

SBI-IFUSP



Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Efeitos da Geometria Toroidal na Atuação de Campos
Helicoidais Ressonantes em Tokamaks**

Elton Cesar da Silva



Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - IFUSP (Orientador)

Prof. Dr. Álvaro Vannucci - IFUSP

Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato - UFRGS

Profa. Dra. Maria Célia Ramos Andrade - INPE

Prof. Dr. Othon Cabo Winter - UNESP

Prof. Armando Chani Ferraz
residente Comissão de Pós Graduação

São Paulo

Março-2001

530.44

530.44

D

2001

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Elton Cesar da

“Efeitos da Geometria Toroidal na Atuação de Campos Helicoidais Ressonantes em Tokamaks”. São Paulo, 2001.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas.

Área de Concentração: Física dos Flúidos, Física de Plasma e Descargas Elétricas.

Unitermos: 1. Limitador Magnético Caótico;
2. Campos Helicoidais Ressonantes;
3. Transporte de Linhas de Força;
4. Ilhas Magnéticas;
5. Linhas de Força Caóticas e Bifurcações.

USP/IF/SBI-012/2001

*Aos meus pais por todo o apoio e carinho
a mim dedicados. À Kenya, com todo o
meu amor.*

Conteúdo

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xiii
Resumo	xv
Abstract	xvii
1 Introdução	1
2 Sistemas de Coordenadas	7
2.1 Coordenadas Curvilíneas	7
2.1.1 Bases Covariante e Contravariante	8
2.1.2 Operadores em Coordenadas Curvilíneas	10
2.2 Coordenadas Toroidais	11
2.3 Coordenadas Polares Locais	13
2.4 Coordenadas Polares Toroidais	15
3 Equilíbrio MHD Toroidal	17
3.1 Equação de Grad-Shafranov	17
3.2 Campo Magnético de Equilíbrio	20
3.3 Perfil do Fator de Segurança	26
4 Campo Helicoidal Perturbativo	31
4.1 Hélices em Tokamaks	31
4.2 Condições de Contorno	33

4.3	Potencial Escalar Magnético	35
4.3.1	Cálculo do Potencial Escalar $\Phi_M^{(0)}$	37
4.3.2	Cálculo do Potencial Escalar $\Phi_M^{(1)}$	39
4.4	Campo Magnético Helicoidal	43
5	Linhas de Força do Campo Magnético Ressonante	47
5.1	Cálculo do Parâmetro λ	48
5.2	Mapa Estroboscópico das Linhas de Força	52
5.2.1	Mapas para $\lambda = 0$ e para $\lambda = 0,48$	56
5.3	Hamiltoniana no Limite de Razão de Aspecto Grande	62
5.3.1	Coordenadas Canônicas	66
5.3.2	O Limite de Razão de Aspecto Grande	67
6	Limitador Magnético Caótico	71
6.1	Motivação	71
6.2	Modelo Impulsivo para o Limitador Magnético	73
6.2.1	Mapa Simplético para o Limitador Magnético	76
6.3	Análise Numérica	85
6.3.1	Espectro de Freqüências das Linhas de Força	85
6.3.2	Expoentes de Lyapunov das Linhas de Força	89
7	Destruição de Superfícies Ressonantes.	93
7.1	Ilhas Pendulares	93
7.1.1	Hamiltoniana Local	94
7.1.2	Resultados Numéricos	97
7.2	Estabilidade do Ponto Fixo Elíptico	107
7.3	Conexão de Regiões Caóticas	112
8	Transporte das Linhas de Campo Magnético.	119
8.1	Transporte em Tokamaks	119
8.2	Transporte Anômalo das Linhas de Força	121
8.3	Escape das Linhas de Força do Campo Magnético	126
8.3.1	Padrão de Escape	131
8.4	Limitador Magnético Caótico para o TCABR	133

9	Conclusões.	141
A	Expansão do Ângulo ϑ numa série de Fourier	145
B	Cálculo dos Elementos de Matriz $S_{m,m'}$	147
	Bibliografia	151

Agradecimentos

Lembrar-se de todos que, direta ou indiretamente, colaboraram na elaboração deste trabalho não é tarefa fácil. Sendo assim, para não cometer a injustiça de me esquecer de alguém não citarei nomes.

Agradeço à minha família todo o carinho, incentivo e apoio que me deram ao longo de tantos anos.

Ao meu orientador, agradeço por seu apoio, por suas sugestões sempre procedentes e, principalmente, por sua paciência.

Quero agradecer, também, a todos os amigos do *Grupo de Plasma*, do qual tive o prazer de participar, pelo ótimo ambiente de trabalho e pelas produtivas discussões sobre física.

Aos amigos do *Laboratório de Física Aplicada* do CTM-SP, fica aqui o meu carinho pela excelente oportunidade de convívio e pelas divertidas discussões sobre física, ou deveria dizer *metafísica*.

E, finalmente, quero agradecer à *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* - FAPESP pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

2.1	Sistema de coordenadas curvilíneas.	8
2.2	Superfícies coordenadas do sistema toroidal.	12
2.3	Superfícies coordenadas do sistema polar local.	14
2.4	Superfícies coordenadas do sistema polar toroidal.	15
3.1	Superfícies Magnéticas.	24
3.2	Perfis das componentes $B^{(0)2}$ e $B^{(0)3}$	24
3.3	Perfil do fator de segurança, $q(r_t)$	28
4.1	Cundutores helicoidais.	33
4.2	Perfil poloidal da componente contravariante B_h^4	44
4.3	Perfil radial da componente contravariante B_h^1	45
5.1	Traçado de uma linha de força sobre a superfície racional com $q = \frac{4}{1}$	49
5.2	Traçado da linha de força com $q = \frac{4}{1}$ no plano $\vartheta \times \varphi_t$	50
5.3	Gráfico relacionando ϑ e θ_t	51
5.4	Gráfico relacionando λ com q	52
5.5	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0, 2\% I_p$, $\lambda = 0, 48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	55
5.6	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0, 1\% I_p$, $\lambda = 0$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	58
5.7	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0, 1\% I_p$, $\lambda = 0, 48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	58
5.8	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0, 2\% I_p$, $\lambda = 0$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	59

5.9	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0,2\% I_p$, $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	59
5.10	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0,3\% I_p$, $\lambda = 0$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	60
5.11	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0,3\% I_p$, $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	60
5.12	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0,4\% I_p$, $\lambda = 0$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	61
5.13	Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético: $I_h = 0,4\% I_p$, $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$	61
6.1	Representação esquemática de um limitador magnético.	72
6.2	Dependência do elemento de matriz $S_{m,m'}$ com relação a m' para $m = 4$. . .	78
6.3	Espectros de FOURIER para a hamiltoniana H_1	79
6.4	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 1\%$ de I_p e representação nas coordenadas canônicas.	80
6.5	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 1\%$ de I_p e representação nas coordenadas polares toroidais.	80
6.6	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 1,5\%$ de I_p e representação nas coordenadas canônicas.	81
6.7	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 2\%$ de I_p e representação nas coordenadas canônicas.	82
6.8	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 2,5\%$ de I_p e representação nas coordenadas canônicas.	82
6.9	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 1\%$ de I_p , $\lambda = 0$ e representação nas coordenadas canônicas.	83
6.10	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 1,5\%$ de I_p , $\lambda = 0$ e representação nas coordenadas canônicas.	83
6.11	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 2\%$ de I_p , $\lambda = 0$ e representação nas coordenadas canônicas.	84
6.12	Mapa estroboscópico para os limitadores magnéticos caóticos. $I_h = 2,5\%$ de I_p , $\lambda = 0$ e representação nas coordenadas canônicas.	84

6.13	Mapas estroboscópicos das trajetórias usadas no cálculo dos espectros de FOURIER.	86
6.14	Espectros de FOURIER correspondentes à figura-6.13a.	86
6.15	Espectros de FOURIER correspondentes à figura-6.13b.	87
6.16	Espectros de FOURIER correspondentes à figura-6.13c e à figura-6.13d.	88
6.17	Relação entre a frequência correspondente ao máximo do espectro de potência e o fator de segurança.	89
6.18	Perfil do expoente de LYAPUNOV superposto ao respectivo mapa estro- boscópico para os limitadores magnéticos caóticos.	91
7.1	Espaço de fase para um pêndulo.	96
7.2	Separatrizes, para vários valores de I_h , das cadeias de ilhas para as quais $q = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{5}{1}$	98
7.3	Largura da separatriz para a cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$	99
7.4	Largura da separatriz para a cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{5}{1}$	99
7.5	Representação das linhas de força utilizadas para o cálculo do perfil da frequência interna de uma ilha magnética.	100
7.6	Linhas de força utilizadas para o cálculo de ω_{in}	101
7.7	Perfil da frequência interna, ω_{in} , para a ilha magnética central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$	103
7.8	Frequência no ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$	104
7.9	Frequência no ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{5}{1}$	104
7.10	Perfis da frequência interna para vários valores da corrente elétrica de per- tubação.	105
7.11	Linhas de força usadas para o cálculo do perfil da frequência interna, ω_{in} , para $I_h = 1,3\%$ de I_p	106
7.12	Linhas de força usadas para o cálculo do perfil da frequência interna, ω_{in} , para $I_h = 1,6\%$ de I_p	106
7.13	Linhas de força usadas para o cálculo do perfil da frequência interna, ω_{in} , para $I_h = 1,8\%$ de I_p	107

7.14	Expoente de LYAPUNOV da linha de força associada ao ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$	108
7.15	Seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima ao ponto fixo elíptico de uma ilha magnética primária.	109
7.16	Segunda seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima ao ponto fixo elíptico de uma ilha magnética primária.	110
7.17	Expoente de LYAPUNOV da linha de força associada a um dos dois novos pontos fixos originados por dobra de período.	111
7.18	Seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima aos pontos fixos elípticos gerados pela bifurcação.	111
7.19	Segunda seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima aos pontos fixos elípticos gerados pela bifurcação.	112
7.20	Superfícies magnéticas de equilíbrio em termos das coordenadas canônicas.	113
7.21	Mapa estroboscópico mostrando a região entre duas cadeias de ilhas magnéticas primárias.	114
7.22	Mapa estroboscópico mostrando a conexão das regiões caóticas de duas cadeias de ilhas magnéticas primárias.	115
7.23	Parâmetro de CHIRIKOV como função da corrente de perturbação.	116
7.24	Comportamento da freqüência no ponto fixo elíptico para I_h variando de 0 a 6,5% de I_p	117
7.25	Mapa estroboscópico mostrando regiões de linhas de força estáveis, ao redor dos pontos elípticos das ilhas primárias, contidas na densa região caótica.	118
7.26	Mapa estroboscópico mostrando a bifurcação dos pontos fixos da cadeia de ilhas magnéticas para a qual $q = \frac{4}{1}$	118
8.1	Mapa estroboscópico mostrando a localização dos pontos iniciais para o cálculo de $\sigma^2(n)$ para $I_h = 2,1\%$ de I_p	122
8.2	Mapa estroboscópico mostrando a localização dos pontos iniciais para o cálculo de $\sigma^2(n)$ para $I_h = 4,5\%$ de I_p	123
8.3	Afastamento quadrático médio, σ^2 , da ação \mathcal{J}	123
8.4	Estado final do conjunto de linhas de força após 5 voltas ao longo da câmara de confinamento.	124

8.5	Estado final do conjunto de linhas de força após 15 voltas ao longo da câmara de confinamento.	125
8.6	Variação do número de linhas de força em função do número de iterações.	126
8.7	Histograma de frequências do número de linhas de força que se conectam com a parede da câmara durante o tempo de uma observação.	127
8.8	Histograma de frequências dos tamanhos dos platôs.	130
8.9	Número médio de voltas para se atingir a parede da câmara em função da corrente de perturbação.	131
8.10	Padrão de escape das linhas de força na borda do plasma.	132
8.11	Mapa estroboscópico das linhas de força de equilíbrio para o tokamak TCA-BR em termos das coordenadas canônicas.	134
8.12	Mapa estroboscópico das linhas de força de equilíbrio para o tokamak TCA-BR em termos das coordenadas polares toroidais.	134
8.13	Mapa estroboscópico das linhas de força de equilíbrio para o tokamak TCA-BR em termos das coordenadas polares locais.	135
8.14	Mapa estroboscópico das linhas de força de equilíbrio para o tokamak TCA-BR em termos das coordenadas cilíndricas.	136
8.15	Mapa estroboscópico das linhas de força para o tokamak TCABR em termos das coordenadas canônicas e $I_h = 1,5$ kA.	137
8.16	Mapa estroboscópico das linhas de força para o tokamak TCABR em termos das coordenadas polares locais e $I_h = 1,5$ kA.	137
8.17	Mapa estroboscópico das linhas de força para o tokamak TCABR em termos das coordenadas canônicas e $I_h = 3,2$ kA.	138
8.18	Mapa estroboscópico das linhas de força para o tokamak TCABR em termos das coordenadas polares locais e $I_h = 3,2$ kA.	138

Lista de Tabelas

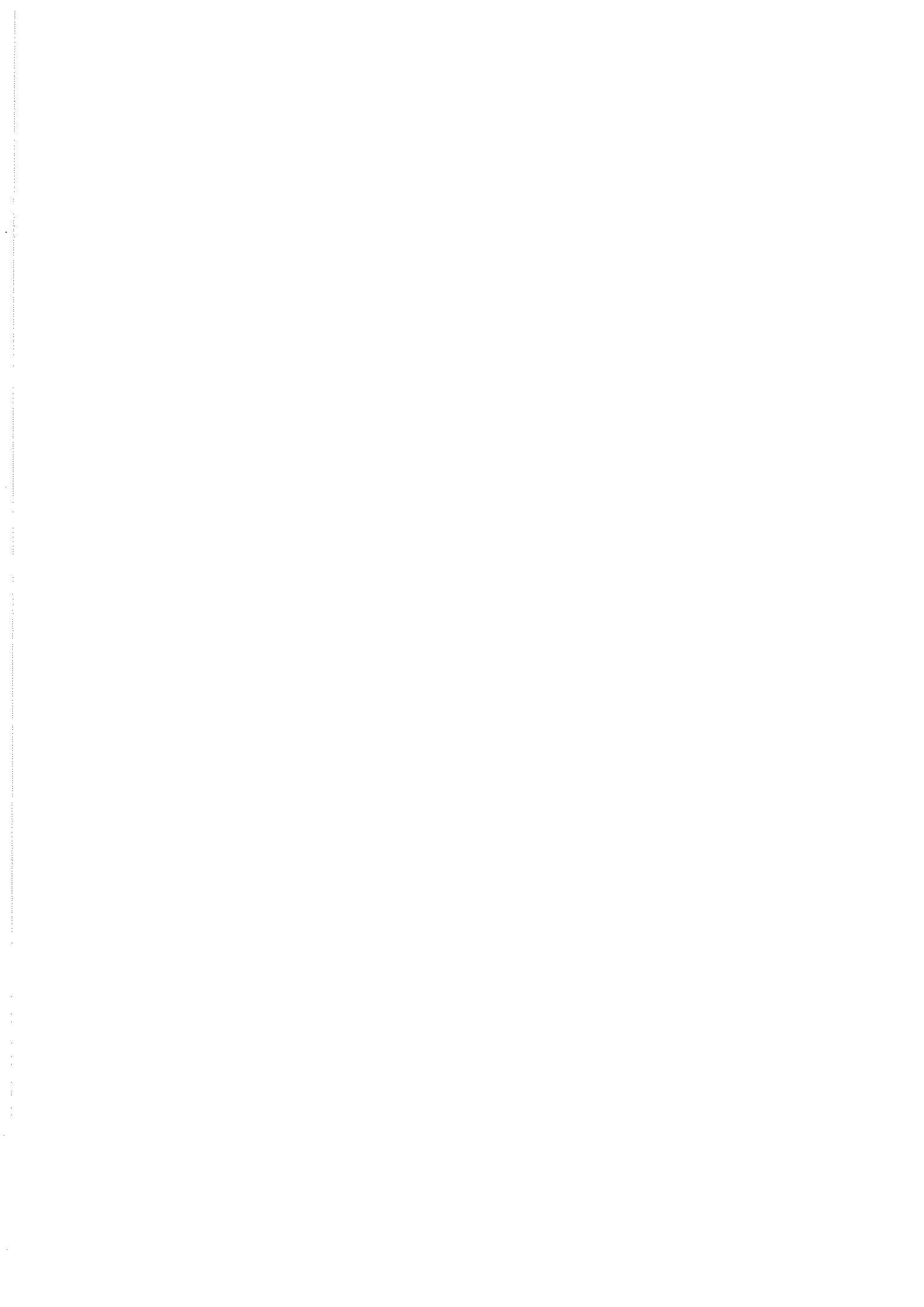
3.1	Parâmetros do tokamak TBR-1	25
7.1	Valores de $\mathcal{J}(t_0) - \mathcal{J}_0$ e $\omega_{S_{max}}$ usados para estimar-se a frequência do ponto fixo elíptico.	102
8.1	Parâmetros do tokamak TCABR	133

Resumo

Neste trabalho, consideramos os efeitos de um campo magnético ressonante externo sobre o plasma confinado em um tokamak. Este campo magnético pode ser produzido quer por condutores helicoidais ou por um limitador magnético caótico. O principal propósito desse campo magnético ressonante é criar uma região de linhas de força caóticas na borda da coluna de plasma que pode melhorar o confinamento do plasma. O campo magnético de equilíbrio foi obtido resolvendo-se a equação de GRAD-SHAFRANOV em um sistema de coordenadas intrinsecamente toroidal (as coordenadas polares toroidais). Obtivemos o campo magnético, gerado pelos condutores helicoidais, através da solução explícita da equação de LAPLACE no mesmo sistema de coordenadas. A partir desse campo magnético, tomando o termo de mais baixa ordem, obtivemos analiticamente um mapa estroboscópico simplético para um conjunto de anéis limitadores magnéticos caóticos. Calculamos esse mapa estroboscópico simplético usando uma formulação hamiltoniana e adotando a ação dos limitadores magnéticos caóticos como uma seqüência de pulsos do tipo função delta. Com esse mapa estroboscópico simplético, caracterizamos algumas ilhas magnéticas ressonantes e a transição para um regime de *caos global* através da superposição das mesmas. Usamos esse mapa estroboscópico simplético para estudar o transporte das linhas de força na borda da coluna de plasma. A perda de linhas de força caóticas, que atingem a parede interna do tokamak, segue uma distribuição de POISSON. Calculamos, ainda, o número médio de voltas, ao redor da câmara de vácuo, necessárias para que uma linha de força caótica atinja a parede da câmara.

Abstract

In this work, we have considered the effects of an external resonant magnetic field on the plasma confined in a tokamak. This resonant field can be produced by helical windings or by a **chaotic magnetic limiter**. The main purpose of this resonant magnetic field is to create a region of chaotic field lines at the edge of the plasma that can improve the confinement of the plasma. The equilibrium tokamak field was obtained by solving the GRAD-SHAFRANOV equation in an intrinsically toroidal coordinate system (the toroidal polar coordinates). We have obtained the magnetic field which has been generated by helical windings through an explicit solution of the LAPLACE equation in the same coordinate system. From this magnetic field, taken in its lowest order, we have analytically obtained a symplectic stroboscopic map for a set of **chaotic magnetic limiters**. We have calculated this symplectic stroboscopic map by using a hamiltonian formulation and by supposing the action of the **chaotic magnetic limiters** as a sequence of delta-function pulses. With this symplectic stroboscopic map we have characterized some resonant magnetic islands and the onset of *global chaos* through their overlap. We have used this symplectic stroboscopic map in order to study the transport of the field lines at the edge of the plasma. The loss of chaotic field lines that reach the inner wall of the tokamak follows a POISSON distribution. We have also calculated the average number of toroidal turns for a chaotic field line to reach the inner wall of the tokamak.



Capítulo 1

Introdução

Dentre os dispositivos de confinamento de plasmas, construídos com o objetivo de se obter energia através da fusão termonuclear controlada, o tokamak é o que apresenta os resultados mais promissores.

O tokamak corresponde, basicamente, a uma câmara toroidal na qual uma coluna de gás altamente ionizada e aquecida ôhmica (o plasma) é confinada. A coluna de gás funciona como a espira do secundário de um transformador em cujas espiras do enrolamento primário são aplicados pulsos de correntes elétricas. Essas correntes, por sua vez, induzem na coluna de gás o campo elétrico responsável pela formação da corrente de plasma e pelo aquecimento ôhmico. O confinamento do plasma é produzido por dois campos magnéticos básicos: o campo toroidal, criado por um conjunto de espiras montadas ao redor da câmara de confinamento, e o campo poloidal, criado pela própria corrente de plasma. O campo magnético resultante da combinação desses dois campos básicos possui linhas de força com forma helicoidal que repousam sobre superfícies toroidais, que se aninham umas dentro das outras, chamadas de superfícies magnéticas. Sobre essas superfícies, a força resultante do gradiente de pressão, que causa a expansão do plasma, é equilibrada pela força de LORENTZ, que surge em virtude da interação das correntes existentes no plasma e os campos magnéticos [1, 2].

Esse confinamento, porém, está constantemente sujeito ao aparecimento de instabilidades, como por exemplo as instabilidades de disruptura, que podem destruí-lo completa e abruptamente. Uma das hipóteses propostas para explicar o surgimento das instabilidades de disruptura é a presença de linhas de força caóticas na região da coluna de plasma onde o fator de segurança é $q = 2$ [3, 4]. Uma maneira de se atuar sobre essa região é através

de campos magnéticos ressonantes [5] que são produzidos por condutores helicoidais de correntes elétricas enrolados sobre a parte externa da câmara de confinamento.

Os condutores helicoidais ressonantes (externos ao plasma) modificam a topologia das superfícies magnéticas onde são formadas as ilhas magnéticas. Ilhas magnéticas são estruturas de linhas de força de forma tubular que se estendem ao longo do toróide como uma hélice [42]. A origem das linhas de força caóticas é a interação entre ilhas magnéticas produzidas pela atuação de campos magnéticos ressonantes sobre as superfícies magnéticas de equilíbrio.

As instabilidades de disruptura são tipicamente precedidas por flutuações do campo magnético poloidal, chamadas de oscilações de MIRNOV, que podem ser detectadas por sondas instaladas próximas à borda da coluna de plasma [6]. Vários resultados experimentais têm confirmado a atenuação das oscilações de MIRNOV, abaixo do limiar para o qual as instabilidades de disruptura ocorrem, em consequência do uso de campos magnéticos ressonantes [7, 8].

Do ponto de vista do controle da instabilidade de disruptura, a existência de linhas de força caóticas na região da coluna de plasma onde $q = 2$ é uma característica indesejável. Há, no entanto, situações nas quais a existência de uma região do plasma com linhas de força caóticas produz resultados benéficos para o confinamento do plasma. Uma dessas situações diz respeito à interação do plasma com a parede da câmara de confinamento.

No final dos anos 70, F. KARGER e K. LACKNER [9] e W. ENGELHARDT e W. FENEBERG [10] propuseram que uma camada da periferia da coluna de plasma com linhas de força caóticas poderia uniformizar a deposição de energia térmica sobre a parede da câmara de confinamento e diminuir a temperatura do plasma nessa região reduzindo, com isso, a produção de impurezas através do mecanismo de *sputtering*. Além do mais, a própria concentração de impurezas na região central da coluna de plasma deveria ser reduzida por um fator proporcional ao inverso do coeficiente de difusão do plasma na região caótica da borda do plasma.

Alguns experimentos têm comprovado essa redução da temperatura na periferia da coluna de plasma e esse *efeito de blindagem* das impurezas em virtude da existência de uma região de linhas de força caóticas na periferia do plasma [8, 11, 12, 13, 14].

Essa região de linhas de força caóticas, na borda da coluna de plasma, pode ser criada por condutores helicoidais de correntes elétricas enrolados, de maneira apropriada, sobre a superfície externa da câmara de confinamento. Entretanto, a existência de um número

grande de janelas na câmara de confinamento destinadas à observação do plasma dificulta sobremaneira a instalação desses condutores. Uma possível maneira de se contornar essa dificuldade é através do uso do dispositivo conhecido como **limitador magnético caótico**. Um **limitador magnético** é formado por um anel condutor de correntes elétricas, instalado em uma seção toroidal da câmara de confinamento, que procura reproduzir uma fatia estreita dos correspondentes condutores helicoidais.

O primeiro tratamento teórico da dinâmica do **limitador magnético** foi feito por MARTIN E TAYLOR [15] que propuseram um modelo no qual o comportamento das linhas de força era descrito através de dois mapas de POINCARÉ acoplados. Um mapa para a região livre da ação do **limitador magnético** e outro para região onde há a ação do **limitador magnético**. Era um modelo que não possuía nenhuma característica toroidal e descrevia a atuação de apenas um anel **limitador magnético**. O mapa de MARTIN E TAYLOR foi, posteriormente, melhorado e até mesmo outros modelos foram propostos que incorporavam efeitos decorrentes da geometria toroidal da câmara de confinamento e a ação de mais de um anel **limitador magnético** [16, 17, 18].

Uma outra abordagem para se investigar a ação do **limitador magnético** consiste em parametrizar o traçado das linhas de força do campo magnético através de uma coordenada espacial ignorável. Com respeito a essa coordenada ignorável, a configuração do campo magnético de equilíbrio exibe algum tipo de simetria espacial de modo que as equações para o traçado das linhas de força tomam a forma das equações de HAMILTON, com a coordenada ignorável correspondendo ao *tempo* canônico [19, 20].

Nesta tese, estudamos a influência, sobre a configuração de equilíbrio do campo magnético responsável pelo confinamento do plasma, dos campos helicoidais ressonantes produzidos por um par de condutores helicoidais, conduzindo correntes elétricas em sentidos opostos, e, também, por um conjunto de anéis **limitadores magnéticos**. O campo magnético de equilíbrio foi derivado, analiticamente, de uma função de fluxo poloidal obtida resolvendo-se, autoconsistentemente, a equação de GRAD-SHAFRANOV representada num sistema de coordenadas intrinsecamente toroidal (as coordenadas polares toroidais) [21]. Obtivemos o campo helicoidal ressonante, produzido pelo par de condutores, em termos de um potencial escalar magnético representado nas mesmas coordenadas usadas para o cálculo do campo magnético de equilíbrio. Calculamos esse potencial escalar magnético resolvendo a equação de LAPLACE para a região do espaço livre de correntes elétricas. Como consequência do sistema de coordenadas utilizado, o campo magnético ressonante demonstra

possuir propriedades decorrentes da geometria toroidal, mesmo para o termo de menor ordem com respeito ao inverso da razão de aspecto.

Apresentamos uma formulação hamiltoniana, para o limite de razão de aspecto grande, para as equações que descrevem o traçado das linhas de força do campo magnético resultante da superposição do campo de equilíbrio com o campo criado pelo par de condutores helicoidais. A partir dessa formulação hamiltoniana, e considerando a ação dos anéis limitadores magnéticos como uma seqüência de pulsos localizados na direção toroidal, obtivemos um mapa estroboscópico simplético para as linhas de força do campo magnético sob a ação dos anéis limitadores magnéticos [22]. Esse mapa estroboscópico nos permitiu obter resultados mais precisos, no que diz respeito à localização e forma das ilhas magnéticas, em contraste com trabalhos anteriores.

Graças à maior precisão desse mapa estroboscópico simplético, pudemos estudar o processo de transporte das linhas de força na região caótica criada na borda da coluna de plasma [23]. Como resultado do estudo do transporte das linhas de força caóticas na borda da coluna de plasma, estimamos o número médio de voltas que uma linha de força necessita para atingir a parede da câmara de confinamento do plasma. Esse número médio de voltas influencia, de certa forma, o tempo de escape dos íons das impurezas presentes nessa região de linhas de força caóticas.

Esta tese está dividida em nove capítulos dos quais o primeiro é este capítulo introdutório.

No capítulo 2, apresentamos um resumo sobre coordenadas curvilíneas e sobre a representação de algumas estruturas matemáticas, tais como os operadores diferenciais utilizados nesta tese, em termos dessas coordenadas curvilíneas. Apresentamos, também, os sistemas de coordenadas utilizados ao longo da tese.

No capítulo 3, apresentamos o cálculo do campo magnético de equilíbrio para um tokamak descrito em termos de uma função de fluxo poloidal que é a solução da equação de GRAD-SHAFRANOV representada nas coordenadas polares toroidais.

No capítulo 4, calculamos o campo magnético criado por um par de condutores helicoidais, transportando correntes elétricas em sentidos opostos, colocados sobre a superfície da câmara toroidal de contenção do plasma. Calculamos esse campo usando a abordagem do potencial escalar magnético [24], na qual $\vec{B} = \nabla\Phi_M$, com o potencial escalar, Φ_M , satisfazendo a equação de LAPLACE nas regiões do espaço onde não há correntes elétricas. Utilizamos o mesmo sistema de coordenadas polares toroidais no qual o campo magnético de equilíbrio foi calculado.

No capítulo 5, estudamos os efeitos do campo magnético criado pelos condutores helicoidais sobre o campo magnético de equilíbrio. Fizemos isto calculando o mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético resultante da superposição desses dois campos. Calculamos, ainda, o parâmetro responsável pela helicidade não uniforme dos condutores helicoidais. Finalizamos o capítulo apresentando uma descrição hamiltoniana, na aproximação de razão de aspecto grande, para o traçado das linhas de força do campo magnético de equilíbrio perturbado pelo campo helicoidal ressonante.

No capítulo 6, apresentamos um modelo para a atuação dos anéis **limitadores magnéticos caóticos**. A partir desse modelo, obtivemos um conjunto de expressões simpléticas para o mapa estroboscópico das linhas de força, sob a ação dos anéis **limitadores magnéticos**, que resultam diretamente do campo magnético de perturbação. Realizamos, também, a caracterização de alguns tipos de linhas de força, produzidas pelo mapa simplético, através do cálculo do espectro de frequências e do cálculo dos expoentes de LYAPUNOV.

No capítulo 7, estudamos a formação da região de linhas de força caóticas na borda do plasma em decorrência da interação entre cadeias de ilhas magnéticas. Analisamos o desenvolvimento dessas cadeias de ilhas através de uma hamiltoniana local semelhante à hamiltoniana de um pêndulo não-linear. Comparamos os resultados dessa análise com os respectivos resultados obtidos do mapeamento simplético. Descrevemos, também, o surgimento das ilhas secundárias e a estabilidade dos pontos fixos elípticos.

No capítulo 8, estudamos o transporte das linhas de força do campo magnético na região de linhas de força caóticas criada pelos anéis **limitadores magnéticos**. Caracterizamos o tipo de transporte (subdifusivo ou superdifusivo) e como ocorre a *colisão* das linhas de força com a parede da câmara de confinamento. No final desse capítulo, apresentamos alguns resultados específicos para o tokamak TCABR, instalado no *Laboratório de Física de Plasmas* do Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Por último, no capítulo 9, encerramos esta tese com as conclusões relativas aos resultados obtidos.

Obtivemos os resultados numéricos apresentados nesta tese, através de programas desenvolvidos pelo próprio autor, utilizando a linguagem de programação FORTRAN 77. Produzimos as figuras com o programa XMGR v4.0, desenvolvido por PAUL J. TURNER, e elaboramos o texto usando o $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$. Todos os programas *rodaram* sobre a distribuição S.U.S.E. LINUX 5.2 instalada em um computador com um processador PENTIUMIII de 500 MHz possuindo 192 Mb de memória RAM.

Capítulo 2

Sistemas de Coordenadas

Boa parte da simplificação que se pode obter na solução das equações que tratam do confinamento de plasmas reside na escolha apropriada do sistema de coordenadas.

Por isso, neste capítulo, descrevemos o sistema de coordenadas polares toroidais, $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, definido por KUCINSKI E OUTROS [21], que usamos nesta tese. Estas coordenadas são apropriadas à descrição dos campos magnéticos de equilíbrio e de perturbação de plasmas confinados em câmaras toroidais. Antes, porém, apresentamos uma introdução bastante resumida sobre coordenadas curvilíneas e, ainda, os sistemas de coordenadas toroidais, (ξ, ω, φ) , e polares locais, (r, θ, φ) . As coordenadas toroidais serviram de base para a definição das coordenadas polares toroidais enquanto que o sistema polar local foi utilizado, nesta tese, na comparação com as coordenadas polares toroidais no limite de razão de aspecto grande.

2.1 Coordenadas Curvilíneas

Qualquer ponto, num espaço tridimensional, pode ser localizado através da interseção de três superfícies que, por exemplo, podem ser os três planos cartesianos. Quando estas superfícies não são planas, nem mutuamente perpendiculares, elas formam o que se costuma chamar de um sistema de coordenadas curvilíneas (ver figura-2.1).

A localização de um ponto P pode ser descrita quer por suas coordenadas cartesianas (x, y, z) quer por suas coordenadas curvilíneas (x^1, x^2, x^3) desde que se garanta que o

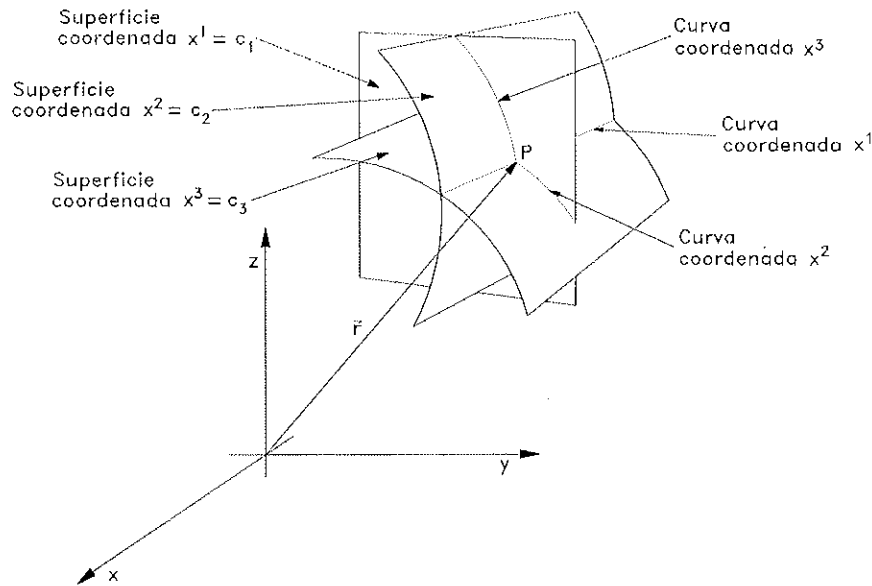


Figura 2.1: Sistema de coordenadas curvilíneas.

conjunto de transformações

$$\begin{aligned}x &= x(x^1, x^2, x^3), \\y &= y(x^1, x^2, x^3), \\z &= z(x^1, x^2, x^3),\end{aligned}$$

seja invertível e diferenciável.

As superfícies $x^i = c_i$ ($c_i = \text{constante}$) são chamadas *superfícies coordenadas* e a curva formada pela interseção das superfícies coordenadas $x^i = c_i$ e $x^j = c_j$ é a *curva coordenada* x^k (com $i \neq j \neq k$) [25].

2.1.1 Bases Covariante e Contravariante

Considere o vetor posição $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, unindo a origem ao ponto P (ver figura-2.1), em que \hat{e}_x , \hat{e}_y e \hat{e}_z são os vetores ortonormais do sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) .

Os vetores da base covariante, \vec{e}_i , para o sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3) , são definidos como:

$$\vec{e}_i \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}.$$

Dado que essa derivada é calculada ao longo da curva coordenada x^i , isto é, com x^j e x^k mantidos constantes, \vec{e}_i é tangente a esta no ponto P .

Os vetores da base contravariante, por sua vez, são definidos como os vetores normais às superfícies coordenadas $x^i = \text{constante}$:

$$\vec{e}^i \equiv \nabla x^i.$$

Os vetores \vec{e}_i e \vec{e}_j não são necessariamente ortonormais, ou seja, pode ocorrer de $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \neq \delta_{ij}$.

Estas duas bases são chamadas de bases recíprocas pois,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j.$$

Um vetor qualquer \vec{A} é decomposto da seguinte forma, em termos das bases covariante e contravariante, respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3 = \\ &= A_1 \vec{e}^1 + A_2 \vec{e}^2 + A_3 \vec{e}^3. \end{aligned}$$

Os coeficientes A^i são as componentes contravariantes de \vec{A} e são dados por:

$$A^i = \vec{A} \cdot \vec{e}^i,$$

enquanto que os coeficientes A_i são as componentes covariantes de \vec{A} e são dadas por:

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i.$$

O quadrado do comprimento de arco diferencial dado por:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r},$$

pode ser escrito como:

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} dx^i dx^j,$$

em que

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,$$

são as componentes do tensor métrico covariante. De modo análogo, as componentes do tensor métrico contravariante são definidas como:

$$g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j .$$

Quando o sistema de coordenadas curvilíneas é ortogonal, $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$, podemos simplificar a notação escrevendo

$$g_{ii} = h_i^2 \quad \text{e} \quad ds^2 = \sum_i (h_i dx^i)^2 ,$$

em que os coeficientes h_i são chamados de *fatores de escala*.

Os vetores das bases covariante e contravariante se relacionam através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \sqrt{g} (\vec{e}^j \times \vec{e}^k) , \\ \vec{e}^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) , \end{aligned}$$

nas quais \sqrt{g} , dada por:

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 ,$$

é o jacobiano da transformação das coordenadas cartesianas para as coordenadas curvilíneas. Eles também podem ser relacionados através de:

$$\begin{aligned} \vec{e}^i &= \sum_j g^{ij} \vec{e}_j , \\ \vec{e}_i &= \sum_j g_{ij} \vec{e}^j , \end{aligned}$$

com os tensores métricos, covariante e contravariante, relacionados por $[g_{ij}] = [g^{ij}]^{-1}$.

2.1.2 Operadores em Coordenadas Curvilíneas

Apresentamos, agora, o modo como alguns operadores, elementos de linha, elementos de superfície e elementos de volume, utilizados nesta tese, são representados em termos das coordenadas curvilíneas.

Antes, contudo, queremos deixar claro que, ao longo desta tese, usamos sempre a notação de soma explicitamente.

- Operador gradiente, ∇ , :

$$\nabla\Phi = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \vec{e}^i.$$

- Operador divergente, $\nabla \cdot$, :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i),$$

- Operador rotacional, $\nabla \times$, :

$$\nabla \times \vec{A} = \sum_i \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} (\vec{e}^i \times \vec{e}^j).$$

- Operador Laplaceano, ∇^2 , :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \right).$$

O elemento de linha $d\vec{s}_i$, ao longo da curva coordenada x^i , é dado por:

$$d\vec{s}_i = dx^i \vec{e}_i.$$

O elemento de superfície $d\vec{\sigma}_i$, perpendicular à superfície coordenada $x^i = \text{constante}$, é:

$$d\vec{\sigma}_i = \sqrt{g} \vec{e}^i dx^j dx^k.$$

E, finalmente, o elemento de volume dV é dado por:

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

2.2 Coordenadas Toroidais

As coordenadas toroidais (ξ, ω, φ) são definidas em termos das coordenadas cilíndricas usuais, (R, ϕ, Z) , como [26]:

$$R = \frac{R'_0 \sinh(\xi)}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)}, \tag{2.1}$$

$$Z = \frac{R'_0 \sin(\omega)}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)}, \tag{2.2}$$

$$\phi = \varphi. \tag{2.3}$$

A figura-2.2 apresenta as superfícies coordenadas do sistema de coordenadas toroidais.

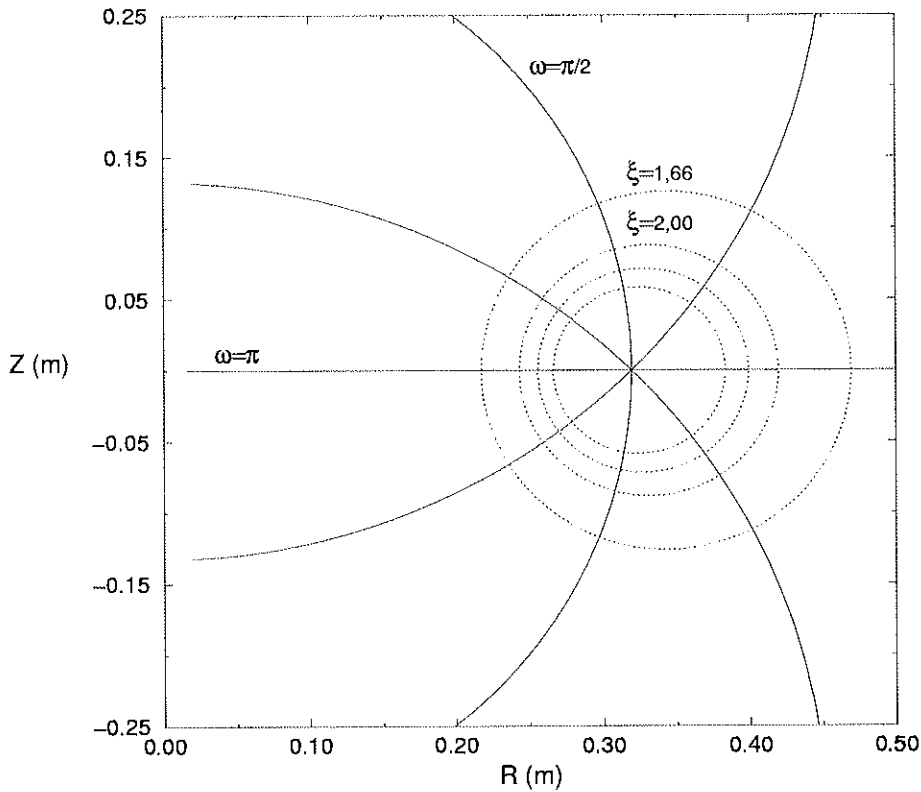


Figura 2.2: Superfícies coordenadas do sistema toroidal. Seção $\varphi = 0$.

- $\xi = \text{constante}$: são toróides de raio menor, a , dado por:

$$a = \frac{R'_0}{\sinh(\xi)},$$

e raio maior, R , dado por:

$$R = R'_0 \coth(\xi).$$

Cada toróide possui um centro diferente, uma vez que R depende de ξ . R'_0 é uma constante com características de raio maior, já que $a \rightarrow 0$ e $R \rightarrow R'_0$, quando $\xi \rightarrow \infty$.

- $\omega = \text{constante}$: são superfícies esféricas, de raio $\frac{R'_0}{\sin(\omega)}$, com centro sobre o eixo Z , na posição $Z = R'_0 \cot(\omega)$. Todas as esferas passam por $(Z = 0, R = R'_0)$, que corresponde ao toróide limite $\xi \rightarrow \infty$.
- $\varphi = \text{constante}$: são semi-planos contendo o eixo Z .

Para este sistema de coordenadas curvilíneas a base contravariante é:

$$\begin{aligned}\vec{e}^1 &= \nabla\xi = \frac{1}{h_\xi}\hat{e}_\xi, \\ \vec{e}^2 &= \nabla\omega = \frac{1}{h_\omega}\hat{e}_\omega, \\ \vec{e}^3 &= \nabla\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\hat{e}_\varphi,\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}h_\xi &= \frac{R'_0}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)} = h_\omega, \\ h_\varphi &= \frac{R'_0}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)} \sinh(\xi),\end{aligned}$$

são os fatores de escala do sistema de coordenadas toroidais; \hat{e}_ξ , \hat{e}_ω e \hat{e}_φ formam uma base ortonormal.

A métrica para este sistema de coordenadas é dada por:

$$\begin{aligned}g^{11} &= \frac{1}{h_\xi^2} = g^{22}, \\ g^{33} &= \frac{1}{h_\varphi^2}, \\ \sqrt{g} &= h_\xi h_\omega h_\varphi.\end{aligned}$$

2.3 Coordenadas Polares Locais

As coordenadas polares locais, (r, θ, φ) , estão relacionadas às coordenadas cilíndricas usuais, (R, ϕ, Z) , através das seguintes relações [26]:

$$R = R_0 - r \cos(\theta), \quad (2.4)$$

$$Z = r \sin(\theta), \quad (2.5)$$

$$\phi = \varphi. \quad (2.6)$$

A figura-2.3 mostra a interseção das superfícies coordenadas $r = \text{constante}$ e $\theta = \text{constante}$ com a superfície coordenada $\varphi = 0$.

A base contravariante para o sistema polar local é dada por:

$$\begin{aligned}\vec{e}^1 &= -\cos(\theta)\hat{e}_R + \sin(\theta)\hat{e}_Z, \\ \vec{e}^2 &= \frac{1}{r}[\sin(\theta)\hat{e}_R + \cos(\theta)\hat{e}_Z], \\ \vec{e}^3 &= \frac{1}{R_0}\hat{e}_\phi.\end{aligned}$$

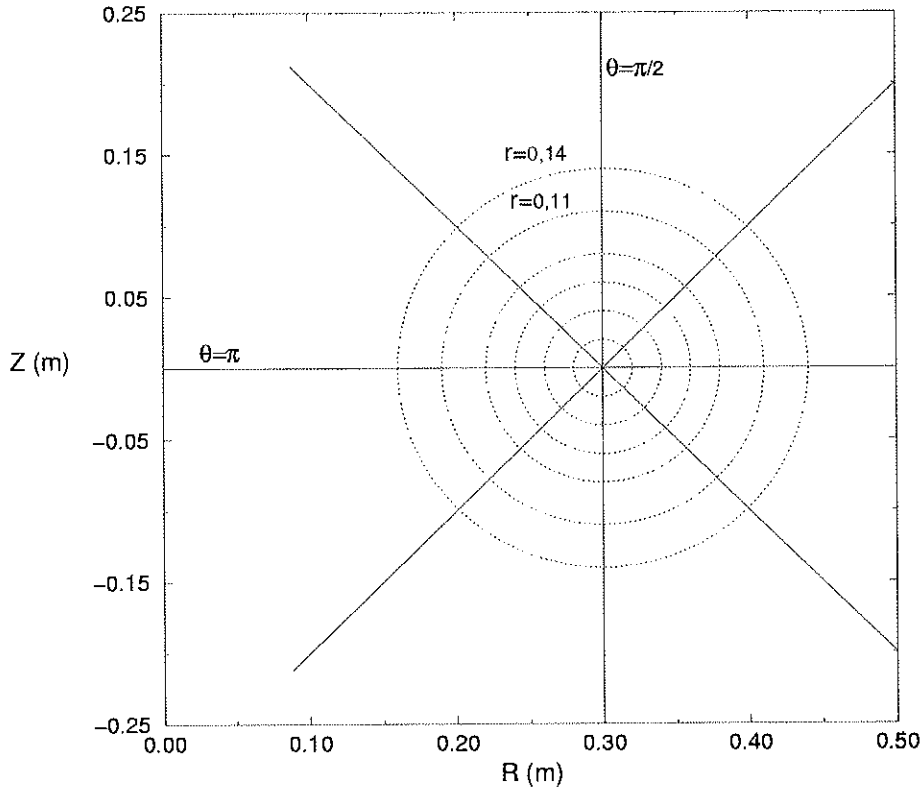


Figura 2.3: Superfícies coordenadas do sistema polar local. Secção $\varphi = 0$.

Como os vetores \hat{e}_R , \hat{e}_θ e \hat{e}_Z formam uma base ortonormal os elementos do tensor métrico para este sistema de coordenadas são:

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1, \\ g^{22} &= \frac{1}{r^2}, \\ g^{33} &= \frac{1}{R_0^2}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sqrt{g} = R_0 r.$$

Muitos trabalhos adotam o sistema de coordenadas polares locais, (r, θ, φ) , quando tratam com plasmas confinados por dispositivos toroidais, caracterizados por um raio maior R_0 e um raio menor b , que possuam uma razão de aspecto grande, isto é, $\frac{b}{R_0} \rightarrow 0$. Nestas condições, podemos aproximar as superfícies toroidais por superfícies cilíndricas, com condições de contorno periódicas, de comprimento $2\pi R_0$.

2.4 Coordenadas Polares Toroidais

Neste item, introduzimos as coordenadas polares toroidais, $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, definidas por KUCINSKI E OUTROS [21], as quais utilizamos para expressar os campos magnéticos de equilíbrio e o campo magnético ressonante, considerados nesta tese. A escolha dessas coordenadas se deveu ao fato de elas tenderem às coordenadas polares locais no limite de razão de aspecto grande — conforme indicado no final deste item. Em consequência disso, as soluções expressas nestas coordenadas guardam algumas semelhanças com aquelas expressas nas coordenadas polares locais, o que será ressaltado ao longo desta tese.

As coordenadas polares toroidais são dadas em termos das coordenadas toroidais como:

$$r_t = \frac{R'_0}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)}, \quad (2.7)$$

$$\theta_t = \pi - \omega, \quad (2.8)$$

$$\varphi_t = \varphi. \quad (2.9)$$

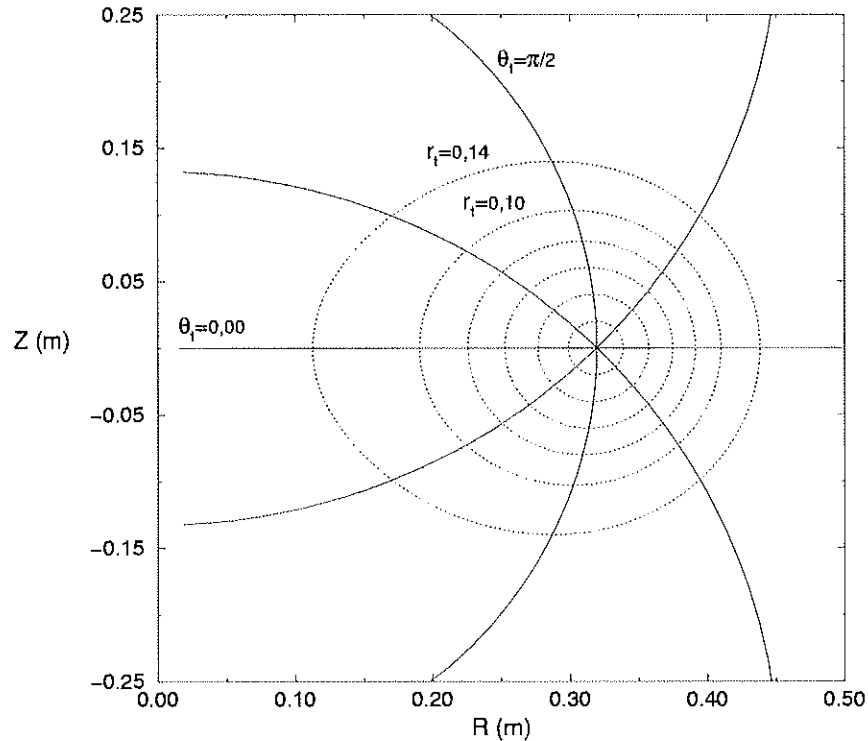


Figura 2.4: Superfícies coordenadas do sistema polar toroidal. Seção $\varphi = 0$.

A figura-2.4 mostra algumas das superfícies coordenadas para o sistema polar toroidal. Em virtude de o termo $\frac{R'_0}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)}$ ser o responsável pela dimensão de compri-

mento dos fatores de escala, da mesma forma que o termo r o é para as coordenadas polares locais, é que tal definição para a coordenada polar toroidal r_t foi adotada.

A base contravariante do sistema polar toroidal é:

$$\begin{aligned}\vec{e}^1 &= -\frac{r_t}{R'_0} \sinh(\xi) \hat{e}_\xi - \frac{r_t}{R'_0} \sin(\theta_t) \hat{e}_\omega, \\ \vec{e}^2 &= -\frac{1}{r_t} \hat{e}_\omega, \\ \vec{e}^3 &= \frac{1}{r_t \sinh(\xi)} \hat{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Os elementos do tensor métrico contravariante são:

$$\begin{aligned}g^{11} &= 1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t), \\ g^{12} &= \frac{1}{R'_0} \sin(\theta_t) = g^{21}, \\ g^{13} &= 0 = g^{31}, \\ g^{22} &= \frac{1}{r_t^2}, \\ g^{23} &= 0 = g^{32}, \\ g^{33} &= \frac{1}{R'^2},\end{aligned}$$

em que

$$R^2 = R'^2 \left[1 - 2 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right) \cos(\theta_t) - \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2 \sin^2(\theta_t) \right] \quad \text{e} \quad \sqrt{g} = R'_0 r_t.$$

Tratar-se de um sistema de coordenadas intrinsecamente toroidal e possuir uma interpretação geométrica simples são características importantes desse sistema de coordenadas.

Como podemos observar das equações (2.10) e (2.11), dadas a seguir, as coordenadas polares toroidais, $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, tendem às coordenadas polares locais, (r, θ, φ) , no limite de $\frac{r}{R_0} \ll 1$, pois:

$$r_t = r \sqrt{1 - \frac{r}{R_0} \cos(\theta) + \left(\frac{r}{2R_0} \right)^2}, \quad (2.10)$$

$$\sin(\theta_t) = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{r}{R_0} \cos(\theta) + \left(\frac{r}{2R_0} \right)^2}}, \quad (2.11)$$

Lembramos, ainda, que consideramos R_0 e R'_0 coincidentes quando fizemos a dedução das equações acima.

Capítulo 3

Equilíbrio MHD Toroidal

O sistema mais simples de equações que permite descrever um plasma a temperaturas termonucleares é aquele fornecido pela teoria Magnetohidrodinâmica (MHD). Na teoria MHD, o plasma é considerado como um único fluido condutor de resistividade nula, com energia interna, sob a ação de campos eletromagnéticos e sendo descrito pelas variáveis hidrodinâmicas usuais — densidade de massa ρ , velocidade \vec{v} e pressão P . Apesar de ser o modelo mais simples, ele é bastante complexo em decorrência da não-linearidade de seu sistema de equações [2].

Considerando que o campo magnético de um plasma, em equilíbrio estacionário e com simetria axial, possa ser descrito por uma função Ψ_p , o sistema de equações MHD se reduz a uma equação diferencial parcial elíptica, conhecida como equação de GRAD-SHAFRANOV, a qual Ψ_p deve satisfazer.

Neste capítulo, apresentamos o campo magnético de equilíbrio, $\vec{B}^{(0)}$, para um plasma confinado por um dispositivo toroidal do tipo tokamak. Este campo foi obtido resolvendo-se a equação de GRAD-SHAFRANOV nas coordenadas polares toroidais $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$.

3.1 Equação de Grad-Shafranov

As equações MHD relevantes para a descrição de plasmas magneticamente confinados são:

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.1)$$

- Equação de conservação de momentum:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P. \quad (3.2)$$

- Relação entre os campos \vec{E} e \vec{B} :

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0. \quad (3.3)$$

Esta relação é válida para $\frac{v}{c} \ll 1$ (c é a velocidade da luz).

- Equações de MAXWELL:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.6)$$

Nelas consideramos que apenas dois tipos de forças são importantes para o modelo MHD: as forças decorrentes de gradientes de pressão e a força de LORENTZ, ocasionada pela interação entre correntes e campos magnéticos presentes no plasma.

Além disso, notamos que a corrente de deslocamento foi desprezada na lei de AMPÈRE, por isso, as equações MHD são úteis para descrever fenômenos lentos quando comparados ao período ciclotrônico dos íons. E a ausência da equação de POISSON no conjunto de equações de MAXWELL indica a quase-neutralidade do plasma. Isto restringe a validade das equações MHD a fenômenos que ocorram em escalas espaciais muito maiores que o comprimento de DEBYE.

Para o caso em que se considera um confinamento estacionário, as equações (3.1-3.6) reduzem-se a:

$$\vec{J}^{(0)} \times \vec{B}^{(0)} = \nabla P^{(0)}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \vec{B}^{(0)} = \mu_0 \vec{J}^{(0)}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}^{(0)} = 0. \quad (3.9)$$

Em sistemas espacialmente simétricos de confinamento de plasmas, todas as grandezas fisicamente relevantes podem ser representadas por apenas duas coordenadas. Para um sistema qualquer de coordenadas curvilíneas, (x^1, x^2, x^3) , escolhemos x^1 e x^2 como sendo estas coordenadas relevantes e x^3 como sendo a coordenada ignorável.

A definição de $2\pi\Psi_p$, como sendo o fluxo do campo magnético $\vec{B}^{(0)}$ através de uma superfície coordenada $x^2 = \text{constante}$, que se estende do eixo magnético até uma curva coordenada x^3 , e de $2\pi I$, como sendo o fluxo da densidade de corrente $\vec{J}^{(0)}$ através da mesma superfície, permite que se represente $\vec{B}^{(0)}$ e $\vec{J}^{(0)}$ através das seguintes expressões:

$$\vec{B}^{(0)} = \frac{\vec{e}_3}{g_{33}} \times \nabla\Psi_p + B_3^{(0)} \frac{\vec{e}_3}{g_{33}}, \quad (3.10)$$

$$\vec{J}^{(0)} = \frac{\vec{e}_3}{g_{33}} \times \nabla I + J_3^{(0)} \frac{\vec{e}_3}{g_{33}}, \quad (3.11)$$

Da equação (3.10) observamos que:

$$\nabla\Psi_p \cdot \vec{B}^{(0)} = 0,$$

e que, portanto, as linhas de força do campo magnético repousam sobre superfícies $\Psi_p = \text{constante}$. Por isso, elas são denominadas de superfícies magnéticas.

De modo análogo, obtemos, de (3.7) e (3.11), respectivamente:

$$\nabla P^{(0)} \cdot \vec{B}^{(0)} = 0,$$

$$\nabla P^{(0)} \cdot \vec{J}^{(0)} = 0,$$

$$\nabla I \cdot \vec{J}^{(0)} = 0,$$

o que significa que I , $P^{(0)}$ e Ψ_p são todas quantidades de superfície e, sendo assim, podemos representar $I = I(\Psi_p)$, bem como $P^{(0)} = P^{(0)}(\Psi_p)$.

A adoção das representações de $\vec{B}^{(0)}$ e $\vec{J}^{(0)}$ — equações (3.10) e (3.11) — em termos de uma função de fluxo magnético Ψ_p , para um confinamento com simetria axial, possibilita que as equações de equilíbrio MHD estacionário, dadas por (3.7-3.9), reduzam-se a uma única equação diferencial parcial elíptica que deve ser satisfeita por Ψ_p . Esta equação é a equação de GRAD-SHAFRANOV que, para o sistema de coordenadas curvilíneas geral escolhido, resulta em [27]:

$$\Delta^* \Psi_p = -\mu_0 g_{33} \frac{dP^{(0)}}{d\Psi_p} - \mu_0^2 I \frac{dI}{d\Psi_p} + \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right], \quad (3.12)$$

na qual

$$\Delta^* \Psi_p \equiv g_{33} \nabla \cdot \left(\frac{1}{g_{33}} \nabla \Psi_p \right). \quad (3.13)$$

Para obtermos Ψ_p precisamos conhecer $P^{(0)}$ e I que, por sua vez, dependem de Ψ_p . Assim sendo, a solução da equação de GRAD-SHAFRANOV deve ser determinada de modo autoconsistente.

3.2 Campo Magnético de Equilíbrio

Adotando-se, como coordenadas curvilíneas, o sistema de coordenadas polares toroidais:

$$x^1 = r_t, \quad (3.14)$$

$$x^2 = \theta_t, \quad (3.15)$$

$$x^3 = \varphi_t, \quad (3.16)$$

a equação de GRAD-SHAFRANOV (3.12), obtida na secção anterior, passa a ser representada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_t} \frac{\partial}{\partial r_t} \left(r_t \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_t} \right) + \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_3^{(0)}(\Psi_p) + \mu_0 R_0'^2 \frac{dP^{(0)}}{d\Psi_p} \left(2 \frac{r_t}{R_0'} \cos(\theta_t) + \frac{r_t^2}{R_0'^2} \sin^2(\theta_t) \right) + \\ + \frac{r_t}{R_0'} \left[\cos(\theta_t) \left(2 \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial r_t^2} + \frac{1}{r_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_t} \right) + \sin(\theta_t) \left(\frac{1}{r_t^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t} - \frac{2}{r_t} \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial \theta_t \partial r_t} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

na qual

$$J_3^{(0)}(\Psi_p) = -R_0'^2 \frac{dI^{(0)}}{d\Psi_p} - \frac{d}{d\Psi_p} \left(\frac{1}{2} \mu_0 I^2 \right). \quad (3.18)$$

As componentes contravariantes do campo magnético de equilíbrio são dadas por:

$$B^{(0)1} = \vec{B}^{(0)} \cdot \vec{e}^1 = -\frac{1}{R_0' r_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t}, \quad (3.19)$$

$$B^{(0)2} = \vec{B}^{(0)} \cdot \vec{e}^2 = \frac{1}{R_0' r_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_t}, \quad (3.20)$$

$$B^{(0)3} = \vec{B}^{(0)} \cdot \vec{e}^3 = -\frac{\mu_0 I}{R^2}. \quad (3.21)$$

No limite de razão de aspecto grande, $\frac{r_t}{R_0'} \rightarrow 0$, a equação (3.17) se reduz a:

$$\frac{1}{r_t} \frac{\partial}{\partial r_t} \left(r_t \frac{\partial \Psi_p^{(0)}}{\partial r_t} \right) + \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_p^{(0)}}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_3^{(0)}(\Psi_p^{(0)}). \quad (3.22)$$

Admitindo-se que $\Psi_p^{(0)}$ seja independente de θ_t , isto é, $\Psi_p^{(0)} = \Psi_p^{(0)}(r_t)$, a equação acima se reduz a:

$$\frac{1}{r_t} \frac{d}{dr_t} \left(r_t \frac{d\Psi_p^{(0)}(r_t)}{dr_t} \right) = \mu_0 J_3^{(0)}(\Psi_p^{(0)}). \quad (3.23)$$

Esta equação é idêntica, na forma, à equação de GRAD-SHAFRANOV para um plasma cilíndrico. Entretanto, apesar de $\Psi_p^{(0)}(r_t)$ possuir a mesma forma analítica da solução

cilíndrica, $\Psi_p^{cil.}(r)$, sua interpretação é diferente em virtude das diferenças entre as superfícies $r_t = \text{constante}$ e as superfícies $r = \text{constante}$.

As interseções das superfícies magnéticas $\Psi_p^{(0)}(r_t) = \text{constante}$ com planos $\varphi_t = \text{constante}$ diferem de círculos e apresentam um deslocamento, no sentido da região equatorial externa da câmara de contenção do plasma, característico de confinamentos toroidais. Esse deslocamento, conhecido como deslocamento de SHAFRANOV, faz com que o eixo magnético esteja localizado um pouco além do eixo geométrico da câmara de contenção.

Para as aplicações numéricas apresentadas nesta tese, usamos a aproximação:

$$\Psi_p(r_t, \theta_t) \simeq \Psi_p^{(0)}(r_t), \quad (3.24)$$

pois ela é suficiente para descrever efeitos importantes da geometria toroidal, ou seja, o deslocamento de SHAFRANOV, as superfícies com seções não circulares e as linhas de força com helicidade não uniforme. Além disso, nessa aproximação, os perfis radiais das componentes de $\vec{B}^{(0)}$ correspondem aos usualmente considerados na literatura [2].

Entretanto, por uma questão de completeza, apresentamos o procedimento para se determinar a solução da equação (3.17), por aproximações sucessivas, que foi desenvolvido por KUCINSKI E OUTROS [21], no qual Ψ_p foi escrita como:

$$\Psi_p(r_t, \theta_t) = \Psi_p^{(0)}(r_t) + \delta\Psi_p(r_t, \theta_t). \quad (3.25)$$

Em outras palavras, as superfícies magnéticas são aproximadamente iguais às superfícies $r_t = \text{constante}$ e $\delta\Psi_p(r_t, \theta_t)$ é uma pequena correção, adicionada a $\Psi_p^{(0)}(r_t)$, para levar em conta a dependência com a coordenada θ_t . Assim, as seguintes expansões são válidas:

$$J_3^{(0)}(\Psi_p) \simeq J_3^{(0)}(\Psi_p^{(0)}) + \frac{dJ_3^{(0)}}{d\Psi_p}(\Psi_p^{(0)}) \delta\Psi_p, \quad (3.26)$$

$$\frac{dP^{(0)}}{d\Psi_p}(\Psi_p) \simeq \frac{dP^{(0)}}{d\Psi_p}(\Psi_p^{(0)}) + \frac{d^2P^{(0)}}{d\Psi_p^{(0)2}}(\Psi_p^{(0)}) \delta\Psi_p. \quad (3.27)$$

O perfil de pressão e a densidade de corrente estão relacionados, na aproximação de ordem zero em $\frac{r_t}{R_0'}$, por:

$$-R_0'^2 \frac{dP^{(0)}}{d\Psi_p}(\Psi_p^{(0)}) = \beta_p J_3^{(0)}(\Psi_p^{(0)}), \quad (3.28)$$

em que β_p é a razão entre a pressão cinética média e a pressão magnética, na superfície do plasma, devido ao campo poloidal.

Considerando as aproximações acima, e o perfil da densidade de corrente, $J_3^{(0)}(r_t)$, dado por:

$$J_3^{(0)}(r_t) = \frac{I_p R'_0}{\pi a^2} (\gamma + 1) \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2}\right)^\gamma, \quad (3.29)$$

no qual

I_p = corrente de plasma,

a = raio do plasma,

γ = constante,

a solução para a função de fluxo poloidal, $\Psi_p(r_t, \theta_t)$, resulta em:

$$\Psi_p(r_t, \theta_t) = \Psi_p^{(0)}(r_t) + \frac{d\Psi_p^{(0)}}{dr_t} \cos(\theta_t) \int_{r_t}^a \frac{\xi}{R'_0} \Lambda(\xi) d\xi, \quad (3.30)$$

com

$$\Psi_p^{(0)}(r_t) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{4\pi} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2}\right)\right] + \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2}\right)^2\right] + \dots + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{\gamma + 1} \left[1 - \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right] \right\}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\Psi_p^{(0)}}{dr_t}(r_t) = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{2\pi r_t} \left[1 - \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right], \quad (3.32)$$

$$\Lambda(r_t) = \beta_p - 1 + \frac{1}{\left(r_t \frac{d\Psi_p^{(0)}}{dr_t}\right)^2} \int_0^{r_t} \xi \left(\frac{d\Psi_p^{(0)}}{d\xi}\right)^2 d\xi. \quad (3.33)$$

É interessante notar que $\Lambda(a)$ é o fator de assimetria do campo magnético poloidal, definido em termos de β_p e da indutância interna normalizada l_i , por unidade de comprimento [28]:

$$\Lambda(a) = \frac{1}{2} l_i + \beta_p - 1, \quad (3.34)$$

$$l_i = \frac{2}{(aB_\theta)^2} \int_0^a B_\theta^2 r dr, \quad (3.35)$$

em que $B_\theta = \vec{B}^{(0)} \cdot \vec{e}_\theta$.

Uma vez que a função de fluxo poloidal, $\Psi_p(r_t, \theta_t)$, foi determinada, é possível representarmos as componentes contravariantes do campo magnético de equilíbrio, $\vec{B}^{(0)}$, explicitamente como funções das coordenadas polares toroidais:

$$B^{(0)1} = \frac{1}{R'_0 r_t} \frac{d\Psi_p^{(0)}}{dr_t} \sin(\theta_t) \int_{r_t}^a \frac{\xi}{R'_0} \Lambda(\xi) d\xi, \quad (3.36)$$

$$B^{(0)2} = \frac{1}{R'_0 r_t} \left\{ \frac{d\Psi_p^{(0)}}{dr_t} \left[1 - \frac{r_t}{R'_0} \Lambda(r_t) \cos(\theta_t) \right] + \frac{d^2\Psi_p^{(0)}}{dr_t^2} \cos(\theta_t) \int_{r_t}^a \frac{\xi}{R'_0} \Lambda(\xi) d\xi \right\}, \quad (3.37)$$

$$B^{(0)3} = -\frac{\mu_0 I}{R^2}, \quad (3.38)$$

com

$$I = -\frac{I_e}{2\pi} \left\{ 1 + (1 - \beta_p)(\gamma + 1) \left(\frac{I_p R'_0}{I_e a} \right)^2 \left[\frac{1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \frac{1}{2\gamma + 1} \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{2\gamma+1} \right] \right\} \simeq -\frac{I_e}{2\pi}, \quad (3.39)$$

$$R^2 = R'_0{}^2 \left[1 - 2 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right) \cos(\theta_t) - \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2 \sin^2(\theta_t) \right], \quad (3.40)$$

e sendo I_e a corrente que produz o campo toroidal externo.

Na aproximação de ordem zero, as superfícies magnéticas, definidas por valores constantes de $\Psi_p^{(0)}(r_t)$, diferem muito pouco das superfícies magnéticas descritas por valores constantes de $\Psi_p(r_t, \theta_t)$ que incorporam a correção de primeira ordem $\delta\Psi_p$ — a correção é de menos de 2% do raio médio das respectivas superfícies. Isso pode ser verificado através da figura-3.1, justificando a escolha que fizemos nesta tese de considerarmos Ψ_p dado por $\Psi_p^{(0)}(r_t)$, apenas, de forma que as componentes contravariantes do campo magnético de equilíbrio resultaram, simplificadas, em:

$$B^{(0)1} = \vec{B}^{(0)} \cdot \nabla \Psi_p^{(0)} = 0, \quad (3.41)$$

$$B^{(0)2} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r_t^2} \left[1 - \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right], \quad (3.42)$$

$$B^{(0)3} = \frac{\mu_0 I_e}{2\pi R'_0{}^2} \left(\frac{1}{1 - 2 \frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t)} \right). \quad (3.43)$$

Na expressão para $B^{(0)3}$ consideramos, ainda, que:

$$R^2 \approx R'_0{}^2 \left(1 - 2 \frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t) \right). \quad (3.44)$$

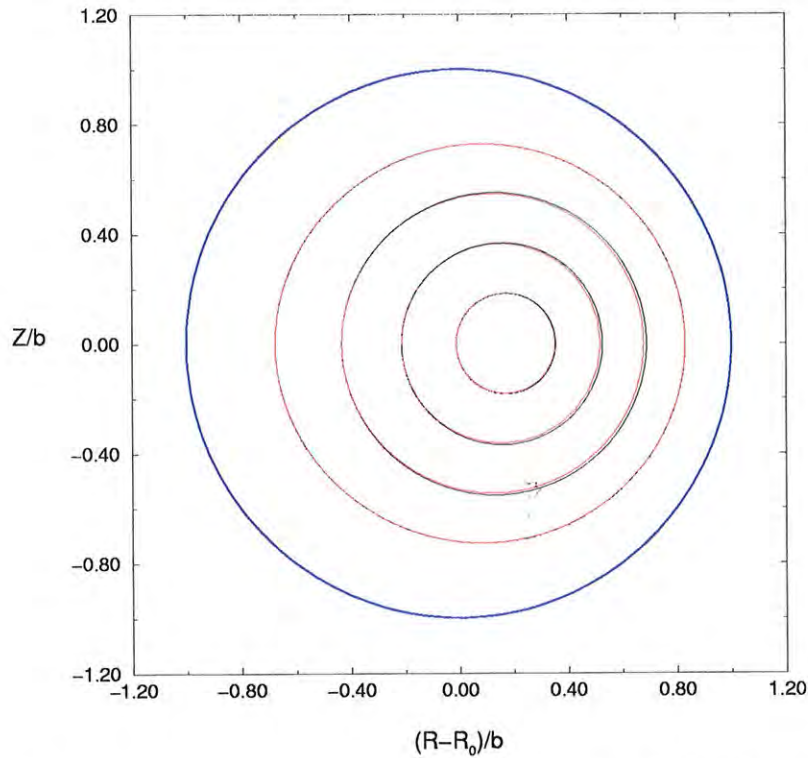


Figura 3.1: Superfícies magnéticas: em vermelho, temos a aproximação de ordem zero e, em preto, a de ordem zero com a correção de primeira ordem. Em azul, temos um corte transversal da câmara de confinamento do plasma. Secção $\varphi = 0$.

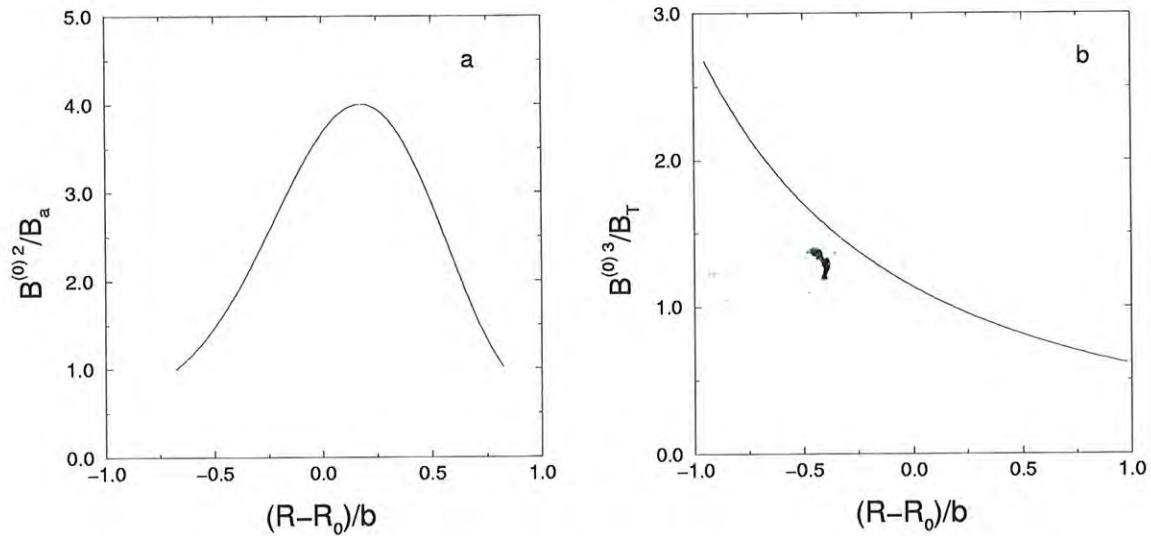


Figura 3.2: Perfis das componentes $B^{(0)2}$ e $B^{(0)3}$ do campo magnético de equilíbrio.

A figura-3.2 mostra os perfis das componentes contravariantes $B^{(0)2}$ e $B^{(0)3}$ do campo magnético de equilíbrio, para uma seção transversal da câmara de confinamento do plasma.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio maior	R_0	0,30 m
Raio menor	b	0,11 m
Raio da coluna de plasma	a	0,08 m
Campo magnético toroidal	B_φ	0,5 T
Corrente de plasma	I_p	12 kA
Fator de segurança na borda do plasma	q	≈ 5
Energia térmica dos elétrons na borda do plasma	kT_e	10 eV
Tempo de duração da descarga elétrica	τ	8 ms
Expoente da densidade de corrente de plasma	γ	3

Tabela 3.1: Parâmetros do tokamak TBR-1 adotados para as simulações numéricas [5, 8].

Esses perfis estão normalizados por $B_a = B^{(0)2}(a)$ e por $B_T = B^{(0)3}(0)$ respectivamente. Como um exemplo, adotamos os parâmetros indicados na tabela-3.1 para o cálculo destes perfis. Esses parâmetros correspondem aos valores típicos de operação do TBR-1, um tokamak no qual experimentos com campos magnéticos ressonantes e anéis limitadores magnéticos caóticos foram realizados. Isto permite que se possa comparar alguns dos resultados por nós obtidos com aqueles medidos. Apesar de usarmos valores característicos do TBR-1, os resultados apresentados encontram-se normalizados de forma que podem ser aplicados a outros tokamaks. Para estes valores, o fator de segurança na borda do plasma é $q(a) \approx 5$.

Da figura-3.2a podemos notar que a componente contravariante $B^{(0)2}$ do campo magnético de equilíbrio possui um perfil aproximadamente simétrico em relação ao centro da coluna de plasma refletindo o perfil de corrente, $J_3^{(0)}(r_t)$, que adotamos. Já na figura-3.2b podemos observar que, em virtude da forma toroidal da câmara de confinamento do plasma, que faz com que as espiras que produzem o campo toroidal estejam mais próximas na parte interna da câmara do que na parte externa, a componente contravariante $B^{(0)3}$ do campo magnético de equilíbrio é bem mais intensa na parte interna da câmara de confinamento do plasma. Essas características decorrem da geometria toroidal e indicam a validade da aproximação de ordem zero ($\Psi_p(r_t, \theta_t) \simeq \Psi_p^{(0)}(r_t)$), adotada nesta tese, para descrever os perfis radiais do campo magnético de confinamento observado em tokamaks [2].

3.3 Perfil do Fator de Segurança

A helicidade das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, em plasmas toroidais, não é uniforme. A sua inclinação, relativa ao plano horizontal, é maior na região mais afastada do eixo de simetria do toróide do que na região mais próxima a este. Por isso, é interessante utilizar a grandeza q (fator de segurança) como uma forma de medir a helicidade média das linhas de força do campo magnético de equilíbrio sobre uma superfície magnética, ou seja, a evolução média das linhas de força na direção toroidal com relação à evolução na direção poloidal.

As superfícies magnéticas nas quais $q = \frac{m}{n}$ é um número racional são chamadas de superfícies racionais; sobre elas as linhas de força do campo magnético de equilíbrio se fecham após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal. Quanto mais lentamente as linhas de força do campo magnético evoluírem na direção poloidal, ou seja, quanto maior for q , mais estável será a configuração do campo associado a essas linhas de força.

Sobre aquelas superfícies magnéticas nas quais q é um número irracional, chamadas de superfícies irracionais, as linhas de força jamais se fecham ocupando toda a sua extensão.

A equação que descreve o traçado das linhas de força do campo magnético é:

$$\vec{B}^{(0)} \times d\vec{l} = 0, \quad (3.45)$$

na qual $d\vec{l}$ é um deslocamento ao longo da linha de força. Isto significa que $\vec{B}^{(0)}$ é proporcional a $d\vec{l}$, isto é, adotando as coordenadas $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, temos:

$$\frac{dr_t}{B^{(0)1}} = \frac{d\theta_t}{B^{(0)2}} = \frac{d\varphi_t}{B^{(0)3}}.$$

A taxa de variação de φ_t com relação a θ_t é dada, em termos das componentes contravariantes de $\vec{B}^{(0)}$, como:

$$\frac{d\varphi_t}{d\theta_t} = \frac{B^{(0)3}}{B^{(0)2}}.$$

Desta forma o fator de segurança pode ser determinado por:

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B^{(0)3}}{B^{(0)2}} d\theta_t. \quad (3.46)$$

Substituindo os valores de $B^{(0)2}$ e $B^{(0)3}$, dados por (3.42) e (3.43) respectivamente, na

expressão acima ficamos com:

$$q(r_t) = \frac{q_c(r_t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_t}{1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t)}, \quad (3.47)$$

na qual $q_c(r_t)$ é:

$$q_c(r_t) = \frac{I_c}{I_p} \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2 \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1}}. \quad (3.48)$$

A integral, dada por (3.47), é facilmente resolvida pelo método dos resíduos. Para tanto, definimos a variável complexa, z , dada por:

$$z = e^{i\theta_t} \quad \text{com} \quad dz = ie^{i\theta_t} d\theta_t.$$

Em termos desta variável, a integral (3.47), se torna:

$$\begin{aligned} q(r_t) &= -\frac{q_c(r_t)}{2\pi i} \frac{R'_0}{r_t} \oint f(z) dz \\ &= -\frac{q_c(r_t)}{2\pi i} \frac{R'_0}{r_t} \oint \frac{dz}{z^2 - \frac{R'_0}{r_t} z + 1}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

com a integração sendo realizada, ao longo do círculo unitário, no plano complexo.

A função $f(z)$ possui dois polos:

$$z_- = \frac{R'_0}{2r_t} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2} \right] \quad \text{e} \quad z_+ = \frac{R'_0}{2r_t} \left[1 + \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2} \right].$$

Um dos polos, z_- , está no interior do círculo unitário enquanto o outro, z_+ , está fora do círculo unitário.

Pelo teorema dos resíduos, a integral de linha de $f(z)$, ao longo do círculo unitário, é igual a $2\pi i$ vezes o resíduo de $f(z)$ calculado no polo z_- . Este resíduo, a_{-1} , é dado por:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{z - z_+} \Big|_{z=z_-} \\ &= -\frac{1}{\frac{R'_0}{r_t} \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

de modo que ficamos com o seguinte resultado para o fator de segurança:

$$\begin{aligned}
 q(r_t) &= \frac{q_c(r_t) R'_0}{2\pi i} \frac{R'_0}{r_t} \frac{2\pi i}{\frac{R'_0}{r_t} \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2}} \\
 &= \frac{q_c(r_t)}{\sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

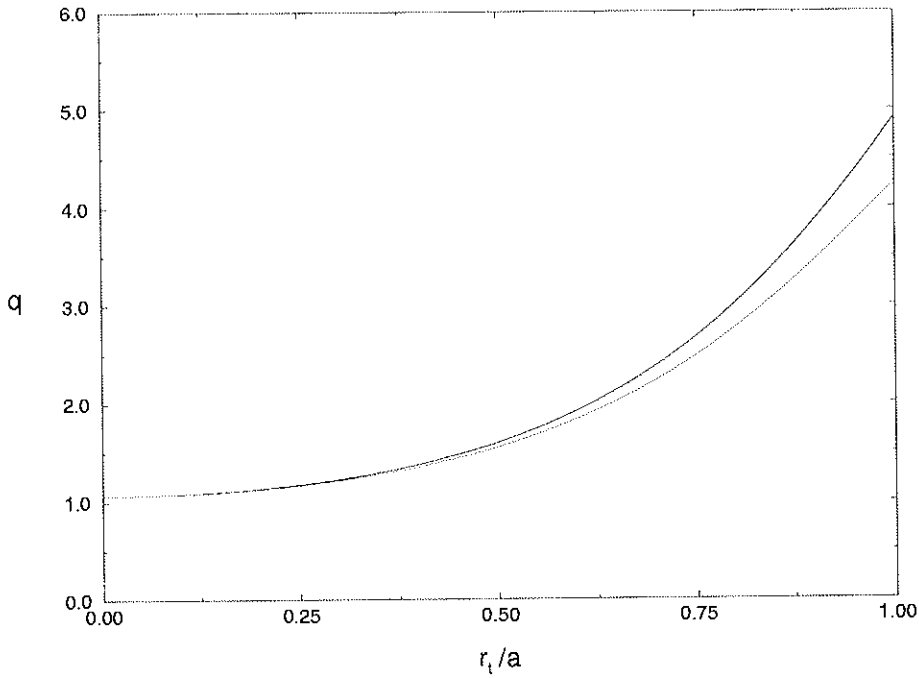


Figura 3.3: Perfil do fator de segurança (linha preta), $q(r_t)$, considerando-se o equilíbrio dado pelos perfis da figura-3.2. A linha vermelha corresponde ao perfil do fator de segurança na aproximação de ordem zero em $\frac{r_t}{R'_0}$.

A figura-3.3 mostra o perfil do fator de segurança, $q(r_t)$ (linha preta), obtido das equações (3.48) e (3.51). Esse fator de segurança, $q(r_t)$, é aproximadamente parabólico com $q \simeq 1$ no centro da coluna de plasma e com $q \simeq 5$ na borda da coluna de plasma. Em vermelho, temos o perfil de $q_c(r_t)$ dado pela expressão (3.48) cuja forma é análoga àquela do fator de segurança para um plasma cilíndrico, porém, representado em termos de r_t .

A correção dada pelo termo:

$$\sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2},
 \tag{3.52}$$

decorrente da geometria toroidal da câmara de contenção do plasma, faz com que o perfil do fator de segurança (linha preta vista na figura-3.3) atinja um valor na borda maior do que o previsto pelo perfil dado pela expressão (3.48) (linha vermelha vista na mesma figura). Como conseqüência as regiões de ressonância na borda do plasma ficam mais próximas facilitando a ergodização das linhas de força.

Esse resultado para o perfil do fator de segurança está de acordo com observações experimentais realizadas em tokamaks e, em particular, para o TBR-1 [5].

Nesta tese, usamos praticamente um único equilíbrio dado pelos perfis mostrados na figura-3.2 e na figura-3.3.

Capítulo 4

Campo Helicoidal Perturbativo

Neste capítulo, calculamos o campo magnético criado por um par de condutores helicoidais colocados sobre a superfície da câmara de contenção do plasma e transportando correntes I_h em sentidos opostos. Esse resultado será usado nos capítulos 5 e 6 quando introduzirmos o efeito ressonante das perturbações no campo magnético de equilíbrio.

O cálculo do campo magnético destas hélices foi feito usando-se a abordagem do potencial escalar magnético [24], na qual $\vec{B} = \nabla\Phi_M$, com o potencial escalar, Φ_M , satisfazendo a equação de LAPLACE nas regiões do espaço onde não há correntes elétricas.

Utilizamos o mesmo sistema de coordenadas polares toroidais, $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, no qual o campo magnético de equilíbrio foi determinado, no capítulo 3, para escrevermos a equação de LAPLACE e a sua solução.

4.1 Hélices em Tokamaks

Durante o confinamento do plasma muitos fenômenos podem causar a deterioração das condições de equilíbrio e até mesmo a perda total deste confinamento [29].

Alguns destes fenômenos, de particular importância em decorrência dos danos que causam aos componentes eletro-mecânicos dos tokamaks ao aniquilarem rapidamente a corrente de plasma, são conhecidos como instabilidades de disruptura [30].

Apesar de já terem sido realizados diversos trabalhos nas últimas décadas, pouco se sabe sobre como surgem e se desenvolvem estas instabilidades. Uma das conjecturas que se faz é a de que as instabilidades de disruptura possam ser o resultado de mudanças topológicas na superfície magnética com fator de segurança $q = 2$ ou, então, do acoplamento entre perturbações MHD, com componente poloidal $m = 2$, com outras que possuam

valores de m maiores ou menores [31].

Em conseqüência disto, ocorre que, desde o trabalho pioneiro de KARGER E OUTROS [32], campos magnéticos ressonantes têm sido utilizados, em diversos tokamaks, com o objetivo de controlar o surgimento das instabilidades de disruptura através da atenuação da atividade MHD do plasma. Tais campos são criados por condutores helicoidais, localizados na parte externa dos dispositivos de confinamento, cujas helicidades são iguais às helicidades das linhas de força do campo magnético de equilíbrio que repousam sobre as superfícies que se deseja perturbar.

Além do controle da atividade MHD do plasma, tem-se usado campos helicoidais ressonantes com o objetivo de criar perturbações magnéticas, na região periférica do plasma, e com isto obter uma série de outros benefícios [13, 33, 34] — diminuir a temperatura na borda do plasma, modificar a interação plasma-parede e diminuir o influxo de impurezas provenientes da câmara de vácuo, entre outras. Isto acaba proporcionando uma melhora global no confinamento do plasma.

Vários resultados experimentais confirmam a atenuação das oscilações MHD em resposta ao campo magnético aplicado [3, 4, 8].

Os primeiros trabalhos teóricos sobre atuação de campos magnéticos perturbativos, gerados por condutores helicoidais, não consideravam a geometria toroidal da câmara de contenção do plasma. Tratavam o plasma como um cilindro com periodicidade $2\pi R_0$ e, em razão disto, as linhas de força do campo magnético de equilíbrio apresentavam um traçado, em forma de hélice, com um passo de enrolamento constante, ou seja, $\Delta\theta \propto \Delta\varphi$ [9, 35, 45]. Da mesma forma, os passos de enrolamento dos condutores helicoidais eram mantidos constantes. Sabe-se, porém, que uma das principais conseqüências da geometria toroidal é fazer com que as linhas de força do campo magnético de equilíbrio, $\vec{B}^{(0)}$, ao descreverem seu traçado helicoidal sobre as superfícies magnéticas nas quais repousam, não apresentem um passo de enrolamento constante, sendo maior na região equatorial, mais afastada do eixo de simetria do toróide, do que na região mais próxima ao mesmo.

Posteriormente foram introduzidas correções, devidas à geometria toroidal, no cálculo do campo magnético de equilíbrio [17], mas poucos são os trabalhos onde o passo de enrolamento dos condutores helicoidais foi ajustado para acompanhar a helicidade das linhas de força sobre as superfícies magnéticas [13, 36].

Neste trabalho, procuramos levar em conta esta não uniformidade do passo de enrolamento das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, considerando uma lei de

enrolamento para as hélices condutoras de correntes elétricas do tipo:

$$u_t = m_0[\theta_t + \lambda \text{sen}(\theta_t)] - n_0\varphi_t = \text{constante}, \quad (4.1)$$

na qual o parâmetro constante λ dá conta da helicidade não uniforme das linhas de força. Este parâmetro será calculado, no capítulo 5, com base no traçado de uma linha de força do campo magnético de equilíbrio que se encontra sobre a superfície racional que desejamos perturbar. Será apresentada, também, uma justificativa do porquê escolhemos esta forma particular para a lei de enrolamento das hélices condutoras de correntes elétricas.

Introduzimos, agora, as condições de contorno que envolvem o campo magnético gerado pelos condutores helicoidais.

4.2 Condições de Contorno

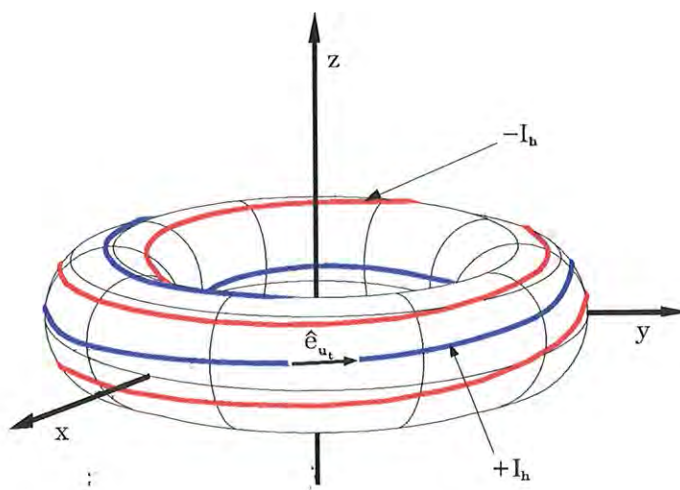


Figura 4.1: Par de condutores helicoidais conduzindo correntes I_h , em sentidos opostos, sobre a câmara de confinamento.

A densidade de corrente de um par de fios enrolados sobre a câmara de confinamento do plasma, caracterizada pela superfície coordenada:

$$r_t = b_t, \quad (4.2)$$

e que conduzem correntes elétricas I_h , em sentidos opostos, ao longo das hélices:

$$u_t = 0 \quad \text{e} \quad u_t = \pi, \quad (4.3)$$

como indicado na figura-4.1, é:

$$\vec{J}_h = \frac{I_h}{\sqrt{g}} \delta(r_t - b_t) [\delta(u_t - 0) - \delta(u_t - \pi)] \vec{e}_{u_t}. \quad (4.4)$$

Na expressão para \vec{J}_h , o vetor \vec{e}_{u_t} , dado por:

$$\vec{e}_{u_t} = \sqrt{g} (\vec{e}^1 \times \nabla u_t), \quad (4.5)$$

é o vetor tangente aos condutores helicoidais descritos pela lei de enrolamento:

$$u_t = m_0 [\theta_t + \lambda \text{sen}(\theta_t)] - n_0 \varphi_t = \text{constante}, \quad (4.6)$$

na qual λ é, como já dissemos, um parâmetro constante que depende da helicidade das linhas de força do campo magnético de equilíbrio.

A distribuição $\delta(x - x_0)$ pode ser escrita, numa forma periódica, como:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(x-x_0)} \right), \quad (4.7)$$

resultando na seguinte expansão para a densidade de corrente:

$$\vec{J}_h = \frac{2I_h}{\pi\sqrt{g}} \delta(r_t - b_t) \sum_{N=1}^{\infty} e^{iNu_t} \vec{e}_{u_t}, \quad (4.8)$$

na qual $N = 2p + 1$ e $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Queremos frisar que somente a parte real das expressões complexas é que correspondem às quantidades físicas.

As condições de contorno sobre \vec{B}_h podem ser escritas como:

$$[\vec{B}_h]_i^e = -\mu_0 \int_i^e d\vec{r}_n \times \vec{J}_h, \quad (4.9)$$

em que temos:

$$d\vec{r}_n = \frac{dr_t}{g^{11}} \vec{e}^1.$$

O símbolo $[\dots]_i^e$ é usado para representar o salto em \vec{B}_h , a partir da região interna para a externa, através de uma superfície de descontinuidade.

Substituindo (4.8) em (4.9) temos, para a expressão do salto em \vec{B}_h , que:

$$\begin{aligned} [\vec{B}_h]_i^e &= -2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} e^{iNu_t} \int_i^e dr_t \delta(r_t - b_t) \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}_{u_t}}{g^{11} \sqrt{g}} = \\ &= -2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} e^{iNu_t} \left(\frac{\vec{e}^1 \cdot \nabla u_t}{g^{11}} \vec{e}^1 - \nabla u_t \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

na qual todas as grandezas que dependem de r_t são calculadas em $r_t = b_t$.

As equações básicas da magnetostática são:

$$\nabla \times \vec{B}_h = \mu_0 \vec{J}_h, \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_h = 0. \quad (4.12)$$

Porque estamos interessados no campo magnético perturbativo numa região livre de correntes elétricas, temos:

$$\nabla \times \vec{B}_h = 0, \quad (4.13)$$

e sua descrição pode ser dada em termos de um potencial escalar magnético Φ_M , por:

$$\vec{B}_h = \nabla \Phi_M, \quad (4.14)$$

ou seja,

$$\vec{B}_h = \frac{\partial \Phi_M}{\partial r_t} \vec{e}^1 + \frac{\partial \Phi_M}{\partial u_t} \nabla u_t + \frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi_t} \vec{e}^3, \quad (4.15)$$

de forma que as equações (4.11) e (4.12) se reduzem à equação de LAPLACE para o potencial escalar magnético Φ_M .

Comparando (4.10) com (4.15), obtemos as condições de contorno para o potencial escalar magnético como sendo:

$$\left[\frac{\partial \Phi_M}{\partial r_t} \right]_i^e = -2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \left(\frac{\vec{e}^1 \cdot \nabla u_t}{g^{11}} \right) \sum_{N=1}^{\infty} e^{iN u_t}, \quad (4.16)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_M}{\partial u_t} \right]_i^e = 2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} e^{iN u_t}, \quad (4.17)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi_t} \right]_i^e = 0. \quad (4.18)$$

Somente duas destas condições de contorno são independentes. Portanto, adotamos as duas primeiras como relevantes para o cálculo de Φ_M .

4.3 Potencial Escalar Magnético

A equação de LAPLACE, em coordenadas polares toroidais, é dada por:

$$\nabla^2 \Phi_M = \frac{1}{r_t} \frac{\partial}{\partial r_t} \left(r_t \frac{\partial \Phi_M}{\partial r_t} \right) + \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \theta_t^2} - \left(\frac{r_t}{R_0'} \right) \left\{ \cos(\theta_t) \left[2 \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial r_t^2} + \frac{3}{r_t} \frac{\partial \Phi_M}{\partial r_t} \right] + \right. \\ \left. - \sin(\theta_t) \left[\frac{1}{r_t^2} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta_t} + \frac{2}{r_t} \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \theta_t \partial r_t} \right] \right\} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \varphi_t^2} = 0. \quad (4.19)$$

Multiplicando-se ambos os lados desta equação por r_t^2 e definindo-se a variável adimensional ρ como:

$$\rho = \frac{r_t}{b_t}, \quad (4.20)$$

ficamos com:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_M}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \theta_t^2} - \left(\frac{b_t}{R'_0} \right) \rho \left\{ \cos(\theta_t) \left[2\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial \Phi_M}{\partial \rho} \right] - \sin(\theta_t) \left[\frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta_t} + 2\rho \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \theta_t \partial \rho} \right] \right\} + \left(\frac{b_t}{R'_0} \right)^2 \frac{\rho^2}{1 - 2 \left(\frac{b_t}{R'_0} \right) \rho \cos(\theta_t) - \left(\frac{b_t}{R'_0} \right)^2 \rho^2 \sin^2(\theta_t)} \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial \varphi_t^2} = 0, \quad (4.21)$$

que pode ser representada, de forma mais compacta, pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}_0(\Phi_M) + \left(\frac{b_t}{R'_0} \right) \mathcal{L}_1(\Phi_M) + \left(\frac{b_t}{R'_0} \right)^2 \mathcal{L}_2(\Phi_M) + \dots = 0, \quad (4.22)$$

na qual os operadores diferenciais \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0() &\equiv \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta_t^2}, \\ \mathcal{L}_1() &\equiv -\rho \left\{ \cos(\theta_t) \left[2\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \sin(\theta_t) \left[\frac{\partial}{\partial \theta_t} + 2\rho \frac{\partial^2}{\partial \theta_t \partial \rho} \right] \right\}, \\ \mathcal{L}_2() &\equiv \frac{\rho^2}{1 - 2 \left(\frac{b_t}{R'_0} \right) \rho \cos(\theta_t) - \left(\frac{b_t}{R'_0} \right)^2 \rho^2 \sin^2(\theta_t)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_t^2}. \end{aligned}$$

No limite de razão de aspecto grande, isto é, $\frac{b_t}{R'_0} \rightarrow 0$, a equação (4.22) se reduz a:

$$\mathcal{L}_0 \left(\Phi_M^{(0)} \right) = 0. \quad (4.23)$$

Isto nos induz a representar o potencial escalar magnético, Φ_M , como a série a seguir:

$$\Phi_M = \Phi_M^{(0)} + \left(\frac{b_t}{R'_0} \right) \Phi_M^{(1)} + \left(\frac{b_t}{R'_0} \right)^2 \Phi_M^{(2)} + \dots, \quad (4.24)$$

a qual, ao ser introduzida na equação (4.22), resulta em:

$$\mathcal{L}_0 \left(\Phi_M^{(0)} \right) + \left(\frac{b_t}{R'_0} \right) \left[\mathcal{L}_0 \left(\Phi_M^{(1)} \right) + \mathcal{L}_1 \left(\Phi_M^{(0)} \right) \right] + \dots = 0. \quad (4.25)$$

Portanto, até primeira ordem em $\frac{b_t}{R'_0}$, a solução para o potencial escalar magnético, Φ_M , é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\mathcal{L}_0 \left(\Phi_M^{(0)} \right) = 0, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{L}_0 \left(\Phi_M^{(1)} \right) = -\mathcal{L}_1 \left(\Phi_M^{(0)} \right). \quad (4.27)$$

A seguir apresentaremos as soluções para os potenciais escalares de ordem zero, $\Phi_M^{(0)}$ e de primeira ordem, $\Phi_M^{(1)}$.

4.3.1 Cálculo do Potencial Escalar $\Phi_M^{(0)}$

De acordo com a equação (4.26), o potencial escalar magnético, $\Phi_M^{(0)}$, satisfaz a equação diferencial:

$$\mathcal{L}_0 \left(\Phi_M^{(0)} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_M^{(0)}}{\partial \theta_t^2} = 0, \quad (4.28)$$

cuja solução é [37]:

$$\Phi_M^{(0)}(\rho, \theta_t, \varphi_t) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{N,k}^{(0)} \mathcal{F}_{N,k}(\rho) e^{i[(Nm_0+k)\theta_t - Nn_0\varphi_t]}, \quad (4.29)$$

em que $\mathcal{F}_{N,k}(\rho)$ é dado por:

$$\mathcal{F}_{N,k}(\rho) = \begin{cases} \rho^{|Nm_0+k|} & , \text{ para } 0 \leq \rho \leq 1 \text{ (região interna à câmara),} \\ \rho^{-|Nm_0+k|} & , \text{ para } \rho \geq 1 \text{ (região externa à câmara).} \end{cases} \quad (4.30)$$

As condições de contorno (4.16) e (4.17), quando termos da ordem de $\frac{b_t}{R'_0}$ ou superiores são desprezados, simplificam-se para:

$$\left[\frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \rho} \right]_i^e = 0, \quad (4.31)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial u_t} \right]_i^e = 2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} e^{iNu_t}. \quad (4.32)$$

A fim de tornar mais direta a aplicação das condições de contorno acima, fizemos uso da seguinte igualdade:

$$(Nm_0 + k)\theta_t - Nn_0\varphi_t = k\theta_t - Nm_0\lambda \text{sen}(\theta_t) + Nu_t, \quad (4.33)$$

para reescrevermos o potencial escalar $\Phi_M^{(0)}$ como:

$$\Phi_M^{(0)}(\rho, \theta_t, \varphi_t) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{N,k}^{(0)} \mathcal{F}_{N,k}(\rho) e^{i[k\theta_t - Nm_0\lambda \text{sen}(\theta_t)]} e^{iNu_t}. \quad (4.34)$$

Nas expressões a seguir fizemos uso da notação simplificada $\mathcal{F}'_{N,k}(\rho)$, para representarmos a derivada de $\mathcal{F}_{N,k}(\rho)$, em relação a ρ , e da igualdade

$$e^{iNm_0\lambda \text{sen}(\theta_t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(Nm_0\lambda) e^{ik\theta_t}, \quad (4.35)$$

em cuja expressão J_k são funções de BESSEL cilíndricas de ordem inteira.

Da condição (4.31) obtemos a seguinte expressão:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[c_{N,k}^{(0)} \mathcal{F}'_{N,k}(\rho) \right]_i^e e^{i[k\theta_t - Nm_0\lambda \text{sen}(\theta_t)]} e^{iNu_t} = 0, \quad (4.36)$$

a qual, quando substituimos $\mathcal{F}'_{N,k}(\rho)$ pela função correspondente, resulta em:

$$c_{N,k}^{(0)e} + c_{N,k}^{(0)i} = 0. \quad (4.37)$$

De modo análogo, de (4.32), temos:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} iN \left[c_{N,k}^{(0)} \mathcal{F}_{N,k}(\rho) \right]_i^e e^{i[k\theta_t - Nm_0\lambda \text{sen}(\theta_t)]} e^{iNu_t} = 2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} e^{iNu_t}, \quad (4.38)$$

que, por sua vez, resulta em:

$$c_{N,k}^{(0)e} - c_{N,k}^{(0)i} = 2 \frac{\mu_0 I_h}{iN\pi} J_k(Nm_0\lambda). \quad (4.39)$$

Os coeficientes $c_{N,k}^{(0)i}$ e $c_{N,k}^{(0)e}$ são facilmente obtidos resolvendo-se o sistema de equações algébricas formado por (4.37) e (4.39). Feito isto, e reescrevendo ρ como $\frac{r_t}{b_t}$, o potencial escalar magnético $\Phi_M^{(0)}$ está determinado.

Para a região interna à câmara de confinamento, o potencial é dado por:

$$\Phi_M^{(0)i}(r_t, \theta_t, \varphi_t) = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(Nm_0\lambda)}{N} \left(\frac{r_t}{b_t} \right)^{|Nm_0+k|} e^{i[(Nm_0+k)\theta_t - Nn_0\varphi_t]}, \quad (4.40)$$

enquanto que, para a região externa à câmara de confinamento, ele é dado por:

$$\Phi_M^{(0)e}(r_t, \theta_t, \varphi_t) = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(Nm_0\lambda)}{N} \left(\frac{r_t}{b_t} \right)^{-|Nm_0+k|} e^{i[(Nm_0+k)\theta_t - Nn_0\varphi_t]}. \quad (4.41)$$

Duas observações, que têm como consequência a simplificação das expressões acima, podem ser feitas.

A primeira é que apenas o termo $N = 1$ é relevante para a descrição do potencial escalar magnético, haja vista que,

$$\frac{1}{N} \left(\frac{r_t}{b_t} \right)^{|Nm_0+k|}$$

tende rapidamente a zero, à medida que N cresce.

E a segunda observação é a de que apenas os valores de k , para os quais $|k| \leq m_0$, são necessários para uma boa aproximação da expressão (4.35).

Assim sendo, podemos reescrever as expressões (4.40) e (4.41) da seguinte forma:

$$\Phi_M^{(0)i}(r_t, \theta_t, \varphi_t) = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} J_k(m_0\lambda) \left(\frac{r_t}{b_t}\right)^{(m_0+k)} e^{i[(m_0+k)\theta_t - n_0\varphi_t]}, \quad (4.42)$$

$$\Phi_M^{(0)c}(r_t, \theta_t, \varphi_t) = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} J_k(m_0\lambda) \left(\frac{r_t}{b_t}\right)^{-(m_0+k)} e^{i[(m_0+k)\theta_t - n_0\varphi_t]}. \quad (4.43)$$

É importante notar que, apesar de $\Phi_M^{(0)}$ ser uma solução de ordem zero em $\frac{b_t}{R_0'}$, ele já possui algumas características toroidais. Isso ocorre em virtude das linhas de força do campo magnético de equilíbrio apresentarem uma helicidade não uniforme como consequência da curvatura do dispositivo de confinamento o que, por sua vez, levou-nos a adotar hélices condutoras de correntes elétricas cujas helicidades também não eram uniformes. Além do fato, é claro, de o sistema de coordenadas $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, em função do qual $\Phi_M^{(0)}$ foi obtido, já conter propriedades toroidais decorrentes de sua definição.

A primeira característica é que outros modos, diferentes do modo (m_0, n_0) das hélices, estão presentes no campo perturbativo. O acoplamento destes modos àqueles presentes no campo magnético de equilíbrio, decorrentes da geometria toroidal, altera a formação das ilhas satélites; esse efeito não ocorre para equilíbrios cilíndricos.

A segunda característica trata das amplitudes de cada modo que, ao contrário do que ocorre com hélices de passo uniforme, são moduladas pelas funções de BESSEL $J_k(m_0\lambda)$.

4.3.2 Cálculo do Potencial Escalar $\Phi_M^{(1)}$

O potencial escalar magnético $\Phi_M^{(1)}$ satisfaz a seguinte equação diferencial não homogênea, dada por (4.27):

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_M^{(1)}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_M^{(1)}}{\partial \theta_t^2} = -\mathcal{L}_1(\Phi_M^{(0)}), \quad (4.44)$$

na qual o termo de fonte $\mathcal{L}_1(\Phi_M^{(0)})$ é dado por:

$$\mathcal{L}_1(\Phi_M^{(0)}) = -\rho \left\{ \cos(\theta_t) \left[2\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_M^{(0)}}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \rho} \right] - \sin(\theta_t) \left[\frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \theta_t} + 2\rho \frac{\partial^2 \Phi_M^{(0)}}{\partial \theta_t \partial \rho} \right] \right\}. \quad (4.45)$$

A solução da equação (4.44) é representada pela seguinte composição:

$$\Phi_M^{(1)} = \Phi_M^{(p)} + \Phi_M^{(h)}, \quad (4.46)$$

na qual $\Phi_M^{(p)}$ é uma solução particular da equação não homogênea e $\Phi_M^{(h)}$ é uma solução da equação homogênea.

Substituindo as soluções (4.42) e (4.43), obtidas para $\Phi_M^{(0)}$, em (4.45), encontramos, para $0 \leq \rho \leq 1$, o termo de fonte:

$$\mathcal{L}_1(\Phi_M^{(0)i}) = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} (m_0 + k)[2(m_0 + k) + 1] J_k(m_0 \lambda) \rho^{(m_0+k)+1} e^{i[(m_0+k-1)\theta_t - n_0 \varphi_t]}, \quad (4.47)$$

e, para $\rho \geq 1$, o termo de fonte:

$$\mathcal{L}_1(\Phi_M^{(0)e}) = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} (m_0 + k)[2(m_0 + k) - 1] J_k(m_0 \lambda) \rho^{-(m_0+k)+1} e^{i[(m_0+k+1)\theta_t - n_0 \varphi_t]}. \quad (4.48)$$

Os resultados (4.47) e (4.48) sugerem uma solução particular para a equação (4.44) do seguinte tipo:

$$\Phi_M^{(p)i} = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} \left(c_k^{(p)i} \rho^{(m_0+k)+1} e^{i(k-1)\theta_t} \right) e^{-im_0 \lambda \text{sen}(\theta_t)} e^{iu_t}, \quad (4.49)$$

$$\Phi_M^{(p)e} = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} \left(c_k^{(p)e} \rho^{-(m_0+k)+1} e^{i(k+1)\theta_t} \right) e^{-im_0 \lambda \text{sen}(\theta_t)} e^{iu_t}. \quad (4.50)$$

Os coeficientes $c_k^{(p)i}$ e $c_k^{(p)e}$ são obtidos substituindo (4.49) e (4.50) na equação (4.44).

Fazendo isto temos:

$$c_k^{(p)i} = -[2(m_0 + k) + 1] \frac{J_k(m_0 \lambda)}{4}, \quad (4.51)$$

$$c_k^{(p)e} = -[2(m_0 + k) - 1] \frac{J_k(m_0 \lambda)}{4}. \quad (4.52)$$

A solução da equação homogênea:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_M^{(h)}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_M^{(h)}}{\partial \theta_t^2} = 0. \quad (4.53)$$

é dada por:

$$\Phi_M^{(h)} = \sum_{k=-m_0}^{m_0} \left(c_k^{(+)} \mathcal{F}_k^{(+)}(\rho) e^{i(k+1)\theta_t} + c_k^{(-)} \mathcal{F}_k^{(-)}(\rho) e^{i(k-1)\theta_t} \right) e^{-im_0 \lambda \text{sen}(\theta_t)} e^{iu_t}, \quad (4.54)$$

na qual $\mathcal{F}_k^{(-)}(\rho)$ é dada por:

$$\mathcal{F}_k^{(-)}(\rho) = \begin{cases} \rho^{|m_0+k-1|} & \text{para } 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho^{-|m_0+k-1|} & \text{para } \rho \geq 1, \end{cases} \quad (4.55)$$

e $\mathcal{F}_k^{(+)}(\rho)$ é dada por:

$$\mathcal{F}_k^{(+)}(\rho) = \begin{cases} \rho^{|m_0+k+1|} & \text{para } 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho^{-|m_0+k+1|} & \text{para } \rho \geq 1. \end{cases} \quad (4.56)$$

Analisando o termo $\frac{\vec{e}^1 \cdot \nabla u_t}{g^{11}}$ da condição de contorno (4.16), temos, em termos de ρ , que:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{e}^1 \cdot \nabla u_t}{g^{11}} &= \frac{1}{g^{11}} \vec{e}^1 \cdot \{[m_0 + m_0 \lambda \cos(\theta_t)] \vec{e}^2 - n_0 \vec{e}^3\} = \\ &= [m_0 + m_0 \lambda \cos(\theta_t)] \frac{g^{12}}{g^{11}} = \\ &= \frac{b_t}{R'_0} \text{sen}(\theta_t) [m_0 + m_0 \lambda \cos(\theta_t)] \frac{1}{1 - 2 \frac{b_t}{R'_0} \rho \cos(\theta_t)}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Assim sendo, considerando-se apenas os termos proporcionais a $\frac{b_t}{R'_0}$, as condições de contorno para o potencial escalar $\Phi_M^{(1)}$ são:

$$\left[\frac{\partial \Phi_M^{(1)}}{\partial \rho} \right]_i^e = -2 \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \text{sen}(\theta_t) [m_0 + m_0 \lambda \cos(\theta_t)] e^{iu_t}, \quad (4.58)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_M^{(1)}}{\partial u_t} \right]_i^e = 0. \quad (4.59)$$

Da condição de contorno (4.58), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} \left\{ [(m_0+k)-1] c_k^{(p)e} e^{i(k+1)\theta_t} + [(m_0+k)+1] c_k^{(p)i} e^{i(k-1)\theta_t} \right\} e^{iu_t} + \\ + \sum_{k=-m_0}^{m_0} \left\{ [c_k^{(+)} \mathcal{F}_k^{(+)}(\rho)]_i^e e^{i(k+1)\theta_t} + [c_k^{(-)} \mathcal{F}_k^{(-)}(\rho)]_i^e e^{i(k-1)\theta_t} \right\} e^{iu_t} = \\ = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} (m_0+k) J_k(m_0 \lambda) \left(e^{i(k+1)\theta_t} - e^{i(k-1)\theta_t} \right) e^{iu_t}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

na qual fizemos uso da igualdade:

$$\text{sen}(\theta_t)[m_0 + m_0\lambda \cos(\theta_t)]e^{im_0\lambda \text{sen}(\theta_t)} = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m_0 + k)J_k(m_0\lambda) \left(e^{i(k+1)\theta_t} - e^{i(k-1)\theta_t} \right). \quad (4.61)$$

Substituindo as expressões correspondentes a $\mathcal{F}_k^{(+)' }(\rho)$ e $\mathcal{F}_k^{(-)' }(\rho)$, obtemos o seguinte conjunto de equações para os coeficientes $c_k^{(+)}$ e $c_k^{(-)}$:

$$c_k^{(+e)} + c_k^{(+i)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \left[\frac{(m_0 + k - 1)}{|m_0 + k + 1|} c_k^{(pe)} - \frac{(m_0 + k)}{|m_0 + k + 1|} J_k(m_0\lambda) \right], \quad (4.62)$$

$$c_k^{(-e)} + c_k^{(-i)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} \left[\frac{(m_0 + k + 1)}{|m_0 + k - 1|} c_k^{(pi)} + \frac{(m_0 + k)}{|m_0 + k - 1|} J_k(m_0\lambda) \right]. \quad (4.63)$$

Da condição de contorno (4.59), temos:

$$\frac{\mu_0 I_h}{\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} \left(c_k^{(pe)} e^{i(k+1)\theta_t} - c_k^{(pi)} e^{i(k-1)\theta_t} \right) e^{iu_t} + \sum_{k=-m_0}^{m_0} i \left\{ \left[c_k^{(+)} \mathcal{F}_k^{(+)}(\rho) \right]_i^c e^{i(k+1)\theta_t} + \left[c_k^{(-)} \mathcal{F}_k^{(-)}(\rho) \right]_i^c e^{i(k-1)\theta_t} \right\} e^{iu_t} = 0, \quad (4.64)$$

que, por sua vez, resulta em:

$$c_k^{(+e)} - c_k^{(+i)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i\pi} c_k^{(pe)}, \quad (4.65)$$

$$c_k^{(-e)} - c_k^{(-i)} = \frac{\mu_0 I_h}{i\pi} c_k^{(pi)}, \quad (4.66)$$

Resolvendo o sistema de equações algébricas (4.62-4.66), obtemos os coeficientes $c_k^{(+i,e)}$ e $c_k^{(-i,e)}$, em termos dos coeficientes da solução particular $c_k^{(pi)}$ e $c_k^{(pe)}$, como sendo:

$$c_k^{(+i)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i2\pi} \left\{ \left[\frac{(m_0 + k - 1)}{|m_0 + k + 1|} - 1 \right] c_k^{(pe)} - \frac{(m_0 + k)}{|m_0 + k + 1|} J_k(m_0\lambda) \right\}, \quad (4.67)$$

$$c_k^{(+e)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i2\pi} \left\{ \left[\frac{(m_0 + k - 1)}{|m_0 + k + 1|} + 1 \right] c_k^{(pe)} - \frac{(m_0 + k)}{|m_0 + k + 1|} J_k(m_0\lambda) \right\}, \quad (4.68)$$

$$c_k^{(-i)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i2\pi} \left\{ \left[\frac{(m_0 + k + 1)}{|m_0 + k - 1|} + 1 \right] c_k^{(pi)} + \frac{(m_0 + k)}{|m_0 + k - 1|} J_k(m_0\lambda) \right\}, \quad (4.69)$$

$$c_k^{(-e)} = -\frac{\mu_0 I_h}{i2\pi} \left\{ \left[\frac{(m_0 + k + 1)}{|m_0 + k - 1|} - 1 \right] c_k^{(pi)} + \frac{(m_0 + k)}{|m_0 + k - 1|} J_k(m_0\lambda) \right\}. \quad (4.70)$$

Com isto, finalizamos o cálculo do potencial escalar magnético, corrigido até primeira ordem em $\frac{b_t}{R'_0}$, que é dado por:

$$\Phi_M = \Phi_M^{(0)} + \frac{b_t}{R'_0} \left(\Phi_M^{(p)} + \Phi_M^{(h)} \right). \quad (4.71)$$

Como estamos interessados apenas no campo magnético interno à câmara de confinamento, de agora em diante iremos suprimir os índices i e e das expressões para os coeficientes, com exceção dos coeficientes da solução particular, e para o potencial escalar magnético.

4.4 Campo Magnético Helicoidal

Como dissemos anteriormente, o campo magnético gerado pelo par de hélices é calculado, a partir do potencial escalar magnético Φ_M , como:

$$\vec{B}_h = \frac{\partial\Phi_M}{\partial r_t} \vec{e}^1 + \frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta_t} \vec{e}^2 + \frac{\partial\Phi_M}{\partial\varphi_t} \vec{e}^3.$$

Suas componentes contravariante são:

$$B_h^1 = \frac{\partial\Phi_M}{\partial r_t} g^{11} + \frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta_t} g^{12}, \quad (4.72)$$

$$B_h^2 = \frac{\partial\Phi_M}{\partial r_t} g^{21} + \frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta_t} g^{22}, \quad (4.73)$$

$$B_h^3 = \frac{\partial\Phi_M}{\partial\varphi_t} g^{33}, \quad (4.74)$$

em cujas expressões os coeficientes métricos são dados por:

$$g^{11} = 1 - 2 \frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t),$$

$$g^{12} = \frac{1}{R'_0} \text{sen}(\theta_t) = g^{21},$$

$$g^{22} = \frac{1}{r_t^2},$$

$$g^{33} = \frac{1}{R^2}.$$

Substituindo esses coeficientes métricos nas expressões para as componentes contravariantes de \vec{B}_h obtemos os seguintes resultados:

$$B_h^1 = \frac{\partial\Phi_M^{(0)}}{\partial r_t} + \left(\frac{b_t}{R'_0}\right) \left[\frac{\partial}{\partial r_t} \left(\Phi_M^{(p)} + \Phi_M^{(h)} \right) - 2 \frac{r_t}{b_t} \frac{\partial\Phi_M^{(0)}}{\partial r_t} \cos(\theta_t) + \frac{1}{b_t} \frac{\partial\Phi_M^{(0)}}{\partial\theta_t} \text{sen}(\theta_t) \right], \quad (4.75)$$

$$B_h^2 = \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial\Phi_M^{(0)}}{\partial\theta_t} + \left(\frac{b_t}{R'_0}\right) \left[\frac{1}{r_t^2} \frac{\partial}{\partial\theta_t} \left(\Phi_M^{(p)} + \Phi_M^{(h)} \right) + \frac{1}{b_t} \frac{\partial\Phi_M^{(0)}}{\partial r_t} \text{sen}(\theta_t) \right], \quad (4.76)$$

$$B_h^3 = 0, \quad (4.77)$$

nos quais os termos de ordem maior que $\frac{b_t}{R_0}$ foram desprezados.

Mostramos, a seguir, os perfis poloidal e radial da componente contravariante B_h^1 haja vista que esta é a componente relevante para as modificações topológicas das superfícies magnéticas de equilíbrio causadas pelo campo magnético de perturbação. Esses perfis estão normalizados em função do valor de $B_T = B^{(0)3}(0)$.

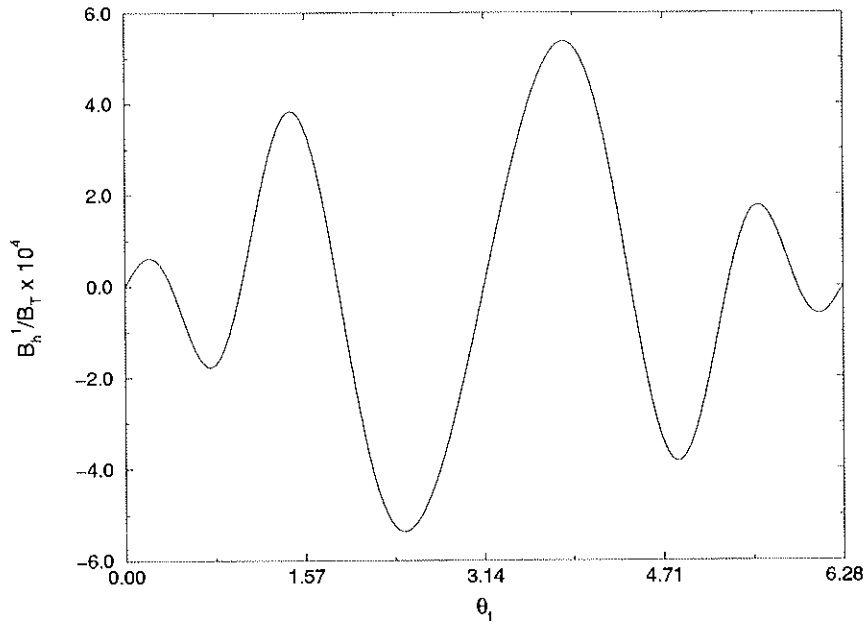


Figura 4.2: Perfil poloidal da componente contravariante B_h^1 do campo magnético de perturbação para: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $I_h = 0,3\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $\frac{r_t}{a} = 0,91$ correspondente à superfície com $q = \frac{4}{1}$.

A figura-4.2 mostra o perfil poloidal da componente contravariante B_h^1 do campo magnético de perturbação calculado em $\frac{r_t}{a} = 0,91$. Pode-se notar que, devido ao fato dos condutores helicoidais estarem mais próximos na região interna da câmara de confinamento, a intensidade do campo magnético nesta região é menor do que na parte externa da câmara de confinamento.

A figura-4.3 mostra, por sua vez, a dependência com r_t de $\langle |B_h^1| \rangle_{\theta_t}$, a média em θ_t do módulo da componente contravariante B_h^1 . Vemos que a intensidade do campo magnético é bastante atenuada à medida que regiões mais próximas ao centro da coluna de plasma são consideradas. Conseqüentemente apenas a borda da coluna de plasma deve sofrer, de forma considerável, os efeitos do campo magnético de perturbação. A atenuação segue

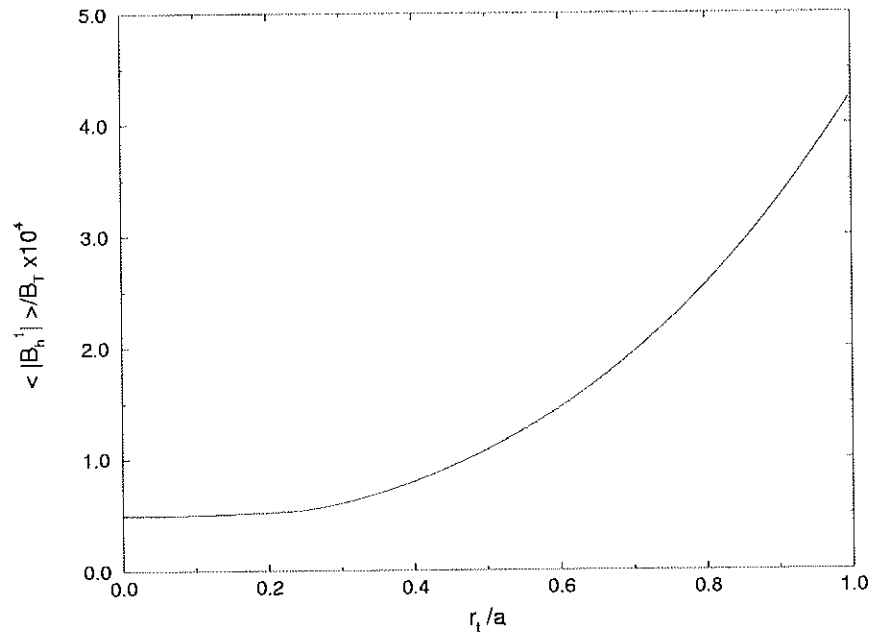


Figura 4.3: Perfil radial da componente contravariante B_h^1 do campo magnético de perturbação para: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $I_h = 0,3\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $\theta_t = \frac{5\pi}{4}$. O valor de B_h^1 é normalizado por $B_T = B^{(0)3}(0)$.

uma forma polinomial cujo termo de maior grau é proporcional a $\left(\frac{r_t}{b_t}\right)^{m_0-1}$.

Estas características concordam com perfis, obtidos experimentalmente, de campos magnéticos de condutores helicoidais para os quais uma helicidade não uniforme foi considerada [13, 38].

As expressões (4.75-4.77) serão utilizadas, no próximo capítulo, para calcular o traçado das linhas de força do campo magnético de equilíbrio perturbado pelo campo magnético das hélices.

Capítulo 5

Linhas de Força do Campo Magnético Ressonante

Aqui, combinamos os resultados obtidos nos dois capítulos anteriores com o objetivo de estudarmos a influência do campo magnético helicoidal externo sobre o campo magnético de equilíbrio do plasma. Isto foi feito através do mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético total — $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$ —, o qual consideramos como sendo uma superposição linear dos campos magnéticos envolvidos. Desprezamos, portanto, qualquer forma de reação do plasma ao campo magnético externo em virtude deste ser muito menos intenso do que o campo magnético de equilíbrio.

Antes, porém, apresentamos o cálculo do parâmetro λ em termos de uma série de potências do inverso da razão de aspecto. Este parâmetro foi utilizado, no capítulo anterior, para descrevermos a lei de enrolamento das hélices condutoras de correntes elétricas como sendo $u_t = m_0[\theta_t + \lambda \text{sen}(\theta_t)] - n_0\varphi_t = \text{constante}$. Durante o desenvolvimento deste cálculo esclarecemos o porquê desta particular escolha para a lei de enrolamento das hélices.

Finalizamos este capítulo apresentando uma descrição hamiltoniana, para o limite de razão de aspecto grande, desse sistema formado por um plasma magneticamente confinado sujeito à ação de um campo magnético perturbativo criado por um par de hélices conduzindo correntes elétricas de mesma intensidade, porém, em sentidos opostos.

5.1 Cálculo do Parâmetro λ

Como mencionamos, na seção 4.1, campos magnéticos ressonantes podem ser criados por condutores de correntes elétricas, enrolados sobre a parte externa da câmara de confinamento do plasma de modo a reproduzir o traçado helicoidal das linhas de força do campo magnético de equilíbrio sobre a superfície racional que se deseja perturbar. Portanto, se desejamos determinar de que maneira iremos enrolar os condutores precisamos, antes de mais nada, saber qual é o traçado de uma linha de força sobre uma superfície magnética racional.

A equação que descreve o traçado de uma linha de força do campo magnético de equilíbrio é:

$$\vec{B}^{(0)} \times d\vec{l} = 0, \quad (5.1)$$

na qual $\vec{B}^{(0)}$ é dado pelas equações (3.41)-(3.43) obtidas com a aproximação $\Psi_p(r_t, \theta_t) \simeq \Psi_p^{(0)}(r_t)$.

Adotando-se as coordenadas polares toroidais, $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, para descrevermos $d\vec{l}$, assim como, as componentes contravariantes de $\vec{B}^{(0)}$ (equações 3.41-3.43), a expressão acima implica no seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dr_t}{d\varphi_t} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi_t} = \frac{1}{q_c(r_t)} \left[1 - 2 \frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t) \right]. \quad (5.3)$$

no qual $q_c(r_t)$ é o fator de segurança, na aproximação de ordem zero em $\frac{r_t}{R'_0}$, dado por (3.48).

Este sistema de equações diferenciais pode ser integrado analiticamente resultando, para as condições iniciais $r_t = r_t^0$, $\theta_t = \theta_t^0$ e $\varphi_t = \varphi_t^0 = 0$, em:

$$r_t(\varphi_t) = r_t^0, \quad (5.4)$$

$$\theta_t(\varphi_t) = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\Omega(r_t^0) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{q(r_t^0)} \varphi_t + \Gamma(r_t^0, \theta_t^0) \right)}{1 + \cos \left(\frac{1}{q(r_t^0)} \varphi_t + \Gamma(r_t^0, \theta_t^0) \right)} \right], \quad (5.5)$$

em cujas expressões $\Omega(r_t^0)$ e $\Gamma(r_t^0, \theta_t^0)$ são dadas por:

$$\Omega(r_t^0) = \frac{\sqrt{1 - 2\frac{r_t^0}{R_0'}}}{\sqrt{1 + 2\frac{r_t^0}{R_0'}}}, \quad (5.6)$$

$$\Gamma(r_t^0, \theta_t^0) = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\Omega(r_t^0)} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta_t^0)}{1 + \cos(\theta_t^0)} \right) \right], \quad (5.7)$$

e $q(r_t^0)$ é o fator de segurança, dado por (3.51), calculado em $r_t = r_t^0$.

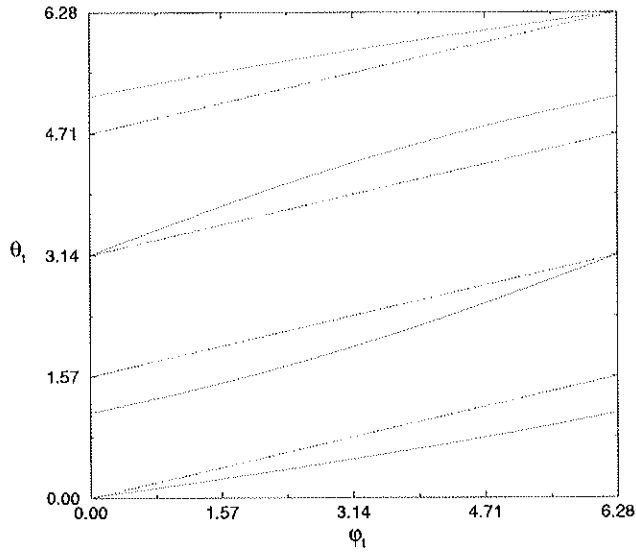


Figura 5.1: Traçado de uma linha de força do campo magnético de equilíbrio (em vermelho) localizada sobre uma superfície racional com $q(r_t^{mn}) = \frac{4}{1}$. A linha pontilhada corresponde a uma hélice com passo constante.

Na figura-5.1 mostramos, em vermelho, o traçado de uma linha de força do campo magnético de equilíbrio sobre uma superfície magnética racional com $q(r_t^{mn}) = \frac{m}{n} = \frac{4}{1}$. Nela, a curva pontilhada representa o traçado de uma hélice com passo constante cuja lei de enrolamento é:

$$m_0 \theta_t - n_0 \varphi_t = \text{constante}. \quad (5.8)$$

Comparando-se as duas curvas notamos que os efeitos da geometria toroidal sobre o campo magnético de equilíbrio resultam numa linha de força cujo traçado é bastante diferente daquele dado pela expressão (5.8), indicando que uma expressão diferente dessa dada por (5.8) deve ser usada para descrever os condutores helicoidais, instalados sobre a câmara

de confinamento do plasma, de modo que estes possuam o mesmo traçado das linhas de força.

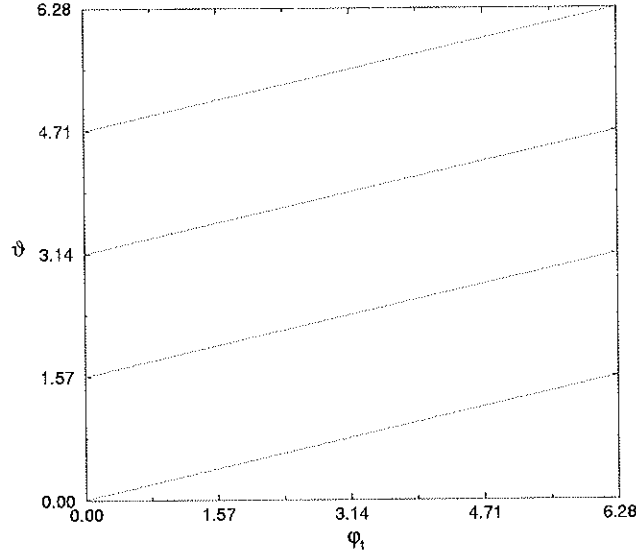


Figura 5.2: Traçado da linha de força do campo magnético de equilíbrio localizada sobre uma superfície racional com $q = \frac{4}{1}$ em termos das variáveis angulares ϑ e φ_t .

Para obtermos essa expressão primeiro adotamos um novo ângulo poloidal [39, 40], ϑ , dado por:

$$\begin{aligned} \vartheta(r_t, \theta_t) &= \frac{1}{q(r_t)} \int_0^{\theta_t} \frac{B(0)^3}{B(0)^2} d\theta \\ &= \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R_0'} \right)^2} \int_0^{\theta_t} \frac{d\theta}{1 - 2 \frac{r_t}{R_0'} \cos(\theta)} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\Omega(r_t)} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{1 + \cos(\theta_t)} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

em termos do qual as linhas de força do campo magnético de equilíbrio possuem um passo constante. Desta forma, o traçado das linhas de força pode ser representado pela expressão:

$$m_0 \vartheta - n_0 \varphi_t = \text{constante}, \quad (5.10)$$

como podemos verificar através da figura-5.2.

O ângulo ϑ pode ser expandido na seguinte série de Fourier (ver apêndice-A):

$$\vartheta = \theta_t + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l(r_t) \operatorname{sen}(l\theta_t), \quad (5.11)$$

em cuja expressão:

$$\alpha_l(r_t) = \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+l)!}{k!(k+l)!} \frac{2}{l} \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^{2k+l}. \quad (5.12)$$

Retendo apenas o termo correspondente a $l = 1$ em (5.11) ficamos com a seguinte expressão para ϑ :

$$\vartheta = \theta_t + \alpha_1 \text{sen}(\theta_t). \quad (5.13)$$

Adotando $\lambda = \alpha_1$ e substituindo (5.13) em (5.10) obtemos:

$$m_0[\theta_t + \lambda \text{sen}(\theta_t)] - n_0\varphi_t = \text{constante}, \quad (5.14)$$

que é justamente a lei de enrolamento que adotamos, no capítulo 4, para descrever os condutoras de correntes elétricas.

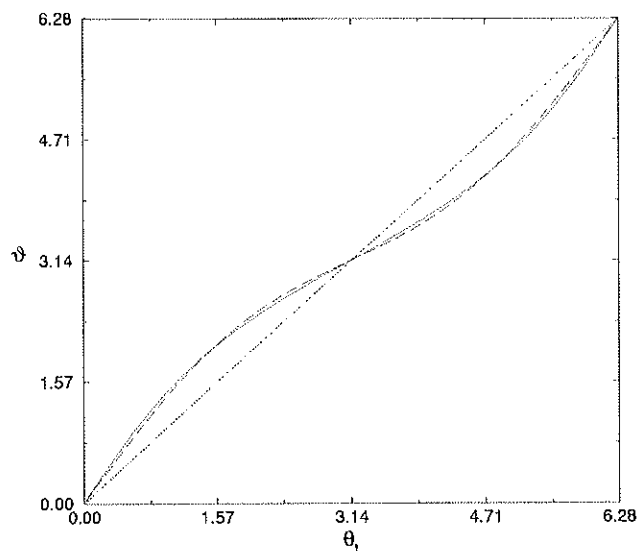


Figura 5.3: Gráfico relacionando as coordenadas ϑ e θ_t para uma linha de força do campo magnético de equilíbrio localizada sobre uma superfície racional com $q = \frac{4}{1}$.

A figura-5.3 mostra a relação entre ϑ e θ_t para uma linha de força que se encontra sobre a superfície racional com $q = \frac{4}{1}$. A curva cheia corresponde à solução exata, (5.9), enquanto que a linha tracejada corresponde à expressão (5.13).

Para a linha de força indicada na figura-5.1 e na figura-5.2 o valor de $\frac{r_t}{a} = \frac{r_t^{mn}}{a}$ utilizado foi $\frac{r_t}{a} = 0,91$ ao qual corresponde o valor $\lambda = 0,48$ e $q = \frac{4}{1}$. Isto pode ser

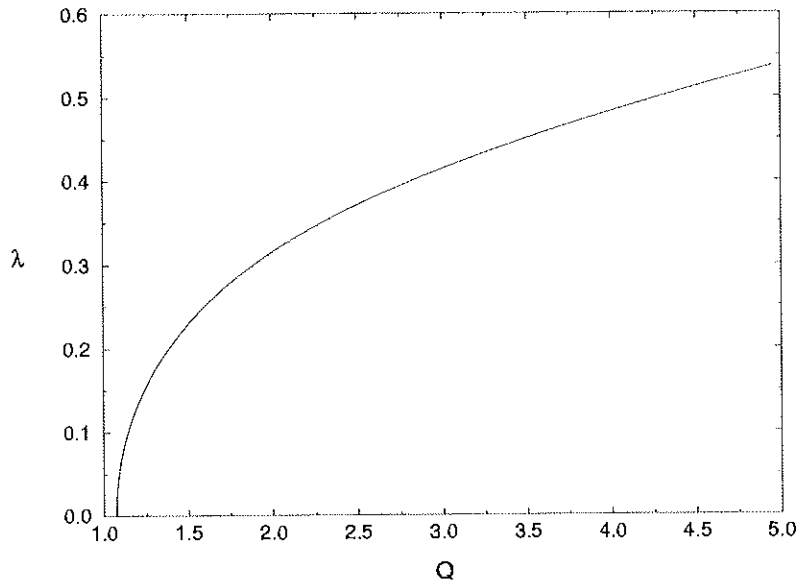


Figura 5.4: Gráfico relacionando o fator de modulação poloidal da helicidade dos condutores de correntes elétricas, λ , com o fator de segurança da superfície magnética de equilíbrio, q , que se deseja perturbar.

verificado na figura-5.4 que relaciona o valor do fator de modulação poloidal da helicidade dos condutores de correntes elétricas, λ , com o valor do fator de segurança da superfície magnética de equilíbrio que se deseja perturbar.

O ângulo ϑ será utilizado, no final deste capítulo, para a determinação de uma descrição hamiltoniana (no limite em que $\frac{r_t}{R_0} \rightarrow 0$) que será tomada, no capítulo 6, como ponto de partida para a obtenção de um mapa simplético para um conjunto de anéis limitadores magnéticos caóticos.

5.2 Mapa Estroboscópico das Linhas de Força

O comportamento de um sistema dinâmico pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais, do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= F_1(v_1, v_2, \dots, v_n, t), \\ &\vdots \\ \frac{dv_n}{dt} &= F_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t), \end{aligned} \tag{5.15}$$

que expressam a taxa de variação temporal das coordenadas de estado do sistema como uma função de seu valor presente.

À medida que o sistema dinâmico evolui com o transcorrer do tempo, ele ocupa uma série de posições em seu espaço de estados. Estas posições formam uma curva contínua que chamamos de trajetória na qual a cada instante, t , corresponde um ponto $P(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$.

O mapa estroboscópico desta trajetória é o conjunto, $M_E = \{P(t_0), P(t_0 + T), P(t_0 + 2T), \dots\}$, dos pontos do seu espaço de estados, ocupados pela trajetória, que são amostrados a intervalos regulares de tempo.

Para um sistema dinâmico com um grau de liberdade, cujo espaço de estados é bidimensional, o mapa estroboscópico resultante consiste numa seqüência de pontos sobre um plano.

Na seção 5.1, vimos que a equação que descreve o traçado das linhas de força do campo magnético, dada por:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0, \quad (5.16)$$

implica, justamente, num conjunto de equações diferenciais do seguinte tipo:

$$\frac{dr_t}{d\varphi_t} = \frac{B_h^1}{B^{(0)3} + B_h^3} = F_{r_t}(r_t, \theta_t, \varphi_t), \quad (5.17)$$

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi_t} = \frac{B^{(0)2} + B_h^2}{B^{(0)3} + B_h^3} = F_{\theta_t}(r_t, \theta_t, \varphi_t), \quad (5.18)$$

em cujas expressões as componentes contravariantes de $\vec{B}^{(0)}$ são dadas por (3.41-3.43) e as componentes contravariantes de \vec{B}_h por (4.75-4.77).

Como podemos notar das equações acima, o cálculo do traçado de linhas de força de campos magnéticos é análogo ao cálculo de trajetórias de um sistema dinâmico com um grau de liberdade no qual $r_t(\varphi_t)$, $\theta_t(\varphi_t)$ e φ_t equivalem às coordenadas de estado $v_1(t)$, $v_2(t)$ e ao tempo t respectivamente. Conseqüentemente, podemos construir um mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, perturbado pelo campo magnético de um par de hélices enroladas sobre a câmara de contenção do plasma, amostrando os valores do par de coordenadas $r_t(\varphi_t)$ e $\theta_t(\varphi_t)$ a cada incremento de 2π no valor de φ_t .

Para tanto é necessário integrar o conjunto de equações diferenciais formado por (5.17 e 5.18) o que, porém, não pode ser feito analiticamente como ocorreu na seção 5.1, quando apenas o campo magnético de equilíbrio foi considerado. Isto nos obrigou a adotar um método numérico de integração no cálculo do traçado das linhas de força do campo magnético.

O método de integração numérica que adotamos chama-se **Método Bulirsch-Stoer com Extrapolação de Richardson** cujo algoritmo pode ser obtido em [41].

A integração foi realizada da seguinte forma: para cada linha de força uma condição inicial, $P(0) = (r_t(0), \theta_t(0))$, foi escolhida e este par de coordenadas era o primeiro ponto do mapa estroboscópico; os próximos pontos foram obtidos integrando-se o sistema de equações diferenciais e coletando os pares $P(\varphi_t) = (r_t(\varphi_t), \theta_t(\varphi_t))$ sempre que φ_t fosse igual $2l\pi$ com l sendo um inteiro positivo.

Aqui cabe um esclarecimento. Vários trabalhos sobre traçado de linhas de força de campos magnéticos em tokamaks costumam tratar por seção de POINCARÉ o que estamos chamando de mapa estroboscópico. Uma seção de POINCARÉ registra os pontos oriundos da interseção da trajetória com uma determinada superfície sempre que a trajetória cruza esta superfície num mesmo sentido. Embora os resultados sejam equivalentes, eles são conceitualmente diferentes pois, na seção de POINCARÉ, os intervalos de tempo entre pontos consecutivos podem não ser regulares e, no mapa estroboscópico, os pontos não estão, necessariamente, sobre a mesma superfície. O termo seção de POINCARÉ é conseqüência da analogia entre sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade, periódicos, cujas trajetórias repousam sobre toros e o traçado das linhas de força do campo magnético que, em tokamaks, repousam sobre superfícies magnéticas toroidais. Neste caso, porém, o ângulo φ_t perde sua analogia com o tempo t .

A seguir, mostramos um mapa estroboscópico típico obtido através deste procedimento de integração numérica.

Este mapa (figura-5.5) foi obtido usando-se os perfis, indicados na figura-3.2 e na figura-3.3, que descrevem o campo magnético de equilíbrio. Já o campo magnético de perturbação foi calculado para os seguintes parâmetros: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $I_h = 0, 2\%$ de I_p e $\lambda = 0, 48$. Nele é possível notar os vários tipos de superfícies magnéticas que coabitam o mesmo mapa.

Primeiramente, notamos as superfícies regulares quase periódicas indicadas por curvas contínuas e para as quais o fator de segurança, q , é um número irracional. Estas superfícies são as correspondentes das superfícies KAM (KOLMOGOROV, ARNOLD E MOSER) em sistemas hamiltonianos e são compostas por linhas de força que jamais se fecham sobre si mesmas. Elas representam constantes de movimento cujos valores podem ser aproximadamente calculados pela teoria de perturbação clássica [42].

Há, também, as superfícies regulares periódicas (com valores de q racionais) que contêm

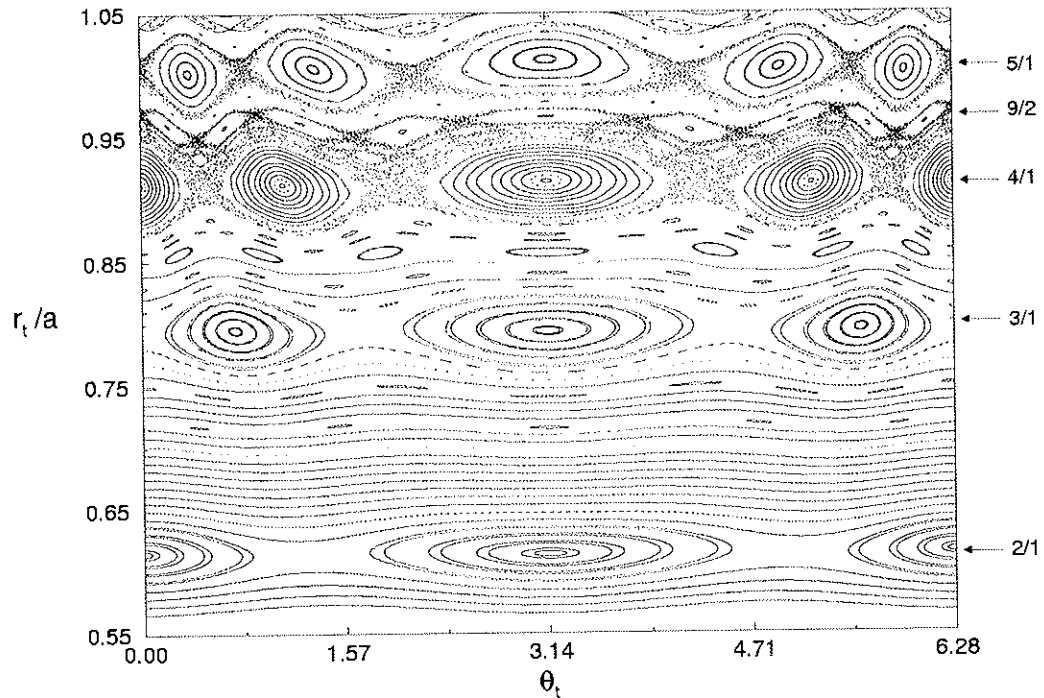


Figura 5.5: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,2% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. As cadeias principais de ilhas primárias e intermediárias para as quais $q = \frac{m}{n} = \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{9}{2}$ e $\frac{5}{1}$ estão indicadas na figura.

linhas de forças que se fecham sobre si mesmas após um certo número k , por exemplo, de iterações do mapa. Estas linhas de força são indicadas por um conjunto de k pontos como aqueles que se encontram no centro das ilhas magnéticas.

Depois, podemos notar as cadeias de ilhas magnéticas que se formam ao redor das regiões para as quais o fator de segurança é um número racional. Essas cadeias de ilhas podem ser classificadas em três tipos diferentes: **cadeia de ilhas primárias** que apresentam as maiores larguras e são decorrentes das ressonâncias entre os harmônicos do campo magnético de perturbação e o campo magnético de equilíbrio nas regiões em que o fator de segurança, $q = \frac{m}{n}$, é um número racional; as **cadeias de ilhas intermediárias** que se formam entre as cadeias de ilhas primárias com $q = \frac{m}{n}$ e $q = \frac{m'}{n'}$ ao redor da superfície magnética para a qual $q = \frac{m + m'}{n + n'}$; as **cadeias de ilhas secundárias** que se formam no interior de outras ilhas em decorrência das ressonâncias dos harmônicos do campo magnético de perturbação em regiões onde o fator de segurança local (que mede o giro de uma linha de força com relação ao ponto elíptico no centro de uma ilha) apresenta valores racionais.

A teoria de perturbação clássica não se aplica a estas superfícies, uma vez que todas se originam de ressonâncias. Entretanto, podemos aplicar a teoria de perturbação secular para removermos ressonâncias localizadas e, com isso, calculá-las de forma aproximada.

Na realidade existem cadeias de ilhas magnéticas ao redor de todas as superfícies para as quais o fator de segurança assume um valor racional; porém, muitas delas são tão pequenas que não é possível vê-las no mapa. Se chamarmos de $\Delta_{m,n}$ a largura de uma ilha que se forma ao redor da superfície para a qual $q = \frac{m}{n}$, vê-se que a razão entre essa largura e a largura de uma ilha intermediária é, de forma aproximada, dada por [42]:

$$\frac{\Delta_{m+m',n+n'}}{\Delta_{m,n}} \approx \sqrt{\frac{J_{m+m'}(\pi)}{J_m(\pi)}}, \quad (5.19)$$

em cuja expressão J_m são funções de BESSEL de ordem m . Como um exemplo, a razão entre a largura de uma ilha intermediária para a qual $q = \frac{m+m'}{n+n'} = \frac{9}{2}$, formada entre as cadeias de ilhas para as quais $q = \frac{m}{n} = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{m'}{n'} = \frac{5}{1}$, é:

$$\frac{\Delta_{9,2}}{\Delta_{5,1}} \approx \sqrt{\frac{J_9(\pi)}{J_5(\pi)}} \approx 0,1. \quad (5.20)$$

As localizações das cadeias principais de ilhas primárias e intermediárias para as quais $q = \frac{2}{1}$, $q = \frac{3}{1}$, $q = \frac{4}{1}$, $q = \frac{9}{2}$ e $q = \frac{5}{1}$ estão indicadas na figura-5.5. Nessa figura pode-se notar que a cadeia de ilhas intermediárias para a qual $q = \frac{9}{2}$ é nitidamente mais estreita que as cadeias de ilhas primárias para as quais $q = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{5}{1}$, conforme especificado pela equação (5.19).

Finalmente, temos regiões do mapa para as quais não podemos definir uma superfície. Estas são ocupadas por linhas de forças caóticas que se espalham pelo mapa preenchendo grandes extensões do mesmo. Podemos notar, da figura-5.5, que há tipos distintos de regiões caóticas. Uma, formada próxima à separatriz de uma cadeia de ilhas, é estreita e se mantém entre superfícies KAM. A outra, surge quando a intensidade da perturbação é grande o bastante para que várias regiões de caos de separatriz se interconectem permitindo que as linhas de força se espalhem por uma região bem ampla.

5.2.1 Mapas para $\lambda = 0$ e para $\lambda = 0,48$

A seguir apresentamos alguns mapas estroboscópicos (ver figura-5.6 até figura-5.13) obtidos para os seguintes valores da corrente elétrica nos condutores helicoidais: $I_h = 0,1\%$ de I_p , $I_h = 0,2\%$ de I_p , $I_h = 0,3\%$ de I_p e $I_h = 0,4\%$ de I_p .

Para o cálculo desses mapas, consideramos os perfis de equilíbrio indicados na figura-3.2 e na figura-3.3. Esses mapas foram calculados para o valor de $\lambda = 0$, correspondendo a um par de hélices enroladas sobre a câmara de confinamento com uma helicidade uniforme, tal qual a curva pontilhada da figura-5.1, e para $\lambda = 0,48$, correspondendo a um par de condutores enrolados de modo a acompanharem o traçado das linhas de força sobre a superfície para a qual $q = \frac{4}{1}$.

Há dois aspectos interessantes a se observar nesses mapas estroboscópicos: o primeiro é que as ilhas magnéticas de uma mesma cadeia não apresentam tamanhos iguais e os seus pontos elípticos centrais não estão igualmente espaçados na direção poloidal. Elas são menores e estão mais perto umas das outras na região próxima ao eixo de simetria da câmara de confinamento, provavelmente em consequência do fato do perfil poloidal de B_h^1 apresentar picos de menor intensidade e mais próximos entre si nesta região (ver figura-4.2). Esta característica, que não é obtida por modelos cilíndricos com correção toroidal apenas no campo B_φ [18, 45], está de acordo com alguns resultados experimentais encontrados na literatura [43, 44]. O segundo aspecto é que o efeito perturbativo produzido pelo campo magnético das hélices se mostrou mais concentrado ao redor da superfície para a qual $q = \frac{m_0}{n_0} = \frac{4}{1}$ (ver figura-5.9) quando consideramos um par de hélices, conduzindo correntes elétricas em sentidos opostos, enroladas sobre a câmara de confinamento de acordo com as seguintes leis de enrolamento:

$$m_0[\theta_t + \lambda \text{sen}(\theta_t)] - n_0\varphi_t = 0, \quad (5.21)$$

$$m_0[\theta_t + \lambda \text{sen}(\theta_t)] - n_0\varphi_t = \pi, \quad (5.22)$$

em que $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Essas expressões para a lei de enrolamento descrevem o traçado, com helicidade não uniforme, das linhas de força do campo magnético de equilíbrio sobre a superfície para a qual $q = \frac{m_0}{n_0} = \frac{4}{1}$. Por outro lado, quando consideramos um par de hélices enroladas de acordo com as seguintes leis de enrolamento:

$$m_0\theta_t - n_0\varphi_t = 0, \quad (5.23)$$

$$m_0\theta_t - n_0\varphi_t = \pi, \quad (5.24)$$

em que $(m_0, n_0) = (4, 1)$, comumente utilizadas e que ignoram a helicidade não uniforme das linhas de força, o efeito perturbativo do campo magnético destas hélices foi mais acentuado para superfícies para as quais $q > \frac{m_0}{n_0} = \frac{4}{1}$, como visto na figura-5.8.

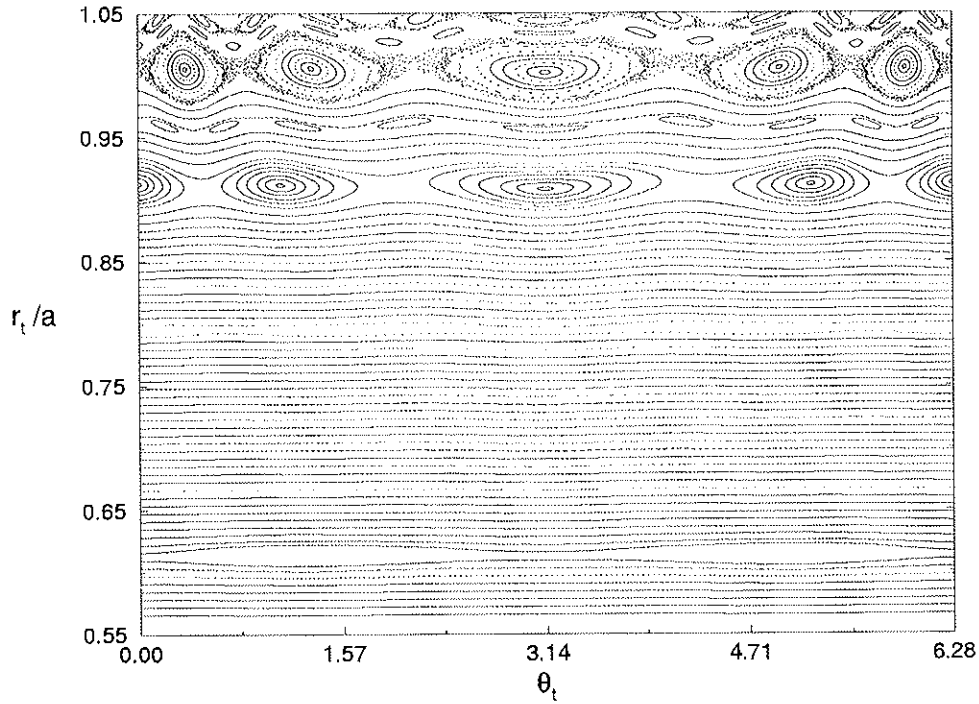


Figura 5.6: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,1% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$. Perfis de equilíbrio considerado na figura-3.2 e na figura-3.3.

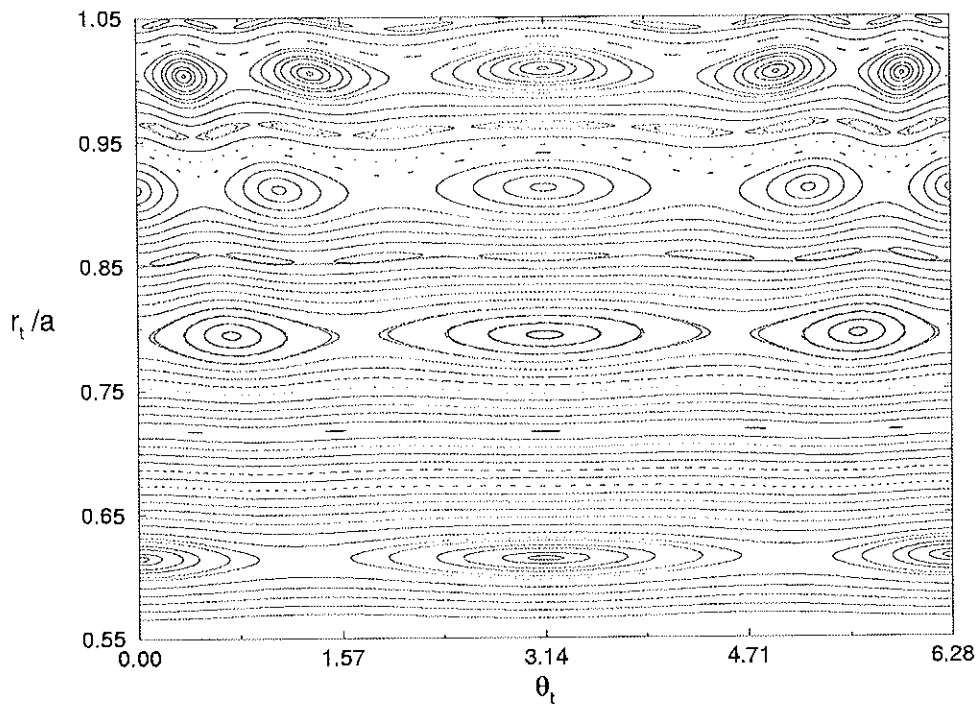


Figura 5.7: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,1% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Mesmos perfis de equilíbrio da figura anterior.

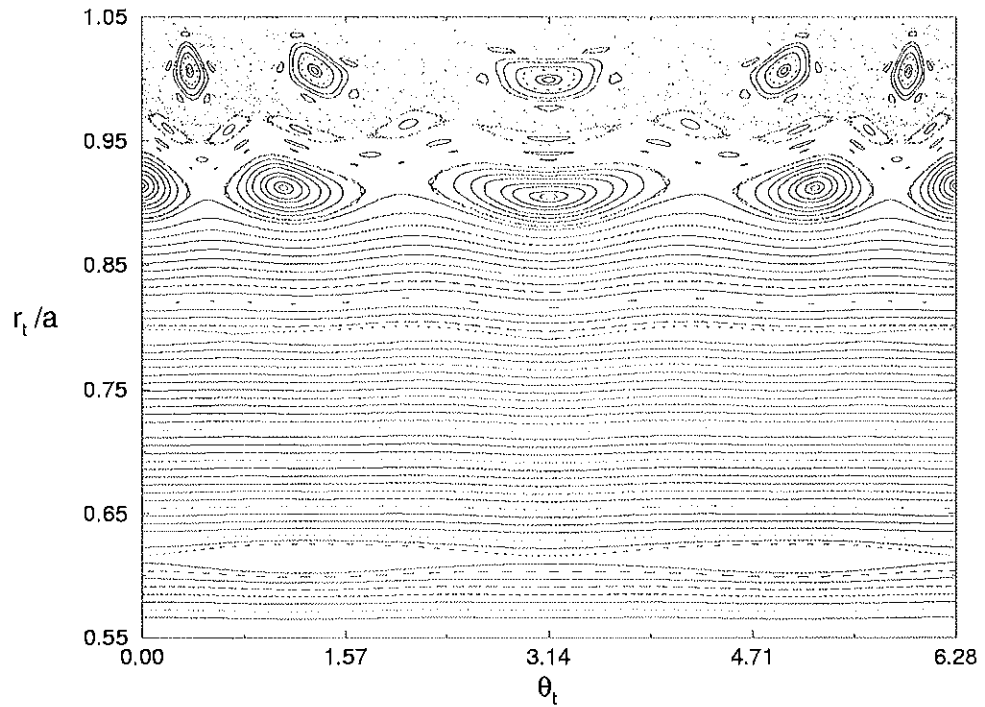


Figura 5.8: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,2% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$.

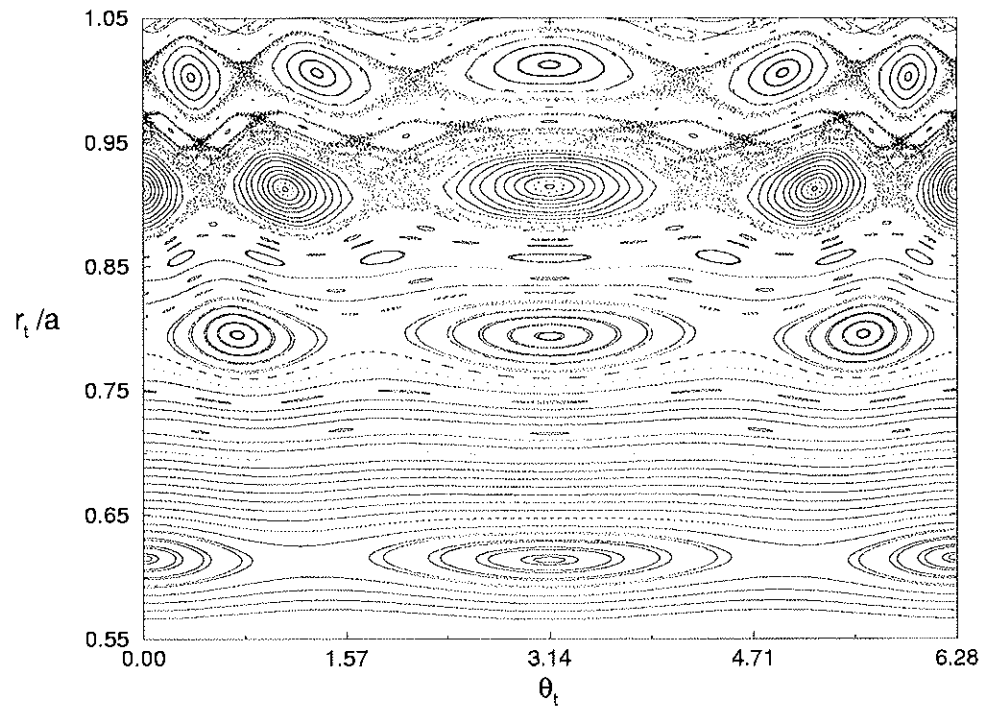


Figura 5.9: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,2% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$.

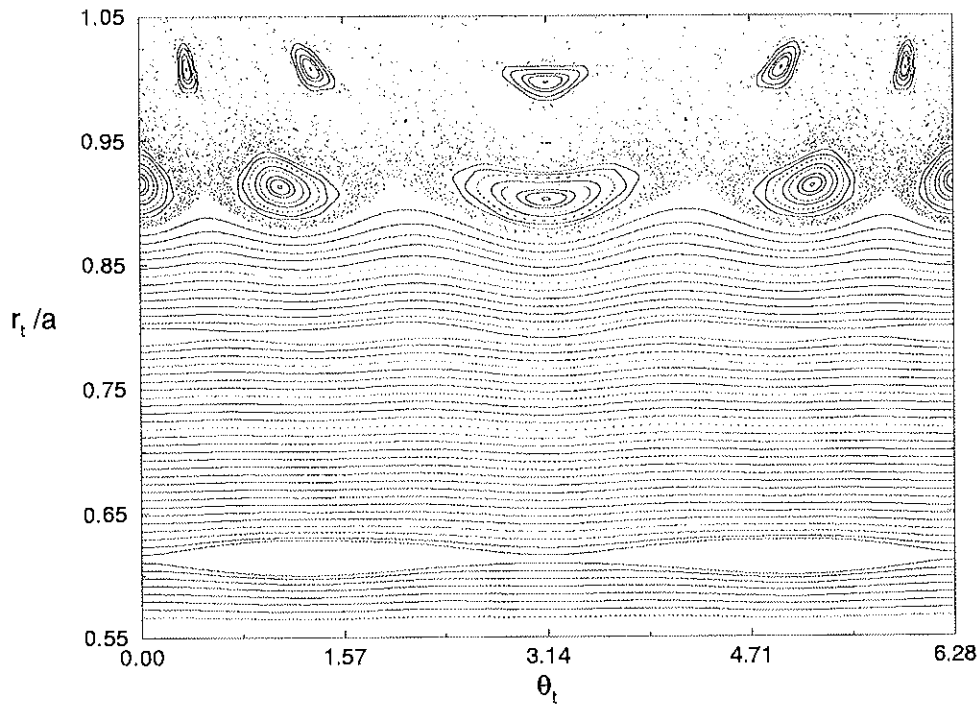


Figura 5.10: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,3% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$.

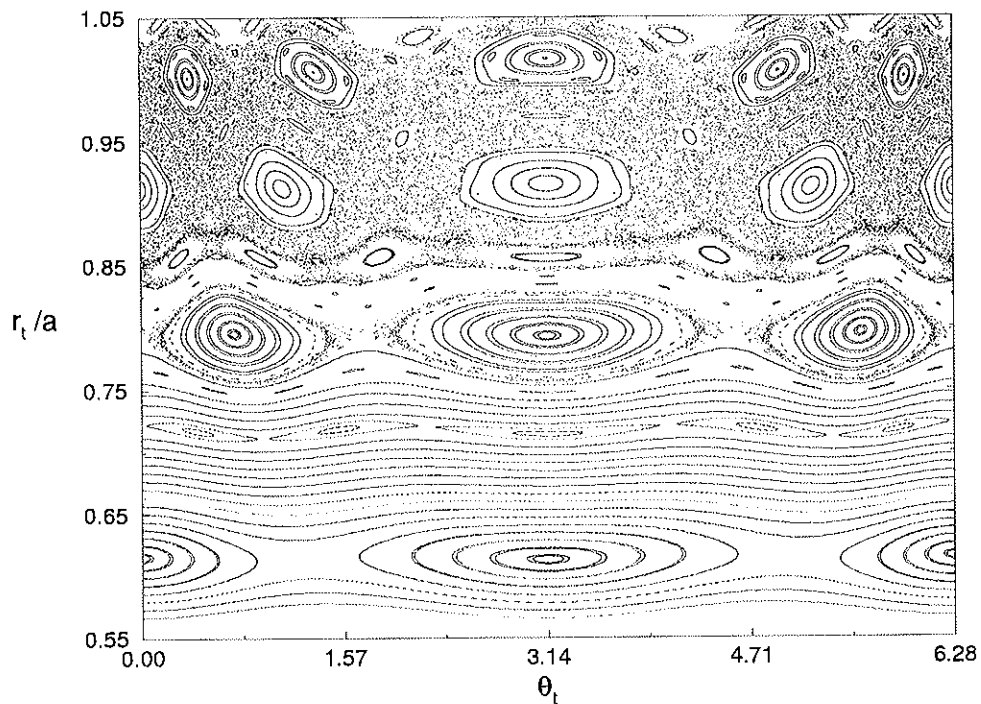


Figura 5.11: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,3% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$.

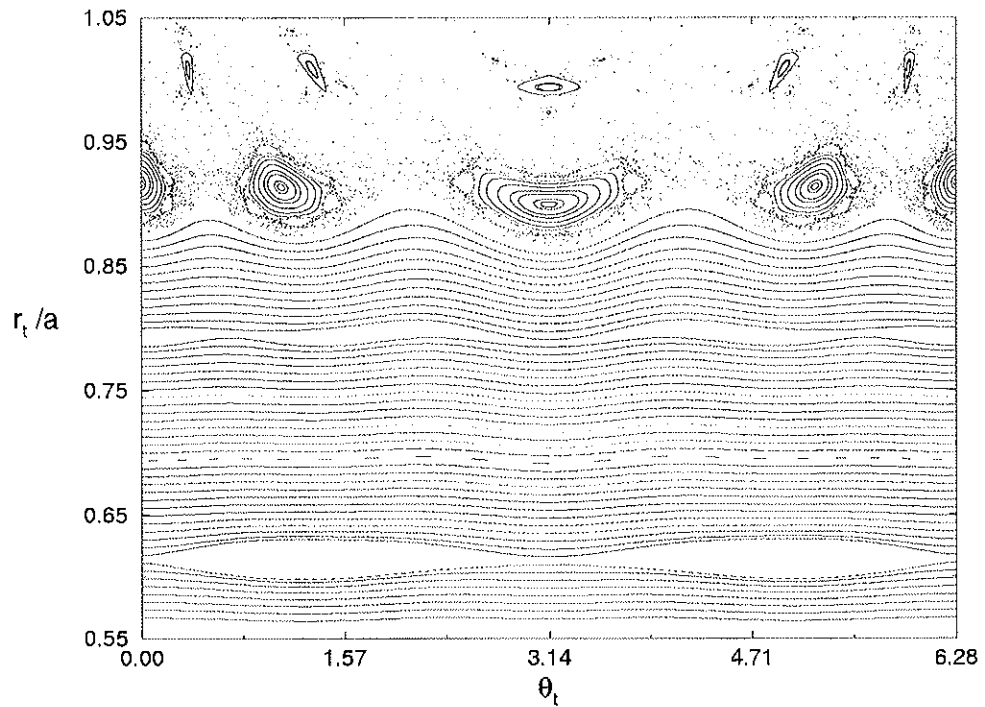


Figura 5.12: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,4% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$.

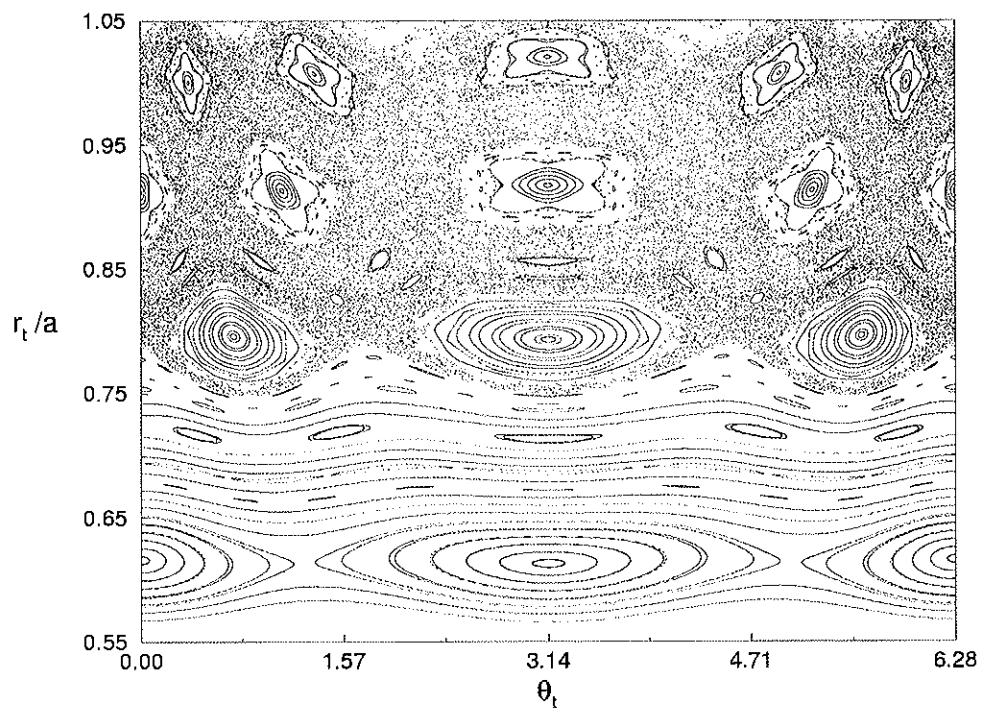


Figura 5.13: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_h$. Para uma corrente nas hélices, I_h , igual a 0,4% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$.

Procuraremos preservar essas características — assimetria no tamanho e localização das ilhas magnéticas e o efeito perturbativo mais localizado —, quando apresentarmos, no capítulo-6, um modelo para um dispositivo conhecido como **anel limitador magnético caótico** que tem sido bastante utilizado no controle das propriedades físicas da periferia da coluna de plasma. Este modelo, para um **limitador magnético caótico**, nos permitirá obter uma aplicação simplética, $\vec{v}_n \mapsto T(\vec{v}_n) = \vec{v}_{n+1}$ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , que tornará muito mais rápida, quando comparada à integração numérica de sistemas de equações diferenciais ordinárias, a obtenção de mapas estroboscópicos. Isto é muito importante haja vista que o tempo computacional gasto no processo de integração numérica das linhas de força do campo magnético de plasmas em tokamaks dificulta muito qualquer análise baseada em métodos de dinâmica não linear tais como: cálculo de expoentes de LYAPUNOV e padrões de escape, por exemplo.

Na próxima seção, apresentaremos um tratamento hamiltoniano, para o problema do traçado de linhas de força em tokamaks, válido para o caso em que podemos desprezar termos da ordem de $\frac{r_l}{R_0}$ no cálculo do campo de perturbação. Esse tratamento será útil, mais adiante, para a obtenção do mapeamento dos **limitadores magnéticos**.

5.3 Hamiltoniana no Limite de Razão de Aspecto Grande

No final da seção anterior chamamos a atenção para dois aspectos particularmente interessantes que resultaram da integração numérica do sistema de equações diferenciais para o traçado das linhas de força. O primeiro é que ilhas magnéticas, de uma mesma cadeia de ilhas, não se distribuem uniformemente ao longo da direção poloidal. O segundo é que essas ilhas não apresentam o mesmo tamanho, confinando, portanto, áreas do espaço de fase de tamanhos diferentes.

Uma vez que a região interna a uma dada ilha da cadeia é mapeada na região interna de outra ilha da mesma cadeia, e estas delimitam áreas diferentes, isto nos conduz a uma aparente violação do teorema de LIOUVILLE.

Essa violação cria uma aparente contradição, pois é sabido que o problema do traçado de linhas de força de campos magnéticos é um paradigma de sistemas hamiltonianos e que, portanto, deve satisfazer o teorema de LIOUVILLE. Este teorema estabelece que o volume (no nosso caso a área) do espaço de fase ocupado por um conjunto de condições iniciais não se altera quando evoluímos esse conjunto de acordo com a dinâmica do sistema.

Essa aparente contradição desaparece quando percebemos que o sistema de equações diferenciais ordinárias, dado por:

$$\frac{dr_t}{d\varphi_t} = F_{r_t}(r_t, \theta_t, \varphi_t), \quad (5.25)$$

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi_t} = F_{\theta_t}(r_t, \theta_t, \varphi_t), \quad (5.26)$$

que descreve o traçado das linhas de força, está representado em termos de variáveis não-canônicas e apenas para as variáveis canônicas vale o teorema de LIOUVILLE.

MORRISON, num artigo sobre descrição hamiltoniana de fluidos ideais [46], apresenta uma discussão elegante sobre descrições não-canônicas de hamiltonianas.

Seguindo as idéias de MORRISON, consideremos um sistema dado por:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \quad (5.27)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{J}}. \quad (5.28)$$

para o qual temos:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}} \left(\frac{d\mathcal{J}}{dt} \right) = 0. \quad (5.29)$$

Essa relação garante o teorema de LIOUVILLE para esse sistema, ou seja:

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad (5.30)$$

em cuja expressão $A(t)$, dado por:

$$A(t) = \int d\mathcal{J}d\vartheta, \quad (5.31)$$

é a área no interior de uma curva arbitrária.

Antes de prosseguirmos, reescrevamos as equações de HAMILTON na forma covariante definindo z^i da seguinte maneira:

$$z^i = \begin{cases} \vartheta & \text{para } i = 1, \\ \mathcal{J} & \text{para } i = 2. \end{cases} \quad (5.32)$$

Em termos de z^i as equações de HAMILTON são dadas por:

$$\frac{dz^i}{dt} = \sum_{j=1}^2 U_c^{i,j} \frac{\partial H}{\partial z^j} = [z^i, H], \quad (5.33)$$

em cuja expressão o colchete de POISSON é dado por:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial z^i} U_c^{i,j} \frac{\partial g}{\partial z^j}, \quad (5.34)$$

com a matriz U_c dada por:

$$U_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A relação dada por (5.29) representada na forma covariante fica:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{dz^i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial U_c^{i,j}}{\partial z^i} \frac{\partial H}{\partial z^j} + U_c^{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial z^i \partial z^j} \right) = 0. \quad (5.35)$$

O primeiro termo se anula porque U_c é constante. O segundo termo se anula porque U_c é anti-simétrica e $\frac{\partial^2 H}{\partial z^i \partial z^j}$ são elementos de uma matriz simétrica.

Agora consideremos a seguinte transformação não-canônica de coordenadas:

$$\bar{z}^i = \bar{z}^i(z). \quad (5.36)$$

Nas novas coordenadas, \bar{z} , as equações de HAMILTON se tornam:

$$\frac{d\bar{z}^l}{dt} = \sum_{m=1}^2 \bar{U}^{l,m} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}^m} = [\bar{z}^l, \bar{H}], \quad (5.37)$$

com a seguinte relação para os elementos da matriz \bar{U} :

$$\bar{U}^{l,m} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \bar{z}^l}{\partial z^i} U_c^{i,j} \frac{\partial \bar{z}^m}{\partial z^j}, \quad (5.38)$$

e com a hamiltoniana se transformando como um escalar, ou seja:

$$\bar{H}(\bar{z}) = H(z). \quad (5.39)$$

Se reescrevermos a condição (5.35) nas novas coordenadas, \bar{z} , ficamos com:

$$\sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} \left(\frac{d\bar{z}^l}{dt} \right) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial \bar{U}^{l,m}}{\partial \bar{z}^l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}^m} + \bar{U}^{l,m} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{z}^l \partial \bar{z}^m} \right). \quad (5.40)$$

Novamente o segundo termo se anula porque \bar{U} é anti-simétrica e $\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{z}^l \partial \bar{z}^m}$ são componentes de uma matriz simétrica. Entretanto, para uma representação em termos de

coordenadas não-canônicas para as equações de HAMILTON, a seguinte relação é verdadeira (embora não necessária):

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \bar{U}^{l,m}}{\partial \bar{z}^l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}^m} \neq 0. \quad (5.41)$$

Essa é a situação que encontramos quando tomamos as novas coordenadas, \bar{z} , como sendo:

$$\bar{z}^l = \begin{cases} \theta_t & \text{para } l = 1, \\ r_t & \text{para } l = 2. \end{cases} \quad (5.42)$$

Em razão disso, temos $\frac{d\bar{A}(t)}{dt} \neq 0$ com $\bar{A}(t)$ dado por:

$$\bar{A}(t) = \int dr_t d\theta_t. \quad (5.43)$$

Para que possamos recuperar o teorema de LIOUVILLE nas novas coordenadas é preciso redefinir $\bar{A}(t)$, quando \bar{z} não forma um conjunto canônico, da seguinte maneira:

$$\bar{A}(t) = \int \bar{U} dr_t d\theta_t, \quad (5.44)$$

em que \bar{U} e \bar{U} se relacionam através de:

$$\bar{U} = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{U}}}. \quad (5.45)$$

O sistema de equações que descreve o traçado das linhas de força do campo magnético, dado por (5.25) e (5.26), é conservativo e por isso pode ser representado numa forma equivalente às equações de HAMILTON canônicas, (5.27) e (5.28), desde que as coordenadas sejam escolhidas apropriadamente.

Sendo assim, para tornar mais visível o caráter conservativo do sistema de equações considerado, o representamos em termos de coordenadas que formam um par canonicamente conjugado.

5.3.1 Coordenadas Canônicas

Na seção 5.1, apresentamos uma coordenada de ângulo, ϑ , dada por [39]:

$$\begin{aligned}\vartheta(r_t, \theta_t) &= \frac{1}{q(r_t)} \int_0^{\theta_t} \frac{B^{(0)3}}{B^{(0)2}} d\theta \\ &= \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2} \int_0^{\theta_t} \frac{d\theta}{1 - 2 \frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta)} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\Omega(r_t)} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{1 + \cos(\theta_t)} \right) \right],\end{aligned}\quad (5.46)$$

que retificava as linhas de força do campo magnético de equilíbrio, no plano $\vartheta \times \varphi_t$, em cuja expressão $\Omega(r_t)$ é dado por:

$$\Omega(r_t) = \frac{\sqrt{1 - 2 \frac{r_t}{R'_0}}}{\sqrt{1 + 2 \frac{r_t}{R'_0}}}, \quad (5.47)$$

e que adotamos como nosso novo ângulo poloidal.

Resta, portanto, obter uma nova coordenada para substituir r_t e que, juntamente com ϑ , possa ser usada para construir um novo conjunto de coordenadas canônicas que revele o caráter conservativo do sistema de equações para o traçado das linhas de força.

Esta coordenada, que chamamos de *ação*, é definida em termos do fluxo toroidal normalizado das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(r_t) &= \frac{1}{2\pi R'_0{}^2 B_T} \int \vec{B}^{(0)} \cdot d\vec{\sigma}_3 \\ &= \frac{1}{2\pi R'_0{}^2 B_T} \int_0^{r_t} \xi d\xi \int_0^{2\pi} \frac{B_T}{1 - 2 \frac{\xi}{R'_0} \cos \theta_t} d\theta_t \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2} \right],\end{aligned}\quad (5.48)$$

em cuja expressão $d\vec{\sigma}_3$ e B_T — o campo magnético toroidal calculado sobre o eixo magnético do plasma —, são dados por:

$$d\vec{\sigma}_3 = R'_0 r_t dr_t d\theta_t \vec{e}^3, \quad (5.49)$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi R'_0}. \quad (5.50)$$

A coordenada \mathcal{J} desempenha o papel de rótulo para as superfícies magnéticas de equilíbrio e forma o par canonicamente conjugado de ϑ , conforme veremos mais adiante.

5.3.2 O Limite de Razão de Aspecto Grande

Consideramos como ponto de partida para a obtenção da hamiltoniana para um sistema formado por um plasma magneticamente confinado sujeito ao campo perturbativo, \vec{B}_P , de um par de hélices, que o campo magnético resultante possa ser representado da seguinte maneira:

$$\vec{B} = \vec{B}^{(0)}(r_t) + \vec{B}_P(r_t, \theta_t, \varphi_t), \quad (5.51)$$

com $\vec{B}^{(0)}$ sendo o campo magnético de equilíbrio cujas componentes contravariantes são dadas pelas equações (3.41)-(3.43).

Estamos interessados numa descrição válida para o limite de razão de aspecto grande $\left(\frac{r_t}{R'_0} \rightarrow 0\right)$, mas que preserve os efeitos da geometria toroidal já discutidos. Conseqüentemente, consideramos o campo magnético de perturbação, \vec{B}_P , como sendo decorrente, apenas, da solução para o potencial escalar magnético na aproximação $\frac{r_t}{R'_0} \rightarrow 0$. Ou seja:

$$\vec{B}_P = \nabla \Phi_M^{(0)}, \quad (5.52)$$

com $\Phi_M^{(0)}$ dado por (4.42). As componentes contravariantes de \vec{B}_P são dadas por:

$$B_P^1 = \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial r_t}, \quad (5.53)$$

$$B_P^2 = \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial \Phi_M^{(0)}}{\partial \theta_t}, \quad (5.54)$$

$$B_P^3 = 0. \quad (5.55)$$

Este campo magnético pode, também, ser representado em termos de um potencial vetor, \vec{A}_M , dado como:

$$\vec{A}_M = -A_3 \vec{e}^3, \quad (5.56)$$

da seguinte maneira:

$$\vec{B}_P = \nabla \times \vec{A}_M. \quad (5.57)$$

Em termos deste potencial vetor obtivemos as seguintes componentes contravariantes para o campo magnético:

$$B_P^1 = -\frac{1}{R'_0 r_t} \frac{\partial A_3}{\partial \theta_t}, \quad (5.58)$$

$$B_P^2 = \frac{1}{R'_0 r_t} \frac{\partial A_3}{\partial r_t}. \quad (5.59)$$

A comparação entre as equações (5.53 e 5.54) e as equações (5.58 e 5.59) nos permitiu determinar uma expressão para a componente covariante, A_3 , do potencial vetor em termos da expressão para o potencial escalar magnético $\Phi_M^{(0)}$. A expressão obtida, para a região $0 \leq r_t \leq b_t$, foi:

$$A_3(r_t, \theta_t, \varphi_t) = -\frac{\mu_0 I_h R'_0}{\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} J_k(m_0 \lambda) \left(\frac{r_t}{b_t}\right)^{(m_0+k)} e^{i[(m_0+k)\theta_t - n_0 \varphi_t]}. \quad (5.60)$$

A substituição do campo magnético $\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}_P$ na equação que descreve o traçado das linhas de força resultou no sistema de equações diferenciais dado a seguir:

$$\frac{dr_t}{d\varphi_t} = -\frac{1}{r_t B_T} \left(1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos \theta_t\right) \frac{\partial}{\partial \theta_t} \left[\Psi_p^{(0)}(r_t) + A_3(r_t, \theta_t, \varphi_t)\right], \quad (5.61)$$

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi_t} = \frac{1}{r_t B_T} \left(1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos \theta_t\right) \frac{\partial}{\partial r_t} \left[\Psi_p^{(0)}(r_t) + A_3(r_t, \theta_t, \varphi_t)\right]. \quad (5.62)$$

Realizando-se a mudança das coordenadas $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$ para as coordenadas $(\mathcal{J}, \vartheta, t)$, dadas pelas transformações abaixo:

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\Omega(r_t)} \left(\frac{\sin(\theta_t)}{1 + \cos(\theta_t)} \right) \right], \quad (5.63)$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R'_0} \right)^2} \right], \quad (5.64)$$

$$t = \varphi_t, \quad (5.65)$$

o sistema de equações diferenciais (5.61 e 5.62) torna-se:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \quad (5.66)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{J}}, \quad (5.67)$$

em cujas expressões $H(\mathcal{J}, \vartheta, t)$ foi escolhido como sendo:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{J}, \vartheta, t) &= H_0(\mathcal{J}) + H_1(\mathcal{J}, \vartheta, t) \\ &= \frac{1}{B_T R'_0{}^2} \Psi_p^{(0)}(\mathcal{J}) + \frac{1}{B_T R'_0{}^2} A_3(\mathcal{J}, \vartheta, t). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Vemos, assim, que as novas coordenadas, $(\mathcal{J}, \vartheta, t)$, nos possibilitou representar as equações para o traçado das linhas de força do campo magnético numa forma canônica e mais, como $|H_1| \ll |H_0|$, pode-se aplicar a este sistema de equações muitos resultados válidos para sistemas hamiltonianos quase-integráveis.

Além do mais, dado que um anel limitador magnético corresponde a uma fatia dos condutores helicoidais de comprimento l , muito pequeno quando comparado ao comprimento típico $2\pi R'_0$ do percurso toroidal, os efeitos devidos aos termos proporcionais a $\frac{r^t}{R'_0}$ são completamente irrelevantes. Isto nos autoriza a utilizarmos essa descrição hamiltoniana na busca de um mapeamento estroboscópico para esse dispositivo.

Capítulo 6

Limitador Magnético Caótico

Neste capítulo apresentamos um modelo usado para descrever a atuação de um dispositivo, conhecido como anel **limitador magnético caótico**, bastante útil quando se pretende estudar e alterar as propriedades físicas da borda da coluna de plasma em tokamaks. As principais características deste modelo são: a de que dele resulta um conjunto de expressões simpléticas para o mapeamento estroboscópico das linhas de força do campo magnético e a de que estas expressões são obtidas diretamente do campo de perturbação helicoidal que obtivemos no capítulo-4.

O desenvolvimento deste modelo passa pela definição de um par de coordenadas canônicas, derivadas a partir do campo magnético de equilíbrio, em termos das quais representamos o mapeamento simplético das linhas de força.

Apresentamos, também, a caracterização dos mapas estroboscópicos obtidos para um conjunto de anéis **limitadores magnéticos caóticos** através de alguns algoritmos de análise numérica de sistemas não lineares tais como: cálculo de expoentes de LYAPUNOV, cálculo de espectros de frequência, cálculo de padrões de escape, entre outros.

Antes, porém, apresentamos uma breve introdução na qual descrevemos as idéias que motivaram a criação do **limitador magnético caótico**.

6.1 Motivação

A idéia de um **limitador magnético caótico** surgiu, no final dos anos 70, com os trabalhos originais de F. KARGER e K. LACKNER e W. ENGELHARDT e W. FENEBERG, [9, 10]. O objetivo proposto para este dispositivo foi o de criar uma região de linhas de força caóticas, na periferia da coluna de plasma, visando a evitar a contaminação do plasma por

impurezas.

O modelo de transporte de partículas [47] adotado por esses autores estabelecia que a concentração de impurezas no centro da coluna de plasma seria proporcional ao fator $\frac{1}{D_p n_p}$. Nesta expressão, D_p e n_p são, respectivamente, os valores do coeficiente de difusão e da densidade do plasma na região de linhas de força caóticas, próxima à parede da câmara. De acordo com esse modelo, as partículas neutras de impurezas, provenientes da parede da câmara que entrassem na região de linhas de força caóticas, seriam ionizadas e conduzidas de volta à parede da câmara devido a um elevado coeficiente de difusão, D_p . Esse processo de reciclagem faria com que o fluxo de impurezas, dirigido para o centro da coluna de plasma, apenas aumentasse a densidade, n_p , na região de linhas de força caóticas sem alterar a concentração de impurezas no centro da coluna de plasma.

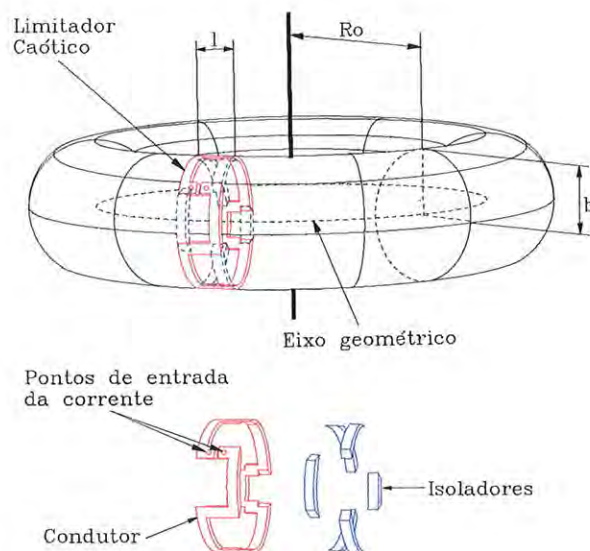


Figura 6.1: Representação esquemática de um limitador magnético caótico instalado sobre a câmara de confinamento do plasma.

A proposta desses autores, para criar uma região com uma alta concentração de partículas e um alto coeficiente de difusão, foi a de ergodizar as linhas de força das superfícies magnéticas próximas à borda da coluna de plasma. Isto era possível de se realizar utilizando-se campos magnéticos ressonantes. Entretanto, a existência de muitas janelas para diagnósticos, nas câmaras que confinam o plasma, muitas vezes tornam impossível a instalação dos condutores de correntes elétricas que criam os campos magnéticos ressonantes. Por causa disto optou-se por construir dispositivos que correspondiam a estreitas

fatias, na direção toroidal, dos condutores helicoidais. Estes dispositivos eram instalados em algumas posições ao longo do toróide de modo a simularem a ação dos condutores helicoidais completos. A esses dispositivos deu-se o nome de anéis **limitadores magnéticos caóticos** (figura-6.1).

Trabalhos posteriores [8, 11, 13] mostraram outros efeitos positivos da atuação dos anéis **limitadores magnéticos caóticos**. Verificou-se que eles reduziam a temperatura do plasma, próximo à sua borda, diminuindo a interação do plasma com a parede da câmara. Verificou-se, também, a possibilidade do controle dos modos de oscilações MHD presentes no plasma. Esses modos podiam ser atenuados ou induzidos dependendo da forma com que se atuasse sobre eles com os anéis **limitadores magnéticos**.

Uma outra característica muito importante, que foi conjecturada, é a de que uma região de linhas de força caóticas propiciaria uma distribuição razoavelmente uniforme do fluxo de calor sobre as paredes da câmara de contenção. No entanto, em experimentos realizados, verificou-se uma modulação poloidal na deposição de energia térmica sobre as paredes [12, 48]. Isto pode ser conseqüência do grau de caoticidade insuficiente para proporcionar tal uniformização do fluxo de calor sobre as paredes.

Assim, é importante que possamos estudar o efeito dos anéis **limitadores magnéticos** sobre as linhas de força de modo que as suas atuações sejam detalhadamente previstas. Isto é o que faremos neste capítulo.

6.2 Modelo Impulsivo para o Limitador Magnético

Nosso interesse foi o de encontrar relações de recorrência, do tipo:

$$x_{n+1} = T_1(x_n, y_n), \quad (6.1)$$

$$y_{n+1} = T_2(x_n, y_n), \quad (6.2)$$

as quais nos permitissem construir, iterativamente, os mapas estroboscópicos das linhas de força do campo magnético sob a ação dos anéis **limitadores magnéticos caóticos**.

Buscamos por expressões que preservassem as características obtidas, por integração numérica, dos mapas do capítulo 5. E que, no limite $\frac{r_t}{R_0} \rightarrow 0$ quando $r_t \rightarrow r$ e $\theta_t \rightarrow \theta$, na ausência de perturbações, as relações de recorrência se tornassem análogas àquelas de um

mapa estroboscópico cilíndrico, ou seja:

$$r_t^{n+1} = r_t^n, \quad (6.3)$$

$$\theta_t^{n+1} = \theta_t^n + \frac{2\pi}{q(r_t^n)}. \quad (6.4)$$

Gostaríamos, também, que tais relações de recorrência satisfizessem a condição simplética, dada por:

$$\left| \frac{\partial(r_t^{n+1}, \theta_t^{n+1})}{\partial(r_t^n, \theta_t^n)} \right| = 1, \quad (6.5)$$

haja vista que o traçado de linhas de força de campos magnéticos é um paradigma de sistemas hamiltonianos.

Além do mais, queríamos que as expressões para o mapeamento estroboscópico das linhas de força resultassem, o mais diretamente possível, das expressões para os campos magnéticos que obtivemos.

Tentamos, primeiramente, um modelo com expressões análogas àquelas derivadas por VIANA E CALDAS [17, 49]. Este modelo propõe um mapeamento estroboscópico composto por dois mapeamentos sucessivos: o primeiro descreve a evolução da linha de força na região onde o limitador magnético não atua; o segundo descreve a perturbação gerada pelo limitador magnético.

Para a região livre da atuação do limitador magnético o problema é integrável e as linhas de força são as do equilíbrio MHD. Assim, obtivemos as seguintes relações de recorrência:

$$r_t^{n+1} = r_t^n, \quad (6.6)$$

$$\theta_t^{n+1} = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\Omega(r_t^n) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{q(r_t^n)} + \Gamma(r_t^n, \theta_t^n) \right)}{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{q(r_t^n)} + \Gamma(r_t^n, \theta_t^n) \right)} \right], \quad (6.7)$$

que correspondem às equações (5.4) e (5.5) para valores de $\varphi_t = 2n\pi$, sendo n um número inteiro. As funções $q(r_t^n)$, $\Omega(r_t^n)$ e $\Gamma(r_t^n, \theta_t^n)$ são dadas, respectivamente, por (3.51), (5.6) e (5.7).

Apesar de as equações (6.6) e (6.7) terem sido obtidas diretamente das expressões para o campo magnético de equilíbrio, podemos observar que elas não satisfazem exatamente a condição simplética dada por (6.5). Portanto, o mapeamento estroboscópico das linhas de força do campo magnético resultante destas expressões apresenta efeitos dissipativos,

como discutido por ULLMANN em sua tese de doutorado [50]. Isso prejudica a análise dos problemas que necessitam um número grande de iterações do mapeamento estroboscópico.

O próprio ULLMANN propôs, então, um conjunto de relações de recorrência alternativo [18] para representar o mapeamento estroboscópico das linhas de força na região onde o limitador magnético não atua. As expressões para tal mapeamento deveriam satisfazer a três critérios:

- Quando $\frac{r}{R_0} \rightarrow 0$ estas expressões deveriam se reduzir ao mapeamento do caso cilíndrico;
- Os perfis de campo magnético poloidal e fator de segurança deveriam ser semelhantes aos do modelo de VIANA E CALDAS, pois este descreve de forma satisfatória a posição e a largura das cadeias de ilhas magnéticas;
- Deveriam ser deriváveis de uma função geratriz, o que garantiria a condição simplética.

Seguindo ULLMANN, tentamos a seguinte função geratriz por ele proposta, mas representada nas coordenadas (r_t, θ_t) ao invés das coordenadas polares locais (r, θ) .

$$G(r_t^{n+1}, \theta_t^n) = \theta_t^n r_t^{n+1} + 2\pi \int_0^{r_t^{n+1}} \frac{d\xi}{q_c(\xi)} + a_1 \left(\frac{r_t^{n+1}}{R_0'} \right) \cos \theta_t^n. \quad (6.8)$$

Nesta expressão, $q_c(\xi)$ é o perfil do fator de segurança na aproximação $\frac{r_t}{R_0'} \rightarrow 0$ dado por (3.48). O coeficiente a_1 deveria ser escolhido de modo que o perfil do fator de segurança, obtido pelo mapeamento, se ajustasse o melhor possível àquele obtido pela integração numérica.

O valor $a_1 = -0,04$ permitiu a obtenção de um mapeamento que, além de ser conservativo, apresentava uma outra característica importante de sistemas de confinamento toroidais. Esta característica era o deslocamento de SHAFRANOV, isto é, o deslocamento do eixo magnético do plasma com relação ao eixo geométrico da câmara. Mas, apesar destas qualidades, o mapeamento resultante desta função geratriz, quando a perturbação estava presente, não era capaz de reproduzir os dois aspectos destacados no capítulo 5: ilhas magnéticas com tamanhos diferentes e distribuição poloidal assimétrica.

Como discutimos na seção 5.3, as coordenadas polares toroidais, $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, em termos das quais tanto o campo magnético de equilíbrio quanto o de perturbação foram determinados, não são canônicas. Sendo assim, no item a seguir, utilizamos um conjunto

de coordenadas canônicas adequadas à obtenção de um mapeamento simplético para os anéis limitadores magnéticos. Mapeamento este conservativo, derivado diretamente das expressões para os campos magnéticos de equilíbrio e de perturbação e que, quando representado nas coordenadas polares toroidais, apresentou ilhas de tamanhos diferentes e com distribuição poloidal assimétrica.

6.2.1 Mapa Simplético para o Limitador Magnético

Como foi dito, no fim da subseção 5.3.2, o fato de um anel limitador magnético corresponder a uma estreita fatia de um enrolamento helicoidal faz com que sua atuação se dê apenas durante um percurso toroidal bastante curto.

A combinação desta característica com a possibilidade de se representar a ação do campo magnético ressonante, na aproximação de razão de aspecto grande, por meio de uma hamiltoniana, nos permitiu introduzir nesta seção o seguinte modelo para os anéis limitadores magnéticos:

$$H_L(\mathcal{J}, \vartheta, t) = H_0(\mathcal{J}) + \frac{l}{R_0'} H_1(\mathcal{J}, \vartheta, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k \frac{2\pi}{N_a}\right), \quad (6.9)$$

no qual N_a corresponde ao número de anéis limitadores magnéticos utilizados e l ao seu comprimento. As variáveis de ação e ângulo, (\mathcal{J}, ϑ) , são obtidas das equações (5.46) e (5.48) e t é o tempo canônico.

A este tipo de hamiltoniana podemos associar [42] o seguinte mapeamento estroboscópico:

$$\mathcal{J}_{n+1} = \mathcal{J}_n + \epsilon f(\mathcal{J}_{n+1}, \vartheta_n, t_n), \quad (6.10)$$

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \frac{2\pi}{N_a q(\mathcal{J}_{n+1})} + \epsilon g(\mathcal{J}_{n+1}, \vartheta_n, t_n), \quad (6.11)$$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\pi}{N_a}, \quad (6.12)$$

em cujas expressões, as funções f e g , são dadas por:

$$f = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \quad (6.13)$$

$$g = \frac{\partial H_1}{\partial \mathcal{J}}, \quad (6.14)$$

e o parâmetro de controle da perturbação, ϵ , é definido como:

$$\epsilon = 2 \frac{l}{R_0'} \frac{I_h}{I_e}. \quad (6.15)$$

Notamos que ϵ depende da fração do comprimento da câmara de contenção ocupada por um anel limitador magnético assim como da razão entre a intensidade do campo magnético de perturbação e o campo magnético toroidal.

Da equação (5.68) combinada com a equação (5.60) temos, para a hamiltoniana de perturbação, o seguinte resultado:

$$\epsilon H_1 = \epsilon \sum_{m'=0}^{2m_0} H_{m'}(r_t(\mathcal{J})) e^{i[m'\vartheta_t(\mathcal{J},\vartheta)-n_0t]}, \quad (6.16)$$

com $H_{m'}(r_t)$ dado por:

$$H_{m'}(r_t) = -J_{m'-m_0}(m_0\lambda) \left(\frac{r_t}{b_t}\right)^{m'}. \quad (6.17)$$

Entretanto, seria particularmente interessante, para o estudo de perturbações ressonantes, se fosse possível representarmos a hamiltoniana H_1 como uma decomposição de FOURIER diretamente nas coordenadas $(\mathcal{J}, \vartheta, t)$.

Isto foi feito supondo que H_1 pudesse ser expandido na seguinte série:

$$\epsilon H_1 = \epsilon \sum_{n=0}^{2m_0} H_n^*(\mathcal{J}) e^{i(n\vartheta-n_0t)}. \quad (6.18)$$

Multiplicando-se (6.16) e (6.18) por $\frac{1}{2\pi} e^{-i(m\vartheta-n_0t)}$ e integrando-se, em ϑ , no intervalo 0 a 2π obtivemos o seguinte resultado para os coeficientes da série de FOURIER nas coordenadas canônicas:

$$H_m^*(\mathcal{J}) = \sum_{m'=0}^{2m_0} H_{m'}(r_t(\mathcal{J})) S_{m,m'}(\mathcal{J}), \quad (6.19)$$

no qual $S_{m,m'}(\mathcal{J})$ são definidos como:

$$S_{m,m'}(\mathcal{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[m'\vartheta_t(\mathcal{J},\vartheta)-m\vartheta]} d\vartheta. \quad (6.20)$$

Para o particular caso das transformações entre as coordenadas $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$ e $(\mathcal{J}, \vartheta, t)$, dadas por (5.63-5.65), foi possível obtermos uma expressão analítica para os elementos de matriz $S_{m,m'}(\mathcal{J})$ (ver apêndice B). A expressão encontrada foi:

$$S_{m,m'}(\mathcal{J}) = (-1)^m \left(\frac{c_1(\mathcal{J})}{c_2(\mathcal{J})}\right)^{m+m'} \sum_{n=0}^m (-1)^n \alpha_n(m, m') \left(\frac{c_1(\mathcal{J})}{c_2(\mathcal{J})}\right)^{-2n}, \quad (6.21)$$

na qual $c_1(\mathcal{J})$, $c_2(\mathcal{J})$ e $\alpha_n(m, m')$ são dados por:

$$c_1(\mathcal{J}) = 1 - \Omega(r_t(\mathcal{J})), \quad (6.22)$$

$$c_2(\mathcal{J}) = 1 + \Omega(r_t(\mathcal{J})), \quad (6.23)$$

$$\alpha_n(m, m') = \begin{cases} 1 & , \text{ se } m = 0 \text{ e } n = 0, \\ m' & , \text{ se } m = 1 \text{ e } n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ m' \frac{(m + m' - n - 1)!}{(m - n)!(m' - n)!n!} & , \text{ se } m > 1 \text{ e } n \leq m', \\ 0 & , \text{ se } m > 1 \text{ e } n > m'. \end{cases} \quad (6.24)$$

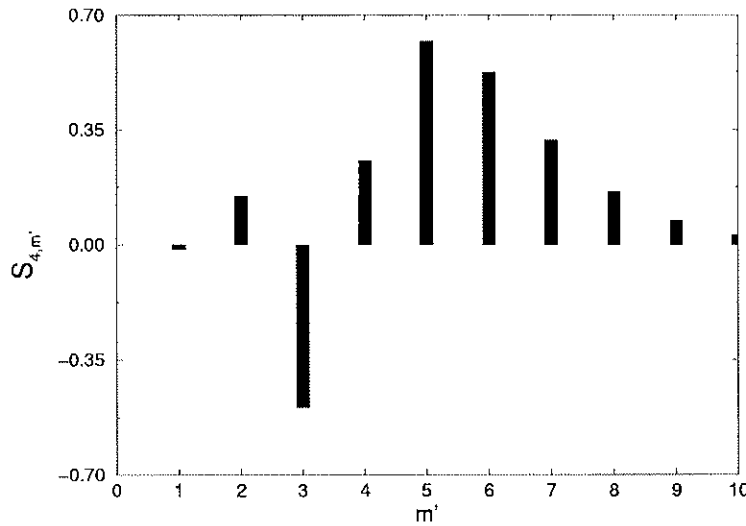


Figura 6.2: Dependência do elemento de matriz $S_{m,m'}$ com relação a m' para $m = 4$. Posição radial $\frac{r_t}{a} = 0,91$, correspondendo à superfície para a qual $q = \frac{4}{1}$.

Um exemplo da dependência do elemento de matriz $S_{m,m'}$, para $m = 4$ e $\frac{r_t}{a} = 0,91$, com relação a m' é mostrado na figura-6.2

Já a figura-6.3 mostra (para a mesma posição $\frac{r_t}{a} = 0,91$ especificada e, portanto, um valor fixo da ação \mathcal{J}) as amplitudes dos coeficientes de FOURIER da hamiltoniana de perturbação H_1 .

Em vermelho, temos os coeficientes $H_{m'}(r_t)$ da representação em termos das coordenadas $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$. E, em preto, os coeficientes $H_m^*(\mathcal{J})$ da representação da hamiltoniana H_1 em termos das coordenadas canônicas. É evidente a predominância do modo ressonante $m = 4$ com relação aos demais. Isto era esperado, haja vista que os parâmetros escolhidos ($\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$) para o cálculo destes espectros foram aqueles que

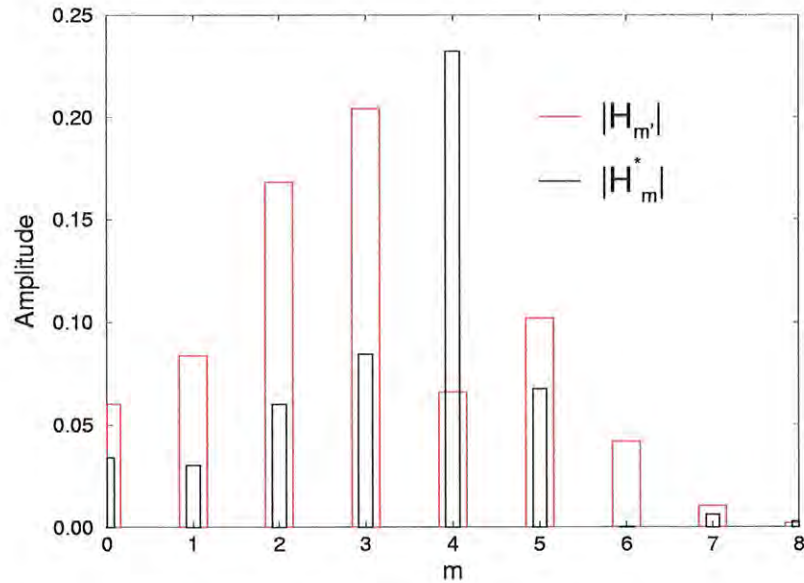


Figura 6.3: Espectros de FOURIER para a hamiltoniana de perturbação, H_1 , representados em termos das coordenadas polares toroidais (em vermelho) e das coordenadas canônicas (em preto). Os parâmetros de enrolamento dos condutores helicoidais foram: $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$. Posição radial $\frac{r_t}{a} = 0,91$, correspondendo à superfície para a qual $q = \frac{4}{1}$.

objetivavam uma atuação otimizada sobre a superfície magnética para a qual $q = \frac{4}{1}$.

Com isto, concluímos a busca por um conjunto de relações de recorrências que permitisse o mapeamento estroboscópico das linhas de força do campo magnético de um plasma toroidal sob a ação de anéis **limitadores magnéticos** de forma iterativa.

Esse conjunto é representado pelas equações (6.10)-(6.14), com a hamiltoniana de perturbação, H_1 , dada pelas equações (6.16)-(6.21) obtidas nesta seção.

O mapeamento possui todas as características que desejávamos. É simplético, ou seja, possui jacobiano com determinante unitário; quando a corrente de perturbação, I_h , é nula — conseqüentemente $\epsilon = 0$ —, o mapeamento se reduz ao *mapa twist* não perturbado que descreve o campo magnético de equilíbrio. É um mapeamento que foi obtido diretamente das expressões para os campos magnéticos e, o mais importante, ele preserva as principais características toroidais — ilhas magnéticas com tamanhos diferentes e distribuição poloidal assimétrica —, como podemos observar na figura-6.4 e figura-6.5. Além, é claro, da rapidez com que ele nos permitiu construir os mapas estroboscópicos possibilitando que vários métodos de análise de dinâmica não-linear pudessem ser utilizados no estudo da ação dos anéis **limitadores magnéticos**.

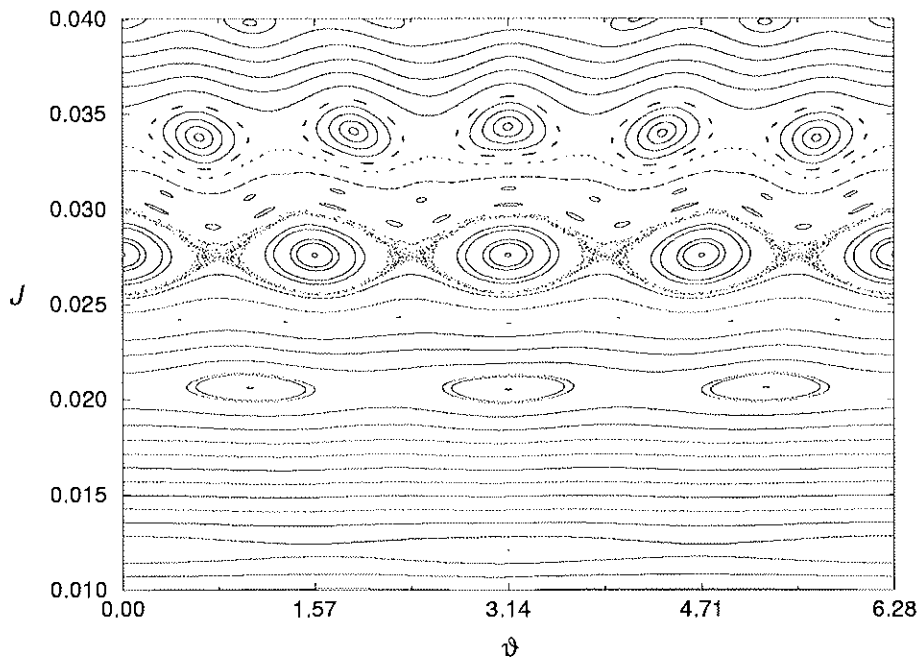


Figura 6.4: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 1% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Representação nas coordenadas canônicas.

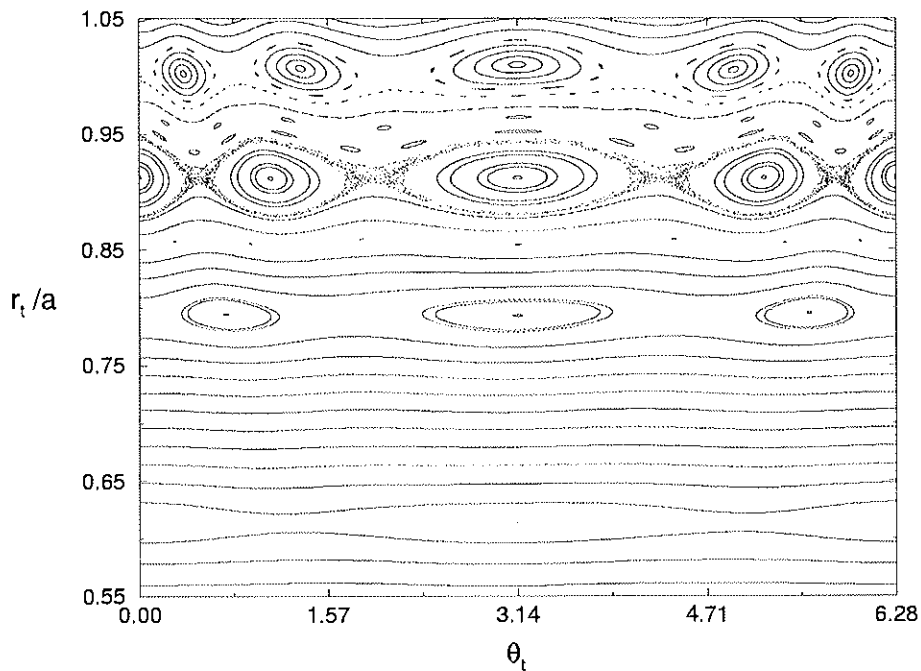


Figura 6.5: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 1% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Representação nas coordenadas polares toroidais.

Da figura-6.4, vemos que as cadeias de ilhas magnéticas criadas pelos anéis limitadores magnéticos apresentam ilhas de mesmo tamanho e com distribuição poloidal uniforme quando vistas em termos de (\mathcal{J}, ϑ) . Porém, como desejávamos, quando transformamos de volta para as coordenadas (r_t, θ_t) (figura-6.5) vemos que as ilhas magnéticas apresentam tamanhos diferentes e estão localizadas, poloidalmente, de maneira não uniforme. E, ainda, observamos que a cadeia de ilhas sobre a superfície para a qual $q = \frac{4}{1}$ é a que se mostra mais bem desenvolvida indicando que o efeito ressonante dos anéis limitadores magnéticos está atuando de acordo com o projetado.

A seguir apresentamos outros mapas estroboscópicos obtidos para os anéis limitadores magnéticos. Para cada um deles escolhemos 40 condições iniciais e, para cada uma, calculamos 5000 iterações do mapeamento. Primeiramente mostramos os resultados obtidos quando utilizamos $\lambda = 0,48$ e valores para a corrente elétrica nos anéis limitadores magnéticos variando entre 1,5% e 2,5% de I_p . O mapa estroboscópico para o valor de $I_h = 1\%$ de I_p é aquele visto na figura-6.4. Em seguida mostramos os correspondentes mapas estroboscópicos para os quais utilizamos $\lambda = 0$, ou seja, sem correção na helicidade.

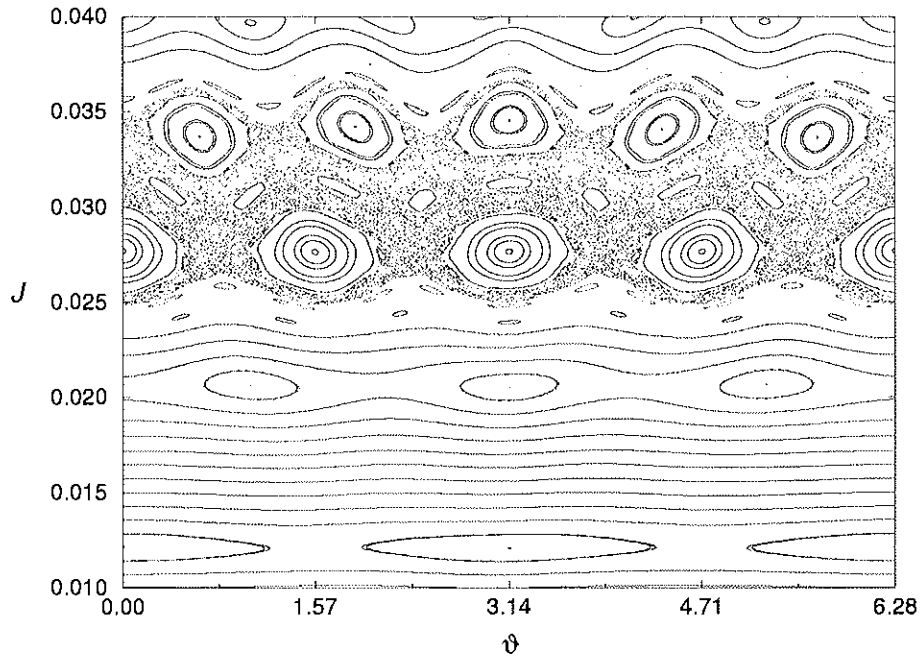


Figura 6.6: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 1,5% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Representação nas coordenadas canônicas.

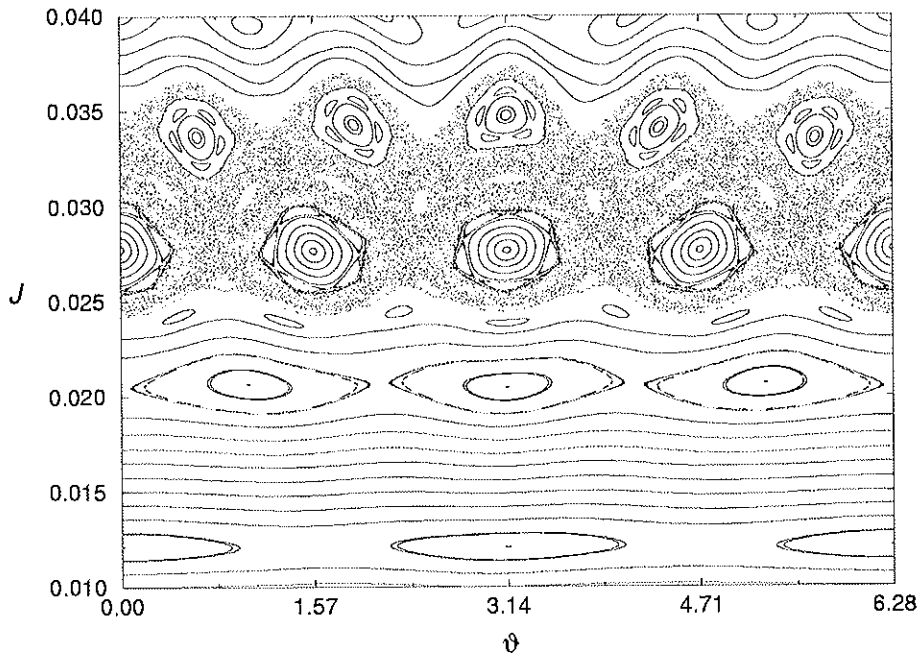


Figura 6.7: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_\alpha = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 2% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Representação nas coordenadas canônicas.

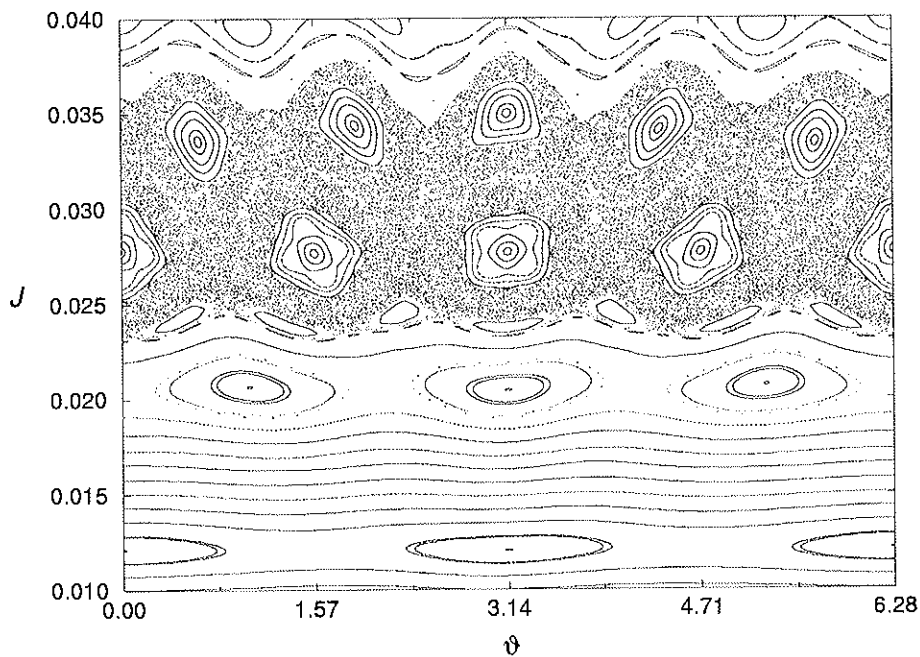


Figura 6.8: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_\alpha = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 2,5% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$. Representação nas coordenadas canônicas.

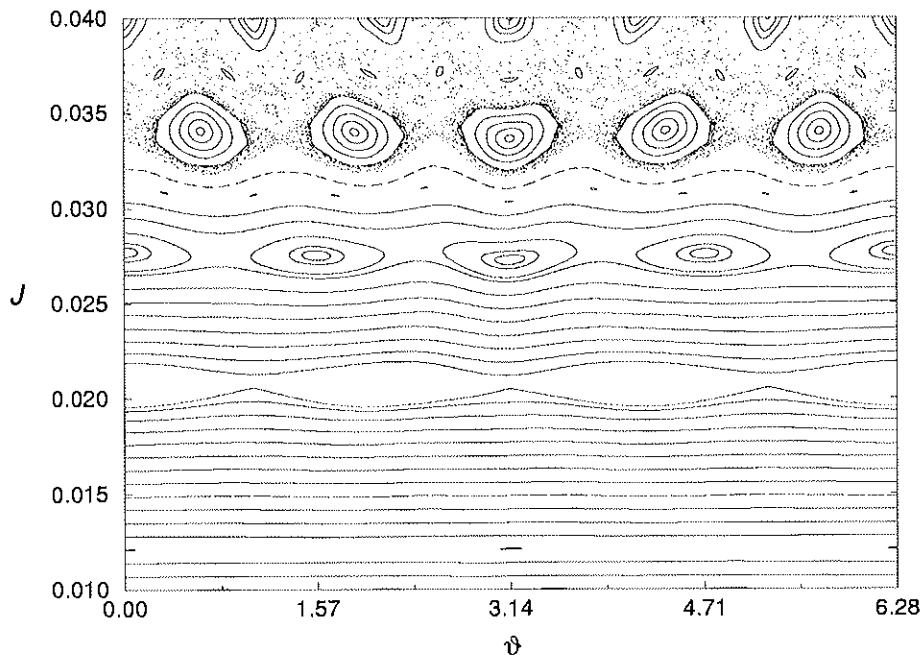


Figura 6.9: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 1% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$. Representação nas coordenadas canônicas.

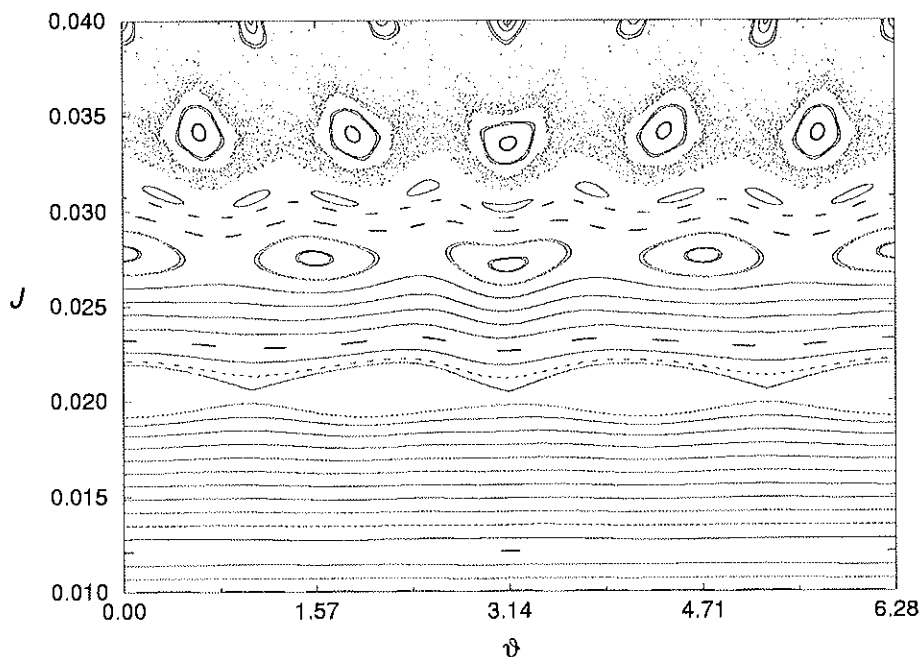


Figura 6.10: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 1,5% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$. Representação nas coordenadas canônicas.

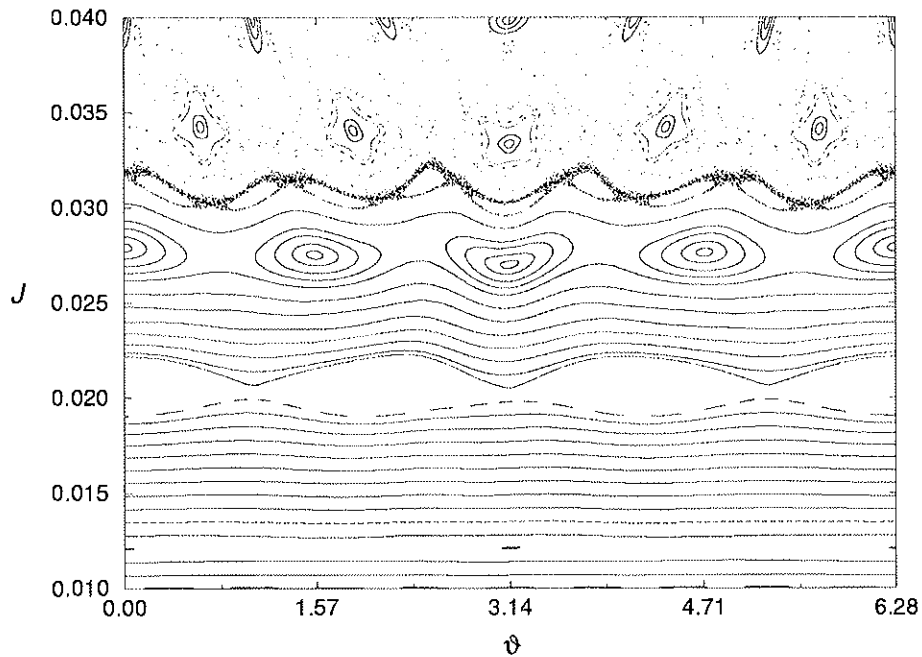


Figura 6.11: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 2% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$. Representação nas coordenadas canônicas.

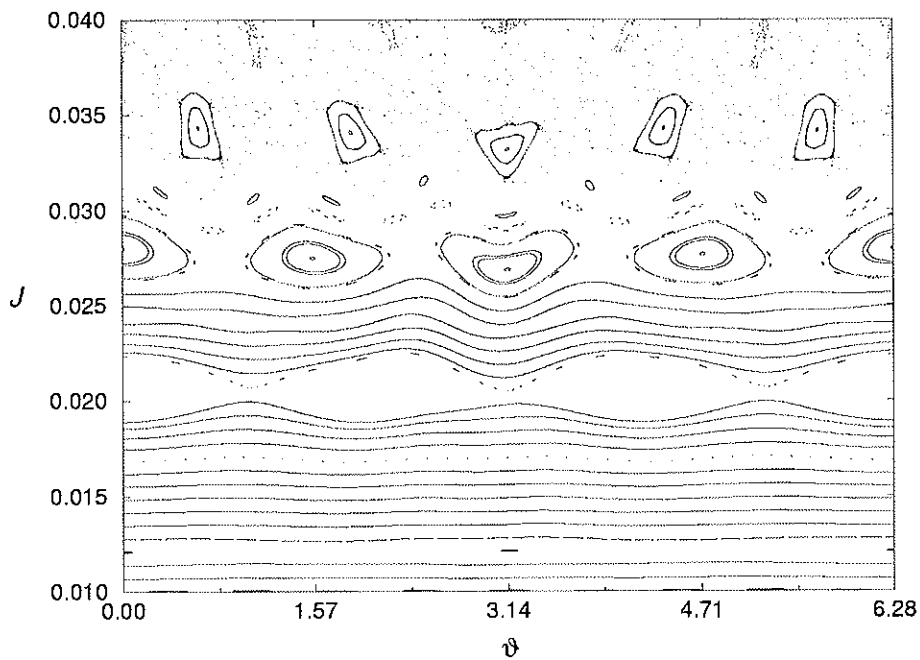


Figura 6.12: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 2,5% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0$. Representação nas coordenadas canônicas.

Podemos observar (figura-6.9-figura-6.12) que, apesar de adotarmos uma lei de enrolamento para os condutores helicoidais do tipo:

$$m_0\theta_t - n_0\varphi_t = \text{constante}, \quad (6.25)$$

com $m_0 = 4$ e $n_0 = 1$, o fato de termos considerado $\lambda = 0$ resultou numa interação ressonante mais intensa dos anéis limitadores magnéticos com superfícies para as quais $q > \frac{4}{1}$.

Isto ressalta a importância que o parâmetro λ tem, para a lei de enrolamento dos condutores helicoidais, quando desejamos que os limitadores magnéticos atuem exatamente sobre a superfície magnética que queremos perturbar.

6.3 Análise Numérica

Apresentamos, agora, a análise de algumas superfícies magnéticas obtidas a partir do mapeamento estroboscópico dado pelas equações (6.10)-(6.12). Para tanto fizemos uso de algumas técnicas bastante utilizadas no estudo de sistemas dinâmicos não-lineares. A primeira destas que mostraremos é a análise espectral.

6.3.1 Espectro de Frequências das Linhas de Força

Utilizamos o algoritmo FFT — *Fast Fourier Transform* —, para o cálculo do espectro de frequências para séries, geradas pelo mapeamento, da coordenada ϑ .

A figura-6.13 mostra os tipos de linhas de força, pertencentes a um mesmo mapa estroboscópico, para as quais foram calculados os espectros. Nesta figura, em (a), temos duas linhas de força. Uma faz parte da cadeia de cinco ilhas magnéticas primárias enquanto que a outra faz parte de uma cadeia de cinco ilhas magnéticas secundárias localizadas ao redor das primeiras. Em (b), temos duas linhas de força localizadas sobre superfícies magnéticas regulares. Uma delas encontra-se mais próxima de uma cadeia de três ilhas magnéticas enquanto que a outra está mais próxima de uma cadeia de duas ilhas. Em (c) temos uma linha de força que se encontra no interior de uma cadeia de três ilhas magnéticas para as quais não havia nenhuma cadeia de ilhas secundárias visível. E, finalmente, em (d) temos uma linha de força caótica.

Para as duas linhas de força da figura-6.13a obtivemos os espectros de frequências vistos na figura-6.14.

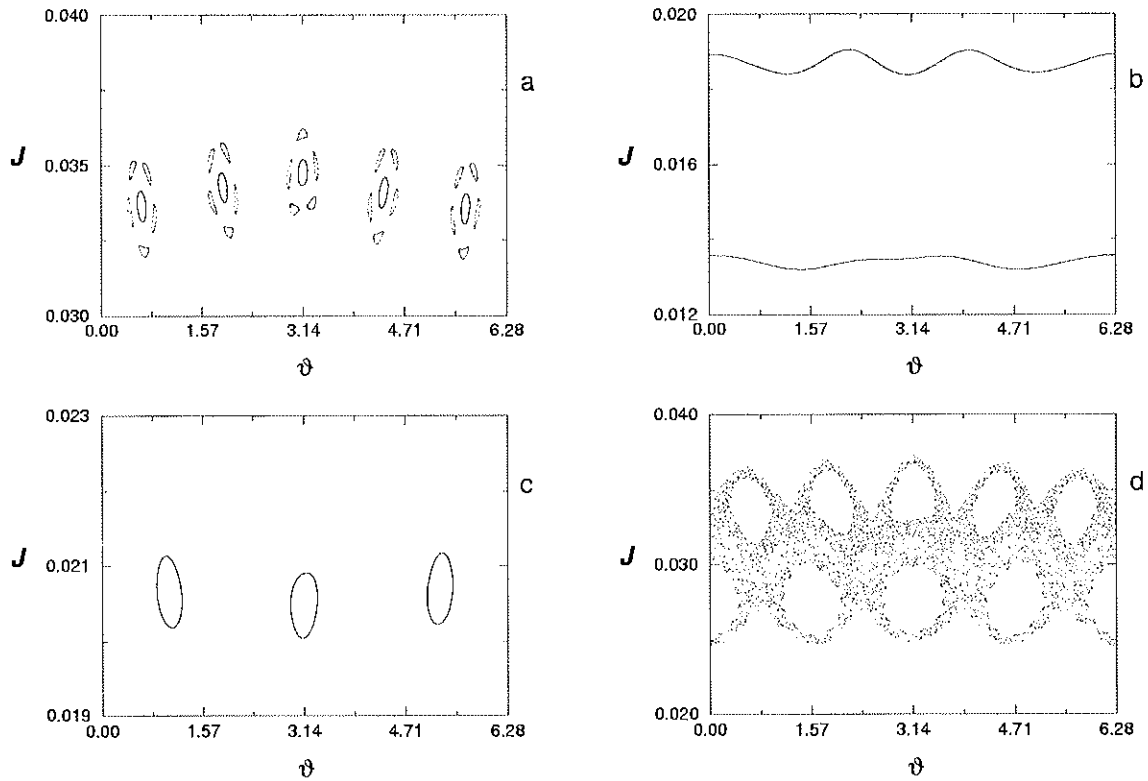


Figura 6.13: Mapas estroboscópicos das trajetórias usadas no cálculo dos espectros de FOURIER. Os parâmetros para o equilíbrio são os mesmos utilizados nos mapas anteriores. Para os limitadores magnéticos os parâmetros utilizados foram: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $\lambda = 0,48$ e $I_h = 2\%$ de I_p .

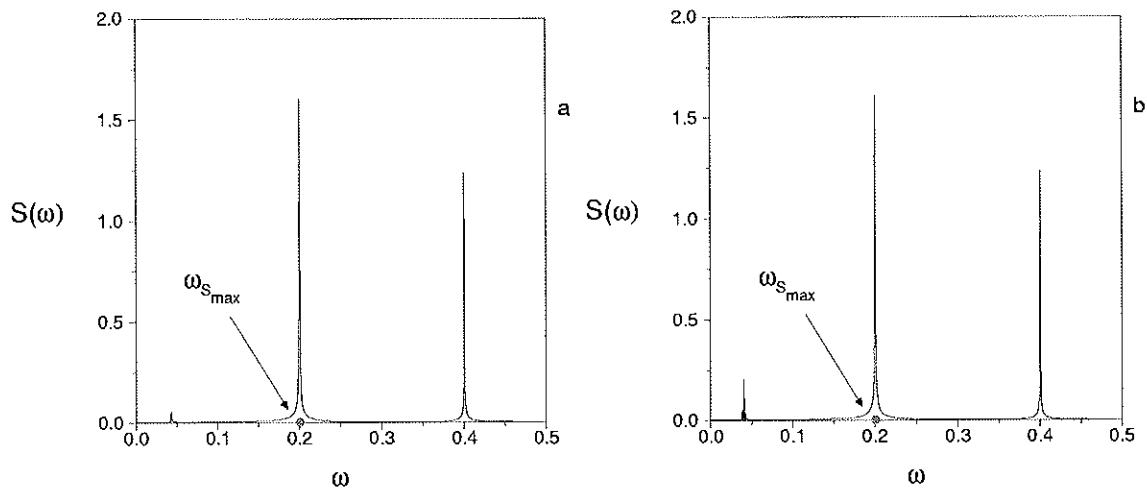


Figura 6.14: Espectros de FOURIER correspondentes às cadeias de ilhas interna (a) e externa (b) do mapa da figura-6.13a. Estão indicadas as frequências, $\omega_{S_{max}}$, correspondentes aos respectivos valores máximo dos espectros de frequências.

Eles são iguais e apresentam apenas picos discretos sendo que o mais intenso ocorre para a frequência ($\omega_{S_{max}} = \frac{1}{5}$) associada à cadeia de ilhas primárias para a qual $q = \frac{5}{1}$. Um segundo pico bastante acentuado ocorre para a frequência ($\omega = \frac{2}{5}$) com que a linha de força *gira* sobre cada ilha. É interessante notar que o espectro de frequências da cadeia de ilhas primárias (figura-6.14a) foi fortemente influenciado pela frequência, $\omega = \frac{2}{5}$, da cadeia de ilhas secundárias (figura-6.14b).

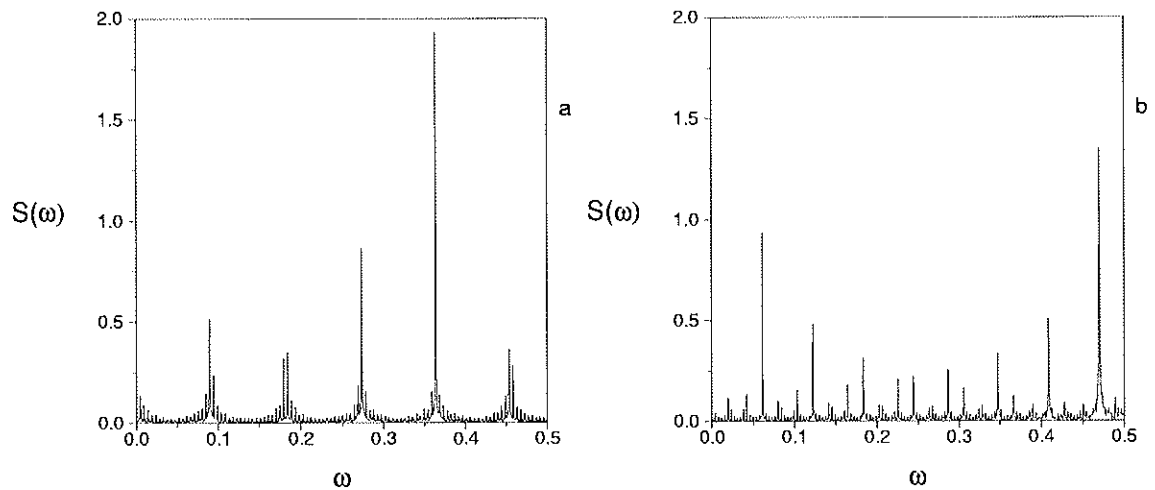


Figura 6.15: Espectros de FOURIER correspondentes às linhas superior (a) e inferior (b) do mapa da figura-6.13b.

A figura-6.15 mostra os espectros de frequências obtidos para as duas linhas de força, que formam toros regulares, presentes na figura-6.13b. Eles são compostos por um conjunto relativamente grande de picos discretos. Na figura-6.15a, temos o espectro para a linha de força superior que se localizava próxima à cadeia de três ilhas magnéticas. Conseqüentemente o pico mais intenso ocorreu para uma frequência $\omega_{S_{max}}$ próxima a $\omega = \frac{1}{3}$. Enquanto que, para a linha de força que se encontrava perto da cadeia de duas ilhas, o pico mais intenso ocorreu para uma frequência $\omega_{S_{max}}$ próxima a $\omega = \frac{1}{2}$.

A figura-6.16 apresenta os espectros de frequências correspondentes às linhas de força da figura-6.13c e da figura-6.13d respectivamente.

Quando a linha de força encontra-se localizada dentro de uma cadeia de ilhas magnéticas para a qual nenhuma cadeia de ilhas secundárias é visível o espectro de frequências é formado por um único pico intenso e alguns picos bem menos intensos do que este. Isto pode ser verificado na figura-6.16a. A frequência, $\omega_{S_{max}} = \frac{1}{3}$, deste pico está associada à cadeia de ilhas, para qual $q = \frac{3}{1}$, sobre a qual a linha de força se encontra.

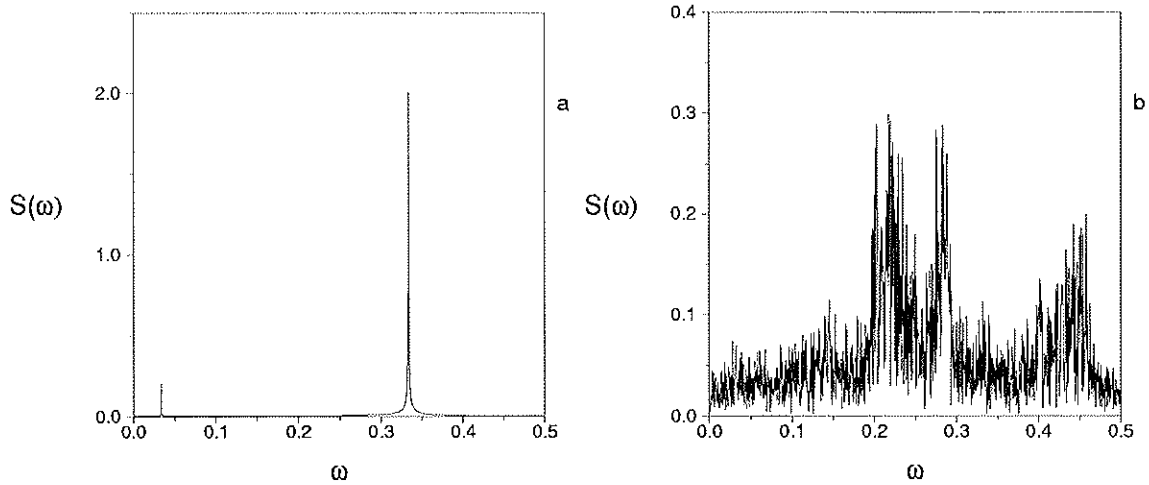


Figura 6.16: Espectros de FOURIER correspondentes às trajetórias dos mapas da figura-6.13c (a) e da figura-6.13d (b).

Já quando uma linha de força caótica é considerada, como a da figura-6.13d, obtemos um espectro de frequências que apresenta um fundo contínuo (figura-6.16b). Algumas vezes é possível notar uma concentração maior em torno de frequências relacionadas às cadeias de ilhas magnéticas ao redor das quais a linha de força caótica permaneceu por um certo número de iterações.

Dos espectros calculados para linhas de força não caóticas podemos observar que existe uma relação entre o fator de segurança, q , de uma linha de força e a frequência $\omega_{S_{max}}$ correspondente ao máximo do espectro calculado para essa linha de força.

Essa relação entre $\omega_{S_{max}}$ e q , para algumas linhas de força não caóticas obtidas do mapeamento simplético para os anéis limitadores magnéticos, pode ser vista na figura-6.17.

O fator de segurança é calculado, a partir do mapeamento simplético, da seguinte forma:

$$q = \frac{2\pi}{\langle \Delta\vartheta \rangle}, \quad (6.26)$$

em cuja expressão $\langle \Delta\vartheta \rangle$ é dado por:

$$\langle \Delta\vartheta \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (\vartheta(t_{k+1}) - \vartheta(t_k)), \quad t_k = 2\pi k. \quad (6.27)$$

Da figura-6.17, vemos que a frequência $\omega_{S_{max}}$, normalizada pela frequência de amostragem, ω_A , apresenta uma dependência linear com o inverso do fator de segurança, ou

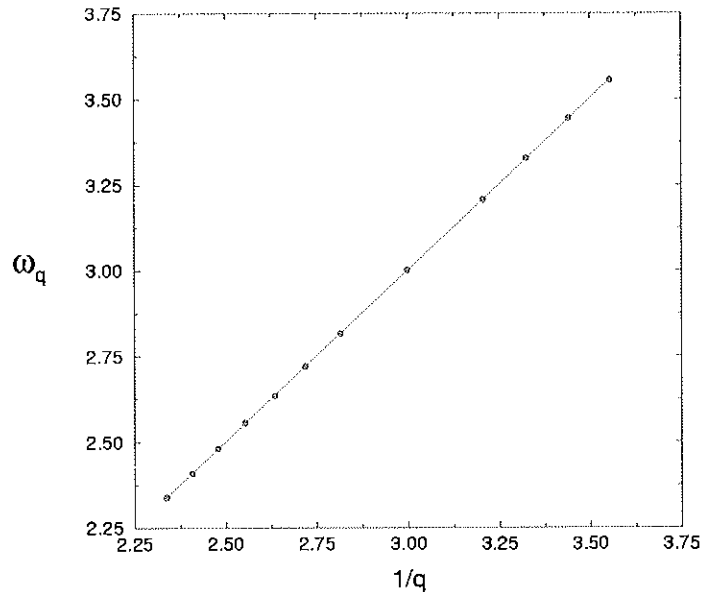


Figura 6.17: Relação entre a frequência correspondente ao máximo do espectro de potência e o fator de segurança.

seja,

$$\omega_q \equiv \frac{\omega_{S_{max}}}{\omega_A} = \frac{1}{q}, \quad (6.28)$$

sendo que a frequência de amostragem, ω_A , para uma linha de força é dada por:

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad (6.29)$$

pois, no mapeamento estroboscópico, dois pontos sucessivos sobre uma linha de força estão defasados pelo período de amostragem $T_A = 2\pi$.

6.3.2 Expoentes de Lyapunov das Linhas de Força

Outro método de análise de sistemas não-lineares, particularmente importante para o estudo do mapeamento estroboscópico de linhas de força, é o cálculo dos expoentes de LYAPUNOV. Eles indicam a sensibilidade de um sistema com relação às condições iniciais, medindo quão rapidamente duas linhas de força, com condições iniciais ligeiramente diferentes, se afastam uma da outra à medida que iteramos o mapeamento.

Para um mapeamento bidimensional, os expoentes de LYAPUNOV de uma linha de força são definidos da seguinte forma [51]:

$$l_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \|a_i(\mathbf{M})\|. \quad (6.30)$$

Nesta expressão, $a_i(\mathbf{M})$ é o i -ésimo autovalor da matriz \mathbf{M} , dada por:

$$\mathbf{M} = \prod_{k=0}^N \mathbf{J}^k, \quad (6.31)$$

em que \mathbf{J}^k é a matriz jacobiana da k -ésima iteração do mapeamento estroboscópico definida como:

$$\mathbf{J}^k = \frac{\partial(\mathcal{J}_{k+1}, \vartheta_{k+1})}{\partial(\mathcal{J}_k, \vartheta_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}_{k+1}}{\partial \mathcal{J}_k} & \frac{\partial \mathcal{J}_{k+1}}{\partial \vartheta_k} \\ \frac{\partial \vartheta_{k+1}}{\partial \mathcal{J}_k} & \frac{\partial \vartheta_{k+1}}{\partial \vartheta_k} \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

O cálculo numérico dos expoentes de LYAPUNOV, diretamente da definição dada acima, é impraticável, pois os elementos da matriz \mathbf{M} tornam-se exponencialmente grandes para o número de iterações necessárias. Entretanto, esta dificuldade pode ser contornada com a ajuda de um artifício [51].

Reescrevendo-se a matriz \mathbf{M} como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{J}^N \cdot \mathbf{J}^{N-1} \cdot \mathbf{J}^{N-2} \dots \mathbf{J}^0 \\ &= (\mathbf{J}^N \cdot \mathbf{T}^N) (\mathbf{T}^{N-1} \cdot \mathbf{J}^{N-1} \cdot \mathbf{T}^{N-1}) \dots (\mathbf{T}^{1-1} \cdot \mathbf{J}^0 \cdot \mathbf{T}^0) \\ &= \mathbf{Q}^N \cdot \mathbf{Q}^{N-1} \cdot \mathbf{Q}^{N-2} \dots \mathbf{Q}^0, \end{aligned} \quad (6.33)$$

em cuja expressão \mathbf{I} é a matriz identidade, \mathbf{T}^{k-1} é a inversa da matriz unitária \mathbf{T}^k dada por:

$$\mathbf{T}^k = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

com α_k dado por:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \text{tg}(\alpha_{k+1}) &= \frac{J_{22}^k \sin(\alpha_k) - J_{21}^k \cos(\alpha_k)}{J_{11}^k \cos(\alpha_k) - J_{12}^k \sin(\alpha_k)}. \end{aligned}$$

Com esta definição para \mathbf{T}^k as matrizes \mathbf{Q}^k tornam-se triangulares, ou seja:

$$\mathbf{Q}^k \equiv \mathbf{T}^{(k+1)-1} \cdot \mathbf{J}^k \cdot \mathbf{T}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ 0 & a_{22}^k \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

e os expoentes de LYAPUNOV podem ser representados como:

$$l_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \ln \|a_{11}^k\|, \quad (6.36)$$

$$l_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \ln \|a_{22}^k\|. \quad (6.37)$$

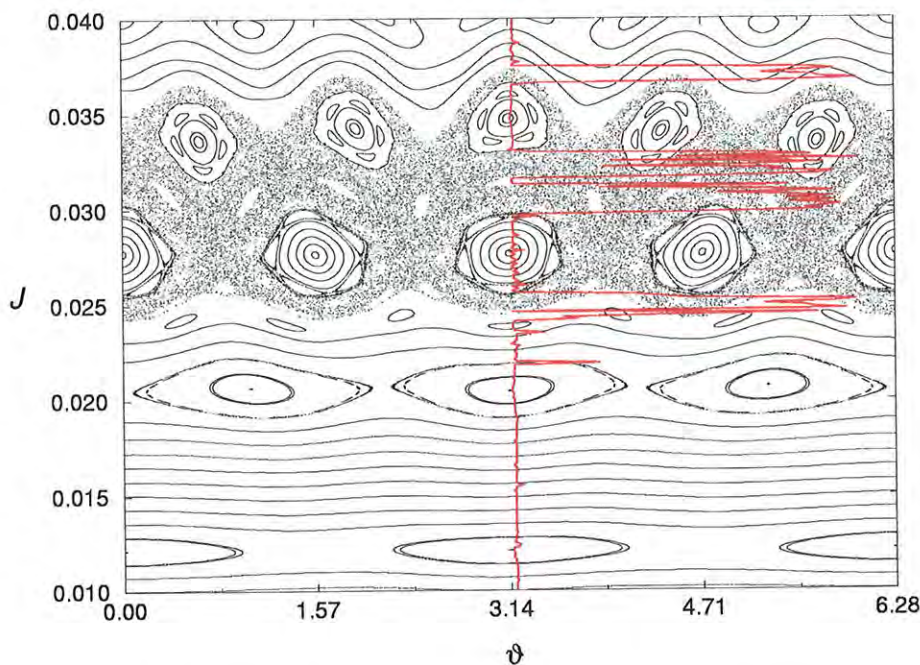


Figura 6.18: Perfil do expoente de LYAPUNOV superposto ao respectivo mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a ação de $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos caóticos. Corrente nas hélices, I_h , igual a 2% de I_p e parâmetros para a lei de enrolamento dados por: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,48$.

A figura-6.18 mostra um mapa estroboscópico, gerado pelos anéis limitadores magnéticos, sobre o qual graficamos (em vermelho) o valor do expoente de LYAPUNOV positivo amplificado por um fator 20. Estes expoentes foram calculados para condições iniciais para as quais fixamos o valor $\vartheta = \pi$ enquanto variamos \mathcal{J} dentro do intervalo 0,01 a 0,04.

Não foi possível distinguir entre linhas de força sobre uma superfície magnética irracional e linhas de força sobre cadeias de ilhas magnéticas observando apenas o valor do expoente de LYAPUNOV, uma vez que os expoentes de LYAPUNOV resultaram ser nulos para tais linhas de força.

Para as linhas de força caóticas, no entanto, o cálculo dos expoentes de LYAPUNOV resultaram ser distintamente não nulos. Mostrando-se efetivo como meio de distinguir as

linhas de força caóticas das linhas de força regulares. Quer estejam elas sobre cadeias de ilhas magnéticas ou sobre superfícies magnéticas irracionais.

Esta propriedade dos expoentes de LYAPUNOV será utilizada, no capítulo 7, como uma forma de se determinar as intensidades das perturbações, produzidas pelos **limitadores magnéticos**, para as quais ocorrem mudanças na estabilidade dos pontos fixos elípticos localizados no centro das ilhas magnéticas.

Capítulo 7

Destruição de Superfícies Ressonantes.

Neste capítulo, estudamos, para os **limitadores magnéticos**, a maneira como se dá a destruição das cadeias de ilhas magnéticas localizadas na borda da coluna de plasma formando, com isto, uma camada de linhas de força caóticas nessa região.

Analisamos o desenvolvimento das cadeias de ilhas primárias, exemplificando com a cadeia para a qual $q = \frac{4}{1}$, através de uma hamiltoniana local que se reduz à hamiltoniana do pêndulo. Comparamos os resultados obtidos dessa hamiltoniana local com resultados obtidos por meio de cálculos numéricos oriundos do mapeamento simplético para os anéis **limitadores magnéticos**. Descrevemos, também, o surgimento de ilhas secundárias dentro das ilhas primárias e a estabilidade dos pontos fixos elípticos.

7.1 Ilhas Pendulares

Ao redor da separatriz de cada cadeia de ilhas, em um mapa de POINCARÉ de um sistema quase integrável, sempre há regiões caóticas. Embora suas áreas tendam a zero à medida que a perturbação diminui, elas sempre estão presentes para uma perturbação não nula. Desta forma não se pode falar em uma transição abrupta para um regime caótico nestes sistemas. O que se pode estudar é como se dá a transição entre um regime em que estas regiões caóticas estão isoladas umas das outras para outro regime em que algumas delas se conectam. Esta conexão aumenta a área do espaço de fase do sistema à qual trajetórias caóticas, destas regiões, têm acesso.

Existem vários critérios para se determinar o valor da perturbação para a qual esta transição ocorre [42]. Dentre esses está o critério de CHIRIKOV [52, 53] também conhecido como critério da superposição de ilhas ou ressonâncias (*overlap criterion*).

Em sua forma mais simples esse critério estabelece que a última superfície, existente entre duas regiões caóticas formadas ao redor das separatrizes de duas cadeias de ilhas, é destruída quando a soma das semi-larguras dessas separatrizes, calculadas isoladamente, iguala-se à separação dessas cadeias de ilhas.

O critério de CHIRIKOV é um critério muito severo. Resultados numéricos mostram que a destruição da última superfície geralmente ocorre antes do previsto por tal critério, em virtude da interação das cadeias de ilhas primárias com cadeias de ilhas intermediárias existentes entre elas [20]. Porém, ele ainda serve como uma estimativa boa e simples para a transição e tem sido utilizado no estudo de vários problemas.

Nesta tese, utilizamos uma forma usual do critério de CHIRIKOV [52] em que calculamos as semi-larguras das cadeias de ilhas, necessárias para se aplicar o critério de CHIRIKOV, extraíndo da hamiltoniana geral uma hamiltoniana local. Esta hamiltoniana descreve o comportamento do sistema apenas ao redor da região de ressonância que dá origem à cadeia de ilhas que se pretende estudar. A partir de transformações canônicas e do cálculo de médias apropriadas, chegamos à hamiltoniana de um pêndulo não-linear e, daí, ao cálculo da semi-largura da separatriz e do perfil de frequência das superfícies internas à cadeia de ilhas.

Nosso objetivo, neste capítulo, não foi desenvolver uma análise rigorosa da transição para um regime de caos global. Mas, sim, dar uma visão qualitativa de como ocorre a destruição de uma cadeia de ilhas magnéticas para os anéis **limitadores magnéticos**, como acontece o surgimento e a evolução das cadeias de ilhas secundárias e como se dá a bifurcação dos pontos fixos elípticos. E, também, comparar os resultados derivados da hamiltoniana local com aqueles produzidos pelo mapeamento simplético.

7.1.1 Hamiltoniana Local

A hamiltoniana que adotamos, no capítulo 6, para descrever a ação de um conjunto de anéis **limitadores magnéticos** foi:

$$H_L(\mathcal{J}, \vartheta, t) = H_0(\mathcal{J}) + \frac{l}{R_0} H_1(\mathcal{J}, \vartheta, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k \frac{2\pi}{N_a}\right), \quad (7.1)$$

na qual N_a é o número de anéis limitadores magnéticos, l é o comprimento de um anel e $H_1(\mathcal{J}, \vartheta, t)$ é dado por:

$$H_1(\mathcal{J}, \vartheta, t) = \sum_{m=0}^{2m_0} H_m^*(\mathcal{J}) e^{i(m\vartheta - n_0 t)}. \quad (7.2)$$

Utilizando as seguintes propriedades da distribuição $\delta(x)$:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (7.3)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi s x}, \quad (7.4)$$

pudemos reescrever a hamiltoniana dos anéis limitadores magnéticos de modo a obtermos:

$$H_L(\mathcal{J}, \vartheta, t) = H_0(\mathcal{J}) + \epsilon \sum_{m=0}^{2m_0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} H_m^*(\mathcal{J}) e^{i[m\vartheta - (n_0 + sN_a)t]}, \quad (7.5)$$

em cuja expressão, a partir de agora, ϵ passa a ser dado por:

$$\epsilon = \frac{I_h l N_a}{I_e \pi R'_0}. \quad (7.6)$$

Para construirmos a hamiltoniana local, que descreva o comportamento do sistema ao redor de uma determinada ressonância apenas, primeiramente pinçamos da série de FOURIER o termo responsável pela ressonância escolhida. Por exemplo, aquele correspondente a $m = m_0$ e $s = 0$:

$$H(\mathcal{J}, \vartheta, t) = H_0(\mathcal{J}) + \epsilon H_{m_0}^*(\mathcal{J}) e^{i(m_0\vartheta - n_0 t)}. \quad (7.7)$$

Depois, expandimos a hamiltoniana $H_0(\mathcal{J})$ ao redor do valor da ação $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$ para a qual $q = \frac{m_0}{n_0}$. Eliminamos, também, contribuições não constantes da ação no modo de FOURIER fazendo $H_{m_0}^*(\mathcal{J}) = H_{m_0}^*(\mathcal{J}_0)$. Com isto, ficamos com:

$$H = H_0(\mathcal{J}_0) + \left. \frac{dH_0}{d\mathcal{J}} \right|_{\mathcal{J}=\mathcal{J}_0} \Delta\mathcal{J} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 H_0}{d\mathcal{J}^2} \right|_{\mathcal{J}=\mathcal{J}_0} (\Delta\mathcal{J})^2 + \epsilon H_{m_0}^*(\mathcal{J}_0) e^{i(m_0\vartheta - n_0 t)}, \quad (7.8)$$

em cuja expressão $\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J} - \mathcal{J}_0$.

O primeiro termo da equação (7.8) pode ser eliminado, pois não contribui para as equações de HAMILTON, por ser constante.

A seguir, eliminamos o *tempo*, t , através da transformação canônica definida pela seguinte função geratriz:

$$G(\Delta\mathcal{J}', \vartheta, t) = (m_0\vartheta - n_0 t)\Delta\mathcal{J}'. \quad (7.9)$$

As relações entre as novas e as velhas coordenadas e a nova e a velha hamiltoniana são dadas por:

$$\Delta \mathcal{J}' = \frac{1}{m_0} \Delta \mathcal{J}, \quad (7.10)$$

$$\vartheta' = m_0 \vartheta - n_0 t, \quad (7.11)$$

$$H' = H - \frac{n_0}{m_0} \Delta \mathcal{J}. \quad (7.12)$$

Substituindo-se as expressões (7.10-7.12) na equação (7.8) e definindo-se:

$$W \equiv m_0^2 \left. \frac{d^2 H_0}{d \mathcal{J}^2} \right|_{\mathcal{J}=\mathcal{J}_0}, \quad (7.13)$$

$$K \equiv -H_{m_0}^*(\mathcal{J}_0), \quad (7.14)$$

chegamos, finalmente, à seguinte hamiltoniana local cuja forma é idêntica àquela para um pêndulo não-linear:

$$H' = \frac{1}{2} W (\Delta \mathcal{J}')^2 - \epsilon K \cos(\vartheta'). \quad (7.15)$$

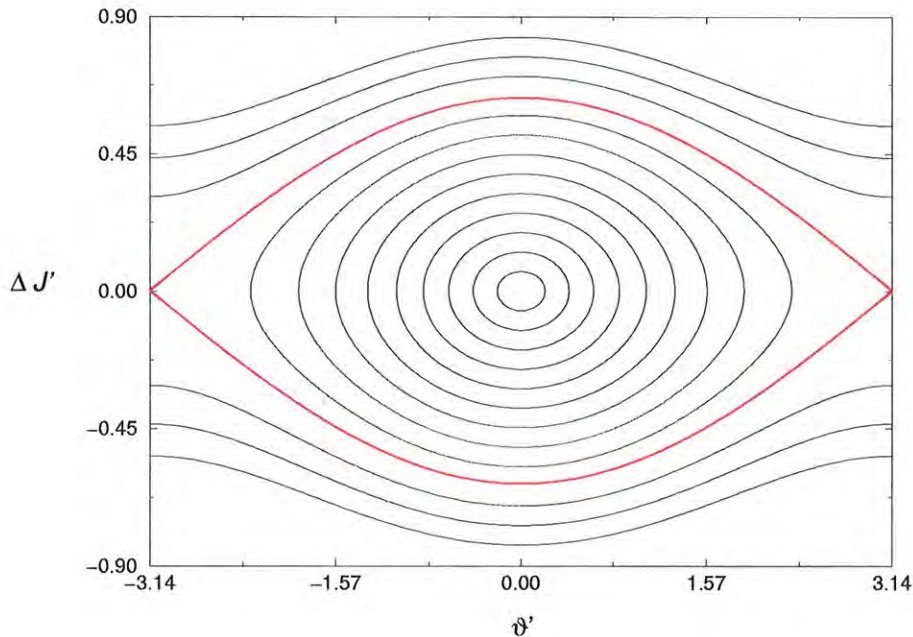


Figura 7.1: Espaço de fase para um pêndulo não-linear. Parâmetros: $W = 1$, $K = 1$ e $\epsilon = 0,1$. Em vermelho temos a separatriz, no interior desta as trajetórias de oscilação e fora desta as de rotações.

A hamiltoniana do pêndulo possui dois pontos fixos, um em $(\Delta \mathcal{J}', \vartheta') = (0, 0)$, que é estável, e outro em $(\Delta \mathcal{J}', \vartheta') = (0, \pi)$, que é instável. E dois tipos de movimentos,

o de oscilação ao redor do ponto fixo estável, também conhecido como ponto elíptico, e o movimento de rotação que se estende de $-\pi$ até $+\pi$. Separando estes dois tipos de movimentos temos a separatriz, que também determina a amplitude máxima de oscilação, $\Delta\mathcal{J}'_{max}$. A figura-7.1 mostra o espaço de fase obtido para os valores de $W = 1$, $K = 1$ e $\epsilon = 0,1$. Em vermelho temos a separatriz, no interior desta temos trajetórias correspondentes aos movimentos de oscilação e, fora desta, trajetórias correspondentes aos movimentos de rotação.

O valor da máxima amplitude de oscilação, $\Delta\mathcal{J}'_{max}$, dado por:

$$\Delta\mathcal{J}'_{max} = 2\sqrt{\epsilon\left|\frac{K}{W}\right|}, \tag{7.16}$$

é calculado a partir do valor da hamiltoniana na separatriz, $H' = \epsilon K$.

Outra relação importante para o pêndulo é aquela que fornece sua frequência natural, ω'_0 , dada por:

$$\omega'_0 = \sqrt{\epsilon|KW|}. \tag{7.17}$$

Este resultado mostra que tanto a amplitude máxima de oscilação quanto a frequência natural são proporcionais à raiz quadrada da amplitude da perturbação e, portanto, pela equação (7.6), proporcionais a $\sqrt{I_h}$.

Considerando-se uma cadeia de m_0 ilhas magnéticas para a qual $q = \frac{m_0}{n_0}$, a substituição de (7.13) e (7.14) em (7.16) e (7.17) fornece, para a largura da separatriz e para a frequência no ponto fixo central de uma das m_0 ilhas magnéticas, os seguintes resultados:

$$\Delta_{m_0,n_0} = 4\sqrt{\epsilon|H_{m_0}|\frac{1}{\left|\frac{d^2H_0}{d\mathcal{J}^2}\right|}}, \tag{7.18}$$

$$\omega_e = m_0\sqrt{\epsilon|H_{m_0}|\left|\frac{d^2H_0}{d\mathcal{J}^2}\right|}. \tag{7.19}$$

7.1.2 Resultados Numéricos

É possível comparar os resultados dados por (7.18) e (7.19), advindos de uma hamiltoniana local, com aqueles obtidos diretamente do mapeamento simplético representado pelas equações (6.10)-(6.12). Por exemplo, a largura, Δ_{m_0,n_0} , pode ser estimada da seguinte forma:

$$\Delta_{m_0,n_0} = \mathcal{J}_{max}(\vartheta_e) - \mathcal{J}_{min}(\vartheta_e). \tag{7.20}$$

Os valores de $\mathcal{J}_{max}(\vartheta_e)$ e $\mathcal{J}_{min}(\vartheta_e)$ são obtidos de uma linha de força cujo ponto inicial, no *espaço de fase*, foi escolhido muito próximo ao ponto fixo hiperbólico da cadeia de ilhas magnéticas em questão. Estes valores de $\mathcal{J}_{max}(\vartheta_e)$ e $\mathcal{J}_{min}(\vartheta_e)$ são, respectivamente, o valor máximo e mínimo da variável de ação, \mathcal{J} , para o valor da variável de ângulo, ϑ , no ponto elíptico de uma determinada ilha da cadeia.

Os valores da corrente de perturbação, I_h , foram escolhidos de maneira que a faixa caótica, que sempre está presente ao redor da separatriz, fosse pequena o bastante para não comprometer a estimativa da largura da separatriz. Os parâmetros do campo magnético de equilíbrio e os demais parâmetros dos anéis limitadores magnéticos são os mesmos utilizados nos capítulos anteriores ($(m_0, n_0) = (4, 1)$, $\lambda = 0,48$, $q(0) \simeq 1$ e $q(a) \simeq 5$).

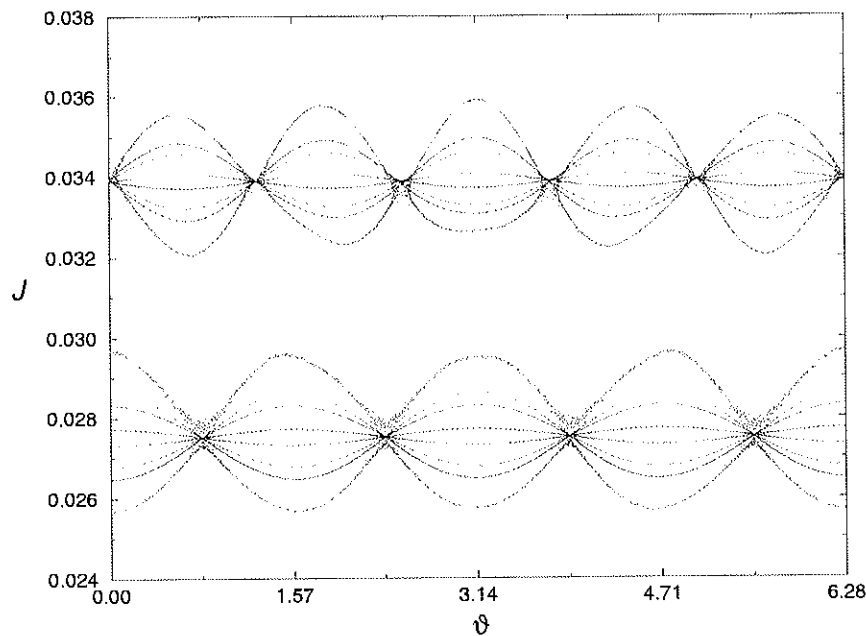


Figura 7.2: Separatrizes das cadeias de ilhas magnéticas para as quais $q = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{5}{1}$. As correntes elétricas de perturbação, I_h , utilizadas foram: $I_h = 0,01\%$ de I_p (preto), $I_h = 0,13\%$ de I_p (vermelho), $I_h = 0,26\%$ de I_p (azul) e $I_h = 0,81\%$ de I_p (verde). Os parâmetros do equilíbrio e os demais parâmetros dos limitadores magnéticos são os mesmos dos capítulos anteriores.

A figura-7.2 mostra algumas das linhas de força utilizadas para a estimativa da largura das ilhas magnéticas centrais das cadeias para as quais $q = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{5}{1}$. Nela, adotamos os seguintes valores para a corrente elétrica de perturbação, em ordem crescente, do preto para o verde: $I_h = 0,01\%$ de I_p , $I_h = 0,13\%$ de I_p , $I_h = 0,26\%$ de I_p e $I_h = 0,81\%$ de I_p .

A figura-7.3 e a figura-7.4 mostram o resultado do cálculo da largura da ilha central,

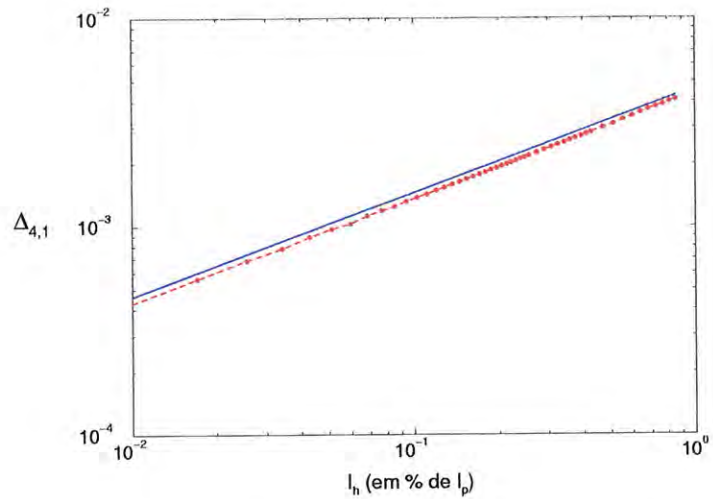


Figura 7.3: Largura da separatriz para a ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Em azul temos o resultado obtido do modelo de hamiltoniana local e em vermelho a largura obtida do mapeamento simplético para os limitadores magnéticos.

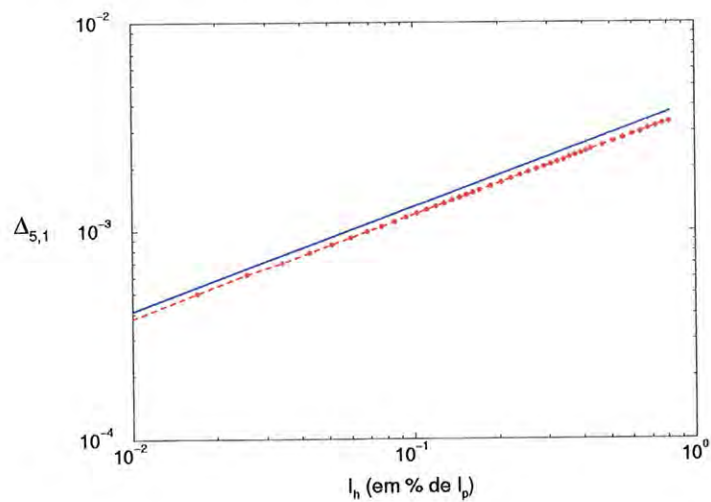


Figura 7.4: Largura da separatriz para a ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{5}{1}$. Em azul temos o resultado obtido do modelo de hamiltoniana local e em vermelho a largura obtida do mapeamento simplético para os limitadores magnéticos.

das cadeias de ilhas para as quais $q = \frac{m_0}{n_0} = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{m_0}{n_0} = \frac{5}{1}$, respectivamente, obtido do modelo de hamiltoniana local (em azul), através da equação (7.18), e o resultado obtido numericamente através do mapeamento simplético (em vermelho), equação (7.20). Os valores da corrente eléctrica de perturbação, I_h , variaram de 0 a aproximadamente 1% de I_p .

Notamos que, em ambos os casos, a concordância com o modelo de hamiltoniana local é bastante boa. E que, pelo menos para correntes de perturbação de até aproximadamente 1% da corrente de plasma, I_p , a largura da separatriz das cadeias de ilhas magnéticas obtidas do mapeamento simplético segue de forma muito precisa a lei de crescimento com $\sqrt{I_h}$.

A frequência no ponto elíptico, por sua vez, pode ser estimada a partir do cálculo do espectro de frequências para um conjunto de linhas de força localizadas no interior de uma cadeia de ilhas magnéticas.

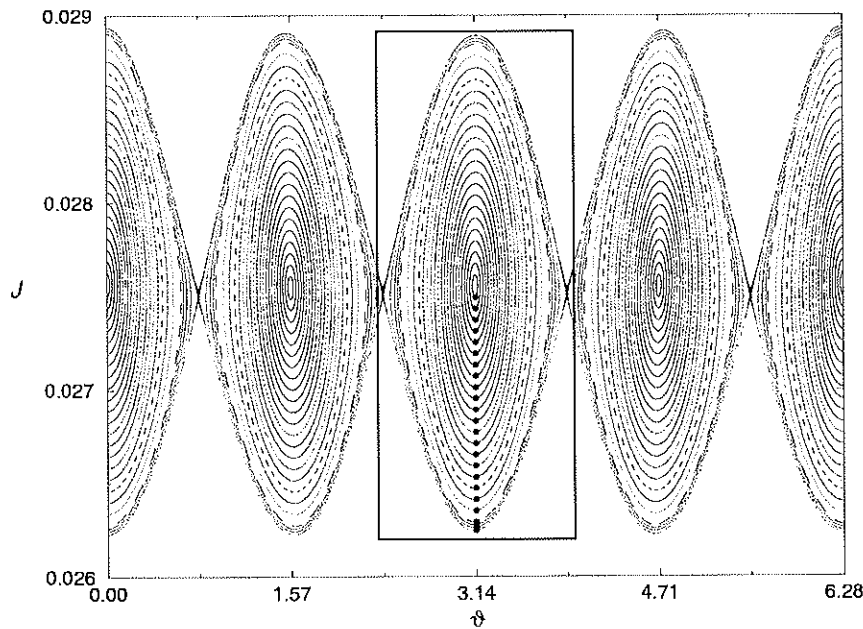
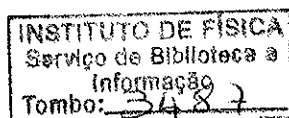


Figura 7.5: Representação das linhas de força utilizadas para o cálculo do perfil da frequência interna e da frequência do ponto elíptico de uma ilha magnética. Os símbolos • indicam os pontos iniciais, as linhas fechadas indicadas em vermelho correspondem a uma particular linha de força e a parte dela contida no retângulo indicado na figura forma o conjunto M_I usado para o cálculo do espectro de FOURIER.

Primeiramente, escolhe-se um certo número N de condições iniciais (indicadas pelo símbolo • na figura-7.5) para a iteração do mapeamento simplético que estejam localizadas no interior da cadeia de ilhas. Para cada uma dessas condições iniciais será gerada uma linha de força constituída por m_0 linhas fechadas localizadas no interior de m_0 ilhas. Isso porque a cada uma dessas linhas de força corresponde um fator de segurança $q = \frac{m_0}{n_0}$.

Do conjunto de pontos, dado por:

$$M_{LF} = \{P(t_k) = (J(t_k), \vartheta(t_k)) \mid t_k = 2\pi k, k = 0, 1, \dots\},$$



ex. 1

que constituem uma particular linha de força (como, por exemplo, aquela indicada em vermelho na figura-7.5), isolamos o subconjunto de pontos, dado por:

$$M_l = \{P(t_l) = (\mathcal{J}(t_l), \vartheta(t_l)) \mid t_l = 2\pi m_0 l, l = 0, 1, \dots\},$$

que formam uma determinada linha fechada localizada no interior de uma das m_0 ilhas (linha vermelha fechada contida no retângulo da figura-7.5).

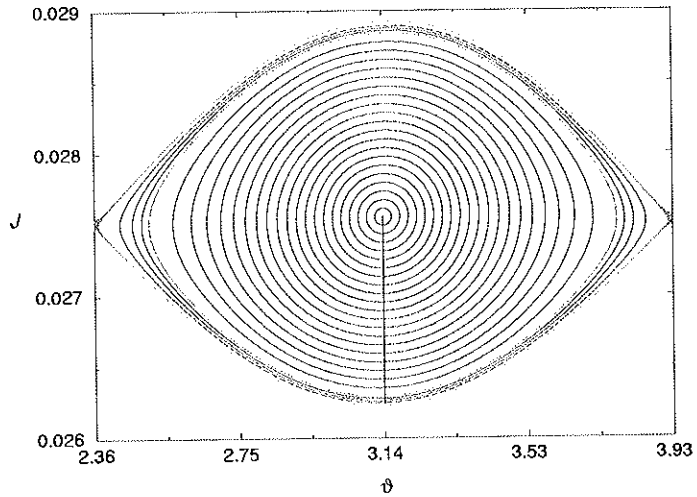


Figura 7.6: Linhas de força que formam a ilha magnética central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Parâmetros para o mapeamento simplético dos limitadores magnéticos: $I_h = 0,4\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$. Em azul, temos a linha ao longo da qual o perfil de ω_{in} foi calculado.

Esse procedimento é repetido para cada uma das N linhas de força, produzindo N subconjuntos iguais ao descrito acima. Esses subconjuntos estão representados, na figura-7.6, pelas linhas fechadas contidas no interior da separatriz (em vermelho) da ilha central da cadeia de ilhas magnéticas da figura-7.5.

Calculamos, então, N espectros de frequências, $S(\omega)$, para os seguintes N conjuntos:

$$M_{\vartheta}(n) = \{\vartheta_n(t_k) \mid t_k = 2\pi m_0 k, k = 0, 1, \dots\} \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

formados, a partir das linhas fechadas indicadas na figura-7.6, isolando-se a série *temporal* para a variável de *ângulo* ϑ . Feito isso, construímos a tabela-7.1 na qual a primeira coluna fornece os afastamentos das ações iniciais em relação à ação no ponto fixo, ao longo da linha azul vista na figura-7.6, e a segunda coluna fornece a frequência, $\omega_{S_{max}}$, correspondente ao valor máximo dos respectivos espectros de frequências.

$\mathcal{J}(t_0) - \mathcal{J}_0$	$\omega_{S_{max}}$
$\mathcal{J}_1(t_0) - \mathcal{J}_0$	$\omega_{1S_{max}}$
$\mathcal{J}_2(t_0) - \mathcal{J}_0$	$\omega_{2S_{max}}$
$\mathcal{J}_3(t_0) - \mathcal{J}_0$	$\omega_{3S_{max}}$
\vdots	\vdots
$\mathcal{J}_N(t_0) - \mathcal{J}_0$	$\omega_{NS_{max}}$

Tabela 7.1: Valores de $\mathcal{J}(t_0) - \mathcal{J}_0$ e $\omega_{S_{max}}$ usados para estimar-se a frequência do ponto fixo elíptico.

Antes de apresentarmos o resultado obtido, vamos definir a frequência e o fator de segurança internos a uma ilha magnética.

Vimos, no capítulo 6, que a frequência $\omega_{S_{max}}$, associada ao valor máximo do espectro de frequências de uma linha de força, se relaciona com o fator de segurança para essa linha de força da seguinte forma:

$$\frac{\omega_{S_{max}}}{\omega_A} = \frac{1}{q}. \quad (7.21)$$

Uma vez que a frequência de amostragem para uma linha de força completa é $\omega_A = 1$, da equação (7.21), temos:

$$\omega_{S_{max}} = \frac{1}{q}. \quad (7.22)$$

Por outro lado, quando mapeamos apenas os pontos que estão contidos no interior de uma determinada ilha magnética, de uma cadeia de m_0 ilhas, a frequência de amostragem, ω_A , é dada por:

$$\omega_A = \frac{2\pi}{2\pi m_0} = \frac{1}{m_0}. \quad (7.23)$$

Desta forma, temos para o trecho interno a uma ilha magnética:

$$m_0 \omega_{S_{max}} = \frac{1}{q_{in}}. \quad (7.24)$$

Definindo-se $\omega_{in} \equiv m_0 \omega_{S_{max}}$ reestabelecemos a forma da equação (7.22) e obtemos o seguinte para o segmento da linha de força contido no interior de uma ilha magnética:

$$\omega_{in} = \frac{1}{q_{in}}. \quad (7.25)$$

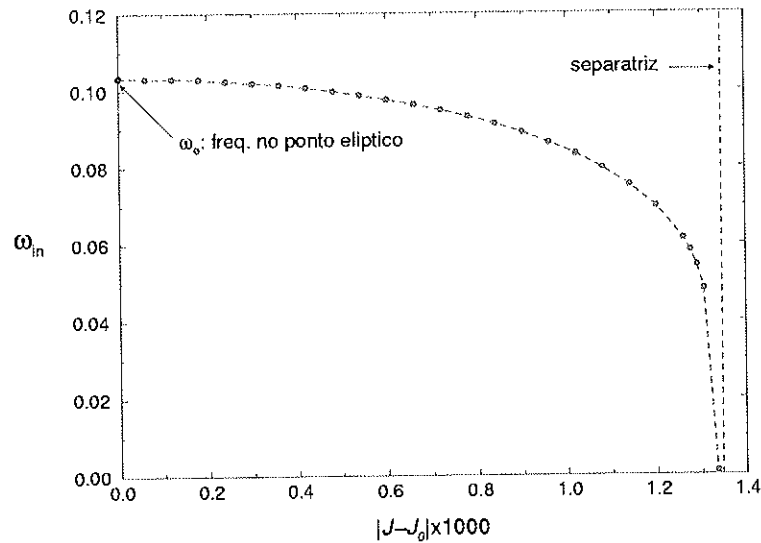


Figura 7.7: Perfil da frequência interna, ω_{in} , para a ilha magnética central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$. As linhas de força usadas para o cálculo são aquelas da figura-7.6.

A figura-7.7 apresenta o resultado obtido para o perfil da frequência interna, ω_{in} , e, conseqüentemente, do fator de segurança interno, q_{in} . Esse perfil foi calculado ao longo da linha azul, indicada na figura-7.6, para os seguintes parâmetros do mapeamento estroboscópico: $I_h = 0,4\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$. Foram usados 4096 pontos para cada linha de força que compõe a ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$.

A frequência interna, ω_{in} , tende a um valor constante, aproximadamente igual à frequência natural, ω_e , do pêndulo equivalente (equação (7.19)), quando a ação, \mathcal{J} , tende ao valor $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$ do ponto fixo elíptico, e diminui à medida em que as linhas de força consideradas se distanciam deste. Próximo à separatriz da cadeia de ilhas magnéticas a frequência diminui abruptamente, tendendo a zero para linhas de força que se encontram cada vez mais próximas da separatriz.

A semelhança desse perfil com o correspondente perfil para um pêndulo não-linear e a semelhança da figura-7.6 com a figura-7.1 chama a atenção, mais uma vez, para a boa concordância entre os resultados obtidos numericamente e os decorrentes da hamiltoniana local.

Da figura-7.7, vemos que a frequência no ponto fixo elíptico, ω_e , pode ser estimada por extrapolação quando consideramos que $\mathcal{J}(t_0) = \mathcal{J}_0$.

Repetindo-se o procedimento para a obtenção do perfil da frequência interna, ω_{in} , para cada novo valor da corrente elétrica de perturbação, I_h , e executando-se em seguida

o procedimento de extrapolação citado acima é possível se comparar o resultado obtido numericamente para a frequência no ponto elíptico com aquele dado pela equação (7.19).

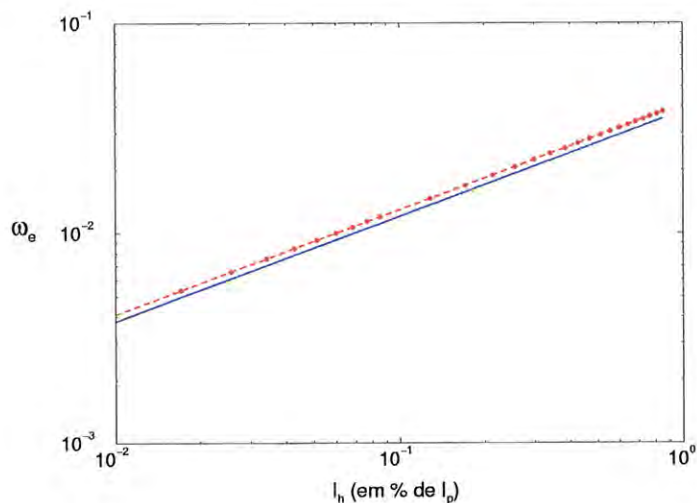


Figura 7.8: Frequência no ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Em azul temos o resultado obtido do modelo de hamiltoniana local e em vermelho a frequência obtida do mapeamento simplético para os limitadores magnéticos.

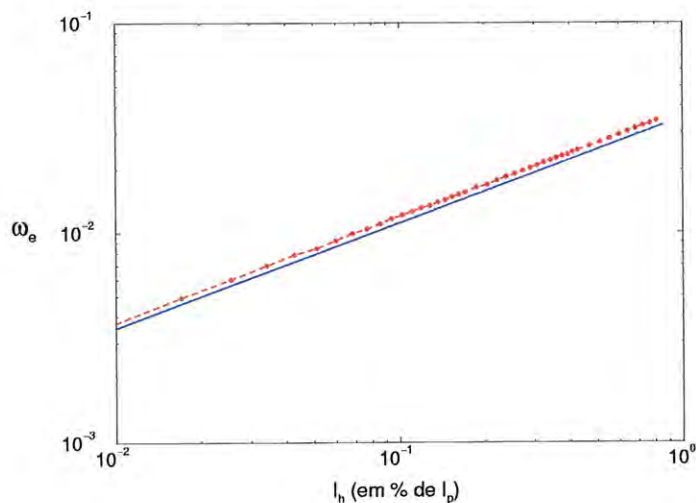


Figura 7.9: Frequência no ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{5}{1}$. Em azul temos o resultado obtido do modelo de hamiltoniana local e em vermelho a frequência obtida do mapeamento simplético para os limitadores magnéticos.

A figura-7.8 e a figura-7.9 mostram os resultados obtidos, a partir do modelo de hamiltoniana local (em azul) e a partir do mapeamento simplético (em vermelho), para as duas cadeias de ilhas utilizadas, anteriormente, no cálculo da largura da separatriz.

Novamente observamos a excelente concordância dos resultados numéricos com a lei de crescimento da frequência ω_e com $\sqrt{I_h}$.

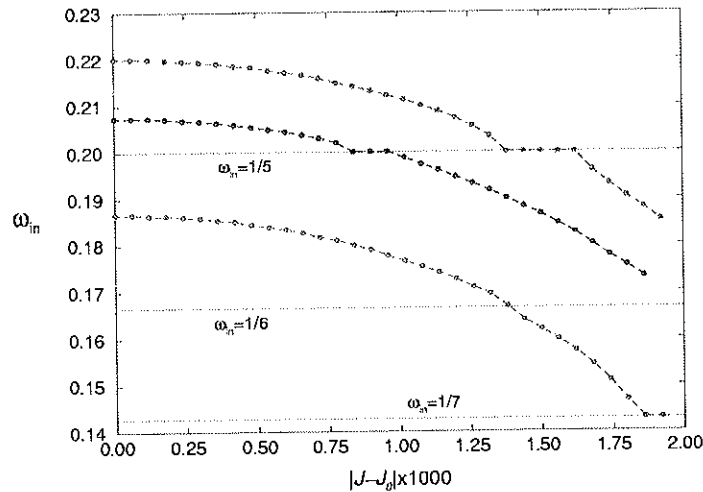


Figura 7.10: Perfis da frequência interna da ilha magnética central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$ para os valores de $I_h = 1,3\%$ de I_p (curva vermelha), $I_h = 1,6\%$ de I_p (curva azul) e $I_h = 1,8\%$ de I_p (curva verde).

Alguns resultados para o perfil da frequência interna, ω_{in} , nos quais podemos notar o aparecimento de cadeias de ilhas magnéticas secundárias, são mostrados na figura-7.10. As correntes de perturbação utilizadas para a obtenção dos perfis foram as seguintes: $I_h = 1,3\%$ de I_p (curva vermelha), $I_h = 1,6\%$ de I_p (curva azul) e $I_h = 1,8\%$ de I_p (curva verde). Os demais parâmetros do mapeamento estroboscópico, assim como, os parâmetros do campo magnético de equilíbrio foram mantidos iguais aos utilizados na figura-7.6.

A figura-7.11 mostra o mapa estroboscópico correspondente ao perfil de ω_{in} indicado pela curva vermelha na figura-7.10. O perfil da frequência interna, ω_{in} , foi calculado ao longo da reta azul vista no mapa estroboscópico. Uma vez que essa reta não cortou nenhuma das 6 ilhas secundárias indicadas no mapa nenhum patamar correspondente à frequência $\omega_{in} = \frac{1}{6}$ apareceu no perfil indicado pela curva vermelha na figura-7.11.

Na figura-7.12 temos o mapa estroboscópico correspondente ao perfil indicado pela curva azul na figura-7.10. Em virtude da reta, ao longo da qual o perfil de ω_{in} foi calculado, ter cortado uma das ilhas que formam a cadeia de ilhas secundárias para a qual $q_{in} = \frac{5}{1}$ surgiu um patamar no perfil da frequência interna para o valor $\omega_{in} = \frac{1}{5}$.

A figura-7.13, por sua vez, mostra o mapa estroboscópico associado ao perfil da

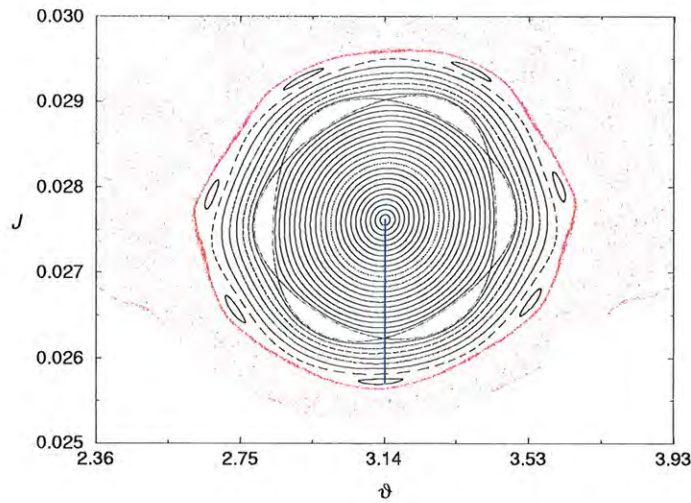


Figura 7.11: Linhas de força usadas para o cálculo do perfil da frequência interna para $I_h = 1,3\%$ de I_p (curva vermelha da figura-7.10).

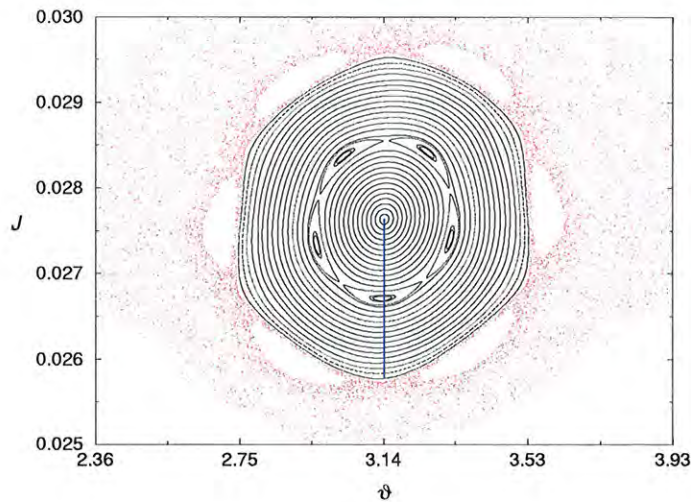


Figura 7.12: Linhas de força usadas para o cálculo do perfil da frequência interna para $I_h = 1,6\%$ de I_p (curva azul da figura-7.10).

frequência interna dado pela curva verde na figura-7.10. Nele, podemos observar o deslocamento da cadeia de 5 ilhas secundárias em direção à região caótica que envolve a ilha primária.

Uma cadeia de ilhas secundárias, com o valor de $q_{in} = \frac{m'}{n'}$, surge sempre que a frequência no centro da ilha primária cruza a linha $\omega_{in} = \frac{n'}{m'}$. Uma vez que a frequência no centro da ilha primária aumenta quando aumentamos a perturbação, as cadeias de ilhas magnéticas secundárias que vão surgindo seguem uma seqüência decrescente para os

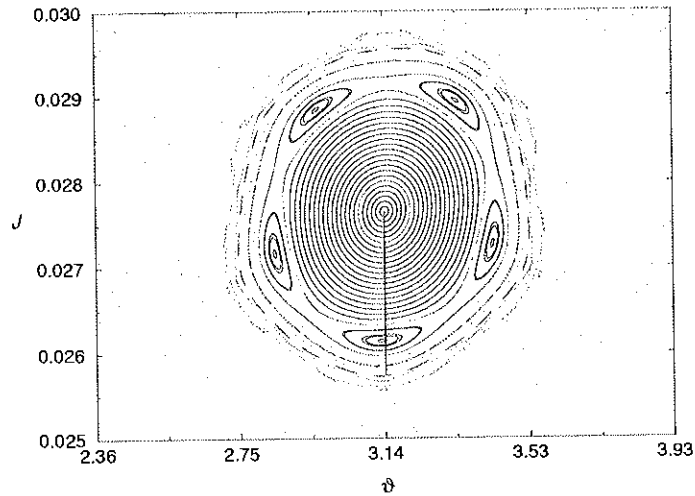


Figura 7.13: Linhas de força usadas para o cálculo do perfil da frequência interna para $I_h = 1,8\%$ de I_p (curva verde da figura-7.10).

valores de m' . Por exemplo, para uma dada corrente de perturbação, surge a cadeia de ilhas secundárias para $q_{in} = \frac{m'}{n'} = \frac{7}{1}$; depois, para uma corrente um pouco maior, surge a cadeia de ilhas para $q_{in} = \frac{6}{1}$; aumentando-se um pouco mais a corrente de perturbação surge a cadeia de ilhas para $q_{in} = \frac{5}{1}$, e assim por diante.

Como dissemos anteriormente, uma cadeia de m' ilhas magnéticas secundárias, com $q_{in} = \frac{m'}{n'}$, nasce no centro da ilha primária quando a frequência neste ponto é $\omega_{in} = \frac{n'}{m'}$. Aumentando-se a corrente elétrica de perturbação, esta cadeia de ilhas magnéticas migra em direção à separatriz da cadeia de ilhas primárias como podemos ver da figura-7.12 e da figura-7.13. Essa migração ocorre em decorrência do aumento da frequência no centro da ilha primária combinado com o fato de o perfil dessa frequência diminuir quando se considera superfícies magnéticas mais afastadas do centro. Sendo assim, para uma dada corrente de perturbação, o perfil de ω_{in} cruza a linha $\omega_{in} = \frac{n'}{m'}$ a uma determinada distância do centro; para uma corrente um pouco maior esse perfil cruza a mesma linha $\omega_{in} = \frac{n'}{m'}$ em um ponto um pouco mais distante que o anterior como podemos observar das curvas para $I_h = 1,6\%$ de I_p e para $I_h = 1,8\%$ de I_p da figura-7.10.

7.2 Estabilidade do Ponto Fixo Elíptico

Na seção anterior, vimos como se dá o crescimento de uma cadeia de ilhas magnéticas primárias e, dentro dessa, o surgimento e desenvolvimento das cadeias de ilhas secundárias.

Vimos, também, que a frequência interna no ponto fixo elíptico aumenta proporcionalmente a $\sqrt{I_h}$.

Nessa seção veremos o que ocorre com esse ponto fixo elíptico, do ponto de vista de sua estabilidade, quando aumentamos a corrente elétrica que cria o campo magnético de perturbação. Isso foi feito monitorando-se o valor do expoente de LYAPUNOV associado a uma linha de força, para diversos valores da corrente de perturbação, cuja condição inicial para o mapeamento era a localização do ponto fixo elíptico.

Enquanto o ponto fixo permanecer estável, a linha de força gerada será periódica e, portanto, possuirá um expoente de LYAPUNOV nulo.

Escolhemos o ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas magnéticas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Usamos os seguintes parâmetros para o mapeamento estroboscópico dos limitadores magnéticos: $\lambda = 0,48$, $(m_0, n_0) = (4, 1)$. A corrente de perturbação, I_h , foi variada desde 0 até 7% da corrente de plasma, I_p . Os parâmetros do campo magnético de equilíbrio e os demais parâmetros dos limitadores magnéticos são os mesmos usados neste e nos capítulos anteriores.

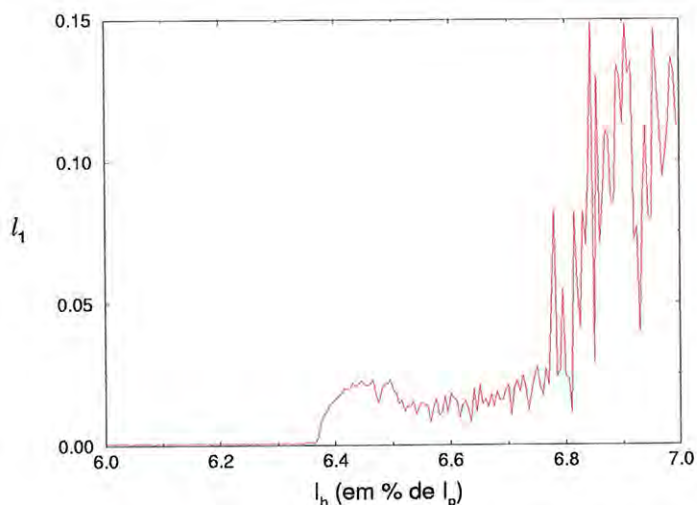


Figura 7.14: Expoente de LYAPUNOV, l_1 , da linha de força associada ao ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$ em função da corrente elétrica de perturbação.

A figura-7.14 mostra o resultado obtido. Notamos que para uma corrente de perturbação aproximadamente igual a 6,37% de I_p ocorre uma mudança na estabilidade do ponto fixo.

De modo a verificarmos que tipo de mudança ocorreu, construímos uma seqüência de

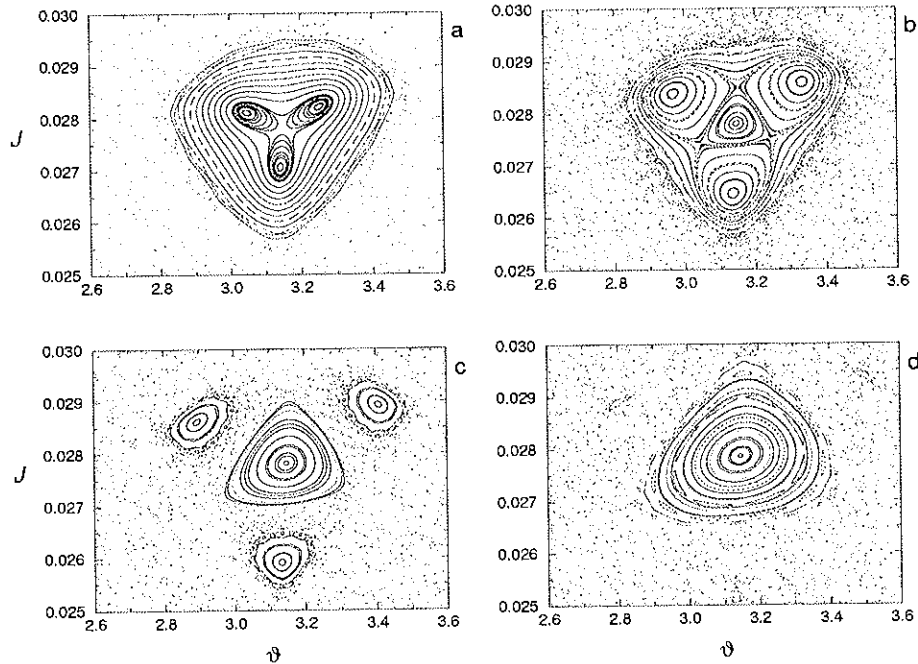


Figura 7.15: Seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima ao ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas magnéticas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Em a, usamos $I_h = 3,9\%$ de I_p ; em b, usamos $I_h = 4,1\%$ de I_p ; em c, usamos $I_h = 4,4\%$ de I_p e em d, usamos $I_h = 5,1\%$ de I_p .

mapas estroboscópicos mostrando a região próxima ao ponto fixo elíptico. A primeira seqüência mostra os mapas estroboscópicos para as seguintes correntes de perturbação: $I_h = 3,9\%$ de I_p , $I_h = 4,1\%$ de I_p , $I_h = 4,4\%$ de I_p e $I_h = 5,1\%$ de I_p (figura-7.15).

Na figura-7.15a, vemos o surgimento da cadeia de ilhas secundárias cujo o valor de q_{in} é $q_{in} = \frac{3}{1}$. Aumentando-se um pouco a corrente de perturbação (figura-7.15b), notamos o crescimento das três ilhas que compõe essa cadeia de ilhas secundárias, assim como, a região caótica que circunda sua separtriz. Porém, ainda há linhas regulares fechadas isolando essas ilhas e o ponto fixo da região caótica externa. Aumentando-se um pouco mais a corrente de perturbação (figura-7.15c), a região caótica que envolve a separtriz das três ilhas secundárias se conecta com a região caótica externa deixando uma pequena área de linhas de força regulares ao redor do ponto fixo. Ao se aumentar um pouco mais ainda a corrente de perturbação, as três ilhas satélites diminuem de tamanho e a região estável que circunda o ponto fixo aumenta. Isso faz com que a área de linhas de força estáveis seja apenas um pouco menor do que era antes do surgimento da cadeia de ilhas secundárias para a qual $q_{in} = \frac{3}{1}$.

A segunda seqüência de mapas estroboscópicos (figura-7.16) mostra o que ocorre quan-

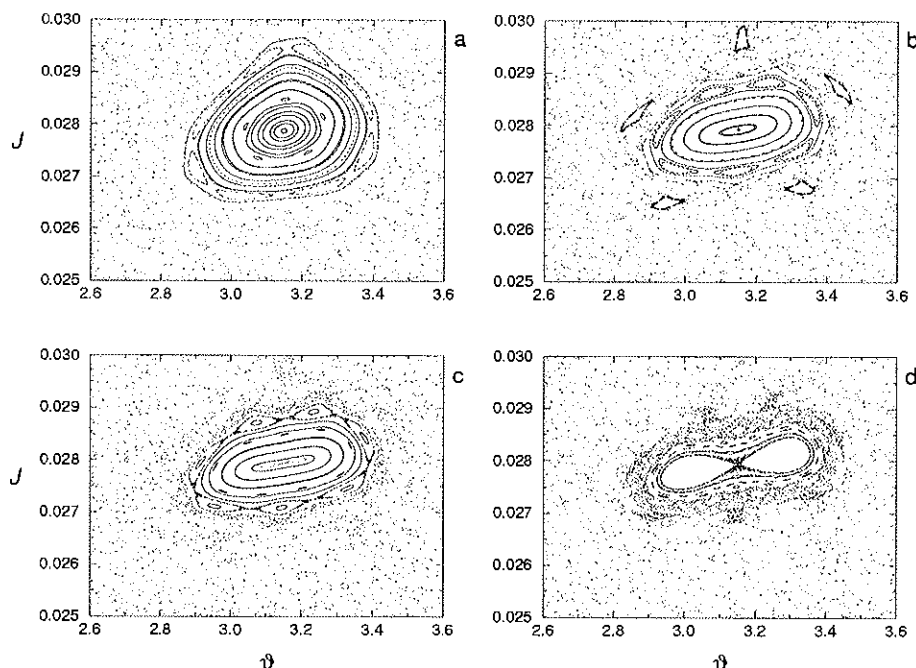


Figura 7.16: Segunda seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima ao ponto fixo elíptico da ilha central da cadeia de ilhas magnéticas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Em a, usamos $I_h = 5,4\%$ de I_p ; em b, usamos $I_h = 6,3\%$ de I_p ; em c, usamos $I_h = 6,4\%$ de I_p e em d, usamos $I_h = 6,7\%$ de I_p .

do continuamos aumentando a corrente de perturbação.

Cadeias de ilhas magnéticas secundárias para as quais q_{in} assume os valores $q_{in} = \frac{8}{3}$, $q_{in} = \frac{5}{2}$, $q_{in} = \frac{7}{3}$ e assim por diante começam a surgir indicando que o valor de ω_{in} , no ponto fixo, se aproxima de $\omega_{in} = 0,5$. As superfícies magnéticas tornam-se mais alongadas e, para um valor de I_h entre $6,3\%$ de I_p e $6,4\%$ de I_p (figura-7.16b e figura-7.16c), o ponto fixo torna-se instável e dois novos pontos fixos estáveis surgem próximos a ele indicando que uma bifurcação, com dobra de período, ocorreu.

Acompanhando o que ocorre com esses dois novos pontos fixos, verificamos que eles seguem o mesmo roteiro descrito para o ponto fixo que os produziu. Exceto por um detalhe. A localização deles no espaço de fase muda conforme variamos a corrente de perturbação. Eles se movem, no sentido de se afastarem mutuamente, ao longo de uma direção que é aproximadamente igual àquela definida pela reta que os une.

A estabilidade desses novos pontos fixos é mostrada na figura-7.17. E as duas seqüências de mapas estroboscópicos, dadas pela figura-7.18 e pela figura-7.19, ilustram o que dissemos a respeito do comportamento desses novos pontos fixos.

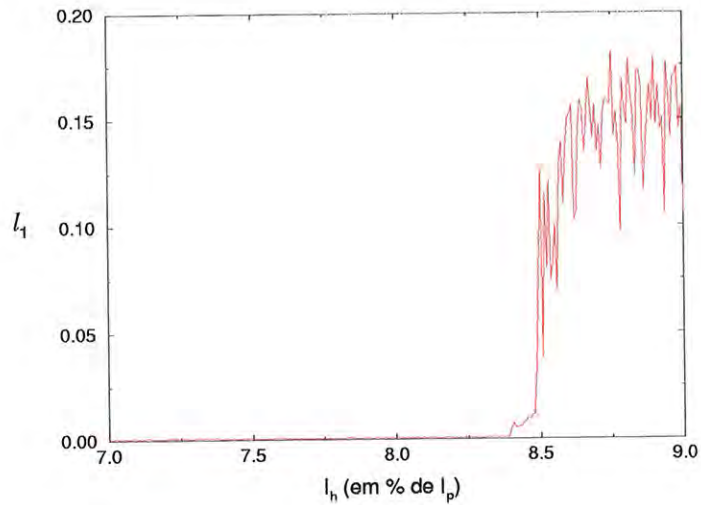


Figura 7.17: Expoente de LYAPUNOV da linha de força associada a um dos dois novos pontos fixos originado da bifurcação, por dobra de período, do ponto elíptico da ilha central da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$ em função da corrente elétrica de perturbação.

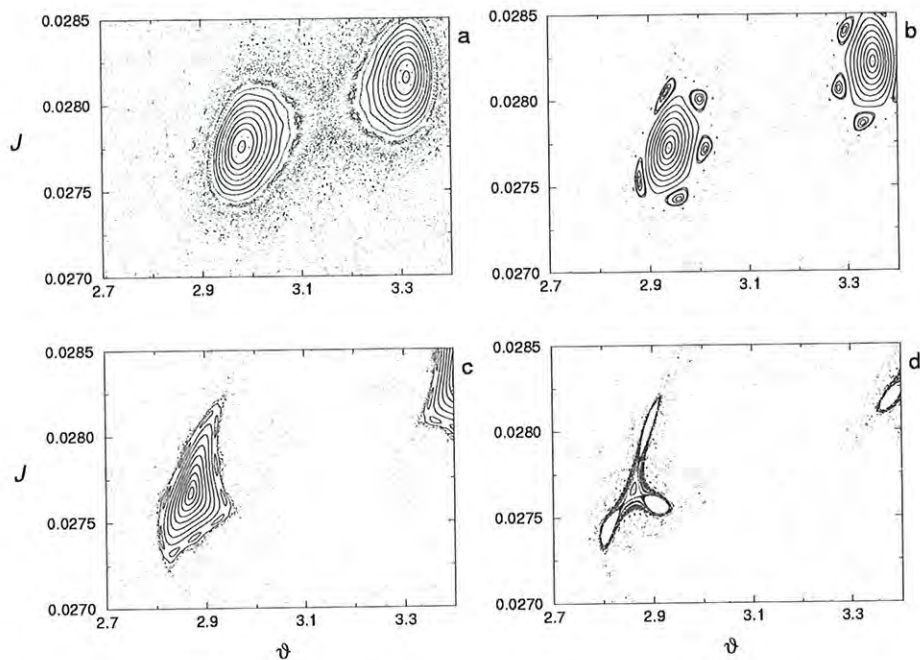


Figura 7.18: Seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima aos pontos fixos elípticos gerados pela bifurcação. Em a, usamos $I_h = 6,8\%$ de I_p ; em b, usamos $I_h = 7,1\%$ de I_p ; em c, usamos $I_h = 7,3\%$ de I_p e em d, usamos $I_h = 7,9\%$ de I_p .

Uma seqüência de bifurcações, seguindo a rota de FEINGENBAUM, parece ser o destino final da cadeia de ilhas magnéticas, em $q = \frac{4}{1}$, gerada pelo mapeamento estroboscópico

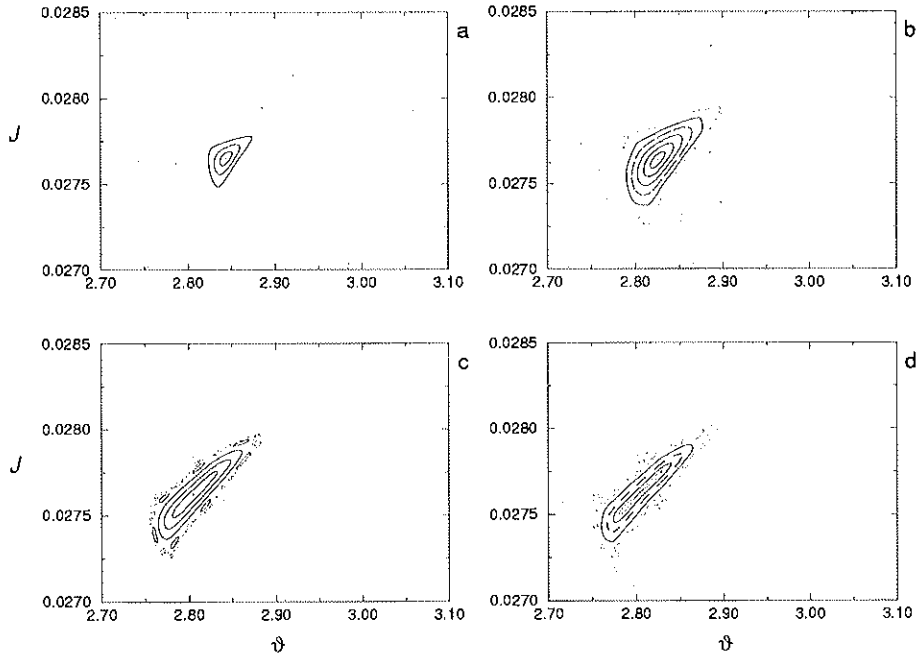


Figura 7.19: Segunda seqüência de mapas estroboscópicos mostrando a região próxima aos pontos fixos elípticos gerados pela bifurcação. Em a, usamos $I_h = 8, 1\%$ de I_p ; em b, usamos $I_h = 8, 2\%$ de I_p ; em c, usamos $I_h = 8, 3\%$ de I_p e em d, usamos $I_h = 8, 4\%$ de I_p .

que descreve a atuação de um conjunto de anéis limitadores magnéticos.

7.3 Conexão de Regiões Caóticas

De maneira resumida, podemos descrever da seguinte forma o *nascimento*, o *desenvolvimento* e a *morte* de uma cadeia de ilhas magnéticas em resposta à atuação do campo dos anéis limitadores magnéticos sobre o campo magnético de equilíbrio de um tokamak.

Na ausência do campo magnético de perturbação as superfícies magnéticas formam toros aninhados. Em termos do mapeamento estroboscópico das linhas de força do campo magnético, nas coordenadas canônicas de ação-ângulo, isso corresponde a um conjunto de linhas com $\mathcal{J}_0 = \text{constante}$, para as superfícies que possuem um fator de segurança q cujo valor é um número irracional, ou m pontos isolados para aquelas que possuem um fator de segurança cujo valor, $q = \frac{m}{n}$, é um número racional (figura-7.20). Sendo que \mathcal{J}_0 é o valor da *ação* de cada ponto inicial.

Quando ligamos o campo magnético de perturbação, ao redor de cada uma das superfícies para as quais q é um número racional, a aparência do *espaço de fase* muda de maneira notável. Surgem estruturas cujas formas assemelham-se àquelas produzidas pela

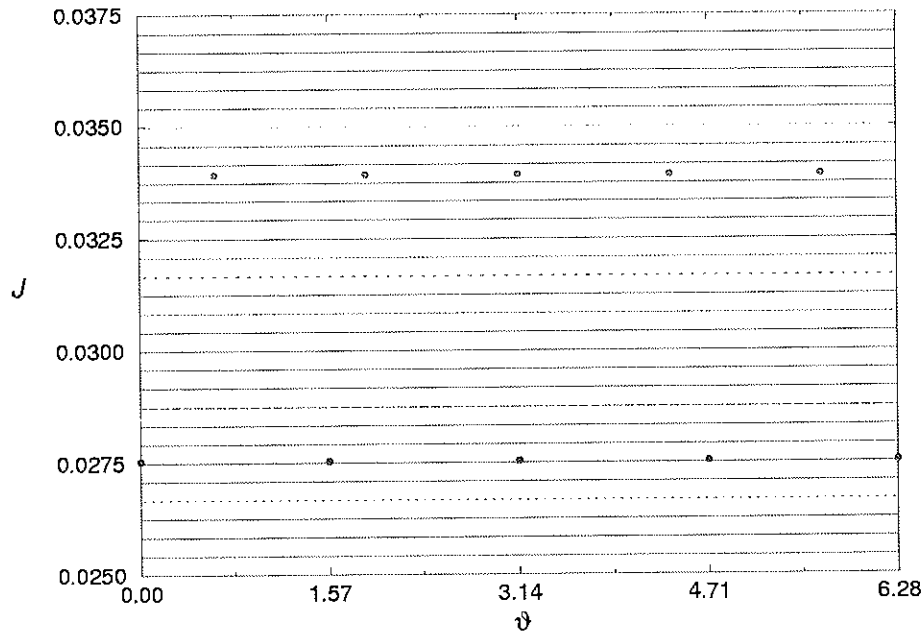


Figura 7.20: Superfícies magnéticas de equilíbrio em termos das coordenadas canônicas. Os valores da tabela-3.1 foram adotados para a simulação.

hamiltoniana de um pêndulo não-linear. Não só as formas são semelhantes, mas algumas características, tais como largura e frequência, obedecem à mesma regra de proporcionalidade com a raiz quadrada da intensidade da perturbação. Isto ocorre ao menos para valores moderados da corrente, I_h , que cria o campo magnético de perturbação — para o caso dos **limitadores magnéticos**, isso corresponde a $I_h \lesssim 2\%$ de I_p .

Nem todas as cadeias de ilhas têm o mesmo tamanho para um determinado valor da perturbação. As primeiras a serem notadas, as ilhas primárias, são aquelas produzidas pela ação ressonante das componentes de FOURIER mais intensas da hamiltoniana de perturbação (equação (6.18)). Para uma escala na qual as ilhas primárias começam a se tornar visíveis a grande maioria das cadeias de ilhas são imperceptíveis.

Ao se aumentar a intensidade da perturbação, as cadeias de ilhas intermediárias começam a serem notadas. Estas, formadas por uma espécie de acoplamento das ressonâncias primárias, surgem ao redor de superfícies magnéticas para as quais $q = \frac{m + m'}{n + n'}$. Sendo que, $q = \frac{m}{n}$ e $q = \frac{m'}{n'}$ correspondem às duas ressonâncias primárias. Esse processo de acoplamento não se restringe, apenas, às ressonâncias primárias. À medida que as cadeias de ilhas intermediárias crescem, começam a ocorrer acoplamentos das ilhas intermediárias com as primárias e das ilhas intermediárias entre si. Com isso, uma verdadeira *plêiade* de

cadeias de ilhas magnéticas intermediárias, de todas as ordens, é formada na região entre duas cadeias de ilhas primárias, como podemos ver na figura-7.21.

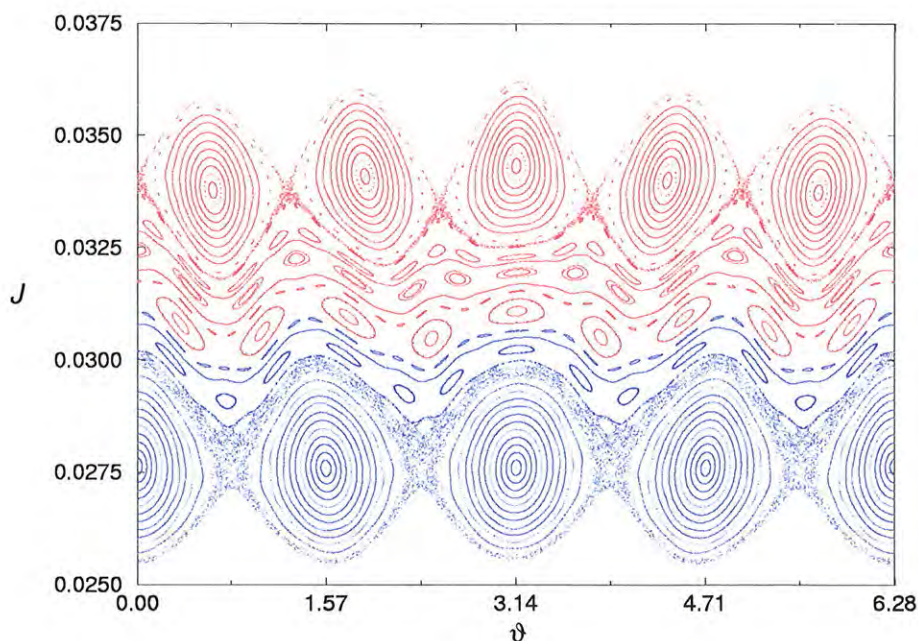


Figura 7.21: Mapa estroboscópico mostrando a região entre duas cadeias de ilhas magnéticas primárias e a formação das cadeias intermediárias. Os parâmetros para o mapeamento usados foram: $I_h = 1, 1\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$. Os parâmetros para o equilíbrio e os demais parâmetros para os limitadores magnéticos são os mesmos das figuras anteriores.

Podemos notar, também, da figura-7.21 que, ao redor das cadeias de ilhas primárias, já se tornam visíveis as regiões caóticas que envolvem as respectivas separatrizes. É de se esperar que as cadeias de ilhas intermediárias venham a facilitar a conexão dessas duas regiões de caos de separatriz reduzindo o valor do parâmetros de CHIRIKOV para um valor menor do que 1.

Aumentando-se mais e mais a intensidade da perturbação, as ilhas magnéticas tornam-se mais e mais largas fazendo com que a região caótica que envolve a cadeia de ilhas primárias se conecte com a correspondente região caótica das cadeias intermediárias mais próximas. Desta forma, amplia-se a área do *espaço de fase* acessível a uma linha de força caótica que se encontre nessa região. Isso ocorre ao redor de ambas as cadeias de ilhas primárias que estamos considerando até que, para um determinado valor da perturbação, as regiões caóticas que envolvem as cadeias de ilhas primárias se conectam. Para o equilíbrio e os anéis **limitadores magnéticos** considerados nesta tese, esse valor da cor-

rente de perturbação é de aproximadamente $I_h = 1,4\%$ de I_p como podemos notar do correspondente mapa estroboscópico (figura-7.22).

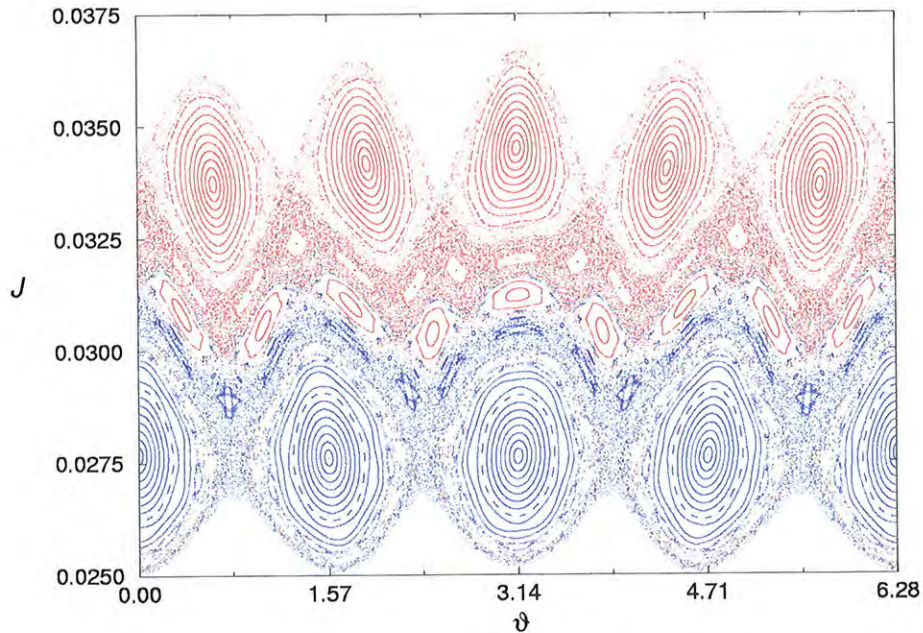


Figura 7.22: Mapa estroboscópico mostrando a conexão das regiões caóticas de duas cadeias de ilhas magnéticas primárias. Os parâmetros para o mapeamento usados foram: $I_h = 1,4\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$.

O parâmetro de CHIRIKOV, correspondente aos mapeamentos estroboscópicos mostrados, é dado por:

$$\chi_{Ch} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_{4,1} + \Delta_{5,1}}{\mathcal{J}_{0,5} - \mathcal{J}_{0,4}} \right), \quad (7.26)$$

em que $\Delta_{4,1}$ e $\Delta_{5,1}$ são as larguras das ilhas, dadas pela equação (7.18), nas regiões onde $q = \frac{4}{1}$ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{0,4}$) e $q = \frac{5}{1}$ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{0,5}$) respectivamente.

A figura-7.23 mostra o comportamento desse parâmetro à medida que aumentamos a corrente de perturbação.

Vemos que, para os limitadores magnéticos, o valor do parâmetro de CHIRIKOV para o qual ocorre a conexão das regiões caóticas é $\chi_{Ch}^{\text{crítico}} \approx 0,8$.

Existe uma relação universal (no sentido que ela é válida para todas as cadeias de ilhas vizinhas de qualquer ordem) para ilhas pendulares, que associa esse valor crítico do parâmetro de CHIRIKOV ao fator de segurança interno no centro da cadeia de ilhas

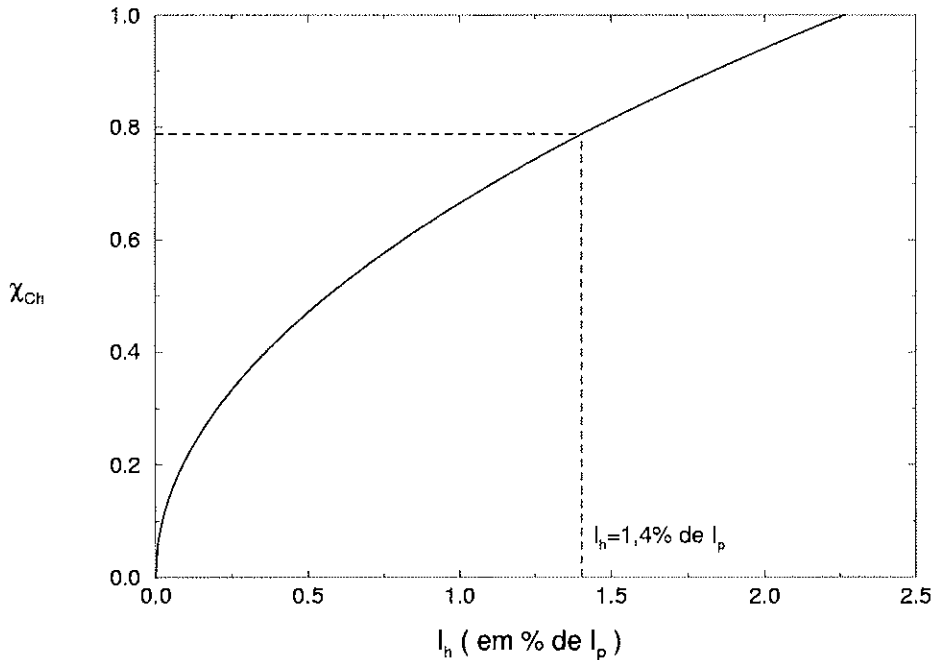


Figura 7.23: Parâmetro de CHIRIKOV, como função da corrente elétrica de perturbação, para as cadeias de ilhas para as quais $q = \frac{4}{1}$ e $q = \frac{5}{1}$.

magnéticas. Essa relação é dada por [42]:

$$\chi_{Ch}^{\text{crítico}} = \frac{4}{q_e} = 4\omega_e. \quad (7.27)$$

O valor de $\chi_{Ch}^{\text{crítico}}$ que obtivemos corresponde ao surgimento da cadeia de ilhas magnéticas secundárias, para a qual $q_e = \frac{5}{1}$, no centro da ilha primária. Isso pode ser verificado através da figura-7.24 obtida usando-se os procedimentos empregados na obtenção da figura-7.8 e da figura-7.9. A figura-7.24 mostra que para $I_h = 1,4\%$ de I_p a frequência no centro da ilha é aproximadamente $\omega_e = \frac{1}{5}$.

Portanto, a conexão entre regiões caóticas adjacentes, produzida pelos limitadores magnéticos, ocorre quando o parâmetro de CHIRIKOV atinge o valor de $\chi_{Ch}^{\text{crítico}} = \frac{4}{5}$. Esse resultado contradiz a chamada *regra dos dois-terços*, obtida do estudo do mapa padrão, a partir da qual o valor crítico do parâmetro de CHIRIKOV seria $\chi_{Ch}^{\text{crítico}} = \frac{2}{3}$.

O valor de $\frac{4}{5}$ para o parâmetro crítico foi obtido, também, por VIANA [20] ao estudar a atuação de campos magnéticos ressonantes, criados por hélices condutoras de correntes elétricas, sobre o campo de equilíbrio de tokamaks.

Persistindo no aumento da intensidade da perturbação, notamos que as cadeias de ilhas magnéticas intermediárias são totalmente *diluídas* numa densa região caótica que envolve

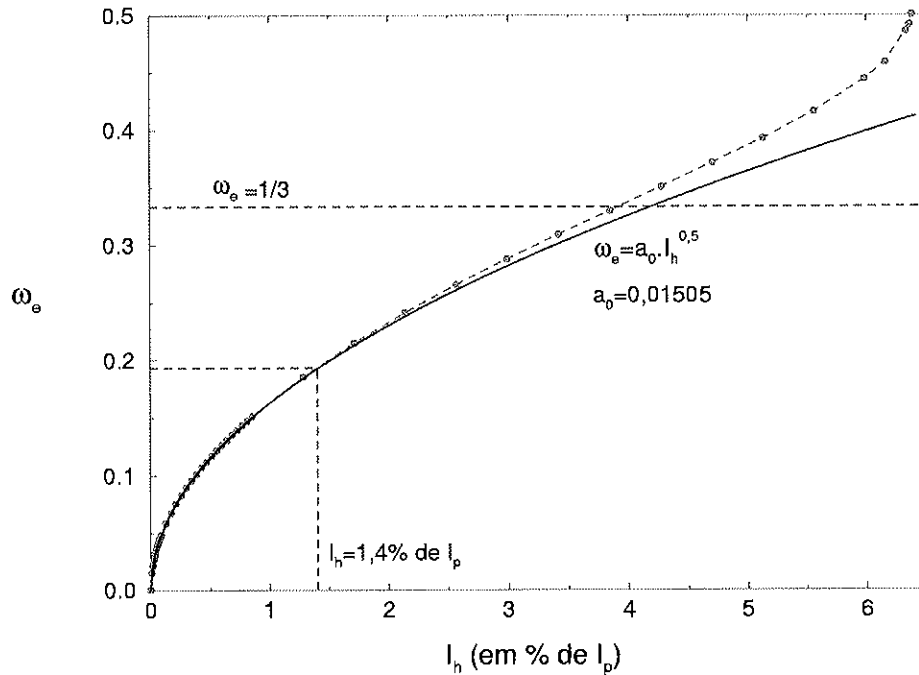


Figura 7.24: Comportamento da frequência no ponto fixo elíptico da ilha central, da cadeia de ilhas para a qual $q = \frac{4}{1}$, desde seu surgimento até sua bifurcação como função da corrente de perturbação.

a região central das duas cadeias de ilhas primárias que, ainda, possuem linhas de força estáveis ao seu redor (figura-7.25).

A partir do surgimento da cadeia de ilhas magnéticas secundárias para a qual $q_{in} = \frac{3}{1}$, o aumento da intensidade da perturbação inicia um processo que irá culminar com a destruição da região de linhas de força estáveis. Essa destruição se dará através de uma seqüência de bifurcações, por dobra de período, dos pontos fixos elípticos das ilhas que formam a cadeia de ilhas primárias (figura-7.26). O retângulo assinalado na figura-7.25 e na figura-7.26 corresponde, respectivamente, à figura-7.15a e à figura-7.16d da seqüência de figuras, usadas na seção 7.2, para ilustrar esse processo de bifurcação por dobra de período.

Notamos, também, na figura-7.24 que, para valores de I_h aproximadamente iguais ou maiores que aquele necessário para o surgimento da cadeia de ilhas secundárias para a qual $q_{in} = \frac{3}{1}$, a frequência no ponto fixo elíptico deixa de seguir a lei de proporcionalidade com $\sqrt{I_h}$.

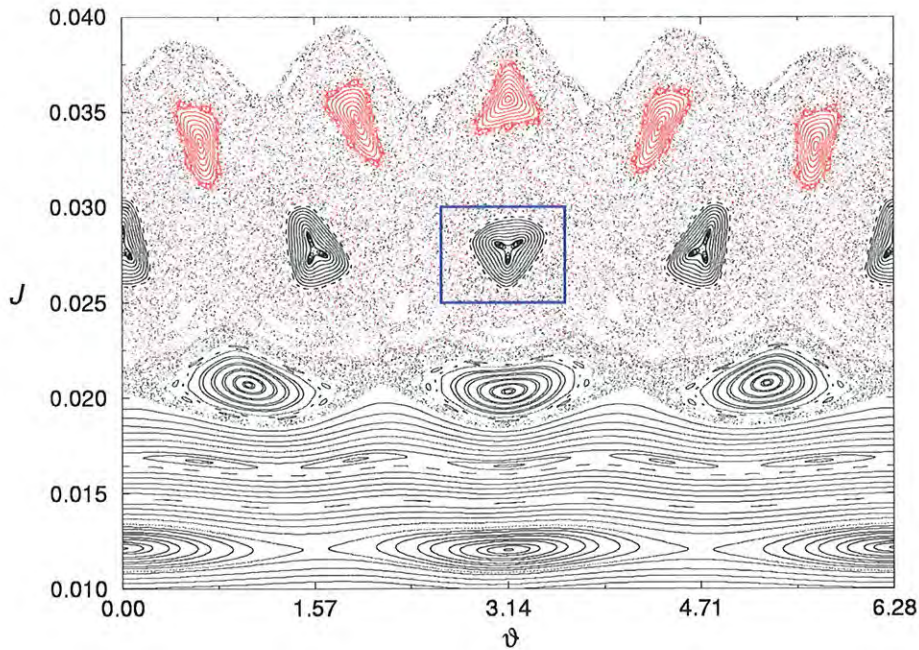


Figura 7.25: Mapa estroboscópico mostrando regiões de linhas de força estáveis, ao redor dos pontos elípticos das ilhas primárias, contidas na densa região caótica formada entre duas cadeias de ilhas magnéticas rimárias. Os parâmetros para o mapeamento usados foram: $I_h = 3,91\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$.

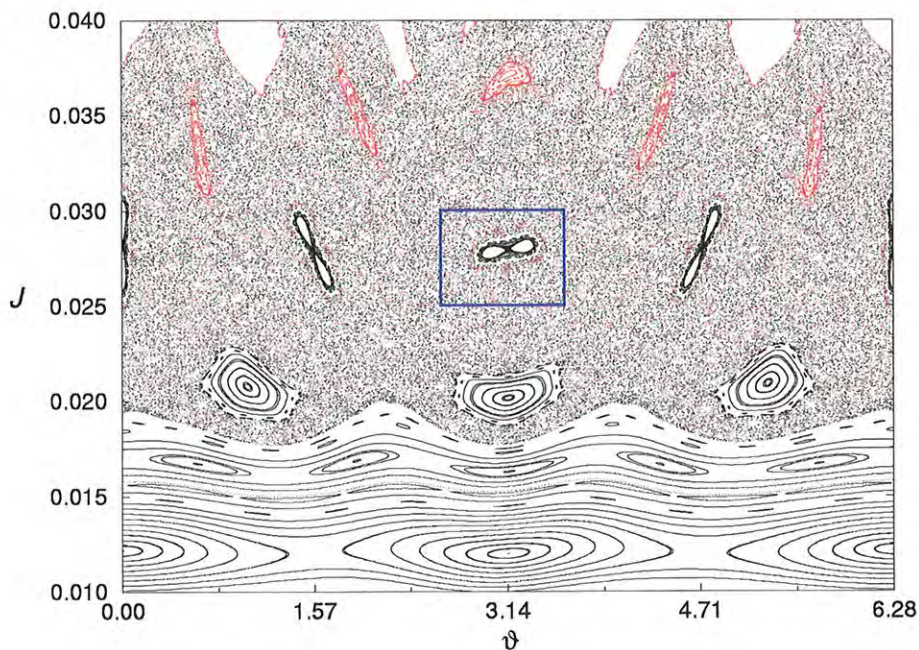


Figura 7.26: Mapa estroboscópico mostrando a bifurcação dos pontos fixos da cadeia de ilhas magnéticas para a qual $q = \frac{4}{1}$. Os parâmetros para o mapeamento usados foram: $I_h = 6,7\%$ de I_p , $\lambda = 0,48$ e $(m_0, n_0) = (4, 1)$.

Capítulo 8

Transporte das Linhas de Campo Magnético.

Neste capítulo, analisamos o transporte das linhas de força do campo magnético, na borda da coluna de plasma, sob a ação dos anéis limitadores magnéticos caóticos.

Parte dessa análise foi feita calculando-se o afastamento quadrático médio da ação, \mathcal{J} , com relação a um valor de referência, \mathcal{J}_0 , como uma função do número de voltas ao redor da câmara de confinamento, n , para um conjunto de pontos iniciais. Com isso, foi possível determinar o tipo de regime (subdifusivo, difusivo ou superdifusivo) que domina o processo de transporte local das linhas de força.

Analisamos, também, a perda ou o escape das linhas de força. Consideramos que uma linha de força é perdida quando esta colide com a parede da câmara. Isso foi feito estudando-se a variação, com relação ao número de voltas, da quantidade de linhas de força de um dado conjunto inicial assim como o processo estatístico associado às perdas dessas linhas de força.

Apresentamos, ainda, como um exemplo, alguns resultados esperados para a atuação dos anéis limitadores magnéticos caóticos no tokamak TCABR do Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

8.1 Transporte em Tokamaks

O entendimento do processo de transporte de partículas e energia, na camada caótica criada na periferia da coluna de plasma em tokamaks, é muito importante para a operação eficiente das máquinas destinadas à obtenção da fusão termonuclear controlada. Isto

porque alguns aspectos importantes para a integridade física da máquina e para a qualidade do confinamento, tais como:

- Evitar o aquecimento excessivo e localizado da parede interna da câmara de confinamento;
- Evitar que uma grande quantidade de impurezas, provenientes da interação do plasma com a parede interna da câmara, penetre na região central da coluna de plasma;
- E fazer isto através de mecanismos que sejam compatíveis com os procedimentos que resultam em um confinamento eficiente do plasma;

estão diretamente ligados ao processo de transporte de partículas e energia.

O movimento das partículas ionizadas se dá, preferencialmente, ao longo das linhas de força do campo magnético. Conseqüentemente, o processo de transporte das mesmas é bastante influenciado pela evolução das linhas de força do campo magnético na região caótica existente na borda da coluna de plasma.

O ciclo de blindagem de impurezas pela região caótica pode ser descrito, de forma simplificada, como segue: as linhas de força que *conectam* a parede da câmara à região caótica guiam as partículas ionizadas em direção à parede da câmara onde elas são neutralizadas. Uma vez neutralizadas elas se desacoplam das linhas de força e podem ser re-injetadas no plasma pelo processo de *sputtering*.

Se a região caótica for espessa o suficiente, as partículas re-injetadas serão ionizadas antes que atinjam o centro da coluna de plasma e passam a seguir as linhas de força do campo magnético sendo conduzidas de volta à parede. Isso aumenta a densidade de partículas na região próxima à parede da câmara de confinamento.

A temperatura eletrônica na borda da coluna de plasma, por sua vez, diminui em virtude desse processo de ionização e da realçada condutividade térmica ao longo das linhas de força. Com isso, mecanismos de produção de impurezas que são dependentes da temperatura eletrônica na borda do plasma, tal qual o processo de *sputtering*, têm suas intensidades reduzidas.

Sendo assim, a combinação do aumento da densidade e da diminuição da temperatura eletrônica na borda da coluna de plasma com um realçado transporte das linhas de força resulta num eficiente mecanismo de blindagem de impurezas. E, como dissemos anteriormente, as linhas de força que conectam a região caótica à parede da câmara de confinamento desempenham um papel importante nesse processo de blindagem.

8.2 Transporte Anômalo das Linhas de Força

O transporte das linhas de força é estudado, geralmente, calculando-se o afastamento quadrático médio, $\sigma^2(n)$, da ação, \mathcal{J} , como uma função do número de voltas ao redor da câmara. Este afastamento, $\sigma^2(n)$, é dado por:

$$\sigma^2(n) \equiv \langle (\mathcal{J}(n) - \mathcal{J}_0)^2 \rangle_\vartheta = \frac{1}{N_{LF}} \sum_{i=1}^{N_{LF}} (\mathcal{J}_i(n) - \mathcal{J}_0)^2, \quad (8.1)$$

em que a média é calculada sobre um conjunto de N_{LF} linhas de força cujas condições iniciais são: $\mathcal{J}_i(0) = \mathcal{J}_0$ e $\vartheta_i(0) = 2\pi \frac{i}{N_{LF}}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N_{LF}$.

Em geral, para um sistema cuja ação, \mathcal{J} , não esteja restrita a um domínio limitado do espaço de fase, o afastamento, $\sigma^2(n)$, apresenta o seguinte comportamento assintótico:

$$\sigma^2(n) = 2D_{LF}n^\mu, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Para um processo de transporte gaussiano, temos $\mu = 1$ e podemos definir um coeficiente de difusão dado por:

$$D_{LF} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2(n)}{2n}. \quad (8.3)$$

Processos de transporte para os quais $\mu \neq 1$ são chamados de processos de transporte anômalos. Esses se dividem em subdifusivos, quando $\mu < 1$, e superdifusivos, quando $\mu > 1$.

Para o caso particular do transporte de linhas de força do campo magnético em tokamaks, as equações (8.2) e (8.3) tornam-se inaplicáveis. Isso porque não podemos calcular o limite $n \rightarrow \infty$, pois as linhas de força não podem existir para além da parede da câmara de confinamento. Entretanto, sendo gaussiano o processo de transporte das linhas de força, é possível, ainda, calcular o coeficiente de difusão, D_{LF} , numa região de *espaço de fase* em que a evolução da *ação* está restrita a um determinado intervalo. Isto é feito analisando-se o número médio de voltas, $\langle n \rangle$, que um conjunto de linhas de força leva para deslocar-se de uma determinada distância, $\Delta\mathcal{J}$, ao invés de se analisar o afastamento quadrático médio. Quando consideramos \mathcal{J}_0 como sendo o ponto médio do intervalo $\Delta\mathcal{J}$, o coeficiente de difusão é dado por [54, 55]:

$$D_{LF} = \frac{(\Delta\mathcal{J})^2}{4G} \frac{1}{\langle n \rangle}, \quad (8.4)$$

com G sendo a constante catalan dada por:

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+2k)^2}. \quad (8.5)$$

A condição de que o processo de transporte seja gaussiano para que se possa aplicar o método do número médio de voltas é muito restritiva, pois sabemos que as equações que descrevem o traçado das linhas de força do campo magnético formam um sistema hamiltoniano com $1 + \frac{1}{2}$ grau de liberdade. Portanto, o problema do transporte das linhas de força pertence a uma classe mais ampla de sistemas: a classe dos sistemas hamiltonianos, cujo espaço de fase é constituído por uma diversidade de estruturas como ilhas de estabilidades, órbitas hiperbólicas, órbitas caóticas e muitas outras. Se, por um lado, isto torna o problema do transporte das linhas de força mais interessante, por outro, faz com que a natureza gaussiana do processo, na maioria dos casos, seja perdida [56, 57, 58].

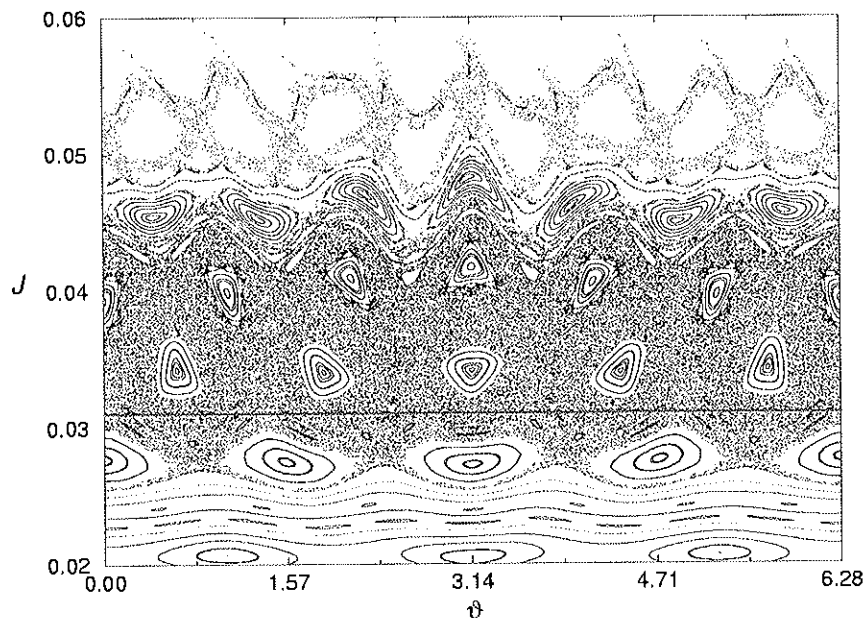


Figura 8.1: Mapa estroboscópico mostrando a localização dos pontos iniciais (linha vermelha) para o cálculo de $\sigma^2(n)$. Os parâmetros para os limitadores magnéticos são: $(m_0, n_0) = (5, 1)$, $\lambda = 0,54$ e $I_h = 2, 1\%$ de I_p .

É possível verificar o caráter anômalo do transporte das linhas de força para os limitadores magnéticos calculando-se o afastamento quadrático médio, $\sigma^2(n)$, como uma função do número de voltas, n , para o mapa da figura-8.1 e para o mapa da figura-8.2.

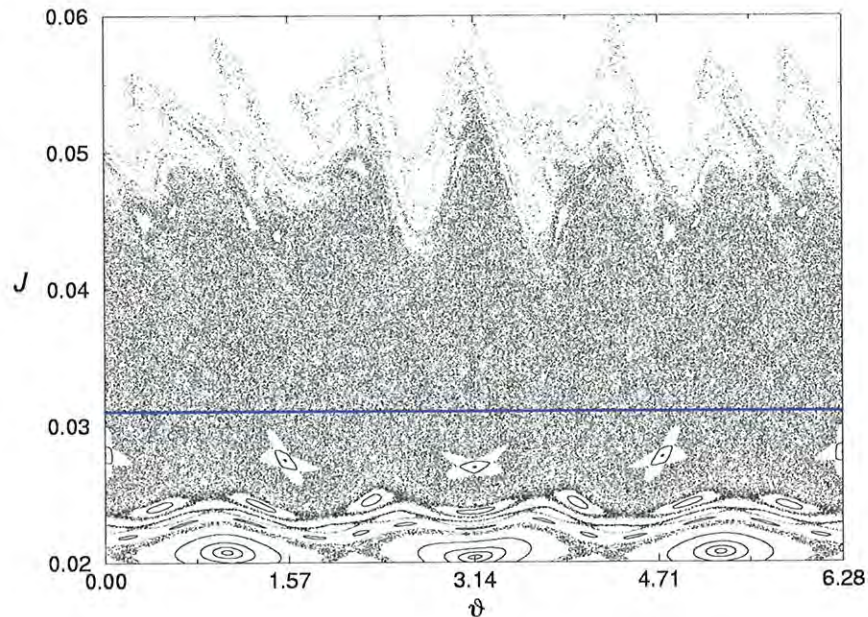


Figura 8.2: Mapa estroboscópico mostrando a localização dos pontos iniciais (linha vermelha) para o cálculo de $\sigma^2(n)$. Os parâmetros para os limitadores magnéticos são: $(m_0, n_0) = (5, 1)$, $\lambda = 0,54$ e $I_h = 4,5\%$ de I_p .

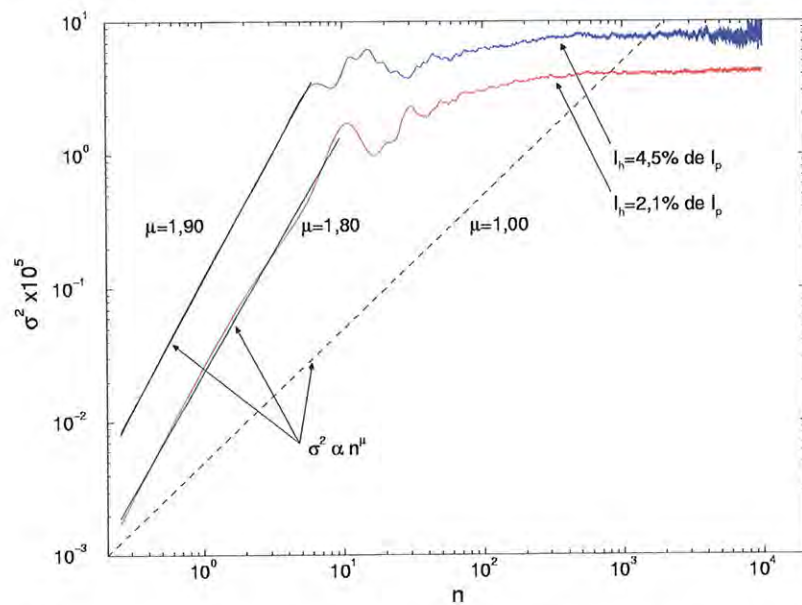


Figura 8.3: Afastamento quadrático médio, $\sigma^2(n)$, da ação, \mathcal{J} , como uma função do número de iterações, n .

A figura-8.3 mostra o resultado desse cálculo. Os parâmetros para o campo magnético de equilíbrio são os mesmos dos mapas estroboscópicos obtidos nos capítulos anteriores. Já para os anéis limitadores magnéticos, usamos os seguintes parâmetros: $(m_0, n_0) = (5, 1)$,

$\lambda = 0,54$ e dois valores diferentes para a corrente de perturbação, I_h . Escolhemos o arranjo $(m_0, n_0) = (5, 1)$ para termos a região caótica mais próxima da borda do plasma. Assim, podemos analisar mais facilmente o escape das linhas de força. A curva vermelha corresponde a $I_h = 2,1\%$ de I_p e a curva azul corresponde a $I_h = 4,5\%$ de I_p . Para ambas as curvas, utilizamos um conjunto com $N_{LF} = 4000$ pontos iniciais com $\mathcal{J}_i(0) = 0,031$ e $\vartheta_i(0) = 2\pi \frac{i}{N_{LF}}$ com $i = 0, 1, 2, \dots, N_{LF}$.

Em ambas as curvas vistas na figura-8.3, e para as primeiras iterações do mapeamento estroboscópico, $\sigma^2(n)$ apresenta um comportamento característico de transporte superdifusivo. Situação na qual $\sigma^2(n) \propto n^\mu$ com $\mu > 1$. Isto pode ser notado comparando os ajustes, feitos para as iterações iniciais, com a curva tracejada correspondente a $\sigma^2(n) \propto n$.

Após as primeiras iterações, o regime de transporte muda para subdifusivo. Isso porque algumas das linhas de força são aprisionadas, durante um número relativamente grande de iterações, pelas ilhas de estabilidade presentes no espaço de fase do sistema.

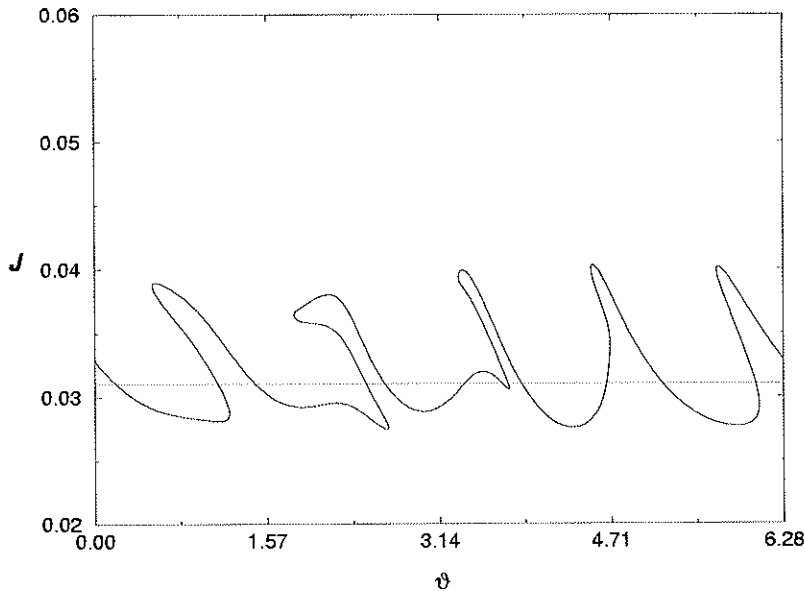


Figura 8.4: Estado final do conjunto de linhas de força após 5 voltas ao longo da câmara de confinamento. A linha vermelha corresponde ao estado inicial das linhas de força.

Acompanhando-se a evolução do conjunto de linhas de força (figura-8.4 e figura-8.5), observamos que este está sujeito ao fenômeno de *estica* e *dobra* bastante comum nos sistemas caóticos conservativos.

Notamos que, para as primeiras iterações do mapeamento estroboscópico, o mecanis-

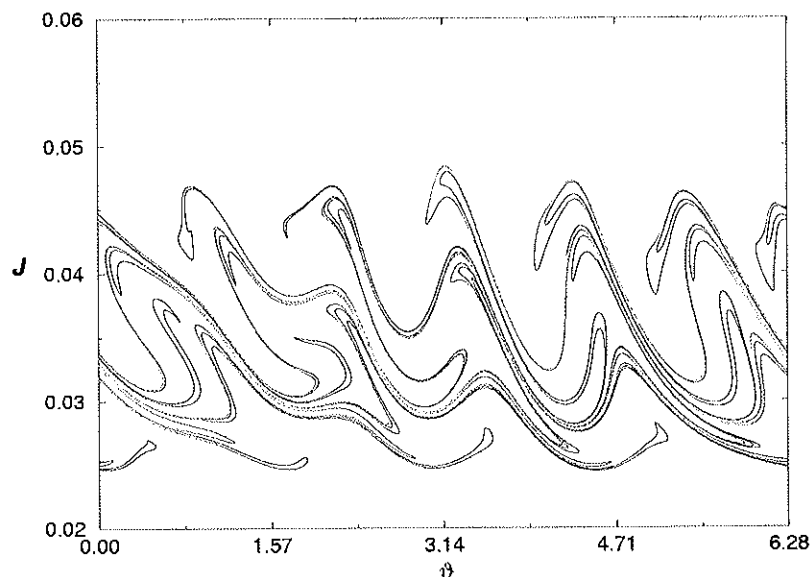


Figura 8.5: Estado final do conjunto de linhas de força após 15 voltas ao longo da câmara de confinamento.

mo de esticamento (e a contração associada) predomina com relação ao mecanismo de aprisionamento. E, em consequência disso, o regime de transporte das linhas de força é superdifusivo.

O mecanismo de dobra, decorrente do aprisionamento de algumas linhas de força por ilhas de estabilidade, torna-se importante somente após um determinado número de iterações, após o qual predomina o regime subdifusivo (ver figura-8.3).

Para o valor da corrente de perturbação, $I_h = 2,1\%$ de I_p , ainda existem superfícies magnéticas, entre a região caótica e a parede da câmara, que não foram destruídas. Isso limita o espalhamento das linhas de força fazendo com que $\sigma^2(n)$ tenda a um valor constante à medida em que n cresce.

Aumentando-se a corrente de perturbação, para por exemplo $I_h = 4,5\%$ de I_p , como indicado na figura-8.3, todas as superfícies magnéticas na periferia da coluna de plasma são destruídas (figura-8.2).

Não tendo mais uma superfície magnética que restrinja o espalhamento das linhas de força algumas delas acabam atingindo a parede da câmara de confinamento, deixando de contribuir para o cálculo de $\sigma^2(n)$. Conseqüentemente, o valor de $\sigma^2(n)$ oscila com mais intensidade à medida em que n aumenta.

8.3 Escape das Linhas de Força do Campo Magnético

Neste item, estudamos como ocorre o processo de escape das linhas de força da região caótica.

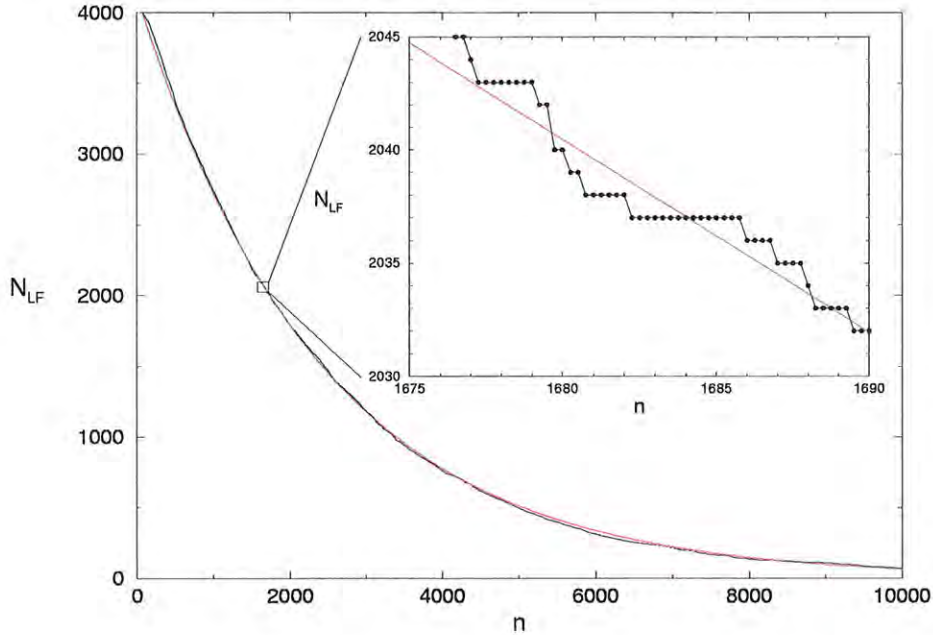


Figura 8.6: Variação do número de linhas de força, N_{LF} , do conjunto de linhas de força correspondente à curva azul da figura-8.3, como uma função do número de iterações, n .

Na figura-8.6 mostramos a dependência do número de linhas de força do conjunto usado para o cálculo do afastamento quadrático médio, $\sigma^2(n)$, correspondente à curva azul da figura-8.3, com o número, n , de voltas ao redor da câmara de confinamento. Cada volta na câmara, $\Delta n = 1$, equivale a 4 iterações do mapa estroboscópico, uma vez que estamos utilizando $N_a = 4$ anéis limitadores magnéticos. Uma linha de força deixa de ser contada ao atingir o valor $\mathcal{J} \simeq 0,06$, posição correspondente à parede da câmara.

O número de linhas de força, $N_{LF}(n)$, que permanecem na região caótica diminui exponencialmente à medida em que o número de iterações aumenta. Isso pode ser visto comparando-se a curva para $N_{LF}(n)$ com a curva exponencial ajustada (curva vermelha na figura-8.6), $N_{Aj}(n)$, dada por:

$$N_{Aj}(n) = N_0 e^{-\frac{(n - n_0)}{\bar{n}}}, \quad (8.6)$$

em cuja expressão $N_0 = 4000$, $n_0 = 69$ e $\bar{n} = 2.393$.

Quando observamos a variação do número de linhas de força durante um intervalo pequeno de número de voltas do mapa estroboscópico (detalhe ampliado na figura-8.6), notamos que essa variação não ocorre de maneira contínua. Pelo contrário, tal qual a diminuição exponencial sugere, o processo de escape das linhas de força assemelha-se ao processo estatístico que controla a desintegração de amostras radioativas.

Sabemos que ao processo de desintegração de amostras radioativas está associada uma distribuição de probabilidades de POISSON. E que essa distribuição, para uma dada taxa de desintegração α , fornece a probabilidade, dada por:

$$P_{\alpha}(m) = \frac{e^{-\alpha T} (\alpha T)^m}{m!}, \quad (8.7)$$

de que, durante o tempo, T , correspondente a um intervalo de observação, m núcleos radioativos decaiam.

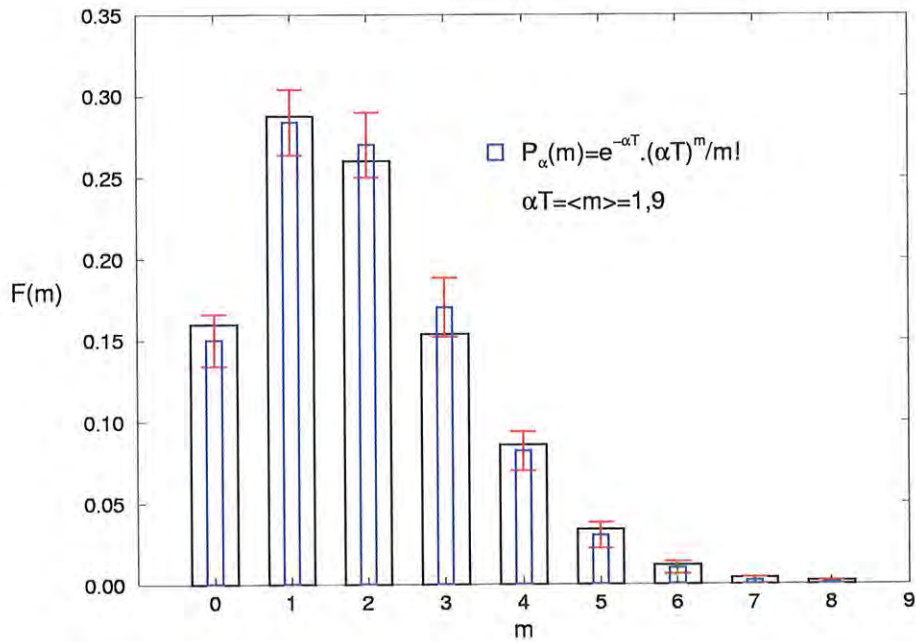


Figura 8.7: Histograma de frequências do número de linhas de força, m , que se conectam com a parede da câmara durante o tempo de uma observação, ou seja, duas voltas na câmara de confinamento. O número total de observações foi $N_O = 500$ correspondendo ao intervalo de número de voltas [1000, 2000] na figura-8.6. Em azul, temos a correspondente distribuição de POISSON.

Procurando explorar a extensão dessa semelhança com o processo de decaimento radioativo, calculamos o número de linhas de força, m , que se conectam com a parede da câmara de confinamento durante um intervalo de observação. Cada intervalo de observação, T , escolhido foi de duas voltas ao redor da câmara de confinamento e o número de

observações feitas foi $N_O = 500$. De posse dos valores para m , construímos um histograma de freqüências e o comparamos com a correspondente distribuição de POISSON para a qual o valor de $\alpha T = \langle m \rangle = 1,9$ foi calculado a partir das $N_O = 500$ observações. O resultado obtido pode ser visto na figura-8.7. O símbolo $\langle m \rangle$ representa o valor médio dos $N_O = 500$ valores de m .

Notamos, da figura-8.7, que a freqüência com a qual um dado número m de linhas de força escapam da região caótica, durante o intervalo de duas voltas na câmara de confinamento, apresenta uma boa concordância com aquela prevista pela distribuição de POISSON correspondente, dada pela equação (8.7), e que está representada em azul.

De forma a quantificarmos essa concordância, foi calculada uma barra de erro, para o modelo de POISSON, para os valores previstos do número de eventos em que m linhas são perdidas. O número de eventos que ocupam um particular canal de histogramação — e, portanto, um particular valor de m —, segue uma distribuição binomial com uma probabilidade de sucesso, $p = P_\alpha(m)$, e uma probabilidade de fracasso, $q = [1 - P_\alpha(m)]$. Sendo que sucesso e fracasso significam, respectivamente, pertencer ou não àquele particular canal de histogramação. Segundo esse modelo, devemos esperar um número médio de eventos, dado por $N_O P_\alpha(m)$, no canal de histogramação correspondente ao particular valor de m , com uma incerteza dada por $\sqrt{N_O P_\alpha(m) [1 - P_\alpha(m)]}$ [59].

A boa concordância com a distribuição de POISSON é indicada pelo fato dos valores, nos canais de histogramação, diferirem daqueles previstos por tal modelo por menos que uma unidade do desvio padrão.

Calculamos, também, os parâmetros *assimetria*, S , e *curtose*, K , para o conjunto dos N_O valores de m obtidos. Esses parâmetros são definidos por [60]:

$$S = \frac{\langle (m - \langle m \rangle)^3 \rangle}{\langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle^{\frac{3}{2}}}, \quad (8.8)$$

$$K = \frac{\langle (m - \langle m \rangle)^4 \rangle}{\langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle^2}. \quad (8.9)$$

Os quais podem ser comparados com as seguintes expressões válidas para uma distri-

buição de POISSON [60]:

$$S_P = \frac{1}{\sqrt{\langle m \rangle}}, \quad (8.10)$$

$$K_P = 3 + \frac{1}{\langle m \rangle}. \quad (8.11)$$

Os valores para S , K , S_P e K_P obtidos foram:

$$S = 0,84 \quad \text{e} \quad S_P = 0,73,$$

$$K = 3,72 \quad \text{e} \quad K_P = 3,53.$$

Dado que o escape das linhas de força aparentemente corresponde a um processo estatístico, cuja distribuição de probabilidades é dada por uma distribuição de POISSON, temos que ao tamanho, \mathcal{N} , dos intervalos de número de voltas entre dois escapes consecutivos, de qualquer número m de linhas de força, deve corresponder uma densidade de probabilidades exponencial dada por:

$$P(\mathcal{N}) = \eta e^{-\eta \mathcal{N}}. \quad (8.12)$$

Sendo que, essa densidade de probabilidades exponencial não é uma qualquer, mas está vinculada à distribuição de POISSON dos escapes das linhas de força através da condição $\eta = \alpha$.

Esses tamanhos, \mathcal{N} , dos intervalos de número de voltas entre dois escapes consecutivos correspondem aos platôs vistos no detalhe ampliado da figura-8.6.

A figura-8.8 mostra o histograma de freqüências com as quais os tamanhos, \mathcal{N} , dos platôs ocorreram durante o intervalo, $n = [1000, 2000]$, em que o experimento numérico foi realizado. Esse intervalo é o mesmo que foi usado para a obtenção dos dados para o histograma da figura-8.7. Em azul, temos o histograma derivado da equação (8.12) quando o valor de $\eta = \alpha$ é utilizado. O valor de α é determinado pela expressão:

$$\alpha = \frac{\langle m \rangle}{T}, \quad (8.13)$$

na qual $\langle m \rangle = 1,9$ e $T = 2$, ou seja, duas voltas ao redor da câmara.

Novamente podemos observar a boa concordância dos valores obtidos do experimento numérico com aqueles derivados de um processo regido pela distribuição de POISSON. Essa boa concordância é indicada pelo fato dos valores, em cada canal de histogramação, estarem distanciados menos que um desvio padrão, na sua maioria, dos valores previstos pelo processo de POISSON correspondente.

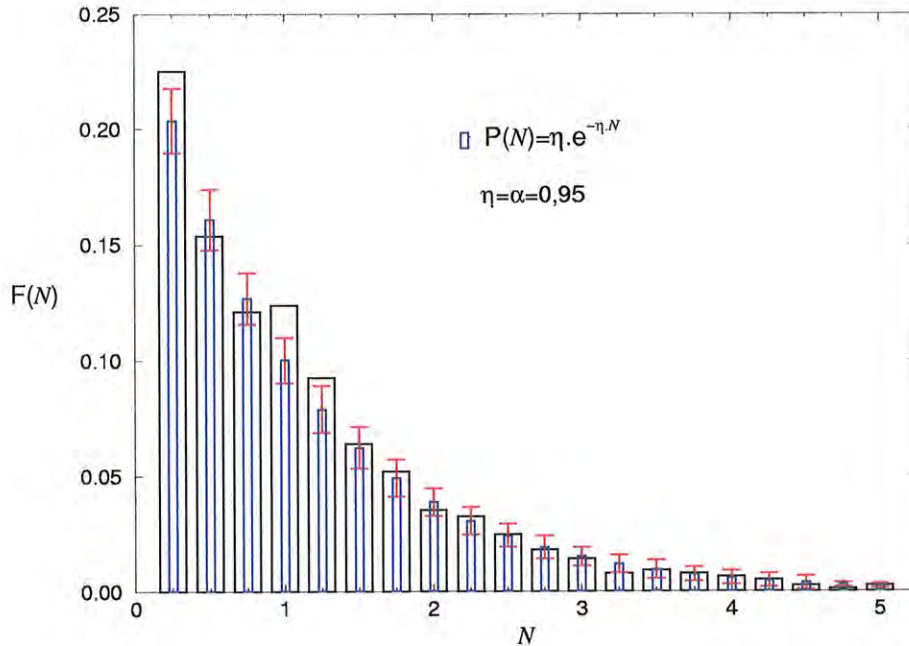


Figura 8.8: Histograma de frequências dos tamanhos dos platôs correspondentes aos intervalos de número de voltas entre dois escapes consecutivos, de qualquer quantidade m de linhas de força, para o intervalo $n = [1000, 2000]$. Os pontos azuis indicam os valores previstos pela distribuição exponencial derivada do modelo de POISSON com $\eta = \alpha = 0,95$.

Da equação (8.12), temos que:

$$\eta = \frac{1}{\langle \mathcal{N} \rangle}. \quad (8.14)$$

Calculando-se o valor de $\langle \mathcal{N} \rangle$, a partir do experimento numérico que originou o histograma da figura-8.8, obtemos $\eta = 0,90$, cujo valor é aproximadamente igual ao valor esperado $\eta = \alpha = 0,95$ decorrente do modelo de POISSON.

Como no exemplo do decaimento radioativo, se observarmos o número de linhas de força, que permanecem na região caótica, por um período muito longo de número de voltas, a taxa α com que as linhas se conectam com a parede irá se alterar ao longo do experimento. Conseqüentemente, o número de linhas que se conectam com a parede da câmara, num intervalo de observação, T , não irá se distribuir de acordo com uma POISSON. No entanto, se dividirmos o período total de observação em uma dada quantidade, N , de intervalos menores, tal qual no experimento descrito anteriormente, cada pequeno intervalo será descrito por uma distribuição de POISSON. Certamente a taxa, α_1 , do primeiro intervalo será bem diferente da taxa, α_N , do intervalo que se localiza no final do período de observação, mas, de acordo com uma propriedade característica da distribuição de

POISSON, a soma dos números de linhas de força que se conectam com a parede durante um intervalo de observação, T , nos vários segmentos em que o período total foi dividido será distribuída de acordo com uma POISSON cuja taxa, α , será: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ [59].

8.3.1 Padrão de Escape

Calculamos o número de voltas médio, $\langle n_c \rangle$, que uma linha de força, localizada na região caótica existente na periferia da coluna de plasma, necessita para atingir a parede da câmara de confinamento.

O valor de $\langle n_c \rangle$ foi calculado através da expressão:

$$\langle n_c \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_{c_i}, \quad (8.15)$$

para um conjunto com $N = 2000$ linhas de força distribuídas aleatoriamente na região caótica existente para $0,025 < \mathcal{J} < 0,060$ (figura-8.2). Na equação (8.15), n_{c_i} é o número de voltas que a i -ésima linha de força do conjunto considerado dispendeu para atingir a parede da câmara.

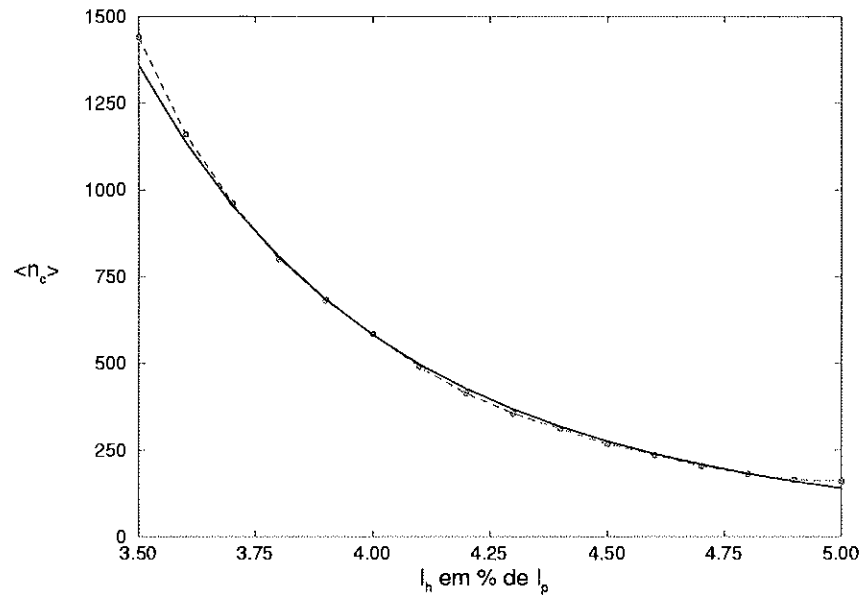


Figura 8.9: Número médio de voltas para se atingir a parede da câmara em função da corrente de perturbação. Os pontos indicam os valores numéricos obtidos e a linha vermelha uma variação $\langle n_c \rangle \propto I_h^{-\beta}$ com $\beta = 6,35$.

O número médio de voltas, $\langle n_c \rangle$, diminui consideravelmente com o aumento da corrente de perturbação, I_h . E sua dependência com essa corrente de perturbação apresenta uma boa concordância com uma lei de potência da forma $\langle n_c \rangle \propto I_h^{-\beta}$ conforme podemos ver na figura-8.9, com $\beta = 6,35$.

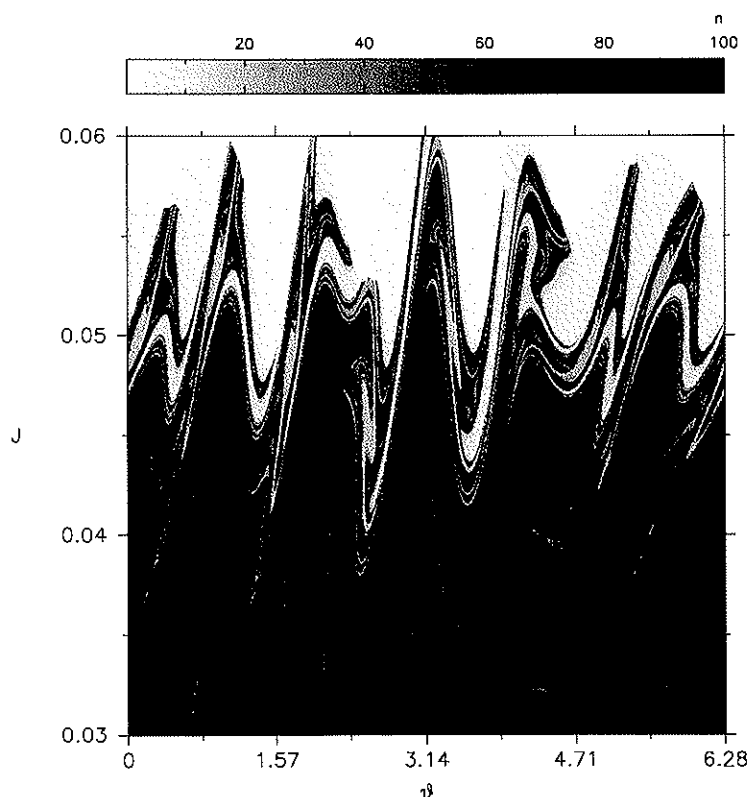


Figura 8.10: Padrão de escape das linhas de força do campo magnético na borda do plasma. Os parâmetros para o campo magnético de equilíbrio são os mesmos usados nas figuras anteriores. Os parâmetros para o campo dos limitadores magnéticos são: $I_h = 5.0\%$ de I_p , $(m_0, n_0) = (5, 1)$ e $\lambda = 0,54$. A escala de cor representa o número de voltas que uma linha necessita para atingir a parede da câmara.

Um outro aspecto interessante do transporte das linhas de força, para valores suficientemente altos da corrente de perturbação, pode ser observado na figura-8.10. Essa figura mostra o padrão de escape das linhas de força sob a ação dos limitadores magnéticos atuando com os seguintes parâmetros: $I_h = 5.0\%$ de I_p , $(m_0, n_0) = (5, 1)$ e $\lambda = 0,54$.

O padrão de escape consiste em um plano de condições iniciais para as quais associamos um ponto de coloração em escala cinza cujo tom é proporcional ao número de voltas que a correspondente linha de força realiza até, eventualmente, atingir a parede da câmara de confinamento.

Podemos observar do padrão de escape que, ao contrário do que se esperaria para

um processo difusivo, o mecanismo de escape das linhas de força na borda da coluna de plasma possui uma estrutura bem definida. Apresentando regiões, representadas pelas *línguas brancas* que penetram na região caótica, de onde as linhas de força que dali iniciam suas evoluções rapidamente atingem a parede da câmara.

Essa estrutura com um padrão bem definido, apesar de bastante complexa e aparentemente fractal, se adequa mais a um processo convectivo possuindo canais de escape preferenciais, do que a um processo difusivo em que esperaríamos uma estrutura menos organizada com as regiões de onde as linhas escapam rapidamente distribuídas de maneira aleatória pela borda da coluna de plasma.

8.4 Limitador Magnético Caótico para o TCABR

Neste item, apresentamos alguns resultados para os quais utilizamos os parâmetros típicos de operação do tokamak TCABR (ver tabela-8.1) para descrever o campo magnético de equilíbrio.

O TCABR é um tokamak que se encontra instalado no *Laboratório de Física de Plasmas* do Instituto de Física da Universidade de São Paulo e cuja operação iniciou-se recentemente.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio maior	R_0	0,61 m
Raio menor	b^1	0,22 m
Raio da coluna de plasma	a	0,18 m
Campo magnético toroidal	B_φ	1,2 T
Corrente de plasma	I_p	70 kA
Fator de segurança na borda do plasma	q	≈ 5
Energia térmica dos elétrons na borda do plasma	kT_e	20 eV
Tempo de duração da descarga	τ	120 ms
Expoente da densidade de corrente de plasma	γ	3

Tabela 8.1: Parâmetros do tokamak TCABR adotados para as simulações numéricas.

¹Uma vez que o TCABR possui seção transversal retangular, consideramos b como sendo o raio da circunferência inscrita nesta seção transversal.

Inicialmente, apresentamos o mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético de equilíbrio representado nos vários sistemas de coordenadas utilizados nesta tese.

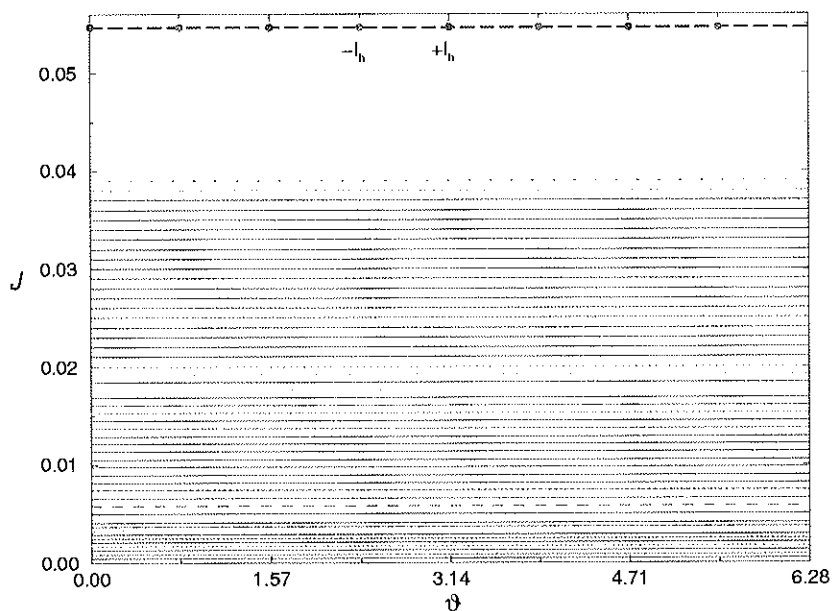


Figura 8.11: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, para o tokamak TCABR, representado nas coordenadas canônicas. Os símbolos \bullet indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

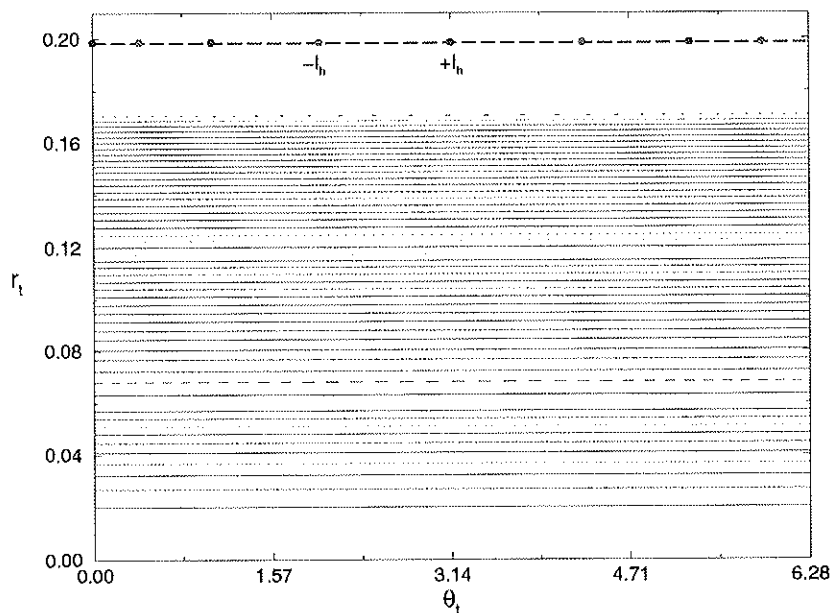


Figura 8.12: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, para o tokamak TCABR, representado nas coordenadas polares toroidais. Os símbolos \bullet indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

A figura-8.11 mostra o mapa estroboscópico representado nas coordenadas canônicas, (\mathcal{J}, ϑ) . Nela, também está representada a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um dos anéis limitadores magnéticos cujos parâmetros são: $(m_0, n_0) = (4, 1)$ e $\lambda = 0,53$. Podemos observar dessa figura que nas coordenadas canônicas os condutores possuem uma separação angular, $\Delta\vartheta$, constante.

Na figura-8.12 temos as mesmas superfícies magnéticas indicadas na figura-8.11, porém, representadas nas coordenadas polares toroidais, (r_t, θ_t) . Nessa figura, podemos observar que a separação angular entre os condutores não é mais constante. Ela é menor para os condutores próximos a $\theta_t = 0$ do que para os condutores próximos a $\theta_t = \pi$.

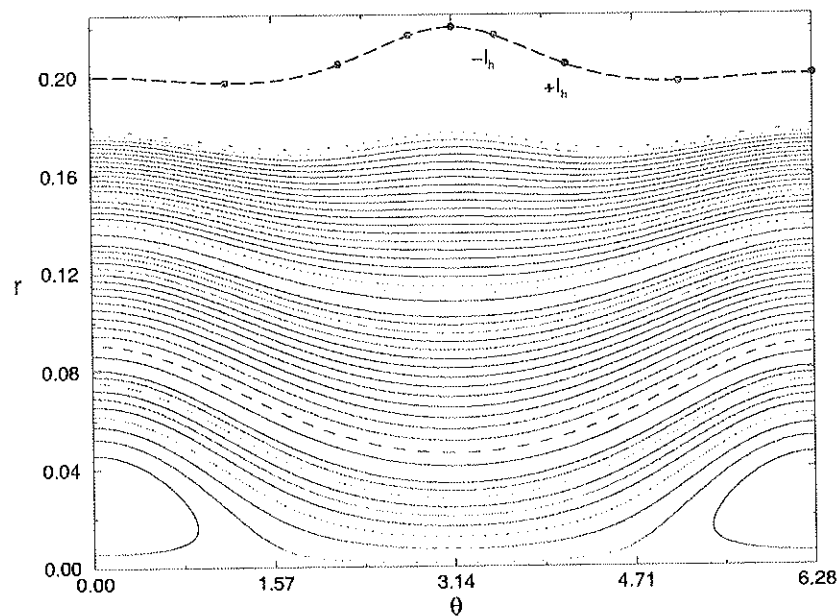


Figura 8.13: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, para o tokamak TCABR, representado nas coordenadas polares locais. Os símbolos \bullet indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

Em termos das coordenadas polares locais, (r, θ) , essas superfícies magnéticas se apresentam como indicado na figura-8.13. Vemos que as superfícies magnéticas diferem de forma considerável de curvas para as quais r é constante. Notamos, também, a presença de uma *pseudo-ilha* na região próxima a $r = 0$ em virtude do deslocamento do eixo magnético (deslocamento de SHAFRANOV).

Finalmente, temos na figura-8.14 um corte transversal da câmara de confinamento do TCABR, representado em termos das coordenadas cilíndricas, (R, Z) , no qual podemos ver indicadas as mesmas superfícies magnéticas de equilíbrio das figuras anteriores. Vemos,

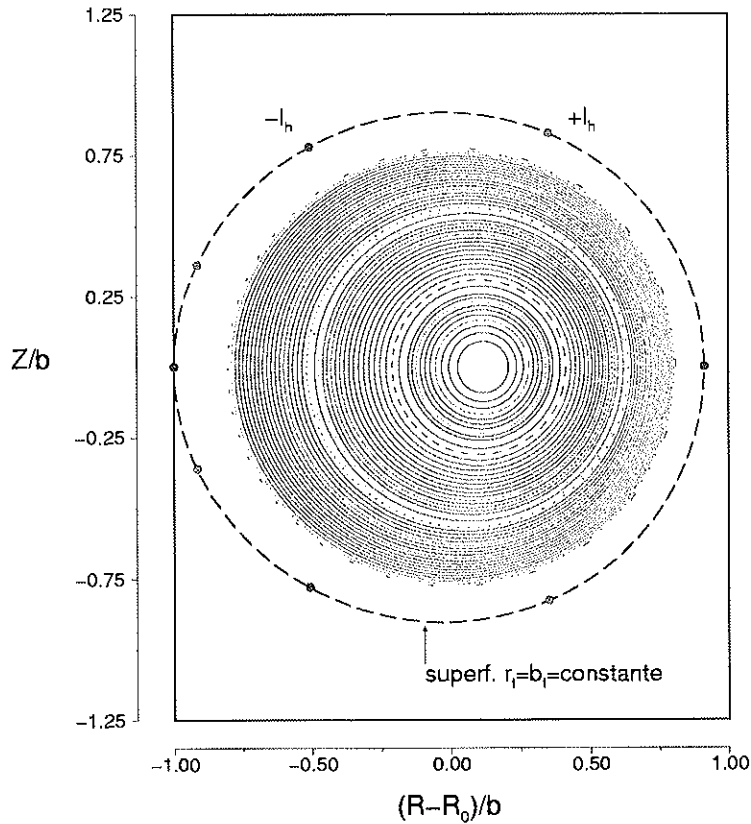


Figura 8.14: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético de equilíbrio, para o tokamak TCABR, representado nas coordenadas cilíndricas. A curva tracejada corresponde à superfície $r_t = b_t = \text{constante}$ e os símbolos \bullet indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

também, a superfície $r_t = b_t = \text{constante}$ sobre a qual se localizam os condutores de corrente elétrica que produzem o campo magnético de perturbação dos anéis limitadores magnéticos.

Nas figuras anteriores consideramos as superfícies magnéticas que estão relacionadas apenas ao campo magnético de equilíbrio, $\vec{B}^{(0)}$. Quando levamos em conta o campo de perturbação criado pelos limitadores magnéticos, algumas dessas superfícies são modificadas consideravelmente.

A figura-8.15 e a figura-8.16 mostram o mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético, sob a ação dos limitadores magnéticos, representado nas coordenadas canônicas e nas coordenadas polares locais respectivamente. A corrente de perturbação usada é $I_h = 1,5$ kA correspondendo a aproximadamente 2% da corrente de plasma, I_p . Os demais parâmetros são: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $\lambda = 0,53$ e $N_a = 4$. Para o cálculo do campo magnético de equilíbrio usamos os parâmetros da tabela-8.1.

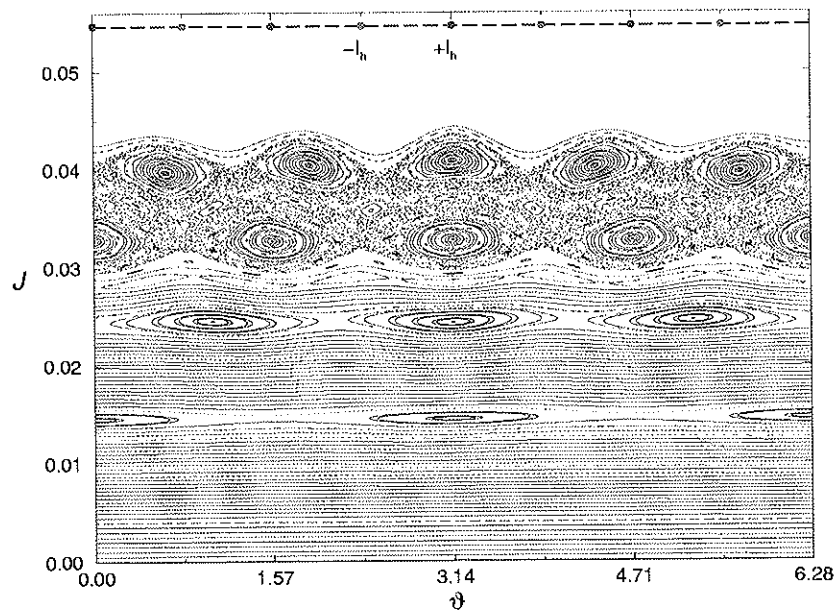


Figura 8.15: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético para o tokamak TCABR representado nas coordenadas canônicas. Os parâmetros para o campo magnético de equilíbrio são os da tabela-8.1. Os parâmetros para os limitadores magnéticos são: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $\lambda = 0,53$, $N_a = 4$ e $I_h = 1,5$ kA. Os símbolos \bullet indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

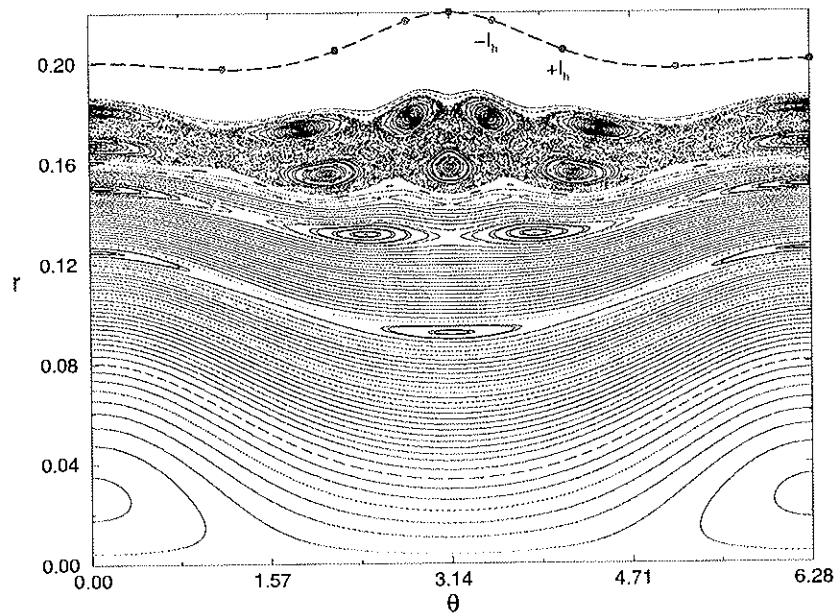


Figura 8.16: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético para o tokamak TCABR representado nas coordenadas polares locais. Os parâmetros para o campo magnético de equilíbrio são os da tabela-8.1. Os parâmetros para os limitadores magnéticos são: $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $\lambda = 0,53$, $N_a = 4$ e $I_h = 1,5$ kA. Os símbolos \bullet indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

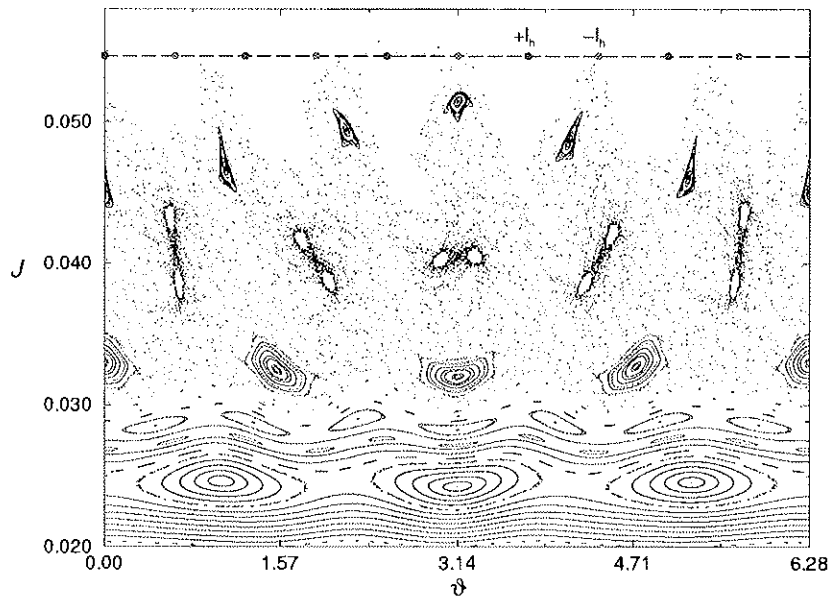


Figura 8.17: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético para o tokamak TCABR representado nas coordenadas canônicas. Os parâmetros para o campo magnético de equilíbrio são os da tabela-8.1. Os parâmetros para os limitadores magnéticos são: $(m_0, n_0) = (5, 1)$, $\lambda = 0,59$, $N_\alpha = 4$ e $I_h = 3,2$ kA. Os símbolos • indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

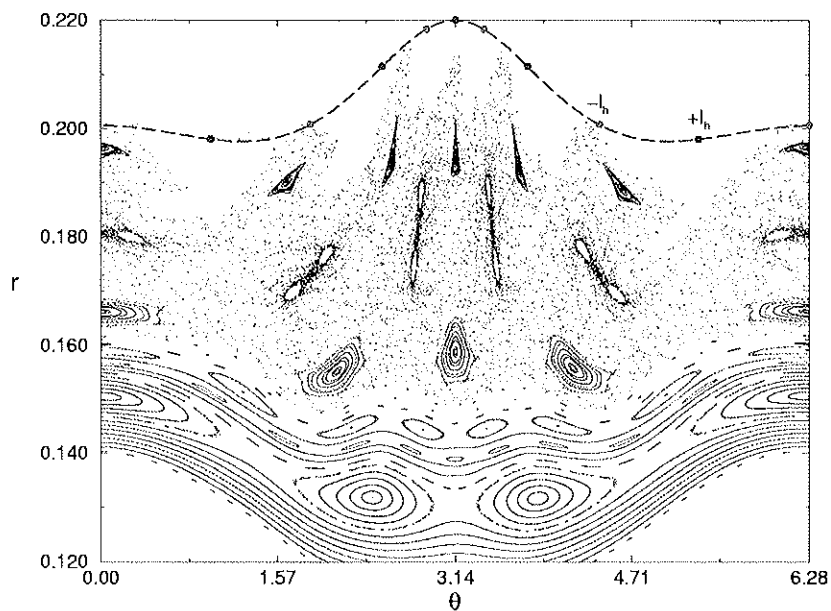


Figura 8.18: Mapa estroboscópico das linhas de força do campo magnético para o tokamak TCABR representado nas coordenadas polares locais. Os parâmetros para o campo magnético de equilíbrio são os da tabela-8.1. Os parâmetros para os limitadores magnéticos são: $(m_0, n_0) = (5, 1)$, $\lambda = 0,59$, $N_\alpha = 4$ e $I_h = 3,2$ kA. Os símbolos • indicam a localização dos condutores de corrente elétrica que formam um anel limitador magnético.

Para esse valor da corrente de perturbação temos uma região de linhas de força caóticas ao redor da superfície para qual $q = \frac{m_0}{n_0}$, mas ainda existem superfícies regulares entre essa região e a parede da câmara que impedem o escape das linhas de força.

Aumentando-se a corrente de perturbação para $I_h = 3,2$ kA e escolhendo-se $\lambda = 0,59$ de forma que os limitadores magnéticos atuem mais intensamente na região em que $q = \frac{m_0}{n_0} = \frac{5}{1}$, todas as superfícies localizadas entre a região caótica e a parede da câmara são destruídas possibilitando o escape das linhas de força. Isso pode ser verificado na figura-8.17 e na figura-8.18, que mostram o mapa estroboscópico das linhas de força representado nas coordenadas canônicas e nas coordenadas polares locais, respectivamente.

Uma vez que não há mais nenhuma barreira impedindo que as linhas de força atinjam a parede da câmara, podemos usar o número médio de voltas, $\langle n_c \rangle$ (equação (8.15)), para estimar um tempo de escape, τ_c , para as partículas ionizadas que se encontram na região de linhas de força caóticas.

Esse tempo de escape é estimado como:

$$\tau_c = \frac{2\pi R_0 \langle n_c \rangle}{v_T}, \quad (8.16)$$

em que $2\pi R_0 \langle n_c \rangle$ é o comprimento de uma linha de força hipotética que escapa da região caótica após $\langle n_c \rangle$ voltas ao redor da câmara de confinamento e, v_T , dado por:

$$v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (8.17)$$

é o módulo da velocidade térmica com a qual as partículas ionizadas, de massa m , movem-se ao longo dessa linha de força hipotética. Nessa equação, k é a constante de BOLTZMAN.

Para que os limitadores magnéticos caóticos sejam efetivos na blindagem das impurezas é necessário que o tempo de escape dessas impurezas seja menor que a duração da descarga elétrica.

Considerando um plasma de hidrogênio com uma energia térmica $kT = 20$ eV na periferia da coluna de plasma, obtivemos para os elétrons ($m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg) e para os prótons ($m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg), respectivamente, os seguintes tempos de escape: $\tau_c(e) = 0,2$ ms e $\tau_c(p) = 9,3$ ms.

Escolhemos a massa do átomo de Berílio ($m_{Be} = 1,50 \times 10^{-26}$ kg) para representar a massa das impurezas porque seu número atômico, $Z = 4$, é aproximadamente igual ao número atômico efetivo, Z_{ef} , esperado para o plasma do TCABR. Conseqüentemente, o tempo de escape estimado para as impurezas foi: $\tau_c(Be) = 27,8$ ms.

Todas essas estimativas dos tempos de escape consideraram um número médio de voltas $\langle n_c \rangle = 150$ correspondendo a um campo de perturbação cuja intensidade média na borda do plasma era $\left\langle \frac{B_h^1(a)}{B_T} \right\rangle = 6,0 \times 10^{-3}$ ($I_h = 3,5$ kA, $(m_0, n_0) = (5, 1)$ e $\lambda = 0,59$).

Uma vez que o tempo estimado para o escape das impurezas é menor do que $\frac{1}{4}$ da duração das descargas elétricas ($\tau = 120$ ms), concluímos que os limitadores magnéticos caóticos podem ser utilizados para o controle de impurezas no tokamak TCABR.

Capítulo 9

Conclusões.

Nesta tese, analisamos como a geometria toroidal das câmaras de confinamento de plasmas em tokamaks condiciona a maneira com que os condutores de correntes elétricas são enrolados sobre essas câmaras. Esses condutores, por sua vez, produzem o campo magnético ressonante responsável pelas mudanças topológicas das superfícies magnéticas de equilíbrio.

Uma das principais conseqüências da geometria toroidal das câmaras de confinamento é fazer com que as linhas de força do campo magnético de equilíbrio apresentem uma helicidade não uniforme. Essa helicidade não uniforme das linhas de força modifica o perfil radial do fator de segurança próximo à borda da coluna de plasma. Como mostramos no final do capítulo 3, o fator de segurança na borda da coluna de plasma é maior do que o correspondente valor para linhas de força com helicidade uniforme. Isso aproxima as ilhas magnéticas nessa região facilitando a superposição e, conseqüentemente, a destruição das mesmas.

Os condutores helicoidais, que criam o campo magnético ressonante, são enrolados sobre a câmara de confinamento de modo a reproduzirem o traçado das linhas de força que se localizam na superfície magnética sobre a qual se deseja atuar. Por isso, esses condutores também devem possuir uma helicidade não uniforme caracterizada por um parâmetro $\lambda \neq 0$. A não uniformidade no passo de enrolamento dos condutores helicoidais resultou em uma perturbação ressonante mais concentrada ao redor da superfície sobre a qual se pretendia atuar. Isso pôde ser observado comparando-se os mapas estroboscópicos para os quais $\lambda = 0$ (condutores de corrente enrolados com passo uniforme) com aqueles para os quais $\lambda \neq 0$ (condutores enrolados de forma a acompanharem uma linha de força

sobre uma superfície racional). Outra característica interessante decorrente da geometria toroidal é o fato das ilhas magnéticas, de uma mesma cadeia, terem tamanhos diferentes e estarem mais próximas na região em que o campo magnético toroidal é mais intenso.

Uma outra maneira, que apresentamos nesta tese, de se produzir uma perturbação ressonante em uma determinada região da coluna de plasma é através dos **limitadores magnéticos**.

No capítulo 6, determinamos um conjunto de expressões para o mapeamento estroboscópico das linhas de força do campo magnético sob a influência dos **limitadores magnéticos** [22]. Vimos que o mapeamento é simplético e que reproduz todas as características, indicadas acima, decorrentes da geometria toroidal da câmara de confinamento. Além do que, obtivemos as expressões para o mapeamento simplético diretamente do campo magnético ressonante.

As características das ilhas magnéticas produzidas pelo mapeamento simplético para os **limitadores magnéticos** mostraram uma perfeita concordância com os respectivos resultados obtidos para um pêndulo não-linear cuja hamiltoniana foi derivada, por aproximação local, da hamiltoniana dos **limitadores magnéticos**. Entre essas características destacamos: a largura das ilhas, a frequência no ponto elíptico (frequência natural do pêndulo), suas respectivas dependências com a intensidade da perturbação e o perfil da frequência interna com respeito à distância ao ponto elíptico.

Vimos, ainda, que a transição para uma condição de caos *global* a partir de uma condição de caos *local* ocorre para um valor do parâmetro de CHIRIKOV igual a $\chi_{Ch}^{crítico} = \frac{4}{5}$. Esse resultado contradiz a chamada *regra dos dois-terços*, obtidas do estudo do mapa padrão, para a qual o valor crítico do parâmetro de CHIRIKOV deveria ser $\chi_{Ch}^{crítico} = \frac{2}{3}$ [42]. O valor $\chi_{Ch}^{crítico} = \frac{4}{5}$ também foi obtido por VIANA [20] ao estudar um problema semelhante ao abordado nesta tese.

Estudando o transporte das linhas de força do campo magnético, na região caótica criada na borda do plasma pelos **limitadores magnéticos**, concluímos que o mesmo corresponde a um processo de transporte anômalo [23]. Anômalo no sentido que o afastamento quadrático médio das linhas de força não condiz com um *passeio aleatório*, típico de processos de transporte difusivos ou gaussianos. Pelo contrário, notamos que para as primeiras iterações do mapa estroboscópico o processo de transporte é superdifusivo em decorrência do mecanismo de esticamento (e da respectiva contração) associado à existência de um expoente de LYAPUNOV positivo. Após algumas dezenas de voltas ao redor da câmara de

confinamento, o processo de transporte torna-se subdifusivo em virtude do aprisionamento de algumas linhas de força por ilhas de estabilidade remanescentes.

Para valores apropriados da corrente de perturbação algumas linhas de força conseguem atingir a parede da câmara de confinamento após um certo número de voltas. Verificamos que esse escape das linhas de força obedece a uma distribuição de POISSON e que, portanto, o intervalo médio de número de voltas entre escapes consecutivos é igual ao inverso da taxa média de escapes.

O mecanismo de blindagem de impurezas, pela região caótica, é caracterizado por um tempo de escape. Para que os **limitadores magnéticos** sejam efetivos na blindagem de impurezas esse tempo de escape deve ser menor que o tempo de duração da descarga elétrica. Considerando os parâmetros característicos de funcionamento do tokamak TCABR, calculamos o número médio de voltas necessário para uma linha de força caótica atingir a parede da câmara. Com base nesse número médio de voltas, estimamos, de forma bastante qualitativa, o tempo de escape para algumas partículas ionizadas que se encontrem na região de linhas de força caóticas próxima à parede da câmara.

Apêndice A

Expansão do Ângulo ϑ numa série de Fourier

No capítulo 5, definimos uma nova variável de ângulo, ϑ , em termos da qual as linhas de força do campo magnético de equilíbrio possuem um passo de enrolamento constante. Neste apêndice detalhamos os cálculos envolvidos na sua obtenção.

Essa nova variável de ângulo foi definida, pela equação (5.9), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vartheta(r_t, \theta_t) &= \frac{1}{q(r_t)} \int_0^{\theta_t} \frac{B^{(0)3}}{B^{(0)2}} d\theta \\ &= \sqrt{1 - 4 \left(\frac{r_t}{R_0'} \right)^2} \int_0^{\theta_t} \frac{d\theta}{1 - 2 \frac{r_t}{R_0'} \cos(\theta)} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\Omega(r_t)} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{1 + \cos(\theta_t)} \right) \right].\end{aligned}\tag{A.1}$$

Apesar de que, para o campo magnético de equilíbrio adotado, uma forma analítica para ϑ pôde ser obtida, a expressão (A.1) é um tanto complexa, dificultando sua aplicações em certos cálculos analíticos. Desta forma, uma representação de ϑ em uma série de FOURIER muitas vezes se torna bastante útil.

Para tanto, antes de realizarmos a integração indicada em (A.1), consideramos a expansão do termo $\frac{1}{1 - 2 \frac{r_t}{R_0'} \cos(\theta_t)}$.

A expansão de $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ em uma série de TAYLOR é dada por [61]:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\tag{A.2}$$

para $|x| < 1$.

Conseqüentemente, a expansão de $\frac{1}{1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t)}$ é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^n \cos^n(\theta_t). \quad (\text{A.3})$$

O termo $\cos^n(\theta_t)$, por sua vez, pode ser representado da seguinte forma [61]:

$$\cos^n(\theta_t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cos[(2k-n)\theta_t]. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se (A.4) em (A.3) e agrupando-se os co-senos com a mesma fase temos:

$$\frac{1}{1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t)} = a_0(r_t) + \sum_{l=1}^{\infty} a_l(r_t) \cos(l\theta_t). \quad (\text{A.5})$$

Em cuja expressão $a_0(r_t)$ e $a_l(r_t)$ são dados por:

$$a_0(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^{2k}, \quad (\text{A.6})$$

$$a_l(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{(2k+l)!}{k!(k+l)!} \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^{2k+l}. \quad (\text{A.7})$$

A expansão dada por (A.6) pode, também, ser substituída pela seguinte expressão analítica:

$$a_0(r_t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2}}. \quad (\text{A.8})$$

Podemos, agora, retornar à integral dada em (A.1) e substituir o termo $\frac{1}{1 - 2\frac{r_t}{R'_0} \cos(\theta_t)}$

pela sua expansão dada por (A.5), obtendo para ϑ :

$$\begin{aligned} \vartheta &= \int_0^{\theta_t} d\theta + \sum_{l=1}^{\infty} l \alpha_l(r_t) \int_0^{\theta_t} \cos(l\theta) d\theta, \\ &= \theta_t + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l(r_t) \text{sen}(l\theta_t), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

em cuja expressão:

$$\alpha_l(r_t) = \sqrt{1 - 4\left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+l)!}{k!(k+l)!} \frac{2}{l} \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^{2k+l}. \quad (\text{A.10})$$

Assim, nas equações (A.9) e (A.10) temos a expansão da variável de ângulo, ϑ , que utilizamos, no capítulo 5, para descrever a lei de enrolamento dos condutores helicoidais de corrente elétrica que produzem o campo magnético perturbativo.

Apêndice B

Cálculo dos Elementos de Matriz $S_{m,m'}$

Na subseção 6.2.1 do capítulo 6, apresentamos os elementos $S_{m,m'}(\mathcal{J})$, da matriz que relaciona a expansão de FOURIER da hamiltoniana de perturbação nas coordenadas canônicas com a expansão nas coordenadas polares toroidais, definidos por:

$$S_{m,m'}(\mathcal{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[m'\theta_t(\mathcal{J},\vartheta) - m\vartheta]} d\vartheta. \quad (\text{B.1})$$

Neste apêndice desenvolvemos os cálculos envolvidos na obtenção desses elementos de matriz.

Invertendo-se a expressão (5.63) para o ângulo ϑ podemos representar da seguinte maneira o ângulo θ_t , em termos das coordenadas canônicas:

$$\theta_t(\mathcal{J}, \vartheta) = 2 \arctg \left[\Omega(\mathcal{J}) \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Essa igualdade pode ser desenvolvida como mostrado a seguir.

Da equação (B.2) obtemos:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_t}{2} \right) = \Omega(\mathcal{J}) \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} \right). \quad (\text{B.3})$$

Representando a tangente de $\frac{\theta_t}{2}$ e de $\frac{\vartheta}{2}$ em termos de exponenciais complexas temos:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta_t} - 1}{e^{i\theta_t} + 1} &= \Omega(\mathcal{J}) \frac{e^{i\vartheta} - 1}{e^{i\vartheta} + 1}, \\ e^{i\theta_t} &= \frac{(1 - \Omega) + (1 + \Omega)e^{i\vartheta}}{(1 + \Omega) + (1 - \Omega)e^{i\vartheta}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Definindo-se as funções $c_1(\mathcal{J})$ e $c_2(\mathcal{J})$ como sendo:

$$c_1(\mathcal{J}) = 1 - \Omega(r_t(\mathcal{J})), \quad (\text{B.5})$$

$$c_2(\mathcal{J}) = 1 + \Omega(r_t(\mathcal{J})), \quad (\text{B.6})$$

e, também, a variável complexa z dada por:

$$z = e^{i\vartheta} \quad \text{com} \quad d\vartheta = -i \frac{dz}{z}, \quad (\text{B.7})$$

podemos representar a integral em (B.1) pela seguinte integral, ao longo do círculo unitário, no plano complexo:

$$S_{m,m'}(\mathcal{J}) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z^{m+1}} \left[\frac{c_1 + c_2 z}{c_2 + c_1 z} \right]^{m'} dz. \quad (\text{B.8})$$

Pelo teorema dos resíduos, essa integral de linha é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos da função $f(z)$, dada por:

$$f(z) = \frac{1}{z^{m+1}} \left[\frac{c_1 + c_2 z}{c_2 + c_1 z} \right]^{m'}, \quad (\text{B.9})$$

calculados nos polos de $f(z)$ que se encontram no interior do círculo unitário.

Os polos de $f(z)$ são:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \quad \text{com multiplicidade } m+1, \\ z_2 &= -\frac{c_2}{c_1} \quad \text{com multiplicidade } m', \end{aligned}$$

uma vez que $c_2 > c_1$, apenas $z_1 = 0$ está dentro do círculo unitário. Portanto, apenas o resíduo de $f(z)$ calculado em $z = z_1$ é necessário para o cálculo da integral dada por (B.8).

O resíduo de $f(z)$, em $z = z_1$, pode ser determinado através da seguinte expressão [37]:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{m!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^m}{dz^m} [(z - z_1)^{m+1} f(z)], \\ &= \frac{1}{m!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{c_1 + c_2 z}{c_2 + c_1 z} \right]^{m'}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Uma outra maneira de se determinar a_{-1} é expandindo-se $f(z)$ em uma série de LAURENT, em torno de $z = z_1$, e identificando-se a_{-1} com o coeficiente do termo $\frac{1}{z - z_1}$ dessa expansão.

Para tanto, observamos que $f(z)$ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$f(z) = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{m'} \frac{1}{z^{m+1}} \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1} \right) z \right]^{m'} \left[1 + \left(\frac{c_1}{c_2} \right) z \right]^{-m'}. \quad (\text{B.11})$$

Expandindo-se os termos entre colchetes, em torno de $z = z_1 = 0$, em uma série de

potências temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{m'} \frac{1}{z^{m+1}} \left[1 + m' \left(\frac{c_2}{c_1}\right) z + \frac{m'(m'-1)}{2!} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 z^2 + \dots + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{m'} z^{m'} \right] \times \\
 &\times \left[1 - m' \left(\frac{c_1}{c_2}\right) z + \frac{m'(m'+1)}{2!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 z^2 - \frac{m'(m'+1)(m'+2)}{3!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^3 z^3 + \dots \right], \\
 &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{m'} [\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{m'}].
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

As somas $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m'}$, presentes na equação (B.12), são obtidas pela multiplicação de um termo do primeiro colchete por $\frac{1}{z^{m+1}}$ e, então, por todos os termos do segundo colchete. Fazendo-se isso temos:

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \left[\frac{1}{z^{m+1}} - m' \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \frac{1}{z^m} + \frac{m'(m'+1)}{2!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \frac{1}{z^{m-1}} + \dots \right], \\
 \sigma_1 &= m' \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-1} \frac{1}{z^m} - m' \frac{1}{z^{m-1}} + \frac{m'(m'+1)}{2!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \frac{1}{z^{m-2}} - \dots \right], \\
 \sigma_2 &= m' \left[\frac{m'-1}{2!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-2} \frac{1}{z^{m-1}} - \frac{m'(m'-1)}{2!} \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \frac{-1}{z^{m-2}} + \dots \right], \\
 &\vdots \\
 \sigma_{m'} &= \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-m'} \frac{1}{z^{m-m'+1}} - m' \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-(m'-1)} \frac{1}{z^{m-m'}} + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

O resíduo, a_{-1} , de $f(z)$, calculado em $z = z_1 = 0$, é obtido agrupando-se todos os coeficientes dos termos $\frac{1}{z}$ das somas acima. Esse procedimento proporciona o seguinte resultado para a_{-1} :

$$a_{-1} = (-1)^m \left(\frac{c_1(\mathcal{J})}{c_2(\mathcal{J})}\right)^{m+m'} \sum_{n=0}^m (-1)^n \alpha_n(m, m') \left(\frac{c_1(\mathcal{J})}{c_2(\mathcal{J})}\right)^{-2n}, \tag{B.14}$$

em cuja expressão $\alpha_n(m, m')$ é dada por:

$$\alpha_n(m, m') = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \text{ e } n = 0, \\ m' & \text{se } m = 1 \text{ e } n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ m' \frac{(m+m'-n-1)!}{(m-n)!(m'-n)!n!} & \text{se } m > 1 \text{ e } n \leq m', \\ 0 & \text{se } m > 1 \text{ e } n > m'. \end{cases} \tag{B.15}$$

Uma vez calculado o resíduo de $f(z)$ em $z = 0$ podemos retornar à equação (B.8) e determinar como a_{-1} se relaciona com os elementos de matriz $S_{m,m'}(\mathcal{J})$.

O teorema dos resíduos estabelece, para o caso da função $f(z)$ dada por (B.9), que:

$$\oint f(z)dz = 2\pi i a_{-1} \quad (\text{B.16})$$

Por outro lado, os elementos de matriz $S_{m,m'}$ são dados, em termos da integral de linha ao longo do círculo unitário no plano complexo, pela seguinte expressão:

$$S_{m,m'}(\mathcal{J}) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)dz. \quad (\text{B.17})$$

Substituindo-se o resultado (B.16) na expressão (B.17) dada acima chegamos ao seguinte resultado para os elementos de matriz $S_{m,m'}$:

$$\begin{aligned} S_{m,m'} &= a_{-1}, \\ &= (-1)^m \left(\frac{c_1(\mathcal{J})}{c_2(\mathcal{J})} \right)^{m+m'} \sum_{n=0}^m (-1)^n \alpha_n(m, m') \left(\frac{c_1(\mathcal{J})}{c_2(\mathcal{J})} \right)^{-2n}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Essa é a expressão utilizada, no capítulo 6, para relacionarmos as componentes de FOURIER da hamiltoniana de perturbação nos sistemas de coordenadas polares toroidais e canônicas.

Bibliografia

- [1] J. Wesson, *Tokamaks*, Oxford University Press, Oxford, (1982).
- [2] J. P. Freidberg, *Reviews of Modern Physics*, vol. **54**, No 3, pp. 801, (1982).
- [3] D. C. Robinson, *Nucl. Fusion*, **25**, 1101, (1985).
- [4] F. Karger and O. Kluber, *Nucl. Fusion*, **25**, pp. 1059, (1985).
- [5] A. Vannucci, I. C. Nascimento and I. L. Caldas, *Plasma Phys. and Controlled Fusion*, **31**, pp. 147, (1989).
- [6] I. H. Tan, I. L. Caldas, I. C. Nascimento, R. P. Silva, E. K. Sanada and R. Bruha, *Trans. Plas. Sci.*, **PS-14**, pp. 279, (1986).
- [7] K. M. McGuire and D. C. Robinson, *Proc. 9th Eur. Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, **1**, pp. 93, (1979).
- [8] M. S. T. Araújo, A. Vannucci and I. L. Caldas, *Il Nuovo Cimento*, **18D**, n.7, pp. 807, (1996).
- [9] F. Karger and K. Lackner, *Physics Letters*, vol. **61 A**, n. 6, pp. 385, (1977).
- [10] W. Engelhardt and W. Feneberg, *J. Nucl. Mater.*, **76 & 77**, pp. 518, (1978).
- [11] N. Ohyabu et al., *J. Nucl. Mater.*, **121**, pp. 363, (1984).
- [12] Y. Shen et al., *J. Nucl. Mater.*, **168**, pp. 295, (1989).
- [13] S. C. McCool et al., *Nucl. Fusion*, **29**, pp. 547, (1989).
- [14] I. L. Caldas, M. V. A. P. Heller, R. M. Castro and E. C. da Silva, *Physica A*, **257**, pp. 341, (1998).

- [15] T. J. Martin and J. B. Taylor, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **26**, pp. 321, (1984).
- [16] X. Y. Yu and J. S. DeGrassie, *Mapping Techniques for the GA Ergodic Magnetic Limiter Experiment on TEXT*, Publicação interna FRC-292, Universidade do Texas, Austin, (1986).
- [17] R. L. Viana and I. L. Caldas, *Zeitschrift fuer Naturforschung*, **47**, pp. 941, (1992).
- [18] K. Ullmann and I. L. Caldas, *Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences*, **1**, pp. 190, (1997).
- [19] R. L. Viana and D. B. Vasconcelos, *Dynam. Stab. Syst.*, **12**, pp. 75, (1997).
- [20] R. L. Viana, *Chaos, Solitons and Fractals*, **11**, pp. 765, (2000).
- [21] M. Y. Kucinski, I. L. Caldas, L. H. A. Monteiro and V. Okano, *J. Plasma Phys.*, **44**, part 2, pp. 303, (1990).
- [22] E. C. da Silva, I. L. Caldas and R. L. Viana, *The Structure of Chaotic Magnetic Field Lines in a Tokamak with External Nonsymmetrical Magnetic Perturbations*, submetido a IEEE Transactions on Magnetics.
- [23] E. C. da Silva, I. L. Caldas and R. L. Viana, *Magnetic Field Line Diffusion in a Tokamak with Ergodic Limiters*, submetido a Physics of Plasmas.
- [24] M. Y. Kucinski and I. L. Caldas, *Z. Naturforsch.*, **42a**, pp. 1124, (1987).
- [25] S. P. Hirshman (1982), *Oak Ridge National Laboratory Report ORNL/TM-8393*.
- [26] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, (1953).
- [27] M. Y. Kncinski and I. L. Caldas, *MHD Equilibrium Equation in Symmetric Systems*, Publicação interna IFUSP/P-817, (1990).
- [28] V. S. Mukhovatov and V. D. Shafranov, *Nucl. Fusion*, **11**, pp. 605, (1971).
- [29] I. L. Caldas e A. Vannucci, *Equilíbrio e Instabilidades do Plasma em Tokamaks*, Publicação interna IFUSP/P-523, (1985).
- [30] P. Noll et al., *Fusion Technol.*, **15**, pp. 259, (1989).

- [31] A. Vannucci and S. C. McCool, *Nuclear Fusion*, vol. **37**, No 9, pp. 1229, (1997).
- [32] F. Karger et al., *Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Research* (Proc. 5th IAEA Int. Conf., Tokyo, 1973) vol. 1, pp. 207, (1974).
- [33] W. Feneberg and G. H. Wolf, *Nucl. Fusion*, vol. **21**, No. 6, pp. 669, (1981).
- [34] J. S. deGrassie et al., *J. Nucl. Mater.*, **128** & **129**, pp. 226, (1984).
- [35] J. M. Finn, *Nucl. Fusion*, **15**, pp. 845, (1975).
- [36] M. Y. Kucinski, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **34**, pp. 513, (1992).
- [37] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego, California, (1985).
- [38] M. S. T. de Araújo, *Construção dos Anéis do Limitador Ergódico e Magnético do Tokamak TBR-1*, Publicação interna IFUSP/P-1055, (1993).
- [39] A. H. Boozer and A. B. Rechester, *Phys. Fluids*, **21**, pp. 682, (1978).
- [40] W. A. Craven, *Resonant External Magnetic Perturbations on the Texas Experimental Tokamak*, Tese de Doutorado, Universidade do Texas, Austin, (1996).
- [41] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, (1986).
- [42] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Motion*, second edition, Springer-Verlag, New York, (1992).
- [43] M. S. T. de Araújo, *Atuação do Limitador Ergódico Magnético sobre o Plasma Confinado pelo Tokamak TBR-1*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (1997).
- [44] T. R. Harley, D. A. Buchenauer, J. W. Coonrod and K. M. McGuire, *Nuclear Fusion*, vol. **29**, n.5, pp. 771, (1989).
- [45] A. S. Fernandes, M. V. A. P. Heller and I. L. Caldas, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **30**, pp. 1203, (1988).

- [46] P. J. Morrison, *Rev. Mod. Phys.*, vol. **70**, n. 2, pp. 467, (1998).
- [47] W. Engelhardt, *Bulletin of the A.P.S.*, (1977).
- [48] S. Takamura et al, *J. Nucl. Mater.*, **162-164**, pp. 643, (1989).
- [49] R. L. Viana, *Problemas Não-Lineares com Perturbação Impulsiva e Aplicações em Física de Plasmas*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (1991).
- [50] K. Ullmann, *Métodos de Análise de Mapeamentos Não-Lineares com Aplicação à Física de Plasmas*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, (1997).
- [51] J. P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, pp. 617, (1985).
- [52] B. V. Chirikov, *Plasma Phys. (J.N.E. Pt. C)*, **1**, pp. 253, (1960).
- [53] B. V. Chirikov, *Phys. Reports*, **52**, pp. 265, (1979).
- [54] R. Sabot and M. A. Dubois, *Physics Letter A*, **212**, pp. 201, (1996).
- [55] P. Castiglione, M. Cencini, A. Vulpiani and E. Zambianchi, *Chaos*, **9**, n. 4, pp. 871, (1999).
- [56] M. de Rover, A. M. R. Schilham, A. Montvai and N. J. Lopes Cardozo, *Phys. Plasmas*, **6**, n. 6, pp. 2443, (1999).
- [57] G. Zimbardo, P. Veltri, G. Basile and S. Principato, *Phys. Plasmas*, **2**, n. 7, pp. 2653, (1995).
- [58] S. S. Abdullaev and G. M. Zaslavsky, *Phys. Plasmas*, **2**, pp. 4533, (1995).
- [59] V. R. Vanin e P. Gouffon, *Tópicos Avançados em Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, Edição Preliminar do Lab. do Acelerador Linear do Inst. de Física da Universidade de São Paulo, (1996).
- [60] M. G. Bulmer, *Principles of Statistics*, Dover, New York, (1979).
- [61] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Tables*, Dover Publications, New York, (1965).