

Apêndice A

Pontos Homoclínicos e Heteroclínicos

Para entender o que é um ponto homoclínico, devemos analisar a trajetória de um sistema através de uma seção de Poincaré. Na figura A.1, o plano indicado contém a seção de Poincaré escolhida para analisar o comportamento de um fluxo qualquer através dela.

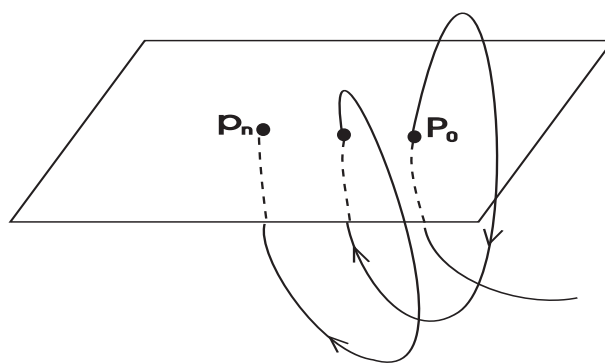


Figura A.1: Trajetória cruzando uma seção de Poincaré em três pontos distintos

Vemos uma trajetória tridimensional cruzando o plano em três pontos. Primeiramente, em P_0 e por fim em P_n . Suponha que entre os pontos P_0 e P_n foram necessárias infinitos cruzamentos até a trajetória atingir o ponto P_n . Unindo todos os pontos obtidos pelo cruzamento dessa trajetória com o plano, podemos desenhar a variedade estável do ponto

P_n neste plano de Poincaré. Assim, iremos trabalhar com variedades definidas em uma seção de Poincaré.

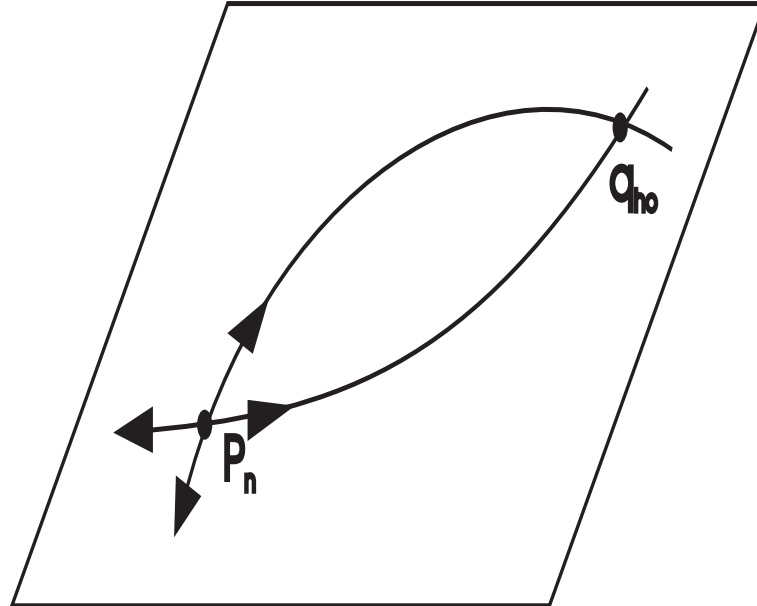


Figura A.2: Ponto homoclínico q_{ho} que surge do cruzamento das variedades estáveis e instáveis do ponto P_n .

Dado um ponto P_n , o cruzamento da variedade estável e instável deste ponto é denominado de ponto homoclínico (indicado por q_{ho} na figura A.2). Já um ponto heteroclínico é definido pelo cruzamento das variedades instáveis de dois pontos quaisquer (indicado na figura A.3 por q_{he}).

Ao surgir um ponto homoclínico em um sistema, surgem infinitos outros de acordo com a figura A.4, onde os pontos estão indicados pela letra q . Vemos que a imagem do ponto homoclínico q_{ho} é o ponto q'_{ho} e assim por diante.

A variedade instável W^i , assim como a estável, não pode cruzar consigo própria, devido a unicidade da solução. Assim, a variedade instável, tão como como a variedade estável, formam nesta figura o denominado emaranhado homoclínico. Este desenho nos informa a cerca de como é o fluxo do sistema sobre a seção de Poincaré.

Dessa forma, podemos determinar como se comporta um conjunto de condições iniciais sobre este plano. Por exemplo, na figura A.4, o quadrado preto representa um conjunto de condições iniciais que quando iterado, se transforma na ferradura representada pela cor azul. Os vértices do quadrado em preto podem ser identificados na ferradura em azul. Vemos

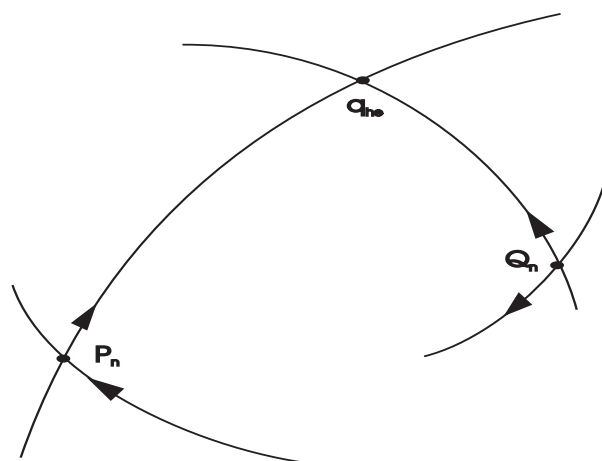


Figura A.3: Ponto heteroclínico que surge pelo cruzamento da variedade instável e estável de dois pontos quaisquer, indicado na figura por q_{he} .

que o segmento (\overline{ad}) encostado na variedade instável, após uma iteração, permanece nesta mesma variedade. No entanto este vértice sofre um esticamento devido justamente por estar posicionado na variedade instável.

Os segmentos (\overline{ab}) e (\overline{dc}) são comprimidos. A figura geométrica resultante da iteração de um quadrado é, portanto, uma ferradura, ou seja, o quadrado foi esticado na direção instável, comprimido na direção estável e depois dobrado devido ao fato das variedades de um mesmo tipo não poderem se cruzar.

Quando iteramos o quadrado para trás, este se transforma de forma inversa (área em vermelho), ou seja, o segmento (\overline{da}) relativo a variedade instável comprime e, o segmento composto pelos outros vértices (\overline{ab}) e (\overline{cd}) é esticado.

Em sistemas conservativos, a iteração de uma área (que representa um conjunto de pontos) tem sua área preservada; portanto, se há uma dobra, tem de haver um esticamento desta área. Para sistemas dissipativos, como o sistema (5.2), esta área diminui a cada iteração, mas a propriedade de dobra e esticamento continua valendo, pois existem as variedades instáveis que esticam a área através de uma iteração e as variedades estáveis que comprimem a área através de uma iteração.

Vemos que em alguma região a iteração para trás (área em vermelho na figura) intercepta a iteração para a frente (ferradura em azul na figura), portanto, sabemos que um ponto interno a este cruzamento irá permanecer por lá por pelo menos duas iterações. Analogamente, ao iterarmos para a frente e para trás, surgem outras regiões onde uma trajetória se

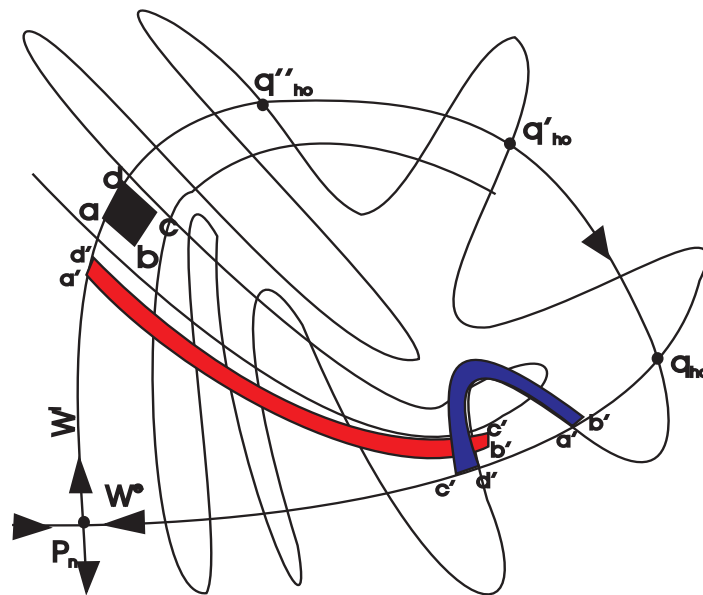


Figura A.4: Ferradura de Smale e emaranhado homoclínico.

comporta periodicamente para n iterações.

As propriedades de esticamento e dobras presentes em um sistema que apresenta o emaranhado homoclínico podem ser estudadas através de um mapa F , que é denominado de Ferradura de Smale [6]. Esse mapa é inversível. Com este mapa, podemos definir as regiões que ocorrem os cruzamentos de iterações para a frente e iterações para trás, que definem regiões onde ocorrem órbitas periódicas. Estas regiões aumentam a cada vez que se consideram mais iterações.

Assim, uma área iterada para a frente, como a ferradura da figura A.5, faz a ferradura se transformar em duas faixas e, na próxima iteração surgem quatro faixas. A ferradura posicionada horizontalmente, na figura A.5, quando iterada para trás, ou seja, com uma aplicação F^{-1} , também gera duas e depois quatro faixas. Portanto, as regiões periódicas deste mapa podem ser obtidas superpondo-se as ferraduras das iterações para trás, com as ferraduras obtidas das iterações para frente.

Sabemos que os 4 quadrados resultantes da superposição da ferradura posicionada horizontalmente, com a ferradura posicionada verticalmente, definem uma área onde os pontos

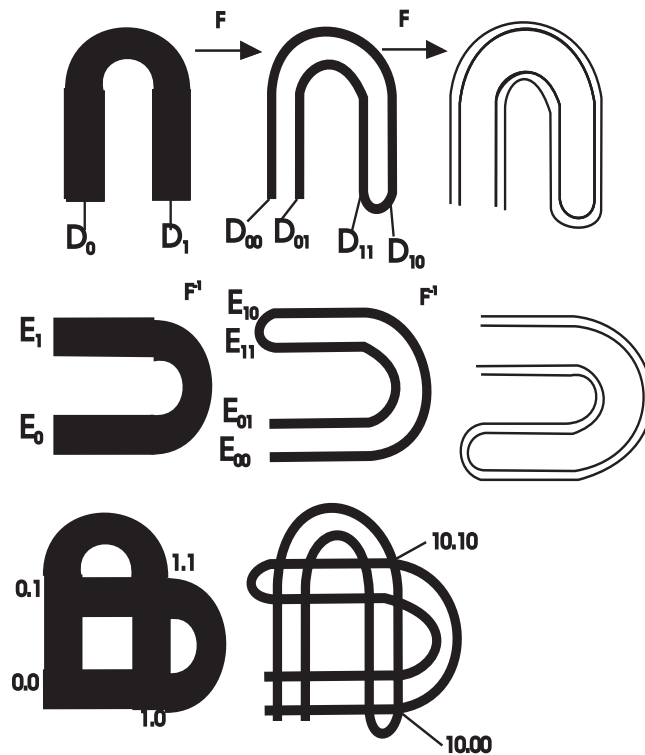


Figura A.5: Esquema de como uma área na forma de ferradura é transformada através da aplicação do mapa de Smale F .

irão permanecer por lá por pelo menos duas iterações. Estes 4 quadrados dão lugar a 16 quadrados, resultantes da superposição das faixas obtidas através da primeira aplicação para a frente e para trás do mapa F , sobre as ferraduras originais (posicionadas horizontalmente e verticalmente). Esses dezesseis quadrados, por sua vez, definem a área nas quais condições iniciais vão permanecer por lá por pelo menos quatro iterações.

Ao considerarmos mais iterações, estes quadrados dão origem a novos quadrados formando para n iterações com $n \rightarrow \infty$ um conjunto de Cantor. Em sistemas dissipativos este conjunto de Cantor, que define a posição das órbitas periódicas, é o próprio atrator.

Podemos representar estes quadrados através de uma sequência simbólica fazendo o seguinte. À ferradura posicionada verticalmente associamos a letra D . Esta ferradura pode ter lado esquerdo ou direito, assim podemos ter o lado D_0 e D_1 . Fazemos o mesmo para a ferradura posicionada horizontalmente e que será iterada para trás. Após sucessivas iterações, acrescentamos ou 0 ou 1 ao índice da letra D ou E .

Assim, as faixas que surgem após uma aplicação de F sobre a ferradura D , são nomeadas

de acordo com a seguinte regra. Caso a faixa apareça à esquerda do centro então acrescentamos um 0. Caso a faixa apareça à direita do centro então acrescentamos 1. Dessa forma “nomeamos” também estas faixas.

Definimos então para as quatro faixas da ferradura D nomes indicados na figura como $V_{00}, V_{01}, V_{11}, V_{10}$. Analogamente as faixas originadas de uma iteração para trás são indicadas por E_{10}, E_{11}, E_{01} e E_{00} . Ao superpor estas faixas, determinamos regiões periódicas. Estas são indicadas por $A.B$, onde A e B são, respectivamente, os índices de D e E . Assim, os quatro quadrados, originados da superposição da ferradura D com a E , são indicados por 0.1, 1.1, 1.0 e 0.0. Estes nomes são as denominadas sequências simbólicas, que definem a posições de pontos que permanecem em uma determinada região para um número n de iterações.

Para uma determinada órbita que passe pelos pontos 10.10,10.11,10.10,10.11... definimos a sua sequência simbólica (S) tal que $S=10.10,10.11,10.10,10.11$. Um órbita periódica possui uma sequência simbólica repetitiva, enquanto uma órbita caótica não.

Existe um número infinito de regiões, cuja aplicação do mapa F faz o ponto retornar a ele após um número n de iterações. Essas regiões são portanto densas no espaço e caracterizam pontos onde a órbita é bem comportada. Uma órbita caótica tem uma sequência simbólica que é muito próxima da sequência de um conjunto de órbitas periódicas (cujas sequência simbólica é repetitiva). No entanto a sequência não é repetitiva. Ou seja, para uma sequência simbólica de uma órbita periódica, podemos definir padrões que se repetem, combinações de zeros e uns que se repetem agrupadamente. No entanto quando a órbita é caótica isto já não é mais possível.

Dada uma sequência simbólica de uma órbita caótica, existe sequências finitas de símbolos que se repetem infinitamente, mas no entanto o tempo de aparecimento destas sequências não é previsível e, como acontece na Ferradura de Smale, é exatamente essa não previsibilidade que caracteriza o comportamento caótico.

A.1 Problemas na Caracterização do Double Scroll

Segundo o teorema de Shil'nikov [48], [49], [50], a existência de uma órbita homoclínica, no atrator Double Scroll, para determinadas condições, cria na vizinhança do ponto de equilíbrio P^0 uma Ferradura de Smale, o que portanto poderia rigorosamente definir que este atrator é caótico (segundo o artigo [12]).

No entanto, a presença de uma órbita homoclínica para um sistema com divergente

negativo nos pontos de equilíbrio, ou pontos de sela-focus, faz com que existam infinitas e densas órbitas periódicas estáveis, o que faz com que o sistema não possa, a rigor, ser considerado estocástico.

O sistema (5.2) apresenta um divergente que pode ou não ser negativo dependendo do ponto de equilíbrio em questão (P^+ , P^0 e P^-). Portanto essa variedade no divergente, pode fazer com que o sistema tenha simultaneamente órbitas periódicas dos três tipos possíveis: estáveis, tipo sela e totalmente instáveis.

Isso faz com que a existência da órbita homoclínica (onde na sua redondeza haverá uma Ferradura de Smale) não seja suficiente para que possamos dizer rigorosamente que o Double Scroll é caótico. Em outras palavras, como a estabilidade das órbitas ao redor da órbita homoclínica depende do sinal do divergente, então a existência da órbita homoclínica por si só não é suficiente para demonstrar a existência de comportamento caótico.

Assim, na referência [41] é proposta uma nova maneira de estabelecer se o Double Scroll é um atrator caótico, analisando a sequência simbólica das órbitas periódicas, ao redor da órbita homoclínica.

No entanto, outro problema surge, que é a existência de uma órbita homoclínica de Poincaré que apresenta uma tangente homoclínica (ver figura A.6). Esta tangente faz com que o sistema considerado não seja estável num sentido global (estruturalmente instável), ou seja, esta tangente cria um atrator não trivial denominado de quasi-atrator [161], cujas características ainda não são bem conhecidos. Entretanto, quasi-atratores devem conter infinitas órbitas periódicas e, até agora, isso não foi encontrado no Double Scroll, ou seja somente algumas janelas periódicas de período p foram encontradas.

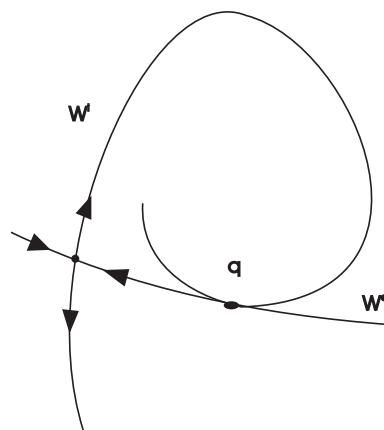


Figura A.6: Tangente homoclínica representada pelo ponto q .

Entretanto, quasi-atratores devem conter infinitas órbitas periódicas e, até agora, isso não foi encontrado no Double Scroll, ou seja somente algumas janelas periódicas de período p foram encontradas.