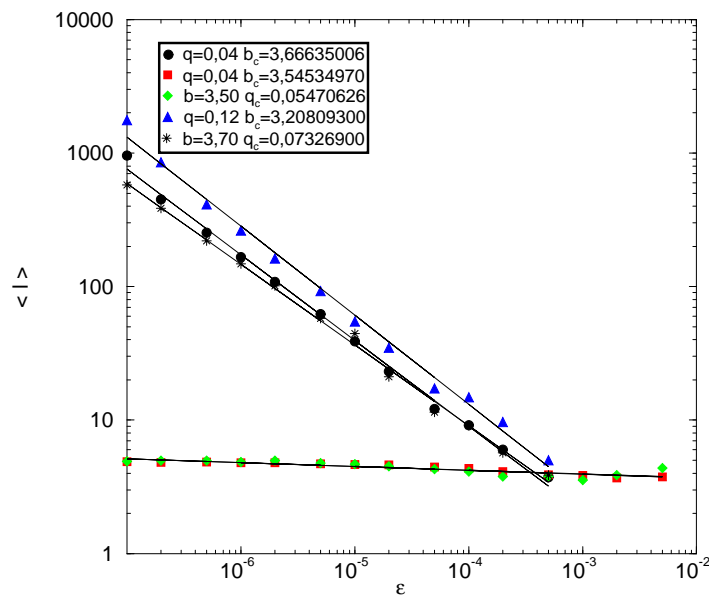


Figura 3.7: Fase laminar média em função de  $\epsilon$  (3.10)

Por último, apesar do mapa (3.1) poder ser imaginado como sendo um mapa descontínuo [36], [33], [35], este mapa não apresenta intermitência com dependência logarítmica em relação ao tamanho da fase laminar média, como nas referências [36], [33], [35].

O mapa (3.1) também não apresenta um cenário, de rota para o caos, típico de mapas descontínuos, no qual o aparecimento de novos períodos acontece de forma aditiva e não em potência de dois, como no cenário de Feigenbaum [1].

## 3.6 Cascatas Inversas

Da mesma maneira que, aumentando o parâmetro  $b$  na figura 2.4, vemos duplicações de período, no processo de cascatas inversas o período da órbita gerada para um aumento do parâmetro é duas vezes menor. Na figura 3.8, uma sequência de cascatas inversas pode ser vista para um aumento do valor de  $q$ .

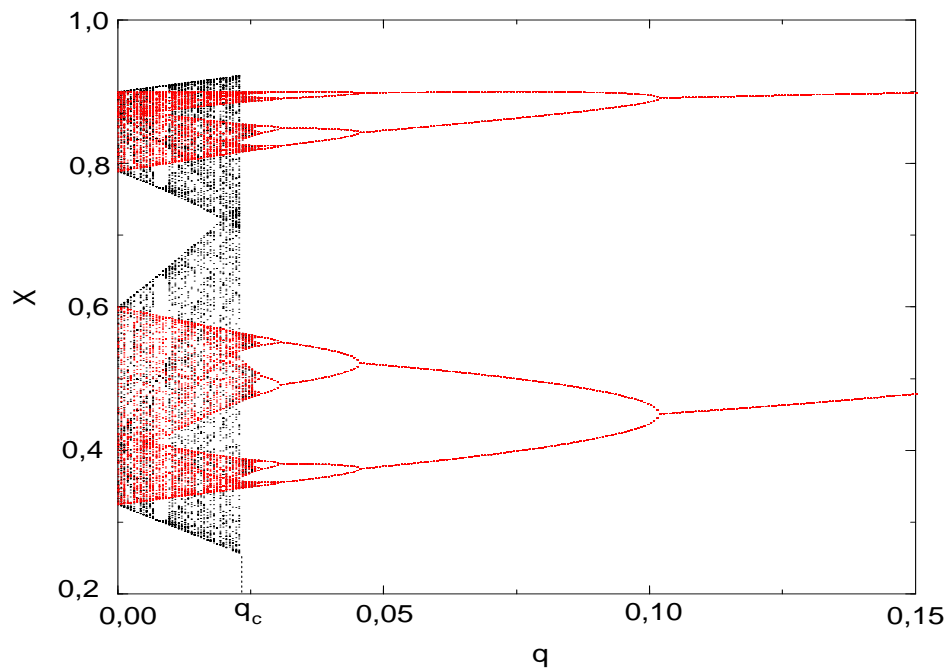


Figura 3.8: Diagrama de bifurcação para  $b=3,6$  e  $t=2$  onde são graficados 250 valores de  $q$ . Atrator em vermelho obtido para  $X_0=0,48$  e o atrator em preto obtido para  $X_0=0,2$ .

Na figura 3.8, acontece crise de transferência para o parâmetro indicado por  $q = q_c$ . Neste caso, para  $q = q_c$ , a bacia do atrator em preto (obtido para  $X_0 = 0,20$ ) é destruída e passa a fazer parte da bacia do atrator em vermelho (obtido para  $X_0 = 0,48$ ). Assim, os dois atratores que coexistiam (o vermelho e o preto) para  $q < q_c$ , fundem-se para  $q > q_c$  em apenas um (o vermelho). Como consequência, no diagrama de bifurcações vê-se um atrator caótico largo (preto) abruptamente encolher de tamanho em  $q = q_c$ . Mas isso é devido à crise de transferência, que faz a bacia de atração do atrator preto se transferir para a bacia

de atração do atrator vermelho<sup>1</sup>.

Deve-se enfatizar que o aparecimento de cascatas inversas só pode acontecer quando consideramos uma variação positiva no valor da amplitude  $q$ . Ou seja, ocorrem cascatas inversas em diagramas de bifurcações realizados considerando-se uma variação apenas no parâmetro  $b$ .

Uma estrutura interessante que surge, com o aparecimento da cascata inversa nos diagramas de bifurcação, são as estruturas do tipo cíclicas. Nesse caso uma órbita se duplica mas logo em seguida sofre uma cascata inversa, gerando uma estrutura fechada, como podemos ver na figura 3.9, feita para  $b=3,3$  e  $t=3$ . Outra característica dessa figura é que acontece uma bifurcação descontínua (no diagrama para  $q \approx 0,1665$ ) devido a crise de transferência.

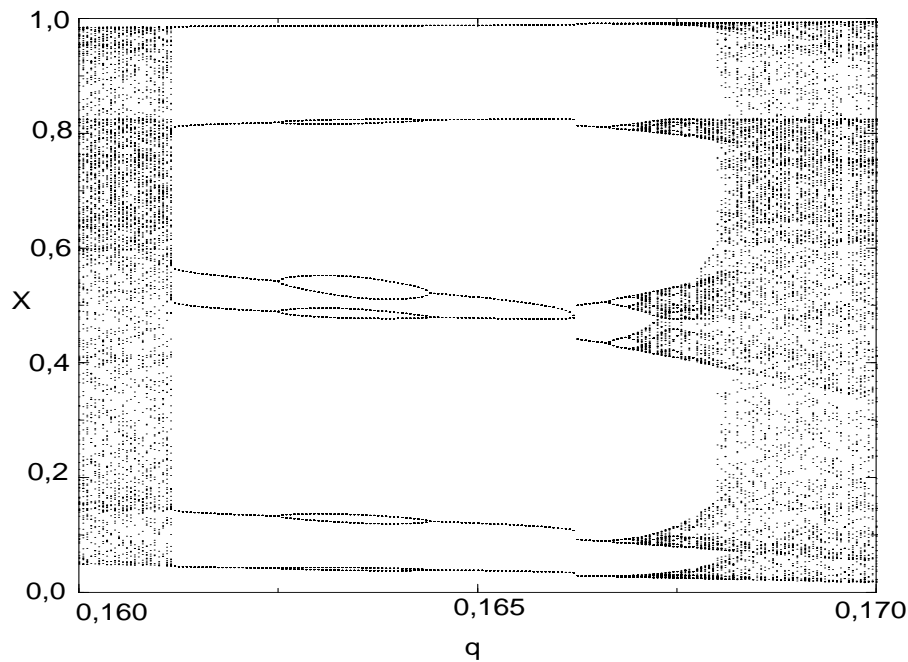


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação para  $b=3,3$ ,  $t=3$  e  $X_0=0,20$ , onde são graficados 200 valores de  $q$ .

<sup>1</sup>Essa crise poderia ser erroneamente confundida com a crise interior, que acontece devido a colisões de atratores com órbitas periódicas

## 3.7 Cruzamento de Trajetórias

Pode ocorrer repetição de um mesmo ponto em uma trajetória. Por exemplo, uma trajetória com período  $p=8$ , onde os pontos desta trajetória são representados pelo vetor  $X_n, n = 1, \dots, 8$ . Então, um dos pontos desta trajetória, como o ponto  $X_4$ , é igual ao ponto  $X_1$ , como pode acontecer para o mapa (3.1).

Pode-se pensar que a nova trajetória tenha período  $p=4$ . Mas isso não é verdade já que a trajetória definida pelos pontos de  $X_1$  a  $X_4$  é diferente da trajetória definida pelos pontos de  $X_4$  a  $X_8$ . Portanto, a trajetória tem período  $p=8$ , já que este é o período necessário para que o sistema retorne à condição inicial  $X_1$ , que é também o ponto onde a órbita de período  $p=8$  se fecha.

A consequência deste fato é que num diagrama de bifurcação pode haver cruzamento entre diferentes trajetórias, como os da figura 3.10A. Nota-se que os cruzamentos das trajetórias se dão em regiões do parâmetro  $q$  para as quais o coeficiente de Lyapunov ( $\lambda$ ) é mínimo (figura 3.10B), bem como em região do parâmetro  $q$  para a qual o mapa (3.1) apresenta uma órbita superestável.

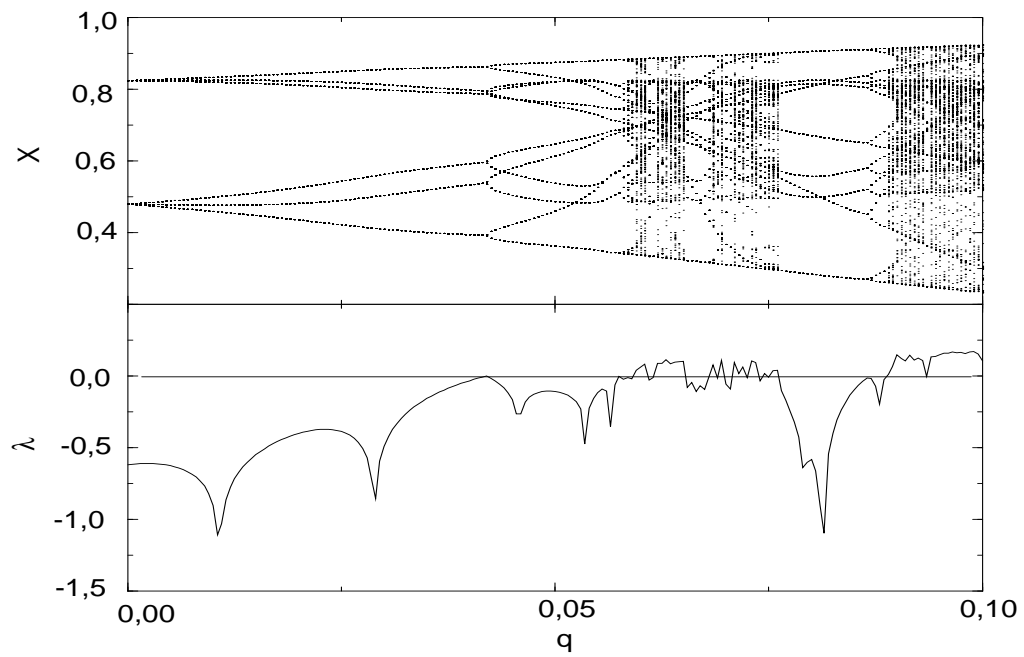


Figura 3.10: Diagrama de bifurcação obtido para  $b=3,3$ ,  $t=3$  e  $X_0=0,20$ , onde são considerados 200 valores de  $q$ . Abaixo se vê o coeficiente de Lyapunov  $\lambda$ .