23/10/95

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

TEORIA CINÉTICA PARA MISTURAS DE GASES IONIZADOS

MAURO GOMES RODBARD

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2342
INSTITUTO DE FÍSICA

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. *Gilberto Medeiros Kremer* (UFPR)
Prof. Dr. *Silvio Roberto de Azevedo Salinas* (USP)
Prof. Dr. *Ricardo Magnus Osório Galvão* (USP)
Prof. Dr. *Wagner Figueiredo* (UFSC)
Prof. Dr. *I-Shih Liu* (UFRJ)

Iberê Luiz Caldas
Orientador: Prof. Dr. *Iberê Luiz Caldas*
Co-orientador: Prof. Dr. *Gilberto Medeiros Kremer*

Iberê Luiz Caldas
Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

São Paulo

1995

SBI-IFUSP
305M810T2342

533.7
R 685t
D
ex 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Rodbard, Mauro Gomes
Teoria cinética para misturas de gases ionizados. São Paulo, 1995.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Aplicada.
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos:1.Gases ionizados; 2. Teoria cinética dos gases; 3. Coeficientes de transporte; 4. Física de plasmas.

USP/IF/SBI- 64/95

Aos meus pais
Alberto Vianna Rodbard e
Maria Izard Gomes Rodbard
por todo o carinho e amor
a mim dedicados.

Agradecimentos

Ao concluir esta tese, agradeço aos professores e colegas, o incentivo dispensados a mim, no transcorrer do trabalho.

Em especial:
Ao professor Gilberto Medeiros Kremer, pela amizade, dedicação e apoio na orientação desta tese.

Ao professor Iberê Luiz Caldas, pela atenção, acolhida e incentivo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Desenvolvemos uma teoria cinética para uma mistura de gases ionizados em presença de campos elétricos e magnéticos. As leis de Ohm, Fourier e Navier-Stokes são obtidas por dois métodos distintos que se baseiam na equação de Boltzmann. Verificamos que o emprego de teoremas de representação torna o método de Chapman-Enskog mais direto. Entretanto o método combinado mostrou-se extremamente simples, onde os coeficientes de transporte são determinados através da inversão de tensores de segunda e quarta ordens. Calculamos também a integral de colisão para as possíveis interações em gases ionizados tais como, entre partículas carregadas, partícula carregada e partícula neutra e entre partículas neutras. Como uma aplicação do método combinado, determinamos os coeficientes de condutividade elétrica, condutividade térmica, coeficiente termo-elétrico e o coeficiente de viscosidade cisalhante para um gás totalmente ionizado. Obtemos seus respectivos gráficos, considerando então um gás ionizado formado a partir do gás de hélio.

Abstract

We develop a kinetic theory for ionized gases mixtures under the presence of electric and magnetic fields. The laws of Ohm, Fourier and Navier-Stokes are obtained by two different methods based on the Boltzmann equation. We verify that the use of representation theorems makes the Chapman-Enskog method more direct. However the combined method shows up as extremely simple where the transport coefficients are determined through inversion of second-order and fourth order tensors. We calculate also the collision integrals for possible interactions in ionized gases like: between charged particles, between charged particles and neutral particles and between neutral particles. As an application of the combined method, we determine the electrical and thermal conductivity coefficients, thermo-electric and shear viscosity coefficients for a completly ionized gas. We obtain their respective graphics considering an ionized gas of helium .

Résumé

Nous developpons une théorie cinétique pour un mélange de gazes ionisés en présence des champs éléctriques et magnétiques. Les lois d'Ohm, Fourier et Navier-Stokes sont obtenues par deux méthodes distincts basées sur l'équation de Boltzmann. Nous vérifions que l'usage des théoremes de représentation conduit a une méthode de Chapman-Enskog plus directe. Par contre, une méthode combinée se révéle extrêmemente simple où les coeficients de transport sont determinés par l'inversion de tenseurs de deuxiéme et quadriéme ordre. Nous calculons aussi l'integral de collision pour les possibles interactions dans des gazes ionisés tels comme entre particules chargés, particule chargé-particule neutre et entre particules neutres. Comme application de la méthode combinée, nous obtenons les coeficients de conductivité électrique, thérmique et thérmo-électrique, et le coeficient de viscosité cisaillant pour un gaz complétament ionisé. Nous obtenons les diagrammes respectives en considerant un gaz ionisé formé à partir du gaz d'helium.

Conteúdo

Agradecimentos i

Resumo ii

Abstract iii

Résumé iv

Conteúdo v

Introdução 1

1 Princípios Básicos 4

1.1 Estrutura Molecular 4

1.1.1 *Gás Ionizado* 5

1.2 Dinâmica Clássica de uma Colisão Binária 9

1.2.1 *As Leis de Conservação* 10

1.2.2 *O Ângulo de Espalhamento* $\chi_{\beta\alpha}$ 12

1.2.3 *Seções Transversais de Choque* 13

1.2.4 *Os Potenciais de Interação Molecular* 15

1.3 Derivação da Equação de Boltzmann a partir da Hierarquia BBGKY . . . 16

1.3.1 *A Equação de Boltzmann* 19

1.4 A Equação de Transferência 24

1.5 Descrição Macroscópica da Mistura de Gases 26

1.5.1 *Os Momentos da Função de Distribuição* 26

1.5.2 *As Equações de Balanço para os Momentos* 29

1.6 Definição de Equilíbrio 33

2 O Método de Chapman-Enskog **36**

2.1 A Função Distribuição Desenvolvida em Série e a Equação de Boltzmann . 37

2.1.1 *Polinômios de Sonine* 60

2.1.2 *Desenvolvimento dos Coeficientes* $\mathcal{D}^{(l)}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{A}^{(l)}_{\alpha}$ *e* $\mathcal{B}^{(l)}_{\alpha}$ *em Polinômios de Sonine* 61

2.2 *Coeficientes de Transporte* 67

2.2.1 *O Vetor Fluxo de Difusão* 68

2.2.2 *O Vetor Densidade de Corrente Elétrica* 70

2.2.3 *O Vetor Fluxo de Calor* 72

2.2.4 *O Tensor Pressão* 76

3 O Método Combinado **82**

3.1 Introdução 82

3.2 Os Momentos da Função Distribuição 83

3.2.1 *A Função de Distribuição* 84

3.2.2 *Os Vetores Densidade de Corrente Elétrica e Fluxo de Calor* 91

3.2.3 *O Tensor Pressão* 97

4 Cálculo das Integrais de Colisão **104**

4.1 Introdução 104

4.2 Integração Preliminar 105

4.3 Potenciais de Interação entre Partículas de um Gás Ionizado 110

4.3.1 *O Potencial Coulombiano e o Potencial de Debye* 111

4.3.2 *O Potencial de Indução* 116

4.3.3 *O Potencial de Repulsão* 117

4.4 Integração de $\Omega^{(l,r)}_{\beta\alpha}$ 118

4.4.1 *Cálculo das Integrais* $\Omega^{(l,r)}_{II}$ *e* $\Omega^{(l,r)}_{EE}$ 119

4.4.2 *Cálculo das Integrais* $\Omega^{(l,r)}_{IE}$ 122

4.4.3 *Cálculo das Integrais* $\Omega^{(l,r)}_{IN}$ *e* $\Omega^{(l,r)}_{EN}$ 126

4.4.4 *Cálculo das integrais* $\Omega_{NN}^{(l,r)}$ 132
4.5 Integração Numérica e Gráficos 135

5 Determinação dos Coeficientes de Transporte para um Gás Totalmente Ionizado 144
5.1 Equações para os Termos Constitutivos 144
5.1.1 *Os Vetores Densidade de Corrente Elétrica e Fluxo de Calor* 148
5.1.2 *O Tensor Pressão* 157
5.2 Representações Gráficas 160

Conclusões 181

A Integrais Utilizadas em Teoria Cinética dos Gases 182

B Produto de um Tensor (função de pseudo-vetor) por Vetor 185

C Componentes do Tensor Viscosidade Cisalhante 187

D Programas Computacionais 194
D.1 Programas para as Integrais $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$ e para os Coeficientes de Transporte . . 194
D.1.1 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{EE}^{(l,r)} = \Omega_{II}^{(l,r)}$ 194
D.1.2 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{EI}^{(l,r)}$ 195
D.1.3 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{EN}^{(l,r)}$ 196
D.1.4 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{NN}^{(l,r)}$ 198
D.1.5 *Determinação das Curvas para os Coeficientes de Transporte* 199

Introdução

A teoria cinética dos gases descreve o comportamento macroscópico de gases a partir de uma descrição puramente microscópica de muitas partículas, baseando-se em um procedimento estatístico. O emprego desta teoria no estudo de gases ionizados exige cuidados especiais, devido à condição da inexistência de correlação entre as partículas tanto antes quanto após as colisões. Este fato delimita a faixa de atuação da teoria, principalmente no que diz respeito à densidade e temperatura dos gases ionizados.

Dentro de sua faixa de aplicabilidade a teoria cinética apresenta resultados extremamente satisfatórios e compensadores, se considerarmos as possibilidades de análise oferecidas por esta, mesmo com a extensão dos cálculos e o carregado formalismo matemático empregado.

O objetivo deste trabalho consiste em determinar o comportamento de gases ionizados em presença de campos elétricos e magnéticos, fundamentado na teoria cinética dos gases.

Através de toda uma análise microscópica específica para gases ionizados, mostramos que sob determinadas condições é possível utilizar a equação de Boltzmann para uma mistura de gases ionizados. O equacionamento dessa equação integro-diferencial é desenvolvido com o objetivo de determinar os coeficientes de transporte, utilizando-se para tanto, de dois métodos distintos: o tradicional método de Chapman-Enskog [1] e o recém desenvolvido método combinado Chapman-Enskog e Grad [2]. Em ambos os métodos supomos condições próximas ao equilíbrio do gás, de modo que o seu desvio se faça até termos em primeira ordem em um desenvolvimento envolvendo variáveis termodinâmicas e seus gradientes.

A forma geral da estrutura para o cálculo dos coeficientes de transporte de uma mistura de gases ionizados em presença de campos elétricos e magnéticos uniformes é primeiramente obtido pelo método de Chapman-Enskog de acordo com [3] ou mais recentemente [4]. Neste caso, a partir da equação de transferência obtemos as equações de balanço a serem utilizadas na eliminação das derivadas temporais existentes. Com isso na nova equação diferencial assim obtida, aparecem apenas gradientes, o que possibilita a sua solução. A presença dos campos elétricos e principalmente magnéticos, acarretam dificuldades matemáticas que são superadas através de artifícios matemáticos e de considerações físicas.

Já o emprego do novo método na determinação dos coeficientes de transporte para a

mesma mistura de gases ionizados mostra-se ser extremamente simples, se comparada com o método anterior. A partir da maximização da entropia calculamos inicialmente a função de Grad, ou seja, uma função de distribuição em termos de variáveis termodinâmicas que se fazem necessárias para um desvio do equilíbrio em primeira ordem. Substituimos essa função na equação de Boltzmann e eliminamos as derivadas temporais através das equações de balanço como no método anterior. Multiplicamos a equação assim obtida por uma função arbitrária e integramos sobre as velocidades das partículas. Substituindo a função arbitrária por cada invariante de soma, como no processo de determinação das equações de balanço a partir da equação de transferência, obtemos um sistema de equações explícitas para as variáveis termodinâmicas fora do equilíbrio. Uma vez resolvido esse sistema, os coeficientes de transportes surgem em uma forma genérica.

Os coeficientes de transportes ficam assim explicitados em função das integrais de colisão, ou seja, partes provenientes do lado direito da equação de Boltzmann que dependem, de variáveis termodinâmicas, de propriedades microscópicas próprias dos elementos químicos que formam o gás, além das velocidades das partículas e dos potenciais de interação, estes a serem integradas sobre o ângulo sólido e sobre as velocidades das partículas.

Os potenciais de interação são modelados para cada tipo de par de partículas que possam colidir. Assim para o gás parcialmente ionizado, estabelecemos os seguintes potenciais de interação (ou colisão): coulombiano entre partículas carregadas eletrostaticamente, de indução entre as partículas carregadas e as partículas neutras e de repulsão entre partículas neutras. Elaboramos então mais adequadamaente esses modelos, de modo a melhor refletir a colisão propriamente dita no interior do gás.

A integração da integral de colisão, referida acima, é efetuada em etapas. Uma vez estabelecido os potenciais de interação, iniciamos o cálculo pela determinação do ângulo de espalhamento para cada par de partículas que sofre a colisão. O cálculo se processa pela integração sobre as posições ocupadas por cada partícula na sua trajetória de colisão. Prosseguimos os cálculos com determinação das seções efetivas de colisão, efetuando para cada caso, uma integração sobre o parâmetro de impacto. Na sequência temos o cálculo da denominada integral ômega, uma integral na qual aparece as seções efetivas de colisão em função de parâmetros adimensionais sobre os quais é feita a integração . Essa sequência

de integrações descritas acima é independente das velocidades das partículas. A parcela da integração que depende das velocidades das partículas pode ser desenvolvida independentemente do cálculo da integral ômega, a qual desenvolvemos após a escolha do método de trabalho. Este procedimento é repetido para cada termo da integral de colisão que vier a aparecere nos coeficientes de transporte.

Restando a escolha do método de trabalho, optamos pelo método combinado. O método é desenvolvido, em sua forma geral, para uma mistura de gases ionizados (podendo também conter partículas neutras), em presença dos já referidos campos. Como uma aplicação prática utilizamos então este método para o caso de um gás totalmente ionizado formado por íons e elétrons. Resolvemos o sistema de equações vetoriais que surge para o caso, obtendo então as equações de transporte (equações para as variáveis termodinâmicas que surgem quando o gás se encontra fora do estado de equilíbrio). Os coeficientes dos gradientes que aparecem nessas equações , ou seja, os coeficientes de transporte, ficam então perfeitamente determinados. Procedemos uma análise desses coeficientes através de gráficos como função da temperatura e do campo magnético, onde consideramos um gás específico, no caso o gás de hélio.

Capítulo 1

Princípios Básicos

Neste capítulo fornecemos toda a formulação básica da teoria cinética dos gases necessária para o desenvolvimento desse trabalho. Analisamos os aspectos hidrodinâmicos e microscópicos de gases rarefeitos, encontramos a equação de Boltzmann para uma mistura de gases e determinamos as condições para a sua utilização no estudo dos gases ionizados. Algumas dificuldades surgem na adoção da equação de Boltzmann no desenvolvimento de uma teoria cinética voltada para gases com partículas carregadas.

1.1 Estrutura Molecular

A teoria cinética considera os gases constituídos de um número muito grande de moléculas, em que na maior parte do tempo se movem independentemente através do volume que o contém. O movimento livre é brevemente interrompido quando uma molécula se choca com as paredes do recipiente ou com outras moléculas. Se a energia potencial de interação entre as moléculas puder ser desprezada em comparação com sua energia cinética, diz-se ser o gás ideal ou rarefeito. A equação de Boltzmann verifica estas condições.

Um gás real, como por exemplo o gás Hélio, pode ser enquadrado dentro dessas características, desde que as condições sob a qual ele se encontre se situe numa determinada faixa de densidade e temperatura. Quanto mais rarefeito estiver um gás, mais próximo da situação de gás ideal ele se encontra.

Como termo de comparação das dimensões características em que se encontra um gás rarefeito, usamos como exemplo o gás hélio nas condições normais de temperatura e pressão, ou seja $273,15$K e $1,01 \times 10^5$Pa. Fornecemos alguns valores próprios desse gás. O número de

moléculas em 1m^3 é da ordem de $2,5 \times 10^{25}$ moléculas. Dividindo-se o volume em células cúbicas, com uma molécula por célula, o volume de cada célula será aproximadamente de $4 \times 10^{-26}\text{m}^3$, o que resulta em um comprimento de aresta de $3 \times 10^{-9}\text{m}$. Como a distância média entre as moléculas d, é da ordem do comprimento de uma aresta e o diâmetro molecular do átomo de hélio é $a = 2,17 \times 10^{-10}\text{m}$, assim a relação entre a distância média e diâmetro das moléculas situa-se em torno de quinze. A velocidade térmica média das partículas do gás nessas condições é $1,2 \times 10^3\text{m/s}$ e o livre caminho médio das partículas pode ser calculado em $L = 1,8 \times 10^{-7}\text{m}$, ou seja, 800 vezes maior que o diâmetro molecular. O tempo médio entre duas colisões sucessivas é então de $\tau = 1,5 \times 10^{-10}\text{s}$, o qual se for comparado com o tempo de interação entre dois átomos no momento da colisão, $\tau_c = 1,3 \times 10^{-13}\text{s}$ é 10^3 vezes mais longo que o tempo de colisão. Um gás nestas condições pode ser considerado como um gás rarefeito comportando-se como um gás ideal. À medida que as partículas que formam o gás tenham maior massa e diâmetro, os valores relativos citados acima tornam-se menores.

Em geral, gases constituidos de moléculas neutras à pressões até a ordem de 100 atmosferas podem ser considerados como ideais, pois nestas condições a probabilidade de ocorrer colisões ternárias (colisões simultâneas entre três moléculas) é pequena em comparação com as colisões binárias. Os limites para a temperatura são aqueles em que o estudo das colisões ocorram dentro das leis da mecânica clássica newtoniana, ou seja, entre 50K e 10^5K, pois nesse intervalo nem os efeitos quânticos (pois a distância média entre as moléculas muito maior que o comprimento de onda de de Broglie das partículas) nem os efeitos relativísticos (velocidades das partículas muito altas) são importantes. Esses limites não são absolutos. pois a densidade do número de moléculas não pode ser considerado como arbitrário.

Na teoria cinética encontramos toda uma formulação necessária para o estudo dos gases sob as condições acima.

1.1.1 *Gás Ionizado*

Para um gás ionizado as forças que surgem entre as partículas carregadas são forças eletrostáticas (coulombianas). Estas forças de longo alcance diminuem sua intensidade muito mais lentamente que as demais forças de interação, fazendo com que o alcance de interação

entre duas partículas carregadas que se aproximam seja maior que o alcance de atuação entre partículas com outras forças de interação . Nestas condições uma partícula interagindo à uma certa distância com uma outra, poderá estar também sob a interação (atração ou repulsão) de muitas outras partículas, existindo portanto uma interpenetração de seus campos, de tal forma que todos os encontros devem ser considerados como múltiplos. Isto faz com que, em princípio, não possamos utilizar a teoria cinética para o caso de gases ionizados, necessitando assim, todo um desenvolvimento específico para o caso.

Ocorre que, após uma análise mais aprofundada dos gases ionizados, verificamos que é possível estudá-los sob determinadas condições de temperatura e pressão, pela mesma teoria cinética dos gases para partículas neutras.

A primeira constatação importante que se observa em gases ionizados é o efeito de polarização do gás próximo à uma carga. As cargas de sinal contrário tendem a se aproximar da mesma fazendo com que o seu campo se atenue de forma mais intensa, em relação a distância, numa espécie de blindagem. Assim as partículas a distâncias suficientemente grandes não são mais influenciadas pela carga em questão. A distância entre a carga e uma determinada posição a partir da qual o efeito desta possa ser negligenciado é denominado de comprimento de Debye λ_D, [5]. Como os elétrons possuem maior mobilidade que os íons, a sua probabilidade de ser encontrado próximo aos íons é maior, o que provoca uma atenuação recíproca dos seus campos. Essas regiões de polarização de formato esférico (também chamadas de esferas de Debye) podem conter muitas partículas que estão constantemente entrando e saindo da influência dessas esferas, formam novas regiões de acordo com as novas posições e mobilidade das partículas.

Uma vez dentro da influência da esfera de Debye, as partículas interagem-se mutuamente. A grande maioria dessas interações ocorre a distâncias relativamente grandes, pois existe um número maior de partículas a grandes distâncias do que a distâncias próximas. Essas interações distantes, também chamadas de encontros distantes, proporcionam uma sequência de pequenos desvios nas trajetórias das partículas. Embora esses encontros não possam ser considerados estritamente como binários, a mudança da velocidade produzida por uma série de tais encontros pode ser calculada como se fosse uma sucessão de encontros binários [1],[3] e [4]. Desse modo a trajetória descrita por uma partícula sob a ação de

interações distantes ér considerada similar ao de um movimento Browniano.

Por outro lado as interações entre partículas que resultem em grandes deflexões nas suas trajetórias, ou seja, quando as partículas se aproximam acentuadamente uma da outra e por isso também denominados de encontros próximos (aqui cabe considerar deflexões grandes, aquelas cujas trajetórias das partículas sofram desvios superior a 90°), não podem ser considerados como encontros binários. Os desvios acentuados das trajetórias das partículas nesses encontros são modificados apreciavelmente pela presença das outras partículas. No entanto se a distância entre dois encontros próximos sofridos por uma partícula durante sua trajetória for maior que o comprimento de Debye, a influência das partículas em torno dessas colisões é semelhante, possibilitando considerar então estas colisões como sendo binárias (caso contràrio a colisão seria considerada como múltipla). Uma vez que as colisões próximas ocorrem em esferas de influência diferentes, cada colisão próxima pode ser considerada como independentes. A relação a ser satisfeita para que uma colisão possa ser considerada binária refere-se ao valor do parâmentro de impacto b, isto é, distância entre os prolongamentos das trajetórias assíntotas de duas partículas. O parâmetro de impacto de cada encontro próximo deve ser muito menor que a distância média entre as partículas. Desse modo as colisões próximas são descritas adequadamente como colisões sucessivas de dois corpos.

Chamando de d_{90} a distância média entre dois encontros próximos sucessivos e de b_{90} o parâmetro de impacto que provoque esses encontros, estabelecemos as condições a que um gás ionizado deva estar sujeito para que seu estudo possa ser desenvolvido pela teoria cinética dos gases rarefeitos através da relação $d_{90} \gg \lambda_D \gg d \gg b_{90}$, além de satisfazer as condições de gases não quânticos e não relativísticos. Sob essas condições os gases ionizados podem ser considerados como um gás rarefeito (energia potencial de interação muito pequena comparada com a energia cinética das partículas) de partículas independentes, também denominado plasmas de partículas independentes. Entretanto as condições na qual a teoria a ser desenvolvida é satisfeita restringe-se a temperaturas menores que 4×10^5K e densidades maiores que $1,0 \times 10^{18}$part/m^3. Para temperatura maiores, correções relativísticas já se fazem necessárias e para densidades menores que a mencionada, as colisões próximas já se tornam relativamente raras. Desse modo, em um gráfico temperatura ver-

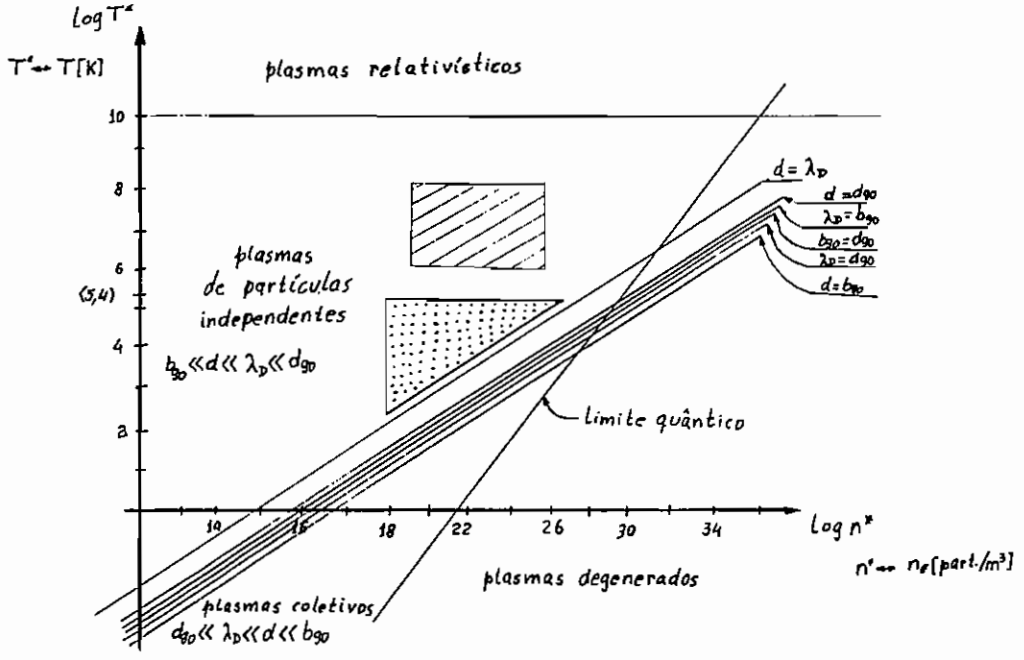


Figura 1.1: Gráfico relacionando $\log_{10} T$ contra $\log_{10} n$ mostrando as diversas modalidades de plasmas com destaque na região pontilhada onde a teoria cinética pode ser aplicada.

sus densidade, como na figura (1.1), representamos a região abrangida pela teoria por uma região pontilhada. A região hachurada representa as condições para as reações termonucleares controladas. Enquadam-se dentro da região pontilhada, [7], aplicações tecnológicas tais como, laser de argônio, geradores MHD, lâmpadas de vapor de mercúrio, conversor termo-emissor, além de plasmas pertencentes a fotosfera do sol.

O movimento das partículas em um gás ionizado com características de partículas independentes, pode ser analisado se seguirmos a trajetória de um elétron em seu movimento através do gás. Sendo a quantidade $b_{90} \ll d$, as colisões próximas são fenômenos definitivamente binários em que somente um elétron e um íon tomam parte. Essas colisões ocorrem muito raramente se comparadas com as colisões distantes, extremamente frequentes uma vez que $d_{90} \gg d$. Os campos elétricos aleatórios encontrados pelos elétrons, produzem deflexões e mudanças nas velocidades das partículas causando pequenas ondulações na sua trajetória, como é mostrado na Figura (1.2). Nessa representação aparece também duas deflexões fortes causadas por encontros próximos [6].

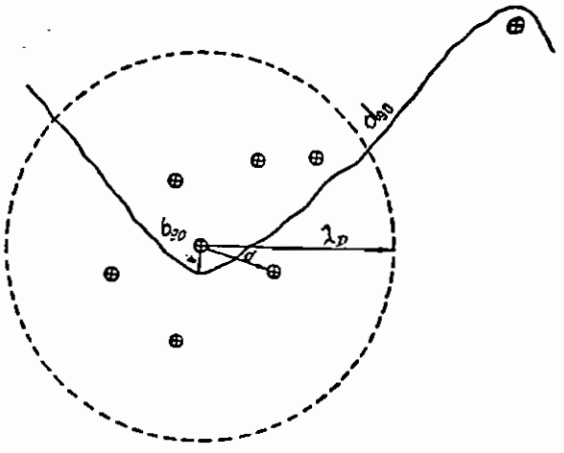


Figura 1.2: Diagrama da trajetória de um elétron em gases ionizados com características de partículas independentes.

Os gases ionizados que não se enquadram nas condições necessárias para que se comporte como um gás de partículas independentes verificam a seguinte relação $d_{90} \ll \lambda_{90} \ll d \ll b_{90}$. Esses gases ionizados possuem um comportamento coletivo onde a noção de colisões binárias perde todo o sentido. Neste tipo de gás, também denominado de plasmas coletivos, qualquer oscilação que ocorra, como por exemplo a oscilação de um elétron térmico, é transmitida ao gás como um todo. Muito embora esses gases possam ser considerados clássicos, não podem ser estudados pela teoria cinética usual.

1.2 Dinâmica Clássica de uma Colisão Binária

Inicialmente iremos desenvolver as bases da teoria cinética para uma mistura de gases rarefeitos em sua forma geral, para em seguida nos restringirmos ao caso de gases ionizados em presença de campos elétricos e magnéticos.

1.2.1 *As Leis de Conservação*

Para a determinação da equação básica da teoria cinética dos gases, a ser estudada ainda nesse capítulo, devemos analisar os fundamentos de uma colisão de partículas. De acordo com as restrições impostas para a utilização desta equação, a análise das interações entre partículas de um gás rarefeito, se restringe à de uma colisão binária.

Consideremos uma colisão entre duas partículas de massas m_α e m_β de um gás rarefeito monoatômico. Se desprezarmos os efeitos das forças externas durante o curto período da colisão, as equações de movimento para duas partículas que colidem podem ser escritas como

$$m_\alpha \ddot{r}_i^\alpha = -\frac{\partial \phi(r_{\beta\alpha})}{\partial r_i^\alpha}, \qquad m_\beta \ddot{r}_i^\beta = -\frac{\partial \phi(r_{\beta\alpha})}{\partial r_i^\beta} = \frac{\partial \phi(r_{\beta\alpha})}{\partial r_i^\alpha} \quad . \tag{1.1}$$

onde r_i^α e r_i^β são os vetores de posição das duas partículas, enquanto que $r_i^{\beta\alpha} = r_i^\beta - r_i^\alpha$ é o vetor da posição relativa e $r_{\beta\alpha}$ seu módulo. $\phi(r_{\beta\alpha})$ é a energia potencial de interação entre as partículas α e β devido as forças de interação moleculares entre ambas. Estas forças ão esfericamente simétricas e cujo domínio satisfaz a condição,

$$\lim_{r_{\beta\alpha}\to\infty} \phi(r_{\beta\alpha}) = 0. \tag{1.2}$$

Denotaremos por $(\mathbf{c}^\alpha, \mathbf{c}^\beta)$ as velocidades assintóticas pré-colisionais de duas partículas e por $(\mathbf{c}'^\alpha, \mathbf{c}'^\beta)$ suas velocidades pós colisionais. Além disso, definimos as velocidades relativas assintóticas pré e pós colisionais respectivamente por

$$\mathbf{g}^{\beta\alpha} = \mathbf{c}^\beta - \mathbf{c}^\alpha, \qquad \mathbf{g}'^{\beta\alpha} = \mathbf{c}'^\beta - \mathbf{c}'^\alpha, \tag{1.3}$$

Se multiplicarmos a primeira equação de (1.1) por $1/m_\alpha$ e a segunda equação por $1/m_\beta$ e as subtrairmos, obtemos

$$\mu_{\alpha\beta}\ddot{\mathbf{r}}^{\beta\alpha} = -\frac{\partial \phi}{\partial r_{\beta\alpha}}\frac{\mathbf{r}^{\beta\alpha}}{r_{\beta\alpha}}, \tag{1.4}$$

onde $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta/(m_\alpha + m_\beta)$ representa a massa reduzida.

Multiplicando escalarmente a equação (1.4) por $\dot{\mathbf{r}}^{\beta\alpha}$ obtemos a expressão,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2}\dot{r}_{\beta\alpha}^2 + \phi(r_{\beta\alpha})\right] = 0\,, \tag{1.5}$$

enquanto que ao multiplicarmos (1.4) vetorialmente por $\mathbf{r}^{\beta\alpha}$ nos fornece,

$$\frac{d}{dt}\left(\mu_{\alpha\beta}\dot{\mathbf{r}}^{\beta\alpha} \times \mathbf{r}^{\beta\alpha}\right) = 0\,. \tag{1.6}$$

As equações (1.5) e (1.6) expressam respectivamente a conservação de energia e a conservação de momento angular durante a colisão.

Ao integramos a equação (1.5) ao longo de um processo de colisão, onde consideramos a equação (1.2), obetemos,

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2}\dot{r}^2_{\beta\alpha} + \phi(r_{\beta\alpha}) = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2}g^2_{\beta\alpha} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2}g'^2_{\beta\alpha}, \tag{1.7}$$

donde verificamos a igualdade entre os módulos das velocidades relativas assintóticas pré e pós-colisionais, isto é

$$g_{\beta\alpha} = g'_{\beta\alpha}. \tag{1.8}$$

Do mesmo modo, integrando a equação (1.6) obtemos,

$$\dot{\mathbf{r}}^{\beta\alpha} \times \mathbf{r}^{\beta\alpha} = \textbf{Constante}\,. \tag{1.9}$$

Concluímos portanto, que o movimento relativo entre as partículas está contido em um plano como o representado na Figura (1.3). Se projetarmos o vetor posição da partícula antes da colisão $\mathbf{r}^{\beta\alpha}$ num plano perpendicular a $\mathbf{g}^{\beta\alpha}$ e o vetor posição após a colisão $\mathbf{r}'^{\beta\alpha}$ num plano perpendicular a $\mathbf{g}'^{\beta\alpha}$ e denotarmos por b e b' estas duas projeções, escrevemos a partir da equação (1.9),

$$g_{\beta\alpha}\, b\,\mathbf{n} = g'_{\beta\alpha}\, b'\,\mathbf{n}'\,, \tag{1.10}$$

onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário perpendicular ao movimento relativo. De acordo com a equação (1.8), concluimos com a equação (1.10) que $b' = b$, sendo b o parâmetro de impacto da colisão.

Na figura (1.3), $\mathbf{k}^{\beta\alpha}$ representa um vetor unitário na direção $(\mathbf{g}^{\beta\alpha} - \mathbf{g}'^{\beta\alpha})$ denominado vetor colisão ou vetor apsidal, enquanto que $\chi_{\beta\alpha}$ o ângulo de espalhamento. O ângulo $\theta_{\beta\alpha}$

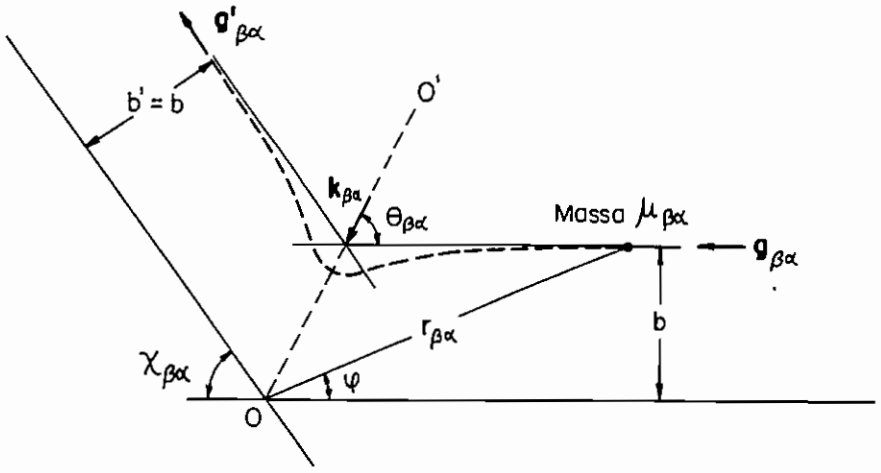


Figura 1.3: Representação de uma colisão binária.

é obtido em função do ângulo de espalhamento $\chi_{\beta\alpha}$ através da relação,

$$\theta_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(\pi - \chi_{\beta\alpha}). \tag{1.11}$$

1.2.2 *O Ângulo de Espalhamento* $\chi_{\beta\alpha}$

Em função das coordenadas polares $(r_{\beta\alpha}, \varphi)$ especificadas na figura (1.3), as equações (1.7) e (1.9) podem ser expressas por,

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2}\left(\dot{r}^2_{\beta\alpha} + r^2_{\beta\alpha}\dot{\varphi}^2\right) + \phi(r_{\beta\alpha}) = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2} g^2_{\beta\alpha}, \tag{1.12}$$

e

$$r^2_{\beta\alpha}\dot{\varphi} = b g_{\beta\alpha}. \tag{1.13}$$

Dividindo-se a equação (1.12) pelo quadrado da equação (1.13) obtemos,

$$\left(\frac{dr_{\beta\alpha}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4_{\beta\alpha}}{b^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2_{\beta\alpha}} - \frac{2\phi(r_{\beta\alpha})}{\mu_{\alpha\beta} g^2_{\beta\alpha}}\right). \tag{1.14}$$

Na interseção da órbita com a linha apsidal (representada pela reta OO' na figura (1.3)), $r_{\beta\alpha}$ assume seu valor mínimo $r^{min}_{\beta\alpha}$. Neste caso $\varphi = \theta_{\beta\alpha}$ e $\frac{dr}{d\varphi} = 0$. Consequentemente

o ângulo de espalhamento $\chi_{\beta\alpha} = (\pi - 2\theta_{\beta\alpha})$ pode ser determinado através da integração da equação (1.14), ou seja,

$$\chi_{\beta\alpha} = \pi + 2\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{b dr_{\beta\alpha}}{r_{\beta\alpha}^2 \left(1 - \frac{b^2}{r_{\beta\alpha}^2} - \frac{2\phi(r_{\beta\alpha})}{\mu_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}^2}\right)^{1/2}}, \tag{1.15}$$

sendo que r_{min} é o valor de $r_{\beta\alpha}$ para o qual $\dot{r}_{\beta\alpha} = 0$, ou seja, o ponto onde a curva do potencial efetivo,

$$\phi_{ef}(r_{min}) = \phi(r_{min}) + \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}^2 \frac{b^2}{r_{min}^2}, \tag{1.16}$$

cruza a linha de energia, $E = \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}^2$, [8] e portanto a maior raiz positiva da equação,

$$1 - \frac{b^2}{r_{\beta\alpha}^2} - \frac{2\phi(r_{\beta\alpha})}{\mu_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha}^2} = 0. \tag{1.17}$$

A equação (1.15) mostra que o ângulo de espalhamento é determinado pelo parâmetro de impacto b, pelo módulo da velocidade relativa $g_{\beta\alpha}$ e pela energia potencial $\phi(r_{\beta\alpha})$.

1.2.3 *Seções Transversais de Choque*

Consideremos o movimento relativo esquematizado na Figura (1.4). As partículas que incidem sobre um elemento de um anel de espessura $d\epsilon$, localizado nos círculos entre b e $b + db$ no plano perpendicular à $\mathbf{g}^{\beta\alpha}$, são espalhadas segundo um ângulo entre $\chi_{\beta\alpha}$ e $\chi_{\beta\alpha} + d\chi_{\beta\alpha}$, isto é, são espalhadas segundo o elemento de ângulo sólido

$$d\Omega_{\beta\alpha} = \text{sen}\chi_{\beta\alpha} d\chi_{\beta\alpha} d\epsilon. \tag{1.18}$$

Definimos a seção diferencial de choque $\sigma_{\beta\alpha}(\chi_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha})$ como a razão entre o número de partículas espalhadas ΔN por unidade de tempo e por elemento de ângulo sólido e o fluxo de partículas incidentes, isto é,

$$\sigma_{\beta\alpha}(\xi_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha}) = \frac{\Delta N/(\Delta t d\Omega_{\beta\alpha})}{\Delta N/(\Delta t b db d\epsilon)} = \frac{b db d\epsilon}{d\Omega_{\beta\alpha}}. \tag{1.19}$$

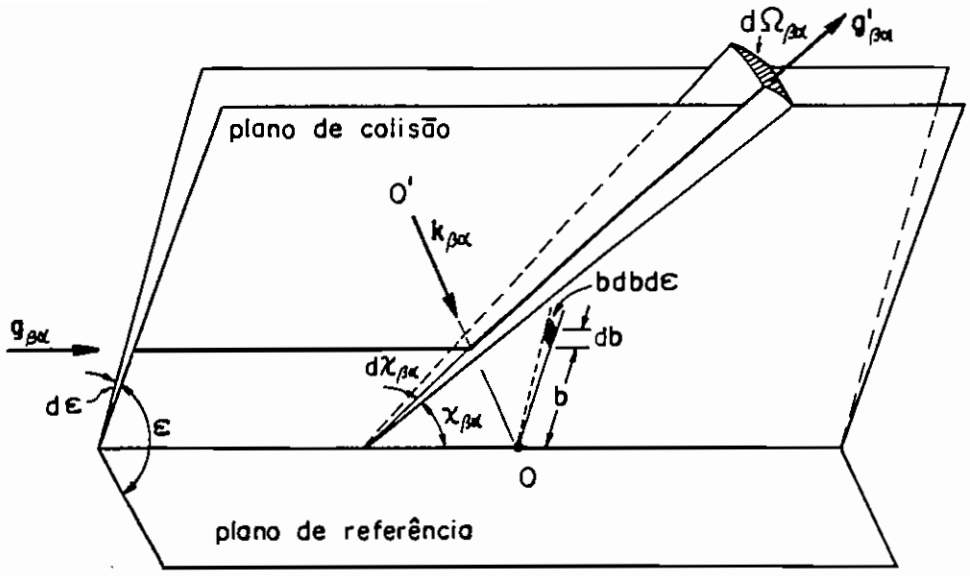


Figura 1.4: Especificação do Elemento de Ângulo Sólido $d\Omega_{\beta\alpha}$.

Das equações (1.18) e (1.19) concluimos que a seção transversal diferencial de choque pode ser escrita na forma,

$$\sigma_{\beta\alpha}(\chi_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha}) = \frac{b}{\mathrm{sen}\chi_{\beta\alpha}} \left| \frac{db}{d\chi_{\beta\alpha}} \right| . \tag{1.20}$$

Para a cálculo dos coeficientes de transporte devemos determinar a seção transversal efetiva de ordem l, definida por,

$$Q^{(l)}_{\beta\alpha}(g_{\beta\alpha}) = \int_0^{\pi} (1 - \cos^l \chi_{\beta\alpha}) \sigma_{\beta\alpha}(\chi_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha}) \mathrm{sen}\chi_{\beta\alpha} d\chi_{\beta\alpha} = \int_0^{\infty} (1 - \cos^l \chi_{\beta\alpha}) b db , \tag{1.21}$$

sendo $Q^{(1)}_{\beta\alpha}(g_{\beta\alpha})$ denominada de seção transversal de transporte, enquanto que $Q^{(2)}_{\beta\alpha}(g_{\beta\alpha})$ de seção transversal de viscosidade.

Uma outra definição de interesse, cuja forma aparecerá nos cálculos dos coeficientes de transporte como função da seção transversal efetiva, vem a ser as denominadas integrais ômega, ou seja,

$$\Omega^{(l,r)}_{\alpha\beta} = \int_0^{\infty} e^{-\gamma^2_{\alpha\beta}} \gamma^{2r+3}_{\alpha\beta} Q^{(l)}_{\beta\alpha}(\gamma_{\alpha\beta}) d\gamma_{\alpha\beta}, \tag{1.22}$$

onde a variável adimensional $\gamma_{\alpha\beta}$ representa uma relação de energias, sendo representada por,

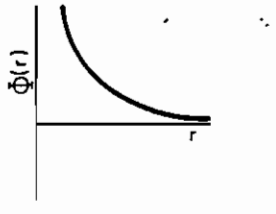
$$\gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2kT}\mu_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}^2 \,. \tag{1.23}$$

1.2.4 *Os Potenciais de Interação Molecular*

De uma maneira geral as forças de interação que agem sobre os átomos e moléculas podem ser subdivididos em dois tipos: forças de curto alcance, também chamadas de forças de valência ou forças químicas e forças de longo alcance, denominadas genericamente de forças de van der Waals. As forças de valência são forças repulsivas e surgem quando as moléculas se aproximam uma das outras e suas nuvens eletrônicas se superpõem. As forças de van der Waals são forças atrativas que agem a grandes distâncias sendo devidas às seguintes contribuições: eletrostáticas, de indução e de dispersão (interação entre duas distribuições de cargas induzidas). Para gases ionizados as forças de interação à grandes distâncias são devidas unicamente à ação de forças eletrostáticas e portanto de grande intensidade, com características atrativas ou repulsivas.

Em geral usamos modelos empíricos para os potenciais de interação. Existem modelos desde os mais simples como o do potencial de esfera rígida aos mais sofisticados, como o do potencial de Lennard-Jones, que expressa de forma bastante próxima o potencial real entre as moléculas. De acordo com as características do problema, como por exemplo faixa de temperatura e densidade, usamos modelos mais adequados a determinadas condições para ganharmos em simplicidade matemática. Neste trabalho utilizaremos dois tipos de potencial de interação:

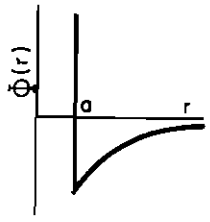
a) Potencial de Centros de Repulsão. A função potencial neste modelo tem a forma,



$$\phi(r) = \frac{\kappa}{\nu - 1}\frac{1}{r^{\nu-1}} \qquad \kappa > 0, \quad \nu > 1 \tag{1.24}$$

b) Potencial de Sutherland. Neste caso temos uma repulsão tipo esfera rígida para

distâncias menores que a (diâmetro médio das partículas em interação), envolto por um potencial atrativo, ou seja,



$$\begin{cases} \Phi(r) = \infty & se \quad r < a, \\ \Phi(r) = -\frac{\kappa}{\nu-1}\frac{1}{r^{\nu-1}} & se \quad r > a. \end{cases} \tag{1.25}$$

As características das partículas que irão interagir em um gás ionizado, enquadram-se nos modelo de potencial de interação acima.

1.3 Derivação da Equação de Boltzmann a partir da Hierarquia BBGKY

O emprego da teoria cinética no estudo do comportamento de gases, baseia-se fundamentalmente em uma equação integro-diferencial para a função de distribuição de um dado gás, denominada de equação de Boltzmann. Com ela determinamos a função de distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ do gás, expressa em termos de posição $\mathbf{x}$, velocidade das partículas $\mathbf{c}$ e do tempo t, obtidos a partir de quantidades macroscópicas que caracterizam o gás em estudo. A derivação da equação de Boltzmann pode ser obtida a partir da equação de Liouville, ou seja, uma equação de evolução que envolve conceitos físicos fundamentais e que estabelece precisamente os limites de validade da equação de Boltzmann.

Partindo do teorema de Liouville, este mostra que a densidade de número de pontos dados por $\rho(x_1, x_2, ..., x_{3N}, p_1, p_2, ..., p_{3N}, t)$ de réplicas de um sistema formado por N partículas no espaço de fase Γ com $6N$ dimensões (sendo $3N$ coordenadas de posição e $3N$ coordenadas de momento linear), permanece constante para um observador que se move com a velocidade do centro de massa do sistema, ou matematicamente [4], [9],

$$\frac{d\rho(x_1, ..., p_{3N}, t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\dot{x}_i^\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_i^\alpha} + \ddot{x}_i^\alpha \frac{\partial \rho}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \right) = 0 \,. \tag{1.26}$$

Supondo agora que este sistema de N partículas representa um gás com N partículas idênticas que ocupa um determinado volume V com coordenadas de posição e veloci-

dade de uma dada partícula a que denominaremos de α, ($\alpha = 1, 2, ..., N$) e denotado por $(\mathbf{x}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$. O estado do gás será descrito através de uma função de distribuição $F^N(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t)$ tal que,

$$F^N(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t) d\mathbf{x}_1 ... d\mathbf{x}_N, d\dot{\mathbf{x}}_1 ... d\dot{\mathbf{x}}_N \,, \tag{1.27}$$

fornece a probabilidade de encontrar N partículas nas posições entre $\mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha + d\mathbf{x}_\alpha$ e com velocidades entre $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ e $\dot{\mathbf{x}}_\alpha + d\dot{\mathbf{x}}_\alpha$, ($\alpha = 1, 2, ..., N$) no tempo t. A função de distribuição é normalizada para todo t, isto é,

$$\int F^N(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t) d\mathbf{x}_1 ... d\dot{\mathbf{x}}_N = 1 \,. \tag{1.28}$$

A partir da função F^N podemos definir as funções F^n de tal forma que,

$$F^n(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_n, t) d\mathbf{x}_1 ... d\dot{\mathbf{x}}_n = \left[\int F^N(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t) d\mathbf{x}_{n+1} ... d\dot{\mathbf{x}}_N \right] d\mathbf{x}_1 ... d\dot{\mathbf{x}}_n \,, \tag{1.29}$$

nos fornece a probabilidade de encontrar, no tempo t, n partículas nas posições entre $\mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha + d\mathbf{x}_\alpha$ e com velocidades entre $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ e $\dot{\mathbf{x}}_\alpha + d\dot{\mathbf{x}}_\alpha$, ($\alpha = 1, 2, ..., n$).

A evolução temporal da função F^N deve satisfazer a equação de Liouville (1.26), isto é

$$\frac{\partial F^N}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\dot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^N}{\partial x_i^\alpha} + \ddot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^N}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \right) = 0 \,. \tag{1.30}$$

A equação de evolução para a função F^n ($n < N$) é obtida através da multiplicação da equação (1.30) por $d\mathbf{x}_{n+1} ... d\dot{\mathbf{x}}_N$ e de sua integração,

$$\int \left[\frac{\partial F^N}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\dot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^N}{\partial x_i^\alpha} + \ddot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^N}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \right) \right] d\mathbf{x}_{n+1} ... d\dot{\mathbf{x}}_N = 0 \,. \tag{1.31}$$

Na equação (1.31) podemos mudar a ordem entre a derivada temporal e a integral, pois os limites de integração não dependem do tempo, logo

$$\int \frac{\partial F^N}{\partial t} d\mathbf{x}_{n+1} ... d\dot{\mathbf{x}}_N = \frac{\partial F^n}{\partial t} \,, \tag{1.32}$$

assim como podemos escrever os gradientes espaciais de (1.31) por,

$$\int \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^N}{\partial x_i^\alpha} d\mathbf{x}_{n+1} ... d\dot{\mathbf{x}}_N = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^n}{\partial x_i^\alpha}, \tag{1.33}$$

uma vez que para $\alpha \geq n+1$ a derivada parcial acima se anula.

Para o termo da equação (1.31) que envolve os gradientes de velocidade devemos considerar que a aceleração da partícula α é a soma de dois termos, a saber, $\ddot{x}_i^\alpha = F_i^\alpha + X_i^\alpha$, onde F_i^α corresponde à força externa que age sobre a partícula α por unidade de massa e $X_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} X_i^{\alpha\beta}$ com $X_i^{\alpha\beta} \equiv X_i^{\alpha\beta}(\mid \mathbf{x}^\beta - \mathbf{x}^\alpha \mid)$ sendo a força que a partícula β exerce sobre a partícula α por unidade de massa. Assim

$$\int \sum_{\alpha=1}^{N} (F_i^\alpha + X_i^\alpha) \frac{\partial F^N}{\partial \dot{x}_i^\alpha} d\mathbf{x}_{n+1} ... d\dot{\mathbf{x}}_N = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F^n}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \left(F_i^\alpha + \sum_{\beta=1}^{N} X_i^{\alpha\beta} \right)$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} (N-n) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \int X_i^{\alpha,n+1} F^{n+1} d\mathbf{x}_{n+1} d\dot{\mathbf{x}}_{n+1}, \tag{1.34}$$

onde o último termo dessa igualdade segue o fato de as partículas serem idênticas além de ser nulo o lado esquerdo de (1.34) para $\alpha \geq n+1$.

Então a equação de evolução para a função F^n pode ser escrita, com base nas equações (1.30) a (1.34) como

$$\frac{\partial F^n}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\dot{x}_i^\alpha \frac{\partial F^n}{\partial x_i^\alpha} + \left(F_i^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n} X_i^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial F^n}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \right]$$
$$= - \sum_{\alpha=1}^{n} (N-n) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^\alpha} \int X_i^{\alpha,n+1} F^{n+1} d\mathbf{x}_{n+1} d\dot{\mathbf{x}}_{n+1}. \tag{1.35}$$

A equação (1.35) indica que a equação de evolução de F^n é uma função de F^{n+1}. Consequentemente, esta equação fornece uma hierarquia de equações acopladas, denominadas hierarquia BBGKY, pois esta foi deduzida independentemente por Bogoliubov (1946), Born e Green (1946), Kirkwood (1946) e Yvon (1935).

A primeira equação da hierarquia BBGKY, ou seja, para $n = 1$ é

$$\frac{\partial F^1}{\partial t} + \dot{x}_i^1 \frac{\partial F^1}{\partial x_i^1} + F_i^1 \frac{\partial F^1}{\partial \dot{x}_i^1} = -(N-1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^1} \int X_i^{12} F^2 d\mathbf{x}_2 d\dot{\mathbf{x}}_2, \tag{1.36}$$

a partir da qual é possível obter a equação de Boltzmann. Essa dedução será baseada em Kirkwood (1947) [25].

1.3.1 *A Equação de Boltzmann*

Seja τ^* um intervalo de tempo suficientemente grande em comparação ao tempo de duração de uma colisão τ_c e suficientemente pequeno em comparação ao tempo médio entre duas colisões τ, ($\tau_c \ll \tau^* \ll \tau$) e a média temporal da função de distribuição $F^1(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, t)$ sobre o intervalo de tempo τ^* definida através de,

$$\overline{F^1}(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, t) = \frac{1}{\tau^*} \int_0^{\tau^*} F^1(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, t+s) ds \,. \tag{1.37}$$

Tomando-se a média temporal da equação (1.36), temos,

$$\frac{\partial \overline{F^1}}{\partial t} + \dot{x}_i^1 \frac{\partial \overline{F^1}}{\partial x_i^1} + \overline{F_i^1} \frac{\partial \overline{F^1}}{\partial \dot{x}_i^1} = -\frac{(N-1)}{\tau^*} \int \int_0^{\tau^*} X_i^{12} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^1} F^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, t+s) ds d\mathbf{x}_2 d\dot{\mathbf{x}}_2 \,, \tag{1.38}$$

onde consideramos que $\overline{F_i^1 F^1} = \overline{F_i^1}\,\overline{F^1}$ pois a força externa específica F_i^1 é estatisticamente independente da função de distribuição F^1.

Na continuação da dedução da equação de Boltzmann, devemos formular as seguintes hipóteses:

1ª Hipótese: Para um gás rarefeito, somente as interações entre os pares de partículas são levadas em consideração. Consequentemente a interação entre três ou mais partículas não é considerada. Desse modo na hierarquia BBGKY (1.35), restam apenas a equação (1.36) para $n = 1$ e a equação,

$$\frac{\partial F^2}{\partial t} + \dot{x}_i^1 \frac{\partial F^2}{\partial x_i^1} + \dot{x}_i^2 \frac{\partial F^2}{\partial x_i^2} + (F_i^1 + X_i^{12}) \frac{\partial F^2}{\partial \dot{x}_i^1} + (F_i^2 + X_i^{21}) \frac{\partial F^2}{\partial \dot{x}_i^2} = 0, \tag{1.39}$$

para $n = 2$.

2ª Hipótese: Supondo que os efeitos das forças externas sobre as partículas durante a colisão sejam pequenos em comparação com as forças que agem entre as partículas, a solução da equação (1.39) é da forma,

$$F^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, t + \Delta t) = F^2(\mathbf{x}_1 - \dot{\mathbf{x}}_1 \Delta t, \mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_2 \Delta t, \dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{X}^{12} \Delta t, \dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{X}^{21} \Delta t, t), \tag{1.40}$$

ou com $\Delta t = s$,

$$F^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, t+s) = F^2(\mathbf{x}_1 - \Delta\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \Delta\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2, t)\,. \tag{1.41}$$

3ª Hipótese: Na posição x e no tempo t em que as partículas estiverem longe umas das outras e não tenham interagido previamente, podemos usar o conceito de caos molecular e escrever,

$$F^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, t+s) = F^1(\mathbf{x}_1 - \Delta\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1, t)F^1(\mathbf{x}_2 - \Delta\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2, t)\,. \tag{1.42}$$

4ª Hipótese: Se a função distribuição não variar muito ao longo de uma distância comparável ao tamanho das partículas, podemos desprezar em (1.42) $\Delta\mathbf{x}_1$ e $\Delta\mathbf{x}_2$ e tomar $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, logo,

$$\begin{aligned}
-X_i^{12}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^1}F^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, t+s) &= -X_i^{12}\frac{\partial F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i^1}F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2, t) \\
&\quad -X_i^{12}F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1, t)\frac{\partial F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2, t)}{\partial \dot{x}_i^1} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left[F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1, t)F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2, t)\right]\,,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

pois,

$$\frac{\partial}{\partial s}F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1, t) = \frac{\partial F^1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1}\frac{\partial(\dot{\mathbf{x}}_1 - X^{12}s)}{\partial s} = -X^{12}\frac{\partial F^1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_1}\,. \tag{1.44}$$

Substituindo a relação (1.43) na equação (1.38) e integrando em s obtemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{F^1}}{\partial t} + \dot{x}_i^1\frac{\partial \overline{F^1}}{\partial x_i^1} + \overline{F_i^1}\frac{\partial \overline{F^1}}{\partial \dot{x}_i^1} \\
&= \frac{(N-1)}{\tau^*}\int[F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(\tau^*), t)F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(\tau^*), t) \\
&\quad - F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(0), t)F^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(0), t)]d\mathbf{x}_2 d\dot{\mathbf{x}}_2\,.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

A equação (1.45) é uma equação apenas para F^1 e a equação de Boltzmann é obtida através dela. Como todas as partículas são idênticas, se trocarmos os pares $(\mathbf{x}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha)$, com $(\alpha = 1, 2, ..., N)$ não alteraremos a distribuição das partículas no espaço de fase μ. Esta

mudança define, porém, um novo ponto no espaço de fase Γ. Portanto uma única distribuição de N partículas no espaço μ corresponde a $N!$ pontos no espaço de fase Γ. O estado do gás será descrito no espaço de fase μ através de uma função de distribuição $f^N(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t)$ tal que,

$$f^N(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t) d\mathbf{x}_1 ... \dot{\mathbf{x}}_N = N! F^N(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_N, t) d\mathbf{x}_1 ... \dot{\mathbf{x}}_N \,, \tag{1.46}$$

fornece o número esperado (probabilidade) de que N partículas se encontrem nas posições entre $\mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha + d\mathbf{x}_\alpha$ e com velocidades entre $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ e $\dot{\mathbf{x}}_\alpha + d\dot{\mathbf{x}}_\alpha$, com $(\alpha = 1, 2, ..., N)$ no tempo t. Da mesma forma,

$$f^n(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_n, t) d\mathbf{x}_1 ... \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{N!}{(N-n)!} F^n(\mathbf{x}_1, ..., \dot{\mathbf{x}}_n, t) d\mathbf{x}_1 ... \dot{\mathbf{x}}_n \,, \tag{1.47}$$

fornece a probabilidade de se encontrar n partículas entre as posições $\mathbf{x}_\alpha$ e $\mathbf{x}_\alpha + d\mathbf{x}_\alpha$ e com velocidades entre $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ e $\dot{\mathbf{x}}_\alpha + d\dot{\mathbf{x}}_\alpha$, com $(\alpha = 1, 2, ..., n)$ no tempo t.

Em particular, com $n = 1$ na equação (1.47), ou seja,

$$f^1(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, t) = N F^1(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, t), \tag{1.48}$$

obtemos a equação para a função de distribuição f^1 se substituirmos a relação (1.48) na equação (1.45). Ao tomarmos a sua média temporal, temos,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{f^1}}{\partial t} + \dot{x}_i^1 \frac{\partial \overline{f^1}}{\partial x_i^1} + \overline{F_i^1} \frac{\partial \overline{f^1}}{\partial \dot{x}_i^1} \\ &= \frac{1}{\tau^*} \int \Big[\overline{f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(\tau^*), t) f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(\tau^*), t)} \\ &- \overline{f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(0), t) f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(0), t)} \Big] \, d\mathbf{x}_2 d\dot{\mathbf{x}}_2 \,. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Na equação (1.49) consideramos que $(N-1) \approx N$ pois N é da ordem de 10^{23} partículas. Adotando-se o sistema de coordenadas cilíndricas, (z, b, ϵ) com origem na partícula 1 e eixo z no sentido antiparalelo à velocidade relativa $\mathbf{g} = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1$, então o elemento de integração de volume $d\mathbf{x}_2$ pode ser substituido por $d(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ ou $(g\tau^* b d\epsilon db)$.

Considerando ainda que a variação da função de distribuição não é muito grande para um intervalo de tempo suficientemente grande em comparação com o tempo de duração de

uma colisão (4ª Hipótese), é possível mostrar usando o desenvolvimento em séries de Taylor que $\overline{f_1^1 f_2^1} = \overline{f_1^1}\,\overline{f_2^1}$, para os primeiros termos da expansão. Os subíndices 1 e 2 das funções de distribuição referem-se respectivamente às partículas com velocidades $\dot{\mathbf{x}}_1$ e $\dot{\mathbf{x}}_2$.Com isso a equação (1.49) pode ser escrita,

$$\frac{\partial \overline{f^1}}{\partial t} + \dot{x}_i^1 \frac{\partial \overline{f^1}}{\partial x_i^1} + \overline{F_i} \frac{\partial \overline{f^1}}{\partial \dot{x}_i^1}$$

$$= \frac{1}{\tau^*} \int \Big[\overline{f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(\tau^*), t) f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(\tau^*), t)}$$

$$- \overline{f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(0), t) f^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(0), t)} \Big] \, d\mathbf{x}_2 d\dot{\mathbf{x}}_2 \,. \tag{1.50}$$

Introduzindo as seguintes abreviações,

$$\begin{aligned} c_i^1 &= \dot{x}_i^1 \,, \\ F_i^1 &= \overline{F_i^1} \,, \end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv f_1(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) \equiv \overline{f_1^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(0), t)} \,, \\ f_2 &\equiv f_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2, t) \equiv \overline{f_2^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(0), t)} \,, \\ f_1' &\equiv f_1'(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1', t) \equiv \overline{f_1^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_1(\tau^*), t)} \,, \\ f_2' &\equiv f_2'(\mathbf{x}, \mathbf{c}_2', t) \equiv \overline{f_2^1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\dot{\mathbf{x}}_2(\tau^*), t)} \,, \end{aligned} \tag{1.52}$$

podemos escrever a equação (1.50) na seguinte forma,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + c_i^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i^1} + F_i^1 \frac{\partial f_1}{\partial c_i^1} = \int (f_1' f_2' - f_1 f_2) \, g b db d\epsilon d\mathbf{c}_2 \,. \tag{1.53}$$

A equação integro-diferencial (1.53) para a função de distribuição f_1, vem a ser a equação de Boltzmann para um gás monoatômico.

A generalização da equação de Boltzmann para uma mistura de ν gases constituintes, pode ser feita de uma forma simples, devido a sua estrutura. Em uma mistura, o conjunto de partículas idênticas que forma cada componente ($\alpha = 1, 2, ..., \nu$) onde α representa cada gás constituinte, comporta-se como se fosse um gás único exceto quando colide com partículas de um outro componente da mistura. Assim o lado esquerdo da equação de Boltzmann

permanece da mesma forma (independentemente das colisões), para cada componente da mistura e o lado direito que depende das interações entre as partículas deve conter a soma de todos os pares possíveis de interações. Devemos lembrar que o número de partículas para cada componente é da ordem de 10^{23}. Portanto a equação de Boltzmann para uma mistura de gases monoatômicos distingue-se da equação (1.53) pela presença de um somatório para todos os ν gases constituintes, cujas partículas possam colidir com as partículas do componente α, ou seja,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \left(f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta \right) g^{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta \,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \quad (1.54)$$

O lado direito da equação de Boltzmann é denominado de integral de colisão. Essa integral pode ser interpretada da seguinte maneira. No instante da colisão entre duas partículas, os pontos correspondentes a essas partículas em um determinado elemento de volume no espaço de fase μ desaparecem, surgindo em outros elementos de volume com velocidades diferentes. Em contrapartida, colisões em outros elementos de volume fazem aparecer pontos no elemento de volume inicial em consideração. As colisões que provocam o aniquilamento de pontos no espaço de fase são denominadas de colisões diretas, enquanto aquelas que criam pontos nesse espaço são denominadas de colisões de restituição. Assim a diferença entre a densidade de número total de colisões por intervalo de tempo que cria e destroi pontos no espaço de fase μ é dado por essa integral.

A forma de apresentação da integral de colisão pode variar (através de manipulações algébricas e condições de contorno) conforme o estudo a que se destina. Por exemplo, quando as partículas dos gases constituintes possuirem massas muito distintas, podemos mostrar que apenas os pequenos desvios nas trajetórias precisam ser considerados para a integral, fazendo então com que essa integral possa ser expressa na forma apresentada na equação de Fokker-Planck [10] ou na forma da integral de colisão de Landau [11], [12] ou até mesmo ser considerada nula, como no caso da equação de Vlasov, [5]. Neste trabalho, utilizaremos a equação de Boltzmann diretamente da forma básica apresentada em (1.54) seguindo [4].

1.4 A Equação de Transferência

A equação de balanço de qualquer propriedade molecular, pode ser derivada a partir da equação de Boltzmann (1.54), quando essa é multiplicada pela propriedade arbitrária associada à espécie α, $\psi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t)$ seguida da integração sobre todos os valores de $\mathbf{c}^\alpha$, ou seja,

$$\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\psi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha + \int c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\psi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha + \int F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha}\psi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \left(\psi_\alpha(f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta\right) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta d\mathbf{c}^\alpha \,, \tag{1.55}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha + \frac{\partial}{\partial x_i}\int \psi_\alpha c_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha - \int \left[\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial c_i^\alpha}\right] f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \left(\psi'_\alpha - \psi_\alpha\right) f_\alpha f_\beta g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta d\mathbf{c}^\alpha \,. \tag{1.56}$$

No desenvolvimento da equação (1.56), empregamos as seguintes considerações:

a) as velocidades moleculares independem da posição, logo,

$$\frac{\partial c_i^\alpha}{\partial x_j} = 0 \,; \tag{1.57}$$

b) a integral,

$$\int \frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}(F_i^\alpha f_\alpha \psi_\alpha) dc_\alpha = \oint (F_i^\alpha f_\alpha \psi_\alpha) n_i^\alpha dS_\alpha = 0 \,, \tag{1.58}$$

ou seja, é nula pois f_α decai rapidamente a zero para grandes velocidades, tornando-se nulo próximo à sua fronteira (infinitamente distante no espaço das velocidades) de superfície S_α e vetor unitário $\mathbf{n}_\alpha$. Emprega-se o teorema da divergência nessa demonstração;

c) as alterações no lado direito da equação (1.56), em relação à equação imediatamente anterior, são obtidas levando-se em conta as equações válidas para uma colisão de restituição, ou seja, colisões de partículas cujas velocidades assintóticas pré-colisionais são $\mathbf{c}'^\alpha$ e $\mathbf{c}'^\beta$ e velocidades assintóticas pós-colisionais são $\mathbf{c}^\alpha$ e $\mathbf{c}^\beta$, parâmetros de impacto b' e ângulo

azimutal ϵ' que podem ser relacionados com as mesmas quantidades das colisões diretas através das seguintes relações:

$$g'_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}\,, \quad \epsilon' = \pi + \epsilon\,, \quad d\epsilon' = d\epsilon\,, \quad b' = b\,, \quad d\mathbf{c}'^{\alpha} d\mathbf{c}'^{\beta} = d\mathbf{c}^{\alpha} d\mathbf{c}^{\beta}\,, \tag{1.59}$$

sendo a igualdade do lado direito das relações (1.59), obtida pela utilização do Jacobiano para as relações de velocidades pré e pós-colisionais. Assim é possível escrever,

$$\int \psi_\alpha (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^{\alpha} d\mathbf{c}^{\beta} = \int \psi_\alpha (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g'_{\beta\alpha} b' db' d\epsilon' d\mathbf{c}'^{\alpha} d\mathbf{c}'^{\beta}\,, \tag{1.60}$$

e como,

$$\int \psi_\alpha f'_\alpha f'_\beta g'_{\beta\alpha} b' db' d\epsilon' d\mathbf{c}'^{\alpha} d\mathbf{c}'^{\beta} = \int \psi'_\alpha f_\alpha f_\beta g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^{\alpha} d\mathbf{c}^{\beta} = \int \psi'_\alpha f_\alpha f_\beta g'_{\beta\alpha} b' db' d\epsilon' d\mathbf{c}'^{\alpha} d\mathbf{c}'^{\beta}\,, \tag{1.61}$$

onde procedemos uma simples troca de símbolos em todos elementos no termo intermediário, para que então possamos escrever a relação,

$$\int \psi_\alpha f'_\alpha f'_\beta g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^{\alpha} d\mathbf{c}^{\beta} = \int \psi'_\alpha f_\alpha f_\beta g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^{\alpha} d\mathbf{c}^{\beta}\,, \tag{1.62}$$

a qual uma vez substituida na relação (1.60) fornece o termo do lado direito da equação (1.56).

Podemos escrever a equação (1.56) na seguinte forma abreviada,

$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\Psi_\alpha v_i^\alpha + \phi_\alpha) = S_\alpha + P_\alpha \tag{1.63}$$

onde definimos,

$$\Psi_\alpha = \int \psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^{\alpha}, \tag{1.64}$$

$$\phi_\alpha = \int \psi_\alpha C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^{\alpha}, \tag{1.65}$$

$$S_\alpha = \int F_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial c_i^\alpha} f_\alpha d\mathbf{c}^{\alpha}, \tag{1.66}$$

$$P_\alpha = \int \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \right) f_\alpha d\mathbf{c}^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (\psi'_\alpha - \psi_\alpha) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\beta\alpha}, \tag{1.67}$$

através da utilização da definição de velocidade peculiar parcial,

$$C_i^\alpha = c_i^\alpha - v_i^\alpha \,, \tag{1.68}$$

sendo v_i^α a velocidade do constituinte α da mistura, além de utilizar a representação,

$$d\Gamma_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\alpha d\mathbf{c}^\beta \,. \tag{1.69}$$

Os termos da equação (1.63) possuem denominações próprias de acordo com as funções que desempenham na equação de transferência. Assim Ψ_α representa uma densidade parcial de uma quantidade aditiva arbitrária, ϕ_α uma densidade parcial de fluxo, S_α uma densidade parcial de suprimento relacionada às forças externas e P_α o termo de produção parcial própria acrescido do termo de produção devido às colisões.

1.5 Descrição Macroscópica da Mistura de Gases

1.5.1 *Os Momentos da Função de Distribuição*

Na teoria cinética, as quantidades que caracterizam o estado macroscópico de uma mistura de ν gases constituintes são definidas a partir da função distribuição f_α. Com base nas quantidades microscópicas m_α, $m_\alpha c_i^\alpha$ e $\frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2$, obtemos os campos de, densidade parcial de massa ρ_α, densidade de momento linear parcial $\rho_\alpha v_i^\alpha$ e densidade de energia parcial $\rho_\alpha u_\alpha$ através das definições,

$$\rho_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int m_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.70}$$

$$\rho_\alpha v_i^\alpha(\mathbf{x}, t) = \int m_\alpha c_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.71}$$

$$\rho_\alpha u_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int \frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2 f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha. \tag{1.72}$$

Se na equação (1.72) a velocidade da partícula α, c_i^α for substituida pela sua velocidade peculiar parcial C_i^α utilizando a relação (1.68), obtemos

$$\rho_\alpha u_\alpha = \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 + \rho_\alpha \epsilon_\alpha, \tag{1.73}$$

onde,

$$\rho_\alpha \epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \int m_\alpha C_\alpha^2 f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.74}$$

é a densidade de energia interna parcial. Consequentemente a densidade de energia parcial é a soma de $\rho_\alpha \epsilon_\alpha$ com a densidade de energia cinética $\frac{1}{2}\rho_\alpha v_\alpha^2$. Na derivação da equação (1.73) utilizamos a relação,

$$\int m_\alpha C_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha = \int m_\alpha c_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha - \int m_\alpha v_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha = 0\,. \tag{1.75}$$

Podemos obter os campos básicos de, densidade ρ, momento linear ρv_i e energia interna $\rho\epsilon$ para uma mistura de gases, se procedermos a soma sobre todos os constituintes α, ou seja,

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha\,, \tag{1.76}$$

$$\rho v_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha v_i^\alpha\,, \tag{1.77}$$

$$\rho\epsilon = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\rho_\alpha \epsilon_\alpha + \frac{1}{2}\rho_\alpha u_\alpha^2 \right)\,. \tag{1.78}$$

onde u_i^α na expressão (1.78) representa a velocidade de difusão do constituinte α, velocidade essa que relaciona a velocidade do constituinte α com a velocidade da mistura, isto é,

$$u_i^\alpha = v_i^\alpha - v_i\,. \tag{1.79}$$

O momento parcial da função de distribuição de ordem N, é definido através de,

$$p_{i_1, i_2, \ldots, i_N}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \int m_\alpha C_{i_1}^\alpha C_{i_2}^\alpha \ldots C_{i_N}^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha\,, \tag{1.80}$$

o qual representa um tensor simétrico de ordem N.

O momento parcial de ordem dois é denominado de tensor pressão parcial, ou seja,

$$p_{ij}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \int m_\alpha C_i^\alpha C_j^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha. \tag{1.81}$$

Definimos o deviante do tensor pressão parcial p^{α}_{ij}, como tensor sem traço,

$$p^{\alpha}_{<ij>} = p^{\alpha}_{ij} - \frac{1}{3}p^{\alpha}_{rr}\delta_{ij}\,. \tag{1.82}$$

A pressão estática parcial do constituinte α, p_α é identificada como sendo o traço do tensor pressão parcial dividido por três, isto é,

$$p_\alpha(\mathbf{x},t) = \frac{1}{3}p^{\alpha}_{rr} = \frac{1}{3}\int m_\alpha C^2_\alpha f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha \tag{1.83}$$

O tensor pressão total da mistura, vem a ser a soma das pressões parciais dos constituintes α acrescido da pressão causada pela difusão de partículas, ou seja,

$$p_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(p^{\alpha}_{ij} + \rho_\alpha u^{\alpha}_i u^{\alpha}_j\right) = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\int m_\alpha \xi^{\alpha}_i \xi^{\alpha}_j f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.84}$$

onde ξ^{α}_i representa a velocidade peculiar da partícula α em relação à mistura, a qual relaciona a velocidade da partícula α, c^{α}_i com a velocidade da mistura v_i, através de,

$$\xi^{\alpha}_i = c^{\alpha}_i - v_i\,. \tag{1.85}$$

Com base na definição de densidade de energia interna $\rho_\alpha\epsilon_\alpha$ de (1.74), podemos escrever a pressão estática como,

$$p_\alpha = \frac{2}{3}\rho_\alpha\epsilon_\alpha\,. \tag{1.86}$$

Por outro lado, a equação de estado térmico para um gás ideal relaciona, a pressão estática parcial, o volume ocupado pelo gás e a temperatura absoluta[1], através da equação,

$$p_\alpha\frac{m_\alpha}{\rho_\alpha} = kT\,. \tag{1.87}$$

Consequentemente na teoria cinética dos gases, a temperatura absoluta para uma mistura de gases clássicos monoatômicos pode ser expressa por,

$$T(\mathbf{x},t) = \frac{1}{k}\frac{m_\alpha p_\alpha}{\rho_\alpha} = \frac{2}{3}\frac{1}{k}\frac{m_\alpha}{\rho_\alpha}\rho_\alpha\epsilon_\alpha = \frac{1}{3}\frac{m_\alpha}{k\rho_\alpha}\int m_\alpha C^2_\alpha f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha. \tag{1.88}$$

[1]Estamos interessados nesta tese em uma mistura, cujos constituintes estão à mesma temperatura.

O momento de terceira ordem contraído,

$$q_i^\alpha(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}p_{jji}^\alpha = \frac{1}{2}\int m_\alpha C_\alpha^2 C_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha\,, \tag{1.89}$$

é denominada de vetor fluxo de calor parcial. Expressando as velocidades peculiares dos constituintes em termos da velocidade peculiar em relação à mistura e somando sobre todos os constituintes α, obtemos o fluxo de calor total da mistura através de,

$$q_i(\mathbf{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\left[q_i^\alpha + \left(\frac{3}{2}\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}kT + \frac{1}{2}\rho_\alpha u_\alpha^2\right)u_i^\alpha + p_{ij}^\alpha u_j^\alpha\right] = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{2}\int m_\alpha \xi_\alpha^2 \xi_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha. \tag{1.90}$$

Uma definição de interesse que envolve o conceito de momento linear é o vetor fluxo de difusão parcial do constituinte α J_i^α representado por,

$$J_i^\alpha = \rho_\alpha u_i^\alpha, \tag{1.91}$$

o qual satisfaz a condição,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} J_i^\alpha = 0\,. \tag{1.92}$$

O vetor J_i^α pode ser obtido em termos da velocidade peculiar da partícula α através da expressão,

$$J_i^\alpha(\mathbf{x},t) = \int m_\alpha \xi_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha. \tag{1.93}$$

Os momentos de ordem superior não tem nomes próprios específicos.

1.5.2 *As Equações de Balanço para os Momentos*

As equações de balanço para os momentos da função distribuição são obtidas a partir da equação de transporte (1.56) ao escolhermos $\psi_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)$ igual a:

a) Balanço da densidade parcial de massa: $\psi_\alpha = m_\alpha$,

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\alpha v_i^\alpha) = 0\,, \tag{1.94}$$

ou,

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(J_i^\alpha + \rho_\alpha v_i) = 0\,. \tag{1.95}$$

Para a densidade de massa da mistura encontramos,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0\,, \tag{1.96}$$

onde procedemos a soma em (1.94) sobre todos os constituintes α e consideramos (1.77).

b) Balanço de densidade parcial de momento linear: $\psi_\alpha = m_\alpha c_i^\alpha$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha v_i^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}^\alpha + \rho_\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha) = S_i^\alpha + P_i^\alpha\,, \tag{1.97}$$

onde,

$$S_i^\alpha = \int m_\alpha F_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.98}$$

e

$$P_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int m_\alpha (c_i'^\alpha - c_i^\alpha) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\beta\alpha}\,, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} P_i^\alpha = 0\,. \tag{1.99}$$

A densidade de momento linear para a mistura resulta em,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij} + \rho v_i v_j) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_i^\alpha\,. \tag{1.100}$$

c) Balanço da densidade de energia da mistura: $\psi_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2$,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i}(q_i^\alpha + p_{ij}^\alpha v_j^\alpha + \rho_\alpha u_\alpha v_i^\alpha) \right] = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_\alpha\,, \tag{1.101}$$

onde,

$$S_\alpha = \int m_\alpha F_i^\alpha c_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.102}$$

ou em termos da energia interna $\rho\epsilon$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(q_i + \rho\epsilon v_i) + p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{P_\alpha}, \tag{1.103}$$

onde,

$$S_{P_\alpha} = \int m_\alpha F_i^\alpha \xi_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha. \tag{1.104}$$

Obtemos a equação para a temperatura se substituirmos a segunda igualdade da equação (1.88) na equação (1.103).

d) Balanço de densidade de entropia da mistura [13]: $\psi_\alpha = -k \ln f_\alpha$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\eta v_i + \varphi_i) = P_E \geq 0\,, \tag{1.105}$$

onde,

$$\rho\eta = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \eta_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu}(-k) \int f_\alpha \ln f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha, \tag{1.106}$$

$$\varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu}(-k) \int C_i^\alpha f_\alpha \ln f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \eta_\alpha u_i^\alpha, \tag{1.107}$$

$$P_E = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu}(-k) \int \ln \frac{f'_\alpha}{f_\alpha} f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\beta\alpha}\,. \tag{1.108}$$

com η_α representando a entropia específica do constituinte α, $\rho\eta$ a densidade de entropia interna e φ_i o fluxo de entropia da mistura.

A desigualdade entrópica pode ser verificada quando escrevemos a relação para P_E de (1.108) em uma forma alternativa. Para obtermos essa outra forma para P_E devemos observar que:

a) Se na relação para P_E trocarmos os índices α e β por serem mudos, o lado direito de (1.108) pode ser escrito,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu}(-k) \int \ln \frac{f'_\beta}{f_\beta} f_\beta f_\alpha d\Gamma_{\alpha\beta} = P_E\,, \tag{1.109}$$

sendo a identidade com P_E possível devido aos módulos das velocidades relativas de $g_{\beta\alpha}$ e $g_{\alpha\beta}$, serem iguais e portanto de (1.69) $d\Gamma_{\beta\alpha} = d\Gamma_{\alpha\beta}$, de modo a que junto com as relações (1.108) e (1.109) nos possibilita escrever,

$$P_E = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu}(-k) \int \left(\ln \frac{f'_\alpha}{f_\alpha} + \ln \frac{f'_\beta}{f_\beta}\right) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\beta\alpha} = -\frac{k}{2}\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu} \int \ln \frac{f'_\alpha f'_\beta}{f_\alpha f_\beta} f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\beta\alpha}\,. \tag{1.110}$$

1.6 Definição de Equilíbrio

Vamos investigar a existência de uma função de distribuição que torna nulo o termo de colisão da equação de Boltzmann (1.54). Nestas condições, o número de pontos destruídos no espaço de fase μ pelas colisões diretas é igual ao número de pontos criados no mesmo espaço pelas colisões de restituição. Assim necessariamente é válida a condição,

$$f'_\alpha f'_\beta = f_\alpha f_\beta \tag{1.117}$$

para qualquer β. Como estamos interessados em uma função distribuição para cada constituinte no equilíbrio, tomamos o logarítmo na condição (1.117), ou seja,

$$\ln f_\alpha + \ln f_\beta = \ln f'_\alpha + \ln f'_\beta . \tag{1.118}$$

Analisando a equação (1.118) verificamos, através das leis de conservação de massa, momento linear e energia, para duas partículas α e β, antes e após uma colisão, que a função $\ln f_\alpha$ deve ser da forma,

$$\ln f_\alpha = \alpha_\alpha + \vec{\beta}.(m_\alpha \mathbf{c}^\alpha) + \gamma \left(\frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2\right) . \tag{1.119}$$

Se fizermos $\alpha_\alpha = \ln a_\alpha - m_\alpha b^* w^2$, $\vec{\beta} = 2b^* \mathbf{w}$ e $\gamma = -b^*$, onde a_α e b^* são duas funções escalares positivas e $\mathbf{w}$ uma função vetorial, podemos escrever a equação (1.119) do seguinte modo,

$$f_\alpha = a_\alpha e^{-m_\alpha b^* (\mathbf{c}^\alpha - \mathbf{w})^2} ; \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu) . \tag{1.120}$$

As condições $a_\alpha > 0$ e $b^* > 0$ garantem a positividade da função de distribuição e a sua integrabilidade em todo o espaço das velocidades.

As funções a_α, b^* e $\mathbf{w}$ são determinadas através da substituição da função distribuição (1.120), nas equações (1.94), (1.97) e na equação (1.103). Devemos efetuar a soma sobre todos os componentes α da mistura na equação (1.97) e (1.103) no equilíbrio considerando

$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha v_i^\alpha = \rho v_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha v_i$. Em seguida, procedemos às integrações[2] que aparecem nas equações de balanço e resolvemos o sistema de equações para a_α, obtendo,

$$a_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha b^*}{\pi}\right)^{3/2} . \tag{1.121}$$

Determinamos o coeficiente b^* através da equação de Gibbs para uma mistura,

$$d\eta \mid_E = \frac{1}{T}\left[d\epsilon \mid_E - \frac{p \mid_E}{\rho^2} d\rho - \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mu_\alpha \mid_E d\left(\frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\right] , \tag{1.122}$$

onde μ_α é o potencial químico do constituinte α, sendo no equilíbrio representado por,

$$\mu_\alpha \mid_E = \epsilon_\alpha \mid_E - T\eta_\alpha \mid_E + \frac{p_\alpha \mid_E}{\rho_\alpha} . \tag{1.123}$$

Se substituirmos a função (1.120) com (1.121) nas definições de (1.106) e considerarmos o estado de equilíbrio temos,

$$\rho\eta|_E = \frac{3}{2}kn - k\sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \left[\ln n_\alpha + \ln\left(\frac{m_\alpha b^*}{\pi}\right)^{3/2}\right] , \tag{1.124}$$

além de,

$$p_{ij}|_E = \frac{n}{2b^*}\delta_{ij} = p|_E\delta_{ij} , \qquad \rho\eta|_E = \frac{3n}{4b^*} , \qquad q_i|_E = 0 , \qquad e \qquad \varphi_i|_E = 0 . \tag{1.125}$$

Desse modo podemos escrever,

[2]Na integração transformamos as coordenadas cartesianas $(\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha)$ em coordenadas esféricas $(\xi_\alpha, \theta, \phi)$ e escrevemos,

$$\int d\vec{\xi}^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1^\alpha d\xi_2^\alpha d\xi_3^\alpha = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \xi_\alpha^2 \mathrm{sen}\theta d\xi_\alpha d\theta d\phi = 4\pi \int_0^\infty \xi_\alpha^2 d\xi_\alpha .$$

Essas integrais recaem em integrais do tipo,

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

onde $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ com $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ é a função gama.

$$\mu_\alpha|_E = \frac{5}{4}\frac{1}{m_\alpha b^*}\frac{kT}{m_\alpha}\left[\frac{3}{2} - \ln n_\alpha - \ln\left(\frac{m_\alpha b^*}{\pi}\right)^{3/2}\right]. \tag{1.126}$$

Diferenciando (1.124) para $\eta|_E$,

$$d\eta|_E = 2b^*k\left[d\epsilon|_E - \left(\frac{5}{4b^*} - \frac{3}{2}kT\right)\frac{n}{\rho^2}d\rho - \frac{1}{2kT}\sum_{\alpha=1}^{\nu}\mu_\alpha d\left(\frac{\rho_\alpha}{\rho}\right) + \left(\frac{3}{4b^*} - \frac{3}{2}kT\right)\frac{1}{\rho}dn\right], \tag{1.127}$$

que comparada com a equação de Gibbs para misturas (1.122), identificamos,

$$2b^*k = \frac{1}{T}. \tag{1.128}$$

Logo, observamos que a função distribuição no equilíbrio reduz-se à função distribuição das velocidades de Maxwell f_{M_α}, ou seja,

$$f_\alpha|_E = f_{M_\alpha} = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha}{2kT}(\mathbf{c}^\alpha - \mathbf{v})^2} = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2}. \tag{1.129}$$

Consequentemente, a função distribuição das velocidades de Maxwell torna nulo o termo de colisão da equação de Boltzmann (1.54), isto é nestas condições a densidade do número total de pontos destruídos no espaço de fase μ devido às colisões diretas é igual a densidade do número total de pontos criados no mesmo espaço devido às colisões de restituição .

Capítulo 2

O Método de Chapman-Enskog

Neste capítulo analisaremos uma mistura de ν gases ionizados clássicos ideais, cuja descrição macroscópica se baseia na teoria termodinâmica de $\nu+4$ campos escalares. Esta teoria termodinâmica tem como objetivo a determinação da evolução dos campos de densidade parcial de massa $\rho_\alpha(\mathbf{x},t)$, velocidade da mistura $v_i(\mathbf{x},t)$ e temperatura da mistura $T(\mathbf{x},t)$. As equações de balanço para estes campos são dadas através das equações (1.94), (1.97), (1.103) sendo reescritas da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(J_i^\alpha + \rho_\alpha v_i) = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij} + \rho v_i v_j) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_i' + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \epsilon_{ijk} J_j^\alpha B_k\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(q_i + \rho\epsilon v_i) + p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} J_i^\alpha E_i'\,, \tag{2.3}$$

onde, para o caso de gases ionizados em presença dos campos externos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ (vetor indução de campo magnético) a força externa específica F_i que atua sobre cada partícula representa a força de Lorentz dividida pela massa da partícula, ou seja,

$$F_i^\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}[E_i + (\mathbf{c}^\alpha \times \mathbf{B})_i]\,, \tag{2.4}$$

e E_i' é o campo elétrico medido por um referencial movendo-se com o gás e portanto,

$$E_i' = E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k \,. \tag{2.5}$$

O sistema de equações formado por (2.1) à (2.3) não pode ser considerado como um sistema de equações de campo para ρ_α, v_i e T. Para tanto devemos determinar equações que relacionem o tensor pressão p_{ij}, o fluxo de calor q_i e o fluxo de difusão parcial J_i^α aos campos de densidade parcial de massa, velocidade da mistura e temperatura da mistura. Na termodinâmica, estas relações são conhecidas como equações constitutivas.

O objetivo principal deste capítulo é a obtenção das equações constitutivas para p_{ij}, q_i e J_i^α com base no método de Chapman-Enskog [4].

2.1 A Função Distribuição Desenvolvida em Série e a Equação de Boltzmann

A equação de Boltzmann (1.54) descreve o comportamento de um sistema de partículas através de uma sua função distribuição $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t)$. Esta função distribuição , solução da equação de Boltzmann, pode ser obtida em termos de grandezas termodinâmicas ao ser desenvolvida em uma série de potências, como nos desenvolvimentos em série de Hilbert e Enskog [1] para um determinado parâmetro ε. Este estabelece o quão distante do equilíbrio se encontra cada termo, de acordo com a ordem dos gradientes das variáveis termodinâmicas envolvidas, de modo que,

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) = f_\alpha^{(0)}(\mathbf{c}^\alpha, \Psi_A^\alpha) + \varepsilon f_\alpha^{(1)}\left(\mathbf{c}^\alpha, \Psi_A^\alpha, \frac{\partial \Psi_A^\alpha}{\partial x_i}\right) + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)}\left(\mathbf{c}^\alpha, \Psi_A^\alpha, \frac{\partial \Psi_A^\alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \Psi_A^\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \ldots \tag{2.6}$$

onde,

$$\Psi_A^\alpha(\mathbf{x}, t) = \int \psi_A^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t) d\mathbf{c}^\alpha, \qquad (A = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{2.7}$$

representam os campos macroscópicos correspondentes aos invariantes de soma ψ_A^α, isto é,

$$\psi_0^\alpha = m_\alpha, \qquad \psi_i^\alpha = m_\alpha c_i^\alpha \quad (i = 1, 2, 3), \quad \psi_4^\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2, \tag{2.8}$$

e

$$\Psi_0^\alpha = \rho_\alpha, \qquad \Psi_i^\alpha = \rho_\alpha v_i^\alpha \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Psi_4^\alpha = \rho_\alpha u_\alpha = \rho_\alpha \left(\epsilon_\alpha + \frac{1}{2} v_\alpha^2\right). \tag{2.9}$$

Em nosso estudo estamos interessados em situações na qual o gás esteja em um estado próximo ao equilíbrio. Desse modo, apenas os gradientes em primeira ordem das grandezas termodinâmicas envolvidas na função distribuição no equilíbrio $f_{M_\alpha} = f_\alpha^{(0)}$, são considerados nesse desvio.

Assim, como a solução da equação de Boltzmann para f_α é obtida em termos de uma série de potências, devemos reconhecer a magnitude de influência de cada termo quando aplicada à essa série, de modo a equilibrar ambos os membros das $n+1$ equações que então ficam obtidas da equação de Boltzmann. No seu lado direito, isto é, na integral de colisão, a escala de tempo próprio é o tempo do livre caminho médio de uma partícula ($t \approx 10^{-10}$s e a função distribuição carrega esta informação). Porém a escala de tempo característica na dinâmica dos fluidos é o tempo necessário para a onda sonora percorrer uma distância de interesse macroscópico, ou seja, da ordem de (10^{-3}s), com todas as informações essenciais fornecidas pelo pequeno número de propriedades macroscópicas, como densidade, velocidade hidrodinâmica e temperatura. Estas informações são fornecidas pelo lado esquerdo da equação de Boltzmann, também denominado de termo de fluxo. Portanto a transição da teoria cinética para a dinâmica dos fluidos, implica numa contração da descrição formal. Se o movimento das moléculas de um ponto a outro no gás pudesse ser ignorado, as colisões fariam com que a função distribuição se tornasse maxwelliana após um pequeno número de colisões. Entretanto para gradientes macroscópicos pequenos, o movimento molecular dentro de uma pequena região não difere muito do movimento molecular de outras regiões próximas, o que implica em variações em escala de tempo macroscópico. Então o efeito das colisões prevalece sobre os efeitos causados pela dinâmica dos fluidos no sentido de levar o gás em direção ao equilíbrio térmico.

Quando um gás ionizado é submetido à um campo magnético $\mathbf{B}$, uma parcela do termo envolvido pela força externa e que depende do campo magnético, também terá uma influência da ordem da integral de colisão. A frequência com que as partículas carregadas podem girar em torno do campo magnético pode ser, dependendo da intensidade desse campo, da ordem da frequência de colisão das partículas. A velocidade das partículas pode ser separada em velocidade da mistura e velocidade peculiar, de modo que a força de Lorentz específica pode ser escrita,

$$F_i^\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}[E_i + \epsilon_{ijk}(\xi_j^\alpha + v_j)B_k]\,. \tag{2.10}$$

O efeito do campo magnético sobre o fluido como um todo é da ordem do tempo característico da dinâmica dos fluidos (pois v_i é baixa), porém esse efeito sobre as partículas com suas velocidades peculiares (ξ_i^α sendo alta) é intenso, fazendo com que o tempo de giro das partículas seja da ordem do tempo entre duas colisões. Desse modo, essa parcela do termo da força magnética deve ter o mesmo peso de influência que a integral de colisão na equação de Boltzmann.

O mesmo princípio é empregado para a função distribuição . Como as colisões tendem a manter o gás o mais próximo do equilíbrio, o termo de colisão e a parcela referente à velocidade peculiar da força de Lorentz (2.10) na equação de Boltzmann, devem ter o mesmo peso que o termo referente à função maxwelliana (equilíbrio térmico, no desenvolvimento em série da função distribuição (2.6)). Para os demais termos cujos tempos característicos sejam da ordem da dinâmica dos fluidos, o mesmo peso relativo do desvio em primeira ordem da função distribuição, no caso peso ε do segundo termo do desenvolvimento (2.6). Desse modo segue os demais termos da série em ordem de potência de ε. Assim a equação de Boltzmann (1.54) com a força externa dada pela força de Lorentz (2.10) e tendo como função distribuição um desenvolvimento em série de ordens de ε, (desvio do equilíbrio), é escrita,

$$\left\{\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t} + c_i^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(E_i + \epsilon_{ijk}v_jB_k)\frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}\right] + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k\frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}\right\}(f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)} + ...)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu}\int[(f_\alpha'^{(0)} + \varepsilon f_\alpha'^{(1)} + ...)(f_\beta'^{(0)} + \varepsilon f_\beta'^{(1)} + ...)$$

$$-(f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(1)} + ...)(f_\beta^{(0)} + \varepsilon f_\beta^{(1)} + ...)]g_{\beta\alpha}bdbd\epsilon d\mathbf{c}^\beta\,. \tag{2.11}$$

Igualando-se os termos de mesma ordem em ε na equação (2.11), obtemos a seguinte série de equações,

$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu}\int(f_\alpha'^{(0)}f_\beta'^{(0)} - f_\alpha^{(0)}f_\beta^{(0)})g_{\beta\alpha}bdbd\epsilon d\mathbf{c}^\beta, \tag{2.12}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k)\frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}\right] f_\alpha^{(0)} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial c_i^\alpha}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (f_\alpha'^{(0)} f_\beta'^{(1)} + f_\alpha'^{(1)} f_\beta'^{(0)} - f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(1)} - f_\alpha^{(1)} f_\beta^{(0)}) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta, \tag{2.13}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k)\frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}\right] f_\alpha^{(1)}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (f_\alpha'^{(0)} f_\beta'^{(2)} + f_\alpha'^{(1)} f_\beta'^{(1)} + f_\alpha'^{(2)} f_\beta'^{(0)} - f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(2)} - f_\alpha^{(1)} f_\beta^{(1)} - f_\alpha^{(2)} f_\beta^{(0)}) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta, \tag{2.14}$$

e etc., seguindo dessa forma as demais equações que surgem se utilizarmos mais termos da série de f_α.

Como já observado, temos como objetivo uma teoria linearizada com primeiros gradientes. Portanto, iremos considerar termos até a primeira ordem em ε. Neste caso a função distribuição pode ser escrita,

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(0)} \phi_\alpha = f_\alpha^{(0)}(1 + \varepsilon \phi_\alpha)\,, \tag{2.15}$$

onde ϕ_α é o desvio do estado de equilíbrio, ou seja, é o desvio da função maxwelliana $f_\alpha^{(0)}$ (1.129).

Devemos lembrar que a relação entre a velocidade da partícula α, c_i^α, com a velocidade peculiar da partícula α, ξ_i^α, é feita através da definição (1.85) e portanto,

$$dc_i^\alpha = d\xi_i^\alpha\,. \tag{2.16}$$

Assim a equação de Boltzmann para uma teoria linearizada pode ser representada pelas equações (2.12) e (2.13). Utilizando o conceito de desvio da função distribuição, ϕ_α dada por (2.15) e usando a relação (1.62), reescrevemos a equação (2.13), do seguinte modo,

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t} + (\xi_i^\alpha + v_i)\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_i' \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial c_i^\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k \frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}(f_\alpha^{(0)}\phi_\alpha)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)} (\phi_\alpha' - \phi_\alpha + \phi_\beta' - \phi_\beta) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta, \tag{2.17}$$

sendo E_i', expresso por (2.5).

Substituindo $f_\alpha^{(0)}$ pela sua expressão (1.129) e considerando a indenpendência das velocidades das partículas tanto em relação a sua posição quanto ao tempo e que,

$$\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial \xi_j^\alpha} = \delta_{ij}\,, \tag{2.18}$$

além de representar a integral de colisão, ou seja o lado direito da equação (2.17), por

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\phi_\alpha) + I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)] \tag{2.19}$$

onde,

$$I_{\alpha\beta}(\phi_\alpha) = \int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)}(\phi_\alpha' - \phi_\alpha) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta, \tag{2.20}$$

encontramos para (2.17),

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(0)} \Bigg\{ & \frac{1}{\rho_\alpha}\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m_\alpha}{kT}\xi_i^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ & + (\xi_i^\alpha + v_i)\left[\frac{1}{\rho_\alpha}\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x_i} + \left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m_\alpha}{kT}\xi_j^\alpha \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] \\ & - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}E_i'\frac{m_\alpha}{kT}\xi_i^\alpha \Bigg\} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k \frac{\partial}{\partial \xi_i^\alpha}(f_\alpha^{(0)}\phi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\phi_\alpha) + I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)]\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

A equação integro-diferencial (2.21) escrita em função de variáveis termodinâmicas, deve ser resolvida para ϕ_α de modo a obter assim a função de distribuição (2.15). Substituímos então as derivadas temporais de ρ_α, v_i e T que aparecem em (2.21), por expressões resultantes das equações de balanço do gás no estado de equilíbrio. Estas podem ser obtidas quando multiplicamos a equação (2.21) sucessivamente por m_α, $\sum_{\alpha=1}^{\nu} m_\alpha c_i^\alpha$ e $\sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{1}{2}m_\alpha c_\alpha^2$ e a integramos em $d\mathbf{c}_\alpha$.[1] As equações assim obtidas representam as equações de balanço no estado de equilíbrio do gás, ou seja quando,

$$u_i^\alpha = 0, \qquad J_i^\alpha = 0, \qquad v_i^\alpha = v_i, \qquad \rho\epsilon = \frac{3}{2}nkT, \qquad p_{ij} = p\delta_{ij}, \quad e \quad q_i = 0\,. \tag{2.22}$$

[1]Ou de uma forma alternativa, quando substituímos ψ_α, na equação de transporte (1.56), pelos invariantes de soma (2.8) e f_α por $f_\alpha^{(0)}$.

Lembrando que a função maxwelliana é uma função par, após a integração, as equações de balanço de massa do constituinte α, momento linear da mistura e temperatura da mistura, todas na condição de equilíbrio são obtidas, sendo representadas respectivamente pelas equações,

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_\alpha v_i) = 0\,, \tag{2.23}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_i' + \sum_{\alpha=1}^{\nu} e_\alpha \epsilon_{ijk} B_k \int \xi_j^\alpha f_\alpha^{(0)} \phi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{2}{3} T \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0\,. \tag{2.25}$$

Substituindo as derivadas temporais de ρ_α, v_i e T da equação (2.21), através das equações (2.23) à (2.25) e procedendo algumas manipulações algébricas, obtemos,

$$f_\alpha^{(0)} \left[\frac{n}{n_\alpha} \xi_i^\alpha d_i^\alpha + \left(\frac{m_\alpha}{2kT} \xi_\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\alpha \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m_\alpha}{kT} \xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu} [I_{\alpha\beta}(\phi_\alpha) + I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)] - f_\alpha^{(0)} \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \epsilon_{ijk} \xi_j^\alpha B_k \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_i^\alpha} + \frac{m_\alpha}{\rho kT} \xi_i^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \epsilon_{ijk} B_k \int \xi_j^\beta f_\beta^{(0)} \phi_\beta d\mathbf{c}^\beta \right), \tag{2.26}$$

onde, introduzimos o vetor força generalizada de difusão do constituinte α, d_i^α, ou seja,

$$d_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right) + \left(\frac{n_\alpha}{n} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\rho_\alpha}{p} E_i' \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{\rho_\beta}{\rho} \frac{e_\beta}{m_\beta} \right), \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} d_i^\alpha = 0\,. \tag{2.27}$$

Consideramos também em (2.26) que o tensor sem traço dado pelo produto tensorial de dois vetores, $\xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha$ representa,

$$\xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha = \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha - \frac{1}{3} \xi_\alpha^2 \delta_{ij}, \tag{2.28}$$

e o produto do tensor sem traço (2.28) pelo tensor simétrico[2] $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ pode ser dado por,

$$\xi^a_{<i}\xi^a_{j>}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \xi^a_i\xi^a_j\frac{\partial v_{<j}}{\partial x_{i>}}. \tag{2.29}$$

Observamos que o produto vetorial,

$$\epsilon_{ijk}\xi^a_j B_k \frac{\partial f^{(0)}_a}{\partial \xi^a_i} = 0\,, \tag{2.30}$$

pois $\partial f^{(0)}_a/\partial\xi^a_i$ possui a direção de ξ^a_i.

A equação (2.26) é uma equação integro-diferencial, não homogênea em relação a ϕ_a, proveniente da equação de Boltzmann. A solução dessa equação é dada pela superposição da solução homogênea com a sua solução não homogênea. A solução da equação integro-diferencial homogênea, isto é, a solução de

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{a\beta}(\phi_a) + I_{a\beta}(\phi_\beta)] - f^{(0)}_a\frac{e_a}{m_a}\epsilon_{ijk}\xi^a_j B_k\frac{\partial\phi_a}{\partial\xi^a_i} - f^{(0)}_a\frac{m_a}{\rho kT}\xi^a_i\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\epsilon_{ijk}B_k\int\xi^\beta_j f^{(0)}_\beta\phi_\beta d\mathbf{c}^\beta = 0, \tag{2.31}$$

é dada por,

$$\phi_{ah} = \alpha + \beta_i\xi^a_i + \gamma\xi^2_a\,, \tag{2.32}$$

onde α e γ são duas funções escalares e β_i é uma função vetorial, todas independentes de ξ^a_i, porém podendo depender de B_i. A solução ϕ^a_h é portanto um invariante de soma. A solução particular da equação integro-diferencial não homogênea (2.26) deve ser função de d^a_i, $\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}$. Como os vetores $d^1_i, d^2_i, ..., d^\nu_i$ são vetores linearmente dependentes pois, $\sum_{a=1}^{\nu} d^a_i = 0$, introduzimos um novo conjunto linearmente independente de vetores d^{*a}_i, de

[2]Genericamente podemos escrever

$$Q_{<rs>}\frac{\partial v_r}{\partial x_s} = Q_{rs}\frac{\partial v_{<r}}{\partial x_{s>}} = Q_{<rs>}\frac{\partial v_{<r}}{\partial x_{s>}},$$

pois,

$$\frac{\partial v_r}{\partial x_s} = \left(\frac{\partial v_{(r}}{\partial x_{s)}}\right)_{\text{simétrico}} + \left(\frac{\partial v_{[r}}{\partial x_{s]}}\right)_{\text{antissimétrico}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} - \frac{\partial v_s}{\partial x_r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_r}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{rs} + \frac{1}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{rs} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} - \frac{\partial v_s}{\partial x_r}\right) = \frac{\partial v_{<r}}{\partial x_{s>}} + \frac{1}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{rs} + \frac{\partial v_{[r}}{\partial x_{s]}}.$$

tal modo que,

$$d_i^\alpha = d_i^{*\alpha} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\sum_{\beta=1}^{\nu} d_i^{*\beta} = \sum_{\beta=1}^{\nu}(\delta^{\alpha\beta} - \frac{\rho_\alpha}{\rho})d_i^{*\beta}. \tag{2.33}$$

Com isso podemos escrever a solução particular da equação integro-diferencial (2.26) por,

$$\phi_{\alpha p} = -\sum_{\beta=1}^{\nu} D_i^{\alpha\beta} d_i^{*\beta} - A_i^\alpha \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - B_{ij}^\alpha \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \tag{2.34}$$

isto é, $\phi_{\alpha p}$ é uma combinação linear dos vetores, força de difusão, gradiente de temperatura e do tensor gradiente de velocidade. Os vetores $D_i^{\alpha\beta}$ e A_i^α e o tensor B_{ij}^α de cada constituinte α da mistura, são funções explícitas de $(\rho_\alpha, T, \vec{\xi}^\alpha, \mathbf{B})$ e implicitamente funções de $(\mathbf{x}, t)$, devido aos campos básicos serem funções da posição e tempo. A velocidade peculiar de uma partícula é inerente à própria partícula (aleatória) e o campo magnético é uniforme. A solução geral da equação (2.26) é então escrita, com base nas equações (2.32) e (2.34) como,

$$\phi_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{\nu} D_i^{\alpha\beta} d_i^{*\beta} - A_i^\alpha \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - B_{ij}^\alpha \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} + \alpha + \beta_i \xi_i^\alpha + \gamma \xi_\alpha^2. \tag{2.35}$$

A unicidade dessa solução é obtida quando aplicamos as restrições,

$$\int \psi_\alpha f_\alpha^{(0)} \phi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha = 0, \tag{2.36}$$

onde ψ_α representa as quantidades aditivas arbitrárias que definem os campos básicos dados por (1.70), (1.71) e (1.72) quando aplicadas à equação (1.63). Na situação de equilíbrio os campos básicos continuam a existir (não são nulos) e portanto para essas mesmas quantidades aditivas arbitrárias torna-se válida a relação,

$$\Psi_\alpha = \int \psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}^\alpha = \int \psi_\alpha f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha, \tag{2.37}$$

de onde segue a restrição (2.36) para $(\alpha = 1, 2, ..., \nu)$.

Ao substituirmos a solução (2.35) na equação (2.26), com a consideração feita em (2.33) e igualarmos os coeficientes de $d_i^{*\beta}$, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}$, em ambos os membros, obtemos assim as seguintes equações integro-diferenciais para $D_i^{\alpha\beta}$, A_i^α e B_{ij}^α,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(D_i^{\alpha\gamma})+I_{\alpha\beta}(D_i^{\beta\gamma})]+\frac{m_\alpha}{\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_j^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\epsilon_{jkl}B_l\int\xi_k^\beta D_i^{\beta\gamma}f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l\frac{\partial D_i^{\alpha\gamma}}{\partial\xi_j^\alpha}$$

$$=\frac{n}{n_\alpha}f_\alpha^{(0)}\left(\delta^{\alpha\gamma}-\frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi_i^\alpha,\qquad(\alpha=1,2,...,\nu\quad\text{e}\quad\gamma=1,2,...,\nu),\tag{2.38}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(A_i^\alpha)+I_{\alpha\beta}(A_i^\beta)]+\frac{m_\alpha}{\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_j^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\epsilon_{jkl}B_l\int\xi_k^\beta A_i^\beta f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l\frac{\partial A_i^\alpha}{\partial\xi_j^\alpha}$$

$$=f_\alpha^{(0)}\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2-\frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha,\qquad(\alpha=1,2,...,\nu),\tag{2.39}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(B_{<ij>}^\alpha)+I_{\alpha\beta}(B_{<ij>}^\beta)]+\frac{m_\alpha}{\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_k^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\epsilon_{klm}B_m\int\xi_l^\beta B_{<ij>}^\beta f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta$$

$$+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\epsilon_{klm}\xi_l^\alpha B_m\frac{\partial B_{<ij>}^\alpha}{\partial\xi_k^\alpha}=\frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha,\qquad(\alpha=1,2,...,\nu).\tag{2.40}$$

Estas equações serão solúveis se e somente se as seguintes condições de ortogonalidade forem satisfeitas,

$$\int\psi_\alpha f_\alpha^{(0)}\left(\delta^{\alpha\beta}-\frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha=0,\qquad\int\psi_\alpha f_\alpha^{(0)}\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2-\frac{5}{2}\right)\xi_\alpha d\mathbf{c}^\alpha=0,\tag{2.41}$$

com,

$$\int\psi_\alpha f_\alpha^{(0)}\frac{m_\alpha}{kT}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha d\mathbf{c}^\alpha=0\,.\tag{2.42}$$

Os vetores $D_i^{\alpha\beta}$ não ficam determinados univocamente pela equação (2.38). A condição que falta é obtida da própria equação (2.38) quando a multiplicamos por $\frac{\rho_\beta}{\rho}$ e a somamos em β. Verificamos assim, que na auxência de campo magnético,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{\rho_\beta}{\rho}D_i^{\alpha\beta}=0\,,\tag{2.43}$$

ou seja, representa, independentemente do campo magnético, um invariante de soma [4]. Da relação (2.33), quando aplicada ao termo correspondente da solução (2.34), escrevemos,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}D_i^{\alpha\beta}d_i^\beta=\sum_{\beta=1}^{\nu}D_i^{\alpha\beta}\sum_{\gamma=1}^{\nu}\left(\delta^{\beta\gamma}-\frac{\rho_\beta}{\rho}\right)d_i^{*\gamma}=\sum_{\beta=1}^{\nu}D_i^{\alpha\beta}d_i^{*\beta}-\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{\rho_\beta}{\rho}D_i^{\alpha\beta}\sum_{\gamma=1}^{\nu}d_i^{*\gamma}.\tag{2.44}$$

Como $\sum_{\gamma=1}^{\nu} d_i^{*\gamma} \neq 0$ e de (2.43), concluimos que,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} D_i^{\alpha\beta} d_i^{\beta} = \sum_{\beta=1}^{\nu} D_i^{\alpha\beta} d_i^{*\beta} . \tag{2.45}$$

A relação (2.43) é a condição que estavamos procurando, a ser acrescentada à equação (2.38) para que aquele sistema de equações torne-se univocamente determinado.

De acordo com os teoremas de representação de funções vetoriais e tensoriais isotrópicas, [14], podemos expressar as funções vetoriais $D_i^{\alpha\beta}(\rho_\alpha, T, \vec{\xi}^\alpha, \mathbf{B})$, $A_i^\alpha(\rho_\alpha, T, \vec{\xi}^\alpha, \mathbf{B})$ e a função tensorial simétrica sem traço $B_{<ij>}^\alpha(\rho_\alpha, T, \vec{\xi}^\alpha, \mathbf{B})$, sabendo ainda que o vetor intensidade de fluxo magnético $\mathbf{B}$ é um pseudo-vetor (vetor axial), por

$$D_i^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{(n)}(\xi_\alpha^2, B^2, (\xi_k^\alpha B_k)^2) V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha , \tag{2.46}$$

$$A_i^\alpha = \sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{(n)}(\xi_\alpha^2, B^2, (\xi_k^\alpha B_k)^2) V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha , \tag{2.47}$$

$$B_{<ij>}^\alpha = \sum_{n=1}^{5} B_\alpha^{(n)}(\xi_\alpha^2, B^2, (\xi_k^\alpha B_k)^2) T_{<ij>}^{(n)\alpha} , \tag{2.48}$$

onde $D_{\alpha\beta}^{(n)}$, $A_\alpha^{(n)}$ e $B_\alpha^{(n)}$ são funções escalares isotrópicas e

$$V_{ij}^{(1)} = \delta_{ij}, \qquad V_{ij}^{(2)} = \epsilon_{ijk} B_k \qquad V_{ij}^{(3)} = B_i B_j , \tag{2.49}$$

$$T_{<ij>}^{(1)\alpha} = \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha - \frac{1}{3}\xi_\alpha^2 \delta_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq}\xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha , \tag{2.50}$$

$$T_{<ij>}^{(2)\alpha} = \xi_i^\alpha \epsilon_{jkl} \xi_k^\alpha B_l + \epsilon_{ikl}\xi_k^\alpha B_l \xi_j^\alpha = (\delta_{ip}\epsilon_{jqr} + \delta_{jp}\epsilon_{iqr}) B_r \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha , \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} T_{<ij>}^{(3)\alpha} &= \epsilon_{ikr}\xi_k^\alpha B_r \epsilon_{jmn} \xi_m^\alpha B_n - \frac{1}{3}[\xi_\alpha^2 B^2 - (\xi_r^\alpha B_r)^2]\delta_{ij} \\ &= \epsilon_{pr<i}\epsilon_{j>qs} B_r B_s \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha - \frac{1}{3}\xi_\alpha^2 B_{<i} B_{j>} , \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} T_{<ij>}^{(4)\alpha} &= \epsilon_{ikl}\xi_k^\alpha B_l (\xi_r^\alpha B_r B_j - B^2 \xi_j^\alpha) + (\xi_r^\alpha B_r B_i - B^2 \xi_i^\alpha)\epsilon_{jmn}\xi_m^\alpha B_n \\ &= \epsilon_{kqr}\epsilon_{npl}\epsilon_{nms}(\delta_{ki}\delta_{sj} + \delta_{kj}\delta_{si}) B_l B_m B_r \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha , \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$T_{<ij>}^{(5)\alpha} = B_i B_j - \frac{1}{3} B^2 \delta_{ij} = B_{<i} B_{j>} . \tag{2.54}$$

Se inserirmos as representações (2.46) à (2.48) na solução geral (2.35), considerando (2.45), podemos escrever,

$$\phi_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha d_i^\beta - \sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$- \sum_{n=1}^{5} B_\alpha^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \alpha + \beta_r \xi_r^\alpha + \gamma \xi_\alpha^2. \tag{2.55}$$

Essa solução da equação integral (2.26), deve ainda satisfazer a condição dada pela equação (2.36) na suposição da teoria ser linearizada. Substituindo a solução ϕ_α dada por (2.55) nas equações que expressam os campos básicos, representados por (1.64) e procedendo a integração requerida, obtemos,

$$\alpha + 3\frac{nkT}{\rho}\gamma = 0\,, \tag{2.56}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \int m_\alpha \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{(n)} V_{jk}^{(n)} d_k^\beta + \sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{(n)} V_{jk}^{(n)} \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k} - \beta_j \right) f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha = 0\,, \tag{2.57}$$

$$\alpha + 5\sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{n_\alpha}{n m_\alpha} kT\,\gamma = 0\,, \tag{2.58}$$

Das equações (2.56) e (2.58) resulta que $\alpha = \gamma = 0$, enquanto que da equação (2.57) segue que β_i deve ser da forma,

$$\beta_i = \sum_{n=1}^{3} \left(\sum_{\gamma=1}^{\nu} \beta_D^{(n)\gamma} d_i^\gamma + \beta_T^{(n)} \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \tag{2.59}$$

Deste modo a equação (2.57) pode ser escrita por,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \int m_\alpha \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{*(n)} d_i^\beta + \sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{*(n)} \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha = 0 \tag{2.60}$$

onde definimos,

$$D_{\alpha\beta}^{*(n)} = D_{\alpha\beta}^{(n)} - \beta_D^{(n)\beta} \qquad \text{e} \qquad A_\alpha^{*(n)} = A_\alpha^{(n)} - \beta_T^{(n)}. \tag{2.61}$$

Sendo os vetores d_i^β e $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ independentes entre si, a partir de (2.60), verificamos que os coeficientes $D_{\alpha\beta}^{*(n)}$ e $A_\alpha^{*(n)}$ devem satisfazer as seguintes equações,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}\int m_\alpha \xi_\alpha^2 \sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{*(n)} f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu}\int m_\alpha \xi_\alpha^2 \sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{*(n)} f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha = 0\,. \tag{2.62}$$

Como os termos de β_i, (2.59), puderam ser absorvidos nos termos $\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{(n)} d_i^\beta$ e $\sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{(n)} \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}$, sem perda de generalidade podemos fazer $\beta_i = 0$.

Com base nos resultados acima e na equação (2.55), a função distribuição (2.15) pode ser escrita, se considerarmos termos até a primeira ordem a partir do equilíbrio, como,

$$\begin{aligned} f_\alpha &= f_\alpha^{(0)}(1+\phi_\alpha) \\ &= f_\alpha^{(0)}\left(1 - \sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\beta}^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha d_i^\beta - \sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \sum_{n=1}^{5} B_\alpha^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Os coeficientes $D_{\alpha\beta}^{(n)}$, $A_\alpha^{(n)}$ e $B_\alpha^{(n)}$ da equação (2.63) podem ser determinados através da resolução das equações (2.38), (2.39) e (2.40), uma vez conhecido a forma dos vetores $D_i^{\alpha\beta}$, A_i^α e $B_{<ij>}^\alpha$, dados por (2.46), (2.47), (2.48) e pelas considerações feitas acima. Portanto podemos escrever,

$$\begin{aligned} &-\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3}[I_{\alpha\beta}(D_{\alpha\gamma}^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha) + I_{\alpha\beta}(D_{\beta\gamma}^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\beta)] \\ &+\frac{m_\alpha}{\rho k T} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \epsilon_{jkl} B_l \int \xi_k^\beta \sum_{n=1}^{3} D_{\beta\gamma}^{(n)} V_{im}^{(n)} \xi_m^\beta f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \\ &+\frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{jkl} \xi_k^\alpha B_l \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}(D_{\alpha\gamma}^{(n)} V_{im}^{(n)} \xi_m^\alpha) \\ &= \frac{n}{n_\alpha} f_\alpha^{(0)}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi_i^\alpha, \quad (\alpha = 1,2,...,\nu \quad \text{e} \quad \gamma = 1,2,...,\nu), \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} &-\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{n=1}^{3}[I_{\alpha\beta}(A_\alpha^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha) + I_{\alpha\beta}(A_\beta^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\beta)] \\ &+\frac{m_\alpha}{\rho k T} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \epsilon_{jkl} B_l \int \xi_k^\beta \sum_{n=1}^{3} A_\beta^{(n)} V_{im}^{(n)} \xi_m^\alpha f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{jkl} \xi_k^\alpha B_l \frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}(\sum_{n=1}^{3} A_\alpha^{(n)} V_{im}^{(n)} \xi_m^\alpha) \end{aligned}$$

$$= f_\alpha^{(0)} \left(\frac{m_\alpha}{2kT} \xi_\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu) \tag{2.65}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{n=1}^{5} [I_{\alpha\beta}(B_\alpha^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\alpha}) + I_{\alpha\beta}(B_\beta^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\beta})]$$

$$+ \frac{m_\alpha}{\rho kT} f_\alpha^{(0)} \xi_k^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \epsilon_{klm} B_m \int \xi_l^\beta \sum_{n=1}^{5} B_\beta^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\beta} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta$$

$$+ \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{klm} \xi_l^\alpha B_m \sum_{n=1}^{5} \frac{\partial}{\partial \xi_k^\alpha} (B_\alpha^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\alpha}) = \frac{m_\alpha}{kT} f_\alpha^{(0)} \xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \tag{2.66}$$

Procederemos inúmeras considerações e simplificações em relação às equações acima, de modo a possibilitar o equacionamento de seus respectivos coeficientes. Como muitas das considerações são válidas para mais de uma das equações, tomaremos como base a equação (2.64) e sobre ela desenvolveremos as manipulações algébricas necessárias para a posterior resolução.

O segundo termo do lado esquerdo da equação (2.64), pode ser reduzido ao considerarmos (2.49), para,

$$\frac{m_\alpha}{\rho kT} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \epsilon_{jkl} B_l \int \xi_k^\beta (\sum_{n=1}^{3} D_{\beta\gamma}^{(n)} V_{im}^{(n)}) \xi_m^\beta f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta$$

$$= \frac{m_\alpha}{\rho kT} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \left(\epsilon_{jkl} B_l \int \xi_k^\beta \xi_i^\beta D_{\beta\gamma}^{(1)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right.$$

$$\left. + \epsilon_{jkl} \epsilon_{imn} B_l B_n \int \xi_k^\beta \xi_m^\beta D_{\beta\gamma}^{(2)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta + \epsilon_{jkl} B_l B_i B_m \int \xi_k^\beta \xi_m^\beta D_{\beta\gamma}^{(3)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right). \tag{2.67}$$

Sabendo que as funções $D_{\alpha\beta}^{(n)}$ e $f_\alpha^{(0)}$ são funções pares em relação a ξ_i^α, a partir do apêndice A obtemos,

$$\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha f(\xi_\alpha^2) d\vec{\xi}^\alpha = \frac{1}{3} \delta_{ij} \int \xi_\alpha^2 f(\xi_\alpha^2) d\vec{\xi}^\alpha, \tag{2.68}$$

e da igualdade (2.67), segue,

$$\frac{m_\alpha}{\rho kT} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \frac{1}{3} \left(\epsilon_{jil} B_l \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(1)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right.$$

$$\left. + \epsilon_{jkl} \epsilon_{ikn} B_l B_n \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta + \epsilon_{jkl} B_l B_i B_k \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(3)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right)$$

$$= \frac{m_\alpha}{\rho kT} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \frac{1}{3} \left[\epsilon_{jil} B_l \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(1)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta + (B^2 \delta_{ij} - B_i B_j) \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right], \quad (2.69)$$

na qual foram utilizadas as relações,

$$\epsilon_{jkl}\epsilon_{ijm}\xi_k^\alpha B_l B_n = (\delta_{kn}\delta_{li} - \delta_{ki}\delta_{ln})\xi_k^\alpha B_l B_n = \xi_n^\alpha B_n B_i - \xi_i^\alpha B^2, \quad (2.70)$$

e

$$\epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l B_i B_j = B_i(B_j \epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l) = 0\,. \quad (2.71)$$

O terceiro termo do lado esquerdo da equação (2.64), pode ser escrito,

$$\begin{aligned}
&\frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j^\alpha}(D_{\alpha\gamma}^{(n)} V_{im}^{(n)} \xi_m^\alpha) \\
&= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l \sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\gamma}^{(n)} V_{im}^{(n)} \frac{\partial \xi_m^\alpha}{\partial \xi_j^\alpha} \\
&= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l (D_{\alpha\gamma}^{(1)} \delta_{im} + D_{\alpha\gamma}^{(2)} \epsilon_{imn} B_n + D_{\alpha\gamma}^{(3)} B_i B_m)\delta_{mj} \\
&= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} [D_{\alpha\gamma}^{(1)} \epsilon_{ikl}\xi_k^\alpha B_l + D_{\alpha\gamma}^{(2)} (B^2 \xi_i^\alpha - B_i B_n \xi_n^\alpha)]\,, \quad (2.72)
\end{aligned}$$

onde, na primeira igualdade de (2.72) é nulo o produto escalar de $\frac{\partial D_{\alpha\gamma}^{(n)}}{\partial \xi_j^\alpha}$ (um vetor na direção de ξ_j^α) com o vetor $\epsilon_{jkl}\xi_k^\alpha B_l$. Na segunda igualdade utilizamos (2.49) e na terceira igualdade utilizamos as relações (2.70) e (2.71).

Substituindo as igualdades de (2.69) e de (2.72) na equação (2.64) obtemos a equação integral,

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\sum_{n=1}^{3} D_{\alpha\gamma}^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\alpha) + I_{\alpha\beta}(\sum_{n=1}^{3} D_{\beta\gamma}^{(n)} V_{ij}^{(n)} \xi_j^\beta)] + \frac{m_\alpha}{3\rho kT} f_\alpha^{(0)} \xi_j^\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu} e_\beta \left(B^2 \delta_{ij} \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right. \\
&\left. + \epsilon_{jil} B_l \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(1)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta - B_i B_j \int \xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)} f_\beta^{(0)} d\mathbf{c}^\beta \right) + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} (-B^2 D_{\alpha\gamma}^{(2)} \xi_i^\alpha \\
&+ \epsilon_{ikl}\xi_k^\alpha B_l D_{\alpha\gamma}^{(1)} + B_i B_n \xi_n^\alpha D_{\alpha\gamma}^{(2)}) = \frac{n}{n_\alpha} f_\alpha^{(0)} \left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \right) \xi_i^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, ..., \nu \quad \text{e} \quad \gamma = 1, 2, ..., \nu).
\end{aligned} \quad (2.73)$$

Como os vetores ξ_i^α, $\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k$ e $B_iB_j\xi_j^\alpha$, são independentes entre si, a equação (2.73) pode ser separada em três equações integrais acopladas para $D_{\alpha\gamma}^{(1)}$, $D_{\alpha\gamma}^{(2)}$ e $D_{\alpha\gamma}^{(3)}$, ou seja,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(D_{\alpha\gamma}^{(1)}\xi_i^\alpha)+I_{\alpha\beta}(D_{\beta\gamma}^{(1)}\xi_i^\beta)]+\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_i^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta B^2\int\xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)}f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\xi_i^\alpha B^2 D_{\alpha\gamma}^{(2)}$$

$$=\frac{n}{n_\alpha}f_\alpha^{(0)}\left(\delta^{\alpha\gamma}-\frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi_i^\alpha\,, \tag{2.74}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(D_{\alpha\gamma}^{(2)}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k)+I_{\alpha\beta}(D_{\beta\gamma}^{(2)}\epsilon_{ijk}\xi_j^\beta B_k)]$$

$$+\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_j^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\epsilon_{jil}B_l\int\xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(1)}f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\epsilon_{ikl}\xi_j^\alpha B_l D_{\alpha\gamma}^{(1)}=0\,, \tag{2.75}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(D_{\alpha\gamma}^{(3)}B_iB_j\xi_j^\alpha)+I_{\alpha\beta}(D_{\beta\gamma}^{(3)}B_iB_j\xi_j^\beta)]$$

$$-\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_j^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta B_iB_j\int\xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)}f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}B_iB_j\xi_j^\alpha D_{\alpha\gamma}^{(2)}=0\,. \tag{2.76}$$

Ainda, como os elementos de integração da integral de colisão $I_{\alpha\beta}$ não dependem de B_i, podemos evidenciar para toda a equação (2.76) o produto B_iB_j de modo que,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(D_{\alpha\gamma}^{(3)}\xi_i^\alpha)+I_{\alpha\beta}(D_{\beta\gamma}^{(3)}\xi_i^\beta)]-\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_i^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi_\beta^2 D_{\beta\gamma}^{(2)}f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\xi_i^\alpha D_{\alpha\gamma}^{(2)}=0. \tag{2.77}$$

Somando a equação (2.74), com (2.77) multiplicada por B^2, temos,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}\{I_{\alpha\beta}[(D_{\alpha\gamma}^{(1)}+B^2D_{\alpha\gamma}^{(3)})\xi_i^\alpha]+I_{\alpha\beta}[(D_{\beta\gamma}^{(1)}+B^2D_{\beta\gamma}^{(3)})\xi_i^\beta]\}=\frac{n}{n_\alpha}f_\alpha^{(0)}\left(\delta^{\alpha\gamma}-\frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi_i^\alpha\,. \tag{2.78}$$

A equação vetorial (2.75) possui uma direção perpendicular tanto à equação (2.74) quanto a (2.76) e portanto também à equação (2.78). A condição de ortogonalidade da equação (2.75) em relação às outras pode ser mantida mesmo eliminando o operador ϵ_{ijk}, se utilizarmos as propriedades de número complexo $i=(-1)^{1/2}$. Evidenciando na equação (2.75) a relação

$\epsilon_{ijk}B_k$ e verificando que para qualquer valor assumido para esta relação a nulidade da equação persiste, então,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(D^{(2)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(D^{(2)}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}_{i})] - \frac{m_\alpha}{3\rho kT}f^{(0)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi^2_\beta D^{(1)}_{\beta\gamma}f^{(0)}_{\beta}d\mathbf{c}^{\beta} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}D^{(1)}_{\alpha\gamma} = 0. \tag{2.79}$$

Multiplicando agora a equação (2.79) pelo produto complexo iB, onde B é o módulo do campo magnético e somando na sequência com a equação (2.74), obtemos,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}\{I_{\alpha\beta}[(D^{(1)}_{\alpha\gamma} + iBD^{(2)}_{\alpha\gamma})\xi^{\alpha}_{i}] + I_{\alpha\beta}[(D^{(1)}_{\beta\gamma} + iBD^{(2)}_{\beta\gamma})\xi^{\beta}_{i}]\}$$

$$+\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f^{(0)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi^2_\beta(B^2D^{(2)}_{\beta\gamma} - iBD^{(1)}_{\beta\gamma})f^{(0)}_{\beta}d\mathbf{c}^{\beta} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}(B^2D^{(2)}_{\beta\gamma} - iBD^{(1)}_{\beta\gamma})\xi^{\alpha}_{i}$$

$$= \frac{n}{n_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi^{\alpha}_{i}. \tag{2.80}$$

Definindo as relações,

$$\mathcal{D}^{(1)\alpha\beta}_{i} = \mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}_{i} = (D^{(1)}_{\alpha\beta} + B^2D^{(3)}_{\alpha\beta})\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.81}$$

$$\mathcal{D}^{(2)\alpha\beta}_{i} = \mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}_{i} = (D^{(1)}_{\alpha\beta} + iBD^{(2)}_{\alpha\beta})\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.82}$$

e substituindo as equações (2.81) e (2.82) em (2.78) e (2.79), podemos escrever,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(1)}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}_{i})] = \frac{n}{n_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.83}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(2)}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}_{i})] - iB\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f^{(0)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi^2_\beta\mathcal{D}^{(2)}_{\beta\gamma}f^{(0)}_{\beta}d\mathbf{c}^{\beta}$$

$$+iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i} = \frac{n}{n_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.84}$$

ou seja, obtemos assim duas equações desacopladas, sendo uma delas complexa, em vez de três equações acopladas. As equações (2.83) e (2.84) podem agora ser resolvidas de forma independente.

As relações recíprocas das equações (2.81) e (2.82) são expressas por,

$$D_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)} + \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)*}), \tag{2.85}$$

$$D_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2iB}(\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)*}), \tag{2.86}$$

$$D_{\alpha\beta}^{(3)} = \frac{1}{B^2}(\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)} - D_{\alpha\beta}^{(1)}), \tag{2.87}$$

onde o asterisco representa o conjugado complexo da variável.

O vetor A_i^α ou seus componentes (2.47) podem ser resolvidos de maneira semelhante ao desenvolvido acima para o vetor $D_i^{\alpha\beta}$.

Partindo da relação (2.65) obtemos três equações acopladas para os $A_i^{(n)\alpha}$, $(n = 1, 2, 3)$. Com o objetivo de desacoplá-las definimos as relações,

$$\mathcal{A}_i^{(1)\alpha} = \mathcal{A}_\alpha^{(1)}\xi_i^\alpha = (A_\alpha^{(1)} + B^2 A_\alpha^{(3)})\xi_i^\alpha, \tag{2.88}$$

$$\mathcal{A}_i^{(2)\alpha} = \mathcal{A}_\alpha^{(2)}\xi_i^\alpha = (A_\alpha^{(1)} + iBA_\alpha^{(2)})\xi_i^\alpha, \tag{2.89}$$

ou reciprocamente,

$$A_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_\alpha^{(2)} + \mathcal{A}_\alpha^{(2)*}), \tag{2.90}$$

$$A_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2iB}(\mathcal{A}_\alpha^{(2)} - \mathcal{A}_\alpha^{(2)*}), \tag{2.91}$$

$$A_\alpha^{(3)} = \frac{1}{B^2}(\mathcal{A}_\alpha^{(1)} - A_\alpha^{(1)}). \tag{2.92}$$

Repetindo o desenvolvimento realizado para os vetores $\mathcal{D}_i^{(l)\alpha\beta}$, com $(l = 1, 2)$, obtemos as seguintes equações desacopladas para os vetores $\mathcal{A}_i^{(l)\alpha}$,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\alpha^{(1)}\xi_i^\alpha) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\beta^{(1)}\xi_i^\beta)] = f_\alpha^{(0)}\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha, \tag{2.93}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\alpha^{(2)}\xi_i^\alpha) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\beta^{(2)}\xi_i^\beta)] - iB\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f_\alpha^{(0)}\xi_i^\alpha\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi_\beta^2\mathcal{A}_\beta^{(2)}f_\beta^{(0)}d\mathbf{c}^\beta$$

$$+ iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \mathcal{A}_\alpha^{(2)} \xi_i^\alpha = f_\alpha^{(0)} \left(\frac{m_\alpha}{2kT} \xi_\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\alpha . \tag{2.94}$$

Notar que, se fizermos $\mathbf{B} = 0$ nas equações (2.84) e (2.94), estas se reduzem às equações (2.83) e (2.93) respectivamente, ou seja, $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)} = \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)}$ e $\mathcal{A}_\alpha^{(1)} = \mathcal{A}_\alpha^{(2)}$, ou, $D_{\alpha\beta}^{(1)} = D_{\alpha\beta}$, $A_\alpha^{(1)} = A_\alpha$, $D_{\alpha\beta}^{(2)} = D_{\alpha\beta}^{(3)} = 0$ e $A_\alpha^{(2)} = A_\alpha^{(3)} = 0$.

Para o estabelecimento das equações para $B_\alpha^{(n)}$, $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$, o procedimento transcorre-se de uma maneira diferente. Inicialmente a integral correspondente ao primeiro termo após as integrais de colisão no lado esquerdo da equação (2.66) é nula, pois o integrando é função ímpar em ξ_i^α (os tensores $T_{<ij>}^{(n)\alpha}$ de (2.50) à (2.54) são pares, assim como $f_\alpha^{(0)}$, em relação à ξ_i^α - ver apêndice A). Desse modo, reescrevendo a equação (2.66) temos,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu} [I_{\alpha\beta}(\sum_{n=1}^{5} B_\alpha^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\alpha}) + I_{\alpha\beta}(\sum_{n=1}^{5} B_\beta^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\beta})] + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} \epsilon_{klm} \xi_l^\alpha B_m \sum_{n=1}^{5} \frac{\partial}{\partial \xi_k^\alpha} (B_\alpha^{(n)} T_{<ij>}^{(n)\alpha})$$
$$= \frac{m_\alpha}{kT} f_\alpha^{(0)} \xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha . \quad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \tag{2.95}$$

A forma como os geradores (2.50) estão construídos torna difícil o equacionamento dos coeficientes $B_\alpha^{(n)}$, $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ devido à derivada parcial existente na equação (2.95). É conveniente e possível definir um novo conjunto de tensores que represente o conjunto linearmente independente (2.50) a (2.54), através de combinações destes, de maneira a podermos evidenciar o tensor $\xi_i^\alpha \xi_j^\alpha$ nas relações algébrica que mantém com o vetor B_i. Neste novo conjunto, mantemos os tensores $T_{<ij>}^{(1)\alpha}$, $T_{<ij>}^{(2)\alpha}$ e $T_{<ij>}^{(4)\alpha}$ e a alteração que fazemos nos demais envolvem relações de ξ_α^2, $(\xi_i^\alpha B_i)^2$ e B^2, ou seja, como se estivessemos explicitando termos de $B_\alpha^{(n)} = B_\alpha^{(n)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2, (\xi_i^\alpha B_i)^2)$ a serem agrupados na correspondente parte tensorial. Assim, um conjunto de tensores mais adequado pode ser,

$$Q_{<ij>}^{(1)\alpha} = \delta_{ip}\delta_{jq}\xi_p^\alpha \xi_q^\alpha = T_{<ij>}^{(1)\alpha} , \tag{2.96}$$

$$Q_{<ij>}^{(2)\alpha} = (\delta_{ip}\epsilon_{jqr} + \delta_{jq}\epsilon_{iqr}) B_r \xi_p^\alpha \xi_q^\alpha = T_{<ij>}^{(2)\alpha} , \tag{2.97}$$

$$Q_{<ij>}^{(3)\alpha} = \epsilon_{pr<i}\epsilon_{j>qs} B_r B_s \xi_p^\alpha \xi_q^\alpha = T_{<ij>}^{(3)\alpha} + \frac{1}{3}\xi_\alpha^2 T_{<ij>}^{(5)\alpha} , \tag{2.98}$$

$$Q_{<ij>}^{(4)\alpha} = [\epsilon_{iqr}(B_p B_j - B^2 \delta_{pj}) + \epsilon_{jqr}(B_i B_p - B^2 \delta_{ip})] B_r \xi_p^\alpha \xi_q^\alpha = T_{<ij>}^{(4)\alpha} , \tag{2.99}$$

$$Q^{(5)\alpha}_{<ij>} = B_{<i}B_{j>}B_pB_q\xi^\alpha_p\xi^\alpha_q = \left[(\xi^\alpha_s B_s)^2 - \frac{1}{3}\xi^2_\alpha B^2\right] T^{(5)\alpha}_{<ij>} . \tag{2.100}$$

Na equação (2.98) utilizamos a seguinte relação,

$$\epsilon_{pr<i}\epsilon_{j>qs} = \epsilon_{pri}\epsilon_{jqs} - \frac{1}{3}\epsilon_{prm}\epsilon_{mqs}\delta_{ij} \tag{2.101}$$

O coeficiente do gradiente de velocidade na expressão para o desvio da função de distribuição (2.35), pode então ser representado por,

$$B^\alpha_{<ij>} = \sum_{n=1}^{5} B^{(n)}_\alpha T^{(n)\alpha}_{<ij>} = \sum_{n=1}^{5} Q^{(n)}_\alpha Q^{(n)\alpha}_{<ij>} . \tag{2.102}$$

A relação entre os coeficientes escalares $B^{(n)}_\alpha$ e $Q^{(n)}_\alpha$ é obtida da expressão (2.102). Nela substituimos as representações (2.96)) a (2.100) e obtemos,

$$Q^{(1)}_\alpha = B^{(1)}_\alpha, \quad Q^{(2)}_\alpha = B^{(2)}_\alpha, \quad Q^{(3)}_\alpha = B^{(3)}_\alpha, \quad Q^{(4)}_\alpha = B^{(4)}_\alpha, \quad \text{e} \quad Q^{(5)}_\alpha = \frac{B^{(5)}_\alpha - \xi^2_\alpha B^{(3)}_\alpha}{(\xi_s B_s)^2 - (1/3)\xi^2_\alpha B^2}. \tag{2.103}$$

Agora na equação (2.95), a correspondente relação para,

$$\epsilon_{klm}\xi^\alpha_l B_m \frac{\partial B^\alpha_{<ij>}}{\partial \xi^\alpha_k} , \tag{2.104}$$

quando aplicada à cada um dos novos tensores $Q^{(n)\alpha}_{<ij>}$ que formam $B^\alpha_{<ij>}$, recae em uma combinação própria de tensores $Q^{(n)\alpha}_{<ij>}$. Como,

$$\frac{\partial \xi^\alpha_{<p}\xi^\alpha_{q>}}{\partial \xi^\alpha_k} = \xi^\alpha_p\delta_{qk} + \xi^\alpha_q\delta_{pk} - \frac{2}{3}\xi^\alpha_k\delta_{pq}, \tag{2.105}$$

a relação (2.104) para $Q^{(n)\alpha}_{<ij>}$ fornece,

$$\epsilon_{klm}\xi^\alpha_l B_m \frac{\partial Q^{(1)\alpha}_{<ij>}}{\partial \xi^\alpha_k} = Q^{(2)\alpha}_{<ij>} \tag{2.106}$$

$$\epsilon_{klm}\xi_l^\alpha B_m \frac{\partial Q_{<ij>}^{(2)\alpha}}{\partial \xi_k^\alpha} = -B^2 Q_{<ij>}^{(1)\alpha} + 3Q_{<ij>}^{(3)\alpha}$$

$$= \xi_k^\alpha B_l \epsilon_{jmn} \xi_m^\alpha B_n + (\xi_s^\alpha B_s)(\xi_i^\alpha B_j + B_i \xi_j^\alpha) - 2B^2 \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \,, \tag{2.107}$$

$$\epsilon_{klm}\xi_l^\alpha B_m \frac{\partial Q_{<ij>}^{(3)\alpha}}{\partial \xi_k^\alpha} = Q_{<ij>}^{(4)\alpha} \,, \tag{2.108}$$

$$\epsilon_{klm}\xi_l^\alpha B_m \frac{\partial Q_{<ij>}^{(4)\alpha}}{\partial \xi_k^\alpha} = -4B^2 Q_{<ij>}^{(3)\alpha} + 2Q_{<ij>}^{(5)\alpha}$$

$$= -4B^2 \epsilon_{ikl} \xi_k^\alpha B_l \epsilon_{jmn} \xi_m^\alpha B_n + 2(\xi_s^\alpha B_s)^2 B_i B_j - 2B^2 \xi_\alpha^2 B_i B_j + 2B^2 [\xi_\alpha^2 B^2 - (\xi_s^\alpha B_s)^2] \delta_{ij} \,, \tag{2.109}$$

$$\epsilon_{klm}\xi_l^\alpha B_m \frac{\partial Q_{<ij>}^{(5)\alpha}}{\partial \xi_k^\alpha} = 0 \,, \tag{2.110}$$

sendo que na segunda igualdade das equações (2.107) e (2.109) utilizamos a identidade,

$$\epsilon_{ikl}\xi_k^\alpha B_l \epsilon_{jmn} \xi_m^\alpha B_n = (\xi_s^\alpha B_s)(\xi_i^\alpha B_j + B_i \xi_j^\alpha) - \xi_\alpha^2 B_i B_j - 2B^2 \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + [\xi_\alpha^2 B^2 - (\xi_s^\alpha B_s)^2] \delta_{ij}. \tag{2.111}$$

Desse modo a equação (2.95) com a consideração de (2.102) e das relações (2.106) a (2.110), pode ser escrita como,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu} [I_{\alpha\beta}(\sum_{n=1}^{5} Q_\alpha^{(n)} Q_{<ij>}^{(n)\alpha}) + I_{\alpha\beta}(\sum_{n=1}^{5} Q_\beta^{(n)} Q_{<ij>}^{(n)\beta})] + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} [Q_\alpha^{(1)} Q_{<ij>}^{(2)\alpha}$$

$$+ Q_\alpha^{(2)}(-B^2 Q_{<ij>}^{(1)\alpha} + 3Q_{<ij>}^{(3)\alpha}) + Q_\alpha^{(3)} Q_{<ij>}^{(4)\alpha} + Q_\alpha^{(4)}(-4B^2 Q_{<ij>}^{(3)\alpha} + 2Q_{<ij>}^{(5)\alpha})]$$

$$= \frac{m_\alpha}{kT} f_\alpha^{(0)} Q_{<ij>}^{(1)\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \tag{2.112}$$

Devido as diferentes formas de atuação do vetor **B** em cada tensor $Q_{<ij>}^{(n)\alpha}$, podemos separar a equação (2.112) em cinco equações acopladas para $Q_\alpha^{(n)}$, ou seja,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu} [I_{\alpha\beta}(Q_\alpha^{(1)} Q_{<ij>}^{(1)\alpha}) + I_{\alpha\beta}(Q_\beta^{(1)} Q_{<ij>}^{(1)\beta})] - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} B^2 Q_\alpha^{(2)} Q_{<ij>}^{(1)\alpha} = \frac{m_\alpha}{kT} f_\alpha^{(0)} Q_{<ij>}^{(1)\alpha}, \tag{2.113}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu} [I_{\alpha\beta}(Q_\alpha^{(2)} Q_{<ij>}^{(2)\alpha}) + I_{\alpha\beta}(Q_\beta^{(2)} Q_{<ij>}^{(2)\beta})] + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha^{(0)} Q_\alpha^{(1)} Q_{<ij>}^{(2)\alpha} = 0, \tag{2.114}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(Q_\alpha^{(3)}Q_{<ij>}^{(3)\alpha})+I_{\alpha\beta}(Q_\beta^{(3)}Q_{<ij>}^{(3)\beta})]+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}(3Q_\alpha^{(2)}+4B^2Q_\alpha^{(4)})Q_{<ij>}^{(3)\alpha}=0, \quad (2.115)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(Q_\alpha^{(4)}Q_{<ij>}^{(4)\alpha})+I_{\alpha\beta}(Q_\beta^{(4)}Q_{<ij>}^{(4)\beta})]+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}Q_\alpha^{(3)}Q_{<ij>}^{(4)\alpha}=0, \quad (2.116)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(Q_\alpha^{(5)}Q_{<ij>}^{(5)\alpha})+I_{\alpha\beta}(Q_\beta^{(5)}Q_{<ij>}^{(5)\beta})]+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}2Q_\alpha^{(4)})Q_{<ij>}^{(5)\alpha}=0. \quad (2.117)$$

Substituindo nas equações (2.113) a (2.117) as relações de $Q_{<ij>}^{(n)\alpha}$ em termos do produto $\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha$ dadas por (2.96) a (2.100) e simplificando em cada equação os tensores (podendo ser dependentes de B_i) que precedem $\xi_i^\alpha\xi_j^\alpha$, uma vez que os elementos de integração da integral de colisão não são funções do vetor B_i, obtemos assim um sistema de equações para $Q_\alpha^{(n)}$ em termos das relações com $\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha$. Com o novo sistema de equações é possível reduzir o número de equações algébricas através de uma combinação linear adequada das equações, desacoplando-as como realizado na determinação das equações (2.80) com (2.81) e (2.82). Assim, somando a primeira equação, com a terceira multiplicada por $(B^2/3)$ e com a quinta equação multiplicada por $(2B^4/3)$, todas do novo conjunto formado a partir de (2.113) a (2.117), obtemos,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}\{I_{\alpha\beta}[(Q_\alpha^{(1)}+\tfrac{B^2}{3}Q_\alpha^{(3)}+\tfrac{2}{3}B^4Q_\alpha^{(5)})\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha]+I_{\alpha\beta}[(Q_\beta^{(1)}+\tfrac{B^2}{3}Q_\beta^{(3)}+\tfrac{2}{3}B^4Q_\beta^{(5)})\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta]\}=\frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha. \quad (2.118)$$

As outras combinações distintas possíveis são,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}\{I_{\alpha\beta}[(Q_\alpha^{(1)}+iBQ_\alpha^{(2)})\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha]+I_{\alpha\beta}[(Q_\beta^{(1)}+iBQ_\beta^{(2)})\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta]\}+iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}(Q_\alpha^{(1)}+iBQ_\alpha^{(2)})\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha$$
$$=\frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha, \quad (2.119)$$

e

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}\{I_{\alpha\beta}[(Q_\alpha^{(1)}+2iBQ_\alpha^{(2)}-B^2Q_\alpha^{(3)}-2iB^3Q_\alpha^{(4)})\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha]$$
$$+I_{\alpha\beta}[(Q_\beta^{(1)}+2iBQ_\beta^{(2)}-B^2Q_\beta^{(3)}-2iB^3Q_\beta^{(4)})\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta]\}$$
$$+2iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}(Q_\alpha^{(1)}+2iBQ_\alpha^{(2)}-B^2Q_\alpha^{(3)}-2iB^3Q_\alpha^{(4)})\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha=\frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha, \quad (2.120)$$

As equações (2.118) a (2.120) foram obtidas multiplicando-se cada uma das novas equações formadas a partir de (2.113) à (2.117) por uma constante a ser determinada, além de multiplicarmos o segundo termo do lado esquerdo de cada equação por um fator comum. Somando-se então todas as equações, com suas respectivas constantes a determinar (que denominaremos de equação soma), obtemos uma equação a ser balanceada entre o primeiro e o segundo termo do lado esquerdo. Desejando inicialmente uma combinação na qual o segundo termo dessa equação soma seja nulo, impomos essa condição a esse termo, o que nos leva a um sistema de equações para as constantes. Resolvendo esse sistema, obtemos a equação (2.118). Para as outras duas equações impomos a condição de que a influência que cada termo possui devido as relações que mantém com $Q_\alpha^{(n)}$ seja o mesmo em ambos os termos do lado esquerdo da equação soma, o que permite igualar os coeficientes de cada $Q_\alpha^{(n)}$ de ambos os termos. Procedendo dessa maneira obtemos um sistema de cinco equações a seis incógnitas que possibilita, porém, calcular o fator comum (que multiplica todo o segundo termo da equação soma) e obter os valores iB e $2iB$. Arbitrando o valor um para a constante que multiplicou a equação (2.113), conhecemos assim para cada valor do fator comum as demais constantes de multiplicação e consequentemente as equações (2.119) e (2.120). A combinação resultante é dada por,

$$\mathcal{B}_\alpha^{(1)} = Q_\alpha^{(1)} + \frac{1}{3}B^2 Q_\alpha^{(3)} + \frac{2}{3}B^4 Q_\alpha^{(5)}, \tag{2.121}$$

$$\mathcal{B}_\alpha^{(2)} = Q_\alpha^{(1)} + iBQ_\alpha^{(2)}, \tag{2.122}$$

$$\mathcal{B}_\alpha^{(3)} = Q_\alpha^{(1)} + 2iBQ_\alpha^{(2)} - B^2 Q_\alpha^{(3)} - 2iB^3 Q_\alpha^{(4)}, \tag{2.123}$$

ou de forma recíproca,

$$Q_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{B}_\alpha^{(2)} + \mathcal{B}_\alpha^{(2)*}), \tag{2.124}$$

$$Q_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2iB}(\mathcal{B}_\alpha^{(2)} - \mathcal{B}_\alpha^{(2)*}), \tag{2.125}$$

$$Q_\alpha^{(3)} = \frac{1}{2B^2}(\mathcal{B}_\alpha^{(2)} + \mathcal{B}_\alpha^{(2)*} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)*}), \tag{2.126}$$

$$Q_\alpha^{(4)} = \frac{1}{2iB^3}\left[\mathcal{B}_\alpha^{(2)} - \mathcal{B}_\alpha^{(2)*} - \frac{1}{2}\left(\mathcal{B}_\alpha^{(3)} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)*}\right)\right], \tag{2.127}$$

$$Q_\alpha^{(5)} = \frac{1}{4B^4}\left[6\mathcal{B}_\alpha^{(1)} - 4(\mathcal{B}_\alpha^{(2)} + \mathcal{B}_\alpha^{(2)*}) + (\mathcal{B}_\alpha^{(3)} + \mathcal{B}_\alpha^{(3)*})\right], \tag{2.128}$$

de modo que as equações desacopladas (2.118), (2.119) e (2.120) são escritas por,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\alpha^{(1)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\beta^{(1)}\xi^\beta_{<i}\xi^\beta_{j>})] = \frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>}, \tag{2.129}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\alpha^{(2)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\beta^{(2)}\xi^\beta_{<i}\xi^\beta_{j>})] + iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\mathcal{B}_\alpha^{(2)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>} = \frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>}, \tag{2.130}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\alpha^{(3)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\beta^{(3)}\xi^\beta_{<i}\xi^\beta_{j>})] + 2iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha^{(0)}\mathcal{B}_\alpha^{(3)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>} = \frac{m_\alpha}{kT}f_\alpha^{(0)}\xi^\alpha_{<i}\xi^\alpha_{j>}. \tag{2.131}$$

Estamos agora em condições de resolver as equações integrais em suas formas desacopladas (2.83), (2.84), (2.93), (2.94), (2.129), (2.130) e (2.83) provenientes das equações integro-diferenciais (2.64) a (2.66), para os escalares dados por $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(l)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2)$, $\mathcal{A}_\alpha^{(l)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2)$ e $\mathcal{B}_\alpha^{(l)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2)$. A solução em primeira ordem de Chapman-Enskog deve satisfazer as condições (2.36), que para os novos coeficientes pode ser escrita, [4],

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} m_\alpha \int \xi_\alpha^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(l)} f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha = 0, \qquad (l = 1, 2), \quad (\beta = 1, 2, ..., \nu), \tag{2.132}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} m_\alpha \int \xi_\alpha^2 \mathcal{A}_\alpha^{(l)} f_\alpha^{(0)} d\mathbf{c}^\alpha = 0, \qquad (l = 1, 2), \tag{2.133}$$

sendo a condição para $\mathcal{B}_\alpha^{(l)}$ identicamente nula, devido à característica do deviante do tensor. Uma solução exata para ϕ_α de (2.55) ou de (2.63), seria possível se conhecessemos $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(l)}$, $\mathcal{A}_\alpha^{(l)}$ e $\mathcal{B}_\alpha^{(l)}$ exatamente. Como não os conhecemos, um método razoável de procedimento seria o de obter uma série de potências em ξ_α^2 com coeficientes indeterminados, estes funções apenas do vetor B_i. Entretanto torna-se mais conveniente utilizar os termos da série de potências que formam o polinômio de Sonine. Procedendo dessa maneira, podemos aproveitar as propriedades desses polinômios.

2.1.1 *Polinômios de Sonine*

A função geratriz, a formula geral e a condição de ortogonalidade para os polinômios de Sonine, são expressos respectivamente por,

$$(1-z)^{-m+1}e^{-\left(\frac{xz}{1-z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_m^{(n)}(x)z^n, \tag{2.134}$$

$$S_m^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+m)!}{k!(n-k)!(k+m)!}(-x)^k, \tag{2.135}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^m S_m^{(n)}(x)S_m^{(p)}(x)dx = \frac{(n+m)!}{n!}\delta_{np}\,. \tag{2.136}$$

O índice m que melhor se enquadra nas equações a serem resolvidas é escrito na forma $m = l + 1/2$, assim como a variavel x para o caso representa $x = \frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 = \beta_\alpha\xi_\alpha^2$ com $\beta_\alpha = \frac{m_\alpha}{2kT}$. Neste caso as funções (2.135) e (2.136) assumem a forma,

$$S_{l+1/2}^{(n)}(\beta_\alpha\xi_\alpha^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{k!(n-k)!\Gamma(k+l+3/2)}(-\beta_\alpha\xi_\alpha^2)^k, \tag{2.137}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta_\alpha\xi_\alpha^2}\xi_\alpha^{2(l+1)} S_{l+1/2}^{(n)}(\beta_\alpha\xi_\alpha^2)S_{l+1/2}^{(p)}(\beta_\alpha\xi_\alpha^2)\beta_\alpha^{l+3/2}d\xi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+l+3/2)}{n!}\delta_{np}, \tag{2.138}$$

onde $\Gamma(m+1/2) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\pi^{1/2}$ é a função gama.

A partir da relação (2.137) os três primeiros polinômios de Sonine são,

$$S_{l+1/2}^{(0)}(\beta_\alpha\xi_\alpha^2) = 1\,, \tag{2.139}$$

$$S_{l+1/2}^{(1)}(\beta_\alpha\xi_\alpha^2) = l + \frac{3}{2} - \frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2\,, \tag{2.140}$$

$$S_{l+1/2}^{(2)}(\beta_\alpha\xi_\alpha^2) = \frac{1}{2}\left(l+\frac{5}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right) - \left(l+\frac{5}{2}\right)\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\right)^2\xi_\alpha^4\,. \tag{2.141}$$

2.1.2 *Desenvolvimento dos Coeficientes $\mathcal{D}^{(l)}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{A}^{(l)}_{\alpha}$ e $\mathcal{B}^{(l)}_{\alpha}$ em Polinômios de Sonine*

As equações integrais (2.83), (2.84), (2.93), (2.94) e (2.129) a (2.131) podem ser escritas em função dos polinômios de Sonine do seguinte modo,

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(1)}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}_{i})] = \frac{n}{n_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)S^{(0)}_{3/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.142}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(2)}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}_{i})] - iB\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f^{(0)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi^2_\beta\mathcal{D}^{(2)}_{\beta\gamma}f^{(0)}_{\beta}d\mathbf{c}^{\beta} + iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\mathcal{D}^{(2)}_{\alpha\gamma}\xi^{\alpha}_{i}$$
$$= \frac{n}{n_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)S^{(0)}_{3/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.143}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{(1)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{(1)}_{\beta}\xi^{\beta}_{i})] = -f^{(0)}_{\alpha}S^{(1)}_{3/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.144}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{(2)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{(2)}_{\beta}\xi^{\beta}_{i})] - iB\frac{m_\alpha}{3\rho kT}f^{(0)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}\sum_{\beta=1}^{\nu}e_\beta\int\xi^2_\beta\mathcal{A}^{(2)}_{\beta}f^{(0)}_{\beta}d\mathbf{c}^{\beta} + iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\mathcal{A}^{(2)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{i}$$
$$= -f^{(0)}_{\alpha}S^{(1)}_{3/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{i}, \tag{2.145}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}^{(1)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}^{(1)}_{\beta}\xi^{\beta}_{<i}\xi^{\beta}_{j>})] = \frac{m_\alpha}{kT}f^{(0)}_{\alpha}S^{(0)}_{5/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}, \tag{2.146}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}^{(2)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}^{(2)}_{\beta}\xi^{\beta}_{<i}\xi^{\beta}_{j>})] + iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\mathcal{B}^{(2)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>} = \frac{m_\alpha}{kT}f^{(0)}_{\alpha}S^{(0)}_{5/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}, \tag{2.147}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}^{(3)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}^{(3)}_{\beta}\xi^{\beta}_{<i}\xi^{\beta}_{j>})] + 2iB\frac{e_\alpha}{m_\alpha}f^{(0)}_{\alpha}\mathcal{B}^{(3)}_{\alpha}\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>} = \frac{m_\alpha}{kT}f^{(0)}_{\alpha}S^{(0)}_{5/2}(\beta_\alpha\xi^2_\alpha)\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}. \tag{2.148}$$

Reconhecemos os polinômios de Sonine que aparecem no lado direito dessas equações integrais, quando os comparamos com a forma da equação (2.137), uma vez conhecida a

ordem de potência em $\xi_\alpha^{2(l+1)}$ dessas equações . Isto é possível ao multiplicarmos as equações (2.142) a (2.145) por ξ_i^α e as equações (2.146) a (2.148) por $\xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha$ e integrarmos em dc^α (coordenadas esféricas). No processo de contração da parte tensorial da integração, de acordo com apêndice A, obtemos a ordem de potência em $\xi_\alpha^{2(l+1)}$. Para o primeiro caso obtemos ordem quatro, ou seja, $l = 1$ e $l + 1/2 = 3/2$. Do mesmo modo para o segundo caso, obtemos ordem seis, e portanto $l + 1/2 = 5/2$.

A resolução das equações (2.142) à (2.148) se faz com base na desenvolvimento dos coeficientes $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(l)}$, $\mathcal{A}_\alpha^{(l)}$ e $\mathcal{B}_\alpha^{(l)}$ em série de polinômios de Sonine, isto é,

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(l)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2) = \beta_\alpha \sum_{r=0}^{\infty} d_{\alpha\beta}^{(l),(r)} S_{3/2}^{(r)}(\beta_\alpha \xi_\alpha^2), \qquad (l = 1, 2), \tag{2.149}$$

$$\mathcal{A}_\alpha^{(l)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2) = -\beta_\alpha \sum_{r=0}^{\infty} a_\alpha^{(l),(r)} S_{3/2}^{(r)}(\beta_\alpha \xi_\alpha^2), \qquad (l = 1, 2), \tag{2.150}$$

$$\mathcal{B}_\alpha^{(l)}(\rho_\alpha, T, \xi_\alpha^2, B^2) = \beta_\alpha \sum_{r=0}^{\infty} b_\alpha^{(l),(r)} S_{5/2}^{(r)}(\beta_\alpha \xi_\alpha^2), \qquad (l = 1, 2, 3), \tag{2.151}$$

onde $d_{\alpha\beta}^{(l),(r)}$, $a_\alpha^{(l),(r)}$ e $b_\alpha^{(l),(r)}$, são coeficientes escalares independentes de ξ_i^α.

Os coeficientes $D_{\alpha\beta}^{(n)}$ e $A_\alpha^{(n)}$ devem satisfazer as condições expressas pelas equações (2.132) e (2.133). Assim se substituirmos as séries (2.149) e (2.150) e a função maxwelliana (1.94) em (2.132) e (2.133) obtemos após a sua integração e utilizando a equação (2.138), as respectivas condições derivadas,

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\nu} m_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \beta_\alpha \sum_{r=0}^{\infty} d_{\alpha\beta}^{(l),(r)} S_{3/2}^{(r)} \xi_\alpha^2 d\mathbf{c}^\alpha &= \frac{4}{\pi^{1/2}} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \sum_{r=0}^{\infty} d_{\alpha\beta}^{(l),(r)} \int e^{-\beta_\alpha \xi_\alpha^2} \xi_\alpha^4 S_{3/2}^{(0)} S_{3/2}^{(r)} \beta_\alpha^{5/2} d\mathbf{c}^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha d_{\alpha\beta}^{(l),(0)} = 0\,,\end{aligned} \tag{2.152}$$

e similarmente,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} m_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \beta_\alpha \sum_{r=0}^{\infty} a_\alpha^{(l),(r)} S_{3/2}^{(r)} \xi_\alpha^2 d\mathbf{c}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha a_\alpha^{(l),(0)} = 0\,, \tag{2.153}$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado à parcela integral do segundo termo do lado esquerdo das equações (2.143) e (2.145). Após realizarmos as respectivas integrações obtemos,

$$\int f_\beta^{(0)} \mathcal{D}_{\beta\gamma}^{(2)} \xi_\beta^2 d\mathbf{c}^\beta = \frac{3}{2} n_\beta d_{\beta\gamma}^{(2),(0)}, \tag{2.154}$$

$$\int f_\beta^{(0)} \mathcal{A}_\beta^{(2)} \xi_\beta^2 d\mathbf{c}^\beta = -\frac{3}{2} n_\beta a_\beta^{(2),(0)}. \tag{2.155}$$

As séries (2.149) a (2.151) convergem rapidamente o que necesssita de poucos termos no desenvolvimento dos polinômios de Sonine. Normalmente apenas o primeiro termo da série, que forneça uma solução não nula, já fornece uma boa aproximação dentro da ordem de erro da função de distribuição (devido a sua condição de linearidade). Pelo menos dois termos da série são necessários nas funções tentativas (2.149) e (2.150) devido as restrições (2.152) e (2.153). Por esta razão os coeficientes de transporte que derivem de $d_{\alpha\beta}^{(l),(r)}$ e $a_\alpha^{(l),(r)}$ são referidos como coeficientes com efeitos de segunda ordem. A nomenclatura a ser adotada será a de que a primeira aproximação de qualquer coeficiente de transporte corresponde a primeira aproximação não nula. Podemos assim truncar as séries infinitas para um dado número m de termos, ou seja, até r assumir o valor $r = m - 1$ (para o segundo termo $m = 2$).

Multiplicando as equações (2.142) a (2.145) por $\beta_\alpha S_{3/2}^{(q)}(\beta_\alpha \xi_\alpha^2)\xi_i^\alpha$ e as equações (2.146) a (2.148) por $\beta_\alpha^2 S_{5/2}^{(q)}(\beta_\alpha \xi_\alpha^2)\xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha$ após já terem sido substituídas as relações (2.149), (2.150), (2.154) e (2.155) e integrarmos em relação á ξ_i^α através da equação (2.138), obtemos,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{r=0}^{m-1} A_{\alpha\beta}^{q,r} d_{\beta\gamma}^{(1),(r)} = \frac{3}{2}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\delta^{(q,0)}, \tag{2.156}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{r=0}^{m-1} A_{\alpha\beta}^{q,r} d_{\beta\gamma}^{(2),(r)} + iB\frac{2}{\pi^{1/2}}\frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha}\frac{n_\alpha}{n}\frac{\Gamma(q+5/2)}{\Gamma(q+1)}\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\delta^{q,0}\right) n_\beta e_\beta d_{\beta\gamma}^{(2),(q)}$$
$$= \frac{3}{2}\left(\delta^{\alpha\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\delta^{(q,0)}, \tag{2.157}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{r=0}^{m-1} A_{\alpha\beta}^{q,r} a_\beta^{(1),(r)} = \frac{15}{4}\frac{n_\alpha}{n}\delta^{(q,1)}, \tag{2.158}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{r=0}^{m-1} A_{\alpha\beta}^{q,r} a_\beta^{(2),(r)} + iB\frac{2}{\pi^{1/2}}\frac{\beta_\alpha}{n}\frac{\Gamma(q+5/2)}{\Gamma(q+1)}\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\delta^{q,0}\right) n_\beta e_\beta a_\beta^{(2),(q)} = \frac{15}{4}\frac{n_\alpha}{n}\delta^{(q,1)}, \tag{2.159}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{m-1} B_{\alpha\beta}^{q,r} b_{\beta}^{(1),(r)} = 5\beta_\alpha \frac{n_\alpha}{n}\delta^{(q,0)}, \tag{2.160}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{m-1} B_{\alpha\beta}^{q,r} b_{\beta}^{(2),(r)} + iB\frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}\frac{\beta_\alpha}{m_\alpha}\frac{n_\alpha}{n}\frac{\Gamma(q+7/2)}{\Gamma(q+1)} e_\alpha b_\alpha^{(2),(q)} = 5\beta_\alpha \frac{n_\alpha}{n}\delta^{(q,0)}, \tag{2.161}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{m-1} B_{\alpha\beta}^{q,r} b_{\beta}^{(3),(r)} + 2iB\frac{4}{3}\frac{1}{\pi^{1/2}}\frac{\beta_\alpha}{m_\alpha}\frac{n_\alpha}{n}\frac{\Gamma(q+7/2)}{\Gamma(q+1)} e_\alpha b_\alpha^{(3),(q)} = 5\beta_\alpha \frac{n_\alpha}{n}\delta^{(q,0)}, \tag{2.162}$$

onde $(\alpha = 1, 2, ..., \nu)$ e $(\gamma = 1, 2, ..., \nu)$, representam os constituintes da mistura, $(q = 0, 1, ..., m-1)$ representa a ordem da série dos polinômios de Sonine, $\delta^{(q,0)}$ representa o delta de Kronecker e os símbolos $A_{\alpha\beta}^{q,r}$ e $B_{\alpha\beta}^{q,r}$ as integrais,

$$A_{\alpha\beta}^{q,r} = -\frac{1}{n}\beta_\alpha \int S_{3/2}^{(q)}\xi_\alpha[I_{\alpha\beta}(\beta_\alpha S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\alpha) + I_{\alpha\beta}(\beta_\beta S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\beta)]d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= -\frac{\beta_\alpha}{n}\int S_{3/2}^{(q)}\xi_i^\alpha \int\int\int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)}[(\beta_\alpha S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\alpha)' + (\beta_\beta S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\beta)' - (\beta_\alpha S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\alpha) - (\beta_\beta S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\beta)]\Gamma_{\beta\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\beta_\alpha\beta_\beta}{n}\{\int \delta^{\alpha,\beta}\sum_{\gamma=1}^{\nu} f_\alpha^{(0)} f_\gamma^{(0)}[S_{3/2}^{(q)}\xi_i^\alpha - (S_{3/2}^{(q)}\xi_i^\alpha)'][S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\alpha) - (S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\alpha)']\Gamma_{\gamma\alpha}$$

$$+ \int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)}[S_{3/2}^{(q)}\xi_i^\alpha - (S_{3/2}^{(q)}\xi_i^\alpha)'][S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\beta - (S_{3/2}^{(r)}\xi_i^\beta)']\Gamma_{\beta\alpha}\}, \tag{2.163}$$

$$B_{\alpha\beta}^{q,r} = -\frac{1}{n}\beta_\alpha \int S_{5/2}^{(q)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha[I_{\alpha\beta}(\beta_\alpha S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha) + I_{\alpha\beta}(\beta_\beta S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta)]d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= -\frac{\beta_\alpha}{n}\int S_{5/2}^{(q)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha \int\int\int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)}[(\beta_\alpha S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha)' + (\beta_\beta S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta)'$$

$$-(\beta_\alpha S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha) - (\beta_\beta S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta)]\Gamma_{\beta\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\beta_\alpha\beta_\beta}{n}\{\int \delta^{\alpha,\beta}\sum_{\gamma=1}^{\nu} f_\alpha^{(0)} f_\gamma^{(0)}[S_{5/2}^{(q)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha - (S_{5/2}^{(q)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha)'][S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha$$

$$- (S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha)']\Gamma_{\gamma\alpha} + \int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)}[S_{5/2}^{(q)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha - (S_{5/2}^{(q)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha)'][S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\beta\xi_{j>}^\beta - (S_{5/2}^{(r)}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha)']\Gamma_{\beta\alpha}\}. \tag{2.164}$$

As equações (2.163) e (2.164) dependem, basicamente, dos campos básicos e do potencial de interação molecular entre as partículas, ou seja, sendo expressas em termos de funções conhecidas. Essa integrais satisfazem as condições,

$$A^{q,r}_{\alpha\beta} = A^{r,q}_{\beta\alpha}, \qquad B^{q,r}_{\alpha\beta} = B^{r,q}_{\beta\alpha}, \tag{2.165}$$

e

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} A^{q,0}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} A^{0,r}_{\alpha\beta}. \tag{2.166}$$

pois, em (2.165), para duas funções arbitrárias $F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t)$ e $G_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t)$, temos,

$$\int F_\alpha[I_{\alpha\beta}(G_\alpha) + I_{\alpha\beta}(G_\beta)]d\mathbf{c}^\alpha = \int F_\alpha f^{(0)}_\alpha f^{(0)}_\beta (G'_\alpha + G'_\beta - G_\alpha - G_\beta)\Gamma_{\beta\alpha}$$

$$= \int G_\alpha f^{(0)}_\alpha f^{(0)}_\beta (F'_\alpha + G'_\beta - G_\alpha - G_\beta)\Gamma_{\beta\alpha} = \int G_\alpha[I_{\alpha\beta}(F_\alpha) + I_{\alpha\beta}(F_\beta)]d\mathbf{c}^\alpha. \tag{2.167}$$

A relação (2.166) deve-se à condição da conservação do momento linear, equação (1.70) além das restrições (2.152) e (2.153) aplicadas para (2.163).

A partir das equações (2.156) e (2.157), (2.158) e (2.159) assim como (2.160) a (2.162) e das observações acima, concluimos que cada uma dessas equações representa respectivamente um sistema de equações algébricas para os coeficientes $d^{(l),(r)}_{\beta\gamma}$, $a^{(l),(r)}_\beta$ e $b^{(l),(r)}_\beta$, com $(l = 1, 2)$ nos dois primeiros casos e $(l = 1, 2, 3)$ no último. Uma relação entre $d^{(l),(r)}_{\beta\gamma}$ e $a^{(l),(r)}_\beta$ é obtida ao multiplicarmos a equação (2.142) por $\sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathcal{A}^{(1)}_\alpha \xi^\alpha_i$ e a equação (2.144) por $\sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\gamma} \xi^\alpha_i$ e integrando no elemento $d\mathbf{c}^\alpha$. Observamos que o lado esquerdo de ambas podem ser igualadas devido à equação (2.165), ou seja,

$$-\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu} \int \mathcal{A}^{(l)}_\alpha \xi^\alpha_i [I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\gamma}\xi^\alpha_i) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{D}^{(1)}_{\beta\gamma}\xi^\beta_i)]d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu} \int \mathcal{D}^{(1)}_{\alpha\gamma}\xi^\alpha_i [I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{(l)}_\alpha \xi^\alpha_i) + I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}^{(1)}_\beta \xi^\beta_i)]d\mathbf{c}^\alpha, \tag{2.168}$$

a qual nos possibilita escrever,

$$-\sum_{\alpha=1}^{\nu} \int \mathcal{A}^{(l)}_\alpha \xi^\alpha_i \frac{n}{n_\alpha} f^{(0)}_\alpha \left(\delta^{\alpha,\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right) \xi^\alpha_i d\mathbf{c}^\alpha = -\sum_{\alpha=1}^{\nu} \int \mathcal{D}^{(l)}_{\alpha\gamma}\xi^\alpha_i f^{(0)}_\alpha S^{(1)}_{3/2}\xi^\alpha_i d\mathbf{c}^\alpha, \tag{2.169}$$

resultando após a integração, onde consideramos a equação (2.138) e (2.153),

$$a_\alpha^{(l),(0)} = \sum_{\gamma=1}^{\nu} \frac{5}{2}\frac{n_\gamma}{n} d_{\gamma\alpha}^{(l),(1)}, \qquad (l = 1, 2). \tag{2.170}$$

Devemos ainda saber, para quais valores de r os coeficientes $d_{\beta\gamma}^{(l),(r)}$, $a_\beta^{(l),(r)}$ e $b_\beta^{(l),(r)}$ se fazem necessários conhecer. Para tanto, estabelecemos as equações de transporte para os termos constitutivos J_i^α, q_i e $p_{<ij>}$, definidos respectivamente pelas equações (1.93), (1.90) e (1.84) com (1.82). Assim substituindo, f_α expresso pela equação (2.63) nas definições dos termos constitutivos e lembrando que no equilíbrio $J_i^\alpha = 0 = q_i$ e $p_{ij} = p\delta_{ij}$, temos,

$$J_i^\alpha = -\frac{1}{3}\sum_{\beta=1}^{\nu}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 (D_{\alpha\beta}^{(1)}\delta_{ik} + D_{\alpha\beta}^{(2)}\epsilon_{ijk}B_j + D_{\alpha\beta}^{(3)}B_iB_k) d\mathbf{c}^\alpha d_k^\beta$$

$$-\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 (A_\alpha^{(1)}\delta_{ik} + A_\alpha^{(2)}\epsilon_{ijk}B_j + A_\alpha^{(3)}B_iB_k) d\mathbf{c}^\alpha \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k}, \tag{2.171}$$

$$q_i = -\frac{1}{3}kT\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{1}{m_\alpha}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2 (D_{\alpha\beta}^{(1)}\delta_{ik} + D_{\alpha\beta}^{(2)}\epsilon_{ijk}B_j + D_{\alpha\beta}^{(3)}B_iB_k) d\mathbf{c}^\alpha d_k^\beta$$

$$-\frac{1}{3}k\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{m_\alpha}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2 (A_\alpha^{(1)}\delta_{ik} + A_\alpha^{(2)}\epsilon_{ijk}B_j + A_\alpha^{(3)}B_iB_k) d\mathbf{c}^\alpha \frac{\partial T}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{5}{2}\frac{kT}{m_\alpha}J_i^\alpha, \tag{2.172}$$

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{\nu}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{5/2}^{(0)} \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \{Q_\alpha^{(1)}\delta_{rp}\delta_{sq} + Q_\alpha^{(2)}(\delta_{rp}\epsilon_{sqt} + \delta_{sp}\epsilon_{rqt})B_t + Q_\alpha^{(3)}\epsilon_{pt<r}\epsilon_{s>qm}B_tB_m$$

$$+ Q_\alpha^{(4)}[\epsilon_{rqt}(B_pB_s - B^2\delta_{ps}) + \epsilon_{sqt}(B_rB_p - B^2\delta_{rp})]B_t + Q_\alpha^{(5)}B_{<r}B_{s>}B_pB_q\}\xi_{<p}^\alpha\xi_{q>}^\alpha d\mathbf{c}^\alpha \frac{\partial v_r}{\partial x_s}, \tag{2.173}$$

e que mostram, considerando (2.85) a (2.87), (2.90) a (2.92) e (2.124) a (2.128), com (2.149) a (2.151), que apenas os coeficientes $d_{\alpha\beta}^{(l),(0)}$, $d_{\alpha\beta}^{(l),(1)}$, ou $a_\alpha^{(l),(0)}$, $a_\alpha^{(l),(1)}$ e $b_\alpha^{(l),(0)}$, precisam ser conhecidos. Como estes podem ser obtidos das equações (2.156) a (2.162) com as restrições (2.152) e (2.153), o sistema de equações (2.1) a (2.3) fica dessa maneira determinado.

2.2 *Coeficientes de Transporte*

Os coeficientes de d_k^β, $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ e de $\frac{\partial v_r}{\partial x_s}$ nas equações (2.171), (2.172) e (2.173) podem ser considerados como coeficientes de transporte, uma vez que expressam as leis de Fick, Fourier e Navier-Stokes respectivamente. Porém estas equações não estão escritas em sua forma mais adequada, se considerarmos que estamos tratando de um gás ionizado sob a ação de campos elétricos e magnéticos.

A direção do campo magnético pode ser usada como uma direção preferencial, a partir da qual, as demais orientações podem ser obtidas. Em composição com as direções das forças de difusão parcial d_i^α ou com o gradiente de temperatura $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, conforme o caso, estabelecemos um plano no qual determinamos as direções paralela, perpendicular e transversal. A direção paralela ($\|$) coincide com a direção do campo magnético assim como seu sentido. A direção perpendicular ($\perp$) é aquela que se encontra sobre o plano formado pela direção do campo magnético e a direção das forças de difusão parcial (ou do gradiente de temperatura conforme o caso), com direção perpendicular ao campo magnético e sentido dado pela projeção do vetor concorrente na direção perpendicular. A direção transversal ($+$) é aquela simultaneamente ortogonal às direções paralela e perpendicular. O seu sentido é estabelecido pelo triedro destrógiro, como na figura (2.1).

Como as direções dependem dos vetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{d}^\alpha$ ou ∇T, definimos, por conveninência, os seguintes vetores nestas direções $\mathbf{d}^\alpha_{(\|)}$, $\mathbf{d}^\alpha_{(\perp)}$ e $\mathbf{d}^\alpha_{(+)}$. Os vetores $\mathbf{d}^\alpha_{(\|)}$ e $\mathbf{d}^\alpha_{(\perp)}$ coinicidem com os vetores componentes do vetor $\mathbf{d}^\alpha$ nas direções ($\|$) e ($\perp$) respectivamente, porém o vetor $\mathbf{d}^\alpha_{(+)}$ representa o produto vetorial de um vetor unitário na direção paralela pelo vetor $\mathbf{d}^\alpha$, ou seja, $\mathbf{d}^\alpha_{(+)} = \frac{\mathbf{B}}{B} \times \mathbf{d}^\alpha$, não existindo qualquer compromisso com a componente do vetor $\mathbf{d}^\alpha$ na direção ($+$), mesmo porque a sua componente nessa direção é nula. Desse modo podemos representar os vetores definidores das orientações no espaço (ver apêndice B) por,

$$d^\alpha_{(\|)_i} = \frac{1}{B^2} B_i B_r d^\alpha_r, \qquad d^\alpha_{(\perp)_i} = d^\alpha_i - d^\alpha_{(\|)i}, \qquad d^\alpha_{(+)_i} = \frac{1}{B} \epsilon_{ijk} B_j d^\alpha_k \tag{2.174}$$

e

$$(\nabla T)_{(\|)_i} = \frac{1}{B^2} B_i B_r \frac{\partial T}{\partial x_r}, \qquad (\nabla T)_{(\perp)_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} - (\nabla T)_{(\|)i}, \qquad (\nabla T)_{(+)_i} = \frac{1}{B} \epsilon_{ijk} B_j \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{2.175}$$

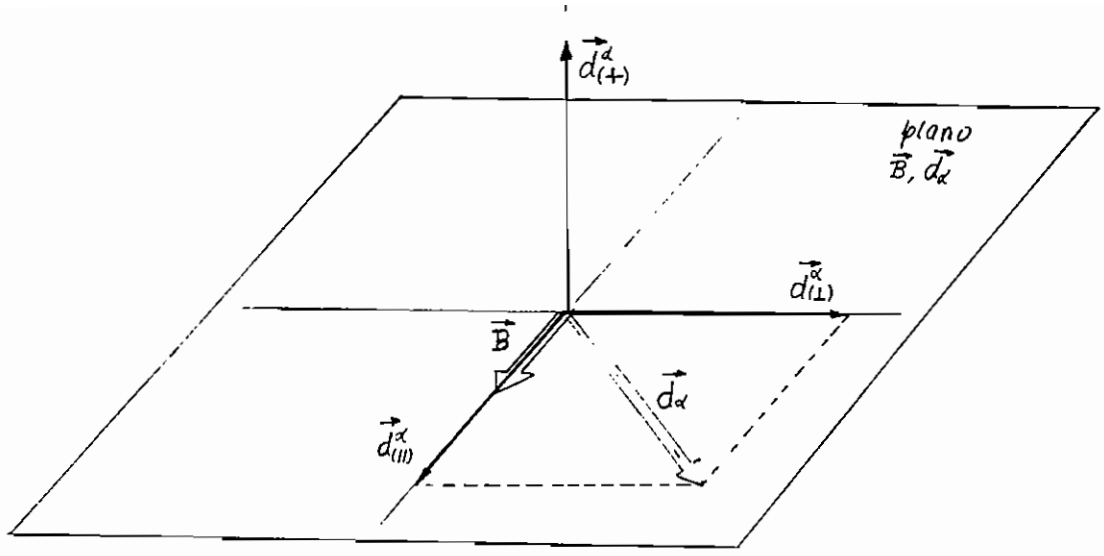


Figura 2.1: Representações das direções paralela ($\|$), perpendicular ($\perp$) e transversal ($+$) dos vetores $\mathbf{d}^{\alpha}_{(\|)}$, $\mathbf{d}^{\alpha}_{(\perp)}$ e $\mathbf{d}^{\alpha}_{(+)}$.

Observar que, $d^{\alpha}_{i} = d^{\alpha}_{(\|)_i} + d^{\alpha}_{(\perp)_i}$, $\frac{\partial T}{\partial x_i} = (\nabla T)_{(\|)_i} + (\nabla T)_{(\perp)_i}$ e as direções de $d^{\alpha}_{(\perp)_i}$ e $(\nabla T)_{(\perp)_i}$ não são em geral as mesmas, assim como as direções de $d^{\alpha}_{(+)_i}$ e $(\nabla T)_{(+)_i}$.

Uma vez estabelecido os vetores de orientação no espaço, iremos obter as equações de transporte (2.171) e (2.172) em termos dos componentes de vetor nessas direções. Mesmo para $\mathbf{B} \longrightarrow 0$ as direções no espaço permanecem determinadas, pois mantemos o versor $\hat{\mathbf{e}}_{(\|)} = \frac{\mathbf{B}}{B}$.

2.2.1 *O Vetor Fluxo de Difusão*

Através de uma manipulação algébrica sobre a equação (2.171), em que subtraímos e adicionamos convenientemente no primeiro termo do lado direito da equação (2.171) a integral

$$\int m_{\alpha} f^{(0)}_{\alpha} S^{(0)}_{3/2} \xi^2_{\alpha} D^{(1)}_{\alpha\beta} d\mathbf{c}^{\alpha} \frac{1}{B^2} B_i B_r d^{\beta}_{r} \tag{2.176}$$

e utilizando as definições (2.174) e (2.175) como em (2.176) para o termo envolvendo o gradiente de temperatura, podemos escrever,

$$J_i^\alpha = -\frac{1}{3}\sum_{\beta=1}^{\nu}\Big[\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 (D_{\alpha\beta}^{(1)} + B^2 D_{\alpha\beta}^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha d_{(\|)_i}^\beta + \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 D_{\alpha\beta}^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha d_{(\perp)_i}^\beta$$

$$+ \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 B D_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha d_{(+)_i}^\beta\Big] - \frac{1}{3T}\Big[\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 (A_\alpha^{(1)} + B^2 A_\alpha^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha (\nabla T)_{(\|)_i}$$

$$+ \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 A_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha (\nabla T)_{(\perp)_i} + \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 B A_\alpha^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha (\nabla T)_{(+)_i}\Big]. \qquad (2.177)$$

Procederemos a integração da equação (2.177) termo a termo. Partindo das definições de (2.81) assim como de (2.149) e utilizando a integração de (2.138), calculamos,

$$\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 (D_{\alpha\beta}^{(1)} + B^2 D_{\alpha\beta}^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha = \frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 \beta_\alpha d_{\alpha\beta}^{(1),(r)} S_{3/2}^{(r)} d\mathbf{c}^\alpha = \frac{1}{2}\rho_\alpha d_{\alpha\beta}^{(1),(0)}. \qquad (2.178)$$

Para as integrais que precedem os vetores $d_{(\perp)_i}^\beta$ e $d_{(+)_i}^\beta$, as integraremos de forma conjunta, de modo a utilizarmos a definição (2.82). Para garantir a independência das integrais no seu processo de integração, multiplicamos uma das expressões, no caso a que precede o vetor $d_{(+)_i}^\beta$, pelo número complexo $i = (-1)^{1/2}$. Assim, usando a definição (2.149) e a equação (2.138), obtemos para as integrais em questão,

$$\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 D_{\alpha\beta}^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha + i\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 B D_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha = \frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 \beta_\alpha d_{\alpha\beta}^{(2),(r)} S_{3/2}^{(r)} d\mathbf{c}^\alpha = \frac{1}{2}\rho_\alpha d_{\alpha\beta}^{(2),(0)}. \qquad (2.179)$$

As integrais que precedem os vetores de direção relativos ao gradiente de temperatura, são calculadas de forma semelhante ao realizado acima, empregando porém as definições (2.88), (2.89), (2.150) e a equação (2.138). Desse modo obtemos,

$$\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 (A_\alpha^{(1)} + B^2 A_\alpha^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha = \frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 \mathcal{A}_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= -\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)}\xi_\alpha^2 \beta_\alpha a_\alpha^{(1),(r)} S_{3/2}^{(r)} d\mathbf{c}^\alpha = -\frac{1}{2}\rho_\alpha a_\alpha^{(1),(0)}, \qquad (2.180)$$

e

$$\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 A_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha + i\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 B A_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha = \frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 \mathcal{A}_\alpha^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha$$

$$= -\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 \beta_\alpha a_\alpha^{(2),(r)} S_{3/2}^{(r)} d\mathbf{c}^\alpha = -\frac{1}{2}\rho_\alpha a_\alpha^{(2),(0)}. \tag{2.181}$$

Dessa maneira a parte real de (2.179) corresponde ao coeficiente $d^\beta_{(\perp)_i}$ e a parte complexa ao coeficiente $d^\beta_{(+)_i}$. Assim o fazemos também para os correspondentes coeficientes relacionados ao gradiente de temperatura. Podemos representar esses coeficientes por,

$$D_{\alpha\beta}^{(\|)} = \frac{1}{2}d_{\alpha\beta}^{(1),(0)}, \qquad D_{\alpha\beta}^{(\perp)} = \frac{1}{4}(d_{\alpha\beta}^{(2),(0)} + d_{\alpha\beta}^{(2),(0)*}), \qquad D_{\alpha\beta}^{(+)} = \frac{1}{4}(d_{\alpha\beta}^{(2),(0)} - d_{\alpha\beta}^{(2),(0)*}), \tag{2.182}$$

$$D_{T\alpha}^{(\|)} = -\frac{1}{2}a_\alpha^{(1),(0)}, \qquad D_{T\alpha}^{(\perp)} = -\frac{1}{4}(a_\alpha^{(2),(0)} + a_\alpha^{(2),(0)*}), \qquad D_{T\alpha}^{(+)} = -\frac{1}{4}(a_\alpha^{(2),(0)} - a_\alpha^{(2),(0)*}), \tag{2.183}$$

onde denominados genericamente de coeficientes multicomponentes de difusão (2.182) e termo difusão (2.183). Dessa forma podemos escrever a lei de Fick (2.177), como

$$J_i^\alpha = -\rho_\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu}(D_{\alpha\beta}^{(\|)} d^\beta_{(\|)_i} + D_{\alpha\beta}^{(\perp)} d^\beta_{(\perp)_i} + D_{\alpha\beta}^{(+)} d^\beta_{(+)_i})$$

$$- \frac{\rho_\alpha}{T}(D_{T\alpha}^{(\|)}(\nabla T)_{(\|)_i} + D_{T\alpha}^{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i} + D_{T\alpha}^{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}). \tag{2.184}$$

É importante notar que em um gás ionizado em presença de campo magnético, existe um fluxo de partículas perpendicular á direção desse campo.

2.2.2 *O Vetor Densidade de Corrente Elétrica*

Como em nosso estudo estamos interessados em gases ionizados, podemos obter a lei de Ohm generalizada para o gás, partindo da lei de Fick, equação (2.184). A partir da definição de densidade de corrente elétrica,

$$J_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}J_i^\alpha, \tag{2.185}$$

e de uma redefinição do vetor força de fluxo de difusão, na qual formamos um vetor a partir de d_i^α, (2.27), de modo a representar, agora, um campo elétrico observado por um referencial em movimento com o fluido, ou seja,

$$d^\alpha_{E'_i} = \frac{1}{\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{\nu} \frac{\rho_\gamma}{\rho}\frac{e_\gamma}{m_\gamma}\right)} \left[\frac{p}{\rho_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right) + \frac{1}{\rho_\alpha}\left(\frac{n_\alpha}{n} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right] - E'_i\,, \tag{2.186}$$

ou,

$$d^\alpha_{E'_i} = \frac{1}{\frac{\rho_\alpha}{p}\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{\nu} \frac{\rho_\gamma}{\rho}\frac{e_\gamma}{m_\gamma}\right)} d_i^\alpha\,. \tag{2.187}$$

Podemos escrever então o vetor densidade de corrente elétrica por,

$$J_i = -\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{\rho_\alpha \rho_\beta e_\alpha}{p\, m_\alpha}\left(\frac{e_\beta}{m_\beta} - \sum_{\gamma=1}^{\nu}\frac{\rho_\gamma}{\rho}\frac{e_\gamma}{m_\gamma}\right)\left(D^{(\|)}_{\alpha\beta} d^\beta_{E'_{(\|)_i}} + D^{(\perp)}_{\alpha\beta} d^\beta_{E'_{(\perp)_i}} + D^{(+)}_{\alpha\beta} d^\beta_{E'_{(+)_i}}\right)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{\rho_\alpha}{T}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(D^{(\|)}_{T_\alpha}(\nabla T)_{(\|)_i} + D^{(\perp)}_{T_\alpha}(\nabla T)_{(\perp)_i} + D^{(+)}_{T_\alpha}(\nabla T)_{(+)_i}\right). \tag{2.188}$$

Os coeficientes de $d^\beta_{E'_{(l)_i}}$ e $(\nabla T)_{(l)_i}$ com $(l) = (\|), (\perp), (+)$ na equação (2.188), são definidos respectivamente como, coeficientes de condutividade elétrica parcial, o qual representa,

$$\sigma^{(l)}_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha e_\alpha}{p}\left(n_\beta e_\beta - \frac{\rho_\beta}{\rho}\sum_{\gamma=1}^{\nu} n_\gamma e_\gamma\right) D^{(l)}_{\alpha\beta} \qquad (l) = (\|), (\perp), (+), \tag{2.189}$$

e coeficiente termo-elétrico parcial, por,

$$\phi^{(l)}_\alpha = \frac{n_\alpha e_\alpha}{T} D^{(l)}_{T\alpha} \qquad (l) = (\|), (\perp), (+)\,. \tag{2.190}$$

Assim escrevemos a lei de Ohm para gases ionizados, através de,

$$J_i = -\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\sigma^{(\|)}_{\alpha\beta} d^\beta_{E'_{(\|)_i}} + \sigma^{(\perp)}_{\alpha\beta} d^\beta_{E'_{(\perp)_i}} + \sigma^{(+)}_{\alpha\beta} d^\beta_{E'_{(+)_i}}\right)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(\phi^{(\|)}_\alpha (\nabla T)_{(\|)_i} + \phi^{(\perp)}_\alpha (\nabla T)_{(\perp)_i} + \phi^{(+)}_\alpha (\nabla T)_{(+)_i}\right). \tag{2.191}$$

Definimos como sendo o coeficiente de condutividade elétrica total em uma dada direção, assim como o coeficiente termo-elétrico, as seguintes relações entre seus coeficientes parciais,

$$\sigma^{(l)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\sigma_{\alpha\beta}^{(l)} \qquad (l) = (\|), (\perp), (+), \tag{2.192}$$

$$\phi^{(l)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\phi_{\alpha}^{(l)} \qquad (l) = (\|), (\perp), (+). \tag{2.193}$$

Podemos observar na equação (2.191), que a presença do campo elétrico E_i', em (2.186) produz uma corrente elétrica perpendicular tanto ao campo magnético quanto ao vetor $\mathbf{d}_{E'}^{(\beta)}$, (caracterizado por $d_{E'(+)_i}^{\beta}$) e uma condutividade elétrica transversal dada por $\sigma^{(+)}$. Esta corrente transversal é conhecida como corrente Hall, sendo devida ao cruzamento dos campos elétrico e magnético, causando às partículas carregadas, uma deriva naquela direção.

É importante notar também, que os coeficientes $\sigma^{(\|)}$ e $\phi^{(\|)}$ não são afetados pelo campo magnético, pois de (2.182) e (2.183) e considerando (2.178) a (2.181), os coeficientes $d_{\alpha\beta}^{(1),(0)}$ e $a_{\alpha}^{(1),(0)}$, solução das equações , (2.156) e (2.158), não dependem desse campo. Isto é uma consequência natural do fato de o campo magnético não ter qualquer efeito sobre o movimento das partículas na direção paralela ao mesmo[3]. No limite quando o campo magnético tende a zero, temos que $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)} \equiv \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)}$ $\mathcal{A}_{\alpha}^{(2)} \equiv \mathcal{A}_{\alpha}^{(1)}$ e portanto, os coeficientes de condutividade elétrica e termo-elétrica perpendiculares ao campo magnético tornam-se iguais às componentes paralelas, sendo os coeficientes transversais nulos. À medida que o campo magnético aumenta, os coeficientes de transporte perpendiculares, ($\perp$) diminuem, enquanto os coeficientes transversais (+) aumentam. Este fato é devido à mudança da velocidade das partículas que se movem perpendicularmente ao campo magnético.

2.2.3 *O Vetor Fluxo de Calor*

Seguindo os mesmos procedimentos realizados para o vetor fluxo de difusão, partimos do fluxo de calor expresso em (2.172) e utilizamos as definições (2.174) e (2.175), para então expressarmos os correspondentes coeficientes nas direções, paralela, perpendicular

[3]Iremos observar no capítulo 5 que existirá uma dependência desses coeficientes na direção do campo magnético, quando do empego do método combinado, o que contradiz o exposto acima, [4].

e transversal em relação ao campo magnético e aos vetores, força de fluxo de difusão e gradiente de temperatura. Assim, somando e subtraindo adequadamente a integral (2.176) ao primeiro termo do lado direito da equação (2.172) e de forma semelhante a integral

$$\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{3/2}^{(0)} \xi_\alpha^2 A_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha \frac{1}{B^2} B_i B_r \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_r} \tag{2.194}$$

ao segundo termo do lado direito da equação (2.172), obtemos,

$$\begin{aligned} q_i = -\frac{kT}{3m_\alpha} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} \Big[\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 (D_{\alpha\beta}^{(1)} + B^2 D_{\alpha\beta}^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha d_{(\|)i}^\beta \\ + \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 D_{\alpha\beta}^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha d_{(\perp)i}^\beta + \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 D_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha B d_{(+)i}^\beta \Big] \\ - \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{k}{3m_\alpha} \Big[\int m_\alpha f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 (A_\alpha^{(1)} + B^2 A_\alpha^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha (\nabla T)_{(\|)i} \\ + \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 A_\alpha^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha (\nabla T)_{(\perp)i} \\ + \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 A_\alpha^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha B (\nabla T)_{(+)i} \Big] + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{5}{2} \frac{kT}{m_\alpha} J_i^\alpha . \end{aligned} \tag{2.195}$$

Do mesmo modo que em (2.178), procedendo a integração, com os termos convenientemente agrupados, obtemos,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{1}{3} \int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 (D_{\alpha\beta}^{(1)} + B^2 D_{\alpha\beta}^{(3)}) d\mathbf{c}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{1}{3} \int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha \\ = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3} \int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)} \xi_\alpha^2 \beta_\alpha d_{\alpha\beta}^{(1),(r)} S_{3/2}^{(r)} d\mathbf{c}^\alpha = -\frac{5}{4} \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha d_{\alpha\beta}^{(1),(1)} - \frac{1}{2} n a_\alpha^{(1),(0)} , \end{aligned} \tag{2.196}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{1}{3} \Big[\int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 D_{\alpha\beta}^{(1)} d\mathbf{c}^\alpha + i \int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 B D_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha \Big] \\ = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{1}{3} \int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{c}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3} \int f_\alpha^{(0)} (-S_{3/2}^{(1)}) \xi_\alpha^2 \beta_\alpha d_{\alpha\beta}^{(2),(r)} S_{3/2}^{(r)} d\mathbf{c}^\alpha \\ = -\frac{5}{4} \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha d_{\alpha\beta}^{(2),(1)} = -\frac{1}{2} n a_\alpha^{(2),(0)} , \end{aligned} \tag{2.197}$$

onde utilizamos a relação (2.170). Também para os coeficientes do vetor gradiente de temperatura para as direções paralela, perpendicular e transversal, temos,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{3}\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2(A_\alpha^{(1)}+B^2A_\alpha^{(3)})d\mathbf{c}^\alpha=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{3}\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{(1)}d\mathbf{c}^\alpha$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3}\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)}\xi_\alpha^2\beta_\alpha a_\alpha^{(1),(r)}S_{3/2}^{(r)}d\mathbf{c}^\alpha=\frac{5}{4}\sum_{\alpha=1}^{\nu}n_\alpha a_\alpha^{(1),(1)} \tag{2.198}$$

e

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{3}\left[\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2A_\alpha^{(1)}d\mathbf{c}^\alpha+i\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2BA_\alpha^{(2)}d\mathbf{c}^\alpha\right]$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{3}\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2\mathcal{A}_\alpha^{(2)}d\mathbf{c}^\alpha=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3}\int f_\alpha^{(0)}(-S_{3/2}^{(1)})\xi_\alpha^2\beta_\alpha a_\alpha^{(2),(r)}S_{3/2}^{(r)}d\mathbf{c}^\alpha$$

$$=-\frac{5}{4}\sum_{\alpha=1}^{\nu}n_\alpha a_\alpha^{(2),(1)}. \tag{2.199}$$

Comparando os resultados (2.196) e (2.197) com (2.180) e (2.181) verificamos que as definições (2.183) podem ser utilizadas agora, como sendo os coeficientes de $d^\beta_{(l)_i}$, com $(l)=(\|),(\perp),(+)$ na equação (2.195) e para os coeficientes do vetor gradiente de temperatura orientados definiremos as relações ,

$$\lambda'_{(\|)}=\frac{5}{4}k\sum_{\alpha=1}^{\nu}n_\alpha a_\alpha^{(1),(1)}$$

$$\lambda'_{(\perp)}=\frac{5}{8}k\sum_{\alpha=1}^{\nu}n_\alpha(a_\alpha^{(2),(1)}+a_\alpha^{(2),(1)*})$$

$$\lambda'_{(+)}=\frac{5}{8}k\sum_{\alpha=1}^{\nu}n_\alpha(a_\alpha^{(2),(1)}-a_\alpha^{(2),(1)*}) \tag{2.200}$$

de modo a podermos escrever,

$$q_i=-nkT\sum_{\beta=1}^{\nu}(D_{T_\beta}^{(\|)}d^\beta_{(\|)_i}+D_{T_\beta}^{(\perp)}d^\beta_{(\perp)_i}+D_{T_\beta}^{(+)}d^\beta_{(+)_i})$$

$$-\left(\lambda'_{(\|)}(\nabla T)_{(\|)_i}+\lambda'_{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i}+\lambda'_{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}\right)+\frac{5}{2}kT\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{J_i^\alpha}{m_\alpha}. \tag{2.201}$$

Na forma em que se apresenta a equação (2.201), os coeficientes $\lambda'_{(m)}$, com $(l) =(\|), (\perp), (+)$ não representam verdadeiramente os coeficientes condutividade térmica correspondentes à lei de Fourier. As condutividades térmicas são medidas em situações nas quais a velocidade de difusão de todas as espécies (ou a densidade de corrente elétrica) são nulas. Para obtermos os coeficientes de condutividade térmica verdadeiros, devemos agrupar o vetor força de fluxo de difusão d_i^β da equação (2.201) no termo correspondente ao fluxo de difusão J_i^α. Para tanto, devemos utilizar a equação (2.184), escrita na seguinte forma,

$$J^\alpha_{(l)_i} = -\rho_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{\nu} D^{(l)}_{\alpha\beta} d^\beta_{(l)_i} + \frac{1}{T} D^{(l)}_{T_\alpha} (\nabla T)_{(l)_i} \right) \qquad (l) = (\|), (\perp), (+), \tag{2.202}$$

de modo que,

$$J_i^\alpha = J^\alpha_{(\|)_i} + J^\alpha_{(\perp)_i} + J^\alpha_{(+)_i} \,. \tag{2.203}$$

Isolando o termo relativo a $d^\beta_{(l)_i}$ da equação (2.202), escrevemos,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} D^{(l)}_{\alpha\beta} d^\beta_{(l)_i} = -\frac{1}{T} D^{(l)}_{T_\alpha} (\nabla T)_{(l)_i} - \frac{1}{\rho_\alpha} J^\alpha_{(l)_i} \qquad (l) = (\|), (\perp), (+) \,, \tag{2.204}$$

Para que possamos relacionar o segundo termo do lado direito da equação (2.201) com (2.204), devemos estabelecer uma relação entre os coeficientes de difusão $D^{(l)}_{\alpha\beta}$ e o coeficiente de termo difusão $D^{(l)}_{T_\alpha}$. Definindo o fator razão de difusão térmica $k^{(l)}_{T_\alpha}$ com $(\alpha = 1, 2, ..., \nu)$ e $(l) = (\|), (\perp), (+)$, por,

$$D^{(l)}_{T_\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} k^{(l)}_{T_\alpha} D^{(l)}_{\alpha\beta} \,, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} k^{(l)}_{T_\alpha} = 0 \,, \tag{2.205}$$

podemos então escrever, com $(l) = (\|), (\perp), (+)$,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} D^{(l)}_{T_\beta} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{\nu} k^{(l)}_{T_\alpha} D^{(l)}_{\alpha\beta} d^\beta_{(l)_i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(-\frac{1}{T} D^{(l)}_{T_\alpha} (\nabla T)_{(l)_i} - \frac{1}{\rho_\alpha} J^\alpha_{(l)_i} \right) \,. \tag{2.206}$$

Substituindo a relação (2.206) na equação (2.201), obtemos a lei de Fourier, ou seja,

$$q_i = nkT \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left[\left(\frac{5}{2} \frac{1}{nm_\alpha} + \frac{k^{(\|)}_{T_\alpha}}{\rho_\alpha} \right) J^\alpha_{(\|)_i} + \left(\frac{5}{2} \frac{1}{nm_\alpha} + \frac{k^{(\perp)}_{T_\alpha}}{\rho_\alpha} \right) J^\alpha_{(\perp)_i} + \left(\frac{5}{2} \frac{1}{nm_\alpha} + \frac{k^{(+)}_{T_\alpha}}{\rho_\alpha} \right) J^\alpha_{(+)_i} \right]$$

$$- \left(\lambda'_{(\parallel)} - nk \sum_{\alpha=1}^{\nu} k_{T_\alpha}^{(\parallel)} D_{T_\alpha}^{(\parallel)} \right) (\nabla T)_{(\parallel)_i} - \left(\lambda'_{(\perp)} - nk \sum_{\alpha=1}^{\nu} k_{T_\alpha}^{(\perp)} D_{T_\alpha}^{(\perp)} \right) (\nabla T)_{(\perp)_i}$$

$$- \left(\lambda'_{(+)} - nk \sum_{\alpha=1}^{\nu} k_{T_\alpha}^{(+)} D_{T_\alpha}^{(+)} \right) (\nabla T)_{(+)_i} , \tag{2.207}$$

ou,

$$q_i = - \left(\lambda_{(\parallel)} (\nabla T)_{(\parallel)_i} + \lambda_{(\perp)} (\nabla T)_{(\perp)_i} + \lambda_{(+)} (\nabla T)_{(+)_i} \right)$$

$$+ p \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{1}{\rho_\alpha} \left[\left(\frac{5}{2} \frac{n_\alpha}{n} + k_{T_\alpha}^{(\parallel)} \right) J_{(\parallel)_i}^{\alpha} + \left(\frac{5}{2} \frac{n_\alpha}{n} + k_{T_\alpha}^{(\perp)} \right) J_{(\perp)_i}^{\alpha} + \left(\frac{5}{2} \frac{n_\alpha}{n} + k_{T_\alpha}^{(+)} \right) J_{(+)_i}^{\alpha} \right] , \tag{2.208}$$

onde,

$$\lambda_{(\parallel)} = \lambda'_{(\parallel)} - nk \sum_{\alpha=1}^{\nu} k_{T_\alpha}^{(\parallel)} D_{T_\alpha}^{(\parallel)}, \tag{2.209}$$

$$\lambda_{(\perp)} = \lambda'_{(\perp)} - nk \sum_{\alpha=1}^{\nu} k_{T_\alpha}^{(\perp)} D_{T_\alpha}^{(\perp)}, \tag{2.210}$$

$$\lambda_{(+)} = \lambda'_{(+)} - nk \sum_{\alpha=1}^{\nu} k_{T_\alpha}^{(+)} D_{T_\alpha}^{(+)}, \tag{2.211}$$

são os coeficientes de condutividade térmica.

O comportamento do vetor fluxo de calor em presença do campo magnético, é análogo ao comportamento do vetor densidade de corrente elétrica. No limite de campo magnético nulo, os coeficientes de condutividade térmica paralelo e perpendicular são iguais e o coeficiente transversal é nulo. A medida que a intensidade de campo aumenta, o coeficiente de condutividade perpendicular diminui e o coeficiente de condutividade transversal aumenta.

2.2.4 *O Tensor Pressão*

Para um gás ionizado, o tensor pressão, é um tensor simétrico que pode ser separado em uma parcela correspondente à seu traço (representando a pressão estática p) e a outra correspondente ao deviante do tensor. Substituindo a função distribição na definição do deviante do tensor pressão, obtemos uma equação na qual um coeficiente tensorial de quarta ordem atua sobre o deviante do tensor gradiente de velocidade do fluido, como já expressso na equação (2.173). Procedendo uma integração preliminar na qual explicitamos

as relações tensoriais de dentro das integrais e utilizando coordenadas esféricas de acordo com o apêndice A, a equação (2.173) passa a ser escrita,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{\nu} 4\pi \left[\frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) - \frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{pq}\right] \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{5/2}^{(0)} \xi_\alpha^6 \left[Q_\alpha^{(1)}\delta_{rp}\delta_{sq}\right.$$

$$+(Q_\alpha^{(2)} - B^2 Q_\alpha^{(4)})(\delta_{rp}\epsilon_{sqt} + \delta_{sp}\epsilon_{rqt})B_t + Q_\alpha^{(3)}(\epsilon_{ptr}\epsilon_{sqm} - \frac{1}{3}\epsilon_{lpt}\epsilon_{lqm}\delta_{rs})B_t B_m$$

$$\left. + Q_\alpha^{(4)}(\epsilon_{rqt}B_p B_s + \epsilon_{sqt}B_r B_p)B_t + Q_\alpha^{(5)} B_{<r}B_{s>}B_p B_q\right] dc^\alpha \frac{\partial v_r}{\partial x_s}, \qquad (2.212)$$

e fazendo os produtos de tensores $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$, obtemos[4].

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{4\pi}{15}\sum_{\alpha=1}^{\nu} \int m_\alpha f_\alpha^{(0)} S_{5/2}^{(0)} \xi_\alpha^6 \left[Q_\alpha^{(1)}(\delta_{ri}\delta_{sj} + \delta_{rj}\delta_{si} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{rs})\right.$$

$$+(Q_\alpha^{(2)} - B^2 Q_\alpha^{(4)})(\delta_{ir}\epsilon_{sjt}B_t + \delta_{is}\epsilon_{rjt}B_t + \delta_{jr}\epsilon_{sit}B_t + \delta_{js}\epsilon_{rit}B_t)$$

$$+Q_\alpha^{(3)}(B_i B_r \delta_{js} + B_i B_s \delta_{jr} + B_j B_r \delta_{is} + B_j B_s \delta_{ir} - \frac{4}{3}B_i B_j \delta_{rs}$$

$$-\frac{4}{3}B_{<r}B_{s>}\delta_{ij} - B^2\delta_{ir}\delta_{js} - B^2\delta_{is}\delta_{jr} + \frac{2}{3}B^2\delta_{ij}\delta_{rs})$$

$$+Q_\alpha^{(4)}(\epsilon_{rjt}B_i B_s B_t + \epsilon_{sjt}B_i B_r B_t + \epsilon_{rit}B_j B_s B_t + \epsilon_{sit}B_j B_r B_t)$$

$$\left. + 2Q_\alpha^{(5)} B_{<i}B_{j>}B_{<r}B_{s>}\right] dc^\alpha \frac{\partial v_r}{\partial x_s}. \qquad (2.214)$$

Representando os seguintes tensores por,

$$n_{(\delta)_{<ij><rs>}} = \delta_{ri}\delta_{sj} + \delta_{rj}\delta_{si} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{rs}, \qquad (2.215)$$

[4]O produto dos tensores $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ pode ser obtido pelo determinante da matriz de,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \qquad (2.213)$$

$$n_{(\epsilon)<ij><rs>} = \frac{1}{B}(\delta_{ir}\epsilon_{sjt} + \delta_{is}\epsilon_{rjt} + \delta_{jr}\epsilon_{sit} + \delta_{js}\epsilon_{rit})B_t, \tag{2.216}$$

$$n_{(\zeta)<ij><rs>} = \frac{1}{B^2}(B_iB_r\delta_{js} + B_iB_s\delta_{jr} + B_jB_r\delta_{is} + B_jB_s\delta_{ir} - \frac{4}{3}B_iB_j\delta_{rs} - \frac{4}{3}B_{<r}B_{s>}\delta_{ij}), \tag{2.217}$$

$$n_{(\eta)<ij><rs>} = \frac{1}{B^3}(\epsilon_{rjt}B_iB_sB_t + \epsilon_{sjt}B_iB_rB_t + \epsilon_{rit}B_jB_sB_t + \epsilon_{sit}B_jB_rB_t), \tag{2.218}$$

$$n_{(\theta)<ij><rs>} = \frac{1}{B^4}B_{<i}B_{j>}B_{<r}B_{s>}, \tag{2.219}$$

escrevemos a equação (2.214) por,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{4\pi}{15}\sum_{\alpha=1}^{\nu}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)}S_{5/2}^{(0)}\xi_\alpha^6\left[(Q_\alpha^{(1)} - B^2Q_\alpha^{(3)})n_{(\delta)<ij><rs>} + (Q_\alpha^{(2)} - B^2Q_\alpha^{(4)})n_{(\epsilon)<ij><rs>}\right.$$
$$\left. + Q_\alpha^{(3)}n_{(\zeta)<ij><rs>} + Q_\alpha^{(4)}n_{(\eta)<ij><rs>} + 2Q_\alpha^{(5)}n_{(\theta)<ij><rs>}\right]dc^\alpha\frac{\partial v_r}{\partial x_s}. \tag{2.220}$$

Utilizando as equações (2.124) a (2.128), podemos relacionar $Q_\alpha^{(n)}$ com $\mathcal{B}_\alpha^{(l)}$, na equação (2.220) e obter,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{2\pi}{15}\sum_{\alpha=1}^{\nu}\int m_\alpha f_\alpha^{(0)}S_{5/2}^{(0)}\xi_\alpha^6\left[(\mathcal{B}_\alpha^{(3)} + \mathcal{B}_\alpha^{(3)*})n_{(\delta)<ij><rs>}\right.$$
$$+\frac{1}{2i}(\mathcal{B}_\alpha^{(3)} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)*})n_{(\epsilon)<ij><rs>}$$
$$+(\mathcal{B}_\alpha^{(2)} + \mathcal{B}_\alpha^{(2)*} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)*})n_{(\zeta)<ij><rs>}$$
$$+\frac{1}{2i}(2\mathcal{B}_\alpha^{(2)} - 2\mathcal{B}_\alpha^{(2)*} - \mathcal{B}_\alpha^{(3)} + \mathcal{B}_\alpha^{(3)*})n_{(\eta)<ij><rs>}$$
$$\left. + (6\mathcal{B}_\alpha^{(1)} - 4\mathcal{B}_\alpha^{(2)} - 4\mathcal{B}_\alpha^{(2)*} + \mathcal{B}_\alpha^{(3)} + \mathcal{B}_\alpha^{(3)*})n_{(\theta)<ij><rs>}\right]dc^\alpha\frac{\partial v_r}{\partial x_s}. \tag{2.221}$$

Utilizando os polinômios de Sonine (2.151), com a integral (2.138), verificamos que,

$$\int m_\alpha f_\alpha^{(0)}S_{5/2}^{(0)}\xi_\alpha^6\mathcal{B}_\alpha^{(l)}dc^\alpha = \int m_\alpha f_\alpha^{(0)}S_{5/2}^{(0)}\xi_\alpha^6\beta_\alpha\sum_{r=0}^{\infty}b_\alpha^{(l),(r)}S_{5/2}^{(r)}dc^\alpha$$

$$= \frac{15}{8}\frac{kT}{\pi} n_\alpha b_\alpha^{(l),(0)} \qquad (l = 1, 2, 3), \tag{2.222}$$

e portanto a equação (2.221) resulta em,

$$\begin{aligned} p_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{1}{4}kT\sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \Big[& (b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\delta)<ij><rs>} + \frac{1}{2i}(b_\alpha^{(3),(0)} - b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\epsilon)<ij><rs>} \\ & + (b_\alpha^{(2),(0)} + b_\alpha^{(2),(0)*} - b_\alpha^{(3),(0)} - b_\alpha^{(3)*,(0)}) n_{(\zeta)<ij><rs>} \\ & + \frac{1}{2i}(2b_\alpha^{(2),(0)} - 2b_\alpha^{(2),(0)*} - b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\eta)<ij><rs>} \\ & + (6b_\alpha^{(1),(0)} - 4b_\alpha^{(2),(0)} - 4b_\alpha^{(2),(0)*} + b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\theta)<ij><rs>} \Big] \frac{\partial v_r}{\partial x_s}, \end{aligned} \tag{2.223}$$

Como já haviamos observado, apenas os coeficientes $b_\alpha^{(l),(0)}$, com $(l = 1, 2, 3)$ precisam ser determinados para que o termo constitutivo p_{ij} se torne conhecido em função dos campos básicos. Isto pode ser feito através da resolução das equações (2.160) a (2.162), para $b_\alpha^{(l),(0)}$. Desse modo a equação (2.223) pode ser escrita,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - 2\mu_{<ij><rs>}\frac{\partial v_r}{\partial x_s} \tag{2.224}$$

onde o tensor de quarta ordem $\mu_{<ij><rs>}$, é denominado de coeficiente de viscosidade cisalhante, no caso, do gás ionizado. A equação (2.224) representa a lei de Navier-Stokes. Assim o coeficiente de viscosidade cisalhante é dado por,

$$\begin{aligned} \mu_{<ij><rs>} = \frac{1}{8}kT\sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \Big[& (b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\delta)<ij><rs>} + \frac{1}{2i}(b_\alpha^{(3),(0)} - b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\epsilon)<ij><rs>} \\ & + (b_\alpha^{(2),(0)} + b_\alpha^{(2),(0)*} - b_\alpha^{(3),(0)} - b_\alpha^{(3)*,(0)}) n_{(\zeta)<ij><rs>} \\ & + \frac{1}{2i}(2b_\alpha^{(2),(0)} - 2b_\alpha^{(2),(0)*} - b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(\eta)<ij><rs>} \\ & + (6b_\alpha^{(1),(0)} - 4b_\alpha^{(2),(0)} - 4b_\alpha^{(2),(0)*} + b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) n_{(theta)<ij><rs>} \Big] \end{aligned} \tag{2.225}$$

Apesar dos 81 componentes possíveis do tensor acima, um grande número deles são nulos, além de o tensor possuir um considerável grau de simetria. Podemos observar que as componentes do tensor $\mu_{<ij><rs>}$ ficam determinadas através de uma combinação de cinco coeficientes, ($\sum_{\alpha=1}^{\nu} b_{\alpha}^{(1),(0)}$, $\sum_{\alpha=1}^{\nu} b_{\alpha}^{(2),(0)}$, $\sum_{\alpha=1}^{\nu} b_{\alpha}^{(2),(0)*}$, $\sum_{\alpha=1}^{\nu} b_{\alpha}^{(3),(0)}$ e $\sum_{\alpha=1}^{\nu} b_{\alpha}^{(3),(0)*}$). Isto faz com que, apenas cinco das componentes desse tensor, sejam linearmente independentes [15]. Se orientarmos o campo magnético na direção x, $\mathbf{B}$ =B$\hat{\imath}$ no sistema de coordenadas retangular, verificamos que as componentes do tensor pressão (2.224) resultam em,

$$p_{xx} = p - 2\mu_1 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}}, \tag{2.226}$$

$$p_{xy} = p_{yx} = -2\mu_3 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} + 2\mu_5 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}}, \tag{2.227}$$

$$p_{xz} = p_{zx} = -2\mu_5 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} - 2\mu_3 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}}, \tag{2.228}$$

$$p_{yy} = p - 2\mu_2 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} - 2(\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} - 2\mu_4 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}, \tag{2.229}$$

$$p_{yz} = p_{zy} = \mu_4 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + 2(\mu_1 - 2\mu_2) \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}} - \mu_4 \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}, \tag{2.230}$$

$$p_{zz} = p - 2(\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + 2\mu_4 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}} - 2\mu_2 \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}, \tag{2.231}$$

onde,

$$\mu_1 = \frac{1}{2} kT \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \left(b_\alpha^{(1),(0)} \right), \tag{2.232}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} kT \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \left[\frac{1}{2} b_\alpha^{(1),(0)} + \frac{1}{4} (b_\alpha^{(3),(0)} + b_\alpha^{(3),(0)*}) \right], \tag{2.233}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2} kT \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \left[\frac{1}{2} (b_\alpha^{(2),(0)} + b_\alpha^{(2),(0)*}) \right], \tag{2.234}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{2} kT \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \left[-\frac{i}{2} (b_\alpha^{(3),(0)} - b_\alpha^{(3),(0)*}) \right], \tag{2.235}$$

$$\mu_5 = \frac{1}{2}kT\sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha \left[-\frac{i}{2}(b_\alpha^{(2),(0)} - b_\alpha^{(2),(0)*})\right] . \tag{2.236}$$

No desenvolvimento das expressões (2.226) a (2.231) utilizamos o fato de ser nulo o traço de $\frac{\partial v_{<r}}{\partial x_{s>}}$, ou seja,

$$\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} + \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} = 0, \tag{2.237}$$

e portanto, é interessante observar que μ_1 não representa o elemento $\mu_{<xx><xx>}$, uma vez que,

$$p_{xx} = p - 2\mu_{<xx><rs>}\frac{\partial v_{<r}}{\partial x_{s>}}. \tag{2.238}$$

Podemos verificar a partir das equações (2.232) a (2.236) com, (2.174) e (2.175), que na ausência de campo magnético, temos, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ e $\mu_4 = \mu_5 = 0$, reduzindo o tensor pressão à forma,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - 2\mu\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} . \tag{2.239}$$

A forma com que aparece o coeficiente viscosidade cisalhante neste caso, corresponde à viscosidade de fluidos puramente isotrópicos, onde $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Capítulo 3

O Método Combinado

3.1 Introdução

A partir dos dois principais métodos de resolução da equação de Boltzmann para a determinação dos coeficientes de transporte de um gás, sejam eles o método de Chapman-Enskog e o método de Grad, foi desenvolvido o método combinado.

O tradicional método de Chapmann-Enskog, já analisado no segundo capítulo, necessita da solução da equação integral proveniente da equação de Boltzmann para a determinação do desvio da função distribuição .

No método de Grad, [16], [17], [18], o desvio da função é distribuição é preliminarmente obtido em termos dos momentos da função distribuição . Desse modo podemos calcular os termos de produção que aparecem no sistema de equações de balanço estabelecido a partir da equação de transporte (1.63) para esses momentos. Desprezando nestas equações os termos não lineares e as derivadas temporais dos campos que são nulos no estado de equilíbrio que estejam no lado esquerdo das equações de balanço e mantendo esses termos no lado direito, obtemos um sistema de equações em primeira iteração. Resolvendo o sistema assim formado para os momentos da função distribuição em primeira aproximação, encontramos os coeficientes de transporte.

Aproximações sucessivas podem ser obtidas em ambos os métodos, o que proporciona resultados melhores. A equivalência na precisão entre esses dois métodos, no que diz respeito à determinação dos coeficientes de transporte e resguardando as aproximações correspondentes, está comprovada em [19].

A determinação dos coeficientes de transporte de gases monoatômicos e de misturas,

$$J_i^\alpha(\mathbf{x},t) = \int m_\alpha \xi_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha\,, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} J_i^\alpha = 0\,, \tag{3.5}$$

$$q_i^\alpha(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\int m_\alpha C_\alpha^2 C_i^\alpha f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha\,. \tag{3.6}$$

Reescrevemos também a equação de Boltzmann (1.54), com sua força externa específica, sendo expressa pela força de Lorentz por unidade de massa da partícula (2.10), de modo que,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(E_i + \epsilon_{ijk}c_j B_k)\frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu}\int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g^{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta\,, \qquad (\alpha = 1,2,...,\nu). \tag{3.7}$$

A função distribuição $f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)$ para $(\alpha = 1,2,...,\nu)$, pode ser obtida tanto pelo seu desenvolvimento em série de polinômios de Hermite em ξ_i^α (velocidade peculiar parcial), quanto, pela maximização da densidade de entropia. Empregaremos a segunda alternativa.

3.2.1 *A Função de Distribuição*

Podemos então obter a função distribuição fora do equilíbrio através da maximização da densidade de entropia, $\rho\eta$ $(1.106)_1$, sujeitos às contribuições dos campos específicos, (3.1) a (3.6). Este problema é equivalente à maximização da densidade de entropia sem restrições através do método dos multiplicadores de Lagrange com o funcional sendo dado por,

$$\begin{aligned} F = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\int \Big(&-k\ln f_\alpha - \Lambda^\alpha m_\alpha - \Lambda_i^\alpha m_\alpha c_i^\alpha - \lambda\frac{1}{2}m_\alpha C_\alpha^2 \\ &- \Lambda_{ij} m_\alpha C_i^\alpha C_j^\alpha - \lambda_i^\alpha \frac{1}{2} m_\alpha C_\alpha^2 C_i^\alpha\Big) f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{c}^\alpha,t)d\mathbf{c}^\alpha, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde λ, Λ^α, λ_i^α, Λ_i^α e Λ_{ij}^α, representam os multiplicadores de Lagrange, todos independentes da função distribuição. A maximização do funcional$F = F(f_\alpha,\mathbf{x},t)$ é feita através da equação de Euler Lagrange,

$$\frac{\partial F}{\partial f_\alpha} = 0\,. \tag{3.9}$$

Assim, derivando parcialmente a equação (3.8) em relação a f_α, obtemos a função que maximiza a densidade de entopia, ou seja,

$$f_\alpha = \exp\left[-\frac{m_\alpha}{k}\left(\frac{k}{m_\alpha} + \Lambda^\alpha + \Lambda_i^\alpha c_i^\alpha + \lambda\frac{1}{2}C_\alpha^2 + \Lambda_{ij}C_i^\alpha C_j^\alpha + \lambda_i^\alpha\frac{1}{2}C_\alpha^2 C_i^\alpha\right)\right]. \tag{3.10}$$

Decompondo as velocidades das partículas em termos das velocidades peculiares parciais e velocidade da mistura através das relações (1.68), (1.79) com (1.91) e (1.85), podemos dividir a função (3.10) em duas parcelas. Agrupando os termos assim formados adequadamente, podemos reconhecer uma primeira parcela que irá representar a função distribuição no equilíbrio, enquanto que a segunda corresponderá ao desvio da função de distribuição. Como estamos interessados nos processos fora do equilíbrio desprezamos os termos não lineares e usamos a aproximação $e^{-x} \approx 1 - x$ na segunda parcela, de modo que (3.10) pode ser escrita em primeira aproximação por,

$$\begin{aligned} f_\alpha = \exp&\left[-\frac{m_\alpha}{k}\left(\frac{k}{m_\alpha} + \Lambda^\alpha + \Lambda_i^\alpha v_i + \lambda\frac{1}{2}\xi_\alpha^2\right)\right] \\ \times&\left[1 - \frac{m_\alpha}{k}\left(\Lambda_i^\alpha\xi_i^\alpha + \lambda\xi_i^\alpha\frac{J_i^\alpha}{\rho_\alpha} + \Lambda_{ij}^\alpha\xi_i^\alpha\xi_j^\alpha + \frac{1}{2}\lambda_i^\alpha\xi_\alpha^2\xi_i^\alpha\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Os multiplicadores de Lagrange são obtidos em termos dos campos básicos ao identificarmos a parcela em equilíbrio com a função maxwelliana (1.129) e substituirmos então a equação (3.11), com os coeficientes em equilíbrio já idenficados, nas definições dos campos básicos (3.1) a (3.6). Lembrando ainda que estamos desenvolvendo uma teoria linearizada, obtemos para os multiplicadores de Lagrange,

$$\Lambda^\alpha = -\frac{k}{m_\alpha}\left\{1 + \ln\left[\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)\right]\right\}, \tag{3.12}$$

$$\Lambda_i^\alpha = \frac{m_\alpha}{\rho_\alpha kT^2}J_i^\alpha, \tag{3.13}$$

$$\lambda = \frac{1}{T}, \tag{3.14}$$

$$\Lambda_{ij}^{\alpha} = -\frac{m_\alpha}{2\rho_\alpha kT^2} p_{<ij>}^{\alpha}\,, \tag{3.15}$$

$$\lambda_i^{\alpha} = -\frac{2}{5}\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha k^2 T^3} q_i^{\alpha}\,. \tag{3.16}$$

Substituindo as expressões (3.12) a (3.16) na equação (3.11), obtemos a função distribuição $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}^\alpha, t)$ em termos dos momentos (3.1) a (3.6), ou seja,

$$f_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2}\left\{1 + \frac{m_\alpha}{\rho_\alpha kT} J_i^\alpha \xi_i^\alpha\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\rho_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{kT}\right)^2\left[p_{<ij>}^\alpha \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + \frac{4}{5} q_i^\alpha \xi_i^\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\right]\right\}\,, \tag{3.17}$$

e que pode ser apresentada como,

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}(1 + \phi_\alpha)\,, \tag{3.18}$$

onde ϕ_α representa o desvio do equilíbrio da função distribuição, linear em relação aos seus momentos.

Uma vez estabelecida a função distribuição , a substituimos na equação de Boltzmann (3.7), agora como no método de Chapman-Enskog, respeitando as devidas influências de cada termo tanto na equação de Boltzmann quanto na função e distribuição, como o fizemos na equação (2.11). Negligenciando os termos não lineares e as derivadas de J_i^α, q_i^α e $p_{<ij>}^\alpha$, além de considerarmos (2.30), obtemos a equação,

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t} + (\xi_i^\alpha + v_i)\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_i' \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial \xi_i^\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j B_k f_\alpha^{(0)} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_i^\alpha}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\phi_\alpha) + I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)], \tag{3.19}$$

na qual utilizamos as relações (2.5) e (2.20), ou seja,

$$E_i' = E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k, \tag{3.20}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\rho_\alpha E_i'+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}J_j^\alpha B_k, \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v_i\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{2}{3}T\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0. \tag{3.26}$$

A equação (3.23) após a substituição devida das equações (3.24) à (3.26), resulta,

$$f_\alpha^{(0)}\left\{\frac{n_\alpha}{n}\xi_i^\alpha d_i^\alpha+\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2-\frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{m_\alpha}{kT}\xi_i^\alpha\xi_j^\alpha\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}\right.$$
$$+\frac{m_\alpha}{\rho_\alpha kT}\xi_i^\alpha\left[\frac{\rho_\alpha}{\rho}\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{e_\beta}{m_\beta}\epsilon_{ijk}J_j^\beta B_k-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}J_j^\alpha B_k\right]$$
$$\left.+\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha(kT)^2}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}\xi_j^\alpha B_k\left[\frac{2}{5}\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2-\frac{5}{2}\right)q_i^\alpha+\xi_l^\alpha p_{<il>}^\alpha\right]\right\}=\sum_{\beta=1}^{\nu}[I_{\alpha\beta}(\phi_\alpha)+I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)], \tag{3.27}$$

onde o vetor d_i^α, representa a força generalizada de difusão do constituinte α, jà definido em (2.27) e que reescrevemos abaixo,

$$d_i^\alpha=\frac{1}{p}\left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i}-\frac{\rho_\alpha}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{\rho_\beta}{\rho}\frac{e_\beta}{m_\beta}-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\right)E_i'\right],\qquad\sum_{\alpha=1}^{\nu}d_i^\alpha=0. \tag{3.28}$$

A equação (3.27) serve de base para a obtenção de um sistema de equações , para os vetores d_i^α, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}$. Uma vez resolvido esse sistema, obtemos as equações para os termos constitutivos J_i^α, q_i^α e $p_{<ij>}^\alpha$, pois estamos interessados em uma termodinâmica usual.

Multiplicando a equação (3.27) por $\frac{m_\alpha}{\rho_\alpha kT}\xi_i^\alpha$ e integrando para todos os valores de ξ_i^α, obtemos,

$$-pd_i^\alpha-\left(\frac{\rho_\alpha}{\rho}\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{e_\beta}{m_\beta}\epsilon_{ijk}J_j^\beta B_k-\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}J_j^\alpha B_k\right)=\sum_{\beta=1}^{\nu}A_{\alpha\beta}J_i^\beta-\sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{m_\beta}{kT}F_{\alpha\beta}q_i^\beta,\quad(\alpha=1,2,...,\nu), \tag{3.29}$$

onde representamos,

$$A_{\alpha\beta}=-\frac{1}{3}\frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT}\int\xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_i^\beta)d\vec{\xi}^\alpha,\qquad\text{se},\quad\alpha\neq\beta, \tag{3.30}$$

$$A_{\alpha\alpha}=-\frac{1}{3}\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha kT}\left[\sum_{\beta=1}^{\nu}\int\xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_i^\alpha)d\vec{\xi}^\alpha+\int\xi_i^\alpha I_{\alpha\alpha}(\xi_i^\alpha)d\vec{\xi}^\alpha\right], \tag{3.31}$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{2}{15}\frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT}\int \xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}\left[\left(\frac{m_\beta}{2kT}\xi_\beta^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\beta\right] d\vec{\xi}^\alpha\,, \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{3.32}$$

$$F_{\alpha\alpha} = \frac{2}{15}\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha kT}\left\{\sum_{\beta=1}^{\nu}\int \xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}\left[\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha\right] d\vec{\xi}^\alpha + \int \xi_i^\alpha I_{\alpha\alpha}\left[\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha\right] d\vec{\xi}^\alpha\right\}. \tag{3.33}$$

A equação (3.29) representa ν equações linearmente dependentes, pois $\sum_{\alpha=1}^{\nu} d_i^\alpha = 0$. Como desejamos equações linearmente independentes, subtraímos a ν-ésima equação das α-gésimas equações (3.29), de modo a obtermos $\nu - 1$ equações linearmente independentes, ou seja,

$$-p(d_i^\alpha - d_i^\nu) + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon_{ijk}J_j^\alpha B_k - \frac{e_\nu}{m_\nu}\epsilon_{ijk}J_j^\nu B_k$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu-1}(A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\nu} - A_{\nu\beta} + A_{\nu\nu})J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{m_\beta}{kT}(F_{\alpha\beta} - F_{\nu\beta})q_i^\beta\,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu - 1)\,, \tag{3.34}$$

ou,

$$-p(d_i^\alpha - d_i^\nu) = \sum_{\beta=1}^{\nu-1}\left[(A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\nu} - A_{\nu\beta} + A_{\nu\nu})\delta_{ij} - \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta} + \frac{e_\nu}{m_\nu}\right)\epsilon_{ijk}\nu B_k\right] J_j^\beta$$

$$- \sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{m_\beta}{kT}(F_{\alpha\beta} - F_{\nu\beta})q_i^\beta\,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu - 1)\,. \tag{3.35}$$

Multiplicando agora a equação (3.27) por, $\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha (kT)^2}\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha$ e integrando sobre todos os valores de $\vec{\xi}^\alpha$, obtemos,

$$\frac{5}{2}\frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{kT}\right)\epsilon_{ijk}q_j^\alpha B_k = \sum_{\beta=1}^{\nu} G_{\alpha\beta}J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{m_\beta}{kT}H_{\alpha\beta}q_i^\beta\,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu), \tag{3.36}$$

onde,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT}\int\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_i^\beta)d\vec{\xi}^\alpha\,, \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{3.37}$$

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3}\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha kT}\left[\sum_{\beta=1}^{\nu}\int\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_i^\alpha)d\vec{\xi}^\alpha + \int\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha I_{\alpha\alpha}(\xi_i^\alpha)d\vec{\xi}^\alpha\right], \tag{3.38}$$

$$H_{\alpha\beta} = -\frac{2}{15}\frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT}\int\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}\left[\left(\frac{m_\beta}{2kT}\xi_\beta^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\beta\right]d\vec{\xi}^\alpha\,, \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta\,, \quad (3.39)$$

$$H_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{15}\frac{m_\alpha^2}{\rho_\alpha kT}\left\{\sum_{\beta=1}^{\nu}\int\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha I_{\alpha\beta}\left[\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha\right]d\vec{\xi}^\alpha\right.$$
$$\left. + \int\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\alpha^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha I_{\alpha\alpha}\left[\left(\frac{m_\alpha}{2kT}\xi_\beta^2 - \frac{5}{2}\right)\xi_i^\alpha\right]d\vec{\xi}^\alpha\right\}. \qquad (3.40)$$

As expressões (3.30) a (3.33) assim como (3.37) a (3.40) representam parcelas das integrais de colisão. Se compararmos a expressão (3.32) com (3.37), observamos que $G_{\alpha\beta} = \frac{5}{2}F_{\beta\alpha}$ e que $G_{\alpha\alpha} = \frac{5}{2}F_{\alpha\alpha}$. Desse modo podemos escrever a equação (3.36) como,

$$\frac{5}{2}\frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{5}{2}\sum_{\beta=1}^{\nu-1}(F_{\beta\alpha} - F_{\nu\alpha})J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{m_\beta}{kT}\left(H_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta}\epsilon_{ijk}B_k\right)q_j^\beta\,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \qquad (3.41)$$

Multiplicando agora a equação (3.27) por $\frac{m_\alpha}{kT}\xi_{<i}^\alpha\xi_{j>}^\alpha$ e integrando sobre todas as velocidades $\vec{\xi}^\alpha$, obtemos,

$$-2p_\alpha\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\epsilon_{kiq}B_q p_{<kj>}^\alpha + \epsilon_{kjq}B_q p_{<ki>}^\alpha) = \sum_{\beta=1}^{\nu}L_{\alpha\beta}p_{<ij>}^\beta\,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu), \quad (3.42)$$

onde,

$$L_{\alpha\beta} = -\frac{1}{10}\frac{m_\alpha m_\beta^2}{\rho_\beta(kT)^2}\int\xi_{<p}^\alpha\xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_{<p}^\beta\xi_{q>}^\beta)d\vec{\xi}^\alpha\,, \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta\,, \qquad (3.43)$$

$$L_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{10}\frac{m_\alpha^3}{\rho_\alpha(kT)^2}\left[\sum_{\beta=1}^{\nu}\int\xi_{<p}^\alpha\xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_{<p}^\alpha\xi_{q>}^\alpha)d\vec{\xi}^\alpha + \int\xi_{<p}^\alpha\xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_{<p}^\alpha\xi_{q>}^\alpha)d\vec{\xi}^\alpha\right]. \qquad (3.44)$$

Evidenciando o deviante do tensor pressão na equação (3.46), temos,

$$-2p_\alpha\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = \sum_{\beta=1}^{\nu}\left[\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta}(\epsilon_{kiq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kjq}B_q\delta_{il}) + L_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}\right]p_{<kl>}^\beta\,, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \qquad (3.45)$$

A partir do sistema formado pelo conjunto de equações (3.35), (3.41) e (3.45), podemos obter as equações para os termos constitutivos desejados. Mais especificamente, para a determinação das equações constitutivas para os vetores J_i^α e q_i^α devemos resolver o sistema formado pelas $2\nu-1$ equações vetoriais (3.35) e (3.41). Já para a determinação das equações constitutivas para os tensores $p^\alpha_{<ij>}$, devemos apenas resolver o sistema formado pelas ν equações tensoriais (3.45).

3.2.2 *Os Vetores Densidade de Corrente Elétrica e Fluxo de Calor*

Para que possamos expressar de forma esquemática as equações, de densidade de corrente elétrica e do fluxo de calor, utilizaremos a representação matricial. Definindo inicialmente os tensores,

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = (A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\nu} - A_{\nu\beta} + A_{\nu\nu})\delta_{ij} - \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta} - \frac{e_\nu}{m_\nu}\right)\epsilon_{ijk}B_k\,, \tag{3.46}$$

$$F_{ij}^{\alpha\beta} = -(F_{\alpha\beta} - F_{\nu\beta})\delta_{ij}\,, \tag{3.47}$$

$$G_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{5}{2}(F_{\beta\alpha} - F_{\nu\alpha})\delta_{ij}\,, \tag{3.48}$$

$$H_{ij}^{\alpha\beta} = -\left(H_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta}\epsilon_{ijk}B_k\right)\,, \tag{3.49}$$

escrevemos as equações (3.35) e (3.41), como,

$$-p(d_i^\alpha - d_i^\nu) = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} A_{ij}^{\alpha\beta}J_j^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu}\frac{m_\beta}{kT}F_{ij}^{\alpha\beta}q_j^\beta\,, \qquad (\alpha = 1,2,...,\nu-1), \tag{3.50}$$

$$\frac{5}{2}\frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} G_{ij}^{\alpha\beta}J_j^\beta + \sum_{\beta=1}^{\nu} H_{ij}^{\alpha\beta}\frac{m_\beta}{kT}q_j^\beta\,, \qquad (\alpha = 1,2,...,\nu). \tag{3.51}$$

O sistema de equações (3.50) e (3.51), na forma matricial, pode então ser escrito,

$$\begin{pmatrix} [-p(d_i^\alpha - d_i^\nu)]_{(\nu-1)\times 1} \\ \left[\frac{5}{2}\frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right]_{\nu\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[A_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{(\nu-1)\times(\nu-1)} & \left[F_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{(\nu-1)\times\nu} \\ \left[G_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{\nu\times(\nu-1)} & \left[H_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{\nu\times\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left[J_j^\beta\right]_{(\nu-1)\times 1} \\ \left[\frac{m_\beta}{kT}q_j^\beta\right]_{\nu\times 1} \end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

Chamando a matriz dos coeficientes na equação (3.52) de $[\mathbf{K}_{ij}^{\alpha\beta}]_{(2\nu-1)\times(2\nu-1)}$, ou seja,

$$[\mathbf{K}_{ij}^{\alpha\beta}]=\begin{pmatrix} \left[A_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{(\nu-1)\times(\nu-1)} & \left[F_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{(\nu-1)\times\nu} \\ \left[G_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{\nu\times(\nu-1)} & \left[H_{ij}^{\alpha\beta}\right]_{\nu\times\nu} \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

podemos calcular a sua inversa, em α e β isto é $\left[(\mathbf{K}^{-1})_{ki}^{\beta\alpha}\right]_{(2\nu-1)\times(2\nu-1)}$. Porém os elementos que a compoẽ são tensores de segunda ordem. A forma geral que os elementos da matriz $[\mathbf{K}_{ij}^{\alpha\beta}]_{(2\nu-1)\times(2\nu-1)}$ possuem é,

$$S_{ij} = s_{(\delta)}\delta_{ij} + s_{(\epsilon)}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + s_{(\zeta)}\frac{B_iB_j}{B^2}, \tag{3.54}$$

onde os sub-índices (δ), (ϵ) e (ζ) nos coeficientes das parcelas tensoriais que formam o tensor, servem para identificar a procedência dos mesmos. O tensor inverso de (3.54) que se tornará necessário no momento da inversão dos elementos da matriz quadrada da equação (3.54), pode ser obtido através do teorema de Cayley-Hamilton [21]. A forma geral desse tensor inverso, especificamente para tensores do tipo de (3.54) é dado por,

$$\left(S^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{s_{(\delta)}^2 + s_{(\epsilon)}^2}\left[s_{(\delta)}\delta_{ij} - s_{(\epsilon)}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + \left(\frac{s_{(\epsilon)}^2 - s_{(\delta)}s_{(\zeta)}}{s_{(\delta)} + s_{(\zeta)}}\right)\frac{B_iB_j}{B^2}\right]. \tag{3.55}$$

Agrupando os elementos da matriz inversa $\left[(\mathbf{K}^{-1})_{ki}^{\beta\alpha}\right]_{(2\nu-1)\times(2\nu-1)}$ em sub-matrizes, de tal modo a escrevermos,

$$\left(\left[\left(\mathbf{K}^{-1}\right)_{ki}^{\beta\alpha}\right]_{(2\nu-1)\times(2\nu-1)}\right) = \begin{pmatrix} [M_{ki}^{\beta\alpha}]_{(\nu-1)\times(\nu-1)} & \left[M_{T_{ki}}^{\beta\alpha}\right]_{(\nu-1)\times\nu} \\ [Q_{ki}^{\beta\alpha}]_{\nu\times(\nu-1)} & \left[Q_{T_{ki}}^{\beta\alpha}\right]_{\nu\times\nu} \end{pmatrix}, \tag{3.56}$$

temos,

$$\begin{pmatrix} [J_k^\beta]_{(\nu-1)\times 1} \\ \left[\frac{m_\beta}{kT}q_k^\beta\right]_{\nu\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [M_{ki}^{\beta\alpha}]_{(\nu-1)\times(\nu-1)} & \left[M_{T_{ki}}^{\beta\alpha}\right]_{(\nu-1)\times\nu} \\ [Q_{ki}^{\beta\alpha}]_{\nu\times(\nu-1)} & \left[Q_{T_{ki}}^{\beta\alpha}\right]_{\nu\times\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-p(d_i^\alpha - d_i^\nu)]_{(\nu-1)\times 1} \\ \left[\frac{5}{2}\frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right]_{\nu\times 1} \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

As equações para os termos constitutivos J_i^α e q_i^α podem então ser escritas na forma,

$$J_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} M_{ij}^{\alpha\beta}[-p(d_j^\beta - d_j^\nu)] + \sum_{\beta=1}^{\nu} M_{T_{ij}}^{\alpha\beta}\frac{5}{2}\frac{p_\beta}{T}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{3.58}$$

$$\frac{m_\alpha}{kT} q_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} Q_{ij}^{\alpha\beta}[-p(d_j^\beta - d_j^\nu)] + \sum_{\beta=1}^{\nu} Q_{T_{ij}}^{\alpha\beta} \frac{5}{2} \frac{p_\beta}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{3.59}$$

sendo $M_{ij}^{\alpha\beta}$, $M_{T_{ij}}^{\alpha\beta}$, $Q_{ij}^{\alpha\beta}$ e $Q_{T_{ij}}^{\alpha\beta}$ os elementos das sub-matrizes de (3.56) que verificam as relações de Onsager.

Podemos escrever a relação entre os vetores força de fluxo de difusão por,

$$(d_i^\beta - d_i^\nu) = d_i^\beta + \sum_{\gamma=1}^{\nu-1} d_i^\gamma = \sum_{\gamma=1}^{\nu-1} (\delta^{\beta\gamma} + 1) d_i^\gamma, \tag{3.60}$$

e obtermos,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu-1} M_{ij}^{\alpha\beta} p(d_i^\beta - d_i^\nu) = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} M_{ij}^{\alpha\beta} p \sum_{\gamma=1}^{\nu-1} (\delta^{\beta\gamma} + 1) d_j^\gamma = \sum_{\gamma=1}^{\nu-1} \sum_{\beta=1}^{\nu-1} p M_{ij}^{\alpha\beta} (\delta^{\beta\gamma} + 1) d_j^\gamma. \tag{3.61}$$

Usando os tensores estabelecidos em (3.56), definimos então,

$$D_{ij}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \frac{p}{\rho_\alpha} (\delta^{\beta\gamma} + 1) M_{ij}^{\alpha\beta}, \tag{3.62}$$

$$D_{T_{ij}}^{\alpha} = -\frac{5}{2} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{p_\beta}{\rho_\alpha} M_{T_{ij}}^{\alpha\beta}, \tag{3.63}$$

$$\lambda_{ij}^{\alpha} = -\frac{5}{2} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{k}{m_\alpha} Q_{T_{ij}}^{\alpha\beta}, \tag{3.64}$$

$$D_{D_{ij}}^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{\nu} \frac{kT}{m_\alpha} p(\delta^{\gamma\beta} + 1) Q_{ij}^{\alpha\gamma}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{\beta=1}^{\nu} D_{D_{ij}}^{\alpha\beta} = p D_{T_{ij}}^{\alpha}. \tag{3.65}$$

Assim, escrevemos as equações, (3.58) e (3.59) como,

$$J_i^\alpha = -\sum_{\beta=1}^{\nu-1} \rho_\alpha D_{ij}^{\alpha\beta} d_j^\beta - \rho_\alpha D_{T_{ij}}^{\alpha} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu - 1), \tag{3.66}$$

e

$$q_i^\alpha = -\lambda_{ij}^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sum_{\beta=1}^{\nu-1} D_{D_{ij}}^{\alpha\beta} d_j^\beta \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \tag{3.67}$$

Denominamos os seguintes coeficientes, $D_{ij}^{\alpha\beta}$ de coeficientes multicomponentes de difusão, $D_{T_{ij}}^{\alpha}$ coeficientes multicomponente de termo-difusão, λ_{ij}^{α} coeficientes de condutividade térmica parcial e $D_{D_{ij}}^{\alpha\beta}$ coeficiente multicomponente de difusão-térmica. Como todos esses tensores tem a forma geral dada por (3.54), podemos escrever,

$$
\begin{aligned}
D_{ij}^{\alpha\beta} d_j^{\beta} &= D_{(\delta)}^{\alpha\beta}\delta_{ij} d_j^{\beta} + D_{(\epsilon)}^{\alpha\beta}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} d_j^{\beta} + D_{(\zeta)}^{\alpha\beta}\frac{B_i B_j}{B^2} d_j^{\beta} \\
&= (D_{(\delta)}^{\alpha\beta} + D_{(\zeta)}^{\alpha\beta})\frac{B_i B_j}{B^2} d_j^{\beta} + D_{(\delta)}^{\alpha\beta}\left(d_i^{\beta} - \frac{B_i B_j}{B^2} d_j^{\beta}\right) + (-D_{(\epsilon)}^{\alpha\beta})\epsilon_{ikj}\frac{B_k}{B} d_j^{\beta} \\
&= D_{\alpha\beta}^{(\|)} d_{(\|)_i}^{\beta} + D_{\alpha\beta}^{(\perp)} d_{(\perp)_i}^{\beta} + D_{\alpha\beta}^{(+)} d_{(+)_i}^{\beta} ,
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

onde utilizamos as definições (2.174) e estabelecemos que,

$$
D_{\alpha\beta}^{(\|)} = D_{(\delta)}^{\alpha\beta} + D_{(\zeta)}^{\alpha\beta} , \qquad D_{\alpha\beta}^{(\perp)} = D_{(\delta)}^{\alpha\beta} , \qquad D_{\alpha\beta}^{(+)} = -D_{(\epsilon)}^{\alpha\beta} . \tag{3.69}
$$

e da mesma forma para $D_{T\alpha}^{(l)}$, com $(l) = (\|), (\perp), (+)$.

Os demais coeficientes tensoriais podem ser decompostos de forma inteiramente semelhante às realizadas acima. Do mesmo modo podemos definir vetores gradiente de temperatura nas direções paralela $(\|)$, perpendicular $(\perp)$ e transversal $(+)$ e assim escrever a equação (3.66), ou seja, a lei de Fick, como,

$$
\begin{aligned}
J_i^{\alpha} = &-\rho_{\alpha}\sum_{\beta=1}^{\nu-1}\left(D_{\alpha\beta}^{(\|)} d_{(\|)_i}^{\beta} + D_{\alpha\beta}^{(\perp)} d_{(\perp)_i}^{\beta} + D_{\alpha\beta}^{(+)} d_{(+)_i}^{\beta}\right) \\
&- \frac{\rho_{\alpha}}{T}\left(D_{T\alpha}^{(\|)}(\nabla T)_{(\|)_i} + D_{T\alpha}^{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i} + D_{T\alpha}^{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}\right) , \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu - 1) ,
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

sendo todos os $d_{(l)_i}^{\beta}$, com $(l) = (\|), (\perp), (+)$, linearmente independentes. Utilizando as definições dos vetores $d_{(l)_i}^{\beta}$ e $(\nabla T)_{(l)_i}$, com $(l) = (\|), (\perp), (+)$, o vetor q_i^{α}, expresso na forma (3.67), pode do mesmo modo ser escrito,

$$
q_i^{\alpha} = -\left(\lambda_{\alpha}^{(\|)}(\nabla T)_{(\|)_i} + \lambda_{\alpha}^{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i} + \lambda_{\alpha}^{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}\right)
$$

$$-\sum_{\beta=1}^{\nu-1}\left(D^{(\|)}_{D_{\alpha\beta}}d^{\beta}_{(\|)_i}+D^{(\perp)}_{D_{\alpha\beta}}d^{\beta}_{(\perp)_i}+D^{(+)}_{D_{\alpha\beta}}d^{\beta}_{(+)_i}\right)\,, \tag{3.71}$$

onde,

$$\lambda^{(\|)}_{\alpha}=\lambda^{\alpha}_{(\delta)}+\lambda^{\alpha}_{(\zeta)}\,,\qquad \lambda^{(\perp)}_{\alpha}=\lambda^{\alpha}_{(\delta)}\,,\qquad \lambda^{(+)}_{\alpha}=-\lambda^{\alpha}_{(\epsilon)}\,. \tag{3.72}$$

e da mesma forma para $D^{(l)}_{D_{\alpha\beta}}$, com $(l)=(\|),(\perp),(+)$.

O vetor densidade de corrente elétrica J_i, definido em (2.185), pode ser representado pela equação (2.191), ou utilizando as definições (2.187), (2.189) e (2.190), obtemos a lei de Ohm generalizada,

$$J_i=-\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu-1}\left(\sigma^{(\|)}_{\alpha\beta}d^{\beta}_{E'_{(\|)_i}}+\sigma^{(\perp)}_{\alpha\beta}d^{\beta}_{E'_{(\perp)_i}}+\sigma^{(+)}_{\alpha\beta}d^{\beta}_{E'_{(+)_i}}\right)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(\phi^{(\|)}_{\alpha}(\nabla T)_{(\|)_i}+\phi^{(\perp)}_{\alpha}(\nabla T)_{(\perp)_i}+\phi^{(+)}_{\alpha}(\nabla T)_{(+)_i}\right)\,. \tag{3.73}$$

Define-se o coeficiente de condutividade elétrica do fluido nas respectivas direções por,

$$\sigma^{(l)}=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu-1}\sigma^{(l)}_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\sum_{\beta=1}^{\nu-1}\frac{n_\alpha e_\alpha}{p}\left(n_\beta e_\beta-\frac{\rho_\beta}{\rho}\sum_{\gamma=1}^{\nu}n_\gamma e_\gamma\right)D^{(l)}_{\alpha\beta}\,,\qquad \text{com}\quad (l)=(\|),\,(\perp),\,(+)\,, \tag{3.74}$$

assim como o coeficiente termo-elétrico do fluido por,

$$\phi^{(l)}=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\phi^{(l)}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{n_\alpha e_\alpha}{T}D^{(l)}_{T_\alpha}\,,\qquad \text{com}\quad (l)=(\|),\,(\perp),\,(+)\,. \tag{3.75}$$

O fluxo de calor total q_i, definido em (1.90), pode ser escrito na seguinte forma se considerarmos a definição (1.91),

$$q_i=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(q^{\alpha}_i+\frac{3}{2}\frac{kT}{m_\alpha}J^{\alpha}_i+\frac{1}{2}\frac{J^2_\alpha}{\rho^2_\alpha}J^{\alpha}_i+\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}J^{\alpha}_i+\frac{1}{\rho_\alpha}p^{\alpha}_{<ij>}J^{\alpha}_j\right)\,. \tag{3.76}$$

Como estamos interessados em uma teoria linearizada, desprezamos os termos com produtos de termos constitutivos. Considerando ainda a equação (1.87), temos,

$$q_i=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(q^{\alpha}_i+\frac{5}{2}\frac{kT}{m_\alpha}J^{\alpha}_i\right)\,, \tag{3.77}$$

ou, se considerarmos a equação (3.71),

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\lambda_\alpha^{(\|)} (\nabla T)_{(\|)_i} + \lambda_\alpha^{(\perp)} (\nabla T)_{(\perp)_i} + \lambda_\alpha^{(+)} (\nabla T)_{(+)_i} \right)$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \left(D_{D_{\alpha\beta}}^{(\|)} d_{(\|)_i}^{\beta} + D_{D_{\alpha\beta}}^{(\perp)} d_{(\perp)_i}^{\beta} + D_{D_{\alpha\beta}}^{(+)} d_{(+)_i}^{\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{5}{2} \frac{kT}{m_\alpha} J_i^\alpha \,. \tag{3.78}$$

Como o objetivo é definir o coeficiente de condutividade térmica do gás ionizado, devemos absorver o segundo termo da equação (3.78) no termo referente ao fluxo de difusão, retirando com isso a parcela do coeficiente multicomponente de termo-difusão do coeficiente de condutividade térmica parcial. Utilizando a equação (3.70), definimos,

$$J_{(l)_i}^\alpha = -\rho_\alpha \sum_{\beta=1}^{\nu-1} D_{\alpha\beta}^{(l)} d_{(l)_i}^{\beta} - \frac{\rho_\alpha}{T} D_{T_\alpha}^{(l)} (\nabla T)_{(l)_i} \,, \qquad (l) = (\|), (\perp), (+) \,, \tag{3.79}$$

de modo que,

$$J_i^\alpha = J_{(\|)_i}^\alpha + J_{(\perp)_i}^\alpha + J_{(+)_i}^\alpha \,. \tag{3.80}$$

Assim como na equação (2.204), a partir de (3.79), isolamos o termo referente à força de difusão,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu-1} D_{\alpha\beta}^{(l)} d_{(l)_i}^{\beta} = -\frac{1}{T} D_{T_\alpha}^{(l)} (\nabla T)_{(l)_i} - \frac{1}{\rho_\alpha} J_{(l)_i}^\alpha \,, \qquad (l) = (\|), (\perp), (+) \,, \tag{3.81}$$

e para que possamos relacionar os coeficientes $D_{\alpha\beta}^{(l)}$ com $D_{D_{\alpha\beta}}^{(l)}$ definimos um novo fator razão de difusão térmica, por,

$$k_T^{(l)} = \frac{1}{p} \frac{D_{D_{\alpha\beta}}^{(l)}}{D_{\alpha\beta}^{(l)}} \,, \qquad (l) = (\|), (\perp), (+) \,. \tag{3.82}$$

Com isto o coeficiente de difusão térmica que aparece na equação (3.78) pode ser representado por,

$$\sum_{\beta=1}^{\nu-1} D_{\alpha\beta}^{(l)} d_{(l)_i}^{\beta} = nk k_T^{(l)} D_{T_\alpha}^{(l)} (\nabla T)_{(l)_i} - nkT \frac{k_T^{(l)}}{\rho_\alpha} J_{(l)_i}^\alpha \,, \qquad (l) = (\|), (\perp), (+) \,, \tag{3.83}$$

de modo que a equação (3.78) assume a forma da lei de Fourier, ou seja,

$$q_i = -\left(\lambda^{(\parallel)}(\nabla T)_{(\parallel)_i} + \lambda^{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i} + \lambda^{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}\right)$$

$$+ p\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{1}{\rho_\alpha}\left[\left(k_T^{(\parallel)} + \frac{5}{2}\frac{n_\alpha}{n}\right)J^\alpha_{(\parallel)_i} + \left(k_T^{(\perp)} + \frac{5}{2}\frac{n_\alpha}{n}\right)J^\alpha_{(\perp)_i} + \left(k_T^{(+)} + \frac{5}{2}\frac{n_\alpha}{n}\right)J^\alpha_{(+)_i}\right], \qquad (3.84)$$

onde definimos,

$$\lambda^{(\parallel)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(\lambda_\alpha^{(\parallel)} - nkk_T^{(\parallel)}D_{T_\alpha}^{(\parallel)}\right)$$

$$\lambda^{(\perp)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(\lambda_\alpha^{(\perp)} - nkk_T^{(\perp)}D_{T_\alpha}^{(\perp)}\right) \qquad (3.85)$$

$$\lambda^{(+)} = \sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(\lambda_\alpha^{(+)} - nkk_T^{(+)}D_{T_\alpha}^{(+)}\right).$$

Desse modo obtemos o coeficiente de condutividade térmica do fluido, nas respectivas direções paralela, perpendicular e transversal.

3.2.3 *O Tensor Pressão*

A determinação das equações constitutivas que envolvem os tensores p^α_{ij}, necessitam, como já afirmado anteriormente, da resolução do sistema de equações formado pelas ν equações tensoriais (3.45). Podemos escrever esta equação por,

$$-2p_\alpha\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = \sum_{\beta=1}^{\nu}N^{\alpha\beta}_{ijkl}p^\beta_{<kl>}, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., \nu). \qquad (3.86)$$

onde,

$$N^{\alpha\beta}_{ijkl} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta}(\epsilon_{kiq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kjq}B_q\delta_{il}) + L_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}. \qquad (3.87)$$

Como o produto do tensor $N^{\alpha\beta}_{ijkl}$ com o deviante do tensor pressão $p^\beta_{<kl>}$ resulta no tensor deviante do gradiente de velocidade, $\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}$ (simétrico e sem traço), então é válida a identidade,

$$N^{\alpha\beta}_{ijkl} = N^{\alpha\beta}_{ijlk} = N^{\alpha\beta}_{jikl} = N^{\alpha\beta}_{jilk}, \qquad (3.88)$$

e portanto,

$$N^{\alpha\beta}_{ijkl} = \frac{1}{4}\left(N^{\alpha\beta}_{ijkl} + N^{\alpha\beta}_{ijlk} + N^{\alpha\beta}_{jikl} + N^{\alpha\beta}_{jilk}\right) . \tag{3.89}$$

Assim de (3.87) e considerando a equação (3.89), temos,

$$N^{\alpha\beta}_{ijkl} = \frac{1}{2}L_{\alpha\beta}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\delta^{\alpha\beta}(\epsilon_{kiq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kjq}B_q\delta_{il} + \epsilon_{liq}B_q\delta_{jk} + \epsilon_{ljq}B_q\delta_{ik}) . \tag{3.90}$$

Mas o tensor $N^{\alpha\beta}_{ijkl}$ pode ser sem traço em i, j e em k, l, devido aos demais tensores envolvidos na equação serem sem traço. Como,

$$N^{\alpha\beta}_{<ij><kl>} = N^{\alpha\beta}_{ijkl} - \frac{1}{9}N^{\alpha\beta}_{rrss}\delta_{ij}\delta_{kl} , \tag{3.91}$$

então a equação (3.90) pode ser escrita,

$$N^{\alpha\beta}_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}L_{\alpha\beta}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta}(\epsilon_{kiq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kjq}B_q\delta_{il} + \epsilon_{liq}B_q\delta_{jk} + \epsilon_{ljq}B_q\delta_{ik}) . \tag{3.92}$$

A forma geral de um tensor de quarta ordem simétrico e sem traço em i, j e em k, l que seja função de um pseudo vetor, como o campo magnético $\mathbf{B}$, (ou de um tensor antissimétrico $\epsilon_{ijk}B_k$) é composto por cinco elementos de base independentes como função de $\mathbf{B}$ (teoremas de representação), como em [20], o que nos possibilita escrever um tensor genérico $T_{<ij><kl>}$ do seguinte modo,

$$T_{<ij><kl>} = T_{(\delta)}n_{(\delta)<ij><kl>} + T_{(\epsilon)}n_{(\epsilon)<ij><kl>} + T_{(\zeta)}n_{(\zeta)<ij><kl>}$$

$$+ T_{(\eta)}n_{(\eta)<ij><kl>} + T_{(\theta)}n_{(\theta)<ij><kl>} , \tag{3.93}$$

onde,

$$n_{(\delta)<ij><kl>} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{3.94}$$

$$n_{(\epsilon)<ij><kl>} = \frac{1}{B}(\delta_{ik}\epsilon_{ljt} + \delta_{il}\epsilon_{kjt} + \delta_{jk}\epsilon_{lit} + \delta_{jl}\epsilon_{kit})B_t, \tag{3.95}$$

$$n_{(\zeta)<ij><kl>} = \frac{1}{B^2}(B_iB_k\delta_{jl} + B_iB_l\delta_{jk} + B_jB_k\delta_{il} + B_jB_l\delta_{ik} - \frac{4}{3}B_iB_j\delta_{kl} - \frac{4}{3}B_{<k}B_{l>}\delta_{ij}), \tag{3.96}$$

$$n_{(\eta)<ij><kl>} = \frac{1}{B^3}(\epsilon_{kjt}B_iB_lB_t + \epsilon_{ljt}B_iB_kB_t + \epsilon_{kit}B_jB_lB_t + \epsilon_{lit}B_jB_kB_t), \tag{3.97}$$

$$n_{(\theta)<ij><kl>} = \frac{1}{B^4}B_{<i}B_{j>}B_{<k}B_{l>}\,. \tag{3.98}$$

Comparando a equação (3.93) com a equação (3.92), temos

$$N^{\alpha\beta}_{<ij><kl>} = N^{\alpha\beta}_{(\delta)}n_{(\delta)<ij><kl>} + N^{\alpha\beta}_{(\epsilon)}n_{(\epsilon)<ij><kl>}\,, \tag{3.99}$$

onde,

$$N^{\alpha\beta}_{(\delta)} = \frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\,, \qquad N^{\alpha\beta}_{(\epsilon)} = \frac{1}{2}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\delta^{\alpha\beta} \quad e \quad N^{\alpha\beta}_{(\zeta)} = N^{\alpha\beta}_{(\eta)} = N^{\alpha\beta}_{(\theta)} = 0\,. \tag{3.100}$$

Como o nosso objetivo, neste ítem, é obter uma equação para os termos constitutivos $p^\alpha_{<ij>}$, consideraremos o sistema de equações (3.86) como uma equação matricial, que de forma esquemática pode ser escrita,

$$\left(\left[-2p_\alpha\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}\right]_{\nu\times 1}\right) = \left(\left[N^{\alpha\beta}_{ijkl}\right]_{\nu\times\nu}\right)\left([p^\beta_{<kl>}]_{\nu\times 1}\right)\,. \tag{3.101}$$

Assim devemos inverter a matriz $\nu\times\nu$ formada pelos elementos $N^{\alpha\beta}_{<ij><kl>}$. Será necessário para tanto conhecer a forma inversa desses elementos de matriz, no caso tensores de quarta ordem na forma de (3.23). O tensor identidade de quarta ordem e sem traço é expresso por,

$$I_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\,, \tag{3.102}$$

a ser utilizado na obtenção do tensor inverso, uma vez que,

$$\left(N^{-1}\right)^{\alpha\beta}_{<ij><rs>} N^{\beta\alpha}_{<rs><kl>} = I_{<ij><kl>} \,. \tag{3.103}$$

O tensor inverso de um tensor do tipo (3.99), ou seja, $(N^{-1})^{\alpha\beta}_{<ij><rs>}$, possui a forma geral (3.93), cujos coeficientes a determinar serão obtidos pela composição estabelecida na equação (3.103). Procedendo dessa maneira e resolvendo o sistema de equações resultante de (3.103), com as definições (3.94) a (3.98) obtemos,

$$\left(N^{-1}\right)^{\alpha\beta}_{<ij><kl>} = \frac{1}{4(N_{(\delta)}+4N_{(\epsilon)})}\Big[N_{(\delta)}n_{(\delta)<ij><kl>} + N_{(\epsilon)}n_{(\epsilon)<ij><kl>}$$
$$+3\frac{N_{(\delta)}N^2_{(\epsilon)}}{N^2_{(\delta)}+N^2_{(\epsilon)}}n_{(\zeta)<ij><kl>} + 3\frac{N^3_{(\epsilon)}}{N^2_{(\delta)}+N^2_{(\epsilon)}}n_{(\eta)<ij><kl>} + 12\frac{N^4_{(\epsilon)}}{N_{(\delta)}(N^2_{(\delta)}+N^2_{(\epsilon)})}n_{(\theta)<ij><kl>}\Big] \,. \tag{3.104}$$

Agora podemos inverter a matriz formada pelos elementos $N^{\alpha\beta}_{<ij><kl>}$ na equação (3.101) e escrever,

$$\left(\left[p^{\beta}_{<ij>}\right]_{\nu\times 1}\right) = \left(\left[N^{\beta\alpha}_{ijkl}\right]^{-1}_{\nu\times\nu}\right)\left(\left[-2p_\alpha\frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}}\right]_{\nu\times 1}\right) \,. \tag{3.105}$$

Representando os elementos da matriz inversa por $(N^{-1})^{\alpha\beta}_{<ij><kl>}$, podemos escrever a equação (3.116), como,

$$p^{\alpha}_{<ij>} = -2\sum_{\beta=1}^{\nu} p_\beta \left(N^{-1}\right)^{\alpha\beta}_{<ij><kl>}\frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}}\,, \qquad (\alpha = 1,2,...,\nu). \tag{3.106}$$

Chamando o coeficiente do gradiente de velocidade de coeficiente de viscosidade cisalhante parcial, e o representando por,

$$\mu^{\alpha}_{<ij><kl>} = \sum_{\beta=1}^{\nu} p_\beta \left(N^{-1}\right)^{\alpha\beta}_{<ij><kl>}\,, \qquad (\alpha = 1,2,...,\nu), \tag{3.107}$$

então o traço do tensor pressão parcial pode ser escrito por,

$$p^{\alpha}_{<ij>} = -2\mu^{\alpha}_{<ij><kl>}\frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}}\,, \qquad (\alpha = 1,2,...,\nu)\,. \tag{3.108}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2342
INSTITUTO DE FÍSICA

O tensor pressão total, definido em (1.84), ou seja,

$$p_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(p_{ij}^{\alpha} + \frac{1}{\rho_\alpha} J_i^\alpha J_j^\alpha \right) , \tag{3.109}$$

reduz-se, ao considerarmos uma teoria linearizada, em,

$$p_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_{ij}^{\alpha} . \tag{3.110}$$

Pela equação (1.82) com (1.83), sabemos que,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} + p_{<ij>} , \tag{3.111}$$

sendo que,

$$p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha = nkT = \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha kT , \tag{3.112}$$

e

$$p_{<ij>} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_{<ij>}^{\alpha} . \tag{3.113}$$

Desse modo, a partir da equação (3.108), temos,

$$p_{<ij>} = -2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mu_{<ij><kl>}^{\alpha} \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}} . \tag{3.114}$$

Definindo o coeficiente do gradiente de velocidade em (3.114) por coeficiente de viscosidade cisalhante do gás ionizado e o representamos por,

$$\mu_{<ij><kl>} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mu_{<ij><kl>}^{\alpha} , \tag{3.115}$$

a equação, (3.114), pode então ser escrita,

$$p_{<ij>} = -2\mu_{<ij><kl>} \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}} , \tag{3.116}$$

representando a lei de Navier-Stokes.

O coeficiente de viscosidade cisalhante, expresso em sua forma geral como em (3.93), pode ser representado por,

$$\mu_{<ij><kl>} = \mu_{(\delta)} n_{(\delta)<ij><kl>} + \mu_{(\epsilon)} n_{(\epsilon)<ij><kl>} + \mu_{(\zeta)} n_{(\zeta)<ij><kl>}$$

$$+ \mu_{(\eta)} n_{(\eta)<ij><kl>} + \mu_{(\theta)} n_{(\theta)<ij><kl>} \,, \tag{3.117}$$

O método combinado, nos possibilita também obter outras aproximações para os coeficientes de transporte [19], assim como acontece nos demais métodos. Os coeficientes de, condutividade elétrica, termo-elétrico, condutivida térmica e viscosidade cisalhante, calculados pelo presente método, equivalem-se aos mesmos coeficientes calculados pelo método de Chapmann-Enskog nas seguintes aproximações $2^{\underline{a}}$, $1^{\underline{a}}$, $1^{\underline{a}}$ e $1^{\underline{a}}$, respectivamente.

Supondo o campo magnético na direção x, $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}}$, de acordo com o apêndice C, temos,

$$p_{<xx>} = -2\mu_1 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} \,, \tag{3.118}$$

$$p_{<xy>} = p_{<yx>} = -2\mu_3 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} - 2\mu_5 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}} \,, \tag{3.119}$$

$$p_{<xz>} = p_{<zx>} = 2\mu_5 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} - 2\mu_3 \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}} \,, \tag{3.120}$$

$$p_{<yy>} = -2\mu_2 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} - 2(\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} - 2\mu_4 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}} \,, \tag{3.121}$$

$$p_{<yz>} = p_{<zy>} = \mu_4 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + 2(\mu_1 - 2\mu_2) \frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}} - \mu_4 \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} \,, \tag{3.122}$$

$$p_{<zz>} = -2(\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + 2\mu_4 \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}} - 2\mu_2 \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} \,, \tag{3.123}$$

onde

$$\mu_1 = \mu_{<xx><xx>} - \mu_{<xx><yy>} = \frac{2}{3} \left(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)} \right) \,, \tag{3.124}$$

$$\mu_2 = \mu_{<yy><yy>} - \mu_{<yy><xx>} = \frac{1}{3} \left(6\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)} \right) \,, \tag{3.125}$$

$$\mu_3 = 2\mu_{<xy><xy>} = 2\left(\mu_{(\delta)} + \mu_{(\zeta)}\right) , \tag{3.126}$$

$$\mu_4 = 2\mu_{<yy><yz>} = 4\mu_{(\epsilon)} , \tag{3.127}$$

$$\mu_5 = 2\mu_{<xy><xz>} = -2\mu_{<xz><xy>} = 2(\mu_{(\epsilon)} + \mu_{(\eta)}) . \tag{3.128}$$

Capítulo 4

Cálculo das Integrais de Colisão

4.1 Introdução

O lado direito da equação de Boltzmann (1.54), denominado de termo de colisão, representa uma integral quíntupla contendo as informações cinéticas das partículas que entrarão em colisão, como velocidades, trajetórias e potenciais de interação.

No processo de resolução da equação de Boltzmann para a determinação da função distribuição em função dos campos básicos da termodinânica usual, multiplicamos essa equação por um invariante de soma e em seguida a integramos em relação as velocidades de um dado constituinte α do gás. Obtemos assim, a equação de balanço do correspondente invariante de soma. Os termos dessa equação de balanço que provém do termo de colisão da equação de Boltzmann, agora já separados de acordo com os termos contitutivos, e de acordo com o método de resolução adotado, contém integrais óctuplas, as quais recebem a denominação de integrais de colisão. A forma apresentada por essas integrais, oriundas da aplicação do método de Chapmann-Enskog, ou seja, (2.163) e (2.164), é semelhante às integrais de colisão obtidas pelo método combinado, (3.30) à (3.33), (3.39) com (3.40) e (3.43) com (3.43). Como pelo método combinado a obtenção dos coeficientes de transporte é mais direta e simples, iremos nos restringir ao cálculo dessas integrais por este método.

O processo de integração pode ser dividido em duas etapas. Decompondo-se as velocidades peculiares das partículas que estão em trajetória de colisão, em velocidade do centro de massa e em velocidade relativa, podemos proceder a integração sobre a parcela das integrais que independe do potencial de interação entre as partículas. A outra parcela, dependente do potencial de interação, é uma parcela específica para cada tipo de gás, devendo

ser integrada de uma forma agregada única e representada pela integral $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$, definida em (1.22). Como em nosso estudo o gás em questão é ionizado, as partículas envolvidas serão íons, elétrons e partículas neutras (se considerarmos o gás parcialmente ionizado) e portanto deveremos conhecer os potenciais de interação entre cada uma dessas espécies de partículas.

4.2 Integração Preliminar

Desenvolveremos neste ítem a integração sobre a parcela, das integrais de colisão, referente à velocidade do centro de massa. Obteremos dessa forma expessões algébricas em função das integrais $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$.

Efetuaremos os cálculos especificamente para a integral de colisão $A_{\alpha\beta}$ definidas nas equações (3.30) e (3.31). Para as integrais de colisão, $F_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, o procedimento é semelhante e portanto forneceremos apenas a expressão final.

Reescrevendo a equação (3.30),

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}\frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT}\int \xi_\alpha I_{\alpha\beta}(\xi_i^\beta)d\vec{\xi}^\alpha\,, \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{4.1}$$

ou, usando (??),

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}\frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT}\int \xi_\alpha \int\int\int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)}(\xi_i'^\beta - \xi_i^\beta) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}^\beta d\vec{\xi}^\alpha\,, \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta\,. \tag{4.2}$$

A partir da definição de velocidade relativa (1.3), a escrevemos em termos da velocidade peculiar (1.85), através de,

$$g_i^{\beta\alpha} = \xi_i^\beta - \xi_i^\alpha\,, \tag{4.3}$$

assim como a velocidade do centro de massa, dada em termos das velocidades peculiares, resulta em,

$$G_i^{\beta\alpha} = \frac{m_\alpha \xi_i^\alpha + m_\beta \xi_i^\beta}{m_\alpha + m_\beta}\,. \tag{4.4}$$

Com isto, as velocidades peculiares escritas em termos das velocidades relativas e da velocidade do centro de massa, fica expressa por,

$$\xi_i^\alpha = G_i^{\beta\alpha} - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} g_i^{\beta\alpha} , \tag{4.5}$$

e

$$\xi_i^\beta = G_i^{\beta\alpha} + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} g_i^{\beta\alpha} . \tag{4.6}$$

Os elementos de integração na expressão (4.2), também devem ser alterados para as novas velocidades. Utilizando a definição de velocidade relativa é fácil verificar que o módulo do Jacobiano da transformação , é unitário, ou seja,

$$J = \det \left| \frac{\partial(\mathbf{c}_i^\beta, \vec{\xi}_i^\alpha)}{\partial(\vec{\xi}_i^\beta, \vec{\xi}_i^\alpha)} \right| = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}^\beta}{\partial \vec{\xi}^\beta} & \frac{\partial \mathbf{c}^\beta}{\partial \vec{\xi}^\alpha} \\ \frac{\partial \vec{\xi}^\alpha}{\partial \vec{\xi}^\beta} & \frac{\partial \vec{\xi}^\alpha}{\partial \vec{\xi}^\alpha} \end{vmatrix} = 1, \tag{4.7}$$

logo, $|J| = 1$ e portanto,

$$d\mathbf{c}^\beta d\vec{\xi}^\alpha = d\vec{\xi}^\beta d\vec{\xi}^\alpha . \tag{4.8}$$

Do mesmo modo podemos afirmar que,

$$d\vec{\xi}^\alpha d\vec{\xi}^\beta = d\mathbf{g}^{\beta\alpha} d\mathbf{G}^\alpha , \tag{4.9}$$

pois,

$$d\vec{\xi}^\alpha d\vec{\xi}^\beta = |J| d\mathbf{g}^{\beta\alpha} d\mathbf{G}^\alpha , \tag{4.10}$$

e de forma semelhante à equação (4.7),

$$J = \det \left| \frac{\partial(\vec{\xi}_i^\alpha, \vec{\xi}_i^\beta)}{\partial(\mathbf{g}_i^{\beta\alpha}, \mathbf{G}_i^{\beta\alpha})} \right| = -1 \tag{4.11}$$

verificando, $|J| = 1$. Substituindo a função maxwelliana (1.129) na equação (4.2), seguida da substituição das equações (4.5) e (4.6), assim como (4.9) através de (4.8) e considerando ainda como em (1.59) que $G_i'^{\beta\alpha} = G_i^{\beta\alpha}$, obtemos,

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} \frac{m_\alpha m_\beta}{\rho_\beta kT} \frac{(m_\alpha m_\beta)^{1/2} \rho_\beta}{(2\pi kT)^3} \int \left(G_i^{\beta\alpha} - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} g_i^{\beta\alpha} \right) e^{-\frac{m_\alpha + m_\beta}{2kT} G_{\beta\alpha}^2}$$

$$\times e^{-\frac{m_\alpha m_\beta}{2kT(m_\alpha m_\beta)} g_{\beta\alpha}^2} \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} (g_i'^{\beta\alpha} - g_i^{\beta\alpha}) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{g}^{\beta\alpha} d\mathbf{G}'^{\beta\alpha}, \qquad \alpha \neq \beta . \tag{4.12}$$

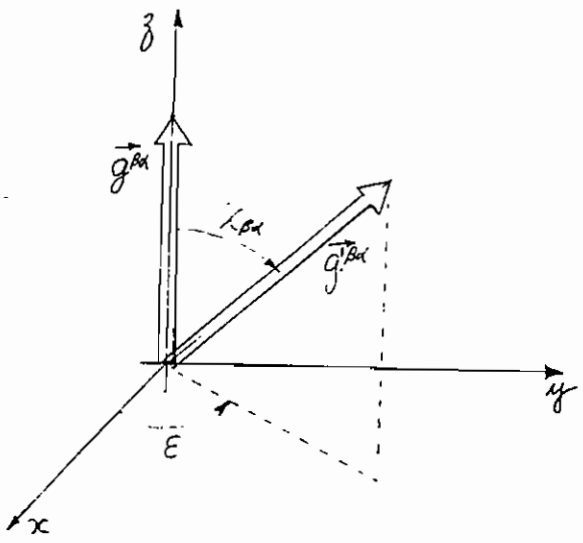


Figura 4.1: Representação das velocidades relativas pré e pós colisionais.

Para procedermos a integração da equação (4.12) em relação ao ângulo azimutal ϵ, necessitamos conhecer a dependência que a velocidade relativa $g_i'^{\beta\alpha}$ possui em relação a variável ϵ. De acordo com a figura (4.1) e adotando a direção positiva do eixo z para o vetor $g_i^{\beta\alpha}$, escrevemos,

$$\mathbf{g}^{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.13}$$

e portanto,

$$\mathbf{g}'^{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}\text{sen}\chi_{\beta\alpha}\cos\epsilon\,\hat{\mathbf{i}} + g_{\beta\alpha}\text{sen}\chi_{\beta\alpha}\text{sen}\epsilon\,\hat{\mathbf{j}} + g_{\beta\alpha}\cos\chi_{\beta\alpha}\hat{\mathbf{k}}. \tag{4.14}$$

Como apenas $g_i'^{\beta\alpha}$ depende do ângulo ϵ, a integração em relação a esta variável já pode ser efetuada, logo,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\mathbf{g}'^{\beta\alpha}d\epsilon &= g_{\beta\alpha}\int_0^{\infty}(\text{sen}\chi_{\beta\alpha}\cos\epsilon\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\chi_{\beta\alpha}\text{sen}\epsilon\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\chi_{\beta\alpha}\hat{\mathbf{k}})d\epsilon \\ &= g_{\beta\alpha}2\pi\cos\chi_{\beta\alpha}\hat{\mathbf{k}} \\ &= 2\pi\cos\chi_{\beta\alpha}\mathbf{g}^{\beta\alpha}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Na integração de $\mathbf{G}_{\beta\alpha}$, verificamos do apêndice A que,

$$g_i^{\beta\alpha} \int G_i^{\beta\alpha} e^{\frac{m_\alpha+m_\beta}{2kT} G_{\beta\alpha}^2} d\mathbf{G}^{\beta\alpha} = 0\,, \tag{4.16}$$

por ser uma integral ímpar no vetor velocidade $G_i^{\beta\alpha}$. Considerando então o integrando restante, calculamos,

$$\int e^{\frac{m_\alpha+m_\beta}{2kT} G_{\beta\alpha}^2} d\mathbf{G}^{\beta\alpha} = \pi^{3/2} \left(\frac{2kT}{m_\alpha + m_\beta} \right)^{3/2} . \tag{4.17}$$

Desenvolvendo o produto $g_i^{\beta\alpha} g_i^{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}^2$ e fazendo a transformação das coordenadas retangulares em esféricas para $g_{\beta\alpha}$, temos, após um remanejamento algébrico simples,

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{16}{3} \frac{\pi^{1/2} \rho_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \int (1 - \cos \chi_{\beta\alpha}) \left(\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta) 2kT} g_{\beta\alpha}^2 \right)^{5/2} e^{-\frac{m_\alpha+m_\beta}{(m_\alpha+m_\beta)2kT} g_{\beta\alpha}^2} b db d g_{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta. \tag{4.18}$$

Reconhecendo a variável adimensional $\gamma_{\alpha\beta}$, de (1.23), na equação (4.18), ou seja,

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{16}{3} \frac{(2\pi kT)^{1/2}}{(m_\alpha m_\beta)^{1/2}} \frac{\rho_\alpha}{(m_\alpha + m_\beta)^{1/2}} \int (1 - \cos \chi_{\beta\alpha}) \gamma_{\alpha\beta}^5 e^{-\gamma_{\alpha\beta}^2} b db d\gamma_{\alpha\beta}\,, \quad \text{se}\,, \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{4.19}$$

ou utilizando a representação da integral $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$ dada por (1.22), obtemos, para $A_{\alpha\beta}$ a expressão,

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{16}{3} \frac{(2\pi kT)^{1/2}}{(m_\alpha m_\beta)^{1/2}} \frac{\rho_\alpha}{(m_\alpha + m_\beta)^{1/2}} \Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)}\,, \qquad \text{se}\,, \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{4.20}$$

assim como para $A_{\alpha\alpha}$ de (3.31), através de um procedimento semelhante, obtemos,

$$A_{\alpha\alpha} = -\frac{16}{3} \frac{(2\pi kT)^{1/2} \rho_\alpha}{m_\alpha^{3/2}} \left[\frac{1}{2^{1/2}} \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} - \sum_{\beta=1}^{\nu} \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^{1/2} \frac{n_\beta}{n_\alpha} \Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)} \right] . \tag{4.21}$$

O procedimento para as integrais representadas por $F_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\alpha}$, $H_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\alpha}$, é o mesmo que para $A_{\alpha\beta}$, pois, todos os produtos com ξ_i^α, ocorrem de maneira semelhante. Assim as equações, (3.32), (3.33), (3.39) e (3.40), após a integração sobre todos os valores de $\mathbf{G}^{\beta\alpha}$ e do ângulo ϵ, podem ser escritas respectivamente por,

$$F_{\alpha\beta} = -\frac{16}{15}\frac{(2\pi kT)^{1/2}\rho_\alpha}{(m_\alpha + m_\beta)^{3/2}}\left(\frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)^{1/2}\left(5\Omega^{(1,1)}_{\beta\alpha} - 2\Omega^{(1,2)}_{\beta\alpha}\right), \qquad \alpha \neq \beta, \tag{4.22}$$

$$F_{\alpha\alpha} = -\frac{16}{15}\frac{(2\pi kT)^{1/2}\rho_\alpha}{m_\alpha^{3/2}}\left[\frac{1}{2^{1/2}}\left(5\Omega^{(1,1)}_{\alpha\alpha} - 2\Omega^{(1,2)}_{\alpha\alpha}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)^{1/2}\frac{n_\beta}{n_\alpha}\left(5\Omega^{(1,1)}_{\beta\alpha} - 2\Omega^{(1,2)}_{\beta\alpha}\right)\right], \tag{4.23}$$

$$H_{\alpha\beta} = -\frac{8}{15}\frac{(2\pi kT)^{1/2}\rho_\alpha}{(m_\alpha + m_\beta)^{5/2}}(m_\alpha m_\beta)^{1/2}\left(55\Omega^{(1,1)}_{\beta\alpha} - 20\Omega^{(1,2)}_{\beta\alpha} + 4\Omega^{(1,3)}_{\beta\alpha} - 8\Omega^{(2,2)}_{\beta\alpha}\right), \quad \alpha \neq \beta, \tag{4.24}$$

$$H_{\alpha\alpha} = -\frac{8}{15}\frac{(2\pi kT)^{1/2}\rho_\alpha}{m_\alpha^{3/2}}\left\{\frac{1}{2^{5/2}}\left(55\Omega^{(1,1)}_{\alpha\alpha} - 20\Omega^{(1,2)}_{\alpha\alpha} + 4\Omega^{(1,3)}_{\alpha\alpha} - 8\Omega^{(2,2)}_{\alpha\alpha}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)^{5/2}\frac{n_\beta}{n_\alpha}\left[5\left(5\frac{m_\beta}{m_\alpha} + 6\frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)\Omega^{(1,1)}_{\beta\alpha} - 20\frac{m_\beta}{m_\alpha}\Omega^{(1,2)}_{\beta\alpha} + 4\frac{m_\beta}{m_\alpha}\Omega^{(1,3)}_{\beta\alpha} + 8\Omega^{(2,2)}_{\beta\alpha}\right]\right\}. \tag{4.25}$$

A integral de colisão correspondente à $L_{\alpha\beta}$ da equação (3.42), definida pelas equações (3.43) e (3.44), possui o produto $\xi^{\alpha}_{<i}\xi^{\alpha}_{j>}$, para o qual devemos considerar (2.30). Na integração em relação ao ângulo ϵ, apenas $g_i^{\prime\beta\alpha}$ possui dependência em relação a este ângulo e desse modo, considerando (4.14), podemos escrever,

$$\int g_i^{\prime\beta\alpha} g_j^{\prime\beta\alpha}\, d\epsilon = \int g^2_{\beta\alpha}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\chi_{\beta\alpha}\cos\epsilon\,\hat{\mathrm{i}} \\ \operatorname{sen}\chi_{\beta\alpha}\operatorname{sen}\epsilon\,\hat{\mathrm{j}} \\ \cos\chi_{\beta\alpha}\hat{\mathrm{k}} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\chi_{\beta\alpha}\cos\epsilon\,\hat{\mathrm{i}} & \operatorname{sen}\chi_{\beta\alpha}\operatorname{sen}\epsilon\,\hat{\mathrm{j}} & \cos\chi_{\beta\alpha}\hat{\mathrm{k}} \end{pmatrix} d\epsilon$$
$$= \pi g^2_{\beta\alpha}(1 - \cos^2\chi_{\beta\alpha})\delta_{ij} + \pi(3\cos^2\chi_{\beta\alpha} - 1)g_i^{\beta\alpha} g_j^{\beta\alpha}\,. \tag{4.26}$$

Prosseguindo, então de forma semelhante ao desenvolvido para a integral de colisão, (3.15), obtemos,

$$L_{\alpha\beta} = -\frac{16}{15}\frac{(2\pi kT)^{1/2}\rho_\alpha}{(m_\alpha + m_\beta)^{3/2}}\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha}\right)^{1/2}\left(10\Omega^{(1,1)}_{\beta\alpha} - 3\Omega^{(2,2)}_{\beta\alpha}\right), \qquad \text{se,} \quad \alpha \neq \beta, \tag{4.27}$$

$$L_{\alpha\alpha} = -\frac{16}{15}\frac{(2\pi kT)^{1/2}\rho_\alpha}{m_\alpha^{3/2}}\left[\frac{1}{2^{3/2}}\left(10\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} - 3\Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)}\right)\right.$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\frac{m_\alpha m_\beta^{1/2}}{(m_\alpha + m_\beta)^{3/2}}\right)\frac{n_\beta}{n_\alpha}\left(10\Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)} + 3\frac{m_\beta}{m_\alpha}\Omega_{\beta\alpha}^{(2,2)}\right)\right] . \tag{4.28}$$

Dessa forma concluimos a primeira etapa de integração. Observamos que as integrais de colisão tornam-se agora função apenas das integrais $\Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)}$, $\Omega_{\beta\alpha}^{(1,2)}$, $\Omega_{\beta\alpha}^{(1,3)}$ e $\Omega_{\beta\alpha}^{(2,2)}$, as quais dependem dos potenciais de colisão entre as partículas. Após o estabelecimento dos correspondentes potenciais de colisão poderemos então, desenvolver essa segunda etapa da integração.

4.3 Potenciais de Interação entre Partículas de um Gás Ionizado

O primeiro passo para o cálculo de $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$ é a determinação do ângulo de espalhamento $\chi_{\beta\alpha}$, de (1.15). Para tanto, devemos conhecer o potencial de colisão entre as partículas em consideração. Como este ângulo deverá ser calculado para cada par diferente de partículas que compõe o gás e considerando que a forma apresentada por (1.15) não é a mais conveniente para a integração, escrevemos essa equação em função de uma variável adimensional x definida por,

$$x = \frac{r_{min}}{r_{\beta\alpha}} \qquad \text{com} \qquad dx = -\frac{x^2}{r_{min}}dr_{\beta\alpha} , \tag{4.29}$$

de modo que o ângulo $\theta_{\beta\alpha}$ de (1.11), pode ser escrito por,

$$\theta_{\beta\alpha} = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left[1 - \frac{2}{\mu_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}^2}\phi\left(\frac{r_{min}}{x}\right) - \frac{b^2}{r_{min}^2}x^2\right]^{1/2}} , \tag{4.30}$$

onde r_{min} é a raiz da equação (1.16) e $\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$ é a massa reduzida.

Os tipos de potenciais de interação que podem existir em um gás, dependem das características das partículas que compõe o mesmo. Em nosso caso, iremos analisar um gás monoatômico que se ioniza com o aumento da temperatura. Nestas condições, poderemos

ter um gás parcialmente ionizado composto pelos seguintes três tipos de partículas: íon, elétron e partícula neutra. Desse modo poderão ocorrer interações entre íon-íon, íon-elétron, íon-partícula neutra, elétron-elétron, elétron-partícula neutra e partícula neutra-partícula neutra.

4.3.1 *O Potencial Coulombiano e o Potencial de Debye*

A força de interação entre partículas carregadas são forças de origem coulombianas, inversamente proporcionais portanto, ao quadrado da distância que as separam. São forças do tipo $\frac{1}{r^2}$ repulsivas para cargas de mesmo sinal e atrativas para as de sinais diferentes. A energia potencial entre partículas carregadas de mesmo sinal é portanto da forma de potencial de centros de repulsão como em (1.24) sendo dado por $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$, enquanto que para partículas de sinais diferentes enquadra-se como potencial de Sutherland (1.25), com a parte atrativa do potencial dado por $\phi(r) \propto -\frac{1}{r}$, para $r > r_o$ e o potencial repulsivo desse potencial, tipo esfera rígida, $\phi(r) = \infty, \quad r \leq r_o$. Desse modo o potencial reflete, de uma forma clássica, a repulsão sofrida pelo elétron térmico ao tentar penetrar na nuvem eletrônica do íon.

Porém, a utilização do potencial do tipo coulombiano nos limites de atuação mostrados acima, acarretará em divergências no cálculo da seção tranversal efetiva (1.21), no processo de passar os limites de integração relativos ao parâmetro de impacto. O que acontece, entretanto, para distâncias suficientemente grandes de uma determinada carga, é uma atenuação mais pronunciada de seu campo elétrico devido a uma polarização do gás envolvente, formando uma espécie de blindagem elétrica, como já observamos no capítulo 1. Portanto, o potencial puramente coulombiano não corresponde ao potencial entre as partículas carregadas de um gás ionizado.

O mecanismo pelo qual o gás ionizado tenta blindar o seu interior de um distúrbio de campo elétrico externo pode ser examinado considerando-se um gás ionizado, que esteja com seu estado de equilíbrio perturbado por um campo elétrico devido a uma partícula carregada externa. Esta partícula poderá ser considerada como uma das partículas carregadas do gás ionizado, isolada para a observação. Supondo que esta partícula teste tenha uma carga positiva $+e$, determinaremos o potencial eletrostático $\phi(r)$ que será estabelecido

próximo à carga teste, devido aos efeitos combinados dessa carga teste e a distribuição de partículas carregadas que a envolvem. Como a carga teste positiva atrai partículas de cargas negativas e repele as positivas, a densidade de número de elétrons $n_E(r)$ e de íons $n_I(r)$ serão ligeiramentes diferentes, próximo da origem, ou seja, da partícula teste. Para grandes distâncias da carga teste, o potencial eletrostático desaparece e a densidade de partículas carregadas torna-se equilibrada para um gás ionizado com o mesmo número de cargas positivas e negativas, de modo que, $n_I = n_{o_I} = n_E = n_{o_E}$. Como este é um problema de estado estacionário sob a ação de um campo elétrico conservativo, é válido,

$$E_i = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial x_i}. \tag{4.31}$$

O potencial desejado pode ser obtido da equação de Maxwell relativa à lei de Gauss,

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\rho_q(r)}{\varepsilon_o}, \tag{4.32}$$

a qual ao ser substituída por (4.31), resulta na equação de Poisson,

$$-\nabla^2 \phi(r) = \frac{\rho_q(r)}{\varepsilon_o}. \tag{4.33}$$

A densidade de carga ρ_q pode ser obtida em termos das densidades de número das partículas que compõe o gás e portanto fazendo $\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}$ na equação (1.70), obtemos,

$$n_\alpha = \int f_{M_\alpha} d\mathbf{c}^\alpha. \tag{4.34}$$

A função distribuição maxwelliana local deve conter a informação da variação do potencial elétrico em torno da carga teste e deste modo, usando a equação (1.129), escrevemos,

$$f_{M_\alpha} = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{kT}\left(\frac{1}{2}m_\alpha \xi_\alpha^2 + e_\alpha \phi(r)\right)}. \tag{4.35}$$

Substituindo a função maxwelliana para o caso (4.35) na equação (4.34), a densidade de

número para os íons e elétrons será,

$$n_E(r) = n_{o_E} e^{+\frac{e\phi(r)}{kT}}, \tag{4.36}$$

$$n_I(r) = n_{o_I} e^{-\frac{e\phi(r)}{kT}}, \tag{4.37}$$

onde consideramos os íons carregados com carga $+1e$ em (4.34), além de uma única temperatura tanto para os íons quanto para os elétrons.

A densidade de carga total $\rho_q(r)$ incluindo a carga teste q_o pode então ser expressa por,

$$\rho_q(r) = e(n_I - n_E) + q_o\delta(r), \tag{4.38}$$

onde $\delta(r)$ é a função delta de Dirac.

Substituindo a densidade de carga (4.38) na equação (4.33), obtemos a equação diferencial para $\phi(r)$,

$$-\nabla^2\phi(r) = \frac{n_{o_I} e}{\varepsilon_o}\left(e^{-\frac{e\phi(r)}{kT}} - e^{+\frac{e\phi(r)}{kT}}\right) + \frac{q_o}{\varepsilon_o}\delta(r). \tag{4.39}$$

Considerando que a energia potencial eletrostática, devido ao potencial perturbador, seja muito menor que a energia térmica média, isto é,

$$e\phi(r) \ll kT, \tag{4.40}$$

podemos usar a aproximação,

$$e^{\pm\frac{e\phi(r)}{kT}} \cong 1 \pm \frac{e\phi(r)}{kT}. \tag{4.41}$$

Substituindo a aproximação (4.41) na equação (4.39), obtemos uma equação diferencial passível de resolução, ou seja,

$$\nabla^2\phi(r) - \frac{2}{\lambda_D^2}\phi(r) = -\frac{q_o}{\varepsilon_o}\delta(r), \tag{4.42}$$

onde definimos o comprimento de Debye por,

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_o kT}{n_{o_I} e^2}\right)^{1/2}. \tag{4.43}$$

Como o potencial eletrostático depende apenas da direção radial, torna-se conveniente escrever a equação (4.42) em um sistema de coordenadas esférico. Assim para $r \neq 0$, temos,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\phi(r)\right) - \frac{2}{\lambda_D^2}\phi(r) = 0\,. \tag{4.44}$$

A solução da equação (4.44) poderá ser obtida de forma mais simples se considerarmos que o potencial $\phi(r)$ aproxima-se do potencial coulombiano para distâncias relativamente pequenas da carga teste. Assim, a solução para $\phi(r)$ deve ser um produto de um potencial coulombiano, por uma função que decai mais rapidamente com o aumento da distância e se aproxima da unidade para distâncias pequenas. Representando essa função por $\zeta(r)$, o potencial pode então ser representado por,

$$\phi(r) = \frac{1}{r}\zeta(r)\,. \tag{4.45}$$

Substituindo o potencial $\phi(r)$ dado pela forma (4.45) na equação (4.44), obtemos a seguinte equação diferencial,

$$\frac{d^2\zeta(r)}{dr^2} = \frac{2}{\lambda_D^2}\zeta(r)\,, \tag{4.46}$$

mais fácil de ser resolvida para $\zeta(r)$, ou seja,

$$\zeta(r) = Ae^{\left(\frac{1}{2^{1/2}\lambda_D}\right)r} + Be^{-\left(\frac{1}{2^{1/2}\lambda_D}\right)r}\,. \tag{4.47}$$

Como essa solução deve tender a zero para $r \to \infty$, o coeficiente A da solução (4.47) deve ser nulo e portanto, fazemos $A = 0$. A constante B é obtida da condição para a qual a solução (4.45) tende ao potencial coulombiano, ou seja, no sistema internacional,

$$\phi_{coulomb.}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e_1e_2}{r}\,, \tag{4.48}$$

quando r tende a valores pequenos, de modo que no limite com $r \to 0$, temos,

$$B = \frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_o}\,. \tag{4.49}$$

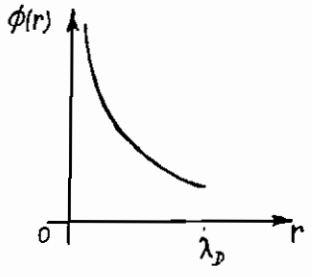
A solução para o potencial $\phi(r)$ pode então ser obtida, logo escrevemos,

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e_1 e_2}{r} e^{-\left(\frac{1}{2^{1/2}\lambda_D}\right)r} . \tag{4.50}$$

Este resultado para o potencial é conhecido como potencial de Debye. Observamos que $\phi(r)$ torna-se muito menor que o potencial de Coulomb à medida que r excede o comprimento de Debye λ_D. Desse modo podemos afirmar, de uma forma mais simples, que uma partícula carregada pertencente a um gás ionizado, interage efetivamente apenas com partículas situadas a distâncias menores que um comprimento de Debye, a partir da qual a sua influência pode ser negligenciada[1].

O emprego do potencial de Debye (4.50) no cálculo do ângulo de espalhamento $\chi_{\beta\alpha}$ torna a integração algébrica muito difícil (se não impossível), o que implica na necessidade de utilização de cálculos numéricos. Uma alternativa simples [4] e que leva a resultados muito bons, é utilizar, em substituição ao potencial de Debye, o potencial coulombiano com o denominado "cut off". Este consiste de um potencial coulombiano para distâncias até a ordem do comprimento de Debye, tornando-se então nulo, para distâncias maiores, como mostrado na figura (4.2). Os resultados algébricos calculados com o potencial assim formado, concordam com os valores numéricos obtidos com a utilização do potencial de Debye [5].

Dessa forma utilizaremos o potencial coulombiano com "cut off" para representar o potencial de interação entre partículas carregadas de mesmo sinal, ou seja, na interação entre íons-íons e elétrons-elétrons, com o potencial sendo expresso por,



$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r}, \qquad & r \leq \lambda_D , \\ \phi(r) &= 0 , \qquad & r > \lambda_D , \end{aligned} \tag{4.51}$$

[1] É comum encontramos na literatura, uma derivação do potencial de Debye, na qual considera-se que a densidade de número de íons não é alterada na proximidade de outras partículas carregadas, variando apenas a densidade do número de elétrons em torno de dada carga teste. Neste caso o fator $2^{1/2}$, torna-se unitário e a expressão para o potecial de Debye, torna-se,

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e_1 e_2}{r} e^{-\left(\frac{1}{\lambda_D}\right)r} .$$

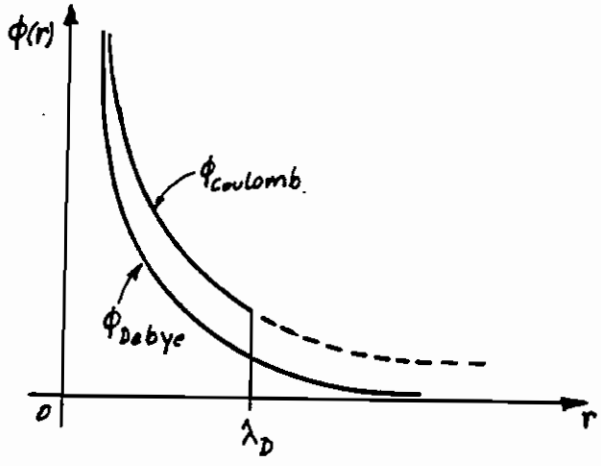
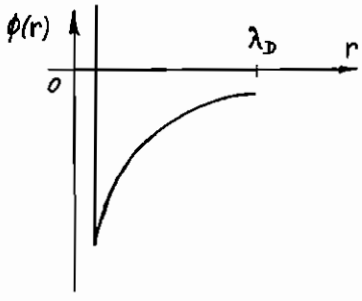


Figura 4.2: Comparação entre os potenciais de Debye e coulombiano com "cutt off".

e para a interação entre partículas carregadas de sinais diferentes, como para a interação entre íons-elétrons, utilizaremos o potencial,

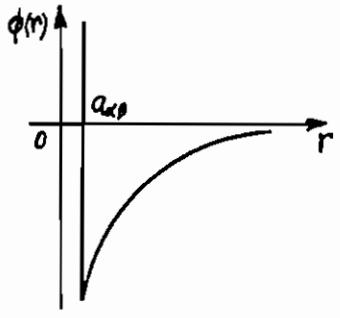


$$\begin{aligned} \phi(r) &= \infty\,, & r &< a_{\alpha\beta} \\ \phi(r) &= -\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\tfrac{e^2}{r}\,, & a_{\alpha\beta} &\leq r \leq \lambda_D\,, \\ \phi(r) &= 0\,, & r &> \lambda_D\,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

4.3.2 *O Potencial de Indução*

A interação entre partículas carregadas e partículas neutras que ocorre em um gás parcialmente ionizado, resulta de um potencial de indução [4], [22], [6] e [1]. Quando uma partícula carregada aproxima-se de uma partícula neutra, a interação entre ambas é devido essencialmente ao efeito de dipolo induzido. O campo elétrico do elétron ou do íon, induz um dipolo elétrico na partícula neutra. Esse dipolo interagindo com o campo elétrico, da partícula carregada, cria um potencial de interação atrativo do tipo $\phi(r) \propto -\frac{1}{r^4}$, inversamente proporcional portanto à quarta potência da distância que as separam. À distâncias muito pequenas porém, a superposição das nuvens eletrônicas fará com que ocorra uma

repulsão quântica entre as partículas, esta variando rapidamente em função da distância. Desse modo um bom modelo clássico para expressar esse tipo de interação, é o potencial de Sutherland (1.25) com $\phi(r) = \infty \quad r \leq a_{\alpha\beta}$ para distâncias menores que o raio médio em relação ao centro das partículas e portanto,



$$\begin{aligned} \phi(r) &\propto -\frac{1}{r^4} \qquad r > a_{\alpha\beta} \\ \phi(r) &= \infty \qquad r \leq a_{\alpha\beta}\,. \end{aligned} \tag{4.53}$$

A constante de proporcionalidade do potencial de indução depende da polarizabilidade da partícula neutra α_P e da carga da partícula carregada, de modo que o potencial de indução para distâncias maiores que $a_{\alpha\beta}$ pode ser dado por,

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\alpha_P\frac{e^2}{r^4}\,, \tag{4.54}$$

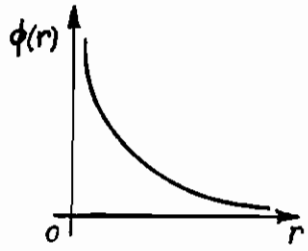
se α_P for expresso em unidades de [m^3], ou na forma,

$$\phi(r) = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)^2 \alpha'_P\frac{e^2}{r^4}\,, \tag{4.55}$$

se a polarizabilidade α'_P for expresso em unidades de [C m^{2}V^{-1}]. Para o gás Hélio, por exemplo, a sua polarizabilidade vale $\alpha_{P_{He}} = 0,205 \times 10^{-30}$m^3 ou $\alpha'_{P_{He}} = 0,227 \times 10^{-40}$ Cm^2/V.

4.3.3 *O Potencial de Repulsão*

A interação entre as partículas neutras para um gás com temperatura da ordem de $1,0 \times 10^3$K como é o caso de um gás parcialmente ionizado por temperatura, do qual trata o nosso estudo, é melhor representado pelo potencial tipo repulsivo (1.24), inversamente proporcional à decima segunda potência da distância entre as partículas, [1], [6] e [4], ou seja,



$$\phi(r) \propto \frac{1}{r^{12}} . \tag{4.56}$$

Para temperaturas relativamente altas, a parte atrativa do potencial, que normalmente existe em interações desse tipo como mostra os potenciais de Lennard-Jones [22], pode ser desprezada em presença da predominate parte repulsiva.

A equação para o potencial repulsivo (4.56) é estabelecida através de um coeficiente de proporcionalidade, α_R, que depende das partículas em interação, e portanto escrevemos,

$$\phi(r) = \alpha_R \frac{1}{r^{12}} . \tag{4.57}$$

Os valores do termo de proporcionalidade α_R podem ser determinados a partir de dados experimentais, como por exemplo, do coeficiente de viscosidade do gás formado pelas partículas em questão [22]. Para a interação entre dois átomos hélio, o coeficiente α_R assume o valor,

$$\alpha_{R_{He-He}} = 3,417 \times 10^{-137} \mathrm{J.m}^{12} . \tag{4.58}$$

4.4 Integração de $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$

De acordo com a representação da integral $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$ dada por (1.22), os índices superiores l e r representam respectivamente a ordem da seção tranversal efetiva e a ordem associada à variável de integração $\gamma_{\alpha\beta}$. As letras gregas α e β, representam as partículas em interação. Para um gás parcialmente ionizado, essas letras, irão representar especificamente os íons, elétrons e as partículas neutras, os quais iremos identificar respectivamente por, I, E e N. A partir das equações (4.20), (4.22), (4.24) e (4.27) verificamos que as letras, r e l podem assumir os seguintes valores: para r os valores 1, 2 e para l os valores 1, 2 e 3 sendo que se r assumir o valor 2, l assume apenas o valor 2.

4.4.1 *Cálculo das Integrais* $\Omega_{II}^{(l,r)}$ *e* $\Omega_{EE}^{(l,r)}$

Como o procedimento é idêntico tanto para as interações íon-íon quanto para elétron-elétron, os cálculos serão desenvolvidos apenas para a interação íon-íon. Como podemos observar da equação (1.22), deveremos inicialmente conhecer o ângulo de espalhamento $\chi_{\beta\alpha}$ definido em (1.15), ou através do ângulo $\theta_{\beta\alpha}$ dado por (4.30), além do potencial de interação entre íons-íons (4.51). Escrevendo esse potencial em termos da variável adimensional x como em (4.29),

$$\phi\left(\frac{r_{min}}{x}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r_{min}}x\,, \tag{4.59}$$

e substituindo na equação para $\theta_{\beta\alpha}$ de (4.30), temos,

$$\theta_{II} = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left[1 - \frac{2}{\mu_{II}g_{II}^2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{min}}x - \frac{b^2}{r_{min}^2}x^2\right]^{1/2}}\,. \tag{4.60}$$

Utilizando a definição (1.23), para íons, ou seja,

$$\gamma_{II}^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_{II}g_{II}^2}{kT}\,, \tag{4.61}$$

e definindo uma nova variável, função da temperatura, com dimensão de comprimento através de,

$$d_{T_{(1)}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o kT}\,, \tag{4.62}$$

escrevemos,

$$\theta_{II} = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1 - \frac{1}{\gamma_{II}^2}\frac{d_{T_{(1)}}}{r_{min}}x - \frac{b^2}{r_{min}^2}x^2\right)^{1/2}}\,. \tag{4.63}$$

A integração da equação (4.63) é simples, resultando no ângulo dado por,

$$\theta_{II} = -\text{arcsen}\frac{1}{(1+4\gamma_{II}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}} + \text{arcsen}\frac{1+2\gamma_{II}^2 b^2/(d_{T_{(1)}}r_{min})}{(1+4\gamma_{II}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}}\,. \tag{4.64}$$

Devemos determinar no entanto a expressão para r_{min}, uma das raízes (que satisfaz as condições físicas) da equação (1.16) para o potencial (4.51). Considerando as definições (4.61) e (4.62), escrevemos esta equação como,

$$r^2 - \frac{d_{T_{(1)}}}{\gamma_{II}^2} r - b^2 = 0\,, \tag{4.65}$$

cuja solução de menor distância na trajetória, é dada pela expressão,

$$r_{min} = \frac{d_{T_{(1)}}}{2\gamma_{II}^2} + \left[\left(\frac{d_{T_{(1)}}^2}{2\gamma_{II}^2}\right) + b^2\right]^{1/2}. \tag{4.66}$$

Substituindo a expressão (4.66) na equação (4.64), obtemos,

$$\theta_{II}(\gamma_{II}) = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\frac{1}{(1 + 4\gamma_{II}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}}\,. \tag{4.67}$$

ou, de (1.11) podemos escrever,

$$\chi_{II}(\gamma_{II}) = \arccos\left(\frac{4\gamma_{II}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2 - 1}{4\gamma_{II}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2 + 1}\right). \tag{4.68}$$

O passo seguinte visando a determinação da integral $\Omega_{II}^{(l,r)}$, é obter a expressão para a seção transversal efetiva. Para $l = 1$ na equação (1.21) e considerando os limites de ação do potencial (4.51), escrevemos,

$$Q_{II}^{(1)}(\gamma_{II}) = \int_0^\infty (1 - \cos\chi_{II(\gamma_{II})})\, bdb = \int_0^{\lambda_D} (1 - \cos\chi_{II(\gamma_{II})})\, bdb\,. \tag{4.69}$$

Substituindo o ângulo de espalhamento χ_{II} de (4.68) na equação (4.69), obtemos após simplificações,

$$Q_{II}^{(1)}(\gamma_{II}) = \int_0^{\lambda_D} \frac{2}{4\gamma_{II}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2 + 1} bdb\,, \tag{4.70}$$

e ao procedermos a integração,

$$Q_{II}^{(1)}(\gamma_{II}) = \frac{d_{T_{(1)}}^2}{4\gamma_{II}^4} \ln\left(1 + 4\gamma_{II}^4 \frac{\lambda_D^2}{d_{T_{(1)}}^2}\right). \tag{4.71}$$

Fazendo agora $l = 2$ na expressão para a seção transversal efetiva, (1.21) temos, do mesmo modo que em (4.69),

$$Q_{II}^{(2)}(\gamma_{II}) = \int_0^{\lambda_D} (1 - \cos^2 \chi_{II(\gamma_{II})})\, bdb\,, \tag{4.72}$$

a qual, após a substituirmos χ_{II} por (4.68) e integrarmos no parâmetro de impacto, obtemos,

$$Q_{II}^{(2)}(\gamma_{II}) = 2Q_{II}^{(1)}(\gamma_{II}) - \frac{\lambda_D^2}{1 + 4\gamma_{II}^4 \lambda_D^2 / d_{T_{(1)}}^2}\,. \tag{4.73}$$

Deste modo, para a interação íon-íon estamos em condições de calcular a integral $\Omega_{II}^{(l,r)}$. Fazendo $l = 1$ na equação (1.22), temos,

$$\Omega_{II}^{(1,r)} = \int_0^{\infty} e^{-\gamma_{II}^2} \gamma_{II}^{2r+3} Q_{II}^{(1)}(\gamma_{II}) d\gamma_{II}\,, \tag{4.74}$$

ou substituindo $Q_{II}^{(1)}$ de (4.71), escrevemos,

$$\Omega_{II}^{(1,r)} = \frac{d_{T_{(1)}}^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_{II}^2} \gamma_{II}^{2r-1} \ln\left(1 + 4\gamma_{II}^4 \frac{\lambda_D^2}{d_{T_{(1)}}^2}\right) d\gamma_{II}\,. \tag{4.75}$$

Substituindo na equação (1.22) l por 2 e por conseguinte $Q_{II}^{(2)}$ expressa por (4.73), podemos escrever após simplificações,

$$\Omega_{II}^{(2,r)} = 2\Omega_{II}^{(1,r)} - 2\lambda_D^2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma_{II}^2} \gamma_{II}^{2r+3} \left(\frac{1}{1 + 4\gamma_{II}^4 \lambda_D^2 d_{T_{(1)}}^2}\right) d\gamma_{II}\,. \tag{4.76}$$

A integração algébrica exata das equações (4.75) e (4.76), não é possível. A forma mais conveniente e precisa, nesse caso, é obter soluções numéricas para essas integrais. Entretanto devemos observar que a relação $\lambda_D^2 / d_{T_{(1)}}^2$ é função da temperatura e da densidade do número de partículas ionizadas desse constituinte do gás. Uma vez que das definições (4.43) e (4.62), encontramos,

$$\frac{\lambda_D^2}{d_{T_{(1)}}^2} = \frac{(4\pi)^2 (\varepsilon_o k)^3 T^3}{e^6 n_I}\,, \tag{4.77}$$

a integração numérica portanto, deverá ser função dessas variáveis.

O procedimento para a determinação das integrais $\Omega_{EE}^{(l,r)}$ é exatamente idêntico ao realizado para as integrais $\Omega_{II}^{(l,r)}$. Mesmo sendo as massas das partículas envolvidas, diferentes, os resultados da integração são idênticos. Desse modo podemos escrever,

$$\Omega_{II}^{(l,r)} = \Omega_{EE}^{(l,r)} . \tag{4.78}$$

4.4.2 *Cálculo das Integrais* $\Omega_{IE}^{(l,r)}$

A partir do potencial (4.52), podemos escrever para a sua parte atrativa,

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r} , \qquad r \leq \lambda_D , \tag{4.79}$$

ou para a substituição na equação (4.30),

$$\phi\left(\frac{r_{min}}{x}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r_{min}}x . \tag{4.80}$$

Portanto, considerando as equações (4.30), (4.61) e (4.62), podemos escrever,

$$\theta_{IE} = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{\gamma_{IE}^2}\frac{d_{T(1)}}{r_{min}}x - \frac{b^2}{r_{min}^2}x^2\right)^{1/2}} , \tag{4.81}$$

ou após a sua integração,

$$\theta_{IE} = \text{arcsen}\frac{1}{(1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}} - \text{arcsen}\frac{1 - 2\gamma_{IE}^2 b^2/(d_{T_{(1)}} r_{min})}{(1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}} . \tag{4.82}$$

Como sabemos, r_{min} representa a distância de maior aproximação entre as partículas em consideração, e portanto o ponto na qual a energia potencial efetiva assume o mesmo valor que a energia total das partículas. No caso, a equação (4.82) é válido para r_{min} assumindo os valores entre $a_{IE} \leq r_{min} \leq \lambda_D$, onde $a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\alpha + a_\beta)$ é o diâmetro médio das partículas. Obtemos então, a partir de (1.16), com (4.79), a expressão,

$$\phi(r_{min}) = \frac{1}{2}\mu_{IE} g_{IE}^2 \left(1 - \frac{b^2}{r_{min}^2}\right) , \tag{4.83}$$

ou utilizando (1.23) e (4.62)

$$-\frac{d_{T_{(1)}}}{r_{min}} = \gamma_{IE}^2 \left(1 - \frac{b^2}{r_{min}^2}\right) . \tag{4.84}$$

Assim a raiz para r_{min} é expressa por,

$$r_{min} = -\frac{d_{T_{(1)}}}{2\gamma_{IE}^2} + \left(\frac{d_{T_{(1)}}^2}{4\gamma_{IE}^4} + b^2\right)^{1/2} . \tag{4.85}$$

Substituindo a solução (4.85) na equação (4.82), obtemos,

$$\theta_{IE} = \frac{\pi}{2} + \text{arcsen}\frac{1}{(1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}} , \tag{4.86}$$

e o ângulo de espalhamento, definido em (1.11) resultando em,

$$\chi_{IE} = -2\text{arcsen}\frac{1}{(1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^{1/2}} , \tag{4.87}$$

de modo que ao extrairmos o cosseno, obtemos,

$$\cos\chi_{IE} = 1 - \frac{2}{1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2} . \tag{4.88}$$

O parâmetro mínimo de impacto b_o, para o qual χ_{IE} de (4.87), ainda seja válido, pode ser determinado fazendo $r_{min} = a_{IE}$ na equação da energia (4.84) e portanto,

$$b_o = a_{IE}\left(1 + \frac{d_{T_{(1)}}}{\gamma_{IE}^2 a_{IE}}\right)^{1/2} . \tag{4.89}$$

Desse modo, os limites para o parâmetro de impacto, dentro do qual o ângulo de espalhamento expresso por (4.87), seja válido é $b_o \leq b \leq \lambda_D$. Se o parâmetro de impacto for menor que b_o, as partículas em interação, entrarão em contacto, (suas nuvens eletrônicas, irão se superpor) e sofrerão uma repulsão tipo potencial de esfera rígida. Neste caso o ângulo de espalhamento deverá considerar o acréscimo do desvio devido ao potencial infinito para $r \leq a_{IE}$, de acordo com (4.52). Para parâmetros de impacto que resultem $b < b_o$, o ângulo

de espalhamento envolvendo o potencial infinito, pode ser obtido fazendo $r_{min} = a_{IE}$ na equação (4.82), simulando dessa maneira o potencial desejado. Escrevemos então a equação (4.82) por,

$$\theta^c_{IE} = \text{arcsen}\frac{1}{(1+4\gamma^4_{IE}b^2/d^2_{T_{(1)}})^{1/2}} - \text{arcsen}\frac{1-2\gamma^2_{IE}b^2/(d_{T_{(1)}}a_{IE})}{(1+4\gamma^4_{IE}b^2/d^2_{T_{(1)}})^{1/2}}\,. \tag{4.90}$$

Considerando agora, de [23], a relação trigonométrica,

$$\text{arcsen}x - \text{arcsen}y = \arccos\left[(1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2} + xy\right] \qquad x > y\,, \tag{4.91}$$

escrevemos a equação (4.90), por,

$$\theta^c_{IE} = \arccos S_{IE}(b, \gamma_{IE})\,, \tag{4.92}$$

onde,

$$S_{IE}(b,\gamma_{IE}) = \frac{1-2\gamma^2_{IE}b^2/(d_{T_{(1)}}a_{IE}) + 4\gamma^4_{IE}(b^2/d^2_{T_{(1)}})[1+d_{T_{(1)}}/(\gamma^2_{IE}a_{IE}) - b^2/a^2_{IE}]^{1/2}}{1+4\gamma^4_{IE}(b^2/d^2_{T_{(1)}})}\,, \tag{4.93}$$

ou, em uma forma mais compacta

$$S_{IE}(x,\gamma_{IE}) = \frac{1-q(b_o/a_{IE})x^2[1-q(1-x^2)^{1/2}]}{1+q^2x^2}\,, \tag{4.94}$$

onde chamamos de,

$$q = 2\gamma^2_{IE}\frac{b_o}{d_{T_{(1)}}}\,, \tag{4.95}$$

e

$$x = \frac{b}{b_o}\,. \tag{4.96}$$

A partir da equação (4.92) e da relação (1.11), obtemos o ângulo de espalhamento para $b < b_o$, ou seja,

$$\chi^c_{IE} = \pi - 2\arccos S_{IE}\,, \tag{4.97}$$

ou,

$$\cos\chi^c_{IE} = 1 - 2S^2_{IE}\,. \tag{4.98}$$

A seção transvesal efetiva de ordem l de (1.21), pode agora ser determinada. Utilizando a equação (4.98) para $b < b_o$ e a equação (4.87) para $b_o \leq b \leq \lambda_D$, escrevemos,

$$Q_{IE}^{(l)} = \int_0^{b_o} \left[1 - (1 - 2S_{IE}^2(b, \gamma_{IE}))^{(l)}\right] bdb + \int_{b_o}^{\lambda_D} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{1 + 4\gamma_{IE}^4(b^2/d_{T_{(1)}}^2)}\right)\right] bdb\,, \tag{4.99}$$

ou com l assumindo os valores 1 e 2, temos,

$$Q_{IE}^{(1)} = 2\int_0^{b_o} S_{IE}^2(b, \gamma_{IE}) bdb + 2\int_{b_o}^{\lambda_D} \frac{1}{1 + 4\gamma_{IE}^4(b^2/d_{T_{(1)}}^2)} bdb\,, \tag{4.100}$$

e

$$Q_{IE}^{(2)} = 4\int_0^{b_o} \left(S_{IE}^2(b, \gamma_{IE}) - S_{IE}^4(b, \gamma_{IE})\right) bdb$$

$$+4\int_{b_o}^{\lambda_D} \left(\frac{1}{1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2} - \frac{1}{(1 + 4\gamma_{IE}^4 b^2/d_{T_{(1)}}^2)^2}\right) bdb\,. \tag{4.101}$$

Embora, a primeira integral do lado direito das equações (4.100) e (4.101), possa ser resolvida algebricamente através de uma sequência de integrações por partes, a tamanho das expressões da solução de cada uma delas, as tornam impraticáveis. Muito embora a contribuição dessas integrais seja pequena em comparação com as segundas integrais (em virtude do pequeno valor de b_o), as quais podem ser desprezadas em uma primeira aproximação, estas podem se tornar de interesse em uma teoria que leve em consideração o efeito da recombinação das patículas ionizadas do gás. De qualquer modo, iremos deixar a integração indicada e quando procedermos a integração numérica, que se fará necessária na integração para γ_{IE}, o faremos também para essas integrais. Chamando então de,

$$Q_{IE}^{(1),c} = 2\int_0^{b_o} S_{IE}^2(b, \gamma_{IE}) bdb = 2b_o^2 \int_0^1 S_{IE}^2(x, \gamma_{IE}) xdx\,, \tag{4.102}$$

e

$$Q_{IE}^{(2),c} = 4\int_0^{b_o} S_{IE}^4(b, \gamma_{IE}) bdb = 2b_o^2 \int_0^1 S_{IE}^4(x, \gamma_{IE}) xdx\,, \tag{4.103}$$

sendo que nas segundas identidades de (4.102) e (4.103), devemos utilizar a expressão (4.94).

Procedendo a integração das segundas integrais do lado direito das equações (4.100) e (4.101), encontramos.

$$Q_{IE}^{(1)} = Q_{IE}^{(1),c} + \frac{d_{T_{(1)}}^2}{4\gamma_{IE}^4} \ln \frac{1 + 4\gamma_{IE}^4 \lambda_D^2 / d_{T_{(1)}}^2}{(1 + 2\gamma_{IE}^2 a_{IE}/d_{T_{(1)}})^2}, \tag{4.104}$$

e

$$Q_{IE}^{(2)} = 2Q_{IE}^{(1)} - Q_{IE}^{(2),c} + \frac{d_{T_{(1)}}^2}{2\gamma_{IE}^4} \left(\frac{1}{1 + 4\gamma_{IE}^4 \lambda_D^2 / d_{T_{(1)}}^2} - \frac{1}{(1 + 2\gamma_{IE}^2 a_{IE}/d_{T_{(1)}})^2} \right). \tag{4.105}$$

Para o cálculo das integrais $\Omega_{IE}^{(l,r)}$, propriamente dita, substituimos as equações, (para $l = 1$) de (4.104) com (4.102) e (para $l = 2$) de (4.105) com (4.103) na equação (1.22) e considerando (4.89), obtemos,

$$\Omega_{IE}^{(1,r)} = \int_0^\infty e^{-\gamma_{IE}^2} \gamma_{IE}^{2r+3} \left[2a_{IE}^2 \left(1 + \frac{d_{T_{(1)}}}{\gamma_{IE}^2 a_{IE}} \right) \int_0^1 S_{IE}^2(x, \gamma_{IE}) x dx \right.$$
$$\left. + \frac{d_{T_{(1)}}^2}{4\gamma_{IE}^4} \ln \frac{1 + 4\gamma_{IE}^4 \lambda_D^2 / d_{T_{(1)}}^2}{(1 + 2\gamma_{IE}^2 a_{IE}/d_{T_{(1)}})^2} \right] d\gamma_{IE}, \tag{4.106}$$

e

$$\Omega_{IE}^{(2,r)} = 2\Omega_{IE}^{(1,r)} + \int_0^\infty e^{-\gamma_{IE}^2} \gamma_{IE}^{2r+3} \left[-4a_{IE}^2 \left(1 + \frac{d_{T_{(1)}}}{\gamma_{IE}^2 a_{IE}} \right) \int_0^1 S_{IE}^4(x, \gamma_{IE}) x dx \right.$$
$$\left. + \frac{d_{T_{(1)}}^2}{2\gamma_{IE}^4} \left(\frac{1}{1 + 4\gamma_{IE}^4 \lambda_D^2 / d_{T_{(1)}}^2} - \frac{1}{(1 + 2\gamma_{IE}^2 a_{IE}/d_{T_{(1)}})^2} \right) \right] d\gamma_{IE}. \tag{4.107}$$

4.4.3 *Cálculo das Integrais $\Omega_{IN}^{(l,r)}$ e $\Omega_{EN}^{(l,r)}$*

A interação entre as partículas carregadas e neutras regida pelo potencial de indução (4.54), requer cuidados especiais na determinação das integrais que aparecem para o ângulo de espalhamento e para a seção transversal efetiva de colisão. O ângulo θ_{IN} pode ser determinado a partir da equação (4.30), onde substituimos o potencial de indução na forma requerida, ou seja,

$$\phi\left(\frac{r_{min}}{x}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\alpha_P\frac{e^2}{r_{min}^4}x^4\,, \qquad \alpha_P[\mathrm{m}^3]\,. \tag{4.108}$$

Definindo,

$$d_{T_{(2)}} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\alpha_P\frac{e^2}{kT}\right)^{1/4}\,, \tag{4.109}$$

escrevemos então,

$$\theta_{IN} = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\frac{1}{\gamma_{IN}^2}\frac{d_{T_{(2)}}^4}{r_{min}^4}x^4 - \frac{b^2}{r_{min}^2}x^2\right)^{1/2}}\,, \tag{4.110}$$

com γ_{IN} sendo dado por (1.23).

A integral definidora do ângulo θ_{IN} na equação (4.110), não pode ser calculada em sua forma geral. Existem situações nas quais o denominador do integrando torna-se complexo e portanto, devem ser desconsiderados sob o ponto de vista físico. Desse modo essa integral deve ser analisada nas regiões de interesse físico, tornando-se assim (em cada região) passível de integração.

A expessão para r_{min}, é obtida da solução da equação,

$$1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{\gamma_{IN}^2}\frac{d_{T_{(2)}}^4}{r^4} = 0\,, \tag{4.111}$$

resultante da equação (1.16), na qual substituimos o potencial de indução (4.54) e a definição (4.109). Assim r_{min} é a raiz de maior valor[2] da equação (4.111), ou seja,

$$r_{min}^2 = \frac{b^2}{2}\left[1+\left(1-\frac{4d_{T_{(2)}}^4}{\gamma_{IN}^2 b^4}\right)^{1/2}\right]\,. \tag{4.112}$$

Do ponto de vista matemático, a solução da equação (4.111), representa (como já observado no capítulo 1), a intersecção da curva de energia potencial efetiva[3] (no caso uma curva com um ponto de máximo), com a reta que representa a energia total da partícula. A solução (4.112) implica em uma relação entre, o parâmetro de impacto b e um termo envolvendo uma distância característica e a energia total $d_{T_{(2)}}^4/\gamma_{IN}^2$. Esta relação pode resultar

[2]Solução fisicamente aceitavel considerando ser, o potencial de indução , atrativo

[3]Energia potencial de interação mais a energia potencial centrípeta.

em um valor complexo para r_{min}, ou seja, em situações na qual a curva representativa da energia potencial efetiva não atinge em qualquer ponto a reta da energia total da partícula. Fisicamente falando, o potencial atrativo supera o potencial centrípeto, fazendo com que as partículas entrem em choque, ou seja, o potencial entre as partículas torna-se infinito para $r < a_{IN}$ como na equação (4.53). Pode também ocorrer que r_{min} de (4.112) resulte em um valor menor que a_{IN}, ou seja em termos gráficos, a curva da energia potencial efetiva, cruza a reta da energia total, em uma distância menor que o raio médio das partículas, fazendo, desse modo, com que as partículas também entrem em choque, quando r for igual a a_{IN}. O que determinará cada situação de interação, é portanto a relação entre o parâmetro de impacto e a energia total da partícula, esta última relacionada à γ_{IN}. A situação na qual existe apenas interação atrativa, é obtida a partir de r_{min} coincidindo com a_{IN}, porém na condição em que, as raízes sejam reais e iguais, ou seja, o ponto de máximo da curva da energia potencial efetiva coincide com um ponto da reta da energia total da partícula na posição $r = a_{IN}$. À partir de um parâmetro de impacto que satisfaça esta condição, os valores para r_{min} fornecidos por (4.112) serão reais e maiores que a_{IN}. Para que as raízes sejam reais e iguais, a equação para r_{min} nos fornece,

$$b^4 = \frac{4d_{T(2)}^4}{\gamma_{IN}^2} = b_L^4 \,, \tag{4.113}$$

onde chamamos de b_L ao parâmetro de impacto limite entre raízes reais e complexas. Nestas condições temos,

$$r_{min} = \frac{1}{2^{1/2}} b = \frac{d_{T(2)}}{\gamma_{IN}^{1/2}} \,. \tag{4.114}$$

Quando o valor de r_{min}, na equação (4.114), coincide com a_{IN}, obtemos uma condição para a γ_{IN}, ou seja,

$$a_{IN} = \frac{d_{T(2)}}{\gamma_{IN}^{1/2}} \,, \qquad \text{ou,} \qquad \gamma_{IN} = \gamma_R = \left(\frac{d_{T(2)}}{a_{IN}}\right)^2 \,, \tag{4.115}$$

onde γ_R representa um valor de referência para o parâmetro adimensional relacionado à energia da partícula γ_{IN}.

Agora, podemos obter as expressões dos parâmetros de impactos limites, dados em termos dos valores das energias das partículas. Com a condição de que apenas o potencial de indução precise ser considerado, vamos supor inicialmente que as energias sejam menores que as fornecidas por γ_R. Portanto, os parâmetros de impacto limites mínimos os quais representaremos por $b_{L_<}$, são obtidos a partir da equação (4.113), ou seja,

$$b_{L_<} = 2^{1/2}\frac{d_{T_{(2)}}}{\gamma_{IN}^{1/2}}, \qquad \text{se,} \qquad \gamma_{IN} \leq \gamma_R, \tag{4.116}$$

em relação ao qual b deve ser maior. Para energias das partículas que correspondam a valores de γ_{IN} maiores que as fornecidas para γ_R, o parâmetro de impacto limite mínimo, ou seja, o qual forneça um r_{min} igual a a_{IN} é obtido da equação (4.112) quando fazemos $r_{min} = a_{IN}$. Considerando ainda, desse modo, a representação para o caso $b_L = b_{L_>}$, podemos escrever,

$$b_{L_>} = a_{IN}\left(1 + \frac{d_{T_{(2)}}}{\gamma_{IN}^{1/2} a_{IN}}\right)^{1/2}, \qquad \text{se,} \qquad \gamma_{IN} > \gamma_R. \tag{4.117}$$

Estabelecemos assim as situações nas quais as partículas em suas trajetórias estarão apenas sob a influência do potencial indutivo. Portanto, para parâmetros de impacto $b > b_L$ com quaisquer valores de γ_{IN}, o ângulo θ_{IN} dado por (4.110), pode ser calculado. Como nessas situações é válida a equação (4.111), podemos escrever o ângulo, que chamaremos de θ_{IN}^a, da equação (4.110), por,

$$\theta_{IN}^a = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left[1 + \frac{1}{\gamma_{IN}^2}\frac{d_{T_{(2)}}^4}{r_{min}^4}x^4 - \left(1 + \frac{1}{\gamma_{IN}^2}\frac{d_{T_{(2)}}^4}{r_{min}^4}x^2\right)\right]^{1/2}}, \qquad b > b_L, \tag{4.118}$$

ou,

$$\theta_{IN}^a = \frac{b}{r_{min}}\int_0^1 \frac{dx}{\left[(1-x^2)\left(1 - \frac{1}{\gamma_{IN}^2}\frac{d_{T_{(2)}}^4}{r_{min}^4}x^4\right)\right]^{1/2}}, \qquad b > b_L, \tag{4.119}$$

com r_{min} dado por (4.112). Observando que,

$$\frac{1}{\gamma_{IN}^2}\frac{d_{T_{(2)}}^4}{r_{min}^4} < 1, \qquad \text{se,} \qquad b > b_L, \tag{4.120}$$

a integral na equação (4.119) é identificada como uma integral completa elíptica de primeira classe. Desse modo, após a integração , considerando [23], temos,

$$\theta^a_{IN} = \frac{\pi}{2}\frac{b}{r_{min}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{|(2n-1)|!!}{(2n)!!}\right]^2 k_e^{2n}, \qquad k_e^2 = \frac{1}{\gamma^2_{IN}}\frac{d^4_{T(2)}}{r^4_{min}} = \frac{b^2}{r^2_{min}} - 1\,. \tag{4.121}$$

Para os valores de $b \leq b_L$, quando devemos considerar também o efeito do choque entre as partículas, fazemos na equação (4.110), $r_{min} = a_{IN}$. Desse modo simulamos o potencial repulsivo infinito que surge para $r \leq a_{IN}$. Representando o ângulo nessas condições por, θ^c_{IN}, temos,

$$\theta^c_{IN} = \frac{b}{a_{IN}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{\gamma^2_{IN}}\frac{d^4_{T(2)}}{a^4_{IN}}x^4 - \frac{b^2}{a^2_{IN}}x^2\right)^{1/2}}, \qquad \text{se} \quad b \leq b_L\,. \tag{4.122}$$

Considerando os valores indicados para b_L na equação (4.122) e conforme os valores de γ_{IE} válidos para cada caso em (4.116) e (4.117), verificamos que o denominador do integrando dessa equação assume valores sempre positivos (reais), muito embora as raízes da equação que o contém sejam complexas (exceto quando r_{min} for real porém menor que a_{IN}). Com isso, a sua integração algébrica torna-se muito complicada. Optamos então, pela integração numérica, mais simples e tão precisa quanto uma possível integração algébrica desenvolvida em série para a integral.

O ângulo de espalhamento χ_{IN} obtido a partir de θ_{IN} através de (1.11), resultarã então,

$$\chi^c_{IN}(\gamma_{IN}) = \pi - 2\frac{b}{a_{IN}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{\gamma^2_{IN}}\frac{d^4_{T(2)}}{a^4_{IN}}x^4 - \frac{b^2}{a^2_{IN}}x^2\right)^{1/2}}, \qquad \text{se} \quad b \leq b_L\,, \tag{4.123}$$

e

$$\chi^a_{IN}(\gamma_{IN}) = \pi\left[1 - \frac{2^{1/2}}{\{1 + [1 - 4d^4_{T(2)}/(\gamma^2_{IN}b^4)]^{1/2}\}^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|(2n-1)|!!}{(2n)!!}\right)^2\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{4}{\gamma^2_{IN}}\frac{d^4_{T(2)}}{b^4\{1 + [1 - 4d^4_{T(2)}/(\gamma^2_{IN}b^4)]^{1/2}\}^2}\right)^{2n}\right], \qquad \text{se} \quad b > b_L. \tag{4.124}$$

A seção transversal efetiva de colisão de ordem (l), (1.21), pode ser obtido, considerando (4.123) e (4.124), logo,

$$Q_{IN}^{(l)}(\gamma_{IN}) = \int_0^{b_L} \left(1 - \cos^l \chi_{IN}^c(\gamma_{IN})\right) bdb + \int_{b_L}^{\infty} \left(1 - \cos^l \chi_{IN}^a(\gamma_{IN})\right) bdb\,, \tag{4.125}$$

onde,

$$b_L = \begin{cases} b_{L<} = \frac{2^{1/2}}{\gamma_{IN}^{1/2}} d_{T_{(2)}}, & \text{se,} \quad \gamma_{IN} \leq \frac{d_{T_{(2)}}^2}{a_{IN}^2}, \\ b_{L>} = \left(1 + \frac{d_{T_{(2)}}}{\gamma_{IN}^{1/2} a_{IN}}\right)^{1/2} a_{IN}, & \text{se,} \quad \gamma_{IN} > \frac{d_{T_{(2)}}^2}{a_{IN}^2}. \end{cases} \tag{4.126}$$

Podemos representar as integrais $\Omega_{IN}^{(l,r)}$ de (1.22), em termos do ângulo de espalhamento. Escrevendo, para $(l = 1)$ e para $(l = 2)$, temos respectivamente,

$$\begin{aligned} \Omega_{IN}^{(1,r)}(\gamma_{IN}) = & \int_0^{\gamma_R} e^{-\gamma_{IN}^2} \gamma_{IN}^{2r+3} \left[\int_0^{b_{L<}} (1 - \cos \chi_{IN(\gamma_{IN})}^c)\, bdb + \int_{b_{L<}}^{\infty} (1 - \cos \chi_{IN(\gamma_{IN})}^a)\, bdb\right] d\gamma_{IN} \\ & + \int_{\gamma_R}^{\infty} e^{-\gamma_{IN}^2} \gamma_{IN}^{2r+3} \left[\int_0^{b_{L>}} (1 - \cos \chi_{IN(\gamma_{IN})}^c)\, bdb + \int_{b_{L>}}^{\infty} (1 - \cos \chi_{IN(\gamma_{IN})}^a)\, bdb\right] d\gamma_{IN}\,, \end{aligned} \tag{4.127}$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_{IN}^{(2,r)}(\gamma_{IN}) = & \int_0^{\gamma_R} e^{-\gamma_{IN}^2} \gamma_{IN}^{2r+3} \left(\int_0^{b_{L<}} \text{sen}^2 \chi_{IN(\gamma_{IN})}^c bdb + \int_{b_{L<}}^{\infty} \text{sen}^2 \chi_{IN(\gamma_{IN})}^a bdb\right) d\gamma_{IN} \\ & + \int_{\gamma_R}^{\infty} e^{-\gamma_{IN}^2} \gamma_{IN}^{2r+3} \left(\int_0^{b_{L>}} \text{sen}^2 \chi_{IN(\gamma_{IN})}^c bdb + \int_{b_{L>}}^{\infty} \text{sen}^2 \chi_{IN(\gamma_{IN})}^a bdb\right) d\gamma_{IN}\,. \end{aligned} \tag{4.128}$$

Neste caso a integração numérica também se faz necessária. A dependência funcional de $\Omega_{IN}^{(l,r)}$ restringe-se à temperatura, devido à $d_{T_{(2)}}$. Desse modo, devemos integrar numericamente a equação (2.225), em conjunto com (4.127) e com (4.128), como função da temperatura. O programa computacional para a determinação dessas integrais em função da temperatura para ($l = 1$ com $r = 1, 2, 3$) e ($l = 2$ com $r = 2$), na linguagem QBasic e pelo método trapesoidal encontra-se no apêndice D.

Para a interação entre o elétron e a partícula neutra, o procedimento é idêntico, onde é alterado apenas a_{EN}. Como o elétron é considerado uma partícula puntual, temos, $a_{EN} =$

$a_N/2$. Assim nas equações (4.123), (4.127) e (4.128), onde aparece a_{IN}, devemos substituir por a_{EN}, obtendo desse modo as integrais $\Omega_{EN}^{(1,r)}$ e $\Omega_{EN}^{(2,r)}$.

4.4.4 *Cálculo das integrais* $\Omega_{NN}^{(l,r)}$

Seguindo a mesma sequência de cálculos necessários para a determinação dos demais $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$, iniciamos o procedimento, calculando θ_{NN} através da equação (4.30). A partir do potencial repulsivo (4.57), escrevemos,

$$\phi\left(\frac{r_{min}}{x}\right) = \alpha_R \frac{x^{12}}{r_{min}^{12}}, \tag{4.129}$$

e definindo,

$$d_{T_{(3)}} = \left(\frac{\alpha_R}{kT}\right), \tag{4.130}$$

obtemos assim,

$$\theta_{NN} = \frac{b}{r_{min}} \int_0^1 \frac{dx}{\left(1 - \frac{1}{\gamma_{NN}^2} \frac{d_{T_{(3)}}^{12}}{r_{min}^{12}} x^{12} - \frac{b^2}{r_{min}^2} x^2\right)^{1/2}}, \tag{4.131}$$

com γ_{NN} sendo dado pela relação (1.23). Uma relação para r_{min} é obtida da equação (1.16), com o potencial sendo dado por (4.57), ou seja,

$$1 - \frac{b^2}{r_{min}^2} - \frac{1}{\gamma_{NN}^2} \frac{d_{T_{(3)}}^{12}}{r_{min}^{12}} = 0, \tag{4.132}$$

onde utilizamos a expressão (4.130). Aqui é interessante utilizar uma mudança de variável,

$$y = \gamma_{NN}^{1/6} \frac{r_{min}}{d_{T_{(3)}}}. \tag{4.133}$$

de modo que a equação (4.132) resulta em,

$$\frac{b^2}{r_{min}^2} = 1 - \frac{1}{y^{12}}, \tag{4.134}$$

possibilitando então escrever a equação (4.131), considerando (4.134), como,

$$\theta_{NN} = (y^{12} - 1)^{1/2} \int_0^1 \frac{dx}{[y^{12}(1 - x^2) + x^2 - x^{12}]^{1/2}}. \tag{4.135}$$

A forma da equação (4.135) será adequada, quando for efetuada a integração devida para a determinação da seção transversal efetiva.

Considerando a expressão (1.11), podemos escrever,

$$1 - \cos\chi_{NN}(\gamma_{NN}) = 2\cos^2\theta_{NN}\,, \tag{4.136}$$

e

$$1 - \cos^2\chi_{NN}(\gamma_{NN}) = \mathrm{sen}^2(2\theta_{NN})\,. \tag{4.137}$$

Podemos relacionar o parâmetro de impacto com a variável y, usando a equação (4.134) e considerando a expressão (4.133). Desse modo obtemos,

$$b^2 = \left(1 - \frac{1}{y^{12}}\right) y^2 \frac{d_{T(3)}}{\gamma_{NN}^{1/3}}\,, \tag{4.138}$$

ou a sua diferencial,

$$d(b^2) = 2bdb = 2\frac{d_{T(3)}}{\gamma_{NN}^{1/3}}\left(1 - \frac{5}{y^{12}}\right) ydy\,. \tag{4.139}$$

Desse modo, podemos trocar o elemento de integração da equação (1.21), para a mesma variável y da equação (4.135), fazendo com que as integrais duplas assim resultantes independam de qualquer parâmetro de integração externo a elas, representando portanto constantes numéricas. Substituindo a equação (4.139) na expressão para a seção transversal efetiva de colisão, temos,

$$Q_{NN}^{(l)}(\gamma_{NN}) = \frac{d_{T(3)}^2}{\gamma_{NN}^{1/3}} \int_1^\infty (1 - \cos^l\chi_{NN}) \left(1 - \frac{5}{y^{12}}\right) ydy\,, \tag{4.140}$$

onde os limites de integração foram obtidos isolando-se a variável y na equação (4.134) e passando os limites:

a) $b \to 0$ obtemos $y \to 1$ na equação então formada (r_{min} não se anula na equação devido ao potencial ser repulsivo).

b) $b \to \infty$, obtemos $y \to \infty$ pois $b^2/r_{min}^2 \to 1$.

Fazendo então ($l = 1$) na equação (4.140) e considerando a relação (4.136) com (4.135), escrevemos,

$$Q_{NN}^{(1)}(\gamma_{NN}) = 2\frac{d_{T(3)}^2}{\gamma_{NN}^{1/3}} \int_1^\infty \cos^2 \left\{ (y^{12}-1)^{1/2} \int_0^1 \frac{dx}{[y^{12}(1-x^2)+x^2-x^{12}]^{1/2}} \right\} \left(1 - \frac{5}{y^{12}}\right) y dy \,, \tag{4.141}$$

a qual, efetuando-se numericamente a integração dupla, resulta,

$$Q_{NN}^{(1)}(\gamma_{NN}) = 2\frac{d_{T(3)}^2}{\gamma_{NN}^{1/3}} (0.262) \,. \tag{4.142}$$

Do mesmo modo, fazendo ($l = 2$) na equação (4.140) e considerando a relação (4.137) com (4.135), obtemos,

$$Q_{NN}^{(2)}(\gamma_{NN}) = \frac{d_{T(3)}^2}{\gamma_{NN}^{1/3}} \int_1^\infty \operatorname{sen}^2 \left\{ 2\,(y^{12}-1)^{1/2} \int_0^1 \frac{dx}{[y^{12}(1-x^2)+x^2-x^{12}]^{1/2}} \right\} \left(1 - \frac{5}{y^{12}}\right) y dy \,, \tag{4.143}$$

a qual, após a integração numérica, pode ser escrita,

$$Q_{NN}^{(2)}(\gamma_{NN}) = \frac{d_{T(3)}^2}{\gamma_{NN}^{1/3}} (0.422) \,. \tag{4.144}$$

As integrais de colisão $\Omega_{NN}^{(l,r)}$, podem agora ser obtidas. Para ($l = 1$) na equação definidora (1.22) e considerando a equação (4.142), temos,

$$\Omega_{NN}^{(1,r)} = 0,523\, d_{T(3)}^2 \int_0^\infty e^{-\gamma_{NN}^2} \gamma_{NN}^{2r+8/3} d\gamma_{NN} \,, \tag{4.145}$$

e para $l = 2$ considerando (4.144), obtemos,

$$\Omega_{NN}^{(2,r)} = 0,422\, d_{T(3)}^2 \int_0^\infty e^{-\gamma_{NN}^2} \gamma_{NN}^{2r+8/3} d\gamma_{NN} \,. \tag{4.146}$$

Neste caso podemos calcular a forma algébrica final das integrais de colisão. Assim, fazendo ($r = 1, 2, 3$) na equação (4.145) e ($r = 2$) na equação (4.146), obtemos respectivamente,

$$\Omega_{NN}^{(1,1)} = 0,451\, d_{T_{(3)}}^2 \,, \tag{4.147}$$

$$\Omega_{NN}^{(1,2)} = 1,278\, d_{T_{(3)}}^2 \,, \tag{4.148}$$

$$\Omega_{NN}^{(1,3)} = 4,898\, d_{T_{(3)}}^2 \,, \tag{4.149}$$

$$\Omega_{NN}^{(2,2)} = 1,031\, d_{T_{(3)}}^2 \,. \tag{4.150}$$

4.5 Integração Numérica e Gráficos

Como podemos observar, a integração algébrica para as integrais $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$, não é possível (exceto neste último caso), devido fundamentalmente aos tipos de potenciais de interação que surgem em um gás parcialmente ionizado. Das integrais que necessitam de cálculos numéricos, apenas a que envolve potencial de indução, requer um programa mais elaborado e um tempo de processamento maior. As demais, como restringem-se basicamente à última etapa de integração, a programação é simples e o tempo de processamento é mínimo. Todas essas integrais possuem uma dependência comum com a temperatura, muito embora através de relações distintas. Particularmente as integrais envolvendo as interações entre partículas carregadas e envolvendo portanto o comprimento de Debye (4.77) possuem também uma dependência com a densidade de número de partículas ionizadas n_I ou n_E (supondo um gás formado por um único constituinte) necessitando assim, de mais uma variável a ser considerada na integração. Porém, se considerarmos que o gás em questão, ioniza-se com o aumento da temperatura, podemos, de acordo com a fórmula de Saha [24], obter uma relação entre n_I e a temperatura, ou seja,

$$\frac{n_E n_I}{n_N} = \left(\frac{2\pi m_E k}{h^2}\right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_q}{kT}} = n_S(T)\,, \tag{4.151}$$

onde ϵ_q é energia potencial química para a ionização do átomo, m_E é a massa do elétron e h é a constante de Planck. Na tabela seguinte, fornecemos a energia potencial química em unidades de [eV] de alguns gases monoatômicos e do Hidrogênio atômico em particular.

Subst.	H	He	Ne	Ar
ϵ_q(eV)	13,598	24,587	21,564	15,759

Supondo ainda que a temperatura do gás esteja em um patamar de primeira ionização do átomo, podemos escrever, $n_E = n_I$. Resolvendo então a equação (4.151) para n_I obtemos,

$$n_I = \frac{1}{2}[(n_S + 4n_H n_S)^{1/2} - n_S]\,, \tag{4.152}$$

onde $n_H = n_N + n_I$ é a densidade do número de partículas pesadas.

Uma definição de interesse para gases parcialmente ionizados é a taxa de ionização desse gás. Esta relaciona o número de partículas ionizadas de um gás com o número de partículas pesadas do mesmo (número de partículas do gás quando em seu estado neutro) por,

$$x = \frac{n_I}{n_H}\,. \tag{4.153}$$

Mostramos na figura (4.3) a taxa de ionização do gás Hélio em função da temperatura de acordo com (4.153), (4.152) e (4.151) para três diferentes casos de $n_{H_{\mathrm{He}}}$, a saber $n_{H_{He}} = 1,0 \times 10^{17}$part/m^3, $n_{H_{He}} = 1,0 \times 10^{20}$part/m^3 e $n_{H_{He}} = 1,0 \times 10^{23}$part/m^3.

Podemos agora obter numericamente as integrais $\Omega_{II}^{(l,r)}$ em função apenas da tempertura. Como necessitaremos de dados numéricos para um gás em particular, escolheremos como exemplo, o gás Hélio e para este obteremos todas as integrais pendentes de integração numérica. Optamos, por conveniência, a forma gráfica para apresentar os resultados dessas integrações. Os valores numéricos para qualquer outro gás, podem ser obtidos, processando os respectivos programas que se encontram no apêndice D.

Desse modo, fazendo na equação (4.75) ($r = 1,2,3$) e na equação (4.76) ($r = 2$), obtemos, através do programa correspondente a essas integrais (D.1), as respectivas curvas de, $\Omega_{II}^{(1,1)} = \Omega_{EE}^{(1,1)}$, $\Omega_{II}^{(1,2)} = \Omega_{EE}^{(1,2)}$, $\Omega_{II}^{(1,3)} = \Omega_{EE}^{(1,3)}$ e $\Omega_{II}^{(2,2)} = \Omega_{EE}^{(2,2)}$ todas em função da temperatura, mostradas no figura (4.4).

Através do programa (D.2) obtemos as curvas de $\Omega_{IE}^{(1,1)}$, $\Omega_{IE}^{(1,2)}$, $\Omega_{IE}^{(1,3)}$ e $\Omega_{IE}^{(2,2)}$, dadas pelas equações (4.106) com ($r = 1,2,3$) e (4.107) com ($r = 2$), respectivamente e mostradas na

figura (4.5). O valor utilizado para o diâmetro médio das partículas em consideração é o raio do íon, no caso $a_{I_{He^+}E} = 1,0 \times 10^{-10}$m.

Nas figuras (4.6) e (4.7) observamos as curvas para $\Omega_{IN}^{(l,r)}$ e $\Omega_{EN}^{(l,r)}$ respectivamente, estas, obtidas das equações (4.127) para $l = 1$ com $(r = 1, 2, 3)$ e (4.128) para $(l = 2)$ com $(r = 2)$, sendo geradas pelo programa (D.3). Aqui utilizamos o diâmetro médio das partículas, $a_{IN} = 2,4 \times 10^{-10}$m e $a_{EN} = 1,4 \times 10^{-10}$m relativos ao átomo de Hélio, seu íon ou do elétron.

Colocamos também na forma de gráficos, as equações (4.147) à (4.150), para $\Omega_{NN}^{(l,r)}$, $(l = 1)$ com $(r = 1, 2, 3)$ e $(l = 2)$ com $(r = 2)$, mostradas na figura (4.8) para a interação entre átomos de Hélio. Observar que as integrais $\Omega_{II}^{(l,r)} = \Omega_{EE}^{(l,r)}$ e $\Omega_{IE}^{(l,r)}$, nas quais ambas as partículas relacionadas estão carregadas, são da ordem de 10^2 vezes maior que nos demais casos de integrais $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$.

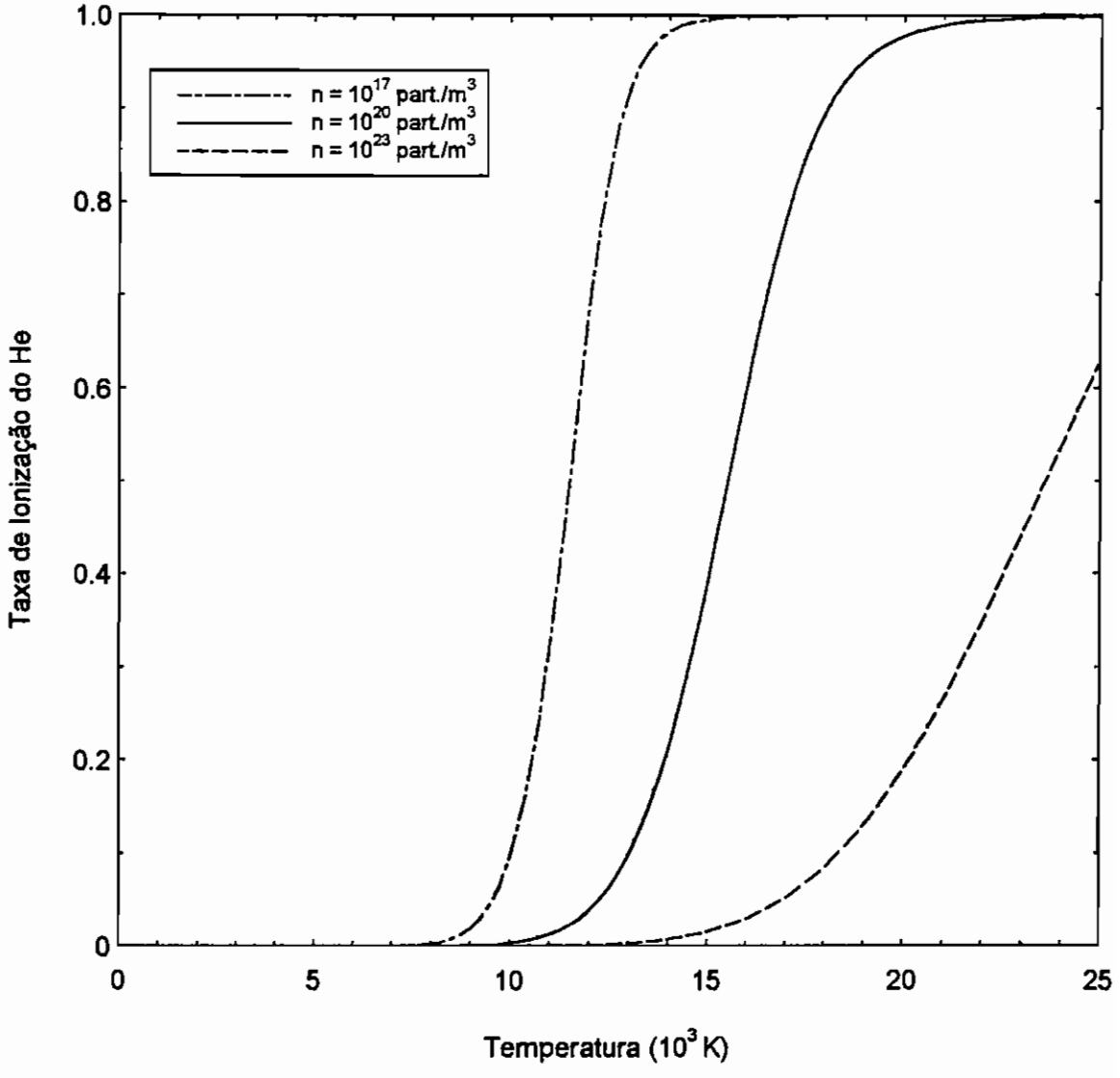


Figura 4.3: Taxa de ionização do gás hélio para três densidades distintas.

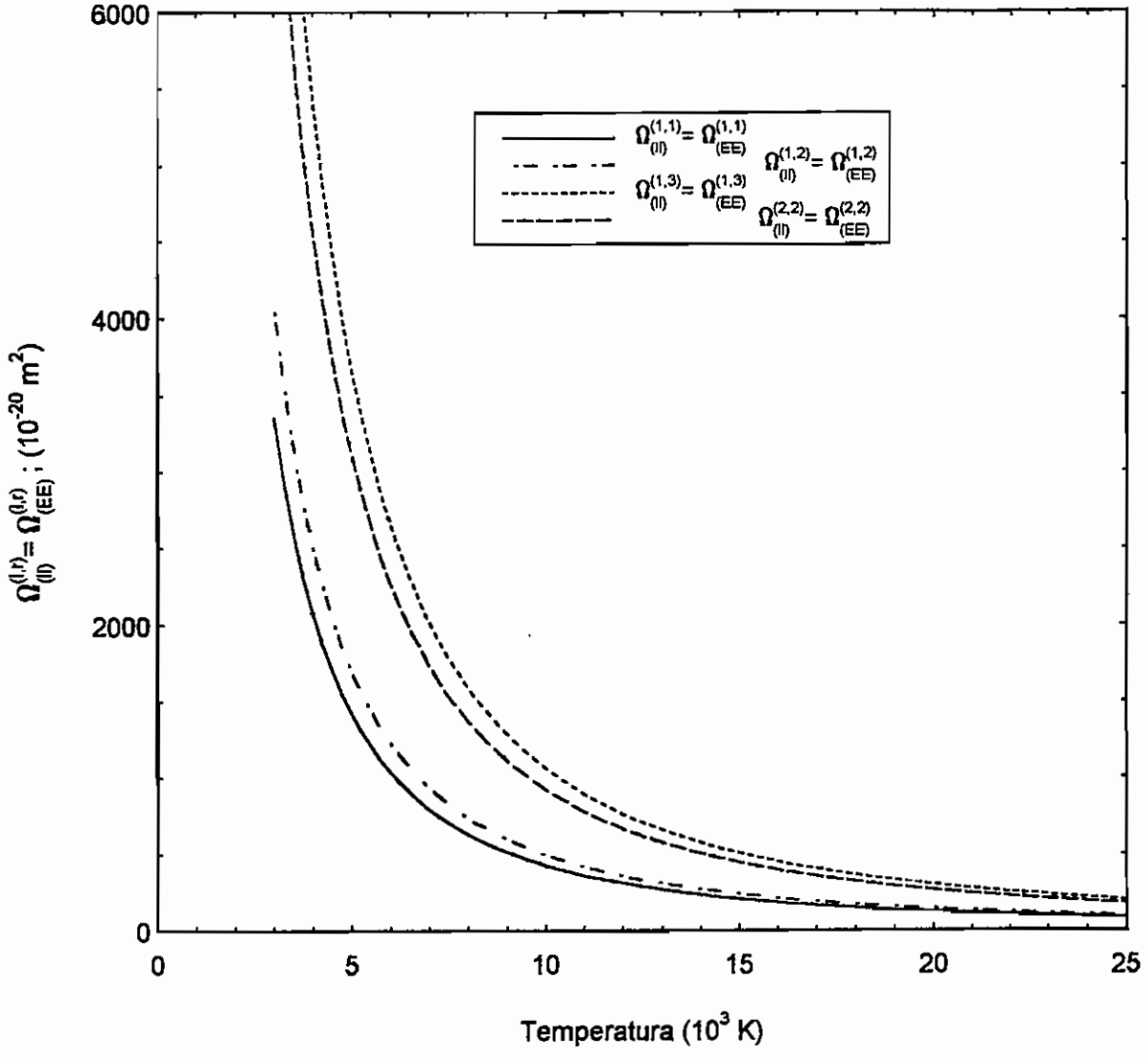


Figura 4.4: Representação das integrais $\Omega^{(l,r)}_{\alpha\beta}$ para a interação entre partículas carregadas de mesma espécie.

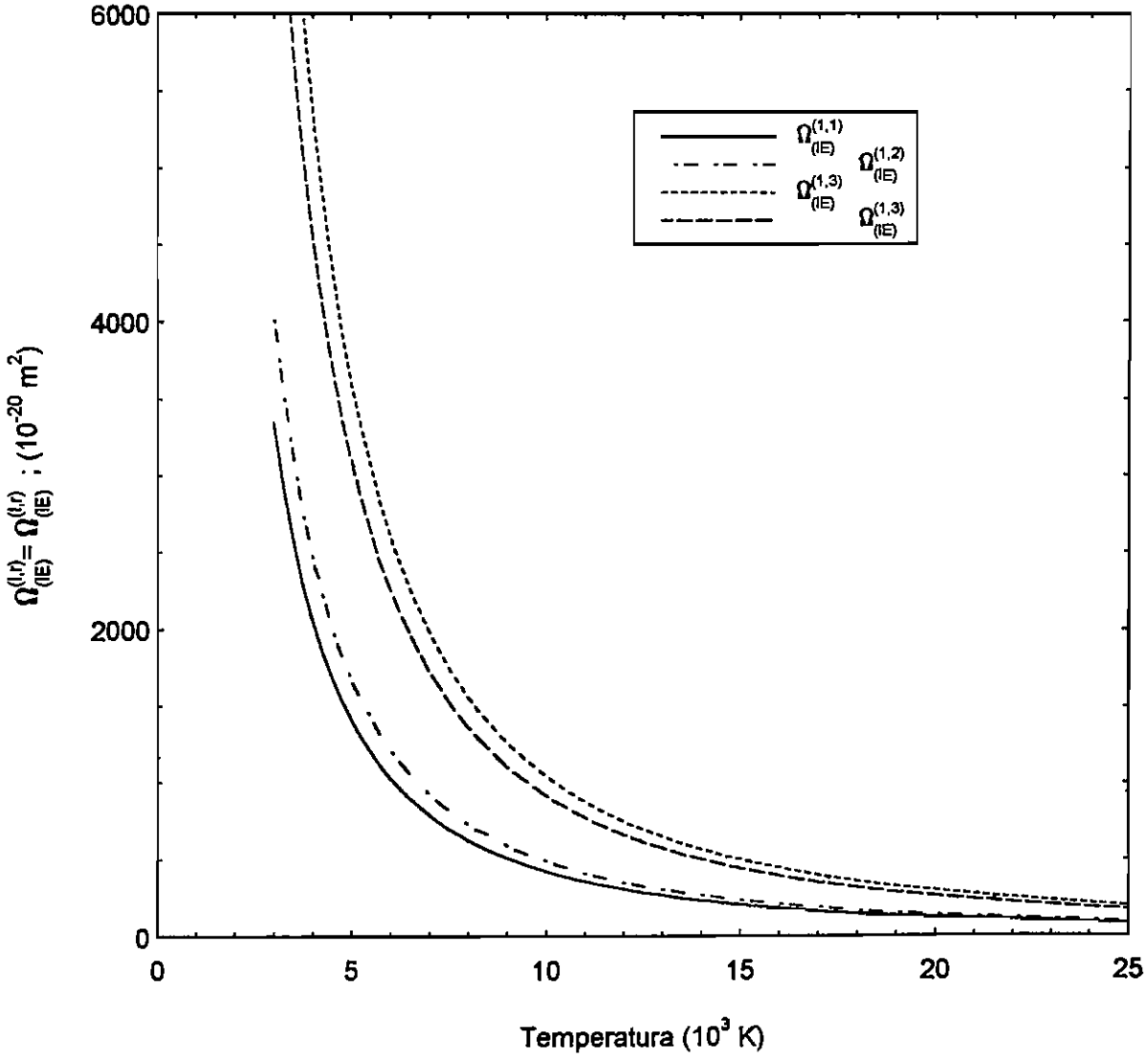


Figura 4.5: Representação das integrais $\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)}$ para a interação entre íon (He^+) e elétron.

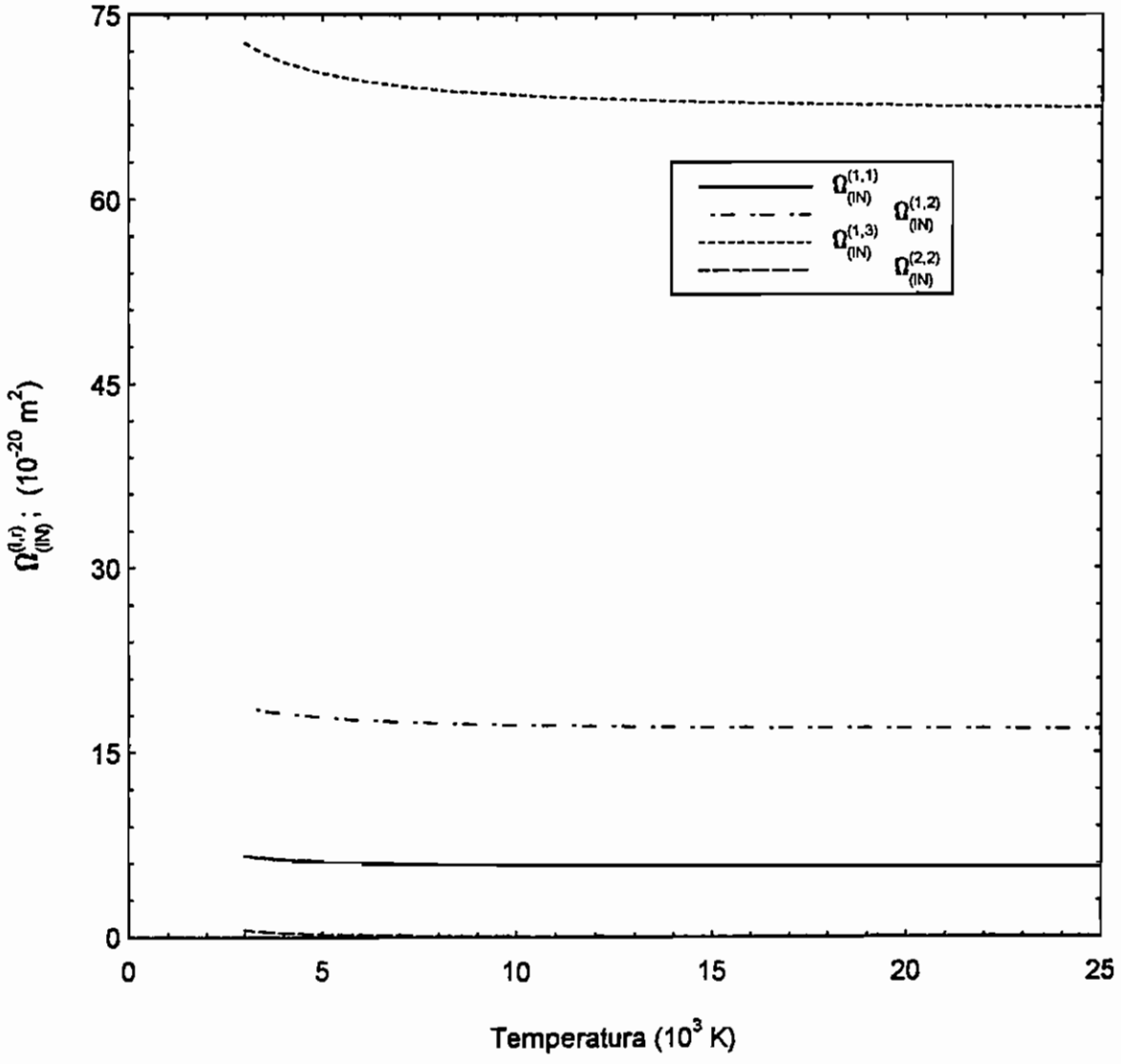


Figura 4.6: Representação das integrais $\Omega^{(l,r)}_{\alpha\beta}$ para a interação entre íon (He^+) e partícula neutra (He).

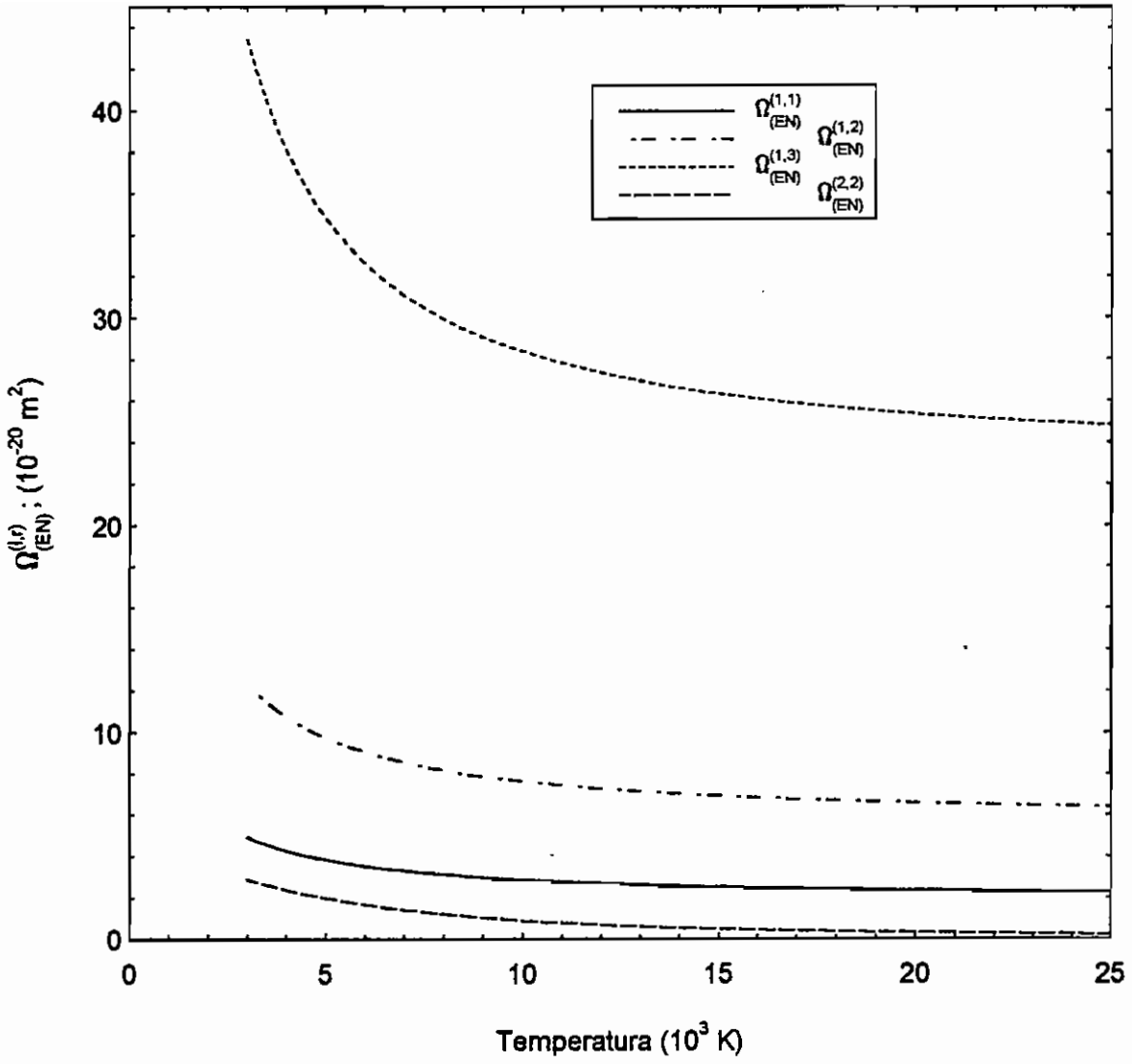


Figura 4.7: Representação das integrais $\Omega^{(l,r)}_{\alpha\beta}$ para a interação entre elétron e partícula neutra (He).

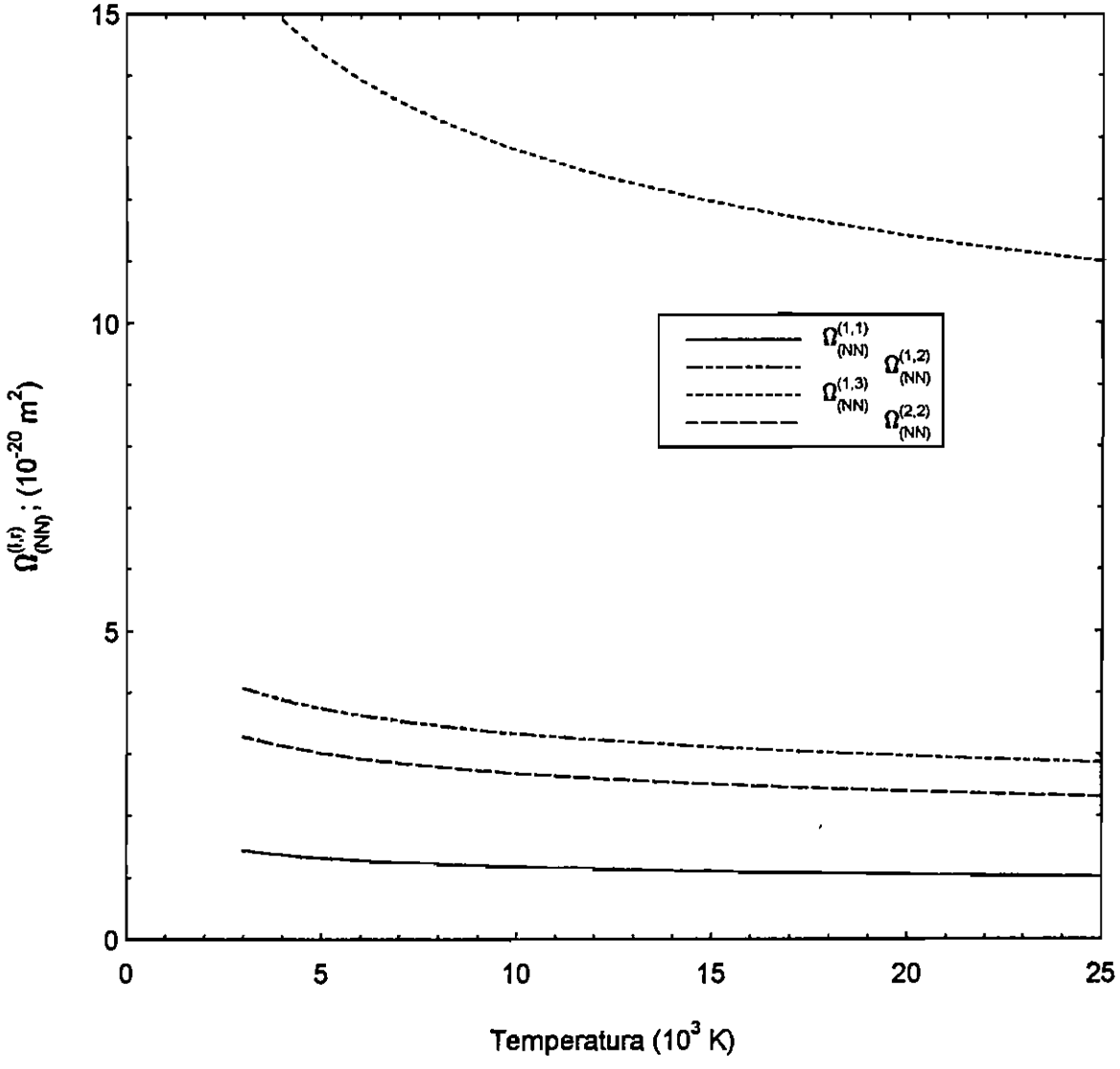


Figura 4.8: Representação das integrais $\Omega^{(l,r)}_{\alpha\beta}$ para a interação entre partículas neutras.

Capítulo 5

Determinação dos Coeficientes de Transporte para um Gás Totalmente Ionizado

Utilizando o método combinado resolvemos, neste capítulo, as equações para os termos constitutivos para assim obtermos os coeficientes de transporte para um gás totalmente ionizado. Vamos supor que o gás seja formado por uma única espécie de átomo, este ionizado uma única vez, e dos respectivos elétrons. Desse modo teremos dois constituintes, $\alpha = E$ e $\alpha = I$ nas equações para os termos constitutivos.

5.1 Equações para os Termos Constitutivos

A partir das equações (3.50), (3.51) e (3.86), formamos o seguinte sistema de equações para elétrons e íons:

$$-p(d_i^E - d_i^I) = A_{ij}^{EE} J_j^E + F_{ij}^{EE} \frac{m_E}{kT} q_j^E + F_{ij}^{EI} \frac{m_I}{kT} q_j^I \,; \tag{5.1}$$

$$\frac{5}{2} \frac{p_E}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = G_{ij}^{EE} J_j^E + H_{ij}^{EE} \frac{m_E}{kT} q_j^E + H_{ij}^{EI} \frac{m_I}{kT} q_j^I \,; \tag{5.2}$$

$$\frac{5}{2} \frac{p_I}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = G_{ij}^{IE} J_j^E + H_{ij}^{IE} \frac{m_E}{kT} q_j^E + H_{ij}^{II} \frac{m_I}{kT} q_j^I \,; \tag{5.3}$$

$$-2p_E \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = N_{<ij><kl>}^{EE} p_{<kl>}^E + N_{<ij><kl>}^{EI} p_{<kl>}^I \,; \tag{5.4}$$

$$-2p_I \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = N^{IE}_{<ij><kl>} p^E_{<kl>} + N^{II}_{<ij><kl>} p^I_{<kl>} \,. \tag{5.5}$$

No sistema de equações acima, os tensores que precedem os termos constitutivos, podem ser representados, considerando (3.46) a (3.49) e (3.92), por,

$$A^{EE}_{ij} = (A_{EE} - A_{EI} - A_{IE} + A_{II})\delta_{ij} - \left(\frac{e_E}{m_E} + \frac{e_I}{m_I}\right)\epsilon_{ijk}B_k \,, \tag{5.6}$$

$$F^{EE}_{ij} = -(F_{EE} - F_{IE})\delta_{ij} \,, \tag{5.7}$$

$$F^{EI}_{ij} = -(F_{EI} - F_{II})\delta_{ij} \,, \tag{5.8}$$

$$G^{EE}_{ij} = \frac{5}{2}(F_{EE} - F_{IE})\delta_{ij} = -\frac{5}{2}F^{EE}_{ij} \,, \tag{5.9}$$

$$G^{IE}_{ij} = \frac{5}{2}(F_{EI} - F_{II})\delta_{ij} = -\frac{5}{2}F^{EI}_{ij} \,, \tag{5.10}$$

$$H^{EE}_{ij} = -\left(H_{EE}\delta_{ij} - \frac{e_E}{m_E}\epsilon_{ijk}B_k\right) \,, \tag{5.11}$$

$$H^{EI}_{ij} = -H_{EI}\delta_{ij} \,, \tag{5.12}$$

$$H^{IE}_{ij} = -H_{IE}\delta_{ij} \,, \tag{5.13}$$

$$H^{II}_{ij} = -\left(H_{II}\delta_{ij} - \frac{e_I}{m_I}\epsilon_{ijk}B_k\right) \,, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} N^{EE}_{<ij><kl>} &= \frac{1}{2}L_{EE}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{e_E}{m_E}\left(\epsilon_{kiq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kjq}B_q\delta_{il} + \epsilon_{liq}B_q\delta_{jk} + \epsilon_{ljq}B_q\delta_{ik}\right) \,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$N^{EI}_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}L_{EI}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \,, \tag{5.16}$$

$$N^{IE}_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}L_{IE}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \,, \tag{5.17}$$

$$N^{II}_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}L_{II}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{e_I}{m_I}\left(\epsilon_{kiq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kjq}B_q\delta_{il} + \epsilon_{liq}B_q\delta_{jk} + \epsilon_{ljq}B_q\delta_{ik}\right) . \qquad (5.18)$$

A partir das equações (4.20) à (4.25), (4.27) e (4.28) onde consideramos, $n_E = n_I$ e $m_I + m_E \approx m_I$, escrevemos,

$$A_{EE} = \frac{16}{3}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\Omega^{(1,1)}_{EI} , \qquad (5.19)$$

$$A_{EI} = -\frac{16}{3}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)\Omega^{(1,1)}_{EI} = -\frac{m_E}{m_I}A_{EE} , \qquad (5.20)$$

$$A_{IE} = -\frac{16}{3}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}\Omega^{(1,1)}_{IE} = -A_{EE} , \qquad (5.21)$$

$$A_{II} = \frac{16}{3}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)\Omega^{(1,1)}_{IE} = \frac{m_E}{m_I}A_{EE} , \qquad (5.22)$$

$$F_{EE} = \frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}(5\Omega^{(1,1)}_{EI} - 2\Omega^{(1,2)}_{EI}) , \qquad (5.23)$$

$$F_{EI} = -\frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^2(5\Omega^{(1,1)}_{EI} - 2\Omega^{(1,2)}_{EI}) = -\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^2 F_{EE} , \qquad (5.24)$$

$$F_{IE} = -\frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}(5\Omega^{(1,1)}_{IE} - 2\Omega^{(1,2)}_{IE}) = -F_{EE} , \qquad (5.25)$$

$$F_{II} = \frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^2(5\Omega^{(1,1)}_{IE} - 2\Omega^{(1,2)}_{IE}) = \left(\frac{m_E}{m_I}\right)^2 F_{EE} , \qquad (5.26)$$

$$H_{EE} = \frac{8}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(2^{3/2}\Omega^{(2,2)}_{EE} + 25\Omega^{(1,1)}_{EI} - 20\Omega^{(1,2)}_{EI} + 4\Omega^{(1,3)}_{EI}\right) , \qquad (5.27)$$

$$H_{EI} = -\frac{8}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^2\left(55\Omega^{(1,1)}_{EI} - 20\Omega^{(1,2)}_{EI} + 4\Omega^{(1,3)}_{EI} - 8\Omega^{(2,2)}_{EI}\right) \qquad (5.28)$$

$$H_{EI} \propto -\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^2 H_{EE} ,$$

$$H_{IE} = -\frac{8}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)\left(55\Omega^{(1,1)}_{IE} - 20\Omega^{(1,2)}_{IE} + 4\Omega^{(1,3)}_{IE} - 8\Omega^{(2,2)}_{IE}\right) \qquad (5.29)$$

$$H_{IE} \propto -\left(\frac{m_E}{m_I}\right) H_{EE}\,,$$

$$H_{II} = \frac{8}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^{1/2}\left(30\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^{1/2}\Omega_{IE}^{(1,1)} + 2^{3/2}\Omega_{II}^{(2,2)}\right) \tag{5.30}$$

$$H_{II} \propto -\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^{1/2} H_{EE}\,,$$

$$L_{EE} = \frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(\frac{3}{2^{1/2}}\Omega_{EE}^{(2,2)} + 3\Omega_{EI}^{(2,2)}\right)\,, \tag{5.31}$$

$$L_{EI} = -\frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_E}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)\left(10\Omega_{EI}^{(1,1)} - 3\Omega_{EI}^{(2,2)}\right) \tag{5.32}$$

$$L_{EI} \propto -\left(\frac{m_E}{m_I}\right) L_{EE}\,,$$

$$L_{IE} = -\frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)\left(10\Omega_{IE}^{(1,1)} - 3\Omega_{IE}^{(2,2)}\right) \tag{5.33}$$

$$L_{IE} \propto -\left(\frac{m_E}{m_I}\right) L_{EE}\,,$$

$$L_{II} = \frac{16}{15}(2\pi kT)^{1/2}\frac{n_I}{m_E^{1/2}}\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{2^{1/2}}\Omega_{II}^{(2,2)} + 10\left(\frac{m_E}{m_I}\right)^{1/2}\Omega_{IE}^{(1,1)}\right) \tag{5.34}$$

$$L_{II} \propto \left(\frac{m_I}{m_E}\right)^{1/2} L_{EE}\,.$$

Observar das equações (5.23) a (5.34), que as equações relacionadas às interações entre elétron-elétron (EE), tem maior influência que as demais nas equações (5.1) a (5.5). Através de uma comparação entre a ordem de grandeza dessas integrais de colisão, verificamos que algumas podem ser negligenciadas ao considerarmos que $m_E \ll m_I$. Mantendo as equações, até a ordem $(m_E/m_I)^{1/2}$ em relação as de maior ordem em cada situação, podemos desprezar os coeficientes A_{EI}, A_{II}, F_{EI}, F_{II}, H_{EI}, H_{IE}, L_{EI} e L_{IE}, pois irão contribuir muito pouco nas equações para os termos constitutivos. Desse modo escrevemos,

$$-p(d_i^E - d_i^I) = A_{ij}'^{EE} J_j^E + F_{ij}'^{EE}\frac{m_E}{kT} q_j^E\,, \tag{5.35}$$

$$\frac{5}{2}\frac{p_E}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} = G'^{EE}_{ij} J^E_j + H^{EE}_{ij}\frac{m_E}{kT} q^E_j \,, \tag{5.36}$$

$$\frac{5}{2}\frac{p_I}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} = H^{II}_{ij}\frac{m_I}{kT} q^I_j \,, \tag{5.37}$$

onde,

$$A'^{EE}_{ij} = 2A_{EE}\delta_{ij} - 2\left(\frac{e_E}{m_E} + \frac{e_I}{m_I}\right)\epsilon_{ijk}B_k \,, \tag{5.38}$$

$$F'^{EE}_{ij} = -2F_{EE}\delta_{ij} \,, \tag{5.39}$$

$$G'^{EE}_{ij} = 5F_{EE}\delta_{ij} \,, \tag{5.40}$$

com H^{EE}_{ij} e H^{II}_{ij} sendo dados por (5.11) e (5.14) respectivamente. As equações (5.4) e (5.5) fornecem um outro sistema de equações,

$$-2p_E\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = N^{EE}_{<ij><kl>} p^E_{<kl>} \,, \tag{5.41}$$

$$-2p_I\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = N^{II}_{<ij><kl>} p^I_{<kl>} \,, \tag{5.42}$$

no caso formando um sistema de equações independentes entre si.

5.1.1 *Os Vetores Densidade de Corrente Elétrica e Fluxo de Calor*

Resolvendo o sistema de equações vetoriais (5.35) à (5.37)[1], determinamos expressões para os termos constitutivos J^E_i, q^E_i e q^I_i.

Multiplicando ambos os membros da equação (5.37) pelo tensor $\left(H^{II^{-1}}\right)_{ki}$, ou seja, o tensor inverso de H^{II}_{ij} de acordo com (3.53), obtemos diretamente q^I_i. Desse modo escrevemos,

$$\frac{m_I}{kT} q^I_i = -Q^{II}_{T_{ij}}\frac{5}{2}\frac{p_I}{T}\frac{\partial T}{\partial x_j} \,, \tag{5.43}$$

[1]Observar que os coeficientes dessas equações são tensores de segunda ordem

onde,

$$Q^{II}_{T_{ki}} = -\left(H^{II^{-1}}\right)_{ki}, \tag{5.44}$$

e

$$\left(H^{II^{-1}}\right)_{ki} H^{II}_{ij} = \delta_{kj}. \tag{5.45}$$

Notar que os possíveis coeficientes de d^E_i e de $\frac{5}{2}\frac{p_E}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}$ que apareceriam na forma geral da equação (5.44), conforme (3.53), são nulos, ou seja, $Q^{IE}_{ij} = 0$ e $Q^{IE}_{T_{ij}} = 0$. Multiplicando agora, a equação (5.36) por $\left(G^{EE^{-1}}\right)_{ki}$, temos,

$$J^E_k = \left(G^{EE^{-1}}\right)_{ki} \frac{5}{2}\frac{p_E}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \left(G^{EE^{-1}}\right)_{ki} H^{EE}_{ij} \frac{m_E}{kT} q^E_j, \tag{5.46}$$

a qual, sendo substituída na equação (5.44), fornece,

$$-p(d^E_i - d^I_i) = A^{EE}_{ij}\left(G^{EE^{-1}}\right)_{jk} \frac{5}{2}\frac{p_E}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \left[F'^{EE}_{il} - A'^{EE}_{ij}\left(G^{EE^{-1}}\right)_{jk} H^{EE}_{kl}\right]\frac{m_E}{kT} q^E_l. \tag{5.47}$$

Multiplicando então, a equação (5.47) por,

$$Q^{EE}_{ki} = \left[F'^{EE}_{ki} - A'^{EE}_{kl}\left(G^{EE^{-1}}\right)_{lm} H^{EE}_{mi}\right]^{-1}, \tag{5.48}$$

e definindo,

$$Q^{EE}_{T_{ki}} = Q^{EE}_{kj} A'^{EE}_{jl}\left(G^{EE^{-1}}\right)_{li}, \tag{5.49}$$

escrevemos a equação (5.47) para $\frac{m_E}{kT} q^E_i$ por,

$$\frac{m_E}{kT} q^E_i = -Q^{EE}_{ij} p(d^E_j - d^I_j) - Q^{EE}_{T_{ij}} \frac{5}{2}\frac{p_E}{T}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{5.50}$$

na qual, de acordo com (3.53) verificamos que $Q^{EI}_{T_{ij}} = 0$. Substituindo então, a equação (5.50) na equação (5.46) e definindo,

$$M^{EE}_{ki} = -\left(G^{EE^{-1}}\right)_{kl} H^{EE}_{lm} Q^{EE}_{T_{mi}}, \tag{5.51}$$

e

$$M^{EE}_{T_{ki}} = -\left(G^{EE^{-1}}\right)_{ki} - \left(G^{EE^{-1}}\right)_{kl} H^{EE}_{lm} Q^{EE}_{T_{mi}}\,, \tag{5.52}$$

escrevemos,

$$J^E_i = -M^{EE}_{ij} p(d^E_j - d^I_j) - M^{EE}_{T_{ij}} \frac{5}{2}\frac{p_E}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\,, \tag{5.53}$$

com $M^{EI}_{T_{ki}} = 0$ para o caso, de acordo com (3.53).

Os tensores coeficientes de $p(d^E_i - d^I_i)$ e $\frac{5}{2}\frac{p_\alpha}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}$, representados por (5.44), (5.48), (5.49), (5.51) e (5.52), após as inversões e multiplicações devidas[2], ficam expressos em função das parcelas dos termos de colisão, $A_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ e demais grandezas afins, ou seja,

$$Q^{II}_{T_{ij}} = Q^{II}_{T(\delta)}\delta_{ij} + Q^{II}_{T(\epsilon)}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + Q^{II}_{T(\zeta)}\frac{B_iB_j}{B^2}\,, \tag{5.54}$$

onde,

$$Q^{II}_{T(\delta)} = \frac{1}{H_{II}}\frac{1}{1+b^2_{B(1)}}\,, \tag{5.55}$$

$$Q^{II}_{T(\epsilon)} = \frac{1}{H_{II}}\frac{b_{B(1)}}{1+b^2_{B(1)}}\,, \tag{5.56}$$

$$Q^{II}_{T(\zeta)} = \frac{b^2_{B(1)}}{H_{II}}\frac{1}{1+b^2_{B(1)}}\,, \tag{5.57}$$

com,

$$b_{B(1)} = \frac{e_I B}{m_I H_{II}}\,. \tag{5.58}$$

[2]Para calcularmos o inverso de um dado tensor, utilizamos o teorema de Cayley-Hamilton, o qual na forma específica para o caso é representado por (3.55). O tensor produto P_{ij} de dois tensores $T_{1_{ij}}$ e $T_{2_{ij}}$, expressos na forma de (3.54), pode ser dado por,

$$P_{ij} = T_{1_{ik}}T_{2_{kj}} = \left(T_{1(\delta)}T_{2(\delta)} - T_{1(\epsilon)}T_{2(\epsilon)}\right)\delta_{ij} + \left(T_{1(\delta)}T_{2(\epsilon)} + T_{1(\epsilon)}T_{2(\delta)}\right)\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B}$$
$$+ \left[T_{1(\delta)}T_{2(\zeta)} + T_{1(\epsilon)}T_{2(\epsilon)} + T_{1(\zeta)}\left(T_{2(\delta)} + T_{2(\zeta)}\right)\right]\frac{B_iB_j}{B^2}\,,$$

uma vez que,

$$\epsilon_{ijk}B_k\epsilon_{jlm}B_m = \epsilon_{jki}\epsilon_{jlm}B_kB_m = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})B_kB_m = B_lB_i - B^2\delta_{il}\,.$$

$$Q_{ij}^{EE} = Q_{(\delta)}^{EE}\delta_{ij} + Q_{(\epsilon)}^{EE}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + Q_{(\zeta)}^{EE}\frac{B_iB_j}{B^2}\,, \tag{5.59}$$

onde,

$$Q_{(\delta)}^{EE} = \frac{5}{2F_{EE}D_Q}\left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5 - b_{B(2)}^2\right)\,, \tag{5.60}$$

$$Q_{(\epsilon)}^{EE} = \frac{5b_{B(2)}}{2F_{EE}D_Q}\left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)\,, \tag{5.61}$$

$$Q_{(\zeta)}^{EE} = \frac{5b_{B(2)}^2}{2F_{EE}D_Q}\frac{\left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)^2 - \left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5 - b_{B(2)}^2\right)}{\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5}\,, \tag{5.62}$$

com,

$$D_Q = \left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5 - b_{B(2)}^2\right)^2 + b_{B(2)}^2\left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)^2\,, \tag{5.63}$$

e

$$b_{B(2)} = \frac{e_E B}{m_E F_{EE}}\,. \tag{5.64}$$

$$Q_{T_{ij}}^{EE} = Q_{T(\delta)}^{EE}\delta_{ij} + Q_{T(\epsilon)}^{EE}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + Q_{T(\zeta)}^{EE}\frac{B_iB_j}{B^2}\,, \tag{5.65}$$

onde,

$$Q_{T(\delta)}^{EE} = \frac{1}{F_{EE}D_Q}\left[\frac{A_{EE}}{F_{EE}}\left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5\right) + b_{B(2)}^2\frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right]\,, \tag{5.66}$$

$$Q_{T(\epsilon)}^{EE} = \frac{b_{B(2)}}{F_{EE}D_Q}\left(\frac{A_{EE}^2}{F_{EE}^2} + 5 + b_{B(2)}^2\right)\,, \tag{5.67}$$

$$Q_{T(\zeta)}^{EE} = \frac{b_{B(2)}^2}{F_{EE}D_Q}\left[\frac{A_{EE}}{F_{EE}}\frac{\left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)^2 - \left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5 - b_{B(2)}^2\right)}{\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5} - \left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)\right]\,. \tag{5.68}$$

$$M_{ij}^{EE} = M_{(\delta)}^{EE}\delta_{ij} + M_{(\epsilon)}^{EE}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + M_{(\zeta)}^{EE}\frac{B_iB_j}{B^2}\,, \tag{5.69}$$

onde,

$$M_{(\delta)}^{EE} = \frac{1}{2F_{EE}}\frac{1}{D_Q}\left[\frac{H_{EE}}{F_{EE}}\left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5\right) + b_{B_{(2)}}^2\frac{A_{EE}}{F_{EE}}\right], \tag{5.70}$$

$$M_{(\epsilon)}^{EE} = \frac{1}{2F_{EE}}\frac{b_{B_{(2)}}}{D_Q}\left(\frac{H_{EE}^2}{F_{EE}^2} + 5 + b_{B_{(2)}}^2\right), \tag{5.71}$$

$$M_{(\zeta)}^{EE} = \frac{b_{B_{(2)}}^2}{2F_{EE}D_Q}\left[\frac{H_{EE}}{F_{EE}}\frac{\left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)^2 - \left(\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5 - b_{B_{(2)}}^2\right)}{\frac{A_{EE}H_{EE}}{F_{EE}^2} - 5} - \left(\frac{A_{EE}}{F_{EE}} + \frac{H_{EE}}{F_{EE}}\right)\right]. \tag{5.72}$$

$$M_{T_{ij}}^{EE} = M_{T_{(\delta)}}^{EE}\delta_{ij} + M_{T_{(\epsilon)}}^{EE}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + M_{T_{(\zeta)}}^{EE}\frac{B_iB_j}{B^2}, \tag{5.73}$$

onde,

$$M_{T_{(\delta)}}^{EE} = \frac{2}{5}Q_{(\delta)}^{EE}, \tag{5.74}$$

$$M_{T_{(\epsilon)}}^{EE} = \frac{2}{5}Q_{(\epsilon)}^{EE}, \tag{5.75}$$

$$M_{T_{(\zeta)}}^{EE} = \frac{2}{5}Q_{(\zeta)}^{EE}. \tag{5.76}$$

Observamos que, a medida que $B \to 0$, isto é, $b_{B_{(1)}} \to 0$ e $b_{B_{(2)}} \to 0$, os termos desses tensores envolvidos com δ_{ij} tendem a um máximo, enquanto os demais termos, tendem a zero.

Para um gás único totalmente ionizado, a equação (3.66) do vetor fluxo de difusão dos elétrons, é escrita por,

$$J_i^E = -\rho_E D_{ij}^{EE} d_j^{EE} - \rho_E D_{T_{ij}}^E \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{5.77}$$

de modo que, a partir de (3.62) e (3.63) obtemos,

$$D_{ij}^{EE} = 2\frac{p}{\rho_E}M_{ij}^{EE} = 4\frac{kT}{m_E}M_{ij}^{EE}, \tag{5.78}$$

$$D^E_{T_{ij}} = \frac{5}{2}\frac{p_E}{\rho_E} M^{EE}_{T_{ij}} + \frac{5}{2}\frac{p_I}{\rho_E} M^{EI}_{T_{ij}} = \frac{5}{2}\frac{kT}{m_E} M^{EE}_{T_{ij}} . \tag{5.79}$$

Para a equação do fluxo de calor, escrevemos considerando (3.67),

$$q^E_i = \lambda^E_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} - D^{EE}_{D_{ij}} d^E_j , \tag{5.80}$$

$$q^I_i = \lambda^I_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} , \tag{5.81}$$

e de acordo com (3.64) e (3.65), temos,

$$\lambda^E_{ij} = \frac{5}{2}\frac{p_E}{m_E} kQ^{EE}_{T_{ij}} + \frac{5}{2}\frac{p_I}{m_I} kQ^{EI}_{T_{ij}} = \frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E} k^2 T Q^{EE}_{T_{ij}} \tag{5.82}$$

$$\lambda^I_{ij} = \frac{5}{2}\frac{p_E}{m_I} kQ^{IE}_{T_{ij}} + \frac{5}{2}\frac{p_I}{m_I} kQ^{II}_{T_{ij}} = \frac{5}{2}\frac{n_I}{m_I} k^2 T Q^{II}_{T_{ij}} \tag{5.83}$$

$$D^{EE}_{D_{ij}} = 2p\frac{kT}{m_E} Q^{EE}_{ij} = 4\frac{n_E}{m_E}(kT)^2 Q^{EE}_{ij} . \tag{5.84}$$

Introduzindo as orientações no espaço, paralela ($\|$), perpendicular ($\perp$) e transversal ($+$) para cada um dos vetores d^E_i e $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ de acordo com o procedimento realizado em (3.68), escrevemos, a partir de (3.70) para o gás em questão,

$$\begin{aligned} J^E_i = & -\rho_E \left(D^{(\|)}_{EE} d^E_{(\|)_i} + D^{(\perp)}_{EE} d^E_{(\perp)_i} + D^{(+)}_{EE} d^E_{(+)_i} \right) \\ & -\frac{\rho_E}{T} \left(D^{(\|)}_{T_E} (\nabla T)_{(\|)_i} + D^{(\perp)}_{T_E} (\nabla T)_{(\perp)_i} + D^{(+)}_{T_E} (\nabla T)_{(+)_i} \right) , \end{aligned} \tag{5.85}$$

onde, de (3.69) e de (5.69) e (5.73), temos,

$$D^{(\|)}_{EE} = D^{EE}_{(\delta)} + D^{EE}_{(\zeta)} = 4\frac{kT}{m_E}(M^{EE}_{(\delta)} + M^{EE}_{(\zeta)}) ,$$

$$D_{EE}^{(\perp)} = D_{(\delta)}^{EE} = 4\frac{kT}{m_E}M_{(\delta)}^{EE}\,, \tag{5.86}$$

$$D_{EE}^{(+)} = -D_{(\epsilon)}^{EE} = -4\frac{kT}{m_E}M_{(\epsilon)}^{EE}\,,$$

$$D_{T_E}^{(\parallel)} = D_{T_{(\delta)}}^{E} + D_{T_{(\zeta)}}^{E} = \frac{5}{2}\frac{kT}{m_E}(M_{T_{(\delta)}}^{EE} + M_{T_{(\zeta)}}^{EE})\,,$$

$$D_{T_E}^{(\perp)} = D_{T_{(\delta)}}^{E} = \frac{5}{2}\frac{kT}{m_E}M_{T_{(\delta)}}^{EE}\,, \tag{5.87}$$

$$D_{T_E}^{(+)} = -D_{T_{(\epsilon)}}^{E} = -\frac{5}{2}\frac{kT}{m_E}M_{T_{(\epsilon)}}^{EE}$$

assim como de (2.174) e (2.175),

$$d_{(\parallel)_i}^{E} = \frac{B_iB_k}{B^2}d_k^E\,; \qquad d_{(\perp)_i} = d_i^E - d_{(\parallel)_i}^{E}\,; \qquad d_{(+)_i}^{E} = \epsilon_{ijk}\frac{B_j}{B}d_k^E\,, \tag{5.88}$$

$$(\nabla T)_{(\parallel)_i} = \frac{B_iB_k}{B^2}\frac{\partial T}{\partial x_k}\,; \qquad (\nabla T)_{(\perp)_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} - (\nabla T)_{(\parallel)_i}\,; \qquad (\nabla T)_{(+)_i} = \epsilon_{ijk}\frac{B_j}{B}\frac{\partial T}{\partial x_k}\,. \tag{5.89}$$

O vetor densidade de corrente elétrica (2.185), é escrito para este tipo de gás,

$$J_i = \frac{e_E}{m_E}J_i^E + \frac{e_I}{m_I}J_i^I = \left(\frac{e_E}{m_E} - \frac{e_I}{m_I}\right)J_i^E \cong \frac{e_E}{m_E}J_i^E\,, \tag{5.90}$$

onde consideramos (1.92) e $m_E \ll m_I$. Usando o vetor força de fluxo de difusão modificado para o campo elétrico, (2.187), escrevemos a densidade de corrente elétrica (3.73), com as considerações de (5.90), como,

$$J_i = -\left(\sigma_{EE}^{(\parallel)}d_{E/(\parallel)_i}^{E} + \sigma_{EE}^{(\perp)}d_{E/(\perp)_i}^{E} + \sigma_{EE}^{(+)}d_{E/(+)_i}^{E}\right) - \left(\phi^{(\parallel)}(\nabla T)_{(\parallel)_i} + \phi^{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i} + \phi^{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}\right) \tag{5.91}$$

onde de (3.74) obtemos o coeficiente de condutividade elétrica do gás,

$$\sigma_{EE}^{(\parallel)} = \frac{n_Ee_E}{p}\left[n_Ee_E - \frac{\rho_E}{\rho}(n_Ee_E + n_Ie_I)\right]D_{EE}^{(\parallel)} = \frac{(n_Ee_E)^2}{2n_EkT}D_{EE}^{(\parallel)} = 2\frac{n_Ee_E^2}{m_E}(M_{(\delta)}^{EE} + M_{(\zeta)}^{EE})\,, \tag{5.92}$$

$$\sigma_{EE}^{(\perp)} = \frac{(n_E e_E)^2}{p} D_{EE}^{(\perp)} = 2\frac{n_E e_E^2}{m_E} M_{(\delta)}^{EE} \tag{5.93}$$

$$\sigma_{EE}^{(+)} = \frac{(n_E e_E)^2}{p} D_{EE}^{(+)} = -2\frac{n_E e_E^2}{m_E} M_{(\zeta)}^{EE}, \tag{5.94}$$

assim como de (3.75), podemos escrever o coeficiente termo-elétrico do gás totalmente ionizado por,

$$\phi^{(\parallel)} = \frac{n_E e_E}{T} D_{T_E}^{(\parallel)} = \frac{5}{2}\frac{n_E e_E}{m_E} k(M_{T(\delta)}^{EE} + M_{T(\zeta)}^{EE}), \tag{5.95}$$

$$\phi^{(\perp)} = \frac{n_E e_E}{T} D_{T_E}^{(\perp)} = \frac{5}{2}\frac{n_E e_E}{m_E} k M_{T(\delta)}^{EE}, \tag{5.96}$$

$$\phi^{(+)} = \frac{n_E e_E}{T} D_{T_E}^{(+)} = -\frac{5}{2}\frac{n_E e_E}{m_E} k M_{T(\zeta)}^{EE}. \tag{5.97}$$

Do mesmo modo o vetor fluxo de calor, obtido de (3.84) para este tipo de gás, resulta na expressão,

$$\begin{aligned} q_i = &-(\lambda^{(\parallel)}(\nabla T)_{(\parallel)_i} + \lambda^{(\perp)}(\nabla T)_{(\perp)_i} + \lambda^{(+)}(\nabla T)_{(+)_i}) \\ &+\frac{p}{\rho_E}\left[\left(k_T^{(\parallel)} + \frac{5}{2}\frac{n_E}{n}\right) J_{(\parallel)_i}^E + \left(k_T^{(\perp)} + \frac{5}{2}\frac{n_E}{n}\right) J_{(\perp)_i}^E + \left(k_T^{(+)} + \frac{5}{2}\frac{n_E}{n}\right) J_{(+)_i}^E\right], \end{aligned} \tag{5.98}$$

onde de (3.85), temos,

$$\begin{aligned} \lambda^{(\parallel)} &= \lambda_E^{(\parallel)} + \lambda_I^{(\parallel)} - nkk_T^{(\parallel)} D_{T_E}^{(\parallel)}, \\ \lambda^{(\perp)} &= \lambda_E^{(\perp)} + \lambda_I^{(\perp)} - nkk_T^{(\perp)} D_{T_E}^{(\perp)}, \\ \lambda^{(+)} &= \lambda_E^{(+)} + \lambda_I^{(+)} - nkk_T^{(+)} D_{T_E}^{(+)}. \end{aligned} \tag{5.99}$$

Como a partir de (5.82) e (5.83), usando (5.54) a (5.54) e (5.87), podemos escrever,

$$\lambda_E^{(\parallel)} = \frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E} k^2 T Q_{TEE}^{(\parallel)} = \frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E} k^2 T (Q_{T(\delta)}^{(EE)} + Q_{T(\zeta)}^{(EE)}),$$

$$\lambda_E^{(\perp)} = \frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E}k^2TQ_{T_{(\delta)}}^{(EE)}, \tag{5.100}$$

$$\lambda_E^{(+)} = -\frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E}k^2TQ_{T_{(\epsilon)}}^{(EE)},$$

$$\lambda_I^{(\|)} = \frac{5}{2}\frac{n_I}{m_I}k^2TQ_{T_{II}}^{(\|)} = \frac{5}{2}\frac{n_I}{m_I}k^2T(Q_{T_{(\delta)}}^{(II)} + Q_{T_{(\zeta)}}^{(II)}),$$

$$\lambda_I^{(\perp)} = \frac{5}{2}\frac{n_I}{m_I}k^2TQ_{T_{(\delta)}}^{(II)}, \tag{5.101}$$

$$\lambda_I^{(+)} = -\frac{5}{2}\frac{n_I}{m_I}k^2TQ_{T_{(\epsilon)}}^{(II)},$$

assim como de (5.84), para o qual definimos,

$$D_{D_{ij}}^{EE} = D_{D_{(\delta)}}^{EE}\delta_{ij} + D_{D_{(\epsilon)}}^{EE}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + D_{D_{(\zeta)}}^{EE}\frac{B_iB_j}{B^2}, \tag{5.102}$$

com,

$$D_{D_{EE}}^{(\|)} = (D_{D_{(\delta)}}^{EE} + D_{D_{(\zeta)}}^{EE}) = 2p\frac{kT}{m_E}(Q_{(\delta)}^{EE} + Q_{(\zeta)}^{EE}),$$

$$D_{D_{EE}}^{(\perp)} = D_{D_{(\delta)}}^{EE} = 2p\frac{kT}{m_E}Q_{(\delta)}^{EE}, \tag{5.103}$$

$$D_{D_{EE}}^{(+)} = -D_{D_{(\epsilon)}}^{EE} = -2p\frac{kT}{m_E}Q_{(\epsilon)}^{EE},$$

expressamos então, considerando (3.82),

$$k_T^{(\|)} = \frac{1}{p}\frac{D_{D_{EE}}^{(\|)}}{D_{EE}^{(\|)}} = \frac{1}{2}\frac{Q_{(\delta)}^{EE} + Q_{(\zeta)}^{EE}}{M_{(\delta)}^{EE} + M_{(\zeta)}^{EE}},$$

$$k_T^{(\perp)} = \frac{1}{p}\frac{D_{D_{EE}}^{(\perp)}}{D_{EE}^{(\perp)}} = \frac{1}{2}\frac{Q_{(\delta)}^{EE}}{M_{(\delta)}^{EE}}, \tag{5.104}$$

$$k_T^{(+)} = \frac{1}{p}\frac{D_{D_{EE}}^{(+)}}{D_{EE}^{(+)}} = \frac{1}{2}\frac{Q_{(\epsilon)}^{EE}}{M_{(\epsilon)}^{EE}}.$$

Desse modo, o coeficiente de condutividade térmica do gás totalmente ionizado, pode ser representado por,

$$\lambda^{(\|)} = \frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E}k^2T\left[Q^{EE}_{T(\delta)} + Q^{EE}_{T(\zeta)} + \frac{m_E}{m_I}(Q^{II}_{T(\delta)} + Q^{II}_{T(\zeta)}) - \frac{2}{5}\frac{(Q^{EE}_{(\delta)} + Q^{EE}_{(\zeta)})^2}{M^{EE}_{(\delta)} + M^{EE}_{(\zeta)}}\right],$$

$$\lambda^{(\perp)} = \frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E}k^2T\left[Q^{EE}_{T(\delta)} + \frac{m_E}{m_I}Q^{II}_{T(\delta)} - \frac{2}{5}\frac{(Q^{EE}_{(\delta)})^2}{M^{EE}_{(\delta)}}\right], \tag{5.105}$$

$$\lambda^{(+)} = -\frac{5}{2}\frac{n_E}{m_E}k^2T\left[Q^{EE}_{T(\epsilon)} + \frac{m_E}{m_I}Q^{II}_{T(\epsilon)} - \frac{2}{5}\frac{(Q^{EE}_{(\epsilon)})^2}{M^{EE}_{(\epsilon)}}\right].$$

Ficam determinados assim, em função de grandezas microscópicas próprias do gás, os vetores q_i^α, ou q_i e J_i^α ou J_i. Em uma análise rápida dos coeficientes obtidos acima, verificamos que os termos dos coeficientes nas direções ($\|$) e ($\perp$) tendem a um mesmo valor, a medida que B se aproxima de zero, enquanto os termos dos coeficientes na direção ($+$) tendem a zero.

5.1.2 *O Tensor Pressão*

Resolvendo o sistema de equações (5.41) e (5.42), para, p^E_{ij} e p^I_{ij}, obtemos diretamente,

$$p^E_{<ij>} = -2p_E\left(N^{EE}_{<ij><kl>}\right)^{-1}\frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}}, \tag{5.106}$$

$$p^I_{<ij>} = -2p_I\left(N^{II}_{<ij><kl>}\right)^{-1}\frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}}, \tag{5.107}$$

onde, a partir de (5.15) e (5.18), considerando (3.94) e (3.95), temos,

$$N^{EE}_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}L_{EE}\left(n_{(\delta)<ij><kl>} + b_{B(3)}n_{(\epsilon)<ij><kl>}\right), \tag{5.108}$$

$$N^{II}_{<ij><kl>} = \frac{1}{2}L_{II}\left(n_{(\delta)<ij><kl>} + b_{B(4)}n_{(\epsilon)<ij><kl>}\right), \tag{5.109}$$

com,

$$b_{B(3)} = \frac{e_E B}{m_E L_{EE}}, \tag{5.110}$$

$$b_{B_{(4)}} = \frac{e_I B}{m_I L_{II}} . \tag{5.111}$$

De acordo com a equação (3.104), os tensores inversos de (5.108) e (5.109), são representados por,

$$\left(N^{EE^{-1}}\right)_{<ij><kl>} = \frac{2}{L_{EE}} \frac{1}{4(1+4b^2_{B_{(3)}})} \left[n_{(\delta)<ij><kl>} + b_{B_{(3)}} n_{(\epsilon)<ij><kl>} \right.$$

$$\left. +3\frac{b^2_{B_{(3)}}}{1+b^2_{B_{(3)}}} \left(n_{(\zeta)<ij><kl>} + b_{B_{(3)}} n_{(\eta)<ij><kl>} + 4b^2_{B_{(3)}} n_{(\theta)<ij><kl>} \right) \right] , \tag{5.112}$$

$$\left(N^{II^{-1}}\right)_{<ij><kl>} = \frac{2}{L_{II}} \frac{1}{4(1+4b^2_{B_{(4)}})} \left[n_{(\delta)<ij><kl>} + b_{B_{(4)}} n_{(\epsilon)<ij><kl>} \right.$$

$$\left. +3\frac{b^2_{B_{(4)}}}{1+b^2_{B_{(4)}}} \left(n_{(\zeta)<ij><kl>} + b_{B_{(4)}} n_{(\eta)<ij><kl>} + 4b^2_{B_{(4)}} n_{(\theta)<ij><kl>} \right) \right] . \tag{5.113}$$

Comparando as equações (5.106) e (5.107) com (3.108), identificamos os coeficientes de viscosidade cisallhante parciais, para os quais escrevemos,

$$\mu^E_{<ij><kl>} = \frac{p_E}{L_{EE}} \frac{1}{2(1+4b^2_{B_{(3)}})} \left(n_{(\delta)<ij><kl>} + b_{B_{(3)}} n_{(\epsilon)<ij><kl>} + 3\frac{b^2_{B_{(3)}}}{1+b^2_{B_{(3)}}} n_{(\zeta)<ij><kl>} \right.$$

$$\left. +3\frac{b^3_{B_{(3)}}}{1+b^2_{B_{(3)}}} n_{(\eta)<ij><kl>} + 12\frac{b^4_{B_{(3)}}}{1+b^2_{B_{(3)}}} n_{(\theta)<ij><kl>} \right) , \tag{5.114}$$

$$\mu^I_{<ij><kl>} = \frac{p_I}{L_{II}} \frac{1}{2(1+4b^2_{B_{(4)}})} \left(n_{(\delta)<ij><kl>} + b_{B_{(4)}} n_{(\epsilon)<ij><kl>} + 3\frac{b^2_{B_{(4)}}}{1+b^2_{B_{(4)}}} n_{(\zeta)<ij><kl>} \right.$$

$$\left. +3\frac{b^3_{B_{(4)}}}{1+b^2_{B_{(4)}}} n_{(\eta)<ij><kl>} + 12\frac{b^4_{B_{(4)}}}{1+b^2_{B_{(4)}}} n_{(\theta)<ij><kl>} \right) . \tag{5.115}$$

O coeficiente de viscosidade cisalhante do gás totalmente ionizado, pode então ser obtido de sua definição, (3.115). Assim de (5.114) e (5.115), escrevemos,

$$\mu_{<ij><kl>} = \mu^{E}_{<ij><kl>} + \mu^{I}_{<ij><kl>} \,, \tag{5.116}$$

e como,

$$\mu_{<ij><kl>} = \mu_{(\delta)} n_{(\delta)<ij><kl>} + \mu_{(\epsilon)} n_{(\epsilon)<ij><kl>} + \mu_{(\zeta)} n_{(\zeta)<ij><kl>} + \mu_{(\eta)} n_{(\eta)<ij><kl>} + \mu_{(\theta)} n_{(\theta)<ij><kl>} \,, \tag{5.117}$$

temos,

$$\mu_{(\delta)} = \frac{1}{2}\frac{n_E}{L_{EE}} kT \left(\frac{1}{1+4b^2_{B(3)}} + \frac{L_{EE}}{L_{II}} \frac{1}{1+4b^2_{B(4)}} \right) \,, \tag{5.118}$$

$$\mu_{(\epsilon)} = \frac{1}{2}\frac{n_E}{L_{EE}} kT \left(\frac{b_{B(3)}}{1+4b^2_{B(3)}} + \frac{L_{EE}}{L_{II}} \frac{b_{B(4)}}{1+4b^2_{B(4)}} \right) \,, \tag{5.119}$$

$$\mu_{(\zeta)} = \frac{3}{2}\frac{n_E}{L_{EE}} kT \left[\frac{b^2_{B(3)}}{(1+4b^2_{B(3)})(1+b^2_{B(3)})} + \frac{L_{EE}}{L_{II}} \frac{b^2_{B(4)}}{(1+4b^2_{B(4)})(1+b^2_{B(4)})} \right] \,, \tag{5.120}$$

$$\mu_{(\eta)} = \frac{3}{2}\frac{n_E}{L_{EE}} kT \left[\frac{b^3_{B(3)}}{(1+4b^2_{B(3)})(1+b^2_{B(3)})} + \frac{L_{EE}}{L_{II}} \frac{b^3_{B(4)}}{(1+4b^2_{B(4)})(1+b^2_{B(4)})} \right] \,, \tag{5.121}$$

$$\mu_{(\theta)} = 6\frac{n_E}{L_{EE}} kT \left[\frac{b^4_{B(3)}}{(1+4b^2_{B(3)})(1+b^2_{B(3)})} + \frac{L_{EE}}{L_{II}} \frac{b^4_{B(4)}}{(1+4b^2_{B(4)})(1+b^2_{B(4)})} \right] \,. \tag{5.122}$$

Como o tensor pressão, de (1.84) com (1.82), pode ser dado por,

$$p_{ij} = p\delta_{ij} + p_{<ij>} \,, \tag{5.123}$$

com,

$$p = nkT \,, \tag{5.124}$$

e

$$p_{<ij>} = -2\mu_{<ij><kl>} \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{<l}} \,, \tag{5.125}$$

também este termo constitutivo torna-se determinado.

Se direcionarmos, sem perda de generalidade, o campo magnético na direção x, $\mathbf{B} = \hat{B}_x\hat{\imath}$, o tensor viscosidade cisalhante, em termos de cinco componentes linearmente independentes, pode ser obtido como em (3.118) a (3.123), com (3.124) a (3.128). Assim podemos escrever, considerando o apêndice C e (5.118) a (5.122),

$$\mu_1 = \frac{2}{3}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)}) = \frac{n_E}{L_{EE}}kT\left(1 + \frac{L_{EE}}{L_{II}}\right), \tag{5.126}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}(6\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)}) = \frac{n_E}{L_{EE}}kT\left(\frac{1 + 2b^2_{B(3)}}{1 + 4b^2_{B(3)}} + \frac{L_{EE}}{L_{II}}\frac{1 + 2b^2_{B(4)}}{1 + 4b^2_{B(4)}}\right), \tag{5.127}$$

$$\mu_3 = 2(\mu_{(\delta)} + \mu_{(\zeta)}) = \frac{n_E}{L_{EE}}kT\left(\frac{1}{1 + b^2_{B(3)}} + \frac{L_{EE}}{L_{II}}\frac{1}{1 + b^2_{B(4)}}\right), \tag{5.128}$$

$$\mu_4 = 4\mu_{(\epsilon)} = 2\frac{n_E}{L_{EE}}kT\left(\frac{b_{B(3)}}{1 + 4b^2_{B(3)}} + \frac{L_{EE}}{L_{II}}\frac{b_{B(4)}}{1 + 4b^2_{B(4)}}\right), \tag{5.129}$$

$$\mu_5 = 2(\mu_{(\epsilon)} + \mu_{(\eta)}) = \frac{n_E}{L_{EE}}kT\left(\frac{b_{B(3)}}{1 + b^2_{B(3)}} + \frac{L_{EE}}{L_{II}}\frac{b^2_{B(4)}}{1 + b^2_{B(4)}}\right). \tag{5.130}$$

Observamos das relações acima, que para $B_x \to 0$ temos $b_{B(3)} \to 0$ e $b_{B(4)} \to 0$, e portanto, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ e $\mu_4 = 0 = \mu_5$.

5.2 Representações Gráficas

Uma análise mais precisa dos coeficientes de transporte, pode ser feita através de gráficos. Os coeficientes são funções de grandezas macroscópicas como o campo magnético, temperatura e densidade, assim como de grandezas com características microscópicas, como as envolvidas nos cálculos das integrais de colisão.

Supondo, como exemplo, um gás totalmente ionizado, formado pelo He^+ e elétrons, com densidades, $n_I = n_E = 1,0 \times 10^{20}$ part/m^3, podemos plotar os coeficientes de transporte em relação às variáveis, campo magnético e a temperatura. Muito embora, para temperaturas abaixo de $2,0 \times 10^4$K, este gás ainda não esteja totalmente ionizado, como na fig. (4.3), esta teoria ainda poderá ser empregada, ou seja, este gás se comporta ainda como totalmente

ionizado a partir de uma taxa de ionização da ordem de $1\sim 1,0 \times 10^4$K. Para temperaturas menores, o gás deverá ser considerado como parcialmente ionizado, necessitando então, para o seu estudo, a inclusão das partículas neutras. Desse modo, plotaremos inicialmente os gráficos dos coeficientes de transporte, em função do campo magnético (módulo), para duas temperaturas dadas, $T = 15.10^3$K e $T = 25.10^3$K. Em seguida, para que possamos fazer uma boa análise dos mesmos coeficientes, os plotaremos, então, em função da temperatura, dado o campo magnético, em três situações de interesse, $B = 0$, $B = 0,01$T e $B = 0,1$T. Para campo nulo, verificamos o comportamento já esperado; para os valores de campo no segundo caso, os coeficientes assumem valores expressivos; para o terceiro caso, devido tratar-se de uma intensidade na qual a trajetória dos elétrons, em torno das linhas de campo magnético, provoca um raio da ordem do comprimento de Debye e portanto atingindo o limite de de validade, em relação ao valor do campo, para esta teoria.

Assim temos nas figuras (5.1), (5.2) e (5.3) as curvas para o coeficiente de condutividade elétrica nas direções paralela ($\|$), perpendicular ($\perp$) e transversal ($+$) respectivamente em função do campo magnético para duas temperaturas dadas. Para as mesmas direções, temos as curvas do coeficiente termo-elétrico nas figuras, (5.4), (5.5) e (5.6). Aqui observamos que estes coeficientes assumem em determinadas regiões dos gráficos valores negativos, como esperado, [1]. Nas figuras (5.7), (5.8) e (5.9) são mostradas, respectivamente, as curvas do coeficiente de condutividade térmica, também nas direções ($\|$), ($\perp$) e ($+$). Para as figuras (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14), mostramos as curvas para as mesmas duas temperaturas dadas, dos componentes linearmente independentes do coeficiente de viscosidade cisalhante, expressos em função do campo magnético.

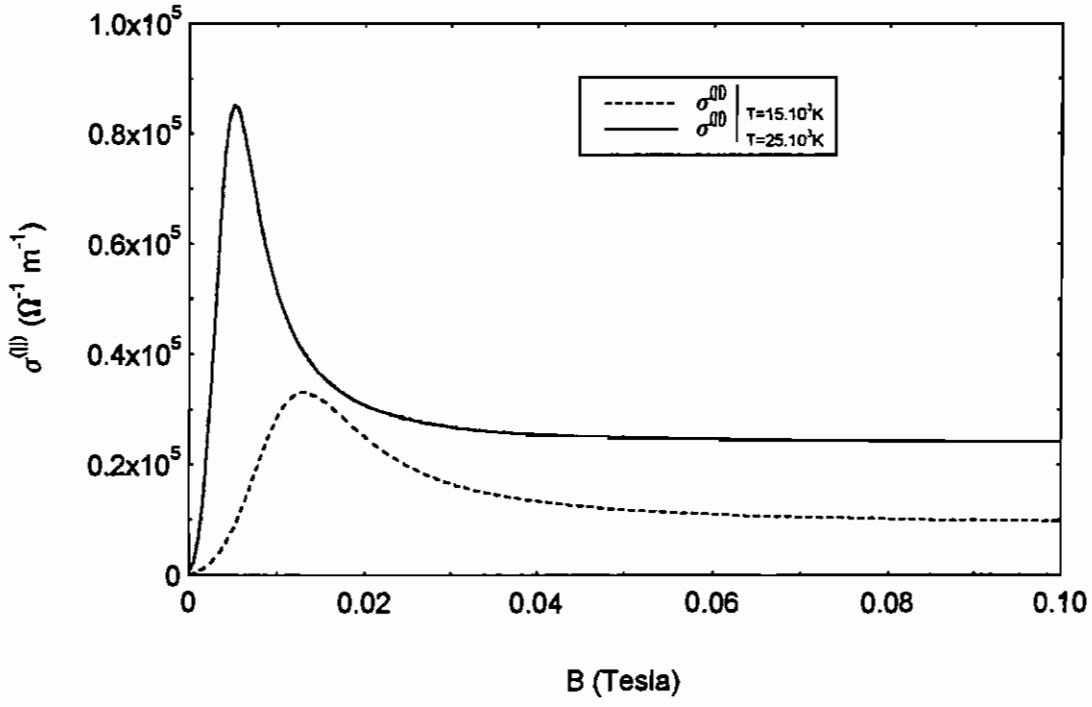


Figura 5.1: Coeficiente de Condutividade Elétrica na Direção Paralela em relação ao campo magnético.

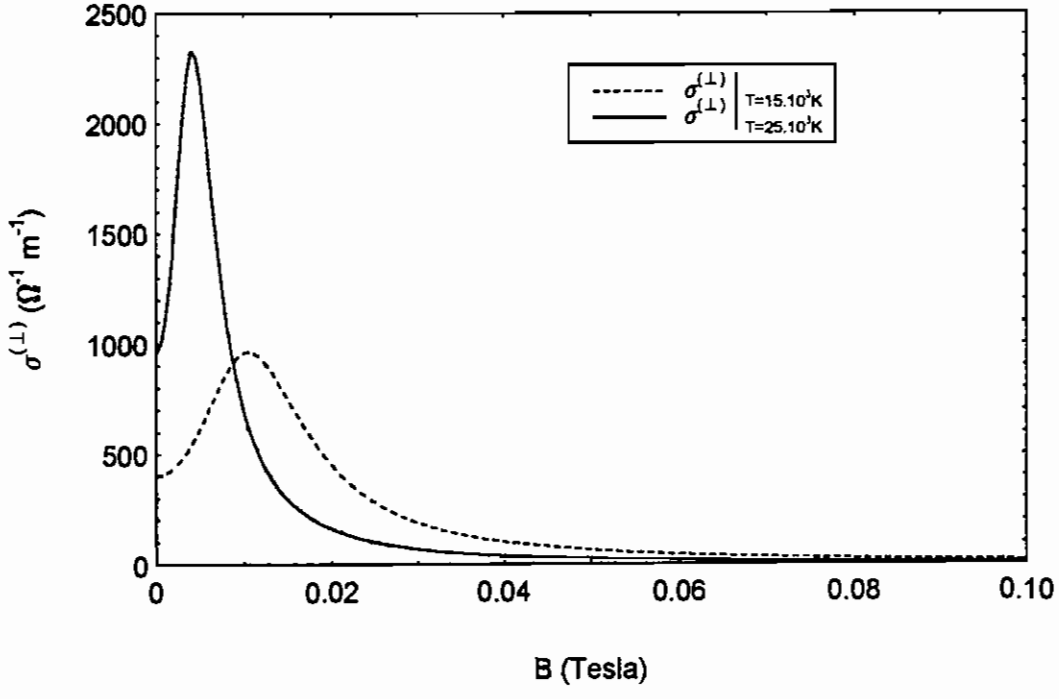


Figura 5.2: Coeficiente de Condutividade Elétrica na Direção Perpendicular em relação ao campo magnético.

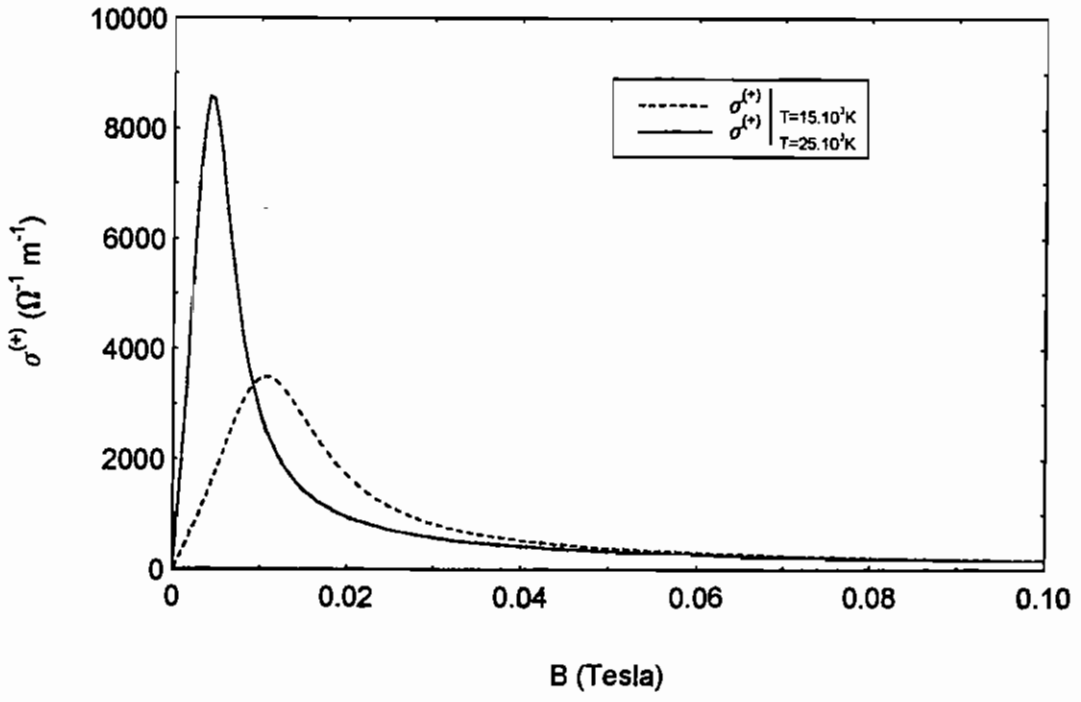


Figura 5.3: Coeficiente de Condutividade Elétrica na Direção Transversal em relação ao campo magnético.

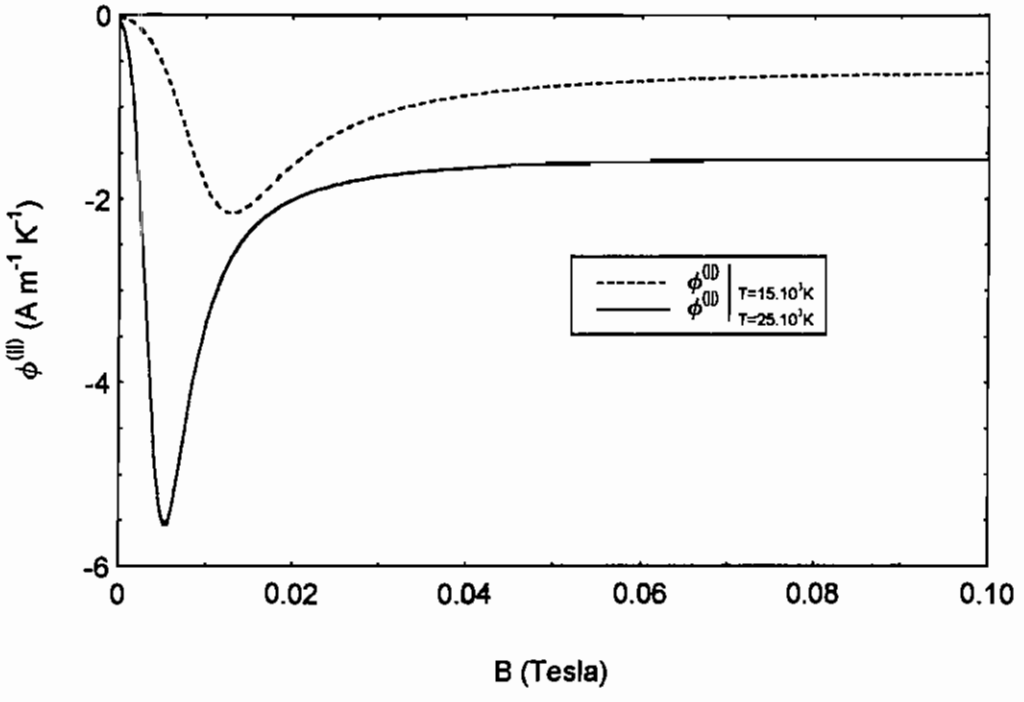


Figura 5.4: Coeficiente Termo-Elétrico na Direção Paralela em relação ao campo magnético.

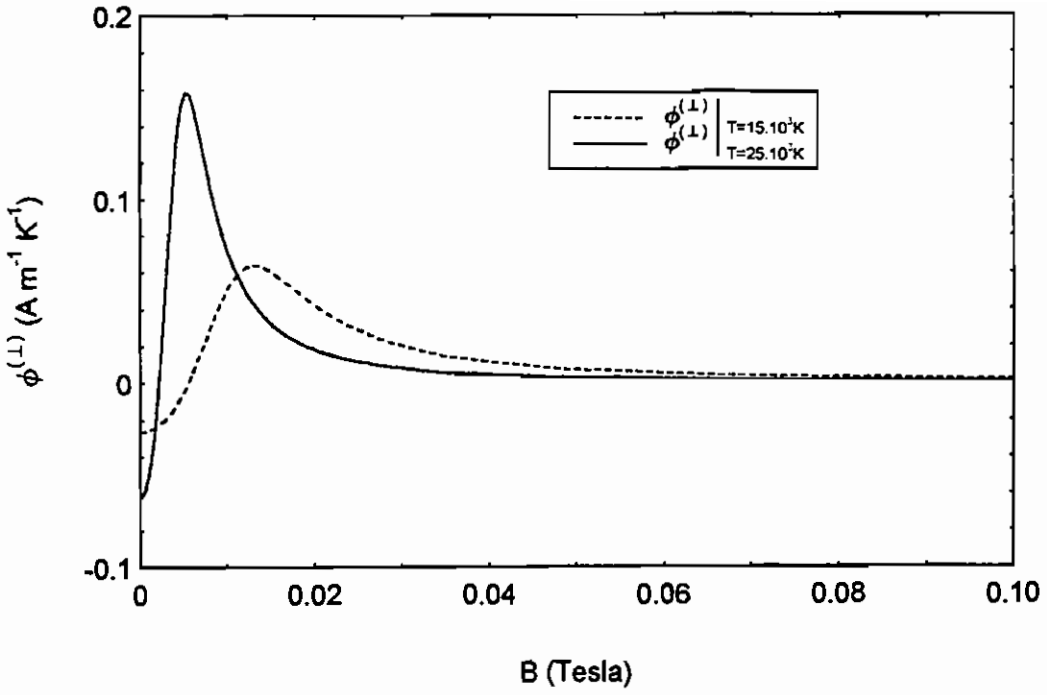


Figura 5.5: Coeficiente Termo-Elétrico na Direção Perpendicular em relação ao campo magnético.

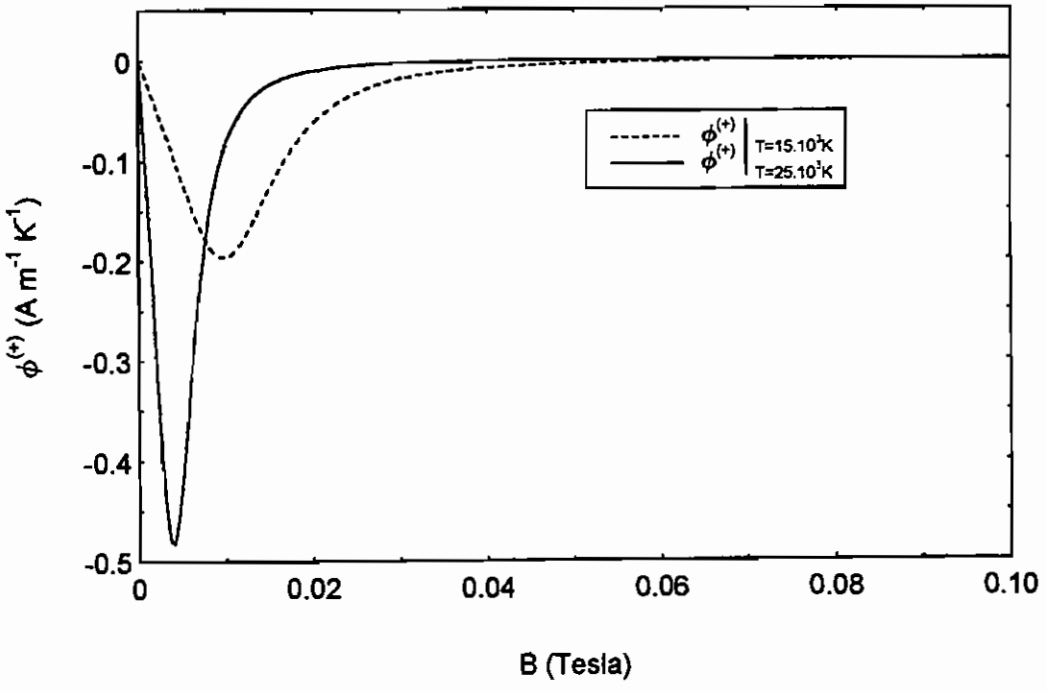


Figura 5.6: Coeficiente Termo-Elétrico na Direção Transversal em relação ao campo magnético.

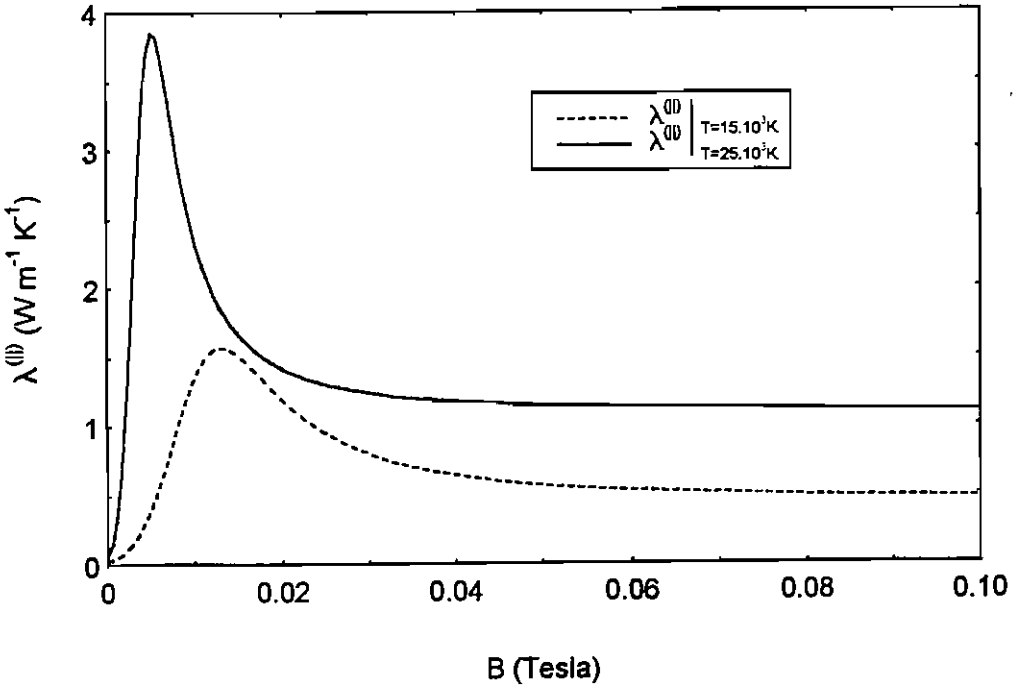


Figura 5.7: Coeficiente de Condutividade Térmica na Direção Paralela em relação ao campo magnético.

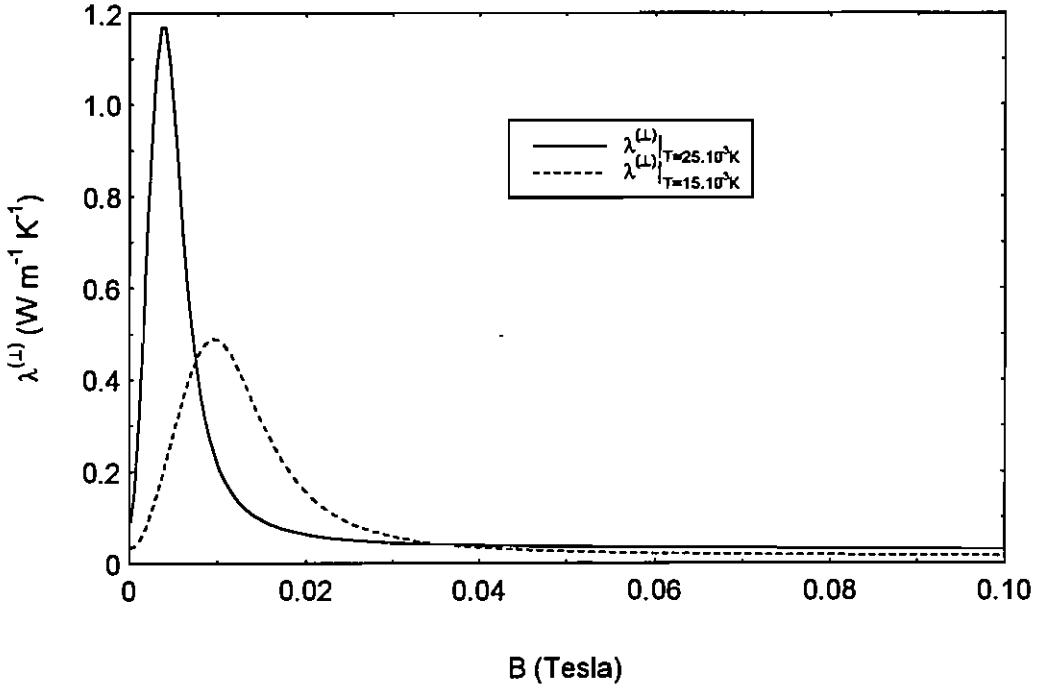


Figura 5.8: Coeficiente de Condutividade Térmica na Direção Perpendicular em relação ao campo magnético.

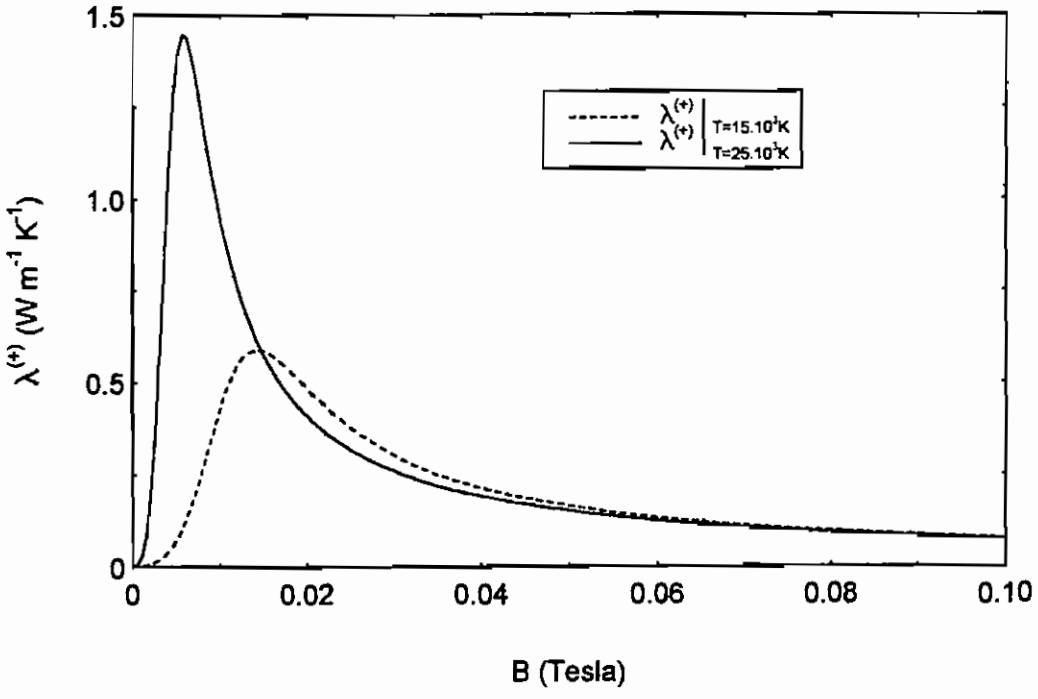


Figura 5.9: Coeficiente de Condutividade Térmica na Direção Transversal em relação ao campo magnético.

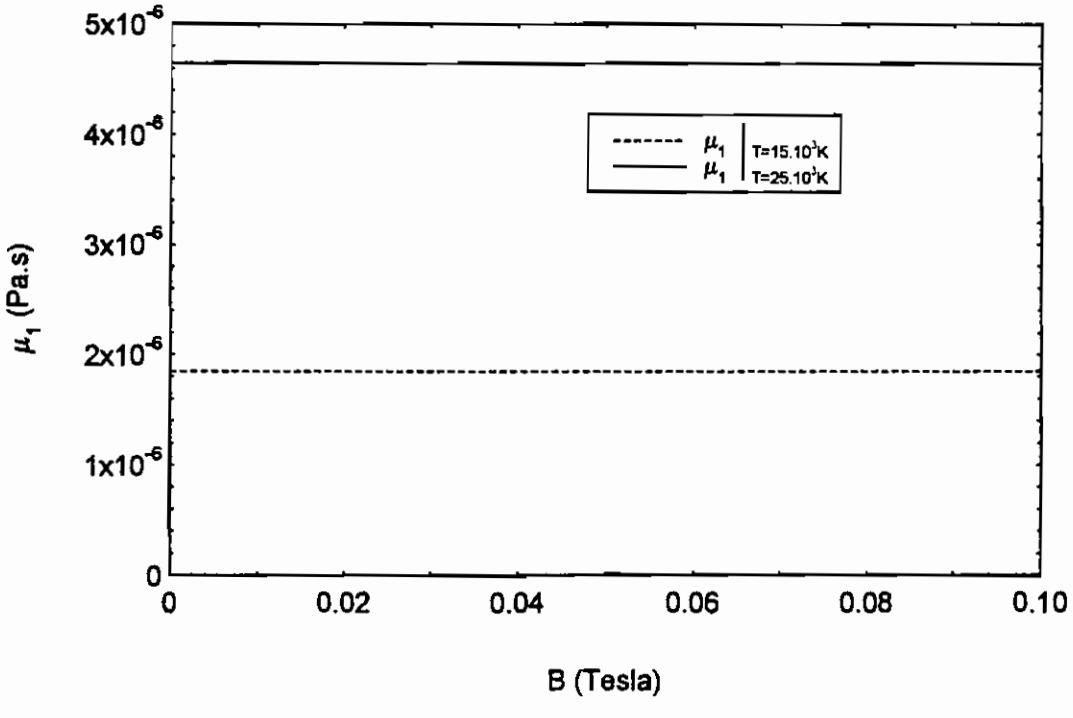


Figura 5.10: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_1 em relação ao campo magnético.

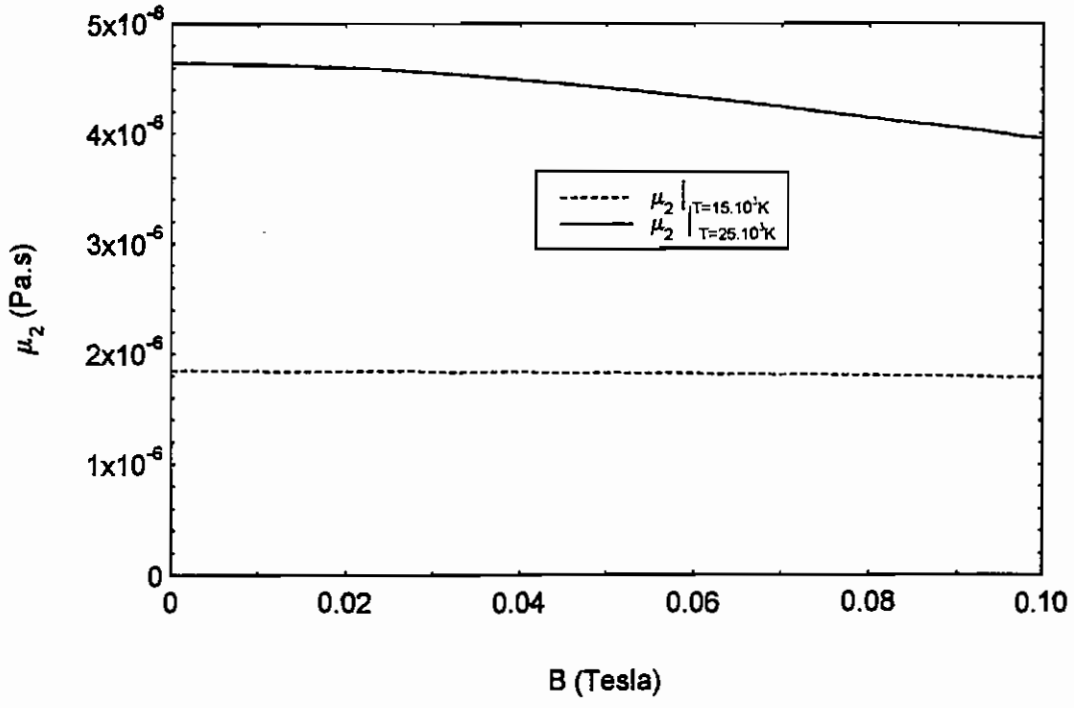


Figura 5.11: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_2 em relação ao campo magnético.

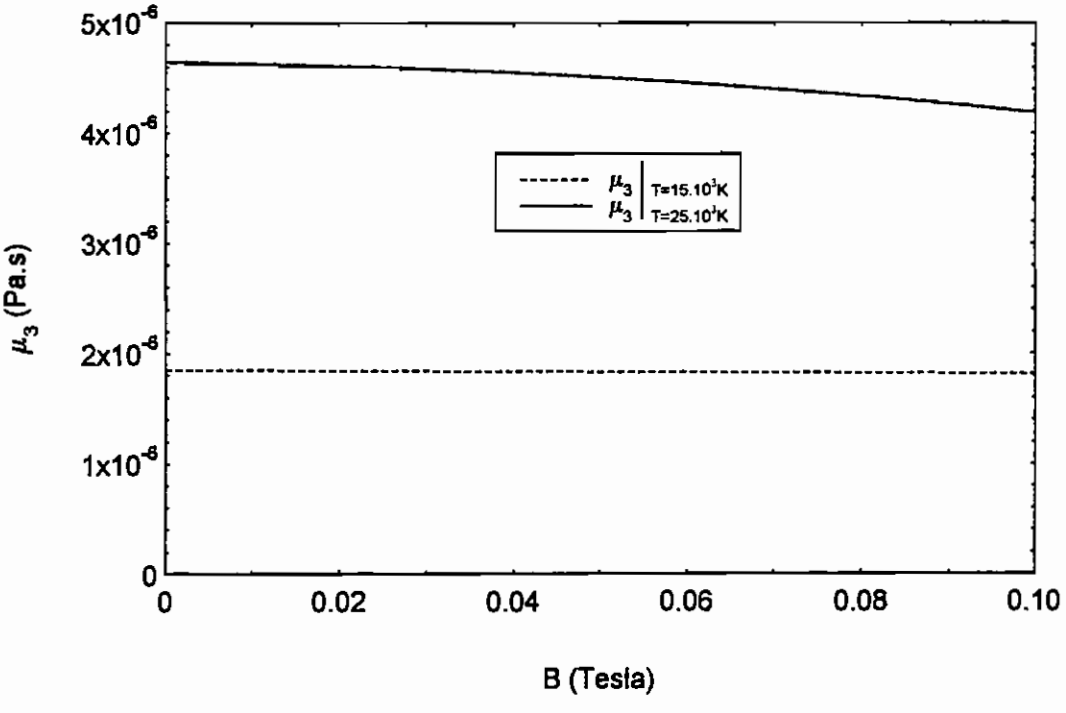


Figura 5.12: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_3 em relação ao campo magnético.

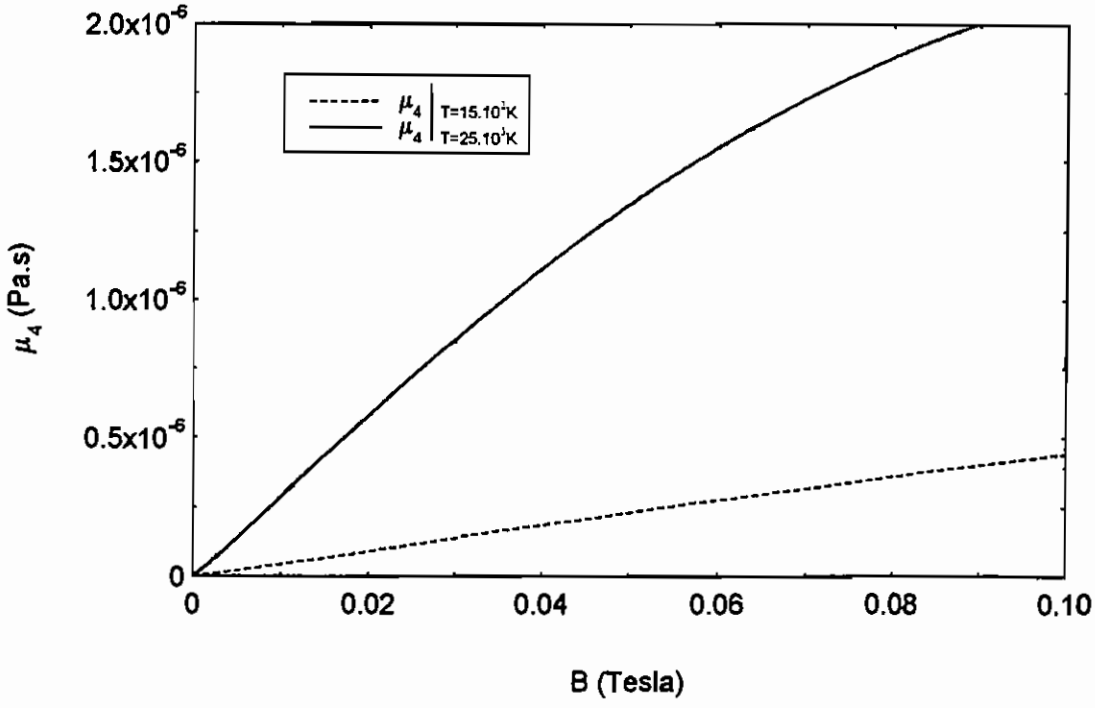


Figura 5.13: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_4 em relação ao campo magnético.

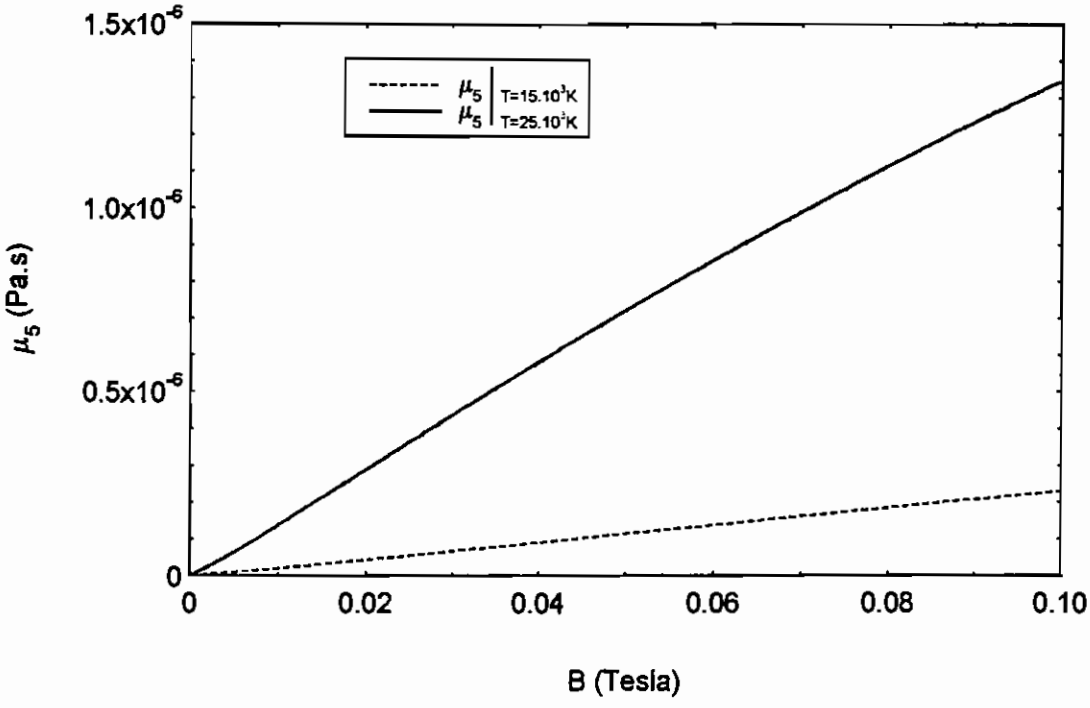


Figura 5.14: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_5 em relação ao campo magnético.

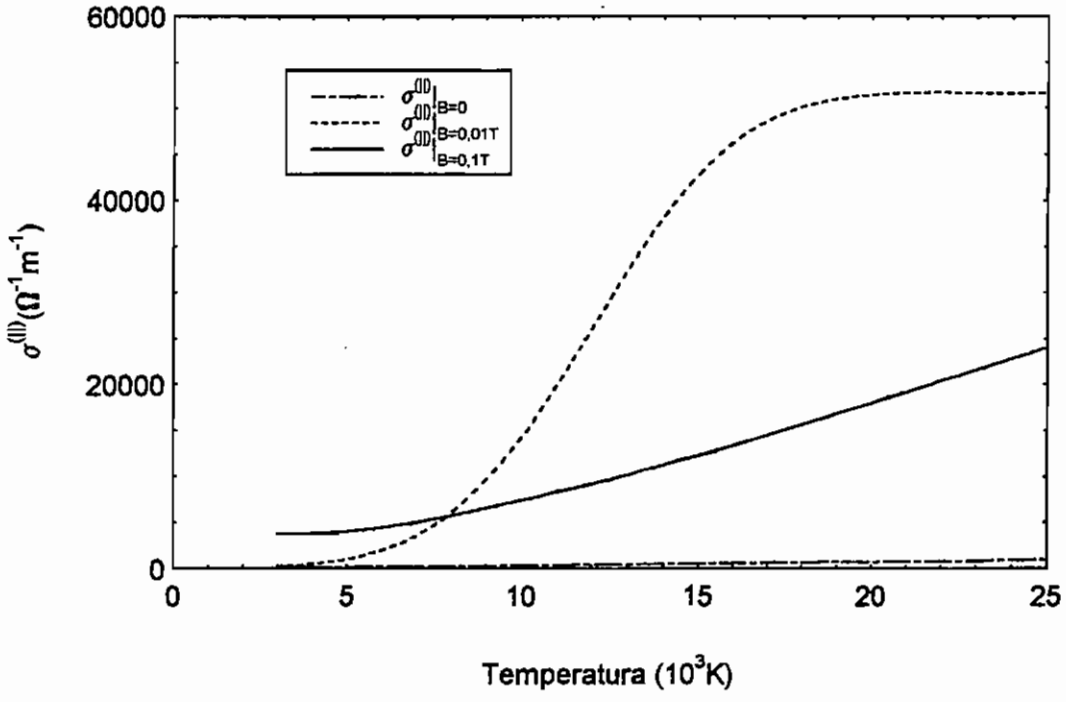


Figura 5.15: Coeficiente de Condutividade Elétrica Paralela em função da temperatura.

Para esses mesmos coeficientes, mostramos agora os gráficos em função da temperatura para três curvas correspondentes aos valores do campo magnético, nulo, $1,0 \times 10^{-2}$T e $1,0 \times 10^{-1}$T. Assim nas figuras (5.15), (5.16) e (5.17) temos o coeficiente de condutividade elétrica nas respectivas direções , ($\|$), ($\perp$) e ($+$). Observamos destas figuras que para campo magnéticos fracos este coeficiente na direção ($\perp$) assume a metade do valor do coeficiente na direção ($\|$), "relação de Spitzer" mas com o aumento do campo essa relação desaparece. Nas figuras (5.18), (5.19) e (5.20) nas mesmas direções ja citadas, temos o coeficiente termo-elétrico, assim como nas figuras (5.21), (5.22) e (5.23) os coeficientes de condutividade térmica. Para o coeficiente de viscosidade cisalhante, plotamos nas figuras (5.24), (5.25), (5.26), (5.27) e (5.28) os seus componentes linearmente independentes para o campo magnético $\mathbf{B} = B_x\hat{\imath}$.

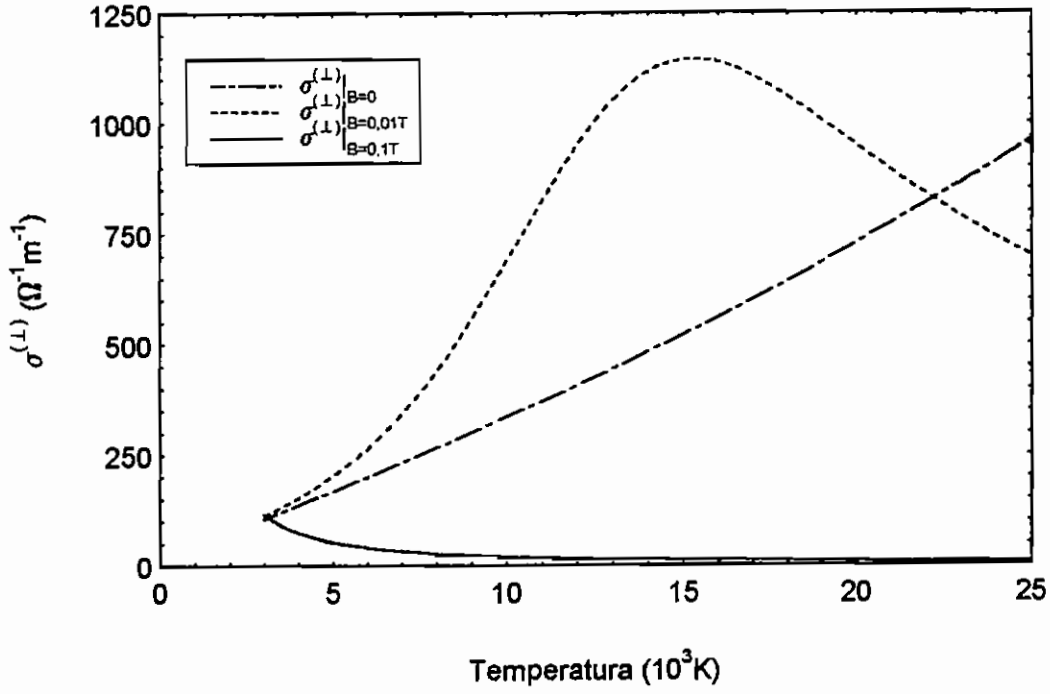


Figura 5.16: Coeficiente de Condutividade Elétrica Perpendicular em função da temperatura.

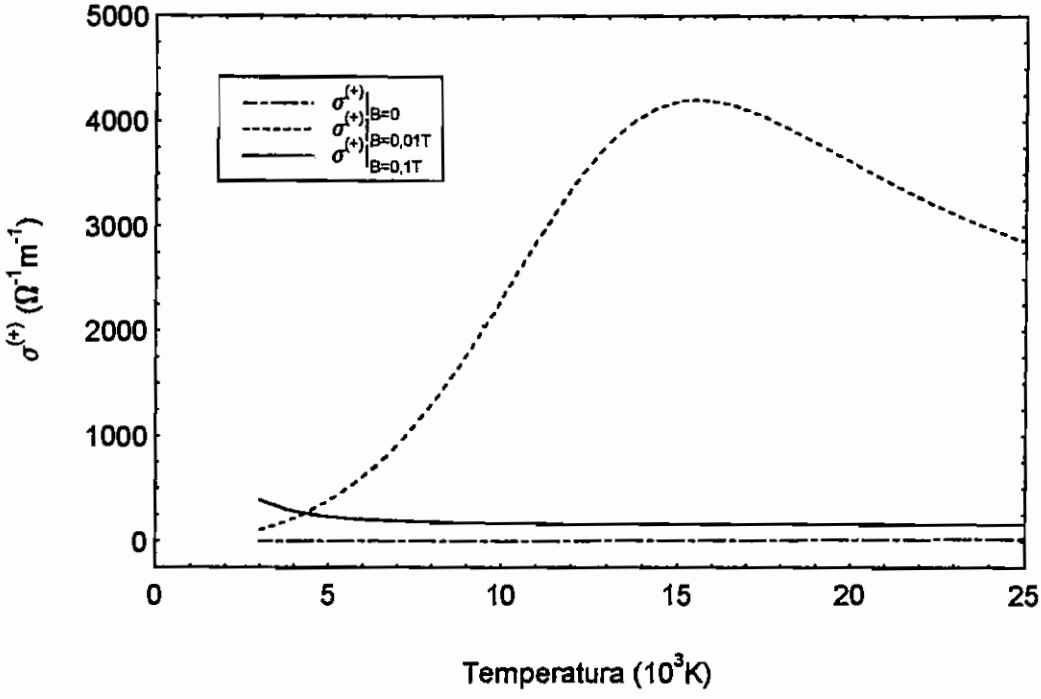


Figura 5.17: Coeficiente de Condutividade Elétrica Transversal em função da temperatura.

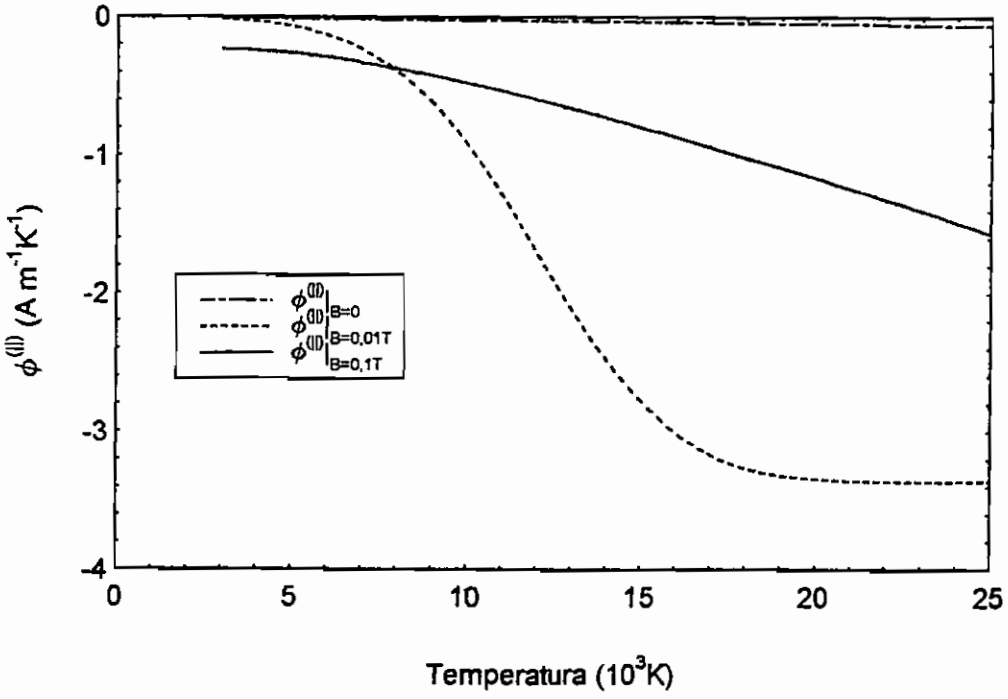


Figura 5.18: Coeficiente Termo-Elétrico Paralela em função da temperatura.

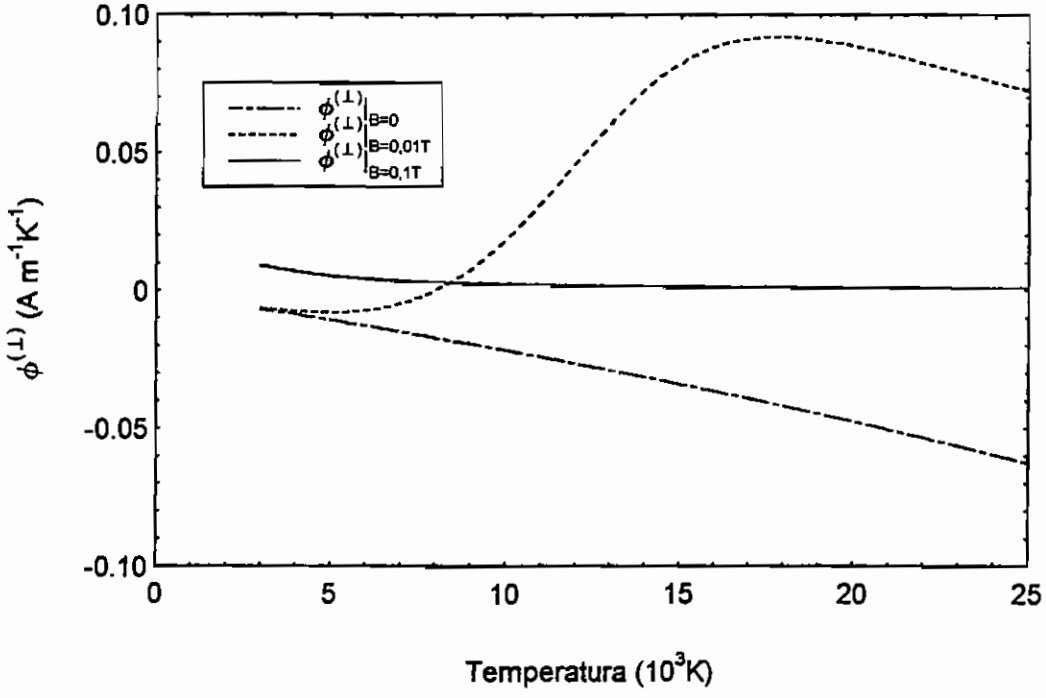


Figura 5.19: Coeficiente Termo-Elétrico Perpendicular em função da temperatura.

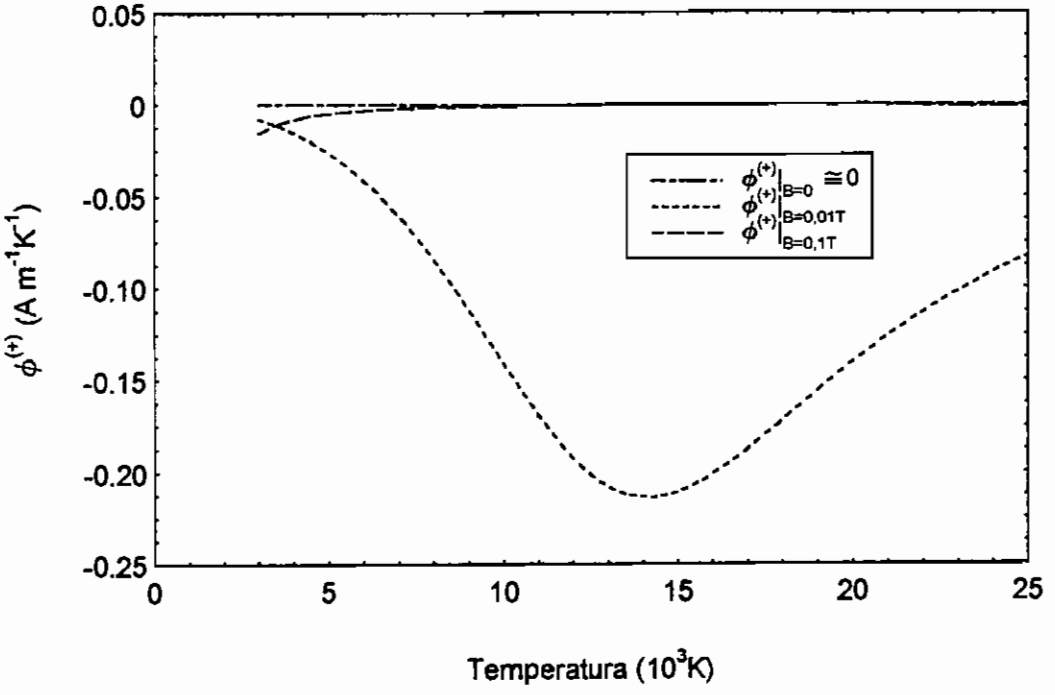


Figura 5.20: Coeficiente Termo-Elétrico Transversal em função da temperatura.

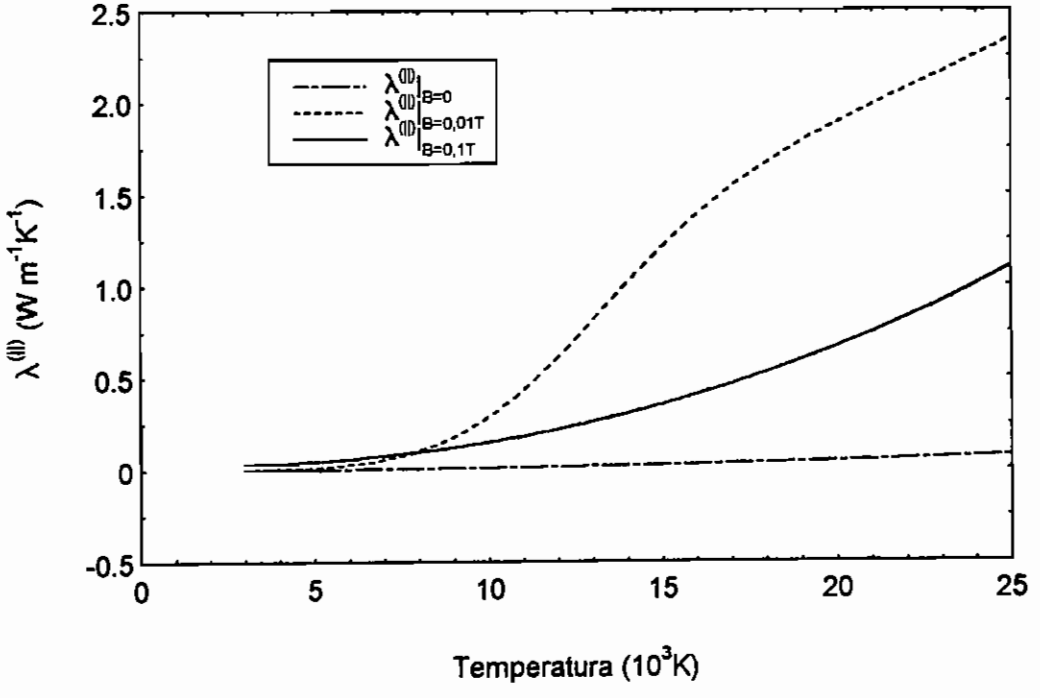


Figura 5.21: Coeficiente de Condutividade Térmica Paralela em função da temperatura.

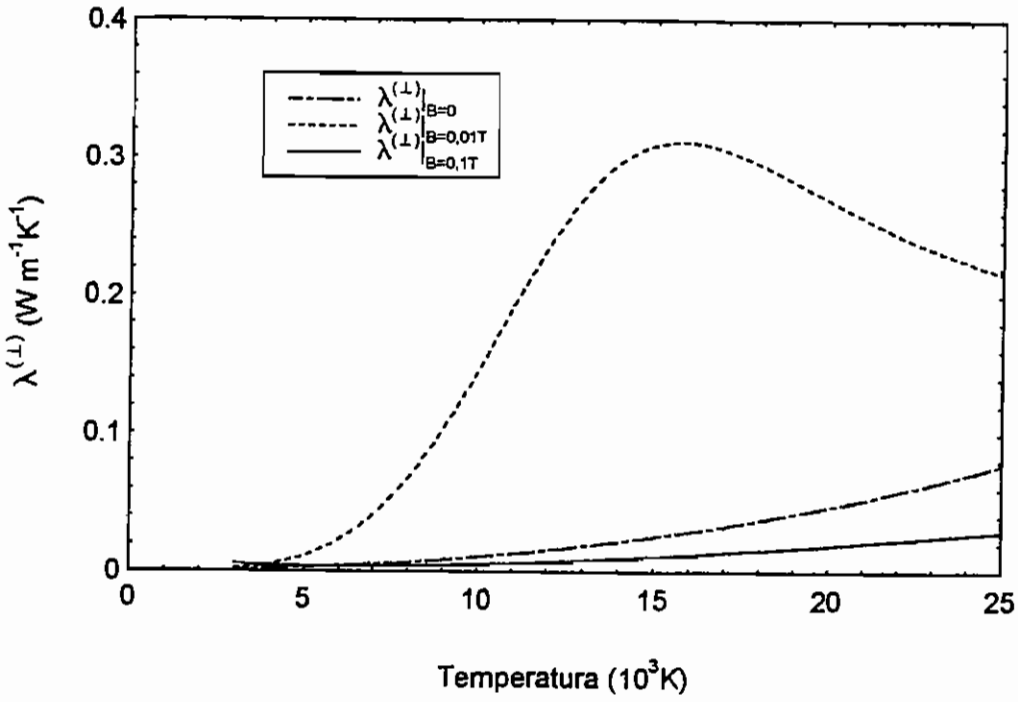


Figura 5.22: Coeficiente de Condutividade Térmica Perpendicular em função da temperatura.

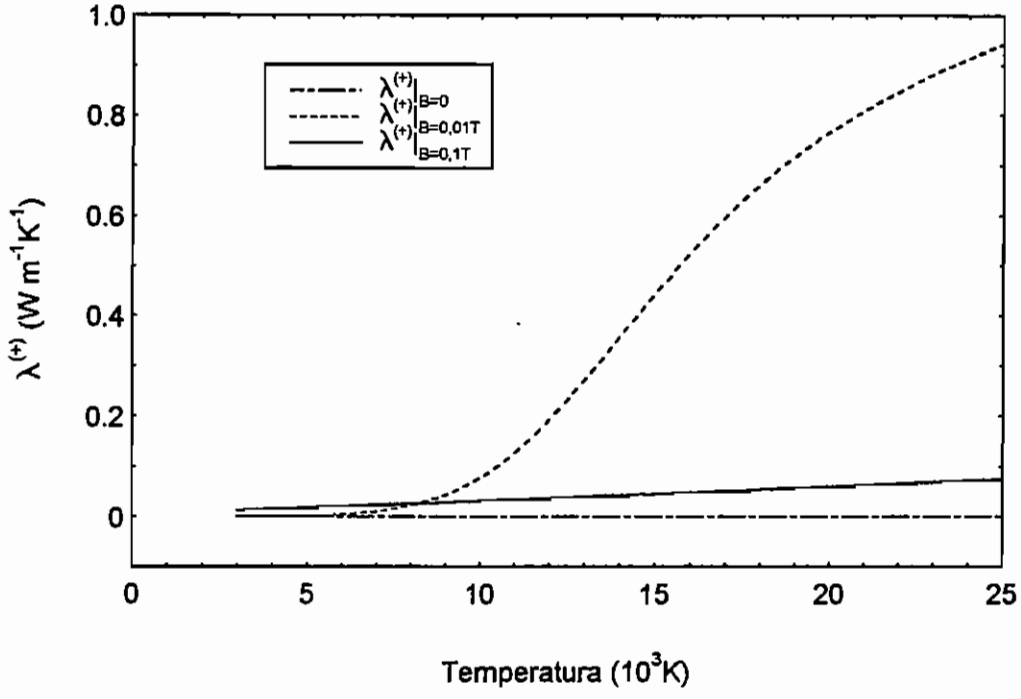


Figura 5.23: Coeficiente de Condutividade Térmica Transversal em função da temperatura.

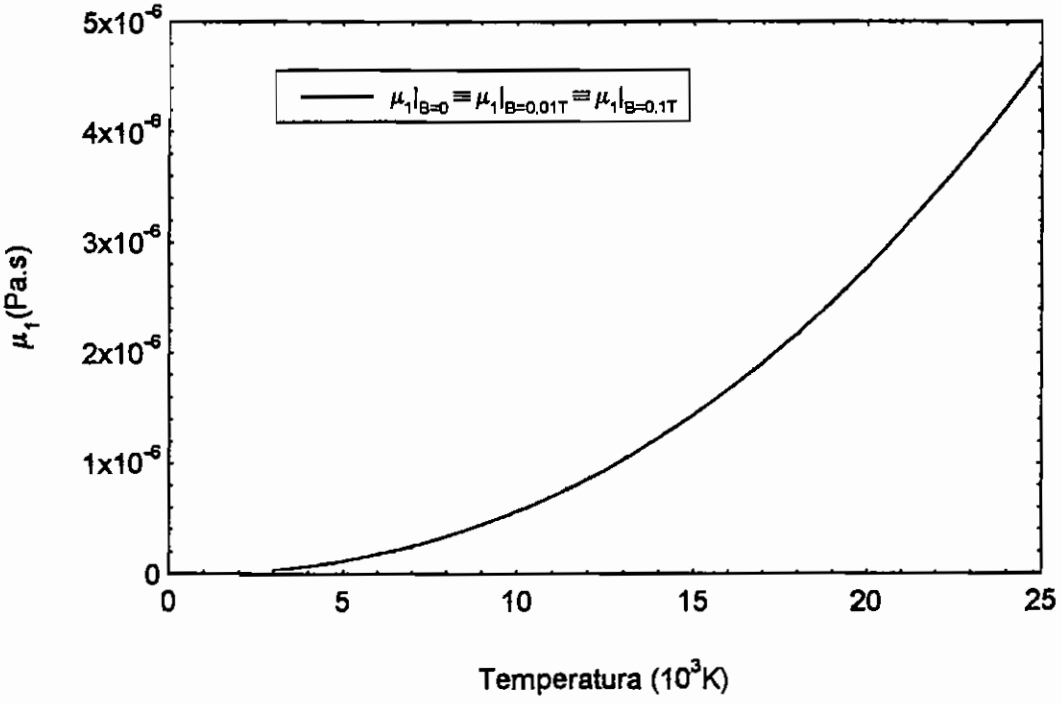


Figura 5.24: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_1 em função da temperatura.

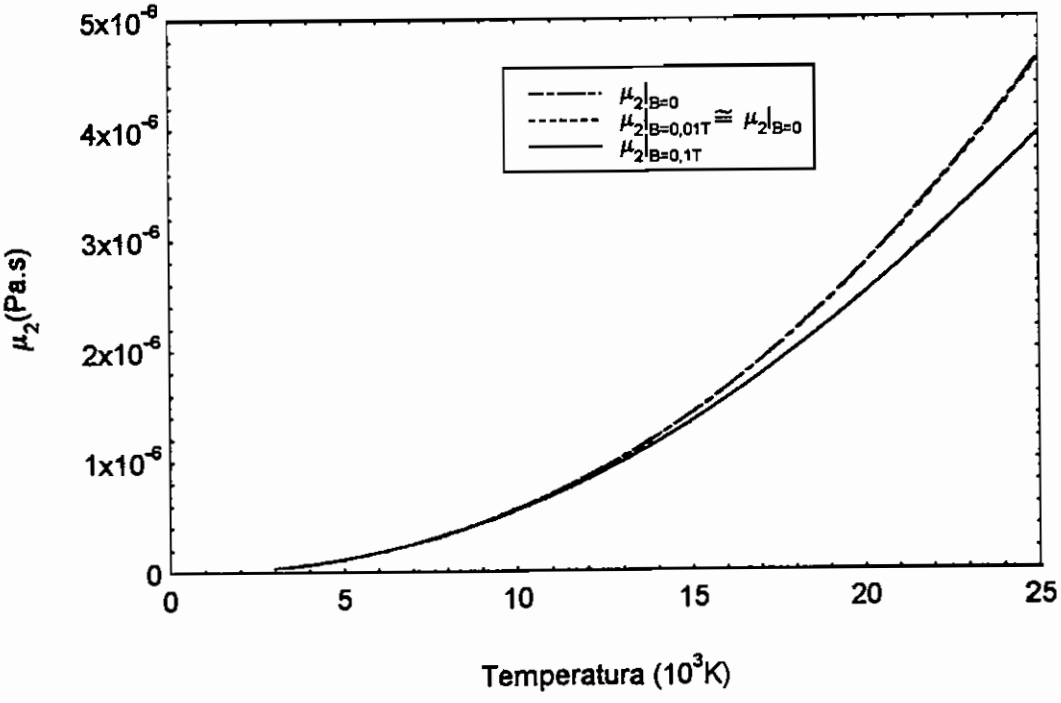


Figura 5.25: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_2 em função da temperatura.

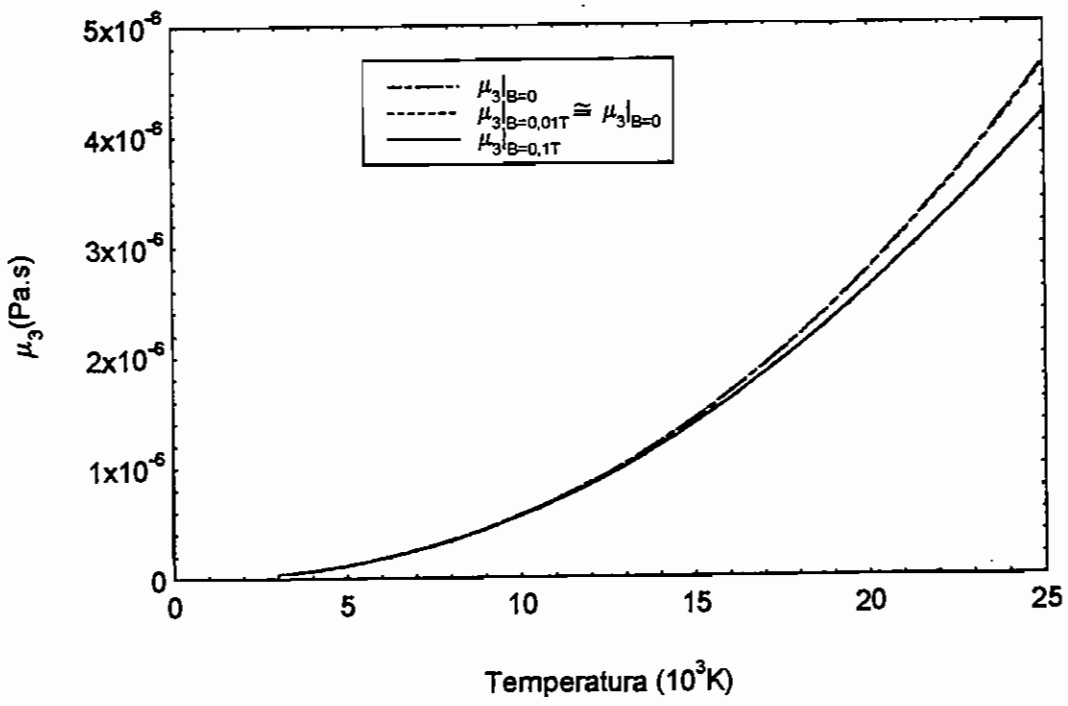


Figura 5.26: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_3 em função da temperatura.

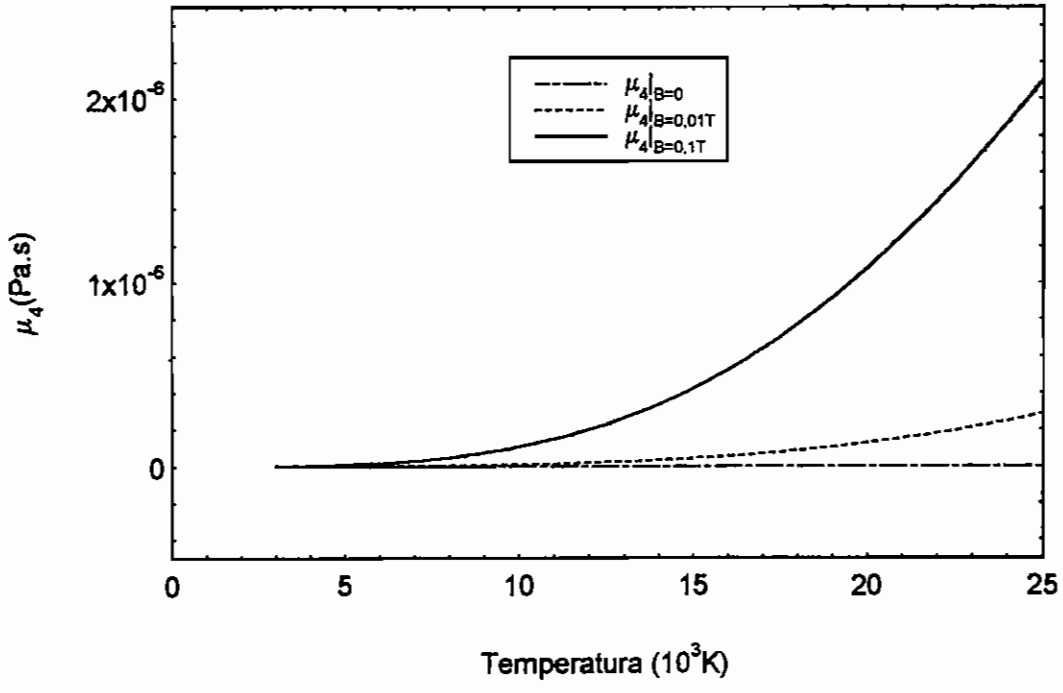


Figura 5.27: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_4 em função da temperatura.

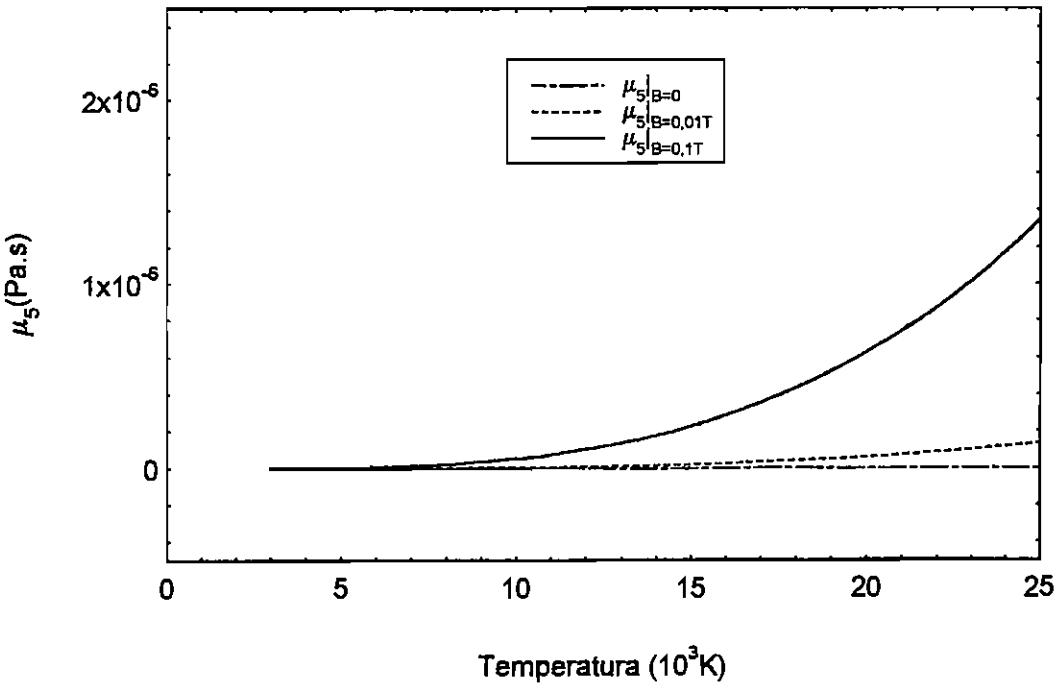


Figura 5.28: Coeficiente de Viscosidade Cisalhante, componente μ_5 em função da temperatura.

Conclusões

Por natureza, a teoria cinética dos gases necessita de uma estrutura um tanto elaborada. para descrever o comportamento do gás. Em contrapartida esta teoria consegue obter bons resultados na determinação dos coeficientes de transporte. Estes resultados dependem em grande parte do modelo de interação entre as partículas do gás. Quanto mais fidedigno o modelo melhores são os resultados.

Quando tratamos de gases ionizados, o problema do modelo de interação complica-se sobre-maneira, uma vez que o longo alcance das forças de interação, implica em interações múltiplas. Como a metodologia baseada na equação de Boltzmann admite apenas interações entre pares de partículas, o seu estudo através da presente teoria só é possível devido ao gás ionizado apresentar um comportamento de partícula independente em determinadas condições de temperatura e pressão. Através de um conjunto de informações, expostas no capítulo 1, podemos considerar as interações como sendo binárias.

Um outro complicador do ponto de vista matemático é a presença de campos elétricos e magnéticos, exigindo um formalismo tensorial, acentuando portanto, o pesado formalismo no qual se apresentou o contexto desse trabalho.

Visando bons resultados, optamos no capítulo 2 por utilizar a equação de Boltzmann na sua forma básica no que se refere ao seu lado direito (integral de colisão) apesar de estarmos tratando de gases ionizados. Seguimos desse modo [3] e [4], como importantes contribuições no contexto da teoria cinética de gases ionizados. Uma maneira alternativa de se empregar a equação de Boltzmann é a forma adotada por [11] ou [12] na qual a integral de colisão é transformada, de maneira que a equação assemelha-se à forma da equação de Fokker-Planck [10].

Ao adotarmos a forma tradicional da equação de Boltzmann, devemos nos ater no tipo de potencial entre as partículas carregadas. Em um gás ionizado sob determinadas condições, existe o efeito da blindagem por cargas de sinal contrário a uma dada carga teste. Desse modo o potencial a ser considerado deve ser o potencial de Debye. A interação não pode ser dada pelo potencial coulombiano simples, pois na determinação das seções transversais efetivas de colisão as integrais divergem.

O potencial de Debye, visto no capítulo 4, possui um comportamento exponencial de-

crescente o que acarreta dificuldades matemáticas no momento das integrações. Para tornar o potencial mais simples, mas sem perder suas características físicas, utilizamos o potencial coulombiano com "cut off". Este torna-se nulo a partir da distância correspondente ao comprimento de Debye. Dessa maneira conciliamos uma certa simplicidade, com um maior rigor no estabelecimento da equação .

Em função do comprimento de Debye e de outras grandezas próprias do gás ionizado, podemos determinar as condições que devem ser satisfeitas para que sejam abrangidas pela teoria cinética. Observamos que estas condições são bastante restritas, pois nem efeitos quânticos nem efeitos relativísticos são levados em consideração . Apesar dessas restrições, verificamos que diversos dispositivos tecnológicos que utilizam gases ionizados, além de alguns efeitos naturais podem ser enquadrados nas condições exigidas para o emprego dessa teoria.

Estabelecidas as condições nas quais iriamos desenvolver o nosso trabalho, tínhamos à disposição no momento do seu início, basicamente dois métodos de resolução da equação de Boltzmann, no sentido da determinação dos coeficientes de transporte: o método de Chapman-Enskog e o método de Grad. Como o objetivo a que nos propunhamos era o de considerar uma mistura de gases ionizados, o método mais adequado era o método de Chapman-Enskog, uma vez que este necessita de um menor número de integrações. Em detrimento a um menor número de equações ele exige uma maior sofisticação matemática. Basicamente este método consiste na resolução de equação integro-diferencial proveniente da equação de Boltzmann com base em grandezas da termodinâmica usual. Na sua solução aparecem separadamente os termos constitutivos (provenientes do sistema de equações de balanço), propiciando assim a determinação dos coeficientes de transporte. A presença de campo magnético implica em uma dificuldade maior, uma vez que a força externa exercida sobre a partícula depende da sua velocidade. No desenvolvimento do método de acordo com [4], nos deparamos com um tedioso desenrolar dos cálculos devido principalmente a atuação desse campo. Através de argumentos físicos, em muitos casos, os cálculos iam se alongando tornando o trabalho mais moroso. Com o intuito de tornar o procedimento mais compacto e mais rigoroso do ponto de vista matemático, introduzimos os teoremas de representação, [14], uma formulação matemática mais atual, que se mostra extremamente

útil, principalmente quando tratamos de vetores axiais, ou pseudo vetores como é o caso do campo magnético. Os resultados obtidos baseados nessa alternância de procedimentos, como não poderia deixar de ser, foram equivalentes. Desse modo o procedimento ficou um pouco mais compacto e mais rigoroso.

No período em que estávamos completando os cálculos relativos ao desenvolvimento do método de Chapman-Enskog, surgiu uma metodologia alternativa [2] para a determinação dos coeficientes de transporte de uma mistura de gases. Este método consilia as vantagens, tanto do método de Chapman-Enskog, quanto as do método de Grad. Ele demonstrava ser, pelo menos para gases com partículas neutras, bem mais compacto que os demais. O nosso esforço voltou-se então na aplicação desse método, denominado método combinado, para gases ionizados em presença de campos elétricos e magnéticos. Mostramos [20] que este método é bem mais compacto e direto que o método de Chapman- Enskog, principalmente em presença de campo magnético. Através da solução de um sistema de equações obtemos diretamente as equações para os termos constitutivos, ou seja, as leis de Fick, Ohm, Fourier e Navier-Stokes. Para o determinação da solução do sistema de equações necessitamos da inversão de tensores de segunda ordem, para o caso do fluxo de difusão e fluxo de calor e tensores de quarta ordem para o tensor pressão. A inversão desses tensores não proporciona maiores problemas, uma vez que conhecemos as suas formas genéricas inversas.

As parcelas provenientes da integral de colisão da equação de Boltzmann, e que se apresentam como coeficientes dos termos constitutivos no sistema de equações formado podem ser, em parte, integradas proporcionando equações que necessitam apenas das integrações que dependem do potencial de interação das partículas, ou seja das integrais $\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)}$.

Para completar o estudo geral de uma mistura de gases ionizados, como era o nosso objetivo, restava estabelecer o procedimento de cálculo para a determinação das integrais $\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)}$. Em uma mistura de gases ionizados, podemos encontrar interações, entre partículas carregadas de mesmo sinal, entre partículas carregadas com cargas contrárias, entre partícula carregada e partícula neutra e entre as partículas neutras apenas. A interação nos dois últimos casos ocorre quando o gás está parcialmente ionizado. Adotamos o potencial de Coulomb com "cut off" para a interação entre partículas carregadas. Para a interação de partículas carregadas de sinais contrários, empregamos o modelo do potencial de Suther-

land com "cut off" na região atrativa. A utilização da parte repulsiva do potencial de Sutherland, nos possibilita determinar probabilidades de recombinação de íons. Do mesmo modo, para a interação entre partícula carregada e partícula neutra utilizamos o modelo de Sutherland onde a parte atrativa representa o potencial de indução. A solução da integral $\Omega_{IN}^{(l,r)}$ para este potencial exigiu um esforço maior, considerando o comportamento incomum das partículas, no que se refere à relação parâmetro de impacto e energia. Na interação entre as partículas neutras, adotamos o potencial de repulsão, visto que as temperaturas envolvidas nos em gases questão são relativamente altas.

As integrais $\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)}$ representam uma sequência de três integrações, ou seja, a integração sobre a posição das partículas na determinação do ângulo de espalhamento, a integração sobre o parâmetro de impacto na determinação da seção transversal efetiva de colisão e a integração sobre a energia. Com isso, uma integração algébrica pura torna-se difícil, em geral. Apenas a interação entre partículas neutras foi algebricamente possível. Desenvolvemos algebricamente as demais integrações até onde a matemática permitiu. Desse modo desenvolvemos rotinas computacionais para as integrações subsequentes. Determinamos assim as integrais $\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)}$ numericamente para um caso mais específico de interações entre as partículas de hélio, ou seja, íi ons de hélio e elétrons. Os gráficos foram obtidos em função da temperatura para uma densidade de partículas de $1,0 \times 10^{20}$part/m^3. Constatamos então que as interações entre as partículas carregadas têm uma influência da ordem de 10^2 vezes maior, sobre a integral de colisão, do que a influência dos demais tipos de interações. Verificamos também que as interações entre partículas carregadas e partículas neutras são da mesma ordem que as interações entre partículas neutras.

Para completar o nosso trabalho aplicamos o método combinado para um gás totalmente ionizado, determinando os coeficientes de condutividade elétrica, condutividade térmica, coeficientes de termo-difusão (estes para as direções paralela, perpendicular e transversal) e coeficiente de viscosidade cisalhante (com o campo magnético na direção x). Utilizando então os dados da integral $\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)}$ calculados no capítulo 4, obtivemos os coeficientes de transporte acima em uma forma gráfica. Plotamos os coeficientes em função da temperatura, para dados valores do campo magnético, e em função do campo magnético para determinadas situações de temperatura.

Nos gráficos constatamos que os coeficientes vetoriais, em geral, atingem valores máximos para um campo magnético da ordem $0,01T$. Aqui, devemos salientar, existe uma controvérsia com a afirmação feita no capítulo 2, onde para o caso do coeficiente de condutividade elétrica e coeficiente termo-elétrico na direção paralela, conforme [4] estes, não dependem do campo magnético. O que os gráficos mostram é que existe esta dependência. A forma literal dos referidos coeficientes também confirma este fato. Em relação à temperatura observamos que os coeficientes na direção perpendicular assumem um valor máximo em torno de $1,5 \times 10^4$K. Os coeficientes de viscosidade aumentam os seus valores com a temperatura.

Para finalizar, observamos que, embora o arsenal matemático exigido seja relativamente pesado, os resultados obtidos são os mais confiáveis (em relação a qualquer outra teoria) devido a gama de considerações adotadas, todas com o maior cuidado possível na tentativa de expressar a realidade. Em se tratando de gaese ionizados os dados experimentais existentes nesta faixa de abrangência da teoria, são escassos, visto a temperatura ser relativamente alta. Esses resultados obtidos pelo método combinados podem ser comparados com os resultados obtidos para gases totalmente ionizados como em [4] pelo método de Chapman-Enskog e [17] pelo métod de Grad.

Como indicação de futuros trabalhos nesta área, propomos inicialmente a comparação entre os métodos (que devem resultar em resultados semelhantes guardadas as devidas aproximações . Como uma segunda aplicação mais eminente, o estudo de um gás parcialmente ionizado através do método combinado. Uma terceira aplicação , mais audaciosa, seria a utilização do método combinado com desvios de segunda ordem na função distribuição, obtendo-se assim as equações de Burnet o que possibilita considerar uma temperatura para cada constituinte do gás ionizado.

Apêndice A

Integrais Utilizadas em Teoria Cinética dos Gases

No estudo da teoria cinética dos gases, as seguintes integrais definidas são frequentemente utilizadas,

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \tag{A.1}$$

onde α é uma constante e

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \\ \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}, \\ \Gamma(n+1/2) = [(2n-1)!!/2^n]\pi^{1/2}, \end{cases} \tag{A.2}$$

é a função gama.

Outras integrais empregadas em teoria cinética dos gases são do tipo,

$$\int \xi^\alpha_{i_1}\xi^\alpha_{i_2}\ldots\xi^\alpha_{i_N} f_{M_\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int \xi^\alpha_{i_1}\xi^\alpha_{i_2}\ldots\xi^\alpha_{i_N} e^{-\frac{m_\alpha \xi^2_\alpha}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha, \tag{A.3}$$

se N for um número par. Se o número de velocidades peculiares for ímpar, a integral na equação (A.3) é nula.

Fazendo $N = 2$ na integral (A.3), esta, pode ser escrita como,

$$\int \xi^\alpha_i \xi^\alpha_j f_{M_\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = -\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m_\alpha}\right)\int \xi^\alpha_i \frac{\partial e^{-\frac{m_\alpha \xi^2_\alpha}{2kT}}}{\partial \xi^\alpha_j} d\vec{\xi}^\alpha$$

$$= -\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m_\alpha}\right)\left[\int \xi^\alpha_i \frac{\partial e^{-\frac{m_\alpha \xi^2_\alpha}{2kT}}}{\partial \xi^\alpha_j} d\vec{\xi}^\alpha - \int e^{-\frac{m_\alpha \xi^2_\alpha}{2kT}} \delta_{ij} d\vec{\xi}^\alpha\right]. \tag{A.4}$$

A primeira termo na última igualdade é nulo, pois a função exponencial tende a zero para grandes valores de ξ_i^α. Consequentemente, a equação (A.4) se reduz a,

$$\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m_\alpha}\right)\delta_{ij}\int e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha . \tag{A.5}$$

Por outro lado, é fácil verificar através da equação (A.1), que,

$$\int e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha = \frac{1}{3}\frac{m_\alpha}{2kT}\int \xi_\alpha^2 e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha . \tag{A.6}$$

Segue portanto das equações (A.5) e (A.6), que,

$$\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = \frac{1}{3}\delta_{ij}\int \xi_\alpha^2 f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha . \tag{A.7}$$

Da mesma forma para $N = 4$, temos da equação (A.3),

$$\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \xi_k^\alpha \xi_l^\alpha f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = -\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m_\alpha}\right)\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \xi_k^\alpha \frac{\partial e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}}}{\partial \xi_l^\alpha} d\vec{\xi}^\alpha$$

$$= -\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m_\alpha}\right)\int \left(\delta_{il}\xi_j^\alpha \xi_k^\alpha + \xi_i^\alpha \delta_{jl}\xi_k^\alpha + \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \delta_{kl}\right) e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha . \tag{A.8}$$

A equação (A.8), pode ser escrita como,

$$\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \xi_k^\alpha \xi_l^\alpha f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha$$

$$= \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m_\alpha}\right)\frac{1}{3}\left(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}\right)\int \xi_\alpha^2 e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha , \tag{A.9}$$

ao utilizarmos a equação (A.7). Ainda, segundo a equação (A.1),

$$\int \xi_\alpha^2 e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha = \frac{1}{5}\frac{m_\alpha}{kT}\int \xi_\alpha^4 e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} d\vec{\xi}^\alpha , \tag{A.10}$$

as equações (A.9) e (A.10) fornecem,

$$\int \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \xi_k^\alpha \xi_l^\alpha f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = \frac{1}{15} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}) \int \xi_\alpha^4 f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha \,. \tag{A.11}$$

A forma final das integrais tanto em (A.7), quanto em (A.11), pode ser obtida, procedendo a mudança de coordenadas retangulares para polares e empregando a equação (A.1), temos,

$$\int m_\alpha \xi_\alpha^n f_{M\alpha} d\vec{\xi}^\alpha = (n+1)!!\, \rho_\alpha \left(\frac{2kT}{m_\alpha}\right)^{n/2} , \qquad \text{se } n \text{ for par.} \tag{A.12}$$

Apêndice B

Produto de um Tensor (função de pseudo-vetor) por Vetor

Seja o vetor A_i, dado como uma aplicação do tensor $T_{ij}(\mathbf{B})$ sobre o vetor V_i, ou seja, $A_i = T_{ij}V_j$. Sendo o vetor B_i, um vetor axial ou pseudo-vetor (como o que representa o campo magnético), então o tensor T_{ij}, assume a forma,

$$T_{ij} = T_{(\delta)}\delta_{ij} + T_{(\epsilon)}\epsilon_{ijk}\frac{B_k}{B} + T_{(\zeta)}\frac{B_iB_j}{B^2}\,, \tag{B.1}$$

onde $T_{(\delta)}$, $T_{(\epsilon)}$ e $T_{(\zeta)}$ representam os coeficientes das respectivas parcelas tensoriais.

Para um dado campo magnético B_i, ele determina uma direção no espaço, chamada de direção paralela ($\|$). Dado um outro vetor qualquer V_i no espaço, este determina com B_i um plano, sobre o qual podemos determinar uma direção perpendicular ($\perp$) em relação a direção do campo magnético. Orientando estas direções de tal modo a escrevermos

$$\mathbf{B} \doteq B\hat{\mathbf{e}}_{(\|)}\,,$$

e

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{(\|)} + \mathbf{V}_{(\perp)} = V^{(\|)}\hat{\mathbf{e}}_{(\|)} + V^{(\perp)}\hat{\mathbf{e}}_{(\perp)}\,, \tag{B.2}$$

onde,

$$\hat{\mathbf{e}}_{(\|)} = \frac{\mathbf{B}}{B}\,,$$

e

$$\hat{\mathbf{e}}_{(\perp)} = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{V}_{(\|)}}{|\mathbf{V} - \mathbf{V}_{(\|)}|}\,.$$

Podemos agora estabelcer uma direção transversal (+), perpendicular às duas anteriores, com sentido dado pela produto vetorial $\hat{\mathbf{e}}_{(+)} = \hat{\mathbf{e}}_{(\parallel)} \times \hat{\mathbf{e}}_{(\perp)}$. Definimos então um novo vetor nesta direção , ao qual por conveniencia o chamaremos de $\mathbf{V}_{(+)}$, através de,

$$\mathbf{V}_{(+)} = V^{(+)}\hat{\mathbf{e}}_{(+)} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{V}}{B} \tag{B.3}$$

muito embora, não haja qualquer relação com a componente do vetor $\mathbf{V}$ na direção (+).

Definida desse modo as direções no espaço, podemos representar, então, o produto $A_i = T_{ij}V_j$, em uma forma matricial, ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^{(\parallel)} \\ A^{(\perp)} \\ A^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_{(\delta)} + T_{(\zeta)}) & 0 & 0 \\ 0 & T_{(\delta)} & T_{(\epsilon)} \\ 0 & -T_{(\epsilon)} & T_{(\delta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{(\parallel)} \\ V^{(\perp)} \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{B.4}$$

Procedendo à multiplicação das matrizes, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^{(\parallel)}\hat{\mathbf{e}}_{(\parallel)} + A^{(\perp)}\hat{\mathbf{e}}_{(\perp)} + A^{(+)}\hat{\mathbf{e}}_{(+)} \\ &= (T_{(\delta)} + T_{(\zeta)})V^{(\parallel)}\hat{\mathbf{e}}_{(\parallel)} + T_{(\delta)}V^{(\perp)}\hat{\mathbf{e}}_{(\perp)} + (-T_{(\epsilon)})V^{(\perp)}\hat{\mathbf{e}}_{(+)} , \\ &= (T_{(\delta)} + T_{(\zeta)})\mathbf{V}_{(\parallel)} + T_{(\delta)}\mathbf{V}_{(\perp)} + (-T_{(\epsilon)})\mathbf{V}_{(+)} \end{aligned} \tag{B.5}$$

uma vez que,

$$|\mathbf{V}_{(\perp)}| = V^{(\perp)} = |\mathbf{V}_{(+)}| = V^{(+)} , \tag{B.6}$$

e portanto,

$$V^{(\perp)}\hat{\mathbf{e}}_{(+)} = V^{(+)}\hat{\mathbf{e}}_{(+)} = \mathbf{V}_{(+)} . \tag{B.7}$$

Representando os componentes do tensor T_{ij} por, $T_{(\delta)}+T_{(\zeta)} = T^{(\parallel)}$, $T_{(\delta)} = T^{(\perp)}$ e $-T_{(\epsilon)} = T^{(+)}$ e denominando-os respectivamente de componentes paralela, perpendicular e transversal em relação ao campo magnético $\mathbf{B}$ e ao vetor $\mathbf{V}$, podemos escrever assim,

$$\mathbf{A} = T^{(\parallel)}\mathbf{V}_{(\parallel)} + T^{(\perp)}\mathbf{V}_{(\perp)} + T^{(+)}\mathbf{V}_{(+)} . \tag{B.8}$$

Apêndice C

Componentes do Tensor Viscosidade Cisalhante

Para determinarmos os elementos do tensor viscosidade cisalhante $\mu_{<ij><kl>}$, necessitamos conhecer a direção do campo magnético. Fazendo a direção desse campo, normalmente considerada como direção paralela, coincidir com o eixo x do sistema de coordenadas retangulares, podemos escrever, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_{(\|)} = B\hat{\mathbf{i}} = (B, 0, 0)$. Genericamente como na equação (3.117) temos para o coeficiente de viscosidade cisalhante para um gás ionizado em presença de campo magnético,

$$\mu_{<ij><kl>} = \mu_{(\delta)}n_{(\delta)_{<ij><kl>}} + \mu_{(\epsilon)}n_{(\epsilon)_{<ij><kl>}} + \mu_{(\zeta)}n_{(\zeta)_{<ij><kl>}} + \mu_{(\eta)}n_{(\eta)_{<ij><kl>}} + \mu_{(\theta)}n_{(\theta)_{<ij><kl>}}, \tag{C.1}$$

onde as parcelas componentes dos tensores são dados pelas expressões (3.94) a (3.98). Os elementos do tensor viscosidade cisalhante, em suas diversas situações, podem então ser estabelecidas. Efetuando os produtos tensoriais especificados, temos,

$$\mu_{<xx><xx>} = \frac{4}{9}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)}),$$

$$\mu_{<xx><xy>} = \mu_{<xx><xz>} = \mu_{<xx><yx>} = 0,$$

$$\mu_{<xx><yy>} = -\frac{2}{9}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)}),$$

$$\mu_{<xx><yz>} = \mu_{<xx><zx>} = \mu_{<xx><zy>} = 0,$$

$$\mu_{<xx><zz>} = -\frac{2}{9}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)}),$$

$$\mu_{<xy><xx>} = \mu_{<yx><xx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xy><xy>} = \mu_{<xy><yx>} = \mu_{<yx><xy>} = \mu_{<yx><yx>} = \mu_{(\delta)} + \mu_{(\zeta)}\,,$$

$$\mu_{<xy><xz>} = \mu_{<xy><zx>} = \mu_{<yx><xz>} = \mu_{<yx><zx>} = \mu_{(\epsilon)} + \mu_{(\eta)}\,,$$

$$\mu_{<xy><yy>} = \mu_{<yx><yy>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xy><yz>} = \mu_{<xy><zy>} = \mu_{<yx><yz>} = \mu_{<yx><zy>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xy><zz>} = \mu_{<yx><zz>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xz><xx>} = \mu_{<zx><xx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xz><xy>} = \mu_{<xz><yx>} = \mu_{<zx><xy>} = \mu_{<zx><yx>} = -(\mu_{(\epsilon)} + \mu_{(\eta)})\,,$$

$$\mu_{<xz><xz>} = \mu_{<xz><zx>} = \mu_{<zx><xz>} = \mu_{<zx><zx>} = (\mu_{(\delta)} + \mu_{(\zeta)})\,,$$

$$\mu_{<xz><yy>} = \mu_{<zx><yy>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xz><yz>} = \mu_{<xz><zy>} = \mu_{<zx><yz>} = \mu_{<zx><zy>} = 0\,,$$

$$\mu_{<xz><zz>} = \mu_{<zx><zz>} = 0\,,$$

$$\mu_{<yy><xx>} = -\frac{2}{9}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,,$$

$$\mu_{<yy><xy>} = \mu_{<yy><yx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<yy><xz>} = \mu_{<yy><zx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<yy><yy>} = \frac{1}{9}(12\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,,$$

$$\mu_{<yy><yz>} = \mu_{<yy><zy>} = 2\mu_{(\epsilon)}\,,$$

$$\mu_{<yy><zz>} = \frac{1}{9}(-6\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,,$$

$$\mu_{<yz><xx>} = \mu_{<zy><xx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<yz><xy>} = \mu_{<yz><yx>} = \mu_{<zy><xy>} = \mu_{<zy><yx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<yz><xz>} = \mu_{<yz><zx>} = \mu_{<zy><xz>} = \mu_{<zy><zx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<yz><yy>} = \mu_{<zy><yy>} = -2\mu_{(\epsilon)}\,,$$

$$\mu_{<yz><yz>} = \mu_{<yz><zy>} = \mu_{<zy><yz>} = \mu_{<zy><zy>} = \mu_{(\delta)}\,,$$

$$\mu_{<yz><zz>} = \mu_{<zy><zz>} = 2\mu_{(\epsilon)}\,,$$

$$\mu_{<zz><xx>} = -\frac{2}{9}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,,$$

$$\mu_{<zz><xy>} = \mu_{<zz><yx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<zz><xz>} = \mu_{<zz><zx>} = 0\,,$$

$$\mu_{<zz><yy>} = \frac{1}{9}(-6\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,,$$

$$\mu_{<zz><yz>} = \mu_{<zz><zy>} = -2\mu_{(\epsilon)}\,,$$

$$\mu_{<zz><zz>} = \frac{1}{9}(12\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,.$$

Definindo as seguintes combinações dos elementos do tensor acima, de modo que,

$$\mu_1 = \mu_{<xx><xx>} - \mu_{<xx><yy>} = \frac{2}{3}(3\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,, \tag{C.2}$$

$$\mu_2 = \mu_{<yy><yy>} - \mu_{<yy><xx>} = \frac{1}{3}(6\mu_{(\delta)} + 4\mu_{(\zeta)} + \mu_{(\theta)})\,, \tag{C.3}$$

$$\mu_3 = 2\mu_{<xy><xy>} = 2(\mu_{(\delta)} + \mu_{(\zeta)})\,, \tag{C.4}$$

$$\mu_4 = 2\mu_{<yy><yz>} = 4\mu_{(\epsilon)} \tag{C.5}$$

$$\mu_5 = 2\mu_{<xy><xz>} = 2(\mu_{(\epsilon)} + \mu_{(\eta)})\,, \tag{C.6}$$

conseguimos representar todos os elementos do tensor viscosidade cisalhante em termos dessas combinações linermente independentes.

Podemos verificar este fato determinando os elementos do deviante do tensor pressão, (3.116), ou seja,

$$p_{<ij>} = -2\mu_{<ij><kl>}\frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}}. \tag{C.7}$$

É conveniente lembrar que, uma vez montada a estrutura de cada elemento do deviante do tensor pressão em termos dos coeficientes de viscosidade com seus respectivos gradientes, não existe mais qualquer vínculo tensorial entre estes. Desse modo, já desconsiderando os elementos nulos de $\mu_{<ij><kl>}$, segue:

$$p_{<xx>} = -2\left(\mu_{<xx><xx>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} + \mu_{<xx><yy>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<xx><zz>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}\right), \tag{C.8}$$

ou sendo nulo o traço de um deviante de um tensor,

$$\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} + \frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} = 0, \tag{C.9}$$

temos,

$$p_{<xx>} = -2\left[\left(\mu_{<xx><xx>} - \mu_{<xx><zz>}\right)\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} + \left(\mu_{<xx><yy>} - \mu_{<xx><zz>}\right)\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}}\right], \tag{C.10}$$

e considerando ainda que $\mu_{<xx><yy>} = \mu_{<xx><zz>}$, podemos escrever,

$$p_{<xx>} = -2\left(\mu_{<xx><xx>} - \mu_{<xx><yy>}\right)\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}}, \tag{C.11}$$

ou, de (C.2),

$$p_{<xx>} = -2\mu_1\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}}. \tag{C.12}$$

Do mesmo modo temos,

$$p_{<xy>} = -2\left(\mu_{<xy><xy>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<xy><xz>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}} + \mu_{<xy><yx>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{x>}} + \mu_{<xy><zx>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{x>}}\right), \tag{C.13}$$

e sendo o tensor $\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}$ um tensor simétrico, ou seja,

$$\frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = \frac{\partial v_{<j}}{\partial x_{i>}}, \tag{C.14}$$

temos,

$$p_{<xy>} = -2\left(2\mu_{<xy><xy>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} + 2\mu_{<xy><xz>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}}\right). \tag{C.15}$$

ou de (C.4) e (C.6),

$$p_{<xy>} = -2\mu_3\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} - 2\mu_5\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}}. \tag{C.16}$$

Para

$$p_{<xz>} = -2\left(\mu_{<xz><xy>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<xz><xz>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}} + \mu_{<xz><yx>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{x>}} + \mu_{<xz><zx>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{x>}}\right), \tag{C.17}$$

escrevemos

$$p_{<xz>} = -2\left(2\mu_{<xz><xy>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} + 2\mu_{<xz><xz>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}}\right). \tag{C.18}$$

ou, de (C.4) e (C.6),

$$p_{<xz>} = 2\mu_5\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{y>}} - 2\mu_3\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{z>}}. \tag{C.19}$$

De forma semelhante, temos,

$$p_{<yx>} = p_{<xy>}. \tag{C.20}$$

Para o elemento,

$$p_{<yy>} = -2\left(\mu_{<yy><xx>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} + \mu_{<yy><yy>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<yy><yz>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}\right.$$
$$\left. + \mu_{<yy><zy>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<yy><zz>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}\right), \tag{C.21}$$

e considerando (C.9),

$$p_{<yy>} = -2\left[\left(\mu_{<yy><yy>} - \mu_{<yy><xx>}\right)\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \left(\mu_{<yy><zz>} - \mu_{<yy><xx>}\right)\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}\right.$$

$$\left. +2\mu_{<yy><yz>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}\right], \tag{C.22}$$

obtemos, com (C.2), (C.3) e (C.5),

$$p_{<yy>} = -2\mu_2\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} - 2(\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} - 2\mu_4\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}. \tag{C.23}$$

Do memo modo que em (C.21), para,

$$p_{<yz>} = -2\left(\mu_{<yz><yy>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<yz><yz>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}} + \mu_{<yz><zy>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<yz><zz>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}\right), \tag{C.24}$$

obtemos,

$$p_{<yz>} = \mu_4\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + 2(\mu_1 - 2\mu_2)\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}} - \mu_4\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}. \tag{C.25}$$

Também para

$$p_{<zx>} = p_{<xz>}, \tag{C.26}$$

assim como para

$$p_{<zy>} = p_{<yz>}. \tag{C.27}$$

Finalmente para o elemento,

$$p_{<zz>} = -2\left(\mu_{<zz><xx>}\frac{\partial v_{<x}}{\partial x_{x>}} + \mu_{<zz><yy>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<zz><yz>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}\right.$$

$$\left. +\mu_{<zz><zy>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{y>}} + \mu_{<zz><zz>}\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}\right), \tag{C.28}$$

temos, utilizando, (C.9),

$$p_{<zz>} = -2\left[\left(\mu_{<zz><yy>} - \mu_{<zz><xx>}\right)\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} + \left(\mu_{<zz><zz>} - \mu_{<zz><xx>}\right)\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}}\right.$$

$$\left. +2\mu_{<zz><yz>}\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}\right], \tag{C.29}$$

ou, de (C.2), (C.3) e (C.5),

$$p_{<zz>} = -2(\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{y>}} - 2\mu_2\frac{\partial v_{<z}}{\partial x_{z>}} + 2\mu_4\frac{\partial v_{<y}}{\partial x_{z>}}. \tag{C.30}$$

Dessa forma, mostramos que cada elemento do tensor viscosidade cisalhante pode ser representado como uma combinação linear de μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 e μ_5[1].

[1]Observar o sinal trocado em μ_5 se comparado com [15]. Se seguirmos esta referência, o referido coeficiente apresenta-se negativo, contrastando com os demais.

Apêndice D

Programas Computacionais

D.1 Programas para as Integrais $\Omega_{\beta\alpha}^{(l,r)}$ e para os Coeficientes de Transporte

D.1.1 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{EE}^{(l,r)} = \Omega_{II}^{(l,r)}$

```
REM Determinacao das curvas para Omega_EE^(l,r).                    (D.1)
OPEN "a:omegEE11.dat" FOR OUTPUT AS #1
OPEN "a:omegEE12.dat" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "a:omegEE13.dat" FOR OUTPUT AS #3
OPEN "a:omegEE22.dat" FOR OUTPUT AS #4
REM a=aV[m]/10^-10, d= dV[m]/10^-10, n=nV[m^-3]/10^20
REM e T = TV(K) / 10 ^ 3
      n = 1#
      pi = 3.14159265#
      ug = pi / 180
FOR T = 3 TO 25 STEP .25
   a = 166.67 / T
   d = 2185.1 * (T / n) ^ .5
   OEE11 = 0: OEE12 = 0: OEE13 = 0: OEE22 = 0
  FOR ng = 1 TO 89
     g = TAN(ng * ug)
     cng2 = COS(ng * ug) ^ 2
     espo = EXP(-g ^ 2)
     lgda = LOG(4 * g ^ 4 * d ^ 2 / a ^ 2 + 1)
     OEE11 = OEE11 + espo * g * lgda / cng2
     OEE12 = OEE12 + espo * g ^ 3 * lgda / cng2
     OEE13 = OEE13 + espo * g ^ 5 * lgda / cng2
     gdcn = (g ^ 4 + (a / (2 * d)) ^ 2) / cng2
     OEE22 = OEE22 + espo * g ^ 7 / gdcn
  NEXT ng
REM (OEEnnV [m^2])=OEEnn*10^-20  e (TV [K])=T*10^3
OEE11 = (a / 2) ^ 2 * OEE11 * ug
OEE12 = (a / 2) ^ 2 * OEE12 * ug
OEE13 = (a / 2) ^ 2 * OEE13 * ug
OEE22 = 2 * OEE12 - a ^ 2 / 2 * OEE22 * ug
      PRINT #1, T, OEE11
      PRINT #2, T, OEE12
      PRINT #3, T, OEE13
      PRINT #4, T, OEE22
      PRINT T, OEE11, OEE12, OEE13, OEE22
NEXT T
CLOSE #1: CLOSE #2: CLOSE #3: CLOSE #4
PRINT "END"
END
```

D.1.2 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{EI}^{(l,r)}$

```
REM Determinacao das curvas para Omega_EI^(l,r).                    (D.2)
OPEN "a:omegEI11.dat" FOR OUTPUT AS #1
OPEN "a:omegEI12.dat" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "a:omegEI13.dat" FOR OUTPUT AS #3
OPEN "a:omegEI22.dat" FOR OUTPUT AS #4
REM aei=(aeiV)/10^-10, a=(aV)/10^-10, d=(dV)/10^-10,
REM n=(nR)/10^20 e T=(TR)/10^3
      n = 1#
      aei = 1#
      pi = 3.14159265#
      ug = pi / 180
FOR T = 3 TO 25 STEP .25
   a = 166.77 / T
   d = 2185.1 * (T / n) ^ .5
   OEI11 = 0: OEI12 = 0: OEI13 = 0: OEI22 = 0
  FOR ng = 1 TO 89
   g = TAN(ng * ug)
   cng2 = COS(ng * ug) ^ 2
   espo = EXP(-g ^ 2)
   gaea = (1 + 2 * g ^ 2 * aei / a) ^ 2
   lgda = LOG((4 * g ^ 4 * d ^ 2 / a ^ 2 + 1) / gaea)
   c = a / (g ^ 2 * aei)
   c1 = (c + 1) ^ .5
   wc = 0
    FOR X = .1 TO .9 STEP .1
    c1x = 4 * c1 ^ 3 * (1 - X ^ 2) ^ .5 * X ^ 2
   N1 = c ^ 2 - 2 * c * c1 ^ 2 * X ^ 2 + c1x
   wc = wc + (N1 / (c ^ 2 + 4 * c1 ^ 2 * X ^ 2)) ^ 2 * X
    NEXT X
    c2x = c ^ 2 + 4 * c1 ^ 2
    wc = wc + ((c ^ 2 - 2 * c * c1 ^ 2) / c2x) ^ 2 / 2
    wc = aei ^ 2 * c1 ^ 2 * (2 * g ^ 2 / a) ^ 2 * wc * .1
    N2 = 1 / (1 + 2 * g ^ 2 * aei / a) ^ 2
    N3 = 1 / (1 + 4 * g ^ 4 * d ^ 2 / a ^ 2)
     OEI11 = OEI11 + espo * g * (2 * wc + lgda) / cng2
     OEI12 = OEI12 + espo * g ^ 3 * (2 * wc + lgda) / cng2
     OEI13 = OEI13 + espo * g ^ 5 * (2 * wc + lgda) / cng2
     OEI22 = OEI22 + espo * g ^ 3 * (2 * wc + N2 - N3) / cng2
     NEXT ng
REM (OEEnnR) = OEEnn*10^-20 [m^2]  e  TR=T*10^3 [K]
OEI11 = (a / 2) ^ 2 * OEI11 * ug
OEI12 = (a / 2) ^ 2 * OEI12 * ug
OEI13 = (a / 2) ^ 2 * OEI13 * ug
OEI22 = 2 * OEI12 - a ^ 2 / 2 * OEI22 * ug
      PRINT #1, T, OEI11
      PRINT #2, T, OEI12
      PRINT #3, T, OEI13
      PRINT #4, T, OEI22
     PRINT T, OEI11, OEI12, OEI13, OEI22
NEXT T
  CLOSE #1: CLOSE #2: CLOSE #3: CLOSE #4
PRINT "END"
END
```

D.1.3 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{EN}^{(l,r)}$

(D.3)

```
REM Determinacao das curvas para Omega_EN^(l,r) e Omega_IN^(l,r)
OPEN "a:omegEN11.dat" FOR OUTPUT AS #1
OPEN "a:omegEN12.dat" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "a:omegEN13.dat" FOR OUTPUT AS #3
OPEN "a:omegEN22.dat" FOR OUTPUT AS #4
REM aen=(aenR)/10^-10, a=(aR)/10^-10, e T=(TR)/10^3
REM aen=1.4*10^-10 [m] ou ain=2.4*10^-10 [m]
      aen = 1.4#
      pi = 3.14159265#
      ug = pi / 180
FOR T = 3 TO 25 STEP .25
   a = 2.413 / T ^ (1 / 4)
   OEN11 = 0: OEN12 = 0: OEN13 = 0: OEN22 = 0
  FOR ng = 1 TO 89
     g = TAN(ng * ug)
     cng2 = (COS(ng * ug)) ^ 2
     espo = EXP(-g ^ 2)
     qcc = 0: qac = 0: qcs = 0: qas = 0
     FOR beta = 1 TO 89
        X = TAN(beta * ug)
        csb2 = (COS(beta * ug)) ^ 2
     IF g <= (a / aen) ^ 2 THEN
       cx = 1
      ELSE
      gae = g * aen ^ 2
       cx = 1 / 2 * (g * (aen / a) ^ 2 + a ^ 2 / gae)
     END IF
          IF beta < 45 THEN
            GOSUB 10
            qcc = qcc + (COS(tetac)) ^ 2 * X / csb2
            qcs = qcs + (SIN(2 * tetac)) ^ 2 * X / csb2
           ELSE
            GOSUB 20
            qac = qac + (COS(tetaa)) ^ 2 * X / csb2
            qas = qas + (SIN(2 * tetaa)) ^ 2 * X / csb2
          END IF
     NEXT beta
  qenc = cx * (qcc + qac) * ug
  qens = cx * (qcs + qas) * ug
     OEN11 = OEN11 + espo * g ^ 4 * qenc / cng2
     OEN12 = OEN12 + espo * g ^ 6 * qenc / cng2
     OEN13 = OEN13 + espo * g ^ 8 * qenc / cng2
     OEN22 = OEN22 + espo * g ^ 6 * qens / cng2
```

```
  NEXT ng
REM (OENnnR) = OENnn*10^-20 [m^2] e TR=T*10^3 [K]
OEN11 = 4 * a ^ 2 * OEN11 * ug
OEN12 = 4 * a ^ 2 * OEN12 * ug
OEN13 = 4 * a ^ 2 * OEN13 * ug
OEN22 = 4 * a ^ 2 * OEN22 * ug
      PRINT #1, T, OEN11
      PRINT #2, T, OEN12
      PRINT #3, T, OEN13
      PRINT #4, T, OEN22
      PRINT T, OEN11, OEN12, OEN13, OEN22
 NEXT T
 CLOSE #1: CLOSE #2: CLOSE #3: CLOSE #4
 PRINT "TERMINADO"
 END
10 ynt = 0
```

D.1.4 *Determinação das Curvas para as Integrais* $\Omega_{NN}^{(l,r)}$

(D.4)

```
REM Determinacao das curvas para Omega_NN^(l,r).
OPEN "a:omegNN11.dat" FOR OUTPUT AS #1
OPEN "a:omegNN12.dat" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "a:omegNN13.dat" FOR OUTPUT AS #3
OPEN "a:omegNN22.dat" FOR OUTPUT AS #4
REM a=(aR)/10^-10, T=(TR)/10^3
FOR T = 3 TO 25 STEP .25
  a = 1.959 / T ^ (1 / 12)
   ONN11 = .451 * a ^ 2
   ONN12 = 1.278 * a ^ 2
   ONN13 = 4.898 * a ^ 2
   ONN22 = 1.031 * a ^ 2
REM ONNnnR=ONNnn*10^-20 [m^2] e TR=T*10^3 [K]
 PRINT #1, T, ONN11
 PRINT #2, T, ONN12
 PRINT #3, T, ONN13
 PRINT #4, T, ONN22
 PRINT T, ONN11, ONN12, ONN13, ONN22
NEXT T
CLOSE #1: CLOSE #2: CLOSE #3: CLOSE #4
PRINT "END"
END
```

D.1.5 *Determinação das Curvas para os Coeficientes de Transporte*

(D.5)

```
REM Progr. p/ determ. dos Coef. de Transporte p/ um gas totalmente ionizado.
OPEN "OMEGEE22.dat" FOR INPUT AS #1
OPEN "OMEGEI11.dat" FOR INPUT AS #2
OPEN "OMEGEI12.dat" FOR INPUT AS #3
OPEN "OMEGEI13.dat" FOR INPUT AS #4
OPEN "OMEGEI22.dat" FOR INPUT AS #5
OPEN "b:CCDELPA0.dat" FOR OUTPUT AS #6
OPEN "b:CCDELPE0.dat" FOR OUTPUT AS #7
OPEN "b:CCDELTR0.dat" FOR OUTPUT AS #8
OPEN "b:CCDETPA0.dat" FOR OUTPUT AS #9
OPEN "b:CCDETPE0.dat" FOR OUTPUT AS #10
OPEN "b:CCDETTR0.dat" FOR OUTPUT AS #11
OPEN "b:CCDTEPA0.dat" FOR OUTPUT AS #12
OPEN "b:CCDTEPE0.dat" FOR OUTPUT AS #13
OPEN "b:CCDTETR0.dat" FOR OUTPUT AS #14
OPEN "b:CVISCIZ1.dat" FOR OUTPUT AS #15
OPEN "b:CVISCIZ2.dat" FOR OUTPUT AS #16
OPEN "b:CVISCIZ3.dat" FOR OUTPUT AS #17
OPEN "b:CVISCIZ4.dat" FOR OUTPUT AS #18
OPEN "b:CVISCIZ5.dat" FOR OUTPUT AS #19
REM Relacoes entre os valores das grandezas definidas para a programacao e
REM o valor verdadeiro (V) dessas grandezas.
REM T=T(V)[K]/10^3; nE=nI=n=n(V)[part/m^3]/10^20; k=k(V)[J/K]/10^-23;
REM mA=mA(V)[kg]/10^-26; eA=eA(V)[C]/10^-20; B=B(V)[T].
B = .1#
pi = 3.14159265#
mI = .665#: mE = 9.11 * 10 ^ -5
eE = -16#: eI = 16#
k = 1.38#
nE = 1#
mEI = mE / mI
FOR T = 3 TO 25 STEP .25
INPUT #1, T, OEE22
INPUT #2, T, OEI11
INPUT #3, T, OEI12
INPUT #4, T, OEI13
INPUT #5, T, OEI22
REM Calculo dos termos de colisao, OABMN=OABMN(V)[m^2]/10^-20.
pt = (2 * pi * k * T / mE) ^ .5
AEE = 16 / 3 * pt * nE * OEI11
FEE = 16 / 15 * pt * nE * (5 * OEI11 - 2 * OEI12)
HEE = 8 / 15 * pt * nE * (2 ^ (3 / 2) * OEE22 + 25 * OEI11 - 20 * OEI12 + 4 *
HII = 8 / 15 * pt * nE * mEI ^ .5 * (30 * mEI ^ .5 * OEI11 + 2 ^ (3 / 2) * OEE
LEE = 16 / 15 * pt * nE * (3 / 2 ^ .5 * OEE22 + 3 * OEI22)
LII = 16 / 15 * pt * nE * mEI ^ .5 * (3 / 2 ^ .5 * OEE22 + mEI ^ .5 * 10 * OEI
a1 = eI * B / (HII * mI) * 10 ^ 3
b1 = eE * B / (FEE * mE) * 10 ^ 3
a2 = HII / LII * a1
b2 = FEE / LEE * b1
```

```
REM Relacoes para os coeficientes de transporte parciais
QTIID = 1 / HII * 1 / (1 + a1 ^ 2)
QTIIE = 1 / HII * a / (1 + a1 ^ 2)
QTIIZ = 1 / HII * a ^ 2 / (1 + a1 ^ 2)
TD = AEE * HEE / FEE ^ 2 - 5 - b1 ^ 2
TE = (AEE + HEE) / FEE
TZ = (TE ^ 2 - TD) / (TD + b1 ^ 2)
DQ = TD ^ 2 + TE ^ 2
QEED = 5 / 2 * 1 / FEE * 1 / DQ * TD
QEEE = 5 / 2 * 1 / FEE * b1 / DQ * TE
QEEZ = 5 / 2 * 1 / FEE * b1 ^ 2 / DQ * TZ
QTEED = 1 / FEE * 1 / DQ * (AEE / FEE * TD + b1 ^ 2 * TE)
QTEEE = 1 / FEE * b1 / DQ * (AEE / FEE * TE - TD)
QTEEZ = 1 / FEE * b1 ^ 2 / DQ * (AEE / FEE * TZ - TE)
MEED = 1 / 2 * 1 / FEE * 1 / DQ * (HEE / FEE * TD + b1 ^ 2 * TE)
MEEE = 1 / 2 * 1 / FEE * b1 / DQ * (HEE / FEE * TE - TD)
MEEZ = 1 / 2 * 1 / FEE * b1 ^ 2 / DQ * (HEE / FEE * TZ - TE)
MTEED = 2 / 5 * QEED
MTEEE = 2 / 5 * QEEE
MTEEZ = 2 / 5 * QEEZ
REM Determinacao dos coeficientes de transporte totais
SIGMPA = 2 * eE ^ 2 * nE / mE * (MEED + MEEZ) * 10 ^ 3
SIGMPE = 2 * eE ^ 2 * nE / mE * MEED * 10 ^ 3
SIGMTR = -2 * eE ^ 2 * nE / mE * MEEE * 10 ^ 3
PHIEPA = 5 / 2 * eE * nE / mE * k * (MTEED + MTEEZ)
PHIEPE = 5 / 2 * eE * nE / mE * k * MTEED
PHIETR = -5 / 2 * eE * nE / mE * k * MTEEE
LAMBPA = 5 / 2 * nE / mE * k ^ 2 * T * (QTEED + QTEEZ + mEI * (QTIID + QTIIZ)
LAMBPE = 5 / 2 * nE / mE * k ^ 2 * T * (QTEED + mEI * QTIID - 2 / 5 * QEED ^ 2
LAMBTR = -5 / 2 * nE / mE * k ^ 2 * T * (QTEEE + mEI * QTIIE - 2 / 5 * QEEE ^
MU1 = nE * k * T / LEE * 10 ^ (-3) * (1 + LEE / LII)
MU2 = nE * k * T / LEE * 10 ^ (-3) * ((1 + 2 * b2 ^ 2) / (1 + 4 * b2 ^ 2) + LE
MU3 = nE * k * T / LEE * 10 ^ (-3) * (1 / (1 + b2 ^ 2) + LEE / LII * 1 / (1 +
MU4 = 2 * nE * k * T / LEE * 10 ^ (-3) * (b2 / (1 + 4 * b2 ^ 2) + LEE / LII *
MU5 = nE * k * T / LEE * 10 ^ (-3) * (b2 / (1 + b2 ^ 2) + LEE / LII * a2 / (1
PRINT #6, T, SIGMPA: PRINT #7, T, SIGMPE: PRINT #8, T, SIGMTR
PRINT #9, T, PHIEPA: PRINT #10, T, PHIEPE: PRINT #11, T, PHIETR
PRINT #12, T, LAMBPA: PRINT #13, T, LAMBPE: PRINT #14, T, LAMBTR
PRINT #15, T, MU1: PRINT #16, T, MU2: PRINT #17, T, MU3
PRINT #18, T, MU4: PRINT #19, T, MU5
10 PRINT T
NEXT T
CLOSE #6
CLOSE #7: CLOSE #8: CLOSE #9
CLOSE #10: CLOSE #11: CLOSE #12
CLOSE #13: CLOSE #14: CLOSE #15: CLOSE #16: CLOSE #17: CLOSE #18
PRINT "END"
END
```

Bibliografia

[1] S. Chapman, T.G. Cowling: *The Mathematical Theory of Non Uniform Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 1952).

[2] A. G. Bezerra Jr., S. Reinecke, G. M. Kremer,: *A Combined Chapman-Enskog and Grad Method.I. Monoatomic Gases and Mixtures*, Continuum Mech. Thermodyn. **6**, 149 (1994).

[3] W. Marshall: *The Kinetic Theory of an Ionized Gas* (Atomic Energy Reserch Establishment, Harwell, Berkshire, 1960).

[4] J. H. Ferziger, H. G. Kaper: *Mathematic Theory of Transport Process* (North Holland Publishing Company, London 1972).

[5] J. A. Bittencourt: *Fundamentals of Plasma Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1986).

[6] J. L. Delcoix: *Introduction to the Theory of the Ionized Gases* (Interscience Publishers, New York, 1960).

[7] B. M. Smirnov: *Introduction to Plasma Physics* (Mir Publishers, Moscow, 1975).

[8] H. Goldstein: *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Comp., Inc., London 1972).

[9] D. A. McQuarrie: *Statistical Mechanics* (Harper & Row Publishers, New York 1973).

[10] M. N. Rosenbluth, W. M. Mcdonald, D. L. Judd: *Fokker-Planck Equation for an Inverse Square Force*, Physical Review, **107**, (1957) 1, 1.

[11] J. L. Lifshitz, L. P. Pitaeviskii: *Physical Kinetics* (Pergamon Press, New York, 1981).

[12] S. I. Braginskii: *Review of Plasma Physics*, (Edited by Acad. M. A. Leontovich Consultants Bureau, New York, 1965), vol. 1

[13] M. N. Kogan: *On the Principle of Maximum Entropy* (Proceedings of the Fifth International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, vol. 1, (1967) 359-368, Academic Press.

[14] G. F. Smith: *On the Isotropic Function of Symmetric Tensors, Screw-Symetric Tensors and Vectors*, Int. J. Engng Sci. vol 9 (1971).

[15] S. R. de Groot and P. Mazur: *Non-Equilibrium Thermodynamics* (North Holland, Amsterdam, 1969)

[16] H. Grad: *On the Kinetic Theory of Rarefied Gases*, Commun. Pure Appl. Math., **2**, (1949) 331-407.

[17] R. Balescu: "Transport Process in Plasmas," *Classical Transpot Theory* (North Holland, New York, 1988) vol. 1.

[18] M. G. Rodbard, G. M. Kremer: *Kinetic Theory for Mixtures of Poliatomic Gases of Rough Spherical Molecules*, Phys. Fluids A, **2**, (7), (1990).

[19] S. Reinecke, G. M. Kremer: *Successive Approximation to Transport Coefficients*, Continuum Mech. Thermodyn. **3**, 115 (1991).

[20] M. G. Rodbard, A. G. Bezerra Jr., G.M. Kremer: *A Combined Chapman-Enskog and Grad method. II. Ionized Gases*, Phys. Plasmas **2**, (3), (1995).

[21] K. Hoffman, R. Kunze: *Linear Algebra* (Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971)

[22] J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, R. B. Bird: *Molecular Theory of Gases and Líquids* (John Wiley & Sons Inc., New York, 1967).

[23] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, Inc., New York 1980).

[24] C. W. Sutton, A. Sherman: *Engineering Magnetohydrodynamics* (McGraw - Hill Book Comp., New York 1965).

[25] J. G. Kirkwood: *The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes II. Transport in Gases*, The Journal Chemical Physics, **15**, (72), (1947).