

Capítulo 2

O Mapa Logístico

O mapa Logístico é um sistema dinâmico não-linear, inicialmente proposto para estudar o controle de populações[25]. Esse mapa apresenta uma gama enorme de fenômenos presentes em sistemas caóticos e por isso ele é bastante utilizado para testar métodos de análise de oscilações caóticas. Com esse mapa Feigenbaum [1] provou características autosimilares nas bifurcações que ele apresenta, posteriormente encontradas em muitos sistemas teóricos e experimentais [26]. Assim, embora este seja um sistema bem conhecido, apresentamos neste capítulo alguns fenômenos nele presentes, tais como intermitência, crises e janelas periódicas. Isso será útil para analisar, nos capítulos 3 e 4, um mapa estudado por nós, o mapa Logístico Perturbado.

2.1 O Mapa Logístico

O mapa Logístico é um mapa discreto não linear representado pela equação

$$F(X_n) = X_{n+1} = bX_n(1 - X_n) \quad (2.1)$$

Essa equação determina a variável X_{n+1} a partir de X_n . A evolução da variável depende do parâmetro de controle b . O valor máximo de X_n é 1. Quando X_n é próximo de 1, X_{n+1} será pequeno. No entanto, quando $X_n \approx 0$, X_{n+1} será proporcional ao parâmetro de controle b . Assim, se X_n é interpretado como o número de indivíduos em uma população, b pode estar relacionado à quantidade de alimento, condições climáticas ou outros parâmetros a que esta população está submetida.

Este mapa apresenta diferentes fenômenos para diferentes valores do parâmetro de controle. Assim, vamos estudar a evolução deste mapa para alguns valores do parâmetro b .

Para estudar a evolução de uma trajetória da equação (2.1), duas informações são necessárias: uma condição inicial, X_0 , e o valor do parâmetro b .

Assim, inicialmente, consideramos $X_0=0,2$ e $b=2,9$, obtendo a figura 2.1A. Após um determinado número de iterações n ($n \cong 50$), denominado de intervalo de transição (ou transiente), a trajetória tende a um único valor, chamado de ponto fixo, X^* . Já na figura 2.1B, obtida para $b=3,1$ e $X_0=0,2$, a trajetória tende a oscilar entre dois valores, após um certo período transitório. Neste caso, dizemos que o sistema é periódico com um período de oscilação igual a dois. O ponto fixo tem um período $p=2$.

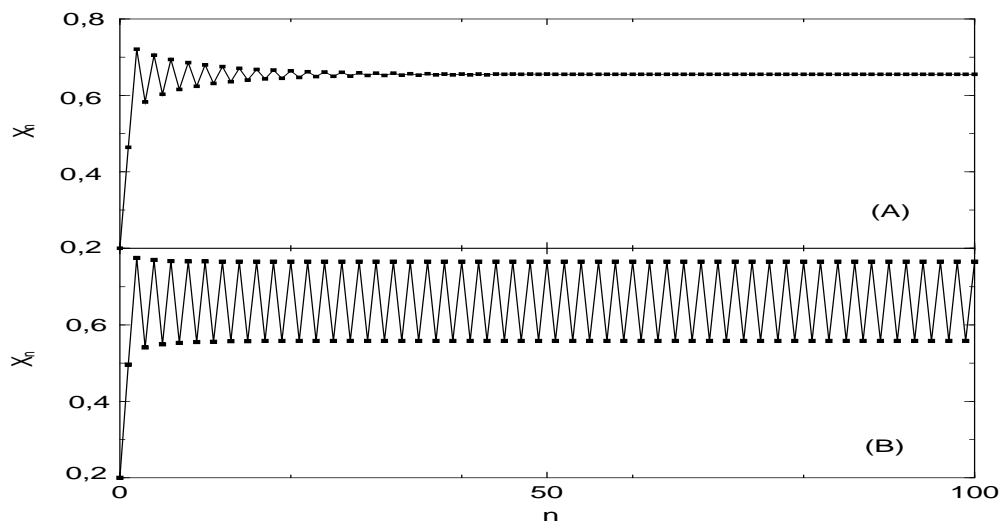


Figura 2.1: (A) Evolução de trajetórias da equação (2.1) para $b=2,9$ e $X_0 = 0,2$, e em (B) para $b=3,1$ e $X_0 = 0,2$.

O ponto fixo, X^* , de período $p=1$, da função $F(X)$, é obtido fazendo-se $F(X^*) = X^*$. Portanto,

$$X_{n+1} = bX^*(1 - X^*) = X^* \quad (2.2)$$

Usando a equação (2.2), obtemos dois pontos fixos de período $p=1$

$$X^* = 0 \quad \text{e} \quad X^* = 1 - \frac{1}{b}. \quad (2.3)$$

Entretanto, $X^*=0$ é uma solução trivial.

A evolução final das trajetórias do mapa Logístico não depende da condição inicial escolhida. Assim, após o transiente, obteríamos o mesmo resultado mostrado na figura 2.1, para outras condições iniciais.

Na figura 2.1, há evidências de uma bifurcação. Com o aumento de b a trajetória de período $p=1$ perdeu estabilidade e surgiu uma outra trajetória estável com período $p=2$.

2.2 Análise de Estabilidade e Duplicação de Período

A análise da estabilidade das trajetórias da equação (2.1) pode esclarecer as afirmações dos parágrafos precedentes.

Ao redor de um ponto fixo, um sistema não linear pode ser aproximado por um sistema linear.¹ Dessa maneira, nós podemos analisar a trajetória nas redondezas do ponto fixo (X^*), ou seja, em $X^* + \epsilon$. Linearizando a equação (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= F(X^* + \epsilon) \\ &\approx F(X^*) + \epsilon F'(X^*) \\ &= X^* + \epsilon F'(X^*). \end{aligned} \tag{2.4}$$

X^* será um ponto fixo estável caso

$$|F'(X^*)| < 1. \tag{2.5}$$

Através de (2.5) determinamos que o ponto fixo de período $p=1$ é instável para $b < 1$ ou $b > 3$. Assim, para $b > 3$ o ponto fixo de período $p=1$ perde a estabilidade.

No entanto, para $b > 3$, surge uma trajetória de período $p=2$. Nesse caso, a variável assume os valores X^{1*} e X^{2*} . Esses pontos são obtidos iterando-se duas vezes o mapa:

$$\begin{aligned} F^2(X_n) &= bF(X_n)[1 - F(X_n)] \\ &= b^2 X_n(1 - X_n)[1 - bX_n(1 - X_n)]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

e usando-se a condição $F^2(X^*) = X^*$. Dessa forma X^* pode ser obtido da equação a seguir, cuja solução nos dá os quatro possíveis valores de X^* :

¹Esta afirmação só é válida para sistemas (como o mapa Logístico) que apresentam pontos fixos hiperbólicos, que são pontos para os quais a matriz Jacobiana do sistema não apresenta auto-valores com parte real nula.

$$-b^3 X^{j^*4} + 2b^3 X^{j^*3} - (b^3 + b^2)X^{j^*2} + (b^2 - 1)X^{j^*} = 0. \quad (2.7)$$

Das quatro soluções possíveis, uma é a trivial $X^* = 0$, duas são as observadas X^{1^*} e X^{2^*} e a última não consideramos por ser complexa.

Aumentando-se o parâmetro b , para $b > 3,45$, acontece outra bifurcação e a trajetória passa a apresentar um período $p=4$. Outras bifurcações sucessivas vão produzir períodos $p=8, 16, 32$, e assim por diante, gerando órbitas de período 2^m , com $m \in \mathbb{N}$.

Para $m \rightarrow \infty$ o período do ciclo é infinito, e portanto aperiódico. Nesse caso a trajetória passa a se comportar caoticamente, e isso acontece para o parâmetro de controle indicado por b_∞ , também conhecido por ponto de acumulação.

O surgimento do caos via duplicação de período é apenas uma das possíveis maneiras de ocorrer o surgimento de comportamento caótico. Essas diferentes maneiras, muitas das quais expostas nesta tese, são denominadas rotas para o caos.

Antes de entrar na descrição das trajetórias caóticas, vamos analisar, geometricamente, como acontece a perda da estabilidade.

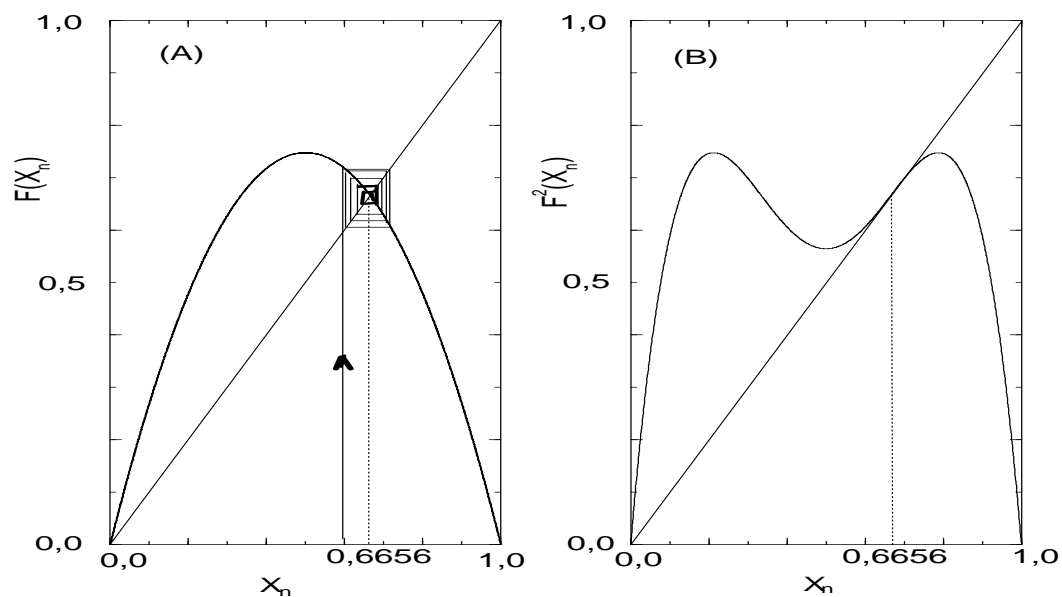


Figura 2.2: (A) Gráfico da função $F(X_n)$, obtido para $b=2,99$. (B) Gráfico de $F^2(X_n, b)$, para $b=2,99$.

Na figura 2.2A, vê-se o gráfico da função $F(X_n)$ para $b=2,99$ e em (B) o gráfico de $F^2(X_n)$. Pode-se perceber que em (A) um ponto inicial qualquer será dirigido para o ponto

fixo $X^* \cong 0,6656$, o que pode ser visto acompanhando-se a linha que representa a evolução temporal da trajetória estável de acordo com a condição (2.5). Na figura 2.2A a estabilidade da trajetória pode ser reconhecida pela inclinação da curva que representa a variação de F . Como em X^* a inclinação dessa curva é menor do que a da reta determinada pela função $F = X_n$, identificamos X^* como um ponto estável.

Na figura 2.2(B), vê-se o gráfico de $F^2(X_n)$, o qual indica que o ponto fixo em questão continua a ser estável, já que a curva da função $F^2(X_n)$ ainda tem a inclinação menor do que a da reta que representa a função $F^2(X_n) = X_n$, cuja inclinação, é de 45 graus.

Analizamos, na figura 2.2, um caso no qual o ponto fixo estável $X^* \cong 0,6656$ está em vias de perder a sua estabilidade. A fim de se analisar como este ponto perde a estabilidade e como os gráficos da figura 2.2 têm a sua estrutura alterada, passamos a analisar o caso para $b > 3,0$, na verdade para $b=3,2$.

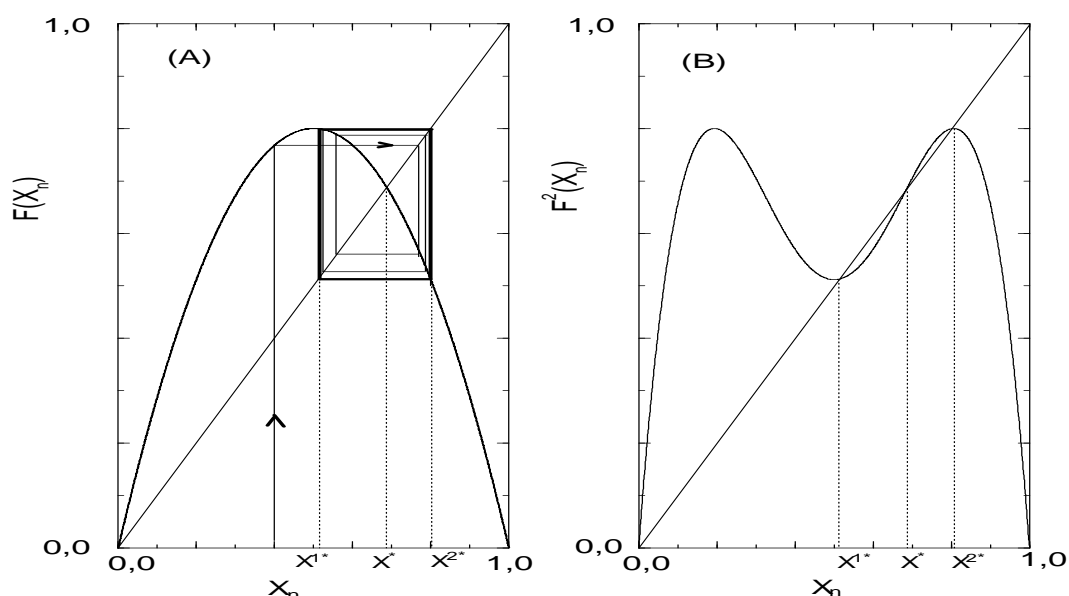


Figura 2.3: (A) Gráfico da função $F(X_n)$, obtido para $b=3.2$. (B) Gráfico de $F^2(X_n)$, para $b=3.2$. $X^*=0,6875$.

Na figura 2.3, vemos que o ponto fixo de período $p=1$, $X^* \cong 0,6875$, obtido através de (2.3), não é mais estável. No entanto, há uma trajetória de período $p=2$, estável.

Vamos analisar a estabilidade da trajetória ao redor de um dos pontos X^{1*} ou X^{2*} . É bom lembrar que a aplicação de X^{1*} na equação (2.1) é o próprio X^{2*} , isto é, $F(X^{1*}) = X^{2*}$.

A condição de estabilidade

$$|F^{2j}(X^{j*})| < 1, 0, \quad (2.8)$$

usando a regra da cadeia, pode ser expressa como

$$|F^{2j}(X^{1*})| = |F(F(X^{1*}))'| = |F'(F(X^{1*}))F'(X^{1*})| = |F'(X^{2*})F'(X^{1*})| < 1, 0. \quad (2.9)$$

Este tipo de bifurcação, na qual o ponto fixo perde estabilidade e, surgem dois ramos estáveis, é denominado na literatura de bifurcação de duplicação de período e, nesse caso, essa duplicação é do tipo “flip”².

No caso do mapa Logístico a demonstração é trivial, já que a matriz Jacobiana do mapa é a própria derivada. Dessa maneira, o aparecimento do ramo estável de período $p=2$ ($b=3,0$), ocorre para X^* dado pela equação (2.3), uma vez que a função $F'(X^*) = 3,0X^*(1 - X^*) = -1$.

Para um mapa qualquer, a condição necessária para que este cenário de duplicação de período, no qual um ponto perde estabilidade e dois novos pontos surgem, originando as duplicações de período do tipo “flip”, é que a função Schwarziana [27] definida como

$$S(f) = \frac{F'''(X)}{F'(X)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(X)}{F'(X)} \right)^2 \quad (2.10)$$

seja negativa no intervalo unitário $[0,1]$. Com o aumento do parâmetro estas duplicações continuam a ocorrer, infinitamente até atingir o ponto de acumulação b_∞

2.3 Ciclos Super Estáveis e Autosimilaridades

Como mencionado anteriormente, o mapa (2.1) descreve bifurcações (com o aumento de b), até atingir o valor $b = b_\infty \cong 3,56994$, acima do qual o sistema apresenta caos.

Uma das maneiras de se caracterizar movimentos caóticos e periódicos é através do uso do coeficiente de Lyapunov (λ) [28]. Através do seu valor podemos caracterizar o movimento como,

²A nomenclatura “flip” se deve ao fato de que os pontos dos n ramos estáveis são visitados um após ao outro, alternadamente. [5]. Essa bifurcação é caracterizada por apresentar um autovalor da matriz Jacobiana do sistema considerado igual a -1

$$\begin{aligned}\lambda > 0 &\Rightarrow \text{caos} \\ \lambda < 0 &\Rightarrow \text{periódico}\end{aligned}\quad (2.11)$$

e esse expoente é calculado, no caso de mapa unidimensionais $F(X_n)$, fazendo-se

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{\partial F(X_n)}{\partial X_n} \right|. \quad (2.12)$$

Numericamente, para se obter o coeficiente de Lyapunov, escolhemos um número fixo de iterações N , e o introduzimos dentro da somatória da equação (2.12), para não acumularmos um número muito grande, e assim, termos problemas de overflow.

Uma maneira de se visualizar o comportamento do mapa Logístico, para todo o intervalo de variação do parâmetro de controle b , pode ser feita através de um diagrama de bifurcação. Esta figura contém os valores da função (2.1), desconsiderando-se para isso o transiente, em função do parâmetro de controle.

Esse diagrama pode ser visto na figura 2.4A. Em 2.4B aparecem os valores do coeficiente de Lyapunov, para cada valor do parâmetro b , obtido considerando-se um número de iterações $N=2000$, descartando-se o transiente ($N=1000$), e a condição inicial considerada $X_0 = 0.2$.

Na figura 2.4, vemos que para determinados valores do parâmetro de controle B_1 e B_2 , o valor do coeficiente de Lyapunov é mínimo. Por isso, estas regiões do parâmetro de controle geram órbitas do mapa denominadas de super estáveis. Estas órbitas são então super estáveis de período 2^m .

O mapa Logístico, representado pela função F , satisfaz a condição (2.8) quando $X = \frac{1}{2}$. Entre as bifurcações, indicadas na figura 2.4 pelas letras b_1 e b_2 , existe um valor do parâmetro b para o qual a trajetória visita o ponto $X = \frac{1}{2}$.

A distância d_1 , indicada na figura 2.4, pode ser obtida fazendo-se

$$d_1 = F_{B_1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad (2.13)$$

e a distância d_2 de

$$d_2 = F_{B_2}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Generalizando, para uma órbita super estável de período 2^m obtemos

$$d_k = F_{B_k}^{2(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

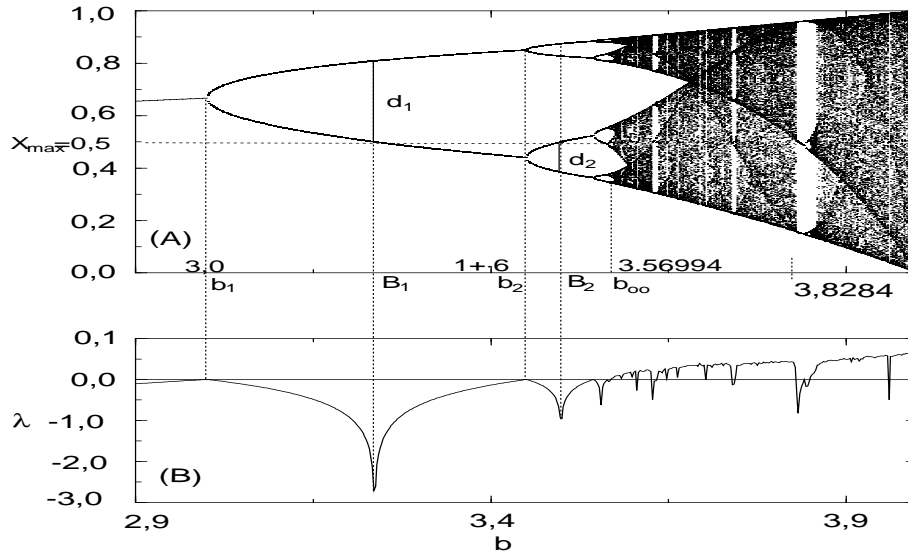


Figura 2.4: (A) Diagrama de bifurcação do mapa Logístico, onde são impressos 250 valores de X_n para cada um dos 500 valores considerados do parâmetro de controle b . (B) Coeficiente de Lyapunov, para cada um dos 500 valores do parâmetro b , considerados no diagrama de bifurcação apresentado em (A).

Na equação (2.15), a escolha do ramo da figura (2.4) que consideramos para o cálculo de d é aquele que cruza a linha pontilhada de $X = 0.5$.

Nota-se na figura 2.4 que parece existir uma relação geométrica entre os valores dos parâmetros onde ocorrem as bifurcações (b_n) e os valores das distâncias d_n (fatores de escala). Esta razão que pode ser colocada na forma,

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -a_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (2.16)$$

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+2} - b_{n+1}} = \sigma_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \quad (2.17)$$

onde a e σ são as constantes de Feigenbaum obtidas numericamente usando técnicas de renormalização [28] ao mapa Logístico,

$$a = 2,502907875... \quad (2.18)$$

$$\sigma = 4,669201609... \quad (2.19)$$

Essas constantes são válidas para uma grande classe de mapas discretos e sistemas experimentais[26]. Em relação aos mapas, a função deles deve apresentar um máximo (há somente uma derivada do mapa igual a zero em todo o intervalo de validade do mapa). Esses mapas são chamados de unimodais e, normalmente, contêm apenas um parâmetro a ser variado. Assim, a sua codimensão (definida como o número de parâmetros de controle [29],[30]) é igual a um.

Apesar das leis de escala (2.18) e (2.19) serem válidas para uma classe grande de mapas discretos unimodais, fluxos também apresentam este cenário de duplicação de período, seguindo as leis de escala de Feigenbaum, caso possam ser mapeados através de uma função unimodal.

Sistemas que têm mais de uma máximo (bimodais) apresentam infinitas leis de escala devido às infinitas possibilidades de órbitas superstáveis [31]. Assim, as leis de Feigenbaum passam a ser apenas um caso particular de leis de escala mais amplas.

2.4 Janelas Periódicas

Para $b > b_\infty$, a equação (2.1) pode gerar trajetórias caóticas. Muitos fenômenos aparecem nesta região compreendida no intervalo $b_\infty \leq b \leq 4$, dentre eles as denominadas crises do atrator que correspondem a mudanças drásticas em sua estrutura.

Na região com $b \geq b_\infty$, há janelas com órbitas periódicas, entre atratores caóticos. Dentre essas janelas, como pode-se observar na figura 2.4, há uma especial que é a mais larga, a partir de $b \geq 1 + \sqrt{8}$, que apresenta período $p = 3$.

Esta janela é de vital importância já que a existência da órbita de período três leva a outras órbitas periódicas de todos períodos, conforme previsto pelo teorema de Sarkowskii (ver [32]).

Nestas janelas o ciclo de bifurcações do cenário de Feigenbaum também ocorre, ou seja, as leis de escala de Feigenbaum são válidas. A ocorrência e a destruição destas janelas vão ser descritas na seção seguinte.

2.5 Crises

Crise, como definido na referência [4], é a colisão entre um atrator caótico e um ponto fixo ou uma órbita periódica instáveis. Basicamente, há três pontos importantes sobre essas

crises. Elas são a causa de súbitas mudanças na dinâmica caótica (com exceção das “subductions”); tais eventos ocorrem em muitas circunstâncias e sistemas; e, seguindo a ocorrência de crises, certos comportamentos estatísticos ocorrem, dependendo do tipo de crise.

Basicamente há dois tipos de crises que nos interessam. A crise de fronteira, na qual o ponto instável de período $p=1$ colide com o atrator caótico, na região de $b=4,0$, destruindo completamente o atrator caótico e a crise interior a qual dedicaremos um pouco mais de atenção.

Na figura 2.5, acontece o surgimento de uma órbita periódica, em $b=b_t$, através de uma bifurcação tangente [28] e ou de sela-nó [5], gerando um ramo estável e outro instável. Para $b > b_t$, esta órbita estável, de período três, sofre uma série de bifurcações, através do cenário de duplicações de período gerando regiões caóticas localizadas, denominadas de bandas caóticas.

Podemos ver a ocorrência de crise interior na figura 2.5, em que a órbita periódica instável (cuja trajetória está desenhada com uma linha pontilhada) colide com uma banda caótica (que se originou após infinitas duplicações de período da órbita de período três, fazendo com que o atrator mude de tamanho e forma).

Voltando um pouco à região em que ocorreu a bifurcação tangente, vemos que, quando surge a órbita de período três, ela é precedida pelo atrator caótico. No entanto, ele subitamente termina para $b = b_t$. Vemos que a crise de fronteira não é então a única responsável pelo término de um atrator caótico.

O processo aqui envolvido é denominado de “subduction”, onde um atrator não caótico aparece dentro de um atrator caótico, mas diferentemente da crise de fronteira, no caso de uma “subduction”, a bacia de atração³ do atrator não é destruída.

Para um parâmetro de controle perto destas regiões em que ocorrem abruptas mudanças no atrator, o comportamento do sistema segue alguns padrões. No caso justamente anterior à “subduction” (para $b < b_t$), ocorre intermitência (fenômeno que descreveremos no capítulo seguinte) e, no caso da crise de fronteira, transiente caótico ocorre para parâmetros justamente após o valor crítico para a ocorrência da crise ($b > 4,0$). Esse transiente caótico significa que a trajetória fica oscilando caoticamente durante um intervalo de tempo finito na região do atrator ($b = 4,0$), antes que ele seja destruído.

Para o caso da crise interior, para parâmetros $b > b_c$, pode-se determinar o tempo médio que a órbita permanece na região das bandas caóticas, antes da ocorrência da crise, em

³Define-se por bacia de atração de um atrator A ao conjunto de condições iniciais cujas trajetórias são dirigidas para o atrator A .

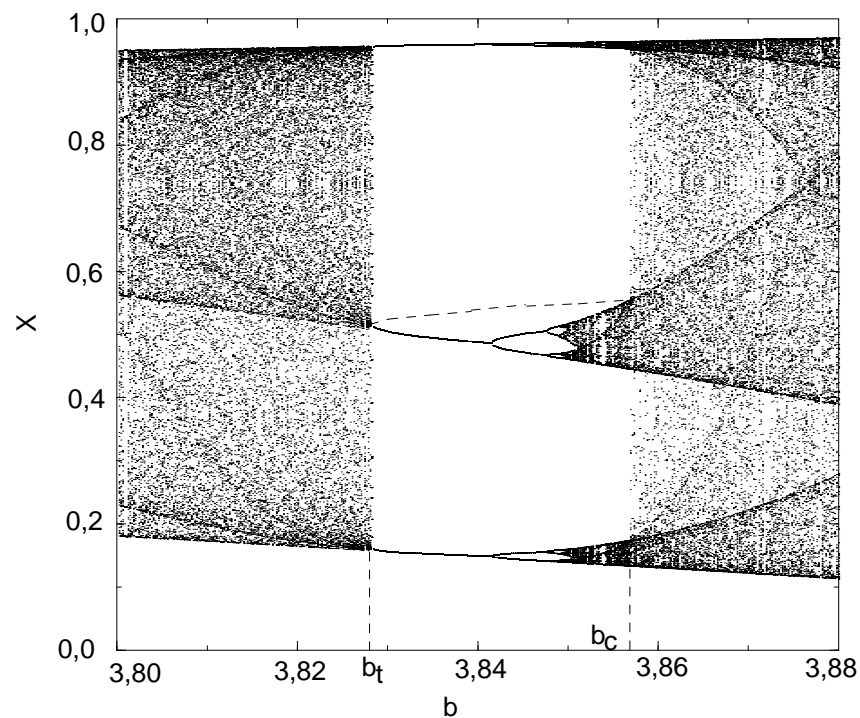


Figura 2.5: Janela de período três, mostrando o fim do comportamento caótico e a criação de uma órbita periódica, em $b = b_t$, que com o aumento de b sofre duplicações de período. Em $b = b_c$ a órbita periódica instável, representada por uma linha pontilhada, colide com as bandas caóticas, modificando radicalmente o atrator, que fica mais largo (crise interior).

função da distância do parâmetro b com o parâmetro b_c [4].

2.6 Intermitência

Além da rota para o caos via duplicação de período, exposta nas seções anteriores, vamos agora descrever a rota para o caos via intermitência. Essa rota foi matematicamente estudada na referência [7]. Ela descreve um sinal cuja evolução temporal permanece regular por um determinado tempo (fase laminar) e de repente passa a se comportar caoticamente (estouro caótico).

Pomeau e Manneville [7] descreveram três tipos de intermitência, as quais surgem de

acordo com o valor dos autovalores da matriz “monodromy”, também denominados de multiplicadores de Floquet.⁴

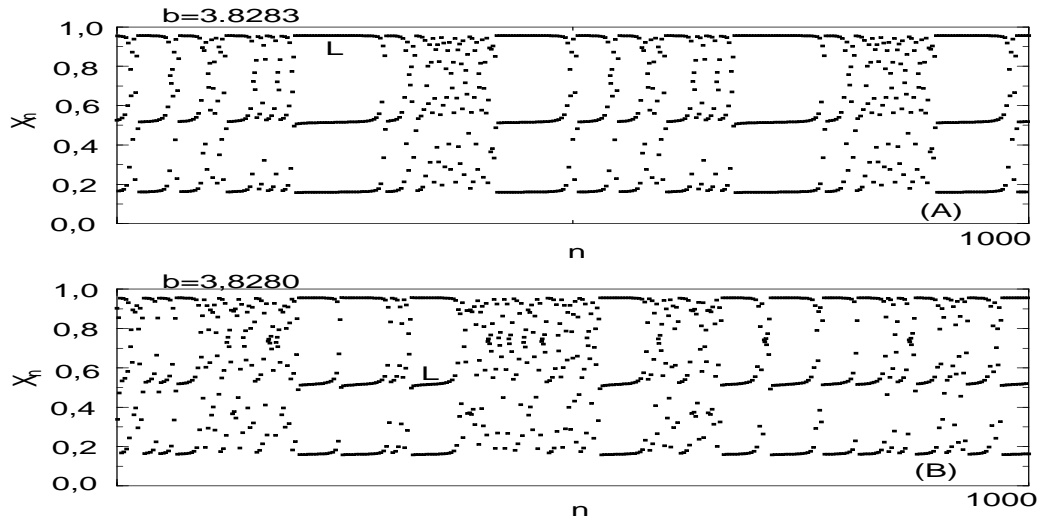


Figura 2.6: (A) Evolução temporal da trajetória da equação (2.1) para $b=3,8283$ e (B) para $b=3,8280$. A letra L indica uma das várias fases laminares que aparecem seguidas de estouros caóticos.

Dependendo de como o valor destes autovalores cruza a circunferência de raio unitário no plano complexo, podemos ter intermitência do tipo I, II ou III. Não entraremos em detalhes sobre a intermitência do tipo II e III, mas daremos especial atenção à intermitência do tipo I, caracterizada pela passagem do multiplicador de Floquet pelo valor $+1$ da circunferência unitária. Este tipo de cruzamento define uma bifurcação de sela-nó, como já havíamos mencionado na seção 2.5.

Um exemplo de regime intermitente, pode ser visto na figura 2.6 obtida para um parâmetro pouco menor do que o parâmetro b_t da figura 2.5, correspondente a janela mais larga de período três do mapa Logístico. Nesta figura fases laminares, identificadas pela letra L, aparecem entre fases caóticas.

⁴A matriz “monodromy” é obtida através da linearização de um fluxo sobre uma seção de Poincaré, na região de um ponto fixo. Portanto, caso um dos autovalores λ_i desta matriz tenha módulo maior do que um, o ponto é instável. Assim, analisando como este autovalor cruza uma circunferência imaginária de módulo um, podemos saber o tipo de bifurcação que acontecerá

Na figura 2.6A, está graficada a evolução de uma trajetória da equação (2.1) para $b=3,8283$ (valor perto do parâmetro crítico $b_t \cong 3,8284..$) e, em (B), a evolução para $b=3,828$.

Nota-se que quanto mais distante do parâmetro crítico b_t , com $b - b_t < 0$, menor a fase laminar. Ao contrário, quanto mais próximo do parâmetro crítico, maior é a fase laminar.

Quando o parâmetro excede o valor crítico, temos então a bifurcação sela-nó, gerando uma órbita estável de período três e outras duas órbitas instáveis de período três.

Na figura 2.7A vemos a terceira iteração do mapa (2.1), onde podemos identificar os pontos fixos que irão ser os responsáveis pela fase laminar. Esses pontos podem ser vistos na figura como o cruzamento da reta identidade com a função X_{n+3} .

A dinâmica local do ponto fixo médio (aquele que está entre os outros dois pontos fixos exteriores na figura), localizado próximo à $X_n = 0,5$, pode ser analisada através da figura 2.7B que é uma ampliação do retângulo da figura 2.7A. Nela vemos três trajetórias para parâmetros diferentes. Assim, como indicado na figura, podemos ver a função X_{n+3} para $b < b_t$, $b = b_t$ e $b > b_t$.

Nos interessa o caso que $b < b_t$, para o qual ocorre a intermitência, que neste caso é do tipo I. Nota-se que a curva da função está localizada ligeiramente acima da função identidade, o que nos indica que não pode haver movimento periódico para esta situação. No entanto, a distância é tão pequena que quando a trajetória atinge um valor próximo ao qual o ponto passa a se deslocar dentro desta pequena região (entre a função X_{n+3} e a função identidade), esta demora um razoável tempo para sair deste pequeno “corredor”, como pode ser visto na figura 2.8.

Este intervalo de tempo que a trajetória demora para atravessar este “corredor” é a denominada fase laminar. O intervalo de tempo exato da fase laminar média depende da posição exata na qual a trajetória entra no “corredor” e isso não pode ser previsto. No entanto a fase laminar média, ou seja o intervalo de tempo médio da fase laminar para uma determinada situação do parâmetro de controle b , pode ser obtida analiticamente [7],[5], [28].

Denominando por ϵ a distância entre o valor atual do parâmetro de controle b e o valor de b_t , ou seja,

$$\epsilon = (b - b_t) \quad (2.20)$$

pode-se demonstrar que a fase laminar média $\langle L \rangle$ é proporcional à ϵ por uma lei de potência [28],

$$\langle L \rangle \propto \epsilon^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Outro tipo de intermitência denominada de intermiência do tipo V [33] e [34] está presente

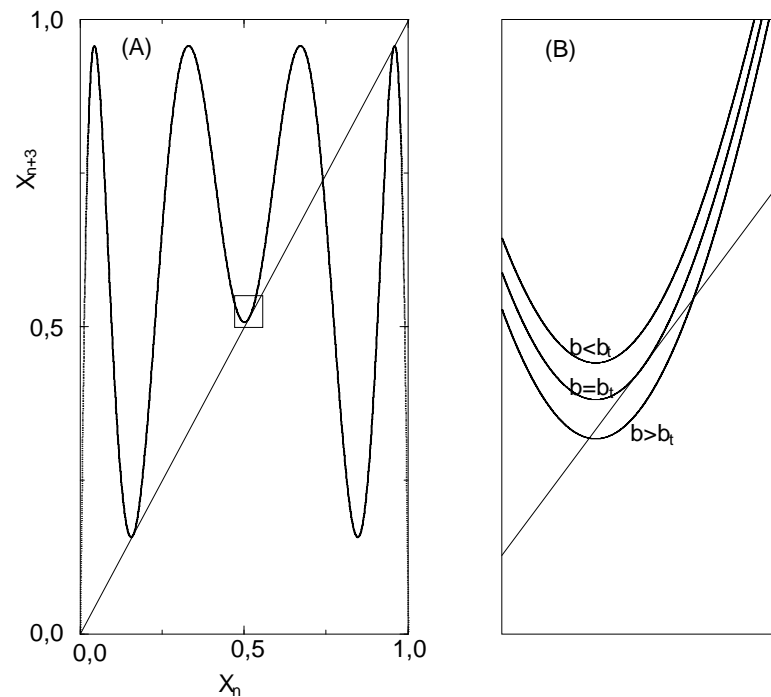


Figura 2.7: (A) Gráfico da terceira iteração do Mapa Logístico X_{n+3} em função de X_n para $b = b_t$. (B) Ampliação do retângulo de (A) onde são graficadas as terceiras iterações do mapa Logístico para três valores diferentes do parâmetro b .

em mapas descontínuos [35] e [36]. A diferença básica é que a fase laminar média não é uma lei de potência, mas sim uma lei exponencial. Este tipo de intermitência foi comprovada experimentalmente em [37] [38].

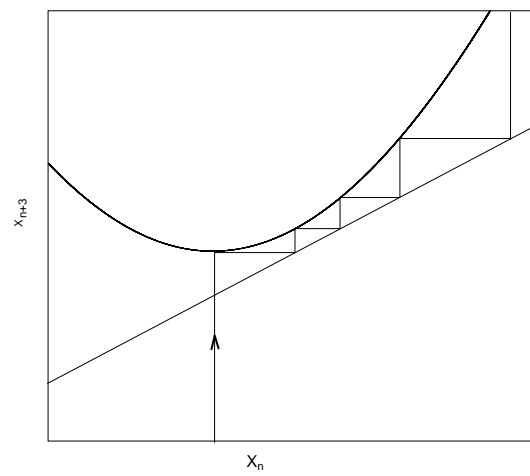


Figura 2.8: Representação de como a trajetória permanece oscilando dentro do “corredor” (fase laminar).

