

DIEGO COLÓN

**MODELAGEM DE SISTEMAS ROBÓTICOS VIA  
FIBRADOS PRINCIPAIS E CONEXÕES DE  
CARTAN**

São Paulo  
2022



**DIEGO COLÓN**

**MODELAGEM DE SISTEMAS ROBÓTICOS VIA  
FIBRADOS PRINCIPAIS E CONEXÕES DE  
CARTAN**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo como requisito  
para obtenção do título de Professor Livre  
Docente junto ao Departamento de Enge-  
nharia de Telecomunicações e Controle.

São Paulo  
2022



**DIEGO COLÓN**

**MODELAGEM DE SISTEMAS ROBÓTICOS VIA  
FIBRADOS PRINCIPAIS E CONEXÕES DE  
CARTAN**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo como requisito  
para obtenção do título de Professor Livre  
Docente junto ao Departamento de Enge-  
nharia de Telecomunicações e Controle.

São Paulo  
2022

### Catálogo-na-publicação

Colón, Diego  
Modelagem de Sistemas Robóticos Via Fibrados Principais e Conexões  
de Cartan / D. Colón -- São Paulo, 2022.

350 p.

Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica da Universidade de  
São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e  
Controle.

1.Robótica 2. Geometria Diferencial 3. Grupos de Lie 4.  
Fibrados Principais  
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de  
Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

Dedicatória

À minha querida mãe Irene.



# RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar sistematicamente parte da obra deste candidato, mais especificamente, os artigos publicados em revistas e congressos científicos na linha de aplicações de conexões de Cartan e fibrados principais em modelagem robótica. Não há resultados novos aqui em quantidade significativa que permitam que se classifique este documento como uma tese original, já que a maioria dos resultados aqui apresentados já foram publicados por este docente. Entretanto, os resultados são apresentados de forma muito mais clara, sem preocupação com número de páginas (algo essencial para artigos científicos). Além disso, com o amadurecimento do assunto por este docente, e com os novos conhecimentos adquiridos para dar continuidade à pesquisa, novos pontos de vista emergiram, bem como possíveis novas aplicações. Apresentam-se inicialmente as motivações para a realização desta pesquisa, assim como os trabalhos fundamentais nos quais este docente se inspirou inicialmente. Em seguida, faz-se uma revisão bibliográfica do assunto, bem como a apresentação de resultados clássicos introdutórios com o objetivo de facilitar a leitura do trabalho. Em seguida, apresentam-se os resultados publicados nos primeiros artigos de congresso e de revista, que estão relacionados à cinemática multicorpos, onde já se pode ver o papel crítico que a conexão de Cartan desempenha. É também apresentado um exemplo de aplicação, cujas equações resultantes são comparadas com as deduzidas em livros clássicos. Em particular, uma justificativa para o teorema de Kirchhoff-Davies, do ponto de vista geométrico, é apresentada. Em seguida, são apresentados os resultados publicados em uma segunda leva de artigos, ou seja, um artigo de revista e outros dois de congresso, sendo um deles internacional. Nestes, os conceitos de fibrados principal e associado são apresentados de forma didática, em complementação aos artigos. Em particular, são apresentados resultados de cinemática e dinâmica na representação de quatérnios. Outro exemplo de aplicação é apresentado. Finalmente, conclusões e sugestões de pesquisas futuras são apresentadas, bem como um quadro geral dos resultados que estão sendo buscados por este docente nesta linha de pesquisa. Finalmente, estão reunidos no apêndice uma série de resultados fundamentais de Matemática que constituem os fundamentos deste trabalho. A organização destes resultados, dispersos em muitos livros diferentes, foi fundamental para esta pesquisa. Há ainda, nestes apêndices, observações acrescentadas por este docente, que ajudam a entender os conceitos.

**Palavras-Chave** – Robótica, Geometria Diferencial, Grupos de Lie, Fibrados Principais.



# ABSTRACT

The objective of this work is to present part of the research of the applicant Diego Colón. More specifically, the journal and congress papers about Cartan connections and principal fiber bundles applied in robot modelling and mechanisms. There is no new significant results here, so this work cannot be called an original thesis. All the results presented were previously published. On the other hand, those results are better explained, in a comprehensive way, and also new comments were included. Besides that, new knowledge was acquired since those publications, and new points of views were developed, which were included here. Initially, motivations for the research, as well as the fundamental results of other researchers are presented. A bibliographical review, contained in the published papers, is also presented. The theorems published in the first papers of congress and journal, which deals with multibody kinematics using Cartan connections are presented. In those, the role of Cartan connections, as well as the associated concept of covariant derivative, are emphasized. In particular, it is shown a geometric foundation for the Kirchhof-Davies law, commonly used in parallel robots modelling, that emerged naturally from the Cartan connection point of view. A first application, for a planar robot, is presented and the resulting equations are compared to those presented in classical books in Robotics. Following this chapter, the concepts of principal fiber bundle, associated vector bundle and covariant derivative are presented in a firm mathematical basis. In particular, the concept of Maurer-Cartan form of a Lie group is presented, as well as its relation with the Cartan connection. A second set of results, published in other journal and conference papers, are presented in the same format. Cartan connection in the principal fiber bundle with fiber  $SU(2)$ , that is the unit quaternions group, is used to obtain the kinematical and dynamical equations for a serial robot. Another practical example, the same used previously, is presented and the equations obtained are compared. Finally, comments, conclusions and suggestions for future research are presented. Several basic material are gathered in the appendices as a way to facilitate the reading, as well as future research. Those appendices are not mandatory reading and can be skipped. The author decided to include them as they are generally dispersed in several books. Also, many comments were included that can help the understanding of the material.

**Keywords** – Robotics, Differential Geometry, Lie Groups, Fiber Bundles.



# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b>	<b>15</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>17</b>
<b>1 Definição do Problema</b>	<b>19</b>
1.1 Introdução . . . . .	19
1.2 Cinemática e Dinâmica para um Corpo Rígido: Ideias Iniciais . . . . .	20
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	28
<b>2 Cinemática dos Corpos Rígidos no <math>SE(3)</math></b>	<b>31</b>
2.1 Cinemática e Dinâmica do Corpo Rígido em $SO(3)$ . . . . .	31
2.2 Cinemática em $SE(3)$ . . . . .	35
2.3 Conexão de Cartan para um Grupo Arbitrário . . . . .	37
2.4 Resultados para um Robô Plano de Dois Elos . . . . .	40
2.4.1 Conexão para Três Frames com a Mesma Origem . . . . .	41
2.4.2 Conexão de Cartan para o Quarto Frame . . . . .	42
2.5 Conexão de Cartan para Mecanismos Fechados . . . . .	44
<b>3 Fibrados Principais e Associados</b>	<b>47</b>
3.1 Introdução . . . . .	47
3.2 Fibrados . . . . .	47
3.3 Conexões em Fibrados Principais e Associados . . . . .	50
3.4 Espaços Homogêneos . . . . .	53
3.5 Formas de Maurer-Cartan . . . . .	55
3.5.1 Grupos de Lie Matriciais . . . . .	57

3.5.2	Cálculo Não-Abeliano . . . . .	58
3.6	Conexões em Fibrados Principais . . . . .	61
3.7	Fibrados Associados . . . . .	64
3.7.1	Fibrados Usados Até Aqui . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Cinemática e Dinâmica para <math>SU(2)</math> - Quatérnios</b>	<b>69</b>
4.1	Introdução . . . . .	69
4.2	Fibrados Principais com Quatérnios Unitários . . . . .	69
4.3	Cinemática em $SU(2)$ para $n$ Frames de Referência . . . . .	71
4.4	Dinâmica em $SU(2)$ para um Sistema com $n$ Frames . . . . .	73
4.5	Resultados para um Robô Plano de Dois Elos . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Comentários e Conclusões</b>	<b>81</b>
	<b>Apêndice A – Conceitos Algébricos Básicos</b>	<b>85</b>
A.1	Álgebra Abstrata: Conceitos Básicos . . . . .	85
A.2	Semigrupos e Monóides . . . . .	89
A.3	Grupos . . . . .	92
A.3.1	Grupos Abelianos . . . . .	97
A.4	Ações de Grupos em Conjuntos . . . . .	99
A.5	Anéis . . . . .	103
A.6	Corpos . . . . .	112
A.7	Módulos . . . . .	114
A.8	Espaços Vetoriais . . . . .	119
A.8.1	Estruturas Quadráticas . . . . .	125
A.9	Álgebras . . . . .	126
A.9.1	Álgebras Filtradas, Graduadas e Diferenciais . . . . .	128
A.10	Quatérnios . . . . .	130

A.11	Álgebras de Grassmann e de Clifford . . . . .	132
A.12	Quatérnios Duais . . . . .	134
A.13	Categorias e Funtores . . . . .	135
A.14	Álgebra Multilinear e Tensorial . . . . .	146
A.14.1	Produto Tensorial em Grupos Abelianos . . . . .	147
A.14.2	Produto Tensorial em $R$ -Módulos . . . . .	148
A.14.3	Aplicações Multilineares . . . . .	149
A.14.4	Produto Tensorial de Espaços Vetoriais . . . . .	150
A.14.5	Álgebra Tensorial . . . . .	156
A.14.6	Álgebra Exterior . . . . .	158
A.15	Álgebras Associativas: Visão Categórica . . . . .	162
A.16	Álgebras de Lie e Álgebras Envolventes . . . . .	164
A.16.1	Álgebras Envolventes . . . . .	167
<b>Apêndice B – Conceitos Topológicos Básicos</b>		<b>169</b>
B.1	Topologia . . . . .	169
B.1.1	Invariantes Topológicos e Topologia Algébrica . . . . .	176
B.1.2	Espaços Métricos . . . . .	185
B.2	Grupos Topológicos e Suas Ações . . . . .	188
B.3	Outras Estruturas Algébricas com Topologia . . . . .	194
<b>Apêndice C – Conceitos de Análise e Geometria Diferencial</b>		<b>197</b>
C.1	Definições Básicas de Análise Real . . . . .	197
C.2	Cálculo em Espaços Euclidianos $\mathbb{R}^n$ . . . . .	201
C.2.1	Diferenciabilidade em Aplicações Entre Espaços Euclidianos . . . . .	201
C.2.2	Teoremas Relacionados ao Posto . . . . .	204
C.3	Variedades Diferenciáveis . . . . .	206
C.3.1	Estrutura Diferenciável . . . . .	206

C.3.2	Topologias de Variedades . . . . .	208
C.3.3	Conceito de Tangência e Derivada de Aplicações entre Variedades Diferenciáveis . . . . .	209
C.3.4	Espaços Tangentes . . . . .	212
C.3.5	Fibrado Tangente . . . . .	212
C.3.6	Subvariedades Diferenciáveis . . . . .	214
C.4	Aplicações entre Variedades . . . . .	215
C.5	Propriedades Adicionais de $TM$ . . . . .	220
C.6	Curvas em $M$ e $TM$ e Pontos Críticos . . . . .	223
C.7	Campos Vetoriais Tangentes . . . . .	227
C.7.1	Curvas Integrais e EDO . . . . .	232
C.8	Derivadas Direcionais de Funções . . . . .	235
C.8.1	Derivadas de Lie de Funções . . . . .	236
C.9	Colchetes de Lie . . . . .	238
C.9.1	A álgebra de Lie $\mathcal{X}(U)$ . . . . .	239
C.9.2	Interpretação Geométrica . . . . .	240
C.10	Campos Vetoriais em $TM$ . . . . .	243
C.11	Cotangência . . . . .	246
C.11.1	Interpretação Geométrica da Cotangência . . . . .	247
C.12	Fibrado Cotangente . . . . .	248
C.13	1-Formas . . . . .	249
C.14	Integração de 1-Formas . . . . .	252
C.15	Folheações . . . . .	256
C.16	Distribuições e Variedades de Contato . . . . .	259
C.17	Distribuições Integráveis: Teorema de Frobenius . . . . .	263
C.18	Folheações e Sistemas de Coordenadas . . . . .	266
C.19	Derivadas de Lie de Distribuições . . . . .	268

C.20 Campos Tensoriais . . . . .	270
C.21 Álgebras de Grassmann: Campos de $r$ -Formas e $r$ -Vetores . . . . .	273
C.22 $r$ -Formas Fechadas e Exatas . . . . .	282
C.23 Integração de $r$ -Formas . . . . .	284
C.24 Teorema de Stokes . . . . .	286
C.24.1 Teorema de Stokes Aplicado a 1-Formas . . . . .	287
C.24.2 Teorema de Stokes Aplicado à 2-Forms . . . . .	288
C.25 Comentários Adicionais . . . . .	290
<b>Apêndice D – Grupos e Álgebras de Lie e Geometria Riemanniana</b>	<b>293</b>
D.1 Grupos de Lie, Álgebras de Lie e Representações . . . . .	293
D.1.1 Propriedades de Álgebras de Lie de Grupos de Lie . . . . .	301
D.1.2 Grupos e Álgebras de Lie Especiais . . . . .	307
D.2 Campos Tensoriais com Valores Vetoriais . . . . .	310
D.2.1 Espaço $V$ com estrutura de álgebra de Lie . . . . .	312
D.3 Geometria Riemanniana e Conexão de Koszul . . . . .	314
D.3.1 Paralelismo . . . . .	314
D.3.2 Derivada Covariante de uma Curva . . . . .	315
D.3.3 Conexão de Koszul . . . . .	316
D.3.4 1-Formas de Conexão . . . . .	317
D.3.5 Derivada Covariante de um Tensor . . . . .	319
D.3.6 Derivada Covariante versus Derivada de Lie . . . . .	319
D.3.7 Horizontalidade . . . . .	320
D.4 Tensor Métrico e Conexão Compatível . . . . .	320
D.5 Geodésicas . . . . .	325
D.5.1 Aceleração Geométrica . . . . .	327
D.5.2 Aplicação Exponencial . . . . .	329

D.5.3	Coordenadas Normais . . . . .	330
D.5.4	Comprimento e Energia . . . . .	331
D.6	Torção de uma Conexão . . . . .	332
D.7	Curvatura de uma Conexão . . . . .	333
D.7.1	Curvatura e Horizontalidade . . . . .	335
D.7.2	2-Formas de Curvatura . . . . .	335
D.7.3	Curvatura em uma Variedade Riemanniana . . . . .	336
D.7.4	Campos de Jacobi . . . . .	338
D.8	Derivada Covariante de Tensores . . . . .	341
D.9	Geometria Riemanniana em Grupos de Lie . . . . .	347

**Referências****351**

## LISTA DE FIGURAS

1	Grupos de Lie e Seus Espaços Tangentes . . . . .	24
2	Transformação entre Frames. . . . .	38
3	Robô Planar de Dois Elos. . . . .	43
4	Mecanismo Fechado. . . . .	45
5	Seções em Curvas e Subconjuntos de um Fibrado Principal . . . . .	53
6	Ilustração de um Fibrado e um Campo Horizontal . . . . .	67
7	Robô Planar com Dois Elos. . . . .	77
8	Ilustração da Partição Induzida por Subgrupo Normal . . . . .	96
9	Ilustração da Conjugação . . . . .	102
10	Ilustração da Aplicação Tangente . . . . .	215
11	Ilustração de um Fibrado Tangente . . . . .	222
12	Arrasto do Campo Vetorial . . . . .	241
13	Ilustração do Efeito dos Campos Comutarem . . . . .	241
14	Ilustração de um Campo Horizontal . . . . .	246
15	Ilustração de um Vetor Cotangente . . . . .	248
16	Visualização de uma 1-Forma . . . . .	251
17	Visualização de uma 1-Forma Fechada . . . . .	255
18	Derivada de Lie Nula de uma 1-Forma . . . . .	256
19	Visualização de uma Distribuição . . . . .	262
20	Exemplo de uma Folheação Integral . . . . .	264
21	Visualização de um 2-Vetor num Espaço Tridimensional . . . . .	278
22	Visualização de uma 2-Forma num Espaço Bidimensional . . . . .	279
23	Visualização de uma 2-Forma num Espaço Tridimensional . . . . .	280

24	Visualização de uma 3-Forma num Espaço Tridimensional . . . . .	280
25	Representação de 1-Forma Fechada . . . . .	283
26	Tubos Formados por uma 2-Forma Fechada . . . . .	283
27	Teorema de Stokes e 1-Forma Fechada . . . . .	289
28	Exemplo de Derivada Exterior de Um Campo . . . . .	314
29	Ilustração da Curvatura . . . . .	334
30	Varição de uma Geodésica . . . . .	338

# LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathbb{R}^3$ : espaço euclidiano tridimensional.
- Letras  $M, N, B$ : em geral representam variedades diferenciáveis (as vezes  $M$  é um monóide).
- $\times$ : produto vetorial ou cartesiano.
- $TM$ : fibrado tangente de uma variedade diferenciável  $M$ .
- $T_pM$ : espaço tangente no ponto  $p \in M$ .
- $G, H$ : em geral representam grupos.
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ : representam álgebras de Lie de grupos de Lie
- $SO(2), SO(3)$ : grupos de Lie das matrizes ortogonais com determinante unitário (dimensão 2 e 3, respectivamente).
- $R$ : matriz de rotação  $R \in SO(2), SO(3)$  ou anel
- $\mathfrak{so}(2), \mathfrak{so}(3)$ : álgebra de Lie dos grupos  $SO(2)$  e  $SO(3)$ , respectivamente.
- $\Omega$ : matriz de velocidade angular (elemento de  $\mathfrak{so}(2)$  ou  $\mathfrak{so}(3)$ ).
- $SE(3)$ : grupo de Lie das matrizes homogêneas.
- $\Gamma$ : matriz em  $SE(3)$  ou curva em fibrado principal.
- $SU(2)$ : grupo de Lie das matrizes complexas unitárias de dimensão dois com determinante unitário (quatérnios unitários).
- $\alpha, \beta, \omega$ : em geral representam formas diferenciais (gregas minúsculas).
- $[A, B] = AB - BA$ : colchete de Lie entre as matrizes  $A$  e  $B$
- $d$ : derivada/diferencial exterior.
- $\gamma$ : curva suave em uma variedade ou 3-vetor.
- $S^n$ : esfera unitária de dimensão  $n$  ou referencial  $n$ .
- $d/dx$ : derivada em relação a  $x$  ou campo vetorial natural da coordenada  $x$ .
- $\partial/\partial t$ : derivada parcial em relação a  $t$  ou campo vetorial natural da coordenada  $t$ .
- $D_t$ : derivada covariante de uma conexão de Cartan.
- $\Xi$ : conexão de Cartan ou curva em álgebra de Lie.
- $\mathbb{I}$ : operador de inércia.

- $\text{Spin}(3)$ : grupo de spin de dimensão três.
- $\times$ : produto semi-direto entre grupos de Lie.
- $A$ : matriz de transformação homogênea ou anel.
- $\theta$ : em geral ângulo.
- $E, P$ : em geral fibrados. Normalmente  $P$  é o fibrado principal.
- $\pi$ : projeção canônica em fibrados.
- $\text{Id}_B$ : aplicação identidade de  $B$ .
- $\psi, \phi$ : em geral trivializações locais ou cartas, as vezes 1-formas.
- $s$ : seção de um fibrado.
- $g_{ij}$ : transformação de fibra entre cartas  $i, j$  ou métrica Riemanniana.
- $\mathfrak{X}$ : campo tangente a fibrado tangente.
- $\dot{x}$ : derivada temporal de  $x$  ou coordenada de fibra.
- $Y/X$ : quociente entre dois espaços.
- $\text{Ad}$ : representação adjunta de um grupo de Lie  $G$  em sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .
- $\text{ad}$ : representação de uma álgebra de Lie nela mesma.
- $\sigma$ : transformação entre álgebras de Lie ou campo fundamental de um fibrado principal
- $\omega_G$ : forma de Maurer-Cartan do grupo de Lie  $G$ .
- $L_g, R_g$ : translações à esquerda e à direita, respectivamente.
- $F : M \rightarrow N$ : aplicação entre variedades diferenciáveis.
- $F_*$ : derivada da aplicação  $F$ .
- $F^*$ : *pullback* de  $F$ .
- $F_p, \mathbf{X}_p$ : valor da função em  $p \in M$ .
- $\otimes$ : produto tensorial.
- $\oplus$ : soma direta.
- $\wedge$ : produto exterior.
- $C_{ij}^k$ : constantes estruturais de uma álgebra de Lie.
- $\rho$ : representação de um grupo de Lie.
- $\nabla, \nabla_{\mathbf{X}}$ : Conexão de Koszul e correspondente derivada covariante em relação a  $\mathbf{X}$ .
- $\Gamma_{ij}^k$ : símbolos de Christoffel.
- $\sigma_i$ : matrizes de Pauli.

# 1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

## 1.1 Introdução

A geometria diferencial e os grupos e álgebras de Lie têm sido usados em mecânica desde o século XIX. O assunto atingiu a maturidade no século XX e desde então esteve presente em diversas formulações teóricas em Física e Engenharia (ABRAHAM; MARDEN, 1985). Métodos algébricos, como os *quatérnios* de Hamilton foram usados na análise de mecanismos e, na mesma linha, Ball formulou a sua teoria das helicóides. Também se pode citar o uso da geometria descritiva, com os conceitos de coordenadas homogêneas de Plücker e Grassmanianos, e das álgebras de Clifford (SELIG, 2005). Mais recentemente, estes assuntos foram abordados novamente com um interesse renovado, como se pode observar no uso de quatérnios em (HESTENES, 1999) e quatérnios duais em (YANG A. T., 1964). Paralelamente, a ciência da cinemática foi bem consolidada em livros clássicos como (BOTTEMA, 1979).

Já na literatura específica de robótica, livros com abordagens clássicas de mecânica, como (CRAIG, 1989) e (SPONG; VIDYASAGAR, 1989) usaram a mecânica vetorial nas suas formulações, ainda que conceitos relacionados a grupos de Lie já apareçam naturalmente, tais como matrizes ortogonais e homogêneas. Outros já até sistematizando a obtenção das equações dinâmicas, como em (FEATHERSTONE, 2014). Outros livros já usam a linguagem da geometria diferencial de maneira mais ampla (MURRAY; LI; SASTRY, 1994; SELIG, 2005; KAJITA et al., 2009).

Na literatura citada acima, formula-se a cinemática e a dinâmica de um corpo rígido no espaço tridimensional associando-se um sistema de coordenadas rígido ao corpo, de modo que todo o movimento que o corpo realizar será também realizado pela base de vetores do sistema de coordenadas. Esta base de vetores costuma ser representada pelo trio de vetores unitários  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ . Para que esta formulação faça sentido, é necessário também se fixar um outro sistema de coordenadas a algum *referencial inercial*, também formado por um trio de vetores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  em relação ao qual o primeiro trio é escrito.

Para distinguir o sistema de coordenadas preso ao corpo do sistema inercial, chama-se o primeiro de um sistema *não-inercial*.

Embora os livros clássicos de Física e mecânica clássica abordem os conceitos de sistema inercial e não-inercial, no caso deste autor, não foi antes de ter contato com a literatura de relatividade geral e geometria diferencial que o domínio sobre esse assunto foi adquirido (MISNER et al., 2017; BURKE, 1985). Por enquanto, somente será apresentada a diferença entre estes dois tipos de sistema de coordenadas/referência de forma intuitiva, que é a seguinte: somente no sistema inercial a segunda lei de Newton, como é apresentada nos cursos básicos de Física, é válida. Já no sistema não-inercial, ela precisa ser corrigida com alguns termos extras. A chave para entender esta diferença do ponto de vista matemático está justamente no principal conceito que será trabalhado aqui, que é o de *conexão (de Cartan)*. Nesta tese, diverge-se um pouco da nomenclatura encontrada em alguns livros, como (SHARPE, 1997), pois deseja-se manter a semelhança com o trabalho clássico de Cartan (CARTAN, 2001).

Conexões são objetos geométricos fundamentais na Física moderna e também na Geometria Diferencial. Os livros clássicos de geometria diferencial e Riemanniana como (CARMO, 1994) vão apresentar a conexão na sua forma mais simples, que é conhecida como *conexão de Koszul*. Outros livros mais avançados apresentam a chamada *conexão de Ehresmann* (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a). A conexão abordada aqui, apesar de ser equivalente à de Koszul e à de Ehresmann, se apresenta de uma forma um pouco diferente. Ela é conhecida como *conexão de Cartan* como apresentada em (SPIVAK, 2005; CARTAN, 2001). Esta conexão é importante em muitas teorias físicas, como nas chamadas *teorias de calibre* (ou *gauge theories*), que são utilizadas para a descrição das forças fundamentais da natureza, como a força forte, através da chamada *cromodinâmica quântica*, da força eletrofraca e da relatividade geral (SCHWARZ, 1996; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982; CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1989). Nestas teorias de calibre, a conexão (assim como a *curvatura* associada) desempenham um papel na dinâmica do sistema.

## 1.2 Cinemática e Dinâmica para um Corpo Rígido: Ideias Iniciais

O livro (SATTINGER; WEAVER, 1986) foi de importância fundamental para esta pesquisa, pois apresentou a conexão como uma velocidade angular na forma matricial,

associada a uma matriz de rotação. Isto despertou a curiosidade deste autor, e pode-se identificar a semelhança com a conexão de Cartan, como apresentado em (CARTAN, 2001). A seguir, apresenta-se uma releitura do que foi apresentado em (SATTINGER; WEAVER, 1986) de modo a auxiliar na elucidação do problema. Isto também foi apresentado no primeiro trabalho deste autor nesta linha de pesquisa, que é (COLÓN, 2014). Qualquer ponto no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  pode ser representado como um 3-vetor  $\mathbf{r}'$  no sistema não-inercial  $S'$  (que poderia estar ligado a um corpo rígido) ou por um 3-vetor  $\mathbf{r}$  no sistema inercial  $S$ . Suponha que ambos os sistemas de referência (ou *frames*) tenham o mesmo ponto de origem. A matriz de transformação entre eles, que deve ser *ortogonal*, deve depender do tempo, isto é  $R = R(t)$ , e as suas colunas são os 3-vetores  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  escritos em função de  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Como as matrizes de rotação pertencem ao grupo de Lie  $SO(3)$ , pode-se dizer que  $R(t)$  é uma trajetória neste espaço (SELIG, 2005). As posições de um ponto arbitrário em  $\mathbb{R}^3$ , nestes dois *frames* de referência, são relacionadas por:

$$\mathbf{r}(t) = R(t)\mathbf{r}'(t). \quad (1.1)$$

Aplicando-se a derivada temporal nos dois lados da Equação (1.1), tem-se:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{r}' + R\dot{\mathbf{r}}' = R\left(R^T\dot{R}\mathbf{r}' + \dot{\mathbf{r}}'\right) = R(\Omega\mathbf{r}' + \dot{\mathbf{r}}'), \quad (1.2)$$

onde  $\Omega = R^T\dot{R}$  é uma matriz *anti-simétrica* variante no tempo chamada *velocidade angular de corpo*, que é uma trajetória na álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  (vide seção D.1), e que poderia ser chamada de *hodógrafo*. De fato, foi  $\Omega(t)$  que foi chamada de conexão em (SATTINGER; WEAVER, 1986). Ambas as matrizes  $R(t)$  e  $\Omega(t)$  podem ser vistas como operadores sobre o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, são *representações* do grupo de Lie  $SO(3)$  e da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  neste espaço vetorial, respectivamente (FULTON; HARRIS, 1991).

A *teoria das representações*, pouco abordada na engenharia, mas largamente utilizada em física quântica, é importante neste problema pois a cinemática e a dinâmica do ponto são feitas na chamada *representação fundamental* em  $\mathbb{R}^3$ , enquanto que a cinemática e a dinâmica do corpo rígido são feitas na chamada *representação adjunta*, que sempre é na própria álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  que está sendo representada. De fato, o uso de diferentes representações do mesmo grupo de Lie e álgebra de Lie é feito na *cromodinâmica quântica*, que é a teoria que descreve a chamada força forte da física de partículas. Nesta teoria, os

chamados *quarks* estão na chamada representação fundamental do grupo  $SU(3)$  (e de sua álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(3)$ ), que é o chamado *grupo de simetria de calibre* de cor, enquanto as partículas que representam a força, os chamados *gluons*, estão na representação adjunta (GOTTFRIED; WEISSKOPF, 1986).

Explicar a intuição por trás de se usar duas representações é desafiadora, mas pode-se dizer que os dois espaços de representação, ou seja,  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathbb{R}^3$ , são equivalentes. De forma mais rigorosa, o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , munido com o *produto vetorial* tradicional, é uma álgebra de Lie isomórfica a  $\mathfrak{so}(3)$  munido com o *colchete de Lie*  $[A, B] = AB - BA$ . De fato, a ação de  $\mathfrak{so}(3)$  em  $\mathbb{R}^3$  dada pela aplicação de  $\Omega$  a  $\mathbf{r}'$ , (isto é,  $\Omega\mathbf{r}'$ ), é equivalente ao produto vetorial  $\omega \times \mathbf{r}'$ , onde  $\omega$  é o 3-vetor correspondente à matriz  $\Omega$  (vide seção D.1). O 3-vetor  $\mathbf{r}'$  é conhecido como *velocidade relativa*, e representa a velocidade do ponto em relação ao *frame* móvel (isto é, para um observador que se move junto com o *frame* móvel) e escrito na base do *frame móvel*. A equação (1.2) mostra a fórmula de transformação desta velocidade para a velocidade em relação ao *frame* inercial e escrito na sua base. A matriz  $\Omega(t)$  contém a informação de como o *frame* móvel  $S'$  se move em relação ao sistema inercial.

Conforme foi dito em (SATTINGER; WEAVER, 1986), a matriz  $\Omega = R^T \dot{R}$  representa uma conexão. De fato, esta afirmação é um pouco imprecisa, pois o próprio Élie Cartan em (CARTAN, 2001) define as chamadas *formas de conexão* (vide definição D.3.8) como sendo um conjunto de 1-formas (vide seção C.13) que podem ser arranjadas em uma matriz. Além disso, o livro (SATTINGER; WEAVER, 1986) falha em informar que a matriz de velocidades angulares é um tipo particular de conexão conhecida como *forma de Maurer-Cartan*, bem conhecida da teoria de grupos de Lie (veremos mais adiante quando essa particularização ocorre).

Cartan definiu para cada ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  um *vetor posição*, que liga a origem a este ponto, e também um *frame*  $\{\mathbf{E}_1(p), \mathbf{E}_2(p), \mathbf{E}_3(p)\}$ . Para o caso de espaço euclidiano, será visto que pode-se tirar o diferencial de qualquer campo vetorial, de modo que dado um campo de vetores posição  $\mathbf{P}$ , o diferencial fica  $d\mathbf{P}$ . Este deslocamento é um campo tensorial  $(1, 1)$ , ou seja, é uma 1-forma com valores vetoriais tangentes. Deste modo, vale que:

$$d\mathbf{P} = \omega^1 \mathbf{E}_1 + \omega^2 \mathbf{E}_2 + \omega^3 \mathbf{E}_3, \quad (1.3)$$

onde  $\omega^i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , são 1-formas diferenciais (vide seções C.13 e D.1.1), conhecidas como *parâmetros*, onde subentende-se que esta identidade vale ponto-a-ponto. Seguindo-

se o mesmo raciocínio, é possível tirar o diferencial de  $\mathbf{E}_i$ , que novamente é a 1-forma com valores vetoriais  $d\mathbf{E}_i$ . Expressando-se esses diferenciais em termos do próprio *frame*, tem-se:

$$\begin{cases} d\mathbf{E}_1 = \omega_1^1\mathbf{E}_1 + \omega_1^2\mathbf{E}_2 + \omega_1^3\mathbf{E}_3, \\ d\mathbf{E}_2 = \omega_2^1\mathbf{E}_1 + \omega_2^2\mathbf{E}_2 + \omega_2^3\mathbf{E}_3, \\ d\mathbf{E}_3 = \omega_3^1\mathbf{E}_1 + \omega_3^2\mathbf{E}_2 + \omega_3^3\mathbf{E}_3, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde os  $\omega_i^j$  são 1-formas diferenciais (vide seção D.2).

Como  $d\mathbf{P}$  e  $d\mathbf{E}_i$  são tensores (1,1) (vide seção C.20), ao serem aplicados no vetor tangente em um ponto, isto é, em  $\mathbf{v}_p$ , o que se obtém é a taxa de variação dos campos  $\mathbf{E}_i$  e  $\mathbf{P}$  ao longo de uma curva  $\gamma$  que, no ponto  $p$ , possui o vetor velocidade  $\mathbf{v}_p$ , ou seja, trata-se de uma derivada direcional do campo análoga à derivada covariante (vide seção D.3.2). De fato, qualquer derivada exterior de um campo é uma derivada covariante. Entretanto, como estamos trabalhando com a geometria euclidiana, a derivada covariante fica naturalmente definida com esta formulação, e os  $\omega_i^j$  são as formas de conexão.

Por conta da ortogonalidade de cada *frame*, tem-se que  $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_i^j$ , o que vai resultar em  $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ , para  $i \neq j$  e  $\omega_i^i = 0$ . Tem-se então somente três 1-formas linearmente independentes, que são  $\omega_2^3$ ,  $\omega_3^1$  e  $\omega_1^2$ . Estas são as *componentes de rotação*. Deste modo, pode-se escrever:

$$\begin{cases} d\mathbf{E}_1 = & +\omega_1^2\mathbf{E}_2 & -\omega_1^3\mathbf{E}_3, \\ d\mathbf{E}_2 = & -\omega_1^2\mathbf{E}_1 & +\omega_2^3\mathbf{E}_3, \\ d\mathbf{E}_3 = & +\omega_3^1\mathbf{E}_1 & -\omega_2^3\mathbf{E}_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

e pode-se interpretar  $\omega_i^j$  (que são chamadas de 1-formas de conexão, vide seção D.3.4) como sendo a velocidade angular do eixo  $j$  em torno do eixo  $i$ . Ao se organizar estas formas diferenciais em uma matriz, o que se obtém é uma 1-forma com valores matriciais (vide seção D.2) dada por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & +\omega_1^2 & -\omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & +\omega_2^3 \\ +\omega_3^1 & -\omega_2^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

e como  $R = [ \mathbf{E}_1 \mid \mathbf{E}_2 \mid \mathbf{E}_3 ]$  e  $dR = [ d\mathbf{E}_1 \mid d\mathbf{E}_2 \mid d\mathbf{E}_3 ]$ , então tem-se que  $dR = R\Omega$ . Podemos dizer que a matriz na equação (1.6) é uma 1-forma com valores na álgebra de

Lie  $\mathfrak{so}(3)$ . Esta sim é uma conexão de Cartan, mas como será visto mais adiante, é de um tipo especial, chamada de *forma de Maurer-Cartan* (definição rigorosa na seção 3.5), que está definida para qualquer grupo de Lie  $G$  (mais adiante, será mostrada a ligação entre as formas de Maurer-Cartan e a conexão de Cartan).

Indo adiante com esta apresentação do problema, para entender melhor a forma de Maurer-Cartan, dado um grupo de Lie  $G$  (vide seção D.1) e seu fibrado tangente  $TG$  (vide seção C.3.5), a sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é o próprio espaço tangente no elemento identidade do grupo  $e$ , ou seja  $\mathfrak{g} = T_e G$  (IVEY; LANDSBERG, 2003). De fato, conforme mostrado na figura 1 – a), qualquer vetor tangente a  $G$ , que sempre pode ser pensado como o vetor velocidade  $\dot{\Gamma}$  de uma curva  $\Gamma(t)$ , pode ser transladado para o elemento identidade do grupo, ou seja  $I$ , por uma multiplicação pela esquerda  $\Gamma$ . Esta aplicação é conhecida como *translação à esquerda*, e a fórmula  $\dot{\Gamma} = \Gamma\xi$  permite representar qualquer velocidade  $\dot{\Gamma}$  no ponto  $\Gamma$  como um elemento da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Nota-se que esta fórmula é a generalização, para um grupo arbitrário, da fórmula  $\dot{R} = R\Omega$  em  $SO(3)$ .

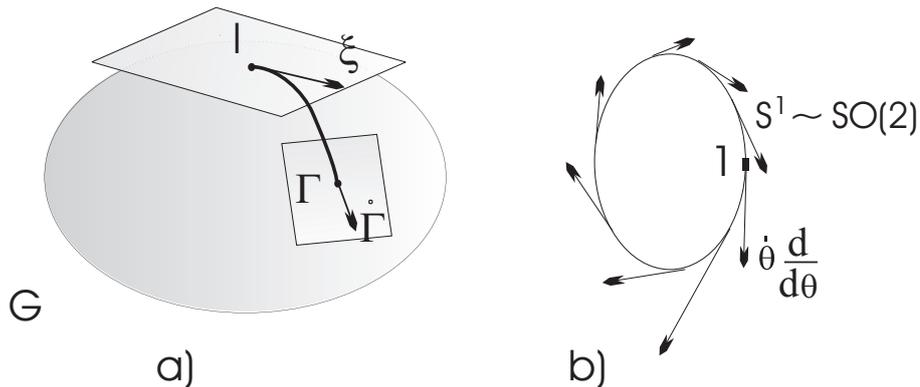


Figura 1: Grupos de Lie e Seus Espaços Tangentes

Como a matriz  $\Gamma(t)$  é invertível, pode-se escrever  $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = \xi$  e a chamada forma de Maurer-Cartan à esquerda é definida por  $\Xi = \Gamma^{-1}d\Gamma$ , onde  $\Gamma$  é uma matriz qualquer do grupo (SATTINGER; WEAVER, 1986). Esta claro que esta fórmula está relacionada com  $\dot{\Gamma} = \Gamma\xi$ , porém um exemplo irá ajudar.

O grupo de Lie  $SO(2)$  é o grupo unidimensional das rotações planares (ou seja, precisa de somente um parâmetro, que é  $\theta$ , por exemplo). Este grupo é homomórfico (vide seção A.3) à circunferência unitária  $S^1$ , como apresentado na figura 1 – b). Para qualquer ponto em  $S^1$  (exceto um) existe uma função  $\theta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  que associa um número ao intervalo  $[0, 2\pi)$  àquele ponto, ou seja  $R(\theta) = e^{j\theta}$ , ou ainda:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Se for tirado o diferencial de  $R$ , como feito anteriormente, tem-se:

$$dR = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} d\theta;$$

de modo que a forma de Maurer-Cartan fica:

$$\Xi = R^{-1} dR = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} d\theta = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta \\ d\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Como é preciso aplicar uma 1-forma em um vetor, e como o grupo de Lie em questão é unidimensional, então trata-se de aplicar uma 1-forma com valores em  $\mathfrak{so}(2)$  em um 1-vetor tangente ao grupo  $SO(2) = S^1$ , conforme ilustrado na figura 1 – b). Qualquer curva em  $S^1$  nada mais é que um ângulo em função do tempo  $\theta(t)$ . Deste modo, os vetores tangentes a esta curva são da forma:  $\dot{\theta}(d/d\theta)$ . Como  $d\theta(d/d\theta) = 1$ , tem-se então:

$$\Xi \left( \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta \left( \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \right) \\ d\theta \left( \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix},$$

o que, agora sim, é o que é chamado de conexão em (SATTINGER; WEAVER, 1986), ou seja,  $\Omega(t)$ . Voltando-se para o caso mais geral no espaço  $\mathbb{R}^3$ , onde o grupo das rotações de um corpo rígido é  $SO(3)$ , o frame não-inercial  $R = [ \mathbf{E}_1 \mid \mathbf{E}_2 \mid \mathbf{E}_3 ]$  se move juntamente e solidariamente com este corpo rígido, e que se pode querer encontrar a velocidade de um ponto qualquer em relação a este frame, ou seja,  $\mathbf{r}'$ . De modo a reescrever a equação (1.2), a *derivada covariante* é o operador sobre os vetores tangente de  $\mathbb{R}^3$  (que são também vetores de  $\mathbb{R}^3$ ) dado por:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega = I \frac{\partial}{\partial t} + \Xi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = (I + \Xi) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (1.9)$$

De fato, ao se aplicar  $D_t$  sobre o vetor  $\mathbf{r}'$ , resulta em  $\Omega \mathbf{r}' + \dot{\mathbf{r}}'$ , que é a velocidade do ponto  $\mathbf{r}'$  como vista em relação ao REFERENCIAL INERCIAL  $S$ , mas escrito em relação à base de vetores do sistema não inercial  $S'$ . Ao se aplicar novamente a derivada

temporal sobre os dois lados da equação (1.2), tem-se a aceleração do ponto em relação ao referencial inercial e também escrito na base do referencial inercial. Após algumas manipulações algébricas, tem-se  $\ddot{\mathbf{r}} = R(\ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\Omega}\mathbf{r}' + 2\Omega\dot{\mathbf{r}}' + \Omega^2\mathbf{r}')$ , de modo que a parte que está interna ao parênteses do lado direito da equação é o que se chama de aceleração do ponto em relação ao REFERENCIAL INERCIAL mas escrito na base do não inercial  $\mathbf{a}'$ . Não é difícil ver que:

$$\mathbf{a}' = D_t^2\mathbf{r}' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega\right)(\Omega\mathbf{r}' + \dot{\mathbf{r}}') = \ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\Omega}\mathbf{r}' + 2\Omega\dot{\mathbf{r}}' + \Omega^2\mathbf{r}', \quad (1.10)$$

onde  $\ddot{\mathbf{r}}'$  é a aceleração relativa, ou seja, a aceleração do ponto em relação ao REFERENCIAL NÃO INERCIAL e escrita na base deste mesmo sistema,  $\Omega^2\mathbf{r}'$  é a chamada *aceleração centrífuga* também escrita na base do sistema não inercial e  $2\Omega\dot{\mathbf{r}}'$  é a aceleração de Coriolis. Todas estas parcelas de aceleração são sempre em relação ao sistema inercial  $S$  mas escrito na base de  $S'$ .

Para descrever a dinâmica do movimento do ponto, supondo que a força resultante esteja escrita na base não inercial, ou seja, tem-se  $\mathbf{f}'$ , a segunda Lei de Newton pode ser escrita como:

$$mD_t^2\mathbf{r}' = \mathbf{f}', \quad (1.11)$$

que é a dinâmica escrita na base não inercial, mas em relação ao sistema de referência inercial. Isto também poderia ter sido escrito em termos da quantidade de movimento do ponto, ou seja:  $\mathbf{P}' = mD_t\mathbf{r}'$ , e a segunda lei de Newton ficaria escrita como  $D_t\mathbf{P}' = \mathbf{f}'$ . Pode-se dizer que a segunda lei de Newton apresentada na equação (1.11) é um *forma invariante* de se escrever a tal lei, que vale para qualquer sistema de referência, inercial ou não. Entretanto, só conseguimos chegar nela porque existe um sistema inercial.

De forma a obter a dinâmica do movimento de corpo rígido, como foi dito, é necessário se trabalhar em outra representação do grupo  $SO(3)$  e da álgebra  $\mathfrak{so}(3)$ , que é a *representação adjunta* (vide seção D.1.1). Por conta do homomorfismo entre os espaços base, pode-se definir a derivada covariante como sendo:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + [\Omega, \cdot], \quad (1.12)$$

onde  $[A, B] = AB - BA$  é o comutador. Há entretanto, duas cópias de  $\mathfrak{so}(3)$  que devem ser consideradas: 1) a cópia onde vive a velocidade angular e quantidades relacionadas;

2) a cópia onde vive o vetor posição, velocidade pontual e etc. Um conceito essencial é o de *momento angular*, que está relacionado com a conexão através de um operador linear  $\mathbb{I}$ , conhecida como *operador inercial*. O momento angular é dado por  $\Lambda = \mathbb{I}(\Omega)$  e a lei de Newton (ou de Euler) é dada por  $D_t\Lambda = T$ , onde  $T$  é a matriz de torque agindo no corpo rígido. Após a substituição, tem-se:

$$D_t\Lambda = D_t\mathbb{I}(\Omega) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{I}(\Omega) + [\Omega, \mathbb{I}(\Omega)] = \mathbb{I}(\dot{\Omega}) + [\Omega, \mathbb{I}(\Omega)] = T.$$

Após a escolha da base para  $\mathfrak{so}(3)$  dada por:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

e escrevendo-se a conexão nesta base, ou seja,  $\Omega = \Omega_1\mathbf{E}_1 + \Omega_2\mathbf{E}_2 + \Omega_3\mathbf{E}_3$ , é possível mostrar que  $\mathbb{I}(\mathbf{E}_i) = I_i\mathbf{E}_i$ , onde  $I_i$  são os autovalores do operador (a convenção de Einstein foi usada aqui). Como  $\Omega = \Omega_i\mathbf{E}_i$ , então:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_i\mathbb{I}(\mathbf{E}_i) + [\Omega_j\mathbf{E}_j, \Omega_k\mathbb{I}(\mathbf{E}_k)] &= \dot{\Omega}_i I_i \mathbf{E}_i + [\Omega_j\mathbf{E}_j, \Omega_k I_k \mathbf{E}_k] = \\ &= (\dot{\Omega}_m I_m + I_k \Omega_j \Omega_k \epsilon_{ikm}) \mathbf{E}_m = T_m \mathbf{E}_m, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde  $\epsilon_{ikm}$  é o tensor totalmente anti-simétrico. Isto resulta nas chamadas equações de Euler:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 + T_1, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 + T_2, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 + T_3. \end{aligned}$$

Foi visto então que é possível obter tanto a cinemática de um ponto material e de um corpo rígido usando a chamada conexão de Cartan, e os conceitos associados de representação de grupo e derivada covariante, todos associados ao grupo de Lie  $SO(3)$  e à sua álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$ . No caso do corpo rígido, a cinemática e a dinâmica do movimento translacional é igual ao do ponto material.

## 1.3 Organização do Trabalho

Neste trabalho, pretende-se apresentar os resultados publicados em (COLÓN, 2014), (COLÓN, 2015) e (COLÓN, 2018a), que são os resultados obtidos por este candidato ao longo desses anos. A apresentação foi feita de forma a se tornar a mais clara possível, e elucida os resultados dos artigos.

1. No capítulo 2, mostra-se que a cinemática geral de um conjunto de corpos rígidos pode ser obtida de maneira integrada usando-se conexão de Cartan, teoria da representação e derivada covariante associados ao grupo de Lie  $SE(3)$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(3)$ .
2. No capítulo 3, apresentam-se os conceitos de fibrado principal e fibrados associados, bem como os conceitos de derivadas covariantes, que explicam fibrados vetoriais, seções, conexões e derivadas covariantes em fibrados.
3. No capítulo 4, mostra-se que a cinemática e a dinâmica de um conjunto de corpos rígidos pode ser obtida usando-se a conexão de Cartan, a teoria da representação e a derivada covariante associados ao grupo de Lie  $SU(2)$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , com movimento rotacional e translacional separados, ou seja, usando-se quatérnios.
4. Finalmente, no capítulo 5, apresentam-se conclusões, comentários e sugestões de trabalhos futuros.

Há muitas vantagens, como será visto, em se usar conexões de Cartan, derivadas covariantes e fibrados principais e associados para realizar a modelagem de um sistema robótico ou mecanismo em geral. Ela pode ser usada, por exemplo, tanto para modelar um robô serial quanto um robô paralelo. Ela expõe também uma forma única de escrever as equações cinemáticas e dinâmicas tanto usando o grupo de Lie  $SO(3)$  (matrizes de rotação), grupo de Lie  $SE(3)$  (translações e rotações representadas por matrizes homogêneas), grupo de Lie  $SU(2)$  (rotação e translação de forma separada no espaço dos quatérnios) e grupo de Lie  $\text{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$ , que é o grupo dos quatérnios duais. Embora já se demonstre que essas representações são possíveis com o mesmo equipamento matemático básico, as equações dinâmicas para  $SE(3)$  e cinemáticas e dinâmicas para  $\text{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$  ainda estão em fase de investigação. Finalmente, juntou-se uma série de assuntos de Matemática, todos relacionados com os resultados apresentados acima, na forma de apêndices. O intuito é facilitar o entendimento do leitor, que, do contrário, teria que buscar assuntos bastante diversos na literatura matemática. No apêndice A, apresentam-se conceitos básicos de álgebra

abstrata, passando por grupos, anéis, módulos e álgebras. Em especial, apresentam-se conceitos de teoria das categorias, que é importante para o entendimento do papel do produto tensorial nas construções de diferentes álgebras associativas e de álgebras e co-álgebras de Lie associadas. O conceito de co-álgebra de Lie é importante para a definição de álgebras de Lie duais, que, por sua vez, são importantes para escrever as equações dinâmicas no caso de grupo  $SE(3)$  e  $Spin(3) \times \mathbb{R}^3$ .

No apêndice B, apresentam-se os principais conceitos de topologia e espaços topológicos, bem como sua utilização para prover às estruturas algébricas do apêndice anterior os conceitos de proximidade, limite e continuidade. Um pouco de topologia algébrica é também apresentado, já que os grupos de Lie que trabalhamos acima não são, em geral, simplesmente conexos. No apêndice C, apresentam-se as estruturas matemáticas necessárias que são usadas para poder se definir diferenciabilidade em diferentes espaços, através das chamadas variedades diferenciáveis. Importantes conceitos como o de campos vetoriais, seções suaves, formas diferenciais, integração e folheações são apresentados. Finalmente, no apêndice D, grupos de Lie com suas álgebras de Lie são definidos e suas propriedades apresentadas. Após isso, são introduzidas ainda mais estruturas (sobre as variedades diferenciáveis) de forma que noções como métrica (para medição de ângulos e comprimentos), paralelismo e curvatura possam ser definidas. É nesse ponto que se podem definir rigorosamente as conexões, como por exemplo a de Cartan, embora ela seja introduzida de forma didática no corpo do texto principal. No fim das contas, os apêndices não são leitura obrigatória, mas somente estão neste documento para facilidade do leitor. Um especialista nestas áreas não precisa ler os apêndices.

Outro fato importante sobre os apêndices é que eles contém conhecimentos adquiridos por este autor ao longo de sua carreira até aqui, e que são importantes para esta área de pesquisa. Contém também muitas observações e pontos de vista deste autor, que foram anotadas de forma a facilitar o seu entendimento. Até onde vai o conhecimento deste autor, esta abordagem usando conexões de Cartan para escrita das equações cinemáticas e dinâmicas é original, juntamente com fibrados e derivadas covariantes. Embora grupos de Lie, álgebras de Clifford, dentre outros, já sejam usados em robótica há algum tempo (SELIG, 2005), (CHIRIKJIAN; KYATKIN, 2000), conexões, fibrados principais, associados e derivadas covariantes só são encontrados, até onde este autor sabe, em sua obra de pesquisa. Finalmente, muitos dos conhecimentos apresentados nestes apêndices são importantes para pesquisa futura de técnicas de controle não-lineares para robótica. Entretanto, trata-se por enquanto de pesquisa em estado inicial, e não será mais mencionada aqui.



## 2 CINEMÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS NO $SE(3)$

Antes de se passar para à Cinemática com conexão de Cartan associada ao  $SE(3)$ , reescrevem-se os resultados do capítulo anterior, que foi introdutório, para explicar o problema, de uma maneira mais formal, ao mesmo tempo em que se fixa notação.

### 2.1 Cinemática e Dinâmica do Corpo Rígido em $SO(3)$

De volta ao caso  $SO(3)$ , é possível definir:

**Definição 2.1.1** (Derivada Covariante agindo em  $\mathbb{R}^3$ ). *Dada uma conexão de Cartan  ${}^i\Omega_i$  num frame  $S^i$  (que, no caso Euclidiano, é uma forma de Maurer-Cartan), a derivada covariante (ou derivada total) é um operador que age em  $\mathbb{R}^3$  e é dada por:*

$${}^iD_t = \frac{\partial}{\partial t} + {}^i\Omega_i. \quad (2.1)$$

Se se deseja calcular a derivada temporal de um vetor no sistema de referência não-inercial  $S^1$ , esta operação deve ser usada. De fato, ao se aplicar  ${}^1D_t$  em  ${}^1\mathbf{r}$ , resulta em  ${}^1\Omega_1{}^1\mathbf{r} + {}^1\dot{\mathbf{r}}$ , que é a velocidade do ponto  ${}^1\mathbf{r}$  como vista do frame inercial mas em coordenadas do frame não-inercial  $S^1$ .

**Proposição 2.1.1** (Aceleração de um ponto). *A aceleração de um ponto  ${}^1\mathbf{r}$  para uma dada conexão de Cartan  ${}^1\Omega_1$ , que se aplica a uma partícula, é dada por:*

$${}^1\mathbf{a} = {}^1D_t{}^1D_t{}^1\mathbf{r} = {}^1\ddot{\mathbf{r}} + 2({}^1\Omega_1){}^1\dot{\mathbf{r}} + \left({}^1\dot{\Omega}_1 + {}^1\Omega_1{}^1\Omega_1\right){}^1\mathbf{r}, \quad (2.2)$$

onde  ${}^1\ddot{\mathbf{r}}$  é a aceleração relativa como visto pelo referencial  $S^1$  e nas coordenadas deste mesmo frame,  $({}^1\dot{\Omega}_1 + {}^1\Omega_1{}^1\Omega_1){}^1\mathbf{r}$  é a aceleração centrífuga, e  $2{}^1\Omega_1{}^1\dot{\mathbf{r}}$  é a aceleração de Coriolis. Esta é a aceleração do ponto  ${}^1\dot{\mathbf{r}}$  como visto no frame inercial  $S^0$ , mas expresso na base do frame não-inercial  $S^1$ .

*Demonstração.* É importante notar que os operadores  $\partial/\partial t$  e  ${}^1\Omega_1$  não comutam. Aplicando-se a equação (2.1) na equação (1.1), tem-se:

$${}^1\mathbf{a} = {}^1D_t {}^1D_t {}^1\mathbf{r} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + {}^1\Omega_1 \right) ({}^1\Omega_1 {}^1\mathbf{r} + {}^1\dot{\mathbf{r}}), \quad (2.3)$$

e o resultado segue. ■

De modo a descrever a dinâmica do ponto material com massa  $m$ , a segunda lei de Newton fica escrita, no frame não-inercial, como:

$$m {}^1D_t {}^1D_t {}^1\mathbf{r} = {}^1\mathbf{f}, \quad (2.4)$$

onde  ${}^1\mathbf{f}$  representa a força resultante nas coordenadas do frame não-inercial  $S^1$ . Isto também poderia ter sido escrito em termos da quantidade de movimento da partícula, calculado como  ${}^1\mathbf{p} = m {}^1D_t {}^1\mathbf{r}$ , e a lei de Newton extendida seria reformulada para  ${}^1D_t {}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{f}$ . A cinemática e a dinâmica do corpo rígido com um ponto fixo, ou seja, com operadores no  $SO(3)$ , é formulada na chamada representação adjunta, ou seja, criam-se homomorfismos entre as matrizes de  $SO(3)$  e de  $\mathfrak{so}(3)$  nos operadores lineares de  $\mathfrak{so}(3)$ . De modo a evitar confusão, os elementos de  $\mathfrak{so}(3)$  são representados por letras maiúsculas. Nesta representação, a derivada covariante é dada por:

**Definição 2.1.2** (Derivada covariante agindo em  $\mathfrak{so}(3)$ ). *Dada uma conexão de Cartan  ${}^1\Omega_1$ , a derivada covariante na representação adjunta é um operador que age na álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$ , ou seja, é da forma:*

$${}^1D_t = \frac{\partial}{\partial t} + [{}^1\Omega_1, \cdot], \quad (2.5)$$

onde  $[A, B] = AB - BA$  é o colchete de Lie.

**Teorema 2.1.1** (Aceleração de um ponto na representação adjunta). *A aceleração relacionada à conexão de Cartan  ${}^1\Omega_1$  para um ponto ou partícula de posição  ${}^1\mathbf{X} \in \mathfrak{so}(3)$  é dada por:*

$${}^1\mathbf{A} = {}^1D_t {}^1D_t {}^1\mathbf{X} = {}^1\ddot{\mathbf{X}} + [{}^1\dot{\Omega}_1, {}^1\mathbf{X}] + 2[{}^1\Omega_1, {}^1\dot{\mathbf{X}}] + [{}^1\Omega_1, [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}]], \quad (2.6)$$

onde a aceleração é em relação ao referencial inercial  $S^0$  mas em coordenadas de  $S^1$ .

*Demonstração.* Composto-se a equação (2.5), tem-se:

$$\begin{aligned}
{}^1\mathbf{A} &= {}^1D_t {}^1D_t {}^1\mathbf{X} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + [{}^1\Omega_1, \cdot] \right) ({}^1\dot{\mathbf{X}} + [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}]) = \\
&= {}^1\ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial}{\partial t} [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}] + [{}^1\Omega_1, {}^1\dot{\mathbf{X}}] + [{}^1\Omega_1, [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}]] = \\
&= {}^1\ddot{\mathbf{X}} + [{}^1\dot{\Omega}_1, {}^1\mathbf{X}] + [{}^1\Omega_1, {}^1\dot{\mathbf{X}}] + [{}^1\Omega_1, {}^1\dot{\mathbf{X}}] + [{}^1\Omega_1, [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}]]. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

■

Nota-se que a equação (2.7) é bastante similar a equação (2.2) e ambas se aplicam a pontos, porém as representações são bastante diferentes. Seja o momento angular em relação ao sistema não-inercial  $S^1$  representado por  ${}^1\mathbf{A}$ , e  ${}^1\mathbf{V} = {}^1D_t {}^1\mathbf{X}$  a velocidade em relação à referência  $S^0$ , mas escrita nas coordenadas de  $S^1$ . A fórmula para o momento angular de um ponto de massa  $m$  é dada por:  ${}^1\mathbf{A} = m[{}^1\mathbf{X}, {}^1\mathbf{V}]$ .

**Proposição 2.1.2.** *Para o caso do movimento rígido de um corpo com um ponto fixo, sendo  $S^1$  o sistema de referência preso ao centro de massa (que também é o ponto fixo), as equações da dinâmica, também conhecidas como equações de Euler, são dadas por:*

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + T_x, \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_z \omega_x + T_y, \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + T_z, \end{cases} \quad (2.8)$$

onde as constantes  $I_i$ , para  $i \in \{x, y, z\}$ , são os momentos principais de inércia,  $\omega_i$ , para  $i \in \{x, y, z\}$ , são as componentes da velocidade angular  ${}^1\Omega_1$ , e  $T_i$ , para  $i \in \{x, y, z\}$ , são os componentes do torque externo aplicado ao corpo.

*Demonstração.* Sendo  ${}^1\mathbf{X}$  um ponto qualquer do corpo rígido, tem-se que a velocidade deste ponto, em relação ao sistema de referência inercial, mas escrito na base do não inercial, tem-se que  ${}^1\mathbf{V} = {}^1D_t {}^1\mathbf{X}$ . Como a velocidade relativa tem que ser nula, então  ${}^1\dot{\mathbf{X}} = 0$ , o que implica que  ${}^1\mathbf{V} = [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}]$ . A fórmula para o momento angular deste ponto é então  ${}^1\mathbf{A} = m[{}^1\mathbf{X}, [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{X}]] = -m[{}^1\mathbf{X}, [{}^1\mathbf{X}, {}^1\Omega_1]] = \mathbb{I}({}^1\mathbf{X}) {}^1\Omega_1$ , onde foi usada a propriedade de anti-simetria de  $[\cdot, \cdot]$ . O operador linear resultante  $\mathbb{I}({}^1\mathbf{X})$  é chamado de operador (ou tensor, ou matriz) de inércia para uma partícula de massa  $m$ . Claramente, trata-se de uma função não-linear de  ${}^1\mathbf{X}$ , e no caso de um corpo rígido, é preciso integrar em relação à massa para se ter o operador de inércia para o corpo rígido completo, isto é:

$$\mathbb{I}_b({}^1\Omega_1) = \left\{ \int \mathbb{I}({}^1\mathbf{X}) \, dm \right\} {}^1\Omega_1, \quad (2.9)$$

Após feita a integração na massa, o operador resultante  $\mathbb{I}_b$  não depende de  ${}^1\mathbf{X}$  e é constante, já que nesta base/referência, os pontos do corpo rígido não se movem. A lei de Newton rotacional, nesta representação, é dada por:

$${}^1D_t{}^1\mathbf{\Lambda} = \frac{\partial{}^1\mathbf{\Lambda}}{\partial t} + [{}^1\Omega_1, {}^1\mathbf{\Lambda}] = {}^1\mathbf{T},$$

onde  ${}^1\mathbf{T}$  é a representação adjunta do torque externo aplicado (SELIG, 2005). Usando-se então  ${}^1\mathbf{\Lambda} = \mathbb{I}_b({}^1\Omega_1)$ , tem-se:

$${}^1D_t{}^1\mathbf{\Lambda} = {}^1D_t\{\mathbb{I}_b({}^1\Omega_1)\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [{}^1\Omega_1, \cdot] \right\} \mathbb{I}_b({}^1\Omega_1) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_b({}^1\Omega_1) + [{}^1\Omega_1, \mathbb{I}_b({}^1\Omega_1)], \quad (2.10)$$

onde a equação (2.5) foi usada. Devido ao fato de que os operadores  $\mathbb{I}_b$  and  $\partial/\partial t$  também comutam, tem-se:

$${}^1D_t{}^1\mathbf{\Lambda} = \mathbb{I}_b({}^1\dot{\Omega}_1) + [{}^1\Omega_1, \mathbb{I}_b({}^1\Omega_1)] = {}^1\mathbf{T}. \quad (2.11)$$

Escolhendo-se a base canônica da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  para ser a base do sistema de referência de  $S^1$ , que é dada pelas matrizes:

$${}^1\mathbf{E}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{E}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e escrevendo-se a conexão nesta base, ou seja,  ${}^1\Omega_1 = \omega_x {}^1\mathbf{E}_x + \omega_y {}^1\mathbf{E}_y + \omega_z {}^1\mathbf{E}_z = \sum_i \omega_i {}^1\mathbf{E}_i$ , onde  $i \in \{x, y, z\}$ , é possível mostrar que  $\mathbb{I}_b({}^1\mathbf{E}_i) = I_i {}^1\mathbf{E}_i$ , onde  $I_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor do operador de inércia (que são os momentos principais de inércia). Fazendo-se a substituição, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_b\left(\sum_i \dot{\omega}_i {}^1\mathbf{E}_i\right) + \left[\sum_j \omega_j {}^1\mathbf{E}_j, \sum_k \omega_k {}^1\mathbf{E}_k\right] = \\ = \sum_i (\dot{\omega}_i \mathbb{I}_b({}^1\mathbf{E}_i)) + \left[\sum_j \omega_j {}^1\mathbf{E}_j, \sum_k (\omega_k \mathbb{I}_b({}^1\mathbf{E}_k))\right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando-se a equação de autovalores  $\mathbb{I}_b({}^1\mathbf{E}_i) = I_i {}^1\mathbf{E}_i$  na equação (2.12), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_i (\dot{\omega}_i I_i {}^1\mathbf{E}_i) + \sum_j \sum_k [\omega_j {}^1\mathbf{E}_j, \omega_k I_k {}^1\mathbf{E}_k] = \\
& = \sum_i (\dot{\omega}_i I_i {}^1\mathbf{E}_i) + \sum_j \sum_k \omega_j \omega_k I_k [{}^1\mathbf{E}_j, {}^1\mathbf{E}_k] = \sum_i (\dot{\omega}_i I_i {}^1\mathbf{E}_i) + \sum_j \sum_k \omega_j \omega_k I_k \sum_i \epsilon_{jki} {}^1\mathbf{E}_i = \\
& = \sum_i \left[ \dot{\omega}_i I_i + \sum_j \sum_k \omega_j \omega_k I_k \epsilon_{jki} \right] {}^1\mathbf{E}_i = \sum_i T_i {}^1\mathbf{E}_i,
\end{aligned}$$

onde foi usada a relação  $[{}^1\mathbf{E}_i, {}^1\mathbf{E}_j] = \epsilon_{ijk} {}^1\mathbf{E}_k$  e  $\epsilon_{ikm}$  é zero se dois índices forem iguais, 1 para qualquer permutação par de 123 e  $-1$  para qualquer permutação ímpar 123. Estas relações entre os vetores da base são conhecidas como relações estruturais da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  (vide seção D.1). É interessante notar que  $[{}^1\mathbf{E}_x, {}^1\mathbf{E}_y] = {}^1\mathbf{E}_z$  é equivalente a  ${}^1\mathbf{e}_x \times {}^1\mathbf{e}_y = {}^1\mathbf{e}_z$ , onde  ${}^1\mathbf{e}_i$  é o vetor em  $\mathbb{R}^3$  correspondente a  ${}^1\mathbf{E}_i \in \mathfrak{so}(3)$ . O resultado então segue. ■

## 2.2 Cinemática em $SE(3)$

Até aqui, o leitor deve ter se convencido que podemos usar conexão de Cartan e derivada covariante para escrever as equações cinemáticas e dinâmicas para um ponto material e um corpo rígido com um ponto fixo. Evidentemente, isso já é suficiente para escrever as equações completas, cinemáticas e dinâmicas, para um corpo rígido. Antes porém de passar para a definição de fibrado principal e fibrados associados, que são os outros conceitos fundamentais para a abordagem que se propõe, mostra-se que é possível escrever a cinemática do movimento completo de um corpo rígido nas chamadas *matrizes homogêneas*, ou seja, por matrizes do grupo de Lie  $SE(3)$ , usando-se o conceito de derivada covariante. Ainda se mostra como escrever a fórmula de transformação de uma conexão entre bases/sistemas de referência diferentes. Em particular, deduz-se a fórmula para uma cadeia cinemática com  $n$  frames (ou sistemas de referência), tal como é útil em robótica. Sejam então dois sistemas de referência  $S^0, S^1$ , mas que não tem o mesmo ponto de origem, e o 3-vetor  ${}^0\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$  descreve a posição da origem do sistema não-inercial  $S^1$  nas coordenadas do inercial  $S^0$ . Esta origem e orientação são representadas pela matriz  $4 \times 4$  da forma:

$${}^0_1\Gamma = \begin{bmatrix} {}^0_1R & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que pertence ao grupo de Lie  $SE(3)$  e que é também conhecida como *transformação homogênea*. O grupo de Lie  $SE(3)$  pode ser pensado como o produto de dois outros grupos

de Lie  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , chamado de produto *semi-direto*, onde  ${}^0\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$  e  ${}^0R \in SO(3)$  (vide seção B.2). Uma curva em  $SE(3)$ , que é  $\Gamma(t)$ , descreve o movimento de um corpo rígido (IVEY; LANDSBERG, 2003). Modificando-se a equação (1.1) para incluir a translação do sistema de referência inercial, a equação fica  ${}^0\dot{\mathbf{r}} = {}^0R({}^1D_t){}^1\mathbf{r} + {}^0\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , que é:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix} {}^1D_t \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1D_t = I \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} {}^1\Omega_1 & | & {}^1_0R^0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

onde  ${}^1D_t$  é a derivada covariante para a nova conexão, agora associada ao novo grupo de Lie. A nova conexão de Cartan continua sendo uma forma de Maurer-Cartan, mas a álgebra de Lie agora é  $\mathfrak{se}(3)$ .

**Teorema 2.2.1.** *Dados dois sistemas de referência  $S^0$  e  $S^1$  num espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , tal que o primeiro é inercial, o frame variante no tempo  ${}^0\Gamma(t)$  é uma curva em  $SE(3)$  e a velocidade total (que junta rotacional e translacional)  ${}^0\dot{\Gamma}$  é um campo tangente a  $SE(3)$ , então a conexão é uma curva na álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(3)$  (curva de twists, vide (SELIG, 2005)):*

$${}^1\Xi_1(t) = \begin{bmatrix} {}^1\Omega_1 & | & {}^1_0R^0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde  ${}^1\Omega_1(t)$  é a curva de velocidades angulares em  $\mathfrak{so}(3)$ .

Ou seja, novamente a derivada covariante assume a forma geral:

$${}^1D_t = \frac{\partial}{\partial t} + {}^1\Xi_1.$$

*Demonstração.* A fórmula de transformação entre  $S^0$  e  $S^1$  é:

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

que relaciona as coordenadas de um ponto arbitrário em  $S^1$  e  $S^0$ . Diferenciando-se ambos os lados da equação (2.14), tem-se:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{R} & | & {}^0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde a segunda fórmula à direita é a ação/representação do grupo  $SE(3)$  no espaço tangente,  $T_{\mathbf{r}}\mathbb{R}^3$ , e a primeira vai ser analisada na sequência. Aplicando-se a fórmula  $\dot{R} = R\Omega$ , todos os vetores tangentes ao longo da curva  ${}^0_1\Gamma(t)$  podem ser transformados em elementos de  $\mathfrak{se}(3)$  (hodógrafo). A álgebra de Lie tem a decomposição de Levi (vide seção D.1.1) dada por  $\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$ , onde  $\mathbb{R}^3$  deve ser vista como uma álgebra de Lie com produto vetorial  $\times$ , que representa translações, e  $\mathfrak{so}(3)$ , que representa velocidades rotacionais (SATTINGER; WEAVER, 1986; SELIG, 2005). A fórmula na equação (2.15) pode ser simplesmente escrita por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^0_1R^1\Omega_1 & | & {}^0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} {}^0_1R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0_1R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\Omega_1 & | & {}^1_0R^0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0_1R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esta poderia ainda ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0_1R & | & {}^0\boldsymbol{\gamma} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} {}^1\Omega_1 & | & {}^1_0R^0\dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\dot{\mathbf{r}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.16)$$

onde o último termo na soma é a velocidade relativa. A matriz que faz o papel análogo à matriz  ${}^1\Omega_1$  no caso  $SO(3)$  é aquela apresentada em (2.13), que aparece multiplicando uma posição, o que conclui a prova.  $\blacksquare$

Evidentemente, para descrever a aceleração de um ponto (pertence ou não a um corpo rígido), assim como a dinâmica, as equações em (1.10), (2.4) e (1.12) deveriam ser reformuladas para a nova conexão em (2.13).

## 2.3 Conexão de Cartan para um Grupo Arbitrário

Dada uma variável na variedade diferenciável  $M$  (vide seção C.3), a fórmula da transformação está relacionada em diferentes frames de referência, o que é fundamental de modo a se calcular a conexão no efeturador (ou qualquer outro elo). Vide (COLÓN, 2014) para uma discussão mais detalhada.

**Teorema 2.3.1** (Transformação entre Frames da Conexão). *Dados dois frames móveis  $S, S'$  (ou seja, nenhuma deles é inercial), e  $\mathbf{X}, \mathbf{X}'$  são as matrizes que representam os dois frames, então  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}A$  representa a relação entre eles, e  $\nabla\mathbf{X}' = \mathbf{X}'\Xi'$ ,  $\nabla\mathbf{X} = \mathbf{X}\Xi$  suas derivadas direcionais, de modo que a relação entre eles é dada por:*

$$\Xi' = A^{-1}dA + A^{-1}\Xi A, \quad (2.17)$$

e é chama de transformação de calibre. As matrizes  $\Xi, \Xi'$  são duas conexões de Cartan nos seus respectivos frames.

*Demonstração.* A fórmula na equação (2.17) pode ser facilmente demonstrada (segue-se aqui a demonstração de Spivak (SPIVAK, 2005)):

$$\nabla\mathbf{X}' = \mathbf{X}'\Xi' = \nabla(\mathbf{X}A) = \mathbf{X}dA + \nabla\mathbf{X}A = \mathbf{X}dA + \mathbf{X}\Xi A, \quad (2.18)$$

o que resulta em  $\Xi' = A^{-1}dA + A^{-1}\Xi A$ . ■

Então, a fórmula no teorema 2.3.1 é a transformação entre as conexões em diferentes frames. Não é difícil ver que se  $S$  é o frame  $S^0$  e  $S'$  é  $S^1$ , então  $A = {}^0_1R$ .

**Definição 2.3.1** (Derivada Covariante). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  e a conexão de Cartan  ${}^i\Xi_i$  no frame de referência  $S^i$  com valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , a derivada covariante associada é dada por:*

$${}^iD_t = I \frac{\partial}{\partial t} + {}^i\Xi_i, \quad (2.19)$$

onde  $I$  é a identidade em  $\mathfrak{g}$ .

Se três ou mais frames estão envolvidos (vide Figura 2), o que é necessário em robótica, o seguinte resultado é importante:

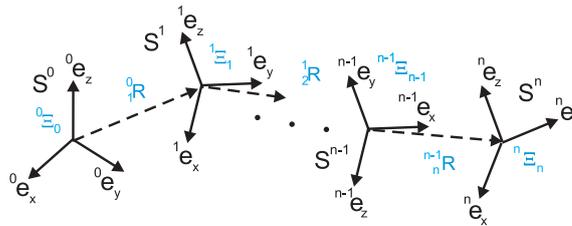


Figura 2: Transformação entre Frames.

**Proposição 2.3.1** (Fórmulas de Transformação). *Dados os frames  $S^0, S^1, \dots, S^{n-1}, S^n$ , então a fórmula de transformação entre as conexões de Cartan é:*

$${}^n \Xi_n = ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A)^{-1} d({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) + ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A)^{-1} ({}^0 \Xi_0) ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A). \quad (2.20)$$

*Demonstração.* A prova é por indução:

- O teorema 2.3.1 é a base da indução.
- Suponha que:

$${}^{n-1} \Xi_{n-1} = ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_{n-1}^{n-2} A)^{-1} \cdot d({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_{n-1}^{n-2} A) + \\ + ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_{n-1}^{n-2} A)^{-1} ({}^0 \Xi_0) ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_{n-1}^{n-2} A),$$

seja válida. Então, por aplicação de uma transformação de similaridade em ambos os lados por  ${}_n^{n-1} A$ , tem-se:

$$({}_n^{n-1} A)^{-1} ({}^{n-1} \Xi_{n-1}) ({}_n^{n-1} A) = ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A)^{-1} \cdot d({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) ({}_n^{n-1} A) + \\ + ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A)^{-1} ({}^0 \Xi_0) ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A). \quad (2.21)$$

Aplicando-se a regra da cadeia em  ${}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A$ , tem-se:

$$d({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) ({}_n^{n-1} A) = d({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) - ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) d({}_n^{n-1} A), \quad (2.22)$$

e substituindo-se na equação (2.21), tem-se:

$$({}_n^{n-1} A)^{-1} ({}^{n-1} \Xi_{n-1}) ({}_n^{n-1} A) = ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A)^{-1} \cdot \\ \cdot [d({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) - ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A) d({}_n^{n-1} A)] + \\ + ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A)^{-1} ({}^0 \Xi_0) ({}_1^0 A_2^1 A \cdots {}_n^{n-1} A),$$

e finalmente:

$$\begin{aligned}
& \binom{n-1}{n}A^{-1} \binom{n-1}{n}\Xi_{n-1} \binom{n-1}{n}A + \binom{n-1}{n}A^{-1} d \binom{n-1}{n}A = \\
& = \binom{0}{1}A_2^1 A \cdots \binom{n-1}{n}A^{-1} d \binom{0}{1}A_2^1 A \cdots \binom{n-1}{n}A + \\
& \quad + \binom{0}{1}A_2^1 A \cdots \binom{n-1}{n}A^{-1} \binom{0}{1}\Xi_0 \binom{0}{1}A_2^1 A \cdots \binom{n-1}{n}A, \quad (2.23)
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

De modo a calcular  ${}^i\Xi_i$ , deve-se fixar os frames em cada elo do robô e escolher o conjunto conveniente de parâmetros, além de calcular a matriz de transformação total do frame de base, que é 0, até o frame  $n - 1$ , que é  $\binom{0}{1}A_2^1 A \cdots \binom{n-1}{n}A$ . Deste modo, pela aplicação da proposição 2.3.1, a conexão de Cartan  ${}^i\Xi_i$  pode ser calculada para qualquer frame arbitrário. Este método, por outro lado, permite calcular as conexões em cada frame de uma forma recursiva, usando-se a fórmula da equação (2.17), que é:

$${}^n\Xi_n = \binom{n-1}{n}A^{-1} \binom{n-1}{n}\Xi_{n-1} \binom{n-1}{n}A + \binom{n-1}{n}A^{-1} d \binom{n-1}{n}A.$$

No caso da descrição do movimento completo do corpo rígido por matrizes homogêneas de  $SE(3)$ , a conexão de Cartan  ${}^i\Xi_i$  assume valores em  $\mathfrak{se}(3)$ , ou seja, os chamados *twists*, e no caso de somente rotações  $SO(3)$ , as conexões de Cartan assumem valores em  $\mathfrak{so}(3)$ , ou seja, simples matrizes de velocidades angulares. Como as matrizes  $\binom{i}{i+1}A$  dependem dos ângulos ou posições lineares das juntas de um robô, a conexão  ${}^n\Xi_n$  vai depender destes parâmetros também. A cinemática inversa pode ser calculada como em (CRAIG, 1989). Já a cinemática diferencial, ou jacobiano, pode ser determinado a partir de  ${}^n\Xi_n$ , como indicado no exemplo da seção 2.4.2. As velocidades das juntas podem ser calculadas a partir da inversa do jacobiano, como indicado em (SELIG, 2005).

## 2.4 Resultados para um Robô Plano de Dois Elos

Nesta seção, apresentam-se alguns resultados para uma cadeia cinemática plana em um espaço euclidiano com dois elos e quatro sistemas de referência, sendo que um é inercial e os demais são não-inerciais.

### 2.4.1 Conexão para Três Frames com a Mesma Origem

De modo a calcular a conexão de Cartan, a aplicação da proposição 2.3.1 mostra que ela é dada por  ${}^2\Xi_2 = ({}^0R_2^1R)^{-1} d({}^0R_2^1R)$  para o segundo frame. Então:

$$\begin{aligned} {}^2\Xi_2 &= ({}^0R_2^1R)^{-1} d({}^0R_2^1R) = ({}^2R)({}^1R)[(d({}^0R)_2^1R + {}^0R d_2^1R)] = \\ &= ({}^2R)[{}^1\Omega_1^1R + d_2^1R] = ({}^2R)({}^1\Omega_1)_2^1R + {}^2\Omega_2, \end{aligned}$$

o que vai resultar em  ${}^2\Omega_2 + {}^1\Omega_1$  para o caso de movimento planar, já que as matrizes do grupo  $SO(2)$  e de sua álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2)$  comutam. A lei de Newton invariante (2.4) para o frame  $S^2$  tem a expressão  ${}^2\mathbf{f} = m({}^2D_t^2D_t)^2\mathbf{r}$  com derivada covariante dada por:

$${}^2D_t = I \frac{\partial}{\partial t} + {}^1\Omega_1 + {}^2\Omega_2. \quad (2.24)$$

O leitor pode verificar que esta é a fórmula correta aplicando-se a derivada temporal (não a covariante) na expressão  ${}^0\mathbf{r} = {}^0R_2^1R^2\mathbf{r}$ , tal como feito em (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006), seções 4.1 a 4.5, que é  ${}^0\dot{\mathbf{r}} = {}^0R_2^1R({}^1\Omega_1)_2^1R^2\mathbf{r} + {}^0R_2^1R({}^2\Omega_2)^2\mathbf{r} + {}^0R_2^1R^2\dot{\mathbf{r}}$ , e aplicando-se novamente esta derivada temporal, após algumas manipulações, tem-se:

$$\begin{aligned} ({}^0R_2^1R)^T({}^0\ddot{\mathbf{r}}) &= {}^2\ddot{\mathbf{r}} + 2({}^2\Omega_2)^2\mathbf{r} + 2({}^2R^1\Omega_1^1R)^2\mathbf{r} + \left[{}^2\dot{\Omega}_2 + {}^2R({}^1\dot{\Omega}_1)_2^1R\right]^2\mathbf{r} + \\ &+ \left[{}^2\Omega_2^2\Omega_2 + {}^2R({}^1\Omega_1^1\Omega_1)_2^1R\right]^2\mathbf{r} + 2({}^2R^1\Omega_1)_2^1R^2\Omega_2^2\mathbf{r}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Aplicando-se agora a fórmula na equação (2.24) duas vezes, ou seja:

$$\begin{aligned} {}^2D_t^2D_t({}^2\mathbf{r}) &= \left(I \frac{\partial}{\partial t} + {}^2R^1\Omega_1^1R + {}^2\Omega_2\right)^2 {}^2\mathbf{r} = \left(I \frac{\partial}{\partial t} + {}^2R^1\Omega_1^1R + {}^2\Omega_2\right) \cdot \\ &\cdot ({}^2\dot{\mathbf{r}} + {}^2R^1\Omega_1^1R^2\mathbf{r} + {}^2\Omega_2^2\mathbf{r}), \end{aligned}$$

após algumas manipulações algébricas, é fácil constatar que esta e a apresentada na equação (2.25) são iguais. Novamente considerando que no movimento plano as matrizes de  $SO(2)$  e de  $\mathfrak{so}(2)$  comutam, então a lei de Newton invariante fica:

$$m({}^2\ddot{\mathbf{r}}) + 2m({}^2\Omega_2 + {}^1\Omega_1)({}^2\dot{\mathbf{r}}) + m\left({}^2\dot{\Omega}_2 + {}^1\dot{\Omega}_1\right)^2\mathbf{r} + m({}^2\Omega_2 + {}^1\Omega_1)^2({}^2\mathbf{r}) = {}^2\mathbf{F}.$$

Embora os resultados obtidos usando-se a abordagem com conexões de Cartan e a abordagem clássica, tal como feita em (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006), devam coincidir, a primeira é mais geral, pois pode ser aplicada para qualquer grupo de Lie, ou seja, para qualquer representação de movimento, seja ela usando-se quatérnios ou quatérnios duais, por exemplo. Além disso, pode-se usar qualquer representação destes grupos, como a fundamental ou a adjunta, onde os vetores  ${}^0\mathbf{r}$ ,  ${}^1\mathbf{r}$  seriam trocados por matrizes anti-simétricas em  $\mathfrak{so}(3)$ .

No caso onde há também movimento translacional dos frames, ou seja, o grupo em questão é  $SE(3)$ , os valores da seção  ${}^i\Xi_i$  são os chamados *twists*, e do fato dos frames tridimensionais se moverem somente por rotações, onde o grupo é  $SO(3)$ , os valores dos frames são elementos de  $\mathfrak{so}(3)$ , ou seja, são simplesmente matrizes de velocidade angular. Se o frame  $i$  e o seu adjacente  $i+1$  estiverem ligados a elos adjacentes de um robô, a matriz  ${}^n\Xi_n$  dependerá das coordenadas de juntas do robô até a junta  $n-1$ . A cinemática inversa de posição é calculada da mesma forma que em (CRAIG, 1989). A cinemática diferencial, ou jacobiano, é determinada a partir da conexão  ${}^n\Xi_n$ , como indicado na subseção 2.4.2. As velocidades das juntas podem ser calculadas usando-se a inversa do jacobiano, que é similar ao método apresentado em (CAMPOS; GUENTHER; MARTINS, 2005), mas a diferença está no fato que o *screws*  $\hat{\$}$  neste caso é representado por um vetor em  $\mathbb{R}^6$  e não como um elemento de  $\mathfrak{se}(2)$ .

## 2.4.2 Conexão de Cartan para o Quarto Frame

Na figura 3, tem-se um robô planar de dois elos com quatro frames de referência, sendo que  $S^0$  é o inercial. A origem do frame  $S^i$  em relação ao adjacente anterior  $S^{i-1}$  é dada pelo vetor  ${}^{i-1}\gamma$ . A fórmula para a conexão no frame  $S^2$  é  ${}^2\Xi_2 = ({}^0\Gamma_2^1\Gamma)^{-1} d({}^0\Gamma_2^1\Gamma)$ , onde  $\Gamma \in SE(2)$  e  ${}^2\Xi_2 \in \mathfrak{se}(2)$ . Então  ${}^2\Xi_2 = ({}^0\Gamma_2^1\Gamma)^{-1} [(d_1^0\Gamma)_2^1\Gamma + {}^0\Gamma(d_2^1\Gamma)]$ , o que resulta, após algumas substituições, em:

$${}^2\Xi_2 = \left[ \begin{array}{c|c} {}^2_1R & -{}^2_1R^1\gamma \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} {}^1_0R & -{}^1_0R^0\gamma \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} d({}^0_1R) & d({}^0\gamma) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} {}^1_2R & {}^1\gamma \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} {}^0_1R & {}^0\gamma \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} d({}^1_2R) & d({}^1\gamma) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \right\},$$

e, após alguns cálculos adicionais, tem-se:

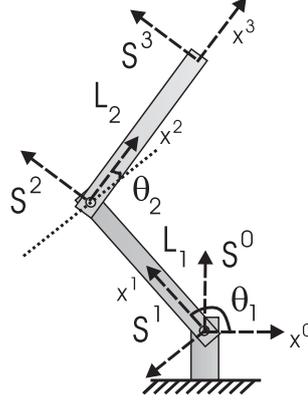


Figura 3: Robô Planar de Dois Elos.

$${}^2\Xi_2 = \left[ \begin{array}{c|c} {}^2R_0^1 R & -{}^2R_0^1 R^0 \gamma - {}^2R^1 \gamma \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} (d_1^0 R) {}_2^1 R + {}_0^1 R (d_2^1 R) & (d_1^0 R) {}^1 \gamma + d^{(0)\gamma} + {}_0^1 R d^1 \gamma \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.26)$$

Após realizar a multiplicação na equação (2.26) e lembrando que  ${}^1\Omega_1, {}^2\Omega_2, {}_0^1 R, {}_2^1 R$  comutam, tem-se:

$${}^2\Xi_2 = \left[ \begin{array}{c|c} {}^1\Omega_1 + {}^2\Omega_2 & {}^2R ({}^1\Omega_1 {}^1 \gamma + {}_0^1 R d^{(0)\gamma} + d^{(1)\gamma}) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.27)$$

Tem-se então que :

$${}^1\Omega_1 + {}^2\Omega_2 = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -d(\theta_1 + \theta_2) \\ d(\theta_1 + \theta_2) & 0 \end{array} \right],$$

e como  ${}^1\gamma = [L_1 \ 0]^T$  e  ${}^0\gamma = 0$  são fixos,  $d^0\gamma = d^1\gamma = 0$ , o que significa que , da equação (2.27):

$${}^2\Xi_2 = \left[ \begin{array}{c|c} {}^1\Omega_1 + {}^2\Omega_2 & {}^2R {}^1\Omega_1 {}^1 \gamma \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & -d\theta_1 - d\theta_2 & L_1 \sin \theta_2 d\theta_1 \\ \hline d\theta_1 + d\theta_2 & 0 & L_1 \cos \theta_2 d\theta_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Também pode-se pensar nesta conexão de Cartan como sendo uma aplicação do espaço de parâmetros, no caso  $T^2$  (toro) com funções coordenadas  $\theta_1, \theta_2$ , e com valores matriciais

em  $\mathfrak{se}(2)$ . O vetor tangente no espaço de parâmetros é dado por  $\mathbf{v} = \dot{\theta}_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ , e após a aplicação da conexão sobre este vetor, ou seja,  ${}^2\Xi_2(\mathbf{v})$ , tem-se:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \hline \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.28)$$

O leitor pode facilmente verificar na literatura que este resultado coincide com o deduzido, por outros meios, para o robô planar de dois elos, como mostrado em (CRAIG, 1989), exemplo 5.3 (veja  ${}^2\omega_2$  e  ${}^2v_2$ ). É também possível calcular a conexão de Cartan para o terceiro frame  $S^3$  que está ligado ao efetuador, isto é  ${}^3\Xi_3$ . A fórmula recursiva na equação (2.17) poderia ser então utilizada, isto é  ${}^3\Xi_3 = ({}^2_3\Gamma)^{-1}({}^2\Xi_2)({}^2_3\Gamma) + ({}^2_3\Gamma)^{-1}d({}^2_3\Gamma)$ . A correspondente transformação entre frames tem  ${}^2_3R = I$  e  ${}^3\gamma = [L_2 \ 0]^T$ . Neste caso,  $({}^2_3\Gamma)^{-1}d({}^2_3\Gamma)$  é nulo, e um cálculo rápido mostra que:

$${}^3\Xi_3(\mathbf{v}) = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ \hline \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

A matriz jacobiana em  $S^3$  pode ser obtida diretamente da fórmula tomando-se os elementos nas posições (1,3) e (2,3) da matriz  ${}^3\Xi_3(\mathbf{v})$ , isto é  $L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$  e  $L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$ , respectivamente (CRAIG, 1989, pag. 171). De maneira a se obter a matriz jacobiana expressa em  $S^0$ , a fórmula  $J = {}^0_1\Gamma_2^1\Gamma_3^2\Gamma({}^3\Xi_3) {}^3_2\Gamma_1^2\Gamma_0^1\Gamma$ , que expressa  ${}^3\Xi_3(\mathbf{v})$  no frame  $S^0$  é utilizada.

## 2.5 Conexão de Cartan para Mecanismos Fechados

O método da conexão de Cartan também pode ser utilizado em robôs paralelos e mecanismos em malha fechada. Há boas referências em que o leitor pode encontrar conceitos de teoria de Topologia de Grafos, como por exemplo árvores e malhas (SELIG, 2005; CAMPOS; GUENTHER; MARTINS, 2005). Neste trabalho, mostraremos como o método da conexão de Cartan pode ser usado em um mecanismo fechado como na Figura 4. Neste caso, há  $n$  elos, um para cada frame, de modo que se pode determinar a conexão de Cartan para cada frame  ${}^1\Xi_1, {}^2\Xi_2, \dots, {}^n\Xi_n$ . Considera-se que  ${}^0\Xi_0$  já que se trata de um frame fixo. Pode-se considerar que a conexão de Cartan neste caso, onde a curvatura é nula, é um potencial não linear similar ao potencial eletromagnético (vide seção 3.4)

(CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982). De fato, o método de Davies (CAMPOS; GUENTHER; MARTINS, 2005), que generaliza as leis de Kirchhoff das tensões (circuitos elétricos) é uma prova disso, uma vez que a soma dos *twists* ao longo de um mecanismo fechado é zero. Um resultado similar pode ser encontrado para as conexões de Cartan.

**Teorema 2.5.1** (Lei de Kirchhoff-Davies para Conexão de Cartan). *Seja  ${}^i\Omega_i$  a conexão de Cartan para o frame  $S^i$  e  ${}^i_n A = {}^i_{i+1}A \cdots {}^n_{n-1}A$ , onde  $i$  assume valores de 0 to  $n$ , tem-se que:*

$$({}^1_n A)^{-1}({}^1\Omega_1)({}^1_n A) + ({}^2_n A)^{-1}({}^2\Omega_2)({}^2_n A) + \cdots + ({}^{n-1}_n A)^{-1}({}^{n-1}\Omega_{n-1})({}^{n-1}_n A) + {}^n\Omega_n = 0.$$

*Demonstração.* De fato, como o elo  $n$  está fixo (ligado ao terra), então  ${}^n\Xi_n = 0$ .

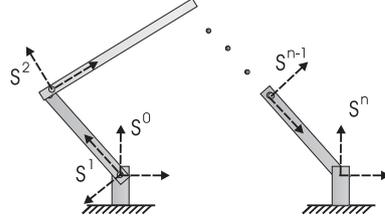


Figura 4: Mecanismo Fechado.

Seja a 1-forma com valores em uma álgebra de Lie dada por:

$${}^i\Theta_i = ({}^i_{i+1}A \cdots {}^n_{n-1}A)^{-1} d({}^i_{i+1}A \cdots {}^n_{n-1}A). \quad (2.29)$$

É fácil ver que  ${}^0\Theta_0 = {}^n\Xi_n$ , e:

$${}^n\Xi_n = ({}^0_1A \cdots {}^n_{n-1}A)^{-1} d({}^0_1A \cdots {}^n_{n-1}A) = ({}^1_2A \cdots {}^n_{n-1}A)^{-1} ({}^1\Omega_1) ({}^1_2A \cdots {}^n_{n-1}A) + {}^1\Theta_1.$$

Aplicando-se novamente a equação (2.5) resulta e:

$${}^1\Theta_1 = ({}^2_3A \cdots {}^n_{n-1}A)^{-1} ({}^2\Omega_2) ({}^2_3A \cdots {}^n_{n-1}A) + {}^2\Theta_2. \quad (2.30)$$

Após sucessivas aplicações desta fórmula, chega-se ao resultado ■



## 3 FIBRADOS PRINCIPAIS E ASSOCIADOS

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos de fibrados, fibrados principais e fibrados associados, que são os espaços apropriados para se definir os movimentos de corpos rígidos, ou conjuntos desses. A apresentação é formal, porém busca-se desenvolver uma intuição no leitor de modo que esse possa compreender o papel desses objetos matemáticos em problemas de robótica e mecanismos, bem como manter o rigor matemático. Com o conceito de fibrado em bases sólidas, pode-se definir rigorosamente a conexão de Cartan e a derivada covariante.

### 3.2 Fibrados

Nesta seção, apresenta-se o conceito geral de fibrado.

**Definição 3.2.1** (Fibrados). *Seja  $E$  uma variedade de dimensão  $n$ ,  $B$  uma variedade de dimensão  $n-m$ , chamada base, e  $F$  uma variedade de dimensão  $m$ , chamada fibra padrão. Seja ainda uma submersão  $\pi : E \rightarrow B$  suave. Diz-se que  $(E, B, \pi, F)$  é um fibrado se: 1) as subvariedades  $\pi^{-1}(b)$  para cada  $b \in B$  são todas difeomórficas a  $F$ , e 2) as cartas locais do atlas máximo de  $E$  sejam, para cada ponto  $b \in B$ , da forma  $(\pi^{-1}(U_b), \psi_b)$ , onde  $U_b \subset B$  é uma vizinhança de  $b$  e  $\psi_b : \pi^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times F$ .*

Note que  $\pi^{-1}(b)$  é formada por todos os pontos de  $E$  que são mapeados em um único ponto da base  $b \in B$  por  $\pi$ , e  $\pi^{-1}(U_b)$  é uma vizinhança de  $E$  que pode ser pensada como um produto cartesiano da base  $U_b$  com a fibra  $F$ . Isto é conhecido como *trivialização local*, e qualquer ponto  $p \in E$  pode então ser decomposto na forma  $(b, f)$ . Entretanto, o fibrado completo não pode ser pensado dessa forma e essa decomposição só vale localmente, nesta vizinhança (STEENROD, 1951). Ainda, se pensarmos que todos os pontos de uma fibra  $\pi^{-1}(b)$  são equivalentes, isto define uma classe de equivalência  $[b]$ . Então, o espaço quociente  $E/\sim$  é difeomórfico a  $B$  (vide seção A.1).

**Definição 3.2.2** (Seção). *Dado um fibrado  $(E, B, \pi, F)$ , uma seção é uma aplicação suave  $s : U \subset B \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = \text{Id}_B$ .*

Pelo teorema da aplicação implícita,  $s$  é localmente suave. No caso especial de  $F$  ser um espaço vetorial, tem-se que o fibrado é um *fibrado vetorial*, e uma seção é então um campo vetorial (vide seção C.7). Um caso ainda mais particular é quando  $E = TB$ , ou seja, é o fibrado tangente da base  $B$ . Neste caso, o fibrado é  $(TB, B, \pi, \mathbb{R}^{n-m})$ , e a fibra padrão é um espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n-m}$  com a mesma dimensão da base (vide seção C.3.5). Uma seção  $s$  define uma subvariedade imersa em  $E$ , conhecida como *gráfico* de  $s$  e tal que tem a mesma dimensão que  $B$  e é transversal a toda a fibra (vide seção C.15). Deste modo, podemos pensar em uma seção  $s$  como uma subvariedade de um fibrado que é homeomórfica à base.

**Definição 3.2.3** (Distribuição Vertical). *Dado um fibrado  $(E, B, \pi, F)$ , define-se a distribuição vertical como sendo a distribuição formada por todos os espaços tangentes às fibras em cada ponto de  $B$  (vide seção C.16).*

Uma *curva vertical* é uma curva da forma  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \Gamma(t)$  é igual a um único ponto da base  $B$  para qualquer valor de  $t$ . O campo de velocidades de uma curva vertical é obviamente sempre tangente às fibras. Da mesma forma, pode-se definir campos vetoriais verticais, que são campos tangentes às fibras do fibrado, ou seja, valem zero quando projetados na direção tangente à base  $B$ .

**Definição 3.2.4** (G-fibrado). *Seja um fibrado  $(E, B, \pi, F)$  e uma  $G$ -ação  $\phi : G \times F \rightarrow F$  de um grupo de Lie  $G$  sobre a fibra padrão  $F$  (portanto, trata-se de um grupo de homeomorfismos de  $F$ ). Define-se então um  $G$ -fibrado como sendo a quintupla  $(E, B, \pi, F, G)$  tal que está definida uma  $G$ -ação natural em  $E$  que transforma cada fibra individual da mesma forma (vide seção B.2).*

Pode-se dizer que esta ação preserva as fibras, ou seja, um ponto  $p = (b, f)$ , após sofrer a ação do grupo, se torna  $(b, gf)$ , ou seja, o ponto transformado continua na mesma fibra. Outro nome que se dá às fibras  $G$ -invariantes. Em geral, o grupo  $G$  é mais que um grupo topológico: é um grupo de Lie (vide seção D.1).

**Definição 3.2.5** (Transformações nas Fibras). *Dadas duas trivializações locais  $\psi_1, \psi_2$ , define-se para cada par de abertos  $U_i, U_j \in B$  com intersecção não-vazia a aplicação  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  tal que:*

- $g_{ij}(b)g_{jk}(b) = g_{ik}(b)$  onde  $b \in U_i \cap U_j \cap U_k$ ;

- $g_{ii}(b) = \text{Id}_G$ ;
- $g_{ij}(b) = [g_{ji}(b)]^{-1}$ .

**Definição 3.2.6** (Fibrado Trivial ou Trivializável). *Dadas duas variedades diferenciáveis  $B$  e  $F$ , a variedade dada por  $E = B \times F$  é conhecida como fibrado trivial ou fibrado trivializável.*

Neste caso, há duas submersões suaves naturais  $\pi_1 : E \rightarrow B$  e  $\pi_2 : E \rightarrow F$ , o que diferencia um fibrado trivial de um não trivial, que é a existência de  $\pi_2$ . Como será visto a seguir, sempre existe localmente uma projeção deste tipo, mas para existir globalmente, condições bastante estritas devem ser satisfeitas. Dado um fibrado trivial, existe uma trivialização local tal que  $\psi_i(p) = (\pi_1(p), \pi_2(p))$ .

**Exemplo:** Exemplos de fibrados triviais de grande importância são o fibrados tangentes de grupos de Lie. Um exemplo de fibrado não-trivial é a *faixa de Möbius*, onde a base é o  $S^1$ . Cada fibra é homeomórfica a  $\mathbb{R}$ , porém é possível mostrar que não existe  $\pi_2$ .

**Teorema 3.2.1** (Coordenadas Locais). *Dado um fibrado  $(E, B, \pi, F)$  e uma trivialização local  $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que as coordenadas de  $U$  (ou seja, as coordenadas da base) sejam  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  e tal que para  $V \subset F$  as coordenadas sejam  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  (ou seja, as coordenadas da fibra), tem-se que um ponto qualquer  $p \in E$  é representado por  $\psi(p) = (r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n)$*

Evidentemente, essas coordenadas induzem uma base normal no espaço tangente  $TE = TU \times TV$ , que é:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r^1}, \frac{\partial}{\partial r^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n}, \frac{\partial}{\partial s^1}, \frac{\partial}{\partial s^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s^n} \right\},$$

com coordenadas locais no espaço  $TE$  dadas por:

$$(r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n; \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n, \dot{s}_1, \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_n),$$

onde  $\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n$  são as coordenadas de  $TU$  e  $\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_n$  são as coordenadas de  $TV$ . Os pontos em cima não significam que se tratam de derivadas temporais (vide seção C.3.4). Deste modo, qualquer vetor tangente a um ponto  $p \in E$  é dado por:

$$\mathfrak{X}_p = \sum_{i=1}^n \dot{r}^i(p) \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_p + \sum_{i=1}^n \dot{s}^i(p) \frac{\partial}{\partial s^i} \Big|_p.$$

**Definição 3.2.7** (Isomorfismos entre Fibrados). *Dados  $(E_1, B, \pi, F)$  e  $(E_2, B, \pi, F)$  dois fibrados, diz-se que eles são isomórficos se existe um difeomorfismo  $\phi : E_1 \rightarrow E_2$  que preserva as fibras.*

Se os fibrados forem os mesmos, diz-se então que se trata de um *automorfismo* entre fibrados.

### 3.3 Conexões em Fibrados Principais e Associados

O espaço onde vivem os corpos rígidos que aqui trabalhados é obviamente o espaço euclidiano, que se pode considerar como sendo o  $\mathbb{R}^3$ , embora alguns livros utilizem o espaço afim  $\mathbb{E}^3$  (??). Deste modo, não há necessidade de se utilizar uma variedade Riemanniana com curvatura não nula para modelar este espaço (vide seção D.3). Entretanto, variedades mais complexas ainda são necessárias, como os chamados fibrados principais, que são utilizados para descrever o movimento completo do corpo rígido. Dada uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$ , ou seja, de dimensão  $n$ , o fibrado tangente é uma outra variedade diferenciável  $TM$  formada pelo próprio  $M$  juntamente com a união de todos os seus espaços tangentes (vide seções C.3.3 a C.3.5). Um fibrado principal, a grosso modo, é uma variedade  $M$  com um grupo de Lie  $G$  colado em cada ponto (ou seja, as fibras são grupos de Lie). A definição formal de fibrado principal é:

**Definição 3.3.1** (Fibrado Principal). *Dada uma variedade  $P$  e um grupo de Lie  $G$ , diz-se que um fibrado principal consiste de  $P$  com uma  $G$ -ação (vide seção A.4) nesta variedade tal que:*

1.  $G$  age livremente em  $P$  pela direita, isto é:  $(p, g) \mapsto R_g p = pg$ ;
2. O espaço quociente  $B = P/G$  (que é a base) é induzido pela ação de  $G$  e a projeção canônica  $\pi : P \rightarrow B$  é diferenciável e sobrejetiva (vide seção A.3);
3.  $P$  é localmente trivializável, isto é, se  $U \subset B$ , então existe uma aplicação tal que  $\psi_i : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  e  $\psi_i(p) = (\pi(p), \phi_i(p))$  com  $\phi_i(R_g p) = R_g(\phi_i(p))$  (ou seja,  $\phi_i$  é  $G$ -equivariante).

Dadas duas trivializações locais  $(\pi^{-1}(U_1), \psi_1)$  e  $(\pi^{-1}(U_2), \psi_2)$ , então define-se a transformação de fibras  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  dada por  $g_{ij} = \phi_i^{-1} \circ \phi_j$ . Esta definição está como apresentada em (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a). A referida  $G$ -ação fibra toda a variedade  $P$  e as fibras são homeomórficas a  $G$ . A aplicação  $\pi : P \rightarrow B$  mapeia cada fibra

no seu ponto base em  $B$ . O item três significa que numa vizinhança da base  $U \subset B$ , o espaço  $P$  pode ser representado localmente por  $U \times G$  (trivialização local) e um ponto arbitrário de  $p \in P$  fica sendo  $(u, g)$ , onde  $u$  representa as coordenadas na base e  $g$  as coordenadas na fibra (vide seção C.3.5 para o caso do fibrado tangente). Essa separação de  $p$  em  $(u, g)$ , entretanto, só vale localmente.

**Exemplo:** Uma figura que ilustra bem um fibrado principal é a Figura 6. Em cada ponto da chamada variedade base  $B$  se prende uma cópia do grupo de Lie (no caso, o  $SO(2)$ , que é a circunferência de raio unitário) que são as chamadas fibras.

**Exemplo:** Um fibrado principal bastante útil neste trabalho é  $(P, \mathbb{R}^3, \pi, SO(3))$ , que é o fibrado utilizado para descrever o movimento espacial de um corpo rígido. A base  $\mathbb{R}^3$  é usada para representar o centro de massa do corpo, e a orientação do corpo é representada por um elemento de  $SO(3)$  (vide seção D.1.2). Deste modo,  $p$  representa a *pose* de um corpo rígido.

**Definição 3.3.2** (Fibrado Principal Trivial). *Um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  é trivial se  $P = B \times G$  e se a  $G$ -ação pela direita for tal que  $R_gp = R_g(b, h) = (b, hg)$ . Neste caso, existe uma única trivialização global, e qualquer ponto  $p$  tem uma única decomposição  $(b, g)$  válida globalmente.*

No caso do fibrado principal trivial, tem-se  $\pi : P \rightarrow B$  e  $\pi_2 : P \rightarrow G$ . Cada uma dessas novas fibras será da forma  $\pi_2^{-1}(g)$  e homeomórficas a  $B$ , onde  $g \in G$  e, pelo teorema da função implícita, ficam definidas aplicações suaves  $s : B \rightarrow P$  conhecidas como *seções globais uniformes*, que associam a cada ponto  $b$  o mesmo valor  $g$ , ou seja,  $s : b \mapsto g$ .

**Exemplo:** No caso do exemplo anterior, se o fibrado principal  $(P, \mathbb{R}^3, \pi, SO(3))$  fosse trivial, então  $P = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$  e teríamos  $\pi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow SO(3)$ . Então haveria em  $\mathbb{R}^3$  a associação suave do mesmo elemento  $g \in SO(3)$ .

É importante deixar claro que um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  em geral não é trivial. Então, não é possível em geral fazer uma associação de um único elemento  $g \in G$  em cada ponto de  $B$  que seja uma associação SUAVE, ou seja, diferenciável em todas as ordens. É evidente que sempre podemos colar um elemento arbitrário de  $G$  em  $B$ , o que é sempre uma aplicação (inclusive sempre o mesmo elemento), mas não há garantia que haverá sequer continuidade nesta aplicação. O seguinte teorema afirma que para cada elemento da álgebra de Lie de  $G$ , existe um campo tangente uniforme vertical em  $P$ , ou seja, tangente às fibras.

**Teorema 3.3.1.** *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  e  $\mathfrak{g}$  a correspondente álgebra*

de Lie do grupo de Lie  $G$ , a ação canônica do fibrado principal  $G \times P \rightarrow P$  induz um homomorfismo  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(P)$ , este último sendo o espaço vetorial dos campos uniformes e tangentes a  $P$ . Para cada  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  o correspondente campo  $\mathfrak{X}^\dagger = \sigma(\mathbf{x})$  é conhecido como campo vetorial fundamental, e é sempre vertical.

Trata-se portanto da existência de campos vetoriais verticais tangentes às fibras de  $P$  que são uniformes, ou seja, são seções globais uniformes  $\mathfrak{X}^\dagger : P \rightarrow TP$ . Entretanto, o fibrado tangente  $TP$  não precisa ser trivial (vide seção C.7). Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável especial porque o seu fibrado tangente, isto é  $TG$ , é sempre trivializável (vide seção D.1). Isto significa que se pode definir um campo uniforme (ou constante) em  $G$ , o que não é possível em geral para variedades  $M$  (exceto o campo nulo). Deste modo, um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  possui também campos uniformes/constantes, como os grupos de Lie. O conjunto dos campos fundamentais de um fibrado principal forma uma álgebra de Lie homomórfica a  $\mathfrak{g}$ .

**Proposição 3.3.1.** *Seja um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  e  $\mathfrak{X}^\dagger = \sigma(\mathbf{x})$  um campo vetorial fundamental. Para cada  $g \in G$ , tem-se que*

$$(R_g)_* \mathfrak{X}^\dagger = \sigma(\text{Ad}_{g^{-1}} \mathbf{x}),$$

onde  $(R_g)_*$  é a aplicação derivada da translação à direita (vide seções C.3.3 e D.1).

Como para cada vetor  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  corresponde um campo vetorial invariante à esquerda de  $G$ , pode-se dizer que o campo vetorial principal em  $P$  dado por  $\mathfrak{X}^\dagger = \sigma(\mathbf{x})$ , quando restrito a uma fibra, é o próprio campo invariante à esquerda de  $G$  (ou seja,  $\sigma$  copia o campo  $\mathbf{x}$  em cada fibra, vide seção C.3.3).

**Definição 3.3.3** (Seção de um Fibrado Principal). *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$ , uma seção  $s$  de um fibrado principal é uma aplicação  $s : B \rightarrow P$  tal que  $s \circ \pi = \text{Id}_B$ .*

Deste modo, em uma trivialização local,  $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ , tem-se que  $\psi(p) = (b, g)$ , e pelo teorema da função implícita, tem-se um mapeamento suave  $s : b \mapsto g$  onde  $b = \pi(p)$  e  $g \in G$ . A ação pela direita  $R_h(p)$  é dada simplesmente por  $R_h(b, g) = (b, gh)$ . Isso significa que a  $G$ -ação não altera o ponto da base, mas somente o elemento da fibra que, se era  $g$ , passa a ser  $gh$  (a multiplicação é válida já que a fibra é um grupo).

**Definição 3.3.4** (Curva suave em Fibrado Principal). *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$ , uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow P$  transversal a cada fibra de  $P$  pode ser pensada como uma seção de um conjunto unidimensional em  $U \subset B$ , que é a imagem de uma curva*

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ . Numa trivialização local, tal curva pode ser escrita na forma  $(\gamma(t), g(t))$ , onde  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$  é uma curva no grupo  $G$ . Evidentemente,  $\pi \circ \Gamma(t) = \gamma(t)$ .

**Exemplo:** No caso do fibrado  $(P, B, \pi, SO(3))$ , onde  $B$  não é euclidiano, conseguimos separar, pelo menos localmente, o movimento de um corpo rígido em uma curva em  $B$  (curva do centro de massa) e uma curva em  $SO(3)$  (curva de rotação). Entretanto, isso não vale globalmente, a não ser que  $B = \mathbb{R}^3$ .

Para o caso particular de  $G$  ser um grupo matricial, pode-se pensar nas colunas de  $g$  como sendo vetores de uma base de um espaço vetorial (espaço de representação) em relação a uma base original. Deste modo, uma curva em  $P$  associa a cada ponto de  $\gamma$  na base deste espaço vetorial, ou seja, um *frame*. Na Figura 5, à direita, tem-se uma ilustração de uma seção definida em um fibrado  $(P, M, \pi, SO(3))$  e à esquerda, uma seção definida sobre uma curva em  $M$ . Note que esta curva pode muito bem representar o movimento geral de um corpo rígido em  $M$ , pelo menos localmente, desde que a seção seja suave.

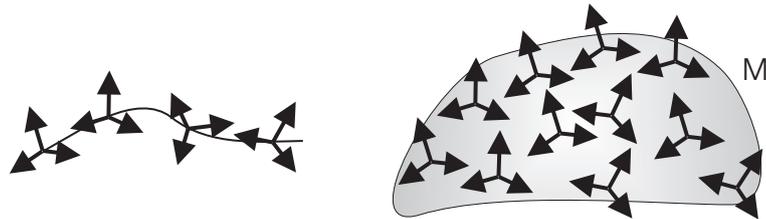


Figura 5: Seções em Curvas e Subconjuntos de um Fibrado Principal

Dadas duas curvas suaves em  $(P, B, \pi, G)$  representadas por  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , elas poderiam ser tais que  $\pi \circ \Gamma_1 = \pi \circ \Gamma_2 = \gamma$ , ou seja, corresponderiam a dois movimentos de corpo rígido que difeririam apenas na rotação, tendo o mesmo movimento do centro de massa. Num fibrado principal geral, entretanto, nada obriga que  $G$  seja o grupo  $SO(3)$ , podendo ser, por exemplo, o grupo dos quatérnios  $SU(2)$ . Isso será explorado no próximo capítulo, para descrever o movimento de um corpo rígido usando quatérnios, ao mesmo tempo que provê a base matemática para aplicar conexões de Cartan nesta descrição.

### 3.4 Espaços Homogêneos

Um caso particular de fibrado principal é o seguinte:

**Teorema 3.4.1.** *Dado um grupo de Lie  $G$  e um subgrupo fechado  $H \subset G$ , naturalmente induz-se uma estrutura de fibrado principal pela  $H$ -ação em  $G$  (vide seção A.4). Este*

fibrado principal é então  $(G, G/H, \pi, H)$ . O espaço quociente  $G/H$ , que é o espaço das órbitas, possui naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável.

Qualquer seção deste fibrado é um frame do grupo  $H$  no espaço homogêneo  $G/H$ , em particular, para qualquer de suas subvariedades. Diz-se neste caso que  $G/H$  é um *espaço homogêneo*. A utilidade neste trabalho está no fato do movimento geral em  $G$  ter sido decomposto no movimento em  $H$  (fibra) e no movimento em  $G/H$  (base). Isto acontece por exemplo quando  $G = SE(3)$  e  $H = SO(3)$ . Neste caso  $G/H = \mathbf{R}^3$  de modo que seria feita uma decomposição do movimento geral de um corpo rígido no movimento rotacional e no translacional (este último na base  $G/H$ ).

**Teorema 3.4.2.** *O espaço tangente na identidade de  $G$  pode ser decomposto em  $T_e G = T_e H \oplus T_{[e]}(G/H)$  e o subespaço  $T_{[e]}(G/H) \subset T_e G$  é invariante pela ação de  $H$*

*Demonstração.* Seja uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G/H$  tal que para  $t = 0$ , tem-se que  $\gamma(0) = [e]$ . Ao se aplicar a ação  $H$  nesta curva, o ponto  $\gamma(0) = [e]$  permanece invariante. O vetor tangente  $\gamma'(0) \in T_{[e]}(G/H)$  deve ser então transformado em outro vetor deste espaço. ■

**Definição 3.4.1** (Representação de Isotropia). *A representação do grupo  $H$  no espaço  $T_{[e]}(G/H)$  é conhecida como representação de isotropia  $e$ , dada uma base deste espaço, pode-se mostrar que o frame formado por esta base, ao ser transformado por  $H$ , é isomórfico a  $H$ , o que indica a variedade dos frames é isomórfica a  $H$ .*

No exemplo em questão, como  $G/H = \mathbb{R}^3$ , então  $T_{[e]}(G/H) = \mathbb{R}^3$ . Neste caso, a representação de isotropia seria a própria ação de  $SO(3)$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.4.2** (*Lift* em espaços homogêneos). *Dado um espaço homogêneo  $G/H$  e uma subvariedade  $f : M \rightarrow G/H$ , diz-se que um lift no fibrado principal  $(G, G/H, \pi, H)$  é qualquer aplicação suave  $F : M \rightarrow G$  tal que  $\pi \circ F = f$ , onde  $\pi : G \rightarrow G/H$ .*

Isto significa dizer que um *lift* mergulha  $M$  em  $G/H$  ao mesmo tempo que associa um campo de frames sobre esta subvariedade, pois o ponto base do frame não é alterado por  $F$ . Isto porque localmente tem-se que  $G = G/H \times H$ . Quaisquer dois lifts  $F, E : M \rightarrow G$  estão relacionados da forma:  $E(p) = A(p)F(p)$ , ou seja, trata-se do produto no grupo  $G$ , e a aplicação  $A : M \rightarrow H$  transforma um frame no outro.

**Definição 3.4.3** (Lift/Frame Adaptado). *Dada um subvariedade qualquer  $f : M \rightarrow G/H$ , se o lift  $F : M \rightarrow G$  for escolhido tal que os  $n$  primeiros vetores da base sejam tangentes à  $G/H$ , diz-se que este é um frame adaptado.*

No caso geral:

**Definição 3.4.4.** *Uma variedade diferenciável  $M$  é um espaço homogêneo se houver um grupo de Lie  $G$  tal que a ação sobre  $M$  é suave e transitiva.*

**Exemplo:** O exemplo mais simples de espaço homogêneo é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , dado pelo conjunto quociente  $SE(2)/SO(2)$ , onde o grupo de Lie  $SE(2)$  é o grupo dos movimentos euclidianos bidimensionais (transformações de Galileu). As curvas que diferem entre si somente de um movimento deste tipo são chamadas de *equivalentes*. Obviamente, a ação de  $SO(2)$  no  $\mathbb{R}^2$  mantém qualquer ponto fixo, de modo que  $SO(2)$  é o grupo de isotropia de qualquer ponto. Sabe-se que o grupo de Lie  $SE(2)$  pode ser identificado com uma tripla  $(p, \mathbf{e}_p^1, \mathbf{e}_p^2)$ , formada pelo frame que gera o espaço tangente em cada ponto, e o próprio ponto onde estes vetores estão aplicados.

### 3.5 Formas de Maurer-Cartan

Dado um grupo de Lie  $G$ , da mesma forma que existem os campos vetoriais invariantes à esquerda (direita - vide seção D.1), existem as:

**Definição 3.5.1** (Formas Invariantes à Esquerda (Direita)). *Dado um grupo de Lie  $G$ , diz-se que uma 1-forma  $\omega$  é invariante à esquerda (direita) se  $(L_g)^*\omega = \omega$  ( $(R_g)^*\omega = \omega$ ) para todo  $g \in G$ .*

Por dualidade, as 1-formas invariantes à esquerda formam uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}^*$  dual a  $\mathfrak{g}$ . O número de formas de Maurer-Cartan é igual à dimensão da álgebra de Lie. Deste modo, pode-se definir:

**Definição 3.5.2** (Forma de Maurer-Cartan). *Dado um grupo de Lie  $G$  e uma base  $\{f_i\}$  para  $\mathfrak{g}$ , define-se a forma de Maurer-Cartan  $\omega_G : G \rightarrow \mathfrak{g}$ , que tem valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , como sendo a única 1-forma em  $G$  tal que  $\omega_G|_e : T_eG \rightarrow \mathfrak{g}$  é a aplicação identidade em  $\mathfrak{g}$ . Pode-se escrever então que  $\omega_G = \omega^i f_i$  (vide seção D.2).*

Outra definição, que é equivalente, é: sendo  $\mathbf{v}_g$  um vetor tangente no ponto  $g \in G$ , define-se a *forma de Maurer-Cartan* com valores em  $\mathfrak{g}$  como sendo dada por  $\omega_G(\mathbf{v}_g) = (L_{g^{-1}})_*\mathbf{v}_g$ . É interessante interpretar esta fórmula: como  $\mathbf{v}_g$  é um vetor tangente no ponto  $g$ , quando aplicamos  $L_{g^{-1}}$  em  $g$ , o que temos é  $L_{g^{-1}}g = g^{-1}g = e$ , ou seja, translada-se o ponto  $g$  para a identidade do grupo. Então,  $(L_{g^{-1}})_*\mathbf{v}_g$  translada o vetor tangente em  $g$  para o espaço tangente  $T_eG$ , que é a própria álgebra de Lie. Deste modo,  $\omega_G$  sempre translada vetores tangentes em um ponto arbitrário para a identidade do grupo.

**Teorema 3.5.1.** *A forma de Maurer-Cartan é invariante à esquerda, o que significa dizer que  $(L_h)^*\omega_G(\mathbf{v}_g) = \omega_G(\mathbf{v}_g)$ .*

Isto é, todas as formas  $\omega^i$  que são componentes da forma de Maurer-Cartan  $\omega_G$  são invariantes à esquerda. A forma de Maurer-Cartan no ponto  $g$ , se transladada para algum outro ponto, será igual à mesma forma que já estava naquele ponto. De forma semelhante, se definem as formas invariantes à direita. A forma de Maurer-Cartan deve satisfazer uma equação, que é:

**Teorema 3.5.2** (Equação de Maurer-Cartan ou Estrutural). *Dado um grupo de Lie  $G$  e a sua forma de Maurer-Cartan  $\omega_G$ , tem-se que:*

$$d\omega_G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + [\omega_G(\mathbf{X}), \omega_G(\mathbf{Y})] = 0,$$

onde  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  são campos invariantes à esquerda (o mesmo valendo para campos invariantes à direita).

*Demonstração.* A partir da relação

$$d\omega_G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}\omega_G(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\omega_G(\mathbf{X}) - \omega_G([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]),$$

que também vale para 1-formas com valores vetoriais (vide seção D.2), como os campos  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  são invariantes, tem-se que  $\omega_G(\mathbf{X}), \omega_G(\mathbf{Y})$  são constantes. Logo, as suas derivadas direcionais se anulam, ou seja,  $\mathbf{Y}\omega_G(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\omega_G(\mathbf{Y}) = 0$ . Por fim, necessariamente temos que ter  $\omega_G([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = [\omega_G(\mathbf{X}), \omega_G(\mathbf{Y})]$ , de onde a identidade segue. ■

A forma de Maurer-Cartan trivializa  $TG$ . Isto significa que para qualquer campo uniforme em  $G$ , ela associa um vetor de  $\mathfrak{g}$ . A  $i$ -ésima coluna da forma de Maurer-Cartan  $\omega_G$ , quando aplicada a  $\mathbf{v}$  fornece a velocidade angular do  $i$ -ésimo vetor de  $g$  nesta direção. em particular, ela é a identidade em  $T_eG = \mathfrak{g}$ , o que seria esperado se  $\omega_G$  descreve velocidade angular do frame. É comum representar a equação de Maurer-Cartan, também conhecida com *equação estrutural*, na forma:

$$d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0,$$

ou seja, considerando que não está aplicada aos campos vetoriais invariantes. O fator  $1/2$  aparece pois  $[\omega_1, \omega_2](\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 2[\omega_1(\mathbf{X}), \omega_2(\mathbf{Y})]$ . Devido ao fato desta 2-forma ser um tensor (vide seção C.21), então ela é válida para quaisquer campos  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ . Por fim, escrevendo-se tudo na base da álgebra de Lie  $\{f_i\}$  de campos invariantes à esquerda de  $\mathfrak{g}$ ,

pode-se escrever  $\omega = \omega^i f_i$  e ainda os referidos coeficientes devem satisfazer:

$$d\omega^k = -\frac{1}{2}C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

**Proposição 3.5.1.** *Dados dois grupos de Lie  $G_1$  e  $G_2$  com as suas formas de Maurer-Cartan  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente, e  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  um homomorfismo, então  $\phi^*\omega_2 = (d\phi)|_{e\omega_1}$ .*

*Demonstração.* vide (SHARPE, 1997) ■

**Proposição 3.5.2.** *Dado um grupo de Lie  $G$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , se  $\omega_G$  é a forma de Maurer-Cartan invariante à esquerda, isto é  $L_g^*\omega = \omega$ , então:*

$$R_g^*\omega = \text{Ad}_{g^{-1}}\omega.$$

Além de transportar os vetores tangentes de um grupo de Lie para o espaço tangente da identidade, uma outra interpretação de  $\omega_G$  é como uma matriz de velocidades, como é feito na seção 1.2: ao se aplicar esta matriz a um vetor  $\mathbf{v}_p$ , que indica uma direção num ponto  $p$ , o resultado é a velocidade em relação a cada vetor da base. Cada coluna da matriz representa a velocidade angular que o frame (visto como um corpo rígido) possui em relação àquele eixo. A equação de Maurer-Cartan se refere então à equação que a matriz de rotação deve satisfazer.

### 3.5.1 Grupos de Lie Matriciais

Apresentam-se agora o cálculo de algumas formas de Maurer-Cartan para alguns grupos de Lie de interesse didático ou de interesse para esse trabalho.

**Exemplo:** [Grupo Aditivo  $G = \mathbb{R}$ ] Dado o grupo abeliano  $G = \mathbb{R}$ , tem-se que  $L_g h = g + h$  e  $L_{g^{-1}} h = g - h$ . A forma de Maurer-Cartan é  $(L_{g^{-1}})_*(v)$ , que está definida em  $T\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , cujo efeito é associar a  $(g, v \frac{\partial}{\partial g})$  o vetor  $(0, v \frac{\partial}{\partial g})$ . Tal aplicação é  $(dg) \frac{\partial}{\partial g}$ , pois  $dg(v \frac{\partial}{\partial g}) \frac{\partial}{\partial g} = v \frac{\partial}{\partial g}$ .

**Exemplo:** [Grupo Multiplicativo  $G = \mathbb{R}^+$ ] Dado o grupo  $G = \mathbb{R}^+$ , tem-se  $L_g h = g \cdot h$  e  $L_{g^{-1}} h = \frac{h}{g}$ . Já a aplicação  $(L_{g^{-1}})_*(v)$ , que está definida em  $T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , o efeito é associar a  $(g, v \frac{\partial}{\partial g})$  o ponto  $(1, (g^{-1}v) \frac{\partial}{\partial g})$ , já que o efeito em  $\mathbb{R}$  é o mesmo, localmente, que em  $\mathbb{R}^+$ . Deste modo, a aplicação buscada é  $g^{-1} dg$ , já que  $dg(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  (vide seção D.2). A forma de Maurer-Cartan deve igualmente se distorcer próxima de zero. Entretanto, quando for aplicada ao campo uniforme, o resultado deve ser igual a 1 sempre. Por isso,

é dada por  $\omega = dg/g$ . Por se tratar de uma 1-forma, quanto maior a sua intensidade, menor a distância entre suas placas (a régua tem que ficar menor).

**Exemplo:** [Grupo Multiplicativo  $GL(n, \mathbb{R})$ ] Um dos exemplos mais importantes de grupos de Lie, como já foi dito, são os grupos de Lie matriciais (ou seja, os sub-grupos de  $GL(n, \mathbb{R})$ , inclusive o próprio). Aplicando-se a definição, tem-se que  $\omega_G(\mathbf{v}) = (L_{g^{-1}})_*(g, \mathbf{v}) = (e, g^{-1}\mathbf{v})$ . Pode-se pensar em  $g$  como a aplicação que associa a cada elemento de  $g \in G$  ele mesmo, ou seja, trata-se da aplicação identidade. A aplicação  $dg$ , segundo a seção D.2, é também a identidade dos vetores tangentes. Deste modo  $dg(\mathbf{v}_g) = \mathbf{v}_g$ . Então,  $g^{-1}dg(\mathbf{v}_g) = g^{-1}(\mathbf{v}_g) = g^{-1}\mathbf{v}_e$ . Esta é a representação clássica da forma de Maurer-Cartan de  $GL(n, \mathbb{R})$ , que é definida como sendo aplicada neste grupo e tem valores em  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Se  $\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}\}$  é um sistema de coordenadas numa vizinhança  $U$  de  $GL(n, \mathbb{R})$ , então qualquer elemento deste grupo pode ser escrito na forma  $[x_{ij}]$ . Pode-se ainda pensar nesta aplicação como sendo  $i : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ , que é a aplicação identidade (expressa na forma de coordenadas), que poderia ainda ser pensada como uma função (com valores no grupo). Deste modo, a forma de Maurer-Cartan  $g^{-1}dg$ , fica  $[x_{ij}]^{-1}d[x_{ij}] = [x_{ij}]^{-1}[dx_{ij}]$

**Exemplo:** [Grupo Multiplicativo  $2 \times 2$  simples] Seja o grupo matricial dado por matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A forma de Maurer-Cartan é dada por:

$$\omega = G^{-1}dG = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{x} & \frac{dy}{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.5.2 Cálculo Não-Abeliano

Suponha que temos um fibrado principal cuja base é um espaço homogêneo, ou seja,  $(G, G/H, \pi, H)$ . Isso ocorre por exemplo quando a base é  $\mathbf{R}^3$ , que é um espaço homogêneo, já que não existe nem um ponto privilegiado. Seja agora uma subvariedade  $M \subset G/H$  (que poderia ser o próprio espaço homogêneo) e uma aplicação  $F : M \subset G/H \rightarrow H$ , que associa a cada ponto de  $M$  uma *frame* no fibrado principal  $(G, G/H, \pi, H)$ :

**Definição 3.5.3** (Derivada de Darboux). *Dado um grupo de Lie  $H$ , sua álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  e sua forma de Maurer-Cartan  $\omega_H$ , define-se a derivada de Darboux de  $F : M \rightarrow H$*

como sendo a 1-forma  $F^*(\omega_H)$ .

A aplicação  $F : M \rightarrow H$  nada mais é que a associação, a cada ponto de  $M$ , de um elemento do grupo de Lie  $H$ . Isso poderia ser, por exemplo, a associação suave de um frame em  $M$ , como mostrado na Figura 5, lado direito. Deste modo,  $F^*(\omega_H)$  é o *pullback* (vide seção C.21) da forma de Maurer-Cartan de  $H$  para a variedade  $M$ . Afirma-se que  $F^*(\omega_H)$ , a derivada de Darboux, é uma generalização do diferencial do cálculo clássico. Seguem alguns exemplos que vão ajudar o leitor a se convencer:

**Exemplo:** Para uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , como  $\omega_{\mathbb{R}} = dy$ , então  $f^*(dy) = f'(x) dx$ .

**Exemplo:** Para uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , como  $\omega_{\mathbb{R}} = dy$ , então  $f^*(dy) = (\partial f / \partial x_1) dx_1 + \dots + (\partial f / \partial x_n) dx_n$ .

**Exemplo:** No caso de  $F : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ , tem-se que a cada ponto do espaço atribui-se um frame ortonormal com orientação positiva, ou seja, cujo determinante é igual a 1. Tem-se que  $F^*(\omega_{SO(3)})$  assume-se valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$ , que consiste das matrizes anti-simétricas. Tem-se então um gradiente do frame  $F$ , ou seja, este fornece uma matriz anti-simétrica, que é uma taxa de variação de  $F$  com valores em  $SO(3)$ , para cada direção tangente da base.

**Teorema 3.5.3.** *Dada uma aplicação  $F : M \rightarrow H$  qualquer, onde  $H$  é um grupo de Lie matricial, a derivada de Darboux  $F^*(\omega_H)$  satisfaz a equação estrutural:*

$$dF^*(\omega_H) + F^*(\omega_H) \wedge F^*(\omega_H) = 0.$$

*Demonstração.* Considerando que  $d$  e  $F^*$  comutam sempre, e a equação de Maurer-Cartan, é possível demonstrar tal resultado. ■

Este teorema afirma que qualquer *gradiente* ou *diferencial*  $F^*(\omega_H)$  satisfaz a mesma equação estrutural que a forma de Maurer-Cartan. De maneira geral, dada uma 1-forma  $\psi$  com valores numa álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$ , quais são as condições para ela ser o gradiente (derivada de Darboux) de uma aplicação? A resposta é dada por:

**Teorema 3.5.4** (Teorema de Cartan). *Seja  $H$  um grupo de Lie matricial com álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  e forma de Maurer-Cartan  $\omega_H$ . Seja ainda uma variedade  $M$  na qual existe uma 1-forma  $\psi$  com valores em  $\mathfrak{h}$  tal que satisfaz a equação estrutural  $d\psi + \psi \wedge \psi = 0$ . Então, para cada ponto  $p \in M$ , existe uma vizinhança deste ponto  $U$  e uma aplicação  $F : U \subset M \rightarrow H$  tal que  $F^*\omega_H = \psi$ . Além disso, quaisquer duas aplicações  $F_1, F_2$  devem satisfazer  $F_1 = L_a \circ F_2$  para algum  $a \in H$ .*

*Demonstração.* A prova pode ser encontrada, por exemplo, em (IVEY; LANDSBERG, 2003). ■

O que se busca então é saber se existe um *frame* SUAVE em  $M$ , que se pode chamar de integral, que é um *gradiente*  $\psi$  não-abeliano, ou seja, com valores em uma álgebra de Lie qualquer. A resposta é que existirá o frame se o gradiente satisfizer a equação estrutural. Existe uma forma de se medir o quanto que  $\psi$  deixa de satisfazer a equação de Maurer-Cartan, que é a:

**Definição 3.5.4** (Curvatura). *Dada uma 1-forma  $\psi$  definida em  $M$  com valores em  $\mathfrak{h}$ , se houver uma 2-forma  $\Omega$  com valores em  $\mathfrak{g}$  tal que  $d\psi + \psi \wedge \psi = \Omega$ , então o teorema de Cartan não é satisfeito, o que significa que não existe  $F : U \subset M \rightarrow G$  tal que  $F^*\omega_G = \psi$ . Tal 2-forma  $\Omega$  é conhecida como curvatura de  $\psi$ , e é uma obstrução à integrabilidade de  $\psi$ .*

Esta 2-forma  $\Omega$  é, de fato, a mesma 2-forma de curvatura que aparece na seção D.7. Isto sugere que a existência de uma aplicação suave que atribui a cada ponto de uma vizinhança de  $M$  um frame depende da curvatura ser zero ou não. Se se trata de um frame que é um elemento de  $SO(3)$ , essa aplicação suave de frames em cada ponto só é possível se o espaço não for curvo, como é o caso do espaço euclidiano  $\mathbf{R}^3$ . Quando  $\Omega$  não é identicamente nula, então não é possível a existência de  $F$  suave. Isto significa o seguinte: dados dois pontos  $p, q \in M$  com dois caminhos quaisquer entre eles  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , e duas curvas com frames paralelamente transportados sobre elas partindo do mesmo frame inicial, ou seja,  $\Gamma_1(t) = (\gamma_1(t), h_1(t))$  e  $\Gamma_2(t) = (\gamma_2(t), h_2(t))$ , onde  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  e  $h_1(0) = h_2(0)$  curvas num grupo de Lie  $H$  com  $h_1(0) = h_2(0)$ , então para  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$  os valores  $h_1(1)$  e  $h_2(1)$  são diferentes. Em outras palavras, transportar suavemente um frame por caminhos diferentes resulta em frames finais diferentes, ou ainda, o transporte paralelo depende do caminho.

Um dos resultados que mostra que a forma de Maurer-Cartan e a conexão de Cartan estão intimamente relacionadas é:

**Teorema 3.5.5.** *Dada uma subvariedade de um espaço homogêneo  $f : M \rightarrow G/H$  e  $E, F : M \rightarrow G$  sendo lifts associados a essa variedade, se  $a : M \rightarrow H$  é uma mudança de lift (mudança de frame), tem-se que:*

$$E^*(\omega_H) = \text{Ad}_{a^{-1}}(F^*(\omega_H)) + a^*\omega_H.$$

**Corolário 3.5.1.** *Para o caso de grupo de Lie matricial, esta equação se reduz a:*

$$E^*(\omega_H) = a^{-1}F^*(\omega_H)a + a^{-1}da.$$

Estas fórmulas relacionam as derivadas de Darboux de duas aplicações diferentes, mas que diferem pela aplicação  $a : M \rightarrow H$ . Especificamente, no caso de grupo de Lie matricial, as duas aplicações são dois frames em  $M$ . Uma mudança de frame (por exemplo, de um adaptado para outro não-adaptado) causa uma modificação da velocidade angular de duas parcelas: uma que causa uma rotação na velocidade angular (transformação de semelhança), e outra da forma  $a^{-1}da$  (lembrando da interpretação da derivada de Darboux como velocidade angular). Esta última só existe quando a transformação  $a$  de um frame para o outro não for constante. De fato, se  $F^*(\omega_G) = 0$ , tem-se um frame uniforme mas pode haver outro, que sofreu a transformação por  $a$ , não é mais uniforme. Essas duas parcelas da velocidade se devem ao movimento não uniforme entre dois pontos no frame, e a própria variação causada pela transformação. Note também a semelhança com as fórmulas de transformação entre frames diferentes para conexões de Cartan (vide seção 2.3).

Por fim, por ser  $\psi$  uma 1-forma, sabe-se que se trata de um integrando (vide seção C.14), mais especificamente, de integral de linha. Como será visto,  $\psi$  representa uma taxa de variação diferente para cada direção. Partindo-se do mesmo ponto em direções diferentes e integrando-se  $\psi$  ao longo da curva (integral de linha), obtem-se frames diferentes, mesmo se as curvas terminarem no mesmo ponto. Trata-se então de ser integral de campo *não-conservativo*, ou seja, cuja integral é diferente para caminhos diferentes. Logo, não é possível definir uma função *potencial*  $F : M \rightarrow G$ .

## 3.6 Conexões em Fibrados Principais

No seção anterior, foi mostrado que em um espaço homogêneo  $G/H$ , com fibrado principal  $(G, G/H, \pi, H)$ , qualquer frame local  $F : M \subset G/H \rightarrow G$  tem que ser tal que seu *gradiente* satisfaz a equação de Maurer-Cartan, isto é:

$$dF^*(\omega_G) + F^*(\omega_G) \wedge F^*(\omega_G) = 0.$$

Entretanto, de maneira geral, em fibrados principais  $(P, B, \pi, H)$ , pode-se generalizar esta teoria através do conceito de *conexão de Ehresmann*. Inicialmente, apresenta-se a

versão onde a conexão é uma distribuição (vide seção C.16), para depois introduzir a versão usando-se formas diferenciais.

**Definição 3.6.1** (Conexão de Ehresmann). *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, H)$ , uma conexão de Ehresmann em  $P$  é uma distribuição suave em  $P$  que associa a cada ponto  $p \in P$  um subespaço horizontal  $H_p$  tal que:*

1.  $T_p P = H_p \oplus \mathfrak{h}$  (soma direta com o espaço vertical);
2.  $H_{(R_h p)} = (R_h)_* H_p$ ;

A segunda condição significa que a distribuição é invariante pela  $H$ -ação, ou seja, os espaços horizontais ao longo de uma mesma fibra são construídos a partir da ação de  $H$ .

**Corolário 3.6.1.** *Dada uma conexão de Ehresmann, qualquer campo vetorial tangente de  $P$  pode ser decomposto em uma componente vertical e outra componente horizontal.*

A Figura 6 apresenta uma ilustração de um fibrado principal com uma conexão de Ehresmann. Nesta figura, as fibras são as circunferências  $S^1$ , a base é  $B$ ,  $V$  é o campo (ou distribuição) vertical e  $H$  é o campo (ou distribuição) horizontal, fixado pela conexão.

**Definição 3.6.2** (Formas de Conexão / Conexão de Cartan). *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, H)$  e uma conexão de Ehresmann  $H$ , define-se a 1-forma de conexão  $\Xi$  como sendo uma 1-forma em  $P$  com valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  tal que:*

1.  $(R_h)^* \Xi = \text{Ad}_{h^{-1}} \Xi$ ;
2.  $\Xi(\mathfrak{X}^\dagger) = \mathbf{x}$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathfrak{h}$ .

Deste modo, uma 1-forma de conexão é tal que  $\Xi_p : T_p P \rightarrow \mathfrak{h}$ , que é uma aplicação linear para cada ponto  $p \in P$ . Qualquer vetor vertical, que é elemento da álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$ , ele mantém inalterado.

**Teorema 3.6.1.** *A 1-forma de conexão  $\Xi$  define uma distribuição horizontal, que é uma conexão de Ehresmann (vide seção C.16) que, em cada ponto  $p \in P$ , define um espaço horizontal, que é representado por  $H_p$ . É importante notar também que, para cada ponto  $p \in E$ , tem-se que  $T_p E = H_p \oplus V_p$ .*

**Definição 3.6.3** (Curvas Horizontais). *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$ , diz-se que uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow P$  é horizontal se  $\Gamma'(t) \in H_p$  para todo  $p = \Gamma(t)$  e  $\Gamma'(t) \neq 0$ .*

**Teorema 3.6.2.** *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  e uma distribuição horizontal  $H$  definida globalmente, se esta for involutiva (integrável), então existe uma aplicação  $\pi_2 : E \rightarrow F$  (ou seja, o espaço fica trivializado) tal que o espaço  $TP$  fica duplamente fibrado (ou seja, trivializado).*

A interpretação geométrica das distribuições horizontais pode ser mais explorada: sejam duas curvas horizontais  $\Gamma_1, \Gamma_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow P$  tais que  $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = p$  (começam no mesmo ponto). Se a distribuição horizontal não for integrável significa que estas duas curvas não pertencem a nenhuma subvariedade (folha) integral da distribuição horizontal  $H$  (vide seção C.17). Isso é equivalente a dizer que uma curva  $\Gamma$  cuja projeção da base é fechada não necessariamente é uma curva fechada no variedade total, ou ainda, duas curvas começando e terminando nos mesmos pontos e com o mesmo valor inicial na fibra não tem o mesmo valor final na fibra. A teoria de fibrados principais aqui apresentada vem sendo usado em Física, nas chamadas *Teorias de Calibre* (SCHWARZ, 1996). Outro nome utilizado é *Teoria Gauge*. Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, H)$ , pode-se entender um gauge como uma seção suave  $s$  que associa a cada ponto da base  $B$  uma matriz do grupo de Lie  $H$ . Sejam então  $s_1, s_2$  duas seções suaves de modo que elas estejam relacionadas ponto-a-ponto por  $s_1(p) = s_2(p)h(p)$ , onde  $h : U \rightarrow H$ . Esta última é conhecida como *transformação gauge*, e tem o papel, por exemplo, de fazer uma transformação de frame (por exemplo, uma mudança de referência). O gauge infinitesimal nada mais é que o pullback da conexão, ou seja,  $s^*(\Xi)$ .

O teorema de Cartan, que já foi apresentado no caso para espaços homogêneos, pode ser generalizado:

**Teorema 3.6.3** (Teorema de Cartan). *Seja  $H$  um grupo de Lie matricial e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  com forma de Maurer-Cartan  $\omega_H$ . Seja também uma variedade diferenciável  $B$  e uma 1-form  $\Xi$  com valores em  $\mathfrak{h}$  tal que  $d\Xi + \Xi \wedge \Xi = 0$ . Então em cada ponto  $b \in B$ , existe uma vizinhança  $U$  e uma aplicação  $s : U \subset M \rightarrow H$  tal que  $S^*(\omega_H) = \Xi$ . Dadas também duas aplicações  $s_1, s_2$ , elas devem satisfazer  $s_1 = As_2$  para algum  $A \in H$ .*

Novamente, a equação  $d\Xi + \Xi \wedge \Xi = 0$  é chamada de *equação estrutural*. Quando ela não for satisfeita, ou seja, existe uma 2-forma  $\Theta$  com valores em  $\mathfrak{h}$  conhecida como curvatura tal que  $\Theta = d\Xi + \Xi \wedge \Xi$ , então  $\Xi$  não se comporta como gradiente, e a sua integral de linha depende do caminho de integração. Logo, não haverá aplicação  $s : U \subset M \rightarrow H$  (primitiva) tal que a derivada  $s^*(\omega_H)$  seja igual a  $\Xi$  (também conhecido como teorema fundamental do cálculo não-abeliano).

### 3.7 Fibrados Associados

**Definição 3.7.1** (Fibrado Associado). *Seja um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  e uma  $G$ -ação à esquerda em um espaço vetorial  $F$  representada por  $\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(F)$ . Mais especificamente,  $\rho$  é uma representação de  $G$  em  $F$  (vide seção D.1.1). Um  $G$ -fibrado vetorial  $(E, B, \pi_1, F, G, \rho)$  é chamado de fibrado associado ao fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  se para cada trivialização local em  $P$ , ou seja  $(U_i, \psi)$ , com transformação de fibra  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  dada por  $g_{ij} = \phi_i^{-1} \circ \phi_j$ , existe uma trivialização local em  $(E, B, \pi_1, F, G)$  da forma  $(U_i, \chi_i)$  com  $\chi_i : \pi_1^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$  tal que o correspondente mapeamento entre fibras  $\phi_{i,j} : U_i \cup U_j \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$  é da forma  $\rho(g_{ij}) : E \rightarrow E$ .*

Se  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  é uma curva em um fibrado associado que associa a cada ponto da curva  $\gamma(t) = \pi_1(\Gamma(t))$  um vetor de  $F$ , é necessária uma forma de tirar derivadas em relação ao parâmetro  $t$  neste espaço associado. Trata-se portanto de diferenciar um campo vetorial em  $\gamma(t)$  que não é o campo de velocidades. É importante que esta derivada indique o que vem a ser um campo constante ao longo da curva, ou seja, o que é um campo de derivada nula. É necessário então se definir:

**Definição 3.7.2** (Derivada Covariante). *Dado um fibrado principal  $(P, B, \pi, G)$  com um fibrado associado  $(E, B, \pi_1, F, G, \rho)$ , define-se a derivada covariante por:*

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \rho'_e(\Xi), \quad (3.1)$$

onde  $\Xi$  é uma conexão de Cartan no fibrado principal  $(P, M, \pi, G)$ , e  $\rho'(e)(\Xi)$  é a derivada da representação no elemento identidade de  $G$ .

Esta é portanto a derivada covariante que apareceu nos capítulos anteriores. Na seção D.3 do apêndice, apresenta-se o conceito de *conexão de Koszul*. Será mostrado agora que esta conexão conduz aos mesmos resultados que a conexão de Ehresmann e a conexão de Cartan. Como a derivada covariante estudada nos capítulos anteriores foi aplicada em vetores posição e velocidade, faz-se inicialmente o cálculo da derivada covariante para o vetor posição em coordenadas normais:

**Definição 3.7.3** (Vetor Posição). *Seja uma  $n$ -variedade  $M$  e uma conexão de Levi-Civita  $\nabla$  definida nesta variedade (vide seção D.3.3). Se  $q = \exp_p x_i \mathbf{e}_i$  é um ponto qualquer de  $M$  nestas coordenadas normais, o campo vetorial definido por:*

$$\mathbf{X}_q = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} \exp_p(x_i(t) \mathbf{e}_i),$$

é conhecido como vetor posição

Evidentemente, pode-se definir a aplicação suave  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$ , onde  $U$  é uma vizinhança normal, que associa a cada  $q \in U$  o vetor  $\mathbf{X}_q$  definido acima, que é conhecida como campo vetorial de posição. Não é difícil mostrar que a expressão de  $\mathbf{X}$  nas coordenadas normais é  $x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  (PAIT; COLÓN, 2010). Ainda pode-se enunciar outro lema:

**Lema 3.7.1** ((PAIT; COLÓN, 2010)). *Se  $\mathbf{X}$  é um campo vetorial de posição, então:*

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

**Proposição 3.7.1.** *Dada uma variedade diferenciável  $M$  com um sistema de coordenadas normais, a derivada covariante, a partir da conexão de Koszul, do campo vetorial de posição ao longo de alguma curva  $c(t)$  é dada por :*

$$\nabla_{\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{X} = \left\{ I \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \right\} \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

onde  $\Omega$  é a matriz com componentes  $\Omega_j^i = \Gamma_{lj}^i \dot{x}_l$ .

*Demonstração.* Aplicando a definição de derivada covariante, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\mathbf{X}}}\mathbf{X} &= \nabla_{(\dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j})} (x_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \dot{x}_j \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \\ &= \dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \dot{x}_j x_i \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} = (\dot{x}_k + \dot{x}_j x_i \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} x_k + (\Gamma_{ij}^k \dot{x}_j) x_i \right] \frac{\partial}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} + \Omega_i^k x_i \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} + \Omega \mathbf{X}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Obviamente, as coordenadas normais, neste caso, fazem o papel de um frame não inercial, como aconteceu na seção 1.2. Como esta fórmula vale para coordenadas gerais (pois é invariante) tem que funcionar para todos os sistemas não-inerciais, que são em muito maior número que os inerciais (que na verdade, estes nem existem para variedades gerais, com curvatura, como comentado em (COLÓN, 2014)). Por fim, chega-se facilmente à identidade  $\Omega_j^i = \Gamma_{lj}^i \dot{x}_l = \Gamma_{lj}^i dx_l(\partial/\partial t) = \Xi_j^i(\partial/\partial t)$ . Também é importante ressaltar que os símbolos de Christoffel (vide seção D.3.4) não precisam ser zero quando a curvatura é nula. De fato, em um espaço euclidiano (ou seja, com curvatura nula) as formas de conexão de um sistema não-inercial podem variar no tempo (vide (FOSTER; NIGHTINGALE, 1994), seção 2.10, sobre sistema de referência rotativo).

De forma semelhante, pode-se calcular a derivada covariante para um campo de velo-

idades:

**Proposição 3.7.2.** *Dado um espaço euclidiano  $M = \mathbb{R}^n$  com frame inercial, a equação da derivada covariante pode ser escrita como:*

$$\nabla_c \mathbf{V} = \left\{ I \frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \right\} \mathbf{v}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{v}$  é um vetor coluna com as coordenadas de  $\mathbf{V}$  no frame normal, e  $\Omega$  é a matriz com componentes  $\Omega_j^i = \Gamma_{lj}^i x'_l$ .

*Demonstração.* Expandindo (D.3.4), tem-se:

$$\nabla_c \mathbf{V} = \left( \frac{dv_1}{d\tau} + \Gamma_{ij}^1 v_j x'_i \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \left( \frac{dv_n}{d\tau} + \Gamma_{ij}^n v_j x'_i \right) \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (3.5)$$

onde  $v_j$  são as componentes de  $\mathbf{V}$ . Se estes números foram empilhados em um vetor coluna  $\mathbf{v}$ , assim como  $\Gamma_{ij}^k v_j x'_i$  ( $k$  sendo o índice da linha), é possível escrever este último vetor na forma de um produto de matrizes,  $\Omega_j^i = \Gamma_{lj}^i x'_l$  e  $\mathbf{v}$ , de modo que o resultado segue. ■

Os cálculos apresentados acima foram somente para confirmar que os mesmos resultados poderiam ser obtidos se no lugar da conexão de Cartan, fosse usada a conexão de Koszul. De fato, parece ser mais simples do ponto de vista didático, a introdução à geometria diferencial utilizando-se a conexão de Koszul (vide por exemplo (CARMO, 1994)), que é todo escrito desta forma e é uma referência reconhecida mundialmente). Entretanto, para sistemas mecânicos, a conexão de Cartan é mais natural, já que consegue-se fazer cálculos com ela de forma mais simples e direta, como mostrado no primeiro capítulo deste trabalho.

### 3.7.1 Fibrados Usados Até Aqui

Para descrever o movimento rotacional do corpo rígido, no capítulo 2 trabalhou-se com o fibrado principal  $(\mathbb{R}^3 \times SO(3), \mathbb{R}^3, \pi, SO(3))$ , embora isso não tenha sido lá mencionado. A velocidade angular era representada pela conexão de Cartan  $\Omega$ , que nesse caso, era a própria forma de Maurer-Cartan de  $SO(3)$ . Foram usados dois fibrados associados, sendo o primeiro para com representação do grupo  $SO(3)$  na fibra padrão  $F = \mathbf{R}^3$ , ou seja, dos próprios 3-vetores. Neste caso, o fibrado principal era  $(E, \mathbb{R}^3, \pi_1, \mathbb{R}^3, SO(3), \rho_1)$ . A representação usada foi  $\rho_1 : SO(3) \rightarrow GL(\mathbb{R}^3)$ , ou seja, as transformações lineares que preservam comprimento e orientação.

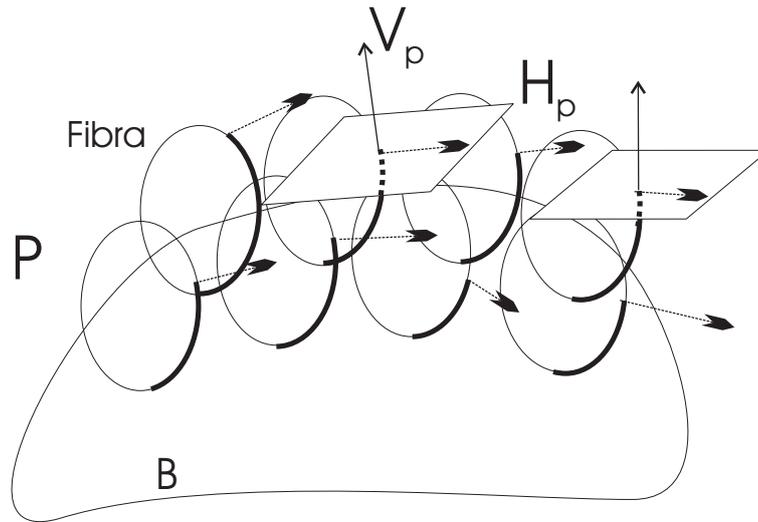


Figura 6: Ilustração de um Fibrado e um Campo Horizontal

Também foi apresentada a formulação do movimento do corpo rígido para a representação adjunta (vide seção D.1.1), ou seja, o fibrado vetorial associado tinha a representação  $\rho_2 : SO(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  e era representado por  $(E, \mathbb{R}^3, \pi_2, \mathfrak{so}(3), SO(3), \rho_2)$  similar ao feito em (SATTINGER; WEAVER, 1986), porém sem usar fibrados principais e associados nesta última referência. A fórmula de representação era:

$$\rho(g)\mathbf{X} = \text{Ad}_g\mathbf{X} = g\mathbf{X}g^{-1},$$

onde  $\mathbf{X} \in \mathfrak{so}(3)$ . A representação da correspondente álgebra de Lie era dada por  $\rho'_e : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ , que é simplesmente:

$$\rho'_e(\mathbf{X})\mathbf{Y} = \text{ad}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}].$$

As duas representações são equivalentes no sentido que existe um isomorfismo entre  $(\mathbb{R}^3, \times)$ , que é o espaço Euclidiano dos 3-vetores munido com o produto vetorial, e a álgebra de Lie  $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$ , munida com o colchete de Lie  $[A, B] = AB - BA$ .



## 4 CINEMÁTICA E DINÂMICA PARA $SU(2)$ - QUATÉRNIOS

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, são deduzidas a cinemática e a dinâmica de corpos rígidos supondo representação em quatérnios, sempre dentro da metodologia das conexões de Cartan, que é a proposta deste trabalho. O movimento de translação e o de rotação são feitos de forma separada. No capítulo anterior, para representar as rotações de um corpo rígido, um frame era rigidamente associado ao corpo, ou seja, o movimento de rotação tridimensional era representado por uma matriz do grupo de Lie  $SO(3)$ . Nesse capítulo, por outro lado, em vez de se associar um frame tradicional, ou seja, uma tripla de 3-vetores que formam as colunas da matriz de  $SO(3)$ , será associada uma matriz do grupo de Lie  $SU(2)$ , que é o grupo dos quatérnios unitários, que faz o mesmo papel. Estes objetivos só serão atingidos com o uso do fibrado principal, conexão associada ao fibrado principal, fibrados vetoriais associados e derivada covariante, para depois utilizar estes conceitos na formulação da cinemática e dinâmica de rotação do corpo rígido. Esses objetivos justificam o capítulo anterior, que foi para introdução das ferramentas e conceitos necessários para o capítulo atual.

### 4.2 Fibrados Principais com Quatérnios Unitários

Neste capítulo, propõe-se a utilização de quatérnios unitários para descrever o movimento rotacional de um corpo rígido, e daí deduzir a correspondente conexão de Cartan e todas as equações cinemáticas e dinâmicas correspondentes. Uma introdução aos quatérnios é apresentada na seção A.10. Nesta seção, passa-se direto para as propriedades dos quatérnios unitários, que formam o grupo de Lie  $SU(2)$ .

O fibrado principal tem como base  $B = \mathbb{R}^3$  e a fibra padrão é  $SU(2)$ . Deste modo, o fibrado principal fica sendo  $(P, \mathbb{R}^3, \pi, SU(2))$ . Então, em vez de associar a cada ponto

uma cópia de  $SO(3)$ , como feito no capítulo 2, associa-se uma cópia de  $SU(2)$ . Para escrever as equações dinâmicas do corpo rígido, utiliza-se o fibrado vetorial associado  $(E, \mathbb{R}^3, \pi_1, \mathfrak{su}(2), SU(2), \rho_3)$  onde se utiliza a representação adjunta  $\rho_3 : SU(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ . Neste caso, tem-se que  $SU(2)$  é uma cobertura dupla de  $SO(3)$  (vide seção D.1). As álgebras de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{so}(3)$ , entretanto, são isomórficas. Também é importante lembrar que qualquer 3-vetor também pode ser representado em  $\mathfrak{su}(2)$ , de modo que é possível escrever tanto as equações da dinâmica rotacional quanto da translacional neste mesmo espaço, ou seja, o movimento geral pode ser descrito em  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Uma base típica para  $\mathfrak{su}(2)$  é a formada pelas matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

mas de modo a simplificar as relações entre os colchetes, costuma-se utilizar as chamadas matrizes de Pauli normalizadas, que são  $\bar{\sigma}_1 = (i/2)\sigma_1, \bar{\sigma}_2 = -(i/2)\sigma_2, \bar{\sigma}_3 = (i/2)\sigma_3$ . Então qualquer elemento em  $\mathfrak{su}(2)$  pode ser escrito como  $\mathbf{X} = \mathbf{v} \cdot \bar{\sigma} = \sum_{i=1}^3 v^i \bar{\sigma}_i$ , onde  $\mathbf{v}$  é um 3-vector em  $\mathbb{R}^3$  associado a este elemento, e  $\bar{\sigma}$  é um vetor com componentes  $\bar{\sigma}_i$ , ou seja, trata-se de um *vetor de matrizes*, que é uma notação conveniente. As relações de comutação ficam então  $[\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2] = \bar{\sigma}_3, [\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_1] = \bar{\sigma}_2$  e  $[\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3] = \bar{\sigma}_1$ , que são as relações de comutação normalmente encontradas na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

Qualquer elemento do grupo de Lie  $SU(2)$  em torno da identidade pode ser representado na forma  $e^{\theta \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}}$  já que o grupo é simplesmente conexo e a aplicação exponencial tem seu domínio até o ponto antipodal da identidade D.1. A rotação de um 3-vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , nesta representação, é feita através da representação adjunta deste vetor, ou seja, o vetor equivalente é  $\mathbf{X}$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . A rotação sempre se dá em torno de um 3-vector unitário  $\mathbf{n}$ , de modo que a rotação na representação adjunta é dada por  $\mathbf{X}' = e^{-\theta \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}} \mathbf{X} e^{\theta \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}}$ . O produto vetorial de dois 3-vectores  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  é representado por  $[\mathbf{V}, \mathbf{U}]$ , e a conexão de Cartan  $\Xi$  é uma 1-forma com valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , que representa a velocidade angular. A seguir, apresentam-se algumas relações importantes para computações:

$$\begin{aligned} e^{-i(\theta/2)\sigma_3} \sigma_1 e^{i(\theta/2)\sigma_3} &= \sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta, \\ e^{-i(\theta/2)\sigma_3} \sigma_2 e^{i(\theta/2)\sigma_3} &= -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta, \\ e^{-i(\theta/2)\sigma_3} \sigma_3 e^{i(\theta/2)\sigma_3} &= \sigma_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

que são usadas na sequência. Outras fórmulas úteis podem ser encontradas em (SATTINGER; WEAVER, 1986). De modo a escrever as equações de Euler do movimento

rotacional nesta representação, a derivada covariante deve ser determinada, o que é feito no lema seguinte:

**Lema 4.2.1.** *A derivada covariante é o operador que age em  $\mathfrak{su}(2)$  pela seguinte fórmula:*

$$D_t \mathbf{X} = \partial \mathbf{X} / \partial t + [\Xi, \mathbf{X}], \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{X} \in \mathfrak{su}(2)$  representa um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Usando-se a fórmula apresentada na Equação (3.1), como se trata da representação adjunta, que é dada por  $\rho(S)\mathbf{X} = S\mathbf{X}S^{-1}$ , suponha que uma curva  $\alpha(t)$  passa pela identidade  $e \in SU(2)$  tal que  $\dot{\alpha}(0) = \Xi$  é um elemento da álgebra de Lie. Então  $\rho'_e(\Xi)\mathbf{X} = \left. \frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{X}\alpha(t)^{-1}) \right|_{t=0}$ . Continuando os cálculos:

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{X}\alpha(t)^{-1}) = \frac{d\alpha(t)}{dt}\mathbf{X}\alpha(t)^{-1} - \alpha(t)\mathbf{X}\frac{1}{\alpha^2(t)}\frac{d\alpha(t)}{dt}, \quad (4.4)$$

que, para  $t = 0$ , é igual a  $\rho'_e(\Xi)\mathbf{X} = \frac{d\alpha(0)}{dt}\mathbf{X} - \mathbf{X}\frac{d\alpha(0)}{dt} = [\Xi, \mathbf{X}]$ , o que conclui a prova. ■

### 4.3 Cinemática em $SU(2)$ para $n$ Frames de Referência

Considere o movimento de um corpo rígido em que os frames  $S^{(i)}$  estão rigidamente presos aos corpos. De modo a se determinar a dinâmica, considera-se a parte translacional separada da rotacional. Devido ao teorema de Cartan, que estabelece que se não há curvatura no espaço base, sempre há um sistema de referência, o inercial, onde a conexão de Cartan é igual a zero (veja por exemplo (SPIVAK, 2005) e (IVEY; LANDSBERG, 2003)), pode-se considerar que na Equação (2.20) tem-se  $\Xi^{(0)} \equiv 0$ . Este resultado é importante para provar a fórmula recursiva para a conexão de Cartan, como provado no teorema 4.3.1 para os casos estudados anteriormente. O lema a seguir é importante para a prova que desejada:

**Lema 4.3.1.** *Dado um sistema com três frames  $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}$  e matrizes de transformação  $R^{(0)}, R^{(1)}$ , a conexão de Cartan  $\Xi^{(2)}$  é dada por:*

$$\Xi^{(2)} = [R^{(1)}]^{-1}\Omega^{(0)}R^{(1)} + \Omega^{(1)}. \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Aplicando-se a fórmula na equação Eq. (2.20) com  $\Xi^{(0)} \equiv 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (R^{(0)}R^{(1)})^{-1} d(R^{(0)}R^{(1)}) &= [R^{(1)}]^{-1}[R^{(0)}]^{-1}\{(dR^{(0)})R^{(1)} + R^{(0)}dR^{(1)}\} = \\ &= (R^{(1)})^{-1}[\Omega^{(0)}R^{(1)} + dR^{(1)}], \end{aligned} \quad (4.6)$$

o que conclui a prova. ■

**Teorema 4.3.1.** *Dado um sistema com  $n+1$  frames  $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ , com matrizes de transformação  $R^{(0)}, R^{(1)}, \dots, R^{(n-1)}$  e matrizes de rotação  $\Omega^{(i)} = [R^{(i)}]^{-1}dR^{(i)}$  entre  $S^{(i)}$  e  $S^{(i+1)}$ , a conexão de Cartan para o frame  $S^{(i)}$  pode ser calculada pela fórmula recursiva:*

$$\Xi^{(i)} = [R^{(i-1)}]^{-1}\Xi^{(i-1)}R^{(i-1)} + \Omega^{(i-1)}, \quad (4.7)$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

*Demonstração.* A prova é por indução. A base da indução é o lema 4.3.1. Considere também que a conexão em  $S^{(i-1)}$  é dada pela proposição 2.3.1, isto é:

$$\Xi^{(i-1)} = (R^{(0)}R^{(1)} \dots R^{(i-2)})^{-1} d(R^{(0)}R^{(1)} \dots R^{(i-2)}). \quad (4.8)$$

Aplicando-se novamente Eq. (2.20), tem-se:

$$\begin{aligned} \Xi^{(i)} &= \underbrace{(R^{(0)}R^{(1)} \dots R^{(i-2)})}_Q R^{(i-1)-1} d(R^{(0)}R^{(1)} \dots R^{(i-2)}R^{(i-1)}) \\ &= (QR^{(i-1)})^{-1} d(QR^{(i-1)}) = [R^{(i-1)}]^{-1}Q^{-1}\{dQR^{(i-1)} + QdR^{(i-1)}\} = \\ &= [R^{(i-1)}]^{-1}Q^{-1}dQR^{(i-1)} + [R^{(i-1)}]^{-1}\underbrace{Q^{-1}Q}_I dR^{(i-1)} = \\ &= [R^{(i-1)}]^{-1}\Xi^{(i-1)}R^{(i-1)} + [R^{(i-1)}]^{-1}dR^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e o resultado segue. ■

A fórmula na equação (4.7) transforma a conexão de Cartan em dois frames adjacentes de uma forma simples. É importante lembrar que  $\Xi^{(i)}$  é a velocidade angular do frame  $i$  (e portanto do corpo rígido  $i$ ) em relação ao frame inercial, mas expressa nas coordenadas do frame  $i$ , e  $\Omega^{(i-1)}$  é a velocidade angular do frame  $i$  em relação ao frame  $i-1$ , mas expressa nas coordenadas do frame  $i$ .

**Lema 4.3.2.** *A velocidade de um ponto  $\mathbf{X}^{(i)}$  de um corpo rígido com frame  $S^{(i)}$  ligado*

rigidamente a ele em relação ao frame  $S^{(0)}$  mas em coordenadas do frame  $S^{(i)}$  é dada por:

$$\mathbf{V}^{(i)} = [\Xi^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}] + \mathbf{V}_{O_i}^{(i)}, \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{V}_{O_i}^{(i)}$  é a velocidade da origem de  $S^{(i)}$  em relação a  $S^{(0)}$  mas em coordenadas de  $S^{(i)}$ .

*Demonstração.* Aplicando-se a definição de derivada covariante, tem-se:

$$\mathbf{V}^{(i)} = D_t X^{(i)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \cdot] \right\} X^{(i)} = \dot{X}^{(i)} + [\Xi^{(i)}, X^{(i)}], \quad (4.11)$$

o que não inclui a translação do frame. Como o ponto do corpo rígido não se move em relação ao frame  $S^{(i)}$ , então  $\dot{\mathbf{X}}^{(i)} = 0$ . O termo  $\mathbf{V}_{O_i}^{(i)}$  deve então ser incluído e o resultado segue. ■

## 4.4 Dinâmica em $SU(2)$ para um Sistema com $n$ Frames

Dado um conjunto de frames como na Figura 2, tal como ocorre em robôs e mecanismos seriais com  $n$  elos, deve-se escrever as equações para cada elo do robô, que é um corpo rígido. O seguinte teorema é então importante:

**Teorema 4.4.1.** *A equação dinâmica para a parte rotacional do movimento do  $i$ -ésimo elo do robô é obtida escrevendo-se para o frame  $S^{(i)}$  ligado ao centro de massa do elo:*

$$\mathbb{I}_i \frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \mathbb{I}_i \Xi^{(i)}] = \mathbf{T}^{(i)}, \quad (4.12)$$

onde  $\mathbf{T}^{(i)}$  é o torque no centro de massa do corpo, tudo representado na álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ .

*Demonstração.* Pela Equação (4.10), tem-se que a velocidade de um elemento de massa infinitesimal  $dm$  no ponto  $\mathbf{X}^{(i)}$  é dada por  $\mathbf{V}^{(i)} = [\Xi^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}] + \mathbf{V}_{CM_i}^{(i)}$ , e isso implica que o momento angular é  $\Lambda^{(i)} = -dm[\mathbf{X}^{(i)}, [\mathbf{X}^{(i)}, \Xi^{(i)}]] + dm[\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{V}_{CM_i}^{(i)}]$ . Integrando-se todos os elementos de massa através de uma integral de volume, o segundo termo passará a ser  $m[\mathbf{X}_{CM_i}^{(i)}, \mathbf{V}_{CM_i}^{(i)}]$ , que é zero, dado que  $\mathbf{X}_{CM_i}^{(i)} = 0$ . Ignora-se então este termo daqui por diante. Pode-se definir o operador em  $\mathfrak{su}(2)$  dado por  $\mathbb{I}_i(\mathbf{X}^{(i)}) = -dm[\mathbf{X}^{(i)}, [\mathbf{X}^{(i)}, \cdot]]$  e então  $\Lambda^{(i)} = \mathbb{I}_i(\mathbf{X}^{(i)})\Xi^{(i)}$ . Este é o chamado *operador de inércia* para um único elemento infinitesimal de volume. Para o corpo rígido completo, a integral de volume do corpo rígido pode ser realizada, em que a medida de volume é  $dm = \rho dV$ , onde  $\rho$  é a densidade de massa. O momento angular total é então  $\mathbb{I}_i \Xi^{(i)}$ , onde  $\mathbb{I}_i$  é o operador de inércia completo do

corpo, que não depende mais do vetor posição  $\mathbf{X}^{(i)}$ . A segunda lei de Newton rotacional tem a fórmula  $D_t\Lambda^{(i)} = \frac{\partial\Lambda^{(i)}}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \Lambda^{(i)}] = \mathbf{T}^{(i)}$ . Após a substituição da fórmula do momento angular, tem-se:

$$D_t\Lambda^{(i)} = \frac{\partial\Lambda^{(i)}}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \mathbb{I}_i\Xi^{(i)}] = \mathbb{I}_i \frac{\partial\Xi^{(i)}}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \mathbb{I}_i\Xi^{(i)}] = \mathbf{T}^{(i)}, \quad (4.13)$$

e o resultado segue. ■

Alguns resultados adicionais são apresentados a seguir que serão úteis em cálculos mais adiante:

**Lema 4.4.1.** *O operador de inércia  $\mathbb{I}(\mathbf{X})$  (e consequentemente  $\mathbb{I}$ ) é simétrico e definido positivo para o caso da dinâmica formulada em  $\mathfrak{su}(2)$  e a métrica é dada pela forma de Killing  $(\Xi_1, \Xi_2) = -\frac{1}{2}K(\Xi_1, \Xi_2)$  (vide seção D.1.1).*

*Demonstração.* Para a álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , tem-se que  $K(\sigma_i, \sigma_j) = -2\delta_{ij}$  (onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker (SATTINGER; WEAVER, 1986)), então a métrica  $(\Xi_1, \Xi_2)$  é definida positiva (que é uma consequência de  $SU(2)$  ser semi-simples). Pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}(\mathbf{X})\Xi_1, \Xi_2) &= -\frac{1}{2}K(dm[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \Xi_1]], \Xi_2) = \\ &= \frac{1}{2}K(dm[\mathbf{X}, \Xi_1], [\mathbf{X}, \Xi_2]) = -\frac{1}{2}K(\Xi_1, dm[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \Xi_2]]) = (\Xi_1, \mathbb{I}(\mathbf{X})\Xi_2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde foi usada a propriedade:  $K([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) = K([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}) = -K(\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}])$  da forma de Killing. O resultado então segue. ■

Como consequência, todos os autovalores de  $\mathbb{I}(\mathbf{X}), \mathbb{I}$  são reais e positivos. Seja  $\mathbf{I}$  a matriz  $3 \times 3$  de inércia do corpo rígido, e  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$  são os seus autovetores (que determinam os eixos principais de inércia), tal que  $\mathbf{I}\mathbf{e}_i = I_i\mathbf{e}_i$ , onde  $I_j$  são os momentos principais de inércia. Seja ainda  $\phi : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$  um isomorfismo de álgebra de Lie tal que  $\phi(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ , onde  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  são elementos correspondentes em  $\mathfrak{su}(2)$  de  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , e  $\times$  é o produto vetorial.

**Proposição 4.4.1.** *Os elementos  $\mathbf{E}_1 = \phi(\mathbf{e}_1), \mathbf{E}_2 = \phi(\mathbf{e}_2), \mathbf{E}_3 = \phi(\mathbf{e}_3) \in \mathfrak{su}(2)$  são autovetores do operador  $\mathbb{I}$  com autovalores  $I_1, I_2, I_3$  (momentos principais de inércia).*

*Demonstração.*  $\mathbf{l} = dm \mathbf{x} \times (\omega \times \mathbf{x}) = -dm \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \omega)$ , o que pode ser escrito como  $\mathbf{l} = \mathbf{I}(\mathbf{x})\omega$ , onde  $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = -dm \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \cdot)$  é operador de inércia. Uma integração em  $dm$  produziria  $\mathbf{I}$ , que é a matriz de inércia completa do corpo rígido. Devido a propriedades do isomorfismo  $\phi$ , tem-se que:

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \Xi]] = [\phi(\mathbf{x}), [\phi(\mathbf{x}), \phi(\omega)]] = [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x} \times \omega)] = \phi(\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \omega)), \quad (4.15)$$

onde  $\Xi = \phi(\omega)$ . Se  $\mathbf{E}_i = \phi(\mathbf{e}_i)$  é um autovetor do operador  $[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \cdot]]$  com autovalor  $\lambda_i$ , tem-se que:

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{E}_i]] = \lambda_i \mathbf{E}_i = \phi(\lambda_i \mathbf{e}_i) = \phi(\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{e}_i)), \quad (4.16)$$

o que implica que  $\mathbf{e}_i$  é um autovetor  $\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \cdot)$  com autovalor  $\lambda_i$ . Devido à diferença de  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \cdot)$  ser somente uma constante, que é a mesma diferença entre  $\mathbb{I}(\mathbf{X})$  e  $[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \cdot]]$ , então  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  e  $\mathbb{I}(\mathbf{X})$  tem os mesmos autovalores, assim como  $\mathbf{I}$  e  $\mathbb{I}$ . ■

De modo a se obter a dinâmica completa para o robô serial, os seguintes lemas são importantes:

**Lema 4.4.2.** *A derivada parcial  $\frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t}$  é dada pela fórmula recursiva:*

$$\frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t} = [R^{(i-1)}]^{-1} \frac{\partial \Xi^{(i-1)}}{\partial t} R^{(i-1)} - [\Omega^{(i-1)}, [R^{(i-1)}]^{-1} \Xi^{(i-1)} R^{(i-1)}] + \dot{\Omega}^{(i-1)}. \quad (4.17)$$

*Demonstração.* Aplicando-se a derivada parcial em (4.7), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{ [R^{(i-1)}]^{-1} \} \Xi^{(i-1)} R^{(i-1)} + [R^{(i-1)}]^{-1} \frac{\partial \Xi^{(i-1)}}{\partial t} R^{(i-1)} + \\ &\quad + [R^{(i-1)}]^{-1} \Xi^{(i-1)} \dot{R}^{(i-1)} + \dot{\Omega}^{(i-1)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Devido às fórmulas  $\frac{\partial}{\partial t} \{ [R^{(i-1)}]^{-1} \} = -[R^{(i-1)}]^{-1} \dot{R}^{(i-1)} [R^{(i-1)}]^{-1}$  e  $\Omega^{(i-1)} = [R^{(i-1)}]^{-1} \dot{R}^{(i-1)}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t} &= -\Omega^{(i-1)} [R^{(i-1)}]^{-1} \Xi^{(i-1)} R^{(i-1)} + [R^{(i-1)}]^{-1} \frac{\partial \Xi^{(i-1)}}{\partial t} R^{(i-1)} + \\ &\quad + [R^{(i-1)}]^{-1} \Xi^{(i-1)} \underbrace{R^{(i-1)} [R^{(i-1)}]^{-1}}_I \dot{R}^{(i-1)} + \dot{\Omega}^{(i-1)} = \\ &= [R^{(i-1)}]^{-1} \frac{\partial \Xi^{(i-1)}}{\partial t} R^{(i-1)} - \Omega^{(i-1)} [R^{(i-1)}]^{-1} \Xi^{(i-1)} R^{(i-1)} + \\ &\quad + [R^{(i-1)}]^{-1} \Xi^{(i-1)} R^{(i-1)} \Omega^{(i-1)} + \dot{\Omega}^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

e lembrando da definição de colchete de Lie, o resultado segue. ■

**Lema 4.4.3.** *Seja  $S^{(i)}$  um frame rigidamente ligado ao  $i$ -ésimo corpo rígido. A aceleração*

do ponto  $\mathbf{X}^{(i)}$  em relação ao frame  $S^{(0)}$ , mas expresso nas coordenadas de  $S^{(i)}$  é dada por:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \left[ \frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t}, \mathbf{X}^{(i)} \right] + [\Xi^{(i)}, [\Xi^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}]] + \mathbf{A}_{O_i}^{(i)}, \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{A}_{O_i}^{(i)}$  representa a aceleração da origem de  $S^{(i)}$  em relação a  $S^{(0)}$  mas em coordenadas de  $S^{(i)}$ .

*Demonstração.* A definição de aceleração a partir da conexão de Cartan é:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(i)} &= (D_t)^2 \mathbf{X}^{(i)} + \mathbf{A}_{O_i}^{(i)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \cdot] \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \cdot] \right\} \mathbf{X}^{(i)} + \mathbf{A}_{O_i}^{(i)} = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [\Xi^{(i)}, \cdot] \right\} \{ \dot{\mathbf{X}}^{(i)} + [\Xi^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}] \} + \mathbf{A}_{O_i}^{(i)} = \\ &= \ddot{\mathbf{X}}^{(i)} + \left[ \frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t}, \mathbf{X}^{(i)} \right] + 2[\Xi^{(i)}, \dot{\mathbf{X}}^{(i)}] + [\Xi^{(i)}, [\Xi^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}]] + \mathbf{A}_{O_i}^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lembrando que  $\ddot{\mathbf{X}}^{(i)} = \dot{\mathbf{X}}^{(i)} = 0$  para um ponto no corpo rígido, o resultado segue. ■

A dinâmica translacional para o corpo  $S^{(i)}$  é então dada por:

**Teorema 4.4.2.** *Se  $m_i$  é a massa do corpo  $S^{(i)}$ , a equação para a aceleração do centro de massa é:*

$$m_i \left[ \frac{\partial \Xi^{(i)}}{\partial t}, \mathbf{X}^{(i)} \right] + m_i [\Xi^{(i)}, [\Xi^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)}]] + m_i \mathbf{A}_{O_i}^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)}, \quad (4.22)$$

onde  $\mathbf{F}^{(i)}$  é a força total agindo no corpo.

*Demonstração.* Aplicando a lei de Newton baseada na derivada covariante no frame  $S^{(i)}$ , isto é  $m_i \mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)}$ , e usando a equação (4.20), o resultado segue. ■

É importante observar que as forças  $\mathbf{F}^{(i)}$  e os torques  $\mathbf{T}^{(i)}$  causam o movimento do corpo e são expressos no frame rigidamente ligado ao corpo  $S^{(i)}$ . Em um robô serial, leva-se em conta as forças e os torques nas juntas e os torques externos produzidos pelos atuadores (por exemplo, motores) nas juntas. Na seção seguinte, apresenta-se um exemplo.

## 4.5 Resultados para um Robô Plano de Dois Elos

Nesta seção, apresenta-se a continuação do exemplo da seção 2.4. Aplica-se o método apresentado para determinar a cinemática e a dinâmica do robô planar de dois elos apresentado na Figura 7. Este exemplo, como já foi dito, foi retirado da seção 6.7, página 201 do livro clássico de Craig's (CRAIG, 1989). Este exemplo foi também usado em

(COLÓN, 2015). Assume-se que em cada elo toda a massa está concentrada em  $L_i$  unidades de distância a partir da origem do frame. Obviamente, este ponto é também o centro de massa do elo. Por simplicidade e economia de espaço (e de forma diferente do feito em (CRAIG, 1989)), considera-se que a força de gravidade é zero. Os torques ativos fornecidos pelos motores nas juntas são  $\tau_1$  and  $\tau_2$ .

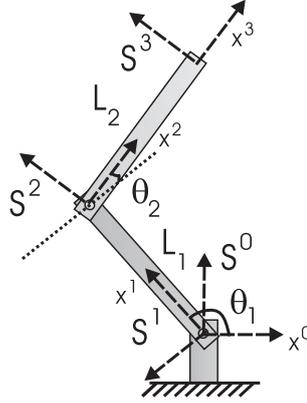


Figura 7: Robô Planar com Dois Elos.

Neste caso, há três conexões de Cartan  $\Xi^{(0)}, \Xi^{(1)}, \Xi^{(2)}$  (uma para cada frame), mas a primeira conexão deve ser nula por estar ligada ao referencial inercial. Se  $R^{(0)}, R^{(1)}$  são as transformações de frame entre  $S^{(0)}$  e  $S^{(1)}$ , e  $S^{(1)}$  e  $S^{(2)}$ , respectivamente, e  $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}$  são as correspondentes velocidades angulares entre um elo e outro, as conexões de Cartan estão relacionadas por (usando o fato que  $\Xi^{(0)} \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned}\Xi^{(1)} &= [R^{(0)}]^{-1}\Xi^{(0)}R^{(0)} + \Omega^{(0)} = \Omega^{(0)}, \\ \Xi^{(2)} &= [R^{(1)}]^{-1}\Xi^{(1)}R^{(1)} + \Omega^{(1)} = [R^{(1)}]^{-1}\Omega^{(0)}R^{(1)} + \Omega^{(1)}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Para cada corpo rígido (elo), deve haver uma equação da forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1 \frac{\partial \Xi^{(1)}}{\partial t} + [\Xi^{(1)}, \mathbb{I}_1 \Xi^{(1)}] &= \mathbf{T}^{(1)}, \\ \mathbb{I}_2 \frac{\partial \Xi^{(2)}}{\partial t} + [\Xi^{(2)}, \mathbb{I}_2 \Xi^{(2)}] &= \mathbf{T}^{(2)},\end{aligned}\tag{4.24}$$

que relaciona a velocidade angular do frame ligado ao corpo em relação ao referencial inercial, mas com valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  nas coordenadas do próprio frame ligado ao corpo (que é também o próprio centro de massa). Aplicando-se, para cada corpo, a equação (4.22), tem-se:

$$\begin{aligned}m_1 \left[ \frac{\partial \Xi^{(1)}}{\partial t}, \mathbf{X}^{(1)} \right] + m_1 [\Xi^{(1)}, [\Xi^{(1)}, \mathbf{X}^{(1)}]] + m_1 \mathbf{A}_{O_1}^{(1)} &= \mathbf{F}^{(1)}, \\ m_2 \left[ \frac{\partial \Xi^{(2)}}{\partial t}, \mathbf{X}^{(2)} \right] + m_2 [\Xi^{(2)}, [\Xi^{(2)}, \mathbf{X}^{(2)}]] + m_2 \mathbf{A}_{O_2}^{(2)} &= \mathbf{F}^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

As derivadas parciais são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Xi^{(1)}}{\partial t} &= [R^{(0)}]^{-1} \underbrace{\frac{\partial \Xi^{(0)}}{\partial t}}_{\equiv 0} R^{(0)} - [\Omega^{(0)}, [R^{(0)}]^{-1} \underbrace{\Xi^{(0)}}_{\equiv 0} R^{(0)}] + \dot{\Omega}^{(0)} = \dot{\Omega}^{(0)}, \\ \frac{\partial \Xi^{(2)}}{\partial t} &= [R^{(1)}]^{-1} \frac{\partial \Xi^{(1)}}{\partial t} R^{(1)} - [\Omega^{(1)}, [R^{(1)}]^{-1} \Xi^{(1)} R^{(1)}] + \dot{\Omega}^{(1)} = \\ &= [R^{(1)}]^{-1} \dot{\Omega}^{(0)} R^{(1)} - [\Omega^{(1)}, [R^{(1)}]^{-1} \Omega^{(0)} R^{(1)}] + \dot{\Omega}^{(1)}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

O conjunto das equações do movimento rotacional, após algumas substituições, é:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1 \dot{\Omega}^{(0)} &= \mathbf{T}^{(1)} - [\Omega^{(0)}, \mathbb{I}_1 \Omega^{(0)}], \\ \mathbb{I}_2 \dot{\Omega}^{(1)} &= \mathbf{T}^{(2)} - \mathbb{I}_2 [R^{(1)}]^{-1} \dot{\Omega}^{(0)} R^{(1)} + \mathbb{I}_2 [\Omega^{(1)}, [R^{(1)}]^{-1} \Omega^{(0)} R^{(1)}] \\ &\quad - [[R^{(1)}]^{-1} \Omega^{(0)} R^{(1)} + \Omega^{(1)}, \mathbb{I}_2 ([R^{(1)}]^{-1} \Omega^{(0)} R^{(1)} + \Omega^{(1)})].\end{aligned}\tag{4.27}$$

As equações em (4.27) relacionam o torque em cada elo (que precisam ainda ser determinadas devido aos esforços causados pelos outros elos ligados a esse) com a velocidade angular relativa e as matrizes de rotação. O eixo 3 é normal ao plano, o que significa dizer que  $\Omega^{(0)} = (i/2)\theta_1\sigma_3$ ,  $\dot{\Omega}^{(0)} = (i/2)\dot{\theta}_1\sigma_3$ ,  $\Omega^{(1)} = (i/2)\theta_2\sigma_3$  and  $\dot{\Omega}^{(1)} = (i/2)\dot{\theta}_2\sigma_3$ . De modo a calcular as transformações usando  $R^{(0)} = e^{i(\theta_1/2)\sigma_3}$ ,  $R^{(1)} = e^{i(\theta_2/2)\sigma_3}$ , da terceira fórmula em Eq. (C.21), conclui-se que  $\Omega^{(0)}$ ,  $\dot{\Omega}^{(0)}$ ,  $R^{(0)}$ ,  $\Omega^{(1)}$ ,  $\dot{\Omega}^{(1)}$ ,  $R^{(1)}$  comutam, e a segunda equação em (4.27) se torna:

$$\mathbb{I}_2 \left\{ \dot{\Omega}^{(1)} + \dot{\Omega}^{(0)} \right\} = \mathbf{T}^{(2)} + \mathbb{I}_2 [\Omega^{(1)}, \Omega^{(0)}] - [\Omega^{(0)} + \Omega^{(1)}, \mathbb{I}_2 (\Omega^{(0)} + \Omega^{(1)})].\tag{4.28}$$

Finalmente, como  $[\sigma_3, \sigma_3] = 0$ , todos os colchetes são zero, e esta equação pode ainda ser simplificada para  $\mathbb{I}_2 \{ \dot{\Omega}^{(1)} + \dot{\Omega}^{(0)} \} = \mathbf{T}^{(2)}$ . Por um raciocínio similar, pode-se concluir que a primeira equação em (4.27) é simplificada para  $\mathbb{I}_1 \dot{\Omega}^{(0)} = \mathbf{T}^{(1)}$ . Neste exemplo, por outro lado, como se supõe que a massa dos corpos está concentrada, tem-se que

$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = 0$ , e  $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)} = 0$ . Pode-se ainda deduzir isto diretamente de (4.24), mas este autor acredita que é instrutivo deduzir e apresentar (4.27). A aceleração  $\mathbf{A}_{O_1}^{(1)}$  é nula, e pela aplicação da equação (4.20), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{O_2}^{(2)} &= R^{(1)}(\ddot{\theta}_1 L_1 \bar{\sigma}_2 - (\dot{\theta}_1)^2 L_1 \bar{\sigma}_1)(R^{(1)})^{-1} = e^{i(\theta_2/2)\sigma_3}(\ddot{\theta}_1 L_1 \bar{\sigma}_2 - (\dot{\theta}_1)^2 L_1 \bar{\sigma}_1)e^{-i(\theta_2/2)\sigma_3} = \\ &= -\frac{i}{2}\ddot{\theta}_1 L_1(e^{i(\theta_2/2)\sigma_3}\sigma_2 e^{-i(\theta_2/2)\sigma_3}) - \frac{i}{2}(\dot{\theta}_1)^2 L_1(e^{i(\theta_2/2)\sigma_3}\sigma_1 e^{-i(\theta_2/2)\sigma_3}) = \\ &= \ddot{\theta}_1 L_1(\bar{\sigma}_1 \sin \theta_2 + \bar{\sigma}_2 \cos \theta_2) - (\dot{\theta}_1)^2 L_1(\bar{\sigma}_1 \cos \theta_2 - \bar{\sigma}_2 \sin \theta_2) = \\ &= (\ddot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 - (\dot{\theta}_1)^2 L_1 \cos \theta_2)\bar{\sigma}_1 + ((\dot{\theta}_1)^2 L_1 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2)\bar{\sigma}_2, \quad (4.29) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{X}^{(1)} = L_1 \bar{\sigma}_1$ ,  $\mathbf{X}^{(2)} = L_2 \bar{\sigma}_1$ . As equações dinâmicas translacionais são então:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= m_1[\ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_3, L_1 \bar{\sigma}_1] + m_1[\dot{\theta}_1 \bar{\sigma}_3, [\dot{\theta}_1 \bar{\sigma}_3, L_1 \bar{\sigma}_1]], \\ \mathbf{F}^{(2)} &= m_2[(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\bar{\sigma}_3, L_2 \bar{\sigma}_1] + m_2[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\bar{\sigma}_3, [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\bar{\sigma}_3, L_2 \bar{\sigma}_1]] + m_2 \mathbf{A}_{O_2}^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= m_1 L_1 \ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_2 - m_1 (\dot{\theta}_1)^2 L_1 \bar{\sigma}_1, \\ \mathbf{F}^{(2)} &= (m_2 \ddot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 - m_2 (\dot{\theta}_1)^2 L_1 \cos \theta_2 - m_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2)\bar{\sigma}_1 + \\ &\quad + (m_2 (\dot{\theta}_1)^2 L_1 \sin \theta_2 + m_2 \ddot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 + m_2 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))\bar{\sigma}_2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Daqui por diante, fórmulas análogas às apresentadas na página 199 de (CRAIG, 1989) serão usadas. Estas fórmulas transformam as forças e torque de um elo para o anterior. A diferença é que estas forças e torques são elementos de  $\mathfrak{su}(2)$ , o produto vetorial é substituído pelo colchete de Lie, e a matriz de rotação é substituída pela representação adjunta de  $SU(2)$  na sua própria álgebra de Lie. O torque na junta 2 nas coordenadas de  $S^{(2)}$ , que é o torque do motor 2 (isto é,  $\tau_2$ ), é dado por  $\mathbf{n}_2^{(2)} = [\mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{F}^{(2)}]$ , o que resulta em:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_2^{(2)} &= [L_2\bar{\sigma}_1, (m_2\ddot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 - m_2(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \cos \theta_2 - m_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2)\bar{\sigma}_1 + \\
&\quad + (m_2(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \sin \theta_2 + m_2\ddot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 + m_2 L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))\bar{\sigma}_2] = \\
&= (m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 (L_2)^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))\bar{\sigma}_3. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

A força na junta 1 em coordenadas de  $S^{(1)}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1^{(1)} &= R^{(1)}\mathbf{f}_2^{(2)}[R^{(1)}]^{-1} + \mathbf{F}^{(1)} = R^{(1)}\mathbf{F}^{(2)}[R^{(1)}]^{-1} + \mathbf{F}^{(1)} = \\
&= (m_2\ddot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 - m_2(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \cos \theta_2 - m_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2)e^{i(\theta_1/2)\sigma_3}\bar{\sigma}_1 e^{-i(\theta_1/2)\sigma_3} + \\
&\quad + (m_2(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \sin \theta_2 + m_2\ddot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 + m_2 L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))e^{i(\theta_1/2)\sigma_3}\bar{\sigma}_2 e^{-i(\theta_1/2)\sigma_3} + \\
&\quad\quad + m_1 L_1 \ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_2 - m_1(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \bar{\sigma}_1 = \\
&= (m_2\ddot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 - m_2(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \cos \theta_2 - m_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_2)(\cos \theta_2 \bar{\sigma}_1 + \sin \theta_2 \bar{\sigma}_2) + \\
&\quad + (m_2(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \sin \theta_2 + m_2\ddot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 + m_2 L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))(-\sin \theta_2 \bar{\sigma}_1 + \cos \theta_2 \bar{\sigma}_2) + \\
&\quad\quad + m_1 L_1 \ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_2 - m_1(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \bar{\sigma}_1. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

O torque na junta 1 em coordenadas de  $S^{(1)}$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1^{(1)} &= R^{(1)}\mathbf{n}_2^{(2)}[R^{(1)}]^{-1} + [\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{F}^{(1)}] + [\mathbf{X}^{(1)}, R^{(1)}\mathbf{F}^{(2)}[R^{(1)}]^{-1}] = \\
&= (m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 (L_2)^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))e^{i(\theta_1/2)\sigma_3}\bar{\sigma}_3 e^{-i(\theta_1/2)\sigma_3} + \\
&\quad + [L_1\bar{\sigma}_1, m_1 L_1 \ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_2 - m_1(\dot{\theta}_1)^2 L_1 \bar{\sigma}_1] + [L_1\bar{\sigma}_1, e^{i(\theta_1/2)\sigma_3}\mathbf{F}^{(2)}e^{-i(\theta_1/2)\sigma_3}] = \\
&= (m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 (L_2)^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))\bar{\sigma}_3 + m_1 (L_1)^2 \ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_3 + \\
&\quad + (m_2 \ddot{\theta}_1 (L_1)^2 \sin^2 \theta_2 - m_2 (\dot{\theta}_1)^2 (L_1)^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - m_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_1 L_2 \sin \theta_2)\bar{\sigma}_3 + \\
&\quad + (m_2 (\dot{\theta}_1)^2 (L_1)^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + m_2 \ddot{\theta}_1 (L_1)^2 \cos^2 \theta_2 + m_2 L_1 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2)\bar{\sigma}_3 = \\
&= (m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 (L_2)^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2))\bar{\sigma}_3 + m_1 (L_1)^2 \ddot{\theta}_1 \bar{\sigma}_3 + \\
&\quad + (m_2 (L_1)^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 L_1 L_2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2)\bar{\sigma}_3. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Comparando-se estas equações com aquelas apresentadas nas páginas 203 e 204 de (CRAIG, 1989), é possível verificar que a metodologia proposta produz as mesmas equações cinemáticas e dinâmicas, porém numa representação diferente.

## 5 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho uma pesquisa realizada por este autor na linha da modelagem de sistemas robóticos e mecanismos. Esta pesquisa, que está em andamento, até o momento foi publicada nos artigos (COLÓN, 2014), (COLÓN et al., 2015), (COLÓN, 2015), (COLÓN, 2015), (COLÓN, 2018a). A linha de pesquisa consiste na utilização de fibrados principais e associados, conexões de Cartan e derivadas covariantes, e é original deste autor, até onde vai seu conhecimento. Este autor acredita que além das vantagens que esta metodologia apresenta para modelagem (descritas mais adiante), ainda poderá conduzir a novas técnicas de controle não-lineares e geométricos, que serão objetos de pesquisa futuras. O capítulo 1 introduziu o problema, onde foram apresentadas as ideias principais do problema a ser abordado, bem como os trabalhos mais importantes que constituem a origem desta pesquisa.

No capítulo 2, os primeiros resultados são apresentados e comentados. Estes resultados foram publicados nos artigos (COLÓN, 2014), (COLÓN, 2015), porém aqui eles são apresentados de forma mais didática e também com outros pontos de vista, que este autor adquiriu após as publicações. Dentre as vantagens que se pode citar sobre a metodologia apresentada, em comparação por exemplo com (CRAIG, 1989) e (TSAI, 1999) e que utilizam as equações de Newton e os parâmetros de Denavit-Hartenberg, no método proposto aqui as matrizes de transformação homogêneas do grupo de Lie  $SE(3)$ , ou seja  ${}^i{}^{-1}A$ , não precisam ser feitas logo no início do processo. A conexão de Cartan, que representa as velocidades em relação ao sistema inercial, podem ser parametrizadas de infinitas formas diferentes (vide seção 2.4.2), como por exemplo com as coordenadas de Plücker, ângulos de Euler ou coordenadas helicoidais (CAMPOS; GUENTHER; MARTINS, 2005; MURRAY; LI; SASTRY, 1994). Cada frame (preso a um elo, por exemplo) terá uma conexão de Cartan, e elas podem ser calculadas de forma recursiva, como feito na metodologia em (CRAIG, 1989). Todas as derivadas temporais das quantidades importantes, como velocidades, acelerações, momentos angulares e lineares (para citar alguns) podem ser calculadas nos frames inercial e não inercial usando-se a derivada covariante  ${}^nD_t$ , somente tendo que adaptá-la para o caso de somente rotação (grupo  $SO(3)$ ), translação + rotação

(grupo  $SE(3)$ ) ou quatérnios, como é visto no capítulo seguinte. A aceleração é calculada pela dupla derivada covariante  ${}^n D_t^n D_t$ . Softwares de manipulação simbólica podem ser utilizados para calcular conexões em mecanismos complexos, como os tridimensionais (tais como MATLAB®). Um resultado bastante interessante obtido por este autor e apresentado ainda neste capítulo é o da Lei de Kirchhoff-Davies para a formulação com conexão de Cartan. De fato, o resultado obtido é uma justificativa geométrica para a lei de Kirchhoff-Davies, pois a conexão de Cartan pode ser pensada como um potencial (similar ao potencial eletromagnético).

No capítulo, 3 apresentaram-se uma série de conceitos matemáticos fundamentais como os de fibrado principal, fibrados associados, seções em fibrados, formas de Maurer-Cartan, conexão de Cartan (definição formal) e derivada covariante (definição formal). Procurou-se manter uma explicação didática e intuitiva, ligando-se estes conceitos com exemplos utilizados neste trabalho. Por exemplo, procurou-se mostrar como estes espaços podem ser usados para descrever movimentos de corpos rígidos. Este material é complementado com os apêndices. Também são importantes os conceitos de trivialização, curvas verticais, distribuições e curvas horizontais e espaços homogêneos. Mostram-se também alguns exemplos de computação de formas de Maurer-Cartan, que são os tipos de conexão de Cartan que aparecem neste trabalho, já que o espaço de movimento dos corpos rígidos é euclidiano. Definiu-se também a 2-forma de curvatura como uma medida da falha da existência de uma seção  $F$  suave, que é um frame em uma subvariedade do espaço base, e cuja derivada de Darboux é  $F^*(\omega_H)$ , onde  $\omega_H$  é a forma de Maurer-Cartan do grupo de Lie  $H$ . Por fim, mostraram-se os três tipos de Conexão que se encontram na literatura (Cartan, Koszul e Ehresmann) e como elas estão relacionadas. Deste modo, pode-se dizer que a metodologia de modelagem robótica apresentada neste trabalho é uma metodologia *geométrica*.

No capítulo 4, apresentou-se a metodologia da conexão de Cartan usando-se quatérnios unitários, ou seja, elementos do grupo de Lie  $SU(2)$ , o que mostra a utilidade da metodologia para se escrever equações cinemáticas e dinâmicas nesta representação. Os resultados apresentados são originais e foram publicados no artigo (COLÓN, 2018b). Ficou clara também outra vantagem da formulação com conexões de Cartan, que é a de ser mais intuitiva e compacta. A derivada covariante permite escrever as leis cinemáticas e dinâmicas usando representações diferentes, como por exemplo, quatérnios e quatérnios duais (OLIVEIRA et al., 2014; RADAVELLI L. A., 2014; RADAVELLI et al., 2014; BERNARDES et al., 2014). Como estas representações geralmente implicam em menor carga computacional nos diversos algoritmos, tem-se justificativa prática para a metodologia proposta

aqui. De fato, toda a teoria da representação e o campo das chamadas *álgebras envolventes* (vide seção A.16) poderiam ser usadas para esta formulação (DIXMIER, 1996), tentando escrever as equações em formulações que podem ter outras utilidades. Também a forma invariante que as leis físicas nesta formulação assumem (formulações covariantes) permitem que as fórmulas sejam mais intuitivas. De fato, este autor motivou-se bastante para esta pesquisa através da busca desta intuição nas equações, como a Lei de Newton Covariante da equação (2.4). Outra vantagem é que a metodologia aqui apresentada poderia ser generalizada facilmente para espaços não-euclidianos, ou seja, em vez dos movimentos ocorrerem no  $\mathbb{R}^3$ , eles poderiam ocorrerem em uma variedade diferenciável com curvatura não nula. Em um ambiente onde se tem alta gravidade, o espaço passa a ser curvo, o que tem implicações em como se fixar o que vem a ser um sistema de referência inercial. Isso é comentado um pouco melhor em (COLÓN, 2014) e certamente exigiria uma extensão da teoria usando-se Relatividade Geral (MISNER et al., 2017). Em particular, na representação de quatérnios, pode-se reduzir a quantidade de memória e o número de computações, fato este que torna o uso de quatérnios bastante popular.

Como sugestões para trabalhos futuros, este autor pretende inicialmente obter as equações cinemáticas e dinâmicas, usando conexão de Cartan e os demais conceitos apresentados aqui, para o caso do fibrado principal  $(SE(3) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \pi, SE(3))$ , isto é, com movimento descrito por matrizes homogêneas. Para tanto, conceitos novos como co-álgebras de Lie são fundamentais (ABE, 2004; MICHAELIS, 1980). Estes conceitos já estão sendo estudados por este autor, sobretudo a parte fundamental para eles, que são a teoria das categorias (vide seção A.13) e álgebra tensorial (vide seção A.14). Infelizmente, esta parte ainda não foi explorada adequadamente por outros pesquisadores da área (SELIG, 2005). Em seguida, pretende-se escrever as equações cinemáticas e dinâmicas, usando conexão de Cartan e demais conceitos, para o caso do fibrado principal  $(Spin(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \pi, Spin(3) \times \mathbb{R}^3)$ , ou seja, para o caso onde o movimento geral do corpo rígido é descrito por quatérnios duais (vide seção A.12). Para tanto, conceitos de álgebras de Clifford deverão ser estudados (LOUNESTO et al., 2001), o que também necessita de teoria das categorias e álgebra tensorial, já chamada de *mãe de todas as álgebras* devido à sua propriedade de *universalidade*. Após terem sido desenvolvidos modelos de sistemas robóticos seriais e paralelos usando-se estas metodologias, poderá se pesquisar controladores não-lineares e geométricos, seguindo a linha de outros artigos deste autor (STEVANI et al., 2018; STEVANI, 2020) e de outros. Em particular, deseja-se desenvolver técnicas de controle onde a noção de linearidade possa ser estendida para variedades diferenciáveis através do conceito de coordenadas normais (PAIT; COLÓN, 2010; COLÓN;

PAIT, 2004).

# APÊNDICE A – CONCEITOS ALGÉBRICOS BÁSICOS

## A.1 Álgebra Abstrata: Conceitos Básicos

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados, em sua maioria, em (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986). Exceções a essa regra serão informadas.

**Definição A.1.1** (Aplicação ou Função). *Dados dois conjuntos  $S$  e  $R$ , uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$  associa a cada ponto  $p \in U$  um e somente um ponto de  $R$ , que é representado por  $f(p)$ . O conjunto  $U$  é conhecido como domínio da função, e  $R$  é conhecido como contra-domínio.*

**Definição A.1.2** (Aplicação Identidade). *Todo conjunto  $S$  possui uma aplicação que mapeia cada elemento nele mesmo, conhecida como aplicação identidade, e representada por  $\text{Id}_S$ .*

**Definição A.1.3** (Conjunto Imagem). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$ , o conjunto dos pontos de  $U$  mapeados por  $f$  é conhecido como conjunto imagem e é representado por  $f(U) \subset R$ . A imagem da função  $f$  é simplesmente o conjunto imagem de  $S$ , ou seja,  $f(S)$ .*

**Definição A.1.4** (Imagem Inversa (ou conjunto de nível)). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$ , para cada ponto  $q \in f(U)$  está associado um conjunto denominado imagem inversa ou conjunto de nível, e representado por  $f^{-1}(q)$ , que consiste dos pontos de  $U$  que são mapeados em  $q$  por  $f$ .*

**Definição A.1.5** (Gráfico de uma Aplicação). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$ , define-se o gráfico de  $f$  como sendo o subconjunto de  $U \times R$  formado pelos pares  $(p, f(p))$ , para cada  $p \in U$ .*

**Definição A.1.6** (Igualdade entre Aplicações). *Duas aplicações  $f : U \subset S \rightarrow R$  e  $g : V \subset S \rightarrow R$  são iguais, o que se representa por  $f = g$ , se  $U = V$  e  $f(p) = g(p)$  para todo ponto  $p \in V = U$ .*

**Definição A.1.7** (Composição de Aplicações). *Dadas duas aplicações  $f : U \subset S \rightarrow R$  e  $g : V \subset R \rightarrow T$ , a composição é definida como sendo a aplicação  $f \circ g : U \rightarrow T$  e está definida desde que  $f(U) \subset V$ .*

**Definição A.1.8** (Imagem Inversa (ou conjunto de nível)). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$  entre dois conjuntos  $S$  e  $R$ , para cada ponto  $q \in f(S)$  está associado um conjunto denominado imagem inversa ou conjunto de nível, e representado por  $f^{-1}(q)$ , que consiste dos pontos de  $U$  que são mapeados em  $q$  por  $f$ .*

**Definição A.1.9** (Aplicação Injetiva). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$ , quando a imagem inversa de cada ponto de  $f(U)$  for um conjunto com somente um elemento, diz-se que a aplicação é injetiva*

**Definição A.1.10** (Aplicação Sobrejetiva). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$ , quando  $f(U) = R$  diz-se que a aplicação é sobrejetiva*

**Definição A.1.11** (Aplicação Bijetiva). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$ , se esta for injetiva e sobrejetiva, diz-se que ela é bijetiva ou invertível*

A aplicação identidade  $\text{Id}_S$  é sempre invertível para qualquer  $S$ .

**Definição A.1.12** (Função Característica). *Dado um conjunto  $S$  e um subconjunto  $V \subset S$ , diz-se que a função característica de  $V$ , representada por  $\chi_V : S \rightarrow \{0, 1\}$  é tal que  $\chi_V(V) = 1$  e vale zero no resto do conjunto.*

**Definição A.1.13** (Restrição no domínio). *Dada uma aplicação  $f : U \subset S \rightarrow R$  e  $V \subset U$ , a aplicação representada por  $f_V : V \subset U \rightarrow R$  e tal que  $f_V(p) = f(p)$  para todo  $p \in V$  é conhecida como restrição de  $f$  em  $V$ .*

**Definição A.1.14** (Restrição na imagem). *Pode-se também restringir a aplicação de modo que o contra-domínio seja igual à imagem, o que é conhecido como sendo restrição na imagem.*

Deste modo, duas aplicações  $f : U \subset S \rightarrow R$  e  $g : V \subset S \rightarrow R$  diferentes mas tais que  $f(p) = g(p)$  para todo ponto de  $V \cap U$  podem ser restringidas para esta intersecção, e podem então ser consideradas iguais, o que é também uma operação natural.

**Definição A.1.15** (Aplicação Inversa). Quando a aplicação for invertível, está definida naturalmente a aplicação inversa  $f^{-1} : R \rightarrow U$  tal que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_S$ .

**Definição A.1.16** (Partição). Dado um conjunto  $S$ , define-se uma partição sobre este conjunto como sendo uma família de subconjuntos  $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n\}$  tais que  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$  e tal que  $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i = S$ .

Os subconjuntos que formam a partição são chamados de *átomos*.

**Definição A.1.17** (Relação de Equivalência). Dado um conjunto  $S$  e dois elementos  $p$  e  $q$  pertencentes a este conjunto, define-se uma relação de equivalência  $p \sim q$  como uma relação que satisfaz as seguintes propriedades:

- $q \sim q$ , (propriedade reflexiva);
- Se  $q \sim p$  então  $p \sim q$  (propriedade simétrica);
- Se  $q \sim p$  e  $p \sim r$ , então  $q \sim r$  (propriedade transitiva);

Dado um conjunto  $S$  e uma relação de equivalência  $\sim$  definida sobre este conjunto, é possível agrupar todos os elementos equivalentes por  $\sim$  em subconjuntos de  $S$  de modo que se define uma partição em  $S$ . Tais subconjuntos são as:

**Definição A.1.18** (Classes de Equivalência). Dado um conjunto  $S$  e uma relação de equivalência sobre  $S$ , representada por  $(S, \sim)$ , define-se uma classe de equivalência representada por  $p$  como sendo o conjunto  $[p] = \{r \in S \mid r \sim p\}$ .

**Definição A.1.19** (Conjunto Quociente). O conjunto formado por todas as classes de equivalência de  $S$ , isto é,  $\{[p] \mid p \in S\}$  é chamado de conjunto quociente de  $S$  pela relação  $\sim$ , e é representado por  $S/\sim$ .

**Exemplo:** Um exemplo de equivalência é estabelecer que todos os números inteiros múltiplos de 3 são equivalentes. O conjunto  $3\mathbb{Z}$  é então um subconjunto de  $\mathbb{Z}$ . Deste modo,  $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  passa a ser um novo conjunto das classes de equivalência, onde todos os múltiplos de 3, ou seja  $3\mathbb{Z}$ , passa a ser elemento único, e  $1 + 3\mathbb{Z}$  e  $2 + 3\mathbb{Z}$  são os outros dois elementos. Então,  $\mathbb{Z}_3$  tem cardinalidade 3. Os elementos deste conjunto são representados por  $\bar{0}, \bar{1}$  e  $\bar{2}$ .

O conjunto das classes de equivalência de  $(S, \sim)$  forma uma partição de  $S$ .

**Definição A.1.20** (Aplicação Projeção). *Dado um conjunto  $S$  e uma relação de equivalência  $\sim$ , está definida canonicamente a aplicação  $\pi : S \rightarrow S/\sim$ , conhecida como projeção canônica .*

A aplicação projeção é sempre sobrejetiva, mas não é injetiva.

*Demonstração.* É fácil provar, pois todo elemento de  $S$  está associado a uma classe de equivalência. Entretanto, não é injetiva, pois dois elementos equivalentes são mapeados a uma mesma classe de equivalência. ■

**Exemplo:** Evidentemente, para o conjunto  $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  a aplicação projeção mapeia  $3\mathbb{Z}$  em  $\bar{0}$ ,  $3\mathbb{Z} + 1$  em  $\bar{1}$  e  $3\mathbb{Z} + 2$  em  $\bar{2}$ .

**Definição A.1.21** (Conjuntos Contáveis). *Um conjunto  $S$  é contável se existe uma aplicação bijetiva entre  $S$  e os números naturais  $\mathbb{N}$*

Todos os conjuntos finitos são contáveis.

**Definição A.1.22** (Permutações). *Uma permutação  $\sigma$  de ordem  $k$  é qualquer aplicação bijetiva  $\sigma : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Deste modo, a  $k$ -upla de valores  $(1, 2, \dots, k)$  é transformada na  $k$ -upla:*

$$(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)).$$

**Exemplo:** Cada conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$  possui  $k!$  permutações possíveis. Por exemplo,  $\{1, 2, 3\}$  pode ser permutado para  $\{3, 1, 2\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$ ,  $\{2, 1, 3\}$ ,  $\{3, 2, 1\}$  e  $\{1, 3, 2\}$ .

**Definição A.1.23** (Permutações Pares e Ímpares). *Diz-se que uma permutação  $\sigma$  de ordem  $k$  é par se a ordem crescente (módulo  $k$ ) de  $(1, 2, \dots, k)$  é preservada. Diz-se que é uma permutação ímpar se a ordem é alterada.*

No exemplo anterior, as três primeiras são permutações pares (sendo a primeira a própria identidade), enquanto que as três últimas são ímpares.

**Definição A.1.24** (Pré-Ordem, (MACLANE, 1978)). *Uma relação de pré-ordem  $\preceq$  em um conjunto  $S$  é uma relação que é reflexiva e transitiva, ou seja:*

1.  $a \preceq a$  para  $a \in S$ ,
2. Se  $a \preceq b$  e  $b \preceq c$ , então  $a \preceq c$  para todo  $a, b, c \in S$ .

**Definição A.1.25** (Ordem Parcial). *Uma relação de ordem parcial  $\leq$  em um conjunto  $S$  é uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja:*

1.  $a \leq a$  para  $a \in S$ ,
2.  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , então  $a = b$ , para todo  $a, b \in S$ ,
3. Se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então  $a \leq c$  para todo  $a, b, c \in S$ .

Um *pre-set* é um conjunto munido com uma pré-ordem  $(S, \preceq)$ . Um *poset* é um conjunto munido de uma ordem parcial  $(S, \leq)$ . Dados dois pre-sets/posets  $S, R$ , uma aplicação *monotônica*  $f : S \rightarrow R$  é uma aplicação tal que se  $a \leq b$  então  $f(a) \leq f(b)$ .

**Definição A.1.26** (Operação  $n$ -ária). *Dado um conjunto  $S$ , uma operação  $n$ -ária é uma aplicação  $\mathcal{O} : S \times S \times \cdots \times S \rightarrow S$ , onde  $\times$  é o produto cartesiano.*

O caso mais importante de operação é a binária, tais como a soma e o produto no conjunto dos números naturais. Destaque para as operações 0-árias, que são constantes, e as 1-árias, que são simplesmente as aplicações do conjunto nele mesmo.

**Definição A.1.27** (Estrutura Algébrica). *Uma estrutura algébrica  $A$  é um conjunto  $S$  munido com uma coleção de operações  $n$ -árias sobre este mesmo conjunto.*

**Definição A.1.28** (Axiomas Equacionais). *Qualquer operação  $n$ -ária pode ter que satisfazer axiomas dados em forma de identidade, que são conhecidos como axiomas equacionais.*

Será visto mais adiante que a associatividade, presente em muitas estruturas algébricas, é o caso mais comum de axiomas equacionais.

**Definição A.1.29** (Homomorfismos). *Dadas duas estruturas algébricas  $A$  e  $B$ , uma aplicação  $h : A \rightarrow B$  é um homomorfismo se para cada operação  $n$ -ária valer que  $h(\mathcal{O}_A(p_1, \dots, p_n)) = \mathcal{O}_B(h(p_1), \dots, h(p_n))$ .*

## A.2 Semigrupos e Monóides

Os resultados desta seção podem ser encontrados em (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986), (BOURBAKI, 1998), (MACLANE, 1978) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

**Definição A.2.1** (Magma). *Dado um conjunto  $S$  com uma operação binária  $\cdot : S \times S \rightarrow S$ , diz-se que  $(S, \cdot)$  é um magma se ele for fechado em relação a esta operação binária.*

**Definição A.2.2** (Homomorfismos de Magmas). *Dados dois magmas  $(S, \cdot)$  e  $(R, \circ)$ , um homomorfismo é uma aplicação  $f : S \rightarrow R$  tal que  $f(s_1 \cdot s_2) = r_1 \circ r_2$ .*

Em um magma, a operação binária não é necessariamente associativa.

Como a operação binária não é associativa, pode-se pensar que cada palavra é uma *árvore binária*, onde as folhas são elementos de  $X$ . A operação binária é equivalente a juntar as árvores pelas raízes.

**Exemplo:** Para o alfabeto  $X = \{a, b, c\}$ , algumas palavras são  $a.b = (a)(b)$ , que é a árvore binária com duas folhas,  $a.(b.c) = (a)((b)(c))$ ,  $(a.b).c = ((a)(b))(c)$ ,  $(a.a).(b.c) = ((a)(a))((b)(c))$ , e assim por diante.

**Definição A.2.3** (Produto de Dois Magmas). *Dados dois magmas  $A, B \in S$ , define-se o produto de dois magmas como sendo o magma  $AB = \{a.b | a \in A, b \in B\}$ .*

**Definição A.2.4** (Semi-grupos). *Dado um conjunto  $S$  e uma operação binária  $\cdot : S \times S \rightarrow S$ , diz-se que  $(S, \cdot)$  é um semi-grupo se esta operação for associativa, ou seja, se  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .*

**Exemplo:** Um exemplo de semi-grupo é o conjunto de inteiros positivos, conhecidos por todos como o conjunto de números naturais  $\mathbb{N}$  com a operação soma.

Praticamente todos os espaços neste trabalho terão operações associativas, por isso a estrutura de semi-grupo será básica.

**Definição A.2.5** (Sub-semigrupos). *Dado um semigrupo  $S$ , um sub-semigrupo é um subconjunto de  $A \subset S$  fechado em relação à operação binária, isto é,  $AA \subset A$ .*

É claro que um sub-semigrupo é também um semigrupo.

**Definição A.2.6** (Ideais de Semigrupos). *Um sub-semigrupo é um ideal à direita se  $AS \subset A$ , e um ideal à esquerda se  $SA \subset A$ .*

**Definição A.2.7** (Conjunto Gerador). *Dado um semi-grupo  $S$  e um conjunto  $A$ , o menor sub semi-grupo  $T$  que contém  $A$  é dito ser gerado por  $A$ , este último sendo conhecido por gerador de  $T$ .*

Sempre podemos realizar a operação binária entre todos os pares de elementos de  $A$  e o resultado será necessariamente um sub semi-grupo de  $S$ .

**Definição A.2.8** (Sub Semi-Grupo Cíclico). *Todo elemento  $a \in S$  gera um sub semi-grupo formado pelos elementos  $a^n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ . Tais semi-grupos são chamados de cíclicos.*

**Definição A.2.9** (Elemento Unitário). *Dado um semi-grupo  $(S, \cdot)$ , um elemento unitário é um elemento  $e \in S$  tal que  $e \cdot x = x \cdot e = x$ , onde  $x \in S$ .*

**Definição A.2.10** (Monóide). *Um monóide  $(S, \cdot)$  é um semi-grupo dotado de um elemento unitário.*

**Definição A.2.11** (Monóide Livre). *Dado um conjunto  $X$ , um monóide livre gerado por  $X$ , que é representado por  $FX$ , é o conjunto de strings finitas cujo alfabeto é  $X$ , sendo que a multiplicação é a concatenação e a unidade é a string vazia.*

**Definição A.2.12** (Estrela de Kleene). *Dado um monóide  $(M, \cdot)$  com  $X \subset M$  e o subconjunto  $V_0 = \{e\}$ , pode-se definir recursivamente a família de conjuntos  $V_{i+1} = \{w \cdot v \mid w \in V_i, v \in X\}$ , para todo  $i > 0$ . O conjunto estrela de Kleene do conjunto  $X$  é dado por  $X^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ .*

**Exemplo:** Dado o subconjunto  $X = \{a, b, c\}$  do conjunto  $S$  formado pelas letras do alfabeto, com  $e$  sendo a identidade, pode-se escrever:

$$FX = X^* = \{e, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \dots, aaa, aab, aac, aba, abb, \dots\}.$$

**Exemplo:** Pode-se pensar que  $X = \{e, a, b, c\}$  gera um magma livre

$$FX = \{e, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, \dots, a(aa), (aa)a, (aa)b, a(ab) \dots\}.$$

onde assumem-se equivalências como  $ea \sim ae \sim a$ ,  $(aa)a \sim a(aa)$ , e assim por diante. Dessa forma, o monóide livre gerado por  $X$  é simplesmente  $FX / \sim$ .

**Definição A.2.13** (Sub-monóide). *Um sub-monóide é um sub-semigrupo de  $S$  e que contém ainda o elemento unitário.*

É claro que um sub-monóide é também um monóide.

**Teorema A.2.1.** *Dado um conjunto  $N \subset S$ , o conjunto  $N^*$  é sempre o menor sub-monóide de  $S$  que contém  $N$ .*

**Teorema A.2.2** (Conjunto Gerador). *Dado um monóide  $(S, \cdot)$ , diz-se que ele é gerado por um subconjunto  $N$  se e somente se  $S = N^*$ . Diz-se ainda que o monóide é finitamente gerado se a cardinalidade de  $N$  é finita.*

Um exemplo de monóide é o conjunto das funções definidas de  $S$  em  $S$ , onde a operação é a composição e a identidade é a aplicação  $\text{Id}_S$ . Dado um monóide  $M$ , o conjunto dos elementos de  $M$  é representado por  $UM$ . Então, qualquer função  $f : N \rightarrow UM$  se estende para um morfismo de monóides  $g : FN \rightarrow M$ . Pode se pensar em  $U$  como sendo um funtor (a ser visto mais adiante).

## A.3 Grupos

Os grupos são conjuntos munidos de duas operações: um *produto* (que é uma operação binária) e uma *inversa* (que é unária). São portanto monóides com estrutura adicional. As definições e teoremas aqui apresentados podem ser encontrados em (KAWAKUBO, 1991), (SATTINGER; WEAVER, 1986), (MACLANE, 1978) e (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986).

**Definição A.3.1** (Grupo). *Um grupo é um monóide  $(G, \cdot)$  tal que para todo  $g \in G$ , existe um elemento inverso  $g^{-1}$  de modo que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .*

**Definição A.3.2** (Grupos Comutativos ou Abelianos). *Um grupo  $G$  tal que a operação binária é comutativa, isto é,  $a \cdot b = b \cdot a$  para quaisquer elementos é chamado de grupo comutativo ou grupo abeliano.*

**Definição A.3.3** (Subgrupos). *Diz-se que um subconjunto  $H \subset G$  é um subgrupo se ele for fechado em relação à operação binária e à aplicação inversa.*

**Definição A.3.4** (Ordem). *Dado um grupo  $G$ , a ordem de um elemento  $g \in G$  é o menor inteiro positivo  $m$  tal que  $g^m = e$ . Se não existe tal  $m$ , então a ordem de  $g$  é infinita.*

Representamos por  $\langle g \rangle$  o conjunto  $\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , que é o subgrupo gerado por  $g$ . Se a ordem de  $g$  for  $m$ , então a ordem/cardinalidade de  $\langle g \rangle$  é  $m$ .

**Definição A.3.5** (Grupos Finitos). *Dado um grupo  $G$ , diz-se que ele é finito se a cardinalidade  $|G|$  do grupo é um número finito.*

**Exemplo:** O conjunto  $\mathbb{Z}$  munido com a operação de soma é um grupo abeliano infinito. Qualquer subconjunto  $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  é um subgrupo. Pode-se definir a relação de equivalência  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , onde se identificam todos os inteiros que diferem por  $n$  unidades, ou seja, 1 é identificado a  $n, 2n, 3n, -n+1, \dots$  e assim por diante. É possível mostrar que  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  é um grupo formado por  $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  com a operação de soma tal que  $\bar{1} + \overline{n-1} = \bar{0}$ . Outro exemplo de grupo é o das permutações de ordem  $k$ . Esse grupo é finito com  $k!$  elementos e pode ser identificado com as simetrias do  $k$ -ésimo polígono plano regular.

**Definição A.3.6** (Grupos Cíclicos). *Diz-se que um grupo  $G$  é cíclico se existe um elemento  $g \in G$  que gera  $G$ , de modo que todos os elementos de  $G$  são da forma  $g^i$ , onde  $i$  pode variar em  $\mathbb{Z}$  ou em qualquer  $\mathbb{Z}_n$ .*

**Exemplo:** O grupo aditivo  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  com a operação de soma é um grupo cíclico e finito. Existe um isomorfismo natural entre o grupo aditivo  $\mathbb{Z}_n$  e o grupo cíclico de ordem  $n$  dado por  $G = \{g^i | i \in \mathbb{Z}_n\}$ . Outro exemplo de grupo cíclico finito é o grupo das raízes complexas da equação polinomial  $z^n + 1 = 0$ , que são da forma  $\{1, e^{2\pi j/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi j/n}\}$ . Os conjuntos  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  são grupos em relação à soma, e  $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$  são grupos em relação à multiplicação e são exemplos de grupos infinitos. Há também os grupos multiplicativos  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , cujos elementos são  $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ .

**Definição A.3.7** (Homomorfismos de Grupo). *Dados dois grupos  $(G, \cdot)$  e  $(H, \circ)$ , uma aplicação  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo de grupo se  $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$ , onde  $a, b \in G$ .*

**Teorema A.3.1** (Grupo dos Automorfismos). *Dada uma classe  $X$  (por exemplo, uma estrutura algébrica), os automorfismos desta classe formam um grupo sobre a composição de morfismos  $X$ . Tal grupo é conhecido como grupo dos automorfismos de  $X$ .*

A ordem de um grupo finito é sua cardinalidade.

**Teorema A.3.2** (Lagrange). *Dado um grupo finito  $G$ , qualquer subgrupo  $H$  tem a ordem  $|H|$  como um divisor de  $|G|$ .*

Deste modo, a ordem de qualquer elemento de um grupo finito divide a cardinalidade do grupo.

**Definição A.3.8** (índice de um subgrupo). *Dado um grupo  $G$  e um subgrupo  $H \subset G$ , define-se a ordem de  $H$  em  $G$  como sendo  $[G : H] = |G|/|H|$ .*

**Definição A.3.9** (Elementos de Torção). *Dado um grupo abeliano  $G$ , um elemento de torção é um elemento  $g \in G$  que tem ordem finita, ou seja, tal que  $\langle g \rangle = \{kg | k \in \mathbb{Z}\}$  tem cardinalidade finita.*

**Definição A.3.10** (Grupo Abelian Livre de Torção). *Um grupo abeliano  $G$  livre de torção é um grupo abeliano tal que somente a identidade é um elemento de torção, ou seja, tem ordem finita.*

**Exemplo:** Um grupo  $G$  onde todo elemento é de ordem finita é chamado de grupo de torção. O grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  é um grupo livre de torção.

**Definição A.3.11** (Conjunto Gerador de um Grupo). *Dado um grupo  $G$  e um subconjunto  $S \subset G$ , define-se  $\langle S \rangle \subset G$  como sendo o conjunto de todas as combinações (pela operação do grupo) dos elementos de  $S$ , e é chamado de subgrupo gerado por  $S$ .*

O subgrupo  $\langle S \rangle$  também é o menor subgrupo de  $G$  que contem  $S$ . Se  $S$  é um subgrupo finito, diz-se que  $G$  é *finitamente gerado*.

**Exemplo:** O grupo  $\mathbb{Z}$  com a operação de soma é finitamente gerado por  $\{-1, 1\}$ . Já o grupo dos racionais  $\mathbb{Q}$ , ou qualquer grupo com cardinalidade incontável, não é finitamente gerado.

Dado um grupo  $G$  e um subconjunto  $S \subset G$ , define-se o *conjunto inverso* de  $S$  como sendo o subconjunto  $S^{-1} \subset G$  formado pelas inversas de todos os elementos de  $S$ . Um subconjunto  $S \subset G$  tal que  $S = S^{-1}$  é chamado *simétrico*.

**Definição A.3.12** (Grupo Livre). *Dado um alfabeto  $X$ , um grupo livre  $FX$  gerado a partir do conjunto gerador livre  $X$  é o grupo formado por todas as palavras compostas por concatenação dos elementos de  $X \cup X^{-1}$ , ou seja, o monóide livre gerado por  $X \cup X^{-1}$ , e que ainda satisfaz o axioma  $ss^{-1} = s^{-1}s = e$ .*

**Exemplo:** Para o conjunto de geradores  $\{a, b\}$ , tem-se o alfabeto  $X = \{e, a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ . Além de supor a equivalência da associatividade, ainda se supõe que  $ea = ae = a$ ,  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ , e assim por diante.

**Teorema A.3.3** (Universalidade do Grupo Livre). *Dado um grupo  $G$ , um alfabeto  $X$  e o correspondente grupo livre  $FX$ , para qualquer aplicação  $f : X \rightarrow G$  existe um homomorfismo de grupo  $\phi : FX \rightarrow G$  tal que  $f = \phi \circ i$ , onde  $i : X \rightarrow FX$  é a inclusão.*

Ou seja, qualquer grupo é a imagem homomórfica de um grupo livre, ou ainda, qualquer grupo  $G$  é isomórfico ao grupo quociente de algum grupo livre  $FX$ . Será visto que várias estruturas algébricas possuem propriedades universais, o que é explorado em Teoria das Categorias (MACLANE, 1978)

**Definição A.3.13** (Grupo Simétrico). *Dado um conjunto  $S$ , o grupo simétrico é formado pelas bijeções do conjunto  $S$  nele mesmo, onde o produto é a composição de funções.*

No caso de  $S$  ser finito com cardinalidade  $n$ , o grupo simétrico é formado pelas  $n!$  permutações dos elementos.

**Teorema A.3.4** (Teorema de Cayley). *Dado um grupo  $G$ , ele sempre é isomórfico a um subgrupo do grupo simétrico do conjunto  $G$ .*

**Definição A.3.14** (Centro de um Grupo). *Dado um grupo  $G$ , o subconjunto de elementos de  $G$  que comuta com todos os elementos de  $G$  é conhecido como centro de  $G$ , e é representado por  $Z(G)$ .*

Dado um grupo abeliano  $G$ , tem-se que  $Z(G) = G$ . Dado um grupo  $G$  e um subgrupo  $H \subset G$ , este também é um grupo, e por consequência  $H^{-1} = H$ .

**Definição A.3.15** (Subgrupo Máximo). *Diz-se que um subgrupo  $H \subset G$  é máximo se não existe nenhum outro subgrupo  $K \subset G$  tal que  $H \subset K \subset G$  e  $K \neq G$ .*

**Definição A.3.16** (Co-conjunto de  $G$ ). *Dado  $H \subset G$  um subgrupo de  $G$  e  $g \in G$ , define-se o co-conjunto à esquerda de  $H$  associado a  $g$  como sendo um conjunto obtido pelo produto de  $g$  por os elementos de  $H$ , representado aqui por  $g \cdot H$  e um co-conjunto à direita é o obtido por  $H \cdot g$ . Representam-se estes co-conjuntos, respectivamente, por  $gH$  e  $Hg$ .*

**Proposição A.3.1** (Co-conjuntos como classes de equivalência). *Dado um grupo  $G$ , o agrupamento dos seus elementos em co-conjuntos é uma relação de equivalência. Vale igualmente para a relação à esquerda e à direita.*

*Demonstração.* De fato, cada co-conjunto é uma classe de equivalência, onde a relação é:  $g_1$  é equivalente a  $g_2$  se  $g_1 = g_2 \cdot h$ , onde  $h \in H$ . ■

**Corolário A.3.1.** *Dado um grupo  $G$  e um subgrupo  $H \subset G$ , existe uma partição de  $G$  por cópias de  $H$  à esquerda. De forma semelhante, pode-se obter uma partição à direita.*

**Definição A.3.17** (Conjuntos Quocientes  $G/H$  e  $H \setminus G$ ). *Dado  $H \subset G$  um subgrupo de  $G$ , o conjunto de todos os co-conjuntos à esquerda  $gH$ , conjunto quociente, é representado por  $G/H$ . Há também o conjunto quociente dos co-conjuntos à direita, representado por  $H \setminus G$ .*

Está canonicamente definida a aplicação projeção  $\pi : G \rightarrow G/H$  que associa a cada ponto  $g \in G$  a classe de equivalência  $g \cdot H$ . De forma semelhante, se define a projeção para  $H \setminus G$ .

**Definição A.3.18** (Conjugação). *Dado um grupo  $G$  e  $a, b \in G$ , diz-se que estes são conjugados se existe  $g \in G$  tal que  $gag^{-1} = b$ .*

**Definição A.3.19** (Subgrupos Normais ou Invariantes). *Um subgrupo  $N \subset G$  é normal ou invariante se para cada  $h \in N$ , tem-se que  $g \cdot h \cdot g^{-1} \in N$ , para qualquer  $g \in G$ . Dito de outra forma, um subgrupo é normal se  $g \cdot N \cdot g^{-1} = N$  para qualquer  $g \in G$ .*

Seja um grupo  $G$  e  $N \subset G$  é um subgrupo abeliano de  $G$ . Então este subgrupo é normal. Se  $G$  é um grupo abeliano, então qualquer subgrupo é abeliano (e normal, por consequência).

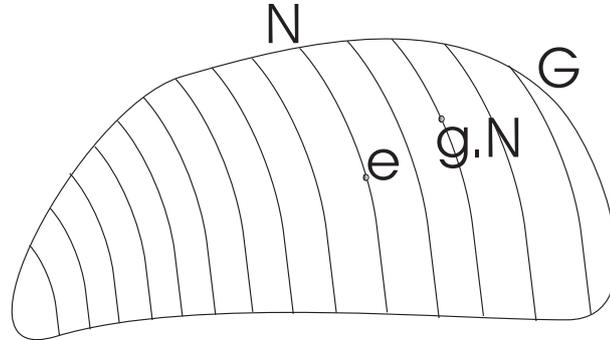


Figura 8: Ilustração da Partição Induzida por Subgrupo Normal

**Teorema A.3.5** (Grupo Quociente  $G/N$ ). *Dado  $N \subset G$  um subgrupo normal de  $G$ , os conjuntos quocientes à esquerda e à direita coincidem e adquirem um estrutura de grupo. Tal grupo é conhecido como grupo quociente  $G/N$ .*

*Demonstração.* Como  $g_1.N.g_2.N = (g_1.g_2).N.N = (g_1.g_2).N$  para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$ , há um mapeamento que leva o par  $[g_1], [g_2]$  ao par  $[g_1.g_2]$ , que representamos por  $*$ . É fácil mostrar que tal operação é associativa. Da mesma forma,  $g^{-1}.N.g.N = e.N$  induz uma aplicação invertível entre as classes  $[g]$  e  $[g^{-1}]$ . Deste modo,  $G/N$  com estas operações é um grupo. ■

Na figura 8, tem-se uma representação da partição única gerada por um subgrupo normal.

**Definição A.3.20** (Subgrupo Comutador). *Dado um grupo  $G$  e  $g, h \in G$ , o subgrupo formado por todos  $ghg^{-1}h^{-1}$  é um subgrupo normal de  $G$  e representado por  $[G, G]$ , conhecido como subgrupo comutador.*

**Definição A.3.21** (Grupo Simples). *Diz-se que um grupo  $G$  é simples se os únicos subgrupos normais são  $\{e\}$  e o próprio  $G$ .*

**Teorema A.3.6.** *Dado  $G$  um grupo e  $N \subset G$  um subgrupo normal,  $N$  é um subgrupo normal máximo se e somente se  $G/N$  for um grupo simples.*

Em conexão com a teoria de grupos de Lie (a ser abordada mais adiante), define-se:

**Definição A.3.22** (Grupo Semi-Simples). *Um grupo  $G$  é semi-simples se ele não tiver subgrupos normais abelianos, exceto por  $\{e\}$  e o próprio  $G$ .*

**Definição A.3.23** (Produto Direto de Grupos). *Dados dois grupos  $G_1, G_2$ , define-se o produto direto  $G_1 \times G_2$  como sendo o grupo formado pelos pares  $(g_1, g_2)$  tais que o produto é dado por  $(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$*

O homomorfismo de grupo é o morfismo (de estruturas algébricas) dos grupos. É equivalente portanto ao morfismo de magma, pois preserva a estrutura algébrica.

**Definição A.3.24** (Núcleo do Homomorfismo). *Dado um homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  entre dois grupos, o núcleo de  $\phi$ , representado por  $\ker \phi$ , é o conjunto dos elementos de  $G$  que são mapeados na identidade de  $H$ . Ou seja,  $\ker \phi = \phi^{-1}(e)$ .*

Todo núcleo de um homomorfismo é um subgrupo normal do domínio. De fato,  $\phi(g \cdot \ker \phi \cdot g^{-1}) = \phi(g) \cdot \phi(\ker \phi) \cdot \phi(g^{-1}) = e$ . Um isomorfismo de grupo  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo que também é uma aplicação bijetiva. O isomorfismo é a equivalência entre os grupos. Do ponto de vista de estrutura algébrica, não há diferença entre grupos isomórficos. Por esta razão, diz-se que os grupos são iguais, a menos de um isomorfismo.

### A.3.1 Grupos Abelianos

Os grupos abelianos recebem tratamento particular devido a serem melhor entendidos que os não-abelianos. Além disso, suas propriedades são base para outras estruturas algébricas, como os *anéis* e os *R-módulos*. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em (FUCHS et al., 2015).

**Exemplo:** No caso do grupo abeliano aditivo  $\mathbb{Z}$ , todos os números inteiros múltiplos de 2 formam um subgrupo, que representamos por  $2\mathbb{Z}$ . Da mesma forma,  $n\mathbb{Z}$  para qualquer  $n$  natural, é um subgrupo de  $\mathbb{Z}$ . O subgrupo  $2\mathbb{Z}$  particiona  $\mathbb{Z}$  em dois subconjuntos, que são  $2\mathbb{Z}$  e  $2\mathbb{Z} + 1$ . Define-se então  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ , onde se  $a \in \mathbb{Z}$  e  $a \bmod 2 = 0$  então  $a \in 2\mathbb{Z}$ , ou se  $a \bmod 2 = 1$  então  $a \in 2\mathbb{Z} + 1$ . O grupo  $\mathbb{Z}_2$  é aditivo, onde a soma é dada por:  $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ ,  $\bar{1} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$  e  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ . Pode-se dizer então que  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ou seja, é o grupo quociente. De forma semelhante, pode-se definir  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , que particiona  $\mathbb{Z}$  em  $n$  co-conjuntos, que são  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$

**Definição A.3.25** (Soma Direta). *O produto direto, definido na seção anterior, recebe o nome particular de soma direta quando se trata de um grupo abeliano, e é representado por  $G_1 \oplus G_2$ . Para o caso de  $n$  somas diretas de elementos idênticos  $(h_1, h_2)$ , representa-se o resultado por  $(nh_1, nh_2)$ .*

**Definição A.3.26** (Decomposição em Soma Direta). *Diz-se que o grupo abeliano  $G$  é a soma direta de um conjunto de subgrupos  $\{H_i\}$ , e representado por  $G = \oplus_i H_i$ , se: 1)*

As intersecções par-a-par dos subgrupos são triviais; 2)  $G$  é gerado por elementos dos subgrupos.

Como cada  $H_i$  possui um conjunto gerador, todo grupo abeliano terá um grupo gerador. Os grupos abelianos podem ser divididos entre finitos e infinitos.

**Teorema A.3.7** (Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitos). *Todo grupo abeliano finito  $G$  pode ser expresso como a soma direta de subgrupos cíclicos de potência prima.*

**Definição A.3.27** (Aplicação Linear). *Dados os grupos abelianos  $G$  e  $H$ , a aplicação  $f : G \rightarrow H$  é chamada de linear se 1)  $f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2)$ . Ou seja, todo homomorfismo de grupo abeliano é uma aplicação linear.*

**Exemplo:** Dado o grupo abeliano  $G \times H$ , ou seja, o produto direto de dois grupos abelianos  $G, H$ , um homomorfismo  $f : G \times H \rightarrow B$ , onde  $B$  também é um grupo abeliano, é tal que  $f(g_1 + g_2, h_1 + h_2) = f(g_1, h_1) + f(g_2, h_2)$ .

Esta é a definição de linearidade que necessita de menos estrutura. Veremos mais adiante que a tradicional definição, em espaços vetoriais, é um caso particular desta.

**Definição A.3.28** (Aplicação Bilinear). *Dados os grupos abelianos  $G_1, G_2$  e  $H$ , a aplicação  $\phi : G_1 \times G_2 \rightarrow H$  é chamada de bilinear se: 1)  $\phi(g_1 + g_2, g_3) = \phi(g_1, g_3) + \phi(g_2, g_3)$  e 2)  $\phi(g_1, g_2 + g_3) = \phi(g_1, g_2) + \phi(g_1, g_3)$ ;*

De forma semelhante, pode-se definir aplicações multilineares. Note que há linearidade em cada argumento, bem como na classe das aplicações propriamente ditas. Isto é, pode-se somar as aplicações.

**Definição A.3.29** (Grupos abelianos livres). *No caso de  $G$  ser abeliano e livre, as palavras viram simplesmente combinações lineares formais, onde parcelas da forma  $a - a$  são trocadas por 0. Deste modo, o alfabeto  $B$  vira simplesmente uma base. Deste modo, todos os elementos de  $G$  são da forma  $k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_nb_n$  onde  $b_i \in B$  e  $k_i \in \mathbb{Z}$ .*

Representa-se um grupo abeliano livre gerado por  $B$  como sendo  $\mathbb{Z}(B)$ , pois tratam-se de combinações lineares com coeficientes inteiros.

**Teorema A.3.8** (Nielsen-Shreier). *Todo subgrupo de um grupo livre e discreto é também um grupo livre.*

Chama-se de  $n$ -reticulado um subconjunto de pontos de  $\mathbb{R}^n$  regularmente posicionados. Por exemplo,  $\mathbb{Z}^n$  é um reticulado de dimensão  $n$ .

**Exemplo:** O grupo abeliano  $\mathbb{Z}$  é livre com base  $\{1\}$ . O grupo  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  é um reticulado inteiro, que é também um grupo abeliano livre cuja base é formada por  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ . O grupo de polinômios  $\mathbb{Z}[x]$  é um grupo abeliano livre cuja base é formada pelas potências de  $x$ .

Evidentemente, existe uma propriedade de universalidade para os grupos abelianos livres.

**Teorema A.3.9.** *Todos os grupos abelianos livres são livres de torção, ou seja, não existe em  $FX$  nenhum elemento  $g$  tal que para algum  $n \in \mathbb{Z}$  tem-se  $ng = 0$ .*

**Teorema A.3.10.** *Se um grupo abeliano livre é o quociente de dois grupo, ou seja,  $FX = A/B$ , então  $A = B \oplus (A/B)$ .*

**Definição A.3.30** ( $I$ -Gradação). *Dado um conjunto de índices  $I$ , que normalmente é um monóide, uma  $I$ -gradação de uma estrutura algébrica  $X$  é uma decomposição em soma direta da forma:*

$$X = \bigoplus_{i \in I} X_i = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots$$

onde os elementos de  $X_i$  são ditos homogêneos de grau  $i$ .

**Definição A.3.31** (Grupo Abeliano Graduado). *Dado um conjunto de índices  $I$ , um grupo abeliano graduado  $G$  é um grupo abeliano com a seguinte forma:*

$$G = \bigoplus_{i \in I} G_i = G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots$$

onde os elementos de  $G_i$  são ditos homogêneos de grau  $i$ .

Evidentemente, só é possível somar termos homogêneos de mesmo grau.

**Exemplo:** O conjunto dos polinômios em  $x$  de grau  $n$ , visto como um grupo abeliano, é graduado por  $I = \mathbb{Z}_n$ .

## A.4 Ações de Grupos em Conjuntos

O principal papel que um grupo vai desempenhar é através da sua realização como aplicações em um conjunto  $S$ . A partir disto, pode-se definir conceitos importantes, como o de *dinâmica* (para a teoria completa, vide (KAWAKUBO, 1991), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982)).

**Definição A.4.1** (G-Ação). *Seja  $G$  um grupo e  $S$  um conjunto. Uma G-ação (ou ação de um grupo sobre um conjunto) é uma aplicação  $\phi : G \times S \rightarrow S$  tal que*

- $\phi(e, p) = p$ , para todo  $p \in S$ , onde  $e \in G$  é a identidade do grupo;
- $\phi(g_2, \phi(g_1, p)) = \phi(g_2 \cdot g_1, p)$  para todo  $g_1, g_2 \in G$  e todo  $p \in S$ .

O grupo  $G$  é então conhecido como grupo de transformações de  $S$  e a aplicação  $\phi_g : S \rightarrow S$  é conhecida como transformação correspondente a  $g$ , e o conjunto  $S$  é chamado de  $G$ -conjunto.

Normalmente, representa-se  $\phi_g p$  como simplesmente  $g.p$ , quando isso não gerar confusão.

**Teorema A.4.1.** *A transformação  $\phi_g : S \rightarrow S$  é bijetiva.*

*Demonstração.* É óbvio devido a  $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_{g \cdot g^{-1}} = \text{Id}_S$ . ■

**Definição A.4.2** (Órbita). *Seja uma G-ação sobre um conjunto  $S$ . Dado  $p \in S$ , o conjunto  $G(p) = \{g \cdot p \in S | g \in G\}$  é conhecido como órbita de  $p$ .*

Duas órbitas passando em pontos diferentes ou nunca se cruzam ou são iguais. De fato, se duas órbitas  $G(p_1)$  e  $G(p_2)$  se cruzassem, poderíamos escolher  $g_1, g_2 \in G$  tal que  $\phi(g_1, p_1) = \phi(g_2, p_2)$  e assim  $\phi(g_1^{-1}, \phi(g_1, p_1)) = \phi(g_1^{-1}, \phi(g_2, p_2)) = p_1 = \phi(g_1^{-1}g_2, p_2)$ , ou seja,  $p_1 \in G(p_2)$ .

**Teorema A.4.2** (Partição de  $S$ ). *A G-ação sobre um conjunto  $S$  induz uma partição de  $S$ , ou seja, um conjunto quociente  $S/G$  cujas classes de equivalência são as órbitas de  $G$  em  $S$ .*

Isso vem do fato das órbitas nunca se cruzarem.

**Definição A.4.3** (Grupo de Isotropia). *Seja a G-ação sobre um conjunto  $S$ . Para cada ponto  $p \in S$ , o subgrupo de  $G$  dado por  $G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$  é conhecido como grupo de isotropia de  $p$ . Ou seja, é formado pelo conjunto das transformações que deixa o ponto  $p$  parado.*

**Definição A.4.4** (Pontos Fixos). *Dada uma G-ação sobre  $S$ , o conjunto  $S^G = \{p \in S | G_p = G\}$  é conhecido como conjunto dos pontos fixos de  $S$  pela G-ação.*

**Teorema A.4.3.** *Os grupos de isotropia  $G_p$  e  $G_{g.p}$ , ou seja, que estão sobre uma mesma órbita, são subgrupos conjugados em  $G$ , isto é  $G_{g.p} = gG_pg^{-1}$ .*

**Definição A.4.5** ( $G$ -aplicações ou Aplicações Equivariantes). *Dadas duas  $G$ -ações  $\phi_1, \phi_2$  em dois conjuntos  $S_1, S_2$ , uma aplicação  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é equivariante se  $f(\phi_1(g, p)) = \phi_2(g, f(p))$  (note que as ações nos conjuntos são distintas). Outra forma comum de aparecer é  $f(g \cdot p) = g \cdot f(p)$ , desde que se tenha em mente que as ações são diferentes.*

**Definição A.4.6** ( $G$ -Isomorfismo). *Uma aplicação equivariante que for bijetiva é conhecida como  $G$ -isomorfismo entre os conjuntos  $S_1, S_2$ .*

**Definição A.4.7** ( $G$ -Invariância). *Dada uma  $G$ -ação sobre  $S_1$  e  $U \subset S_1$  um subconjunto qualquer, diz-se que este é  $G$ -invariante se  $g.U \subset U$ . Quando o conjunto  $S$  é o próprio  $G$ , tem-se que qualquer órbita é o próprio conjunto  $G$ .*

**Teorema A.4.4.** *Dada uma ação de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $S$ , um sub-conjunto  $G$ -invariante  $U \subset S$  adquire ele mesmo uma  $G$ -ação induzida.*

**Teorema A.4.5.** *A órbita  $G(p)$  de um ponto é um subconjunto  $G$ -invariante, e também é  $G$ -isomórfica a  $G/G_p$ .*

**Definição A.4.8** (Classificação das  $G$ -ações). *A seguinte classificação das  $G$ -ações em um conjunto  $S$  é de interesse:*

- Uma ação é trivial se  $G_p = G$  para todo  $p \in S$ ;
- Uma ação é livre se  $G_p = \{e\}$  para todo  $p \in G$ ;
- Uma ação é semi-livre se  $G_p = G$  ou  $\{e\}$  para todo  $p \in S$ ;
- Uma ação é transitiva se existe somente uma órbita, ou seja, para cada par  $p_1, p_2$  de pontos de  $S$ , existe um elemento do grupo que mapeia um no outro;
- Uma ação é efetiva se  $\bigcap_{p \in S} G_p = \{e\}$ .

A ação trivial é tal que  $\phi_p = \text{Id}_S$ . Em uma ação efetiva, o único elemento de  $G$  mapeado em  $\text{Id}_S$  é  $e$ . A seguir, apresentamos as ações naturais de um grupo sobre ele mesmo. Essas ações não existem para  $G$  – conjuntos em geral.  $H \subset G$  será um subgrupo de  $G$ .

**Definição A.4.9** (Translações à Direita e à Esquerda). *A ação  $L : H \times G \rightarrow G$  dada por  $L_h : G \rightarrow G$  onde  $L_h g = hg$  é conhecida como translação à esquerda. A ação  $R : G \times H \rightarrow G$  dada por  $R_h g = gh$  é conhecida como translação à direita , .*

Note que  $H$  poderia ser o próprio  $G$ . As órbitas de  $R$  ( $L$ ) são os co-conjuntos à esquerda (direita) de  $H \subset G$ . Como  $L_Hg = Hg = R_gH$ , as órbitas de  $L$  são os co-conjuntos à direita (análogo para o caso à esquerda). Em particular, como  $L_hH = H$ , o subgrupo  $H$  é  $H$ -invariante. Outro ponto de vista é que as ações  $L$  e  $R$  promovem transformações entre os co-conjuntos, o que implica:

**Teorema A.4.6** (Ação Induzida). *A ação  $\bar{L} : G \times G/H \rightarrow G/H$ , conhecida como ação induzida por  $L$  em  $G/H$ , é tal que  $\bar{L}_g[j] = [gj]$ , onde  $[j]$  é o co-conjunto correspondente a  $[j]$ .*

O resultado vem de  $\bar{L}_g[j] = \bar{L}_g jH = gjH = [gj]$ . Em particular,  $\bar{L}_e[j] = [j] = \text{Id}_{G/H}$ . Raciocínio semelhante vale para a ação à direita, inclusive no espaço  $H \backslash G$

**Corolário A.4.1.** *Se  $H = N$  é um subgrupo normal de  $G$ , então  $G/N$  é um grupo e se define a ação de  $G/N$  sobre ele mesmo e sobre  $N \backslash G$ .*

**Definição A.4.10** (Conjugação). *A ação  $I : H \times G \rightarrow G$  dada por  $I_hg = L_h \circ R_{h^{-1}}h = hgh^{-1}$  é conhecida como conjugação. Diz-se então que  $h$  e  $g \cdot h \cdot g^{-1}$  são conjugados.*

Uma ilustração da conjugação é apresentada na Figura 9.

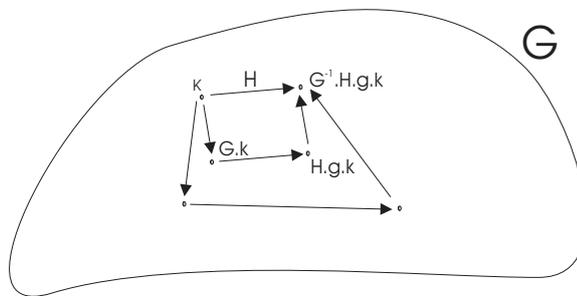


Figura 9: Ilustração da Conjugação

**Definição A.4.11** (Classes de Conjugação). *Diz-se que dois subgrupos  $H_1, H_2 \subset G$  são conjugados se  $I_g(H_1) = H_2$ . Isto define uma relação de equivalência, onde a classe de equivalência é conhecida como classe de conjugação.*

Mais adiante, serão introduzidas topologias em  $S$  e  $G$ , dando origem aos *grupos topológicos* e suas  $G$ -ações, que serão munidas dos conceitos de proximidade (entre elementos do grupo e dos pontos que eles transformam).

## A.5 Anéis

As definições desta seção podem ser encontradas em (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (BOURBAKI, 1998).

**Definição A.5.1** (Anel). *Um anel é um conjunto  $R$  munido de duas operações binárias  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  e  $(x, y) \mapsto x + y$  conhecidas como multiplicação e adição, respectivamente. As seguintes propriedades são satisfeitas:*

- $R$  é um grupo abeliano com relação à adição;
- a multiplicação é associativa e distributiva com relação à adição.

A forma de se representar um anel é  $(R, \cdot, +)$ . Como sempre, utilizaremos os mesmos símbolos para as operações, vamos omiti-las, e representar o anel simplesmente por  $R$ .

**Definição A.5.2** (Anel com Identidade). *Seja um anel  $R$  com um elemento  $e \in R$  tal que  $e \cdot x = x \cdot e = x$  para qualquer  $x \in R$ . Diz-se que tal anel é um anel com identidade.*

**Definição A.5.3** (Anéis Comutativos ou Abelianos). *Se o anel é um grupo abeliano com relação à multiplicação, trata-se de um anel abeliano ou comutativo.*

**Exemplo:** O anel mais simples de todos é  $R = \{0\}$ , conhecido como *anel zero*. Se ele tiver identidade, esta é o próprio zero. Outros exemplos de anéis são  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ . O conjunto  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  munido com a soma e a multiplicação módulo  $n$  é um anel.

**Exemplo:** Dado um conjunto  $S$  qualquer, o conjunto das funções reais da forma  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , com a soma e a multiplicação ponto-a-ponto, isto é  $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$  e  $(f \cdot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$ , é um anel comutativo com identidade. Se trocarmos a multiplicação ponto-a-ponto pela convolução, tem-se um pseudo-anel (BOURBAKI, 1998).

**Definição A.5.4** (Elementos Unitários). *Dado um anel com identidade  $(R, e)$ , diz-se que um elemento  $r \in R$  é unitário se ele possui inversa com relação à multiplicação.*

**Teorema A.5.1.** *Dado um anel  $(R, \cdot, +)$ , o conjunto dos elementos unitários de  $R$  é fechado em relação à multiplicação e forma um grupo multiplicativo com relação a  $\cdot$ , e é representado por  $U(R)$ .*

**Teorema A.5.2.** *Dado um anel comutativo  $R$ , o grupo  $U(R)$  age em  $R$  via multiplicação, e as órbitas definem uma relação de equivalência tal que dois elementos  $r, s$  são equivalentes se existe  $u \in U(R)$  tais que  $r = u \cdot s$ .*

**Definição A.5.5** (Característica de um Anel). *Dado um anel  $R$ , a característica de um anel  $R$  é o menor número de vezes que 1 deve ser somado a si mesmo para resultar em 0.*

A característica é zero quando nunca esta soma de 1's resulta em 0.

**Definição A.5.6** (Zero Divisores). *Dado um elemento de um anel  $r \in R$ , diz-se que  $s \neq 0 \in R$  é um zero-divisor a esquerda de  $r$  se  $s \cdot r = 0$ , e um zero-divisor a direita de  $r$  se  $r \cdot s = 0$ .*

**Definição A.5.7** (Elementos nulipotentes). *Dado um elemento de um anel  $r \in R$  é nulipotente se existe um  $n$  natural tal que  $r^n = 0$ .*

**Exemplo:** Por exemplo, em  $\mathbb{Z}_6$ , os elementos  $\bar{2}$  e  $\bar{3}$  são zero divisores, pois  $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ . Em  $\mathbb{Z}_4$ ,  $\bar{2}$  é nulipotente.

Todo elemento nulipotente é um zero-divisor.

**Definição A.5.8** (Elementos Regulares). *Dado um elemento de um anel  $r \in R$ , diz-se que ele é regular se não for zero-divisor a direita nem um zero-divisor a esquerda.*

**Definição A.5.9** (Domínios de Integridade). *Um anel  $R$  que não possui zero-divisores e ainda é comutativo, é conhecido como domínio de integridade*

**Exemplo:** Exemplos de domínios de integridade são  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . O anel das funções reais não é um domínio de integridade. Se  $R$  é um domínio de integridade, então  $R[x]$  também o será.

Se  $R$  é comutativo, ele será um domínio de integridade se e somente se tiver uma lei de cancelamento. De fato, se  $rx = ry$ , passando-se para a esquerda, tem-se  $r(x - y) = 0$ . Então, se  $r \neq 0$ , then  $x = y$ .

**Teorema A.5.3.** *Qualquer domínio de integridade finito é um corpo.*

**Exemplo:** Todo o anel  $\mathbb{Z}_p$ , isto é, o conjunto  $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{p}\}$  onde  $p$  é um número primo, é um domínio de integridade finito (logo, um corpo).

Todos os anéis que aparecem nas aplicações são comparados com  $\mathbb{Z}$ . De fato, tão melhor será o anel quanto mais propriedades dos inteiros ele for. Alguns conjuntos de matrizes comutativas, que possuem matrizes *idempotentes*, isto é  $A^n = 0$ , não são domínios de integridade. *Divisibilidade* só faz sentido quando se trabalha em domínios de integridade.

**Definição A.5.10** (Corpo de Frações). *Dado um domínio de integridade  $R$  e definindo-se  $R^*$  como sendo  $R$  sem o zero, então a relação de equivalência em  $R \times R^*$  onde  $(n, d) \sim (m, b)$  se e somente se  $nb = md$ . Representamos então esta classe de equivalência por  $n/d$ . O conjunto quociente  $R \times R^*/\sim$  é representado por  $\text{Fra}(R)$ .*

A adição e a multiplicação nestas classes de equivalência são dadas por  $n/d + m/b = (n+m)/bd$  e  $(n/d).(m/b) = (nm)/(bd)$ . Um corpo de frações de um domínio de integridade  $R$  é o menor corpo no qual  $R$  pode ser mergulhado, e é representado por  $\text{Fra}(R)$ . Este mergulho mapeia  $n$  em  $n/1$  onde  $1$  é a identidade de  $R$ .

**Exemplo:** O corpo de frações de  $\mathbb{Z}$  é o próprio  $\mathbb{Q}$ . Dado o anel dos polinômios  $K[x]$  no corpo  $K$ , o corpo das frações  $\text{Fra}(K[x])$  é o corpo das funções racionais, e é representado por  $K(x)$ .

**Definição A.5.11** (Sub-Anel). *Um subconjunto  $F \subset R$  de um anel  $R$  é um sub-anel se este é fechado com relação às operações de adição e multiplicação deste anel.*

Isto significa que o sub-anel contém o zero  $0 \in R$ . Um sub-anel não precisa conter a identidade. Exemplos de sub-anéis são  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Definição A.5.12** (Homomorfismo de Anel). *Dados dois Anéis  $R$  e  $S$ , diz-se que a aplicação  $f : R \rightarrow S$  é um homomorfismo se  $f(r \cdot s) = f(r) \cdot f(s)$  e  $f(r + s) = f(r) + f(s)$ .*

Se os anéis possuírem identidades, o homomorfismo as mapeia, desde que a identidade da segunda estiver nesta imagem. Note que se trata de um homomorfismo de grupo abeliano (sobre a soma). Diz-se que o *homomorfismo é aditivo* se somente a segunda propriedade acima é satisfeita. É possível mostrar que, para um homomorfismo,  $f(0) = 0$  e  $f(-r) = -f(r)$ .

**Definição A.5.13** (Núcleo de um Homomorfismo de Anel). *Dado um homomorfismo entre dois anéis  $f : R \rightarrow S$ , o núcleo é definido por  $\ker f = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$ .*

A imagem de um homomorfismo é um sub-anel, e se for uma aplicação invertível, a inversa também é um homomorfismo. Diz-se então que se trata de um *isomorfismo de anel*. O homomorfismo é injetivo se o núcleo contiver somente o elemento zero.

**Definição A.5.14** (Ideal, Ideal à Esquerda e Ideal à Direita). *Um ideal à esquerda  $I$  de um anel  $R$  é um sub-anel tal que se  $i \in I$ , então  $xi \in I$  para qualquer elemento  $x$  do anel. Um ideal à direita é definido de forma semelhante. Um ideal (bilateral) é um sub-anel que é ideal à direita e à esquerda ao mesmo tempo.*

A multiplicação de um elemento arbitrário do anel por um elemento de um ideal resulta em outro elemento do ideal. Então se em um produto de  $k$  elementos do anel tiver pelo menos um elemento do ideal, o resultado estará dentro do ideal.

**Exemplo:** Todo ideal, possui pelo menos um elemento, que é o zero. O sub-anel  $\{0\}$  é sempre um ideal de  $R$ . Para qualquer  $n$  natural,  $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  é um ideal. Dado um homomorfismo de anel, o núcleo deste homomorfismo é um ideal.

**Proposição A.5.1.** *No caso do anel  $R$  ser comutativo, os ideais à esquerda e à direita (e os que são ambos) são sempre iguais.*

**Definição A.5.15** (Ideais Próprios). *Dado um anel  $R$ , diz-se que  $I$  é um ideal próprio se ele não for nem o conjunto  $\{0\}$  nem o próprio  $R$ .*

Da mesma forma que é possível criar-se grupos quocientes a partir de subgrupos normais, é possível criar-se os chamados *anéis quocientes*.

**Definição A.5.16** (Anel Quociente). *Seja  $I$  um ideal do anel  $R$ . Diz-se que dois elementos de  $x, y \in R$  são equivalentes se  $x - y \in I$ . Então, o conjunto  $R/I$  das classes de equivalência  $[x] = \{x + i \mid i \in I\}$ , que também é representado por  $x + I$  forma um anel sobre as operações de adição  $([x], [y]) \mapsto [x] + [y] = [x + y]$  e multiplicação  $([x], [y]) \mapsto [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ . O anel  $R/I$  é conhecido como anel quociente.*

Um outra forma de representar adição e multiplicação em um anel quociente é:  $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$  e  $(a + I) \cdot (b + I) = a \cdot b + I$ . Há um mapa naturalmente definido  $\phi_I : R \rightarrow R/I$  dado por  $\phi_I(a) = a + I$  que é um homomorfismo de anel sobrejetivo.

**Teorema A.5.4.** *Dados dois anéis  $R, S$  e  $f : R \rightarrow S$  um homomorfismo de anel, então  $\text{Im} f$  é isomórfico a  $R/\ker f$ . Além disso, se  $I \subset S$  é um ideal, então  $f^{-1}(I)$  é um ideal.*

Além disso, dada a projeção canônica  $R \rightarrow R/I$ , onde  $I \subset R$  é um ideal, os ideais de  $R$  que contém  $I$  estão em correspondência um-para-um com os ideais de  $R/I$ .

**Exemplo:** O anel  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  é isomórfico ao anel quociente  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Já foi visto que este anel tem zero divisores. Neste caso, a característica do anel é  $n$ .

**Teorema A.5.5.** *Seja um anel  $R$  e um ideal  $I \subset R$ . Se  $I$  contém um elemento unitário, então  $I = R$ .*

**Teorema A.5.6.** *Seja um anel comutativo com identidade  $R$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $R$  é um corpo;
2.  $R$  não tem ideias próprios;
3. Qualquer homomorfismo entre  $R$  e outro anel é injetivo.

**Teorema A.5.7** (Combinação Linear e Geradores). *Dado um subconjunto de um anel  $F \in R$ , diz-se que  $r_1f_1 + \dots + r_nf_n$  é uma combinação linear dos elementos  $f_i \in F$  (chamados de geradores) onde  $r_i \in R$  (chamados de coeficientes).*

**Definição A.5.17** (Gerador de um Ideal). *Dado um subconjunto de um anel  $F \in R$ , o ideal gerado por  $F$  é o menor ideal de  $R$  que contém  $F$ . Além disso, o ideal gerado por  $F$  pode ser escrito sempre como a combinação linear  $r_1f_1 + \dots + r_nf_n$ , onde  $r_i \in R$  e  $f_i \in F$ .*

**Definição A.5.18** (Ideais Finitamente Gerados). *Dado um subconjunto de um anel  $F \in R$ , diz-se que o ideal gerado por  $F$  é finitamente gerado se o número de elementos de  $F$  é finito.*

O conceito de independência linear, entretanto, não se define em anéis gerais, uma vez que poderia ocorrer que para um dado conjunto de geradores de um ideal  $\{f_i\}$  houvesse um conjunto de coeficientes não-nulos  $\{r_j\}$  que são zero-divisores dos respectivos geradores. Deste modo, os conceitos de base e dimensão não são também definidos em anéis gerais.

**Proposição A.5.2** (Ideais Máximos). *Dado um anel  $R$ , um ideal  $I_M$  é máximo se não existe nenhum outro ideal  $I$  tal que  $I_M \subset I \subset R$ .*

**Definição A.5.19** (Ideais Primos). *Um ideal  $I \subset R$  em um anel comutativo é primo se: 1) se  $a$  e  $b$  são elementos de  $R$  tal que o produto  $ab \in I$ , então  $a \in I$  ou  $b \in I$  e 2)  $I$  é um ideal próprio.*

**Exemplo:** Como exemplo, dado  $p \in \mathbb{Z}$  um número primo, então  $p\mathbb{Z}$  é um ideal primo de  $\mathbb{Z}$ . Note que se o ideal  $\{0\}$  for primo, então  $R$  é um domínio de integridade. O anel de polinômios  $\mathbb{R}[x]$  tem como um ideal primo o espaço gerado pelo polinômio  $x$ .

**Teorema A.5.8.** *Um ideal  $I \subset R$  é primo se e somente se  $R/I$  for um domínio de integridade.*

**Definição A.5.20** (ideais Principais). *Dado um anel  $R$ , um ideal principal  $I$  é um ideal gerado por somente um elemento, ou seja, é da forma  $\{ra \mid r \in R\}$ , onde  $a$  é o gerador. Tal ideal é representado por  $\langle a \rangle$ .*

**Definição A.5.21** (Soma e Produto de Ideais). *Dado um anel  $R$  e dois ideais  $I_1, I_2 \subset R$ , diz-se que  $I_1 + I_2 = \{r_1 + r_2 | r_1 \in I_1, r_2 \in I_2\}$  é a soma dos ideais e  $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_i r_i \cdot a_i | r_i \in I_1, a_i \in I_2\}$  é o produto dos ideais. Este último sempre contido na intersecção dos ideais.*

A soma e a intersecção de dois ideais é sempre um ideal. A união de dois ideais não é, em geral, um ideal.

**Definição A.5.22** (Produto Direto de Anéis). *Dados dois anéis  $R$  e  $S$ , o produto direto é o ideal  $R \times S$  com as operações induzidas ponto-a-ponto  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  e  $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ .*

**Definição A.5.23** (Anéis de Polinômios). *Dado um anel  $R$  comutativo, um anel de polinômios sobre  $R$ , representado por  $R[x]$ , é o conjunto das expressões da forma:*

$$p = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_mx^m,$$

onde os  $p_i \in R$  e  $x$  é um símbolo formal, que comuta com qualquer elemento de  $R$ . Este anel também é comutativo e os polinômios neste anel podem ter qualquer grau finito.

De forma semelhante, se define-se  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  o anel dos polinômios em várias variáveis. Dois sub-anéis de  $R[x]$  são o próprio anel  $R$  e se  $n$  for par,  $R[x^2]$  também é um sub-anel, que é o conjunto dos polinômios com potência par. Entretanto,  $R[x^2]$  não é um ideal, pois o produto por um polinômio arbitrário pode não estar em  $R[x^2]$ . O sub-anel  $\langle x \rangle$  de  $R[x]$  é o ideal de todos os polinômios com termo constante nulo (pois todos os polinômios com termo constante nulo podem ser postos na forma  $xp(x)$ ). A cada polinômio pode ser associado o  $(n + 1)$ -vetor  $(p_0, p_1, \dots, p_m) \in R^{n+1}$ . A soma dos polinômios consiste na soma dos correspondentes  $(n + 1)$ -vetores. O produto de dois polinômios é feito como se  $X$  pertencesse a  $R$ . Dois polinômios são iguais se seus coeficientes assim o forem. Se  $R$  for um domínio de integridade,  $R[x]$  também será.

**Exemplo:** O anel dado por  $R = \mathbb{Z}[j]/\langle 2 - j \rangle$  tem como elementos  $a + bj + \langle 2 - j \rangle$ . O elemento  $\bar{0} = \langle 2 - j \rangle$  ocorre quando  $2 = j$ , ou seja, ao se elevar ambos os lados ao quadrado, tem-se  $5 = 0$ .

**Exemplo:** Seja  $R$  o conjunto das matrizes  $2 \times 2$  com elementos inteiros, isto é:

$$r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Este conjunto é um anel, e seja  $I \subset R$  o conjunto das matrizes com elementos pares. Como qualquer matriz de  $I$  é da forma  $2r$ , onde  $r \in R$ , então é obvio

que  $I$  é um ideal. Então, o anel quociente  $R/I$  é da forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix} + I,$$

onde  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  valem ou 0 ou 1. É fácil ver que há dezesseis elementos neste anel.

**Exemplo:** Se  $R[x]$  é o anel dos polinômios e  $\langle x^2 + 1 \rangle$  é o ideal gerado por  $x^2 + 1$ , então  $\langle x^2 + 1 \rangle = q(x)(x^2 + 1)$ , onde  $q(x) \in R[x]$ . Então, o anel quociente  $R[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$  tem elementos da forma  $p(x) + \langle x^2 + 1 \rangle$ . Como  $p(x) = q(x)(x^2 + 1) + r(x)$ , então pode-se escrever  $r(x) + \langle x^2 + 1 \rangle$ , onde  $r(x)$  tem grau menor que dois. Logo, tem-se que:

$$\frac{R[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle} = \{ax + b + \langle x^2 + 1 \rangle \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

O produto de  $ax + b + \langle x^2 + 1 \rangle$  e  $cx + d + \langle x^2 + 1 \rangle$  vai resultar em  $(bd - ac) + (ad + bc)x + \langle x^2 + 1 \rangle$ , o que é igual ao produto dos números complexos  $aj + b$  e  $cj + d$ , de modo que este anel é isomórfico a  $\mathbb{C}$ .

É evidente que todos os polinômios do ideal  $\langle x^2 + 1 \rangle$  se anulam em  $\pm j$ .

**Exemplo:** Os elementos do anel quociente  $R[x]/\langle x^2 \rangle$  são da forma  $a + bx + \langle x^2 \rangle$  e o produto de  $a + bx + \langle x^2 \rangle$  e  $c + dx + \langle x^2 \rangle$  é da forma  $(ad + bc)x + bd + \langle x^2 \rangle$ , o que é equivalente à multiplicação dos números duais  $a + b\epsilon$  e  $c + d\epsilon$ .

**Definição A.5.24** (Ideal de Anulação). *Dado um subconjunto de pontos  $S \subset \mathbb{C}^n$ , o conjunto dos polinômios de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  que se anulam em  $S$ , ou seja:*

$$I(S) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall (a_1, \dots, a_n) \in S\}$$

*é um ideal conhecido como ideal de anulação em  $S$ .*

**Definição A.5.25** (Anel Noetheriano). *Dado um anel  $R$ , diz-se que este anel é Noetheriano se para qualquer cadeia de ideais tal que*

$$I_1 \subseteq \dots \subseteq I_{k-1} \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \dots$$

*então existe um  $n$  inteiro tal que  $I_n = I_{n+1} = \dots$ .*

O anel dos inteiros e dos polinômios sobre um corpo  $K$ , ou seja  $K[X]$ , são exemplos de anéis Noetherianos. A estrutura de ideais de um anel deste tipo permite que várias simplificações sejam possíveis.

**Teorema A.5.9** (Teorema da Base de Hilbert). *Todo ideal polinomial em  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é finitamente gerado.*

**Definição A.5.26** (Anel Artiniano). *Dado um anel  $R$ , diz-se que este anel é Artiniano se para qualquer cadeia de ideais tal que*

$$I_1 \supseteq \dots \supseteq I_{k-1} \supseteq I_k \supseteq I_{k+1} \supseteq \dots$$

*então existe um  $n$  inteiro tal que  $I_n = I_{n+1} = \dots$ .*

**Definição A.5.27** (Fatoração). *Dado um anel  $R$  comutativo, com  $a, b \in R$ , diz-se que  $a$  divide  $b$  se existe  $q \in R$  tal que  $b = qa$ .*

É possível entretanto que  $a$  um elemento não divida o outro, e resulte em algo do tipo  $b = qa + r$ .

**Definição A.5.28** (Elementos associados). *Dado um anel  $R$ , diz-se que quando  $a$  divide  $b$  e  $b$  divide  $a$  e estes são não nulos nem unitários, os elementos são associados.*

**Teorema A.5.10.** *Dado um domínio de integridade  $R$ , se  $a, b \in R$  são associados, então existe um  $u \in U(R)$  tal que  $b = au$ .*

**Definição A.5.29** (Elementos irredutível). *Dado um anel comutativo  $R$ , um elemento  $c \in R$  não nulo e não unitário é irredutível se  $c = ab$  com  $a, b \in R$  então  $a$  ou  $b$  é unitário.*

**Definição A.5.30** (Anel de Divisão). *Dado um anel  $R$ , um anel de divisão é um anel onde todo elemento  $r \in R$  possui um inverso multiplicativo.*

De fato, um anel é de divisão  $R$  se o grupo das unidades  $U(R)$  for igual ao próprio anel.

**Definição A.5.31** (Elementos Primos). *Dado um anel comutativo  $R$ , um elemento  $r \in R$  é primo se ele não é 0 nem unitário e se divide  $ab$ , então divide  $a$  ou divide  $b$ .*

Deste modo, se ele divide um elemento que é fatorado, ele divide um dos fatores. Isto sugere um processo recursivo onde vai se buscando uma fatoração para cada elemento de um produto (onde um dos fatores é primo), até que ao final somente reste um produto de primos.

**Definição A.5.32** (Divisor Comum). *Dado um anel comutativo  $R$ , com  $a, b \in R$ , diz-se que  $q$  é um divisor comum de  $a, b$  se  $a = rq$  e  $b = sq$ .*

**Definição A.5.33** (Máximo Divisor Comum - MDC). *Dado um anel comutativo  $R$ , com  $a, b \in R$ , o máximo divisor comum, ou MDC, é dividido por qualquer outro divisor comum de  $a, b$ .*

É possível que dois elementos tenham vários MDC ou nenhum.

**Teorema A.5.11.** *Se  $R$  é um domínio de integridade, quaisquer MDC devem ser elementos associados, se existirem. Em domínios de fatoração única, qualquer par de elementos tem um MDC.*

**Definição A.5.34** (Domínio de Fatoração Única). *Um domínio de integridade  $R$  é um domínio de fatoração única se todo elemento que não é 0 nem unitário pode ser escrito como um produto de elementos primos com um elemento unitário, ou seja,  $r = p_1 p_2 \cdots p_n u$ .*

Qualquer fatoração sempre vai conter a identidade (que é unitária).

**Teorema A.5.12.** *Em um domínio de integridade  $R$ , todo o elemento primo é irredutível. Em um domínio de fatoração única, todo primo é irredutível e todo irredutível é primo.*

**Teorema A.5.13.** *Se  $R$  é um domínio de fatoração única,  $R[X]$  também o será.*

**Definição A.5.35** (Domínios de Ideias Principais). *Um domínio de integridade  $R$  é um domínio de ideais principais se todos os seus ideais são principais, ou seja, são gerador por um único elemento.*

**Teorema A.5.14.** *Todo domínio de ideais principais é um domínio de fatoração única e também um anel Noetheriano.*

Ideais principais são importantes para a fatoração, uma vez que qualquer elemento  $j$  deste ideal tem somente uma fatoração do tipo  $j = r \cdot i$ , onde  $i$  pertence ao mesmo ideal. Então dois elementos do mesmo ideal terão um MDC (gerador do ideal) e elementos em ideais diferentes não terão MDC. Como ainda são domínios de fatoração única, pelo menos o MDC deverá ser a identidade. Deste modo, os domínios de integridade garantem que não se pode fatorar zero (a não ser que envolva zero), garantem que se pode fatorar qualquer elemento por primos (e um elemento unitário) e os domínios de ideais principais garantem que qualquer par de elementos possui um máximo divisor comum.

**Definição A.5.36** (Domínios Euclidianos). *Os domínios euclidianos são domínios de ideais principais tal que se pode encontrar o MDC usando o algoritmo de Euclides.*

**Definição A.5.37** (Algoritmo de Euclides). *É um método eficiente para se calcular o MDC. No caso dos inteiros, dados dois números, o MDC não muda se o maior número for substituído pela diferença do maior com o menor.*

**Definição A.5.38** (Domínio de Bézout). *Dado um domínio de integridade  $R$ , diz-se que ele é um domínio de Bézout se a soma de quaisquer ideais principais é um ideal principal.*

Todo domínio de ideais principais é um domínio de Bézout.

**Definição A.5.39** (Identidade de Bézout). *Dado um domínio de ideais principais  $R$ , se  $a, b \in R$  e  $d$  é o MDC de  $a, b$  então existem elementos  $x, y \in R$  tais que  $ax + by = \text{mdc}(a, b)$ .*

O algoritmo de Euclides estendido calcula, além do MDC, os coeficientes da identidade de Bézout.

**Definição A.5.40** (Operador Diferencial). *Um operador diferencial em um anel comutativo  $R$  é uma operação  $d : R \rightarrow R$  que é linear e tal que vale a regra de Leibniz  $d(r_1 \cdot r_2) = (dr_1) \cdot r_2 + r_1 \cdot (dr_2)$  onde  $r_1, r_2 \in R$ .*

Um anel comutativo munido com um operador diferencial é conhecido como *anel diferencial*. Esta é a definição algébrica de derivada (não envolve limites). Uma decomposição que ocorre em alguns anéis (e que tem interesse neste trabalho) é:

**Definição A.5.41** (Anéis Graduados). *Um anel graduado  $R$  é um anel que possui uma decomposição em soma direta da forma:*

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$$

onde um elemento de  $R_j$  é chamado de elemento homogêneo de grau  $j$  e tal que o produto sempre tem o comportamento de mapeamento da forma  $\cdot : R_i \times R_j \rightarrow R_{i+j}$ .

Isto implica que  $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ . Deste modo, um anel não graduado tem por definição grau zero. Qualquer elemento do anel graduado pode ser escrito na forma  $r = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_i + \dots$ , que é uma decomposição em elementos homogêneos.

**Exemplo:** O anel de polinômios  $\mathbb{Z}$  é graduado por  $\mathbb{N}$ .

## A.6 Corpos

As definições desta seção podem ser encontradas em (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK,

1982).

**Definição A.6.1** (Corpo). *Um corpo  $K$  é um domínio de integridade com identidade onde todos os elementos são unitários, exceto o elemento neutro com relação à adição (conhecido também como zero do anel).*

Todo corpo  $K$  é um anel de divisão comutativo.

**Definição A.6.2** (Corpo das Frações). *A todo domínio de integridade  $R$  pode ser associado o corpo das frações  $\text{Frac}R$ , da seguinte forma:  $n/d \in \text{Frac}R$  é uma classe de equivalência, onde  $n$  é o numerador e  $d$  denominador. Dois elementos  $n/d$  e  $m/f$  são equivalentes se  $n \cdot f = m \cdot d$ . A soma do corpo (das classes de equivalência) é a classe dada por  $(n \cdot f + m \cdot d)/d \cdot f$  e o produto é  $(n \cdot m)/(d \cdot f)$ .*

**Exemplo:** Os números racionais  $\mathbb{Q}$  e os números reais  $\mathbb{R}$  são exemplos de corpos, assim como o conjunto das funções racionais.

**Teorema A.6.1.** *A característica de qualquer corpo é sempre 0 ou um número primo (vide definição A.5.5)*

**Definição A.6.3** (Sub-corpo). *Dado um corpo  $L$ , um sub-corpo  $K \subset L$  é um corpo que é fechado nas operações de  $L$ , e nas suas inversas.*

**Definição A.6.4** (Extensão de um Corpo). *Dado um corpo  $L$  e um sub-corpo  $K \subset L$ , diz-se que  $L$  é uma extensão do corpo  $K$ , e é representada por  $L/K$ .*

**Definição A.6.5** (Extensão Gerada e Adjunção). *Se  $S \subset L$  é o menor subconjunto de  $L$  que contém  $K$ , que é denotado por  $K(S)$ , diz-se que  $K(S)$  é gerado por  $K$  pela adjunção dos elementos de  $S$  em  $K$ .*

**Teorema A.6.2.** *Todo corpo extensão  $L$  de um corpo  $K$  é um  $K$ -espaço vetorial, e a dimensão de  $L$  é o grau da extensão.*

As extensões de um corpo  $K$  podem ser de dimensão finita ou infinita.

**Exemplo:** O corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$  é uma extensão dos reais  $\mathbb{R}$ , onde o grau da extensão é dois. Já o grau da extensão de  $\mathbb{R}$  em relação a  $\mathbb{Q}$  é infinito.

O corpo dos racionais  $\mathbb{Q}$  é o corpo das frações construído a partir do anel  $\mathbb{Z}$ .

**Definição A.6.6** (Corpos Numéricos). *Um corpo numérico (algébrico) é qualquer extensão dos números racionais  $\mathbb{Q}$  que tem grau finito.*

Deste modo, este corpo contém  $\mathbb{Q}$  e é considerado um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Definição A.6.7** (Números Algébricos). *Diz-se que um corpo  $F$  extensão de  $E$  é algébrico se todo seu elemento é raiz de um polinômio com coeficientes em  $E$ .*

**Exemplo:** O menor corpo numérico é o dos números racionais  $\mathbb{Q}$ . Outro exemplo consiste dos chamados *racionais Gaussianos*  $a + bi$ , onde  $i$  é a unidade imaginária, e o conjunto é representado por  $\mathbb{Q}(i)$ . O corpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$  é a menor extensão de  $\mathbb{Q}$  que contém toda solução real da equação  $x^2 = 2$ .

## A.7 Módulos

Uma espécie de pré-espaço vetorial pode ser definida com as mesmas propriedades que estes, exceto pelo fato do escalar ser elemento de um anel. Seguem as definições principais (para mais detalhes, vide (EISENBUD, 2004), (ABE, 2004), (ATIYAH, 2018), (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986)).

**Definição A.7.1** (Módulo sobre um Anel). *Dado um grupo abeliano  $(M, \oplus)$  e um anel com identidade  $(R, \cdot, +, 1)$  juntamente com a operação  $(\cdot) : R \times M \rightarrow M$  tal que  $(r, m) \mapsto rm$  (conhecida como multiplicação escalar) e tal ainda que:*

- $r(m_1 \oplus m_2) = rm_1 \oplus rm_2$ ;
- $(r_1 + r_2)m = r_1m \oplus r_2m$ ;
- $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$ ;
- $1m = m$ .

*diz-se então que  $(M, R)$  é um módulo sobre um anel  $R$  à esquerda, representado por  ${}_R M$ , ou um  $R$ -módulo à esquerda.*

Um  $R$ -módulo à direita, que é representado por  $M_R$ , tem a mesma definição, só que a operação de multiplicação por um escalar é da forma  $(\cdot) : M \times R \rightarrow M$  e:

- $(m_1 \oplus m_2)r = m_1r \oplus m_2r$ ;
- $m(r_1 + r_2) = mr_1 \oplus mr_2$ ;

- $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$ ;
- $m = m1$ .

**Definição A.7.2** (Bimódulo). *Um bimódulo é um grupo abeliano  $M$  que possui uma operação de multiplicação por escalar  $R$  à esquerda e uma multiplicação por escalar  $S$  à direita (satisfazendo os axiomas anteriores) e que é representado por  ${}_R M_S$ .*

*Se o anel  $R$  é comutativo, então  ${}_R M = M_R$ . Neste caso, omite-se  $R$ , de modo que um  $R$ -módulo é simplesmente denotado por  $M$ . Da mesma forma, usa-se o mesmo símbolo  $+$  para soma no anel e soma no módulo. Costuma-se dizer ainda que a ação de um anel sobre um módulo  $M$  é uma operação, e portanto os elementos do anel são conhecidos como operadores.*

**Exemplo:** *O exemplo mais simples de um  $R$ -módulo é o próprio  $R$ . Qualquer grupo abeliano  $M$  é um  $R$ -módulo sobre o anel dos inteiros, ou seja,  $R = \mathbb{Z}$ . Se  $R$  é um anel, então  $R \times R \times \cdots \times R = R^n$  é um anel com o produto escalar e soma termo-a-termo.*

**Definição A.7.3** (Sub-Módulos). *Seja  $M$  um  $R$ -módulo e  $N$  um subgrupo do grupo (abeliano)  $M$ . Diz-se que  $N$  é um  $R$ -submódulo se para qualquer  $r \in R$  e  $n \in N$ , tem-se que  $rn \in N$ .*

*O anel  $R$  de um  $R$ -módulo  $M$  é o que acaba dando propriedades diferentes de um espaço vetorial (cujo anel é um corpo). Por exemplo, nem todos os anéis possuem base.*

**Definição A.7.4** (Aniquilador). *Dado  ${}_R M$  um  $R$ -módulo à esquerda, e um subconjunto  $S \in {}_R M$ , o aniquilador de  $S$  é o conjunto de todos os elementos  $r \in R$  tais que  $rs = 0$  para todo  $s \in S$ . O conjunto dos aniquiladores de  $S$  forma um ideal à esquerda de  $R$ .*

*Se  $S$  é um submódulo de  ${}_R M$ , então os aniquiladores de  $M$  formam um ideal bilateral de  $R$ . Se o conjunto de todos os aniquiladores de um módulo  ${}_R M$  é vazio, então diz-se que o módulo é fiel.*

**Definição A.7.5** (Homomorfismo de Módulo). *Dados dois  $R$ -módulos à esquerda  $M_1$  e  $M_2$ , um homomorfismo entre  $R$ -módulos é um homomorfismo entre os grupos abelianos  $M_1$  e  $M_2$  que preserva a ação de  $R$ . Em outras palavras,  $f(r_1m_1 + r_2m_2) = r_1f(m_1) + r_2f(m_2)$ .*

*Vê-se claramente que um homomorfismo de módulo é a generalização do conceito de aplicação linear (que será revisto mais adiante). O núcleo de um homomorfismo  $f$  :*

$M_1 \rightarrow M_2$  entre módulos é o conjunto  $\ker f = \{m_1 \in M_1 | f(m_1) = 0\}$ . O núcleo de um homomorfismo de módulo é um submódulo. Se o homomorfismo tem inversa, diz-se que se trata de um isomorfismo entre módulos.

**Definição A.7.6** (Soma Direta). Dados dois  $R$ -módulos  $M_1, M_2$  à esquerda, define-se a soma direta como sendo  $M_1 \oplus M_2 = \{(m_1, m_2) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$  tal que se tem a mesma estrutura de módulo, isto é,  $r(m_1, m_2) = (rm_1, rm_2)$ .

**Teorema A.7.1.** A soma direta de dois módulos gera o menor  $R$ -módulo que contém  $M_1, M_2$  e tal que estes ficam representados por  $(m_1, 0)$  e  $(0, m_2)$ .

De fato, pode-se definir as seguintes aplicações:

**Definição A.7.7** (Inclusões). As aplicações  $i_{m_1} : M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2$  dada por  $m_1 \mapsto (m_1, m_2)$  e  $i_{m_2} : M_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2$  dada por  $m_2 \mapsto (m_1, m_2)$  são conhecidas como inclusões da soma direta.

**Definição A.7.8** (Projeções). As aplicações  $p_1 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$  dada por  $(m_1, m_2) \mapsto m_1$  e  $p_2 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2$  dada por  $(m_1, m_2) \mapsto m_2$  são conhecidas como projeções da soma direta.

**Definição A.7.9** (Comprimento de um Módulo). Dado um  $R$ -módulo  $M$ , o comprimento de um módulo é o número de submódulos da seqüência  $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ . Se esta for infinita, diz-se que o comprimento do módulo é infinito.

O conceito de comprimento generaliza o de dimensão de um espaço vetorial.

**Definição A.7.10** (Combinação Linear). Diz-se que uma combinação linear de elementos de um módulo é a soma finita  $r_1 m_1 + \dots + r_n m_n$ , onde  $m_i \in M$  e  $r_i \in R$ .

**Definição A.7.11** (Elementos de Torção). Seja  ${}_R M$  um  $R$ -módulo à esquerda. Um elemento  $m \in {}_R M$  é chamado de elemento de torção se existe um elemento regular  $r \in R$  tal que  $rm = 0$ .

**Definição A.7.12** (Módulos de Torção e Módulos Livres de Torção). Diz-se que um  $R$ -módulo  $M$  é um módulo de torção se todos os seus elementos são de torção. Um módulo é livre de torção se o único elemento de torção é o zero.

Para qualquer  $s \in R$ , tem-se  $sm = 0$ , de modo que há todo um ideal  $S$  tal que  $Sm = 0$ . Se  $R$  é um domínio de integridade comutativo, então é obvio que o ideal  $S$  anula o módulo gerado por  $m$ . O conjunto de todos os elementos de torção formam um submódulo de  $M$ , denotado por  $T(M)$ .

**Definição A.7.13** (Bases). *Dado um  $R$ -módulo  ${}_R M$  e  $S$  um conjunto  $S$  tal que satisfaça as condições:*

1. *para qualquer subconjunto finito  $\{m_1, \dots, m_n\}$  de  $S$  tem-se que se  $r_1 m_1 + \dots + r_n m_n = 0$  então  $r_i = 0$  para qualquer  $i$*
2. *Para qualquer  $m \in {}_R M$  pode-se escolher um subconjunto finito de  $M$  tal que  $m$  é combinação linear deste conjunto.*

*é chamado de base e seus elementos são linearmente independentes.*

*Um módulo  ${}_R M$  que tem uma base finita é chamado de finitamente gerado.*

**Definição A.7.14** ( $R$ -módulo Livre). *Um  $R$ -módulo livre  $F_R(\Lambda)$  gerado por um conjunto  $\Lambda$  é um módulo que é isomórfico à soma direta de cópias do anel  $R$  onde cada cópia é representada por  $F_R(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ . Diz-se ainda que esse módulo livre possui uma base coordenada  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ .*

*Isso significa que um módulo livre tem sempre uma base. O módulos livres são os que mais se parecem com os espaços vetoriais. Como todo anel  $R$  é um  $R$ -módulo, um anel também pode ser finitamente gerado. Todo  $R$ -módulo livre é um módulo finitamente gerado.*

*Quando se tratar de  $n$  cópias de  $R$ , o módulo é representado por  $R^n$ . Quando  $R = K$  é um corpo, tem-se um  $K$ -módulo ou espaço vetorial, que é sempre um módulo livre. Entretanto, se  $R$  não for um anel de divisão, o módulo pode não ser livre.*

**Definição A.7.15** (Módulo Livre Formal). *Dado um conjunto  $S$  qualquer e um anel  $R$ , então as combinações lineares formais formam um módulo livre.*

*As seguintes definições, apesar de não serem fundamentais para o desenvolvimento que se segue, ilustram bem a natureza dos módulos, mostrando como eles são diferentes (mais gerais) que os espaços vetoriais.*

**Definição A.7.16** (Módulo Cíclico). *Diz-se que um módulo é cíclico se ele é gerado por somente um elemento  $m \in M$ .*

**Definição A.7.17** (Módulos Simples ou Irredutível). *Diz-se que um  $R$ -módulo  $M$  é simples ou irredutível se ele não possui nenhum sub-módulo, exceto pelos triviais (isto é  $\{0\}$  e  $M$ ).*

**Teorema A.7.2.** *Um módulo simples não pode ser escrito como uma soma direta de dois submódulos, que não sejam os triviais.*

*Os módulos que não são irredutíveis são chamados de redutíveis.*

**Definição A.7.18** (Módulo Semi-Simples). *Um  $R$ -módulo é semi-simples se ele pode ser escrito como soma direta de módulos simples.*

*Um módulo simples tem sempre comprimento um.*

**Teorema A.7.3.** *Seja um conjunto  $\Sigma$  parcialmente ordenado (ou seja, há uma relação de ordem parcial, por exemplo  $\subseteq$ ). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Toda sequencia  $m_1 \subseteq m_2 \subseteq \dots$  em  $\Sigma$  é estacionária, ou seja, existe um  $n$  tal que  $m_n = m_{n+1} = \dots$ ;*
2. *Todo subconjunto não vazio de  $\Sigma$  tem um elemento máximo.*

**Definição A.7.19** (Módulo Noetheriano). *Seja  $M$  um  $R$ -módulo e  $\Sigma$  um conjunto de submódulos de  $M$  ordenador por  $\subseteq$ . Se  $M$  é tal que  $\Sigma$  é estacionário ou tem um elemento máximo (condições equivalentes) então este módulo é chamado de noetheriano.*

*Pode-se mostrar que um módulo noetheriano tem todos os seus sub-módulos finitamente gerados. Obviamente, um anel noetheriano é um  $R$ -módulo noetheriano.*

**Definição A.7.20** (Módulo Indecomponível). *Um módulo  $M$  que não pode ser escrito como a soma direta de dois submódulos próprios é dito indecomponível.*

**Definição A.7.21** (Aplicação Bilinear). *Dados dois  $R$ -módulos  $M$  e  $N$  e um grupo abeliano  $G$ , diz-se que a aplicação  $\psi : M \times N \rightarrow G$  é uma aplicação bilinear se ela for linear nos dois argumentos, e ainda  $\psi(rm_1, m_2) = \psi(m_1, rm_2)$ .*

**Teorema A.7.4.** *Dados os  $R$ -módulos  $M, N, P, Q$ , uma aplicação bilinear  $\psi : M \times N \rightarrow P$ , e uma aplicação linear  $L : P \rightarrow Q$ , a aplicação composta  $L \circ \psi$  é uma aplicação bilinear.*

*Pode-se dizer que aplicações lineares são somas generalizadas, enquanto aplicações bilineares são produtos generalizados. De forma semelhante, se define aplicação multilinear.*

**Definição A.7.22** (Módulo Graduado). *Um módulo graduado à esquerda  ${}_R M$  sobre um anel graduado  $R$  é um módulo à esquerda decomposto em soma direta da forma:*

$${}_R M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots$$

onde  $R_i M_j \subset M_{i+j}$ .

*Deste modo, todo elemento de  ${}_R M$  é decomposto na forma  $m = m_0 + m_1 + m_2 + \cdots$ . Dados dois módulos graduados, um morfismo graduado  $f : N \rightarrow M$  de grau  $d$  é tal que  $f(N_i) \subset M_{i+d}$ .*

## A.8 Espaços Vetoriais

*As definições desta seção podem ser encontradas em (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1986), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (LANCASTER; TISMENETSKY, 1985).*

*Nesta seção, recordam-se alguns conceitos e definições de álgebra linear necessários para os desenvolvimentos posteriores. Optou-se aqui por apresentar a álgebra linear após a teoria de módulos, uma vez que esta é um caso particular da primeira.*

**Definição A.8.1** (Determinante). *Dada uma matriz complexa  $n \times n$ , representada aqui por  $A$ , o determinante é uma função polinomial nos coeficientes dada por:*

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{t(\sigma)} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)},$$

*que é uma somatória sobre todas as possíveis permutações de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , representadas aqui por  $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ , e  $t(\sigma)$  é o número de inversões associado à permutação  $\sigma$ .*

*Deste modo, vê-se claramente que o determinante é analítico nos coeficientes de  $A$ , e pode-se diferenciar infinitamente em qualquer coeficiente.*

**Nota:** Nesta seção, será introduzida a *notação de Einstein*, onde somatórias do tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n,$$

serão representadas simplesmente por  $a_i b^i$ , suprimindo-se o símbolo da somatória. Quando

não for gerar confusão, esta notação será utilizada.

**Definição A.8.2** (Espaço Vetorial). *Um  $R$ -módulo tal que  $R$  é um corpo, é conhecido como espaço vetorial (ou espaço linear)  $V$ , e seus elementos são conhecidos como vetores. Os elementos do corpo  $R$  são conhecidos como escalares.*

*Todo espaço vetorial sobre um corpo  $K$  é um  $K$ -módulo livre. Neste caso, como  $R = K$  é um corpo, então qualquer espaço vetorial é um  $K$ -módulo à direita e à esquerda.*

**Exemplo:** *O exemplo mais familiar de espaço vetorial é o  $V = \mathbb{R}^3$ , que é o espaço Euclidiano dos vetores utilizados na Física básica. Várias grandezas na física são simplesmente números reais (os chamados escalares) como a temperatura. Outros podem ser representados por vetores, como posição, deslocamento linear, velocidade, aceleração e velocidade angular. Outras porém podem aparentar serem vetoriais, mas na verdade não são, como por exemplo o deslocamento angular tridimensional. Embora toda rotação em torno de um eixo possui uma direção e um valor numérico associado ao ângulo deslocado, um deslocamento de  $0$  e  $2\pi$  (ou mesmo  $4\pi$ ) seriam equivalentes, o que obrigaria vetores de comprimentos diferentes serem iguais. Obviamente isto indica que vetores não podem representar deslocamentos angulares. De fato, deslocamentos angulares (na verdade, movimentos rotacionais em geral) são descritos por grupos de Lie, como será visto mais adiante.*

**Definição A.8.3** (Subespaços vetoriais). *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $U \subset V$  um subconjunto deste. Diz-se que este é um subespaço vetorial de  $V$  se para  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$  e  $r \in \mathbb{R}$ , sempre ocorrer que  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$  e  $r\mathbf{u}_1 \in U$ .*

*Em outras palavras, trata-se de um sub-módulo de um  $R$ -módulo onde o anel  $R$  é o corpo de  $V$ .*

**Definição A.8.4** (Combinações Lineares). *As combinações lineares da álgebra linear são um caso particular das combinações em  $R$ -módulos, mas com  $R$  sendo um corpo. Diz-se ainda que um conjunto é linearmente independente se  $r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_n\mathbf{v}_n = 0$  é somente possível com  $r_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .*

**Definição A.8.5** (Base de Um Espaço Vetorial (ou Base de Hamel)). *Dado um espaço vetorial  $V$ , diz-se que um conjunto  $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é uma base de  $V$  se: 1) este conjunto for linearmente independente; 2) todo vetor  $\mathbf{v} \in V$  puder ser escrito como uma combinação linear de  $E$ .*

Evidentemente, espaços vetoriais não possuem elementos de torção assim como o corpo  $K$  não possui zero-divisores.

**Definição A.8.6** (Dimensão de Um Espaço Vetorial). *Dado um  $K$ -espaço vetorial  $V$ , a dimensão é o número de elementos de uma base deste espaço e representa-se por  $\dim V$ .*

*A dimensão é o próprio comprimento de módulo, quando este é o espaço vetorial.*

**Definição A.8.7** (Flag). *Dado um espaço vetorial  $V$ , uma flag é uma filtragem de subespaços, tal que*

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k = V,$$

*onde a dimensão final é  $n$  e a inicial é  $0$ .*

**Definição A.8.8** (Assinatura de uma Flag). *Dada uma flag, a sua assinatura é a seqüência de dimensões crescentes da flag.*

**Definição A.8.9** (Quociente Entre Espaços Vetoriais). *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $S \subset V$  um  $K$ -subespaço de dimensão  $k \leq n$ . Define-se o espaço quociente  $V/S$  (ou espaço  $V$  módulo  $S$ ) como sendo o conjunto das classes de equivalência  $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \text{ com } \mathbf{u} \in S\}$ .*

*Ou seja, a classe de equivalência  $[\mathbf{v}]$  é o conjunto de todos os vetores que diferem por um elemento de  $S$ . Uma forma de representar seria  $\mathbf{v} + S$ . Por exemplo, no plano  $\mathbb{R}^2$ , o quociente entre  $\mathbb{R}^2$  que é gerado por  $x, y$  (ou seja  $ax + by$ ) e o espaço vetorial gerado por  $x + y$  (ou seja,  $c(x + y)$ ) e determinado fazendo-se  $c(x + y) = 0$ , ou seja,  $y = -x$ . Isto significa que  $ax - bx = (a - b)x = dx$  é o espaço quociente. Por fim, poderia-se escrever que  $\mathbb{R}^2 = dx + c(x + y)$ .*

**Definição A.8.10** (Transformações Lineares). *Dados dois  $K$ -espaços vetoriais  $U$  e  $V$ , diz-se que uma transformação  $A : U \rightarrow V$  é linear se, dados  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in U$  e  $k \in \mathbb{K}$  tem-se que  $A(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{w})$  e  $A(k\mathbf{w}) = kA(\mathbf{w})$ .*

*Uma transformação linear é um homomorfismo aditivo de  $R$ -módulo. O núcleo e a imagem de uma transformação linear vêm deste homomorfismo.*

**Teorema A.8.1** (Espaço Vetorial de Transformações Lineares). *O conjunto das transformações lineares entre os  $K$ -espaços vetoriais  $U, V$ , que é representada por  $\mathcal{L}(U, V)$  ou  $\text{Hom}(U, V)$ , possui uma estrutura de espaço vetorial, onde a soma é dada por  $(f+g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$  e a multiplicação por escalar é  $(kf)(\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v})$ , onde  $k \in K$ .*

Para o caso de  $W = V$ , tem-se que  $\text{Hom}(V, V)$  é representado por  $\text{End}(V)$ .

**Definição A.8.11** (Isomorfismos Entre Espaços Vetoriais). *Dados dois  $K$ -espaços vetoriais  $U$  e  $V$ , diz-se que estes espaços são isomórficos, e se representa por  $U \cong V$ , se existe uma transformação linear  $A$  entre eles que seja um isomorfismo, isto é, injetiva e sobrejetiva. Isto implica necessariamente que  $\dim U = \dim V$ .*

**Corolário A.8.1.** *Dado um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$ , sempre existe um isomorfismo entre este espaço e  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definição A.8.12** (Representação Matricial). *Dados dois espaços vetoriais  $U$  e  $V$  gerados por  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$  e uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(U, V)$ , a matriz  $[a_j^i] = [A(\mathbf{e}_1) \ A(\mathbf{e}_2) \ \dots \ A(\mathbf{e}_n)]$  é uma representação matricial da transformação  $A$ .*

**Definição A.8.13** (Posto de Uma Transformação Linear). *Dado um  $K$ -espaço vetorial e uma aplicação linear  $A \in \text{Hom}(V, V)$ , define-se o posto desta aplicação como sendo o posto de uma representação matricial  $[a_{ij}]$  desta representação. Ou seja, dadas as submatrizes menores de  $[a_{ij}]$  o posto é o tamanho da maior submatriz quadrada tal que o determinante não é nulo.*

*O posto de uma aplicação  $A \in \text{Hom}(V, V)$  é independente da representação matricial, sendo uma quantidade invariante por transformações de base.*

**Definição A.8.14** (Autovalores e Autovetores de uma Transformação Linear). *Sejam  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$ . Um autovalor de  $A$  é um elemento  $k \in K$  tal que  $A\mathbf{v} = k\mathbf{v}$ , onde  $\mathbf{v} \in V$  é um correspondente autovetor.*

**Definição A.8.15** (Espectro de uma Aplicação Linear). *O conjunto dos autovalores de  $A$  é conhecido como espectro de  $A$ .*

*De forma similar ao teorema anterior, pode-se mostrar que os autovalores são invariantes qualquer que seja a representação matricial. De especial interesse é o seguinte espaço:*

**Definição A.8.16** (Espaço dos Automorfismos). *Dado um espaço vetorial  $V$ , o conjunto dos isomorfismos de  $V$  nele mesmo é conhecido como conjunto dos automorfismos ou endomorfismos e é representado por  $GL(V) = \text{End}(V)$ .*

**Teorema A.8.2.** *O espaço  $\text{End}(V)$  das transformações lineares em  $V$  é um anel com a associação sendo a multiplicação.*

*Evidentemente, o conjunto dos automorfismos de um espaço vetorial é formado por aplicações lineares. Alguns autores o chamam de grupo de simetrias do espaço vetorial.*

**Teorema A.8.3.** *O conjunto  $GL(V) \subset \text{Hom}(V, V)$  possui uma estrutura de grupo quando o produto é a composição de aplicações.*

**Proposição A.8.1** (Matriz de Mudança de Base). *Dado um espaço vetorial  $V$  e uma particular base  $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , qualquer isomorfismo é uma fórmula de mudança para uma base  $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$  e a matriz correspondente representação matricial  $[a_j^i]$  tal que  $f_j = a_j^i \mathbf{e}_i$  é conhecida com matriz de mudança de base.*

**Proposição A.8.2.** *O determinante de qualquer matriz de mudança de base (de fato, de qualquer isomorfismo) é sempre não-nulo, ou seja, a matriz é não-singular. Isso é equivalente a dizer que seu posto é máximo.*

**Definição A.8.17** (Matriz de Permutação). *Dada uma permutação  $\sigma$ , a ela sempre se associa uma matriz de permutação, tal que transforma o conjunto ordenado de vetores  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  em  $(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$ . Esta matriz é representada por  $P_\sigma$ .*

*A matriz correspondente à permutação identidade é a matriz identidade.*

**Definição A.8.18** (Base Ordenada). *Dado um espaço vetorial  $V$ , uma base ordenada é uma base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  deste espaço tal que existe uma relação de ordem entre os índices dos elementos da base, de modo que se representa por  $\vec{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$*

**Definição A.8.19** (Orientação de Um Espaço Vetorial). *Um espaço vetorial orientado  $(V, \vec{E})$  é um espaço vetorial  $V$  com uma particular base orientada  $\vec{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ .*

*Diz-se que a ordem dos vetores na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  define a orientação do espaço  $V$ . Evidentemente, existem somente duas orientações para um espaço vetorial (correspondentes às permutações par e ímpar). As permutações pares da base orientada  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  preservam a orientação, enquanto que as ímpares invertem a orientação.*

**Definição A.8.20** (Isomorfismos Preservadores de Orientação). *Dado um espaço vetorial orientado  $(V, \vec{E})$ , diz-se que um isomorfismo  $A$  preserva a orientação se o seu determinante for estritamente positivo. Diz-se que ele inverte a orientação, se o determinante for estritamente negativo.*

*Se o determinante for nulo, então a base é transformada em um conjunto de vetores linearmente dependente, e deixa de ser uma base.*

**Teorema A.8.4** (Relação entre  $\ker A$  e  $\text{Im}A$ ). *Seja  $A : U \rightarrow V$  uma transformação linear. Vale a identidade  $\text{Im}A \cong U / \ker A$ , o que implica que  $\dim U = \dim \ker A + \dim \text{Im}A$ .*

*É óbvio que se  $U = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , tem-se que  $\text{Im}A = \text{span}\{A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_n)\} \in V$ . É claro que, em geral, este conjunto gerador de  $\text{Im}A$  é linearmente dependente.*

**Definição A.8.21** (Equações Lineares). *Sejam uma transformação linear  $A : U \rightarrow V$ , com  $\dim U = n$  e  $\dim V = m$  e os vetores  $\mathbf{x} \in U$  e  $\mathbf{b} \in V$ . Se estes últimos forem tais que a relação  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  for verdadeira, diz-se que  $\mathbf{x}$  é uma solução da equação algébrica linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e  $\mathbf{b} \in \text{Im}A$ .*

*Nota-se que para se determinar  $\ker A$ , basta encontrar todas as soluções da equação  $A\mathbf{x} = 0$ . Com base na relação entre  $\ker A$  e  $\text{Im}A$ , pode-se concluir o seguinte: para  $A$  ser invertível, é necessário que  $\text{Im}A = V$ , o que implica que  $\dim \ker A = 0$ . Nesse caso  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  pode ser obtido por  $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{b})$ . A soma direta de espaços vetoriais se particulariza de forma óbvia.*

**Definição A.8.22** (Base para  $\text{Im}A$ ). *Dado o conjunto de geradores  $\{A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_n)\}$ , é possível selecionar um subconjunto que seja linearmente independente e que gere  $\text{Im}A$ , que será então uma base deste espaço vetorial.*

*A dimensão de  $\text{Im}A$  é o posto da  $A$ .*

**Definição A.8.23** (Funcional Linear). *Dado um vetor  $\mathbf{v} \in V$ , define-se um funcional linear, ou covetor, como sendo uma aplicação linear  $\omega \in \mathcal{L}(U; \mathbb{R})$  tal que  $\omega(\mathbf{v})$  é um real qualquer.*

*Normalmente, representa-se um covetor por uma letra do alfabeto grego.*

**Definição A.8.24** (Espaço Dual). *O conjunto dos covetores  $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$  é representado por  $V^*$  e é conhecido como espaço dual a  $V$ .*

*Também é comum se representar  $\omega(\mathbf{v})$  por  $\langle \omega, \mathbf{v} \rangle$ . Esta é conhecida como notação de conjugação*

**Definição A.8.25** (Base Dual). *Dado um espaço vetorial  $U = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  e o espaço dual  $U^* = \text{span}\{\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n\}$ , diz-se que estas duas bases são duais se  $\langle \epsilon^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i$ .*

**Definição A.8.26** (Transformação Adjunta ou Dual). *Dados dois espaços vetoriais  $U$  e  $V$  e uma transformação  $A \in \mathcal{L}(U; V)$ , define-se a transformação adjunta ou dual como sendo a aplicação linear  $A^* \in \mathcal{L}(V^*, U^*)$  definida por:*

$$\langle A^*(\alpha); \mathbf{u} \rangle = \langle \alpha; A(\mathbf{u}) \rangle. \quad (\text{A.1})$$

**Teorema A.8.5.** *Dado que a representação matricial de  $A$  é  $[a_{ij}]$ , a representação matricial de  $A^*$  é dada por  $[a_{ji}] = [a_{ij}]^T$ .*

### A.8.1 Estruturas Quadráticas

*Conforme dito em (LOUNESTO et al., 2001), conceitos como comprimento, distância e ângulo não estão naturalmente definidas em espaços vetoriais, sendo necessária a inclusão de uma forma quadrática.*

**Definição A.8.27** (Aplicação Sesquilinear). *Dado um espaço vetorial  $V$  real, diz-se que a aplicação  $(\cdot|\cdot) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação sesquilinear se: 1)  $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_1)$  e 2)  $(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3) = \alpha(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os reais.*

**Definição A.8.28** (Aplicação Não-degenerada). *Diz-se que uma aplicação sesquilinear  $(\cdot|\cdot)$  é não-degenerada se a aplicação  $f : V \rightarrow V^*$  dada por  $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}|\cdot)$  for bijetiva.*

*Para espaços vetoriais de dimensão finita, isso é equivalente a dizer que a única forma de  $(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2)$  ser identicamente nulo para qualquer  $\mathbf{v}_1$  é se  $\mathbf{v}_2 = 0$ .*

**Definição A.8.29** (Produto Interno e Matriz Métrica). *Dado um espaço vetorial  $V$ , diz-se que a aplicação sesquilinear  $(\cdot|\cdot) \rightarrow \mathbb{R}$  é um produto interno se  $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) \geq 0$  (isto é, for semi-definida positiva) e ainda o fato de  $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 0$  implica que  $\mathbf{v} = 0$  (isto é, é definida positiva).*

**Definição A.8.30** (Matriz Métrica). *Dado um produto interno  $(\cdot|\cdot)$ , diz-se que a representação matricial  $[g_{ij}]$  é a matriz métrica do produto interno.*

*A matriz métrica  $[g_{ij}]$  de um produto interno é sempre uma matriz simétrica definida positiva, ou seja, possui todos os autovalores reais positivos.*

**Proposição A.8.3** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se uma aplicação sesquilinear é definida positiva, então vale  $|(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2)|^2 \leq (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_2)$ .*

*Para  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , não se pode definir determinante e nem inversa. Uma base no espaço de partida pode até ser mapeada em uma base, mas essa base pode não ser mapeada de volta a uma base. De fato, se  $G : V \rightarrow W$ , então:*

$$\dim V = \dim \ker G + \dim \operatorname{Im} G.$$

**Teorema A.8.6.** *Se  $G$  é uma matriz simétrica real, então:*

1. *Todos os seus autovalores são reais;*
2. *Para dois autovalores distintos, tem-se que os correspondentes autovetores são ortogonais;*
3.  *$G$  é diagonalizável por uma transformação de semelhança cuja matriz é ortogonal, isto é:*

$$P^{-1}GP = P^TGP = \Xi,$$

onde  $\Xi = \operatorname{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

**Definição A.8.31** (Matriz Definida Positiva e Semi-definida Positiva). *Uma matriz real é definida positiva se todos os seus autovalores forem reais e positivos. Ela é semi-definida positiva se todos os seus autovalores forem positivos ou nulos.*

**Definição A.8.32** (Anel  $\operatorname{End}(V)$ ). *O espaço vetorial das aplicações lineares em  $V$ , ou seja  $\mathcal{L}(V, V)$ , também conhecido como endomorfismos de  $V$ , munido com a composição  $\circ$  de aplicações, forma um anel  $\operatorname{End}(V)$ .*

## A.9 Álgebras

*As definições desta seção podem ser encontradas em (PIERCE, 1982), (BOURBAKI, 1998), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (LOUNESTO et al., 2001). Para a teoria das  $R$ -álgebras, todo anel  $R$  é comutativo e com unidade 1.*

**Definição A.9.1** ( $R$ -Álgebra ou Álgebra sobre um Anel). *Dado um anel comutativo  $R$ , uma  $R$ -álgebra é um  $R$ -módulo à direita  $M$  dotado de um produto  $\odot : M \times M \rightarrow M$  que é bilinear.*

*Quando o produto  $\odot$  for associativo, diz-se que a se tem uma  $R$ -álgebra associativa e sendo 1 elemento identidade tem-se que  $1 \odot x = x \odot 1 = x$ . A diferença entre um  $R$ -módulo e uma  $R$ -álgebra é a presença de um produto bilinear, que os módulos não possuem. É óbvio que qualquer  $R$ -álgebra é um anel com identidade. Qualquer anel  $R$  pode ser considerado uma  $\mathbb{Z}$ -álgebra e o único homomorfismo de anel é o que transforma a identidade do anel na identidade de álgebra.*

**Definição A.9.2** (*K*-Álgebra). Dado um corpo *K*, uma *K*-álgebra é uma *R*-álgebra tal que  $R = K$ .

Deste modo, uma *K*-álgebra associativa é um espaço vetorial sobre *K* munido com um produto bilinear associativo. Algumas álgebras não associativas são de interesse, como por exemplo as álgebras de Lie (estudadas mais adiante). Porém, muitas álgebras de interesse serão associativas.

**Exemplo:** Exemplos de álgebras associativas são a das matrizes quadradas com elementos em um anel, as álgebras de Clifford (em particular os chamados quatérnios) que serão estudadas mais adiante, e a álgebra dos operadores sobre um espaço vetorial, que é denotada por  $\text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ .

**Definição A.9.3** (Homomorfismo de Álgebra Associativa). Se  $(M_1, \odot_1)$  e  $(M_2, \odot_2)$  forem duas álgebras associativas (com *R* comutativo) então um homomorfismo é uma aplicação  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tal que: 1)  $f(r.m) = r.f(m)$ , com  $r \in R$ ; 2)  $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$  (linearidade); 3)  $f(m_1 \odot_1 m_2) = f(m_1) \odot_2 f(m_2)$ . A unidade de uma também é mapeada na unidade da outra.

Uma subálgebra associativa é qualquer subconjunto de uma *R*-álgebra que contenha 0, 1 e seja fechada por adição, multiplicação e multiplicação por escalar.

**Definição A.9.4** (Coeficientes Estruturais). Sendo *A* uma *R*-álgebra e sendo *R* um anel, dada uma base  $\{m_i\}$  para *A*, a estrutura (ou seja, o comportamento do produto) é completamente determinado pelos coeficientes estruturais, isto é,  $m_i \odot m_j = c_{ij}^k m_k$ .

**Definição A.9.5** (Homomorfismo de Álgebra Associativa). Se  $(M_1, \odot_1)$  e  $(M_2, \odot_2)$  forem duas álgebras associativas (com *R* comutativo) então um homomorfismo é uma aplicação  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tal que: 1)  $f(r.m) = r.f(m)$ , com  $r \in R$ ; 2)  $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$  (linearidade); 3)  $f(m_1 \odot_1 m_2) = f(m_1) \odot_2 f(m_2)$ . A unidade de uma também é mapeada na unidade da outra.

**Definição A.9.6** (Álgebra Não-Associativa). Álgebras tais que o produto não é associativo são conhecidas como Álgebras Não-Associativas. Normalmente, são especificadas algumas propriedades que o produto deve satisfazer.

A álgebra não-associativa mais importante para este trabalho é:

**Definição A.9.7** (Álgebras Anti-Comutativas). São álgebras não-associativas sobre um anel *R* tais que 1)  $[m_1, m_1] = 0$ ; 2)  $[m_1, [m_2, m_3]] + [m_2, [m_3, m_1]] + [m_3, [m_1, m_2]] = 0$

(identidade de Jacobi), onde  $[\cdot, \cdot]$  é a forma tradicional de representar o produto numa álgebra não-associativa.

A álgebra anti-comutativa mais importante para este trabalho é:

**Definição A.9.8** (Álgebra de Lie de uma  $K$ -Álgebra). Dada uma  $K$ -álgebra associativa  $A$ , a correspondente álgebra de Lie, que é representada por  $\mathcal{L}(A)$  tem o mesmo espaço vetorial base de  $A$  mas tem o produto anti-comutativo  $[x, y] = xy - yx$

**Exemplo:** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  juntamente com o produto vetorial  $\times$  é uma álgebra de Lie.

**Definição A.9.9** (Sub-Álgebras). Dada uma álgebra sobre um anel comutativo  $(A, \odot)$ , diz-se que  $A$  é uma sub-álgebra se esta for um sub-anel e fechada em relação a multiplicação por escalar  $R$ .

Evidentemente, uma subálgebra deve conter 0 e 1. Produtos cartesianos de álgebras devem ter o produto definido componente a componente.

**Definição A.9.10** (Ideais à Esquerda (Direita)). Diz-se que uma sub-álgebra  $I \subset A$  é um ideal à esquerda (direita) se  $I$  for um sub-módulo e se, dado um elemento  $z \in A$ , tem-se que  $z \odot x \in I$  ( $x \odot z \in A$ ), para qualquer  $x \in I$ . Será simplesmente um ideal se for um ideal à esquerda e à direita. Representa-se então por  $I \triangleleft A$ .

**Definição A.9.11** (Gerador de um Ideal). Dado um ideal  $I \in A$ , qualquer subconjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in I$  a partir do qual se pode gerar  $I$  por meio de adição e produto é conhecido com um gerador de  $I$ .

Como uma  $R$ -álgebra  $A$  é um anel, sendo  $I \triangleleft A$  então  $A/I$  é uma  $R$ -álgebra e a projeção canônica  $\pi : A \rightarrow A/I$  é um homomorfismo de álgebra.

**Definição A.9.12** (Álgebra de um Grupo). Dado um grupo  $G$  e um anel  $R$ , uma álgebra de grupo sobre  $R$  é uma  $R$ -álgebra que é um módulo livre cuja base são os elementos de  $G$ .

## A.9.1 Álgebras Filtradas, Graduadas e Diferenciais

**Definição A.9.13** (Álgebra Filtrada). Seja o semigrupo  $I = \mathbb{N}$  dos naturais com respeito à adição. Se  $R$  é um anel comutativo e  $A$  uma  $R$ -álgebra, então se uma família de submódulos  $A_i$ , para  $i \in I$  satisfaz a condição de que  $B_i \subset B_j$  se  $i \leq j$ ,  $B_i B_j \subset B_{i+j}$  e  $1 \in B_0$  então diz-se que  $A$  é uma  $R$ -álgebra filtrada.

**Definição A.9.14** (Álgebra Graduada). *Dado um monóide  $\Lambda$ , que é o conjunto de índices, uma  $R$ -álgebra graduada  $A$  é uma  $R$ -álgebra associativa que é também um anel graduado. Isto significa que:*

$$A = \bigoplus_{i \in \Lambda} A_i = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots$$

onde  $R_i A_j \subset A_{i+j}$  e  $A_i A_j \subset A_{i+j}$ . Os elementos de  $A_i$  são chamados de elementos homogêneos de ordem  $i$ .

Um elemento de uma álgebra graduada é expresso da forma  $a = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_r$ , ou seja, na soma direta, somente um número finito de elementos não é nulo.

**Definição A.9.15** (Superálgebra). *Uma  $R$ -álgebra associativa graduada tal que o conjunto de índices é  $\mathbb{Z}_2$  é chamada de superálgebra, onde ela pode ser decomposta em uma soma direta:*

$$A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}},$$

juntamente com uma multiplicação bilinear tal que  $A_i A_j \subset A_{i+j}$ , onde a operação com os índices se dá em  $\mathbb{Z}_2$ , ou seja, é módulo 2.

Os elementos de uma superálgebra serão então divididos em elementos de paridade par, ou seja os que estão em  $A_{\bar{0}}$  e elementos de paridade ímpar, ou seja, os que estão em  $A_{\bar{1}}$ .

**Exemplo:** *Qualquer  $R$ -álgebra sobre um anel comutativo pode ser pensada como uma álgebra de paridade par, ou seja, com  $A_{\bar{1}}$  trivializada. Será visto que álgebras exteriores e álgebras de Clifford são exemplos de superálgebras.*

**Definição A.9.16** (Álgebras Diferenciais). *Dada uma álgebra  $A$  (não necessariamente associativa), diz-se que a aplicação  $d : A \rightarrow A$  é uma derivação se 1)  $d(r \cdot m) = r \cdot dm$  e 2)  $d(m_1 + m_2) = dm_1 + dm_2$  e 3)  $d(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1 dm_1 + r_2 dm_2$ . Uma álgebra  $A$  dotada com esta operação é chamada de álgebra diferencial.*

**Definição A.9.17** (Ideal Diferencial). *Dado um ideal  $I$  de uma álgebra diferencial  $A$ , diz-se que este ideal é um ideal diferencial se a derivação de qualquer elemento do ideal também é um elemento deste, ou seja, o ideal é fechado pela operação de derivação.*

Um caso de particular interesse é o das álgebras de Lie, que são anti-comutativas e possuem uma derivação conhecida como representação adjunta (a ser estudada mais adiante). Uma classe especial de álgebras tem interesse para este trabalho:

**Definição A.9.18** (Grau de uma Transformação Linear). *Seja  $A$  uma álgebra graduada (sobre um anel comutativo  $R$ ) e  $r_1, r_2 \in R$  são constantes. Diz-se que a transformação linear é de grau  $j$  se  $T : R_i \rightarrow R_{i+j}$  para todo  $i$  natural.*

**Definição A.9.19** (Derivação). *Dada uma álgebra graduada  $A$ , diz-se que a transformação linear  $T$  é uma derivação se este for de grau par e obedecer a regra de Leibniz, ou seja,  $T(a_1 \odot a_2) = Ta_1 \odot a_2 + a_1 \odot Ta_2$ .*

**Definição A.9.20** (Anti-Derivação). *Dada uma álgebra graduada  $A$ , diz-se que a transformação linear  $T$  é uma anti-derivação se este for de grau ímpar e obedecer a regra de Anti-Leibniz, ou seja,  $T(a_1 \odot a_2) = Ta_1 \odot a_2 + (-1)^k a_1 \odot Ta_2$ , onde  $k$  é um grau relacionado a  $a_1$ .*

*Por fim, define-se:*

**Definição A.9.21** (Álgebra Diferencial Graduada). *Dada uma álgebra graduada  $A$ , diz-se que ela é diferencial se for dotada de uma anti-derivação  $d : A \rightarrow A$  de grau  $-1$  e que ainda satisfaz  $d \circ d = 0$ .*

*As álgebras graduadas diferenciais de maior interesse são a álgebra tensorial e a álgebra exterior.*

## A.10 Quatérnios

*Os quatérnios  $\mathbb{H}$  formam uma  $\mathbb{R}$ -álgebra associativa, que são generalizações dos números complexos da forma  $q = a + bi + cj + dk$ , onde  $a, b, c, d$  são números reais e  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Todo quatérnio pode ser representado pela quádrupla  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ , e tal que  $1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $i = (0, 1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 0, 1, 0)$  e  $k = (0, 0, 0, 1)$ . Não há elementos de torção em  $\mathbb{H}$  e nem zero-divisores. Entretanto, não é um domínio de integridade, já que não é uma álgebra comutativa (vide seção A.5).*

*Todo elemento tem inversa, portanto é uma álgebra de divisão. Obviamente, por não serem um domínio de integridade, não existe o conceito de primos e nem de fatoração em primos. Também não é um corpo. A norma de um quatérnio  $\|q\|$  é por definição  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ . Por causa da estrutura de anel, pode-se definir subespaços de uma álgebra (sub-anéis), ideais à esquerda e à direita, subespaços quocientes e geradores. O conjugado de um quatérnio é dado por  $\bar{q}^* = a - \hat{b}i - \hat{c}j - \hat{d}k$  e  $\bar{q}$ . Há elementos unitários de  $\mathbb{H}$  (versores). De fato,  $i, j, k$  são versores. Como  $ij = k$ ,  $jk = i$  e  $ki = j$ , nota-se*

que também são bivectores (conceito detalhado mais adiante), de modo que geram também rotações. A tripla de números  $(b, c, d)$  é conhecida como parte vetorial e  $a$  é a parte escalar. De fato, o produto de dois quatérnios puramente vetoriais  $(0, \mathbf{v})$  e  $(0, \mathbf{u})$  é igual a  $(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u})$ , ou seja, a parte escalar é o produto escalar, e a parte vetorial é o produto vetorial. Os quatérnios puramente vetoriais podem representar rotações de corpos rígidos e os quatérnios de norma unitária formam um grupo que é isomórfico a  $SU(2)$ . É fácil ver que a restrição de norma unitária determina o espaço  $S^3$ .

**Teorema A.10.1** (Teorema de Frobenius). *Toda  $\mathbb{R}$ -álgebra associativa de divisão de dimensão finita é isomórfica ou a: 1) os reais  $\mathbb{R}$ , ou a 2) os complexos  $\mathbb{C}$ , ou a 3) os quatérnios  $\mathbb{H}$ .*

As dimensões são 1, 2 e 4, respectivamente, e somente as duas primeiras são álgebras comutativas. É possível mostrar que  $\mathbb{H}$  tem um homomorfismo de álgebra com o espaço  $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  of  $2 \times 2$  das matrizes complexas da forma:

$$Q = \begin{bmatrix} a + bi & c - di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix},$$

cuja norma é dada pelo determinante  $\|Q\| = \sqrt{\det Q}$  (SELIG, 2005). Os elementos unitários esta álgebra formam o grupo de Lie  $SU(2)$ . Todo quatérion não nulo tem a forma polar  $\bar{q} = \|q\|(\cos \theta + \hat{u} \sin \theta)$ , onde  $\hat{u}$  é um versosr. Tem-se também que  $\bar{q}^n = \|\bar{q}\|^n(\cos n\theta + \hat{u} \sin n\theta)$  (GIRARD, 2007).

Dois vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$  podem se representados por quatérnios puros  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  com parte escalar nula. O produto destes resulta em  $(-\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ , onde  $\cdot$  é o produto escalar e  $\times$  é o produto vetorial. Se a parte escalar for zero, então  $\{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_1 \bar{q}_2\}$  forma uma base ortogonal para  $\mathbb{R}^3$ . Uma translação pura é representada por um quatérnio puro  $\bar{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}$ , de modo que estes também são conhecidos como quatérnios de translação, e este espaço também é isomórfico à álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$ . Devido ao isomorfismo entre quatérnios e  $SU(2)$ , estes são usados para representar rotações, e chamados de quatérnios de rotação. A rotação de um quatérnio  $\bar{u}$  é calculada por  $\bar{r} \bar{u} \bar{r}^*$ , onde  $\bar{r} = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \mathbf{n}$ , e  $\mathbf{n}$  é um quatérnio unitário puro na direção da rotação. Neste caso,  $\bar{r}^* = \bar{r}^{-1}$  (SELIG, 2005).

## A.11 Álgebras de Grassmann e de Clifford

Os principais resultados aqui apresentados podem ser encontrados em (LOUNESTO et al., 2001; MEINRENKEN, 2013). Para ilustrar uma álgebra de Clifford bastante simples, e qual a sua utilidade, apresenta-se a seguir um exemplo retirado de (LOUNESTO et al., 2001):

**Exemplo:** Dotando-se o plano  $\mathbb{R}^2$  com uma multiplicação entre seus elementos, qualquer vetor  $\mathbf{r}$  pode ser elevado ao quadrado. Deste modo:

$$\mathbf{r}^2 = (xe_1 + ye_2)^2 = x^2\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2 + xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1).$$

Se se deseja que isso seja igual a  $|\mathbf{r}|^2$ , basta impor que  $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$  e  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ . Pode-se então definir  $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ , que é conhecido como bivector, de modo que o produto  $\mathbf{ab}$  pode ser definido por  $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}$ . Certamente, este não é o espaço  $\mathbb{R}^2$ , pois tem elementos que são escalares, vetores e bivectores. Este espaço é gerado por  $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\}$ . A segunda parcela é análoga ao produto vetorial  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , de modo que se pode escrever:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad ; \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}).$$

Como elementos deste espaço, um vetor sempre terá uma inversa  $\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2$ , pois  $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}^2/|\mathbf{b}|^2 = 1$ . A seguinte tabela de multiplicação deve ser usada:

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

Estas regras definem a álgebra de Clifford  $Cl_2$ . Essas regras podem ser resumidas em  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$  para  $i \neq j$  e  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = 1$ . Este espaço é uma álgebra associativa isomórfica a  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  e os vetores da base indicados acima são equivalentes a:

$$1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_{12} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Grassmann definiu também sua álgebra exterior com as seguintes regras:  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$  para  $i \neq j$  e  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$ . Em ambos os casos, para  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  tem se, como já foi dito,

a álgebra de Clifford  $Cl_2$  e a álgebra de Grassmann  $\wedge \mathbb{R}^2$ . De fato, as álgebras de Clifford são generalizações das álgebras de Grassmann. Deste modo, esta álgebra é equivalente a  $Cl_2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^2$ , que é uma álgebra de Clifford para o plano  $\mathbb{R}^2$  e onde  $\wedge^2 \mathbb{R}^2$ . Pode-se dividir esta álgebra em  $Cl_2^+ \oplus Cl_2^-$ , que são a parte par  $Cl_2^+ = \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^2$  e a parte ímpar  $Cl_2^- = \mathbb{R}^2$ , que é uma superálgebra, ou seja, uma álgebra graduada com grau  $\mathbb{Z}_2$  (vide seção A.3.1), onde qualquer elemento da parte par é da forma  $x1 + ye_{12}$  e qualquer elemento da parte ímpar é da forma  $xe_1 + ye_2$ . Deste modo, a parte par  $Cl_2^+$  é isomórfica aos números complexos como álgebra, com  $e_{12} \sim i$ , ou seja  $\mathbb{C} \sim \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^2$ . Claramente se vê que  $Cl_2^+ Cl_2^+ \subset Cl_2^+$ ,  $Cl_2^+ Cl_2^- \subset Cl_2^-$ ,  $Cl_2^- Cl_2^+ \subset Cl_2^-$  e  $Cl_2^- Cl_2^- \subset Cl_2^+$ , ou seja,  $\{+, -\}$  é equivalente a  $\mathbb{Z}_2$ . Os elementos de  $s \in Cl_2^+$  tal que  $\bar{s}s = 1$  forma o grupo  $Spin(2)$ , que é uma dupla cobertura de  $SO(2)$ . Como sabemos,  $SO(2)$  é isomórfico a  $\mathbb{C}$ .

Um vetor qualquer é dado por  $\mathbf{r} = xe_1 + ye_2$  e pode representar uma velocidade ou uma força, por exemplo. Qualquer elemento da forma  $\omega e_{12}$  é um bivector, e pode representar um momento de força ou a velocidade angular, por exemplo. O vetor  $\mathbf{r}e_{12}$  é uma rotação de 90 graus no sentido anti-horário, já  $\mathbf{r}e_{12}^2 = -\mathbf{r}$  equivale a uma rotação de 180 graus, ou seja, troca de sentido. É interessante que  $Cl_2$  é a união do plano real com o plano complexo, e o único ponto que eles tem em comum é a origem. Nesta álgebra faz então sentido multiplicar um vetor bidimensional por um número complexo.

**Exemplo:** No espaço  $\mathbb{R}^3$  além de haver escalares e 3-vetores, há os bivectores e os trivetores. Bivectores são elementos de plano com direção, intensidade (área) e sentido. O formato da área é irrelevante. Alguns bivectores podem ser representados pelo produto exterior de dois vetores da forma  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$ . Neste caso, o elemento de área é representado pelo paralelogramo determinado por estes vetores (e com a área deste), e vale que  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = -\mathbf{s} \wedge \mathbf{r}$ . O espaço dos bivectores é  $\wedge^2 \mathbb{R}^3$  e uma base para este espaço é  $\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\}$ . O produto escalar pode ser definido para bivectores, o que resulta em:

$$\langle \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \rangle = \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$$

o que vai resultar em uma norma euclidiana. Da mesma forma, pode-se definir os trivetores que, neste caso, são unidimensionais. A base canônica é  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$  e o produto  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}$  é igual ao volume do paralelepípedo determinado pelos vetores, ou seja, o determinante da matriz cujas colunas são estes vetores. A álgebra associativa  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 = \wedge \mathbb{R}^3$  que envolve escalares, vetores, bivectores e trivetores, que é uma álgebra exterior (como será visto mais adiante) é também uma álgebra de Clifford  $Cl_3$  e também uma superálgebra  $Cl_3^+ \oplus Cl_3^-$  (vide seção A.9.1), onde  $Cl_3^+ = \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3$  e  $Cl_3^- = \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3$ . A subálgebra

$Cl_3^+$  não é comutativa e é também conhecida como Álgebra dos Quatérnios.

Uma álgebra de Clifford  $Cl(n, m, z)$  geral para o espaço  $V$  terá dimensão  $2^d$  e sua base será dada por  $(\mathbf{1}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_a\mathbf{e}_b\mathbf{e}_c, \dots, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_d)$ , onde  $\mathbf{1}$  é a identidade da álgebra. Os elementos que possuem inversa são chamados de unidades. É fácil ver que  $Cl(0, 1, 0) = \mathbb{C}$ , sua dimensão é 2, e sua base é  $(\mathbf{1}, \mathbf{e})$  com  $\mathbf{e}^2 = -1$ . No caso de  $Cl(0, 2, 0)$ ,  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -1$ ,  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1$ ,  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ . Se for feita a renomeação  $\hat{i} = \mathbf{e}_1$  e  $\hat{j} = \mathbf{e}_2$  e for definida  $\hat{k} = \hat{i}\hat{j}$  para completar a base de quatro elementos, pode-se ver que se trata da álgebra de quatérnios  $\mathbb{H}$ . No caso de  $d = 2p$  par, é possível provar que a álgebra de Clifford é isomórfica ao espaço das matrizes complexas  $2^p \times 2^p$  (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1989). O teorema de Clifford mostra que a álgebra  $Cl(0, 2m, 1)$  é o produto tensorial de  $m$  cópia de  $\mathbb{H}$  (GIRARD, 2007).

## A.12 Quatérnios Duais

Outra importante classe de álgebras de Clifford envolve uma forma quadrática degenerada. O exemplo mais simples é  $Cl(0, 0, 1)$ , que é conhecida como a álgebra dos números duais  $\mathbb{D}$ . Ela tem a base  $(1, \epsilon)$  com  $\epsilon^2 = 0$ . Pode ser provado que existe um isomorfismo de álgebra entre  $\mathbb{D}$  e a álgebra das matrizes reais  $2 \times 2$  da forma:

$$w = a + b\epsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI_{2 \times 2} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\epsilon}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $a$  é a parte real e  $b$  é a parte dual. Este isomorfismo preserva a adição e a multiplicação. Trata-se também de uma álgebra comutativa. A divisão entre números duais é similar à dos números complexos, mas o produto de dois números duais não nulos pode ser nulo, o que significa que este anel/álgebra não é um domínio de integridade. A divisão de um número dual por um dual puro não está definida. O conjugado de um número dual é  $w^* = a - b\epsilon$ , e os números duais unitários são aqueles dados por  $ww^* = 1$ , de modo que  $a = \pm 1$ . Outra propriedade interessante dos números duais é  $\exp(b\epsilon) = 1 + b\epsilon$ . Foi mostrado também que  $\mathbb{D}$  é isomórfica ao anel  $R[x]/\langle x^2 \rangle$  (vide seção A.5).

Os quatérnios duais vem sendo usados em robótica e mecanismos há algum tempo (vide por exemplo (YANG A. T., 1964)) e o número de trabalhos relacionados tem crescido (BERNARDES et al., 2013), (BERNARDES et al., 2014), (OLIVEIRA et al., 2014), (RADAVELLII L. A., 2014). Esta álgebra é uma álgebra de Clifford  $Cl(0, 3, 1)$ , que tem

uma forma quadrática degenerada. Neste caso, as identidades são  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -1$ ,  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1$ ,  $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = -1$ ,  $\mathbf{e}_4\mathbf{e}_4 = 0$  e  $\mathbf{e}_a\mathbf{e}_b = -\mathbf{e}_b\mathbf{e}_a$  para  $a \neq b$ . Definindo-se  $\hat{i} = \mathbf{e}_1$ ,  $\hat{j} = \mathbf{e}_2$ ,  $\hat{k} = \mathbf{e}_3$  e  $\epsilon = \mathbf{e}_4$ , a dimensão esperada é  $2^4 = 16$ , mas pode ser provado que  $\epsilon$  comuta com  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  e então os produtos de  $\epsilon\hat{i}, \epsilon\hat{j}, \epsilon\hat{k}$  são também zero. Este fato reduz o número de elementos da base para  $(1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \epsilon, \epsilon\hat{i}, \epsilon\hat{j}, \epsilon\hat{k})$ , de modo que a álgebra dos quaternions duais fica isomórfica a  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ .

Qualquer elemento desta álgebra de Clifford pode ser representado por  $\underline{q} = \bar{r} + \epsilon(1/2)\overline{p}r$ , e se  $\bar{p}$  e  $\bar{r}$  são quatérnios de translação e de rotação (unitários), pode ser provado que este quatérnio dual tem norma unitária, tem inversa e representa um movimento rígido geral (ADORNO; FRAISSE, 2016). Uma translação pura é representada por  $1 + \epsilon(1/2)\bar{p}$ . Se  $\underline{s}$  representa uma pose de um corpo rígido, então um movimento rígido é representado por  $\underline{s}' = \underline{q}\underline{s}\underline{q}^{-1}$ .

Os quatérnios duais unitários formam também um grupo de Lie e mostra-se que se trata do produto semi-direto  $\text{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$  (SELIG, 2005). Este grupo forma uma cobertura dupla universal para  $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ . Qualquer elemento neste espaço pode então ser escrito na forma  $\underline{q} = w_1 + w_2\hat{i} + w_3\hat{j} + w_4\hat{k} = \bar{q}_1 + \epsilon\bar{q}_2$ , onde  $w_i$ , para  $i = 1 \dots 4$  são números duais e  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  são quatérnios. Um quatérnio é sempre um quatérnio dual com a parte dual nula. Há então três conjugações que podem ser aplicadas a um quatérnio dual: 1)  $\underline{q}^* = \bar{q}_1 - \epsilon\bar{q}_2$ , 2)  $\underline{q}^* = \bar{q}_1^* + \epsilon\bar{q}_2^*$ , e 4)  $\underline{q}^{**} = \bar{q}_1^* - \epsilon\bar{q}_2^*$ . A norma de um quatérnio dual é dada por  $\|\underline{q}\| = \underline{q}^*\underline{q}$ , que em princípio é um número dual. Um quatérnio dual unitário é então definido por  $\|\bar{q}_1\| = 1$  e  $\bar{q}_1^*\bar{q}_2 + \bar{q}_2^*\bar{q}_1 = 0$  e a sua inversa é  $\underline{q}^{-1} = \underline{q}^*/\|\underline{q}\|$ . Quatérnios duais em geral não tem inversa, pois não se trata de uma álgebra associativa de divisão. Do ponto de vista computacional, há claras vantagens do uso de quatérnios duais para representar o movimento geral de um corpo rígido, se comparado com elementos de  $SE(3)$ . Entre estas vantagens, tem-se que se trata de uma representação sem singularidades e eficiência computacional, já que precisa de oito números de ponto flutuante, se comparado com os doze de  $SE(3)$  (SELIG, 2005; ADORNO, 2017).

## A.13 Categorias e Funtores

Apresentam-se aqui conceitos fundamentais para a teoria de categorias que será usada neste trabalho. Os conceitos foram retirados de referências clássicas, tais como (MACLANE, 1978) e (SIMMONS, 2011).

**Definição A.13.1** (Classe). Uma classe é uma coleção de objetos matemáticos que pode ser definida a partir de propriedades que os objetos partilham.

Uma classe é mais geral que um conjunto, uma vez que todo conjunto é uma classe. Uma classe que é também um conjunto é conhecida como pequena classe. Do contrário, é conhecida como classe própria. A reunião de todos os conjuntos não é um conjunto, mas uma classe própria. As reuniões de algumas estruturas algébricas, como por exemplos os grupos e os espaços vetoriais são todas classes próprias.

**Definição A.13.2** (Família Indexada). Dados dois conjuntos  $I$  e  $X$  e uma função  $f : I \rightarrow X$ , define-se uma família indexada  $x_i$  como sendo formada pelas imagens  $x_i = f(i)$ .

**Definição A.13.3** (Categorias). Uma categoria  $\mathbf{C}$  é formada por uma classe de objetos, que em geral são outras classes, e outra classe de flechas, ou morfismos, entre esses objetos, tal como em:

$$A \xrightarrow{f} B$$

onde  $A, B$  são objetos e  $f$  é um morfismo.

Representaremos categorias sempre em negrito. Está definida a composição de morfismos, que é uma operação binária  $\circ$ , e que é representada pelo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

e essa composição é associativa. Cada objeto tem um morfismo identidade, ou seja,  $\text{Id}_A$  é a identidade do objeto  $A$ . Ainda,  $f \circ \text{Id}_A = \text{Id}_A \circ f$ . Como a cada objeto está associado unicamente uma flecha identidade, pode-se encarar uma categoria como sendo formada apenas por flechas. Quando dois objetos  $A, B$  são conjuntos e  $A \subset B$  define-se a inclusão como sendo um morfismo  $i : A \rightarrow B$  tal que  $i(a) = a$ . Se  $\mathbf{C}$  é uma categoria e  $A, B \in \mathbf{C}$ , então  $\mathbf{C}(A, B)$  é o conjunto de todas as flechas entre  $A$  e  $B$ , que também é conhecido como hom-set de  $A$  para  $B$ , que também pode ser representada por  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ . Morfismos (flechas) não são funções no geral, mas para algumas categorias, podem ser.

**Definição A.13.4** (Categoria **Set**). A categoria dos conjuntos, representada por **Set**, é formada por todos os conjuntos (ou seja, pequenas classes) e os morfismos são as funções entre eles.

O conjunto de objetos de **Set** é o conjunto universo  $U$  cujos objetos são todos os pequenos conjuntos. Entretanto,  $U$  é uma classe própria. Quando se tratam de categorias cujos objetos possuem estruturas algébricas, como por exemplo a categoria dos grupos,

então os morfismos são funções que preservam esta operação, isto é, dada uma operação  $\cdot$ , tem-se que  $f(a.b) = f(a).f(b)$ .

Dada uma categoria  $\mathbf{C}$ , uma flecha  $m : A \rightarrow B$  é mônica quando para qualquer par de flechas paralelas  $f_1, f_2 : D \rightarrow A$ , a igualdade  $m \circ f_1 = m \circ f_2$  implica que  $f_1 = f_2$ . Uma flecha  $h : A \rightarrow B$  é epi quando para quaisquer duas flechas paralelas  $g_1, g_2 : B \rightarrow C$ , a igualdade  $g_1 \circ h = g_2 \circ h$  implica que  $g_1 = g_2$ . Uma flecha  $f : B \rightarrow B$  é idempotente se  $f^2 = f$ . Uma flecha idempotente se divide se existem flechas  $g, h$  tais que  $f = h \circ g$  e  $g \circ h = 1$ . Um grupóide é uma categoria em que toda flecha é invertível.

**Definição A.13.5** (Endomorfismos). Diz-se que um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre dois objetos é um endomorfismo se o objeto  $Y$  é igual ao objeto  $X$ . O conjunto dos endomorfismos em  $X$  é representado por  $\text{End}(X)$ .

**Definição A.13.6** (Epimorfismos). Diz-se que um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre dois objetos é um epimorfismo se ele for sobrejetivo.

**Definição A.13.7** (Isomorfismos). Os morfismos que são aplicações invertíveis são conhecidos como isomorfismos.

**Definição A.13.8** (Automorfismos). Diz-se que um endomorfismo  $f : X \rightarrow X$  é um automorfismo se ele também for um isomorfismo.

Os morfismos são mais gerais que as funções definidas anteriormente, pois mapeiam classes em classes (enquanto que funções ou aplicações só fariam mapeamento entre conjuntos). Entretanto, devem preservar as operações, o que constituem restrições. Para o caso da classe dos conjuntos, os morfismos são as próprias funções entre conjuntos. Para a classe dos grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupo, e para os espaços vetoriais, são as aplicações lineares. Uma categoria é pequena se todos os objetos formam um conjunto e todas as flechas formam outro conjunto. Uma categoria é localmente pequena se  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  é um conjunto para qualquer par  $A, B \in \mathbf{C}$ . A categoria **Set** não é pequena mas é localmente pequena.

A categoria  $\mathbf{0}$  é a categoria vazia, que não tem nem objeto nem morfismo. A categoria  $\mathbf{1}$  possui um objeto e um morfismo (a identidade). A categoria  $\mathbf{2}$  possui dois objetos, um morfismo entre os dois e as duas identidades. Uma categoria é discreta se todo morfismo for uma identidade. Se cada morfismo possui inversa bilateral, então a categoria é um grupo. Um preset é qualquer categoria que entre dois objetos apresenta no máximo um morfismo. Como sempre haverá identidade, tudo se passa como se houvesse sido definida uma relação binária que é reflexiva e transitiva (representada pelas flechas)

**Definição A.13.9** (Funtor Covariante). *Dadas duas categorias  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ , um funtor  $\mathbf{F} : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$  associa:*

1. *Um objeto da primeira categoria a um objeto da segunda, ou seja,  $\mathbf{F}C = D$ , onde  $C \in \mathbf{C}_1$  e  $D \in \mathbf{C}_2$ ;*
2. *Um morfismo da primeira categoria a um morfismo da segunda categoria, ou seja,  $\mathbf{F}f = g$ , onde  $f \in \mathbf{C}_1$  e  $g \in \mathbf{C}_2$  e tal que  $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}g \circ \mathbf{F}f$  e  $\mathbf{F}\text{Id}_C = \text{Id}_{\mathbf{F}C}$*

*Um funtor pode ser pensado como um morfismo entre categorias.*

**Exemplo:** *Um exemplo de funtor é o power set  $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ . É óbvio que se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função,  $\mathcal{P}f$  deve associar os subconjuntos de  $X$  a subconjuntos de  $Y$ . A preservação da composição também é de fácil verificação.*

*Outros exemplos de categorias são  $\mathbf{Ab}$ , que é a categoria dos grupos abelianos e cujos morfismos são os homomorfismos de grupo abeliano,  $\mathbf{Grp}$  que é a categoria dos grupos em geral, e cujos morfismos são os homomorfismos de grupo,  $\mathbf{Top}$ , a categoria dos espaços topológicos, com os morfismos sendo as funções contínuas e  $\mathbf{Ring}$  a categoria dos anéis com identidade, onde os morfismos são os homomorfismos de anel que preservam a identidade.*

**Definição A.13.10** (Funtor Esquecedor). *Um funtor entre duas categorias que esquece a estrutura dos objetos do domínio é chamado de esquecedor, e normalmente representado por  $\mathbf{U}$ .*

*Por exemplo, o funtor  $\mathbf{U} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  que associa a cada grupo  $G$  o conjunto  $\mathbf{U}G$ , que é o conjunto base do grupo sem a operação binária, é um funtor esquecedor. Funtores podem ser compostos, e a composição é associativa. Também se definem os funtores identidade.*

**Definição A.13.11** (Funtor Contravariante). *Dadas duas categorias  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ , um funtor contravariante  $\mathbf{T} : \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$  associa:*

1. *Um objeto da primeira categoria a um objeto da segunda, ou seja,  $\mathbf{T}C = D$ , onde  $C \in \mathbf{C}_1$  e  $D \in \mathbf{C}_2$ ;*
2. *Um morfismo da primeira categoria a um morfismo da segunda categoria, ou seja,  $\mathbf{T}f = g$ , onde  $f \in \mathbf{C}_1$  e  $g \in \mathbf{C}_2$  e tal que  $\mathbf{T}(g \circ f) = \mathbf{T}f \circ \mathbf{T}g$  e  $\mathbf{T}\text{Id}_C = \text{Id}_{\mathbf{T}C}$*

Todo monóide  $M$  é uma categoria com somente um objeto  $*$ , que não tem estrutura interna. Cada elemento de  $M$  corresponde a uma flecha  $* \rightarrow *$ , o produto de dois elementos de  $M$  corresponde à composição de duas flechas, e a identidade do monóide corresponde a flecha identidade  $\text{Id}_*$ . As categorias **Pre** e **Pos** são as categorias dos presets e dos posets, respectivamente, e em ambos os casos, as flechas são as aplicações monotônicas, e as aplicações identidades são as próprias identidades. Um preset é sempre uma categoria, onde os elementos do conjunto são os objetos, e a relação de pré-ordem é a flecha.

**Definição A.13.12** (Subcategoria). Dada uma categoria  $\mathbf{C}$ , uma subcategoria  $\mathbf{S}$  é formada por um subconjunto de objetos e flechas de  $\mathbf{C}$  tal que para qualquer flecha em  $\mathbf{S}$ , o domínio e contradomínio devem estar em  $\mathbf{S}$ , para qualquer objeto a flecha identidade deve estar em  $\mathbf{S}$  e a composição de flechas deve ser fechada.

A inclusão de  $\mathbf{S}$  em  $\mathbf{C}$  é também um funtor.

**Definição A.13.13** (Oposto de uma Categoria:  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ ). Dada uma categoria  $\mathbf{C}$ , o oposto desta categoria, representado por  $\mathbf{C}^{\text{op}}$  é uma categoria com os mesmos objetos, mas para cada flecha  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathbf{C}$  corresponde uma flecha  $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$  em  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ , com a composição  $f^{\text{op}} \circ^{\text{op}} g^{\text{op}} = (g \circ f)^{\text{op}}$

Ou seja, a categoria oposta tem os mesmos objetos, mas as flechas tem sentido invertido.

**Definição A.13.14** (Diagrama). Dadas duas categorias  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{C}$ , um diagrama é um funtor covariante  $\mathbf{D} : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ , onde  $\mathbf{J}$  é uma categoria índice.

Um diagrama é o análogo de uma família indexada em Teoria de Conjuntos.

Um diagrama constante é um diagrama que mapeia todo objeto de  $\mathbf{J}$  em um único objeto  $A \in \mathbf{C}$  e toda flecha de  $\mathbf{J}$  em  $\text{Id}_A$ . Se  $\mathbf{J}$  é uma categoria discreta, então  $\mathbf{D} : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$  é somente uma família indexada de objetos.

**Definição A.13.15** (Categoria Flecha). Dada uma categoria  $\mathbf{C}$ , podemos formar uma nova categoria onde os novos objetos são as flechas de  $\mathbf{C}$ , que é conhecida como categoria flecha e representada por  $\mathbf{C}^\downarrow$ .

**Definição A.13.16** (Grafo direcionado = Pré-Categoria). Um grafo direcionado, representado por  $(O, A, \partial_O, \partial_A)$  é um conjunto de objetos  $O$ , conhecidos como vértices, e um conjunto de flechas  $A$ , conhecidas como elos, com duas funções definidas  $\partial_0, \partial_1 : A \rightarrow O$ , que são as funções domínio e codomínio, respectivamente.

**Proposição A.13.1** (Categoria = Grafo Estendido). *Uma outra forma de se entender categoria é através de grafos, considerando-se agora somente conjuntos. Uma categoria é um grafo com as funções adicionais: 1) identidade  $\text{Id} : O \rightarrow A$ , que associa a cada objeto o seu morfismo identidade e 2) composição  $\circ : A \times A \rightarrow A$  entre dois morfismos.*

*Um morfismo de grafos  $D : G \rightarrow G'$  é um par de funções  $D_O : O \rightarrow O'$  e  $D_A : A \rightarrow A'$  tal que  $D_O \partial_O f = \partial_O D_A f$  e  $D_O \partial_1 f = \partial_1 D_A f$*

**Definição A.13.17** (Categoria dos Grafos). *A categoria **Grph** é a categoria dos pequenos grafos, ou seja, ambos  $O$  e  $A$  são pequenos conjuntos.*

*Deste modo, todo grafo é uma pré-categoria, pois para ele falta somente a composição e as identidades. Deste modo, para toda categoria **C** tem-se um grafo **UC**, onde **U** é o funtor esquecedor.*

**Teorema A.13.1.** *Dadas duas categorias **C**, **C'** e um funtor  $\mathbf{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ , então  $\mathbf{UF} : \mathbf{UC} \rightarrow \mathbf{UC}'$  é um morfismo entre os grafos.*

**Definição A.13.18** (Categoria **Cat**). *A categoria cujos objetos são todas as pequenas categorias e cujas flechas são todos os funtores é conhecida como **Cat**.*

*Deste modo,  $\mathbf{U} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Grph}$  é o funtor esquecedor, pois esquece da operação  $\circ$  e de  $\text{Id}$ . Não é possível entretanto definir a categoria de todas as categorias. Diz-se que um funtor  $\mathbf{G}$  é uma inversa bilateral de  $\mathbf{F}$  se  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ , e representa-se este funtor por  $\mathbf{F}^{-1}$ , que também é chamado de isomorfismo.*

*Pode-se definir um conjunto universo  $\mathcal{U}$ , onde todos os objetos matemáticos na prática estão. Porém, não se pode definir este conjunto somente por meio de proposições, para não incorrer no paradoxo de Russell. Todos os conjuntos dentro de  $\mathcal{U}$  são pequenos conjuntos. Uma função  $f : U \rightarrow V$  entre dois conjuntos em  $\mathcal{U}$  é chamada de pequena. Uma pequena função também é um conjunto dos pares ordenados  $(x, fx)$ , de modo que também pertence a  $\mathcal{U}$ . Então, a categoria **Cat** tem como conjunto de objetos  $\mathcal{U}$  e como conjunto de flechas todas as pequenas funções.*

**Teorema A.13.2.** *Seja um pequeno grafo  $G = (O, A, \partial_O, \partial_A)$ . Existe uma pequena categoria  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_G$  cujo conjunto de objetos é  $O$  e um morfismo de grafos  $P : G \rightarrow \mathbf{UC}$ , onde dada qualquer categoria **B** e qualquer morfismo  $D : G \rightarrow \mathbf{UB}$  de grafo, existe um único funtor  $\mathbf{D}' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$  tal que  $\mathbf{UD}' \circ P = D$ , o que é equivalente ao seguinte diagrama*

comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{P} & UC \\
 & \searrow D & \downarrow UD' \\
 & & UB
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 C \\
 \downarrow D' \\
 B
 \end{array}$$

Diz-se então que  $\mathbf{C}_G$  é uma categoria livre e que  $P$  é universal, ou única a menos de um isomorfismo, como será visto mais adiante.

**Definição A.13.19** (Produto de Categorias). Dadas duas categorias  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , o produto destas categorias, representado por  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$  é formado pelos pares ordenados  $(A, R)$ , onde  $A \in \mathbf{C}$  e  $R \in \mathbf{D}$ , que são seus objetos, e pelos pares ordenados de flechas  $(f, \theta)$ , onde  $f \in \mathbf{C}$  e  $\theta \in \mathbf{D}$ , que são suas flechas, tal que a composição  $(f, \theta) \circ (g, \gamma) = (f \circ g, \theta \circ \gamma)$  e a identidade é formada de forma análoga.

Pode-se definir dois funtores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  que são as projeções tal que  $\mathbf{P} : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  e  $\mathbf{Q} : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  e tal que para as flechas  $\mathbf{Q}(f, \theta) = \theta$  e  $\mathbf{P}(f, \theta) = f$ . De fato, dada uma categoria  $\mathbf{D}$  e dois funtores  $\mathbf{R} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{T} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , sempre haverá um funtor  $\mathbf{F} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{D} & & \\
 & \swarrow \mathbf{R} & \downarrow \mathbf{F} & \searrow \mathbf{T} & \\
 \mathbf{B} & \xleftarrow{\mathbf{P}} & \mathbf{B} \times \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathbf{Q}} & \mathbf{C}
 \end{array}$$

o que é equivalente a dizer que  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são universais entre os pares de funtores para  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ . Não se deve esquecer a preservação da composição que um funtor apresenta.

Pode-se definir o produto cartesiano de dois funtores de maneira óbvia. A composição do produto cartesiano é o produto cartesiano da composição. Deste modo, tem-se que  $\times$  é um funtor da forma  $\times : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ .

**Definição A.13.20** (Bifuntores). Dadas três categorias  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , um funtor da forma  $\mathbf{S} : \mathbf{B} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  é chamado de bifuntor, ou funtor de duas variáveis.

Pode-se formar qualquer número de produtos entre funtores, envolvendo inclusive categorias opostas. Por exemplo, pode haver um bifuntor  $\mathbf{T} : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$ .

**Definição A.13.21** (Objetos Inicial e Final). Dada uma categoria  $\mathbf{C}$ , um objeto  $S \in \mathbf{C}$  é final se para cada  $A \in \mathbf{C}$  existe somente uma única flecha tal que  $A \rightarrow S$ . Um objeto  $S$  é inicial se para cada  $A \in \mathbf{C}$  existe somente uma flecha tal que  $S \rightarrow A$ .

A categoria **Set** tem como elemento final qualquer conjunto com somente um elemento, e como conjunto inicial o conjunto vazio. No caso da categoria dos grupos abelianos **Ab**, o grupo trivial, dado por  $\{0\}$ , é tanto o objeto final quanto o inicial. Como em geral os objetos iniciais/finais são isomórficos, fala-se do objeto final/inicial. Um objeto nulo é um objeto que é tanto inicial quanto final. Os funtores podem ser comparados através da:

**Definição A.13.22** (Transformações Naturais). Dadas duas categorias **C**, **D** e um par de funtores entre elas, ou seja  $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ , uma transformação natural  $\tau : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$  é uma família de morfismos que associa a cada objeto  $A \in \mathbf{C}$  um morfismo  $\tau_A$  tal que para cada  $f(A) = B$  então  $\tau_B \circ \mathbf{F}(f) = \mathbf{G}(f) \circ \tau_A$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \mathbf{F}(A) \xrightarrow{\tau_A} \mathbf{G}(A) & \\ \downarrow f & \downarrow \mathbf{F}(f) & \downarrow \mathbf{G}(f) \\ B & \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\tau_B} \mathbf{G}(B) & \end{array}$$

As transformações naturais também podem ser pensadas como morfismos entre funtores, pois preservam a operação de composição. Se pensarmos que  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  produzem cada um uma imagem de **C** em **D**, a transformação natural mapeia uma imagem na outra. Chama-se  $\tau_A : \mathbf{F}(A) \rightarrow \mathbf{G}(A)$ , onde  $A \in \mathbf{C}$ , de componente de  $\tau$  para  $A$ . Quando cada componente for invertível, diz-se que se trata de uma equivalência natural. Uma transformação natural frequentemente é chamada de morfismo de funtores. Um exemplo de transformação natural é o determinante de uma matriz (mais detalhes em (MACLANE, 1978)). Há também as transformações naturais entre bifuntores.

**Definição A.13.23** (Categoria de Funtores). Dadas duas categorias **B**, **C**, define-se a categoria dos funtores da forma  $\mathbf{T} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ , e que é representada por  $\mathbf{B}^{\mathbf{C}}$ , cujos objetos são os funtores e os morfismos são as transformações naturais.

**Definição A.13.24** (Funtores Fiéis e Cheios). Dadas duas categorias localmente pequenas **C**, **D** e um funtor  $\mathbf{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ . Para cada par de objetos  $A, B \in \mathbf{C}$ , o funtor  $\mathbf{F}$  induz a função:

$$\mathbf{F}_{A,B} : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B)).$$

Diz-se que o funtor é fiel se  $\mathbf{F}_{A,B}$  é injetivo para cada par  $A, B$ , é cheio se  $\mathbf{F}_{A,B}$  é sobrejetiva para cada par  $A, B$  e é cheio e fiel se  $\mathbf{F}_{A,B}$  é bijetiva para cada par  $A, B$ .

**Definição A.13.25** (Categoria Concreta). Uma categoria **C** que é equipada com um funtor fiel para a categoria **Set** é conhecida como categoria concreta.

**Definição A.13.26** (Morfismo Universal). Dado um funtor  $\mathbf{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ , onde  $B \in \mathbf{C}$  e  $X \in \mathbf{D}$ , um morfismo universal, representado por  $(A, u) : X \rightarrow \mathbf{F}(A)$ , é um morfismo em  $\mathbf{D}$  tal que para qualquer morfismo  $f \in \mathbf{D}$  na figura abaixo, existe um único morfismo  $h \in \mathbf{C}$  tal que o diagrama abaixo comuta: /

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & \mathbf{F}(A) & & A \\
 & \searrow f & \downarrow \mathbf{F}(h) & & \downarrow h \\
 & & \mathbf{F}(B) & & B
 \end{array}$$

ou seja,  $f = \mathbf{F}(h) \circ u$ . Tal propriedade é conhecida como propriedade universal.

Note que  $X$  pertence à mesma categoria que  $\mathbf{F}(B)$ . A interpretação é a seguinte: dado o funtor  $\mathbf{F}$  e dado o morfismo  $f : X \rightarrow \mathbf{F}(B)$ , um morfismo universal é um par  $u$  e  $A$  tal que existe um único morfismo  $h$  tal que o diagrama comute. Isto ocorre por exemplo com um grafo e a categoria associada  $\mathbf{C}_G$ . Deste modo, essa propriedade universal permite que morfismos mergulhem um conjunto de geradores em objetos algébricos livres.

**Definição A.13.27** (Objeto Livre). Seja um conjunto  $X$  em  $\mathbf{Set}$  e seja  $\mathbf{C}$  uma categoria concreta com um funtor fiel  $\mathbf{U} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Seja ainda  $i : X \rightarrow \mathbf{U}(A)$  um mapa injetivo (inserção canônica). Diz-se que  $A \in \mathbf{C}$  é um objeto livre em  $X$  com respeito a  $i$  se e somente se para qualquer  $B \in \mathbf{C}$  e algum mapa  $f : X \rightarrow \mathbf{U}(B)$  existe um único morfismo  $g : A \rightarrow B$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & \mathbf{U}(A) & & A \\
 & \searrow f & \downarrow \mathbf{U}(g) & & \downarrow g \\
 & & \mathbf{U}(B) & & B
 \end{array}$$

Diz-se então que  $X$  é uma base ou alfabeto. A propriedade universal se caracteriza pelo fato de haver um funtor (no caso, o esquecedor) e existe a inserção e o chamado objeto livre tal que para qualquer  $f$  existe um único  $g$ .

No diagrama acima, subentende-se que o se trata de um funtor fiel  $\mathbf{U}$  e uma categoria concreta  $\mathbf{C}$ . O conjunto  $X$  é inserido canonicamente no conjunto  $A$ . Para que  $A$  seja livre, é necessário que exista algum equivalente ao alfabeto para qualquer  $B$  na categoria concreta.

**Exemplo:** De fato, para qualquer objeto na classe dos monóides  $\mathbf{Mon}$ , o funtor  $\mathbf{U} : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$  aplicado a um monóide  $M$ , ou seja  $\mathbf{U}M$ , é o conjunto dos elementos do

monóide. Um monóide livre gerado por  $X$  é representado por  $FX$ . Então qualquer função  $f : X \rightarrow \mathbf{U}(M)$  se estende a um morfismo de monóides  $g : FX \rightarrow M$ . Um objeto livre associativo pode ser construído a partir de um alfabeto  $X$  da seguinte forma: 1) forme todas as palavras possíveis de comprimento finito a partir do alfabeto; 2) imponha relações de equivalência às palavras, ou seja, aquelas relações que caracterizam a estrutura algébrica em questão. O objeto livre consiste deste conjunto de classes de equivalência. Por exemplo, um grupo formado a partir do alfabeto  $\{a, b, e\}$ , onde  $e$  é a identidade terá palavras da forma  $a^n, b^m$ , mas  $a^n b^m a^p b \dots$  deverão se reduzir a  $a^m, b^n$  ou  $e$ . Além disso,  $b = a^{-1}$ . Já um monóide livre formado a partir deste alfabeto seria o conjunto de todas as palavras possíveis a partir de  $a$  e  $b$ , e mais a única palavra com  $e$  que é possível (identidade), que é ela mesma. Qualquer outra palavra com  $e$  seria equivalente àquela mesma com todos os  $e$  removidos.

**Definição A.13.28** (Funtor livre). Dada uma categoria  $\mathbf{C}$  com uma certa estrutura algébrica e o funtor esquecedor  $\mathbf{U} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ , o funtor livre é o funtor adjunto à  $\mathbf{U}$ , ou seja, é  $\mathbf{V} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{C}$ .

O funtor livre vai mapear o conjunto gerador  $X$  no objeto livre  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exemplo:** Um exemplo é a categoria  $\mathbf{Vect}_K$  dos espaços vetoriais sobre o corpo  $K$ , onde as flechas são as transformações lineares e  $\mathbf{U} : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Set}$  é o funtor esquecedor. Dado um conjunto  $X$ , tem-se que  $V_X$  é o conjunto de todas as combinações lineares formais dos elementos de  $X$  com coeficientes em  $K$ . A função  $j : X \rightarrow \mathbf{U}(V_X)$  mergulha a base  $X$  no espaço gerado. Para qualquer outro espaço vetorial  $W$ , qualquer outra função  $f : X \rightarrow \mathbf{U}(W)$  pode ser estendida para uma única transformação linear  $f' : V_X \rightarrow W$  com  $\mathbf{U}f' \circ j = f$ . De fato,  $f'$  mapeia um conjunto de geradores em outro, mas este último pode não gerar  $W$  completamente. Em MacLane, podem ser encontradas outras aplicações, como em conjuntos quocientes e grupos quocientes.

Outro exemplo de propriedade universal é:

**Definição A.13.29** (Funtor  $\mathbf{Hom}$ ). Seja  $\mathbf{C}$  uma categoria localmente pequena, ou seja, cada hom-set é um conjunto. Então, para cada  $A \in \mathbf{C}$ , define-se o funtor  $\mathbf{Hom}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  tal que:

1. mapeia cada objeto  $B \in \mathbf{C}$  no hom-set  $\mathbf{Hom}(A, B)$  de  $\mathbf{C}$ ;
2. mapeia cada morfismo  $f : B \rightarrow D$  na função  $\mathbf{Hom}(A, f) : \mathbf{Hom}(A, B) \rightarrow \mathbf{Hom}(A, D)$  dado por  $g \rightarrow f \circ g$  para cada  $g \in \mathbf{Hom}(A, B)$

**Definição A.13.30** (Funtor representável). *Um funtor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  é dito representável se existe uma transformação natural*

**Lema A.13.1** (Yoneda). *Se  $\mathbf{D}$  é uma categoria localmente pequena e  $\mathbf{F} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$  é um funtor de  $\mathbf{D}$  para um objeto em  $A \in \mathbf{D}$ , existe uma bijeção que manda cada transformação natural  $\tau : \text{Hom}(A, -) \rightarrow \mathbf{F}$  para a imagem da identidade  $\tau_A \text{Id}_A$ .*

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\tau_A} & \mathbf{F}(A) \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{Hom}(A, f) & & \downarrow \mathbf{F}(f) \\
 B & & \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathbf{F}(B)
 \end{array}$$

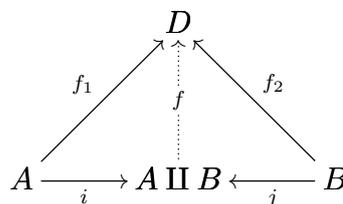
**Exemplo:** *Se  $\mathbf{C}$  é a categoria com somente um elemento  $*$  e cada morfismo é um isomorfismo de  $*$  (o que é conhecido como grupóide) então  $\text{Hom}(*, -)$  é um funtor e  $G = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(*, *)$  forma um grupo das bijeções em  $*$  com elemento genérico  $g$ . O funtor  $\mathbf{F}$  mapeia  $*$  num conjunto  $X$ , ou seja  $\mathbf{F}(*) = X$ . Deste modo qualquer isomorfismo em  $*$  é tal que  $\tau \circ g = \mathbf{F}(f) \circ \tau$ . O mapa  $\mathbf{F}(f)$  é uma bijeção em  $X$  (conjunto), o que pode ser entendido como uma representação, ou ainda,  $\tau(g.x) = g.\tau(x)$ . Isto é o teorema de Cayley.*

**Definição A.13.31** (Funtor Diagonal). *Dada uma categoria  $\mathbf{C}$ , define-se o funtor diagonal  $\Delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$  como sendo dado por:*

- $\Delta(A) = (A, A)$ , onde  $A$  é um objeto, e;
- $\Delta(f) = (f, f)$ , onde  $f$  é um morfismo.

*Para qualquer categoria  $\mathbf{C}$ , existe um morfismo universal de um objeto  $(A, B)$  de  $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$  para o funtor diagonal  $\Delta$*

**Definição A.13.32** (Coproduto). *Dada uma categoria  $\mathbf{C}$  e dois objetos  $A, B \in \mathbf{C}$ , um objeto é chamado de um coproduto de  $A, B$ , e representado por  $A \amalg B$ , se existirem morfismos  $i : A \rightarrow A \amalg B$  e  $j : B \rightarrow A \amalg B$  satisfazendo a propriedade universal tal que o diagrama abaixo, isto é, para qualquer objeto  $D$  e morfismos  $f_1, f_2$ , existe um único morfismo  $f : A \amalg B \rightarrow D$  tal que o diagrama abaixo comuta.*



Na categoria **Set**, o coproduto é a união disjunta, enquanto que os morfismos são aplicações de inclusão. Na categoria dos espaços vetoriais e grupos abelianos, o coproduto é a soma direta.

**Definição A.13.33** (Funtores Adjuntos). Dadas duas categorias **C** e **D**, diz-se que elas estão em adjunção se existe um par de funtores covariantes  $\mathbf{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  e  $\mathbf{G} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , e representa-se por  $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$ , tal que para todo par de objetos  $A \in \mathbf{C}$  e  $B \in \mathbf{D}$  existe uma bijeção entre os conjuntos de morfismos, ou seja  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{F}(B), A) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}}(B, \mathbf{G}(A))$  tal que essa família de bijeções é natural em  $A$  e  $B$ . Um dos funtores é adjunto à direita e o outro é adjunto à esquerda.

Uma outra definição equivalente é: um functor  $\mathbf{U} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  é adjunto à direita se para cada objeto  $X \in \mathbf{C}$  existe um objeto  $\mathbf{F}(X) \in \mathbf{D}$  e um morfismo  $\epsilon_X : X \rightarrow \mathbf{U}(\mathbf{F}(X))$  tal que para cada objeto  $X \in \mathbf{D}$  e cada morfismo  $f : \mathbf{F}(X) \rightarrow \mathbf{Y}$  existe um único morfismo  $g : \mathbf{F}(X) \rightarrow \mathbf{Y}$  com  $\mathbf{F}(g) \circ \epsilon_X = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{U}(\mathbf{Y}) & \\ & \uparrow & \swarrow f \\ \mathbf{F}(g) \downarrow & & \\ & \mathbf{U}(\mathbf{F}(X)) & \xleftarrow{\epsilon_X} X \end{array}$$

**Exemplo:** Seja um functor  $\mathbf{F} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$  que associa a cada  $X \in \mathbf{Set}$  um grupo livre gerado pelos elementos de  $X$  e  $\mathbf{U} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  o functor esquecedor. Neste caso,  $\mathbf{F}$  é adjunto à esquerda a  $\mathbf{U}$ . De fato, a aplicação  $\epsilon_X : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U}\mathbf{F}X$  consiste na inserção dos geradores

Os endofuntores  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  em **C** e  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  em **D** estão relacionados com os funtores identidades por transformações naturais do tipo unidade:

$$\text{Id}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\eta} \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$$

e counidade

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F} \xrightarrow{\epsilon} \text{Id}_{\mathbf{D}}$$

## A.14 Álgebra Multilinear e Tensorial

Os resultados desta seção podem ser encontrados em (WASSERMAN, 1992), (MACLANE, 1978), (ABE, 2004), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-

BLEICK, 1982) e (BURKE, 1985). O produto tensorial é fundamental para os desenvolvimentos daqui para frente. Aparecerá em várias das álgebras que são usadas neste trabalho. De fato, a álgebra tensorial já foi chamada de mãe de todas as álgebras.

### A.14.1 Produto Tensorial em Grupos Abelianos

Dados dois grupos abelianos  $A$  e  $B$ , queremos definir um produto  $m : A \times B \rightarrow C$ . Obviamente, este produto deve ser bilinear. São várias as possibilidades de aplicações bilineares como essa. É possível mostrar que qualquer aplicação bilinear pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\otimes} & A \otimes B \\ & \searrow m & \downarrow \bar{m} \\ & & C \end{array}$$

ou seja, existe um grupo abeliano  $A \otimes B$  e uma aplicação bilinear geral  $\otimes : A \times B \rightarrow A \otimes B$  tal que o diagrama acima sempre comuta, ou seja,  $m = \bar{m} \circ \otimes$ , onde  $\bar{m}$  é um morfismo de grupo abeliano. De fato:

$$\begin{aligned} m(a_1 + a_2, b) &= \bar{m} \circ [(a_1 + a_2) \otimes b] = \bar{m} \circ [(a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b)] = \\ &= \bar{m} \circ (a_1 \otimes b) + \bar{m} \circ (a_2 \otimes b) = m(a_1, b) + m(a_2, b). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Isto pode ser feito também para o segundo argumento, o que mostra que  $\otimes$  é uma aplicação bilinear bastante geral. Outra forma de se definir o produto tensorial de grupos abelianos é impondo uma relação de equivalência no grupo abeliano livre de  $A \times B$ , representado por  $F(A \times B)$ , onde  $(a_1 + a_2, b) \sim (a_1, b) + (a_2, b)$  e  $(a, b_1 + b_2) \sim (a, b_1) + (a, b_2)$  pela bilinearidade dos tensores, além de  $(a_i, b_j) - (a_i, b_j) \sim (0, 0)$  da propriedade de grupo. O conjunto quociente resultante é chamado de produto tensorial (ABE, 2004).

O diagrama comutativo acima claramente representa uma propriedade universal. Todos os espaços representados na figura são grupos abelianos. O funtor é o esquecedor das álgebras associativas para os grupos abelianos. O par  $(\otimes, A \otimes B)$  é um morfismo universal se para cada aplicação bilinear  $m$  existe um morfismo de álgebras tal que é mapeado pelo funtor na aplicação linear  $\bar{m}$

### A.14.2 Produto Tensorial em $R$ -Módulos

Dados  $M$ ,  $N$  e  $P$  três  $R$ -módulos, onde  $R$  é um anel comutativo, diz-se que uma aplicação  $f : M \times N \rightarrow P$  é  $R$ -bilinear se, mantendo-se um dos argumentos fixos, ela é  $R$ -linear no outro.

**Teorema A.14.1.** *Sejam  $M$ ,  $N$   $R$ -módulos, sendo que  $M = M_R$  é um módulo à direita e  $N = {}_R N$  é um módulo à esquerda. Então existe um par  $(T, g)$  consistindo de um  $R$ -módulo  $T$  e uma aplicação bilinear  $g : M \times N \rightarrow T$  com a seguinte propriedade: dado qualquer  $R$ -módulo  $P$  e qualquer aplicação bilinear  $f : M \times N \rightarrow P$  existe uma única aplicação  $R$ -linear  $\bar{f} : T \rightarrow P$  tal que  $f = \bar{f} \circ g$ , ou seja, toda aplicação bilinear fatora através de  $T$ . Além disso, se  $(T, g)$  e  $(\bar{T}, \bar{g})$  são pares com esta propriedade, então existe um único isomorfismo  $j : T \rightarrow \bar{T}$  tal que  $j \circ g = \bar{g}$*

O teorema acima também vem de uma propriedade universal. O módulo  $T$  acima é o que se chama de produto tensorial de  $M$  e  $N$ , e representado por  $M \otimes_R N$ . Além disso, a aplicação bilinear entre  $M \times N$  e  $T$  também se chama produto tensorial. Isto define um produto tensorial a menos de um isomorfismo. Qualquer tensor pode ser escrito, de forma não única, como uma soma de tensores da forma  $a \otimes b$ , que são os chamados tensores puros. Uma definição alternativa seria:

**Definição A.14.1.** *Dados os  $R$ -módulos  $M$  e  $N$ , seja o grupo abeliano livre  $F(M \times N)$  dado pelos símbolos da forma  $m.n$ , que é o símbolo que representa  $(m, n)$ . Seja também o subgrupo gerado por: 1)  $m.n + m.p - m.(n+p)$ ; 2)  $m.n + p.m - m.(n+p)$  e 3)  $mr.n - m.rn$ . O conjunto quociente do primeiro pelo segundo grupo define o produto tensorial  $M \otimes_R N$  (ABE, 2004).*

**Exemplo:** *Um exemplo bastante simples de se calcular é o produto tensorial  $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ . De fato, pode-se pensar nos quatro tensores fundamentais  $\bar{0} \otimes \bar{0}$ ,  $\bar{0} \otimes \bar{1}$ ,  $\bar{1} \otimes \bar{0}$ ,  $\bar{1} \otimes \bar{1}$ . Entretanto, ao se multiplicar  $\bar{1} \otimes \bar{0}$  por 2, tem-se  $\bar{1}2 \otimes \bar{0} = \bar{0} \otimes \bar{0} = \bar{1} \otimes 2\bar{0} = \bar{1} \otimes \bar{0}$ . Por um argumento semelhante, mostra-se que  $\bar{0} \otimes \bar{1} = \bar{0} \otimes \bar{0}$ . Deste modo, só sobra  $\bar{1} \otimes \bar{1}$ , de modo que  $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ .*

Deste modo, uma infinidade de novas álgebras podem ser criadas a partir do produto tensorial.

**Exemplo:** *O produto tensorial de entre  $\mathbb{Z}$ -módulos (ou grupos abelianos) dado por  $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m$  é isomórfico a  $\mathbb{Z}/\text{mdc}(n, m)\mathbb{Z}$ , onde  $\text{mdc}$  é o máximo divisor comum. Deste modo,  $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/\text{mdc}(2, 2)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ . No caso de  $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/\text{mdc}(2, 3)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z} = \bar{0}$ .*

Será visto mais adiante que no caso de produto tensorial de espaços vetoriais, este possuem sempre uma base, de modo que estas podem ser utilizadas para diversas computações. Entretanto, no caso de produto tensorial de módulos, em geral os módulos não possuem uma base, de modo que as coisas ficam mais complicadas.

Por fim, pode-se mostrar que dado um anel comutativo  $R$  e  $R$ -módulos  $M, N$  e  $P$ , então  $R \otimes_R M \cong M$ ,  $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$  e  $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$ .

### A.14.3 Aplicações Multilineares

Neste trabalho, tem-se interesse principalmente em aplicações multilineares e álgebra tensorial baseadas em espaços vetoriais, isto porque são os espaços tensoriais oriundos de espaços vetoriais que encontram aplicações na Física.

**Definição A.14.2** (Aplicação Multilinear). Dados os espaços vetoriais  $V_1, V_2, \dots, V_n, W$ , uma aplicação  $t : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  é dita ser  $n$ -linear se ela for linear em cada argumento, mantendo-se os outros fixos. O conjunto destas aplicações é representado por  $\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ .

O conjunto  $\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$  das aplicações multilineares é um espaço vetorial. Um exemplo imediato de uma aplicação multilinear são os funcionais lineares de  $V$ , que estão contidos no espaço dual  $V^*$ . Nesta caso, são obviamente aplicações lineares.

**Definição A.14.3** (Representação em Coordenadas). Dado  $\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$  e as bases  $\{\mathbf{e}_i^j\}$  para cada espaço vetorial  $V_j$  e  $\{\mathbf{f}_k\}$  para o espaço  $W$ , a aplicação  $t$  sobre os vetores da base é da forma:

$$t(\mathbf{e}_{i_1}^1, \dots, \mathbf{e}_{i_n}^n) = t^k(\mathbf{e}_{i_1}^1, \dots, \mathbf{e}_{i_n}^n) \mathbf{f}_k = t_{i_1 \dots i_n}^k \mathbf{f}_k, \quad (\text{A.4})$$

de modo que a aplicação nos vetores  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  resulta em:

$$t(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n) = t_{i_1 \dots i_n}^k v^{i_1} \dots v^{i_n} \mathbf{f}_k. \quad (\text{A.5})$$

**Exemplo:** [Aplicações Bilineares] Uma classe especial de aplicações multilineares são as bilineares com valores reais  $B : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dentre as quais se destacam: 1) a conjugação  $\langle, \rangle : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  e 2) as aplicações sesquilineares  $(\cdot | \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  da seção A.8. Se  $\{e_i^1\}$  e  $\{e_i^2\}$  são bases para os espaços  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente, e  $v_i$  e  $u_j$  são as componentes dos vetores destes espaços nestas bases, qualquer aplicação bilinear pode ser representada por uma matriz  $[b^{ij}]$ , de modo que o valor da aplicação é calculado por  $b^{ij} v_i u_j$ .

**Exemplo:** A partir de uma aplicação bilinear como do exemplo anterior, define-se a aplicação linear  $B^\sharp : V \rightarrow V^*$  dada por  $\mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{v}, \cdot)$ , que se for bijetiva, então  $B$  é não-degenerada (o que equivale a dizer que a matriz  $[b^{ij}]$  não tem autovalores nulos), como foi feito por exemplo para as aplicações sesquilineares.

**Definição A.14.4** (Posto de Uma Aplicação Bilinear). Dada uma aplicação bilinear  $B : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o posto desta aplicação é o posto de uma de suas representações matriciais  $[b_{ij}]$

*Prova-se que o posto de  $B$  é independente da representação matricial.*

**Definição A.14.5** (Aplicações Bilineares Simétricas e Anti-simétricas). Dada uma aplicação bilinear  $B : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que ela é simétrica se  $B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , e anti-simétrica se  $B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

#### A.14.4 Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

A propriedade de universalidade apresentada anteriormente para  $R$ -módulos é igualmente válida quando se trata de um  $K$ -módulo, onde  $K$  é um corpo, que é o caso dos espaços vetoriais. Sendo  $V_1, V_2$  e  $W$  espaços vetoriais (o funtor esquecedor entre a categoria das álgebras associativas e os espaços vetoriais está subentendido), tem-se que o par  $(\otimes, V_1 \otimes V_2)$  é um morfismo universal se para qualquer aplicação bilinear  $f$ , existe uma aplicação linear  $\bar{f}$  tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 & \xrightarrow{\otimes} & V_1 \otimes V_2 \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & W \end{array}$$

**Exemplo:** De fato, seja  $f$  bilinear. Pelo diagrama, tem-se que:

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \bar{f}((\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w}) = \bar{f}(\alpha \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} + \beta \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}) = \\ &= \alpha \bar{f}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}) + \beta \bar{f}(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \beta f(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

, o que confirma a bilinearidade de  $f$ .

Normalmente, para produto tensorial de espaços vetoriais, os elementos de  $V_1 \otimes V_2$  são aplicações com valores reais. Sejam  $V_1, V_2$  espaços vetoriais. O produto tensorial dos vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  é a aplicação bilinear  $(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) : V_1^* \times V_2^* \rightarrow \mathbb{R}$  que associa ao par

de covetores  $(\omega^1, \omega^2) \in V_1^* \times V_2^*$  um real dado por  $\langle \omega^1, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \omega^2, \mathbf{v}_2 \rangle$  (vide seção A.8). O produto tensorial de dois vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ , ou seja, a aplicação bilinear  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ , numa base  $\{\mathbf{e}_i\}$  de  $V$  é dada por  $v^i u^j$ , onde  $v^i$  e  $u^j$  são as coordenadas nesta base do vetores. De fato, pela definição, se  $\alpha, \beta \in V^*$  então:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})(\alpha, \beta) &= \langle \alpha, \mathbf{v} \rangle \langle \beta, \mathbf{u} \rangle = \langle \alpha_i \epsilon^i, v^k \mathbf{e}_k \rangle \langle \beta_j \epsilon^j, u^l \mathbf{e}_l \rangle = \\ &= \alpha_i v^k \langle \epsilon^i, \mathbf{e}_k \rangle \beta_j u^l \langle \epsilon^j, \mathbf{e}_l \rangle = \alpha_i v^k \delta_k^i \beta_j u^l \delta_l^j = \alpha_i v^i \beta_j u^j = (v^i u^j)(\alpha_i \beta_j), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

que é a fórmula em coordenadas de um bilinear  $v^i u^j$  agindo nos covetores em questão.

Pode-se determinar uma representação matricial do produto tensorial de dois vetores  $\mathbf{v} \in V$  e  $\mathbf{w} \in W$ , que é conhecido como produto de Kronecker, e é dado por  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = [v_i w_j]$ , ou seja, trata-se de uma matriz. Deste modo, tem-se que o produto tensorial de dois vetores é uma aplicação bilinear:

$$T(\omega, \nu) = [\omega_i]^T (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) [\nu_j] = [\omega_i]^T [v_i u_j] [\nu_j].$$

Da mesma forma, pode-se definir o produto tensorial entre os covetores  $\omega^1$  e  $\omega^2$ :

**Definição A.14.6** (Produto Tensorial de Covetores). *Seja  $V_1, V_2$  espaços vetoriais. O produto tensorial dos covetores  $\omega_1$  e  $\omega_2$  é a aplicação bilinear  $(\omega_1 \otimes \omega_2) : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$  que associa ao par  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2$  um real dado por  $\langle \omega^1, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \omega^2, \mathbf{v}_2 \rangle$*

**Definição A.14.7** (Produto Tensorial de um Vetor e um Covetor). *Sejam  $V_1, V_2$  espaços vetoriais. O produto tensorial do vetor  $\mathbf{v}_1$  e do covetor  $\omega_2$  é a aplicação multilinear  $(\mathbf{v}_1 \otimes \omega_2) : V_1^* \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$  que associa ao par  $(\omega_1, \mathbf{v}_2) \in V_1^* \times V_2$  um real dado por  $\langle \omega^1, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \omega^2, \mathbf{v}_2 \rangle$ .*

Nota-se claramente que as aplicações  $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ ,  $\omega_1 \otimes \omega_2$  e  $\mathbf{v}_1 \otimes \omega_2$  (de ainda  $\omega_1 \otimes \mathbf{v}_2$ ) são equivalentes, pois a fórmula definidora é a mesma. Dados  $V_1, V_2$  espaços vetoriais, o espaço vetorial  $V_1 \otimes V_2$  é o espaço gerado por todos os pares do tipo  $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ , com  $\mathbf{v}_1 \in V_1$  e  $\mathbf{v}_2 \in V_2$ . É fácil ver que a dimensão deste espaço é  $\dim(V_1) \dim(V_2)$ . Da mesma forma se define os espaços  $V_1^* \otimes V_2$ ,  $V_1 \otimes V_2^*$  e  $V_1^* \otimes V_2^*$ .

**Teorema A.14.2.** *As fórmulas definidoras acima induzem um isomorfismo natural entre os quatro espaços  $V_1 \otimes V_2$ ,  $V_1^* \otimes V_2$ ,  $V_1 \otimes V_2^*$  e  $V_1^* \otimes V_2^*$ .*

A generalização desta definição é o que se chama de álgebra multilinear, no sentido que trata de objetos lineares que podem ser produzidos a partir de outros espaços vetoriais.

Em particular, estudam-se aqui espaços tensoriais, que são criados a partir de um mesmo espaço vetorial  $V$  e o seu dual  $V^*$ .

**Definição A.14.8** (Tensores Tipo 2). *Os elementos de quaisquer dos espaços  $V_1 \otimes V_2$ ,  $V_1^* \otimes V_2$ ,  $V_1 \otimes V_2^*$  e  $V_1^* \otimes V_2^*$  são conhecidos como tensores do tipo dois, e estes espaços vetoriais são conhecidos como espaços tensoriais de tipo 2.*

**Definição A.14.9** (Tensor Puro de  $V_1 \otimes V_2$ ). *Dado um espaço  $V_1 \otimes V_2$ , define-se um tensor puro como sendo um tensor da forma  $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ , onde  $\mathbf{v}_1 \in V_1$  e  $\mathbf{v}_2 \in V_2$ , ou seja, ele é dado diretamente pelo produto tensorial de dois vetores.*

*Em geral, em um espaço vetorial  $V_1 \otimes V_2$ , nem todos os tensores são puros, e são escritos como somas de tensores puros.*

**Definição A.14.10** (Posto de um Tensor). *O posto de um tensor é o número de tensores puros necessários para formar este tensor. Um tensor puro sempre tem posto unitário.*

*Se as representações matriciais de  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são respectivamente  $[a_i]$  e  $[b_j]$  então a representação do produto tensorial de ambas é  $[a_i b_j]$  que é uma matriz de posto um. Tensores e produto tensorial de forma geral podem ser definidos algebricamente de forma óbvia. Em particular, a maioria das referências define tensores da seguinte forma.:*

**Definição A.14.11** (Tensores). *Tensores tipo  $(r, s)$  (grau de contravariância  $r$  e de covariância  $s$ ) são elementos pertencentes ao espaço vetorial:*

$$V_s^r = \mathcal{L}(\underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_r \times \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_s; \mathbb{R}),$$

*que é o espaço tensorial de tipo  $(r, s)$ . O espaço vetorial  $V$  é chamado de espaço base.*

*Nesta definição, todos os espaços vetoriais envolvidos são derivados de um único espaço  $V$ . Vamos seguir aqui esta convenção, embora seja óbvia a generalização para o caso de espaços vetoriais diferentes. Dados dois tensores  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente de tipos  $(r_1, s_1)$  e  $(r_2, s_2)$ , o produto tensorial  $t_1 \otimes t_2$  é o tensor de tipo  $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$  tal que as seguintes propriedades são satisfeitas: 1) Associativa:  $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_2 \otimes t_3$ ; 2) Comutação com relação ao escalar:  $(kt_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (kt_2) = k(t_1 \otimes t_2)$  e 3) Distributiva:  $t_1 \otimes (t_2 + t_3) = t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes t_3$ . Como dito anteriormente, o produto tensorial transforma um par de aplicações multilineares em outra aplicação multilinear. Deste modo, o produto tensorial  $\otimes$  é ele mesmo uma aplicação bilinear, o que já foi provado anteriormente. Este resultado fica claro considerando as propriedades dois e três da última definição.*

**Exemplo:** Deste modo, tem-se que  $V \otimes V \cong \mathcal{L}(V; V) \cong V^* \otimes V^* \cong V \otimes V^*$ . É evidente também que  $V_0^1 \cong V \cong V_1^0 \cong V^*$ .

**Proposição A.14.1** (Base para Espaço Tensorial). *Se a base de  $V$  é  $\{\mathbf{e}_i\}$  e a base dual (ou seja, de  $V^*$ ) é  $\{\varepsilon^i\}$ , sabe-se que  $\varepsilon^j \mathbf{e}_i = \delta_i^j$ . Uma base para o espaço tensorial  $V_s^r$  a partir da base de  $V$  é dada por  $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}\}$*

*Obviamente, trata-se de uma base formada somente por elementos decomponíveis.*

**Exemplo:** Se  $\mathbf{b} \in V_0^2$  e  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  é a base canônica de  $V_0^2$ , a expansão de  $\mathbf{b}$  na base canônica é  $\mathbf{b} = b^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  com  $b^{ij} = \mathbf{b}(\varepsilon^i, \varepsilon^j)$ .

No caso geral, isto vale para qualquer espaço tensorial  $V_s^r$ , e a expansão em coordenadas de  $\mathbf{b} \in V_s^r$  é:

$$t = t_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s},$$

sendo que  $b_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} = \mathbf{b}(\varepsilon^{i_1}, \varepsilon^{i_2}, \dots, \varepsilon^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_s})$  são as chamadas componentes do tensor.

**Corolário A.14.1.** *Dados os tensores  $t_1 \in V_s^r$  e  $t_2 \in V_u^v$ , com coeficientes na base canônica dados por  $(t_1)_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r}$  e  $(t_2)_{l_1 l_2 \cdots l_u}^{k_1 k_2 \cdots k_v}$ , os coeficientes do tensor dado por  $t_1 \otimes t_2$  é:*

$$(t_1)_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} (t_2)_{l_1 l_2 \cdots l_u}^{k_1 k_2 \cdots k_v}.$$

Dado um tensor  $t$  do tipo  $k$  (ou seja, pertencente ao espaço tensorial dado por produtos de  $V$  e  $V^*$ ), define-se o posto de  $t$  como sendo o número mínimo de elementos decomponíveis em que  $t$  pode ser decomposto. Para o caso de tensores do tipo 2, este posto coincide com o posto de matrizes.

**Definição A.14.12** (Mudança de Base). *Dado um isomorfismo  $\phi : V \rightarrow V$  com representação matricial  $[a_j^i]$ , que muda a base de  $E$  para  $F$ , os coeficiente mudam segundo*

$$\bar{b}_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} = a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} \cdots a_{k_s}^{i_r} b_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{k_1 k_2 \cdots k_r}.$$

**Definição A.14.13** (Produto Interior). *Dado um espaço vetorial  $V$  ( $V^*$ ) e um tensor  $t \in V_s^r$ , o produto interior de  $\mathbf{v}$  ( $\omega$ ) é o tensor  $(r, s - 1)$  ( $(r, s - 1)$ ) dado por*

$$(\mathbf{i}_{\mathbf{v}} t)(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s-1}) = t(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s-1}),$$

$$((\mathbf{i}^{\omega} t)(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = t(\omega_1, \dots, \omega_r, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) )$$

*Evidentemente, o produto interior é uma aplicação linear.*

**Exemplo:** O produto interior de um covetor com um vetor é simplesmente:  $i_{\mathbf{v}}\omega = \langle \omega, \mathbf{v} \rangle$ .

**Definição A.14.14** (Contração). Dados dois espaços tensoriais  $V_s$  e  $V_r$ , define-se a contração  $C$  entre dois tensores  $t_1 \in V_s$  e  $t_2 \in V_r$  como sendo o tensor  $(s-1, r-1)$ , representado por  $C(t_1 \otimes t_2)$  dado por:

$$(t_1 \otimes t_2) = (t_1)^{i_1 \dots k \dots i_s} (t_2)_{j_1 \dots k \dots j_s}. \quad (\text{A.8})$$

Dependendo dos índices que foram escolhidos para serem substituídos por  $k$ , a contração é diferente. O caso mais simples de contração é o que ocorre com o espaço vetorial  $V$  e seu dual  $V^*$ , conhecido como:

**Definição A.14.15** (Traço). Dado um espaço vetorial  $V$  e seu dual, define-se o traço do tensor  $t \in V \otimes V^*$  (que pode ser visto como um operador em  $V$ ) como sendo a contração  $t_k^k$ , que é neste caso um escalar.

Em coordenadas, dado o tensor  $b_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ , a contração é dada pelo tensor com coordenadas  $b_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}$  (ou seja, os índices  $i_k$  e  $j_k$  foram omitidos).

**Exemplo:** [retirado de (BURKE, 1985)] Seja o tensor dado por  $t = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \varepsilon^1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \varepsilon^1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \varepsilon^2$ . Há duas formas de contrair este tensor (que deve resultar obviamente num vetor): primeiro com terceiro fator, resultando em  $(\varepsilon^1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 + (\varepsilon^1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 + (\varepsilon^2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ . A segunda possibilidade resultará em um vetor nulo.

Outro exemplo é a contração de um tensor  $(1,1)$  que resulta no traço da matriz  $[b_i^j]$ . Evidentemente, o produto interior é uma forma de contração.

**Definição A.14.16** (Aplicação Elevadora de Índice). Seja  $V$  um espaço vetorial com um produto interno  $(\cdot|\cdot)$  e a correspondente matriz métrica  $[g_{ij}]$ . A aplicação elevadora de índice é a aplicação  $(\cdot)^{\flat} : V \rightarrow V^*$  e dada por  $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}|\cdot)$ , e cuja representação matricial é  $[g_{ij}]$ .

**Definição A.14.17** (Aplicação Abaixadora de Índice). Sendo  $V$  com o produto interno  $(\cdot|\cdot)$  e a matriz métrica  $[g_{ij}]$ , e sendo ainda  $[g^{ij}]$  a inversa desta matriz, a aplicação abaixadora de índice é a aplicação  $(\cdot)^{\sharp} : V^* \rightarrow V$  e dada pelo inverso e cuja representação matricial é  $[g^{ij}]$ .

**Definição A.14.18** (Pull-Back). Sejam dois espaços vetoriais  $V, W$  e uma aplicação linear  $\phi : V \rightarrow W$  (não necessariamente um isomorfismo), define-se o pull-back para os

tensores com sendo a aplicação  $\phi^* \in \mathcal{L}(V_s^0, W_s^0)$  dada por

$$\phi^*t(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = t(\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_s)).$$

**Definição A.14.19** (Push-Forward). *Sejam dois espaços vetoriais  $V, W$  e um isomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$ , define-se o push-forward para tensores como sendo a aplicação  $\phi_* \in \mathcal{L}(V_s^r, W_s^r)$  dada por:*

$$\phi_*t(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = t(\phi^*(\omega_1), \dots, \phi^*(\omega_r), \phi^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, \phi^{-1}(\mathbf{v}_s)),$$

onde  $\phi^*(\omega_i)$  é a aplicação dual de  $\phi$  aplicada em  $\omega_i$ .

**Exemplo:** Se  $t \in V \otimes V^*$  é dado pelos coeficientes  $t_j^i$ , e  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_k]$  e  $\omega = [\omega^l]^T$ , então  $(A_*t)(\omega, \mathbf{v}) = t(A^*\omega, A^{-1}\mathbf{v}) = t(A^T\omega, A^{-1}\mathbf{v}) = [\omega^l][a_{ij}]^T[t_j^i][a_{ij}]^{-1}[\mathbf{v}_k]$ .

**Proposição A.14.2.** *Sejam  $V, W, Z$  espaços vetoriais e  $\phi : V \rightarrow W$ ,  $\psi : W \rightarrow Z$  aplicações lineares. Então, se seguintes propriedades são válidas:*

- $(\phi \circ \psi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ ;
- Se  $i : V \rightarrow V$  é a identidade, o mesmo ocorre para  $i^* : V_s^0 \rightarrow V_s^0$ ;
- Se  $\phi$  é um isomorfismo, então  $\phi^* = (\phi^{-1})_*$ ;
- Se  $t_1 \in V_s^0$  e  $t_2 \in V_s^0$ , então  $\psi^*(t_1 \otimes t_2) = \psi^*(t_1) \otimes \psi^*(t_2)$ .

**Definição A.14.20** (Permutações de Tensores). *Dado um tensor  $t \in V_s^0$  (ou  $t \in V_0^r$ ), uma permutação de tensor  $\sigma$  é uma permutação sobre os índices dos argumentos de modo que  $\sigma t(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = t(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$  (ou  $\sigma t(\omega_1, \dots, \omega_k) = t(\omega_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(k)})$ ).*

*Todas as aplicações multilineares podem ser decompostas numa parte simétrica somada com uma parte anti-simétrica. De fato, em muitas aplicações, usam-se tensores puramente simétricos e/ou puramente anti-simétricos.*

**Definição A.14.21** (Tensor Contravariantes Anti-simétrico). *Um tensor  $t$  de tipo  $(r, 0)$  é anti-simétrico se  $t(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = (\text{sgn } \sigma)t(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)})$  onde  $\{\mathbf{e}_i\}$  é uma base para  $V$  e  $\sigma$  é uma permutação de  $\{1, 2, \dots, n\}$  e  $\text{sgn } \sigma$  é o sinal desta permutação.*

*Isto é equivalente a dizer que a aplicação muda de sinal cada vez que se permuta dois argumentos entre si.*

**Definição A.14.22** (Tensores Contravariantes Simétricos). *Um tensor  $t$  de tipo  $(r, 0)$  é simétrico se  $t(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = t(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)})$ .*

Isto é equivalente a dizer que o valor não muda para qualquer permutação realizada entre dois de seus argumentos. De forma semelhante, se pode definir tensores covariantes simétricos e anti-simétricos.

**Definição A.14.23** (Mapas Alternante e Simetrizante). Para qualquer tensor de  $t \in V_0^r$  (ou  $V_r^0$ ), definem-se as aplicações:

- $S_r(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \sigma t$  (aplicação simetrizante);
- $A_r(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \sigma t$  (aplicação simetrizante);

onde a somatória se dá sobre todas as permutações possíveis.

**Definição A.14.24** (Espaços Tensorial Simétrico e Anti-simétrico Contravariante). Definem-se:

- $S^r V = S_r(V_0^r)$ , espaço tensorial simétrico;
- $\Lambda^r V = A_r(V_r^0)$ , espaço tensorial anti-simétrico;

De forma análoga, pode-se definir os Espaços Tensoriais Simétrico e Anti-simétrico Covariantes.

**Exemplo:** Os espaços  $S^2 V$  e  $\Lambda^2 V$  (este último já definido anteriormente) são gerados, respectivamente, por  $\{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1\}$  e  $\{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1\}$ .

Com estas definições, é possível também definir produtos tensoriais especiais.

**Definição A.14.25** (Produto Simétrico). Define-se o produto simétrico como sendo a operação binária  $\circ$  entre dois espaços tensoriais tal que:

$$\xi \circ \eta = S_{k+l}(\xi \otimes \eta).$$

É comum representar  $t_1 \circ t_2$  simplesmente por  $t_1 t_2$ .

**Exemplo:** Deste modo, temos que  $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$ .

## A.14.5 Álgebra Tensorial

A álgebra tensorial é de fundamental importância para várias outras álgebras de importância para este trabalho, como as álgebras associativas e as álgebras de Lie. Existem algumas propriedades de teoria das categorias para o produto tensorial, mais especificamente sobre morfismos universais (vide seção A.13):

**Definição A.14.26** (*R*-Álgebra Tensorial). Se  $R$  é um anel comutativo e  $M$  é um  $R$ -módulo, então pode-se definir o  $R$ -módulo  $T_n(M)$  de forma indutiva por:  $T_0(M) = R$ , e  $T_{n+1}(M) = T_n(M) \otimes M$ , com  $n$  pertencente ao semigrupo dos naturais. Tem-se que o  $R$ -módulo graduado  $T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{I}} T_n(M)$ , onde  $T_n(M)$  é o chamado  $n$ -ésimo componente homogêneo. Se  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q \in T_q(M)$  e  $y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \in T_p(M)$ , então o produto destes dois é  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \in T_p(M) \in T_{q+p}(M)$ . Para  $p = q = 0$  temos  $a \otimes b = ab$  e  $a \otimes x = ax$ . Então, isto define um morfismo  $\mu : T(M) \otimes T(M) \rightarrow T(M)$ , que é o produto da álgebra. A aplicação canônica  $i_0 : T_0(M) = R \rightarrow T(M)$  completa tudo, tornando  $T(M)$  uma álgebra graduada.

**Definição A.14.27** (Álgebra Tensorial Contravariante). A soma direta  $T(V) = \bigoplus_{r \geq 0} V_0^r$  é uma álgebra graduada conhecida como álgebra tensorial contravariante.

De forma semelhante, define-se:

**Definição A.14.28** (Álgebra Tensorial Covariante). A soma direta  $T(V^*) = \bigoplus_{r \geq 0} (V^*)_0^r$  é uma álgebra graduada conhecida como álgebra tensorial covariante.

Ambas estas álgebras são duais uma da outra, sendo que

$$\langle \omega_1 \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_s \rangle = \langle \omega_1, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \omega_2, \mathbf{v}_2 \rangle \cdots \langle \omega_r, \mathbf{v}_r \rangle.$$

A álgebra tensorial  $T(V)$  é uma álgebra livre em  $V$  e é também um funtor, no sentido que mapeia  $\mathbf{Vect}_K$  na categoria  $\mathbf{Alg}_K$  das álgebras associativas, ou seja, é um funtor  $\mathbf{T} : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Alg}_K$ .

**Teorema A.14.3.** Dadas as categorias  $\mathbf{Vect}_K$  e os objetos  $\mathbf{Alg}_K$  e  $V \in \mathbf{Vect}_K$  e  $A \in \mathbf{Alg}_K$ , então qualquer aplicação linear  $f : V \rightarrow A$  pode ser decomposta de forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & \mathbf{T}(V) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & \mathbf{A} \end{array}$$

ou seja,  $f = \tilde{f} \circ i$ , onde  $i$  é a inclusão canônica e  $\tilde{f}$  é um homomorfismo de álgebra.

Além disso,  $\mathbf{T}(V)$  é a única álgebra satisfazendo esta propriedade e  $\mathbf{T}$  é um funtor, de modo que para quaisquer espaços vetoriais  $U, W$ , dada uma aplicação linear  $h : U \rightarrow W$ , está definido um homomorfismo de álgebra que faz o diagrama abaixo ser comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{i} & \mathbf{T}(U) & & U \\
 & \searrow f & \downarrow \mathbf{T}(h) & & \downarrow h \\
 & & \mathbf{T}(W) & & W
 \end{array}$$

ou seja,  $f = \mathbf{T}(h) \circ i$ . Como a álgebra tensorial é bastante genérica, é possível construir, através da imposição de restrições no conjunto de geradores, álgebras quocientes em  $\mathbf{T}(V)$ , como a álgebra exterior, álgebras simétricas, álgebras de Clifford e álgebras envelopantes (DIXMIER, 1996).

### A.14.6 Álgebra Exterior

Oference-se aqui uma definição formal de álgebra exterior de um espaço vetorial  $V$ , que pode ser obtida a partir da álgebra tensorial  $T(V)$ .

**Definição A.14.29** (Álgebra Exterior). Dado um espaço vetorial sobre um corpo  $K$  e a correspondente álgebra tensorial  $T(V)$ , seja o ideal bilateral  $\mathcal{I}(V)$  gerado por elementos da forma  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ , com  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ . A álgebra quociente dada por  $\Lambda(V) = T(V)/\mathcal{I}(V)$  é conhecida como álgebra exterior.

Esta álgebra é graduada, de forma que:

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^k(V),$$

onde  $\Lambda^0(V) = K$  e  $\Lambda^1(V) = V$ , de modo que  $V$  é um subespaço desta álgebra. Trata-se então de uma álgebra associativa linearmente gerada por  $V$ . Se  $\mathcal{B}_n$  é um submódulo de  $T_n(M)$  formado pela antisimetrização de  $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$ . Tem-se também que  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 = \{0\}$ . Então, tem-se que  $\coprod_n \mathcal{B}_m = \mathcal{B}$  é um ideal da álgebra  $T(M)$ .

**Definição A.14.30** (Multivetores). O espaço vetorial  $\Lambda^n M = T_n(M)/\mathcal{B}_n$  é conhecido como o espaço dos  $n$ -vetores, e seus elementos são evidentemente os  $n$ -vetores. O espaço vetorial  $\Lambda^n M^*$  é conhecido como o espaço dos  $n$ -covetores, e seus elementos são evidentemente os  $n$ -covetores

**Definição A.14.31** (Álgebra de Grassmann ou Exterior). A álgebra graduada  $\Lambda M = T(M)/\mathcal{B}$  (ou  $\Lambda M^*$ ) dada por  $\Lambda M = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n V$  (ou  $\Lambda M^* = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n M$ ), é conhecida como álgebra de Grassmann ou Exterior de  $M$  ( $M^*$ ).

**Definição A.14.32** (Produto Exterior). *Define-se produto exterior de dois multivetores (ou multicovetores) como sendo a operação binária  $\wedge$  tal que :*

$$\xi_1 \wedge \xi_2 = A_{k+l}(\xi_1 \otimes \xi_2).$$

**Exemplo:** *Um exemplo bastante ilustrativo é  $\Lambda^2\mathbb{R}^3$ , que é o chamado espaço dos bivectores, cujos elementos são os 3-bivetores. Dados dois vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , pode-se definir o produto exterior  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ . Uma base para  $\Lambda^2\mathbb{R}^3$  é  $\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\}$  de modo que todos os bivectores são combinações lineares desta base. É também possível definir  $\Lambda^3\mathbb{R}^3$ , que é o espaço dos trivetores, que são elementos de volume em  $\mathbb{R}^3$ . Este espaço é gerado unicamente por  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ , ou seja, trata-se de um espaço vetorial de dimensão um. A soma direta  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \Lambda^2\mathbb{R}^3 \oplus \Lambda^3\mathbb{R}^3 = \Lambda\mathbb{R}^3$  é uma álgebra exterior.*

**Teorema A.14.4.** *O produto exterior satisfaz as seguintes propriedades:*

- Associativa:  $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$ ;
- Anti-comutação:  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = (-1)^{kl} \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1$ ;
- Distributiva:  $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3$ .

*Os seguintes resultados são fundamentais para álgebras exteriores:*

**Teorema A.14.5.** *Dados os vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ , eles serão linearmente dependentes se e somente se  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_r = 0$  (uma fórmula semelhante vale para os multicovetores)*

**Teorema A.14.6.** *Dado um multivetor decomponível  $\xi \neq 0$ , ele determina um subespaço vetorial  $W \subset V$  de dimensão  $p$  formado por todos os vetores  $\mathbf{v}$  tais que  $\mathbf{v} \wedge \xi = 0$ .*

**Corolário A.14.2.** *Dado o subespaço  $W \subset V$  e duas bases  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$  e  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ , os multivetores  $\bar{\xi} = \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p$  e  $\bar{\xi} = \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$  diferem por uma constante. Diz-se ainda que estes vetores são vetores coordenados de Grassmann de  $W$ .*

**Lema A.14.1** (Lema de Cartan). *Suponha que  $\{\mathbf{v}_i\}$  e  $\{\mathbf{w}_j\}$  são dois conjuntos de vetores de  $V$  tais que:*

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{w}_i = 0.$$

*Então, se o primeiro conjunto é linearmente independente, o segundo conjunto pode ser expresso por:*

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \mathbf{v}_j.$$

**Teorema A.14.7.** *Suponha que  $\{\mathbf{v}_i\} \subset V$  são  $r$  vetores linearmente independentes, e  $w \in \Lambda^p(V)$ . Então, uma condição necessária e suficiente para*

$$w = \mathbf{v}_1 \wedge \psi_1 + \cdots + \mathbf{v}_r \wedge \psi_r,$$

onde  $\psi_i \in \Lambda^{p-1}$  é que  $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_r \wedge w = 0$ .

*A partir destas propriedades, pode-se mostrar que:*

**Corolário A.14.3.** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\{\mathbf{e}_i\}$  uma base. Então, o conjunto dos elementos  $\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_r} = A_r(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r})\}$  forma uma base para  $\Lambda^r V$ .*

*De modo que qualquer tensor antisimétrico de grau  $r$  pode ser dado por  $\xi = (1/r!) \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_r}$ . Os coeficientes  $\xi^{i_1 i_2 \cdots i_r}$  são obviamente antisimétricos. Deste modo, a base do espaço é sempre decomponível. De forma semelhante, qualquer  $r$ -forma é expressa numa base da forma  $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}\}$ .*

**Corolário A.14.4.** *Se a dimensão do espaço vetorial  $V$  é  $n$ , então*

$$\dim \Lambda^r(V) = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \text{ para } \forall r \leq n,$$

e para  $r > n$ , tem-se  $\dim \Lambda^r(V) = 0$ .

**Definição A.14.33** (Conjugação de um  $r$ -covetor sobre um  $r$ -vetor). *A conjugação de um  $r$ -covetor num  $r$ -vetor é igual a  $\langle \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_r \rangle = (1/r!) \det[\langle \omega_i, \mathbf{v}_j \rangle]$ .*

*No caso particular dos elementos  $\omega_i$  serem duais de  $\mathbf{v}_i$ , então o determinante é igual  $1/r!$ .*

**Definição A.14.34** (Orientação: segunda versão). *Dado um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  e uma base  $E$ , o par  $(V, t)$ , onde  $t$  é o  $n$ -vetor  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$  é um espaço vetorial orientado.*

*De forma semelhante, um espaço dual  $V^*$  com um  $n$ -covetor determina um espaço vetorial orientado. É possível ainda definir tensores com valores vectoriais.*

**Definição A.14.35** (Posto de uma Aplicação Multilinear). *Dado o espaço tensorial dado pelo produto de  $V_1, V_1, \cdots, V_k$  e um elemento  $t$  neste espaço, define-se o posto de  $t$  como sendo o menor número  $r$  tal que  $t$  possa ser escrito como sendo uma soma de  $r$  elementos decomponíveis deste espaço.*

Deste modo, todo tensor pode ser escrito como uma soma de tensores de posto um. Um tensor de posto um sempre pode ser escrito pelo produto tensorial de tensores do tipo um, por exemplo  $t = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \omega_1 \otimes \omega_r$ . Em termos de coordenadas, isso fica  $t_{ij}^{lm} = a_i b_j c^l d^m$ .

**Definição A.14.36** (Produto Interno Induzido). Dado um espaço vetorial  $V$  munido de um produto interno  $(\cdot|\cdot)$ , o produto interno entre dois tensores  $(r, 0)$  dados por  $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r$  e  $\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_r$  é dado por  $(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_r) = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{w}_1)(\mathbf{v}_2 | \mathbf{w}_2) \cdots (\mathbf{v}_r | \mathbf{w}_r)$ .

Se no lugar de simples produtos tensoriais, fossem usados o produto simétrico ou o produto exterior, este valor teria que ser dividido por  $r!$ , uma vez que haveria esta quantidade de termos como resultado. A norma de um tensor baseada no produto interno induzido por  $V$  pode ser definida naturalmente.

**Definição A.14.37** (Elementos de Volume). Dado um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$ , o espaço vetorial  $\Lambda^n V$  tem dimensão 1, e qualquer elemento deste espaço é chamada de forma de volume.

As álgebras de Clifford são generalizações da Álgebra Exterior devido à presença de uma forma bilinear, como será visto a seguir.

**Definição A.14.38** (Álgebras de Clifford). Dado um  $K$ -espaço vetorial  $V$  e uma forma bilinear quadrática  $B : V \otimes V \rightarrow K$ , uma álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}(V, B)$  é uma álgebra associativa com identidade tal que para qualquer  $K$ -álgebra associativa  $A$  e qualquer aplicação linear  $j : V \rightarrow A$  tal que  $j(\mathbf{v})^2 = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})1_A$  para todo  $\mathbf{v} \in V$ , tem-se que existe um único morfismo de  $K$ -álgebra  $f : \mathcal{Cl}(V, B) \rightarrow A$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & \mathcal{Cl}(V, B) \\ & \searrow j & \vdots f \\ & & A \end{array}$$

Para construir esta álgebra, seja a álgebra tensorial associada  $T(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} T^k(V)$ , a forma bilinear  $B : V \otimes V \rightarrow K$ , que pode ser degenerada, e  $\mathcal{I}(V, B) \subset T(V)$  o ideal bilateral gerado por elementos da forma  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} - 2B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ . A Álgebra de Clifford  $\mathcal{Cl}(V, B)$  é dada pelo quociente  $T(V)/\mathcal{I}(V, B)$ .

**Teorema A.14.8.** Dado um espaço vetorial quadrático  $V$  com a forma bilinear  $B : V \otimes V \rightarrow K$ , tem-se que  $\mathcal{Cl}$  é um funtor entre a categoria desses espaços vetoriais (cujos

morfismos são aplicações lineares que preservam  $B$ ) e a categoria das álgebras associativas.

## A.15 Álgebras Associativas: Visão Categórica

Os resultados desta seção estão em (MACLANE, 1978) e (SIMMONS, 2011). É importante lembrar neste ponto que todo anel  $R$  é também uma  $R$ -álgebra.

**Definição A.15.1** ( $R$ -Álgebra). Dado um anel comutativo  $R$ , uma  $R$ -álgebra é um  $R$ -módulo  $A$  munido com dois morfismos  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  e  $u : R \rightarrow A$  tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes \mu} & A \otimes A \\
 \downarrow \mu \otimes I & & \downarrow \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 K \otimes A & \xrightarrow{u \otimes I} & A \otimes A & \xleftarrow{I \otimes u} & A \otimes K \\
 & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

O morfismo  $\mu$  é chamado de produto e  $u$  é chamado de unidade. Ambos são chamados de mapas estruturais de  $A$ . Este último é também um morfismo de anel. Como  $A$  é um  $R$ -módulo, haverá a multiplicação por escalar  $rx$ , onde  $r \in R$  e  $x \in A$ .

**Definição A.15.2** (Morfismo de  $R$ -álgebra). Dadas duas  $R$ -álgebras  $B$  e  $C$ , e  $f : B \rightarrow C$  é tanto um morfismo de anel quanto um morfismo de  $R$ -módulo. Diz-se então que se trata de um morfismo de  $R$ -álgebra.

**Definição A.15.3** (Produto Tensorial de  $R$ -Álgebras). Dadas duas  $R$ -álgebras  $B, C$ , o  $R$ -módulo  $B \otimes_R C$  se torna uma  $R$ -álgebra com  $u = u_B \otimes u_C$  e  $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$  com a identidade sendo  $1 \otimes 1$ .

**Definição A.15.4** (Mergulhos Canônicos). Dado um anel comutativo  $R$  e duas  $R$ -álgebras  $B$  e  $C$ , as aplicações  $i_1 : B \rightarrow B \otimes C$  e  $i_2 : C \rightarrow B \otimes C$  tais que  $i_1(b) = b \otimes 1$  e  $i_2(c) = 1 \otimes c$  são morfismos de  $R$ -álgebra conhecidos como mergulhos canônicos

**Teorema A.15.1.** Dada uma  $R$ -álgebra comutativa  $T$  e morfismos  $f : B \rightarrow T$  e  $g : C \rightarrow T$ , então existe um único morfismo de  $R$ -álgebra  $h : B \otimes_A C \rightarrow T$  tal que  $h \circ i_1 = f$  e  $h \circ i_2 = g$

De fato, já que a aplicação  $\phi : B \times C \rightarrow T$  dada por  $\phi(b, c) = f(b)g(c)$  é bilinear, tem-se que  $h(b \otimes c) = f(b)g(c)$  então  $h(i_1(b)) = h(b \otimes 1) = f(b)g(1) = f(b)$  e  $h(i_2(c)) =$

$h(1 \otimes c) = f(1)g(c) = g(c)$ . Além disso,  $h((b \otimes c)(b' \otimes c')) = h(bb' \otimes cc') = f(bb')g(cc')$ , o que resulta em  $f(b)g(c)f(b')g(c') = h(b \otimes c)h(b' \otimes c')$ , o que prova que se trata de um morfismo de  $R$ -álgebra

**Definição A.15.5.** Dado um anel comutativo  $R$ , uma álgebra associativa livre em  $n$  variáveis  $\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  é um  $R$ -módulo livre cuja base é formada pelas palavras geradas por um alfabeto  $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  cuja unidade é a palavra vazia e a multiplicação é dada pela concatenação dos monômios. Os coeficientes obviamente são elementos do anel  $R$ .

Então esta álgebra é uma generalização do anel de polinômios  $R\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  onde agora não há comutatividade. Seja ainda  $\Sigma^*$  o monóide livre gerado pelo alfabeto  $\Sigma$  (vide seção A.2) e  $w$  uma palavra arbitrária desde monóide. Seja ainda  $Rw$  o  $R$ -módulo livre gerado por esta palavra. Tem-se então que:

$$R\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \bigoplus_{w \in \Sigma^*} Rw$$

**Teorema A.15.2.** Dado um corpo  $K$ , o anel de polinômios multivariáveis  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  é isomórfico a  $K[X_1]K[X_2] \cdots K[X_n]$ , que é isomórfico ao produto tensorial  $K[X_1] \otimes K[X_2] \otimes K[X_2] \cdots \otimes K[X_n]$ .

Por fim, há um resultado mais geral, de teoria das categorias, que ressalta o papel amplo que o produto tensorial desempenha.

**Definição A.15.6** (Categoria Monoidal ou Tensorial). Uma categoria monoidal é uma categoria  $\mathbf{C}$  equipada com um bifuntor  $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  conhecido como produto tensorial, um objeto identidade  $I$  e três isomorfismos naturais sujeitos a condições de coerência, que são:

- Um associador  $\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A \otimes B,C,D}} & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
 \downarrow 1_A \otimes \alpha_{B,C,D} & & & & \uparrow \alpha_{A,B,C} \otimes 1_D \\
 A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D
 \end{array}$$

- Unitores à direita e à esquerda, isto é  $\lambda_A : I \otimes A \cong A$  e  $\rho_A : A \otimes I \cong A$ , tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes (I \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & (A \otimes I) \otimes B \\
 \searrow 1_A \otimes \lambda_B & & \swarrow \rho_A \otimes 1_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

Uma categoria estritamente monoidal é uma categoria onde os isomorfismos naturais  $\alpha, \lambda, \rho$  são identidades. Toda categoria monoidal é equivalente a uma categoria estritamente monoidal. Os bifuntores associam a cada par de objetos  $A, B$  um objeto  $A \otimes B$  e a cada par de morfismos  $f, g$  um morfismo  $f \otimes g$ . Deste modo,  $1_a \otimes 1_b = 1_{a \otimes b}$  e  $(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g)$ . As categorias de espaços vetoriais, grupos abelianos,  $R$ -módulos e  $R$ -álgebras são transformadas em categoriais monoidais com o produto tensorial. Numa categoria monoidal, o produto é associativo a menos de um isomorfismo, e há identidade única à direita e à esquerda, a menos de um isomorfismo.

O produto tensorial na categoria **Ab** dos grupos abelianos já foi definido por conta da existência de uma função bilinear universal  $A \times B \rightarrow A \otimes B$ . É possível mostrar que esta função universal satisfaz todas as condições de uma categoria monoidal. Como para qualquer anel  $R$  e  $R$ -módulo  $M$  tem-se que  $M \otimes_R R \cong M$ , com  $m \otimes r \mapsto mr$  e  $R \otimes_R M \cong M$ , com  $r \otimes m \mapsto rm$  e mapa inverso  $m \mapsto 1 \otimes m$ , então a categoria dos grupos abelianos tem como unidade  $\mathbb{Z}$ . A categoria **Mod** $_R$ , ou seja, a categoria dos módulos sobre o anel comutativo  $R$  à direita é uma categoria monoidal com o produto tensorial de módulos  $\otimes_R$  sendo o produto monoidal e o anel  $R$  servindo como unidade. Em particular tem-se **Vect** $_K$ , a categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo  $K$  servindo como unidade. Se trocássemos o produto tensorial pelo produto cartesiano  $\times$  ou a soma direta  $\oplus$ , ainda assim teríamos uma categoria monoidal. Qualquer monóide no sentido usual pode ser pensado como uma categoria discreta e cujo produto é um bifuntor. O mesmo vale para  $K$ -módulos graduados e  $K$ -módulos graduados diferenciais.

**Exemplo:** Dado um anel comutativo  $R$  e um conjunto de indeterminados  $x_\lambda$ , onde  $\lambda \in \Lambda$ , o conjunto dos polinômios  $R[x_\lambda]$  é um anel comutativo. Com o mergulho canônico  $R \rightarrow R[x_\lambda]$  tem-se uma  $R$ -álgebra.

## A.16 Álgebras de Lie e Álgebras Envolventes

Os resultados desta seção podem ser encontrados em (DIXMIER, 1996).

**Definição A.16.1** (Anel de Lie). *Dado um  $\mathbb{Z}$ -módulo  $L$ , se existe um mapa  $\phi : L \times L \rightarrow L$  tal que satisfaz:*

1.  $\phi(x + y, z) = \phi(x, z) + \phi(y, z)$
2.  $\phi(x, y + z) = \phi(x, y) + \phi(x, z)$
3.  $\phi(x, x) = 0$
4.  $\phi(\phi(x, y), z) + \phi(\phi(z, x), y) + \phi(\phi(y, z), x) = 0$

então  $(L, \phi)$  é o que se chama de Anel de Lie, e é denotado por  $\phi(x, y) = [x, y]$ .

Se ainda por cima  $L$  for dotado de um produto escalar por um anel comutativo  $R$  tal que  $[rx, y] = [x, ry] = r[x, y]$ , teremos uma  $R$ -álgebra de Lie, para  $r \in R$ . Pela universalidade, fica canonicamente definida a aplicação  $\mu_L : L \otimes L \rightarrow L$ , e  $\mu_L(x \otimes y)$  passa a ser o produto a  $R$ -álgebra subjacente à álgebra de Lie.

**Definição A.16.2** (Morfismo de  $R$ -álgebra de Lie). *Dadas duas  $R$ -álgebras de Lie  $L_1, L_2$  e  $f : L_1 \rightarrow L_2$  é um morfismo de  $R$ -módulo, se  $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$  para qualquer  $x, y \in L_1$ , então diz-se que se trata de um morfismo de  $R$ -álgebra de Lie.*

Outra forma de fazer a mesma definição é supor que existe uma  $R$ -álgebra cujo produto é  $\phi : A \otimes A \rightarrow A$  e a correspondente  $R$ -álgebra de Lie, representada por  $\mathcal{L}(A)$  é tal que  $x \cdot y = \phi \circ \otimes(x, y)$  e  $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ .

**Definição A.16.3** (Categoria das Álgebras de Lie). *A categoria das  $R$ -álgebras de Lie é definida como sendo  $\mathbf{AlgLie}_R$ , cujos morfismos preservam o colchete de Lie.*

**Definição A.16.4.** *Dado um  $K$ -espaço vetorial, o conjunto das transformações lineares  $\text{Hom}_K(V, V)$  tem naturalmente a estrutura de uma álgebra de Lie com colchete dado por  $[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$ .*

**Definição A.16.5** (Ideal de Álgebra de Lie). *Dado um submódulo  $N$  de  $L$  é tal que para  $x \in N$  e  $y \in L$  tem-se  $[x, y] \in N$  então  $N \subset L$  é um ideal de  $L$ .*

Deste modo,  $L/N$  é uma  $R$ -subálgebra de Lie com a mesma estrutura conhecida como álgebra de Lie quociente.

**Definição A.16.6** ( $L$ -módulo). *Se  $L$  é um anel de Lie e  $M$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo, se uma aplicação  $f : L \times M \rightarrow M$  tal que  $f(x, s) = xs$  satisfizer as condições:*

1.  $x(s + t) = xs + xt$ , para  $x, t \in L$  e  $s, t \in M$ ;
2.  $(x + y)s = xs + ys$ ;
3.  $[x, y]s = x(ys) - y(xs)$ .

então  $M$  é chamado de  $L$ -módulo.

No caso de um anel comutativo  $R$ , se  $L$  for uma  $R$ -álgebra de Lie,  $M$  será um  $R$ -módulo e o mapa acima ainda satisfizer  $(ax)s = a(xs) = x(as)$  então  $M$  é um  $L$ -módulo agora com o anel  $R$ . A propriedade universal garante que haverá um morfismo de  $R$ -módulo  $\phi : L \otimes_R M \rightarrow M$ .

**Definição A.16.7** (Representação de  $L$ ). *A partir de  $\phi$  anterior, pode-se definir a aplicação  $\rho : L \rightarrow \text{End}_A(M)$ , que associa a  $x \in L$  uma aplicação  $\rho(x)$  que é um endomorfismo em  $M$ . Esta aplicação é conhecida como representação de  $L$*

**Definição A.16.8** (Representação Adjunta). *Em particular,  $\mu_L : L \otimes L \rightarrow L$  define uma representação de  $L$  em  $L$  conhecida como representação adjunta.*

**Definição A.16.9** (Derivação Algébrica). *Dado um anel  $B$  e  $M$  um  $B$ -módulo bilateral, uma aplicação  $D : B \rightarrow M$  satisfazendo 1)  $D(x + y) = D(x) + D(y)$ , e 2)  $D(xy) = xD(y) + D(x)y$ , para  $x, y \in B$  é chamado de derivação de  $B$  para  $M$ .*

É fácil concluir que  $D(1) = 0$ . Se  $B$  for uma  $A$ -álgebra, onde  $A$  é um anel comutativo, e se  $D$  for um morfismo de  $A$ -módulo, então  $D$  é uma  $A$ -derivação de  $B$  para  $M$ . Deste modo, para  $a \in A$  e  $x \in B$ , tem-se que  $D(ax) = aD(x) + D(a1)x$ .

**Definição A.16.10** (Módulo das Derivações). *Seja  $\text{Der}_A(B, M)$  o conjunto das  $A$ -derivações de  $B$  para  $M$ . Se definirmos  $D_1, D_2$  neste espaço tal que  $(D_1 + D_2)(x) = D_1(x) + D_2(x)$  e  $(aD)(x) = aD(x)$  para  $a \in A$  e  $x \in B$ , então  $\text{Der}_A(B, M)$  se torna um  $A$ -módulo.*

No caso de  $M = B$ , definindo-se  $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ , tem-se que  $[D_1, D_2] \in \text{Der}_A(B, B) = \text{Der}_A(B)$ , de modo que  $\text{Der}_A(B)$  se torna uma  $A$ -álgebra de Lie.

**Definição A.16.11** (Derivações em Álgebras de Lie). *Seja  $L$  uma  $A$ -álgebra de Lie e  $\text{Der}_A(L)$  a  $A$ -álgebra de Lie das derivações em  $L$ . Qualquer elemento de  $\text{Der}_A(L)$  será um morfismo de  $A$ -módulo e  $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ , para  $x, y \in L$ .*

Definindo-se  $D_u(x) = xu - ux$ , onde  $D_u : B \rightarrow M$  para  $u \in M$ , como sendo uma derivação interna, então para  $M = L$  definindo-se  $D_x(y) = [x, y]$ , pela identidade de Jacobi, tem-se que esta é uma derivação.

### A.16.1 Álgebras Envolventes

Dado um anel comutativo  $A$ , seja  $L$  uma  $A$ -álgebra de Lie e seja  $T(L)$  a  $A$ -álgebra tensorial sobre o  $A$ -módulo  $L$ . Seja também o ideal  $\mathcal{I}$  gerado por elementos da forma  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ , para  $x, y \in L$ . Então a  $A$ -álgebra dada por  $U(L) = T(L)/\mathcal{I}$  é chamada de  $A$ -álgebra universal envolvente de  $L$ . Por se tratar de uma álgebra graduada, a inclusão  $i : L \rightarrow U(L)$  é o mergulho canônico e  $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$

A álgebra universal envolvente é a álgebra unital associativa mais geral que contém todas as representações de uma álgebra de Lie. Esta última é mergulhada na álgebra associativa de maneira que o colchete de Lie seja representado pelo comutador. A álgebra envolvente é única. Para o caso de álgebras de Lie associadas a grupos de Lie, tem-se:

**Definição A.16.12.** Seja a álgebra tensorial do espaço vetorial  $\mathfrak{g}$ , que é uma álgebra de Lie. Sabe-se que ela é dada por:

$$T = T^0 \oplus T^1 \oplus \dots \oplus T^n \oplus \dots$$

onde  $T^n = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g}$  ( $n$  vezes), onde  $T^0 = K.1$ ,  $T^1 = \mathfrak{g}$ . Seja  $J$  um ideal bilateral de  $T$  gerado pelos tensores  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ , onde  $x, y \in \mathfrak{g}$ . A álgebra associativa  $T/J$  é a álgebra envolvente e é denotada por  $U(\mathfrak{g})$ .

Seja a aplicação  $\sigma = \pi \circ i$ , onde  $\pi : T \rightarrow T/J$  e  $i : V \rightarrow T$ , que associa para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ , tem-se  $\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) = \sigma([x, y])$

**Lema A.16.1.** Seja  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$  a aplicação canônica de  $\mathfrak{g}$  em  $U(\mathfrak{g})$  e seja  $A$  uma álgebra associativa com unidade, e seja  $\tau$  uma aplicação linear de  $\mathfrak{g}$  em  $A$  tal que:

$$\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x) = \tau([x, y]),$$

para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Então existe um e somente um homomorfismo  $\tau'$  de  $U(\mathfrak{g})$  em  $A$  tal que  $\tau'(1) = 1$  e  $\tau' \circ \sigma = \tau$ .



# APÊNDICE B – CONCEITOS TOPOLÓGICOS BÁSICOS

## B.1 Topologia

*Nesta seção, apresentam-se resumidamente os principais resultados de topologia que serão úteis. A maioria das definições e resultados estão iguais às encontradas em (LIMA, 1970) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982). A ideia principal é que aos conjuntos com estruturas algébricas apresentados nas seções anteriores (monóides, grupos, anéis e etc...), sejam introduzidas estruturas adicionais que permitam que se fale inicialmente do conceito de proximidade entre pontos, o que vai permitir a definição de convergência de sequências e limites, para posteriormente introduzir nestes mesmos conjuntos uma estrutura que permita se definir derivadas e integrais (as chamadas variedades diferenciáveis). Um espaço topológico é um conjunto dotado de uma estrutura que permite a definição de proximidade entre pontos e funções contínuas (o que ainda não é distância, que é um conceito associado a espaços métricos). A noção de proximidade é suficiente para que se possa saber se numa sequência de pontos, estes estão se aproximando (convergência) ou não. Com isso, é possível também definir continuidade de funções.*

**Definição B.1.1** (Topologia). *Dado um conjunto  $S$ , uma família  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $S$  é uma topologia em  $S$  se:*

- *O conjunto vazio e o próprio  $S$  estão contidos em  $\mathcal{T}$ ;*
- *Toda união de qualquer subfamília de  $\mathcal{T}$  (inclusive infinita) está contida neste;*
- *A intersecção de qualquer subfamília finita de  $\mathcal{T}$  está contida neste.*

*Os elementos de uma topologia são conhecidos como os subconjuntos abertos de  $S$ .*

**Definição B.1.2** (Espaço Topológico). *Um conjunto  $S$  dotado de uma topologia é conhecido como um espaço topológico  $(S, \mathcal{T})$ .*

*Por conveniência, denota-se espaço topológico somente pelo conjunto  $S$ .*

**Definição B.1.3** (Vizinhança). *Uma vizinhança  $N(p)$  de um ponto  $p \in S$  é qualquer subconjunto de  $S$  que contém um aberto que contém  $p$ .*

*Um aberto é sempre vizinhança de todos os seus pontos, o que não ocorre para vizinhanças em geral.*

**Definição B.1.4** (Filtro (ou Sistema) de Vizinhanças). *Dado um espaço topológico  $S$ , o filtro de vizinhanças de um ponto  $p$ , representado por  $\mathcal{V}(p)$ , é a família de todas as vizinhanças deste ponto.*

**Definição B.1.5** (Base de Vizinhanças). *Dado um espaço topológico  $S$  e  $p \in S$ , uma base para  $\mathcal{V}(p)$  é um subconjunto desta tal que para qualquer vizinhança de  $p$ , existe um elemento da base contido nesta.*

**Definição B.1.6** (Pontos indistinguíveis). *Dado um espaço topológico  $S$ , dois pontos são indistinguíveis se eles tem todas as vizinhanças em comum.*

**Definição B.1.7** (Pontos distinguíveis). *Dois pontos são topologicamente distinguíveis se existe um aberto que contém um dos pontos e não contém o outro.*

**Definição B.1.8** (Pontos de Acumulação). *Dado um espaço topológico  $S$ , um ponto  $p \in S$  é um ponto de acumulação de  $U \subset S$  se toda vizinhança de  $p$  contiver pelo menos um ponto de  $U$ .*

**Definição B.1.9** (Subconjunto Fechado). *Um subconjunto de  $S$  é fechado se ele contém todos os seus pontos de acumulação.*

*Um subconjunto é fechado se o seu complementar em  $S$  for aberto.*

**Definição B.1.10** (Fecho). *Dado um subconjunto  $U \subset S$ , onde  $S$  é um espaço topológico, o fecho de  $U$ , representado por  $\bar{U}$  é a união de  $U$  com todos os seus pontos de acumulação.*

**Definição B.1.11** (Fronteira). *Dado um conjunto  $U \subset S$ , define-se a fronteira de  $U$ , ou  $\partial U$  como sendo a intersecção  $U \cap \bar{U}$*

**Definição B.1.12** (Interior). *Dado um conjunto  $U \subset S$ , define-se o interior de  $U$  como sendo  $U - \partial U$ , e é representado por  $\text{int}(U)$ .*

*O interior é sempre um conjunto aberto na topologia em questão.*

**Definição B.1.13** (Ponto Interior). *Dado um conjunto  $U \subset S$ , diz-se que  $p \in U$  é um ponto interior se  $p \in \text{int}(U)$ .*

*Como exemplo, pode-se imaginar o subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$  onde  $x_1 \leq 0$  (e  $x_2$  qualquer). A fronteira é o eixo  $x_1 = 0$ , o interior é o conjunto  $x_1 < 0$ , e qualquer ponto deste é um ponto interior. O fecho é o próprio conjunto  $x_1 \leq 0$ , que é um conjunto fechado.*

**Definição B.1.14** (Topologia Trivial). *Dado o conjunto  $S$  não-vazio, se  $\mathcal{T}$  é formado somente pelo conjunto  $S$  e pelo conjunto vazio, diz-se que  $S$  tem uma topologia trivial.*

**Definição B.1.15** (Topologia Discreta). *Dado o conjunto  $S$  não-vazio, se  $\mathcal{T}$  é formado por todos os subconjuntos de  $S$  diz-se que  $S$  tem uma topologia discreta.*

*Para um dado conjunto  $S$ , se  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$  diz-se que a segunda é mais fina que a primeira. De fato, quanto mais fina for uma topologia, maior a quantidade de pontos que são topologicamente distintos. A topologia discreta é a mais fina de todas as topologia de  $S$ , enquanto que a topologia trivial é a mais grosseira. Os conceitos seguintes são importantes para que se possa definir separação entre dois pontos.*

**Definição B.1.16** (Espaço Kolmogorov). *Um espaço topológico é de Kolmogorov se quaisquer dois pontos distintos são topologicamente distinguíveis.*

**Definição B.1.17** (Espaço Hausdorff). *Um espaço topológico é Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos possuem vizinhanças disjuntas.*

**Definição B.1.18** (Espaços  $T_1$ ). *Um espaço topológico é  $T_1$  quando qualquer conjunto formado por somente um ponto é um conjunto fechado.*

**Definição B.1.19** (Espaço Topológico Normal). *Um espaço topológico  $S$  é normal se para qualquer par de conjuntos fechados disjuntos em  $S$ , existe um par de abertos disjuntos, cada um contendo um dos fechados.*

*Pode ser demonstrado que em espaços Hausdorff os pontos sempre são conjuntos fechados. A grande maioria dos espaços topológicos de interesse são de Hausdorff, então não detalharemos outras classes (de fato, a maioria dos espaços são normais, o que significa que todo par de conjuntos possui vizinhanças com intersecção vazia).*

**Definição B.1.20** (Base de uma Topologia). *Uma base  $\mathcal{B}$  de uma topologia  $\mathcal{T}$  é um subconjunto desta tal que todos os elementos da segunda são união de elementos da primeira.*

**Definição B.1.21** (Espaço Segundo Contável). *Todo espaço topológico  $S$  com uma base para a topologia que seja um conjunto contável recebe o nome de espaço segundo contável.*

**Definição B.1.22** (Base de Vizinhanças). *Uma base de vizinhanças de um ponto  $p \in S$  é uma família de vizinhanças de  $p$  tal que cada vizinhança de  $p$  contém um elemento da família.*

**Definição B.1.23** (Espaço Primeiro Contável). *Um espaço é primeiro contável se cada ponto de  $S$  possui uma base contável de vizinhanças;*

**Exemplo:** *O exemplo mais óbvio de um espaço topológico é o  $\mathbb{R}$ , onde os abertos são os intervalos  $(a, b)$ . De fato, qualquer  $\mathbb{R}^n$  com a base topológica formada pelas bolas abertas  $B(\delta, x)$  são espaços topológicos. Esses espaços possuem todas as propriedades descritas até agora.*

**Definição B.1.24** (Cobertura Aberta). *Uma família  $\{U_i\} \subset \mathcal{T}$  (ou seja, subfamília da topologia) de  $S$  é uma cobertura aberta se a união de todos os elementos da família contém  $S$ .*

*Um refinamento de  $\{U_i\}$  é uma subfamília desta cuja união também contém  $S$ , também chamada de subcobertura.*

**Definição B.1.25** (Espaço de Lindelöf). *Um espaço topológico é de Lindelöf quando toda cobertura aberta admite uma subcobertura contável.*

**Definição B.1.26** (Cobertura Localmente Finita). *Uma cobertura aberta é localmente finita se para cada ponto  $p \in S$  existe uma vizinhança  $N(p)$  que intersecta somente com um número finito dos elementos da cobertura.*

**Definição B.1.27** (Subconjunto Compacto). *Dado um espaço topológico  $S$  e  $U \subset S$ , diz-se que este conjunto é compacto se toda cobertura aberta de  $U$  tem uma subcobertura finita. Essa definição também vale para espaços topológicos compactos.*

*Se o espaço topológico é Hausdorff, todo conjunto compacto é também fechado.*

**Definição B.1.28** (Espaços Localmente Compactos). *Um espaço é localmente compacto se todo ponto tem uma vizinhança compacta.*

**Definição B.1.29** (Espaços Paracompactos). *Um espaço Hausdorff é paracompacto se toda cobertura aberta tem um refinamento localmente finito.*

**Definição B.1.30** (Suporte de uma Função). *Seja uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que o suporte de  $f$  é o fecho do conjunto de pontos onde  $f$  é não nula. Isso é equivalente a dizer que  $\text{supp}f = \{p \in M \mid \bar{f}(p) \neq 0\}$ .*

**Definição B.1.31** (Partições da Unidade). *Dado um espaço topológico  $S$ , diz-se que um conjunto de funções contínuas  $g_i : S \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$  é uma partição da unidade se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *O suporte de toda função  $g_i$  é compacto. Além disso, existem abertos  $W_i$  tais que  $\text{supp}g_i \subset W_i$ ;*
2. *Para cada ponto  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $p \in U$  onde somente um número finito de aplicações  $g_i$  são não nulas;*
3.  $\sum_i g_i = 1$ .

**Teorema B.1.1.** *Se um espaço topológico  $S$  é paracompacto, é sempre possível encontrar uma partição da unidade subordinada a uma cobertura localmente finita.*

**Definição B.1.32** (Subconjuntos Densos). *Dado um espaço topológico  $S$ , diz-se que um subconjunto  $U \subset S$  é denso em  $S$  se qualquer vizinhança de qualquer ponto  $p \in S$  contém pelo menos um ponto de  $U$ .*

*Outra forma de dizer isto é que sempre haverá um ponto de  $U$  arbitrariamente próximo de qualquer ponto de  $S$ . Uma definição equivalente é que todo conjunto denso em  $S$  possui o seu fecho igual ao próprio  $S$ .*

*O interior do fecho de um conjunto denso em  $S$  é o próprio  $S$ .*

**Definição B.1.33** (Espaços Separáveis). *Um espaço topológico  $S$  é separável se ele contém um subconjunto contável e denso  $\{p_n\}$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Deste modo, qualquer ponto de  $S$  estará arbitrariamente próximo de um elemento de uma sequência.*

**Exemplo:** *O conjunto dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$  e pelo fato do primeiro ser contável, tem-se que  $\mathbb{R}$  é separável. Qualquer espaço topológico segundo contável é separável. Basta escolher para cada elemento da base da topologia um elemento para formar a sequência.*

*Freqüentemente, pode-se criar topologias novas a partir de outras.*

**Definição B.1.34** (Topologia Relativa). *Dado  $U \subset (S, \mathcal{T})$  um subconjunto de um espaço topológico, diz-se que a topologia relativa de  $U$  em relação a  $S$  é topologia dada por  $\mathcal{T}_U = \{U \cap A \mid A \subset S\}$ .*

**Definição B.1.35** (Topologia Produto). *Dados dois espaços topológicos  $(S_1, \mathcal{T}_1)$  e  $(S_2, \mathcal{T}_2)$ , a topologia do produto é a topologia de  $S_1 \times S_2$  tal que sua base é dada por todos os pares  $(V_1, V_2)$ , onde  $V_1 \in \mathcal{T}_1$  e  $V_2 \in \mathcal{T}_2$ .*

*Dado o produto de espaços topológicos  $S_1 \times S_2$  e a projeção  $P_i : S_1 \times S_2 \rightarrow S_i$ ,  $i = 1, 2$ , a topologia produto é a topologia mais grosseira onde  $P_i$  é contínua. Sejam  $S_1, S_2$  espaços topológicos e  $S_1 \times S_2$  com a topologia produto. As aplicações  $i_p : S_2 \rightarrow S_1 \times S_2$  e  $i_q : S_1 \rightarrow S_1 \times S_2$  dadas por  $i_p(q) = (p, q)$  e  $i_q(p) = (p, q)$  são contínuas.*

**Definição B.1.36** (Topologia Quociente). *Dados um espaço topológico  $S$ , uma relação de equivalência  $\sim$  que identifica pontos em  $S$  e a aplicação sobrejetiva  $\pi : S \rightarrow S/\sim$  que é a projeção canônica de  $S$  no espaço quociente  $S/\sim$ , a topologia quociente (vide seção A.1) é a topologia mais fina em  $S/\sim$  tal que a projeção canônica  $\pi$  é uma aplicação contínua.*

*Dados dois espaços topológicos, o conjunto das aplicações entre estes também é um espaço topológico:*

**Definição B.1.37** (Topologia Compacto-Aberta). *Dados espaços topológicos  $R$  e  $S$ , o conjunto das aplicações contínuas entre estes espaços  $\mathcal{C}^0(R, S)$  é um espaço topológico cuja base é formada por conjuntos de aplicações da forma:*

$$W(C, O) = \{f \in \mathcal{C}^0(R, S) \mid f(C) \subset O\},$$

*onde  $O$  é aberto em  $S$  e  $C$  é compacto em  $R$ .*

**Lema B.1.1.** *Se  $S$  é Hausdorff, então  $\mathcal{C}^0(R, S)$  também é, assim como qualquer subespaço seu.*

**Definição B.1.38** (Sequência Convergente). *Dada uma sequência  $\{x_i\} \subset S$  em um espaço topológico  $S$ , diz-se que esta sequência é convergente para o limite  $q \in S$  se para qualquer vizinhança  $U(q)$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i > K$  tem-se que  $x_i \in U(q)$ .*

*O limite  $q$  da sequência é representado por  $\lim x_i = q$ . Segundo (CAMACHO; NETO, 1979), os espaços naturais para se definir aplicações contínuas são os espaços topológicos.*

**Definição B.1.39** (Aplicação Contínua). *Uma aplicação  $f : S \rightarrow R$  entre dois espaços topológicos é contínua em  $p$  se para qualquer vizinhança  $N(f(p)) \subset R$  existe uma vizinhança  $M(p) \in S$  tal que  $f(M(p)) \subset N$ .  $f$  é contínua se for contínua em todos os pontos de  $S$ .*

*Aplicações contínuas mapeiam pontos próximos no domínio em pontos próximos no contradomínio.*

**Definição B.1.40** (Aplicação Sequencialmente Contínua). *Uma aplicação  $f : S \rightarrow R$  entre dois espaços topológicos é sequencialmente contínua em  $p$  se para toda sequência  $\{x_i\}$  em  $S$  que converge para  $p$ , a correspondente sequência  $\{f(x_i)\}$  converge para  $f(p)$ .*

*Toda função contínua é sequencialmente contínua.*

**Definição B.1.41** (Aplicações Abertas (Fechadas)). *Dados dois espaços topológicos  $S, R$ , uma aplicação é aberta (fechada) se esta mapeia abertos (fechados) em abertos (fechados).*

**Teorema B.1.2.** *Uma aplicação  $f : S \rightarrow R$  é contínua se e só se para todo aberto  $U \subset R$  o conjunto  $V = f^{-1}(U) \subset S$  é um aberto em  $S$ .*

**Definição B.1.42** (Homeomorfismo). *Uma aplicação contínua  $f : S \rightarrow R$  entre dois espaços topológicos é um homeomorfismo se ela for bijetiva (vide seção A.1) e a sua inversa for contínua.*

*Desta forma, dois espaços topológicos  $S$  e  $R$  que possuem um homeomorfismo entre eles são chamados de homeomórficos. Com isto, é possível definir uma classe de equivalência, de modo que numa mesma classe estão todos os espaços topológicos homeomórficos. Diz-se também que dois espaços topológicos homeomórficos são iguais a menos de um homeomorfismo. Também é possível definir, como já foi feito na seção A.13, a categoria dos espaços topológicos **Top** cujos objetos são os espaços topológicos e os morfismos são os homeomorfismos.*

**Proposição B.1.1** (Composição). *A composta de duas aplicações contínuas é uma aplicação contínua.*

*Uma das aplicações contínuas mais importantes é:*

**Definição B.1.43** (Curva Contínua). *Uma aplicação contínua do tipo  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  é chamada de curva sobre o conjunto  $S$ . Diz-se que uma curva está contida em  $S$  se sua imagem pertence a  $S$ .*

*Uma classe especial de curvas sobre um espaço topológico são os caminhos, onde sempre se tem  $I = [0, 1]$ . Um caminho fechado é simplesmente um caminho onde  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .*

### B.1.1 Invariantes Topológicos e Topologia Algébrica

*Os invariantes topológicos são propriedades que são preservadas por um homeomorfismo, ou seja, são iguais entre espaços homeomórficos. Deste modo, espaços iguais (a menos de um homeomorfismo) devem possuir os mesmos invariantes topológicos. Estas propriedades servem principalmente para caracterizar o espaço topológico do ponto de vista global, isto é, considerando o espaço como um todo. Deste modo, a teoria das Categorias, apresentada na seção A.13, tem um importante papel aqui. De fato, boa parte do desenvolvimento realizado nesta teoria se deve aos problemas de Topologia Algébrica, que podem ser encontrados por exemplo em (MACLANE, 1978), (SATTINGER; WEAVER, 1986) (DOLD, 1972) e (SCHWARZ, 1996). Para este trabalho, esta parte da Topologia é importante pois os grupos de Lie importantes possuem invariantes topológicos bastante diferentes daquele do espaço euclidiano.*

**Definição B.1.44** (Conexidade). *Um espaço topológico é conexo se ele não for a união de dois subconjuntos disjuntos abertos não-vazios.*

**Definição B.1.45** (Conexidade por caminhos). *Um espaço topológico  $S$  é conexo por caminhos se, para quaisquer dois pontos  $p, q \in S$ , existe um caminho totalmente contido em  $S$  ligando estes pontos.*

*Dados dois espaços topológicos homeomórficos, se um deles for conexo por caminhos, o outro automaticamente será. Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo.*

**Definição B.1.46** (Espaços Localmente Conexos). *Um espaço é localmente conexo se qualquer vizinhança de qualquer ponto possui uma vizinhança que é um subconjunto conexo.*

*Quando  $S$  não for conexo por caminhos, é sempre possível dividi-lo em componentes conexas. A compacidade de um espaço topológico também é um invariante de importância para este trabalho.*

**Definição B.1.47** (Espaços Compactos). *Diz-se que um espaço topológico é compacto se toda sequência neste espaço tiver uma subsequência convergente com limite neste próprio espaço.*

**Definição B.1.48** (Aplicações Próprias). *Diz-se que uma aplicação contínua  $f : S \rightarrow R$  é própria quando para qualquer conjunto compacto  $K \subset R$ , a imagem inversa  $f^{-1}(K)$  também é um compacto em  $S$ .*

*A propriedade de Hausdorff também é invariante.*

**Definição B.1.49** (Espaços Simplesmente Conexos). *Um espaço topológico  $S$  é simplesmente conexo se ele for conexo e localmente conexo.*

*Ser simplesmente conexo também é um invariante topológico. Na topologia algébrica, estudam-se as propriedades de espaços topológicos que não dependem de deformações contínuas, ou seja, aquelas propriedades que são invariantes quando se aplicam deformações contínuas, ou seja, homeomorfismos. Dado um espaço topológico  $S$ , uma curva fechada  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  baseada no ponto  $x_0 = \gamma(0)$  é uma curva contínua tal que  $\gamma(1) = \gamma(0)$ .*

**Definição B.1.50** (Homotopia). *Seja  $S$  um espaço topológico. Uma aplicação contínua*

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

*onde  $h_s : \mathbb{R} \rightarrow X$  é uma curva contínua cujo parâmetro é  $t$  é chamada de homotopia.*

*Ao se variar  $s$  muda-se continuamente entre curvas contínuas. Duas curvas que podem ser deformadas continuamente uma na outra são chamadas de homotópicas. Todas as curvas baseadas num ponto  $x_0$  que são homotópicas formam uma classe de equivalência.*

**Definição B.1.51** (Concatenação). *Define-se concatenação de dois caminhos  $\gamma$  e  $\eta$ , e representada por  $\gamma \diamond \eta$ , em  $S$  como sendo a operação tal que origina o caminho  $\rho$  dado por  $\rho(t) = \gamma(2t)$  para  $t \in [0, 0.5]$  e  $\rho(t) = \eta(2t - 1)$  para  $t \in [0.5, 1]$ .*

*A concatenação de dois caminhos é um produto entre estes dois caminhos. O produto preserva a homotopia. Pode-se definir também a concatenação de duas classes de equivalência de curvas homotópicas: dadas as classes  $[\gamma]$  e  $[\eta]$  de curvas homotópicas baseadas em  $x_0$ , define-se a concatenação destas duas classes como sendo a classe de equivalência  $[\gamma \diamond \eta]$ . Pode-se mostrar que esse produto não depende dos representantes das classes. A toda curva corresponde uma inversa, que consiste em percorrer a curva do final para o começo, o mesmo valendo para as classes de equivalência homotópicas. A curva constante  $x_0$  e as classes das curvas que podem ser deformadas continuamente ao ponto  $x_0$  formam a classe identidade. Pode-se provar que a concatenação de classes de equivalência de curvas é associativa. Deste modo, identifica-se uma estrutura algébrica de grupo (vide seção A.3).*

**Definição B.1.52** (Grupo Fundamental  $\pi_1(S, x_0)$ ). *Dado um espaço topológico  $S$ , o grupo fundamental de  $S$  baseado no ponto  $x_0$  é o conjunto das classes de equivalência de curvas homotópicas fechadas onde a operação binária é a concatenação de classes homotópicas.*

**Exemplo:** A esfera  $S^2$  tem grupo fundamental trivial, pois todas as curvas fechadas são contrátveis a um ponto. Já  $S^1$  possui o grupo fundamental  $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$ , que é um grupo abeliano (vide seção A.3.1), pois uma curva que dá uma volta completa não pode ser reduzida a um ponto. Da mesma forma, uma curva que dá duas voltas não pode ser reduzida a uma que dá uma volta. Então, todas as curvas que dão  $n \in \mathbb{Z}$  voltas são equivalentes. Os números negativos correspondem a voltas no sentido contrário.

**Exemplo:** Já no caso do espaço topológico que tem a forma de um oito, ou  $\infty$ , ao se escolher como ponto base o ponto onde as circunferências se tocam, chamado aqui de  $x_0$ , haverá as curvas que não dão voltas nas circunferências, que são redutíveis à  $x_0$  (identidade do grupo), as curvas que dão um número  $n$  arbitrário de voltas na circunferência da esquerda, ou seja,  $a^n$ , as curvas que dão um número  $m$  arbitrário de voltas na direita, ou seja,  $b^m$ . Uma volta primeiro na direita e depois na esquerda é  $ba$ , que é diferente de  $ab$ . Deste modo, tem-se um elemento geral é  $a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2} \dots$ . Trata-se portanto do grupo livre a partir do alfabeto  $\{e, a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ , que é não-abeliano (vide seção A.3)

**Exemplo:** No caso do toro  $T^2$ , dado um ponto  $x_0$ , a identidade  $e$  será a classe das curvas homotópicas à constante  $x_0$ . A letra  $a$  será a classe das curvas que dão uma volta ao redor de  $T^2$ , como se fosse um anel. Um número  $n$  inteiro de voltas deste tipo é representado por  $a^n$ . Uma volta ao longo do perímetro também não pode ser reduzida aos casos anteriores, de modo que se tem uma nova classe de curvas  $b$ . Define-se também  $b^m$  para um número arbitrário de voltas. Olhando mais atentamente a figura, pode-se ver que  $aba^{-1}b^{-1} = e$ . Deste modo, este grupo é comutativo, ou seja, é o grupo livre  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Exemplo:** Para o caso de  $\mathbb{P}^1$  (espaço projetivo de dimensão um), o grupo fundamental é  $\{e, a\}$ , ou seja, é o grupo finito  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ . Neste último exemplo, tem-se um caso de torção, isto é,  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ . De fato, este espaço topológico consiste de uma circunferência  $S^1$  com pontos opostos identificados. A curva começando em um ponto  $x_0$  que pega meia circunferência e salta nos pontos extremos (porque são opostos) nunca pode ser reduzida a um ponto, porém qualquer outra curva deste tipo pode ser rodada e sempre vai incluir  $x_0$ . Porém, uma curva de meia circunferência que dá duas voltas pode ser deformada para um ponto, pois há dois pontos com saltos e estes pontos podem ir para lados opostos e se encontrarem, o que é uma redução a um ponto único, o que representa  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ .

Dados dois espaços topológicos  $S, R$  e uma aplicação contínua  $f : S \rightarrow R$  entre eles, haverá um homomorfismo induzido  $\pi(f) : \pi_1(S, x_0) \rightarrow \pi_1(R, f(x_0))$  tal que  $\pi(f)[\gamma] = [f \circ \gamma]$ . De fato, mostra-se que  $\pi_1$  é um funtor  $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$  que relaciona a categoria dos espaços topológicos com um ponto destacado, ou seja  $\mathbf{Top}_*$ , com a categoria dos grupos

**Grp**, ou seja, mapeia  $(S, x_0)$  com  $\pi_1(S, x_0)$  e os homeomorfismos que preservam  $x_0 \in S$  com os homomorfismos de grupo.

A homotopia dá então informações sobre os tipos de curvas fechadas e quais os tipos que elas se enquadram. Há grupos de homotopia de ordem superior. Entretanto, para espaços topológicos de dimensão maior, é mais adequado o uso do conceito de homologia, especialmente porque os chamados grupos de homologia são abelianos. A homologia lida com ciclos fechados de forma diferente que a homotopia, que é mais fácil de se computar. Uma introdução à homologia se dá através da teoria de grafos no plano (BONDY; MURTY, 2011).

**Definição B.1.53** (Complexo de Cadeias). Um complexo de cadeias é uma seqüência de grupos abelianos ligados por uma seqüência de homomorfismos  $\alpha_n : G_n \rightarrow G_{n-1}$  (conhecidos como operadores de fronteira) tais que valem:  $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$  para todo  $n$ . Escreve-se como:

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} G_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Note que a composta de operadores consecutivos é nulo, porém a seqüência não é necessariamente exata. De forma similar, pode-se definir um complexo de cadeias formado por  $R$ -módulos a direita ou a esquerda.

**Definição B.1.54** (Categoria dos Complexos de Cadeias). Dada a categoria  $\mathbf{Mod}_R$  dos  $R$ -módulos à direita, define-se a categoria  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Mod}_R)$  dos complexos de cadeias como sendo formada por objetos da forma:

$$\mathcal{A}: \quad \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

onde  $A_i$  são objetos da categoria  $\mathbf{Mod}_R$  e os  $\alpha_i$  são flechas desta mesma categoria. Uma flecha  $0 : B \rightarrow C$  é tal que mapeia cada elemento do objeto  $B$  no zero do objeto  $C$  (onde  $B, C$  são  $R$ -módulos à direita). Ainda  $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$ . Dados dois objetos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  desta nova categoria, uma flecha nesta categoria é uma família indexada de flechas de  $\mathbf{Mod}_R$ , ou seja  $\cdots, f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, \cdots$ , tal que:

$$\begin{array}{ccccc} A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & A_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ B_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\beta_n} & B_{n-1} \end{array}$$

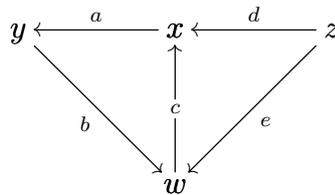
onde  $f_n \circ \alpha_{n+1} = \beta_{n+1} \circ f_{n+1}$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , e a composição de duas flechas se dá pela composição das componentes para o mesmo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição B.1.55** (Cadeia, Fronteiras e Ciclos). Denota-se o operador de fronteira por  $\partial_n$ . Um elemento do grupo  $G_n$  é chamado de  $n$ -cadeia, os elementos do grupo imagem de  $\partial_n$  são chamados de  $n$ -fronteiras e os elementos do núcleo de  $\partial_n$  são chamados de  $n$ -ciclos.

Pode-se dizer que  $\partial_n$  determina a  $(n - 1)$ -fronteira de uma  $n$ -cadeia. Os  $n$ -ciclos são objetos que não possuem  $(n - 1)$ -fronteiras. A  $n$ -cadeia nula pode ser pensada como  $n$ -fronteira nula. A composição nula de homomorfismos significa que não há fronteira de fronteiras. Estes conceitos são úteis mais adiante, quando falarmos de topologia.

**Definição B.1.56** (Cadeias de dimensão 0 e 1). Em um grafo, qualquer combinação linear inteira formal de vértices é uma cadeia de dimensão 0, ou 0-cadeia. Qualquer combinação linear inteira de elos é uma 1-cadeia.

**Exemplo:** Dado um grafo:



os vértices são  $x, y, z, w$  e os elos são  $a, b, c, d, e$ . Então,  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$  é uma 0-cadeia e  $\xi a + \phi b + \psi c + \eta d + \omega e$  é uma 1-cadeia, onde todos os coeficientes (letras gregas) são inteiros.

Dado um grafo  $S$ , o grupo abeliano das 0-cadeias é  $C_0(S)$  enquanto que o grupo abeliano das 1-cadeias é  $C_1(S)$ .

**Definição B.1.57** ( $k$ -Simplex). Um  $k$ -simplex é um polítopo convexo com  $k + 1$  vértices, ou seja, sendo  $u_0, \dots, u_k \in \mathbf{R}^k$ , os vetores  $u_l - u_0$  para  $l = 1, \dots, k$  são LI e o  $k$ -simplex é dado pelo conjunto  $\theta_0 u_0 + \dots + \theta_k u_k$ , onde  $\theta_i \geq 0$  e  $\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_k = 1$ .

Deste modo, um 0-simplex  $\Delta^0$  é um ponto (face tipo 0), um 1-simplex  $\Delta^1$  tem uma face tipo 1 (linha) e 2 faces tipo 0. Um 2-simplex  $\Delta^2$  (triângulo) tem uma face tipo 2 (superfície), 3 faces tipo 1 e 3 faces tipo 0, um 3-simplex  $\Delta^3$  (tetraedro) tem 1 face tipo 3 (volume), 4 faces tipo 2 (superfície), 6 faces tipo 1 (linha) e 4 faces tipo 0. Nota-se o padrão do triângulo de Pascal. De fato, o número total de faces em um  $k$ -simplex é sempre uma potência de dois e o número de  $l$  faces é o binômio de Newton  $\binom{k}{l}$ . Um  $k$ -simplex pode ser representado a partir de seus vetores  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ .

Como exemplo, dados dois vetores  $v_0, v_1$ , o segmento de reta  $[v_0, v_1]$ , com orientação de 0 para 1, é dado pelo lugar geométrico  $\theta_0 v_0 + \theta_1 v_1$ , onde  $\theta_0 + \theta_1 = 1$ . No caso de

$[v_0, v_1, v_2]$ , cuja orientação é da tripla de vetores, basta adicionar  $\theta_0 v_0 + \theta_1 v_1 + \theta_2 v_2$ , com  $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$ , o que vai gerar qualquer ponto dentro do triângulo determinado por estes vetores.

**Definição B.1.58** (*k*-cadeias). Dado um complexo simplicial  $S$ , o grupo  $C_k(S)$  das *k*-cadeias é dado por:

$$C_k(S) = \left\{ \sum_i m_i \sigma_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

onde  $\sigma_i$  são os *k*-símplices de  $S$ .

A multiplicação formal de um simplex por um número faz sentido quando se realiza integração naquela *k*-hipersuperfície. Qualquer complexo simplicial pode então ser decomposto em seus *i*-símplices, onde *i* varia de 0 até *k*, que é a maior dimensão no complexo simplicial. O grupo  $C_k(S)$  é um grupo abeliano livre cujo alfabeto são os *k*-símplices em  $S$ .

**Definição B.1.59** (Fases de um *k*-simplex). Dado um simplex  $S = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ , as *k* - 1-fases são obtidas fazendo-se todas as possíveis combinações dos vetores de  $S$ , após um ser retirado. As *k* - 2-fases são obtidas fazendo-se todas as possíveis combinações dos vetores de  $S$ , após dois serem retirados, e assim por diante, até sobrarem somente os vértices.

O número de *k*-faces respeita o triângulo de Pascal. As orientações sempre devem ser respeitadas.

**Definição B.1.60** (Complexos de simplexes). Um complexo de simplexes consiste de um lugar geométrico formado pela união de *k*-símplices.

Por exemplo, o complexo formado por  $[v_0, v_1]$  e  $[v_2, v_3]$  é dado pela união dos pontos  $\theta_0 v_0 + \theta_1 v_1$ , com  $\theta_0 + \theta_1 = 1$  e  $\theta_2 v_2 + \theta_3 v_3$  com  $\theta_2 + \theta_3 = 1$ . O conjunto de todos os simplexes é  $\mathcal{K}$ . Multiplicar formalmente um *k*-simplex por  $-1$  é equivalente a inverter a sua orientação. Por exemplo  $-[v_0, v_1] = [v_1, v_0]$ . No caso de 2-simplex,  $-[v_0, v_1, v_2]$  é equivalente a trocar o sinal da permutação de  $\{1, 2, 3\}$ . Pode-se decompor um complexo de símplices nos seus *k*-símplices.

**Definição B.1.61** (Operador de fronteira). Dado um *k*-simplex  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ , o operador de fronteira  $\partial : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  é dado por:

$$\partial \sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k],$$

O operador  $\partial$  quando aplicado a um simplex, fornece a fronteira deste. Por exemplo, o segmento  $[v_0, v_1]$  tem a fronteira  $[v_1] - [v_0]$ . Já o triângulo  $[v_0, v_1, v_2]$ . No caso de um 2-simplex  $[v_0, v_1, v_2]$ , aplicando-se o operador  $\partial$ , tem-se  $[v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ , que são três linhas orientadas todas no mesmo sentido e formando as bordas do triângulo. Este operador sempre transforma um  $k$ -simplex em sua fronteira.

**Teorema B.1.3.** *Pode-se mostrar que  $\partial^2\sigma = 0$ , para qualquer cadeia  $\sigma$ .*

A fronteira de uma fronteira é sempre nula. O operador de fronteira é linear e define um homomorfismo de grupo abeliano. Dados os grupos  $C_i(S)$ , para  $i = 0, \dots, k$ , pode-se definir os operadores de fronteira  $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ . Também é fácil ver que se tratam de homomorfismos. Seja  $Z_i = \ker \partial_i$  o conjunto dos complexos simpliciais que não têm fronteira (chamados de ciclos), e  $B_i = \text{Im } \partial_{i+1}$  o conjunto das fronteiras. Ambos estes conjuntos são também subgrupos de  $C_i$ . Deste modo:

$$\cdots \longrightarrow C_4 \xrightarrow{\partial_4} C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{0} 0$$

o que significa que  $B_i \subset Z_i$ . Ou seja, toda fronteira é um ciclo, mas nem todo ciclo é uma fronteira.

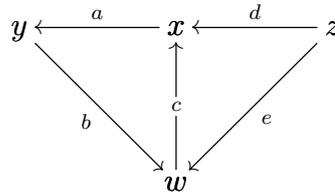
**Definição B.1.62** (Grupo de Homologia de ordem  $k$ ). *Dado um complexo de simplexes  $S$ , o grupo de homologia de ordem  $k$ , representado por  $H_k(S) = Z_k/B_k$ , é o grupo abeliano quociente das classes de equivalência dos  $k$ -ciclos módulo  $k$ -fronteiras. Os elementos de dos grupos de homologia são chamados de classes de homologia.*

Para o caso geral, sendo  $e$  o número de elos e  $v$  o número de vértices, tem-se que  $H_k = \mathbb{Z}^{e-v+1}$ . O grupo de homologia  $H_0(S)$  mede o número de componentes conexas. Sempre que ele for  $\mathbb{Z}^k$  então tem-se  $k$  componentes conexas. O grupo de homologia  $H_k(S)$  mede, em certo sentido, o número de buracos de dimensão  $k$  em  $S$ . Para o caso de um espaço topológico qualquer, é necessário verificar inicialmente qual é o complexo simplicial homeomórfico ao referido espaço. Por exemplo,  $S^1$  é homeomórfico à fronteira do triângulo, ou seja, três segmentos de linha (ou seja, três 1-simplices) e mais três vértices (0-simplices). Neste caso,  $C_0$  será  $\mathbb{Z}^3$ , já que há três vértices, com elemento típico  $a[v_0] + b[v_1] + c[v_2]$ , com  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $C_1$  será também  $\mathbb{Z}^3$ , já que há três segmentos de reta, com elemento típico  $d[v_0, v_1] + e[v_1, v_2] + f[v_2, v_0]$  com  $d, e, f \in \mathbb{Z}$ , e  $C_2 = 0$ , já que não há conjunto bidimensional. Como  $\partial_0 = 0$ , então  $Z_0 = C_0$ , e  $B_0$  é o subgrupo gerado por  $[v_1] - [v_0]$ ,  $[v_2] - [v_1]$  e  $[v_2] - [v_0]$ . Para achar  $H_0 = Z_0/B_0$ , primeiramente se encontra  $B_0$ . Um dos elementos deste espaço deve ser zero (identidade do grupo abeliano). Basta então fazer  $a([v_1] - [v_0]) + b([v_2] - [v_1]) + c([v_2] - [v_0]) \equiv 0$  para quaisquer

$a, b, c$ , o que significa dizer que  $[v_2] = [v_1] = [v_0]$ . Isto significa que  $(a + b + c)[v_0]$  é o espaço quociente e  $H_0 = \mathbb{Z}$ . Todo elemento é então da forma  $nx + B_0$ . É evidente que  $B_0$  tem dimensão dois, pois o conjunto de geradores é linearmente dependente. Para se calcular  $H_1$ , é necessário primeiro se calcular  $Z_1 = \ker \partial_1$  e como o elemento típico é  $d[v_0, v_1] + e[v_1, v_2] + f[v_2, v_0]$ , após a aplicação do operador de fronteira, tem-se:  $d[v_1] - d[v_0] + e[v_2] - e[v_1] + f[v_0] - f[v_2] = (d - f)[v_0] + (d - e)[v_1] + (e - f)[v_2]$ . Como deve ser zero, implica que  $d = f = e$ , logo  $Z_1 = d([v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0])$ , ou seja, é homomórfico a  $\mathbb{Z}$ . Como  $B_1 = \{0\}$ , então  $H_1$  é  $\mathbb{Z}$ . Por fim, tem-se que  $H_0(S^1) = \mathbb{Z} = H_1(S^1)$  e para todos os grupos de ordem maior, é zero. Isto significa que há uma componente conexa e um ciclo base, do qual todos os outros são formados.

Em geral, sempre que se identificar  $B_0$  a zero, todos os vértices de uma mesma componente conexa serão identificados, o que acaba indicando o número de componentes conexas. O grupo de homologia  $H_k(S)$  mede o número de buracos de dimensão  $k$  em  $S$ . O primeiro grupo de homologia  $H_0(S)$  é a abelianização do primeiro grupo de homotopia  $\pi_1(S, x_0)$ .

**Exemplo:** Dado um grafo:



qualquer elemento de  $C_0$  é do tipo  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$ . Já o grupo  $C_1$  é formado por combinações lineares inteiras de  $a, b, c, d, e$ . As fronteiras dos elos são  $\partial a = y - x$ ,  $\partial b = w - x$ ,  $\partial c = x - w$ ,  $\partial d = x - z$  e  $\partial e = w - z$ . A aplicação fronteira sobre qualquer combinação linear de elos é:

$$\begin{aligned} \partial(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \epsilon e) &= \alpha \partial a + \beta \partial b + \gamma \partial c + \delta \partial d + \epsilon \partial e = \\ &= (-\alpha + \gamma + \delta)x + (\alpha - \beta)y + (-\delta - \epsilon)z + (\beta - \gamma + \epsilon)w, \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Para encontrar os ciclos, é necessário que (B.1) seja igual a zero, o que vai resultar em um sistema linear de quatro equações com cinco incógnitas, que é um sistema

indeterminado. Fazendo-se  $\epsilon = r$  e  $\gamma = s$ , tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de modo que isto determina dois ciclos básicos  $a + b + c$  e  $-a - b - d + e$ . Quaisquer outros ciclos são combinações lineares destes ciclos, de modo que  $\ker \partial$  é o grupo abeliano  $\mathbb{Z}^2$ , que é  $H_1$ . É importante notar que o número de buracos linearmente independentes é igual a dois, já que há dois geradores. Qualquer outro buraco é uma combinação linear destes dois.

Entretanto, o interesse aqui não é em grafos, mas em curvas entre pontos em um espaço topológico. Em um plano, uma 2-cadeia é uma superfície orientada. No exemplo anterior, poderia-se supor que o ciclo  $a + b + c$  delimita uma superfície triangular com a mesma orientação, e  $a + b + c$  é a fronteira desta superfície triangular, que é chamada de 2-cadeia. Para que cada ciclo (ou seja, uma base de um subgrupo abeliano) continue contando o número de buracos é preciso retirar aqueles ciclos que são fronteiras, pois esses não delimitam buracos. Então, se  $Z_1 = \ker \partial_1$  é o subgrupo dos 1-ciclos e  $B_1$  é o subgrupo das fronteiras, todos os ciclos que são equivalente a fronteiras não entram na conta. Deste modo, o grupo abeliano mais adequado é  $H_1 = Z_1/B_1$ . Como  $B_1 = \mathbb{Z}$ , então  $H_1 = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ .  $B_1$  tem como base  $a + b + c$  e todos os seus elementos são do tipo  $\alpha(a + b + c)$ . O ciclo  $a + b - e + d = a + b + c - (c - d + e)$ , de modo que  $(a + b - e + d) \sim (c - d + e)$ , o que indica que o ciclo externo é equivalente àquele que tem o buraco. Define-se então um operador de fronteira para as superfícies, que é  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ , onde  $C_2$  é o grupo abeliano das 2-cadeias. O imagem de  $\partial_2$  é formada pelas fronteiras das superfícies que formam as 2-cadeias, de modo que  $H_1 = \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2$ . Deste modo, tem-se o seguinte:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

de onde se pode deduzir que  $H_2 = \ker \partial_2$ . Considerando-se no exemplo anterior, já no espaço tridimensional, que há duas superfícies cuja fronteira é o ciclo  $a + b + c$  (chamam-se essas duas superfícies de  $A$  e  $B$  com a orientação induzida por  $a + b + c$ ), então  $A - B$  é um elemento de  $C_2$  cuja fronteira é zero, logo está em  $\ker \partial_2$ . Como se trata de uma superfície fechada,  $A - B$  delimita um buraco. Se fossem acrescentadas cadeias de dimensão três,

isto é, cadeias de  $C_3$ , por exemplo aquela delimitada por  $A - B$ , que poderíamos chamar de  $\mathcal{A}$ , então  $A - B$  seria a sua fronteira e  $\mathcal{A}$  pertenceria a  $\ker \partial_3$ , onde

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Um simplex é um conjunto composto por pontos, segmentos de linhas, triângulos, tetraedros e seus correspondentes de dimensão maior que três. Uma definição mais formal é:

**Teorema B.1.4.** *Dados dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  e uma aplicação contínua entre eles  $f : X \rightarrow Y$ , pode-se definir  $H_n(f)$  como sendo o correspondente homomorfismo entre os correspondentes grupos de homologia  $H_n(X)$  e  $H_n(Y)$ . Deste modo,  $H_n$  é um funtor entre **Top** e **Ab**.*

## B.1.2 Espaços Métricos

Introduz-se agora a noção de distância entre dois pontos em um conjunto, bem como conceitos de topologia com essa nova definição.

**Definição B.1.63** (Métrica). *Dado um conjunto  $S$ , uma métrica é uma função  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada par de pontos  $(p, q)$  associa um número real e tal que:*

- $d(p, q) \geq 0$ , onde a igualdade só ocorre se  $p = q$ ;
- $d(p, q) = d(q, p)$ ;
- $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$  (desigualdade triangular).

Um par  $(S, d)$ , isto é, um conjunto mais uma métrica é chamado de espaço métrico. Um espaço métrico é canonicamente um espaço topológico. Deste modo, todos os resultados da topologia deduzidos até agora continuam válidos. Entretanto, nem todo espaço topológico é métrico. Entretanto, vale a pena refazer algumas definições especificamente para espaços métricos.

**Exemplo:** O exemplo mais simples de um espaço métrico é um subconjunto qualquer  $U \subset \mathbf{R}^n$  com a distância dada por  $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ . Outro exemplo importante é o conjunto das funções reais definidas num intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e que sejam contínuas, ou seja,  $C^0(a, b)$ . Definindo-se a métrica como sendo  $d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ , é fácil mostrar que esta operação satisfaz as propriedades de métrica.

O conceito de seqüência convergente é melhor apresentada em espaços métricos (assim como outras seqüências e suas propriedades). É fácil transportar todos os conceitos relacionados para espaços topológicos em geral. Dados dois espaços métricos  $(S, d)$  e  $(R, \delta)$  e uma aplicação  $f : S \rightarrow R$  entre eles, esta aplicação será contínua se e somente se for sequencialmente contínua.

**Definição B.1.64** (Seqüência Convergente). Dado um espaço métrico  $(S, d)$  e uma seqüência  $\{p_n\}$ , diz-se que esta seqüência é convergente (e converge para o limite  $p$ ) se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, p) = 0$ .

**Definição B.1.65** (Seqüência de Cauchy). Dado um espaço métrico  $(S, d)$  e uma seqüência  $\{p_n\}$ , diz-se que esta seqüência é de Cauchy se  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(p_n, p_m) = 0$

Uma seqüência de Cauchy nem sempre é convergente, apesar da distância entre os elementos sempre diminuir. O caso mais comum é que a seqüência de Cauchy converge para algo que está fora do espaço métrico.

**Definição B.1.66** (Espaços Métricos Completos). Um espaço métrico  $(S, d)$  é completo se toda seqüência de Cauchy for convergente.

Completeza não é um invariante topológico e é muito comum se completar um espaço, adicionando neste os limites de todas as seqüências de Cauchy.

**Proposição B.1.2** (de (LIMA, 1970)). Para um espaço métrico  $S$  são equivalentes as seguintes afirmações: 1)  $S$  é segundo contável; 2)  $S$  é Lindelöf; 3)  $S$  é separável.

Um espaço topológico é metrizable se existe um homeomorfismo entre este espaço e um espaço métrico. O espaço topológico herda então a topologia induzida pela métrica. Nem todo espaço topológico é métrico. Portanto, existem os chamados teoremas de metrização, que dão condições suficientes para um espaço topológico ser metrizable.

**Teorema B.1.5** (Metrização de Urysohn). Todo espaço topológico normal (vide seção B.1) com base contável é metrizable, isto é, pode-se encontrar uma métrica que origine naturalmente esta topologia.

Todo espaço métrico  $S$  é um espaço de Baire. Para os leitores interessados, três boas referências sobre topologia são (LIMA, 1970), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (SCHWARZ, 1996). O primeiro é uma abordagem completa sobre topologia de conjuntos de pontos, feito com rigor matemático. O segundo e mais particularmente o terceiro, introduzem também com rigor os conceitos básicos de topologia, mas apresentam intuição e aplicações em Física.

**Teorema B.1.6.** *Todo espaço métrico é Hausdorff e perfeitamente normal.*

**Definição B.1.67** (Aplicação Compacta). *Dados dois espaços métricos  $U, V$ , diz-se que uma aplicação  $f : U \rightarrow V$  é compacta se: 1)  $f$  é contínua; e 2) conjuntos limitados em  $U$  são mapeados em conjuntos relativamente compactos em  $V$ .*

**Definição B.1.68** (Função Lipschitz). *Dados dois espaços métricos  $(U, d)$  e  $(V, e)$ , uma função  $f : U \rightarrow V$  é Lipschitz se e somente se para algum  $K < \infty$ , tem-se que:*

$$e(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y), \text{ para todo } x, y \in U.$$

**Teorema B.1.7** (Continuidade do Máximo e Mínimo). *Dado um espaço métrico  $(S, d)$  e duas funções reais contínuas  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ , as funções  $\max(f(x), g(x))$  e  $\min(f(x), g(x))$  são também contínuas.*

**Definição B.1.69** (Aplicações Uniformemente Contínuas). *Dados dois espaços métricos  $(S, d_S)$  e  $(R, d_R)$  e uma aplicação  $f : S \rightarrow R$ , diz-se que está é uma aplicação uniformemente contínua se para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que:*

$$d_S(s_1, s_2) < \delta \Rightarrow d_R(f(s_1), f(s_2)) < \epsilon$$

para todo  $s_1, s_2 \in S$ .

*Toda aplicação uniformemente contínua é contínua.*

**Definição B.1.70** (Convergência Uniforme). *Dados um conjunto  $R$ , um espaço métrico  $(R, d)$ , uma sequência de aplicações  $\{f_k\}$  entre  $R$  e  $S$  e uma aplicação  $g : R \rightarrow S$ , diz-se que a sequência  $\{f_k\}$  converge uniformemente para  $g$  se a sequência  $\sup_{x \in R} d(f_k(x), g(x))$  converge para zero nos reais.*

*Essa definição vale tanto para aplicações limitadas quanto para aplicações não limitadas. Não é possível que um sequência de aplicações ilimitadas convirja para uma aplicação limitada.*

**Definição B.1.71** (Isometrias). *Dado um espaço métrico  $(S, d)$  e uma função  $f : S \rightarrow S$  tal que  $d(f(s_1), f(s_2)) = d(s_1, s_2)$ , diz-se que esta função é uma isometria.*

**Definição B.1.72** (Equicontinuidade). *Um conjunto de funções  $\mathcal{F}$  definidas em um espaço métrico compacto  $(K, d)$  é um conjunto de funções equicontínuas se para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para cada par  $s, s_0 \in S$  e  $f \in \mathcal{F}$  tem-se:*

$$d(s, s_0) \leq \delta \Rightarrow d(f(s), f(s_0)) < \epsilon.$$

## B.2 Grupos Topológicos e Suas Ações

Os principais conceitos algébricos relacionados a grupos foram apresentados nas seções A.3 e A.4. Entretanto, para as aplicações pretendidas neste trabalho, são necessários grupos e ações que possuam também a noção de proximidade, convergência e continuidade definidas. Na verdade, será necessário mais que isso, como por exemplo a noção de diferenciabilidade, que será visto mais adiante. Um grupo topológico  $G$  é um conjunto que além de ter definido um produto  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  e conter todos os pares de inversas, ainda possui uma topologia (ou seja, é um espaço topológico).

**Definição B.2.1** (Grupos Topológicos). Segundo (KAWAKUBO, 1991),  $G$  é um grupo topológico se satisfizer as seguintes condições: 1)  $G$  é Hausdorff (vide seção B.1); 2)  $G$  é um grupo, e 3) para  $G \times G$  dotado da topologia do produto, as aplicações  $\alpha : G \times G \rightarrow G$  e  $\beta : G \times G \rightarrow G$  definidas, respectivamente, por  $\alpha(g, h) = g \cdot h$  e  $\beta(g) = g^{-1}$ , são contínuas.

Isto significa que o produto e a inversão são aplicações contínuas nesta topologia. Qualquer grupo que for dotado da topologia discreta se torna um grupo topológico.

**Definição B.2.2** (Subgrupos Topológicos). Todo subgrupo  $H$  de um grupo topológico  $G$  se torna um grupo topológico quando dotado da topologia relativa (vide seção B.1). Entretanto, ele pode ser aberto, fechado ou até discreto em  $G$ .

O fecho de um subgrupo é sempre um subgrupo topológico, e se  $H$  for normal ou comutativo, assim será também o respectivo fecho. Uma classe especial de subgrupos topológicos são:

**Definição B.2.3** (Subgrupos de 1 parâmetro). Dado um grupo topológico  $G$  e um homomorfismo contínuo  $g : \mathbb{R} \rightarrow G$  tal que  $f(0) = e$ , diz-se que  $g$  é um subgrupo de 1 parâmetro uma vez que cada ponto  $g(t)$  é parametrizado pelos números reais.

De fato, esta classe especial de subgrupos só pode ser definida para grupos topológicos, uma vez que precisa do conceito de curva contínua. É óbvio que  $g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2)$ .

**Teorema B.2.1.** Em um grupo topológico  $G$ , a translação (vide seção A.4) de qualquer aberto é sempre aberto.

O produto direto de dois grupos topológicos é o produto direto dos dois grupos em questão com a topologia do produto (vide seção B.1).

**Lema B.2.1.** *Dado um grupo topológico, o sistema de vizinhanças simétricas e abertas da identidade e formam uma base de vizinhanças deste ponto.*

*Com o filtro de  $e$  (vide seção B.1), é possível falar de proximidade de um  $g$  em relação a  $e$ . Com a base simétrica, é possível dizer que  $g^{-1}$  está tão próximo de  $e$  quanto está o ponto  $g$ .*

**Definição B.2.4** (Automorfismos). *Dado um grupo topológico  $H$ , define-se  $\text{Aut}(H)$  como sendo o grupo topológico dos automorfismos de  $H$ , isto é, as aplicações de  $H$  nele mesmo que são ao mesmo tempo homomorfismos e homeomorfismos.*

**Definição B.2.5** (Produto Semi-Direto). *Sejam dois grupos topológicos  $N$  e  $G$  e  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$  um homeomorfismo contínuo (onde  $\text{Aut}(N)$  tem a topologia compacto-aberta, vide seção B.1). O produto semi-direto  $N \rtimes G$  é um grupo topológico onde o produto é dado por  $(n_1, g_1) \circ (n_2, g_2) = (n_1 \theta(g_1) n_2, g_1 g_2)$  e a inversa é dada por  $(n, g)^{-1} = (\theta(g^{-1}) n^{-1}, g^{-1})$ .*

*O quociente  $(N \rtimes G)/N \simeq G$  é um grupo topológico. Muitos grupos topológicos encontrados na prática podem ser escritos como produtos diretos ou produtos semi-diretos de outros mais básicos.*

*As  $G$ -ações contínuas de grupos topológicos em espaços topológicos têm especial interesse neste trabalho, em especial quando forem dotadas de estruturas que permitam definir diferenciabilidade.*

**Teorema B.2.2.** *Se  $S$  é um espaço topológico Hausdorff e compacto, então o conjunto dos homeomorfismos  $\text{Homeo}(S)$  é um grupo topológico.*

*Disto, podemos definir:*

**Definição B.2.6** (Grupos Topológicos de Transformação). *Seja  $G$  um grupo topológico,  $S$  um espaço topológico e  $\phi : G \times S \rightarrow S$  uma  $G$ -ação contínua. Diz-se então que  $G$  é um grupo topológico de transformações e  $\Phi : G \rightarrow \text{Homeo}(S)$  é uma aplicação contínua tal que  $\Phi_g(p) = \phi(g, p)$ .*

*Todos os resultados e nomenclaturas apresentados para  $G$ -ações se aplicam. Evidentemente,  $\ker \phi = \ker \Phi$  é um subgrupo normal. Dado um grupo topológico de transformações e uma ação  $\phi$  contínua, as aplicações  $\phi_g : S \rightarrow S$  dadas por  $\Phi_g(p) = \phi(g, p)$  são homeomorfismos de  $S$ .*

**Proposição B.2.1.** *Dada uma  $G$ -ação contínua no espaço topológico  $S$ , para qualquer curva contínua  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  a aplicação  $\phi(g, t)$  mapeia  $\gamma$  numa família de curvas contínuas.*

**Exemplo:** Qualquer grupo topológico  $G$  é um grupo topológico de transformações sobre ele mesmo (com  $G$  sendo também um  $G$ -espaço). Outro exemplo é o grupo dos isomorfismos de um espaço vetorial de dimensão  $n$ , que é representado por  $GL(n, \mathbb{R})$  (alguns autores representam por  $GL(n, V)$ , o que é irrelevante devido ao isomorfismo com  $\mathbb{R}^n$ ). A função contínua  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  é um homomorfismo entre estes dois grupos (o codomínio é o grupo  $(\mathbb{R}, +)$ ). Como a imagem da aplicação é a união disjunta  $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$  de dois abertos, a imagem inversa também é união de abertos disjuntos, o que significa que há duas componentes conexas:  $GL(n, \mathbb{R})^+$  e  $GL(n, \mathbb{R})^-$  (vide seção B.1), sendo que somente a primeira é um grupo (pois contém a matriz identidade). Pode-se dizer ainda que as transformações da primeira componente preservam a orientação do espaço vetorial orientado  $(V, \vec{E})$ , enquanto que as do segundo as inverte.

Já é possível se falar em dinâmica somente com o conceito de continuidade (no tempo). Deste modo, a seguinte definição é de interesse.

**Definição B.2.7** (Sistemas Dinâmicos Topológico). Seja o grupo topológico  $\mathbb{R}$  (grupo abeliano) e uma  $\mathbb{R}$ -ação deste num espaço topológico  $S$  (ou seja, é o  $\mathbb{R}$  espaço). Diz-se que uma ação deste tipo é um sistema dinâmico topológico completo em  $S$ .

Então, uma partícula no espaço topológico  $S$  teria seu movimento definido para todo instante de tempo (embora não se possa definir velocidade, o que precisa de diferenciabilidade). A órbita que passa no ponto inicial da partícula seria o subespaço topológico onde se poderia encontrar a partícula. Os movimentos para frente e para trás no tempo estão definidos, uma vez que cada ação corresponde uma ação inversa (propriedade de grupo). Alguns teoremas finais sobre o status topológico de grupos de transformações são:

**Teorema B.2.3.** Se  $S$  é um espaço topológico  $T_1$  e  $\phi$  é a ação no grupo, então  $\ker \phi$  é um subgrupo fechado de  $G$ . Além disso,  $G/\ker \phi$  é um grupo topológico.

Qualquer grupo de transformações que não for uma ação efetiva vai induzir uma que seja (vide seção A.4).

**Teorema B.2.4.** Se  $S$  é um espaço topológico  $T_1$ , então a ação de grupo de transformação topológico  $\phi : G \times S \rightarrow S$  induz uma ação efetiva  $\bar{\phi} : G/\ker \phi \rightarrow S$ .

O seguinte lema é importante para saber os efeitos de uma ação sobre a topologia:

**Lema B.2.2.** Seja  $J$  um subconjunto de  $G$ ,  $U$  um subconjunto de  $S$  e  $JU = \{gx | g \in J, x \in U\}$ . Então: 1) se  $U$  é aberto, então  $JU \subset S$  é aberto; 2) Se  $J$  é compacto e  $U$  é fechado, então  $JU$  é fechado em  $S$ ; 3) Se  $J$  e  $U$  são compactos, então  $JU$  é compacto.

**Teorema B.2.5.** *Dado um grupo de transformações topológico  $\phi : G \times S \rightarrow S$ , se  $S$  é Hausdorff então o conjunto dos pontos fixos  $S^J$  (onde  $J \subset G$  é subgrupo) é fechado. Ainda, se  $\bar{J}$  é o fecho de  $J$ , então  $S^J = S^{\bar{J}}$ .*

**Proposição B.2.2.** *Se  $G$  é compacto e  $S$  é Hausdorff, então a aplicação  $\bar{f} : G/G_p \rightarrow G(p)$  dada por  $\bar{f} \circ \pi = f$ , onde  $f : G \rightarrow G(p)$  e  $f(g) = \phi(g, p)$  uma ação, é um  $G$ -homeomorfismo.*

*Dada uma ação  $\phi : G \times S \rightarrow S$ , o conjunto das órbitas  $S/G$  dotado da topologia quociente é conhecido como espaço das órbitas.*

**Proposição B.2.3.** *A aplicação projeção  $\pi : X \rightarrow X/G$  é uma aplicação aberta e contínua e ainda se  $S$  satisfaz o primeiro (segundo) axioma da contabilidade,  $S/G$  também.*

As propriedades topológicas do espaço das órbitas só são interessantes quando o grupo  $G$  é compacto. De fato:

**Proposição B.2.4.** *Seja  $G$  um grupo topológico compacto e  $\phi : G \times S \rightarrow S$  um grupo de transformações. Então: 1)  $\pi : S \rightarrow S/G$  é uma aplicação fechada; 2) Se  $X$  é Hausdorff, então  $S/G$  também é; 3)  $\pi : S \rightarrow S/G$  é própria; 4)  $S$  é compacto se e só se  $S/G$  também for; 5)  $S$  é localmente compacto se e só se  $S/G$  também for.*

Boa parte da teoria aqui apresentada pode ser encontrada em (STEENROD, 1951). Um conceito fundamental é:

**Definição B.2.8** (Espaço Homogêneo). *Um espaço topológico  $S$  é homogêneo se ele admite uma única  $G$ -ação transitiva, ou seja, há somente uma órbita.*

O exemplo mais importante de espaço homogêneo é:

**Definição B.2.9** (Translações à Esquerda e à Direita em  $G/H$ ). *Diz-se que  $G/H$  é um espaço homogêneo sobre as ações induzidas  $\bar{L} : G \times G/H \rightarrow G/H$  e  $\bar{R} : G/H \times G \rightarrow G/H$ , onde a primeira, translação à esquerda, é dada por  $\bar{L}_g x = \pi(g\pi^{-1}(x))$ .*

Esta ação consiste de um grupo de transformações topológico  $G$  em  $G/H$ , e que além disso, é uma ação transitiva, o que mostra que se trata de um espaço homogêneo. Para este espaço, há vários resultados que podem ser encontrados em (KAWAKUBO, 1991).

**Lema B.2.3.** *Dado um grupo topológico  $G$  e um subgrupo  $H \subset G$  fechado (no sentido topológico), então o espaço  $G/H$  é Hausdorff e o mapa  $\pi : G \rightarrow G/H$  é contínuo e aberto.*

Além disso, se  $N \subset G$  é um subgrupo normal e fechado, então  $G/N$  é um grupo topológico. Dado um homomorfismo contínuo, o núcleo será sempre um subgrupo normal e fechado.

**Teorema B.2.6.** *Seja  $H_0$  o máximo subgrupo normal de  $G$  contido em  $H$ , que é dado por:*

$$H_0 = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

*Então as ações  $L, R : G \times G/H \rightarrow$  são tais que  $\ker L = \ker R = H_0$ .*

**Corolário B.2.1.** *O grupo  $G/H_0$  age efetivamente em  $G/H$ .*

**Proposição B.2.5.** *Se  $N \subset G$  é um subgrupo topológico normal e fechado, então a ação de  $G$  em  $S$  induz uma  $G/H$ -ação em  $S/H$  e há um homeomorfismo natural:*

$$X/G \rightarrow (X/H)(G/H).$$

**Lema B.2.4.** *Seja  $G$  um grupo topológico compacto e  $H_1, H_2 \subset G$  subgrupos compactos. Então, vale o seguinte:*

- *Existe uma  $G$ -aplicação  $f : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  se e somente se  $H_1$  e  $H_2$  são conjugados;*
- *Se existir  $a \in G$  com  $aH_2a^{-1} \subset H_1$ , então a aplicação  $f_a : G/H_1 \rightarrow G/H_2$  definida por  $f_a(gH_1) = ga^{-1}H_2$  é uma aplicação bem definida e toda  $G$ -aplicação tem esta forma;*
- *$f_a = f_b$  se e somente se  $ab^{-1} \in H_2$ .*

Um dos resultados de maior importância para o estudo de espaços homogêneos é:

**Proposição B.2.6.** *Se  $G$  é um grupo topológico compacto e  $S$  é homogêneo e Hausdorff, então  $S$  é  $G$ -homeomórfico ao espaço homogêneo  $G/G_p$  para qualquer  $p \in S$ .*

Deste modo, pode-se restringir o estudo da ação de grupos compactos em espaços de Hausdorff homogêneos em espaços homogêneos do tipo  $G/H$ .

**Teorema B.2.7.** *Se  $G$  é compacto, o espaço dos  $G$ -homeomorfismos de  $G/H$  nele mesmo, isto é,  $\text{Homeo}^G(G/H)$  coincide com o espaço dos  $G$ -automorfismos de  $G/H$  com a topologia compacto-aberta, e ambos são subgrupos topológicos de  $\text{Homeo}(G/H)$ .*

e como corolário, tem-se:

**Corolário B.2.2.** *Se  $H \subset G$  é um subgrupo normal fechado do grupo compacto  $G$ , então os espaços  $\text{Homeo}^G(G/H)$  e  $G/H$  são isomórficos como grupos topológicos.*

Com estes resultados, podemos criar a seguinte relação de equivalência, com o intuito de classificar as ações:

**Definição B.2.10** (Tipos de Órbitas). *Seja  $G$  um grupo topológico compacto e  $\mathcal{F}_G$  a família de todos os espaços Hausdorff homogêneos de  $G$ . Diz-se que  $X, Y \in \mathcal{F}_G$  são equivalentes se existir um  $G$ -homeomorfismo entre estes dois espaços.*

As classes de equivalência, representadas por  $(X)$ , são chamadas de *tipos de  $G$ -órbitas*.

**Definição B.2.11** (Tipos de Isotropia). *Se  $X \in (G/H)$ , dizemos que  $X$  tem o tipo de isotropia da classe de conjugação de  $H$ .*

De fato, a ação de  $H$  em  $G$  induz as órbitas que estão em  $G/H$ . A dimensão das órbitas caracteriza o tipo. Dado  $H \subset G$ , o movimento de um ponto  $g \in G$  qualquer pode ser decomposto no movimento do correspondente co-conjunto de  $H$  (que contém  $g$ ), ou seja, a projeção em  $G/H$ , e no movimento em  $H$ . Entretanto, algumas resultados preliminares são necessários.

**Teorema B.2.8** (Ação de  $H$  sobre ele mesmo,  $G/H$  e  $H/G$ ). *i) O subgrupo  $H$  é invariante por ele mesmo; ii) O co-conjunto à esquerda  $g.H$  é invariante à direita por  $H$ ; iii) co-conjunto à direita  $H.g$  é invariante à esquerda por  $H$ ; iv) A aplicação de  $h \in H$  pela esquerda em  $g.H$  causa movimento à esquerda em  $G/H$ ; v) A aplicação de  $h \in H$  pela direita em  $H.g$  causa movimento à direita em  $H/G$ ; vi) Quando o grupo  $G$  é abeliano seus co-conjuntos invariantes à esquerda e à direita coincidem.*

*Demonstração.* i) Óbvio; ii) Vem de  $g.H.H = g.H$ ; iii)  $H.H.g = H.g$ ; iv) óbvio; v) óbvio; vi)  $g.h = h.g$ , o que implica que  $g.H = H.g$ . ■

**Teorema B.2.9** (Ação de  $G$  sobre ele mesmo,  $G/H$  e  $H/G$ ). *i) A ação de  $G$  pela esquerda em  $G/H$  resulta em movimento dentro de  $G/H$ ; ii) A ação de  $G$  pela direita em  $G/H$  resulta em troca de elemento entre  $G/H$  e  $H \setminus G$ .*

*Demonstração.* i) Se  $g_1, g_2 \in G$ , tem-se  $g_1.(g_2.H)$ , que resulta em  $(g_1.g_2).H$ , que é outro elemento de  $G/H$ ; ii) Se  $g_1, g_2 \in G$ , tem-se  $(g_2.H).g_1 = g_2.(H.g_1)$ . ■

O raciocínio pode ser repetido agora para o subconjunto  $H \setminus G$ . Se a ação à esquerda de  $H$  não causasse movimento à esquerda de  $G/H$ , haveria uma situação de genuína

decomposição de movimento. Esta só ocorrerá quando o subgrupo  $H$  for normal, o que será estudado a seguir.

**Teorema B.2.10** (Ação de  $G$  em grupos quocientes). *i) O conjunto  $G/N$  é invariante pela ação de  $G$ ; ii) A ação de  $N$  em  $G/N$  não causa movimento em  $G/N$ ;*

*Demonstração.* Se  $g_1, g_2 \in G$ , tem-se que  $g_1.(g_2.N) = (g_1.g_2).N = N.(g_1.g_2) = (N.g_1).g_2$ , o que indica que tudo se passa no espaço único  $G/N$ ; ii) Como  $N.(g.N) = (N.g).N = g.N.N = g.N$ , nota-se que  $N$  não causa movimento em  $G/N$ ; ■

De tudo isso, pode-se concluir que a ação de  $G$  sobre  $G$ , quando este possui um subgrupo normal, pode ser separada na ação de  $G/N$  e de  $N$ . A ação sobre  $G$  também pode ser vista como a ação em  $G/N$  e a ação em  $N$ . A vantagem está no fato que  $G/N$  não causa movimento interno em  $N$ , e vice-versa. De fato, qualquer elemento de  $G$  pode ser escrito da forma  $g = n.h$ , onde  $n \in N$  e  $h \in G$ . Deste modo: **Ação de  $G$  sobre  $G$ :**  $(n_1.h_1).(n_2.h_2) = (n_1.n_2).(h_1.h_2)$ , que resulta em outro elemento decomposto desta forma, o que prova o desejado. **Ação de  $G/N$  sobre  $G/N$ :**  $(h_1.N).(h_2.N) = (h_1.h_2).N$ , o que mostra que o movimento dentro de  $G/N$  só depende de elementos que não estão nele. Se  $h_2 \in N$ , então ele teria sido absorvido, ou seja,  $(h_1.N).(h_2.N) = (h_1.h_2).N = h_1.N$ ; **Ação de  $G/N$  em  $G$ :** Esta ação força novamente a partição de  $G$  em  $G/N$ , pois  $(g.N).h = g.(N.h) = (g.h).N$ . **Ação de  $G/N$  em  $N$ :** Por outro lado, a ação de  $G/N$  sobre  $N$  transforma em  $g.N$ ; **Ação de  $G/N$  em  $G/N$ :** pela própria estrutura de grupo, esta ação é análoga à de  $G$  em  $G$ .

A utilidade dos grupos topológicos, especialmente os grupos de Lie, que incluem estrutura diferencial, não fica clara somente com estas poucas páginas. De fato, a referência (KAWAKUBO, 1991) é toda voltada para este assunto. A continuação deste assunto, segundo o entendimento do autor da citada referência, são os *fibrados topológicos*, onde se desenvolve toda a teoria de fibrados (que é de importância fundamental para este trabalho) inicialmente sem falar da estrutura diferencial. Como nosso objetivo é aplicação, decidimos apresentar as duas coisas juntas, já que todos os nossos fibrados serão diferenciais.

### B.3 Outras Estruturas Algébricas com Topologia

Por fim, é importante falar de alguns conceitos fundamentais de espaços que possuem uma estrutura algébrica, além da topológica. De forma geral, um espaço qualquer com

a estrutura algébrica deve ainda ser compatível com a topologia, isto é, as aplicações definidas devem ser funções contínuas.

**Definição B.3.1** (Anel Topológico). *Diz-se que um anel  $(R, \cdot, +)$  munido de uma topologia  $\mathcal{T}$  é um anel topológico se as operações de multiplicação  $\cdot : V \times V \rightarrow V$  e adição  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  forem funções contínuas segundo esta topologia.*

Um corpo topológico deverá ainda ter a aplicação inversão da multiplicação como sendo uma aplicação contínua.

**Definição B.3.2** (Módulo Topológico). *Seja um  $R$ -módulo  $M$  onde  $R$  é um anel topológico e ainda está definida uma topologia  $\mathcal{T}$  sobre  $M$ . Se a adição  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  e multiplicação por elemento do anel  $R \times V \rightarrow V$  forem aplicações contínuas, diz-se que se trata de um  $R$ -módulo topológico.*

**Definição B.3.3** (Espaço Vetorial Topológico). *Dado um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo topológico  $F$  e que ainda é dotado de uma topologia, diz-se que este é um espaço vetorial topológico se ele for um  $F$ -módulo topológico.*

**Definição B.3.4** (Base num Espaço Vetorial Topológico). *Seja  $V$  um espaço vetorial topológico e  $U$  um subconjunto linearmente independente que é também um base de  $V$ . Para que este conjunto efetivamente gere o espaço  $V$ , é necessário ainda que  $V = \bar{U}$ , ou seja, que o conjunto seja denso em  $V$  (vide seção B.1).*

**Definição B.3.5** (Espaço Separável). *Seja  $V$  um espaço vetorial topológico e  $U$  denso e que gere  $V$ . Se o conjunto  $U$  for ainda contável diz-se que o espaço  $V$  é separável.*

**Definição B.3.6** (Norma de um Espaço Vetorial). *Seja  $V$  um espaço vetorial. Diz-se que uma aplicação  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma norma se para cada  $\mathbf{v} \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se que: 1)  $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$ ; 2)  $\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\|$  3)  $\|\mathbf{v}\| = 0$  se e somente se  $\mathbf{v} = 0$ .*

Um espaço vetorial qualquer que possua uma norma é conhecido como *espaço vetorial normado*. Um espaço vetorial normado é naturalmente um espaço métrico, uma vez que se pode definir a métrica como sendo  $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$ . Deste modo, todo espaço vetorial normado é um espaço vetorial topológico.

**Definição B.3.7** (Bola Unitária). *Dado um espaço vetorial normado, uma bola unitária aberta é o subconjunto do espaço dado por  $\|\mathbf{v}\| < 1$ . Uma bola unitária fechada é dada por  $\|\mathbf{v}\| \leq 1$*

Uma classe especial de espaços vetoriais normados é formada pelos chamados:

**Definição B.3.8** (Espaços de Banach). *Um espaço vetorial normado que for completo como espaço métrico é conhecido como Espaço de Banach*

Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Como exemplo de espaço de Banach de dimensão finita, temos o  $\mathbb{R}^n$  onde a norma é a própria distância euclidiana  $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\sum_i (v_1^i - v_2^i)^2}$ . Os espaços vetoriais de dimensão infinita, por outro lado, são mais complexos.

**Exemplo:** Seja  $S$  o espaço vetorial topológico das funções contínuas e limitadas  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , e que é representado por  $\mathcal{C}^0(S)$ . Se dotarmos este espaço com a norma  $\|f\| = \sup_{p \in S} |f(p)|$ , que é a chamada *norma uniforme*, teremos um espaço de Banach. Este espaço porém não é separável.

**Definição B.3.9** (Espaço de Hilbert). *Dado um espaço vetorial  $V$  com um produto interno  $(\cdot|\cdot)$ , este espaço induz uma norma  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$ . Se este espaço for ainda um espaço de Banach, diz-se que ele é um espaço de Hilbert.*

Por fim, tem-se a importante definição:

**Definição B.3.10** (Álgebra Topológica). *Diz-se que uma álgebra  $(M, \cdot)$  é uma álgebra topológica se  $M$  é dotado de uma topologia e se  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  é uma aplicação contínua.*

# APÊNDICE C – CONCEITOS DE ANÁLISE E GEOMETRIA DIFERENCIAL

## C.1 Definições Básicas de Análise Real

As definições e resultados desta seção podem ser encontradas em (RUDIN, 1974), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (LIMA, 2002) e (BERBERIAN, 2013), pois são elementares.

**Definição C.1.1** (Sequência). *Uma sequência é uma função  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e normalmente é representada por  $\{a_n\}$ .*

Deste modo, a imagem da sequência tem a cardinalidade de  $\mathbb{N}$ .

**Definição C.1.2.** *Dada uma sequência  $\{x_n\}$ , define-se o limite superior e o limite inferior respectivamente, como sendo:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} x_m).$$

Para o caso de funções, a definição se estende de forma óbvia.

**Definição C.1.3** (Função Indicadora). *Dada uma função  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in A, \\ 0 & , \text{ se } x \notin A, \end{cases}$$

*diz-se que está é uma função indicadora ou característica do conjunto  $A$ .*

**Definição C.1.4** (Convergência ponto-a-ponto). *Diz-se que uma sequência de funções  $\{f_k(x)\}$  converge ponto-a-ponto para  $f(x)$  se:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x),$$

para cada  $x$  no domínio da função.

**Definição C.1.5** (Continuidade uniforme). *Uma função contínua em  $\mathcal{C}(X)$  é uniformemente contínua se para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$ , ambos independentes de  $x, y \in X$ , tal que se  $|x - y| < \delta$  tem-se que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .*

Isto significa que a velocidade com que  $f(x)$  se aproxima de  $f(y)$  depende somente da velocidade com que  $x$  se aproxima de  $y$ , independente de qual  $x$  for. Por exemplo  $x^2$  não é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$  nem  $\tan(x)$  em  $[0, 2\pi)$ .

**Definição C.1.6** (Espaço métrico totalmente limitado). *Um espaço métrico  $(S, d)$  é totalmente limitado se e somente se para cada  $\epsilon > 0$  existe um conjunto finito  $F \subset S$  tal que para cada  $x \in S$  existe algum  $y \in F$  com  $d(x, y) < \epsilon$ .*

**Definição C.1.7** (Espaço Vetorial de Funções). *Uma coleção  $F$  de funções reais definidas em um conjunto  $X$  forma um espaço vetorial se e somente se para qualquer  $f, g \in F$  e  $c \in \mathbb{R}$  tem-se que  $cf + g \in F$ , onde  $(cf + g)(x) = cf(x) + g(x)$  para todo  $x \in X$ .*

**Definição C.1.8** (Álgebra de Funções). *Se  $F$  é um espaço vetorial de funções e ainda definirmos o produto de funções  $fg$  tal que  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  e  $fg \in F$ , dizemos que  $F$  é uma álgebra de funções.*

É interessante notar que se para cada  $x, y \in X$  tal que  $x \neq y$  existe algum  $f$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ , diz-se que  $F$  separa pontos.

**Definição C.1.9** (Espaço das Funções Contínuas). *Seja  $U$  um espaço topológico. O conjunto das funções reais contínuas em  $U$  é representado por  $\mathcal{C}^0(U)$ , que é um espaço vetorial, uma vez que estão definidos a soma  $f + g$  e a multiplicação por escalar  $\alpha f$ .*

**Teorema C.1.1** (Stone-Weierstrass). *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto e seja  $F \subset \mathcal{C}^0(K)$  uma álgebra que separa pontos e contém as funções constantes. Então  $F$  é denso em  $\mathcal{C}^0(K)$  para a norma do sup.*

**Corolário C.1.1** (Weierstrass). *Em qualquer compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d < \infty$ , o conjunto dos polinômios em  $d$  variáveis é denso em  $\mathcal{C}^0(K)$  para a norma do sup.*

**Definição C.1.10** (Espaços de Funções  $\mathcal{C}^k(X)$ ). *Dado um espaço topológico  $X \subset \mathbb{R}^n$ , o espaço das funções reais com derivadas até ordem  $k$  contínuas é representado por  $\mathcal{C}^k(X)$ .*

Se  $k = 0$ , temos a classe das funções contínuas. A classe das funções que tem derivadas contínuas de todas as ordens é representada por  $\mathcal{C}^\infty(X)$ .

**Definição C.1.11** (Suporte de uma função). *Dada uma função  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se o suporte desta função, representado por  $\text{supp}(f)$ , como sendo o fecho do subconjunto  $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ .*

O espaço das funções de classe  $\mathcal{C}^\infty(X)$  com suporte compacto é representada por  $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ .

**Exemplo:** Um exemplo de uma função da classe  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  é:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Esta função tem todas as derivadas (de todas as ordens) bem definidas.

Para se definir estes objetos, são necessárias as seguintes definições.

**Teorema C.1.2.** *Se  $f \in \mathcal{C}^0(U)$ , então o suporte de  $f$  é sempre um conjunto fechado.*

**Definição C.1.12** (Espaço das Funções Contínuas com Suporte Compacto). *Seja  $U$  um espaço topológico. O conjunto das funções reais contínuas em  $U$  com suporte compacto é representado por  $\mathcal{C}_c^0(U)$ , que também é um espaço vetorial.*

O conceito de derivada vem do processo limite bastante conhecido:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

onde o limite vindo pela direita e pela esquerda devem ser iguais. De forma semelhante, se definem derivadas parciais. Para se definir diferenciabilidade em um espaço topológico  $S$  é necessário transformá-lo em uma variedade diferenciável, conceito esse que será apresentado na seção C.3. Diversos operadores diferenciais, como derivada exterior, covariante e de Lie (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982; BURKE, 1985) usam, quando expressos em coordenadas, as derivadas parciais (definidas por processos limites).

**Definição C.1.13** (Funções Analíticas Reais). *Uma função  $f$  é analítica em  $U \subset \mathbb{R}^n$ , ou seja, pertence ao espaço  $\mathcal{C}^\omega(U)$ , se ela for de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $U$  e além disso a série de Taylor*

de  $f$  converge em  $U$ . Em outras palavras, significa que a função pode ser representada localmente pela sua série de Taylor.

O exemplo clássico das funções analíticas são as funções polinomiais de grau  $K$ . Toda função analítica é suave, mas nem toda função suave é analítica.

**Exemplo:** Voltando ao exemplo anterior, a função:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

tem as derivadas de todas as ordens iguais a 0 em  $|x| = 1$ , o que significa que a série de Taylor em uma vizinhança de  $|x| = 1$  convergiria para a função nula, de modo que não converge para  $f$  para  $|x| < 1$ , logo não pode ser analítica.

**Teorema C.1.3.** Para as funções definidas em qualquer aberto de  $\mathbb{R}^n$ , vale que:

$$\mathcal{C}^\omega(U) \subset \mathcal{C}^\infty(U) \subset \dots \subset \mathcal{C}^2(U) \subset \mathcal{C}^1(U) \subset \mathcal{C}^0(U),$$

onde as inclusões são próprias.

Além disso, todas as classes de funções polinomiais de ordem  $k$  são analíticas.  $\mathcal{C}^k(U)$  para qualquer  $k$  forma uma álgebra de Banach para a multiplicação ponto-a-ponto das funções (e não para a composição).

**Teorema C.1.4.** A classe  $\mathcal{C}^{k+1}(U)$  é densa em  $\mathcal{C}^k(U)$

**Teorema C.1.5** (Teorema da aproximação de Weierstrass). Seja  $\mathcal{C}[a, b]$  o espaço de Banach das funções contínuas com a norma  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  da convergência uniforme. Para cada  $\epsilon > 0$ , existe um polinômio  $p$  em  $[a, b]$  tal que  $\|f - p\| < \epsilon$ .

Isto significa dizer que o conjunto das funções polinomiais em  $[a, b]$  é denso em  $\mathcal{C}[a, b]$ , o que implica que  $\mathcal{C}^\omega[a, b]$  é também denso neste espaço.

**Teorema C.1.6** (Teorema de Stone-Weierstrass). Dado um espaço de Hausdorff compacto  $X$ ,  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  é a álgebra de Banach das funções contínuas com valores reais e com a norma da convergência uniforme e  $A$  é uma subálgebra que contém uma função não-nula e constante, então  $A$  é densa se e somente se existe uma função nesta subálgebra tal que para dois pontos distintos ela assume valores distintos.

## C.2 Cálculo em Espaços Euclidianos $\mathbb{R}^n$

O material apresentado nesta seção é básico e pode ser consultado em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (LIMA, 1995).

O cálculo diferencial e integral no espaço euclidiano é por si só um assunto complexo, e inclui todo o cálculo aprendido nos cursos de graduação. Trata-se de estudar derivadas e integrais das funções do tipo  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (ou seja, funções de várias variáveis reais com valores vetoriais), que inclui as funções reais de números reais (do primeiro curso de cálculo) como caso particular. Algumas dessas propriedades do espaço euclidiano serão introduzidas em variedades diferenciáveis (que inicialmente são somente espaços topológicos). Assume-se aqui que todas as funções são suaves (isto é, de classe  $C^\infty$ ).

É evidente que o espaço  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n$  possui um *sistema de coordenadas* associado a ele de forma que qualquer ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  pode ser representado pela  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que são também conhecidas como *variáveis independentes da função*. De fato, existe uma infinidade de sistemas de coordenadas para este espaço. Qualquer função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  pode então ser representada por um conjunto de  $m$  funções reais  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , conhecidas como *funções componentes*.

### C.2.1 Diferenciabilidade em Aplicações Entre Espaços Euclidianos

**Definição C.2.1** (Aplicação Diferenciável). *Dada uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , diz-se que está é diferenciável num ponto  $p \in U$  se existir uma aplicação linear  $(F_*)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  associada àquele ponto e àquela aplicação tal que esta possa ser escrita em  $U$  como sendo  $F_x = F_p + (F_*)_p(x - p) + \mathcal{O}(x^2)$  e tal que quando  $x$  tende para  $p$ , os termos de grau maior ou igual a dois, representados por  $\mathcal{O}(x^2)$  tendam a zero mais rapidamente que  $x - p$  (segundo alguma norma). Tal aplicação  $(F_*)_p$  é conhecida como derivada de  $F$  no ponto  $p$  e é única.*

Diz-se que quando existe a derivada em todo ponto  $p \in U$ , então a aplicação é *diferenciável* em  $U$ , e fica então naturalmente definida, conforme a seguir:

**Definição C.2.2** (Aplicação Derivada). *Dada uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável em  $U$ , a aplicação  $F_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (vide seção A.14.3), tal que*

$(F_*)_p = (F_*)_p$  (definida acima) é conhecida como aplicação derivada de  $F$ , e tem como representação matricial a conhecida matriz jacobiana  $[\partial F_j / \partial x_i]$ , onde  $j$  é o índice das linhas e  $i$  é o índice das colunas. Esta matriz é evidentemente  $m \times n$ .

A aplicação  $F_*$  é uma aplicação entre espaços euclidianos tal como é  $F$ , pois o espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  das aplicações lineares é um espaço vetorial isomórfico a  $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ . Ela associa a cada ponto uma transformação linear.

**Teorema C.2.1** (Regra da Cadeia). *Dado que  $F, G$ , com domínios e imagens apropriados, são diferenciáveis, então a composta  $F \circ G$  é uma aplicação diferenciável, e a respectiva derivada é calculada pela fórmula  $((F \circ G)_*)_p = (F_*)_{G_p}(G_*)_p$ .*

É uma condição necessária e suficiente que para que  $f$  seja diferenciável, todas as funções componentes sejam diferenciáveis na mesma classe.

**Definição C.2.3** (Classes de Diferenciabilidade). *Diz-se que  $F$  é diferenciável de classe  $\mathcal{C}^1$  (ou simplesmente de classe  $\mathcal{C}^1$ ) se a aplicação derivada  $F_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  for contínua em todos os pontos de  $U$ , o que é equivalente a dizer que as derivadas parciais das funções componentes de  $F$  são contínuas. De forma semelhante, diz-se que  $F$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  se todas as derivadas parciais até ordem  $k$  das funções componentes forem contínuas.*

**Definição C.2.4** (Aplicações Suaves e Aplicações Analíticas). *Diz-se que a aplicação  $F$  é suave ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$  se todas as derivadas parciais de todas as ordens forem contínuas em todos os pontos. Diz-se que uma aplicação é analítica, ou de classe  $\mathcal{C}^\omega$ , se  $F$  for igual à sua série de Taylor.*

As diferenças entre aplicações suaves e analíticas podem ser encontradas em livros de análise, entretanto, vamos trabalhar aqui principalmente com funções suaves devido à sua menor *rigidez local* (SHARPE, 1997). Nos casos onde precisarmos nos restringir às analíticas, isto será mencionado.

**Definição C.2.5** (Gráfico de uma Aplicação). *Dada uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , define-se o gráfico como sendo o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  dos pontos  $(x, F(x))$ .*

Até aqui, assumimos que a aplicação  $(F_*)_p$  é entre os espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Entretanto, é mais conveniente pensar que se trata de uma aplicação entre cópias destes espaços ligadas respectivamente nos pontos  $p$  e  $F_p$ . Desta forma, define-se:

**Definição C.2.6** (Espaços Tangentes). *Dado um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , em cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  pode-se associar uma cópia deste mesmo espaço, conhecida como espaço tangente em  $p$ , e representado por  $T_p\mathbb{R}^n$ .*

Deste modo, a aplicação  $(F_*)_p$  pode ser pensada como uma aplicação entre  $T_p\mathbb{R}^n$  e  $T_p\mathbb{R}^m$ . Esta interpretação de aplicação derivada como mapeamento entre vetores tangentes é a base para se generalizar o conceito de derivada de aplicações entre variedades diferenciáveis (o que será feito a partir da seção C.3.3). Tal interpretação não é enfatizada nos cursos de cálculo da graduação. Um dos conceitos fundamentais quando se fala de aplicações de variáveis reais com valores vetoriais é:

**Definição C.2.7** (Posto de uma Aplicação). *Dada a aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , diz-se que o posto de  $F$  no ponto  $p$  é o posto da matriz jacobiana (ou seja, da representação matricial de  $(F_*)_p$ ) no ponto  $p$ .*

Nota-se que o posto é um conceito pontual na aplicação, mas o seu valor em torno de um ponto depende dos valores da aplicação numa vizinhança do ponto (por causa da dependência das derivadas parciais). Pode-se naturalmente falar de posto em uma região do domínio da aplicação.

**Definição C.2.8** (Pontos e Valores Críticos). *Dada uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $m \leq n$ , qualquer ponto  $p \in U$  tal que o posto de  $F$  não for máximo é chamado de ponto crítico, enquanto que o correspondente valor  $F_p$  é chamado de valor crítico. Outro nome que se dá para ponto crítico é singularidade.*

O posto de uma matriz  $n \times m$  pode variar desde zero até a menor dimensão da matriz (no caso é  $m$ ).

**Corolário C.2.1** (Máximos e Mínimos de Funções Reais). *Dada uma função real  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , um ponto crítico  $p$  é um ponto onde  $(f_*)_p = 0$ .*

*Demonstração.* Como a matriz jacobiana  $(f_*)_p$  só possui uma linha, o posto é normalmente 1. No caso de ponto crítico, ele cai para zero, o que só pode acontecer se esta for a matriz nula. Essa condição é conhecida do Cálculo Básico para o ponto ser um máximo ou mínimo (ou extremo qualquer, na verdade). ■

**Definição C.2.9** (Regularidade). *Dada uma aplicação suave  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $m \leq n$ , diz-se que a aplicação é regular em uma vizinhança se o posto for constante nesta vizinhança, quer seja máximo ou não.*

Por se estar trabalhando com a classe de funções  $\mathcal{C}^\infty$ , o posto nunca irá *variar loucamente* em uma vizinhança, mas essa variação nunca será tão bem comportada quando se a aplicação fosse analítica. De fato, uma aplicação não-analítica (porém suave) pode ter

infinitos zeros uma região finita sem ser identicamente nula. Isto significa a matriz jacobiana pode ter seu posto variando tão rápido quanto a função  $\sin(1/t)$  no intervalo  $(0, 1]$ . Da mesma forma, uma função suave poderia ser dada por uma soma de funções de suporte compacto (*bump functions*), de modo que o posto poderia ter um valor numa vizinhança e outro valor em outra vizinhança. Pode haver aqui uma certa dificuldade no conceito de posto, uma vez que não é um conceito tratado nos cursos de cálculo da graduação. Recomenda-se então o estudo deste conceito com maior profundidade, utilizando-se por exemplo o livro (LIMA, 1995).

## C.2.2 Teoremas Relacionados ao Posto

Uma boa referência para mais detalhes desta seção pode ser encontrada em (KAHN, 1980).

**Definição C.2.10** (Difeomorfismo Local e Difeomorfismo Global). *Diz-se que uma aplicação suave  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo local se  $F$  for injetiva e sobrejetiva em alguma vizinhança de  $U$  e a aplicação inversa  $F^{-1}$ , nas respectivas vizinhanças, também for suave. Se ainda  $U = \mathbb{R}^n$ , diz-se que é um difeomorfismo global.*

**Definição C.2.11** (Aplicação Inclusão). *Uma aplicação suave  $i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  onde  $m \geq n$  que for um difeomorfismo local quando restrita à imagem  $i(U)$  é conhecida como inclusão de  $U$  em  $\mathbb{R}^m$ . Evidentemente, o posto é máximo e igual a  $n$  neste caso.*

A aplicação inclusão insere um conjunto dentro do espaço euclidiano sem mudar dimensão, já que o seu posto é máximo. Pense, por exemplo, no  $\mathbb{R}$  inserido em um plano.

**Teorema C.2.2** (Teorema da Aplicação Inversa). *Seja uma aplicação suave  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $(F_*)_p \neq 0$ . Então, existe um aberto  $V$  em torno de  $p$  e um aberto  $W$  em torno de  $F_p$  tal que existe a inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$  suave em cada ponto.*

Uma consequência é que em todo ponto  $p \in U$  tal que o posto for máximo, existe uma vizinhança  $\bar{U}$  tal que  $p \in \bar{U} \subset U$  e tal que a aplicação  $F$  é um difeomorfismo local.

**Teorema C.2.3** (Teorema da Aplicação Implícita). *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^{n+r+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação suave e seja a família de aplicações de inclusão dadas por  $i_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e tal que, para um ponto  $p \in \mathbb{R}^m$ ,  $(i_q)_p = (q, p)$ , onde  $q \in \mathbb{R}^r$ . Seja  $(F \circ i_q)_*$  a família de aplicações derivadas da composição  $F \circ i_q$ , que é  $m \times m$  numa vizinhança de  $q$ . Se esta matriz tiver posto máximo nesta vizinhança, então existe uma aplicação suave  $g : W \subset \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $F_{(x,y=g_x)} = F_{(q,p)}$  com  $g_q = p$ . A matriz jacobiana de  $F$  poderia ainda*

ser dividida em dois blocos, de modo que  $(F_*)_{(x,y)} = [(F_*)_x((F \circ i_q)_*)_y]$ . Tem-se ainda que  $(g_*)_x = [((F \circ i_a)_*)_{g_x}]^{-1}(F_*)_x$ , que é uma matriz  $r \times m$ . O núcleo da aplicação  $(F_*)_{(x,y)}$  tem dimensão  $r = n - m$ .

Isto significa que, no caso de posto máximo da composta, haverá uma aplicação  $g$  cujo gráfico é dado pelo conjunto de nível de  $F$  no ponto  $(q, p)$ .

**Definição C.2.12** (Submersão). *Uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada de submersão se para todo ponto  $p \in U$ , a aplicação  $(F_*)_p$  é sobrejetiva. Tal fato somente ocorre se  $m \leq n$  e se o posto for máximo (pela famosa relação da álgebra linear  $\dim(F_*)_p(\mathbb{R}^n) = n - \dim \ker f$ . Neste caso, o núcleo tem dimensão igual a  $n - m$ .*

**Definição C.2.13** (Imersão). *Uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada de imersão se para cada ponto  $p \in U$ , a aplicação  $(F_*)_p$  é injetiva. Isso somente pode ocorrer se o núcleo tiver dimensão nula, o que implica que a dimensão da imagem deve ser  $n$ , o que só é possível se  $m \geq n$  e o posto for máximo.*

Deste modo, pode-se pensar na imersão como uma forma de *colocar*  $U$  num espaço de dimensão igual ou maior a  $U$  sem fazer a dimensão dos espaços tangentes cair em nenhum ponto. A submersão, por outro lado, necessariamente tem que transformar os espaços tangentes de  $U$  (de dimensão  $n$ ) em espaços de dimensão menor (dimensão  $m$ ). Subespaços de dimensão  $n - m$  nesse caso são mapeados no vetor nulo.

Se restringirmos a o co-domínio de  $F$  como sendo a própria imagem, a aplicação deixa de ser uma aplicação entre espaços euclidianos (de fato, passa a ser uma aplicação entre variedades, que serão estudadas mais adiante). Porém, adiantando um pouco os resultados, a aplicação passa a ser um difeomorfismo local.

**Definição C.2.14** (Mergulho). *Uma imersão  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada de mergulho se  $F$  for também um homeomorfismo entre  $U$  e  $f(U)$  com a topologia deste último sendo a induzida pela topologia de  $\mathbb{R}^m$ .*

**Nota:** O fato de uma aplicação ser localmente um difeomorfismo não significa que ela o seja em todo o espaço.

O objetivo de apresentar estes resultados preliminares em espaços euclidianos é fazer uma ligação entre o cálculo da graduação. Muitos resultados porém foram omitidos, pois serão apresentados (junto com estes preliminares) de forma mais geral quando se falar na próxima seção em variedades diferenciáveis.

## C.3 Variedades Diferenciáveis

A partir daqui, passa-se a trabalhar com espaços que generalizam o conceito de espaço euclidiano. Pode-se dizer que tais espaços são *localmente euclidianos*. Uma das características que distinguem variedades diferenciáveis de espaços euclidianos é a impossibilidade, em geral, de definir um único sistema de coordenadas que a cobre por completo. Isso implica que uma aplicação  $f$  entre variedades em geral não pode ser decomposta globalmente em funções componentes únicas. A estratégia consiste em definir vários sistemas de coordenadas locais, e usar os conceitos diferenciais definidos na seção C.2 nessas coordenadas locais, cuidando para que as transformações de coordenadas também tenham as propriedades de diferenciabilidade desejadas. O material apresentado nesta seção é básico e pode ser consultado em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (CARMO, 1988) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), por exemplo.

### C.3.1 Estrutura Diferenciável

**Definição C.3.1** (Cartas). *Seja  $M$  um espaço topológico Hausdorff e que tenha ainda base contável (vide seção B.1). Uma carta sobre  $M$  é um homeomorfismo  $\psi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ . Duas cartas com intersecções não vazias de seus domínios são conhecidas como compatíveis.*

Um ponto  $p \in M$  numa intersecção entre duas cartas é representado então por dois conjuntos diferentes de coordenadas.

**Definição C.3.2** (Transformação de Coordenadas). *Sendo as cartas  $\psi_1 : U_1 \subset M \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^n$  e  $\psi_2 : U_2 \subset M \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^n$ , as aplicações  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$  e  $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$  com domínios e imagens propriamente definidos, são aplicações de  $\mathbb{R}^n$  nele mesmo, conhecidas como transformações de coordenadas.*

Deste modo, as transformações de coordenadas utilizam o cálculo definido na seção C.2.

**Definição C.3.3** (Funções Coordenadas). *Dada uma carta  $\psi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , pode-se decompor a aplicação  $\psi$  no conjunto de funções  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i = 1, \dots, n$  conhecidas como funções coordenadas.*

Uma transformação de coordenadas é uma aplicação de  $\mathbb{R}^n$  nele mesmo que pode ser

decomposta em  $n$  funções reais de  $n$  variáveis reais  $y_j = y_j(x_i)$ , e que têm validade na intersecção dos domínios das cartas. Esta transformação deve ser invertível.

**Definição C.3.4** (Atlas). *Uma família de cartas  $\mathcal{A} = (U_i, \psi_i)$  de  $M$  tal que a sua união contém o próprio  $M$  é chamado de atlas de  $M$ .*

Dois atlas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são *equivalentes* se a união  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  for um atlas contendo as cartas de ambos. A união de todos os atlas equivalentes de uma variedade  $M$  é conhecida como *atlas máximo*. Dada então uma variedade com o seu atlas máximo, ficam definidas uma infinidade de cartas e transformações de coordenadas ao redor de cada ponto.

**Definição C.3.5** (Estrutura Diferenciável). *Uma estrutura diferenciável  $\mathcal{D}$  sobre  $M$  é um atlas máximo tal que todas as transformações de coordenadas são difeomorfismos suaves locais. Além disso, uma carta qualquer deste atlas é chamada de carta local admissível.*

Tendo-se definido estas estruturas, é possível se definir uma variedade diferenciável.

**Definição C.3.6.** *Seja  $S$  uma variedade diferenciável de classe  $\mathcal{C}^k$ . O espaço das funções reais que possuem as funções derivadas parciais de ordem  $k$  contínuas (em qualquer carta de coordenadas) é representada por  $\mathcal{C}^k(U)$ .*

**Definição C.3.7** (Variedades Diferenciáveis de Classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). *Uma variedade diferenciável de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de dimensão  $n$  é um par  $(M, \mathcal{D})$ , onde  $M$  é um espaço topológico Hausdorff de dimensão  $n$  e  $\mathcal{D}$  é uma estrutura diferenciável.*

Evidentemente, poderia se ter definido variedades de classe  $\mathcal{C}^k$ , fazendo-se substituições óbvias nas definições anteriores. Daqui por diante, ao se representar um variedade diferenciável, será indicado somente o conjunto (no caso,  $M$ ). Diferentes referências fazem mais ou menos hipóteses sobre o espaço topológico  $M$  que serve de base para a definição de variedade diferenciável. Em (CARMO, 1994), por exemplo, nada se supõe sobre  $M$ , declarando-se somente que se trata de um conjunto. De fato, a adoção de um atlas implica naturalmente em uma topologia para  $M$ . Em (THIRRING, 1978), define-se variedade diferenciável como sendo um espaço topológico separável e metrizável com uma estrutura diferenciável. Já (KAHN, 1980) afirma que  $M$  deve ser de base contável. De fato, estas diferenças não são significativas para nossos propósitos neste trabalho.

**Definição C.3.8** (Variedades Analíticas). *Para se obter a definição de variedade analítica, basta assumir que as aplicações  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  do atlas são analíticas em vez de suaves.*

Há uma maior complicação técnica em se definir geometria em variedades analíticas, uma vez que certas estruturas que são definidas facilmente em variedades suaves, não podem ser definidas em variedades analíticas. Um exemplo é a *partição da unidade*, que não pode ser definida em variedades analíticas, pois o fato aplicação analítica ser nula em uma região implica que ela deve ser identicamente nula. Pelo corolário A.8.1, qualquer espaço vetorial (inclusive  $\mathbb{R}^n$ ) é uma variedade diferenciável. Qualquer curva, superfície ou hipersuperfície em um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  pode ser uma variedade diferenciável (imersa ou mergulhada neste espaço) desde que seu posto satisfaça certas condições.

**Exemplo:** Os grupos de Lie são a classe mais importante de variedade diferenciável que será usada neste trabalho, mas há outros também, como os fibrados tangentes e fibrados vetoriais.

### C.3.2 Topologias de Variedades

Apresentam-se aqui algumas definições relacionadas às particularidades de topologias das variedades diferenciáveis.

**Definição C.3.9** (Variedades com Fronteira). *Diz-se que uma variedade diferenciável  $M$  possui fronteira se ela contém tanto pontos interiores quanto pontos de fronteira na sua própria topologia.*

**Proposição C.3.1.** *Dada uma variedade diferenciável  $M$  com fronteira, para cada ponto interior existe uma carta  $(U_i, \phi_i)$  em  $M$  tal que  $U_i$  é mapeado num ponto interior da forma  $(x_1, \dots, x_n)$  e para cada ponto da fronteira, existe uma carta  $(U_j, \phi_j)$  tal que o ponto de fronteira é mapeado num ponto da forma  $(0, x_2, \dots, x_n)$ .*

Diz-se que tal carta  $(U_j, \phi_j)$  é adaptada à fronteira.

**Definição C.3.10** (Variedade Fechada). *Diz-se que  $M$  é uma variedade fechada se for compacta e sem fronteira (no sentido de variedade).*

**Exemplo:** Exemplos de variedades Fechadas são o toro  $T^2$  e as esferas  $S^n$ . As variedades compactas podem, por outro lado, possuir fronteira, como os discos  $D^n \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição C.3.11** (Variedades Abertas). *Diz-se que uma variedade  $M$  é aberta se ela não possui fronteira e nenhuma componente conexa que seja compacta.*

**Definição C.3.12** (Variedades Orientáveis). *Dada uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$ , esta será orientável se existir um atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$  tal que na intersecção de cada par de*

cartas, os determinantes jacobianos das transformações de coordenadas sempre tiverem o mesmo sinal.

**Teorema C.3.1.** *Toda variedade orientável conexa possui somente duas orientações.*

**Exemplo:** Exemplos de variedades orientáveis são: qualquer espaço vetorial  $V$  de dimensão finita, as esferas  $S^n$  e os toros  $T^n$ . Exemplos de variedades não orientáveis são a *faixa de Möbius* e a *garrafa de Klein*.

### C.3.3 Conceito de Tangência e Derivada de Aplicações entre Variedades Diferenciáveis

A definição de variedade diferenciável já é suficiente para que se possa generalizar os conceitos de cálculo diferencial apresentados na seção C.2 para espaços não-euclidianos. Porém, uma série de desenvolvimentos devem ser realizados até se chegar ao objetivo desejado. É o que será feito agora.

**Definição C.3.13** (Curva de classe  $C^\infty$ ). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que a aplicação  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva de classe  $C^\infty$  se, para qualquer carta  $(\psi_i, U_i)$  tal que contenha parte da imagem da curva, a aplicação  $\psi_j \circ \gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^\infty$ . A imagem da curva é dada simplesmente por  $\gamma(I)$ .*

**Definição C.3.14** (Função Real em  $M$  de classe  $C^\infty$ ). *Uma função real de classe  $C^\infty$  em  $M$  é uma aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que quando restrita a uma carta  $(U, \psi)$ , resulta em uma função real  $\bar{f} = f \circ \psi^{-1} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  da forma  $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de classe  $C^\infty$ .*

Com isso, aumenta-se a classe das funções entre variedades que se pode falar de diferenciabilidade.

**Teorema C.3.2** (Anel das Funções Reais de uma Variedade). *O conjunto das funções reais de classe  $C^\infty$  sobre um aberto  $U \subset M$ , representado por  $C^\infty(U)$ , pode ser dotado de uma estrutura de anel, onde a soma é  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  (soma ponto-a-ponto) e o produto é  $fg(x) = f(x)g(x)$  (produto ponto-a-ponto).*

Também é um espaço vetorial de dimensão infinita (em geral) com relação à soma e à multiplicação por um escalar real.

Na seção C.2.1 foi apresentada a aplicação derivada num ponto  $(F_*)_p$ , que é entre os espaços tangentes  $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  e  $T_{f(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ . Busca-se agora generalizar esta aplicação para variedades diferenciáveis.

**Definição C.3.15** (Tangência em um ponto). *Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  duas curvas (suaves) tais que  $\gamma(0) = \eta(0) = p \in U \subset M$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  uma função real. Diz-se que estas curvas são tangentes em  $p$  quando  $(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \eta)'(0)$ , onde  $()'$  denota a derivação em relação ao parâmetro da curva.*

A relação de tangência entre duas curvas define uma equivalência entre curvas (vide seção A.1). Disto decorre que a definição do chamado *feixe tangente* à curva  $\gamma$  em  $p$ , que é a classe de equivalência das curvas tangentes a  $\gamma$  no ponto  $p$ , e que é representada por  $[\gamma]_p$ . Deste modo, tem-se:

**Definição C.3.16** (Vetor Tangente). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $p \in M$ . Um vetor tangente  $\mathbf{v}_p$  neste ponto é uma classe de equivalência de curvas tangentes neste ponto.*

Nota-se que a definição é independente de coordenadas. Para chegar ao conceito de espaço tangente, tem-se o seguinte teorema.

**Teorema C.3.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $p \in U \subset M$ . O conjunto das classes de equivalência  $\mathbf{v}_p = [\gamma]_p$ , isto é, o conjunto quociente (vide seção A.1), possui uma estrutura de espaço vetorial de dimensão igual à da variedade em questão.*

As demonstrações podem ser encontradas em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990) e em (THIRRING, 1978). Como, pela álgebra linear, todos os espaços vetoriais de mesma dimensão são equivalente, pode-se pensar nestas classes de equivalência como um vetor qualquer de mesma dimensão (uma flecha fixa no ponto  $p$ ).

**Teorema C.3.4** (Vetor Tangente como Derivada Direcional de Funções Reais). *Um vetor tangente  $\mathbf{v}_p$  no ponto  $p$  é um operador diferencial no espaço das funções  $f \in \mathcal{C}(U)^\infty$  e o resultado da aplicação, ou seja  $\mathbf{v}_p f = [\gamma]_p f$ , é um número real conhecido como derivada direcional naquele ponto.*

*Demonstração.* Como  $f \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \gamma$  são aplicações entre espaços euclidianos, sabemos como derivar e aplicar a regra da cadeia correspondente, de forma que:

$$(f \circ \gamma)'|_{t=0} = (f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma)'|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{t=0} \frac{d(\psi \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Se chamarmos de  $\bar{f} = f \circ \psi$  e  $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$  as derivadas em relação a  $t$  da curva  $\psi \circ \gamma$  expressa na mesma carta (isto é,  $\psi \circ \gamma$ ), pode-se escrever:

$$(f \circ \gamma)' |_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} |_{t=0} \dot{x}_i(0) = \left( \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) |_{t=0} \bar{f}.$$

Se  $\gamma(0) = p$ , para diferentes curvas  $\gamma$  da mesma classe  $[\gamma]_p$ , os valores  $(\dot{x}_1(0), \dots, \dot{x}_n(0))$  não mudam, o que mostra que a derivada direcional é independente da curva dentro da mesma classe. Deste modo, pode-se seguramente retirar qualquer referência ao parâmetro  $t$  (particular da curva  $\gamma$ ) de modo que a igualdade acima fica completada com:

$$(f \circ \gamma)' |_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) |_p \bar{f} = \mathbf{v}_p f.$$

■

Deste teorema, pode-se escolher  $a_i = 1$  e os restantes nulos, o que resulta em um operador:

**Definição C.3.17** (Derivada Parcial). *Dada uma variedade diferenciável e uma particular carta  $(x_1, \dots, x_n)$ , define-se o operador diferencial  $(\frac{\partial}{\partial x^i}) |_p$  que, quando aplicado em  $f$ , fornece o valor da derivada parcial na direção de  $x_i$  no ponto  $p$ .*

Este operador está diretamente ligado com a escolha de uma particular carta. Apesar do conceito de vetor tangente ser independente de coordenadas, um determinado vetor  $\mathbf{v}_p$  pode se tornar, em alguma carta, uma derivada parcial.

**Teorema C.3.5.** *Dados dois vetores tangentes  $\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p$ , um escalar  $a$  e uma função  $f$ :*

- $(\mathbf{v} + \mathbf{u})_p f = \mathbf{v}_p f + \mathbf{u}_p f$ , onde  $f \in C^\infty(M)$ ;
- $\mathbf{v}_p(a f) = a(\mathbf{v}_p f)$ .

que são as bem conhecidas propriedades de linearidade dos operadores diferenciais.

**Teorema C.3.6** (Regra de Leibniz). *Dado um vetor tangente  $\mathbf{v}_p$  e duas funções  $f, g$ , tem-se que:*

$$\mathbf{v}_p(fg) = g\mathbf{v}_p f + f\mathbf{v}_p g.$$

Para uma derivação um pouco diferente de vetor tangente, vide (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a).

### C.3.4 Espaços Tangentes

Generaliza-se agora a idéia de espaço tangente para variedades diferenciáveis (vide seção C.2.1 para o conceito em espaços euclidianos). Como o conjunto das classes de equivalências de curvas no ponto  $p$  possui uma estrutura de espaço vetorial, tem-se:

**Definição C.3.18** (Espaço Tangente). *Dada uma variedade diferenciável  $M$ , define-se o espaço tangente no ponto  $p$ , representado por  $T_pM$ , como sendo o espaço vetorial das classes de equivalência dos vetores tangentes no ponto  $p \in M$ .*

A dimensão é obviamente a mesma da variedade.

**Definição C.3.19** (Base Natural). *Dada uma carta  $(U, \psi)$  tais que as funções coordenadas são  $x_i$ , a base*

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\},$$

*do espaço tangente  $T_pM$  é denominada base natural no ponto  $p$ . É evidente que para cada ponto diferente tem-se uma base diferente. Dado um vetor  $\mathbf{v}_p \in T_pM$ , este costuma ser representado pelas coordenadas  $(\dot{x}_p^1, \dot{x}_p^2, \dots, \dot{x}_p^n)$  na base natural (isso não necessariamente é uma velocidade).*

Consulte (CARMO, 1994) para uma demonstração que a base natural é de fato uma base (isto é, todos os vetores são linearmente independentes). Uma base  $\{(\mathbf{e}_i)_p\}$  qualquer de  $T_pM$  em geral não é natural, ou seja, não é possível encontrar uma carta tal que estes vetores formem uma base natural (de fato, saber as condições em que isto ocorre é um problema importante de geometria diferencial, e faz parte de uma classe de problemas gerais conhecidos como *problemas de integrabilidade*, que serão estudados mais adiante).

### C.3.5 Fibrado Tangente

Os pares  $(p, \mathbf{v}_p)$  formados por um vetor tangente e o ponto de  $M$  onde este está aplicado definem uma variedade diferenciável que está naturalmente associada a  $M$ , e que é conhecida como *fibrado tangente*.

**Definição C.3.20** (Fibrado Tangente à um Subconjunto  $U$ ). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $U \subset M$ . Define-se o fibrado tangente em  $U$  como:*

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_pM \text{ (união disjunta).}$$

Cada espaço tangente  $T_pM$  também recebe a denominação de fibra de  $TU$ , enquanto que  $U$ , que está contido em  $TU$ , é conhecido como base.

Quando não houver perigo de confusão, será usado simplesmente  $\mathbf{v}_p$  para representar  $(p, \mathbf{v}_p)$ . Ficará claro no contexto se está se referindo ao ponto de  $TM$  ou somente à parte vetorial deste ponto. Mostra-se em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990) ou em outro texto básico sobre variedades que  $TM$  tem uma estrutura de variedade diferenciável induzida pela estrutura de  $M$  e que sua dimensão é  $2n$  (se a dimensão de  $M$  for  $n$ ). Pode-se visualizar um fibrado tangente como sendo o conjunto  $U$  com um espaço vetorial (de mesma dimensão) preso em cada ponto (pense, por exemplo, numa casca esférica com todos os seus planos tangentes em cada ponto). Cada elemento do fibrado tangente é o par ordenado  $(p, \mathbf{v}_p)$ . Um fibrado tangente de uma variedade  $M$ , representado por  $TM$ , é consequência da definição anterior. Na literatura em língua inglesa, o fibrado tangente é conhecido como *tangent bundle*.

**Definição C.3.21** (Cartas Induzidas em Fibrados Tangentes). *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $V_i \subset TM$  e  $U_i = V_i \cap M$ . Seja ainda uma carta de  $M$  dada por  $(U_i, \psi_i)$ . Pode-se definir uma carta induzida (naturalmente)  $(V_i, \phi_i)$  em  $TM$  tal que, para um ponto  $(p, 0)$ , se tenha  $\phi_i(p, 0) = \psi_i(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))$  e, para qualquer vetor na fibra tangente de  $p \in M$ , se tenha  $\phi_p(\mathbf{v}_p) = (\dot{x}_p^1, \dots, \dot{x}_p^n)$ , que são as coordenadas do vetor na base natural induzida por  $\psi_i$ .*

Outra forma de ver é que o vetor  $\mathbf{v}_p$  é dado, na carta local, por  $\dot{x}_p^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \dots + \dot{x}_p^n \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ . Dada uma variedade  $M$ , existe uma aplicação canônica (naturalmente definida) que é de fundamental importância para entender as propriedades de  $TM$ .

**Definição C.3.22** (Projeção Natural). *Dada uma variedade  $M$ , a aplicação  $\pi_M : TM \rightarrow M$  sobrejetiva tal que ao ponto  $(p, \mathbf{v}_p)$  associa o ponto  $p$  é conhecida como projeção natural.*

É comum se referir ao fibrado tangente de  $M$  como simplesmente  $\pi_M : TM \rightarrow M$  (algumas vezes omite-se o  $M$  em  $\pi$ , quando não gerar confusão).

**Definição C.3.23** (Fibrado Trivializável). *Diz-se que um fibrado tangente  $TM$  é trivializável se ele puder ser escrito como  $TM = M \times \mathbb{R}^n$ .*

Em geral, um fibrado tangente não é trivializável (os grupos de Lie são uma exceção, como será visto mais adiante), mas é sempre localmente trivializável.

**Proposição C.3.2** (Orientação de Fibrado Tangente). *Dada uma variedade orientável  $M$  com atlas orientado  $\mathcal{A}$ , o fibrado tangente  $TM$  adquire naturalmente uma orientação, pois qualquer atlas induzido de um atlas orientado é também orientado.*

As bases naturais em cada  $T_pM$  determinam uma base orientada neste espaço. Como as matrizes jacobianas têm determinante positivo, as matrizes jacobianas delas também terão. Para dar continuidade aos estudos de fibrados tangentes, assim como ao assunto de geometria diferencial em geral, é necessário que se possa definir a generalização de derivada para funções entre variedades.

### C.3.6 Subvariedades Diferenciáveis

Dada uma variedade diferenciável  $M$ , certos subconjuntos desta são também variedades diferenciáveis.

**Definição C.3.24** (Subvariedade). *Diz-se que um subconjunto  $S$  de dimensão  $s$  de uma variedade diferenciável  $M$  é uma subvariedade (regular) se, para cada ponto  $p \in S$  existe uma carta  $(U_i, \psi_i)$  de  $M$  que contenha  $p$  e tal que qualquer ponto  $p \in S$  seja representado por  $\psi_i(p) = (0, 0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots, x_s)$ .*

Evidentemente, qualquer aberto  $U \subset U_i \subset M$  se enquadra nesta definição, de forma que se torna uma subvariedade de  $M$ . Dada uma variedade  $M$  e uma subvariedade  $S$ , a estrutura diferenciável de  $M$  induz uma estrutura diferenciável em  $S$ .

**Exemplo:** As subvariedades generalizam conceitos de *superfícies regulares* no espaço euclidiano (lembrando que superfícies regulares são aquelas que tem espaço tangente bem definido em cada ponto e de dimensão igual à da superfície, ou seja, um ou dois). Um exemplo de superfície não-regular seria o cone, e exemplos de regulares seriam a esfera  $S^2$  (dimensão dois) ou mesmo o toro  $T^2$ .

As subvariedades diferenciáveis também podem possuir fronteira, de modo que:

**Proposição C.3.3.** *Dada uma  $s$ -subvariedade diferenciável  $S \subset M$  com fronteira, para cada ponto interior existe uma carta  $(U_i, \phi_i)$  em  $M$  tal que  $U_i$  é mapeado num ponto interior da forma  $(x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$  e para cada ponto da fronteira, existe uma carta  $(U_j, \phi_j)$  tal que o ponto de fronteira é mapeado num ponto da forma  $(0, x_2, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$ .*

As definições e resultados sobre orientação em variedades se aplicam igualmente em subvariedades.

## C.4 Aplicações entre Variedades

Dada uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciáveis, a estratégia é generalizar as propriedades de diferenciabilidade do espaço euclidiano (apresentadas na seção C.2.1) numa vizinhança ao redor de um ponto, ou seja, localmente. Posteriormente, questões globais, que envolvem a topologia da variedade, podem ser abordadas.

**Definição C.4.1** (Aplicações Diferenciáveis de classe  $\mathcal{C}^\infty$  suaves). *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e seja uma aplicação  $F : M \rightarrow N$ . Diz-se que esta aplicação é diferenciável de classe  $\mathcal{C}^\infty$  se para quaisquer pares de cartas  $(U_i, \psi_i)$  em  $N$ ,  $(V_j, \phi_j)$  em  $M$ , as aplicações  $\psi_i \circ F \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  com domínios e imagens propriamente definidos, são de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Essa definição é independente de coordenadas pois as cartas escolhidas podem ser quaisquer (com domínios e imagens contidos nas correspondentes cartas). Escolhendo-se cartas específicas em  $M$  e  $N$ , a aplicação  $\psi_i \circ F \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  pode ser escrita como sendo um conjunto de  $n$  funções reais de  $n$  variáveis, isto é,  $(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m))$ . A generalização da aplicação derivada (ou seja,  $F_*$ , já vista entre espaços euclidianos) para variedades diferenciáveis é mais adequadamente feita pelo conceito de aplicação tangente, como será visto a seguir. Primeiro, define-se a aplicação tangente em cada ponto, para depois se definir a aplicação tangente.

**Definição C.4.2** (Aplicação Tangente num Ponto). *Seja  $F : U \subset M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre variedades. A aplicação tangente num ponto  $p \in M$  é uma aplicação linear  $(F_*)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  que mapeia os vetores tangentes no ponto  $p \in M$  em vetores tangentes no ponto  $F(p) \in N$ . Vide Figura 10.*

A interpretação de uma derivada como sendo uma aproximação local continua sendo válida em aplicações entre variedades.

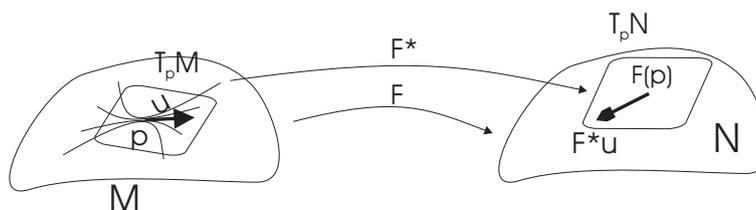


Figura 10: Ilustração da Aplicação Tangente

**Definição C.4.3** (Aplicação Derivada ou Tangente). *Dada uma aplicação diferenciável  $F : M \rightarrow N$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , define-se a aplicação tangente como sendo a aplicação de*

classe  $\mathcal{C}^\infty$  e representada por  $TF : M \rightarrow \mathcal{L}(T_pM, T_{F_p}N)$ , tal que em cada ponto  $p$  se reduz a  $T_pF = (F_*)_p$ . Esta aplicação também é por vezes representada por  $F_*$ .

**Teorema C.4.1.** *Dados os fibrados tangentes  $\pi_M : TM \rightarrow M$  e  $\pi_N : TN \rightarrow N$  e uma aplicação diferenciável  $F : M \rightarrow N$ , tem-se que  $\pi_N \circ TF = F \circ \pi_M$ .*

Isto significa que em  $TF$  está contida a informação também da aplicação  $F$  (redundância). A aplicação tangente pode ser pensada como uma aplicação entre os fibrados tangentes  $TM$  e  $TN$ , e associa ao ponto  $(p, \mathbf{v}_p)$  o ponto  $(F_p, (F_*)_p \cdot \mathbf{v}_p)$ . Se  $U$  for uma carta de coordenadas, obviamente esta última aplicação pode ser representada pela respectiva matriz jacobiana.

**Teorema C.4.2** (Regra da Cadeia). *Dadas as aplicações  $F, G$ , com domínios e imagens apropriados e diferenciáveis, então a composta  $F \circ G$  é uma aplicação diferenciável, e a aplicação tangente é calculada pela fórmula  $T(F \circ G) = TF(G(x))TG(x)$ .*

**Definição C.4.4** (Posto de uma Aplicação). *Dada a aplicação  $F : U \subset M \rightarrow N$ , diz-se que o posto de  $F$  no ponto  $p \in U$  é o posto da matriz jacobiana de  $T_pF$ .*

Os conceitos de pontos críticos, valores críticos e regularidade se generalizam de forma óbvia.

**Definição C.4.5** (Difeomorfismo e Difeomorfismo Local). *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e seja uma aplicação  $F : M \rightarrow N$ . Diz-se que esta aplicação é um difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^\infty$  se ela for diferenciável de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , for invertível e com inversa também de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Diz-se que é um difeomorfismo local se tudo isto valer para vizinhanças  $U \subset M$  e  $V \subset N$  somente.*

**Definição C.4.6** (Variedades Difeomorfas). *Diz-se que duas variedades  $M$  e  $N$  são difeomorfas se existir um difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre elas.*

Assim como os homeomorfismos estabelecem uma relação de equivalência entre espaços topológicos, pode-se dizer que os difeomorfismos suaves fazem o mesmo entre as variedades suaves. É ainda possível definir classes de equivalência entre fibrados tangentes, uma vez que se  $F$  é difeomorfismo suave,  $TF$  também o será. O teorema da aplicação inversa tem uma generalização óbvia. Finalmente, o teorema da aplicação implícita continua válido localmente para variedades. Uma versão global pode ser encontrada em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990).

**Definição C.4.7** (Aplicações Invariantes por Equivalência). *Dada uma aplicação entre duas variedades  $F : M \rightarrow N$  e uma relação de equivalência  $\sim$  em  $M$ , diz-se que  $F$  é invariante por  $\sim$  se  $F_x = F_y$  sempre quando  $x \sim y$ , onde  $x, y \in M$ .*

Esta definição implica naturalmente outra:

**Definição C.4.8** (Projeção no Espaço Quociente). *Dada uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  e uma relação de equivalência  $\sim$ , induz-se naturalmente uma aplicação  $\tilde{F} : M/\sim \rightarrow N$  tal que  $F = \tilde{F} \circ \pi$ , onde  $\pi : M \rightarrow M/\sim$  é a aplicação projeção.*

Se  $F$  for suave, então  $\tilde{F}$  também será suave. De posse dos conceitos apresentados até agora, é possível se caracterizar aplicações diferenciáveis entre variedades. Segundo (BURKE, 1985), uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  entre duas variedades diferenciáveis se enquadra dentre três categorias (de forma semelhante ao que acontece nas aplicações entre espaços euclidianos).

- Dimensão de  $M$  é menor que a de  $N$ ;
- Se a dimensão de  $M$  é maior que  $N$ ;
- Dimensão igual para ambas (tendo como caso particular  $M = N$ ).

O tipo mais importante de aplicação da primeira categoria é:

**Definição C.4.9** (Imersão). *Sejam duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$ . Diz-se que uma aplicação diferenciável  $F : M \rightarrow N$  é uma imersão se as aplicações tangentes restritas a cada ponto, ou seja,  $(F_*)_p : T_p M \rightarrow T_{F_p} N$  forem injetivas (ou seja, o posto for máximo).*

Pode-se dizer que a imersão *coloca* a variedade  $M$  dentro de  $N$ , mas preservando somente a característica local de  $M$ . Isto é, não há nenhum compromisso da topologia de  $M$  ser compatível com a topologia de  $F(M)$  induzida por  $N$ . O tipo mais importante da segunda classe é:

**Definição C.4.10** (Submersão). *Sejam duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$ . Diz-se que uma aplicação suave  $F : M \rightarrow N$  é uma submersão se para cada ponto  $p \in M$ , a aplicação  $(F_*)_p : T_p M \rightarrow T_{F_p} N$  for sobrejetiva para todos os pontos de  $M$ .*

O caso mais importante de submersão é a *projeção canônica* do fibrado tangente  $\pi_M : TM \rightarrow M$ , pois é base para construções naturais fundamentais. Pelo fato de  $(F_*)_p$  nunca ser injetiva, o seu núcleo é sempre não-trivial.

**Definição C.4.11** (Mergulhos (*Embedding*)). *Dada uma imersão  $F : M \rightarrow N$ , esta é chamada de mergulho se  $F$  também for um homeomorfismo (vide seção B.1), de modo que  $F(M)$  tenha a topologia induzida de  $N$ .*

Um mergulho preserva então a dimensão do espaço tangente, assim como a topologia de  $M$ . Diz-se então que um mergulho preserva as *características globais* de uma variedade. Evidentemente, estes conceitos são simples generalizações daqueles já vistos entre espaços euclidianos. Em (CARMO, 1994), o autor afirma que para a maioria das questões de geometria diferencial, que são de natureza local, não importa se está se trabalhando com imersões ou mergulhos.

**Proposição C.4.1.** *Seja uma imersão  $F : M \rightarrow N$ . Para todo ponto  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  tal que a restrição  $F_U$  é um mergulho.*

A demonstração se encontra em (CARMO, 1994). Para a terceira classe de aplicações entre variedades, o tipo mais importante de aplicação é a dos difeomorfismos (os quais já falamos) e o caso particular das transformações de coordenadas, quando as variedades são a mesma.

**Definição C.4.12** (Automorfismos). *Diz-se que qualquer difeomorfismo  $F : N \rightarrow N$  é um automorfismo.*

**Teorema C.4.3.** *O conjunto de todos os automorfismos de  $N$  formam grupo topológico (vide seção B.2), com a operação de grupo sendo a composição de aplicações.*

Completa-se aqui o estudo básico das subvariedades uma vez que já se dispõe dos conceitos e ferramentas de aplicações diferenciáveis. Seguindo-se a nomenclatura de (OLVER, 1996), as subvariedades suaves têm duas origens: 1) *parametrização* por meio de uma imersão ou mergulho, 2) Definição *implícita* como imagem inversa de alguma aplicação suave.

**Definição C.4.13** (Subvariedades Imersas). *Uma subvariedade imersa parametrizada por  $F$  é uma variedade  $S \subset M$  tal que  $S = F(N)$ , ou seja, é imagem de uma imersão  $F : N \rightarrow M$ , onde  $N$  é conhecido como espaço de parâmetros.*

Apesar de toda imersão ser localmente um difeomorfismo, nada garante que ela o seja para todo  $N$ . A característica principal de uma subvariedade imersa é que ela somente deve ter a mesma dimensão que o espaço de parâmetros e nunca se autointersecte. Nada impede porém que esta tenha comportamentos estranhos como, apresentar *pontos de acumulação* (empilhamento).

**Definição C.4.14** (Subvariedades Mergulhadas). *Uma subvariedade mergulhada é uma subvariedade imersa por um mergulho  $F$  tal que a topologia induzida pela aplicação é compatível com a topologia induzida pela variedade ambiente.*

As chamadas subvariedades regulares são aquelas mergulhadas e não apresentam  *pontos de acumulação*. Já as subvariedades próprias são as subvariedades regulares tais que os conjuntos fechados da topologia induzida coincidem com a da topologia induzida pela aplicação  $F$ . As subveriedades próprias formam a classe mais restrita, contida em todas as outras (ABRAHAM; MARSDEN, 1990).

**Exemplo:** Para exemplificar a diferença entre variedades imersas e as demais, considere o toro  $T^2$  mergulhado em  $\mathbb{R}^3$  que é definido pela aplicação  $\phi(u, v) = ((2 + \cos 2\pi v) \cos 2\pi u, (2 + \cos 2\pi v) \sin 2\pi u, \sin 2\pi v)$ . Seja agora a subvariedade de  $T^2$  dada pela escolha  $v = c + \alpha u$  onde  $c \in \mathbb{R}$ . É possível mostrar que se  $\alpha$  é um número irracional, então a imagem de  $\phi(u, c + \alpha u)$  é um conjunto denso em  $T^2$ , porém para  $\alpha$  racional, não é. Para o último caso, a topologia da imagem da curva coincide com a topologia induzida pelo toro, o que significa que trata-se de uma variedade mergulhada. Já para o caso de  $\alpha$  irracional, a intersecção de qualquer aberto de  $T^2$  sempre vai conter um número infinito de subconjuntos da imagem, de modo que um único subconjunto aberto da imagem não pode ser gerado pela topologia induzida. Logo, como a topologia da imagem é mais fina, esta é só uma subvariedade imersa.

**Definição C.4.15** (Conjunto dos Valores Regulares). *Dada uma aplicação suave  $F : M \rightarrow N$ , o conjunto dos valores regulares de  $F$ , ou seja,  $\mathcal{R}_F$  é formado por todos os pontos de  $F(M) \subset N$  tais que não são valores críticos de  $F$ .*

**Proposição C.4.2.** *Dada uma aplicação suave  $F : M \rightarrow N$ , somente se a dimensão de  $N$  for menor que a de  $M$  tem-se valores regulares. Senão todos os valores serão críticos. A imagem inversa (ou subvariedade de nível) de um valor regular é formada por pontos regulares.*

**Teorema C.4.4** (Teorema das Submersões). *Seja  $F : M \rightarrow N$  uma submersão e  $q \in \mathcal{R}_F$ . Então, a imagem inversa  $F^{-1}(q)$  é uma subvariedade regular (portanto, mergulhada) de  $M$  e os espaços tangentes em cada ponto  $p \in F^{-1}(q)$  são dados por  $\ker T_p F$ . Esta subvariedade é conhecida como subvariedade de nível.*

De fato, toda subvariedade é localmente a imagem inversa de um valor regular (para alguma aplicação).

**Teorema C.4.5** (Sard). *Dada uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  suave, o conjunto dos valores críticos de  $F$  tem medida nula, o que implica que  $\mathcal{R}_F$  é denso em  $N$ .*

**Corolário C.4.1.** *Se  $M$  for uma variedade compacta, o conjunto de valores regulares é aberto e denso em  $N$ .*

Por fim, um último conceito:

**Definição C.4.16** (Transversalidade). *Dada uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  e  $S \subset N$  uma subvariedade, diz-se que  $F$  é transversal a  $S$  em  $p \in M$  se:*

- $F(p) \notin S$  ou;
- No caso de  $F(p) \in S$ , a condição abaixo é satisfeita:

$$T_{F(p)}N = T_{F(p)}S + T_pF(T_pM).$$

Quando não há transversalidade em um ponto, o espaço  $T_pF(T_pM)$  é tangente a  $S$  neste ponto.

**Teorema C.4.6** (Teorema da Aplicação Transversal). *Dada uma aplicação suave  $F : M \rightarrow N$  e uma subvariedade  $S \subset N$ , se  $F$  e  $S$  forem transversais então  $F^{-1}(S)$  será uma subvariedade de  $M$  e  $T_pF^{-1}(S) = (T_pF)^{-1}(T_{F(p)}S)$ . Ainda, a codimensão de  $F^{-1}(S)$  é igual à codimensão de  $S$ .*

**Proposição C.4.3.** *Dada uma subvariedade regular que é transversal num ponto, ela coincide localmente com o gráfico de uma aplicação.*

Para o caso da variedade  $M$  ser compacta, há um teorema mais forte, que é:

**Teorema C.4.7** (Thom). *Seja  $\mathcal{C}^\infty(M, N)$  o espaço topológico das aplicações suaves entre variedades, onde  $M$  é compacta. O subconjunto das aplicações transversais a uma subvariedade suave  $S \in N$  é aberto e denso em  $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ .*

**Teorema C.4.8** (Mergulho de Whitney). *Toda variedade suave  $M$  pode ser mergulhada num espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$  de dimensões apropriadas.*

## C.5 Propriedades Adicionais de $TM$

Tendo-se definido derivada de aplicações entre variedades, assim como estudado as suas diversas classes, é possível fornecer mais algumas propriedades do fibrado tangente

de uma variedade  $M$ . Omite-se o índice da aplicação  $\pi$  por conveniência, uma vez que não há perigo de confusão. O material desta seção é mais avançado e pode ser encontrado em (LANG, 1999) e (BLOCH, 2003).

**Teorema C.5.1** (da projeção natural). *Dado um subconjunto  $U \subset M$ , onde  $M$  é uma variedade diferenciável, a projeção canônica (ou natural)  $\pi : TU \rightarrow U$  é uma submersão suave, mesmo para o caso de  $U = M$  (validade global).*

**Teorema C.5.2** (Fibras com Subvariedade Suaves). *Dado  $\pi : TM \rightarrow M$ , toda fibra em  $p \in M$ , que é a imagem inversa  $\pi^{-1}(p)$ , é uma subvariedade suave de  $TM$ .*

**Definição C.5.1** (Espaços Verticais Canônicos). *Dado  $\pi : TM \rightarrow M$ , o núcleo da aplicação  $(\pi_*)_{(p, \mathbf{v}_p)}$  em cada ponto define, naquele ponto, o espaço vertical canônico. O espaço vertical é tangente à fibra  $\pi^{-1}(p)$ .*

Esse resultado é uma consequência do fato de  $\pi$  ser uma imersão.

**Teorema C.5.3.** *Seja  $M$  uma variedade e  $TM$  o seu fibrado tangente. A variedade  $M$  é uma subvariedade regular de  $TM$ , e sendo  $i : M \rightarrow TM$  a inclusão de  $M$  em  $TM$ , esta é mergulho transversal em  $TM$ .*

Pelo teorema da transversalidade, dado um aberto  $U \subset M$  (que é subvariedade regular e transversal de  $M$ ), então  $\pi^{-1}(U)$  é uma subvariedade regular de  $TM$ . Já foi visto na seção C.3.5 o que vem um fibrado tangente  $TM$  trivializável, que também pode ser chamada de *trivialização global*. Entretanto, ainda é possível definir:

**Teorema C.5.4** (Trivialização local). *Se  $U \subset M$ , então qualquer subvariedade  $\pi^{-1}(U)$  é difeomórfica a  $U \times \mathbb{R}^n$ .*

Por esta razão, é possível estender carta de coordenada de  $M$  para  $TM$ . Como ocorre com qualquer variedade diferenciável,  $TM$  possui também fibrado tangente.

**Definição C.5.2** (Fibrado Tangente  $TTM$ ). *Define-se o fibrado tangente de  $TM$ , ou seja  $\pi_{TM} : TTM \rightarrow TM$  como sendo a variedade de dimensão  $4n$  dada por  $TTM = T(TM)$ . Os elementos que formam  $TTM$  podem ser representados pela quádrupla  $(p, \mathbf{v}_p; \mathbf{w}_{\mathbf{v}_p})$ , onde  $p \in M$ ,  $\mathbf{v}_p$  é um vetor tangente de dimensão  $n$  e  $\mathbf{w}_{\mathbf{v}_p}$  é o vetor tangente a  $(p, \mathbf{v}_p)$  e de dimensão  $2n$ .*

**Definição C.5.3** (Base Natural em  $TTM$ ). *Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$  e  $U \subset M$  um aberto. Dada uma carta  $(U, \psi)$  e sua carta induzida em  $TM$  com funções*

coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ . Então, a base induzida para o espaço tangente a  $TM$  (em um ponto qualquer, aqui omitido) é dada por:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^1}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^n} \right\}.$$

Deste modo, qualquer vetor tangente  $\mathbf{w}$  pode ser escrito como sendo

$$\mathbf{w}_{\mathbf{v}_p} = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}.$$

**Definição C.5.4** (Carta induzida em  $TM$ ). Considerando-se que as coordenadas induzidas em  $TM$  sejam  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ , pode-se atribuir a  $TM$  as coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n; \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n)$ .

Na Figura 11 tem-se uma representação do fibrado tangente de um fibrado tangente, onde as  $n$  primeiras coordenadas são as mesmas coordenadas do vetor  $\mathbf{v}_p$ , enquanto que as demais são agrupadas no vetor  $\mathbf{u}$

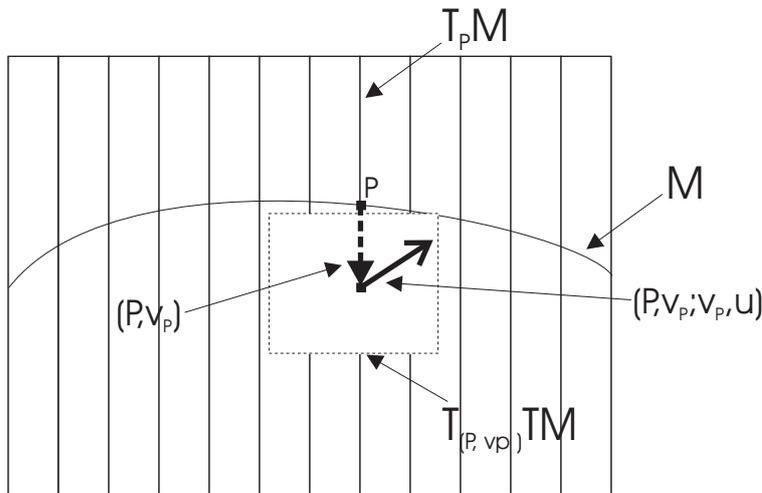


Figura 11: Ilustração de um Fibrado Tangente

**Definição C.5.5** (Componentes Horizontal e Vertical numa Carta). Dada uma  $n$ -variedade e uma carta  $(U, x_1, \dots, x_n)$ , a componente do vetor  $\mathbf{w}_{\mathbf{v}_p}$  na direção dos campos  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  é conhecida como componente horizontal na carta, e a componente na direção dos campos  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$  é conhecida como componente vertical

**Definição C.5.6** (Espaços Horizontal e Vertical de uma Carta). O subespaço de  $T_{\mathbf{v}_p}TM$  gerado pelos vetores  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  de uma carta é conhecido como Espaço Horizontal da carta e representado por  $H_{\mathbf{v}_p}$ , e o subespaço gerado por  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$  é conhecido por Espaço Vertical da carta, e representado por  $V_{\mathbf{v}_p}$

**Teorema C.5.5.** *O espaço vertical de uma carta  $V_{\mathbf{v}_p}$  sempre coincide com o espaço vertical canônico de  $T_{\mathbf{v}_p}TM$ .*

Não existe, para um  $TM$  geral, uma distribuição horizontal canônica, exceto quando  $M$  é trivializável. Entretanto, cada carta induz uma distribuição horizontal local. É evidente que, analogamente ao que foi feito até aqui, se poderia definir  $TTM$  (e assim por diante). É importante dizer que o vetor  $\mathbf{w}$  só pode ser dividido em duas componentes, isto é,  $(\mathbf{v}_p, \mathbf{u})$  por que se tratar de um fibrado tangente de outro fibrado tangente. Esta também não é uma escolha obrigatória de base (poderia ser outra).

## C.6 Curvas em $M$ e $TM$ e Pontos Críticos

Estudam-se aqui propriedades de curvas suaves. Uma curva suave em uma variedade é uma aplicação suave  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ . O material desta seção pode ser encontrado em (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a) e (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969b).

**Definição C.6.1** (Campo Tangente). *Dada uma curva suave  $\gamma$  e  $\partial/\partial t$  a base canônica em  $\mathbb{R}$  para o ponto  $t$ , o conjunto de vetores em  $\gamma(I)$  dados por  $(\gamma_*)_t(\partial/\partial t)$  denomina-se campo tangente ou de velocidades da curva. Ou seja, o campo de velocidades de  $\gamma$  é a aplicação  $\gamma_* : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ .*

A aplicação  $\gamma_* : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  obviamente é suave. Sendo escolhida uma carta  $(U, \psi)$  em  $M$ , pode-se então expressar  $(\gamma_*)_t(\partial/\partial t)$  na base canônica de  $T_{\gamma(t)}M$  associada a esta carta, de forma que os coeficientes desta expansão, colocados numa matriz coluna, formam a jacobiana, que é  $[\dot{x}_1(t) \cdots \dot{x}_n(t)]^T$ .

**Definição C.6.2** (Curvas Regulares). *Uma curva regular é uma curva tal que a matriz jacobiana (de qualquer carta) nunca se anula, ou seja, a aplicação  $\gamma_*$  nunca perde o posto.*

Isto é equivalente a dizer que o campo de velocidades de uma curva regular nunca cai para zero. As curvas definidas em  $TM$  podem ser estudadas começando-se com a seguinte classificação.

**Definição C.6.3** (Curvas Verticais). *Dada uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ , diz-se que esta curva é vertical se  $\pi \circ \Gamma$  se reduz a um único ponto  $p \in M$ . De fato, a imagem desta curva está totalmente contida na fibra  $T_pM$ , que é um espaço vetorial.*

Pelo fato de  $\pi$  ser uma imersão, o campo de velocidades de uma curva vertical é formado somente por vetores verticais (que são os vetores tangentes às fibras).

**Definição C.6.4** (Curvas Transversais). *Uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  tal que sua projeção  $\gamma(t) = \pi \circ \Gamma(t) \subset M$  é uma curva regular é conhecida como curva transversal.*

Qualquer curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  que for transversal nunca terá velocidade na direção vertical.

**Definição C.6.5** (Curvas de Segunda Ordem). *Uma curva transversal tal que a projeção, por  $\pi_*$ , de seu campo tangente, resultar no campo de velocidade de  $\gamma$  recebe o nome de curva de segunda ordem.*

Devido a se estar trabalhando com curvas suaves, pode ocorrer que uma curva tenha uma parte sua totalmente contida em uma fibra, e outra parte não. Deste modo, um trecho inteiro da curva seria projetado em um único ponto da base. Porém, para o caso de curvas de segunda ordem, sempre haverá um mapeamento biunívoco entre esta e sua projeção, o que permite a seguinte definição.

**Definição C.6.6** (Lift Tangente). *Toda curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  pode ser associada a uma curva em  $\gamma' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  dada por  $(\gamma')_t = (\gamma_t, (\gamma_*)_t)$  que é conhecida como lift tangente de  $\gamma$ . Esta curva é também de segunda ordem.*

Note que  $\gamma'$  é diferente de  $T\gamma : TI \rightarrow TM$ .

**Definição C.6.7** (Campo Tangente ao Lift Tangente  $\neq$  Aceleração). *Dada uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  e seu lift tangente  $\gamma' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ , o campo  $\gamma'' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TTM$  é simplesmente o campo tangente de  $\gamma'$ . Este campo, por outro lado, não pode ser chamado de aceleração.*

Será visto que aceleração é algo muito mais complicado, pois vai depender de uma estrutura adicional em  $TM$  conhecida como *conexão*, que está intimamente ligada à conexão de Cartan, objeto de estudo deste trabalho. Não falamos até agora sobre os pontos e valores críticos de aplicações (ou seja, os pontos onde o posto da aplicação cai). Supôs-se que todas as aplicações tinham posto pleno no domínio considerado. Para o caso de funções reais  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , os pontos críticos tem dois papéis reconhecidamente importantes:

- Estudo de máximos e mínimos locais destas funções (que é de caráter local);

- Estudo da topologia da variedade  $M$  a partir dos pontos críticos das funções de  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , assunto este conhecido como *Teoria de Morse* (MILNOR, 1963), que tem caráter global.

De fato, a teoria de Morse está ligada à *topologia algébrica* através das chamadas desigualdades de Morse. Como características globais são uma preocupação menor neste trabalho, somente serão apresentados os conceitos gerais sobre pontos críticos. Recomenda-se ao leitor os livros (MILNOR, 1963) e (KAHN, 1980) para maiores detalhes. Outro aspecto da teoria de Morse, por outro lado, é de interesse. Justamente aquele que trata dos pontos críticos de um funcional, que o próprio Morse se referia como *Calculus of Variations in the Large*.

**Teorema C.6.1.** *Se  $(U, \psi)$  é uma carta sobre o ponto  $p$ , este ponto é um ponto crítico se  $\partial(f \circ \psi^{-1})/\partial x^i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$*

Pelo fato da matriz jacobiana de uma função real ser um vetor linha formado pelas derivadas parciais de  $f$  nesta carta, então para ser um ponto crítico (isto é, com posto zero) todas as derivadas parciais devem se anular.

**Definição C.6.8.** *Seja  $(U, \psi)$  uma carta e  $p \in U$  um ponto crítico de uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se a matriz Hessiana  $H(f)(p)$  em  $p$ , dada por:*

$$H(f)(p) = \left[ \frac{\partial^2(f \circ \psi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right],$$

*é não singular, então  $p$  é um ponto crítico não-degenerado de  $f$ .*

A natureza do ponto crítico é obviamente independente da carta escolhida (conceito covariante). Para pontos críticos não-degenerados, a matriz Hessiana é sempre simétrica. Pode-se determinar a forma aproximada de  $f$  numa vizinhança do ponto crítico. Para isso, é necessário o seguinte conceito:

**Definição C.6.9** (Índice). *Uma matriz  $A$  tem índice  $i$  se  $A$  tem  $i$  autovalores negativos.  $A$  tem nulidade  $k$  se esta possui  $k$  autovalores nulos.*

**Proposição C.6.1** (Lema de Morse). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável suave,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in M$  um ponto crítico não-degenerado. Então existe uma carta  $(U, \psi)$  contendo  $p$  com  $\psi(p) = 0$  tal que:*

$$f(\Psi^{-1}(u)) = f(\Psi^{-1}(0)) - u_1^2 - \dots - u_i^2 + u_{i+1}^2 + \dots + u_n^2,$$

onde  $u = [u_1, \dots, u_n]^\top \in \mathbb{R}^n$  e  $i$  é o índice de  $f$  em  $p$ .

Com isto já se tem uma boa idéia de como a função se comporta em torno do ponto crítico. Se o índice de  $H(f)(p)$  é nulo, assim como a nulidade, então este ponto é um *ponto de mínimo* local. Se porém o índice for  $n$ , então tem-se um *ponto de máximo* local. Apresenta-se agora um exemplo de determinação dos pontos críticos de uma função sobre uma variedade.

**Exemplo:** Seja a semi-esfera superior parametrizada por  $x$  e  $y$  (neste caso  $z = z(x, y)$ ). Seja também a função definida em  $\mathbb{R}^3$ :

$$V(x, y, z) = \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{(y - y_0)^2}{2} + \frac{(z - z_0)^2}{2}.$$

Restringindo esta última na semi-esfera superior descrita, tem-se:

$$V'(x, y) = \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{(y - y_0)^2}{2} + \frac{(z(x, y) - z_0)^2}{2}.$$

Os pontos críticos de  $V'$  são obtidos primeiramente calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial x} &= (x - x_0) + \frac{(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - z_0)}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} (-2x) \\ &= -x_0 + \frac{z_0 x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'}{\partial y} &= (y - y_0) + \frac{(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - z_0)}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} (-2y) \\ &= -y_0 + \frac{z_0 y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \end{aligned}$$

O sistema a ser resolvido é então:

$$\begin{cases} -x_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + z_0 x = 0 \\ -y_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + z_0 y = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é:

$$\begin{cases} x = x_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \\ y = y_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \end{cases}$$

Este mesmo ponto poderia ser determinado usando-se o método dos multiplicadores de Lagrange da seguinte forma: achar os extremos de  $V(x, y, z)$  restrito a  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Deve-se buscar os extremos da seguinte função:

$$W(x, y, z, \lambda) = \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{(y - y_0)^2}{2} + \frac{(z - z_0)^2}{2} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

As equações são então:

$$\begin{cases} \partial W/\partial x = 2(x - x_0) + \lambda(2x) = 0, \\ \partial W/\partial y = 2(y - y_0) + \lambda(2y) = 0, \\ \partial W/\partial z = 2(z - z_0) + \lambda(2z) = 0, \\ \partial W/\partial \lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema de equações (usando algum software para solução simbólica), tem-se:

$$\begin{cases} x = \pm x_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \\ y = \pm y_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \\ z = \pm z_0/\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \\ \lambda = -1 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \end{cases}$$

Como se busca o extremo de  $V$  restrito à calota superior, somente as soluções com sinal positivo são consideradas.

## C.7 Campos Vetoriais Tangentes

O conceito de campo vetorial tangente é fundamental em teoria de controle, pois é a forma de se descrever geometricamente as equações diferenciais ordinárias (e, por consequência, os sistemas dinâmicos). Maiores detalhes podem ser encontrados por exemplo em (ABRAHAM; MARSDEN, 1985) e (WASSERMAN, 1992).

**Definição C.7.1** (Campos Vetorial, ou Seção de um Fibrado Tangente  $TM$ ). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Um campo vetorial ou seção é uma aplicação*

$\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tal que a cada ponto  $p \in U$  associa-se um par  $(p, \mathbf{v}_p)$ , onde  $\mathbf{v}_p \in T_p M$  e tal que  $\pi \circ \mathbf{X} = \text{Id}_U$ .

Evidentemente, o conceito de posto está definido para um campo vetorial, cujo valor máximo é a dimensão de  $U$ . Dado um campo vetorial de posto pleno, a sua imagem é uma subvariedade imersa (localmente mergulhada) em  $TM$ . Para fornecer uma ideia mais concreta, na Figura 11. Pode-se ver nesta figura que a variedade base  $M$  é uma curva. Um campo vetorial ou seção do fibrado tangente nesta figura seria qualquer outra curva que cruzasse as linhas verticais uma só vez (ou seja, cuja projeção em  $M$  fosse biunívoca). Deste modo, há duas formas de se ver um campo vetorial: 1) uma *floresta* de flechas, uma em cada ponto da variedade, na direção do espaço tangente (flecha pontilhada na Figura 11); 2) uma subvariedade de  $TM$ , cruzando cada fibra uma só vez. Ambos os pontos de vista são importantes, e revelam informações diferentes sobre um campo vetorial.

**Definição C.7.2** (Campo Vetorial Global). *Dada uma variedade  $M$ , diz-se que um campo vetorial  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$  é global se  $U = M$ .*

Em geral, campos vetoriais não estão definidos para a variedade  $M$  inteira, pois questões topológicas podem impedir que isto ocorra (ou criar *obstruções*, que é o nome mais usado). O campo vetorial global mais simples é o *campo vetorial nulo*, que associa a cada ponto de  $M$  o vetor tangente nulo. Dados dois campos vetoriais  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : U \subset M \rightarrow TM$ , a soma destes campos é a soma ponto-a-ponto dos vetores, isto é,  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})_p = \mathbf{X}_p + \mathbf{Y}_p$ . A multiplicação por um escalar real é também definida ponto-a-ponto, isto é,  $(\alpha \mathbf{Y})_p = \alpha \mathbf{Y}_p$ . Por causa destas propriedades, define-se:

**Definição C.7.3** (Espaço dos Campos Vetoriais). *Dada uma variedade diferenciável  $M$ , o conjunto dos campos vetoriais sobre ela, representado por  $\mathcal{X}(U)$ , é também um espaço vetorial, cujas operações são soma e multiplicação escalar definidas acima.*

Em geral, este espaço é de dimensão infinita. Na definição de multiplicação escalar acima, o escalar  $\alpha$  poderia ser substituído por uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sem em nada alterar a definição. Deste modo:

**Definição C.7.4** (Módulo dos Campos Vetoriais). *O espaço  $\mathcal{X}(U)$  também é um módulo livre sobre o anel  $\mathcal{C}^\infty(U)$  das funções reais (vide seção A.7), de modo que  $(f\mathbf{X})_p = f_p \mathbf{X}_p$ .*

Tendo a estrutura de módulo livre, é sempre possível determinar uma base. Em particular:

**Definição C.7.5** (Base natural). *Dada  $U \subset M$  e uma carta  $(U, \psi)$ , a família de campos vetoriais  $\partial/\partial x^i : U \rightarrow TM$ , que associam a cada ponto a base natural associada à carta, forma uma base para o módulo  $\mathcal{X}(U)$ .*

Os campos da base definidos acima são suaves e linearmente independentes (tanto como espaço vetorial quanto como módulo sobre anel). Deste modo, tem-se que

$$\mathbf{X}_p = \sum_{i=1}^n X_p^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,$$

e a representação em coordenadas de (induzidas em  $TU$ ) fica simplesmente:

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n; X^1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X^n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Na verdade, qualquer conjunto de  $n$  campos  $\{\mathbf{X}_i\}$  em  $U$ , com  $i = 1, \dots, n$  que seja linearmente independente no módulo (o que implica ser LI ponto-a-ponto) pode ser adotado como uma base para  $\mathcal{X}(U)$ , de modo que pode-se definir:

**Definição C.7.6** (Frame). *Um frame em  $U$  é um subconjunto de campos de  $\mathcal{X}(U)$  tal que todos os campos deste espaço são gerados por este conjunto. Outro nome que se dá a um conjunto deste tipo é frame móvel, e os campos restritos num dado ponto  $p$  formam uma base para o espaço tangente de  $M$  naquele ponto.*

Em geral, para um frame arbitrário local não existe uma carta de coordenadas tal que este frame seja natural a ela. Determinar quando existe tal carta é um *problema de integrabilidade*, como já foi dito antes, e será estudado mais adiante.

**Teorema C.7.1** (Frames Globais). *Para que exista um frame definido globalmente em  $M$ , é necessário que  $TM$  seja trivializável, ou seja, que  $TM = M \times \mathbb{R}^n$ .*

Outro nome que se dá para  $TM$  trivializável é *paralelizável*. Toda uma teoria foi desenvolvida para verificar em que condições isso é verdade (e também para quantificar o tanto que falta para tal, quando não for). Tal teoria é conhecida como *classes características*, e é abordada por exemplo em (MILNOR; STASHEFF, 1974).

**Teorema C.7.2.** *Dada uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$ , um campo vetorial  $\mathbf{X} : M \rightarrow TM$  e uma carta local, a aplicação tangente  $T\mathbf{X}$  tem expressão local:*

$$T_p\mathbf{X}(\mathbf{v}_p) = (p, \mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p, (\mathbf{X}_*)_p \mathbf{v}_p),$$

onde o último par  $(\mathbf{X}_p, (\mathbf{X}_*)_p \mathbf{v}_p)$  é formado, nesta ordem, pela componente horizontal (local) e pela componente vertical.

Evidentemente,  $(\mathbf{X}_*)_p$  é uma matriz, e induz um campo de matrizes suave em cada ponto  $p \in M$ . Conforme visto na seção C.5, toda carta induz espaços horizontais locais em  $TTM$ , o que permite a decomposição apresentada.

Dado um fibrado tangente  $TM$  trivializável, uma *trivialização (global)* é uma submersão suave  $t : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que toda fibra de  $TM$  seja univocamente mapeada no espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ . Dado que a variedade é trivializável, a trivialização é naturalmente definida. Por isso, é independente de coordenadas. Deste modo, pode-se dizer que  $t$  é a projeção global  $\pi_2$  na direção da fibra.

**Teorema C.7.3** (Fibrado da Trivialização). *Seja  $TM$  trivializável e a trivialização  $t : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para cada vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , a imagem inversa  $t^{-1}(\mathbf{v})$  define em  $TM$  uma subvariedade regular de dimensão  $n$ , conhecida como fibra.*

Pode-se dizer que a trivialização em  $TM$  introduz uma segunda folheação neste espaço, ou seja, o espaço é duplamente fibrado. Qualquer ponto  $\mathbf{v}_p$  pode ser unicamente decomposto na forma  $(p, \mathbf{v})$ , onde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . As fibras definidas pela imagem inversa de  $t$  são subvariedades de  $TM$  isomórficas a  $M$ . Cada uma dessas fibras pode ser pensada como um *campo vetorial uniforme*.

É importante notar que o conceito de campo uniforme aparece aqui pela primeira vez, e não pode ser definido para fibrados tangentes em geral. Exceto o campo identicamente nulo (único campo uniforme que pode ser definido para qualquer  $TM$ ). O nome campo uniforme é conveniente, pois é o campo que corresponde ao vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, o vetor  $\mathbf{v}$  é associado a cada ponto de  $M$ , o que é uma associação suave. É importante distinguir a trivialização global definida aqui das trivializações locais associadas à cartas (como definido na seção C.5). O estudo de campos uniformes é um tópico fundamental, que será abordado mais adiante.

**Definição C.7.7** (Espaço Horizontal Canônico). *Dada uma trivialização  $t : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o núcleo de  $t_*$ , em cada ponto de  $TM$ , define um espaço horizontal canônico, que é um subespaço vetorial de  $T_p TM$ .*

**Definição C.7.8** (Curva Horizontal). *Dada uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  onde  $TM$  é trivializável, diz-se que ela é uma curva horizontal se seu campo vetorial tangente tiver os vetores contidos em espaços horizontais (seja espaço horizontal associado a uma carta ou canônico).*

Qualquer curva horizontal é uma curva transversal. De fato, como os vetores estão contidos nos espaços horizontais, não podem estar contidos nos espaços verticais. Logo, se tratam de curvas transversais. Como consequência, dada uma variedade diferenciável  $M$  e uma trivialização  $t : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o espaço tangente  $T_pM$  é dado pela soma direta canônica do espaço vertical e do espaço horizontal. Uma boa ilustração é apresentada na Figura 11, onde se pode ver a base  $M$ , as fibras  $T_pM$  e um espaço tangente no ponto  $(p, \mathbf{v}_p)$ , que é uma das fibras de  $TTM$ . Se há trivialização, então este último espaço tangente sempre pode ser separado, em qualquer ponto, como soma direta de um espaço vertical (tangente a  $T_pM$ ) e num espaço horizontal. Entretanto, se não há trivialização, essa separação não é possível globalmente.

**Corolário C.7.1.** *Dada uma trivialização  $t : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então a aplicação  $\pi_{TM} : TTM \rightarrow TM$  é dada simplesmente por  $(\pi_M, (\pi_M)_*)$ . Deste modo, um ponto qualquer de  $TTM$  é representado da forma  $(p, \mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{u}_{(p, \mathbf{v})})$ , onde  $\mathbf{u}_{(p, \mathbf{v})}$  é a componente vertical.*

Da seção C.6, já sabemos que  $\gamma''$  não pode ser pensada como a aceleração de uma curva  $\gamma$  para variedades diferenciáveis gerais  $M$ . Entretanto, dada uma trivialização  $t : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos criar uma curva  $\gamma$  tal que  $\gamma'_t = (\gamma_t, t^{-1}(\mathbf{v}))$ , ou seja, para cada ponto da curva está associado o vetor  $\mathbf{v}$  pela trivialização. Neste caso, como temos um campo constante igual a  $\mathbf{v}$  ao longo da curva, tem-se que  $\gamma''(t) = (\gamma(t), \mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{0})$ . De fato, a trivialização em  $TM$  permite que qualquer espaço tangente a  $TM$  seja escrito na forma  $T_{\mathbf{v}_p}TM = M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Então  $\gamma'_t = (\gamma_t, \mathbf{v})$  trata-se de uma curva  $\gamma(t)$  cuja velocidade é  $\mathbf{v}$ . A curva  $\gamma''$  tem terceira componente, horizontal, igual a  $\mathbf{v}$  (que sempre é igual à segunda), porém, a quarta componente, a vertical, tem que ser zero. Numa variedade arbitrária  $M$ , dada uma trivialização local, é sempre possível se definir um espaço horizontal em cada ponto. Porém, estes espaços horizontais induzidos são valem na trivialização local. Entretanto, para uma outra carta com intersecção não-vazia com a atual, os espaços horizontais seriam diferentes, o que resultaria em curvas de aceleração nula diferentes. Ou seja, este conceito de aceleração é dependente de coordenadas. Entretanto, quando existe uma trivialização global, todas estas acelerações se encaixam. Da mesma forma, só é possível se definir campo uniforme com uma trivialização global.

Será visto que se pode definir estes conceitos de forma invariante mesmo para espaços não-trivializáveis, desde que se introduza uma estrutura adicional na variedade conhecida como *conexão de Ehresmann* e será objeto de intenso estudo mais adiante. Será mostrado que se tal conexão estiver disponível em  $TM$ , vetores em pontos diferentes podem ser comparados de uma forma independente de coordenadas, o que já é suficiente.

**Teorema C.7.4** (Transversalidade em Relação à Vertical). *Dado um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , o seu gráfico, além de ser uma imersão biunívoca em  $TM$ , deve ser transversal às fibras de  $TM$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma curva na base e  $\mathbf{X} \circ \gamma$  a correspondente curva no gráfico (do campo). Se em algum ponto a última curva tivesse vetor velocidade vertical (ou seja, fosse não transversal), a aplicação projeção  $\pi_*$  mapearia este ponto no vetor nulo, o que significaria que a curva  $\gamma$  seria não-regular. De fato, isso aconteceria para qualquer curva no gráfico que passasse neste campo, não sendo possível definir a inversa da derivada, que deve ser invertível já que o gráfico deveria ser uma imersão. O gráfico deve ser então transversal. ■

### C.7.1 Curvas Integrais e EDO

O cálculo de campos vetoriais tangentes (isto é, o estudo da sua aplicação tangente e outras associadas) será posto de lado por enquanto (até definirmos conexões). Parte-se agora para o estudo das propriedades especiais que um campo vetorial possui, que são: curvas integrais (das quais ele é campo de velocidade) e interpretação como operador diferencial sobre  $\mathcal{C}^\infty(U)$ , onde  $U \subset M$ .

**Definição C.7.9** (Curvas Integrais). *Dado um campo vetorial tangente  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$ , diz-se que uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva integral de  $\mathbf{X}$  se  $\gamma'_t = \mathbf{X}(\gamma_t)$ , onde  $\gamma_*$  é o campo de velocidades da curva (notação mais comumente usada).*

A equação  $\gamma'_t = \mathbf{X}(\gamma_t)$ , expressa em uma carta em  $TM$ , resulta em um sistema de EDO's.

**Teorema C.7.5** (Existência e Unicidade Locais). *Dado um campo vetorial suave  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$ , para todo ponto  $p \in U$  existe uma curva  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  que passa neste ponto e tal que  $\gamma'_t = \mathbf{X}(\gamma_t)$  neste domínio.*

A prova é válida somente para o caso local e se baseia na existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias.

**Definição C.7.10** (Fluxo de um Campo Vetorial). *Dado  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$  um campo suave, pode-se associar uma aplicação  $\phi : I \times U \rightarrow U$  tal que,  $\phi_p : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset M$  é dada por  $\phi_p(t) = \gamma_t$ , onde  $\gamma$  é a curva integral de  $\mathbf{X}$  que passa por  $p$  em  $t = 0$ . Obviamente, o intervalo  $I$  é a intersecção do domínio de validade de todas as curvas integrais em  $U$ . Esta aplicação é conhecida como Fluxo do Campo Vetorial  $\mathbf{X}$ .*

**Teorema C.7.6.** *A seguinte identidade é sempre válida para um fluxo de um campo vetorial  $\mathbf{X}$ :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_p(t) = \mathbf{X}(\phi_p(t)). \quad (\text{C.3})$$

*Além disso, a aplicação para  $t$  fixo  $\phi_t(p) : U \rightarrow U$  é um difeomorfismo local.*

Como conseqüência da *existência e unicidade locais* de soluções de (C.3) para os campos tratados aqui, as curvas  $\phi_t(p)$  nunca se cruzam. Sabe-se também que para certas EDO's, algumas soluções possuem *tempo de escape finito*, o que significa que pode haver soluções que tendem para o infinito para um valor de  $t$  finito. Neste ponto, apesar da EDO estar bem definida, a solução não mais estará.

**Definição C.7.11** (Extensão de Curvas Integrais). *Dado  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$  e uma curva integral  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  passando em  $p \in U$ , diz-se que  $\bar{\gamma} : [-a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma extensão de  $\gamma$  se  $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset [-a, b]$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma$  no intervalo menor e  $\bar{\gamma}$  também é um curva integral de  $\mathbf{X}$ .*

Desta forma, pode-se definir:

**Definição C.7.12** (Curvas Integrais Máximas). *Dado um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , por cada ponto  $p$  existe uma curva integral máxima, que é a máxima extensão de qualquer curva passando em  $p$ . O intervalo de definição desta curva  $I_{max}$  é conhecido como intervalo maximal.*

Evidentemente, quatro situações distintas podem ocorrer:

$$I_{max} = [-a, b], [-\infty, b], [-a, \infty], [-\infty, \infty].$$

**Definição C.7.13** (Campos Vetoriais Completos). *Quando o intervalo maximal de cada ponto  $p$  é  $[-\infty, \infty]$ , diz-se que o campo vetorial é completo.*

É importante dizer aqui que não é necessário que o campo  $\mathbf{X}$  esteja definido em todo  $M$  para que seja completo, como é mostrado a seguir (mais detalhes em (SHARPE, 1997)).

**Definição C.7.14** (Suporte Compacto de um Campo Vetorial). *O suporte compacto de um campo vetorial é o fecho do subconjunto de pontos de  $M$  onde o campo não é igual ao vetor nulo. Diz-se que tais campos são de suporte compacto.*

Já foi mencionado no capítulo anterior que na classe das funções suaves, existem as funções de suporte compacto, que são funções que se anulam fora de um conjunto

(por exemplo, as *bump functions*). Um campo vetorial suave e de suporte compacto é sempre completo. Para campos definidos na variedade completa  $M$ , a topologia desta tem muito a dizer sobre as curvas integrais máximas. Este tipo de estudo é objeto da *teoria das folheações* (vide (CAMACHO; NETO, 1979)) e de uma forma mais particular, da *teoria dos sistemas dinâmicos*, que será abordada mais adiante. Deixando de lado por enquanto os conceitos globais relacionados às curvas integrais, passa-se agora aos principais conceitos de caráter local.

**Definição C.7.15** (Singularidades). *Seja  $M$  uma variedade e  $\mathbf{X}$  um campo vetorial sobre  $M$ . Diz-se que num ponto  $p \in M$  o campo apresenta uma singularidade se, naquele ponto, o campo se anula.*

**Definição C.7.16** (Curva Integral Constante). *Qualquer curva integral que passa numa singularidade tem como sua imagem somente este ponto e recebe o nome de curva integral constante Além disso, o seu campo de velocidades é identicamente nulo.*

Na literatura de sistemas dinâmicos, assim como na de teoria de controle, estes pontos são conhecidos como *pontos de equilíbrio*. É importante ainda lembrar que, para uma aplicação, os pontos onde o posto cai de valor são também chamados, em alguns livros, de pontos singulares. No entanto, a singularidade de um campo vetorial (vetor nulo) o posto não precisa cair em geral.

**Teorema C.7.7** (Retificação). *Dado um campo vetorial  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$ , se não houver singularidades em  $U$ , existe sempre uma transformação de coordenadas onde o campo pode ser expresso simplesmente como  $\frac{\partial}{\partial t}$ .*

**Corolário C.7.2.** *Dado um campo sem singularidades em  $U$ , numa certa carta  $(U, \psi)$ , para qualquer ponto  $(x_i)$ , o fluxo fica  $\phi(x_i, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$ , que é conhecido como fluxo de translação.*

Diz-se também que este fluxo é a *forma normal* de todos os campos retificáveis nesta região. Todos os campos que tem esta forma normal são *equivalentes a menos de uma transformação de coordenadas*, ou seja, são qualitativamente o mesmo. É natural a pergunta se existe uma classificação em classes de equivalência (como acima) para campos vetoriais com singularidade numa vizinhança. De fato, tal teoria existe e foi desenvolvida por Poincaré sob o nome de *formas normais*. Para uma abordagem rigorosa, vide (ARNOLD, 1988). Seu interesse maior está na *teoria de sistemas dinâmicos*, onde é usada para estudar qualitativamente classes de sistemas que diferem por uma transformação de coordenadas. O próximo passo é estudar mais a fundo as propriedades de um campo vetorial como operador diferencial.

## C.8 Derivadas Direcionais de Funções

Uma vez que um vetor tangente a  $M$  num ponto, ou seja  $\mathbf{v}_p$ , é um operador que fornece a derivada direcional de uma função qualquer  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  naquele ponto, é razoável esperar que um campo vetorial também terá uma propriedade semelhante. Maiores detalhes podem ser encontrados em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

**Definição C.8.1** (Operador Local). *Diz-se que um operador  $D$  em  $\mathcal{C}^\infty(U)$  é local se, para qualquer aberto  $V \subset U$ , for verdade que  $D_V f = D_U f$ .*

O operador  $\mathbf{v}_p$  é um operador local. Um campo vetorial  $\mathbf{X} : U \subset M \rightarrow TM$  é um operador diferencial em  $\mathcal{C}^\infty(U)$  que fornece, para cada ponto  $p \in U$  a derivada direcional  $\mathbf{X}_p$ . Este operador também é local.

**Proposição C.8.1.** *Dados dois campos vetoriais  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , as seguintes propriedades são válidas:*

- $\mathbf{X}(fg) = (\mathbf{X}f)g + f\mathbf{X}g$  (regra de Leibniz).
- $\mathbf{X}(cf) = c\mathbf{X}f$ , onde  $c$  é uma constante.
- $\mathbf{X}(f + g) = \mathbf{X}f + \mathbf{X}g$ .

**Teorema C.8.1** (Campos Vetoriais Equivalentes a Derivadas Parciais). *Um campo vetorial  $\mathbf{X}$  definido em  $U \subset M$  é equivalente a uma derivada parcial se ele for retificável.*

De fato, pelo teorema da retificação, este campo seria equivalente a  $\partial/\partial t$  a menos de uma transformação de coordenadas. As diferenças então entre campos vetoriais e derivadas parciais são:

1. Os campos vetoriais, em alguns casos, podem ser definidos globalmente;
2. Os campos vetoriais podem possuir singularidades, enquanto derivadas parciais não podem;
3. Derivadas parciais são dependentes de coordenadas.

Deste modo, os campos vetoriais são generalizações das derivadas parciais. A existência de uma derivada parcial válida globalmente é equivalente a existir um campo vetorial globalmente definido que não possua singularidades, ou seja, está ligado à existência de uma

trivialização. A teoria que estuda os campos globais e as relações entre a existência ou não de singularidades e a topologia da variedade é conhecida como *topologia diferencial* e é uma parte da *topologia algébrica*. O teorema mais importante relacionado à questão acima é o *teorema de Hopf-Poincaré* (vide por exemplo (MILNOR, 1965)).

### C.8.1 Derivadas de Lie de Funções

As derivadas de Lie, que são uma classe de derivadas fundamental para geometria diferencial, podem ser definidas para qualquer campo de objetos geométricos.

**Definição C.8.2** (Derivada de Lie de funções). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. A derivada de Lie de uma função  $f \in C^\infty(M)$  por um campo vetorial  $\mathbf{X}$  é uma função deste mesmo conjunto dada por:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f.$$

Ou seja, a derivada de Lie de funções nada mais é que a derivada por um campo vetorial.

**Proposição C.8.2** (Propriedades). *As seguintes propriedades valem para a derivada de Lie de funções:*

- $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(fg) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f)g + f\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g$
- $(\mathcal{L}_{g\mathbf{X}+h\mathbf{Y}})f = g\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f + h\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}f$
- $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(f + g) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}f + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}g$

onde  $f, g \in C^\infty(M)$

Estas propriedades são as mesmas da última proposição, acrescida da linearidade em relação ao operador de derivação. É importante destacar que a derivada de Lie nunca é em relação a um vetor num ponto, mas sim em relação ao campo vetorial.

**Proposição C.8.3** (Restrição à Curva). *Se  $\gamma$  é uma curva em  $M$  que é integral de  $\mathbf{X}$ , então a derivada de Lie da função só depende da curva integral em que está sendo calculada*

*Demonstração.* Da fato, se  $\gamma$  é uma curva em  $M$  que é integral de  $\mathbf{X}$ , é óbvio que ao longo desta curva

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathcal{L}_{\dot{\gamma}}f = (f \circ \gamma)',$$

o que mostra que ela independe do campo numa vizinhança  $U$  aberta em  $M$ . ■

É claro que a derivada de Lie por campo vetorial num aberto possui também esta propriedade. Uma das principais curiosidades da derivada de Lie de uma função (e que se estende para objetos mais gerais) é que o fato dela ser nula, ou seja,  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = 0$ , não significa que o  $f$  é a função constante. De fato, qualquer função que não varia ao longo das curvas integrais deste campo terá derivada de Lie em relação a este campo igual a zero.

**Exemplo:** Seja a função  $V = x^2 + y^2$  no  $\mathbb{R}^2$  e seja o campo  $\mathbf{X} = -y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)$ . Ao se aplicar  $\mathbf{X}f = [-y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)](x^2 + y^2) = [-2xy + 2xy] = 0$ .

**Definição C.8.3** (Pullback e Pushforward). *Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação suave e  $f$  uma função real em  $N$ . Define-se o pullback de  $f$  em relação a  $\phi$  como sendo a composta  $f \circ \phi^{-1}$ . De forma análoga se define o pushforward  $f \circ \phi$ .*

O nome vem do fato da função, que estava definida em  $N$  ser trazida para ser definida em  $M$ .

**Definição C.8.4** (Arrasto de uma Função ou Integral Primeira). *Dada uma função  $f \in C^\infty(M)$  e um campo vetorial nesta variedade, diz-se que a função  $f$  é arrastada pelo campo  $\mathbf{X}$  (ou que a função é uma integral primeira deste campo) se  $f \circ \phi_t \equiv f$  para todo  $t$ , onde  $\phi(p, t)$  é o fluxo do campo.*

O arrasto somente ocorre se  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = 0$ . Pode-se dizer que o valor que a função atribui a cada ponto é arrastado ao longo das linhas de fluxo do campo (não confundir com movimento rígido do gráfico da função).

**Teorema C.8.2** (Série de Lie). *Seja  $f \in C^\omega(M)$  e  $\mathbf{X}$  um campo vetorial analítico em  $M$  (variedade analítica), tem-se que*

$$f(\phi_p(t)) = f_p + t(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f)_p + \frac{1}{2}t^2(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}^2f)_p + \dots$$

que é conhecida como série de Lie.

Este teorema representa uma expansão em série das modificações de  $f$  quando sofrer pushforward pelo fluxo deste campo. Note o caráter exponencial desta série. Obviamente, a função terá sido arrastada quando a derivada de Lie se anula.

## C.9 Colchetes de Lie

Deseja-se agora definir a derivada de Lie de um campo vetorial em relação a outro campo vetorial, também conhecido como *colchete de Lie*. Esta deve ter as mesmas propriedades que a derivada de Lie de uma função (pelo menos, a princípio).

**Definição C.9.1** (Push-forward de Campos Vetoriais). *O push-forward de um campo vetorial  $\mathbf{Y}$  por uma aplicação  $\phi : M \rightarrow N$  nada mais é que  $\phi_*\mathbf{Y}$ , tal que a cada ponto  $p$  se reduz a  $(\phi_*)_p\mathbf{Y}_p$ .*

Então trata-se de empurrar um campo que está definido no ponto  $p$  para o ponto  $\phi(p) \in N$ .

**Definição C.9.2** (Arrasto de um Campo). *Dados dois campos vetoriais em  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  definidos em  $M$ , diz-se que o campo  $\mathbf{Y}$  é arrastado ao longo das linhas de fluxo de  $\mathbf{X}$  se  $(\phi_t)_*(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$ .*

Isto significa que a ação do fluxo sobre o campo não o altera. Quando se falar de simetria, serão mostradas mais características importantes dos campos arrastados, porém, para o propósito deste momento, o que se tem já é suficiente.

**Definição C.9.3** (Derivada de Lie de Campos: Colchetes de Lie). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(M)$  campos vetoriais tangentes. Se  $\phi$  é o fluxo do campo  $\mathbf{X}$ , define-se a derivada de Lie de  $\mathbf{Y}$  por  $\mathbf{X}$  por:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_{-t})_*(\mathbf{Y} \circ \phi_t) - \mathbf{Y}] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^*\mathbf{Y}). \quad (\text{C.4})$$

Isto significa que, dado um ponto inicial  $p$ , toma-se o vetor  $\mathbf{Y}_{\phi_t(p)}$  (que está na curva integral de  $\mathbf{X}$  partindo de  $p$ , e faz-se o pushforward do campo para este mesmo ponto, subtraindo-se deste o vetor do campo neste mesmo ponto. Por fim, toma-se o limite.

Quando o campo  $\mathbf{Y}$  é arrastado por  $\mathbf{X}$ , a derivada de Lie deve ser nula. Outra forma de se definir derivada de Lie é através de seu efeito sobre funções reais, da seguinte forma:

**Definição C.9.4** (Derivada de Lie: Ação sobre Funções Reais). *Sejam os campos vetoriais  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  definidos em  $M$ . O único campo vetorial  $\mathbf{Z}$  dependente de ambos os anteriores tal que sua ação sobre uma função real em  $M$  é dada por  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} - \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$  é a derivada de Lie  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ .*

**Teorema C.9.1.** *A seguinte fórmula é verdadeira:*

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*Y) = \phi_t^*(\mathcal{L}_X Y).$$

A demonstração pode ser encontrada em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990).

**Proposição C.9.1** (Fórmula em Coordenadas). *Dada uma carta de coordenadas em  $M$  com funções coordenadas  $\{x_i\}$ , a fórmula em coordenadas da derivada de Lie é:*

$$\mathcal{L}_W \mathbf{V} = \left( \frac{\partial V^i}{\partial x^j} W^j - V^j \frac{\partial W^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

### C.9.1 A álgebra de Lie $\mathcal{X}(U)$

Uma terceira estrutura algébrica pode ser acrescentada em  $\mathcal{X}(U)$  (além de espaço vetorial e módulo sobre um anel) dado que já foi definido o colchete de Lie:

**Definição C.9.5** (Colchete de Lie). *Diz-se que uma operação binária entre espaços vetoriais é um colchete de Lie se as seguintes propriedades são satisfeitas: Se  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X}(M)$ ,  $a, b$  são reais e  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , então vale:*

- $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$  (anticomutatividade);
- $[a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$  (linearidade);
- $[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0$  (identidade de Jacobi);
- $[f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] = fg[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + f\mathbf{X}(g)\mathbf{Y} - g\mathbf{Y}(f)\mathbf{X}$ .

Está mostrado em (CARMO, 1994) que

**Proposição C.9.2.** *A derivada de Lie entre dois campos é um colchete de Lie, ou seja  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathcal{L}_X \mathbf{Y}$*

**Teorema C.9.2** (Álgebra de Lie dos Campos Vetoriais). *Dotando-se o espaço vetorial  $\mathcal{X}(U)$  com um colchete de Lie como definido acima, tem-se definido uma álgebra de Lie dos campos vetoriais (vide seção A.16).*

Na seção A.16 estas álgebras já foram estudadas do ponto de vista abstrato. Vê-se agora que existe uma família de campos vetoriais tangentes que forma uma álgebra de Lie. Estas álgebras geralmente são de dimensão infinita (como espaço vetorial), porém também serão úteis de dimensão finita, que estão associadas a grupos de Lie, o que será

visto na seção D.1. Para um tratamento completo de álgebras de Lie, interessantes em muitos problemas de controle, vide (MARTIN, 1999), (SATTINGER; WEAVER, 1986), (DIXMIER, 1996).

**Teorema C.9.3.** *A álgebra de Lie dos campos vetoriais, munida com a derivada de Lie em relação a um de seus próprios campos, ou seja,  $\mathcal{L} = [\mathcal{X}, \cdot]$ , forma uma álgebra diferencial (vide seção A.16).*

Pela identidade de Jacobi, é fácil ver que a regra de Leibniz é satisfeita, ou seja

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = [\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + [\mathbf{Y}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}].$$

Apesar da colchete de Lie ser uma derivada (derivada interna, vide seção A.16), ele não possui todas as propriedades da derivada de Lie de função. Mais especificamente, ele não possui a propriedade:

**Definição C.9.6** (Tensorialidade). *Diz-se que uma derivada de um campo de objetos  $\mathcal{O}$  em relação a um campo vetorial  $D_{\mathbf{X}}$  é tensorial em  $\mathbf{X}$  se seu valor num ponto, isto é  $(D_{\mathbf{X}}\mathcal{O})_p$  depende somente do valor do campo naquele ponto, ou seja,  $\mathbf{X}_p$ .*

De fato, pela fórmula em coordenadas apresentada na proposição C.9.1, nota-se que a derivada de Lie de um campo em relação a outro depende dos valores de ambos os campos numa vizinhança do ponto (pois depende das derivadas parciais de ambos os campos). Deste modo, essa derivada não é tensorial. Quando for introduzido o conceito de *conexão*, será definido também o de *derivada covariante*, que possui a propriedade de tensorialidade, e pode ser considerada uma derivada direcional.

## C.9.2 Interpretação Geométrica

É importante agora dar uma interpretação geométrica quando dois campos vetoriais  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  comutam. Dada uma variedade diferenciável  $M$  e dois campos vetoriais  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  definidos nela, diz-se que estes campos *comutam* quando  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$ . De fato, pela definição em (C.4), se o colchete de Lie se anula identicamente, tem-se que  $(\phi_t)_*(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$  se  $\phi_t$  é o fluxo do campo  $\mathbf{X}$  (e o contrário também vale). Isto é ilustrado na Figura 12.

Pode-se dizer que as pontas do campo  $\mathbf{Y}$  sempre começam e terminam nas mesmas curvas integrais de  $\mathbf{X}$ . Uma outra construção bastante ilustrativa que aparece na literatura, por exemplo (BURKE, 1985), e a ilustrada na Figura 13. Nesta, mostra-se o caso onde  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  é pequeno (num ponto). Há uma curva que é a concatenação de outras

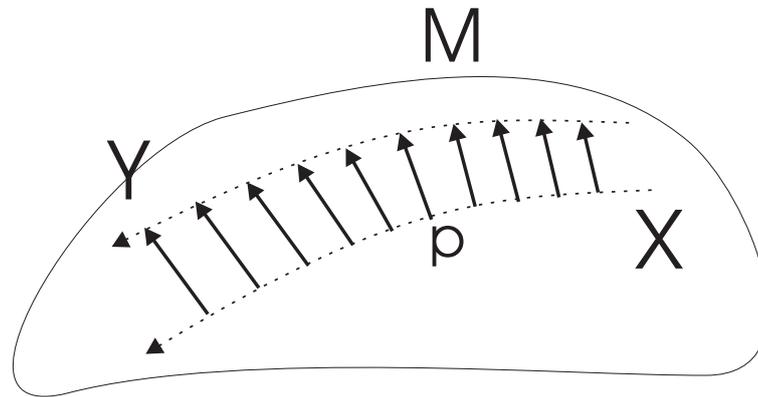


Figura 12: Arrasto do Campo Vetorial

quatro (curvas em preto, contínuas) e que é construída da seguinte maneira: 1) Partindo do ponto  $p$ , caminhe por  $t$  unidades de parâmetro na direção de  $\mathbf{X}$ ; 2) Caminhe agora na direção de  $\mathbf{Y}$  por  $s$  unidades; 3) Caminhe na direção de  $-\mathbf{X}$  por  $t$  unidades, e 4) Caminhe na direção de  $-\mathbf{Y}$  por  $s$  unidades. Há ainda uma outra curva pontilhada, que une o ponto inicial  $p$  ao ponto final da curva concatenada, e que é a curva integral de  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ . Quanto menor o valor do colchete no ponto  $p$ , a sua curva integral e mais próxima a curva contínua está de se fechar. Quando os campos comutam, tem-se que a curva se fecha, e a situação é de *malha ou reticulado fechados*. Deste modo, o módulo do colchete num ponto mede, de certa forma, o quanto o reticulado ou malha não se fecha.

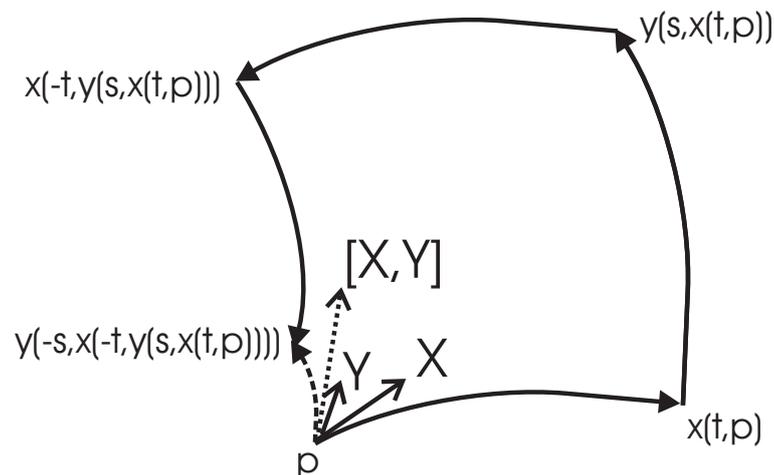


Figura 13: Ilustração do Efeito dos Campos Comutarem

Uma outra consequência importante de  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$  é a seguinte: ao se percorrermos as curvas integrais de  $\mathbf{X}$  partindo de pontos diferentes sobre uma curva integral de  $\mathbf{Y}$ , mas pelo mesmo tempo, chega-se na mesma curva integral do campo  $\mathbf{Y}$  (ou vice-versa). Deste modo, pode-se pensar que as curvas integrais de um campo são *curvas equipotenciais*, e que o tempo para ir de uma curva à outra é independente do caminho. De fato:

**Teorema C.9.4.** *Seja  $M$  uma variedade e dois campos vetoriais tangentes tais que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$ . Se  $\phi_t$  e  $\psi_s$  são os respectivos fluxos, então  $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ .*

Como qualquer caminho entre duas curvas integrais de  $\mathbf{Y}$  (equipotenciais) é uma composição de vários fluxos do tipo  $\phi_t$  e  $\psi_s$ , pela teorema anterior, qualquer caminho pode ser reduzido a algo do tipo  $\phi_a \circ \psi_b$ . Como não interessa o tempo  $b$  em que se permanece na equipotencial de  $\mathbf{Y}$ , o tempo para ir entre uma equipotencial e outra é sempre  $a$ . O fato dos campos comutarem ainda permite que se defina, a partir destes campos:

**Proposição C.9.3** (Sistema de Coordenadas). *Dados dois campos vetoriais tangentes  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : U \subset M \rightarrow TM$  onde  $M$  é de dimensão dois e sem singularidades, se  $[X, Y] \equiv 0$ , então tem-se definida, localmente, uma carta de coordenadas dada pelas funções reais  $s, t$  em  $U \subset M$  (parâmetros das curvas integrais dos dois campos).*

*Demonstração.* Demonstra-se somente uma parte: A função  $s$  não varia ao longo das curvas de  $\mathbf{X}$ , assim como a função  $t$  não varia ao longo das curvas de  $\mathbf{Y}$ , ou seja,  $\mathbf{X}s = \mathbf{Y}t = 0$ . Tais funções são *funcionalmente independentes*, isto é, uma não pode ser escrita como função da outra. Tem-se ainda que  $\mathbf{X}t = 1$ ,  $\mathbf{Y}s = 1$  (o que só é possível se os campos não têm singularidades), assim:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]t = \mathbf{X}\mathbf{Y}t - \mathbf{Y}\mathbf{X}t = \mathbf{X}\mathbf{Y}t - \mathbf{Y}1 = \mathbf{X}\mathbf{Y}t = 0.$$

Fazendo-se o mesmo para  $s$ , necessariamente devemos ter que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$  por causa da independência funcional de  $t, s$ . ■

Por fim, uma última consequência geométrica de  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$  é que:

**Teorema C.9.5.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  tais que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$ . O reticulado formado pelos fluxos de ambos os campos determinam uma 2-subvariedade  $S \subset M$ .*

A Figura 13 pode ajudar o leitor a se convencer. Não é possível que o reticulado se feche e não determine uma superfície. Basta pensar que as curvas integrais de um deles vão sendo deslizadas ao longo do fluxo do outro, sem nunca perder a continuidade. Isso significa que descrevem uma superfície. O mesmo pode ser dito do outro. Há por fim uma consequência operacional para a comutação: o colchete de Lie  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  mede o quanto os operadores diferenciais (campos) estão deixando de comutar. Sabemos, por

outro lado que, dado um sistema de coordenadas, as derivadas parciais em relação a estas coordenadas são operadores diferenciais e que eles comutam par-a-par entre si. Deste modo, segue:

**Corolário C.9.1.** *Sendo  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$ , as funções coordenadas  $t, s : M \rightarrow \mathbb{R}$  induzem os campos vetoriais  $\partial/\partial t$  e  $\partial/\partial s$ , que são tangentes às curvas integrais dos campos, e que obviamente comutam, já que são derivadas parciais.*

Por fim, para o caso de campos analíticos em variedades analíticas, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema C.9.6** (Fórmula de *Campbell-Baker-Hausdorff*). *Dados os campos vetoriais  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  analíticos definidos em  $U \subset M$ , onde  $M$  também é analítica, vale a fórmula:*

$$(\phi_{-t})^* \cdot \mathbf{Y} \circ \phi_t = \mathbf{Y} + [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]t + [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]\frac{t^2}{2!} + [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]]\frac{t^3}{3!} + \dots \quad (\text{C.5})$$

conhecida como fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff.

Note que esta expansão tipo Taylor é semelhante à apresentada no teorema C.8.2 e o papel do colchete de Lie como termo linear na expansão. Obviamente, quando os campos comutam, tem-se o arrasto de um campo pelo outro.

## C.10 Campos Vetoriais em $TM$

Cabe aqui apresentar algumas propriedades dos campos vetoriais em  $TM$ , uma vez que foram apresentadas algumas propriedades das curvas neste espaço. Estas últimas são utilizadas para deduzir as propriedades dos campos, já que estes são formados por classes de equivalências destas últimas. (ABRAHAM; MARS DEN, 1990) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982)

**Definição C.10.1.** *Um campo vetorial em  $TM$  é uma aplicação  $\mathfrak{X} : TM \rightarrow TTM$  de modo que  $\pi_{TM} \circ \mathfrak{X} = \text{Id}_{TM}$ .*

Como foi visto, em geral  $T\pi_M = (\pi_M, (\pi_M)_*)$  é diferente de  $\pi_{TM}$  globalmente (a igualdade vale se houver trivialização em  $M$ ). De fato, pensando-se em  $(p, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{\mathbf{v}_p})$ , a aplicação  $\pi_{TM}$  projeta este ponto em  $(p, \mathbf{v}_p)$ , enquanto que  $\pi_*$  projeta  $\mathbf{w}_{\mathbf{v}_p}$  em  $\mathbf{v}_p$ . Na Figura 11, o vetor pontilhado representa um campo tangente a  $M$ , enquanto que o vetor

contínuo (isto é, não tracejado) representa um campo sobre  $TM$ . Da mesma forma, o gráfico de  $\mathfrak{X}$  é uma subvariedade transversal de  $TTM$ .

**Definição C.10.2** (Campos Vetoriais em Curvas de  $TM$ ). *Dada uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ , um campo vetorial nesta curva é uma aplicação  $\mathfrak{X} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TTM$  tal que a cada ponto  $\Gamma_t$  associa um vetor de  $T_{\Gamma_t}TM$ .*

Em particular, o campo de velocidades de  $\Gamma$  recai nesta categoria. Para o caso de uma curva  $\Gamma$  vertical, tem-se que  $\pi_* \circ \Gamma' = 0$ . Deste modo, pode-se definir:

**Definição C.10.3** (Campos Verticais). *Um campo vetorial  $\mathfrak{V} : U \subset TM \rightarrow TTM$  é dito ser vertical se  $\pi_* \mathfrak{V} = 0$ .*

**Definição C.10.4** (Campos de Segunda Ordem). *Um campo  $\mathfrak{X} : U \subset TM \rightarrow TTM$  é de segunda ordem em  $M$  se cada curva integral  $\Gamma$  de  $\mathfrak{X}$  for uma curva de segunda ordem, conforme definido anteriormente.*

**Teorema C.10.1.** *Um campo de segunda ordem nunca possui pontos de equilíbrio nem pontos onde fica vertical.*

*Demonstração.* Como toda as suas curvas integrais são de segunda ordem, e os campos de velocidades nunca devem se anular ou serem verticais (pois senão seriam lifts de curvas não-regulares) a afirmação do teorema tem que ser verdadeira. ■

**Corolário C.10.1.** *Cada curva de segunda ordem é um lift tangente de  $\pi \circ \Gamma$ , ou seja,  $(\pi \circ \Gamma)' = \Gamma$ , onde  $\pi : TM \rightarrow M$  é a projeção canônica do fibrado tangente.*

*Demonstração.* Para demonstração, vide (LANG, 1999). ■

Um conceito de extrema importância para geometria diferencial, e que será explorado mais adiante, é o de:

**Definição C.10.5** (Geodésica de Campo de Segunda Ordem). *Dada uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$  e um campo de segunda ordem  $\mathfrak{X}$  para esta variedade, uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é chamada de geodésica de um campo de segunda ordem  $\mathfrak{X}$  se*

$$\gamma' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM,$$

for uma curva integral de  $\mathfrak{X}$ .

**Corolário C.10.2.** Se  $\gamma' = \Gamma$  é uma curva integral de um campo de segunda ordem  $\mathfrak{X} : TM \rightarrow TTM$ , então vale que  $\gamma'' = \mathfrak{X}_{\gamma'}$ , onde  $\gamma''$  representa, num ponto de  $TM$ , um vetor tangente, ou seja, um elemento de  $TTM$ .

**Teorema C.10.2.** Dado um campo de segunda ordem  $\mathfrak{X}$  e uma carta de coordenadas, as suas curvas integrais devem satisfazer um sistema de equações ordinárias de segunda ordem do tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= F_1^i(x_k), \\ \ddot{x}_j &= F_2^j(\dot{x}_i, x_k). \end{cases}$$

*Demonstração.* De fato, numa carta local, o campo  $\mathfrak{X}$  pode ser escrito na forma

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n F_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n F_2^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}.$$

Considerando as coordenadas da carta local para um vetor em  $TTM$ , a identidade segue.

■

**Nota:** Se  $\gamma$  fosse uma curva em  $M$  não-regular, ou seja, tivesse um ponto onde a velocidade é nula, o seu *lift tangente* deveria ou ter uma curva não-regular, ou uma curva não transversal. Como será visto mais adiante, as geodésicas, ou seja, as projeções de curvas integrais de campos de segunda ordem, têm que ser curvas regulares. Deste modo, os campos de segunda ordem não podem ter pontos de equilíbrio nem se tornarem puramente verticais em nenhum ponto. Será visto mais adiante que a generalização do conceito de movimento rerilíneo uniforme para variedades quaisquer não trivializáveis são geodésicas de campos de segunda ordem. Como neste movimento, as velocidades em cada ponto devem ser a mesma, as geodésicas nunca podem ser curvas não-regulares.

Novamente, um campo de segunda ordem não pode ser pensado como um campo de aceleração, já que as suas curvas integrais satisfazem  $\gamma''_t = \mathfrak{X}_{\gamma'_t}$  e um campo de aceleração nula resultaria que  $\gamma'_t$  seria um ponto parado, ou seja, qualquer partícula com aceleração nula teria que ser uma partícula que ficasse permanentemente parada, o que não concorda com as Leis de Newton (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2011).

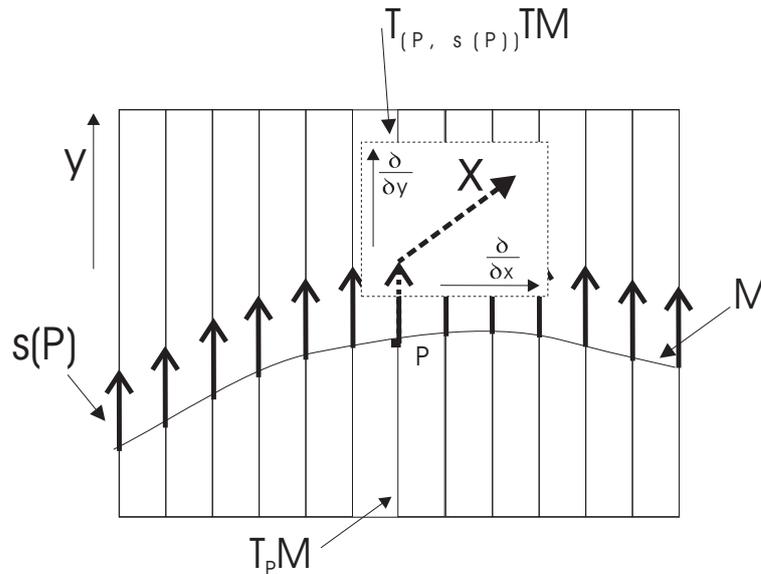


Figura 14: Ilustração de um Campo Horizontal

## C.11 Cotangência

Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados, por exemplo, em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (BLOCH, 2003).

Um conceito fundamental para se definir rigorosamente as conexões de Cartan é o de *cotangência*. Seja uma variedade diferenciável  $M$  e  $p \in U \subset M$  um ponto e uma função real  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ . Suponha ainda que  $p$  seja um ponto regular de  $f$  e  $y = f(p) = f_p$ . Deste modo, ele deve pertencer a uma subvariedade de nível  $f^{-1}(y)$  e o espaço tangente em  $p$  para esta subvariedade é bem definido. Deste modo, pode-se definir:

**Definição C.11.1** (Cotangência). *Diz-se que duas funções  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$  são cotangentes em  $p \in U$  se, para qualquer curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  e que passe em  $p$ , tivermos que  $(f_1 \circ \gamma)'_t = (f_2 \circ \gamma)'_t$ .*

A cotangência de duas funções em um ponto  $p$  é uma relação de equivalência (vide seção A.1) e o conjunto de todas as funções cotangentes em um ponto é uma classe de equivalência representada por  $df_p = [f]_p$ , que é chamada de *covetor cotangente* a  $f$  em  $p$ . A função  $f$  é o representante da classe naquele ponto.

**Teorema C.11.1.** *O covetor cotangente  $[f]_p$  é de fato um covetor, já definidos na seção A.8, e numa carta de coordenadas local, este pode ser representado pelas derivadas parciais de  $f$  naquele ponto.*

*Demonstração.* De fato, numa carta de coordenadas local que contém  $p$ , tem-se que

$$(f \circ \gamma)'_p = f(x_1(t), \dots, x_n(t))' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \dot{x}_i(t)$$

o que é de fato a aplicação de um covetor sobre um vetor. Tem-se ainda que  $(f_1 \circ \gamma)'_t = (f_1 \circ \gamma)'_t$ , e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \dot{x}_i(t) = \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \dot{x}_i(t) \text{ (Notação de Einstein)}$$

o que implica que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \Big|_p$$

■

A representação da classe de equivalência  $[f]_p$  (que está definida em somente um ponto) pode ser feita pelas derivadas parciais de uma função representante da classe. Entretanto, esta forma não é adequada quando forem definidos os campos suaves destas classes de equivalência, como será visto mais adiante.

**Definição C.11.2** (Espaço Cotangente). *Dada a variedade  $M$ ,  $p \in M$  e o espaço tangente  $T_p M$ , para cada vetor  $\mathbf{v}_p$  existe um covetor  $\omega_p$ , e o espaço formado por estes covetores, que tem a mesma dimensão que  $T_p M$  (e por conseguinte,  $M$ ) é conhecido como espaço cotangente em  $p$ , e é representado por  $T_p^* M$ .*

De fato, o espaço cotangente se trata do espaço vetorial dual de  $T_p M$  (vide seção A.8). Define-se também a aplicação de um covetor em um vetor  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , cujo resultado é um número real. Define-se o *núcleo* do covetor  $\omega_p$  como sendo o subespaço vetorial de  $T_p M$ , que tem dimensão  $n - 1$  tal que  $\langle \omega_p, \mathbf{v}_p \rangle = 0$ . Evidentemente, qualquer base que se atribuir a  $T_p M$  vai induzir uma base dual em  $T_p^* M$ , conforme definido na seção A.8.

### C.11.1 Interpretação Geométrica da Cotangência

A interpretação geométrica de  $\omega_p$  aplicado a  $\mathbf{v}_p$  é de um *medidor* do número de *perfurações* que  $\mathbf{v}_p$  realiza no feixe de hiper-planos paralelos ao núcleo de  $\omega_p$ , que têm dimensão  $n - 1$  em  $T_p M$ . De fato, esta aplicação fornece um número proporcional ao de perfurações. Isto pode ser melhor compreendido através da Figura 15. Já se sabe que um covetor cotangente é elemento de um espaço vetorial. Entretanto, a interpretação é diferente de um vetor tangente, no seguinte sentido:

- Se  $\mathbf{v}_p$  pertence ao núcleo de  $\omega_p$ , tem-se que  $\omega_p(\mathbf{v}_p) = 0$ , ou seja, neste caso o

número de perfurações é zero. Os vetores tangentes paralelos aos planos diz-se serem *aniquilados* pela covetor;

- Multiplicar  $\omega_p$  por um número  $\alpha$  equivale a diminuir a distância entre os planos do feixe. De fato,  $\langle \alpha\omega_p, \mathbf{v}_p \rangle = \langle \omega_p, \alpha\mathbf{v}_p \rangle$ , ou seja, o efeito é o mesmo que aumentar o comprimento de  $\mathbf{v}_p$  pelo fator  $\alpha$ ;
- Multiplicar  $\omega_p$  por  $-1$  significa trocar a orientação dos planos.

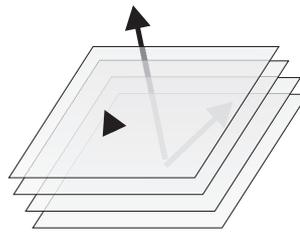


Figura 15: Ilustração de um Vetor Cotangente

Esta interpretação geométrica na verdade poderia ser dada na seção A.8, pois se aplica para qualquer covetor, e não somente para covetor cotangente. Ainda, não se deve imaginar o covetor como algo que mede comprimento de um vetor, pois isso exige o conceito de métrica (que será introduzido mais adiante).

## C.12 Fibrado Cotangente

Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados por exemplo em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (BLOCH, 2003). Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , pode-se criar um outro fibrado (tal como  $TM$ ) que é composto pela união dos espaços cotangentes em cada ponto.

**Definição C.12.1** (Fibrado Cotangente). *Define-se o fibrado cotangente  $T^*M$  como sendo*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M \text{ (união disjunta)}$$

*que tem dimensão  $2n$ . Define-se também a aplicação sobrejetiva  $\bar{\pi} : T^*M \rightarrow M$ , que é a projeção natural deste fibrado.*

Evidentemente, o fibrado cotangente também é um fibrado vetorial, e dada uma trivialização local, os pontos desta variedade são da forma  $(p, \omega_p)$ , de modo que  $\bar{\pi}(p, \omega_p) = p$ . Pode-se definir curvas em  $T^*M$ , como em qualquer variedade diferenciável. Utilizando-se

a noção de tangência de curvas, pode-se definir o conceito de vetor tangente a  $T^*M$  num ponto  $\omega_p$ , espaço tangente neste mesmo ponto  $T_{\omega_p}T^*M$ , campo de velocidades de uma curva em  $T^*M$  e até:

**Definição C.12.2** (Fibrado Tangente de  $T^*M$ ). *O Fibrado tangente de  $T^*M$ , representado por  $TT^*M$ , é dado pela união disjunta dos espaços  $T_{\omega_p}T^*M$ , que tem dimensão  $4n$  e os pontos desta variedade são da forma  $(p, \omega_p; \mathfrak{V}_{\omega_p})$ .*

Dada uma curva  $\xi : I \subset M \rightarrow T^*M$  no fibrado cotangente, o seu campo de velocidades contém a informação da variação tanto da curva projeção  $\gamma(t) = \bar{\pi}(\xi(t))$  quanto da variação dos covetores em relação ao parâmetro  $t$ . Para cada ponto  $p \in M$ , define-se o *subespaço vertical* como sendo o subespaço de  $T_{\omega_p}T^*M$  definido pelo núcleo de  $\bar{\pi}_*$  em cada ponto  $p$ .

**Definição C.12.3** (Curvas Verticais em  $T^*M$ ). *Uma curva  $\xi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow T^*M$  é vertical se  $\bar{\pi}(\xi) = p$  (projeção resulta em um ponto). Ou seja, tratam-se das curvas verticais neste fibrado, que é um fibrado vetorial.*

É interessante saber o que ocorre quando se tem uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , um campo vetorial tangente  $\Gamma$  sobre esta curva (não necessariamente o campo de velocidades) e um campo cotangente  $\xi$  sobre a mesma curva.

**Definição C.12.4** (Conjugação de curvas). *Dadas uma curva  $\xi(t)$  em  $T^*M$  e uma curva  $\Gamma(t)$  em  $TM$  tais que  $\pi \circ \Gamma = \bar{\pi} \circ \xi = \gamma$ , então está definida a função real sobre a imagem de  $\gamma$  dada por  $\langle \xi, \Gamma \rangle(t)$  que é a conjugação dos vetores ponto-a-ponto.*

Sabe-se que a aplicação tangente  $TF : TM \rightarrow TN$  mapeia curvas de  $TM$  em curvas de  $TN$ . Usando-se a mesma idéia, define-se:

**Definição C.12.5** (Aplicação Cotangente ou *Pullback*). *Dada uma aplicação entre duas variedades  $F : M \rightarrow N$  e dois pontos  $(p, \omega_p)$  e  $(y, \theta_y)$ , define-se a aplicação  $T^*F : T^*N \rightarrow T^*M$  tal que  $T^*F(\theta_{f(p)}) = \omega_p$  e tal que  $\langle T_p^*F(\theta_{f(p)}), \mathbf{v}_p \rangle = \langle \omega_p, T_p F(\mathbf{v}_p) \rangle$*

Uma forma alternativa e mais econômica de representação do *pullback* é  $F^*(\eta)$ .

## C.13 1-Formas

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982), (ABRAHAM; MARSDEN, 1990) e (BLOCH, 2003). O conceito de 1-forma é dual ao de campo vetorial:

**Definição C.13.1** (1-formas). *Dado o fibrado cotangente  $T^*M$ , uma 1-forma é qualquer seção deste fibrado  $\omega : S \subset M \rightarrow T^*M$  que associa a cada ponto  $p \in S$  um covetor  $\omega_p$  naquele ponto.*

Uma 1-forma pode ser pensada como um campo covetorial cotangente (dual ao campo vetorial) que associa um covetor cotangente (como na Figura 15) a cada ponto  $p \in U \subset M$ . A Figura 16 apresenta uma ilustração de uma 1-forma. Tem-se então um medidor de número de perfurações causadas por vetores em cada ponto de  $M$ . A 1-forma mais simples de todas é:

**Definição C.13.2** (Diferencial). *Dada uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , a aplicação  $df$ , que vem de  $Tf = (f, (df))$  e tal que  $(df)_p \in \mathcal{L}(T_pM, \mathbb{R})$  recebe o nome de diferencial de  $f$ .*

Dada uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , a aplicação  $df$  tem a propriedade  $\langle df, \mathbf{v}_p \rangle = \mathbf{v}_p f$ . De fato, pela prova dos teoremas C.11.1 e C.3.4, chega-se facilmente a essa conclusão.

**Teorema C.13.1** (Espaço Vetorial  $\Lambda^1(U)$ ). *O conjunto das 1-formas  $\Lambda^1(U)$  em  $U \subset M$  tem estrutura de espaço vetorial (de dimensão infinita) onde os escalares são as funções constantes e a soma é simplesmente a soma de 1-formas definida acima.*

De forma semelhante, este espaço possui estrutura de módulo sobre o anel  $\mathcal{C}^\infty(U)$  (vide seção A.7). De fato, será visto que há toda uma álgebra de  $n$ -formas, que é uma álgebra graduada conhecida como *álgebra exterior* (vide seção A.14.6). Seja  $\Lambda^1(U)$  o conjunto das 1-formas em  $U \subset M$ . Naturalmente vale que  $(\xi + \omega)_p = \xi_p + \omega_p$  e  $(f\omega)_p = f_p\omega_p$ , onde  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto significa que os medidores de perfuração podem ser somados ponto-a-ponto, como se fossem vetores. De fato, se tomarmos os vetores normais aos planos de cada covetor, e somarmos, teremos uma idéia do que ocorre: os planos normais ao vetor soma serão os planos do covetor resultante. Se o vetor normal resultante aumentou de tamanho, os planos correspondentes se aproximaram.

Da mesma forma que um campo vetorial tangente pode apresentar pontos onde seu valor se anula, uma 1-forma  $\omega$  pode apresentar pontos onde o covetor é nulo (singularidade). Pode-se pensar então que naquele ponto, a separação entre os planos paralelos se torna infinita. Igualmente, pode haver pontos onde a separação entre os planos é igual a zero, e tem-se então um outro tipo de singularidade.

**Definição C.13.3** (Base Natural). *Dada uma carta de  $M$  onde as funções coordenadas são  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , os diferenciais  $dx^i : M \rightarrow \mathcal{L}(T_pM, \mathbb{R})$  associam uma base de covetores em cada ponto para o espaço cotangente  $T_p^*U$*

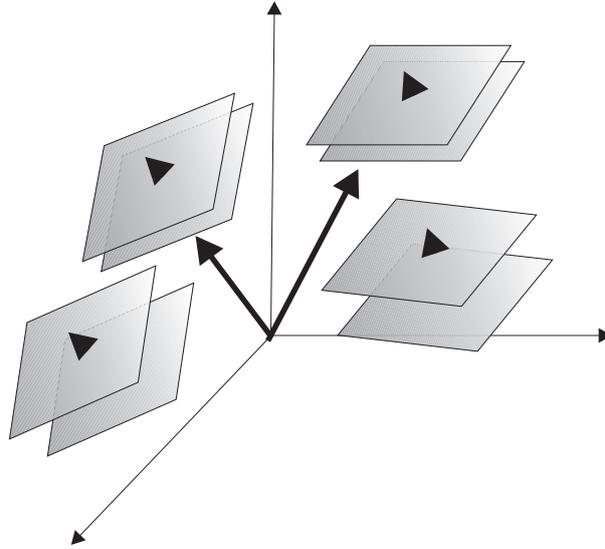


Figura 16: Visualização de uma 1-Forma

A base natural  $\{dx^i\}$  é dual à base  $\{\partial/\partial x^i\}$  numa carta de coordenadas em  $U$ . Se  $x^i$  é uma função, esta cresce a uma taxa constante numa direção e não cresce nas demais, uma vez que  $(\partial/\partial x^j)x^i = \delta_i^j$ . Como  $\langle dx^i, (\partial/\partial x^j) \rangle = (\partial/\partial x^j)x^i = \delta_i^j$ , tem-se a dualidade desejada. É evidente que  $\{dx_p^i\}$  tem dimensão  $n$  e forma uma base para  $T_p^*M$  e qualquer covetor é expresso da forma  $\omega = p_i dx^i$ . Usaremos aqui  $p_i$  para denotar as coordenadas das 1-formas na base natural, pois é uma notação comum (sobretudo em sistemas mecânicos). Não confundir com o ponto  $p \in M$  na variedade. Com isto, é possível criar uma carta que vale para toda uma vizinhança.

**Proposição C.13.1** (Carta em  $T^*M$ ). *Todo ponto de  $T^*U$  pode ser escrito como:*

$$(x^1, x^2, \dots, x^n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

*que é um sistema de coordenadas (ou carta) em  $T^*M$ .*

É evidente que o fato das funções coordenadas serem independentes é que garante que as jacobianas destas funções determinam uma base natural em cada ponto. É possível atribuir uma base para os espaços cotangentes de uma vizinhança  $U \subset M$  sem que esta esteja associada a uma carta de  $M$ .

**Proposição C.13.2** (Co-frame). *Dada a família de seções suaves  $\{\theta_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  de  $T^*U$  linearmente independentes ponto-a-ponto, diz-se que esta base é co-frame (ou ainda co-frame móvel ou repère mobile) e qualquer seção de  $T^*U$  pode ser expressa como combinação linear (no sentido de módulo) deste co-frame.*

É evidente que  $\{dx^i\}$  também forma um co-frame, porém associado a uma carta

de coordenadas. Muitas questões importantes estão relacionadas com os co-frames. Eles têm um papel fundamental no chamado *método das equivalências de Cartan* (GARDNER, 1989), por exemplo, que é uma ferramenta geométrica muito poderosa, mas que não será tratada neste livro. Cabe aqui fazer algumas considerações sobre a aplicação tangente de uma 1-forma  $\omega$ .

**Definição C.13.4** (Aplicação  $T\omega$ ). *Dada a 1-forma  $\omega : M \rightarrow T^*M$  que mapeia  $p \mapsto (p, \omega_p)$  de forma suave, a aplicação  $T\omega : TM \rightarrow TT^*M$  mapeia  $(p, \mathbf{v}_p)$  em  $(p, \omega_p; \mathbf{w}_{\omega_p})$ .*

Curvas em  $TM$  são então mapeadas em curvas de  $TT^*M$ , e o vetor  $\mathbf{w}_{\omega_p}$  contém informação de como varia em  $\omega_p$  uma curva passando neste ponto (e contém informação da variação da projeção na base assim como a variação da parte covetorial).

## C.14 Integração de 1-Formas

Uma pergunta natural é: quando que uma 1-forma  $\omega$  é o diferencial de uma função real  $f$ , ou seja, quando  $\omega = df$ ? De fato, isso não ocorre sempre. Será visto que esta questão está relacionada com a integração de 1-formas. Vide (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982) e (BLOCH, 2003) para mais detalhes.

**Definição C.14.1** (Integração de 1-formas ao longo de curvas). *Dada uma variedade  $M$ , uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  e uma 1-forma  $\omega$  em  $M$ , define-se a integral de  $\omega$  ao longo de  $\gamma$  como sendo o número real dado pela integral de linha:*

$$J = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \langle \omega, \gamma' \rangle dt. \quad (\text{C.6})$$

Em mecânica, é comum representar uma força como uma 1-forma  $\omega$ . Deste modo, se  $\gamma$  for a trajetória de uma partícula, o número  $J$  é o trabalho realizado por esta força. Se aumentarmos  $\omega$ , significa que os hiperplanos correspondentes ficam mais próximos, de modo que o número de furos aumenta, e  $J$  aumenta. Da mesma forma, se mudarmos a curva, aumentando o comprimento do seu vetor velocidade  $\gamma'$ , e o  $J$  também aumenta. É importante destacar que não podemos falar ainda de comprimento de uma curva, pois isso depende de se introduzir o conceito de métrica. Entretanto, o comprimento será dado por uma integral semelhante à dada na Equação (C.6).

**Proposição C.14.1.** *As seguintes propriedades da integração podem ser demonstradas:*

1. Se  $\gamma_1 \diamond \gamma_2$  é a concatenação das curvas  $\gamma_1, \gamma_2$ , então

$$\int_{\gamma_1 \diamond \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

2. A integral é linear, isto é:

$$\int_{\gamma} (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_{\gamma} \omega_1 + b \int_{\gamma} \omega_2.$$

onde  $a$  e  $b$  são reais.

Pode-se então definir:

**Definição C.14.2** (Conjugação entre 1-formas e curvas). *Define-se a conjugação entre uma 1-forma  $\omega$  e uma curva  $\gamma$  como sendo a operação bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dada por:*

$$\langle \omega, \gamma \rangle = \int_{\gamma} \omega.$$

**Definição C.14.3** (Variação da Integral). *Dada uma integral da forma da Equação (C.6), define-se uma variação desta integral como sendo a homotopia  $\delta\gamma : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\delta(0, t) = \gamma(t)$ , uma curva qualquer  $\delta(s_1, t)$  não se cruza com outra curva  $\delta(s_2, t)$ , exceto talvez para  $t = 0$  ou  $t = 1$ , e as curvas definem uma superfície de dimensão dois.*

A definição de homotopia se encontra na seção B.1.1. É evidente que o valor da integral deve mudar para as diferentes curvas da variação. A hipótese de que as curvas da variação não se cruzam e determinam uma superfície é para simplificar, mas a integral estaria definida mesmo no caso contrário.

**Teorema C.14.1.** *Se as curvas da variação  $\delta\gamma$  não se cruzam e definem uma superfície, está definido um sistema de coordenadas nesta superfície, dado pelas funções parâmetro  $t, s$ , e também os campos  $\partial/\partial t$  (campo tangente) e  $\partial/\partial s$  (campo variacional).*

*Demonstração.* Vem da proposição C.9.3. ■

**Teorema C.14.2** (Independência do Caminho). *Dada uma integral da forma (C.6) e uma carta de coordenadas local, a condição para que esta seja independente do caminho é que o bilinear de Frobenius:*

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i},$$

*seja identicamente nulo.*

*Demonstração.* Seja uma variação  $\delta\gamma : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow M$  onde  $\mathbf{X} = \partial/\partial t$ ,  $\mathbf{Y} = \partial/\partial s$  são os seus campos coordenados. Ao se aplicar uma variação da curva onde se tira a integral, tem-se:

$$\mathbf{Y} \int_{\delta\gamma} \omega = \mathbf{Y} \int_{-1}^1 \langle \omega, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{Y} \int_{-1}^1 \omega_i \langle dx^i, \mathbf{X} \rangle = \int_{-1}^1 (\mathbf{Y}\omega_i \mathbf{X}x^i + \omega_i \mathbf{Y}\mathbf{X}x^i). \quad (\text{C.7})$$

Dados os pontos de coordenadas  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ , seja uma curva ligando estes dois pontos, formada pela concatenação de duas curvas integrais dos campos  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ . Uma variação desta curva concatenada, com os mesmos pontos inicial e final, consiste de uma variação da primeira curva em relação a  $\mathbf{Y}$  somada com uma variação da segunda curva em relação a  $-\mathbf{X}$  (o sinal menos na segunda curva é necessário para que a curva variada não cruze com a primeira). Como a integral ao longo das duas curvas deve ser a mesma, então:

$$\mathbf{Y} \int_{-1}^1 \langle \omega, \mathbf{X} \rangle - \mathbf{X} \int_{-1}^1 \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle = 0.$$

Considerando-se ainda a identidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} \cdot (\omega_i \mathbf{X}x^i) - \mathbf{X} \cdot (\omega_i \mathbf{Y}x^i) &= \mathbf{Y}(\omega_i) \cdot \mathbf{X}x^i + \omega_i \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}x^i - \mathbf{X}(\omega_i) \cdot \mathbf{Y}x^i - \omega_i \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}x^i = \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \mathbf{Y}x^j \cdot \mathbf{X}x^i - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \mathbf{X}x^j \cdot \mathbf{Y}x^i = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) \mathbf{X}x^j \mathbf{Y}x^i. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

que vai aparecer na diferença de integrais (C.7), pode-se concluir que a proposição é verdadeira. ■

Se a integral independe do caminho, significa que entre quaisquer dois pontos  $a, b \in M$ , pode-se definir uma função  $f$  tal que:

$$f_b - f_a = \int_a^b \omega = \int_a^b df,$$

ou seja, a 1-forma  $\omega$  é um diferencial, conforme definido acima. Outro nome para  $\omega$  tal que o bilinear se anula é *1-forma fechada*. A interpretação geométrica é a seguinte: as subvariedades de nível  $f^{-1}(y_2)$  e  $f^{-1}(y_1)$ , com  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  valores regulares, são subvariedades (de dimensão  $n - 1$ ) de  $M$  de tal forma que a integral de  $\omega = df$  de qualquer curva entre  $f^{-1}(y_2)$  e  $f^{-1}(y_1)$  é dada por  $y_2 - y_1$ . Obviamente, esta integral independe

do caminho. A figura 17 representa a situação acima. A integral sobre qualquer curva pontilhada é sempre a mesma. Qualquer curva contida em uma subvariedade de nível deve ser obviamente de integral igual a zero.

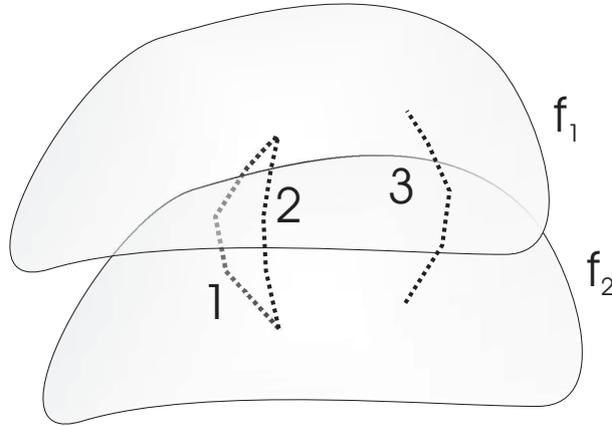


Figura 17: Visualização de uma 1-Forma Fechada

**Definição C.14.4** (Folheação de Nível). *O conjunto de todas as subvariedades de nível de  $f$  correspondentes a valores regulares de  $f$  é conhecida como folheação de nível.*

A ideia da derivada de Lie de 1-formas é semelhante a derivada de Lie campos, isto é, há necessidade de se medir o que ocorre com  $\omega$  quando for arrastada ao longo de curvas integrais de um campo vetorial  $\mathbf{X}$ .

**Definição C.14.5** (Derivada de Lie de 1-formas). *Dada uma 1-forma  $\omega$ , a derivada de Lie  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega$  em relação ao campo  $\mathbf{X}$  é dada por*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi_{-t}^*(\omega_{\phi_t(p)}) - \omega_p], \quad (\text{C.9})$$

onde  $\phi_{-t}^*$  é o pull-back da 1-forma pelo fluxo do campo  $\mathbf{X}$ . Nota-se então que  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega$  é também uma 1-forma.

A derivada de Lie  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega$  fornece a taxa de variação de  $\omega$  ao longo das curvas integrais de  $\mathbf{X}$ . Quando esta for nula, significa que não há variação desta ao longo das curvas, de modo que para se construir  $\omega$  basta ter seu valor em um ponto para cada curva de  $\mathbf{X}$  e arrastar (usando *pull-back*) para os demais pontos. Na figura 18, tem-se a representação de uma 1-forma cuja derivada de Lie em relação a um campo é nula.

**Proposição C.14.2** (Fórmula em Coordenadas). *Dada uma carta de coordenadas em  $M$  com funções coordenadas  $\{x_i\}$ , a fórmula em coordenadas da derivada de Lie de uma 1-forma  $\omega$  é:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) dx^j.$$

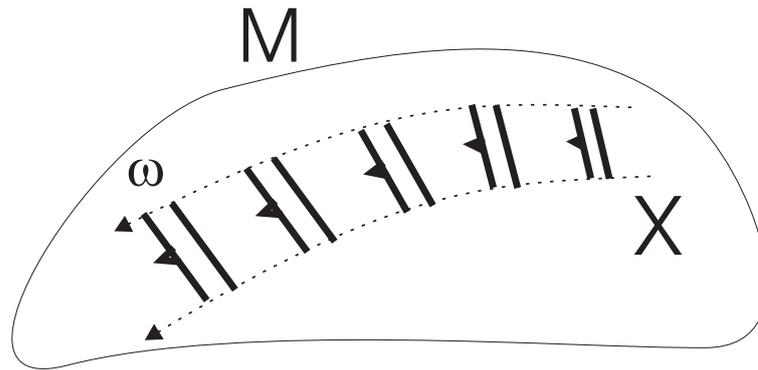


Figura 18: Derivada de Lie Nula de uma 1-Forma

Nota-se que, como no caso da derivada de Lie de Campos, a fórmula depende da derivada parcial do campo de direções, o que indica que a derivada de Lie não é direcional (depende de informação local do campo e não somente de um vetor qualquer num ponto).

## C.15 Folheações

Uma excelente referência sobre folheações é (CAMACHO; NETO, 1979), de onde muitos dos resultados aqui apresentados foram retirados.

**Definição C.15.1** (Folheação). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$  e codimensão  $n - m$  é uma partição desta em subvariedades conexas de dimensão  $m$ , chamadas folhas.*

Obviamente, as subvariedades da folheação são imersas, porém não há garantias que são mergulhos (vide seção C.4). Outra definição equivalente de folheação é:

**Definição C.15.2** (Folheação como Atlas). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$  é um atlas máximo tal que:*

- Para cada carta  $(U, \psi)$ , tem-se  $\psi(U) = U_1 \times U_2$  tal que  $U_1 \subset \mathbb{R}^m$  e  $U_2 \subset \mathbb{R}^{(n-m)}$ ;
- Dadas duas cartas  $(U, \psi)$  e  $(V, \phi)$  que se intersectam, então  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  é tal que  $(\psi \circ \phi^{-1})_{(x,y)} = ((h_1)_{(x,y)}, (h_2)_y)$ .

Deste modo, localmente a folheação separa a variedade  $M$  na forma  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$ , e as coordenadas podem ser separadas em dois conjuntos: 1)  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  para localizar um ponto dentro da folha, e 2) o conjunto de números  $(y_1, y_2, \dots, y_{n-m})$  diferente para cada folha diferente. Pode-se dizer então que uma folheação generaliza o conceito de fibração.

**Definição C.15.3** (Transformação preservadora de folhas). *Pela definição acima, uma transformação de coordenadas da forma  $(x, y) \mapsto (\tilde{x} = (h_1)_{(x,y)}, \tilde{y} = (h_2)_y)$  preserva as folhas.*

De fato, nota-se que  $h_2$  independe de  $h_1$ . A existência de um atlas máximo com estas características é suficiente para garantir que haja a partição de  $M$  em folhas globalmente.

**Definição C.15.4** (Placas). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  e uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$  e uma particular carta  $(U, \psi)$ . Os subconjuntos de  $M$  da forma  $\psi^{-1}(U_1 \times \{c\})$  são chamados de placas de  $U$ .*

Toda folheação  $\mathcal{F}$  divide uma variedade em placas, que são subvariedades conexas de dimensão  $m$ . Dados dois pontos  $p, q \in M$ , diz-se que eles são equivalentes se existe uma seqüência de placas  $\alpha_i$  que se intersectam e tais que cobrem um caminho entre estes pontos. Evidentemente, dois pontos são equivalentes se eles estão sobre a mesma folha.

**Proposição C.15.1** (Topologia das Folhas). *A topologia dentro de uma folha vinda das cartas da folheação nem sempre é compatível com a topologia induzida da variedade  $M$ .*

A relação de equivalência acima permite que se defina naturalmente o seguinte espaço:

**Definição C.15.5** (Espaço das Folhas). *O espaço quociente  $M/\mathcal{F}$ , que é o conjunto das folhas de uma folheação em  $M$  é conhecido como espaço das folhas com a topologia quociente.*

A projeção  $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$  é sempre uma aplicação aberta e a topologia quociente pode não ser Hausdorff. Dado um conjunto  $A \subset M$ , o saturado  $\mathcal{F}(A)$  é o conjunto de todas as folhas que passam pelos pontos de  $A$ . O saturado é sempre um conjunto aberto.

**Definição C.15.6** (Conjunto Invariante). *Diz-se que um subconjunto  $A \subset M$  é  $\mathcal{F}$ -invariante se o seu saturado é igual a ele mesmo.*

**Teorema C.15.1.** *A fronteira, o interior e o fecho de qualquer conjunto invariante é também invariante.*

**Exemplo:** [Curvas Integrais de  $\mathbf{X}$ ] Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  e um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , as imagens das curvas integrais deste campo formam uma folheação de  $M$ , desde que o campo não tenha singularidades e sejam campos completos.

Se houvesse singularidade no campo, naquele ponto haveria uma folha de dimensão 0, o que não é admissível numa folheação de dimensão um. Outros exemplos de folheações são os fibrados, onde as fibras são as folhas, tem a mesma topologia e também

são difeomórficas. O espaço das folhas é a base  $B$ . Para o caso de  $TM$  e  $T^*M$ , qualquer atlas que preserve as fibras, ou seja, tal que  $(x, \dot{x}) \mapsto ((h_2)_x, (h_1)_{(x, \dot{x})})$  para o  $TM$  e  $(x, p) \mapsto ((h_2)_x, (h_1)_{(x, p)})$  para o  $T^*M$  deixam transparente o caráter de folheação que estes espaços têm.

**Nota:** É importante destacar que, num atlas máximo de  $M$  sempre haverá cartas tais que a transformação de coordenadas entre elas preserva as folhas. Um atlas porém que preserva as folhas globalmente nem sempre existe para uma dada variedade.

**Definição C.15.7** (Subvariedade Transversal). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  e uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$ , diz-se que uma subvariedade  $\Sigma \subset M$  é transversal a  $\mathcal{F}$  se ela for transversal a todas as folhas que intersectar.*

**Definição C.15.8** (Seção Transversal). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$  e uma subvariedade transversal  $\Sigma$ , se a dimensão de  $\Sigma$  for  $n - m$ , então esta é uma seção transversal de  $\mathcal{F}$  em  $M$ .*

**Teorema C.15.2** (Uniformidade Transversal). *Seja uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  e uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$ . Dados dois pontos  $q, p \in M$  pertencentes a uma mesma folha, sempre existem seções transversais a  $\mathcal{F}$  passando por estes pontos, representadas aqui por  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  e um difeomorfismo  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  tal que para qualquer folha  $F'$  tem-se  $f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$ .*

Este teorema por fim dá origem a outro, que restringe as possibilidades que as folhas podem assumir.

**Teorema C.15.3.** *Sejam uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$  e uma particular folha  $F$ . Seja ainda uma seção transversal  $\Sigma$  tal que  $F \cap \Sigma$  é não vazio. Há então três casos possíveis:*

- $F \cap \Sigma$  é discreto, o que implica que  $F$  é um mergulho;
- O fecho de  $F \cap \Sigma$  com  $\Sigma$  tem interior não vazio, o que significa que  $F$  é residual;
- O fecho de  $F \cap \Sigma$  tem interior vazio. Neste caso, diz-se que  $F$  é excepcional.

**Definição C.15.9** (Folhas Fechadas). *Diz-se que uma folha de uma folheação é fechada se um conjunto com fecho compacto  $U$  contém um número finito de placas.*

Isto é equivalente à folha ser uma imersão própria.

**Definição C.15.10** (Conjuntos Minimais). *Sejam uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  e uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m$ . Diz-se que um subconjunto  $\mu$  de  $M$  é minimal se  $\mu$  é fechado, não vazio e invariante, e se qualquer subconjunto  $\mu' \subset \mu$  com estas mesmas propriedades é o próprio  $\mu$  (ou é vazio).*

Toda folha fechada é um subconjunto minimal, e toda a folheação numa variedade compacta possui um conjunto minimal. Na Figura 20 tem-se um exemplo de uma folheação de codimensão um (na variedade de dimensão três). Há, obviamente, uma carta local onde uma coordenada localiza cada subvariedade da folheação e outras duas para localizar o ponto dentro de cada folha. O estudo das folheações é uma disciplina em si, e pode ser encontrado em (CAMACHO; NETO, 1979). Para os fins deste trabalho, já foram apresentados os conceitos básicos necessários. Serão estudados com mais detalhes folheações especiais (como os diversos tipos de fibrados), o que será feito em capítulos posteriores.

## C.16 Distribuições e Variedades de Contato

Nesta seção, apresentam-se os *campos de  $r$ -planos* ou  $r$ -distribuições, que são os objetos geométricos diferenciais cujas integrais são folheações locais. Inicialmente, a introdução será menos formal do que deveria. Posteriormente, serão usados os chamados *grassmannianos* para formalizar os conceitos. Maiores detalhes podem ser encontrados em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (WASSERMAN, 1992) e (CAMACHO; NETO, 1979).

**Definição C.16.1** (Contato). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , diz-se que duas subvariedades de dimensão  $k$ ,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , estão em contato num ponto  $p \in M$  se: 1) elas tem este ponto em comum e; 2) os espaços tangente  $T_p\Sigma_1$  e  $T_p\Sigma_2$  coincidem.*

Outro nome que se dá é *contato de primeira ordem*. Pode-se definir uma relação de equivalência de contato, tal como feito com a tangência. Diz-se que duas subvariedades  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são equivalentes no ponto  $p$  se elas estão em contato. A classe de equivalência é representada por  $[\Sigma_1]_p$  e é chamada de um  $k$ -elemento de contato no ponto  $p$ . A melhor forma de representar um  $k$ -elemento de contato é como sendo um feixe de subespaços vetoriais de dimensão  $k$  de  $T_pM$ , ou seja, um feixe de  $k$ -planos tangentes. Entretanto, diferentemente das 1-formas apresentadas na seção C.13, o feixe de planos de contato não possuem uma amplitude ou sentido associados. A classe de equivalência de todos os covetores em um ponto que possuem a mesma direção formam um elemento de contato.

**Proposição C.16.1.** *Há um isomorfismo entre os  $k$ -elementos de contato no ponto  $p \in M$  e os subespaços vetoriais tangentes de dimensão  $k$  em  $T_pM$ .*

**Definição C.16.2** ( $k$ -grassmanniano de  $V$ ). *Seja  $V$  um espaço vetorial. O conjunto dos  $k$ -subespaços de  $V$ , que é representado por  $G(k, V)$ , é conhecida como  $k$ -grassmanniano de  $V$ , e possui uma estrutura de variedade diferenciável.*

De fato,  $G(n, V)$  não tem estrutura linear, pois não se define nem soma nem multiplicação por escalar de elementos de contato (não faria sentido definir um elemento de contato nulo, por exemplo).

**Definição C.16.3** ( $k$ -grassmannianos de  $M$ , ou variedade de  $k$ -contatos). *Dada uma variedade diferenciável  $M$ , a variedade  $G(k, T_pM)$  fornece o  $k$ -grassmanniano de  $T_pM$ . A variedade diferenciável:*

$$G(k, TM) = \bigcup_{p \in M} G(k, T_pM) = C^k M,$$

define o  $k$ -grassmanniano de  $M$ .

Não confundir  $k$  como sendo ordem de diferenciabilidade.

**Teorema C.16.1.** *A variedade de  $k$ -contato  $C^k M$  tem uma estrutura de fibrado, com  $\pi : C^k M \rightarrow M$ , base  $M$  e fibra padrão  $G(k, V)$ , onde  $V$  é isomorfo a  $T_pM$ .*

**Definição C.16.4** ( $k$ -distribuição). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  e a variedade de  $k$ -contato  $C^k M$ , uma  $k$ -distribuição é uma seção suave de  $C^k M$ .*

Pode-se dizer então que um  $k$ -distribuição é um campo de  $k$ -elementos de contato (ou  $k$ -contatos). O caso mais simples de distribuições são os de dimensão um.

**Definição C.16.5** (Campos de 1-planos ou linhas (ou distribuição de dimensão um)). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Um campo de linhas é uma aplicação suave  $L$  que a cada ponto  $p \in M$  associa um 1-elemento de contato.*

Ou seja, para cada ponto de  $M$  está associada uma reta tangente (subespaço de  $T_pM$ ) de forma suave. Representa-se a linha no ponto  $p \in M$  por  $L_p$ .

**Definição C.16.6** (Campo Vetorial Gerador). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $\mathbf{X}$  um campo tangente sem singularidades. Diz-se que este campo gera o campo de linhas  $L$  se cada linha  $L_p$  for gerada por uma combinação linear ponto-a-ponto do vetor  $\mathbf{X}_p$ , ou seja,  $L_p = \{\alpha \mathbf{X}_p \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .*

A codimensão de uma  $k$ -distribuição é sempre  $n - k$ .

**Definição C.16.7** (Campos Vetoriais Geradores). *Seja  $\{\mathbf{X}^i\}$  com  $i = 1, \dots, k$  um conjunto de campos vetoriais tangentes suaves de  $M$ , linearmente independentes ponto-a-ponto. Diz-se que este conjunto gera  $D$  se em cada ponto  $p \in M$  o  $k$ -contato  $D_p$  tem como base os vetores  $\{\mathbf{X}_p^i\}$  com  $i = 1, \dots, k$ .*

De particular interesse são as distribuições de dimensão  $n - 1$  (ou codimensão um), que como será visto mais adiante, correspondem a uma 1-forma em  $M$ . A maioria dos resultados sobre distribuições poderão ser estabelecidos a partir de um conjunto de campos geradores. Da mesma forma que em campos vetoriais e 1-formas, é possível definir singularidades de distribuições da seguinte maneira.

**Definição C.16.8** (Singularidades de Distribuições). *Dada uma distribuição  $D$  de dimensão  $k$ , qualquer ponto onde a dimensão do subespaço caia é conhecida como singularidade*

No caso particular dos campos de linhas, as singularidades necessariamente correspondem a pontos onde a dimensão cai para zero.

**Definição C.16.9** (Distribuições Regulares). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que uma  $k$ -distribuição  $D$  é regular (ou não-singular) se a dimensão do subespaço associado é localmente constante e igual a  $k$ , isto é, ela é constante numa mesma componente conexa.*

Evidentemente, o fato da distribuição ter singularidades não implica que os campos geradores deverão tê-las, já que para gerar o espaço singular, basta escolher os coeficientes da combinação linear dos campos adequadamente. O seguintes lemas pode ser encontrado em (ISIDORI, 1995).

**Definição C.16.10.** *Dada a variedade diferenciável  $M$  e duas distribuições  $D_1, D_2$  em  $U \subset M$  suaves, diz-se que  $D_1$  está contida em  $D_2$  se, em cada ponto  $p \in U$ ,  $(D_1)_p \subset (D_2)_p$ .*

**Lema C.16.1.** *O conjunto dos pontos regulares (ou seja, com dimensão máximo do subespaço) de uma distribuição suave  $D$  em  $U \subset M$  é um subconjunto aberto e denso de  $U$ .*

**Lema C.16.2.** *Dadas duas distribuições suaves  $D_1, D_2$  em  $U \subset M$  tal que  $D_2$  é regular e  $(D_1)_p \subset (D_2)_p$  em todos os pontos  $p$  de um subconjunto aberto e denso de  $U$ , então  $D_1 \subset D_2$ .*

Outros lemas semelhantes podem ser encontrados na referência citada. Ver-se-á também que podem existir distribuições analíticas. Uma representação de uma distribuição é apresentada na Figura 19.

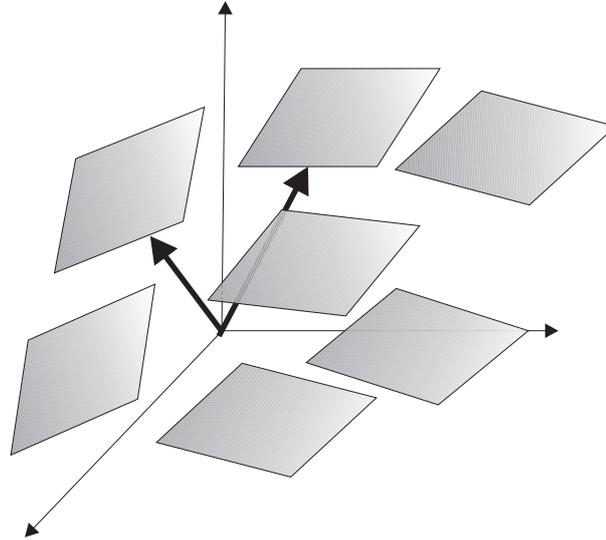


Figura 19: Visualização de uma Distribuição

**Definição C.16.11** (Distribuição Tangente a uma Subvariedade). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  e uma subvariedade  $\Sigma$  de dimensão  $k$ , a distribuição de dimensão  $k$  formada pela associação a cada ponto  $p \in \Sigma$  do espaço tangente  $T_p\Sigma$  é conhecida como distribuição tangente de  $\Sigma$ .*

O nome distribuição em contato com  $\Sigma$  seria mais apropriado, uma vez que tangência envolve uma taxa de variação associada. Entretanto, mantém-se o nome tangente por conveniência. De fato, qualquer distribuição de  $l$ -planos tal que estes estão contidos na distribuição tangente é também uma distribuição em contato com  $\Sigma$ , porém com dimensão menor que  $k$ .

**Definição C.16.12** (Distribuição Tangente de uma Folheação). *Dada uma folheação de dimensão  $k$  definida em uma vizinhança  $U \subset M$ , diz-se que a  $k$ -distribuição  $D$  formada pelos espaços tangentes a cada folha, isto é, a distribuições formada pelos espaços tangentes  $T_p\mathcal{F}$  a cada folha e em cada ponto é a distribuição tangente de  $\mathcal{F}$ .*

Embora nem toda folha seja uma subvariedade (mergulhada), os campos de  $k$ -planos estão definidos para qualquer subvariedade imersa.

## C.17 Distribuições Integráveis: Teorema de Frobenius

Maiores detalhes podem ser encontrados em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990), (WASSERMAN, 1992) e (CAMACHO; NETO, 1979). Algumas distribuições são tais que seus  $k$ -contatos são tangentes a uma folheação em um aberto  $U \subset M$ . Diz-se então que a distribuição é *integrável*. As condições para que isto ocorra são algébricas. Inicia-se com o caso mais simples dos campos de linhas, para depois generalizar.

**Definição C.17.1** (Subvariedade Integral). *Dada uma  $k$ -distribuição  $D$ , diz-se que a  $l$ -subvariedade imersa  $\Sigma$  é uma subvariedade integral de  $D$  se  $T_p\Sigma$  for um subespaço de  $D_p$  em cada ponto. Ou seja,  $\Sigma$  está em contato com a distribuição em todos os seus pontos.*

**Definição C.17.2** (Extensão). *Dada uma  $k$ -distribuição com uma subvariedade integral  $\Sigma$ , diz-se que  $\Sigma_1$  é uma extensão de  $\Sigma$  se ela contiver esta subvariedade e ainda for integral da mesma  $k$ -distribuição.*

**Definição C.17.3** (Subvariedade Integral Máxima). *Diz-se que  $\Sigma$  é uma  $l$ -subvariedade integral máxima se ela for a extensão de qualquer outra subvariedade integral contida nela.*

Evidentemente, uma subvariedade integral máxima é conexa por caminhos. Este resultado generaliza a noção a idéia de campos vetoriais completos.

**Definição C.17.4** (Folheação Integral Local). *Dada uma  $k$ -distribuição  $D$ , diz-se que  $\mathcal{F}_U$  é uma folheação integral local em  $U$  se todas as suas folhas em  $U$  forem subvariedades integrais máximas em  $U$ .*

**Corolário C.17.1.** *Se  $\Sigma$  for uma subvariedade integral de  $D$  num ponto  $p \in M$ , vai existir uma folheação integral local numa vizinhança  $U$  que contém  $p$  da qual  $\Sigma$  é uma folha.*

*Demonstração.* A prova vem do fato do conjunto de pontos não-singulares de  $D$  ser sempre aberto e denso. ■

**Teorema C.17.1.** *Para todo campo de linhas  $L$ , existe uma vizinhança  $U_p$  ao redor de cada ponto  $p \in M$  tal que há nesta vizinhança uma folheação integral local de dimensão  $m$  tal que toda folha desta está em contato com  $L$ .*

*Demonstração.* Selecionando-se um campo gerador de  $L$ , a linha em  $p$  está em contato com a imagem da curva integral do campo gerador neste ponto. Então, pelo teorema

da existência e unicidade de curvas integrais de campos vetoriais, sempre haverá uma folheação local em contato. ■

Este teorema assegura que para todo campo de linhas existe uma folheação integral local, não importa qual seja a dimensão da variedade  $M$ . Evidentemente, a existência de folheação integral local de dimensão um deve ser tratada nos mesmos moldes que curvas integrais de campos vetoriais completos. O campo de linhas pode ser pensado como a *derivada* de folheação de dimensão um, e a folheação pensada como a *integral* do campo de linhas. Para  $k$ -distribuições  $D$  em geral, mesmo que ela seja perfeitamente suave, pode não haver folheação em torno de um ponto (vide o exemplo 3.1 de (SHARPE, 1997)). Neste último exemplo, em torno da origem, a forma com que a distribuição se comporta não permite que uma 2-variedade se encaixe nestes planos tangentes (a suavidade não é suficiente). As condições de existência e unicidade para  $k$ -subvariedades integrais serão apresentadas em seguida.

**Definição C.17.5** (Distribuição Integrável). *Diz-se que uma  $k$ -distribuição  $D$  em  $M$  é integrável se existe uma folheação local  $\mathcal{F}$  cujas folhas têm dimensão  $k$  tal que  $D_p = T_p F$  em cada ponto de uma vizinhança  $U \subset M$  que contém  $p$ .*

Outro nome que se dá para distribuição integrável é distribuição *completamente integrável*. Na Figura 20, tem-se um exemplo de uma distribuição correspondente a uma folheação de codimensão um no espaço de dimensão três.

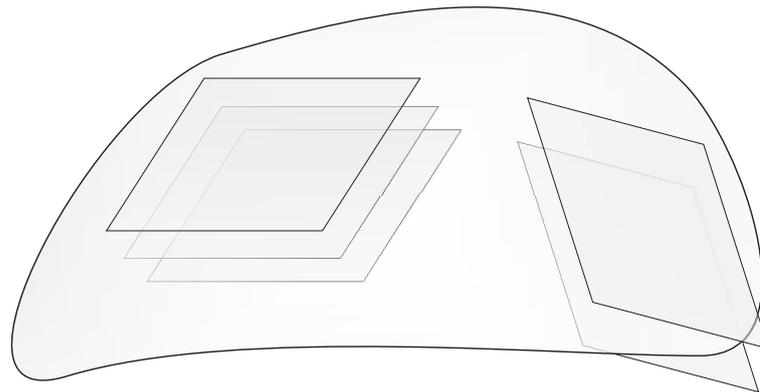


Figura 20: Exemplo de uma Folheação Integral

A ligação entre 1-formas e  $n - 1$ -distribuições dá-se da seguinte forma:

**Proposição C.17.1.** *Dada uma 1-forma  $\omega$  em  $U \subset M$ , o núcleo em cada ponto, isto é  $\ker \omega_p$ , forma uma  $n - 1$ -distribuição em  $U$ .*

Um resultado muito interessante, que será desenvolvido em capítulo posterior, é:

**Proposição C.17.2.** *Dada uma 1-forma  $\omega$  em  $U \subset M$ , se esta for gradiente de uma função  $f$ , ou seja,  $\omega = df$ , então a  $(n - 1)$ -distribuição  $\ker \omega$  é integrável e a correspondente  $(n - 1)$ -folheação global é a folheação de nível de  $f$ .*

Esse resultado (e muito outros) permitem que  $k$ -distribuições possam ser expressas de uma forma dual (mais conveniente para cálculos). Antes de apresentar o critério algébrico para verificar se uma  $k$ -distribuição é integrável, apresentam-se alguns conceitos preliminares.

**Definição C.17.6** (Distribuições Involutivas). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável,  $D$  uma  $k$ -distribuição regular e  $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k\}$  uma base de campos vetoriais tangentes que gera esta distribuição. Diz-se que  $D$  é involutiva se quaisquer pares de campos vetoriais  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$  da forma  $\sum_{i=1}^k c_i(p)\mathbf{X}_i$  forem tais que  $[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]$  também é desta forma. Ou seja, se  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in D$  então  $[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] \in D$  também.*

É possível verificar se uma distribuição é involutiva de forma mais fácil. Para tanto, é importante o seguinte lema:

**Lema C.17.1.** *Seja  $D$  uma  $k$ -distribuição regular. Dizer que  $D$  é involutiva é equivalente a dizer que, dada uma base  $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k\}$ , os campos  $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] \in D$  para todo par de campos possível.*

Com isto, é possível enunciar o teorema que garante a existência de uma folheação integral local.

**Teorema C.17.2** (Teorema de Frobenius). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $D$  uma  $k$ -distribuição regular em  $U \subset M$ . Esta distribuição é completamente integrável (isto é, existem  $k$ -subvariedades soluções) se e somente se ela for involutiva.*

A prova do teorema de Frobenius pode ser encontrada em várias referências, como por exemplo (SHARPE, 1997) e (IVEY; LANDSBERG, 2003), porém é em geral extensa e necessita de mais conhecimentos do que até agora apresentados. Uma série de observações são traçadas agora sobre o teorema de Frobenius.

### Observações:

1. O teorema de Frobenius é de caráter local, tal como o teorema de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais ordinárias. Para o caso de campos

de linhas, ele é sempre satisfeito. Outra semelhança notável entre os dois resultados é que as folhas das folheações integrais nunca se tocam, da mesma forma que as curvas integrais do fluxo.

2. A existência de  $k$ -folheação integral global depende tanto da condição local (Frobenius) quanto de condições topológicas, que podem ser encontradas em (CAMACHO; NETO, 1979). De fato, a existência de folheações globais é estudada através das chamadas *classes características* (MILNOR; STASHEFF, 1974);
3. O teorema de Frobenius tipicamente é apresentado em três versões diferentes, sendo que a primeira é a que foi apresentada acima (IVEY; LANDSBERG, 2003).

**Exemplo:** Um exemplo de variedade que nunca admite uma folheação (integral) de dimensão dois (global) é a esfera  $S^5$ . Esta não existência é uma questão eminentemente topológica.

**Teorema C.17.3.** *Dada uma carta local na  $n$ -variedade  $M$ , sempre está definida uma distribuição horizontal local  $H$  tangente  $TM$  associada a esta carta, e que é integrável.*

*Demonstração.* O resultado decorre das definições da seção C.5. ■

**Teorema C.17.4.** *Dada uma  $n$ -variedade  $M$ , a distribuição vertical  $V$  dada por  $V_{\mathbf{v}_p} = \pi_*^{-1}(\mathbf{v}_p)$  é suave e é integrável, cuja folheação integral é formada pelas fibras de  $TM$ .*

*Demonstração.* O resultado decorre das definições da seção C.5. ■

## C.18 Folheações e Sistemas de Coordenadas

Foi visto que um conjunto de  $k$  campos vetoriais suaves  $\{\mathbf{X}_i\}$  e linearmente independentes ponto-a-ponto determinam uma  $k$ -folheação local  $S$  se os colchetes de Lie dois-a-dois forem combinações lineares ponto-a-ponto destes próprios campos. Também é evidente que um subconjunto com  $l$  destes campos, se satisfizer estas mesmas propriedades, define uma  $l$ -folheação local contida em  $S$ . Continuando a idéia de sistema de coordenadas iniciada na seção C.9.2, seria interessante reenunciar a proposição C.9.3 usando-se todo o conhecimento adquirido até agora para fazer a demonstração. Inicialmente, faz-se para o caso mais simples.

**Proposição C.18.1** (Sistema de Coordenadas para Dimensão Dois). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão dois e dois campos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  sem singularidades sobre  $U \subset M$ , se  $[X, Y] \equiv 0$*

então este par determina (localmente) duas folheações de dimensão um, além de duas funções coordenadas  $t, s$ .

*Demonstração.* Para haver funções coordenadas  $t, s$ , deve-se ter  $dt, ds$  linearmente independentes em  $M$ . O único vetor simultaneamente nos núcleos de ambas é o vetor nulo. Mas como as funções devem ter as propriedades  $\mathbf{X}t = 1, \mathbf{Y}s = 1, \mathbf{X}s = 0$  e  $\mathbf{Y}t = 0$ , (ou seja, devem ser integrais primeiras, como definido na seção C.8.1) o que implica que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]t = \langle dt, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle = 0$  assim como  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]s = \langle ds, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \equiv 0$ . Isso só é possível se  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$ . ■

O objetivo agora é descobrir quais propriedades o conjunto de  $n$  campos  $\{\mathbf{X}_i\}$  deve satisfazer para gerar um sistema de coordenadas em  $M$ . Deve-se inicialmente, estudar todas as propriedades que um sistema de coordenadas possui.

**Proposição C.18.2.** *Um sistema de coordenadas em  $V$  é um conjunto de funções  $x_i : V \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\{dx^i\}$  forma um conjunto linearmente independente (ou seja, as funções são funcionalmente independentes) e cada uma delas deve ser integral primeira de todos os campos exceto um, em relação ao qual terá derivada sempre igual a um. Isso é equivalente a dizer que  $\langle dx^i, (\partial/\partial x^j) \rangle = \delta_j^i$ .*

É evidente que  $[\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^i] \equiv 0$  para quaisquer  $i, j$ , o que implica que os campos não podem ter singularidades. Além disso:

**Teorema C.18.1** (pag. 196 de (WASSERMAN, 1992)). *Dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ , se a  $k$ -distribuição  $D$  é involutiva, os campos  $\mathbf{X}_i$ , para  $i = 1 \cdots k$ , possuem  $n - k$  integrais primeiras.*

Estas  $n - k$  integrais primeiras podem ser escolhidas para completar o sistema de coordenadas em  $M$ , de forma que as  $k$  primeiras coordenadas selecionam o ponto dentro da folha  $\Sigma$ , enquanto que as  $n - k$  últimas coordenadas selecionam a folha em si. Deste modo, podemos enunciar:

**Teorema C.18.2.** *Dado o conjunto de  $k$  campos geradores  $\{\mathbf{X}_i\}$  em involução, para que estes determinem um sistema de coordenadas local em  $\Sigma$  (subvariedade integral de dimensão  $k$ ):*

1. Os campos não podem ter singularidades no local;
2.  $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] \equiv 0$  para quaisquer  $i, j = 1, \dots, k$ .



**Definição C.19.2** (Simetrias de uma Distribuição). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $D$  uma  $k$ -distribuição regular. Diz-se que  $\mathbf{X}$  é uma simetria de  $D$ , ou que esta é invariante pelo campo  $\mathbf{X}$ , se para todo campo  $\mathbf{Y} \in D$ , for verdade que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in D$ .*

Uma forma mais compacta de dizer isso é:  $[\mathbf{X}, D] \subset D$ . Pela fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (C.5), pode-se ver que os campos de  $D$  transformados por  $\mathbf{X}$  continuarão sendo campos de  $D$ , de modo que os subespaços de  $D$  serão sempre transformados um no outro. As seguintes observações são importantes:

- A princípio, dado um conjunto gerador  $\{\mathbf{Y}_i\}$  de  $D$ , os campos não precisam comutar individualmente com  $\mathbf{X}$ , o que significa que os campos não são Lie-transportados. Entretanto, pelo fato da derivada de Lie estar em  $D$ , os campos nunca deixam de estar contidos em  $D$ ;
- Se  $D$  é involutiva, então a folheação integral local tem  $\mathbf{X}$  como simetria.

Posteriormente, será mostrado que se todos os campos  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$  forem simetrias de  $D$ , então os campos pertencentes a  $D$  formam um *ideal* de álgebra de Lie. Este resultado é particularmente útil na classificação das álgebras de Lie associadas a *grupos de Lie*.

**Lema C.19.1.** *Seja  $D$  uma  $k$ -distribuição regular e involutiva na  $n$ -variedade  $M$  e  $\mathbf{X}$  uma de suas simetrias. Então em cada ponto  $p \in M$  existe uma carta  $(x^i, U)$  tal que  $\mathbf{X}$  é representado por*

$$X_1(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X_k(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{C.11})$$

$$+ X_{k+1}(x^{k+1}, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} + \dots + X_n(x^{k+1}, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^n}. \quad (\text{C.12})$$

A prova pode ser encontrada em (ISIDORI, 1995), porém, é fácil ver que as coordenadas  $x^{k+1}, \dots, x^n$  localizam a folha e os campos  $\partial/\partial x^{k+1}, \dots, \partial/\partial x^n$  são transversais às folhas. A parte do campo que arrasta uma folha é combinação linear destes últimos campos e não pode variar entre pontos diferentes da fibra. Por fim, as simetrias de  $D$  formam uma álgebra de Lie, o que vem do seguinte:

**Lema C.19.2.** *Seja  $D$  uma  $k$ -distribuição invariante por  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ , então ela será invariante também por  $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ .*

## C.20 Campos Tensoriais

Já foi mostrado, na seção A.14.5, como construir uma álgebra tensorial  $T(V)$  a partir de um espaço vetorial  $V$ . Também foi mostrado como construir várias outras álgebras de interesse a partir da álgebra tensorial. Passa-se agora a considerar campos cujos valores são os diversos tipos de tensores e as construções algébricas a partir deles, como por exemplo tensores antisimétricos e elementos de álgebras de Clifford (vide seção A.11). Mais detalhes podem ser encontrados em (WASSERMAN, 1992). Seja  $M$  uma  $n$ -variedade diferenciável e  $T_pM$  o espaço tangente no ponto  $p \in M$ . Pode-se então definir, em cada ponto, a álgebra tensorial  $T(T_pM)$ . Representa-se o espaço vetorial de tensores do tipo  $(r, s)$  no ponto  $p \in M$  como sendo  $(T_pM)_s^r$  (conforme visto na seção A.14), o que permite definir:

**Definição C.20.1** (Fibrado Tensorial). *Um fibrado tensorial de grau de contravariância  $r$  e grau de covariância  $s$  é definido por*

$$(TM)_s^r = \bigcup_{p \in M} (T_pM)_s^r.$$

Casos particulares de fibrados tensoriais são  $(TM)_0^1 = TM$  (fibrado tangente) e  $(TM)_1^0 = T^*M$  (fibrado cotangente).

**Definição C.20.2** (Campos Tensoriais). *Um campo tensorial é uma aplicação suave  $t : M \rightarrow (TM)_s^r$  que a cada ponto  $p \in M$  associa um tensor  $(r, s)$ . O espaço vetorial dos campos tensoriais sobre uma variedade é representado por  $\mathcal{X}_s^r(M)$*

Ou seja, um campo tensorial é uma seção do fibrado tensorial  $\pi : (TM)_s^r \rightarrow M$ . Deste modo, um campo tensorial associa a cada ponto  $p$  um ponto de  $(TM)_s^r$  que é  $(p, t_p)$ . O espaço vetorial  $\mathcal{X}_s^r(M)$  é em geral de dimensão infinita e também é um  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo em  $M$ .

**Proposição C.20.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e uma carta local em  $U \subset M$  com funções coordenadas  $x^i$ . Sejam ainda as bases naturais  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  e  $\{dx^i\}$ . A base natural para os campos tensoriais de  $\mathcal{X}_s^r(U)$  é dada por:*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \right\},$$

e a representação em coordenadas do campo tensorial  $t$  nesta base é:

$$t = t_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s},$$

onde:

$$t_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = t \left( dx^{i_1}, dx^{i_2}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \right).$$

**Definição C.20.3** (Transformação de Coordenadas). *Seja uma variedade  $M$  e duas cartas  $(U, x^i)$  e  $(V, \bar{x}^i)$  tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ . As componentes de um campo tensorial nas duas cartas se relacionam, em  $U \cap V$ , por:*

$$\bar{t}_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} = t_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial \bar{x}^{l_2}} \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial \bar{x}^{l_s}}.$$

No caso particular de um campo vetorial (campo contravariante de grau 1), as componentes em diferentes cartas se relacionam da seguinte forma:

$$\bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} X^j.$$

No caso do campo covariante de grau 1 (covetorial ou 1-forma) as suas coordenadas se relacionam por:

$$\bar{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \omega_j.$$

Claramente, se vê que ao se colocar os coeficientes de transformação dos campos vetoriais em uma matriz, está é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas.

Dados dois campos tensoriais  $t, s \in \mathcal{X}_s^r(M)$ , o campo tensorial resultante da soma dos dois campos é representado por:

$$t + s \in \mathcal{X}_{s+u}^{r+v}(M),$$

e é tal que  $(t+s)_p = t_p + s_p$ , onde a segunda soma é aquela definida na seção A.14. Dados dois campos tensoriais  $t \in \mathcal{X}_s^r(M)$  e  $s \in \mathcal{X}_u^v(M)$ , o campo tensorial resultante do produto tensorial é representado por:

$$t \otimes s \in \mathcal{X}_s^r(M),$$

e é tal que  $(t \otimes s)_p = t_p \otimes s_p$ , onde o segundo produto tensorial é aquele definido na seção A.14. Define-se o posto de um campo tensorial  $t$  como a associação a cada ponto  $p \in M$  do correspondente posto de  $t_p$ .

**Definição C.20.4** (Singularidade de Campo Tensorial). *Dado um campo tensorial  $t \in \mathcal{X}_s^r(M)$ , diz-se que  $p \in M$  é uma singularidade de  $t$  quando o posto em  $t_p$  for menor que o posto numa vizinhança deste ponto.*

Passa-se agora para o estudo da derivada de Lie de campos tensoriais em geral, que

é o tipo mais geral de derivada para campos tensoriais. Esta tem o mesmo significado geométrico que as derivadas de Lie para campos vetoriais e 1-formas. A definição em termos de limites é similar à apresentada em C.9, exceto que o campo vetorial  $\mathbf{Y}$  deve ser trocado por um tensor. Também se apresentam algumas definições gerais sobre derivações na álgebra dos tensores.

**Teorema C.20.1** (Derivada de Lie de Campos Tensoriais). *Dado um tensor  $(r, s)$  e um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , a derivada de Lie do tensor em relação ao campo satisfaz:*

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}t)(\alpha^1, \dots, \alpha^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(t(\alpha^1, \dots, \alpha^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)) \\
 - \sum_{i=1}^r t(\alpha^1, \dots, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\alpha^i, \dots, \alpha^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) &- \sum_{j=1}^s t(\alpha^1, \dots, \alpha^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_s).
 \end{aligned}
 \tag{C.13}$$

Isto é equivalente a dizer que a derivada de Lie comuta com as contrações. De fato, por ser uma derivação e não uma anti-derivação (vide seção A.9.1), a derivada de Lie satisfaz:

**Proposição C.20.2.** *Dados dois campos tensoriais  $t_1, t_2$ , tem-se que a derivada de Lie  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$  por um campo  $\mathbf{X}$  tem as seguintes propriedades:*

1. *É um operador local;*
2.  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}t_2);$
3.  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\delta = 0$ , onde  $\delta$  é o tensor Delta de Kronecker;
4. *Comuta com as contrações.*

Esta definição de derivada se reduz às definições de derivada de Lie para funções, campos vetoriais e 1-formas apresentadas anteriormente. A derivada de Lie é uma derivação de grau zero nas álgebras tensoriais graduadas definidas na seção A.9.1. Alguns resultados sobre derivada de Lie, que já valiam para campos vetoriais, são válidos também para campos tensoriais. Alguns casos particulares de derivada de Lie são especialmente instrutivos, como por exemplo:

**Corolário C.20.1.** *Sejam  $\omega$  e  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  uma 1-forma e campos vetoriais em  $M$ . Deste modo:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\langle \omega, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega, \mathbf{Y} \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \rangle.$$

Lembrando que a principal característica da derivada de Lie é que ela é local, porém não é pontual. Ou seja, para o seu cálculo, é necessário conhecer o tensor  $t$  e o campo  $\mathbf{X}$  em todos os pontos de uma vizinhança (por menor que seja). Algumas derivações, por outro lado, não precisam ser assim, como será visto mais adiante.

**Proposição C.20.3.** *Toda derivação de grau zero  $D$  na álgebra graduada dos tensores pode ser decomposta unicamente como:*

$$D = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} + S,$$

onde  $S$  é um campo tensorial  $(1, 1)$ .

Esta proposição mostra que toda derivação pode ser dada por uma derivação pontual (que é  $S$ ) somada com uma derivação local.

**Teorema C.20.2.** *O espaço vetorial das derivações na álgebra dos tensores forma uma álgebra de Lie onde o colchete é dado por  $[D, D'] = DD' - D'D$ . Ainda, o conjunto das derivações pontuais, ou seja, tensores  $(1, 1)$ , forma uma subálgebra desta álgebra, assim como as derivadas de Lie em relação a um campo  $\mathbf{X}$ .*

**Corolário C.20.2.** *Como a derivada de Lie não muda o tipo das  $r$ -formas (ou  $r$ -covetores) trata-se de uma derivação de grau zero.*

## C.21 Álgebras de Grassmann: Campos de $r$ -Formas e $r$ -Vetores

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em (BLOCH, 2003) e (ABRAHAM; MARSDEN, 1990). Uma classe especial de campos tensoriais são os anti-simétricos, ou seja, os campos de  $r$ -formas, que são campos tensoriais covariantes, e os campos de  $r$ -vetores, que são campos tensoriais contravariantes. Esses campos formam duas álgebras associativas graduadas, que serão descritas a seguir. Dada uma variedade diferenciável  $M$ , pode-se construir em cada ponto  $p \in M$  duas álgebras associativas graduadas  $\Lambda(T_p M)$  e  $\Lambda(T_p^* M)$  dos  $r$ -vetores e dos  $r$ -covetores, respectivamente. Sejam também as variedades diferenciáveis  $\Lambda(TM) = \bigcup_{p \in M} \Lambda(T_p M)$  e  $\Lambda^*(TM) = \bigcup_{p \in M} \Lambda(T_p^* M)$ , que são fibrados tensoriais cuja base é  $M$ . Vamos agora considerar as seções suaves destes fibrados e vamos definir o produto exterior de quaisquer dessas seções da seguinte forma: se  $s$  e  $r$  são seções de um ou outro fibrado, então  $(r \wedge s)_p = r_p \wedge s_p$  (vide seção A.14.6). Deste modo, pode-se definir  $\Omega^k(TM)$  como sendo o  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo das seções

suaves de  $\Lambda^k(TM)$  e  $\Omega^k(T^*M)$  como sendo  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo das seções suaves de  $\Lambda^k(T^*M)$ . Evidentemente,  $\Omega^0(TM) = \Omega^0(T^*M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ . Podemos dotar  $\Omega(TM)$  e  $\Omega(T^*M)$ , que são  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulos graduados definidos por:

$$\Omega(TM) = \bigoplus_{l \in \mathbf{N}} \Omega^l(TM) \quad \text{e} \quad \Omega(T^*M) = \bigoplus_{l \in \mathbf{N}} \Omega^l(T^*M),$$

com o produto exterior, o que transforma ambos em  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -álgebras graduadas, conhecidas como *álgebras de Grassmann* (vide seção A.14)

**Nota:** Em (BOT; TU, 1982), constrói-se  $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$  como uma álgebra associativa livre, e depois mostra-se que  $\Omega^*$  é um funtor contravariante entre a categoria dos espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$  com os morfismos sendo aplicações suaves e a categoria das  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ -álgebras associativas graduadas, com os morfismos sendo os homomorfismos de álgebra. Finalmente, usa-se o funtor  $\Omega^*$  para se definir a álgebra  $\Omega^*(TM)$  em uma  $n$ -variedade diferenciável (vide seção A.13).

**Definição C.21.1** (Operadores Diferenciais). *Seja  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}^p\}$  uma álgebra graduada. Diz-se que um operador linear  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  é uma derivação de grau  $s$  em  $\mathcal{A}$  se  $TT = 0$  e  $T : \mathcal{A}^p \rightarrow \mathcal{A}^{p+s}$ . Uma álgebra graduada dotada de uma tal operação é conhecida como álgebra graduada diferencial.*

**Definição C.21.2** (Derivada Exterior). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  e o espaço das  $l$ -formas  $\Omega^l(T^*M)$ , a derivada exterior é o único operador  $d : \Omega^l(T^*M) \rightarrow \Omega^{l+1}(T^*M)$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Dada uma função real  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , a derivada exterior de  $f$ , que é  $df$ , é igual ao diferencial de  $f$ ;*
2.  *$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ , onde  $\alpha$  é uma  $l$ -forma e  $\beta$  é uma  $k$ -forma;*
3.  *$dd = 0$ .*

Isto significa que a derivada exterior transforma  $r$ -formas em  $(r + 1)$ -formas. Segue desta definição que:

**Corolário C.21.1.** *Dada uma carta local em  $M$ , com funções coordenadas  $x_i$ , os seguintes resultados são conseqüências imediatas da definição:*

- *Se  $f \in \Omega^0(M)$ , então  $df$  é o diferencial desta função;*

- Se  $\omega = \omega_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$  então  $d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$

Há ainda outras propriedades da derivada exterior, cujas demonstrações se encontram por exemplo em (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a). A álgebra  $\Omega(T^*M)$  munida com o produto exterior e a derivada exterior é uma  $C^\infty(M)$ -álgebra associativa graduada e diferencial (vide seção A.9.1).

**Definição C.21.3** (Pull back). *Dadas duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$ , uma aplicação suave  $F : M \rightarrow N$ , e uma  $k$ -form  $\alpha$  em  $N$ , o pull back de  $\alpha$  por  $\varphi$ , que é representado por  $F^*\alpha$ , é dado por:*

$$(F^*\alpha)_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha_{\varphi(p)}((d\varphi)_p \mathbf{v}_1, \dots, (d\varphi)_p \mathbf{v}_n).$$

**Proposição C.21.1.** *Dada uma aplicação  $F : M \rightarrow N$ , a aplicação  $F^* : \Omega(T^*N) \rightarrow \Omega(T^*M)$ , conhecida como pull-back, é um homomorfismo entre as álgebras, de modo que:*

- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ ;
- $F^*(\alpha_1 + \alpha_2) = F^*\alpha_1 + F^*\alpha_2$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2$  são formas de mesmo grau;
- $F^*d\alpha = dF^*\alpha$ .

**Exemplo:** É interessante revisitar os exemplos de 2-formas que foram apresentadas anteriormente, de um ponto de vista de expansão na base natural. A 2-forma em  $\mathbb{R}^2$  como a mostrada na Figura 22 à direita teria duas expressões na base natural:  $dx \wedge dy$ , que seria correspondente às paredes com linha contínua, e  $(dx + dy) \wedge dx$ , que seria a correspondente às paredes com linhas pontilhadas. De fato, estas duas expressões na base natural são iguais, pois  $dx \wedge dx = 0$ , o que está coerente com o fato das duas representações serem da mesma 2-forma. Cada um destes covetores vai dar origem às paredes de um dos lados.

Será visto na próxima seção que existe uma operação inversa à derivada exterior, que é a integração das formas diferenciais. Entretanto, antes de passar para o Cálculo Diferencial e Integral com  $r$ -formas, é mais conveniente tratar da terceira forma de derivada de  $r$ -formas, que é o produto (derivada) interior.

**Definição C.21.4** (Produto ou Derivada Interior). *Dada uma  $r$ -forma  $\omega$  e um campo vetorial  $\mathbf{X}$  ambos sobre uma variedade diferenciável  $M$ , define-se o produto interior ou derivada interior de  $\omega$  por  $\mathbf{X}$  como sendo a  $(r - 1)$ -forma tal que:*

$$(i_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_r) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_r).$$

Deste modo, tem-se uma aplicação  $i_{\mathbf{X}} : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p-1}(M)$ .

**Proposição C.21.2.** *O produto interior deve satisfazer as seguintes propriedades: dada  $\omega$  é uma  $p$ -forma:*

- $i_{\mathbf{X}}(\omega \wedge \nu) = (i_{\mathbf{X}}\omega) \wedge \nu + (-1)^p \omega \wedge (i_{\mathbf{X}}\nu)$ , portanto é uma anti-derivação de grau  $+1$ .
- $i_{\mathbf{X}} i_{\mathbf{Y}} \omega = -i_{\mathbf{Y}} i_{\mathbf{X}} \omega$ ;
- $i_{\mathbf{X}}^2 = 0$ .

A derivada interior de uma função  $i_{\mathbf{X}}f$  é sempre nula. A derivada interior só depende do que ocorre num ponto, ou seja, é uma derivação pontual. Portanto, é uma derivada muito diferente da derivada de Lie e da derivada exterior, que são de natureza local, e o cálculo num ponto depende dos valores dos campos numa vizinhança deste ponto. De fato, pode-se mostrar que se trata de uma derivada algébrica (vide seção A.16). A derivada interior também é uma anti-derivação. Deste modo, se trata de uma álgebra diferencial graduada. Entretanto, a derivada interior também é uma anti-derivada, como a exterior.

**Proposição C.21.3.** *Dada uma  $r$ -forma  $\alpha$  e um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , tem-se que  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} d = d\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$*

Isto significa que a derivada exterior e a derivada de Lie comutam. Outra fórmula de grande importância é:

**Proposição C.21.4.** *Dada uma  $r$ -forma  $\alpha$  e um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , tem-se que*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\alpha = (i_{\mathbf{X}} d + d i_{\mathbf{X}})\alpha, \quad (\text{C.14})$$

*conhecida como fórmula mágica de Cartan, e ainda que  $[\mathcal{L}_{\mathbf{X}}, i_{\mathbf{Y}}] = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} i_{\mathbf{Y}} - i_{\mathbf{Y}} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} = i_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}$ .*

**Proposição C.21.5.** *Dada uma 1-forma  $\omega$  e dois campos vetoriais  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ , tem-se que:*

$$d\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \mathbf{Y}\omega(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\omega(\mathbf{Y}) - \omega([\mathbf{Y}, \mathbf{X}]). \quad (\text{C.15})$$

Esta relação pode ser demonstrada a partir da fórmula mágica e da derivada de Lie de  $\langle \omega, \mathbf{X} \rangle$ . Diversas outras relações podem ser encontradas em (BURKE, 1985), em especial na página 158. Entretanto, é interessante dar uma interpretação para ela. Como se pode ver na Figura 16, uma 1-forma determina um feixe de  $(n - 1)$ -planos tangentes em cada ponto  $p \in M$ . Deste modo, há uma distribuição  $(n - 1)$ -dimensional  $\Delta$  associada a cada  $\omega$ . Se o bilinear de Frobenius apresentado na seção C.14 é igual a zero, caso em que

dizemos que  $\omega$  é uma 1-forma fechada, então  $\Delta$  é integrável, de modo que vão existir um par de campos vetoriais  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  geradores de  $\Delta$ , tal que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  é uma combinação linear ponto-a-ponto de  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ . Deste modo,  $\omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}])$  deve ser igual a zero. Da mesma forma,  $\omega(\mathbf{Y})$  e  $\omega(\mathbf{X})$  devem ser igual a zero, já que estes vetores são paralelos à distribuição. Resulta então que  $d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ . Se, por outro lado,  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  fosse diferente de zero, que seria o caso da distribuição não ser integrável,  $d\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = -\omega([\mathbf{Y}, \mathbf{X}])$ , ou seja,  $d\omega$  mede o quanto a 1-forma  $\omega$  deixa de ser integrável. De fato, pode-se chegar a um resultado mais geral para hiperplanos mais gerais:

**Teorema C.21.1.** *Dada uma distribuição  $(n-k)$ -dimensional  $\Delta$  em  $M$  tal que os fibrados de planos paralelos associados são anulados por um conjunto de 1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_k$  (isto é, são distribuições com codimensão  $k$ ). Então  $\Delta$  é integrável se e somente se:*

$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0,$$

para  $j = 1, \dots, k$

**Teorema C.21.2.** *De fato, sabe-se que dadas  $k$  1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_k$ , uma 2-forma  $\eta$  tal que  $\eta \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$ , deve necessariamente ser da forma  $\eta = \alpha_1 \wedge \omega_1 + \dots + \alpha_k \wedge \omega_k$ , onde  $\alpha_i$  são 1-formas arbitrárias.*

Aplicando-se o penúltimo teorema acima para o caso mais simples, que é o de uma única 1-forma, tem-se que um feixe de  $(n-1)$ -planos  $\Delta$  é integrável se e só se  $d\omega \wedge \omega = 0$ . De fato, pelo último teorema acima, tem-se que  $d\omega = \alpha \wedge \omega$ , e  $\alpha \wedge \omega \wedge \omega \equiv 0$ . Existe uma fórmula geral para a derivada exterior de uma  $k$ -forma  $\alpha$  dada por: se  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+1}$  são campos vetoriais, então:

$$\begin{aligned} d\alpha(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{k+1}) &= \sum_i (-1)^{i+1} \mathbf{X}_i(\alpha(\mathbf{X}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_i, \dots, \mathbf{X}_{k+1})) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], \mathbf{X}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_i, \dots, \hat{\mathbf{X}}_j, \dots, \mathbf{X}_{k+1}), \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

onde  $\hat{\mathbf{X}}_i$  significa que o correspondente termo não aparece. No caso particular de 2-formas, tem-se:

$$\begin{aligned} d\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{X}\alpha(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \mathbf{Y}\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{Z}\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ &\quad - \alpha([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) + \alpha([\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}) - \alpha([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Vamos agora examinar alguns exemplos de formas diferenciais e correspondentes ilustrações.

**Exemplo:** Um campo 2-vetorial no espaço  $\mathbb{R}^3$  é apresentado na Figura 21. A todo 2-vetor  $\mathbf{w}_p$  num espaço de dimensão três está associado um par de vetores  $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$  linearmente independentes. Deste modo, a cada 2-vetor está associada: 1) uma direção, correspondente à direção do plano determinado pelo par  $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$ ; 2) uma orientação, conforme mostrado na Figura 21, que vem da escolha da ordem dos vetores  $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$ ; 3) uma intensidade, que é a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$ . Deste modo, o campo 2-vetorial pode ser representado por  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ .

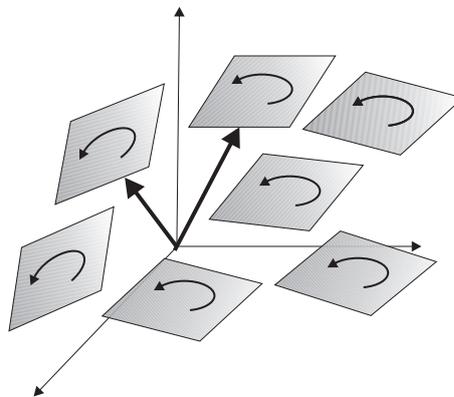


Figura 21: Visualização de um 2-Vetor num Espaço Tridimensional

Um campo 3-vetorial em  $\mathbb{R}^3$  seria dado por  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ , onde o sentido seria da ordem dos vetores (regra da mão direita ou esquerda) e a intensidade seria o *volume* do cubo oblíquo determinado pelos três vetores. Ou seja, um campo 3-vetorial associa a cada ponto de  $\mathbb{R}^3$  um *volume*. Evidentemente, se os campos vetoriais não fossem LI em um ponto, neste ponto o volume seria zero.

**Exemplo:** [2-formas no  $\mathbb{R}^2$  e no  $\mathbb{R}^3$ ] Uma 2-forma  $\alpha$  associa a cada ponto de uma variedade um 2-covetor. No caso do espaço ser bidimensional (por exemplo,  $\mathbb{R}^2$ ), a representação mais comum é a de *caixa de ovos*, conforme apresentado na Figura 22, lado esquerdo. Há uma orientação, representada pela flecha circular (horária ou anti-horária) e uma intensidade, representada pela *área das células*. Quanto menor as células, maior a intensidade (e vice-versa).

Entretanto, a representação em *caixa de ovos* é enganosa, pois faz pensar que uma 2-forma no  $\mathbb{R}^2$  é formada por dois feixes de linhas paralelas, e que a inclinação dessas linhas tem alguma importância. De fato, essas inclinações não importam, mas somente as intersecções destes feixes, ou seja, o conjunto de pontos e a orientação indicada. De fato, na Figura 22 à direita, mostra-se outra caixa de ovos (pontilhada) cuja área das células é

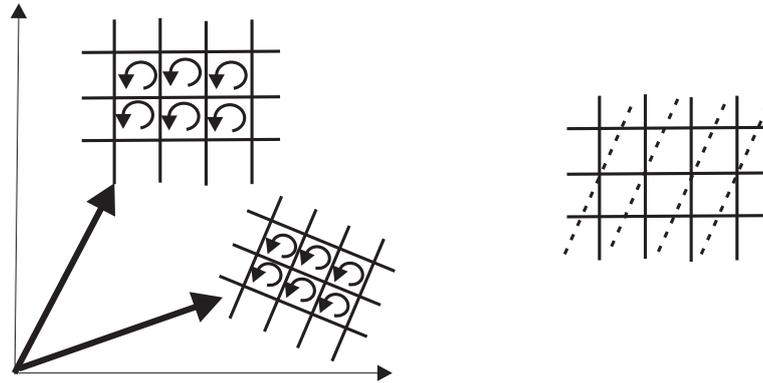


Figura 22: Visualização de uma 2-Forma num Espaço Bidimensional

a mesma (regra do paralelogramo). Ambas as caixinhas representam a mesma densidade bidimensional de pontos, e portanto a mesma 2-forma. Então, uma 2-forma é uma classe de equivalência de caixinhas, onde todas têm a mesma área de célula e orientação.

No caso de 2-formas no  $\mathbb{R}^3$ , a representação é um pouco mais complexa, pois agora existe uma direção associada (além de orientação e intensidade). Na Figura 23, tem-se a representação que generaliza a *caixinha de ovos* no que poderia ser chamada de *caixinha de tubos*. Quanto menor a área da seção dos tubos, maior é a densidade de linhas dadas pelas intersecções das paredes, ou seja, maior intensidade da 2-forma. Novamente, esta representação é enganosa, pois o que importa não são os tubos em si, mas sim a intersecção das suas paredes, que no caso são linhas paralelas. Há outras caixinhas de tubos que poderiam representar este mesmo conjunto de linhas, de modo que a 2-forma deve ser pensada como a classe de equivalência destas caixinhas de tubos (que representam o mesmo conjunto de linhas paralelas). A orientação indicada também é importante.

Dados dois campos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , ao se conjugar  $\alpha$  com os dois campos, ou seja, ao se calcular o número  $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , este é igual ao *fluxo* de linhas paralelas passando pela área determinada por  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  (por exemplo,  $\alpha$  poderia representar um campo densidade de fluxo magnético). Este número  $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  pode aumentar ou diminuir de um ponto para outro, ou seja, pode haver fontes e/ou sorvedouros de linhas de fluxo. Há duas formas de se aumentar este fluxo:

1. multiplicando-se  $\alpha$  por um escalar  $a$ , o que faz os tubos ficarem mais finos, ou seja a  $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Isto é equivalente às linhas de fluxo ficarem mais próximas.
2. multiplicando-se o 2-vetor por  $a$ , o que tem três formas de ocorrer:  $\alpha(a\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \alpha(\mathbf{X}, a\mathbf{Y}) = \alpha(\sqrt{a}\mathbf{X}, \sqrt{a}\mathbf{Y})$ .

Se o 2-vetor for tal que nenhuma das linhas de  $\alpha$  o fura, o que ocorre por exemplo quando

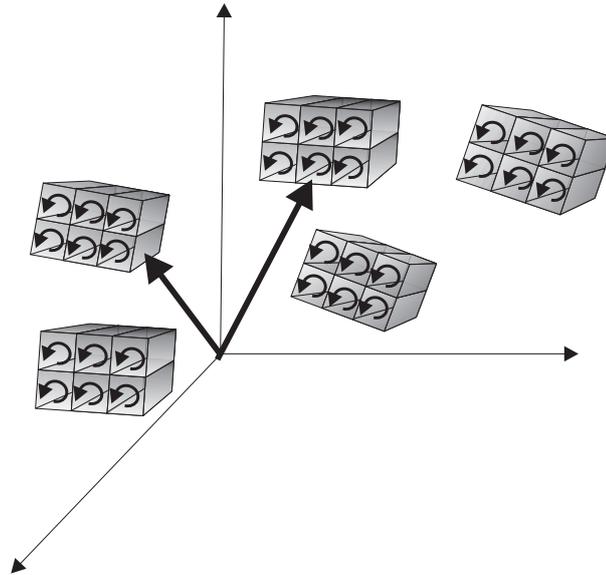


Figura 23: Visualização de uma 2-Forma num Espaço Tridimensional

2-vetor for paralelo a uma das laterais, então  $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ .

É também importante saber o que representa uma 2-forma num espaço  $\mathbb{R}^n$  qualquer. Para tanto, deve-se lembrar da noção de codimensão, apresentada na definição C.15.1. Para 2-formas no  $\mathbb{R}^2$ , a codimensão é zero, por isso tem-se que essa é uma densidade de pontos. No caso  $\mathbb{R}^3$ , a codimensão é um, e a 2-forma é uma densidade de linhas. Para o  $\mathbb{R}^4$ , a 2-forma representa uma densidade de 2-variedades, e assim por diante. Obviamente, tratam-se de densidades com orientação e direção.

**Exemplo:** [3-formas] Uma 3-forma é um campo de 3-covetores, e a menor dimensão onde faz sentido se ter este campo é igual a três. A codimensão neste espaço seria zero, o que indica que a 3-forma representa uma densidade de pontos (com orientação ou sentido, no caso positivo ou negativo). Deste modo, a 3-forma num espaço de dimensão três faz o mesmo papel que a 2-forma na dimensão dois. Deste modo, a representação mais adequada seria a de uma *caixa de ovos* tridimensional com orientação, conforme mostrado na Figura 24.

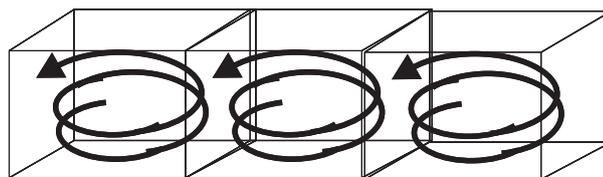


Figura 24: Visualização de uma 3-Forma num Espaço Tridimensional

Novamente, uma outra *caixinha de ovos*, com paredes oblíquas, poderia representar esta mesma 3-forma, desde que tivesse o mesmo sentido e o mesmo volume das células, ou

ainda, o mesmo número de pontos de intersecções por unidade de volume. Quanto menor o volume das células, maior a densidade de pontos, e portanto maior a intensidade da 3-forma. Ao se conjugar com 3-vetores, seria equivalente a multiplicar a densidade pelo volume. Uma 3-forma num espaço de dimensão quatro representaria uma densidade de linhas, e assim por diante (sempre com orientação).

Conforme pode ser concluído da seção A.14, uma  $n$ -forma num espaço de dimensão  $n$  sempre representará uma densidade de pontos mas com orientação (ou sinal), de modo que poderia ser pensada como uma densidade de cargas. Na seção A.14.6 foram definidas as álgebras de Grassmann para os espaços vetoriais  $V$  e  $V^*$ . Pode-se então definir:

**Definição C.21.5** (Variedades Orientáveis: segunda definição). *Dada uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$ , diz-se que ela é orientável se existe uma  $n$ -forma que não tem singularidades (isto é, não se anula em nenhum ponto).*

Compare com a definição C.3.12. De forma semelhante, pode-se definir uma  $k$ -subvariedade orientável como sendo aquela que admite uma  $k$ -forma sobre ela que não tenha singularidades.

**Definição C.21.6** (Subvariedade Orientada). *Define-se  $k$ -subvariedade orientada como sendo o par  $(M, \varpi)$  onde  $M$  é orientável e  $\varpi$  é uma  $k$ -forma sem singularidades.*

Uma  $k$ -subvariedade orientada poderia ser igualmente obtida usando-se um campo  $k$ -vetorial no lugar de uma  $k$ -forma.

**Teorema C.21.3.** *Dada uma  $n$ -variedade orientável  $(M, \varpi)$ , a classe de equivalência representada pela  $n$ -forma  $\varpi$  é invariante por qualquer transformação de coordenadas com o mesmo determinante.*

Evidentemente, para qualquer variedade orientada  $(M, \varpi)$  tem-se que todos os espaços tangentes e cotangente são espaços vetoriais orientados (com orientação dada de forma óbvia, conforme definição A.8.19).

**Teorema C.21.4.** *Dada uma  $n$ -variedade orientável  $(M, \varpi)$ , qualquer  $n$ -forma dada pela multiplicação de  $\varpi$  por uma constante é uma orientação equivalente, de modo que se pode definir a classe de equivalência das orientações de  $M$ .*

Para o caso de variedades (e subvariedades) com fronteira, a orientação é mais complexa, pois é necessário orientar a fronteira de uma forma compatível, isto é:

**Definição C.21.7** (Variedades Orientadas com Fronteira Compatível). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade orientável com fronteira também orientável. Diz-se que a variedade orientada  $M$  é com fronteira compatível  $\partial M$  se para cada carta adaptada à fronteira  $(u_1, \dots, u_n)$  a  $(n-1)$ -forma  $\bar{\omega}$  que orienta a fronteira e a  $n$ -forma  $\omega$  que orienta  $M$  são, na carta adaptada, respectivamente,  $(-1)^n du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$  e  $du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ .*

**Nota:** Evidentemente, tudo o que foi feito para  $n$ -variedades orientadas com fronteira, pode ser feito para subconjuntos abertos desta sem perda de generalidade, pois: 1) todo  $n$ -subconjunto aberto é também uma subvariedade; 2) a integral de uma  $n$ -forma em um subconjunto orientado  $U \in M$  é igual à integral de no seu interior.

## C.22 $r$ -Formas Fechadas e Exatas

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados na em (BLOCH, 2003) e (ABRAHAM; MARSDEN, 1990).

**Definição C.22.1** (Formas Fechadas). *Diz-se que uma  $r$ -forma  $\omega$  é fechada se  $d\omega = 0$ .*

**Definição C.22.2** (Formas Exatas). *Diz-se que uma  $r$ -forma  $\omega$  é exata se ela puder ser escrita como  $\omega = d\alpha$ , onde  $\alpha$  é uma  $(r-1)$ -forma.*

**Exemplo:** [1-Forma Fechada] Um exemplo de 1-forma fechada é mostrada na Figura 25. Há um alinhamento entre todos os planos tangentes determinantes da 1-forma, determinando então uma folheação de codimensão um. Nos pontos onde  $\omega$  é mais intenso, isto é, onde os planos estão mais próximos, a folheação fica mais apertada. Também está associado um sentido entre as folhas, pelo fato da 1-forma ter uma orientação.

A 1-forma fechada mais simples é a diferencial de uma função  $df$ , pois das propriedades da derivada exterior tem-se que  $d^2f = 0$ . Portanto, se a 1-forma representada na figura 25 for  $df$ , as folhas (subvariedades integrais) podem ser pensadas como subvariedades de nível da função  $f$ .

**Exemplo:** [2-Forma Fechada] Seja a 2-forma apresentada na Figura 23 da seção anterior. Se pensarmos na representação em *caixa de ovos* no caso de espaço de dimensão três, se  $d\alpha = 0$ , significa que as paredes dos tubos em torno de um ponto se alinham com as paredes do ponto vizinho, dando origem aos tubos compridos mostrados na Figura 26. Ou

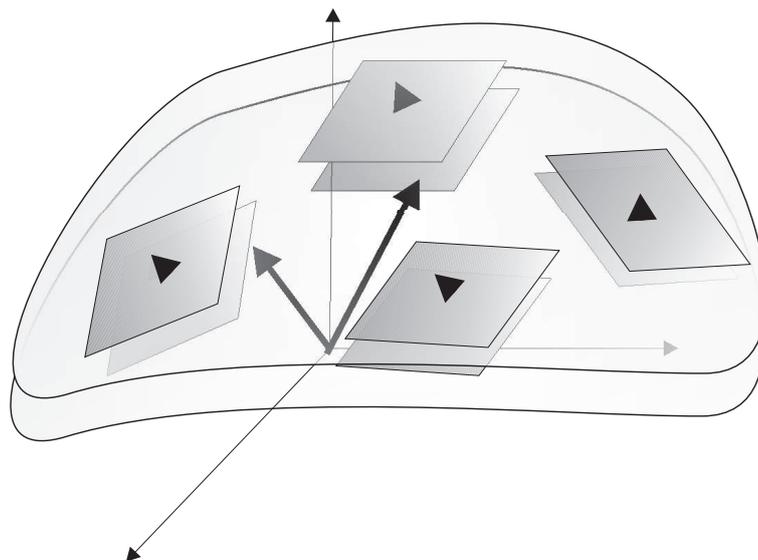


Figura 25: Representação de 1-Forma Fechada

seja, tem-se uma dupla folheação de dimensão dois, que são as integrais das distribuições formadas pelas paredes das caixas de ovos. Entretanto, o que importa é a folheação de dimensão um dada pela intersecção desta dupla folheação, pois uma outra dupla folheação poderia resultar nesta mesma folheação de dimensão um. Por isso, a figura em 26 pode ser enganosa. A interpretação mais adequada seria pensar que as intersecções das paredes das 2-formas na Figura 23, que são linhas, se alinham com as linhas de outro ponto, formando as curvas de dimensão um, que são as intersecções das paredes dos tubos da Figura 26.

É interessante apresentar também a interpretação encontrada em textos de Física, que complementa esta acima no seguinte sentido: a razão para não ocorrer o alinhamento das linhas de um ponto para o outro é que há surgimento (e desaparecimento) de linhas, que são representados por *fontes* e *sorvedouros* destas linhas. Quando estes últimos não existem, o alinhamento entre pontos infinitesimalmente próximos sempre ocorre (senão a 2-forma não seria suave).

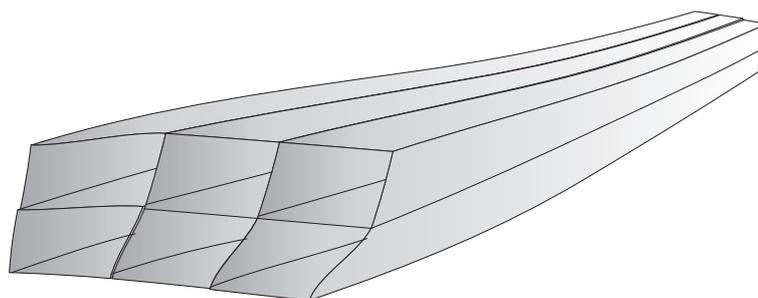


Figura 26: Tubos Formados por uma 2-Forma Fechada

**Exemplo:** [3-forma Fechada] Uma 3-forma numa 3-variedade, por outro lado, é sempre fechada (faça a derivada exterior de  $f dx \wedge dy \wedge dz$  e verifique!). É intuitivo que as paredes e teto das caixinhas de ovos sempre vão se alinhar para determinar uma tripla folheação.

A condição para que uma  $r$ -forma seja exata é dada por:

**Lema C.22.1** (Lema de Poincaré). *Uma  $r$ -forma fechada é exata se e somente se o domínio  $U \in M$  onde ela está definida é um espaço (ou subespaço) topológico contratível.*

Entretanto,  $r$ -formas exatas são melhor interpretadas quando se introduzir o conceito de integral destas formas. Por fim, para encerrar a seção, introduzimos alguns conceitos que precisam da derivada exterior.

**Definição C.22.3** (Posto de uma 1-Forma). *O posto de uma 1-forma  $\omega$  num ponto  $p \in M$  é o menor inteiro  $k$  tal que a série:  $\omega_1 = \omega, \omega_2 = d\omega, \omega_3 = \omega \wedge d\omega, \omega_4 = d\omega \wedge d\omega, \omega_5 = \omega \wedge d\omega \wedge d\omega \cdots \omega_k$  se anula em  $p$ .*

Tendo-se a definição de posto, é possível apresentar o seguinte resultado:

**Teorema C.22.1.** *Seja uma 1-forma de posto constante igual a  $r$  na  $n$ -variedade  $M$ . Então existem coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n)$  tais que: 1) Se  $r = 2s$ , tem-se que  $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2s-1} dx_{2s}$ ; e se 2) Se  $r = 2s + 1$ , tem-se que  $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2s-1} dx_{2s} + dx_{2s+1}$ .*

Isto significa que existem coordenadas especiais onde as 1-formas podem ser colocadas em uma forma normal, da mesma forma que os campos vetoriais podiam ser retificados numa vizinhança onde não tinham singularidades. Para o caso de 2-formas fechadas, a forma normal é dada pelo chamado *teorema de Darboux*, a ser enunciado mais adiante.

## C.23 Integração de $r$ -Formas

Foi visto que uma  $r$ -forma representa uma densidade. Deste modo, as integrações de  $r$ -formas podem ser pensadas como integrais de densidades, como aparecem na Física.

**Definição C.23.1** (Integral em um aberto). *(vide (BURKE, 1985)) Seja uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$  orientável,  $S$  uma  $r$ -subvariedade de  $M$  e uma  $r$ -forma  $\alpha$  definida em  $S$ . Seja ainda um aberto  $U \subset S$  e uma carta sobre este aberto tal que  $\psi : \Sigma \subset \mathbb{R}^r \rightarrow U \subset S$ . Defina-se a integral de  $\alpha$  em  $U \subset S$  como sendo dada por*

$$\int_U \alpha = \int_{\psi(\Sigma)} \alpha = \int_{\Sigma} (\psi^* \alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r} \right) dx^1 \cdots dx^r \quad (\text{C.18})$$

ou seja, faz-se o *pullback* de  $\alpha$  para o espaço euclidiano pela carta, e calcula-se a integral no campo  $r$ -vetorial

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^r},$$

de modo que a integral pode ser calculada como uma  $r$ -múltipla integral. Para calcular a integral numa subvariedade qualquer, será necessário o conceito de partição da unidade, como na definição B.1.31. A partir daqui, teremos que exigir que as  $n$ -variedades diferenciáveis que trabalharmos sejam paracompactas (vide teorema B.1.1).

**Nota:** É importante considerar que no cálculo da integral, não basta a  $r$ -forma que se deseja integrar, mas também é necessário um campo  $r$ -vetorial (campo de elementos de extensão) para que se possa conjugá-los e assim obter uma função real sobre a variedade. Esta função será então o integrando de uma integral múltipla, bem conhecida dos cursos de cálculo avançado.

**Proposição C.23.1.** *Dada uma  $n$ -variedade  $M$  paracompacta e orientável, uma subvariedade de dimensão  $k$  representada por  $S \subset M$  (também paracompacta), um subconjunto  $R \subset S$ , uma partição da unidade  $\{g_i\}$  de  $S$  e uma  $k$ -forma  $\alpha$  definida em  $S$ , que pode ser escrita como  $\alpha = \sum_i (g_i \alpha)$  onde  $\text{supp}(g_i \alpha) \subset \text{supp}(g_i)$ , tem-se que:*

$$\int_R \alpha = \sum \int_{\text{supp}(g_i)} g_i \alpha = \sum \int_{W_i} g_i \alpha, \quad (\text{C.19})$$

onde  $\text{supp}(g_i) \subset W_i$  e os  $W_i$  são abertos de  $S$  que forma uma cobertura aberta de  $R$ .

Deste modo, pode-se calcular a integral em  $R$  simplesmente usando-se a fórmula (C.18) para cada aberto  $W_i$  para a  $k$ -forma  $g_i \alpha$ , e depois realizar a somatória.

**Teorema C.23.1.** *Esta definição de integral usando-se partição da unidade não depende nem do conjunto de cartas nem da partição da unidade.*

**Teorema C.23.2** (Fórmula de Mudança de Coordenadas). *Ao se mudar de carta, a fórmula de mudança do integrando é  $\bar{\alpha}_{1\dots n}(\bar{x}_i) = \alpha_{1\dots n}(x_i(\bar{x}_j))(\det[\partial \bar{x}_l / \partial x_k])$ . É necessário ainda que a variedade seja orientável, de modo que as mudanças de coordenadas preservem a orientação.*

**Proposição C.23.2.** *As seguintes propriedades da integração podem ser demonstradas:*

1. Se  $U = U_1 \cup U_2$  (união disjunta), então

$$\int_{U_1 \cup U_2} \alpha = \int_{U_1} \alpha + \int_{U_2} \alpha.$$

2. A integral é linear, isto é:

$$\int_U (a\alpha_1 + b\beta_2) = a \int_U \omega_1 + b \int_U \alpha_2.$$

onde  $a$  e  $b$  são reais.

A integral de uma 1-forma  $\omega$  ao longo de uma curva  $\gamma$  pode ser interpretada como o trabalho realizado pela força  $\omega$  ao longo desta curva. A quantidade  $\langle \omega_p, (\gamma_*)_p \rangle$ , que é o integrando, representa a potência instantânea. A integral de uma 2-forma  $\alpha$  deve ser feita num campo 2-vetorial  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , que é um elemento de superfície (que possui intensidade, direção e orientação). A quantidade  $\alpha_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)$ , dependendo da dimensão do espaço, representa densidade de pontos, densidade de fluxo de linhas, densidade de fluxo 2-subvariedades e etc, e a sua integral numa 2-subvariedade, tangente ao campo 2-vetorial, representa quantidade de pontos, fluxo de linhas e etc. Para uma 3-forma  $\omega$  numa 3-variedade, tem-se que o integrando é da forma  $\omega_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p)$ , que representa a densidade de pontos (no espaço tangente) em torno de um ponto  $p$  (da variedade) no elemento de volume  $\mathbf{X}_p \wedge \mathbf{Y}_p \wedge \mathbf{Z}_p$ . Fisicamente, uma 3-forma em uma 3-variedade representa a densidade de carga (ou massa, se usarmos somente formas com orientação positiva).

## C.24 Teorema de Stokes

Uma questão interessante é se existe uma generalização, para  $r$ -formas em  $r$ -variedades, do teorema C.14.2, que fala sobre independência de caminho para uma integral de 1-forma. De fato, existe um teorema que generaliza os teoremas de Gauss e Stokes do Cálculo Vetorial e ainda estabelece uma simetria entre a derivada exterior  $d$  e o operador de fronteira  $\partial$  que aparece nas teorias de *homologia* da topologia algébrica (vide seção B.1.1). Para mais detalhes veja também (BLOCH, 2003) e (ABRAHAM; MARSDEN, 1990)

**Teorema C.24.1** (Stokes). *Seja uma  $n$ -variedade  $M$  orientável e paracompacta, uma  $(k+1)$ -subvariedade  $S$  orientável com fronteira (que é uma  $k$ -subvariedade de  $M$  representada por  $\partial S$  com orientação compatível) e uma  $k$ -forma  $\alpha$ . Deste modo, vale que:*

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha. \quad (\text{C.20})$$

Em palavras, este teorema afirma que a integral de  $\alpha$  na fronteira  $\partial S$  é igual à integral de  $d\alpha$  no interior de  $S$ .

**Teorema C.24.2.** *As seguintes propriedades podem então ser inferidas: No caso das integrais serem nulas, tem-se as seguintes possibilidades: 1)  $\alpha$  é identicamente nula; 2)  $S$  é uma variedade sem fronteira e 3)  $\alpha$  é fechada (ou seja,  $d\alpha = 0$ ), o que significa que a integral em qualquer subvariedade orientada cuja fronteira é  $\partial S$  (com orientação compatível) é a mesma;*

Para uma melhor compreensão do impacto deste teorema, inicialmente analisa-se a sua aplicação para 1-formas para depois verificar se reduz ao teorema C.14.2 de independência de caminho. Aplica-se em seguida para 2-formas para obter resultados análogos aos do Cálculo Avançado.

### C.24.1 Teorema de Stokes Aplicado a 1-Formas

Seja uma 1-forma  $\omega$  numa 3-variedade (paracompacta e orientável)  $M$ , e seja  $S \subset M$  uma 2-subvariedade, que têm orientações compatíveis. Seja ainda a sua fronteira  $\partial S$  com orientação compatível. Neste caso, tem-se que:

$$d\omega = d(\omega_i dx^i) = d\omega_i \wedge dx^i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i, \quad (\text{C.21})$$

o que é a fórmula para o rotacional. Deste modo, tem-se que para 1-formas, o Teorema de Stokes geométrico é o próprio teorema de Stokes da Física. Podemos pensar que as componentes  $\omega_i$  são as componentes do campo elétrico  $\mathbf{E}$  (que tem as mesmas propriedades que uma força), ou campo magnético  $\mathbf{H}$ .

No caso particular em que  $\omega$  for fechada, então  $d\omega = 0$ , o que significa, pelo teorema de Stokes, que:

$$\int_{\partial S} \omega = 0.$$

Então, se  $\partial S$  é a concatenação de duas curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (de modo que formem uma curva fechada contida em  $\partial S$ ), a integral da 1-forma ao longo desta curva é nula, ou equivalentemente, a integral ao longo de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (uma delas com sentido trocado) é a mesma em ambos os casos, ou seja, ela independe do caminho. Como  $d\omega$  é uma 2-forma, sua interpretação é como sendo uma densidade de fluxo passando pela subvariedade  $S$ , e

que nesse caso é nula (ou seja, o fluxo total é nulo). Deste modo, recupera-se a afirmação do teorema C.14.2. De fato, a equação (C.21) é o próprio bilinear de Frobenius.

Por fim, no teorema C.14.2 foi visto que a integração independe do caminho significa que esta determina localmente uma folheação de nível de uma função real  $f$ . De fato, se para qualquer caminho entre dois pontos  $p$  e  $q$ , a integral de  $\omega$  é sempre a mesma, pode-se calculá-la por  $f_q - f_p$ , onde  $\omega = df$ . Deste modo,  $\omega$  é uma *forma exata*. Deste modo, podemos enunciar:

**Teorema C.24.3** (Formas Exatas). *Para uma 1-forma ser exata, é necessário que:*

1. *Ela seja fechada, isto é  $d\omega = 0$ ;*
2. *A integral entre dois pontos quaisquer sempre sejam independentes do caminho.*

*Neste caso, esta integral é dada por  $f_q - f_p$ .*

Este resultado vale para qualquer que fosse a dimensão  $n$  da variedade  $M$ , para o caso de 1-formas,  $S$  sempre será uma 2-subvariedade,  $\partial S$  será uma 1-subvariedade orientada e fechada (sem fronteiras).

Cabe então a pergunta: quando uma 1-forma é fechada e não é exata? A resposta está na topologia da  $n$ -variedade. De forma geral, a  $r$ -forma ser fechada é uma questão local, enquanto ser exata é uma questão global. A topologia pode apresentar obstruções à existência de  $f$  tal que  $\omega = df$ , mesmo quando  $d\omega = 0$ . De fato, uma das formas de se classificar as variedades, do ponto de vista topológico global), é através da falha das  $r$ -formas fechadas em serem exatas. Este é o assunto estudado pela já citada Topologia Algébrica, especificamente a teoria de *Cohomologia de de Rham*. Este assunto porém não será tratado neste livro.

**Nota:** Será visto que uma 1-forma  $\omega$  pode determinar uma folheação local sem ser fechada, desde que  $d\omega \wedge \omega = 0$  (o que será assunto do capítulo de sistemas diferenciais exteriores), porém esta não será uma folheação de nível, e a integral ao longo de caminhos irá depender destes caminhos.

## C.24.2 Teorema de Stokes Aplicado à 2-Forms

Seja uma 2-forma  $\alpha$  numa 3-variedade  $M$ . Neste caso, a integral do lado esquerdo em (C.20) é uma integral de 2-superfície de uma 2-forma, e a do lado direito, é a integral

de volume (3-subvariedade) de uma 3-forma. No caso particular de  $d\alpha = 0$ , tem-se que a integral no volume é zero. E neste caso também sabemos que o fluxo representado por  $\alpha$  fica confinado em tubos, como ilustrado na figura 27. Então, o fluxo que entra pela superfície  $S$  e sai pela  $R$  (a concatenação de ambas forma a fronteira de um volume) é exatamente o mesmo. Não há então fontes de linhas de fluxo (nem sorvedouros) e podemos interpretar  $d\alpha$  como a densidade de fontes e sorvedouros. Ou todas as linhas de fluxos são fechadas ou se estendem para o infinito.

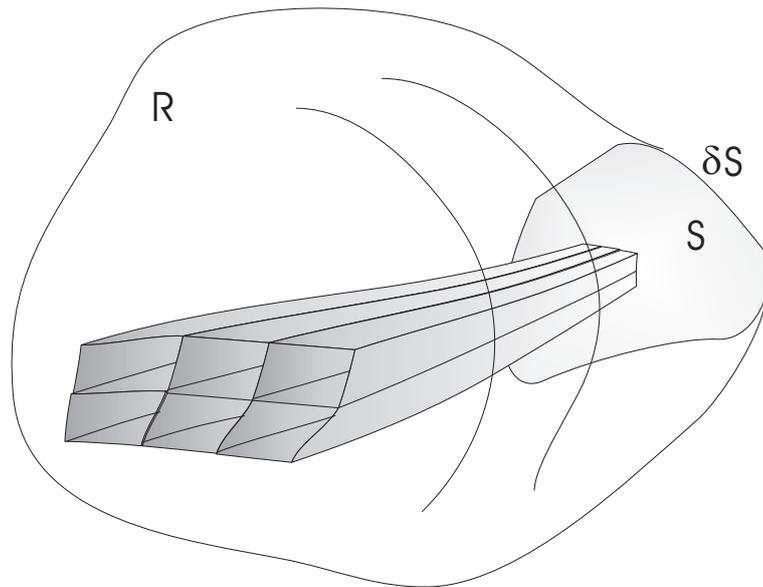


Figura 27: Teorema de Stokes e 1-Forma Fechada

Localmente, podemos pensar que  $\alpha = d\omega$  (1-forma), o que significa que se pode aplicar o teorema de Stokes novamente para  $\omega$  num aberto. Não necessariamente ocorre que  $d\omega \equiv 0$ , de modo que a integral de  $\omega$  na fronteira  $\partial S$  das superfícies  $S$  e  $R$  não é zero. Deste modo, não existe função real tal que  $\omega = df$ , e a integral entre dois pontos de  $\omega$  fica dependente do caminho. Podemos dizer que neste caso, e neste aberto, a 1-forma  $\omega$  é uma primitiva de  $\alpha$  (que pode não valer globalmente).

**Exemplo:** Fisicamente, pode-se citar o exemplo das equações de Maxwell do campo  $\mathbf{B}$  (densidade de fluxo magnético), que é geometricamente representado por uma 2-forma  $\beta$ , e como as linhas e fluxo magnético devem ser fechadas, devemos ter que  $d\beta \equiv 0$  (divergente nulo), o que significa que não existem fontes nem sorvedouros de fluxo magnético. Já no caso do campo  $\mathbf{D}$  (densidade de fluxo elétrico), a 2-forma  $\delta$  não é fechada, pois as cargas elétricas são fontes deste fluxo. Já o vetor  $\mathbf{E}$  é representado geometricamente por uma 1-forma (assim como  $\mathbf{H}$ ) pois eles estão relacionados com forças (de Lorentz). Se  $\epsilon$  é a 1-forma correspondente a  $\mathbf{E}$ , o Teorema de Stokes informa que se  $d\epsilon \equiv 0$  (rotacional nulo) então deve existir um potencial elétrico  $\phi$  tal que a integral de linha de  $\epsilon$  pode ser

calculada pela diferença  $\phi_q - \phi_p$  (para o caso da 1-forma  $\eta$  que representa  $\mathbf{H}$  isso não é possível, pois se  $d\eta$ , o próprio  $\eta$  é identicamente nulo).

Evidentemente, pode-se aplicar o Teorema de Stokes para  $r$ -formas em geral. A interpretação entretanto fica cada vez mais complicada, e achar exemplos físicos exige conhecimento de teorias mais avançadas, o que em geral não é de conhecimento de engenheiros.

## C.25 Comentários Adicionais

Passa-se agora para uma comparação entre as três derivadas de  $r$ -formas que aprendemos até agora. Em capítulos posteriores, será visto que há mais uma derivação importante em  $r$ -formas, que é a derivada covariante. Todas estas derivações são operações lineares em uma álgebra de Grassmann (vide seção A.9). Quanto ao tipo de derivação, podemos dizer que a derivada de Lie é uma derivação de grau 0, pois não altera o tipo da  $r$ -forma. Trata-se também de uma operação local (depende de valores da  $r$ -forma numa vizinhança). A derivada exterior também é de natureza local, porém é uma anti-derivação de grau  $-1$ . Já a derivada interior é de natureza pontual, e é uma anti-derivação de grau  $+1$ . A proposição C.21.5 têm vários casos particulares, do qual se pode tirar as seguintes interpretações:

- Se  $\omega = df$ , obtém-se simplesmente que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f$ ;
- Quando  $\omega$  é fechada, tem-se que  $\mathbf{Y}\omega(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\omega(\mathbf{Y}) = \omega([\mathbf{Y}, \mathbf{X}])$ , o que é uma espécie de regra de Leibniz.
- Se os campos  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  forem anulados por  $\omega$ , então  $d\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = -\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ , e no caso especial de  $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = 0$  tem-se  $d\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0$ . Evidentemente, no plano esta identidade é impossível. Em dimensão dois, significa que  $\omega$  anula a subvariedade integral determinada por  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ , e este bivector, num ponto, é paralelo às paredes de  $d\omega_p$ . Logo, se restringirmos  $\omega$  e  $d\omega$  a esta 2-subvariedade, é como se ambas fossem nulas (como deveria ser, pois para a primeira ser identicamente nula, a segunda, que é uma derivada da primeira, também deve ser).
- Recordando-se do Teorema de Frobenius (vide seção C.17), basta que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  fosse combinação linear dos dois campos para que a distribuição associada fosse integrável. E neste caso, ainda assim  $\omega([\mathbf{Y}, \mathbf{X}]) = 0$ . Ou seja, o fato do par de campos  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$

determinar uma folheação integral significa que qualquer 1-forma que anula esta subvariedade terá sua derivada exterior anulando esta variedade.

**Exemplo:** [Divergente de um campo] Dada uma  $n$ -variedade  $M$  e uma  $n$ -forma de volume  $\Omega$ , a taxa de expansão do fluxo de um campo  $\mathbf{X}$  em relação a  $\Omega$  é dada pelo divergente  $\operatorname{div}\mathbf{X}$ , cuja definição é  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = \operatorname{div}(\mathbf{X})\Omega$ . Para o espaço  $\mathbb{R}^3$  e  $\Omega = dx\,dy\,dz$  é fácil mostrar que  $\operatorname{div}\mathbf{X} = \partial X_x/\partial x + \partial X_y/\partial y + \partial X_z/\partial z$ .



# APÊNDICE D – GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE E GEOMETRIA RIEMANNIANA

## D.1 Grupos de Lie, Álgebras de Lie e Representações

As definições apresentadas nesta seção podem ser encontradas em (KAWAKUBO, 1991), (SHARPE, 1997), (OLVER, 1996) e (SATTINGER; WEAVER, 1986). Um grupo de Lie é um grupo (vide seção A.3) que é também uma variedade diferenciável (vide seção C.3), portanto possui uma estrutura topológica (vide seção B.2). Portanto, todos os conhecimentos apresentados até aqui, neste apêndice, se aplicam para o seu entendimento. Os grupos de Lie são fundamentais para o trabalho em questão, já aparecendo logo no primeiro capítulo através do grupo das rotações  $SO(3)$ .

**Definição D.1.1** (Grupos de Lie). *Um grupo de Lie é uma variedade  $G$  de classe  $C^\infty$  tal que estão definidas a aplicação bilinear  $\alpha : G \times G \rightarrow G$ , dada por  $\alpha(g, h) = gh$  (multiplicação) e  $\beta : G \rightarrow G$ , dada por  $\beta(g) = g^{-1}$  (inversão) e que são também de classe  $C^\infty$ .*

**Definição D.1.2** (Homomorfismo de Grupos de Lie). *Dados dois grupos de Lie  $G_1, G_2$ , diz-se que  $f : G_1 \rightarrow G_2$  é um homomorfismo entre grupos de Lie se: 1)  $f$  for uma aplicação  $C^\infty$ ; 2)  $f$  for um homomorfismo de grupo.*

**Definição D.1.3** (Subgrupo de Lie). *Dado um grupo de Lie  $G$ , diz-se que  $H \subset G$  é um subgrupo de Lie se, além de ser um subgrupo de  $G$ , ele for uma subvariedade imersa  $f : H \rightarrow G$ , onde  $f$  é um homomorfismo de grupo (vide seção C.4).*

Em particular, pode-se definir:

**Definição D.1.4** (Subgrupos de Lie de um parâmetro). *Dado um grupo de Lie  $G$ , os subgrupos de um parâmetro são as curvas suaves dadas por homomorfismos  $g : \mathbb{R} \rightarrow G$  de classe  $C^\infty$  com  $g(0) = e$  (vide seção C.6).*

Pode-se então provar que dado um grupo de Lie  $G$  e  $H \subset G$  um subgrupo, se este for topologicamente fechado, então ele é um subgrupo de Lie de  $G$  (KAWAKUBO, 1991). São exemplos de grupos de Lie:

**Exemplo:** Um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  é exemplo de um grupo de Lie abeliano; O grupo multiplicativo dos números complexos sem o zero, isto é,  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$ , onde o elemento identidade deste grupo é 1; O subgrupo de  $\mathbb{C}^*$  de números complexos com módulo 1, conhecido também como  $S^1$ ; O *toro*  $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$  ( $n$  vezes) com a operação de multiplicação sendo  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \bullet (w_1, w_2, \dots, w_n) = (z_1.w_1, z_2.w_2, \dots, z_n.w_n)$ ; O grupo linear geral  $GL(n, \mathbb{R})$  e seus subgrupos chamados *grupos clássicos* ou seja:  $SL(n, \mathbb{R})$ , que é o *grupo linear especial* das matrizes com determinante unitário,  $O(n, \mathbb{R})$ , que é o *grupo ortogonal* (matrizes ortogonais), e  $Sp(n, \mathbb{R})$  que é o *grupo simplético*, das matrizes que são simetrias lineares da 2-forma canônica  $\Omega$  do espaço simplético  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Definição D.1.5** (Dimensão de um Grupo de Lie). *Dado um grupo de Lie  $G$ , diz-se que sua dimensão é a dimensão da variedade  $G$ .*

**Proposição D.1.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $H$  um subgrupo normal topologicamente fechado. Então o grupo quociente  $G/H$  é também um grupo de Lie.*

*Demonstração.* Vide (OLVER, 1996) ■

**Proposição D.1.2.** *Dados dois grupos de Lie  $G$  e  $H$ , o produto direto  $G \times H$ , onde a multiplicação é definida por  $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$  e a identidade é  $(e, I)$ , é também um grupo de Lie.*

A representação matricial de um elemento de  $G \times H$  é bloco-diagonal, ou seja,  $\text{diag}([g], [h])$ , de modo que o produto de  $\text{diag}([g_1], [h_1])$  e  $\text{diag}([g_2], [h_2])$  é da forma  $\text{diag}([g_1g_2], [h_1h_2])$  e a inversa de é  $\text{diag}([g^{-1}], [h^{-1}]) = \text{diag}([g]^{-1}, [h]^{-1}) = [\text{diag}([g], [h])]^{-1}$ . O produto direto de duas variedades simplesmente conexas é também uma variedade simplesmente conexa.

**Teorema D.1.1.** *Todo grupo de Lie  $G$  tem uma cobertura simplesmente conexa  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  tal que  $\tilde{G}$  é também um grupo de Lie e a projeção  $\pi$  é um homomorfismo.*

**Teorema D.1.2.** *Todo grupo de Lie abeliano  $n$ -dimensional e conexo  $G$  é isomórfico a  $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$ , onde  $T^k = S^1 \times \cdots \times S^1$  ( $k$  cópias). Se o grupo de ainda for abeliano, conexo e simplesmente conexo, então ele é isomórfico a  $\mathbb{R}^n$ . Se em vez disso ele for abeliano, compacto e conexo, então ele é isomórfico a  $T^n$ .*

**Definição D.1.6** (Produto Semi-Direto de Grupos de Lie). *Dados dois grupos de Lie  $G$ ,  $H$  onde o segundo é abeliano, e existe uma ação linear de  $G$  em  $H$ , se definirmos o produto semi-direto como  $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 + g_1(h_2))$  e a inversa é dada por  $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}(h))$  então o grupo resultante, que é representado por  $G \ltimes H$  é conhecido como produto semi-direto de  $G$  e  $H$ .*

**Exemplo:** Um exemplo bastante importante de produto semi-direto é o grupo  $SE(3) = SO(3) \ltimes T(3)$ , onde  $T(3)$  é o grupo das translações, gerado pela álgebra de Lie  $\mathfrak{t}(3)$ , como será visto mais adiante. Qualquer elemento de  $SE(3)$  é representado por uma matriz  $4 \times 4$  da forma:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} R & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $R \in SO(3)$  e  $\gamma \in T(3)$ , que é abeliano. O produto de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é dado por:

$$\begin{bmatrix} R_1 & \gamma_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & \gamma_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & R_1 \gamma_2 + \gamma_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As  $G$ -ações contínuas sobre espaços topológicos estudadas na seção B.2 não envolviam qualquer noção de diferenciabilidade. De fato, nenhum dos objetos geométricos estudados até agora poderiam ser definidos naquela situação. Quando o espaço topológico  $M$  é uma variedade diferenciável, tem-se que o conjunto das aplicações bijetivas, suaves e de inversa suave (ou seja, difeomorfismos) formam um Grupo de Lie  $G(M)$ .

**Definição D.1.7** ( $G$ -ação de grupos de Lie em Variedades). *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. Uma  $G$ -ação suave é uma aplicação  $\phi : G \times M \rightarrow M$  suave tal que  $\phi_g : M \rightarrow M$  são difeomorfismos suaves.*

Outro nome que se dá é *grupo de transformações suaves*, e a variedade  $M$  é simplesmente conhecida como  *$G$ -variedade*. Evidentemente, existe um homomorfismo suave  $\Phi : G \rightarrow G(M)$  tal que  $\Phi(g, \cdot) = \phi_g$ .

**Definição D.1.8** ( $G$ -Difeomorfismos). *Dadas as variedades diferenciáveis  $M, N$  e um  $G$ -isomorfismo  $f : M \rightarrow N$ , diz-se que esta aplicação é um  $G$ -difeomorfismo se ela for um homomorfismo suave e a sua inversa também.*

Diz-se então que  $M$  e  $N$  são  *$G$ -difeomórficas*. Um exemplo imediato de uma  $G$ -variedade é o próprio grupo de Lie  $G$ , onde a ação é a aplicação produto  $\alpha : G \times G \rightarrow G$ .

Evidentemente, todas as classificações das  $G$ -ações continuam válidas para o caso de grupos de Lie e variedades suaves. Pode-se, a partir de agora, falar da taxa de variação da curva em relação ao parâmetro, bem como o efeito que a ação do grupo tem sobre a curva, e como sua taxa de variação em relação a  $t$  fica alterada. Dada uma  $G$ -ação suave sobre  $M$  e uma curva suave e regular  $\gamma$ , a aplicação  $\phi_g \circ \gamma$  é igualmente uma curva suave e regular. De fato, isso se generaliza para:

**Teorema D.1.3.** *Dada uma  $G$ -ação suave sobre  $M$  e uma subvariedade qualquer  $S \subset M$ , o conjunto  $\phi_g(S)$  é uma subvariedade de mesma dimensão que  $S$ .*

**Definição D.1.9** (Subvariedades  $G$ -invariantes). *Dada uma  $G$ -ação suave sobre  $M$  e uma subvariedade qualquer  $S \subset M$ , diz-se que  $S$  é  $G$ -invariante se  $g \cdot S = S$  para qualquer  $g \in G$ .*

As  $G$ -ações mais comuns são:

**Definição D.1.10** (Translações à Esquerda e à Direita). *Dado um grupo de Lie  $G$ , a translação à esquerda por  $g \in G$  é a aplicação suave  $L_g$  tal que quando aplicada a  $h \in G$ , tem-se  $L_g h = gh$ . A translação à direita é a aplicação suave  $R_g$  tal que quando aplicada em  $h \in G$  resulta em  $R_g h = hg$ .*

**Teorema D.1.4** ((BOURBAKI, 1966)). *Dados dois grupos de Lie  $G_1$  e  $G_2$ , o produto  $G_1 \times G_2$  tem estrutura de variedade e de grupo compatíveis com  $G_1$  e  $G_2$ , de modo que este produto é também um grupo de Lie.*

Este teorema se estende para um conjunto finito qualquer de grupos de Lie e o produto destes. As aplicações  $L_g$  e  $R_g$  são difeomorfismos. De fato, o conjunto das aplicações  $L_g$  é um grupo de difeomorfismos (que é o próprio grupo de Lie  $G$ ).

A aplicação derivada de  $L_g : G \rightarrow G$  é a aplicação  $dL_g : TG \rightarrow TG$  tal que quando restrita a um ponto  $h \in G$  é dada por  $(dL_g)|_h : T_h G \rightarrow T_{gh} G$  e esta mapeia vetores tangentes em diferentes pontos.

**Definição D.1.11** (Campos Invariantes à Esquerda e à Direita). *Dado um grupo de Lie  $G$ , diz-se que um campo vetorial  $\mathbf{X} : G \rightarrow TG$  é invariante à esquerda se  $(L_g)_* \mathbf{X} = \mathbf{X}$  para todo  $g \in G$ , e invariante à direita se  $(R_g)_* \mathbf{X} = \mathbf{X}$  para todo  $g \in G$ .*

**Teorema D.1.5.** *Dado um grupo de Lie  $G$ , para cada vetor  $\mathbf{x} \in T_e G$  está associado um campo vetorial invariante à esquerda  $\mathbf{X}_L$  e um campo vetorial invariante à direita  $\mathbf{X}_R$  dados, respectivamente, por  $(L_g)_* \mathbf{x}$  e  $(R_g)_* \mathbf{x}$  para cada  $g \in G$ .*

*Demonstração.* Ao se aplicar  $L_g$  sobre o elemento identidade  $e$ , obtem-se o próprio ponto  $g$  (a aplicação  $L_{g^{-1}}$  mapeia  $g$  em  $e$ ). A aplicação  $(L_g)_*$  mapeia um vetor  $\mathbf{x} \in T_e G$  em um vetor tangente em  $T_g G$ . Fazendo-se esta operação para todo  $g \in G$ , obtem-se um campo que consiste do *transporte paralelo* do vetor  $\mathbf{x}$  para todo ponto de  $G$ . O mesmo vale para a construção do campo invariante à direita. ■

Os campos invariantes à esquerda e à direita são também conhecidos como *campos uniformes*, e são as generalizações dos campos uniformes (constantes) bem conhecidos nos espaços euclidianos (uma vez que os espaços vetoriais também são grupos de Lie). O processo de construção dos campos uniformes a partir dos vetores de  $T_e G$ , que é conhecido também como transporte paralelo, é um processo natural que somente é possível por causa da do fato de  $TG$ , ou seja, o fibrado tangente de  $G$ , ser trivializável. O transporte paralelo será definido mais adiante para variedades mais gerais, entretanto ao custo de introdução de uma estrutura adicional (conhecida como conexão).

**Teorema D.1.6** (Álgebra de Lie de um Grupo de Lie). *Dado um grupo de Lie  $G$ , o conjunto dos campos invariantes à esquerda (à direita) em  $G$  forma uma álgebra de Lie, representada por  $\mathfrak{g}_L$  ( $\mathfrak{g}_R$ ) com o colchete de Lie padrão.*

Pode-se ainda mostrar que se  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são invariantes à esquerda,  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  também é invariante à esquerda. Deste modo, existe isomorfismos de álgebras de Lie entre  $\mathfrak{g}$  e os campos invariantes a esquerda e à direita. As ações correspondentes à identidade do grupo  $e$  resultam em  $L_e h = eh = h$ , o que significa que  $L_e$  é a aplicação identidade no grupo  $G$ . Todas as translações são difeomorfismos. Tem-se também que  $L_g L_h = L_{gh}$ , e  $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$  de modo há homomorfismo entre  $G$  e as translações definidas entre eles.

**Definição D.1.12.** *Dada uma carta  $(U, \phi)$  em torno de  $e$ , o atlas formado pelas cartas  $(U_g, \phi_g)$  tal que  $U_g = L_g(U)$  e  $\phi_g = \phi \circ L_{g^{-1}} : U_g \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um atlas induzido por uma translação à esquerda. Da mesma forma, pode-se definir atlas para translações à direita.*

**Definição D.1.13** ( $G$ -ações sobre Funções Reais). *Dado um grupo de Lie  $G$ , uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$ , uma ação  $\phi : G \times M \rightarrow M$  e uma função real  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , a ação induzida de  $G$  sobre a função é dada por  $(g^* f)_p = f_{g \cdot p} = (f \circ g)_p$ .*

Dada uma classe de equivalência  $\omega_p$  de subvariedades que têm contato de primeira ordem em  $p$ , e representada por  $S$  (ou seja, um covetor), esta classe de equivalência é mapeada na classe  $g^* \cdot \omega_p$  representada pela subvariedade  $g \cdot S$ . Em particular, tem-se que dada a função real  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(d(g^* f))_p = g^* \cdot (df)_p$ . É óbvio que como as  $G$ -ações transformam curvas em curvas, tem-se:

**Teorema D.1.7.** *Dado um grupo de Lie  $G$ , uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$  e uma ação  $\phi : G \times M \rightarrow M$ , um vetor tangente  $\mathbf{v}_p \in TM$  é mapeado no vetor tangente  $g_* \cdot \mathbf{v}_p$ .*

*Demonstração.* O vetor tangente  $\mathbf{v}_p \in TM$  é uma classe de equivalência representada pela curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ . Esta curva, assim como todas as outras da mesma classe de equivalência, é mapeada na curva  $g \cdot \gamma$  tal que  $g \cdot \gamma(t) = g \cdot p$ . Chamamos esta última classe de equivalência de  $g_* \cdot \mathbf{v}_p$ . ■

Deste modo, fica induzida a ação  $\phi_* : G \times TM \rightarrow TM$  e de forma similar, se define as ações sobre curvas e subvariedades de  $TM$ .

**Corolário D.1.1** (Ação sobre o Campo de Velocidade). *Dado um grupo de Lie  $G$ , uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$ , uma ação  $\phi : G \times M \rightarrow M$  e uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , a ação induzida sobre o campo de velocidades da curva é representado por  $g_* \gamma' = (g \cdot \gamma)'$ .*

Pode-se também induzir a ação sobre um campo vetorial qualquer:

**Teorema D.1.8.** *Dada uma  $G$ -ação suave sobre  $M$  e um campo vetorial  $\mathbf{X}$  em  $U \subset M$ , a  $G$ -ação induzida sobre  $\mathbf{X}$  é o campo vetorial  $g_* \cdot \mathbf{X}$  definido em  $g \cdot U \subset M$ .*

*Demonstração.* Para a classe de equivalência  $\mathbf{X}_p$  representada pela curva  $\gamma$  tal que no ponto  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \mathbf{X}_p$ , mapeia-se na classe de equivalência  $g_* \cdot \mathbf{X}_p$  que é representada por  $g_* \gamma'(0) = (g \cdot \gamma)'(0)$  ■

O campo é invariante pela  $G$ -ação se  $\mathbf{X}_{g \cdot p} = g_* \cdot \mathbf{X}_p$ . De forma semelhante:

**Teorema D.1.9.** *Dada uma  $G$ -ação suave sobre  $M$  e uma 1-forma  $\omega$  definida em  $U \subset M$ , a  $G$ -ação induzida sobre  $\omega$  é a 1-forma  $g^* \omega$  definida em  $g^{-1}U$  tal que  $(g^* \omega)_p = g^* \cdot \omega_{g \cdot p}$ .*

De forma similar, pode-se definir as ações sobre qualquer campo tensorial advindo dos espaços tangentes e contangentes. Os campos invariantes por ação de um grupo constituem tipos importantes de campos em várias aplicações. A seguir, apresentam-se as definições pertinentes.

**Definição D.1.14** (Funções Reais Invariantes). *Dada uma função real  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que esta é  $G$ -invariante se  $f_{g \cdot p} = f_p$  para qualquer  $g \in G$ .*

**Definição D.1.15** (Campos Invariantes). *Dado um campo vetorial  $\mathbf{X}$  definido em  $U$ , diz-se que  $\mathbf{X}$  é  $G$ -invariante se  $g_* \cdot \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_{g \cdot p}$  para qualquer  $g \in G$ .*

Seja  $\mathcal{X}(G)$  a álgebra de Lie de dimensão infinita dos campos vetoriais tangentes em  $G$  (com colchete de Lie dado por  $[\cdot, \cdot]$ , vide seção C.9.1). É simples provar que o conjunto dos campos invariantes à esquerda é uma subálgebra de Lie de  $\mathcal{X}(G)$  (o mesmo valendo para os campos invariantes à direita). Este fato tem a ver com a propriedade da trivialização dos grupos de Lie, ou seja,  $TG = G \times T_e G$ , isto é,  $TG$  é uma variedade trivializável (vide seção C.3.5).

**Definição D.1.16** (1-formas Invariantes). *Dada uma 1-forma  $\omega$  definida em  $U$ , diz-se que  $\omega$  é  $G$ -invariante se  $g^* \cdot (\omega_{g \cdot p}) = \omega_p$  para qualquer  $g \in G$ .*

**Exemplo:** A função real  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é invariante pela ação do grupo  $SO(2)$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . De fato, o valor da função é constante nas circunferências com centro na origem do plano.

**Definição D.1.17** (Grupo de Simetria). *Diz-se que se um campo (função, campo vetorial, 1-forma ou qualquer campo tensorial) é invariante pela ação de um grupo de Lie  $G$ , este grupo é um grupo de simetria deste campo.*

O conceito de grupo de simetria desempenha um papel fundamental na Física Moderna, especialmente pela existência do *Teorema de Noether*, que relaciona simetria com leis de conservação. Por exemplo, se o sistema possui simetria rotacional, pelo grupo  $SO(3)$ , então este sistema possui conservação do Momento Angular (há vários outros). Os grupos de simetria também são importantes no estudos de equações diferenciais (ordinárias e parciais), pois a presença delas facilita na busca de soluções. Mais adiante, serão apresentados alguns exemplos e sua utilidade para Controle (OLVER, 1996). O conceito de simetria está relacionado também ao conceito de derivada de Lie (vide seção C.9).

**Definição D.1.18** (Gerador Infinitesimal de um Grupo de Difeomorfismos). *O campo vetorial  $X$  completo sobre  $U$  é um gerador infinitesimal do grupo de difeomorfismos de um parâmetro.*

**Definição D.1.19** (Grupos de Difeomorfismos). *Dada uma variedade diferenciável  $M$ , o grupo de difeomorfismos da variedade é o grupo topológico  $\mathcal{G}(M)$  formado por todos os difeomorfismos de  $M$ , e cuja operação de grupo é a composição entre os difeomorfismos e a operação de inversão vem do difeomorfismo inverso.*

**Teorema D.1.10.** *Cada grupo de difeomorfismos de um parâmetro, gerado por um campo  $X$ , é um subgrupo de  $\mathcal{G}(M)$ .*

No caso do campo ser transformado nele mesmo, ou seja, ser um campo invariante, diz-se que  $G$  é um *grupo de simetria*. Isto significa que as curvas integrais são transformadas nelas mesmas (como já foi dito). Se a ação do grupo sobre  $p \in M$  é representada por  $g \cdot p$ , então a ação sobre os pontos da curva é  $g \cdot \gamma$  e a ação sobre um campo vetorial é  $g_* \cdot \mathbf{X}$ . Muitas vezes, a ação de  $g$  sobre um campo é representada simplesmente por  $g\mathbf{X}$ , onde se subentende que se trata de um *push-forward*. Seja  $H \subset G$  um subgrupo de 1-parâmetro gerado pelo campo  $\mathbf{Y}$ . Diz-se que o campo  $\mathbf{X}$  tem a simetria diferencial  $\mathbf{Y}$  se o grupo  $H$  é um grupo de simetria de  $\mathbf{X}$ . Isto equivale a dizer que  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = 0$ . Neste caso, o par de campos determina uma subvariedade de dimensão dois, sobre a qual há um reticulado de dimensão dois (formado pelas curvas integrais dos campos). A derivada de Lie então mede quanto falta para o campo  $\mathbf{Y}$  ser uma simetria de  $\mathbf{X}$ .

O colchete de Lie também é fundamental para o estudo das simetrias de um campo vetorial. Para o entendimento deste conceito, é interessante partir da família de curvas integrais de um campo  $\mathbf{X}$ . Seja  $\phi_t^{\mathbf{X}}$  o fluxo de  $\mathbf{X}$  e suponha ainda que  $[X, Y] = 0$ . Deste modo, o push-forward de  $\phi_t^{\mathbf{X}}$  sempre mapeia vetores de  $\mathbf{Y}$  de um ponto em vetores deste mesmo campo em outros pontos. Neste caso, diz-se que  $\mathbf{Y}$  é *invariante* por  $\mathbf{X}$  (vide Figura C.9.2). Pode-se trocar  $\mathbf{X}$  por  $\mathbf{Y}$  e o resultado se mantém.

De fato, para qualquer valor de  $t$  (que aqui não é uma função), tem-se que a aplicação  $\phi_t^{\mathbf{X}}$  transforma vetores de  $\mathbf{Y}$  em vetores dele mesmo. Sabe-se também que o conjunto destas funções forma um grupo de difeomorfismos de um 1-parâmetro. Diz-se então que  $\phi_t^{\mathbf{X}}$  é uma *simetria* de  $\mathbf{Y}$ , e que o referido grupo é um *grupo de simetria* de  $\mathbf{Y}$ . Por um abuso de linguagem, diz-se que  $\mathbf{X}$  é uma simetria de  $\mathbf{Y}$  quando o primeiro é um gerador de um grupo de simetrias de um único parâmetro para o campo  $\mathbf{Y}$ .

Outra visão das simetrias de um campo vetorial  $\mathbf{Y}$  pode ser adquirida ao se pensar nas curvas integrais deste campo. A transformação da família de curvas integrais (fluxo) de  $\mathbf{Y}$  por um difeomorfismo qualquer  $g \in G(M)$  leva uma curva  $\gamma$  do fluxo a outra curva que, a princípio, não pertence a este. Isto implica que vetores tangentes a estas curvas (isto é, vetores do campo  $\mathbf{Y}$ ) não serão transformados em vetores deste mesmo campo, pela aplicação  $g_*$ .

Para o caso particular de  $g = \phi_t^{\mathbf{X}}$ , é de se esperar que, quando  $t$  for pequeno, a mudança no fluxo arrastado (e por conseguinte, do campo que o gera) seja pequena. Outras propriedades da derivada de Lie de campos vetoriais sé que sendo  $F_1$  e  $F_2$  difeomorfismos, tem-se que  $F_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [F_*\mathbf{X}, F_*\mathbf{Y}]$ . Com estas informações, é possível afirmar que um difeomorfismo é uma transformação de coordenadas, pois a condição para que dois campos

determinem coordenadas é que seu colchete de Lie seja zero, logo, a transformação das respectivas curvas também resultam em sistema de coordenadas;

### D.1.1 Propriedades de Álgebras de Lie de Grupos de Lie

Nesta seção, o foco está sobretudo na álgebras de Lie associadas a grupos de Lie. Supoe-se que a base de uma álgebra de Lie é um  $K$ -espaço vetorial. As principais definições aqui apresentadas podem ser encontradas também em (DIXMIER, 1996; SATTINGER; WEAVER, 1986).

**Definição D.1.20.** *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial com uma multiplicação  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  tal que: 1)  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  depende linearmente de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ; 2)  $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \equiv 0$ ; 3)  $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] \equiv 0$ , tudo para qualquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$ . O bilinear  $[\cdot, \cdot]$  é conhecido como colchete de Lie.*

Diz-se que uma álgebra de Lie é *abeliana* se para quaisquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$  tem-se que  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \equiv 0$ . Para uma álgebra associativa  $A$ , se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  tal que  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}$ , define-se a álgebra de Lie associada a  $A$ , como já feito anteriormente. Em particular, dado um espaço vetorial  $V$  e  $\text{End}(V)$  a álgebra associativa dos endomorfismos de  $V$ , a álgebra de Lie associada a este espaço é representada por  $\mathfrak{gl}(V)$ .

**Definição D.1.21.** *Dadas duas álgebras de Lie  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ , diz-se que elas são homomórficas se existe uma aplicação linear  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tal que  $\phi([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})]$ .*

**Definição D.1.22** (Álgebra de Lie de um grupo de Lie). *Dado um grupo de Lie  $G$ , define-se a álgebra de Lie associada a este grupo, representada por  $\mathfrak{g} = T_e G$ , como sendo o espaço vetorial tangente no elemento identidade de  $G$ , munido com  $[\cdot, \cdot]$ ;*

Se  $I : G \rightarrow G$  é a aplicação inversão de  $G$ , dada por  $I(g) = g^{-1}$  (que sabemos que é suave), é possível mostrar que  $dI : \mathbf{X}_L \mapsto -\mathbf{X}_R$ , onde  $\mathbf{X}_L, \mathbf{X}_R$  são os campos invariantes à esquerda e a direita correspondentes ao mesmo ponto  $\mathbf{x} \in T_e G$ . Dados  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{g}$ , denota-se por  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  o conjunto de todas as combinações lineares da forma  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Deste modo:

**Definição D.1.23** (Ideais de álgebras de Lie). *Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  um subespaço vetorial, diz-se que  $\mathfrak{h}$  é um ideal se  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ .*

**Definição D.1.24** (Álgebra de Lie Quociente). *Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  um ideal, o espaço vetorial quociente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é também uma álgebra de Lie conhecida como álgebra quociente de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{h}$ .*

Dado um grupo de Lie  $G$  e uma curva suave  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$  em  $G$ , o lift da curva em  $TG$  (vide seção C.6) pode ser decomposto em  $(g(t), \dot{g}(t))$ , e  $dg : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow TG = G \times \mathfrak{g}$  pode também ser separado em:

$$dg : \left(t, \frac{d}{dt}\right) \rightarrow (g(t), \dot{g})$$

, de modo que podemos assumir que  $dg$  representa somente a parte tangente, e  $dg(d/dt) = \dot{g}$ .

**Exemplo:** Para o caso particular do grupo de Lie  $GL(2, \mathbb{R})$  e uma curva  $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ , pode-se escrever então  $d[g] = [dg]$ , de modo que:

$$g = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \quad dg = \begin{bmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{bmatrix}$$

$$dg\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{bmatrix} dx_{11}\left(\frac{d}{dt}\right) & dx_{12}\left(\frac{d}{dt}\right) \\ dx_{21}\left(\frac{d}{dt}\right) & dx_{22}\left(\frac{d}{dt}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} \end{bmatrix},$$

onde  $x_{ij}$  são as funções coordenadas.

**Definição D.1.25** (Produto de álgebras de Lie). *Dadas duas álgebras de Lie  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ , o espaço vetorial  $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$  munido com o colchete de Lie definido por  $[(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)] = ([\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1], [\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2])$  com  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in \mathfrak{g}_1$  e  $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in \mathfrak{g}_2$  é conhecido como álgebra de Lie produto.*

É evidente que  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  são ideais de  $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$  e a intersecção desses espaços é vazia.

**Definição D.1.26** (Derivações). *Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , uma aplicação linear  $D$  neste espaço tal que  $D([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = [D\mathbf{x}, \mathbf{y}] + [\mathbf{x}, D\mathbf{y}]$  é chamada de derivação de  $\mathfrak{g}$  e o conjunto das derivações  $\mathfrak{d}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  (vide seção A.16).*

**Definição D.1.27** (Aplicação Exponencial). *Dado um grupo de Lie  $G$  com a sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , para cada vetor  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  está associado um subgrupo de um parâmetro  $g_{\mathbf{x}}(t)$  que também pode ser representado por  $\exp(t\mathbf{x})$ .*

De fato, para cada  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  está associado um campo vetorial tangente invariante em  $G$  (vide seção C.7) e para cada campo está associado um fluxo que satisfaz a propriedade de grupo, isto é,  $\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s}$ . A curva integral passando pela identidade do grupo é na verdade um grupo de um parâmetro  $g(t+s) = g(t)g(s)$  tal que  $g(0) = e$ .

**Teorema D.1.11.** *A aplicação exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \rightarrow G$  é definida por  $\exp(t\mathbf{x}) = g_{\mathbf{x}}(t)$  para cada  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ . Esta aplicação é um difeomorfismo local e a aplicação derivada  $(d\exp)|_0$  é a própria identidade de  $T_e G$ .*

Se  $\{\mathbf{x}_i\}$  forma uma base para a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , então fica definido um sistema de coordenadas local em  $G$  representado por  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  através da aplicação exponencial. A região de validade desta carta de coordenadas é na região em torno da identidade de  $G$  onde  $\exp$  é um difeomorfismo local.

**Exemplo:** Para um grupo de Lie matricial, um subgrupo de um parâmetro é da forma  $g(t) = e^{Xt}$ , onde a matriz exponencial é dada por:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i,$$

e  $X$  é o elemento da álgebra de Lie que gera o grupo.

**Proposição D.1.3.** *Dados os grupos de Lie  $G, G_1, G_2, G_3$  então:*

1. *Dado  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  um homomorfismo de grupo de Lie, então  $(d\phi)|_e : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  é um homomorfismo das respectivas álgebras de Lie;*
2. *Dados  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  e  $\psi : G_2 \rightarrow G_3$  homomorfismos de grupo de Lie, então  $d(\psi \circ \phi)|_e = (d\psi)|_e \circ (d\phi)|_e$ .*
3. *Se  $\text{Id} : G \rightarrow G$  é a aplicação identidade do grupo de Lie  $G$ , então  $(d\text{Id})|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é a aplicação identidade da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.* vide (SHARPE, 1997). ■

**Definição D.1.28** (Soma direta de álgebras de Lie). *Uma álgebra de Lie é a soma direta de duas outras  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  e é representada por  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  se ela for uma somadireta de espaços vetoriais e o colchete de Lie é tal que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$ .*

**Definição D.1.29** (Álgebra de Lie Solúvel). *Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , vamos definir  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , que é um subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Por indução, vamos definir  $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$ . Se para algum  $n$  finito tem-se  $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ , então a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  recebe o nome de solúvel.*

**Definição D.1.30** (Radical). *Dada uma álgebra de Lie, define-se o radical como sendo o máximo ideal solúvel. Além disso, ele é único e contém todos os outros ideais solúveis.*

**Definição D.1.31** (Álgebras de Lie Simples e Semi-Simples). *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é simples se ela não contém ideais exceto o trivial. Ela é semi-simples se ela não contém nenhum ideal abeliano, exceto o trivial.*

**Teorema D.1.12** (Decomposição de Levi). *Toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é a soma semi-direta do seu radical com uma álgebra de Lie semi-simples.*

Já foi apresentado o conceito de  $G$ -ação contínua em um espaço topológico na seção B.2. É comum representar uma  $G$ -ação por  $\phi(g, p) = gp$  e a aplicação  $\phi_g : M \rightarrow M$  dada por  $\phi_g(p) = \phi(g, p)$  é um difeomorfismo. Se fixarmos um ponto  $p \in M$ , o conjunto de pontos  $\mathcal{O}_p = \{gp | g \in G\}$  é chamado de *órbita* de  $G$  em  $p$ , o que determina uma partição de  $M$  em subvariedades suaves. A dimensão das órbitas são em geral diferentes em cada ponto de  $M$ . Cada subgrupo de um parâmetro de  $G$  determinado por um elemento  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ , que é da forma  $e^{\mathbf{x}t}$ , produz uma ação em  $M$  dada por  $e^{\mathbf{x}t}p$ . Se fixarmos  $\mathbf{x}$  e variarmos  $p \in M$ , obtemos a partição de  $M$  em órbitas  $e^{\mathbf{x}t}p$ . Um campo vetorial tangente é gerado por esta ação tomando-se a derivada temporal em  $t = 0$ , ou seja:

$$\mathbf{X}_M(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{\mathbf{x}t}p),$$

isso então mapeia um campo em  $M$  para cada elemento de  $\mathfrak{g}$ . Se  $M$  fosse o próprio grupo de Lie  $G$  e as ações fossem translações à esquerda ou à direita, recuperaríamos os campo invariantes à esquerda e à direita. Teríamos também  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_M = -[\mathbf{x}_M, \mathbf{y}_M]$ .

**Definição D.1.32** (Representação de um Grupo de Lie). *Dado um espaço vetorial  $V$ , uma representação de um grupo de Lie  $G$  em  $V$  é um homomorfismo  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  em que cada elemento  $g \in G$  é representado como uma transformação linear invertível de  $V$ , que está no grupo de Lie  $\text{Aut}(V)$ .*

Uma representação de  $G$  é uma  $G$ -ação sobre um espaço vetorial, e como se trata de um homomorfismo, então  $\rho_{gh} = \rho_g \rho_h$  e existe uma representação correspondente ao elemento identidade do grupo que é  $\rho_e = \text{Id}_V$ , ou seja, é a identidade do espaço vetorial. Como  $\rho_g \in \text{Aut}(V)$ , então  $\rho_g(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = a\rho_g(v_1) + b\rho_g(v_2)$  (SELIG, 2005).

**Definição D.1.33** (Representação Fiel de um Grupo). *Diz-se que uma representação de  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  é fiel se  $\rho$  for um homomorfismo injetivo.*

A derivada do homomorfismo  $\rho$ , que representamos aqui por  $d\rho_g$  no ponto  $g \in G$  mapeia o espaço tangente  $T_g G$  no espaço tangente  $T_{\rho(g)} \text{Aut}(V)$ . Se restringirmos  $g = e$ , que é o elemento identidade de  $G$ , a aplicação linear  $d\rho_e$  mapeia a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  na álgebra de Lie do grupo de Lie  $\text{Aut}(V)$ .

**Definição D.1.34** (Produto Tensorial de Representações de Grupo). *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais com representações  $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  e  $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ . O produto*

tensorial de duas representações é definido como  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow V \otimes W$  tal que  $\rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \rho_1(\mathbf{v}) \otimes \rho_2(\mathbf{w})$

Se  $L_1$  e  $L_2$  são geradores infinitesimais de  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , então vale que, para qualquer um dos dois,  $L(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (L_1\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes (L_2\mathbf{w})$ .

**Definição D.1.35** (Ação Conjugação). *Dado um grupo de Lie  $G$ , a ação conjugação do grupo nele mesmo é uma  $G$ -ação  $\mathbf{Ad} : G \times G \rightarrow G$  e dada por:*

$$\mathbf{Ad}_g h = L_g R_{g^{-1}} h,$$

que em grupos de Lie matriciais fica da forma  $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ . É evidentemente uma aplicação suave e induz a aplicação  $\mathbf{Ad}_g : G \rightarrow G$  tal que  $\mathbf{Ad}_g(h) = ghg^{-1}$ .

Para o caso de  $g = e$ , tem-se que  $\mathbf{Ad}_e$  é a aplicação identidade  $G$  e, para qualquer  $g \in G$ , tem-se que  $\mathbf{Ad}_g(e) = e$ , o que significa que  $e$  é um ponto fixo da aplicação.

**Definição D.1.36** (Ação/Representação Adjunta de  $G$  em  $\mathfrak{g}$ ). *Dado um grupo de Lie  $G$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , a aplicação derivada de  $\mathbf{Ad}_g$  em  $e$ , isto é,  $(d\mathbf{Ad}_g)|_e$ , é um operador em  $\mathfrak{g}$  da forma  $\mathbf{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Isto é equivalente a definir:*

$$\mathbf{Ad}_g \mathbf{x} = (dL_g)|_{g^{-1}}(dR_{g^{-1}})|_e \mathbf{x}.$$

A ação adjunta  $\mathbf{Ad}_g$  é um isomorfismo de  $\mathfrak{g}$ . Para o caso particular de grupos de Lie matriciais, tem-se  $\mathbf{Ad}_g \mathbf{x} = g\mathbf{x}g^{-1}$ , onde  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ . A aplicação  $\mathbf{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ , que associa a cada  $g \in G$  a transformação linear  $\mathbf{Ad}_g$  é tal que  $\mathbf{Ad}_e$  é a aplicação identidade de  $\mathfrak{g}$ . Deste modo, se  $N \subset G$  é um subgrupo normal, então  $\mathbf{Ad}(N) = N$ .

**Definição D.1.37** (Representação Adjunta de  $\mathfrak{g}$ ). *A ação adjunta  $\mathbf{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  é tal que  $\mathbf{ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é definida por  $\mathbf{ad}_\mathbf{x} = d(\mathbf{Ad})_e(\mathbf{x})$ . Esta aplicação é um homomorfismo de álgebra de Lie. Sua aplicação é  $\mathbf{ad}_\mathbf{x} \mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ .*

Um exemplo de derivação em uma álgebra de Lie é a aplicação  $\mathbf{ad} \mathbf{x} = [\mathbf{x}, \cdot]$ , de modo que  $\mathbf{ad} \mathbf{x}(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ . A aplicação  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ad} \mathbf{x}$  é uma *derivação interna* em  $\mathfrak{g}$ .

**Proposição D.1.4.** *Dado um grupo de Lie  $G$  e a sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , então:*

1.  $\mathbf{Ad}_g[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [\mathbf{Ad}_g \mathbf{x}, \mathbf{Ad}_g \mathbf{y}]$ ;
2.  $\mathbf{ad}_\mathbf{z}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [\mathbf{ad}_\mathbf{z} \mathbf{x}, \mathbf{y}] + [\mathbf{x}, \mathbf{ad}_\mathbf{z} \mathbf{y}]$

onde a última equação é a identidade de Jacobi.

**Definição D.1.38** (Grupos de Lie gerados por Álgebras de Lie). *Pode haver vários grupos de Lie para a mesma álgebra de Lie. Alguns sendo conexos e outros não. A componente conexa principal de um grupo de Lie é a componente conexa que contém a identidade.*

Isso significa que a aplicação exponencial  $\exp(\mathfrak{g})$  não é a forma de se construir um grupo de Lie.

**Lema D.1.1.** *A álgebra de Lie do grupo de Lie  $G \times H$  é  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ .*

**Definição D.1.39** (Soma Semi-direta de álgebras de Lie). *Uma álgebra de Lie é uma soma semi-direta de duas outras  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , representada por  $\mathfrak{g} \oplus_S \mathfrak{h}$ , se todos os elementos podem ser decompostos na forma de soma direta de dois elementos, um de  $\mathfrak{g}$  e outro de  $\mathfrak{h}$ , mas tal que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{g}$ .*

Segundo (SHARPE, 1997), a ação adjunta é uma forma de se comparar translação à direita e à esquerda.

**Proposição D.1.5.** *Os seguintes resultados são verdadeiros:*

1.  $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é um isomorfismo de álgebra de Lie e  $\text{Ad}$  é um homomorfismo de grupo de Lie;
2. Se  $\mathbf{X}$  é um campo vetorial invariante à esquerda em  $G$ ,  $(\text{Ad}_g)_* \mathbf{X}$  também será;

Para prova, consulte (SHARPE, 1997). O segundo item significa que a ação adjunta no campo invariante à esquerda produz outro campo invariante à esquerda (um para cada  $g \in G$ ).

**Definição D.1.40** (Constantes Estruturais). *Se  $\{\mathbf{e}_j\}$  é uma base para a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , então  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \sum_k C_{ij}^k \mathbf{e}_k$ , onde  $C_{ij}^k$  são as chamadas constantes estruturais da álgebra de Lie.*

**Teorema D.1.13.** *Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de um grupo de Lie  $G$  as constantes estruturais satisfazem as seguintes relações:*

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0,$$

$$C_{ij}^k C_{kl}^m + C_{jl}^k C_{ki}^m + C_{li}^k C_{kj}^m = 0,$$

onde vale a notação de Einstein.

*Demonstração.* As expressões podem ser demonstradas usando-se a identidade de Jacobi e a antisimetria do colchete de Lie. ■

**Corolário D.1.2.** *Existe um isomorfismo de álgebra de Lie natural entre  $\mathfrak{g}_L$ ,  $\mathfrak{g}_R$  e  $T_e G$*

*Demonstração.* Pela própria forma de construção dos campos invariantes à esquerda, tem-se uma identificação entre o espaço destes campos vetoriais e o espaço vetorial  $T_e G$ . Pode-se ainda definir o colchete de Lie  $[\cdot, \cdot] : T_e \times T_e \rightarrow T_e$  induzido pelos colchetes de Lie nos espaços de campos uniformes. Deste modo, chega-se ao resultado desejado. ■

**Teorema D.1.14.** *Dado um grupo de Lie  $G$ , o seu fibrado tangente  $TG$  é trivializável, ou seja, pode ser escrito por  $TG = G \times \mathfrak{g}$ .*

**Teorema D.1.15.** *Dado um grupo de Lie  $G$  e (uma) correspondente álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , para cada  $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$  corresponde um subgrupo de um parâmetro.*

*Demonstração.* Cada campo invariante de  $G$  induz um grupo de difeomorfismos de um parâmetro  $\phi_t$  no próprio  $G$ . Em particular, haverá uma curva integral que passa em  $e$  e como  $\phi_{t+s}(e) = \phi_t \phi_s(e)$ , o produto  $hg = \phi_t g = \phi_t \phi_s(e)$  é fechado dentro desta curva, transformando-a em um subgrupo de  $G$ . ■

Todas as álgebras isomórficas têm as mesmas constantes estruturais, como ocorre por exemplo com as álgebras  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathfrak{su}(2)$ . A representação adjunta resulta em  $\text{ad}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = \sum_k C_{ij}^k \mathbf{e}_k$ , o que é equivalente a dizer que a transformação linear  $\text{ad}_{\mathbf{e}_i}$  tem a representação matricial  $[\text{ad}_{\mathbf{e}_i}]_{jk} = [C_{ik}^j]$ . A representação matricial de  $\text{ad}_{\mathbf{x}}$ , onde  $\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i$  é dada por  $[\beta_j^k] = [\sum_i \alpha_i C_{ij}^k]$ . De fato, tem-se que  $\text{ad}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = \sum_k C_{ij}^k \mathbf{e}_k$ , e  $[\text{ad}_{\mathbf{e}_i}]_{jk} = [C_{ik}^j]$ . Para o caso de  $\text{ad}_{\mathbf{x}} \mathbf{e}_j$ , devido à natureza bilinear do colchete de Lie,  $\text{ad}_{\mathbf{x}} \mathbf{e}_j = \sum_i \alpha_i \text{ad}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = \sum_{i,k} \alpha_i C_{ij}^k \mathbf{e}_k$ .

## D.1.2 Grupos e Álgebras de Lie Especiais

Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em (CHIRIKJIAN; KYATKIN, 2000) e (SATTINGER; WEAVER, 1986). Os grupos de Lie de rotação tridimensional  $SO(3)$  e grupo de spin complexo (unitário especial)  $SU(2)$  são de interesse especial para este trabalho. Não é difícil mostrar que este último é homeomórfico à esfera  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  e que, portanto, é simplesmente conexo (vide seção B.1.1). De fato, dado o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , está automaticamente definida a variedade diferenciável  $S^{n-1}$ , que é o conjunto de pontos tal que  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ , onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Essa variedade é sempre simplesmente conexa. O

grupo  $SO(3)$ , por outro lado, tem uma topologia mais complexa, que não é simplesmente conexa. A seguir, apresentam-se alguns resultados relativos a esta topologia.

**Definição D.1.41** (Espaços Projetivos). *O espaço projetivo  $P_n(\mathbb{R})$  é uma variedade diferenciável que pode ser construída a partir de  $S^n$  identificando os pontos diametralmente opostos, ou seja, traçando-se uma reta em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passa pela origem, os pontos que são a intersecção desta reta com  $S^n$  são identificados.*

O espaço  $P_n(\mathbb{R})$  tem uma topologia complicada. De fato, pode-se mostrar que  $P_n(\mathbb{R})$  pode ser recursivamente construído por  $P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup P_{n-1}(\mathbb{R})$ . O espaço mais simples dessa recursão é  $P_1(\mathbb{R})$ , que é homeomórfico a  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , isto é, o eixo real mais o ponto no infinito. Já o espaço projetivo  $P_2(\mathbb{R})$  é homeomórfico a  $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}^2 \cup P_1(\mathbb{R})$ , e assim por diante. De especial interesse é o espaço  $P_3(\mathbb{R})$ , que pode ser construído a partir de  $S^3 = SU(2)$ . O seguinte resultado é importante:

**Lema D.1.2.** *O hemisfério aberto de  $S^n$  (superior ou inferior) é isomórfico à bola aberta  $B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , que por sua vez é delimitada por  $S^{n-1}$ . O equador de  $S^n$  é isomórfico a  $S^{n-1}$ .*

*Demonstração.* De fato, considerando a equação  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$  de  $S^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , que é equivalente a  $x_n = \pm \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)}$ , para  $x_n = 0$  temos um difeomorfismo entre o equador de  $S^n$  e  $S^{n-1}$ . Para  $x_n > 0$  ou  $x_n < 0$  temos um difeomorfismo entre um hemisfério de  $S^n$  e a bola aberta  $B^{n-1}$  delimitada por  $S^{n-1}$ . ■

**Lema D.1.3.** *A topologia da esfera  $B^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é homeomórfica a  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Este resultado pode ser encontrado em livros clássicos de topologia, como por exemplo (??).

**Teorema D.1.16.** *O grupo  $SO(3)$  é homeomórfico a  $\mathbb{R}^3 \cup P_2(\mathbb{R}) = P_3(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Conforme (SATTINGER; WEAVER, 1986), a rotação instantânea de um corpo sempre se dá em torno de um eixo de rotação, que especifica a direção. São necessários dois ângulos para localizar este eixo. Além disso, é necessário mais um ângulo  $\theta$  com valor entre  $[-\pi, \pi]$  para determinar o valor da rotação. Os pontos  $-\pi$  e  $\pi$ , qualquer que seja a direção, equivalem à mesma rotação. Estes pontos então determinam uma casca esférica cujos pontos opostos devem ser identificados, que é  $P_2(\mathbb{R})$ . O interior da esfera é por outro lado, homeomórfico a  $\mathbb{R}^3$  pelo lema anterior. ■

Como  $SO(3)$  é homeomórfico a  $P_3(\mathbb{R})$ , então uma possível parametrização é  $x_1 = \cos \alpha \sin(\beta/2) \sin \theta$ ,  $x_2 = \sin \alpha \sin(\beta/2) \sin \theta$ ,  $x_3 = \cos(\beta/2) \sin \theta$ ,  $x_4 = \cos \theta$ , já que  $P_3(\mathbb{R})$  está mergulhado em  $\mathbb{R}^4$ .

**Corolário D.1.3.** *Por fim, como  $SU(2)$  é homeomórfico a  $S^3$  e  $SO(3)$  é homeomórfico a  $P_3(\mathbb{R})$ , então  $SU(2)$  é uma cobertura dupla universal de  $SO(3)$  (vide seção B.1.1).*

**Exemplo:** [Grupo Linear Geral] Representa-se uma matriz quadrada de dimensão  $n$  com somente o elemento  $ij$  diferente de zero por  $\mathbf{e}_{ij}$  (este elemento será igual a 1). Deste modo, a álgebra de Lie do grupo de Lie  $Gl(n, \mathbb{R})$ , que é  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  terá como base canônica o conjunto de  $n^2$  matrizes  $\{\mathbf{e}_{ij}\}$ .

**Exemplo:** [Rotações de um Corpo Rígido] As rotações de um corpo rígido são descritas pelo grupo de Lie  $SO(3)$ , que tem somente uma componente conexa. Esse grupo é sabidamente duplamente conexo, e possui uma cobertura universal  $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ , onde  $SU(2)$  é simplesmente conexo. A correspondente álgebra de Lie é  $\mathfrak{so}(3)$ , que é tridimensional.  $SO(3)$  é representado matricialmente por matrizes  $3 \times 3$  ortogonais com determinante um. A correspondente álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  é representada pelas matrizes  $3 \times 3$  anti-simétricas e tem dimensão três. Uma escolha comum de base é  $\{\mathbf{R}_1 = \mathbf{e}_{32} - \mathbf{e}_{23}, \mathbf{R}_2 = \mathbf{e}_{13} - \mathbf{e}_{31}, \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_{21} - \mathbf{e}_{12}\}$ . É fácil mostrar que  $[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{R}_k$ , onde  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo totalmente anti-simétrico. Deste modo, as constantes estruturais de  $SO(3)$  são os próprios símbolos completamente anti-simétricos  $\epsilon_{ijk}$ .

**Exemplo:** [Movimento Geral de um Corpo Rígido] Já foi visto que o movimento geral de um corpo rígido é descrito pelo grupo de Lie  $SE(3) = SO(3) \times T(3)$ , que é uma soma semi-direta. O grupo de Lie  $T(3)$  é abeliano e pode ser simplesmente identificado com  $\mathbb{R}^3$ . A sua álgebra de Lie, representada por  $\mathfrak{t}(3)$ , e que é isomórfica a  $\mathbb{R}^3$  é um ideal da álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(3)$ . É fácil mostrar que  $\mathfrak{se}(3)$  não é solúvel, e  $\mathfrak{t}(3)$  é seu radical. Esta última é a soma direta de três álgebras unidimensionais  $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ , que geram as translações nas direções  $x, y$  and  $z$ , respectivamente. A álgebra de Lie dada por  $\mathfrak{se}(3) = \mathfrak{t}(3) \oplus_S \mathfrak{so}(3)$  tem as seguintes relações de comutação:  $[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{R}_k$ ,  $[\mathbf{R}_i, \mathbf{T}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{T}_k$ , and  $[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j] = 0$ , onde  $\mathbf{T}_i$  são os geradores de  $\mathfrak{t}(3)$ . Além da representação principal, como apresentada na seção 2.2, existe uma segunda representação de interesse, que é a adjunta, onde a matriz não é mais  $4 \times 4$  homogênea, mas sim  $6 \times 6$ :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} R & 0 \\ \Gamma R & R \end{bmatrix},$$

onde  $\Gamma$  é a representação em  $\mathfrak{so}(3)$  do vetor  $\gamma$  e  $R$  é a matriz de rotação em  $SO(3)$ . O

correspondente produto é:

$$\Upsilon_1 \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ \Gamma_1 R_1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ \Gamma_2 R_2 & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & 0 \\ (\Gamma_1 + R_1 \Gamma_2 R_1^T) R_1 R_2 & R_1 R_2 \end{bmatrix}.$$

## D.2 Campos Tensoriais com Valores Vetoriais

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em (ABRAHAM; MARSDEN, 1990) e (SHARPE, 1997). Os campos tensoriais estudados até o momento ou eram  $r$ -formas, que quando aplicados em um campo de  $r$ -vetores, resultavam em um número, ou o contrário, ou seja, sempre forneciam um número real como resultado. Entretanto, em alguns casos é interessante haja uma  $r$ -forma que, quando aplicada a um  $r$ -vetor, forneça um outro vetor (ou elemento de um espaço vetorial). Seja o espaço vetorial das aplicações multilineares com valores vetoriais  $\mathcal{L}(W, \dots, W, W^*, \dots, W^*; V)$  de modo que o valor final é sempre no espaço vetorial  $V$ . Dado que  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$  é uma base do espaço vetorial  $V$ , é possível tratar uma aplicação  $\ell \in \mathcal{L}(W, \dots, W, W^*, \dots, W^*; V)$  como sendo um conjunto de  $m$  aplicações  $\ell^a \in \mathcal{L}(W, \dots, W, W^*, \dots, W^*; \mathbb{R})$ , escrita por  $\ell = \ell^a \mathbf{e}_a$ .

Dada a universalidade do produto tensorial dentre as aplicações multilineares (vide seção A.14.5) e uma variedade diferenciável  $M$ , é possível definir:

**Definição D.2.1** (Campos Tensoriais com Valores Vetoriais). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  e o espaço tensorial  $T_p M \otimes \dots \otimes T_p M \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M \otimes V$ , é possível associar a cada ponto  $p \in M$  um tensor deste tipo, de modo que se cria um campo tensorial com valores vetoriais.*

Dada uma carta  $(U, \psi)$  sobre a variedade diferenciável  $M$ , representada pelas coordenadas  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , induz-se, como já se viu, em cada espaço tangente, a base  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ . Pode-se ainda pensar que a carta de coordenadas induz a definição de  $n$  campos vetoriais, conhecidos como campos coordenados. Da mesma forma, a carta induz uma base  $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$  (ou campo) de 1-formas. Deste modo, um campo tensorial com valores vetoriais pode ser expresso, em coordenadas, por:

$$\ell = \ell^a \mathbf{e}_a = (\ell_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{j_1, j_2, \dots, j_r} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_r}} \otimes dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{i_s})^a \mathbf{e}_a.$$

Outra forma de fazer esta definição é, considerando um espaço vetorial arbitrário  $U$ , tem-se definida a álgebra exterior  $T(U)$ . O produto tensorial  $T^*(U) \otimes V$  é então o espaço dos tensores com valores em  $V$ . Dada uma variedade diferenciável  $M$ , para cada ponto  $p \in M$  tem-se então  $T(T_p^*M) \otimes V$ , de modo que fica definido um fibrado tensorial cujas seções suaves são campos tensoriais com este tipo de tensor. Estas seções pertencem a um módulo sobre um anel  $\Gamma(\Lambda^r(M) \otimes V)$  (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a).

**Definição D.2.2** (Produto Exterior). *O produto exterior de uma  $p$ -forma  $\mathbf{s}_1$  com valores em  $V_1$  e uma  $r$ -forma com valores em  $V_2$   $\mathbf{s}_2$  é uma  $p+r$ -forma com valores em  $V_1 \otimes V_2$  dada por:*

$$(\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+r}) = \sum (-1)^\sigma \mathbf{s}_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(p)}) \otimes \mathbf{s}_2(\mathbf{v}_{\sigma(p+1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(p+r)}).$$

O módulo  $\Gamma(\Lambda^r(M) \otimes V)$  munido com este produto exterior se torna então uma álgebra associativa graduada.

**Definição D.2.3** (Derivada exterior). *A derivada exterior de uma  $p$ -forma com valores em  $V$  é uma  $(p+1)$ -forma com valores em  $V$  dada por*

$$ds = ds^i \otimes \mathbf{e}_i,$$

onde  $ds^i$  são  $(p+1)$ -formas com valores reais. Esta definição não depende, evidentemente, da base escolhida para  $V$ .

De fato, dada uma  $r$ -forma com valores vetoriais em  $V$  chamada  $s$  e uma base para o espaço vetorial dada por  $\{e_a\}$  de modo que  $s = s^a e_a$ , a derivada exterior é dada por  $ds = (ds^a)e_a$ , que é uma  $(r-1)$ -forma com valores em  $V$ .

O exemplo mais imediato da uma álgebra graduada diferencial é o espaço vetorial  $\Lambda(M)$  das formas diferenciais em  $M$ , como será apresentado agora.

**Definição D.2.4** (Álgebra Exterior). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  e a álgebra graduada das formas diferenciais com valores em  $V$  representada  $\Lambda(M) \otimes V$ . Se esta for dotada da derivada exterior, que é um operador diferencial de grau 1, tem-se a chamada álgebra exterior com valores em  $V$  de  $M$ .*

Um dos resultados mais importantes relacionados a álgebras exteriores é o seguinte.

**Teorema D.2.1.** *Dadas duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  e uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ , existe um homomorfismo de álgebra entre  $\Lambda(M) \otimes V$  e  $\Lambda(N) \otimes V$  induzido por  $f$  e dado por  $f^*$ , isto é, o pull-back de  $f$ .*

A demonstração está em (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982). Dada uma base  $\{\mathbf{e}_i\}$  em  $V$ , é possível se fazer uma expansão, de modo que se  $\dim V = m$ , então associada a cada  $r$ -forma com valores em  $V$ , tem-se  $m$   $r$ -formas com valores reais. Formalmente, tem-se que  $\mathbf{s} = s^i \otimes \mathbf{e}_i$ , onde  $s^i$  são  $r$ -formas em  $M$ .

### D.2.1 Espaço $V$ com estrutura de álgebra de Lie

Quando  $V$  é dotado com uma estrutura de álgebra de Lie, ou seja,  $V = \mathfrak{g}$ , está definido o *colchete de Lie*  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$  entre pares de elementos. Devido à estrutura de anti-simetria que este já possui, pode-se definir o seguinte:

**Definição D.2.5** (Colchete de Lie entre  $V$ -formas). *Dadas uma  $p$ -forma  $\mathbf{s}_1$  e uma  $r$ -forma  $\mathbf{s}_2$ , ambas com valores em  $V$ , o colchete de Lie entre estas formas é uma  $p+r$ -forma com valores em  $V$  dada por:*

$$[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = (s_1^i \wedge s_2^j) \otimes [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j],$$

e as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Se  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  são  $p$ -formas, então  $[\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3] = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3] + [\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3]$ ;
2. Se  $\mathbf{s}_1$  é uma  $p$ -forma e  $\mathbf{s}_2$  é uma  $r$ -forma, então  $[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = (-1)^{(rp+1)}[\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1]$ ;
3. If  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  are respectively  $r, p, q$ -forms, the Jacobi identity is given by  $(-1)^{rp}[\mathbf{s}_1, [\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3]] + (-1)^{pq}[\mathbf{s}_2, [\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_1]] + (-1)^{qr}[\mathbf{s}_3, [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]] = 0$ ;
4. A derivada exterior do colchete de Lie é dada por  $d[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = [d\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] + (-1)^p[\mathbf{s}_1, d\mathbf{s}_2]$ .

**Exemplo:** [Espaço Euclidiano] Seja  $\mathbb{R}^n$  o espaço euclidiano de dimensão  $n$ . Qualquer ponto  $p$  pode ser representado então por um vetor posição  $[x^1 x^2 \cdots x^n]^T$ . Seja também a base natural das 1-formas  $\{dx^i\}$  e a base natural dos campos vetoriais  $\{\partial/\partial x^i\}$ , de modo que qualquer 1-forma com valores vetoriais será representada por  $\Omega = \Omega_i dx^i$ , onde  $\Omega_i = \Omega_i^j \partial/\partial x^j$  é uma família de campos vetoriais. O campo vetorial  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$  cuja derivada é:

$$d\mathbf{P} = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

tem especial importância, pois esta derivada é conhecida como *aplicação identidade*. Esta recebe este nome pois:

$$d\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = d\mathbf{P}(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = dx^i (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^i} = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \mathbf{Y}.$$

Vê-se claramente que esta definição depende de uma particular carta de coordenadas. Ela funciona bem para um espaço euclidiano, entretanto, para uma variedade, ela fica diferente em cada carta. Para variedades diferenciáveis  $M$  em geral, uma aplicação com tais propriedades terá que ser fixada, de forma invariante, o que é feito através de uma *conexão*, como a de Cartan ou a de Koszul, que é também essencial para se definir geometria. Dado um campo vetorial  $\mathbf{X}$  em  $\mathbb{R}^n$ , a sua derivada exterior  $d\mathbf{X}$  sempre será tal que  $d d\mathbf{X} = 0$ .

Nesta seção, generalizam-se os conceitos básicos de cálculo apresentados até agora, para se obter o chamado *cálculo abeliano*.

Dado um campo vetorial  $\mathbf{X} : M \rightarrow TM$ , sua aplicação tangente é da forma  $T\mathbf{X} : TM \rightarrow TTM$ . Dado que não haja obstrução, esta aplicação pode ser colocada na forma  $(\mathbf{X}(p), d\mathbf{X})$ , onde esta última é um tensor tipo  $(1, 1)$ . Por analogia com as derivadas de funções reais, deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. Ao ser integrada ao longo de uma curva  $\gamma \in M$ , o resultado (que é um vetor) deve ser igual para qualquer caminho com os mesmos pontos extremos. Algo deve acontecer como:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 = \int_{\gamma} d\mathbf{X}.$$

2. Uma folheação, onde cada folha corresponde a um mesmo vetor, deve ser formada em  $M$ , o que caracteriza o campo.
3. A integração ao longo da curva é uma soma de Riemann de *vetores infinitesimais* de modo a associar a cada curva um vetor.

A figura (28) representa tudo o que foi descrito.

Deve haver, por outro lado, aplicações  $\Omega : M \rightarrow (TM)_1^1$  que não satisfazem estas propriedades, isto é, cujas integrais

$$d\mathbf{J} = \int_{\gamma} \Omega,$$

dependem do caminho. A condição a ser satisfeita por  $\Omega$  deve ser semelhante ao do caso de funções reais, isto é, deve ser *fechada*, condição que é automaticamente satisfeita por  $d\mathbf{X}$ .

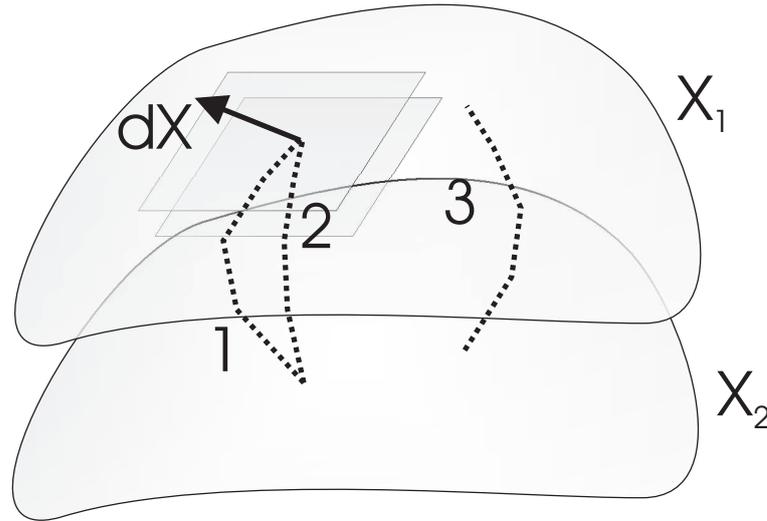


Figura 28: Exemplo de Derivada Exterior de Um Campo

## D.3 Geometria Riemanniana e Conexão de Koszul

Até agora, neste apêndice, não há como medir comprimentos de vetores, comprimentos de curvas, ângulos entre curvas, áreas e volumes em variedades diferenciáveis. Para tal, é necessário equipá-la com uma estrutura que permita que vetores tangentes em pontos diferentes possam ser comparados. A derivada de Lie (vide seção C.9) não faz esse papel. São necessárias duas estruturas adicionais em uma variedade  $M$  conhecidas como *conexão* e *tensor métrico*. Estas duas estruturas serão introduzidas a partir de agora nas seções seguintes. Mais detalhes podem ser encontrados por exemplo em (PETERSEN, 1998), (CARMO, 1988) e (CHOQUET-BRUHAT; DEWITT-MORETTE; DILLARD-BLEICK, 1982).

### D.3.1 Paralelismo

**Definição D.3.1** (Transporte Paralelo). *Dada uma curva  $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , um transporte paralelo é uma aplicação suave  $b_\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  definida ao longo da curva e que depende dela.*

Ou seja, para cada ponto da curva (parametrizado por  $t$ ), há um isomorfismo  $b_\gamma(t) : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  que transforma os vetores tangentes ao ponto inicial nos vetores tangentes ao ponto  $\gamma(t)$ . Deste modo, pode-se definir:

**Definição D.3.2** (Campo Paralelo). *Dada uma curva  $\gamma$ , com  $p = \gamma(0)$ , e um transporte paralelo  $b_\gamma$ , para qualquer vetor  $\mathbf{v}_p$ , pode-se definir um campo paralelo  $\mathbf{V} : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  ao longo de  $\gamma$  que é dado por  $b_{\gamma(t)}\mathbf{v}_p$  e que é suave.*

Isto significa que para uma dada curva  $\gamma$  e cada vetor  $\mathbf{v}_p$ , para cada  $b_\gamma$  diferente, tem-se um campo paralelo diferente que é *paralelo* a  $\mathbf{v}_p$  no ponto inicial da curva. Em outras palavras, dado  $b_\gamma$ , um campo paralelo pode ser construído somente a partir do vetor  $\mathbf{v}_p$ . É importante enfatizar que não são iguais, mas sim paralelos, que é uma noção sendo definida aqui. O  $b_\gamma$  definido acima é de fato uma atribuição de conexão entre dois pontos ao longo de uma curva, pois se  $p = \gamma(0)$  e  $q = \gamma(t)$ , pode-se definir  $A_{p\gamma q} = b_{\gamma(t)} b_{\gamma(0)}^{-1}$ .

### D.3.2 Derivada Covariante de uma Curva

Pode-se caracterizar um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  como tendo uma certa *derivada* nula ao longo desta curva. Esta derivada é:

**Definição D.3.3** (Derivada Covariante ao Longo de uma Curva). *Dada uma variedade  $M$  e uma curva  $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , define-se derivada covariante ao longo da curva  $\gamma$ , que é representada por  $D/dt$ , como sendo a derivada de campos tangentes definidos ao longo de  $\gamma$  tal que:*

- $\frac{D}{dt}(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \frac{D}{dt}(\mathbf{V}) + \frac{D}{dt}(\mathbf{W});$
- $\frac{D}{dt}(f\mathbf{V}) = \frac{df}{dt}\mathbf{V} + f\frac{D\mathbf{V}}{dt};$

onde  $\mathbf{V}, \mathbf{W}$  são campos tangentes ao longo de  $\gamma$ .

Pode-se então redefinir paralelismo a partir desta nova derivada:

**Definição D.3.4** (Segunda Definição de Paralelismo). *Dado um campo vetorial  $\mathbf{V}$  ao longo de uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , este é chamado de paralelo quando  $\frac{D\mathbf{V}}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .*

Não é difícil concluir que dados dois campos paralelos sobre uma mesma curva, quando somados, devem resultar também num campo paralelo, por razões óbvias. Se o campo paralelo  $\mathbf{V}$  for multiplicado ponto-a-ponto por uma função  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , o campo resultante deve variar somente por causa de  $f$ . A derivada  $(D\mathbf{V}/dt)_p$ , isto é, a derivada covariante do campo  $\mathbf{V}$  no ponto  $p = \gamma(t)$  da curva, pode ser pensada como uma derivada direcional de  $\mathbf{V}$  em relação ao vetor  $\dot{\gamma}(t)$ , que é o vetor velocidade da curva no ponto  $p$ . De fato, ela vai depender somente do vetor velocidade de  $\gamma$  no ponto  $p$ , como será visto mais adiante. O próximo passo é definir a derivada covariante de um campo vetorial tangente definido em uma região de  $M$ . A melhor forma de se fazer isso é definir o operador  $\nabla$  e mostrar que a partir disto se obtém as aplicações  $b_\gamma$  e as derivadas  $D/dt$ .

### D.3.3 Conexão de Koszul

Dada uma variedade diferenciável  $M$  e um campo vetorial tangente  $\mathbf{V} : U \subset M \rightarrow TM$ , a derivada covariante de  $\mathbf{V}$  na direção  $\mathbf{v}_p$ , que representaremos por  $\nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{V}$ , deve depender de  $\mathbf{V}$  numa vizinhança de  $p$ , mas somente do vetor  $\mathbf{v}_p$  no ponto  $p$ . Esta propriedade é partilhada com a derivada covariante ao longo de uma curva. Além disto, ela deve se reduzir à derivada covariante ao longo de uma curva tal que  $D/dt = \nabla_{\dot{\gamma}}$ . A seguinte definição, retirada de (SPIVAK, 2005), é a definição mais clara do operador  $\nabla$  encontrada por este autor.

**Definição D.3.5** (Conexão de Koszul). *Dada uma variedade diferenciável  $M$ , uma conexão é um operador:*

$$\nabla : TM \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

que para cada ponto  $p \in M$ , cada vetor  $\mathbf{v}_p \in T_p M$  e cada campo  $\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(M)$  associa um outro vetor  $\nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{Y} \in T_p M$  tal que:

- $\nabla_{\mathbf{v}_p} (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{Z}$ ;
- $\nabla_{\mathbf{v}_p + \bar{\mathbf{v}}_p} (\mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{Y} + \nabla_{\bar{\mathbf{v}}_p} \mathbf{Y}$
- $\nabla_{a\mathbf{v}_p} \mathbf{Y} = a \nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{Y}$ , onde  $a \in \mathbb{R}$
- $\nabla_{\mathbf{v}_p} (f\mathbf{Y}) = (\mathbf{v}f)_p \mathbf{Y} + f(p) \nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{Y}$ ;

e, além disso, se  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  forem campos suaves, então  $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$  também o será.

A conexão afim então possui as mesmas propriedades que a derivada covariante ao longo de uma curva, ou seja, trata-se de uma derivada direcional, que fornece a taxa de variação de um campo  $\mathbf{Y}$  ao longo de uma direção  $\mathbf{X}_p$ , que é um vetor em um ponto. Uma outra definição, equivalente, é também muito encontrada na literatura, que é:

**Definição D.3.6** (Conexão Afim). *Dada uma variedade diferenciável  $M$ , uma conexão é uma operação:*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

ou seja, associa a um par de campos vetoriais tangentes um outro campo vetorial tangente e satisfaz as seguintes propriedades:

- $\nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}$ ;

- $\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ ;
- $\nabla_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$ . (*tensorial em  $\mathbf{X}$* )
- $\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ ; (*tensorial em  $\mathbf{X}$* )

É possível mostrar que as duas últimas propriedades fazem com que  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  seja uma aplicação que a cada  $p \in M$  associa um vetor  $\nabla_{\mathbf{X}_p}\mathbf{Y}$ . A seguir, mostra-se que estas definições equivalentes de conexão implicam na definição de derivada covariante ao longo de uma curva:

**Proposição D.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão de Koszul  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa um campo vetorial  $\mathbf{V}$  ao longo de uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{D\mathbf{V}}{dt}$  ao longo de  $\gamma$ , denominada derivada covariante de  $\mathbf{V}$  ao longo de  $\gamma$ , tal que:*

- $\frac{D}{dt}(\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \frac{D}{dt}(\mathbf{V}) + \frac{D}{dt}(\mathbf{W})$ ;
- $\frac{D}{dt}(f\mathbf{V}) = \frac{df}{dt}\mathbf{V} + f\frac{D\mathbf{V}}{dt}$ ;
- *Se  $\mathbf{V}$  é induzido por um campo de vetores  $\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(M)$ , isto é,  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{Y}(\gamma(t))$ , então  $\frac{D\mathbf{V}}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}\mathbf{Y}$ .*

A demonstração pode ser encontrada em (SPIVAK, 2005). Deste modo, a imposição de uma conexão  $\nabla$  implica na existência de uma derivada covariante ao longo de qualquer curva, o que implica na existência de paralelismo e das aplicações  $b_\gamma = A_{p\gamma q}$ . Deste modo, ao se escolher um  $\nabla$  para uma variedade  $M$ , imediatamente ficam definidas as aplicações  $A_{p\gamma q}$ .

**Definição D.3.7** (Conexão Simétrica). *Uma conexão Koszul  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica quando*

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \text{ para todo } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(M).$$

### D.3.4 1-Formas de Conexão

Como foi dito, a conexão de Koszul  $\nabla$  não é única para uma variedade  $M$ . De fato, pode ser expressa através de 1-formas diferenciais, conhecidas como 1-*formas de conexão*, como apresentado na seção 1.2. A menos de algumas relações que estas 1-formas devem satisfazer, elas são arbitrárias (vide seção C.13). Ver-se-á, mais adiante, que esta permite

outra forma de definição de conexão, que é a base da conexão de Cartan usada neste trabalho.

**Definição D.3.8** (Formas de Conexão). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  e uma conexão afim  $\nabla$ , seja  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$  e uma carta local  $(U, x^1, \dots, x^n)$  de  $M$ . Defina-se, na carta local, as 1-formas de conexão  $\omega_{ij}$ , em  $M$ , como sendo as 1-formas tais que:*

$$\nabla_{\mathbf{X}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \omega_{ij}(\mathbf{X})\frac{\partial}{\partial x^j},$$

para qualquer  $\mathbf{X}$ . Para o caso de  $M$  ter dimensão finita  $n$  e  $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x^k}$ , tem-se que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \Gamma_{ki}^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

onde  $\Gamma_{ki}^j$  é o *Símbolo de Christoffel de segundo tipo*.

As formas de conexão também devem satisfazer certas restrições que serão apresentadas mais adiante (equações estruturais). De fato, estas restrições são a base da última e mais complexa formulação dos conceitos geométricos. Pode-se agora definir a derivada covariante de um campo vetorial em relação a outro. Trata-se de calcular como varia um campo  $\mathbf{Y}$  ao longo das curvas integrais de  $\mathbf{X}$ , porém respeitando a ideia de paralelismo definida acima.

**Teorema D.3.1.** *A derivada covariante, expressa em coordenadas locais, de um campo vetorial em relação a outro (na base de campos coordenados) é:*

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i\left(\frac{\partial Y^l}{\partial x^i} + Y^j\Gamma_{ij}^l\right)\frac{\partial}{\partial x^l}. \quad (\text{D.1})$$

*Demonstração.* Expressando-se os campos em coordenadas, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla_{(X^i\frac{\partial}{\partial x^i})}(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}) &= (X^i\frac{\partial}{\partial x^i}Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\nabla_{(X^i\frac{\partial}{\partial x^i})}\frac{\partial}{\partial x^j} = \\ &= (X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^jX^i\Gamma_{ij}^l)\frac{\partial}{\partial x^l} = X^i\left(\frac{\partial Y^l}{\partial x^i} + Y^j\Gamma_{ij}^l\right)\frac{\partial}{\partial x^l}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

■

Nota-se que na formulação em coordenadas, não aparecem derivadas das componentes do campo  $\mathbf{X}$ , já que, como foi dito anteriormente, a conexão de Koszul (e a derivada covariante baseada nela) dependem somente do valor do vetor no ponto. Para o caso de  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}$ , a fórmula em coordenadas é:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = X^j \left\{ X^k \Gamma_{jk}^i + \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

o que significa que, a princípio, um campo pode variar ao longo de suas curvas integrais. Isso é mais uma diferença em relação à derivada de Lie, pois  $[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \equiv 0$ .

### D.3.5 Derivada Covariante de um Tensor

Qualquer campo tensorial possui derivada covariante.

**Definição D.3.9** (Derivada Covariante). *Dada uma variedade  $M$  e uma conexão  $\nabla$ , define-se a derivada covariante de um campo  $\mathbf{Y}$  como sendo um campo tensorial  $(1, 1)$  (vide seção C.20) dado por:*

$$\nabla\mathbf{Y} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M).$$

De fato, num ponto  $p \in M$ ,  $(\nabla\mathbf{Y})_p$  associa a cada vetor tangente  $\mathbf{v}_p$  um vetor  $\nabla_{\mathbf{v}_p}\mathbf{Y}$ , que é a variação do campo naquele ponto naquela direção. Dada uma variedade  $M$  e uma carta local, a derivada covariante de um campo vetorial  $\mathbf{Y}$  é o campo tensorial  $(1, 1)$  dado localmente por:

$$\nabla\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes (dY^j + Y^i \omega_{ij}),$$

onde  $d$  é a derivação exterior e  $\omega_{ij}$  são as coordenadas da forma de conexão. Suas coordenadas na base natural são:

$$Y_{,j}^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + Y^k \Gamma_{kj}^i.$$

### D.3.6 Derivada Covariante versus Derivada de Lie

A seguir, comparam-se as propriedades da derivada covariante e da derivada de Lie.

- Se  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = 0$ , significa que a taxa de variação de  $\mathbf{Y}$  ao longo de uma curva integral de  $\mathbf{X}$  é nula, isto é, o campo  $\mathbf{Y}$  é paralelo ao longo dela. Um campo então pode ser paralelo em uma conexão, mas não ser em outra. Já  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$  não ocorre para todos os campos  $\mathbf{Y}$ , mas somente para alguns;
- A derivada covariante  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  mede a taxa de variação do campo  $\mathbf{Y}$  nas curvas integrais de  $\mathbf{X}$ . Por causa da tensorialidade, essa medida só leva em conta a curva integral (e não suas curvas vizinhas). A derivada de Lie  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ , por outro lado,

mede o quanto as curvas integrais de  $\mathbf{Y}$  deixam de ser mapeadas em outras curvas integrais deste mesmo campo;

- A principal diferença entre derivada covariante e derivada de Lie está no fato desta última estar definida para dois campos, isto é,  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ , enquanto que a primeira está definida para um campo e um vetor, isto é,  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}$ . Por outro lado, a generalização para derivada covariante de um campo em relação ao outro é imediata.

### D.3.7 Horizontalidade

Foi visto na seção C.6 o que são as curvas verticais e as curvas transversais em um fibrado tangente. Se o fibrado tangente  $TM$  é trivializável, para cada ponto de  $\mathbf{v}_p \in TM$  está definido canonicamente o chamado subespaço horizontal  $H_{\mathbf{v}_p}$ , que é um subespaço de dimensão  $n$  de  $T_{\mathbf{v}_p}TM$  para um dado ponto  $\mathbf{v}_p \in TM$ . Entretanto, para  $TM$  em geral (ou seja, não trivializável), isso não acontece. O que se pretende apresentar nesta seção é o fato de que a definição de uma conexão de Koszul  $\nabla$  em uma variedade diferenciável implica na definição de uma distribuição suave em  $TM$ , que é conhecida como *distribuição horizontal* (vide seção C.16). Como toda distribuição, ela é independente de coordenadas.

**Teorema D.3.2.** *Dada uma variedade  $M$  e uma conexão  $\nabla$ , está associado unicamente uma distribuição horizontal suave  $H$  ao espaço tangente  $TM$ , que num ponto  $\mathbf{v}_p$  é representado por  $H_{\mathbf{v}_p}$ . De fato, pode-se escrever que  $T_{\mathbf{v}_p}TM = H_{\mathbf{v}_p} \oplus V_{\mathbf{v}_p}$ , onde  $V_{\mathbf{v}_p}$  é a distribuição vertical canonicamente definida no fibrado tangente.*

Um campo paralelo ao longo de uma curva  $\gamma$  nunca tem variação na direção vertical. A distribuição horizontal é a forma mais geral de se definir uma conexão, e é facilmente generalizada para outros fibrados (além do tangente).

## D.4 Tensor Métrico e Conexão Compatível

O paralelismo, principal propriedade que a conexão provê, ainda não é suficiente para se medir comprimentos e ângulos em uma variedade diferenciável  $M$ . Entretanto, já foi visto na seção A.8 que para um espaço vetorial  $V$ , um produto interno define uma métrica em tal espaço, e que suas componentes são representadas por  $g_{ij}$ . Isto permitia se atribuir comprimentos a vetores de  $V$ , e também ângulos entre dois vetores (inclusive se definir o conceito de ortogonalidade). Na seção B.1.2, definiu-se métrica também para conjuntos mais gerais como uma forma de se medir distâncias. Para uma variedade diferenciável  $M$ ,

veremos que existe uma forma de se juntar as duas noções, ou seja, medir comprimentos de vetores tangente, ângulos entre eles e também comprimentos de curvas. Tal generalização é obtida através do conceito de:

**Definição D.4.1** (Tensor Métrico). *Um tensor métrico ou métrica Riemanniana sobre uma variedade  $M$  é um campo tensorial suave puramente covariante de grau 2, representado por  $\mathbf{g}$ , tal que  $\mathbf{g}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  e que é simétrico e definido-positivo (vide seção C.20).*

Deste modo, o tensor métrico atribui a cada espaço tangente  $T_p M$  onde  $p \in M$ , um produto interno de um espaço vetorial. Este produto interno não precisa ser o mesmo para cada  $p$ , desde que varie suavemente entre os pontos. Expressando-se  $\mathbf{g}$  na base de campos coordenados, tem-se:

$$\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \text{ onde } g_{ij} = \mathbf{g} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

**Definição D.4.2** (Matriz Métrica). *Pode-se colocar as componentes  $g_{ij}$  ordenadas numa matriz  $G$ , conhecida como matriz métrica, que é diferente para cada carta de coordenadas em que  $\mathbf{g}$  é expresso.*

A matriz métrica é uma matriz simétrica e definida-positiva, e frequentemente é representada na forma  $[g_{ij}]$ . Fica definida também a matriz métrica inversa, importante em várias outras definições, como sendo o campo tensorial  $(2, 0)$  tal que em cada carta de coordenadas fica na forma  $[g^{ij}]$ , que é o inverso de  $[g_{ij}]$ , ou seja, satisfaz a relação  $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$ .

**Corolário D.4.1.** *O tensor métrico tem suas coordenadas em diferentes bases se relacionado por:*

$$g'_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j}. \quad (\text{D.3})$$

Não basta, entretanto, somente o tensor métrico para se definir comprimento e ângulos entre vetores. É preciso que dados dois campos vetoriais paralelos  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  ao longo de uma curva  $\gamma$  formem sempre o mesmo ângulo em todos os pontos. É necessário então se compatibilizar a conexão  $\nabla$  (que está ligada ao paralelismo) com o tensor métrico  $\mathbf{g}$ . Isso é feito da seguinte forma:

**Definição D.4.3** (Compatibilidade). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão de Koszul  $\nabla$  e uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $\mathbf{g}$ , quando para toda curva diferenciável  $\gamma$  e quaisquer campos paralelos  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  ao longo de  $\gamma$ , for verdade que  $\mathbf{g}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \text{constante}$ .*

**Proposição D.4.1.** *Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é compatível com a métrica se e só se para todo par  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  de campos vetoriais suaves ao longo da curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  tem-se:*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mathbf{g}\left(\frac{D\mathbf{V}_1}{dt}, \mathbf{V}_2\right) + \mathbf{g}\left(\mathbf{V}_1, \frac{D\mathbf{V}_2}{dt}\right), \text{ com } t \in I.$$

Em termos de campos vetoriais gerais e suas curvas integrais, tem-se que esse mesmo resultado pode ser expresso por:

**Corolário D.4.2.** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é compatível com a métrica se e só se:*

$$\mathbf{Xg}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}), \text{ com } \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X}(M).$$

**Definição D.4.4** (Variedade Riemanniana). *Uma variedade diferenciável  $M$  dotada com um tensor métrico  $\mathbf{g}$  e uma conexão de Koszul  $\nabla$  compatível é chamada de variedade riemanniana.*

O teorema fundamental sobre conexões é:

**Teorema D.4.1** (Levi-Civita). *Dada uma variedade riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

- $\nabla$  é simétrica;
- $\nabla$  é compatível com a métrica riemanniana.

Tal conexão é chamada de *Conexão de Levi-Civita*, que é afim e compatível com a métrica.

A prova está em (CARMO, 1994).

**Teorema D.4.2.** *Dada uma variedade Riemanniana com tensor métrico  $g$  e conexão compatível  $\nabla$ , então:*

$$2g(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + (d\theta_{\mathbf{X}})(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}),$$

onde  $\theta_{\mathbf{X}} = g(\mathbf{X}, \cdot)$  é a 1-forma dual a  $\mathbf{X}$  segundo à métrica.

**Definição D.4.5** (Campo Vetorial de Killing). *Dado um campo vetorial  $\mathbf{K}$  em uma variedade Riemanniana  $M$  com tensor métrico  $\mathbf{g}$ , diz-se que  $\mathbf{K}$  é um campo vetorial de Killing se:*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}}\mathbf{g} = 0,$$

o que significa fazer que o fluxo  $\phi_t$  do campo vetorial  $\mathbf{K}$  arrasta o tensor métrico.

**Teorema D.4.3.** *Dada uma variedade  $M$ , uma métrica  $\mathbf{g}$  e uma conexão  $\nabla$  compatível com a métrica, os símbolos de Christoffel podem ser calculados a partir da métrica, numa determinada carta de coordenadas, da seguinte forma:*

$$\Gamma_{ki}^j = \sum_h \frac{1}{2} g^{hj} \left( \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^h} \right). \quad (\text{D.4})$$

Com o conceito de métrica numa variedade Riemanniana pode-se definir:

**Definição D.4.6** (Comprimento de curva). *Seja  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana,  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva suave sobre  $M$  e  $\dot{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  o campo de velocidade da curva. O comprimento da curva entre os pontos  $a$  e  $b$  é definido por:*

$$l_a^b(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\mathbf{g}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt. \quad (\text{D.5})$$

**Teorema D.4.4.** *Toda variedade diferenciável com base enumerável possui uma métrica riemanniana.*

Para a prova, veja (CARMO, 1994).

**Definição D.4.7.** *Dados dois vetores  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \in T_p M$ , onde  $(M, \mathbf{g})$  é uma variedade Riemanniana, define-se o ângulo entre estes vetores como sendo dado por:*

$$\angle(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p) = \arccos \left( \frac{\mathbf{g}(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p)}{\sqrt{\mathbf{g}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p)} \sqrt{\mathbf{g}(\mathbf{w}_p, \mathbf{w}_p)}} \right).$$

De forma similar, é possível definir ângulo entre duas curvas num ponto  $p \in M$ , bastando medir o ângulo entre vetores tangentes às curvas naquele ponto. Em uma variedade Riemanniana  $(M, \mathbf{g})$  é possível ainda generalizar os campos típicos do cálculo vetorial. Para tanto, facilita a definição de alguns operadores especiais que dependem do tensor métrico:

**Definição D.4.8** (Operadores de Diminuição e Aumento de Índices). *Seja uma variedade Riemanniana  $(M, \mathbf{g})$  e uma carta local  $(U, \psi = (x^1, \dots, x^n))$ . Os isomorfismos:*

$$(\cdot)^b : \mathcal{X}(M) \rightarrow \Lambda^1(M) \text{ dado localmente por } X^j \mapsto \alpha_i = g_{ij} X^j,$$

e a sua inversa:

$$(\cdot)^\sharp : \Lambda^1(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \text{ dado localmente por } \alpha_j \mapsto X^i = g^{ij} \alpha_j,$$

são chamados, respectivamente, de operador de diminuição e aumento de índice.

O primeiro isomorfismo transforma campos tangentes (contravariantes) em 1-formas (covariantes), e o segundo faz o contrário. Isto então faz uma ligação entre campos tangentes e 1-formas diferenciais com a presença de uma métrica. Estes operadores podem ser aplicados em tensores para produzir outros novos. Por exemplo, um tensor tipo  $(0, 2)$  com coordenadas  $t_{ij}$  seria transformado em um tipo  $(1, 1)$  dado por  $g^{ik}t_{kj}$  com a aplicação do primeiro deles.

**Definição D.4.9** (Operador Estrela de Hodge). *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\{\mathbf{e}_i\}$  uma base para este espaço. Seja também  $\pi$  uma permutação de ordem  $p$  tal que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  e  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(n)$ . O operador  $*$  :  $\Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^{n-p}(V)$  que é definido por:*

$$* : \mathbf{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\sigma(p)} \mapsto (\text{sgn}\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\sigma(n)},$$

é chamado de operador estrela de Hodge, onde  $\text{sgn}$  é o sinal da permutação.

**Definição D.4.10** (Aplicação Estrela de Hodge). *Dada  $\Omega \in \Lambda^n V$  uma forma de volume, com  $V$  possuindo um produto interno  $(\cdot|\cdot)$ , e tal que a norma de  $\Omega$  é unitária, para uma forma  $\alpha \in \Lambda^k V$ , define-se a forma  $*\alpha \in \Lambda^{n-k} V$  tal que  $\beta \wedge *\alpha = (\alpha, \beta)\Omega$ , onde  $\beta \in \Lambda^k V$ .*

**Exemplo:** Se  $V$  é de dimensão 3 e  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  é uma base para  $V$ , tem-se que  $*(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$ ,  $*(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$  e  $*(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ .

Com os conceitos apresentados até aqui, pode-se generalizar para variedades Riemannianas os principais operadores diferenciais do cálculo vetorial.

**Teorema D.4.5** (Cálculo Vetorial). *Seja  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade riemanniana com uma carta local  $(U, (x^1, \dots, x^n))$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  e  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$ . A generalização dos operadores de cálculo vetorial são:*

- $\text{grad} f = (df)^\sharp$ . Isto significa obter o diferencial da função  $f$  e depois fazer uma operação de aumento de índice, para transformar a 1-forma num campo vetorial. Sua expressão local é:

$$\text{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (\text{D.6})$$

Este campo aponta sempre na direção de máximo crescimento da função;

- $\text{div} \mathbf{X} = *d*\mathbf{X}^\flat$ , que é a generalização do divergente;
- $\text{rot} \mathbf{X} = (*d\mathbf{X}^\flat)^\sharp$ , que é a generalização do rotacional.

**Exemplo:** A expressão do rotacional em  $\mathbb{R}^3$  sai facilmente da definição acima. A métrica para o espaço Euclidiano é  $g_{ij} = \delta_{ij}$  e o campo vetorial é simplesmente:

$$\mathbf{X} = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial z}.$$

Aplicando-se o operador de diminuição de índice, obtém-se a 1-forma  $\sigma = f dx + g dy + h dz$ . A derivada exterior desta, que é uma 2-forma, é  $d\sigma = df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$  usando-se as regras do corolário C.21.1. Após substituir-se  $df$ ,  $dg$  e  $dh$ , tem-se

$$\begin{aligned} d\sigma = \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ + \left( \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz \right) \wedge dz, \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

que resulta, após algumas manipulações algébricas, em:

$$d\sigma = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz.$$

Aplicando-se em seguida o operador estrela, obtém-se:

$$*d\sigma = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dy + \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx,$$

que por fim vai resultar, após o aumento de índice, em:

$$\text{rot}\mathbf{X} = \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

## D.5 Geodésicas

Outra consequência de se introduzir métrica e conexão compatível em uma variedade diferenciável  $M$  é a possibilidade de se definir o conceito de *curva geodésica*, que generaliza as linhas retas do espaço euclidiano. Outra consequência é a possibilidade de se definir movimento retilíneo e uniforme. Mostra-se também que a curva de menor comprimento entre dois pontos é sempre uma geodésica, mas nem toda geodésica minimiza comprimento. Será mostrado que as geodésicas são curvas integrais de campos de segunda

ordem (vide seção C.10), e por isso tem que serem curvas regulares.

**Definição D.5.1** (Geodésicas). *Dada uma  $n$ -variedade diferenciável  $M$  e uma conexão de Koszul  $\nabla$ , diz-se que uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica se  $D/dt(d\gamma/dt) = \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ .*

Isso significa dizer que as geodésicas são curvas cujo campo de velocidade é paralelo ao longo destas próprias curvas. Elas também têm velocidade constante e o comprimento é proporcional ao parâmetro temporal. Na seção C.10, definiu-se o que eram campos de segunda ordem, cujas curvas integrais  $\Gamma$  eram chamadas de curvas de segunda ordem em  $TM$ . Além disso, as curvas de segunda ordem  $\Gamma$  nunca assumem velocidade zero, nem têm velocidades puramente na direção vertical e sempre haverá um *lift* que associa  $\Gamma$  a uma curva  $\gamma$  na base  $M$ , ou seja,  $\pi(\Gamma) = \gamma$ .

**Definição D.5.2** (Spray Geodésico). *Dada uma conexão de Koszul  $\nabla$ , o correspondente campo de segunda ordem para esta família é conhecido como spray geodésico e representado por  $\mathfrak{G}$ . O fluxo correspondente a este campo em  $TM$  é conhecido como fluxo geodésico.*

**Lema D.5.1.** *Existe um único spray geodésico  $\mathfrak{G} : TM \rightarrow TTM$  associado à conexão  $\nabla$ .*

**Definição D.5.3.** *Uma conexão afim  $\nabla$  é (geodesicamente) completa se o correspondente spray geodésico  $\mathfrak{G}$  for um campo vetorial completo.*

As curvas integrais de  $\mathfrak{G}$  são sempre curvas horizontais.

**Definição D.5.4** (Fórmula de Coordenadas para as geodésica). *A equação diferencial satisfeita pela geodésica é:*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \{\ddot{x}_k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}_j \dot{x}_i\} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0, \quad (\text{D.8})$$

ou seja, definindo-se uma carta local  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  em  $M$ , as equações em coordenadas que são satisfeitas por geodésica são:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \text{ com } k = 1, \dots, n. \quad (\text{D.9})$$

As equações em espaço de estados, ou seja, na forma de um sistema de equações de primeira ordem, é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_k &= -\Gamma_{lm}^k y^l y^m, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

onde todos os índices variam de 1 a  $n$ . Por estas equações, nota-se que a definição de geodésica está diretamente ligada à de conexão, pois aparecem os símbolos de Christoffel.

Como se trata de um sistema de segunda ordem, deve-se prover a posição e a velocidade inicial de forma a se poder integrar o sistema. Entretanto, para poder determinar a geodésica entre dois pontos, precisa-se fornecer condições de contorno, ou seja, as posições inicial e final. Definindo-se uma carta local Alguns pontos importantes sobre as geodésicas precisam ser destacados: Em cada ponto  $p \in M$  passam infinitas geodésicas, uma para cada vetor tangente  $\mathbf{v}_p$  (que é transportado paralelamente para obter o campo de velocidades). Por esta razão, alguns livros (como esse próprio e (CARMO, 1994)), adotam a seguinte representação para uma curva geodésica:  $\gamma(t, p, \mathbf{v}_p)$ , o que indica que se trata de uma geodésica que passa no ponto  $p$  com velocidade  $\mathbf{v}_p$ ;

**Definição D.5.5** (Lift Tangente). *Dada uma variedade e uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , o lift tangente de  $\gamma$  para  $TM$  is é uma curva  $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  dada por:*

$$\gamma(\tau) = (\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)).$$

Há algumas restrições com relação à curvas geodésicas em  $M$ , assim como seus campos tangentes: 1) Uma curva com velocidade nula  $\gamma$  se reduz a um ponto, que seria simplesmente dada por  $(p, 0)$ ; 2) Uma curva com velocidade zero em  $m$  pontos poderia ser dividida em  $m + 1$  curvas em que  $I = \mathbb{R}$ ; 3) Uma curva  $C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$  com velocidade identicamente nula deve ser um ponto único  $(p, \mathbf{v}_p)$ , mas tais curvas não fazem sentido, a menos que  $\mathbf{v}_p = 0$ , isto é,  $(C, C')$  is  $(p, 0, 0, 0)$  4) Uma curva vertical em  $TM$ , isto é, a curva que está contida na fibra é projetada em um único ponto  $\pi^{-1}(p)$ , Então tem-se que  $(p, 0, 0, \mathbf{w})$ . Outra consequência importante da natureza de segunda ordem das geodésicas é que se duas geodésicas  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  são tais que  $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\bar{\gamma}}(0)$ , então  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t)$ .

## D.5.1 Aceleração Geométrica

O leitor deve estar se perguntando como definir a aceleração para uma dada curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  já que foi mostrado na seção C.6 que esta não é simplesmente a curva  $\gamma'' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TTM$ . Por outro lado, no contexto da existência de uma trivialização para  $TM$ , foi possível se falar em curvas  $\gamma$  tal que para cada ponto o vetor velocidade é mapeado pela trivialização  $t$  para o mesmo vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Um campo deste tipo possuiria uma aceleração nula. Entretanto, não é necessário que haja uma trivialização em  $TM$  para se definir aceleração de uma curva. Basta que esteja definida uma conexão de Koszul. Foi visto na seção D.3.7 que para cada conexão  $\nabla$  está associada uma única distribuição

horizontal em  $TM$ . Vale então o seguinte resultado:

**Teorema D.5.1.** *Dada uma  $n$ -variedade  $M$  e uma conexão  $\nabla$ , o correspondente spray geodésico  $\mathfrak{G}$  em  $TM$  é tal que  $\mathfrak{G}_{v_p} \in H_{v_p}$ , onde  $H$  é a distribuição horizontal correspondente a  $\nabla$ .*

Isto significa que o campo de segunda ordem que define as geodésicas é um campo horizontal. Podemos agora definir o que são as curvas de aceleração nula:

**Definição D.5.6** (Curvas de Aceleração Nula). *Dada uma  $n$ -variedade  $M$  e uma conexão  $\nabla$ , define-se as curvas de aceleração nula como sendo as geodésicas da conexão.*

Ou seja, a única forma de se definir curvas com aceleração nula é impondo-se a estrutura adicional  $\nabla$ . De fato, parece bastante natural declarar que as curvas de aceleração nula são aquelas que têm o campo de velocidade com os vetores todos paralelos. Toda a informação sobre a velocidade daquela curva está contida em somente um representante do campo (em somente um ponto). Para se definir aceleração de forma geral, é necessário se fazer as seguintes considerações:

**Definição D.5.7** (Curva acelerada). *Dada uma  $n$ -variedade  $M$  e uma conexão de Koszul  $\nabla$ , uma curva acelerada é qualquer curva que não é uma geodésica.*

Por fim, a aceleração se define por:

**Definição D.5.8** (Aceleração Geométrica). *Dada uma  $n$ -variedade  $M$  e uma conexão de Koszul  $\nabla$ , define-se a aceleração geométrica (ou aceleração geodésica) como sendo  $\mathfrak{a}(t) = D/dt(d\gamma/dt)$ .*

As seguintes observações são importantes:

1. A aceleração  $\mathfrak{a}(t)$  é um campo com valores em  $TTM$ , diferente de  $\gamma''(t)$ , pois não é o campo de velocidade de  $\gamma'$ , e não há problema nenhum em ser identicamente nulo.
2. O nome aceleração geométrica vem do fato de estar ligada à conexão. Entretanto, para estudar movimento de partículas em uma variedade  $M$  de maneira geral, será necessário mais uma componente da aceleração.
3. O campo  $\mathfrak{a}(t)$  pode ser decomposto numa soma direta de uma parte vertical e outra horizontal. A parte vertical dá conta da variação na direção tangente à curva, enquanto que a horizontal dá conta da variação do campo que muda a direção da curva.

## D.5.2 Aplicação Exponencial

Dada uma variedade diferenciável  $M$  e um ponto  $p \in M$ , deduz-se facilmente que se uma conexão de Koszul  $\nabla$  estiver presente, deste ponto  $p$  partirão uma quantidade infinita de geodésicas. De fato, haverá uma geodésica para cada vetor tangente em  $T_pM$ . Deste modo, fica definida uma aplicação entre  $T_pM$  e  $M$ , que é:

**Definição D.5.9** (Aplicação Exponencial). *Se  $\gamma(t)$  é uma geodésica tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ , então para cada ponto  $p \in M$  e velocidade inicial  $\mathbf{v}$  tem-se:*

$$\exp(p, \mathbf{v}) = \gamma(1),$$

que é conhecida como aplicação exponencial para a conexão  $\nabla$ .

Esta aplicação é suave e  $\exp(p, \mathbf{0}) = p$ . Frequentemente, restringe-se a aplicação exponencial ao espaço tangente  $T_pM$ , de modo que:

$$\exp_p(\mathbf{v}) = \exp(p, \mathbf{v}).$$

Desta forma, se  $B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$  é uma bola aberta centrada na origem do espaço e de raio  $\epsilon$ , então:

**Proposição D.5.1.** *Dado  $p \in M$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$  é um difeomorfismo local de  $B_\epsilon(0)$  sobre um aberto de  $M$ .*

A prova se encontra em (CARMO, 1994) e se baseia no teorema da aplicação inversa, pois a aplicação tangente de  $\exp_p(\mathbf{v})$  é a identidade de  $T_pM$ , que é injetiva.

**Lema D.5.2** (Lema de Gauss). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , uma métrica e dois vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ , então:*

$$\mathbf{g}((d \exp_p)_\mathbf{v} \mathbf{v}, (d \exp_p)_\mathbf{v} \mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

onde foi feita a identificação  $T_\mathbf{v}T_pM \simeq T_pM$ .

A aplicação  $(d \exp_p)_\mathbf{v}$  é a derivada no ponto  $\mathbf{v}_p$  e pode-se notar que se trata de uma *isometria*, pois a aplicação exponencial preserva a métrica. O lema implica que uma esfera em  $T_pM$ , isto é, uma superfície ortogonal a todas as linhas partindo da origem, é transformada em uma subvariedade de  $M$  que é ortogonal a todas as geodésicas começando em  $p$ , também conhecida como esfera geodésica. Também é interessante notar que as

linhas retas em  $T_pM$  partindo da origem (que são geodésicas) são mapeadas em outras geodésicas em  $M$ .

Por fim, a aplicação  $f(t, s) = \exp_p(t\mathbf{v}(s))$ , com  $0 \leq t \leq 1$  e  $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$ , define uma superfície parametrizada em  $M$ , onde  $\mathbf{v}(s)$  é uma curva parametrizada em  $T_pM$  com  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'(0) = \mathbf{w}$ . Se fixarmos  $s$ , o resultado é uma geodésica  $\exp_p(t\mathbf{v})$  tal que  $0 \leq t \leq 1$ . Se derivarmos  $f$  por  $s$ , tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = (d \exp_p)_{t\mathbf{v}}(t\mathbf{w}),$$

o que é um campo vetorial que indica a velocidade com que as geodésicas se afastam umas das outras.

### D.5.3 Coordenadas Normais

**Definição D.5.10** (Normal Coordinates). *Dada uma variedade Riemannian com tensor métrico  $\mathbf{g}$  e conexão de Koszul compatível  $\nabla$ , é sempre possível selecionar um ponto  $p$  e definir este ponto as chamadas coordenadas normais  $x^i$ , tal que o tensor métrico em  $p$  fica  $(\mathbf{g}_{ij})_p = \delta_{ij}$  (delta de Kronecker) e  $(\partial \mathbf{g}_{ij} / \partial x_k)_p = 0$ .*

De fato, seja um ponto  $p \in M$  e uma base  $\{\mathbf{e}_i\}$  de  $T_pM$ , e sejam as geodésicas  $\exp_p(x_i \mathbf{e}_i)$  para esta conexão. Um ponto qualquer  $q \in M$  numa vizinhança de  $p$  pode ser expresso pela  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n)$ , que são conhecidas como *coordenadas normais* centradas no ponto  $p$ . Para mostrar que a definição de coordenadas normais concorda com a de sistemas de coordenadas apresentada anteriormente, tem-se:

**Lema D.5.3.** *Seja  $\{\mathbf{e}_i\}$  uma base de  $T_pM$ , e seja o transporte paralelo da base ao longo de cada geodésica  $\exp_p(x_i \mathbf{e}_i)$  representado por  $\{\mathbf{E}_i\}$ . Este conjunto de  $n$  campos vetoriais comutam dois-a-dois.*

*Demonstração.* Considerando torção nula, tem-se que  $[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j] = \nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{E}_j - \nabla_{\mathbf{E}_j} \mathbf{E}_i$ . Como estes campos são transportes paralelos, então  $[\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j] = 0$ . ■

Deste modo, as geodésicas começando em  $p$  são reproduzidas paralelamente em cada ponto de uma vizinhança de  $p$ , e determinam as diversas folheações de dimensão dois e maiores, que caracterizam um sistema de coordenadas.

**Proposição D.5.2.** *Dada uma variedade  $M$  e uma conexão  $\nabla$ , os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ , quando expressos nas coordenadas normais em  $p$ , resultam em  $\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kf}^i$  em  $p$ . Se a*

torção for nula, então  $\Gamma_{jk}^i = 0$  em  $p$ .

Como consequência, as componentes das derivadas covariantes de qualquer tensor nestas coordenadas coincidem com as derivadas parciais no ponto  $p$ . Da mesma forma, a derivada exterior de uma forma diferencial, no ponto  $p$  coincide com a derivada covariante (devidamente anti-simetrizada). Para mais propriedades, vide (KOBAYASHI; NOMIZU, 1969a).

**Teorema D.5.2.** *Seja um sistema de coordenadas normais em torno de  $p \in M$ , e  $U(p, \rho)$  a vizinhança em torno de  $p$  tal que  $(x^i)^2 < \rho^2$  (vizinhança de raio  $\rho$ ). Existe um número positivo  $a$  tal que se  $0 < \rho < a$ , então: 1)  $U(p, \rho)$  é convexo (quaisquer dois pontos podem ser unidos por uma geodésica); 2) Cada ponto desta vizinhança tem suas próprias coordenadas normais e cuja intersecção com  $U(p, \rho)$  é não-vazia.*

**Definição D.5.11** (Função Distância). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$  com tensor métrico  $\mathbf{g}$ , a função  $r : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função distância se ela satisfaz a equação de Hamilton-Jabobi:*

$$|\nabla r|^2 = 1,$$

em  $U$ , onde  $\nabla r = \frac{\partial}{\partial r}$  é o gradiente de  $r$ .

Neste caso, tem-se ainda que  $dr(\mathbf{v}) = g(\nabla r, \mathbf{v})$ . Outra consequência importante é que em coordenadas normais em torno de  $p$ , a função distância em relação à origem pode ser expressa como  $r(x) = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$ . Neste caso, o tensor métrico pode ser escrito como  $g = dr^2 + g_r$ , onde  $g_r$  é uma métrica em  $S^{n-1}$ . Um campo vetorial radial emanando de  $p \in M$  é dado por  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r}(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n})$  e as curvas integrais deste campo vetorial são as geodésicas emanando de  $p \in M$ .

## D.5.4 Comprimento e Energia

Dados dois pontos  $p$  e  $q$  numa variedade riemanniana  $M$ , a curva de menor comprimento que une estes dois pontos é sempre uma geodésica, desde que o espaço seja geodesicamente completo. Desta forma, o seguinte problema variacional se estabelece: Achar a curva  $\gamma$  tal que o funcional em (D.5) seja minimizado. Pode-se chegar a algumas conclusões importantes sobre geodésicas através do conceito de *curvas vizinhas*

**Definição D.5.12.** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes em uma variedade  $M$ . Uma variação de  $\gamma$  é uma aplicação contínua  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  tal que:*

- $f(t, 0) = \gamma(t)$ ,  $t \in [0, a]$ ;
- existe uma subdivisão de  $[0, a]$  por pontos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = a$ , tal que a restrição de  $f$  a cada  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$ , com  $i = 0, 1, \dots, k$ , é diferenciável.

Para comparar o comprimento de arco de  $\gamma$  com o comprimento de arco das curvas vizinhas de uma variação  $f$ , define-se a função  $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$L(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

isto é,  $L(s)$  é o comprimento da curva  $f_s(t)$ . Entretanto, é mais conveniente estudar a chamada *função energia*  $E(s)$  dada por:

$$E(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Seja  $s = 0$ , situação onde  $L(0) = \int_0^a \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt$  e  $E(0) = \int_0^a \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt$ . Fazendo-se  $f \equiv 1$  e  $g = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$ , pela desigualdade de Schwarz para  $f$  e  $g$ , conclui-se que  $L(s)^2 \leq aE(s)$ , o que somente vale se  $t$  for proporcional aos comprimentos de arco.

**Lema D.5.4.** *Sejam  $p, q \in M$  e  $c : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ . Então, para toda curva  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  ligando estes pontos, vale*

$$E(c) \leq E(\gamma),$$

*e vale a igualdade se e somente se  $\gamma$  é uma geodésica minimizante.*

Mudando-se o parâmetros  $t$  para uma função qualquer do comprimento do arco, a equação da geodésica fica sendo:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = h(l) \dot{x}^k, \quad \text{com } k = 1, \dots, n,$$

onde  $l$  é o parâmetros comprimento de arco até o instante  $t$  e  $h(l) = -\frac{d^2t}{dl^2} \left( \frac{dt}{dl} \right)^{-2}$ .

## D.6 Torção de uma Conexão

Uma importante propriedade de uma conexão é a chamada *torção*, que é um operador  $\mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  definido por:

$$\mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}].$$

Inicialmente, analisa-se o que ocorre para o caso de  $\mathbb{R}^3$  onde  $\mathbf{X} = \partial/\partial x$  e  $\mathbf{Y} = \partial/\partial y$ . Neste caso, o colchete  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv 0$  (o que ocorre sempre com derivadas parciais, ou seja, em uma carta). A quantidade  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$  é nula já que ambos os campos são paralelos ao longo das curvas integrais do outro. De fato, isso ocorre qualquer que seja a carta, de modo que a torção é sempre nula neste espaço. Consideremos agora que estamos em uma carta local e estamos utilizando campos coordenados, de modo que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  continua sendo nulo. Neste caso, somente se  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$  for identicamente nulo é que teremos torção nula. Deste modo, a torção nula exige uma certa simetria entre os campos. Ela mede então o quanto que o arrasto por campos paralelos deixa de formar um reticulado.

Uma outra forma de olhar o problema é como na Figura 13, só que em vez de considerar curvas integrais, considerar geodésicas. Tomando-se o limite do comprimento destas curvas para zero, elas podem ser representadas por vetores tangentes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . A falha em este circuito se fechar, que é um vetor na direção da curva que fecharia, será representada pelo operador  $\mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Pode-se mostrar (vide (BURKE, 1985)) que o módulo deste vetor é proporcional à área englobada pelo circuito multiplicado por  $\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$ . Então, se houver uma simetria nos índices inferiores dos símbolos de Christoffel, teremos que a torção é nula. É possível mostrar que torção é um tensor, ou seja, é tensorial nos argumentos.

## D.7 Curvatura de uma Conexão

Um problema surge ao se introduzir uma conexão de Koszul  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$ : como o paralelismo tem caráter local, em curvas fechadas, é possível que o campo paralelo definido não tenha o mesmo valor na saída e na chegada (os vetores sejam diferentes, embora o ponto final seja o mesmo que o inicial). A Figura 29 ajuda a ilustrar essa característica.

Supondo-se então três campos vetoriais  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$ , os dois primeiros determinam um reticulado, como na Figura 13, e o campo  $\mathbf{Z}$  será o campo transportado. Uma medida adequada da diferença entre o valor final e inicial do campo é:

**Definição D.7.1** (Tensor de Curvatura). *Define-se o tensor de curvatura como sendo o operador:*

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = [\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}]\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}. \quad (\text{D.11})$$

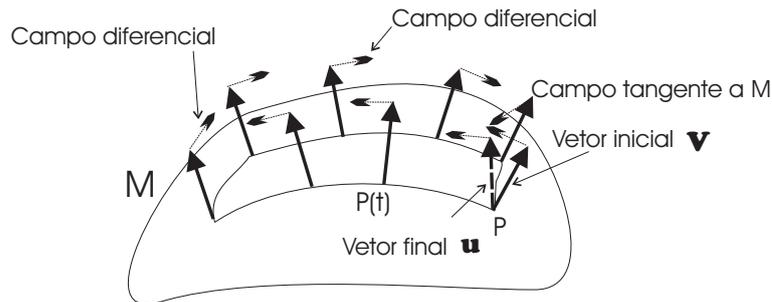


Figura 29: Ilustração da Curvatura

O fenômeno responsável por impedir que os vetores inicial e final sejam os mesmos é o que conhecemos por *curvatura*. Nota-se que o tensor de curvatura é tensorial em  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , pois estes campos aparecem no campo derivador das conexões. A cada ponto da variedade, para cada par de vetores naquele ponto, associa-se um operador sobre um terceiro campo vetorial  $\mathbf{Z}$ . Vamos inicialmente fazer uma análise em campos vetoriais no  $\mathbb{R}^3$ . Por facilidade, consideremos os campos naturais  $\mathbf{X} = \partial/\partial x$ ,  $\mathbf{Y} = \partial/\partial y$  e  $\mathbf{Z} = \partial/\partial z$ . Então, a segunda parcela de (D.11) é nula. Deste modo, o termo  $[\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}]\mathbf{Z}$  será zero, pois os campos são paralelos. Se multiplicarmos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  respectivamente por  $f, g$ , nada se altera, o que indica que o operador/tensor depende somente do ponto em que ele está e não da vizinhança, ou seja,  $R_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)$  só depende de um subespaço bidimensional de  $T_pM$ . Por fim, é possível mostrar que  $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$  é tensorial também em  $\mathbf{Z}$  (embora necessite um pouco mais de cálculos), ou seja, ele somente transforma vetores tangentes num ponto em vetores tangentes no mesmo ponto, independente do que ocorra com o campo  $\mathbf{Z}$  nas vizinhanças. Então para o espaço euclidiano, o valor é zero, o que significa que ele não tem curvatura.

As propriedades principais da curvatura são:

**Proposição D.7.1.** *A curvatura  $\mathcal{R}$  de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

1.  $\mathcal{R}$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , isto é:

$$\mathcal{R}(f\mathbf{X}_1 + g\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) = f\mathcal{R}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) + g\mathcal{R}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1),$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}_1, f\mathbf{Y}_1 + g\mathbf{Y}_2) = f\mathcal{R}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) + g\mathcal{R}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2),$$

onde  $f, g \in C^\infty(M)$  e  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in \mathcal{X}(M)$ ;

2. Para todo par  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(M)$ , o operador curvatura  $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é

linear, isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{Z} + \mathbf{W}) &= \mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} + \mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{W}, \\ \mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(f\mathbf{Z}) &= f\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z},\end{aligned}$$

onde  $f \in C^\infty(M)$  e  $\mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \mathcal{X}(M)$ .

A demonstração está em (CARMO, 1994).

**Proposição D.7.2** (Identidade de Bianchi). *Sejam  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X}(M)$ . Vale então:*

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} + \mathcal{R}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\mathbf{X} + \mathcal{R}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})\mathbf{Y} = 0.$$

### D.7.1 Curvatura e Horizontalidade

A noção de curvatura está ligada à dependência do transporte paralelo em relação ao caminho. Para o entendimento do conceito, observe novamente a figura 29. Obviamente, todos os campos são suaves, assim como os campos diferenciais destes. Se o campo diferencial de  $\mathbf{Z}$  (flecha dupla) é horizontal segundo a conexão  $\nabla$ ,  $\mathbf{Z}$  é um transporte paralelo. Entretanto, como já foi dito, em geral o vetor final  $\mathbf{u}$  e o vetor inicial  $\mathbf{v}$  são diferentes, o que indica curvatura. No caso geral, a segunda parcela da definição não é zero, o que leva em conta quando o reticulado do percurso não é fechado de fato. Quando a curvatura é nula, o transporte paralelo sempre transforma o vetor inicial no mesmo vetor ao longo do percurso, ou seja, o transporte paralelo não depende do caminho.

### D.7.2 2-Formas de Curvatura

É possível se definir a curvatura de outra maneira, usando-se 2-formas diferenciais (vide seção C.21). Cria-se uma aplicação  $A_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  que fornece um operador dependendo dos vetores inicial e final ao longo de uma curva fechada, ou seja,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Se este operador for diferente da identidade, significa que existe curvatura em  $M$  (isto está mostrado na figura 29). Este operador é tão mais diferente da identidade quanto maior for a área envolvida pela curva fechada. Se o caminho fosse reduzido a área zero, essa aplicação seria a própria identidade, mesmo que houvesse curvatura. Ao se analisar, entretanto, o comportamento da aplicação  $A$  para valores pequenos de área envolvida pela curva fechada, pode-se proceder a uma aproximação linear, que consistiria em aproximar o caminho fechado por um caminho fechado no espaço tangente determinado pelos vetores

inicial  $\mathbf{v}$  e final  $\mathbf{u}$ . Deste modo, a aplicação poderia ser escrita, numa vizinhança do ponto  $p \in M$ , como:

$$A_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = I + \varepsilon^2 \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

O termo  $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  é uma 2-forma com valores vetoriais (em  $T_p M$ ) aplicada no elemento de superfície (bi-vetor) determinado pelos vetores final e inicial. Esta 2-forma não depende do caminho, ou seja, só pode depender de propriedades intrínsecas da variedade, isto é, da curvatura em si. Esta 2-forma é conhecida como *2-Forma de Curvatura* e descreve a variação infinitesimal que o vetor tangente sofre quando é transportada paralelamente num caminho diferencial. É óbvio que quando esta 2-forma é nula, o transporte paralelo não depende do caminho.

### D.7.3 Curvatura em uma Variedade Riemanniana

Deste modo, toda variedade Riemanniana, isto é, variedade diferenciável  $M$  munida de uma métrica  $\mathbf{g}$  e uma conexão de Koszul  $\nabla$  compatível, possui um tensor de curvatura (ou tensor de Riemann) associado que mede a curvatura em cada ponto. A curvatura em torno de um ponto influencia decisivamente o comportamento das geodésicas em torno deste ponto. De fato, se a curvatura for positiva, as geodésicas ficam oscilantes (próximas) umas das outras. No caso da curvatura ser negativa, elas se afastam rapidamente umas das outras.

**Proposição D.7.3.** *Escrevendo-se  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \mathbf{g}(\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{W})$ . Então vale o seguinte:  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) + (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{W}) + (\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}) = 0$ ,  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = -(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W})$ ,  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = -(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}, \mathbf{Z})$ ,  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = -(\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .*

A demonstração está em (CARMO, 1994). Como  $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$  é um campo vetorial, pode-se escrevê-lo na base dos campos coordenados: dada uma carta  $(U, \psi)$  em torno de um ponto  $p \in M$ , pode-se escrever:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l},$$

onde  $R_{ijk}^l$  são as coordenadas da curvatura na base de coordenadas induzida pela carta  $(U, \psi)$ . Sendo  $\mathbf{X} = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\mathbf{Y} = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  e  $\mathbf{Z} = w^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ , pode se obter por linearidade:

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = R_{ijk}^l u^i v^j w^k \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

É conveniente escrever  $R_{ijk}^l$  em termos dos símbolos de Christoffel. Com alguns cálculos, chega-se a:

$$R_{ijk}^s = \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i}. \quad (\text{D.12})$$

**Definição D.7.2** (Tensor de Curvatura: segunda versão). *O tensor de curvatura é um tensor  $\mathbf{R} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  do tipo  $(0, 4)$  definido por:*

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \langle \mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle, \text{ com } \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \mathcal{X}(M).$$

As componentes de  $\mathbf{R}$  são dadas por  $R_{ijkl} = \mathbf{R}(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l})$ .

As funções reais  $R_{ijk}^s$  estão relacionadas com as coordenadas do tensor de curvatura (segunda versão) por  $R_{ijkl} = g_{ls} R_{ijk}^s$ . As identidades da proposição D.7.3 podem ser escritas na seguinte forma :  $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$ ,  $R_{ijks} = -R_{jik s}$ ,  $R_{ijks} = -R_{ijsk}$  e  $R_{ijks} = -R_{ksij}$ . A extensão para uma variedade riemanniana qualquer do conceito de curvatura de Gauss é a *curvatura seccional* (SPIVAK, 1999). A curvatura de Gauss mede o *afastamento* que a superfície sofria no ponto  $p$  do plano tangente neste ponto. Seja  $p \in M$  e seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço de dimensão dois de  $T_p M$ . Deste ponto, partem geodésicas que são tangentes a  $\sigma$  e determinam uma subvariedade  $S$  de dimensão dois de  $M$  e que é tangente a  $\sigma$ , neste ponto. Então, dados dois vetores linearmente independentes  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sigma$ , a fórmula da curvatura seccional é:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|^2}, \quad (\text{D.13})$$

onde  $|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|$  é a área do paralelogramo determinada por estes dois vetores (aqui trata-se do produto vetorial e não do produto exterior). É natural (e esta demonstrado em (??)) que esta curvatura não depende dos vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  e nem da carta local escolhida.

**Definição D.7.3** (Isometria). *Dadas duas variedades riemannianas  $(M, \mathbf{g})$  e  $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ , um difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$  entre estas variedades é chamado de isometria se  $\phi^* \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$ . Neste caso, diz-se que estas variedades Riemannianas são isométricas.*

O conjunto de todas as isometrias de uma variedade riemanniana  $(M, \mathbf{g})$  é conhecido como *grupo das isometrias* de  $(M, \mathbf{g})$ . Prova-se que o grupo das isometrias de  $(M, \mathbf{g})$  é sempre um grupo de Lie de dimensão finita. Pode-se então agrupar todas as variedades isométricas em uma mesma classe de equivalência. Pode-se dizer então que estas variedades possuem a mesma geometria. Haverá então um conjunto de *invariantes geométricos*,

dos quais o principal é a *curvatura*.

### D.7.4 Campos de Jacobi

Dada uma geodésica  $\gamma$ , uma *deformação* será uma família de curvas, todas geodésicas,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  tal que cada curva é dada pela fórmula  $h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  com  $\beta \mapsto h(\alpha, \beta)$  e onde  $h_0 = \gamma$ . Represente o campo de velocidades destas geodésicas por  $\lambda$ . Quando o parâmetro  $\alpha$  é variado, há uma mudança suave entre uma geodésica e outra da família. Localmente, esta variação é representada por um campo vetorial definido ao longo da curva  $\gamma$  e representado por  $\eta$ , que é tangente às curvas  $h_\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$ , com  $\alpha \mapsto h(\alpha, \beta)$ .

**Definição D.7.4** (Campo de Jacobi). *Diz-se que o campo  $\eta$  acima é um campo de Jacobi, e define a taxa de variação infinitesimal de uma geodésica para outra quando se varia o parâmetro  $\alpha$  (vide Figura 30)*

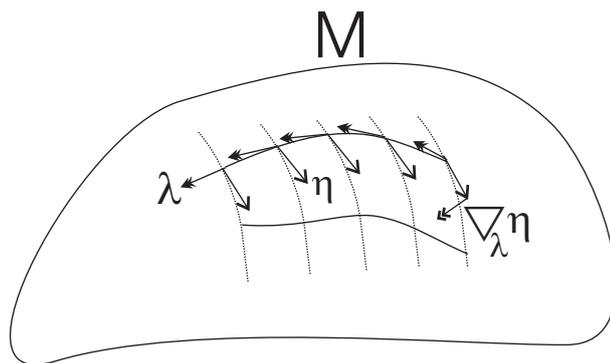


Figura 30: Variação de uma Geodésica

**Definição D.7.5** (Equação de Jacobi). *Todo campo de Jacobi  $\eta$  satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:*

$$\nabla_\lambda \nabla_\lambda \eta + \nabla_\lambda \mathcal{T}(\eta, \lambda) + \mathcal{R}(\eta, \lambda)\lambda = 0, \tag{D.14}$$

que é chamada de equação de Jacobi.

A equação de Jacobi é linear, o que levou Vladimir Arnold a dizer que esta equação é uma linearização da descrição de como as geodésicas se aproximam e se afastam umas das outras (ARNOLD, 1988). Por se tratar de uma equação de segunda ordem, qualquer campo de Jacobi ao longo de uma geodésica é unicamente determinado pelo valor do campo num ponto e de sua derivada covariante ao longo da geodésica neste mesmo ponto. Claramente é um sistema de  $2n$  equações de primeira ordem lineares. Se definirmos um

frame ortogonal em algum ponto da geodésica, esse pode ser transportado paralelamente e definir assim uma base onde o campo de Jacobi pode ser escrito como combinação linear, ou seja, se  $\mathbf{E}_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forma uma base ao longo da geodésica, pode-se escrever o campo de Jacobi como  $\eta(t) = f_i(t)\mathbf{E}_i(t)$ . Deste modo, fazendo-se a substituição na equação (D.14), tem-se o sistema:

$$\ddot{f}_j(t) + a_{ij}(t)f_i(t) = 0,$$

onde  $a_{ij}(t) = g(R(\dot{\gamma}(t), \mathbf{E}_i(t))\dot{\gamma}(t), \mathbf{E}_j(t))$ . Para cada posição e velocidade iniciais diferentes, tem-se diferentes campos de Jacobi. Somente se considera, entretanto campos que são normais a  $\dot{\gamma} = \lambda$ .

**Corolário D.7.1.** *Dada uma variedade Riemanniana, toda geodésica  $\gamma$  admite naturalmente dois campos de Jacobi:  $\dot{\gamma}$  e  $t\dot{\gamma}$ .*

**Definição D.7.6** (Pontos Conjugados). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $M$  com uma conexão de Koszul compatível com uma métrica  $\mathbf{g}$  e  $\gamma$  uma geodésica. Diz-se que dois pontos  $p = \gamma_0$  e  $q = \gamma_t$  nesta curva são conjugados se existe um campo de Jacobi não identicamente nulo  $\eta$  que se anula nestes dois pontos.*

A existência de pontos conjugados tem implicações na aplicação exponencial. De fato, dado um ponto  $p \in M$  e a aplicação exponencial  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ , se  $q \in M$  é um ponto conjugado, então a aplicação exponencial é singular no ponto  $\mathbf{v}_p \in T_pM$  tal que  $\exp_p(\mathbf{v}_p) = q$ . Este ponto  $\mathbf{v}_p$  é também conhecido como ponto conjugado. Para métricas Riemannianas, é possível mostrar que os pontos conjugados são sempre isolados.

**Corolário D.7.2.** *A região onde valem as coordenadas normais não podem conter pontos conjugados. Para o caso da conexão ser completa, as coordenadas normais em  $p$  valem para toda a variedade.*

Ou seja, enquanto as geodésicas não se cruzarem, as coordenadas normais são válidas. Uma característica importante é que uma variedade Riemanniana pode ser geodesicamente completa, mas mesmo assim  $\exp_p$  não é um difeomorfismo em  $T_pM$  (mas somente localmente em torno da origem).

**Definição D.7.7.** *Diz-se que uma variedade riemanniana  $M$  é geodesicamente completa se as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p \in M$  estão definidas para todos os valores dos parâmetros  $t \in \mathbb{R}$*

Uma variedade geodesicamente completa sempre possui uma geodésica minimizante entre quaisquer dois pontos  $p, q \in M$ , isto é, uma geodésica ligando estes pontos que tem o menor comprimento dentre todas as curvas que ligam estes mesmos pontos.

Pode-se então definir a distância entre dois pontos  $p, q \in M$  como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas que ligam  $p$  e  $q$ , que é o comprimento da geodésica minimizante entre estes pontos. Não é difícil mostrar que esta distância define uma métrica, no sentido de espaço métrico, em  $M$ .

**Teorema D.7.1** (Teorema de Hopf-Rinow). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A aplicação  $\exp(p, \mathbf{v})$  está definida para o espaço  $T_p M$  completo;
2. Todos os conjuntos limitados e fechados em  $M$  são compactos;
3.  $M$  é completa como espaço métrico;
4.  $M$  é geodesicamente completa;
5. Para quaisquer dois pontos  $p, q \in M$  existe uma geodésica  $\gamma$  ligando estes pontos e a distância entre eles é o comprimento do segmento.

**Corolário D.7.3.** *Variiedades Riemannianas compactas são sempre geodesicamente completas.*

**Teorema D.7.2** (Hadamard). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional  $K(p, \sigma) \leq 0$ , para todo  $p \in M$  e todo  $\sigma \subset T_p M$ . Então  $M$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim M$ .*

A demonstração está em (CARMO, 1994)

**Teorema D.7.3** (Milnor). *Seja  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional. Suponha que  $M$  admite um campo vetorial  $X$  com uma única singularidade atratora localmente e globalmente. Então  $M$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .*

A demonstração pode ser encontrada em (MILNOR; STASHEFF, 1974).

**Definição D.7.8** (Ponto Mínimo ou *Cut Point*). *Dada uma variedade Riemanniana geodesicamente completa  $M$ , cada geodésica  $\gamma(t)$  tal que  $\gamma(0) = p$  tem um tempo finito, chamado aqui de  $\tau_0$  tal que para  $\tau > \tau_0$  a geodésica deixa de ser minimizante. Tal ponto é chamado de ponto mínimo, ou cut point.*

**Definição D.7.9** (Lugar dos Pontos Mínimos ou *Cut Locus*). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , o lugar dos pontos mínimos a partir de um ponto  $p \in M$ , representado por  $\mathcal{C}_p$ , é o conjunto dos pontos mínimos a partir de um ponto  $p$ .*

Seguem algumas propriedades do lugar de pontos mínimos:

1. Existem pelo menos duas geodésicas minimizantes unindo os pontos  $p$  e  $q \in \mathcal{C}_p$
2.  $q$  e  $p$  são pontos conjugados.
3. O conjunto dos pontos mínimos é sempre fechado e com medida nula.
4. A região dentro de  $\mathcal{C}_p$  é o domínio onde a função  $\exp_p$  é um difeomorfismo, ou seja, é a região onde valem as coordenadas normais

**Definição D.7.10** (Força de Curvatura ou *Tidal Force*). *Se  $p \in M$  é um ponto e  $\mathbf{w}_p, \mathbf{v}_p \in T_pM$ , então  $R(\cdot, \mathbf{v}_p)\mathbf{v}_p$  é um operador em  $T_pM$  que representa uma força causada pela curvatura que mantém a trajetória contida na variedade.*

Quanto maior for o valor da curvatura, maior será a força de curvatura. Essa força causa a aceleração pela qual as geodésicas se afastam umas das outras. Se  $\mathbf{v}_p$  é a velocidade da geodésica no ponto  $p$ , a força de curvatura nunca tem essa direção. Se a curvatura é nula, essa força também é nula.

**Definição D.7.11** (Lugar dos Pontos Conjugados). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$  e um ponto  $p \in M$ , o conjunto de todos os pontos conjugados a  $p$  é chamado de lugar dos pontos conjugados e é representado por  $C(p)$ .*

**Proposição D.7.4.** *No grupo de Lie  $SU(2)$ , para cada ponto  $p$  existe um único ponto conjugado, que é o ponto diametralmente oposto  $-p$ .*

## D.8 Derivada Covariante de Tensores

Até agora foram estudadas as propriedades da conexão no que se refere à derivação covariante de um campo, e as propriedades decorrentes desta derivada. Em particular, os conceitos fundamentais de torção e curvatura já foram introduzidos. Passa-se agora ao estudo da derivação covariante de tensores em geral. Será visto que torção e curvatura permanecem sendo os únicos conceitos fundamentais (ou invariantes) também para a

derivação destes objetos. Mais detalhes podem ser encontrados em (PETERSEN, 1998) e (LANG, 1999).

Inicialmente, devemos reafirmar um resultado já apresentado:

**Teorema D.8.1.** *Dada uma  $n$ -variedade  $M$ , uma conexão afim  $\nabla$  e uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se que:*

$$\nabla f = df.$$

*Demonstração.* Pela definição de  $\nabla$  e para um campo vetorial  $\mathbf{X}$ , temos que  $\nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}f$ , e como  $\mathbf{X}f = \langle df, \mathbf{X} \rangle$  chega-se ao resultado esperado. ■

Deste modo, a derivada covariante de funções nada mais é que a derivada exterior de funções. Entretanto, para o caso de 1-formas, este resultado não se mantém. Para se deduzir a derivada covariante de uma 1-forma, é necessário o seguinte resultado:

**Teorema D.8.2.** *Dada uma  $n$ -variedade  $M$ , uma conexão de Koszul  $\nabla$  e as bases naturais  $\{\partial/\partial x^i\}$  e  $\{dx^j\}$ , tem-se que:*

$$\langle \nabla_{\partial/\partial x^i} dx^j, \partial/\partial x^k \rangle = -\Gamma_{ik}^j.$$

*Demonstração.* Evidentemente, tem-se que:

$$\nabla_{\partial/\partial x^k} \langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \nabla_{\partial/\partial x^k} (\delta_i^j) = 0.$$

Para que a derivada covariante esteja bem definida, é necessário que a igualdade anterior seja igual também a:

$$\langle \nabla_{\partial/\partial x^k} dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle + \langle dx^j, \nabla_{\partial/\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle.$$

de modo que se chega ao resultado desejado. ■

Dada uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , pode-se definir o tensor Hessiano a partir da derivada covariante, generalizando, portanto, a definição em C.6.8. Pode-se também definir o Hessiano de uma função real em uma variedade diferenciável. É um conceito que também precisa da métrica e da conexão, ou seja, só faz sentido em uma variedade Riemanniana.

**Definição D.8.1** (Tensor Hessiano). *Dada uma variedade riemanniana  $(M, g)$  munida de uma conexão compatível  $\nabla$ , define-se tensor Hessiano de uma função  $f$  como sendo o tensor simétrico  $H(f)$ :*

$$\text{Hess}f(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \nabla_{\mathbf{E}_i} \nabla_{\mathbf{E}_j} f - \nabla_{\nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{E}_j} f. \quad (\text{D.15})$$

Uma fórmula equivalente para definição do tensor Hessiano é:

$$\text{Hess}f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g(\nabla^2 f(\mathbf{X}), \mathbf{Y}),$$

o que resulta em uma fórmula em coordenadas dada por:

$$\text{Hess}f = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} f.$$

Com isto, é possível generalizar o operador Laplaciano (conhecido da Física) através de:

**Definição D.8.2** (Operador de Laplace-Beltrami). *Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  com conexão  $\nabla$  e um função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se o operador de Laplace-Beltrami como sendo o traço, em relação à métrica  $g$  do tensor Hessiano  $\text{Hess}(f)$ , ou seja:*

$$\Delta f = g^{ij} \text{Hess}(f)_{ij}. \quad (\text{D.16})$$

De fato, este operador pode ser estendido para qualquer tensor.

**Definição D.8.3** (Conjuntos Convexos em Variedades Riemannianas). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , diz-se que um subconjunto  $U \subset M$  é convexo se a geodésica minimizante entre dois pontos  $p, q \in U$  é única em  $M$  e a sua imagem está contida totalmente em  $U$ .*

**Definição D.8.4** (Funções Convexas em Variedades Riemannianas). *Dada uma função  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $M$  é uma variedade Riemanniana e  $U \subset M$  é um conjunto convexo, diz-se que esta função é convexa se a sua restrição em qualquer trecho de geodésica, isto é, a função  $t \mapsto f(\exp_x(t\mathbf{v}_x))$ , é convexa em seu domínio para qualquer  $x \in M$  e  $\mathbf{v}_x$  tangente em  $x$ .*

**Exemplo:** [Métrica no Plano] Seja a variedade riemanniana  $\mathbb{R}^2$ . Pode-se achar facilmente uma carta para este espaço e que o cobre todo, que é  $(\mathbb{R}^2, I)$  (onde  $I$  é aplicação identidade de  $\mathbb{R}^2$ .) Uma outra carta seria a das coordenadas polares (que está definida para  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$   $r > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ ). A relação entre estas cartas, válida na intersecção dos domínios de ambas, é:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

A matriz métrica da primeira carta é a matriz identidade. Para a segunda carta, a métrica é mais conhecida na literatura de Física em forma de diferenciais:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2,$$

qu, posta na forma matricial, fica:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

A matriz jacobiana da transformação entre estas coordenadas é:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar facilmente que  $G$  satisfaz a relação D.3, que na forma matricial é:

$$G = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} I \left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right]^\top.$$

Calculando-se a curvatura gaussiana de ambas as métricas, vê-se que são nulas, ou seja, está consistente com o fato de que ambas as métricas são para o mesmo espaço, que é o  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo:** [Métricas na Esfera  $S^2$ ] Seja a esfera  $S^2$ , que é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^3$ . Pode-se introduzir um atlas composto pelas cartas:

$$\psi_i^s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2,$$

que associam a calota aberta  $x_i = s\sqrt{1 - x_j^2 - x_k^2}$  o subconjunto  $x_j^2 + x_k^2 < 1$ , onde  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $s = +, -$ . Tomando-se uma carta particular onde  $x_i = x$ ,  $x_j = y$ , pode-se calcular facilmente a matriz métrica desta superfície, primeiramente determinando-se os campos coordenados:

$$\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}(x, y) = \left( 1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right), \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}(x, y) = \left( 0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right). \quad (\text{D.18})$$

Resulta que:

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2}, \quad (\text{D.19})$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{xy}{1-x^2-y^2}, \quad (\text{D.20})$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 1 + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}, \quad (\text{D.21})$$

onde  $\langle, \rangle$  é o produto escalar canônico de  $\mathbf{R}^3$ . A matriz métrica é então da forma:

$$G'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{1-x^2-y^2} & 1 + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$

Usando-se coordenadas de elevação e azimute  $(\theta, \varphi)$ , onde  $\varphi \in [0, 2\pi)$  e  $\theta \in (0, \pi)$ , para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  a carta não está definida, logo ela não cobre dois pontos de  $S^2$ . Tem-se então que definir um atlas com duas cartas.

Numa região de intersecção entre as cartas  $x_i$  e as de  $(\theta, \varphi)$ , as coordenadas estão relacionadas por  $x = \sin \theta \cos \varphi$  e  $y = \sin \theta \sin \varphi$ . Calculando-se a matriz jacobiana da transformação de coordenadas:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

A matriz métrica para parametrização em elevação e azimute é facilmente calculada:

$$G(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

Com um pouco mais de trabalho que no exemplo anterior, verifica-se que:

$$G = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} G'(x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi)) \left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} \right]^\top.$$

Os símbolos de Christoffel são:  $\Gamma_{\theta\theta}^\theta, \Gamma_{\theta\varphi}^\theta, \Gamma_{\varphi\theta}^\theta, \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta, \Gamma_{\theta\theta}^\varphi, \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi, \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi, \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi$ , onde,  $\Gamma_{\theta\varphi}^\theta = \Gamma_{\varphi\theta}^\theta$  e  $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi$ . De

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{bmatrix},$$

os símbolos ficam:

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right] g^{\theta\theta} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} \right] g^{\varphi\theta} = 0,$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \right] g^{\theta\theta} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \right] g^{\varphi\theta} = 0,$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right] g^{\theta\theta} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right] g^{\varphi\theta} = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right] g^{\theta\varphi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} \right] g^{\varphi\varphi} = 0,$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \right] g^{\theta\varphi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \right] g^{\varphi\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right] g^{\theta\varphi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right] g^{\varphi\varphi} = 0,$$

As equações das geodésicas são então:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta (\dot{\varphi})^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2 \cot \theta (\dot{\varphi} \dot{\theta}) = 0. \end{cases}$$

Calculando-se o tensor de curvatura, chega-se em:

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta\theta\theta} &= R_{\theta\theta\varphi\theta} = R_{\theta\varphi\theta\theta} = R_{\varphi\theta\theta\theta} = R_{\varphi\varphi\theta\theta} = R_{\varphi\theta\varphi\theta} = \\ R_{\theta\theta\theta\varphi} &= R_{\theta\theta\varphi\varphi} = R_{\theta\varphi\varphi\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi\varphi} = R_{\varphi\varphi\theta\varphi} = R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = 0, \\ R_{\theta\varphi\varphi\theta} &= R_{\varphi\theta\theta\varphi} = -R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -\cos^2 \theta + 1 = \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Calculando a curvatura seccional

$$K\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial}{\partial\varphi}\right|^2} = \frac{R_{\theta\varphi\theta\varphi}}{\left|\frac{\partial}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial}{\partial\varphi}\right|^2} = \frac{\sin^2\theta}{\det G} = 1, \quad (\text{D.22})$$

ou seja, a curvatura seccional de  $S^2$  é constante e positiva.

## D.9 Geometria Riemanniana em Grupos de Lie

Os grupos de Lie são variedades diferenciáveis onde o produto e a inversão são aplicações suaves (vide seção D.1). Por ter o fibrado tangente trivializável, existem métricas e conexões compatíveis imediatas. Mais detalhes podem ser obtidos em (LANG, 1999) e (SATTINGER; WEAVER, 1986).

**Definição D.9.1** (Métricas Invariantes à Esquerda e à Direita). *Dado um grupo de Lie  $G$  e suas translações à direita e à esquerda  $R_x(y) = yx$  e  $L_x(y) = xy$  sendo suaves, diz-se que um tensor métrico Riemanniano  $\mathbf{g}$  em  $G$  é invariante à direita/esquerda se  $R_x / L_x$  é uma isometria deste tensor.*

Todo grupo de Lie admite métricas invariantes à esquerda e à direita. Uma métrica bi-invariante é invariante tanto à esquerda quanto à direita.

**Definição D.9.2** (Métrica Canônica). *Dado um grupo de Lie e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , a métrica canônica é dada por:*

$$g_{ij} = C_{is}^r C_{jr}^s,$$

onde  $C_{is}^r$  são os coeficientes estruturais de  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema D.9.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie,  $\nabla$  uma conexão de Koszul e  $\mathbf{g}$  um tensor métrico invariante à esquerda compatível com a conexão. Seja ainda  $\mathbf{e}_i$  uma base ortonormal para os campos invariantes à esquerda de  $G$  tal que  $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ . Então os símbolos de Christoffel são dados por:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ij}^k + C_{ki}^j - C_{jk}^i),$$

onde  $C_{ij}^k$  são as constantes estruturais de  $\mathfrak{g}$ . A conexão  $\nabla$  também é invariante à esquerda.

**Definição D.9.3** (Forma de Killing). *Dado um grupo de Lie matricial  $G$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , a forma de Killing é a forma bilinear dada por :*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{tr}([\text{ad}_{\mathbf{x}}], [\text{ad}_{\mathbf{y}}]),$$

onde  $[\text{ad}_{\mathbf{x}}], [\text{ad}_{\mathbf{y}}]$  são as matrizes das representações adjuntas.

**Proposição D.9.1.** *As seguintes propriedades são válidas para a forma de Killing de um grupo de Lie matricial arbitrário:*

1.  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\text{Ad}_g \mathbf{x}, \text{Ad}_g \mathbf{y})$ , isto é, é Ad-invariante para qualquer  $g \in G$ .
2.  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , isto é, é simétrica.

**Proposição D.9.2** (Critério de Cartan). *A forma de Killing pode ser usada para classificar grupos de Lie da seguinte forma: dado um grupo de Lie  $G$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ :*

1. Um grupo de Lie é solúvel se e somente se  $B(\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]) = 0$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$ ,
2. Um grupo de Lie é nulipotente se e somente se  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ ,
3. Um grupo de Lie é semi-simples se e somente se  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é não-degenerada, isto é, não tem autovalores nulos.

Todas as álgebras de Lie isomórficas têm a mesma forma de Killing, como por exemplo  $\mathfrak{so}(3)$  and  $\mathfrak{su}(2)$ . Outra importante propriedade da forma de Killing é  $K([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) = K([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}) = -K(\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}])$  (SATTINGER; WEAVER, 1986). Como se trata de uma forma bilinear na álgebra de Lie, a forma de Killing pode ser usada como métrica desde que tenha todos os seus autovalores positivos ou todos negativos. Ela define um tensor métrico suave uniforme em um grupo de Lie devido a este ser trivializável. Há, entretanto, outras métricas que podem ser utilizadas.

**Exemplo:** Para o caso particular de  $SO(3)$ , o tensor métrico é dado por  $g_{ij} = -2\delta_{ij}$ . No caso de  $SE(3)$ , a matriz métrica é dada por  $\text{diag}(-4, -4, -4, 0, 0, 0)$ , o que significa que a forma de Killing é degenerada.

**Definição D.9.4** (Matriz Métrica). *Para o caso do grupo de Lie matricial  $GL(n, \mathbb{R})$ , um exemplo de métrica é  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{XY})$*

Em grupos de Lie abelianos, todas as métricas invariantes à esquerda ou à direita são bi-invariantes.

**Teorema D.9.2.** *Se um grupo de Lie  $G$  possui uma métrica bi-invariante, então  $G \times H$  também tem uma métrica bi-invariante.*

Por este teorema, o grupo  $SE(3)$  tem uma métrica bi-invariante. Em um grupo de Lie compacto todas as funções contínuas devem ser limitadas. Em geral, os elementos de  $\mathfrak{g}$  não são campos vetoriais de Killing, e  $\exp(t\mathbf{X})$  não é uma isometria. Por outro lado, o lema de Gauss mostra que a aplicação exponencial da geometria Riemanniana é uma isometria radial.

**Proposição D.9.3.** *A duas definições de aplicação exponencial, tanto a de grupos de Lie como da geometria Riemanniana coincidem para um grupo de Lie compacto com uma métrica bi-invariante.*

**Proposição D.9.4** (Petersen). *Seja  $G$  um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante  $\mathfrak{g}$ . Se  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$  são campos invariantes à esquerda em  $\mathfrak{g}$ , então:*

$$\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = \frac{1}{2}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}],$$

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = -\frac{1}{4}[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}],$$

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \frac{1}{4}\mathfrak{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], [\mathbf{W}, \mathbf{Z}]).$$

*Em particular, a curvatura seccional é sempre não negativa.*

Está claro que os símbolos de Christoffel estão relacionados com as constantes estruturais do grupo de Lie. Um grupo unimodular é um grupo que tem uma medida de integração invariante à esquerda e à direita.

**Proposição D.9.5.** *Dado um grupo de Lie  $G$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , seja ainda uma forma de Killing como definida em D.9.3. A forma de Killing do grupo  $G \times G \times \cdots \times G$  é dada então por:*

$$\tilde{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \cdots + B(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n), \quad (\text{D.23})$$

onde  $[\mathbf{X}] = \text{diag}([\mathbf{x}_1], \cdots, [\mathbf{x}_n]) \in \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* Sabe-se que, como se trata de um produto direto de grupos, tem-se que  $[\text{ad}_{\mathbf{X}}] = \text{diag}([\text{ad}_{\mathbf{x}_1}], \cdots, [\text{ad}_{\mathbf{x}_n}])$ , e:

$$\begin{aligned} \text{tr}([\text{ad}_{\mathbf{X}}][\text{ad}_{\mathbf{Y}}]) &= \text{tr}(\text{diag}([\text{ad}_{\mathbf{x}_1}][\text{ad}_{\mathbf{y}_1}], [\text{ad}_{\mathbf{x}_2}][\text{ad}_{\mathbf{y}_2}], \cdots, [\text{ad}_{\mathbf{x}_n}][\text{ad}_{\mathbf{y}_n}])) = \\ &= \text{tr}([\text{ad}_{\mathbf{x}_1}][\text{ad}_{\mathbf{y}_1}]) + \text{tr}([\text{ad}_{\mathbf{x}_2}][\text{ad}_{\mathbf{y}_2}]) + \cdots + \text{tr}([\text{ad}_{\mathbf{x}_n}][\text{ad}_{\mathbf{y}_n}]), \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

de modo que o resultado segue. ■

**Corolário D.9.1.** *Se  $B$  é definida positiva, também é  $\tilde{B}$*

*Demonstração.* De fato, para qualquer vetor  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ , tem-se:

$$\tilde{B}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + \dots + B(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n),$$

tal que  $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) > 0$ , de modo que o resultado segue. ■

No caso de  $G = SU(2) \times SU(2) \times \dots \times SU(2)$ , a forma de Killing é definida positiva. Então, devido ao critério de Cartan apresentado D.9.2,  $G$  é semi-simples. Seja ainda notação  $\mathbf{E}_i^k = (0, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, 0)$ , ou seja, é não nula na posição  $k$ . Então  $[\mathbf{X}^k]$  e  $[\mathbf{Y}^l]$  são diagonais com somente um elemento não nulo que estão nas posições  $k$  e  $l$ , respectivamente. Pela fórmula em (D.23),  $[\mathbf{X}^k]$  e  $[\mathbf{Y}^l]$  são ortogonais.

**Definição D.9.5** (Funções Ortogonais Reais em Variedade Riemanniana). *Se  $M$  é uma variedade Riemanniana com tensor métrico  $g_{ij}$  e  $\phi_1, \phi_2 : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais definidas nela, pode-se definir o produto interno por:*

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_U \phi_1(x_i) \phi_2(x_i) \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \cdots dx_n,$$

e diz-se então que  $\phi_1, \phi_2$  são ortogonais se  $(\phi_1, \phi_2) = 0$  (CHIRIKJIAN; KYATKIN, 2000).

**Teorema D.9.3.** *Dado um grupo de Lie  $G$  e um produto interno  $(\cdot, \cdot)$  em  $T_e G$ , se ele satisfizer:*

$$([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}) + (\mathbf{u}, [\mathbf{w}, \mathbf{v}]) = 0,$$

então a métrica construída por translações à direita/esquerda é bi-invariante.

É simples provar que para grupos de Lie compactos e conexos,  $G$  tem sempre uma métrica bi-invariante.

**Teorema D.9.4.** *Se um grupo de Lie  $G$  tem uma métrica bi-invariante então as geodésicas de  $G$  que passam por  $e \in G$  são subgrupos de um parâmetro.*

Neste caso, as geodésicas podem ser calculadas explicitamente pela aplicação da função exponencial do grupo de Lie. Para o caso de  $SU(2)$ , sabe-se que este grupo é difeomórfico a  $S^3$ , de modo que as geodésicas são circunferências centradas no centro de  $S^3$ .

## REFERÊNCIAS

- ABE, E. *Hopf Algebras*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Tracts in Mathematics). ISBN 9780521604895.
- ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E. *Foundations of Mechanics*. second. [S.l.]: Addison-Wesley, 1985.
- ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. v. 75. (Applied Mathematical Sciences, v. 75).
- ADORNO, B. V. Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra — Part I: Fundamentals. Working paper or preprint. 2017.
- ADORNO, B. V.; FRAISSE, P. The cross-motion invariant group and its application to kinematics. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, July 2016.
- ARNOLD, V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. second. New York: Springer, 1988. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 250).
- ATIYAH, M. *Introduction To Commutative Algebra*. [S.l.]: CRC Press, 2018. ISBN 9780429973260.
- BERBERIAN, S. *Fundamentals of Real Analysis*. [S.l.]: Springer New York, 2013. (Universitext). ISBN 9780387984803.
- BERNARDES, M. et al. Robot-assisted automatic insertion of steerable needles with closed-loop imaging feedback and intraoperative trajectory replanning. *Mechatronics*, v. 23, n. 6, p. 630 – 645, 2013.
- BERNARDES, M. C. et al. 3d robust online motion planning for steerable needles in dynamic workspaces using duty-cycled rotation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer US, v. 25, n. 2, p. 216–227, 2014.
- BHATTACHARYA, P. B.; JAIN, S. K.; NAGPAUL, S. R. *Basic Abstract Algebra*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1986.
- BLOCH, A. M. *Nonholonomic Mechanics and Control*. [S.l.]: Springer, 2003. v. 24. (Interdisciplinary Applied Mathematics: System and Control, v. 24).
- BONDY, A.; MURTY, U. *Graph Theory*. [S.l.]: Springer London, 2011. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781846289699.
- BOTT, R.; TU, L. W. *Differential Forms in Algebraic Topology*. [S.l.]: Springer, 1982. 331 p. (Graduate Texts in Mathematics, 82).
- BOTTEMA, O. *Theoretical kinematics*. Amsterdam ; New York : New York: North-Holland Pub. Co., 1979.

- BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics*. [S.l.]: Hermann, 1966. (ADIWES international series in mathematics, l. 7,pt. 1). ISBN 9782705658267.
- BOURBAKI, N. *Algebra I: Chapters 1-3*. [S.l.]: Springer, 1998. (Actualités scientifiques et industrielles). ISBN 9783540642435.
- BURKE, W. L. *Applied Differential Geometry*. first. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985.
- CAMACHO, C.; NETO, A. L. *Teoria Geométrica das Folhas Planas*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides).
- CAMPOS, A.; GUENTHER, R.; MARTINS, D. Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, scielo, v. 27, p. 345 – 356, 12 2005. ISSN 1678-5878.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. second. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988. (Projeto Euclides).
- CARMO, M. P. do. *Riemannian Geometry*. [S.l.]: Birkhäuser, 1994.
- CARTAN Élie. *Riemannian Geometry in an Orthogol Frame*. [S.l.]: World Scientific, 2001.
- CHIRIKJIAN, G.; KYATKIN, A. *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis: With Emphasis on Rotation and Motion Groups*. [S.l.]: CRC Press, 2000. ISBN 9781420041767.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; DILLARD-BLEICK, M. *Analysis, Manifolds and Physics: Part I: Basics*. Revised. [S.l.]: North-Holland, 1982.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; DILLARD-BLEICK, M. *Analysis, Manifolds and Physics: Part II: Applications*. Revised. [S.l.]: North-Holland, 1989.
- COLÓN, D. Cartan connections as a tool for kinematic chain calculation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 26, n. 6, p. 630–641, 2015. ISSN 2195-3899.
- COLÓN, D. Connections between screw theory and cartan's connections. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA. *Proceedings of the Congresso Brasileiro de Automática 2014*. Belo Horizonte, 2014.
- COLÓN, D. Cartan's connection, fiber bundles and quaternions in kinematics and dynamics calculations. In: *Proceedings of the ASME 2015 IDETC/CIE 2015*. Boston: ASME, 2015.
- COLÓN, D. Cartan connection applied to dynamic calculation in robotics. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 40, n. 8, p. 369, Jul 2018. ISSN 1806-3691.
- COLÓN, D. Cartan connection applied to dynamic calculation in robotics. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 40, n. 8, p. 369, Jul 2018. ISSN 1806-3691.

- COLÓN, D. et al. Geometric modeling and robust control of a gyroscopic system. In: *Proceedings of the ASME 2015 IDETC/CIE 2015*. Boston: ASME, 2015. v. 8.
- COLÓN, D.; PAIT, F. M. Geometry of adaptive control: Optimization and geodesics. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 18, p. 381–392, 2004.
- CRAIG, J. J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. [S.l.]: Addison-Wesley Longman, 1989.
- DIXMIER, J. *Enveloping Algebras*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1996. (Graduate studies in mathematics). ISBN 9780821805602.
- DOLD, A. *Lectures on Algebraic Topology*. First. [S.l.]: Springer-Verlag, 1972.
- EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. [S.l.]: Sprin, 2004. 797 p. (Graduate Texts in Mathematics, 150).
- FEATHERSTONE, R. *Rigid Body Dynamics Algorithms*. [S.l.]: Springer US, 2014.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics: The New Millenium Edition*. [S.l.]: Basic Books, 2011. v. 1.
- FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. *A Short Course in General Relativity*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1994.
- FUCHS, L. et al. *Abelian Groups*. [S.l.]: Elsevier Science, 2015. (ISSN). ISBN 9781483280905.
- FULTON, W.; HARRIS, J. *Representation Theory: A First Course*. [S.l.]: Springer New York, 1991. (Graduate Texts in Mathematics / Readings in Mathematics). ISBN 9780387974958.
- GARDNER, R. B. *The Method of Equivalence and Its Applications*. Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989. (Regional Conferences Series in Applied Mathematics, 58).
- GIRARD, P. *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2007. ISBN 9783764377915.
- GOTTFRIED, K.; WEISSKOPF, V. *Concepts of Particle Physics*. [S.l.]: Clarendon Press, 1986. (Concepts of particle physics). ISBN 9780195364583.
- HESTENES, D. *New Foundations for Classical Mechanics*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1999. (Fundamental Theories of Physics). ISBN 9780792353027.
- ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Springer, 1995. (Communications and Control Engineering).
- IVEY, T. A.; LANDSBERG, J. M. *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2003. v. 61. (Graduate Studies in Mathematics, v. 61).
- KAHN, D. W. *Introduction to Global Analysis*. first. [S.l.]: Academic Press, 1980.

- KAJITA, S. et al. *Introduction à la commande des robots humanoïdes - De la modélisation à la génération du mouvement*. [S.l.]: Springer, 2009. Translated from Japanese by Sophie Sakka.
- KAWAKUBO, K. *The Theory of Transformation Groups*. [S.l.]: Oxford University Press, 1991.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. [S.l.]: Interscience Publishers, 1969. one.
- KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. [S.l.]: Interscience Publishers, 1969. two.
- LANCASTER, P.; TISMENETSKY, M. *The Theory of Matrices: With Applications*. [S.l.]: Elsevier Science, 1985. (Computer Science and Scientific Computing). ISBN 9780124355606.
- LANG, S. *Fundamentals of Differential Geometry*. New York: Springer, 1999.
- LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. [S.l.]: Ao Livro Técnico e Editora da Universidade de São Paulo, 1970.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise: Vol 2*. fourth. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise: Vol 1*. tenth. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- LOUNESTO, P. et al. *Clifford Algebras and Spinors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. (Lecture note series / London mathematical society). ISBN 9780521005517.
- MACLANE, S. *Categories for the Working Mathematician*. [S.l.]: Springer New York, 1978. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781461298397.
- MARTIN, L. A. B. S. *Álgebras de Lie*. first. [S.l.]: Editora da Unicamp, 1999.
- MEINRENKEN, E. *Clifford Algebras and Lie Theory*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics). ISBN 9783642362163.
- MICHAELIS, W. Lie coalgebras. *Advances in Mathematics*, v. 38, n. 1, p. 1–54, 1980. ISSN 0001-8708.
- MILNOR, J. *Morse Theory: Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963. 153 p. (Annals of Mathematical Studies, 51).
- MILNOR, J. W. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. [S.l.]: Princeton University Press, 1965. (Princeton Landmarks in Mathematics).
- MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. *Characteristic Classes*. [S.l.]: Princeton University Press, 1974.

- MISNER, C. et al. *Gravitation*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. ISBN 9781400889099.
- MURRAY, R. M.; LI, Z.; SASTRY, S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. Corporate Blvd., Boca Raton, Fl 33431: CRC Press, 1994. 474 p.
- OLIVEIRA, A. S. de et al. A new approach to singularity-free inverse kinematics using dual-quaternionic error chains in the davies method. *Robotica*, 7 2014.
- OLVER, P. J. *Equivalence, Invariants, and Symmetry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- PAIT, F.; COLÓN, D. Some properties of the riemannian distance function and the position vector  $x$ , with applications to the construction of lyapunov functions. In: *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 6277–6280. ISSN 0743-1546.
- PETERSEN, P. *Riemannian Geometry*. New York: Springer, 1998.
- PIERCE, R. *Associative Algebras*. [S.l.]: Island Press, 1982. (Graduate texts in mathematics). ISBN 9781475701647.
- RADAVELLI, L. A. et al. Points, lines, screws and planes in dual quaternions kinematics. In: LENARÄ?IÄ?, J.; KHATIB, O. (Ed.). *Advances in Robot Kinematics*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. p. 285–293.
- RADAVELLI L. A., D. P. E. R. M. D. S. R. A screw dual quaternion operator for serial robot kinematics. In: *Proceedings of PACAM XIV*. Santiago: [s.n.], 2014.
- RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1974. (Higher Mathematics Series). ISBN 9780070542334.
- SATTINGER, D. H.; WEAVER, O. L. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986. v. 61. (Applied Mathematical Sciences, v. 61).
- SCHWARZ, A. S. *Topology for Physicists*. [S.l.]: Springer, 1996. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften - A Series of Comprehensive Studies im Mathematics).
- SELIG, J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*. second. [S.l.]: Springer, 2005.
- SHARPE, R. W. *Differential Geometry: Cartan Generalization of Klein Erlangen Program*. [S.l.]: Springer, 1997. (Graduate Texts in Mathematics, 166).
- SIMMONS, H. *An Introduction to Category Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781139503327.
- SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Third. Houston: Publish or Perish, 1999.
- SPIVAK, M. *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3rd. ed. [S.l.]: Publish or Perish, INC., 2005. Two.

SPONG, M.; VIDYASAGAR, M. *Robot Dynamics and Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1989.

SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. *Robot modeling and control*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2006.

STEENROD, N. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1951. 229 p. (Princeton Landmarks in Mathematics).

STEVANI, I. *Robust Control of a 2-DOF parallel mechanism combining feedback linearization and H-infinity design*. Dissertação (mathesis) — Escola Politécnica da USP, 2020.

STEVANI, I. et al. H-infinity control of a 3-dof rrr spatial serial mechanism. In: *Proceedings of the CBA 2018*. [S.l.: s.n.], 2018.

THIRRING, W. *A Course in Mathematical Physics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1978. one: Classical Dynamical Systems.

TSAI, L. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. [S.l.]: Wiley, 1999. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471325932.

WASSERMAN, R. H. *Tensors and Manifolds, with Applications to Mechanics and Relativity*. first. [S.l.]: Oxford University Press, 1992.

YANG A. T., F. F. Application of dual-number quaternions algebra to the analysis of spatial mechanisms. *Journal of Applied Mechanics*, v. 31, n. 2, p. 300–308, 1964.