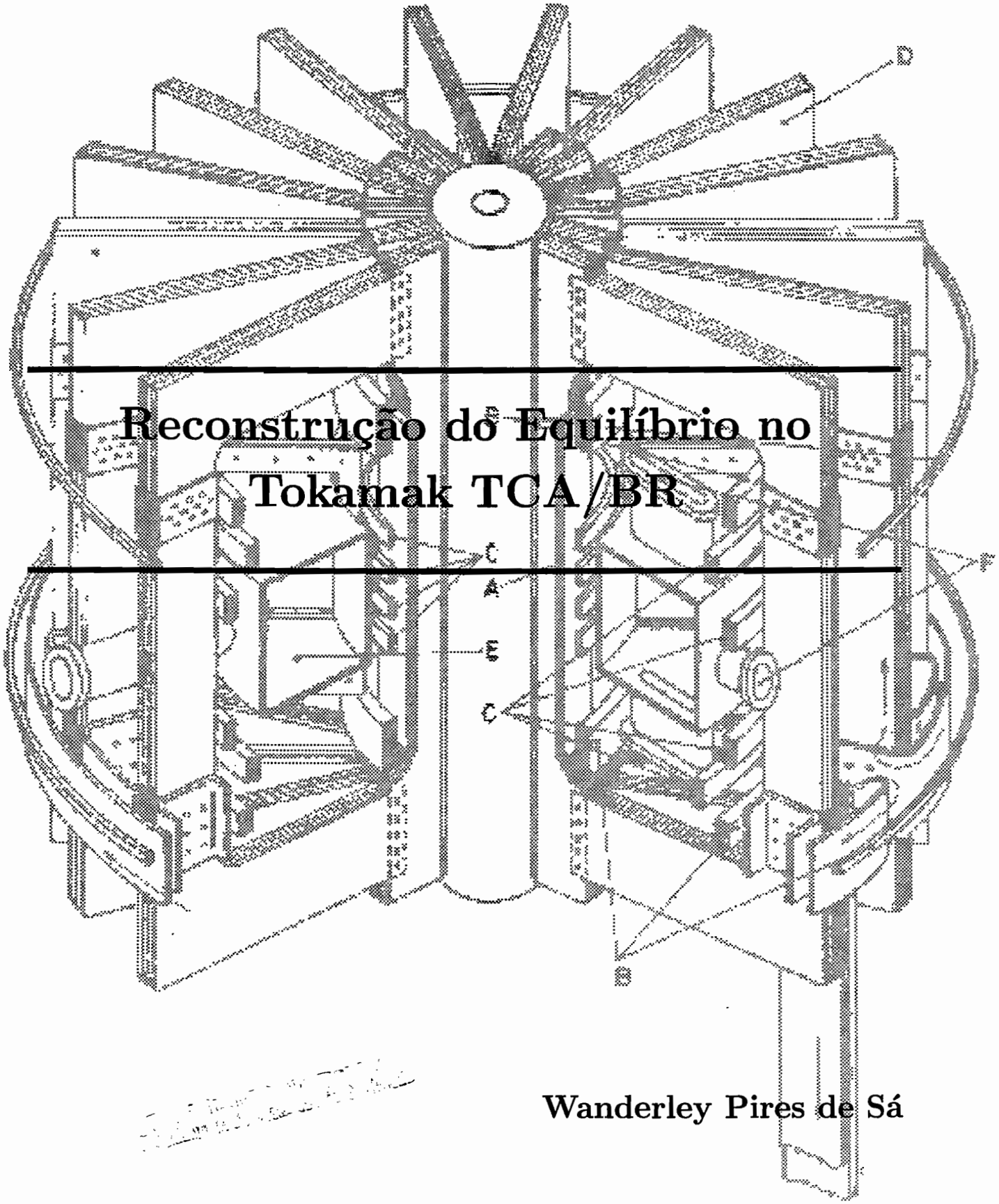

Reconstrução do Equilíbrio no Tokamak TCA/BR

Wanderley Pires de Sá

SBI-IFUSP

305M810T2525

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

25/7/96

Reconstrução do Equilíbrio no Tokamak TCA/BR

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2.525
INSTITUTO DE FÍSICA

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ricardo M.O. Galvão (IF-USP - Orientador)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP)
Prof. Dr. Paulo H. Sakanaka (IF-UNICAMP)
Prof. Dr. Gerson O. Ludwig (INPE)
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (IF-UFPR)

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Wanderley Pires de Sá

julho de 1996

530.44
S111r
D
ex 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Sá, Wanderley Pires de
Reconstrução do equilíbrio no TCA/BR.
São Paulo, 1996.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Aplicada.
Área de Concentração: Física Nuclear.
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão

Unitermos:1.Equilíbrio MHD; 2.Reconstrução
do equilíbrio; 3. Equação de Grad-Shafranov;
4. Tokamak TCA/BR; 5. Função de parametrização.
USP/IF/SBI - 18/96

A uma
flor.

Aos meus pais,
Albina
e
Devanir,
porque estou aqui.

Algumas coisas são
importantes
e outras são
fundamentais.
Distingui-las é uma
questão
de
tempo.
Aquelas que passarem
simplesmente
em suas vidas
serão importantes.
O fundamental persistirá.
Impossível não senti-lo.
Afinal,
se nos envolvemos tanto
com as coisas importantes,
não é porque
sabemos
quais são as
fundamentais?

Agradecimentos

Todo trabalho realizado não pode de forma alguma ser caracterizado como um trabalho individual ou mesmo por um grupo muito pequeno de participantes. Para que o sucesso seja atingido é necessário um equilíbrio que envolva todos os aspectos que estão em torno do ser humano e a quantidade de pessoas aí envolvidas é muito grande.

Não sei como nomear as pessoas que contribuíram para que as metas estabelecidas para este trabalho atingissem o objetivo por mim proposto. Muitas contribuíram e elas sabem disso e de que forma e grau isto foi feito, portanto, acredito que a melhor forma de agradecimento está na convivência do dia a dia com todos, em especial ao Galvão, cuja participação e amizade foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Índice

Agradecimentos **i**

Resumo **xiii**

Abstract **xv**

Símbolos e Definições **xvii**

1 Introdução **1**

1.1 Plasma e Fusão Termonuclear Controlada 1

1.1.1 Fusão e Fissão Nuclear 1

1.1.2 Reações de Fusão 2

1.1.3 Condições para Fusão 3

1.1.4 Confinamento Magnético 4

1.2 TOKAMAK - Plasma Magneticamente Confinado 4

1.3 O Tokamak TCA/BR 6

1.3.1 Um pouco de História 6

1.3.2 Programa de Pesquisa para o TCA/BR 8

1.3.3 Parâmetros do TCA/BR 9

1.4 Motivação para esta TESE 9

1.5 Reconstrução do Equilíbrio Magnetohidrodinâmico MHD 12

2 Equilíbrio MHD em Tokamaks **15**

2.1 Introdução 15

2.2 As equações MHD 16

2.2.1 Descrição do Modelo MHD Ideal 16

2.2.2 Equilíbrio Estático - Equações Básicas 17

2.2.3 Equilíbrio MHD em Sistemas Toroidais - Equação de Grad-Shafranov 18
2.2.4 Condições de Contorno 22
2.3 Parâmetros do Equilíbrio MHD em Tokamaks 24
2.4 Solução Numérica do Equilíbrio MHD em Tokamaks 28

3 Solução Numérica do Equilíbrio MHD no TCA/BR 31
3.1 Introdução 31
3.2 Conceitos Básicos 32
3.3 Código TCABREC 36
3.4 Aplicação Preliminar no TCA/BR 41

4 FP: Função de Parametrização 47
4.1 Introdução 47
4.2 Função de Parametrização - FP 49
4.3 Descrição Matemática 50
4.3.1 Representação de um Sistema Físico 50
4.3.2 Simulação do Sistema Físico 50
4.3.3 Redução na Dimensão das Medidas 51
4.3.4 Regressão 53
4.3.5 Análise dos Erros Envolvidos no Processo Estatístico 54
4.4 Estrutura do Modelo FP na Reconstrução do Equilíbrio MHD 55
4.4.1 Base de Dados Simulada 56
4.4.2 Função de Parametrização 57
4.4.3 Reconstrução dos Parâmetros de Equilíbrio 57

5 Implementação da Função de Parametrização no TCA/BR 59
5.1 Introdução 59
5.2 Banco de Dados - Programas ECPG e ECDBG 60
5.2.1 Programa ECDBG 60
5.2.2 Programa ECPG 62
5.3 Tratamento Estatístico do Banco de Dados 64
5.3.1 Programa FPG 64
5.4 Reconstrução do Equilíbrio MHD 66
5.4.1 Programa FPEQR 66
5.5 Aplicação no Tokamak TCA/BR 66

5.5.1 Diagnósticos Magnéticos e Corrente de Plasma 66
5.5.2 Criação do Banco de Dados 68
5.5.3 Redução na Dimensão das Medidas 69
5.5.4 Análise da Regressão 69
5.5.5 Reconstrução dos Parâmetros de Equilíbrio 76
5.5.6 Algumas Considerações 79

6 Discussão e Conclusão **81**
6.1 Introdução 81
6.2 Estudo do Equilíbrio MHD no Tokamak TCA/BR - *TCABREC* 82
6.2.1 TCABREC "versus" EQUS 82
6.2.2 Comparação dos Resultados - TCABREC "versus" EQUS 83
6.3 Reconstrução do Equilíbrio MHD no TCA/BR (*FP*) 90
6.3.1 Análise do Banco de Dados 90
6.3.2 Regressão - Ajuste Polinomial 91
6.4 FP versus Outros Métodos 93
6.5 FP: Vantagens e Desvantagens 95
6.6 Conclusão 97

7 O Futuro **99**
7.1 Introdução 99
7.2 História e Futuro 100
7.3 Código de equilíbrio MHD 100
7.4 Função de Parametrização 101
7.5 Código de Reconstrução *EFIT* 103
7.6 Novas Técnicas em Reconstrução 103
7.7 Considerações Finais 104

A Código TCABREC
Parâmetros de Entrada e Saída **105**
A.1 Introdução 105
A.2 Parâmetros de Entrada 105
A.3 Parâmetros de Saída 110
A.4 Pós-Processamento Gráfico 111

B Algumas Configurações e Reconstruções de Equilíbrio MHD **113**
B.1 Introdução 113
B.2 Configurações 113

Bibliografia **123**

Lista de Figuras

1.1 Diagrama esquemático de um tokamak. 5

1.2 O campo magnético poloidal criado pela corrente de plasma produz uma força radial que tende a expandir a coluna devido a sua maior concentração na parte interna do toróide. O campo magnético vertical externo somado ao campo poloidal aumenta a concentração deste campo na parte externa e diminui na interna, corrigindo o efeito de expansão. 7

1.4 Superfícies de fluxo magnético. 9

1.3 Tokamak TCA/BR. Figura obtida na referência [Chee-79]. 10

2.1 Geometria para sistemas toroidais com simetria axial onde: R, ϕ, Z descrevem o sistema de coordenadas cilíndricas, R_0 é o raio geométrico do torus, e R_{Mag} é o raio magnético do plasma. Ψ e χ são as coordenadas de fluxo, definidas na seção 2.3. 19

2.2 Linha de campo magnético em uma superfície de Ψ constante. "ι" é a transformada rotacional. 27

3.1 Domínio computacional usado no código de equilíbrio MHD TCABREC. 35

3.2 Geometria utilizada para o uso das funções de Green em bobinas com correntes toroidais. 36

3.3 Diagrama da estrutura do código de equilíbrio MHD TCABREC. 38

3.4 Definição das variáveis geométricas da secção transversal do plasma que caracterizam parâmetros geométricos do equilíbrio. 42

3.5 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 3.1. Na figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD descritos no Cap. 2. 44

3.6 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 3.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. 45

4.1 Diagrama esquemático do método Função de Parametrização aplicado à reconstrução do equilíbrio MHD em tokamaks. 56

5.1 Distribuição normal de probabilidade. 62

5.2 Desenho esquemático da secção poloidal do tokamak TCA/BR mostrando simbolicamente as sondas magnéticas, onde: $\rightarrow$ - sonda magnética para medida de B_R e $\uparrow$ - sonda magnética para medida de B_Z. 67

5.3 Autovalores da matriz de dispersão das medidas simuladas versus o índice destes autovalores, em escala linear e logarítmica. 70

5.4 Erros de reconstrução $((\epsilon_j^{sys}/\sigma_j)*100$, $(\epsilon_j^{stat}/\sigma_j)*100$ e $(\epsilon_j^{rec}/\sigma_j)*100)$ envolvidos no *sistema FP* em função do número de termos lineares no processo de regressão para o raio menor a do plasma. 75

5.5 Erros de reconstrução $((\epsilon_j^{sys}/\sigma_j)*100$, $(\epsilon_j^{stat}/\sigma_j)*100$ e $(\epsilon_j^{rec}/\sigma_j)*100)$ envolvidos no *sistema FP* em função do número de termos de segunda ordem no processo de regressão para o raio menor a do plasma. O número de termos lineares foi mantido constante em cinco. 76

6.1 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 14×15 pontos. 85

6.2 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 14×15 pontos. 86

6.3 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 32×33 pontos. 87

6.4 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 32×33 pontos. 88

6.5 Desenho esquemático utilizado para o cálculo do deslocamento Δ_r e de $\beta_p + li/2$ usando medidas em bobinas de fluxo nas posições 1 e 2 e medidas de campos magnéticos na direção Z nestas mesmas posições. 94

A.1 Desenho esquemático ilustrando os principais parâmetros de entrada para o código de equilíbrio MHD **TCABREC**. 106

A.2 Estrutura do arquivo de entrada para o código *TCABREC*. 107

B.1 Parâmetros de entrada para o código TCABREC. Os resultados são apresentados nas Figs. B.2 e B.3. O significado de cada dado de entrada apresentado na figura é descrito no apêndice A. 114

B.2 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.1. Na figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD descritos no capítulo 2. 115

B.3 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. 116

B.4 Parâmetros de entrada para o código TCABREC. Os resultados são apresentados nas Figs. B.5 e B.6. O significado de cada dado de entrada apresentado na figura é descrito no apêndice A. 118

B.5 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.4. Na figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD descritos no capítulo 2. 119

B.6 Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.4. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. 120

Lista de Tabelas

1.1 Parâmetros do TCA/BR 9

3.1 Parâmetros de entrada para o código TCABREC. Os resultados são apresentados nas Figs. 3.5 e 3.6. O significado de cada dado de entrada apresentado na figura é descrito no apêndice A. 43

5.1 Parâmetros de saída do programa **ECDBG**. (R_{sm}, Z_{sm}) é a posição da sonda magnética. 61

5.2 Parâmetros de entrada do programa **ECPG**. 63

5.3 Faixa dos parâmetros de entrada do programa **ECPG** para a geração do banco de dados do tokamak TCA/BR. 68

5.4 Avaliação do erro sistemático ϵ_j^{sys} no processo de regressão ao achar a forma funcional $\vec{F}$ que caracteriza p_j em função dos $\tilde{q}$. A tabela apresenta os valores mínimo, máximo e médio para a ocorrência de cada parâmetro no banco de dados, o desvio padrão associado a esta média, o erro ϵ_j^{sys} no processo de reconstrução usando a função de parametrização. 71

5.5 Avaliação do erro estatístico ϵ_j^{stat} no processo de regressão ao achar a forma funcional $\vec{F}$ que caracteriza p_j em função dos $\tilde{q}$. A tabela apresenta os valores mínimo, máximo e médio para a ocorrência de cada parâmetro no banco de dados, o desvio padrão associado a esta média, o erro ϵ_j^{stat} no processo de reconstrução usando a função de parametrização. 72

5.6 Avaliação do erro de reconstrução ϵ_j^{rec} no processo de regressão ao achar a forma funcional $\vec{F}$ que caracteriza p_j em função dos $\tilde{q}$. A tabela apresenta os valores mínimo, máximo e médio para a ocorrência de cada parâmetro no banco de dados, o desvio padrão associado a esta média, o erro ϵ_j^{rec} no processo de reconstrução usando a função de parametrização. 73

5.7 Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a FP. A diferença porcentual refere-se a diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100. 78

6.1 Parâmetros de entrada para o código TCABREC para uma grade de plasma com 14×15 pontos . Os resultados são apresentados nas Figs. 6.1 e 6.2. O significado de cada dado de entrada apresentado na tabela é descrito no apêndice A. 84

6.2 Comparação dos valores de campos magnéticos B_R e B_Z simulados nos sensores para uma grade de 14×15 pontos e 32×33 pontos. 89

6.3 Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a FP. A diferença porcentual refere-se à diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100. 92

6.4 Comparação de resultados para a reconstrução do R_{geo} usando a Função de Parametrização (FP), a fórmula (6.1) e a fórmula (6.2), para três casos diferentes. O caso (1) refere-se a um equilíbrio em que usando a FP tivemos um $Q = 0,550$, o caso (2) está associado aos dados apresentados na Tabela 5.7 ($Q = 1,907$), o caso (3) está associado aos dados apresentados na Tabela 6.2 ($Q = 3,842$) e o caso (4) está associado aos dados apresentados no Apêndice B ($Q = 0,910$). . . 95

6.5 Comparação de resultados para a reconstrução do parâmetro $\beta_p + \frac{l_i}{2}$ usando a Função de Parametrização (FP) e a fórmula 6.4 para três casos diferentes. O caso (1) refere-se a um equilíbrio em que usando a FP tivemos um $Q = 0,550$, o caso (2) está associado aos dados apresentados na Tabela 5.7 ($Q = 1,907$), o caso (3) está associado aos dados na Tabela 6.2 ($Q = 3,842$) e o caso (4) está associado aos dados apresentados no Apêndice B ($Q = 0,910$). 96

B.1 Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a FP. A diferença porcentual refere-se a diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100. 117

B.2 Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a FP. A diferença porcentual refere-se a diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100. 121

Resumo

A determinação precisa e rápida das configurações de equilíbrio Magnetohidrodinâmico (MHD) em tokamaks é de fundamental importância para o confinamento magnético do plasma. Através do conhecimento dos parâmetros que caracterizam este equilíbrio MHD é possível controlar o plasma durante a sua formação por processos de realimentação. Uma análise mais detalhada destes parâmetros é necessária, também, entre um disparo e outro, para a estruturação do experimento.

Neste trabalho é investigada a reconstrução das configurações de equilíbrio MHD no tokamak TCA/BR a partir de medidas magnéticas externas, utilizando um método que permite uma rápida determinação dos parâmetros principais da descarga. A tese divide-se em duas partes. Na primeira, é apresentada a construção de um código de equilíbrio que resolve a equação de Grad-Shafranov para a configuração geométrica que caracteriza o tokamak TCA/BR. Na segunda, é descrito o processo de reconstrução do equilíbrio MHD através de medidas de campos e fluxos magnéticos externos ao plasma no TCA/BR, e utilizando o método de *Função de Parametrização* **FP**. Este método baseia-se no tratamento estatístico de um banco de dados simulados de configurações de equilíbrio, com o objetivo de obter uma expressão simples relacionando os parâmetros que caracterizam o equilíbrio e as medidas realizadas. Os resultados obtidos através da *FP* são comparados com os obtidos através de outros métodos convencionais.

Abstract

The accurate and rapid determination of the Magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium configuration in tokamaks is a fundamental subject for the magnetic confinement of the plasma. With the knowledge of characteristic plasma MHD equilibrium parameters it is possible to control the plasma position during its formation using feed-back techniques. It is also necessary an on-line analysis between successive discharges to program external parameters for the subsequent discharges.

In this work it is investigated the MHD equilibrium configuration reconstruction of the TCA/BR tokamak from external magnetic measurements, using a method that is able to determine fastly the main parameters of discharge. The thesis has two parts. Firstly it is presented the development of an equilibrium code that solves de Grad-Shafranov equation for the TCA/BR tokamak geometry. Secondly it is presented the MHD equilibrium reconstruction process from external magnetic field and flux measurements using the *Function Parametrization* **FP** method. This method is based on the statistical analysis of a database of simulated equilibrium configurations, with the goal of obtaining a simple relationship between the parameters that characterize the equilibrium and the measurements. The results from *FP* are compared with conventional methods.

Símbolos e Definições

A maioria dos símbolos usados no texto são explicados e definidos aonde eles aparecem, a não ser que o significado seja suposto conhecido por obviedade. Aqui, alguns dos símbolos mais importantes são listados junto com suas definições. As unidades adotadas no texto estão no Sistema Internacional (SI); entretanto a unidade adotada para as correntes em condutores é MegaAmpere (MA).

Símbolo	**Definição**
I_P	Corrente de Plasma
R_{geo}	Posição radial do centro geométrico da coluna de plasma
Z_{geo}	Posição vertical do centro geométrico da coluna de plasma
R_{mag} ou R_{Mag}	Posição radial do centro magnético a coluna de plasma
Z_{mag} ou Z_{Mag}	Posição vertical do centro magnético a coluna de plasma
a	Meia largura da secção transversal da coluna de plasma
b	Meia altura da secção transversal da coluna de plasma
β_p	Beta poloidal
l_i	Indutância interna da coluna de plasma
μ	Parâmetro que caracteriza o paramagnetismo
$TRIA$	Triangularidade da secção transversal da coluna de plasma
$ELON$	Elongação da secção transversal da coluna de plasma
Ψ_a	Ψ no eixo magnético (R_{mag}, Z_{mag})
Ψ_b	Ψ na borda da coluna de plasma
R_0	Posição radial do centro do vaso de vácuo

Observações

O símbolo decimal adotado na tese é o utilizado pela lingua portuguêsa, ou seja, a virgula (,). Entretanto, em algumas figuras e tabelas aparece como símbolo decimal o ponto (.), símbolo adotado na lingua inglêsa. Isto acontece porque os programas utilizados na geração de gráficos, bem como as linguagens de programação e os compiladores são escritos usando o ponto como símbolo decimal.

Capítulo 1

Introdução

Um dos fatores atuais mais relevantes para a manutenção e o avanço da humanidade é a energia. As principais fontes de energia existentes no planeta, que alimentam as necessidades das sociedades, estão baseadas em recursos naturais. Parece claro que grande parte destes recursos são finitos e se tornarão rapidamente escassos e muito custosos para produção de energia.

A procura de fontes alternativas de energia se torna, portanto, uma necessidade. A energia nuclear, através da fissão, já é uma destas fontes alternativas e usinas baseadas em reatores de fissão nuclear produzem energia elétrica. A França por exemplo, produz mais do 60% de sua energia por fissão. Também pesquisas em energia solar e eólica vêm sendo desenvolvidas. Existem vastas áreas, como desertos ou campos abertos, que podem abrigar diferentes tipos de coletores solares e modernos moinhos de vento, por serem áreas com grande incidência de luz solar e corredores de vento.

Fazendo-se uma estimativa das necessidades de energia para o próximo século e a fim de evitar o uso exaustivo dos recursos naturais baseados na exploração dos combustíveis fósseis, serão necessárias outras formas de energia além da energia proveniente das usinas nucleares [McCr-89, Paul-92]. A fusão nuclear é uma destas novas possibilidades.

1.1 Plasma e Fusão Termonuclear Controlada

1.1.1 Fusão e Fissão Nuclear

Por muitos séculos foi, para o homem, um mistério como o sol e as estrelas produziam energia para sua auto-sustentação. Durante este século os pesquisadores descobriram que

estes astros produzem energia através da fusão de núcleos.

Diferentes tipos de reações de fusão nuclear ocorrem na natureza. Entretanto, poucas destas reações têm valor prático para produção de energia. Isto porque o processo de geração de energia está sustentado na conversão de massa em energia ($E = mc^2$). Embora a fusão ocorra também entre núcleos pesados, só há produção de energia com núcleos leves onde o balanço de energia produzida é positivo. Nestas reações, a quantidade de energia liberada é superior à que foi necessária para produzir a reação.

A fissão nuclear está baseada na mesma lei de conversão de massa em energia. Porém, neste processo, núcleos pesados são divididos liberando parte da energia de ligação dos constituintes do núcleo. Este processo já é usado comercialmente para produzir energia em muitos países.

1.1.2 Reações de Fusão

A energia em uma reação de fusão é gerada quando dois núcleos de baixo número atômico se fundem e o produto da reação tem massa menor que a massa dos núcleos originais. As reações de interesse para reatores a fusão envolvem isótopos do hidrogênio conhecidos como deutério (D) e trítio (T) e os produtos finais são em geral um núcleo de hélio (que também é chamado partícula alfa), com grande energia cinética, isótopos de hidrogênio e nêutrons. As principais reações para reatores a fusão são:

$$D + T \longrightarrow {}^4He + n + 17,6MeV, \tag{1.1}$$

$$D + D \xrightarrow{50\%} T + H + 4,0MeV, \tag{1.2}$$

$$D + D \xrightarrow{50\%} {}^3He + n + 3,3MeV, \tag{1.3}$$

$$D + {}^3He \longrightarrow {}^4He + H + 3,3MeV, \tag{1.4}$$

onde as energias indicadas referem-se à energia cinética dos produtos das reações.

O deutério pode ser facilmente extraído da água do mar e, portanto, temos uma fonte virtualmente inesgotável. O trítio, por outro lado, não é encontrado na natureza e o ${}^3He$ é muito raro. Entretanto, a reação $D+T$ é a que tem maior taxa de reações para temperaturas do plasma da ordem de algumas dezenas de kilo elétron volts e, portanto, uma candidata forte para os primeiros reatores de fusão nuclear. O trítio necessário para esta reação pode ser produzido através das seguintes reações do lítio com nêutrons:

$$^{7}Li + n \longrightarrow {}^{4}He + T + n - 2,5MeV, \tag{1.5}$$

$$^{6}Li + n \longrightarrow {}^{4}He + T + 4,8MeV, \tag{1.6}$$

onde os nêutrons podem ser provenientes da reação $D+T$. O lítio é encontrado na natureza de forma abundante e de fácil extração.

1.1.3 Condições para Fusão

As reações de fusão $D+T$, $D+D$ e $D+{}^{3}He$, apresentadas nas Eqs. 1.1-1.4, ocorrem entre núcleos carregados e para que isso aconteça estes núcleos têm que se aproximar o suficiente para que as forças nucleares vençam as forças de repulsão eletrostáticas. Um método direto de obter a fusão entre dois núcleos seria fornecer energia a um feixe de um dos núcleos, usando aceleradores, fazendo este colidir com o outro núcleo. Entretanto, neste processo, dificilmente se produz mais energia de fusão do que a gasta para acelerar os núcleos. Outro método seria através de energia térmica, ou seja, confinar os núcleos, que formam uma das misturas acima, e aquecê-los a uma temperatura suficientemente alta tal que as reações ocorram espontaneamente em uma taxa razoável, obtendo uma ganho positivo de energia. Este método parece ser mais plausível, um vez que há uma calda na distribuição estatística da energia térmica, com partículas bastante energéticas, sendo desta forma possível obter um ganho de energia mesmo para energias térmicas bastante inferiores à energia necessária para vencer as forças de repulsão eletrostáticas (barreira Coulombiana). As temperaturas necessárias para este processo são da ordem de $15keV$. Esta mistura a esta temperatura caracteriza um meio onde as partículas formam um gás ionizado chamado plasma.

Algumas condições básicas devem ser observadas para que se tenha um balanço positivo de energia nas reações de fusão termonuclear. Estas condições são analisadas através das perdas de energia que ocorrem no plasma devido basicamente à dois processos, que levam ao conceito de temperatura de ignição e condição de "breakeven".

Temperatura de ignição é a temperatura do plasma na qual a energia produzida pelas partículas alfas, supondo que sejam inteiramente absorvidas pelo plasma, se iguala à energia perdida por radiação, principalmente bremsstrahlung. A condição de "breakeven" é quando a energia total produzida pelas reações de fusão se iguala a energia perdida por todos os outros processos, principalmente transporte. A ignição é atingida quando a potência devida a fusão no plasma é suficiente para manter a temperatura do plasma sem o uso de fontes

externas. Uma vez o plasma estando suficientemente aquecido (ignição atingida) ele deve ser confinado em um tempo tal que a condição de "breakeven" seja atingida. A condição de "breakeven" é descrita pelo critério de Lawson [Laws-57] $n\tau_E$, onde n é a densidade do plasma e τ_E o tempo de confinamento de energia. Para a reação $D+T$ com uma temperatura de íons da orden de $10keV$ temos que $n\tau_E \simeq 1,5 \times 10^{20} m^{-3} s$.

1.1.4 Confinamento Magnético

O plasma sendo formado por partículas carregadas (íons e elétrons) pode, em princípio, ser confinado por um campo magnético. Na ausência de um campo magnético, as partículas carregadas no plasma movem-se em linhas retas e em direções aleatórias. Desta forma, as partículas carregadas vão colidir com as paredes de qualquer sistema de confinamento material. Nesta situação, o plasma irá se esfriar e a fusão não terá condições de ser realizada. Na presença de um campo magnético, partículas carregadas seguem trajetórias espiraladas em torno das linhas de campo. Desta forma, o plasma pode ser confinado por linhas fechadas de campo magnético, sem haver colisões com o recipiente que o envolve.

O desenvolvimento de máquinas de confinamento magnético, para fusão termonuclear como fonte comercial de energia elétrica, envolve vários desafios tanto na área tecnológica como na de física de plasmas. De uma forma geral, na área da física, o problema de confinamento do plasma está no estudo do equilíbrio, estabilidade, aquecimento e transporte no plasma.

Um reator baseado no sistema de confinamento magnético tem que permitir o confinamento do plasma com densidade e temperaturas suficientemente altas e por um tempo tal que a energia produzida por reações de fusão seja superior à gasta para produzir o plasma.

1.2 TOKAMAK - Plasma Magneticamente Confinado

Nos últimos quarenta anos várias máquinas têm sido desenvolvidas com o objetivo de confinar, a altas temperaturas, plasmas suficientemente densos para que o critério de ganho de energia seja atingido. Entre os dispositivos de confinamento magnético se destaca o "*tokamak*", considerado o mais promissor para o estudo de plasmas confinados com o objetivo de se desenvolver reatores a fusão nuclear.

A palavra "*tokamak*" é um acrônimo da expressão russa *toroidal'naya kamara e magnitnaya katuska* que significa "câmara toroidal" e "bobinas magnéticas". Esta máquina foi concebida

na antiga União Soviética, no final dos anos 50. Nos anos 70 se tornou parte do programa internacional de fusão e principal linha de pesquisa em plasmas confinados magneticamente, porque o tempo de confinamento do plasma nestes dispositivos é pelo menos duas ordens de grandeza superior aos obtidos em sistemas alternativos.

O tokamak é um sistema com uma câmara toroidal de vácuo onde é estabelecido um campo magnético helicoidal de simetria axial, confinando o plasma em seu interior (Fig. 1.1). Este campo magnético é usualmente caracterizado por uma forte componente na direção toroidal e uma fraca componente na direção em torno do plasma (direção poloidal)[1].

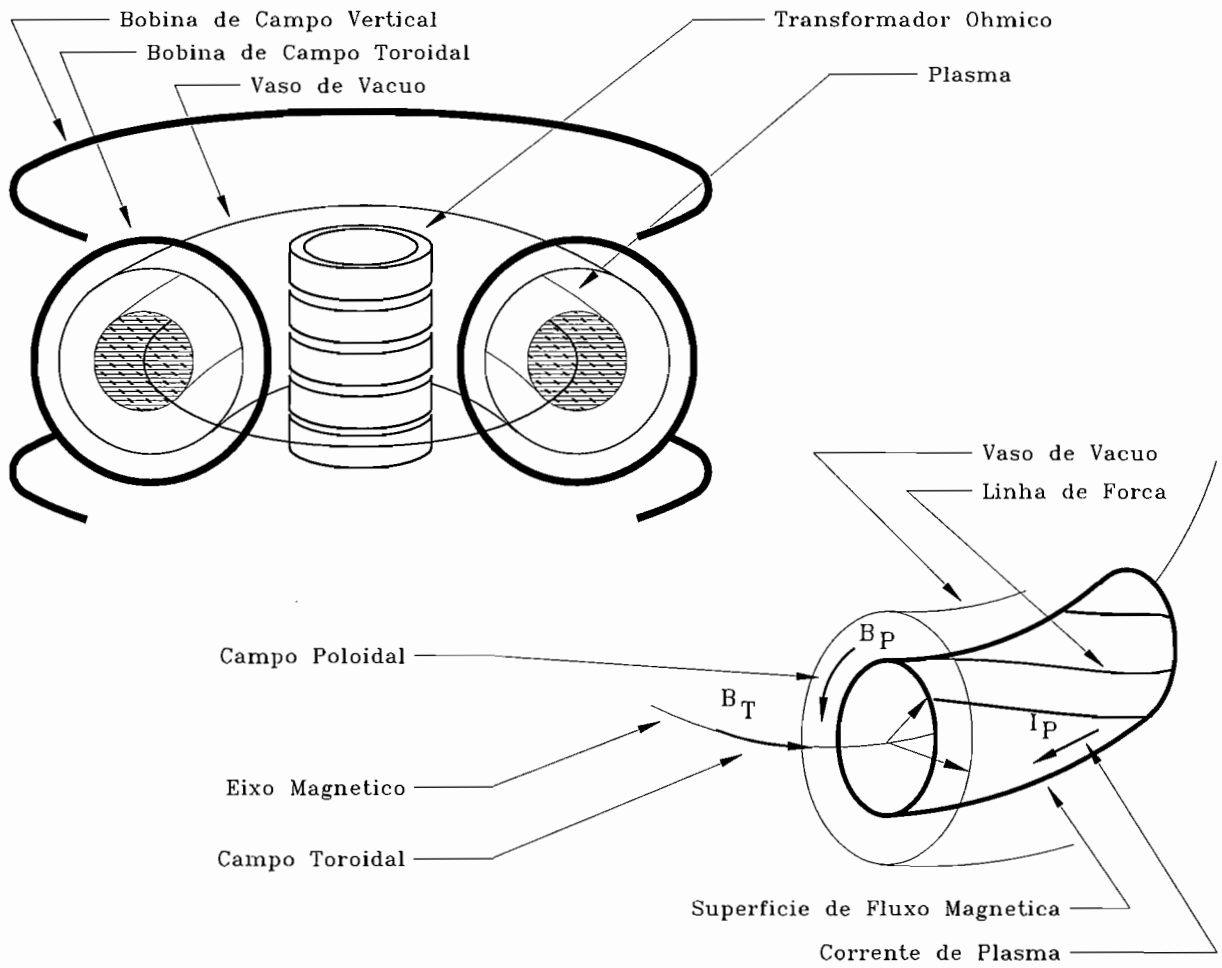

Figura 1.1: Diagrama esquemático de um tokamak.

[1]Situação válida para tokamaks convencionais, chamados de grande razão de aspecto, onde o raio maior do torus é bem maior do que o raio da câmara do torus.

Inicialmente, um gás (normalmente hidrogênio ou deutério) é injetado dentro da câmara toroidal onde é feito alto vácuo. Um sistema de pré-ionização e um transformador, enrolamento cujo primário está no centro do toróide e a espira de plasma é o secundário, leva à formação da corrente de plasma ao longo do toróide pela indução de um campo elétrico. A corrente de plasma cria o campo magnético poloidal. O campo toroidal é gerado por correntes em bobinas externas em torno do toróide, sendo este o principal campo magnético em tokamaks convencionais.

Para atingir a condição de equilíbrio magnetohidrodinâmico, no qual a pressão de plasma é balanceada pela pressão devido às forças magnéticas, é necessário ainda aplicar um campo magnético vertical externo. Pois, somente com o campo toroidal e o campo poloidal, descritos acima, o plasma na geometria toroidal sofre uma força radial que tende a expandir a coluna de plasma. Esta força radial é basicamente devida à concentração maior do campo magnético poloidal na parte interna do toróide. O campo vertical externo somado ao campo poloidal aumenta a concentração deste campo na parte externa e diminui na interna, corrigindo o efeito de expansão (Fig. 1.2). Este campo vertical é também utilizado para controlar a posição da coluna de plasma.

A corrente de plasma, além de criar o campo poloidal, serve também para aquecer o plasma através do mecanismo de aquecimento ôhmico.

1.3 O Tokamak TCA/BR

1.3.1 Um pouco de História

A pesquisa em física de plasmas usando tokamaks, no Brasil, vem sendo desenvolvida desde o final de 1979, quando entrou em operação o TBR-1 [Nasc-77, Nasc-81], um tokamak de pequeno porte, ainda em operação no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP). Suas principais dimensões são: raio maior de $0,30m$; raio menor da câmara de vácuo de $0,11m$; raio de plasma igual a $0,08m$ (valor máximo, com limitador nesta posição); campo toroidal de $0,5T$ e corrente de plasma de $12kA$.

Desde então, vários pesquisadores foram formados em física básica de plasmas na área de tokamaks nesta máquina e têm contribuído com trabalhos científicos relevantes à fusão termonuclear controlada.

A necessidade de melhor entender o comportamento de plasmas em condições termonucleares levou à construção de máquinas maiores com o objetivo de chegar próximo a um

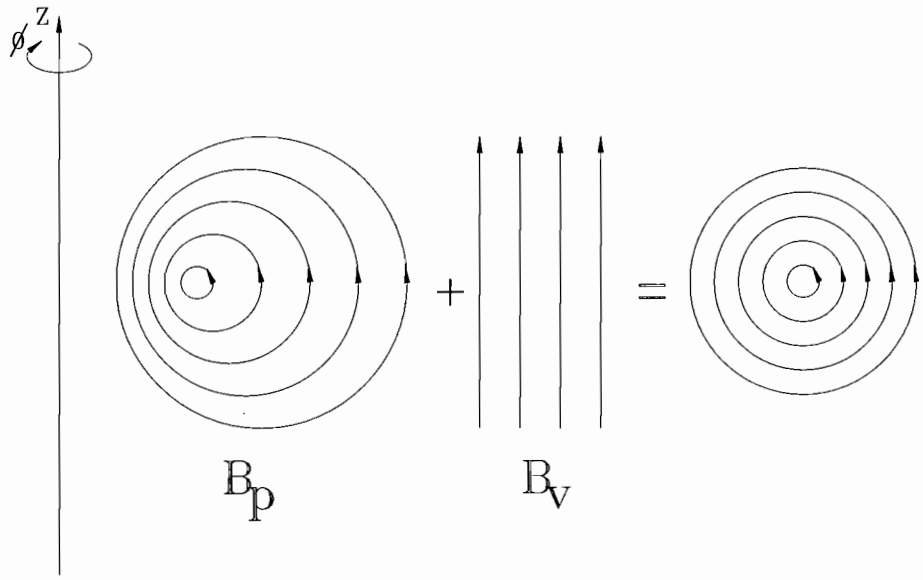

Figura 1.2: O campo magnético poloidal criado pela corrente de plasma produz uma força radial que tende a expandir a coluna devido a sua maior concentração na parte interna do toróide. O campo magnético vertical externo somado ao campo poloidal aumenta a concentração deste campo na parte externa e diminui na interna, corrigindo o efeito de expansão.

reator de fusão. Embora esta tendência não represente necessariamente uma discontinuidade da pesquisa em tokamaks de pequeno e médio porte, o TBR-1 já alcançou o objetivo proposto. Isto levou a comunidade de física de plasma do país ao projeto de máquinas de médio porte e tokamaks para teste de novos regimes de operação [Nasc-93].

O grupo de Física de Plasmas do IFUSP recebeu suporte das entidades financiadoras de pesquisa do país para realizar o projeto conceitual de um tokamak de médio porte com razão de aspecto $R/a = 2,5$, raio maior $R = 0,56m$: o TBR-2 [Nasc-89]. O projeto deste tokamak, de características tradicionais, foi finalizado em 1989. Nesta mesma época, foi decidido iniciar o projeto de uma máquina com razão de aspecto na faixa $1,5 \leq R/a \leq 2,0$, para testar novos conceitos na área de física de plasmas em tokamaks. Este tokamak, o TBR-E [Nasc-91], teve seu projeto conceitual e de engenharia finalizados em 1991 com a colaboração do grupo de física de plasmas da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). Apesar da construção do TBR-E ter sido aprovada pelas entidades financiadoras do país, o suporte financeiro para realizar a construção não foi viabilizado devido à situação econômica em que se encontrava o país.

No início de 1994 foi transferido para o IFUSP o TCA (Tokamak Chauffage Alfvèn). Este tokamak foi construído pelo CRPP (Centre de Recherche en Physique des Plasmas/Association Euratom - Suisse) em Lausanne, na Suiça, e foi desativado em meados de 1991 em pleno auge de seu funcionamento. No mesmo ano de 1994 o TCA começou a ser remontado no novo edifício do Laboratório de Física de Plasmas do IFUSP e deve entrar em operação em 1996 sob o nome de TCA/BR.

1.3.2 Programa de Pesquisa para o TCA/BR

O TCA tinha como linha principal de pesquisa a investigação de aquecimento do plasma em tokamaks por ondas de Alfvèn e seus efeitos na estabilidade e transporte no plasma. Em estudos recentes, verificou-se que esta linha de pesquisa continua sendo um ponto importante para o aquecimento do plasma, uma vez que, os resultados existentes não são suficientes para concluir qual método utilizar para o aquecimento do plasma nos futuros reatores a fusão nuclear [Elfi-95]. A física envolvida também tem se mostrado bastante interessante. Desta forma, optou-se por continuar esta linha de pesquisa no TCA/BR, desenvolvendo novas antenas para a geração de ondas de Alfvèn.

O programa de pesquisa para o TCA/BR inclui a continuação de alguns tópicos em desenvolvimento no TBR-1 tais como: estudo dos fenômenos de turbulência na borda do plasma, campos helicoidais ressonantes e limitadores ergódicos, controle de instabilidades e

caos em plasma, modo H, polarização e processos físicos na borda do plasma.

1.3.3 Parâmetros do TCA/BR

Na Tabela 1.1 estão listados os principais parâmetros do tokamak TCA/BR. Na Fig. 1.3 é mostrado uma vista esquemática do TCA/BR.

Parâmetro	*Símbolo*	*Valor*
Raio maior	$R(m)$	0,615
Raio menor	$a(m)$	0,180
Campo Toroidal	$B_T(T)$	1,2
Corrente de Plasma	$I_P(kA)$	135
q na borda	$q(a)$	3
Duração do plasma	$t_P(ms)$	80
Densidade eletrônica média	$\bar{n}(cm^{-3})$	7,8x10^{13}
Temperatura eletrônica	$T_e(eV)$	750
Temperatura de íons	$T_i(eV)$	400

Tabela 1.1: Parâmetros do TCA/BR

1.4 Motivação para esta TESE

Em tokamaks, como já mencionamos anteriormente, o plasma é confinado pelo campo magnético resultante de vários campos externos aplicados e pelo campo criado pela corrente de plasma. Desta forma, temos um equilíbrio entre as forças devido ao gradiente de pressão cinética no plasma e às forças devido aos campos magnéticos presente no sistema que interagem com a corrente de plasma. O campo magnético de equilíbrio é ca-

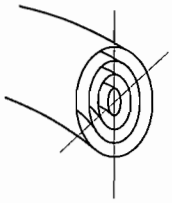

Figura 1.4: Superfícies de fluxo magnético.

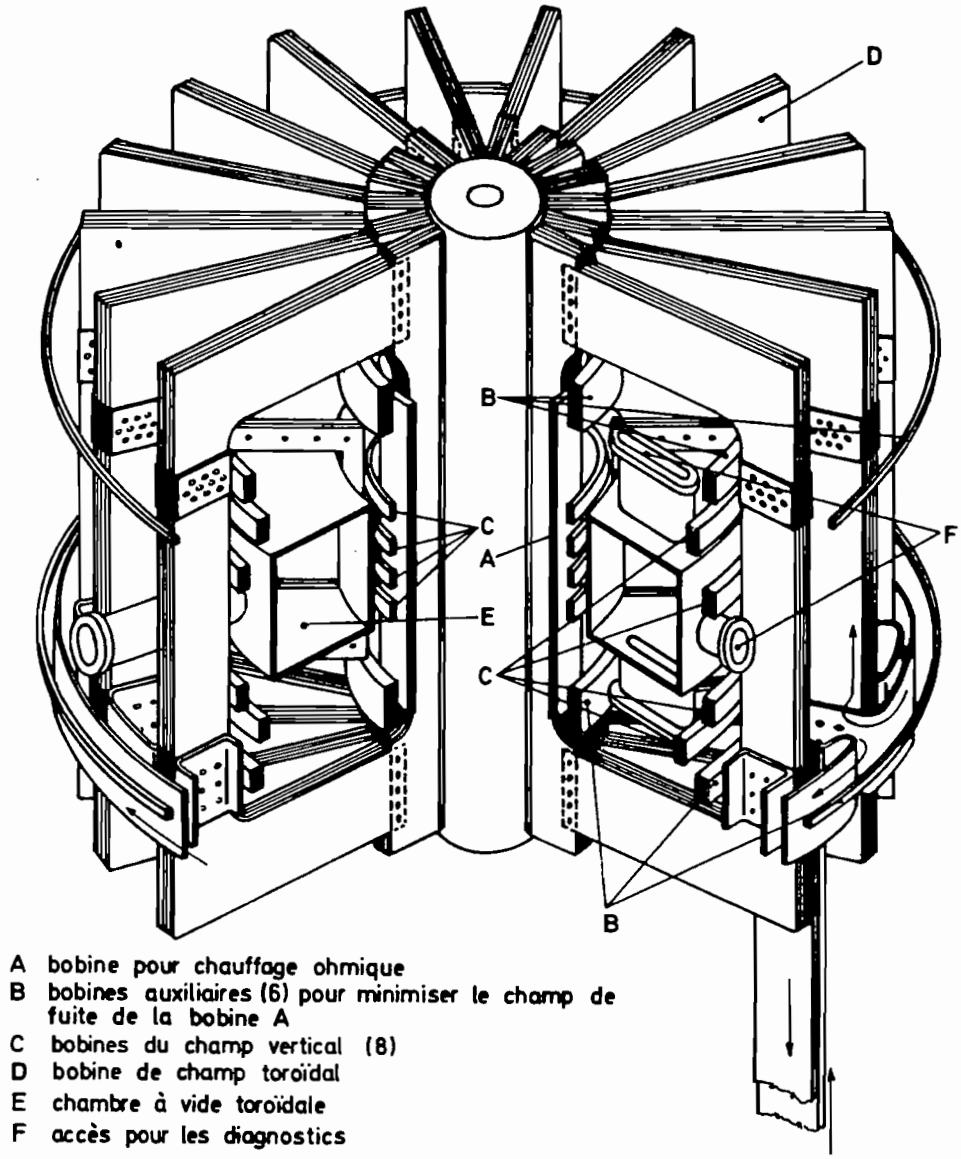

Figura 1.3: Tokamak TCA/BR. Figura obtida na referência [Chee-79].

racterizado por linhas helicoidais que estão em superfícies de fluxo magnético constante [Arts-72, Kado-92]. topologicamente estas superfícies são toróides concêntricos como mostra a Fig. 1.4.

O plasma magneticamente confinado é caracterizado por vários fenômenos físicos tais como radiação, aquecimento, efeitos de ressonância de partículas, equilíbrio, estabilidade, transporte entre outros [Kado-92, Frei-87]. Vários modelos físicos são usados para descrever cada um destes fenômenos. O modelo que descreve o equilíbrio de forças mencionado acima é chamado *magnetohidrodinâmico* (MHD).

Os parâmetros principais que caracterizam o equilíbrio MHD de uma coluna de plasma são:

- Corrente de plasma I_P
- Posição e forma da coluna de plasma
- l_i - Indutância interna
- q - Fator de segurança
- β - Razão entre pressão cinética e pressão magnética

A rápida e precisa determinação da configuração de equilíbrio é muito importante em experimentos de confinamento magnético, como no caso de tokamaks. Isto é importante para o controle em tempo real do plasma durante a operação da máquina, para uma análise imediata dos dados entre sucessivas descargas ou ainda uma análise mais cuidadosa do experimento realizado. Os parâmetros característicos do equilíbrio MHD podem ser obtidos através de medidas externas de campos e fluxos [Mukh-71, Zakh-86].

Na interpretação dos diagnósticos em tokamaks, a quantidade de informações experimentais é em geral muito grande quando comparamos com a taxa em que as medidas são realizadas bem como com a quantidade de dados a serem interpretados.

Desta maneira, precisamos de um sistema eficiente, rápido e confiável para a obtenção e análise das medidas magnéticas, bem como a realização destas medidas para a determinação dos parâmetros característicos do equilíbrio. Isto é básico na realização de qualquer experimento em tokamaks.

Por outro lado, o problema da determinação do equilíbrio MHD, usando medidas externas de campo e fluxo magnético, não é muito bem resolvido [Braa-91]. A solução apresentada para o equilíbrio pode ser instável quando pequenas perturbações são realizadas nas medidas.

Formalmente, o problema de determinação da configuração de equilíbrio a partir de medidas magnéticas externas é mal condicionado no sentido de Hadamard [Cour-66]. Vários métodos são apresentados na literatura estudando este problema. Muitos deles impõem uma série de restrições e vínculos ao problema originando perda de informações sobre o equilíbrio e ainda muito tempo de computador para trabalhar os dados.

O tokamak TCA/BR entrará em operação no segundo semestre de 1996 e a determinação e reconstrução dos parâmetros característicos do equilíbrio MHD será um procedimento rotineiro. Desta forma, foi desenvolvido um código de equilíbrio MHD para a configuração geométrica do TCA/BR com o objetivo de estudar o equilíbrio MHD e modelar o plasma. Para a reconstrução do equilíbrio foi implementado o método *Função de Parametrização.*

1.5 Reconstrução do Equilíbrio Magnetohidrodinâmico MHD

O equilíbrio magnetohidrodinâmico em configurações com simetria axial é descrito por uma equação parcial diferencial não linear denominada equação de Grad-Shafranov [Shaf-58, Shaf-66]:

$$R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{2}\frac{dF^2}{d\Psi}. \tag{1.7}$$

Nesta equação, Ψ representa a função de fluxo poloidal. Este equilíbrio é chamado *magnetohidrodinâmico* (MHD) sendo a equação de Grad-Shafranov derivada das equações de Maxwell e das equações de movimento de fluidos. No Cap. 2 vamos descrever o equilíbrio MHD em tokamaks e deduzir a equação de Grad-Shafranov.

As funções $p(\Psi)$ e $F^2(\Psi)$ são, em geral, funções não lineares de Ψ e a fronteira plasma-vácuo, onde condições de contorno para a solução da Eq. (1.7) têm que ser impostas, têm que ser determinadas junto com a solução. Nestes casos as soluções só podem ser obtidas numericamente e, para isto, são construídos códigos de equilíbrio onde processos iterativos são usados junto com as condições de contorno plasma-vácuo[2].

Estes códigos têm em geral como parâmetros de entrada a geometria da máquina, valores dos campos magnéticos aplicados no sistema e perfis de pressão e densidade de corrente na

[2]Há casos onde podem-se obter soluções analiticas para a equação de Grad-Shafranov, a partir de perfis simples para $p(\Psi)$ e $F^2(\Psi)$.

coluna de plasma. Os resultados são parâmetros de equilíbrio do plasma. Entretanto, estes resultados refletem uma simulação da realidade, ou seja, servem tanto para modelar as descargas como, uma vez tendo determinada uma configuração experimental, para obter alguns parâmetros que identificam o equilíbrio desta descarga.

No Cap. 3, vamos descrever um código de equilíbrio MHD escrito para a configuração do TCA/BR. Os algoritmos utilizados são os mesmos usados em vários códigos conhecidos (EFIT, EQUS) [Lao-85, Yasi-95]. Entretanto, foram desenvolvidas rotinas que diferem das tradicionais, para atender às necessidades específicas da configuração geométrica que caracteriza o tokamak TCA/BR.

Vários métodos e códigos numéricos têm sido desenvolvidos para a reconstrução do equilíbrio MHD, através de medidas magnéticas realizadas em bobinas externas ao plasma [Hutc-87]. Braams faz uma revisão destes métodos e códigos computacionais, para configurações com simetria toroidal [Braa-91]. No Cap. 4, vamos discutir de forma abreviada alguns destes métodos em uma introdução para justificar as opções escolhidas para o tokamak TCA/BR.

Uma situação que acontece atualmente, em vários ramos da física, é que a quantidade de dados gerados durante os experimentos tem aumentado em uma proporção muito maior do que o tempo em que estes dados podem ser analisados. Isto também é uma realidade para o estudo do plasma.

Um tokamak funciona em regime pulsado, ou seja, temos uma descarga onde o tempo de duração é da ordem de algumas centenas de milissegundos e alguns minutos entre descargas sucessivas. É neste período entre as descargas que parte dos dados obtidos devem ser analisados. Em tokamaks de grande porte, a escala de tempo para a duração da descarga é de dezenas de segundos e o tempo entre descargas é de muitos minutos. Aqui o problema de interpretação dos dados é ainda mais crucial, pois normalmente o plasma possui uma forma elongada e torna-se necessário o controle em tempo real da posição do plasma, bem como da forma deste, e a quantidade de dados provenientes dos diagnósticos é muito grande.

Assim, precisamos de métodos para a rápida e precisa interpretação e manipulação dos dados. Em nosso caso, estamos interessados na reconstrução do equilíbrio MHD para a determinação dos parâmetros do plasma associados a este equilíbrio.

Nesta tese vamos descrever o método estatístico desenvolvido por H. Wind [Wind-72] para a rápida interpretação de dados em física de altas energias no CERN, chamado Função de Parametrização (FP). Posteriormente, o método foi adaptado por B.J. Braams , W. Jilge e K. Lackner [Braa-86] na reconstrução do equilíbrio MHD no tokamak ASDEX e

aperfeiçoado por P.J. McCarthy [McCa-92], permitindo o controle da coluna de plasma. O método será implementado no TCA/BR para a reconstrução do equilíbrio e usado como diagnóstico rotineiro.

A FP é um método baseado na análise de um banco de dados. Um código de equilíbrio é usado para calcular um grande número de configurações de interesse. Este código de equilíbrio também gera medidas simuladas para todas as configurações calculadas e armazena os parâmetros físicos que caracterizam cada equilíbrio calculado mais as medidas simuladas em um banco de dados. É realizada uma análise estatística neste banco de dados para achar uma relação entre cada parâmetro físico e as medidas simuladas. Esta relação obtida pode ser aplicada em medidas reais, obtidas no experimento, para calcular os parâmetros de equilíbrio. No Cap. 4, vamos descrever a FP e sua implementação no TCA/BR.

A Função de Parametrização foi inicialmente implementada no tokamak TBR-1, após um estágio em 1991 no FOM Instituut voor Plasmafysica 'Rijnhuizen', na Holanda, onde a FP é usada no tokamak RTP [Mill-91, Mill-91a]. Para a utilização no TBR-1 foram necessárias adaptações simples para atender às diferenças das dimensões geométricas e quantidade de diagnósticos magnéticos. Tanto o RTP como o TBR-1 possuem câmara de vácuo com secção poloidal circular e os diagnósticos magnéticos estão dispostos em uma circunferência na direção poloidal. Entretanto, o sistema não foi utilizado em medidas experimentais, uma vez que estas se mostraram com sinais fracos e erros grandes. Os testes para verificação da implementação da FP no TBR-1 foram feitos com dados simulados.

Para a implementação no TCA/BR, a FP teve de ser toda reestruturada para a geometria de secção poloidal retangular desta máquina. A geração do banco de dados foi realizada pelo código de equilíbrio escrito para o TCA/BR e um modelo de simulação das medidas foi desenvolvido visando o sistema de diagnósticos magnéticos a ser implementado no tokamak.

No tokamak TCA/BR os diagnósticos magnéticos estarão dispostos retangularmente seguindo a secção poloidal retangular que caracteriza esta máquina. Apesar do tokamak possuir secção poloidal retangular o plasma é circular. Nas implementações atuais da Função de Parametrização, os diagnósticos magnéticos utilizados para a reconstrução do equilíbrio, estão dispostos sobre a superfície de uma casca que segue a superfície do plasma. Devido a esta diferença, a implementação da FP no TCA/BR evoluiu em uma direção nova, diferente das já utilizadas.

Capítulo 2

Equilíbrio MHD em Tokamaks

2.1 Introdução

Antes de entrarmos diretamente no assunto equilíbrio MHD, vamos analisar o critério de Lawson, $n\tau_E$, apresentado na introdução desta tese.

O critério de Lawson que descreve a condição para obter ganho de energia num reator à fusão, pode ser expresso como uma otimização do produto $n\tau_E$, e, de um ponto de vista simplificado, pode ser separado em duas partes independentes: a maximização do tempo de confinamento τ_E e da densidade n [Frei-87].

Nesta condição de maximização, τ_E é determinado pelo comportamento microscópico do plasma representado pelos processos de colisões e microinstabilidades. Este comportamento se relaciona com o transporte macroscópico de energia no plasma. Estes fenômenos exigem o conhecimento do movimento individual das partículas em escalas de tempo e de comprimento bastantes pequenas e, portanto, são tratados pela teoria cinética dos gases. Este modelo determina, também, a deposição de energia e temperatura do plasma associados aos métodos de aquecimento.

A maximização da densidade n, no critério de Lawson, é determinada pelos limites de equilíbrio e estabilidade macroscópica do plasma impostos pela geometria do sistema de confinamento magnético. Comparando as condições que determinam o limite da densidade n e do tempo de confinamento τ_E, as escalas de comprimento são maiores para os fenômenos relacionados com a densidade n, sendo o modelo de fluidos mais adequado para tratar este assunto.

A *magnetohidrodinâmica* (MHD) é um modelo baseado na teoria de fluidos simples [1], que é adequado para representar as propriedades macroscópicas do equilíbrio e estabilidade do plasma. Usando as equações de fluido e as equações de Maxwell, a teoria MHD descreve como as forças magnéticas e de pressão interagem com a corrente de plasma.

Dentro do modelo MHD, o equilíbrio de uma coluna de plasma num tokamak, ou, de forma mais formal, o equilíbrio de uma configuração de confinamento magnético com simetria axial, é descrito pela solução de uma equação diferencial elíptica denominada equação de *Grad-Shafranov* (GS) [Shaf-66, Shaf-58]. Neste capítulo, vamos deduzir a equação de Grad-Shafranov, descrevendo apenas as passagens mais importantes, com o objetivo de apresentar uma revisão introdutória. Uma dedução mais formal e criteriosa sobre o assunto pode ser encontrada em muitos livros e artigos [Frei-87, Bate-80, Kado-92, Galv-89]. A partir da equação de Grad-Shafranov, discutimos as grandezas físicas ou parâmetros de tokamaks que caracterizam o equilíbrio MHD. No próximo capítulo vamos descrever um código numérico para solucionar o problema do equilíbrio para a geometria específica do TCA/BR.

2.2 As equações MHD

2.2.1 Descrição do Modelo MHD Ideal

O plasma magneticamente confinado pode ser considerado como um fluido simples governado pelas equações MHD ideal. As condições de validade deste modelo são: (1) plasma altamente colisional, (2) o raio de giro dos íons em torno das linhas de campo magnético é muito pequeno comparado com as dimensões macroscópicas do plasma, e (3) resistividade desprezível [Frei-87, Galv-89]. Estas condições são válidas para resolver o problema do equilíbrio em tokamaks. Entretanto, em plasmas termonucleares a condição (1) não é satisfeita e deve ser incluída a condição de não colisionalidade no modelo MHD.

O conjunto de equações básicas, que representa o modelo MHD ideal, para o estudo do equilíbrio é [Frei-87, Bate-80, Kado-92, Galv-89]:

[1] Um fluido cujas propriedades são obtidas a partir de médias apropriadas sobre as propriedades das diferentes espécies que o compõe.

conservação da massa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$	(2.1)
conservação do momento	$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \vec{J} \wedge \vec{B},$	(2.2)
equação de estado	$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0,$	(2.3)
lei de Ohm	$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0,$	(2.4)
lei de Faraday	$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	(2.5)
lei de Ampère	$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J},$	(2.6)
lei de Gauss	$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$	(2.7)

onde ρ é a densidade de massa, $\vec{v}$ a velocidade macroscópica de partículas, p a pressão do plasma, $\vec{J}$ a densidade de corrente do plasma, $\vec{B}$ o campo magnético, $\vec{E}$ o campo elétrico, γ constante adiabática do fluido e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. As três primeiras equações descrevem a conservação da massa, do momento e pressão, para o que chamamos de fluido ideal. As quatro últimas equações são as equações de Maxwell para um meio condutor ideal, sem resistividade e sem a corrente de deslocamento na lei de Ampère [Heal-94, Reit-93]. Este sistema de equações permite uma descrição macroscópica do plasma, tratando-o como um fluido condutor magnetizado.

Os critérios usados no modelo MHD ideal implicam que os fenômenos de interesse que o modelo apresenta correspondem a certas escalas de tempo e comprimento. Em [Frei-87] e [Galv-89] as Eqs. 2.1-2.7 acima são trabalhadas e obtém-se que o comprimento característico a_{MHD} é da ordem das dimensões macroscópicas do plasma e o tempo característico $\tau_{MHD} \equiv a_{MHD}/V_A$, onde V_A é a velocidade de Alfvèn. De um modo geral, temos que em plasma de laboratório $a_{MHD} \approx 1,0m$ e $\tau_{MHD} \approx 2,3 \times 10^{-6}s$.

A Eq. 2.2 mostra explicitamente a física básica da interação das forças envolvidas no estudo do equilíbrio MHD ideal; o gradiente de pressão ∇p e a força magnética $\vec{J} \wedge \vec{B}$.

2.2.2 Equilíbrio Estático - Equações Básicas

Estamos interessados em um caso particular do estudo do equilíbrio MHD onde a velocidade do fluido é zero ($\vec{v} = 0$) e o sistema é independente do tempo, ou seja, estático ($\partial/\partial t = 0$). Desta forma, as Eqs. 2.1-2.7 resultam no conjunto de equações básicas:

$$\nabla p = \vec{J} \wedge \vec{B}, \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.9}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \tag{2.10}$$

O equilíbrio é realizado pelo balanço da força magnética $\vec{J} \wedge \vec{B}$ com a força devido ao gradiente de pressão ∇p.

Das Eqs. 2.8-2.10 obtemos

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0, \tag{2.11}$$

$$\vec{J} \cdot \nabla p = 0, \tag{2.12}$$

que significa que p é constante ao longo das linhas de força do campo magnético $\vec{B}$, bem como ao longo das linhas constituídas pelo vetor densidade de corrente $\vec{J}$, sendo que a densidade de corrente e o campo magnético têm de ser perpendiculares ao gradiente de pressão. Entretanto, apesar destes resultados, em geral $\vec{J} \wedge \vec{B}$ e $\vec{J} \cdot \vec{B}$ não se anulam e, portanto as linha de $\vec{J}$ e $\vec{B}$ se cruzam formando um ângulo arbitrário.

A pressão p é uma quantidade escalar que varia no espaço e a superfície definida por $p = constante$, onde as linhas de campo magnético ($\vec{B}$) e $\vec{J}$ estão contidas, é chamada superfície de fluxo magnético.

2.2.3 Equilíbrio MHD em Sistemas Toroidais - Equação de Grad-Shafranov

Na Fig. 2.1 é apresentado o sistema de coordenadas usualmente utilizados na solução da equação de Grad-Shafranov: o sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) usual. Pelo fato de o sistema possuir simetria axial, ou seja, $\partial/\partial\phi = 0$, o campo magnético e a densidade de corrente vão ser funções somente das variáveis R e Z:

$$\vec{B} = \vec{B}(R, Z), \tag{2.13}$$

$$\vec{J} = \vec{J}(R, Z). \tag{2.14}$$

O equilíbrio vai ser descrito por uma função $\Psi(R, Z)$, que será obtida resolvendo-se a equação de Grad-Shafranov.

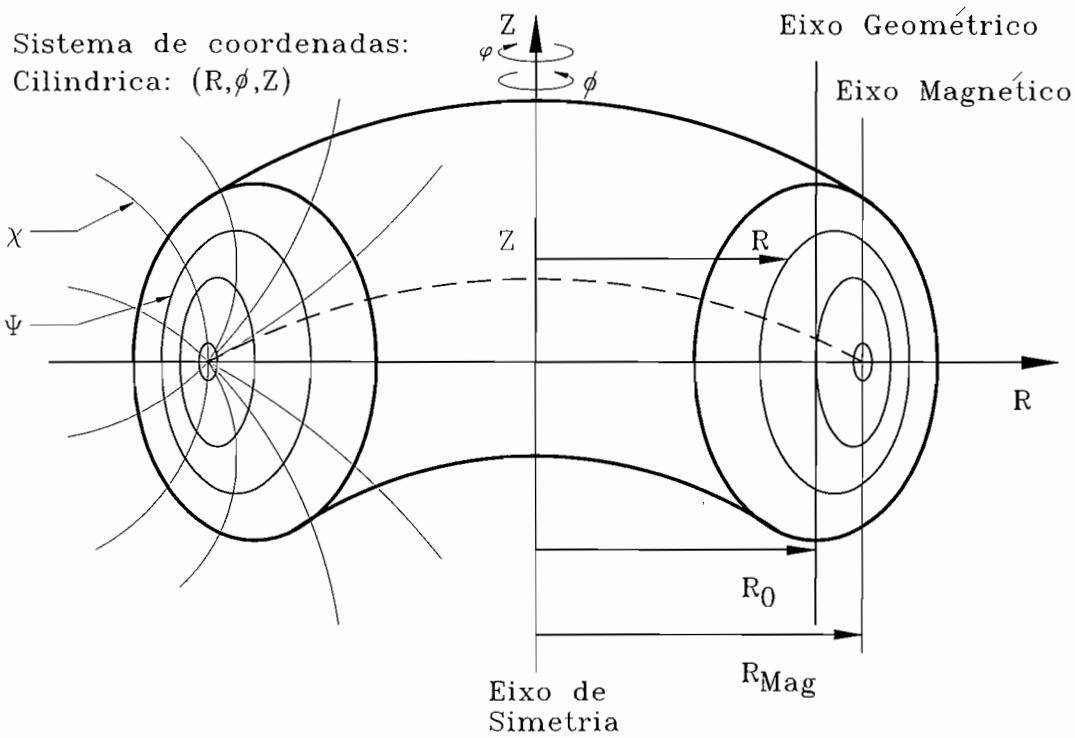

Figura 2.1: Geometria para sistemas toroidais com simetria axial onde: R, ϕ, Z descrevem o sistema de coordenadas cilíndricas, R_0 é o raio geométrico do torus, e R_{Mag} é o raio magnético do plasma. Ψ e χ são as coordenadas de fluxo, definidas na seção 2.3.

Vamos manipular as Eqs. 2.8-2.10 para obter esta equação. Primeiro, vamos escrever o campo magnético total como:

$$\vec{B} = \vec{B}_\phi + \vec{B}_P \tag{2.15}$$

onde nas coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z), $\vec{B}_\phi = B_\phi \hat{e}_\phi$ é a componente do campo na direção toroidal e $\vec{B}_P = B_R \hat{e}_R + B_Z \hat{e}_Z$ é a componente do campo na direção poloidal[2].

Equação $\nabla \cdot \vec{B}$:

A Eq. 2.9 pode ser escrita como:

[2] $\hat{e}_R$, $\hat{e}_\phi$ e $\hat{e}_Z$ são os versores nas direções R, ϕ e Z respectivamente no sistema de coordenadas cilíndricas.

$$\frac{1}{R}\frac{\partial(RB_R)}{\partial R} + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0. \tag{2.16}$$

Esta equação é satisfeita se escrevermos:

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \tag{2.17}$$

$$B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}, \tag{2.18}$$

onde definimos a função escalar $\Psi = \Psi(R, Z)$ para o campo magnético poloidal. Ψ está relacionado com a componente toroidal do vetor potencial A_ϕ segundo a relação $\Psi = RA_\phi$. Desta forma, podemos escrever:

$$\vec{B}_P = \vec{B}_R\hat{e}_R + \vec{B}_Z\hat{e}_Z = \frac{1}{R}\nabla\Psi \wedge \hat{e}_\phi. \tag{2.19}$$

O fluxo do campo magnético poloidal através de uma fita toroidal de área A, delimitada pelo eixo magnético ($R = R_{Mag}$, $Z = Z_{Mag}$, e uma linha $R = R_\Psi$ arbitrária sobre uma superfície Ψ é dado por $\Phi_P = \int \vec{B}_P \cdot d\vec{A}$, o que resulta na seguinte relação entre a função Ψ e o fluxo magnético convencional Φ_P:

$$\Phi_P = 2\pi\Psi \tag{2.20}$$

Lei de Ampère $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0\vec{J}$:

Usando a Lei de Ampère $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0\vec{J}$ (Eq. 2.10) podemos achar a relação entre Ψ e a corrente de plasma. Para isto vamos substituir as Eqs. 2.15 e 2.19 na lei de Ampère. Para as componentes toroidal J_ϕ e poloidal J_P da densidade de corrente $\vec{J}$ obtemos:

$$-\frac{1}{R}\left[R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\right] = \mu_0 J_\phi \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{R}\nabla(RB_\phi) \wedge \hat{e}_\phi = \mu_0\vec{J}_P \tag{2.22}$$

onde definindo o operador elíptico

$$\Delta^* \equiv R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \tag{2.23}$$

resulta para a componente toroidal da densidade de corrente de plasma

$$\Delta^*\Psi = -\mu_0 R J_\phi \tag{2.24}$$

Equações das Superfícies Magnéticas - $\vec{B}\cdot\nabla p = 0$ e $\vec{J}\cdot\nabla p = 0$:

Substituindo Eqs. 2.15 e 2.19 na Eq. 2.11, obtemos que $\hat{e}_\phi \cdot (\nabla\Psi \wedge \nabla p) = 0$. Isto implica que p depende de Ψ, ou seja:

$$p = p(\Psi) \tag{2.25}$$

Da mesma forma, substituindo as Eqs. 2.21 e 2.22 na Eq. 2.12, obtemos que $\hat{e}_\phi \cdot (\nabla\Psi \wedge \nabla R B_\phi) = 0$. Isto implica

$$R B_\phi = F(\Psi) \tag{2.26}$$

Sendo $I_{Pol}(\Psi) = \int \vec{J}\cdot dA$ a corrente poloidal total que circula entre o eixo magnético e um circuito poloidal em uma superfície $\Psi = constante$, podemos mostrar que

$$I_{Pol}(\Psi) = -2\pi\mu_0 F(\Psi) + Constante \tag{2.27}$$

Equação de Equilíbrio - $\nabla p = \vec{J}\wedge\vec{B}$:

Usando a equação de equilíbrio $\nabla p = \vec{J}\wedge\vec{B}$ (Eq. 2.8) estamos prontos a encontrar uma relação entre J_ϕ, p e F, pela substituição das Eqs. 2.19, 2.22, 2.24 e 2.26. O resultado é a **equação de Grad-Shafranov (GS)**:

$$\Delta^*\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{2}\frac{dF^2}{d\Psi}, \tag{2.28}$$

onde

$$\vec{B} = \frac{1}{R}\nabla\Psi \wedge \hat{e}_\phi + \frac{F}{R}\hat{e}_\phi. \tag{2.29}$$

Da Eq. 2.10 ($\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) e da equação de Grad-Shafranov obtemos que

$$\mu_0 \vec{J} = \frac{1}{R}\frac{dF}{d\Psi}\nabla\Psi \wedge \hat{e}_\phi \frac{1}{R}\Delta^*\Psi\hat{e}_\phi \tag{2.30}$$

e portanto

$$J_\phi = R\frac{dp}{d\Psi} + \frac{1}{2\mu_0 R}\frac{dF^2}{d\Psi}. \tag{2.31}$$

A equação de Grad-Shafranov é uma equação diferencial parcial não linear que descreve o equilíbrio MHD ideal em sistemas com simetria axial. Na formulação MHD, as funções $p(\Psi)$ e $F^2(\Psi)$ podem ser escolhidas de forma arbitrária. Para resolver o sistema de forma auto-consistente, a equação de equilíbrio teria que ser solucionada juntamente com as equações de transporte. Este é um problema formidável que requer códigos bastante sofisticados para encontrar soluções aceitáveis fisicamente [Jard-85]. Estes códigos requerem grande tempo de computação, tornando inviável sua utilização para as computações extensas para a base de dados. Portanto, nesta tese, vamos seguir o procedimento mais usual de arbitrar formas funcionais para $p(\Psi)$ e $F^2(\Psi)$ que produzem soluções de acordo com perfis observados experimentalmente. Como existe grande experiência acumulada sobre resultados experimentais em tokamaks, esta escolha, feita de forma criteriosa, não afeta fortemente as relações entre os parâmetros globais de equilíbrio.

Para completar o problema de solução da equação de Grad-Shafranov, condições de contorno devem ser aplicadas.

2.2.4 Condições de Contorno

Os campos elétricos e magnéticos devem satisfazer as condições de contorno usuais do eletromagnetismo [Reit-93]. Apesar do plasma ser tratado como um fluido e condições de contorno para a $\vec{v}$ devam ser satisfeitas, estas não serão consideradas, uma vez que o equilíbrio estudado é estático ($\vec{v} = 0$).

Inicialmente, vamos considerar a interface de um plasma (meio p) com um outro meio, que pode ser o vácuo (meio v) ou uma parede (meio w). Vamos supor que o plasma esteja separado de paredes condutoras por um vácuo.

Campo Magnético - $\vec{B}$

A condição para a **componente normal** do campo magnético é obtida da lei de Gauss (Eq. 2.7), $\nabla \cdot \vec{B}$, sendo:

$$[\vec{n} \cdot \vec{B}] = 0, \tag{2.32}$$

onde $\vec{n}$ é o versor normal à interface e $[Q] = Q_i - Q_p$, para $i = w, v$.

A condição para a **componente tangencial** do campo magnético é obtida da lei de Ampère $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (Eq. 2.6):

$$[\vec{n} \wedge \vec{B}] = \mu_0 \vec{J}_s \tag{2.33}$$

onde $\vec{J}_s$ é a densidade de corrente superficial na interface em consideração.

Campo Elétrico $\vec{E}$

As condições de contorno para o campo elétrico não serão utilizadas pois este pode ser eliminado das Eqs. 2.4-2.5.

Pressão no Plasma

Na passagem pela interface plasma-vácuo, devemos considerar o que acontece com a pressão. Então, é necessário estabelecer uma condição de contorno. Integrando a equação de equilíbrio (Eq. 2.2) através da interface obtemos:

$$[p + \frac{B^2}{2\mu_0}] = 0. \tag{2.34}$$

Isto significa que a soma das pressões cinéticas p e magnética $(B^2/2\mu_0)$ tem que ser conservada através da interface.

Usando as Condições de Contorno

Apesar das condições de contorno, mostradas acima, determinarem completamente o que acontece na interface do plasma com outro meio ou com uma parede qualquer, determinados cuidados devem ser tomados na sua aplicação.

As Eqs. 2.32-2.34 mostram que existem quatro equações para determinar as três componentes que determinam o campo magnético $\vec{B}$ quando a densidade superficial de corrente $\vec{J}_s$ é especificada. Desta forma, a interface não pode ser especificada e tem que ser determinada de forma auto-consistente. Este é um problema de fronteira livre. Se por outro lado, a fronteira for especificada por algum método que imponha o campo magnético na interface, pode-se determinar $\vec{J}_s$. Este problema é conhecido como fronteira fixa. Estes problemas serão discutidos mais a frente.

2.3 Parâmetros do Equilíbrio MHD em Tokamaks

Alguns parâmetros podem ser definidos para descrever as propriedades globais do equilíbrio MHD no plasma, desta forma caracterizando diferentes configurações, e permitindo uma análise da eficiência e estabilidade do confinamento do plasma. Estas quantidades são obtidas através de integrais sobre as superfícies de fluxo Ψ ou através de parâmetros relacionados à geometria do sistema em consideração.

A seguir, vamos descrever algumas destas quantidades relevantes para o estudo do equilíbrio MHD em tokamaks. Novamente, a apresentação não será feita de forma rigorosa e detalhada, pois o objetivo é mostrar estes parâmetros na sua forma final e a importância no estudo do equilíbrio. Os detalhes podem ser encontrados nas referências [Frei-87, Bate-80, Kado-92, Galv-89]. As definições destes parâmetros não são padronizadas, existindo algumas diferenças entre vários autores. Procuraremos seguir as definições apresentadas em [Frei-87] e [Galv-89].

Antes de apresentar a definição das grandezas de plasma vamos introduzir uma coordenada angular χ perpendicular a Ψ como podemos ver na Fig. 2.1. Desta forma temos um novo sistema de coordenadas, denominado sistema de coordenadas de fluxo [Haes-90], (Ψ,χ,φ), que facilita o cálculo destas grandezas. Basicamente estamos interessados na transformação das coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) para (Ψ,χ,φ) [3]. A função coordenada $\chi(R,Z)$ é determinada pela condição de ortogonalidade $\nabla\Psi \cdot \nabla\chi = 0$, ou seja

$$\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\chi}{\partial R} + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial\chi}{\partial Z} = 0 \tag{2.35}$$

Conhecendo-se $\Psi(R,Z)$ podemos obter $\chi(R,Z)$ e, portanto, devemos conhecer como se processa a transformação de coordenadas. Uma maneira simples de fazer isto é escrever um

[3] O sentido de φ é oposto ao de ϕ para que tenhamos um sistema de triedro direto.

elemento de arco dl neste novo sistema de coordenadas, ou seja:

$$dl^2 = h_\Psi^2 d\Psi^2 + h_\chi^2 d\chi^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2 = dl_\Psi + dl_\chi + dl_\varphi \tag{2.36}$$

onde h_Ψ, h_χ e h_φ são o que chamamos de métricas das coordenadas Ψ, χ e φ. A transformação de coordenadas pode ser vista através destas métricas.

Com base na geometria apresentada na Fig. 2.1 podemos ver que $dl_\varphi = Rd\varphi$ e portanto:

$$h_\varphi = R. \tag{2.37}$$

Já vimos anteriormente que Ψ é o fluxo poloidal dividido por 2π ($\Phi_P = 2\pi\Psi$ - Eq.2.20), portanto, temos que $d\Psi = d\Phi_P/\pi = (1/2\pi)(2\pi R dl_\Psi)B_\chi = RB_\chi dl_\Psi$, que resulta em $dl_\Psi = [1/(RB_\chi)]d\Psi$, ou seja

$$h_\Psi = \frac{1}{(RB_\chi)} = \frac{1}{|\nabla\Psi|}. \tag{2.38}$$

Para determinarmos a métrica h_χ vamos usar o Jacobiano J da transformação [Haes-90] que é dado por

$$dV = RdRd\phi dZ = Jd\Psi d\chi d\varphi = h_\Psi h_\chi h_\varphi d\Psi d\chi d\varphi, \tag{2.39}$$

onde dV é o elemento de volume. Portanto J é dado por

$$\frac{R}{J} = \frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\chi}{\partial Z} - \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial\chi}{\partial R}. \tag{2.40}$$

Como $J = h_\Psi h_\chi h_\varphi$ e usando os valores já obtidos de h_Ψ e h_φ obtemos

$$h_\chi = JB_\chi \tag{2.41}$$

Plasma β: O parâmetro β é um indicador da eficiência do confinamento do plasma pelo campo magnético. Ele é definido pela razão entre a energia média do plasma e a energia média armazenada no campo magnético. Segundo [Frei-87] temos:

$$\bar{\beta} \equiv \frac{2\mu_0 < p >}{< B^2{}_\varphi + B^2{}_\chi >} \tag{2.42}$$

onde temos

$$< p >= \frac{1}{V_0}\int_0^{V_0} p(V)dV = \frac{1}{V_0}\int_{\Psi_{Mag}}^{\Psi_b} p(\Psi)\frac{dV(\Psi)}{d\Psi}d\Psi \tag{2.43}$$

sendo V_0 o volume total do plasma, $V(\Psi)$ é o volume da superfície magnética $\Psi = constante$, B_φ e B_χ os campos magnéticos na direções de φ e χ definidos anteriormente, Ψ_{Mag} e Ψ_{Mag} são os valores de Ψ no eixo magnético e na borda do plasma respectivamente. A presença do volume nas integrais acima deixa o cálculo da média complicado; entretanto, temos que $dV = h_\Psi h_\chi h_\varphi d\Psi d\chi d\varphi = R h_\Psi h_\chi d\Psi d\chi d\varphi$, onde R varia em cada ponto da superfície do plasma. Aproximando R por R_{Mag} a média será calculada sobre a área S_0 da seção transversal da coluna de plasma

$$< p >= \frac{1}{S_0}\int\int p(\Psi)h_\Psi h_\chi d\Psi d\chi \tag{2.44}$$

Transformada Rotacional ι: Como visto anteriormente, o acoplamento do campo magnético poloidal $\vec{B}_p$ com o campo magnético toroidal $\vec{B}_\phi$ resulta em um campo composto de linhas de forças helicoidais que tendem a confinar as partículas em movimento do gás. Em geral, o passo das hélices varia de superfície magnética para superfície magnética.

Duas intersecções sucessivas de uma linha de força com o plano poloidal, correspondente a $\phi = constante$, após uma volta toroidal completa ($\Delta\phi = 2\pi$), determina uma variação "ι" na coordenada angular θ ($\Delta\theta = \iota$), conforme mostra a Fig. 2.2. Chamamos ι de transformada rotacional.

De uma maneira mais formal, podemos escrever [Zakh-86]:

$$\iota \equiv \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2\pi\frac{\Delta\theta_i}{\Delta\phi_i} \tag{2.45}$$

Fator de Segurança $q(\Psi)$: Esta grandeza é denominada desta forma porque desempenha o papel de um limite de segurança para algumas instabilidades que aparecem no plasma.

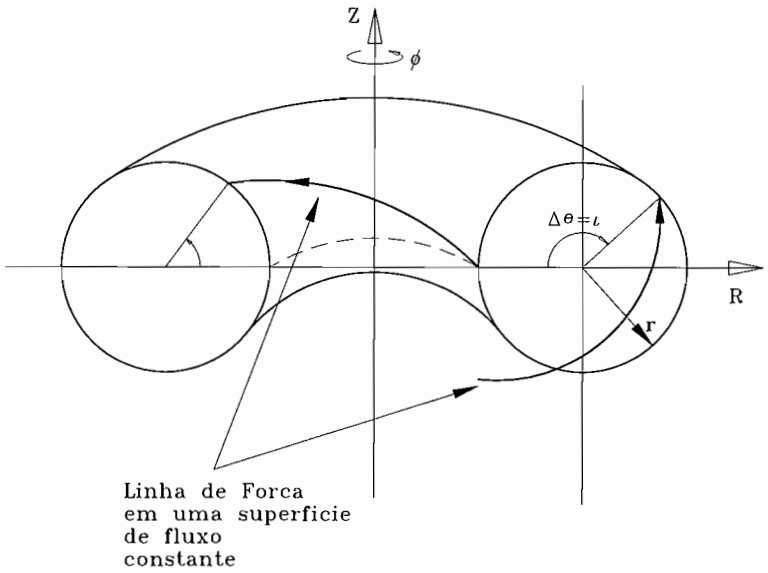

Figura 2.2: Linha de campo magnético em uma superfície de Ψ constante. "ι" é a transformada rotacional.

Se considerarmos uma linha de força em uma superfície Ψ constante, a inclinação local desta linha é definida por $\nu = d\varphi/d\chi$ ao longo de uma linha de força, no sistema de coordenadas (Ψ,χ,φ). Portanto, a inclinação média de todas as linhas de força nesta superfície Ψ constante será:

$$q(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \nu d\chi, \tag{2.46}$$

onde $q(r)$ é o fator de segurança.

A equação que descreve a trajetória das linhas de força é dada por:

$$\frac{h_\chi d\chi}{B_\chi} = \frac{h_\varphi d\varphi}{B_\varphi} \tag{2.47}$$

e portanto resulta

$$q(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_\varphi J}{R} d\chi. \tag{2.48}$$

Como $F(\Psi) = RB_\phi$ (Eq.2.26) no sistema de coordenadas cilíndricas e em módulo B_ϕ é iqual a B_φ então:

$$q(\Psi) = \frac{F(\Psi)}{2\pi} \oint \frac{J}{R} d\chi. \tag{2.49}$$

Fator de Segurança Global q_*: Este parâmetro, também conhecido por fator de segurança cilíndrico, tem como objetivo medir a estabilidade do plasma para modos com longos comprimentos de onda devido a corrente de plasma. Sua definição é dada por:

$$q_* = \frac{2\pi a^2 \ell B_0}{\mu_0 R_0 I_P}, \tag{2.50}$$

onde $\ell = (\oint_\Psi dl_\chi)/2\pi a$ é o perímetro normalizado da coluna de plasma e $I_P = (\oint B_\chi dl_\chi)/\mu_0$ é a corrente de plasma.

2.4 Solução Numérica do Equilíbrio MHD em Tokamaks

Como mencionado anteriormente, pouco podemos fazer para resolver o problema do equilíbrio MHD analiticamente. A solução exata da equação de Grad-Shafranov só é possível para perfis especiais de $p(\Psi)$ e $F(\Psi)$ e só podem ser usados para alguns formatos da secção poloidal da coluna de plasma. Estas soluções não permitem, ainda, incluir em seus cálculos a região externa ao plasma. Um destes perfis especiais é dado no modelo de Solov'ev para a corrente de perfil plano [Galv-89].

A solução numérica da equação de GS e as condições de contorno a serem usadas no problema, dependem do tipo de formulação usada para a configuração adotada para o tokamak. Podemos dividir a formulação do problema em dois grupos: `problema de fronteira fixa` e `problema de fronteira livre`.

No problema de fronteira fixa, a posição e forma da superfície $\Psi = \Psi_b$, que define a fronteira do plasma através da equação $p(\Psi_b) = 0$, é imposta a priori. Neste caso, os campos de equilíbrio obtidos da solução da equação de Grad-Shafranov representariam corretamente o equilíbrio se uma concha condutora perfeita fosse colocada em torno da coluna de plasma, coincidente com a superfície $p(\Psi_b)$. Mas, na realidade, o equilíbrio da coluna de plasma em

máquinas reais é mantido pelos campos produzidos em correntes circulantes em condutores externos à coluna de plasma, como mostrado na Fig. 1.1. A partir da solução do problema de fronteira fixa, não é possível estender a solução para o vácuo para calcular os campos externos que consistentemente manteriam o equilíbrio encontrado, porque este é um problema mal-condicionado, conforme já mencionado. Embora existam alguns métodos para regularizar estas soluções [Shaf-72], eles são bastante imprecisos para configurações arbitrárias. Portanto, o problema de fronteira fixa só é util para estudos iniciais das propriedades de algumas configurações de equilíbrio, quanto ao transporte e a estabilidade.

No problema de fronteira livre, as correntes em condutores externos ou outras condições de vínculo são impostas e a fronteira da coluna de plasma, onde as condições de contorno plasma-vácuo são impostas, é determinada juntamente com a solução da equação de Grad-Shafranov. Em alguns poucos casos particulares, como numa coluna cilíndrica de plasmas, é possível se obter uma solução analítica para o problema de fronteira livre [Cena-75]. No entanto, para a geometria toroidal de tokamaks, o problema só pode ser solucionado por métodos numéricos iterativos. Tipicamente, nestes métodos uma forma inicial da fronteira é arbitrada e a equação de Grad-Shafranov solucionada nas regiões do plasma e do vácuo. As condições de contorno são verificadas e, se não forem satisfeitas, a fronteira é modificada seguindo algum procedimento. Existem vários procedimentos possíveis [Blum-89] e no próximo capítulo vamos discutir o utilizado no programa de equilíbrio desenvolvido para o TCA/BR.

Nos primeiros programas de fronteira livre, as correntes nos condutores externos eram mantidas fixas durante o processo iterativo. Em programas modernos, geralmente é permitido que a corrente seja alterada em alguns condutores de controle de forma que, outras condições de vínculo sejam satisfeitas, como que a fronteira do plasma passe por alguns pontos escolhidos. Desta forma, as simulações de equilíbrio podem ser conduzidas quase como um problema de fronteira fixa, satisfazendo condições impostas por considerações físicas fora do problema de determinação do equilíbrio MHD por si.

Capítulo 3

Solução Numérica do Equilíbrio MHD no TCA/BR

3.1 Introdução

Códigos de equilíbrio MHD têm uma importância fundamental no estudo de física de plasma em tokamaks bem como no projeto destes. Na fase de projeto de tokamaks, configurações de plasma são simuladas para determinar as posições de bobinas de campos magnéticos verticais que melhor se adaptem ao projeto. Durante a operação da máquina, o plasma pode ser modelado a partir dos resultados obtidos no código de equilíbrio, ou seja, as configurações de equilíbrio obtidas numericamente mostram os resultados de campos magnéticos, sendo que estes podem ser parâmetros de entrada para o sistema que gera os campos no tokamak. No método de reconstrução do equilíbrio usando a Função de Parametrização, o código de equilíbrio é usado para gerar um banco de dados com configurações de equilíbrio que abrangem o regime de operação do tokamak.

De uma forma bem simplista, o código de equilíbrio é um esquema numérico para resolver a equação de Grad-Shafranov, apresentada no Cap. 2. Normalmente, procura-se personalizar o código de equilíbrio para a configuração geométrica da máquina em estudo.

Para o TCA/BR desenvolvemos um código chamado **TCABREC** baseado em um código de equilíbrio construído por I.V. Yasin e Yu.K. Kuznetsov [Yasi-95] (**EQUS** - Plasma Equilibrium Solver for Tokamaks). O código *TCABREC* resolve o problema de equilíbrio MHD usando o método das funções de Green [Heal-94, Reit-93], para cálculo de campos magnéticos em bobinas com correntes toroidais, e o método de iterações de Picard [Blum-89, Helt-78,

Lack-76], para os processos iterativos de solução da equação de GS. O código é de "fronteira livre", ou seja, o contorno do plasma faz parte da solução do problema.

O código *EQUS* foi implementado no grupo de Física de Plasma do IFUSP no início de 1995, para estudos preliminares das configurações de equilíbrio MHD. Estes estudos tinham por finalidade iniciar o projeto das sondas magnéticas para o processo de reconstrução do equilíbrio no TCA/BR. Ele foi desenvolvido para trabalhar em computadores do tipo PC compatível com IBM-PC. O código mostrou-se bastante eficiente para o TCA/BR. Entretanto, os objetivos propostos para esta máquina requerem que os resultados possam ser obtidos em um tempo menor que o possível em PCs e que o código também possa ser utilizado no processo de reconstrução do equilíbrio no TCA/BR. Portanto, para os objetivos do TCA/BR foi necessário fazer várias modificações e adaptações no código original. Inicialmente, o código foi adaptado para processamento em estações de trabalho UNIX e OpenVMS. Também foram feitas algumas modificações para otimizar e personalizar seu uso para as condições previstas para o TCA/BR; em particular, foram desenvolvidos novos módulos para calcular parâmetros de equilíbrio não disponíveis na sua versão original.

3.2 Conceitos Básicos

A equação de Grad-Shafranov - GS

No Cap. 2 apresentamos a equação de Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 R J_\phi, \tag{3.1}$$

onde

$$\Delta^* \equiv R \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \tag{3.2}$$

$$J_\phi = R\frac{dp}{d\Psi} + \frac{1}{2\mu_0 R}\frac{dF^2}{d\Psi}. \tag{3.3}$$

Aqui vamos rescrever a Eq. 3.1 como:

$$\Delta^* \Psi = -f(R, \Psi). \tag{3.4}$$

Como foi mencionado no Cap. 2, as funções $p(\Psi)$ e $F^2(\Psi)$, a pressão e a forma da componente toroidal da densidade de corrente, respectivamente, podem ser especificadas de forma arbitrária. Existe grande experiência computacional adquirida em simulações de configurações de equilíbrio que permite escolher estas funções de forma a produzir resultados que representem adequadamente os resultados experimentais. Neste trabalho vamos adotar a forma utilizada por Luxon e Brown [Luxo-82, Lazz-88, Kuzn-87]:

$$J_\phi = J_0\left[\beta_0 f_P(\alpha_P, \Psi_t)\frac{R}{R_{Mag}} + (1-\beta_0) f_F(\alpha_F, \Psi_t)\frac{R_{Mag}}{R}\right], \tag{3.5}$$

onde R_{Mag} é o raio maior do centro magnético da coluna de plasma, J_0 e β_0 são coeficientes constantes e f_P e f_F são funções arbitrárias da função de fluxo normalizada Ψ_t, definida como

$$\Psi_t = \frac{\Psi - \Psi_L}{\Psi_{Mag} - \Psi_L}, \tag{3.6}$$

onde Ψ_{Mag} e Ψ_L são os valores da função de fluxo no eixo magnético e na borda do plasma, respectivamente. No código *TCABREC* é possível escolher entre duas expressões distintas para as funções f_P e f_F, ou seja,

`Fórmula de Balmer` $$f_{P,F}(\alpha_{P,F}, \Psi_t) = \frac{e^{\alpha_{P,F}\Psi_t} - 1}{e^{\alpha_{P,F}} - 1}, \tag{3.7}$$

`Fórmula de Efremov` $$f_{P,F}(\alpha_{P,F}, \Psi_t) = 1 - (1-\Psi_t)^{\alpha_{P,F}}. \tag{3.8}$$

Para a solução da Eq. (3.1) temos, portanto, que fornecer os valores de α_P, α_F, J_0 e β_0, além dos parâmetros geométricos do tokamak. O parâmetro β_0 é uma quantidade escalar relacionada com o beta poloidal $\bar{\beta}_p$ [Luxo-82]. $\bar{\beta}_p$ é o valor de beta definido com o campo poloidal somente. Para tokamaks onde a razão entre o raio geométrico R_0 e o raio menor do plasma a é muito maior que a unidade temos que $\bar{\beta}_p = (8\pi^2 a^2 \kappa^2 < p >)/(\mu_0 I_0^2)$, sendo que $\kappa = A/\pi a^2$, A é a área da secção poloidal do plasma, I_0 a corrente total do plasma [Frei-87]. Por outro lado, a forma da densidade de corrente determina o valor da indutância interna da coluna de plasma, definida pela expressão

$$l_i = \frac{2}{R_0 I_P^2}\left(\int_{S_P} \Psi J_\phi dS - \Psi_L I_P\right), \tag{3.9}$$

onde é I_P a corrente do plasma

$$I_P = \int_{S_P} J_\phi dS. \tag{3.10}$$

Nestas equações, a integral tem que ser feita sobre a secção transversal do plasma, que tem que ser determinada juntamente com a solução da Eq. (3.1), de forma auto-consistente.

No código *TCABREC*, ao invés de fornecer os valores de β_0 e J_0, são dados como parâmetros de entrada os valores de I_P, $\bar{\beta}_p$ e l_0, onde l_0 é a indutância interna inicial do plasma. Os valores de J_0, Ψ_L e β_0 são ajustados num processo iterativo, a ser descrito na seqüência, de forma que a indutância interna l_i se iguale a l_0 dentro de uma tolerância pré-estabelecida.

Condições de Contorno - Equilíbrio Mantido por Correntes Externas

O código *TCABREC* resolve o problema do equilíbrio mantido por correntes externas e com o plasma separado da parede por uma região de vácuo, ou seja, as condições de contorno devem ser satisfeitas na interface plasma-vácuo. A superfície do plasma é considerada livre e determinada como solução do problema, de forma a satisfazer as condições de contorno plasma-vácuo. Este é o *problema de fronteira livre* discutido no capítulo anterior. A geometria típica do domínio computacional usado no código *TCABREC* é mostrado na Fig. 3.1. A região $R_P = P + V$, com contorno ∂R, é uma secção poloidal desta região toroidal, onde P e V são as secções poloidais relativas ao plasma e ao vácuo, respectivamente.

Dentro do plasma a função de fluxo Ψ é obtida pela equação de Grad-Shafranov (rescrevendo a Eq. (3.1))

$$\Delta^* \Psi_p = -\mu_0 R J_\phi(\Psi_p), \tag{3.11}$$

e para Ψ no vácuo (Ψ_v) resulta para a equação de Grad-Shafranov

$$\Delta^* \Psi_v = 0, \tag{3.12}$$

As condições de contorno na interface plasma-vácuo são obtidas das Eqs. (2.32)-(2.37). Analisando estas condições junto com a equação de Grad-Shafranov para Ψ no plasma e no vácuo (Eqs. (3.11), (3.12)) resulta que

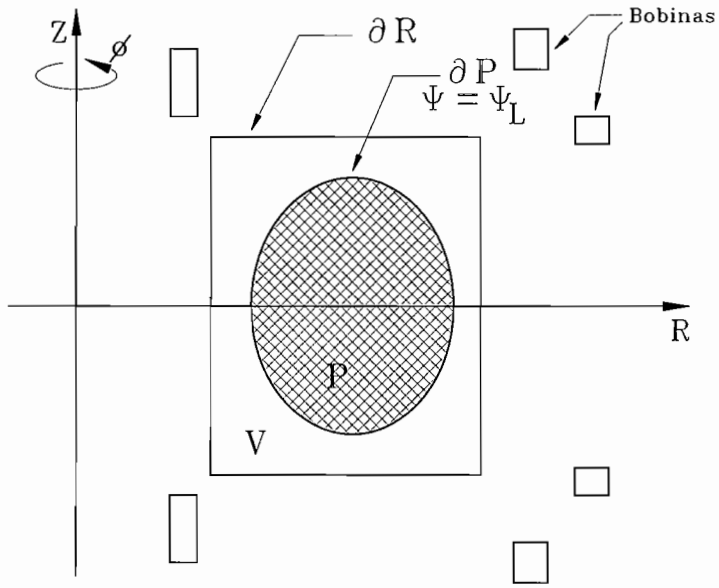

Figura 3.1: Domínio computacional usado no código de equilíbrio MHD TCABREC.

$$\Psi_v\big|_{\Psi_L} = \Psi_P\big|_{\Psi_L}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \Psi_P}{\partial n}\Big|_{\Psi_L} = \frac{\partial \Psi_v}{\partial n}\Big|_{\Psi_L}, \tag{3.14}$$

onde $\partial/\partial n$ é a derivada normal ao contorno dado por Ψ_L. Nestas condições foi considerado $J_s = 0$ (Eq. 2.33), que é o caso mais usual. As outras condições são automaticamente satisfeitas.

A função de fluxo no vácuo também tem que satisfazer condições de contorno apropriadas, uma vez que temos o equilíbrio mantido por correntes externas. Para achar esta condição, vamos procurar uma solução para a Eq. (3.12) ($\Delta^*\Psi_v = 0$) supondo uma superposição linear das contribuições devido à corrente de plasma e das correntes nas bobinas externas, ou seja,

$$\Psi_v = \Psi_v^p + \Psi_v^c, \tag{3.15}$$

onde Ψ_v^p é devido às correntes que circulam no plasma e Ψ_v^c é o fluxo devido às correntes externas. No tokamak TCA/BR estas correntes circulam em bobinas circulares concêntricas com o eixo de simetria do torus. O fluxo do campo magnético devido a este tipo de bobina

é conhecido [Heal-94, Reit-93, Jack-62]. Usando a nomenclatura apresentada na Fig. 3.2 o fluxo em um ponto $P(R, \phi, Z)$ devido à bobina, mostrada nesta figura, com corrente I_C é

$$\Psi((R, \phi, Z) = I_C G(a, Z_0|R, Z). \tag{3.16}$$

$G(a, Z_0|R, Z)$ é a função de Green dada por [Jack-62]

$$G(a, Z_0|R, Z) = \frac{\mu_0}{2k\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)K(k) - E(k)\right]. \tag{3.17}$$

onde

$$k^2 = \frac{4aR}{[(a+R)^2 + (Z - Z_0)^2]}, \tag{3.18}$$

e $K(k)$ e $E(k)$ são as integrais elípticas completas de primeira e segunda espécie, respectivamente.

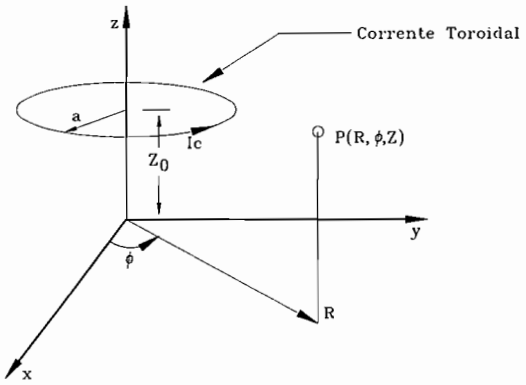

Figura 3.2: Geometria utilizada para o uso das funções de Green em bobinas com correntes toroidais.

3.3 Código TCABREC

O código *TCABREC* irá resolver o problema do equilíbrio MHD solucionando a equação de Grad-Shafranov no plasma e no vácuo (Eqs. (3.11) e (3.12)) usando as condições de

contorno dadas pelas Eqs. (3.13)-(3.15). Apesar do equilíbrio ser mantido por correntes externas e o problema ser caracterizado por um *problema de fronteira livre*, o código tem a possibilidade da corrente ser alterada em alguns destes condutores externos enquanto que em outros a corrente é mantida fixa, durante o processo iterativo (ver Cap. 2).

O procedimento iterativo usado, no código *TCABREC*, para resolver o problema acima é ilustrado esquematicamente na Fig. 3.3. Este procedimento consiste basicamente de dois laços: um `laço externo` no qual as correntes nas bobinas externas, que possuem correntes ajustáveis, são ajustadas e a indutância interna l_i e a fronteira do plasma atualizada, e um `laço interno` que resolve a equação de Grad-Shafranov para uma superfície de plasma fixa. A necessidade dos dois laços reside no fato que a superfície do plasma tem que ser determinada concomitantemente com a solução da equação de Grad-Shafranov.

Iterações de Picard

Antes de iniciarmos a apresentação do algoritmo usado no código *TCABREC* vamos apresentar o método para se resolver a equação $\Delta^*\Psi = -\mu_0 R J_\phi(\Psi)$.

Para um domínio computacional retangular (ver Figs. 3.1 e A.1), a função de fluxo Ψ nos pontos interiores a esta grade é obtida usando o esquema iterativo de Picard para a equação de Grad-Shafranov [Lack-76, Helt-78, John-79, Lao-85, Blum-89]

$$\Delta^*\Psi^{(n+1)} = -\mu_0 R J_\phi(\Psi^n). \tag{3.19}$$

A solução desta equação é obtida na forma integral usando as funções de Green [Lao-85]

$$\begin{aligned}\Psi^{(n+1)}(R_i, Z_j) = &\sum_{k=1}^{n_c} G(R_k, Z_k|R_i, Z_j) I_C(R_k, Z_k) + \\ &\sum_{m,n} G(R_m, Z_n|R_i, Z_j)\Delta R_m \Delta Z_n J_\phi(\Psi^n(R_i, Z_j))\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde n está relacionado ao número da iteração no laço interno, n_c é o número de bobinas externas, $I_C(R_k, Z_k)$ é a corrente na bobina externa localizada na posição (R_k, Z_k), $G(R_k, Z_k|R_i, Z_j)$ é a função de Green calculada no ponto (R_i, Z_j) do domínio computacional devido a uma corrente em uma bobina externa localizada em (R_k, Z_k), $G(R_m, Z_n|R_i, Z_j)$ é a função de Green calculada no ponto (R_i, Z_j) do domínio computacional devido a uma

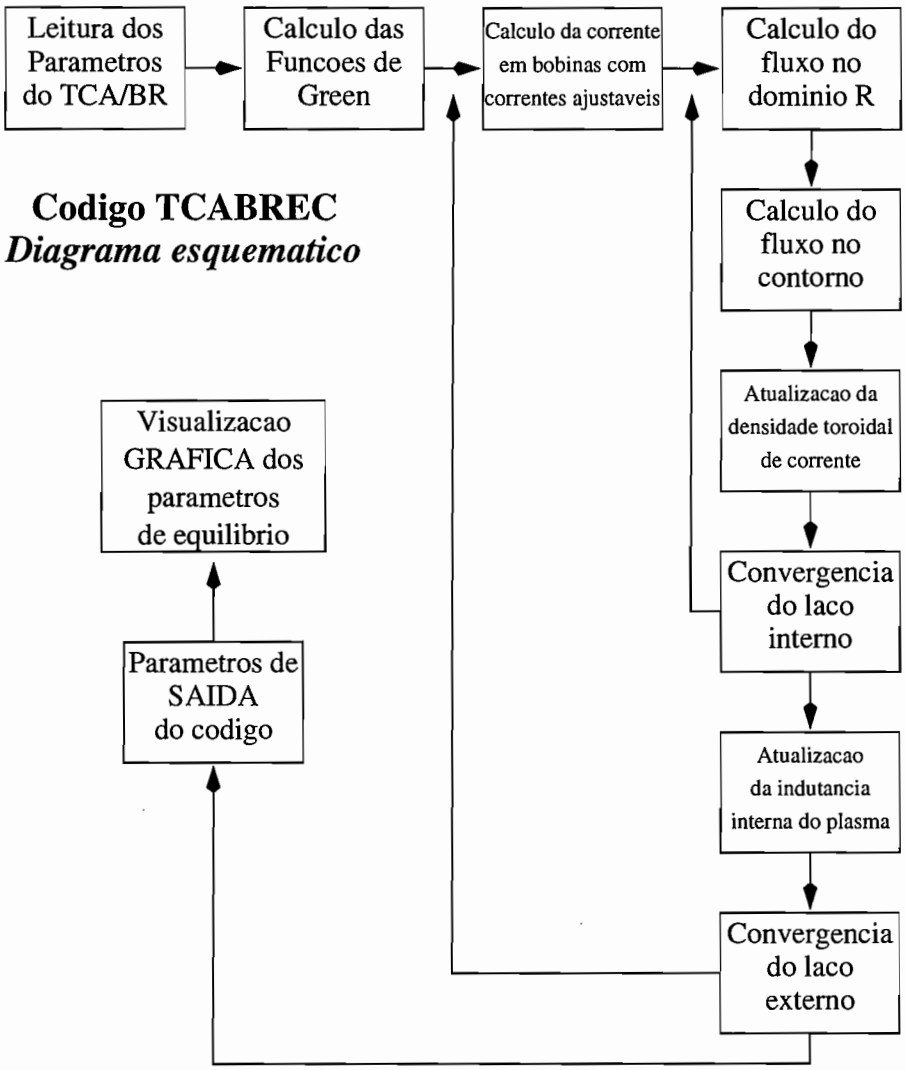

Figura 3.3: Diagrama da estrutura do código de equilíbrio MHD TCABREC.

corrente localizada no ponto (R_m, Z_n) deste domínio computacional e $J_\phi(\Psi^n(R_i, Z_j))$ é a componente toroidal da densidade de corrente.

Em uma dada iteração $(n+1)$ o valor de Ψ em cada ponto da grade é calculado usando o valor de Ψ de uma iteração anterior (n) através do cálculo $J_\phi(\Psi^n)$. O valor da função de fluxo Ψ estará determinada quando algum critério de convergência for atingido. Discutiremos este critério mais adiante.

Algoritmo do Código do *TCABREC*

Inicialmente, é definido o conjunto de correntes externas que possuem um valor fixo e um conjunto de correntes que serão ajustados ao longo do processo iterativo usado para achar a solução da equação de Grad-Shafranov. A escolha deste conjunto de correntes é determinada pelo tipo de equilíbrio em que estamos interessados em estudar. O campo vertical de equilíbrio é formado não só pelos campos verticais de equilíbrio descrito no Cap. 2, mas também por um campo vertical originado das bobinas de aquecimento ôhmico. Na determinação do equilíbrio, estas correntes devem ser levadas em consideração e são, em nosso problema, consideradas correntes fixas. Os valores das correntes que formam o campo de equilíbrio originado pelas bobinas de campo vertical podem ser fixos ou ajustáveis. No tokamak TCABR, o plasma terá a interface plasma-vácuo definida por limitadores físicos. Do ponto de vista computacional, são pontos onde em um deles passará a última superfície magnética do plasma. Desta forma, seria interessante que parte destas correntes que originam o campo vertical fosse ajustada junto com a solução do problema (como no problema de fronteira fixa). Entretanto, estas correntes ajustáveis são novas incógnitas acrescentadas ao problema e por isto, condições adicionais devem ser impostas. Estas condições são representadas por pontos de vínculos no domínio computacional direcionando o centro da densidade de corrente de plasma. Ou seja, esta condição de vínculo está associada à posição do centro do plasma. Se tivermos "N" correntes ajustáveis, o número "M" de vínculos deve ser tal que $M \geq N - 1$ para que tenhamos um número de equações suficientes para determinar as incógnitas.

O cenário inicial completa-se com a corrente de plasma e o perfil da densidade de corrente toroidal definida pela indutância interna do plasma. Desta forma, são fornecidos valores iniciais para os α_P, α_F, J_0 e β_0, e o tipo de expressões para as funções f_P e f_F (Eqs. (3.7) e (3.8)) definindo a densidade de corrente J_ϕ e o valor de l_0 para o perfil da corrente de plasma.

O código *TCABREC* inicia gerando um mapa de funções de Green no domínio compu-

tacional devido a todas as contribuições de corrente existentes no sistema. Desta forma, temos um valor inicial para a função de fluxo Ψ usando a Eq. (3.16). Vamos definir $\Psi_{(i,j)}^{(m,n)}$ como sendo o fluxo no ponto (R_i, Z_j) da grade na iteração externa m e na iteração interna n. A situação inicial define a função de fluxo $\Psi_{(i,j)}^{(0,0)}$. O contorno do plasma $\Psi_L^{(0,0)}$ é calculado usando a Eq. (3.15) nos pontos que definem o limitador físico e procurando o menor valor de $\Psi_L^{(0,0)}$ entre estes pontos.

A equação de Grad-Shafranov é, então, resolvida na forma integral usando o esquema iterativo de Picard descrito pela Eq. (3.20). A densidade toroidal de corrente J_ϕ é atualizada em cada iteração usando a Eq. (3.5) através dos parâmetros α_P, α_F, J_0 e β_0. O sistema irá convergir segundo o critério

$$\frac{|[\Psi_{(i,j)}^{(m,n)} - \Psi_{(i,j)}^{(m,n-1)}]_{máximo}|}{|\Psi_0^{(m,n)} - \Psi_L^{(m,n)}|} < tolerância1, \tag{3.21}$$

onde $\Psi_0^{(m,n)}$ é o valor do fluxo no eixo magnético e $\Psi_L^{(m,n)}$ o valor do fluxo na superfície do plasma em cada iteração. A tolerância é um valor estipulado baseado na experiência adquirida na convergência do método usado. A convergência é alcançada quando a máxima diferença de fluxo entre uma iteração e outra, no domínio computacional, for menor do que a tolerância estipulada vezes a diferença de fluxo entre o eixo magnético e a borda do plasma.

A convergência sendo alcançada, temos o valor de Ψ em todos os pontos do domínio computacional e a borda do plasma definida (Ψ_L). Temos o *laço interno* finalizado. Entretanto, esta borda deve ser reajustada para ser verificada a auto-consistência do problema. Isto é feito através da atualização da indutância interna da coluna de plasma. Calcula-se o novo valor de l_i^m (Eq. (3.9)) e compara-se este resultado com o valor de entrada l_0. Ou seja,

$$|l_i - l_0| < tolerância2. \tag{3.22}$$

Se a diferença, em módulo, for maior do que *tolerância2*, atualizam-se as correntes ajustáveis das bobinas de campo vertical e se resolve, para esta nova condição, a equação de Grad-Shafranov.

As correntes ajustáveis são ajustadas através da solução linear do problema de mínimos quadrados, onde é minimizada a norma de um vetor $(\vec{r} - \vec{\vec{M}}\vec{t})$. Aqui, $\vec{t}$ são as correntes externas a serem determinadas, $\vec{\vec{M}}$ é a matriz que relaciona as variáveis não conhecidas com os pontos de vínculos e $\vec{r}$ é o vetor do fluxo magnético destas correntes ajustáveis determinadas

no laço externo anterior mais o fluxo magnético da corrente de plasma calculada nos pontos de vínculos.

Alcançados os critérios de convergência para indutância interna da coluna de plasma, temos o laço externo finalizado e o problema de equilíbrio resolvido numericamente.

3.4 Aplicação Preliminar no TCA/BR

O tokamak TCA/BR está atualmente em fase de instalação e deverá entrar em operação em meados de 1997. Desta forma, os resultados gerados pelo código *TCABREC* têm o objetivo de estudar as configurações de equilíbrio que caracterizam a máquina. Com os dados simulados podemos estudar o comportamento do plasma e dos campos magnéticos produzidos. Estes resultados são também importantes para o projeto do conjunto de sondas magnéticas [Hutc-87] que serão utilizadas para medir os campos externos ao plasma.

Na Tabela 3.1 temos o arquivo de entrada com os dados de uma destas configurações. No apêndice A temos o detalhamento e o significado das variáveis apresentadas na Tabela 3.1. Neste estudo o plasma está sendo mantido por correntes fixas nas bobinas do transformador de aquecimento ôhmico OHT (Fig 1.3) e por correntes ajustáveis nas bobinas de campo vertical.

Os resultados para esta configuração estão mostrados nas Figs. 3.5 e 3.6. Os parâmetros do equilíbrio MHD que caracterizam o plasma e mostrados na Fig. 3.5 são definidos abaixo. Os parâmetros geométricos que definem a sessão transversal do plasma estão definidos na Fig. 3.4.

- I_P - Corrente de plasma
- β_p - Beta poloidal
- l_i - Indutância interna
- R_{geo} - Raio do centro geométrico do plasma: $R_{geo} = \frac{R_{max}-R_{min}}{2}$
- Z_{geo} - Posição Z do centro geométrico do plasma $Z_{geo} = \frac{Z_{top}-Z_{bot}}{2}$
- a - Raio menor do plasma na direção R
- b - Raio menor do plasma na direção Z
- Elong - Elongação do plasma: $Elong = b/a$

- Triang - Triangularidade do plasma: $Triang = \frac{R_{geo}-R_{top}}{a}$, onde R_{top} é o raio que corresponde ao valor de Z_{top}
- μ - Parâmetro magnético: descreve o quanto o plasma é paramagnético ou diamagnético
- Ψ_{axis} - Ψ no eixo magnético (R_{mag}, Z_{mag})
- Ψ_{bound} - Ψ na borda do plasma
- R_{mag} - Raio do centro magnético do plasma
- Z_{mag} - Posição Z do centro magnético do plasma

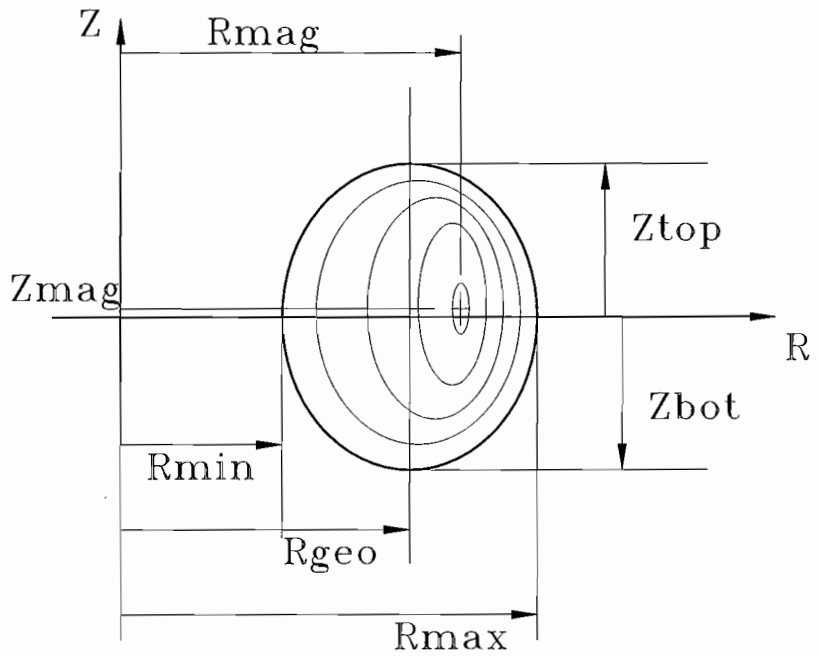

Figura 3.4: Definição das variáveis geométricas da secção transversal do plasma que caracterizam parâmetros geométricos do equilíbrio.

```
Coils
13
  1   0.302   0.000   0.040   1.156   2  73   0    0.1470 147
  2   0.389   0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  2   0.389  -0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  3   0.885   0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  3   0.885  -0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  4   0.934   0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  4   0.934  -0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850   0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850  -0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  6   0.334   0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  6   0.334  -0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334   0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334  -0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
Grid
   0.435   0.795  -0.200   0.200 14 15
Constrains
2
   0.435   0.000
   0.795   0.000
Plasma
   0.135   0.100   0.900  1  1   1.800   1.800   0.615   0.000
Accuracy
  0.01000  0.01000  0.00100  10 100
Boundary
90
Points
       2
   0.435   0.000
   0.795   0.000
```

Tabela 3.1: Parâmetros de entrada para o código TCABREC. Os resultados são apresentados nas Figs. 3.5 e 3.6. O significado de cada dado de entrada apresentado na figura é descrito no apêndice A.

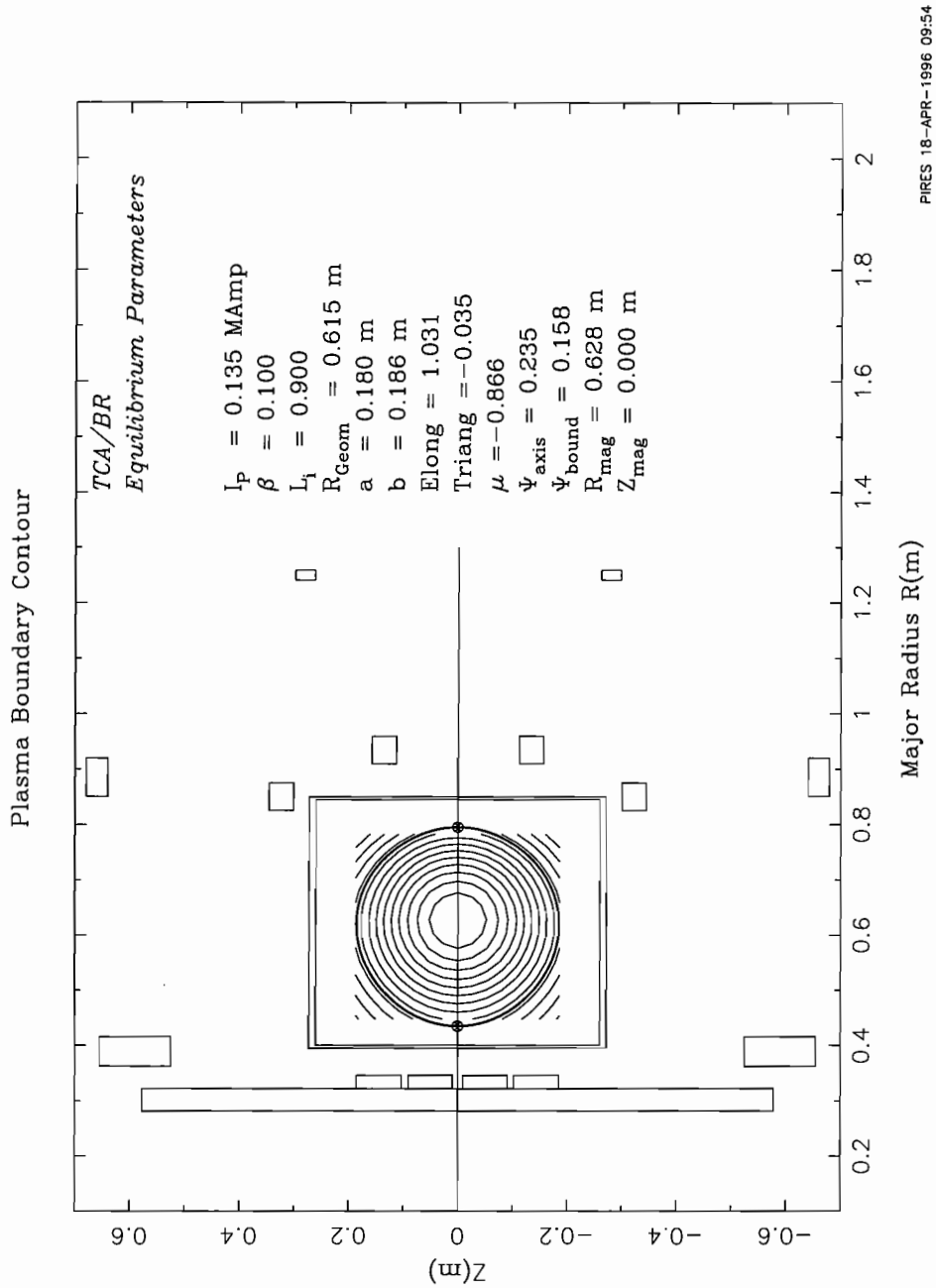

Figura 3.5: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 3.1. Na figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD descritos no Cap. 2.

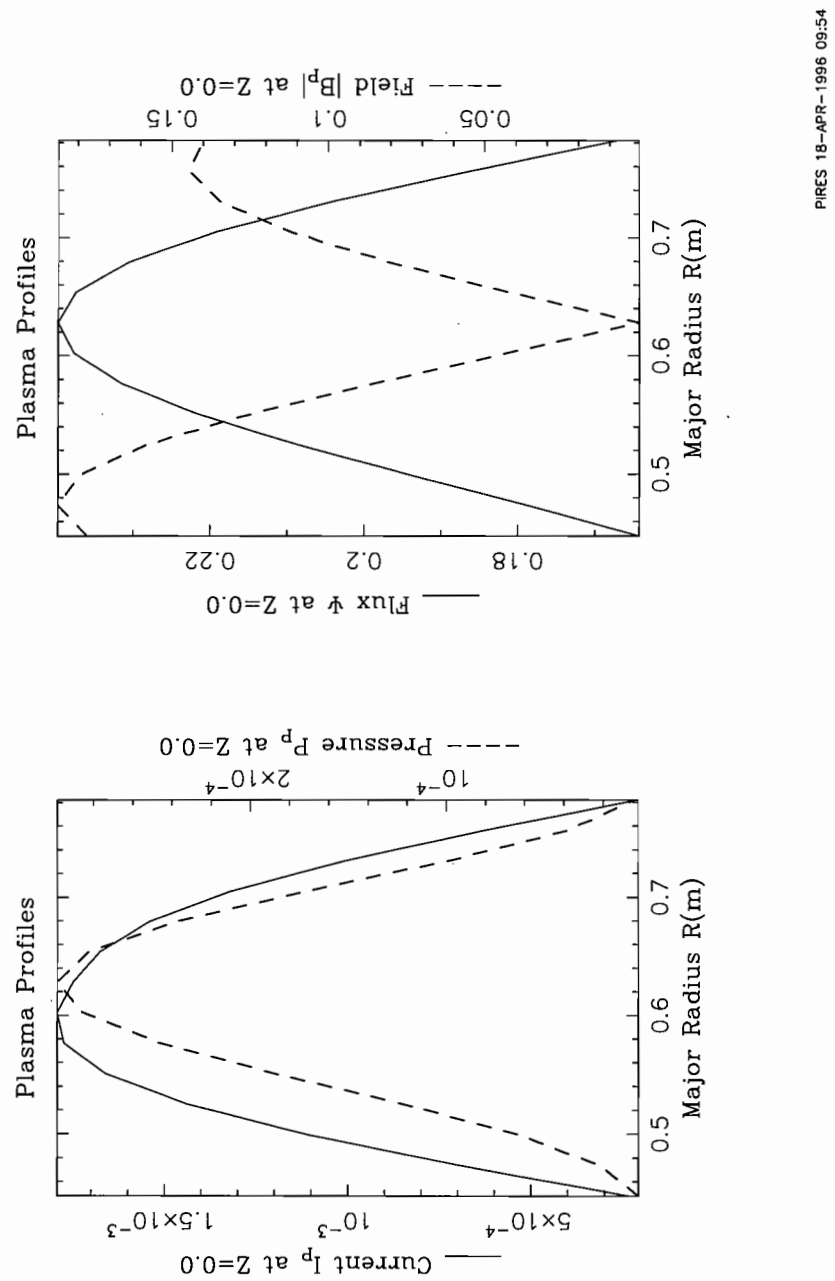

Figura 3.6: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 3.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$.

Capítulo 4

FP: Função de Parametrização

4.1 Introdução

A rápida e precisa determinação da configuração de equilíbrio magnetohidrodinâmico é muito importante em experimentos de confinamento magnético, como no caso de tokamaks. Isto é importante para o controle em tempo real do plasma durante a operação da máquina, para uma análise imediata dos dados entre sucessivas descargas ou ainda uma análise mais cuidadosa e extensa do experimento realizado. O equilíbrio do plasma ou certos parâmetros característicos do equilíbrio são basicamente informações de suas propriedades eletromagnéticas e podem ser obtidos através de medidas externas de campos e fluxos magnéticos. No entanto, na interpretação dos diagnósticos em tokamaks, a quantidade de dados é muito grande e o tempo gasto nesta intepretação também é grande, quando comparamos com a razão em que as medidas são realizadas. Desta maneira, precisamos de um sistema eficiente, rápido e confiável para a obtenção e análise das medidas magnéticas, para determinação dos parâmetros característicos do equilíbrio MHD. Isto é básico na realização de qualquer experimento no tokamak.

Vários métodos e códigos numéricos têm sido desenvolvidos para a reconstrução do equilíbrio MHD através de medidas de campos e fluxos magnéticos realizadas em bobinas externas ao plasma. Entretanto, mesmo tendo sido mostrado na literatura que estas medidas magnéticas levam a obter importantes informações sobre o equilíbrio, a maioria dos métodos existentes reconstroem poucos parâmetros do equilíbrio com boa precisão.

Inicialmente, estes métodos não envolviam uma completa solução do problema de equilíbrio. As medidas magnéticas eram relacionadas com os momentos da corrente toroidal J_ϕ [Zakh-73,

Braa-86a]. O problema envolvendo a solução completa do equilíbrio MHD, ou seja, resolvendo-se a equação de Grad-Shafranov (Eq. (2.28)) foi estudado pela primeira vez por J.L. Luxon e B.B. Brown [Luxo-82] para uso nos tokamaks Doublet IIa e Doublet III.

Estes métodos são baseados na determinação do perfil de corrente dentro do plasma, de tal forma que a equação de equilíbrio de GS seja satisfeita e que o campo magnético tenha um bom ajuste com os resultados dos campos medidos externamente ao plasma. Ou seja, temos que determinar $J_\phi = Rdp/d\Psi + (1/2\mu_0 R)(dF^2/d\Psi)$ dentro do plasma. O perfil de corrente é parametrizado segundo as condições de cada tokamak, substituindo os parâmetros $dp/d\Psi$ e $dF^2/d\Psi$ por funções previamente escolhidas. B.J. Braams faz uma revisão e comparação de alguns destes métodos usados no tokamaks Doublet IIa, Doublet III, Doublet IIID, Jet, Tuman-3 [Braa-86, Braa-86a] .

Entretanto, os métodos menos sofisticados permitem reconstruir somente alguns parâmetros do equilíbrio; a posição do centróide do perfil de corrente toroidal, o parâmetro de Shafranov $(\beta_P + l_i/2)$, o diamagnetismo do plasma μ_I, e a forma da secção transversal da coluna de plasma. Em alguns casos de plasmas com sessão poloidal elongada é possível obter separadamente β_P e a indutância interna l_i [Shaf-71, Lao-85a, Chri-82].

Dada a importância da reconstrução do contorno do plasma e dos campos magnéticos neste contorno, métodos rápidos foram desenvolvidos unicamente com este objetivo. Os métodos de expansão da função de fluxo Ψ em harmônicos toroidais e o método da filamentarização da corrente de plasma também está discutido em [Braa-86] e [Braa-86a]. Na maioria das máquinas são usados estes métodos para reconstruir alguns parâmetros característicos do equilíbrio MHD do plasma. Entretanto, seria interessante termos uma visão mais ampla do equilíbrio através de um número maior de parâmetros, obtidos com precisão suficientemente boa e rápido o bastante, para podermos controlar o plasma durante as descargas ou entre sucessivos disparos. A **Função de Parametrização (FP)** é uma proposta, nesta direção, a ser usada no tokamak TCA/BR.

O método da Função de Parametrização foi desenvolvido inicialmente por H. Wind [Wind-72, Wind-84] para rápida interpretação de dados em física de altas energias. Posteriormente foi adaptado por B.J. Braams , W. Jilge e K. Lackner [Braa-86] para a determinação do equilíbrio no ASDEX, tendo sido usado posteriormente para controle em tempo real das descargas nesta máquina [McCa-92]. Nestas aplicações em tokamaks, o método se mostrou extremamente satisfatório. Mais recentemente, foi utilizado no RTP (Rijnhuizen Toroidal Pinch), um tokamak de médio porte instalado na Holanda, e no Textor, para permitir um estudo comparativo com resultados de polarimetria e interferometria [Mill-91, Mill-91a, Mill-91b].

Estudos iniciais para a implementação no TCA/BR foram realizados aplicando a FP no tokamak TBR-1 [Sa-93]. Os códigos usados no RTP foram adaptados para a geometria do TBR-1.

4.2 Função de Parametrização - FP

Este método é basicamente a análise estatística de um conjunto muito grande de dados de experimentos simulados com o objetivo de obter uma representação funcional dos parâmetros intrínsecos de um sistema em termos dos valores das medidas. Técnicas estatísticas de redução de dimensão e regressão múltipla são usadas nesta análise. A função resultante pode ser escolhida de forma a ser um polinômio de baixa ordem com poucas combinações das medidas originais. Desta forma, o método permite que a análise posterior de medidas experimentais possa ser feita rapidamente, sem uso extenso de cálculos computacionais.

A Função de Parametrização pode ser explicada basicamente em três passos:

1. Um modelo numérico que represente o experimento é usado para gerar um grande conjunto de simulações do sistema físico, sendo que cada uma destas simulações é representada pelos parâmetros físicos e suas medidas associadas.

2. Tendo este conjunto de simulações, aplicamos uma análise estatística, onde o objetivo é achar uma dependência funcional entre os parâmetros físicos e as medidas.

3. Com esta função simples, podemos fazer uma inversão obtendo os parâmetros físicos a partir das medidas reais.

Como foi mencionado no começo do texto, estaremos interessados nas medidas de campos e fluxos magnéticos externos ao plasma. A Função de Parametrização é particularmente indicada neste caso. Isto porque a teoria MHD serve como um excelente modelo numérico para descrever o conjunto de parâmetros de equilíbrio e as medidas magnéticas associadas a estes parâmetros. Estes parâmetros, no entanto, não descrevem o plasma completamente. São necessários outros diagnósticos para obter parâmetros não descritos pela teoria MHD e portanto, outros modelos numéricos para descrever o estado do plasma. Estes modelos são em geral muito mais complexos. Porém, para a finalidade básica de controle do equilíbrio entre disparos e uma visão dos parâmetros básicos que caracterizam o plasma, o modelo MHD é extremamente eficiente.

4.3 Descrição Matemática

4.3.1 Representação de um Sistema Físico

De uma maneira genérica, o estado P que representa um sistema físico qualquer pode ser designado por um conjunto finito de N_p parâmetros, ou seja, $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_{Np})$. Normalmente estas quantidades que descrevem o sistema em questão são funções de algumas variáveis, como por exemplo tempo ou distâncias, e podem ser representadas em uma forma paramétrica no formalismo em questão, por isso o nome Função de Parametrização.

No contexto experimental, os parâmetros $\vec{p}$ que descrevem o estado físico do sistema são determinados a partir de um conjunto de medidas realizadas em determinado experimento. Sendo realizadas N_q medidas, este conjunto pode ser representado pelo vetor $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_{Nq})$.

O objetivo da Função de Parametrização é achar uma função simples F tal que para um estado P tenhamos uma relação entre $\vec{p}$ e $\vec{q}$. Esta dependência pode ser representada como $\vec{p} = F(\vec{q}) + \vec{e}$, para um erro $\vec{e}$ suficientemente pequeno.

4.3.2 Simulação do Sistema Físico

A primeira fase do método Função de Parametrização é gerar um conjunto de simulações através de um modelo que descreva os estados físicos do experimento. Este modelo tem que ter a capacidade de descrever todos os estados possíveis do sistema físico e ainda conter um modelo que simule as medidas que serão futuramente realizadas no experimento.

O código que implementa o modelo acima irá receber alguns parâmetros numéricos convenientes de entrada e terá como saída os valores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ correspondentes. Os valores de entrada são então, modificados várias vezes gerando varias saídas de valores $\vec{p}$ e $\vec{q}$. Desta forma, temos que para cada rodada do código temos um resultado para $\vec{p}$ e $\vec{q}$ diferente, que pode ser indexado pela variável α como $\vec{p}^{\alpha}$ e $\vec{q}^{\alpha}$, para $\alpha = 1, 2, ...N$, onde N representa o número de simulações realizadas pelo código. Normalmente, para gerar este conjunto de simulações de uma forma automática e que abranja todas as possibilidades dentro do experimento realizado, é feita uma variação pseudo-aleatória nos parâmetros numéricos de entrada do código.

4.3.3 Redução na Dimensão das Medidas

Ao tentar achar uma relação linear, quadrática, etc, que ajuste as componentes de $\vec{p}$ em função do vetor de medidas $\vec{q}$ de maneira que tenhamos $\vec{p} = F(\vec{q}) + \vec{e}$, problemas poderão surgir se N_q for muito grande. Isto porque se escolhermos um polinômio de grau k para F, serão necessários $N_q^k/k!$ coeficientes para o ajuste de cada parâmetro físico [Braa-86a]. Desta maneira, o número de simulações necessárias para determinar estes coeficientes será enorme. Portanto, é necessário reduzir o número de variáveis independentes das componentes de $\vec{q}$ por um processo qualquer de transformação para um espaço de mais baixa ordem sem a perda de informações essenciais.

A Análise de Componentes Principais (Principal Components Analysis - PCA) é um método bastante conhecido que trata da redução de dimensão eliminando combinações lineares (componentes principais) das medidas que tenham pouca variação no conjunto de simulações, supondo que estas combinações lineares tenham pouca importância no comportamento dos parâmetros [Manl-86].

O método consiste em dado N_X variáveis X_1, X_2,..., X_{N_X} achar um novo conjunto de variáveis Y_1, Y_2,..., Y_{N_X} onde cada Y_k $(k = 1, 2, ..., N_X)$ é uma combinação das N_X variáveis originais e sendo os Y_k não correlacionados entre si. A cada variável X temos associada uma variância, bem como em Y [Vuol-92]. Entretanto, é procurada uma combinação tal que a variância nos Y esteja ordenada em ordem decrescente, ou seja, a variância em Y_1 é maior do que em Y_2 e assim por diante. Seguindo estes critérios, os Y_k são chamados de componentes principais e temos uma situação onde vamos encontrar valores de Y, a partir de um certo valor, com variância extremamente pequena quando comparados com os primeiros valores de Y. O objetivo do método da análise das componentes principais é poder desprezar as variáveis Y com variâncias muito pequenas, mantendo um conjunto de valores N_Y para os Y (Y_1, Y_2,..., Y_{N_Y}), sendo N_Y menor do que N_X, e poder estudar o conjunto de dados (antes representado pelas variáveis X) pelas variáveis Y com uma quantidade menor de valores.

Método da Análise das Componentes Principais - PCA

Inicialmente, é feita uma normalização nos parâmetros físicos $\vec{p}$ e nas medidas $\vec{q}$ os quais chamaremos de $\bar{p}$ e $\bar{q}$ respectivamente. Para isto fazemos uma média dos valores no conjunto de simulações e calculamos o desvio associado a esta média, ou seja:

$$< x >_j = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_j^\alpha, \tag{4.1}$$

$$\sigma_{x_j} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(x_j^\alpha - < x >_j)^2}, \tag{4.2}$$

$$\bar{x}_j^\alpha = \frac{(x_j^\alpha - < x >_j)}{\sigma_{x_j}}, \tag{4.3}$$

onde $(i, j = 1, 2, ..., N_x; \alpha = 1, 2, ..., N; x = p, q)$. $< x >_j$ é o valor médio de x_j no conjunto de simulações, σ_{x_j} o desvio médio quadrático (desvio padrão) e $\sigma_{x_j}^2$ a variância associado a esta média.

As matrizes de dispersão (ou matriz de correlação) de $\vec{p}$ e $\vec{q}$ são dadas por [Bevi-69, Manl-86, Vuol-92];

$$D_{ij}^x = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N} \bar{x}_i^\alpha \bar{x}_j^\alpha \qquad (i, j = 1, 2, ..., N_x; \alpha = 1, 2, ..., N; x = p, q). \tag{4.4}$$

A diagonal de D^x contém os desvios quadráticos médios de $\bar{x}_j^\alpha$, os quais devido a normalização acima (Eq. 4.3), são iguais a 1. Os elementos de fora da diagonal de D^x representam a correlação entre as componentes de $\bar{x}_j^\alpha$ e $\bar{x}_i^\alpha$. D^x é uma matriz real positivamente definida [Bevi-69, Manl-86]. A análise das componentes principais envolve a determinação dos autovalores e autovetores desta matriz de correlação [Manl-86]. Os autovalores λ_j^x e autovetores $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, ..., N_x)$ de D^x são calculados resolvendo a equação

$$D^x \cdot \vec{e}_j = \lambda_j^x \vec{e}_j. \tag{4.5}$$

Os autovalores são ordenados tais que $\lambda_1^x \geq \lambda_2^x \geq ... \geq \lambda_{Nx}^x$ e $\mid \vec{e}_j \mid = 1$. Estes autovalores são a variância das componentes principais.

Fazemos agora uma transformação de variáveis

$$\tilde{x}_j^\alpha = \vec{e}_j \cdot \vec{\bar{x}}^\alpha \qquad (j = 1, 2, ..., N_x; \alpha = 1, 2, ..., N; x = p, q). \tag{4.6}$$

Desta forma, as componentes $\tilde{x}_j^\alpha$ de $\tilde{x}^\alpha$ são combinações lineares de $\bar{x}_j^\alpha$, com desvio padrão $\sqrt{\lambda_j^x}$ e não correlacionados com o conjunto de simulações. Assim, temos que a componente

principal $\tilde{x}_k$ (para um k qualquer) é combinação linear dos parâmetros $\bar{x}_1^\alpha$, $\bar{x}_2^\alpha$,..., $\bar{x}_{Nx}^\alpha$, onde os coeficientes são os autovetores $\vec{e}_{1,k}$, $\vec{e}_{2,k}$,...,$\vec{e}_{Nx,k}$, com variância dada por $(\lambda_k^x)^2$.

O próximo passo é analisar os autovalores para verificar se é possível diminuir a dimensão do problema. Entretanto, no caso da Função de Parametrização aplicada ao problema de reconstrução do equilíbrio estaremos interessados em reduzir a dimensão nas variáveis do vetor $\vec{q}$. Ou seja, queremos $N_{id} < N_q$ componentes das medidas que contenham significante informação. Este é o objetivo da análise das componentes principais.

Fazendo uma análise dos autovalores em determinado experimento, vamos ver que para valores acima de λ_{id}^q estes decaem rapidamente para zero, de forma exponencial. Podemos assim, escolher para a redução $\lambda_j^q \leq \lambda_{id}^q$. Em experimentos reais temos que nossas medidas apresentam um erro relativo ϵ. Podemos supor que as componentes principais que mostram uma variação significativa no conjunto de simulações são tais que $\lambda_j^q \leq (3\epsilon)^2$.

4.3.4 Regressão

Para obtermos a forma funcional F, precisamos fazer a regressão de p_j em termos de $\tilde{q}$ para cada j. Neste trabalho, vamos fazer um ajuste polinomial da forma:

$$p_j = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}j} \cdot \prod_{i=1}^{N_{id}} \phi_{k_i}(\frac{\tilde{q}_i}{\sigma_i}) + e_j \tag{4.7}$$

onde o multi-índice tem N_{id} componentes $k_1, k_2, ..., k_{Nid}$ e $c_{\vec{k}j}$ são os coeficientes da regressão, que podem ser determinados por um ajuste de mínimos quadrados sobre o conjunto de simulações, e ϕ_{k_i} são polinômios de Hermite dados por:

$$\phi_n(x) = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^{-2}} \tag{4.8}$$

Devemos ter $\phi_{k_i}(\frac{\tilde{q}_i}{\sigma_i})$ linearmente independente para todos "k_i" e "i", e os polinômios de Hermite satisfazem muito bem esta condição. Ou seja, se x for uma variável aleatória com uma distribuição normal de probabilidade, então $c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm}$, onde c é uma constante de normalização e δ_{nm} é o símbolo de Kronecker.

Certos cuidados devem ser tomados no ajuste feito acima devido ao fato de que nosso conjunto de simulações é finito. Veremos na próxima seção como fazer uma análise dos erros envolvidos no método descrito acima.

4.3.5 Análise dos Erros Envolvidos no Processo Estatístico

Existem basicamente três tipos de erros envolvidos no método estatístico em que se baseia a Função de Parametrização:

- O *erro sistemático* (ϵ^{sys}) na reconstrução dos parâmetros físicos, que é devido as seguintes fontes:
  1. O modelo analítico usado para descrever o estado físico e as medidas simuladas são claramente uma aproximação da realidade.
  2. A parametrização do modelo acarreta erros.
  3. A redução de dimensão pode reduzir as informações nas medidas.
  4. A regressão feita pelos mínimos quadrados reduz parte das informações.
- O *erro estatístico* (ϵ^{stat}) na reconstrução é devido a:
  1. Erros de medidas.
  2. Erros aleatórios devido a flutuações.
  3. Precisão computacional no cálculo de F.
- O *erro de reconstrução* (ϵ^{rec}), que é uma combinação dos dois erros apresentados acima.

Definição Matemática dos erros [Mill-91, Mill-91a]

O *erro sistemático* (ϵ^{sys}) é avaliado calculando os parâmetros de plasma usando os dados simulados no conjunto de simulações e comparando estes com os valores de p_j. O *erro sistemático* é definido como:

$$(\epsilon_j^{sys})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(F_j(\vec{q}_\alpha) - p_{j\alpha})^2 \tag{4.9}$$

onde N é o número de simulações realizadas.

O *erro estatístico* (ϵ^{stat}) é definido como:

$$(\epsilon_j^{stat})^2 = \frac{1}{N_{stat}-1}\sum_{\beta=1}^{N_{stat}}(F_j(\vec{q}+\vec{\epsilon}_\beta) - F_j(\vec{q}))^2 \tag{4.10}$$

onde N_{stat} é escolhido arbitrariamente, mas não muito pequeno e $\vec{\epsilon}_\beta$ é um vetor de variáveis aleatórias.

O *erro de reconstrução* (ϵ^{rec}) contém o efeito combinado do *erro sistemático* e do *erro estatístico* e pode ser estimado como:

$$(\epsilon_j^{rec})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(F_j(\vec{q}_\alpha + \vec{\epsilon}_\alpha) - p_{j\alpha})^2 \tag{4.11}$$

sendo que $(\epsilon_j^{rec})^2 \approx (\epsilon_j^{sys})^2 + (\epsilon_j^{stat})^2$.

Medida da Confiança do Resultado

A medida da confiança do resultado é dada por:

$$Q = \frac{1}{N_q}\sum_{i=1}^{N_q}\frac{\tilde{q}_i^2}{\lambda_i + \tilde{\epsilon}_i^2} \tag{4.12}$$

onde N_q é o número de medidas envolvidas e $\tilde{\epsilon}_i$ é o erro que $\tilde{q}_i$ sofre devido ao erro das medidas. $\tilde{\epsilon}_i$ é calculado assumindo que o experimento está sujeito a erros aleatórios que segue uma distribuição normal de probabilidades com média zero e desvio padrão $\tilde{\epsilon}_i$.

A medida de confiança Q pode ser interpretada como o χ^2 reduzido [Bevi-69, Vuol-92] do ajuste e permite analisar se o estado que descreve o plasma está dentro da faixa prevista pelo banco de dados. Desta forma Q mede o quanto as medidas realizadas estão previstas pelo processo de simulação. Quando $Q \approx 1$ as medidas estão bem representadas pelo banco de dados e teremos portanto uma boa precisão no processo de reconstrução. Por outro lado se $Q \gg 1$ ou $Q \ll 1$ teremos um resultado não condizente com a realidade, sendo que as medidas não possuem uma boa representação no banco de dados.

4.4 Estrutura do Modelo FP na Reconstrução do Equilíbrio MHD

Na Fig. 4.1 temos um diagrama esquemático da aplicação do método da Função de Parametrização na reconstrução do equilíbrio MHD em tokamaks.

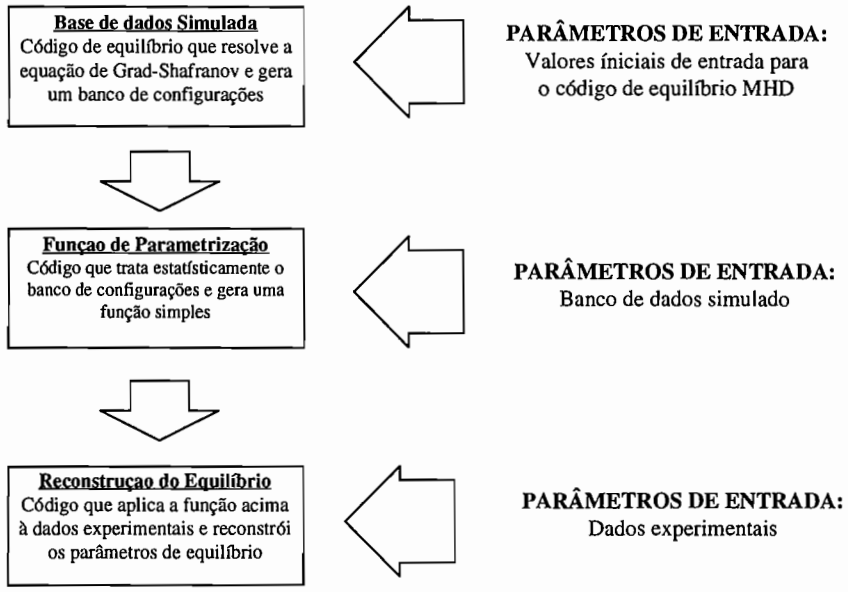

Figura 4.1: Diagrama esquemático do método Função de Parametrização aplicado à reconstrução do equilíbrio MHD em tokamaks.

4.4.1 Base de Dados Simulada

Para o problema de reconstrução dos parâmetros de equilíbrio MHD que caracterizam o plasma, a **base de dados** é criada usando o código de equilíbrio *TCABREC* modificado para incluir cálculos de campos magnéticos em posições externas ao plasma. Este código de equilíbrio modificado calcula os parâmetros de equilíbrio e para este resultado gera valores de campos magnéticos em posições externas ao plasma onde estarão posicionados sensores. A base de dados é um conjunto de resultados de equilíbrios e medidas que abrange o experimento.

4.4.2 Função de Parametrização

O código que trabalha a **base de dados** acima realiza as operações descritas no item 4.3 (Descrição Matemática).

A análise dos erros envolvidos no processo estatístico em que se baseia a FP é feito realizando pequenas perturbações nos parâmetros referentes às medidas e recalculando os parâmetros físicos de equilíbrio. Desta forma, podemos determinar o erro sistemático destes parâmetros físicos. Fazendo pequenas perturbações nos valores médios dos parâmetros referentes às medidas podemos determinar o erro estatístico no processo de reconstrução.

Uma análise destes erros nos possibilita realimentar o código no sentido de achar uma função mais adequada que represente os parâmetros de equilíbrio em função das medidas magnéticas.

4.4.3 Reconstrução dos Parâmetros de Equilíbrio

Terminada toda a análise acima temos uma função que representa os parâmetros de equilíbrio em função das medidas magnéticas. Temos, a partir deste instante, um processo de inversão em nosso problema de reconstrução, onde serão lidos valores experimentais e a estes aplicaremos a função acima obtendo os parâmetros de equilíbrio, bem como os erros, que caracterizam este experimento.

O ponto importante neste processo de reconstrução é que o tempo de computação envolvido nos cálculos é pequeno. Isto permite uma análise do experimento entre descargas sucessivas e até o controle do plasma durante a descarga.

Capítulo 5

Implementação da Função de Parametrização no TCA/BR

5.1 Introdução

No Cap. 4 descrevemos a estrutura do modelo da Função de Parametrização no processo de reconstrução do equilíbrio MHD.

Resumindo, o sistema **FP** pode ser dividido em três etapas:

- Criação de um banco de dados que contém equilíbrios simulados abrangendo a faixa de operação do experimento. Tal conjunto de equilíbrios possui dados simulados para as medidas de campos magnéticos em pontos externos ao plasma onde estão localizadas sondas magnéticas.

- Tratamento estatístico do banco de dados com o objetivo de parametrizar os parâmetros de equilíbrio em função dos campos magnéticos nas bobinas externas ao plasma.

- Realizar o experimento e medir os campos nas sondas magnéticas. Aplicar a função obtida no processo estatístico determinando, desta forma, os parâmetros que caracterizam o equilíbrio do plasma.

A implementação da Função de Parametrização no TCA/BR consiste de um sistema de quatro programas que cobre as três etapas do processo de reconstrução do equilíbrio MHD em tokamaks, resumidas acima. Os dois primeiros programas **ECPG** ("*Equilibrium Code Parameters Generation*") e **ECDBG** ("*Equilibrium Code Data Base Generation*")

estão relacionados à criação do banco de dados, o programa **FPG** ("*Function Parametrization Generation*") manipula estatisticamente o banco de dados e o programa **FPEqR** ("*Function Parametrization Equilibrium Reconstruction*") lê os dados experimentais de sondas magnéticas e aplica a função parametrizada achada no programa FPG, reconstruindo os parâmetros que caracterizam o equilíbrio do experimento observado.

Na fase de elaboração deste trabalho, o tokamak TCA/BR ainda se encontrava em fase de montagem e portanto, não existem ainda dados experimentais. A realização e teste da terceira parte do sistema **FP** foi feita com dados simulados de campos medidos em posições externas ao plasma.

Neste capítulo, vamos descrever os programas acima e os critérios usados para a geração do banco de dados de equilíbrio para a configuração do tokamak TCA/BR.

Todos os programas desenvolvidos para o sistema que compõem a *Função de Parametrização* foram escritos na linguagem *FORTRAN*. Atualmente este programas estão operando nos computadores VAX da DIGITAL existentes no IFUSP. O sistema operacional destas máquinas é OpenVMS. Os programas estão escritos para serem portáteis para sistemas UNIX, independente do tipo de plataforma que irão operar.

5.2 Banco de Dados - Programas ECPG e ECDBG

5.2.1 Programa ECDBG

O banco de dados de configurações de equilíbrio para o TCA/BR foi gerado usando o código de equilíbrio *TCABREC* descrito no Cap. 3 porém, modificado para esta finalidade. Este código modificado tem como parâmetros de entrada os mesmos descritos no Cap. 3, entretanto, estão agrupados em blocos que diferem entre si. O código lê um bloco e resolve o problema de equilíbrio e passa para o bloco seguinte.

Tendo este resultado, foi acrescentado um módulo novo ao código *TCABREC* para calcular o campo magnético em posições externas ao contorno do plasma. O *TCABREC* resolve a equação de Grad-Shafranov e determina a densidade de corrente dentro do plasma e as correntes em todas as bobinas externas. As correntes dentro do plasma e nas bobinas externas são toroidais e, portanto, usando as funções de Green, descritas no Cap. 3 (sessão 3.2 - Eq. (3.9)), podemos calcular o campo magnético em qualquer região do espaço. O cálculo destes campos magnéticos, nas posições onde serão colocadas as bobinas sensoras, foi acrescentado ao *TCABREC*.

Com as modificações introduzidas no código *TCABREC* foi construído o programa **ECDBG**. A saída deste programa possui blocos, onde cada bloco contém parâmetros que caracterizam determinado equilíbrio e os valores de campos magnéticos nos sensores associados a este equilíbrio.

Na Tabela 5.1 estão apresentados os parâmetros de saída do programa **ECDBG**, para cada conjunto que caracteriza um equilíbrio. As definições destes parâmetros estão apresentadas nos Caps. 2, 3 e apêndice A.

Parâmetro	*Descrição*
(R_{geo}, Z_{geo})	Coordenadas do centro geométrico da coluna de plasma
(R_{mag}, Z_{mag})	Coordenadas do centro magnético da coluna de plasma
a	Meia largura da secção transversal da coluna de plasma
b	Meia altura da secção transversal da coluna de plasma
$TRIA$	Triangularidade da secção transversal da coluna de plasma
$ELON$	Elongação da secção transversal da coluna de plasma
β_p	Beta poloidal
l_i	Indutância interna da coluna de plasma
I_P	Corrente de plasma
Ψ_a	Ψ no eixo magnético (R_{mag}, Z_{mag})
Ψ_b	Ψ na borda da coluna de plasma
μ	Parâmetro que caracteriza o paramagnetismo
α_P	Parâmetro de ajuste para J_ϕ (Eq. (3.5))
α_F	Parâmetro de ajuste para J_ϕ (Eq. (3.5))
B_R	Componente radial do campo magnético em (R_{sm}, Z_{sm})
B_Z	Componente vertical do campo magnético em (R_{sm}, Z_{sm})

Tabela 5.1: Parâmetros de saída do programa **ECDBG**. (R_{sm}, Z_{sm}) é a posição da sonda magnética.

5.2.2 Programa ECPG

A distribuição estatística dos parâmetros de entrada para o programa *ECDBG* são gerados pelo programa **ECPG**. Para cada equilíbrio calculado em *ECDBG* temos um conjunto $\vec{p}^{\alpha}$ de parâmetros de entrada que estão apresentados nos Cap. 2 e 3 e no apêndice A. Deste conjunto de parâmetros, escolhemos alguns independentes entre si e fazemos uma variação pseudo-aleatória dentro de uma faixa que corresponde ao regime de operação do TCA/BR. Este procedimento é repetido N vezes, gerando N $\vec{p}^{\alpha}$ entradas para o programa *ECDBG*, que consequentemente gera N blocos de configurações de equilíbrio $\vec{q}^{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, ...N$).

Este procedimento pseudo-aleatório que seleciona o conjunto de parâmetros acima é feito usando a distribuição normal de probabilidades (Gaussiana). Para cada parâmetro p_j que será variado, entramos com um valor mínimo p_j^{min}, um valor máximo p_j^{max} e um valor médio p_j^{μ} que corresponde a um valor onde se concentra o maior número de equilíbrios. Na figura 5.1 apresentamos um gráfico que representa este procedimento para o parâmetro p_j, onde $f_j(p_j)$ é a distribuição normal de probabilidades para p_j e σ_j é o desvio padrão.

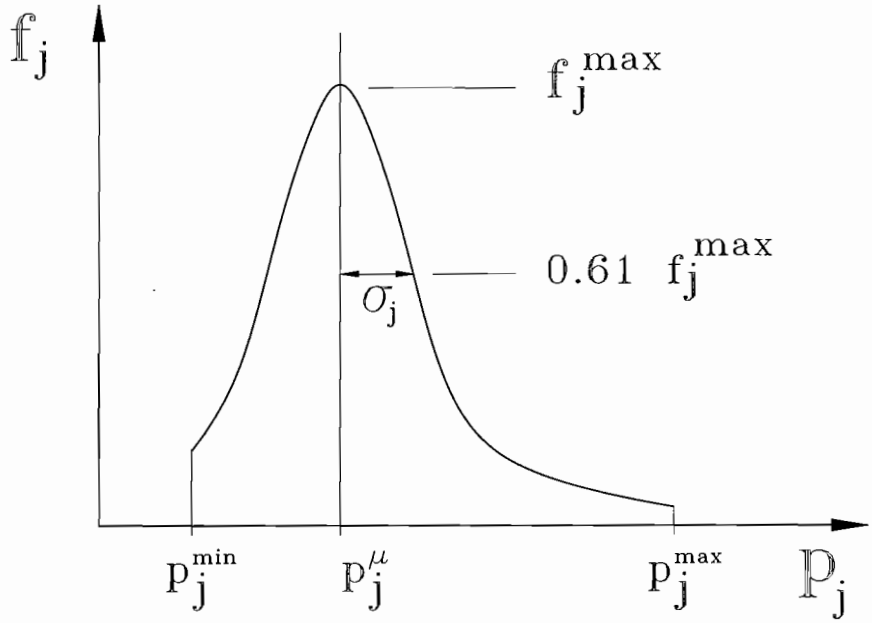

Figura 5.1: Distribuição normal de probabilidade.

A escolha do tipo de distribuição de probabilidades não é importante para o método usado no sistema FP. A distribuição normal de probabilidades foi escolhida para ter no banco de

dados uma concentração de equilíbrios em torno de valores mais prováveis para o regime de operação do TCA/BR que é razoavelmente conhecido. Além disto, a distribuição é truncada em um valor mínimo p_j^{min}e um valor máximo p_j^{max} para evitar as configurações de equilíbrio que representem estados do plasma que não estão na faixa de operação do experimento. Outro motivo para a escolha desta distribuição está no fato que, no processo de escolha da função parametrizada que representará o parâmetro p_j em função de $\vec{q}$, haverá uma maior precisão nas configurações perto das mais prováveis.

Os parâmetros usados no processo de geração dos conjuntos de entrada para a criação do banco de dados estão apresentados na Tabela 5.2. Estes parâmetros foram escolhidos como um processo inicial de implementação do sistema FP. Mais a frente vamos discutir a faixa de trabalho do experimento TCA/BR para este conjunto de dados.

Parâmetro	*Descrição*
I_P	Corrente de plasma
β_p	Beta poloidal
l_i	Indutância interna
L_{int}	Posição interna do limitador
L_{ext}	Posição externa do limitador
α_P	Parâmetro que caracteriza perfil de J_ϕ (Eq. (3.5))
α_F	Parâmetro que caracteriza perfil de J_ϕ (Eq. (3.5))

Tabela 5.2: Parâmetros de entrada do programa **ECPG**.

Estes parâmetros foram inicialmente escolhidos porque permitem o mínimo possível de variações pseudo-aleatórias dos parâmetros de entrada para a geração do banco de dados. Com estes valores podemos cobrir uma faixa de operação, com variação na meia largura a especificada pelos valores de L_{int} e L_{ext}, dentro de um certo conjunto de correntes de plasma.

Os parâmetros apresentados na Tabela 5.2 deverão ser ampliados quando o tokamak TCA/BR entrar em operação, uma vez que teremos a faixa de operação da máquina para as novas condições de operação no Laboratório de Física de Plasma do IFUSP. Nesta fase de implementação, como veremos a seguir, os valores dos campos magnéticos produzidos pelas bobinas de aquecimento ôhmico OHT e pelas bobinas do campo vertical de equilíbrio

(Fig. 1.2) foram mantidas em um certo valor. Isto não prejudica valores gerados pelo programa *ECPG* e na formação do banco de dados pelo programa *ECDBG*.

5.3 Tratamento Estatístico do Banco de Dados

5.3.1 Programa FPG

O programa **FPG** lê o banco de dados gerado por *ECDBG* e realiza os passos descritos na sessão 4.3 do Cap. 4.

A estrutura de entrada de dados para *ECDBG* é feita de forma a permitir escolher quais dos parâmetros de equilíbrio (Tabela 5.1) estamos interessados em ter como função de quais parâmetros experimentais. Supondo que temos a corrente de plasma e valores de campos magnéticos (B_R e B_Z) em doze sondas externas ao plasma, vamos escolher em nosso processo de redução um subconjunto de parâmetros da Tabela 5.1 em função da corrente de plasma e de seis valores de campos B_R e B_Z.

Esta versatilidade se torna importante do ponto de vista experimental. Durante a realização do experimento, pode-se constatar que determinado conjunto de sondas apresentam valores muito pequenos de campos magnéticos medidos. Este valores poderão influenciar de forma negativa no processo de reconstrução dos parâmetros de equilíbrio, ou ainda acarretar um erro grande na parametrização destes.

No processo de regressão, onde será determinada a forma funcional F (sessão 4.3.4 - Cap. 4) que represente os parâmetros p_j em termos das funções $\tilde{q}$, é feito um ajuste polinomial do tipo:

$$p_j = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}j} \cdot \prod_{i=1}^{N_{id}} \phi_{k_i}(\frac{\tilde{q}_i}{\sigma_i}) + e_j, \tag{5.1}$$

onde ϕ_{k_i} são polinômios de Hermite. Em nosso programa foi adotado a seguinte forma para estes polinômios:

$$\phi_0(x) = H_0(x) = 1, \tag{5.2}$$

$$\phi_1(x) = H_1(x) = x, \tag{5.3}$$

$$\phi_2(x) = H_2(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}}, \tag{5.4}$$

que nos permite um ajuste de até terceiro grau para o polinômio que represente p_j. Apesar da possibilidade de um ajuste de grau maior, verifica-se que até terceiro grau tem-se bons resultados [Braa-86, Mill-91, Mill-91a, McCa-92].

Os coeficientes $c_{\vec{k}j}$ são determinados usando rotinas básicas de ajuste por mínimos quadrados e soluções de sistemas lineares. Atualmente estas rotinas são as do pacote comercial IMSL e futuramente serão modificadas para usar as rotinas do pacote de domínio público NETLIB aumentando a versatilidade do sistema *FP*.

A escolha do número de componentes e do grau do polinômio é feita através da análise de uma saída onde temos os valores de todos os autovalores da matriz de dispersão D^x para os parâmetros p e q e um mapa dos erros ϵ^{sys}, ϵ^{stat} e ϵ^{rec}, para cada parâmetro p_j. Mais a frente, ao analisarmos os resultados para o TCA/BR, mostraremos mais em detalhe esta saída.

Os erros acima, como são mostrados nas expressões (4.9), (4.10) e (4.11), são uma amostra da sensibilidade que os ruídos aleatórios devidos às medidas experimentais causam na representação dos parâmetros p_j em função destes dados experimentais. O programa *FPG* possui como dados de entrada erros absolutos associados a estes valores experimentais para que possam de forma aleatória perturbar o sistema e obter como resposta a sensibilidade causada através da análise de ϵ^{sys}, ϵ^{stat} e ϵ^{rec}.

Esta análise está baseada em um processo de realimentação. Ou seja, o programa será rodado várias vezes até encontrarmos um resultado satisfatório para os erros acima. Feito isto, o programa devolve uma saída onde temos como resultado os seguintes valores:

- Números de parâmetros p e q,
- Número de funções lineares, quadráticas, etc, presentes no polinômio que representa p_j em termos das funções $\tilde{q}$,
- Os valores $\tilde{q}_i$ dados pela Eq. (4.6),
- Os valores σ_i dados pela Eq. (4.2),
- Os autovalores λ_j^q dados pela Eq. (4.5),
- Os autovetores $\vec{e}_j$ dados pela Eq. (4.6) para q,
- Os coeficiente $c_{\vec{k}j}$.

Uma vez realizadas as análises acima, os resultados estão definidos, fechando o ciclo que envolve a maior parte do tempo computacional. Em resumo, temos a parametrização dos parâmetros que caracterizam o equilíbrio magnetohidrodinâmico em função dos parâmetros experimentais gravados em um arquivo com os dados mostrados acima.

5.4 Reconstrução do Equilíbrio MHD

5.4.1 Programa FPEQR

A reconstrução dos parâmetros de equilíbrio que caracterizam determinado estado do plasma é feito pelo programa **FPEQR**. Este programa tem duas entradas:

1. Leitura dos dados gerados pelo programa *FPG* descritos na sessão anterior.
2. Leitura dos dados experimentais que definem determinado experimento realizado no tokamak. Nesta fase inicial, estes dados serão resultados de campos magnéticos nas direções R e Z (B_R e B_Z) e a corrente de plasma I_P.

Este programa realiza, basicamente, a operação inversa do processo de regressão realizado no programa *FPG*. Entretanto, neste processo de reconstrução serão usados os valores experimentais lidos nos diagnósticos.

Neste item o tempo computacional é bastante reduzido quando comparado com o necessário em todo processo da *FP*. No item em que descreveremos os resultados para o TCA/BR, teremos a oportunidade de comparar, estes tempos em cada parte do sistema.

5.5 Aplicação no Tokamak TCA/BR

5.5.1 Diagnósticos Magnéticos e Corrente de Plasma

O sistema de medidas de campos externos ao plasma será realizado por sondas magnéticas distribuídas na região entre o plasma e a câmara de vácuo. Na Fig. 5.2 temos uma secção poloidal do tokamak TCA/BR onde estão representadas simbolicamente as bobinas que formam as sondas magnéticas [Hutc-87, Wess-87, Vann-95].

Na fase de implementação e teste do sistema *FP* vamos estar trabalhando com uma situação simulada da posição e quantidades destas sondas. Optamos por 12 sondas posicionadas para medir o campo magnético na direção R (B_R), e 12 sondas posicionadas para

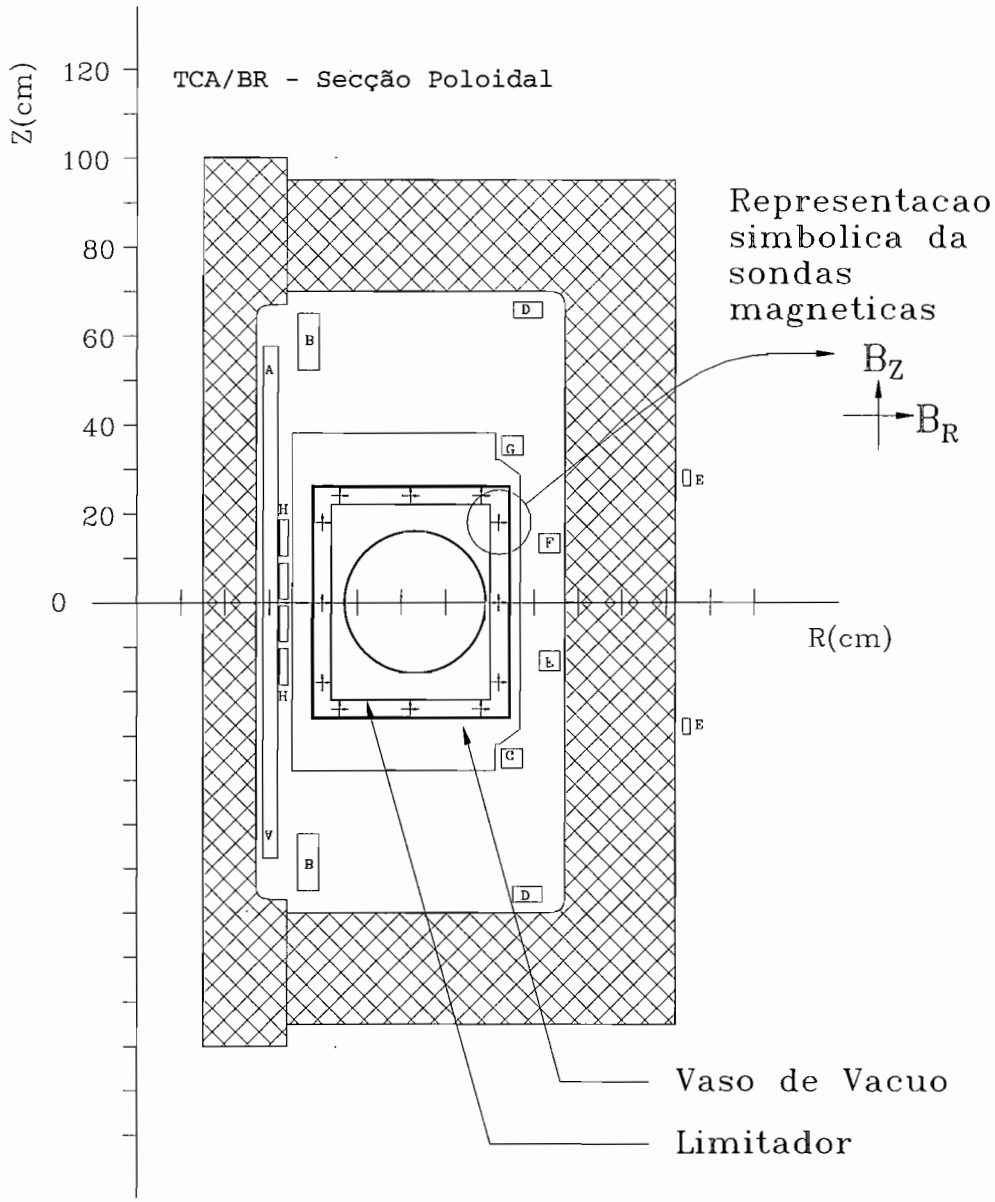

Figura 5.2: Desenho esquemático da secção poloidal do tokamak TCA/BR mostrando simbolicamente as sondas magnéticas, onde: $\rightarrow$ - sonda magnética para medida de B_R e $\uparrow$ - sonda magnética para medida de B_Z.

medir o campo magnético na direção Z (B_Z). O sistema de medidas experimentais usado no processo de reconstrução do equilíbrio será composto, portanto, por 24 dados provenientes de diagnóstico magnético e uma medida de corrente de plasma. No total teremos 25 dados experimentais. Usando a nomenclatura do Cap. 4, temos que $N_q = 25$.

5.5.2 Criação do Banco de Dados

A faixa de operação do TCA/BR, para a criação do banco de dados, é baseada nos parâmetros fornecidos na Tabela 1.1. Na Tabela 5.3 apresentamos os valores escolhidos para esta fase inicial do estudo do sistema *FP*.

Parâmetro	p_j^{min}	p_j^{max}	p_j^{μ}	σ_j
$I_P(MA)$	0,080	0,150	0,130	0,020
β_p	0,050	0,200	0,100	0,020
l_i	0,600	1,200	0,900	0,100
$L_{int}(m)$	0,420	0,460	0,435	0,008
$L_{ext}(m)$	0,770	0,810	0,795	0,008
α_P	1,500	2,100	1,800	0,100
α_F	1,500	2,100	1,800	0,100

Tabela 5.3: Faixa dos parâmetros de entrada do programa **ECPG** para a geração do banco de dados do tokamak TCA/BR.

A base de dados gerada pelo conjunto de programas *ECPG* e *ECDBG* é composta de 1000 simulações cobrindo o espectro de valores da Tabela 5.3. Devemos lembrar que nossa escolha para uma pseudo-variação normalmente distribuída segundo a distribuição Gaussiana está em termos uma melhor estatística em torno dos valores médios (p_j^{μ}). Portanto, o banco de dados tem uma concentração de equilíbrios em torno dos valores mais esperados para o regime de operação do TCA/BR. No entanto, este banco de dados não deve ser definitivo e um estudo mais detalhado no início da operação do tokamak propiciará a criação de um conjunto de dados mais realístico.

Os programas *ECPG* e *ECDBG* estão operando em um computador VAX ALPHA Sable 2100 com sistema operacional OpenVmsAxp 6.1. O tempo de CPU usado para a criação do

banco de dados acima foi de aproximadamente 55 minutos. Os cálculos de equilíbrio foram realizados em uma região com 32x33 pontos [1].

5.5.3 Redução na Dimensão das Medidas

No processo de regressão representado pela Eq. (4.7) e reapresentada em (5.1), temos a dependência de p_j em função de vários $\tilde{q}_i$. Para o problema apresentado para o TCA/BR temos um total de $N_q = 25$ valores possíveis para $\tilde{q}_i$. No tratamento estatístico do banco de dados usando o método das "componentes principais" (PCA), este número será reduzido para N_{id} através da análise dos autovalores da matriz de dispersão dos dados experimentais simulados.

O programa *FPG* apresentou o seguinte conjunto de autovalores: $20,43$; $2,383$; $1,125$; $0,8698$; $0,1953$; $5,380 \times 10^{-4}$; $3,950 \times 10^{-5}$; $5,379 \times 10^{-6}$; $3,354 \times 10^{-6}$; $1,988 \times 10^{-6}$; $1,165 \times 10^{-6}$; $8,304 \times 10^{-7}$; $6,276 \times 10^{-7}$; $2,233 \times 10^{-7}$; $1,046 \times 10^{-7}$; etc, para os 15 primeiros valores. Na figura 5.3 mostramos um gráfico onde temos estes autovalores em função de seu índice em escala linear e logarítmica.

Podemos ver claramente que os cinco primeiros autovalores são da ordem da unidade, sendo os outros autovalores muito menores quando comparados a estes primeiros valores. Isto sugere que estes cinco autovalores são dominantes no conteúdo de informações, podendo portanto, ser usados na análise da regressão. Teremos então $N_{id} = 5$ para o banco de dados acima.

5.5.4 Análise da Regressão

Como descrito anteriormente, o processo de regressão é basicamente uma procura experimental da melhor função que se ajusta ao banco de dados gerado. Isto é feito analisando os erros ϵ^{sys}, ϵ^{stat} e ϵ^{rec} em função do número de termos lineares, quadráticos e de terceira ordem, que aparecem na expressão (5.1) [2] como mencionado anteriormente.

O resultado obtido para os erros acima, usando o modelo das componentes principais no processo de regressão, está mostrado nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6. Para cada parâmetro, é apre-

[1] O código de equilíbrio usado para a geração do banco de dados permite escolher o número de pontos em uma grade onde será calculado o equilíbrio. Quanto maior for o número, maior será a precisão nos cálculos. Entretanto, o tempo de CPU também será maior.

[2] No sistema *FP* implementado para o tokamak TCA/BR serão considerados termos até terceira ordem no processo de regressão.

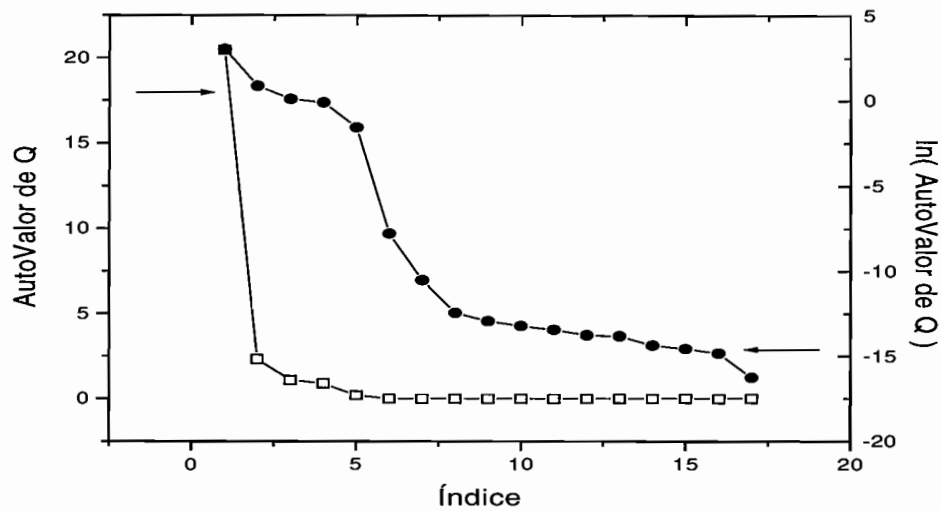

Figura 5.3: Autovalores da matriz de dispersão das medidas simuladas versus o índice destes autovalores, em escala linear e logarítmica.

sentado o valor mínimo, máximo e o médio que ocorrem no banco de dados gerado. Temos ainda o desvio padrão associado a esta média e os erros devido ao processo de reconstrução.

Os dados apresentados nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 se referem a uma regressão com as seguintes características:

- Número de componentes principais: $N_{id} = 5$
- Número de termos lineares: 5
- Número de termos quadráticos: 1

que corresponde a um ajuste polinomial da forma:

$$p_j = c_j^0 + c_j^1 x_1 + c_j^2 x_2 + c_j^3 x_3 + c_j^4 x_4 + c_j^5 x_5 + c_j^6 H_2(x_1) + e_j, \tag{5.5}$$

onde $x_i = \tilde{q}_i/\sigma_i$ e $H_2(x_i) = (x_i^2 - 1)/\sqrt{2}$. Os coeficientes c_j^i são determinados usando algoritmos de ajuste de mínimos quadrados e resolução de sistemas lineares. e_j é o erro associado ao processo de redução devido ao ajuste.

$$(\epsilon_j^{sys})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(F_j(\vec{q}_\alpha) - p_{j\alpha})^2$$

Parâmetro	p_j^{min}	p_j^{max}	p_j^{μ}	σ_j	ϵ_j^{sys}	$(\epsilon_j^{sys}/\sigma_j)\cdot 100$
R_{geo}	0,596	0,631	0,615	0,00541	0,00154	28,4
Z_{geo}	0,000	0,000	0,000			
R_{mag}	0,609	0,645	0,627	0,00653	0,00377	57,7
Z_{mag}	0,000	0,000	0,000			
a	0,163	0,192	0,179	0,00509	0,00493	96,8
b	0,168	0,199	0,185	0,00551	0,00527	95,5
$TRIA$	-0,0626	0,0207	-0,0232	0,0209	0,0209	99,7
$ELON$	1,02	1,05	1,03	0,00372	0,00311	83,5
β_p	0,0520	0,172	0,0997	0,0192	0,0191	99,6
l_i	0,619	1,17	0,898	0,0931	0,0912	97,9
I_P	0,0810	0,150	0,125	0,0153	0,000434	2,84
Ψ_a	0,152	0,270	0,221	0,0224	0,00573	25,6
Ψ_b	0,113	0,179	0,150	0,0130	0,00242	18,6
μ	-0,935	-0,806	-0,878	0,0207	0,0189	91,1
α_P	0,335	6,14	1,55	0,709	0,689	97,1
α_F	0,335	6,14	1,54	0,707	0,687	97,2

Tabela 5.4: Avaliação do erro sistemático ϵ_j^{sys} no processo de regressão ao achar a forma funcional $\vec{F}$ que caracteriza p_j em função dos $\tilde{q}$. A tabela apresenta os valores mínimo, máximo e médio para a ocorrência de cada parâmetro no banco de dados, o desvio padrão associado a esta média, o erro ϵ_j^{sys} no processo de reconstrução usando a função de parametrização.

$$(\epsilon_j^{stat})^2 = \frac{1}{N_{stat}-1}\sum_{\beta=1}^{N_{stat}}(F_j(\vec{q}+\vec{\epsilon}_\beta) - F_j(\vec{q}))^2$$

Parâmetro	p_j^{min}	p_j^{max}	p_j^{μ}	σ_j	ϵ_j^{stat}	$(\epsilon_j^{stat}/\sigma_j)\cdot 100$
R_{geo}	0,596	0,631	0,615	0,00541	0,000460	8,50
Z_{geo}	0,000	0,000	0,000			
R_{mag}	0,609	0,645	0,627	0,00653	0,000682	10,4
Z_{mag}	0,000	0,000	0,000			
a	0,163	0,192	0,179	0,00509	0,00118	23,1
b	0,168	0,199	0,185	0,00551	0,00140	25,3
$TRIA$	-0,0626	0,0207	-0,0232	0,0209	0,00154	7,38
$ELON$	1,02	1,05	1,03	0,00372	0,000991	26,6
β_p	0,0520	0,172	0,0997	0,0192	0,00200	10,4
l_i	0,619	1,17	0,898	0,0931	0,0196	21,1
I_P	0,0810	0,150	0,125	0,0153	0,000145	0,947
Ψ_a	0,152	0,270	0,221	0,0224	0,00171	7,65
Ψ_b	0,113	0,179	0,150	0,0130	0,000481	3,69
μ	-0,935	-0,806	-0,878	0,0207	0,00105	5,09
α_P	0,335	6,14	1,55	0,709	0,134	18,9
α_F	0,335	6,14	1,54	0,707	0,135	19,1

Tabela 5.5: Avaliação do erro estatístico ϵ_j^{stat} no processo de regressão ao achar a forma funcional $\vec{F}$ que caracteriza p_j em função dos $\tilde{q}$. A tabela apresenta os valores mínimo, máximo e médio para a ocorrência de cada parâmetro no banco de dados, o desvio padrão associado a esta média, o erro ϵ_j^{stat} no processo de reconstrução usando a função de parametrização.

$$(\epsilon_j^{rec})^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(F_j(\vec{q}_\alpha + \vec{\epsilon}_\alpha) - p_{j\alpha})^2$$

Parâmetro	p_j^{min}	p_j^{max}	p_j^{μ}	σ_j	ϵ_j^{rec}	$(\epsilon_j^{rec}/\sigma_j)\cdot 100$
R_{geo}	0,596	0,631	0,615	0,00541	0,00163	30,0
Z_{geo}	0,000	0,000	0,000			
R_{mag}	0,609	0,645	0,627	0,00653	0,00381	58,2
Z_{mag}	0,000	0,000	0,000			
a	0,163	0,192	0,179	0,00509	0,00514	101,0
b	0,168	0,199	0,185	0,00551	0,00553	100,0
$TRIA$	-0,0626	0,0207	-0,0232	0,0209	0,00210	101,0
$ELON$	1,02	1,05	1,03	0,00372	0,00325	87,5
β_p	0,0520	0,172	0,0997	0,0192	0,0191	99,7
l_i	0,619	1,17	0,898	0,0931	0,0929	99,8
I_P	0,0810	0,150	0,125	0,0153	0,000432	2,82
Ψ_a	0,152	0,270	0,221	0,0224	0,00599	26,7
Ψ_b	0,113	0,179	0,150	0,0130	0,00249	19,2
μ	-0,935	-0,806	-0,878	0,0207	0,0189	91,0
α_P	0,335	6,14	1,55	0,709	0,700	98,6
α_F	0,335	6,14	1,54	0,707	0,698	98,7

Tabela 5.6: Avaliação do erro de reconstrução ϵ_j^{rec} no processo de regressão ao achar a forma funcional $\vec{F}$ que caracteriza p_j em função dos $\tilde{q}$. A tabela apresenta os valores mínimo, máximo e médio para a ocorrência de cada parâmetro no banco de dados, o desvio padrão associado a esta média, o erro ϵ_j^{rec} no processo de reconstrução usando a função de parametrização.

Os dados apresentados acima correspondem a uma análise que já está otimizada. Os critérios usados para atingir esta escolha serão mostrados mais adiante. Mas antes, vamos discutir um pouco melhor os resultados mostrados nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6.

Os erros envolvidos no processo estatístico, e que aparecem na última coluna de cada uma das tabelas acima, mostram como alguns dos parâmetros podem ser mais facilmente reconstruídos do que outros através das medidas de campos magnéticos nas sondas externas ao plasma. Ou ainda, como o banco de dados gerado tem uma boa amostragem de configurações de equilíbrio para o processo de reconstrução dos parâmetros.

Analisando a Tabela 5.5 podemos ver que alguns parâmetros possuem valores de $(\epsilon_j^{stat}/\sigma_j)*$ 100 grandes para a, b e $ELON$ comparados com as de outros parâmetros. Isto sugere que nesta configuração de sondas magnéticas proposta, juntamente com o banco de dados gerado, estes parâmetros possuem uma "qualidade" ou "confiabilidade" menor ao serem reconstruídos pelo *sistema FP* por possuírem uma dependência maior com os erros associados às bobinas sensoras [3].

A influência da estatística de configurações presentes no banco de dados pode ser analisada pelo erro $(\epsilon_j^{sys}/\sigma_j) * 100$ que aparece na Tabela 5.4. Aqui, podemos ver o quanto determinados parâmetros são influenciados pelo tipo de banco de dados de configurações. Parâmetros como β_p, $TRIA$ parecem ter uma forte dependência com o banco de dados.

A análise simultânea de todas as tabelas permite saber se determinado parâmetro é mais fortemente dominado pelas medidas realizadas ou pela caracterização do banco de dados. No caso desta análise preliminar, todos estes parâmetros são dominados pela estatística que caracteriza o banco de dados.

Para definir a forma polinomial a que chegamos acima (Eq. (5.5)), os critérios utilizados são baseados na variação dos erros de reconstrução em função da quantidade de termos lineares, quadráticos e de terceira ordem presentes no processo de regressão. O que devemos fazer é procurar uma expressão com uma quantidade significativa de termos que nos dê o máximo de precisão na reconstrução e concomitantemente não seja tão sensível a ruídos e flutuações nas medidas.

Na Fig 5.4 apresentamos a variação dos erros sistemáticos, estatísticos e de reconstrução em função do número de termos lineares no processo de regressão para o banco de dados gerado. Notamos que o erro sistemático diminui com o número de termos lineares enquanto o erro estatístico tende a aumentar. Podemos estimar, que tendo muitos termos no processo

[3] O erro estatístico está relacionado com os erros nas medidas realizadas e a erros aleatórios devido a flutuações que ocorrem no experimento

de regressão, teremos uma deterioração na reconstrução dos parâmetros, uma vez que o sistema fica mais sensível aos erros envolvidos nas medidas, mas o processo de reconstrução fica menos sensível à estatística de equilíbrios presentes no banco de dados. O erro de reconstrução é a mistura do comportamento do erro sistemático, mais o erro estatístico. Um mínimo na variação deste erro, seria o esperado para a escolha do número de termos lineares no processo de regressão.

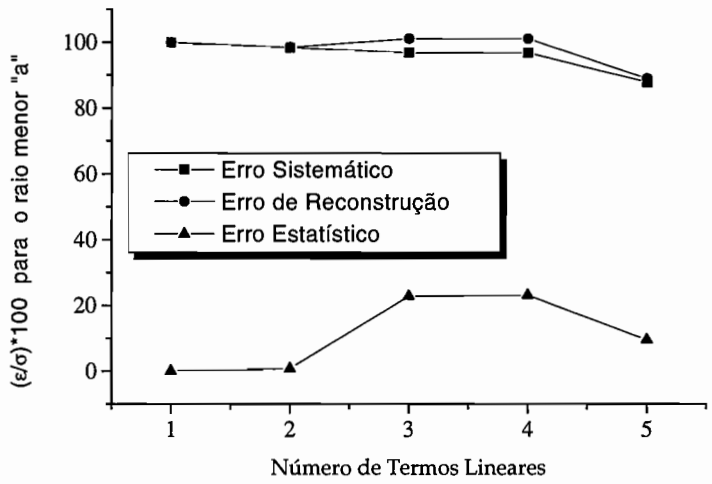

Figura 5.4: Erros de reconstrução $((\epsilon_j^{sys}/\sigma_j) * 100$, $(\epsilon_j^{stat}/\sigma_j) * 100$ e $(\epsilon_j^{rec}/\sigma_j) * 100)$ envolvidos no *sistema FP* em função do número de termos lineares no processo de regressão para o raio menor a do plasma.

Escolhemos 5 termos lineares para representar a função que parametriza os parâmetros de equilíbrio em função das medidas magnéticas. Para avaliar a influência dos termos de segunda ordem, vamos variar a quantidade de termos quadráticos em nosso processo de regressão. Na Fig. 5.5 apresentamos este resultado. O sistema de reconstrução, visto por este ângulo, parece sofrer menos variações com os erros de reconstrução. Seguindo as deduções propostas no parágrafo anterior, seria razoável escolher um termo quadrático para o processo de regressão.

A análise acima nos permitiu escolher a expressão (5.5) para representar o ajuste polinomial que se enquadra na análise estatística do banco de dados proposto.

O programa *FPG* está operando no computador VAX 6330 com sistema operacional

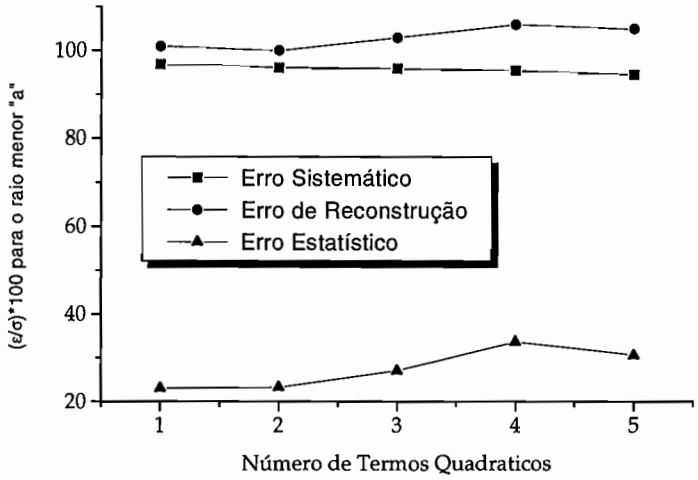

Figura 5.5: Erros de reconstrução $((\epsilon_j^{sys}/\sigma_j) * 100$, $(\epsilon_j^{stat}/\sigma_j) * 100$ e $(\epsilon_j^{rec}/\sigma_j) * 100)$ envolvidos no *sistema FP* em função do número de termos de segunda ordem no processo de regressão para o raio menor a do plasma. O número de termos lineares foi mantido constante em cinco.

VAX/VMS V5.5-2. O tempo de CPU usado em todo o processo de regressão varia dependendo do número de termos que compõe a função polinomial. Nas análises acima tivemos uma variação entre 10 e 30 minutos.

5.5.5 Reconstrução dos Parâmetros de Equilíbrio

O programa *FPG* gera uma saída com dados que foram apresentados na sessão 5.3.1. Estes dados são lidos pelo programa *FPEQR*, bem como os valores de campos magnéticos nas sondas externas ao plasma. Substituindo estas medidas na forma polinomial (5.5) obtemos os parâmetros do equilíbrio reconstruído usando a *Função de Parametrização.*

Como mencionado anteriormente, o tokamak TCA/BR ainda não estaria em operação durante a realização deste trabalho e nem o sistema de diagnósticos magnéticos projetado. Desta forma, as medidas teriam de ser simuladas para que os testes no *sistema FP* fossem realizados.

Para realizar estas simulações no processo de reconstrução dos parâmetros do equilíbrio, procuramos um conjunto qualquer de parâmetros representando um equilíbrio no banco de dados e usamos os resultados calculados para campos magnéticos externos ao plasma

como medidas simuladas. Usando estas medidas simuladas no programa *FPEQR* obtemos os parâmetros do equilíbrio reconstruído.

Na Tabela 5.7 apresentamos para cada parâmetro, o valor encontrado pelo código de equilíbrio e o valor reconstruído pelo programa *FPEQR*. A terceira coluna apresenta "a diferença porcentual" definida pela diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100. Não estão sendo levados em consideração o número de algarismos significativos. O objetivo é ter noção do que está ocorrendo com o sistema de reconstrução.

Os resultados apresentados na Tabela 5.7 permite-nos uma análise do que acontece no processo de reconstrução com os parâmetros do equilíbrio. Podemos ver que a diferença em alguns deles é grande comparada com outros. Já havíamos discutido este aspecto ao analisar a influência do banco de dados e erros de medidas no processo de regressão. Aqui, podemos acrescentar a relação do processo físico envolvido na reconstrução destes parâmetros.

O caso típico está na reconstrução de β_p e l_i. Estes dois parâmetros são normalmente determinados experimentalmente através do parâmetro de Shafranov $(\beta_p + l_i/2)$ e somente em alguns casos de plasmas com sessão poloidal elongada é possível obtê-los separadamente [Shaf-71, Lao-85a].

A corrente de plasma apesar de estar fortemente associada às medidas magnéticas, possui uma diferença pequena. Entretanto, I_P é um parâmetro de entrada para o processo de medidas. Este fato não acontece com α_P e α_F, por fazerem parte de um ajuste iterativo no cálculo do equilíbrio MHD ao se resolver a equação de Grad-Shafranov numericamente usando o algoritmo proposto para o código *TCABREC* e pelo programa *EQDBG*. Temos ainda, que α_P e α_F estão associados aos perfis de corrente de plasma e pressão, funções determinadas de forma arbitrária na resolução da equação de Grad-Shafranov [Shaf-58, Zakh-73, Zakh-86, Galv-89].

Podemos ainda, avaliar a confiabilidade dos resultados obtidos na reconstrução através da medida de confiança do resultado, definida no Cap. 4 sessão 4.3.5 por Q. Para a reconstrução apresentada acima temos $Q = 1,907$. Como Q representa χ^2 reduzido da medida, temos que para $Q \approx 1$ o resultado possui uma boa representação no banco de dados, podendo ser reconstruído com precisão. Por outro lado se $Q \gg 1$ teremos um resultado não condizente com a realidade, sendo que as medidas não possuem uma boa representação no banco de dados. Podemos ver que, em nosso caso, os valores reconstruídos possuem uma boa confiabilidade.

O programa *FPEQR* está operando no computador VAX 6330 com sistema operacional VAX/VMS V5.5-2 e no VAX ALPHA Sable 2100 com sistema operacional OpenVMSAXP

$$Q = \frac{1}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\tilde{q}_i^2}{\lambda_i + \tilde{\epsilon}_i^2} = 1,907$$

Parâmetro	*Valor no banco de dados*	*Valor reconstruído*	*Diferença porcentual*
R_{geo}	$0,6225$	$0,6206$	0,3052
Z_{geo}	$0,0$	$0,0$	
R_{mag}	$0,6333$	$0,6327$	0,0947
Z_{mag}	$0,0$	$0,0$	
a	$0,1725$	$0,1783$	3,362
b	$0,1793$	$0,1848$	3,068
$TRIA$	$-2,621 \times 10^{-2}$	$-2,348 \times 10^{-2}$	10,416
$ELON$	$1,039$	$1,037$	0,1925
β_p	$0,1160$	$0,1025$	11,64
l_i	$0,7568$	$0,8543$	12,88
I_P	$0,1050$	$0,1049$	0,0952
Ψ_a	$0,1893$	$0,1915$	1,162
Ψ_b	$0,1368$	$0,1346$	1,608
μ	$-0,8717$	$-0,8838$	1,388
α_P	$2,802$	$1,898$	32,26
α_F	$2,802$	$1,875$	33,08

Tabela 5.7: Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a *FP*. A diferença porcentual refere-se a diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100.

6.1. O tempo de CPU usado no processo de reconstrução é da ordem de décimos de segundos para o conjunto de parâmetros acima.

5.5.6 Algumas Considerações

De uma forma resumida, os tempos de CPU envolvidos em todo o sistema que caracteriza a *Função de Parametrização* onde foram instalados são:

- Criação do banco de dados: $\approx$ 1 hora
- Determinação da Função de Parametrização: $\approx$ 15 minutos
- Reconstrução dos parâmetros de equilíbrio: décimos de segundos

A forma final do banco de dados e da expressão polinomial que representa os parâmetros a serem reconstruídos em função das medidas, requerem um estudo no qual são gerados vários bancos de dados e várias análises de regressão. Portanto, os dois primeiros itens acima vão consumir considerável tempo de CPU. Uma vez definida a análise e estudo do processo que se chega à regressão, o processo de reconstrução é extremamente rápido.

No próximo capítulo, discutiremos um pouco mais a precisão deste método comparado com outros métodos usados para reconstruir o equilíbrio MHD em tokamaks.

Os resultados numéricos que aparecem nas tabelas apresentadas neste capítulo não tiveram o cuidado de serem tratados com relação a quantidade de algarismos significativos. Estes resultados são apresentados da forma como foram expostas pelos programas que fazem parte do sistema de reconstrução. Neste estágio do processo de implementação do *sistema FP* podemos analisar os efeitos dos erros e flutuações nas medidas sem esta preocupação.

Claro que, quando o sistema de medidas estiver configurado, a noção de erros presentes de forma intrínseca nos diagnósticos poderão nos proporcionar meios mais realísticos de definir estes números.

Capítulo 6

Discussão e Conclusão

6.1 Introdução

A motivação deste trabalho reside na importância de uma rápida e precisa determinação da configuração de equilíbrio em experimentos de confinamento magnético, como no caso de tokamaks. Isto é importante para o controle em tempo real do plasma, durante a operação da máquina, e para uma análise mais cuidadosa do experimento realizado. Como discutido durante o trabalho, a configuração de equilíbrio do plasma ou certos parâmetros que caracterizam o equilíbrio são basicamente informações das propriedades eletromagnéticas do plasma confinado e podem ser obtidas através de medidas externas de campos e fluxos.

Também é necessário o estudo do equilíbrio do plasma para modelagem de vários processos físicos que ocorrem nas descargas. Ou seja, ao montarmos uma experiência de confinamento magnético, poderemos, a partir de estudos anteriores, determinar como serão os campos magnéticos para termos determinado tipo de configuração de equilíbrio. Mas é a reconstrução desta configuração de equilíbrio através de medidas feitas em diagnósticos magnéticos externos que permite o controle da coluna de plasma.

Para estudar o equilíbrio *Magnetohidrodinâmico* no tokamak TCA/BR desenvolvemos um código com estrutura semelhante ao principais códigos de equilíbrio MHD usualmente utilizados, como descrito no Cap. 3. A determinação das configurações de equilíbrio durante a realização do experimento, utilizando as medidas magnéticas externas, deverá ser realizada pelo sistema de reconstrução (Função de Parametrização) descrito nos Caps. 4 e 5.

Neste capítulo, vamos discutir a implementação do código de equilíbrio **TCABREC** e do **Sistema FP** no tokamak TCA/BR e comparar os resultados com os de outros códigos e

métodos.

O tokamak TCA/BR estava em fase de montagem durante a realização deste trabalho. Desta forma, a verificação da funcionalidade do *sistema FP* e a comparação dos resultados com os de outros métodos foi feito usando dados simulados para a configuração geométrica do TCA/BR. Entretanto, este sistema deverá estar em operação quando a máquina entrar em operação.

6.2 Estudo do Equilíbrio MHD no Tokamak TCA/BR - *TCABREC*

6.2.1 TCABREC "versus" EQUS

O código de equilíbrio *TCABREC* foi escrito para atender às necessidades específicas do tokamak TCA/BR. Desta forma, procuramos personalizar o código segundo a geometria e as características desta máquina. Com isto, conseguimos economizar tempo de CPU e recursos computacionais, aumentando a rapidez no estudo do equilíbrio e modelagem do plasma.

O *TCABREC* foi desenvolvido em FORTRAN devido às próprias características do problema de solução da equação de Grad-Shafranov e para que pudesse ser portátil para todas as plataformas computacionais que o grupo de Física de Plasma do IFUSP tem acesso. Basicamente, foi estruturado para operar nos computadores de médio porte e estações de trabalho do IFUSP.

Os resultados gerados pelo *TCABREC* foram comparados com o código de equilíbrio *EQUS*, desenvolvido por I.V. Yasin e Yu.K. Kuznetsov [Yasi-95]. Este código foi escrito para operar em computadores compatíveis com PC usando sistema operacional MS-DOS e compilador FORTRAN Microsoft [Fort-91]. Esta combinação de sistema operacional e compilador permite um acesso restrito à memória do computador de tal forma que o *EQUS* consegue realizar cálculos discretizando a região do plasma com apenas 14×15 ($= 210$) pontos.

Apesar do código *TCABREC* estar baseado em uma estrutura parecida com a do *EQUS*, a malha de discretização pode ser muito maior, aumentado substancialmente a precisão dos resultados.

6.2.2 Comparação dos Resultados - TCABREC "versus" EQUS

A comparação dos resultados do equilíbrio MHD usando os códigos *TCABREC* e *EQUS* foi realizada usando em ambos os casos uma grade de 14×15 pontos. Não houve diferença significativa em nenhum das configurações testadas. Desta forma o código *TCABREC* atende à necessidade proposta, e ainda com uma eficiência maior do ponto de vista de tempo de processamento, uma vêz que computadores usados são mais rápidos que a plataforma PC.

No processo de reconstrução do equilíbrio, o código *TCABREC* é usado como base para o programa *EQDBG* que gera o banco de dados contendo configurações de equilíbrio e medidas simuladas de campos externos. A importância da determinação precisa da borda do plasma, através de parâmetros como a triangularidade, ou da posição do eixo magnético vai estar refletida em todo o processo de reconstrução usando o *sistema FP*.

O cálculo do equilíbrio numa grade com maior número de pontos, como mencionado anteriormente, aumenta a precisão nos valores dos parâmetros obtidos. Para verificar o que acontece com o aumento do número de pontos da grade, fizemos uma comparação dos resultados obtidos com uma grade de 14×15 e outra com 32×33. Na Tabela 6.1 apresentamos os parâmetros de entrada para a configuração com 14×15 pontos. Os resultados são apresentados nas Figs. 6.1 e 6.2. Para a configuração com 32×33 pontos foram usados os mesmos parâmetros da Tabela 6.1, sendo os resultados mostrados nas Figs. 6.3 e 6.4.

Comparando os resultados mostrados nas Figs. 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4, observamos uma pequena diferença nos valores da triangularidade do plasma ($Triang$), do raio magnético (R_{mag}) e do parâmetro diamagnético (μ). Estes parâmetros refletem a importância de termos uma melhor resolução no cálculo de equilíbrio. Podemos observar também mudanças nos perfis da densidade de corrente e da pressão do plasma, que aparecem com melhor resolução no caso 32×33. Na Tabela 6.2 comparamos os resultados dos valores de campos magnéticos B_R e B_Z simulados na posição dos sensores. Para maior parte das bobinas sensoras, os erros relativos nos valores dos campos calculados usando uma grade de 14×15 pontos e outra de 32×33 pontos é menor do 10%. No entanto, pode haver alguns casos patológicos, como o valor da componente B_R do campo magnético calculado na posição da sonda 5. Estes erros inaceitáveis dependem criticamente da escolha da posição da sonda e, caso esta não possa ser alterada, os valores de medidas imprecisos por ela produzidos terão que ser posteriormente descartados no processo de reconstrução.

Para termos a noção da influência da grade na resolução do problema de equilíbrio podemos recorrer ao desenho mostrado na Fig. A.1, do apêndice A. Como a borda do plasma é calculada por interpolação no interior de um quadrado, onde os vértices são os pontos da

```
Coils
15
  1   0.302   0.000   0.040   1.156   2  73   0    0.1470 147
  2   0.389   0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  2   0.389  -0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  3   0.885   0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  3   0.885  -0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  4   0.934   0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  4   0.934  -0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850   0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850  -0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  6   0.334   0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  6   0.334  -0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334   0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334  -0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  8   1.250   0.280   0.018   0.036   1   1   0    0.0000   1
  8   1.250  -0.280   0.018   0.036   1   1   0    0.0000   1
Grid
   0.420   0.810  -0.215   0.215 14 15
Constrains
2
   0.435   0.000
   0.785   0.000
Plasma
   0.117   0.116   0.829  1  1   1.580   1.668   0.615   0.000
Accuracy
  0.01000  0.01000  0.00100  50 100
Boundary
90
Points
       2
   0.435   0.000
   0.785   0.000
```

Tabela 6.1: Parâmetros de entrada para o código TCABREC para uma grade de plasma com 14×15 pontos . Os resultados são apresentados nas Figs. 6.1 e 6.2. O significado de cada dado de entrada apresentado na tabela é descrito no apêndice A.

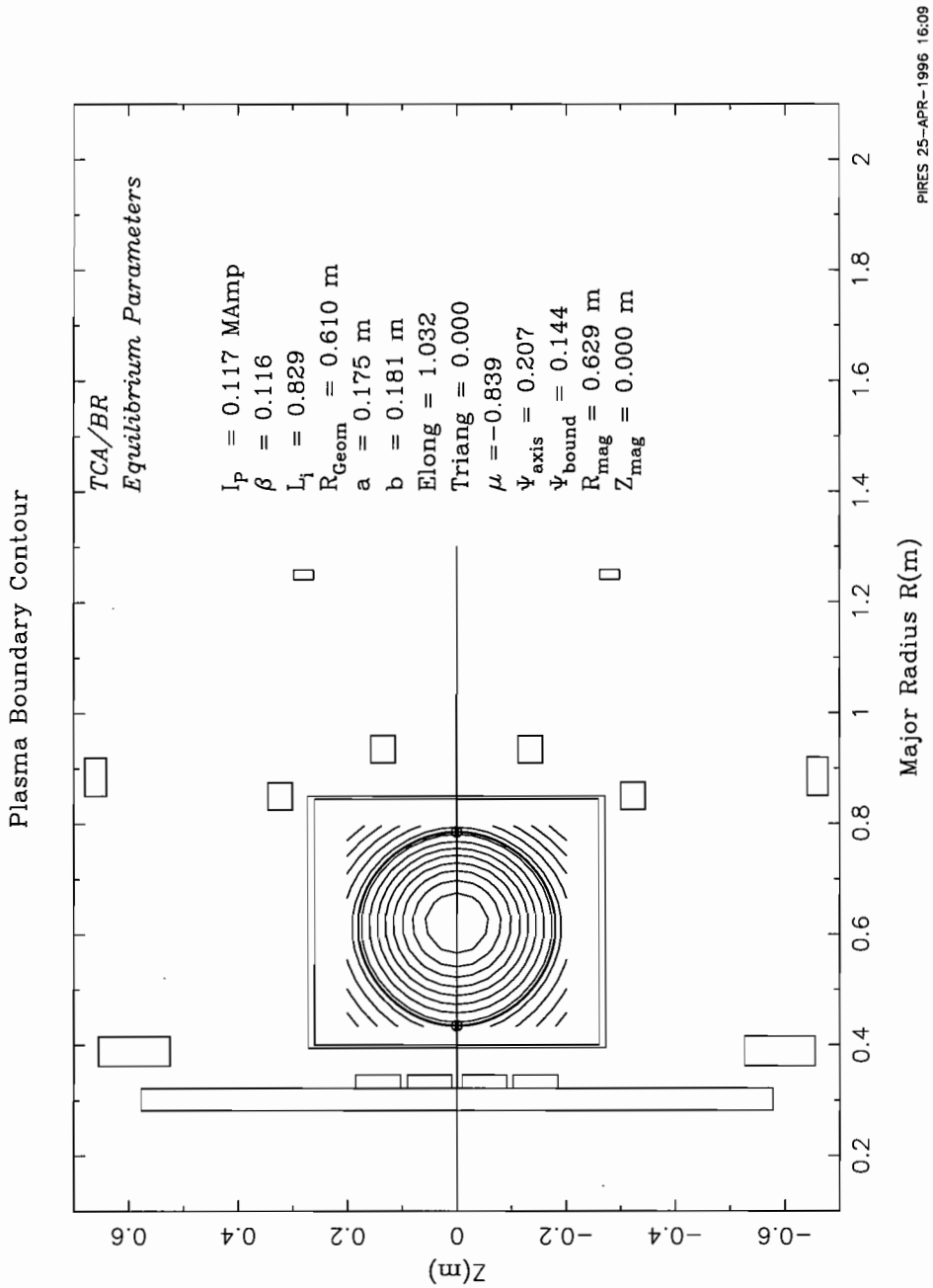

Figura 6.1: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 14×15 pontos.

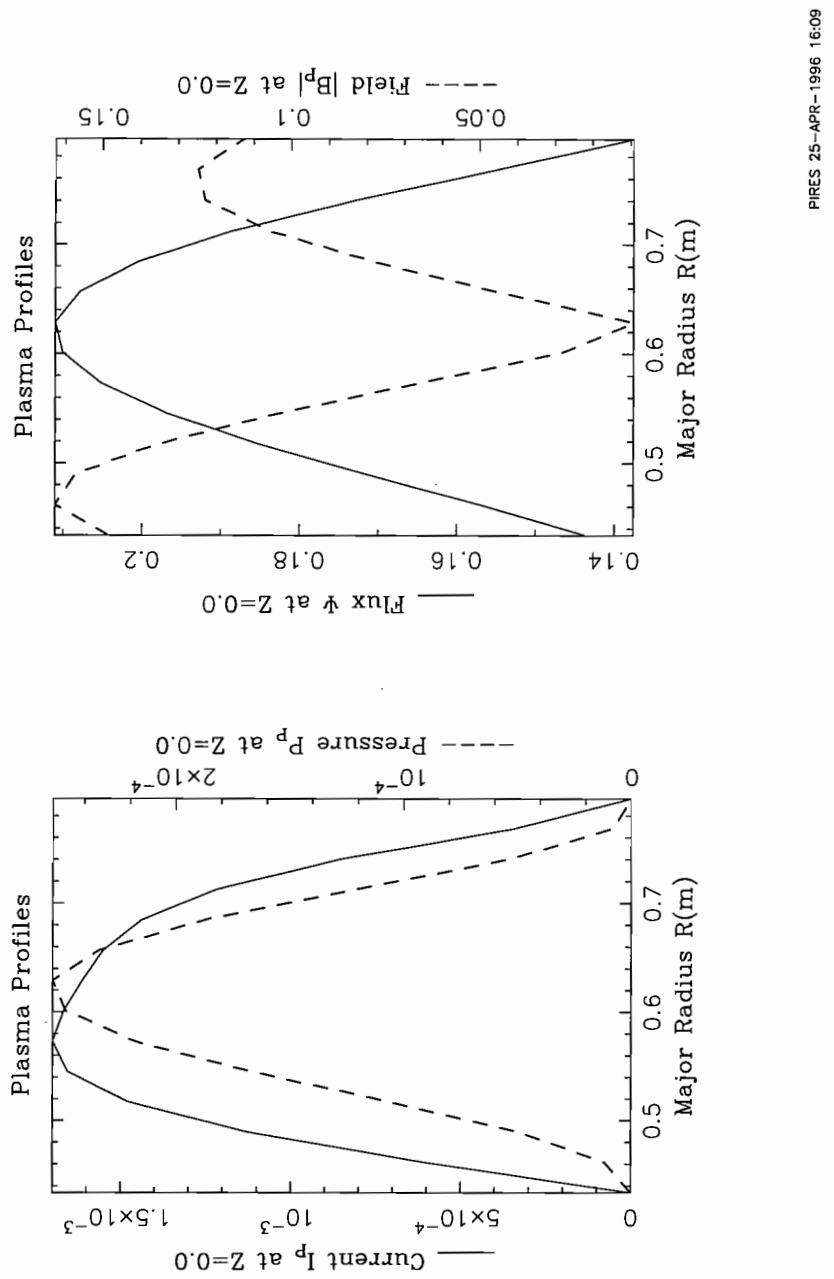

Figura 6.2: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 14×15 pontos.

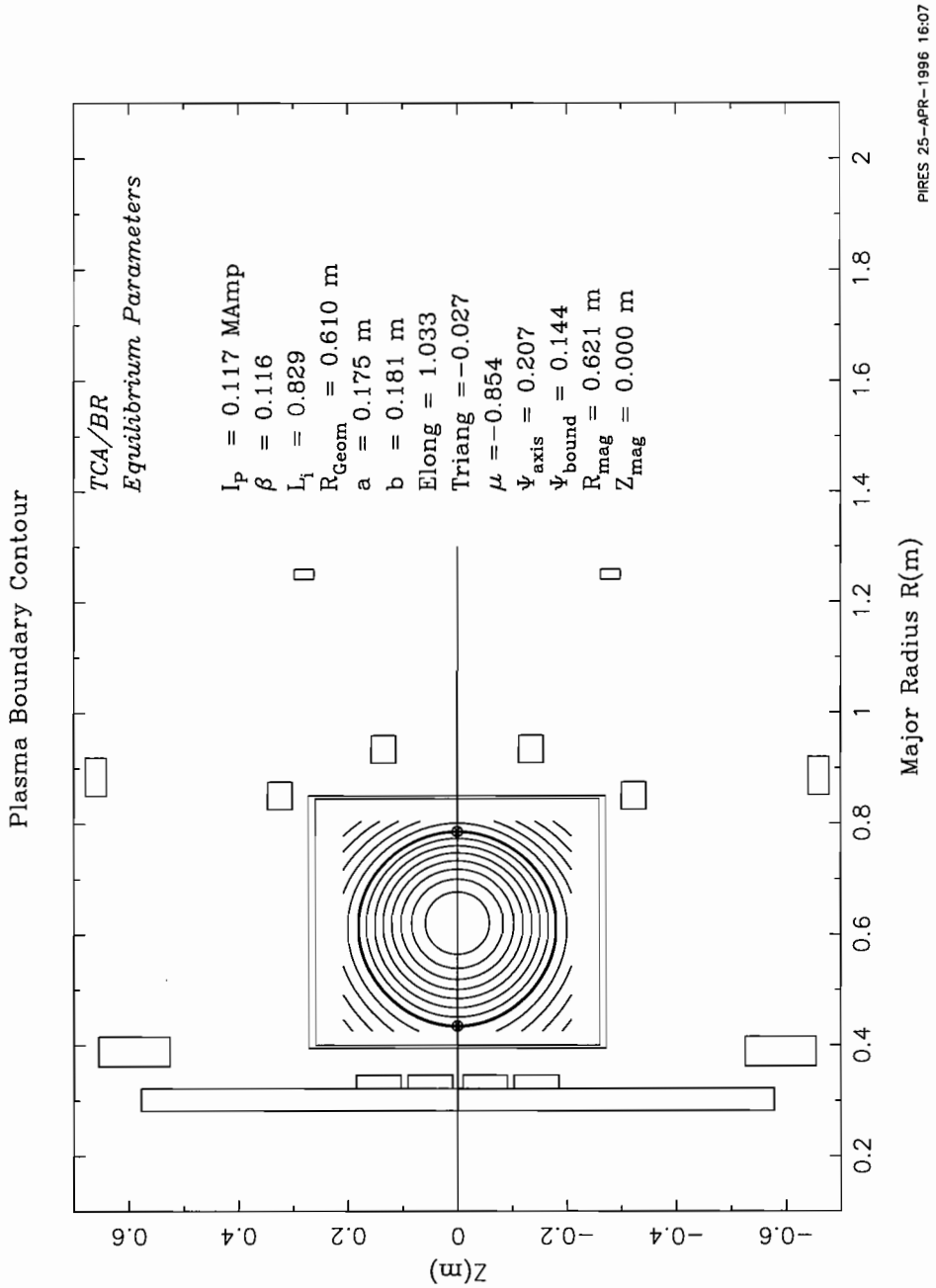

Figura 6.3: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 32×33 pontos.

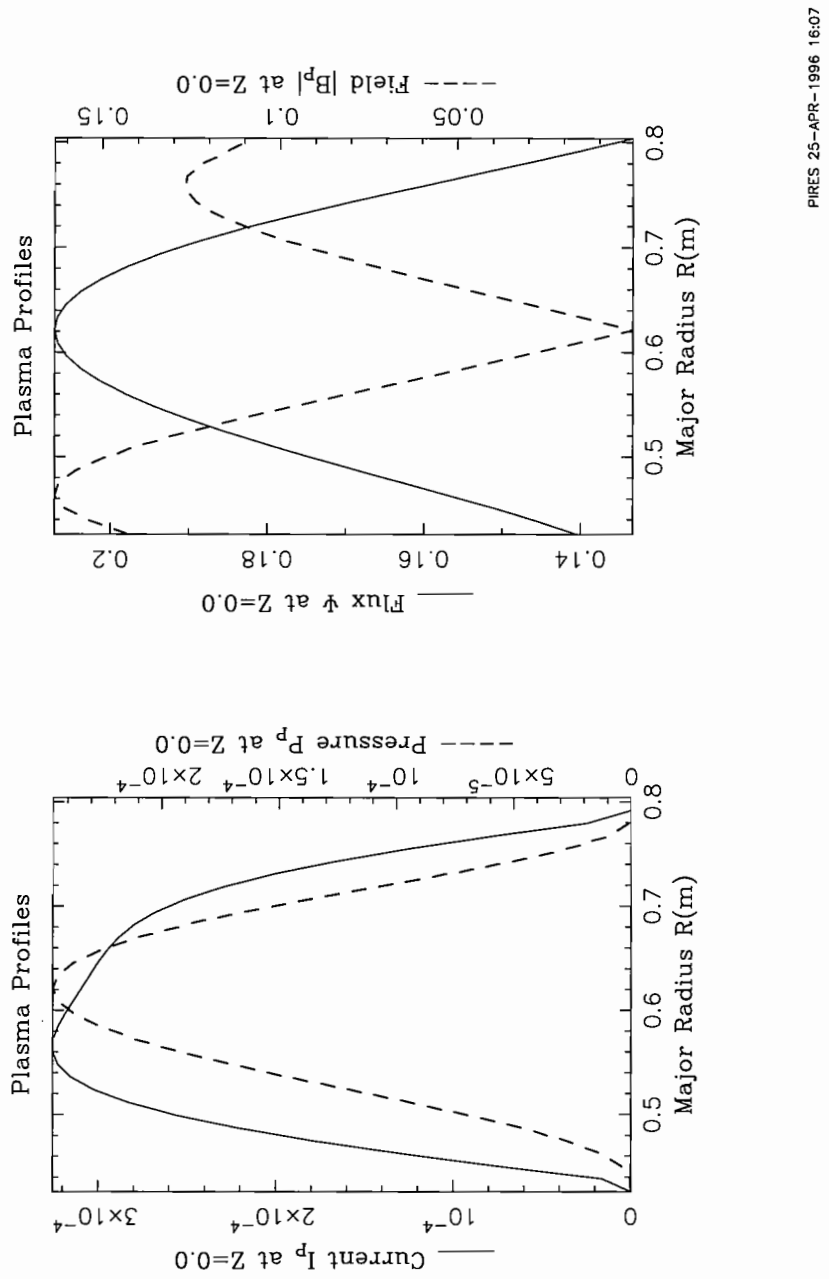

Figura 6.4: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Tabela 6.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$. O cálculo do equilíbrio é realizado em uma grade de 32×33 pontos.

Sonda	B_Z 14×15 *pontos*	B_Z 32×33 *pontos*	B_R 14×15 *pontos*	B_R 32×33 *pontos*
1	$5,760 \times 10^{-02}$	$5,780 \times 10^{-02}$	$7,500 \times 10^{-02}$	$7,488 \times 10^{-02}$
2	$-2,286 \times 10^{-03}$	$-2,057 \times 10^{-03}$	$8,363 \times 10^{-02}$	$8,363 \times 10^{-02}$
3	$-5,614 \times 10^{-02}$	$-5,589 \times 10^{-02}$	$5,265 \times 10^{-02}$	$5,256 \times 10^{-02}$
4	$-6,687 \times 10^{-02}$	$-6,663 \times 10^{-02}$	$3,627 \times 10^{-02}$	$3,619 \times 10^{-02}$
5	$-9,165 \times 10^{-02}$	$-9,119 \times 10^{-02}$	$-6,462 \times 10^{-09}$	$-2,090 \times 10^{-09}$
6	$-6,687 \times 10^{-02}$	$-6,663 \times 10^{-02}$	$-3,627 \times 10^{-02}$	$-3,619 \times 10^{-02}$
7	$-5,614 \times 10^{-02}$	$-5,589 \times 10^{-02}$	$-5,265 \times 10^{-02}$	$-5,256 \times 10^{-02}$
8	$-2,286 \times 10^{-03}$	$-2,057 \times 10^{-03}$	$-8,363 \times 10^{-02}$	$-8,363 \times 10^{-02}$
9	$5,760 \times 10^{-02}$	$5,780 \times 10^{-02}$	$-7,500 \times 10^{-02}$	$-7,488 \times 10^{-02}$
10	$7,457 \times 10^{-02}$	$8,363 \times 10^{-02}$	$-8,313 \times 10^{-02}$	$-8,297 \times 10^{-02}$
11	$1,296 \times 10^{-01}$	$1,304 \times 10^{-01}$	$1,801 \times 10^{-09}$	$1,902 \times 10^{-09}$
12	$7,457 \times 10^{-02}$	$7,484 \times 10^{-02}$	$8,313 \times 10^{-02}$	$8,297 \times 10^{-02}$

Tabela 6.2: Comparação dos valores de campos magnéticos B_R e B_Z simulados nos sensores para uma grade de 14×15 pontos e 32×33 pontos.

grade por onde passa a borda, intuitivamente podemos concluir que estes pontos sendo mais próximos entre si, levam a uma determinação melhor da última superfície do plasma. O mesmo raciocínio pode ser levado para compreender a determinação do eixo magnético.

6.3 Reconstrução do Equilíbrio MHD no TCA/BR (*FP*)

6.3.1 Análise do Banco de Dados

O processo de reconstrução dos parâmetros do equilíbrio MHD usando a *Função de Parametrização* é uma união entre vários sistemas, onde cada parte deve ser bem estruturada.

A criação do banco de dados para a geração da função polinomial que irá representar os parâmetros de equilíbrio em função das medidas de campos magnéticos externos ao plasma, deve ser capaz de abranger a região de operação do experimento. Como descrevemos nos Caps. 4 e 5, o processo de reconstrução tem que ser preciso na faixa de configurações de equilíbrios mais prováveis de acontecer no experimento.

A análise do banco de dados preliminar criado para o TCA/BR mostrou que temos uma reconstrução muita boa dos parâmetros de equilíbrio, quando os dados reconstruídos estão dentro da faixa mais provável. Isto foi verificado nas Tabela 5.7 com uma medida de confiança $Q = 1,907$.

Seria interessante verificar o que acontece com configurações de equilíbrio fora desta faixa mais provável. Para isto procuramos uma configuração menos provável no banco de dados. O resultado está apresentado na Tabela 6.3. Devemos lembrar que estes dados também são importantes para o processo de regressão e por isto, devem contribuir de forma positiva para a estatística do problema.

É exatamente o que observamos ao analisar este resultado fora da região de maior concentração de equilíbrios, dentro do banco de dados. A medida de confiança possui um valor alto ($Q = 3.842$) comparado com a de resultados mais prováveis. Mesmo assim este resultado ainda não está dentro da faixa de falta de confiança no processo de reconstrução ($Q \gg 1$) e os valores reconstruídos têm o mesmo perfil de "diferença porcentual" apresentado na Tabela 5.7. Por outro lado, qualquer medida que não esteja prevista no banco de dados mostra valores absurdos de Q. Os testes foram realizados com configurações de equilíbrio fora da região determinada nos parâmetros de entrada mostrados na Tabela 5.3 [1].

[1] A Tabela 5.3 apresenta os parâmetros de entrada para o código de equilíbrio modificado *EQDBG* que gera o banco de dados, selecionados segundo uma distribuição normal.

Apesar de não termos com clareza a faixa de configurações de equilíbrio em que o TCA/BR irá operar, os resultados apresentados cobrem uma região de operação que certamente é um subconjunto desta. Os parâmetros usados para gerar o banco de dados foram baseados em relatórios e artigos sobre o tokamak TCA [Chee-79, Nasc-94, Nasc-95].

6.3.2 Regressão - Ajuste Polinomial

A análise de regressão e o ajuste polinomial definido para o banco de dados descrito no Cap. 5 mostraram-se bastante razoáveis uma vez que a reconstrução dos parâmetros de equilíbrio ocorreu como se esperava (Tabela 5.7, Figs. 5.4 e 5.5).

Entretanto, o banco de dados deve ser melhor configurado. Ao analisar os erros (ϵ^{sys}, ϵ^{stat}, ϵ^{rec}) envolvidos no processo de regressão, podemos ver uma forte predominância do erro sistemático (ϵ^{sys}), como mostra as Figs. 5.4 e 5.5. O erro estatístico (ϵ^{stat}) tem uma pequena contribuição no processo de regressão, mas o suficiente para caracterizar que a, b e $ELON$ dependem dos erros das medidas (Tabelas 5.4, 5.5, 5.6). Esta melhoria no banco de dados, porém, só será possível quando o sistema de diagnósticos magnéticos estiver completamente definido.

O programa *EQDBG* usado para gerar o banco de dados, usa um modelo para o cálculo de campos magnéticos externos ao plasma para a simulação de medidas em sondas magnéticas nestas posições externas. Atualmente o *EQDBG* está configurado para sondas que medem campos nas direções R e Z (Fig. 5.2). O modelo, entretanto, foi construído para que possamos adicionar módulos que suportem sondas para medidas do fluxo do campo magnético poloidal e toroidal.

Tendo medidas de campos e fluxos magnéticos, aumentaremos a quantidade e diversidade de medidas realizadas. Em particular, as medidas de campo, utilizadas para análise do método nesta tese, são medidas locais enquanto que as medidas de fluxo são medidas integrais em que erros localizados tendem a se cancelar. Desta forma, teremos um processo de regressão melhor configurado, uma vez que os parâmetros do equilíbrio estarão relacionados com um espectro maior de medidas. O projeto em estudo dos sistemas de diagnósticos magnéticos para o tokamak TCA/BR [Kuzn-96] tem previsto o conjunto de bobinas citados acima.

Apesar da necessidade mencionada de uma melhora do banco de dados e da definição dos diagnósticos magnéticos, as posições das sondas sugeridas neste trabalho mostraram um comportamento muito bom, com respeito à redução na dimensão das medidas. Ao analisar os autovalores da matriz de dispersão das medidas simuladas (Fig. 5.3), foi mostrado que,

$$Q = \frac{1}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\tilde{q}_i^2}{\lambda_i + \tilde{\epsilon}_i^2} = 3,842$$

Parâmetro	*Valor no banco de dados*	*Valor reconstruído*	*Diferença porcentual*
R_{geo}	$0,6165$	$0,6153$	0,1946
Z_{geo}	$0,0$	$0,0$	
R_{mag}	$0,6211$	$0,6244$	0,5313
Z_{mag}	$0,0$	$0,0$	
a	$0,1645$	$0,1709$	3,891
b	$0,1696$	$0,1759$	3,715
$TRIA$	$8,079 \times 10^{-3}$	$-1,215 \times 10^{-2}$	115,0
$ELON$	$1,031$	$1,030$	0,0970
β_p	$0,1070$	$0,0954$	10,84
l_i	$0,8224$	$0,9361$	13,83
I_P	$0,1490$	$0,1489$	0,0671
Ψ_a	$0,2578$	$0,2611$	1,280
Ψ_b	$0,1788$	$0,1738$	2,800
μ	$-0,8755$	$-0,8860$	1,199
α_P	$1,999$	$1,165$	41,72
α_F	$1,999$	$1,142$	42,87

Tabela 6.3: Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a *FP*. A diferença porcentual refere-se à diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100.

com apenas cinco componentes principais entre 24 possíveis, podemos ter um bom processo de reconstrução dos parâmetros de equilíbrio.

Quando o tokamak estiver em funcionamento, mudanças no sistema de regressão deverão ser realizadas para poder prever falhas em algumas medidas. Isto é importante, uma vez que estas medidas vão contribuir com erros grandes no processo de reconstrução.

6.4 FP versus Outros Métodos

Durante este trabalho foi mencionado a existência de vários métodos que são usados para a reconstrução do equilíbrio MHD em tokamaks. Existem dois métodos bastante simples que podem ser usados para a determinação da posição do plasma e outro para o cálculo de $\beta_p + l_i/2$. Estes métodos são úteis para plasma com sessão circular e alta razão de aspecto ($R_{geo}/a \gg 1$), caso em que se encontra o TCA/BR na fase inicial de operacão[2].

Os métodos acima usam medidas de campos e fluxos magnéticos em sondas posicionadas externamente ao plasma como podemos ver na Fig. 6.5. Nas posições R_1 e R_2 são colocadas duas bobinas toroidais que servem para medir o fluxo Ψ_1 e Ψ_2 do campo poloidal [Vann-95] e bobinas para medir o campo magnético B_{Z_1} e B_{Z_2} na direção Z.

Um dos métodos usa uma versão simplificada do método dos harmônicos toroidais [Zakh-73, Zakh-86, Kuzn-96] que resulta na seguinte expressão para o deslocamento Δ_r do plasma mostrado na Fig. 6.5:

$$\begin{aligned}\Delta_r =& \frac{b^2}{a_l}\left[\frac{a_l^2}{b^2}\ln\left(\frac{a_l}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_l^2}{b^2}\right)\right] - \\ & \frac{b^2}{4\times 10^2 I_P}\left[\frac{B_{Z_1} + B_{Z_2}}{2}\left(1 - \frac{a_l^2}{b^2}\right) - \frac{\Delta\Psi_P}{2\Delta\varphi R_0 b}\left(1 + \frac{a_l^2}{b^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{6.1}$$

O outro método usa expansões em série de Taylor resultando para Δ_r:

$$\Delta_r = \frac{[(a_l - b)(R_1 B_{Z_1} + R_2 B_{Z_2}) + \Delta\varphi^{-1}\Delta\Psi_P]}{R_2 B_{Z_2} - R_1 B_{Z_1}}. \tag{6.2}$$

Onde $\Delta\Psi_P = (\Psi_1 - \Psi_2)$, $\Delta\varphi$ é o ângulo das bobinas de fluxo, $R_0 = (R_1 + R_2)/2$, $b = R_1 - R_0 = R_0 - R_2$ e a_l é o raio de um limitador circular onde o plasma fica confinado.

[2]Pretende-se no futuro fazer uma atualização no projeto do TCA/BR para podermos ter plasma com pequena elongação. Entretanto, a razão de aspecto do plasma deverá ser próxima da atual ($R_{geo}/a \approx 3,4$)

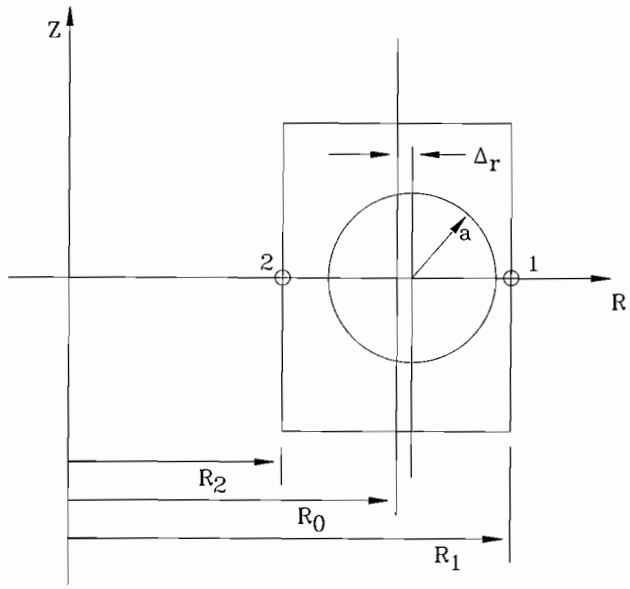

Figura 6.5: Desenho esquemático utilizado para o cálculo do deslocamento Δ_r e de $\beta_p + li/2$ usando medidas em bobinas de fluxo nas posições 1 e 2 e medidas de campos magnéticos na direção Z nestas mesmas posições.

A posição do plasma refere-se ao raio geométrico R_{geo}, que define o raio da última superfície de fluxo (borda do plasma). Usando a expressão 6.1 ou a expressão 6.2 teremos que:

$$R_{geo} = R_0 + \Delta_r \tag{6.3}$$

Ainda segundo as referências [Zakh-73, Zakh-86, Kuzn-96] temos que:

$$\beta_p + \frac{l_i}{2} = 1 - \ln\frac{b}{a_l} - 2,5 \times 10^6 \frac{R_0}{I_P}\left(B_{Z_1} + B_{Z_2} + \frac{\Delta\Psi_P}{2\Delta\varphi R_0 b}\right). \tag{6.4}$$

Na Tabela 6.4 apresentamos resultados comparando a reconstrução do raio geométrico R_{geo} usando o *sistema FP* e as fórmulas 6.1 e 6.2 para três casos de configurações de equilíbrio. Estas configurações foram escolhidas dos dados simulados que estão presentes no banco de dados, de acordo com o valor que define a medida de confiança na reconstrução usando a *FP*. Para o caso (1) temos $Q = 0,550$; caso (2), $Q = 1,907$[3]; caso (3), $Q = 3,8420$[4];

[3]O caso (2) refere-se aos dados que levaram aos dados apresentados na Tabela 5.7.

[4]O caso (3) refere-se aos dados que levaram aos apresentados na Tabela 6.1.

caso (4), $Q = 0,910$[5]. Para as mesmas configurações acima, comparamos os resultados na reconstrução do parâmetro $\beta_p + l_i/2$ usando a Função de Parametrização e a fórmula 6.4. Estes resultados aparecem na Tabela 6.5.

Parâmetro R_{geo}	*Valor no banco de dados*	*Reconstrução FP*	*Reconstrução* $\Delta_{r_{(6.1)}}$	*Reconstrução* $\Delta_{r_{(6.2)}}$
1	0,6100	0,6100	0,6093	0,6064
2	0,6225	0,6206	0,6213	0,6216
3	0,6165	0,6153	0,6138	0,6120
4	0,6150	0,6153	0,6151	0,6137

Tabela 6.4: Comparação de resultados para a reconstrução do R_{geo} usando a Função de Parametrização (*FP*), a fórmula (6.1) e a fórmula (6.2), para três casos diferentes. O caso (1) refere-se a um equilíbrio em que usando a FP tivemos um $Q = 0,550$, o caso (2) está associado aos dados apresentados na Tabela 5.7 ($Q = 1,907$), o caso (3) está associado aos dados apresentados na Tabela 6.2 ($Q = 3,842$) e o caso (4) está associado aos dados apresentados no Apêndice B ($Q = 0,910$).

Analisando os resultados apresentados nas Tabelas 6.4 e 6.5, a Função de Parametrização mostra resultados iguais ou melhores que os métodos apresentados nas expressões (6.1), (6.2) e (6.4).

Os métodos apresentados para o cálculo de Δ_r e expressos pelas Eqs. (6.1) e (6.2) são bastante usados para o controle em tempo real da coluna de plasma, porém, apresentam erros grandes no processo de reconstrução [Kock-96].

6.5 FP: Vantagens e Desvantagens

A *Função de Parametrização* é caracterizada por um método onde temos os parâmetros que representam o estado físico de um sistema em função de medidas realizadas no sistema. Esta representação é suficientemente simples de tal forma que com pouco esforço computacional possamos reconstruir estes parâmetros que caracterizam o sistema em estudo. Entretanto, temos um esforço computacional inicial grande, implícito no processo que

[5]Dados apresentados no apêndice B.

Parâmetro $\beta_p + \frac{l_i}{2}$	*Valor no banco de dados*	*Reconstrução FP*	*Reconstrução Fórmula (6.4)*
1	$0,5319$	$0,5446$	$0,5997$
2	$0,4944$	$0,5296$	$0,5532$
3	$0,5182$	$0,5635$	$0,6414$
4	$0,5665$	$0,5524$	$0,5995$

Tabela 6.5: Comparação de resultados para a reconstrução do parâmetro $\beta_p + \frac{l_i}{2}$ usando a Função de Parametrização (*FP*) e a fórmula 6.4 para três casos diferentes. O caso (1) refere-se a um equilíbrio em que usando a FP tivemos um $Q = 0,550$, o caso (2) está associado aos dados apresentados na Tabela 5.7 ($Q = 1,907$), o caso (3) está associado aos dados na Tabela 6.2 ($Q = 3,842$) e o caso (4) está associado aos dados apresentados no Apêndice B ($Q = 0,910$).

fica embutido na simplicidade e aplicabilidade do método.

O que está por detrás de todo o sistema é um grande banco de dados que contém informações que cobrem o regime de operação do experimento e ainda, medidas simuladas referente a cada estado físico do sistema. O tratamento estatístico deste banco de dados dá origem à expressão representando o estado do sistema.

Desta forma, o método proposto pela *FP* é bastante geral e rápido, o que possibilita a melhora do sistema de reconstrução através da implementação de módulos atualizados com novos modelos que representem as medidas realizadas e ainda, melhorias no próprio modelo que calcula os parâmetros que representam o estado físico deste sistema.

A FP, por ser um método estatístico, permite a análise dos erros envolvidos no processo de reconstrução. Temos portanto, uma análise do quanto podemos ter confiança nos resultados e ainda, saber como os parâmetros são influenciados pelos vários erros que estão presentes no experimento. Isto permite, ainda estudar como novos diagnósticos podem contribuir para a melhoria do sistema de reconstrução.

Como o processo de reconstrução é rápido ele pode ser utilizado para o controle em tempo real do experimento. Entretanto, por ser um método estatístico baseado em esquemas para a redução da dimensão, descartando informações não significativas, temos a possibilidade de uma representação incompleta das medidas que estão sendo projetadas para a representação do sistema. Isto poderia levar à reconstrução de alguns dos parâmetros com um erro grande por não ter uma completa representação nas medidas. Temos também o oposto a esta

situação, onde podemos incluir no processo de regressão, medidas que são desnecessárias por já terem suas informações incluídas através de outras componentes. Neste aspecto o método *FP* torna-se bastante delicado e devemos tomar muito cuidado na escolha do número de componentes principais no processo de regressão. No caso do banco de dados criado para o TCA/BR vimos que o comportamento das medidas escolhidas permitiram uma escolha fácil do número de medidas para redução. Por outro lado, a versatilidade do método permite acrescentar novos modelos de medidas que melhorem este aspecto da *FP*.

6.6 Conclusão

A **Função de Parametrização** tem ganho um espaço grande no processo de reconstrução do equilíbrio magnetohidrodinâmico e controle da posição do plasma em vários tokamaks. Será um dos métodos utilizados no tokamak TCA/BR. O trabalho aqui apresentado mostrou a viabilidade da implementação deste método como um sistema rápido e confiável para a reconstrução do equilíbrio, bem como um tratamento dos erros intrínsecos associados às medidas de campos magnéticos em sondas, aspecto difícil de ser analisado usando outros métodos de reconstrução. Entretanto, alguns parâmetros do equilíbrio são difíceis de serem reconstruídos, através da *FP*, com uso de medidas magnéticas externas ao plasma. Desta forma, este método deverá estar associado a outros sistemas de medidas que permitam obter estes parâmetros de forma independente do *sistema FP* ou como modelos de medidas acrescentados a este.

O código de equilíbrio **TCABREC**, mostrou-se também bastante eficiente nos cálculos dos parâmetros de equilíbrio, mas precisa ser melhorado para acrescentar outros parâmetros.

Capítulo 7

O Futuro

7.1 Introdução

Este capítulo tem o objetivo de mostrar algumas considerações a respeito da continuação do trabalho de análise de configurações de equilíbrio e do processo de reconstrução através de medidas realizadas no plasma.

O trabalho realizado e apresentado ainda não está completamente finalizado e nem poderia pelo simples fato de que o tokamak TCA/BR ainda não está em operação. Mas a implementação do método de reconstrução do equilíbrio MHD através da Função de Parametrização foi feita e está pronta para entrar em funcionamento quando o TCA/BR estiver iniciando suas operações de estudo de plasmas confinado.

O código para análise das configurações de equilíbrio está, também, implementado de forma satisfatória. Entretanto, ainda precisa de melhorias quanto aos parâmetros de equilíbrio que potencialmente um código de equilíbrio pode apresentar. Estas melhorias foram deixadas para um futuro pela própria finalidade a que se destinava o estudo de equilíbrio no TCA/BR antes de seu funcionamento.

Devido à natureza da importância do estudo do equilíbrio magnetohidrodinâmico e dos processos de reconstrução deste, muitos estudos vêm sendo realizados e vários métodos desenvolvidos. O objetivo é claro, controlar o plasma em futuros reatores de fusão termonuclear.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2.525
INSTITUTO DE FÍSICA

7.2 História e Futuro

O grupo de física de plasmas do IFUSP vem desenvolvendo projetos de tokamaks desde a implementação de seu primeiro tokamak, o TBR-1, no final de 1979 (ver Cap. 1), passando pelos arrojados projetos do TBR-2 e do TBR-E. A necessidade de códigos de equilíbrio MHD em projetos de tokamaks é fundamental para determinar as configurações dos campos magnéticos poloidal que manterão o plasma confinado e para modelagem das configurações de equilíbrio quando estas máquinas estão em funcionamento.

A reconstrução do equilíbrio MHD é outro ponto fundamental e o motivo para a realização deste trabalho. Usando a Função de Parametrização como um dos métodos para a reconstrução do equilíbrio, temos necessidade de usar códigos de equilíbrio para a geração do banco de configurações para a máquina em estudo. A experiência para o desenvolvimento deste trabalho, em implementação para o tokamak TCA/BR vem dos projetos das bobinas de campos magnéticos poloidais para o TBR-2 [Sa-90] e TBR-E [Ludw-91, Sa-92]. Alguns códigos de equilíbrio foram adaptados a estas máquinas e este estudo possibilitou a construção do código *TCABREC*. Concomitantemente à elaboração do sistema dos campos poloidais dos projetos destes tokamaks, métodos para a reconstrução do equilíbrio foram estudados e optou-se pela implementação da *FP* como um dos sistemas de reconstrução. Começamos a implementação da *FP* para o TBR-1, como teste e estudo do sistema, usando os mesmos programas que são utilizados no tokamak RTP do FOM Instituut voor Plasmafysica 'Rijnhuizen' [Mill-91, Mill-91a], modificados para o TBR-1 [Sa-93]. Entretanto, para a implementação da *FP* no TCA/BR, todo o sistema teve que ser reconstruído para atender às características deste projeto. Isto porque o sistema utilizado no FOM usa o código de equilíbrio HBT [Galv-89a] para gerar o banco de dados. Este programa resolve o problema do equilíbrio usando fronteira fixa e não permite acrescentar um modelo de cálculo de campos magnéticos externos ao plasma em qualquer região. Isto nos motivou a construir nosso próprio código MHD visando a personalização para o TCA/BR e desenvolver o *sistema FP*.

7.3 Código de equilíbrio MHD

O código de equilíbrio *TCABREC* apresentado no Cap. 4 e apêndice A foi desenvolvido de forma a ser o mais otimizado possível com relação a configuração do tokamak TCA/BR. Atualmente os parâmetros de saída correspondem aos valores básicos que podemos obter da solução de Grad-Shafranov servindo às necessidades do estudo e do processo de reconstrução

do equilíbrio na fase de implementação realizada e apresentada neste trabalho. Entretanto, podemos obter mais detalhes do equilíbrio e para isto novas rotinas serão acrescentadas ao *TCABREC*. Pretendemos incluir os cálculos dos seguintes parâmetros:

- *Fator de segurança q em toda a região do plasma*
- *Perfil do campo toroidal*
- *Volume e área do plasma*

O cálculo destes parâmetros foram deixados para uma fase posterior a este trabalho uma vez que envolve uma determinação de todas as superfícies do plasma. Atualmente, somente a última superfície é determinada por um processo de interpolação. As outras superfícies são determinadas por rotinas de curvas de nível, a partir dos valores de Ψ em cada ponto da grade utilizada para a resolução do problema.

7.4 Função de Parametrização

Medidas Magnéticas

O sistema que define a *Função de Parametrização* está implementado para reconstruir o equilíbrio através das medidas de campos magnéticos em bobinas sensoras posicionadas na direção R e Z. Portanto, temos medidas externas ao plasma dos campos B_R e B_Z devido a configuração magnética que define o tokamak TCA/BR.

Já sabemos da necessidade de medidas de fluxo magnético para uma melhora na precisão da reconstrução de alguns parâmetros do equilíbrio. Como o projeto dos sistemas de diagnósticos magnéticos ainda não estava finalizado na época deste trabalho, não tínhamos ainda uma definição de como poderíamos definir todo o *sistema FP*.

O *sistema FP* deverá suportar os seguintes modelos de medidas:

- *Medidas de fluxo magnético.*
  Estas sondas possibilitam medidas que são mais intensas que alguns sinais das tradicionais sondas de campos magnéticos. Este aspecto deve melhorar o processo de regressão.

- *Medidas diamagnéticas.*
  Estas medidas possibilitam mais definição na reconstrução de parâmetros relacionados

com o efeito diamagnético ou paramagnético devido à interação do plasma com o campo toroidal.

- *Medidas de corrente de plasma e campo magnético toroidal.*

Outros Diagnósticos

A *FP* é um método que possibilita outros tipos de diagnósticos, além de medidas magnéticas, serem incluídos no modelo. Para tal, devemos acrescentar ao modelo magnetohidrodinâmico uma forma de relacionar o equilíbrio com estes dados.

O programa de operação do tokamak TCA/BR será composto por várias etapas de funcionamento, onde diferentes tipos de diagnósticos estarão disponíveis. Na fase inicial de funcionamento teremos apenas os diagnósticos básicos; medidas magnéticas mencionadas acima, sistemas de medidas de temperatura e densidade com sondas eletrostáticas. Nesta fase o *sistema FP* será o descrito acima.

Em uma fase mais avançada, onde teremos sistemas mais complexos para medidas de densidade e temperatura do plasma, tais como polarimetria e interferometria, poderemos acrescentar ao *sistema FP* modelos acoplando estas medidas com a solução do equilíbrio, como o utilizado no tokamak TEXTOR [Mill-91b].

Tratamento de Falhas em Sinais

Um dos problemas que poderão ocorrer durante o experimento é uma possível falha em alguma medida. Uma sonda magnética pode falhar e teremos uma medida completamente errônea que certamente levará a um processo de reconstrução também errôneo.

Podemos proceder de várias formas em um caso destes. A forma mais simples seria descartar esta reconstrução. Sabemos que houve falha ou algo errado aconteceu uma vez que a medida de confiança Q apresenta valores absurdos em caso de reconstrução que não é condizente com a realidade. Por outro lado, estaremos eliminando uma descarga, no tokamak, com dados úteis.

Outra forma de tratar o problema seria detectar esta falha e usar algum procedimento para corrigir o sinal errado. Esta será a forma usada no TCA/BR, uma vez que os dados são importantes para serem descartados.

A direção a ser seguida para resolver este problema ainda não está definida. Mas a solução do problema está na análise estatística de cada medida em relação ao conjunto de medidas e corrigir o dado errôneo através de algum processo de ajuste ou interpolação.

Redução na Dimensão das Medidas e Regressão

O método estatístico utilizado para tratar o banco de dados está baseado no método da análise das componentes principais (PCA). Neste método a redução na dimensão das medidas é feita descartando componentes que possuem pequena variação no banco de dados (ver Cap. 4). Porém, este pode não ser o melhor método, embora tenha se mostrado bastante eficiente no processo de reconstrução do equilíbrio usando a função de parametrização em vários tokamaks.

Pretendemos ao longo do tempo estudar outros métodos, a medida que o número e tipo de medidas sejam incorporadas ao sistema de reconstrução.

7.5 Código de Reconstrução *EFIT*

O *EFIT* é um código de reconstrução do equilíbrio usado na análise das medidas magnéticas no tokamak DIII-D [Lao-85, Lao-85a, Lao-90]. Muitas máquinas vêm adaptando o EFIT à sua configuração. Recentemente foi utilizado para comparação entres vários métodos para estudar a reconstrução e projeto do sistema de diagnósticos magnéticos do projeto ITER [Kock-96].

O *EFIT* é um código de equilíbrio MHD associado a um código de ajuste para o processo de reconstrução do equilíbrio. A equação de Grad-Shafranov é resolvida na forma integral por iterações de Picard (ver Cap. 3). No modo de ajuste são processadas iterações para acertar a corrente de plasma e a corrente nas bobinas de campos poloidais no sentido de minimizar, por ajustes de mínimos quadrados, a diferença entre as medidas e sinais calculados pelo código. O código é muito rápido e deveremos usá-lo em paralelo com a função de parametrização no TCA/BR. Ele já foi implementado no Laboratório de Física de Plasmas do IFUSP e sua modificação visando à geometria do TCA/BR foi iniciada no final de 1995.

7.6 Novas Técnicas em Reconstrução

A reconstrução do equilíbrio MHD, devido à importância já frisada, tem motivado o estudo de técnicas cada vez mais rápidas para o controle do plasma. Isto tanto do ponto de vista de equipamentos como do ponto de vista de métodos computacionais.

Redes neurais é um dos métodos que vêm sendo cogitados para o processo de reconstrução do equilíbrio. O controle da posição do plasma e a reconstrução através da análise

de redes neurais está sendo aplicado no tokamak COMPASS-D [Kock-96]. Este método também trata estatisticamente um banco de dados, mas usando processos de realimentação e "aprendizado", simplificando a procura dos dados.

7.7 Considerações Finais

A reconstrução do equilíbrio MHD em tokamaks e projetos de reatores para testar a viabilidade da fusão nuclear controlada não é ainda, um trabalho concluído sobre o que é mais eficaz ou melhor. Talvez o caminho seja o uso de vários métodos acoplados, adotando o que cada um tem de melhor. Neste sentido, pretendemos utilizar no início da operação do TCA/BR a Função de Parametrização e o EFIT.

Apêndice A

Código TCABREC
Parâmetros de Entrada e Saída

A.1 Introdução

Como descrito no Cap. 3, o código de equilíbrio MHD **TCABREC** possui uma estrutura de entrada de dados e uma saída de resultados para pós-processamento gráfico. Estes resultados são gravados em arquivos.

Neste apêndice vamos descrever os parâmetros de entrada e saída do TCABREC.

A.2 Parâmetros de Entrada

Na Fig. A.1 temos um desenho esquemático mostrando os principais dados usados como entrada para o TCABREC. Nesta figura está representada a grade de pontos que caracteriza o domínio de cálculo onde será resolvida a equação de Grad-Shafranov.

Os dados de entrada são lidos em um arquivo que possui a estrutura mostrada na Fig. A.2, onde podemos ver a disposição de cada parâmetro. Os dados estão agrupados em itens que relacionam as diferentes partes do sistema que formam o tokamak; *Coils (bobinas), Grid (grade), Constrains (vínculos), Plasma Boundary (contorno), Points (limitadores).* No Cap. 3, temos um exemplo numérico deste arquivo.

A seguir, vamos apresentar uma descrição de cada um destes dados de entrada.

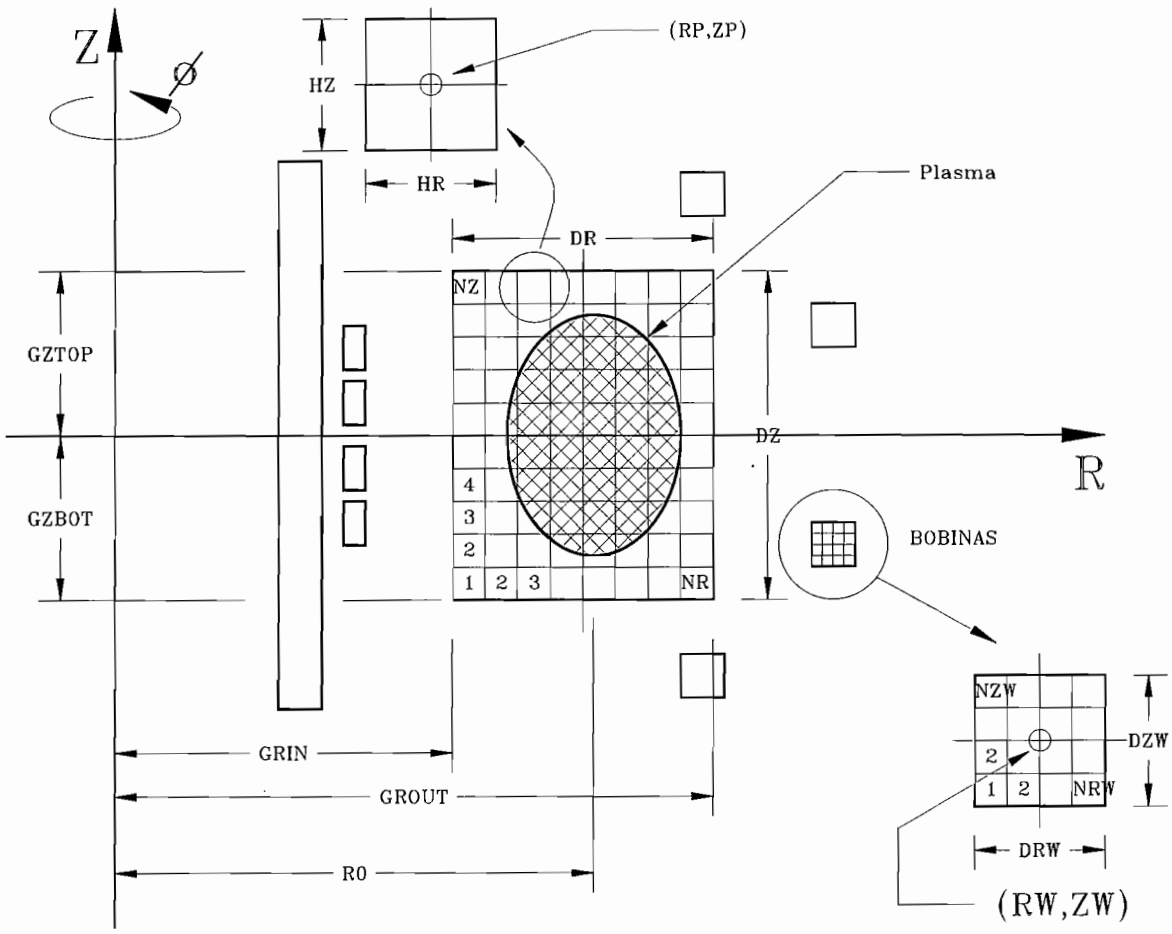

Figura A.1: Desenho esquemático ilustrando os principais parâmetros de entrada para o código de equilíbrio MHD **TCABREC**.

```
Coils
NW
 KW    RW      ZW      DRW     DZW    NRW  NZW  Type   TW     NTW
  .   .....   .....   .....   .....   ..   ..   ..    ......  ...
  .   .....   .....   .....   .....   ..   ..   ..    ......  ...
  .   .....   .....   .....   .....   ..   ..   ..    ......  ...
Grid
   GRIN    GROUT   GZBOT   GZTOP  NR  NZ
Constrains
ND
    RD      ZD
   ....    ....
   ....    ....
   ....    ....
Plasma
   TOK     BJO     SLO   NFOR  NPAR    AP    AF   RO   ZO
Accuracy
   TOL1    TOL2    TOL3   MAX1   MAX2
Boundary
NB
Points
NL
    RD      ZD
   ....    ....
   ....    ....
   ....    ....
```

Figura A.2: Estrutura do arquivo de entrada para o código *TCABREC*.

Bobinas

Parâmetros que caracterizam as *bobinas* que produzem o campo vertical de equilíbrio.

- *NW* Número de bobinas
- *KW* Ordenação de bobina
- *RW* Posição radial do centro de bobina
- *ZW* Posição Z do centro de bobina
- *DRW* Largura de bobina
- *DZW* Altura de bobina
- *NRW* Número de voltas na direção R
- *NZW* Número de voltas na direção Z
- *TYPE* Variável que caracteriza se a bobina deve ter sua corrente ajustada. O valor 0 é para bobinas com corrente fixa e valores diferente de zero agrupa bobinas com correntes iguais a serem ajustadas
- *TW* Corrente em cada volta da bobina definida pela variável NTW
- *NTW* Número total de correntes na bobina

Para efeito de cálculo, o código não trabalha com o número real de voltas que cada bobina possui. O número usado é definido por $NRW \times NZW$ e o valor real é NTW. Isto é feito para otimização do tempo de uso do computador.

Grade

Parâmetros que caracterizam a grade usada nos cálculos e que define o domínio R descrito no Cap. 3. Estes dados estão bem caracterizados na Fig. A.1, sendo eles *GRIN*, *GROUT*, *GZBOT*, *NR*, *NZ*.

Vínculos

Pontos que caracterizam a posição do plasma através do centro geométrico do conjunto.

- *ND* Número de vínculos
- *RD* Posição R de vínculo
- *ZD* Posição Z de vínculo

Plasma

Parâmetros que caracterizam o plasma.

- *TOK* Corrente total de plasma
- *BJ0* β poloidal
- *SL0* Indutância interna
- *NFOR* Tipo de fórmula usada para a parametrização da densidade de corrente de plasma
- *NPAR* Número de parâmetros
- *AP* Parâmetro da fórmula acima
- *AF* Parâmetro da fórmula acima
- *R0* Posição R do eixo magnético
- *Z0* Posição Z do eixo magnético

Tolerâncias

Valores de tolerância usados nos laços dos processos iterativos para a resolução da equação de Grad-Shafranov.

- *TOL1* Tolerância para laço interno
- *TOL2* Tolerância para laço externo
- *TOL3*

- *MAX1* Número máximo de laços internos
- *MAX2* Número máximo de laços externos

Contorno

- *NB* Número de pontos para o cálculo de valores do contorno do plasma

Limitadores

Valores que caracterizam pontos que definem a última superfície de fluxo.

- *NL* Número de limitadores
- *RL* Vetor contendo a posição R de cada limitador
- *ZL* Vetor contendo a posição Z de cada limitador

A.3 Parâmetros de Saída

Os parâmetros de saída do código TCABREC são gravados em um arquivo para pós-processamento. Os dados armazenados são:

- Dados lidos no arquivo de entrada
- *NB* pontos da última superfície que define a borda do plasma
- Parâmetros que caracterizam o plasma:
  - μ: parâmetro diamagnético
  - Valor final ajustado para α_P
  - Valor final ajustado para α_F
  - Ψ_b: Ψ na borda
  - Ψ_a: Ψ no eixo magnético do plasma
  - Raio menor da coluna de plasma plasma na direção R (a) e na direção Z (b)
  - Elongação do plasma definido por b/a
  - Triangularidade do plasma

  - Posição do centro geométrico da coluna do plasma (R_{geo}, Z_{geo})
  - Posição do centro magnético (R_{mag}, Z_{mag})

- Posição do centro de todas voltas das bobinas verticais usadas para efeito de cálculo e a corrente correspondente

- O valor da corrente e pressão em cada ponto da grade que define o domínio de cálculo

A.4 Pós-Processamento Gráfico

O pós-processamento gráfico é realizado por um programa que lê os dados do arquivo de resultados gerado pelo TCABREC e gera uma saída que pode ser vista em monitor de vídeo ou impresso em impressoras laser ou jato de tinta. No Cap. 3 estão mostrados os resultados impressos de um exemplo de cálculo realizado para o TCA/BR.

Apêndice B

Algumas Configurações e Reconstruções de Equilíbrio MHD

B.1 Introdução

Apresentamos neste apêndice algumas configurações de equilíbrio e reconstruções que são expostas aqui para que o leitor tenha a oportunidade de comparar outros resultados além dos que aparecem no texto regular.

As configurações escolhidas estão baseadas na *medida de confiança* Q quando usamos a Função de Parametrização como método de reconstrução do equilíbrio. Temos basicamente duas configurações que foram divididas em dois blocos. O primeiro bloco é composto pelas Figs. B.1, B.2, B.3 e Tabela B.1 e refere-se a uma reconstrução com $Q = 0,9097$ e o segundo bloco pelas Figs. B.4, B.5, B.6 e Tabela B.2 referindo-se a uma reconstrução com $Q = 7,514$.

A primeira figura de cada bloco apresenta os parâmetros de entrada para o código de equilíbrio *TCABREC* e as duas figuras seguintes, os resultados para este conjunto de dados. A Tabela refere-se aos dados comparativos dos parâmetros de equilíbrio obtidos pelo código e reconstruídos usando o *sistema FP*.

B.2 Configurações

A seguir são apresentadas as configurações.

```
Coils
15
  1   0.302   0.000   0.040   1.156   2  73   0    0.1470 147
  2   0.389   0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  2   0.389  -0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  3   0.885   0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  3   0.885  -0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  4   0.934   0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  4   0.934  -0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850   0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850  -0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  6   0.334   0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  6   0.334  -0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334   0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334  -0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  8   1.250   0.280   0.018   0.036   1   1   0    0.0000   1
  8   1.250  -0.280   0.018   0.036   1   1   0    0.0000   1
Grid
   0.420   0.810  -0.215   0.215 32 33
Constrains
2
   0.435   0.000
   0.795   0.000
Plasma
   0.111   0.109   0.916  1  1   1.939   1.789   0.615   0.000
Accuracy
  0.01000  0.01000  0.00100  50 100
Boundary
90
Points
       2
   0.435   0.000
   0.795   0.000
```

Figura B.1: Parâmetros de entrada para o código TCABREC. Os resultados são apresentados nas Figs. B.2 e B.3. O significado de cada dado de entrada apresentado na figura é descrito no apêndice A.

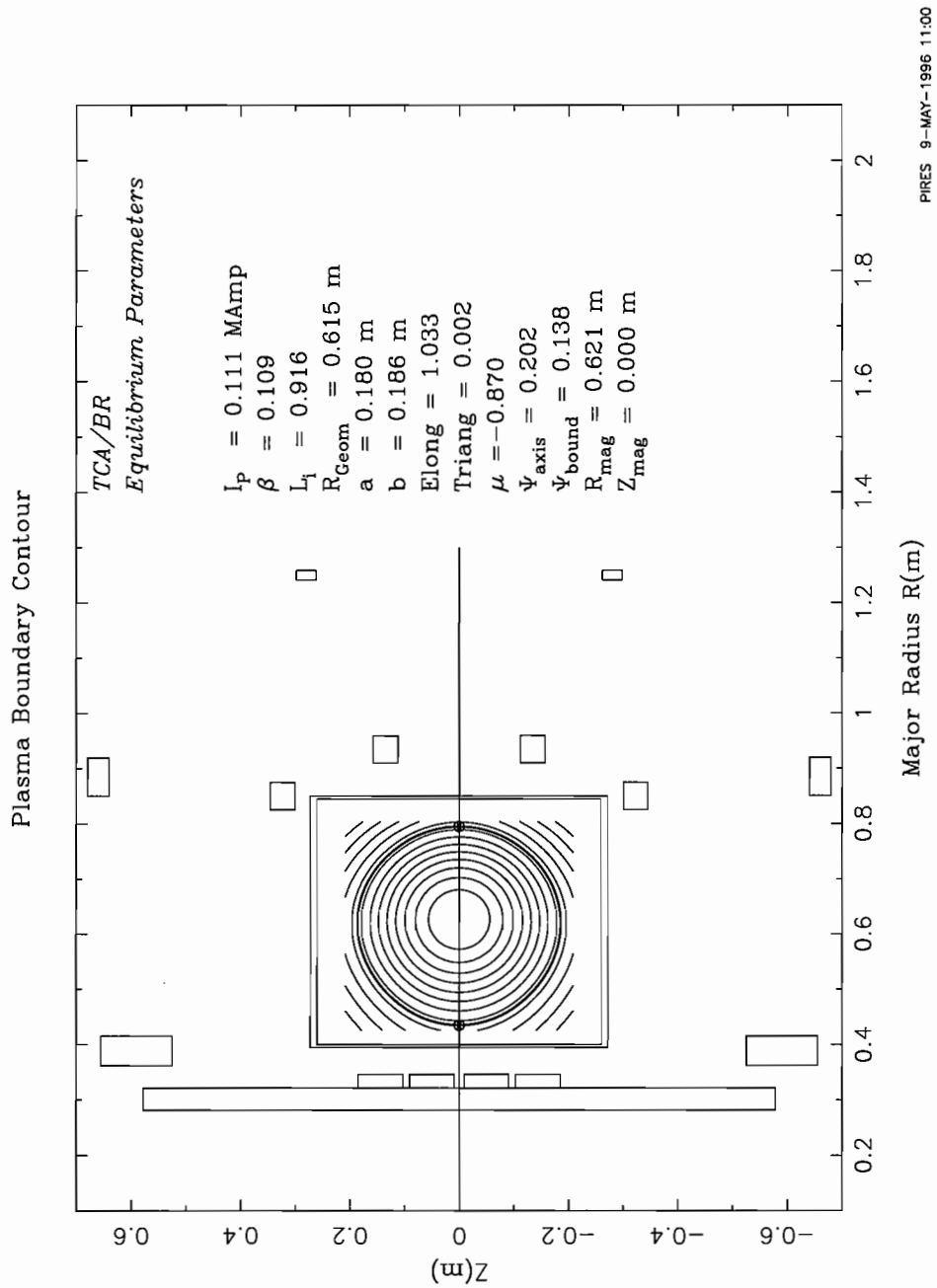

Figura B.2: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.1. Na figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD descritos no capítulo 2.

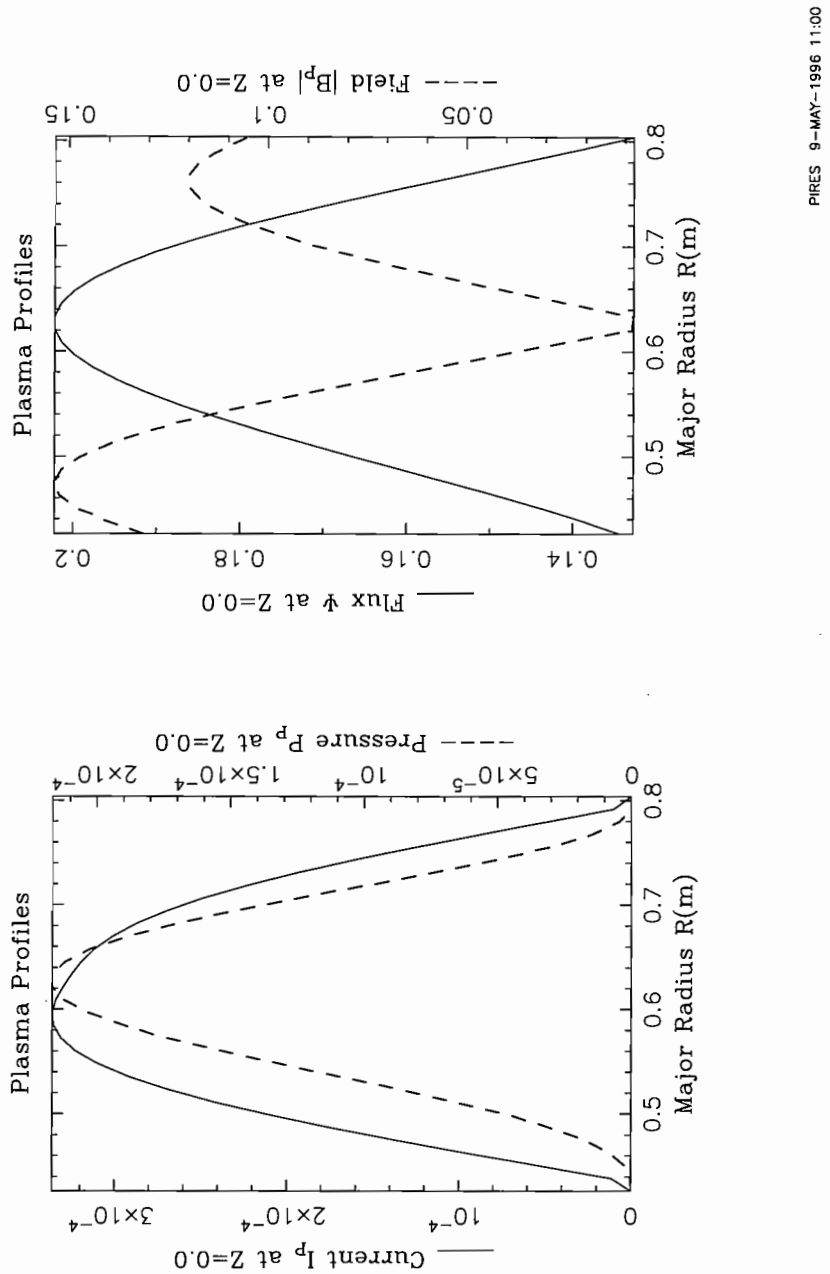

Figura B.3: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.1. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$.

$$Q = \frac{1}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\tilde{q}_i^2}{\lambda_i + \tilde{\epsilon}_i^2} = 0,9097$$

Parâmetro	*Valor no banco de dados*	*Valor reconstruído*	*Diferença porcentual*
R_{geo}	$0,6150$	$0,6153$	0,0488
Z_{geo}	$0,0$	$0,0$	
R_{mag}	$0,6211$	$0,6272$	0,9821
Z_{mag}	$0,0$	$0,0$	
a	$0,1800$	$0,1781$	1,056
b	$0,1860$	$0,1841$	1,022
$TRIA$	$2,231 \times 10^{-3}$	$-2,197 \times 10^{-2}$	31,89
$ELON$	$1,033$	$1,034$	0,0968
β_p	$0,1090$	$0,1030$	5,505
l_i	$0,9149$	$0,8986$	1,782
I_P	$0,1110$	$0,1110$	0,007
Ψ_a	$0,2017$	$0,2019$	0,0992
Ψ_b	$0,1376$	$0,1386$	0,7267
μ	$-0,8698$	$-0,8761$	0,7243
α_P	$1,315$	$1,569$	19,32
α_F	$1,315$	$1,555$	18,25

Tabela B.1: Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a FP. A diferença porcentual refere-se a diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100.

```
Coils
15
  1   0.302   0.000   0.040   1.156   2  73   0    0.1470 147
  2   0.389   0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  2   0.389  -0.590   0.054   0.130   3   7   0    0.0210  21
  3   0.885   0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  3   0.885  -0.660   0.069   0.039   2   2   0    0.0070   7
  4   0.934   0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  4   0.934  -0.135   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850   0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  5   0.850  -0.323   0.049   0.045   1   1   2   -0.0200  10
  6   0.334   0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  6   0.334  -0.050   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334   0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  7   0.334  -0.144   0.025   0.082   1  10  -2    0.0200  10
  8   1.250   0.280   0.018   0.036   1   1   0    0.0000   1
  8   1.250  -0.280   0.018   0.036   1   1   0    0.0000   1
Grid
   0.420   0.810  -0.215   0.215 32 33
Constrains
2
   0.430   0.000
   0.785   0.000
Plasma
   0.081   0.097   0.731  1  1   1.745   1.759   0.615   0.000
Accuracy
  0.01000  0.01000  0.00100  50 100
Boundary
90
Points
       2
   0.430   0.000
   0.785   0.000
```

Figura B.4: Parâmetros de entrada para o código TCABREC. Os resultados são apresentados nas Figs. B.5 e B.6. O significado de cada dado de entrada apresentado na figura é descrito no apêndice A.

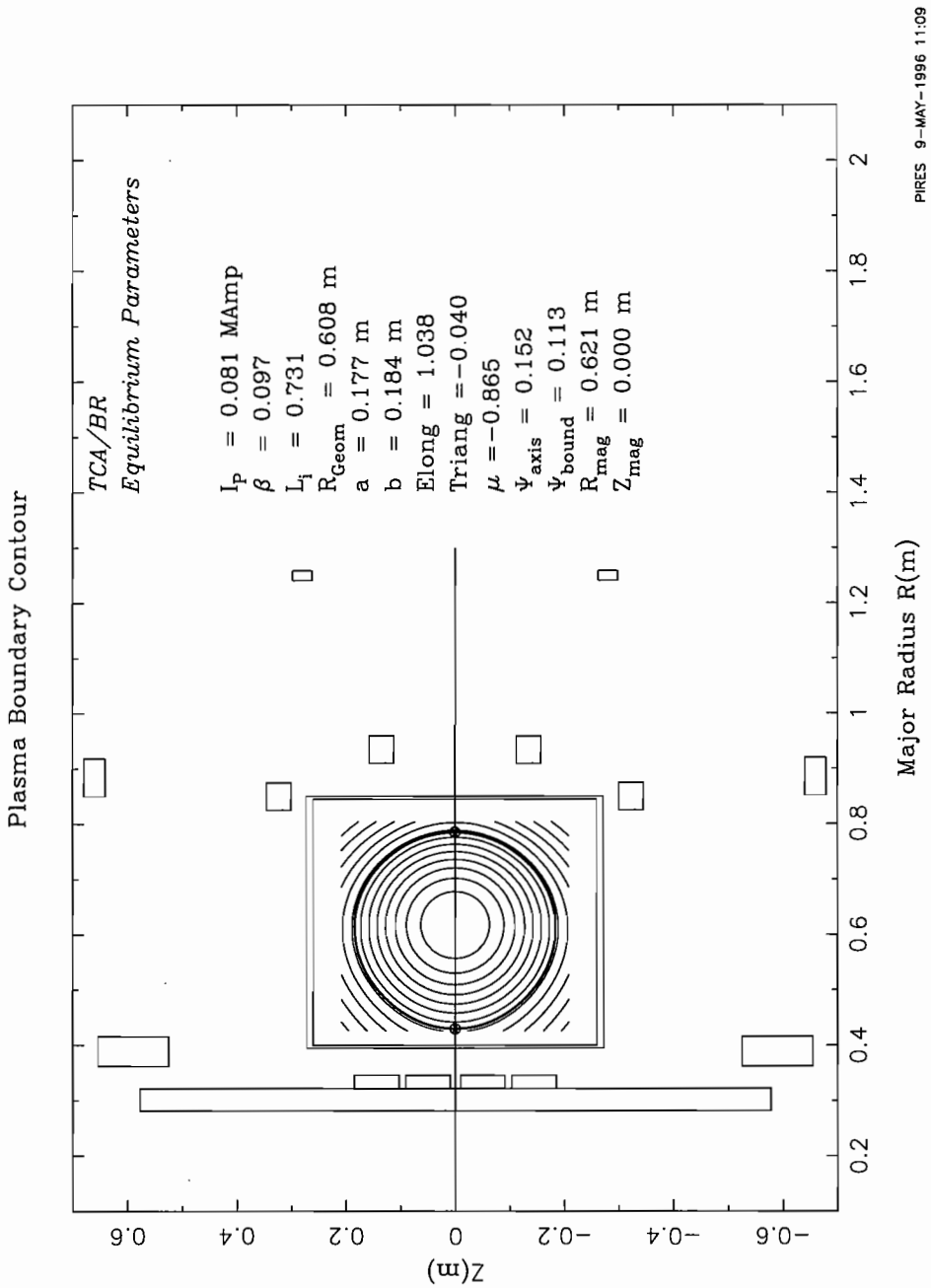

Figura B.5: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.4. Na figura são mostrados as superfícies de fluxo, o contorno do plasma (superfície representada por uma linha mais grossa) e alguns parâmetros que caracterizam o equilíbrio MHD descritos no capítulo 2.

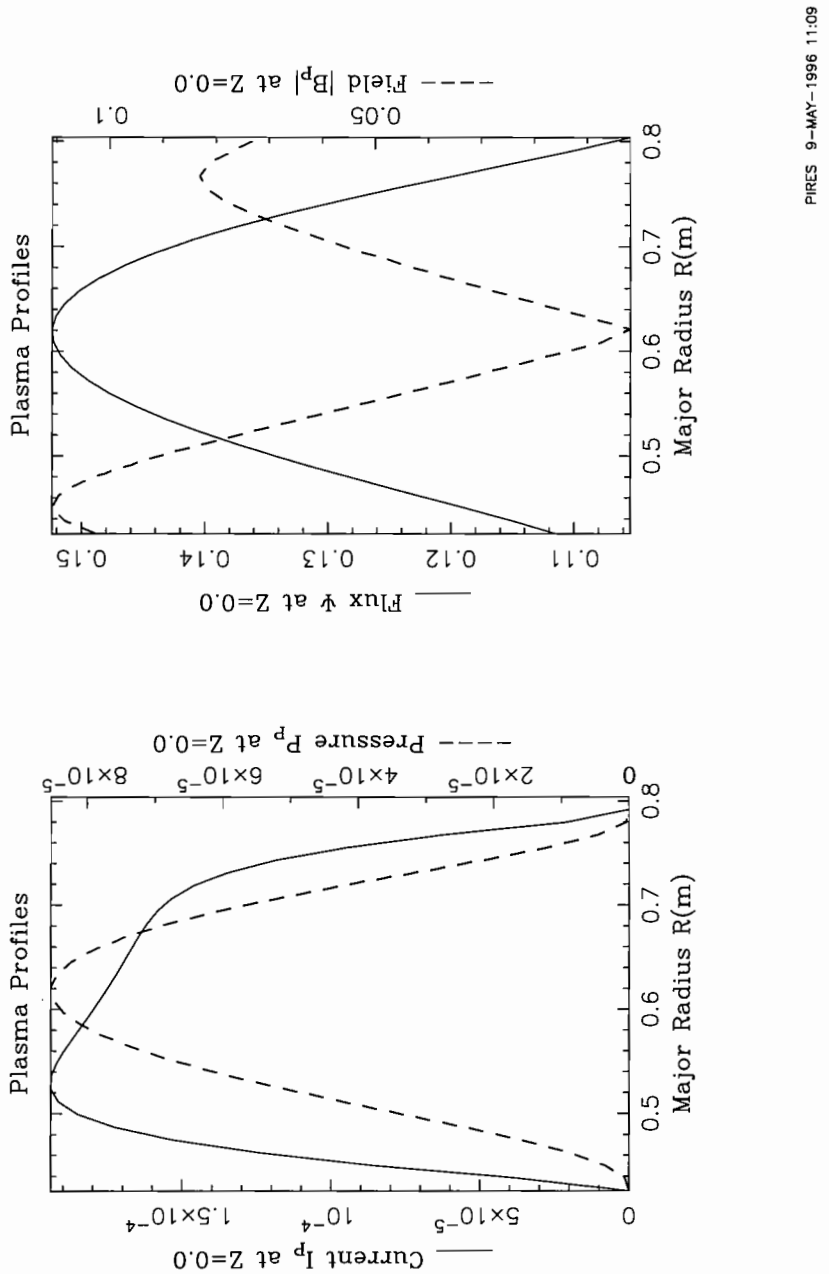

Figura B.6: Resultado gerado pelo código TCABREC referente à configuração apresentada na Fig. B.4. Nesta figura estão plotados os perfis de corrente de plasma e pressão em função do raio maior do plasma para $Z = 0$, os perfis de Ψ e do campo poloidal B_P em função do raio maior do plasma para $Z = 0$.

$$Q = \frac{1}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\tilde{q}_i^2}{\lambda_i + \tilde{\epsilon}_i^2} = 7,514$$

Parâmetro	*Valor no banco de dados*	*Valor reconstruído*	*Diferença porcentual*
R_{geo}	$0,6075$	$0,6096$	0,3457
Z_{geo}	$0,0$	$0,0$	
R_{mag}	$0,6211$	$0,6222$	0,1771
Z_{mag}	$0,0$	$0,0$	
a	$0,1775$	$0,1814$	2,198
b	$0,1843$	$0,1880$	2,008
$TRIA$	$-4,033 \times 10^{-2}$	$-2,747 \times 10^{-2}$	31,89
$ELON$	$1,038$	$1,036$	0,1927
β_p	$9,700 \times 10^{-2}$	$8,732 \times 10^{-2}$	9,979
l_i	$0,7384$	$0,8496$	15,06
I_P	$0,0810$	$0,0809$	0,1235
Ψ_a	$0,1521$	$0,1539$	1,188
Ψ_b	$0,1126$	$0,1109$	1,510
μ	$-0,8655$	$-0,8802$	1,698
α_P	$2,789$	$1,846$	33,81
α_F	$2,788$	$1,839$	34,04

Tabela B.2: Comparação entre parâmetros do equilíbrio calculados pelo código de equilíbrio e pelo sistema de reconstrução usando a FP. A diferença porcentual refere-se a diferença entre o valor no banco de dados e o valor reconstruído, em módulo, vezes 100.

Bibliografia

[Arts-72] L.A. Artsimovich, *Tokamak Devices*, Nuclear Fusion **12**, (1972), 215-252

[Bate-80] G.Bateman, *"MHD Instabilities"*, The MIT Press, Cambridge, 1980

[Bevi-69] P.R. Bevington, *"Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences"*, McGraw-Hill, USA, 1969

[Blum-89] J. Blum, *"Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics"*, John Wiley and Sons, London, 1989

[Braa-86] B.J. Braams, W. Jilge, K. Lackner, *Fast Determination of Plasma Parameters Through Function Parametrization*, Nuclear Fusion **6**, (1986), 699

[Braa-86a] B.J. Braams, *"Computational Studies in Tokamak Equilibrium and Transport"*, Ph.D. Thesis, University of Utrecht, Utrecht, 1986

[Braa-91] B.J. Braams, *The Interpretation of Tokamak Magnetic Diagnostic*, Plasma Physics and Controlled Fusion **33**, (1991), 715-748

[Cena-75] G. Cenacchi, A. Toroni, A. Sestero, *Numerical Solution of the MHD Equilibrium Equation for an Axially Symetric Free-Boundary Plasma in a Torus with Arbitrary Cross-Section*, Il Nuovo Cimento **25b**, (1975), 279-294

[Chee-79] A.D. Cheetham, A. Heym, F. Hofmann, K. Hruska, R. Keller, A. Lietti, J.B. Lister, A. Pochelon, H. Ripper, R. Schreiber, A. Simik, *The TCA Tokamak Project Report 1979*, École Polytechnique Fédérale de Lousane, Suisse. Report 162/80 (1979)

[Chri-82] J.P. Christiansen, J.B. Taylor, *Determination of Current Distribution in a Tokamak*, Nuclear Fusion **22**, (1982), 111-115

[Cour-66] R. Courant, D. Hilbert, *"Methods of Mathematical Physics"*, Interscience Publishers, New York, 1966

[Elfi-95] A.G. Elfimov, *Alvfèn Wave Current Drive*, Physica Scripta **160**, (1995), 71-78

[Frei-87] J.Freidberg, *"Ideal Magnetohydrodynamics"*, Plenum Press, New York, 1987

[Fort-91] Microsoft, *"Microsoft FORTRAN Reference - Version 5.1 - for MS-DOS Operating System"*, Microsoft Corporation, USA, 1991

[Galv-89] R.M.O. Galvão, *"Teoria Magneto-Hidrodinâmica: Equílibrio e Estabilidade"*, Notas de Aula de Curso, ITA-CTA, 1989

[Galv-89a] R.M.O. Galvão, J.P. Goedbloed, G.T.A. Huysmans, B. Keegan, E. Lazzaro, E. Springmann, F. Tiboni, *Implementation of the Stability Code HBT at Jet*, Joint European Torus Report JET-IR, Abingdom, 1989

[Haes-90] W.D.D'haeseleer, W.N.G. Hitchon, J.D. Callen, J.L. Shohet, *"Flux Coordinates and Magnetic Field Structure"*, Springer-Verlag, New York, 1990

[Heal-94] M.A. Heald, J.B. Marion, *"Classical Electromagnetic Radiation"*, 3th ed. Saunders College Publishing, USA, 1994

[Helt-78] F.J. Helton, T.S. Wang, *MHD Equilibrium in Non-Circular Tokamaks with Field-Shaping coil Systems*, Nucl. Fusion **18**, (1978), 1523

[Hutc-87] I.H. Hutchinson, *"Principles of Plasma Diagnostics"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[Jack-62] J.D. Jackson, *"Classical Electrodynamics"*, Willey, New York, 1962

[Jard-85] S.C. Jardin, *"Multiple Time-Scale Methods in Tokamaks Magnetohydrodynamics"*, in Multiple Time and Scales, J. Brackbill, B. Cohen ed., Academic Press (1985)

[John-79] J.L. Johnson, H.E. Dalhed, J.M. Greene, R.C. Grimm, Y.Y. Hsieh, S.C. Jardin, J. Manickam, M. Okabayashi, R.G. Storer, A.M.M. Todd, D.E. Voss, K.E. Weimer, *Numerical Determination of Axisymmetric Toroidal Magnetohydrodynamic Equilibria*, Jornal of Computational Physics **32**, (1979), 212-234

[Kado-92] B.B. Kadomtsev, *"Tokamak Plasma: A Complex Physical System"*, Institute of Physics Publishing, London, 1992

[Kami-94] A.O. Kaminskii, T.G. Kilovataya, Yu.K. Kuznetsov, I.V. Yasin, *Precise and Fast Methods of ITER Tokamak Plasma Shape and Position Determination from Outer Magnetic Measurements*, Plasma Physics Reports **20**, (1994), 133-136

[Kock-96] L. de Kock, Yu.K. Kuznetsov, *Magnetic Diagnostic for Fusion Plasmas*, Nuclear Fusion **36**, (1996), 387-400

[Kuzn-87] Yu.K. Kuznetsov, V.N. Pyatov, I.V. Yasin, *Possibility of Determining Equilibrium Plasma Current and Pressure Profiles in a Tokamak from Magnetic Measurements*, Sovietic Journal Plasma Physics **13**, (1987), 75-80

[Kuzn-96] Yu.K. Kuznetsov, *Magnetic Diagnostic of Plasma Equilibrium in the TCA/BR Tokamak*, Relatório Interno, IFUSP, São Paulo, 1996

[Kuzn-94] Yu.K. Kuznetsov, *The ITER Tokamak Plasma Magnetic Diagnostics*, Plasma Physics Reports **20**, (1994), 122-128

[Lack-76] K. Lackner, *Computation of Ideal MHD Equilibria*, Computer Physics Communications **12**, (1976), 33-44

[Lao-85] L.L. Lao, H.St. John, R.D. Stambaugh, A.G. Kellman, W. Pfeiffer, *Reconstruction of Current Profile Parameters and Plasma Shapes in Tokamaks*, Nuclear Fusion **25**, (1985), 1611

[Lao-85a] L.L. Lao, H.St. John, R.D. Stambaugh, W. Pfeiffer, *Separation of $\bar{\beta}_p$ and l_i in Tokamaks of Non-Cirular Cross-Section*, Nuclear Fusion **25**, (1985), 1421

[Lao-90] L.L. Lao, J.R. Ferron, R.J. Groebner, W. Howl, H.St. John, E.J. Strait, T.S. Taylor, *Equilibrium Analysis of Current Profiles in Tokamaks*, Nuclear Fusion **30**, (1990), 1035

[Laws-57] J.D. Lawson, *Proceedings of the Physical Society*, Section B **70**, (1957), 6

[Lazz-88] E. Lazzaro, P. Mantica, *Experimental Identification of Tokamak Equilibrium Using Magnetic and Diamagnetic Signals*, Plasma Physics and Controlled Fusion **12**, (1988), 1735-1754

[Ludw-91] G.O. Ludwig, Y. Aso, J.J. Barroso, J.L. Ferreira, R.M.O. Galvão, A. Montes, G.M. Sandonato, M. Yeda, W.P. de Sá, A.G. Tuszel, L.C.S. Góes: *Proceedings of a Technical Committee Meeting*, Arlington, Virginia, USA, (1991), 159

[Luxo-82] J.L. Luxon, B.B. Brown, *Magnetic Analysis of Non-circular Cross section Tokamaks*, Nuclear Fusion **22**, (1982), 813-821

[Manl-86] B.F.J. Manly, *"Multivariate Statistical Methods - A Primer"*, Chapman and Hall, London, 1982

[McCa-92] P.J. McCarthy, *"An Integrated Data Interpretation System for Tokamak Discharges"*, Ph.D. Thesis, University College Cork, Ireland, 1992

[McCr-89] R.L. McCrory Jr, *Energy Supply and Demand in the Twenty-first Century*, Journal of Fusion Energy, **8**, (1989)

[Mill-91] B.Ph. Milligen, *"Analysis of Equilibrium and Topology of Tokamak Plasmas"*, Ph.D. Thesis, University of Utrecht, Utrecht, 1991

[Mill-91a] B.Ph. van Milligen, N.J. Lopes Cardoso, *Function Parametrization: A Fast Inverse Mapping Method*, Comp. Phys. Comm. **66**, (1991), 243

[Mill-91b] B.Ph. van Milligen, H. Soltwisch, N.J. Lopes Cardoso, *Application of Function Parametrization to the Analysis of Polarimetry and Interferometry Data at TEXTOR*, Nucl.Fusion **31**, (1991), 309

[Mukh-71] V.S. Mukhovatov, V.D.Shafranov, *Plasma Equilibrium in a Tokamak*, Nuclear Fusion, **11**, (1971), 605

[Nasc-77] I.C. Nascimento, R.M.O. Galvão, A.N. Fagundes, J.H. Vuolo, R.M.P. Drozak, *Projeto TBR*, Relatório Interno LFP-1, IFUSP, São Paulo, 1977

[Nasc-81] I.C. Nascimento, A.N. Fagundes, R.P. da Silva, R.M.O. Galvão, E. del Bosco, J.H. Vuolo, E.K. Sanada, R. Dallaqua, *Fusion Energy - 1981, Proceedings os the Spring College on Plasma Physics*, Trieste, (1981), 45

[Nasc-89] I.C. Nascimento, M. Machida, A.G. Tuszel, S. Wang, Y. Chen, M. Brusati, R.M.O. Pauletti, W.P. de Sá, F.T. Degasperi, I.L. Caldas, A.N. Fagundes, J.I. Elizondo, V.P. Mamanna, R.P. da Silva, A.M. da Paz, *Projeto TBR-2*, Relatório Interno, IFUSP, São Paulo, 1989

[Nasc-91] I.C. Nascimento, R.M.O. Galvão, R.M.O. Pauletti, A.G. Tuszel, W.P. de Sá, F.T. Degasperi, F.R. Bignardi, N. Coelho-Nascimento, J.I. Elizondo, I.L. Caldas, M. Machida, P.H. Sakanaka, G.O. Ludwig, A. Montes, M. Ueda, Y. Li and J. Shi, *The TBR-E Project, Basic Enginnering Design*, Internal Report, IFUSP, São Paulo, 1991

[Nasc-93] I.C. Nascimento, I.L. Caldas, R.M.O. Galvão, *Tokamak Research at University of São Paulo*, Journal of Fusion Energy, **12**, (1981), 295-302

[Nasc-94] I.C. Nascimento, R.M.O. Galvão, A.G. Tuszel, F.T. Degasperi, L. Rouchko, R.P. da Silva, A.N. Fagundes, E.K. Sanada, R.M.O. Pauletti, W.P. de Sá, A. Vannucci, J.H. Vuolo, J.I. Elizondo, M. Machida, I.L. Caldas, M.C.R. Andrade, A.C.A. Ferreira, H. Franco, I.H. Tan, V.S.W. Vuolo, M.V.A.P. Heller, M. Roberto, M.Y. Kucinski, *Project TCA/BR: A Middle Size Tokamak Facility in Brazil*, Proceedings of 1994 International Conference on Plasma Physics, Foz do Iguaçu, (1994), 69-72

[Nasc-95] I.C. Nascimento, R.M.O. Galvão, A.G. Tuszel, F.T. Degasperi, L. Rouchko, R.P. da Silva, A.N. Fagundes, A.C.P. Mendes, E.K. Sanada, V. Taran, R.M.O. Pauletti, W.P. de Sá, A. Vannucci, J.H. Vuolo, H. Franco, J.I. Elizondo, I.L. Caldas, M.C.R. Andrade, A.C.A. Ferreira, I.H. Tan, V.S.W. Vuolo, M.V.A.P. Heller, M.Y. Kucinski, E. Ozono, M.S.T. Araujo, E.A. Lerch, *Present Status of TCA/BR Project*, Proceedings of 3º Encontro Brasileiro de Física dos Plasmas, Águas de Lindóia, (1995), 147-150

[Paul-92] R.M.O. Pauletti, *"Alguns Problemas Estruturais Ligados ao Projeto de Máquinas para Pesquisa em Fusão Termonuclear Controlada"*, Tese de Mestrado, EP-USP, São Paulo, 1992

[Reit-93] J.R. Reitz,F.J. Milford, R.W. Christy: *"Fundamentos da Teoria Eletromagnética"*, 4th ed. Addison-Wesley, Reading MA, 1993

[Sa-90] W.P. de Sá, M. Machida, I.C. Nascimento, R.M.O. Galvão, *Proc of the IV Latin-American Workshop on Plasma Physics*, Proceedings of the IV Latin-American Workshop on Plasma Physics, Buenos Aires, Argentina, (1990), 39-42

[Sa-92] W.P. de Sá, M. Roberto, R.M.O. Galvão, *TBR-E MHD Equilibrium Studies*, Proceedings of the V Latin-American Workshop on Plasma Physics, Mexico City, (1992), 74

[Sa-93] W.P. de Sá, R.M.O. Galvão, A.N. Fagundes: *Reconstruction of TBR-1 Equilibrium Parameters*, Proceedings of 2º Encontro Brasileiro de Física dos Plasmas, Serra Negra, (1993), 287-290

[Shaf-58] V.D.Shafranov, *On Magnetohydrodynamical Equilibrium Configurations, Sov. Phys. JETP.* **6**, 545, (1958), *J. Exper. Theor. Phys. (USSR)* **33**, (1957), 710

[Shaf-66] V.D.Shafranov, *Plasma Equilibrium in a Magnetic Field, in "Reviews of Plasma Physics"*, Vol. 2 (M.A. Leontovich, Ed.), Consultants Bureau, New York, 1966. (Translation of "Voprosy Teorii Plasmy", Atomizdat, Moscow, 1963)

[Shaf-71] V.D.Shafranov, *Determination of the Parameters β_I and l_i in a Tokamak for Arbitrary Shape of Plasma Pinch Cross-Section*, Plasma Physics **13**, (1971), 757-762

[Shaf-72] V.D.Shafranov, L.E. Zakharov, *Use of The Virtual-Casing Principle in Calculating the Containing Magnetic Field in Toroidal Plasma Systems*, Nuclear Fusion **12**, (1972), 599-601

[Vann-95] A. Vannucci, R.M.O. Galvão, F.T. Degasperi, M.S.T. Araujo, V. Okano, M.Y. Kucinski, I.C. Nascimento, W.P. de Sá, Y. Kuznetsov, E.K. Sanada, H. Franco, I.H. Tan, E.C. da Silva, *Magnetic Fluctuations Detecting System for TCA/BR Tokamak*, Proceedings of 3º Encontro Brasileiro de Física dos Plasmas, Águas de Lindóia, (1995), 199-202

[Vuol-92] J.H. Vuolo, *"Fundamentos da Teoria de Erros"*, Edgard Blücher, São Paulo, 1992

[Yasi-95] I.V. Yasin, Yu.K. Kuznetsov, *Comunicações Pessoais escritas por Yu.K. Kuznetsov durante visita ao IFUSP em março de 1995*

[Wess-87] J. Wesson, *"Tokamaks"*, Oxford University Press, Oxford UK, 1987

[Wind-72] H. Wind, *Function Parametrization*, Proceedings of the CERN Computing and Data Processing School, CERN 72-21, (1972), 53

[Wind-84] H. Wind, *(a) Principal Components Analysis and Its Application to Track Finding, (b) Interpolation and Function Representation, "Formulae and Method in Experimental Data Evolution"* **Vol.2**, European Physical Society, Geneva, 1984

[Zakh-73] L.E. Zakharov, V.D.Shafranov, *Equilibrium of a Toroidal Plasma with Noncircular Cross Section*, Sov. Phys. Tech. Phys. **18**, (1973), 151-156

[Zakh-86] L.E. Zakharov, V.D.Shafranov, *Equilibrium of Current-Carrying Plasmas in Toroidal Configurations in "Reviews of Plasma Physics"*, Vol. 11 (M.A. Leontovich, Ed.), Consultants Bureau, New York, 1986. (Translation of "Voprosy Teorii Plasmy", Atomizdat, Moscow, 1982)