

ADRIANO DOMENY DOS SANTOS

**Dinâmica e controle de uma estrutura rotativa flexível
esbelta sujeita a torção e *rubbing***

São Paulo
2023

ADRIANO DOMENY DOS SANTOS

**Dinâmica e controle de uma estrutura rotativa flexível
esbelta sujeita a torção e *rubbing***

Versão Corrigida

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração:
Engenharia de Controle e Automação
Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Agenor de Toledo
Fleury

São Paulo
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Santos, Adriano Domeny
Dinâmica e controle de uma estrutura rotativa flexível esbelta sujeita a torção e rubbing / A. D. Santos -- versão corr. -- São Paulo, 2023.
271 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento de Engenharia Mecânica.

1.CONTROLE (TEORIA DE SISTEMAS E CONTROLE) 2.ATRITO
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

DOS SANTOS, A. D. **Dinâmica e controle de uma estrutura rotativa flexível esbelta sujeita a torção e *rubbing*** 2023. 271 f. Tese (Doutor em Ciências na Área de Engenharia de Controle e Automação Mecânica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Aprovado em:

Banca examinadora

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Dedico esse trabalho à minha família e aos meus amigos, minhas maiores riquezas

Agradecimentos

Confesso que ao começar a redigir essa seção de agradecimentos, senti um leve frio na barriga, pois foram tantas as pessoas que me ajudaram, seja com suporte financeiro ao projeto desenvolvido, seja com o tempo disponibilizado para pensar junto comigo em como resolver alguns problemas técnicos críticos, seja na prontidão em me ajudar no que estivesse ao alcance, seja com o ombro amigo e as piadas nos momentos de cansaço, seja com suas preciosas orações; que receio enumerá-las e esquecer de um só nome, mas vamos lá!

Gostaria de agradecer ao prof. Adailton Novaes, que desde a minha adolescência, quando nos conhecemos, apostou em mim. Sem ele, não teria chegado onde cheguei. Gostaria de agradecer ao prof. Alaelson, ao Marinho Kamiroski, ao prof. Amaury Bordallo; ao prof. Américo, pela disponibilidade e por me ajudar em várias dúvidas conceituais; ao Lucas Beltrame; ao grande Andrés, ao Bruno Hall, ao Bruno Wagner, ao Arthur Peixoto, ao prof. Claudemir, ao Daniel Langendorf; ao Danilo, meu colega de doutorado; a dona Dea; e dona Maria e dona Helena, pelas orações; ao Eduardo Karlin; ao meu grande amigo de infância prof. José Luís, de Petrolina; a Everton Lins, meu colega de doutorado, pela disponibilidade e vídeo-chamadas que varavam a noite até que o meu problema estivesse resolvido; a Fábio Júnior; ao Felipe Gualberto, pelo apoio e pelas orações; ao Felipe Santiago, ao Fernando Asfor, ao Fernando Cabral, ao Gabriel Cluchite, ao Galrão, ao Lucas Gonçalves; a Guilherme Aminger, o “Rei Midas”, com seu poder de fazer funcionar o que ninguém mais conseguiria, pelo seu apoio no processo de construção da bancada experimental, e antes de tudo pela amizade e pela companhia de chopp; ao Guilherme Jordão, meu amigo de Recife, por suas orações; ao Gustavo Grochoski, pelo apoio inestimável; ao Gustavo Lucena e ao Matheus, seu aluno, pelas gravações e edição do vídeo de apresentação da bancada experimental; ao prof. Hans, um grande formador de pesquisadores, por sua disponibilidade e paciência; ao Herbert Azevedo, ao Antônio Sombra; a Ivison, meu cunhado e amigo; ao Jordan Rodrigues; ao casal de amigos Roni e Juliana, minha eterna gratidão pela amizade de vocês; ao grande Laszlo Lueska, amigo de infância, pelo apoio inestimável; ao Lázaro Fernandes, pelas assessorias jurídicas; ao grande Leonardo Borges, Borjão; ao Lucas Moraes, meu amigo gênio em programação, que me tirou (e continua me tirando) de várias enrascadas; ao Lucas Susco, da Radial Rolamentos; ao prof. Luciano Menegaldo, com quem me aconselhei quando decidi embarcar na carreira acadêmica; ao Leonardo Soriano, pela paciência infinita e pelas orações; ao Didier Kouaku, pela valiosíssima amizade; ao grande Orlando Onofre; ao pe Fábio Carvalheiro, pelo apoio e pelas orações; ao Pedro Borges; ao prof. Thiago Ritto, pela prontidão em responder aos meus e-mails com dúvidas conceituais; ao prof. Raul Gonzales; ao prof. Tanuri, cuja

disciplina ministrada na POLI foi essencial para a consolidação da minha tese; ao Rafael Guerra; ao meu grande amigo Rafael Sanchez, pela delicadeza e receptividade em minha chegada à USP; ao grande Rarylson; ao grande Renato Morelli, pela amizade inestimável; ao Renato Sarreta; ao Ricardo Damn, pelo apoio e por compartilhar sua experiência acadêmica; ao Rodrigo Jayme; ao Rômulo Aguiar, da Schlumberger, pelo grande apoio, desde o início da minha entrada na vida acadêmica; ao Samir, ao Leonan Studart; à tia Elza e tia Gema, pelas orações; à tia Salete, por suas orações, uma homenagem póstuma a uma pessoa tão querida e muito importante em minha vida; ao Tiago Marchiore; ao Thiago Ramos; ao meu padrinho Paulo, pelas orações; ao Tomás Rodrigues, pela grande amizade; ao Victor Arandas, meu grande amigo da ECA; ao grande Vinícius Hessel, pela amizade inestimável; ao William, amigo e colega da POLI; ao Yberê, ao grande amigo Yuasa; a minha madrinha Zélia, pelas orações; ao Daniel, ao Álvaro e à dona Cida, da Jaguaré Protótipos, pelo apoio essencial na confecção da parte mecânica da bancada experimental; ao Paulo Lessa, pelo apoio essencial no projeto do sistema eletrônico. Espero não ter esquecido ninguém. A todos a minha mais sincera gratidão.

Mas de forma alguma poderia deixar de citar o prof. Agenor Fleury. Desde o primeiro momento em que nos encontramos, nunca me tratou de cima para baixo, mas sim como a um colega de trabalho, mesmo com a ampla distância entre ele e eu no que se refere aos anos de experiência e ao conhecimento. Chamá-lo de professor ou orientador, sem tirar o mérito e o valor dessas palavras, seria pouco. Sem deixar de exigir quando preciso, o prof. Fleury foi antes de tudo um amigo.

Meus agradecimentos também se dirigem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da USP, pelo suporte na minha formação técnica, e também à CAPES, pela bolsa de suporte financeiro.

*“A vida é o que é, meu filho, e não outra coisa”
(Minha avó)*

Resumo

SANTOS, Adriano Domeny dos **Dinâmica e controle de uma estrutura rotativa flexível esbelta sujeita a torção e *rubbing***. 2023. 271 f. Tese (Doutor em Ciências na Área de Engenharia de Controle e Automação Mecânica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

A indústria de óleo e gás há décadas constitui um setor de grande relevância estratégica para um país. Pelo seu alto custo fixo, melhorias no processo de extração e refino costumam representar um aumento considerável na margem de lucro, bem como tornar viável a extração em áreas que antes não eram.

Desde a década de 60, a *perfuração rotativa* constitui a técnica mais consolidada na extração de óleo e gás em poços profundos. Essa técnica se baseia na utilização de uma coluna metálica extremamente esbelta, para transmissão de energia rotativa desde o nível da superfície até a broca, que pode se encontrar a quilômetros de profundidade no solo; e também na utilização de um sistema paralelo de circulação de fluido de perfuração, para retirada do cascalho, arrefecimento e lubrificação da broca, e manutenção da pressão interna na parede do furo de perfuração, no decorrer do processo.

A elevada esbeltez da coluna de perfuração, e a presença de forças de interação não lineares sobre a coluna, especialmente forças de impacto e de atrito, são as principais causas das altas vibrações do sistema, das quais algumas são as responsáveis pela redução considerável na eficiência do processo de perfuração, quantificada pela taxa de avanço da broca com o sistema em pleno funcionamento.

A presente proposta de doutorado teve como alvo o estudo do comportamento dinâmico de sistemas rotativos flexíveis, qualitativamente similares ao utilizado na técnica de perfuração rotativa. Na tentativa de melhorar a estabilização dessas estruturas rotativas muito esbeltas, sujeitas a torção e flexão, alguns passos foram dados no desenvolvimento de novas estratégias de controle do sistema, seja por meio de simulações numéricas, seja por meio de ensaios em bancada experimental. Na bancada experimental desenvolvida e utilizada no presente trabalho, alguns componentes rotativos estiveram submetidos a interações de impacto e escorregamento (*rubbing*), bem como a atrito seco, o que permitiu observar experimentalmente comportamentos não-lineares do sistema, tais como o *stick-slip*, fenômeno caracterizado pela ocorrência sucessiva de esticamento e distensão torcionais do eixo, causado principalmente pelo atrito.

Palavras-chaves: rotores. estrutura flexível. *rubbing*. atrito seco. dinâmica e controle.

Abstract

SANTOS, Adriano Domeny dos **Dynamics and control of a slender flexible rotating structure subject to torsion and *rubbing***. 2023. 271 f. Thesis (Doctor of Sciences in Control and Mechanic Automation Engineering) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

The oil and gas industry has been a sector of great strategic importance for a country for decades. Due to its high fixed cost, improvements in the extraction and refining process usually represent a considerable increase in the profit margin, as well as making extraction viable in areas that were not previously.

Since the 1960s, *rotary drilling* has been the most established technique for extracting oil and gas from deep wells. This technique is based on the use of an extremely slender metallic column to transmit rotating energy from the surface level to the drill bit, which can be found kilometers deep in the ground; and also in the use of a parallel drilling fluid circulation system, for removing the gravel, cooling and lubricating the bit, and maintaining the internal pressure on the wall of the drilling hole, during the process.

The high slenderness of the drill string, and the presence of non-linear interaction forces on the string, especially impact and friction forces, are the main causes of the high vibrations of the system, some of which are responsible for the considerable reduction in efficiency of the drilling process, quantified by the bit advance rate with the system in full operation.

The present doctoral proposal aimed to study the dynamic behavior of flexible rotating systems, qualitatively similar to the one used in the rotary drilling technique. In an attempt to improve the stabilization of these very slender rotating structures, subject to torsion and bending, some steps were taken in the development of new system control strategies, either through numerical simulations or through experimental bench tests. In the experimental bench developed and used in the present work, some rotating components were subjected to impact and slip interactions (*rubbing*), as well as to dry friction, which allowed to experimentally observe non-linear behavior of the system, such as the *stick-slip*, phenomenon characterized by the successive occurrence of torsional “stretching” and “relaxation” of the shaft, mainly caused by friction.

Key-words: rotors. flexible structure. rubbing. friction. control and dynamic.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sonda de perfuração (RITTO, 2010).	21
Figura 2 – Ciclo do fluido de perfuração (Schlumberger Developers, 2022a).	22
Figura 3 – Estabilizadores da coluna de perfuração (Schlumberger Developers, 2022b).	23
Figura 4 – Tipos de vibração (LÓPEZ, 2010).	24
Figura 5 – Tipos de perfuração direcional (RITTO, 2010).	25
Figura 6 – Dispositivo experimental (MIHAJLOVIC et al., 2004).	33
Figura 7 – Curvas de atrito: (a) para o rotor superior; (b) para o rotor inferior (MIHAJLOVIC et al., 2004).	34
Figura 8 – Diagrama de bifurcação tensão de entrada <i>versus</i> velocidade angular do rotor inferior (MIHAJLOVIC et al., 2004).	34
Figura 9 – Bancada experimental	40
Figura 10 – Rotor intermediário	42
Figura 11 – Excentricidade do rotor intermediário	46
Figura 12 – Bancada experimental e sistema fixo de referência	47
Figura 13 – Sistemas referenciais	48
Figura 14 – Posição do pino no referencial fixo ao rotor intermediário	51
Figura 15 – Malha de elementos finitos no eixo principal	57
Figura 16 – Deformações do eixo nos modos longitudinais (planos XY e XZ)	71
Figura 17 – Deformações do eixo nos modos de torção (planos XY e XZ)	72
Figura 18 – Deformações do eixo nos modos de precessão (planos XY e XZ)	72
Figura 19 – Deformações do eixo para outros modos laterais (planos XY e XZ)	72
Figura 20 – Modos longitudinais e de torção segundo deslocamentos em u e em θ_x	73
Figura 21 – Modelos de atrito	77
Figura 22 – Ajustes do modelo contínuo de atrito ao modelo descontínuo	79
Figura 23 – Rub e variáveis envolvidas	82
Figura 24 – Modelos de impacto lateral	87
Figura 25 – Modelo em parâmetros concentrados, com acoplamento de dinâmicas	88
Figura 26 – Sistemas de coordenadas e vetor velocidade da massa de excentricidade	90
Figura 27 – Modelo em parâmetros concentrados, sem acoplamento de dinâmicas	100
Figura 28 – Sistema em regime de <i>stick-slip</i> - curvas experimentais	112
Figura 29 – Trajetórias de seguimento para as saídas do sistema e zona de instabilidade	113
Figura 30 – Trajetória desejada $\omega_d(t)$	114
Figura 31 – Mapa de autovalores para o metamodelo	123
Figura 32 – Dinâmicas de torção e longitudinal em malha aberta e sem atrito	126
Figura 33 – Dinâmicas longitudinal com <i>zoom</i>	127

Figura 34 – Comportamento desejado para o sistema	128
Figura 35 – Comportamento desejado para o sistema	129
Figura 36 – Seguimento da trajetória por parte do sistema sem acoplamento	130
Figura 37 – Seguimento da trajetória por parte do sistema sem acoplamento	130
Figura 38 – Seguimento da trajetória por parte do sistema sem acoplamento	131
Figura 39 – Escorregamento e esforço de controle para sistema sem atrito	132
Figura 40 – Velocidades de rotação para sistema sem acoplamento e atrito	133
Figura 41 – Forças de atuação longitudinal e de compressão no contato, sem torque de atrito	133
Figura 42 – Escorregamento e esforço de controle	134
Figura 43 – Velocidades de rotação para sistema com acoplamento e atrito	134
Figura 44 – Forças de atuação longitudinal e de compressão no contato (com atrito)	135
Figura 45 – Escorregamento e esforço de controle para modelo EF	137
Figura 46 – Velocidades de rotação para modelo em EF sem atrito	137
Figura 47 – Trajetórias real e desejada - rotor principal	138
Figura 48 – Movimento lateral do rotor intermediário para modelo em EF sem atrito	138
Figura 49 – Movimento longitudinal dos rotores para modelo em EF sem atrito . . .	139
Figura 50 – Forças de reação para modelo em EF sem atrito	140
Figura 51 – Variáveis de saída para lei de controle com presença de atrito	141
Figura 52 – Esforço de atuação: (a) em todo o tempo simulado; (b) <i>zoom</i>	142
Figura 53 – Camada limite e escorregamento: (a) em todo o tempo simulado; (b) <i>zoom</i>	142
Figura 54 – Movimento lateral do rotor intermediário	142
Figura 55 – Bancada experimental	143
Figura 56 – Subsistema superior	144
Figura 57 – Componentes de acoplamento e segurança	145
Figura 58 – Subsistema intermediário	146
Figura 59 – Subsistema inferior	147
Figura 60 – Alguns componentes do subsistema inferior	148
Figura 61 – <i>Drivers</i> para controle local do servo-motor e do motor de passo	149
Figura 62 – <i>Encoder</i>	149
Figura 63 – Células de carga	150
Figura 64 – Sensores de distância com cabos	150
Figura 65 – Placa de aquisição e processamento	151
Figura 66 – Placas de aquisição e processamento confeccionadas para a bancada . . .	151
Figura 67 – Placas de aquisição e processamento instalada na bancada	152
Figura 68 – Ensaio sem contato entre rotor principal e pinos de atrito	153
Figura 69 – Ensaio com contato entre rotor principal e pinos de atrito	154
Figura 70 – Ensaio com contato entre rotor principal e pinos de atrito - órbita	155

Figura 71 – Outras ensaios sob as mesmas condições	157
Figura 72 – Lista de vetores com um vetor artificial em destaque	194
Figura 73 – Modelo para construção de modos de torção e longitudinais	195
Figura 74 – Vetores artificiais e normalizados dos modos de torção	201
Figura 75 – Vetores artificiais e normalizados dos modos longitudinais	202
Figura 76 – Vetores artificiais para identificação dos modos de precessão	204
Figura 77 – Frequência natural <i>versus</i> Coeficiente de amortecimento	208
Figura 78 – Gráficos de ω_m e ω_M em função de δ_ξ	211
Figura 79 – Gráficos de ω_m e ω_M em função de δ_ξ	212
Figura 80 – Torque total de atrito	215
Figura 81 – Pêndulos de torção	216
Figura 82 – Resposta do pêndulo duplo de torção a uma entrada degrau	219
Figura 83 – Trajetória desejada para diferentes valores de γ_{td}	221
Figura 84 – Sistemas de referência para o rotor intermediário	223
Figura 85 – Subsistema intermediário	227
Figura 86 – Posicionamento do rotor intermediário, concêntrico com o estator	232
Figura 87 – Órbita do centro geométrico do rotor intermediário	232
Figura 88 – Funções de chaveamento	250

Lista de tabelas

Tabela 1 – Bancada experimental: algumas medidas	41
Tabela 2 – Frequências naturais do sistema (Hz)	70
Tabela 3 – Parâmetros do modelo descontínuo de atrito	77
Tabela 4 – Parâmetros da função adimensional para o modelo contínuo de atrito	77
Tabela 5 – Frequências naturais dos sistemas em PC e EF (Hz)	99
Tabela 6 – Frequências naturais dos sistemas em PC e EF (Hz)	105
Tabela 7 – Índices dos modos de torção, longitudinais e de precessão na matriz de autovetores	205

Lista de abreviaturas e siglas

WOB	Peso sobre a broca (<i>Weight On Bit</i>)
BHA	<i>Bottom Hole Assemble</i> : estrutura responsável por manter a broca sob pressão e a coluna sob tração.
TOB	Torque sobre a broca (<i>Torque On Bit</i>)
PC	Parâmetros Concentrados.
EF	Elementos Finitos
L	Comprimento útil do eixo principal ou o lagrangeano do sistema
L_1	Distância vertical entre o acoplamento e o rotor intermediário
L_2	Distância vertical entre o rotor intermediário e o rotor principal
d	Espessura do eixo principal
D_{r_2}	Diâmetro do rotor intermediário
\bar{L}_2	Espessura do rotor intermediário
D_{r_1}	Diâmetro do rotor principal
\bar{L}_1	Espessura do rotor principal
\mathbf{q}	Vetor de coordenadas generalizadas nas equações de Lagrange
\mathbf{Q}	Vetor de forças generalizadas nas equações de Lagrange
T	Energia cinética do sistema
U	Energia potencial total do sistema
U_g	Energia potencial gravitacional do sistema
U_{el}	Energia potencial gravitacional do sistema
\mathbf{W}	Vetor peso do sistema
ρ	Densidade do aço
A	Área da seção transversal do eixo principal
J_p	Momento polar de inércia da área transversal do eixo principal

J	Momento de inércia da área transversal do eixo principal
V_e	Volume do pino de excentricidade no rotor intermediário
\mathbf{v}	Vetor velocidade linear
$\boldsymbol{\omega}_c$	Vetor velocidade angular
\mathbf{v}_m	Vetor velocidade linear do pino de excentricidade no rotor intermediário
\mathbf{J}_t	Tensor de inércia por comprimento do eixo, obtido no referencial B_2
N	Número total de elementos na malha de elementos finitos
N_1	Número de elementos finitos entre o acoplamento e o rotor intermediário
N_2	Número de elementos finitos entre o rotor intermediário e o rotor principal
N_g	$[= 6(N + 1)]$ Número total de variáveis de deslocamento, sem restrições, para uma malha com N elementos
	Menor número inteiro maior que
	Maior número inteiro menor que
\mathbf{M}_1	Matriz fixa de inércia no modelo em Elementos Finitos
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento no modelo em Elementos Finitos
\mathbf{K}	Matriz de rigidez no modelo em Elementos Finitos, em torno da configuração não deformada
$\bar{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez no modelo em Elementos Finitos, em torno da configuração de equilíbrio
\mathbf{B}	Matriz de ganho no modelo em Elementos Finitos
$\mathbf{M}_{1,r}$	Matriz fixa de inércia no modelo em Elementos Finitos, com aplicação das restrições intrínsecas
\mathbf{C}_r	Matriz de amortecimento no modelo em Elementos Finitos, com aplicação das restrições intrínsecas
\mathbf{K}_r	Matriz de rigidez no modelo em Elementos Finitos, em torno da configuração não deformada, com aplicação das restrições intrínsecas

$\overline{\mathbf{K}}_r$	Matriz de rigidez no modelo em Elementos Finitos, em torno da configuração de equilíbrio, com aplicação das restrições intrínsecas
\mathbf{B}_r	Matriz de ganho no modelo em Elementos Finitos, com aplicação das restrições intrínsecas
λ	Vetor com multiplicadores de Lagrange, na aplicação das restrições às equações da dinâmica em Elementos Finitos.
r	Número inicial de restrições aplicadas ao modelo em Elementos Finitos, mantendo-se os dois modos de corpo rígido do sistema.
\mathbf{C}_{est}	Matriz de amortecimento estrutural
\mathbf{C}_{conc}	Matriz de amortecimento devida a amortecimentos concentrados em nós da malha
$\mathbf{I}_{d,n}$	Matriz identidade de ordem n
$\mathbf{I}_{d,n}^{c_j}$	j -ésima coluna da matriz $\mathbf{I}_{d,n}$
$\mathbf{I}_{d,n}^{l_j}$	j -ésima linha da matriz $\mathbf{I}_{d,n}$
u_C	Distância vertical entre o rotor principal e os pinos de atrito, com a coluna na condição de não-deformação.
k_{N+1}	Rigidez longitudinal no contato de atrito.
\mathbf{Y}_2	Vetor contendo a saída y_2 e suas derivadas no tempo, até a de quarta ordem.
LVC	Algoritmo de limitação das variáveis cíclicas
t_{09}	Parâmetros da trajetória desejada para o movimento de rotação; instante em que a velocidade desejada alcança 90% da velocidade de referência
Γ	Matriz de restrição via multiplicadores de Lagrange
\mathbf{h}	Vetor de restrição via multiplicadores de Lagrange
$\lceil x \rceil$	menor inteiro maior que x
$\lfloor x \rfloor$	maior inteiro menor que x

Sumário

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Objetivos	26
1.2	Metodologia	26
1.3	Descrição da tese	27
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
3	MODELOS	40
3.1	Modelo físico	40
3.2	Modelagem	44
3.2.1	Modelo do sistema em Elementos Finitos	44
3.2.1.1	Expressão analítica da energia cinética	44
3.2.1.2	Expressão analítica da energia potencial	54
3.2.1.3	Equação de Lagrange do sistema	56
3.2.1.4	Malha de elementos finitos	57
3.2.1.5	Discretização da expressão da energia cinética	58
3.2.1.6	Discretização da expressão da energia potencial	59
3.2.1.7	Modelo completo sem aplicação de restrições	62
3.2.1.8	Modelo completo com aplicação intrínseca de restrições	62
3.2.1.9	Ponto de equilíbrio	64
3.2.1.10	Equação da dinâmica em torno do ponto de equilíbrio	65
3.2.1.11	Modelo completo com aplicação extrínseca de restrições	67
3.2.1.12	Modelo simplificado em torno do ponto equilíbrio	69
3.2.2	Matriz de amortecimento	73
3.2.3	Interações de atrito no rotor principal	76
3.2.3.1	Modelos de atrito seco	76
3.2.3.2	Força generalizada de atrito na equação da dinâmica	79
3.2.4	Interações de impacto e deslizamento no rotor intermediário	81
3.2.4.1	Modelo de <i>rub</i>	81
3.2.4.2	Força generalizada de <i>rub</i> na equação da dinâmica	83
3.2.4.3	Suavização de curvas para estabilidade numérica	86
3.2.5	Modelo do sistema em Parâmetros Concentrados	88
3.2.5.1	Modelo com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal	88
3.2.5.2	Modelo sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal	100
3.2.5.3	Forma normal do modelo sem acoplamento das dinâmicas	105

4	ESTRATÉGIA DE CONTROLE	111
4.1	Trajetória desejada	111
4.2	Lei de controle	115
4.3	Ajuste de modelo	118
5	SIMULAÇÕES	125
5.1	Dinâmicas longitudinal e de torção em malha aberta	125
5.2	Dinâmica interna e camada limite dinâmica para a trajetória desejada	127
5.3	Equação completa com lei de controle, sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal	129
5.4	Equação completa com lei de controle, com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal	131
5.5	Equação do modelo em elementos finitos com lei de controle	135
5.5.1	Simulações em malha fechada, sem torque de atrito	136
5.5.2	Simulações em malha fechada, com torque de atrito	140
6	BANCADA EXPERIMENTAL	143
6.1	Sistema mecânico da bancada experimental	143
6.1.1	Subsistema superior	143
6.1.2	Subsistema intermediário	146
6.1.3	Subsistema inferior	147
6.2	Projeto eletrônico e instrumentação	148
6.2.1	Servo-driver e driver do motor de passo	149
6.2.2	Encoders	149
6.2.3	Células de carga	150
6.2.4	Sensores de distância	150
6.2.5	Placa de aquisição e processamento	151
6.3	Ensaios	152
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	158
8	TRABALHOS FUTUROS	160
	REFERÊNCIAS	161
	ANEXO A – FUNÇÕES DE FORMA	165
	ANEXO B – EXPRESSÃO FINAL DA ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA POR COMPRIMENTO DO EIXO	169
	ANEXO C – DEMONSTRAÇÕES	174

C.1	Discretização da energia cinética	174
C.2	Equação global de movimento, sem aplicação das restrições	178
C.3	Equações de movimento com restrições por multiplicadores de Lagrange	180
C.4	Equações das dinâmicas axial e de torção reescritas com a formulação de Newmark	182
C.5	Dinâmica interna e camada limite dinâmica para a trajetória desejada	185
C.6	Equação completa com lei de controle, sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal	187
C.7	Equação completa com lei de controle, com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal	189
C.7.1	Sem atrito	189
C.7.2	Com atrito	191
ANEXO D – IDENTIFICAÇÃO DE MODOS DE VIBRAÇÃO ESPECIAIS		193
D.1	Criação de um vetor artificial ou de referência	193
D.2	Modelo em parâmetros concentrados	194
D.2.1	Autovetores da dinâmica de torção	195
D.2.2	Autovetores da dinâmica longitudinal	199
D.3	Construção dos vetores artificiais	200
D.3.1	Vetores artificiais para identificação dos modos de torção	200
D.3.2	Vetores artificiais para identificação dos modos longitudinais	201
D.3.3	Vetores artificiais para identificação dos modos de precessão	202
D.3.4	Alguns resultados	204
ANEXO E – MATRIZ DE AMORTECIMENTO ESTRUTURAL		206
ANEXO F – ZONA DE INSTABILIDADE E TRAJETÓRIA DESEJADA		215
ANEXO G – RELAÇÃO ENTRE ÂNGULOS DE EULER E DE TAIT-BRYAN		223
ANEXO H – CÁLCULOS GEOMÉTRICOS PARA SENSORES DE DISTÂNCIA		227
H.1	Órbita do centro geométrico	227
H.2	Ajustes e calibração dos sensores de distância	231
ANEXO I – PLANTA DA PLACA DE AQUISIÇÃO E PROCESSAMENTO		234

	ANEXO J – CONCEITOS	236
J.1	Equação de estados na forma normal	236
J.1.1	Dinâmica externa do sistema	236
J.1.2	Difeomorfismo	239
J.1.3	Dinâmica interna do sistema	240
J.1.4	Equação de estado na forma normal para o caso linear	243
J.1.5	Inversão da função difeomorfismo no caso não linear	244
J.2	Modos deslizantes	244
J.2.1	Lei de controle por modos deslizantes para sistemas SISO	246
J.2.2	Lei de controle com camada limite para sistemas SISO	248
J.2.2.1	Conceito de camada limite	248
J.2.2.2	Comportamento dinâmico do sistema no interior da camada limite	250
J.2.2.3	Lei de controle e condição de escorregamento com camada limite	252
J.2.3	Lei de controle por modos deslizantes para sistemas MIMO	255
J.2.4	Lei de controle com camada limite para sistemas MIMO	258
J.2.4.1	Comportamento dinâmico do sistema no interior da camada limite	264
J.3	Integração por método de Newmark/Newton-Raphson	266
J.4	Algumas operações elementares	269

1 Introdução

O processo de perfuração de um poço de petróleo consiste na abertura de um furo em terreno rochoso através da retirada de cascalho por meio de uma broca, até que o reservatório seja alcançado. Para que o processo se desenvolva, é necessário um dispositivo de transporte de energia rotativa da superfície, onde se encontra a fonte de energia - o motor - até o suporte da broca, fazendo-o girar; e de um dispositivo que transporte o cascalho retirado do fundo do poço até a superfície. Para tal fim, a indústria de petróleo e gás conta com uma técnica, denominada perfuração rotativa, que consiste de um sistema mecânico e de um sistema hidráulico combinados para o transporte de energia e cascalho (SOUSA et al., 2012), conforme ilustrado na figura (1).

O sistema mecânico é constituído por uma coluna cilíndrica oca, chamada coluna de perfuração, projetada para atuar em regime de tração; pelo BHA - *bottom hole assembly* - que é um cilindro oco mais robusto, projetado para suportar carregamentos de compressão; e pela broca. A extremidade superior da coluna encontra-se acoplada a uma mesa rotativa na superfície, a qual alimenta o sistema com energia rotativa. Em sua extremidade inferior, a coluna de perfuração está fixa ao BHA, que por sua vez comporta a broca (ver figura (1)). O principal papel do BHA é gerar o peso sobre a broca durante a retirada de cascalho e garantir que a coluna permaneça atuando em regime de tração.

Existe também um sistema de içamento na superfície que atua movimentando a coluna de perfuração na direção vertical. Tanto o sistema de içamento quanto a coluna encontram-se sustentados pela torre de perfuração.

O sistema hidráulico, por sua vez, é constituído por uma bomba, que se encontra na torre de perfuração; pelo fluido de perfuração; e por canais de transporte do fluido. A bomba garante o fluxo do fluido de perfuração inicialmente pelo interior da coluna num movimento descendente, no sentido superfície-broca, e posteriormente pela fresta anular entre a coluna de perfuração e a parede do furo, num movimento ascendente (ver figura (2)).

Mais detalhadamente, o fluido de perfuração é pressurizado pela bomba (*mud pump*) e conduzido por dutos flexíveis (*standpipe*) até uma estrutura comprida e esbelta, com perfil transversal hexagonal, chamada *kelly*. O perfil hexagonal dessa estrutura possibilita o acoplamento com o furo hexagonal da mesa rotativa, permitindo um movimento simultâneo descendente/ascendente e de rotação da *kelly*. Basicamente, a *kelly* recebe a tração rotativa da mesa motora e transfere, por meio de um engate, essa energia rotativa para o topo da coluna de perfuração, ao mesmo tempo que avança para baixo, liberando maior peso sobre a broca. Enquanto isso, o fluido de perfuração segue um movimento sempre descendente no

1. Bloco de coroa
2. Roldana e gancho
3. Saque
4. Roldana da Kelly
5. Mangueira
6. Tubo
7. Bomba de lama
8. Kelly
9. Acionamento rotativo
10. Mesa rotativa
11. Tubo de perfuração
12. Engate
13. Estabilizadores
14. Colar de perfuração
15. Broca
16. Revestimento
17. Dispositivo de segurança anti explosão
18. Torre

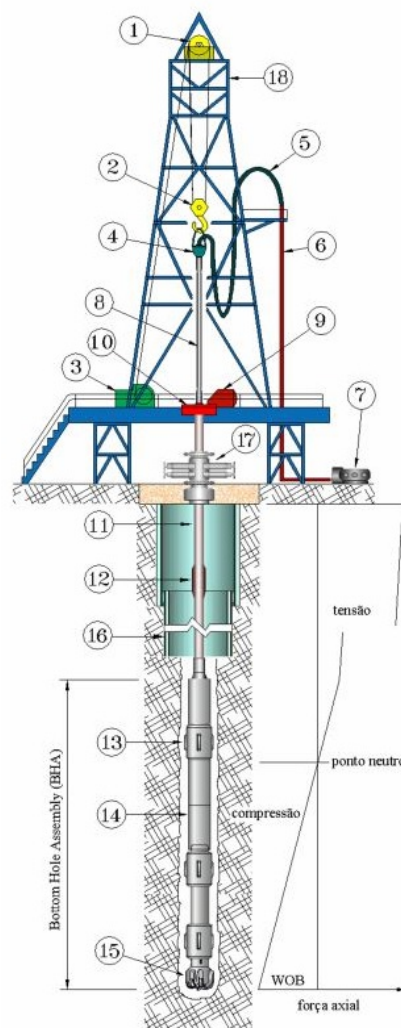


Figura 1 – Sonda de perfuração (RITTO, 2010).

interior da *kelly*, seguindo posteriormente pelo interior da coluna de perfuração. O fluido chega até a extremidade inferior da coluna, ultrapassando a broca (*bit*) a uma pressão elevada (ver figura (2)).

A partir desse momento, o fluido começa um movimento ascendente pela fresta anular entre a parede interna do furo e a parede externa da coluna de perfuração, carregando consigo o cascalho arrancado do fundo do poço pelo contato com a broca. Nesse movimento ascendente, antes de alcançar novamente a *kelly*, o fluido é desviado por meio de uma estrutura de saída da coluna (*bell nipple*), sendo conduzido, já na superfície, primeiramente ao agitador de xisto (*shale shaker*) onde passa por uma primeira purificação de cascalho com maior granulometria. Logo em seguida, o fluido passa pela tanque agitador (*shaker tank*) onde passa para uma segunda purificação de cascalho com menor granulometria. A etapa seguinte do fluido é o tanque de sucção (*suction tank*), onde o fluido receberá um tratamento com aditivos, para ajuste de peso específico, como último estágio antes de ser novamente pressurizado pela bomba e reconduzido à *kelly* por meio dos dutos flexíveis, reiniciando o ciclo.

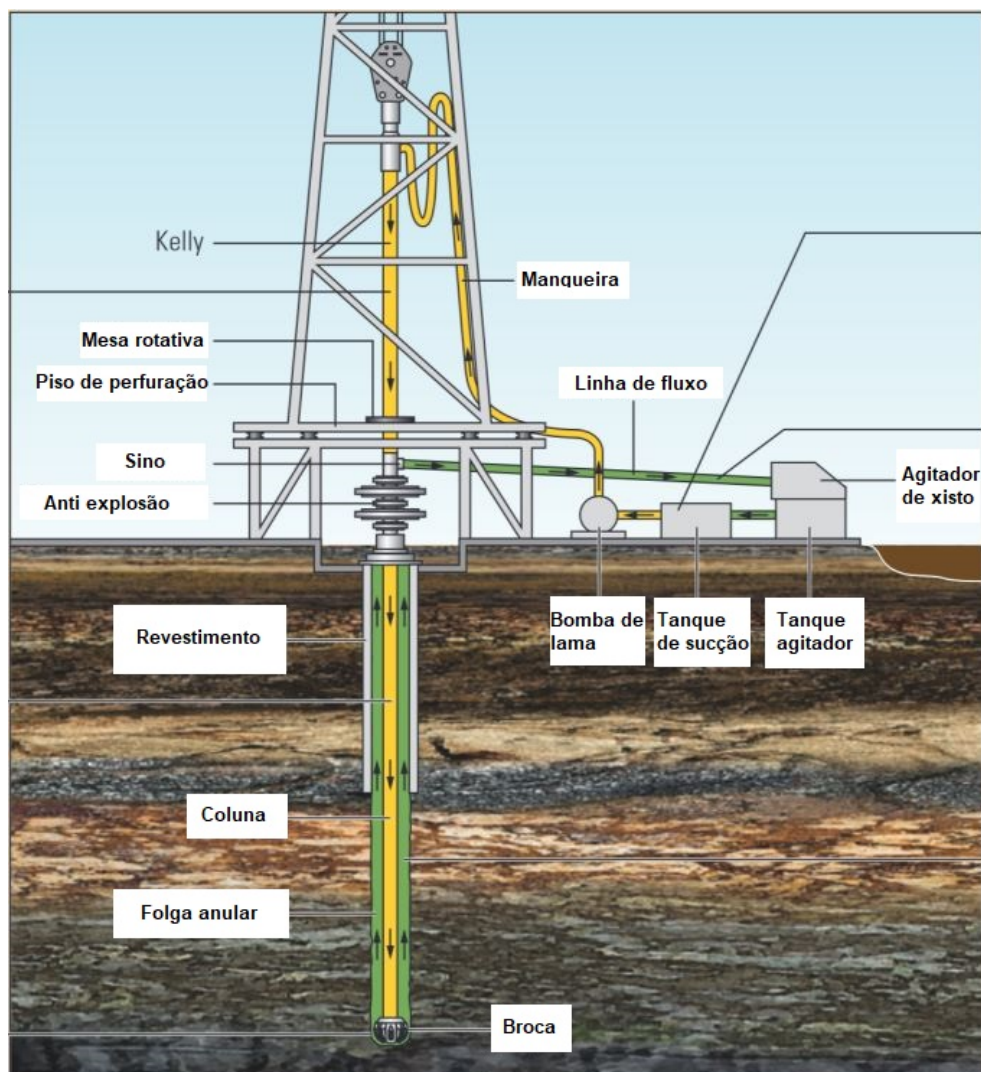


Figura 2 – Ciclo do fluido de perfuração (Schlumberger Developers, 2022a).

O fluido possui propriedades específicas, como alta viscosidade e comportamento não-Newtoniano, de modo que possa desempenhar melhor suas funções no sistema. O fluido, de um modo geral, atua no arrefecimento e lubrificação da broca durante o processo de perfuração; no transporte do cascalho retirado pela broca até a superfície; garante a estabilidade do furo durante o processo de perfuração, contrabalançando a pressão externa; e contribui com a estabilidade do movimento da coluna, amortecendo efeitos mecânicos das diversas perturbações geradas sobre a coluna na sua interação com a rocha. O comportamento não-Newtoniano confere ao fluido uma consistência gelatinosa. Essa propriedade é necessária, pois o processo de perfuração é interrompido diversas vezes para acoplamento de um novo *drill pipe* (unidade de cilindros metálicos que compõem a coluna de perfuração) à medida que a coluna avança na perfuração, e durante esse período de estagnação o cascalho deve permanecer suspenso no fluido de perfuração.

Junto ao BHA existem estruturas fixas chamadas estabilizadores, cuja função é centralizar a coluna de perfuração, afastar a coluna da parede do furo e manter o diâmetro

do poço. São compostos de aletas que tocam a parede do furo sem obstruírem a passagem do fluido de perfuração (ver fig. (3)). Constituem juntamente com a interação broca-rocha uma das principais fontes de atrito sobre a coluna de perfuração em poços verticais.



Figura 3 – Estabilizadores da coluna de perfuração (Schlumberger Developers, 2022b).

São três os parâmetros de controle do processo de perfuração que estão disponíveis ao operador: o peso sobre a broca (WOB - *Weight On Bit*), a velocidade de rotação da coluna de perfuração, e a vazão do fluido de perfuração. Na prática o peso real sobre a broca não é medido diretamente, e por isso é estimado como a diferença entre o peso total da coluna de perfuração livre e a carga de tração no gancho onde está apoiada a coluna em sua extremidade superior, quando a mesma se encontra apoiada no fundo do poço. Na realidade há uma certa variabilidade no valor real de WOB, por conta do contato de elementos da coluna na parede do furo e do regime de vibração axial ao qual a broca está sujeita. Por sua vez, a velocidade de rotação da broca é estimada pela velocidade de rotação imposta pela mesa rotativa, mas também pode sofrer uma grande variabilidade devido à alta flexibilidade torcional da coluna de perfuração.

Um outro fenômeno de grande importância na perfuração devido ao prejuízo que acarreta é a vibração da coluna, cujos efeitos costumam ser mais significativos na região próxima à broca, por estar em regime de compressão.

Há diversos regimes de vibração do sistema, mas todos eles se resumem a uma combinação de três tipos de vibração bem distintas uma da outra: a vibração lateral (*whirl*), a vibração de torção (*stick-slip*) e a vibração axial (*bit bounce*), como pode ser observado na figura (4). Constituem a principal causa da perda de eficiência no processo de perfuração, acelerando o desgaste da broca e a falha por fadiga de componentes da coluna. Quando as vibrações são severas, ou seja, no caso de excitação de alguma frequência natural do

sistema, surgem disfunções que podem conduzir a uma falha prematura do equipamento. O desacoplamento dos três tipos de vibração citados é assumido em determinados modelos a título de hipótese simplificadora, pois na realidade cada um deles pode induzir os outros dois.

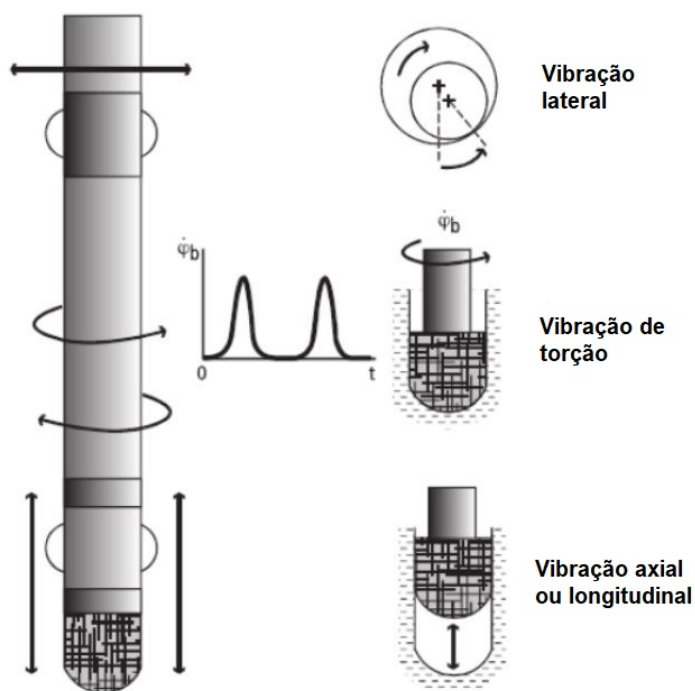


Figura 4 – Tipos de vibração (LÓPEZ, 2010).

As vibrações de torção, por sua vez, são geradas quando o torque resistivo na interação broca-rocha contrapõe-se consideravelmente aos efeitos de torque de tração da coluna, tornando nula a velocidade angular da broca. Enquanto isso a mesa rotativa continua girando, provocando o acúmulo de energia de torção na coluna e conseqüente aumento do torque de reação sobre o motor e sobre a broca. Quando este torque acumulado atinge um valor suficiente para vencer o torque resistivo, o BHA é acelerado a velocidades angulares que podem atingir até três vezes o valor da rotação da mesa rotativa. Essa alternância entre acúmulo de torque e rompimento do torque resistivo é um fenômeno conhecido como *stick-slip*.

Destacando-se o fenômeno da fadiga, as vibrações laterais são consideradas como as mais destrutivas, pois geram tensões cíclicas de alta frequência no BHA. São geradas pelo movimento lateral do BHA no fundo do poço, e é minimizada pela atuação dos estabilizadores.

Em contrapartida, o contato dos estabilizadores com a parede do furo, associado às vibrações laterais e à excentricidade da coluna, podem gerar um movimento de precessão da órbita formada pelo centro do BHA, tanto no mesmo sentido de rotação da mesa rotativa (*forward rub*, se houver contato com a parede do furo, e *forward whirl*, se não houver o

contato), quanto no sentido contrário (*backward rub* ou *backward whirl*), conforme ilustrado bem simplificada na figura (4), na ilustração da vibração lateral. A depender da relação entre a excentricidade local da coluna e a folga existente entre os estabilizadores e a parede interna do furo, é possível que ocorram sucessivos choques entre esses elementos, num comportamento periódico, quaseperiódico ou caótico do sistema, o que seria extremamente danoso para o processo.

Todos esses efeitos rotativos descritos são consequência da interação lateral da estrutura rotativa com a parede interna do furo, interação caracterizada pelo contato intermitente entre esses elementos, tanto de impacto quanto de fricção. Essa interação, que produz efeitos consideráveis na dinâmica rotativa do sistema, é denominada *rubbing*.

Uma outra vertente da técnica de perfuração rotativa é a perfuração direcional, na qual a coluna pode sofrer curvaturas por conta de desvios propositalis do BHA ao longo do processo. Essa técnica permite a viabilidade de exploração de poços em regiões cuja superfície ao ar livre imediatamente superior não permita a instalação da torre de perfuração. Em alguns casos de exploração *off-shore*, a perfuração direcional partindo da costa torna-se mais viável que a perfuração vertical.

A figura (5) ilustra a técnica de perfuração direcional.

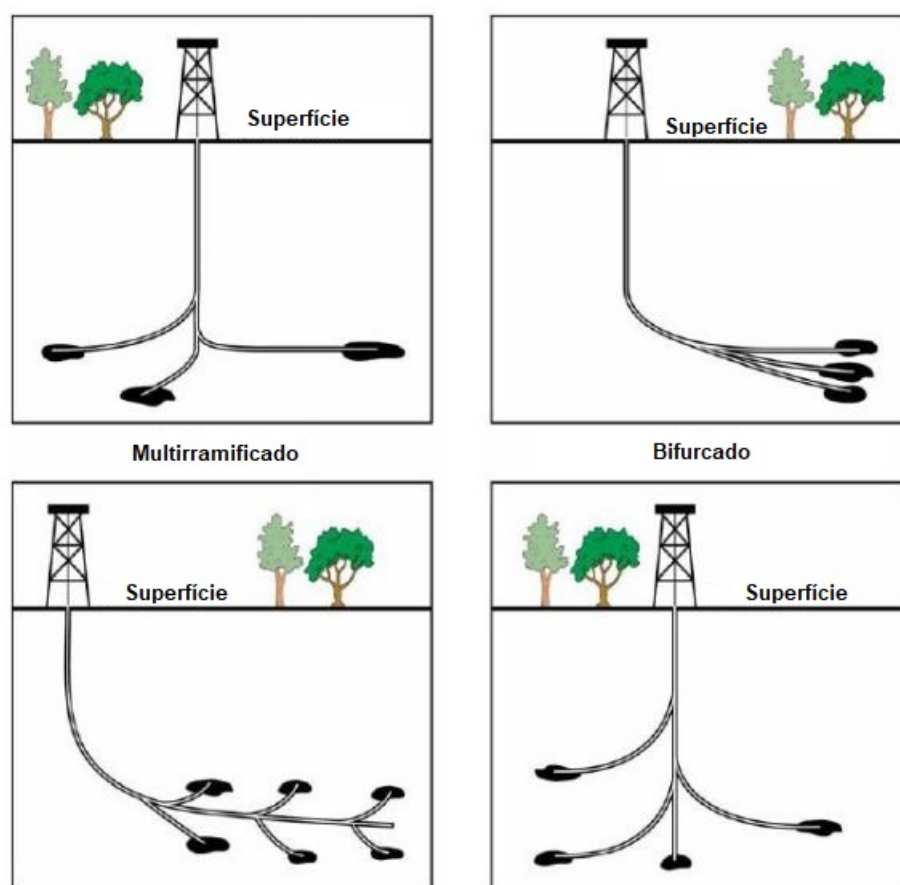


Figura 5 – Tipos de perfuração direcional (RITTO, 2010).

Na perfuração direcional tanto o BHA quanto parte da coluna de perfuração podem se encontrar em orientações praticamente horizontais, e os efeitos de *forward rub*, *backward rub* e comportamento caótico aumentam em chances de ocorrência, uma vez que se aumenta a área de interação lateral dos componentes rotativos de fundo com a parede do furo.

1.1 Objetivos

Inspirando-se no sistema real de perfuração utilizado pela indústria de extração de petróleo, o principal objetivo desse trabalho é propor uma estratégia de controle para uma bancada de testes com estrutura flexível extremamente esbelta, submetida à torção e flexão.

Durante o Mestrado, foi abordada apenas a dinâmica de torção para uma bancada de testes similar, na qual foi considerado o fenômeno do *stick-slip* em duas posições distintas, por meio da aplicação de atrito seco (SANTOS, 2015). Esse primeiro experimento foi fundamental na elaboração de um projeto mais amadurecido para a bancada experimental do presente trabalho. Neste novo projeto, por sua vez, deu-se maior foco às dinâmicas de torção e de flexão em uma nova bancada de testes, a qual difere da bancada original pelos fenômenos abordados, e pelos meios de atuação: (i) ao invés de se induzir *stick-slip* em duas regiões distintas, optou-se por manter a aplicação de atrito seco numa região, e induzir a ocorrência de impacto e deslizamento (*rub*) na outra; (ii) optou-se também pela bi-atuação, ou seja, implementação de atuadores independentes para os movimentos de torção e deslocamento longitudinal. A inserção do *stick-slip*, do *rub* e da bi-atuação na definição do novo modelo físico aproxima-o ainda mais do sistema de perfuração utilizado na indústria do óleo e gás, se comparado ao modelo físico utilizado nos trabalhos do mestrado.

O problema se enquadra na grande área de *Controle de Estruturas Flexíveis*. A implementação da estratégia de controle contribui com uma maior compreensão geral do problema envolvendo a técnica de perfuração rotativa, utilizada pela indústria de extração de petróleo e gás.

1.2 Metodologia

A bancada de testes foi idealizada não como uma cópia fiel, em escala, do sistema real de perfuração, mas como um sistema no qual fosse possível observar, por meio de ensaios, alguns fenômenos comuns na técnica da perfuração rotativa, mais especificamente o *stick-slip* e o *rub*. As dimensões dos componentes de inércia e rigidez foram escolhidas de modo que a bancada tivesse as primeiras duas frequências de torção com mesma ordem de grandeza das do sistema real. Também conforme o sistema real de perfuração utilizado

na indústria, foram consideradas, na bancada, atuações para os movimentos de rotação e longitudinal dos componentes rotativos. Para o movimento de rotação, foi instalado um servo-motor de potência, enquanto que para o movimento longitudinal, foi instalado um motor de passo. A precisão obtida no movimento longitudinal chega a décimo de milímetro. Para cada motor foi instalado um controlador dedicado (*driver*).

Para realização das simulações, foram utilizadas tanto a modelagem em *elementos finitos* como em *parâmetros concentrados*. Na representação final do sistema a ser controlado, foi utilizado o modelo em elementos finitos, enquanto que a lei de controle foi definida a partir de um modelo em parâmetros concentrados, ajustado de modo a ter as mesmas duas primeiras frequências de torção e longitudinais apresentadas pelo modelo em elementos finitos.

Por sua vez, a lei de controle robusto de seguimento de trajetória, para o movimento de rotação, foi definida com base na técnica de modos deslizantes, conforme a abordagem em (SLOTINE; LI et al., 1991). Devido ao problema da alta frequência de chaveamento na entrada, já bem conhecido na literatura envolvendo modos deslizantes, a lei de controle foi definida considerando uma camada limite dinâmica. Como detalhado ao longo do presente trabalho, se por um lado a camada limite eliminou a alta frequência de chaveamento na entrada, por outro inseriu um erro em regime no seguimento da trajetória, que foi avaliado como dentro de uma tolerância aceitável.

1.3 Descrição da tese

O texto foi organizado em oito capítulos. No capítulo 1, o problema em estudo foi situado no contexto do sistema real de perfuração, utilizado atualmente na indústria de óleo e gás. Foram definidos os objetivos do trabalho, bem como foi descrita a metodologia de trabalho.

No capítulo 2, foi realizada uma revisão da literatura quanto aos seguintes ramos de interesse para o presente trabalho: (i) principais técnicas de modelagem utilizadas para sistemas rotativos extremamente esbeltos; (ii) modelos de atrito seco e condições para ocorrência de *stick-slip*; (iii) modelagens de impacto e escorregamento (*rub*) para sistemas rotativos com folga; (iv) configurações de bancadas experimentais utilizadas em laboratório; (v) principais métodos utilizados na reconstrução de variáveis de estado em sistemas com parâmetros descontínuos, para implementação de observador em bancada experimental; (vi) e por fim, as principais estratégias de controle utilizados em sistemas similares ao do presente trabalho.

Já no capítulo 3, foi descrita a modelagem do sistema, por meio das técnicas de elementos finitos e parâmetros concentrados. No caso do modelo em elementos finitos, foram também discutidas duas formas de aplicação das restrições nas extremidades: uma

denominada *intrínseca*, com menos variáveis na integração, e bastante útil para a obtenção do ponto de equilíbrio do sistema; e outra, denominada *extrínseca*, realizada por meio dos *multiplicadores de Lagrange*. Foram também apresentados os modelos de atrito seco e de *rub* adotados nas simulações. Por fim, partindo-se do modelo em parâmetros concentrados, foram obtidas *formas normais* para os modelos que descrevem, em separado, as dinâmicas de torção e longitudinal. A forma normal tem particular interesse para a definição da lei de controle.

Por sua vez, no capítulo 4 foram descritos: (i) a trajetória desejada, tanto para o movimento longitudinal descendente quanto para o de rotação; (ii) a lei de controle propriamente dita, com a inclusão do modelo de atrito no metamodelo; (iii) e o ajuste do modelo em parâmetros concentrados, utilizado na definição da lei de controle.

No capítulo 5, foram apresentados diversos resultados referentes às simulações do sistema, tanto em malha aberta quanto em malha fechada. Em particular, foram realizadas simulações em malha fechada utilizando-se modelos em parâmetros concentrados e o modelo em elementos finitos para representação do sistema a ser controlado.

Já o capítulo 6 foi dedicado à descrição da bancada experimental, com ênfase no projeto e execução do sistema mecânico e do *hardware* do sistema eletrônico. Foram enumerados os sensores e os atuadores utilizados, com algumas de suas especificações. O capítulo foi encerrado com alguns ensaios em malha aberta, com a ilustração dos sinais adquiridos pelos sensores e breves discussões demonstrando o funcionamento da bancada conforme o esperado.

Por fim, os capítulos 7 e 8 foram dedicados, respectivamente, a um fechamento resumido dos resultados obtidos e à enumeração de problemas a serem estudados como continuidade do presente trabalho.

2 Revisão Bibliográfica

Em geral, as vibrações que acontecem no fundo do poço de perfuração são de grande complexidade e, por isso, em muitos trabalhos teóricos procurou-se tratar os diferentes tipos de vibração individualmente. Seguindo essa linha, em (ANDRADE, 2013) foram realizados estudos de vibração de torção numa bancada de testes, na qual se procurou eliminar os efeitos do acoplamento mecânico entre as vibrações laterais e torcionais restringindo os movimentos laterais dos rotores da bancada por meio de mancais.

Em (REAL et al., 2018), foi descrita uma bancada experimental instrumentada, representativa de uma coluna de perfuração vertical. A bancada inclui uma broca de perfuração e um corpo de prova. É possível estimar, por meio de *encoders* e células de carga: posição angular e velocidade angular nos discos que se encontram nas duas extremidades do eixo esbelto, torque de reação sobre o motor, torque sobre a broca e peso sobre a broca. Foram apresentados uma sequência de ensaios, e um resultado bastante significativo foi a detecção de um comportamento de histerese na curva velocidade de rotação da broca por torque sobre a broca.

Em (YIGIT; CHRISTOFOROU, 1998), foi assumido o acoplamento entre as dinâmicas de torção e lateral. O acoplamento foi implementado apenas considerando o torque sobre a broca (TOB) como função do peso sobre a broca (WOB). Para fins de modelagem, as equações foram obtidas aplicando-se a lei de Newton em coordenadas polares, sendo a velocidade da mesa rotativa no *top drive* a variável escolhida como entrada do sistema, desconsiderando-se assim a dinâmica do motor. O modelo de impacto adotado entre a coluna e a parede interna do furo foi obtido a partir de princípios de quantidade de movimento e impulso, integrando-se as equações de força no tempo, para um pequeno intervalo de tempo de contato.

Em (RITTO; SOIZE; SAMPAIO, 2009), as equações de movimento foram obtidas a partir do Princípio de Hamilton estendido e de uma discretização em Elementos Finitos. Impôs-se ao modelo o acoplamento estrutural das dinâmicas lateral, de torção e axial da coluna de perfuração, assumindo-se para a coluna um campo de deslocamento pré-definido e a relação constitutiva de um material isotrópico com elasticidade linear. O impacto lateral foi modelado como uma força elástica da parede sobre a coluna durante o tempo de contato. A interação broca-rocha foi modelada por meio de equações que acoplaram as vibrações axial e de torção. Foi incluída no modelo a interação fluido-estrutura, simulando a interação entre o fluido de perfuração e a coluna no sistema real. Após a obtenção do modelo determinístico, alguns parâmetros foram assumidos como variáveis dotadas de incertezas, e uma análise estocástica foi realizada pelo método de Monte Carlo. Não foi

considerado no modelo a dinâmica do motor no *top drive*.

Já em (KREUZER; STEIDL, 2009), propôs-se uma metodologia para a construção de modelo em ordem reduzida de um sistema de perfuração sujeito a vibrações do tipo *stick-slip*. Foi demonstrado que, por meio de Projeção de Galerkin sobre as duas primeiras funções características do sistema obtidas a partir de uma transformação de Karhunen-Loève, é possível obter um sistema equivalente reduzido, o qual reproduz as propriedades dinâmicas essenciais do sistema original, como por exemplo, o movimento de *stick-slip*. Partiu-se do princípio de que mais de 99% da energia cinética do sistema é capturada pelas duas primeiras funções características.

Em (HAN; KIM; KARKOUB, 2013), é proposto um método de modelagem da propagação de ondas de torção, axiais e laterais ao longo da coluna de perfuração, baseada na obtenção de uma matriz de transferência de vibração que relaciona dois conjuntos de variáveis referentes às extremidades de uma unidade da coluna. Para um sistema com múltiplas unidades de coluna, a matriz de transferência total seria o produto das matrizes individuais. Essa metodologia apresentou custo computacional significativamente menor que métodos convencionais baseados em Elementos Finitos. Foram deduzidas tanto matrizes de transferência considerando o desacoplamento das dinâmicas lateral, de torção e longitudinal, quanto matrizes de transferência considerando o acoplamento das três dinâmicas. Os resultados obtidos foram bastante similares para as duas abordagens em diversas simulações. A metodologia foi validada por meio de ensaios experimentais e simulações em ANSYS.

Alguns trabalhos mais recentes se concentraram no estudo do comportamento dinâmico do sistema rotativo sujeito a atrito seco. Como exemplo, em (NAVARRO-LÓPEZ; CORTÉS, 2007a) foi feita uma análise de estabilidade dinâmica do sistema em torno de diferentes velocidades de equilíbrio de rotação da broca. A finalidade desse trabalho foi o de oferecer procedimentos que pudessem ser realizados pelo operador de modo a mitigar instabilidades no movimento da broca. Duas variáveis de entrada foram escolhidas para essa análise: o peso sobre broca e o torque de entrada na mesa rotativa. A velocidade de rotação da broca foi a variável de saída. Foram detectadas bifurcações de Hopf em diagramas de velocidade de rotação *versus* peso sobre a broca, com torque de entrada constante na mesa rotativa. Foram detectadas bifurcações de Hopf também em diagramas de velocidade de rotação *versus* torque de entrada, com peso constante sobre a broca. O modelo utilizado se baseou na hipótese de parâmetros concentrados, e foi considerada apenas a dinâmica de torção do sistema. O modelo incluiu também em sua formulação o fato de que o comprimento da coluna de perfuração aumenta ao longo do processo de perfuração. O artigo apresentou dentre os resultados mapas de velocidade angular *versus* peso sobre a broca, indicando as regiões com estabilidade de operação.

Nessa mesma linha da análise do comportamento dinâmico do sistema, em (RI-

(CHARD; GERMAI; DETOURNAY, 2007) buscou-se compreender a natureza da interação broca-rocha por meio de um modelo refinado considerando parâmetros de corte, bem como sua real influência no aparecimento de *stick-slip*. As análises foram realizadas com o auxílio de um modelo discreto que levou em conta dois tipos de vibração: axial e de torção. Por hipótese, as vibrações axiais e de torção foram acopladas apenas na interação broca-rocha, na qual o peso sobre a broca, com influência direta sobre o torque de atrito, incluiu os efeitos das oscilações longitudinais. Nesse artigo, o trabalho de (ANDRONOV; VITT; KHAIKIN, 2013) é citado ao se afirmar que uma condição suficiente para o surgimento de instabilidades em atrito permanente é a existência de amortecimento positivo na vizinhança de velocidade angular nula, ou seja:

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial \Omega} \right|_{\Omega \in (-\epsilon, \epsilon)} > 0 \quad (2.1)$$

sendo Ω a velocidade de rotação e μ o coeficiente de atrito como função da velocidade.

Em (RITTO; SOIZE; SAMPAIO, 2009), um modelo computacional estocástico é proposto considerando a incerteza de parâmetros relacionados ao modelo da interação broca-rocha. No modelo final foram considerados também a interação fluido-estrutura entre a coluna e a lama de perfuração e as forças de impacto. As equações da dinâmica foram discretizadas por meio do método de elementos finitos.

Considerando-se outros fenômenos, certos tipos de folgas associados aos elementos rotativos do sistema, em conjunto com diferentes regimes de atrito entre esses elementos, possibilitam o surgimento de outros tipos de comportamento dinâmico não lineares, sendo alguns já bem evidenciados na literatura: *forward rub*, *backward rub* e comportamento caótico do sistema. As interações de contato no conjunto rotor-estator, também conhecidas como *rubbing*, foram bastante estudadas.

Em (PICCOLI, 1994) e em (PICCOLI; WEBER, 1998) foi desenvolvido um método para identificação, a partir de dados experimentais, de comportamento caótico de um rotor sujeito a folgas. Foi implementado um modelo preditivo baseado em conceitos de dinâmica não linear, tais como expoentes de Lorentz e mapas de Poincaré.

Em (LI; PAIDOUSSIS, 1994), foi realizado um estudo teórico do fenômeno *rubbing* para um sistema rotor-estator, levando-se em conta os fatores de maior influência desse fenômeno: folga entre o rotor e o estator, desbalanceamento do rotor, e o atrito seco no contato. Foi assumido, como hipótese de modelo, o choque parcialmente elástico entre o rotor e o estator, e a velocidade angular constante do rotor. Como resultado foram mapeados, num diagrama da excentricidade do rotor *versus* coeficiente de atrito seco entre as superfícies de contato, as condições para ocorrência de *forward rub*, *backward rub*, deslocamentos laterais periódicos e quase-periódicos, e comportamento caótico. Foram apresentados também diagramas de bifurcação do coeficiente de atrito seco *versus* velocidade radial

do rotor, e calculados expoentes de Lyapunov para diferentes coeficientes de atrito, considerando a excentricidade fixa. Pode-se dessa forma identificar faixas de ocorrência de movimento caótico.

Em (JONUŠAS; JUZÈNAS; JUZÈNAS, 2010), foi realizado um estudo sobre ocorrência de *rubbing* no rotor de um compressor industrial. Adotou-se nas simulações um modelo simplificado de impacto, conforme a equação (2.2), sendo F_r a força radial de *rubbing*, F_t a força tangencial (força de atrito), e o deslocamento radial do rotor, δ a folga entre o rotor e outros elementos, k_s a rigidez do corpo da máquina, e μ o coeficiente de atrito tangencial no contato.

$$F_r = \begin{cases} 0 & (e < \delta) \\ (e - \delta)k_s & (e \geq \delta) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$F_t = \mu F_r$$

Na equação (2.2), a condição $e < \delta$ indica a ausência de contato lateral entre o rotor do compressor e seu mancal de apoio, e por isso, tanto a força radial F_r quanto a força tangencial de atrito F_t são nulas. Já a condição $e \geq \delta$ indica a ocorrência de contato lateral entre o rotor e o mancal de apoio, e as forças F_r e F_t seriam estimadas conforme o modelo sugerido na equação (2.2).

Em (CHOY; PADOVAN, 1987), o problema do *rubbing* em sistemas do tipo rotor-estator foi estudado partindo-se de um modelo analítico de dinâmica não-linear. Foram considerados no modelo efeitos da rigidez do estator no contato do rotor, o coeficiente de atrito e desbalanceamento do rotor, além de amortecimentos no sistema devidos ao suporte do rotor (modelo de Jeffcott). Foram analisadas as relações entre diversos parâmetros do sistema: desbalanceamento do rotor, evolução das forças de contato rotor-estator no tempo, níveis de energia, duração de contato, ângulos de incidência e separação no contato rotor-estator, ocorrência de *backward rub*, e órbitas do rotor durante interação com o estator.

Além do *rubbing*, outro fator que pode conduzir o sistema de perfuração a instabilidades é a curva de atrito na interação broca-rocha.

Em (MIHAJLOVIC et al., 2004), foi realizado um estudo experimental sobre a indução de ciclos limite por atrito em sistema rotativo que simula qualitativamente o sistema real de perfuração. A bancada de testes foi constituída de um motor CC, com um redutor na saída, conectado a um rotor (*upper disc*). Esse rotor esteve conectado a outro rotor (*low disc*) por meio de um eixo metálico de 1,5m de comprimento e 2mm de espessura. Associado ao disco inferior, havia um sistema de freio, acionado nos ensaios. O dispositivo foi construído de modo que o eixo metálico estivesse na posição vertical. As curvas de atrito propostas foram validadas por meio de diagramas de bifurcação da

tensão de entrada *versus* velocidade angular do rotor inferior, com e sem acionamento do sistema de freio. Após a estimação dos parâmetros dos modelos de atrito, verificou-se grande exatidão do modelo preditivo em relação aos dados obtidos experimentalmente. Esse artigo é a principal referência para o modelo de atrito adotado no presente trabalho.

As figuras (6) e (7) apresentam, respectivamente, a bancada de testes utilizada, o modelos de atrito para o rotor superior e o modelo de atrito para o rotor inferior.

Na figura (8) é apresentado um dos gráficos utilizados para ilustrar a validação do modelo adotado para os torques de atrito.

As curvas de atrito na figura (7) foram modelados em (MIHAJLOVIC et al., 2004) conforme as eq. (2.3) e (2.4), sendo T_{fu} o torque de atrito no rotor superior, e T_{fl} o torque de atrito no rotor inferior.

No presente trabalho foram utilizados os modelos de atrito propostos em (MIHAJLOVIC et al., 2004), conforme as equações (2.3) e (2.4), obtendo-se as novas estimativas para os parâmetros T_{sup} , b_{up} , T_{sun} , b_{un} , T_{sl} , T_1 , T_2 , T_{sl} , b_l , β_1 e β_2 .

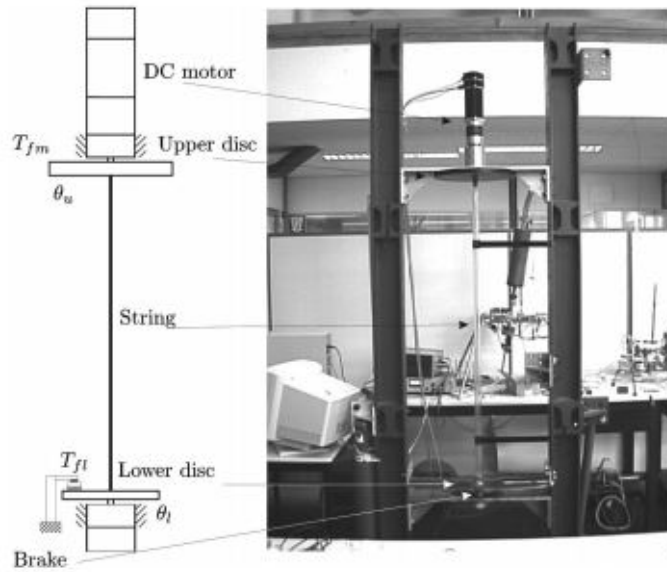


Figura 6 – Dispositivo experimental (MIHAJLOVIC et al., 2004).

$$T_{fu}(\dot{\theta}_u) \in \begin{cases} T_{sup} + b_{up}\dot{\theta}_u & (\dot{\theta}_u > 0) \\ (T_{sun}, T_{sup}) & (\dot{\theta}_u = 0) \\ -T_{sun} + b_{un}\dot{\theta}_u & (\dot{\theta}_u < 0) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$T_{fl}(\dot{\theta}_l) \in \begin{cases} [T_{sl} + T_1 \left(1 - \frac{2}{1+e^{\beta_1|\dot{\theta}_l|}}\right) + T_2 \left(1 - \frac{2}{1+e^{\beta_2|\dot{\theta}_l|}}\right)] \text{sign}(\dot{\theta}_l) + b_l\dot{\theta}_l & (\dot{\theta}_l \neq 0) \\ (-T_{sl}, T_{sl}) & (\dot{\theta}_l = 0) \end{cases} \quad (2.4)$$

Uma das principais dificuldades na estabilização de variáveis de fundo do poço, num sistema de perfuração na indústria de óleo e gás, é a impossibilidade de medição

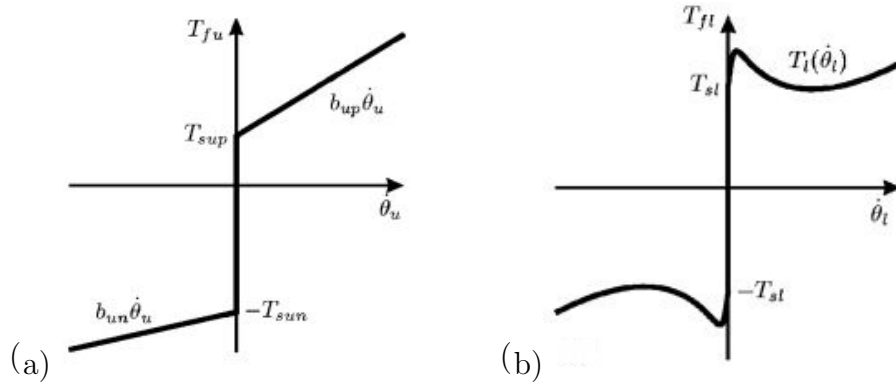


Figura 7 – Curvas de atrito: (a) para o rotor superior; (b) para o rotor inferior (MIHAJLOVIC et al., 2004).

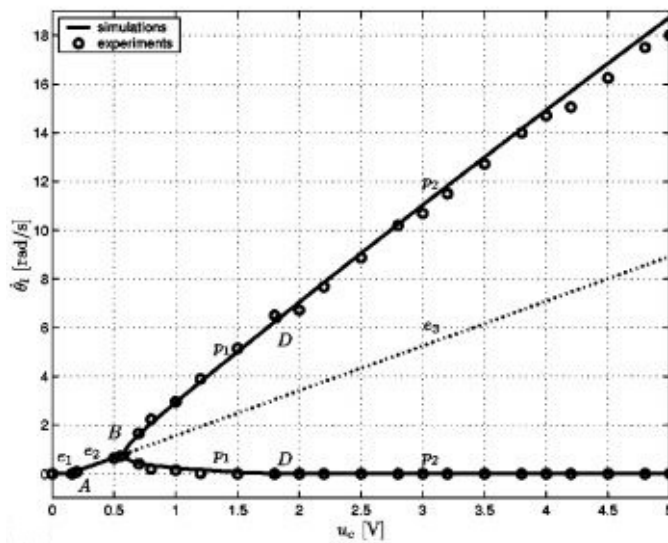


Figura 8 – Diagrama de bifurcação tensão de entrada *versus* velocidade angular do rotor inferior (MIHAJLOVIC et al., 2004).

direta dessas variáveis. O que comumente é realizado é a estimação dessas variáveis por meio de medições na superfície, de grandezas tais como a velocidade de saída no motor, a corrente elétrica no motor e o torque de reação da coluna de perfuração sobre o motor. Dessa forma, a aplicação real de uma estratégia de estabilização para a velocidade de rotação da broca exige a reconstrução das variáveis de estado do sistema, a partir dessas medições.

Em (SAGERT et al., 2013), é proposto um projeto de observador baseado na técnica de modos deslizantes. Esse observador apresentou um bom desempenho para uma classe de sistemas, inclusive com erros de modelo e medidas com ruído.

Em (DRAKUNOV; UTKIN, 1995), é apresentado um tutorial para o projeto de observador, para sistemas lineares e não lineares, baseado em modos deslizantes.

Segundo (DORIS et al., 2008), observadores por modos deslizantes garantem estabilidade assintótica local na estimação de erro do estado, para sistemas lipschitzianos,

ou melhor, por sistemas descritos por funções lipschitzianas, com derivadas descontínuas.

Uma função de valor real, ou seja, $f : R \rightarrow R$, é dita lipschitziana se dados x_1 e x_2 em R , existe uma constante K tal que $|f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$. Esse conceito pode ser estendido para funções com entradas múltiplas.

Pode-se concluir que um sistema dotado com o modelo de atrito proposto em (MIHAJLOVIC et al., 2004) não é lipschitziano, devido à descontinuidade do torque de atrito. O observador por modos deslizantes poderia ser melhor aplicado se se assumisse um modelo de atrito contínuo para o sistema.

Por outro lado, em (DORIS et al., 2008) foi proposto um modelo de observador descontínuo, aplicável a sistemas não suaves e descontínuos, partindo de resultados apresentados por (BROGLIATO; HEEMELS, 2009). (DORIS et al., 2008) apresentou resultados da metodologia proposta aplicada a uma viga experimental. Baseando-se em (BROGLIATO; HEEMELS, 2009), (DORIS et al., 2008) também propôs, com a mesma metodologia, um observador descontínuo para um sistema rotativo com atrito descontínuo.

No que se refere às estratégias de controle para sistemas rotativos sujeitos a atrito, existem muitos estudos na literatura.

Em (VIGUIÉ et al., 2009), partiu-se de um modelo de parâmetros concentrados com dois graus de liberdade e diferentes modelos de atrito seco nas extremidades para uma bancada de testes que simula simplificada o sistema real de perfuração. Propôs-se a supressão de ciclos limites no sistema de torção com atrito, devidos ao efeito de *stick-slip*, por meio de um absorvedor passivo e não linear. Foram obtidos resultados satisfatórios para uma boa faixa de parâmetros de entrada em malha aberta, e foi sugerida a utilização de processos de otimização dos parâmetros do absorvedor para aumento dessa faixa.

Em (KREUZER; STEIDL, 2012), propôs-se uma estratégia de controle da velocidade angular baseada na decomposição da dinâmica da coluna de perfuração em duas ondas viajantes. A velocidade no *top drive* foi controlada de modo a absorver a onda viajante na sua direção, anulando dessa forma a reflexão da faixa de frequências indesejadas da vibração de torção. A onda viajante era detectada por meio de dois sensores, sendo o primeiro posto diretamente no *top drive*, e o segundo na coluna de perfuração, a uma curta distância abaixo da posição do primeiro sensor (5m). Dois cenários foram analisados: um com atrito apenas no *top drive* e no BHA; e outro com atrito aplicado nessas mesmas posições, e também na coluna a uma distância do *top drive* de 3/4 do comprimento total da coluna. O controlador mostrou-se bastante eficiente em ambos os cenários, tanto em simulações quanto em ensaios experimentais.

Em (SAGERT et al., 2013), partiu-se de um modelo contínuo de onda de torção para a coluna de perfuração. Após uma simplificação do modelo inicial, desprezando o amortecimento estrutural ao longo da coluna e a inércia do BHA (*flatness approach*)

propôs-se como lei de controle uma condição de contorno para o *top drive* de modo que a velocidade de rotação na outra extremidade da coluna convergisse exponencialmente para uma trajetória pré-definida. Partindo-se novamente do modelo inicial, mas dessa vez sem a supressão da inércia do BHA, propôs-se como lei de controle uma nova condição de contorno para o *top drive*, para o modelo linearizado em torno da velocidade angular de referência. Por meio de uma *backstepping transformation*, o sistema linearizado foi mapeado num novo sistema com propriedades desejadas de estabilidade. Em seguida, definiu-se uma lei de controle que, em conjunto com o novo sistema, tivesse a solução nula como solução exponencialmente estável. Por fim, aplicou-se uma transformação inversa, obtendo a solução de controle para o sistema linearizado anterior.

Em (NAVARRO-LÓPEZ; LICÉAGA-CASTRO, 2009), partiu-se de um modelo com quatro graus de liberdade e parâmetros concentrados para se analisar as condições de instabilidade no sistema rotativo. Essas condições de instabilidade foram descritas considerando-se o torque no *top drive* e o peso sobre a broca como variáveis de entrada. O torque de atrito foi modelado como uma curva de decaimento exponencial com relação à velocidade angular. Por fim, foi proposta uma estratégia de controle baseada em modos deslizantes com camada limite, para eliminação do *chattering*, e comparou-se o desempenho com resultados obtidos por meio de controlador PI.

Em (ABDULGALIL; SIGUERDIDJANE, 2005), foi proposta uma estratégia de controle do tipo PID baseado em modos deslizantes para um modelo de parâmetros concentrados com dois graus de liberdade. A entrada de controle foi composta por uma componente tipo *feedback linearization* (u_{in}) - para cancelamento das não-linearidades -, uma componente do controlador por modos deslizantes (u_s), e outra de um controlador PID, u_{PID} , tendo como entrada de erro a variável s de deslizamento, conforme as equações (2.5) e (2.6).

$$u_s = k \cdot \text{sign}(s) \quad (2.5)$$

$$u_{PID} = k_p \left(s + \frac{1}{T_i} \int s dt + T_d \frac{ds}{dt} \right) \quad (2.6)$$

Foi feita uma breve análise de estabilidade por meio da construção de uma função de Lyapunov, para o sistema em malha fechada.

Em (ZHANG et al., 2010), foi utilizado o mesmo modelo para o sistema rotativo em (ABDULGALIL; SIGUERDIDJANE, 2005), mas se propôs para a lei de controle modificações da componente de entrada referente aos modos deslizantes, conforme as equações (2.7) a (2.9).

$$u_{sm} = -k \cdot \text{sign}(s) \quad (2.7)$$

$$u_{sm} = -k \cdot \text{sign}(s) - \lambda_1 s \quad (2.8)$$

$$u_{sm} = -k|s|^\alpha \text{sign}(s) - \lambda_1 s \quad (2.9)$$

Ao comparar os resultados obtidos, constatou-se um melhoramento gradativo da saída do sistema, conforme a sequência das equações (2.7)-(2.9), com a total eliminação das oscilações de *stick-slip*, e menores tempos de subida e de acomodação para a equação (2.9).

Em (NAVARRO-LÓPEZ; CORTÉS, 2007b), foi proposta uma estratégia de controle baseada em modos deslizantes para um modelo de sistema rotativo em parâmetros concentrados com quatro graus de liberdade. O atrito aplicado à extremidade que representa a broca foi modelado como uma combinação do *switch model* em (LEINE et al., 1998) e o modelo de atrito seco no qual uma banda de velocidade é introduzida (KARNOPP, 1985). As variáveis de estado foram consideradas plenamente observadas.

Em (MONTEIRO; TRINDADE, 2017), é proposto um controlador PI para estabilização da rotação do BHA, com atuação realizada na mesa rotativa. O sistema é modelado em Elementos Finitos, com 10 elementos, apenas considerando a dinâmica de torção, com interpolação realizada por funções lineares, e uma malha de 10 elementos. Uma vez que tanto o aumento da velocidade de rotação quanto a redução do peso sobre a broca reduzem a ocorrência de *stick-slip*, é definido também um controlador proporcional, com atuação proporcional ao desvio entre a velocidade angular de referência e a velocidade angular observada no BHA. Para diferentes valores de *WOB*, mantido constante nas simulações, é desenvolvida uma metodologia para determinação das faixas de valores dos ganhos que induzem a um desvio relativo predeterminado da velocidade observada em relação à velocidade de referência. Ao se aplicar um controle proporcional em *WOB*, em torno de um valor de referência WOB_{ref} *WOB*, nota-se que a faixa de sintonização dos ganhos é ampliada. As simulações foram realizadas para valores pontuais de WOB_{ref} (*kN*): 100, 120, 140 e 160.

Em (ZHENG et al., 2020), propõe-se uma estratégia de controle para um modelo físico que considera efeitos não lineares de atrito, de estado dependente de tempo de atraso, e de perda de contato. O objetivo principal é a mitigação da vibração de torção do tipo *stick-slip*. Considera-se um modelo simples massa-mola-amortecedor com acoplamento entre as dinâmicas de torção e longitudinal. O tempo de atraso é incluído no modelo ao se considerar a natureza da interação entre a broca e a rocha: é admitido a extremidade da broca contendo lâminas para retirada de cascalho igualmente espaçadas. As equações da dinâmica são adimensionalizadas no tempo e no espaço, e a escolha das escalas de tempo e espaço levou em consideração a preponderância da dinâmica de torção sobre o

fenômeno *stick-slip*, se comparada com a dinâmica longitudinal. Para diferentes faixas de profundidade de corte, nota-se a coexistência ou não de equilíbrio estável, ciclo limite estável com *stick-slip* e ciclo limite estável sem *stick-slip*. Esse último comportamento é proveniente da dependência do estado com relação ao tempo de atraso. A ocorrência de tempo de atraso como argumento nas equações da dinâmica conduz ao surgimento de uma expressão exponencial mesclada com expressões polinomiais na equação característica, impactando assim na estabilidade do sistema. Uma análise de estabilidade se faz necessária, a fim de se mapear a distribuição desses polos no plano complexo.

Em (MACLEAN et al., 2022), é apresentado um dispositivo experimental instrumentado, que simula a dinâmica de torção de um sistema de perfuração rotativa. Esse dispositivo é simulado por um modelo em parâmetros concentrados com dois graus de liberdade. A estratégia de controle adotada para o sistema, MIRC (*Modified Integral Resonant Control*) consistiu em se gerar um novo sistema a partir do acréscimo de mais uma equação de dinâmica, cuja variável de integração é acrescida à variável de controle original. A escolha dessa equação e de seus parâmetros são realizados de modo a se satisfazer as condições de estabilidade de Lyapunov para os pontos de equilíbrio do novo sistema gerado. Esses pontos de equilíbrio correspondem à velocidade constante desejada para o sistema, com a supressão do *stick-slip*, dado um valor constante para a variável de controle original. Sob as mesmas condições, é implementado também um controlador por modos deslizantes (SMC), e os resultados são comparados com o desempenho do controlador MIRC combinado com seguimento integral. A principal vantagem do controlador MIRC com seguimento integral em relação ao SMC é a simplicidade de implementação para sistemas mais complexos, uma vez que o desempenho dos dois se mostrou similar.

Em (LOBO et al., 2022), duas estratégias comerciais de controle atuando sobre a mesa rotativa são analisadas, uma baseada em controlador PI (*Stiff controller*) e outra baseada na absorção das ondas de torção viajantes por meio da minimização do coeficiente de reflexão na mesa rotativa (*Soft Speed*). O controlador PI é mais robusto, e a sintonização dos ganhos é realizada para velocidades específicas de rotação. Já o controle *Soft Speed* é também de fácil implementação, uma vez que a sintonização dos ganhos é feita considerando a minimização do coeficiente de reflexão na mesa rotativa. A principal fragilidade do controle *Soft Speed* se funda na alta sensibilidade à dependência da dinâmica aos tempos de atraso (*time delay*), fenômeno comum causado pela natureza da interação broca-rocha, em brocas com várias lâminas para retirada do cascalho.

Em (NETO; TRINDADE, 2023), são apresentados resultados, obtidos por simulação, da utilização de um controlador OSOF (*Optimal Static Output Feedback*) sobre um modelo físico de sistema de perfuração para mitigação de oscilações de torção severas do tipo *stick-slip*. Considerando a aquisição limitada de dados aferidos diretamente num processo de perfuração, a técnica apresentou resultados positivos quanto à mitigação do *stick-*

slip. Procura-se argumentar que apesar todas as opções de controladores encontrados na literatura, especialmente *torsional rectification*, *soft torque*, controle proporcional bilinear, LQR, H_∞ , *sliding mode* e *backstepping*, apresentarem bom desempenho, frequentemente necessitam de dados e condições não factíveis para um sistema típico de perfuração rotativa. A vantagem do controlador OSOF seria a utilização apenas de combinações lineares dos sinais disponíveis para a retroação. A implementação do controlador OSOF partiu de um modelo reduzido do sistema, obtido de uma modelagem prévia em elementos finitos. Em comparação com controladores PI e LQR, OSOF apresentou um desempenho superior, especialmente com a redução do tempo de acomodação e maior robustez às incertezas em parâmetros do modelo de atrito.

De um modo geral, nos trabalhos apresentados foram realizados estudos da dinâmica de sistema rotativo sujeito a atrito em uma ou mais regiões, incluindo-se análises de estabilidade em torno de pontos de equilíbrio dinâmico do sistema. Foram estudados também comportamentos do sistema rotativo relacionados ao *rubbing*, seja numa análise transiente do sistema, seja por meio de técnicas para identificação, a partir de dados experimentais, de comportamentos periódicos, quase-periódicos, e caóticos. Foram propostas também curvas de atrito para implementação de modelos preditivos mais adequados a bancadas de teste representativas do sistema real de perfuração. Por fim, foram propostas estratégias de controle ativo e passivo para um sistema rotativo submetido a atrito seco em uma ou mais regiões. No entanto, as estratégias de controle propostas na literatura revisada não incluíam a existência de *rubbing* no modelo, fenômeno muito presente, juntamente com o atrito, em sistemas reais de perfuração rotativa.

3 Modelos

3.1 Modelo físico

O modelo físico foi definido de modo que resgatasse dois fenômenos físicos comuns no sistema de perfuração utilizado na indústria de óleo e gás: o *stick-slip* e o *rub*. E assim como ocorre no referido sistema, foram incluídos no modelo físico dois atuadores, um para o movimento axial dos componentes rotativos e outro para seu movimento de giro.

O modelo físico encontra-se materializado no protótipo desenvolvido, que por sua vez consiste, basicamente, em dois rotores maciços fixos a um eixo metálico esbelto, disposto na posição vertical, com um dos rotores fixo na extremidade inferior do eixo (rotor principal), e o outro fixo num ponto intermediário (rotor intermediário). A extremidade superior do eixo encontra-se acoplada a um servo motor. A figura (9) ilustra esquematicamente o modelo físico.

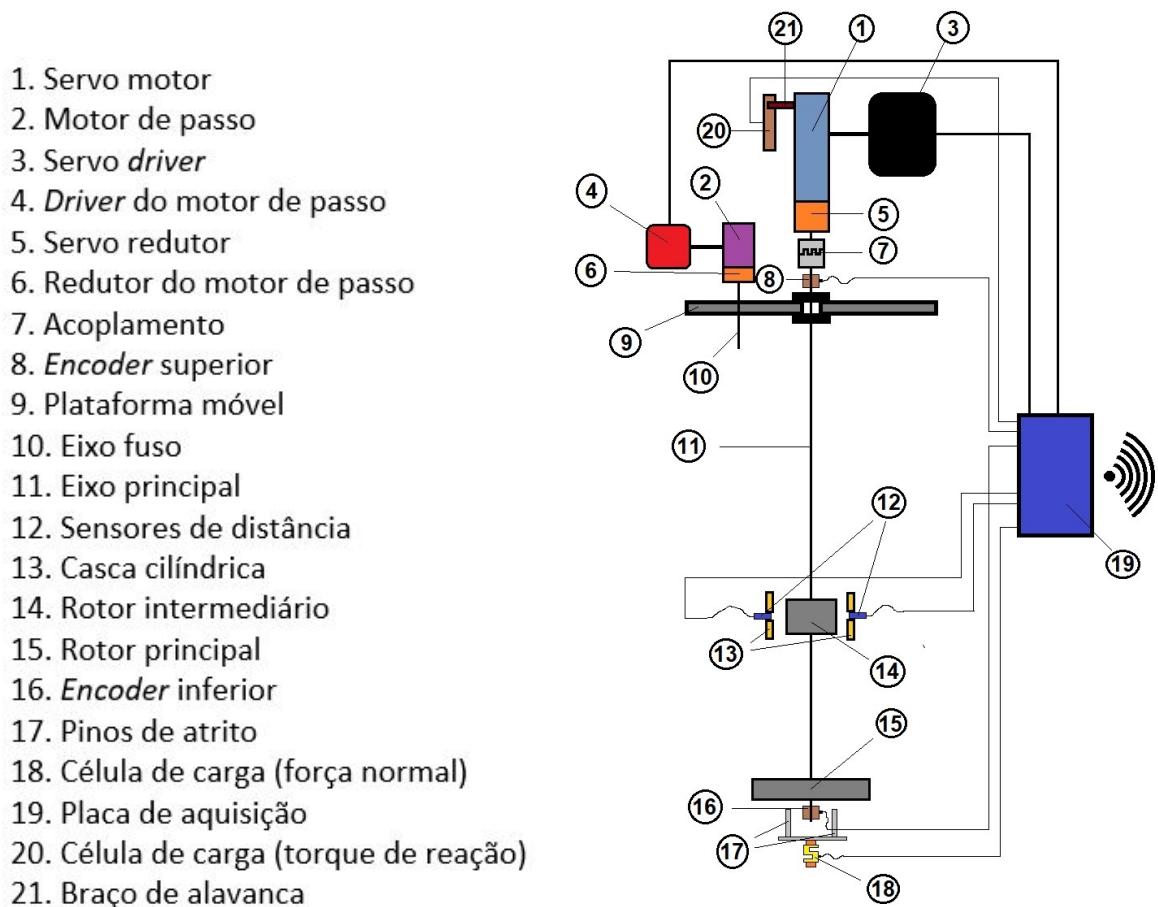


Figura 9 – Bancada experimental

A tabela (1) apresenta algumas medidas da bancada, de modo a se ter uma ideia

de suas dimensões.

Tabela 1 – Bancada experimental: algumas medidas

Descrição	Símbolo	Medida (mm)
Altura total da bancada	-	3.500
Largura da bancada	-	600
Profundidade da bancada	-	600
Comprimento do eixo principal	L	2.500
Espessura do eixo principal	d	3
Distância entre servo motor e rotor intermediário	L_1	2.000
Diâmetro do rotor intermediário	D_{r_2}	140
Espessura do rotor intermediário	\bar{L}_2	60
Diâmetro do rotor principal	D_{r_1}	250
Espessura do rotor principal	\bar{L}_1	30

O eixo principal, no qual estão fixados os dois rotores, encontra-se submetido a restrições, sendo permitido nas extremidades apenas os movimentos de rotação em torno do eixo longitudinal do servo motor e deslocamento longitudinal. O eixo principal está apoiado, por meio de uma junção de rolamentos, na plataforma móvel, de modo que o conjunto eixo principal + rotores encontra-se totalmente suspenso, até que haja interação entre o rotor principal e os pinos de atrito.

A imposição das restrições aos elementos rotativos resultou na existência de dois modos de corpo rígido: um de rotação em torno do eixo longitudinal, e outro de deslocamento linear longitudinal.

O servo motor, por sua vez, atua na torção do eixo principal, a partir do ponto de acoplamento na extremidade superior do eixo.

Ao imprimir um torque sobre o eixo principal, o servo motor sofre como consequência um torque de reação, que, por sua vez, é aferido por meio de uma célula de carga, instalada ao lado do motor, e um braço de alavanca, fixo ao corpo do motor e apoiado sobre a célula de carga. O servo motor encontra-se apoiado inferiormente sobre um rolamento axial, e superiormente sobre um rolamento radial rígido, de modo que seria possível sua rotação em torno do próprio eixo, caso o braço de alavanca não estivesse apoiado na célula de carga. Ao impedir o movimento de rotação do servo motor em torno do próprio eixo, a célula de carga é deformada, aferindo dessa forma a força de contato. O valor da força, medida pela célula de carga, ao ser multiplicada pela distância estimada entre o ponto de contato, entre a célula de carga e o braço de alavanca, e o eixo do servo motor, fornece o valor estimado do torque de reação sobre o servo motor.

O motor de passo, por sua vez, atua no deslocamento longitudinal da plataforma móvel, e, por conseguinte, no deslocamento longitudinal do eixo e dos rotores, que se encontram suspensos na plataforma móvel. O sistema foi projetado para um deslocamento longitudinal máximo de $5mm$. Na saída do motor de passo, encontra-se um eixo com um

fuso usinado, que, acoplado à plataforma móvel, faz esta subir ou descer, a depender do sentido de giro.

Durante o deslocamento longitudinal, o servo motor permanece a uma altura fixa. Isso só é possível pois o acoplamento mecânico permite um deslocamento longitudinal relativo entre as duas peças de encaixe que o compõem, ao mesmo tempo que o servo motor transmite ao eixo principal o movimento de rotação, por meio do mesmo acoplamento.

Durante o movimento vertical, uma vez que o rotor principal encoste nos pinos de atrito, fica então submetido a um torque de atrito seco. A partir daí, quanto maior o deslocamento descendente do rotor principal, maior a força normal de contato, aferida pela célula de carga, e, por consequência, maior o torque resistivo de atrito sobre o rotor. O torque de atrito é o principal responsável pelo fenômeno conhecido como *stick-slip*, descrito no capítulo 1.

Já o rotor intermediário, durante a rotação, tende a realizar deslocamento laterais, que por sua vez são aferidos pelos sensores de distância. As principais causas desses deslocamento lateral são: (i) a excentricidade do rotor, devido à não homogeneidade do aço; (ii) e os modos de precessão de vibração, analisados mais detalhadamente nos próximos capítulos.

No projeto do rotor intermediário, está previsto um furo onde inserir pinos de diferentes densidades, como ilustrado na figura (10), a fim de se estudar o efeito de diferentes excentricidades do rotor no comportamento dinâmico do sistema.

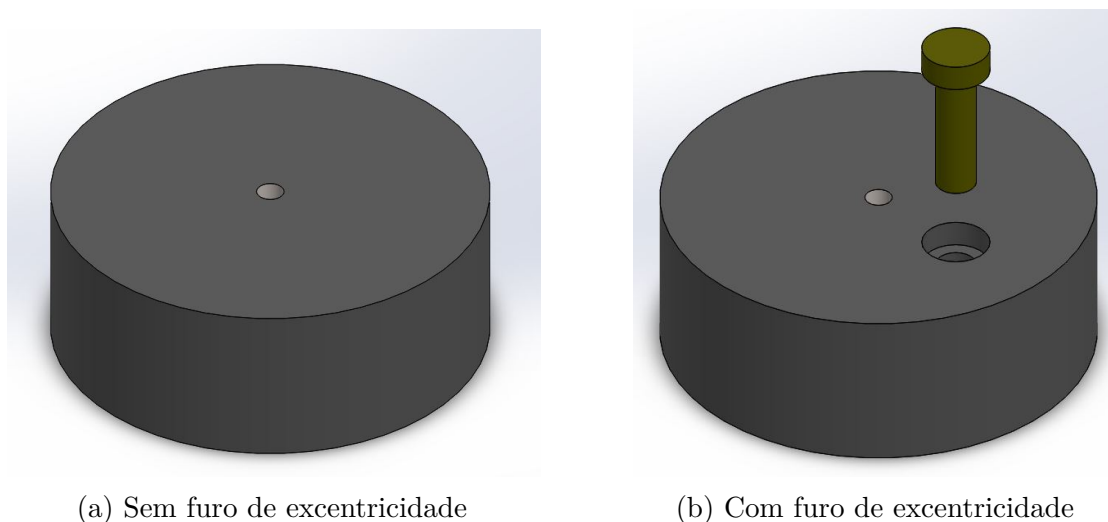


Figura 10 – Rotor intermediário

A princípio, trabalhar-se-ia com três dispositivos distintos: (i) rotor com furo vazio, representando excentricidade máxima; (ii) rotor com furo preenchido com pino de aço, ou seja, mesmo material do rotor, representando excentricidade mínima ou residual; e (iii) rotor com furo preenchido com pino de alumínio, que pela densidade inferior ao do aço, representaria uma excentricidade intermediária.

Entre o diâmetro externo do rotor intermediário e a parede interna da casca cilíndrica, existe uma folga média de 6mm . Uma vez que o deslocamento lateral do rotor intermediário alcance esse valor, um misto de impacto e fricção começa a surgir na interação entre os dois componentes, caracterizando o fenômeno do *rubbing*, descrito no capítulo 1.

Antes de se comentar sobre os componentes eletrônicos, vale ressaltar que são cinco os principais componentes móveis do sistema, os quais foram inclusos no modelo teórico, a saber: (i) o eixo principal; (ii) o rotor principal; (iii) o rotor intermediário; (iv) a plataforma móvel; (v) e a inércia total na saída do motor, a qual incluiu o acoplamento e a inércia total dos componentes móveis internos do motor, com valor corrigido pela redução na saída do servo motor.

Quanto aos componentes eletrônicos, além dos sensores de distância e das células de carga, a bancada é dotada também de dois *encoders*, um na saída do servo motor e outro próximo ao rotor principal, conforme ilustrado na figura (9), de modo a serem aferidos os respectivos deslocamentos angulares e estimadas as respectivas velocidades angulares.

Acoplado a cada motor, existe um *driver*, componente eletrônico responsável por receber o sinal de atuação e por garantir que o respectivo motor atue exatamente conforme o sinal. O servo *driver* recebe, como sinal de atuação, um valor de frequência, associada a uma velocidade de rotação que será imposta ao servo motor. Já o *driver* do motor de passo recebe, como sinal de atuação, um valor fixo de tensão, associado a um determinado deslocamento angular que será imposto ao eixo de saída do motor de passo, levando a um determinado deslocamento vertical da plataforma móvel.

Por sua vez, a placa de aquisição centraliza tanto os sinais aferidos pelos sensores, quanto os sinais de atuação enviados aos *drivers*. O processamento dos sinais é realizado num dispositivo externo à placa de aquisição, conectado a esta seja por meio de um sinal *wi-fi* gerado pela própria placa, seja por um cabo micro USB. Esse dispositivo externo pode ser tanto um celular quanto um computador.

A bancada experimental foi concebida de modo a ser possível verificar experimentalmente modos combinados de atuação do servo motor e do motor de passo sobre o sistema rotativo, de forma que fosse possível garantir que o rotor principal mantivesse uma velocidade constante de rotação, mesmo submetido a um torque resistivo de atrito seco, tendo presente a possibilidade de ocorrência de *rubbing*. Esse estudo tem particular interesse por lançar luz sobre possíveis modos de estabilizar a rotação de uma broca a grandes profundidades, no sistema real de perfuração rotativa aplicada a poços de petróleo, por meio de atuação realizada na superfície.

3.2 Modelagem

A bancada experimental foi modelada em parâmetros concentrados e por meio de elementos finitos. As principais referências para obtenção do modelo final em elementos finitos foram (RITTO, 2010), (JUNIOR, 2015) e (SANTOS, 2001).

3.2.1 Modelo do sistema em Elementos Finitos

Para obtenção das equações da dinâmica, é considerado o acoplamento dinâmico dos movimentos de torção, lateral e longitudinal, no eixo principal, por meio de equações de continuidade. Por sua vez, os rotores e a plataforma móvel foram considerados como inércias concentradas.

As expressões da energia cinética e da energia potencial do sistema, utilizadas nas equações de Lagrange, são obtidas desconsiderando quaisquer restrições ou condições de contorno. Essas mesmas restrições são aplicadas posteriormente de duas maneiras distintas: (i) de forma *extrínseca*, ou seja, por meio dos multiplicadores de Lagrange e da definição do operador de Lagrange estendido; (ii) de forma *intrínseca*, ou seja, através da redefinição do vetor de posição utilizando-se matrizes de 0's e 1's, de modo que as restrições já estivessem embutidas nessa redefinição de variáveis.

O amortecimento é incluído nas equações de Lagrange como um vetor de força generalizada, função da primeira derivada temporal do vetor de posição. O amortecimento é dividido em duas parcelas, superpostas por hipótese: uma, de amortecimento estrutural, estimada por meio de uma combinação linear entre as matrizes de inércia e rigidez; e outra, de amortecimento concentrado, devido ao atrito viscoso nos rolamentos das extremidades superior e inferior do eixo principal.

A força gravitacional é inclusa nas equações da dinâmica através da expressão da energia potencial, por sua vez composta por duas parcelas: uma de energia potencial elástica, acumulada durante as deformações do eixo principal; e outra de energia potencial gravitacional, devido ao efeito da gravidade.

Por fim, são inclusas no modelo as interações de atrito e de *rub* como vetores de força generalizada, construídos considerando-se essas interações como forças concentradas, aplicadas respectivamente sobre o rotor principal e o rotor intermediário.

3.2.1.1 Expressão analítica da energia cinética

A formulação geral das equações de Lagrange para um sistema dinâmico, sem restrições, é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (3.1)$$

sendo $L = T - U$ a *função de Lagrange* de um sistema, T a energia cinética total, U a energia potencial total, \mathbf{q} o vetor de coordenadas generalizadas do sistema, e \mathbf{Q} o vetor força generalizada (GREENWOOD, 1997).

Em geral, quando o vetor \mathbf{Q} corresponde a uma *força conservativa*, pode ser incluso na expressão da energia potencial U sob a forma de gradiente de uma função potencial escalar, ou seja, $\mathbf{Q} = \nabla U_Q = \frac{\partial U_Q}{\partial \mathbf{q}}$. A força peso, \mathbf{W} , é um exemplo de força conservativa.

A energia cinética do sistema é composta pelas energias cinéticas referentes a cada uma das partes móveis, a saber: o eixo principal, os rotores principal e intermediário, a massa de excentricidade no rotor intermediário, a inercia interna do motor e a plataforma móvel.

A equação (3.2) apresenta a energia cinética total do sistema:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(A \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c \right) dx + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \left(M_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l + \boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l} \right) + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m \quad (3.2)$$

Na equação (3.2), L é o comprimento do eixo principal; ρ é a densidade do aço; A é a área da seção transversal do eixo principal; $[\mathbf{J}_t] = \text{diag}([J_p, J, J])$ corresponde ao tensor de momentos da seção transversal do eixo, no sistema de referência local, sendo J_p o momento polar de inércia e J o momento de inércia; \mathbf{v} é o campo vetorial velocidade linear ao longo do eixo; $\boldsymbol{\omega}_c$ é um vetor velocidade angular de um elemento diferencial genérico do eixo; os elementos M_l , para $l = 1, \dots, 4$, correspondem às massas concentradas de elementos móveis; v_l suas respectivas velocidades lineares; $[\mathbf{I}_l] = \text{diag}([I_{pl}, I_l, I_l])$ o tensor de inércia dos elementos móveis, descrito no sistema de referência local; $\boldsymbol{\omega}_{c_l}$ suas respectivas velocidades angulares; Δm a massa deslocada acrescida ao rotor intermediário, para intensificar os movimentos laterais; e \mathbf{v}_m a velocidade linear da massa Δm .

A massa Δm é definida como a diferença entre a massa do pino real de excentricidade m_2 , ilustrado na figura (10b), e a massa de um pino de excentricidade constituído pelo mesmo material do rotor, m_0 . Em termos algébricos:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_2 - m_0 \\ &= \rho_2 V_e - \rho_0 V_e \\ &= (\rho_2 - \rho_0) V_e \\ &= \Delta \rho V_e \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo V_e o volume do pino de excentricidade, que por projeto coincide com o volume do furo de excentricidade no rotor.

Para o caso particular de o pino de excentricidade ser do mesmo material do rotor, então $\Delta m = \Delta \rho V_e = 0$, e a excentricidade seria nula. Para o caso do rotor

intermediário sem pino de excentricidade, ou seja, com excentricidade máxima, então $\rho_2 = 0$ e $\Delta m = -\rho_0 V_e < 0$.

Seja \bar{M}_2 a massa do rotor intermediário, sem furo de excentricidade, ilustrado na figura (10a); e M_2 a massa do rotor, com furo de excentricidade, ilustrado na figura (10b). Pode-se afirmar, então, que $\bar{M}_2 = M_2 + m_0$. Sendo assim, para se obter a expressão da excentricidade do rotor intermediário, considere l_2 como a distância entre os centros do pino de excentricidade e o do rotor, e y_M a posição do centro de massa de M_2 no eixo yy , conforme ilustrado na figura (11).

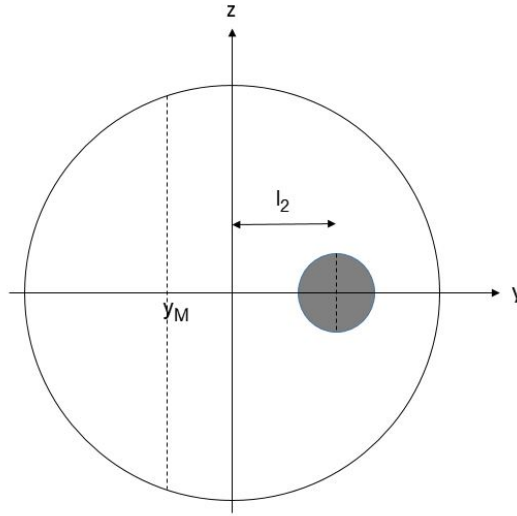


Figura 11 – Excentricidade do rotor intermediário

Para o rotor maciço, ou seja, sem furo de excentricidade, teoricamente a excentricidade é nula. Sendo assim:

$$M_2 y_M + m_0 l_2 = 0 \Leftrightarrow y_M = -\frac{m_0}{M_2} l_2 \quad (3.4)$$

Já considerando o conjunto composto pelo rotor com furo de excentricidade e o pino de excentricidade, caso o pino não seja composto do mesmo material do rotor, surgirá, então uma excentricidade não nula:

$$\begin{aligned} M_2 y_M + m_2 l_2 &= (M_2 + m_2) e_2 \Rightarrow (M_2 + m_2) e_2 = -m_0 l_2 + m_2 l_2 \\ &\Rightarrow e_2 = \frac{m_2 - m_0}{M_2 + m_2} l_2 \\ &\Rightarrow e_2 = \frac{\Delta m}{M_2 + m_2} l_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Representar o rotor intermediário em termos de \bar{M}_2 e Δm ao invés M_2 e m_2 tem como vantagem o fato de \bar{M}_2 ter o centro de massa coincidindo com o centro geométrico, o que simplifica bastante a expressão da energia cinética, na equação (3.2), uma vez que o rotor intermediário está fixado ao eixo principal exatamente no centro geométrico.

A figura (12) apresenta o sistema de referência fixo adotado para o modelo da bancada de testes.

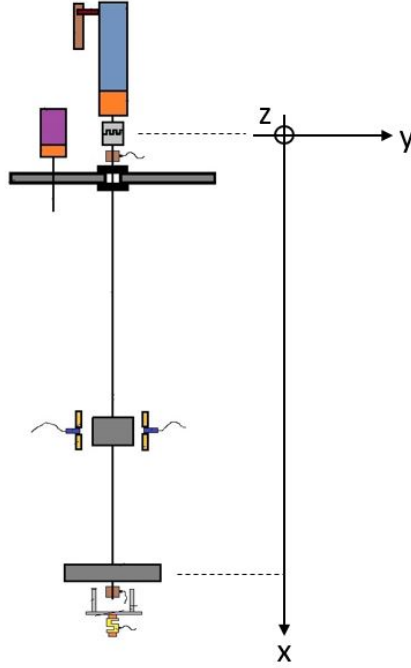


Figura 12 – Bancada experimental e sistema fixo de referência

Importante destacar que o referencial foi escolhido de modo que a origem coincidisse com o acoplamento na saída do servo motor, e que, *considerando o eixo não deformado*, o rotor principal estivesse na posição $(L, 0, 0)$.

Na equação (3.2), a saber:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(A \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c \right) dx + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \left(M_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l + \boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l} \right) + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m$$

o vetor velocidade \mathbf{v} é um campo vetorial ao longo do eixo principal dado por:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left[\dot{u}(x, y, z), \dot{v}(x, y, z), \dot{w}(x, y, z) \right]^T \quad (3.6)$$

sendo u , v e w os deslocamentos lineares nas direções xx , yy e zz , respectivamente, em relação à configuração não deformada do eixo.

Já o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_c$, como demonstrado a seguir, corresponde ao campo vetorial, ao longo do eixo principal, dado por:

$$\boldsymbol{\omega}_c(x, y, z) = \left[\begin{array}{c} \dot{\theta}_x(x, y, z) + \dot{\theta}_y(x, y, z) \theta_z(x, y, z) \\ \dot{\theta}_y(x, y, z) \\ \dot{\theta}_z(x, y, z) \end{array} \right] \quad (3.7)$$

sendo θ_x , θ_y e θ_z os deslocamentos angulares da seção transversal, em torno dos eixos xx , yy e zz , respectivamente.

A expressão de ω_c é obtida no sistema referencial não inercial *imediatamente anterior* ao sistema fixo à seção transversal genérica do eixo principal, como detalhado logo a seguir. São também consideradas as aproximações para pequenos ângulos $\cos(\theta) \cong 1$ e $\sin(\theta) \cong \theta$.

Com efeito, sejam $I = B_0[x, y, z]$, $B_1[x_1, y_1, z_1]$, $B_2[x_2, y_2, z_2]$ e $S = B_3[x_3, y_3, z_3]$ sistemas referenciais, sendo I o sistema referencial fixo, apresentado na figura (12), e S o referencial fixo à seção transversal genérica do eixo principal. Seguindo como referência os ângulos de Tait-Bryan, o sistema B_1 é definido pela rotação θ_y em torno do eixo yy do sistema I , o sistema B_2 é definido pela rotação θ_z em torno do eixo zz do sistema B_1 , e o sistema S é definido pela rotação θ_x em torno do eixo xx do sistema B_2 , conforme apresentado na figura (13):

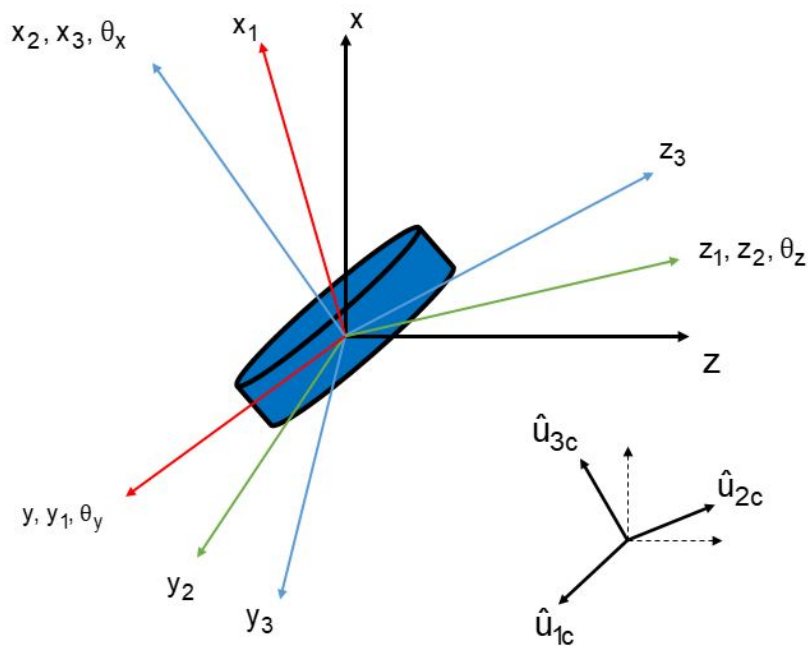


Figura 13 – Sistemas referenciais

Em todas as transformações, o sentido de rotação é definido pela regra da mão direita, em relação ao respectivo eixo.

Sejam T_c^{01} , T_c^{12} e T_c^{23} as matrizes de rotação tais que:

$$T_c^{01} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$T_c^{12} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\text{sen}(\theta_z) & 0 \\ \text{sen}(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$T_c^{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\text{sen}(\theta_x) \\ 0 & \text{sen}(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A inversa dessas matrizes podem ser obtidas invertendo-se o sinal dos ângulos de rotação, uma vez que uma rotação seguida de outra rotação de sinal contrário e mesmo módulo conduz o corpo à orientação original.

Sendo assim,

$$T_c^{01^{-1}} = T_c^{10} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & -\text{sen}(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$T_c^{12^{-1}} = T_c^{21} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & \text{sen}(\theta_z) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$T_c^{23^{-1}} = T_c^{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \text{sen}(\theta_x) \\ 0 & -\text{sen}(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Dessa forma, a sequência de transformações

$$I \xrightarrow[\theta_y]{T_c^{01}} B_1 \xrightarrow[\theta_z]{T_c^{12}} B_2 \xrightarrow[\theta_x]{T_c^{23}} S$$

é escolhida de modo que o eixo xx do sistema referencial S coincida com o eixo principal da seção transversal, como sugerido em problemas resolvidos em (SANTOS, 2001), ou seja, de modo que a velocidade $\dot{\theta}_x$ seja paralela à velocidade intrínseca, ou *spin*, da seção transversal.

Ainda na figura (13), os vetores \hat{u}_{1c} , \hat{u}_{2c} e \hat{u}_{3c} são unitários e correspondem, respectivamente, aos eixos de rotação de cada uma das transformações nas equações (3.8) a (3.10). Esses vetores unitários são definidos conforme a equação (3.14), e escritos na base B_2 :

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{1c}^{B_2} &= T_c^{21} T_c^{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_z) \\ \text{cos}(\theta_z) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \\
\hat{u}_{2c}^{B_2} &= T_c^{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \\
\hat{u}_{3c}^{B_2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Utilizando-se os vetores \hat{u}_{1c} , \hat{u}_{2c} e \hat{u}_{3c} definidos na equação (3.14), é possível obter a expressão da velocidade angular, da equação (3.7). Com efeito:

$$\begin{aligned}
\omega_c^{B_2} &= \dot{\theta}_y \hat{u}_{1c}^{B_2} + \dot{\theta}_z \hat{u}_{2c}^{B_2} + \dot{\theta}_x \hat{u}_{3c}^{B_2} \\
&= \dot{\theta}_y \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_z) \\ \text{cos}(\theta_z) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} + \dot{\theta}_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} + \dot{\theta}_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \text{sen}(\theta_z) \\ \dot{\theta}_y \text{cos}(\theta_z) \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}_{B_2} \\
&\cong \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \theta_z \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}_{B_2}
\end{aligned}$$

A escolha da base para expressão da velocidade angular ω_c é uma questão de conveniência. No sistema de referência fixo ao corpo, o tensor de inércia é constante no tempo, e depende apenas da geometria do corpo (SANTOS, 2001), o que não ocorre, em geral nos outros sistemas de referência. No caso específico do presente trabalho, a seção transversal do eixo principal, por ser circular, apresenta o mesmo momento de inércia em relação aos eixos yy e zz do sistema S , fixo à seção, de modo que, no sistema B_2 , os momentos em relação aos eixos yy e zz também permanecem constantes no tempo, não sendo necessário recorrer ao sistema fixo à seção transversal. Para clarificar melhor o que se acabou de afirmar, caso a seção transversal do eixo principal fosse uma elipse, os momentos de inércia em relação aos eixos yy e zz do sistema fixo à seção transversal *não seriam iguais*, e por consequência, a seção vista a partir do sistema B_2 não conservaria a

propriedade de constância do tensor de inércia no tempo, e então seria necessário recorrer ao sistema fixo ao corpo para expressão do vetor velocidade angular.

Sendo assim, no presente trabalho, a conveniência em se escolher a base B_2 para a expressão do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_c$ se justifica, primeiramente, pela constância, no tempo, do tensor de inércia da seção transversal, expressa nessa base; e por $\boldsymbol{\omega}_c$ apresentar uma expressão mais simples do que se tivesse sido expressa na base S , fixa à seção transversal.

Voltando-se à equação (3.2), da energia cinética, falta ainda determinar a expressão analítica da velocidade linear \mathbf{v}_m , do pino de excentricidade no rotor intermediário.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(A \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c \right) dx + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \left(M_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l + \boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l} \right) + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m$$

Considere a posição do pino no sistema referencial S , fixo ao rotor intermediário, conforme a figura (14):

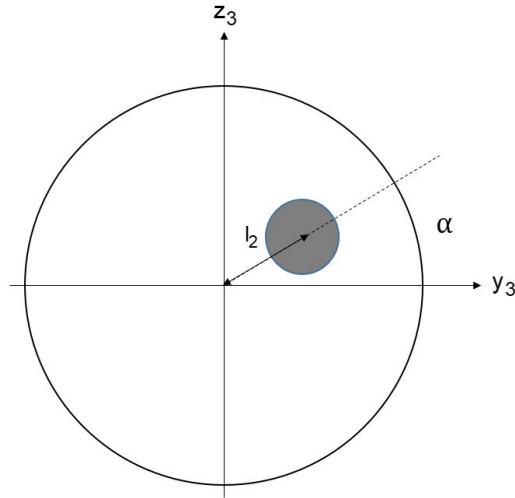


Figura 14 – Posição do pino no referencial fixo ao rotor intermediário

O vetor posição do pino no sistema referencial fixo S é tal que:

$$\mathbf{r}_2^S = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cos(\alpha) \\ l_2 \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

O vetor velocidade $\mathbf{v}_{M,I}^{B_2}$ do pino, em relação ao sistema inercial I , expresso na base B_2 , é:

$$\mathbf{v}_{M,I}^{B_2} = \mathbf{v}_{S,I}^{B_2} + \boldsymbol{\omega}_{C,I}^{B_2} \times \mathbf{r}_2^{B_2} \quad (3.16)$$

sendo $\mathbf{v}_{S,I}^{B_2}$ a velocidade do centro geométrico do rotor intermediário em relação ao sistema inercial I , expresso na base B_2 ; $\boldsymbol{\omega}_{C,I}^{B_2}$ o vetor velocidade angular do rotor intermediário, em relação ao sistema inercial I , escrito na base B_2 ; e $\mathbf{r}_2^{B_2}$ o vetor posição do pino no rotor intermediário, escrito na base B_2 .

De forma imediata, tem-se já o vetor posição \mathbf{r}_2^S , expresso na base S , conforme a equação (3.15). A expressão do vetor velocidade $\mathbf{v}_{S,I}^I$, escrito na base I , é descrita na equação (3.17):

$$\mathbf{v}_{S,I}^I = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{C,I}^{B_2}$, escrita na base B_2 , é descrita conforme a equação (3.7):

$$\boldsymbol{\omega}_{C,I}^{B_2} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \theta_z \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}$$

Passando-se os vetores $\mathbf{v}_{S,I}^I$ e \mathbf{r}_2^S para a base B_2 , tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{S,I}^{B_2} &= T_c^{21} T_c^{10} \mathbf{v}_{S,I}^I = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & \text{sen}(\theta_z) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & -\text{sen}(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_{S,I}^{B_2} &= \begin{bmatrix} \dot{u} \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + \dot{v} \text{sen}(\theta_z) - \dot{w} \cos(\theta_z) \text{sen}(\theta_y) \\ -\dot{u} \cos(\theta_y) \text{sen}(\theta_z) + \dot{v} \cos(\theta_z) + \dot{w} \text{sen}(\theta_y) \text{sen}(\theta_z) \\ \dot{u} \text{sen}(\theta_y) + \dot{w} \cos(\theta_y) \end{bmatrix} \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_2^{B_2} = T_c^{23} \mathbf{r}_2^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\text{sen}(\theta_x) \\ 0 & \text{sen}(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cos(\alpha) \\ l_2 \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cos(\theta_x + \alpha) \\ l_2 \text{sen}(\theta_x + \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Substituindo-se as equações (3.7), (3.18) e (3.19) na equação (3.16), calculando-se a expressão $\mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m$, presente na equação (3.2), e após algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m &= \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + l_2^2 \dot{\theta}_x^2 + \\
&+ l_2^2 \left(2 \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \theta_z + \dot{\theta}_y^2 \theta_z^2 \right) + \theta_z^2 (\dot{v}^2 + \dot{u}^2) + \theta_y^2 (\dot{w}^2 + \dot{u}^2) + \\
&+ 2 l_2 (\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \theta_z) \left(\dot{u} (\theta_z \sin(\theta_x + \alpha) + \theta_y \cos(\theta_x + \alpha)) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{w} \cos(\theta_x + \alpha) \right) + \\
&+ 2 l_2 (\dot{u} - \dot{w} \theta_y) (\dot{\theta}_y \sin(\theta_x + \alpha) - \dot{\theta}_z \cos(\theta_x + \alpha)) + \\
&+ l_2^2 (\dot{\theta}_y \sin(\theta_x + \alpha) - \dot{\theta}_z \cos(\theta_x + \alpha))^2 + \\
&- 2 \dot{v} (\dot{w} \theta_z \theta_y + l_2 \theta_z \dot{\theta}_z \cos(\theta_x + \alpha) + l_2 \dot{\theta}_x \sin(\theta_x + \alpha))
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Considerando-se os demais termos da equação (3.2),

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (A \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c) dx + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 (M_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l + \boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l}) + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m$$

a saber: $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ e $\boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c$, para o eixo principal, e $\mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l$ e $\boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l}$, com $l = 1, \dots, 4$, para os elementos concentrados, tem-se que:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \theta_z & \dot{\theta}_y & \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \theta_z \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \\
&= J_p (\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \theta_z)^2 + J \dot{\theta}_y^2 + J \dot{\theta}_z^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

sendo $[\mathbf{J}_t]$ o tensor de inércia por comprimento, obtido no referencial B_2 ,

$$\mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l = \dot{u}_l^2 + \dot{v}_l^2 + \dot{w}_l^2 \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x_l} + \dot{\theta}_{y_l} \theta_{z_l} & \dot{\theta}_{y_l} & \dot{\theta}_{z_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p_l} & 0 & 0 \\ 0 & I_l & 0 \\ 0 & 0 & I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x_l} + \dot{\theta}_{y_l} \theta_{z_l} \\ \dot{\theta}_{y_l} \\ \dot{\theta}_{z_l} \end{bmatrix} \\
&= I_{p_l} (\dot{\theta}_{x_l} + \dot{\theta}_{y_l} \theta_{z_l})^2 + I_l \dot{\theta}_{y_l}^2 + I_l \dot{\theta}_{z_l}^2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

sendo $[\mathbf{I}_l]$ o tensor de inércia do l -ésimo elemento móvel concentrado, obtido no referencial B_2 .

Os casos particulares da plataforma móvel e da inércia de saída do servo-motor merecem uma observação à parte:

1. Como a plataforma móvel não recebe solicitação nenhuma de rotação vinda do acoplamento, sua velocidade de rotação no sentido do eixo principal do servo-motor é nula, independentemente das restrições às quais está submetida, ou seja, $\dot{\theta}_{x_{pl}} = 0$. Sendo assim, da equação (3.24), conclui-se que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{c_{pl}}^T [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{c_{pl}} &= I_{p_{pl}} \left(\dot{\theta}_{x_{pl}} + \dot{\theta}_{y_{pl}} \theta_{z_{pl}} \right)^2 + I_{pl} \dot{\theta}_{y_{pl}}^2 + I_{pl} \dot{\theta}_{z_{pl}}^2 \\ &= I_{p_{pl}} \left(\dot{\theta}_{y_{pl}} \theta_{z_{pl}} \right)^2 + I_{pl} \dot{\theta}_{y_{pl}}^2 + I_{pl} \dot{\theta}_{z_{pl}}^2\end{aligned}$$

2. Já a inércia na saída do servo-motor não recebe solicitação de qualquer outro movimento que não seja a rotação em torno do eixo longitudinal do motor, e permanece com velocidade linear nula em todo o tempo. Sendo assim, $\dot{u}_M = 0$, $\dot{v}_M = 0$, $\dot{w}_M = 0$, $\dot{\theta}_{z_M} = 0$, $\dot{\theta}_{y_M} = 0$ e $\dot{\theta}_{x_M} = 0$, independente das restrições. Conclui-se que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{c_M}^T [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{c_M} &= I_{p_M} \left(\dot{\theta}_{x_M} + \dot{\theta}_{y_M} \theta_{z_M} \right)^2 + I_M \dot{\theta}_{y_M}^2 + I_M \dot{\theta}_{z_M}^2 \\ &= I_{p_M} \dot{\theta}_{x_M}^2 \\ \mathbf{v}_M^T \mathbf{v}_M &= \dot{u}_M^2 + \dot{v}_M^2 + \dot{w}_M^2 \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

3.2.1.2 Expressão analítica da energia potencial

A energia potencial total do sistema inclui a energia potencial elástica, acumulada no eixo principal por suas deformações, e a energia potencial gravitacional. A equação (3.25) apresenta a expressão geral da energia potencial:

$$U = \int_0^L \Psi(x) dx + U_g \quad (3.25)$$

sendo $\Psi(x)$ a função referente à energia de deformação por comprimento, obtida por meio das equações de continuidade; e U_g a energia potencial gravitacional total do sistema.

Com efeito, para se obter a expressão de $\Psi(x)$, é necessário antes calcular o campo de deformação do eixo principal, escrito em função da configuração não deformada.

O campo de deslocamento pode ser obtido, segundo (RITTO, 2010), considerando a translação $[u, v, w]^T$ do centro de massa de uma seção transversal, composta pela sequência de rotações θ_y , θ_z e θ_x do plano da seção transversal, respectivamente em torno dos eixos yy , do referencial I , zz do referencial B_1 , e xx , do referencial B_2 , mesma sequência

adotada na obtenção da expressão da energia cinética, ilustrada na figura (13). Traduzindo analiticamente o procedimento descrito no referencial I (RITTO, 2010), tem-se que:

$$[\mathbf{P}(x, y, z)]_I = \begin{bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_I + [\mathbf{x}_\theta]_I - [X_\theta]_I \quad (3.26)$$

sendo que

$$[\mathbf{X}_\theta]_I = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}_I \quad (3.27)$$

$$[\mathbf{x}_\theta]_I = T_c^{01} T_c^{12} T_c^{23} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}_S$$

A equação (3.28) apresenta o campo de deformação obtido:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u + y \left(\theta_y \operatorname{sen}(\theta_x) - \theta_z \operatorname{cos}(\theta_x) \right) + z \left(\theta_y \operatorname{cos}(\theta_x) + \theta_z \operatorname{sen}(\theta_x) \right) \\ u_y(x, y, z) &= v + y \left(\operatorname{cos}(\theta_x) - 1 \right) - z \operatorname{sen}(\theta_x) \\ u_z(x, y, z) &= w + y \operatorname{sen}(\theta_x) + z \left(\operatorname{cos}(\theta_x) - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

A energia potencial elástica U_{el} é obtida a partir da equação (3.29), como descrito em (RITTO, 2010):

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_V \left[E \epsilon_{xx}^2 + 4 k_s G \left(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2 \right) \right] dV \quad (3.29)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Explicitando-se os limites de integração da equação (3.29), tem-se que:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A_{yz}} \left[E \epsilon_{xx}^2 + 4 k_s G \left(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2 \right) \right] dA dx \quad (3.31)$$

sendo A_{yz} a área da seção transversal plana na configuração não deformada.

Comparando-se a equação (3.31) com a equação (3.25), sem considerar o termo da energia potencial gravitacional, conclui-se que:

$$\Psi(x) = \int_{A_{yz}} \left[E \epsilon_{xx}^2 + 4 k_s G (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2) \right] dA \quad (3.32)$$

Considerando-se a geometria cilíndrica do eixo principal na configuração não deformada, a integral na equação (3.32) foi calculada sobre a área da seção transversal da seguinte forma:

$$\Psi(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[E \epsilon_{xx}^2 + 4 k_s G (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2) \right] r dr d\theta = \Psi_L(x) + \Psi_{nL}(x) \quad (3.33)$$

com $y = r \cos(\theta)$ e $z = r \sin(\theta)$. A expressão final de $\Psi(x)$ foi dividida, por conveniência, na soma dos termos $\Psi_L(x)$ e $\Psi_{nL}(x)$, cujas expressões finais encontram-se no anexo B.

Por sua vez, a energia potencial gravitacional U_g corresponde ao trabalho da força peso, distribuída ao longo do eixo principal, englobando também a força peso concentrada dos demais componentes móveis suspensos, tendo como referência a configuração não deformada. A equação (3.34) apresenta a expressão final de U_g :

$$U_g = - \int_0^L \frac{\partial W}{\partial x} dx - \sum_{k=1, k \neq k^*}^3 M_k u_k g - (M_{k^*} + \Delta m) u_{k^*} g$$

$$U_g = - \int_0^L \rho g \frac{\partial u}{\partial x} dx - \sum_{k=1, k \neq k^*}^3 M_k u_k g - (M_{k^*} + \Delta m) u_{k^*} g \quad (3.34)$$

sendo k^* o índice do rotor intermediário.

3.2.1.3 Equação de Lagrange do sistema

As equações da dinâmica do sistema são geradas a partir da equação de Lagrange na forma vetorial, apresentada na forma genérica da equação (3.1), a saber:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

Uma formulação mais apropriada das equações de Lagrange para modelagem em elementos finitos do sistema é apresentada na equação (3.35), já considerando o operador $L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = T(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u})$, sendo \mathbf{u} o vetor *global* de deslocamentos.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{Amort} + \mathbf{Q}_{Atr} + \mathbf{Q}_{Rub} + \mathbf{Q}_{Motor} \quad (3.35)$$

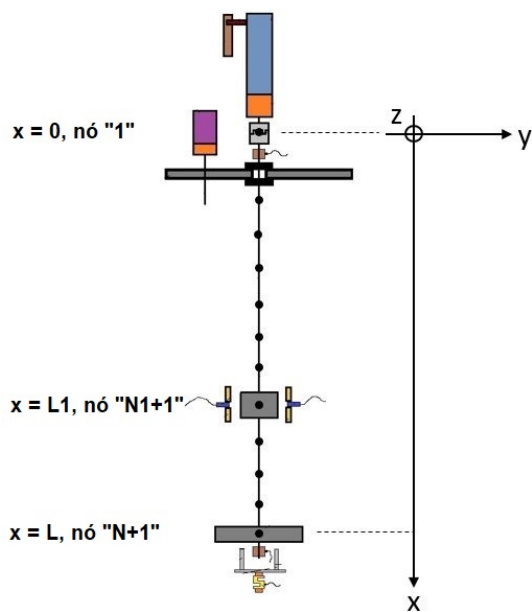
Na equação (3.35), \mathbf{Q}_{Amort} corresponde às forças de amortecimento, detalhadas na seção 3.2.2; \mathbf{Q}_{Atr} se refere ao torque de atrito concentrado sobre o rotor principal, detalhado na seção 3.2.3; \mathbf{Q}_{Rub} se refere às forças concentradas de impacto e fricção às quais o rotor intermediário está submetido, detalhadas na seção 3.2.4; e, por fim, \mathbf{Q}_{Motor} corresponde às forças generalizadas de atuação direta do servo motor sobre o eixo principal e do motor de passo sobre a plataforma móvel.

Para se obter o modelo da dinâmica a partir das equações de Lagrange, é preciso: (i) gerar a malha de elementos finitos sobre o eixo principal, como detalhado na seção 3.2.1.4; (ii) discretizar a expressão da energia cinética T , como detalhado na seção 3.2.1.5; (iii) e discretizar a expressão da energia potencial U , como detalhado na seção 3.2.1.6.

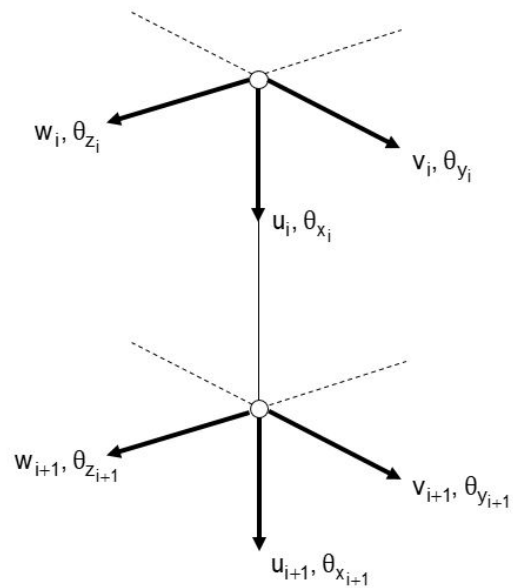
3.2.1.4 Malha de elementos finitos

Inicialmente, é gerada uma malha unidimensional ao longo do eixo principal. Como explicitado na tabela (1), a distância entre o acoplamento, do eixo com o motor, e o rotor principal foi designado como L , e a distância entre o acoplamento e o rotor intermediário, como L_1 . $L_2 = L - L_1$ corresponde à distância entre os rotores principal e intermediário. Uma vez definido o número de elementos N da malha, o número de elementos N_1 ao longo do comprimento L_1 é calculado de modo que a razão entre N_1 e N_2 -número de elementos no trecho do eixo entre os rotores- seja o mais próximo possível da razão entre L_1 e L_2 .

A figura (15a) ilustra a malha de elementos finitos.



(a) Vista global da malha



(b) Elemento i : sentidos de rotação definidos pela regra da mão direita

Figura 15 – Malha de elementos finitos no eixo principal

Traduzindo-se em termos analíticos, o valor de N_1 é calculado da seguinte forma:

$$N_1 = \left\lceil N \frac{L_1}{L} \right\rceil (N - N_1 \geq 1) + \left\lfloor N \frac{L_1}{L} \right\rfloor (N - N_1 < 1)$$

ou seja, primeiramente, calcula-se $N_1 = \left\lceil N \frac{L_1}{L} \right\rceil$. Se $N - N_1 \geq 1$ é verdadeiro, então $N_1 = \left\lceil N \frac{L_1}{L} \right\rceil$; caso contrário, $N_1 = \left\lfloor N \frac{L_1}{L} \right\rfloor$. Isso garante que $N_2 = N - N_1$ seja no mínimo igual a 1. Uma vez imposto que em cada um dos pontos $x = 0$, $x = L_1$ e $x = L$ haja um nó da malha, o menor número possível de elementos é $N = 2$. Recordando, conforme enumerado da lista de símbolos, que $\lceil x \rceil$ corresponde ao menor inteiro maior que x e que $\lfloor x \rfloor$ corresponde ao maior inteiro menor que x .

3.2.1.5 Discretização da expressão da energia cinética

Uma vez definida a malha de elementos finitos, o próximo passo é a discretização da expressão da energia cinética, T . Com esse fim, as variáveis de posição u , v , θ_z , w , θ_y e θ_x , no interior de cada elemento finito, são interpoladas em função dos valores de deslocamento nos respectivos nós. A equação (3.36) elenca as funções de interpolação. A principal referência utilizada nessa formulação foi (RITTO, 2010).

$$\begin{aligned} u_i(\xi, t) &= \mathbf{N}_u(\xi) \mathbf{u}_i(t), & \theta_{xi}(\xi, t) &= \mathbf{N}_{\theta_x}(\xi) \mathbf{u}_i(t) \\ v_i(\xi, t) &= \mathbf{N}_v(\xi) \mathbf{u}_i(t), & \theta_{yi}(\xi, t) &= \mathbf{N}_{\theta_y}(\xi) \mathbf{u}_i(t) \\ w_i(\xi, t) &= \mathbf{N}_w(\xi) \mathbf{u}_i(t), & \theta_{zi}(\xi, t) &= \mathbf{N}_{\theta_z}(\xi) \mathbf{u}_i(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Na equação (3.36), $\xi = \frac{x}{L_i}$ é a coordenada elementar, com $0 \leq \xi \leq 1$, sendo $L_i = x_{i+1} - x_i$ o comprimento do i -ésimo elemento; t é o tempo. As expressões \mathbf{N} correspondem às funções de forma, escritas como vetores-linha, conforme detalhado no Anexo A. E \mathbf{u}_i corresponde ao vetor elementar de deslocamento, função do tempo, referente ao i -ésimo elemento, tal que:

$$\mathbf{u}_i = \left[u_1^{(i)} \quad v_1^{(i)} \quad \theta_{z1}^{(i)} \quad w_1^{(i)} \quad \theta_{y1}^{(i)} \quad \theta_{x1}^{(i)} \quad u_2^{(i)} \quad v_2^{(i)} \quad \theta_{z2}^{(i)} \quad w_2^{(i)} \quad \theta_{y2}^{(i)} \quad \theta_{x2}^{(i)} \right]^T$$

A figura (15b) ilustra o elemento genérico, com 6 graus de liberdade por nó, adotado na discretização. O sentido dos deslocamentos angulares seguiu a regra da mão direita.

Dando-se início ao processo de discretização, a partir da equação (3.2), tem-se que:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left(A \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_c^T [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c \right) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \left(M_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l + \boldsymbol{\omega}_{c_l}^T [\mathbf{I}_l] \boldsymbol{\omega}_{c_l} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m \end{aligned}$$

A expressão final da energia cinética T discretizada, conforme demonstrado mais detalhadamente na seção em anexo C.1, é dada pela equação (3.37):

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \rho \left\{ A \mathbf{v}_{\xi,j}^T(\xi) \mathbf{v}_{\xi,j}(\xi) + \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,j}}^T(\xi) [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,j}}(\xi) \right\} d\xi + \\
& + \frac{1}{2} M_M \mathbf{v}_{M,\xi,1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{M,\xi,1}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{M,\xi,1}}^T(\xi=0) [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{c_{M,\xi,1}}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} M_{pl} \mathbf{v}_{\xi,1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{\xi,1}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{pl,\xi,1}}^T(\xi=0) [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{c_{pl,\xi,1}}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \overline{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{\xi,N_1}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1}}^T(\xi=1) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1}}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \overline{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1+1}}^T(\xi=0) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1+1}}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} M_1 \mathbf{v}_{\xi,N}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{\xi,N}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N}}^T(\xi=1) [\mathbf{I}_1] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N}}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1}}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1}}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1+1}}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1+1}}(\xi=0)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

A grande vantagem da equação (3.37) é explicitar, em termos de parâmetros da malha de elementos finitos, qual a posição de cada termo concentrado. Assim, por exemplo, o termo $\frac{1}{2} M_{pl} \mathbf{v}_{\xi,1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{\xi,1}(\xi=0)$ indica que os efeitos da massa M_{pl} da plataforma devem ser considerados no nó $j=1$, na posição local $\xi=0$. Já os termos $\frac{1}{2} \overline{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{\xi,N_1}(\xi=1)$ e $\frac{1}{2} \overline{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}(\xi=0)$ indicam que os efeitos do rotor intermediário, de massa \overline{M}_2 , devem ser considerados nos elementos $j=N_1$ e $j=N_1+1$, nas posições locais $\xi=1$ e $\xi=0$, respectivamente.

3.2.1.6 Discretização da expressão da energia potencial

Por sua vez, para a discretização da expressão da energia potencial total U do sistema, partiu-se das equações (3.25), (3.31), (3.33) e (3.34), listadas em ordem a seguir:

$$U = \int_0^L \Psi(x) dx + U_g$$

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A_{yz}} \left[E \epsilon_{xx}^2 + 4k_s G (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2) \right] dA dx$$

$$\Psi(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[E \epsilon_{xx}^2 + 4k_s G (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2) \right] r dr d\theta = \Psi_L(x) + \Psi_{nL}(x)$$

$$U_g = - \int_0^L \rho g \frac{\partial u}{\partial x} dx - \sum_{k=1, k \neq k^*}^3 M_k u_k g - (M_{k^*} + \Delta m) u_{k^*} g$$

sendo k^* o índice do rotor intermediário, e $\Psi_L(x)$ e $\Psi_{nL}(x)$ parcelas da energia potencial elástica acumulada, por comprimento do eixo principal, cujas expressões encontram-se no Anexo B.

Combinando-se as equações (3.31) e (3.33), tem-se que:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^L \Psi(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \Psi_L(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \Psi_{nL}(x) dx \quad (3.38)$$

De forma análoga à energia cinética T , as expressões das energias potencial elástica U_{el} e potencial gravitacional U_g foram discretizadas conforme as equações (3.39) e (3.40).

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Psi_L(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Psi_{nL}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \Psi_L(x_j + \xi L_j) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \Psi_{nL}(x_j + \xi L_j) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \Psi_{L\xi,j}(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \Psi_{nL\xi,j}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
U_g &= - \int_0^L \rho g \frac{\partial u}{\partial x}(x) dx + \\
&\quad - M_{pl} g u_1 + \\
&\quad - (\overline{M}_2 + \Delta m) g u_{N_1+1} + \\
&\quad - M_1 g u_{N+1} \\
&= - \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho g \frac{\partial u}{\partial x}(x) dx + \\
&\quad - \int_{x_1}^{x_2} M_{pl} g u(x) \delta(x - x_1) dx + \\
&\quad - \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} (\overline{M}_2 + \Delta m) g u(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
&\quad - \int_{x_{N_1+1}}^{x_{N_1+2}} (\overline{M}_2 + \Delta m) g u(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
&\quad - \int_{x_N}^{x_{N+1}} M_1 g u(x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= - \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \rho g \frac{\partial u}{\partial x}(x_j + \xi L_j) d(L_j \xi) + \\
&\quad - \int_0^{L_1} M_{pl} g u(x_1 + \xi L_1) \delta(\xi L_1) d(L_1 \xi) + \\
&\quad - \int_0^{L_{N_1}} (\overline{M}_2 + \Delta m) g u(x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N_1+1}) d(L_{N_1} \xi) + \\
&\quad - \int_0^{L_{N_1+1}} (\overline{M}_2 + \Delta m) g u(x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(L_{N_1+1} \xi) + \\
&\quad - \int_0^{L_N} M_1 g u(x_N + \xi L_N) \delta(x_N + \xi L_N - x_{N+1}) d(L_N \xi) \\
&= - \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \rho g \frac{\partial u_\xi}{\partial x}(\xi) d\xi + \\
&\quad - \int_0^1 M_{pl} g u_{\xi,1}(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi + \\
&\quad - \int_0^1 (\overline{M}_2 + \Delta m) g u_{\xi,N_1}(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\
&\quad - \int_0^1 (\overline{M}_2 + \Delta m) g u_{\xi,N_1+1}(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi + \\
&\quad - \int_0^1 M_1 g u_{\xi,N}(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_g &= - \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \rho g \frac{\partial u_{\xi,j}}{\partial x}(\xi) d\xi + \\
&\quad - M_{pl} g u_{\xi,1}(\xi = 0) + \\
&\quad - (\overline{M}_2 + \Delta m) g u_{\xi,N_1}(\xi = 1) + \\
&\quad - (\overline{M}_2 + \Delta m) g u_{\xi,N_1+1}(\xi = 0) + \\
&\quad - M_1 g u_{\xi,N}(\xi = 1)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.2.1.7 Modelo completo sem aplicação de restrições

De posse das expressões discretizadas das energias cinética T e potencial U , conforme as equações (3.37), (3.39) e (3.40), o próximo passo é deduzir a equação da dinâmica do sistema, sem aplicação das restrições, a partir das equações de Lagrange, descritas na equação (3.35), a saber:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{Amort} + \mathbf{Q}_{Atr} + \mathbf{Q}_{Rub} + \mathbf{Q}_{Motor}$$

A equação (3.41) apresenta a equação da dinâmica, na forma global final,

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{M}_2(\mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{F}_U(\mathbf{u}) + \mathbf{F}_{atr}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{F}_{rub}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{W}_g$$

sendo \mathbf{u} um vetor de deslocamentos de dimensão $N_g = 6(N + 1)$, uma vez que a malha é constituída por $N + 1$ nós, com seis graus de liberdade em cada nó; e \mathbf{U} o vetor de entrada:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} T_{sm} \\ F_{pl} \end{bmatrix}$$

T_{sm} o torque de saída do servo motor e F_{pl} a força de atuação do fuso de saída do motor de passo sobre a plataforma móvel.

A demonstração da equação (3.41) a partir da equação (3.35) encontra-se descrita na seção em anexo C.2.

3.2.1.8 Modelo completo com aplicação intrínseca de restrições

Como afirmado na seção 3.2.1.7, a equação (3.41) representa o sistema da bancada sem a aplicação de restrições. Fisicamente, isso significaria dizer que o sistema encontra-se *solto no ar*, e que possui seis modos de corpo rígido, conforme os seis graus de liberdade considerados em cada nó. Matematicamente, haveria, então, uma infinidade de configurações de equilíbrio a depender da posição do sistema no espaço e de sua orientação.

Outro fato relevante, consequência da ausência de restrições, é que a matriz global \mathbf{K} seria singular, não sendo possível obter uma configuração única de equilíbrio, já que sua obtenção depende de inversões das matrizes de rigidez, como descrito na seção 3.2.1.9.

Por isso, para delimitar melhor o modelo e para que a equação 3.41 represente o sistema em estudo, é necessário impor condições de contorno que, adicionalmente, permitam o cálculo de uma configuração de equilíbrio do sistema.

Uma primeira forma de impor essas condições de contorno é a definição de um novo vetor de descolamento, conforme a equação 3.42.

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{u}_r \quad (3.42)$$

sendo $\mathbf{\Sigma}_r$ uma matriz $N_g \times (N_g - 8)$ composta por $N_g - 8$ colunas selecionadas da matriz identidade \mathbf{I}_{N_g} , de dimensão $N_g = 6(N + 1)$. As colunas escolhidas da matriz identidade para $\mathbf{\Sigma}_r$ são todas menos as de índices 2, 3, 4, 5, $6N_g - 4$, $6N_g - 3$, $6N_g - 2$, $6N_g - 1$, que correspondem às variáveis v_1 , θ_{z_1} , w_1 , θ_{y_1} , v_{N+1} , $\theta_{z_{N+1}}$, w_{N+1} e $\theta_{y_{N+1}}$ do vetor global de deslocamentos \mathbf{u} .

Para efeitos de comparação, tem-se que:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_{z_1} & w_1 & \theta_{y_1} & \theta_{x_1} & \cdots & u_{N+1} & v_{N+1} & \theta_{z_{N+1}} & w_{N+1} & \theta_{y_{N+1}} & \theta_{x_{N+1}} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} u_1 & \theta_{x_1} & \cdots & u_{N+1} & \theta_{x_{N+1}} \end{bmatrix}^T$$

Da equação (3.42), conclui-se que:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{x_1} & \cdots & u_{N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{x_{N+1}} \end{bmatrix}^T \quad (3.43)$$

A equação (3.43) demonstra que a definição do vetor \mathbf{u}_r , conforme a equação (3.42), impõe as restrições das equações (3.44) de forma intrínseca ao modelo.

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, & \theta_{z_1} &= 0, & w_1 &= 0, & \theta_{y_1} &= 0, \\ v_{N+1} &= 0, & \theta_{z_{N+1}} &= 0, & w_{N+1} &= 0, & \theta_{y_{N+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Substituindo-se a equação $\mathbf{u} = \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{u}_r$ na equação 3.41, a saber:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B} \mathbf{U}$$

e pré-multiplicando-se a expressão final por $\mathbf{\Sigma}_r^T$, tem-se que:

$$\mathbf{M}_{1r} \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r + \mathbf{f}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r, \ddot{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{B}_r \mathbf{U} \quad (3.45)$$

sendo que

$$\mathbf{M}_{1r} = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{M}_1 \mathbf{\Sigma}_r, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{C} \mathbf{\Sigma}_r, \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{K} \mathbf{\Sigma}_r, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r, \ddot{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}_r \mathbf{u}_r, \mathbf{\Sigma}_r \dot{\mathbf{u}}_r, \mathbf{\Sigma}_r \ddot{\mathbf{u}}_r)$$

A equação (3.45) corresponde à dinâmica do sistema com imposição intrínseca das oito restrições nas extremidades do eixo principal.

3.2.1.9 Ponto de equilíbrio

É importante destacar que a equação (3.45) modela a dinâmica de um sistema no qual nenhuma restrição foi ainda imposta a qualquer um dos deslocamentos u e θ_x nas extremidades do eixo principal, o que conduz à existência ainda de dois modos de corpo rígido, um de rotação em torno ao eixo xx e outro de deslocamento linear na direção longitudinal ao eixo principal. A existência desses modos de corpo rígido leva ao surgimento de uma infinidade de configurações de equilíbrio, a depender da posição e orientação do sistema no espaço.

Nessa seção, é descrita a configuração de equilíbrio para deslocamento nulo do nó 1, o que significa que, para se obter essa configuração de equilíbrio, faz-se necessário acrescentar as restrições expressas nas equações (3.46) às restrições anteriormente definidas, enumeradas na equação (3.44).

$$u_1 = 0, \quad \theta_{x_1} = 0 \quad (3.46)$$

Para se impor essas novas restrições apenas para o cálculo de uma configuração de equilíbrio, basta definir a matriz Σ_{r+2} a partir da matriz Σ_r , retirando-se desta última também as colunas de índices 1 e 6 da matriz identidade \mathbf{I}_{N_g} , correspondentes às variáveis u_1 e θ_{x_1} no vetor global de deslocamentos \mathbf{u} . Sendo assim, seja $\mathbf{u} = \Sigma_{r+2}\mathbf{u}_{r+2}$. Logo:

$$\mathbf{u} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ u_{N+1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \theta_{x_{N+1}} \right]^T \quad (3.47)$$

sendo o vetor \mathbf{u}_{r+2} tal que:

$$\mathbf{u}_{r+2} = \left[u_2 \ v_2 \ \theta_{z_2} \ w_2 \ \theta_{y_2} \ \theta_{x_2} \ \cdots \ u_{N+1} \ \theta_{x_{N+1}} \right]^T$$

e a equação (3.45) é reescrita conforme a equação (3.48),

$$\mathbf{M}_{1,r+2}\ddot{\mathbf{u}}_{r+2} + \mathbf{C}_{r+2}\dot{\mathbf{u}}_{r+2} + \mathbf{K}_{r+2}\mathbf{u}_{r+2} + \mathbf{f}_{r+2}(\mathbf{u}_{r+2}, \dot{\mathbf{u}}_{r+2}, \ddot{\mathbf{u}}_{r+2}) = \mathbf{B}_{r+2}\mathbf{U} \quad (3.48)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1,r+2} &= \Sigma_{r+2}^T \mathbf{M}_1 \Sigma_{r+2}, & \mathbf{C}_{r+2} &= \Sigma_{r+2}^T \mathbf{C} \Sigma_{r+2}, \\ \mathbf{K}_{r+2} &= \Sigma_{r+2}^T \mathbf{K} \Sigma_{r+2}, & \mathbf{B}_{r+2} &= \Sigma_{r+2}^T \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{r+2}(\mathbf{u}_{r+2}, \dot{\mathbf{u}}_{r+2}, \ddot{\mathbf{u}}_{r+2}) = \boldsymbol{\Sigma}_{r+2}^T \mathbf{f}(\boldsymbol{\Sigma}_{r+2} \mathbf{u}_{r+2}, \boldsymbol{\Sigma}_{r+2} \dot{\mathbf{u}}_{r+2}, \boldsymbol{\Sigma}_{r+2} \ddot{\mathbf{u}}_{r+2})$$

Na configuração de equilíbrio $\mathbf{u}_{r+2} = \mathbf{u}_{r+2}^*$, $\dot{\mathbf{u}}_{r+2} = 0$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{r+2} = 0$. Seja $\mathbf{U} = 0$ também, considerando que o sistema é mantido em repouso. Assim, a equação (3.48) se reduz a:

$$\mathbf{K}_{r+2} \mathbf{u}_{r+2}^* + \mathbf{f}_{r+2}(\mathbf{u}_{r+2}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

ou melhor,

$$\mathbf{K}_{r+2} \mathbf{u}_{r+2}^* + \mathbf{F}_{U_{r+2}}(\mathbf{u}_{r+2}^*) - \mathbf{W}_{g_{r+2}} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

A configuração de equilíbrio \mathbf{u}_{r+2}^* é obtida por método iterativo de Newton- Raphson, através dos operadores definidos nas equações (3.50) e (3.51):

$$\Psi(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{K}_{r+2} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{F}_{U_{r+2}}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{W}_{g_{r+2}} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\eta}^T}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{K}_{r+2} + \frac{\partial \mathbf{F}_{U_{r+2}}}{\partial \boldsymbol{\eta}^T}(\boldsymbol{\eta}) \quad (3.51)$$

Uma observação de interesse é que a configuração de equilíbrio \mathbf{u}_{r+2}^* é também um ponto ótimo da energia potencial total. Com efeito, como consequência da equação (3.49), tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_{r+2}} \Big|_{\mathbf{u}_{r+2}=\mathbf{u}_{r+2}^*} &= \frac{\partial U_{el}}{\partial \mathbf{u}_{r+2}} \Big|_{\mathbf{u}_{r+2}=\mathbf{u}_{r+2}^*} + \frac{\partial U_g}{\partial \mathbf{u}_{r+2}} \Big|_{\mathbf{u}_{r+2}=\mathbf{u}_{r+2}^*} \\ &= \mathbf{K}_{r+2} \mathbf{u}_{r+2}^* + \mathbf{F}_{U_{r+2}}(\mathbf{u}_{r+2}^*) - \mathbf{W}_{g_{r+2}} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

3.2.1.10 Equação da dinâmica em torno do ponto de equilíbrio

Seja $\bar{\mathbf{u}}_r$ o vetor de deslocamento em torno do ponto de equilíbrio, tal que:

$$\bar{\mathbf{u}}_r = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_r^* \Leftrightarrow \mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^* \quad (3.52)$$

O vetor \mathbf{u}_r^* é calculado a partir do vetor \mathbf{u}_{r+2}^* , solução da equação 3.49, tendo como referência a equação 3.42:

$$\mathbf{u}_r^* = \boldsymbol{\Sigma}_r^T \mathbf{u}^* = \boldsymbol{\Sigma}_r^T (\boldsymbol{\Sigma}_{r+2} \mathbf{u}_{r+2}^*)$$

Partindo-se da equação (3.45) com a função \mathbf{f}_r expandida,

$$\mathbf{M}_{1r}\ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r + \mathbf{f}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r, \ddot{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{B}_r \mathbf{U}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1r}\ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r + \\ & + \mathbf{M}_{2r}(\mathbf{u}_r) \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{G}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r) + \mathbf{F}_{U_r}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{W}_{g_r} + \\ & + \mathbf{F}_{atr_r}(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r) + \mathbf{F}_{rub_r}(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{B}_r \mathbf{U} \end{aligned}$$

e substituindo-se a equação (3.52), $\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*$, na última expressão, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1r}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{K}_r (\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) + \\ & + \mathbf{M}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{G}_r(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \mathbf{F}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) - \mathbf{W}_{g_r} + \\ & + \mathbf{F}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \mathbf{F}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{B}_r \mathbf{U} \end{aligned}$$

Desmembrando-se a expressão $\mathbf{K}_r (\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*)$ e após um rearranjo das parcelas, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1r}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{u}}_r + \\ & + \mathbf{M}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{G}_r(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \\ & + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r^* + \mathbf{F}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) - \mathbf{W}_{g_r} + \\ & + \mathbf{F}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \mathbf{F}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{B}_r \mathbf{U} \end{aligned}$$

Suponha $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0$, sendo \mathbf{U}_0 a atuação para se equilibrar a força peso, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r \mathbf{U} &= \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{B}_r \mathbf{U}_0 \\ &= \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{W}_{0,g_r} \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na equação de movimento, obtém-se que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1r}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{u}}_r + \\ & + \mathbf{M}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{G}_r(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \\ & + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r^* + \mathbf{F}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) - \mathbf{W}_{g_r} + \\ & + \mathbf{F}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \mathbf{F}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{W}_{0,g_r} \end{aligned}$$

Definindo-se as funções $\bar{\mathbf{M}}_{2r}$, $\bar{\mathbf{G}}_r$, $\bar{\mathbf{F}}_{U_r}$, $\bar{\mathbf{F}}_{atr_r}$ e $\bar{\mathbf{F}}_{rub_r}$ tais que:

$$\bar{\mathbf{M}}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{M}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) \quad (3.53)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_r(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{G}_r(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) \quad (3.54)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r^* + \mathbf{F}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*) - \mathbf{W}_{g_r} + \mathbf{W}_{0,g_r} \quad (3.55)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{F}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) \quad (3.56)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{F}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{u}_r^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) \quad (3.57)$$

e substituindo-as na última expressão da dinâmica, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1r} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{u}}_r + \\ & + \bar{\mathbf{M}}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \bar{\mathbf{G}}_r(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r) + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} \end{aligned}$$

A última expressão foi reagrupada de modo que:

$$\mathbf{M}_{1r} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{u}}_r + \bar{\mathbf{f}}_r(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} \quad (3.58)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_r(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r) = \bar{\mathbf{M}}_{2r}(\bar{\mathbf{u}}_r) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_r + \bar{\mathbf{G}}_r(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\bar{\mathbf{u}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{atr_r}(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{rub_r}(\bar{\mathbf{u}}_r, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_r)$$

A equação (3.58) corresponde à dinâmica do sistema em torno do ponto de equilíbrio.

Uma última observação de interesse é que a função $\bar{\mathbf{F}}_{U_r}$, definida na equação (3.55), satisfaz a condição:

$$\bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

como consequência da equação de equilíbrio (3.49).

3.2.1.11 Modelo completo com aplicação extrínseca de restrições

Uma outra forma mais completa de aplicação das restrições sobre as equações da dinâmica envolve o uso dos *multiplicadores de Lagrange* e de uma versão estendida do operador lagrangeano do sistema. A *aplicação extrínseca das restrições* é mais completa pois os multiplicadores de Lagrange são acrescentados ao vetor de variáveis do sistema e quantificam as forças de reação referentes a cada restrição, fornecendo, assim, informações adicionais sobre a evolução da dinâmica do sistema no tempo.

As principais referências para aplicação dessa técnica no presente trabalho foram (JUNIOR, 2015) e (GREENWOOD, 1997).

Seja $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \boldsymbol{\lambda}^T \end{bmatrix}^T$ o vetor contendo tanto o vetor global de deslocamento, \mathbf{u} , quanto o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ com os multiplicadores de Lagrange. O vetor \mathbf{u} tem dimensões $N_g \times 1$, $N_g = 6(N + 1)$, enquanto o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ tem dimensões $r \times 1$, sendo $r = 8$ o número de restrições aplicadas ao sistema. As equações (3.60) e (3.61) apresentam a versão estendida do operador lagrangeano e as equações da dinâmica, respectivamente:

$$L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) = T(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{h} - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}) \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{st}}{\partial \dot{z}_k} \right) - \frac{\partial L_{st}}{\partial z_k} = Q_k^{ext}; \quad k = 1, \dots, N_g, N_g + 1, \dots, N_g + r \quad (3.61)$$

A matriz $\boldsymbol{\Gamma}$ é fixa e com dimensões $r \times N_g$, e é escolhida conforme a equação (3.62) de modo que:

$$\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} = \left[v_1, \theta_{z_1}, w_1, \theta_{y_1}, v_{N+1}, \theta_{z_{N+1}}, w_{N+1}, \theta_{y_{N+1}} \right]^T$$

sendo $\left[v_1, \theta_{z_1}, w_1, \theta_{y_1}, v_{N+1}, \theta_{z_{N+1}}, w_{N+1}, \theta_{y_{N+1}} \right]^T$ o vetor com as variáveis de restrição.

Por sua vez, vetor \mathbf{h} é fixo de dimensões $r \times 1$, conforme a equação (3.63).

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{h} = \left[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0 \right]^T \quad (3.63)$$

As equações finais de movimento em torno do ponto de equilíbrio, obtido a partir da equação (3.61), encontram-se descritas na equação (3.64).

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \quad (3.64)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{h}$$

A demonstração da equação (3.64) a partir da equação (3.61) encontra-se mais detalhada na seção em anexo C.3.

3.2.1.12 Modelo simplificado em torno do ponto equilíbrio

A fim de observar os principais modos e frequências naturais do sistema em torno da configuração de repouso, definido pela equação (3.58), a saber:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1r} \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r + \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r, \ddot{\mathbf{u}}_r) &= \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{f}}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r, \ddot{\mathbf{u}}_r) &= \bar{\mathbf{M}}_{2r}(\mathbf{u}_r) \ddot{\mathbf{u}}_r + \bar{\mathbf{G}}_r(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\mathbf{u}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{atr_r}(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r) + \bar{\mathbf{F}}_{rub_r}(\mathbf{u}_r, \dot{\mathbf{u}}_r) \end{aligned}$$

faz-se necessário suprimir alguns termos não lineares, que no repouso são nulos.

Para obtenção do modelo linear simplificado, descrito na equação (3.65), são desprezados todos os termos não lineares da equação (3.58), exceto $\bar{\mathbf{F}}_{U_r}$, que, por meio de uma linearização em torno do ponto $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$, é incorporado à matriz de rigidez.

$$\mathbf{M}_{1r} \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \bar{\mathbf{K}}_r \mathbf{u}_r = \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} \quad (3.65)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_r = \mathbf{K}_r + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{U_r}}{\partial \mathbf{u}_r^T} \right|_{\mathbf{u}_r=\mathbf{0}} \quad (3.66)$$

Com efeito, por meio de uma aproximação da função $\bar{\mathbf{F}}_{U_r}$ em séries de Taylor, truncada a partir do termo de segunda ordem, e considerando o resultado da equação (3.59), tem-se que:

$$\bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\mathbf{u}_r) \cong \bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{U_r}}{\partial \mathbf{u}_r^T} \right|_{\mathbf{u}_r=\mathbf{0}} \mathbf{u}_r = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{U_r}}{\partial \mathbf{u}_r^T} \right|_{\mathbf{u}_r=\mathbf{0}} \mathbf{u}_r \quad (3.67)$$

Reescrevendo-se a equação (3.58) sem os termos desprezados, tem-se que:

$$\mathbf{M}_{1r} \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{u}_r + \bar{\mathbf{F}}_{U_r}(\mathbf{u}_r) = \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} \quad (3.68)$$

Substituindo-se a equação (3.67) na equação (3.68), tem-se que:

$$\mathbf{M}_{1r} \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{u}}_r + \left(\mathbf{K}_r + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{U_r}}{\partial \mathbf{u}_r^T} \right|_{\mathbf{u}_r=\mathbf{0}} \right) \mathbf{u}_r = \mathbf{B}_r \bar{\mathbf{U}} \quad (3.69)$$

E por fim, substituindo-se a equação (3.66) na equação (3.69), chega-se ao resultado da equação (3.65).

Na equação (3.66), a matriz \mathbf{K}_r representa a rigidez do eixo principal no estado não deformado, enquanto a matriz $\bar{\mathbf{K}}_r$ representa a rigidez do eixo principal em estado de repouso, em torno do ponto de equilíbrio.

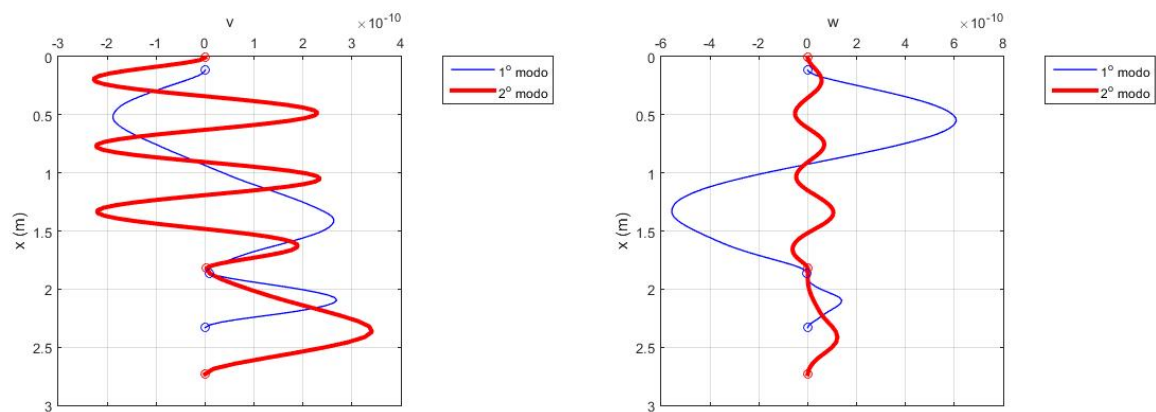
A tabela (2) lista, em ordem crescente, as primeiras 26 frequências naturais do sistema, numa malha de elementos finitos com $N = 100$ elementos, considerando a matriz de inércia \mathbf{M}_{1r} e as matrizes de rigidez \mathbf{K}_r e $\bar{\mathbf{K}}_r$.

Nota-se, da tabela (2), que as frequências em torno do ponto de equilíbrio são maiores que as frequências do sistema com o eixo principal no estado não deformado. Esse resultado já era esperado, especialmente para os modos laterais de vibração, devido ao acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal, uma vez que o eixo sob estado de tensão tende a um maior enrijecimento de movimentos laterais (SANTOS; FLEURY, 2019). Nota-se também que uma maior tensão sobre o eixo principal influencia pouco no valor das frequências naturais referentes aos primeiros dois modos de vibração de torção e longitudinal, tendo sido o efeito do aumento da tensão preponderante sobre o valor das frequências referentes aos modos de vibração lateral.

Tabela 2 – Frequências naturais do sistema (Hz)

Índices	f_i (Hz) - \mathbf{K}_r	Identificação do modo	f_i (Hz) - $\bar{\mathbf{K}}_r$	Identificação do modo
1	0,28	1º modo de precessão	0,61	1º modo de torção
2	0,28	2º modo de precessão	0,87	1º modo de precessão
3	0,61	1º modo de torção	0,87	2º modo de precessão
4	1,26	2º modo de torção	1,26	2º modo de torção
5	2,90	Lateral	6,41	Lateral
6	2,90	Lateral	6,41	Lateral
7	4,53	Lateral	16,80	Lateral
8	4,53	Lateral	16,80	Lateral
9	10,00	Lateral	34,00	Lateral
10	10,00	Lateral	34,00	Lateral
11	19,35	Lateral	37,19	1º modo longitudinal
12	19,35	Lateral	52,20	Lateral
13	31,90	Lateral	52,20	Lateral
14	31,90	Lateral	71,82	Lateral
15	37,18	1º modo longitudinal	71,82	Lateral
16	47,62	Lateral	72,20	Lateral
17	47,62	Lateral	72,20	Lateral
18	57,17	Lateral	93,21	Lateral
19	57,17	Lateral	93,21	Lateral
20	66,50	Lateral	116,65	Lateral
21	66,50	Lateral	116,65	Lateral
22	88,51	Lateral	118,94	2º modo longitudinal
23	88,51	Lateral	142,38	Lateral
24	113,68	Lateral	142,38	Lateral
25	113,68	Lateral	170,58	Lateral
26	118,93	2º modo longitudinal	170,58	Lateral

Um fato relevante a ser destacado é que apenas em oito modos, sendo dois modos de corpo rígido e seis de vibração, ocorrem deslocamentos não desprezíveis dos rotores, enquanto que os demais modos se caracterizam pelas vibrações predominantemente laterais do eixo principal, com deslocamentos quase nulos dos demais componentes móveis. As figuras (16), (17) e (18) ilustram graficamente as deformações do eixo principal para os seis modos de vibração referidos, para uma malha com $N = 100$ elementos. As deformações do eixo principal estão exageradas em cada vista dos modos, para ser possível observá-las, respeitando-se as devidas razões de proporção entre os modos.



(a) Longitudinais - XY

(b) Longitudinais - XZ

Figura 16 – Deformações do eixo nos modos longitudinais (planos XY e XZ)

Na figura (16), referente aos modos de vibração longitudinais, observa-se no 1º modo o avanço do nó 1 e recuo dos nós $N_1 + 1$ e $N + 1$, indicando a existência do ponto neutro de deslocamento longitudinal ao longo do eixo entre os nós 1 e $N_1 + 1$. Já no 2º modo, observa-se o movimento mais pronunciado de recuo do nó $N_1 + 1$ e de avanço do nó $N + 1$, indicando a existência do ponto neutro de deslocamento longitudinal ao longo do eixo entre os nós $N_1 + 1$ e $N + 1$. Observa-se também no 2º modo, como melhor evidenciado na figura (20a), que no nó 1 também há um avanço, de maneira que também há um ponto neutro entre os nós 1 e $N_1 + 1$, bem mais próximo do nó 1.

Já na figura (17), referente aos modos de vibração de torção, observa-se, mesmo com a pequena escala, as tendências de movimentos laterais, ao longo do eixo principal, nos dois modos. Observa-se também que as baixas tendências de deslocamento longitudinal do acoplamento, do rotor intermediário e do rotor principal, fixos aos nós 1, $N_1 + 1$ e $N + 1$, respectivamente, já que se encontram nas mesmas posições, no eixo xx , do estado de repouso, do que se conclui que os modos de torção pouco influem nos movimentos longitudinais dos rotores e do acoplamento. Por sua vez, a figura (17b) mostra também a tendência dos movimentos de rotação do rotor intermediário em torno dos eixos yy e zz .

Por sua vez, na figura (18), observa-se, como esperado, uma tendência de movimento mais pronunciado de descolamento em v no modo de precessão “ v ” e de movimento mais

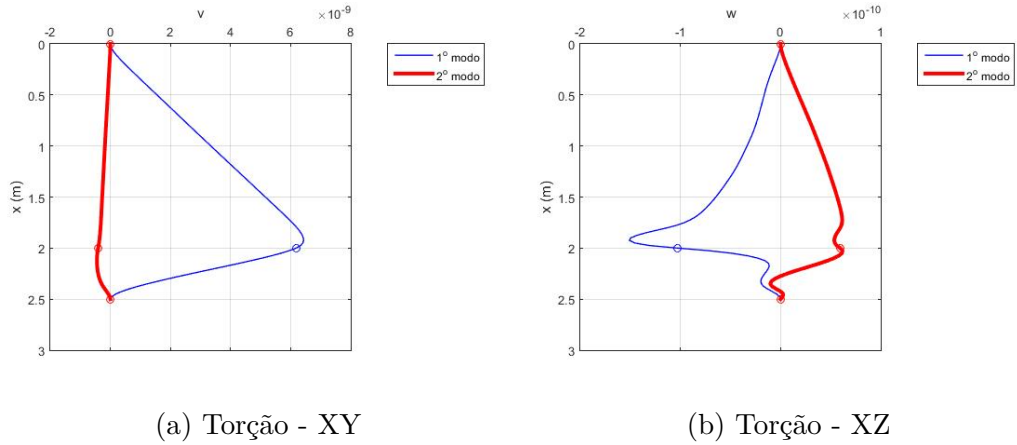


Figura 17 – Deformações do eixo nos modos de torção (planos XY e XZ)

pronunciado de descolamento em w no modo de precessão “ w ”.

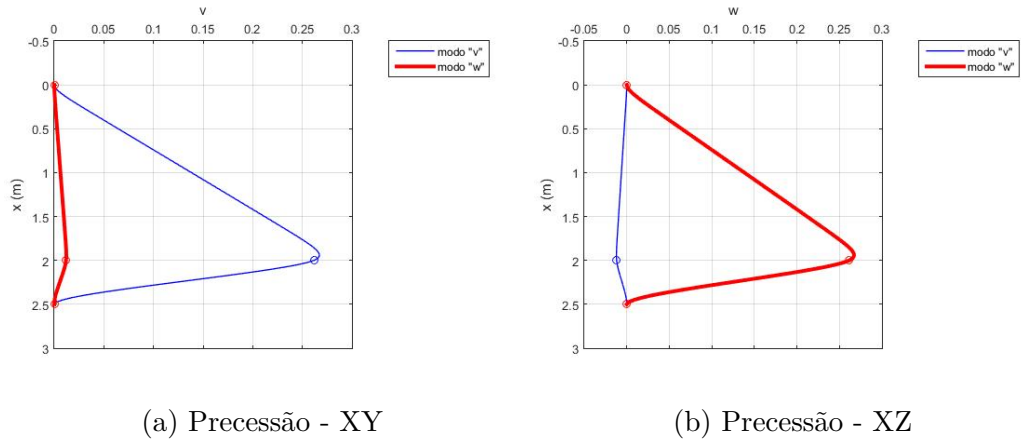


Figura 18 – Deformações do eixo nos modos de precessão (planos XY e XZ)

Por outro lado, a figura (19) ilustra mais alguns outros modos de vibração lateral, com deslocamentos desprezíveis dos rotores e do acoplamento

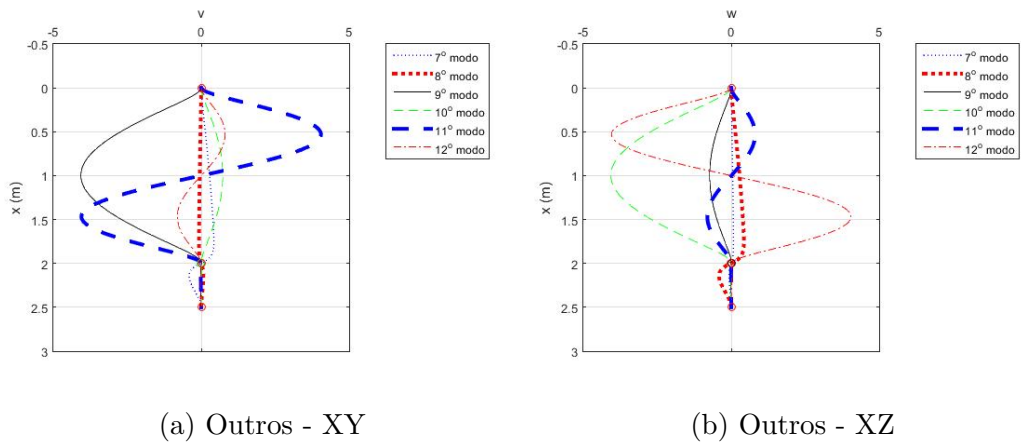


Figura 19 – Deformações do eixo para outros modos laterais (planos XY e XZ)

A figura (20), por sua vez, apresenta os valores de deslocamento longitudinal u e de rotação θ_x em cada nó da malha.

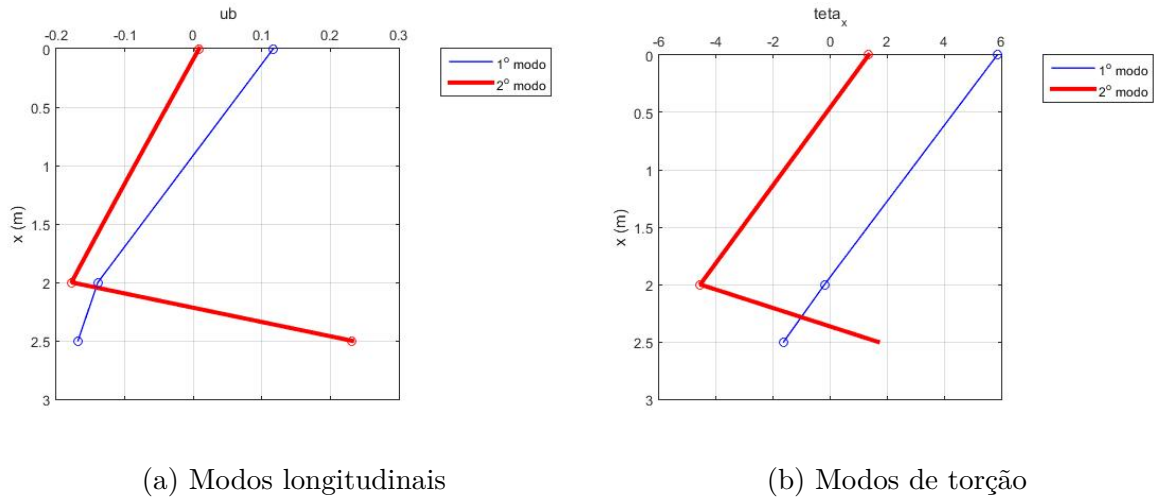


Figura 20 – Modos longitudinais e de torção segundo deslocamentos em u e em θ_x

A figura (20a) ilustra a proporção de deslocamentos longitudinais para o 1º e 2º modos de vibração, enquanto a figura (20b) ilustra a proporção de deslocamentos de rotação em θ_x , referentes ao 1º e ao 2º modos de torção, ambos ao longo do eixo principal. Observa-se, como esperado, a presença de um nó no 1º modo e de dois nós no 2º modo, tanto para as vibrações longitudinais quanto para as de torção.

Como última observação, chamou-se **modos de precessão** a dois modos específicos de vibração lateral, correspondentes aos maiores deslocamentos laterais do rotor intermediário.

3.2.2 Matriz de amortecimento

Partindo-se da equação global (3.35), a saber:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{Amort} + \mathbf{Q}_{Atr} + \mathbf{Q}_{Rub} + \mathbf{Q}_{Motor}$$

o vetor força generalizada \mathbf{Q}_{Amort} é definido como sendo proporcional ao vetor velocidade $\dot{\mathbf{u}}$, conforme a equação (3.70).

$$\mathbf{Q}_{Amort} = -\mathbf{C}_{EF} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.70)$$

A matriz \mathbf{C}_{EF} é dividida nas duas parcelas \mathbf{C}_{estr} e \mathbf{C}_{conc} , conforme a equação (3.71),

$$\mathbf{C}_{EF} = \mathbf{C}_{estr} + \mathbf{C}_{conc} \quad (3.71)$$

sendo que \mathbf{C}_{estr} se refere a um amortecimento estrutural no eixo principal, e \mathbf{C}_{conc} se refere a um amortecimento concentrado, devido à interação das partes móveis com os rolamentos de apoio, um deles instalado próximo ao acoplamento, na saída do servo-motor; e os outros, instalados no rotor principal.

A matriz \mathbf{C}_{estr} é definida como uma combinação linear das matrizes de inércia e de rigidez, conforme a equação (3.72).

$$\mathbf{C}_{estr} = \alpha \mathbf{M}_{EF} + \beta \mathbf{K}_{EF} \quad (3.72)$$

Na equação (3.72), os valores de α e β são escolhidos de modo que os coeficientes de amortecimento ξ_i , referentes a cada modo de vibração, estejam delimitados entre um valor mínimo ξ_{min} e um valor máximo ξ_{max} , previamente definidos. Para maiores detalhes, vide anexo E.

Já a matriz de amortecimento concentrado \mathbf{C}_{conc} é definida com base nos torques concentrados de amortecimento sobre o sistema, devidos aos rolamentos presentes tanto no acoplamento quanto no rotor principal. Os torques de amortecimento foram assumidos proporcionais às velocidades de rotação $\dot{\theta}_{x_1}$ e $\dot{\theta}_{x_{N+1}}$, relativas aos nós 1 e $N + 1$, respectivamente.

Para se obter a força generalizada \mathbf{Q}_{ac} , referente ao amortecimento concentrado, é preciso antes considerar o trabalho virtual associado aos torques de atrito $-c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1}$ e $-c_{\theta_{x_{N+1}}} \dot{\theta}_{x_{N+1}}$ a seguir:

$$\begin{aligned} \delta W_{ac1} &= - \int_0^L c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_1) dx \\ \delta W_{ac2} &= - \int_0^L c_{\theta_{x_{N+1}}} \dot{\theta}_{x_{N+1}} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\delta W_{ac_1} &= - \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_1) dx \\
&= - \int_{x_1}^{x_2} c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_1) dx \\
&= - \int_0^{L_1} c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \bar{\theta}_x(t, x_1 + \xi L_1) \delta(x_1 + \xi L_1 - x_1) d(\xi L_1) \\
&= - \int_0^{L_1} c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \bar{\theta}_x(t, x_1 + \xi L_1) \delta(\xi L_1) d(\xi L_1) \\
&= - \int_0^1 c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \bar{\theta}_{\xi, N}(t, \xi) \frac{1}{L_1} \delta(\xi - 0) L_1 d\xi \\
&= - \int_0^1 c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \delta \mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi \\
&= - \delta \mathbf{u}_1^T(t) \int_0^1 c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi \\
&= - \delta \mathbf{u}_1^T(t) c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(0)
\end{aligned}$$

do que se conclui que:

$$\mathbf{Q}_{ac_1}^{(j)} = -c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(0) I_{c_1}(j)$$

sendo que:

$$I_{c_n}(j) = \begin{cases} 1 & \text{para } j = n \\ 0 & \text{para } j \neq n \end{cases}$$

Da mesma forma, a partir da expressão do trabalho virtual δW_{ac_2} , conclui-se que:

$$\mathbf{Q}_{ac_2}^{(j)} = -c_{\theta_{x_{N+1}}} \dot{\theta}_{x_{N+1}} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(1) I_{c_N}(j)$$

A expressão final da força generalizada referente aos amortecimentos concentrados é:

$$\mathbf{Q}_{ac}^{(j)} = -c_{\theta_{x_1}} \dot{\theta}_{x_1} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(1) I_{c_1}(j) - c_{\theta_{x_{N+1}}} \dot{\theta}_{x_{N+1}} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(1) I_{c_N}(j) \quad (3.73)$$

para $j = 1, \dots, N$.

A equação (3.73) indica que, na montagem da matriz global de amortecimento, que inclui a parcela $\mathbf{Q}_{ac} = -\mathbf{C}_{conc} \dot{\mathbf{u}}$, o termo $c_{\theta_{x_1}}$ deve ser associado ao elemento 1, na

posição local $\xi = 0$; enquanto que o termo $c_{\theta_{x_{N+1}}}$ deve ser associado ao elemento N , na posição local $\xi = 1$. De modo prático, isso é equivalente a adicionar os termos $c_{\theta_{x_1}}$ e $c_{\theta_{x_{N+1}}}$ na matriz global de amortecimento \mathbf{C}_{EF} , nas posições da diagonal principal referentes às variáveis θ_{x_1} e $\theta_{x_{N+1}}$ do vetor global de deslocamentos, respectivamente.

3.2.3 Interações de atrito no rotor principal

3.2.3.1 Modelos de atrito seco

São adotados, basicamente, dois modelos de atrito seco, para descrever a interação entre o rotor principal e os pinos de atrito.

As equações (3.74) e (3.75) apresentam os modelos de coeficiente de atrito em função da velocidade de rotação.

$$\mu_{dc}(\omega) = \left[\mu_0 + \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\beta_1|\omega|}} \right) \mu_1 - \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\beta_2|\omega|}} \right) \mu_2 \right] \text{sign}(\omega) \quad (3.74)$$

$$\mu_c(\omega) = \mu_{c,0} \phi_c \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (3.75)$$

$$\phi_c(\nu) = \tanh(\pi \nu) + \lambda_\mu \frac{2 n_\mu \nu}{2 n_\mu - 1} \left(\frac{|\nu|^{2 n_\mu}}{2 n_\mu - 1} + 1 \right)^{-1} \quad (3.76)$$

O modelo da equação (3.74) é uma adaptação do modelo de atrito descontínuo na origem, proposto em (MIHAJLOVIC et al., 2004). Neste último, é acrescida a parcela de atrito fluido $\beta\omega$, que no presente trabalho é inserida na força generalizada de amortecimento, descrita na seção 3.2.2, conforme a equação (3.73).

Já o modelo da equação (3.75) representa o coeficiente de atrito como um função da velocidade de rotação suave na origem.

O modelo de atrito descontínuo foi escolhido para ser utilizado na representação do sistema a ser controlado, pois se aproxima mais da realidade. Já o modelo de atrito contínuo é utilizado na definição da lei de controle, pela suavidade da função e de suas derivadas.

A figura (21) ilustra o modelo descontínuo de atrito, segundo a equação (3.74), e a função adimensional ϕ_c , da equação (3.76).

Os parâmetros utilizados para gerar o gráfico da figura (21a) são retirados de (MIHAJLOVIC et al., 2004), os quais se encontram na tabela (3).

Já os parâmetros utilizados para gerar o gráfico da figura (21b) encontram-se listados na tabela (4).

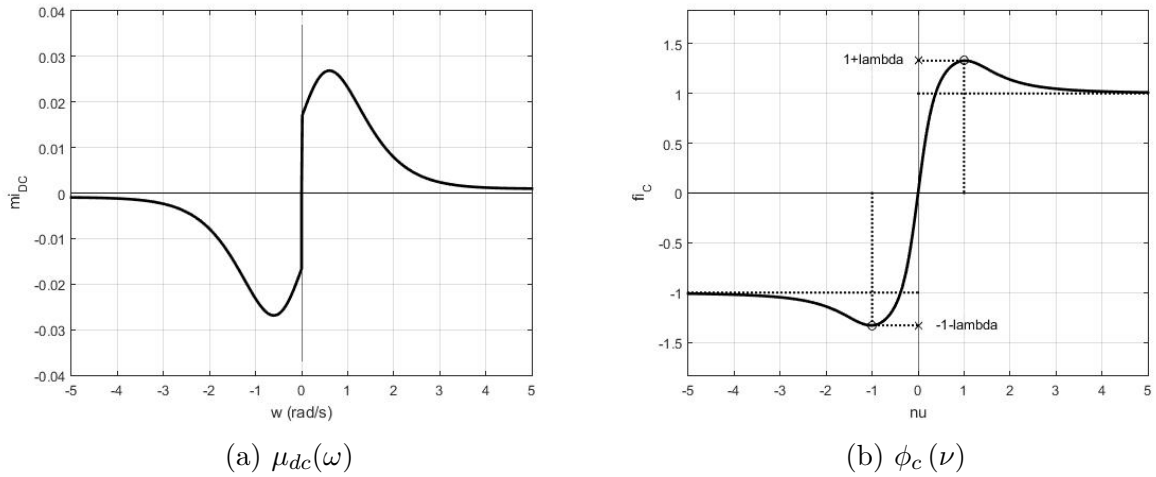


Figura 21 – Modelos de atrito

Tabela 3 – Parâmetros do modelo descontínuo de atrito

Parâmetro	Valor numérico
μ_0	$1,663 \times 10^{-2}$
μ_1	$7,016 \times 10^{-1}$
μ_2	$7,173 \times 10^{-1}$
β_1	$2,043 \times 10^0$
β_2	$1,921 \times 10^0$

Tabela 4 – Parâmetros da função adimensional para o modelo contínuo de atrito

Parâmetro	Valor numérico
λ_μ	$3,333 \times 10^{-1}$
n_μ	$3,000 \times 10^0$

Os parâmetros μ_0 , μ_1 , μ_2 , β_1 e β_2 , a princípio, devem ser gerados a partir da identificação do modelo com a bancada experimental. Posteriormente, os parâmetros $\mu_{c,0}$, ω_0 , λ_μ e n_μ são estimados de modo que proporcionem um bom ajuste do modelo contínuo ao modelo descontínuo de atrito.

O ajuste do modelo contínuo ao modelo descontínuo é realizado com base em algumas propriedades das funções dos dois modelos:

- (1) $\mu_{dc}(\omega) \rightarrow \mu_0 + \mu_1 - \mu_2$ quando $\omega \rightarrow \infty$
- (2) $\mu_c(\omega) \rightarrow \mu_{c,0}$ quando $\omega \rightarrow \infty$
- (3) $\phi_c(1) = \tanh(\pi) + \lambda \cong 1 + \lambda$
- (4) $\mu_{dc}(0) = \mu_0$

Das propriedades (1) e (2), pode-se concluir de forma direta que:

$$\mu_{c,0} = \mu_0 + \mu_1 - \mu_2 \tag{3.77}$$

Sendo ω_{Max} o ponto de máximo da função $\mu_{dc}(\omega)$, o parâmetro ω_0 do modelo contínuo é escolhido de modo que:

$$\omega_0 = \omega_{Max} \quad (3.78)$$

Sendo $\mu_{dc,Max} = \mu_{dc}(\omega_{Max})$ o máximo valor da função $\mu_{dc}(\omega)$, e partindo-se da propriedade (3), estima-se a o parâmetro λ_μ de modo que:

$$\begin{aligned} \mu_c(\omega_{Max}) = \mu_{dc}(\omega_{Max}) &\Rightarrow \mu_{c,0} \phi_c\left(\frac{\omega_{Max}}{\omega_0}\right) = \mu_{dc,Max} \\ &\Rightarrow \mu_{c,0} (\tanh(\pi) + \lambda_\mu) = \mu_{dc,Max} \\ &\Rightarrow \tanh(\pi) + \lambda_\mu = \frac{\mu_{dc,Max}}{\mu_{c,0}} \end{aligned}$$

$$\lambda_\mu = \frac{\mu_{dc,Max}}{\mu_{c,0}} - \tanh(\pi) \quad (3.79)$$

Para facilitar um possível ajuste da lei de controle, é inserido na equação (3.79) um fator α_ω , de modo a ser possível um ajuste fino do valor máximo da função do modelo contínuo:

$$\lambda_\mu = \alpha_\omega \frac{\mu_{dc,Max}}{\mu_{c,0}} - \tanh(\pi) \quad (3.80)$$

O ponto de máximo ω_{Max} da função $\mu_{dc}(\omega)$ é obtido resolvendo-se a equação (3.81) pelo método de Newton-Raphson, chegando-se no exemplo da figura (21a) ao valor $\omega_{Max} = 0,604 \text{ rad/s}$.

$$\left. \frac{d \mu_{dc}}{d \omega} \right|_{\omega = \omega_{Max}} = 2 \beta_1 \mu_1 \frac{e^{\beta_1 \omega_{Max}}}{(e^{\beta_1 \omega_{Max}} + 1)^2} - 2 \beta_2 \mu_2 \frac{e^{\beta_2 \omega_{Max}}}{(e^{\beta_2 \omega_{Max}} + 1)^2} = 0 \quad (3.81)$$

A equação (3.81) é calculada a partir da derivada da função na equação (3.74) para $\omega > 0$, ou seja, com $|\omega| = \omega$.

A figura (22) ilustra o ajuste do modelo contínuo de atrito ao modelo descontínuo, para $\alpha_\omega = 1.0$ e $\alpha_\omega = 1.5$.

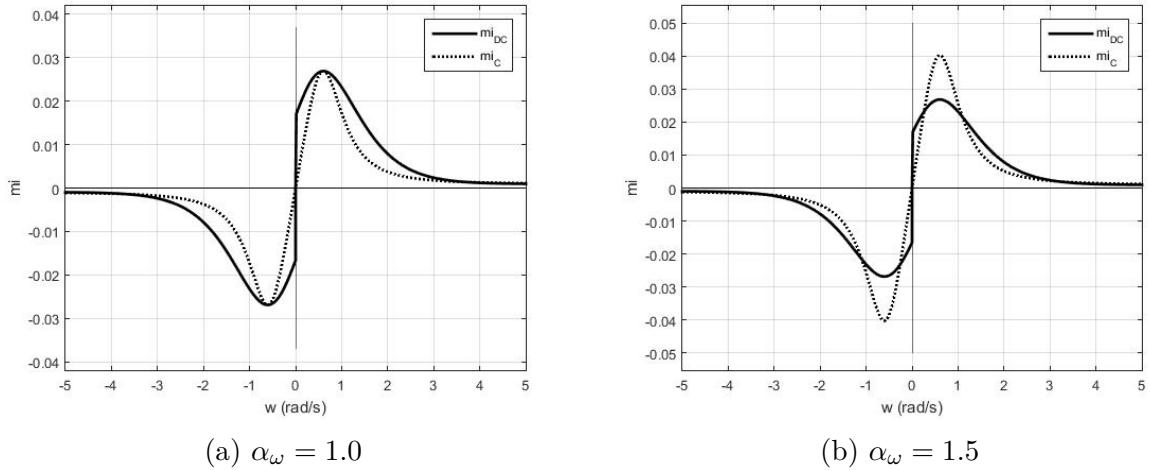


Figura 22 – Ajustes do modelo contínuo de atrito ao modelo descontínuo

3.2.3.2 Força generalizada de atrito na equação da dinâmica

No contato entre o pino de atrito e o rotor principal, surgem duas interações: (i) a força normal N_r de apoio do rotor sobre os pinos, na direção do deslocamento longitudinal u_{N+1} do nó $N+1$ e no sentido contrário; (ii) e o torque resistivo de atrito T_{atr} , com sentido oposto à velocidade angular $\dot{\theta}_{X_{N+1}}$ no nó $N+1$ da malha.

As equações (3.82) e (3.83) correspondem às expressões de N_r e de T_{atr} :

$$N_r(\bar{u}_{N+1}) = k_{N+1} \bar{u}_{N+1} I_c(\bar{u}_{N+1}) \quad (3.82)$$

$$T_{atr}(\bar{u}_{N+1}, \dot{\theta}_{X_{N+1}}) = \mu(\dot{\theta}_{X_{N+1}}) N_r(\bar{u}_{N+1}) R \quad (3.83)$$

sendo \bar{u}_{N+1} o deslocamento longitudinal no nó $N+1$ em relação ao ponto de equilíbrio, R a distância entre os pinos de atrito e o centro geométrico do rotor principal, e $I_{c,N+1}(\bar{u}_{N+1})$ o índice de contato definido pela equação (3.84).

$$I_c(\bar{u}_{N+1}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{u}_{N+1} \geq 0 \\ 0, & \text{se } \bar{u}_{N+1} < 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

A força generalizada \mathbf{Q}_{Atr} da equação da dinâmica é a soma da força generalizada \mathbf{Q}_{N_r} , devida à força normal, com a força generalizada $\mathbf{Q}_{T_{atr}}$, devida ao torque de atrito.

Para se obter a força generalizada \mathbf{Q}_{N_r} , é preciso antes considerar o trabalho virtual da força normal N_r , conforme a equação (3.85).

$$\delta W_{N_r} = \int_0^L N_r \delta \bar{u}(x) \delta(x - x_{N+1}) dx \quad (3.85)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\delta W_{N_r} &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_r \delta \bar{u}(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_{x_N}^{x_{N+1}} N_r \delta \bar{u}(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_0^{L_N} N_r \delta \bar{u}(t, x_N + \xi L_N) \delta(x_N + \xi L_N - x_{N+1}) d(\xi L_N) \\
&= \int_0^1 N_r \delta \bar{u}_{\xi, N}(t, \xi) \frac{1}{L_N} \delta(\xi - 1) L_N d\xi \\
&= \int_0^1 N_r \delta \mathbf{u}_N^T(t) \mathbf{N}_u^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi \\
&= \delta \mathbf{u}_N^T(t) \int_0^1 N_r \mathbf{N}_u^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi
\end{aligned}$$

do que se concluiu que:

$$\mathbf{Q}_{N_r}^{(j)} = \int_0^1 N_r \mathbf{N}_u^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi = N_r (\bar{u}_{N+1}) \mathbf{N}_u^T(\xi = 1) I_{c_N}(j) \quad (3.86)$$

para $j = 1, \dots, N$.

De modo similar, a força generalizada $\mathbf{Q}_{T_{atr}}$ é obtida partindo-se da expressão do trabalho virtual:

$$\begin{aligned}
\delta W_{T_{atr}} &= \int_0^L T_{atr} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_{atr} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_{x_N}^{x_{N+1}} T_{atr} \delta \bar{\theta}_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_0^{L_N} T_{atr} \delta \bar{\theta}_x(t, x_N + \xi L_N) \delta(x_N + \xi L_N - x_{N+1}) d(\xi L_N) \\
&= \int_0^1 T_{atr} \delta \bar{\theta}_{x\xi, N}(t, \xi) \frac{1}{L_N} \delta(\xi - 1) L_N d\xi \\
&= \int_0^1 T_{atr} \delta \mathbf{u}_N^T(t) \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi \\
&= \delta \mathbf{u}_N^T(t) \int_0^1 T_{atr} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi
\end{aligned}$$

do que se conclui que:

$$\mathbf{Q}_{T_{atr}}^{(j)} = \int_0^1 T_{atr} \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi = T_{atr} (\bar{u}_{N+1}, \dot{\theta}_{X_{N+1}}) \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi = 1) I_{c_N}(j) \quad (3.87)$$

para $j = 1, \dots, N$.

3.2.4 Interações de impacto e deslizamento no rotor intermediário

O rotor intermediário, a depender do deslocamento lateral, é submetido a forças de interação no contato com a casca cilíndrica, limitadora do movimento lateral do rotor e suporte dos sensores de distância, como ilustrado na figura (9). As interações no ponto de contato, denominadas, em seu conjunto, de *rub*, se caracterizaram: (i) pela força de impacto lateral, com direção radial e sentido dirigido para o centro do rotor; (ii) e pela força de atrito de deslizamento na direção tangencial e sentido oposto ao da velocidade tangencial no ponto de contato.

Nas seções a seguir encontram-se descritos o modelo representativo do *rub*, bem como a força generalizada referente a essa interação na equação da dinâmica.

3.2.4.1 Modelo de *rub*

A figura (23) ilustra o movimento lateral do rotor intermediário e as variáveis envolvidas. Na figura (23a), o ponto (y_C, z_C) corresponde ao ponto de contato na superfície lateral do rotor; o ponto (y_E, z_E) corresponde ao centro geométrico do rotor; $\hat{\mathbf{u}}_r$ corresponde ao vetor unitário na direção radial; $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$ corresponde ao vetor unitário na direção tangencial ao ponto de contato; R_2 corresponde ao raio do rotor; u_E corresponde ao deslocamento lateral do centro geométrico do rotor na direção de $\hat{\mathbf{u}}_r$; e φ corresponde ao deslocamento angular do vetor $\hat{\mathbf{u}}_r$ em relação ao eixo yy .

Durante o contato com a casca cilíndrica, o rotor é submetido às forças F_y e F_z , componentes, nas direções yy e zz , da resultante da composição entre a força de impacto F_n , na direção radial, e a força resistiva de atrito F_t com mesma direção do vetor $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$. O rotor é submetido também ao torque T_2 resistivo à rotação em torno do eixo principal. As equações (3.88), (3.89) e (3.90) apresentam as expressões das forças F_y e F_z , e do torque T_2 , sendo f_r a folga radial entre as superfícies de contato com o rotor em repouso:

$$F_y = -F_n(u_E) \cos(\varphi) + F_t(u_E, v_{C,\varphi}) \sen(\varphi) \quad (3.88)$$

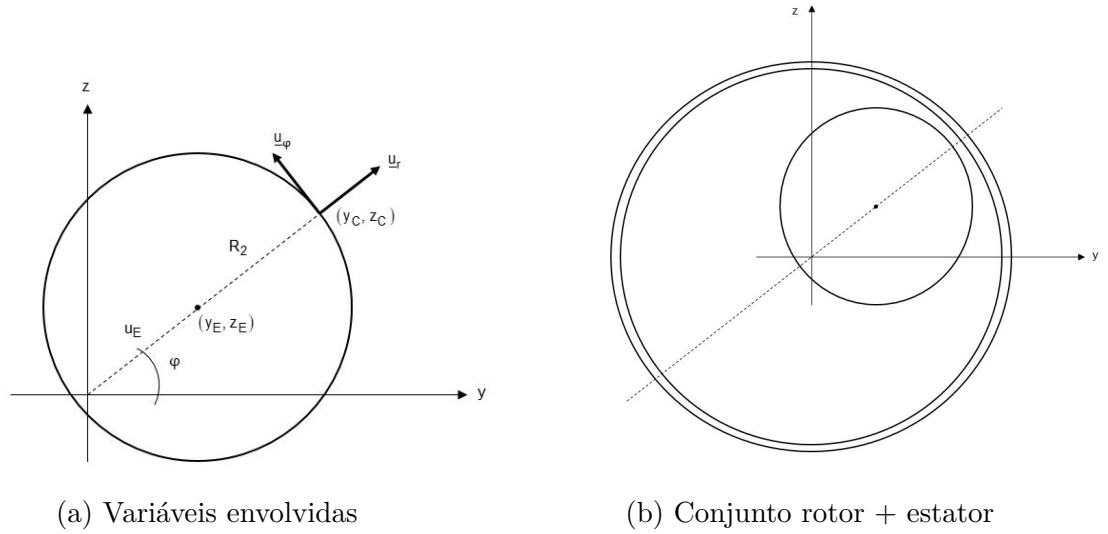
$$F_z = -F_n(u_E) \sen(\varphi) - F_t(u_E, v_{C,\varphi}) \cos(\varphi) \quad (3.89)$$

$$T_2 = -F_t(u_E, v_{C,\varphi}) \{R_2 + f_r\} \quad (3.90)$$

sendo que:

$$F_n(u_E) = K_{ip} \{u_E - f_r\} I_c(u_E - f_r) \quad (3.91)$$

$$F_t(u_E, v_{C,\varphi}) = \mu_{rub}(v_{C,\varphi}) F_n(u_E) \quad (3.92)$$


 Figura 23 – Rub e variáveis envolvidas

$I_c(u)$ a função de indicação de contato, definida na equação (3.84), e $v_{C,\varphi}$ a intensidade da velocidade do ponto de contato em relação ao sistema inercial, definido pela reta pontilhada que passa pela origem e pelo centro geométrico do rotor, como ilustrado na figura (23b).

A expressão do deslocamento u_E é obtida por meio da equação (3.93):

$$u_E = \sqrt{y_E^2 + z_E^2} \quad (3.93)$$

sendo $y_E = v_{N_1+1}$ e $z_E = w_{N_1+1}$ os deslocamentos laterais do nó $N_1 + 1$ da malha de elementos finitos.

Por semelhança de triângulos, obtém-se as relações geométricas entre as coordenadas do ponto de contato e as do centro geométrico do rotor:

$$\frac{y_C}{u_E + R_2} = \frac{y_E}{u_E} \Rightarrow y_C = y_E \frac{u_E + R_2}{u_E} = y_E \left(1 + \frac{R_2}{u_E} \right) \quad (3.94)$$

$$\frac{z_C}{u_E + R_2} = \frac{z_E}{u_E} \Rightarrow z_C = z_E \frac{u_E + R_2}{u_E} = z_E \left(1 + \frac{R_2}{u_E} \right) \quad (3.95)$$

Os vetores unitários $\hat{\mathbf{u}}_r$ e $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$ são calculados conforme as equações (3.96) e (3.97).

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \left[\cos(\varphi), \sin(\varphi) \right]^T \quad (3.96)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\varphi = \left[-\sin(\varphi), \cos(\varphi) \right]^T \quad (3.97)$$

A expressão da velocidade $\mathbf{v}_{C,\varphi}$, com intensidade $v_{C,\varphi}$, é dada pela equação (3.98).

$$\mathbf{v}_{C,\varphi} = v_{C,\varphi} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} v_{C,\varphi} &= \dot{\mathbf{u}}_C^T \hat{\mathbf{u}}_\varphi + R_2 \dot{\theta}_{x_{N+1}} \\ \dot{\mathbf{u}}_C &= \left[\dot{y}_C, \dot{z}_C \right]^T \end{aligned}$$

sendo que $\dot{\mathbf{u}}_C^T \hat{\mathbf{u}}_\varphi$ é a projeção do vetor $\dot{\mathbf{u}}_C$ sobre o vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}_\varphi$, ou seja, na direção tangencial no ponto de contato; e $R_2 \dot{\theta}_{x_{N+1}}$ é a parcela da velocidade $v_{C,\varphi}$ referente ao deslocamento angular do rotor intermediário no tempo.

Por sua vez, as derivadas temporais \dot{y}_C e \dot{z}_C são obtidas a partir das equações (3.94) e (3.95). As equações (3.99) e (3.100) apresentam as expressões finais de \dot{y}_C e \dot{z}_C :

$$\dot{y}_C = \left\{ 1 + \frac{R_2}{u_E} \left(\frac{z_E}{u_E} \right)^2 \right\} \dot{y}_E - \frac{y_E z_E R_2}{u_E^3} \dot{z}_E \quad (3.99)$$

$$\dot{z}_C = -\frac{z_E y_E R_2}{u_E^3} \dot{y}_E + \left\{ 1 + \frac{R_2}{u_E} \left(\frac{y_E}{u_E} \right)^2 \right\} \dot{z}_E \quad (3.100)$$

As equações (3.99) e (3.100) são compactadas nas formas matriciais equivalentes das equações (3.101) e (3.102).

$$\dot{\mathbf{u}}_C = \begin{bmatrix} \dot{y}_C \\ \dot{z}_C \end{bmatrix} = \frac{R_2}{u_E} \begin{bmatrix} \frac{u_E}{R_2} + \text{sen}^2(\varphi) & -\cos(\varphi) \text{sen}(\varphi) \\ -\text{sen}(\varphi) \cos(\varphi) & \frac{u_E}{R_2} + \cos^2(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{R_2}{u_E} \begin{bmatrix} \text{sen}^2(\varphi) & -\cos(\varphi) \text{sen}(\varphi) \\ -\text{sen}(\varphi) \cos(\varphi) & \cos^2(\varphi) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Por fim, na equação (3.92), a expressão μ_{rub} do coeficiente de atrito como função da velocidade $v_{C,\varphi}$ é definida pelo modelo de atrito descontínuo similar ao da equação (3.74), conforme a equação (3.103).

$$\mu_{rub}(v) = \left[\mu_{r0} + \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\beta_{r1}|v|}} \right) \mu_{r1} - \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\beta_{r2}|v|}} \right) \mu_{r2} \right] \text{sign}(v) \quad (3.103)$$

3.2.4.2 Força generalizada de *rub* na equação da dinâmica

Similarmente às forças generalizadas de amortecimento e de atrito, para a obtenção da força generalizada relativa às interações de *rub* sobre o rotor intermediário, é necessário partir dos trabalhos virtuais das forças F_y e F_z , e do torque T_2 .

Seja δW_{F_y} o trabalho virtual referente à força F_y , conforme a equação (3.104).

$$\delta W_{F_y} = \int_0^L F_y \delta v(t, x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx \quad (3.104)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \delta W_{F_y} &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_y \delta v(t, x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx \\ &= \int_{x_{N_1-1}}^{x_{N_1}} F_y \delta v(t, x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\ &\quad + \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} F_y \delta v(t, x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx \\ &= \int_0^{L_{N_1}} F_y \delta v(t, x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N_1+1}) d(\xi L_{N_1}) + \\ &\quad + \int_0^{L_{N_1+1}} F_y \delta v(t, x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1} - x_{N_1+1}) d(\xi L_{N_1+1}) \\ &= \int_0^{L_{N_1}} F_y \delta v(t, x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N_1+1}) d(\xi L_{N_1}) + \\ &\quad + \int_0^{L_{N_1+1}} F_y \delta v(t, x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(\xi L_{N_1+1}) \\ &= \int_0^1 F_y \delta v_{\xi, N_1}(t, \xi) \frac{1}{L_{N_1}} \delta(\xi - 1) L_{N_1} d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 F_y \delta v_{\xi, N_1+1}(t, \xi) \frac{1}{L_{N_1+1}} \delta(\xi - 0) L_{N_1+1} d\xi \\ &= \int_0^1 F_y \delta \mathbf{u}_{N_1}^T(t) \mathbf{N}_v^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 F_y \delta \mathbf{u}_{N_1+1}^T(t) \mathbf{N}_v^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi \\ &= \delta \mathbf{u}_{N_1}^T(t) \int_0^1 F_y \mathbf{N}_v^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\ &\quad + \delta \mathbf{u}_{N_1+1}^T(t) \int_0^1 F_y \mathbf{N}_v^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi \end{aligned}$$

do que se conclui que:

$$\mathbf{Q}_{F_y}^{(j)} = F_y \mathbf{N}_v^T(\xi = 1) I_{c_{N_1}}(j) + F_y \mathbf{N}_v^T(\xi = 0) I_{c_{N_1+1}}(j) \quad (3.105)$$

para $j = 1, \dots, N$.

Por sua vez, seja δW_{F_z} o trabalho virtual referente à força F_z , conforme a equação (3.106).

$$\delta W_{F_z} = \int_0^L F_z \delta w(t, x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx \quad (3.106)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\delta W_{F_z} &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_z \delta w(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_{x_{N_1-1}}^{x_{N_1}} F_z \delta w(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx + \\
&\quad + \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} F_z \delta w(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_0^{L_{N_1}} F_z \delta w(t, x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N+1}) d(\xi L_{N_1}) + \\
&\quad + \int_0^{L_{N_1+1}} F_z \delta w(t, x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1} - x_{N+1}) d(\xi L_{N_1+1}) \\
&= \int_0^{L_{N_1}} F_z \delta w(t, x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N+1}) d(\xi L_{N_1}) + \\
&\quad + \int_0^{L_{N_1+1}} F_z \delta w(t, x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(\xi L_{N_1+1}) \\
&= \int_0^1 F_z \delta w_{\xi, N_1}(t, \xi) \frac{1}{L_{N_1}} \delta(\xi - 1) L_{N_1} d\xi + \\
&\quad + \int_0^1 F_z \delta w_{\xi, N_1+1}(t, \xi) \frac{1}{L_{N_1+1}} \delta(\xi - 0) L_{N_1+1} d\xi \\
&= \int_0^1 F_z \delta \mathbf{u}_{N_1}^T(t) \mathbf{N}_w^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\
&\quad + \int_0^1 F_z \delta \mathbf{u}_{N_1+1}^T(t) \mathbf{N}_w^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi \\
&= \delta \mathbf{u}_{N_1}^T(t) \int_0^1 F_z \mathbf{N}_w^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\
&\quad + \delta \mathbf{u}_{N_1+1}^T(t) \int_0^1 F_z \mathbf{N}_w^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi
\end{aligned}$$

do que se conclui que:

$$\mathbf{Q}_{F_z}^{(j)} = F_z \mathbf{N}_w^T(\xi = 1) I_{c_{N_1}}(j) + F_z \mathbf{N}_w^T(\xi = 0) I_{c_{N_1+1}}(j) \quad (3.107)$$

para $j = 1, \dots, N$.

Por fim, seja δW_{T_2} o trabalho virtual referente ao torque T_2 , conforme a equação (3.108).

$$\delta W_{T_2} = \int_0^L T_2 \delta \theta_x(t, x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx \quad (3.108)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\delta W_{T_2} &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_2 \delta \theta_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_{x_{N_1-1}}^{x_{N_1}} T_2 \delta \theta_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx + \\
&\quad + \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} T_2 \delta \theta_x(t, x) \delta(x - x_{N+1}) dx \\
&= \int_0^{L_{N_1}} T_2 \delta \theta_x(t, x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N+1}) d(\xi L_{N_1}) + \\
&\quad + \int_0^{L_{N_1+1}} T_2 \delta \theta_x(t, x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1} - x_{N+1}) d(\xi L_{N_1+1}) \\
&= \int_0^{L_{N_1}} T_2 \delta \theta_x(t, x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N+1}) d(\xi L_{N_1}) + \\
&\quad + \int_0^{L_{N_1+1}} T_2 \delta \theta_x(t, x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(\xi L_{N_1+1}) \\
&= \int_0^1 T_2 \delta \theta_{x_{\xi, N_1}}(t, \xi) \frac{1}{L_{N_1}} \delta(\xi - 1) L_{N_1} d\xi + \\
&\quad + \int_0^1 T_2 \delta \theta_{x_{\xi, N_1+1}}(t, \xi) \frac{1}{L_{N_1+1}} \delta(\xi - 0) L_{N_1+1} d\xi \\
&= \int_0^1 T_2 \delta \mathbf{u}_{N_1}^T(t) \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\
&\quad + \int_0^1 T_2 \delta \mathbf{u}_{N_1+1}^T(t) \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi \\
&= \delta \mathbf{u}_{N_1}^T(t) \int_0^1 T_2 \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi + \\
&\quad + \delta \mathbf{u}_{N_1+1}^T(t) \int_0^1 T_2 \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi) \delta(\xi - 0) d\xi
\end{aligned}$$

do que se conclui que:

$$\mathbf{Q}_{T_2}^{(j)} = T_2 \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi = 1) I_{c_{N_1}}(j) + T_2 \mathbf{N}_{\theta_x}^T(\xi = 0) I_{c_{N_1+1}}(j) \quad (3.109)$$

para $j = 1, \dots, N$.

A equação (3.110) apresenta a expressão final da força generalizada para as interações de impacto e escorregamento entre o rotor intermediário e o estator:

$$\mathbf{Q}_{Rub}^{(j)} = \mathbf{Q}_{F_y}^{(j)} + \mathbf{Q}_{F_z}^{(j)} + \mathbf{Q}_{T_2}^{(j)} \quad (3.110)$$

3.2.4.3 Suavização de curvas para estabilidade numérica

No modelo original de impacto, a força F_n é definida conforme a equação (3.91), a saber:

$$F_n(u_E) = K_{ip} \{u_E - f_r\} I_c(u_E - f_r) = \begin{cases} 0 & \text{para } u_E < f_r \\ K_{ip} (u_E - f_r) & \text{para } u_E \geq f_r \end{cases}$$

Com a finalidade de suavizar a curva de impacto para se ter maior estabilidade numérica na integração das equações, é implementada uma expressão aproximada da força F_n em função do deslocamento lateral total do rotor, suave no ponto $u_E = f_r$, conforme a equação (3.111).

$$F_n(u_E) = K_{ip} (u_E - f_r) \left\{ \tanh \left(n\pi \left(\frac{u_E}{f_r + \delta_0} - 1 \right) \right) \right\} \quad (3.111)$$

sendo δ_0 o avanço máximo de deformação durante o impacto, e o parâmetro n tal que:

$$n = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{f_r}{f_r + \delta_0} \right)^{-1}$$

A figura (24) ilustra tanto o modelo original de impacto quanto o modelo suavizado.

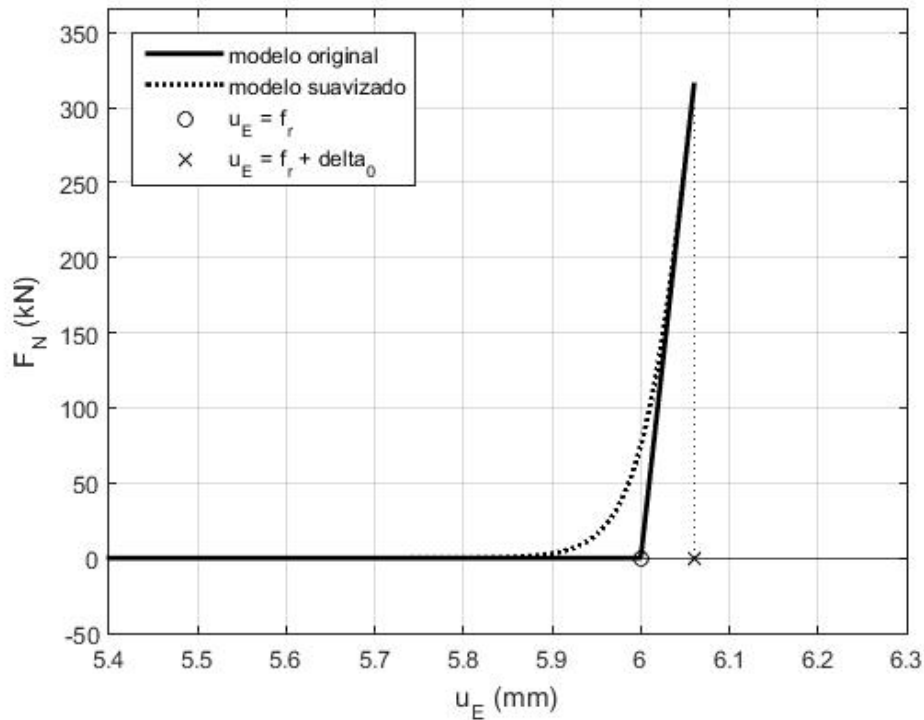


Figura 24 – Modelos de impacto lateral

A expressão da força de impacto $F_n(u_E)$, conforme a equação (3.111), é definida de modo que as seguintes propriedade sejam satisfeitas:

- (i) $F_n(u_E) \Big|_{u_E=\delta_0} = K_{ip} (\delta_0 - f_r)$
- (ii) $\frac{dF_n}{du_E} \Big|_{u_E=\delta_0} = K_{ip}$

3.2.5 Modelo do sistema em Parâmetros Concentrados

Dois modelos em parâmetros concentrados são implementados: um considerando o acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal, com o movimento lateral do rotor intermediário, conforme descrito na seção 3.2.5.1; e outro considerando o rotor intermediário restrito aos movimentos longitudinal e de rotação, conforme descrito na seção 3.2.5.2.

Algumas simulações foram realizadas com o intuito de se observar a robustez do controlador. Por isso, nessas simulações, o modelo em parâmetros concentrados *sem acoplamento* de dinâmicas foi adotado como metamodelo, para definição da lei de controle, enquanto que o modelo em parâmetros concentrados *com acoplamento* foi utilizado para representar o sistema a ser controlado. Descrição e resultados das simulações encontram-se descritos no capítulo 5.

3.2.5.1 Modelo com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal

O modelo com acoplamento de dinâmicas é obtido por meio das equações de Lagrange. A figura (25) ilustra o modelo, com deslocamento do rotor intermediário propositalmente exagerado para melhor visualização.

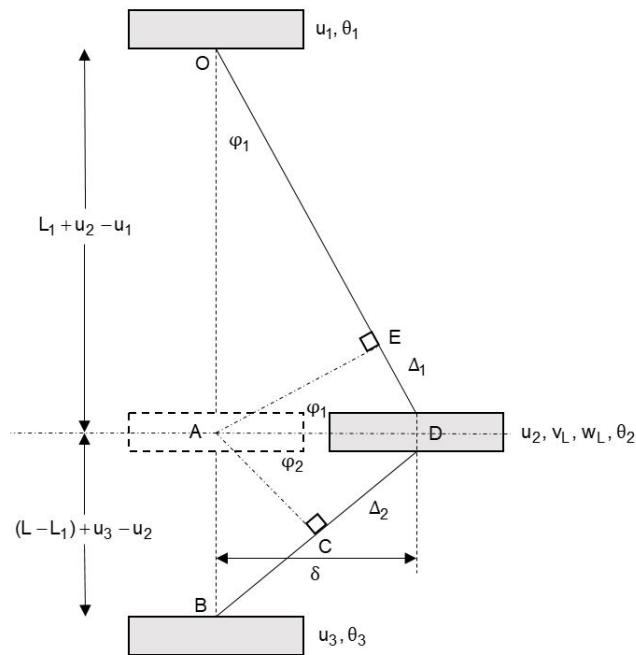


Figura 25 – Modelo em parâmetros concentrados, com acoplamento de dinâmicas

O vetor deslocamento está definido conforme a equação (3.112), com as variáveis de deslocamento ilustradas na figura (25).

$$\mathbf{u}_{ac} = \left[u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_L \quad w_L \quad \theta_2 \quad u_3 \quad \theta_3 \right]^T \quad (3.112)$$

Na definição das energias cinética T e potencial U , é adotado como hipótese simplificadora que o rotor intermediário possui apenas a velocidade intrínseca de rotação $\dot{\theta}_2$, ou seja, com movimentos desprezíveis de rotação em torno dos eixos YY e ZZ locais, podendo transladar-se com os movimentos u_2 , v_L e w_L .

A energia cinética do sistema é expressa conforme a equação (3.113), sendo $\mathbf{v}_{m,0,0}$ o vetor velocidade da massa de excentricidade Δm relativo ao sistema fixo, e escrito nesse mesmo sistema de coordenadas:

$$T = T_M + T_{pl} + T_2 + T_3 \quad (3.113)$$

mais explicitamente:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_{pl} \dot{u}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} \bar{I}_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{M}_2 (\dot{u}_2^2 + \dot{v}_L^2 + \dot{w}_L^2) + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_{m,0,0}^T \mathbf{v}_{m,0,0} + \\ & + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{u}_3^2 \end{aligned}$$

sendo T_M a energia cinética total dos componentes rotativos internos do motor; T_{pl} a energia cinética da plataforma móvel; T_2 a energia cinética total do rotor intermediário; e T_3 a energia cinética total do rotor principal.

A expressão do vetor velocidade $\mathbf{v}_{m,0,0}$ é obtida considerando-se os três sistemas de coordenadas S_0 , S_1 e S_2 , sendo S_0 o sistemas inercial fixo; S_1 o sistema com origem no centro geométrico do rotor intermediário e eixos XX , YY e ZZ paralelos respectivamente aos eixos XX , YY e ZZ do sistema S_0 ; e S_2 o sistema fixo ao rotor intermediário, conforme ilustrado na figura (26).

Na figura (26), $\mathbf{r}_{1,0} = \left[u_2 \quad v_L \quad w_L \right]^T$ corresponde ao vetor posição da origem do sistema S_1 em relação à origem do sistema S_0 . Conclui-se que:

$$\mathbf{v}_{m,0,0} = \mathbf{v}_{m,1,0} + \mathbf{v}_{1,0,0} \quad (3.114)$$

sendo $\mathbf{v}_{m,1,0}$ o vetor velocidade da massa Δm em relação à origem do sistema S_1 e escrito no sistema S_0 ; e $\mathbf{v}_{1,0,0} = \dot{\mathbf{r}}_{1,0,0}$ o vetor velocidade da origem do sistema S_1 em relação à origem do sistema S_0 e escrito no sistema S_0 .

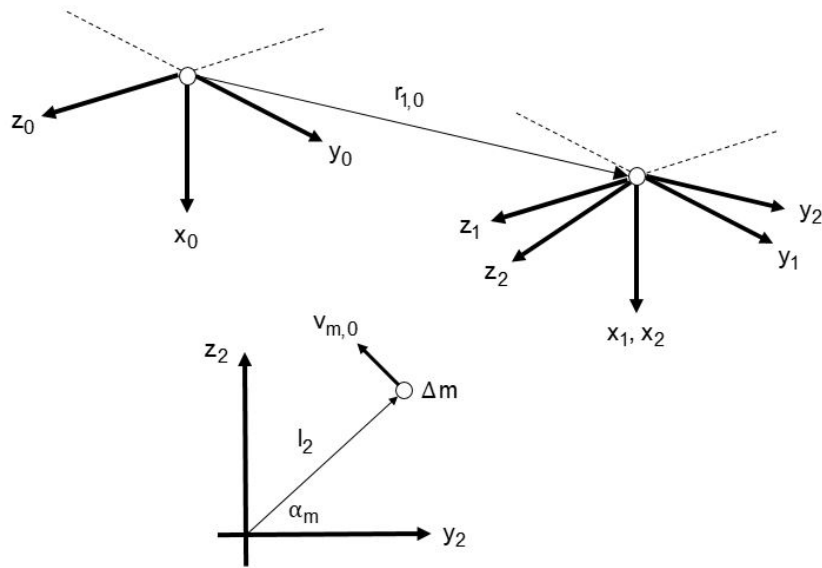


Figura 26 – Sistemas de coordenadas e vetor velocidade da massa de excentricidade

Sabe-se que:

$$\mathbf{v}_{m,1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\alpha_m) \\ l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\alpha_m) \end{bmatrix}$$

o que implica que:

$$\mathbf{v}_{m,1,0} = \mathbf{v}_{m,1,1} = \mathbf{T}_{12} \mathbf{v}_{m,1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) \\ 0 & \text{sen}(\theta_2) & \text{cos}(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\alpha_m) \\ l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\alpha_m) \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\mathbf{v}_{m,1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 + \alpha_m) \\ l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2 + \alpha_m) \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Das equações (3.114) e (3.115), conclui-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{m,0,0} &= \mathbf{v}_{m,1,0} + \mathbf{v}_{1,0,0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2 + \alpha_m) \\ l_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2 + \alpha_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_L \\ \dot{w}_L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\mathbf{v}_{m,0,0} = \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_L - l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \alpha_m) \\ \dot{w}_L + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{cos}(\theta_2 + \alpha_m) \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

e a expressão da energia cinética do sistema pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_{pl} \dot{u}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} \bar{I}_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{M}_2 (\dot{u}_2^2 + \dot{v}_L^2 + \dot{w}_L^2) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta m \left\{ \dot{u}_1^2 + (\dot{v}_L - l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \alpha_m))^2 + (\dot{w}_L + l_2 \dot{\theta}_2 \operatorname{cos}(\theta_2 + \alpha_m))^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{u}_3^2 \end{aligned}$$

Já a energia potencial total U do sistema é obtida considerando a energia de deformação dos eixos que interligam os rotores, U_{el} , com $\overline{OA} \cong \overline{OE}$ e $\overline{BA} \cong \overline{BC}$ na figura (25); e a energia potencial gravitacional dos rotores U_g , tendo como referência a configuração inicial de repouso do sistema e de não deformação dos eixos:

$$U = U_{el} + U_g \quad (3.117)$$

mais explicitamente:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} k_1 (u_2 - u_1 + \Delta_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_3 - u_2 + \Delta_2)^2 + \\ & - M_{pl} g u_1 - (\bar{M}_2 + \Delta m) g u_2 - M_3 g u_3 \end{aligned}$$

Considerando a aproximação $|\varphi_1| \ll 1$, tem-se que:

$$\operatorname{sen}(\varphi_1) \cong \operatorname{tg}(\varphi_1) \Rightarrow \frac{\Delta_1}{\delta} \cong \frac{\delta}{L_1 + u_2 - u_1} \Rightarrow \Delta_1 \cong \frac{\delta^2}{L_1 + u_2 - u_1}$$

ou seja:

$$\Delta_1 \cong \frac{v_L^2 + w_L^2}{L_1 + u_2 - u_1} \quad (3.118)$$

Da mesma forma:

$$\Delta_2 \cong \frac{v_L^2 + w_L^2}{L - L_1 + u_3 - u_2} \quad (3.119)$$

o que conclui a descrição da energia potencial total.

As equações de movimento do sistema são obtidas por meio da formulação de Lagrange, partindo-se das expressões da energia cinética e potencial, e da força generalizada total:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ac}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_{ac}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_{ac}} = \mathbf{Q} \quad (3.120)$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{C}_{ac} \dot{\mathbf{u}}_{ac} - \mathbf{F}_{at}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) - \mathbf{F}_{rub}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) + \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_c \quad (3.121)$$

sendo \mathbf{C}_{ac} a matriz de amortecimento; \mathbf{F}_{at} a força generalizada de atrito no contato entre o rotor principal e os pinos de atrito; \mathbf{F}_{rub} a força generalizada de impacto e escorregamento, proveniente da interação entre o rotor intermediário o estator; \mathbf{B}_{ac} a matriz de ganho e $\mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} T_{x,U} & F_{u,U} \end{bmatrix}^T$ o vetor contendo as variáveis de controle, sendo $T_{x,U}$ o torque no acoplamento, na saída do servo-motor, em torno do eixo XX , e $F_{u,U}$ a força sobre a plataforma móvel, na direção do eixo XX .

Desenvolvendo-se as derivadas da equação (3.120), tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{ac}} \right) = \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{M}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac}) \ddot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{G}_{1,ac}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_{ac}} = -\mathbf{G}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_{ac}} = \mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac} + \mathbf{F}_u(\mathbf{u}_{ac}) - \mathbf{W}_{ac} \quad (3.124)$$

sendo $\mathbf{M}_{1,ac}$ a parcela da matriz de inércia independente da configuração do sistema; $\mathbf{M}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac})$ a parcela da matriz de inércia dependente da configuração do sistema; \mathbf{K}_{ac} a matriz de rigidez; $\mathbf{F}_u(\mathbf{u}_{ac})$ a expressão total dos termos não lineares da derivada $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_{ac}}$; e \mathbf{W}_{ac} o vetor peso.

As matrizes $\mathbf{M}_{1,ac}$ e $\mathbf{M}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac})$ foram definida de modo que $\mathbf{M}_{2,ac}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por sua vez, as matrizes \mathbf{K}_{ac} e $\mathbf{F}_u(\mathbf{u}_{ac})$ foram definidas de modo que $\mathbf{F}_u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Substituindo-se as equações (3.121), (3.122), (3.123) e (3.124) na equação (3.120), obtém-se a expressão final das equações de movimento:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac} + \\
& + \mathbf{M}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac}) \ddot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{G}_{ac}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) + \mathbf{F}_u(\mathbf{u}_{ac}) - \mathbf{W}_{ac} + \\
& + \mathbf{F}_{at}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) + \mathbf{F}_{rub}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) = \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_c
\end{aligned}$$

sendo:

$$\mathbf{G}_{ac}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) = \mathbf{G}_{1,ac}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) + \mathbf{G}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac})$$

a matriz giroscópica total.

Explicitando-se as parcelas da equação de movimento, tem-se que:

$$\mathbf{M}_{1,ac} = \begin{bmatrix} M_{pt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_2 + \Delta m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{M}_2 + \Delta m & 0 & -\Delta m l_2 \text{sen}(\alpha_m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{M}_2 + \Delta m & \Delta m l_2 \text{cos}(\alpha_m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta m l_2 \text{sen}(\alpha_m) & \Delta m l_2 \text{cos}(\alpha_m) & \bar{I}_2 + \Delta m l_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{2,ac}(\mathbf{u}_{ac}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{64}(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{65}(\theta_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{64}(\theta_2) & m_{65}(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{64}(\theta_2) = -\Delta m l_2 \text{sen}(\theta_2 + \alpha_m) + \Delta m l_2 \text{sen}(\alpha_m)$$

$$m_{65}(\theta_2) = \Delta m l_2 \text{cos}(\theta_2 + \alpha_m) - \Delta m l_2 \text{cos}(\alpha_m)$$

$$\mathbf{G}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta m l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 + \alpha_m) \\ -\Delta m l_2 \dot{\theta}_2^2 \sen(\theta_2 + \alpha_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{ac} = \begin{bmatrix} M_{pl} g \\ 0 \\ (\bar{M}_2 + \Delta m) g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ac} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_2 & 0 & 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & K_1 + K_2 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_2 & 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_u(\mathbf{u}_{ac}) = \begin{bmatrix} \frac{k_1 (v_L^2 + w_L^2) u_2 - u_1 + \frac{v_L^2 + w_L^2}{L_1 - u_1 + u_2}}{(L_1 - u_1 + u_2)^2} - \frac{k_1 (v_L^2 + w_L^2)}{L_1 - u_1 - u_2} \\ 0 \\ \mathbf{f}_u(\mathbf{u}_{ac}) - \frac{k_1 (v_L^2 + w_L^2) \left(\frac{v_L^2 + w_L^2}{(L_1 - u_1 + u_2)^2} - 1 \right)}{L_1 - u_1 - u_2} + \frac{k_1 (v_L^2 + w_L^2) (u_1 - u_2)}{(L_1 - u_1 + u_2)^2} \\ \frac{2 k_2 v_L \left(u_3 - u_2 + \frac{v_L^2 + w_L^2}{L - L_1 - u_2 + u_3} \right)}{L - L_1 - u_2 + u_3} + \frac{2 k_2 v_L \left(u_2 - u_1 + \frac{v_L^2 + w_L^2}{L_1 - u_1 + u_2} \right)}{L_1 - u_1 + u_2} \\ \frac{2 k_2 w_L \left(u_3 - u_2 + \frac{v_L^2 + w_L^2}{L - L_1 - u_2 + u_3} \right)}{L - L_1 - u_2 + u_3} + \frac{2 k_2 w_L \left(u_2 - u_1 + \frac{v_L^2 + w_L^2}{L_1 - u_1 + u_2} \right)}{L_1 - u_1 + u_2} \\ 0 \\ -\mathbf{f}_u(\mathbf{u}_{ac}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_u(\mathbf{u}_{ac}) = \frac{k_2 (v_L^2 + w_L^2) \left(\frac{v_L^2 + w_L^2}{(L - L_1 - u_2 + u_3)^2} - 1 \right)}{L - L_1 - u_2 + u_3} - \frac{k_2 (v_L^2 + w_L^2) (u_2 - u_3)}{(L - L_1 - u_2 + u_3)^2}$$

$$\mathbf{F}_{at}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_r(u_3) \\ T_{at}(\dot{\theta}_3, u_3) \end{bmatrix}$$

sendo que:

$$N_r(u_3) = k_{N+1}(u_3 - u_C) \quad (u_3 \geq u_C) \quad (3.125)$$

$$T_{at}(u_3, \dot{\theta}_3) = \mu(\dot{\theta}_3) N_r(u_3) R \quad (3.126)$$

Na equação (3.125), N_r é a força normal no contato, k_{N+1} é a rigidez longitudinal no contato de atrito, u_C é a distância vertical entre o rotor principal e o ponto de contato, enquanto o eixo encontra-se não deformado. Já na equação (3.126), T_{at} é o torque de atrito, $\mu(\dot{\theta}_3)$ corresponde ao coeficiente de atrito, como função da velocidade de rotação, conforme descrito na seção 3.2.3; e R corresponde ao braço da força de atrito tangencial durante o contato de atrito, ou seja, trata-se da distância horizontal entre os pontos de contato de atrito e o centro geométrico do rotor principal.

A força generalizada de impacto e deslizamento sobre o rotor intermediário é dada por:

$$\mathbf{F}_{rub}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_y(v_L, w_L, \dot{\theta}_2, \dot{v}_L, \dot{w}_L) \\ F_z(v_L, w_L, \dot{\theta}_2, \dot{v}_L, \dot{w}_L) \\ T_2(v_L, w_L, \dot{\theta}_2, \dot{v}_L, \dot{w}_L) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo as funções F_y , F_z e T_2 as descritas respectivamente pelas equações (3.88), (3.89) e (3.90).

Por fim, a matriz de ganho e o vetor com variáveis de controle são tais que:

$$\mathbf{B}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} T_{x,U} \\ F_{u,U} \end{bmatrix}$$

Previamente à condição de operação, o sistema encontra-se inicialmente em repouso e na condição de equilíbrio. Assim como no modelo em elementos finitos, a distância inicial u_C , entre o rotor principal e o ponto de contato *na condição de não deformação do eixo*, é escolhida como sendo $u_C = u_3^*$, de modo que na condição inicial de movimento, com as equações de movimento descritas em torno da configuração de equilíbrio, o rotor principal esteja na iminência de contato com os pinos de atrito.

A configuração de equilíbrio, por sua vez, assim como no modelo em elementos finitos, é definida considerando $u_1 = 0$ e $\theta_1 = 0$, analogamente às equação (3.46).

Para obtenção da configuração de equilíbrio, seja:

$$\mathbf{u}_{ac} = \boldsymbol{\Sigma}_{ac,r} \mathbf{u}_{ac,r} \quad (3.127)$$

tal que:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ac,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{d,8}^{c_3} & \mathbf{I}_{d,8}^{c_7} \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

sendo $\mathbf{I}_{d,8}$ a matriz identidade de dimensão 8, e $\mathbf{I}_{d,8}^{c_j}$ a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{I}_{d,8}$.

No equilíbrio, os vetores velocidade e aceleração são nulos, e a equação de movimento se reduz a:

$$\mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac} + \mathbf{F}_u(\mathbf{u}_{ac}) - \mathbf{W}_{ac} = \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_{c,0} = -\mathbf{W}_{ac,0} \quad (3.129)$$

considerando que $\mathbf{U}_{c,0}$ é o valor de atuação que equilibra a força peso.

Substituindo-se a equação (3.127) na equação (3.129), pré-multiplicando a expressão resultante por $\boldsymbol{\Sigma}_{ac,r}^T$, e levando em consideração que $\boldsymbol{\Sigma}_{ac,r}^T \mathbf{B}_{ac} = \mathbf{0}$, obtém-se:

$$\Sigma_{ac,r}^T \mathbf{K}_{ac} \Sigma_{ac,r} \mathbf{u}_{ac,r}^* + \Sigma_{ac,r}^T \mathbf{F}_u \left(\Sigma_{ac,r} \mathbf{u}_{ac,r}^* \right) - \Sigma_{ac,r}^T \mathbf{W}_{ac} = \Sigma_{ac,r}^T \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_{c,0}$$

$$\mathbf{K}_{ac,r} \mathbf{u}_{ac,r}^* + \mathbf{F}_{u,r} \left(\mathbf{u}_{ac,r}^* \right) - \mathbf{W}_{ac,r} = \mathbf{0} \quad (3.130)$$

O vetor solução da equação (3.130), $\mathbf{u}_{ac,r}^* = \left[u_2^* \ u_3^* \right]^T$, é obtido pelo método de Newton-Raphson. O ponto de equilíbrio completo é obtido pela equação (3.127):

$$\mathbf{u}_{ac}^* = \Sigma_{ac,r} \mathbf{u}_{ac,r}^* \quad (3.131)$$

Definindo-se a vetor deslocamento relativo $\bar{\mathbf{u}}_{ac} = \mathbf{u}_{ac} - \mathbf{u}_{ac}^*$, ou de forma equivalente $\mathbf{u}_{ac} = \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*$, e substituindo esse resultado na equação de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac}^* + \\ & + \bar{\mathbf{M}}_{2,ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \bar{\mathbf{G}}_{ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \mathbf{F}_u(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*) - \mathbf{W}_{ac} + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{at}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \bar{\mathbf{F}}_{rub}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) = \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_c \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_{2,ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) &= \mathbf{M}_{2,ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*) \\ \bar{\mathbf{G}}_{ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) &= \mathbf{G}_{ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) \\ \bar{\mathbf{F}}_{at}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) &= \mathbf{F}_{at}(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) \\ \bar{\mathbf{F}}_{rub}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) &= \mathbf{F}_{rub}(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{U}_c = \bar{\mathbf{U}}_c + \mathbf{U}_{c,0}$. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_c &= \mathbf{B}_{ac} \mathbf{U}_{c,0} + \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c \\ &= -\mathbf{W}_{ac,0} + \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c \end{aligned}$$

Substituindo-se esse resultado na equação de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac}^* + \\ & + \bar{\mathbf{M}}_{2,ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \bar{\mathbf{G}}_{ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \mathbf{F}_u(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*) - \mathbf{W}_{ac} + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{at}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \bar{\mathbf{F}}_{rub}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) = -\mathbf{W}_{ac,0} + \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c \end{aligned}$$

Definindo-se o vetor $\bar{\mathbf{F}}_u$, de modo que:

$$\bar{\mathbf{F}}_u(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) = \mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac}^* + \mathbf{F}_u(\bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{u}_{ac}^*) - \mathbf{W}_{ac} + \mathbf{W}_{ac,0} \quad (3.132)$$

e substituindo essa expressão na equação de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \\ & + \bar{\mathbf{M}}_{2,ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \bar{\mathbf{G}}_{ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \bar{\mathbf{F}}_u(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{at}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \bar{\mathbf{F}}_{rub}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) = \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c \end{aligned}$$

Pela definição da equação (3.132), é correto afirmar que $\bar{\mathbf{F}}_u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, com base na equação (3.129).

Por fim, a equação de movimento pode ser reescrita de forma mais simplificada:

$$\mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) = \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) = & \bar{\mathbf{M}}_{2,ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \bar{\mathbf{G}}_{ac}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \bar{\mathbf{F}}_u(\bar{\mathbf{u}}_{ac}) + \\ & + \bar{\mathbf{F}}_{at}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) + \bar{\mathbf{F}}_{rub}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) \end{aligned}$$

A função \mathbf{f} concentra todos os termos não lineares da equação de movimento.

Analogamente à equação (3.69), referente a uma simplificação linearizada do modelo em elementos finitos, o modelo em parâmetros concentrados também apresenta, na configuração de equilíbrio, um maior enrijecimento lateral, se comparado ao da configuração com o eixo não deformado.

Por meio de operações simbólicas, chega-se à seguinte expressão da derivada de $\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}_{ac}^T}$, aplicada à configuração de equilíbrio:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}_{ac}^T} \Big|_{\mathbf{u}_{ac}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2k_1}{u_2^* + 1} - \frac{2k_2}{u_2^* - u_3^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k_1}{u_2^* + 1} - \frac{2k_2}{u_2^* - u_3^*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez total na configuração de equilíbrio é dada por:

$$\bar{\mathbf{K}}_{ac} = \mathbf{K}_{ac} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}_{ac}^T} \right|_{\mathbf{u}_{ac}^*}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{ac} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2k_1}{u_2^*} + 1 & -\frac{2k_2}{u_2^* - u_3^*} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k_1}{u_2^*} + 1 & -\frac{2k_2}{u_2^* - u_3^*} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1 + K_2 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

A tabela (5) apresenta as frequências naturais do sistema em parâmetros concentrados e as frequências correspondentes no modelo em elementos finitos, ambos na configuração de equilíbrio. Convém apenas recordar que denomina-se **modo de precessão** a dois modos específicos de vibração lateral, nas quais o rotor intermediário tem maior deslocamento lateral, conforme ilustrado na figura (18).

Tabela 5 – Frequências naturais dos sistemas em PC e EF (Hz)

Índices	f_i (Hz) - PC	f_i (Hz) - EF	Identificação do modo
1	0,66	0,61	1º modo de torção
2	1,40	0,87	1º modo de precessão
3	1,40	0,87	2º modo de precessão
4	1,79	1,26	2º modo de torção
5	40,5	30,2	1º modo longitudinal
6	144	119	2º modo longitudinal

Como se pode notar na tabela (5), as frequências naturais em ambos os modelos apresentam mesma ordem de grandeza. As diferenças numéricas ocorrem pela diferença de precisão dos modelos na representação da bancada experimental, já que o modelo em elementos finitos é o mais próximo da realidade, enquanto que o modelo em parâmetros concentrados apresenta um número maior de hipóteses simplificadoras.

A vantagem do modelo em parâmetros concentrados está na sua simplicidade, que permite uma melhor visualização do significado físico dos parâmetros e das variáveis. Já sua desvantagem se encontra na omissão de alguns fenômenos físicos relevantes, como por exemplo, a supressão das frequências naturais intermediárias entre as enumeradas na tabela (5), referentes a modos laterais de vibração do eixo.

Em resumo, o modelo em parâmetros concentrados permite uma melhor análise qualitativa de comportamentos físicos relevantes da bancada, enquanto o modelo em

elementos finitos permite uma melhor análise quantitativa desses mesmos comportamentos físicos.

3.2.5.2 Modelo sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal

Uma simplificação adotada para o modelo com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal é a inclusão de novas restrições ao movimento do rotor intermediário, reduzindo-o aos deslocamentos longitudinal u_2 e de rotação θ_2 . Adota-se a hipótese de independência estrutural entre as dinâmicas de torção e longitudinal, sendo que o acoplamento entre as duas dinâmicas é considerado apenas na interação entre o rotor principal e os pinos de atrito, uma vez que a dinâmica longitudinal influi diretamente na força normal de contato, da qual depende o torque de atrito, que por sua vez influi diretamente na dinâmica de torção.

O vetor deslocamento está definido conforme a equação (3.134), com as variáveis de deslocamento ilustradas na figura (27).

$$\mathbf{u}_m = \left[u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \theta_2 \quad u_3 \quad \theta_3 \right]^T \quad (3.134)$$

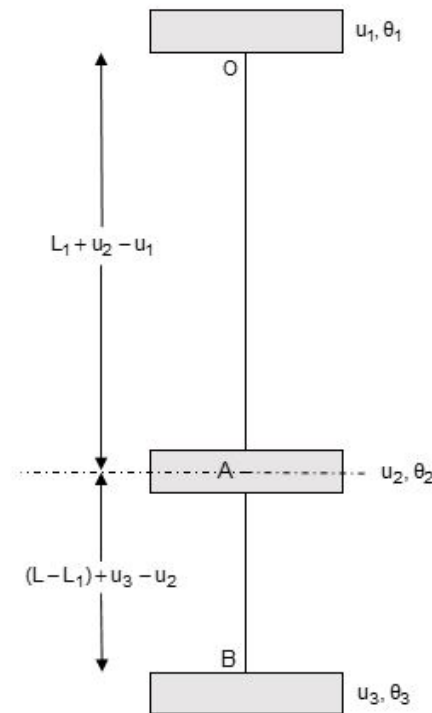


Figura 27 – Modelo em parâmetros concentrados, sem acoplamento de dinâmicas

A energia cinética do sistema é expressa conforme a equação (3.135):

$$T = \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} M_{pl} \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{M}_2 \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{u}_3^2 \quad (3.135)$$

Já a energia potencial total U do sistema é obtida considerando a energia de deformação dos eixos que interligam os rotores, U_{el} , e a energia potencial gravitacional dos rotores U_g , esta última tendo como referência a configuração inicial de repouso do sistema e de não deformação dos eixos:

$$U = U_{el} + U_g \quad (3.136)$$

mais explicitamente:

$$U = \frac{1}{2} k_1 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_3 - u_2)^2 - M_{pl} g u_1 - (\bar{M}_2 + \Delta m) g u_2 - M_3 g u_3$$

As equações de movimento do sistema são obtidas por meio da formulação de Lagrange, partindo-se das expressões da energia cinética e potencial, e da força generalizada total:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_m} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_m} = \mathbf{Q} \quad (3.137)$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{C}_m \dot{\mathbf{u}}_m - \mathbf{F}_{at,m}(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) + \mathbf{B}_m \mathbf{U}_c \quad (3.138)$$

sendo \mathbf{C}_m a matriz de amortecimento; $\mathbf{F}_{at,m}$ a força generalizada de atrito no contato entre o rotor principal e os pinos de atrito; \mathbf{B}_m a matriz de ganho e $\mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} T_{x,U} & F_{u,U} \end{bmatrix}^T$ o vetor contendo as variáveis de controle, sendo $T_{x,U}$ o torque no acoplamento, na saída do servo-motor, em torno do eixo XX , e $F_{u,U}$ a força sobre a plataforma móvel, na direção do eixo XX .

Desenvolvendo-se as derivadas da equação (3.137), tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_m} \right) = \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{u}}_m \quad (3.139)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_m} = \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m - \mathbf{W}_m \quad (3.140)$$

sendo \mathbf{M}_m a matriz de inércia, \mathbf{K}_m a matriz de rigidez, e \mathbf{W}_m o vetor peso.

Substituindo-se as equações (3.138), (3.139) e (3.140) na equação (3.137), obtém-se a expressão final das equações de movimento:

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m - \mathbf{W}_m + \mathbf{F}_{at,m}(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) = \mathbf{B}_m \mathbf{U}_c \quad (3.141)$$

Explicitando-se as parcelas da equação de movimento, tem-se que:

$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} M_{pl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_2 + \Delta m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{I}_2 + \Delta m l_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$\mathbf{W}_{ac} = \left[M_{pl} g, 0, (\bar{M}_2 + \Delta m) g, 0, M_1 g, 0 \right]^T \quad (3.143)$$

$$\mathbf{K}_{ac} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & -K_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & -K_1 & 0 & K_1 + K_2 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_2 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$\mathbf{F}_{at}(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m) = \left[0, 0, 0, 0, N_r(u_3), T_{at}(\dot{\theta}_3, u_3) \right]^T \quad (3.145)$$

sendo $N_r(u_3)$ a força normal no contato e $T_{at}(u_3, \dot{\theta}_3)$ o torque de atrito resistivo, com expressões definidas nas equações (3.125) e (3.126), respectivamente.

Por fim, a matriz de ganho e o vetor com variáveis de controle são tais que:

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} T_{x,U} \\ F_{u,U} \end{bmatrix}$$

Previamente à condição de operação, o sistema encontra-se inicialmente em repouso e na condição de equilíbrio. Assim como no modelo em elementos finitos, a distância inicial u_C , entre o rotor principal e o ponto de contato *na condição de não deformação do eixo*, foi escolhida como sendo $u_C = u_3^*$, de modo que na condição inicial de movimento, com as equações de movimento descritas em torno da configuração de equilíbrio, o rotor principal estivesse na iminência de contato com os pinos de atrito.

A configuração de equilíbrio, por sua vez, assim como no modelo em elementos finitos, é definida considerando $u_1 = 0$ e $\theta_1 = 0$, analogamente às equação (3.46).

Para obtenção da configuração de equilíbrio, seja:

$$\mathbf{u}_m = \Sigma_{m,r} \mathbf{u}_{m,r} \quad (3.146)$$

tal que:

$$\Sigma_{m,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{d,6}^{c_3} & \mathbf{I}_{d,6}^{c_5} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

sendo $\mathbf{I}_{d,6}$ a matriz identidade de dimensão 6, e $\mathbf{I}_{d,6}^{c_j}$ a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{I}_{d,6}$.

No equilíbrio, os vetores velocidade e aceleração são nulos, e a equação de movimento se reduz a:

$$\mathbf{K}_m \mathbf{u}_m - \mathbf{W}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{U}_{c,0} = -\mathbf{W}_{m,0} \quad (3.148)$$

considerando que $\mathbf{U}_{c,0}$ é o valor de atuação que equilibra a força peso no repouso.

Aplicando-se a equação (3.146) na equação (3.148), pré-multiplicando a expressão resultante por $\Sigma_{m,r}^T$, e levando em consideração que $\Sigma_{m,r}^T \mathbf{B}_m = \mathbf{0}$, obtém-se:

$$\Sigma_{m,r}^T \mathbf{K}_m \Sigma_{m,r} \mathbf{u}_{m,r}^* - \Sigma_{m,r}^T \mathbf{W}_m = \Sigma_{m,r}^T \mathbf{B}_m \mathbf{U}_{c,0}$$

$$\mathbf{K}_{m,r} \mathbf{u}_{m,r}^* - \mathbf{W}_{m,r} = \mathbf{0} \quad (3.149)$$

O vetor solução da equação (3.149), $\mathbf{u}_{m,r}^* = \begin{bmatrix} u_2^* & u_3^* \end{bmatrix}^T$, foi obtido diretamente por inversão da matriz $\mathbf{K}_{m,r}$. O ponto de equilíbrio completo é obtido pela equação (3.150):

$$\mathbf{u}_m^* = \Sigma_{m,r} \mathbf{u}_{m,r}^* \quad (3.150)$$

Definindo-se a vetor deslocamento relativo $\bar{\mathbf{u}}_m = \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m^*$, ou de forma equivalente $\mathbf{u}_m = \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{u}_m^*$, e substituindo esse resultado na equação de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m + \mathbf{K}_m \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m^* - \mathbf{W}_m + \\ + \bar{\mathbf{F}}_{at,m}(\bar{\mathbf{u}}_m, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m) = \mathbf{B}_m \mathbf{U}_c \end{aligned}$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{F}}_{at,m}(\bar{\mathbf{u}}_m, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m) = \mathbf{F}_{at,m}(\bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{u}_m^*, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m)$$

Seja $\mathbf{U}_c = \bar{\mathbf{U}}_c + \mathbf{U}_{c,0}$. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m \mathbf{U}_c &= \mathbf{B}_m \mathbf{U}_{c,0} + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_c \\ &= -\mathbf{W}_{m,0} + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_c \end{aligned}$$

Substituindo-se esse resultado na equação de movimento (3.141), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m + \mathbf{K}_m \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m^* - \mathbf{W}_m + \\ + \bar{\mathbf{F}}_{at,m}(\bar{\mathbf{u}}_m, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m) = -\mathbf{W}_{m,0} + \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_c \end{aligned}$$

ou melhor, considerando a equação (3.148):

$$\mathbf{M}_m \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m + \mathbf{K}_m \bar{\mathbf{u}}_m + \bar{\mathbf{F}}_{at,m}(\bar{\mathbf{u}}_m, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m) = \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_c \quad (3.151)$$

A tabela (6) apresenta as frequências naturais do sistema em parâmetros concentrados e as frequências correspondentes no modelo em elementos finitos, ambos na configuração de equilíbrio. Convém apenas recordar que denomina-se **modo de precessão** a dois modos específicos de vibração lateral, nas quais o rotor intermediário tem maior deslocamento lateral, conforme ilustrado na figura (18).

Na tabela (6), nota-se que as frequências naturais do primeiro e segundo modos de torção coincidem comparando-se os dois modelos em parâmetros concentrados. Já as frequências naturais do primeiro e segundo modos longitudinais, para os dois modelos em parâmetros concentrados, apesar de numericamente iguais na tabela, têm valores bastante aproximados.

Tabela 6 – Frequências naturais dos sistemas em PC e EF (Hz)

Índices	f_i (Hz) - PC,m	f_i (Hz) - PC	f_i (Hz) - EF	Identificação do modo
1	0,66	0,66	0,61	1º modo de torção
2	-	1,40	0,87	1º modo de precessão
3	-	1,40	0,87	2º modo de precessão
4	1,79	1,79	1,26	2º modo de torção
5	40,5	40,5	30,2	1º modo longitudinal
6	144	144	119	2º modo longitudinal

3.2.5.3 Forma normal do modelo sem acoplamento das dinâmicas

Com a finalidade de definir uma lei de controle para o modelo sem acoplamento, são geradas as equações da dinâmica externa e da dinâmica interna, a partir das equações de estado.

Partindo-se da hipótese de desacoplamento estrutural entre as dinâmicas longitudinal e de torção, ocorrendo o acoplamento apenas na interação de atrito, como abordado no preâmbulo da seção 3.2.5.2, é conveniente desmembrar a equação (3.151) nas referentes a cada uma das dinâmicas, conforme as equações (3.152) e (3.153), considerando que y_2 corresponde à força normal durante o contato de atrito, que é nula fora do contato.

$$\mathbf{M}_\theta \ddot{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{C}_\theta \dot{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{K}_\theta \mathbf{u}_\theta + \mathbf{T}_{at,\theta}(\dot{\mathbf{u}}_\theta, y_2) = \mathbf{B}_\theta T_{x,U} \quad (3.152)$$

$$\mathbf{M}_l \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\bar{\mathbf{u}}}_l + \mathbf{K}_l \bar{\mathbf{u}}_l + \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_l) = \mathbf{B}_l \bar{F}_{u,U} \quad (3.153)$$

sendo que:

$$\mathbf{u}_\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{u}}_l = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.154)$$

$$\mathbf{M}_\theta = \begin{bmatrix} I_M & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_2 + \Delta m l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_l = \begin{bmatrix} M_{pl} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_2 + \Delta m & 0 \\ 0 & 0 & M_1 \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

$$\mathbf{T}_{at,\theta}(\dot{\mathbf{u}}_\theta, \bar{u}_3) = \left[0, 0, \bar{T}_{at}(\dot{\theta}_3, \bar{u}_3) \right]^T, \quad \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_l) = \left[0, 0, \bar{N}_r(\bar{u}_3) \right]^T \quad (3.157)$$

com $\bar{N}_r(\bar{u}_3) = N_r(\bar{u}_3 + u_3^*)$, $y_2 = \bar{N}_r(\bar{u}_3)$, $\bar{T}_{at}(\dot{\theta}_3, y_2) = \mu(\dot{\theta}_3) y_2 R$, e por fim, as matrizes de ganho:

$$\mathbf{B}_\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

Nota-se na equação (3.153) que o modelo da dinâmica longitudinal independe de qualquer das variáveis de rotação, enquanto que, da equação (3.152), se conclui que a variável y_2 pode ser entendida como um parâmetro variável no tempo, do modelo de torção, cujo valor é obtido diretamente como saída da dinâmica longitudinal.

A estratégia de controle adotada consiste na definição de leis de controle independentes para cada dinâmica, com a nuance de que a lei de controle para a dinâmica de torção leve em consideração os valores de y_2 e suas derivadas temporais, obtidos da dinâmica longitudinal.

A equação (3.159) apresenta as equações de estado geradas a partir da dinâmica de torção, descrita pela equação (3.152):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_\theta = \mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2) + \bar{\mathbf{B}}_\theta T_{x,U} \\ y_1 = \dot{\theta}_3 = \mathbf{C}_1 \mathbf{Z}_\theta \end{cases} \quad (3.159)$$

sendo que $\mathbf{Z}_\theta = \left[\mathbf{u}_\theta^T, \dot{\mathbf{u}}_\theta^T \right]^T = \left[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3 \right]^T$ e:

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{d,3} \\ -\mathbf{M}_\theta^{-1} \mathbf{K}_\theta & -\mathbf{M}_\theta^{-1} \mathbf{C}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{M}_\theta^{-1} \mathbf{T}_{at,\theta}(\dot{\mathbf{u}}_\theta, y_2) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{M}_\theta^{-1} \mathbf{B}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \left[\mathbf{0}_{1 \times 3} \quad \mathbf{I}_{d,3}^l \right]$$

com $\mathbf{I}_{d,3}$ sendo a matriz identidade com dimensão 3, e $\mathbf{I}_{d,3}^l$ a terceira linha da matriz $\mathbf{I}_{d,3}$.

Da mesma forma, a equação (3.160) apresenta as equações de estado geradas a partir da dinâmica longitudinal, descrita pela equação (3.153):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{Z}_l + \bar{\mathbf{B}}_l \bar{F}_{u,U} \\ y_2 = N_r(\bar{u}_3) = k_{N+1} \mathbf{C}_2 \mathbf{Z}_l \end{cases} \quad (3.160)$$

sendo que $\mathbf{Z}_l = [\mathbf{u}_l^T, \dot{\mathbf{u}}_l^T]^T = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dot{\bar{u}}_1, \dot{\bar{u}}_2, \dot{\bar{u}}_3]^T$ e:

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{d,3} \\ -\mathbf{M}_l^{-1} \bar{\mathbf{K}}_l & -\mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{C}_l \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{M}_l^{-1} \mathbf{B}_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = [\mathbf{I}_{d,3}^t \quad \mathbf{0}_{1 \times 3}]$$

sendo $y_2 = 0$ fora do contato e:

$$\bar{\mathbf{K}}_l(\bar{u}_3) = \mathbf{K}_l + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{N+1} \end{bmatrix} (\bar{u}_3 \geq 0) \quad (3.161)$$

Partindo-se das equações de estado obtém-se a forma normal para cada dinâmica. Para facilitar a demonstração das expressões obtidas, define-se algumas funções auxiliares por recorrência, referentes à dinâmica de torção, considerando que y_2 é um parâmetros variável no tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \mathbf{C}_1 \\ i\Psi_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \beta_0 \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \Psi_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_\theta^T} i\Psi_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \Phi_{1,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = i\Psi_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \\ i\Gamma_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2) = \frac{\partial}{\partial t} i\Psi_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \beta_1 = \beta_0 \mathbf{A}_\theta \\ i\Psi_1(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \beta_1 \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2) + \Psi_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2) [\mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2)] \\ \Psi_1(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_\theta^T} i\Psi_1(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \Phi_{2,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2) = i\Psi_1(\mathbf{Z}_\theta, y_2) + i\Gamma_0(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2) \\ \\ i\Gamma_{k-1}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(k)}) = \frac{\partial}{\partial t} i\Psi_{k-1}(\mathbf{Z}_\theta, y_2) + \frac{\partial}{\partial t} i\Gamma_{k-2}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(k-1)}) + \\ \quad + \Gamma_{k-2}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(k-1)}) [\mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2)] \\ \beta_k = \beta_{k-1} \mathbf{A}_\theta \\ i\Psi_k(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \beta_k \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2) + \Psi_{k-1}(\mathbf{Z}_\theta, y_2) [\mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_\theta, y_2)] \\ \Psi_k(\mathbf{Z}_\theta, y_2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_\theta^T} i\Psi_k(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \Phi_{k+1,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(k)}) = i\Psi_k(\mathbf{Z}_\theta, y_2) + i\Gamma_{k-1}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(k)}) \end{array} \right.$$

ou, de forma mais compacta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \mathbf{C}_1 \\ i\Psi_0 = \beta_0 \mathbf{F}_\theta \\ \Psi_0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_\theta^T} i\Psi_0 \\ \Phi_{1,Dif} = i\Psi_0 \\ \\ i\Gamma_0 = \frac{\partial}{\partial t} i\Psi_0 \\ \beta_1 = \beta_0 \mathbf{A}_\theta \\ i\Psi_1 = \beta_1 \mathbf{F}_\theta + \Psi_0 [\mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta] \\ \Psi_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_\theta^T} i\Psi_1 \\ \Phi_{2,Dif} = i\Psi_1 + i\Gamma_0 \\ \\ i\Gamma_{k-1} = \frac{\partial}{\partial t} i\Psi_{k-1} + \frac{\partial}{\partial t} i\Gamma_{k-2} + \Gamma_{k-2} [\mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta] \\ \beta_k = \beta_{k-1} \mathbf{A}_\theta \\ i\Psi_k = \beta_k \mathbf{F}_\theta + \Psi_{k-1} [\mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_\theta - \mathbf{F}_\theta] \\ \Psi_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_\theta^T} i\Psi_k \\ \Phi_{k+1,Dif} = i\Psi_k + i\Gamma_{k-1} \end{array} \right. \quad (3.162)$$

Para a dinâmica longitudinal, as funções auxiliares de recorrência são mais simples, já que as equações de estado são lineares por partes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = k_{N+1} \mathbf{C}_2 \\ \alpha_{k+1} = \alpha_k \mathbf{A}_l \end{array} \right. \quad (3.163)$$

Seguindo-se a metodologia definida na seção em anexo J.1, as derivadas da saída y_1 e a equação da dinâmica externa obtida para o movimento de torção estão descritas nas equações (3.164) e (3.165):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \beta_0 \mathbf{Z}_\theta \\ \dot{y}_1 = \beta_1 \mathbf{Z}_\theta - \Phi_{1,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \ddot{y}_1 = \beta_2 \mathbf{Z}_\theta - \Phi_{2,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2) \\ y_1^{(3)} = \beta_3 \mathbf{Z}_\theta - \Phi_{3,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2) \\ y_1^{(4)} = \beta_4 \mathbf{Z}_\theta - \Phi_{4,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}) \end{array} \right. \quad (3.164)$$

$$y_1^{(5)} = a_1 \left(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, y_2^{(4)} \right) + b_1 T_{x,U} \quad (3.165)$$

sendo que:

$$a_1 \left(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, y_2^{(4)} \right) = \beta_5 \mathbf{Z}_\theta - \Phi_{5,Dif} \left(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, y_2^{(4)} \right) \quad (3.166)$$

$$b_1 = \beta_4 \bar{\mathbf{B}}_\theta = \frac{K_1 K_2}{I_1 I_3 \left(\bar{I}_2 + l_2^2 \Delta m \right)} \quad (3.167)$$

Já as derivadas da saída y_2 e a equação da dinâmica externa obtida para o movimento longitudinal estão descritas nas equações (3.168) e (3.169):

$$\begin{cases} y_2 = \alpha_0 \mathbf{Z}_l \\ \dot{y}_2 = \alpha_1 \mathbf{Z}_l \\ \ddot{y}_2 = \alpha_2 \mathbf{Z}_l \\ y_2^{(3)} = \alpha_3 \mathbf{Z}_l \\ y_2^{(4)} = \alpha_4 \mathbf{Z}_l \\ y_2^{(5)} = \alpha_5 \mathbf{Z}_l \end{cases} \quad (3.168)$$

$$y_2^{(6)} = a_2(\mathbf{Z}_l) + b_2 \bar{F}_{u,U} \quad (3.169)$$

sendo que:

$$a_2(\mathbf{Z}_l) = \alpha_6 \mathbf{Z}_l \quad (3.170)$$

$$b_2 = \alpha_5 \bar{\mathbf{B}}_l = \frac{k_1 k_2 k_{N+1}}{M_1 M_{pl} \left(\bar{M}_2 + \Delta m \right)} \quad (3.171)$$

Da equação (3.165), conclui-se que as equações de estado (3.159) são de grau relativo $r_\theta = 5$, enquanto que da equação (3.169), conclui-se que as equações de estado (3.160) são de grau relativo $r_l = 6$.

Como r_θ é inferior à ordem das equações de estado (3.159), que é 6, faz-se necessário definir mais uma variável para a dinâmica interna, μ , tal que:

$$\mu = \mathbf{A}_\mu \mathbf{Z}_\theta \quad (3.172)$$

A matriz \mathbf{A}_μ deve ser escolhida de modo que sejam satisfeitas as condições enumeradas na seção em anexo J.1.3. Para as dimensões da bancada experimental, a matriz \mathbf{A}_μ descrita na equação (3.173) é a que melhor satisfaz as condições requeridas:

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

$$\mu = \mathbf{A}_\mu \mathbf{Z}_\theta = \theta_2 \quad (3.174)$$

Sendo assim, partindo-se das equações (3.164) e (3.174), o vetor de estado na forma normal do sistema da equação (3.159) é dado por:

$$\mathbf{X}_\theta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ y_1^{(3)} \\ y_1^{(4)} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \mathbf{A}_\mu \end{bmatrix} \mathbf{Z}_\theta - \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{1,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2) \\ \Phi_{2,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2) \\ \Phi_{3,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2) \\ \Phi_{4,Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

ou, de forma mais compacta:

$$\mathbf{X}_\theta = \Psi_{Dif,\theta}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}) = \sigma_{Dif,\theta} \mathbf{Z}_\theta - \Phi_{Dif}(\mathbf{Z}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}) \quad (3.176)$$

A equação (3.176) corresponde ao difeomorfismo que relaciona os vetores de estado \mathbf{X}_θ e \mathbf{Z}_θ . Dado um vetor \mathbf{X}_θ , o vetor \mathbf{Z}_θ localmente correspondente é obtido por meio da inversa do difeomorfismo, dada pela equação (3.177):

$$\mathbf{Z}_\theta = \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{X}_\theta, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, \mathbf{Z}_0) \quad (3.177)$$

sendo \mathbf{Z}_0 a estimativa inicial para o cálculo de \mathbf{Z}_θ via método de Newton-Raphson em cada instante de tempo, a partir das equações (3.178) e (3.179), para dados valores de y_2 , \dot{y}_2 , \ddot{y}_2 , e $y_2^{(3)}$, sendo que, no processo iterativo, $\boldsymbol{\eta}_{n+1} \rightarrow \mathbf{Z}_\theta$.

$$\Psi(\boldsymbol{\eta}) = \sigma_{Dif,\theta} \boldsymbol{\eta} - \Phi_{Dif}(\boldsymbol{\eta}, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}) - \mathbf{X}_\theta \quad (3.178)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \Psi(\boldsymbol{\eta}) = \sigma_{Dif,\theta} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \Phi_{Dif}(\boldsymbol{\eta}, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}) \quad (3.179)$$

4 Estratégia de controle

Na presente seção, é descrita a estratégia de controle adotada para estabilização da velocidade de giro do rotor principal, estando este submetido ou não a atrito seco. A lei de controle é definida contando com a existência de dois atuadores, sendo um responsável pela rotação do eixo principal e, por consequência, dos dois rotores fixos ao eixo, e o outro, responsável pelo deslocamento vertical das peças móveis.

A lei de controle é definida considerando o metamodelo em parâmetros concentrados, sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal. Já o sistema é representado em diferentes simulações pelos três modelos abordados até então: (i) modelo em parâmetros concentrados, *sem* acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal; (ii) modelo em parâmetros concentrados, *com* acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal; e (iii) modelo em elementos finitos.

Para as simulações utilizando o modelo em elementos finitos como representativo do sistema, é realizado um ajuste do metamodelo em parâmetros concentrados, de modo que neste último, a primeira e segunda frequências de torção e longitudinais coincidam com as respectivas frequências referentes ao modelo em elementos finitos.

Como demonstrado nas simulações, a utilização do metamodelo em parâmetros concentrados com ajuste implica num erro médio em regime quando o modelo em elementos finitos é escolhido como representativo do sistema. Mesmo assim, considera-se que o objetivo buscado de estabilizar a velocidade de giro do rotor principal é alcançado dentro de uma margem aceitável de erro.

4.1 Trajetória desejada

No sistema real de perfuração rotativa, um dos efeitos mecânicos mais nocivos ao processo de perfuração é a extrema vibração de torção da coluna, de modo que, estando a mesa rotativa girando a uma velocidade aproximadamente constante na superfície, o conjunto "BHA + broca", há alguns quilômetros de profundidade, pode apresentar uma oscilação de velocidade de rotação entre zero e até cinco vezes a velocidade nominal da mesa rotativa.

Esse fenômeno é conhecido com o nome de *stick-slip*, e é caracterizado pela ocorrência alternada de dois estágios bem definidos: (i) um primeiro, em que a broca se encontra a uma velocidade nula, pelo fato de o torque resistivo proveniente da interação broca-rocha equilibrar o torque elástico da coluna sobre o BHA, enquanto a coluna vai acumulando energia potencial elástica (*stick*); (ii) e outro logo seguinte, caracterizado pela superação

do torque resistivo por parte do torque elástico sobre a broca, acompanhada por um relaxamento súbito da coluna (*slip*).

A figura (28) ilustra o comportamento do sistema em regime de *stick-slip*.

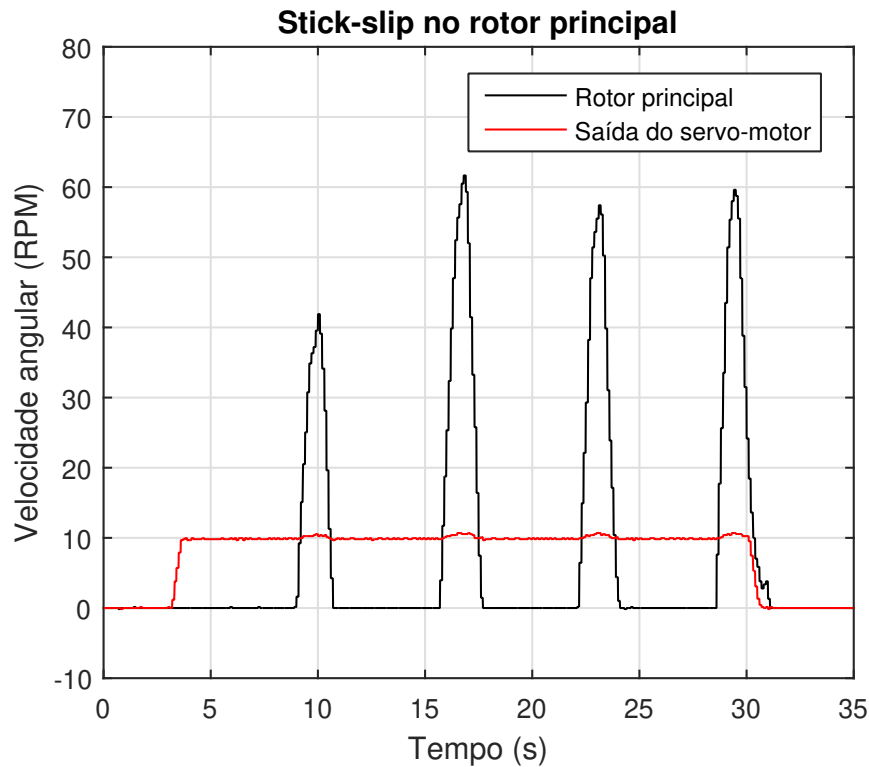


Figura 28 – Sistema em regime de *stick-slip* - curvas experimentais

É de se esperar que quanto maior seja a força normal no contato de atrito, maior também seja o torque resistivo sobre o rotor principal, e conseqüentemente maior seja a chance de ocorrência de *stick-slip*. Outra variável correlata a esse fenômeno é a própria velocidade de giro da mesa rotativa, pois a *stick-slip* tende a ocorrer em velocidades mais baixas de rotação.

Como discutido de forma mais detalhada no anexo F, é possível levantar uma curva teórica da velocidade de giro na saída do servo-motor *versus* peso sobre os pinos de atrito, que delimite duas zonas bem distintas: (i) uma zona de instabilidade, com maior chance de ocorrência de *stick-slip*; (ii) e uma zona de estabilidade, com menor chance de ocorrência desse fenômeno.

A figura (29) ilustra a divisão entre as referidas zonas, juntamente com duas trajetórias hipotéticas de seguimento para o sistema da bancada experimental. As trajetórias de seguimento 1 e 2 são definidas pela relação velocidade do rotor principal *versus* peso sobre os pinos de atrito. O ponto de operação se refere ao estado permanente de operação do sistema, a ser alcançado de forma estável.

A princípio, as duas trajetórias de seguimento seriam factíveis como trajetórias

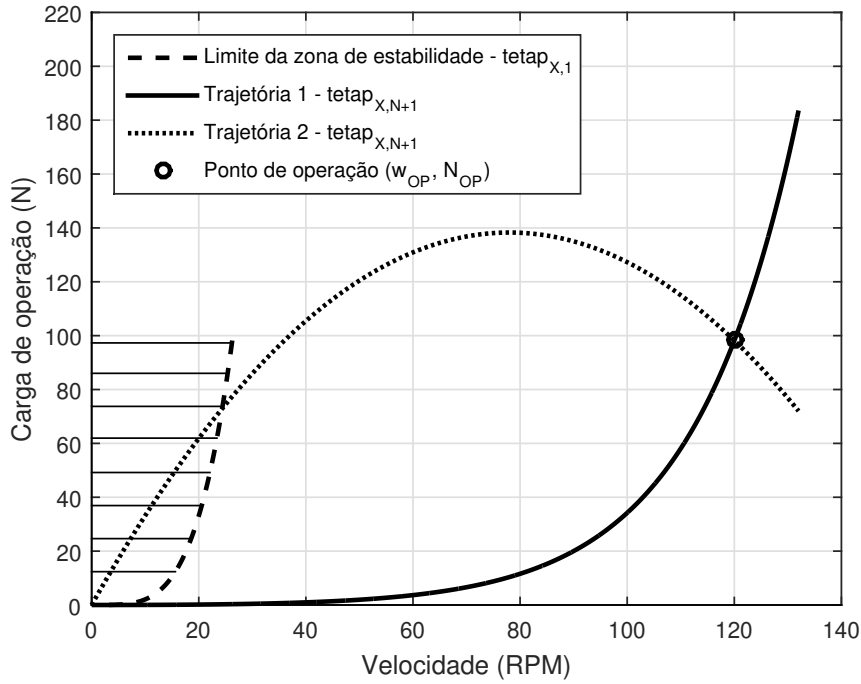


Figura 29 – Trajetórias de seguimento para as saídas do sistema e zona de instabilidade

desejadas para o regime de operação sobre o rotor principal, mas a passagem da trajetória 2 pela zona de instabilidade a baixas velocidades implicaria numa elevação do esforço de atuação. Esse esforço elevado seria evitado com a escolha da trajetória 1, já que toda ela permanece na zona de estabilidade. Fisicamente, a trajetória 1 pode ser interpretada como um aumento gradativo, e em conjunto, da velocidade de giro do rotor principal e da carga sobre os pinos de atrito, já que para uma alta carga e uma baixa velocidade de giro, seria maior o tempo necessário para que o acúmulo de energia potencial elástica no eixo conduzisse à superação do torque resistivo, o que caracterizaria o estágio de esticamento num regime de *stick-slip*. Portanto, a trajetória de seguimento escolhida para o sistema foi a de número 1 da figura (29), já que exige menor esforço de atuação.

Como detalhado no anexo F, a equação (4.1) representa a trajetória de seguimento de número 1 na figura (29).

$$N(\omega) = \gamma_{td} \left(\beta_{td} \exp\left(\frac{\omega}{\beta_{td}}\right) - \omega - \beta_{td} \right) \quad (4.1)$$

A função $N(\omega)$ definida na equação (4.1) satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Os pontos $(0, 0)$ e (ω_{op}, N_{op}) satisfazem a equação (4.1).
- (ii) $\left. \frac{dN}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0$

O parâmetro γ_{td} está relacionado à concavidade da curva $\omega \times N$, sendo que quanto menor o valor de γ_{td} , maior a concavidade.

Uma vez definida a trajetória desejada da carga de operação N sobre os pinos de atrito em função da velocidade de rotação ω , faz-se necessário definir a trajetória desejada para a velocidade ω no tempo. As equações (4.2) e (4.3) apresentam a expressão final dessa trajetória desejeja.

$$\omega_d(t) = \omega_{op} \phi_\omega \left(\frac{t}{t_{09}} \right) \quad (4.2)$$

$$\phi_\omega(\nu) = \tanh(\alpha \nu) - \frac{\alpha \nu}{\frac{1}{3}\alpha^2 \nu^2 + 1} \quad (4.3)$$

A figura (30) ilustra o comportamento da função adimensional $\phi_\omega(\nu)$ e da trajetória desejada $\omega_d(t)$:

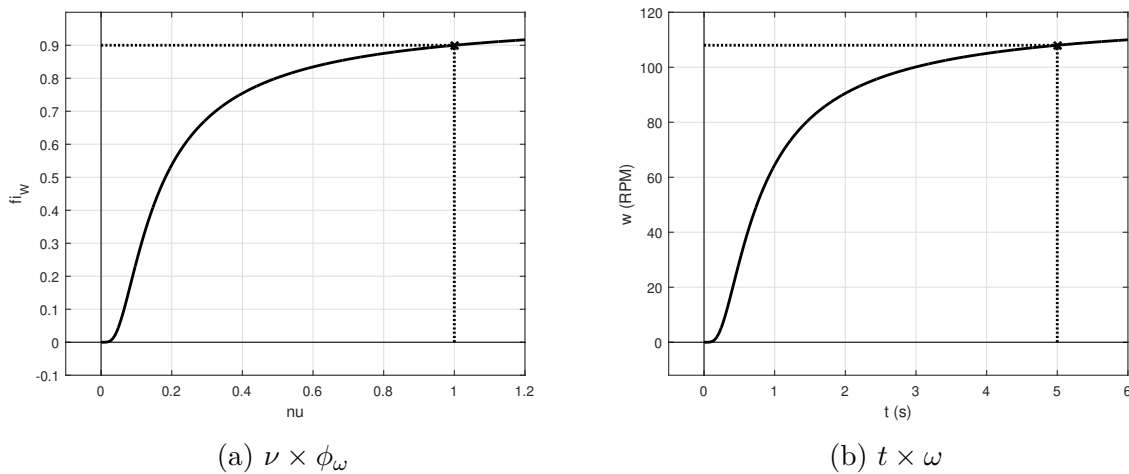


Figura 30 – Trajetória desejada $\omega_d(t)$

A função adimensional da equação (4.3) é definida de modo a satisfazer as seguintes propriedades:

- (i) $\phi_\omega(\nu = 0) = 0$
- (ii) $\left. \frac{d\phi_\omega}{d\nu} \right|_{\nu=0} = 0$
- (iii) $\left. \frac{d^2\phi_\omega}{d\nu^2} \right|_{\nu=0} = 0$
- (iv) $\left. \frac{d^3\phi_\omega}{d\nu^3} \right|_{\nu=0} = 0$
- (v) $\phi_\omega(\nu = 1) = 0,9$

Para que a propriedade (v) seja satisfeita, o valor de α na equação (4.3) deve ser calculado por meio de uma otimização que minimize a função de custo $f_{custo} = \left\{ \phi_\omega(\nu = 1) - r \right\}^2$, sendo $r = 0,9$. O valor obtido foi $\alpha = 29,9$.

Com base nas propriedades elencadas e como ilustrado na figura (30), a trajetória desejada $\omega_d(t)$ é definida de modo que tenha uma curva bem suave na origem. Como consequência, observa-se que a função adimensional $\phi_\omega(\nu)$ cresce de forma acentuada até

o valor 0,9, e a partir daí adquire um comportamento mais assintótico ao se aproximar de 1. Por esse motivo, o instante t_{09} de referência está associado ao instante em que o sistema alcançasse 90% da velocidade de operação ω_{op} .

Uma vez definidas as trajetórias desejadas para as saídas ω e N do sistema, descritas pelas equações (4.2) e (4.1), a saber:

$$\begin{aligned} y_{1,d}(t) &= \omega_d(t) = \omega_{op} \phi_\omega \left(\frac{t}{t_{09}} \right) \\ y_{2,d}(t) &= N_d(t) = \gamma_{td} \left(\beta_{td} \exp \left(\frac{\omega_d(t)}{\beta_{td}} \right) - \omega_d(t) - \beta_{td} \right) \end{aligned}$$

o próximo passo é a definição propriamente dita da lei de controle de seguimento.

4.2 Lei de controle

A estratégia de controle de seguimento encontra-se condensada nas equações (4.4) e (4.5), sendo $\bar{F}_{u,U}$ a força de atuação longitudinal sobre a plataforma móvel, $T_{x,U}$ o torque de saída do servo-motor, K_f o ganho de controle proporcional na lei de controle da dinâmica longitudinal, k_{N+1} a rigidez longitudinal no contato de atrito, s_θ a variável de escorregamento referente à dinâmica de torção, Φ_{Bd} a camada limite dinâmica, \mathbf{Z}_θ o vetor de estado na dinâmica de torção, \mathbf{X}_θ o vetor de estado na dinâmica de torção em sua forma normal, μ_d a variável da dinâmica interna para a trajetória desejada, \mathbf{Z}_0 o chute inicial para iterações internas da lei de controle na integração das equações, \bar{K}_θ o ganho de controle na dinâmica de torção, e b_1 o ganho na equação da dinâmica externa de torção, descrito na equação (3.167).

$$\bar{F}_{u,U}(t, \mathbf{Z}_l) = y_{2,d}(t) - K_f \left(\bar{u}_1 - \frac{y_{2,d}(t)}{k_{N+1}} \right) \quad (4.4)$$

$$T_{x,U}(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mu_d, \Phi_{Bd}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) = b_1^{-1} \left\{ \hat{T}_{x,U} - \bar{K}_\theta \operatorname{sat} \left(\frac{s_\theta}{\Phi_{Bd}} \right) \right\} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \left[y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, y_2^{(4)} \right]$$

A lei de controle na equação (4.5) é elaborada com base na teoria de modos deslizantes descrita na seção em anexo J.2.

Já a equação (4.4) consiste em um controlador proporcional dependente diretamente do deslocamento \bar{u}_1 da plataforma móvel.

Na equação (4.5), tem-se que a variável de escorregamento é dada por:

$$\begin{aligned} s_\theta(t, \mathbf{X}_\theta) &= y_1^{(4)} - y_{1,r}^{(4)}(t, \mathbf{X}_\theta) \\ y_{1,r}^{(4)}(t, \mathbf{X}_\theta) &= y_{1,d}^{(4)} - 4\lambda_1 \tilde{y}_1^{(3)} - 6\lambda_1^2 \ddot{\tilde{y}}_1 - 4\lambda_1^3 \dot{\tilde{y}}_1 - \lambda^4 \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_1 &= y_1 - y_{1,d} \end{aligned}$$

A expressão de $\hat{T}_{x,U}$ é dada por:

$$\hat{T}_{x,U}(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mathbf{Y}_2) = y_{1,r}^{(5)}(t, \mathbf{X}_\theta) - a_1(\mathbf{Z}_\theta, \mathbf{Y}_2)$$

sendo a expressão de $a_1(\mathbf{Z}_\theta, \mathbf{Y}_2)$ descrita na equação (3.166), e

$$\begin{aligned} y_{1,r}^{(5)}(t, \mathbf{X}_\theta) &= \frac{d}{dt} y_{1,r}^{(4)}(t, \mathbf{X}_\theta) \\ &= y_{1,d}^{(5)} - 4\lambda_1 \tilde{y}_1^{(4)} - 6\lambda_1^2 \tilde{y}_1^{(3)} - 4\lambda_1^3 \ddot{\tilde{y}}_1 - \lambda^4 \dot{\tilde{y}}_1 \end{aligned}$$

O ganho de controle \bar{K}_θ é dado por:

$$\bar{K}_\theta(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mu_d, \Phi_{Bd}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) = K_{lc,\theta}(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mathbf{Y}_2) - K_{lc,\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) + K_{\phi,\theta} \Phi_{Bd}$$

sendo que os ganhos parciais $K_{lc,\theta}$ e $K_{lc,\theta,d}$, e a constante $K_{\phi,\theta}$ são dados por:

$$K_{lc,\theta}(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mathbf{Y}_2) = \frac{1}{(1-D_{11})} \left\{ F_{lc,\theta}(\mathbf{Z}_\theta, \mathbf{Y}_2) + \eta_{lc} + D_{11} \left| \hat{T}_{x,U}(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mathbf{Y}_2) \right| \right\}$$

$$K_{lc,\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) = K_{lc,\theta} \left(t, \mathbf{Z}_{\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0), \mathbf{X}_{\theta,d}(t, \mu_d), \mathbf{Y}_2 \right)$$

$$K_{\phi,\theta} = \frac{\lambda_1}{1 - D_{11}}$$

sendo $\lambda_1 = 1,2 \times 2\pi f_{\theta,2}$ a frequência de corte do controlador em rad/s , e $f_{\theta,2} = 1,79 Hz$ a segunda frequência de torção, como indicado na tabela (6).

Na expressão do ganho parcial $K_{lc,\theta}$, a função $F_{lc,\theta}(\mathbf{Z}_\theta, \mathbf{Y}_2)$ é escolhida com base na robustez requerida para o controlador frente à variabilidade do termo a_1 na dinâmica

externa de torção, enquanto que o termo D_{11} se refere à robustez do controlador frente à variabilidade do termo b_1 na dinâmica externa de torção (vide equações (J.28) e (J.29)).

Já na expressão do ganho parcial $K_{lc,\theta,d}$, as funções $\mathbf{Z}_{\theta,d}$ e $\mathbf{X}_{\theta,d}$ se referem à cinemática inversa, obtida a partir da trajetória desejada, de modo que:

$$\mathbf{X}_{\theta,d}(t, \mu_d) = \begin{bmatrix} y_{1,d}(t) \\ \dot{y}_{1,d}(t) \\ \ddot{y}_{1,d}(t) \\ y_{1,d}^{(3)}(t) \\ y_{1,d}^{(4)}(t) \\ \mu_d \end{bmatrix} = \mathbf{A}_d \mu_d + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1,d}(t) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Z}_{\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) = \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{X}_{\theta,d}(t, \mu_d), y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, \mathbf{Z}_0) \quad (4.7)$$

sendo que:

$$\mathbf{y}_{1,d}(t) = \begin{bmatrix} y_{1,d}(t) & \dot{y}_{1,d}(t) & \ddot{y}_{1,d}(t) & y_{1,d}^{(3)}(t) & y_{1,d}^{(4)}(t) \end{bmatrix}^T \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I}_{d,6}^{(c_6)} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{d,6}^{(c_1)} & \mathbf{I}_{d,6}^{(c_2)} & \mathbf{I}_{d,6}^{(c_3)} & \mathbf{I}_{d,6}^{(c_4)} & \mathbf{I}_{d,6}^{(c_5)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

considerando que $\mathbf{I}_{d,6}^{(c_j)}$ é a j -ésima coluna da matriz identidade de dimensão 6.

Partindo-se das equações (3.159), (3.173), (3.174) e (4.7), é possível definir a equação da dinâmica interna:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_d &= \mathbf{A}_\mu \dot{\mathbf{Z}}_{\theta,d} \\ &= \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_{\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) - \mathbf{A}_\mu \mathbf{F}_\theta(\mathbf{Z}_{\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0)) \\ &= \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\theta \mathbf{Z}_{\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \\ &= \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\theta \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{X}_{\theta,d}(t, \mu_d), \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \\ &= \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\theta \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{A}_d \mu_d + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1,d}(t), \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\dot{\mu}_d = \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\theta \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{A}_d \mu_d + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1,d}(t), \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \quad (4.11)$$

No caso linear, na ausência de atrito, a equação (4.11) adquire um formato mais simples, conforme a equação (J.16), da seção J.1.3, a saber:

$$\dot{\mu}_d = \mathbf{\Gamma}_\mu \mu_d + \mathbf{\Sigma}_\mu \mathbf{y}_{1,d}(t)$$

Por fim, vale um breve comentário sobre a lei de controle relativa à dinâmica longitudinal, definida na equação (4.4).

Cogitou-se inicialmente a definição de uma lei de controle similar à da dinâmica de torção, por modos deslizantes, no intuito de se alcançar o seguimento da trajetória descrita na equação (4.1), recordando que essa trajetória foi definida com o objetivo de se manter o sistema em operação na zona de estabilidade, como ilustrado na figura (29), a fim de reduzir ao máximo o esforço de atuação.

Por outro lado, o seguimento perfeito da trajetória, apesar de ser algo desejado, não é necessário, bastando-se garantir apenas que o sistema se mantenha na zona de estabilidade, o que foi alcançado com a lei de controle definida na equação (4.4), como ilustrado em simulações do capítulo 5.

Considerando que as frequências da dinâmica longitudinal são muito superiores às frequências da dinâmica de torção e lateral, devido à elevada rigidez longitudinal do eixo principal, o seguimento perfeito da trajetória descrita na equação (4.1) -o que significaria uma absorção das vibrações longitudinais- implicaria numa elevada frequência de atuação imposta ao motor de passo, efeito não igual mas similar ao *chattering*, fenômeno de alta frequência de chaveamento, comentado no preâmbulo da seção J.2.2.

Por esses motivos, optou-se pela escolha de uma lei de controle mais simples, que mantivesse o sistema em operação na zona de estabilidade, ao mesmo tempo que supusesse um esforço de atuação aceitável.

4.3 Ajuste de modelo

Tendo em vista a utilização de um metamodelo diferente do modelo representativo da planta do sistema, faz-se necessário a realização de um ajuste para adequação do primeiro modelo ao segundo.

Partindo-se da figura (27), o modelo em parâmetros concentrados sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal é o principal candidato a metamodelo para definição da lei de controle, pela simplicidade de operação; enquanto que o modelo em elementos finitos é o mais adequado para representação da bancada experimental, pela maior semelhança quantitativa.

Os parâmetros concentrados do metamodelo correspondem à inércia de rotação na saída do servo motor, I_M , à inércia de rotação total do rotor intermediário, $I_2 = \bar{I}_2 + l_2^2 \Delta m$, à inércia de rotação do rotor principal, I_1 , à massa da plataforma móvel, M_{pl} , à massa total

do rotor intermediário, $M_2 = \bar{M}_2 + \Delta m$, à massa do rotor principal M_1 , à rigidez de torção K_1 entre a saída do servo-motor e o motor intermediário, à rigidez de torção K_2 entre os rotores intermediário e principal, à rigidez longitudinal k_1 entre a saída do servo-motor e o rotor intermediário, e à rigidez longitudinal k_2 entre os rotores intermediário e principal.

Sejam σ_1 e σ_2 os autovalores do modelo em elementos finitos referentes ao primeiro e ao segundo modos de torção. A primeira tentativa de ajuste do modelo em parâmetros concentrados é obter os valores de rigidez K_1 e K_2 , mantendo-se idênticas as inércias dos dois modelos.

Como demonstrado no anexo D, o polinômio característico do sistema é dado por:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(\mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{K}_{pc} - \lambda \mathbf{I}_d) \\ &= -\lambda(\lambda^2 - b_{pc}\lambda + c_{pc}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} b_{pc} &= \frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}}, \quad c_{pc} = \frac{K_1 K_2}{I_{123}} \\ I_{12} &= \left(\frac{1}{I_{p1}} + \frac{1}{\bar{I}_{p2}} \right)^{-1} = \frac{I_{p1} I_{p2}}{I_{p1} + I_{p2}} \\ I_{23} &= \left(\frac{1}{\bar{I}_{p2}} + \frac{1}{\bar{I}_{p3}} \right)^{-1} = \frac{\bar{I}_{p2} \bar{I}_{p3}}{\bar{I}_{p2} + \bar{I}_{p3}} \\ I_{123} &= \left(\frac{1}{\bar{I}_{p3} I_{p1}} + \frac{1}{\bar{I}_{p2} I_{p1}} + \frac{1}{\bar{I}_{p3} \bar{I}_{p2}} \right)^{-1} = \frac{I_{p1} \bar{I}_{p2} \bar{I}_{p3}}{I_{p1} + \bar{I}_{p2} + \bar{I}_{p3}} \end{aligned}$$

Pelas relações de Girard para polinômios, dados autovalores λ_1 e λ_2 , a busca das rigidezes K_1 e K_2 implica que:

$$b_{pc} = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}} \quad (4.13)$$

$$c_{pc} = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{K_1 K_2}{I_{123}} \quad (4.14)$$

Da equação (4.13), tem-se que:

$$K_1 = I_{23} \left(b_{pc} - \frac{K_2}{I_{12}} \right) \quad (4.15)$$

Substituindo-se a equação (4.15) na equação (4.14), após algumas manipulações algébricas, obtém-se a equação de segundo grau:

$$K_2^2 - b_{pc} I_{12} K_2 + \frac{I_{12} I_{123}}{I_{23}} c_{pc} = 0 \quad (4.16)$$

cujas soluções são dadas por:

$$K_2 = \frac{1}{2} \left(b_{pc} I_{12} \pm \sqrt{b_{pc}^2 I_{12}^2 - 4 \frac{I_{12} I_{123}}{I_{23}} c_{pc}} \right) \quad (4.17)$$

Da equação (4.14), obtém-se o respectivo valor de K_1 , de modo que:

$$K_1 = \frac{c_{pc} I_{123}}{K_2} \quad (4.18)$$

Tendo como base a equação (4.17), para que a equação (4.16) tenha solução real, é necessário que:

$$\Delta = b_{pc}^2 I_{12}^2 - 4 \frac{I_{12} I_{123}}{I_{23}} c_{pc} = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 I_{12}^2 - 4 \frac{I_{12} I_{123}}{I_{23}} \lambda_1 \lambda_2 \geq 0 \quad (4.19)$$

Seja a função $f(\lambda_1, \lambda_2)$ definida conforme a equação (4.20):

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Delta}{I_{12}^2} = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4 \frac{I_{123}}{I_{12} I_{23}} \lambda_1 \lambda_2 \quad (4.20)$$

É necessário mapear para quais valores de λ_1 e λ_2 a desigualdade da equação (4.19) pode ser satisfeita.

A partir da equação (4.20), tem-se que:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - 4 \frac{I_{123}}{I_{12} I_{23}} \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \lambda_1^2 + 2 \left(1 - \frac{2 I_{123}}{I_{12} I_{23}} \right) \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 \\ &= \lambda_1^2 + 2 \alpha \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 \end{aligned}$$

$$\alpha = 1 - \frac{2 I_{123}}{I_{12} I_{23}} \quad (4.21)$$

do que se conclui que:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1, \lambda_2) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1^* & \lambda_2^* \end{bmatrix} \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1^* & \lambda_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} \\
&= (1 + \alpha) \lambda_1^{*2} + (1 - \alpha) \lambda_2^{*2}
\end{aligned}$$

sendo \mathbf{P} a matriz cujas colunas são os autovetores normalizados associados aos autovalores $\eta_1 = 1 + \alpha$ e $\eta_2 = 1 - \alpha$ da matriz $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, respectivamente, ou seja:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_1 & \hat{\mathbf{P}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Conclui-se, assim, que:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \Leftrightarrow (1 + \alpha) \lambda_1^{*2} \geq (\alpha - 1) \lambda_2^{*2} \quad (4.22)$$

Da equação (4.21), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - \frac{2 I_{123}}{I_{12} I_{23}} \\
&= 1 - \frac{2 \frac{I_{p_1} \bar{I}_{p_2} \bar{I}_{p_3}}{I_{p_1} + I_{p_2} + \bar{I}_{p_3}}}{\left(\frac{I_{p_1} I_{p_2}}{I_{p_1} + I_{p_2}} \right) \left(\frac{\bar{I}_{p_2} \bar{I}_{p_3}}{\bar{I}_{p_2} + \bar{I}_{p_3}} \right)} \\
&= 1 - 2 \frac{(I_{p_1} + \bar{I}_{p_2}) (\bar{I}_{p_2} + \bar{I}_{p_3})}{\bar{I}_{p_2} (I_{p_1} + \bar{I}_{p_2} + \bar{I}_{p_3})} \\
&= 1 - 2 \frac{\left(\frac{I_{p_1}}{\bar{I}_{p_2}} + 1 \right)}{\left(\frac{I_{p_1}}{\bar{I}_{p_2} + \bar{I}_{p_3}} + 1 \right)} \\
&< 1 - 2 \frac{\left(\frac{I_{p_1}}{\bar{I}_{p_2}} + 1 \right)}{\left(\frac{I_{p_1}}{\bar{I}_{p_2}} + 1 \right)} = -1
\end{aligned}$$

do que se conclui que, para quaisquer valores das inércias dos rotores I_{p_1} , \bar{I}_{p_2} e \bar{I}_{p_3} :

$$\alpha < -1 \quad (4.23)$$

Combinando-se as desigualdades (4.22) e (4.23), obtém-se que:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_2^{*2}}{\lambda_1^{*2}} \geq \sigma_\alpha \quad (4.24)$$

sendo que:

$$\sigma_\alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{1 - \frac{2I_{123}}{I_{12}I_{23}} + 1}{1 - \frac{2I_{123}}{I_{12}I_{23}} - 1} = 1 - \frac{I_{12}I_{23}}{I_{123}} < 1 \quad (4.25)$$

Da desigualdade (4.24), conclui-se que:

$$\frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} \leq -\sqrt{\sigma_\alpha} \text{ ou } \frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} \geq \sqrt{\sigma_\alpha} \quad (4.26)$$

Considerando o resultado da equação (4.26), e que os autovalores λ_1 e λ_2 são positivos, a região hachurada da figura (31) é onde se encontram os pares ordenados (λ_1, λ_2) de autovalores que satisfazem a desigualdade da equação (4.26), para os quais a equação (4.16) apresenta solução real. Acrescentando-se o fato de que $\lambda_1 < \lambda_2$, a região de interesse é a hachurada acima do vetor $\hat{\mathbf{P}}_1$.

No entanto, como ilustrado na figura (31), o par de autovalores (σ_1, σ_2) , referentes respectivamente ao primeiro e ao segundo modos de torção no modelo de elementos finitos, não se encontra na região hachurada desejada, indicando que o ajuste exato do modelo de parâmetros concentrados não é possível ser realizado apenas variando-se o valor das rigidezes K_1 e K_2 . Para que o par de autovalores (σ_1, σ_2) se encontre na região hachurada superior, torna-se necessário variar a declividade da reta $\frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} = \sqrt{\sigma_\alpha}$, o que significa alterar também o valor das inércias I_{p_1} , \bar{I}_{p_2} e \bar{I}_{p_3} dos rotores, para o modelo de parâmetros concentrados.

O ajuste do valor das inércias é realizado por meio de um processo de otimização da função de custo:

$$\Psi_c(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_\alpha^*(\alpha_1, \alpha_2)} \right\}^2 \quad (4.27)$$

sendo que:

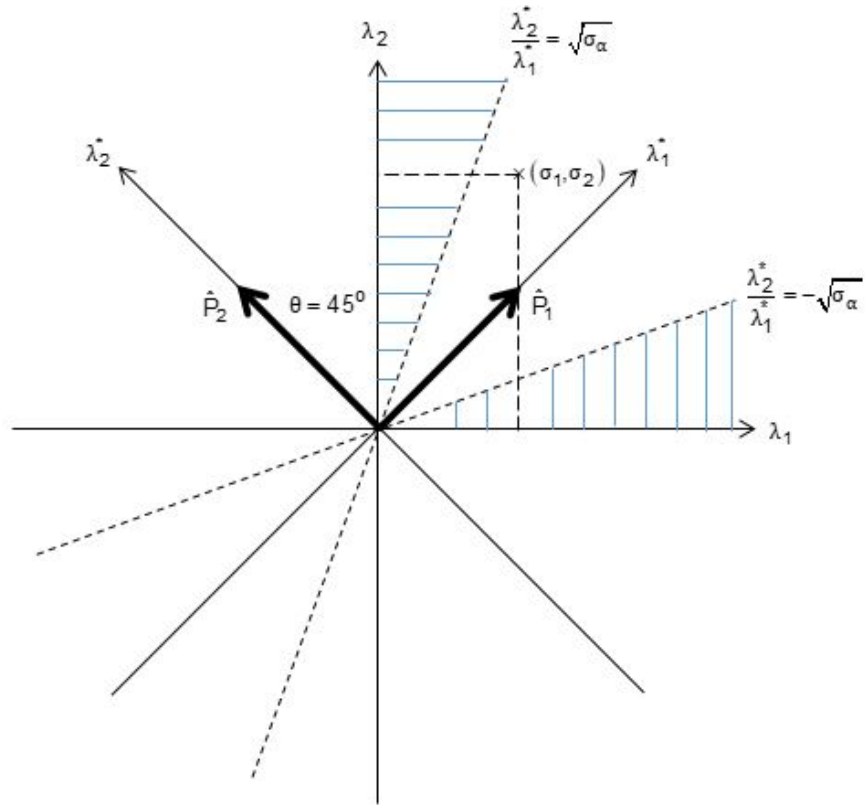


Figura 31 – Mapa de autovalores para o metamodelo

$$\sigma_{\alpha}^* (\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \frac{I_{12}^* (\alpha_1, \alpha_2) I_{23}^* (\alpha_2)}{I_{123}^* (\alpha_1, \alpha_2)}$$

$$I_{12}^* (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{\alpha_1 I_{p_1}} + \frac{1}{\alpha_2 \bar{I}_{p_2}} \right)^{-1}$$

$$I_{23}^* (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{\alpha_2 \bar{I}_{p_2}} + \frac{1}{I_3^* (\alpha_1, \alpha_2)} \right)^{-1}$$

$$I_{123}^* (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{I_3^* (\alpha_1, \alpha_2) \alpha_1 I_{p_1}} + \frac{1}{\alpha_2 \bar{I}_{p_2} \alpha_1 I_{p_1}} + \frac{1}{I_3^* (\alpha_1, \alpha_2) \alpha_2 \bar{I}_{p_2}} \right)^{-1}$$

com $I_3^* (\alpha_1, \alpha_2) = I_{p, Total} - \alpha_1 I_{p_1} - \alpha_2 \bar{I}_{p_2}$ e $I_{p, Total} = I_{p_1} + \bar{I}_{p_2} + \bar{I}_{p_3}$.

Por meio dessa formulação, a otimização dos parâmetros α_1 e α_2 é realizada mantendo-se a soma total dos momentos de inércia, do sistema ajustado, fixa e igual a $I_{p, Total}$.

Partindo-se da estimativa inicial $(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}) = (1, 1)$ para a otimização, chegou-se aos seguintes valores ótimos:

$$\Psi_{c, min} = 0$$

$$\alpha_1^* \cong 1,07$$

$$\alpha_2^* \cong 1,05$$

A otimização foi realizada por meio da função *fminsearch* do MATLAB.

Para $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{\sigma_\alpha}$, tem-se que $f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, chegando-se, assim, às expressões das rigidezes e das inércias para o ajuste do modelo:

$$\begin{aligned} I_{p_1}^* &= \alpha_1^* I_{p_1} = 1,07 \times 0,078 = 0,084 \text{ kg m}^2 \\ \bar{I}_{p_2}^* &= \alpha_2^* \bar{I}_{p_2} = 1,05 \times 0,0175 = 0,0184 \text{ kg m}^2 \\ \bar{I}_{p_3}^* &= I_3^*(1,07, 1,05) = 0,0165 \text{ kg m}^2 \\ K_2 &= \frac{1}{2} I_{12}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) (\sigma_1 + \sigma_2) = 0,5908 \frac{Nm}{rad} \\ K_1 &= \frac{I_{123}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*)}{K_2} \sigma_1 \sigma_2 = 2 \frac{I_{123}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*)}{I_{12}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*)} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} = 0,3404 \frac{Nm}{rad} \end{aligned}$$

Em resumo, dadas as frequências de ajuste σ_1 e σ_2 , é possível obter rigidezes e inércias correspondentes para o modelo em parâmetros concentrados. Se por um lado, a modificação dos valores de inércia permite uma maior precisão no alcance das frequências desejadas, por outro, afeta as proporções entre os deslocamento dos rotores nos modos de vibração. No capítulo 5, encontram-se descritas simulações da planta do sistema com controlador, sendo a planta representada pelo modelo em elementos finitos, e o controlador definido a partir de modelos com parâmetros concentrados ajustados.

5 Simulações

Para ilustrar os resultados da estratégia de controle adotada, foram realizadas algumas simulações, as quais englobaram: (i) a observação dos modelos em parâmetros concentrados em malha aberta, com e sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal, com e sem atrito; (ii) a observação da evolução no tempo da dinâmica interna desejada e da camada limite dinâmica; (iii) a resposta do sistema ao controlador, escolhendo-se o modelo sem acoplamento de dinâmicas, com e sem atrito, como representante da planta; (iv) a resposta do sistema, com e sem atrito, ao controlador, escolhendo-se o modelo com acoplamento de dinâmicas como representante da planta; (v) e por fim, a resposta do sistema, com e sem atrito, ao controlador, escolhendo-se o modelo em elementos finitos como representante da planta. O modelo em elementos finitos foi definido com 12 elementos, número mínimo para convergência da malha até o 2º modo axial, ou melhor, o 22º modo do sistema em torno do ponto de equilíbrio, conforme enumeração da tabela (2).

A integração das equações foi realizada por meio da formulação de Newmark (NEWMARK, 1959) e do método de Newton-Raphson para resolução de sistemas de equações não lineares, conforme descrito na seção em anexo J.3, e os modelos foram integrados por meio de código em MATLAB. Em algumas simulações, a integração foi realizada a passo constante de $\Delta t = 10^{-4} s$, e em outras, com o passo constante de $\Delta t = 10^{-5} s$, como descrito nas seções a seguir.

5.1 Dinâmicas longitudinal e de torção em malha aberta

Primeiramente, a equação (3.152) da dinâmica de torção foi simulada, com uma entrada dependente unicamente do tempo $T_{x,U}(t)$:

$$\mathbf{M}_\theta \ddot{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{C}_\theta \dot{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{K}_\theta \mathbf{u}_\theta + \mathbf{T}_{at,\theta}(\dot{\mathbf{u}}_\theta, y_2) = \mathbf{B}_\theta T_{x,U}(t) \quad (5.1)$$

No caso da dinâmica longitudinal, descrita na equação (3.153), a saber:

$$\mathbf{M}_l \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\bar{\mathbf{u}}}_l + \mathbf{K}_l \bar{\mathbf{u}}_l + \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_l) = \mathbf{B}_l \bar{F}_{u,U}$$

foi implementado um controle proporcional simples, de modo que:

$$\mathbf{M}_l \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_l + \mathbf{C}_l \dot{\bar{\mathbf{u}}}_l + \mathbf{K}_l \bar{\mathbf{u}}_l + \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_l) = \mathbf{B}_l \left\{ -K_f (\bar{u}_1 - \bar{u}_{1,Ref}) \right\} \quad (5.2)$$

sendo $\bar{u}_{1, Ref}$ um deslocamento de referência preestabelecido para a plataforma móvel.

As equações (5.1) e (5.2) foram reescritas utilizando-se a formulação de Newmark. Maiores detalhes são encontrados na seção em anexo C.4. As duas dinâmicas foram integradas com um passo de $\Delta t = 10^{-4} s$.

A figura (32) ilustra as dinâmicas de torção e longitudinal, sem torque de atrito resistivo, para $T_{x,U}(t) = T_{Ref} = 7 Nm$ e $\bar{u}_{1, Ref} = 0,1 mm$, respectivamente. E a figura (33) ilustra a dinâmica longitudinal com um *zoom* no primeiro segundo de movimento.

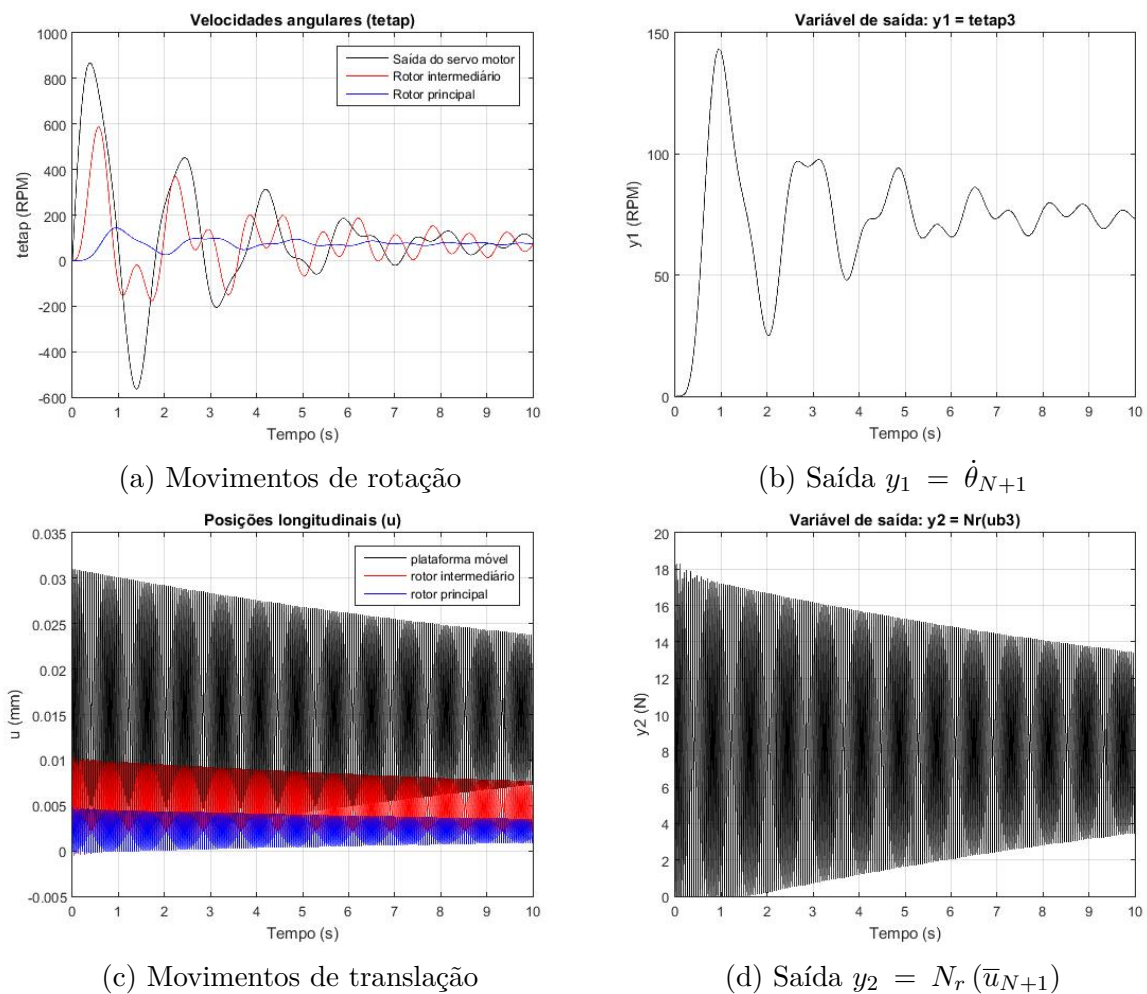
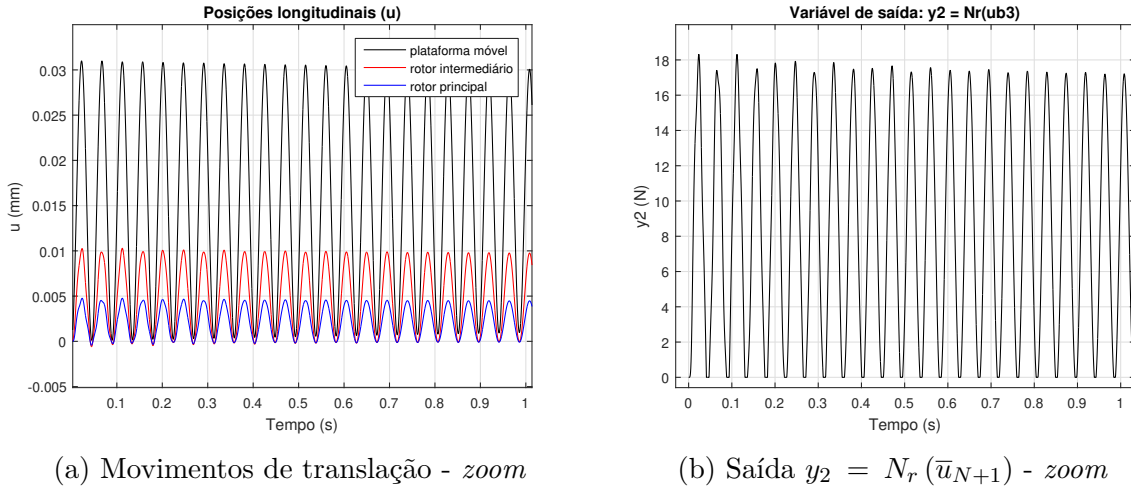


Figura 32 – Dinâmicas de torção e longitudinal em malha aberta e sem atrito

Conforme a figura (32a), a aplicação do torque de entrada levou o acoplamento na saída do servo-motor a uma velocidade razoavelmente elevada, superior a $800 RPM$, o que se refletiu nos outros rotores em velocidades bem inferiores. A figura (32b) ilustra a velocidade de saída do rotor principal, com pico de velocidade inferior a $150 RPM$ e velocidade em regime tendendo a um valor entre 70 e $80 RPM$.

Já a figura (32c) ilustra a alta frequência do movimento longitudinal dos rotores, devido ao elevado valor da rigidez longitudinal do eixo, também caracterizado pela baixa amplitude, imperceptível a olho nu. Por sua vez, a figura (32d) indica perdas de contato

Figura 33 – Dinâmicas longitudinal com *zoom*

entre o rotor principal e os pinos de atrito até um instante inferior a 2 s, a partir do qual se matem o contato, com uma elevada oscilação da força normal.

5.2 Dinâmica interna e camada limite dinâmica para a trajetória desejada

A figura (34) ilustra, respectivamente, a evolução da dinâmica interna e suas derivadas no tempo; a evolução, no tempo, da camada limite dinâmica para a trajetória desejada, sem presença de torque resistivo; algumas variáveis da cinemática inversa; e a trajetória desejada para a velocidade angular do rotor principal. Maiores detalhes sobre a integração das equações são encontrados na seção em anexo C.5.

Partindo-se da equação (3.174), da qual se conclui que $\mu_d = \theta_{2,d}$, a evolução esperada para a variável μ_d no tempo é, como confirmado na figura (34a), de crescimento ilimitado, uma vez que o sistema se mantém em contínuo movimento de rotação.

Sabe-se que, no caso linear, a equação (4.11) da dinâmica interna se reduz a:

$$\dot{\mu}_d = \mathbf{\Gamma}_\mu \mu_d + \mathbf{\Sigma}_\mu \mathbf{y}_{1,d}(t)$$

Por outro lado, no caso particular do presente estudo, $\mathbf{\Gamma}_\mu = \mathbf{0}$, do que se conclui que a derivada temporal $\dot{\mu}_d$ não depende diretamente da variável μ_d . Tal fato permite a implementação de um algoritmo de *limitação de variáveis cíclicas* (LVC), de modo que, cada vez que a posição angular na saída do servo-motor $\theta_{1,d}$ atinja o valor de $2\pi \text{ rad}$, todas as variáveis de posição angular sejam decrescidas em $2\pi \text{ rad}$, não afetando, dessa forma, a derivada de μ_d no tempo.

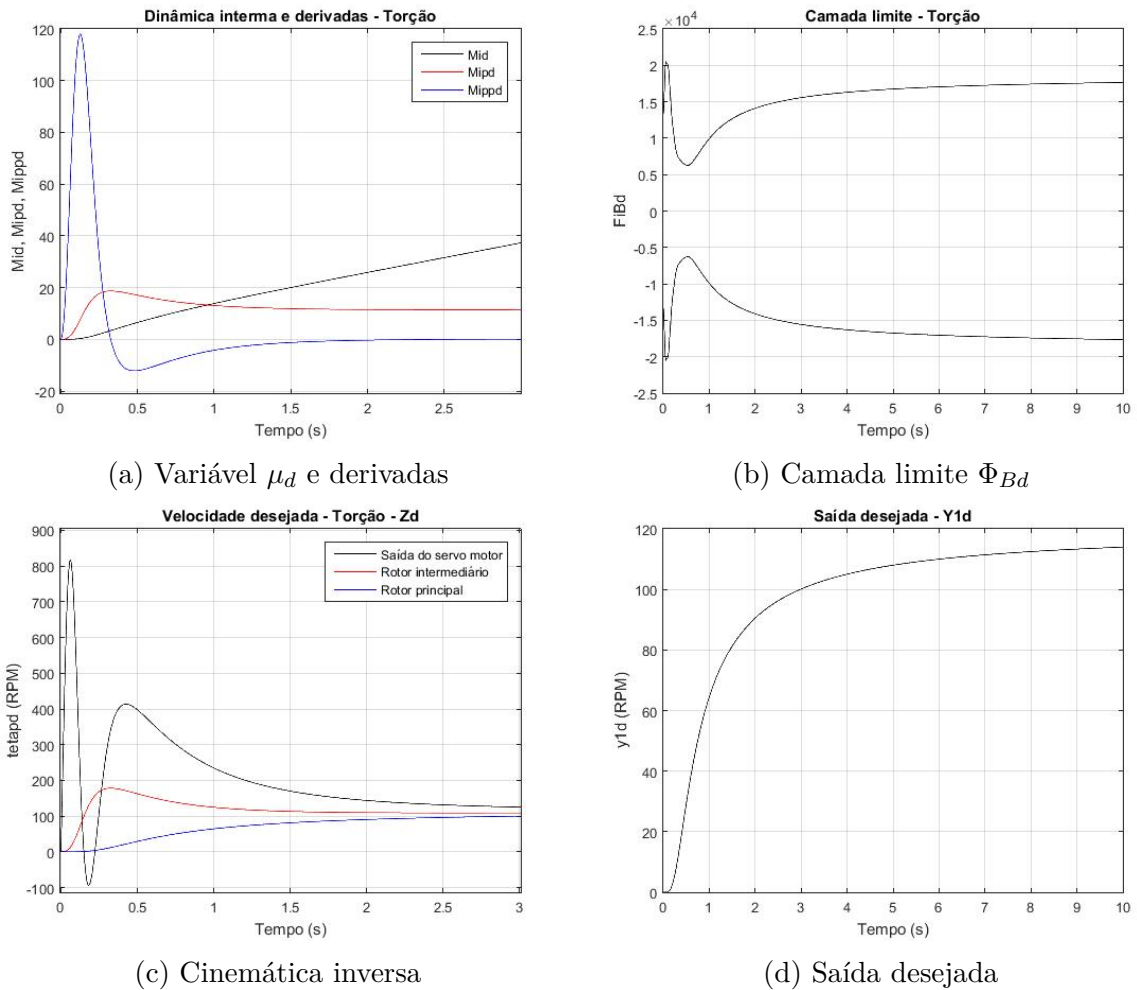


Figura 34 – Comportamento desejado para o sistema

Por sua vez, como ilustrado na figura (34b), a camada limite dinâmica apresenta uma oscilação mais acentuada durante o regime transitente, adquirindo um comportamento assintótico no regime permanente.

Outras variáveis que descrevem o comportamento desejado para o sistema são as respectivas velocidades $\dot{\theta}_{1,d}$, $\dot{\theta}_{2,d}$ e $\dot{\theta}_{3,d}$, desejadas para os rotores, como ilustrado na figura (34c). Nota-se que, sendo a meta principal o seguimento da trajetória $\dot{\theta}_{3,d}$ por parte do rotor principal, a velocidade $\dot{\theta}_{1,d}$, na saída do servo-motor, apresenta uma oscilação acentuada e um pico que chega a superar 800 RPM em menos de 0,3 s, o que indica uma elevada aceleração. Esse esforço de atuação pode ser reduzido aumentando-se a variável t_{09} , que corresponderia ao instante em que o sistema idealmente atingiria 90% da velocidade de referência.

Vale recordar que a trajetória desejada para o rotor principal foi definida conforme a equação (4.3), de modo que desde a própria função até a sua terceira derivada temporal fossem nulas na origem. Essa definição teve como objetivo a suavização do movimento do sistema logo após a partida, de modo a reduzir ao máximo o esforço de atuação.

Implementando-se a LVC, obtém-se o resultado ilustrado no figura (35).

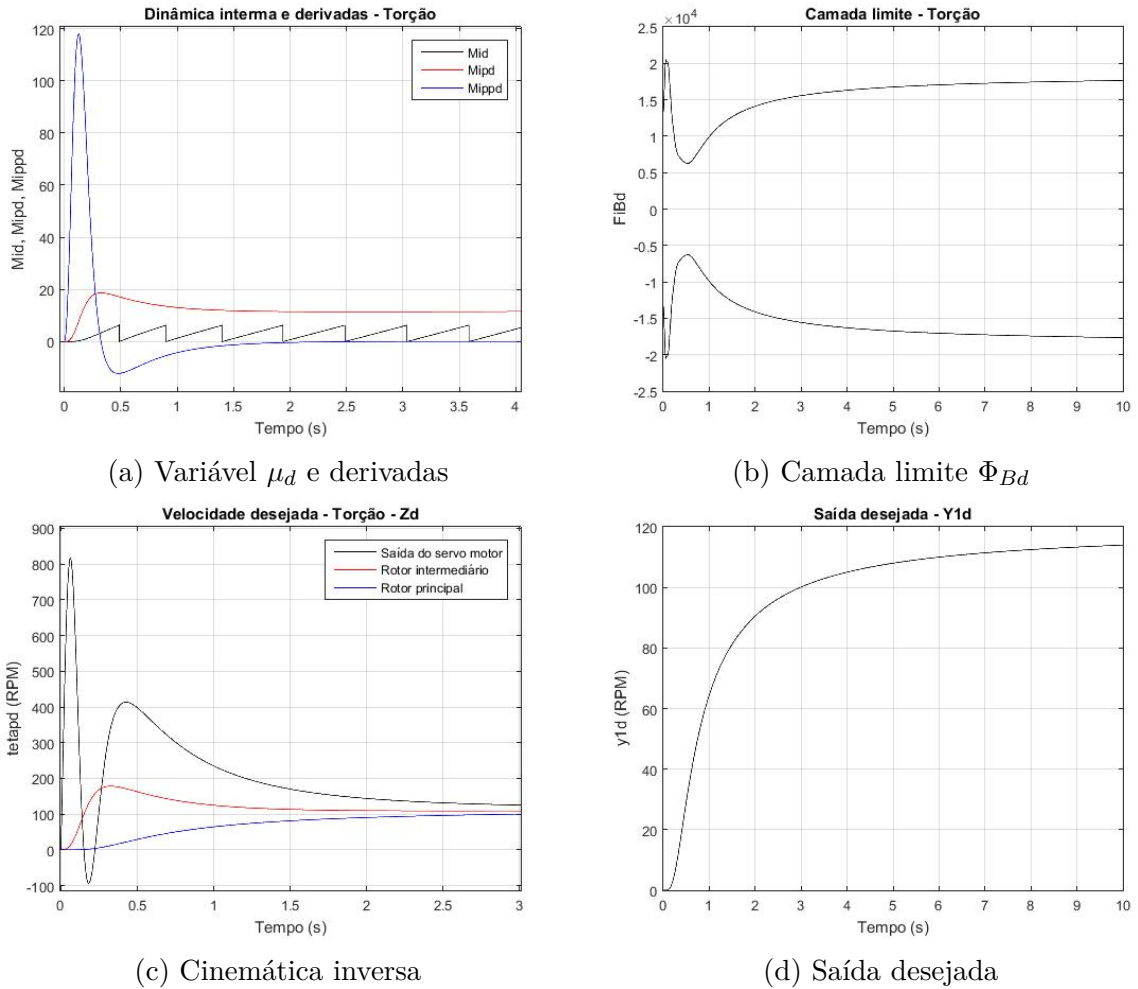


Figura 35 – Comportamento desejado para o sistema

Nota-se o formato de dente de serra da variável μ_d no tempo, sem nenhuma consequência na evolução temporal das demais grandezas.

5.3 Equação completa com lei de controle, sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal

O modelo sem acoplamento das dinâmicas, descrito na equação (3.151), e reescrito sem o vetor de atrito, conforme a equação (5.3), é integrado com as entradas de controle descritas pelas equações (4.4) e (4.5), sem presença de torque de atrito resistivo no contato, em conjunto com as equações da dinâmica interna e da camada limite dinâmica para a trajetória desejada.

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m = \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_c \tag{5.3}$$

A figura (36) ilustra o seguimento teórico da trajetória desejada por parte do sistema, submetido à lei de controle, na ausência de torque de atrito no contato, e sem implementação da LVC, através da evolução, no tempo, de duas variáveis de particular importância na avaliação do controlador: o esforço de atuação e a variável de escorregamento. Maiores detalhes na implementação da integração são encontrados na seção em anexo C.6.

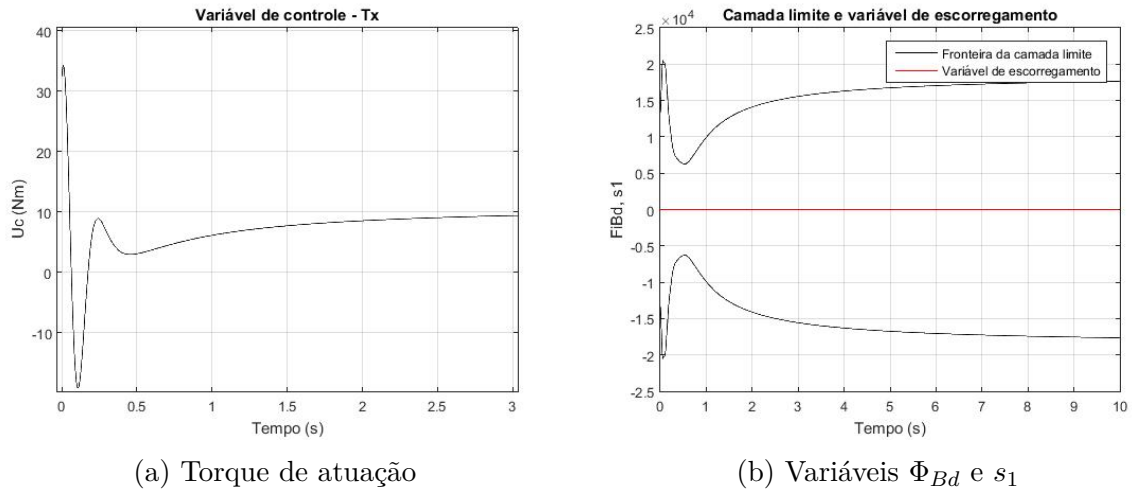


Figura 36 – Seguimento da trajetória por parte do sistema sem acoplamento

A figura (36a) ilustra a evolução do esforço de controle no tempo. No regime transiente, o torque de saída do servo motor apresentou um pico superior a 30 Nm , o que é bastante elevado, indicando-se a necessidade de se espaçar mais o instante t_{09} .

Por outro lado, a figura (36b) ilustra a variável de escorregamento nula em todo o tempo de simulação, o que indica o seguimento perfeito da trajetória desejada.

Por sua vez, a figura (37) ilustra parâmetros de entrada e resposta do sistema, sem implementação da LVC.

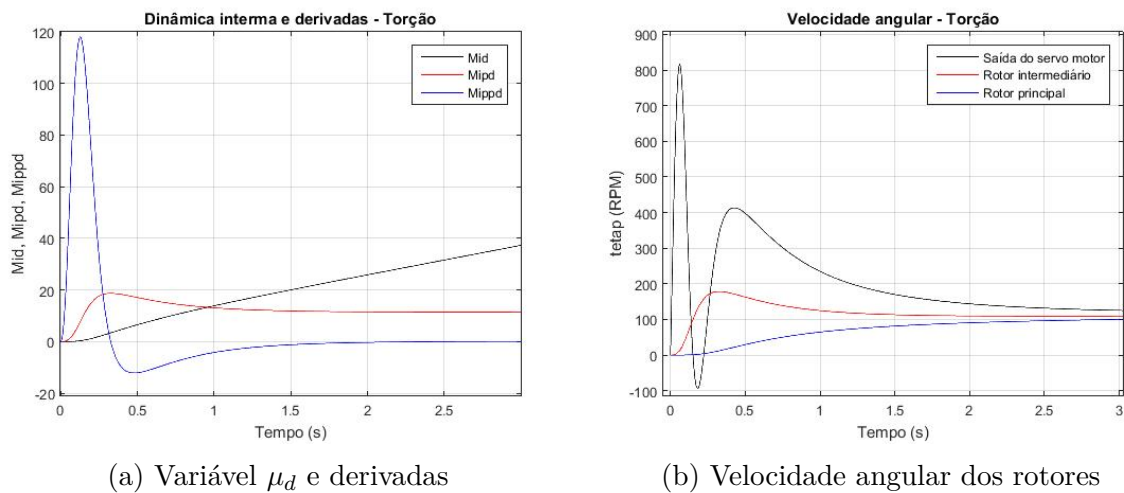
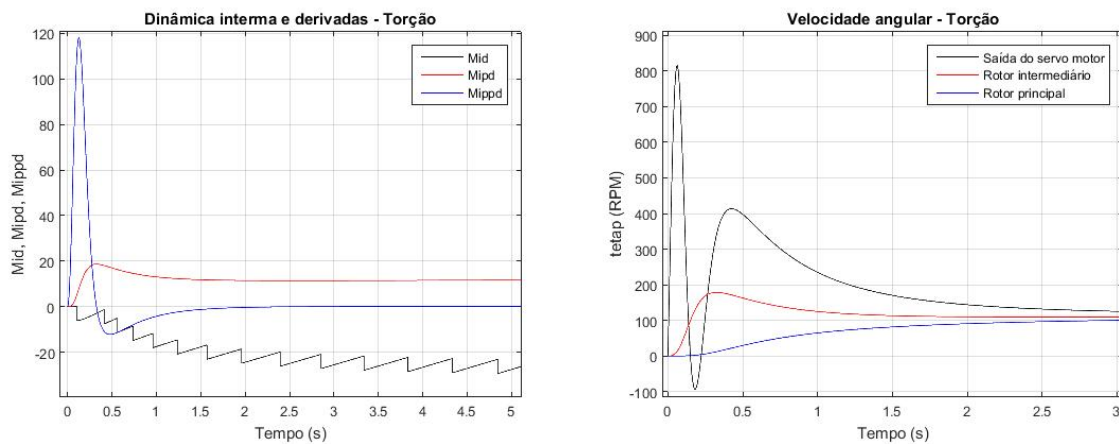


Figura 37 – Seguimento da trajetória por parte do sistema sem acoplamento

Pela figura (37a), a evolução da dinâmica interna desejada no tempo, integrada em conjunto com as equações da dinâmica e lei de controle, coincide com o gráfico da figura (34a), como esperado.

Já as velocidades de giro dos rotores, ilustradas na figura (37b), coincidem com as velocidade obtidas pela cinemática inversa, conforme a figura (34c), em conformidade com o fato de a variável de escorregamento ter permanecido nula ao longo de todo o tempo de simulação.

Com o intuito de limitar ciclicamente o crescimento das variáveis de posição angulares, incluindo a variável $\mu_d = \theta_{2,d}$, é implementada a LVC, na integração com as equações do sistema e controlador. O resultado é ilustrado na figura (38).

(a) Variável μ_d e derivadas

(b) Velocidade angular dos rotores

Figura 38 – Seguimento da trajetória por parte do sistema sem acoplamento

Observa-se na figura (38a) que a variável da dinâmica interna deixou de crescer sem limites. O critério utilizado para o decréscimo cíclico em $2\pi rad$ das variáveis de posição angular foi $\theta_1 \geq 2\pi$. Já a evolução das velocidades dos rotores apresentada na figura (38b) coincide com os gráficos apresentados na figura (37b), indicando que a LVC não influi no movimento dos rotores.

5.4 Equação completa com lei de controle, com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal

Na presente seção, são descritas simulações nas quais é aplicada a lei de controle descrita na seção 5.3 também no modelo com acoplamento. Como detalhado a seguir, o controlador garante o seguimento da trajetória desejada dentro da margem esperada, e a diferença entre o modelo da planta e o metamodelo, com e sem acoplamento, é compensada pela robustez do controlador.

Como adiantado no preâmbulo, o modelo com acoplamento das dinâmicas, descrito na equação (3.133), a saber:

$$\mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \mathbf{u}_{ac} + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{ac}, \dot{\mathbf{u}}_{ac}, \ddot{\mathbf{u}}_{ac}) = \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c$$

é integrado com as entradas de controle descritas pelas equações (4.4) e (4.5), a saber:

$$\bar{F}_{u,U}(t, \mathbf{Z}_l) = y_{2,d}(t) - K_f \left(\bar{u}_1 - \frac{y_{2,d}(t)}{k_{N+1}} \right)$$

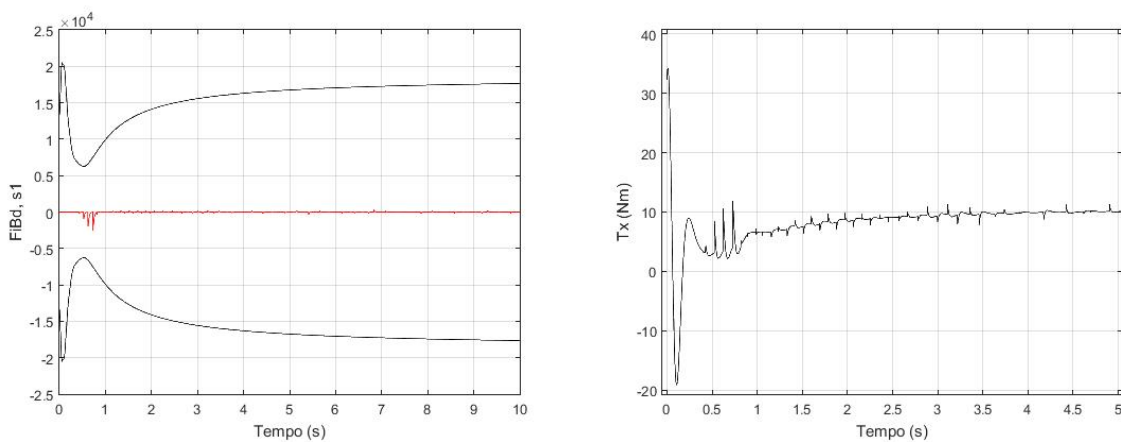
$$T_{x,U}(t, \mathbf{Z}_\theta, \mathbf{X}_\theta, \mu_d, \Phi_{Bd}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) = b_1^{-1} \left\{ \hat{T}_{x,U} - \bar{K}_\theta \text{sat} \left(\frac{s_\theta}{\Phi_{Bd}} \right) \right\}$$

sendo:

$$\mathbf{Y}_2 = \left[y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, y_2^{(4)} \right]$$

Maiores detalhes da integração desconsiderando o torque de atrito encontra-se na seção em anexo C.7.1.

A figura (39) ilustra o seguimento teórico da trajetória desejada por parte do sistema com acoplamento, submetido à lei de controle, sem torque de atrito no contato, bem como o esforço de controle para o movimento de rotação:



(a) Escorregamento e camada limite

(b) Esforço de controle

Figura 39 – Escorregamento e esforço de controle para sistema sem atrito

e a figura (40) apresenta as velocidades de rotação reais e desejadas.

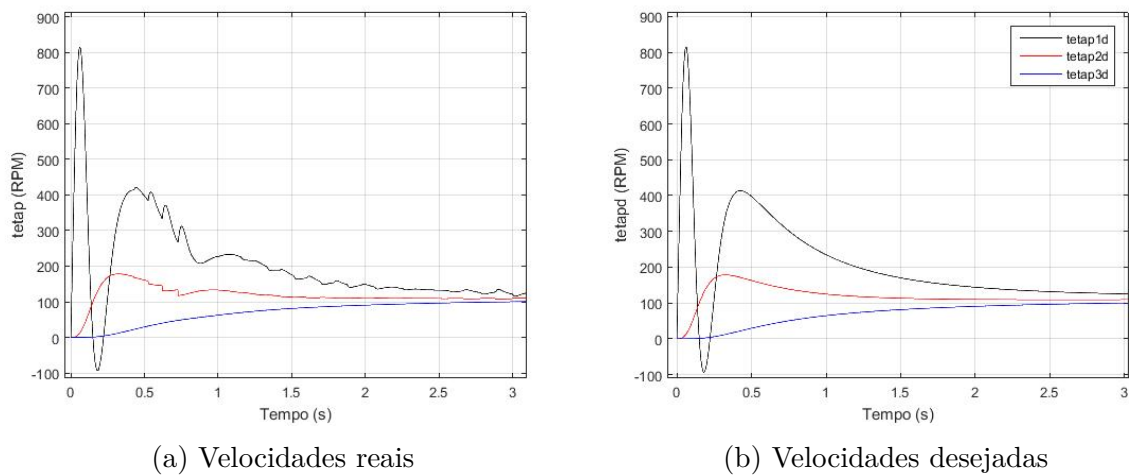


Figura 40 – Velocidades de rotação para sistema sem acoplamento e atrito

Nota-se, a partir da figura (39a), a eficiência do controlador no seguimento da trajetória desejada, mantendo a variável de escorregamento no interior da camada limite.

Já o esforço de controle ilustrado na figura (39b) apresentou um pico elevado no início do movimento, indicando a necessidade, no caso sem atrito, de se aumentar o valor do parâmetro t_{09} a fim de se reduzir a exigência sobre o controlador.

Por sua vez, a figura (41) ilustra a evolução da força de atuação longitudinal e da força normal de contato entre o rotor principal e os pinos de atrito.

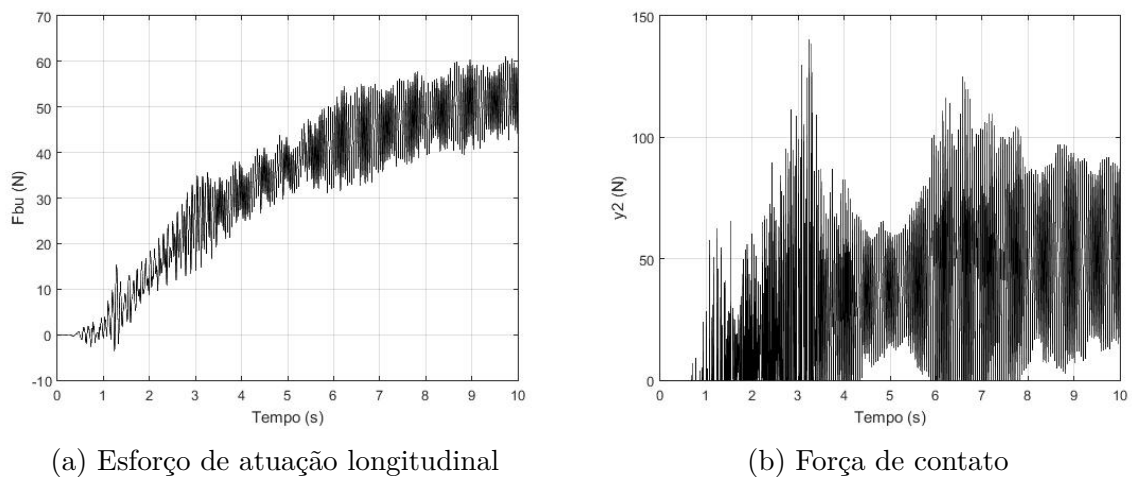


Figura 41 – Forças de atuação longitudinal e de compressão no contato, sem torque de atrito

A oscilação maior observada na figura (41a) em relação à figura (41b) deve-se à vibração da coluna como um todo, mas especialmente ao acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal, já que os movimento laterais do rotor intermediário geram uma variação na tensão longitudinal ao longo do eixo principal.

A figura (42) ilustra o seguimento teórico da trajetória desejada por parte do

sistema com acoplamento, submetido à lei de controle, na presença de torque de atrito no contato, bem como o esforço de controle para o movimento de rotação, e a figura (43) apresenta as velocidades de rotação reais e desejadas. Maiores detalhes da integração considerando o torque de atrito encontra-se na seção em anexo C.7.2.

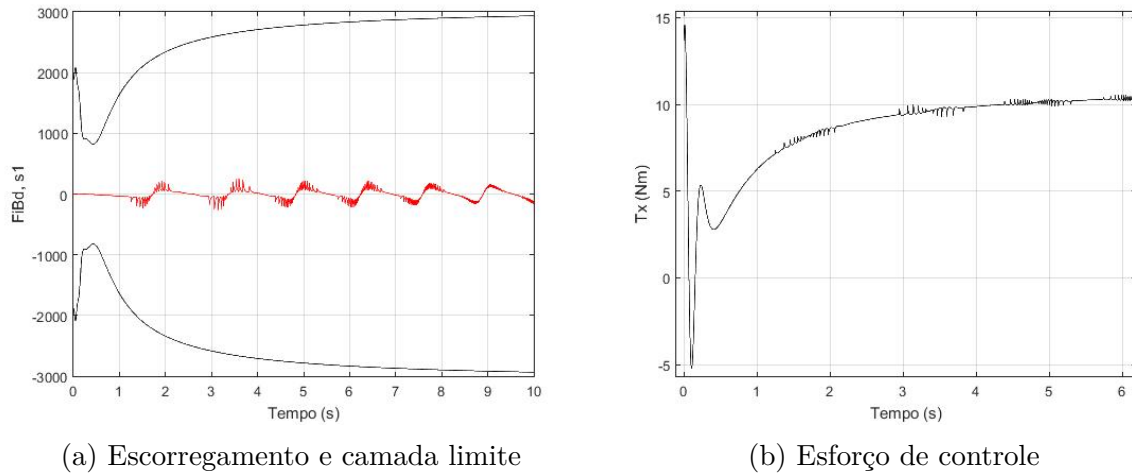


Figura 42 – Escorregamento e esforço de controle

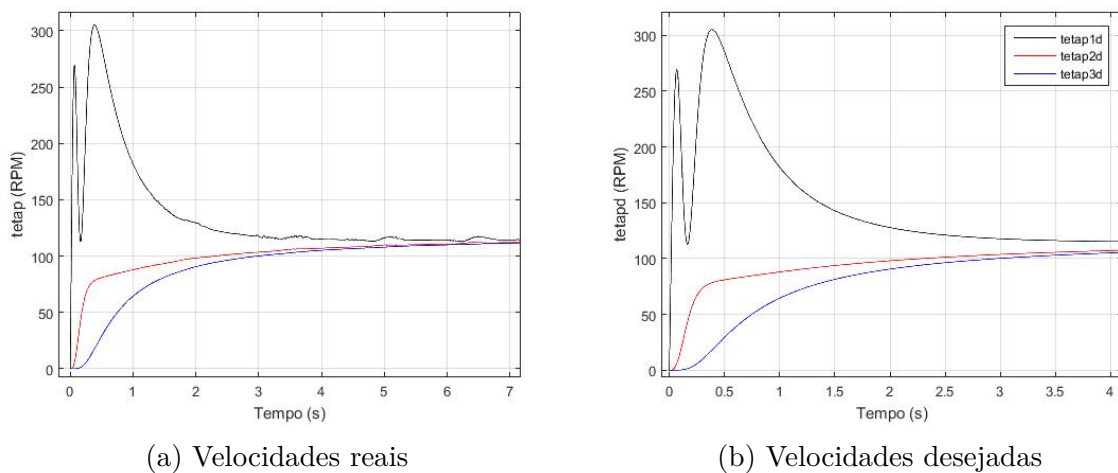


Figura 43 – Velocidades de rotação para sistema com acoplamento e atrito

A figura (42a) ilustra o seguimento da trajetória desejada por parte do sistema, sob ação do controlador. Observa-se uma oscilação maior da variável de escorregamento se comparada ao caso sem torque de atrito, mas por outro lado, seu valor mantém-se no interior da camada limite, como esperado.

Por outro lado, observa-se uma redução do esforço de atuação, ilustrado na figura (42b), no início do movimento, se comparado ao gráfico da figura (39b).

O que de início pode parecer um contrassenso -o esforço de seguimento, no início do movimento, ser inferior no caso com atrito do que no caso sem- pode encontrar uma explicação razoável na diferença de comportamento dinâmico do sistema nos dois casos.

Comparando-se as figuras (40) e (43), nota-se que no caso sem atrito, o rotor intermediário adquire um pico de rotação próximo a 200 RPM , enquanto que no caso com atrito, esse pico de velocidade não ocorre. Isso se deve ao efeito amortecedor do torque resistivo de atrito sobre o sistema, uma vez que, no caso sem atrito, o esforço de atuação é estimado pelo controlador para equilibrar a elevada oscilação na velocidade do rotor intermediário, a fim de que o rotor principal siga a trajetória desejada para a velocidade, o que leva a uma atuação mais brusca e de maior intensidade por parte do servo-motor. No caso com atrito, o efeito de amortecimento leva a um aumento mais suave e gradativo da velocidade do rotor intermediário, não sendo necessário um movimento mais intenso e brusco na atuação para compensá-la.

Por sua vez, a figura (44) ilustra a evolução da força de atuação longitudinal e da força normal de contato entre o rotor principal e os pinos de atrito.

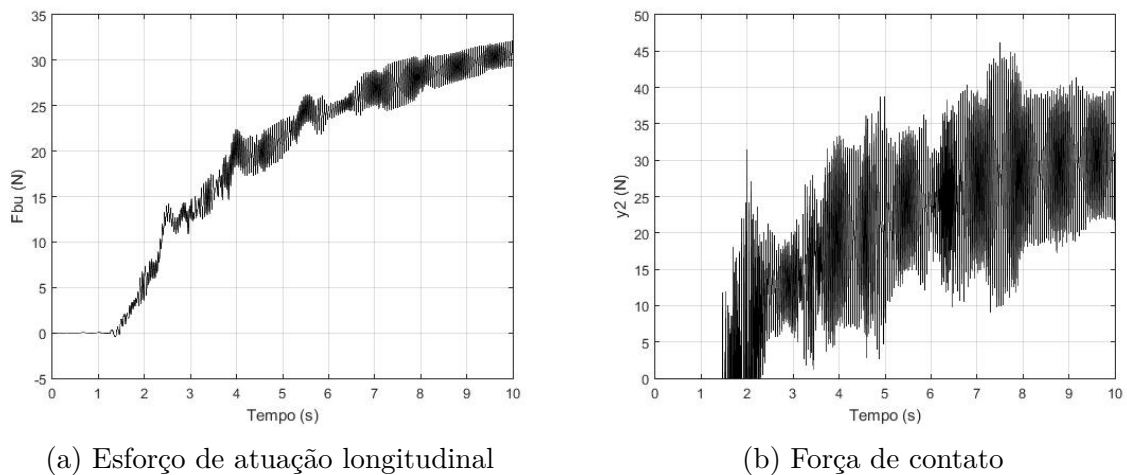


Figura 44 – Forças de atuação longitudinal e de compressão no contato (com atrito)

Se se compara as figuras (41b) e (44b), nota-se maior oscilação no valor da força normal para o caso sem atrito, já que o movimento lateral do rotor intermediário é mais intenso, influenciando mais fortemente na dinâmica longitudinal.

5.5 Equação do modelo em elementos finitos com lei de controle

Na seção 5.4, os modelos utilizados para representar o sistema a ser controlado e para a definição da lei de controle são diferentes. Optando-se pelo modelo em elementos finitos para representação do sistema, a formulação utilizada na seção 5.4 é seguida como roteiro para equacionamento do sistema com lei de controle. O modelo em parâmetros concentrados, sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal, permanece como metamodelo, para definição da lei de controle.

As primeiras simulações são realizadas considerando o sistema em malha aberta. Respeitando-se o projeto da bancada experimental, com cada motor controlado localmente

por um *driver* dedicado, a força sobre a plataforma móvel e o torque de saída do servo motor, utilizados nas simulações anteriores, são substituídos pela aplicação de restrições variáveis no tempo, por meio de multiplicadores de Lagrange, sobre os deslocamentos \bar{u}_1 e $\theta_{x,1}$ do nó 1, no qual se encontra a saída do servo motor.

As simulações seguintes são realizadas considerando o sistema em malha fechada. O deslocamento longitudinal \bar{u}_1 , do nó 1, é mantido como uma restrição variável no tempo, como nas simulações em malha aberta, e o modelo é adaptado considerando-se apenas como entrada o torque de torção, variável de controle sobre a qual se define a lei de controle. O modelo em elementos foi definido com 12 elementos

5.5.1 Simulações em malha fechada, sem torque de atrito

Nesse caso, a malha fechada é definida sobre a variável de entrada T_x , ou seja, sobre o torque de saída no servo motor. É aplicada apenas a restrição via multiplicadores de Lagrange sobre o deslocamento \bar{u}_1 do nó 1, conforme as equações (5.4) e (5.5):

$$\mathbf{\Gamma}_{MF} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{d, N_g}^{l_1} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{h}_{MF}(t) = \begin{bmatrix} h_u(t) \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

de modo que a equação final da dinâmica do sistema, com restrições extrínsecas via multiplicadores de Lagrange, é reescrita de acordo com a equação (5.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) + \mathbf{\Gamma}_{MF}^T \boldsymbol{\lambda}_{MF} &= \mathbf{B}_\theta T_x \\ \mathbf{\Gamma}_{MF} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{h}_{MF}(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo $\mathbf{B}_\theta = \mathbf{I}_{d, N_g}^{c_6}$ a matriz de ganho da equação da dinâmica.

A integração da equação (5.6) é realizada seguindo como roteiro a formulação da lei de controle descrita na seção 5.4, com ajuste do metamodelo.

A figura (45) ilustra o escorregamento e o esforço de controle para o movimento de rotação.

Nota-se na figura (45a) a eficácia do controlador em manter a variável de escorregamento no interior da camada limite, o que por outro lado não evitou o surgimento de um erro em regime. Esse erro também é observado nos gráficos das figuras (46) e (47). A trajetória real em regime sofre um decréscimo de cerca de 40 *RPM* com relação à trajetória desejada para movimento do rotor principal. Esse é o ônus ao se utilizar a camada limite na lei de controle por modos deslizantes, já que, se por um lado elimina a alta frequência

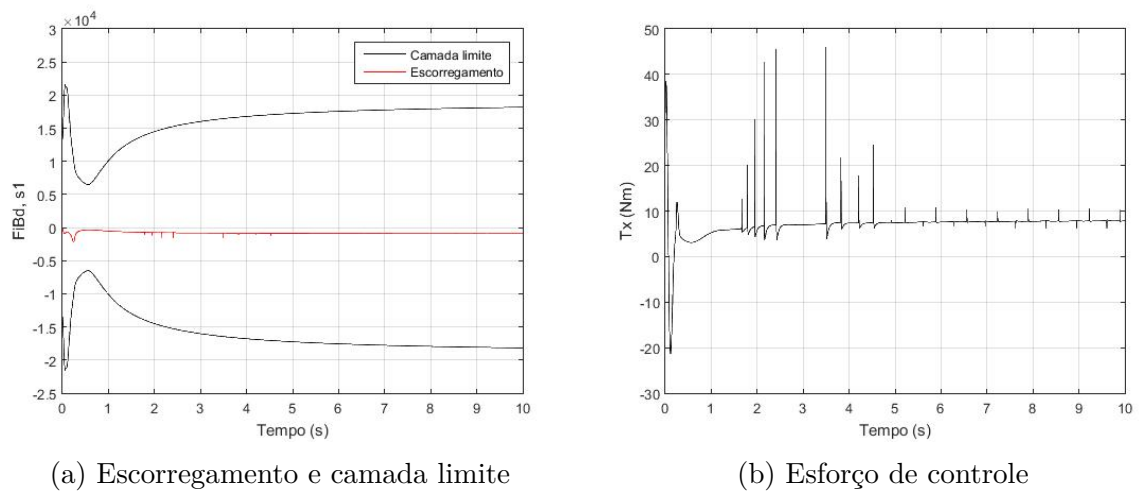


Figura 45 – Escorregamento e esforço de controle para modelo EF

na entrada, por outro não garante a redução de imprecisões no seguimento da trajetória desejada, caso a variável de escorregamento esteja no interior da camada limite. Nota-se também que, enquanto na figura (46b) a velocidade desejada em regime está acima de 100 RPM, na figura (46a) a velocidade real em regime está abaixo de 100 RPM, denotando mais uma vez o erro em regime.

Vale ressaltar que a trajetória desejada para o rotor principal, ilustrada na figura (47), foi definida de modo que, na origem, tanto o valor da própria função quanto as derivadas até a terceira ordem fossem iguais a zero. Dessa forma, suaviza-se a quebra da inércia do sistema, inicialmente em repouso, diminuindo-se o esforço de controle. Outra propriedade da trajetória desejada é que alcança mais rapidamente o patamar de 90% da velocidade de referência, e a partir daí, cresce de forma assintótica até essa mesma velocidade. Na presente simulação, a velocidade de referência é 120 RPM.

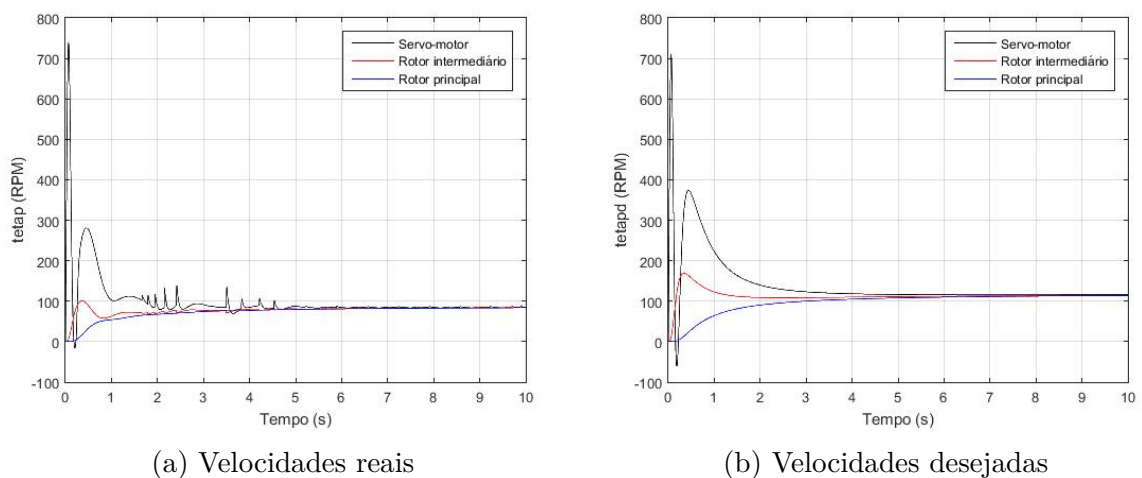


Figura 46 – Velocidades de rotação para modelo em EF sem atrito

Por sua vez, a figura (45b) ilustra o esforço de controle, apresentando picos em

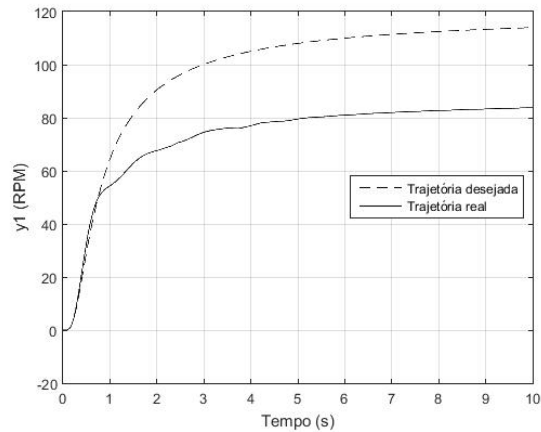


Figura 47 – Trajetórias real e desejada - rotor principal

torno de 40 Nm, valores elevados, o que sugere a necessidade de aumentar o valor de parâmetro t_{09} de controle, ou seja, o tempo para alcance do patamar de 90% da velocidade de referência. Por outro lado, nota-se que a existência da camada limite eliminou a alta frequência de chaveamento na entrada. Nota-se também, como descrito ao longo da seção, que os picos a partir do instante 1s estão diretamente relacionados com os instantes de choque entre o rotor intermediário e o estator.

A figura (48) ilustra a evolução, no tempo, das variáveis que descrevem o movimento lateral do rotor intermediário, bem como a sua órbita no plano horizontal.

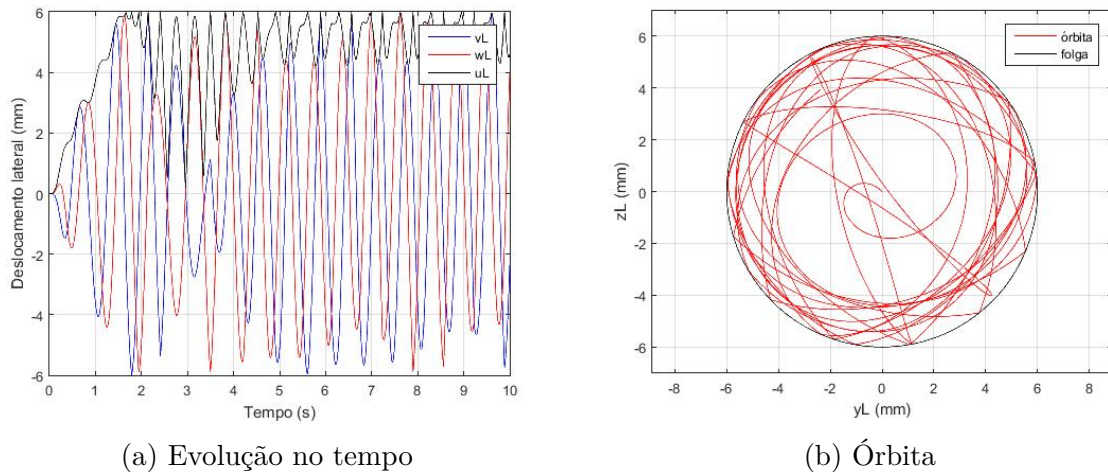


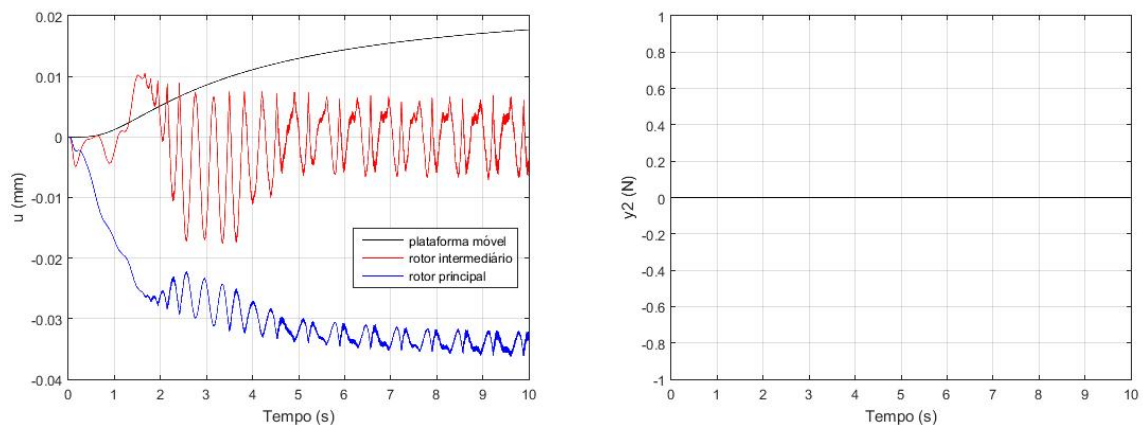
Figura 48 – Movimento lateral do rotor intermediário para modelo em EF sem atrito

Na figura (48a), a variável u_L corresponde ao deslocamento radial total do rotor intermediário, ou seja:

$$u_L = \sqrt{v_L^2 + w_L^2}$$

Uma observação pertinente é a correlação explicitada pelas figuras (45b), (46a) e (48a) entre os contatos do rotor intermediário com o estator e os picos de velocidade na saída do servo-motor e de torque de controle. Ambos acontecem nos mesmos instantes de tempo, o que é uma observação relevante, já que indica uma possibilidade de identificar a ocorrência de choques a partir de sinais observados a certa distância dos mesmos.

Por sua vez, a figura (49) ilustra a dinâmica longitudinal do sistema, com a imposição da restrição variável no tempo sobre o movimento da plataforma móvel; e o peso sobre a célula de carga S ao longo da simulação.



(a) Evolução no tempo

(b) Força compressiva sobre a célula de carga

Figura 49 – Movimento longitudinal dos rotores para modelo em EF sem atrito

Nota-se na figura (49a) que, enquanto a plataforma móvel avança num movimento descendente, o rotor principal afasta-se do contato inicial com a célula de carga, num movimento ascendente, oposto ao da plataforma móvel, e apresenta um movimento longitudinal oscilatório. Pode-se afirmar que o movimento longitudinal do rotor principal seria uma composição causal do deslocamento proveniente da deformação longitudinal do eixo principal com o deslocamento proveniente do movimento lateral do rotor intermediário e longitudinal da plataforma móvel. O deslocamento ascendente, pouco superior a $3,0 \times 10^{-2} \text{ mm}$, é atribuído ao movimento lateral do rotor intermediário, que acrescenta uma parcela de tração sobre o eixo principal; enquanto que o movimento oscilatório, com amplitude em torno de $5,0 \times 10^{-3} \text{ mm}$, é proveniente principalmente da deformação sofrida pelo eixo principal.

A força nula sobre a célula de carga, apresentada na figura (49b), é uma consequência imediata da perda de contato inicial entre o rotor principal e os pinos de atrito. O movimento longitudinal apresentado pelo sistema sugere um aumento de mais 150% no deslocamento descendente imposto à plataforma móvel, a fim de que o rotor principal comece a realizar pressão longitudinal sobre a célula de carga.

Quanto às reações às restrições impostas, a figura (50) ilustra a evolução das mesmas no tempo.

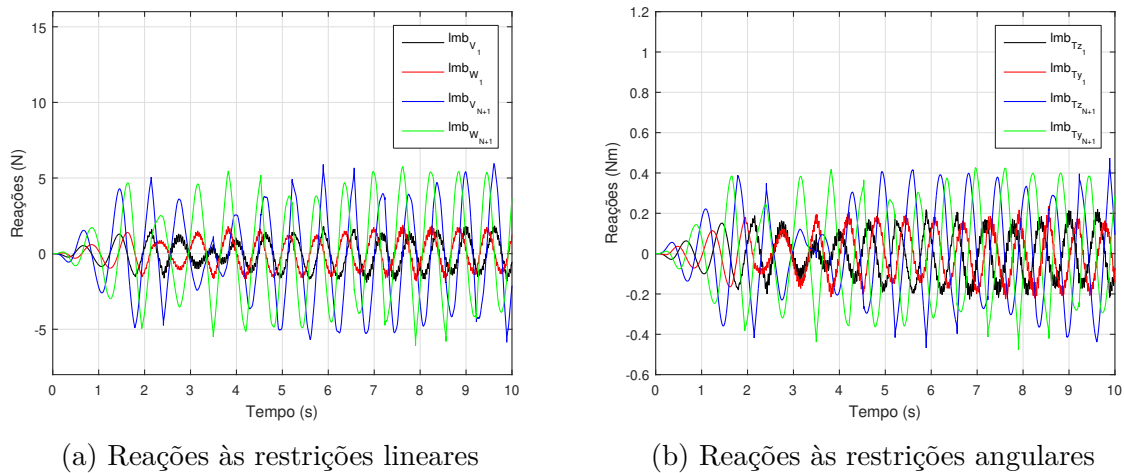


Figura 50 – Forças de reação para modelo em EF sem atrito

Os gráficos das figuras (50a) e (50b) mostram as reações no nó 1 inferiores às reações no nó $N + 1$, o que é condizente com o fato de o rotor intermediário estar mais próximo do nó $N + 1$.

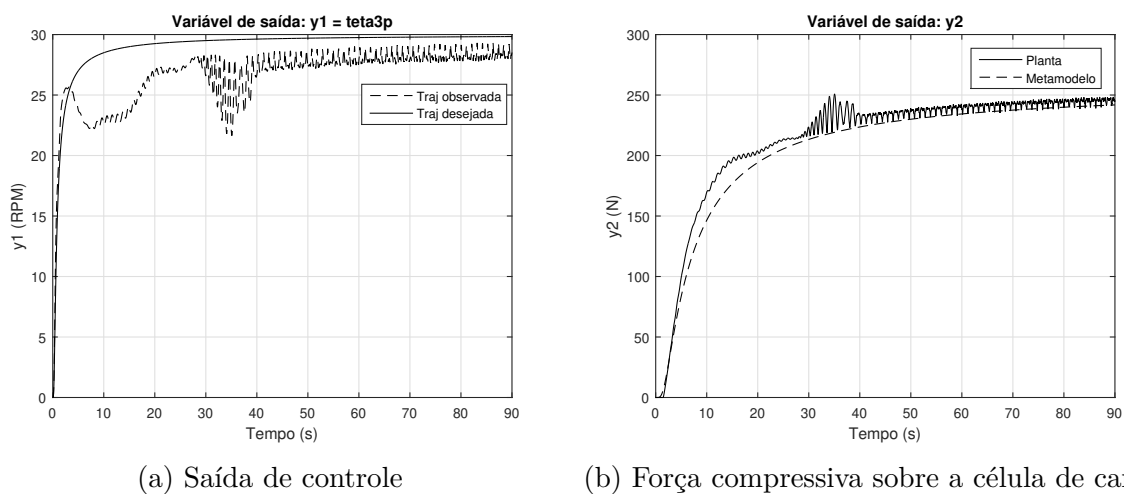
5.5.2 Simulações em malha fechada, com torque de atrito

A simulação do sistema com controlador, em presença de contato com atrito, constitui ponto culminante do presente trabalho, uma vez que sua motivação principal é a elaboração de uma estratégia de controle para estabilização da rotação do disco principal, mesmo submetido a um torque de atrito resistivo. Considerando a simulação descrita na seção 5.5.1, nota-se que mesmo um deslocamento descendente da plataforma móvel é compatível com um movimento ascendente do rotor principal, dentre outros fatores já comentados, por conta do movimento lateral do rotor intermediário, que gera uma tração axial sobressalente sobre o rotor principal. Tendo isso em conta, para garantir um contato de atrito permanente, com força normal de contato crescente no tempo de forma mais suave e gradativa possível, deve-se imprimir ao movimento descendente da plataforma móvel um acréscimo de deslocamento em relação ao deslocamento médio desejado para o rotor principal.

É importante frisar também que a lei de controle foi definida considerando os modelos com parâmetros concentrados ajustados para os movimentos de torção e axial, descritos pelas equações (3.152) e (3.153). Considerando que a equação (3.153) parte da hipótese simplificadora de desacoplamento estrutural entre os movimentos axial e lateral do eixo principal, um movimento descendente da plataforma móvel, na presença de rotação do sistema, não levaria a um movimento ascendente do disco principal, como observado na seção 5.5.1, particularmente na figura (49a). Como o movimento axial do rotor principal tem relação direta com a força normal de contato, que por sua vez tem influência direta no torque de atrito resistivo, a diferença entre os comportamentos dinâmicos, considerando os

diferentes modelos utilizados para representar o sistema, conduz à obtenção de um torque de atuação superestimado, uma vez que o modelo em parâmetros concentrados descrito pela equação (3.153), utilizado no controlador, estima um movimento descendente mais acentuado do disco principal, em relação ao modelo em elementos finitos, utilizado para representar a planta do sistema nas simulações.

Sendo assim, dado um movimento descendente real imposto ao movimento da plataforma móvel, a lei de controle deve ser estimada considerando-se um ajuste numérico desse movimento, a fim de se minimizar a superestimativa do torque de atuação. A figura (51) ilustra os resultados obtidos para uma rotação de referência de 30 RPM, com deslocamento axial da plataforma móvel ajustado para a lei de controle.



(a) Saída de controle

(b) Força compressiva sobre a célula de carga

Figura 51 – Variáveis de saída para lei de controle com presença de atrito

Nota-se na figura (51b) o ajuste entre as forças de compressão observada (planta) e estimada para a lei de controle (metamodelo), que permitiu o seguimento da trajetória desejada, observada na figura (51a).

A figura (52) ilustra o esforço de atuação e a figura (53) ilustra a condição de escorregamento satisfeita e a evolução do sistema no interior da camada limite. Nota-se particularmente nas figuras (51), (52a) e (53b) uma perturbação mais acentuada entre os instantes $t = 30s$ e $t = 40s$, seguida de uma perturbação reduzida mas permanente. Esse fenômeno é atribuído predominantemente aos choques laterais do rotor intermediário, mais proeminentes na faixa de tempo assinalada, e com menor intensidade mas constante após o instante $t = 40s$. A figura (54) ilustra o movimento lateral do rotor intermediário ao longo da simulação.

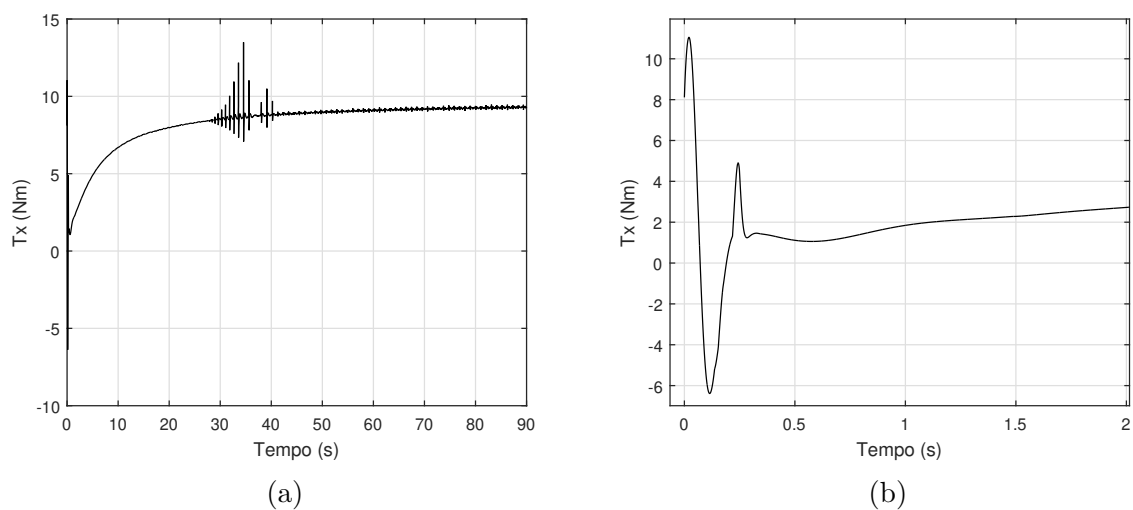


Figura 52 – Esforço de atuação: (a) em todo o tempo simulado; (b) *zoom*

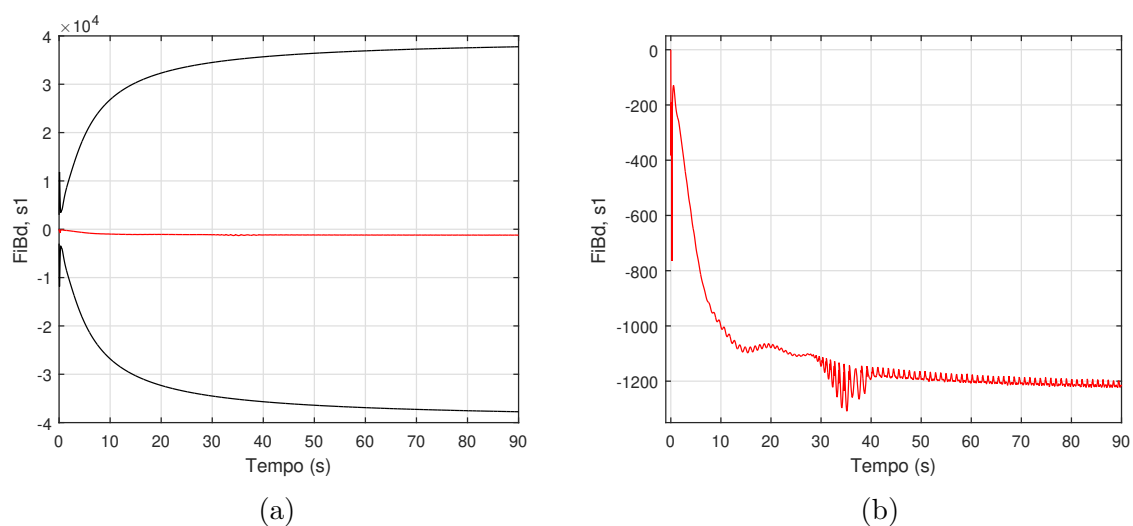


Figura 53 – Camada limite e escorregamento: (a) em todo o tempo simulado; (b) *zoom*

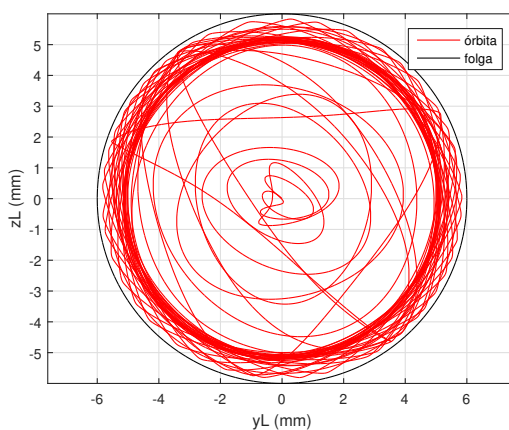


Figura 54 – Movimento lateral do rotor intermediário

6 Bancada experimental

Uma descrição mais geral da bancada experimental é realizada na seção 3.1, apenas como introdução à modelagem do sistema. No presente capítulo, a bancada é descrita de forma mais detalhada, dando-se ênfase ao projeto mecânico e eletrônico, especificações dos principais componentes, e algumas soluções de engenharia na montagem de alguns subsistemas.

A figura (55) ilustra o dispositivo completo da bancada experimental.

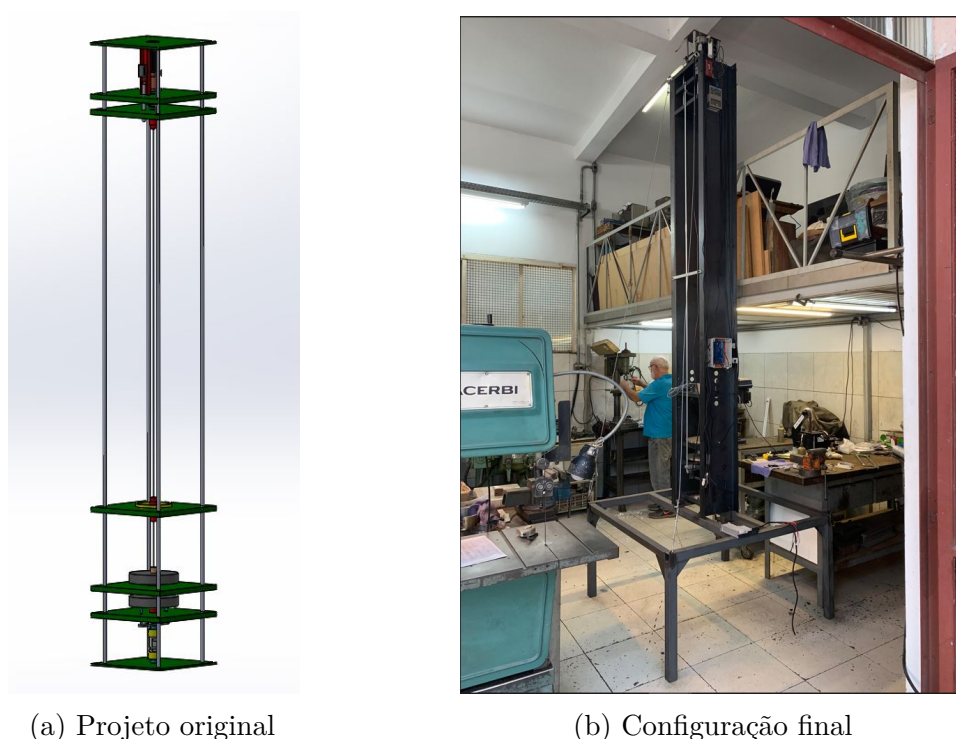


Figura 55 – Bancada experimental

6.1 Sistema mecânico da bancada experimental

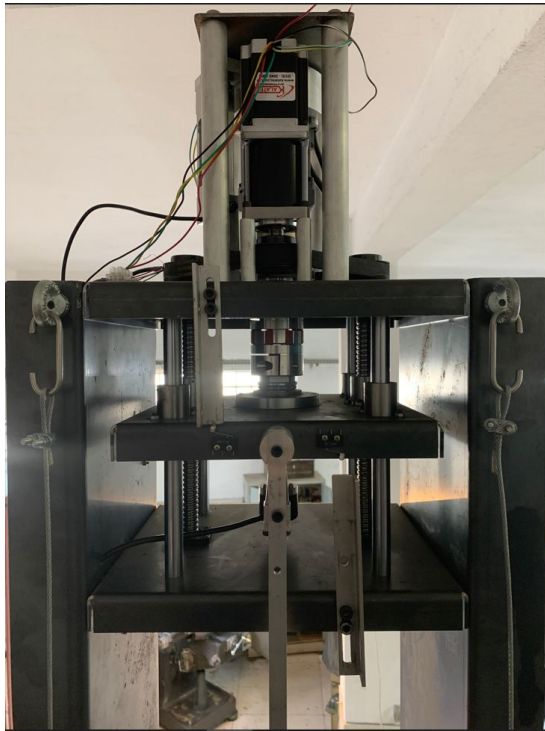
De um modo geral, o sistema mecânico da bancada experimental é dividido em três subsistemas: (i) o subsistema superior (seção 6.1.1); (ii) o subsistema intermediário (seção 6.1.2); e (iii) o subsistema inferior (seção 6.1.3).

6.1.1 Subsistema superior

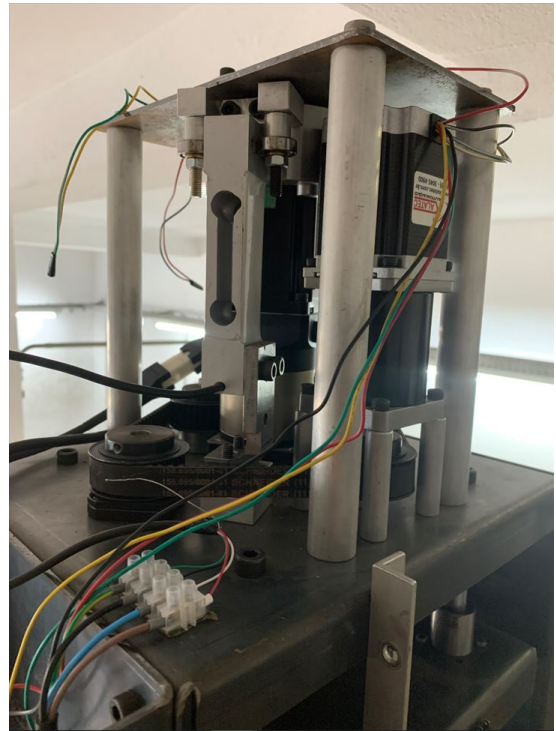
O subsistema superior é composto basicamente pelos seguintes componentes: (1) servo-Motor com redução de 7 : 1 na saída; (2) motor de passo com redução de 15 : 1 na saída; (3) célula de carga de 20 kg; (4) jogo de Polias (4 unidades) e correia tratora; (5)

eixos fusos verticais (2 unidades), apoiados em mancais; (6) acoplamento mecânico; (7) plataforma móvel, acoplado aos dois eixos fusos; (8) *encoder* com precisão de 12 *bits* (4096 divisões por volta); (9) plataformas fixas estruturais (2 unidades); (10) rolamentos rígidos e axiais.

A figura (56) ilustra o subsistema superior em diferentes ângulos.



(a) Vista frontal



(b) Vista da célula de carga

Figura 56 – Subsistema superior

O conjunto servo-motor + redutor é capaz de alcançar um torque máximo de 7 Nm e uma velocidade máxima de 400 RPM , e tem como principal finalidade imprimir um movimento de giro aos componentes rotativos. O servo-motor possui um *servo-driver* dedicado, que garante uma velocidade de saída praticamente constante, dentro dos limites de saturação. O servo-motor possui 5 pares de polos, opera no modo trifásico, com potência de 400 W e 220 V de tensão de entrada, possui uma velocidade nominal de rotação de 3000 RPM e torque nominal de saída de 1 Nm . Maiores detalhes sobre o *servo-driver* são descritos na seção 6.2.1.

Por sua vez, o conjunto motor de passo + redutor tem como finalidade imprimir um deslocamento vertical às peças móveis, e para isso encontra-se acoplado a uma polia tratora, conectada a outras três polias por meio de uma correia. Duas polias se encontram fixas respectivamente a dois eixos fusos, responsáveis pelo movimento vertical da plataforma móvel, enquanto a quarta polia é de posição ajustável e tem como função apenas manter a correia esticada. O motor de passo opera com passo de $1,8^\circ$ e $1,9 \text{ Nm}$ de torque estático nominal de saída. O motor de passo também possui *driver* dedicado, cujo detalhamento é

realizado na seção 6.2.1.

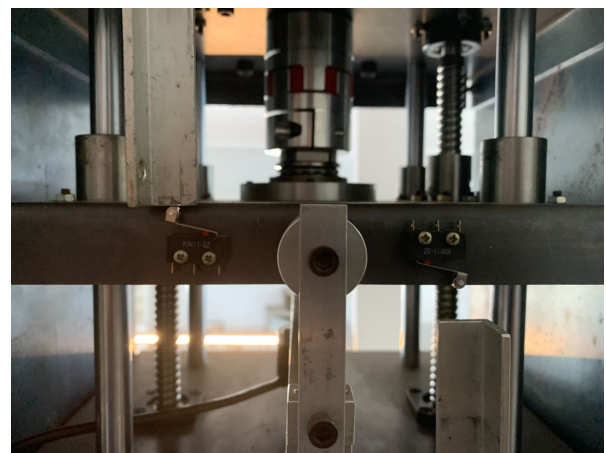
Na saída do servo-redutor, encontra-se um acoplamento mecânico, conforme ilustrado na figura (57a), responsável pela transmissão de movimento de rotação entre o servo-motor e o eixo principal, ao mesmo tempo que permite o deslocamento vertical da plataforma móvel, do eixo principal -que se encontra apoiado na plataforma móvel- e de todos os demais componentes fixos ao eixo, a saber: rotor intermediário, rotor principal e os *encoders* superior e inferior.

A plataforma móvel se desloca verticalmente, sob efeito dos eixos fusos, e se locomove apoiada em quatro eixos guias por meio de rolamentos lineares. A plataforma móvel tem deslocamento máximo de $1,5\text{ mm}$, desde sua posição original de altura máxima até o contato do rotor principal com os pinos de atrito, no subsistema inferior. Essa delimitação do descolamento superior e inferior é garantida, a princípio, pela instalação de chaves de segurança, conforme ilustrado na figura (57b) que, caso acionadas pelas hastes delimitadoras, param o funcionamento do sistema, impedindo o dano a algum componente.

Por sua vez, as chaves delimitadoras possuem posição vertical ajustável, o que permite a definição da faixa de deslocamento da plataforma móvel.



(a) Acoplamento mecânico



(b) Chaves de segurança

Figura 57 – Componentes de acoplamento e segurança

A célula de carga ilustrada na figura (56b), tem como finalidade a estimação do torque de reação do eixo principal sobre o conjunto servo-motor + redutor. Basicamente, o conjunto motor encontra-se apoiado superiormente num rolamento rígido e inferiormente sobre um rolamento axial, de modo a ser possível um movimento de rotação com atrito praticamente nulo. Por sua vez, do suporte do servo-motor parte um braço de alavanca em "U" que se apoia na extremidade superior da célula de carga. Dessa forma, o conjunto motor tem seu movimento de rotação limitado apenas pelo apoio sobre a célula de carga, de modo que qualquer tendência de giro gera uma deformação do *strain gage*, através da qual é aferida a força de contato, tangencial à tendência de giro do motor. O braço da

força de contato corresponde à distância horizontal entre o eixo vertical de simetria do conjunto motor e a linha de contato com a célula de carga, cujo valor é de $67,0\text{ mm}$, um dos parâmetros de projeto. Portanto, com a força aferida pela célula de contato e o braço dessa força, estima-se o torque de reação.

Com relação ao mecanismo do movimento longitudinal da plataforma, o eixo fuso possui diâmetro funcional de 16 mm e passo 5 mm . A plataforma móvel encontra-se acoplada aos eixos fuso por meio de um mancal com esferas circulantes, o que reduz a praticamente a zero os atritos internos na interação entre o eixo fuso e a plataforma.

6.1.2 Subsistema intermediário

O subsistema intermediário é composto pelos seguintes componentes: (1) rotor intermediário; (2) sensores analógicos de distância, por efeito indutivo (3 unidades); (3) pinças de fixação do rotor no eixo principal (2 unidades);

A figura (58) ilustra o subsistema intermediário sob dois ângulos diferentes.



Figura 58 – Subsistema intermediário

A inclusão do rotor intermediário, juntamente com o estator, permitiu observar a influência dos fenômenos de impacto e escorregamento sobre o comportamento do sistema. O rotor intermediário encontra-se fixo ao eixo principal por meio de duas pinças, uma na parte superior e outra na parte inferior ao rotor. As dimensões do rotor intermediário foram definidas como 140 mm de diâmetro e 60 mm de espessura, considerando as frequências naturais de torção pré-definidas para a bancada, e o diâmetro interno do estator foi definido como 152 mm , de modo a haver uma folga de 6 mm entre as superfícies lateral externa do

rotor e interna do estator. A folga de 6 mm foi assim definida em função das especificações dos sensores analógicos de distância, capaz de realizar uma medida de distância mínima de 3 mm e máxima de 15 mm.

No anexo H.1, encontram-se as expressões que descrevem a órbita do rotor intermediário em seu movimento lateral, em função das medidas aferidas pelos três sensores de distância. E no anexo H.2, encontra-se o cálculo dos fatores de correção radial para ajuste das coordenadas da órbita.

6.1.3 Subsistema inferior

O subsistema inferior é composto pelos seguintes componentes: (1) conjunto do rotor principal, constituído por dois rotores fixos entre si por meio de um eixo metálico cilíndrico; (2) pinos de atrito (2 unidades); (3) célula de carga “S”; (4) conjunto constituído por rolamento linear acoplado a um rolamento rígido, como mancal do eixo cilíndrico de fixação dos rotores; (5) rolamentos lineares (2 unidades) de apoio aos pinos de atrito; (6) rolamentos axiais autocompensadores (2 unidades); (7) *encoder* + suporte móvel, para estimação da velocidade do rotor principal; (8) plataformas fixas de suporte (3 unidades). A figura (59) ilustra o subsistema inferior.

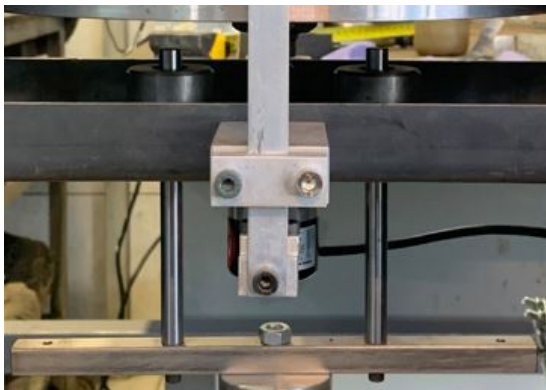


Figura 59 – Subsistema inferior

Como explicitado, o rotor principal é composto por dois rotores fixos a um cilindro vazado e interligados por ele. O cilindro encontra-se apoiado num rolamento linear. O

rolamento linear, por sua vez, encontra-se engastado no anel interno de um rolamento radial. O jogo de rolamentos permite apenas os movimentos de rotação do rotor principal em torno do eixo xx , e de deslocamento longitudinal ao longo do mesmo eixo. O rotor principal encontra-se fixado ao eixo principal por meio de uma pinça, na parte inferior do rotor.

Logo abaixo ao rotor principal, encontram-se os pinos de atrito, sob a guia de rolamentos lineares na posição vertical, conforme ilustrado na figura (60a). Os pinos de atrito se encontram apoiados sobre uma célula de carga em “S”, por meio de uma haste horizontal.



(a) Pinos de atrito



(b) Célula de carga “S”

Figura 60 – Alguns componentes do subsistema inferior

A célula de carga em “S”, ilustrada na figura (60b), tem como finalidade aferir a força normal de compressão, na interação entre os pinos de atrito e a superfície horizontal inferior do rotor principal. A célula de carga encontra-se apoiada, tanto inferiormente quanto superiormente, em rolamentos autocompensadores. Esses rolamentos têm a função de isolar o máximo possível a célula de carga de outros tipos de carregamento que não sejam o de compressão (SANTOS, 2015), o que tornou o sinal aferido pela célula bastante estável.

6.2 Projeto eletrônico e instrumentação

O sistema eletrônico da bancada é composto: (i) pelo servo-*driver* e pelo *driver* do motor de passo (seção 6.2.1), responsáveis pelo controle local do servo-motor e do motor de passo, respectivamente; (ii) por dois *enconders* (seção 6.2.2), responsáveis pela medição da posição angular do acoplamento, na saída do servo-reductor, e do rotor principal, respectivamente; (iii) pela célula de carga em “S” (seção 6.2.3), já ilustrada na figura (60b); (iv) pela célula de carga para estimação do torque de reação do eixo principal sobre o servo-motor pela célula de carga em “S” (seção 6.2.3); (v) por três sensores de distância (seção 6.2.4), utilizados para estimativa das coordenadas em yy e em zz do centro

geométrico do rotor intermediário; (vi) e pela placa de aquisição e processamento (seção 6.2.5), para integração de todos esses componentes, projetada especificamente para a bancada experimental do presente trabalho.

6.2.1 Servo-driver e driver do motor de passo

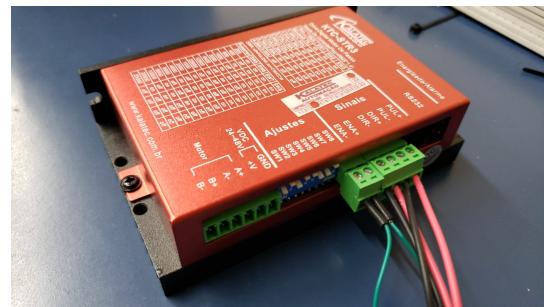
Para garantir a velocidade de saída constante do servo-motor, o servo-*driver* opera no modo trifásico, com potência de 400 W e 220 V de tensão de entrada.

Já o *driver* dedicado ao motor de passo é capaz de imprimir ao motor um deslocamento angular com precisão ajustável de 200 até 25600 pulsos por revolução. No presente trabalho, foi adotada uma precisão de 2000 pulsos por revolução, o que confere uma precisão de pelo menos $0,2 \mu\text{m}$ ao deslocamento longitudinal da plataforma móvel.

A figura (61) ilustra os *drivers* utilizados para controle local do servo-motor e do motor de passo.



(a) Servo-*driver*



(b) *Driver*

Figura 61 – *Drivers* para controle local do servo-motor e do motor de passo

6.2.2 Encoders

A figura (62) ilustra um dos *encoders* utilizados para estimação da velocidade angular do acoplamento mecânico e do rotor principal.



Figura 62 – *Encoder*

Os *encoders* possuem uma resolução de 12 *bits*, ou seja, é capaz de dividir uma volta em 4.096 unidades.

6.2.3 Células de carga

A figura (63) ilustra as células de carga utilizadas para estimativa do torque de reação sobre o servo-motor e para aferição da compressão no contato de atrito entre o rotor principal e os pinos de atrito.



(a) Célula para torque de reação



(b) Célula para o rotor principal

Figura 63 – Células de carga

A célula de carga utilizada para estimação indireta do torque de reação é de 10 kg , enquanto a utilizada para medição direta da carga de compressão durante o atrito é de 20 kg .

6.2.4 Sensores de distância

A figura (64) ilustra os sensores de distância utilizados para aferir a posição lateral do rotor intermediário.



Figura 64 – Sensores de distância com cabos

Os três sensores analógicos são da marca *Balluff*. Para uma faixa de distâncias de 3 mm a 15 mm , atribuem valores de tensão de saída variando 0 V a 10 V , numa relação crescente de linearidade. Para distâncias inferiores a 3 mm , o sensor fornece uma tensão

nula, enquanto que para distâncias superiores a 15 mm , a tensão de saída é fixa e igual a 10 V .

Como detalhado no anexo H, com as medidas Δz_1 , Δz_2 e Δy , aferidas diretamente pelos sensores de distância, é possível estimar as coordenadas laterais yy e zz do centro geométrico do rotor intermediário.

Na seção H.2, encontram-se detalhados: (i) o processo de calibração no posicionamento dos sensores de distância; (ii) e o tratamento dos sinais adquiridos por meio de *software*.

6.2.5 Placa de aquisição e processamento

A placa de aquisição e processamento foi projetada especificamente para a bancada experimental, e tem como finalidade integrar todos os sensores e os *drivers* sob o comando da placa *Teensy 3.2*. No anexo I encontra-se detalhada a planta da placa de aquisição.

As figuras (65), (66) e (67) ilustram a placa de aquisição.

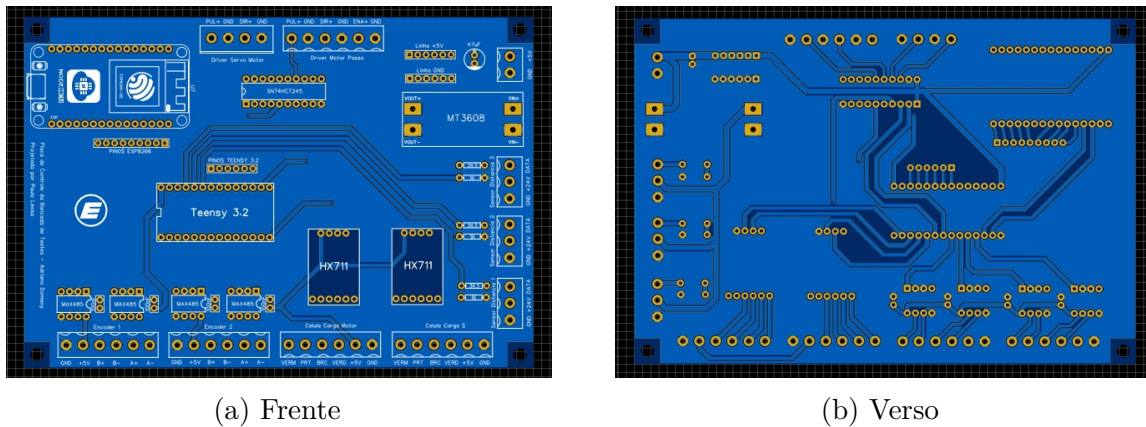


Figura 65 – Placa de aquisição e processamento

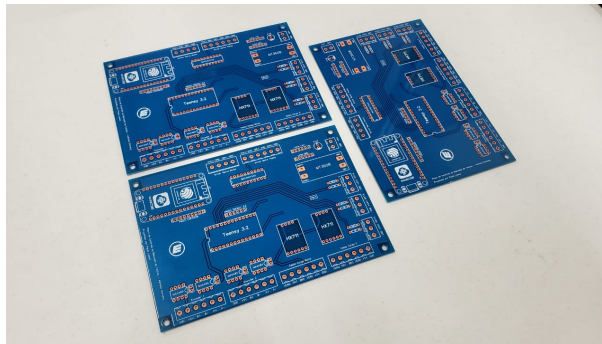


Figura 66 – Placas de aquisição e processamento confeccionadas para a bancada

A comunicação com a placa *Teensy 3.2* é realizada por ligação direta com um computador por meio de cabo micro USB, e tanto a aquisição e armazenamento de

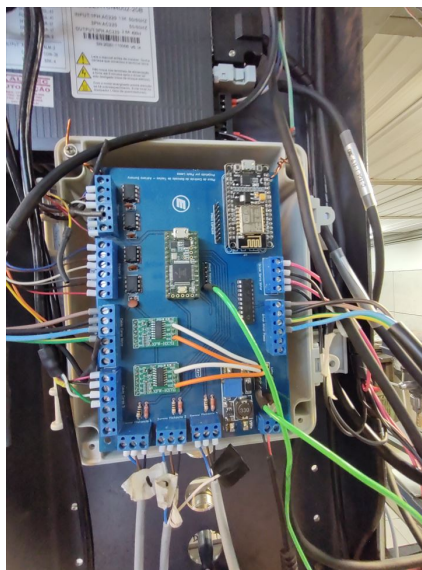


Figura 67 – Placas de aquisição e processamento instalada na bancada

dados, quanto os comandos de atuação, podem ser realizados diretamente pela plataforma *MATLAB*.

A placa de aquisição e processamento possui também um módulo que permite acessar a placa *Teensy 3.2* via sinal *wi-fi*, o que permite também a interação com o usuário a partir de um *smartphone*, por exemplo.

No processo de calibração dos sensores, os fatores de calibração são salvos diretamente na placa *Teensy 3.2*, de modo que a mesma calibração seja utilizada nos experimentos futuros. Caso seja necessário trocar algum dos instrumentos, basta refazer a calibração, que então é sobrescrita sobre a anterior.

6.3 Ensaios

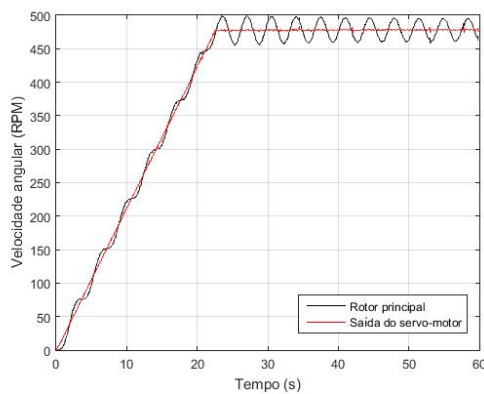
Uma vez realizados o posicionamento dos sensores de distância e a calibração das células de carga, dois ensaios simples foram efetuados em malha aberta, a fim de demonstrar o perfeito funcionamento da bancada experimental.

No primeiro ensaio, foi imposta uma velocidade de 480 RPM à saída do servo-motor. O rotor principal foi mantido a uma distância pequena dos pinos de atrito, de modo a ser possível observar o comportamento do sistema sem estar sob efeito do torque resistivo de atrito.

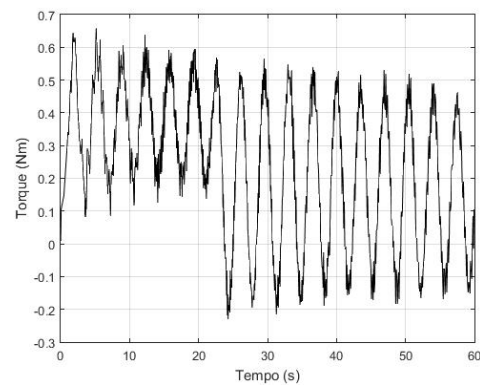
A figura (68) ilustra os dados adquiridos pelos sensores.

As figuras (68a) e (68b) apresentam uma estrita correlação entre as velocidades de rotação e o torque de reação aferidos.

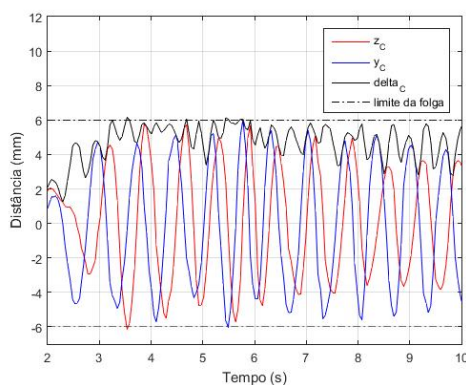
Em primeiro lugar, na faixa de tempo de 0 s a 22 s , depende-se do gráfico de



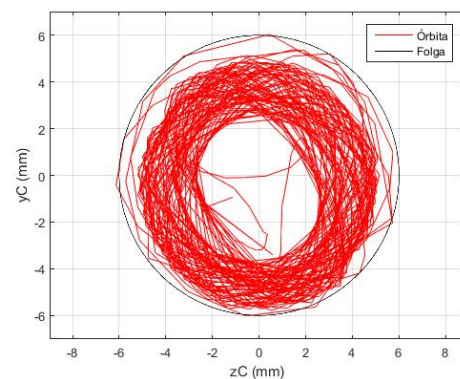
(a) Velocidades angulares



(b) Torque de reação



(c) Deslocamento lateral no tempo



(d) Órbita do rotor intermediário

Figura 68 – Ensaio sem contato entre rotor principal e pinos de atrito

velocidades uma aceleração constante, ao mesmo tempo que no gráfico do torque de reação, o valor médio do torque é superior ao dos instantes posteriores (em torno de $0,4 \text{ Nm}$). Passada essa faixa de tempo, o sistema adquire um estágio transiente de velocidade, com leve amortecimento para o rotor principal, e velocidade oscilando em torno de 480 RPM , ao mesmo tempo que o torque médio de reação cai para um valor inferior (em torno de $0,3 \text{ Nm}$). De fato, um movimento rotativo acelerado indica a presença de uma componente de torque de saída do servo-motor a mais que no estágio sem aceleração no acoplamento.

A oscilação da velocidade do rotor principal, de aproximadamente $0,3 \text{ Hz}$, apresentada no estágio de velocidade mais ou menos constante do acoplamento, é atribuída a um estágio ainda transiente no movimento do rotor principal. Por outro lado, essa oscilação -observada também na curva de torque de reação, com mesma frequência- não parece ter relação direta com o movimento de precessão do rotor intermediário, já que, pelos gráficos da figura (68c) e (68d), a precessão apresenta uma frequência bem maior (em torno de $1,2 \text{ Hz}$).

Desses último gráficos, referentes às medições dos sensores de distância, destaca-se o fato de as coordenadas do centro geométrico do rotor intermediário respeitarem com razoável precisão os limites da curva delimitadora da folga entre o rotor e o estator, o que

denota coerência da medição do sensores de distância e do tratamento dos dados.

Um segundo ensaio realizado foi constituído por quatro etapas, e partiu do sistema inicialmente numa configuração de repouso, com o rotor principal a uma distância vertical de 2 mm dos pinos de atrito:

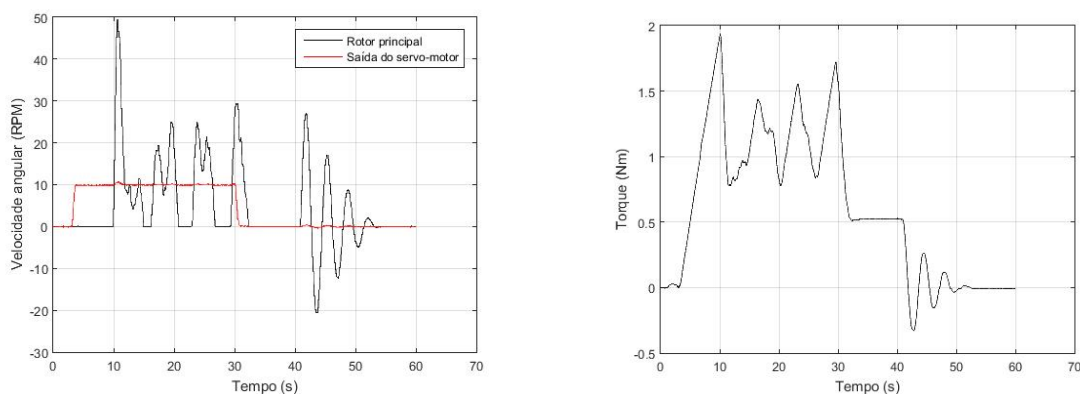
1. Deslocamento vertical de $2,7\text{ mm}$ da plataforma móvel, para baixo, promovido pelo acionamento do motor de passo, mantendo-se o servo-motor em repouso. Esse deslocamento correspondeu a uma pressão não nula, após o contato, sobre a célula de carga S, localizada abaixo do rotor principal.

2. Após um breve intervalo de tempo, acionamento do servo-motor, imprimindo-se uma velocidade constante de saída, num valor de 10 RPM .

3. Após um intervalo de aproximadamente 25 s , o servo-motor cessa o movimento, e o sistema é mantido com contato de atrito ativo por aproximadamente 10 s .

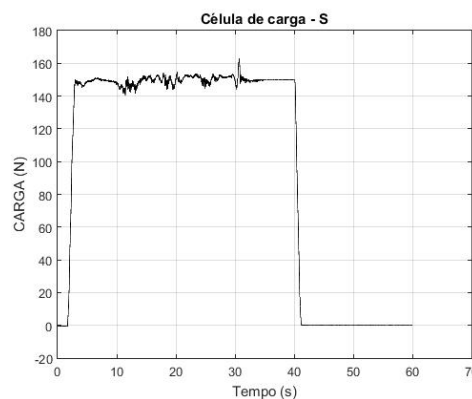
4. O motor de passo é acionado, retornando o sistema para a posição vertical original.

As figuras (69) e (70) ilustram os resultados obtidos com a medição dos sensores.



(a) Velocidades angulares

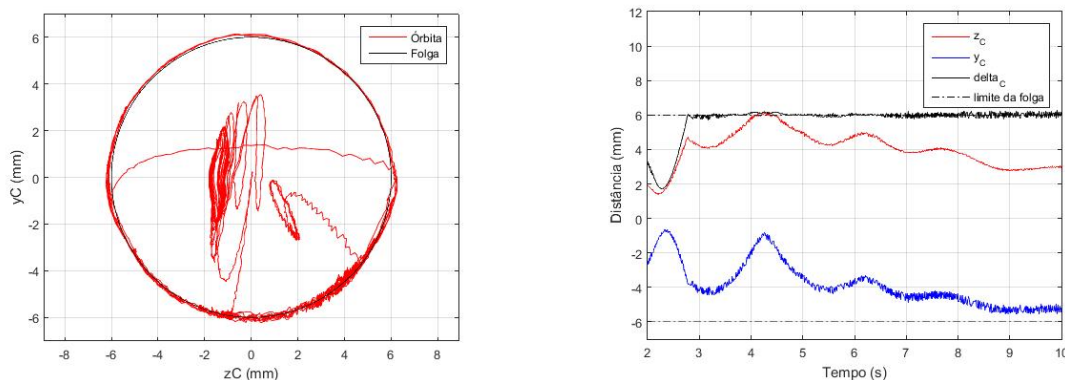
(b) Torque de reação



(c) Força normal no contato de atrito

Figura 69 – Ensaio com contato entre rotor principal e pinos de atrito

Nota-se uma estrita correlação entre os gráficos da figura (69). Conforme ilustrado



(a) Deslocamento lateral no tempo

(b) Órbita do rotor intermediário

Figura 70 – Ensaio com contato entre rotor principal e pinos de atrito - órbita

na figura (69a), no instante 4s, a velocidade na saída do servo-motor é de 10 *RPM*, enquanto que o rotor principal, sob efeito do torque resistivo, mantém-se em repouso. Concomitantemente, até o instante 10s, nota-se uma elevação do torque de reação. Esse comportamento do sistema configura um estágio de *stick*, com acúmulo de energia de deformação no eixo principal.

No instante 10s, ocorre o primeiro pico de velocidade do rotor principal, caracterizando um estágio de *slip*, com relaxamento do eixo principal e conseqüente redução do torque de reação durante o pico.

Aproximadamente no instante 15s, o rotor principal volta ao estado de repouso, reiniciando-se o segundo estágio de *stick*.

Após o quarto pico de velocidade, no instante 30s, o servo-motor cessa o movimento, e o sistema é mantido em repouso por aproximadamente 10s, após o qual o motor de passo é acionado para levar os rotores à posição vertical original, desfazendo-se assim o contato entre o rotor principal e os pinos de atrito.

Nota-se que, durante o contato entre o rotor principal e os pinos de atrito, entre os instantes 30s e 40s, o torque de reação mantém-se constante, com um valor aproximado de 0,5 *Nm*, indicando uma deformação residual do eixo principal. Logo após o instante 40s da simulação, com o contato de atrito desfeito, o rotor principal inicia um movimento oscilatório transiente de rotação até o repouso, concomitante com um movimento oscilatório transiente no valor do torque de reação até o valor nulo inicial.

A figura (69c) indica ao mesmo tempo a evolução do peso sobre a célula de carga S, e o intervalo de tempo de contato entre o rotor principal e os pinos de atrito. Como o rotor principal tem aproximadamente 11 *kg*, e a célula de carga S indica um peso superior a 140 *N* (o equivalente a uma massa de 14,3 *kg*), conclui-se que o ponto neutro de tensão longitudinal ao longo do eixo principal encontra-se acima do rotor principal, estando uma parte do eixo principal em regime de compressão. Considerando também que o rotor

intermediário tem massa aproximada de 7 kg , a massa total dos dois rotores juntos seria de aproximadamente 18 kg , valor superior aos $14,3\text{ kg}$ indicado pela célula de carga S. Pode-se então concluir que o ponto neutro de tensão ao longo do eixo principal encontra-se entre os rotores principal e intermediário, estando o trecho compreendido entre a saída do servo-motor e o rotor intermediário em regime de tração. Vale destacar que, mesmo assim, não foi observado nenhum tipo de flambagem do eixo principal.

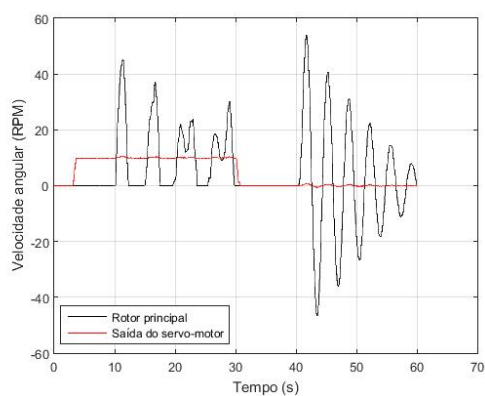
Por sua vez, a figura (70a) ilustra a órbita do rotor intermediário ao longo do ensaio. Considerando também a figura (70b), que ilustra o movimento do rotor principal numa janela inicial de tempo, nota-se que o rotor intermediário começa a tangenciar o estator a partir do instante $3s$, instante em torno do qual o rotor principal trava contato com os pinos de atrito, o que leva a uma compressão de parte do eixo principal. É possível, então, a partir da órbita ilustrada na figura (70a), classificar o movimento do rotor intermediário em três fases: (i) um movimento inicial sem tocar o estator, durante o deslocamento descendente promovido pelo motor de passo, antes de tocar os pinos de atrito, no qual o eixo principal encontra-se em regime de tração; (ii) um movimento circular tangenciando o estator, coincidente com o movimento de rotação e com a compressão promovida pela pressão não nula sobre os pinos de atrito; (iii) e por fim um movimento oscilatório sem tocar o estator, caracterizado pela ausência de rotação e pelo fim do contato do rotor principal com os pinos de atrito, estágio no qual o eixo principal estaria em regime de tração.

A figura (71) ilustra o resultado de mais dois ensaios com a bancada experimental, realizados sob as mesmas condições.

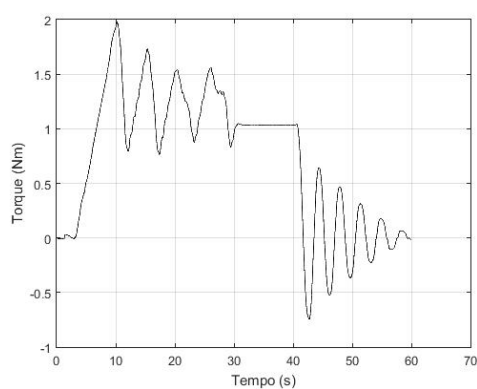
A principal semelhança apresentada pelos outros ensaios em relação ao primeiro é o mesmo número de picos de velocidade no regime de *stick-slip*. Por outro lado, os gráficos das figuras (69a) e (71a) apresentam picos de velocidade com irregularidades, enquanto que na figura (71c) os picos foram mais bem definidos.

Outra consideração relevante é que a evolução do movimento do rotor principal, de forma diferenciada nos três ensaios, resultou em diferentes torques residuais entre os instantes $30s$ e $40s$, como ilustrado nas figuras (69b), (71b) e (71d), com valores entre $0,5\text{ Nm}$ e 1 Nm . De forma correlata, os picos de velocidade logo após o instante $40s$ tiveram intensidades proporcionais aos respectivos torques residuais.

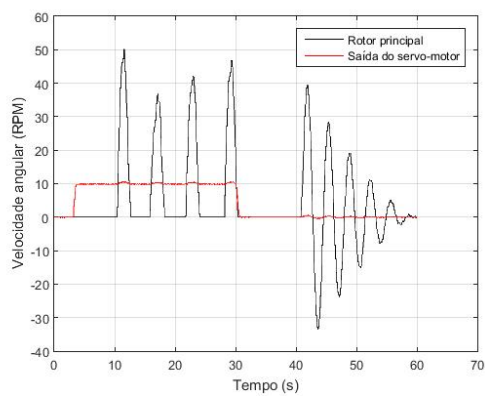
As diferenças quantitativas nos três ensaios se devem à variabilidade intrínseca das interações de atrito entre o rotor principal e os pinos de atrito.



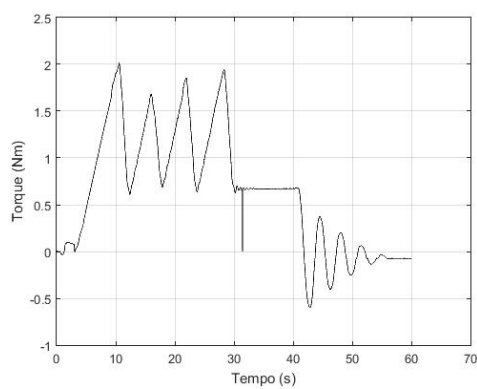
(a) Velocidades angulares



(b) Torque de reação



(c) Velocidades angulares



(d) Torque de reação

Figura 71 – Outras ensaios sob as mesmas condições

7 Considerações finais

O objetivo do presente trabalho foi o de propor uma estratégia de controle para uma bancada experimental, a qual resgatasse qualitativamente alguns fenômenos físicos comuns na aplicação da técnica de perfuração rotativa, utilizada na indústria de óleo e gás, mais especificamente *stick-slip* e *rub*. O modelo físico também contemplou um sistema de bi-atuação, de modo similar ao que acontece no sistema real de perfuração, uma vez que a caluna de perfuração é movida tanto longitudinalmente, por efeito do sistema de içamento, quanto em rotação em torno do eixo, por meio do torque motor da mesa rotativa. Na bancada de testes, o sistema de içamento foi representado pela plataforma móvel, movida pelo motor de passo por meio de dois eixos fusos. Já a mesa rotativa foi representada na bancada pelo servo-motor.

A configuração final da bancada permite vários tipos de estudos experimentais: (i) implementação de lei de controle para estabilização de rotores, (ii) observação e caracterização do *stick-slip*; (iii) observação e caracterização do *rub*; dentre outros. Toda a observação e atuação pode ser realizada acoplando-se o sistema central da bancada a um computador por meio de cabo micro-USB. O sistema central da bancada também emite um sinal wi-fi, que permite algumas ações por meio de celular, por exemplo.

Para as simulações, o modelo em elementos finitos foi escolhido para representar o sistema a ser controlado. Por sua vez, a utilização de um modelo em parâmetros concentrados com ajustes permitiu uma maior simplicidade na definição da lei de controle.

A estratégia de controle foi definida e simulada partindo-se das hipóteses de controlabilidade e plena observabilidade do sistema. A lei de controle, para seguimento da trajetória desejada, foi definida com base no método dos modos deslizantes com camada limite dinâmica. A utilização do conceito de camada limite levou ao seguimento da trajetória desejada, por parte do sistema, com um erro permanente dentro de limites aceitáveis; mas também permitiu a eliminação da alta frequência de chaveamento na entrada, problema típico do método de modos deslizantes.

Foram também obtidas as curvas teóricas delimitadoras da zona de instabilidade, no mapa de operação do sistema (velocidade de saída do servo-motor *versus* força de compressão sobre a célula de carga S). A trajetória desejada foi definida de modo que as saídas do sistema se mantivessem na zona de estabilidade, a fim de reduzir ao máximo o esforço de atuação.

Além da construção da bancada experimental, que incluiu algumas soluções de montagens mecânicas, e da lei de controle ilustrada apenas em simulações, as principais contribuições do presente trabalho foram: (i) a definição de funções auxiliares para inclusão

do modelo não linear de atrito na lei de controle; (ii) a estruturação de um algoritmo para obtenção da dinâmica interna do sistema; (iii) a definição de um novo modelo de *rub*, que levou em consideração na velocidade relativa de contato não apenas a velocidade de rotação mas também a componente de translação do rotor. No tratamento dos sinais adquiridos, uma contribuição do presente trabalho foi a correção da órbita do rotor intermediário, deformada por limitações inerentes aos sensores de distância. A correção foi implementada definindo-se fatores de correção para coordenadas do centro geométrico do rotor, em função de sua posição angular em relação ao eixo das abscissas.

8 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros, foram deixados os seguintes problemas:

1. Estudo mais detalhado das condições de controlabilidade e observabilidade do sistema;
2. Implementação de um observador, para reconstrução das variáveis de estado a partir das medidas dos sensores, sob condições favoráveis de observabilidade;
3. Caracterização mais detalhada do fenômeno de impacto com escorregamento, que ocorre entre o rotor intermediário e o estator;
4. Implementação da estratégia de controle na bancada experimental;
5. Estudo de técnicas para redução ou até a eliminação do erro permanente observado no seguimento da trajetória desejada por parte do sistema, submetido à lei de controle.

Referências

- ABDULGALIL, F.; SIGUERDIDJANE, H. Pid based on sliding mode control for rotary drilling system. In: IEEE. *EUROCON 2005-The International Conference on "Computer as a Tool"*. [S.l.], 2005. v. 1, p. 262–265. Citado na página 36.
- ANDRADE, B. C. C. *Numerical and experimental analysis of nonlinear torsional dynamics of a drilling system*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 29.
- ANDRONOV, A. A.; VITT, A. A.; KHAIKIN, S. E. *Theory of Oscillators: Adiwes International Series in Physics*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 4. Citado na página 31.
- BROGLIATO, B.; HEEMELS, W. Observer design for lur'e systems with multivalued mappings: A passivity approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 54, n. 8, p. 1996–2001, 2009. Citado na página 35.
- CHOY, F.; PADOVAN, J. Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 113, n. 3, p. 529–545, 1987. Citado na página 32.
- DORIS, A. et al. Observer designs for experimental non-smooth and discontinuous systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 1323–1332, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- DRAKUNOV, S.; UTKIN, V. Sliding mode observers. tutorial. In: IEEE. *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1995. v. 4, p. 3376–3378. Citado na página 34.
- GREENWOOD, D. T. *Classical dynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 68.
- HAN, J.-H.; KIM, Y.-J.; KARKOUB, M. Modeling of wave propagation in drill strings using vibration transfer matrix methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 134, n. 3, p. 1920–1931, 2013. Citado na página 30.
- INMAN, D. J. *Vibration with control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017. Citado na página 206.
- JONUŠAS, R.; JUŽENAS, E.; JUŽENAS, K. Analysis of some extreme situations in exploitation of complex rotary systems. *Mechanics*, v. 81, n. 1, p. 53–57, 2010. Citado na página 32.
- JUNIOR, A. B. da C. *Modeling and uncertainty quantification in the nonlinear stochastic dynamics of horizontal drillstrings*. Tese (Doutorado) — Université Paris-Est; Pontifícia universidade católica (Rio de Janeiro, Brésil), 2015. Citado 3 vezes nas páginas 44, 68 e 266.
- KARNOPP, D. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. The American Society of Mechanical Engineers (ASME), 1985. Citado na página 37.

- KREUZER, E.; STEIDL, M. Model order reduction of a drill-string-model with self-excited stick-slip vibrations. In: WILEY ONLINE LIBRARY. *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. [S.l.], 2009. v. 9, n. 1, p. 295–296. Citado na página 30.
- KREUZER, E.; STEIDL, M. Controlling torsional vibrations of drill strings via decomposition of traveling waves. *Archive of Applied Mechanics*, Springer, v. 82, n. 4, p. 515–531, 2012. Citado na página 35.
- LEINE, R. et al. Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear dynamics*, Springer, v. 16, n. 1, p. 41–54, 1998. Citado na página 37.
- LI, G.; PAIDOUSSIS, M. Impact phenomena of rotor-casing dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 5, n. 1, p. 53–70, 1994. Citado na página 31.
- LOBO, D. et al. On the stochastic bit-rock interaction disturbances and its effects on the performance of two commercial control strategies used in drill strings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 164, p. 108229, 2022. Citado na página 38.
- LÓPEZ, E. *Bit-sticking phenomena in a multidegree-of-freedom controlled drill strings*. [S.l.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 24.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 531–773, 1992. Citado na página 245.
- MACLEAN, J. D. et al. Suppressing stick-slip oscillations in drill-strings by modified integral resonant control. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 228, p. 107425, 2022. Citado na página 38.
- MIHAJLOVIC, N. et al. Analysis of friction-induced limit cycling in an experimental drill-string system. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, v. 126, n. 4, p. 709–720, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 9, 32, 33, 34, 35 e 76.
- MONTEIRO, H. L.; TRINDADE, M. A. Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 398, p. 28–38, 2017. Citado na página 37.
- NAVARRO-LÓPEZ, E. M.; CORTÉS, D. Avoiding harmful oscillations in a drillstring through dynamical analysis. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 307, n. 1-2, p. 152–171, 2007. Citado na página 30.
- NAVARRO-LÓPEZ, E. M.; CORTÉS, D. Sliding-mode control of a multi-dof oilwell drillstring with stick-slip oscillations. In: IEEE. *2007 American control conference*. [S.l.], 2007. p. 3837–3842. Citado na página 37.
- NAVARRO-LÓPEZ, E. M.; LICÉAGA-CASTRO, E. Non-desired transitions and sliding-mode control of a multi-dof mechanical system with stick-slip oscillations. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 41, n. 4, p. 2035–2044, 2009. Citado na página 36.
- NELSON, H. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. 1980. Citado na página 165.

- NETO, H. C.; TRINDADE, M. A. Control of drill string torsional vibrations using optimal static output feedback. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 130, p. 105366, 2023. Citado na página 38.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, American Society of Civil Engineers, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959. Citado 2 vezes nas páginas 125 e 266.
- PICCOLI, H. C. *Observação de Caos nas Medidas do Movimento de um Rotor Sujeito a Rubbing*. Tese (Doutorado) — Faculdade Estadual de Campinas, Campinas, 1994. Citado na página 31.
- PICCOLI, H. C.; WEBER, H. I. Experimental observation of chaotic motion in a rotor with rubbing. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 16, n. 1, p. 55–70, 1998. Citado na página 31.
- REAL, F. et al. Experimental analysis of stick-slip in drilling dynamics in a laboratory test-rig. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 170, p. 755–762, 2018. Citado na página 29.
- RICHARD, T.; GERMAI, C.; DETOURNAY, E. A simplified model to explore the root cause of stick-slip vibrations in drilling systems with drag bits. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 305, n. 3, p. 432–456, 2007. Citado na página 31.
- RITTO, T. *Numerical analysis of the nonlinear dynamics of a drill-string with uncertainty modeling*. Tese (Doutorado) — Citeseer, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 9, 21, 25, 44, 54, 55, 58 e 165.
- RITTO, T. G.; SOIZE, C.; SAMPAIO, R. Non-linear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit-rock interaction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 44, n. 8, p. 865–876, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.
- SAGERT, C. et al. Backstepping and flatness approaches for stabilization of the stick-slip phenomenon for drilling. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 46, n. 2, p. 779–784, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- SANTOS, A. D. *Dinâmica de uma coluna rotativa esbelta sujeita à ação de stick-slip em duas regiões distintas*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 148.
- SANTOS, A. D.; FLEURY, A. T. Sliding mode control strategies for flexible rotating systems. In: SAVI M.A.; RITTO, T.; BESSA, W. (Ed.). *Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*. [S.l.]: ABCM, 2019. p. –. ISBN -. Citado na página 70.
- SANTOS, I. F. *Dinâmica de sistemas mecânicos: modelagem, simulação, visualização, verificação*. [S.l.]: Makron, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 44, 49 e 50.
- Schlumberger Developers. *The Defining Series: Drilling Fluid Basics*. 2022. Disponível em <<https://www.slb.com/resource-library/oilfield-review/defining-series/defining-drilling-fluids>>. Acesso em 21 de abril de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 22.

- Schlumberger Developers. *Diamond-Enhanced Insert Stabilizer*. 2022. Disponível em <<https://www.slb.com/drilling/bottomhole-assemblies/reamers-and-stabilizers/diamond-enhanced-stabilizer>>. Acesso em 11 de abril de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.
- SHTESSEL, Y. et al. *Sliding mode control and observation*. [S.l.]: Springer, 2014. v. 10. Citado na página 248.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199. Citado 7 vezes nas páginas 27, 239, 244, 248, 249, 251 e 255.
- SOUSA, B. V. P. et al. Perfurações de poços de petróleo métodos e equipamentos utilizados. *Caderno de Graduação-Ciências Exatas e Tecnológicas-UNIT-SERGIPE*, v. 1, n. 1, p. 103–108, 2012. Citado na página 20.
- VIGUIÉ, R. et al. Using passive nonlinear targeted energy transfer to stabilize drill-string systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 148–169, 2009. Citado na página 35.
- YIGIT, A.; CHRISTOFOROU, A. Coupled torsional and bending vibrations of drillstrings subject to impact with friction. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 215, n. 1, p. 167–181, 1998. Citado na página 29.
- ZHANG, Q.-Z. et al. Sliding mode control of rotary drilling system with stick slip oscillation. In: IEEE. *2010 2nd International Workshop on Intelligent Systems and Applications*. [S.l.], 2010. p. 1–4. Citado na página 36.
- ZHENG, X. et al. Nonlinear instabilities and control of drill-string stick-slip vibrations with consideration of state-dependent delay. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 473, p. 115235, 2020. Citado na página 37.

ANEXO A – Funções de forma

A principal referência para a redação dessa seção foi (RITTO, 2010).

As funções de forma para a discretização em elementos finitos, sendo $\xi = \frac{x}{L_i}$, foram definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u(\xi, l_e) &= \begin{bmatrix} n_1(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_2(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_v(\xi, l_e) &= \begin{bmatrix} 0 & H_1(\xi, l_e) & H_2(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3(\xi, l_e) & H_4(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_{\theta_z}(\xi, l_e) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{dH_1}{dx}(\xi, l_e) & \frac{dH_2}{dx}(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dH_3}{dx}(\xi, l_e) & \frac{dH_4}{dx}(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_w(\xi, l_e) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & H_1(\xi, l_e) & -H_2(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3(\xi, l_e) & -H_4(\xi, l_e) & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_{\theta_y}(\xi, l_e) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{dH_1}{dx}(\xi, l_e) & \frac{dH_2}{dx}(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dH_3}{dx}(\xi, l_e) & \frac{dH_4}{dx}(\xi, l_e) & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}_{\theta_x}(\xi, l_e) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_1(\xi, l_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_2(\xi, l_e) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo que as expressões:

$$\begin{aligned} n_1(\xi, l_e) &= 1 - \xi \\ n_2(\xi, l_e) &= \xi \\ H_1(\xi, l_e) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ H_2(\xi, l_e) &= l_e (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ H_3(\xi, l_e) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ H_4(\xi, l_e) &= l_e (-\xi^2 + \xi^3) \end{aligned}$$

correspondem a funções de interpolação. Foram utilizadas as funções lineares n_1 e n_2 para interpolação dos deslocamentos em u e em θ_x . Já para as variáveis de deslocamento lateral, a saber v , w , θ_z e θ_y , foram utilizadas as funções de interpolação $H_1(\xi, l_e)$, $H_2(\xi, l_e)$, $H_3(\xi, l_e)$ e $H_4(\xi, l_e)$, geradas para o cálculo de resposta estática de uma viga (RITTO, 2010 apud NELSON, 1980).

Nas funções $\mathbf{N}_{\theta_z}(\xi, l_e)$ e $\mathbf{N}_{\theta_y}(\xi, l_e)$, em particular, foram utilizadas as derivas das funções $H_1(\xi, l_e)$, $H_2(\xi, l_e)$, $H_3(\xi, l_e)$ e $H_4(\xi, l_e)$ em relação à variável x , uma vez que:

$$\begin{aligned} \theta_z &\cong \frac{dv}{dx} \\ \theta_y &\cong -\frac{dw}{dx} \end{aligned}$$

A diferença de sinais entre essas derivas foi consequência da orientação definida para as rotações θ_z e θ_y em relação aos eixos zz e yy , respectivamente, ou seja, o sentido positivo de rotação definido pela regra da mão direita.

No processo de discretização das expressões das energias cinética e potencial, foram utilizadas aproximações das variáveis de deslocamento e de suas derivadas em função do tempo t e do espaço x , tendo sido necessário efetuar as derivadas das funções de forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}_u}{dx}(\xi, l_e) &= \left[\frac{dn_1}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dn_2}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ \frac{d\mathbf{N}_v}{dx}(\xi, l_e) &= \left[0 \ \frac{dH_1}{dx}(\xi, l_e) \ \frac{dH_2}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dH_3}{dx}(\xi, l_e) \ \frac{dH_4}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ \frac{d\mathbf{N}_{\theta_z}}{dx}(\xi, l_e) &= \left[0 \ \frac{d^2H_1}{dx^2}(\xi, l_e) \ \frac{d^2H_2}{dx^2}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{d^2H_3}{dx^2}(\xi, l_e) \ \frac{d^2H_4}{dx^2}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \right] \\ \frac{d\mathbf{N}_w}{dx}(\xi, l_e) &= \left[0 \ 0 \ 0 \ \frac{dH_1}{dx}(\xi, l_e) \ -\frac{dH_2}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dH_3}{dx}(\xi, l_e) \ -\frac{dH_4}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \right] \\ \frac{d\mathbf{N}_{\theta_y}}{dx}(\xi, l_e) &= \left[0 \ 0 \ 0 \ -\frac{d^2H_1}{dx^2}(\xi, l_e) \ \frac{d^2H_2}{dx^2}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{d^2H_3}{dx^2}(\xi, l_e) \ \frac{d^2H_4}{dx^2}(\xi, l_e) \ 0 \right] \\ \frac{d\mathbf{N}_{\theta_x}}{dx}(\xi, l_e) &= \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dn_1}{dx}(\xi, l_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{dn_2}{dx}(\xi, l_e) \right] \end{aligned}$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dx}(\xi, l_e) &= -\frac{1}{l_e} \\ \frac{dn_2}{dx}(\xi, l_e) &= \frac{1}{l_e} \\ \frac{dH_1}{dx}(\xi, l_e) &= \frac{6}{l_e}\xi(\xi - 1) \\ \frac{dH_2}{dx}(\xi, l_e) &= 3\xi^2 - 4\xi + 1 \\ \frac{dH_3}{dx}(\xi, l_e) &= -\frac{6}{l_e}\xi(\xi - 1) \\ \frac{dH_4}{dx}(\xi, l_e) &= \xi(3\xi - 2) \\ \frac{d^2H_1}{dx^2}(\xi, l_e) &= \frac{6}{l_e^2}(2\xi - 1) \\ \frac{d^2H_2}{dx^2}(\xi, l_e) &= \frac{1}{l_e}(6\xi - 4) \\ \frac{d^2H_3}{dx^2}(\xi, l_e) &= -\frac{6}{l_e^2}(2\xi - 1) \\ \frac{d^2H_4}{dx^2}(\xi, l_e) &= \frac{1}{l_e}(6\xi - 4) \end{aligned}$$

Uma vez definidas as funções de forma e suas derivadas, as aproximações das

variáveis de deslocamento e de suas derivadas em função do tempo t e do espaço x foram realizadas como segue:

$$\begin{aligned} u(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \mathbf{N}_u(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ v(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \mathbf{N}_v(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \theta_z(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_z}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ w(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \mathbf{N}_w(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \theta_y(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_y}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \theta_x(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_x}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(\xi, l_e, \dot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_u(\xi, l_e) \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{v}(\xi, l_e, \dot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_v(\xi, l_e) \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{\theta}_z(\xi, l_e, \dot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_z}(\xi, l_e) \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{w}(\xi, l_e, \dot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_w(\xi, l_e) \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{\theta}_y(\xi, l_e, \dot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_y}(\xi, l_e) \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{\theta}_x(\xi, l_e, \dot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_x}(\xi, l_e) \dot{\mathbf{u}}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\xi, l_e, \ddot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_u(\xi, l_e) \ddot{\mathbf{u}}_j \\ \ddot{v}(\xi, l_e, \ddot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_v(\xi, l_e) \ddot{\mathbf{u}}_j \\ \ddot{\theta}_z(\xi, l_e, \ddot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_z}(\xi, l_e) \ddot{\mathbf{u}}_j \\ \ddot{w}(\xi, l_e, \ddot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_w(\xi, l_e) \ddot{\mathbf{u}}_j \\ \ddot{\theta}_y(\xi, l_e, \ddot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_y}(\xi, l_e) \ddot{\mathbf{u}}_j \\ \ddot{\theta}_x(\xi, l_e, \ddot{\mathbf{u}}_j) &= \mathbf{N}_{\theta_x}(\xi, l_e) \ddot{\mathbf{u}}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \frac{d\mathbf{N}_u}{dx}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \frac{dv}{dx}(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \frac{d\mathbf{N}_v}{dx}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \frac{d\theta_z}{dx}(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \frac{d\mathbf{N}_{\theta_z}}{dx}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \frac{dw}{dx}(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \frac{d\mathbf{N}_w}{dx}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \frac{d\theta_y}{dx}(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \frac{d\mathbf{N}_{\theta_y}}{dx}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \\ \frac{d\theta_x}{dx}(\xi, l_e, \mathbf{u}_j) &= \frac{d\mathbf{N}_{\theta_x}}{dx}(\xi, l_e) \mathbf{u}_j \end{aligned}$$

com $j = 1, \dots, N$, sendo N o número de elementos na malha e \mathbf{u}_j o vetor elementar de deslocamento:

$$\mathbf{u}_j = \left[u_1^{(j)} \quad v_1^{(j)} \quad \theta_{z_1}^{(j)} \quad w_1^{(j)} \quad \theta_{y_1}^{(j)} \quad \theta_{x_1}^{(j)} \quad u_2^{(j)} \quad v_2^{(j)} \quad \theta_{z_2}^{(j)} \quad w_2^{(j)} \quad \theta_{y_2}^{(j)} \quad \theta_{x_2}^{(j)} \right]^T$$

ANEXO B – Expressão final da energia potencial elástica por comprimento do eixo

Para a resolução da integral:

$$\Psi(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^R [E \epsilon_{xx}^2 + 4k_s G (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2)] r dr d\theta$$

considerando-se a campo de deslocamento,

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u + y(\theta_y \text{sen}(\theta_x) - \theta_z \text{cos}(\theta_x)) + z(\theta_y \text{cos}(\theta_x) + \theta_z \text{sen}(\theta_x)) \\ u_y(x, y, z) &= v + y(\text{cos}(\theta_x) - 1) - z \text{sen}(\theta_x) \\ u_z(x, y, z) &= w + y \text{sen}(\theta_x) + z(\text{cos}(\theta_x) - 1) \end{aligned}$$

e as expressões de ϵ_{xx} , ϵ_{xy} e ϵ_{xz} ,

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

foi antes necessário o cálculo das derivadas parciais do campo de deslocamento nas expressões de ϵ_{xx} , ϵ_{xy} e ϵ_{xz} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ y \left(\left(\text{cos}(\theta_x) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \theta_y + \text{sen}(\theta_x) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - \left(-\text{sen}(\theta_x) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \theta_z + \text{cos}(\theta_x) \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) \right) \\ &+ z \left(\left(-\text{sen}(\theta_x) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \theta_y + \text{cos}(\theta_x) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \left(\text{cos}(\theta_x) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \theta_z + \text{sen}(\theta_x) \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \theta_y \text{sen}(\theta_x) - \theta_z \text{cos}(\theta_x)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \theta_y \cos(\theta_x) + \theta_z \operatorname{sen}(\theta_x)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \left(y \operatorname{sen}(\theta_x) + z \cos(\theta_x) \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -1 + \cos(\theta_x)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\operatorname{sen}(\theta_x)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \left(y \cos(\theta_x) - z \operatorname{sen}(\theta_x) \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \operatorname{sen}(\theta_x)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -1 + \cos(\theta_x)$$

Por hipótese simplificadora, as derivadas $\frac{\partial \theta_x}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta_x}{\partial z}$, $\frac{\partial \theta_y}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta_y}{\partial z}$, $\frac{\partial \theta_z}{\partial y}$ e $\frac{\partial \theta_z}{\partial z}$ foram consideradas nulas, ou seja, as variáveis θ_x , θ_y e θ_z foram consideradas independentes de y e z sobre o domínio da seção transversal.

Inserindo-se as derivadas parciais na integral, efetuando-se as substituições $y = r \cos(\theta)$ e $z = r \operatorname{sen}(\theta)$, e efetuando-se a integração, chegou-se ao seguinte resultado:

$$\Psi(x) = \Psi_L(x) + \Psi_{nL}(x) \tag{B.1}$$

sendo que

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) = & \pi R^2 E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \pi R^4 E \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\ & + \pi R^2 k_s G \left\{ \left(\theta_z - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\ & + \pi R^4 k_s G \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi R^4 E \left\{ + \frac{1}{4} \theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta_y \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \\
& + \pi R^4 E \left\{ - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \\
& + \pi R^4 E \left\{ - \frac{3}{2} \theta_y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} \theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\
& + \pi R^6 E \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{32} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{32} \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^4 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \left\{ \frac{1}{12} \theta_y^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{12} \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{32} \theta_y^4 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{32} \theta_z^4 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^4 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{1}{16} \left\{ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 + \theta_y^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{3}{16} \left\{ \theta_y^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 + \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{1}{16} \left\{ \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 + \theta_y^2 \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^4 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \left\{ - \frac{1}{6} \theta_y \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{1}{8} \theta_y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^3 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \left\{ \frac{1}{6} \theta_z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{8} \theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^3 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{1}{8} \left\{ - \theta_y^3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \theta_z^3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{1}{8} \left\{ - \theta_y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
& + \pi R^6 E \frac{1}{8} \left\{ \theta_y^2 \theta_z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \theta_y \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right\} + \\
& - \pi R^6 E \frac{1}{4} \theta_y \theta_z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \\
& + \pi R^2 k_s G \left\{ 2 \left(\theta_y^2 + \theta_z^2 - \theta_z \frac{\partial v}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (\theta_y^2 + \theta_z^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
& + \pi R^4 k_s G \left\{ \frac{1}{2} \theta_y^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \theta_y^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \theta_y^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
& + \pi R^4 k_s G \left\{ \frac{1}{4} \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \theta_y^4 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \theta_z^4 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi R^4 k_s G \left\{ -\frac{1}{2} \theta_y \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_y^2 \theta_z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta_y^3 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right\} + \\
& - \pi R^4 k_s G \frac{1}{2} \theta_y \theta_z^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x}
\end{aligned}$$

A parcela $\Psi_L(x)$ deu origem aos termos lineares da equação final da dinâmica, provenientes da energia potencial elástica; enquanto que a parcela $\Psi_{nL}(x)$ deu origem aos termos não lineares.

ANEXO C – Demonstrações

C.1 Discretização da energia cinética

Os quatro elementos concentrados, no somatório da equação (3.2) correspondem à plataforma móvel, à inercia total na saída do servo-motor, e aos rotores principal e intermediário. A equação (C.1) explicita os elementos móveis na expressão de T :

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho \left\{ A \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) + \boldsymbol{\omega}_c^T(x) [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c(x) \right\} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \left(M_M \mathbf{v}_M^T \mathbf{v}_M + \boldsymbol{\omega}_{c_M}^T [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{c_M} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(M_{pl} \mathbf{v}_{pl}^T \mathbf{v}_{pl} + \boldsymbol{\omega}_{c_{pl}}^T [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{c_{pl}} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\bar{M}_2 \mathbf{v}_{N_1+1}^T \mathbf{v}_{N_1+1} + \boldsymbol{\omega}_{c_{N_1+1}}^T [\bar{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{N_1+1}} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(M_1 \mathbf{v}_{N+1}^T \mathbf{v}_{N+1} + \boldsymbol{\omega}_{c_{N+1}}^T [\mathbf{I}_1] \boldsymbol{\omega}_{c_{N+1}} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Na equação (C.1), os termos \mathbf{v}_M e $\boldsymbol{\omega}_{c_M}$ correspondem, respectivamente, ao vetor velocidade linear e ao vetor velocidade angular da inércia de saída, e os termos \mathbf{v}_{pl} e $\boldsymbol{\omega}_{c_{pl}}$ correspondem, respectivamente, ao vetor velocidade linear e ao vetor velocidade angular da plataforma móvel. Da mesma forma, \mathbf{v}_{N_1+1} e $\boldsymbol{\omega}_{c_{N_1+1}}$ correspondem aos vetores velocidade linear e velocidade angular do nó $N_1 + 1$, e \mathbf{v}_{N+1} e $\boldsymbol{\omega}_{c_{N+1}}$ correspondem aos vetores velocidade linear e velocidade angular do nó $N + 1$.

Visando-se a inclusão dos termos concentrados na formulação em elementos finitos, os termos concentrados na expressão da energia cinética foram particionados em integrais aplicadas sobre cada elemento, lançando-se mão das funções Delta de Dirac, de modo que a expressão da energia cinética adquirisse a formulação da equação (C.2).

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho \left\{ A \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) + \boldsymbol{\omega}_c^T(x) [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c(x) \right\} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} M_M \mathbf{v}_M^T(x) \mathbf{v}_M(x) \delta(x - x_1) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\omega}_{c_M}^T(x) [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{c_M}(x) \delta(x - x_1) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} M_{pl} \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) \delta(x - x_1) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\omega}_{c_{pl}}^T(x) [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{c_{pl}}(x) \delta(x - x_1) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} \overline{M}_2 \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} \boldsymbol{\omega}_c^T(x) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_c(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_{N_1+1}}^{x_{N_1+2}} \overline{M}_2 \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_{N_1+1}}^{x_{N_1+2}} \boldsymbol{\omega}_c^T(x) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_c(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} M_1 \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) \delta(x - x_{N+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} \boldsymbol{\omega}_c^T(x) [\mathbf{I}_1] \boldsymbol{\omega}_c(x) \delta(x - x_{N+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_{N_1}}^{x_{N_1+1}} \Delta m \mathbf{v}_m^T(x) \mathbf{v}_m(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_{N_1+1}}^{x_{N_1+2}} \Delta m \mathbf{v}_m^T(x) \mathbf{v}_m(x) \delta(x - x_{N_1+1}) dx
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Aplicando-se a substituição de variáveis da equação (C.3) na equação (C.2),

$$\xi = \frac{x - x_j}{L_j} \Leftrightarrow x = x_j + \xi L_j \tag{C.3}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \rho \left\{ A \mathbf{v}^T (x_j + \xi L_j) \mathbf{v} (x_j + \xi L_j) + \boldsymbol{\omega}_c^T (x_j + \xi L_j) [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_c (x_j + \xi L_j) \right\} d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} M_M \mathbf{v}_M^T (x_1 + \xi L_1) \mathbf{v}_M (x_1 + \xi L_1) \delta(\xi L_1) d(L_1 \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \boldsymbol{\omega}_{cM}^T (x_1 + \xi L_1) [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{cM} (x_1 + \xi L_1) \delta(\xi L_1) d(L_1 \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} M_{pl} \mathbf{v}^T (x_1 + \xi L_1) \mathbf{v} (x_1 + \xi L_1) \delta(\xi L_1) d(L_1 \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \boldsymbol{\omega}_{cpl}^T (x_1 + \xi L_1) [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{cpl} (x_1 + \xi L_1) \delta(\xi L_1) d(L_1 \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_{N_1}} \overline{M}_2 \mathbf{v}^T (x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \mathbf{v} (x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N_1+1}) d(L_{N_1} \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_{N_1}} \boldsymbol{\omega}_c^T (x_{N_1} + \xi L_{N_1}) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_c (x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N_1+1}) d(L_{N_1} \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_{N_1+1}} \overline{M}_2 \mathbf{v}^T (x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \mathbf{v} (x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(L_{N_1+1} \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_{N_1+1}} \boldsymbol{\omega}_c^T (x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_c (x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(L_{N_1+1} \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_N} M_1 \mathbf{v}^T (x_N + \xi L_N) \mathbf{v} (x_N + \xi L_N) \delta(x_N + \xi L_N - x_{N+1}) d(L_N \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_N} \boldsymbol{\omega}_c^T (x_N + \xi L_N) [\mathbf{I}_1] \boldsymbol{\omega}_c (x_N + \xi L_N) \delta(x_N + \xi L_N - x_{N+1}) d(L_N \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_{N_1}} \Delta m \mathbf{v}_m^T (x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \mathbf{v}_m (x_{N_1} + \xi L_{N_1}) \delta(x_{N_1} + \xi L_{N_1} - x_{N_1+1}) d(L_{N_1} \xi) + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_{N_1+1}} \Delta m \mathbf{v}_m^T (x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \mathbf{v}_m (x_{N_1+1} + \xi L_{N_1+1}) \delta(\xi L_{N_1+1}) d(L_{N_1+1} \xi)
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, definiu-se as funções das equações (C.4) e (C.5):

$$\mathbf{v}_{\xi,j}(\xi) = \mathbf{v}(x_j + \xi L_j) \quad (\text{C.4})$$

$$\boldsymbol{\omega}_{c\xi,j}(\xi) = \boldsymbol{\omega}_c(x_j + \xi L_j) \quad (\text{C.5})$$

Aplicando as equações (C.4) e (C.5) na última expressão da energia cinética, obteve-se equação (C.6):

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \rho \left\{ A \mathbf{v}_{\xi,j}^T (\xi) \mathbf{v}_{\xi,j} (\xi) + \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,j}}^T (\xi) [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,j}} (\xi) \right\} d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 M_M \mathbf{v}_{M,\xi,1}^T (\xi) \mathbf{v}_{M,\xi,1} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \boldsymbol{\omega}_{c_{M\xi,1}}^T (\xi) [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{c_{M\xi,1}} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 M_{pl} \mathbf{v}_{\xi,1}^T (\xi) \mathbf{v}_{\xi,1} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \boldsymbol{\omega}_{c_{pl\xi,1}}^T (\xi) [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{c_{pl\xi,1}} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \overline{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1}^T (\xi) \mathbf{v}_{\xi,N_1} (\xi) \delta (\xi - 1) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1}}^T (\xi) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1}} (\xi) \delta (\xi - 1) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \overline{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}^T (\xi) \mathbf{v}_{\xi,N_1+1} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1+1}}^T (\xi) [\overline{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1+1}} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 M_1 \mathbf{v}_{\xi,N}^T (\xi) \mathbf{v}_{\xi,N} (\xi) \delta (\xi - 1) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N}}^T (\xi) [\mathbf{I}_1] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N}} (\xi) \delta (\xi - 1) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \Delta m \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1}}^T (\xi) \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1}} (\xi) \delta (\xi - 1) d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \Delta m \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1+1}}^T (\xi) \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1+1}} (\xi) \delta (\xi - 0) d\xi
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Por fim, aplicando-se a propriedade da função Delta de Dirac:

$$\int_0^1 f (\xi) \delta (\xi - \xi_0) d\xi = f (\xi_0), \text{ para } 0 \leq \xi \leq 1$$

chegou-se à expressão final desejada da energia cinética, dada pela equação (C.7):

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N L_j \int_0^1 \rho \left\{ A \mathbf{v}_{\xi,j}^T(\xi) \mathbf{v}_{\xi,j}(\xi) + \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,j}}^T(\xi) [\mathbf{J}_t] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,j}}(\xi) \right\} d\xi + \\
& + \frac{1}{2} M_M \mathbf{v}_{M,\xi,1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{M,\xi,1}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{M\xi,1}}^T(\xi=0) [\mathbf{I}_M] \boldsymbol{\omega}_{c_{M\xi,1}}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} M_{pl} \mathbf{v}_{\xi,1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{\xi,1}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{pl\xi,1}}^T(\xi=0) [\mathbf{I}_{pl}] \boldsymbol{\omega}_{c_{pl\xi,1}}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \bar{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{\xi,N_1}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1}}^T(\xi=1) [\bar{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1}}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \bar{M}_2 \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{\xi,N_1+1}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1+1}}^T(\xi=0) [\bar{\mathbf{I}}_2] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N_1+1}}(\xi=0) + \\
& + \frac{1}{2} M_1 \mathbf{v}_{\xi,N}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{\xi,N}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N}}^T(\xi=1) [\mathbf{I}_1] \boldsymbol{\omega}_{c_{\xi,N}}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1}}^T(\xi=1) \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1}}(\xi=1) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta m \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1+1}}^T(\xi=0) \mathbf{v}_{m_{\xi,N_1+1}}(\xi=0)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

C.2 Equação global de movimento, sem aplicação das restrições

Considere novamente da equação (3.35):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{Amort} + \mathbf{Q}_{Atr} + \mathbf{Q}_{Rub} + \mathbf{Q}_{Motor}$$

sendo T e U as expressões *globais* das energias cinética e potencial do sistema, obtidas nas seções 3.2.1.5 e 3.2.1.6.

Gerar a equação (3.41) a partir da equação (3.35) é equivalente a efetuar as derivações $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)$, $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}}$ e $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}}$ em cada elemento, e depois construir os termos que compõem a equação global por meio de superposições de matrizes.

Analicamente, o procedimento significa partir da equação (C.8), e posteriormente construir as matrizes globais pela superposição das matrizes elementares.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j} \right) - \frac{\partial T_j}{\partial \mathbf{u}_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \mathbf{u}_j} = \mathbf{Q}_{Amort_j} + \mathbf{Q}_{Atr_j} + \mathbf{Q}_{Rub_j} + \mathbf{Q}_{Motor_j} \tag{C.8}$$

Desmembrando-se a energia potencial U nas parcelas U_{el} e U_g , tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j} \right) - \frac{\partial T_j}{\partial \mathbf{u}_j} + \frac{\partial U_{el_j}}{\partial \mathbf{u}_j} + \frac{\partial U_{g_j}}{\partial \mathbf{u}_j} = \mathbf{Q}_{Amort_j} + \mathbf{Q}_{Atr_j} + \mathbf{Q}_{Rub_j} + \mathbf{Q}_{Motor_j} \tag{C.9}$$

As equações (C.10), (C.11) e (C.12) apresentam expressões das derivadas de T e de U , que compõem a equação (C.9).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j} \right) = \mathbf{M}_{1j} \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{M}_{2j}(\mathbf{u}_j) \ddot{\mathbf{u}}_j + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_j} \{ \mathbf{M}_{2j}(\mathbf{u}_j) \dot{\mathbf{u}}_j \} \dot{\mathbf{u}}_j \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial U_{el_j}}{\partial \mathbf{u}_j} = \mathbf{K}_j \mathbf{u}_j + \mathbf{F}_{U_j}(\mathbf{u}_j) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial U_{g_j}}{\partial \mathbf{u}_j} = -\mathbf{W}_{g_j} \quad (\text{C.12})$$

A matriz giroscópica $\mathbf{G}_j(\mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j)$ foi definida conforme a equação (C.13).

$$\mathbf{G}_j(\mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_j} \{ \mathbf{M}_{2j}(\mathbf{u}_j) \dot{\mathbf{u}}_j \} \dot{\mathbf{u}}_j - \frac{\partial T_j}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (\text{C.13})$$

As forças generalizadas da equação (C.9) foram definidas conforme as equações (C.14) a (C.17).

$$\mathbf{Q}_{Amort_j} = -\mathbf{C}_j \dot{\mathbf{u}}_j \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{Q}_{Atr_j} = -\mathbf{F}_{atr_j}(\mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j) \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{Q}_{Rub_j} = -\mathbf{F}_{rub_j}(\mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j) \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{Q}_{Motor_j} = \mathbf{B}_j \mathbf{U} \quad (\text{C.17})$$

Cabem algumas observações importantes:

1. As matrizes \mathbf{M}_1 e $\mathbf{M}_2(\mathbf{u})$ são matrizes de inércia. A matriz $\mathbf{M}_2(\mathbf{u})$ depende do vetor deslocamento \mathbf{u} , e foi definida de modo que:

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.18})$$

2. \mathbf{K} é a matriz de rigidez na condição não deformada do eixo, e $\mathbf{F}_U(\mathbf{u})$ é um vetor coluna que representa a parte não linear da energia de deformação do eixo. $\mathbf{F}_U(\mathbf{u})$ é tal que:

$$\mathbf{F}_U(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.19})$$

3. Como detalhado na seção 3.2.1.9, a matriz de rigidez de operação $\bar{\mathbf{K}}$ é a gerada em torno do ponto \mathbf{u}^* de equilíbrio do sistema, e é tal que:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_U}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \quad (\text{C.20})$$

4. As frequências naturais do sistema no ponto de operação foram estimadas a partir das matrizes de inércia e rigidez na condição de equilíbrio, ou seja, por meio das raízes do polinômio característico em λ :

$$\det(\bar{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{M}_1) = 0 \quad (\text{C.21})$$

5. O vetor coluna \mathbf{W}_g corresponde à força peso, que inclui tanto a parcela da força distribuída ao longo do eixo, quanto a força proveniente dos demais elementos móveis concentrados.

6. A matriz giroscópica $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ é um vetor coluna definido como o complemento dos termos de inércia em relação às derivadas da energia cinética na equação de Lagrange, cuja expressão é equivalente à equação (C.13), ou seja:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} - \{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2(\mathbf{u})\} \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{C.22})$$

Substituindo-se as equações (C.10) a (C.17) na (C.9), chegou-se à equação (C.23), que é a versão elementar da equação (3.41).

$$\mathbf{M}_{1j} \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_j \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j, \ddot{\mathbf{u}}_j) = \mathbf{B}_j \mathbf{U} \quad (\text{C.23})$$

C.3 Equações de movimento com restrições por multiplicadores de Lagrange

Para os índices $k = 1, \dots, N_g$, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{st}}{\partial \dot{u}_k} \right) - \frac{\partial L_{st}}{\partial u_k} = Q_k^{ext}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_k} + \frac{\partial U}{\partial u_k} + \bar{\lambda}_k = Q_k^{ext} \quad (\text{C.24})$$

sendo $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda}$.

Para os índices $k = N_g + l$, com $l = 1, \dots, r$, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{st}}{\partial \dot{\lambda}_l} \right) - \frac{\partial L_{st}}{\partial \lambda_l} = Q_{N_g+l}^{ext} \quad (\text{C.25})$$

Da equação (3.60), conclui-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{st}}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial L_{st}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{h} - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} \quad (\text{C.27})$$

Substituindo-se as equações C.26 e C.27 na equação C.25, concluiu-se que:

$$-(\mathbf{h} - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}) = \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\lambda}}^{ext} \quad (\text{C.28})$$

Como não há forças generalizadas associadas a $\boldsymbol{\lambda}$, então $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\lambda}}^{ext} = \mathbf{0}$. Conclui-se, por fim, que:

$$\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} - \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (\text{C.29})$$

Em resumo, as equações (C.24) e (C.29) constituem o modelo da dinâmica do sistema com restrições impostas via multiplicadores de Lagrange, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}_u^{ext} \\ \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} - \mathbf{h} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

o que, conforme resultados demonstrados na seção 3.2.1.8, é equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{B} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} &= \mathbf{h} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

A equação C.30 ainda não corresponde à formulação final, pois está definida em relação ao vetor nulo e não à configuração de equilíbrio.

Seja \mathbf{u}^* o vetor de dimensões $N_g \times 1$ que representa a configuração de equilíbrio, e \mathbf{u}_{r+2}^* a solução da equação (3.49). Logo:

$$\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\Sigma}_{r+2} \mathbf{u}_{r+2}^* \quad (\text{C.31})$$

Seja $\bar{\mathbf{u}}$ o vetor global de deslocamento em relação à configuração de equilíbrio, isto é:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \Leftrightarrow \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^* \quad (\text{C.32})$$

Substituindo-se a equação (C.32) na equação (C.30), e considerando que:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \mathbf{U} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{B} \mathbf{U}_0 \\ &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{W}_0\end{aligned}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{\Gamma} (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*) &= \mathbf{h}\end{aligned}\quad (\text{C.33})$$

Seja a função $\bar{\mathbf{f}}$ definida conforme a equação (C.34):

$$\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{K} \mathbf{u}^* + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{W}_0 \quad (\text{C.34})$$

Substituindo-se a equação (C.34) na equação (C.33), chega-se à equação (C.35):

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \\ \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{h} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}^*\end{aligned}\quad (\text{C.35})$$

Como era de se esperar, o vetor \mathbf{u}^* possui elementos não nulos apenas nas posições referentes ao deslocamento longitudinal u de cada nó, na malha de elementos finitos, com exceção do nó 1, ou seja:

$$\mathbf{u}^* = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ u_2^* \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ u_N^* \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ u_{N+1}^* \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

Assim, partindo-se da equação (3.62), verificou-se que $\mathbf{\Gamma} \mathbf{u}^* = 0$, chegando-se, enfim, à formulação final da dinâmica do sistema, apresentada na equação (C.36):

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \\ \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{h}\end{aligned}\quad (\text{C.36})$$

C.4 Equações das dinâmicas axial e de torção reescritas com a formulação de Newmark

Reescrevendo-se a equação (5.1) com a formulação de Newmark, obteve-se:

$$\mathbf{M}_\theta \ddot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} + \mathbf{C}_\theta \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} + \mathbf{K}_\theta \mathbf{u}_{\theta, n+1} + \mathbf{T}_{at, \theta}(\dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1}, y_2) = \mathbf{B}_\theta T_{x, U}(t_{n+1})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_\theta \left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{u}_{\theta, n+1} + \phi_2 (\mathbf{u}_{\theta, n}, \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n}, \ddot{\mathbf{u}}_{\theta, n}) \right\} + \\ & + \mathbf{C}_\theta \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{\theta, n+1} + \phi_1 (\mathbf{u}_{\theta, n}, \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n}, \ddot{\mathbf{u}}_{\theta, n}) \right\} + \mathbf{K}_\theta \mathbf{u}_{\theta, n+1} + \\ & + \mathbf{T}_{at, \theta} (\dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1}, y_{2, n+1}) - \mathbf{B}_\theta T_{x, U} (t_{n+1}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M}_\theta + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}_\theta + \mathbf{K}_\theta \right\} \mathbf{u}_{\theta, n+1} + \mathbf{T}_{at, \theta} (\dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1}, y_{2, n+1}) - \mathbf{B}_\theta T_{x, U} (t_{n+1}) + \\ & + \mathbf{M}_\theta \phi_{2, n} + \mathbf{C}_\theta \phi_{1, n} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_\theta \mathbf{u}_{\theta, n+1} + \mathbf{T}_{at, \theta} (\dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1}, y_{2, n+1}) - \mathbf{B}_\theta T_{x, U} (t_{n+1}) + \mathbf{M}_\theta \phi_{2, n} + \mathbf{C}_\theta \phi_{1, n} = \mathbf{0} \quad (\text{C.37})$$

com:

$$\hat{\mathbf{K}}_\theta = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M}_\theta + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}_\theta + \mathbf{K}_\theta$$

Os valores escolhidos para os parâmetros de Newmark foram $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$. Maiores detalhes sobre a escolha desses parâmetros encontram-se na seção J.3 em anexo.

O processo de integração consistiu em resolver, na variável $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_{\theta, n+1}$, a equação (C.38), gerada a partir da equação (C.37):

$$\boldsymbol{\Psi} (\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.38})$$

sendo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} (\boldsymbol{\eta}) &= \hat{\mathbf{K}}_\theta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{T}_{at, \theta} (\dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} (\boldsymbol{\eta}), y_{2, n+1}) - \mathbf{B}_\theta T_{x, U} (t_{n+1}) + \mathbf{M}_\theta \phi_{2, n} + \mathbf{C}_\theta \phi_{1, n} \\ \frac{d}{d \boldsymbol{\eta}^T} \boldsymbol{\Psi} (\boldsymbol{\eta}) &= \hat{\mathbf{K}}_\theta + \frac{d}{d \dot{\mathbf{u}}_\theta^T} \mathbf{T}_{at, \theta} (\dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} (\boldsymbol{\eta}), y_{2, n+1}) \frac{d}{d \boldsymbol{\eta}^T} \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} (\boldsymbol{\eta}) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \boldsymbol{\eta} + \phi_1 (\mathbf{u}_{\theta, n}, \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n}, \ddot{\mathbf{u}}_{\theta, n}) \\ \frac{d}{d \boldsymbol{\eta}^T} \dot{\mathbf{u}}_{\theta, n+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{I}_{d, 3} \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado à equação da dinâmica de torção, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{l,n+1} + \mathbf{C}_l \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{l,n+1} + \mathbf{K}_l \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} + \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_{l,n+1}) &= -K_f \mathbf{B}_l (\bar{u}_{1,n+1} - \bar{u}_{1,Ref}) \\ &+ \mathbf{M}_l \left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} + \phi_2(\bar{\mathbf{u}}_{l,n}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{l,n}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{l,n}) \right\} + \\ &+ \mathbf{C}_l \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} + \phi_1(\bar{\mathbf{u}}_{l,n}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{l,n}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{l,n}) \right\} + \mathbf{K}_l \mathbf{u}_{l,n+1} + \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_{l,n+1}) + \\ &+ K_f \mathbf{B}_l (\bar{u}_{1,n+1} - \bar{u}_{1,Ref}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Tendo presente que $\bar{u}_1 = \mathbf{I}_{d,3}^{(l_1)} \bar{\mathbf{u}}_l$, tem-se que:

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M}_l + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}_l + \mathbf{K}_l \right\} \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} + \\ &+ \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_{l,n+1}) + K_f \mathbf{B}_l \left(\mathbf{I}_{d,3}^{(l_1)} \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} - \bar{u}_{1,Ref} \right) + \mathbf{M}_l \phi_{2,n} + \mathbf{C}_l \phi_{1,n} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_l \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} + \mathbf{F}_{n,l}(\bar{\mathbf{u}}_{l,n+1}) + K_f \mathbf{B}_l \left(\mathbf{I}_{d,3}^{(l_1)} \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1} - \bar{u}_{1,Ref} \right) + \\ + \mathbf{M}_l \phi_{2,n} + \mathbf{C}_l \phi_{1,n} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

com:

$$\hat{\mathbf{K}}_l = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{M}_l + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}_l + \mathbf{K}_l$$

Sendo assim, da mesma forma como na dinâmica de torção, o processo de integração consistiu em resolver, na variável $\boldsymbol{\eta} = \bar{\mathbf{u}}_{l,n+1}$, a equação (C.39):

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \tag{C.39}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \hat{\mathbf{K}}_l \boldsymbol{\eta} + \mathbf{F}_{n,l}(\boldsymbol{\eta}) + K_f \mathbf{B}_l \left(\mathbf{I}_{d,3}^{(l_1)} \boldsymbol{\eta} - \bar{u}_{1,Ref} \right) + \mathbf{M}_l \phi_{2,n} + \mathbf{C}_l \phi_{1,n} \\ \frac{d}{d\boldsymbol{\eta}^T} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \hat{\mathbf{K}}_l + \frac{d}{d\boldsymbol{\eta}^T} \mathbf{F}_{n,l}(\boldsymbol{\eta}) + K_f \mathbf{B}_l \mathbf{I}_{d,3}^{(l_1)} \end{aligned}$$

C.5 Dinâmica interna e camada limite dinâmica para a trajetória desejada

Dada a trajetória desejada, obteve-se a evolução da dinâmica interna do sistema de torção bem como da camada limite dinâmica, no tempo por meio da integração das equações que descrevem as duas grandezas em conjunto, considerando-se inicialmente a ausência de torque de atrito resistivo.

$$\Psi_{\mu, \Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_d - \Gamma_{\mu} \mu_d - \Sigma_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ D_{\Phi}(\dot{\Phi}_{Bd}) \dot{\Phi}_{Bd} + K_{\phi, \theta} \Phi_{Bd} - K_{lc, \theta, d}(t, \mu_d) \end{bmatrix} \quad (\text{C.40})$$

Apenas para simplificar a notação, seja $\Gamma_{\Phi}(\dot{\Phi}_{Bd}) = D_{\Phi}(\dot{\Phi}_{Bd}) \dot{\Phi}_{Bd}$, e então a equação (C.40) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Psi_{\mu, \Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_d - \Gamma_{\mu} \mu_d - \Sigma_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ \Gamma_{\Phi}(\dot{\Phi}_{Bd}) + K_{\phi, \theta} \Phi_{Bd} - K_{lc, \theta, d}(t, \mu_d) \end{bmatrix} \quad (\text{C.41})$$

Seja $\mathbf{x} = [\mu_d \quad \Phi_{Bd}]^T$ o vetor total de integração conjunta, de modo que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{\mu, x} \mu_d + \mathbf{A}_{\phi, x} \Phi_{Bd} \quad (\text{C.42})$$

sendo $\mathbf{A}_{\mu, x} = \mathbf{I}_{d, 2}^{(c_1)}$ e $\mathbf{A}_{\phi, x} = \mathbf{I}_{d, 2}^{(c_2)}$.

Conclui-se da equação (C.42) que:

$$\mu_d = \mathbf{A}_{\mu, x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.43})$$

$$\Phi_{Bd} = \mathbf{A}_{\phi, x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.44})$$

Substituindo-se as equações (C.43) e (C.44) na equação (C.41), tem-se que:

$$\Psi_x(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mu, x}^T \dot{\mathbf{x}} - \Gamma_{\mu, x} \mathbf{x} - \Sigma_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ \Gamma_{\Phi, x}(\dot{\mathbf{x}}) + K_{\phi, \theta, x} \mathbf{x} - K_{lc, \theta, d, x}(t, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.45})$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu, x} &= \Gamma_{\mu} \mathbf{A}_{\mu, x}^T \\
\Gamma_{\Phi, x}(\dot{\mathbf{x}}) &= \Gamma_{\Phi}(\dot{\mathbf{x}}) \\
K_{\phi, \theta, x} &= K_{\phi, \theta} \mathbf{A}_{\phi, x}^T \\
K_{lc, \theta, d, x}(t, \mathbf{x}) &= K_{lc, \theta, d}(t, \mathbf{A}_{\mu, x}^T \mathbf{x})
\end{aligned}$$

Sendo assim, a integração consiste em resolver, na variável $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_{n+1}$, o sistema de equações (C.46):

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\Psi}_x(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) = \mathbf{0} \quad (\text{C.46})$$

sendo que:

$$\boldsymbol{\Psi}_x(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mu, x}^T \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) - \Gamma_{\mu, x} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mu} \mathbf{y}_{1, d}(t_{n+1}) \\ \Gamma_{\Phi, x}(\dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) + K_{\phi, \theta, x} \boldsymbol{\eta} - K_{lc, \theta, d, x}(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}$$

e a derivada total da função $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta})$ em relação a $\boldsymbol{\eta}$ dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}^T} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_x}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\substack{t = t_{n+1} \\ x = \boldsymbol{\eta} \\ \dot{x} = \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})}} + \\
&+ \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_x}{\partial \dot{\mathbf{x}}^T} \right|_{\substack{t = t_{n+1} \\ x = \boldsymbol{\eta} \\ \dot{x} = \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}^T}
\end{aligned}$$

No caso com torque de atrito resistivo, a equação (C.41) é reescrita conforme a equação (C.47):

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mu, \Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_d - \mathbf{A}_{\mu} \mathbf{A}_{\theta} \boldsymbol{\Psi}_{Dif, \theta}^{-1}(\mathbf{A}_d \mu_d + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1, d}(t), \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \\ \Gamma_{\Phi}(\dot{\Phi}_{Bd}) + K_{\phi, \theta} \Phi_{Bd} - K_{lc, \theta, d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{C.47})$$

Mas a formulação da equação (C.47) não é suficiente para a integração, já que se fazem necessárias as entradas $\mathbf{Y}_2 = [y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}, y_2^{(4)}]$, que por sua vez são obtidas como saídas das equações da dinâmica longitudinal, para cada instante de tempo.

Sendo assim, a formulação completa para integração na presença de torque resistivo deve incluir, nessa ordem: (i) a integração da equação (C.39), da equação da dinâmica longitudinal; (ii) o cálculo do vetor \mathbf{Y}_2 como saída; (iii) e, por fim, a integração da equação (C.47).

Esse algoritmo encontra-se implementado nas simulações envolvendo as equações da planta com a entrada de controle.

C.6 Equação completa com lei de controle, sem acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal

Na ausência de torque de atrito no contato, a equação (C.48) apresenta o sistema de equações a ser resolvido no processo de integração, em cada instante de tempo:

$$\Psi_{u, \mu, \Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{C}_m \dot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m - \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_c(t, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m, \mu_d, \Phi_{Bd}) \\ \dot{\mu}_d - \Gamma_\mu \mu_d - \Sigma_\mu \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ \Gamma_\Phi(\dot{\Phi}_{Bd}) + K_{\phi, \theta} \Phi_{Bd} - K_{lc, \theta, d}(t, \mu_d) \end{bmatrix} \quad (\text{C.48})$$

sendo que:

$$\bar{\mathbf{U}}_c(t, \mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m, \mu_d, \Phi_{Bd}) = \begin{bmatrix} T_{x,U}(t, \mathbf{Z}_\theta(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m), \mathbf{X}_\theta(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m), \mu_d, \Phi_{Bd}) \\ \bar{F}_{u,U}(t, \mathbf{Z}_l(\mathbf{u}_m, \dot{\mathbf{u}}_m)) \end{bmatrix} \quad (\text{C.49})$$

Seja $\mathbf{x} = [\mathbf{u}_m^T \ \mu_d \ \Phi_{Bd}]^T$ o vetor total de integração conjunta, de modo que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{u,x} \mathbf{u}_m + \mathbf{A}_{\mu,x} \mu_d + \mathbf{A}_{\phi,x} \Phi_{Bd} \quad (\text{C.50})$$

sendo $\mathbf{A}_{u,x} = [\mathbf{I}_{d,8}^{(c1)} \ \mathbf{I}_{d,8}^{(c2)} \ \cdots \ \mathbf{I}_{d,8}^{(c6)}]$, $\mathbf{A}_{\mu,x} = \mathbf{I}_{d,8}^{(c7)}$ e $\mathbf{A}_{\phi,x} = \mathbf{I}_{d,8}^{(c8)}$.

Conclui-se da equação (C.50) que:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.51})$$

$$\mu_d = \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.52})$$

$$\Phi_{Bd} = \mathbf{A}_{\phi,x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.53})$$

Substituindo-se as equações (C.51), (C.52) e (C.53) na equação (C.48), tem-se que:

$$\Psi_x(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m,x} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{m,x} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{m,x} \mathbf{x} - \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{A}_{\mu,x}^T \dot{\mathbf{x}} - \Gamma_{\mu,x} \mathbf{x} - \Sigma_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}) + K_{\phi,\theta,x} \mathbf{x} - K_{lc,\theta,d,x}(t, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.54})$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m,x} &= \mathbf{M}_m \mathbf{A}_{u,x}^T \\ \mathbf{C}_{m,x} &= \mathbf{C}_m \mathbf{A}_{u,x}^T \\ \mathbf{K}_{m,x} &= \mathbf{K}_m \mathbf{A}_{u,x}^T \\ \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \bar{\mathbf{U}}_c(t, \mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{u,x}^T \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{\phi,x}^T \mathbf{x}) \\ \Gamma_{\mu,x} &= \Gamma_{\mu} \mathbf{A}_{\mu,x}^T \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}) &= \Gamma_{\Phi}(\dot{\mathbf{x}}) \\ K_{\phi,\theta,x} &= K_{\phi,\theta} \mathbf{A}_{\phi,x}^T \\ K_{lc,\theta,d,x}(t, \mathbf{x}) &= K_{lc,\theta,d}(t, \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sendo assim, a integração consistiu em resolver, na variável $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_{n+1}$, o sistema de equações (C.55), em cada instante de tempo:

$$\Psi(\boldsymbol{\eta}) = \Psi_x(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) = \mathbf{0} \quad (\text{C.55})$$

sendo que:

$$\begin{aligned} &\Psi_x(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m,x} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{C}_{m,x} \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{K}_{m,x} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) \\ \mathbf{A}_{\mu,x}^T \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) - \Gamma_{\mu,x} \boldsymbol{\eta} - \Sigma_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t_{n+1}) \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) + K_{\phi,\theta,x} \boldsymbol{\eta} - K_{lc,\theta,d,x}(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e a derivada total da função $\Psi(\boldsymbol{\eta})$ em relação a $\boldsymbol{\eta}$ dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}^T} \Psi(\boldsymbol{\eta}) &= \left. \frac{\partial \Psi_x}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\substack{t = t_{n+1} \\ x = \boldsymbol{\eta} \\ \dot{x} = \dot{x}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) \\ \ddot{x} = \ddot{x}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})}} + \\
&+ \left. \frac{\partial \Psi_x}{\partial \dot{\mathbf{x}}^T} \right|_{\substack{t = t_{n+1} \\ x = \boldsymbol{\eta} \\ \dot{x} = \dot{x}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) \\ \ddot{x} = \ddot{x}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} + \\
&+ \left. \frac{\partial \Psi_x}{\partial \ddot{\mathbf{x}}^T} \right|_{\substack{t = t_{n+1} \\ x = \boldsymbol{\eta} \\ \dot{x} = \dot{x}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) \\ \ddot{x} = \ddot{x}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}^T}
\end{aligned}$$

C.7 Equação completa com lei de controle, com acoplamento das dinâmicas lateral e longitudinal

C.7.1 Sem atrito

Num primeiro momento, o torque de atrito é desconsiderado, tanto no modelo representativo da planta quanto no metamodelo.

A equação (C.56) apresenta o sistema de equações diferenciais a ser resolvido no processo de integração:

$$\begin{aligned}
\Psi_{u, \mu, \Phi}(t, \bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \mu_d, \dot{\mu}_d, \Phi_{Bd}, \dot{\Phi}_{Bd}) &= \tag{C.56} \\
= \left[\begin{array}{l} \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}) - \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c(t, \bar{\mathbf{u}}_m, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_m, \mu_d, \Phi_{Bd}) \\ \dot{\mu}_d - \Gamma_\mu \mu_d - \boldsymbol{\Sigma}_\mu \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ \Gamma_\Phi(\dot{\Phi}_{Bd}) + K_{\phi, \theta} \Phi_{Bd} - K_{lc, \theta, d}(t, \mu_d) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

sendo que $\bar{\mathbf{u}}_{ac} = [\bar{u}_1 \ \theta_1 \ \bar{u}_2 \ v_L \ w_L \ \theta_2 \ \bar{u}_3 \ \theta_3]^T$ é o vetor posição do modelo com acoplamento, desmembrado nos deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_m$, v_L e w_L conforme a equação (C.57):

$$\bar{\mathbf{u}}_{ac} = \mathbf{A}_{uu} \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{A}_{vu} v_L + \mathbf{A}_{wu} w_L \tag{C.57}$$

As matrizes \mathbf{A}_{uu} , \mathbf{A}_{vu} e \mathbf{A}_{wu} são constituídas por colunas selecionadas da matriz identidade $\mathbf{I}_{d,8}$, de modo que, para que a equação (C.57) seja satisfeita:

$$\mathbf{A}_{uu} = \left[\mathbf{I}_{d,8}^{(c_1)} \quad \mathbf{I}_{d,8}^{(c_2)} \quad \mathbf{I}_{d,8}^{(c_3)} \quad \mathbf{I}_{d,8}^{(c_6)} \quad \mathbf{I}_{d,8}^{(c_7)} \quad \mathbf{I}_{d,8}^{(c_8)} \right] \quad (\text{C.58})$$

$$\mathbf{A}_{vu} = \mathbf{I}_{d,8}^{(c_4)} \quad (\text{C.59})$$

$$\mathbf{A}_{wu} = \mathbf{I}_{d,8}^{(c_5)} \quad (\text{C.60})$$

Da equação (C.57), conclui-se que:

$$\bar{\mathbf{u}}_m = \mathbf{A}_{u,u}^T \bar{\mathbf{u}}_{ac} \quad (\text{C.61})$$

$$v_L = \mathbf{A}_{v,u}^T \bar{\mathbf{u}}_{ac} \quad (\text{C.62})$$

$$w_L = \mathbf{A}_{w,u}^T \bar{\mathbf{u}}_{ac} \quad (\text{C.63})$$

Seja $\mathbf{x} = \left[\bar{\mathbf{u}}_{ac}^T \quad \mu_d \quad \Phi_{Bd} \right]^T$ o vetor total de integração conjunta, de modo que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{u,x} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{A}_{\mu,x} \mu_d + \mathbf{A}_{\phi,x} \Phi_{Bd} \quad (\text{C.64})$$

sendo $\mathbf{A}_{u,x} = \left[\mathbf{I}_{d,10}^{(c_1)} \quad \mathbf{I}_{d,10}^{(c_2)} \quad \dots \quad \mathbf{I}_{d,10}^{(c_8)} \right]$, $\mathbf{A}_{\mu,x} = \mathbf{I}_{d,10}^{(c_9)}$ e $\mathbf{A}_{\phi,x} = \mathbf{I}_{d,10}^{(c_{10})}$.

Conclui-se da equação (C.64) que:

$$\bar{\mathbf{u}}_{ac} = \mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.65})$$

$$\mu_d = \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.66})$$

$$\Phi_{Bd} = \mathbf{A}_{\phi,x}^T \mathbf{x} \quad (\text{C.67})$$

Substituindo-se as equações (C.61), (C.65), (C.66) e (C.67) na equação (C.56), tem-se que:

$$\Psi_x(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \quad (\text{C.68})$$

$$= \left[\begin{array}{l} \mathbf{M}_{1,ac,x} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{ac,x} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{ac,x} \mathbf{x} + \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) - \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{A}_{\mu,x}^T \dot{\mathbf{x}} - \Gamma_{\mu,x} \mathbf{x} - \Sigma_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t) \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}) + K_{\phi,\theta,x} \mathbf{x} - K_{lc,\theta,d,x}(t, \mathbf{x}) \end{array} \right]$$

sendo que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1,ac,x} &= \mathbf{M}_{1,ac} \mathbf{A}_{u,x}^T \\
\mathbf{C}_{ac,x} &= \mathbf{C}_{ac} \mathbf{A}_{u,x}^T \\
\mathbf{K}_{ac,x} &= \mathbf{K}_{ac} \mathbf{A}_{u,x}^T \\
\mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{f}\left(\mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{u,x}^T \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}_{u,x}^T \ddot{\mathbf{x}}\right) \\
\bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \bar{\mathbf{U}}_c\left(t, \mathbf{A}_{u,u}^T \mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{u,u}^T \mathbf{A}_{u,x}^T \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{\phi,x}^T \mathbf{x}\right) \\
\mathbf{A}_{d,x} &= \mathbf{A}_d \mathbf{A}_{\mu,x}^T \\
\Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}) &= \Gamma_{\Phi}\left(\mathbf{A}_{\phi,x}^T \dot{\mathbf{x}}\right) \\
K_{\phi,\theta,x} &= K_{\phi,\theta} \mathbf{A}_{\phi,x}^T \\
K_{lc,\theta,d,x}(t, \mathbf{x}) &= K_{lc,\theta,d}\left(t, \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x}\right)
\end{aligned}$$

Partindo-se da equação (C.68), a integração consiste em resolver, na variável $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_{n+1}$, o sistema de equações a seguir, em cada instante de tempo:

$$\begin{aligned}
&\Psi_x\left(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})\right) = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,ac,x} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{C}_{ac,x} \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{K}_{ac,x} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_x\left(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})\right) - \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_{c,x}\left(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})\right) \\ \mathbf{A}_{\mu,x}^T \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) - \Gamma_{\mu,x} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mu} \mathbf{y}_{1,d}(t_{n+1}) \\ \Gamma_{\Phi,x}\left(\dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})\right) + K_{\phi,\theta,x} \boldsymbol{\eta} - K_{lc,\theta,d,x}(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

C.7.2 Com atrito

Na presença de torque de atrito no contato, a equação (C.69) apresenta o sistema de equações a ser resolvido no processo de integração, em cada instante de tempo. A única diferença entre as equações (C.56) e (C.69) são os termos \mathbf{Y}_2 e \mathbf{Z}_0 , devidos ao torque de atrito.

$$\begin{aligned}
&\Psi_{u,\mu,\Phi}\left(t, \bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \mu_d, \dot{\mu}_d, \Phi_{Bd}, \dot{\Phi}_{Bd}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0\right) = \tag{C.69} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,ac} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{C}_{ac} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \bar{\mathbf{u}}_{ac} + \mathbf{f}\left(\bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}\right) - \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_c\left(t, \bar{\mathbf{u}}_{ac}, \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{ac}, \mu_d, \Phi_{Bd}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0\right) \\ \dot{\mu}_d - \mathbf{A}_{\mu} \mathbf{A}_{\theta} \Psi_{Dif,\theta}^{-1}\left(\mathbf{A}_d \mu_d + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1,d}(t), \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0\right) \\ \Gamma_{\Phi}\left(\dot{\Phi}_{Bd}\right) + K_{\phi,\theta} \Phi_{Bd} - K_{lc,\theta,d}(t, \mu_d, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (C.69) com a entrada \mathbf{x} , definida na equação (C.64), tem-se que:

$$\begin{aligned} & \Psi_x(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) = \\ = & \left[\begin{array}{l} \mathbf{M}_{1,ac,x} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{ac,x} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{ac,x} \mathbf{x} + \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) - \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \\ \mathbf{A}_{\mu,x}^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_{\mu} \mathbf{A}_{\theta} \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{A}_{d,x} \mathbf{x} + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1,d}(t), \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}) + K_{\phi,\theta,x} \mathbf{x} - K_{lc,\theta,d,x}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \end{array} \right] \end{aligned}$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m,x} &= \mathbf{M}_m \mathbf{A}_{u,x}^T \\ \mathbf{C}_{m,x} &= \mathbf{C}_m \mathbf{A}_{u,x}^T \\ \mathbf{K}_{m,x} &= \mathbf{K}_m \mathbf{A}_{u,x}^T \\ \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{f}(\mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{u,x}^T \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}_{u,x}^T \ddot{\mathbf{x}}) \\ \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) &= \bar{\mathbf{U}}_c(t, \mathbf{A}_{u,u}^T \mathbf{A}_{u,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{u,u}^T \mathbf{A}_{u,x}^T \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{A}_{\phi,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \\ \mathbf{A}_{d,x} &= \mathbf{A}_d \mathbf{A}_{\mu,x}^T \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}) &= \Gamma_{\Phi}(\mathbf{A}_{\phi,x}^T \dot{\mathbf{x}}) \\ K_{\phi,\theta,x} &= K_{\phi,\theta} \mathbf{A}_{\phi,x}^T \\ K_{lc,\theta,d,x}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) &= K_{lc,\theta,d}(t, \mathbf{A}_{\mu,x}^T \mathbf{x}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_0) \end{aligned}$$

Da mesma forma que para o caso sem torque de atrito, a integração consistiu em resolver, na variável $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_{n+1}$, o sistema de equações a seguir, em cada instante de tempo:

$$\begin{aligned} & \Psi_x(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{Y}_{2,n+1}, \mathbf{Z}_0) = \\ = & \left[\begin{array}{l} \mathbf{M}_{1,ac,x} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{C}_{ac,x} \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{K}_{ac,x} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_x(\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) - \mathbf{B}_{ac} \bar{\mathbf{U}}_{c,x}(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{Y}_{2,n+1}, \mathbf{Z}_0) \\ \mathbf{A}_{\mu,x}^T \dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A}_{\mu} \mathbf{A}_{\theta} \Psi_{Dif,\theta}^{-1}(\mathbf{A}_{d,x} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_d \mathbf{y}_{1,d}(t_{n+1}), \mathbf{Y}_{2,n+1}, \mathbf{Z}_0) \\ \Gamma_{\Phi,x}(\dot{\mathbf{x}}_{n+1}(\boldsymbol{\eta})) + K_{\phi,\theta,x} \boldsymbol{\eta} - K_{lc,\theta,d,x}(t_{n+1}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{Y}_{2,n+1}, \mathbf{Z}_0) \end{array} \right] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

A formulação completa para integração do sistema com controlador, na presença de torque resistivo, deve incluir, nessa ordem: (i) a integração da equação (C.39), da equação da dinâmica longitudinal; (ii) o cálculo do vetor \mathbf{Y}_2 como saída da equação da dinâmica longitudinal; (iii) e, por fim, a integração do sistema equações completo.

ANEXO D – Identificação de modos de vibração especiais

D.1 Criação de um vetor artificial ou de referência

Dentre todos os modos de vibração do sistema, alguns são mais relevantes, por apresentarem deslocamentos mais significativos dos nós em que se encontram fixados os rotores, enquanto que, nos demais modos, as oscilações são essencialmente laterais e do eixo, com movimentos desprezíveis dos rotores, como ilustrado nas figuras (16), (17), (18) e (19).

Os modos mais relevantes encontram-se identificados na tabela (2), e são estes: primeiro e segundo modos de torção, primeiro e segundo modos de precessão, e primeiro e segundo modos longitudinais.

Na presente seção, foi descrita a metodologia adotada para a identificação de cada um desses modos, e das respectivas frequências, para um valor genérico de N de nós da malha.

A ideia basicamente consistiu na seguinte analogia: ante uma lista de vetores unitários no plano, para identificar qual vetor encontra-se o mais próximo possível de uma orientação predeterminada, basta definir um vetor unitário artificial com a orientação desejada e calcular o produto interno desse vetor com os outros vetores listados. O vetor listado que apresentar módulo máximo do produto interno com o vetor artificial é o que mais está orientado com o vetor artificial, sendo, por tanto, o vetor procurado.

A figura 72 ilustra uma lista de vetores unitários no plano, e a presença, em destaque, de um vetor artificial com a orientação desejada.

Por analogia, para identificar qual coluna da matriz de autovetores do sistema corresponde ao modo procurado, basta: (i) definir um vetor artificial minimamente representativo do vetor desejado; (ii) normalizar cada uma dos vetores referidos segundo uma mesma definição de produto interno; (iii) calcular o valor absoluto do produto interno de cada coluna da matriz de autovetores com o vetor artificial; (iv) e por fim selecionar a coluna com módulo máximo do produto interno.

Analiticamente, seja \mathbf{p}_j um autovetor genérico do sistema, e seja \mathbf{p}_{ref} o vetor artificial. Para normalização dos vetores, foram adotados o produto interno ponderado e a norma segundo a matriz de inércia do sistema, conforme as equações (D.1) e (D.2).

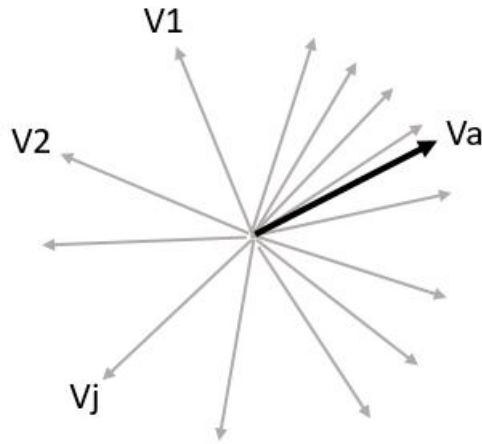


Figura 72 – Lista de vetores com um vetor artificial em destaque

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle_M = \mathbf{p}_i^T \mathbf{M}_r \mathbf{p}_j \quad (\text{D.1})$$

$$\|\mathbf{p}_j\| = \langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j \rangle_M^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.2})$$

Sejam $\hat{\mathbf{p}}_j$ e $\hat{\mathbf{p}}_{ref}$ um autovetor genérico e o vetor artificial normalizados, respectivamente, conforme as equações (D.3) e (D.4).

$$\hat{\mathbf{p}}_j = \frac{\mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_j\|} \quad (\text{D.3})$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{ref} = \frac{\mathbf{p}_{ref}}{\|\mathbf{p}_{ref}\|} \quad (\text{D.4})$$

O autovetor $\hat{\mathbf{p}}_{j_d}$ desejado será tal que:

$$\left| \langle \hat{\mathbf{p}}_{j_d}, \hat{\mathbf{p}}_{ref} \rangle_M \right| = \max \left\{ \left| \langle \hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{p}}_{ref} \rangle_M \right| \right\}_{j=1, \dots, N_g-r}$$

D.2 Modelo em parâmetros concentrados

Para construção dos vetores artificiais referentes aos modos de torção e longitudinais, recorreu-se ao modelo em parâmetros concentrados de três rotores conectados em série por duas molas, como ilustrado na figura (73), sendo que cada mola foi dotada de constantes de rigidez de torção e longitudinal.

No modelo da figura (73), os rotores principal e intermediário mantiveram os mesmos parâmetros de inércia do sistema. Quanto ao rotor superior, foi assumido com mesma massa da plataforma móvel e mesmo momento polar de inércia do rotor interno ao servo-motor,

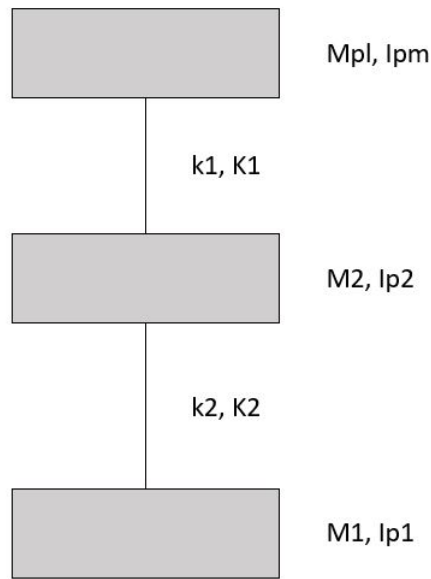


Figura 73 – Modelo para construção de modos de torção e longitudinais

corrigido na saída pela redução do motor e somado aos momentos polares de inércia de outros de componentes na saída do redutor. Os parâmetros k_1 e k_2 corresponderam às constantes de rigidez longitudinal dos trechos entre o rotor superior e intermediário e entre o rotor intermediário e o rotor principal, respectivamente. Analogamente a k_1 e k_2 , as constantes K_1 e K_2 se referiram a constantes de rigidez de torção. As constantes k_1 , k_2 , K_1 e K_2 foram estimadas conforme a equação (D.5).

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{EA}{L_1}, & k_2 &= \frac{EA}{L-L_1} \\ K_1 &= \frac{GJ}{L_1}, & K_2 &= \frac{GJ_p}{L-L_1} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

sendo E e G os módulos de Young e de cisalhamento do aço, respectivamente; L o comprimento do eixo principal; L_1 a distância entre o acoplamento na saída do servo-motor e o rotor intermediário; A e J_p a área e o momento polar da seção transversal do eixo principal, respectivamente.

D.2.1 Autovetores da dinâmica de torção

Aplicando-se as equações de Newton-Euler ao sistema da figura (73), chegou-se à seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{p3} \ddot{\theta}_1 &= -K_1 (\theta_1 - \theta_2) \\ \bar{I}_{p2} \ddot{\theta}_2 &= K_1 (\theta_1 - \theta_2) - K_2 (\theta_2 - \theta_3) \\ I_{p1} \ddot{\theta}_3 &= K_2 (\theta_2 - \theta_3) \end{aligned}$$

que matricialmente escreveu-se conforme a equação (D.6).

$$\mathbf{M}_{pc} \ddot{\mathbf{u}}_{pc} + \mathbf{K}_{pc} \mathbf{u}_{pc} = \mathbf{0} \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{u}_{pc} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{pc} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{p3} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{p1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{pc} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Com as matrizes \mathbf{M}_{pc} e \mathbf{K}_{pc} da equação (D.6), calculou-se o polinômio característico, conforme a equação (D.7).

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(\mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{K}_{pc} - \lambda \mathbf{I}_d) \\ &= -\lambda(\lambda^2 - b_{pc}\lambda + c_{pc}) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} b_{pc} &= \frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}}, \quad c_{pc} = \frac{K_1 K_2}{I_{123}} \\ I_{12} &= \left(\frac{1}{I_{p1}} + \frac{1}{\bar{I}_{p2}} \right)^{-1} \\ I_{23} &= \left(\frac{1}{\bar{I}_{p2}} + \frac{1}{\bar{I}_{p3}} \right)^{-1} \\ I_{123} &= \left(\frac{1}{\bar{I}_{p3} I_{p1}} + \frac{1}{\bar{I}_{p2} I_{p1}} + \frac{1}{\bar{I}_{p3} \bar{I}_{p2}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

As raízes da equação (D.7) foram:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} (b_{pc} - \sqrt{\Delta}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} (b_{pc} + \sqrt{\Delta}) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\Delta = b_{pc}^2 - 4 c_{pc} = \left(\frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}} \right)^2 - 4 \frac{K_1 K_2}{I_{123}} \equiv \left(\frac{K_2}{I_{12}} - \frac{K_1}{I_{23}} \right)^2 + 4 \frac{K_1 K_2}{I_{123}} > 0$$

Uma observação importante a ser destacada é que λ_1 e λ_2 são positivos. Com efeito, λ_2 é maior que zero, como pode ser verificado diretamente da equação (D.8). Com relação a λ_1 , tem-se que:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2} (b_{pc} - \sqrt{\Delta}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}} - \sqrt{\left(\frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}} \right)^2 - 4 \frac{K_1 K_2}{I_{123}}} \right\} \\
&> \frac{1}{2} \left\{ \frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}} - \sqrt{\left(\frac{K_2}{I_{12}} + \frac{K_1}{I_{23}} \right)^2} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para obtenção dos modos de torção $\mathbf{p}_{1,pc}$ e $\mathbf{p}_{2,pc}$, referente aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente, foi necessário resolver os seguintes sistemas de equações:

$$(\mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{K}_{pc} - \lambda_1 \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_{1,pc} = \mathbf{0} \quad (\text{D.9})$$

$$(\mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{K}_{pc} - \lambda_2 \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_{2,pc} = \mathbf{0} \quad (\text{D.10})$$

Seja d_C um polinômio definido conforme a equação (D.11).

$$d_C(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{K_1}{\bar{I}_{p_3}} + \frac{K_1 + K_2}{\bar{I}_{p_2}} \right) \lambda + \frac{K_1 K_2}{\bar{I}_{p_2} \bar{I}_{p_3}} \quad (\text{D.11})$$

Após uma sequência de operações entre linhas das equações (D.9) e (D.10), chegou-se aos seguintes sistemas, equivalentes aos sistemas que lhes deram origem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{K_2}{\bar{I}_{p_2}} \frac{K_1}{\bar{I}_{p_3}} \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ 0 & 1 & -\frac{K_2}{\bar{I}_{p_2}} \left(\frac{K_1}{\bar{I}_{p_3}} - \lambda_1 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ 0 & 0 & \frac{p_C(\lambda_1)}{d_C(\lambda_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{K_2}{\bar{I}_{p_2}} \frac{K_1}{\bar{I}_{p_3}} \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ 0 & 1 & -\frac{K_2}{\bar{I}_{p_2}} \left(\frac{K_1}{\bar{I}_{p_3}} - \lambda_2 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ 0 & 0 & \frac{p_C(\lambda_2)}{d_C(\lambda_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Como $p_C(\lambda_1) = 0$ e $p_C(\lambda_2) = 0$, e λ_1 e λ_2 não são raízes do polinômio $d_C(\lambda)$, as equações (D.12) e (D.13) se reduziram a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ 0 & 1 & -\frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_1 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ 0 & 1 & -\frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_2 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Das equações (D.14) e (D.15), concluiu-se que os sistemas das equações (D.9) e (D.10) possuíam infinitas soluções, de modo que, para se obter os autovetores $\mathbf{p}_{1,pc}$ e $\mathbf{p}_{2,pc}$, bastou escolher as soluções das equações (D.16) e (D.17), para $p_{31} = p_{32} = 1$:

$$\mathbf{p}_{1,pc} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = p_{31} \begin{bmatrix} \frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ \frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_1 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ \frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_1 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_1)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbf{p}_{2,pc} = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = p_{32} \begin{bmatrix} \frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ \frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_2 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ \frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_2 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_2)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

O modo de corpo rígido $\mathbf{p}_{0,pc}$, associado ao autovalor $\lambda_0 = 0$, foi obtido, analogamente aos vetores $\mathbf{p}_{1,pc}$ e $\mathbf{p}_{2,pc}$, a partir da equação (D.18),

$$\left(\mathbf{M}_{pc}^{-1} \mathbf{K}_{pc} - \lambda_0 \mathbf{I}_d \right) \mathbf{p}_{0,pc} = \mathbf{0} \quad (\text{D.18})$$

que por sua vez é equivalente ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{K_2}{I_{p2}} \frac{K_1}{I_{p3}} \frac{1}{d_C(\lambda_0)} \\ 0 & 1 & -\frac{K_2}{I_{p2}} \left(\frac{K_1}{I_{p3}} - \lambda_0 \right) \frac{1}{d_C(\lambda_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{20} \\ p_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{20} \\ p_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

cuja solução é, para $p_{30} = 1$:

$$\mathbf{p}_{0,pc} = \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{20} \\ p_{30} \end{bmatrix} = p_{30} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

D.2.2 Autovetores da dinâmica longitudinal

Analogamente à metodologia adotada na dinâmica de torção, os autovetores \mathbf{q}_0 , \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 referentes à dinâmica longitudinal foram obtidos conforme as equações:

$$\mathbf{q}_{0,pc} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.21})$$

$$\mathbf{q}_{1,pc} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{M_2} \frac{k_1}{M_{pl}} \frac{1}{d_C^{(l)}(\sigma_1)} \\ \frac{k_2}{M_2} \left(\frac{k_1}{M_{pl}} - \sigma_1 \right) \frac{1}{d_C^{(l)}(\sigma_1)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbf{q}_{2,pc} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{M_2} \frac{k_1}{M_{pl}} \frac{1}{d_C^{(l)}(\sigma_2)} \\ \frac{k_2}{M_2} \left(\frac{k_1}{M_{pl}} - \sigma_2 \right) \frac{1}{d_C^{(l)}(\sigma_2)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

sendo σ_1 e σ_2 raízes da equação (D.24),

$$\begin{aligned} p_C^{(l)}(\sigma) &= \det(\mathbf{M}_{l,pc}^{-1} \mathbf{K}_{l,pc} - \sigma \mathbf{I}_d) \\ &= -\sigma(\sigma^2 - b_{l,pc}\sigma + c_{l,pc}) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} b_{l,pc} &= \frac{k_2}{M_{12}} + \frac{k_1}{M_{23}}, \quad c_{l,pc} = \frac{k_1 k_2}{M_{123}} \\ M_{12} &= \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^{-1} \\ M_{23} &= \left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_{pl}} \right)^{-1} \\ M_{123} &= \left(\frac{1}{M_{pl} M_1} + \frac{1}{M_2 M_{pl}} + \frac{1}{M_{pl} M_2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

conforme a equação (D.25).

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (b_{l,pc} - \sqrt{\Delta_l}) \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} (b_{l,pc} + \sqrt{\Delta_l}) \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$\Delta_l = b_{l,pc}^2 - 4 c_{l,pc} = \left(\frac{k_2}{M_{12}} + \frac{k_1}{M_{23}} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{M_{123}} \equiv \left(\frac{k_2}{M_{12}} - \frac{k_1}{M_{23}} \right)^2 + 4 \frac{k_1 k_2}{M_{123}} > 0$$

O polinômio $d_C^{(l)}(\sigma)$ foi definido conforme a equação (D.26).

$$d_C^{(l)}(\sigma) = \sigma^2 - \left(\frac{k_1}{M_{pl}} + \frac{k_1 + k_2}{M_2} \right) \sigma + \frac{k_1 k_2}{M_2 M_{pl}} \quad (\text{D.26})$$

D.3 Construção dos vetores artificiais

D.3.1 Vetores artificiais para identificação dos modos de torção

Os vetores artificiais definidos para a identificação do 1º e do 2º modos de torção, e do modo de corpo rígido, foram construídos a partir dos autovetores $\mathbf{p}_{0,pc}$, $\mathbf{p}_{1,pc}$ e $\mathbf{p}_{2,pc}$, definidos nas equações (D.16), (D.17) e (D.20).

Seja $\bar{\mathbf{u}}_{r,\theta_j} = \sum_r^T \bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ o vetor artificial genérico, com dimensão $(N_g - r) \times 1$, referente ao 1º e ao 2º modos e ao modo de corpo rígido de torção, sendo $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ o vetor deslocamento completo, com dimensão $N_g \times 1$, ou seja, sem aplicação das restrições intrínsecas.

Os vetores $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ foram construídos de modo que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6) &= \mathbf{p}_{j,pc}(1) \\ \bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6(N_1 + 1)) &= \mathbf{p}_{j,pc}(2) \\ \bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6(N + 1)) &= \mathbf{p}_{j,pc}(3) \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

para $j = 0, 1, 2$.

As posições $i = 6$, $i = 6(N_1 + 1)$ e $i = 6(N + 1)$ no vetor deslocamento $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ correspondem às variáveis θ_{x_1} , $\theta_{x_{N_1+1}}$ e $\theta_{x_{N+1}}$, referentes aos deslocamento em θ_x do acoplamento, do rotor intermediário e do rotor principal, respectivamente. Os valores de θ_x nos nós com índices $n = 2, \dots, N_1$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6)$ e $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6(N_1 + 1))$; e os valores de θ_x nos nós com índices $n = N_1 + 2, \dots, N$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6(N_1 + 1))$ e $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}(6(N + 1))$. Os demais elementos do vetor $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ foram definidos como nulos.

Uma vez definido o vetor $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$, e por consequência o vetor artificial genérico $\bar{\mathbf{u}}_{r,\theta_j} = \sum_r^T \bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$, foram calculados os vetores artificiais normalizados, de acordo com a equação (D.28), conforme a norma definida na equação (D.3):

$$\hat{\mathbf{u}}_{r,\theta_j} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{r,\theta_j}}{\|\bar{\mathbf{u}}_{r,\theta_j}\|} \quad (\text{D.28})$$

A figura (74) ilustra os três vetores artificiais normalizados, referentes a cada modo de torção.

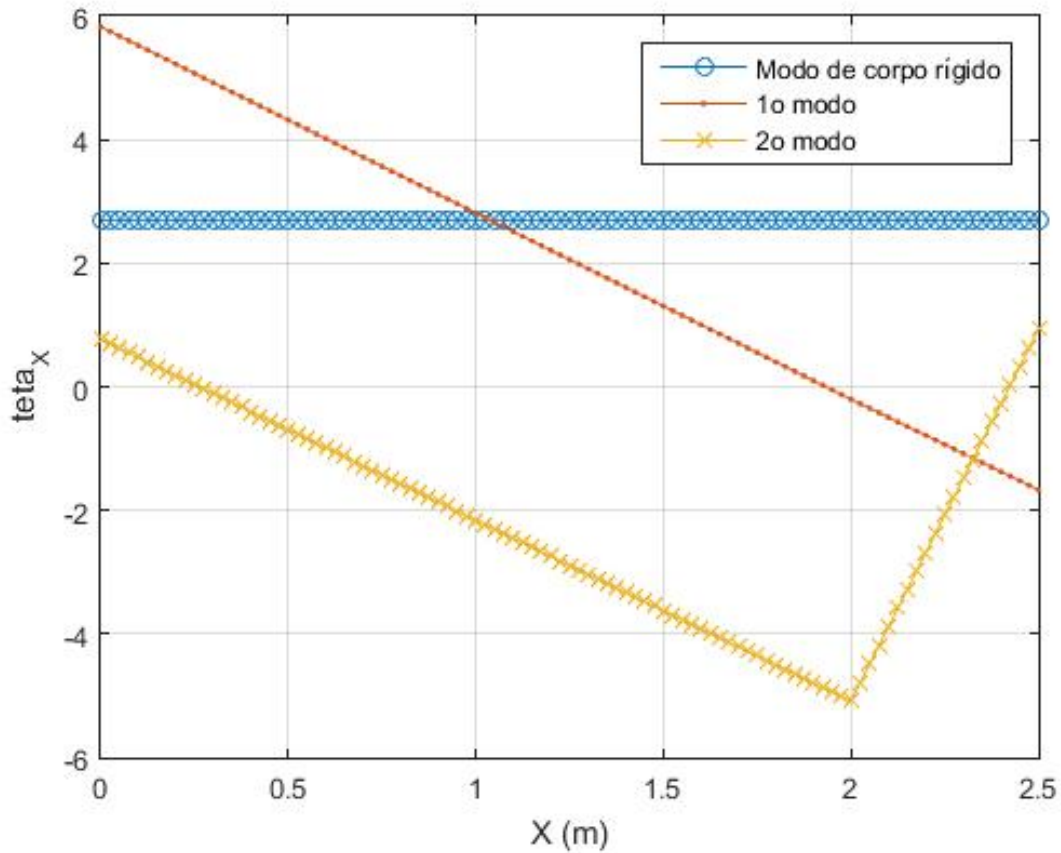


Figura 74 – Vetores artificiais e normalizados dos modos de torção

D.3.2 Vetores artificiais para identificação dos modos longitudinais

De forma análoga aos modos de torção, seja $\bar{\mathbf{u}}_{r,u_j} = \Sigma_r^T \bar{\mathbf{u}}_{u_j}$ o vetor artificial genérico, com dimensão $(N_g - r) \times 1$, referente ao 1º e ao 2º modos e ao modo de corpo rígido longitudinais, sendo $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}$ o vetor deslocamento completo, com dimensão $N_g \times 1$, ou seja, sem aplicação das restrições intrínsecas.

Os vetores $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}$ foram construídos de modo que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{u_j}(1) &= \mathbf{q}_{j,pc}(1) \\ \bar{\mathbf{u}}_{u_j}(6(N_1 + 1) - 5) &= \mathbf{q}_{j,pc}(2) \\ \bar{\mathbf{u}}_{u_j}(6(N + 1) - 5) &= \mathbf{q}_{j,pc}(3) \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

para $j = 0, 1, 2$.

As posições $i = 1$, $i = 6(N_1 + 1) - 5$ e $i = 6(N + 1) - 5$ no vetor deslocamento $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}$ correspondem às variáveis u_1 , u_{N_1+1} e u_{N+1} , referentes aos deslocamento em u do acoplamento, do rotor intermediário e do rotor principal, respectivamente. Os valores de u nos nós com índices $n = 2, \dots, N_1$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}(1)$ e $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}(6(N_1 + 1) - 5)$; e os valores de u nos nós com

índices $n = N_1 + 2, \dots, N$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}$ ($6(N_1 + 1) - 5$) e $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ ($6(N + 1) - 5$). Os demais elementos do vetor $\bar{\mathbf{u}}_{\theta_j}$ foram definidos como nulos.

Uma vez definido o vetor $\bar{\mathbf{u}}_{u_j}$, e por consequência o vetor artificial genérico $\bar{\mathbf{u}}_{r,u_j} = \Sigma_r^T \bar{\mathbf{u}}_{u_j}$, foram calculados os vetores artificiais normalizados, de acordo com a equação (D.30), conforme a norma definida na equação (D.3).

$$\hat{\mathbf{u}}_{r,u_j} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{r,u_j}}{\|\bar{\mathbf{u}}_{r,u_j}\|} \quad (\text{D.30})$$

A figura (75) ilustra os três vetores artificiais normalizados, referentes a cada modo longitudinal.

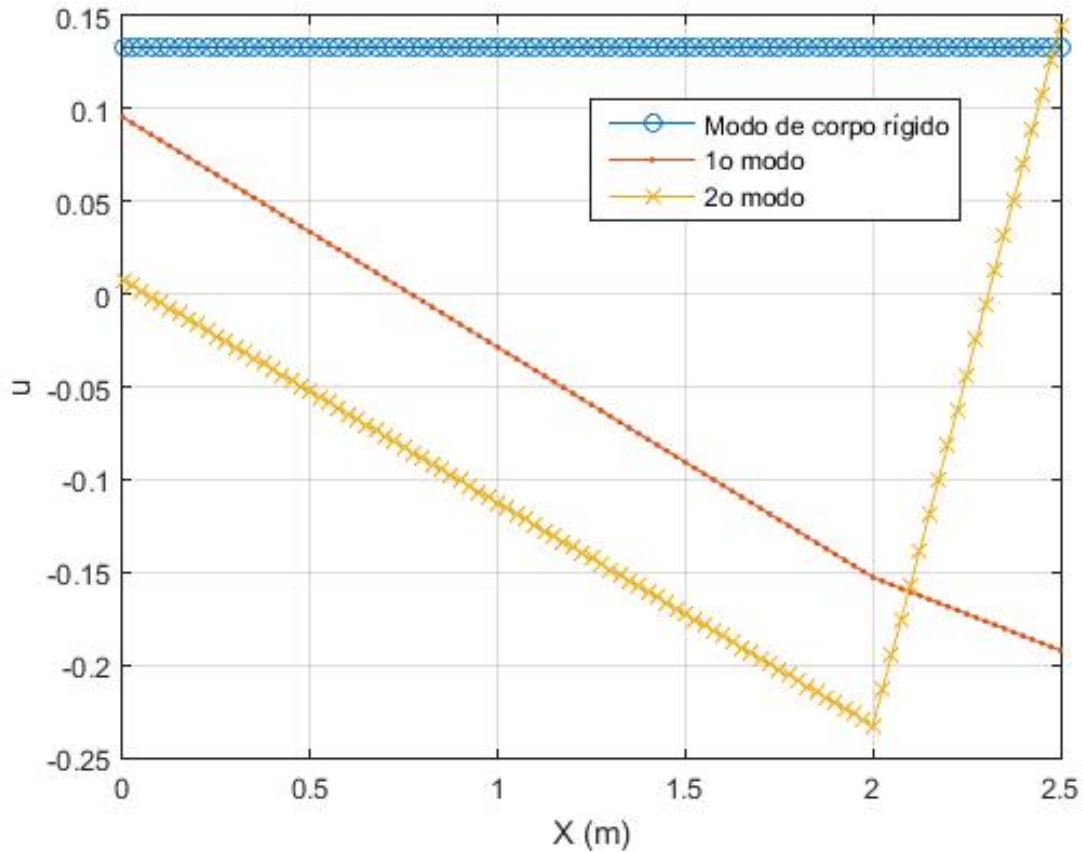


Figura 75 – Vetores artificiais e normalizados dos modos longitudinais

D.3.3 Vetores artificiais para identificação dos modos de precessão

O vetor artificial para identificação dos modos de precessão foram mais simples de serem implementados, já que as extremidades do eixo principal não têm deslocamento lateral, com conta das restrições impostas.

Para a identificação do modo de precessão na direção v , foi construído o vetor deslocamento $\bar{\mathbf{u}}_v$, de dimensões $N_g \times 1$, conforme a equação (D.31).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_v(2) &= 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_v(6(N_1 + 1) - 4) &= 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_v(6(N + 1) - 4) &= 0\end{aligned}\tag{D.31}$$

As posições $i = 2$, $i = 6(N_1 + 1) - 4$ e $i = 6(N + 1) - 4$ no vetor deslocamento $\bar{\mathbf{u}}_v$ correspondem às variáveis v_1 , v_{N_1+1} e v_{N+1} , referentes aos deslocamento em v do acoplamento, do rotor intermediário e do rotor principal, respectivamente. Os valores de v nos nós com índices $n = 2, \dots, N_1$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_v(1)$ e $\bar{\mathbf{u}}_v(6(N_1 + 1) - 4)$; e os valores de v nos nós com índices $n = N_1 + 2, \dots, N$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_v(6(N_1 + 1) - 4)$ e $\bar{\mathbf{u}}_v(6(N + 1) - 4)$. Os demais elementos do vetor $\bar{\mathbf{u}}_v$ foram definidos como nulos.

Uma vez definido o vetor $\bar{\mathbf{u}}_v$, e por consequência o vetor artificial genérico $\bar{\mathbf{u}}_{r,v} = \sum_r^T \bar{\mathbf{u}}_v$, foram calculados os vetores artificiais normalizados, de acordo com a equação (D.32), conforme a norma definida na equação (D.3).

$$\hat{\mathbf{u}}_{r,v} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{r,v}}{\|\bar{\mathbf{u}}_{r,v}\|}\tag{D.32}$$

Da mesma forma, para a identificação do modo de precessão na direção w , foi construído o vetor deslocamento $\bar{\mathbf{u}}_w$ conforme a equação (D.33).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_w(4) &= 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_w(6(N_1 + 1) - 2) &= 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_w(6(N + 1) - 2) &= 0\end{aligned}\tag{D.33}$$

As posições $i = 4$, $i = 6(N_1 + 1) - 2$ e $i = 6(N + 1) - 2$ no vetor deslocamento $\bar{\mathbf{u}}_w$ correspondem às variáveis w_1 , w_{N_1+1} e w_{N+1} , referentes aos deslocamento em w do acoplamento, do rotor intermediário e do rotor principal, respectivamente. Os valores de w nos nós com índices $n = 2, \dots, N_1$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_w(4)$ e $\bar{\mathbf{u}}_w(6(N_1 + 1) - 2)$; e os valores de w nos nós com índices $n = N_1 + 2, \dots, N$ foram definidos por meio de uma interpolação linear entre os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}_w(6(N_1 + 1) - 2)$ e $\bar{\mathbf{u}}_w(6(N + 1) - 2)$. Os demais elementos do vetor $\bar{\mathbf{u}}_w$ foram definidos como nulos.

Uma vez definido o vetor $\bar{\mathbf{u}}_w$, e por consequência o vetor artificial genérico $\bar{\mathbf{u}}_{r,w} = \sum_r^T \bar{\mathbf{u}}_w$, foram calculados os vetores artificiais normalizados, de acordo com a equação (D.34), conforme a norma definida na equação (D.3).

$$\hat{\mathbf{u}}_{r,w} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{r,w}}{\|\bar{\mathbf{u}}_{r,w}\|} \quad (\text{D.34})$$

A figura (76) ilustra do vetores artificiais normalizados $\hat{\mathbf{u}}_{r,v}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{r,w}$.

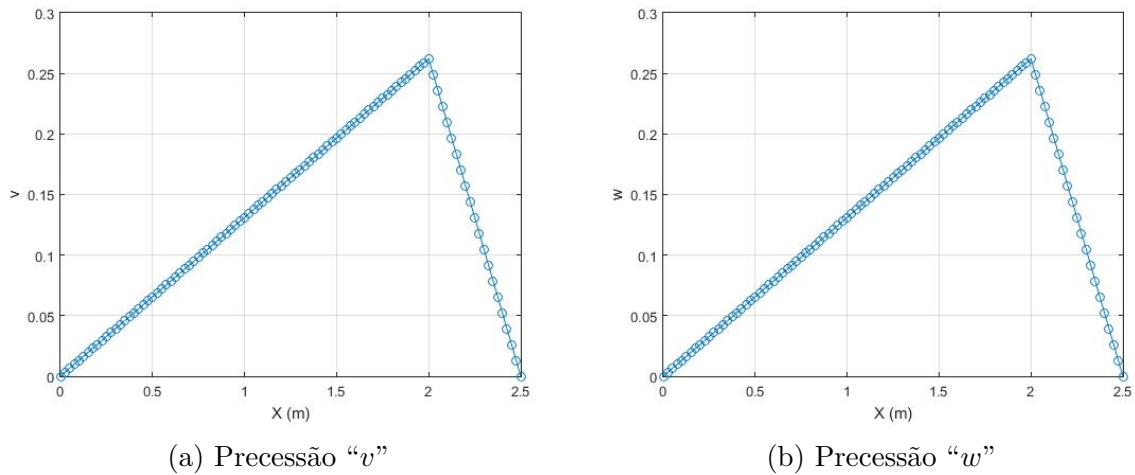


Figura 76 – Vetores artificiais para identificação dos modos de precessão

D.3.4 Alguns resultados

A tabela (7) apresenta o índice de coluna da matriz de autovetores referente a cada modo desejado, bem como o grau de alinhamento entre o vetor indicado e o respectivo vetor de referência, considerando diferentes números N de nós da malha.

O grau de alinhamento de um determinado modo com o respectivo vetor artificial foi designado por MAC_{modo} , e definido como o módulo do produto interno entre os vetores normalizados representativos do referido modo e do vetor artificial, conforme a equação (D.35).

$$MAC_{\mathbf{p}} = \left| \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}_{ref} \rangle_M \right| \quad (\text{D.35})$$

Na tabela (7), os termos θ_0 , θ_1 e θ_2 se referem ao modo de corpo rígido, ao 1º e ao 2º modos de torção, respectivamente; os termos u_0 , u_1 e u_2 se referem ao modo de corpo rígido, ao 1º e ao 2º modos longitudinais; e v e w se referem aos modos de precessão.

Tabela 7 – Índices dos modos de torção, longitudinais e de precessão na matriz de autovetores

N	j_{θ_0}	MAC_{θ_0}	j_{θ_1}	MAC_{θ_1}	j_{θ_2}	MAC_{θ_2}	j_{u_0}	MAC_{u_0}	j_{u_1}	MAC_{u_1}	j_{u_2}	MAC_{u_2}	j_v	MAC_v	j_w	MAC_w
3	2	1.00	3	0.99	6	0.97	1	1.00	11	0.99	14	0.94	4	1.00	5	1.00
5	1	1.00	3	1.00	6	0.97	2	1.00	13	0.99	20	0.94	5	1.00	4	1.00
10	1	1.00	3	1.00	6	0.97	2	1.00	13	0.99	24	0.94	5	0.96	4	0.96
20	1	1.00	3	1.00	6	0.97	2	1.00	13	0.99	24	0.94	4	0.91	5	0.91
50	2	0.90	3	1.00	6	0.97	1	0.90	13	0.99	24	0.94	4	1.00	5	1.00
100	2	0.99	3	1.00	6	0.97	1	0.99	13	0.99	24	0.94	4	0.92	5	0.92
200	2	1.00	3	1.00	6	0.97	1	1.00	13	0.99	24	0.94	4	0.86	5	0.86
300	2	1.00	3	1.00	6	0.97	1	1.00	13	0.99	24	0.94	5	0.96	4	0.96
500	2	1.00	3	1.00	6	0.97	1	1.00	13	0.99	24	0.94	4	0.97	5	0.97
750	2	1.00	3	1.00	6	0.97	1	1.00	13	0.99	24	0.94	4	0.98	5	0.98

ANEXO E – Matriz de amortecimento estrutural

A matriz de amortecimento estrutural foi definida conforme a equação (3.72), a saber:

$$\mathbf{C}_{estr} = \alpha \mathbf{M}_{EF} + \beta \mathbf{K}_{EF} \quad (\text{E.1})$$

Pré-multiplicando-se a equação (E.1) por $\mathbf{\Sigma}_r^T$ e pós-multiplicando-se a equação resultante por $\mathbf{\Sigma}_r$, obteve-se a equação (E.2), sendo $\mathbf{M}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{M}_{EF} \mathbf{\Sigma}_r$, $\mathbf{K}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{K}_{EF} \mathbf{\Sigma}_r$ e $\mathbf{C}_r = \mathbf{\Sigma}_r^T \mathbf{C}_{estr} \mathbf{\Sigma}_r$ as matrizes de inércia, rigidez e amortecimento do sistema, respectivamente, após aplicação das restrições intrínsecas.

$$\mathbf{C}_r = \alpha \mathbf{M}_r + \beta \mathbf{K}_r \quad (\text{E.2})$$

Seja \mathbf{P}_k a matriz de autovetores do sistema, normalizados segundo \mathbf{M}_r . Sendo assim, conforme (INMAN, 2017), tem-se que:

$$\mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_r \mathbf{P}_k = \mathbf{I}_d \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_r \mathbf{P}_k = \text{diag}([\omega_i^2]) \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{P}_k^T \mathbf{C}_r \mathbf{P}_k = \text{diag}([2 \xi_i \omega_i]) \quad (\text{E.5})$$

sendo ω_i^2 , $i = 1, 2, \dots, N_g - r$ os autovalores do sistema, e \mathbf{I}_d a matriz identidade com mesma dimensão de \mathbf{M}_r .

Pré-multiplicando-se a equação (E.2) por \mathbf{P}_k^T , e pós-multiplicando-se a equação resultante por \mathbf{P}_k , obteve-se a equação (E.6).

$$\mathbf{P}_k^T \mathbf{C}_r \mathbf{P}_k = \alpha \mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_r \mathbf{P}_k + \beta \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_r \mathbf{P}_k \quad (\text{E.6})$$

Substituindo-se as equações (E.3), (E.4) e (E.5) na equação (E.6), obteve-se a equação (E.7).

$$\text{diag}([2 \xi_i \omega_i]) = \alpha \mathbf{I}_d + \beta \text{diag}([\omega_i^2]) \quad (\text{E.7})$$

Da equação (E.7), concluiu-se que:

$$2 \xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \Leftrightarrow \xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (\text{E.8})$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N_g - r$.

Partindo-se da equação (E.8), o objetivo principal a ser alcançado foi obter valores positivos de α e β de modo que a desigualdade da equação (E.9) fosse satisfeita, para todo $i = 1, 2, \dots, N_g - r$, e para valores predeterminados de ξ_{min} e ξ_{max} .

$$\xi_{min} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \leq \xi_{max} \quad (\text{E.9})$$

Seja $f : R \rightarrow R$ uma função de ω , definida conforme a equação (E.10), que corresponde a uma versão contínua da equação (E.8).

$$f(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega} + \beta \omega \right) \quad (\text{E.10})$$

Calculando-se a derivada de f em relação a ω e igualando a zero, obteve-se que:

$$\left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega=\omega^*} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\alpha}{\omega^{*2}} + \beta \right) = 0 \Rightarrow \omega^* = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (\text{E.11})$$

Da equação (E.11), concluiu-se que $\omega^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ é um ponto ótimo da função f , para $\omega^* > 0$.

Calculando-se a segunda derivada de f , tem-se que:

$$\frac{d^2 f}{d\omega^2} = \frac{\alpha}{\omega^3} \quad (\text{E.12})$$

Da equação (E.12), concluiu-se que $\frac{d^2 f}{d\omega^2}$ é maior que zero para $\omega > 0$, e que por consequência, $\omega^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ é um ponto de mínimo.

O valor mínimo da função f foi obtido como segue:

$$\begin{aligned} f(\omega^*) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega^*} + \beta \omega^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \beta \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \\ &= \sqrt{\alpha\beta} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi_{min} = f(\omega^*) = \sqrt{\alpha\beta} \quad (\text{E.13})$$

A figura (77) ilustra o comportamento da função f para $\omega > 0$.

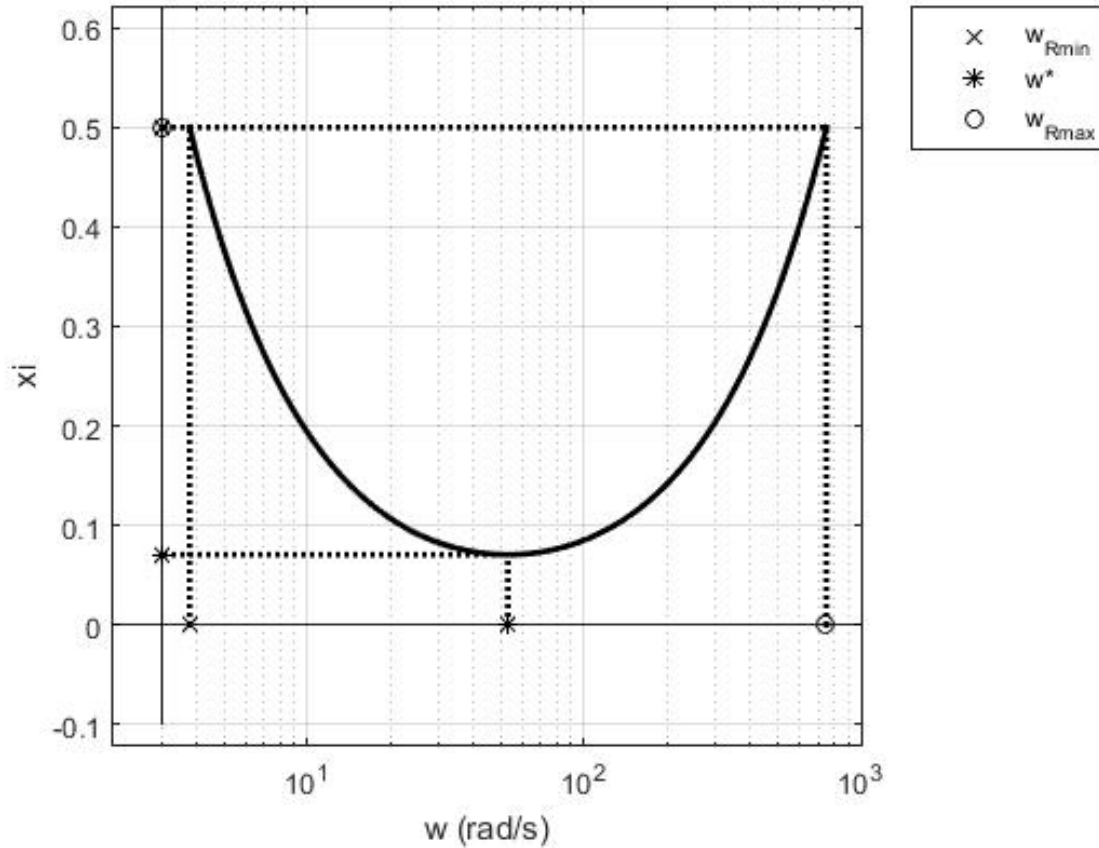


Figura 77 – Frequência natural versus Coeficiente de amortecimento

A título de ilustração, na figura (77): (i) $\xi_{max} = 0,50$; (ii) $\omega_{R,min} = 3,8 \text{ rad/s}$; (iii) $\omega_{R,max} = 750,2 \text{ rad/s}$; (iv) $\xi_{min} = 0,07$; e $\omega^* = 53,2 \text{ rad/s}$.

Seja $\xi_{max} \leq 1$ o valor máximo dos coeficientes de amortecimento. Para $f(\omega) = \xi_{max}$, há duas soluções, por hora designadas como ω_m e ω_M , tal que $0 < \omega_m < \omega_M$.

Os pontos (ω_m, ξ_{max}) e (ω_M, ξ_{max}) do gráfico de f fornecem um sistema com duas equações, tendo como variáveis os parâmetros α e β , conforme a equação (E.14).

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_m^2 \\ 1 & \omega_M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \xi_{max} \omega_m \\ 2 \xi_{max} \omega_M \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

Com efeito,

$$f(\omega_m) = \xi_{max} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_m} + \beta \omega_m \right) = \xi_{max} \Leftrightarrow \alpha + \beta \omega_m^2 = 2 \xi_{max} \omega_m$$

$$f(\omega_M) = \xi_{max} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_M} + \beta \omega_M \right) = \xi_{max} \Leftrightarrow \alpha + \beta \omega_M^2 = 2 \xi_{max} \omega_M$$

Resolvendo-se o sistema da equação (E.14), chegou-se à solução das equações (E.15) e (E.16).

$$\alpha = 2 \xi_{max} \frac{\omega_m \omega_M}{\omega_m + \omega_M} \quad (E.15)$$

$$\beta = \frac{2 \xi_{max}}{\omega_m + \omega_M} \quad (E.16)$$

Substituindo-se as equações (E.15) e (E.16) nas equações (E.11) e (E.13), para $\omega^* > 0$, tem-se que:

$$\xi_{min} = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{2 \xi_{max} \frac{\omega_m \omega_M}{\omega_m + \omega_M} \frac{2 \xi_{max}}{\omega_m + \omega_M}} = \frac{2 \xi_{max}}{\omega_m + \omega_M} \sqrt{\omega_m \omega_M} \quad (E.17)$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{2 \xi_{max} \frac{\omega_m \omega_M}{\omega_m + \omega_M} \frac{\omega_m + \omega_M}{2 \xi_{max}}} = \sqrt{\omega_m \omega_M} \quad (E.18)$$

Da equação (E.18), tem-se que:

$$\omega_m = \frac{\omega^{*2}}{\omega_M} \quad (E.19)$$

Substituindo-se as equações (E.18) e (E.19) na equação (E.17), tem-se que:

$$\xi_{min} = \frac{2 \xi_{max}}{\frac{\omega^{*2}}{\omega_M} + \omega_M} \omega^* \Leftrightarrow \frac{\omega^{*2}}{\omega_M} + \omega_M = \frac{2 \xi_{max} \omega^*}{\xi_{min}}$$

$$\xi_{min} \omega_M^2 - 2 \xi_{max} \omega^* \omega_M + \xi_{min} \omega^{*2} = 0 \quad (E.20)$$

As soluções da equação (E.20) de 2º grau em ω_M são:

$$\omega_{M1,2} = \frac{\omega^*}{\xi_{min}} \left(\xi_{Max} \pm \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2} \right) \quad (E.21)$$

Substituindo-se a equação (E.21) na equação (E.19), tem-se que:

$$\omega_{m_{1,2}} = \frac{\omega^{*2}}{\omega_{M_{1,2}}} = \frac{\omega^{*2}}{\frac{\omega^*}{\xi_{min}} \left(\xi_{Max} \pm \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2} \right)} = \frac{\xi_{min} \omega^*}{\xi_{Max} \pm \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}} \quad (E.22)$$

Das soluções $(\omega_{m_1}, \omega_{M_1})$ e $(\omega_{m_2}, \omega_{M_2})$, a única que satisfaz a hipótese inicial de $0 < \omega_m < \omega_M$ é $(\omega_{m_1}, \omega_{M_1})$. Com efeito, considerando que $x < \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} \omega_{M_1} - \omega_{m_1} &= \omega^* \left(\frac{\xi_{Max} + \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}}{\xi_{Min}} - \frac{\xi_{Min}}{\xi_{Max} + \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}} \right) \\ &= 2 \omega^* \left(\frac{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2 + \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}}{\xi_{Min} \left(\xi_{Max} + \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2} \right)} \right) \\ &> 0 \\ \omega_{M_2} - \omega_{m_2} &= \omega^* \left(\frac{\xi_{Max} - \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}}{\xi_{Min}} - \frac{\xi_{Min}}{\xi_{Max} - \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}} \right) \\ &= 2 \omega^* \left(\frac{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2 - \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}}{\xi_{Min} \left(\xi_{Max} - \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2} \right)} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Logo, os valores de ω_M e ω_m são dados pelas seguintes equações:

$$\omega_M = \frac{\omega^*}{\xi_{min}} \left(\xi_{Max} + \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2} \right) \quad (E.23)$$

$$\omega_m = \frac{\xi_{min} \omega^*}{\xi_{Max} + \sqrt{\xi_{Max}^2 - \xi_{Min}^2}} \quad (E.24)$$

Seja δ_ξ uma nova variável auxiliar definida conforme a equação (E.25):

$$\delta_\xi = \frac{\xi_{min}}{\xi_{max} + \sqrt{\xi_{max}^2 - \xi_{min}^2}} = \frac{1}{\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}} + \sqrt{\left(\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}}\right)^2 - 1}} \quad (E.25)$$

Substituindo-se a equação (E.25) nas equações (E.23) e (E.24), tem-se que:

$$\omega_M = \frac{\omega^*}{\delta_\xi} \quad (E.26)$$

$$\omega_m = \omega^* \delta_\xi \quad (E.27)$$

que são expressões mais simples de ω_M e ω_m .

A figura (78) ilustra os gráficos de ω_M e ω_m em função de δ_ξ .

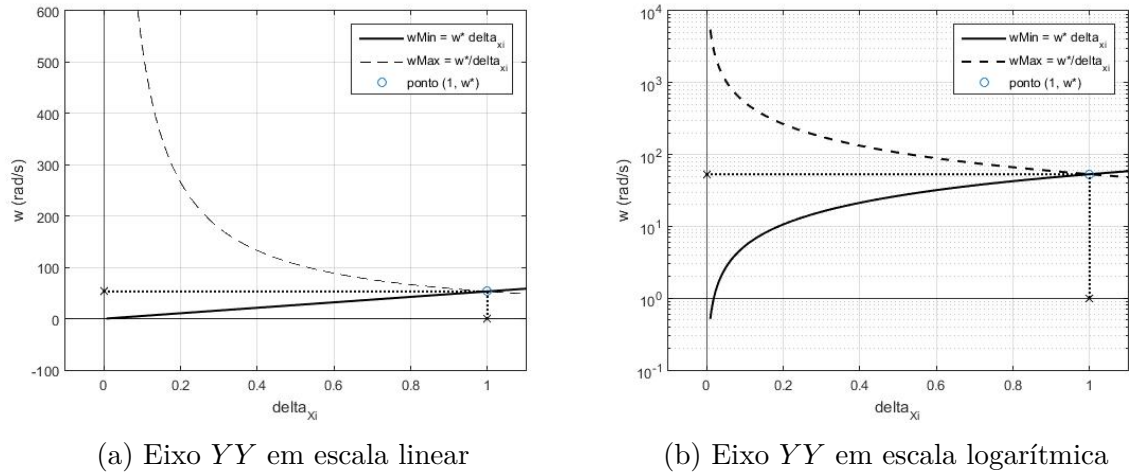


Figura 78 – Gráficos de ω_m e ω_M em função de δ_ξ

Como ilustrado na figura (78), o ponto comum aos gráficos $\omega_M = \frac{\omega^*}{\delta_\xi}$ e $\omega_m = \omega^* \delta_\xi$ é tal que $\delta_\xi = 1$ e $\omega_M = \omega_m = \omega^*$.

Da equação (E.25), após algumas manipulações algébricas, concluiu-se que:

$$\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}} = \frac{1}{2} \left(\delta_\xi + \frac{1}{\delta_\xi} \right) \quad (E.28)$$

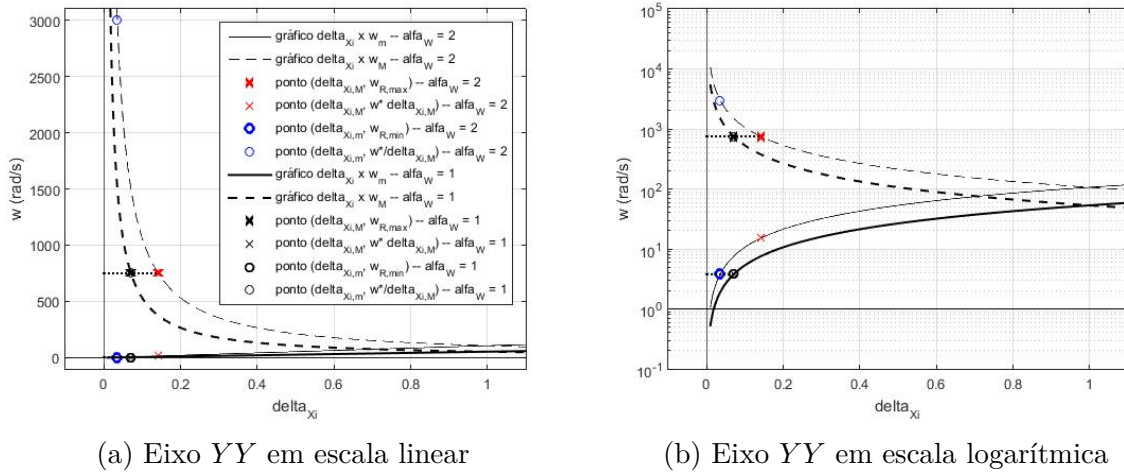
Seja $\omega_{R,min}$ e $\omega_{R,max}$ a menor e maior frequências reais do sistema, respectivamente. Recordando-se que $\xi_{max} = f(\omega_m) = f(\omega_M)$ e que $\xi_{min} = f(\omega^*)$, os parâmetros ω^* , ω_m e ω_M devem ser tais que:

$$0 < \omega_m \leq \omega_{R,min} < \omega^* < \omega_{R,max} \leq \omega_M \quad (E.29)$$

Seja $\omega_{ref}^* = \sqrt{\omega_{R,min} \omega_{R,max}}$, uma frequência de referência, e seja ω^* escolhido como proporcional a ω_{ref}^* :

$$\omega^* = \alpha_\omega \omega_{ref}^*$$

A figura (79) ilustra os gráficos de ω_m e ω_M em função de δ_ξ para $\alpha_\omega = 1$ e $\alpha_\omega = 2$. Foi destacado o ponto $(\delta_{\xi_M}, \omega_{R,max})$, com $\delta_{\xi_M} = \frac{\omega^*}{\omega_{R,max}}$, no gráfico $\delta_\xi \times \omega_M$ da equação (E.26); e o ponto $(\delta_{\xi_m}, \omega_{R,min})$, com $\delta_{\xi_m} = \frac{\omega_{R,min}}{\omega^*}$, no gráfico $\delta_\xi \times \omega_m$ da equação (E.27). Destacou-se também os pontos auxiliares $(\delta_{\xi_M}, \omega^* \delta_{\xi_M})$, no gráfico $\delta_\xi \times \omega_m$; e $(\delta_{\xi_m}, \frac{\omega^*}{\delta_{\xi_m}})$, no gráfico $\delta_\xi \times \omega_M$.


 Figura 79 – Gráficos de ω_m e ω_M em função de δ_ξ

Observou-se na figura (79a), como esperado, que o gráfico elíptico referente à função $\omega_M = \frac{\omega^*}{\delta_\xi}$ tendeu a se afastar da origem, com aumento de α_ω de 1 para 2; enquanto que o gráfico da função $\omega_m = \omega^* \delta_\xi$ apresentou um aumento de declividade, também com o aumento de α_ω . Notou-se também que, para $\alpha_\omega = 1$, δ_{ξ_M} parece coincidir com δ_{ξ_m} . Por outro lado, para $\alpha_\omega = 2$, com a afastamento do gráfico elíptico da origem, δ_{ξ_M} aumentou, indo em direção a $\delta_\xi = 1$, enquanto que, por conta do aumento da declividade do gráfico linear, δ_{ξ_m} diminuiu, afastando-se $\delta_\xi = 1$.

Ainda dos gráficos da figura (79a), foi possível concluir que a condição da equação (E.29) é completamente satisfeita apenas para o intervalo $0 < \delta_\xi < \min\{\delta_{\xi_M}, \delta_{\xi_m}\}$.

Por outro lado, da equação (E.28), concluiu-se que o valor mínimo da razão $\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}}$ é 1, e por tanto, para $0 < \delta_\xi < 1$ e para $1 < \delta_\xi$ tem-se que $\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}} > 1$. Assim, para se reduzir o máximo possível a razão $\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}}$, de modo que esteja o mais próxima possível de 1 e a condição da equação (E.29) continue sendo satisfeita, concluiu-se que os parâmetros δ_{ξ_M} e δ_{ξ_m} devem ser tais que satisfaçam a equação (E.30), ou seja, $\alpha_\omega = 1$ e, por consequência, $\omega^* = \omega_{ref}^*$.

$$\delta_{\xi_M} = \delta_{\xi_m} \quad (E.30)$$

Como consequência da equação (E.30), tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta_{\xi_M} = \delta_{\xi_m} &\Rightarrow \frac{\omega^*}{\omega_{R,max}} = \frac{\omega_{R,min}}{\omega^*} \\ &\Rightarrow \omega^{*2} = \omega_{R,max} \omega_{R,min} \end{aligned}$$

$$\omega^* = \sqrt{\omega_{R,max} \omega_{R,min}} \quad (\text{E.31})$$

Da equação (E.31), tem-se que:

$$\delta_{\xi_M} = \frac{\omega^*}{\omega_{R,max}} = \frac{\sqrt{\omega_{R,max} \omega_{R,min}}}{\omega_{R,max}} = \sqrt{\frac{\omega_{R,min}}{\omega_{R,max}}}$$

$$\delta_{\xi_M} = \delta_{\xi_m} = \sqrt{\frac{\omega_{R,min}}{\omega_{R,max}}} \quad (\text{E.32})$$

Substituindo-se a equação (E.32) na equação (E.28), tem-se que:

$$\frac{\xi_{max}}{\xi_{min}} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\xi} + \frac{1}{\delta_{\xi}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_{R,min}}{\omega_{R,max}}} + \sqrt{\frac{\omega_{R,max}}{\omega_{R,min}}} \right) \quad (\text{E.33})$$

Substituindo-se as equações (E.31) e (E.32) nas equações (E.26) e (E.27), tem-se que:

$$\omega_M = \frac{\omega^*}{\delta_{\xi}} = \frac{\sqrt{\omega_{R,max} \omega_{R,min}}}{\sqrt{\frac{\omega_{R,min}}{\omega_{R,max}}}} = \omega_{R,max} \quad (\text{E.34})$$

$$\omega_m = \omega^* \delta_{\xi} = \sqrt{\omega_{R,max} \omega_{R,min}} \sqrt{\frac{\omega_{R,min}}{\omega_{R,max}}} = \omega_{R,min} \quad (\text{E.35})$$

Por fim, substituindo-se as equações (E.34) e (E.35) nas equações (E.15) e (E.16), tem-se que:

$$\alpha = 2 \xi_{max} \frac{\omega_{R,min} \omega_{R,max}}{\omega_{R,min} + \omega_{R,max}} \quad (\text{E.36})$$

$$\beta = \frac{2 \xi_{max}}{\omega_{R,min} + \omega_{R,max}} \quad (\text{E.37})$$

Em suma, tendo como únicas entradas os parâmetros ξ_{max} , o coeficiente máximo de amortecimento; $\omega_{R,min}$, a menor frequência em rad/s do sistema; e $\omega_{R,max}$, a maior frequência em rad/s , para o cálculo da matriz de amortecimento estrutural \mathbf{C}_{estr} ; as equações (E.36) e (E.37) forneceram as expressões de α e β , parâmetros constituintes da equação (E.1).

No caso específico do presente trabalho, o modelo conservou dois modos de corpo rígido, cujas frequências são nulas. Sendo assim, foi necessário impôr $\alpha = 0$, para se evitar o surgimento de denominador nulo na equação (E.10), a saber:

$$\xi = f(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega} + \beta \omega \right)$$

Dessa forma, o coeficiente de amortecimento estrutural final para cada frequência do sistema foi definido conforme a equação (E.38), já que $\omega_{R,min} = 0$, pois corresponde à frequência de corpo rígido.

$$\xi_i = \frac{1}{2} \beta \omega_i, \text{ tal que } \beta = \frac{2 \xi_{max}}{\omega_{R,max}} \quad (\text{E.38})$$

ANEXO F – Zona de instabilidade e trajetória desejada

A curva delimitadora da zona de instabilidade foi obtida de modo teórico, partindo-se da correlação existente entre o surgimento do regime de *stick-slip* e a existência de amortecimento negativo no torque de atrito seco para uma faixa de baixas velocidades de rotação.

A figura (80) ilustra o torque total de atrito e a faixa de velocidades com amortecimento negativo, para diferentes cargas N_r sobre os pinos de atrito.

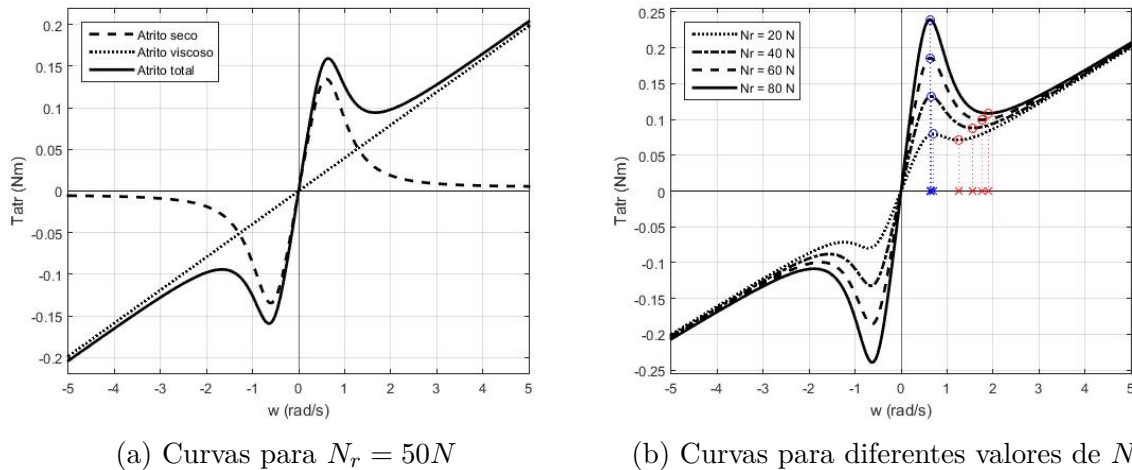


Figura 80 – Torque total de atrito

A figura (80a) evidencia o efeito preponderante do atrito seco para baixas velocidades e a preponderância do atrito viscoso para velocidades maiores. Já a figura (80b) ilustra as faixas de velocidade, entre picos locais do torque de atrito, nas quais se verifica amortecimento negativo, para diferentes cargas N_r . As velocidades críticas de rotação referentes aos pontos de mínimo locais, como ilustrado na figura (80b), indicam as velocidades mínimas, para diferentes cargas, às quais o rotor principal poderia chegar de modo a não entrar em regime de *stick-slip*. Caso atingisse uma velocidade inferior a essa velocidade crítica, não necessariamente entraria em regime de *stick-slip*, mas a possibilidade disso ocorrer já não seria inexistente.

A curva delimitadora da zona de instabilidade, ilustrada na figura (29), foi trassada de modo teórico, considerando a velocidade nominal na saída do servo-motor, e não a velocidade do rotor principal. Se se assumisse, por exemplo, a velocidade de saída do servo-motor ω_{ref} como uma entrada em degrau ao movimento de rotação do sistema, por uma faixa de instantes seguintes, se notaria um regime transiente de oscilação de

velocidade do rotor principal, com velocidade rotativa que, caso não atingisse como valor mínimo a velocidade crítica de amortecimento negativo, oscilaria de forma amortecida, até se estabilizar num valor teoricamente igual à velocidade nominal de saída do servomotor. Tal comportamento do sistema motivou um questionamento chave: para qual velocidade nominal mínima do servo-motor, aplicado ao sistema como função degrau, seria possível que o rotor principal atingisse uma velocidade mínima igual à velocidade crítica de amortecimento positivo? A curva delimitadora teórica da zona de instabilidade foi uma resposta a esse questionamento.

Com efeito, para uma primeira análise qualitativa, considerou-se o sistema de torção formado apenas pelo eixo de torção e pelo rotor principal, como ilustrado na figura (81a).

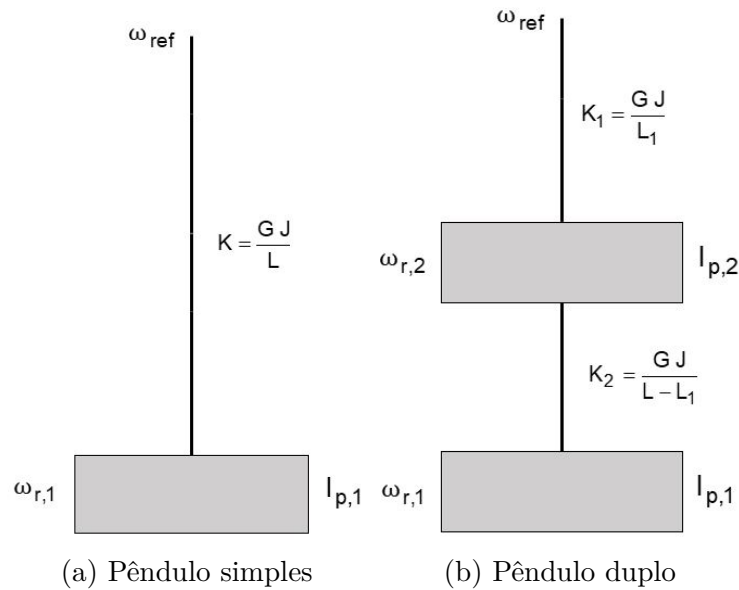


Figura 81 – Pêndulos de torção

Considerando ω_{ref} grande o suficiente para se desprezar num primeiro momento os efeitos de atrito seco, a equação de movimento do pêndulo simples de torção foi obtida por meio das equações de Euler, conforme as equações (F.1) e (F.2).

$$I_{p1} \ddot{\theta}_{r1} = -K (\theta_{r1} - \theta_{ref}) - c_1 \dot{\theta}_{r1} \quad (F.1)$$

$$I_{p1} \ddot{\theta}_{r1} + c_1 \dot{\theta}_{r1} + K \theta_{r1} = K \theta_{ref} \quad (F.2)$$

sendo $c_1 = 2 \xi_1 \sqrt{K I_{p1}}$, e ξ_1 o coeficiente de amortecimento.

Derivando-se a equação (F.2) no tempo, tem-se que:

$$I_{p1} \ddot{\omega}_{r1} + c_1 \dot{\omega}_{r1} + K \omega_{r1} = K \omega_{ref} \quad (F.3)$$

A solução da equação (F.3) para um entrada em degrau ω_{ref} , e condições iniciais $\omega_{r_1}(t=0) = 0$ e $\dot{\omega}_{r_1}(t=0) = 0$, e supondo o sistema em regime sub-amortecido, foi:

$$\omega_{r_1}(t) = \frac{\omega_{ref}}{1 + \xi^2} - e^{-\xi_1 \omega_n t} \frac{\omega_{ref}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \text{sen}(\omega_n t + \phi_0) \quad (\text{F.4})$$

$$\phi_0 = \text{atan2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}, \frac{\xi_1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \right) \quad (\text{F.5})$$

O primeiro ponto de máximo na oscilação amortecida apresentada pela expressão da equação (F.4) ocorre para:

$$\text{sen}(\omega_n t_{Max,1} + \phi_0) = -1 \quad (\text{F.6})$$

$$\omega_n t_{Max,1} + \phi_0 = \frac{3\pi}{2} \quad (\text{F.7})$$

Já o primeiro ponto de mínimo na oscilação amortecida apresentada pela expressão da equação (F.4) ocorre logo após o primeiro ponto de máximo, para:

$$\text{sen}(\omega_n t_{Min,1} + \phi_0) = 1 \quad (\text{F.8})$$

$$\omega_n t_{Min,1} + \phi_0 = \frac{5\pi}{2} \quad (\text{F.9})$$

Aplicando-se o resultado das equações (F.8) e (F.9) na equação (F.4), obteve-se o primeiro valor mínimo da velocidade do rotor, em oscilação sub-amortecida, conforme a equação (F.10):

$$\omega_{r_1,Min,1} = \frac{\omega_{ref}}{1 + \xi^2} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0\right)} \frac{\omega_{ref}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}}$$

$$\omega_{r_1,Min,1} = \frac{\omega_{ref}}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0\right)} \right\} \quad (\text{F.10})$$

Partindo-se da equação (F.10), a condição crítica para o não surgimento de *stick-slip* ocorre quando o primeiro mínimo da velocidade do rotor em oscilação sub-amortecida coincide com um mínimo $\omega_{r_1}^*$ local do torque de atrito, ilustrado na figura (80b), ou seja:

$$\omega_{r_1,Min,1} = \omega_{r_1}^* \Rightarrow \frac{\omega_{ref}^*}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0\right)} \right\} = \omega_{r_1}^*$$

do que se conclui que:

$$\omega_{ref}^* = \omega_{r_1}^* \sqrt{1 + \xi_1^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0\right)} \right\}^{-1} \quad (\text{F.11})$$

A equação (F.11) fornece um modo de se calcular o valor nominal crítico ω_{ref}^* da velocidade de saída do servo motor, para não ocorrência de *stick-slip*, dado um valor $\omega_{r_1}^*$ de mínimo local do torque de atrito.

Resumindo, uma curva delimitadora da zona de instabilidade, similar à da figura (29), pode ser obtida seguindo-se a seguinte metodologia: (i) para cada carga N_r calcula-se o mínimo local $\omega_{r_1}^*$; (ii) e em seguida, pela equação (F.11), calcula-se a velocidade nominal crítica ω_{ref}^* .

Para o caso do pêndulo duplo, mais próximo do sistema em estudo, a metodologia para determinação da zona de instabilidade em função da carga sobre os pinos de atrito e da velocidade nominal crítica de saída do servo-motor foi a mesma para ao do modelo do pêndulo simples.

A equação de movimento obtida, via equações de Euler, foi:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_{ref} \quad (\text{F.12})$$

sendo $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$.

Derivando-se a equação (F.12) no tempo tem-se que:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_{ref} \quad (\text{F.13})$$

A solução da equação (F.13) apenas para o movimento do rotor principal, considerando uma entrada em degrau ω_{ref} ; condições iniciais $\omega_{r_1}(t=0) = 0$, $\dot{\omega}_{r_1}(t=0) = 0$, $\omega_{r_2}(t=0) = 0$ e $\dot{\omega}_{r_2}(t=0) = 0$; e supondo o sistema em regime sub-amortecido, foi:

$$\omega_{r_1}(t) = \omega_{ref} K_1 p_{21} \left\{ \left(\frac{p_{11}}{\omega_1^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \omega_1 t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_{01}) \right) + \left(\frac{p_{22}}{\omega_2^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2}} - e^{-\xi_2 \omega_2 t} \text{sen}(\omega_2 t + \phi_{02}) \right) \right\}$$

sendo ξ_1 e ξ_2 os coeficientes de amortecimento associados ao primeiro e segundo modos de vibrações; ω_1 e ω_2 as duas frequências naturais; p_{11} e p_{21} os componentes do autovetor associado ao primeiro modo de vibração $\hat{\mathbf{P}}_1 = [p_{11}, p_{21}]^T$; e p_{12} e p_{22} os componentes do autovetor associado ao segundo modo de vibração $\hat{\mathbf{P}}_2 = [p_{12}, p_{22}]^T$. Os autovetores $\hat{\mathbf{P}}_1$ e $\hat{\mathbf{P}}_2$ foram normalizados segundo a norma:

$$\|\mathbf{P}_i\| = \sqrt{\langle \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_i \rangle_M}$$

$$\langle \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j \rangle_M = \mathbf{P}_i^T \mathbf{M} \mathbf{P}_j$$

Importante destacar que, para o modelo do pêndulo duplo:

$$\frac{p_{11}}{\omega_1^2} \cong \frac{2,75}{1,31^2} \cong 1,61 \quad (\text{F.14})$$

$$\frac{p_{22}}{\omega_2^2} \cong \frac{1,31}{7,88^2} \cong 0,02 \quad (\text{F.15})$$

ou seja, o valor obtido na equação (F.14) é mais que 80 vezes o obtido na equação (F.15), o que sugeriu uma possível preponderância do primeiro modo no movimento do rotor principal.

A figura (82) ilustra o movimento do rotor principal para o modelo com dois rotores, como resposta a uma entrada $\omega_{ref} = 120 \text{ RPM}$ como função degrau.

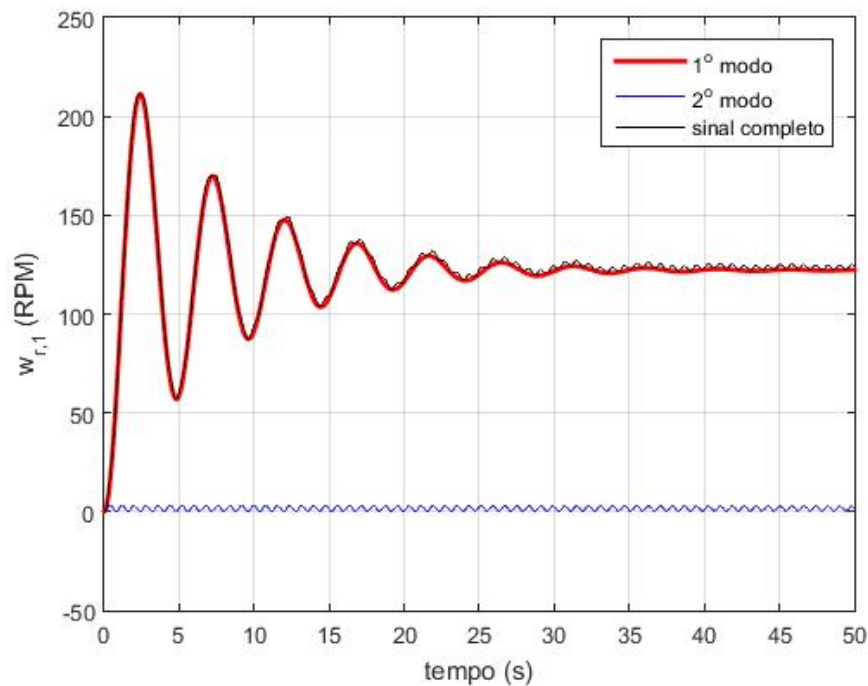


Figura 82 – Resposta do pêndulo duplo de torção a uma entrada degrau

Pela figura (82), constatou-se a preponderância do primeiro modo sobre o segundo no movimento do rotor principal em resposta à entrada em função degrau. Essa observação, juntamente com o resultado das equações (F.14) e (F.15) levou à aproximação da equação (F.16) para o levantamento da curva teórica delimitadora da zona de instabilidade:

$$\omega_{r_1}(t) \cong \omega_{ref} K_1 p_{21} \frac{p_{11}}{\omega_1^2 \sqrt{1 + \xi_1^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \omega_1 t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_{01}) \right) \quad (\text{F.16})$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio adotado para o pêndulo simples de torção, o primeiro mínimo de velocidade do rotor principal é dado pela expressão da equação (F.17):

$$\omega_{r_1, Min, 1} = \omega_{ref} K_1 p_{21} \frac{p_{11}}{\omega_1^2 \sqrt{1 + \xi_1^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0 \right)} \right\} \quad (\text{F.17})$$

do que se concluiu que:

$$\omega_{ref} = \omega_{r_1, Min, 1} \frac{\omega_1^2 \sqrt{1 + \xi_1^2}}{K_1 p_{21} p_{11}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0 \right)} \right\}^{-1} \quad (\text{F.18})$$

A possibilidade de ocorrer *stick-slip* só passa a existir quando o primeiro mínimo de velocidade do rotor principal coincide com a velocidade crítica da zona limitadora de instabilidade, ou seja, que a condição da equação (F.19) seja satisfeita.

$$\omega_{r_1, Min, 1} = \omega_{r_1}^* \quad (\text{F.19})$$

Das equações (F.18) e (F.19), chegou à equação (F.20), que corresponde à velocidade nominal crítica na saída do servo-motor, para uma dada velocidade crítica da zona limitadora, e por consequência, para uma determinada carga N_r sobre os pinos de atrito.

$$\omega_{ref}^* = \omega_{r_1}^* \frac{\omega_1^2 \sqrt{1 + \xi_1^2}}{K_1 p_{21} p_{11}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_{01} \right)} \right\}^{-1} \quad (\text{F.20})$$

Considerando como $\omega_{ref, s}^*$ a velocidade nominal crítica referente ao sistema do pêndulo simples de torção, e como $\omega_{ref, dp}^*$ a velocidade nominal crítica referente ao sistema do pêndulo duplo de torção, a partir das equações (F.11) e (F.20), chegou-se ao resultado da equação (F.21):

$$\frac{\omega_{ref,dp}^*}{\omega_{ref,s}^*} = \frac{\omega_{r1}^* \frac{\omega_1^2 \sqrt{1+\xi_1^2}}{K_1 p_{21} p_{11}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0\right)} \right\}^{-1}}{\omega_{r1}^* \sqrt{1+\xi_1^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}} - e^{-\xi_1 \left(\frac{5\pi}{2} - \phi_0\right)} \right\}^{-1}} \cong \frac{\omega_1^2}{K_1 p_{21} p_{11}} \cong 0,97 \quad (\text{F.21})$$

Do resultado da equação (F.21), conclui-se que a velocidade nominal crítica para o modelo com pêndulo duplo de torção, mais representativo do sistema em estudo, é levemente inferior à velocidade nominal crítica obtida para o modelo com pêndulo simples, de modo que, por segurança, foi escolhida a curva delimitadora levantada com o modelo do pêndulo simples, ilustrada na figura (29).

Com o intuito de se manter a trajetória deseje para a carga N_r , em relação à velocidade nominal ω_{ref} , na zona de estabilidade de movimento do rotor principal, definiu-se a equação (4.1), a saber:

$$N(\omega) = \gamma_{td} \left(\beta_{td} \exp\left(\frac{\omega}{\beta_{td}}\right) - \omega - \beta_{td} \right)$$

sendo que o parâmetro γ_{td} está relacionado à concavidade do gráfico $\omega \times N$, de modo que quanto menor o valor de γ_{td} , maior a concavidade da curva.

A figura (83) ilustra os gráficos de ω versus N para diferentes valores γ_{td} .

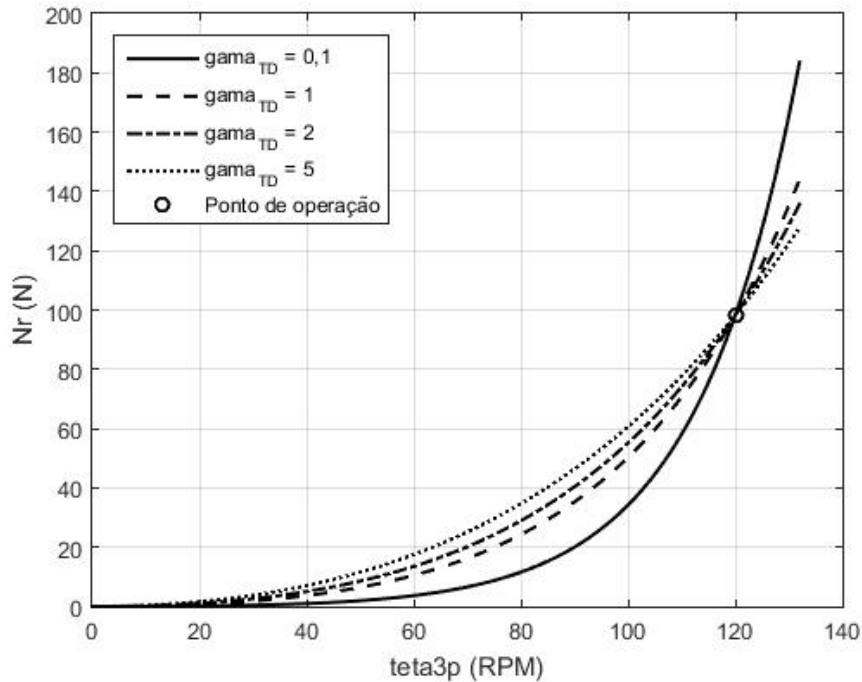


Figura 83 – Trajetória desejada para diferentes valores de γ_{td}

Uma vez definido o parâmetros γ_{td} , o parâmetro β_{td} foi calculado como raiz da equação (F.22):

$$\gamma_{td} \left(\beta_{td} \exp \left(\frac{\omega_{op}}{\beta_{td}} \right) - \omega_{op} - \beta_{td} \right) - N_{op} = 0 \quad (\text{F.22})$$

sendo (ω_{op}, N_{op}) as coordenadas do ponto de operação.

O cálculo do parâmetro β_{td} foi realizado pelo método de Newton-Raphson, com a definição da função Ψ e sua derivada, conforme as equações (F.23) e (F.24):

$$\Psi(\eta) = \eta \exp \left(\frac{\omega_{op}}{\eta} \right) - \omega_{op} - \eta - \frac{N_{op}}{\gamma_{op}} \quad (\text{F.23})$$

$$\frac{d\Psi}{d\eta} = \left(1 - \frac{\omega_{op}}{\eta} \right) \exp \left(\frac{\omega_{op}}{\eta} \right) - 1 \quad (\text{F.24})$$

ANEXO G – Relação entre ângulos de Euler e de Tait-Bryan

O vetor velocidade angular do rotor intermediário pode ser representado em diferentes sistemas de coordenadas.

Para o modelo da dinâmica em elementos finitos, foi definido, para cada nó, um sistema com orientação descrita pelos ângulos de Tait-Bryan, a saber θ_x , θ_y e θ_z , conforme a sequência de transformações:

$$I \xrightarrow[\theta_y]{T_c^{01}} B_1 \xrightarrow[\theta_z]{T_c^{12}} B_2 \xrightarrow[\theta_x]{T_c^{23}} S$$

Um outro conjunto de ângulos, de particular interesse por seu significado físico, é o dos ângulos de Euler, a saber φ , conhecido como *ângulo de precessão*; θ , conhecido como *ângulo de nutação*; e α , conhecido como *ângulo de rotação intrínseca* ou *spin*. O sistema originado pelos ângulos de Euler foi definido conforme a sequência de transformações:

$$I \xrightarrow[\varphi]{T_{eu}^{01}} E_1 \xrightarrow[\theta]{T_{eu}^{12}} E_2 \xrightarrow[\alpha]{T_{eu}^{23}} S$$

Os sentidos de todos os ângulos foram definidos pela regra da mão direita, em relação ao respectivo eixo de rotação.

A figura 84 ilustra os dois sistemas de referência.

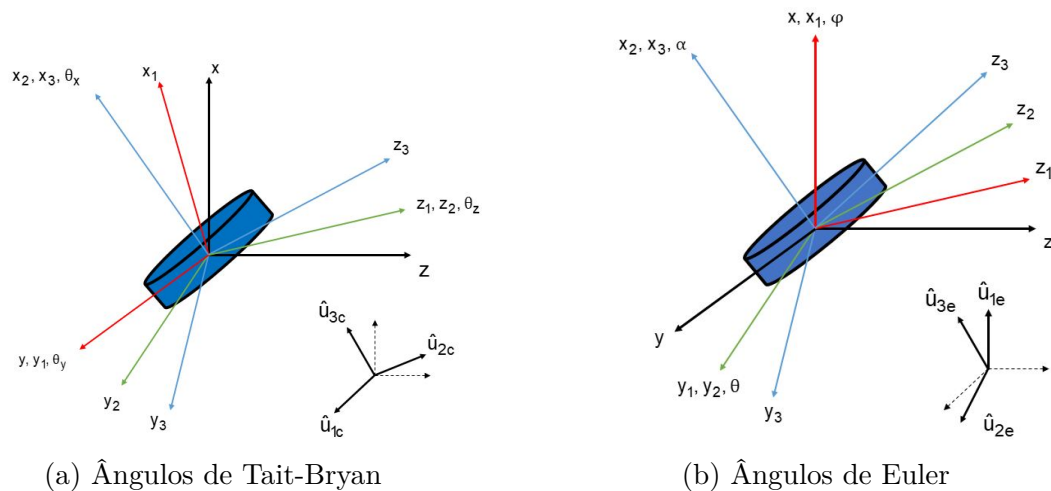


Figura 84 – Sistemas de referência para o rotor intermediário

Uma vez obtido o vetor velocidade angular Ω_{N_1+1} do rotor intermediário para cada instantes de tempo, integrando-se as equações da dinâmica do sistema modelado pelos

ângulos de Tait-Bryan, optou-se por visualizá-lo também no sistema de referência definido pelos ângulos de Euler, a fim de melhor observar os movimentos de precessão, nutação e *spin* do rotor.

O primeiro passo para isso foi a escolha da base de referência para representação do vetor $\boldsymbol{\Omega}_{N_1+1}$. A base escolhida foi o referencial inercial I , já que constitui a única base de referência comum aos sistemas de Tait-Bryan e de Euler.

As equações (G.1) e (G.2) apresentam os vetores unitários referentes aos sistemas de Tait-Bryan e Euler, respectivamente, escritos na base I .

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_{1c}^I &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_I \\ \hat{\mathbf{u}}_{2c}^I &= T_c^{01} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_y) \\ 0 \\ \cos(\theta_y) \end{bmatrix}_I\end{aligned}\quad (\text{G.1})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{3c}^I = T_c^{01} T_c^{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) \\ \sin(\theta_z) \\ -\sin(\theta_y) \cos(\theta_z) \end{bmatrix}_I$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{1e}^I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_I$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{2e}^I = T_{eu}^{01} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{E_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_I\quad (\text{G.2})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{3e}^I = T_{eu}^{01} T_{eu}^{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{E_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ -\cos(\varphi) \sin(\theta) \end{bmatrix}_I$$

Lançando-se mão dos vetores unitários nos dois sistemas, a equação (G.3) apresenta as diferentes representações do vetor $\boldsymbol{\Omega}_{N_1+1}^I$ no sistema referencial I :

$$\boldsymbol{\Omega}_{N_1+1}^I = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{1e}^I & \hat{\mathbf{u}}_{2e}^I & \hat{\mathbf{u}}_{3e}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{1c}^I & \hat{\mathbf{u}}_{2c}^I & \hat{\mathbf{u}}_{3c}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix}\quad (\text{G.3})$$

Fazendo $\mathbf{R}_e(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{1e}^I & \hat{\mathbf{u}}_{2e}^I & \hat{\mathbf{u}}_{3e}^I \end{bmatrix}$ e $\mathbf{R}_c(\theta_y, \theta_z) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{1c}^I & \hat{\mathbf{u}}_{2c}^I & \hat{\mathbf{u}}_{3c}^I \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$\mathbf{R}_e(\varphi, \theta) \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_c(\theta_y, \theta_z) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_e^{-1}(\varphi, \theta) \mathbf{R}_c(\theta_y, \theta_z) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{R}_e^{-1}\mathbf{R}_c$ tal que:

$$\mathbf{R}_e^{-1}\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} -\frac{\cos(\theta)\text{sen}(\varphi)}{\text{sen}(\theta)} & \text{sen}(\theta_y) + \frac{\cos(\varphi)\cos(\theta)\cos(\theta_y)}{\text{sen}(\theta)} & \cos(\theta_y)\cos(\theta_z) - \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}(\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta_z) + \cos(\varphi)\cos(\theta_z)\text{sen}(\theta_y)) \\ \cos(\varphi) & \cos(\theta_y)\text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi)\text{sen}(\theta_z) - \cos(\theta_z)\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta_y) \\ \frac{\text{sen}(\varphi)}{\text{sen}(\theta)} & -\frac{\cos(\theta_y)\cos(\varphi)}{\text{sen}(\theta)} & \frac{1}{\text{sen}(\theta)}(\text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta_z) + \cos(\varphi)\cos(\theta_z)\text{sen}(\theta_y)) \end{bmatrix}$$

Considerando-se as aproximações $|\theta| \ll 1$, $|\theta_y| \ll 1$ e $|\theta_z| \ll 1$, tem-se que:

$$\mathbf{R}_e^{-1}\mathbf{R}_c \cong \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen}(\varphi)}{\theta} & \theta_y + \frac{\cos(\varphi)}{\theta} & 1 - \left(\frac{\theta_z}{\theta}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\theta}\cos(\varphi) \right) \\ \cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi)\theta_z - \text{sen}(\varphi)\theta_y \\ \frac{\text{sen}(\varphi)}{\theta} & -\frac{\cos(\varphi)}{\theta} & \frac{\theta_z}{\theta}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\theta}\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

e então:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen}(\varphi)}{\theta} & \theta_y + \frac{\cos(\varphi)}{\theta} & 1 - \left(\frac{\theta_z}{\theta}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\theta}\cos(\varphi) \right) \\ \cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi)\theta_z - \text{sen}(\varphi)\theta_y \\ \frac{\text{sen}(\varphi)}{\theta} & -\frac{\cos(\varphi)}{\theta} & \frac{\theta_z}{\theta}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\theta}\cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

Da equação (G.4), tem-se particularmente que:

$$\dot{\alpha} \cong \dot{\theta}_y \frac{\text{sen}(\varphi)}{\theta} - \dot{\theta}_z \frac{\cos(\varphi)}{\theta} + \dot{\theta}_x \left\{ \frac{\theta_z}{\theta}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\theta}\cos(\varphi) \right\} \quad (\text{G.5})$$

Após algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_z}{\theta}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\theta}\cos(\varphi) &= \frac{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}{|\theta|} \left\{ \frac{\theta_z}{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}\text{sen}(\varphi) + \frac{\theta_y}{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}\cos(\varphi) \right\} \\ &= \dot{\theta}_x \frac{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}{|\theta|} \text{sen}(\varphi + \varphi_0(\theta_z, \theta_y)) \end{aligned}$$

tem-se que:

$$\dot{\alpha} \cong \dot{\theta}_y \frac{\text{sen}(\varphi)}{\theta} - \dot{\theta}_z \frac{\text{cos}(\varphi)}{\theta} + \dot{\theta}_x \frac{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}{|\theta|} \text{sen}(\varphi + \varphi_0(\theta_z, \theta_y)) \quad (\text{G.6})$$

A presença da variável θ no denominador de alguns termos na equação (G.4), sendo que θ transita em torno de zero, inspira um certo cuidado, ainda mais considerando que φ não é necessariamente nulo em nenhum momento da integração.

Considerando-se: (i) que $|\theta_y| \cong |\theta|$, $|\theta_z| \cong |\theta|$; (ii) que a medida que θ se aproxima de zero, também θ_y e θ_z se aproximam de zero, e vice-versa; (iii) e que, por fim, o comportamento dinâmico do rotor intermediário é suave ao longo do movimento, sem nenhum tipo de capotamento; foi implementado o seguinte artifício, a fim de se eliminar os efeitos numéricos em torno de $\theta = 0$, para efeitos de integração:

$$\frac{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}{|\theta|} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}}{|\theta|}, & \text{se } |\theta| \geq \epsilon \\ 1, & \text{se } |\theta| < \epsilon \end{cases}$$

sendo $0 < |\epsilon| \ll 1$.

ANEXO H – Cálculos geométricos para sensores de distância

H.1 Órbita do centro geométrico

Para se aferir, em diferentes instantes de tempo, a posição lateral do centro geométrico do rotor intermediário, foi montado um aparato instrumental dotado de três sensores de distância, fixos ao estator. Desses três sensores, dois se encontram em posições diametralmente opostas e o terceiro encontra-se orientado numa posição ortogonal aos outros dois. A figura (85) ilustra o dispositivo composto pelo rotor intermediário, pelo estator e pelos sensores de distância.

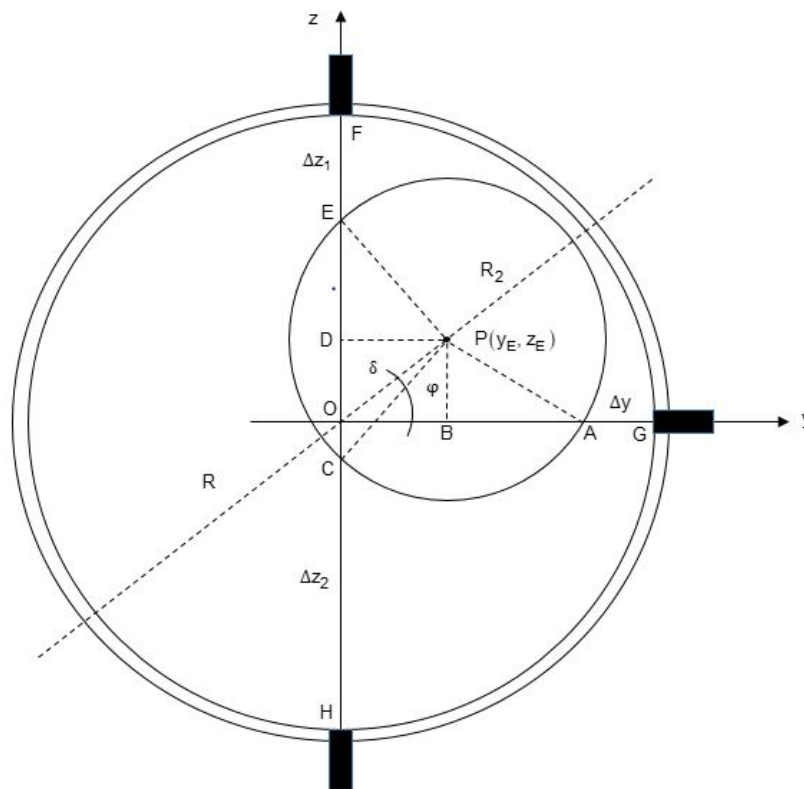


Figura 85 – Subsistema intermediário

Na figura (85), R corresponde ao raio interno do estator, R_2 corresponde ao raio do rotor intermediário. O ponto P , com coordenadas (y_E, z_E) , representa o centro geométrico do rotor intermediário, e o ponto O se refere à origem do sistema de referência inercial, no plano YZ . Os segmentos \overline{PB} e \overline{PD} são respectivamente ortogonais aos eixos yy e zz . O ângulo φ corresponde ao ângulo $B\hat{O}P$, crescente no sentido anti-horário. A variável δ representa a distância entre os ponto O e P , ou seja, entre a origem e o centro do rotor.

Além disso, Δz_1 , Δz_2 e Δy correspondem às distâncias respectivamente \overline{EF} , \overline{HC} e \overline{AG} , aferidas diretamente pelos sensores de distância.

O principal objetivo da presente seção é a obtenção das coordenadas (y_E, z_E) do centro geométrico do rotor em função das distâncias Δz_1 , Δz_2 e Δy , aferidas diretamente pelos sensores.

Antes de demonstrar a relação entre essas grandezas, vale destacar que, para se obter valores únicos das coordenadas (y_E, z_E) , na atual configuração do dispositivo, foram necessários um número mínimo de três sensores. Com efeito, se houvesse apenas as medidas diretas Δz_1 e Δy , duas soluções seriam possíveis para as coordenadas (y_E, z_E) : (i) o ponto P ilustrado na figura (85); (ii) e o ponto P' simétrico ao ponto P com relação ao segmento que liga os pontos E e A .

Feitas essas considerações, aplicando-se a lei dos cossenos ao triângulo ΔCPO a partir do vértice O , obteve-se a equação (H.1).

$$R_2^2 = \delta^2 + (R - \Delta z_2)^2 - 2 \delta (R - \Delta z_2) \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{H.1})$$

Aplicando-se a identidade trigonométrica $\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen}(\varphi)$ na equação (H.1), obteve-se a equação (H.2).

$$R_2^2 = \delta^2 + (R - \Delta z_2)^2 + 2 \delta (R - \Delta z_2) \text{sen}(\varphi) \quad (\text{H.2})$$

Considerando-se que $z_E = \delta \text{sen}(\varphi)$ e $\delta^2 = y_E^2 + z_E^2$, e substituindo-se essas igualdades na equação (H.2), obteve-se a equação (H.3).

$$R_2^2 = y_E^2 + z_E^2 + (R - \Delta z_2)^2 + 2 z_E (R - \Delta z_2)$$

$$R_2^2 = y_E^2 + \left\{ z_E + (R - \Delta z_2) \right\}^2 \quad (\text{H.3})$$

Por outro lado, aplicando-se a lei dos cossenos ao triângulo ΔOPE a partir do vértice O , obteve-se a equação (H.4).

$$R_2^2 = \delta^2 + (R - \Delta z_1)^2 - 2 \delta (R - \Delta z_1) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad (\text{H.4})$$

Aplicando-se a identidade trigonométrica $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \text{sen}(\varphi)$ na equação (H.4), obteve-se a equação (H.5).

$$R_2^2 = \delta^2 + (R - \Delta z_1)^2 - 2\delta(R - \Delta z_1)\text{sen}(\varphi) \quad (\text{H.5})$$

Considerando-se novamente que $z_E = \delta \text{sen}(\varphi)$ e $\delta^2 = y_E^2 + z_E^2$, e substituindo-se essas igualdades na equação (H.5), obteve-se a equação (H.6).

$$R_2^2 = y_E^2 + z_E^2 + (R - \Delta z_1)^2 - 2z_E(R - \Delta z_1)$$

$$R_2^2 = y_E^2 + \{z_E - (R - \Delta z_1)\}^2 \quad (\text{H.6})$$

Das equações (H.3) e (H.6), concluiu-se que:

$$\begin{aligned} R_2^2 - y_E^2 &= \{z_E + (R - \Delta z_2)\}^2 = \{z_E - (R - \Delta z_1)\}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{z_E + (R - \Delta z_2)\}^2 - \{z_E - (R - \Delta z_1)\}^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (z_E + R - \Delta z_2 + z_E - R + \Delta z_1)(z_E + R - \Delta z_2 - z_E + R - \Delta z_1) = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$(2z_E - \Delta z_2 + \Delta z_1)(2R - \Delta z_2 - \Delta z_1) = 0 \quad (\text{H.7})$$

Como $2R = \Delta z_2 + \Delta z_1 + \overline{CE} > \Delta z_2 + \Delta z_1$, como ilustrado na figura (85), concluiu-se da equação (H.7) que:

$$z_E = \frac{\Delta z_2 - \Delta z_1}{2} \quad (\text{H.8})$$

Partindo-se, por outro lado, do triângulo retângulo ΔBAP , pelo teorema de Pitágoras, concluiu-se que:

$$z_E^2 + \{(R - \Delta y) - y_E\}^2 = R_2^2 \quad (\text{H.9})$$

Já do triângulo $\triangle DPE$, aplicando-se novamente o teorema de Pitágoras, obteve-se:

$$y_E^2 + \left\{ (R - \Delta z_1) - z_E \right\}^2 = R_2^2 \Leftrightarrow y_E^2 - R_2^2 = -\left\{ R - \Delta z_1 - z_E \right\}^2 \quad (\text{H.10})$$

Substituindo-se a equação (H.8) na equação (H.10), tem-se que:

$$\begin{aligned} y_E^2 - R_2^2 &= -\left\{ R - \Delta z_1 - z_E \right\}^2 = -\left\{ R - \Delta z_1 - \frac{\Delta z_2 - \Delta z_1}{2} \right\}^2 \\ y_E^2 - R_2^2 &= -\left\{ R - \frac{\Delta z_2 + \Delta z_1}{2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Partindo-se da equação (H.9), tem-se que:

$$\begin{aligned} z_E^2 + \left\{ (R - \Delta y) - y_E \right\}^2 &= R_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (R - \Delta y)^2 - 2y(R - \Delta y) + y_E^2 + z_E^2 &= R_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (R - \Delta y)^2 - 2y(R - \Delta y) + y_E^2 - R_2^2 + z_E^2 &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo-se a expressão equivalente a $y_E^2 - R_2^2$, da equação (H.11), e a expressão equivalente a z_E^2 , da equação (H.8), tem-se que:

$$\begin{aligned} (R - \Delta y)^2 - 2y_E(R - \Delta y) + (y_E^2 - R_2^2) + z_E^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (R - \Delta y)^2 - 2y_E(R - \Delta y) - \left\{ R - \frac{\Delta z_2 + \Delta z_1}{2} \right\}^2 + \left(\frac{\Delta z_2 - \Delta z_1}{2} \right)^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y_E(R - \Delta y) = 2R \left(\frac{\Delta z_2 + \Delta z_1}{2} - \Delta y \right) + \Delta y^2 - \Delta z_1 \Delta z_2 \end{aligned}$$

$$y_E = \frac{1}{2(R - \Delta y)} \left\{ 2R \left(\frac{\Delta z_2 + \Delta z_1}{2} - \Delta y \right) + \Delta y^2 - \Delta z_1 \Delta z_2 \right\} \quad (\text{H.12})$$

Em suma, a partir das medidas Δz_1 , Δz_2 e Δy aferidas diretamente dos sensores de distância, as coordenadas do centro geométrico do rotor intermediário foram obtidas por meios das equações (H.8) e (H.12), a saber:

$$z_E = \frac{\Delta z_2 - \Delta z_1}{2}$$

$$y_E = \frac{1}{2(R - \Delta y)} \left\{ 2R \left(\frac{\Delta z_2 + \Delta z_1}{2} - \Delta y \right) + \Delta y^2 - \Delta z_1 \Delta z_2 \right\}$$

No caso de um aparato instrumental composto por quatro sensores de distância, dispostos ortogonalmente e diametralmente opostos dois a dois, a coordenada y_E do centro geométrico do rotor poderia ser obtida similarmente à coordenada z_E , ou seja, por meio da equação (H.13):

$$y_E = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{2} \quad (\text{H.13})$$

o que a princípio não traria vantagem alguma em termos de precisão na obtenção das coordenadas y_E e z_E , mas pelo contrário, traria a desvantagem de um custo desnecessário na hipótese de se adquirir um quarto sensor.

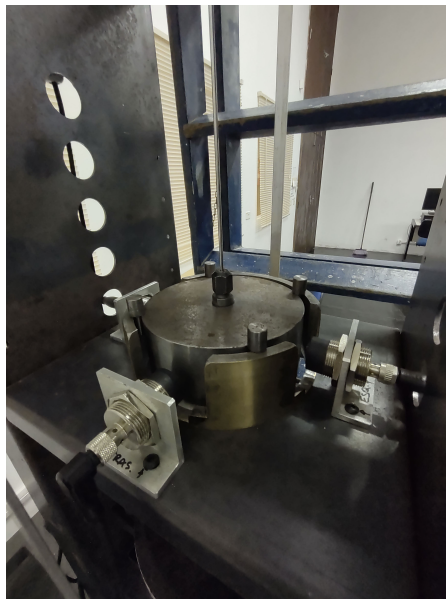
H.2 Ajustes e calibração dos sensores de distância

Os sensores de distância têm uma faixa de distância de medição entre $d_{min} = 3\text{ mm}$ e $d_{max} = 15\text{ mm}$, associando a 3 mm o valor de tensão de 0 V , e a 15 mm o valor de tensão de 10 V , com elevada precisão e estabilidade do sinal.

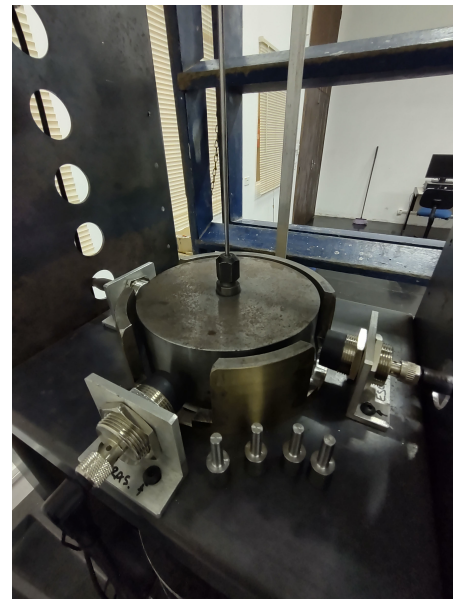
Por causa da limitação de 3 V para a tensão de entrada da placa de aquisição, foi necessário implementar um divisor de tensão, o que acabou inserindo uma oscilação no sinal de saída adquirido dos sensores de distância, dentro de um limite razoável. Foram traçadas, por meio de ensaios, as novas curvas de calibração de cada sensor, diferenciadas para cada sensor por conta da implementação do divisor de tensão. E o ajuste de posicionamento dos sensores foi realizado de modo que, uma vez fixado o rotor intermediário concêntrico ao estator, como ilustrado na figura (86), os valores adquiridos por cada sensor corresponderem ao valor médio ($\cong 1,5\text{ V}$) da nova faixa de tensão, de aproximadamente 0 V a aproximadamente 3 V .

Outro fator considerado no ajuste dos dados adquiridos foi o perfil da zona de sensibilidade local do sensor para um determinado obstáculo. A aquisição dos sinais, relativos à distância, é muito bem realizada para obstáculos metálicos que se movem ao longo da direção longitudinal de cada sensor. Para deslocamentos ortogonais do obstáculo em relação ao eixo principal do sensor, os valores de tensão adquiridos perdem precisão. No caso do posicionamento lateral do rotor intermediário, essa perda de precisão causa uma deformação na órbita adquirida para o rotor principal, se comparada à órbita real, como evidenciado na figura (87).

Na figura (87a), o contorno vermelho da órbita corresponde ao deslocamento manual do rotor intermediário, tangenciando a face interna do estator em toda a sua extensão.

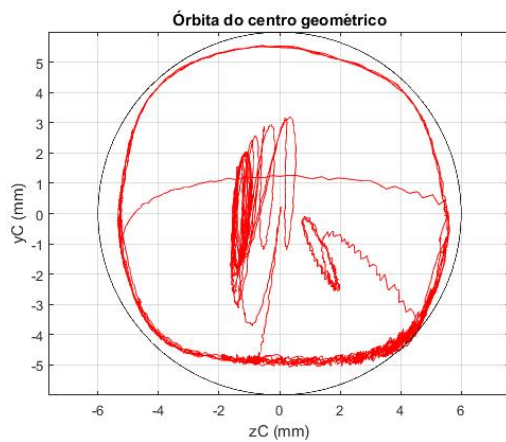


(a) Rotor concêntrico ao estator

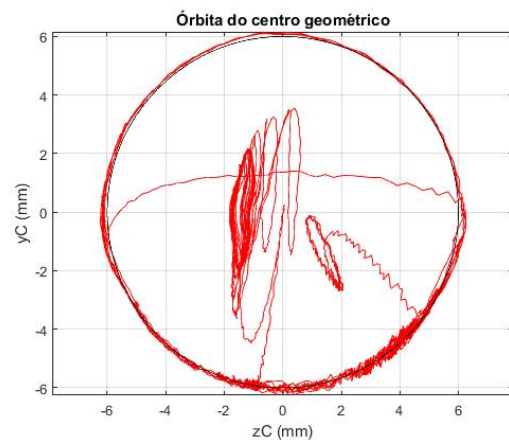


(b) Pinos separados

Figura 86 – Posicionamento do rotor intermediário, concêntrico com o estator



(a) Órbita original adquirida



(b) Órbita com ajuste

Figura 87 – Órbita do centro geométrico do rotor intermediário

Já a linha em cor preta corresponde a uma circunferência de raio 6 mm , indicando o limite máximo de deslocamento do centro geométrico do rotor, já que a folga radial entre a face lateral do rotor e a face interna do estator é de 6 mm . Esperava-se que a linha de contorno vermelha coincidissem com a linha circular de limite máximo de deslocamento, o que não ocorreu, como evidenciado na figura (87a). Atribuiu-se essa não coincidência de linhas à imprecisão do sinal adquirido pelos sensores por conta da componente ortogonal de deslocamento do rotor, em relação ao eixo longitudinal de cada sensor.

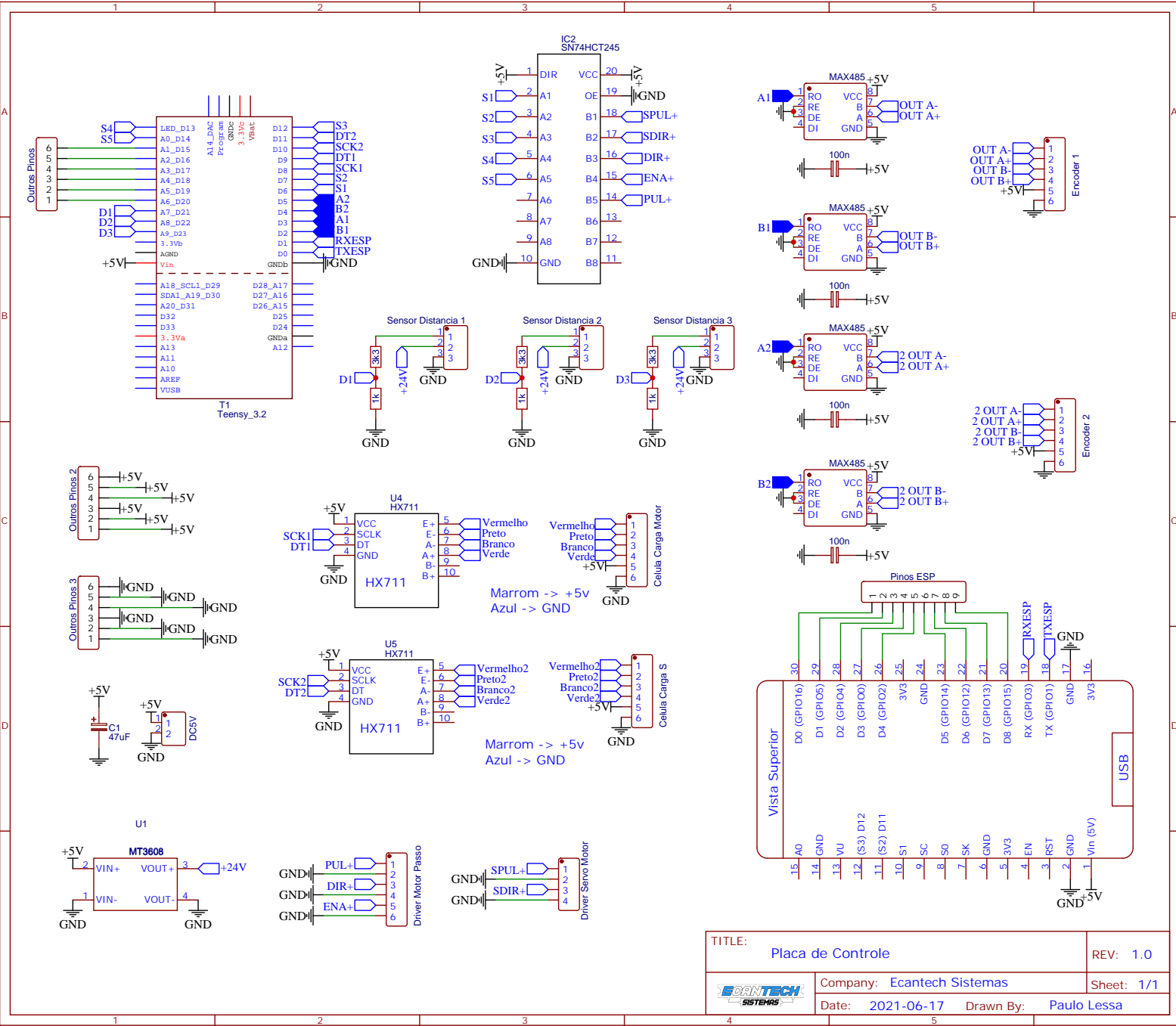
Para sanar o problema, foi realizado um ensaio simples para aquisição e armazenamento, numa tabela numérica, da distância de cada ponto do contorno, adquirido originalmente, ao ponto origem das coordenadas, o que corresponde ao módulo do vetor $\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} z_C & y_C \end{bmatrix}^T$, em função do ângulo do vetor \mathbf{r}_C com o eixo das abscissas, no sentido

anti-horário. De posse dessa tabela numérica, dado um par de coordenadas do centro geométrico, obteve-se o ângulo de orientação do rotor e, por meio de uma interpolação das distâncias originais armazenadas, calculou-se um fator de correção para o módulo do vetor \mathbf{r}_C para cada ângulo, de modo que o contorno vermelho coincidissem com o contorno em cor preta.

A figura (87b) ilustra o resultado da transformação realizada da órbita originalmente adquirida na órbita resultante do ajuste. A transformação foi aplicada não somente aos pontos do contorno da órbita adquirida mas a toda a trajetória do centro geométrico do rotor.

ANEXO I – Planta da placa de aquisição e processamento

A imagem a seguir apresenta a planta da placa de controle:



TITLE: Placa de Controle		REV: 1.0
Company: Ecantech Sistemas		Sheet: 1/1
Date: 2021-06-17	Drawn By: Paulo Lessa	

ANEXO J – Conceitos

Afim de facilitar a compreensão do texto, nesse capítulo foram abordadas os principais conceitos utilizados na elaboração das estratégias de controle, para a bancada experimental.

J.1 Equação de estados na forma normal

J.1.1 Dinâmica externa do sistema

Considere o sistema descrito pela equação de estados da equação (J.1).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A} \mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \mathbf{B} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{Z} \end{cases} \quad (\text{J.1})$$

sendo \mathbf{Z} é um vetor coluna $2n \times 1$, \mathbf{A} uma matriz quadrada $2n \times 2n$, \mathbf{B} uma matriz de ganho $2n \times m$, \mathbf{U}_c um vetor de entrada $m \times 1$, \mathbf{F} uma função não linear de \mathbf{Z} com dimensões $2n \times 1$, \mathbf{C} uma matriz $m \times 2n$ e \mathbf{y} um vetor de saída $m \times 1$. Seja inicialmente $m = 1$.

As equações de estado descritas na equação (J.1) na forma matricial foram obtidas a partir da equação genérica da dinâmica para uma classe de sistemas não lineares a seguir, sendo \mathbf{u} o vetor deslocamento $n \times 1$, \mathbf{M} a matriz de inércia $n \times n$, \mathbf{K} a matriz de rigidez $n \times n$, \mathbf{C}_a a matriz de amortecimento $n \times n$, \mathbf{F}_{nl} um campo vetorial $n \times 1$ não linear em \mathbf{u} e $\dot{\mathbf{u}}$, e \mathbf{B}_g o vetor de ganho $n \times 1$:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_a \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B}_g \mathbf{U}_c$$

considerando que:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_g \end{bmatrix}$$

Para se obter o equação de estados equação (J.1) na forma normal, é necessário conhecer qual derivada temporal de y depende diretamente do vetor de entrada U_c .

Para evitar expressões muito extensas no processo de derivação temporal, foram definidas por recorrência algumas funções auxiliares, conforme equação (J.2):

$$\begin{cases} \beta_0 = \mathbf{C} \\ \Psi_0(\mathbf{Z}) = \nabla[\beta_0 \mathbf{F}(\mathbf{Z})] \\ \beta_{k+1} = \beta_k \mathbf{A} \\ \Psi_{k+1}(\mathbf{Z}) = \nabla[\beta_{k+1} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \Psi_k(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z}))] \end{cases} \quad (\text{J.2})$$

A variável k é tal que $k = 1, 2, 3, \dots$, e o símbolo ∇ corresponde ao operador gradiente em relação ao vetor de estado \mathbf{Z} , de modo que $\nabla[\cdot]$ é um vetor linha $1 \times 2n$.

Seja $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{Z}$, conforme equação (J.1). Considerando também as funções auxiliares definidas na equação (J.2), tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} \\ &= \beta_0(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \mathbf{B}U_c) \\ &= \beta_1\mathbf{Z} - \beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \beta_0\mathbf{B}U_c \end{aligned}$$

Se $\beta_0\mathbf{B} \neq 0$, então:

$$\dot{\mathbf{y}} = a(\mathbf{Z}) + bU_c \quad (\text{J.3})$$

Na equação (J.3), $a(\mathbf{Z}) = \beta_1\mathbf{Z} - \beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ e $b = \beta_0\mathbf{B}$.

Caso $\beta_0\mathbf{B} = 0$, prossegue-se com mais uma diferenciação no tempo:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}} &= \nabla[\beta_1\mathbf{Z} - \beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})]\dot{\mathbf{Z}} \\ &= \nabla[\beta_1\mathbf{Z} - \beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})](\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \mathbf{B}U_c) \\ &= \beta_1\mathbf{A}\mathbf{Z} - \beta_1\mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \beta_1\mathbf{B}U_c - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})](\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})]\mathbf{B}U_c \\ &= \beta_2\mathbf{Z} - \beta_1\mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})](\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) + (\beta_1 - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})])\mathbf{B}U_c \end{aligned}$$

Se $(\beta_1 - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})])\mathbf{B} \neq 0$, então:

$$\ddot{\mathbf{y}} = a(\mathbf{Z}) + bU_c \quad (\text{J.4})$$

Na equação (J.4),

$$\begin{aligned} a(\mathbf{Z}) &= \beta_2\mathbf{Z} - \beta_1\mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})](\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ b(\mathbf{Z}) &= (\beta_1 - \nabla[\beta_0\mathbf{F}(\mathbf{Z})])\mathbf{B} \end{aligned}$$

ou melhor, considerando funções auxiliares na equação (J.2),

$$\begin{aligned} a(\mathbf{Z}) &= \beta_2 \mathbf{Z} - \beta_1 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_0(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ b(\mathbf{Z}) &= (\beta_1 - \Psi_0(\mathbf{Z}))\mathbf{B} \end{aligned}$$

Caso $(\beta_1 - \Psi_0(\mathbf{Z}))\mathbf{B} = 0$, então a diferenciação no tempo deve prosseguir, até que para um determinado valor $r \leq n$:

$$\begin{aligned} y &= \beta_0 \mathbf{Z} \\ \dot{y} &= \beta_1 \mathbf{Z} - \beta_0 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) \\ \ddot{y} &= \beta_2 \mathbf{Z} - \beta_1 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_0(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ y^{(3)} &= \beta_3 \mathbf{Z} - \beta_2 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_1(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ &\vdots \\ y^{(r-1)} &= \beta_{r-1} \mathbf{Z} - \beta_{r-2} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_{r-3}(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

$$y^{(r)} = a(\mathbf{Z}) + b(\mathbf{Z})U_c \quad (\text{J.6})$$

Na equação (J.6):

$$\begin{aligned} a(\mathbf{Z}) &= \beta_r \mathbf{Z} - \beta_{r-1} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_{r-2}(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ b(\mathbf{Z}) &= (\beta_{r-1} - \Psi_{r-2}(\mathbf{Z}))\mathbf{B} \end{aligned}$$

As equações (J.5) correspondem à: (i) equação de saída do sistema, conforme equação (J.1); (ii) e às primeiras $r - 1$ derivadas temporais de y , que por sua vez não dependem diretamente da variável de entrada U_c .

A equação (J.6) é denominada equação da *dinâmica externa* do sistema da equação (J.1). O parâmetro r é denominado *grau relativo* do sistema, e corresponde à menor ordem da derivada de y que depende diretamente da variável de entrada U_c .

Esse procedimento pode ser estendido para sistemas MIMO, ou seja, considerando $m > 1$ na equação (J.1). Basta efetuar o processo de derivação, acima descrito, para cada variável de saída y_i , com $i = 1, \dots, m$, até que, para um determinado grau relativo r_i , a derivada $y_i^{r_i}$ dependa diretamente de pelo menos uma das variáveis de entradas U_{c_i} .

Para sistemas MIMO, a forma geral da *dinâmica externa* é:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{Z}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{Z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}(\mathbf{Z}) & \cdots & b_{1m}(\mathbf{Z}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(\mathbf{Z}) & \cdots & b_{mm}(\mathbf{Z}) \end{bmatrix} \mathbf{U}_c \quad (\text{J.7})$$

O termo r_i é denominado grau relativo da variável y_i . O grau relativo total do sistema é dado por $r = r_1 + \dots + r_m$.

Maiores detalhes podem ser encontrados em (SLOTINE; LI et al., 1991).

J.1.2 Difeomorfismo

O sistema da equação (J.1) é de ordem $2n$, já que o vetor de estado Z tem dimensões $2n \times 1$.

Para descrever, na forma normal, o mesmo sistema, faz-se necessário definir um novo vetor de estado com mesma ordem. Para facilitar a compreensão do desenvolvimento que se segue, será utilizado o sistema SISO ($m = 1$). Esse procedimento é naturalmente extensivo a sistemas MIMO.

Seja $Y = [y, \dot{y}, \dots, y^{r-1}]^T$ um vetor coluna de ordem r , e seja $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n-r}]^T$ um vetor coluna de ordem $2n - r$. Define-se o novo vetor de estado para o sistema na forma normal, de ordem $2n$, como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}_d \mathbf{Y} \quad (\text{J.8})$$

As matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d são compostas por colunas da matriz identidade de ordem $2n$, de modo que o vetor \mathbf{X} pudesse ser reescrito como uma soma de termos exclusivamente dependentes de $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{Y} , respectivamente.

Uma vez que não necessariamente $r = 2n$, foi preciso definir o vetor $\boldsymbol{\mu}$ como complemento ao vetor \mathbf{Y} com relação à ordem do vetor de estado \mathbf{X} . O vetor $\boldsymbol{\mu}$ será chamado *vetor da dinâmica interna* do sistema, que deve ser definido como função das variáveis de estado, e de modo a não depender diretamente do vetor de entrada U_c , como descrito no próximo tópico.

Uma vez definidos os dois vetores de estado \mathbf{Z} e \mathbf{X} representantes do sistema, faz-se necessário definir uma relação que permita converter um no outro. Essa relação deve satisfazer o conceito de *difeomorfismo*.

Uma função $\Psi_{Dif} : R^n \rightarrow R^n$ é dita ser um *difeomorfismo* numa região Ω se é suave e sua inversa Ψ_{Dif}^{-1} existe e é suave (SLOTINE; LI et al., 1991).

Para o sistema em questão, definiu-se o difeomorfismo $\Psi_{Dif} : R^n \rightarrow R^n$ de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \Psi_{Dif}(\mathbf{Z}) \\ \mathbf{Z} &= \Psi_{Dif}^{-1}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (\text{J.9})$$

Uma vez definido o vetor da dinâmica interna $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\omega}_\mu(\mathbf{Z})$, e considerando-se as equações (J.5), a função $\Psi_{Dif} : R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ pode ser definida como:

$$\Psi_{Dif}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \beta_0 \mathbf{Z} \\ \beta_1 \mathbf{Z} - \beta_0 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) \\ \beta_2 \mathbf{Z} - \beta_1 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_0(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \mathbf{Z} - \beta_{r-2} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \Psi_{r-3}(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ \omega_\mu(\mathbf{Z}) \end{bmatrix} \quad (\text{J.10})$$

J.1.3 Dinâmica interna do sistema

Definir a dinâmica interna de um sistema não linear no caso de $r < 2n$ é uma tarefa para a qual não há um algoritmo universal.

Para o sistema em estudo, uma representação da dinâmica interna foi obtida partindo-se da hipótese mais simples:

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_\mu \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mu_1} & \mathbf{A}_{\mu_2} \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{Z} \quad (\text{J.11})$$

sendo \mathbf{M} a matriz de inércia do sistema. Como ficará mais claro a seguir, incluir a matriz de inércia \mathbf{M} na equação (J.11) facilita a obtenção de equações para a dinâmica interna, inclusive em sistemas com matriz de inércia variável.

Partindo-se das equações (J.10) e (J.11), redefiniu-se a função Ψ_{Dif} como:

$$\Psi_{Dif}(\mathbf{Z}) = \boldsymbol{\sigma}_{Dif} \mathbf{Z} - \phi_{Dif}(\mathbf{Z}) \quad (\text{J.12})$$

A matriz $\boldsymbol{\sigma}_{Dif}$ e a função $\phi_{Dif}(\mathbf{Z})$ foram definidas conforme as equações (J.13) e (J.14):

$$\boldsymbol{\sigma}_{Dif} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \mathbf{A}_\mu \end{bmatrix} \quad (\text{J.13})$$

$$\phi_{Dif}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_0 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) \\ \beta_1 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \Psi_0(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ \beta_2 \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \Psi_1(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ \vdots \\ \beta_{r-2} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \Psi_{r-3}(\mathbf{Z})(\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{F}(\mathbf{Z})) \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{J.14})$$

Para se obter a equação da dinâmica interna, considerou-se, numa primeira abordagem, $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = 0$ e, por consequência, $\phi_{Dif}(\mathbf{Z}) = 0$, tendo-se em conta a definição das funções auxiliares na equação (J.2). Nesse caso, o difeomorfismo se tornou uma função linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \boldsymbol{\sigma}_{Dif} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} &= \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{J.15})$$

Para o caso linear da equação (J.1) do sistema, a equação da dinâmica interna foi obtida a partir das equações (J.1), (J.8), (J.11) e (J.15) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}} &= \mathbf{A}_\mu \dot{\mathbf{Z}} \\ &= \mathbf{A}_\mu (\mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}\mathbf{U}_c) \\ &= \mathbf{A}_\mu (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}_c) \\ &= \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \{\mathbf{A}_d \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}_d \mathbf{Y}\} + \mathbf{A}_\mu \mathbf{B} \mathbf{U}_c \\ &= \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{A}_d \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{B}_d \mathbf{Y} + \mathbf{A}_\mu \mathbf{B} \mathbf{U}_c \end{aligned}$$

Assim, definindo-se as matrizes $\boldsymbol{\Gamma}_\mu = \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{A}_d$ e $\boldsymbol{\Sigma}_\mu = \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{B}_d$, chegou-se à equação da dinâmica interna:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\Gamma}_\mu \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}_\mu \mathbf{Y} + \mathbf{A}_\mu \mathbf{B} \mathbf{U}_c \quad (\text{J.16})$$

A equação (J.16) permite estabelecer alguns critérios para definição da matriz \mathbf{A}_μ :

- (i) $\mathbf{A}_\mu \mathbf{B} = 0$, pela definição da dinâmica interna;
- (ii) A matriz quadrada $\boldsymbol{\sigma}_{Dif}$ deve ser inversível;
- (iii) $Re_\lambda(\boldsymbol{\Gamma}_\mu) \leq 0$, ou seja, a parte real dos autovalores de $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ deve ser menor ou igual a zero, pela estabilidade da eq. (J.16);
- (iv) Convém que a matriz $\boldsymbol{\sigma}_{Dif}$ seja a mais bem condicionada possível.

Pela equação (J.11), escolher matriz \mathbf{A}_μ é equivalente a escolher as matrizes $\mathbf{A}_{\mu,1}$ e $\mathbf{A}_{\mu,2}$. O critério (i), por exemplo, pode ser expresso de forma mais simples:

$$\mathbf{A}_\mu \mathbf{B} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mu_1} & \mathbf{A}_{\mu_2} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_g \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mu_1} & \mathbf{A}_{\mu_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_g \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Uma vez satisfeitas estas condições, a equação da dinâmica interna é estabelecida a partir da equação (J.16) como:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\Gamma}_\mu \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}_\mu \mathbf{Y} \quad (\text{J.17})$$

Nota-se que a equação (J.17) foi definida de modo que tivesse como saída o vetor da dinâmica interna $\boldsymbol{\mu}$ e como entrada o vetor de saída da dinâmica externa \mathbf{Y} . Ambos os vetores são compostos por variáveis internas ao sistema, ou seja, sem dependência direta do vetor de entrada U_c .

Uma propriedade importante da dinâmica interna, para sistemas lineares, ou seja, com $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = 0$ na equação (J.1), é que os autovalores da matriz $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ permanecem inalterados para qualquer transformação $\mathbf{A}_\mu \mapsto \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu$, sendo \mathbf{P}_μ uma matriz quadrada não singular. Para demonstrar esse fato, para simplicidade de notação, a equação (J.13) foi reescrita de modo que:

$$\boldsymbol{\sigma}_{Dif} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{r-1} \\ \mathbf{A}_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{Dif_0} \\ \mathbf{A}_\mu \end{bmatrix}$$

A transformação $\mathbf{A}_\mu \mapsto \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu$ induz às transformações $\boldsymbol{\sigma}_{Dif} \mapsto \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{Dif}$ e $\boldsymbol{\Gamma}_\mu \mapsto \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_\mu$, de modo que:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{Dif} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{Dif_0} \\ \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{d_\sigma} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{Dif_0} \\ \mathbf{A}_\mu \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_{Dif}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_\mu = \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{Dif}^{-1} \mathbf{A}_d$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_\mu &= \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \bar{\sigma}_{Dif}^{-1} \mathbf{A}_d \\
&= \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \sigma_{Dif}^{-1} \mathbf{P}_\mu^{-1} \mathbf{A}_d \\
&= \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \sigma_{Dif}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{d_\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_\mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{d_\mu} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \sigma_{Dif}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_\mu^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \sigma_{Dif}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{d_\mu} \end{bmatrix} \mathbf{P}_\mu^{-1} \\
&= \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu \mathbf{A} \sigma_{Dif}^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{P}_\mu^{-1} \\
&= \mathbf{P}_\mu \Gamma_\mu \mathbf{P}_\mu^{-1}
\end{aligned}$$

Concluiu-se que $\bar{\Gamma}_\mu = \mathbf{P}_\mu \Gamma_\mu \mathbf{P}_\mu^{-1}$, ou seja, que as matrizes $\bar{\Gamma}_\mu$ e Γ_μ são semelhantes, e que por consequência, têm o mesmo polinômio característico. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\det(\bar{\Gamma}_\mu - \lambda \mathbf{I}_{d_\mu}) &= \det(\mathbf{P}_\mu \Gamma_\mu \mathbf{P}_\mu^{-1} - \lambda \mathbf{I}_{d_\mu}) \\
&= \det(\mathbf{P}_\mu \Gamma_\mu \mathbf{P}_\mu^{-1} - \lambda \mathbf{P}_\mu \mathbf{P}_\mu^{-1}) \\
&= \det(\mathbf{P}_\mu \{\Gamma_\mu - \lambda \mathbf{I}_{d_\mu}\} \mathbf{P}_\mu^{-1}) \\
&= \det(\mathbf{P}_\mu) \det(\Gamma_\mu - \lambda \mathbf{I}_{d_\mu}) \det(\mathbf{P}_\mu^{-1}) \\
&= \det(\Gamma_\mu - \lambda \mathbf{I}_{d_\mu})
\end{aligned}$$

Finalmente concluiu-se que, uma vez definido o vetor de estado para a dinâmica interna, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_\mu \mathbf{Z}$, a transformação $\mathbf{A}_\mu \mapsto \mathbf{P}_\mu \mathbf{A}_\mu$ preserva os autovalores da matriz Γ_μ , da equação (J.17).

J.1.4 Equação de estado na forma normal para o caso linear

Uma vez definidas a dinâmica interna do sistema e a função difeomorfismo, é relativamente simples reescrever a equação (J.1) original de estado para a sua forma normal.

Da equação (J.15) por meio de uma diferenciação temporal, obtém-se que:

$$\dot{\mathbf{X}} = \sigma_{Dif} \dot{\mathbf{Z}} \quad (\text{J.18})$$

Das equações (J.1) (sem o termo não linear) e (J.18), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{X}} &= \sigma_{Dif} \dot{\mathbf{Z}} \\
&= \sigma_{Dif} (\mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{B} \mathbf{U}_c) \\
&= \sigma_{Dif} \mathbf{A} \sigma_{Dif}^{-1} \mathbf{X} + \sigma_{Dif} \mathbf{B} \mathbf{U}_c
\end{aligned}$$

Definindo-se as matrizes $\mathbf{A}_{fn} = \boldsymbol{\sigma}_{Dif} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_{Dif}^{-1}$ e $\mathbf{B}_{fn} = \boldsymbol{\sigma}_{Dif} \mathbf{B}$, tem-se a equação de estados na forma normal:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_{fn} \mathbf{X} + \mathbf{B}_{fn} \mathbf{U}_c \quad (\text{J.19})$$

J.1.5 Inversão da função difeomorfismo no caso não linear

Para o caso não linear do sistema, ou seja, com $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \neq 0$, a inversão da função $\boldsymbol{\Psi}_{Dif}$ na equação (J.12) não é direta. Enquanto no caso linear, a inversão de $\boldsymbol{\Psi}_{Dif}$ corresponde à simples inversão algébrica da matriz $\boldsymbol{\sigma}_{Dif}$, conforme a equação (J.15), no caso não linear, recai-se num problema de ponto fixo, sendo necessário um chute inicial \mathbf{Z}_0 para a resolução do sistema de equação não linear $\boldsymbol{\Psi}_{Dif}(\mathbf{Z}) = \mathbf{X}$ por método iterativo, para um dado vetor \mathbf{X} , ou seja:

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Psi}_{Dif}^{-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_0) \quad (\text{J.20})$$

No presente trabalho, optou-se pelo método iterativo de Newton-Raphson para resolução de sistemas de equação não lineares, como detalhado nos próximos capítulos.

J.2 Modos deslizantes

Nesta seção, é apresentado o conceito de modos deslizantes, aplicado à definição de uma estratégia de controle por seguimento de trajetória, para sistemas SISO e MIMO. Toda a exposição é detalhada a partir de um sistema SISO, mas o conceito de modos deslizantes é naturalmente extensivo a sistemas MIMO com mesmo número de entradas e saídas, como exposto no fim da seção.

A principal referência utilizada nesta exposição foi (SLOTINE; LI et al., 1991).

Considere um sistema dinâmico SISO, com entrada u e saída x , definido pela equação (J.21):

$$x^{(n)} = a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X})u \quad (\text{J.21})$$

sendo \mathbf{X} o vetor de estado definido pela equação (J.22), $a: R^n \rightarrow R$ e $b: R^n \rightarrow R$ campos escalares de \mathbf{X} , com:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \dots & x^{(n-1)} \end{bmatrix}^T \quad (\text{J.22})$$

A trajetória desejada para o sistema é definida conforme a equação (J.23):

$$\mathbf{X}_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) & \dot{x}_d(t) & \cdots & x_d^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}^T \quad (\text{J.23})$$

A função vetorial *erro de seguimento* é definida como a diferença entre x e $x_d(t)$:

$$\tilde{x} = x - x_d(t)$$

Outro conceito importante é o de variável de escorregamento s , definida como função de t e de \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} s(t, \mathbf{X}) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}, \quad \lambda > 0 \\ &= \tilde{x}^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} \lambda \tilde{x}^{(n-2)} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} \lambda^{n-2} \dot{\tilde{x}} + \lambda^{n-1} \tilde{x} \\ &= x^{(n-1)} - x_r^{(n-1)} \end{aligned}$$

$$s(t, \mathbf{X}) = x^{(n-1)}(\mathbf{X}) - x_r^{(n-1)}(t, \mathbf{X}) \quad (\text{J.24})$$

$$x_r^{(n-1)} = x_d^{(n-1)} - \binom{n-1}{1} \lambda \tilde{x}^{(n-2)} - \cdots - \binom{n-1}{n-2} \lambda^{n-2} \dot{\tilde{x}} - \lambda^{n-1} \tilde{x} \quad (\text{J.25})$$

Para $s(t, \mathbf{X}) = 0$, tem-se uma *superfície de escorregamento*. Esse nome é sugestivo, já que se o vetor de estado \mathbf{X} satisfaz essa equação, então tenderá exponencialmente para a trajetória desejada $\mathbf{X}_d(t)$ quando t cresce indefinidamente.

Uma estratégia de controle baseada no conceito de modos deslizantes tem como objetivo tornar a superfície de escorregamento atrativa para o sistema, caso o vetor de estado \mathbf{X} seja tal que $|s(t, \mathbf{X})| > 0$, o que leva à uma definição da *condição de escorregamento* para definição da lei de controle:

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta |s|, \text{ para } |s| > 0; \quad \eta > 0 \quad (\text{J.26})$$

A condição de escorregamento da equação (J.25) satisfaz a condição de estabilidade de Lyapunov, se se define a função de Lyapunov do sistema como:

$$V(t, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} s^2(t, \mathbf{X}) \quad (\text{J.27})$$

A seguir, é anunciado o teorema J.1 (LYAPUNOV, 1992) que justifica a definição da condição de escorregamento.

Theorem J.1 *Se as equações diferenciais de um sistema submetido e perturbação são tais que seja possível encontrar uma função definida V , da qual a derivada \dot{V} seja uma função de sinal fixo e oposto ao de V , ou se reduza identicamente a zero; então o movimento não perturbado do sistema é estável.*

O conceito de *modos deslizantes* e a *condição de escorregamento* permitem a definição de uma lei de controle por seguimento de trajetória, para o sistema da equação (J.21), mesmo com imprecisões na estimação de parâmetros das funções $a(\mathbf{X})$ e $b(\mathbf{X})$.

J.2.1 Lei de controle por modos deslizantes para sistemas SISO

Seja $\hat{a}(\mathbf{X})$ uma estimativa para a função $a(\mathbf{X})$, e $\hat{b}(\mathbf{X})$ uma estimativa para a função $b(\mathbf{X})$. Seja $F : R^n \rightarrow R$ uma função do vetor de estado \mathbf{X} tal que:

$$F \geq |a - \hat{a}| = |\Delta a| \quad (\text{J.28})$$

Seja $\delta : R^n \rightarrow R$ também uma função do vetor \mathbf{X} , limitada, e D uma constante, $0 < D < 1$, tais que:

$$\begin{aligned} b &= \hat{b} \{1 + \delta\} \\ |\delta(\mathbf{X})| &\leq D, \text{ para todo } \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{J.29})$$

Importante destacar que afirmar que $b = \hat{b} \{1 + \delta\}$ é o mesmo que afirmar que $\delta = \frac{\Delta b}{\hat{b}}$. Com efeito:

$$\begin{aligned} \hat{b} \{1 + \delta\} = b &\Rightarrow \hat{b} + \hat{b} \delta = b \\ &\Rightarrow \hat{b} \delta = b - \hat{b} \\ &\Rightarrow \delta = \frac{b - \hat{b}}{\hat{b}} = \frac{\Delta b}{\hat{b}} \end{aligned}$$

Sendo assim, δ seria uma medida de variabilidade relativa de b .

Seja η uma constante positiva, utilizada na condição de escorregamento, equação (J.26), e $K : R^n \rightarrow R$ uma função ganho, definida como:

$$(1 - D)K = F + \eta + D|\hat{U}_c| \quad (\text{J.30})$$

tal que:

$$\begin{aligned} \hat{U}_c(t, \mathbf{X}) &= x_r^{(n)}(t, \mathbf{X}) - \hat{a}(\mathbf{X}) \\ x_r^{(n)} &= \frac{d}{dt} x_r^{(n-1)} \end{aligned} \quad (\text{J.31})$$

sendo $x_r^{(n-1)}$ definida na equação (J.25).

Vale destacar que sendo o ganho K obtido pela equação (J.30), então K é positivo. Com efeito:

$$K = \frac{1}{1 - D} (F + \eta + D |\hat{U}_c|) > 0$$

Com todas essas considerações, pode-se afirmar que a equação (J.32) apresenta uma proposta de controlador para o sistema da equação (J.21):

$$U_c = \hat{b}^{-1} \{ \hat{U}_c - K \text{sign}(s) \} \quad (\text{J.32})$$

Para isso, basta demonstrar que a equação (J.32) satisfaz a condição de escorregamento da equação (J.26). Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= s \dot{s} \\ &= s \{ x^{(n)} - x_r^{(n)} \} \\ &= s \{ a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X}) U_c - x_r^{(n)} \} \end{aligned}$$

Substituindo-se a equação (J.32) na expressão de U_c , tem-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \{ a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X}) \hat{b}(\mathbf{X})^{-1} [\hat{U}_c - K \text{sign}(s)] - x_r^{(n)} \}$$

Substituindo-se equação (J.29) na expressão de $b(\mathbf{X})$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= s \{ a(\mathbf{X}) + \hat{b}(\mathbf{X}) (1 + \delta) \hat{b}(\mathbf{X})^{-1} [\hat{U}_c - K \text{sign}(s)] - x_r^{(n)} \} \\ &= s \{ a(\mathbf{X}) + (1 + \delta) [\hat{U}_c - K \text{sign}(s)] - x_r^{(n)} \} \\ &= s \{ a(\mathbf{X}) + [\hat{U}_c - K \text{sign}(s)] + \delta [\hat{U}_c - K \text{sign}(s)] - x_r^{(n)} \} \end{aligned}$$

Substituindo-se equação (J.31) na expressão de \hat{U}_c , tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= s \{ a(\mathbf{X}) + [x_r^{(n)} - \hat{a}(\mathbf{X}) - K \text{sign}(s)] + \delta [\hat{U}_c - K \text{sign}(s)] - x_r^{(n)} \} \\ &= s \{ a(\mathbf{X}) - \hat{a}(\mathbf{X}) - K \text{sign}(s) + \delta \hat{U}_c - \delta K \text{sign}(s) \} \\ &= s \{ a(\mathbf{X}) - \hat{a}(\mathbf{X}) + \delta \hat{U}_c \} - s \{ K \text{sign}(s) + \delta K \text{sign}(s) \} \end{aligned}$$

Considerando-se as desigualdades das equações (J.28) e (J.29), e que $|s| = \text{sign}(s) s$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &\leq |s| \{F + D |\hat{U}_c|\} - s \{1 + \delta\} K \operatorname{sign}(s) \\ &= |s| \{F + D |\hat{U}_c| - (1 + \delta) K\} \end{aligned}$$

Substituindo a equação (J.30) na expressão de $F + D |\hat{U}_c|$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &\leq |s| \{F + D |\hat{U}_c| - (1 + \delta) K\} \\ &= |s| \{(1 - D) K - \eta - (1 + \delta) K\} \\ &= |s| \{-\eta - (D + \delta) K\} \end{aligned}$$

Por fim, da equação (J.29), pode-se afirmar que $D + \delta \geq 0$. Com efeito:

$$\begin{aligned} |\delta| \leq D &\Rightarrow -D \leq \delta \leq D \\ &\Rightarrow 0 = -D + D \leq D + \delta \leq 2D \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &\leq |s| \{-\eta - (D + \delta) K\} \\ &\leq -\eta |s| \end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

J.2.2 Lei de controle com camada limite para sistemas SISO

O principal inconveniente da lei de controle definida na equação (J.32), já bem conhecido na literatura, é o problema da alta frequência de chaveamento no sinal de atuação (SHTESSEL et al., 2014), efeito também conhecido como *chattering* (SLOTINE; LI et al., 1991). Esse feito pode levar, por exemplo, a um super aquecimento do atuador. Uma das técnicas adotadas para minimizar o *chattering* é a inclusão, na lei de controle, do conceito de *camada limite*.

J.2.2.1 Conceito de camada limite

Seja $B(t)$ um conjunto definido como:

$$B(t) = \{\mathbf{X}, |s(t, \mathbf{X})| < \Phi\}, \Phi > 0$$

sendo \mathbf{X} o vetor de estado definido na equação (J.22).

O conjunto $B(t)$ é denominado *camada limite*, e seu principal efeito na lei de controle é atuar como um filtro passa baixa, reduzindo praticamente a zero as altas frequências de chaveamento (SLOTINE; LI et al., 1991).

O principal inconveniente no uso desse conceito é a redução de precisão do controlador no seguimento de uma trajetória desejada, equação (J.23), o que deve ser considerado como um *trade off* no projeto do controlador.

No sistema do presente trabalho, foram obtidos resultados satisfatórios, como exposto nos próximos capítulos.

A partir do conceito de camada limite, a principal estratégia para definição da lei de controle é tornar o conjunto $B(t)$ atrativo para o sistema.

Expressando-se a atratividade da camada limite de forma mais precisa (SLOTINE; LI et al., 1991):

$$\begin{aligned} \text{Se } s \geq \Phi, \quad \text{então } \frac{d}{dt} [s - \Phi] &\leq -\eta \\ \text{Se } s \leq -\Phi, \quad \text{então } \frac{d}{dt} [s - (-\Phi)] &\geq \eta \end{aligned} \quad (\text{J.33})$$

As condicionais em equação (J.33) podem ser reescritas de modo mais conveniente na *condição de escorregamento* a seguir (SLOTINE; LI et al., 1991):

$$\text{Se } |s| \geq \Phi, \quad \text{então } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq (\dot{\Phi} - \eta) |s| \quad (\text{J.34})$$

Considerando, então, a formulação de camada limite na definição da lei de controle, a equação (J.32) passou por uma modificação:

$$U_c = \hat{b}^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \text{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \quad (\text{J.35})$$

sendo $\bar{K} = K - D_{\Phi} \dot{\Phi}$ (SLOTINE; LI et al., 1991).

Comparando-se as definições de lei de controle expressas nas equações (J.32) e (J.35), nota-se que o termo $K \text{sign}(s)$ foi substituído por $\bar{K} \text{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right)$. A descontinuidade da função sinal *sign* foi substituída pela suavização da função saturação *sat* em torno da origem. A função saturação escolhida no presente trabalho foi definida utilizando-se a função tangente hiperbólica, conforme a equação (J.36). A figura (88) ilustra as funções de chaveamento utilizadas nas diferentes definições da lei de controle.

$$\text{sign}(\nu) = \begin{cases} -1 & \nu < 1 \\ 0 & \nu = 0 \\ 1 & \nu \geq 1 \end{cases}, \quad \text{sat}(\nu) = \tanh(\pi\nu) \quad (\text{J.36})$$

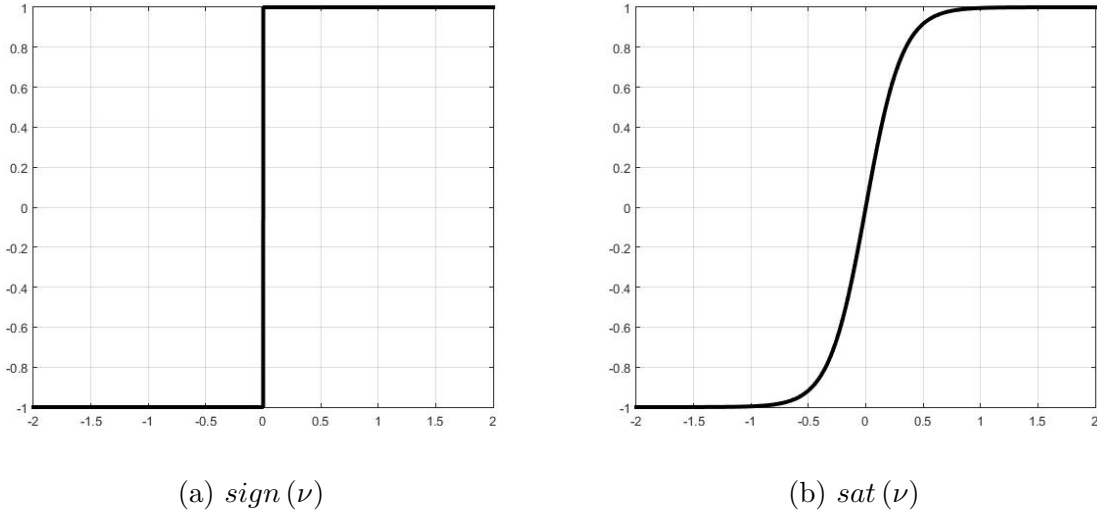


Figura 88 – Funções de chaveamento

J.2.2.2 Comportamento dinâmico do sistema no interior da camada limite

Para completar a redefinição da lei de controle, na equação (J.35), é preciso ainda definir a expressão do ganho \bar{K} em função dos parâmetros já definidos até então. Para esse fim, foi necessário considerar o comportamento do sistema no interior da camada limite, ou seja, quando $|s| < \Phi$.

Da equação (J.24), deduz-se que:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= x^{(n)} - x_r^{(n)} \\ &= a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X})U_c - x_r^{(n)} \end{aligned}$$

Substituindo U_c pela nova definição da lei de controle, equação (J.35), tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X})\hat{b}(\mathbf{X})^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \\ &= a(\mathbf{X}) + \hat{b}(\mathbf{X}) \{1 + \delta\} \hat{b}(\mathbf{X})^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \\ &= a(\mathbf{X}) + \{1 + \delta\} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \\ &= a(\mathbf{X}) + \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} + \delta \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \\ &= a(\mathbf{X}) + \left\{ x_r^{(n)} - \hat{a}(\mathbf{X}) - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} + \delta \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \\ &= a(\mathbf{X}) - \hat{a}(\mathbf{X}) - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) + \delta \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \\ &= -(1 + \delta) \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) + \Delta a(\mathbf{X}) + \delta \left\{ \hat{U}_c \right\} \end{aligned}$$

Considerando que no interior da camada limite é válida a seguinte aproximação:

$$sat(\nu) \cong \nu$$

chagou-se, dessa forma, a uma expressão aproximada de \dot{s} :

$$\dot{s} \cong -(1 + \delta) \bar{K}(\mathbf{X}) \frac{s}{\Phi} + \Delta \hat{a}(t, \mathbf{X}) \quad (\text{J.37})$$

Uma melhor aproximação foi obtida para a equação (J.37), considerando que no interior da camada limite $\mathbf{X} \cong \mathbf{X}_d$ (SLOTINE; LI et al., 1991):

$$\dot{s} \cong -(1 + \delta) \bar{K}(\mathbf{X}_d) \frac{s}{\Phi} + \Delta \hat{a}(t, \mathbf{X}_d) + O(\varepsilon) \quad (\text{J.38})$$

A equação (J.38) corresponde aproximadamente a uma equação diferencial de primeira ordem em s .

Supondo-se como verdadeiro, para uma frequência de corte $\lambda > 0$, que:

$$\frac{\bar{K}(\mathbf{X}_d)}{\Phi} \cong \frac{\lambda}{1 - D} \quad (\text{J.39})$$

então equação (J.38) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{s} \cong -\lambda \frac{1 + \delta}{1 - D} s + \Delta \hat{a}(t, \mathbf{X}_d) + O(\varepsilon) \quad (\text{J.40})$$

Conclui-se que a aproximação de $\frac{\bar{K}(\mathbf{X}_d)}{\Phi}$ assumida na equação (J.39) garante que o coeficiente

$$\lambda_s = -\lambda \frac{1 + \delta}{1 - D}$$

da variável s na equação (J.40) seja negativo, de modo que a equação diferencial em s seja estável.

Com efeito, recordando que $0 < D < 1$,

$$\begin{aligned} |\delta| < D &\Rightarrow -D \leq \delta \leq D \\ &\Rightarrow 1 - D \leq 1 + \delta \leq 1 + D \\ &\Rightarrow 1 \leq \frac{1 + \delta}{1 - D} \leq \frac{1 + D}{1 - D} \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{1 + \delta}{1 - D} > 0$.

Partindo-se da equação (J.39), é possível definir, enfim, uma equação para a dinâmica da camada limite, que garanta que, uma vez que o sistema tenha atingido o interior da camada, aí permaneça. Tal comportamento do sistema estaria garantido pela estabilidade da equação (J.38) na variável de escorregamento s .

A dinâmica da camada limite é, então, obtida conforme a equação (J.41):

$$D_{\Phi} \dot{\Phi} + \frac{\lambda}{1-D} \Phi = K(\mathbf{X}_d) \quad (\text{J.41})$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{K}(\mathbf{X}_d)}{\Phi} &= \frac{\lambda}{1-D} \Rightarrow \bar{K}(\mathbf{X}_d) = \frac{\lambda}{1-D} \Phi \\ &\Rightarrow K(\mathbf{X}_d) - D_{\Phi} \dot{\Phi} = \frac{\lambda}{1-D} \Phi \\ &\Rightarrow D_{\Phi} \dot{\Phi} + \frac{\lambda}{1-D} \Phi = K(\mathbf{X}_d) \end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

Uma última observação sobre a equação (J.41) é que se trata de uma equação diferencial de primeira ordem em Φ com entrada \mathbf{X}_d , ou seja, a camada limite dinâmica depende apenas da trajetória desejada, e não do vetor de estado do sistema.

Tendo-se em conta que $\frac{\lambda}{1-D} > 0$, o coeficiente D_{Φ} , na equação (J.41), deve ser escolhido de modo que: (i) a equação (J.41) permaneça estável em Φ ; e (ii) a condição de escorregamento, equação (J.34), seja satisfeita.

J.2.2.3 Lei de controle e condição de escorregamento com camada limite

Nessa seção, demonstra-se sob que condições a lei de controle da equação (J.35),

$$\begin{aligned} U_c &= \hat{b}^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \\ \bar{K} &= K - D_{\Phi} \dot{\Phi} \end{aligned}$$

satisfaz a condição de escorregamento, equação (J.34), ou seja:

$$\text{se } |s| \geq \Phi, \text{ então } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq (\dot{\Phi} - \eta) |s|$$

Com efeito, seja s tal que $|s| \geq \Phi$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= s \dot{s} \\
&= s \left\{ x^{(n)} - x_r^{(n)} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X}) U_c - x_r^{(n)} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X}) \hat{b}(\mathbf{X})^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) + \hat{b}(\mathbf{X}) \{1 + \delta\} \hat{b}(\mathbf{X})^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) + \{1 + \delta\} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) + \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} + \delta \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) + \left\{ x_r^{(n)} - \hat{a}(\mathbf{X}) - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} - x_r^{(n)} + \delta \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \right\} \\
&= s \left\{ a(\mathbf{X}) - \hat{a}(\mathbf{X}) - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) + \delta \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \right\} \\
&= s \left\{ \Delta a - (1 + \delta) \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) + \delta \left\{ \hat{U}_c \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Considerando a identidade $\bar{K} = K - D_\Phi \dot{\Phi}$, tem-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \left\{ \Delta a - (1 + \delta) (K - D_\Phi \dot{\Phi}) \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) + \delta \left\{ \hat{U}_c \right\} \right\}$$

Se $|s| \geq \Phi$, então $\operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) = \operatorname{sign}(s)$, logo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 &= s \left\{ \Delta a + \delta \left\{ \hat{U}_c \right\} - (1 + \delta) (K - D_\Phi \dot{\Phi}) \operatorname{sign}(s) \right\} \\
&\leq |s| \left\{ F + D \left| \hat{U}_c \right| - (1 + \delta) K + (1 + \delta) D_\Phi \dot{\Phi} \right\} \\
&= |s| \left\{ (1 - D) K - \eta - (1 + \delta) K + (1 + \delta) D_\Phi \dot{\Phi} \right\} \\
&= |s| \left\{ -\eta - (D + \delta) K + (1 + \delta) D_\Phi \dot{\Phi} \right\} \\
&\leq |s| \left\{ -\eta + (1 + \delta) D_\Phi \dot{\Phi} \right\}
\end{aligned}$$

Da última desigualdade, conclui-se que, para que a condição de escorregamento seja satisfeita, é necessário que:

$$(1 + \delta) D_\Phi \dot{\Phi} \leq \dot{\Phi} \tag{J.42}$$

Se $\dot{\Phi} = 0$, então a condição equação (J.42) é sempre satisfeita.

Se $\dot{\Phi} > 0$, então $(1 + \delta) D_\Phi < 1$, para todo valor de δ . Uma possibilidade seria $D_\Phi = \frac{1}{1 + \delta}$. Com efeito:

$$(1 + \delta) D_{\Phi} \dot{\Phi} = \frac{1 + \delta}{1 + D} \dot{\Phi} \\ \leq \dot{\Phi}, \quad \text{para todo } \delta \text{ tal que } |\delta| \leq D$$

Se $\dot{\Phi} < 0$, então $(1 + \delta) D_{\Phi} > 1$, para todo valor de δ . Uma possibilidade seria $D_{\Phi} = \frac{1}{1-D}$. Com efeito:

$$(1 + \delta) D_{\Phi} \dot{\Phi} = \frac{1 + \delta}{1 - D} \dot{\Phi} \\ \leq \dot{\Phi}, \quad \text{para todo } \delta \text{ tal que } |\delta| \leq D$$

Logo, uma expressão para o coeficiente D_{Φ} que satisfaz a condição de escorregamento seria:

$$D_{\Phi}(\dot{\Phi}) = \frac{1}{1 + D} (\dot{\Phi} \geq 0) + \frac{1}{1 - D} (\dot{\Phi} \leq 0) \quad (\text{J.43})$$

A última condição a se verificar é a estabilidade da equação (J.41).

Se $\dot{\Phi} = 0$, então:

$$\frac{\lambda}{1 - D} \Phi = K(\mathbf{X}_d) \quad (\text{J.44})$$

que é uma condição de equilíbrio.

Se $\dot{\Phi} > 0$, então:

$$\frac{1}{1 + D} \dot{\Phi} + \frac{\lambda}{1 - D} \Phi = K(\mathbf{X}_d) \Rightarrow \dot{\Phi} + \lambda \frac{1 + D}{1 - D} \Phi = (1 + D) K(\mathbf{X}_d)$$

Verifica-se, assim, que para $\dot{\Phi} > 0$, o coeficiente $\lambda \frac{1+D}{1-D}$ é positivo. Logo a equação (J.41) é estável.

Por fim, se $\dot{\Phi} < 0$, então:

$$\frac{1}{1 - D} \dot{\Phi} + \frac{\lambda}{1 - D} \Phi = K(\mathbf{X}_d) \Rightarrow \dot{\Phi} + \lambda \Phi = (1 - D) K(\mathbf{X}_d)$$

Verifica-se, assim, que para $\dot{\Phi} < 0$, o coeficiente de Φ , que é igual a λ , é positivo. Logo a equação (J.41) também é estável.

Em síntese, a lei de controle:

$$\begin{aligned}
U_c &= \hat{b}^{-1} \left\{ \hat{U}_c - \bar{K} \operatorname{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right) \right\} \\
\bar{K} &= K - D_\Phi (\dot{\Phi}) \dot{\Phi} \\
D_\Phi (\dot{\Phi}) &= \frac{1}{1+D} (\dot{\Phi} \geq 0) + \frac{1}{1-D} (\dot{\Phi} \leq 0)
\end{aligned} \tag{J.45}$$

satisfaz a condição de escorregamento, mantendo estável a dinâmica da camada limite.

Combinando-se a equação (J.41) com a expressão do ganho na equação (J.45), chega-se a uma formulação mais simples para o ganho \bar{K} :

$$\bar{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_d, \Phi) = K(\mathbf{X}) - K(\mathbf{X}_d) + \frac{\lambda}{1-D} \Phi \tag{J.46}$$

J.2.3 Lei de controle por modos deslizantes para sistemas MIMO

Para elaboração dessa seção, baseou-se fundamentalmente em (SLOTINE; LI et al., 1991).

Considere um sistema não linear com m entradas e m saídas:

$$x_i^{n_i} = a_i(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\mathbf{X}) u_j \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m \tag{J.47}$$

O vetor de estado \mathbf{X} é a junção de todas as $n_i - 1$ primeiras derivadas de x_i , com $i = 1, \dots, m$, ou seja:

$$\mathbf{X} = \left[x_1 \quad \dots \quad x_1^{(n_1-1)} \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_i^{(n_i-1)} \quad \dots \quad x_m \quad \dots \quad x_m^{(n_m-1)} \right]^T \tag{J.48}$$

A matriz $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ é quadrada, $m \times m$, e assumida invertível em todo os espaço de estados.

A matriz estimada $\hat{\mathbf{B}}$ é também assumida invertível em todo o espaço de estado, e $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ na ausência de parâmetros de incerteza.

A incerteza de parâmetros é quantificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|\hat{a}_i - a_i| &< F_i, \quad i = 1, \dots, m \\
\mathbf{B} &= \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{I} + \mathbf{\Delta}), \quad |\Delta_{ij}| < D_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{J.49}$$

O vetor de escorregamento \mathbf{s} , com componentes s_i é definido como:

$$s_i = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n_i-1} \tilde{x}_i = x_i^{(n_i-1)} - x_{r_i}^{(n_i-1)} \tag{J.50}$$

sendo $x_{r_i}^{(n_i-1)}$ definido como na equação (J.25).

A condição de escorregamento para cada variável de saída é:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 \leq -\eta_i |s_i| \quad (\eta_i > 0) \quad (\text{J.51})$$

Seja $\mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{s})$ o vetor coluna com componentes $k_i \text{sign}(s_i)$.

Sendo assim, a lei de controle que satisfaz as condições de escorregamento da equação (J.51) é:

$$\mathbf{U}_c = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{U}}_c - \mathbf{K} \text{sign}(\mathbf{s}) \right), \quad \hat{\mathbf{U}}_c = \mathbf{x}_r^{(n)} - \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{J.52})$$

sendo $\mathbf{x}_r^{(n)} = [x_{r_i}^{(n_i)}]_{i=1,\dots,m}$ e $\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_i]_{i=1,\dots,m}$ vetores coluna.

Escrevendo-se a equação (J.52) em notação indicial, tem-se que:

$$u_j = \sum_{l=1}^m \hat{b}_{jl}^- \left(x_{r_l}^{n_l} - \hat{a}_l - k_l \text{sign}(s_l) \right) \quad (\text{J.53})$$

sendo \hat{b}_{jl}^- o termo geral da matriz $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$.

Assim como para sistemas SISO, do modo similar, o ganho k_l na equação (J.53) satisfaz a seguinte condição:

$$(1 - D_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i} D_{ij} k_j \geq F_i + \eta_i + \sum_{j=1}^m D_{ij} |\hat{U}_{c_j}|, \quad \hat{U}_{c_j} = x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j$$

Para minimizar o valor do ganho, basta escolher a condição mínima para k_i :

$$(1 - D_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i} D_{ij} k_j = F_i + \eta_i + \sum_{j=1}^m D_{ij} |\hat{U}_{c_j}| \quad (\text{J.54})$$

Para demonstrar que a equação (J.53) satisfaz a condição de escorregamento equação (J.51), é preciso demonstrar antes que, aplicando-se a equação (J.53) na primeira derivada temporal da equação (J.50):

$$\dot{s}_i = a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} \left(x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j \right) - (1 + \Delta_{ii}) k_i \text{sign}(s_i) - \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} k_j \text{sign}(s_j) \quad (\text{J.55})$$

Com efeito, seja $\bar{\delta}_l = x_{r_l}^{n_l} - \hat{a}_l - k_l \text{sign}(s_l)$, logo:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_i &= x_i^{(n_i)} - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} \sum_{l=1}^m \hat{b}_{jl}^- \left(x_{r_l}^{n_l} - \hat{a}_l - k_l \operatorname{sign}(s_l) \right) - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \sum_{j=1}^m \left(\hat{b}_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \hat{b}_{kj} \right) \sum_{l=1}^m \hat{b}_{jl}^- \bar{\delta}_l - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \hat{b}_{ij} \hat{b}_{jl}^- \bar{\delta}_l + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \hat{b}_{kj} \right) \left(\sum_{l=1}^m \hat{b}_{jl}^- \bar{\delta}_l \right) - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \sum_{l=1}^m \delta_{il} \bar{\delta}_l + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \hat{b}_{jl}^- \bar{\delta}_l \left(\sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \hat{b}_{kj} \right) - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \bar{\delta}_i + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \hat{b}_{kj} \hat{b}_{jl}^- \bar{\delta}_l - x_{r_i}^{(n_i)} \\
&= a_i + \bar{\delta}_i - x_{r_i}^{(n_i)} + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \bar{\delta}_l \sum_{j=1}^m \hat{b}_{kj} \hat{b}_{jl}^- \\
&= a_i + \bar{\delta}_i - x_{r_i}^{(n_i)} + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \delta_{kl} \bar{\delta}_l \\
&= a_i + \bar{\delta}_i - x_{r_i}^{(n_i)} + \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \bar{\delta}_k
\end{aligned}$$

Retomando-se a identidade $\bar{\delta}_l = x_{r_l}^{n_l} - \hat{a}_l - k_l \operatorname{sign}(s_l)$ na última expressão, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_i &= a_i + \left(x_{r_i}^{n_i} - \hat{a}_i - k_i \operatorname{sign}(s_i) \right) - x_{r_i}^{(n_i)} + \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \left(x_{r_k}^{n_k} - \hat{a}_k - k_k \operatorname{sign}(s_k) \right) \\
&= a_i - \hat{a}_i - k_i \operatorname{sign}(s_i) + \sum_{k=1}^m \Delta_{ik} \left(x_{r_k}^{n_k} - \hat{a}_k - k_k \operatorname{sign}(s_k) \right) \\
&= a_i - \hat{a}_i - k_i \operatorname{sign}(s_i) + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} \left(x_{r_j}^{n_j} - \hat{a}_j \right) - \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} k_j \operatorname{sign}(s_j) \\
&= a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} \left(x_{r_j}^{n_j} - \hat{a}_j \right) - (1 + \Delta_{ii}) k_i \operatorname{sign}(s_i) - \sum_{j \neq i}^m \Delta_{ij} k_j \operatorname{sign}(s_j)
\end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

Agora, sim, é possível demonstrar que a lei de controle na equação (J.53), sob a condição da equação (J.54), satisfaz a condição de escorregamento, equação (J.51). Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 &= s_i \dot{s}_i \\
&= s_i \left\{ a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} (x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j) + \right. \\
&\quad \left. - (1 + \Delta_{ii}) k_i \operatorname{sign}(s_i) - \sum_{j \neq i}^m \Delta_{ij} k_j \operatorname{sign}(s_j) \right\} \\
&= s_i \left\{ a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} (x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j) \right\} + \\
&\quad - s_i \left\{ (1 + \Delta_{ii}) k_i \operatorname{sign}(s_i) + \sum_{j \neq i}^m \Delta_{ij} k_j \operatorname{sign}(s_j) \right\} \\
&\leq |s_i| \left\{ F_i + \sum_{j=1}^m D_{ij} |x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j| \right\} - |s_i| (1 + \Delta_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} k_j \operatorname{sign}(s_j) \\
&= |s_i| \left\{ (1 - D_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i}^m D_{ij} k_j - \eta_i \right\} + \\
&\quad - |s_i| (1 + \Delta_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} k_j \operatorname{sign}(s_j) \\
&= |s_i| \{ 1 - D_{ii} - 1 - \Delta_{ii} \} k_i - \sum_{j \neq i}^m \{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sign}(s_j) \} k_j - \eta_i |s_i| \\
&= -\eta_i |s_i| - |s_i| \{ D_{ii} + \Delta_{ii} \} k_i - \sum_{j \neq i}^m \{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sign}(s_j) \} k_j
\end{aligned}$$

Como $|\Delta_{ij}| < D_{ij}$ para todo i e j , então $D_{ii} + \Delta_{ii} > 0$ e $|s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sign}(s_j) > 0$.

Logo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 &= -\eta_i |s_i| - |s_i| \{ D_{ii} + \Delta_{ii} \} k_i - \sum_{j \neq i}^m \{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sign}(s_j) \} k_j \\
&\leq -\eta_i |s_i|
\end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

J.2.4 Lei de controle com camada limite para sistemas MIMO

A aplicação da camada limite em sistemas MIMO, para se dirimir o problema do *chattering*, é bem mais complexa, sendo viável nos casos específicos de a matriz quadrada \mathbf{B} , da equação (J.49) ser triangular, ou no melhor dos casos, diagonal.

No sistema em estudo, a matriz \mathbf{B} é de dimensão 2×2 e diagonal, o que possibilitou a obtenção da lei de controle com camada limite, como descrito a seguir.

Seguindo o mesmo roteiro utilizado para sistemas SISO, a condição de escorregamento em sistemas MIMO, com inclusão de camada limite, admite-se a seguinte condição de escorregamento, para $i = 1, \dots, m$:

$$|s_i| \geq \Phi_i \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 \leq (\dot{\Phi}_i - \eta_i) |s_i| \quad (\eta_i > 0) \quad (\text{J.56})$$

A lei de controle é reescrita de forma similar a como foi feito para sistemas SISO, com a substituição do termo $k_i \text{sign}(s_i)$ pelo termo $\bar{k}_i \text{sat}\left(\frac{s_i}{\Phi_i}\right)$:

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{l=1}^m \hat{b}_{jl}^- \left(x_{r_l}^{n_l} - \hat{a}_l - \bar{k}_l \text{sat}\left(\frac{s_l}{\Phi_l}\right) \right) \\ \bar{k}_i &= k_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_i \\ (1 - D_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i} D_{ij} k_j &= F_i + \eta_i + \sum_{j=1}^m D_{ij} |\hat{U}_{c_j}| \end{aligned} \quad (\text{J.57})$$

A condição de escorregamento pode ser verificada já partindo da expressão de \dot{s}_i da equação (J.55), apenas substituindo o termo $k_i \text{sign}(s_i)$ pelo termo $\bar{k}_i \text{sat}\left(\frac{s_i}{\Phi_i}\right)$:

$$\dot{s}_i = a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} \left(x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j \right) - (1 + \Delta_{ii}) \bar{k}_i \text{sat}\left(\frac{s_i}{\Phi_i}\right) - \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} \bar{k}_j \text{sat}\left(\frac{s_j}{\Phi_j}\right) \quad (\text{J.58})$$

Sendo assim, tem-se que, para $|s_i| \geq \Phi_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 &= s_i \dot{s}_i \\
&= s_i \left\{ a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} (x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j) + \right. \\
&\quad \left. - (1 + \Delta_{ii}) \bar{k}_i \operatorname{sat} \left(\frac{s_i}{\Phi_i} \right) - \sum_{j \neq i}^m \Delta_{ij} \bar{k}_j \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \right\} \\
&= s_i \left\{ a_i - \hat{a}_i + \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} (x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j) \right\} + \\
&\quad - s_i \left\{ (1 + \Delta_{ii}) \bar{k}_i \operatorname{sat} \left(\frac{s_i}{\Phi_i} \right) + \sum_{j \neq i}^m \Delta_{ij} \bar{k}_j \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \right\} \\
&\leq |s_i| \left\{ F_i + \sum_{j=1}^m D_{ij} |x_{r_j}^{(n_j)} - \hat{a}_j| \right\} - |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \bar{k}_i - \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \bar{k}_j \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \\
&= |s_i| \left\{ (1 - D_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i}^m D_{ij} k_j - \eta_i \right\} + \\
&\quad - |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \bar{k}_i - \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \bar{k}_j \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \\
&= |s_i| \left\{ (1 - D_{ii}) k_i - \sum_{j \neq i}^m D_{ij} k_j - \eta_i \right\} + \\
&\quad - |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \left(k_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j \right) - \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \left(k_j - \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \right) \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \\
&= -\eta_i |s_i| + |s_i| \{1 - D_{ii} - 1 - \Delta_{ii}\} k_i + \\
&\quad - \sum_{j \neq i}^m \left\{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \right\} k_j + \\
&\quad + |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \\
&= -\eta_i |s_i| - |s_i| \{D_{ii} + \Delta_{ii}\} k_i - \sum_{j \neq i}^m \left\{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \right\} k_j \\
&\quad + |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right)
\end{aligned}$$

Recordando que, para $|s_i| \geq \Phi_i$ então $\operatorname{sat} \left(\frac{s_i}{\Phi_i} \right) \cong \operatorname{sign}(s_i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 &= -\eta_i |s_i| - |s_i| \{D_{ii} + \Delta_{ii}\} k_i - \sum_{j \neq i}^m \left\{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \right\} k_j \\
&\quad + |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \operatorname{sat} \left(\frac{s_j}{\Phi_j} \right) \\
&= -\eta_i |s_i| - |s_i| \{D_{ii} + \Delta_{ii}\} k_i - \sum_{j \neq i}^m \{ |s_i| D_{ij} + s_i \Delta_{ij} \operatorname{sign}(s_j) \} k_j \\
&\quad + |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \operatorname{sign}(s_j) \\
&\leq -\eta_i |s_i| + |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \operatorname{sign}(s_j)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 \leq -\eta_i |s_i| + |s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \operatorname{sign}(s_j) \quad (\text{J.59})$$

Da desigualdade da equação (J.59), conclui-se que, para que a condição de escorregamento, na equação (J.56), seja satisfeita, é necessário escolher α_{ij} 's que satisfaçam a seguinte inequação:

$$|s_i| (1 + \Delta_{ii}) \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \dot{\Phi}_j + \sum_{j \neq i}^m s_i \Delta_{ij} \operatorname{sign}(s_j) \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} \dot{\Phi}_l \leq \dot{\Phi}_i |s_i| \quad (\text{J.60})$$

Como adiantado no início da seção, a matriz \mathbf{B} do sistema em estudo é de dimensão 2×2 e diagonal, de modo que a equação (J.49) em \mathbf{B} pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & 1 + \Delta_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{J.61})$$

Da equação (J.61), conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{11} \Delta_{12} = 0 &\Rightarrow \Delta_{12} = 0 \\
\hat{b}_{22} \Delta_{21} = 0 &\Rightarrow \Delta_{21} = 0
\end{aligned}$$

Logo, a matriz $\mathbf{\Delta}$, na equação (J.49), é tal que:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta_{11} & 0 \\ 0 & 1 + \Delta_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{J.62})$$

Reescrevendo a equação (J.60) para $i = 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} |s_1| (1 + \Delta_{11}) (\alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{12} \dot{\Phi}_2) + s_1 \Delta_{12} \text{sign}(s_2) (\alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{22} \dot{\Phi}_2) &\leq \dot{\Phi}_1 |s_1| \Rightarrow \\ \Rightarrow |s_1| (1 + \Delta_{11}) (\alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{12} \dot{\Phi}_2) &\leq \dot{\Phi}_1 |s_1| \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 + \Delta_{11}) (\alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{12} \dot{\Phi}_2) &\leq \dot{\Phi}_1 \end{aligned}$$

ou seja,

$$(1 + \Delta_{11}) \alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{11}) \alpha_{12} \dot{\Phi}_2 \leq \dot{\Phi}_1 \quad (\text{J.63})$$

Reescrevendo a equação (J.60) para $i = 2$, tem-se que:

$$\begin{aligned} |s_2| (1 + \Delta_{22}) (\alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{22} \dot{\Phi}_2) + s_2 \Delta_{21} \text{sign}(s_1) (\alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{12} \dot{\Phi}_2) &\leq \dot{\Phi}_2 |s_2| \Rightarrow \\ \Rightarrow |s_2| (1 + \Delta_{22}) (\alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{22} \dot{\Phi}_2) &\leq \dot{\Phi}_2 |s_2| \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 + \Delta_{22}) (\alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + \alpha_{22} \dot{\Phi}_2) &\leq \dot{\Phi}_2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$(1 + \Delta_{22}) \alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{22}) \alpha_{22} \dot{\Phi}_2 \leq \dot{\Phi}_2 \quad (\text{J.64})$$

Seguem as possibilidades de soluções:

Caso 1) $\dot{\Phi}_1 > 0$ e $\dot{\Phi}_2 > 0$:

(a) Equação (J.63): $\alpha_{11} = \frac{1}{1 + D_{11}}$ e $\alpha_{12} = 0$

(b) Equação (J.64): $\alpha_{21} = 0$ e $\alpha_{22} = \frac{1}{1 + D_{22}}$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{11}) \alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{11}) \alpha_{12} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{11}}{1 + D_{11}} \dot{\Phi}_1 \\ &\leq \dot{\Phi}_1 \\ (1 + \Delta_{22}) \alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{22}) \alpha_{22} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{22}}{1 + D_{22}} \dot{\Phi}_2 \\ &\leq \dot{\Phi}_2 \end{aligned}$$

Caso 2) $\dot{\Phi}_1 > 0$ e $\dot{\Phi}_2 < 0$:

(a) Equação (J.63): $\alpha_{11} = \frac{1}{1 + D_{11}}$ e $\alpha_{12} = 0$

(b) Equação (J.64): $\alpha_{21} = 0$ e $\alpha_{22} = \frac{1}{1-D_{22}}$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{11}) \alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{11}) \alpha_{12} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{11}}{1 + D_{11}} \dot{\Phi}_1 \\ &\leq \dot{\Phi}_1 \\ (1 + \Delta_{22}) \alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{22}) \alpha_{22} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{22}}{1 - D_{22}} \dot{\Phi}_2 \\ &\leq \dot{\Phi}_2 \end{aligned}$$

Caso 3) $\dot{\Phi}_1 < 0$ e $\dot{\Phi}_2 > 0$:

(a) Equação (J.63): $\alpha_{11} = \frac{1}{1-D_{11}}$ e $\alpha_{12} = 0$

(b) Equação (J.64): $\alpha_{21} = 0$ e $\alpha_{22} = \frac{1}{1+D_{22}}$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{11}) \alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{11}) \alpha_{12} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{11}}{1 - D_{11}} \dot{\Phi}_1 \\ &\leq \dot{\Phi}_1 \\ (1 + \Delta_{22}) \alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{22}) \alpha_{22} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{22}}{1 + D_{22}} \dot{\Phi}_2 \\ &\leq \dot{\Phi}_2 \end{aligned}$$

Caso 4) $\dot{\Phi}_1 < 0$ e $\dot{\Phi}_2 < 0$:

(a) Equação (J.63): $\alpha_{11} = \frac{1}{1-D_{11}}$ e $\alpha_{12} = 0$

(b) Equação (J.64): $\alpha_{21} = 0$ e $\alpha_{22} = \frac{1}{1-D_{22}}$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (1 + \Delta_{11}) \alpha_{11} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{11}) \alpha_{12} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{11}}{1 - D_{11}} \dot{\Phi}_1 \\ &\leq \dot{\Phi}_1 \\ (1 + \Delta_{22}) \alpha_{21} \dot{\Phi}_1 + (1 + \Delta_{22}) \alpha_{22} \dot{\Phi}_2 &= \frac{1 + \Delta_{22}}{1 - D_{22}} \dot{\Phi}_2 \\ &\leq \dot{\Phi}_2 \end{aligned}$$

Em síntese, para que a condição de escorregamento, equação (J.56), seja satisfeita, então:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{D}_\Phi (\dot{\Phi}) \dot{\Phi} \quad (\text{J.65})$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\Phi (\dot{\Phi}) &= \mathbf{D}_1 (\dot{\Phi}_1 > 0 \text{ e } \dot{\Phi}_2 > 0) + \mathbf{D}_2 (\dot{\Phi}_1 > 0 \text{ e } \dot{\Phi}_2 < 0) + \\ &+ \mathbf{D}_3 (\dot{\Phi}_1 < 0 \text{ e } \dot{\Phi}_2 > 0) + \mathbf{D}_4 (\dot{\Phi}_1 < 0 \text{ e } \dot{\Phi}_2 < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1+D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+D_{22}} \end{bmatrix} & \mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1+D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_{22}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+D_{22}} \end{bmatrix} & \mathbf{D}_4 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_{22}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

J.2.4.1 Comportamento dinâmico do sistema no interior da camada limite

Para se definir a dinâmica da camada limite, é necessário estudar como o sistema se comporta na região do espaço de estado definida pelas desigualdades $|s_1(t, \mathbf{X})| < \Phi_1$ e $|s_2(t, \mathbf{X})| < \Phi_2$.

Da equação (J.58), obtém-se as expressões de \dot{s}_1 e \dot{s}_2 :

$$\dot{s}_1 = a_1 - \hat{a}_1 + \Delta_{11} (x_{r_1}^{(n_1)} - \hat{a}_1) + \Delta_{12} (x_{r_2}^{(n_2)} - \hat{a}_2) - (1 + \Delta_{11}) \bar{k}_1 \text{sat} \left(\frac{s_1}{\Phi_1} \right) - \Delta_{12} \bar{k}_2 \text{sat} \left(\frac{s_2}{\Phi_2} \right)$$

$$\dot{s}_2 = a_2 - \hat{a}_2 + \Delta_{21} (x_{r_1}^{(n_1)} - \hat{a}_1) + \Delta_{22} (x_{r_2}^{(n_2)} - \hat{a}_2) - (1 + \Delta_{22}) \bar{k}_2 \text{sat} \left(\frac{s_2}{\Phi_2} \right) - \Delta_{21} \bar{k}_1 \text{sat} \left(\frac{s_1}{\Phi_1} \right)$$

Da equação (J.62), sabe-se que $\Delta_{12} = 0$ e $\Delta_{21} = 0$, logo:

$$\dot{s}_1 = a_1 - \hat{a}_1 + \Delta_{11} (x_{r_1}^{(n_1)} - \hat{a}_1) - (1 + \Delta_{11}) \bar{k}_1 \text{sat} \left(\frac{s_1}{\Phi_1} \right) \quad (\text{J.66})$$

$$\dot{s}_2 = a_2 - \hat{a}_2 + \Delta_{22} (x_{r_2}^{(n_2)} - \hat{a}_2) - (1 + \Delta_{22}) \bar{k}_2 \text{sat} \left(\frac{s_2}{\Phi_2} \right) \quad (\text{J.67})$$

Considerando-se a aproximação:

$$\text{sat} \left(\frac{s_i}{\Phi_i} \right) \cong \frac{s_i}{\Phi_i}$$

para $|s_i| < \Phi_i$, tem-se que:

$$\dot{s}_1 \cong -(1 + \Delta_{11}) \bar{k}_1(\mathbf{X}) \frac{s_1}{\Phi_1} + \Delta \hat{a}_1(t, \mathbf{X}) \quad (\text{J.68})$$

$$\dot{s}_2 \cong -(1 + \Delta_{22}) \bar{k}_2(\mathbf{X}) \frac{s_2}{\Phi_2} + \Delta \hat{a}_2(t, \mathbf{X}) \quad (\text{J.69})$$

Considerando-se que $\mathbf{X} \cong \mathbf{X}_d$ se $|s_1| < \Phi_1$ e $|s_2| < \Phi_2$, tem-se que:

$$\dot{s}_1 \cong -(1 + \Delta_{11}) \bar{k}_1(\mathbf{X}_d) \frac{s_1}{\Phi_1} + \Delta \hat{a}_1(t, \mathbf{X}_d) + O(\varepsilon) \quad (\text{J.70})$$

$$\dot{s}_2 \cong -(1 + \Delta_{22}) \bar{k}_2(\mathbf{X}_d) \frac{s_2}{\Phi_2} + \Delta \hat{a}_2(t, \mathbf{X}_d) + O(\varepsilon) \quad (\text{J.71})$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio da equação (J.39), considerando-se as frequências de corte $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, tem-se que:

$$\frac{\bar{k}_1(\mathbf{X}_d)}{\Phi_1} \cong \frac{\lambda_1}{1 - D_{11}} \quad (\text{J.72})$$

$$\frac{\bar{k}_2(\mathbf{X}_d)}{\Phi_2} \cong \frac{\lambda_2}{1 - D_{22}} \quad (\text{J.73})$$

Ao se substituir a equação (J.72) na equação (J.70), e a equação (J.73) na equação (J.71), respectivamente, tem-se que:

$$\dot{s}_1 \cong -\lambda_1 \frac{1 + \Delta_{11}}{1 - D_{11}} s_1 + \Delta \hat{a}_1(t, \mathbf{X}_d) + O(\varepsilon) \quad (\text{J.74})$$

$$\dot{s}_2 \cong -\lambda_2 \frac{1 + \Delta_{22}}{1 - D_{22}} s_2 + \Delta \hat{a}_2(t, \mathbf{X}_d) + O(\varepsilon) \quad (\text{J.75})$$

Como, por hipótese, $|\Delta_{ii}| < D_{ii}$, então $\frac{1 + \Delta_{ii}}{1 - D_{ii}} > 1$. Logo, conclui-se que as equações (J.72) e (J.73) garantem a estabilidade das equações (J.74) e (J.75) nas variáveis s_1 e s_2 , respectivamente.

Sendo assim, a dinâmica das camadas limites Φ_1 e Φ_2 podem ser definidas combinando-se as equações (J.65), (J.72) e (J.73):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} &= \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_d) \Rightarrow \mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} = \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) - \begin{bmatrix} \bar{k}_1(\mathbf{X}_d) \\ \bar{k}_2(\mathbf{X}_d) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} = \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) - \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{1 - D_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{1 - D_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} = \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) - \mathbf{K}_\Phi \Phi \end{aligned}$$

A dinâmica das camadas limites é, então, definida da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} + \mathbf{K}_\Phi \Phi = \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) \quad (\text{J.76})$$

Combinando-se as equações (J.65) e (J.76), é possível chegar a uma formulação mais simples do ganho $\bar{\mathbf{K}}$:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(\mathbf{X}) - \mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} \Rightarrow \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(\mathbf{X}) - \{\mathbf{K}(\mathbf{X}_d) - \mathbf{K}_\Phi \Phi\}$$

$$\bar{\mathbf{K}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_d, \Phi) = \mathbf{K}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) + \mathbf{K}_\Phi \Phi \quad (\text{J.77})$$

Em síntese, para um sistema MIMO com matriz de ganho \mathbf{B} diagonal e de dimensão 2×2 , a lei de controle final na forma matricial, com camada limite, é definida como:

$$\mathbf{U}_c = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{U}}_c - \bar{\mathbf{K}} \text{sat} \left(\frac{\mathbf{s}}{\Phi} \right) \right\} \quad (\text{J.78})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}_c &= \mathbf{x}_r^{(n)}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{a}(\mathbf{X}) \\ \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_d, \Phi) &= \mathbf{K}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) + \mathbf{K}_\Phi \Phi \\ \mathbf{D}_\Phi(\dot{\Phi}) \dot{\Phi} + \mathbf{K}_\Phi \Phi &= \mathbf{K}(\mathbf{X}_d) \end{aligned}$$

J.3 Integração por método de Newmark/Newton-Raphson

O método de integração utilizado para resolver os sistemas de equações diferenciais no presente trabalho foi o de Newmark (NEWMARK, 1959 apud JUNIOR, 2015).

O método consiste em definir um processo implícito de integração por relações de recorrência, a partir das seguintes expressões:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (\text{J.79})$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (\text{J.80})$$

Nas equações (J.79) e (J.80), Δt é o passo constante de integração, $\mathbf{u}_n \cong \mathbf{u}(t_n)$, $\dot{\mathbf{u}}_n \cong \dot{\mathbf{u}}(t_n)$ e $\ddot{\mathbf{u}}_n \cong \ddot{\mathbf{u}}(t_n)$.

Os termos γ e β são parâmetros de precisão e estabilidade numérica da integração implícita, realizada a partir das equações (J.79) e (J.80), e o método de integração é incondicionalmente estável se:

$$\gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

No presente trabalho, optou-se por $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$.

Por meio de algumas manipulações algébricas, as equações (J.79) e (J.80) deram origem às equações (J.81) e (J.82) de recorrência:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (\text{J.81})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (\text{J.82})$$

Reescrevendo-se as equações (J.81) e (J.82) de forma mais compacta, tem-se que:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{n+1} + \phi_{1n} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{n+1} + \phi_1 (\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (\text{J.83})$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \Phi_{\dot{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}_{n+1}, \phi_{1n})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1} + \phi_{2n} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1} + \phi_2 (\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (\text{J.84})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \Phi_{\ddot{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}_{n+1}, \phi_{2n})$$

sendo:

$$\phi_{1n} = \phi_1 (\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \ddot{\mathbf{u}}_n) = -\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n$$

$$\phi_{2n} = \phi_2 (\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \ddot{\mathbf{u}}_n) = -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_n - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_n$$

Considere um sistema descrito pela equação padrão a seguir:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{f} (\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (\text{J.85})$$

Para integrar a equação (J.85) pelo método de Newmark, é preciso antes reescrevê-la na forma discretizada no tempo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{B} \mathbf{U}_{n+1} \quad (\text{J.86})$$

Substituindo-se as equações (J.83) e (J.84) na equação (J.86), chega-se à equação (J.87):

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{n+1} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{B} \mathbf{U}_{n+1} \quad (\text{J.87})$$

sendo:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{C} + \mathbf{K}$$

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{n+1}, \Phi_{\dot{u}}(\mathbf{u}_{n+1}, \phi_{1n}), \Phi_{\ddot{u}}(\mathbf{u}_{n+1}, \phi_{2n})\right) + \mathbf{M} \phi_{2n} + \mathbf{C} \phi_{1n}$$

Por fim, o valor de \mathbf{u}_{n+1} é calculado por meio da equação (J.87), para um dado valor de \mathbf{U}_{n+1} , por algum método numérico de ponto fixo. No presente trabalho, foi utilizado o método de Newton-Raphson para resoluções de sistemas de equações não lineares.

Para aplicação do método de Newton-Raphson sobre a equação (J.87), referente a um sistema em malha aberta, definiu-se as funções descritas nas equações (J.88) e (J.89), sendo o vetor \mathbf{u}_{n+1} substituído pela variável muda η :

$$\Psi(\eta) = \hat{\mathbf{K}} \eta + \hat{\mathbf{f}}(\eta) - \mathbf{B} \mathbf{U}_{n+1} \quad (\text{J.88})$$

$$\frac{d\Psi}{d\eta^T}(\eta) = \hat{\mathbf{K}} + \frac{d\hat{\mathbf{f}}}{d\eta^T}(\eta) \quad (\text{J.89})$$

No caso da integração das equações para o sistema em malha fechada, ou seja, considerando a variável de entrada \mathbf{U}_{n+1} como função de \mathbf{u}_{n+1} e eventualmente de suas derivadas temporais, a equação (J.89) deve ser substituída pela equação (J.90) na rotina de integração.

$$\frac{d\Psi}{d\eta^T}(\eta) = \hat{\mathbf{K}} + \frac{d\hat{\mathbf{f}}}{d\eta^T}(\eta) - \mathbf{B} \frac{d\mathbf{U}_{n+1}}{d\eta^T} \quad (\text{J.90})$$

Tanto na equação (J.89) quanto na equação (J.90), o operador $\frac{d\cdot}{d\eta^T}$ se refere a uma derivada total, ou seja:

$$\frac{d\cdot}{d\eta^T} = \frac{\partial\cdot}{\partial\eta^T} + \frac{\partial\cdot}{\partial\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^T} \frac{\partial\Phi_{\dot{u}}}{\partial\eta^T} + \frac{\partial\cdot}{\partial\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^T} \frac{\partial\Phi_{\ddot{u}}}{\partial\eta^T}$$

Durante o processo de integração no tempo, a passo constante Δt , uma vez obtido o valor de \mathbf{u}_{n+1} , calcula-se os respectivos valores de $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ por meio das equações (J.83) e (J.84).

O chute inicial no *loop* em cada passo de integração, para o cálculo de \mathbf{u}_{n+1} , foi aproximado por uma expressão de segundo grau na variável t :

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \Delta t^2 \quad (\text{J.91})$$

J.4 Algumas operações elementares

Seja $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ e $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ dois vetores pertencentes ao R^3 .

O produto vetorial entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é equivalente ao produto matricial $\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, sendo $\underline{\mathbf{a}}$ uma matriz anti-simétrica, construída a partir do vetor \mathbf{a} . Com efeito, seja

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$