DOUGLAS DANIEL SAMPAIO SANTANA

# NAVEGAÇÃO TERRESTRE USANDO UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL DE BAIXO DESEMPENHO E FUSÃO SENSORIAL COM FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO SUAVIZADO

São Paulo
2011

DOUGLAS DANIEL SAMPAIO SANTANA

# NAVEGAÇÃO TERRESTRE USANDO UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL DE BAIXO DESEMPENHO E FUSÃO SENSORIAL COM FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO SUAVIZADO

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia

São Paulo
2011

DOUGLAS DANIEL SAMPAIO SANTANA

# NAVEGAÇÃO TERRESTRE USANDO UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL DE BAIXO DESEMPENHO E FUSÃO SENSORIAL COM FILTRO DE KALMAN ADAPTATIVO SUAVIZADO

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Controle e Automação Mecânica

Orientador: Professor Doutor
Celso Massatoshi Furukawa

São Paulo
2011

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 28 de julho de 2011.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

Santana, Douglas Daniel Sampaio
Navegação terrestre usando unidade de medição inercial de baixo desempenho e fusão sensorial com filtro adaptativo e suavizado de Kalman / D.D.S. Santana. – ed.rev. -- São Paulo, 2011.
209p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Filtros Kalman 2. Estimação não linear 3. Sensor 4. Instrumentação (Física) 5. Navegação inercial I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha amada mãe *Rosa de Almeida Camargo*, por suas palavras de sabedoria e incondicional apoio nos momentos mais difíceis.

# AGRADECIMENTOS

Ao divino Deus por tudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Celso Massatoshi Furukawa que por meio de sua firme orientação, apoio e paciência tornou possível o meu grande sonho de realizar este trabalho.

À minha querida Aluany Alves dos Santos e ao meu sobrinho Fernando de Almeida Faria, pelo imenso apoio e pelos muitos domingos em que disponibilizaram seu precioso tempo me ajudando na execução dos testes de campo na EPUSP.

Ao Prof. Dr. Newton Maruyama pelo apoio, co-orientação e divagações filosóficas acerca do tema escolhido neste trabalho.

Aos amigos de labuta do departamento, Ramon Viera Canales, Eric Conrado de Souza, Roberto Ferraz de Campos Filho e Erick Wakamoto Takarabe pela valiosa companhia e auxílio prestado durante todos estes anos.

A todos os demais colegas de pesquisa da EPUSP sem citar nomes para não incorrer num gravíssimo erro de omissão.

Aos amigos do *Colégio Divino Salvador*, Ulisses Loureiro de Lima, Nilton R. Santos Machado e Susumo Renato Oya, pela agradável convivência e espírito colaborativo.

Ao prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury pela preciosa dica sobre a técnica de ruído adaptativo e ao prof. Dr. Celso Flávio Trigo pela disponibilização do referido artigo.

“Não há nada que faça um homem suspeitar tanto como o fato de saber pouco”.

(Francis Bacon)

# RESUMO

Apresenta-se o desenvolvimento de modelos matemáticos e algoritmos de fusão sensorial para navegação terrestre usando uma unidade de medição inercial (UMI) de baixo desempenho e o Filtro Estendido de Kalman. Os modelos foram desenvolvidos com base nos sistemas de navegação inercial *strapdown* (SNIS). O termo “baixo desempenho” refere-se à UMIs que por si só não são capazes de efetuar o auto-alinhamento por *girocompassing*. A incapacidade de se navegar utilizando apenas uma UMI de baixo desempenho motiva a investigação de técnicas que permitam aumentar o grau de precisão do SNIS com a utilização de sensores adicionais.

Esta tese descreve o desenvolvimento do modelo completo de uma fusão sensorial para a navegação inercial de um veículo terrestre usando uma UMI de baixo desempenho, um hodômetro e uma bússola eletrônica. Marcas topográficas (*landmarks*) foram instaladas ao longo da trajetória de teste para se medir o erro da estimativa de posição nesses pontos. Apresenta-se o desenvolvimento do Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado (FKAS), que estima conjuntamente os estados e o erro dos estados estimados do sistema de fusão sensorial. Descreve-se um critério quantitativo que emprega as incertezas de posição estimadas pelo FKAS para se determinar *a priori*, dado os sensores disponíveis, o intervalo de tempo máximo que se pode navegar dentro de uma margem de confiabilidade desejada. Conjuntos reduzidos de *landmarks* são utilizados como sensores fictícios para testar o critério de confiabilidade proposto. Destacam-se ainda os modelos matemáticos aplicados à navegação terrestre, unificados neste trabalho.

Os resultados obtidos mostram que, contando somente com os sensores inerciais de baixo desempenho, a navegação terrestre torna-se inviável após algumas dezenas de segundos. Usando os mesmos sensores inerciais, a fusão sensorial produziu resultados muito superiores, permitindo reconstruir trajetórias com deslocamentos da ordem de 2,7 km (ou 15 minutos) com erro final de estimativa de posição da ordem de 3 m.

# ABSTRACT

This work presents the development of the mathematical models and the algorithms of a sensor fusion system for terrestrial navigation using a low-grade inertial measurement unit (IMU) and the Extended Kalman Filter.

The models were developed on the basis of the strapdown inertial navigation systems (SINS). “Low-grade” designates an IMU that is not able to perform girocompassing self-alignment. The impossibility of navigating relying on a low performance IMU is the motivation for investigating techniques to improve the SINS accuracy with the use of additional sensors.

This thesis describes the development of a comprehensive model of a sensor fusion for the inertial navigation of a ground vehicle using a low-grade IMU, an odometer and an electronic compass. Landmarks were placed along the test trajectory in order to allow the measurement of the error of the position estimation at these points. It is presented the development of the Smoothed Adaptive Kalman Filter (SAKF), which jointly estimates the states and the errors of the estimated states of the sensor fusion system. It is presented a quantitative criteria which employs the position uncertainties estimated by SAKF in order to determine - given the available sensors, the maximum time interval that one can navigate within a desired reliability. Reduced sets of landmarks are used as fictitious sensors to test the proposed reliability criterion. Also noteworthy are the mathematical models applied to terrestrial navigation that were unified in this work.

The results show that, only relying on the low performance inertial sensors, the terrestrial navigation becomes impracticable after few tens of seconds. Using the same inertial sensors, the sensor fusion produced far better results, allowing the reconstruction of trajectories with displacements of about 2.7 km (or 15 minutes) with a final error of position estimation of about 3 m.

# LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| AVAR | Allan Variance |
| BF | Bootstrap Filter |
| ECEF | Earth - Centered, Earth - Fixed |
| ECI | Earth - Centered - Inertial |
| EPUSP | Escola Politécnica da Universidade de São Paulo |
| FEAK | Filtro Estendido Adaptativo de Kalman |
| FKAS | Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado |
| FEK | Filtro Estendido de Kalman |
| FK | Filtro de Kalman |
| FLK | Filtro Linearizado de Kalman |
| FOG | Fiber Optic Gyro |
| FP | Filtro de Partículas |
| GPS | Global Position System |
| JARK | Filtro Adaptativo de Jazwinski-Rios Neto-Kuga |
| LTP | Local Tangent Plane |
| MCD | Matriz de Cossenos Diretores |
| MEMS | Micro Eletro-Mechanical System |
| MO | Matriz de Orientação |
| MT | Marcas Topográficas |
| NED | North East Down |
| PIG | Pipeline Inspection Gauge |
| RPY | Roll - Pitch - Yaw |
| SNI | Sistema de Navegação Inercial |
| SNIS | Sistema de Navegação Inercial Strapdown |
| UKF | Unscented Kalman Filter |
| UMI | Unidade de Medição Inercial |
| WGS - 84 | World Geodetic System 1984 |

# LISTA DE SÍMBOLOS

## *Escalares*

| | |
|---|---|
| $a_i$ | Aceleração inercial |
| $c_{ij}$ | Elemento da linha $i$ e coluna $j$, da matriz de cossenos diretores |
| $f(\cdot)$ | Função não linear que descreve o processo do sistema |
| $f^b$ | Força específica, ou não gravitacional, expressa no referencial da plataforma |
| $f^n$ | Força específica, ou não gravitacional, expressa no referencial da navegação local |
| $f_x$ | Força específica, ou não gravitacional, que atua na direção do eixo $x$ |
| $f_y$ | Força específica, ou não gravitacional, que atua na direção do eixo $y$ |
| $f_z$ | Força específica, ou não gravitacional, que atua na direção do eixo $z$ |
| $f_N$ | Força específica, ou não gravitacional, que atua na direção norte |
| $f_E$ | Força específica, ou não gravitacional, que atua na direção leste |
| $f_D$ | Força específica, ou não gravitacional, que atua na direção descendente |
| $g$ | Aceleração gravitacional |
| $h$ | Altitude |
| $h(\cdot)$ | Função não linear que descreve a saída do sistema |
| $k-1$ | Amostra passada |
| $k$ | Amostra presente |
| $k+1$ | Amostra futura |
| $k_f$ | Fator de escala |
| $l$ | Longitude |

| | |
|---|---|
| $L$ | Latitude |
| $m$ | Massa de um corpo |
| $q_{0-3}$ | Elementos do quaternion de orientação |
| $R, R_0$ | Raio médio de curvatura da Terra |
| $R_N$ | Raio de curvatura da elipsóide na direção norte |
| $R_E$ | Raio de curvatura da elipsóide na direção leste |
| $t$ | Tempo |
| $v$ | Ruído associado à medição |
| $v_x$ | Velocidade linear que atua na direção $x$ |
| $v_y$ | Velocidade linear que atua na direção $y$ |
| $v_z$ | Velocidade linear que atua na direção $z$ |
| $v_N$ | Velocidade linear que atua na direção norte |
| $v_E$ | Velocidade linear que atua na direção leste |
| $v_D$ | Velocidade linear que atua na direção descendente (para baixo) |
| $x$ | Estado do sistema |
| $w$ | Ruído associado ao processo |
| $\alpha$ | Ângulo de rotação sobre o eixo $x$ |
| $\beta$ | Ângulo de rotação sobre o eixo $y$ |
| $\gamma$ | Ângulo de rotação sobre o eixo $z$ |
| $\delta, \Delta$ | Erro ou incremento |
| $\phi$ | Ângulo de roll |
| $\theta$ | Ângulo de pitch |
| $\psi$ | Ângulo de yaw |
| $\omega^b$ | Velocidade angular expressa no referencial da plataforma |
| $\omega^n$ | Velocidade angular expressa no referencial da navegação local |
| $\omega_x$ | Velocidade angular sobre o eixo $x$ |
| $\omega_y$ | Velocidade angular sobre o eixo $y$ |
| $\omega_z$ | Velocidade angular sobre o eixo $z$ |
| $\Omega$ | Velocidade de rotação da terra |

| | |
|---|---|
| $b$ | Sinal de bias |
| $p(x)$ | Probabilidade de $x$ |
| $\sigma, \sigma^2$ | Desvio padrão e variância |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | Distribuição normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ |
| $\eta, \xi$ | Deflexão magnética longitudinal e latitudinal |

## *Vetores (minúsculas em negrito)*

| | |
|---|---|
| $\mathbf{a}_i$ | Aceleração inercial |
| $\mathbf{f}^b$ | Força especifica expressa no referencial da plataforma (saída dos acelerômetros) |
| $\mathbf{f}^n$ | Força especifica expressa no referencial da navegação local |
| $\mathbf{g}$ | Aceleração gravitacional |
| $\mathbf{g}_l$ | Gravidade local |
| $\mathbf{i}$ | Vetor unitário (versor) na direção $x$ |
| $\mathbf{j}$ | Vetor unitário (versor) na direção $y$ |
| $\mathbf{k}$ | Vetor unitário (versor) na direção $z$ |
| $\mathbf{q}$ | Quaternion de orientação |
| $\mathbf{r}^e$ | Vetor posição expresso no referencial terrestre |
| $\mathbf{r}^i$ | Vetor posição expresso no referencial inercial |
| $\mathbf{r}^n$ | Vetor posição expresso no referencial da navegação local |
| $\mathbf{v}^i$ | Velocidade expressa no referencial inercial |
| $\mathbf{v}^e$ | Velocidade expressa no referencial terrestre |
| $\mathbf{v}^n$ | Velocidade expressa no referencial da navegação local |
| $\mathbf{v}_e^e$ | Velocidade terrestre expressa no referencial terrestre |
| $\mathbf{v}_e^i$ | Velocidade terrestre expressa no referencial terrestre |
| $\mathbf{x}$ | Vetor de estados |
| $\hat{\mathbf{x}}$ | Estimativa do vetor de estados |

| | |
|---|---|
| $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ | Estimativa a priori do vetor de estados |
| $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ | Estimativa a posteriori do vetor de estados |
| $\mathbf{z}$ | Vetor de medições |
| $\mathbf{v}_e^n$ | Velocidade terrestre expressa no referencial da navegação local |
| $\mathbf{v}_e^n$ | Velocidade terrestre expressa no referencial da navegação local |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Vetor angular com componentes $\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z\end{bmatrix}^T$ |
| $\boldsymbol{\omega}^b$ | Velocidade angular expressa no referencial da plataforma (saída dos giroscópios) |
| $\boldsymbol{\omega}^n$ | Velocidade angular expressa no referencial da navegação local |
| $\boldsymbol{\omega}_{en}$ | Rotação da navegação em relação ao referencial terrestre |
| $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ | Rotação da plataforma em relação ao referencial inercial |
| $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ | Rotação da Terra em relação ao referencial inercial |
| $\boldsymbol{\omega}_{in}$ | Rotação da navegação em relação ao referencial inercial |
| $\boldsymbol{\psi}$ | Vetor de orientação com componentes $\begin{bmatrix}\phi & \theta & \psi\end{bmatrix}^T$ |

## *Matrizes (maiúsculas em negrito)*

| | |
|---|---|
| $\mathbf{A}, \boldsymbol{\Phi}$ | Matriz de transição de estados (caso linear) ou jacobiano de $\mathbf{F}$ (caso não linear) |
| $\mathbf{B}$ | Matriz de entradas do sistema discreto |
| $\mathbf{C}_b^i$ | Matriz que rotaciona a plataforma para o referencial inercial |
| $\mathbf{C}_b^e$ | Matriz que rotaciona a plataforma para o referencial terrestre |
| $\mathbf{C}_b^n$ | Matriz que rotaciona a plataforma para o referencial da navegação local |
| $\mathbf{C}_e^b$ | Matriz que rotaciona o referencial terrestre para o referencial da plataforma |
| $\mathbf{C}_e^i$ | Matriz que rotaciona o referencial terrestre para o referencial inercial |
| $\mathbf{C}_e^n$ | Matriz que rotaciona o referencial terrestre para o referencial da |

navegação local

$\mathbf{C}_n^b$ Matriz que rotaciona o referencial da navegação para o referencial da plataforma

$\mathbf{C}_n^e$ Matriz que rotaciona o referencial da navegação para o referencial terrestre

$\mathbf{C}_n^i$ Matriz que rotaciona o referencial da navegação para o referencial inercial

$\mathbf{G}$ Matriz de entradas do sistema discreto

$\mathbf{H}$ Matriz de medições

$\mathbf{K}$ Ganho do Filtro de Kalman

$\mathbf{L}, \mathbf{F}$ Matrizes de transição de estados contínuos

$\mathbf{P}$ Matriz de covariâncias

$\mathbf{Q}$ Matriz da covariância dos ruídos associados ao processo

$\mathbf{R}$ Matriz da covariância dos ruídos associados à medição

$\mathbf{V}$ Matriz de ruídos associados à medição

$\mathbf{W}$ Matriz de ruídos associados ao processo

$\mathbf{\Omega}_{ib}$ Matriz anti-simétrica que define a rotação da plataforma em relação ao referencial inercial

$\mathbf{\Omega}_{eb}$ Matriz anti-simétrica que define a rotação da plataforma em relação ao referencial terrestre

$\mathbf{\Omega}_{nb}$ Matriz anti-simétrica que define a rotação da plataforma em relação ao referencial da navegação local

$\mathbf{\Psi}$ Matriz anti-simétrica que define o incremento de rotação

## *Outros símbolos utilizados*

$\times$ Representa o produto vetorial

$\bullet$ Representa o produto escalar

$\otimes$ Representa a multiplicação entre quaternions

| | |
|---|---|
| $*$ | Representa o conjugado complexo |
| $\wedge$ | Representa a quantidade estimada |
| $(\bullet)^T$ | Representa o transposto de um vetor ou matriz |
| $(\bullet)^{-1}$ | Representa a inversa de uma matriz |

# SUMÁRIO

RESUMO i

ABSTRACT ii

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS iii

LISTA DE SÍMBOLOS iv

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS 1
   1.1. Contextualização 1
   1.2. Navegação inercial 2
   1.3. Definição de configuração inercial e plataforma 4
   1.4. Etapas da navegação inercial strapdown 5
   1.5. O Objetivo da tese 7
   1.6. A motivação do objetivo da tese 8
   1.7. As contribuições da tese 9
   1.8. Organização da tese 9

2. REVISÃO DA LITERATURA 12

3. MODELAGEM DOS REFERENCIAIS NAVEGAÇÃO TERRESTRE 18
   3.1. Principais referenciais utilizados na navegação inercial strapdown 18
   3.2. Modelagem terrestre do sistema de navegação inercial strapdown 21
      3.2.1. Conceituando a força específica 21
      3.2.2. Modelagem do SNIS num sistema de coordenadas fixo 22
      3.2.3. Modelagem da navegação num sistema de coordenadas girante 23

3.2.4. Modelagem do SNIS no sistema de coordenadas ECI 23
3.2.5. Modelagem do SNIS no sistema de coordenadas ECEF 26
3.2.6. Modelagem do SNIS no sistema de coordenadas NED 27
3.2.7. Representação na navegação NED em coordenadas geodésicas 29
3.2.8. O formato da Terra segundo a convenção WGS-84 32
3.2.9. Deflexão gravitacional sobre a superfície da Terra 33
3.2.10. Algoritmo proposta para se navegar no sistema NED 35
3.3. Transformações de coordenadas 35
3.3.1. Ângulos de Euler 36
3.3.1.1. Propagação de Ângulos de Euler no tempo 38
3.3.2. Cossenos diretores 39
3.3.2.1. Transformações de coordenadas por meio da matriz de cossenos diretores 39
3.3.2.2. Propagação da matriz de cossenos diretores no tempo 40
3.3.3. O quaternion de orientação 42
3.3.3.1. Utilização de quaternions de orientação para transformação de vetores 43
3.3.3.2. Elementos do quaternion expressos em termos dos componentes da matriz dos cossenos diretores 45
3.3.3.3. Propagação dos quaternions no tempo 45
3.3.4. Implementação numérica da orientação utilizando cossenos diretores 46
3.3.5. Implementação numérica da orientação utilizando quaternions 48

4. RUÍDOS E ERROS DE SENSORES INERCIAIS 51
4.1. Erros característicos de giroscópios 53
4.1.1. Erro de “bias” 53
4.1.2. Ruído Branco e “Random Walk” angular 53
4.1.3. Erro angular devido a deriva térmica 55
4.1.4. Erro angular devido aos erros de calibração 55
4.2. Erros característicos de acelerômetros 56
4.2.1. Erro de “bias” 56
4.2.2. Ruído Branco e “Random Walk” de velocidade 57

4.2.3. Erro de aceleração devido a deriva térmica 59
4.2.4. Erro de aceleração devido aos erros de calibração 59
4.3. Classificação de uma UMI strapdown 59
4.4. Caracterização de sinais com ruídos aditivos 61
4.4.1. Variância de Allan 61
4.4.2. Desvio padrão de Allan aplicado à UMI VG700AA 64

5. ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E FILTROS DE KALMAN 66
5.1. Estimação de estados 66
5.2. Filtros de Kalman 67
5.2.1. O Filtro de Kalman Linear 69
5.2.1.1. O algoritmo do Filtro de Kalman Linear 70
5.2.2. O Filtro de Informação 72
5.2.3. Estimação de sistemas não lineares 74
5.2.4. Filtro Linearizado de Kalman 75
5.2.5. Filtro Estendido de Kalman 76
5.2.6. Outras técnicas de estimação aplicadas à sistemas não lineares 77
5.2.7. O filtro suavizador Forward-Blackward 77
5.2.7.1. Desenvolvimento do filtro suavizador Forward-Blackward 78
5.2.8. Sintonia do Filtro de Kalman 85
5.2.9. Ruído adaptativo 87
5.2.9.1. A idéia da adaptação da matriz Q 87
5.2.9.2. A consistência estatística das inovações 89
5.2.9.3. Definição de inovação verdadeira e pseudo-medida 91
5.2.9.4. O pseudo-filtro 95
5.2.9.5. O Filtro JARK 95
5.2.9.6. O Filtro JARK aplicado à sistemas não lineares 99
5.2.9.7. A modelagem da matriz $G_d$ 103
5.2.9.8. O Filtro FKAS 103

6. MODELAGEM DO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL 109
6.1. Modelagem dos estados do sistema de navegação inercial 110

strapdown
6.1.1. Modelagem da orientação utilizando cossenos diretores 110
6.1.2. Modelagem da orientação por quaternions 110
6.1.3. Modelagem da velocidade 111
6.1.4. Modelagem da Posição 114
6.1.5. Modelo completo da navegação 115
6.1.6. Modelo simplificado do SNI 118
6.1.7. Modelagem das equações de medição 119
6.2. Modelagem dos erros de estados do sistema de navegação inercial strapdown 121
6.2.1. Modelagem do erro de orientação a partir dos erros de cossenos diretores 121
6.2.2. Modelagem dos erros de velocidade a partir dos erros de cossenos diretores 126
6.2.3. Modelagem dos erros de posição a partir dos erros de cossenos diretores 129
6.2.4. Modelo total dos erros de navegação utilizando a abordagem dos erros de cossenos diretores 130
6.2.5. Modelagem do erro de orientação a partir dos quaternions 132
6.2.6. Modelagem dos erros de velocidade a partir dos erros de quaternions 137
6.2.7. Modelagem dos erros de posição a partir dos erros de quaternions 139
6.2.8. Modelo total dos erros de navegação utilizando a abordagem dos erros de quaternions 139
6.2.9. Modelo simplificado dos erros de navegação utilizando a abordagem dos erros de quaternions 140
6.2.10. modelagem das equações que descrevem os erros de medição 143
6.3. Ortogonalização e normalização 145
6.3.1. Ortogonalização dos cossenos diretores 145
6.3.2. Normalização dos cossenos diretores 147
6.3.3. Normalização do quaternion 147
6.4. Calibração e alinhamento inicial 148
6.4.1. Calibração 148
6.4.2. Alinhamento inicial 149

6.4.3. Alinhamento estacionário terrestre utilizando o método da matriz de orientação 150
6.4.4. Erro de alinhamento estacionário terrestre 152
6.4.5. Alinhamento estacionário fino 155
6.5. Limitação da incerteza do erro de posição 156

7. MATERIAIS E MÉTODOS 158
7.1. Equipamentos utilizados 158
7.2. Equipamentos embarcados no veículo 165
7.3. Testes realizados 166
7.4. Metodologia dos testes 167
7.4.1. Filtragem dos dados 168
7.4.2. Sintonia do filtro 171
7.4.3. Monitoramento do filtro 171
7.4.4. Reconstrução da trajetória estimada e figura de mérito adotada 172
7.5. Constantes utilizadas 173

8. RESULTADOS E DISCUSSÃO 174
8.1. Sinais de sensores 175
8.2. Velocidades e acelerações transportadas para o sistema NED 181
8.3. Reconstrução da trajetória 183
8.3.1. Reconstrução da trajetória sem o auxílio de medidas externas 183
8.3.2. Reconstrução da trajetória utilizando medida externa de velocidade na fusão sensorial 185
8.3.3. Reconstrução da trajetória utilizando medidas externas de velocidade e azimute na fusão sensorial 187
8.3.4. Reconstrução da trajetória utilizando medidas externas de velocidade e landmarks na fusão sensorial 190
8.3.5. Reconstrução da Trajetória em Percurso de Longa Duração 194

9. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES 197

REFERÊNCIAS 202

# 1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

## 1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Aplicações práticas de medições inerciais requerem métodos eficientes na utilização dos dados disponibilizados pelos sensores inerciais. Entretanto, as unidades de medição inercial (UMI) de baixo desempenho são equipadas com sensores inerciais (giroscópios e acelerômetros) que não possuem sensibilidade suficiente para medir a velocidade de rotação terrestre, além de apresentar baixo desempenho de navegação para tempos da ordem de minutos.

De uma forma geral, os sinais provenientes de sensores inerciais apresentam ruídos e deriva de natureza aleatória que ao serem matematicamente integrados se acumulam com o passar do tempo. Esta característica indesejável torna o processo de navegação inercial inviável, pois, dependendo do grau de precisão dos sensores inerciais, em alguns minutos a trajetória reconstruída por meio dos sinais destes dispositivos poderá apresentar desvios da ordem de quilômetros. Para minimizar este problema, uma das possibilidades é combinar os sinais dos sensores inerciais com sinais de sensores não-inerciais. A técnica que combina as informações dos sensores inerciais e não-inerciais é conhecida como fusão sensorial.

A fusão sensorial é essencialmente um algoritmo computacional resultante de modelo matemático, com o objetivo de se determinar um conjunto de propriedades frequentemente representadas por um vetor de estados. Na fusão sensorial, os estados e as informações sensoriais são combinados para produzir informações mais precisas. A técnica frequentemente utilizada para fazer a fusão sensorial entre as medições inerciais e outros tipos de sensores é o Filtro de Kalman (FK). O Filtro de Kalman é um observador que estima os estados de um sistema dinâmico linear ou não linear, no qual

os estados e as medidas estão supostamente contaminados por ruídos. O Filtro de Kalman tem sido extensivamente utilizado na fusão de informação dos diversos sensores relacionados. Em aplicações de navegação inercial, o Filtro de Kalman é frequentemente utilizado para estimar estados de posição, velocidade e orientação por meio de sinais provenientes de acelerômetros e giroscópios.

Teoricamente, se o sistema de navegação inercial (SNI) for contínuo e as medidas forem perfeitas, é possível calcular a velocidade linear e a orientação do objeto a partir de um modelo determinístico de sensores inerciais e força gravitacional,, integrando-se numericamente as acelerações e velocidades angulares.

Como será visto adiante, o problema com os SNI de baixo desempenho, é que os sensores inerciais não são contínuos e suas medições não são perfeitas. Por este motivo, a integração numérica dos erros dos sensores contaminados por ruídos faz com que os erros de posição, velocidade e orientação do SNI cresçam rapidamente, degradando severamente o processo da navegação inercial. Além dos erros atribuídos à imprecisão dos sensores inerciais, existe a limitação da precisão do modelo geofísico terrestre que não prevê fenômenos que modificam a magnitude e direção do vetor gravitacional, tornando-se impossível compensar com precisão os efeitos gravitacionais sobre a aceleração. Por estes e outros motivos, um SNI de baixo desempenho não pode por si só proporcionar uma solução minimamente satisfatória na estimação de trajetória. Entretanto, pesquisas indicam que consegue-se produzir medidas mais precisas e robustas quando o SNI é auxiliado por outros sensores não inerciais. Uma das técnicas mais populares é a fusão sensorial SNI/GPS que, embora produza bons resultados, não pode ser aplicada em ambientes fechados, por não se dispor de sinal GPS. Devido ao fato de que em muitas trajetórias importantes não se dispõe de sinal GPS, esta limitação tem motivado o desenvolvimento de técnicas de fusão sensorial com outros tipos de dispositivos sensores.

## 1.2. NAVEGAÇÃO INERCIAL

Navegação inercial é uma técnica na qual medidas fornecidas por acelerômetros e giroscópios (sensores inerciais) são utilizadas para rastrear a posição e a orientação de

um corpo referenciado a um determinado sistema de coordenadas. Neste sistema, as informações iniciais de posição e orientação devem ser previamente conhecidas.

De uma forma geral, os sensores inerciais são convenientemente agrupados e controlados por uma eletrônica embarcada, formando uma unidade de medição inercial (UMI). Tipicamente, uma UMI contém uma tríade ortogonal de giroscópios e outra de acelerômetros, os quais fornecem medições de velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}^b = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ e acelerações lineares $\mathbf{f}^b = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T$ respectivamente. Através do processamento desses sinais é possível rastrear a posição e a orientação do objeto, como será visto adiante.

A navegação inercial é amplamente utilizada na navegação de aeronaves, mísseis, submarinos, navios, robôs, veículos autônomos, entre outros. A ampla maioria das UMI's destinadas a estas aplicações não são muito compactas e possuem custo elevado. No entanto, os recentes avanços na construção de dispositivos semicondutores têm possibilitado a fabricação de sistemas de navegação inerciais mais leves, compactos, baratos e relativamente precisos.

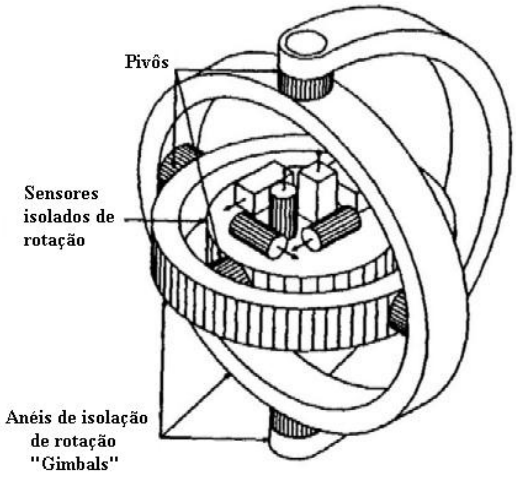



Figura 1.1 – Sistema de navegação inercial isolado de rotação (*gimbaled system*)

Teoricamente, os sistemas de navegação inerciais são classificados em duas categorias: os sistemas de navegação de plataforma estável (também conhecidos como

sistemas isolados de rotação ou *gimbaled systems*[1] – vide figura 1.1) e os sistemas de navegação de plataforma analítica, conhecidos como *strapdown systems*. Neste trabalho em particular será empregado o sistema *strapdown*, o qual será visto em detalhes nos capítulos adiante.

## 1.3. DEFINIÇÃO DE CONFIGURAÇÃO *STRAPDOWN* E PLATAFORMA

*Strapdown* é o nome atribuído a um sistema de medição inercial integrado, onde três acelerômetros e três giroscópios são montados sobre eixos ortogonais coincidentes, fixados sobre uma base rígida. Nesse sistema, as origens dos eixos dos acelerômetros e dos giroscópios são coincidentes e com eixos paralelos, o que torna possível realizar transformações entre coordenadas.

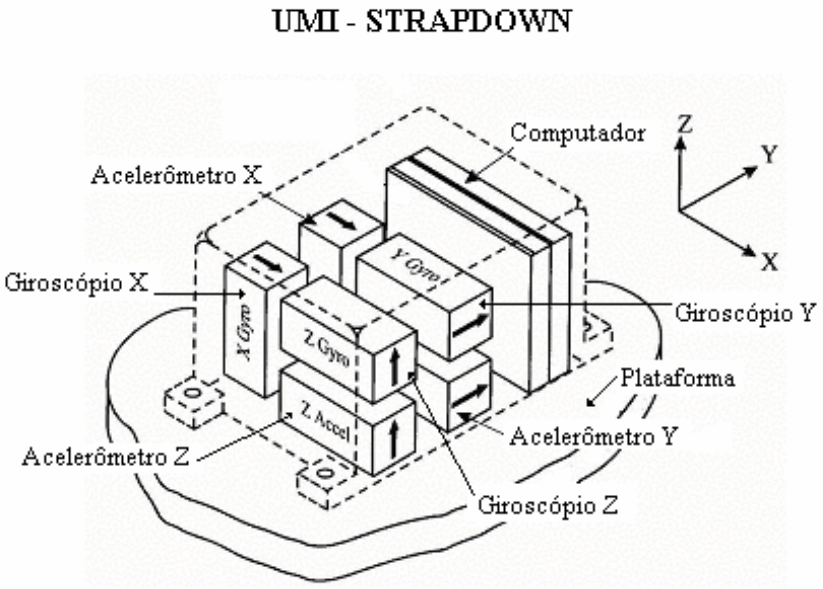



Figura 1.2 – Sistema de navegação inercial não isolado de rotação (*strapdown system*)

[1] "*Gimbaled Systems*" é o nome dado aos sistemas de navegação inercial com três graus de liberdade. Neste sistema, os sensores inerciais estão isolados do movimento de rotação através de anéis rotativos denominados "*gimbals*".

Quando duas tríades ortogonais de sensores inerciais (acelerômetros e giroscópios) são montadas sobre uma base rígida e embarcada juntamente com um sistema de controle eletrônico dedicado, tem-se então uma estrutura denominada unidade de medição inercial *strapdown*. Fixando-se esta UMI num determinado corpo ou veículo obtém-se uma estrutura denominada plataforma. Esta estrutura forma um sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas da plataforma[2]. Os sinais fornecidos pelos giroscópios, $\boldsymbol{\omega}^b = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ e acelerômetros, $\mathbf{f}^b = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T$, são medidos neste sistema de referência[3]. A figura 1.2 ilustra uma UMI do tipo *strapdown*.

## 1.4. ETAPAS DA NAVEGAÇÃO INERCIAL *STRAPDOWN*

Um sistema de navegação inercial é basicamente um algoritmo de tempo real, projetado para se calcular através de integração matemática das acelerações e velocidades angulares a velocidade linear, a posição e a orientação de um corpo que transporta uma UMI.

A velocidade e a posição são calculadas por dupla integração, devendo-se compensar os efeitos da aceleração gravitacional nos sinais fornecidos pelos acelerômetros. Para um sistema de navegação inercial *strapdown* (SNIS), as integrações matemáticas são efetuadas no sistema de coordenadas da plataforma que é o sistema onde os giroscópios e os acelerômetros estão instalados. Teoricamente, é possível se determinar a orientação dos acelerômetros integrando-se as velocidades angulares fornecidas pelos giroscópios. As acelerações, velocidades e posições calculadas são então convertidas para o sistema de referência desejado utilizando-se as informações de orientação.

---

[2] O sistema de coordenadas da plataforma é também conhecido como sistema de coordenadas do corpo ou ***body*** *system*. Por este motivo, sempre que um símbolo ou equação matemática estiver se referindo a este sistema de coordenadas, um índice "*b*" será utilizado.

[3] Não necessariamente o sistema de coordenadas da plataforma coincide com a posição da UMI, sendo necessário transferir as coordenadas para pontos usualmente utilizados, tal como, o centro de gravidade do veículo.

Basicamente, um sistema de navegação inercial é composto de duas etapas principais: uma etapa denominada alinhamento inicial e a etapa da navegação propriamente dita. Como mencionado anteriormente, o processo de integração dos sinais dos sensores inerciais inicia-se a partir dos valores iniciais de velocidade, posição e orientação. O alinhamento inicial é o processo pelo qual se determina tais valores iniciais. A etapa de alinhamento inicial deve preceder a etapa da navegação, pois caso isso não ocorra os erros de alinhamento serão integrados e propagados no tempo, introduzindo grandes erros nos cálculos da velocidade, posição e orientação da plataforma.

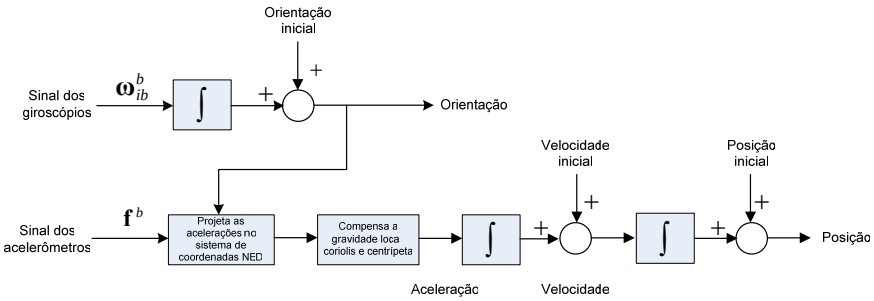



Figura 1.3 – Duplo integrador strapdown

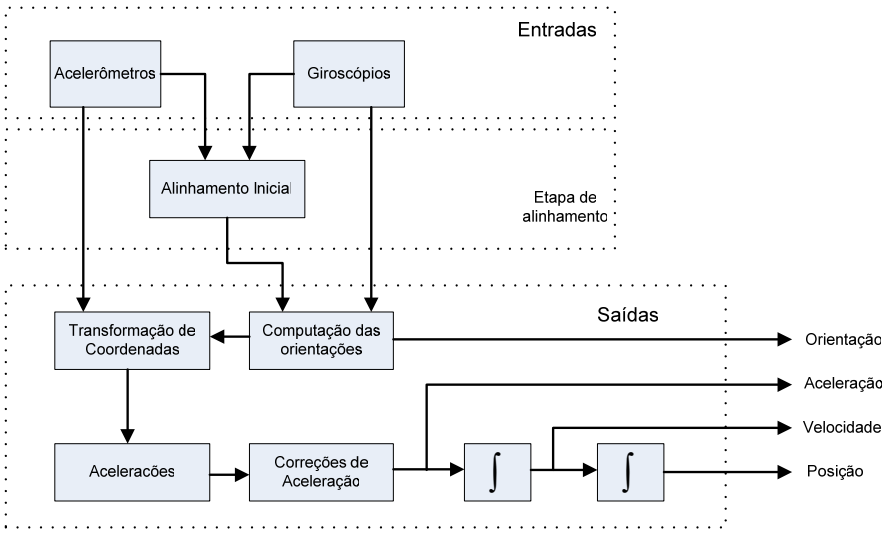



Figura 1.4 – Etapas de alinhamento e navegação do SNI

A figura 1.3 ilustra um algoritmo de duplo integrador comumente utilizado num SNIS, enquanto que a figura 1.4 ilustra as etapas de alinhamento e de navegação do SNIS corretamente contempladas.

## 1.5. O OBJETIVO DA TESE

O objetivo desta tese é desenvolver um algoritmo de fusão sensorial baseado no Filtro de Kalman para obtenção da posição, velocidade e orientação de uma plataforma.

A plataforma é composta por um automóvel no qual são embarcados sensores inerciais e auxiliares. A configuração de sensores é composta por uma unidade de medição inercial (UMI) strapdown dotada de acelerômetros e giroscópios de baixo desempenho apoiada por um hodômetro incremental do qual se extrai medidas de velocidade e um magnetômetro (bússola eletrônica).

O termo “UMI de baixo desempenho” é utilizado para se descrever uma UMI que não possui sensibilidade suficiente para medir a velocidade de rotação terrestre, além de apresentar baixo desempenho de navegação para tempos da ordem de minutos. Desta forma, a fusão sensorial proposta torna possível reconstruir a trajetória da plataforma utilizando-se sensores inerciais cuja classe de precisão e custo são ordens de grandeza inferiores às mínimas requeridas para se obter resultados equivalentes por meio de técnicas convencionais de reconstrução.

Propõe-se ainda um critério quantitativo para se determinar *a priori* a extensão máxima de uma trajetória que se pode reconstruir dentro de uma confiabilidade determinada a partir do conjunto de sensores disponíveis usando-se a incerteza da posição estimada pelo algoritmo.

Um conjunto de marcas topográficas (*landmarks*) instaladas ao longo da trajetória experimental fornecem as coordenadas do ponto quando o veículo passa por elas, permitindo-se determinar com precisão o erro da posição estimada com relação à trajetória real. Além disso, conjuntos reduzidos de *landmarks* são utilizados como sensores fictícios para corroborar o critério de confiabilidade proposto.

## 1.6. A MOTIVAÇÃO DO OBJETIVO DA TESE

A motivação inicial para o tema em questão teve sua origem na necessidade de se criar um sistema de navegação terrestre para um PIG – *Pipeline Inspection Gauge* de inspeção de dutos (vide figura 1.5). No decorrer do desafio percebeu-se que as questões acerca do problema da navegação inercial não eram triviais e muito poucos trabalhos tinham sido publicados na literatura nacional. Tais limitações instigaram o autor a efetuar um estudo aprofundado do SNI, visando desenvolver algoritmos de navegação inercial terrestre, que é exatamente o tema desta tese. A questão da navegação inercial é de crucial importância estratégica para o Brasil e, portanto, a comunidade acadêmica deve ser um dos vetores de contribuição do aumento da massa crítica envolvendo o tema. Como ponto de partida para futuras reflexões da importância do tema, o autor parafraseia a seguir, um texto extraído do Ministério da Defesa Nacional em **http://www.defesa.gov.br**

> A tecnologia inercial é utilizada em sensores e equipamentos para monitoramento, instrumentação, controle, guiagem e navegação de engenhos não-tripulados e para estabilização de plataformas. O tema é de grande relevância estratégica para a Defesa Nacional, pois envolve tecnologias de acesso restrito por tratados internacionais, como o Regime de Controle de Tecnologia de Mísseis (MTCR), do qual o Brasil é um dos países signatários. Por conta das restrições a importações de componentes, o estabelecimento de uma competência nacional na área de tecnologia de sistemas inerciais representa um grau importante de autonomia para o Brasil, que depende de fornecedores estrangeiros para a solução de problemas de estabilização de plataformas de tiro e de petróleo, de pilotagem e guiamento de veículos submarinos, terrestres e lançadores de satélites e de controle de órbita e de atitude de satélites.

Figura 1.5 – PIG de inspeção de dutos

## 1.7. AS CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Esta tese tem como principais contribuições uma proposta de modelagem original (como será visto mais adiante) de um sistema de navegação inercial montado em um automóvel com a configuração descrita na seção 1.5, que permite produzir trajetórias experimentais de grande extensão em áreas abertas com grande flexibilidade. Também se desenvolve um filtro de estimação de estados inédito, denominado FKAS – *Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado*. Como última e não menos importante contribuição, pode-se se destacar que no desenvolvimento da tese um grande esforço de agrupamento de informações foi feito, sobretudo, nas etapas de revisão bibliográfica, desenvolvimento e consolidação dos diversos fundamentos teóricos envolvidos no SNIS.

## 1.8. ORGANIZAÇÃO DA TESE

O capítulo 2 fornece ao leitor um panorama acerca do estado da arte da navegação inercial strapdown. Neste capítulo é feita uma minuciosa revisão cronológica da literatura pertinente, explorando-se as diversas fases envolvidas no processo do SNIS. Neste capítulo em especial, procura-se fornecer um panorama acerca do estado da arte da navegação inercial no Brasil.

O capítulo 3 apresenta os fundamentos teóricos dos diversos sistemas de coordenadas terrestres envolvidos na navegação inercial e as técnicas utilizadas para efetuar as transformações de coordenadas entre os diversos referenciais. Neste capítulo são desenvolvidos os principais modelos matemáticos terrestres utilizados no SNI/SNIS. As técnicas de transformações de coordenadas são desenvolvidas com base nas matrizes de rotação que descrevem os Ângulos de Euler, os Cossenos Diretores e os Quaternions de Orientação. Técnicas de implementação numérica das matrizes de rotação também são discutidas neste capítulo.

O capítulo 4 descreve as principais fontes de ruídos presentes nos sensores inerciais e que degradam o SNI/SNIS. Também são apresentadas técnicas de correções determinísticas e estocásticas, bem como sua modelagem, caracterização e estratificação.

O capítulo 5 descreve as técnicas de estimação de estados e estimação estocástica, descrevendo as diversas formas existentes do Filtro de Kalman. Este capítulo também apresenta uma técnica adaptativa para sintonizar a matriz associada ao ruído do processo. Por último, descreve-se a proposta do Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado (FKAS).

No capítulo 6 o modelo de estados e o modelo dos erros de estado do SNIS são desenvolvidos. O espaço de estados é composto pelas variáveis de orientação, velocidade e posição, e a estas variáveis de estados associam-se erros que compõem um segundo espaço de estados. A fim de se evitar problemas de singularidade e normalização, no modelo de estado de espaços total adota-se uma representação de quatro estados de quaternions. Por conveniência de modelagem e facilidade de implementação, o modelo de erros de estados utiliza a análise de quatro estados de quaternions e a análise de três parâmetros de cossenos diretores. Uma vez desenvolvida a análise de espaço de estados total e espaço de estado dos erros, ambas são convenientemente combinadas para produzir uma medição de estado corrigida.

O capítulo 7 descreve os materiais e suas características, conjuntamente com a metodologia empregada para realização da fusão sensorial proposta. Ele descreve todo o *setup* envolvendo os ensaios realizados, desde a concepção e instalação dos diversos sensores até as etapas de coleta, sincronismo e processamento dos dados. Também são descritos neste capítulo as técnicas utilizadas para implementação e monitoramento do FKAS.

O capítulo 8 mostra, analisa e discute os resultados simulados e experimentais para os diversos ensaios realizados.

O capítulo 9 discute as principais conclusões e recomendações acerca do trabalho realizado.

# 2. REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta um panorama geral acerca dos sistemas de navegação inercial (SNI), com ênfase na utilização de técnicas de estimação estocásticas e, particularmente, aquelas que utilizam as diversas formas do Filtro de Kalman aplicadas à determinação de trajetórias terrestres. Enfatizam-se também as particularidades de um sistema de navegação inercial *strapdown* (SNIS).

Inicialmente definem-se as etapas envolvidas.

A navegação inercial utiliza acelerômetros e giroscópios para determinar a velocidade, posição e orientação do corpo onde os referidos sensores estão fixados. É uma ciência multidisciplinar, que integra as etapas de modelagem dos diversos sistemas de coordenadas de navegação e seus modelos gravitacionais, os sensores inerciais com seus erros e ruídos associados e a estimação estocástica de estados.

Antes de se iniciar a navegação inercial propriamente dita, torna-se necessário conhecer os sistemas de coordenadas utilizados juntamente com suas correções gravitacionais e rotacionais. As obras de Titterton (1997) e Rogers (2000), são excelentes fontes de consulta, pois descrevem de forma detalhada os diversos referenciais utilizados na navegação inercial *strapdown*, seus modelos matemáticos e as correções gravitacionais e rotacionais terrestres. No sentido de consolidar o modelo dos diversos referenciais da navegação, Bar-Itzhack (1982) *apud* (KONG, 2000) propõe a unificação do sistema através da abordagem de navegação através dos ângulos $\phi$ *(phi)* e $\psi$ *(psi).*

Outra questão crucial na navegação inercial é o problema das transformações de coordenadas. Para tanto utilizam-se basicamente três técnicas para efetuar as mudanças de orientação: os Ângulos de Euler, os Cossenos Diretores e os Quaternions. Por serem computacionalmente mais eficientes, os quaternions ganharam atenção especial nas últimas décadas (KIM, 2004).

Kong (2000) apresenta uma modelagem para a navegação inercial de baixo custo, no qual a propagação dos erros de orientação é assumida “grande”. Neste trabalho, os erros de orientação são modelados utilizando-se as abordagens dos

cossenos diretores e dos quaternions. Ela corrobora a eficiência de sua proposta aplicando uma fusão sensorial com GPS (*Global Positioning System*) por meio de um Filtro Estendido de Kalman.

A calibração de um SNI *strapdown* (SNIS) é bastante trabalhosa e exige boa habilidade de modelagem. O procedimento de calibração não é uma intervenção física nos sensores, mas sim uma técnica para se determinar os erros e ruídos de sensores e incluí-los na dinâmica do sistema. A calibração exige equipamentos auxiliares que via de regra não estão disponíveis a um custo baixo. Kim (2004) apresenta um procedimento de calibração combinando as medidas de sensores MEMS (*Microelectromechanical Systems*) na determinação do erro de orientação. O resultado dos erros de orientação estimados pelo filtro foram então aferidos por meio de um rastreador óptico e mostraram-se bastante satisfatórios, indicando que esta pode ser uma solução de calibração de orientação de baixo custo. Para executar a calibração da navegação (posição, velocidade e aceleração), Kim emprega medidas de posição auxiliares. Os resultados foram simulados no rastreamento de uma trajetória conhecida e o modelo aplicado ao filtro apresentou erros de trajetória da ordem de centímetros. No entanto o filtro diverge quando se deixa de fornecer medidas de posição externa por mais de dez segundos, indicando que esta proposta não é uma boa solução para navegação de média ou longa duração.

O desenvolvimento de uma técnica de calibração e alinhamento usando uma fusão de sensores inerciais MEMS e magnetômetro é proposto por Jurman (2007). O algoritmo apresenta desempenho notável na determinação da orientação, com erro RMS menor que $1,2^0$ em toda faixa de operação. Zhu et al (2006) também propõem um algoritmo de calibração e alinhamento usando fusão de sensores inerciais MEMS e magnetômetro. Neste trabalho, as componentes do campo magnético e do campo gravitacional são utilizadas ao invés do uso tradicional dos ângulos de Euler e quaternions. Esta proposta é interessante porque torna o modelo linear, o que melhora substancialmente sua aplicação com os Filtros de Kalman. Além disso, o algoritmo é processado a altas velocidades e os resultados obtidos atingem os objetivos propostos.

Ojeda (2000) desenvolve uma técnica de calibração para giroscópios do tipo FOG – *Fiber Optic Gyroscopes*. Ojeda testa sua técnica em cinco giroscópios FOG modelo KVH-2010, e os resultados após a calibração é que todos apresentaram

estabilidade de *bias* e de *randown-walk* equivalentes a modelos de uma classe de precisão acima.

Antes de se navegar, torna-se necessário efetuar o alinhamento inicial do sistema. Tecnicamente, a etapa do alinhamento inicial pode ser feita de duas formas: o alinhamento estático e o alinhamento dinâmico.

Em seu artigo denominado “Experimentos de alinhamento de unidade de medida inercial baseada em MEMS (Micro Electro-Mechanical Systems)”, Kuga, Milani e Einwoegerer (2008a), propõe um método de alinhamento estático e semi-dinâmico utilizando a técnica de filtragem não linear. Uma abordagem, que usa o filtro de Kalman sigma-ponto (também conhecido como *Unscented Kalman Filter*) (JULIER, 1997a), (JULIER, 1997b), foi desenvolvida para processar os dados e evitaram a necessidade de computar a matriz Jacobiana, fornecendo estimativas muito consistentes do filtro. Os resultados mostraram uma resposta rápida do filtro tanto em situações estáticas (UMI completamente parada) como em condições semi-dinâmicas (UMI só com movimento rotacional).

Waldman (2007) investiga o impacto que o erro de modelo e das manobras causam na estimação do desalinhamento e dos erros da unidade de medidas inerciais (UMI). Ele modela o sistema através da fusão de um sistema girante de navegação inercial de baixo custo com medidas externas de posição e velocidade empregando um Filtro de Kalman. Neste artigo, Waldman ressalta a superioridade da abordagem *feedforward* usando sensores auxiliares de posição e velocidade em relação ao SNI não auxiliado. Também se conclui que o bias de acelerômetro é estimado com maior precisão quando se mantém girando continuamente a UMI durante o alinhamento estacionário terrestre.

Existem basicamente duas técnicas de fusão sensorial: uma que utiliza medidas de sensores externos para auxiliar o filtro na determinação dos estados e outra que utiliza medidas de sensores externos para determinação dos erros de estados (KIM, 2004).

A fusão sensorial tem sido ao longo dos anos de grande interesse da comunidade inercial. Uma grande quantidade de trabalhos de fusão sensorial GPS/SNI foram publicados e algumas dezenas entre teses, dissertações e artigos foram examinadas pelo autor, não sendo possível esgotar este tema. Citam-se, portanto, algumas propostas interessantes e desenvolvidas no contexto nacional.

Em seu artigo “Integração de Sistema DGPS e Unidade Inercial para Navegação Precisa de Aeronave em Tempo-Real”, Kuga et al (2008b) descreve a integração de um sistema GPS diferencial (DGPS) com a unidade inercial de uma aeronave, visando trajetografia precisa em tempo real. Basicamente, uma implementação de GPS diferencial é integrada a uma plataforma inercial (giroscópios e acelerômetros em 3-eixos) para identificar a posição e velocidade de uma aeronave. Os resultados mostraram desempenho satisfatório mesmo num caso crítico de dados DGPS indisponíveis por um intervalo razoável (37 s). Permanecem para serem testadas situações com taxas de amostragem maiores.

Uma fusão sensorial GPS/SNI para um robô ambiental operando na floresta amazônica é proposta por Stein e Salvi dos Reis (2007). Este artigo ressalta a degradação do sinal GPS em ambientes florestais e a necessidade de se combinar as características complementares dos sinais GPS com o SNI.

Outras referencias consultadas pelo autor relacionando a diversas técnicas de fusão sensorial GPS/SNI podem ser consultadas em (DOROBANTU, 1999), (SUKKARIEH, 2000), (GUIVANT, 2000), (SHIN, 2001), (KONG, 2004), (GUL, 2006), (TOLEDO-MOREO, 2007) , (PINGYUAN, 2007), (BRANDT, 2008), (BIJKER, 2008), e (FRANÇA JUNIOR, 2009).

A técnica de fusão sensorial com GPS melhora consideravelmente o desempenho do SNI, porém é estritamente dependente de disponibilidade de sinais dos satélites. Em ambientes onde não se dispõe de sinal GPS, esta técnica não é aplicável. Neste sentido, grandes esforços têm sido feitos objetivando-se integrar o SNI com outros tipos de sensores.

Rudolf Kalman desenvolveu e apresentou na década de 1960, o Filtro de Kalman discreto (KALMAN, 1960), tendo desenvolvido posteriormente com a colaboração de Richard Bucy a versão continua do filtro (KALMAN e BUCY, 1961). Devido ao seu êxito inicial, o Filtro de Kalman tornou-se rapidamente um sucesso e seu emprego na estimação de estados de sistemas dinâmicos passou a ser uma das teorias mais estudadas na área. Para sistemas dinâmicos lineares e ruídos gaussianos (vide equação (2.1)) o filtro de Kalman produz estimativas de estados ótimas, predizendo um valor para o estado $\mathbf{x}_{k-1}$, estimando a incerteza do valor predito e calculando uma média ponderada entre o valor predito e o valor medido $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, onde o peso maior é dado ao valor de menor incerteza.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} && \text{(modelo dinâmico)} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k && \text{(equação de medição)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Embora muito robusto se aplicado a sistemas dinâmicos lineares, quando se desvia deste cenário (sistemas não-lineares, ruídos não-gaussianos), o Filtro de Kalman pode apresentar sérios problemas de divergência. Um dos problemas é própria linearização do modelo que, via de regra, pode ser altamente não linear, fazendo com que o filtro divirja. Outro problema relativo à divergência dos Filtros de Kalman tanto para casos lineares como não lineares é o ajuste (sintonia) da matriz que modela a covariância do ruído associado ao processo $\mathbf{Q}$.

Como será visto em detalhes no capítulo 5, o ajuste da matriz $\mathbf{Q}$ é crucial para o bom funcionamento do Filtro de Kalman, pois o filtro irá divergir se $\mathbf{Q}$ for mal condicionada. Muitos esforços continuam sendo feitos na determinação do ajuste de $\mathbf{Q}$. Brown (1987) e Hartikanen (2005) apresentam uma técnica para modelar e efetuar o ajuste inicial de $\mathbf{Q}$ baseada na densidade espectral de potencia do sistema contínuo. Embora eficiente, este tipo de ajuste não modela a matriz adequadamente quando a mesma é variável no tempo. Jazwinski (1970) propõe um algoritmo para ajustá-la de forma adaptativa. Nessa linha, Rios Neto e Kuga publicaram um trabalho em 1982 (RIOS NETO e KUGA, 1982) que descreve uma técnica adaptativa de ajuste, na qual os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{Q}$ são empregados para compor um vetor de otimização denominado $\mathbf{q}$. Este trabalho inovador tornou o tema de grande relevância nacional. Posteriormente, Nascimento Júnior (1988) publicou um trabalho em que combate a divergência dos Filtros de Kalman ajustando adaptativamente a matriz $\mathbf{Q}$. Este trabalho explora uma grande quantidade de conceitos teóricos acerca do problema da divergência do FK, modelando a técnica do ruído adaptativo. Essa técnica foi utilizada com sucesso por Trigo (2005) no problema de estimação não linear de parâmetros na tomografia por impedância elétrica. Qing-Hao (2000), também propõe em seu trabalho uma técnica de filtragem estocástica baseada em Filtros de Kalman com ruído adaptativo e a empregada na determinação de trajetória de um robô em ambiente estruturado, mostrando a superioridade de desempenho quando se utiliza o filtro adaptativo em detrimento do não adaptativo.

Existem ainda outras técnicas de estimação de estados baseadas nos filtros de Kalman, podendo-se citar:

- Filtro de Informação, no qual ao invés de se propagar a matriz de covariância do ruído de processo $\mathbf{P}$, propaga a sua inversa $\mathbf{P}^{-1}$, denominada matriz de informação da covariância do ruído associado ao processo.
- Filtro Linearizado de Kalman (FLK) e Filtro Estendido de Kalman (FEK), ambos aplicados a sistemas dinâmicos não lineares.
- Filtro de Kalman de Sigma-Ponto ou *"Unscented Kalman Filter"* (UKF), que opera segundo o principio de mudar de domínio um sistema não linear, a partir de um conjunto de pontos denominados "*sigma-points".*
- Filtro de Partículas (FP), também conhecido como *Bootstrap Filter* (BF), o qual se baseia nas técnicas estatísticas de *Monte-Carlo*, (ARULAMPALAM, 2002), (GUSTAFSSON et al, 2001).

A grande vantagem do Filtro de Kalman de Sigma-Ponto sobre as versões não lineares anteriores é que não se necessita calcular as matrizes jacobianas ou hessianas (JULIER e UHLMANN, 1997). O Filtro de Partículas também apresenta desempenho superior aos Filtros de Kalman, porém sua aplicação exige maiores esforços computacionais, o que deve ser cautelosamente ponderado antes de se optar por este tipo de solução (CAMPOS, 2004c).

A estimação de estados também pode ser melhorada aplicando-se algoritmos de suavização. Dentre os algoritmos de suavização mais utilizados estão o algoritmo *RTS* desenvolvido por Rauch, Tungel e Striebel (RAUCH, 1965) e o algoritmo *Forward-Backward* desenvolvido por Fraser e Potter (FRASER, 1969).

Para os que desejem obter maiores informações sobre as técnicas de filtragem estocástica, o autor recomenda além das referencias já citadas a consulta a outras obras tais como: (GELB, 1969), (LEONDES, 1970), (MAYBECK, 1976), (BAR-SHALOM, 1993), (BROOKNER, 1998), (BAR-SHALOM, 2001), (SIMON, 2006), e (TEIXEIRA et al, 2010).

# 3. MODELAGEM DOS REFERENCIAIS DA NAVEGAÇÃO TERRESTRE

## 3.1. PRINCIPAIS REFERENCIAIS UTILIZADOS NA NAVEGAÇÃO INERCIAL *STRAPDOWN*

Os sistemas de coordenadas são utilizados para referenciar ou localizar geograficamente um determinado corpo ou veículo. Portanto, para se definir a posição de um objeto, torna-se necessário especificar o sistema de coordenadas no qual o objeto está representado. Segundo Grewal (2001), os sistemas de coordenadas utilizados em navegação inercial são constituídos basicamente por sistemas de coordenadas cartesianas e sistemas de coordenadas esféricas, sendo que os mais utilizados em navegação são:

**Referencial ECI (*Earth-Centered-Inertial*)** – sua origem está no centro de massa da Terra, sendo que seu eixo $x$ aponta para o Equinócio Vernal[4], passando pela linha do equador, seu eixo $z$ passa pelo pólo norte e seu eixo $y$ é orientado seguindo a regra da mão direita. O sistema ECI é dito inercial por ser considerado fixo em relação a um corpo estelar distante.

**Referencial ECEF (*Earth-Centered, Earth-Fixed*)** – sua origem está no centro de massa da Terra, sendo que seu eixo $x$ passa pelo cruzamento entre a linha do equador e o meridiano de Greenwich, seu eixo $z$ passa pelo pólo norte e seu eixo $y$ é orientado seguindo a regra da mão direita.

[4] O Equador Celeste e a Eclíptica são dois grandes círculos na Esfera Celeste, definidos a um ângulo de 23,5 graus. Os dois pontos onde eles se interceptam são chamados de Equinócios. Quando o Sol passa pelo Equinócio Vernal, ele atravessa o Equador Celeste de Sul para Norte.

**Referencial de navegação terrestre ou referencial NED (*North-East-Down*)** – conhecido como *sistema de navegação local*, sua origem pode ser estabelecida em qualquer ponto do globo terrestre, sendo que seu eixo $x$ aponta para o norte geográfico, seu eixo $z$ aponta para o centro da Terra e seu eixo $y$ é referenciado de acordo com regra da mão direita. É um sistema de coordenadas local do tipo **LTP (*Local Tangent Plane*),** no qual a Terra é representada como uma superfície plana no ponto onde a navegação está sendo analisada.

**Referencial da plataforma ou referencial RPY (*Roll-Pitch-Yaw*)** – conhecido como *sistema de navegação da plataforma,* é um sistema cujos eixos são fixos num veículo, constituindo assim uma estrutura denominada "estrutura móvel". O eixo $x$ (eixo de roll) do sistema RPY deve apontar para a direção frontal do movimento do veículo, o eixo $y$ (eixo de "pitch") deve ser ortogonal a $x$ e apontar para a direita enquanto que o eixo $z$ (eixo de "yaw") aponta para baixo (regra da mão direita).

**Referencial curvilíneo ou geodésico** – trata-se de um sistema de coordenadas esféricas, onde a localização de um corpo é representada por um deslocamento angular (positivo no sentido anti-horário) cuja origem é o Meridiano de *Greenwhich* denominado *longitude* $(l)$, seguido por um movimento angular (também positivo no sentido anti-horário) cuja origem é a linha do equador denominado *latitude* $(L)$ e uma cota de elevação referenciada ao nível do mar denominada *altitude* $(h)$.

A figura (3.1) ilustra a relação entre quatro dos cinco sistemas de coordenadas anteriormente descritos. No globo terrestre estão os sistemas ECEF, com eixos designados pelo índice '$e$' (derivado de *earth*), o sistema NED ou sistema de navegação local, onde os eixos são designados pelas letras $(N)$, $(E)$, $(D)$ e o sistema geodésico designado pelas cotas de longitude $(l)$, latitude $(L)$ e altitude $(h)$. O sistema RPY está fixo ao veículo (plataforma) que por sua vez se movimenta com o sistema de navegação local NED. Também estão representados os eixos onde ocorrem os movimentos de rotação denominados: "roll-pitch-yaw" (RPY) os quais podem ser traduzidos como "rolamento – arfagem – guinada" respectivamente.

O sistema RPY é também designado como sistema do corpo (*body system*), sendo atribuído o índice "$b$" aos seus eixos.

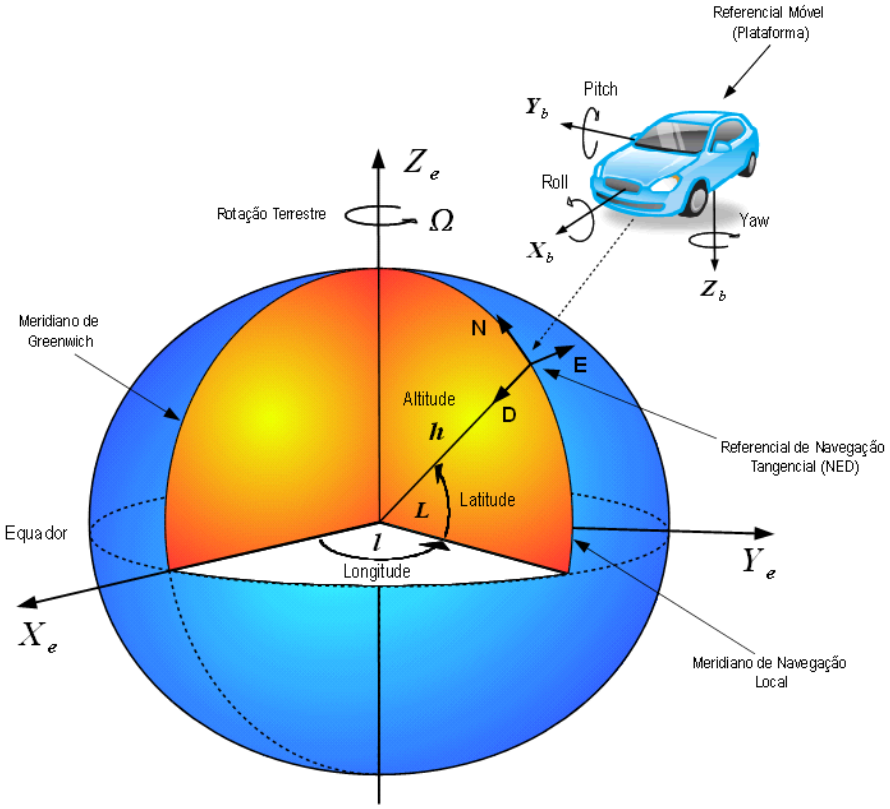



Figura 3.1 – Sistemas de coordenadas: ECEF, Geodésico, NED e RPY

A título de complementação, cita-se o referencial ENU **(*East-North-Up*)**, amplamente utilizado para navegação aérea no lugar do referencial NED, sendo que seu eixo $x$ aponta para o norte geográfico, seu eixo $z$ é normal à superfície da Terra e aponta para cima e seu eixo $y$ é referenciado de acordo com regra da mão direita.

# 3.2. MODELAGEM TERRESTRE DO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL “STRAPDOWN” (SNIS)

## 3.2.1. CONCEITUANDO A ACELERAÇÃO “FORÇA ESPECÍFICA”

Conforme mencionado anteriormente, um acelerômetro fornece uma medida de aceleração denominada força específica. Para conceituar esta aceleração considere a figura (3.2), onde uma força peso **P** atua sobre uma massa *m* e, o corpo sofre um deslocamento produzido por uma força **F**.

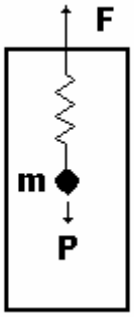



Figura 3.2 – Forças atuando sobre um acelerômetro

A segunda lei de Newton aplicada ao sistema produz

$$\sum Forças = \mathbf{F} + \mathbf{P} = m\mathbf{a}_i \,, \tag{3.1}$$

e a aceleração inercial é obtida por

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{f} + \mathbf{g} \,. \tag{3.2}$$

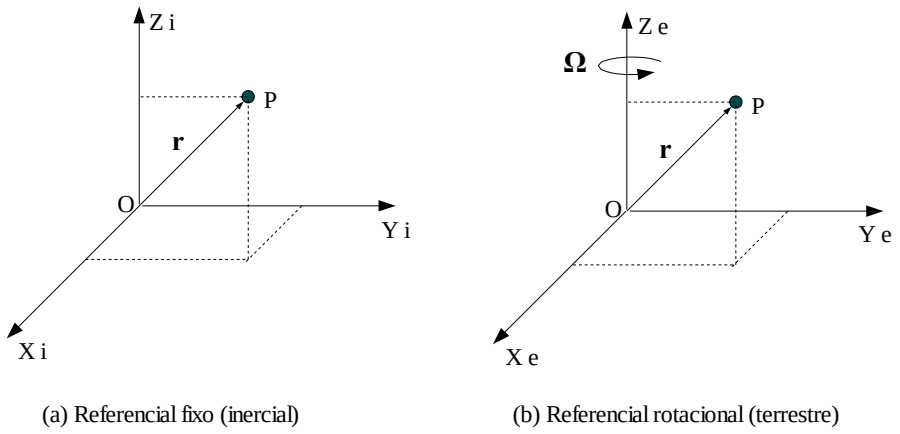
Assim, a aceleração sentida pelo acelerômetro, é aquela que produz o movimento, ou seja, é a aceleração denominada força específica $\mathbf{f}$, dada por

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_i - \mathbf{g} \,. \tag{3.3}$$

### 3.2.2. MODELAGEM NUM SISTEMA DE COORDENADAS FIXO

Considere a situação onde se deseja navegar em um sistema de coordenadas inercial. As componentes da força específica e da aceleração gravitacional são somadas para determinar as componentes da aceleração em relação a este sistema de coordenadas. Estas quantidades podem então ser integradas uma vez para se obter estimativas da velocidade e duas vezes para se obter estimativas da posição.

Este processo pode ser expresso matematicamente da seguinte forma. Seja **r** um vetor posição que mapeia o ponto *P* em relação à origem do sistema de coordenadas inerciais, como mostra a figura (3.3a).




(a) Referencial fixo (inercial) (b) Referencial rotacional (terrestre)

Figura 3.3 – Sistemas de coordenadas fixo e móvel

A velocidade e a aceleração de *P* em relação ao sistema de coordenadas inercial são dadas por

$$\mathbf{v_i} = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_i , \tag{3.4}$$

$$\mathbf{a_i} = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i . \tag{3.5}$$

Dado que os acelerômetros medem a força específica que atua sobre o ponto *P*, tem-se que

$$\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{g}\,. \tag{3.6}$$

A equação acima é chamada de equação da navegação inercial, onde a primeira integração fornece a velocidade e a segunda integração fornece a posição.

### 3.2.3. MODELAGEM NUM SISTEMA DE COORDENADAS GIRANTE

Quando se navega sobre a superfície terrestre, é necessário se obter informações sobre a velocidade e a aceleração do veículo em relação ao sistema de coordenadas girante fixado à Terra. Nesta situação, devido ao movimento de rotação terrestre, forças aparentes atuam sobre o veículo. O teorema de Coriolis relaciona as velocidades de deslocamento de um veículo sobre um referencial girante e um referencial inercial através da seguinte equação

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_e = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{v}_e &= \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_e = \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\boldsymbol{\omega}_{ie} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}^T$ é o vetor que expressa a velocidade de rotação da Terra em relação ao sistema de referência inercial e o símbolo "$\times$" representa o produto vetorial.

### 3.2.4. MODELAGEM NO SISTEMA DE COORDENADAS ECI

Nesta seção, deseja-se determinar a velocidade de deslocamento de um veículo sobre a superfície da Terra no sistema de coordenadas *Earth-Centered-Inertial*. Esta velocidade é denotada pelo vetor $\mathbf{v}_e^i$ e pode ser obtida expressando-se a equação da navegação (3.7) em termos da velocidade terrestre por

$$\mathbf{v}_e = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_e . \tag{3.8}$$

A velocidade inercial pode ser obtida por

$$\mathbf{v}_i = \left.\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{r}_e}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{r}_e}{dt}\right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_e \,, \tag{3.9}$$

cuja derivada produz a aceleração inercial

$$\mathbf{a}_i = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i + \left.\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}_e\right)\right|_i \,, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{a}_i = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_i + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} \times \mathbf{r} \,. \tag{3.11}$$

Como $\frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} = 0$ e $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$ , obtém-se

$$\mathbf{a}_i = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \,, \tag{3.12}$$

e portanto,

$$\mathbf{a}_i = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i = \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \,. \tag{3.13}$$

Lembrando que $\mathbf{a}_i = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ , onde o vetor de acelerações **f** representa a *força específica* à qual o sistema de navegação está submetido, substituindo na equação acima obtém-se a *equação da navegação inercial no sistema de coordenadas inercial ECI*, a qual é expressa por

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \,. \tag{3.14}$$

Nesta equação, o termo $\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e$ é conhecido como aceleração de Coriolis. O termo $\boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r})$ define a aceleração centrípeta experimentada pela plataforma devido a rotação da Terra e não pode ser distinguida da aceleração gravitacional.

A soma vetorial da aceleração gravitacional $\mathbf{g}$ e da aceleração centrípeta constitui a denominada *gravidade local* "$\mathbf{g}_l$". Este vetor gravitacional é o que determina a direção apontada por prumo em qualquer ponto do globo terrestre, como mostra a figura a seguir.

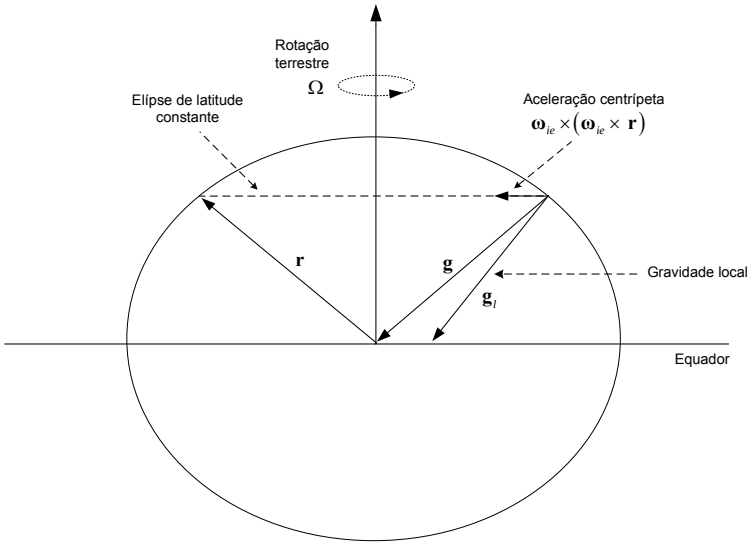



Figura 3.4 – Aceleração centrípeta e gravidade local

Analisando-se a figura (3.4), conclui-se que $\mathbf{g} = \mathbf{g}_l + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r})$. Substituindo na equação (3.14), obtém-se

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l . \tag{3.15}$$

Esta equação pode ser expressa no sistema inercial, por

$$\dot{\mathbf{v}}_e^i = \mathbf{f}^i - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \times \mathbf{v}_e^i + \mathbf{g}_l^i . \tag{3.16}$$

Como os acelerômetros medem a força especifica no sistema de coordenadas da plataforma, é necessário aplicar uma transformação de coordenadas. Assim a equação (3.16), pode ser expressa como

$$\dot{\mathbf{v}}_e^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{f}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \times \mathbf{v}_e^i + \mathbf{g}_l^i . \tag{3.17}$$

### 3.2.5. MODELAGEM NO SISTEMA DE COORDENADAS ECEF

Neste referencial, a velocidade de deslocamento terrestre $\mathbf{v}_e$ é expressa ou projetada em um sistema de coordenadas Terra-Centralizada, Terra-Fixa (ECEF), e passa a ser denominada $\mathbf{v}_e^e$. Através da equação de Coriolis, é conhecido que a taxa de variação da velocidade terrestre $\mathbf{v}_e$ em relação ao eixo da Terra pode ser expressa em termos do sistema inercial por

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_e = \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e . \tag{3.18}$$

A derivada da velocidade em relação ao referencial inercial é

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l . \tag{3.19}$$

Substituindo na equação (3.18), obtém-se a *equação da navegação inercial no sistema de coordenadas ECEF,*

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_e &= \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e , \\ \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_e &= \mathbf{f} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l , \end{aligned} \tag{3.20}$$

que pode ser expressa por

$$\dot{\mathbf{v}}_e^e = \mathbf{f}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e^e + \mathbf{g}_l^e . \tag{3.21}$$

Devido ao fato de que os acelerômetros fornecem a força especifica no sistema da plataforma, aplica-se uma transformação de coordenadas na equação (3.21) chegando-se à

$$\dot{\mathbf{v}}_e^e = \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e^e + \mathbf{g}_l^e \,, \tag{3.22}$$

onde $\mathbf{C}_b^e$ é a matriz de rotação usada para transformar o vetor força específica (corpo do veículo) para o sistema ECEF (Terra-Fixa). Esta matriz se propaga no tempo através da equação

$$\dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \,, \tag{3.23}$$

onde $\boldsymbol{\Omega}_{eb}^b$ é a forma anti-simétrica ( $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ) de $\boldsymbol{\omega}_{eb}^b$, que é a matriz das velocidades angulares dos giroscópios em relação ao sistema de coordenadas ECEF. Esta matriz é obtida derivando-se as velocidades angulares que são expressas no sistema de coordenadas da plataforma $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$, e a velocidade de rotação terrestre $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$, que é expressa no sistema ECI e projetada no sistema de coordenadas ECEF.

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_e^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \,, \tag{3.24}$$

onde: $\mathbf{C}_e^b = \left(\mathbf{C}_b^e\right)^T$.

### 3.2.6. MODELAGEM NO SISTEMA DE COORDENADAS NED

Para se navegar longas distâncias sobre a Terra, as informações de navegação são requeridas no sistema geográfico local ou de navegação local *North-East-Down* (NED), em termos da longitude, latitude e altitude.

Neste modelo, a velocidade terrestre da plataforma $\mathbf{v}_e$ deve ser expressa no sistema de coordenadas da navegação local para fornecer $\mathbf{v}_e^n$. A taxa de variação da velocidade $\mathbf{v}_e^n$ em relação ao eixo de navegação local pode ser expressa em termos da taxa de variação da velocidade no eixo inercial como

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_n = \left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i - \left(\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}\right) \times \mathbf{v}_e . \tag{3.25}$$

Como $\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l$, obtém-se a *equação da navegação inercial no sistema de coordenadas da navegação local* NED dada por

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_e = \mathbf{f} - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}\right) \times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l . \tag{3.26}$$

Convertendo-se as saídas dos acelerômetros, a equação anterior pode ser expressa no sistema de coordenadas da navegação local NED, por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_e^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n , \\ \dot{\mathbf{v}}_e^n &= \mathbf{f}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n , \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $\mathbf{C}_b^n$ é a matriz de rotação usada para transformar o vetor força específica da plataforma para o sistema NED. Esta matriz propaga-se no tempo através da equação

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b , \tag{3.28}$$

onde $\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$ é a forma anti-simétrica de $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$, que é a matriz de velocidade angular dos giroscópios em relação ao sistema de coordenadas navegação local. Esta matriz é obtida derivando-se as velocidades angulares expressas no sistema de referência da plataforma $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ e a velocidade de rotação terrestre $\boldsymbol{\omega}_{in}$, onde $\boldsymbol{\omega}_{in} = \boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}$, e

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) . \tag{3.29}$$

A figura 3.5 ilustra esse processo.

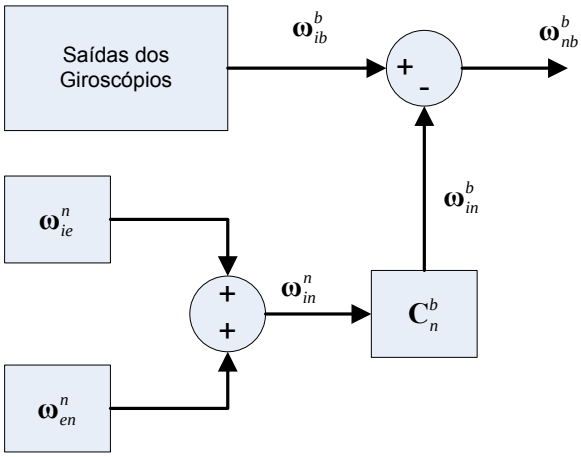



Figura 3.5 – Algoritmo de compensação das velocidades angulares

### 3.2.7. REPRESENTAÇÃO DA NAVEGAÇÃO LOCAL ATRAVÉS DAS COORDENADAS CURVILÍNEAS OU GEODÉSICAS

A aceleração de um sistema de navegação inercial referenciada no sistema de navegação local NED é expressa pela equação

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{f}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n \,. \tag{3.30}$$

Nesta equação, $\mathbf{v}_e^n$ representa a velocidade da plataforma em relação a superfície terrestre, expressa no sistema NED por

$$\mathbf{v}_e^n = \begin{bmatrix} v_N & v_E & v_D \end{bmatrix}^T . \tag{3.31}$$

Neste vetor, as componentes $v_N$, $v_E$ e $v_D$, representam as velocidades nos sentidos norte, leste e para baixo, respectivamente.

A componente $\mathbf{f}^n$ representa o vetor de acelerações (força específica) fornecido pelos acelerômetros no referencial de navegação local, e pode ser representada através de

$$\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} f_N & f_E & f_D \end{bmatrix}^T . \tag{3.32}$$

O vetor $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$ é o vetor de velocidade de rotação da Terra em relação ao referencial inercial, expresso no sistema de coordenadas de navegação local, e pode ser obtido por

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} = \mathbf{C}_{e}^{n}.\boldsymbol{\omega}_{ie}^{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos L & 0 & \sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos l & -\sin l & 0 \\ \sin l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \cos L \\ 0 \\ -\Omega \sin L \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

onde $\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ representa a taxa de rotação do sistema NED em relação ao sistema ECEF. O vetor $\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ também é denominado como *vetor taxa de transporte*, e pode ser expresso em termos das coordenadas geodésicas latitude $(L)$, longitude $(l)$ e altitude $(h)$ por

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \dot{l}\cos L & -\dot{L} & -\dot{l}\sin L \end{bmatrix}^{T}. \tag{3.34}$$

As componentes $\dot{L}$, $\dot{l}$ e $\dot{h}$, representam as taxas de variações (derivadas) da latitude, longitude e altitude respectivamente, podendo ser representadas por

$$\dot{L} = \frac{v_N}{(R_0 + h)}, \tag{3.35}$$

$$\dot{l} = \frac{v_E}{(R_0 + h)\cos L}, \tag{3.36}$$

$$\dot{h} = -v_D. \tag{3.37}$$

Substituindo $\dot{L}$ e $\dot{l}$ na equação (3.34), tem-se

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_E}{(R_0 + h)} & -\dfrac{v_N}{(R_0 + h)} & -\dfrac{v_E}{(R_0 + h)}\tan L \end{bmatrix}^{T}, \tag{3.38}$$

onde $R_0$ é o raio da Terra e $h$ é a altitude da plataforma representada no sistema NED. O vetor $\mathbf{g}_l$ é a componente gravitacional local que inclui os efeitos combinados da gravitação terrestre **g** e da aceleração centrípeta $\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{r}),\\ \mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times (R_0 + h)).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Substituindo-se a equação (3.33) na equação (3.39) e desenvolvendo-se o produto vetorial, obtém-se uma representação para a gravidade local, dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \begin{bmatrix} \dfrac{\Omega^2 (R_0 + h)\sin 2L}{2} & 0 & \dfrac{\Omega^2 (R_0 + h)(1+\cos 2L)}{2} \end{bmatrix}^T,\\ \mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{2}\begin{pmatrix} \sin 2L \\ 0 \\ 1+\cos 2L \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

O desenvolvimento da equação (3.30) permite expressar as velocidades em termos das componentes da força especifica $\mathbf{f}^n$, da aceleração de Coriolis, da aceleração centrípeta e da gravidade local por

$$\begin{aligned}\dot{v}_N &= f_N - v_E (2\Omega + \dot{l})\sin L + v_D \dot{L} + \xi g,\\ \dot{v}_N &= f_N - \underbrace{2\Omega v_E \sin L}_{Coriolis} + \underbrace{\frac{(v_N v_D - v_E^2 \tan L)}{(R_0 + h)}}_{centrípeta} + \underbrace{\xi g}_{g_{l(N)}},\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_E &= f_E + v_N (2\Omega + \dot{l})\sin L + v_D (2\Omega + \dot{l})\cos L - \eta g,\\ \dot{v}_E &= f_E - \underbrace{2\Omega (v_N \sin L - v_D \cos L)}_{Coriolis} + \underbrace{\frac{v_E}{(R_0 + h)}(v_D - v_N \tan L)}_{centrípeta} - \underbrace{\eta g}_{g_{l(E)}},\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_D &= f_D - v_E (2\Omega + \dot{l})\cos L - v_N \dot{L} + g,\\ \dot{v}_D &= f_D - \underbrace{2\Omega v_E \cos L}_{Coriolis} - \underbrace{\frac{(v_E^2 + v_N^2)}{(R_0 + h)}}_{centrípeta} + g_{l(D)},\end{aligned} \tag{3.43}$$

onde $\xi$ e $\eta$ representam as deflexões angulares da gravidade local e serão discutidas adiante, na seção 3.2.9.

### 3.2.8. O FORMATO DA TERRA SEGUNDO A CONVENÇÃO WGS-84

Devido ao achatamento nos pólos, o formato da Terra assemelha-se a uma elipse. Portanto o modelo que adota a Terra como uma esfera perfeita não é adequado para ser usado em navegação inercial de precisão e um modelo mais realista deve ser adotado. O comitê *World Geodetic System*, em sua convenção de 1984 (WGS-84), propôs que a forma da Terra seja representada por uma elipsóide, como ilustra a figura a seguir.

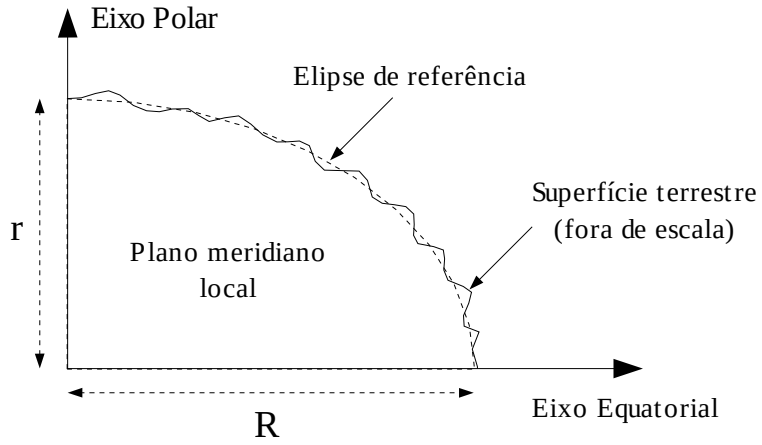



Figura 3.6 – Modelo terrestre elíptico adotado pelo comitê WGS84

A tabela a seguir apresenta as constantes utilizadas no modelo WGS-84.

Tabela 3.1 – Parâmetros do modelo terrestre elíptico (WGS84)

| Parâmetro | Definição | Magnitude | Unidade |
|---|---|---|---|
| $R$ | Semi-eixo maior | 6378137,0 | $[m]$ |
| $r = R(1-f)$ | Semi-eixo menor | 6356752,3142 | $[m]$ |
| $f = \frac{R-r}{R}$ | Achatamento da elipsóide | $\frac{1}{298,257223563}$ | -- |
| $e = \sqrt{f(2-f)}$ | Maior excentricidade da elipsóide | 0,0818191908426 | -- |
| $\mathbf{\Omega}$ | Rotação da Terra | 15,041067<br>$7,292115 \times 10^{-5}$ | $[^{o}/h]$<br>$[rad/s]$ |

Adotando-se o modelo terrestre definido pelo comitê WGS-84, as equações (3.35), (3.36), (3.37) e (3.38) devem ser corrigidas e passam a ser representadas através das seguintes equações:

$$\dot{l} = \frac{v_E}{(R_E + h)\cos L}, \tag{3.44}$$

$$\dot{L} = \frac{v_N}{(R_N + h)}, \tag{3.45}$$

$$\dot{h} = -v_D, \tag{3.46}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_N}{(R_E + h)} & -\dfrac{v_E}{(R_N + h)} & -\dfrac{v_E}{(R_E + h)}\tan L \end{bmatrix}^T, \tag{3.47}$$

onde

$$R_E = \frac{R}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 L)}}, \tag{3.48}$$

$$R_N = \frac{R(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 L)^3}}. \tag{3.49}$$

As equações (3.44), (3.45) e (3.46) podem ser reescritas na forma matricial a fim de se obter as componentes da velocidade em termos das coordenadas curvilíneas (geodésicas) por

$$\mathbf{v}_e^n = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_N + h) & 0 & 0 \\ 0 & (R_E + h)\cos L & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{l} \\ \dot{h} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

### 3.2.9. A DEFLEXÃO GRAVITACIONAL SOBRE A SUPERFÍCIE DA TERRA

Conforme mencionado anteriormente, existem variações da atração gravitacional sobre a superfície terrestre denominadas deflexões angulares. Este

fenômeno ocorre devido às anomalias na gravidade terrestre, tais como distribuição não uniforme da massa da Terra, variações gravitacionais devido a aceleração centrífuga, que varia em função da latitude, etc. A figura (3.7) ilustra a deflexão meridional $\xi$ que ocorre no sentido da latitude.

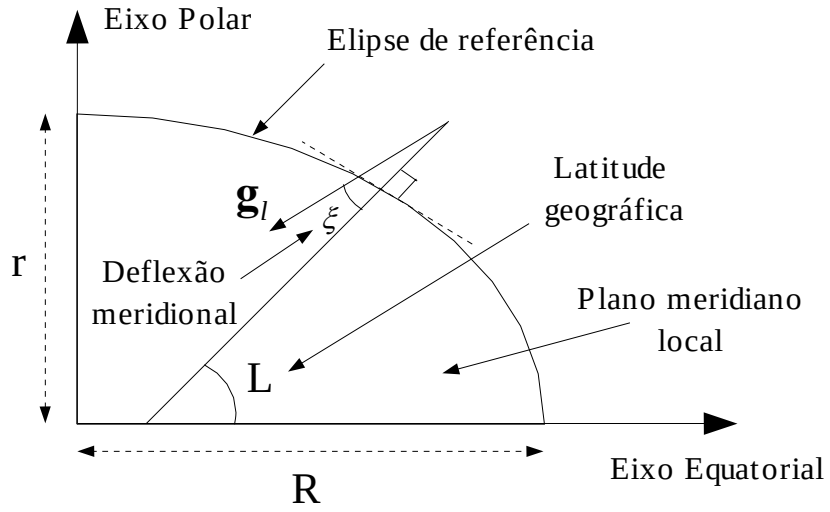



Figura 3.7 – Representação da deflexão gravitacional latitudinal (ξ)

Para entender a deflexão $\eta$, imagine que $\eta$ é a deflexão que ocorre no sentido da longitude. Portanto, devido ao fenômeno da deflexão gravitacional, se expressa o vetor gravidade local em termos da decomposição de suas componentes nas direções norte, leste e para baixo, através de

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_l &= \begin{bmatrix} g_{l\_N} \\ g_{l\_E} \\ g_{l\_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi g \\ -\eta g \\ g \end{bmatrix}, \\
\mathbf{g}_l^n &= \mathbf{g}^n - \frac{\Omega^2 \left(R_0 + h\right)}{2} \begin{bmatrix} \sin 2L \\ 0 \\ 1 + \cos 2L \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Omega^2 \left(R_0 + h\right)}{2} \sin 2L \\ 0 \\ \frac{\Omega^2 \left(R_0 + h\right)}{2} \left(1 + \cos 2L\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Omega^2 \left(R_0 + h\right)}{2} \sin 2L \\ 0 \\ g - \frac{\Omega^2 \left(R_0 + h\right)}{2} \left(1 + \cos 2L\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

### 3.2.10. ALGORITMO PROPOSTO PARA SE NAVEGAR NO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO LOCAL NED

A figura (3.8) ilustra um algoritmo para estimar coordenadas de posições no sistema de coordenadas locais NED a partir de uma central inercial *strapdown*.

Este diagrama apresenta um fechamento das etapas que devem ser seguidas para se construir um algoritmo que possibilite a navegação no sistema tangencial local a partir de uma UMI *strapdown*.

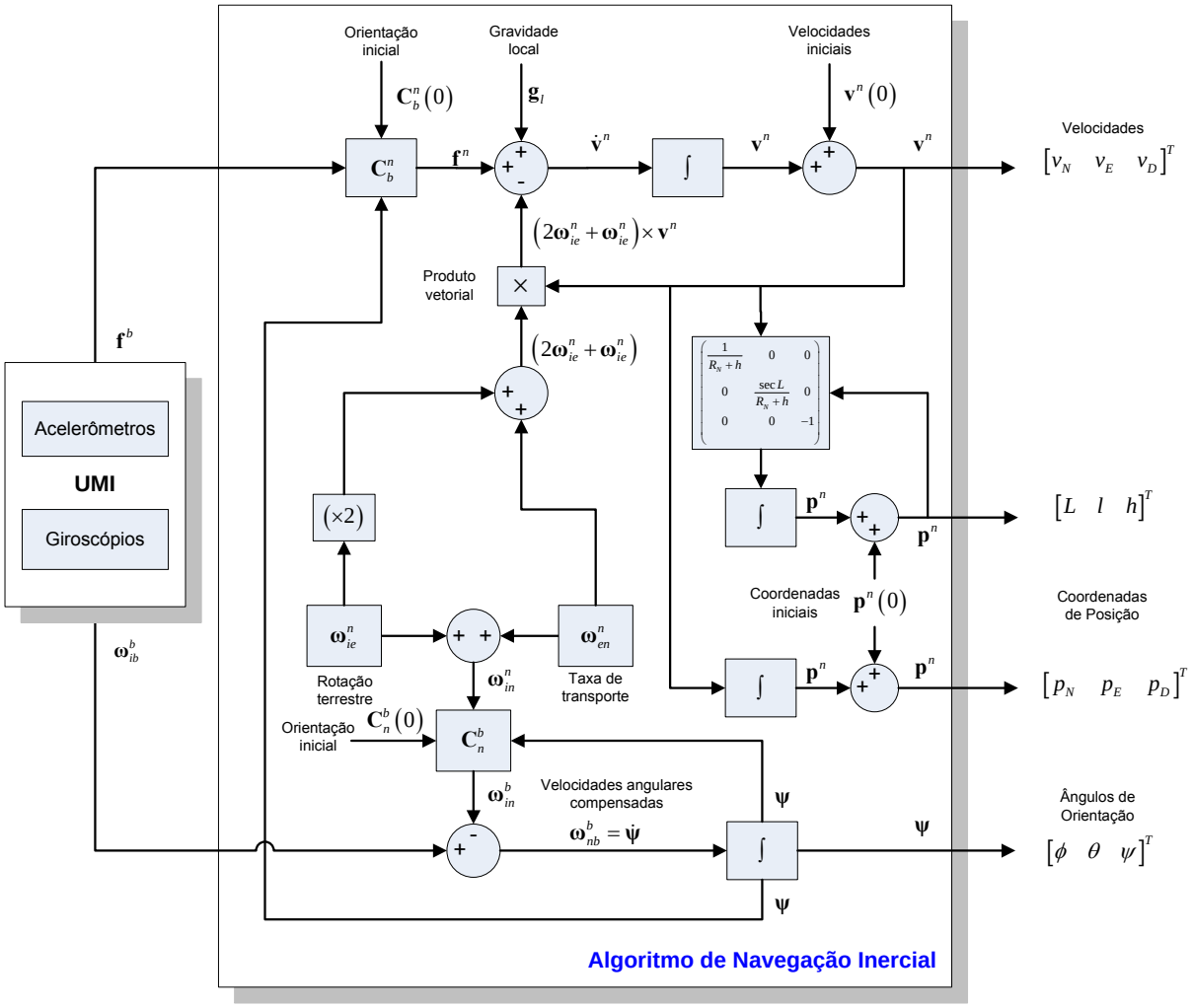



Figura 3.8 – Algoritmo do sistema de navegação inercial

## 3.3. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

As transformações de coordenadas são utilizadas para converter um vetor representado num determinado sistema de coordenadas para outro sistema de

coordenadas conveniente[5]. Para exemplificar, considere um vetor de acelerações no sistema de navegação local NED representado por

$$\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} f_N & f_E & f_D \end{bmatrix}^T . \tag{3.52}$$

A matriz de transformação de coordenadas que leva o vetor de aceleração do sistema de navegação local NED para o sistema de navegação da plataforma RPY é definida como

$$\mathbf{C}_{NED}^{RPY} = \mathbf{C}_n^b . \tag{3.53}$$

Assim, o novo vetor de acelerações no sistema da plataforma é dado por

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{C}_n^b \mathbf{f}^n . \tag{3.54}$$

As transformações de coordenadas podem ser obtidas por meio da matriz dos *Ângulos de Euler,* matriz dos *Cossenos Diretores* (MCD), através dos *Quaternions de Orientação*. Dependendo da aplicação, um tipo de transformação pode ser mais adequado que o outro. Em particular, os quaternions evitam o problema da singularidade na matriz de transformação de coordenadas (MTC[6]) também conhecido como “Gimbal Lock[7]”.

### 3.3.1. ÂNGULOS DE EULER

Descrevem-se a seguir as matrizes de rotação denominadas “Ângulos de Euler”, que levam um vetor representado no sistema de coordenadas da plataforma,

---

[5] Nas equações a seguir, os índices *i*, *e*, *n* e *b* são utilizados para indicar os referenciais: inercial (ECI), terrestre (ECEF), da navegação local (NED) e da plataforma (RPY) respectivamente.

[6] Ao longo do texto as notações: “Matriz de Transformação de Coordenadas”, “Matriz de Rotação” e “Matriz de Orientação” são sinônimas e serão utilizadas convenientemente.

[7] “*Gimbal Lock*” é a impossibilidade de se obter a matriz de transformação de coordenadas, devido a uma ou mais matrizes de rotação estar próximas da singularidade, ou seja, quando os movimentos angulares estão próximos à ± 90° os cossenos das matrizes tornam-se nulos.

para o sistema de coordenadas de navegação local NED (equação (3.55)), do sistema NED para o referencial da plataforma (equação (3.56)). Os ângulos $\phi$, $\theta$ e $\psi$ são respectivamente definidos como rotações em torno dos eixos *x*, *y* e *z* no sistema de coordenadas da plataforma. Estes ângulos também são conhecidos como ângulos de *"roll", 'pitch" e "yaw"* (RPY)[8]. Dado que a multiplicação entre matrizes não são comutativas, torna-se necessário explicitar e conservar a mesma seqüência de rotações. Neste caso em particular adotou-se a seguinte seqüência de rotações: $roll \rightarrow pitch \rightarrow yaw$, também é conhecida como seqüência $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C}_n^b = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

No caso de serem utilizados sensores angulares (giroscópios) com freqüências de amostragem elevadas, o período de amostragem torna-se muito pequeno. Admitindo-se que a leitura dos giroscópios não se alteram significativamente entre duas leituras consecutivas, tem-se como conseqüência que pequenos ângulos de rotação serão obtidos ao se integrar as velocidades angulares entre duas leituras consecutivas.

Para pequenos ângulos, as equações (3.55) e (3.56) podem ser linearizadas, produzindo as seguintes aproximações: $sen\phi \rightarrow \phi$, $sen\theta \rightarrow \theta$, $sen\psi \rightarrow \psi$ e $\cos\phi = \cos\theta = \cos\psi = 1$. Neste *caso particular*, as matrizes de transformação de coordenadas são aproximadas por

[8] Os ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* são definidos como ângulos de *rolagem*, *arfagem* e *guinada* respectivamente. Para o ângulo *yaw*, as definições *heading* e *azimuth* (azimute) também são bastante utilizadas.

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

onde: $\psi$ é o ângulo de rotação positiva sobre o eixo $z$ (ângulo de yaw), $\theta$ é o ângulo de rotação positiva sobre o novo eixo $y$ (ângulo de pitch) e $\phi$ é o ângulo de rotação positiva sobre o eixo $x$ resultante (ângulo de roll).

### 3.3.1.1. PROPAGAÇÃO DOS ÂNGULOS DE EULER NO TEMPO

Os ângulos de Euler $\phi, \theta \; e \; \psi$ são obtidos pelo conjunto de três rotações em relação a uma plataforma estável num dado sistema de navegação inercial. Conseqüentemente $\dot{\phi}, \dot{\theta} \; e \; \dot{\psi}$ são as três componentes das velocidades angulares no mesmo referencial. As velocidades angulares $\omega_x, \omega_y \; e \; \omega_z$ do sistema de coordenadas da plataforma RPY podem ser relacionadas com $\dot{\phi}, \dot{\theta} \; e \; \dot{\psi}$ do sistema de coordenadas de navegação NED, por

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} . \tag{3.59}$$

Arranjando-se a equação acima e expressando-a na forma das velocidades angulares do sistema NED obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= (\omega_y \operatorname{sen}\phi + \omega_z \cos\phi)\tan\theta + \omega_x \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cos\phi - \omega_z \operatorname{sen}\phi \\ \dot{\psi} &= (\omega_y \operatorname{sen}\phi + \omega_z \cos\phi)\sec\theta \end{aligned} , \tag{3.60}$$

a qual pode ser representada na forma matricial por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen}\phi\tan\theta & \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & \operatorname{sen}\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} . \tag{3.61}$$

Estas equações podem ser utilizadas num sistema *strapdown* para atualizar os ângulos de Euler obtidos no sistema RPY (giroscópios), para o sistema NED. Entretanto o uso destas equações está limitado até que as soluções para $\phi \, e \, \psi$ não se tornem indefinidas, ou seja, até que não ocorra a singularidade *gimbal lock*, onde $\theta = \pm 90^0$.

## 3.3.2. COSSENOS DIRETORES

Além dos ângulos de Euler, outra forma de se efetuar a transformação de coordenadas é através de uma matriz de rotação denominada “Matriz dos Cossenos Diretores” (MCD). A MCD é definida por uma matriz 3x3, cujas colunas são os vetores unitários representados no eixo da plataforma e projetados ao longo do sistema de coordenadas de referência (neste exemplo o sistema de referência é o plano tangencial local NED).

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} . \tag{3.62}$$

O elemento da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna representa o cosseno do ângulo entre o eixo do sistema de coordenadas de referência *i* e o eixo *j* do sistema de coordenadas da plataforma.

### 3.3.2.1. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS POR MEIO DA MATRIZ DOS COSSENOS DIRETORES

Um vetor definido no sistema de coordenadas da plataforma pode ser expresso no sistema de coordenadas da navegação local por

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}^b , \tag{3.63}$$

onde a matriz $\mathbf{C}_b^n$ é aquela obtida através dos "*Ângulos de Euler*"

### 3.3.2.2. PROPAGAÇÃO DOS COSSENOS DIRETORES NO TEMPO

A taxa de variação da matriz $\mathbf{C}_b^n$ com o tempo é dada por

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{C}_b^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_b^n(t+\Delta t) - \mathbf{C}_b^n(t)}{\Delta t} , \tag{3.64}$$

onde $\mathbf{C}_b^n(t)$ e $\mathbf{C}_b^n(t+\Delta t)$ representam a MCD no instante de tempo $t$ e $t+\Delta t$ respectivamente. A matriz $\mathbf{C}_b^n(t+\Delta t)$ pode ser escrita como um produto de duas matrizes, por

$$\mathbf{C}_b^n(t+\Delta t) = \mathbf{C}_b^n(t)\mathbf{A}(t) , \tag{3.65}$$

onde $\mathbf{A}(t)$ é a MCD que relaciona o sistema de coordenadas da plataforma no instante de tempo t ao sistema de coordenadas de navegação local no instante de tempo $t+\Delta t$. Para pequenos ângulos de rotação, a matriz $\mathbf{A}(t)$ pode ser escrita como (TITTERTON, 1997)

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{I} + \delta\mathbf{\Psi} . \tag{3.66}$$

Na equação acima, $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade 3x3 e $\delta\mathbf{\Psi}$ é definida por

$$\delta\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.67}$$

Nesta matriz, $\delta\phi, \delta\theta$ e $\delta\psi$ são os pequenos ângulos na qual a plataforma é rotacionada sobre os eixos $x$, $y$ e $z$, respectivamente. No limite, quando $\Delta t \to 0$, a

aproximação por pequenos ângulos torna-se válida e a ordem das rotações não é importante.

Substituindo $\mathbf{C}_b^n(t+\Delta t)$ na equação (3.64), obtém-se

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_b^n(t)(\mathbf{I}+\delta\mathbf{\Psi}) - \mathbf{C}_b^n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_b^n(t)(\mathbf{I}+\delta\mathbf{\Psi}-\mathbf{I})}{\Delta t}, \tag{3.68}$$

e como $\mathbf{C}_b^n(t)$ torna-se invariante no tempo, pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta\mathbf{\Psi}}{\Delta t}. \tag{3.69}$$

No limite quando $\Delta t$ tende a zero, $\frac{\delta\mathbf{\Psi}}{\Delta t}$ torna-se a forma anti-simétrica (em termos genéricos, $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$) do vetor da taxa angular $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \begin{bmatrix} \omega_{nbx} & \omega_{nby} & \omega_{nbz} \end{bmatrix}^T$, o qual representa a taxa de rotação do sistema da plataforma em relação ao sistema de navegação local, ou seja

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta\mathbf{\Psi}}{\Delta t} = \mathbf{\Omega}_{nb}^b. \tag{3.70}$$

Substituindo na equação (3.69) tem-se

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{\Omega}_{nb}^b, \tag{3.71}$$

onde

$$\mathbf{\Omega}_{nb}^b = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nbz} & \omega_{nby} \\ \omega_{nbz} & 0 & -\omega_{nbx} \\ -\omega_{nby} & \omega_{nbx} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.72}$$

Na equação (3.71), $\mathbf{C}_b^n$ é a matriz de orientação inicial (também conhecida como matriz de alinhamento inicial) e $\mathbf{\Omega}_{nb}^b$ é a matriz de propagação da taxa de rotação do sistema da plataforma para o sistema de navegação local NED.

### 3.3.3. O QUATERNION DE ORIENTAÇÃO

Um *quaternion de orientação* é uma representação de quatro parâmetros baseado na idéia de que uma transformação de um sistema de coordenadas para outro pode ser efetuado por uma simples rotação em torno de um vetor $\boldsymbol{\mu}$, o qual é definido em relação ao sistema de coordenadas de referência. O quaternion, aqui denotado pelo símbolo $\mathbf{q}$, é um vetor de quatro elementos, cujos elementos são dados em função deste vetor e da magnitude da rotação. Ou seja

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mu/2) \\ (\mu_x/\mu)\sin(\mu/2) \\ (\mu_y/\mu)\sin(\mu/2) \\ (\mu_z/\mu)\sin(\mu/2) \end{pmatrix}, \tag{3.73}$$

onde $\mu_x$, $\mu_y$ e $\mu_z$ são as componentes do vetor angular $\boldsymbol{\mu}$ e $\mu$ representa a magnitude do vetor.

A direção e magnitude de $\boldsymbol{\mu}$ são definidas de forma que o sistema de coordenadas de referência seja rotacionado até coincidir com o sistema de coordenadas móvel.

Um quaternion com componentes $q_0$, $q_1$, $q_2$ e $q_3$ também pode ser expresso como um número complexo de quatro parâmetros na forma

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 . \tag{3.74}$$

O produto entre dois quaternions $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ e $\mathbf{p} = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$, pode ser obtido aplicando-se as regras usuais do produto entre números complexos, onde, $\mathbf{i}.\mathbf{i} = -1$, $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}.\mathbf{i} = -\mathbf{k}$ e assim por diante. Portanto, o produto entre os quaternions $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ é dado como a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} &= (q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3).(p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) \\ &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) + (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2)\mathbf{i} + \\ &\quad (q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1)\mathbf{j} + (q_0 p_3 + q_3 p_0 + q_1 p_2 - q_2 p_1)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Este resultado pode também ser expresso na forma matricial como:

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \tag{3.76}$$

onde o símbolo $\otimes$ representa a multiplicação entre quaternions.

Outra propriedade importante a ser mencionada é que os elementos de um quaternion guardam a seguinte relação:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \tag{3.77}$$

### 3.3.3.1. UTILIZAÇÃO DO QUATERNION DE ORIENTAÇÃO PARA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DE VETORES

Um vetor definido no sistema de coordenadas da plataforma $\mathbf{r}^b$ pode ser expresso como um vetor $\mathbf{r}^n$, determinado num sistema de coordenadas de referência da seguinte forma:

$$\mathbf{r}^{n'} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}^{b'} \otimes \mathbf{q}^*, \tag{3.78}$$

onde $\mathbf{r}^b = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, é um vetor cujas grandezas estão expressas no sistema de coordenadas da plataforma, $\mathbf{r}^{b'} = 0 + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ é o quaternion formado a partir de $\mathbf{r}^b$ e $\mathbf{q}^* = \left(q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3\right)$ é o complexo conjugado de $\mathbf{q}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{n'} &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}^{b'} \otimes \mathbf{q}^* \\ &= \left(q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3\right).\left(0 + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z\right).\left(q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3\right) \end{aligned}, \tag{3.79}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}^{n'} &= 0 \\
&+\left[\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)x+2\left(q_1q_2-q_0q_3\right)y+2\left(q_1q_3+q_0q_2\right)z\right]\mathbf{i} \\
&+\left[2\left(q_1q_2+q_0q_3\right)x+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)y+2\left(q_2q_3-q_0q_1\right)z\right]\mathbf{j} \\
&+\left[2\left(q_1q_3-q_0q_2\right)x+2\left(q_2q_3+q_0q_1\right)y+\left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right)z\right]\mathbf{k}
\end{aligned}
\quad . \tag{3.80}
$$

A equação $\mathbf{r}^{n'} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}^{b'} \otimes \mathbf{q}^*$ pode ser reescrita alternativamente como:

$$
\mathbf{r}^{n'} = \mathbf{C}'\mathbf{r}^{b'}, \tag{3.81}
$$

onde,

$$
\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \tag{3.82}
$$

$$
\mathbf{r}^{b'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^{b} \end{pmatrix}, \tag{3.83}
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right) & 2\left(q_1q_2-q_0q_3\right) & 2\left(q_1q_3+q_0q_2\right) \\ 2\left(q_1q_2+q_0q_3\right) & \left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right) & 2\left(q_2q_3-q_0q_1\right) \\ 2\left(q_1q_3-q_0q_2\right) & 2\left(q_2q_3+q_0q_1\right) & \left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right) \end{pmatrix}, \tag{3.84}
$$

o qual é equivalente a escrever: $\mathbf{r}^n = \mathbf{C}\mathbf{r}^b$.

Comparando a equação (3.84) com a equação dos cossenos diretores (3.63), esta equação revela que a matriz $\mathbf{C}$ é equivalente a matriz $\mathbf{C}_b^n$ dada pela equação (3.62) e, portanto:

$$
\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right) & 2\left(q_1q_2-q_0q_3\right) & 2\left(q_1q_3+q_0q_2\right) \\ 2\left(q_1q_2+q_0q_3\right) & \left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right) & 2\left(q_2q_3-q_0q_1\right) \\ 2\left(q_1q_3-q_0q_2\right) & 2\left(q_2q_3+q_0q_1\right) & \left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right) \end{pmatrix}. \tag{3.85}
$$

### 3.3.3.2. ELEMENTOS DO QUATERNION EXPRESSO EM TERMOS DOS ELEMENTOS DOS COSSENOS DIRETORES

Para pequenos ângulos de rotação, os parâmetros do quaternion podem ser obtidos utilizando-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}}, \\ q_1 &= \frac{1}{4q_0}\left(c_{32}-c_{23}\right), \\ q_2 &= \frac{1}{4q_0}\left(c_{13}-c_{31}\right), \\ q_3 &= \frac{1}{4q_0}\left(c_{21}-c_{12}\right). \end{aligned} \tag{3.86}$$

### 3.3.3.3. PROPAGAÇÃO DOS QUATERNIONS COM O TEMPO

Um quaternion $\mathbf{q}$ se propaga no tempo de acordo com a seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}_{nb}^{b}. \tag{3.87}$$

Esta equação pode ser expressa na forma matricial como uma função dos componentes de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}_{nb}^{b} = \left[0, \boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\right]^T$ como a seguir:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{nbx} \\ \omega_{nby} \\ \omega_{nbz} \end{pmatrix}, \tag{3.88}$$

ou alternativamente como

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nbx} & -\omega_{nby} & -\omega_{nbz} \\ \omega_{nbx} & 0 & \omega_{nbz} & -\omega_{nby} \\ \omega_{nby} & -\omega_{nbz} & 0 & \omega_{nbx} \\ \omega_{nbz} & \omega_{nby} & -\omega_{nbx} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \tag{3.89}$$

onde $\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - \mathbf{C}_{n}^{b}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)$ expressa a rotação da plataforma em relação ao sistema de coordenadas de navegação (NED) cujas componentes $\omega_{nbx}$, $\omega_{nby}$ e $\omega_{nbz}$ descrevem as rotações em torno dos eixos $x$, $y$ e $z$ respectivamente.

O vetor $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ é composto pelas saídas dos giroscópios, $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$ é a taxa de rotação da terra expressa no sistema de coordenadas da navegação e $\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ é o vetor que representa a rotação do referencial de navegação em relação à terra, conhecido como vetor taxa de transporte. Equações desta forma podem ser utilizadas em sistemas de navegação inercial *strapdown* para rastrear os parâmetros do quaternion, os quais definem a orientação da plataforma. Estes parâmetros podem então ser utilizados para computar uma matriz de Cossenos Diretores equivalente.

### 3.3.4. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA MATRIZ DE ORIENTAÇÃO UTILIZANDO COSSENOS DIRETORES

Ao invés de fornecer um sinal contínuo $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}(t)$, uma UMI fornece amostras da velocidade angular numa freqüência fixa. Por este motivo, uma técnica de integração numérica deve ser empregada sobre o sinal amostrado. Para pequenos intervalos de tempo e aplicações de baixa precisão, uma integração retangular é suficiente, enquanto que para aplicações de maior precisão, métodos de integração numérica de ordem superior devem ser empregados, tais como trapezoidal, Simpson e Runge-Kuta. Uma vez que a UMI empregada neste trabalho é de baixa precisão, nesta seção serão desenvolvidas as soluções retangular e trapezoidal.

Lembrando que a propagação da matriz dos Cossenos Diretores é descrita pela equação $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Omega}$, e admitindo-se que o período entre as sucessivas amostras da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_b$ seja $T$, a solução da equação diferencial por um intervalo de amostragem é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t+T) &= \mathbf{C}(t)\exp\left(\int_{t}^{t+T} \boldsymbol{\Omega}(t)\,dt\right), \\ \mathbf{C}_{k+1} &= \mathbf{C}_{k}\exp\left(\int_{t}^{t+T} \boldsymbol{\Omega}(t)\,dt\right). \end{aligned} \tag{3.90}$$

A equação (3.90) pode ser reescrita de forma genérica como

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k \exp(\boldsymbol{\Sigma}), \tag{3.91}$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz de elementos constantes que representa o resultado da integração numérica do argumento do termo exponencial. Ou seja,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \int_t^{t+kT} \boldsymbol{\Omega}(t)\,dt = \int_t^{t+kT} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nbz} & \omega_{nby} \\ \omega_{nbz} & 0 & -\omega_{nbx} \\ -\omega_{nby} & \omega_{nbx} & 0 \end{pmatrix} dt, \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & 0 & -\sigma_x \\ -\sigma_y & \sigma_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

onde $\omega_{nbx}$, $\omega_{nby}$ e $\omega_{nbz}$ são as componentes do vetor $\boldsymbol{\omega}_b$, dadas pelas amostras das velocidades angulares em coordenadas da plataforma, fornecidas pela UMI em intervalos de tempo $t = kT\big|_{k=1,2,3...}$.

Aplicando-se integrações numéricas do tipo retangular, tem-se

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nbz}T & \omega_{nby}T \\ \omega_{nbz}T & 0 & -\omega_{nbx}T \\ -\omega_{nby}T & \omega_{nbx}T & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.93}$$

Por outro lado, caso se utilize uma integração trapezoidal, tem-se

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\left(\omega_{nbz(k)} + \omega_{nbz(k-1)}\right)}{2}T & \dfrac{\left(\omega_{nby(k)} + \omega_{nby(k-1)}\right)}{2}T \\ \dfrac{\left(\omega_{nbz(k)} + \omega_{nbz(k-1)}\right)}{2}T & 0 & -\dfrac{\left(\omega_{nbx(k)} + \omega_{nbx(k-1)}\right)}{2}T \\ -\dfrac{\left(\omega_{nby(k)} + \omega_{nby(k-1)}\right)}{2}T & \dfrac{\left(\omega_{nbx(k)} + \omega_{nbx(k-1)}\right)}{2}T & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.94}$$

Como se verá nos capítulos seguintes, neste trabalho emprega-se uma técnica de integração ou outra. Nos experimentos em que se podem amostrar os sensores em intervalos menores, a integração retangular mostra-se suficiente e utiliza-se a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ dada pela expressão (3.93). Para intervalos de amostragem maiores, utiliza-se a integração trapezoidal e a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ dada por (3.94).

Independentemente do tipo de integração empregado, verifica-se que da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ contém apenas 3 termos não nulos indistintos com os quais define-se uma nova variável $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$.

Pode-se demonstrar que (TITTERTON, 1997), $\boldsymbol{\Sigma}^3 = -\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right)\boldsymbol{\Sigma} = -\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\Sigma}^4 = -\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}^2$. Portanto, expandindo-se a equação (3.91) por série de Taylor e substituindo as identidades $\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}^2, \boldsymbol{\Sigma}^3, \boldsymbol{\Sigma}^4, \ldots$ convenientemente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{k+1} &= \mathbf{C}_k\left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^4}{4!} + \ldots\right), \\
&= \mathbf{C}_k\left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{2!} - \sigma^2\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{3!} - \sigma^2\frac{\boldsymbol{\Sigma}^2}{4!} + \ldots\right), \\
&= \mathbf{C}_k\left(\mathbf{I} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{3!} + \frac{\sigma^4}{5!} - \ldots\right)\boldsymbol{\Sigma} + \left(\frac{1}{2!} - \frac{\sigma^2}{4!} + \frac{\sigma^4}{6!} - \ldots\right)\boldsymbol{\Sigma}^2\right).
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Desta forma, a equação (3.95) pode ser expressa como

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k\left(\mathbf{I} + \frac{\sin\sigma}{\sigma}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{1-\cos\sigma}{\sigma^2}\boldsymbol{\Sigma}^2\right). \tag{3.96}$$

Portanto, sempre que novas amostras de sinais fornecidas pelos giroscópios estiverem disponíveis, as equações (3.95) e (3.96), podem ser utilizadas recursivamente para atualizar a orientação da matriz dos cossenos diretores $\mathbf{C}_b^n$. A equação (3.96) descreve a representação exata da orientação da plataforma nos instantes de tempo $t_k$ e $t_{k+1}$. Entretanto, para aplicações em sistemas embarcados de tempo real emprega-se via de regra a equação (3.95), truncando-se as séries conforme a precisão desejada para o algoritmo.

### 3.3.5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA MATRIZ DE ORIENTAÇÃO UTILIZANDO QUATERNIONS

Ao se utilizar a representação através dos quaternions de orientação, torna-se necessário desenvolver a equação

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \,, \tag{3.97}$$

onde $\mathbf{p} = \left[0, \boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\right]^{T}$ é um quaternion composto pelas componentes das velocidades angulares compensadas $\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - \mathbf{C}_{n}^{b}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)$.

Como descrito na seção (3.3.3.3), a equação (3.97) pode ser reescrita como.

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{nb}^{b}\mathbf{q} \,, \tag{3.98}$$

A matriz $\boldsymbol{\Omega}_{nb}^{b}$ tem a forma

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^{b} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nbx} & -\omega_{nby} & -\omega_{nbz} \\ \omega_{nbx} & 0 & \omega_{nbz} & -\omega_{nby} \\ \omega_{nby} & -\omega_{nbz} & 0 & \omega_{nbx} \\ \omega_{nbz} & \omega_{nby} & -\omega_{nbx} & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\omega_{nbx}$, $\omega_{nby}$ e $\omega_{nbz}$ são as componentes de $\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}$.

Nas situações em que a orientação do vetor de velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}$ permanece fixa durante o intervalo de tempo entre duas amostras de medição consecutivas, a solução da equação (3.98), pode ser escrita como:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Omega}_{nb}^{b}\, dt\right)\mathbf{q} \tag{3.99}$$

Analogamente à solução desenvolvida na seção anterior, define-se a

$$\boldsymbol{\Sigma} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Omega}_{nb}^{b}\, dt = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_x & -\sigma_y & -\sigma_z \\ \sigma_x & 0 & \sigma_z & -\sigma_y \\ \sigma_y & -\sigma_z & 0 & \sigma_x \\ \sigma_z & \sigma_y & -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.100}$$

tal que, de forma genérica,

$$\mathbf{q}_{k+1} = \exp\left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{q} \,. \tag{3.101}$$

Expandindo-se o termo exponencial em série de Taylor, obtém-se uma nova equação na forma de multiplicação de quaternions dada por

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{r}_k \,, \tag{3.102}$$

onde $\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} q_{0_k} & q_{1_k} & q_{2_k} & q_{3_k} \end{bmatrix}^T$. O vetor $\mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} a_c & a_s\sigma_x & a_s\sigma_y & a_s\sigma_z \end{bmatrix}^T$ representa o quaternion que efetua a rotação de magnitude $\sigma$ sobre o vetor $\boldsymbol{\sigma}$, cujos elementos são obtidos a partir de

$$a_c = \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) = 1 - \frac{(0,5\sigma)^2}{2!} + \frac{(0,5\sigma)^4}{4!} - \ldots \,, \tag{3.103}$$

$$a_s = \frac{\sin(\sigma/2)}{\sigma} = 0,5\left(1 - \frac{(0,5\sigma)^2}{2!} + \frac{(0,5\sigma)^4}{4!} - \ldots\right), \tag{3.104}$$

$$(0,5\sigma)^2 = 0,25\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right). \tag{3.105}$$

Desta forma, sempre que houver uma mudança de orientação da plataforma, a utilização recursiva das equações (3.102) a (3.105) permitem efetuar uma atualização do quaternion $\mathbf{q}_k$, através das amostras dos sinais dos giroscópios nos instantes de tempo $t = kT\big|_{k=1,2,3\ldots}$.

# 4. RUÍDOS E ERROS DE SENSORES INERCIAIS

As principais fontes de erros que comprometem a precisão de um sistema de navegação inercial são as imperfeições dos sensores e os erros devido a distúrbios aleatórios. Os erros devido à imperfeição dos sensores podem ser identificados com elevada precisão por um processo denominado calibração e são classificados como erros determinísticos, ou seja, podem ser expressos por uma função matemática bem determinada. Já as fontes de erros de natureza aleatória não possuem uma função matemática bem determinada, podendo apenas ser descritos através da teoria de processos estocásticos (PAPOULIS, 2001). A seguir são indicadas as fontes de erros mais significativas que degradam o processo de navegação inercial strapdown.

**Polarização constante (*Bias*):** um erro de polarização *constante* ou erro de *bias* pode ser interpretado como sendo um nível de sinal constante ou que varia muito lentamente, independentemente do sinal de entrada. Mesmo sendo constante, um sinal de *bias* pode mudar de valor em algumas condições, por exemplo, ao se religar o equipamento (*turn-on bias*).

**Passeio aleatório (*Random Walk*):** O passeio aleatório ou *Random Walk* é uma especificação para descrever o erro que irá ocorrer devido à integração da parcela de ruído aleatório presente nos sinais dos sensores inerciais. O ruído aleatório, também conhecido como ruído branco, pode ser visto como uma variação de curto período (alta freqüência) do sinal de saída, como por exemplo, a variação pico a pico ou o desvio padrão do sinal, enquanto os sensores inerciais estão em repouso. O ruído aleatório também pode ser definido como uma função da freqüência. Neste caso descreve-se o ruído como uma função da largura de banda

dos sensores. O *Random Walk* é definido em "$graus/\sqrt{h}$" para os sinais de giroscópios e "$g/\sqrt{Hz}$" para os sinais de acelerômetros.

**Erro de quantização:** os sinais de saída dos acelerômetros e giroscópios presentes numa UMI são digitalizados e disponibilizados em instantes discretos de tempo. Isto produz um ruído branco na saída que é proporcional à magnitude da quantização, ou seja, depende da ordem de grandeza com que um sinal elétrico é aproximado para valores diferentes daquele cuja amostra foi obtida. Uma técnica para caracterizar o erro devido ao processo de quantização será vista mais adiante na seção: *Variância de Allan*.

**Deriva térmica (*Drift*):** os sensores inerciais são afetados pela temperatura e devem ser compensados eletronicamente. Como esta compensação nunca é perfeita, a deriva térmica deve ser modelada como um processo aleatório.

**Fator de escala**: trata-se de um erro que é proporcional ao sinal de entrada, ou seja, o erro de fator de escala comporta-se como um erro de inclinação do coeficiente angular da equação de uma reta. Embora sejam modelados como lineares, erros deste tipo geralmente exibem algum grau de não linearidade.

**Desalinhamento**: refere-se ao desalinhamento mecânico entre eixos. Idealmente os giroscópios e os acelerômetros definem uma base ortogonal idealizada como estrutura da plataforma. Como na prática é impossível se obter um perfeito alinhamento mecânico da plataforma, descrevem-se então os erros de alinhamento de cada sensor com relação aos eixos da plataforma como constantes aleatórias.

## 4.1. ERROS CARACTERÍSTICOS DE GIROSCÓPIOS

Nesta seção serão examinados os principais erros que se propagam nos giroscópios. Também será visto que estes erros se acumulam com o passar do tempo, promovendo um efeito indesejável na determinação da orientação.

### 4.1.1. ERRO DE POLARIZAÇÃO CONSTANTE OU ERRO DE *BIAS*

O erro de *bias*[9] de um giroscópio é o valor médio de saída, que é medido em $(^{o}/h)$ quando uma UMI está em repouso, ou seja, não está submetida a nenhum tipo de rotação. Por ser constante, um erro de *bias,* $\varepsilon_{bg}$, causa um erro angular que cresce linearmente com tempo $\theta(t) = \varepsilon_{bg} t$, onde $t$ é o tempo de integração.

O *bias* de um giroscópio é mais bem estimado tomando-se o valor médio das medições durante um longo intervalo de tempo. Uma vez conhecido, seu efeito pode ser compensado, subtraindo-o do sinal de saída.

### 4.1.2. RUÍDO BRANCO E PASSEIO ALEATÓRIO (*RANDOM WALK*) ANGULAR

O sinal de saída de um giroscópio é perturbado por algum tipo de ruído termomecânico que flutua numa taxa muito maior que a taxa de amostragem do sensor (WOODMAN, 2007). Como conseqüência, as amostras obtidas a partir dos sensores são perturbadas por seqüência de ruído branco, que é simplesmente uma seqüência de variáveis aleatórias não correlacionadas e de média zero. Neste caso particular, cada variável aleatória é identicamente distribuída e possui variância $\sigma^2$.

Para se verificar o efeito deste ruído quando se integra o sinal no tempo, uma análise a partir de uma simples regra de integração retangular será feita. Admite-se que $N_i$ é a i-ésima variável aleatória da seqüência de ruído branco, onde cada $N_i$ é identicamente distribuída com média $E(N)_i = E(N) = 0$ e variância finita $Var(N_i) = Var(N) = \sigma^2$. Por definição, a seqüência de um ruído branco possui

[9] Neste trabalho, aplica-se a definição de *Bias*, *Polarização ou Polarização Constante* indistintamente.

covariância $Cov\left(N_i, N_j\right) = 0$ para todo $i \neq j$. O resultado de uma integração retangular sobre um sinal de ruído branco $\varepsilon(t)$ num intervalo $t = n\delta t$ é dado por

$$\int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau = \delta t \sum_{i=1}^{n} N_i \,, \tag{4.1}$$

onde $n$ é o numero de amostras fornecidas pelo dispositivo durante o período $t = n\delta t$ e $\delta t$ é o intervalo entre as sucessivas amostras.

Utilizando-se as formulações padronizadas $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ e $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, Cov(X, Y)$, onde $a$ e $b$ são constantes e $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias, segue que

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau\right) &= n\delta t E(N) = 0, \\ Var\left(\int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau\right) &= n\delta t^2 Var(N) = t\delta t \sigma^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto a integração retangular de um ruído branco introduz um sinal denominado Passeio Aleatório[10] (*Random Walk)* de média zero, cujo desvio padrão $\sigma_\theta(t) = \sigma\sqrt{t\delta t}$ cresce proporcionalmente com a raiz quadrada do tempo. Dado que deseja-se saber como o ruído afeta o sinal integrado no tempo, os fabricantes de dispositivos especificam o ruído usando uma unidade de medida em $^{\circ}/\sqrt{\mathrm{h}}$, denominada *Angular Random Walk* (ARW). Para exemplificar, tomemos como exemplo a UMI VG700-AA da CROSSBOW que possui um $ARW = 0{,}4^{\circ}/\sqrt{\mathrm{h}}$. Isto significa que após uma hora de funcionamento o desvio padrão de erro de orientação será de $0{,}4^{\circ}$, após duas horas tem-se $ARW = 0{,}4^{\circ}\sqrt{2} \approx 0{,}57^{\circ}$, e assim por diante.

Outras medidas utilizadas pelos fabricantes para especificar o ruído são a Densidade Espectral de Potência (*PSD*, do inglês *Power Spectral Density*), cuja unidade de medida é $\left[(^{\circ}/\mathrm{h})^2/\mathrm{Hz}\right]$, e a *FFT* da densidade de ruído expressa em

[10] Neste trabalho, aplica-se a definição de *Passeio Aleatório* ou *Random Walk* indistintamente.

$\left[ {}^{\circ}/\mathrm{h}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \right]$. É possível converter entre as diferentes especificações (CROSSBOW, 2002), utilizando-se

$$ARW\left({}^{\circ}/\mathrm{h}\right) = \frac{1}{60}\sqrt{PSD\left(\left({}^{\circ}/\mathrm{h}\right)^{2}/\mathrm{Hz}\right)},$$
$$ARW\left({}^{\circ}/\mathrm{h}\right) = \frac{1}{60}FFT\left({}^{\circ}/\mathrm{h}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right). \tag{4.3}$$

### 4.1.3. ERRO ANGULAR DEVIDO A DERIVA TÉRMICA

Flutuações de temperatura devido a mudanças no ambiente e/ou devido ao auto-aquecimento dos sensores inerciais angulares (giroscópios) produzem uma variação na magnitude do *bias* $\left(\varepsilon_{bg}\right)$, que não está incluída naquela parcela obtida com os sensores em repouso (TITTERTON, 1997).

Como descrito na seção 4.1.1, qualquer valor residual de *bias* incorporado ao sinal dos giroscópios irá causar um erro de orientação que crescerá linearmente com o tempo, $\theta\left(t\right) = \varepsilon_{bg}t$. Entretanto, a relação entre a variação de *bias* $\left(\varepsilon_{bg}\right)$ e a temperatura $\left(\Theta\right)$ depende do tipo de sensor (MEMS, FOG, etc.), e via de regra, é altamente não-linear. Assim sendo, a variação angular devido ao *bias* introduzido pela variação térmica $\left(\Delta\Theta\right)$ será também não-linear, $\theta\left(\Theta, t\right) = \varepsilon_{bg}\left(\Theta\right)t$.

Atualmente, a grande maioria das UMI's são internamente equipadas com sensores de temperatura, o que torna possível determinar (modelar) a instabilidade de *bias* devido à variação térmica. A determinação da parcela de *bias* devido à variação térmica é feita por meio de ensaios de orientação no interior de câmaras climáticas.

### 4.1.4. ERRO ANGULAR DEVIDO AOS ERROS DE CALIBRAÇÃO

O termo "erros de calibração" refere-se coletivamente aos erros de fator de escala, alinhamento entre eixos e linearidade dos sensores angulares. Estes erros

também introduzem uma parcela de *bias* $\left(\varepsilon_{bg}\right)$ e são observáveis somente enquanto os giroscópios estiverem sendo rotacionados. Assim como na deriva térmica, estes erros também introduzem um acúmulo adicional de deriva angular $\left(\theta(t)\right)$, sendo sua magnitude proporcional à magnitude da velocidade angular $\left(\omega_{ib}(t)\right)$ do giroscópio e do tempo de duração do movimento (WOODMAN, 2007).

Algumas UMI's possuem algoritmos internos para calibrar (compensar) estes erros, no entanto, uma caracterização "mais precisa" destes erros, somente é obtida fixando-se a UMI em uma mesa de simulação de orientação inercial (figura 4.1).

Figura 4.1 – Mesa simuladora de orientação inercial 3D
(extraída do site: www.acutronic.com)

## 4.2. ERROS CARACTERÍSTICOS DE ACELERÔMETROS

Analogamente aos erros dos giroscópios, esta seção examina os principais erros que se propagam nos acelerômetros. Serão examinados, como os erros dos acelerômetros, influenciam negativamente no processo de obtenção da velocidade e da posição.

### 4.2.1. ERRO DE POLARIZAÇÃO CONSTANTE OU ERRO DE *BIAS*

Assim como no giroscópio, o erro de *bias* de um acelerômetro é o valor médio de saída, que é medido em $\left(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)$ quando uma UMI está nivelada e em repouso, ou

seja, encontra-se perfeitamente nivelada e não está submetida a nenhum tipo translação. Por ser constante, um erro de *bias* de acelerômetro $\varepsilon_{ba}$, quando integrado duas vezes, causa um erro que cresce proporcionalmente com o quadrado do tempo $S(t) = \varepsilon_{ba}\, t^2/2$, onde $t$ é o tempo de integração.

Analogamente ao giroscópio, o *bias* de um acelerômetro pode ser estimado tomando-se o valor médio de medições durante um longo intervalo de tempo. Dado que o efeito da componente gravitacional $\mathbf{g}$ se propaga sobre os demais acelerômetros quando a plataforma não esta perfeitamente nivelada, uma parcela desta componente será erroneamente percebida como um efeito de *bias* e, para que este erro não ocorra, torna-se necessário conhecer com precisão a orientação da UMI. Na prática, isto pode ser alcançado por rotinas de calibração, na qual a UMI é montada sobre uma mesa com três graus de liberdade de rotação, e cuja orientação possa ser controlada com extrema precisão.

### 4.2.2. RUÍDO BRANCO E PASSEIO ALEATÓRIO DE VELOCIDADE

Assim como no giroscópio, o sinal de saída proveniente de um acelerômetro é perturbado por uma seqüência de ruído branco. Na seção anterior, mostrou-se que a integral de um ruído branco produz um *random walk* angular, cujo desvio padrão cresce proporcionalmente a $\sqrt{t}$. Portanto, aplicando-se uma analise análoga, pode demonstrar-se que, quando integrado, um ruído branco de acelerômetro irá produzir um *random walk* de velocidade, o qual é especificado em $\left(\mathrm{m/s/\sqrt{h}}\right)$.

A fim de se verificar qual é o efeito que o ruído branco de acelerômetro causa sobre a determinação da posição, será feita uma análise similar à dos giroscópios, na qual as amostras obtidas de um acelerômetro serão duplamente integradas. Admite-se que $N_i$ é a i-ésima variável aleatória da seqüência de ruído branco, onde cada $N_i$ é identicamente distribuída com média $E(N_i) = E(N) = 0$ e variância finita $Var(N_i) = Var(N) = \sigma^2$. O resultado de uma dupla integração sobre o ruído branco $\varepsilon(t)$ sobre um intervalo de tempo $t = n\delta t$ é dado por:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau d\tau &= \delta t\sum_{i=1}^{n}\delta t\sum_{j=1}^{i}N_j,\\ &= \delta t^2\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)N_i,\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $n$ é o número de amostras recebidas do acelerômetro durante o período $t = n\delta t$, e $\delta t$ é o intervalo de tempo entre as sucessivas amostras. A esperança matemática e a variância do erro de posição são dadas por

$$E\left(\int_0^t\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau d\tau\right) = \delta t^2\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)E(N_i) = 0\,, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}Var\left(\int_0^t\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau d\tau\right) &= \delta t^4\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)^2 Var(N_i)\\ &= \frac{\delta t^4 n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2\\ &= \frac{\delta t^4 n\left(2n^2+3n+1\right)}{6}\sigma^2\\ &= \frac{2\delta t(n\delta t)^3 + 3\delta t^2(n\delta t)^2 + \delta t^2(n\delta t)}{6}\sigma^2\\ &= \frac{2t^3\delta t + 3t^2\delta t^2 + t\delta t^2}{6}\sigma^2.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Desprezando-se os temos $\delta t^2$, chega-se a seguinte aproximação para a variância:

$$Var\left(\int_0^t\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau d\tau\right) \approx \frac{1}{3}\sigma^2 t^3\delta t. \tag{4.7}$$

Na obtenção da equação (4.7), assume-se que o intervalo $\delta t$ é pequeno, ou seja, assume-se que a freqüência de amostragem do acelerômetro é suficientemente alta, o que é valida para os acelerômetros atuais. Esta análise mostrou que um ruído branco de acelerômetro produz um *random walk* de posição com média zero e desvio padrão $\sigma_s(t) \approx \sigma\sqrt{t^3}\sqrt{\delta t/3}$, que cresce com o passar do tempo proporcionalmente a $\sqrt{t^3}$.

### 4.2.3. ERRO DE ACELERAÇÃO DEVIDO A DERIVA TÉRMICA

Assim como nos giroscópios, variações de temperatura causam flutuações no *bias* $(\varepsilon_{ba})$ do sinal de saída dos acelerômetros. Como descrito na seção 4.2.1, qualquer erro residual de *bias* introduzido ao sinal dos acelerômetros irá causar um erro de posição que cresce quadraticamente com o tempo, $S(t) = \varepsilon_{ba}\, t^2/2$.

A relação entre o *bias* $(\varepsilon_{ba})$ e a temperatura $(\Theta)$ depende especificamente do tipo de dispositivo (MEMS, etc.), no entanto, assim como no caso dos giroscópios esta relação também é altamente não-linear. Assim sendo, um erro residual de *bias* introduzido pela variação térmica irá causar um erro de posição, $S(\Theta, t) = \varepsilon_{ba}(\Theta) t^2/2$.

No caso da UMI possuir sensor interno de temperatura, então será possível aplicar correções ao sinal de saída dos acelerômetros no sentido de compensar a variação do *bias* causada pela variação da temperatura.

### 4.2.4. ERRO DE ACELERAÇÃO DEVIDO AOS ERROS DE CALIBRAÇÃO

Analogamente aos giroscópios, os erros de calibração (fator de escala, alinhamento entre eixos e linearidade) aparecem como um erro de *bias* $(\varepsilon_{ba})$ adicionado ao sinal dos sensores. Este erro é observável somente enquanto os sensores estiverem sob aceleração. No entanto, diferentemente dos giroscópios, devido à aceleração gravitacional $(\mathbf{g})$, esta parcela de *bias* introduzida pode ser observada com os acelerômetros em estado estacionário.

## 4.3. CLASSIFICAÇÃO DE UMA UMI *STRAPDOWN*

A qualidade de uma UMI *strapdown* está diretamente relacionada à qualidade de seus sensores, pois como foi visto nas seções anteriores, os erros e ruídos dos sensores afetam crucialmente o desempenho da navegação inercial. UMI´s

*strapdown* comerciais são divididas basicamente em três categorias: alta qualidade, média qualidade e baixa qualidade.

**Alta qualidade** refere-se a sistemas capazes de navegar e sentir as mudanças de orientações com excelente precisão por longo tempo de duração (tipicamente horas) somente com a UMI.

**Média qualidade** requer o auxilio de sensores externos para manter a capacidade oferecida pelos sistemas de alta qualidade. Sistemas de média qualidade são capazes de navegar durante curtos períodos de duração (tipicamente minutos) somente com a UMI.

**Baixa qualidade** requer sensores externos para proporcionar performance *útil* e são capazes de operar somente num curtíssimo intervalo de tempo (tipicamente segundos) utilizando apenas a UMI.

A tabela (4.1), extraída de Brown (1997), mostra como são classificadas as UMI´s do tipo *strapdown,* segundo alguns parâmetros de sensores. Dentre estes parâmetros estão o *bias* e o *random walk*, discutidos anteriormente.

Tabela 4.1 – Classificação de uma UMI strapdown

| Parâmetro do Sensor | Alta Qualidade | Média Qualidade | Baixa Qualidade |
|---|---|---|---|
| Bias máximo de Giroscópio | < 0,01 $^0/h$ | 0,1-1,0 $^0/h$ | 10 $^0/h$ |
| Random Walk de giroscópio | $3.10^{-4}$ $^0/\sqrt{h}$ | 0,01 $^0/\sqrt{h}$ | > 0,01 $^0/\sqrt{h}$ |
| Bias máximo de acelerômetro[1] | 10-50 $\mu g$ | 200-500 $\mu g$ | > 1000 $\mu g$ |
| Random Walk de acelerômetro[1] | 3-10 $\mu g/\sqrt{Hz}$ | 50 $\mu g/\sqrt{Hz}$ | > 50 $\mu g/\sqrt{Hz}$ |

[1] ‘ $g$ ’ representa a aceleração gravitacional terrestre e “ $\mu g = 10^{-6} g$ ”.

## 4.4. CARACTERIZAÇÃO DE SINAIS COM RUIDO ADITIVO

As seções anteriores descreveram como processos ruidosos degradam os sinais dos giroscópios e acelerômetros. Para contornar este problema, torna-se necessário utilizar alguma técnica que permita caracterizar os diversos tipos de ruídos presentes nos sinais fornecidos pelos sensores inerciais. Uma técnica bastante eficiente e muito utilizada para se caracterizar ruídos em processos ocultos é a análise do sinal por meio da Densidade Espectral de Potência (DEP). A DEP permite analisar e/ou caracterizar dados de processos estocásticos empregando uma análise espectral (no domínio da freqüência) sobre sinais periódicos ou não periódicos. A DEP, $S(\omega)$, é expressa pela transformada de Fourier aplicada à covariância $P(\tau)$, como a seguir (EL-SHEIMY et al, 2008):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} P(\tau)\, d\tau \,. \tag{4.8}$$

Embora eficiente, esta técnica pode se tornar relativamente trabalhosa, pois a covariância $P(\tau)$ pode ser de difícil caracterização. Além disso, a DEP caracteriza o ruido no domínio da freqüência, sendo que a caracterização no domínio do tempo seria mais desejável.

Nesta seção será abordada uma técnica que explora as características dos sinais ruidosos a partir de sucessivas análises de variância aplicadas ao sinal no domínio do tempo. Esta técnica é conhecida como *Allan Variance* (AVAR) e pode ser utilizada para se caracterizar algumas propriedades de sinais ruidosos (EL-SHEIMY et al, 2008).

### 4.4.1. VARIÂNCIA DE ALLAN (*AVAR*)

A análise da variância de Allan (*AVAR*) é uma técnica de análise no domínio do tempo originalmente desenvolvida para se caracterizar ruídos e estabilidade em sistemas de relógio GPS. Entretanto, esta técnica pode ser aplicada a qualquer sinal sob o qual se deseja determinar ruídos de processos ocultos. A AVAR de um sinal é

expressa como sendo uma função da média temporal, $f\left(\overline{x}(\tau)\right)$, de uma função $f(t)$. Para uma média temporal, $\overline{x}(\tau)$, o algoritmo para obtenção da AVAR se processa como a seguir:

1. Obtenha uma longa seqüência de dados (no domínio do tempo) e divida-os em partições (escaninhos) de comprimento $\tau$. Deve existir uma quantidade de dados suficientes para um conjunto de pelo menos nove partições distintas, pois caso contrário os resultados obtidos começam a perder sua significância estatística (STOCKWELL, 2002a).

2. Proceda a extração da média temporal de cada partição a fim de se obter uma lista de valores médios $\left(\overline{x}_1(\tau),\ \overline{x}_2(\tau),\ \overline{x}_3(\tau),\ \ldots\ \overline{x}_n(\tau),\right)$, onde $n$ é o número de partições.

3. A partir dos valores de $\overline{x}_n(\tau)$, a variância de Allan é expressa por

$$AVAR(\tau) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_n \left(\overline{x}_n(\tau) - \overline{x}_{n-1}(\tau)\right)^2. \tag{4.9}$$

As figuras (4.2) e (4.3) ilustram o mecanismo de partição de comprimento $\tau$ aplicado a um sinal fornecido por um giroscópio.

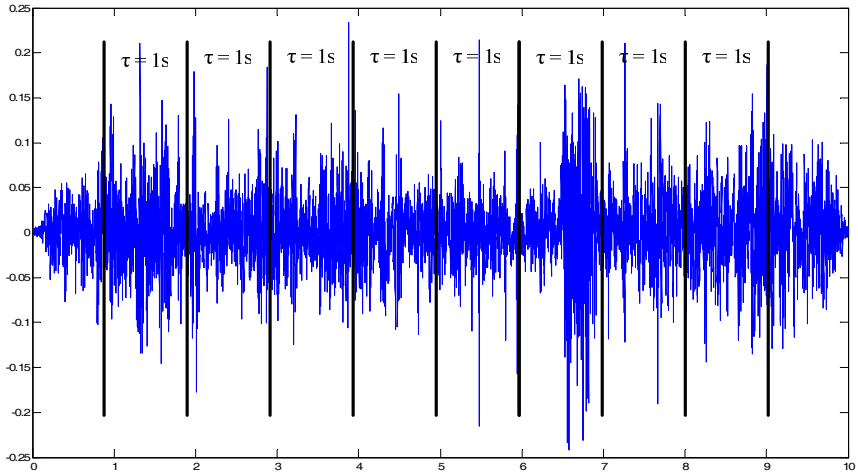



Figura 4.2 – Análise de Allan com tempo de partição $\tau = 1\text{s}$

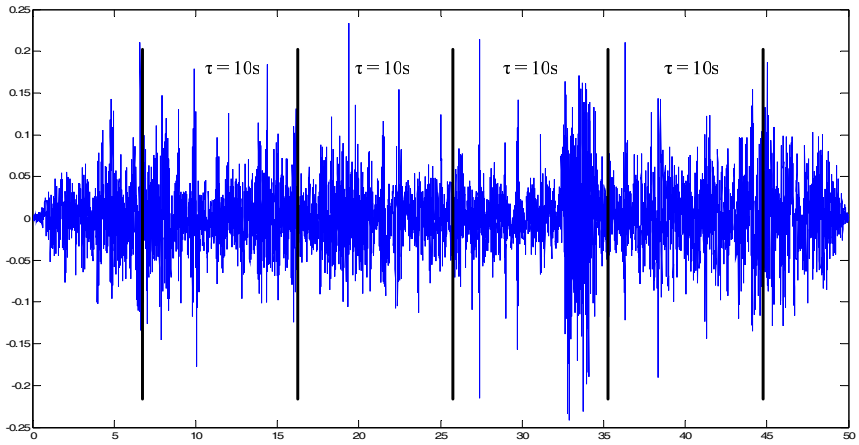



Figura 4.3 – Análise de Allan com tempo de partição $\tau = 10\,\mathrm{s}$

Para se determinar as características de ruídos de processos ocultos, o desvio padrão de Allan, $AD(\tau) = \sqrt{AVAR(\tau)}$, é plotado como uma função de $\tau$ num gráfico bidimensional com ambas as escalas logarítmicas. Como ilustra a figura (4.4), ao serem plotados, os diferentes tipos de processos aleatórios produzem curvas com diferentes gradientes de inclinação (IEEE STD 962, 2003). Além do mais, processos aleatórios distintos geralmente aparecem em diferentes regiões de partição $\tau$, permitindo que sua presença seja facilmente identificada por meio do coeficiente angular $m$, aplicado aos gráficos da variância ou do desvio padrão de Allan. Uma vez identificado o tipo de processo aleatório, é possível obter seu valor numérico diretamente dos gráficos da variância ou do desvio padrão.

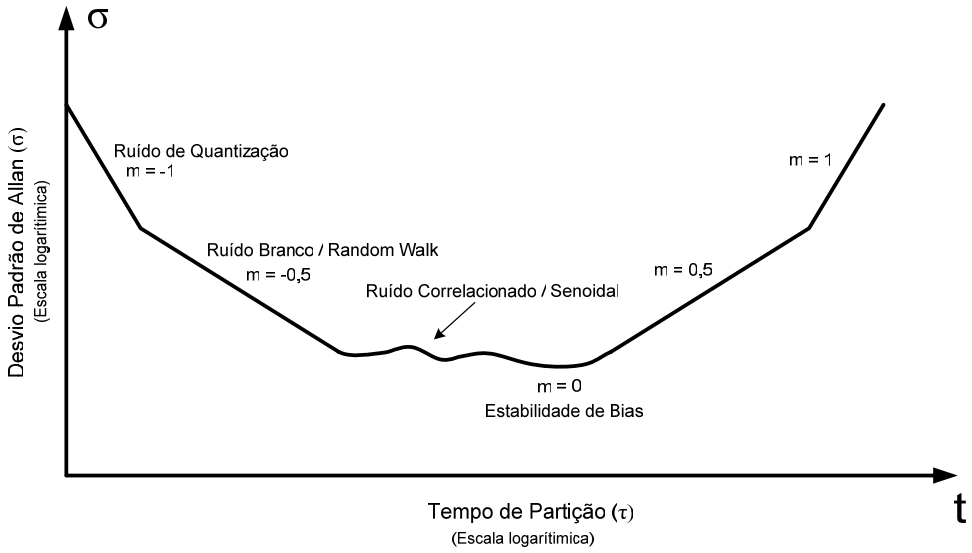



Figura 4.4 – Possível gráfico para análise do desvio padrão de Allan

Para giroscópios e acelerômetros, as características mais importantes que se deseja determinar através do desvio padrão de Allan são as instabilidades de bias e random *walk*, as quais podem ser identificadas e posteriormente determinadas como a seguir:

1. O ruído branco aparece no gráfico do desvio padrão como uma inclinação de coeficiente angular $m = -0,5$. O valor do *random walk* para este tipo de ruído é obtido traçando-se uma linha perpendicular ao eixo das ordenadas no tempo de partição $\tau = 1$ e lendo seu valor diretamente do gráfico.

2. A instabilidade de *bias* aparece no gráfico do desvio padrão como uma região relativamente plana próxima ao valor mínimo, e seu valor é numericamente igual ao valor mínimo da curva do desvio padrão.

A partir da norma IEEE std 962 (2003) e de Stockwell (2002a), o leitor poderá encontrar uma descrição mais aprofundada da AVAR, bem como, os fundamentos matemáticos que permitem caracterizar os coeficientes angulares dos diferentes processos aleatórios e suas técnicas de obtenção.

### 4.4.2. DESVIO PADRÃO DE ALLAN APLICADO À UMI VG700AA

Para elucidar o procedimento de caracterização de ruídos pelo método de Allan, apresenta-se a seguir (figura 4.5) um gráfico do desvio padrão obtido através de um teste de aproximadamente 12 horas sobre os sinais dos giroscópios da UMI VG700AA-202. A aquisição dos sinais foi feita a uma taxa de 50 Hz com a UMI em repouso. Nesta figura é possível observar que o período de 12 horas de aquisição dos sinais não foi suficiente para caracterizar o ruído de quantização a partir do coeficiente angular $m = -1$, no entanto, a mudança de inflexão da curva a partir de $t > 2000s$, indica que poderia ser possível caracterizar este tipo de ruído aumentando-se o tempo de aquisição, ou seja, até se alcançar o coeficiente angular $m = 1$ (vide figura 4.4).

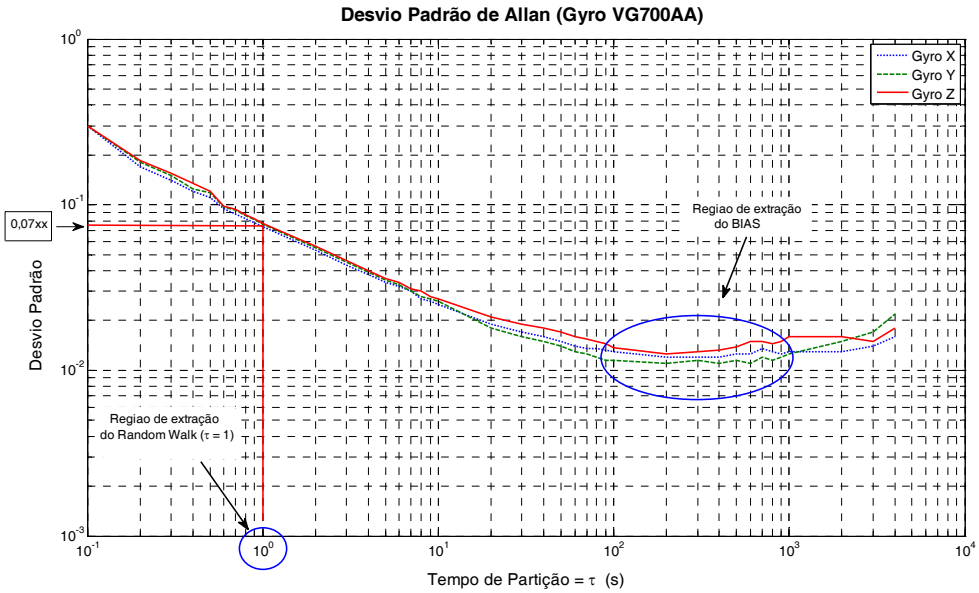



Figura 4.5 – Desvio padrão de Allan – Giroscópios da VG700AA-202

A tabela a seguir mostra os resultados de *bias* e *random walk* que foram extraídos do gráfico, aplicando-se a metodologia indicada na seção anterior.

Tabela 4.2 – Bias e Random Walk extraídos do gráfico de desvio padrão de Allan

| Giroscópio | Instabilidade de Bias | Random Walk Angular |
|---|---|---|
| Eixo X | $0,014^0/s = 50,4^0/h \quad (\cong 400s)$ | $0,074^0/\sqrt{s} = 4,44^0/\sqrt{h}$ |
| Eixo Y | $0,012^0/s = 43,2^0/h \quad (\cong 400s)$ | $0,076^0/\sqrt{s} = 4,56^0/\sqrt{h}$ |
| Eixo Z | $0,015^0/s = 54,0^0/h \quad (\cong 200s)$ | $0,078^0/\sqrt{s} = 4,68^0/\sqrt{h}$ |

# 5. ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E FILTROS DE KALMAN

## 5.1. ESTIMAÇÃO DE ESTADOS

A reconstrução de trajetórias através da navegação inercial é interpretada como um problema de estimação de estados, onde, dado o modelo matemático que descreve a navegação e um conjunto de medidas, torna-se possível estimar o valor de seus estados a cada instante.

A figura (5.1), obtida de Furukawa (1992), ilustra o problema da estimação de estados. Neste algoritmo, $x$ é o estado a ser estimado, $u$ é a entrada do sistema (que deve ser conhecida) e $z$ é a saída, relacionada a $x$ por $h(x)$ e que pode ser observada. O estimador determina as estimativas $\hat{x}$ dos estados a partir de um modelo matemático do sistema e de um modelo $h'$ da função de saída.

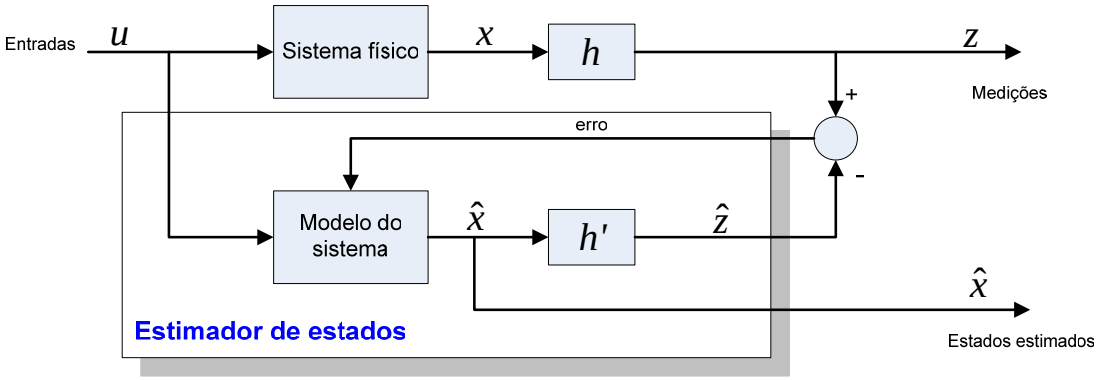



Figura 5.1 – Estimador de estados determinístico

Ocorre que os sistemas reais estão sujeitos a erros e ruídos, os quais não estão representados no modelo anterior. Para contornar este problema, as fontes de erros podem ser modeladas como ruídos ($w$) adicionados às entradas e ($v$) as saídas do sistema (figura 5.2). Os ruídos adicionados às entradas são conhecidos como

ruídos de processo e os ruídos adicionados às saídas são conhecidos como ruídos de medição.

Devido à presença de ruídos aleatórios, o novo sistema passa a ter natureza estocástica (aleatória), onde se tem agora que determinar não somente a estimativa dos estados $\hat{x}$, mas também a incerteza associada $\hat{p}$.

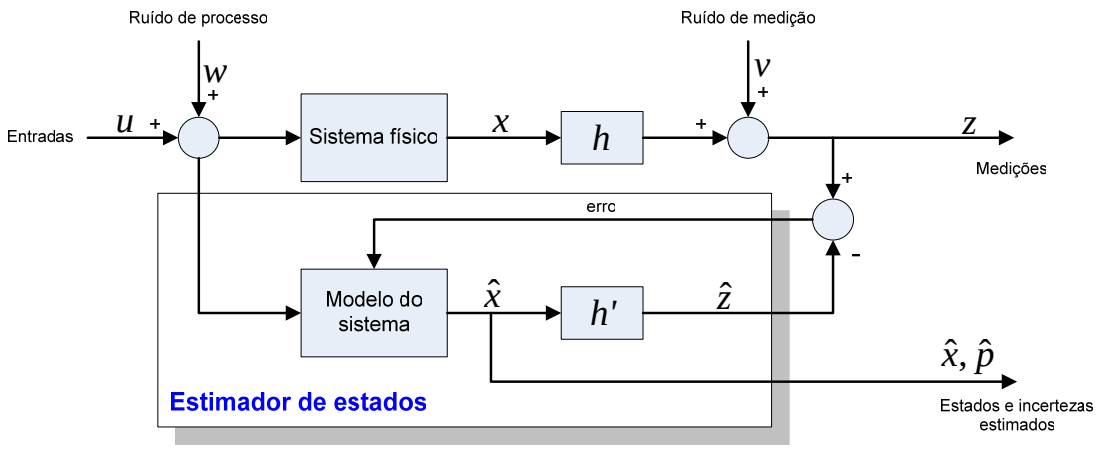



Figura 5.2 – Estimador de estados estocástico

Adequando-se os conceitos ora mencionados ao problema da navegação inercial, tem-se que o veículo (plataforma) passa a ser o sistema dinâmico, as entradas são as leituras dos acelerômetros e os estados (variáveis) do veículo a serem estimados são, entre outros, a posição, a orientação e a velocidade. Em sistemas dinâmicos (lineares ou não-lineares), uma das técnicas mais difundidas e utilizadas na implementação de estimadores de estados estocásticos são os Filtros de Kalman. Devido a sua importância, descreve-se a seguir, as principais abordagens de construção desses filtros para instantes discretos de tempo.

## 5.2. FILTROS DE KALMAN

O filtro de Kalman é o núcleo do algoritmo de navegação proposto, sendo que o mesmo realiza conjuntamente a fusão sensorial, gerando as estimativas dos estados e efetuando a correção destas estimativas através de medidas auxiliares, que no caso deste trabalho podem ser: medidas de velocidade, medidas de orientação, coordenadas de marcas topográficas, ou a combinação de ambas.

O filtro de Kalman é essencialmente um conjunto de equações matemáticas que implementa um estimador de estados conhecido como “preditor-corretor”. Quando algumas condições são satisfeitas, o filtro de Kalman é considerado um estimador ótimo e minimiza a covariância do erro estimado. O filtro de Kalman é empregado no sentido de tentar estimar o estado $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ de um processo controlado em instantes discretos de tempo, governado por equações lineares ou não, do tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad \text{(sistema linear)}, \\ \mathbf{x}_k &= f\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k\right) + \mathbf{w}_{k-1} \quad \text{(sistema não linear)}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

e equações de medição $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$ lineares ou não, dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad \text{(sistema linear)}, \\ \mathbf{z}_k &= h\left(\mathbf{x}_k, k\right) + \mathbf{v}_k \quad \text{(sistema não linear)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

As variáveis aleatórias $\mathbf{w}_k$ e $\mathbf{v}_k$ representam os ruídos do processo e da medição respectivamente. Considera-se que estas variáveis são ruídos brancos, independentes (estatisticamente não correlacionadas) com médias nulas e distribuições normais de probabilidade, dadas por:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{w}) &\sim N(0, \mathbf{Q}), \\ p(\mathbf{v}) &\sim N(0, \mathbf{R}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T\right] &= \mathbf{Q}_k\delta_{k-j}, \\ E\left[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T\right] &= \mathbf{R}_k\delta_{k-j}, \\ E\left[\mathbf{v}_k\mathbf{w}_j^T\right] &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nas equações anteriores, $\mathbf{Q}_k$ representa a covariância do ruído associado ao processo, $\mathbf{R}_k$ é a covariância do ruído associado à medição, $E[\bullet]$ é o operador esperança ou expectância matemática associado à função $[\bullet]$ e $\delta_{k-j}$ é a função delta de Kronecker, definida como:

$$\begin{cases} \delta_{k-j} = 1 & se \quad k = j \\ \delta_{k-j} = 0 & se \quad k \neq j \end{cases}$$

Embora admita vários tipos de formulação, o principal objetivo do Filtro de Kalman é estimar o estado $\mathbf{x}_k$, baseado no conhecimento do modelo do sistema dinâmico e da disponibilidade da medição $\mathbf{z}_k$. A quantidade de informação que é disponibilizada para a estimação do estado pode variar dependendo da particularidade do processo. No caso de se dispor de um conjunto de medições até (e incluindo) o instante de tempo $k$ para se estimar o estado $\mathbf{x}_k$, então se pode determinar uma estimativa conhecida como *estimativa a posteriori*, denotada por $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. Entretanto, caso se disponha de um conjunto de medições até (mas não incluindo) o instante de tempo $k$ para se estimar o estado $\mathbf{x}_k$, então pode se determinar uma estimativa conhecida como *estimativa a priori*, denotada por $\hat{\mathbf{x}}_k^-$. Em outras palavras, diz-se que:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^- = \textit{estimativa de } \mathbf{x}_k \textit{ antes de se processar a medição no instante de tempo } k \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \textit{estimativa de } \mathbf{x}_k \textit{ após se processar a medição no instante de tempo } k \end{cases}$$

Visando uma notação mais limpa, a estimativa *a posteriori* $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ também será denotada simplesmente por $\hat{\mathbf{x}}_k$. O superscrito "+" será explicitado para destacar que se trata da estimativa que já incorpora a informação da medição no instante $k$.

Para os casos em que se disponha de medições após o instante de tempo $k$ para se estimar o estado $\mathbf{x}_k$, então pode se determinar uma estimativa de estado *a posteriori,* denominada estimativa suavizada (*smoothed*) do estado.

### 5.2.1. O FILTRO DE KALMAN LINEAR

O Filtro de Kalman (FK) linear estima um processo utilizando uma forma de controle por realimentação, onde o filtro estima o estado do processo em algum instante de tempo e então obtém a realimentação a partir de medições. Assim, as

equações para o Filtro de Kalman são divididas em dois grupos: atualização temporal (predição) e atualização da medição (correção).

As equações de atualização temporal são responsáveis por projetar a frente no tempo o estado corrente e a estimativa da covariância do erro. As equações para atualização da medição são responsáveis pela realimentação, ou seja, elas incorporam uma nova medição ao estado $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ e a covariância $\mathbf{P}_k^-$ estimados *a priori* para obter uma estimativa do estado $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ e da covariância $\mathbf{P}_k^+$ melhoradas (corrigidas) *a posteriori*. A figura a seguir ilustra as etapas de predição (*a priori*) e correção (*a posteriori*).

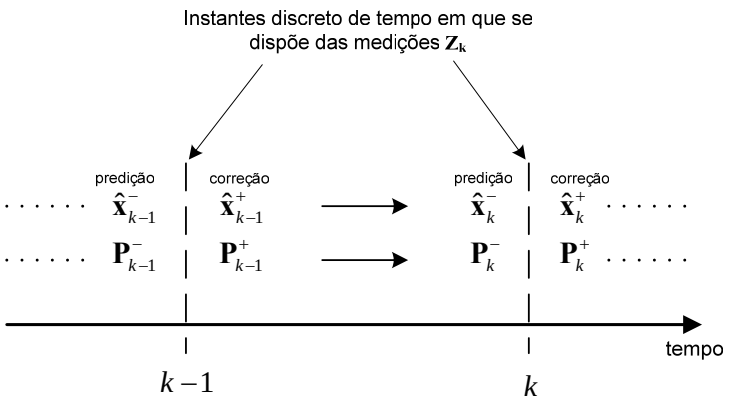



Figura 5.3 - Predição-Correção

### 5.2.1.1. O ALGORITMO DO FILTRO DE KALMAN LINEAR

Na literatura atual, pode-se encontrar várias maneiras para se descrever o conjunto de equações que implementa o algoritmo do Filtro de Kalman. Neste trabalho em particular, optou-se pelo processo descrito em (SIMON, 2006).

---

**Algoritmo do Filtro de Kalman Linear**

---

i. Inicializa-se o Filtro de Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0^+ &= E\left[\mathbf{x}_0\right] \\ \mathbf{P}_0^+ &= E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)^T\right] \end{aligned} \tag{5.5}$$

ii. Calcula-se a predição do estado e da covariância (para $k > 0$)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^-\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

iii. Calcula-se o ganho do Filtro de Kalman:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \tag{5.7}$$

iv. Procede-se correção do estado e da covariância a partir da medição:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T \\ &= \left[\left(\mathbf{P}_k^-\right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k\right]^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^- \end{aligned} \tag{5.9}$$

v. Recursão do Filtro de Kalman: volta-se ao passo ii.

---

Nas equações que descrevem a atualização da covariância $\mathbf{P}_k^+$, a primeira expressão é denominada de versão estabilizada de Joseph para atualização da covariância. Ela foi formulada por Peter Joseph na década de 1960, e demonstra-se que este tipo de realização é mais robusto que a terceira expressão desenvolvida por Kalman e Bucy em 1968. A forma de Joseph garante que, quando $\mathbf{P}_k^-$ for positiva semi-definida, $\mathbf{P}_k^+$ será também positiva semi-definida.

Embora computacionalmente mais simples, a terceira expressão não garante as condições de matriz simétrica ou de matriz positiva semi-definida. A segunda expressão utilizada para determinar $\mathbf{P}_k^+$, raramente é utilizada na forma como está descrita, no entanto é muito útil para se demonstrar outra formulação do Filtro de Kalman, denominada de Filtro de Informação.

### 5.2.2. O FILTRO DE INFORMAÇÃO

Esta seção discute um tipo de Filtro de Kalman modificado, denominado Filtro de Informação (SIMON, 2006). Trata-se de uma implementação de um Filtro de Kalman que, ao invés de propagar a matriz de covariância $\mathbf{P}$, propaga sua inversa $\mathbf{P}^{-1}$. Ou seja, o Filtro de Informação propaga uma matriz que contém as informações do sistema. Para esclarecer melhor o conceito de matriz de informação, admita a definição da matriz de covariância $\mathbf{P} = E\left[\left(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right)^T\right]$. Nesta equação, a matriz $\mathbf{P}$ representa a incerteza da estimativa do estado. Quando $\mathbf{P}$ é "grande", tem-se que o grau da incerteza relacionada às estimativas dos estados é elevado. Por outro lado, quando a matriz $\mathbf{P}$ é "pequena", o grau de incerteza é baixo. No limite, quando $\mathbf{P} \to 0$ pode-se afirmar que o conhecimento do estado $\mathbf{x}$ é perfeito, e quando $\mathbf{P} \to \infty$ o conhecimento do estado $\mathbf{x}$ é nulo. Baseado nestas análises define-se então uma matriz denominada Matriz de Informação, dada por

$$\mathcal{I} = \mathbf{P}^{-1}. \tag{5.10}$$

Diferentemente de $\mathbf{P}$, a matriz $\mathcal{I}$ representa a certeza sobre a estimativa do estado $\mathbf{x}$. No limite, quando $\mathcal{I} \to \infty$ a certeza é total, e quando $\mathcal{I} \to 0$ a certeza torna-se nula. Para elaborar o Filtro de Informação, utiliza-se a segunda forma de se expressar a matriz de covariância $\mathbf{P}_k^+$ na equação (5.9), reescrita aqui na forma inversa,

$$\left(\mathbf{P}_k^+\right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_k^-\right)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k . \tag{5.11}$$

Aplicando-se a definição de $\mathcal{I}$ nesta equação, tem-se

$$\mathcal{I}_k^+ = \mathcal{I}_k^- + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k , \tag{5.12}$$

que é a equação de atualização da medição (correção) da Matriz de Informação. Para determinar uma equação de atualização temporal (predição) para a Matriz de Informação, recorre-se à equação de predição da covariância $\mathbf{P}$, onde:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^-\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \tag{5.13}$$

Substituindo $\mathcal{I}$ nesta equação, chega-se à:

$$\mathcal{I}_k^- = \left[\mathbf{A}_{k-1}\left(\mathcal{I}_{k-1}^-\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}\right]^{-1}. \tag{5.14}$$

Utilizando-se o lema de inversão de matrizes

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}, \tag{5.15}$$

facilmente se identifica que: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_{k-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{k-1}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{k-1}^T$ e $\mathbf{D} = \mathcal{I}_{k-1}^-$. Substituindo-se estas identidades na equação (5.14), obtém-se:

$$\mathcal{I}_k^- = \left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1} + \left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}\left(\mathcal{I}_{k-1}^- + \mathbf{A}_{k-1}^T\left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^T\left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1} \tag{5.16}$$

Esta equação é a equação de atualização temporal (predição) do Filtro de Informação. O algoritmo que implementa o Filtro de Informação pode então ser definido como a seguir.

---

**ALGORITMO DO FILTRO DE INFORMAÇÃO**

---

i. Inicializa-se o Filtro de Informação:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0^+ &= E\left[\mathbf{x}_0\right], \\ \mathbf{P}_0^+ &= E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)^T\right]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

ii. Para $k = 1, 2, 3, ..., N$, processam-se as equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k^- &= \left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1} + \left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}\left(\mathcal{I}_{k-1}^- + \mathbf{A}_{k-1}^T\left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^T\left(\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{-1}, \\ \mathcal{I}_k^+ &= \mathcal{I}_k^- + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k, \\ \mathbf{K}_k &= \left(\mathcal{I}_k^+\right)^{-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-\right). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Algumas comparações se fazem necessárias. O Filtro de Kalman convencional requer a inversão de uma matriz com dimensão $(r \times r)$ onde $r$ é o número de medições. O Filtro de Informação requer pelo menos a inversão de uma matriz com dimensão $(n \times n)$ onde $n$ é o número de estados, portanto, se $r \gg n$ (mais medições do que estados) o Filtro de Informação torna-se computacionalmente mais eficiente[11].

Caso a incerteza da covariância seja infinita, não é possível ajustar numericamente $\mathbf{P}_0^+ = \infty$, porém é possível ajustar numericamente $\mathcal{I}_0^+ = 0$, e neste caso o Filtro de Informação é matematicamente mais preciso do que o Filtro de Kalman convencional. De maneira análoga, caso a incerteza da covariância seja nula, pode-se dizer que o Filtro de Kalman convencional é matematicamente mais preciso.

### 5.2.3. ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Em muitas aplicações de interesse, o sistema dinâmico possui um comportamento não linear por natureza e o filtro de Kalman tradicional não pode ser aplicado na estimação dos estados. Neste tipo de sistema, pode ocorrer que tanto os estados e as medições são não lineares, ou apenas um deles.

Nesta seção, descrevem-se dois tipos de filtros aplicados à estimação de estados não lineares. O primeiro é o Filtro Linearizado de Kalman (FLK) cuja idéia básica é encontrar um sistema linear cujos estados representem pequenos desvios $(\Delta x)$ em relação aos estados nominais $(\overline{x})$ do sistema não linear. O segundo tipo é o Filtro Estendido de Kalman (FEK), cuja idéia básica é utilizar os estados estimados $\hat{x}$ como trajetória nominal no FLK, em outras palavras, o que se faz é igualar o estado estimado ao estado nominal, ou seja, $\hat{x} = \overline{x}$.

---

[11] Nos casos em que as medições $(v_k)$ forem não-correlacionadas, tem-se então uma matriz diagonal $(r_d)$ cuja inversa $(r_d^{-1})$ é simplesmente a inversa dos elementos da diagonal principal e, assim sendo, não se pode afirmar que o Filtro de Informação é uma solução computacionalmente mais eficiente.

### 5.2.4. FILTRO LINEARIZADO DE KALMAN (FLK)

Descreve-se a seguir, os algoritmos recursivos que executam o **FLK** (SIMON, 2006).

---

**ALGORITMO DO FILTRO LINEARIZADO DE KALMAN**

---

i. Inicializa-se o Filtro Linearizado de Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0^+ &= E\left[\mathbf{x}_0\right] \\ \mathbf{P}_0^+ &= E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)^T\right] \end{aligned} \tag{5.19}$$

ii. Computam-se os estados nominais:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}_k &= f\left(\overline{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k\right) \\ \overline{\mathbf{z}}_k &= h\left(\overline{\mathbf{x}}_k, k\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

iii. Computam-se as matrizes das derivadas parciais, calculadas a partir dos estados nominais:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k-1} &= \left.\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}_{k-1}} \\ \mathbf{H}_k &= \left.\frac{\partial h\left(\mathbf{x}, k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}_k} \end{aligned} \tag{5.21}$$

iv. Calcula-se $\Delta\mathbf{z}_k$ como a diferença entre a medição atual $\mathbf{z}_k$ e a medição nominal $\overline{\mathbf{z}}_k$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{z}_k &= \mathbf{z}_k - \overline{\mathbf{z}}_k \\ &= \mathbf{z}_k - h\left(\overline{\mathbf{x}}_k\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

v. Atualizam-se as equações do filtro:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \\ \mathbf{P}_k^+ &= \mathbf{A}_{k-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{k-1}^- \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \Delta\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\Delta\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- \\ \Delta\hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \Delta\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k\left(\Delta\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \Delta\hat{\mathbf{x}}_k^-\right) \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \overline{\mathbf{x}}_k + \Delta\hat{\mathbf{x}}_k^+ \end{aligned} \tag{5.23}$$

vi. Inicia-se a iteração do filtro: volta-se ao passo ii.

### 5.2.5. FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN (FEK)

Descreve-se a seguir, os algoritmos iterativos que executam o **FEK** (SIMON, 2006).

---

**ALGORITMO DO FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN**

---

i. Inicializa-se o filtro como a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0^+ &= E\left[\mathbf{x}_0\right] \\ \mathbf{P}_0^+ &= E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+\right)^T\right] \end{aligned} \tag{5.24}$$

ii. Computa-se a matriz $\mathbf{A}_{k\text{-}1}$ a partir do estado estimado anterior e processa-se a atualização temporal (predição) da matriz de covariância

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k-1} &= \left.\frac{\partial f\left(\mathbf{x},\mathbf{u},k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \tag{5.25}$$

iii. Processa-se a atualização dos estados e computa-se a matriz $\mathbf{H}_k$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= f_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, k\right) \\ \mathbf{H}_k &= \left.\frac{\partial h\left(\mathbf{x},k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \end{aligned} \tag{5.26}$$

iv. Processa-se a atualização (correção) com a medição dos estados e da covariância:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k - h\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k\right)\right) \\ \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^- \end{aligned} \tag{5.27}$$

v. Inicia-se a iteração do filtro: volta-se ao passo ii.

---

### 5.2.6. OUTRAS TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO APLICADAS À SISTEMAS NÃO LINEARES

A seção anterior abordou a solução de estimadores de estados não lineares, utilizando os filtros de Kalman, linearizado (FLK) e estendido (FEK). No entanto, atualmente se dispõe, de novas técnicas poderosas, e que também são aplicados com êxito, à sistemas não lineares. Dentre as principais, pode-se citar: o *Unscented Kalman Filter* (UKF) (JULIER, 1997) e o *Particles Filters* (PF) (ARULAMPALAM, 2002), já citados no capítulo 2.

### 5.2.7. O FILTRO SUAVIZADOR *FORWARD-BACKWARD*

Suponha que se queira estimar otimamente o *m*-ésimo vetor de estados $\mathbf{x}_m$ com base em um conjunto de medições obtidas a partir de um instante de tempo $k=1$ até o instante de tempo $k=N$, onde $N>m$. Uma das formas de se alcançar este objetivo é por meio de uma técnica de filtragem (e suavização) de estados denominada *Forward-Backward,* a qual obtém duas estimativas do vetor de estados e de sua covariância $\mathbf{P}_m$. A primeira estimativa é denominada estimativa à frente (*forward*) sendo designada por $\hat{\mathbf{x}}_f$, obtida através de um filtro de Kalman iniciando no instante $k=1$ avançando até o instante $k=N$. A segunda estimativa é denominada estimativa para trás (*backward*) sendo designada por $\hat{\mathbf{x}}_b$, obtida através de um filtro de Kalman modificado, iniciando no instante $k=N$ e retrocedendo até o instante $k=m$. O filtro suavizador *Forward-Backward* combina então as duas estimativas de estados, $\hat{\mathbf{x}}_f$ e $\hat{\mathbf{x}}_b$, juntamente com suas respectivas covariâncias, $\mathbf{P}_f$ e $\mathbf{P}_b$, para obter uma terceira estimativa de estado melhorada (suavizada). Esta técnica foi inicialmente apresentada por Fraser e Potter (1969), tendo sido difundida com mais detalhes, como por exemplo, em Gelb (1970).

A figura a seguir ilustra o conceito do algoritmo do Filtro Suavizador *Forward - Backward*. O Filtro *Forward* propaga-se à frente até (incluindo) o instante de tempo $k=m$, obtendo as estimativas e covariâncias do estado *a posteriori*. A partir de então, o Filtro *Backward*, retrocede até o instante de tempo $k=m$, obtendo as estimativas e covariâncias do estado *a priori*. Finalmente, no instante de tempo

$k = m$, as estimativas do estado à frente e para trás bem como suas respectivas covariâncias são combinadas produzindo estimativas ótimas e suavizadas denominadas $\hat{\mathbf{x}}_{sm}$ e $\mathbf{P}_{sm}$.

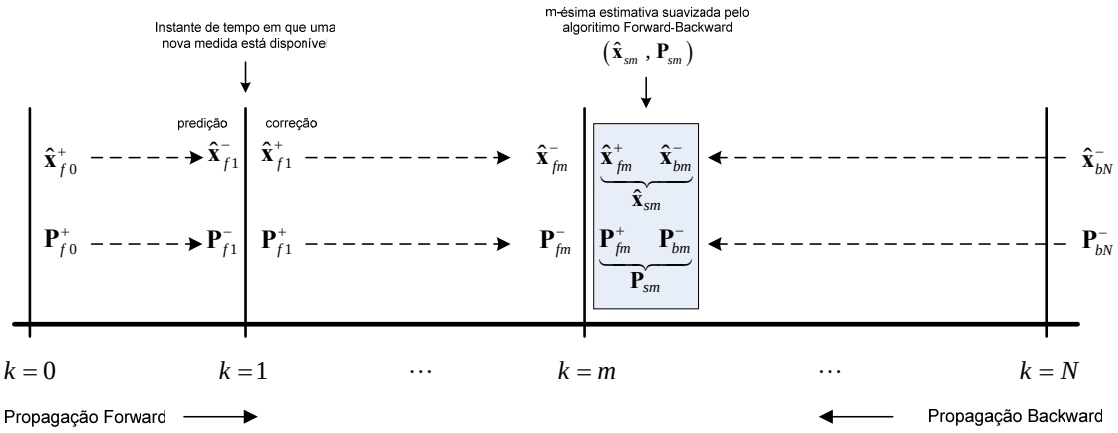



Figura 5.4 – Mecanismo de propagação Forward-Backward

### 5.2.7.1. DESENVOLVIMENTO DO FILTRO SUAVIZADOR *FORWARD-BACKWARD*

Como foi mencionado, a idéia central por traz do Filtro *Forward-Backward* baseia-se numa combinação ponderada entre duas estimativas de estados, $\hat{\mathbf{x}}_f$ e $\hat{\mathbf{x}}_b$, a fim de se obter uma terceira estimativa ótima de estado, a qual pode ser escrita matematicamente, como:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{x}}_b . \tag{5.28}$$

Nesta equação, $\mathbf{K}_f$ e $\mathbf{K}_b$ são matrizes de coeficientes constantes a serem determinadas. Por serem obtidas a partir de um Filtro de Kalman, admite-se que as estimativas $\hat{\mathbf{x}}_f$ e $\hat{\mathbf{x}}_b$ são estimativas não viciadas. Portanto, acredita-se que a estimativa resultante $\hat{\mathbf{x}}$ também não seja viciada, o que requer estatisticamente que $\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_b = \mathbf{I}$, produzindo

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f + \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_f\right) \hat{\mathbf{x}}_b . \tag{5.29}$$

A covariância da estimativa é obtida por

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= E\left[\left(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right)^T\right],\\ &= E\left[\left(\mathbf{x}-\mathbf{K}_f\hat{\mathbf{x}}_f-\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_f\right)\hat{\mathbf{x}}_b\right)\left(\cdots\right)^T\right].\end{aligned} \tag{5.30}$$

Somando e subtraindo $\mathbf{x}$ na equação (5.30), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= E\left[\left(\mathbf{K}_f\left(\mathbf{e}_f-\mathbf{e}_b\right)+\mathbf{e}_b\right)\left(\cdots\right)^T\right],\\ &= E\left[\mathbf{K}_f\left(\mathbf{e}_f\mathbf{e}_f^T+\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T\right)\mathbf{K}_f^T+\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T-\mathbf{K}_f\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T-\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T\mathbf{K}_f^T\right],\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde $\mathbf{e}_f=\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_f$ e $\mathbf{e}_b=\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_b$. Admite-se também que essas variáveis são independentes pois foram obtidas a partir de conjuntos de medidas distintos, e portanto $E\left[\mathbf{e}_f\mathbf{e}_b^T\right]=0$. Dado que as estimativas $\hat{\mathbf{x}}_f$ e $\hat{\mathbf{x}}_b$ não são viciadas e que $\mathbf{e}_f$ e $\mathbf{e}_b$ são independentes, pode-se minimizar o traço da matriz $\mathbf{P}$ em relação a $\mathbf{K}_f$ obtendo-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial Tr\left(\mathbf{P}\right)}{\partial\mathbf{K}_f} &= 2E\left[\mathbf{K}_f\left(\mathbf{e}_f\mathbf{e}_f^T+\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T\right)-\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T\right],\\ &= 2\left[\mathbf{K}_f\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)-\mathbf{P}_b\right],\end{aligned} \tag{5.32}$$

onde $\mathbf{P}_f = E\left[\mathbf{e}_f\mathbf{e}_f^T\right]$ é a covariância da estimativa à frente e $\mathbf{P}_b = E\left[\mathbf{e}_b\mathbf{e}_b^T\right]$ é a covariância da estimativa no sentido inverso (para trás). Igualando-se a equação (5.32) à zero, pode-se determinar um valor ótimo para $\mathbf{K}_f$ e por analogia para $\mathbf{K}_b$, os quais são dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_f &= \mathbf{P}_b\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1},\\ \mathbf{K}_b &= \mathbf{P}_f\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Se as ambas as matrizes de covariâncias forem definidas positivas, a inversa de $\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1}$ sempre existirá. Este resultado pode ser substituído na equação (5.31) para se obter a matriz de covariância do filtro, como a seguir:

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_b\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1}\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1}\mathbf{P}_b+\mathbf{P}_b-\mathbf{P}_b\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1}\mathbf{P}_b-\mathbf{P}_b\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)^{-1}\mathbf{P}_b. \quad (5.34)$$

Utilizando-se a identidade $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{I}\right)^{-1}$, a equação (5.34) pode ser reescrita como

$$\mathbf{P}=\left(\mathbf{P}_f\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{P}_f+\mathbf{P}_b\right)\left(\mathbf{P}_b^{-1}\mathbf{P}_f+\mathbf{I}\right)^{-1}+\mathbf{P}_b-\left(\mathbf{P}_f\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{P}_b-\left(\mathbf{P}_f\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{P}_b. \quad (5.35)$$

Multiplicando o terceiro termo e utilizando novamente a identidade nos dois últimos termos, chega-se a

$$\mathbf{P}=\left[\left(\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{P}_f^{-1}\right)^{-1}+\left(\mathbf{P}_b^{-1}\mathbf{P}_f\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}\right]\left(\mathbf{P}_b^{-1}\mathbf{P}_f+\mathbf{I}\right)^{-1}+\mathbf{P}_b-2\left(\mathbf{P}_b^{-1}\mathbf{P}_f\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}. \quad (5.36)$$

Recorrendo-se à identidade $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}+\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$, conhecida como o “lema da inversão de matrizes”, obtém-se

$$\left(\mathbf{P}_b^{-1}\mathbf{P}_f\mathbf{P}_b^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{P}_b-\left(\mathbf{P}_f^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}. \quad (5.37)$$

Substituindo esta identidade na equação (5.36), tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&=\mathbf{P}_b\left(\mathbf{P}_b^{-1}\mathbf{P}_f+\mathbf{I}\right)^{-1}+\mathbf{P}_b-2\mathbf{P}_b+2\left(\mathbf{P}_f^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1},\\&=\left(\boldsymbol{P}_b^{-1}\boldsymbol{P}_f\boldsymbol{P}_b^{-1}+\boldsymbol{P}_b^{-1}\right)^{-1}-\mathbf{P}_b+2\left(\mathbf{P}_f^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1},\\&=\mathbf{P}_b-\left(\mathbf{P}_f^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}-\mathbf{P}_b+2\left(\mathbf{P}_f^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1},\\&=\left(\mathbf{P}_f^{-1}+\mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}.\end{aligned} \quad (5.38)$$

A equação (5.38) é a base para o problema do Filtro Suavizador *Forward-Backward*, cujo modelo do sistema e algoritmo geral de implementação são dados, por exemplo, como

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}_k=\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{w}_{k-1},\\&\mathbf{y}_k=\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{v}_k,\\&p\left(\mathbf{w}_k\right)\sim N\left(0,\mathbf{Q}_k\right),\\&p\left(\mathbf{v}_k\right)\sim N\left(0,\mathbf{R}_k\right).\end{aligned} \quad (5.39)$$

Supondo que se deseja suavizar a estimativa do estado no instante de tempo $k = m$, primeiro executamos o Filtro de Kalman convencional à frente (*forward*) utilizando as medições até o instante de tempo $m$ (incluindo o instante $m$).

1. Inicializa-se o filtro à frente como a seguir

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{f0}^{+} &= E\left[\mathbf{x}_0\right] \\ \mathbf{P}_{f0}^{+} &= E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{f0}^{+}\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{f0}^{+}\right)^T\right] \end{aligned} \tag{5.40}$$

2. Para $k = 1,...,m$, processa-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{fk}^{-} &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{f/k-1}^{+}\mathbf{A}_{k-1}^{T} + \mathbf{Q}_{k-1} \\ \mathbf{K}_{fk} &= \mathbf{P}_{fk}^{-}\mathbf{H}_k^T\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{fk}^{-}\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{fk}^{-} &= \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{f/k-1}^{+} \\ \hat{\mathbf{x}}_{fk}^{+} &= \hat{\mathbf{x}}_{fk}^{-} + \mathbf{K}_{fk}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{fk}^{-}\right) \\ \mathbf{P}_{fk}^{+} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{fk}\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{fk}^{-} \end{aligned} \tag{5.41}$$

Até aqui temos uma estimativa à frente $\hat{\mathbf{x}}_{fk}\big|_{k=m}$ e sua covariância. Esta estimativa é obtida usando as medições até (incluindo) o instante de tempo $k = m$.

O Filtro *Backward* necessita retroceder no tempo, partindo do instante de tempo final $k = N$. Dado que as estimativas à frente e para trás devem ser independentes, nenhuma informação que seja usada pelo Filtro *Forward* deve ser utilizada no Filtro *Backward*. Portanto, ajusta-se a covariância *backward* como infinita, ou seja: $\mathbf{P}_{bN}^{-} = \infty$.

O sobrescrito "$-$" em $\mathbf{P}_{bN}^{-}$ é usado para indicar a covariância *backward* no instante de tempo $k = N$ antes da medição $N$ ser processada (lembre-se que o filtro propaga-se retrocedendo no tempo). Portanto, $\mathbf{P}_{bN}^{-}$ será atualizada para se obter $\mathbf{P}_{bN}^{+}$ após a n-ésima medição ser processada. Retrocedendo no tempo, $\mathbf{P}_{bN}^{+}$ será extrapolada para se obter $\mathbf{P}_{b,N-1}^{-}$ e assim por diante. A questão agora é como inicializar a variável $\hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-}$, no instante de tempo $k = N$. Este problema pode ser contornado introduzindo-se uma nova variável,

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{P}_{bk}^{-1}\mathbf{x}_{bk} \tag{5.42}$$

De uma forma geral, um sobrescrito "$-$" ou "$+$" pode ser adicionado as variáveis da equação (5.42) para indicar os valores antes ou depois da medição no instante de tempo $k$. No instante de tempo inicial $k = N$ da propagação *backward* $\mathbf{s}_k = \mathbf{s}_N^- = 0$, pois, $\mathbf{P}_{bN}^- = \infty$.

A condição de inicializar $\mathbf{P}_{bN}^- = \infty$ implica que não se pode utilizar um Filtro de Kalman convencional na estimativa *backward*. Ao invés disso utiliza-se o Filtro de Informação anteriormente descrito, o qual pode ser obtido a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k-1} &= \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{x}_k + \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{w}_{k-1}, \\
&= \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{b,k-1}, \\
\mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \\
p\left(\mathbf{w}_{bk}\right) &\sim N\left(0, \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{A}_k^{-T}\right), \\
p\left(\mathbf{v}_k\right) &\sim N\left(0, \mathbf{R}_k\right).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Deve-se notar que a matriz inversa $\mathbf{A}_k^{-1}$ sempre existe pois origina-se de um sistema contínuo real $e^{\mathbf{F}(t)\Delta t}$, cuja solução sempre possui uma inversa (SIMON, 2006).

O algoritmo do Filtro de Informação (*backward)* pode ser escrito como a seguir:

i. Inicializa-se o filtro fazendo $\mathcal{I}_{bk}^- = 0$.

ii. Para $k = N, N-1, ..., m$, processa-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{bk}^+ &= \mathcal{I}_{bk}^- + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k \\
\mathbf{K}_{bk} &= \left(\mathcal{I}_{bk}^+\right)^{-1}\mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{bk}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{bk}^- + \mathbf{K}_{bk}\left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{bk}^-\right) \\
\mathcal{I}_{b,k-1}^- &= \left[\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\left(\mathcal{I}_{bk}^+\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-T} + \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-T}\right]^{-1} \\
&= \mathbf{A}_{k-1}^{-T}\left[\left(\mathcal{I}_{bk}^+\right)^{-1} + \mathbf{Q}_{k-1}\right]^{-1}\mathbf{A}_{k-1} \\
&= \mathbf{A}_{k-1}^{-T}\left[\mathbf{Q}_{k-1}^{-1} - \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\left(\mathcal{I}_{bk}^+ + \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\right]\mathbf{A}_{k-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{b,k-1}^- &= \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{bk}^+
\end{aligned} \tag{5.44}$$

A primeira forma de $\mathcal{I}_{b,k-1}^{-}$ na equação (5.44) requer a inversão da matriz de informação. Dado que a matriz de informação inicial é nula, no caso de existir um número de medidas menor do que o número de estados na primeira rodada de $\mathcal{I}_{bk}^{+} = \mathcal{I}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$, a parcela $\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$ será sempre singular, tornando $\mathcal{I}_{bk}^{+}$ singular no instante $k = N$ e, portanto a primeira forma de $\mathcal{I}_{b,k-1}^{-}$ não é computável. Este problema pode ser facilmente contornado inicializando-se $\mathcal{I}_{bk}^{-}$ com valores muito pequenos, porém diferentes de zero. A terceira forma de expressar $\mathcal{I}_{b,k-1}^{-}$ não requer a inversão de matriz de informação, porém requer a inversão de $\mathbf{Q}_{k-1}$, o que pode não ser computável se $\mathbf{Q}_{k-1}$ for nula. Como no caso anterior, pode-se efetuar pequenas modificações em $\mathbf{Q}_{k-1}$ a fim de tornar sua inversa não singular.

Por motivos relacionados à inicialização do Filtro de Informação, atualiza-se a variável $\mathbf{s}_k = \mathcal{I}_{bk}^{+} \hat{\mathbf{x}}_{bk}$ ao invés de se atualizar o estado $\hat{\mathbf{x}}_{bk}$. Tem-se então que

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k^{+} &= \mathcal{I}_{bk}^{+} \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{+}, \\ &= \mathcal{I}_{bk}^{+} \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} + \mathcal{I}_{bk}^{+} \mathbf{K}_{bk} \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} \right), \end{aligned} \tag{5.45}$$

onde substituímos $\hat{\mathbf{x}}_{bk}^{+}$ pela equação de correção do Filtro de Kalman. Utilizando as identidades $\mathcal{I}_{bk}^{+} = \mathcal{I}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$ e $\mathbf{K}_{bk} = \left( \mathcal{I}_{bk}^{+} \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} = \mathbf{P}_{bk}^{+} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1}$, a matriz $\mathbf{s}_k^{+}$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k^{+} &= \left( \mathcal{I}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \right) \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} + \left( \mathcal{I}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \right) \left( \mathcal{I}_{bk}^{+} \right)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} \right), \\ &= \mathcal{I}_{bk}^{-} \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-} \right). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Após algumas manipulações algébricas, na equação anterior, chega-se à

$$\mathbf{s}_k^{+} = \mathbf{s}_k^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k . \tag{5.47}$$

Esta equação pode ser combinada com a equação (5.44), produzindo um novo algoritmo para o Filtro de Informação *Backward*, expresso como a seguir:

## ALGORITMO DO FILTRO DE INFORMAÇÃO BACKWARD

i. Inicializa-se o filtro fazendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{bN}^{-} &= 0 \\ \mathbf{s}_{N}^{-} &= 0 \end{aligned} \tag{5.48}$$

ii. Para $k = N, N-1, ..., m+1$, processam-se as equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{bk}^{+} &= \mathcal{I}_{bk}^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{s}_k^{+} &= \mathbf{s}_k^{-} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k \\ \mathcal{I}_{b,k-1}^{-} &= \left[ \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \left( \mathcal{I}_{bk}^{+} \right)^{-1} \mathbf{A}_{k-1}^{-T} + \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^{-T} \right]^{-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}^{-T} \left[ \left( \mathcal{I}_{bk}^{+} \right)^{-1} + \mathbf{Q}_{k-1} \right]^{-1} \mathbf{A}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}^{-T} \left[ \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} - \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \left( \mathcal{I}_{bk}^{+} + \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \right] \mathbf{A}_{k-1} \\ \mathbf{s}_{k-1}^{-} &= \mathcal{I}_{b,k-1}^{-} \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \left( \mathcal{I}_{bk}^{+} \right)^{-1} \mathbf{s}_k^{+} \end{aligned} \tag{5.49}$$

iii. Processa-se a atualização de tempo final para obter a estimativa suavizada de $\mathbf{x}_m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{bm}^{+} &= \mathbf{Q}_m^{-1} - \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{A}_m^{-1} \left( \mathcal{I}_{b,m+1}^{+} + \mathbf{A}_m^{-T} \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{A}_m^{-1} \right)^{-1} \mathbf{A}_m^{-T} \mathbf{Q}_m^{-1} \\ \mathbf{P}_{bm}^{-} &= \left( \mathcal{I}_{bm}^{-} \right)^{-1} \\ \mathbf{s}_m^{-} &= \mathcal{I}_{bm}^{-} \mathbf{A}_m^{-1} \left( \mathcal{I}_{b,m+1}^{+} \right)^{-1} \mathbf{s}_{m+1}^{+} \\ \hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} &= \left( \mathcal{I}_{bm}^{-} \right)^{-1} \mathbf{s}_m^{-} \end{aligned} \tag{5.50}$$

iv. Até aqui se dispõe da estimativa backward $\hat{\mathbf{x}}_{bm}$ e sua covariância $\mathbf{P}_{bm}^{-} = \left( \mathcal{I}_{bm}^{-} \right)^{-1}$, obtidas a partir das medições $m+1, m+2, ..., N$. Estas estimativas são então combinadas com as estimativas *forward* para se obter as estimativas dos estados e covariâncias finais:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &= \mathbf{P}_{bm}^{-} \left( \mathbf{P}_{fm}^{+} + \mathbf{P}_{bm}^{-} \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_{fm}^{+} + \left( \mathbf{I} - \mathbf{K}_f \right) \hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} \\ \mathbf{P}_m &= \left[ \left( \mathbf{P}_{fm}^{+} \right)^{-1} + \left( \mathbf{P}_{bm}^{-} \right)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.51}$$

v. Inicia-se a iteração do filtro: volta-se ao passo ii.

A partir da substituição de $\mathbf{K}_f$, de manipulações algébricas e utilizando-se o lema de inversão de matrizes, pode-se demonstrar uma forma alternativa para expressar $\hat{\mathbf{x}}_m$, como a seguir (SIMON, 2006):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{P}_m \mathcal{I}_{fm}^{+} \hat{\mathbf{x}}_{fm}^{+} + \mathbf{P}_m \mathcal{I}_{bm}^{-} \hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} \\ &= \mathbf{P}_m \left( \mathcal{I}_{fm}^{+} \hat{\mathbf{x}}_{fm}^{+} + \mathcal{I}_{bm}^{-} \hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} \right)\end{aligned} \tag{5.52}$$

## 5.2.8. SINTONIA DO FILTRO KALMAN

Para sintonizar corretamente o Filtro de Kalman discreto é necessário conhecer as matrizes que descrevem as covariâncias do ruído do processo $\mathbf{Q}_k$ e do ruído da medição $\mathbf{R}_k$. Em geral, o ruído de processo $\mathbf{Q}_k$ é de difícil caracterização e demanda um grande esforço de modelagem, sendo que em muitos casos só se consegue obtê-lo (ajustá-lo) de forma experimental. Entretanto, na literatura atual se dispõe de algumas técnicas para se chegar a uma estimativa inicial, sendo que tais procedimentos também são passíveis de ajustes finos por tentativa e erro.

Para a estimação inicial de $\mathbf{Q}_k$, uma técnica numérica extraída de Brown, (1997) e Hartikainen (2008) pode ser empregada. Esta técnica procura estimar a matriz $\mathbf{Q}_k$ (discreta), a partir da matriz de transição de estados $\mathbf{F}(t)$, da matriz de entradas $\mathbf{L}(t)$ e da densidade espectral de potencia de ruído do sistema contínuo $\mathbf{Q}_c(t)$. O algoritmo apresentado a seguir descreve as etapas para a obtenção de um valor inicial (passível de ajustes finos por simulação computacional) para $\mathbf{Q}_k$.

---

**ALGORITMO PARA DETERMINAÇÃO DO VALOR INICIAL DE $\mathbf{Q}_k$**

---

Dado o sistema dinâmico contínuo, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t)$:

i. Primeiramente forma-se uma matriz bloco, tal que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{D}_k \end{pmatrix} = \exp\left\{ \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{F}^T \end{array} \right) \Delta t_k \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

onde $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{L}=\mathbf{L}(t)$ são as matrizes de transição de estados e de entradas do sistema contínuo respectivamente. A matriz $\mathbf{Q}_c=\mathbf{Q}_c(t)$ representa a densidade espectral da potência dos ruídos associados ao processo contínuo e $\Delta t_k$ representa o intervalo de tempo discreto.

ii. Determinam-se os termos $\mathbf{C}_k$ e $\mathbf{D}_k$, linearizando a equação (5.53) por série de Taylor e desprezando os termos a partir de segunda ordem,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{C}_k\\ \hline \mathbf{D}_k\end{pmatrix}=\exp\left\{\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{F} & \mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T\\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{F}^T\end{array}\right)}_{\mathbf{A}}\Delta t_k\right\}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \hline \mathbf{I}\end{pmatrix}, \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}\exp\left(\mathbf{A}\Delta t_k\right)&=\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta t_k+\frac{\left(\mathbf{A}\Delta t_k\right)^2}{2!}+\cdots\\ &\approx\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta t_k.\end{aligned} \tag{5.55}$$

Substituindo $\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta t_k$ na equação (5.54), produz

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{C}_k\\ \hline \mathbf{D}_k\end{pmatrix}&=\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{I}+\mathbf{F}\Delta t_k & \left(\mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T\right)\Delta t_k\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}-\mathbf{F}^T\Delta t_k\end{array}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \hline \mathbf{I}\end{pmatrix},\\ &=\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{0} & \left(\mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T\right)\Delta t_k\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}-\mathbf{F}^T\Delta t_k\end{array}\right),\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_k&=\left(\mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T\right)\Delta t_k,\\ \mathbf{D}_k&=\mathbf{I}-\mathbf{F}^T\Delta t_k.\end{aligned} \tag{5.57}$$

iii. Calcula-se em seguida a matriz $\mathbf{Q}_k$, por

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_k&=\mathbf{C}_k\mathbf{D}_k^{-1},\\ &=\left(\mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T\right)\Delta t_k\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}^T\Delta t_k\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.58}$$

---

A matriz da covariância do ruído de medição $\mathbf{R}_k$ é determinada numericamente através dos erros de medições.

A sintonia do Filtro de Kalman através da técnica mostrada nesta seção deve ser utilizada nos casos em que se tenha certeza de que a covariância do ruído de processo $\mathbf{Q}_k$ é constante, ou caso contrário, como ponto de partida para determinação do valor inicial de $\mathbf{Q}_k$.

Nos casos em que a covariância do ruído do processo $\mathbf{Q}_k$ não seja constante entre os intervalos de tempo $t = kT\big|_{k=1,2,3,...}$, uma técnica que adapte $\mathbf{Q}_k$ ao processo deve se empregada. A seção a seguir descreve uma solução particular para este problema.

## 5.2.9. RUÍDO ADAPTATIVO

A idéia central da técnica de Ruído Adaptativo baseia-se na utilização das inovações para julgar o desempenho do Filtro de Kalman e, de acordo com tal julgamento, ajustar (dosar) em tempo de execução a matriz de covariância dos ruídos dos estados $\mathbf{Q}_k$, a qual se supõe estar presente no modelo dinâmico do sistema. O ajuste de $\mathbf{Q}_k$ tem por finalidade sintonizar e evitar a divergência do FK, a qual pode ser causada por erro de modelagem e/ou por erros numéricos (arredondamento computacional de números em ponto flutuante).

Quando o FK começa a divergir, as inovações $\mathbf{i}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ passam a diferir estatisticamente dos valores esperados, em termos de valor médio ou variância da série. A técnica de Ruído Adaptativo procura calcular uma matriz $\mathbf{Q}_k$ que torne a estatística das inovações produzidas pelo FK consistente com a estatística esperada.

### 5.2.9.1. A IDÉIA DA ADAPTAÇÃO DA MATRIZ $\mathbf{Q}_k$

Quando a matriz de covariância $\mathbf{P}_k^+$ se torna muito pequena e se também a matriz $\mathbf{Q}_k$ for pequena, então, dependendo da matriz de transição $\mathbf{A}_{k-1}$, a matriz $\mathbf{P}_k^-$ também poderá se tornar muito pequena. No caso desta hipótese ocorrer, a matriz $\mathbf{K}_k$, que representa o ganho do FK, também será muito pequena. O ganho será

ainda menor se a matriz que representa o ruído das medições $\mathbf{R}_k$ for grande, pois, $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$. Em decorrência disso, o peso atribuído às inovações $\mathbf{i}_k$ será muito pequeno, pois $\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{i}_k$. Como conseqüência, o FK desprezará as informações das medidas e a estimação do estado será feita por meio do modelo dinâmico do para o sistema, ou seja, $\hat{\mathbf{x}}_k^+ \cong \hat{\mathbf{x}}_k^-$.

Como o modelo matemático empregado para representar o sistema geralmente apresenta imperfeições e simplificações, fatalmente ocorrerá a divergência do FK, principalmente após um longo tempo de estimação.

A partir do exposto, pode-se se perceber que se as matrizes $\mathbf{Q}_k$ e $\mathbf{R}_k$ utilizadas no FK forem razoavelmente grandes, não deverá ocorrer problemas de divergência no filtro, seja por erros de modelagem ou por erros numéricos. Entretanto, para cada instante de tempo $t = kT$, os erros de estimação calculados pelo FK também serão maiores, e ainda que não ocorra a divergência, o desempenho do estimador poderá ser não satisfatório, uma vez que a incerteza do conhecimento do estado do sistema é grande.

Desta forma, torna-se altamente desejável dispor de um mecanismo tal que utilize a optimalidade do FK extraindo ao máximo as informações do modelo e das medidas quando o modelo estiver correto. Entretanto, se o modelo estiver incorreto, então os parâmetros do FK deverão ser ajustados de forma que o peso dado ao modelo seja menor.

Em outras palavras, quando se verifica que o modelo adotado pelo FK não está adequado, aumenta-se (ajusta-se) a matriz $\mathbf{Q}_k$, o que conseqüentemente causa o aumento de $\mathbf{P}_k$ e $\mathbf{K}_k$, resultando um peso maior dado às novas medidas. Portanto, o mecanismo do Ruído Adaptativo busca sempre ajustar $\mathbf{Q}_k$ ao modelo utilizado.

A decisão de se aumentar $\mathbf{Q}_k$ se baseia na suposição de que a diferença entre a estatística esperada e a estatística obtida para as inovações $\mathbf{i}_k$ se deve ao erro de modelagem. Entretanto, como as inovações $\mathbf{i}_k$ são estritamente dependentes dos valores das medidas, o ajuste de $\mathbf{Q}_k$ será discrepante se ocorrer alguma falha nos sensores. Assim sendo, o sucesso da técnica do Ruído Adaptativo se baseia fortemente na hipótese de que não ocorra nenhuma falha nos sensores.

No caso do FK começar a divergir por problemas numéricos, o mecanismo de Ruído Adaptativo também irá contornar a divergência, pois como foi dito

anteriormente o aumento de $\mathbf{Q}_k$ força um aumento de $\mathbf{P}_k^-$, tornando a estimação dos estados do sistema observado menos mal condicionada e, portanto, a solução computada pelo FK será menos influenciada por erros de truncamento.

### 5.2.9.2. A CONSISTÊNCIA ESTATÍSTICA DAS INOVAÇÕES

Se forem calculadas as estatísticas das inovações $\mathbf{i}_k$ sobre um numero de realizações suficientemente grandes para caracterizá-las e considerando-se que o FK não está divergindo, definem-se então:

$$\begin{cases} \text{média de } \mathbf{i}_k = E\left[\,\mathbf{i}_k\,\right] \\ \text{covariância de } \mathbf{i} = E\left[\,\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k^T\,\right] \end{cases} \tag{5.59}$$

O modelo do sistema empregado pelo FK é

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Pela equação das saídas $\mathbf{z}_k$, tem-se que

$$E\left[\,\mathbf{i}_k\,\right] = E\left[\,\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-\,\right] = \mathbf{H}_k E\left[\,\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\,\right] + E\left[\,\mathbf{v}_k\,\right] = 0\,, \tag{5.60}$$

$$E\left[\,\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k^T\,\right] = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k\,. \tag{5.61}$$

Admitindo-se que a matriz $\mathbf{Q}_{k\text{-}1}$ seja diagonal, podemos escrever que

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T\,.$$

A matriz de covariância da variável aleatória $\mathbf{i}_k$ (inovação), aqui denotada por $\mathbf{C}_k$, pode ser escrita como

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{H}_k\left(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T\right)\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \tag{5.62}$$

Analisando a equação acima, percebe-se que à medida que a matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}$ é aumentada, aumenta-se a faixa de valores aceitáveis para as realizações das inovações $\mathbf{i}_k$, pois o desvio padrão de $\mathbf{i}_k$ é aumentado.

Partindo para o caso extremo, quando $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}} \to \infty$, então qualquer valor de realização de $\mathbf{i}_k$ seria aceitável, sendo que todas elas teriam mesma probabilidade de ocorrência. A técnica de Ruído Adaptativo expressa matematicamente em Jazwinski (1970), procura determinar uma matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}$ (positiva semi-definida), que torne o mais provável possível à realização da inovação $\mathbf{i}_k$ que de fato tenha ocorrido. Adotando este procedimento, está se aplicando o principio da máxima verossimilhança para estimar $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}$. Como se supõe que a matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}$ seja diagonal, esta pode então ser representada por um vetor $\mathbf{q}_k$, tal que

$$\mathbf{q}_k \triangleq \text{diagonal}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}\right) \tag{5.63}$$

Esta consideração leva a encontrar um vetor $\mathbf{q}_k \geq 0$ que maximize uma função $\mathbf{J}$ que defina a probabilidade de ocorrência da variável aleatória (supostamente gaussiana) $\mathbf{i}_k$, num intervalo $(\Delta > 0)$ desejado. Maiores detalhes sobre o procedimento de determinação da função $\mathbf{J}$ pode ser encontrado em Nascimento Júnior (1988) - (páginas 96 – 100).

Como demonstrado em Jazwinski (1970) *apud* Nascimento Júnior (1988), a maximização de $\mathbf{J}$ deve ser tal que

$$\mathbf{C}_k = E\left[\mathbf{i}_k \mathbf{i}_k^T\right] = E\left[\left(\mathbf{i}_k\right)^2\right] = E\left[\left(\mathbf{i}_k^r\right)^2\right], \tag{5.64}$$

$$\mathbf{C}_k^{(ii)}\Big|_{i=1,2,3,\ldots,m} = E\left[\left(\mathbf{i}_k^{(i)}\right)^2\right]_{i=1,2,3,\ldots,m} = E\left[\left(\mathbf{i}_k^{(i)r}\right)^2\right]_{i=1,2,3,\ldots,m}, \tag{5.65}$$

onde, $\mathbf{C}_k^{(ii)}$, denota o elemento $(i,i)$ da matriz $\mathbf{C}_k$ e $\mathbf{i}_k^{(i)r}$ a realização da i-ésima componente do vetor $\mathbf{i}_k$.

Ou seja, quando o vetor $\mathbf{q}_k$ é sujeito à restrição $\mathbf{q}_k \geq 0$, o desvio padrão da variável aleatória $\mathbf{i}_k$, deve ser ajustado para um valor igual ao módulo de sua realização. Por ser mais geral, a equação (5.65), se aplica tanto para o caso escalar

quanto para o caso vetorial, sendo definida como a equação principal da técnica de ruído adaptativo (JAZWINSKI, 1970).

### 5.2.9.3. DEFINIÇÃO DE INOVAÇÃO VERDADEIRA E PSEUDO-MEDIDA

Rios Neto e Kuga (1982) *apud* Nascimento Júnior (1988), definem uma variável inovação verdadeira como sendo a inovação que seria obtida caso não existisse ruído associado ao processo, ou seja

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_k^v &= \mathbf{i}_k - \boldsymbol{\upsilon}_k, \\ &= \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-\right) - \boldsymbol{\upsilon}_k, \\ &= \left(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\upsilon}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-\right) - \boldsymbol{\upsilon}_k, \\ &= \mathbf{H}_k \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right),\end{aligned} \tag{5.66}$$

onde

$$\begin{aligned}E\left[\mathbf{i}_k^v\right] &= 0, \\ E\left[\left(\mathbf{i}_k^v\right)\left(\mathbf{i}_k^v\right)^T\right] &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T, \\ &= \mathbf{H}_k \left(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T\right)\mathbf{H}_k^T.\end{aligned} \tag{5.67}$$

A partir da definição $E\left[\mathbf{i}_k \mathbf{i}_k^T\right] = \mathbf{H}_k \left(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T\right)\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k = \mathbf{C}_k$, (equação (5.62)), pode-se escrever que:

$$E\left[\left(\mathbf{i}_k^v\right)\left(\mathbf{i}_k^v\right)^T\right] = \mathbf{C}_k - \mathbf{R}_k = \mathbf{C}_k^v. \tag{5.68}$$

Deve se notar que a variável aleatória inovação verdadeira $\mathbf{i}_k^v$ não possui ruído de medidas $\mathbf{R}_k$ e, portanto, não é fisicamente disponível, no entanto é definida somente para auxiliar no desenvolvimento das equações.

Supondo que as inovações verdadeiras $\mathbf{i}_k^v$, também são variáveis aleatórias gaussianas, então analogamente a equação (5.65), determina-se um vetor $\mathbf{q}_k$, tal que:

$$\mathbf{C}_k^{v(ii)}\Big|_{i=1,2,3,\ldots,m} = E\left[\left(\mathbf{i}_k^{v(i)}\right)^2\right]_{i=1,2,3,\ldots,m} = E\left[\left(\mathbf{i}_k^{v(i)r}\right)^2\right]_{i=1,2,3,\ldots,m} \tag{5.69}$$

Onde, $\mathbf{C}_k^{v(ii)}$, denota o elemento $(i-i)$ da matriz, $\mathbf{C}_k^v$, e $\mathbf{i}_k^{v(i)r}$, denota a realização da i-ésima componente de $\mathbf{i}_k^v$.

O modelo dinâmico adotado na utilização do Filtro de Kalman é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned} \tag{5.70}$$

Supondo o seguinte modelo para o sistema real:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1}^v\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}\\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned} \tag{5.71}$$

Na equação (5.70), existe a presença de um ruído $\mathbf{w}_k$, inserido intencionalmente com a finalidade de compensar possíveis falhas de modelagem. Estas falhas podem ser interpretadas como termos ausentes ou ligeiramente incorretos da matriz de transição de estados modelada $\mathbf{A}_k$ em relação à matriz de transição de estados verdadeira $\mathbf{A}_k^v$ (equação (5.70)).

Supondo que a matriz $\mathbf{A}_k$ esteja suficientemente próxima da matriz $\mathbf{A}_k^v$, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_k^v &= \mathbf{i}_k - \boldsymbol{\upsilon}_k,\\ &= \mathbf{H}_k\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right),\\ &= \mathbf{H}_k\left(\left(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\right) - \left(\mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}\right)\right),\\ &\approx \mathbf{H}_k\left(\mathbf{A}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right) + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\right).\end{aligned} \tag{5.72}$$

Consequentemente,

$$\left[\left(\mathbf{i}_k^v\right)\left(\mathbf{i}_k^v\right)^T\right] = \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right)\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right)^T \mathbf{A}_{k-1}^T + \\ \mathbf{A}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right)\mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{G}_{k-1}^T + \\ \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right)^T \mathbf{A}_{k-1}^T + \\ \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T\mathbf{G}_{k-1}^T \end{bmatrix} \mathbf{H}_k^T . \tag{5.73}$$

Como se supõe que os erros de estimação $\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right)$ e os ruídos $\mathbf{w}_{k-1}$ são variáveis aleatórias independentes tem-se que:

$$E\left[\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+\right)\mathbf{w}_{k-1}\right] = 0 \tag{5.74}$$

e por conseguinte

$$E\left[\left(\mathbf{i}_k^v\right)\left(\mathbf{i}_k^v\right)^T\right] = \mathbf{H}_k\left[\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{G}_{k-1}^T\right]\mathbf{H}_k^T \tag{5.75}$$

Para cada componente do vetor $\mathbf{i}_k^v$, admitindo $\mathbf{G}$ e $\mathbf{Q}$ como matrizes diagonais[12], tem-se

$$E\left[\left(\mathbf{i}_k^v\right)\left(\mathbf{i}_k^v\right)^T\right] = \mathbf{H}_k^i\left[\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T\right]\left(\mathbf{H}_k^i\right)^T . \tag{5.76}$$

A partir desta equação, Rios Neto e Kuga (1982) *apud* Nascimento Júnior (1988) – (páginas 104 – 105) desenvolvem uma série de equações matemáticas cujo objetivo é determinar uma matriz denominada “matriz de pseudo-medidas”, $\mathbf{H}_k^p$ .

De uma forma bastante simplificada, a matriz de pseudo-medidas é determinada reescrevendo-se o segundo termo da equação (5.76), onde se considerou $\mathbf{Q}_\mathbf{d}$ como sendo uma matriz diagonal. Dado que a diagonal da matriz $\mathbf{Q}_\mathbf{d}$ é o vetor $\mathbf{q}_k$ , a matriz $\mathbf{H}_k^p$ é determinada, fazendo-se

---

[12] A suposição de que a matriz $\mathbf{G}$ seja diagonal não é condição necessária, pois, dado que a matriz $\mathbf{Q}$ é uma matriz diagonal formada pelo vetor $\mathbf{q}$ , o produto $\mathbf{G}\mathbf{Q}_\mathbf{d}\mathbf{G}^T$ irá resultar numa matriz diagonal independentemente de $\mathbf{G}$ ser diagonal.

$$\mathbf{H}_k^i \left[ \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}} \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T \right] \left( \mathbf{H}_k^i \right)^T = \mathbf{H}_k^{p(i)} \mathbf{q}_k \,, \tag{5.77}$$

onde $\mathbf{H}_k^{(p)i}$ denota a i-ésima linha da matriz $\mathbf{H}_k^p$, cujas dimensões são $m \times q$, sendo $m =$ dimensão do vetor de medidas e $q =$ dimensão do vetor de ruídos.

A matriz $\mathbf{H}_k^p$ é denominada como "*matriz do modelo de pseudo-medidas*", podendo ser calculada como a seguir:

$$\mathbf{H}_k^p = \begin{pmatrix} \left( \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1} \right)^2 & \cdots & \left( \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q} \right)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,1} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1} \right)^2 & \cdots & \left( \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q} \right)^2 \end{pmatrix}, \tag{5.78}$$

onde $\mathbf{H}_k^{i,j}$ e $\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,i}$ denotam os elementos da posição $(i, j)$ das respectivas matrizes.

Nos casos em que a matriz que distribui os ruídos for considerada uma matriz identidade, $\mathbf{G}_{\mathbf{d}} = \mathbf{I}$ (o que na prática é bastante comum), a matriz $\mathbf{H}_k^p$ fica sendo (TRIGO, 2005)

$$\mathbf{H}_k^p = \begin{pmatrix} \left( \mathbf{H}_k^{1,j} \right)^2 & \cdots & \left( \mathbf{H}_k^{1,j} \right)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \mathbf{H}_k^{m,1} \right)^2 & \cdots & \left( \mathbf{H}_k^{m,j} \right)^2 \end{pmatrix}. \tag{5.79}$$

Rios Neto e Kuga (1982) *apud* Nascimento Júnior (1988) – (páginas 104 – 106), também definem um vetor de pseudo-medidas $\mathbf{z}_k^p$ de dimensão $m$, corrompidas por um ruído $\eta$, como sendo

$$\mathbf{z}_k^p = \mathbf{H}_k^p \mathbf{q}_k + \eta_k \,. \tag{5.80}$$

As realizações das pseudo-medidas $\mathbf{z}_k^p$ são calculadas por

$$\mathbf{z}_k^{pi} = \left( \mathbf{i}_k^i \right)^2 + \mathbf{R}_k^{ii} - \mathbf{H}_k^i \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T \left( \mathbf{H}_k^i \right)^T . \tag{5.81}$$

A matriz $\mathbf{H}_k^p$ é determinada utilizando-se as equações (5.78) ou (5.79). O ruído $\eta$ possui média nula e covariância

$$\operatorname{cov}(\eta) = 4\left(\mathbf{i}_k^{r(i)}\right)^2 \mathbf{R}_k^{(ii)} + 2\left(\mathbf{R}_k^{(ii)}\right)^2 . \tag{5.82}$$

## 5.2.9.4. O PSEUDO-FILTRO

Rios Neto e Kuga (1982) tiveram então a idéia de utilizar as pseudo-medidas $\mathbf{z}_k^p$ para estimar o vetor $\mathbf{q}_k$, e conseqüentemente a matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}$, de modo a evitar a divergência do FK. Dado que vetor de pseudo-medidas $\mathbf{z}_k^p$ contém informações acerca de $\mathbf{q}_k$, utiliza-se um segundo Filtro de Kalman para estimar os estados de $\mathbf{z}_k^p$, onde tais estados são os elementos do vetor $\mathbf{q}_k$. Denomina-se “Pseudo-Filtro”, o filtro utilizado para estimar os estados do vetor $\mathbf{q}_k$. O algoritmo do pseudo-filtro é descrito em detalhes no capítulo a seguir.

## 5.2.9.5. O FILTRO JARK

Segundo Nascimento Júnior (1988), “denomina-se de Filtro JARK (de Jazwinski, Rios Neto e Kuga)”, o FK que utiliza o *Pseudo-Filtro*, que é um outro FK, para a estimativa da matriz de covariância do ruído de estado $\mathbf{Q}_k$.

A implementação do Filtro JARK é baseada no processamento de dois FK em série, sendo um filtro principal para estimar o estado $\mathbf{x}_k$ e outro filtro secundário para estimar o vetor $\mathbf{q}_k$ que é a diagonal da suposta matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}$. A figura a seguir ilustra de forma resumida o algoritmo do Filtro JARK.

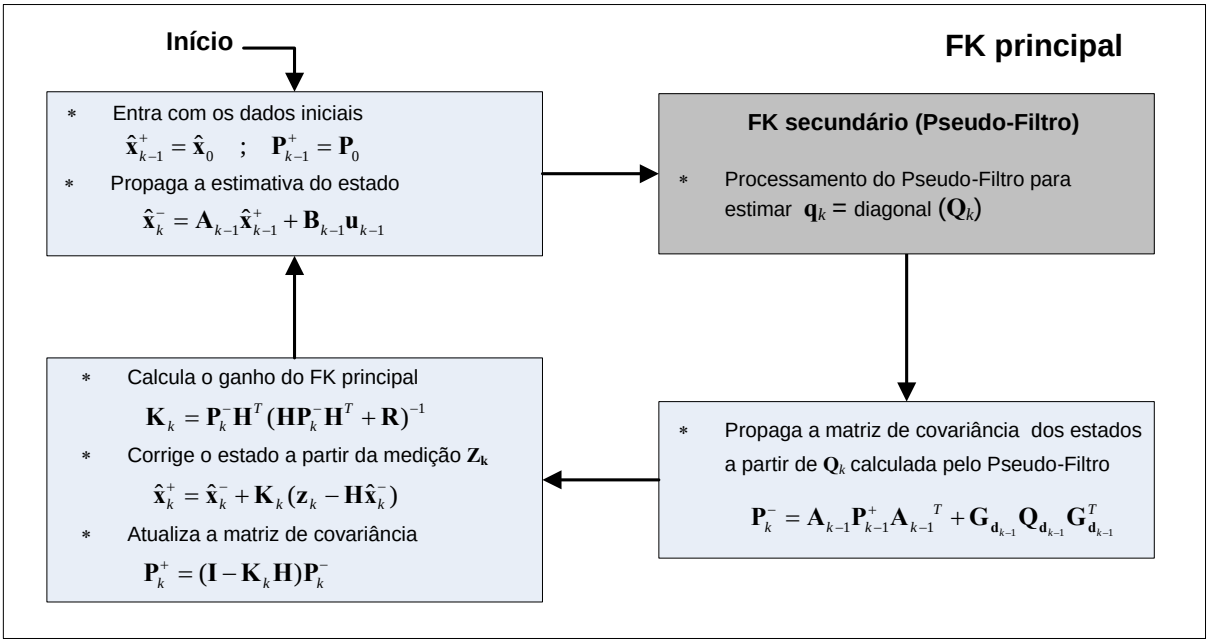



Figura 5.5 – Algoritmo resumido do Filtro JARK

O algoritmo completo do filtro JARK é esquematizado da seguinte forma (RIOS NETO e KUGA, 1982) *apud* (NASCIMENTO JÚNIOR,1988):

## a. PROCESSAMENTO DO FILTRO DE KALMAN PRINCIPAL:

i. Inicia-se o FK principal com os dados iniciais $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{+} = \hat{\mathbf{x}}_0$ e $\mathbf{P}_{k-1}^{+} = \mathbf{P}_0$

ii. Utilizando o modelo dinâmico disponível, realiza-se a propagação da estimativa do estado $\hat{\mathbf{x}}_k^{-} = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{+} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$, onde $k = 1, 2, 3, \ldots$.

## b. PROCESSAMENTO DO PSEUDO-FILTRO:

i. Inicia-se o *Pseudo-Filtro* com os dados iniciais $\mathbf{q}_{k-1}^{+}$ e $\mathbf{P}_{k-1}^{p+}$, onde $\mathbf{q}_{k-1}^{+}\Big|_i \geq 0$, pois a matriz diagonal $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}$ deve ser sempre positiva semi-definida.

ii. A partir do modelo dinâmico do estado para o Pseudo-Filtro realiza-se a propagação calculando-se $\mathbf{q}_k^-$ e $\mathbf{P}_k^{p-}$ por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}^p \mathbf{q}_{k-1}^+, \\ \mathbf{P}_k^{p-} &= \mathbf{A}_{k-1}^p \mathbf{P}_{k-1}^{p+} \mathbf{A}_{k-1}^{p\ T} + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}^p, \end{aligned} \tag{5.83}$$

onde, o sobrescrito *p* denota a condição de pseudo-variável.

Normalmente se adota a pseudo-matriz de transição de estados $\mathbf{A}_k^p$ igual a $\mathbf{I}$ (matriz identidade), então

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k^- &= \mathbf{q}_{k-1}^+ \\ \mathbf{P}_k^{p-} &= \mathbf{P}_{k-1}^{p+} + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}^p \end{aligned} \tag{5.84}$$

Rios Neto e Kuga (1982) *apud* (NASCIMENTO JÚNIOR, 1988) recomendam adotar uma matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^p$, tal que os elementos da diagonal principal sejam especificados por

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ii)} = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathbf{q}_k^{+i}\right)^2}{9}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} > 0 \\ 10^{-2S}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} = 0 \end{cases} \tag{5.85}$$

onde o expoente $S$ é o número de algarismos significativos utilizados pela mantissa do computador e o sobrescrito $ii\big|_{i=1,2,3,...}$ denota os elementos da diagonal principal.

Dado que o valor da matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}^p$ fixa o valor mínimo da matriz $\mathbf{P}_k^{p-}$, a mesma deve ser escolhida com cuidado, para evitar a divergência do Pseudo-Filtro. Nascimento Júnior (1988) propõe tentar ajustar inicialmente $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^p = \rho \mathbf{I}_{q\times q}$ para todos os instantes $k$.

iii. Calcula-se então a realização da inovação $\mathbf{i}_k^r$, por

$$\mathbf{i}_k^r = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \tag{5.86}$$

iv. Calcula-se linha por linha a realização da pseudo-medida $\mathbf{z}_k^p$, por meio de:

$$\mathbf{z}_k^{p(i)} = \left(\mathbf{i}_k^{r(i)}\right)^2 + \mathbf{R}_k^{(ii)} - \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{H}_k^{(i)T} \ \Big|_{i=1,2,3,...} \tag{5.87}$$

v. Calcula-se a covariância do ruído de pseudo medida $\eta_k$, denotada por $\mathbf{R}_k^p$ usando:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_k^{p(ii)} = 4\left(\mathbf{i}_k^{r(i)}\right)^2 \mathbf{R}_k^{(ii)} + 2\left(\mathbf{R}_k^{(ii)}\right)^2, & i = 1,2,3,... \\ \mathbf{R}_k^{p(ij)} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , & i \neq j \end{cases} \tag{5.88}$$

vi. Calcula-se a matriz do modelo de pseudo medidas $\mathbf{H}_k^p$, por:

$$\mathbf{H}_k^p = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1}\right)^2 & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q}\right)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,1} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1}\right)^2 & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{5.89}$$

vii. A partir do vetor de estimativa dos estados $\mathbf{q}_k^-$, da matriz de covariância $\mathbf{P}_k^{p-}$, do vetor da pseudo medida $\mathbf{z}_k^p$, da matriz de covariância do ruído de pseudo medidas $\eta_k \triangleq \mathbf{R}_k^p$ e da matriz $\mathbf{H}_k^p$, realiza-se através de um FK convencional a estimativa do estado do *Pseudo-Filtro* $\mathbf{q}_k^+$ e da matriz de covariância $\mathbf{P}_k^{p+}$.

$$\mathbf{z}_k^p = \mathbf{H}_k^p \mathbf{q}_k^- + \eta_k \tag{5.90}$$

viii. Executa-se a verificação de mau condicionamento de $\mathbf{q}_k$

$$\mathbf{q}_k^{+i} = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathbf{q}_k^{+i}\right)^2}{9}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} > 0 \\ 10^{-2S}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} = 0 \end{cases} \tag{5.91}$$

onde o expoente $S$ é o número de algarismos significativos utilizados pela mantissa do computador.

ix. Monta-se a matriz diagonal $\mathbf{Q}_{d_k}^{p(ij)}$:

$$\mathbf{Q}_{d_k}^{p(ij)} = \begin{cases} \mathbf{q}_k^{+i}, & se \quad i = j \\ 0\ , & se \quad i \neq j \end{cases} \tag{5.92}$$

**... RETORNA AO PROCESSAMENTO DO FK PRINCIPAL:**

iii. Após ter sido calculado o valor da matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p}$ realiza-se a propagação da matriz de covariância dos estados do FK principal, por:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}{}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T \tag{5.93}$$

iv. Calcula-se o ganho $\mathbf{K}_k$ e de posse da medida $\mathbf{z}_k$, atualiza-se o vetor de estados e a matriz de covariância do FK principal.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_k^- \end{aligned} \tag{5.94}$$

v. Inicia-se a iteração do Filtro JARK: volta ao passo ii do FK principal.

---

Deve ser observado que para verificar a sensibilidade do sistema, antes de iniciar a iteração do Filtro JARK devem ser sintonizadas (via testes de simulação) a matriz de covariância dos ruídos de medida $\mathbf{R}_0$ e os parâmetros $\mathbf{q}_0^+$, $\mathbf{P}_0^{p+}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_0}^{p}$ do Pseudo-Filtro.

Nascimento Junior (1988), propõe que, na falta de maiores conhecimentos acerca dos parâmetros do Pseudo-Filtro, adota-se $\mathbf{q}_0^+ = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_0}^{p} = cte = \mathbf{0}$, e a partir daí, procura-se ajustar a matriz $\mathbf{P}_0^{p+}$, tal que, $\mathbf{P}_0^{p+} = \alpha\mathbf{I}$. Desta forma, a fim de se evitar a divergência do FK principal, deve-se ajustar via testes de simulação, os valores iniciais de $\alpha$ e $\mathbf{R}_0$.

## 5.2.9.6. O FILTRO JARK APLICADO À SISTEMAS NÃO LINEARES

A partir de raciocínio análogo ao FEK, o filtro JARK também pode ser empregado na estimação de estados de sistemas dinâmicos não lineares. Rios Neto e Kuga (1982) *apud* (NASCIMENTO JUNIOR, 1988), apresentam um procedimento

para realização do Filtro JARK aplicado à sistemas não lineares, baseado na seguinte idéia: acrescenta-se o Pseudo-Filtro sobre o Filtro Estendido de Kalman, usando-se as matrizes $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{H}_k$ obtidas durante o processo de linearização. Para a obtenção das matrizes $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{H}_k$, admite-se um sistema dinâmico não linear com equações de estados e saídas dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k\right) + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= h\left(\mathbf{x}_k, k\right) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{5.95}$$

Sendo $\mathbf{R}_k$ a covariância do ruído de medida $\mathbf{v}_k$.

## a. PROCESSAMENTO DO FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

i. Inicia-se o FEK principal com os dados iniciais:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{+} &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{P}_{k-1}^{+} &= \mathbf{P}_0 \end{aligned} \tag{5.96}$$

ii. Propaga-se a estimativa do estado, por:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{-} = f\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k\right) \tag{5.97}$$

iii. Determinam-se as matrizes $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{H}_k$ compostas pelos Jacobianos de $f\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k\right)$ e $h\left(\mathbf{x}_k, k\right)$ respectivamente, calculados a partir dos estados estimados:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k-1} &= \left.\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \\ \mathbf{H}_k &= \left.\frac{\partial h\left(\mathbf{x}, k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \end{aligned} \tag{5.98}$$

## b. PROCESSAMENTO DO PSEUDO-FILTRO:

i. Entra-se com os dados iniciais do *Pseudo-Filtro*: $\mathbf{q}_{k-1}^{+}$ e $\mathbf{P}_{k-1}^{p-}$.

ii. Realiza-se a propagação do Pseudo-Filtro calculando-se $\mathbf{q}_k^-$ e $\mathbf{P}_k^{p-}$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}^p \mathbf{q}_{k-1}^+, \\ \mathbf{P}_k^{p-} &= \mathbf{A}_{k-1}^p \mathbf{P}_{k-1}^{p+} \mathbf{A}_{k-1}^{p^T} + \mathbf{Q}_{d_{k-1}}^p, \end{aligned} \tag{5.99}$$

Como se adota a pseudo matriz $\mathbf{A}_k^p$ igual a $\mathbf{I}$, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k^- &= \mathbf{q}_{k-1}^+ \\ \mathbf{P}_k^{p-} &= \mathbf{P}_{k-1}^{p+} + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}^p \end{aligned} \tag{5.100}$$

iii. Adota-se uma matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^p$, tal que os elementos da diagonal principal sejam especificados por:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ii)} = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathbf{q}_k^{+i}\right)^2}{9}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} > 0 \\ 10^{-2S}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} = 0 \end{cases} \tag{5.101}$$

onde o expoente $S$ é o número de algarismos significativos utilizados pela mantissa do computador.

iv. Calcula-se a realização da inovação $\mathbf{i}_k^r$:

$$\mathbf{i}_k^r = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \tag{5.102}$$

v. Calcula-se a pseudo medida $\mathbf{z}_k^{pr}$:

$$\mathbf{z}_k^{p(i)} = \left(\mathbf{i}_k^{r(i)}\right)^2 + \mathbf{R}_k^{(ii)} - \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{H}_k^{(i)T} \Big|_{i=1,2,3,\ldots} \tag{5.103}$$

vi. Calcula-se a covariância do ruído de pseudo medida $\eta_k$, denotada por $\mathbf{R}_k^p$ usando:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_k^{p(ii)} = 4\left(\mathbf{i}_k^{r(i)}\right)^2 \mathbf{R}_k^{(ii)} + 2\left(\mathbf{R}_k^{(ii)}\right)^2, & i = 1,2,3,\ldots \\ \mathbf{R}_k^{p(ij)} = 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \tag{5.104}$$

vii. Calcula-se a matriz do modelo de pseudo medidas $\mathbf{H}_k^p$, por:

$$\mathbf{H}_k^p = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1}\right)^2 & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q}\right)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1}\right)^2 & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{5.105}$$

viii. A partir do vetor de estimativa dos estados $\mathbf{q}_k^-$, da matriz de covariância $\mathbf{P}_k^{p-}$, do vetor da pseudo-medida $\mathbf{z}_k^p$, da matriz de covariância do ruído de pseudo medidas $\eta_k \triangleq \mathbf{R}_k^p$ e da matriz $\mathbf{H}_k^p$, realiza-se através de um FK convencional a estimativa do estado do *Pseudo-Filtro* $\mathbf{q}_k^+$ e da matriz de covariância $\mathbf{P}_k^{p+}$.

$$\mathbf{z}_k^p = \mathbf{H}_k^p \mathbf{q}_k^- + \eta_k \tag{5.106}$$

ix. Executa-se a verificação:

$$\mathbf{q}_k^{+i} = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathbf{q}_k^{+i}\right)^2}{9}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} > 0 \\ 10^{-2S}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} = 0 \end{cases} \tag{5.107}$$

onde o expoente $S$ é o número de algarismos significativos utilizados pela mantissa do computador.

x. Monta-se a matriz diagonal $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ij)}$:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ij)} = \begin{cases} \mathbf{q}_k^{+i}, & se \quad i = j \\ 0\ , & se \quad i \neq j \end{cases} \tag{5.108}$$

Onde $i$ e $j$ variam de *1* a *q* ($q = número\ de\ medidas$).

---

**... RETORNA AO PROCESSAMENTO DO FEK PRINCIPAL:**

---

iv. Após ter sido calculado o valor da matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^p$, realiza-se a propagação da matriz de covariância dos estados $\mathbf{P}_k^-$ do FK principal, por:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}} \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T \tag{5.109}$$

v. Atualiza as equações do filtro:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{z}_k - h\left( \hat{\mathbf{x}}_k, k \right) \right) \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{A}_{k-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right) \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}
\end{aligned} \tag{5.110}$$

vi. Inicia-se a iteração do Filtro JARK estendido: volta-se ao passo ii do FEK principal.

---

## 5.2.9.7. A MODELAGEM DA MATRIZ $\mathbf{G}$

Jazwinzki (1970) menciona que a modelagem da matriz $\mathbf{G}$, que é aquela que especifica a distribuição dos ruídos de estado do sistema dinâmico, pode ser uma tarefa difícil dependendo do modelo utilizado. Para caracterizá-la será necessário um bom conhecimento sobre o sistema e uma boa habilidade na utilização das técnicas de Filtragem de Kalman. Tal dificuldade não inviabiliza o uso do filtro JARK, pois ela também seria necessária na utilização do Filtro de Kalman convencional.

## 5.2.9.8. O FILTRO FKAS

Ao filtro estendido que realiza a suavização dos estados, $\hat{\mathbf{x}}_{sk}$, e covariâncias, $\mathbf{P}_{sk}$, conjuntamente com a técnica de ruído adaptativo, $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^p$, é dado o nome de *Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado* (FKAS). A figura 5.6 ilustra a fusão sensorial do FKAS aplicado ao sistema de navegação inercial strapdown proposto. O FKAS é composto por um Filtro Adaptativo, o qual realiza a propagação dos estados $\hat{\mathbf{x}}_{fk}$ e covariâncias $\mathbf{P}_{fk}$ à frente (Filtro *Forward*, adaptativo). Em seguida, os estados são propagados para trás (Filtro *Backward*), gerando novas estimativas de estados $\hat{\mathbf{x}}_{bk}$ e covariâncias $\mathbf{P}_{bk}$. Os estados e covariâncias produzidos por esses dois processos são combinados, gerando novas estimativas (ótimas e suavizadas) de estados, $\hat{\mathbf{x}}_{sk}$,

e covariâncias $\mathbf{P}_{sk}$. Os algoritmos que executam o filtro á frente, para trás e suavizado, são aqueles desenvolvidos na seção 5.2. Por se tratar de uma estrutura original, o FKAS é uma das contribuições desta tese.

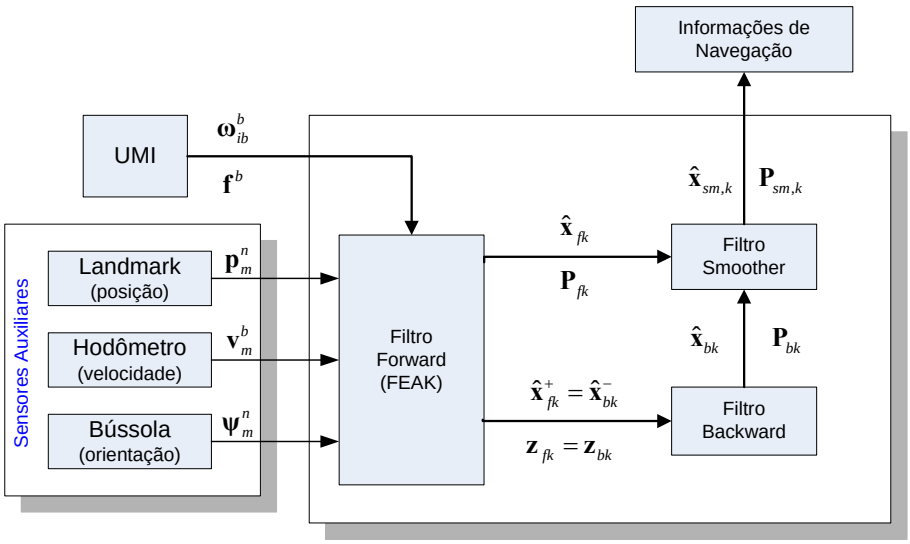



Figura 5.6 – Estrutura do Estimador FKAS

## ALGORITMO DE PROCESSAMENTO DO ESTIMADOR FKAS

### a. PROCESSAMENTO À FRENTE

i. Inicia-se o FEK principal com os dados iniciais:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{+} &= \hat{\mathbf{x}}_{0} \\ \mathbf{P}_{k-1}^{+} &= \mathbf{P}_{0} \end{aligned} \tag{5.111}$$

ii. Propaga-se a estimativa do estado, por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} = f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k\right) \tag{5.112}$$

iii. Determinam-se as matrizes jacobianas $\mathbf{A}_{k}$ e $\mathbf{H}_{k}$, calculadas a partir dos estados nominais:

$$\mathbf{A}_{k-1} = \left.\frac{\partial f\left(\mathbf{x},\mathbf{u},k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}}$$
$$\mathbf{H}_{k} = \left.\frac{\partial h\left(\mathbf{x},k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k}} \tag{5.113}$$

## b. PROCESSAMENTO DO PSEUDO-FILTRO

i. Entra-se com os dados iniciais do *Pseudo-Filtro*: $\mathbf{q}_{k-1}^{+}$ e $\mathbf{P}_{k-1}^{p+}$.

ii. Realiza-se a propagação do Pseudo-Filtro calculando-se $\mathbf{q}_{k}^{-}$ e $\mathbf{P}_{k}^{p-}$ por

$$\mathbf{q}_{k}^{-} = \mathbf{A}_{k-1}^{p}\mathbf{q}_{k-1}^{+}$$
$$\mathbf{P}_{k}^{p-} = \mathbf{A}_{k-1}^{p}\mathbf{P}_{k-1}^{p+}\mathbf{A}_{k-1}^{p^{T}} + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{p} \tag{5.114}$$

Como se adota a pseudo matriz $\mathbf{A}_{k}^{p}$ igual a identidade, então

$$\mathbf{q}_{k}^{-} = \mathbf{q}_{k-1}^{+}$$
$$\mathbf{P}_{k}^{p-} = \mathbf{P}_{k-1}^{p+} + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{p} \tag{5.115}$$

iii. Adota-se uma matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p}$, tal que os elementos da diagonal principal sejam especificados por

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ii)} = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathbf{q}_{k}^{+i}\right)^{2}}{9}, & se\ \mathbf{q}_{k}^{+i} > 0 \\ 10^{-2S}, & se\ \mathbf{q}_{k}^{+i} = 0 \end{cases} \tag{5.116}$$

onde o expoente $S$ é o número de algarismos significativos utilizados pela mantissa do computador.

iv. Calcula-se a realização da inovação $\mathbf{i}_{k}^{r}$:

$$\mathbf{i}_{k}^{r} = \mathbf{z}_{k} - \mathbf{H}_{k}\hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} \tag{5.117}$$

v. Calcula-se a pseudo-medida $\mathbf{z}_{k}^{p}$:

$$\mathbf{z}_{k}^{p(i)} = \left(\mathbf{i}_{k}^{r(i)}\right)^{2} + \mathbf{R}_{k}^{(ii)} - \mathbf{H}_{k}^{(i)}C_{k}\mathbf{P}_{k-1}^{+}\mathbf{A}_{k-1}^{T}\mathbf{H}_{k}^{(i)T} \quad \Big|_{i=1,2,3,\ldots} \tag{5.118}$$

vi. Calcula-se a covariância do ruído de pseudo-medida $\eta_k$, denotada por $\mathbf{R}_k^p$ usando:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_k^{p(ii)} = 4\left(\mathbf{i}_k^{r(i)}\right)^2 \mathbf{R}_k^{(ii)} + 2\left(\mathbf{R}_k^{(ii)}\right)^2, & i = 1,2,3,... \\ \mathbf{R}_k^{p(ij)} = 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \tag{5.119}$$

vii. Calcula-se a matriz do modelo de pseudo medidas $\mathbf{H}_k^p$, por:

$$\mathbf{H}_k^p = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1}\right)^2 & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{1,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q}\right)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,1}\right)^2 & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_k^{m,j} \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^{j,q}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{5.120}$$

viii. A partir do vetor de estimativa dos estados $\mathbf{q}_k^-$, da matriz de covariância $\mathbf{P}_k^{p-}$, do vetor da pseudo medida $\mathbf{z}_k^p$, da matriz de covariância do ruído de pseudo medidas $\eta_k \triangleq \mathbf{R}_k^p$ e da matriz $\mathbf{H}_k^p$, realiza-se através de um FK convencional, a estimativa do estado do *Pseudo-Filtro* $\mathbf{q}_k^+$ e da matriz de covariância $\mathbf{P}_k^{p+}$.

$$\mathbf{z}_k^p = \mathbf{H}_k^p \mathbf{q}_k^- + \eta_k \tag{5.121}$$

ix. Executa-se a verificação:

$$\mathbf{q}_k^{+i} = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathbf{q}_k^{+i}\right)^2}{9}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} > 0 \\ 10^{-2S}, & se\ \mathbf{q}_k^{+i} = 0 \end{cases} \tag{5.122}$$

onde o expoente $S$ é o número de algarismos significativos utilizados pela mantissa do computador.

x. Monta-se a matriz diagonal $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ij)}$:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p(ij)} = \begin{cases} \mathbf{q}_k^{+i}, & se \quad i = j \\ 0\ , & se \quad i \neq j \end{cases} \tag{5.123}$$

Onde $i$ e $j$ variam de *1* a *q* ($q = número\ de\ medidas$).

## ... RETORNA AO PROCESSAMENTO DO FEK PRINCIPAL:

iv. Após ter sido calculado o valor da matriz $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{p}$ realiza-se a propagação da matriz de covariância dos estados $\mathbf{P}_k^-$ do FK principal, por:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}\mathbf{G}_{\mathbf{d}_{k-1}}^T \tag{5.124}$$

v. Atualizam-se as equações do filtro:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}\right)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= f\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, k\right) + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k - h\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k\right)\right) \\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{A}_{k-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k^T\right)\mathbf{P}_k^-\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_{k-1}}
\end{aligned} \tag{5.125}$$

vi. Inicia-se a iteração do Filtro à frente: volta-se ao passo ii do FEK principal.

---

Após terminado o processamento do filtro à frente por meio do algoritmo do Filtro Estendido Adaptativo de Kalman (FEAK), inicia-se o algoritmo do filtro para trás (suavizador), implementado por um filtro de informação

## c. PROCESSAMENTO PARA TRÁS

i. Inicializa-se o filtro fazendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{bN}^- &= 0 \\
\mathbf{s}_N^- &= 0
\end{aligned} \tag{5.126}$$

ii. Para $k = N, N-1, ..., m+1$, processam-se as equações

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{bk}^+ &= \mathcal{I}_{bk}^- + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k \\
\mathbf{s}_k^+ &= \mathbf{s}_k^- + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{z}_k \\
\mathcal{I}_{b,k-1}^- &= \left[\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\left(\mathcal{I}_{bk}^+\right)^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-T} + \mathbf{A}_{k-1}^{-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-T}\right]^{-1} \\
&= \mathbf{A}_{k-1}^{-T}\left[\left(\mathcal{I}_{bk}^+\right)^{-1} + \mathbf{Q}_{k-1}\right]^{-1}\mathbf{A}_{k-1} \\
&= \mathbf{A}_{k-1}^{-T}\left[\mathbf{Q}_{k-1}^{-1} - \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\left(\mathcal{I}_{bk}^+ + \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\right]\mathbf{A}_{k-1} \\
\mathbf{s}_{k-1}^- &= \mathcal{I}_{b,k-1}^-\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\left(\mathcal{I}_{bk}^+\right)^{-1}\mathbf{s}_k^+
\end{aligned} \tag{5.127}$$

iii. Processa-se a atualização de tempo final para obter a estimativa suavizada de $\mathbf{x}_m$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{bm}^{+} &= \mathbf{Q}_m^{-1} - \mathbf{Q}_m^{-1}\mathbf{A}_m^{-1}\left(\mathcal{I}_{b,m+1}^{+} + \mathbf{A}_m^{-T}\mathbf{Q}_m^{-1}\mathbf{A}_m^{-1}\right)^{-1}\mathbf{A}_m^{-T}\mathbf{Q}_m^{-1} \\
\mathbf{P}_{bm}^{-} &= \left(\mathcal{I}_{bm}^{-}\right)^{-1} \\
\mathbf{s}_m^{-} &= \mathcal{I}_{bm}^{-}\mathbf{A}_m^{-1}\left(\mathcal{I}_{b,m+1}^{+}\right)^{-1}\mathbf{s}_{m+1}^{+} \\
\hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} &= \left(\mathcal{I}_{bm}^{-}\right)^{-1}\mathbf{s}_m^{-}
\end{aligned} \tag{5.128}$$

iv. Até aqui se dispõe da estimativa *backward* $\hat{\mathbf{x}}_{bm}$ e sua covariância $\mathbf{P}_{bm}^{-} = \left(\mathcal{I}_{bm}^{-}\right)^{-1}$, obtidas a partir das medições $m+1, m+2, ..., N$. Estas estimativas são então combinadas com as estimativas *forward* para se obter as estimativas dos estados e covariâncias finais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_f &= \mathbf{P}_{bm}^{-}\left(\mathbf{P}_{fm}^{+} + \mathbf{P}_{bm}^{-}\right)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{K}_f\hat{\mathbf{x}}_{fm}^{+} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_f\right)\hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} \\
\mathbf{P}_m &= \left[\left(\mathbf{P}_{fm}^{+}\right)^{-1} + \left(\mathbf{P}_{bm}^{-}\right)^{-1}\right]^{-1}
\end{aligned} \tag{5.129}$$

v. Inicia-se a iteração do filtro suavizador: volta-se ao passo ii do Filtro Suavizador.

# 6. MODELAGEM DO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Neste capítulo desenvolve-se a modelagem do sistema de navegação inercial *strapdown* (SNIS) com base em dois métodos de análise: a direta, que modela os estados, e a indireta, que modela os erros de estados.

A modelagem direta é amplamente utilizada com o FK para efetuar a fusão sensorial. Por outro lado, a modelagem dos erros de estados tem se tornado um dos tópicos mais proeminentes no campo da navegação inercial (KIM, 2004), pois permite analisar a propagação dos erros dos sensores inerciais através dos ciclos computacionais, determinando a precisão da orientação, velocidade e posição do SNI.

Inicialmente se desenvolvem os modelos que descrevem os estados de orientação, velocidade e posição da plataforma. Neste desenvolvimento utilizam-se dois tipos de abordagens: uma por meio dos cossenos diretores e outra por quaternions. Também são modeladas as equações de medições (saídas).

Na seqüência, são modelados os erros de estados de orientação, velocidade e posição, utilizando-se também as abordagens dos cossenos diretores e dos quaternions.

Descrevem-se as equações que modelam os erros dos sensores de medição. Nesta seção também são analisadas a estabilidade dos cossenos diretores por meio da técnica de ortogonalização, enquanto que a estabilidade dos quaternions é analisada por meio de ortogonalização e também por normalização.

Por fim, é discutida a calibração dos sensores inerciais e descrito o algoritmo que efetua o alinhamento inicial da plataforma.

# 6.1. MODELAGEM DOS ESTADOS DO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL STRAPDOWN

Descrevem-se a seguir a modelagem dos estados de orientação, velocidade e posição do SNI. Na modelagem da orientação são utilizadas as abordagens dos cossenos diretores e dos quaternions para posterior obtenção das matrizes de rotação, $\mathbf{C}_b^n$ e $\mathbf{C}_n^b$. Em seguida são modeladas as equações de medição. As equações de estados e de medição são aquelas que serão utilizadas com o Filtro Estendido de Kalman para efetuar a fusão sensorial.

## 6.1.1. MODELAGEM DA ORIENTAÇÃO UTILIZANDO COSSENOS DIRETORES

A modelagem da orientação pelo método dos cossenos diretores, os quais são funções dos ângulos $\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$, é obtida a partir da equação (3.60) fazendo-se $\omega_{(x,y,z)} = \omega_{nb(x,y,z)}$, tal que

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{pmatrix} . \tag{6.1}$$

A partir dos ângulos, $\phi$, $\theta$ e $\psi$ obtidos pela equação (6.1), as matrizes de rotação $\mathbf{C}_b^n$ e $\mathbf{C}_n^b$ (equações (3.55) e (3.56)), são atualizadas. Nesta equação, o vetor $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b \left( \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right)$ expressa a rotação da plataforma em relação ao sistema de coordenadas de navegação NED.

## 6.1.2. MODELAGEM DA ORIENTAÇÃO POR QUATERNIONS

Conforme descrito na seção (3.3.3), um quaternion $\mathbf{q}$ se propaga no tempo de acordo com a equação

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}_{nb}^{b}, \tag{6.2}$$

a qual pode ser expressa na forma matricial como uma função dos componentes de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}_{nb}^{b} = \left[0, \boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\right]^{T}$ como a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2\\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1\\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ \omega_{nbx}\\ \omega_{nby}\\ \omega_{nbz}\end{pmatrix},\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & q_0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & q_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\omega_{nbx}\\ \omega_{nby}\\ \omega_{nbz}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

A partir dos quaternions $q = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{T}$ obtidos pela equação (6.3), as matrizes de rotação $\mathbf{C}_b^n$ e $\mathbf{C}_n^b = \left(\mathbf{C}_b^n\right)^{T}$ (equação 3.84), são atualizadas. Assim como no caso anterior, $\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - \mathbf{C}_n^b\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)$.

### 6.1.3. MODELAGEM DA VELOCIDADE

As equações que descrevem o comportamento dinâmico da velocidade da plataforma no referencial da navegação local NED, são obtidas desenvolvendo-se a equação da navegação demonstrada na seção (3.1.7), e que aqui serão repetidas por conveniência.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_e^n &= \mathbf{f}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n,\\ \dot{\mathbf{v}}_e^n &= \mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b + \mathbf{g}_l^n - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{v}_e^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v}_e^n.\end{aligned} \tag{6.4}$$

O primeiro termo da segunda equação representa a força especifica medida pelos acelerômetros e projetada no sistema NED. O segundo, o terceiro e o quarto

termos representam a gravidade local, a aceleração de Coriolis e a aceleração centrípeta respectivamente e, portanto, seus efeitos devem ser compensados.

A primeira correção determinística a ser efetuada é a compensação da gravidade local que é dada pelo termo $\mathbf{g}_l^n$, e pode ser expressa no sistema NED pela equação

$$\mathbf{g}_l^n = \mathbf{g}^n - \begin{bmatrix} \dfrac{\Omega^2 (R+h)\sin 2L}{2} & 0 & \dfrac{\Omega^2 (R+h)(1+\cos 2L)}{2} \end{bmatrix}^T, \tag{6.5}$$

onde a componente da aceleração $\mathbf{g}^n$, é a aceleração gravitacional expressa no sistema de navegação local, ou seja,

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.80665 \end{bmatrix} m/s^2 . \tag{6.6}$$

A segunda correção refere-se ao terceiro termo da equação (6.4). Este termo representa a aceleração sentida pela plataforma ao se deslocar sobre um referencial girante, e é conhecido como aceleração de Coriolis.

A rotação da Terra no sistema de coordenadas ECEF, é

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00007292 \end{bmatrix} rad/s . \tag{6.7}$$

Esta rotação pode ser transportada para o sistema NED, fazendo-se

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{pmatrix} -\sin L\cos l & -\sin L\sin l & \cos L \\ -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos L\cos l & -\cos L\sin l & -\sin L \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega\cos L \\ 0 \\ -\Omega\sin L \end{bmatrix} . \tag{6.8}$$

A velocidade da plataforma ( $\mathbf{v}_e^n$ ) pode ser projetada para o sistema NED, através de

$$\mathbf{v}_e^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{v}_e^b = \mathbf{C}_b^n \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix}_n . \tag{6.9}$$

Logo, a correção da aceleração de Coriolis é feita através de

$$\mathbf{a}_{Coriolis} = -2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{v}_e^n = -2\begin{bmatrix} \Omega\cos L \\ 0 \\ -\Omega\sin L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} v_D\Omega\sin L \\ -\Omega(v_N \sin L + v_D \cos L) \\ v_E\Omega\cos L \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

A terceira e última correção determinística a ser efetuada refere-se ao quarto termo da equação (6.4). Esta parcela representa a aceleração sentida pela plataforma ao se deslocar sobre uma superfície curva e é conhecida como *aceleração centrípeta.*

O vetor que representa a taxa de transporte sobre a superfície terrestre pode ser expresso em termos das coordenadas curvilíneas (TITTERTON, 1997), por

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dfrac{v_E}{(R+h)} & -\dfrac{v_N}{(R+h)} & -\dfrac{v_E}{(R+h)}\tan L \end{bmatrix}^T . \tag{6.11}$$

Portanto, a correção da aceleração centrípeta é feita através do vetor

$$\mathbf{a}_{Centripeta} = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v}_e^n = -\begin{bmatrix} \dfrac{v_E}{(R+h)} \\ -\dfrac{v_N}{(R+h)} \\ -\dfrac{v_E \tan L}{(R+h)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{v_E{}^2 \tan L - v_N v_D}{(R+h)} \\ \dfrac{v_E v_N \tan L - v_E v_D}{(R+h)} \\ \dfrac{v_E{}^2 - v_N{}^2}{(R+h)} \end{bmatrix}. \tag{6.12}$$

Finalmente o modelo completo da velocidade da plataforma, incluindo as correções determinísticas, fica sendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_N \\ \dot{v}_E \\ \dot{v}_D \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2v_E\Omega\sin L \\ -2\Omega\left(v_D\cos L + v_N\sin L\right) \\ 2v_E\Omega\cos L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{(R+h)}\left(v_E{}^2\tan L - v_D v_N\right) \\ -\frac{v_E}{(R+h)}\left(v_N\tan L + v_D\right) \\ \frac{v_E{}^2 + v_N{}^2}{(R+h)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\Omega^2(R+h)\sin 2L}{2} \\ 0 \\ g - \frac{\Omega^2(R+h)\left(1+\cos 2L\right)}{2} \end{bmatrix}, \tag{6.13}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_N \\ \dot{v}_E \\ \dot{v}_D \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2v_E\Omega\sin L \\ -2\Omega\left(v_D\cos L + v_N\sin L\right) \\ 2v_E\Omega\cos L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{(R+h)}\left(v_E{}^2\tan L - v_D v_N\right) \\ -\frac{v_E}{(R+h)}\left(v_N\tan L + v_D\right) \\ \frac{v_E{}^2 + v_N{}^2}{(R+h)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi g \\ -\eta g \\ g_l \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_N \\ \dot{v}_E \\ \dot{v}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} f_x^b + c_{12} f_y^b + c_{13} f_z^b - 2v_E\Omega\sin L - \frac{\left(v_E{}^2\tan L - v_D v_N\right)}{(R+h)} + \xi g \\ c_{21} f_x^b + c_{22} f_y^b + c_{23} f_z^b + 2\Omega\left(v_D\cos L + v_N\sin L\right) + \frac{v_E}{(R+h)}\left(v_N\tan L + v_D\right) \\ c_{31} f_x^b + c_{32} f_y^b + c_{33} f_z^b - 2v_E\Omega\cos L - \frac{v_E{}^2 + v_N{}^2}{(R+h)} + g_l \end{bmatrix}. \tag{6.15}$$

### 6.1.4. MODELAGEM DA POSIÇÃO

A equação diferencial que descreve a posição da plataforma no referencial NED é dada por

$$\dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{v}^n . \tag{6.16}$$

A posição da plataforma também pode ser descrita em termos da latitude, longitude e altitude, no referencial NED, por meio das equações (3.35) a (3.37), demonstradas na seção (3.1.7), onde

$$
\begin{aligned}
\dot{L} &= \frac{v_N}{\left(R_N + h\right)} \approx \frac{v_N}{(R+h)}, \\
\dot{l} &= \frac{v_E}{\left(R_E + h\right)\cos L} \approx \frac{v_E}{(R+h)\cos L}, \\
\dot{h} &= -v_D.
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

## 6.1.5. MODELO COMPLETO DA NAVEGAÇÃO

Agrupando-se as equações (6.1), (6.3), (6.15) e (6.17), e adicionando um vetor de ruídos $\mathbf{w}(t)$, chega-se ao modelo completo que descreve o comportamento dinâmico da plataforma. Este sistema é não linear, sendo representado de forma genérica por $\dot{\mathbf{x}}(t) = f\left(\mathbf{x}(t), t\right) + \mathbf{w}(t)$.

$$
\begin{pmatrix}
\dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \hline \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \hline \dot{v}_N \\ \dot{v}_E \\ \dot{v}_D \\ \hline \dot{L} \\ \dot{l} \\ \dot{h}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-0,5q_1\omega_{nbx}^b - 0,5q_2\omega_{nby}^b - 0,5q_3\omega_{nbz}^b \\
0,5q_0\omega_{nbx}^b - 0,5q_3\omega_{nby}^b + 0,5q_2\omega_{nbz}^b \\
0,5q_3\omega_{nbx}^b + 0,5q_0\omega_{nby}^b - 0,5q_1\omega_{nbz}^b \\
-0,5q_2\omega_{nbx}^b + 0,5q_1\omega_{nby}^b + 0,5q_0\omega_{nbz}^b \\
\hline
\omega_{nbx}^b + \omega_{nby}^b \sin\phi\tan\theta + \omega_{nbz}^b \cos\phi\tan\theta \\
\omega_{nby}^b \cos\phi - \omega_{nbz}^b \sin\phi \\
\omega_{nby}^b \sin\phi\sec\theta + \omega_{nbz}^b \cos\phi\sec\theta \\
\hline
f_N - 2v_E\Omega\sin L - \dfrac{\left({v_E}^2 \tan L - v_D v_N\right)}{(R_0 + h)} + \xi g \\
f_E + 2\Omega\left(v_D \cos L + v_N \sin L\right) + \dfrac{v_E}{(R_0 + h)}\left(v_N \tan L + v_D\right) \\
f_D - 2v_E\Omega\cos L - \dfrac{{v_E}^2 + {v_N}^2}{(R_0 + h)} + g_l \\
\hline
\dfrac{v_N}{\left(R_N + h\right)} \\
\dfrac{v_E}{\left(R_E + h\right)\cos L} \\
-v_D
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
w_{q_0} \\ w_{q_1} \\ w_{q_2} \\ w_{q_3} \\ \hline w_\alpha \\ w_\beta \\ w_\gamma \\ \hline w_{v_N} \\ w_{v_E} \\ w_{v_D} \\ \hline w_L \\ w_l \\ w_h
\end{pmatrix},
\tag{6.18}
$$

onde

$$\begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} f_x^b + c_{12} f_y^b + c_{13} f_z^b \\ c_{21} f_x^b + c_{22} f_y^b + c_{23} f_z^b \\ c_{31} f_x^b + c_{32} f_y^b + c_{33} f_z^b \end{bmatrix}, \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} \xi g &= -\frac{\Omega^2 (R+h) \sin 2L}{2}, \\ g_l &= g - \frac{\Omega^2 (R+h)\left(1+\cos 2L\right)}{2}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Este modelo pode ser discretizado num intervalo de tempo $\Delta t$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \int_t^{t+\Delta t} \left[ f\left(\mathbf{x}(t), t\right) + \mathbf{w}(t) \right] dt, \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + f\left(\mathbf{x}_k, k\right) \Delta t + \mathbf{w}_k \Delta t, \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{pmatrix} q_{0(k+1)} \\ q_{1(k+1)} \\ q_{2(k+1)} \\ q_{3(k+1)} \\ \hline \phi_{(k+1)} \\ \theta_{(k+1)} \\ \psi_{(k+1)} \\ \hline v_{N(k+1)} \\ v_{E(k+1)} \\ v_{D(k+1)} \\ \hline L_{(k+1)} \\ l_{(k+1)} \\ h_{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{0(k)} \\ q_{1(k)} \\ q_{2(k)} \\ q_{3(k)} \\ \hline \phi_{(k)} \\ \theta_{(k)} \\ \psi_{(k)} \\ \hline v_{N(k)} \\ v_{E(k)} \\ v_{D(k)} \\ \hline L_{(k)} \\ l_{(k)} \\ h_{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5q_1\omega_{nbx}^b - 0,5q_2\omega_{nby}^b - 0,5q_3\omega_{nbz}^b \\ 0,5q_0\omega_{nbx}^b - 0,5q_3\omega_{nby}^b + 0,5q_2\omega_{nbz}^b \\ 0,5q_3\omega_{nbx}^b + 0,5q_0\omega_{nby}^b - 0,5q_1\omega_{nbz}^b \\ -0,5q_2\omega_{nbx}^b + 0,5q_1\omega_{nby}^b + 0,5q_0\omega_{nbz}^b \\ \hline \omega_{nbx}^b + \omega_{nby}^b \sin\phi \tan\theta + \omega_{nbz}^b \cos\phi \tan\theta \\ \omega_{nby}^b \cos\phi - \omega_{nbz}^b \sin\phi \\ \omega_{nby}^b \sin\phi \sec\theta + \omega_{nbz}^b \cos\phi \sec\theta \\ \hline f_N - 2v_E\Omega \sin L - \dfrac{\left(v_E{}^2 \tan L - v_D v_N\right)}{(R_0+h)} + \xi g \\ f_E + 2\Omega\left(v_D \cos L + v_N \sin L\right) + \dfrac{v_E}{(R_0+h)}\left(v_N \tan L + v_D\right) \\ f_D - 2v_E\Omega \cos L - \dfrac{v_E{}^2 + v_N{}^2}{(R_0+h)} + g_l \\ \hline \dfrac{v_N}{\left(R_N+h\right)} \\ \dfrac{v_E}{\left(R_E+h\right)\cos L} \\ -v_D \end{pmatrix} .\Delta t + \begin{pmatrix} w_{q_0} \\ w_{q_1} \\ w_{q_2} \\ w_{q_3} \\ \hline w_\alpha \\ w_\beta \\ w_\gamma \\ \hline w_{v_N} \\ w_{v_E} \\ w_{v_D} \\ \hline w_L \\ w_l \\ w_h \end{pmatrix} .\Delta t. \tag{6.22}$$

O modelo que descreve o processo é não linear do tipo $\mathbf{x}_k = f\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k\right)$. Para que se possa utilizá-lo com o Filtro de Kalman, torna-se necessário linearizá-lo a fim de encontrar a matriz jacobiana $\mathbf{A}_k$, a qual é obtida por:

$$\mathbf{A}_k = \frac{\partial\left(f\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k\right)\right)}{\partial \mathbf{x}_k} \tag{6.23}$$

A solução da equação (6.23), aplicada ao modelo $f\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k\right)$ descrito pela equação (6.22), produz a seguinte matriz bloco linearizada:

$$\mathbf{A}_k = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{11(4\times4)} & \mathbf{0}_{(4\times3)} & \mathbf{0}_{(4\times3)} & \mathbf{0}_{(4\times3)} \\ \hline \mathbf{0}_{(3\times4)} & \mathbf{A}_{22(3\times3)} & \mathbf{0}_{(3\times3)} & \mathbf{0}_{(3\times3)} \\ \hline \mathbf{0}_{(3\times4)} & \mathbf{0}_{(3\times3)} & \mathbf{A}_{33(3\times3)} & \mathbf{A}_{34(3\times3)} \\ \hline \mathbf{0}_{(3\times4)} & \mathbf{0}_{(3\times3)} & \mathbf{A}_{43(3\times3)} & \mathbf{A}_{44(3\times3)} \end{array}\right), \tag{6.24}$$

onde

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5\omega_{nbx}^b & -0,5\omega_{nby}^b & -0,5\omega_{nbz}^b \\ 0,5\omega_{nbx}^b & 0 & 0,5\omega_{nbz}^b & -0,5\omega_{nby}^b \\ 0,5\omega_{nby}^b & -0,5\omega_{nbz}^b & 0 & 0,5\omega_{nbx}^b \\ 0,5\omega_{nbz}^b & 0,5\omega_{nby}^b & -0,5\omega_{nbx}^b & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} \left(\omega_{nby}^b \cos\phi - \omega_{nbz}^b \sin\phi\right)\tan\theta & \left(\omega_{nby}^b \cos\phi - \omega_{nbz}^b \sin\phi\right)\sec^2\theta & 0 \\ -\omega_{nby}^b \sin\phi - \omega_{nbz}^b \cos\phi & 0 & 0 \\ \left(\omega_{nby}^b \cos\phi - \omega_{nbz}^b \sin\phi\right)\sec\theta & \left(\omega_{nby}^b \sin\phi + \omega_{nbz}^b \cos\phi\right)\sec\theta\tan\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.26}$$

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_D}{\left(R_0+h\right)} & -2\left(\dfrac{v_E \tan L}{\left(R_0+h\right)} + \Omega\sin L\right) & \dfrac{v_N}{\left(R_0+h\right)} \\ -\left(\dfrac{v_E \tan L}{\left(R_0+h\right)} + 2\Omega\sin L\right) & \dfrac{v_D - v_N \tan L}{\left(R_0+h\right)} & 2\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{\left(R_0+h\right)} \\ -2\dfrac{v_N}{\left(R_0+h\right)} & -2\left(\dfrac{v_E}{\left(R_0+h\right)} + \Omega\cos L\right) & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.27}$$

$$\mathbf{A}_{34} = \begin{pmatrix} -2v_E\Omega\cos L - \dfrac{{v_E}^2}{\left(R_0+h\right)\cos^2 L} & 0 & \dfrac{{v_E}^2 \tan L - v_N v_D}{\left(R_0+h\right)^2} \\ -2\Omega\left(v_N \cos L + v_D \sin L\right) - \dfrac{v_E v_N\left(\tan^2 L + 1\right)}{\left(R_0+h\right)} & 0 & \dfrac{v_E}{\left(R_0+h\right)^2}\left(v_N \tan L - v_D\right) \\ 2v_E\Omega\sin L & 0 & \dfrac{{v_N}^2 + {v_E}^2}{\left(R_0+h\right)^2} \end{pmatrix}, \tag{6.28}$$

$$\mathbf{A}_{43} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(R_0+h)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(R_0+h)\cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.29}$$

$$\mathbf{A}_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{v_N}{(R_0+h)^2} \\ \dfrac{v_E \tan L}{(R_0+h)\cos L} & 0 & -\dfrac{v_E}{(R_0+h)^2 \cos L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.30}$$

### 6.1.6. MODELO SIMPLIFICADO DO SNI

As equações diferenciais que descrevem a velocidade e a posição de um corpo se deslocando sobre a superfície terrestre, no sistema de coordenadas NED, são

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v}^n, \\ \dot{\mathbf{p}}^n &= \mathbf{v}^n. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Admitindo-se algumas considerações práticas, um modelo de navegação simplificado pode ser obtido a partir da equação (6.31). Os efeitos da aceleração de Coriolis e do raio de curvatura da Terra são justificáveis, desde que possam ser detectados pelos sensores inerciais da UMI.

A rotação da Terra é de $15{,}04\,(graus/hora)$, o que faz com que $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \approx 4{,}17 \times 10^{-3}\left[graus/s\right]$. Admitindo uma velocidade de deslocamento da plataforma de $50\left[km/h\right]$, a aceleração máxima de Coriolis fica sendo, $2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{v}^n \approx 0{,}1157\left[m/s^2\right]$.

O efeito devido ao raio de curvatura terrestre $\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v}^n$, e a velocidade angular com a qual a plataforma atravessa a curvatura da Terra, $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$, é praticamente nulo, a menos que a plataforma se desloque com velocidade extremamente alta

percorrendo grandes distâncias. Como um exemplo numérico, considere que um veículo se desloque a $100\left[km/h\right]$ cobrindo uma volta completa sobre a linha do equador. Neste caso, a magnitude é de $\boldsymbol{\omega}_{en}^{n} = 2{,}5\times10^{-4}\left[graus/s\right]$. Portanto, nos casos em que os efeitos da rotação e do raio de curvatura terrestre são muito pequenos para serem sentidos pelos sensores da UMI quando se navega no sistema NED, podem-se admitir as seguintes simplificações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} &\cong 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} &\cong 0 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Como resultado, as equações simplificadas da velocidade e posição ficam sendo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}^{n} &= \mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}^{b} + \mathbf{g}^{n} \\ \dot{\mathbf{p}}^{n} &= \mathbf{v}^{n} \end{aligned} \tag{6.33}$$

### 6.1.7. MODELAGEM DAS EQUAÇÕES DE MEDIÇÃO

Descreve-se a seguir, o modelo da equação de medição a ser empregado com o Filtro de Kalman para compor a fusão sensorial. Utilizam-se como sensores (medidas de referencias) auxiliares, uma bússola eletrônica, um velocímetro e um conjunto de marcas topográficas (*landmarks*). A bússola eletrônica (magnetômetro) é dotada de inclinômetros os quais fornecem as medidas angulares $\boldsymbol{\psi} = \left[\phi \quad \theta \quad \psi\right]^{T}$. Neste vetor, $\phi$ e $\theta$, descrevem respectivamente, os ângulos de inclinação em torno dos eixos $x$ e $y$ da plataforma, enquanto que o ângulo $\psi$ descreve a orientação da plataforma em relação ao norte do sistema NED. O velocímetro fornece a medida da velocidade na direção do movimento da plataforma $\mathbf{v}^{b} = \left[v_{x}^{b} \quad 0 \quad 0\right]^{T}$, devendo portanto, ser convertido para o sistema da navegação, para produzir $\mathbf{v}^{n} = \mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{v}^{b} = \left[v_{N}^{n} \quad v_{E}^{n} \quad v_{D}^{n}\right]^{T}$. Por fim, o conjunto de marcas topográficas fornece as medidas de posição em coordenadas geodésicas, $\mathbf{p}^{n} = \left[L \quad l \quad h\right]^{T}$, no referencial da navegação.

Como as medidas de referências, possuem as mesmas unidades de medidas, dos vetores de estados, tem-se um sistema de medição linear do tipo $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$. Neste sistema, $\mathbf{z}_k$ é o vetor que contém as medidas dos sensores, disponibilizadas em instantes de tempo $\Delta t = t - T\big|_{t=kT(k=1,2,3,...)}$, $\mathbf{x}_k$ é o vetor que contém os estados do processo e $\mathbf{v}_k$ são os ruídos associados à medição.

Finalmente, o modelo que descreve o sistema de medições fica sendo:

$$\mathbf{z}_k = \left[\phi \quad \theta \quad \psi \;\middle|\; v_x^b \quad v_y^b \quad v_z^b \;\middle|\; L \quad l \quad h\right]_k^T \tag{6.34}$$

$$\mathbf{x}_k = \left[q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \;\middle|\; \phi \quad \theta \quad \psi \;\middle|\; v_N^n \quad v_E^n \quad v_D^n \;\middle|\; L \quad l \quad h\right]_k^T \tag{6.35}$$

$$\mathbf{v}_k = \left[v_\phi \quad v_\theta \quad v_\psi \;\middle|\; v_{v_N^n} \quad v_{v_E^n} \quad v_{v_D^n} \;\middle|\; v_L \quad v_l \quad v_h\right]_k^T \tag{6.36}$$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \hline v_x \\ v_y \\ v_z \\ \hline L \\ l \\ h \end{pmatrix}_k = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) . \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \hline \phi \\ \theta \\ \psi \\ \hline v_N \\ v_E \\ v_D \\ \hline L \\ l \\ h \end{pmatrix}_k + \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \sigma_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_z} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_h \end{array}\right) . \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \\ \hline v_{v_x} \\ v_{v_y} \\ v_{v_z} \\ \hline v_L \\ v_l \\ v_h \end{pmatrix}_k \tag{6.37}$$

onde, $\mathbf{z}_k$ é o vetor que contém as medidas dos sensores, disponibilizadas em instantes de tempo $\Delta t = t - T\big|_{t=kT(k=1,2,3,...)}$ e $\mathbf{x}_k$ é o vetor que contém os estados do processo. O vetor $\mathbf{v}_k$ representa os ruídos associados às medições e $\mathbf{G}_k$ é uma matriz que pondera a distribuição dos ruídos sobre as medições (neste caso em particular declarada como diagonal).

A matriz bloco $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_n^b$ representa a inversa da matriz de transformação de coordenadas $\mathbf{C}_b^n$, dada pela equação (3.61), cujos elementos também podem ser os ângulos de Euler (equação (3.55)) ou quaternions (equação (3.85)).

## 6.2. MODELAGEM DOS ERROS DE ESTADOS DO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL STRAPDOWN

Os modelos de erros de estados são utilizados para analisar o desempenho do SNI a partir de um determinado conjunto de sensores inerciais. Esta modelagem pode ser importante para determinar o quão preciso os sensores precisam ser para se obter a especificação de desempenho desejada do SNI.

### 6.2.1. MODELAGEM DOS ERROS DE ORIENTAÇÃO A PARTIR DOS COSSENOS DIRETORES

A orientação da plataforma em um sistema de navegação inercial strapdown com relação ao sistema de coordenadas de navegação NED pode ser expressa em termos matriz dos cossenos diretores, $\mathbf{C}_b^n$. A orientação estimada, aqui denotada por $\hat{\mathbf{C}}_b^n$, pode ser escrita em termos da matriz dos cossenos diretores verdadeira $\mathbf{C}_b^n$, como:

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{B}\mathbf{C}_b^n \tag{6.38}$$

onde $\mathbf{B}$ representa uma transformação a partir do eixo de referência verdadeiro para eixo de referência estimado, ou seja, o desalinhamento entre os sistemas de referência que é armazenado durante a computação da navegação inercial. Para pequenos ângulos de desalinhamento, a matriz $\mathbf{B}$ pode ser aproximada pela matriz anti-simétrica, expressa como:

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{I} - \delta\mathbf{\Psi}\right] \tag{6.39}$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade $3\times3$ e $\boldsymbol{\Psi}$ é dada por:

$$\delta\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{pmatrix} \tag{6.40}$$

Os elementos, $\delta\phi$ e $\delta\theta$, correspondem aos erros de orientação vertical ou nivelação, enquanto que $\delta\psi$ representa o erro de direção ou azimute. Estes termos são análogos aos erros de desalinhamento físico dos sensores de uma UMI strapdown fixada sobre uma plataforma estável e, para pequenos erros de desalinhamentos, podem ser igualados respectivamente aos erros dos ângulos de Euler (roll, pitch e yaw).

A matriz dos cossenos diretores estimada, $\hat{\mathbf{C}}_b^n$, pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n \tag{6.41}$$

Lembrando-se que $\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b$, a propagação da matriz $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ fica sendo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nb}^b \\ &= \hat{\mathbf{C}}_b^n\left(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^b\right) \end{aligned} \tag{6.42}$$

Substituindo (6.41) em (6.42) e derivando esta equação se obtém:

$$\begin{aligned} -\delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}\mathbf{C}_b^n + \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\dot{\mathbf{C}}_b^n &= \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\left(\left(\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b + \delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b\right) - \left(\boldsymbol{\Omega}_{in}^b + \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right)\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\left(\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right) + \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b + \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right) \end{aligned} \tag{6.43}$$

Portanto a equação (6.43) fica reduzida à:

$$\begin{aligned} -\delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}\mathbf{C}_b^n &= \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right) \\ &= \mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right) - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right) \end{aligned} \tag{6.44}$$

O segundo termo desta equação representa o produto entre dois erros (muito pequenos) e, portanto, pode ser desprezado, assim, reescrevendo a equação (6.44), chega-se à:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\Psi}} = -\mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^b\right)\mathbf{C}_b^{nT} \tag{6.45}$$

Cuja forma vetorial é dada por (TITTERTON, 1997):

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{C}_b^n\left(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b\right) \tag{6.46}$$

Nesta equação $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ representa os erros dos giroscópios enquanto que $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b$ representa o erro de orientação do sistema NED em relação ao sistema inercial expresso no sistema da plataforma. O erro $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b$ é desconhecido e precisa ser determinado, o que pode ser feito admitindo-se que $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b = \hat{\mathbf{C}}_n^b\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^n$. Partindo-se desta consideração o termo $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^b$ pode ser expandido em:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{in}^b + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b &= \left(\left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\right)^T\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\right) \\
&= \mathbf{C}_n^b\left(\mathbf{I} + \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\right) \\
&= \mathbf{C}_n^b\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\right) + \mathbf{C}_n^b\delta\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n\right)
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Desprezando o termo que representa o produto entre dois erros e rearranjando a equação para $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b$, chega-se à:

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b &= \cancel{\mathbf{C}_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^n} + \mathbf{C}_n^b\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_n^b\delta\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_n^b\delta\boldsymbol{\Psi}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \cancel{\boldsymbol{\omega}_{in}^b} \\
&= \mathbf{C}_n^b\left(\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\omega}_{in}^n\right) \\
&= \mathbf{C}_n^b\left(\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \left(\delta\boldsymbol{\psi}\times\boldsymbol{\omega}_{in}^n\right)\right)
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Substituindo a equação (6.48) na equação (6.46), tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} &= \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\psi}\times\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
&= \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \boldsymbol{\omega}_{in}^n\times\delta\boldsymbol{\psi} - \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b
\end{aligned} \tag{6.49}$$

onde $\delta\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix}\delta\phi & \delta\theta & \delta\psi\end{bmatrix}^T$, é o vetor que representa os erros de orientação ou desalinhamento, $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ descreve o ruído dos giroscópios, podendo ser modelado como um ruído branco gaussiano e $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ é o vetor que representa o erro da taxa de transporte, sendo expresso por:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n \tag{6.50}$$

As velocidades $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$, $\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ representam os erros da velocidade angular terrestre, expressa no sistema de navegação e os erros da velocidade angular do sistema de navegação em relação ao globo terrestre respectivamente. Ambos os erros estão expressos no sistema NED e são descritos por:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix}-\Omega\sin L\delta L & 0 & -\Omega\cos L\delta L\end{bmatrix}^T \tag{6.51}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n \approx \begin{bmatrix} -\dfrac{v_E}{(R+h)^2}\delta h + \dfrac{1}{R+h}\delta v_E \\ \dfrac{v_N}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{1}{R+h}\delta v_N \\ -\dfrac{v_E\sec^2 L}{R+h}\delta L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{\tan L}{R+h}\delta v_E \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n &= \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n \\ &= \begin{bmatrix} -\Omega\sin L\delta L - \dfrac{v_E}{(R+h)^2}\delta h + \dfrac{1}{R+h}\delta v_E \\ \dfrac{v_N}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{1}{R+h}\delta v_N \\ -\Omega\cos L\delta L - \dfrac{v_E\sec^2 L}{R+h}\delta L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{\tan L}{R+h}\delta v_E \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{R+h} & 0 & -\Omega\sin L & 0 & -\dfrac{v_E}{(R+h)^2} \\ -\dfrac{1}{R+h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{v_N}{(R+h)^2} \\ 0 & -\dfrac{\tan L}{(R+h)} & 0 & -\left(\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\sec^2 L\right) & 0 & \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \\ \delta L \\ \delta l \\ \delta h \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.53}$$

O vetor taxa de transporte $\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$ expressa a rotação do sistema NED em relação ao sistema ECI, sendo dado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} &= \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega\cos L \\ 0 \\ -\Omega\sin L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{v_E}{(R+h)} & -\dfrac{v_N}{(R+h)} & -\dfrac{v_E}{(R+h)}\tan L \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)} \\ -\dfrac{v_N}{(R+h)} \\ -\Omega\sin L - \dfrac{v_E}{(R+h)}\tan L \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.54}$$

O desenvolvimento do produto vetorial $\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times \delta\boldsymbol{\psi}\right)$ produz:

$$\left(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times \delta\boldsymbol{\psi}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \left(\Omega\sin L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & -\dfrac{v_N}{(R+h)} \\ -\left(\Omega\sin L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & 0 & -\left(\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\right) \\ \dfrac{v_N}{(R+h)} & \left(\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\right) & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{pmatrix} \tag{6.55}$$

O termo $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = \left(\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)$ é dado por:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R+h}\delta v_E - \Omega\sin L\delta L - \dfrac{v_E}{(R+h)^2}\delta h \\ \dfrac{v_N}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{1}{R+h}\delta v_N \\ \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h - \Omega\cos L\delta L - \dfrac{v_E\sec^2 L}{(R+h)}\delta L - \dfrac{\tan L}{(R+h)}\delta v_E \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

Logo, a equação $\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} = \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} - \boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \times \delta\boldsymbol{\psi} - \mathbf{C}_{b}^{n}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ fica sendo:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R+h}\delta v_E - \Omega\sin L\delta L - \frac{v_E}{(R+h)^2}\delta h \\ \frac{v_N}{(R+h)^2}\delta h - \frac{1}{R+h}\delta v_N \\ \frac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h - \Omega\cos L\delta L - \frac{v_E\sec^2 L}{(R+h)}\delta L - \frac{\tan L}{(R+h)}\delta v_E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\Omega\sin L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)}\right)\delta\theta - \left(\frac{v_N}{(R+h)}\right)\delta\psi \\ -\left(\Omega\sin L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)}\right)\delta\phi - \left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)}\right)\delta\psi \\ \left(\frac{v_N}{(R+h)}\right)\delta\phi + \left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)}\right)\delta\theta \end{pmatrix} - \mathbf{C}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \tag{6.57}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} -\left(\Omega\sin L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)}\right)\delta\theta + \frac{v_N}{(R+h)}\delta\psi + \frac{1}{R+h}\delta v_E - \Omega\sin L\delta L - \frac{v_E}{(R+h)^2}\delta h \\ \left(\Omega\sin L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)}\right)\delta\phi + \left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)}\right)\delta\psi - \frac{1}{R+h}\delta v_N + \frac{v_N}{(R+h)^2}\delta h \\ -\frac{v_N}{(R+h)}\delta\phi - \left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)}\right)\delta\theta - \frac{\tan L}{(R+h)}\delta v_E - \left(\Omega\cos L + \frac{v_E\sec^2 L}{(R+h)}\right)\delta L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_{ix}^b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{iy}^b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_{iz}^b \end{pmatrix} \tag{6.58}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -\left(\Omega\sin L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & \frac{v_N}{(R+h)} & 0 & \frac{1}{R+h} & 0 & -\Omega\sin L & 0 & -\frac{v_E}{(R+h)^2} \\ \left(\Omega\sin L + \frac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & 0 & \left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)}\right) & -\frac{1}{R+h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_N}{(R+h)^2} \\ -\frac{v_N}{(R+h)} & -\left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)}\right) & 0 & 0 & -\frac{\tan L}{(R+h)} & 0 & -\left(\Omega\cos L + \frac{v_E}{(R+h)\cos^2 L}\right) & 0 & \frac{v_E\tan L}{(R+h)^2} \end{array}\right) . \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \\ \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \\ \delta L \\ \delta l \\ \delta h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^2 . \begin{pmatrix} \varepsilon_{gx} \\ \varepsilon_{gy} \\ \varepsilon_{gz} \end{pmatrix} \tag{6.59}$$

## 6.2.2. MODELAGEM DOS ERROS DE VELOCIDADE A PARTIR DOS ERROS DE COSSENOS DIRETORES

As equações que descrevem a velocidade real e estimada no sistema NED, são expressas por:

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n + \mathbf{g}_l \tag{6.60}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n\hat{\mathbf{f}}^b - \left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times\hat{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{g}}_l \tag{6.61}$$

Onde $\mathbf{f}^b$ representa o vetor força específica cujas componentes são as saídas dos acelerômetros.

Substituindo $\hat{\mathbf{C}}_b^n = \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n$ e escrevendo $\hat{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b$, $\hat{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n = \boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$, $\hat{\mathbf{g}}_l = \mathbf{g}_l + \delta\mathbf{g}_l$ e expandindo a equação (6.61), desenvolve-se uma equação para o erro de velocidade através de:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}^n + \delta\dot{\mathbf{v}}^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n\hat{\mathbf{f}}^b - \left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times\hat{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{g}}_l \\
&= \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\left(\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n\right) + \\
&\quad \left(\mathbf{g}_l + \delta\mathbf{g}_l\right) \\
&= \mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \\
&\quad \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \\
&\quad \left(\mathbf{g}_l + \delta\mathbf{g}_l\right)
\end{aligned}
\tag{6.62}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \\
&\quad \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \left(\mathbf{g}_l + \delta\mathbf{g}_l\right) - \dot{\mathbf{v}}^n \\
&= \mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \\
&\quad \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \mathbf{g}_l + \delta\mathbf{g}_l - \\
&\quad \left(\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n + \mathbf{g}_l\right) \\
&= \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n - \\
&\quad \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}_l
\end{aligned}
\tag{6.63}
$$

Desprezando-se os produtos entre os erros, $\delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b$ e $\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n$, finalmente chega-se à:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b - \delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}_l \\
&= \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b - \delta\boldsymbol{\psi}\times\mathbf{f}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}_l \\
&= \mathbf{C}_b^n\delta\mathbf{f}^b + \mathbf{f}^n\times\delta\boldsymbol{\psi} + \mathbf{v}^n\times\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}_l
\end{aligned}
\tag{6.64}
$$

Nesta equação, $\delta\mathbf{f}^b$ é o vetor que descreve o ruído dos acelerômetros, podendo ser modelado como um ruído branco gaussiano. $\delta\mathbf{v}^n = \begin{bmatrix}\delta\mathbf{v}_N & \delta\mathbf{v}_E & \delta\mathbf{v}_D\end{bmatrix}^T$, são as perturbações de velocidade na direção norte e leste e para baixo respectivamente e o vetor $\delta\mathbf{g}_l$ representa o erro da gravidade local. Os vetores $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ e $\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ são aqueles desenvolvidos na seção anterior (vide equações (6.51) e (6.52)).

O desenvolvimento da parcela $\delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b = \delta\boldsymbol{\psi}\times\mathbf{f}^n$ produz:

$$\delta\boldsymbol{\Psi}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{pmatrix}}_{\delta\boldsymbol{\Psi}} . \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_b^n} . \underbrace{\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}^b}$$

$$= \begin{pmatrix} -c_{21}f_x\delta\psi - c_{22}f_y\delta\psi - c_{23}f_z\delta\psi + c_{31}f_x\delta\theta + c_{32}f_y\delta\theta + c_{33}f_z\delta\theta \\ c_{11}f_x\delta\psi + c_{12}f_y\delta\psi + c_{13}f_z\delta\psi - c_{31}f_x\delta\phi - c_{32}f_y\delta\phi - c_{33}f_z\delta\phi \\ -c_{11}f_x\delta\theta - c_{12}f_y\delta\theta - c_{13}f_z\delta\theta + c_{21}f_x\delta\phi + c_{22}f_y\delta\phi + c_{23}f_z\delta\phi \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left(c_{31}f_x + c_{32}f_y + c_{33}f_z\right) & -\left(c_{21}f_x + c_{22}f_y + c_{23}f_z\right) \\ -\left(c_{31}f_x + c_{32}f_y + c_{33}f_z\right) & 0 & \left(c_{11}f_x + c_{12}f_y + c_{13}f_z\right) \\ \left(c_{21}f_x + c_{22}f_y + c_{23}f_z\right) & -\left(c_{11}f_x + c_{12}f_y + c_{13}f_z\right) & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{pmatrix}$$

O produto vetorial $-\left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n$ produz:

$$-\left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\delta\mathbf{v}^n = -\begin{bmatrix} 2\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)} \\ -\dfrac{v_N}{(R+h)} \\ -2\Omega\sin L - \dfrac{v_E}{(R+h)}\tan L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-2\Omega\sin L - \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right)\delta v_E + \left(\dfrac{v_N}{(R+h)}\right)\delta v_D \\ \left(2\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\right)\delta v_D + \left(2\Omega\sin L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right)\delta v_N \\ \left(-\dfrac{v_N}{(R+h)}\right)\delta v_N - \left(2\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\right)\delta v_E \end{bmatrix} \tag{6.66}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\left(2\Omega\sin L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & \left(\dfrac{v_N}{(R+h)}\right) \\ \left(2\Omega\sin L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & 0 & \left(2\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\right) \\ -\left(\dfrac{v_N}{(R+h)}\right) & -\left(2\Omega\cos L + \dfrac{v_E}{(R+h)}\right) & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{pmatrix}$$

O produto vetorial $-\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)\times\mathbf{v}^{n}=\mathbf{v}^{n}\times\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)$ produz:

$$-\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)\times\mathbf{v}^{n}=-\underbrace{\begin{bmatrix}-2\Omega\sin L\delta L-\dfrac{v_E}{(R+h)^2}\delta h+\dfrac{1}{R+h}\delta v_E\\ \dfrac{v_N}{(R+h)^2}\delta h-\dfrac{1}{R+h}\delta v_N\\ -2\Omega\cos L\delta L-\dfrac{v_E\sec^2 L}{R+h}\delta L+\dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h-\dfrac{\tan L}{R+h}\delta v_E\end{bmatrix}}_{2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}}\times\begin{bmatrix}v_N\\ v_E\\ v_D\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{v_D}{R+h}\right)\delta v_N-\left(\dfrac{v_E\tan L}{R+h}\right)\delta v_E-\left(2\Omega v_E\cos L+\dfrac{v_E{}^2\sec^2 L}{R+h}\right)\delta L+\left(\dfrac{v_E{}^2\tan L}{(R+h)^2}-\dfrac{v_N v_D}{(R+h)^2}\right)\delta h\\ \left(\dfrac{v_N\tan L}{R+h}+\dfrac{v_D}{R+h}\right)\delta v_E-\left(2\Omega v_D\sin L-2\Omega v_N\cos L-\dfrac{v_E v_N\sec^2 L}{R+h}\right)\delta L-\left(\dfrac{v_E v_D}{(R+h)^2}+\dfrac{v_E v_N\tan L}{(R+h)^2}\right)\delta h\\ -\left(\dfrac{v_N}{R+h}\right)\delta v_N-\left(\dfrac{v_E}{R+h}\right)\delta v_E+\left(2\Omega v_E\sin L\right)\delta L+\left(\dfrac{v_N{}^2}{(R+h)^2}+\dfrac{v_E{}^2}{(R+h)^2}\right)\delta h\end{bmatrix}\tag{6.67}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\left(\dfrac{v_D}{R+h}\right) & -\left(\dfrac{v_E\tan L}{R+h}\right) & 0 & \left(-2\Omega v_E\cos L-\dfrac{v_E{}^2\sec^2 L}{R+h}\right) & 0 & \left(\dfrac{v_E{}^2\tan L}{(R+h)^2}-\dfrac{v_N v_D}{(R+h)^2}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{v_N\tan L}{R+h}+\dfrac{v_D}{R+h}\right) & 0 & \left(2\Omega v_N\cos L+\dfrac{v_E v_N\sec^2 L}{R+h}-2\Omega v_D\sin L\right) & 0 & -\left(\dfrac{v_E v_N\tan L}{(R+h)^2}+\dfrac{v_E v_D}{(R+h)^2}\right)\\ -\left(\dfrac{v_N}{R+h}\right) & -\left(\dfrac{v_E}{R+h}\right) & 0 & \left(2\Omega v_E\sin L\right) & 0 & \left(\dfrac{v_N{}^2}{(R+h)^2}+\dfrac{v_E{}^2}{(R+h)^2}\right)\end{array}\right)\begin{pmatrix}\delta v_N\\ \delta v_E\\ \delta v_D\\ \delta L\\ \delta l\\ \delta h\end{pmatrix}$$

## 6.2.3. MODELAGEM DOS ERROS DE POSIÇÃO A PARTIR DOS ERROS DE COSSENOS DIRETORES

A equação que define os erros de posição é dada por:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{p}}^{n}&=\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{n}-\dot{\mathbf{p}}^{n}\\ \delta\dot{\mathbf{p}}&=\delta\mathbf{v}\end{aligned}\tag{6.68}$$

Os erros de posição podem ser obtidos, perturbando-se a trajetória nominal, em torno das coordenadas de latitude, longitude e altitude local, cuja modelagem e desenvolvimento produzem:

$$\delta\dot{L} = \frac{1}{R_m + h}\delta v_N - \frac{v_N}{\left(R_m + h\right)^2}\delta h$$

$$\delta\dot{l} = \frac{1}{\left(R_t + h\right)\cos L}\delta v_E + \frac{v_E \sin L}{\left(R_t + h\right)\cos^2 L}\delta L - \frac{v_E}{\left(R_t + h\right)^2 \cos L}\delta h \tag{6.69}$$

$$\delta\dot{h} = -\delta v_D$$

## 6.2.4. MODELO TOTAL DOS ERROS DE NAVEGAÇÃO UTILIZANDO A ABORDAGEM DOS ERROS DE COSSENOS DIRETORES

Agrupando-se as equações (6.49), (6.64) e (6.68), o modelo dos erros total, baseado na propagação dos erros de quaternions, é dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} &= \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \delta\boldsymbol{\psi} - \mathbf{C}_b^n \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\
\delta\dot{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \mathbf{f}^n \times \delta\boldsymbol{\psi} + \mathbf{v}^n \times \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}_l \\
\delta\dot{\mathbf{p}} &= \delta\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{6.70}$$

A partir do desenvolvimento das equações que modelam os erros de orientação, velocidade e posição, o modelo total dos erros representados no espaço de estados fica sendo:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t) \\
\mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)
\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\boldsymbol{\psi}}_{3\times1} \\ \hline \delta\dot{\mathbf{v}}_{3\times1} \\ \hline \delta\dot{\mathbf{p}}_{3\times1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \hline \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \hline \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\psi}_{3\times1} \\ \hline \delta\mathbf{v}_{3\times1} \\ \hline \delta\mathbf{p}_{3\times1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} \\ \hline \mathbf{I}_{3\times3} \\ \hline \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix} . \delta\mathbf{g}_{l(3\times1)}^n + \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{\psi} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \hline \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{G}_{v} \\ \hline \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_{ib(3\times1)}^b \\ \hline \delta\mathbf{f}^b{}_{3\times1} \end{pmatrix} \tag{6.72}$$

Onde:

$$\mathbf{F}_{11}=\begin{pmatrix} 0 & -\left(2\Omega\sin L+2\dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & \left(2\dfrac{v_N}{(R+h)}\right) \\ \left(2\Omega\sin L+2\dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & 0 & \left(2\Omega\cos L+2\dfrac{v_E}{(R+h)}\right) \\ -\left(2\dfrac{v_N}{(R+h)}\right) & -\left(2\Omega\cos L+2\dfrac{v_E}{(R+h)}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.73}$$

$$\mathbf{F}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & -\left(\dfrac{1}{R+h}\right) & 0 \\ \left(\dfrac{1}{R+h}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\tan L}{(R+h)}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.74}$$

$$\mathbf{F}_{13}=\begin{pmatrix} (\Omega\sin L) & 0 & \left(\dfrac{v_E}{(R+h)^2}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\dfrac{v_N}{(R+h)^2}\right) \\ \left(\Omega\cos L+\dfrac{v_E}{(R+h)\cos^2 L}\right) & 0 & -\left(\dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\right) \end{pmatrix} \tag{6.75}$$

$$\mathbf{F}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & (c_{31}f_x+c_{32}f_y+c_{33}f_z) & -(c_{21}f_x+c_{22}f_y+c_{23}f_z) \\ -(c_{31}f_x+c_{32}f_y+c_{33}f_z) & 0 & (c_{11}f_x+c_{12}f_y+c_{13}f_z) \\ (c_{21}f_x+c_{22}f_y+c_{23}f_z) & -(c_{11}f_x+c_{12}f_y+c_{13}f_z) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.76}$$

$$\mathbf{F}_{22}=\begin{pmatrix} \left(\dfrac{v_D}{R+h}\right) & -\left(2\Omega\sin L+2\dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & \left(\dfrac{v_N}{(R+h)}\right) \\ \left(2\Omega\sin L+\dfrac{v_E\tan L}{(R+h)}\right) & \left(\dfrac{v_N\tan L+v_D}{(R+h)}\right) & \left(2\Omega\cos L+\dfrac{v_E}{(R+h)}\right) \\ -\left(2\dfrac{v_N}{(R+h)}\right) & -\left(2\Omega\cos L+2\dfrac{v_E}{(R+h)}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.77}$$

$$\mathbf{F}_{23}=\begin{pmatrix} -\left(2\Omega v_E\cos L+\dfrac{{v_E}^2}{(R+h)\cos^2 L}\right) & 0 & \left(\dfrac{{v_E}^2\tan L-v_Nv_D}{(R+h)^2}\right) \\ -\left(2\Omega v_D\sin L-2\Omega v_N\cos L-\dfrac{v_Ev_N}{(R+h)\cos^2 L}\right) & 0 & -\left(\dfrac{v_Ev_N\tan L-v_Ev_D}{(R+h)^2}\right) \\ (2\Omega v_E\sin L) & 0 & \left(\dfrac{{v_N}^2+{v_E}^2}{(R+h)^2}\right) \end{pmatrix} \tag{6.78}$$

$$\mathbf{G}_{\psi} = \mathbf{G}_{v} = \mathbf{C}_{b}^{n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{31} & c_{31} \end{pmatrix} \tag{6.79}$$

Os vetores que descrevem os ruídos dos giroscópios $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ e dos acelerômetros $\delta\mathbf{f}^{b}$ são compostos de duas parcelas, uma que descreve o bias $b_{\omega}$ e $b_{f}$, e outra que descreve o passeio aleatório $\nu_{\omega}$ e $\nu_{f}$.

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \begin{pmatrix} b_{\omega x} + \nu_{\omega x} \\ b_{\omega y} + \nu_{\omega y} \\ b_{\omega z} + \nu_{\omega z} \end{pmatrix} \tag{6.80}$$

$$\delta\mathbf{f}^{b} = \begin{pmatrix} b_{fx} + \nu_{fx} \\ b_{fy} + \nu_{fy} \\ b_{fz} + \nu_{fz} \end{pmatrix} \tag{6.81}$$

### 6.2.5. MODELAGEM DO ERRO DE ORIENTAÇÃO A PARTIR DOS QUATERNIONS

A utilização de quaternions para efetuar a orientação dos estados de aceleração, velocidade e posição é vantajosa em relação às representações angulares, pois os quaternions são livres de singularidades, são fáceis de normalizar e ao invés de operar com funções trigonométricas operam com multiplicações polinomiais mais simples, tornando-se computacionalmente mais eficientes. Os modelos que utilizam quaternions têm sido amplamente usados nos Filtros de Kalman para determinação da orientação.

Em aplicações de navegação inercial, o quaternion de interesse é aquele que rotaciona um vetor do sistema de coordenadas da plataforma para o sistema de coordenadas NED. Isto se deve ao fato de que os sinais da UMI estão referenciados no sistema de coordenadas da plataforma, devendo, portanto, serem rotacionados para o sistema NED.

$$\mathbf{q}_b^n = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \tag{6.82}$$

A equação diferencial do quaternion é dada por:

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{nb}^b \mathbf{q}_b^n \tag{6.83}$$

Onde:

$$\mathbf{\Omega}_{nb}^b = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nbx} & -\omega_{nby} & -\omega_{nbz} \\ \omega_{nbx} & 0 & \omega_{nbz} & -\omega_{nby} \\ \omega_{nby} & -\omega_{nbz} & 0 & \omega_{nbx} \\ \omega_{nbz} & \omega_{nby} & -\omega_{nbx} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.84}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \begin{bmatrix} \omega_{nbx} & \omega_{nby} & \omega_{nbz} \end{bmatrix}^T \tag{6.85}$$

Os giroscópios medem as velocidades angulares no sistema de coordenadas da plataforma com relação ao referencial inercial, $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$. Estas medidas podem ser decompostas por meio das velocidades angulares: do sistema ECEF em relação ao sistema ECI, $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$, do sistema NED em relação ao sistema ECEF, $\boldsymbol{\omega}_{en}^b$ e do sistema da plataforma (corpo) em relação ao sistema NED, $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$.

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{en}^b + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \tag{6.86}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{en}^b \\ &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b \left( \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \right) \end{aligned} \tag{6.87}$$

Substituindo a notação vetorial da equação (6.87) pela sua correspondente notação matricial, a equação diferencial do quaternion, fica sendo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_b^n &= \mathbf{\Omega}_{nb}^b \mathbf{q}_b^n \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^b \mathbf{q}_b^n - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ie}^b \mathbf{q}_b^n - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{en}^b \mathbf{q}_b^n \end{aligned} \tag{6.88}$$

Agrupando o segundo e terceiro termo da equação (6.88), o quaternion verdadeiro pode então ser convenientemente reescrito como a seguir:

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^b \mathbf{q}_b^n - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^b \mathbf{q}_b^n \tag{6.89}$$

Define-se “erro de quaternion”, como a diferença aritmética entre o quaternion estimado e o quaternion verdadeiro.

$$\delta\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_b^n - \mathbf{q}_b^n \tag{6.90}$$

Note que o vetor que descreve o erro do quaternion, $\delta\mathbf{q}$, é uma diferença aritmética, ao invés de uma quantidade derivada a partir de uma pequena perturbação de rotação entre o quaternion estimado e o quaternion verdadeiro.

O erro de quaternion poderia também ser definido como um erro de rotação, $\delta\mathbf{q}_{rot}$, entre o quaternion estimado e o quaternion verdadeiro (MARKLEY, 2003), (BIJKER, 2008), expresso como a seguir:

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n = \mathbf{q}_b^n \otimes \delta\mathbf{q}_{rot} \tag{6.91}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q}_{rot} &= \left(\mathbf{q}_n^b\right)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \\ &= \mathbf{q}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \end{aligned} \tag{6.92}$$

Esta definição de erro de quaternion parece mais intuitiva que a definição aritmética, no entanto, por empregar multiplicações, a expansão de $\delta\mathbf{q}_{rot}$ é computacionalmente menos eficiente. O modelo aritmético do erro de quaternion é amplamente mais utilizado que o modelo de erro rotacional. No caso de se optar pela representação rotacional, o modelo de erro em espaço de estados será altamente não linear, tornando sua implementação no Filtro de Kalman mais difícil que no caso aritmético.

A velocidade angular do sistema de coordenadas NED em relação ao sistema de coordenadas ECI é escrita vetorialmente e matricialmente por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{in}^b &= \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{in}^n \\ \mathbf{\Omega}_{in}^b &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{\Omega}_{in}^n \end{aligned} \tag{6.93}$$

A saída dos sinais dos giroscópios, $\boldsymbol{\omega}_{UMI} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}$, é proporcional a velocidade angular da plataforma com relação ao sistema de coordenadas inercial representado no sistema da plataforma, $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$, somado a um erro de giroscópio, $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$, o qual é modelado como um vetor de erros estocástico.

$$\boldsymbol{\omega}_{UMI} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} + \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \tag{6.94}$$

Substituindo a equação (6.94) na equação (6.89), a estimativa do quaternion, $\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n}$, se propaga como a seguir:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{b}^{n} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{UMI}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^{b}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Omega}_{ib}^{b} + \delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^{b}\right)\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Omega}_{in}^{b} + \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^{b}\right)\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{ib}^{b}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{in}^{b}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^{b}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^{b}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n}
\end{aligned} \tag{6.95}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\Omega}_{ib}^{b}\hat{\mathbf{q}}_{b}^{n} &= \begin{pmatrix} 0 & -\delta\omega_x & -\delta\omega_y & -\delta\omega_z \\ \delta\omega_x & 0 & \delta\omega_z & -\delta\omega_y \\ \delta\omega_y & -\delta\omega_z & 0 & \delta\omega_x \\ \delta\omega_z & \delta\omega_y & -\delta\omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{q}_0 \\ \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 \\ \hat{q}_0 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_0 & -\hat{q}_1 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{pmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{Q}}_{b}^{n}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}
\end{aligned} \tag{6.96}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \begin{bmatrix} \delta\omega_x & \delta\omega_y & \delta\omega_z \end{bmatrix}^{T} \tag{6.97}$$

O erro aritmético de quaternion pode então ser obtido combinando-se as equações (6.88) e (6.95), tal que:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{q}} &= \dot{\hat{\mathbf{q}}}_b^n - \dot{\mathbf{q}}_b^n \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^b\left(\hat{\mathbf{q}}_b^n - \mathbf{q}_b^n\right) - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^b\left(\hat{\mathbf{q}}_b^n - \mathbf{q}_n^b\right) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{\Omega}_{ib}^b\hat{\mathbf{q}}_b^n - \frac{1}{2}\delta\mathbf{\Omega}_{in}^b\hat{\mathbf{q}}_b^n \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^b\delta\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^b\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{\Omega}_{ib}^b\hat{\mathbf{q}}_b^n - \frac{1}{2}\delta\mathbf{\Omega}_{in}^b\hat{\mathbf{q}}_b^n
\end{aligned}
\tag{6.98}
$$

Considerando que esta equação deve ser integrada, pode parecer à primeira vista, que o erro de quaternion, $\delta\mathbf{q}$, pode ser possivelmente maior que o quaternion verdadeiro, $\mathbf{q}_b^n$, o que não é o caso, pois devido à definição de erro aritmético, a condição inicial de $\delta\mathbf{q}$ é geralmente um vetor nulo. Alem do mais, os valores iniciais do quaternion, $\mathbf{q}_b^n$, ou sua estimativa, $\hat{\mathbf{q}}_b^n$, devem ser normalizados e seu módulo deverá ser unitário, o que também confere um vetor de erro nulo ao quaternion.

Devido ao fato dos erros de giroscópios estarem representados na forma matricial, a equação (6.98) deve ser reescrita substituindo o termo $\delta\mathbf{\Omega}_{ib}^b\hat{\mathbf{q}}_b^n$, pelo seu equivalente $\hat{\mathbf{Q}}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$, conforme definido na equação (6.96). Outro problema é que a matriz que descreve o erro devido à rotação e curvatura da Terra, $\delta\mathbf{\Omega}_{in}^b$, é referenciada ao sistema de coordenadas da plataforma enquanto faz-se mais sentido, definir estes erros no sistema de coordenadas NED. A matriz $\hat{\mathbf{Q}}_b^n$ resolve este problema, pois permite que a matriz $\delta\mathbf{\Omega}_{in}^b$ seja transformada num vetor $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b$, o qual é rotacionado para o sistema de coordenadas NED.

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^b\delta\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^b\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^b \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^b\delta\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^b\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_b^n\mathbf{C}_n^b\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n
\end{aligned}
\tag{6.99}
$$

O vetor $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ representa a composição dos erros da rotação terrestre $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ e da taxa de transporte $\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$, tal que:

$$
\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} -\Omega\sin L\delta L - \dfrac{v_E}{(R+h)^2}\delta h + \dfrac{1}{R+h}\delta v_E \\ \dfrac{v_N}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{1}{R+h}\delta v_N \\ -\Omega\cos L\delta L - \dfrac{v_E\sec^2 L}{(R+h)}\delta L + \dfrac{v_E\tan L}{(R+h)^2}\delta h - \dfrac{\tan L}{(R+h)}\delta v_E \end{pmatrix}
\tag{6.100}
$$

A matriz de rotação $\mathbf{C}_n^b$ e sua inversa $\left(\mathbf{C}_n^b\right)^{-1} = \left(\mathbf{C}_n^b\right)^T = \mathbf{C}_b^n$ são escritas em termos dos elementos do quaternion $\mathbf{q} = [\, q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \,]$, como a seguir:

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_1 q_2 - q_0 q_3\right) & 2\left(q_1 q_3 + q_0 q_2\right) \\ 2\left(q_1 q_2 + q_0 q_3\right) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_2 q_3 - q_0 q_1\right) \\ 2\left(q_1 q_3 - q_0 q_2\right) & 2\left(q_2 q_3 + q_0 q_1\right) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \tag{6.101}$$

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_1 q_2 + q_0 q_3\right) & 2\left(q_1 q_3 - q_0 q_2\right) \\ 2\left(q_1 q_2 - q_0 q_3\right) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_2 q_3 + q_0 q_1\right) \\ 2\left(q_1 q_3 + q_0 q_2\right) & 2\left(q_2 q_3 - q_0 q_1\right) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \tag{6.102}$$

### 6.2.6. MODELAGEM DOS ERROS DE VELOCIDADE A PARTIR DOS ERROS DE QUATERNIONS

Nesta seção procura-se determinar os erros de velocidade no sistema de coordenadas NED, baseado no efeito da propagação do erro de orientação produzido pelo quaternion.

A equação diferencial da velocidade da plataforma navegando pelo sistema NED é dada por:

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) \times \mathbf{v}^n \tag{6.103}$$

Considera-se que os erros de velocidade são obtidos por perturbações $\delta\mathbf{v}$ em torno do estado nominal, tal que:

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \dot{\hat{\mathbf{v}}}^n - \dot{\mathbf{v}}^n \tag{6.104}$$

Considerando também que os acelerômetros medem a força específica da plataforma com relação ao referencial inercial, o erro de sensor é então um vetor desconhecido $\delta\mathbf{f}^b$ que, substituído na equação da velocidade, produz:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{v}}}^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{f}_{UMI} + \hat{\mathbf{g}}^n - \left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times \hat{\mathbf{v}}^n \\ &= \hat{\mathbf{C}}_b^n \left(\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b\right) + \hat{\mathbf{g}}^n - \left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times \hat{\mathbf{v}}^n \\ &= \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{C}}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{g}}^n - \left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times \hat{\mathbf{v}}^n\end{aligned} \tag{6.105}$$

Combinando-se as equações (6.103), (6.104) e (6.105), o erro de velocidade é dado por:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{v}} &= \dot{\hat{\mathbf{v}}}^n - \dot{\mathbf{v}}^n \\ &= \left(\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{C}}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{g}}^n - \left(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n\right)\times \hat{\mathbf{v}}^n\right) - \left(\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}^n\right) \\ &= \delta\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \hat{\mathbf{C}}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}^n \\ &= \delta\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{g}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \delta\mathbf{v}^n - \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}^n\end{aligned} \tag{6.106}$$

Desprezando-se os termos que representam o produto entre erros, finalmente a equação que descreve o erro de velocidade por meio dos erros de quaternions fica sendo:

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \delta\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{v}^n \times \left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}^n \tag{6.107}$$

Nesta equação, a matriz $\delta\mathbf{C}_b^n$ é obtida por meio das matrizes dos cossenos diretores, as quais podem ser expressas como funções do quaternion verdadeiro $\mathbf{q}_b^n$ e do erro de quaternion $\delta\mathbf{q}$, tal que: $\delta\mathbf{C}_b^n = \hat{\mathbf{C}}_b^n\left(\hat{\mathbf{q}}\right) - \mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{q}\right) = \hat{\mathbf{C}}_b^n\left(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\right) - \mathbf{C}_b^n\left(\mathbf{q}\right)$.

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{C}_b^n &= \hat{\mathbf{C}}_b^n - \mathbf{C}_b^n \\ &= \begin{pmatrix} \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3\right) & 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2\right) \\ 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3\right) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2\left(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1\right) \\ 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_2\right) & 2\left(\hat{q}_2\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_1\right) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \end{pmatrix} - \\ &\quad \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_1q_2 - q_0q_3\right) & 2\left(q_1q_3 + q_0q_2\right) \\ 2\left(q_1q_2 + q_0q_3\right) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2\left(q_2q_3 - q_0q_1\right) \\ 2\left(q_1q_3 - q_0q_2\right) & 2\left(q_2q_3 + q_0q_1\right) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.108}$$

Admitindo-se que $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$, o desenvolvimento da equação (6.108), produz:

$$\delta \mathbf{C}_b^n =$$

$$2.\begin{pmatrix} (q_0\delta q_0 + q_1\delta q_1 - q_2\delta q_2 - q_3\delta q_3) & (-q_0\delta q_3 + q_1\delta q_2 + q_2\delta q_1 - q_3\delta q_0) & (q_0\delta q_2 + q_1\delta q_3 + q_2\delta q_0 + q_3\delta q_1) \\ (q_0\delta q_3 + q_1\delta q_2 + q_2\delta q_1 + q_3\delta q_0) & (q_0\delta q_0 - q_1\delta q_1 + q_2\delta q_2 - q_3\delta q_3) & (-q_0\delta q_1 - q_1\delta q_0 + q_2\delta q_3 + q_3\delta q_2) \\ (-q_0\delta q_2 + q_1\delta q_3 - q_2\delta q_0 + q_3\delta q_1) & (q_0\delta q_1 + q_1\delta q_0 + q_2\delta q_3 + q_3\delta q_2) & (q_0\delta q_0 - q_1\delta q_1 - q_2\delta q_2 + q_3\delta q_3 +) \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\delta q_0{}^2 + \delta q_1{}^2 - \delta q_2{}^2 - \delta q_3{}^2) & (-2\delta q_0\delta q_3 + 2\delta q_1\delta q_2) & (2\delta q_0\delta q_2 + 2\delta q_1\delta q_3) \\ (2\delta q_0\delta q_3 + 2\delta q_1\delta q_2) & (\delta q_0{}^2 - \delta q_1{}^2 + \delta q_2{}^2 - \delta q_3{}^2) & (-2\delta q_0\delta q_1 + 2\delta q_2\delta q_3) \\ (-2\delta q_0\delta q_2 + 2\delta q_1\delta q_3) & (2\delta q_0\delta q_1 + 2\delta q_2\delta q_3) & (\delta q_0{}^2 - \delta q_1{}^2 - \delta q_2{}^2 + \delta q_3{}^2) \end{pmatrix}}_{\text{não linear e desprezível} \cong 0} \tag{6.109}$$

Onde:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \delta q_0 & \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{q}_b^n &= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{6.110}$$

Deve ser observado que o segundo termo da equação (6.109) apresenta componentes não lineares. No entanto, por se tratarem de produtos entre os erros de quaternions $(\delta\mathbf{q})$, os quais são considerados pequenos, os mesmos podem ser desprezados. Esta simplificação torna a equação (6.109) linear, possibilitando que a equação (6.107) seja aplicada num FK simples (linear).

### 6.2.7. MODELAGEM DOS ERROS DE POSIÇÃO A PARTIR DOS ERROS DE QUATERNIONS

A equação que descreve o erro de posição utilizando a abordagem de erros de quaternion é idêntica aquela apresentada na abordagem de erros de cossenos diretores (vide equações (6.68) e (6.69)).

### 6.2.8. MODELO TOTAL DOS ERROS DE NAVEGAÇÃO UTILIZANDO A ABORDAGEM DOS ERROS DE QUATERNIONS

Agrupando-se as equações (6.99), (6.106) e (6.68), o modelo dos erros total, baseado na propagação dos erros de quaternions, é dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais não lineares:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^{b}\delta\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^{b}\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_{b}^{n}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_{b}^{n}\mathbf{C}_{n}^{b}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \\
\delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{C}_{b}^{n}\delta\mathbf{f}^{b} + \delta\mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}^{b} + \mathbf{v}^{n}\times\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)\times\delta\mathbf{v}^{n} + \delta\mathbf{g}^{n} \\
\delta\dot{\mathbf{p}} &= \delta\mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{6.111}
$$

### 6.2.9. MODELO SIMPLIFICADO DOS ERROS DE NAVEGAÇÃO UTILIZANDO A ABORDAGEM DOS ERROS DE QUATERNIONS

Assim como na seção anterior, a equação (6.111) pode ser simplificada desprezando-se os efeitos da rotação e curvatura terrestres. Usando estas considerações, obtém-se uma equação em espaço de estados mais linear e, portanto, mais apropriada para ser utilizada com o Filtro de Kalman.

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^{b}\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_{b}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}_{g} \\
\delta\dot{\mathbf{v}} &= \delta\mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}^{b} + \delta\mathbf{g}^{n} + \hat{\mathbf{C}}_{b}^{n}\nabla \\
\delta\dot{\mathbf{p}} &= \delta\mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{6.112}
$$

Na equação (6.109) os elementos do segundo termo da matriz $\delta\mathbf{C}_{b}^{n}$ são produtos de erros, $\delta q$, e possuem pouco efeito sobre o sistema, podendo então ser desprezados. Desprezando o referido termo e efetuando a multiplicação da equação (6.109) por $\mathbf{f}^{b}$ e rearranjando os elementos, o erro de estado de quaternion, $\delta\mathbf{q}$, pode ser colocado fora da matriz como mostra a equação (6.114).

$$
\delta\mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}^{b} \approx 2.\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_0\delta q_0 + q_1\delta q_1 - \\ q_2\delta q_2 - q_3\delta q_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -q_0\delta q_3 + q_1\delta q_2 + \\ q_2\delta q_1 - q_3\delta q_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_0\delta q_2 + q_1\delta q_3 + \\ q_2\delta q_0 + q_3\delta q_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} q_0\delta q_3 + q_1\delta q_2 + \\ q_2\delta q_1 + q_3\delta q_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_0\delta q_0 - q_1\delta q_1 + \\ q_2\delta q_2 - q_3\delta q_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -q_0\delta q_1 - q_1\delta q_0 + \\ q_2\delta q_3 + q_3\delta q_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -q_0\delta q_2 + q_1\delta q_3 - \\ q_2\delta q_0 + q_3\delta q_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_0\delta q_1 + q_1\delta q_0 + \\ q_2\delta q_3 + q_3\delta q_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_0\delta q_0 - q_1\delta q_1 - \\ q_2\delta q_2 + q_3\delta q_3 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{pmatrix}
\tag{6.113}
$$

$$\delta \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b \approx 2.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 f_x^b - q_3 f_y^b + \\ q_2 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_1 f_x^b + q_2 f_y^b + \\ q_3 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -q_2 f_x^b + q_1 f_y^b + \\ q_0 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -q_3 f_x^b - q_0 f_y^b + \\ q_1 f_z^b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q_3 f_x^b + q_0 f_y^b - \\ q_1 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_2 f_x^b - q_1 f_y^b - \\ q_0 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_1 f_x^b + q_2 f_y^b + \\ q_3 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_0 f_x^b - q_3 f_y^b + \\ q_2 f_z^b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -q_2 f_x^b + q_1 f_y^b + \\ q_0 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_3 f_x^b + q_0 f_y^b - \\ q_1 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -q_0 f_x^b + q_3 f_y^b - \\ q_2 f_z^b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} q_1 f_x^b + q_2 f_y^b + \\ q_3 f_z^b \end{pmatrix} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{pmatrix} \tag{6.114}$$

$$\delta \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b = \mathbf{F}_v \delta \mathbf{q} \tag{6.115}$$

Outra questão a ser considerada é que os erros de medidas dos acelerômetros $\delta \mathbf{f}^b$ e dos giroscópios $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ são multiplicados pelas matrizes estimadas $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ e $\frac{1}{2}\mathbf{Q}_b^n$, escritas respectivamente como:

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = \begin{pmatrix} \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_2 - \hat{q}_0\hat{q}_3\right) & 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2\right) \\ 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3\right) & \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 & 2\left(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1\right) \\ 2\left(\hat{q}_1\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_2\right) & 2\left(\hat{q}_2\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_1\right) & q_0^2 - \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 \end{pmatrix} \tag{6.116}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_n^b = \begin{pmatrix} -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 \\ \hat{q}_0 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_0 & -\hat{q}_1 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_0 \end{pmatrix} \tag{6.117}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_0 & \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 \end{bmatrix}^T \tag{6.118}$$

Estas matrizes modificam os erros de sensores e, portanto, o quaternion $\mathbf{q}$, será mais afetado que os erros de quaternions, $\delta \mathbf{q}$. Para simplificar o modelo que descreve os erros, as matrizes estimadas são substituídas pelos seus pares determinísticos, tal que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_b^n &\cong \mathbf{C}_b^n = \mathbf{G}_v \\ \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_n^b &\cong \frac{1}{2}\mathbf{Q}_n^b = \mathbf{G}_q \end{aligned} \tag{6.119}$$

Finalmente, o modelo reduzido dos erros de orientação, velocidade e posição, representados no espaço de estados fica sendo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t)\\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned} \tag{6.120}$$

$$\begin{pmatrix}\delta\dot{\mathbf{q}}_{4\times1}\\ \hline \delta\dot{\mathbf{v}}_{3\times1}\\ \hline \delta\dot{\mathbf{p}}_{3\times1}\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c}\mathbf{F}_q & \mathbf{0}_{4\times3} & \mathbf{0}_{4\times3}\\ \hline \mathbf{F}_v & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \hline \mathbf{0}_{3\times4} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}\delta\mathbf{q}_{4\times1}\\ \hline \delta\mathbf{v}_{3\times1}\\ \hline \delta\mathbf{p}_{3\times1}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c}\mathbf{G}_q & \mathbf{0}_{4\times3}\\ \hline \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{G}_v\\ \hline \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}\delta\boldsymbol{\omega}^b_{ib(3\times1)}\\ \hline \delta\mathbf{f}^b{}_{3\times1}\end{array}\right) \tag{6.121}$$

$$\delta\mathbf{z} = \left(\begin{array}{c|c|c}\mathbf{I}_{4\times4} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \hline \mathbf{0}_{3\times4} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \hline \mathbf{0}_{3\times4} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}\delta\mathbf{q}_{4\times1}\\ \hline \delta\mathbf{v}_{3\times1}\\ \hline \delta\mathbf{p}_{3\times1}\end{array}\right) + \mathbf{v}_k \tag{6.122}$$

Onde:

$$\mathbf{F}_q = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^b_{ib} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\omega_{ibx} & -\omega_{iby} & -\omega_{ibz}\\ \omega_{ibx} & 0 & \omega_{ibz} & -\omega_{iby}\\ \omega_{iby} & -\omega_{ibz} & 0 & \omega_{ibx}\\ \omega_{ibz} & \omega_{iby} & -\omega_{ibx} & 0\end{pmatrix} \tag{6.123}$$

$$\mathbf{G}_q = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^b_n = \hat{\mathbf{Q}}^b_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3\\ \hat{q}_0 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2\\ \hat{q}_3 & \hat{q}_0 & -\hat{q}_1\\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_0\end{pmatrix} \tag{6.124}$$

$$\mathbf{F}_v = 2.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0 f^b_x - q_3 f^b_y +\\ q_2 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}q_1 f^b_x + q_2 f^b_y +\\ q_3 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-q_2 f^b_x + q_1 f^b_y +\\ q_0 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-q_3 f^b_x - q_0 f^b_y +\\ q_1 f^b_z\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}q_3 f^b_x + q_0 f^b_y -\\ q_1 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}q_2 f^b_x - q_1 f^b_y -\\ q_0 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}q_1 f^b_x + q_2 f^b_y +\\ q_3 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}q_0 f^b_x - q_3 f^b_y +\\ q_2 f^b_z\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-q_2 f^b_x + q_1 f^b_y +\\ q_0 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}q_3 f^b_x + q_0 f^b_y -\\ q_1 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-q_0 f^b_x + q_3 f^b_y -\\ q_2 f^b_z\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}q_1 f^b_x + q_2 f^b_y +\\ q_3 f^b_z\end{pmatrix}\end{pmatrix} \tag{6.125}$$

$$\mathbf{G}_v = \mathbf{C}^n_b = \begin{pmatrix}q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2)\\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1)\\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2\end{pmatrix} \tag{6.126}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \begin{pmatrix} b_{\omega x} + \nu_{\omega x} \\ b_{\omega y} + \nu_{\omega y} \\ b_{\omega z} + \nu_{\omega z} \end{pmatrix} \tag{6.127}$$

$$\delta\mathbf{f}^{b} = \begin{pmatrix} b_{fx} + \nu_{fx} \\ b_{fy} + \nu_{fy} \\ b_{fz} + \nu_{fz} \end{pmatrix} \tag{6.128}$$

### 6.2.10. MODELAGEM DAS EQUAÇÕES QUE DESCREVEM OS ERROS DE MEDIÇÃO

Para compor a fusão sensorial, emprega-se neste trabalho, um conjunto de sensores auxiliares, utilizados para minimizar os erros de navegação. A fusão sensorial proposta, utiliza um hodômetro, uma bússola eletrônica e um conjunto de marcas topográficas *"landmarks"*, sendo que, a saída do hodômetro é adequadamente convertida em medidas de velocidade.

Admitindo-se que o hodômetro possui um erro de fator de escala $k_{fe}$, a velocidade medida da plataforma $v_m^b$ pode ser expressar por:

$$v_m^b \approx v_x^b - k_{fe} v_x^b + \boldsymbol{\upsilon}_v \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m^b &\approx \mathbf{v}_{mx}^b - \mathbf{v}_{mx}^b k_{fe} + \boldsymbol{\upsilon}_v \\ &\approx \begin{bmatrix} v_x^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_x^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k_{fe} + \boldsymbol{\upsilon}_v \end{aligned} \tag{6.130}$$

onde $v_x^b$ é a componente da velocidade da plataforma na direção $x$, ou seja, na direção do eixo de deslocamento do veículo. A componente $\upsilon_v$ é um ruído de medição associado à velocidade, o qual se assume ser branco e de média zero.

A partir da equação da velocidade medida, pode se determinar uma nova equação que represente o erro de velocidade, expresso no sistema de coordenadas da navegação.

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_m^n &= \hat{\mathbf{v}}^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{v}_m^b \\
&= \hat{\mathbf{v}}^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \left( \mathbf{v}_{mx}^b - \mathbf{v}_{mx}^b k_{fe} \right) \\
&= \hat{\mathbf{v}}^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{v}_{mx}^b + \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{v}_{mx}^b k_{fe} + \hat{\mathbf{C}}_b^n \boldsymbol{\upsilon}_v \\
&= \hat{\mathbf{v}}^n - \hat{\mathbf{v}}_m^n + \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{v}_{mx}^b k_{fe} + \boldsymbol{\upsilon}_v^n \\
&= \delta \hat{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{v}_{mx}^b k_{fe} + \boldsymbol{\upsilon}_v^n \\
&= \delta \hat{\mathbf{v}}^n + \mathbf{v}_m^n \hat{k}_{fe} + \boldsymbol{\upsilon}_v^n
\end{aligned}
\tag{6.131}
$$

As marcas topográficas fornecem informações de posição expressas no sistema de coordenadas geodésico, cujo modelo de erro de posição é dado por:

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{p}_m &= \hat{\mathbf{p}}^n - \mathbf{p}_m^n \\
&= \delta \hat{\mathbf{p}}^n + \boldsymbol{\upsilon}_p
\end{aligned}
\tag{6.132}
$$

onde $\hat{\mathbf{p}}^n$ é o vetor das posições estimadas (latitude, longitude e altitude), $\mathbf{p}_m^n$ é a posição do *landmark*, e $\boldsymbol{\upsilon}_p$ é um ruído de medição associado à posição, assumido ser um ruído branco de média zero.

A bússola eletrônica fornece informações de inclinação e azimute expressas no sistema de coordenadas geodésico. Dado que os ângulos estimados também estão no mesmo sistema, o modelo de erro de medição angular fica sendo:

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{\psi}_m &= \hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}_m \\
&= \delta \hat{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\upsilon}_\psi
\end{aligned}
\tag{6.133}
$$

Portanto, os erros dos sensores de medição são descritos pelas equações (6.131) – (6.133), as quais podem ser resumidas por:

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{\psi}_m &= \delta \hat{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\upsilon}_\psi \\
\delta \mathbf{v}_m^n &= \delta \hat{\mathbf{v}}^n + \mathbf{v}_m^n \hat{k}_{fe} + \boldsymbol{\upsilon}_v^n \\
\delta \mathbf{p}_m &= \delta \hat{\mathbf{p}}^n + \boldsymbol{\upsilon}_p
\end{aligned}
\tag{6.134}
$$

Por serem equações lineares, torna-se possível escrever as equações dos erros de medição matricialmente, tal como:

$$\delta\mathbf{z}=\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{\psi}_m\\ \delta\mathbf{v}_m^n\\ \delta\mathbf{p}_m^n\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}\delta\phi\\ \delta\theta\\ \delta\psi\\ \hline \delta v_N\\ \delta v_E\\ \delta v_D\\ \hline \delta_L\\ \delta l\\ \delta h\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}0\\0\\0\\ \hline v_N^n\\ v_E^n\\ v_D^n\\ \hline 0\\0\\0\end{array}\right)\hat{k}_{fe}+\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}\sigma_\phi^2&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\sigma_\theta^2&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\sigma_\psi^2&0&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&\sigma_{v_N}^2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sigma_{v_E}^2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sigma_{v_D}^2&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&0&\sigma_L^2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sigma_l^2&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\sigma_h^2\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}\upsilon_\phi\\ \upsilon_\theta\\ \upsilon_\psi\\ \hline \upsilon_N\\ \upsilon_E\\ \upsilon_D\\ \hline \upsilon_L\\ \upsilon_l\\ \upsilon_h\end{array}\right)$$

(6.135)

## 6.3. ORTOGONALIZAÇÃO E NORMALIZAÇÃO

Em sistemas de navegação inercial *strapdown*, ao se desenvolver algoritmos para determinação da orientação da plataforma, é interessante aplicar um teste de consistência nos elementos da matriz de orientação (MO) ou nos elementos do quaternion, a fim de minimizar a propagação de erros (TITTERTON, 1997). Estas técnicas, são geralmente obtidas, aplicando-se testes de ortogonalidade e normalidade sobre os elementos dos cossenos diretores e quaternions.

### 6.3.1. ORTOGONALIZAÇÃO DOS COSSENOS DIRETORES

Dado que as linhas e colunas de uma MO dos cossenos diretores, representam a projeção dos vetores unitários de cada eixo do sistema de coordenadas da plataforma, as mesmas devem sempre ser ortogonais entre si, e a soma do quadrado dos elementos de cada linha ou coluna devem ser unitários, isto é, $\sum_{i=1}^{3} c_{ij} = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} = 1$.

As condições para ortogonalidade das i-ésima, j-ésima e k-ésima linhas ou colunas de uma matriz de orientação, aqui denotada por $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{C}_j$ e $\mathbf{C}_k$ é que o produto escalar entre duas linhas ou colunas quaisquer sejam igual à zero. Em aplicações práticas, este não é necessariamente o caso então se pode definir um resíduo a partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}_{ij} &= \mathbf{C}_i \mathbf{C}_j^{\,T} \\ \mathbf{\Delta}_{ik} &= \mathbf{C}_i \mathbf{C}_k^{\,T} \\ \mathbf{\Delta}_{jk} &= \mathbf{C}_j \mathbf{C}_k^{\,T}, \end{aligned} \tag{6.136}$$

onde $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ik}$ e $\Delta_{jk}$ são os erros de ortogonalidade entre as componentes $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{C}_j$ e $\mathbf{C}_k$.

Admitindo que cada linha ou coluna de $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{C}_j$ e $\mathbf{C}_k$ possuam erros igualmente distribuídos, pode-se efetuar uma correção a partir de

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{ic} = \hat{\mathbf{C}}_i - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ij}\hat{\mathbf{C}}_j \\ \mathbf{C}_{ic} = \hat{\mathbf{C}}_i - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ik}\hat{\mathbf{C}}_k \end{cases}, \tag{6.137}$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{jc} = \hat{\mathbf{C}}_j - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ij}\hat{\mathbf{C}}_i \\ \mathbf{C}_{jc} = \hat{\mathbf{C}}_j - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{jk}\hat{\mathbf{C}}_k \end{cases}, \tag{6.138}$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{kc} = \hat{\mathbf{C}}_k - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ik}\hat{\mathbf{C}}_i \\ \mathbf{C}_{kc} = \hat{\mathbf{C}}_k - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{jk}\hat{\mathbf{C}}_j \end{cases}. \tag{6.139}$$

Agrupando-se a contribuição de erro de ortogonalidade de cada componente nas equações (6.137) – (6.139), obtêm-se as linhas ou colunas estimadas.

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{ic} = \hat{\mathbf{C}}_i - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ij}\hat{\mathbf{C}}_j - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ik}\hat{\mathbf{C}}_k \\ \mathbf{C}_{jc} = \hat{\mathbf{C}}_j - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ij}\hat{\mathbf{C}}_i - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{jk}\hat{\mathbf{C}}_k \\ \mathbf{C}_{kc} = \hat{\mathbf{C}}_k - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ik}\hat{\mathbf{C}}_i - \dfrac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{jk}\hat{\mathbf{C}}_j \end{cases}. \tag{6.140}$$

### 6.3.2. NORMALIZAÇÃO DOS COSSENOS DIRETORES

Os erros de normalização podem ser identificados comparando-se a soma dos quadrados dos elementos em cada linha ou coluna, com um valor unitário, ou seja

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta}_{ii} = 1 - \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{\Delta}_{jj} = 1 - \mathbf{C}_j \mathbf{C}_j^T \\ \mathbf{\Delta}_{kk} = 1 - \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^T \end{cases} . \tag{6.141}$$

Rearranjando as equações acima e utilizando o critério de distribuição de erros discutido anteriormente, chega-se à

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{ic} = \hat{\mathbf{C}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{ii}\hat{\mathbf{C}}_i \\ \mathbf{C}_{jc} = \hat{\mathbf{C}}_j - \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{jj}\hat{\mathbf{C}}_j \\ \mathbf{C}_{kc} = \hat{\mathbf{C}}_k - \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}_{kk}\hat{\mathbf{C}}_k \end{cases} . \tag{6.142}$$

Nas equações (6.137) – (6.142), $\hat{\mathbf{C}}_{(i,j,k)}$ representam os valores estimados, enquanto que $\mathbf{C}_{(i,j,k)c}$ representam os valores corrigidos.

### 6.3.3. NORMALIZAÇÃO DO QUATERNION

Um quaternion de orientação, guarda a seguinte relação, $\left(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right) = 1$. Assim sendo, a normalização do quaternion pode ser obtida, comparando-se a soma do quadrado de seus elementos com a unidade. O erro de normalização é dado por:

$$\delta\mathbf{q} = 1 - \mathbf{q}.\mathbf{q}^T . \tag{6.143}$$

Segundo Bar-Itzhack (1984), a forma mais eficiente computacionalmente, e que propaga o menor erro ao se normalizar um quaternion, é dividir cada elemento

do quaternion por sua norma euclidiana, portanto, o quaternion normalizado pode ser obtido por:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{norm} &= \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{\mathbf{q}.\mathbf{q}^T}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\delta\mathbf{q}}}\mathbf{q}\end{aligned} . \tag{6.144}$$

Linearizando o termo $\frac{1}{\sqrt{1-\delta\mathbf{q}}} = \left(1-\delta\mathbf{q}\right)^{-0,5}$, por serie de Taylor, obtém-se:

$$\mathbf{q}_{norm} \approx \left(1+\frac{1}{2}\delta\mathbf{q}\right)\mathbf{q} . \tag{6.145}$$

Deve ser observado que os processos de ortogonalização e normalização, por si só, não são capazes de corrigir os erros provenientes do ciclo computacional anterior e, portanto, um erro que ocorra anteriormente em um único elemento, afetará os demais elementos durante as operações de ortogonalização e normalização. Diante disto, recomenda-se que estas técnicas sejam utilizadas com muita cautela.

## 6.4. CALIBRAÇÃO E ALINHAMENTO INICIAL

### 6.4.1. CALIBRAÇÃO

A calibração dos sensores inerciais, não é propriamente uma intervenção física nos sensores da UMI. Na verdade trata-se de um processo estatístico onde se procura estimar os valores de "*bias*[13]" e fatores de escalas de giroscópios e através destes determinar os "*bias*" e fatores de escala dos acelerômetros. Este procedimento é bastante sensível e demorado, e deve ser feito com a plataforma em repouso.

[13] O processo de determinação do "*bias*" compreende duas etapas: a extração do *"average bias"*, o qual pode ser obtido pelo Desvio Padrão de Allan e o *"turn-on bias"*, o qual pode ser estimado por um Filtro de Kalman.

A calibração inicial da UMI é muito importante, ou mesmo imprescindível, em sistemas de navegação inercial onde não se disponha de informações auxiliares para estimar estados de acelerômetro e giroscópios usando fusão sensorial, pois sem a calibração inicial torna-se impossível reconstruir com relativa precisão as trajetórias percorridas pela plataforma. Para se efetuar a calibração inicial, deve-se dispor de sensores auxiliares com precisão elevada (inclinômetros, bússolas, GPS, etc.) e então combinar as informações através de um filtro de Kalman para se obter as estimativas dos erros de acelerômetros e giroscópios (NEBOT, 1999).

### 6.4.2. ALINHAMENTO INICIAL

O alinhamento inicial ou orientação inicial é necessário para transportar as grandezas medidas pelos acelerômetros fixados na plataforma para o sistema de coordenadas NED. Portanto o alinhamento inicial é a determinação da matriz de orientação inicial que alinha o sistema de coordenadas da plataforma com o sistema de navegação local NED.

O alinhamento inicial pode ser feito de muitas formas, sendo que a mais simples é a utilização de uma técnica conhecida por *"girocompassing"*, que utiliza os acelerômetros da UMI para efetuar o nivelamento e os giroscópios para determinar o norte geográfico.

O nivelamento é obtido inclinando-se a plataforma até que apenas o acelerômetro do eixo *z* apresente leitura igual à aceleração gravitacional ($-\mathbf{g}$). Para determinação do norte geográfico, gira-se a UMI em torno do eixo *z* até que o giroscópio do eixo *x* apresente leitura nula e o giroscópio do eixo *y* apresente a velocidade de rotação da Terra ($\Omega$).

A técnica de *girocompassing* não se aplica à UMI's que possuam giroscópios com sensibilidade $\boldsymbol{\omega}_b$, inferior a $\Omega = 15,04\left(°/h\right)$ ou $\Omega = 72,92115\times10^{-6}\left(rad/s\right)$, pois nestes casos, a informação da velocidade de rotação da Terra, irá se misturar (ficará oculta) ao sinal de ruído dos giroscópios (SHIN, 2001). Este é o caso da UMI empregada neste trabalho, cujos gráficos mostrados na figura 6.1, mostram que os sinais fornecidos pelos giroscópios com a UMI em regime estacionário, encontram-se numa ordem de grandeza, aproximadamente mil vezes inferior, a resolução desejada para se efetuar a técnica de *girocompassing*.

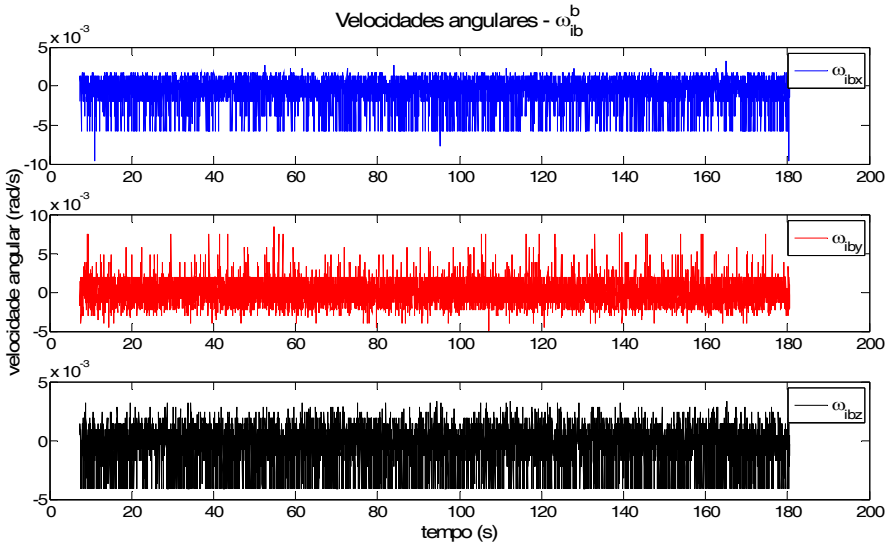



Figura 6.1 – Velocidades angulares dos giroscópios com a UMI VG-700AA-202 colocada em regime estacionário (magnitude $10^{-3}$)

### 6.4.3. ALINHAMENTO ESTACIONÁRIO TERRESTRE UTILIZANDO O MÉTODO DA MATRIZ DE ORIENTAÇÃO

Na seção anterior mencionou-se o método de alinhamento inicial pela técnica de *girocompassing*, entretanto tal técnica exige que a plataforma seja nivelada e depois rotacionada para se obter o norte geográfico. Uma técnica semelhante que não necessita rotacionar a plataforma é o alinhamento estacionário terrestre pelo método da matriz de orientação, como descrito a seguir.

Os acelerômetros e giroscópios montados na plataforma medem respectivamente a força específica $\mathbf{f}^b$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$. Estas grandezas se relacionam com o sistema de navegação local NED da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{f}^n , \tag{6.146}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n . \tag{6.147}$$

Pode-se definir um vetor $\boldsymbol{\lambda}$ que ao mesmo instante seja ortogonal ao vetor força específica $\mathbf{f}^b$ e ao vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$, ou seja: $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^b$. A partir destas considerações torna-se possível montar uma igualdade matricial tal que:

$$\left( \mathbf{f}^b \;\middle|\; \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda}^b \right) = \mathbf{C}_n^b \left( \mathbf{f}^n \;\middle|\; \boldsymbol{\omega}_{ib}^n \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda}^n \right) \tag{6.148}$$

Admitindo-se que durante a etapa de alinhamento a UMI está perfeitamente nivelada e em repouso, a saída dos acelerômetros e giroscópios são: $\mathbf{f}^n = \mathbf{g}^n$ e $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b$. Logo, a equação (6.148) pode ser reescrita como:

$$\left( \mathbf{f}^b \;\middle|\; \boldsymbol{\omega}_{ie}^b \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda}^b \right) = \mathbf{C}_n^b \left( \mathbf{g}^n \;\middle|\; \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda}^n \right) \tag{6.149}$$

A transposição da equação acima produz,

$$\begin{pmatrix} \left(\mathbf{g}^b\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^b\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^b\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{g}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^n\right)^T \end{pmatrix} \mathbf{C}_b^n \tag{6.150}$$

Logo, a matriz de alinhamento é obtida fazendo-se:

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{g}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^n\right)^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \left(\mathbf{g}^b\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^b\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^b\right)^T \end{pmatrix} \tag{6.151}$$

Desde que a UMI não esteja nos pólos terrestres, onde o vetor gravidade é paralelo à rotação terrestre e, portanto, $\boldsymbol{\lambda} = 0$, a solução da equação (6.151) existe, sendo que a matriz inversa referenciada ao sistema NED, é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \left(\mathbf{g}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^n\right)^T \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ \Omega\cos L & 0 & -\Omega\sin L \\ 0 & g\Omega\cos L & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\tan L}{g} & \dfrac{1}{\Omega\cos L} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{g\Omega\cos L} \\ \dfrac{1}{g} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.152}$$

A matriz de orientação tal como obtida pela equação (6.152) pode não satisfazer os requisitos de ortogonalidade e normalidade, no entanto, este problema pode ser contornado transformando-se os elementos da MCD em ângulos de Euler e depois transformando os ângulos de Euler na MCD (SHIN, 2001).

Considerando-se que os sensores da UMI sejam livres de erros (o que não ocorre na prática), a matriz de orientação inicial pode ser determinada substituindo-se a equação (6.152) na equação (6.151).

### 6.4.4. ERRO DE ALINHAMENTO ESTACIONÁRIO TERRESTRE

Durante a etapa do alinhamento inicial, a UMI fornece os dados que são sentidos pelos acelerômetros e giroscópios em estado estacionário. Considerando que a UMI esteja fixada sobre uma plataforma nivelada, e dado que estes sinais possuam erros, tal que seus valores medidos $\left(\tilde{\mathbf{f}}^b, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^b\right)$ sejam dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^b &= \mathbf{g}^b + \delta\mathbf{f}^b \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta\boldsymbol{\omega}^b \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^b &= \boldsymbol{\lambda}^b + \delta\boldsymbol{\lambda}^b \end{aligned} \tag{6.153}$$

A equação (6.151) pode ser reescrita, tal como:

$$\tilde{\mathbf{C}}_b^n = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{g}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^n\right)^T \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \left(\mathbf{f}^b\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\right)^T \\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^b\right)^T \end{pmatrix} \tag{6.154}$$

Para pequenos erros angulares (ROGERS, 2000), pode-se definir uma matriz de alinhamento medida, $\tilde{\mathbf{C}}_b^n$, tal que:

$$\tilde{\mathbf{C}}_b^n = \left(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n \tag{6.155}$$

Igualando-se as equações (6.154) e (6.155), tem-se:

$$\left(\mathbf{I}-\delta\mathbf{\Psi}\right)\mathbf{C}_b^n=\begin{pmatrix}\left(\mathbf{g}^n\right)^T\\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)^T\\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^n\right)^T\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}\left(\mathbf{g}^b\right)^T\\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^b\right)^T\\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^b\right)^T\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(\delta\mathbf{f}^b\right)^T\\ \hline \left(\delta\boldsymbol{\omega}^b\right)^T\\ \hline \left(\delta\boldsymbol{\lambda}^b\right)^T\end{pmatrix}\right] \tag{6.156}$$

Subtraindo a equação (6.151) da equação (6.156), chega-se à:

$$-\delta\mathbf{\Psi}\mathbf{C}_b^n=\begin{pmatrix}\left(\mathbf{g}^n\right)^T\\ \hline \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)^T\\ \hline \left(\boldsymbol{\lambda}^n\right)^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\left(\delta\mathbf{f}^b\right)^T\\ \hline \left(\delta\boldsymbol{\omega}^b\right)^T\\ \hline \left(\delta\boldsymbol{\lambda}^b\right)^T\end{pmatrix} \tag{6.157}$$

A parcela $-\delta\mathbf{\Psi}\mathbf{C}_b^n=\delta\mathbf{C}_b^n$ representa o erro da matriz de alinhamento inicial. A matriz $\delta\mathbf{\Psi}$ representa a forma anti-simétrica dos erros angulares $\delta\phi,\delta\theta\ e\ \delta\psi$, sendo expressa por:

$$-\delta\mathbf{\Psi}=\begin{pmatrix}0 & \delta\psi & -\delta\theta\\ -\delta\psi & 0 & \delta\phi\\ \delta\theta & -\delta\phi & 0\end{pmatrix} \tag{6.158}$$

Para verificar a componente do erro $\delta\mathbf{\Psi}$ na equação (6.157) admite-se que a UMI esteja perfeitamente alinhada com o referencial de navegação NED, onde $\mathbf{C}_b^n=\mathbf{I}$.

$$-\delta\mathbf{\Psi}=\begin{pmatrix}\dfrac{\tan L}{g} & \dfrac{1}{\Omega\cos L} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{g\Omega\cos L}\\ \dfrac{1}{g} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta f_x & \delta f_y & \delta f_z\\ \delta\omega_{ibx} & \delta\omega_{iby} & \delta\omega_{ibz}\\ \delta\lambda_x & \delta\lambda_y & \delta\lambda_z\end{pmatrix} \tag{6.159}$$

Substituindo a equação (6.158) na equação (6.159) e desenvolvendo o produto entre as matrizes no segundo termo, chega-se à:

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta\psi & -\delta\theta \\ -\delta\psi & 0 & \delta\phi \\ \delta\theta & -\delta\phi & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{\delta f_x \tan L}{g} + \dfrac{\delta\omega_{ibx}}{\Omega\cos L} & \dfrac{\delta f_y \tan L}{g} + \dfrac{\delta\omega_{iby}}{\Omega\cos L} & \dfrac{\delta f_z \tan L}{g} + \dfrac{\delta\omega_{ibz}}{\Omega\cos L} \\ \hline \dfrac{\delta\lambda_x}{g\Omega\cos L} & \dfrac{\delta\lambda_y}{g\Omega\cos L} & \dfrac{\delta\lambda_z}{g\Omega\cos L} \\ \hline \dfrac{\delta f_x}{g} & \dfrac{\delta f_y}{g} & \dfrac{\delta f_z}{g} \end{array}\right) \tag{6.160}$$

O vetor $\delta\boldsymbol{\lambda}^b = \delta\mathbf{f}^b \times \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ é dado por:

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\lambda}^b &= \begin{bmatrix} \delta\lambda_x & \delta\lambda_y & \delta\lambda_z \end{bmatrix}^T \\ &\approx \delta\mathbf{f}^b \times \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \mathbf{g}^n \times \delta\boldsymbol{\omega}^b \\ &\approx \begin{bmatrix} -\delta f_y \Omega \sin L - g\delta\omega_{iby} \\ \delta f_x \Omega \sin L + \delta f_z \Omega \cos L + g\delta\omega_{ibx} \\ -\delta f_y \Omega \cos L \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.161}$$

Dado que cada componente de erro $\delta\phi, \delta\theta \; e \; \delta\psi$ aparecem duas vezes no termo esquerdo da equação (6.160), podem-se determinar os termos médios $\bar{\delta}\phi, \bar{\delta}\theta \; e \; \bar{\delta}\psi$ , tal que:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\phi &= \frac{1}{2}\left( \frac{\delta\lambda_z}{g\Omega\cos L} - \frac{\delta f_y}{g} \right) \\ \bar{\delta}\theta &= \frac{1}{2}\left( \frac{\delta f_x}{g} - \frac{\delta f_z \tan L}{g} - \frac{\delta\omega_{ibz}}{\Omega\cos L} \right) \\ \bar{\delta}\psi &= \frac{1}{2}\left( \frac{\delta f_y \tan L}{g} + \frac{\delta\omega_{iby}}{\Omega\cos L} - \frac{\delta\lambda_x}{g\Omega\cos L} \right) \end{aligned} \tag{6.162}$$

Substituindo-se os valores de $\delta\lambda_x \; e \; \delta\lambda_z$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\phi &= -\frac{\delta f_y}{g} \\ \bar{\delta}\theta &= \frac{1}{2}\left( \frac{\delta f_x}{g} - \frac{\delta f_z \tan L}{g} - \frac{\delta\omega_{ibz}}{\Omega\cos L} \right) \\ \bar{\delta}\psi &= \frac{\delta f_y \tan L}{g} + \frac{\delta\omega_{iby}}{\Omega\cos L} \end{aligned} \tag{6.163}$$

A partir da equação (6.163), é possível verificar a influencia dos erros dos sensores inerciais sobre a matriz de orientação inicial. Para ilustrar o problema, admita apenas um erro de *bias* de giroscópio $\delta\omega_{ib} = 1 \sim 10^0 / hr$ com a UMI sendo ensaiada numa latitude $L = -23^0$ (latitude aproximada da cidade de São Paulo). Neste caso, o segundo termo do erro de azimute $\bar{\delta}\psi$ produz um erro de alinhamento $\delta\psi \cong 0,08^0 \sim 0,72^0$, como mostra a figura a seguir.

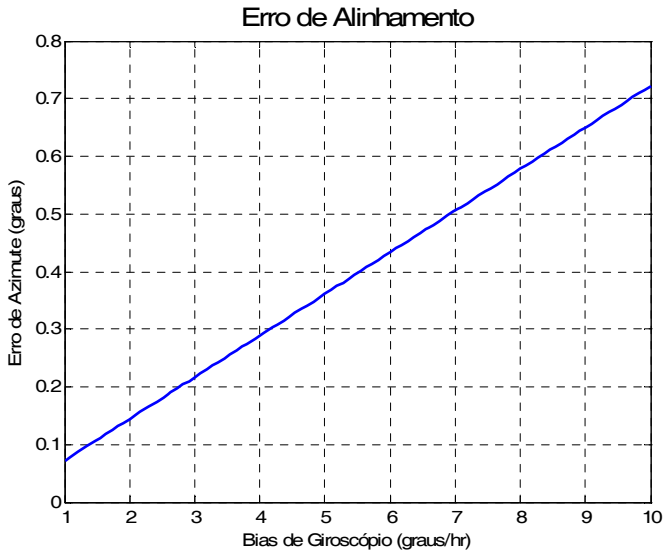



Figura 6.2 – Erro de alinhamento inicial devido aos erros de sensores inerciais

## 6.4.5. ALINHAMENTO ESTACIONÁRIO FINO

Como ficou demonstrado na seção anterior, a determinação da matriz de orientação inicial $\mathbf{C}_b^n(0)$ é sensível aos erros presentes nos sinais dos sensores inerciais e, portanto, torna-se impossível de se determinar com relativa precisão $\mathbf{C}_b^n(0)$ utilizando-se somente o método analítico. Por este motivo e com o objetivo de promover um alinhamento fino na $\mathbf{C}_b^n$ obtida na fase anterior, a inclusão de um filtro de Kalman juntamente com sensores auxiliares de orientação (magnetômetro e inclinômetros) torna-se necessário. A figura a seguir ilustra um possível algoritmo que combina os sinais da UMI com uma bússola eletrônica (dotada de um

magnetômetro e dois inclinômetros) num filtro de Kalman para estimar a matriz de orientação inicial $\mathbf{C}_b^n(0)$.

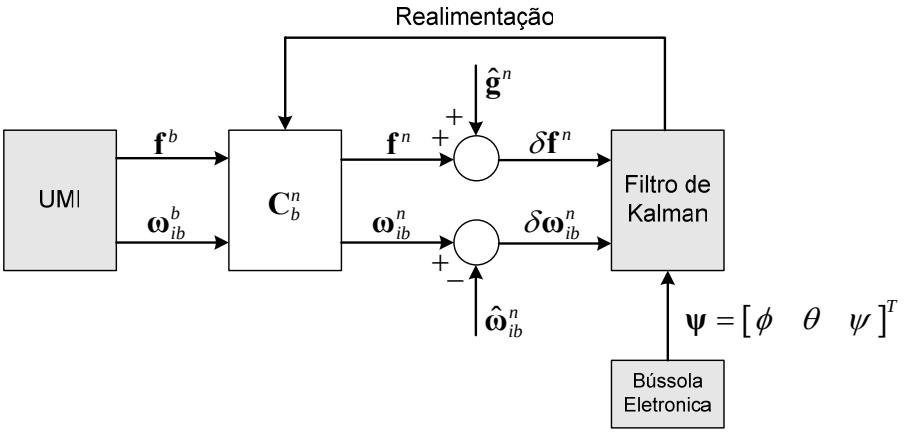



Figura 6.3 – Possível Filtro de Kalman para efetuar o ajuste fino da matriz de orientação inicial $\mathbf{C}_b^n(0)$

## 6.5. LIMITAÇÃO DA INCERTEZA DO ERRO DE POSIÇÃO

O filtro FKAS que realiza a fusão sensorial para navegação inercial é um modelo computacional não linear bastante complexo. Por esse motivo, não é trivial avaliar o quanto a adição de um sensor ou de outro pode contribuir para diminuir os erros de estimação. Da mesma forma, é difícil saber por quanto tempo um conjunto de sensores permite se navegar sem que a posição estimada se afaste totalmente da posição real.

Descreve-se a seguir um critério que permite avaliar de forma quantitativa o tempo máximo que a fusão sensorial desenvolvida neste trabalho é capaz de estimar a posição da plataforma dentro de um intervalo de confiança pré-estabelecido.

Além de outras variáveis, o vetor de estado $\mathbf{x}$ do sistema contém as coordenadas $x$, $y$ e $z$ do veículo no sistema NED, ou seja

$$\mathbf{x} = [\ldots \mid x \quad y \quad z]^T.$$

Portanto, a matriz $\mathbf{P}$ de covariância dos estados estimados contém em sua diagonal principal as covariâncias das estimativas dessas coordenadas, isto é,

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|ccc} \ddots & & \ddots & \\ \hline & \sigma_x^2 & & \\ \ddots & & \sigma_y^2 & \\ & & & \sigma_z^2 \end{array}\right].$$

A partir dessas covariâncias, que estão disponíveis na diagonal de $\mathbf{P}$, define-se o desvio $\sigma_p$ como

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}\,. \tag{6.164}$$

Esse número pode ser interpretado como sendo uma estimativa do desvio padrão da distância entre a posição final real e a estimada. Admitindo que esse erro seja gaussiano, espera-se que a posição final real se encontre a uma distância menor que $3\sigma_p$ da posição estimada, o que corresponde a 99,8% de confiabilidade (vide critério estatístico $\pm 3\sigma$).

Assim, fixado um erro máximo aceitável de posição $e_{pMAX}$, pode-se usar o FKAS para determinar o instante que o desvio $\sigma_p$ ultrapassa o limite $e_{pMAX}/3$. Dessa forma, é possível dimensionar *a priori* por quanto tempo o algoritmo é capaz de estimar a posição do veículo com erro menor que $e_{pMAX}$.

A fusão sensorial descrita neste trabalho é um sistema não linear, o que faz com que esse período de tempo varie de trajetória para trajetória, uma vez que a evolução no tempo da matriz $\mathbf{P}$ depende da trajetória executada. Mesmo assim, o critério pode ser aplicado por meio de simulações numéricas sobre trajetórias nominais.

# 7. MATERIAIS E MÉTODOS

Descrevem-se a seguir, os materiais e a metodologia que foram empregados no processo de fusão sensorial para estimação da trajetória da navegação terrestre.

## 7.1. EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

**UNIDADE DE MEDIÇÃO INERCIAL –** A realização dos experimentos utilizou como sensores inerciais uma UMI *strapdown* de baixo desempenho modelo VG700AA-202 da CROSSBOW (figura 7.1). Segundo recomendações do fabricante, este tipo de UMI destina-se principalmente a aplicações automotivas, tendo como principais sensores embarcados:

- 3 acelerômetros do tipo MEMS (“Micro Eletro Mechanical System”)
- 3 giroscópios do tipo FOG (“Fiber Optic Gyro”)
- 1 Sensor de temperatura
- Processador digital de sinais (DSP) de 32 bits
- Saídas analógicas, de 0 a ± 5V
- Comunicação serial RS-232, 38400 bps
- Relógio de tempo real


Figura 7.1 – UMI “strapdown” Crossbow modelo VG700AA-202

Tabela 7.1 – Especificações da UMI Crossbow VG700AA-202

| Especificação | Faixa de Operação | Unidade |
|---|---|---|
| Máxima taxa angular (roll/pitch/yaw) | ±200 | $^{o}$/s |
| Bias máximo de giroscópio | < ±20 | $^{o}$/h |
| Random Walk de giroscópio | < 0,4 | $^{o}/h\sqrt{Hz}$ |
| Resolução máxima de giroscópio | 0,025 | $^{o}$/s |
| Máxima faixa de aceleração (X/Y/Z) | ±2 | g |
| Bias máximo de acelerômetro | 0,085 | m/s$^2$ |
| Random Walk de acelerômetro | < 0,1 | $m/(s\sqrt{h})$ |
| Resolução máxima de acelerômetro | 0,01 | m/s$^2$ |
| Taxa máxima de amostragem | 100 | Amostras/s |
| Temperatura de operação | -40 a 71 | $^{o}$C |
| Tensão de alimentação | 10 a 30 | $V_{DC}$ |
| Dimensões | 12,7x15,24x10,16 | cm |
| Peso | 1,6 | kg |

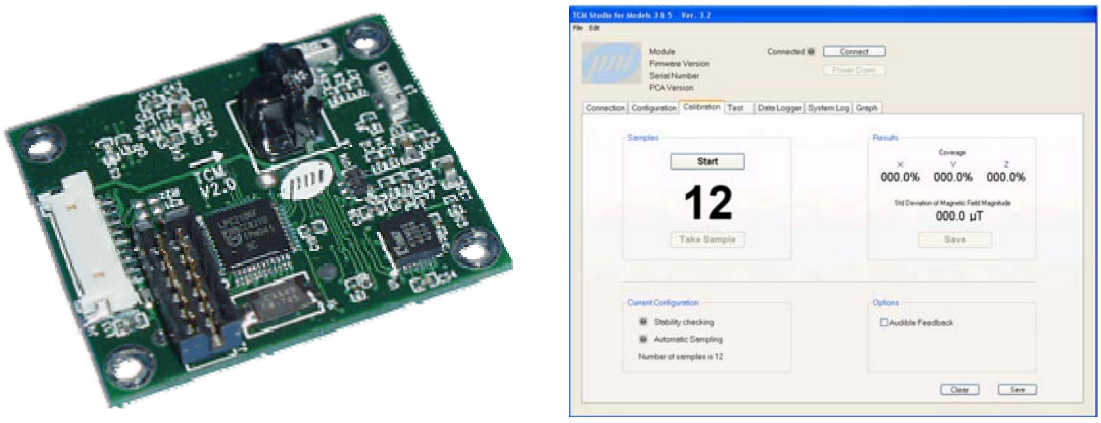
**GIROSCÓPIO REDUNDANTE DE AZIMUTE –** O ângulo de orientação de azimute $(\gamma)$ é crítico, pois predomina as transformações de coordenadas no plano $xy$. Infelizmente, o giroscópio correspondente da UMI começou a apresentar problemas próximo dos testes finais, com *bias* e *random walk* muito acima do especificado. Por este motivo, foi utilizado um giroscópio redundante FOG, modelo E.CORE 2000 da KVH (figura 7.2). Este giroscópio também é de baixo desempenho (vide tabela 7.2) e foi inserido no teste para apoiar a UMI VG700.


Figura 7.2 – Giroscópio FOG KVH - E.CORE 2000

Tabela 7.2 – Especificações do Giroscópio FOG KVH - E.CORE 2000

| Especificação | Faixa de Operação | Unidade |
|---|---|---|
| Máxima taxa angular | ±30 | $^{o}$/seg. |
| Bias máximo de giroscópio | 22 | $^{o}$/h. |
| Random Walk de giroscópio | 5 | $^{o}/h\sqrt{Hz}$ |
| Resolução máxima de giroscópio | 0,04 | $^{o}$/seg. |
| Taxa máxima de amostragem | 10 | Amostras/seg. |
| Temperatura de operação | -40 a 75 | $^{o}$C |
| Tensão de alimentação | 9 a 15 | $V_{DC}$ |
| Dimensões | 11,2x10,8x4,3 | cm |
| Peso | 340 | g |

**BÚSSOLA ELETRÔNICA –** Para efetuar o alinhamento inicial e tentar melhorar as estimativas de orientação e posição, uma bússola eletrônica de três eixos modelo TCM3 da PNI (figura 7.3) foi incorporado ao experimento. Este equipamento é dotado de um magnetômetro e dois inclinômetros baseados em acelerômetros com tecnologia MEMS. A tabela 7.3 descreve as principais características do equipamento.




(a) (b)

Figura 7.3 – Bússola Eletrônica
(a) Hardware – (b) Aplicativo TCM Studio®

Tabela 7.3 – Especificações da Bússola Eletrônica PNI-TCM3

| Especificação | Faixa de Operação | Unidade |
|---|---|---|
| Precisão de Azimute (Magnetômetro) | 0,5 | $deg$ |
| Faixa de Inclinação | $\pm 80$ | $deg$ |
| Correção de Distorção Magnética | Hard Iron / Soft Iron | $---$ |
| Freqüência Máxima de Amostragem | 20 | $Hz$ |
| Consumo | 22 | $mA$ |
| Interface | RS232 | $binary$ |
| Dimensões | $3,5 \times 4,3 \times 1,3$ | $cm$ |
| Peso | 12 | $g$ |

**HODÔMETRO INCREMENTAL** – O deslocamento e a velocidade do veículo foram obtidos por meio de um hodômetro projetado e construído pelo autor (figura 7.4). Trata-se de uma estrutura baseada numa roda de bicicleta onde a catraca foi substituída por uma polia sincronizada acoplada a um *encoder* rotacional com resolução de 1000 pulsos por volta. A relação entre polias é 2:1.

Para obter a relação entre o deslocamento linear e número de pulsos de *encoder*, foram extraídas 12 medidas do perímetro do pneu calibrado com 30 *psi*, e os valores obtidos são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 7.4 – Medidas de Perímetros do Pneu (cm)

| **Perímetros Medidos $x_i$ (cm)** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 157,1 | 156,8 | 156,8 | 156,7 | 156,8 | 156,7 |
| $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ |
| 156,9 | 156,5 | 156,9 | 156,7 | 156,9 | 156,5 |

| **Dados Estatísticos dos Perímetros Medidos (cm)** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_{min} = 156,5$ | $x_{max} = 157,10$ | $\overline{x} = 156,775$ | $\sigma^2 = 0,0293$ | $\sigma = 0,1712$ |

A partir dos valores de perímetro mínimo, médio e máximo, e do desvio padrão, foram rodadas simulações de Monte Carlo para estimar o melhor valor do perímetro do pneu. A estatística utilizada nas simulações é dada pela equação a seguir.

$$P\left(\varepsilon < \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}\right) = P\left(\underbrace{\left|\frac{1}{N}\sum_{N}\left(\overline{x}-\mu\right)\right|}_{\varepsilon} < \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}\right) \approx 98,2\% \tag{7.1}$$

Por esta formulação, a probabilidade do erro $\varepsilon$ ser menor que $3\sigma/\sqrt{N}$ é de $98,2\%$, sendo $\varepsilon$ o erro admissível, $\sigma$ o desvio padrão e $N$ o número de iterações necessárias para se atingir o erro esperado. A partir do valor de $N$ obtido por $\left(N > \sqrt{3\sigma/\varepsilon}\right)$, gerou-se um vetor $\hat{\mathbf{x}}$ com $N$ valores de perímetros estimados, tal que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \left[\hat{x}_1 \quad \cdots \quad \hat{x}_k \quad \cdots \quad \hat{x}_{N-1} \quad \hat{x}_N\right] \\ \hat{x}_k &= \left(x_{max} - x_{min}\right).rand\Big|_0^1 + x_{min} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Com $N = 1000$ iterações, as estimativas do perímetro médio e do erro perimetral foram respectivamente, $\overline{x} = 156,7987$ (cm) e $\varepsilon = 0.0052$ (cm). Com base na estimativa do perímetro médio, da resolução do *encoder* e da razão entre as polias determinou-se a resolução do hodômetro em metro/pulso, a qual ficou sendo, $R_{Encoder} = 0,03919375\left(\text{m/pulso}\right)$. A tabela 7.5 resume as principais especificações do hodômetro:

(a) (b)

Figura 7.4 – (a) Hodômetro utilizado (b) Detalhe do *encoder* incremental

Tabela 7.5 – Especificações do Hodômetro

| Especificação | Faixa de Operação | Unidade |
|---|---|---|
| Deslocamento Linear $(\bar{x})$ | $1{,}5680$ | $(m/volta)$ |
| Resolução do Hodômetro $(R_H)$ | $\cong 0{,}0392$ | $(m/pulso)$ |
| | $\cong 25{,}51$ | $(pulso/m)$ |
| Desvio Padrão $(\sigma)$ | $0{,}00171$ | $(m/volta)$ |
| | $42{,}75\times10^{-6}$ | $(m/pulso)$ |
| Precisão $(R_H+\sigma)$ | $\cong 0{,}03924275$ | $(m/pulso)$ |

A velocidade da plataforma $v_x$ (direção de deslocamento do veículo) foi obtida tomando-se duas medidas consecutivas de deslocamento $S_{x(k)}$ dividido pelo intervalo de tempo em que as amostras foram adquiridas.

$$v_{x(k)} = \frac{S_{x(k)} - S_{x(k-1)}}{t_k - t_{k-1}} \tag{7.3}$$

**MARCAS TOPOGRÁFICAS (*LANDMARKS*):** para suprir o filtro com informações de posição em alguns experimentos e também poder conferir o erro de reconstrução da trajetória, foram distribuídos ao longo do percurso de aproximadamente 2800 metros um conjunto de 52 *landmarks*. As coordenadas topográficas dos *landmarks* foram obtidas junto ao departamento de Engenharia de Transporte da EPUSP. Para checar a possível ocorrência de erros de interpretação cartográfica, as coordenadas dos *landmarks* foram conferidas localmente por meio de um *GPS GARMIM*, modelo GPSMAP® *60CSx*.

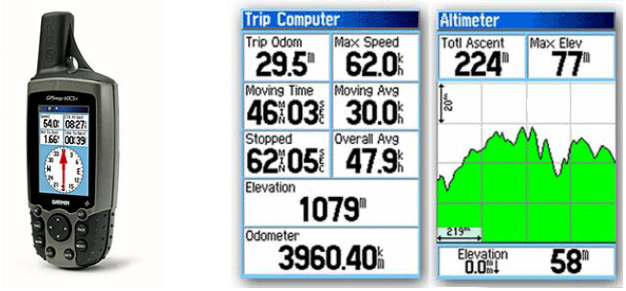



Figura 7.5 - GPSMAP® *60CSx*

A captura sincronizada das coordenadas dos *landmarks* foi efetuada por meio do aplicativo "*Gyro/Encoder/Landmark v1.5*" (também desenvolvido pelo autor). A figura 7.6 mostra a interface do aplicativo, enquanto que a figura 7.7 ilustra o hardware e a tela do aplicativo com dois pontos de *landmarks* capturados.

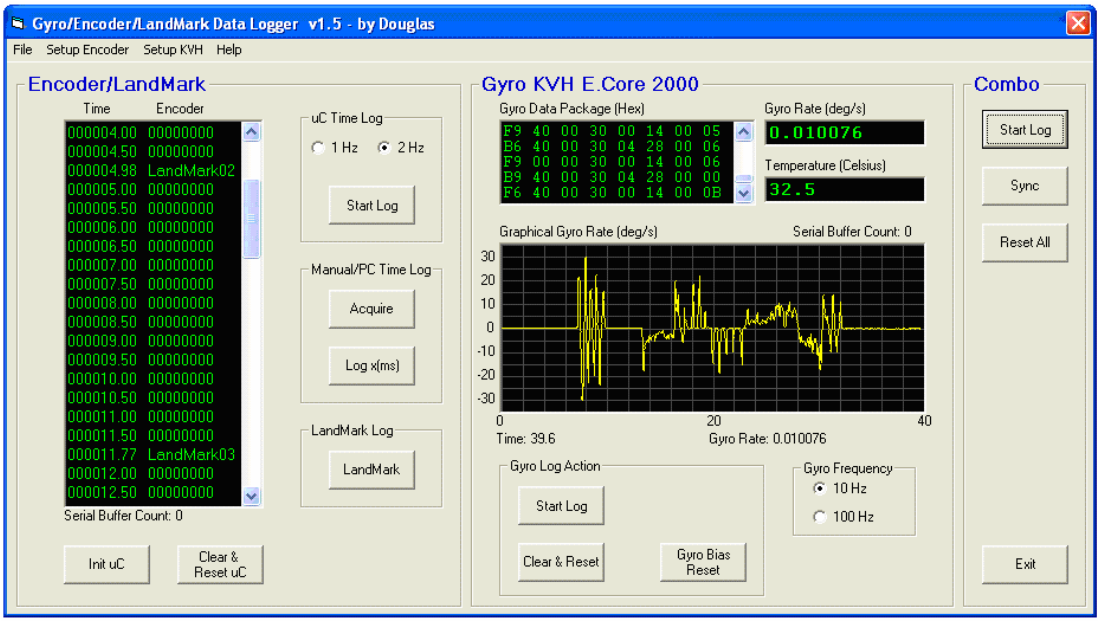
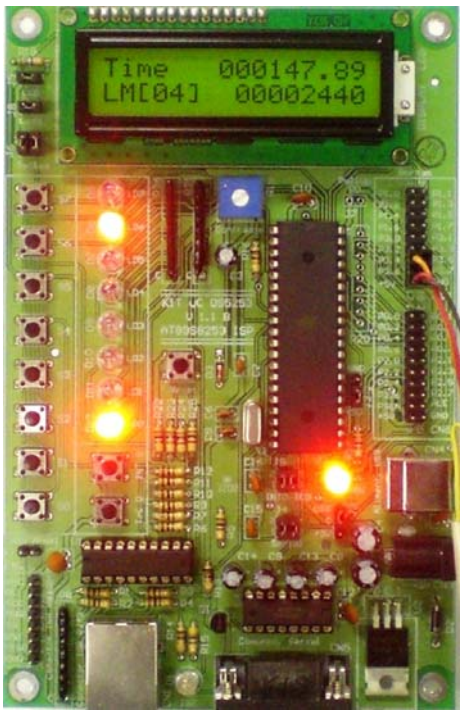
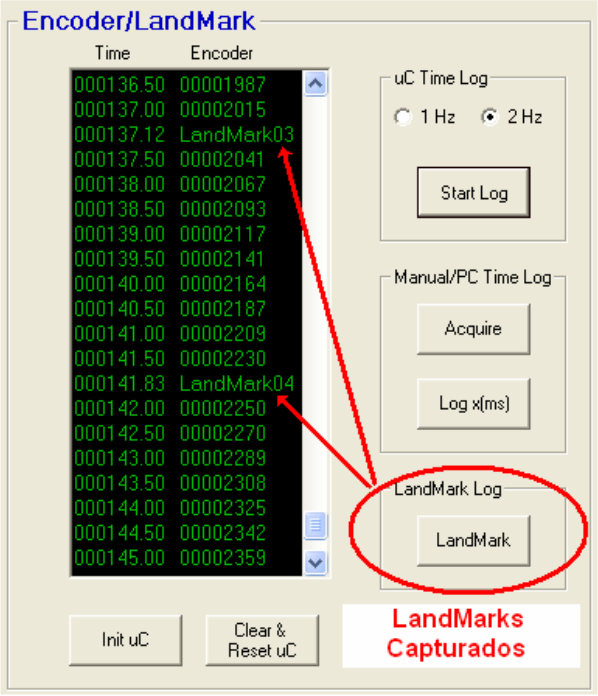



Figura 7.6 – Aplicativo "*Gyro/Encoder/LandMark*"




(a)




(b)

Figura 7.7 – Hardware (a) e software (b) para leitura de *encoder* e *landmark*

Como destaca a figura 7.7 (b), o aplicativo possui um botão denominado "*LandMark*", que quando pressionado, grava uma determinada posição de landmark. Desta forma, sempre que o veículo passa por um *landmark*, pressionando-se (manualmente) este botão, o instante de tempo de passagem e o número do *landmark* são lidos e armazenados num arquivo do tipo texto. A partir do arquivo texto gerado, os *landmarks* nominalmente enumerados são substituídos (via *software*) por suas respectivas coordenadas topográficas, as quais foram previamente gravadas em um outro arquivo texto.

A freqüência de leitura do hodômetro varia de 1 a 5 Hz, sendo ajustada via *software*. No caso da leitura do *landmark*, não existe restrição de freqüência, sendo que o mesmo pode ser lido e armazenado em qualquer instante de tempo.

## 7.2. EQUIPAMENTOS EMBARCADOS NO VEÍCULO

Para realizar os testes de estimação de trajetória, os instrumentos anteriormente citados foram embarcados num automóvel. A UMI VG700, o giroscópio KVH e a bússola eletrônica foram devidamente alinhados e fixados numa prancha de madeira esquadrejada, a qual foi instalada sobre o teto do veículo. No caso da bússola eletrônica, a mesma foi fixada num suporte cúbico de madeira com haste de alumínio de 40 cm. Este procedimento é necessário para minimizar distorções de campo magnético, pois a superfície do veículo é metálica. Segundo o fabricante do equipamento, a distância de afastamento entre a bússola e uma superfície metálica deve ser de aproximadamente 30 cm, sendo que no caso deste ensaio em particular a mesma foi instalada à aproximadamente 50 cm do teto do veículo. O hodômetro foi fixado no engate do veículo e sua eletrônica dedicada foi embarcada no interior do mesmo.

A alimentação da UMI do giroscópio KVH foi fornecida pela bateria do veículo enquanto que a bússola e o hodômetro foram alimentados com fontes de energia próprias. A comunicação entre os diversos sensores se deu por meio de conversores USB/RS-232 ligados a dois computadores portáteis, os quais foram operados pelo autor e um auxiliar. A figura 7.8 ilustra como ficou a configuração dos instrumentos embarcados.

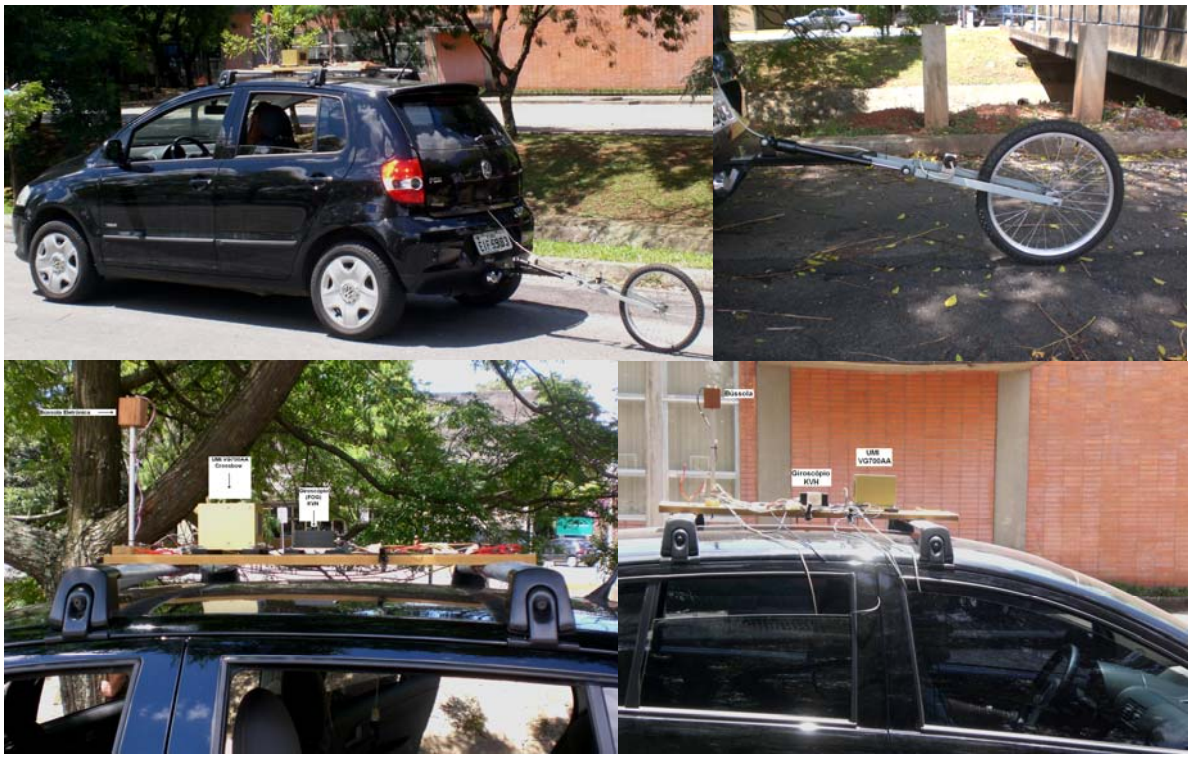


Figura 7.8 – Instrumentos instalados em um automóvel

## 7.3. TESTES REALIZADOS

O ensaio de estimação de trajetórias foi realizado por meio de três testes automotivos em vias do campus da USP em São Paulo, com duração média de quinze minutos cada. A distância do trajeto percorrido é de aproximadamente 2760 metros. O percurso do trajeto é fechado, com saída e chegada no mesmo ponto, numa região razoavelmente plana.

A escolha do percurso em trajetória fechada foi escolhida porque facilita a compreensão dos resultados, pois permite distinguir visualmente se a trajetória reconstruída é parecida com a trajetória percorrida. Outra razão para se adotar uma trajetória fechada é que neste tipo de ensaio é possível avaliar o efeito da deriva do giroscópio responsável pelo movimento de guinada (azimute), dado que o mesmo será solicitado continuamente nos trechos curvos. A figura 7.9 ilustra o trajeto onde foram feitos os testes, destacando o ponto de partida e chegada e o sentido do deslocamento (horário).

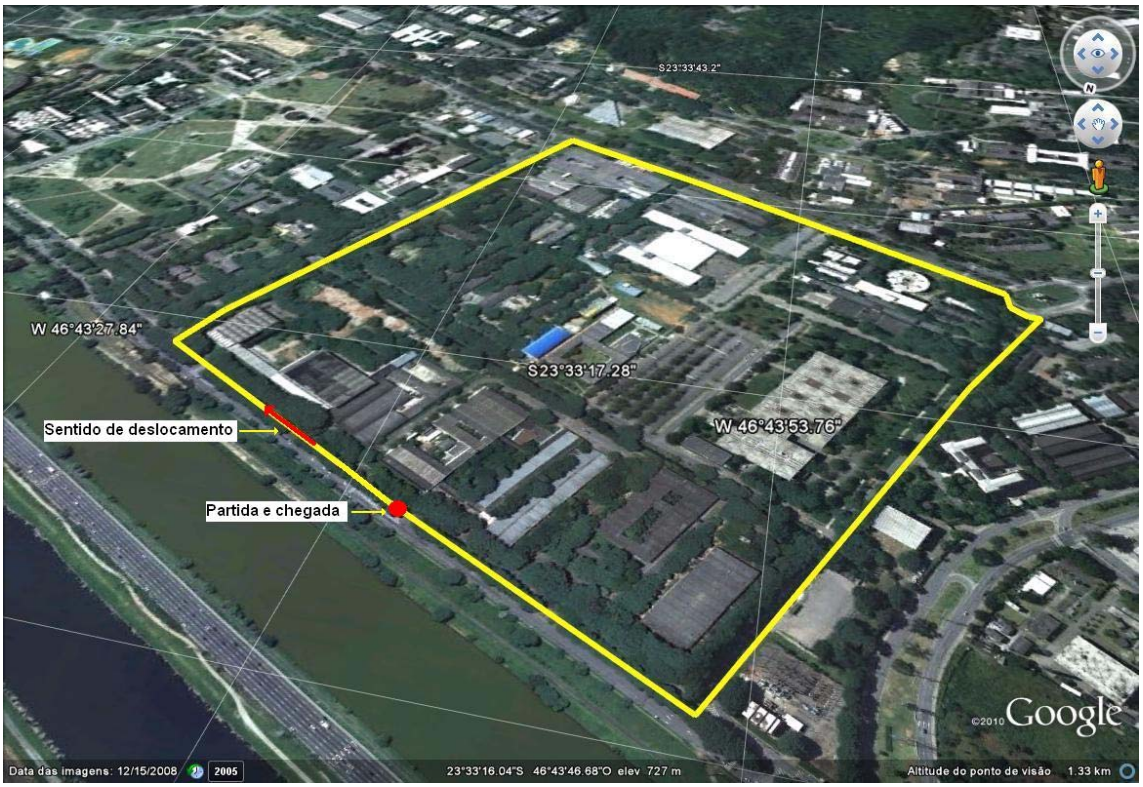



Figura 7.9 – Trajetória percorrida

## 7.4. METODOLOGIA DOS TESTES

Após a instalação e teste de comunicação dos instrumentos, foram executados dois testes: no primeiro teste o veículo executa uma volta completa sobre a trajetória (figura 7.9) enquanto que no segundo são dadas duas voltas completas. O teste com duas voltas objetiva investigar a deriva de giroscópio, pois o veículo atuará no sentido horário, em oito trechos curvos.

Antes de se iniciar ambos os testes o veículo ficou estacionado no ponto de partida por aproximadamente 100 segundos para efetuar o alinhamento inicial. Durante a etapa do alinhamento inicial, a matriz de orientação inicial $\mathbf{C}_b^n(0)$ é obtida através dos ângulos de "roll $(\phi)$", "pitch $(\theta)$" e "yaw $(\psi)$" iniciais aplicados na equação (3.55), sendo que sua propagação pode ser obtida através das equações (3.70) ou (3.87).

Durante o trajeto do veículo, os dados fornecidos pelos diversos sensores são armazenados em arquivo, para posterior processamento *off-line*.

A sincronização dos dados é feita da seguinte forma: inicialmente são sincronizados os relógios dos dois computadores e a partir daí sempre que um arquivo de armazenamento de dados é aberto nele é gravado a hora de abertura. Através de relógios de tempo real embarcados, sempre que os sensores enviam dados para o computador, os mesmos também enviam o tempo em que os dados foram aquisitados. Portanto, sabendo-se o instante inicial em que cada arquivo começou a gravar os dados e conhecendo-se o tempo individual de cada dado, basta ajustar o tempo relativo de cada arquivo para se sincronizar os dados.

### 7.4.1. FILTRAGEM DOS DADOS

O algoritmo testado na estimação da trajetória é o filtro FKAS, descrito em detalhes na secção 5.2.9.8. As acelerações, velocidades e posições foram transportadas para o referencial NED, com as correções determinísticas previamente efetuadas. A figura 7.10 ilustra o algoritmo que transporta as grandezas para o referencial NED e efetua as correções determinísticas.

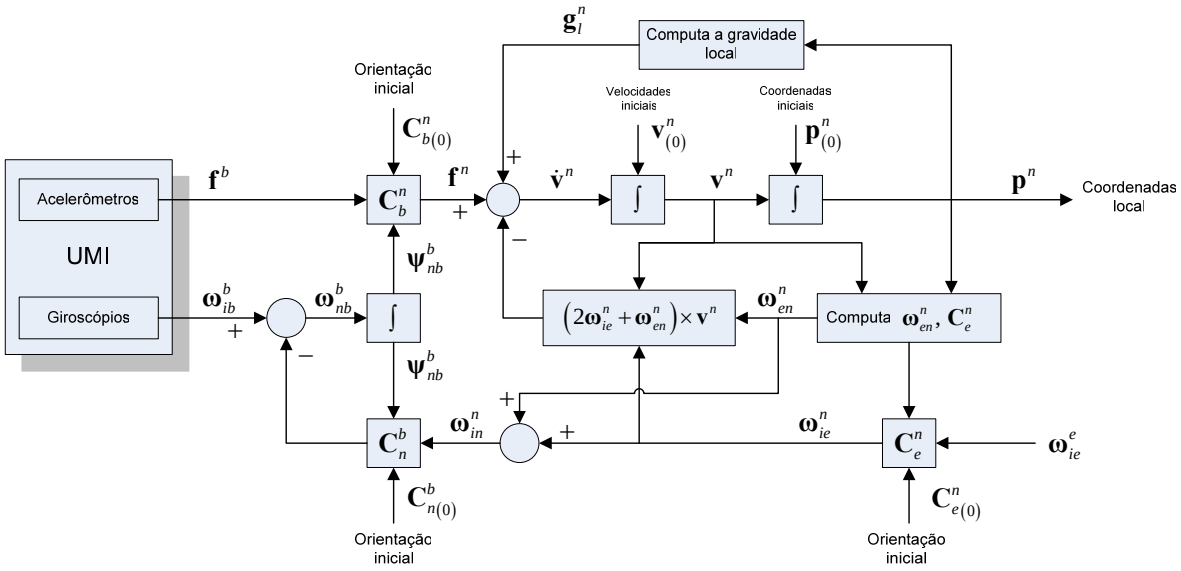



Figura 7.10 – Algoritmo para transporte de coordenadas e correções determinísticas

Para ensaiar os dados experimentais com o filtro FKAS, cinco situações foram adotadas.

1. Reconstrução experimental sem medida de referência auxiliar, onde a matriz de medições $\mathbf{H}_k$ foi declarada nula.

2. Reconstrução experimental tendo como medida auxiliar somente a velocidade da plataforma, onde a matriz de medições é ajustada como $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{(\mathbf{v},k)}$ (equação (7.4)).

3. Reconstrução experimental tendo como medidas auxiliares a velocidade e o ângulo de azimute da bússola, onde a matriz de medições é ajustada como $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi},k)}$ (equação (7.5)).

4. Reconstrução experimental tendo como medidas, a velocidade, o ângulo de azimute da bússola e um conjunto reduzido de marcas topográficas *landmarks*, onde a matriz de medições é ajustada como $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{(\boldsymbol{\psi},\mathbf{v},\mathbf{p},k)} = \mathbf{I}_{(9\times 9)}$.

$$\mathbf{H}_{(\mathbf{v},k)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7.4}$$

$$\mathbf{H}_{(\mathbf{v},\boldsymbol{\psi},k)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7.5}$$

Conforme descrito nas seções 6.1 e 6.2, o modelo dinâmico que descreve os estados $(\mathbf{x}_k)$ do sistema é do tipo não-linear, enquanto que o modelo que descreve os erros de estados $(\delta\mathbf{x}_k)$ é do tipo linear.

Por ser não-linear, os estados $(\hat{\mathbf{x}}_k)$, são estimados por um Filtro Estendido Adaptativo de Kalman (FEAK), enquanto que os erros de estados $(\delta\hat{\mathbf{x}}_k)$, são estimados por um filtro linear denominado Filtro Adaptativo de Kalman (FAK).

Antes de passar pelo processo de suavização, os estados estimados $(\hat{\mathbf{x}}_k)$, são corrigidos por meio dos erros de estados estimados $(\delta\hat{\mathbf{x}}_k)$, tal que: $\mathbf{x}_{C(k)} = \hat{\mathbf{x}}_k - \delta\hat{\mathbf{x}}_k$ , onde $\mathbf{x}_{C(k)}$ é o estado corrigido. A figura a seguir ilustra como se dá o processo de correção dentro do filtro FKAS.

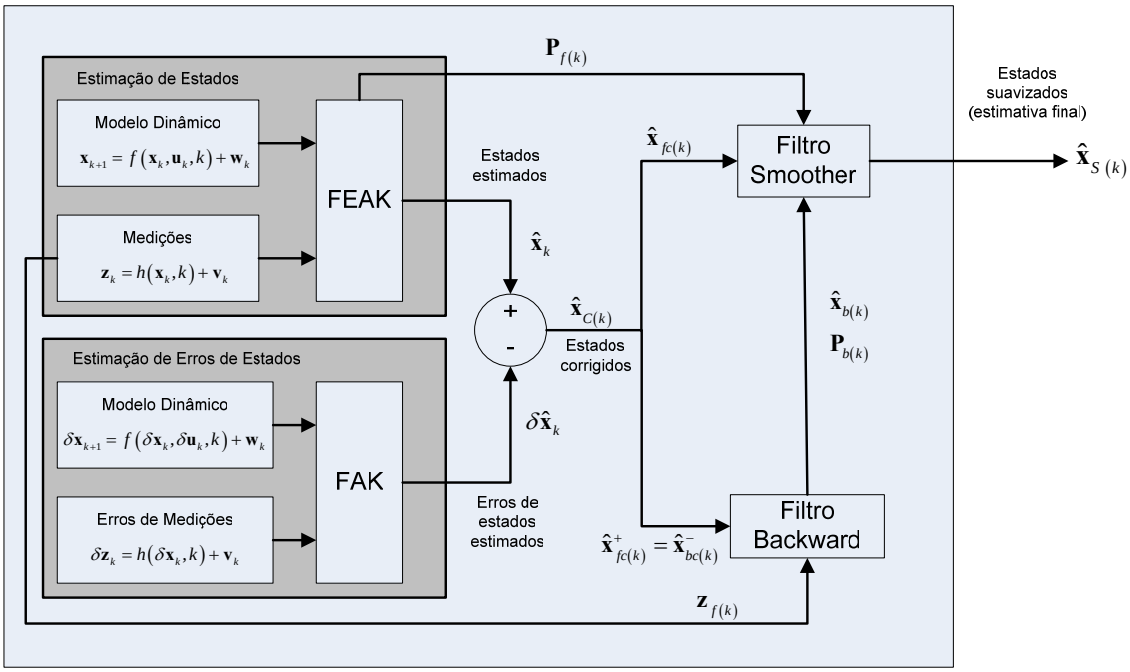



Figura 7.11 – Filtro FKAS

Cabe ressaltar que as freqüências de operação dos diversos sensores utilizados são distintas e neste caso tem-se então um filtro rodando com taxas de amostragens diferentes. A solução adotada foi construir um filtro não sincronizado onde uma dada medida de correção é inserida no vetor de medições $(\mathbf{z}_k)$ levando-se em conta apenas seu instante de tempo de ocorrência, ou seja, a escolha da medida baseia-se na precedência temporal. Por não se manter perfeitamente constante, os intervalos discretos de tempo $(\Delta T_k)$ dos sensores são obtidos a cada ciclo computacional, utilizando-se o intervalo entre duas amostras consecutivas de relógio dos respectivos sensores, tal que, $\Delta T_k = t_k - t_{k-1}$.

### 7.4.2. SINTONIA DO FILTRO

Para sintonizar corretamente o filtro de Kalman é necessário conhecer as matrizes de covariância do ruído de processo $\mathbf{Q}$ e do ruído de medição $\mathbf{R}$.

A matriz da covariância do ruído de medição $\mathbf{R}$ é facilmente obtida por meio dos desvios padrão dos sensores utilizados. O ruído do processo $\mathbf{Q}$ é de difícil caracterização, e em muitos casos só que consegue obtê-lo de forma experimental. Entretanto, para a estimação inicial de $\mathbf{Q}$, empregou-se a técnica numérica descrita no capítulo 5, cujas equações (7.1) e (7.2) são novamente reescritas por conveniência didática. Cumpre ressaltar que esta técnica também é passível de ajuste fino por tentativa e erro (BROWN, 1997).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{D}_k \end{pmatrix} = \exp\left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{F}^T \end{array}\right) \Delta t_k \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{D}_k^{-1} \\ &= \left(\mathbf{L}\mathbf{Q}_c\mathbf{L}^T\right)\Delta t_k \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \Delta t_k\right)^{-1} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Após $\mathbf{Q}$ ter sido ajustada inicialmente, sua divergência é controlada por meio do filtro adaptativo cujo algoritmo de construção é aquele descrito em detalhes na seção 5.2.9.

### 7.4.3. MONITORAMENTO DO FILTRO

Para verificar se o filtro proposto está operando adequadamente, seu desempenho é monitorado checando-se a matriz de covariância $\mathbf{P}$ e a média das inovações $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$. A análise de $\mathbf{P}$ consiste de dois procedimentos: primeiro avaliar se $\mathbf{P}$ é semi-definida positiva e segundo avaliar a norma euclidiana dos elementos da diagonal principal de $\mathbf{P}$.

Para testar se $\mathbf{P}$ é semi-definida positiva, primeiramente simetriza-se a matriz $\mathbf{P}$ por $\mathbf{P} = (\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)/2$ e então se aplica a fatoração modificada de Cholesky (GREEWAL, 2001) e (GOLUB, 1996) sobre $\mathbf{P}$ a cada iteração. Esta técnica também

é conhecida como fatoração $\mathbf{UDU}^T$, e no caso de $\mathbf{P}$ não ser positiva semi-definida, o algoritmo falhará e o processo será interrompido. O teste da diagonal de $\mathbf{P}$ consiste em avaliar se a magnitude da norma euclidiana (norma dois) a cada iteração encontra-se dentro de valores admitidos, tal que: $\left\| diag\left(P\right) \right\|_2 \leq \left(\pm 3\sigma\right)$.

A checagem da média das inovações é feita extraindo-se uma amostra de $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$ a cada iteração e plotando seu histograma a posteriori. No caso do filtro operar corretamente, o histograma deverá apresentar uma distribuição normal com média zero (GREEWAL, 2001).

### 7.4.4. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA ESTIMADA E FIGURA DE MÉRITO ADOTADA

Após os estados de posição terem sidos estimados, reconstrói-se a trajetória estimada, comparando-a com a trajetória real. Para se comparar o resultado de duas reconstruções, analisa-se o erro das estimativas tomadas em oito pontos de observação (pontos de checagem). Os pontos de observação foram obtidos utilizando-se coordenadas cartográficas do trajeto. A figura a seguir mostra os locais onde foram inseridos os pontos de observação.

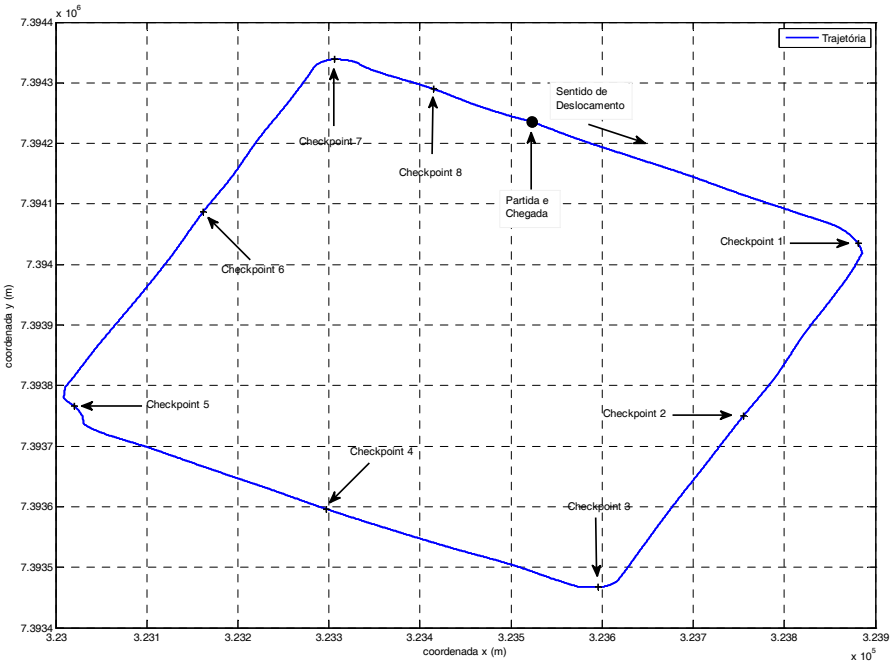



Figura 7.12 – Pontos de observação inseridos na trajetória

## 7.5. CONSTANTES UTILIZADAS

A tabela a seguir apresenta os valores das diversas constantes que foram empregadas nos testes realizados.

Tabela 7.6 – Constantes utilizadas nos testes de estimação de trajetória

| Grandeza | Símbolo | Valor |
|---|---|---|
| Aceleração gravitacional | $g$ | $9{,}80665\ (\mathrm{m/s^2})$ |
| Velocidade de rotação da Terra | $\Omega$ | $72{,}92115\times10^{-6}\ (\mathrm{rad/s})$ |
| Latitude inicial | $L$ | $-23{,}32\ (\mathrm{graus})$ |
| Longitude inicial | $l$ | $46{,}43\ (\mathrm{graus})$ |
| Raio da Terra | $R, R_0$ | $6378137\ (\mathrm{m})$ |
| Desvio padrão de coordenada *x* | $\sigma_x$ | $1{,}5\ (\mathrm{m})$ |
| Desvio padrão de coordenada *y* | $\sigma_y$ | $1{,}5\ (\mathrm{m})$ |
| Desvio padrão de coordenada *z* | $\sigma_z$ | $0{,}5\ (\mathrm{m})$ |
| Desvio padrão da velocidade no eixo *x* | $\sigma_{vx}$ | $0{,}01\ (\mathrm{m/s})$ |
| Desvio padrão da velocidade no eixo *y* | $\sigma_{vy}$ | $0{,}05\ (\mathrm{m/s})$ |
| Desvio padrão da velocidade no eixo *z* | $\sigma_{vz}$ | $0{,}05\ (\mathrm{m/s})$ |

Nota: as coordenadas estão no sistema NED.

# 8. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados os resultados dos testes realizados. Inicialmente apresentam-se os dados provenientes dos sensores, isto é, aqueles obtidos no sistema de coordenadas da plataforma (RPY) e sem nenhum processamento. Em deslocamento normal, sem derrapagens ou saltos, no sistema RPY somente a velocidade na direção de movimento do veículo $\left(v_x^b\right)$ é diferente de zero. Por isso, os dados de velocidade e aceleração são transportados para o referencial NED, pois é de interesse saber como se comportam as componentes da velocidade nas outras direções.

As etapas que se seguem discutem os resultados da fusão sensorial na estimação da trajetória. Nas estimações onde se utilizam medidas externas, também são verificadas os módulos do desvio padrão da orientação, da velocidade e da posição. Dado que a diagonal principal da matriz de covariância do erro de estimação $(\mathbf{P})$ é composta pelas variâncias $\left(\sigma^2\right)$ dos erros de estimação de orientação, velocidade e posição, a raiz quadrada do "traço" destas variâncias fornece uma grandeza que pode ser utilizada na análise do desempenho do sistema.

A raiz quadrada do "traço" de $\mathbf{P}$ é a norma euclidiana dos erros de estimação e, portanto, os erros de estimação de orientação, velocidade e posição podem ser obtidos por meio de:

$$\begin{aligned}
\|\delta\boldsymbol{\psi}\| &= \sqrt{\sigma_\phi^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_\psi^2} &&= \sqrt{traço\left(P_{(1,1)(2,2)(3,3)}\right)} \\
\|\delta v\| &= \sqrt{\sigma_{vx}^2 + \sigma_{vy}^2 + \sigma_{vz}^2} &&= \sqrt{traço\left(P_{(4,4)(5,5)(6,6)}\right)} \\
\|\delta p\| &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} &&= \sqrt{traço\left(P_{(7,7)(8,8)(9,9)}\right)}
\end{aligned} \quad . \tag{8.1}$$

## 8.1. SINAIS DE SENSORES

As figuras 8.1 – 8.6 ilustram os sinais disponibilizados diretamente pelos sensores. Estes sinais são resultantes do trajeto ensaiado, em que a distância percorrida é de aproximadamente 2800 metros com tempo de percurso de aproximadamente 15 minutos.

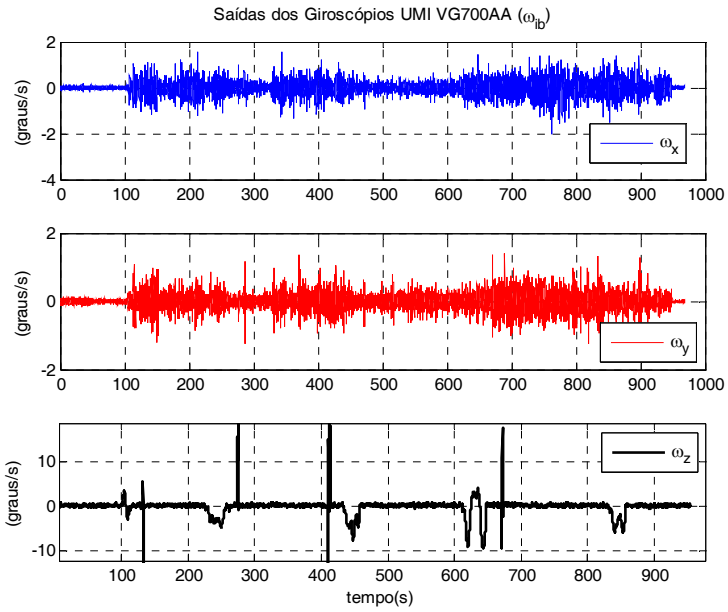



Figura 8.1 – Sinais dos giroscópios (UMI VG700AA)

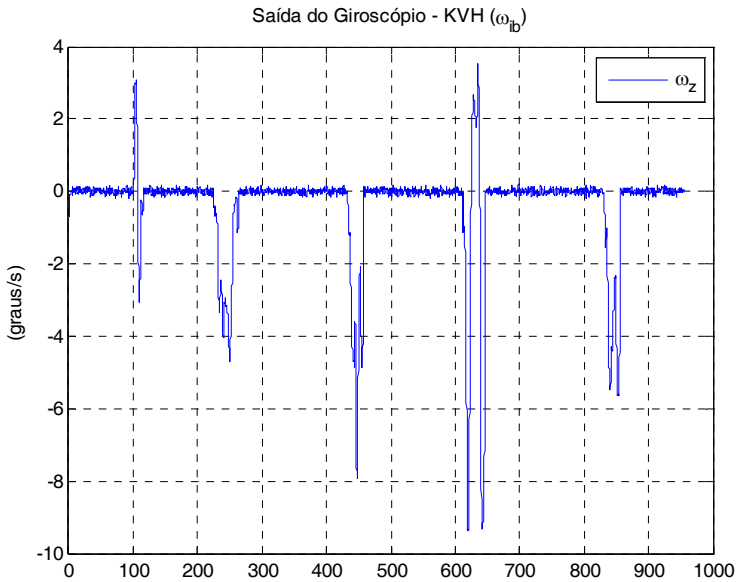



Figura 8.2 – Sinal do giroscópio (KVH E.Core2000)

A figura 8.1 mostra as leituras dos giroscópios da UMI VG700AA. Nota-se nesta figura, que o giroscópio do eixo $z$ (azimute) apresentou sinais espúrios intermitentes em alguns pontos do percurso. Este problema já havia sido percebido em outras oportunidades e, por este motivo, utilizou-se um giroscópio redundante (KVH) para auxiliar na leitura do azimute.

A figura 8.2 mostra o sinal do giroscópio redundante. Quando se extrai os sinais espúrios (picos de curta duração e grande amplitude) é possível perceber a semelhança de atitude (orientação) com o sinal do giroscópio de azimute da UMI VG700AA.

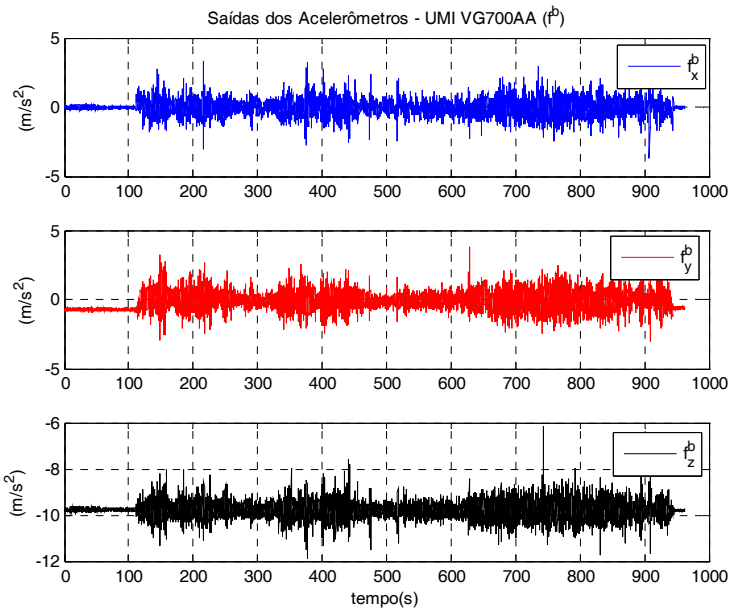



Figura 8.3 – Sinais dos acelerômetros (UMI VG700AA)

A figura 8.3 apresenta os sinais de saída dos acelerômetros, onde as acelerações foram convertidas de $g$ para $m/s^2$. Durante a etapa de alinhamento inicial, que durou aproximadamente 120 segundos, é possível perceber que o acelerômetro do eixo $x$ apresentou leitura nula, enquanto que o acelerômetro do eixo $z$ apresentou leitura de aproximadamente 9,8 $\left(m/s^2\right)$, que é a componente da aceleração gravitacional. Estes valores de leitura estão compatíveis com uma plataforma nivelada e em repouso, a qual se assemelha ao comportamento do veículo durante a etapa do alinhamento inicial. Nota-se, entretanto, que o acelerômetro do eixo $y$ não apresentou leitura nula, indicando a presença de aceleração. Esta aceleração é o resultado da decomposição da aceleração

gravitacional $(\mathbf{g})$ devido a um movimento de rolagem $(\phi)$ do veículo durante a etapa do alinhamento inicial, onde: $a_y = f_y^b = g\sin(\phi)$.

Este movimento de rolagem ocorreu devido à presença de um maior número de tripulantes do lado do passageiro, durante a coleta de dados dos diversos sensores com o auxílio de uma eletrônica embarcada dedicada e computadores portáteis.

Na figura 8.4 são mostradas as leituras da bússola eletrônica, onde é possível perceber que durante o alinhamento inicial, as leituras de *roll* e *pitch* são ruidosas e com valor médio diferente de zero (não nulas). Isto se deve ao fato de que, as leituras de inclinação fornecidas pela bússola utilizada neste trabalho, se baseiam na decomposição da aceleração gravitacional $(\mathbf{g})$ sobre acelerômetros do tipo MEMS, os quais são considerados de baixo desempenho (LAWRENCE, 1998).

Por outro lado, neste mesmo intervalo de tempo, a leitura de azimute disponibilizada é relativamente estabilizada, pois diferentemente dos sensores inerciais MEMS, o sinal de orientação de azimute fornecido pela bússola é obtido por meio de um magnetômetro. Durante o alinhamento inicial, este sensor fornece a orientação inicial.

Deve ser percebido que, as orientações de azimute nos instantes de tempo inicial e final, possuem a mesma magnitude e, como os pontos de partida e chegada do veiculo são os mesmos, esta leitura mostra-se coerente com o ensaio realizado.

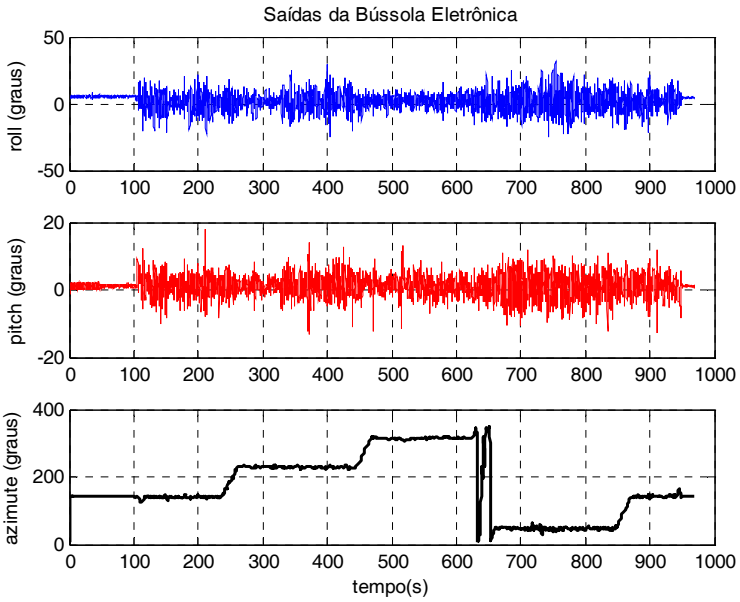



Figura 8.4 – Sinais da bússola (PNI TCM3)

A figura 8.5 apresenta a saída de pulsos e o deslocamento fornecido pelo hodômetro. Observa-se nesta figura, que durante a etapa do alinhamento inicial as leituras são nulas e a magnitude final do deslocamento $(\cong 2760\, m)$ esta coerente com o percurso ensaiado $(\cong 2800\, m)$.

Na figura 8.6 o gráfico da velocidade do veículo $\left(v_x^b\right)$ é apresentado. Este gráfico foi obtido por meio da equação (7.3).

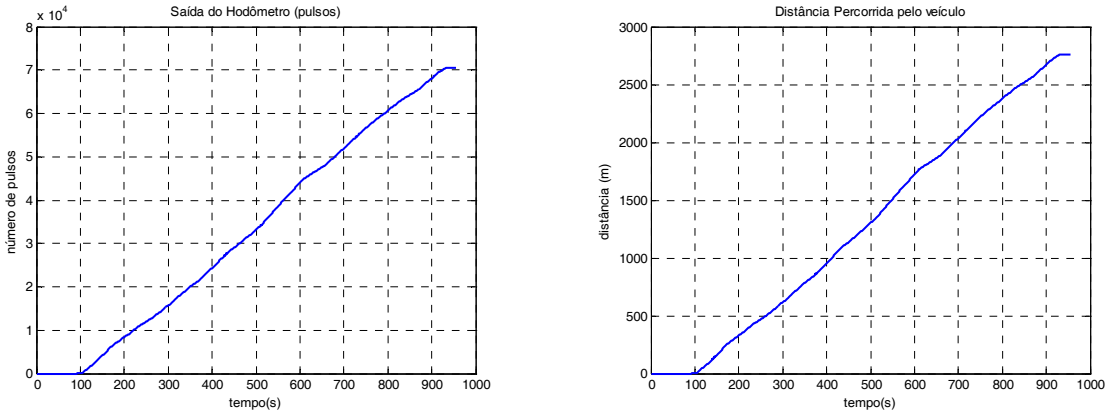



Figura 8.5 – Hodômetro: (a) número de pulsos ; (b) deslocamento

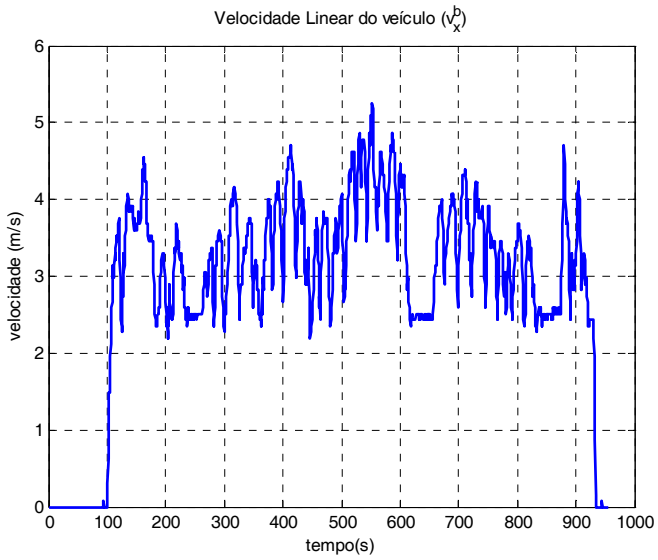



Figura 8.6 – Velocidade do veículo (*body*)

Uma análise mais detalhada sobre os sinais do giroscópio de azimute (figura 8.2) e do magnetômetro (figura 8.4) permite verificar que os mesmos estão carregados com ruídos de alta freqüência. Neste sentido, para atenuar a alta freqüência algum tipo de filtro passa-baixa (FPB) mostra-se necessário. No entanto,

filtros passa-baixa produzem deslocamento de fase (atrasos) existindo, portanto, um compromisso entre a redução das altas freqüências e o deslocamento de fase admitido. A solução adotada neste trabalho em particular foi um filtro com janela de 5 médias moveis. As figuras 8.7 e 8.8 ilustram os resultados dos sinais de magnetômetro e de giroscópio de azimute antes e depois da filtragem, onde é possível perceber que houve uma melhora significativa do sinal sem que tenham ocorrido deslocamentos de fase significativos.

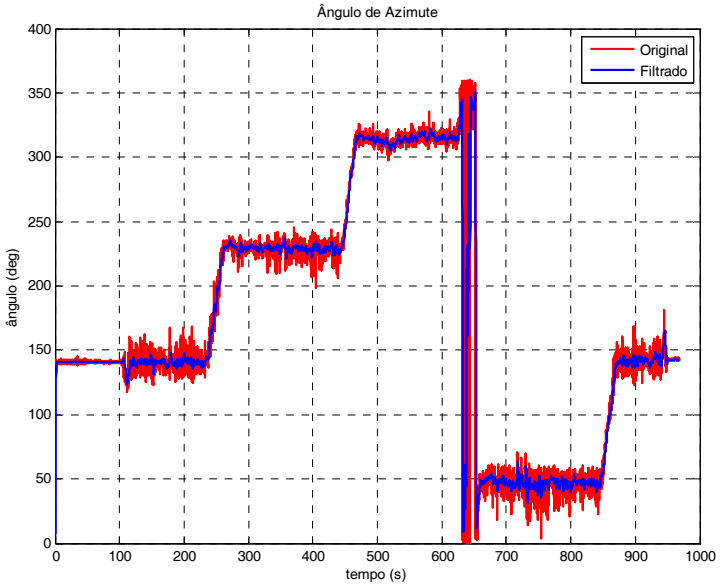



Figura 8.7 – Ângulo de azimute filtrado

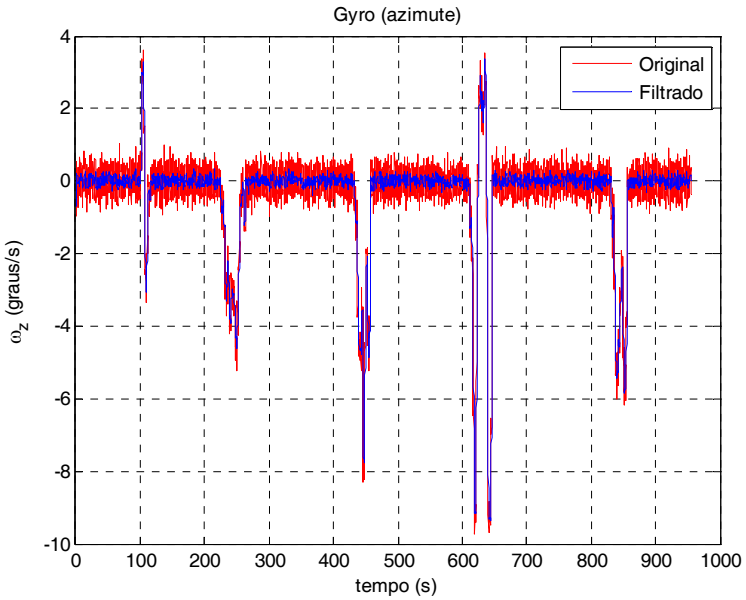



Figura 8.8 – Giroscópio $\omega_Z$ filtrado

Para melhorar o entendimento sobre o comportamento dos sensores, a figura 8.9 ilustra a trajetória que foi percorrida com alguns pontos de interesse destacados pelas letras A – G. Estes pontos estão relacionados com os sinais dos sensores de orientação de azimute através das figuras 8.10 e 8.11.

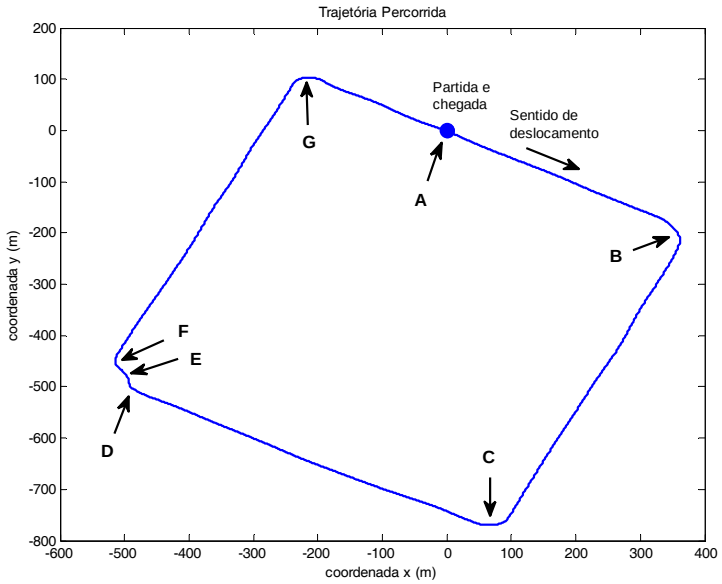



Figura 8.9 – Trajetória com pontos de interesse

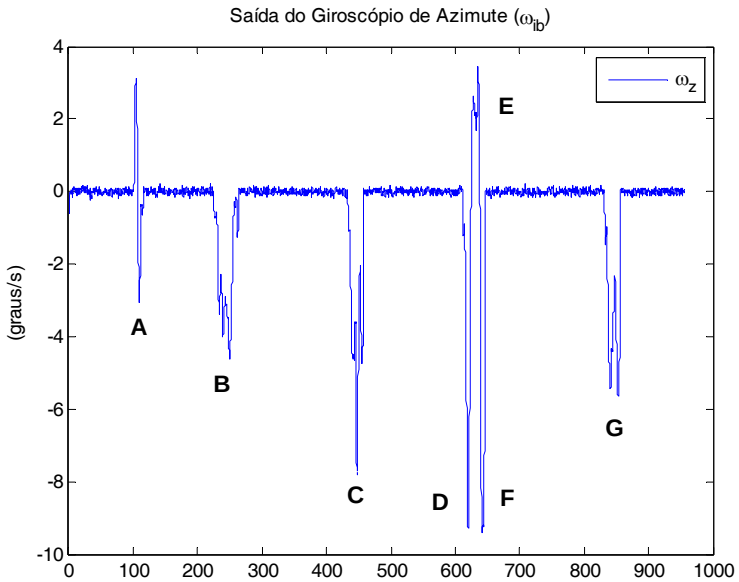



Figura 8.10 – Sinal do giroscópio de azimute

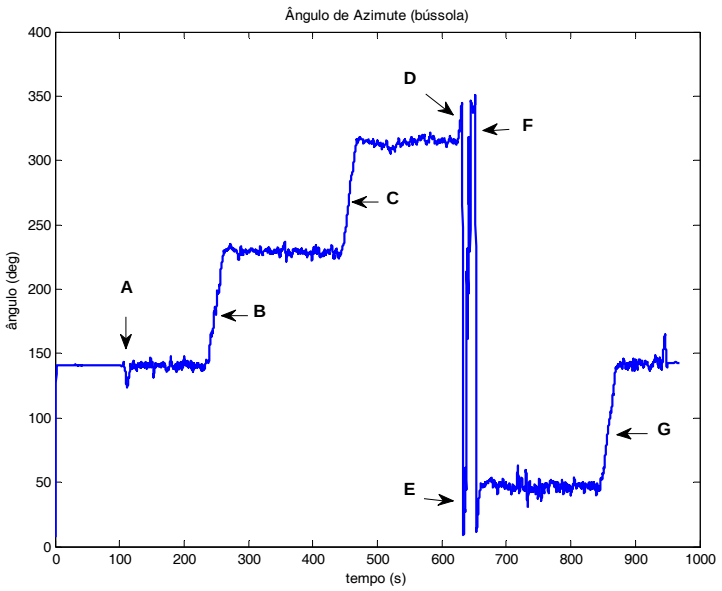



Figura 8.11 – Sinal do magnetômetro

Tanto o histórico do sinal do giroscópio $(\omega_z)$ quanto o do magnetômetro $(\psi)$ apresentam seis pontos $(B-G)$ que indicam o movimento de guinada. Estas mudanças de direção estão de acordo com o sentido de deslocamento na trajetória descrita pela figura 8.9. O sinal pronunciado no ponto $A$ de ambas as figuras descreve o movimento do veículo no momento em que o mesmo sai do estado estacionário (saindo do meio-fio), guinando para a esquerda e em seguida retomando a rota em linha reta (leve guinada para esquerda).

## 8.2. VELOCIDADES E ACELERAÇÕES TRANSPORTADAS PARA O REFERÊNCIAL DA NAVEGAÇÃO (NED)

As figuras 8.12 e 8.13 ilustram respectivamente os resultados da velocidade e da aceleração quando transportados para o sistema NED. A velocidade que no sistema RPY apresentava somente a componente na direção do eixo $x$ (direção do movimento), quando transportada para o sistema NED passa a contar com componentes nas três direções.

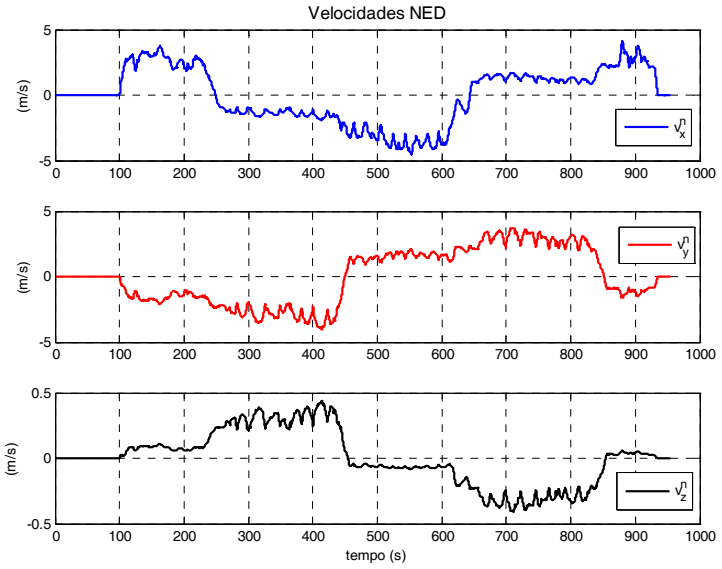



Figura 8.12 – Velocidades do veículo (NED)

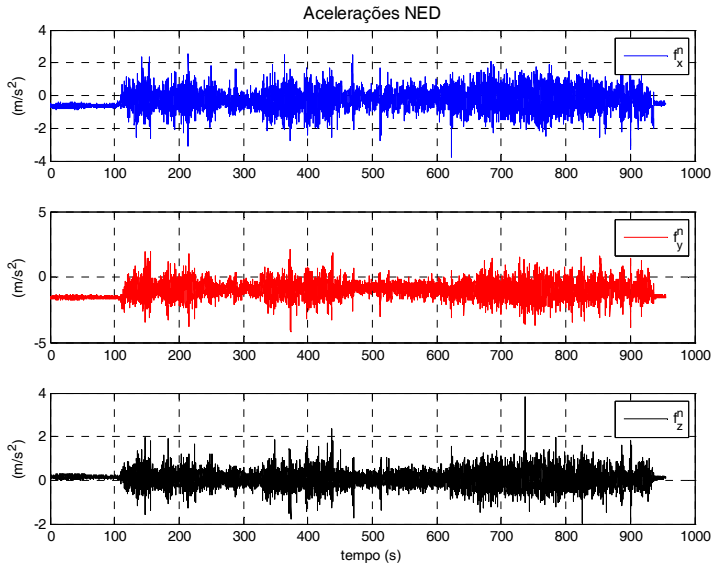



Figura 8.13 – Acelerações do veículo (NED)

No caso das acelerações, além da mudança de sistema de coordenadas, também se processaram as correções determinísticas indicadas no capítulo 3. Note que a componente na direção vertical que possuía valor próximo a $9{,}8\left(m/s^2\right)$, que é aproximadamente o valor da aceleração gravitacional, foi compensada.

# 8.3. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA

## 8.3.1. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA SEM O AUXÍLIO DE MEDIDAS EXTERNAS

A figura 8.14 ilustra o resultado obtido com o filtro quando não se usa nenhum tipo de medida auxiliar na fusão sensorial. Neste caso em particular, a matriz de medições $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}_{n\times 9}$, onde $n$ é o número de medidas externas, foi declarada nula. Equivalentemente, poderia se fazer o vetor de medidas externas, $\mathbf{z}_k = \mathbf{0}$. A figura 8.15 é uma versão ampliada, evidenciando o percurso ensaiado da figura 8.14.

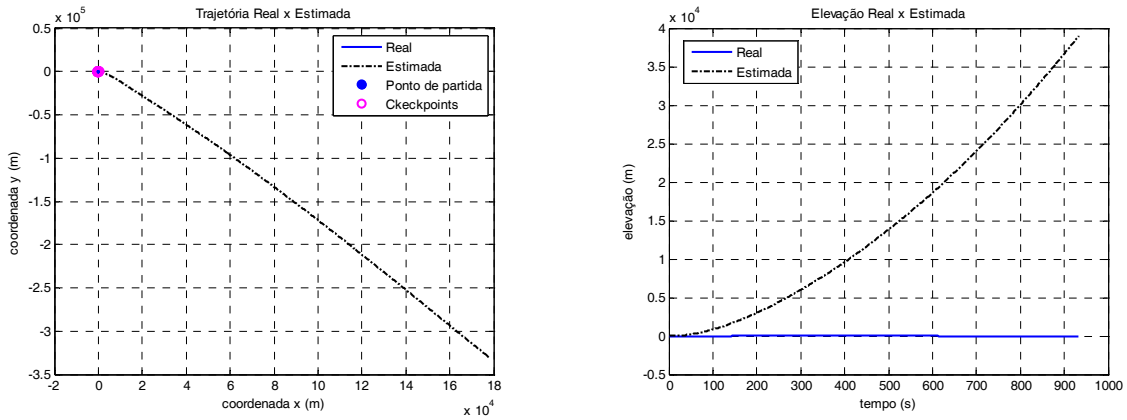



Figura 8.14 – Trajetória reconstruída sem o auxilio de medidas externas

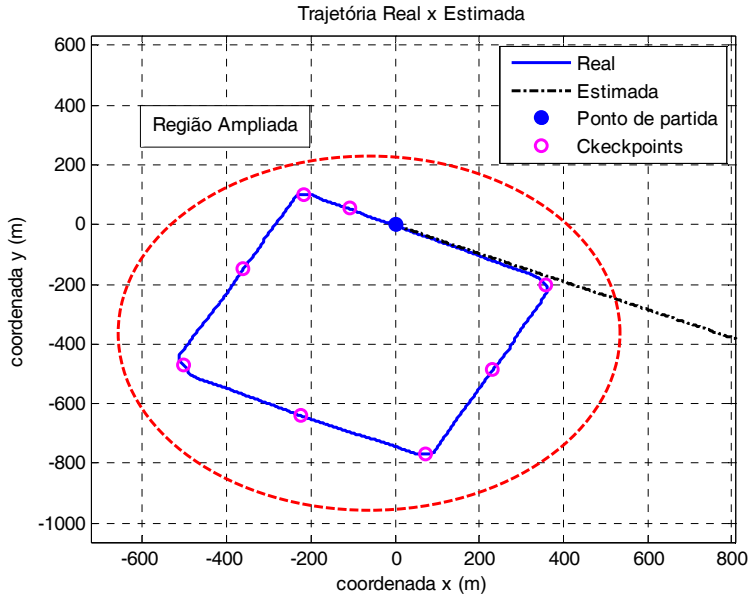



Figura 8.15 – Erro de reconstrução ampliado

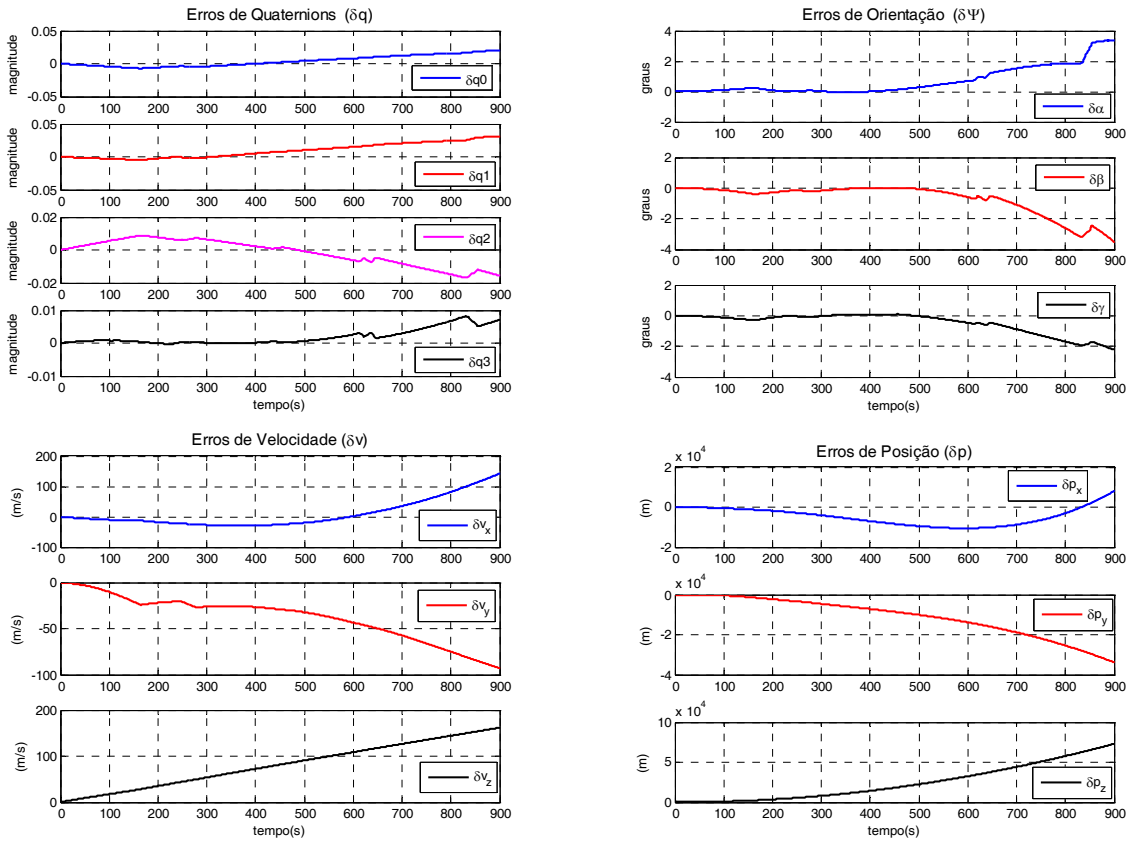



Figura 8.16 – Simulação do modelo de erros de estados aplicado ao conjunto de dados dos sensores ensaiados

A trajetória reconstruída sem o auxilio de medidas externas diverge completamente da real, pois a orientação e a ordem de grandeza do deslocamento são muito diferentes do trajeto ensaiado. O emprego de sensores inerciais de baixo desempenho produz, via de regra, resultados com esta magnitude de degradação.

Uma análise mais aprofundada permite entender melhor esta questão. Para analisar o problema da divergência utiliza-se a equação de propagação dos erros de estados descrita no capítulo 6 e aqui reescrita por conveniência (equação (8.2)). A UMI VG700AA possuí ruído de giroscópio $\delta\omega_{ib} = 0,005\left({}^{0}/s\right)$ e ruído de acelerômetro $\delta\mathbf{f}^{b} = 0,085\left(m/s^{2}\right)$, estes dados foram extraídos do certificado de calibração do fabricante. A componente $\mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}^{b} = \mathbf{f}^{n}$ são as acelerações da plataforma no sistema NED (vide figura 8.13). Aplicando-se os ruídos $\left(\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}, \delta\mathbf{f}^{b}\right)$ juntamente com as medidas das velocidades angulares $\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}\right)$ e acelerações $\left(\mathbf{f}^{n}\right)$ na equação (8.2), chega-se aos resultados ilustrados pela figura 8.16, onde se observa que a ordem

de grandeza da propagação dos erros de posição é coerente com a ordem de grandeza da trajetória ilustrada na figura 8.14.

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{ib}^{b}\delta\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{in}^{b}\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_{b}^{n}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}_{b}^{n}\mathbf{C}_{n}^{b}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \\
\delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{C}_{b}^{n}\delta\mathbf{f}^{b} + \delta\mathbf{C}_{b}^{n}\mathbf{f}^{b} + \mathbf{v}^{n}\times\left(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right) - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\right)\times\delta\mathbf{v}^{n} + \delta\mathbf{g}^{n} \\
\delta\dot{\mathbf{p}} &= \delta\mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Portanto, o que se nota é que somente a utilização dos sinais de acelerômetros não possibilita reconstruir a trajetória de forma minimamente satisfatória. Esta constatação leva a necessidade de se incluir algum tipo de medida externa para auxiliar o filtro. A próxima seção investiga o resultado da estimação quando se funde os dados dos sensores inerciais com medidas externas de velocidade.

### 8.3.2. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA UTILIZANDO MEDIDA EXTERNA DE VELOCIDADE NA FUSÃO SENSORIAL

A figura a seguir ilustra o trajeto obtido quando medidas externas de velocidades são inseridas na fusão sensorial. De imediato percebe-se que o resultado é muito superior àquele descrito na seção anterior. A simples inserção de medidas de velocidade produz uma trajetória estimada compatível com o trajeto ensaiado.

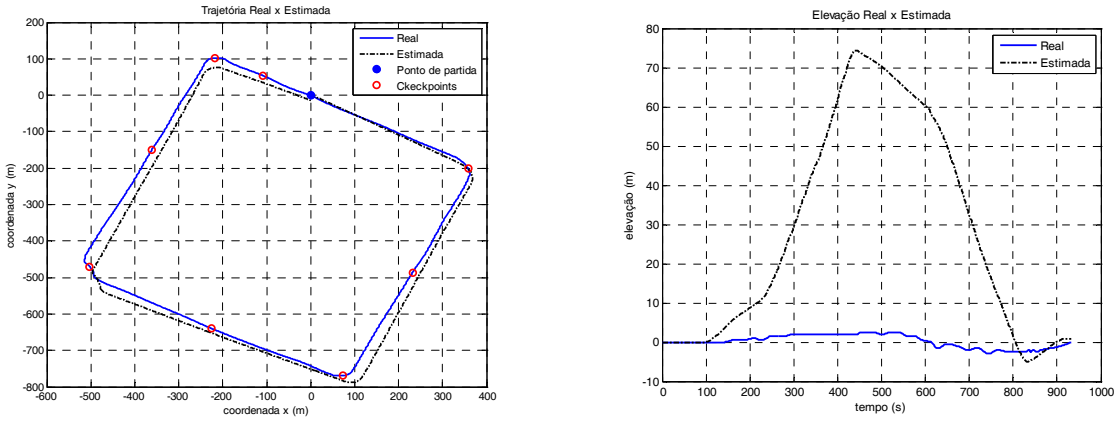



Figura 8.17 – Trajetória reconstruída utilizando velocidade como medida externa

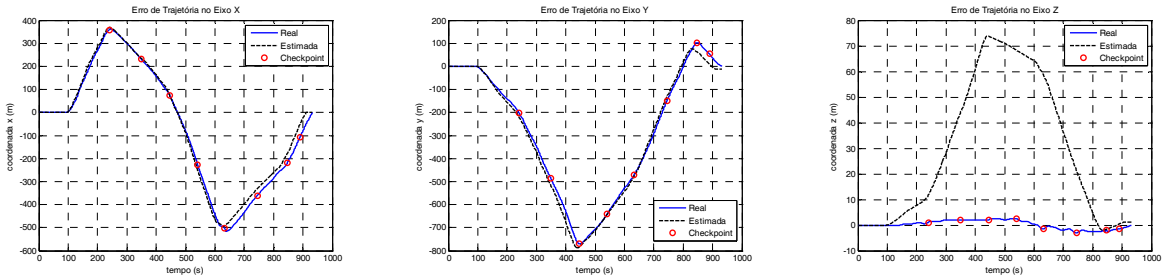
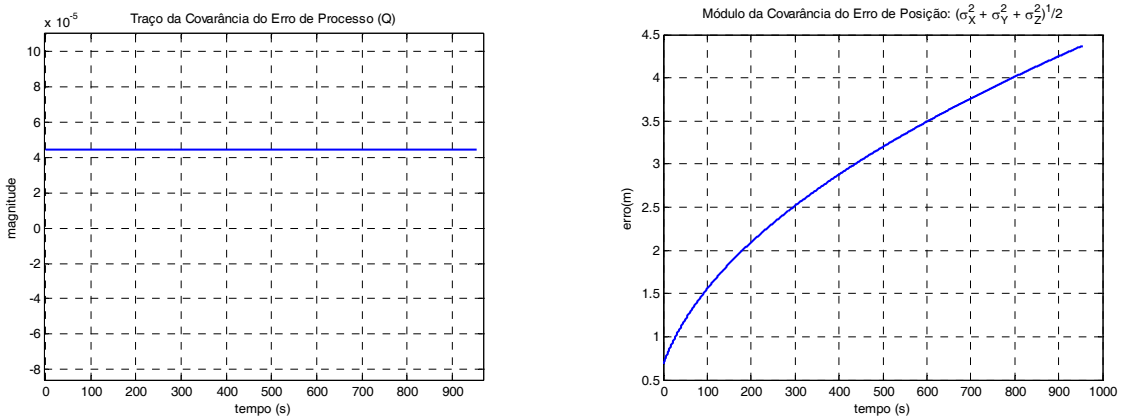



Figura 8.18 – Erros de estimação de posição

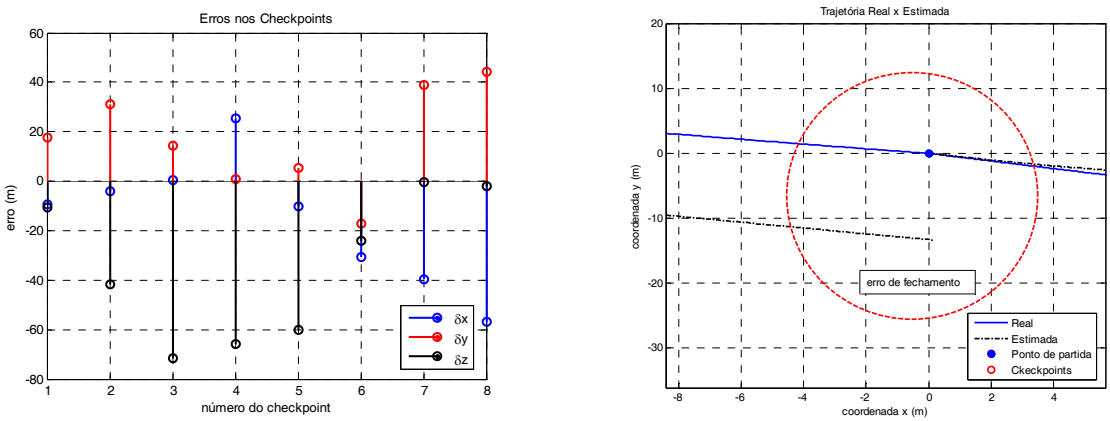
Percebe-se também que a partir de certo momento a trajetória reconstruída começa a acumular erros de orientação, indicando que os giroscópios começam a acumular erros de deriva. Embora apresente melhora expressiva, somente a inclusão de medidas de velocidade externa no processo de fusão não é suficiente para reconstruir a trajetória com relativa precisão de navegação (obviamente que dependendo da necessidade imposta). Estas observações sugerem a inclusão de uma medida externa de orientação na fusão com vistas a melhorar sua deriva, o que será tratado mais adiante.

A figura 8.19 mostra que o traço da matriz de covariância $\mathbf{Q}$ de ruído do processo manteve-se estável, assegurando que o filtro adaptativo não divergiu. A figura mostra também a evolução no tempo do desvio da estimativa de posição $\sigma_p$ dado pelo módulo da covariância do erro de posição. Como esperado, o desvio cresce com o tempo, e seu módulo atinge 4,4 m ao final da trajetória.




(a) (b)

Figura 8.19 – Traço da matriz de covariância de processo (a) e módulo da covariância do erro de posição (b)




(a) (b)

Figura 8.20 – Erro de estimação de posição nos *checkpoints* (a) e de posição final (b)

Com relação às coordenadas estimadas, observa-se que o maior erro ocorre no eixo $z$ (de altitude), de 72 m no ponto 3, como mostra a figura 8.20. Ao final da trajetória, o erro de posição verificado foi de 13 m. Apesar de serem significativos em termos numéricos, os erros de posição são insignificantes quando comparados com os resultados mostrados na figura 8.14 (reconstrução sem medidas externas).

Verifica-se que o erro final não ficou dentro do intervalo de confiança de $3\sigma_p$ = 6,6 m (detalhado logo adiante) e, portanto não satisfaz o critério de confiabilidade descrito no capítulo 6.

A condição $3\sigma_p$ também não se sustenta nos *checkpoints* anteriores, onde os erros são ainda maiores. Esse problema indica que as incertezas e fontes de ruído do sistema se encontram subdimensionadas no modelo fornecido ao FKAS. A discussão a respeito desse assunto será retomada mais a frente.

### 8.3.3. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA UTILIZANDO MEDIDAS EXTERNAS DE VELOCIDADE E AZIMUTE NA FUSÃO SENSORIAL

Visto que a reconstrução da trajetória apresentou acúmulo de desvio angular ao se utilizar somente a velocidade como medida externa, uma informação de orientação também é acrescentada ao processo de fusão. A nova informação de orientação externa é o sinal de azimute fornecido pelo magnetômetro da bússola eletrônica. Embora a bússola eletrônica também possua inclinômetros, os mesmos foram usados apenas na fase de alinhamento inicial e não durante a navegação,

pois suas medidas são provenientes de acelerômetros MEMS que respondem também às acelerações do veículo.

As figuras 8.21 e 8.22 mostram o resultado da fusão UMI, velocidade e bússola por meio do filtro FKAS.

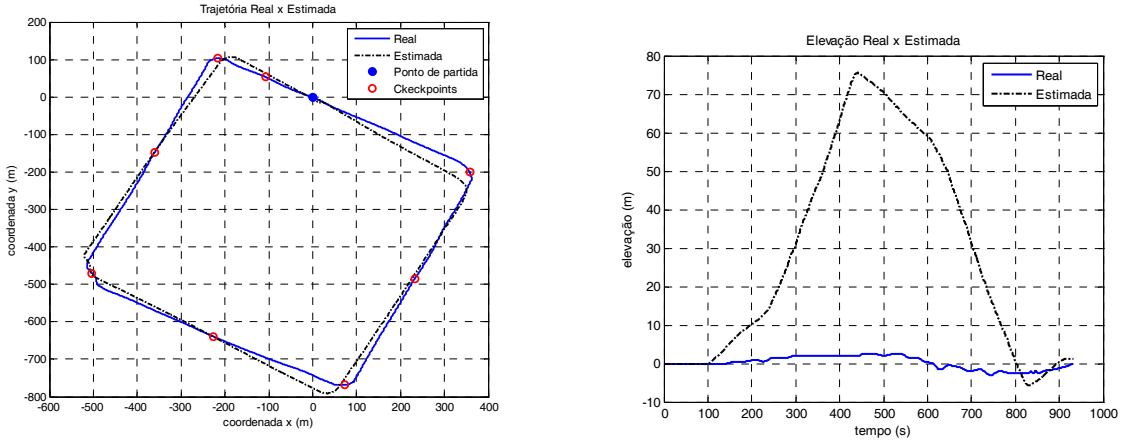



Figura 8.21 – Trajetória reconstruída utilizando velocidade e azimute como medidas externa

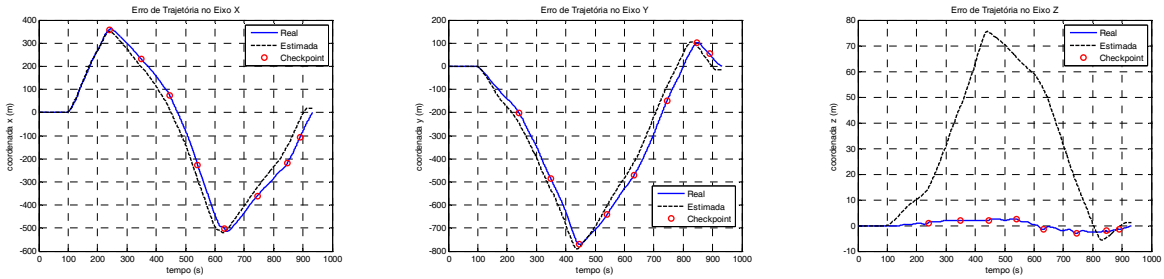
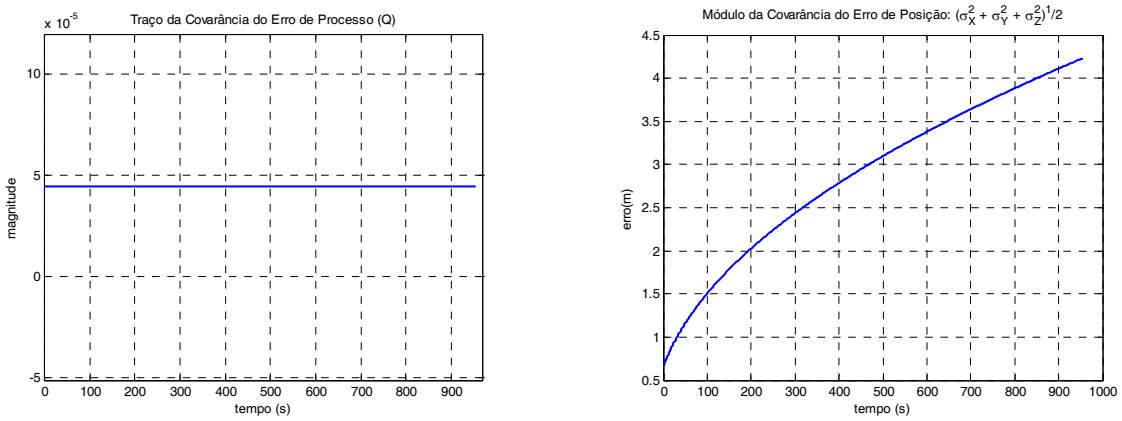



Figura 8.22 – Erros de estimação de posição

Comparando esses resultados com os da seção anterior, nota-se que a inclusão da bússola não trouxe expressiva melhora nos resultados, ao contrário do esperado, pois a bússola deveria contribuir significativamente na redução do desvio angular.

Apesar disso, a análise da evolução da matriz de covariância de processo e da covariância do erro de posição, mostradas na figura 8.23, comprova que a incorporação da bússola ao sistema não causou a divergência do FKAS, apresentado resultados muito parecidos com o do sistema anterior. Isso indica que investigações nessa linha podem continuar com o emprego de um magnetômetro mais preciso ou com um melhor modelamento do disponível, como se comenta mais a frente.

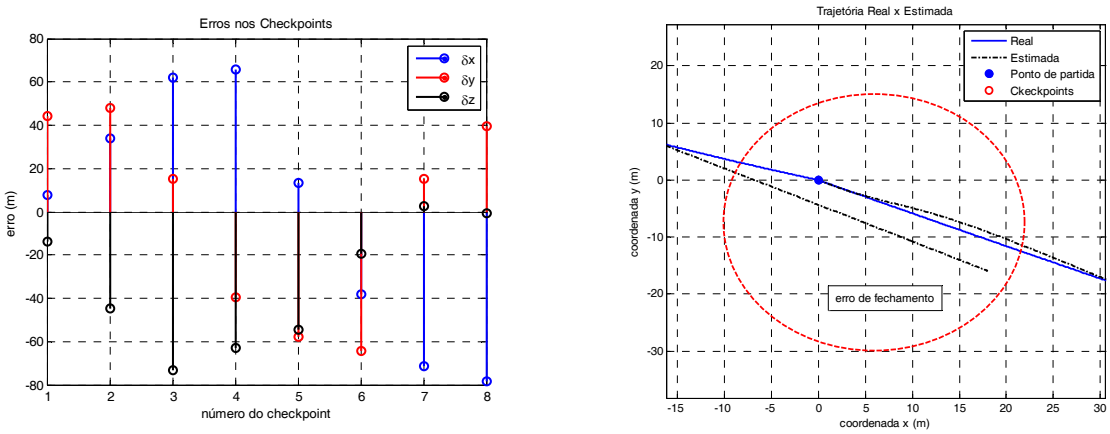



(a) (b)

Figura 8.23 – Traço da matriz de covariância de processo (a) e módulo da covariância do erro de posição (b)

Comparando os gráficos das figuras 8.24 com os correspondentes da figura 8.20, verifica-se que os erros de posição nos *checkpoints* e na posição final são sensivelmente maiores. O erro final é de 30 m. Ainda assim, são erros incomparavelmente menores que os resultantes sem o uso da fusão sensorial. Os erros no eixo $z$ praticamente não se alteraram, o que é de se esperar, uma vez que a bússola fornece informações de orientação apenas no plano horizontal.

É provável que esta ausência de melhora se deva ao fato de que a bússola não tenha sido devidamente modelada. Analisando a saída do magnetômetro durante o percurso, nota-se que nos trechos retos o mesmo apresenta um "*valor médio predominante*" com oscilação de aproximadamente $\pm 8^0$ em torno deste valor (vide figura 8.25b), e quando o veículo entra nos pontos $(D-E-F-G)$ da trajetória a variação é de aproximadamente $340^0$ em cada um dos segmentos $(D-E)$, $(E-F)$ e $(F-G)$, o que caracteriza uma variação angular total de aproximadamente $1020^0$, portanto, incompatível com a geometria do trecho da respectiva curva.




(a) (b)

Figura 8.24 – Erro de estimação de posição nos *checkpoints* (a) e de posição final (b)

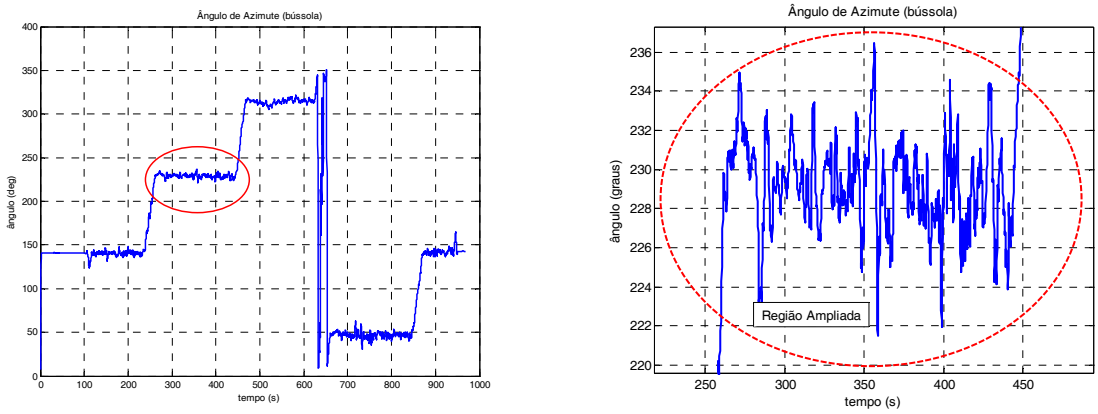



Figura 8.25 – Ampliação de trecho do magnetômetro

### 8.3.4. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA UTILIZANDO MEDIDAS EXTERNAS DE VELOCIDADE E *LANDMARKS* NA FUSÃO SENSORIAL

Os *landmarks* instalados ao longo da trajetória podem também fornecer medidas externas para fusão sensorial na forma de coordenadas de posição. Modela-se um *landmark* como um sensor fictício que fornece suas coordenadas cartográficas no instante em que o veículo passa por ele.

O uso de *landmarks* deve ser ponderado, pois não seria necessário um mecanismo sofisticado para se navegar ao longo de uma trajetória contendo vários *landmarks* próximos uns aos outros, que por outro lado implicaria um alto custo de instalação. Neste sentido, a fusão sensorial deve dispor do menor número

necessário de *landmarks* para se manter o erro de estimação dentro de uma faixa aceitável.

Aplica-se o critério de confiabilidade proposto no capítulo 6 para, dado o erro máximo aceitável de posição $e_{pMAX}$, determinar o instante que o desvio de posição estimado ultrapassa o valor $\left(e_{pMAX}/3\right)$. Estipula-se em que ponto do percurso o primeiro landmark seria necessário.

A seguir, mostra-se o resultado da aplicação deste critério ao caso de fusão sensorial com medidas de velocidade, descrito na seção 8.3.2.

O erro $e_{pMAX}$ foi dimensionado da seguinte forma:

- Definiu-se o desvio de posição nas três coordenadas: $\sigma_x = \sigma_y = 1{,}5\ \mathrm{m}$; $\sigma_z = 0{,}5\ \mathrm{m}$.
- O desvio em $z$ foi estipulado menor, uma vez que a trajetória de teste é praticamente plana.
- O desvio do erro de posição fica: $\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \cong 2{,}2\ \mathrm{m}$,
- E o erro aceitável: $e_{pMAX} = 3\sigma_p = 6{,}6\ \mathrm{m}$.

Pelo gráfico da figura 8.19b, pode-se ver que o desvio $\sigma_p$ atinge o valor 2,2 m após aproximadamente 224 s de navegação. A figura 8.26 mostra essa região do gráfico com maior detalhamento.

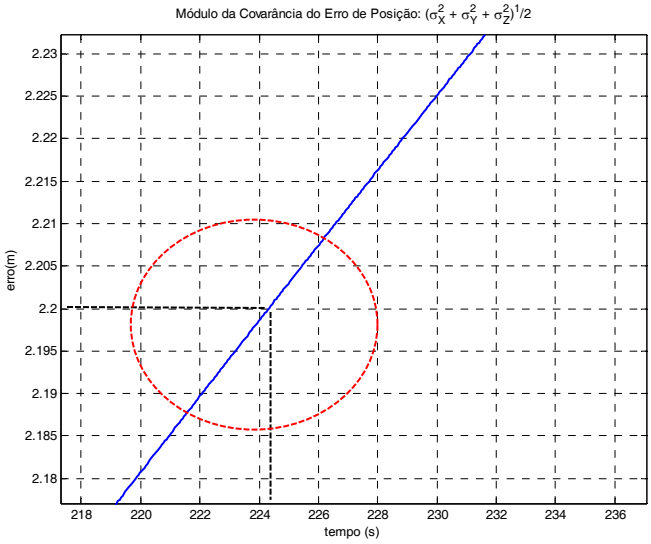



Figura 8.26 – Gráfico do módulo da covariância do erro de posição em torno do instante t = 224 s.

Pelos gráficos das coordenadas da trajetória reconstruída, na figura 8.18, observa-se que o veículo se encontrava próximo ao landmark 7 nesse instante, após percorrer 398 m (conforme figura 8.5b). Outros 5 landmarks foram utilizados como pontos de referência, a cada 400 m aproximadamente de percusso, para se fazer uma reconstrução de toda a trajetória. A tabela 8.1 mostra as coordenadas desses landmarks, com origem no ponto de partida da trajetória.

Tabela 8.1 – Coordenadas dos landmarks usados como referência

| Landmark | x (m) | y (m) | z (m) |
|---|---|---|---|
| 7 | 340,0 | -177,0 | 0,5 |
| 15 | 232,0 | 514,0 | 2,0 |
| 24 | -20,0 | 267,0 | 2,5 |
| 30 | -420,0 | 461,0 | 0,5 |
| 40 | -398,0 | -226,0 | -1,5 |
| 48 | -217,0 | 103,0 | -2,0 |

Os landmarks foram modelados na fusão sensorial como sensores que fornecem suas próprias coordenadas quando o veículo passa por eles. O ruído de medida desses sensores foi modelado como gaussianos, com desvios iguais aos utilizados para dimensionar o erro de posição aceitável: $\sigma_x = \sigma_y = 1{,}5\ \mathrm{m}$; $\sigma_z = 0{,}5\ \mathrm{m}$.

A figura 8.27 mostra o trajeto estimado pela fusão sensorial usando os landmarks juntamente com as medidas de velocidades. Na figura 8.28, tem-se as coordenadas estimadas da trajetória.

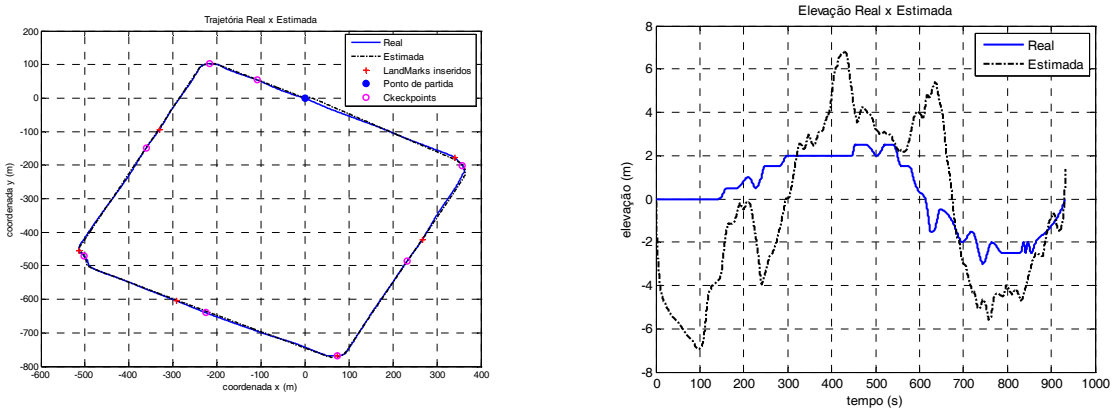



Figura 8.27 – Trajetória reconstruída utilizando velocidade e 6 landmarks como medida externa

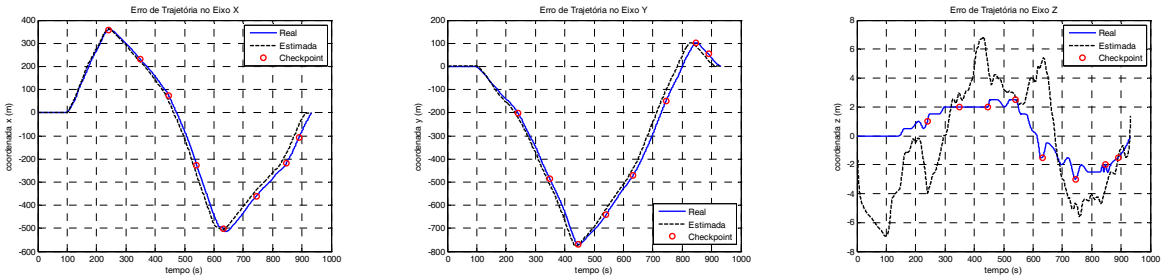
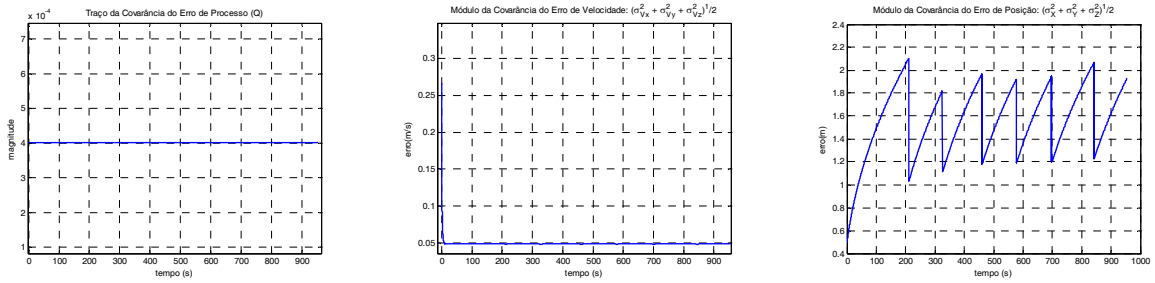



Figura 8.28 – Erros de estimação de posição

Comparando-as com as figuras 8.17 e 8.18, verifica-se uma significativa redução nos erros de estimação. O eixo $z$ é fortemente favorecido, com erro máximo reduzido de 75 m para 7 m, o que é de se esperar, uma vez que os landmarks fornecem uma referência direta da coordenada $z$, cuja estimativa não pode ser corrigida satisfatoriamente nem pelas medidas de velocidade (dado que o trajeto é predominantemente plano) nem pela bússola.

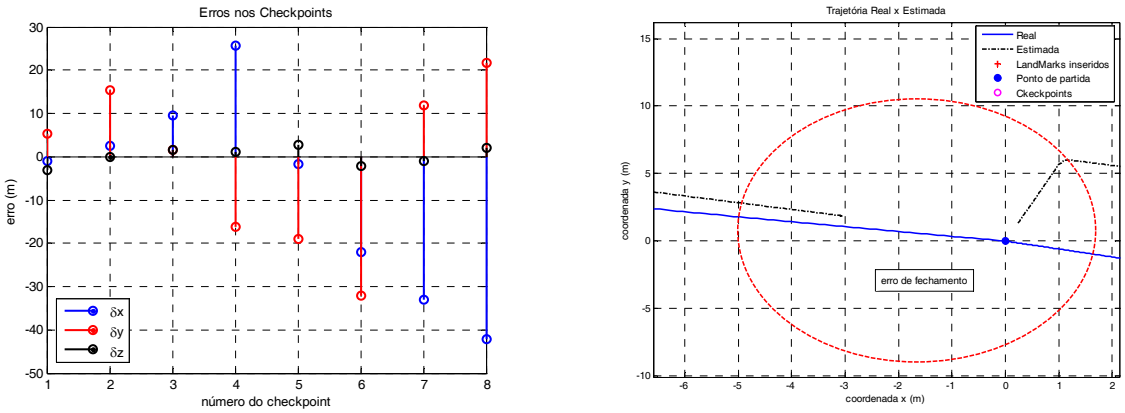
A figura 8.29a mostra a evolução no tempo do traço da matriz $\mathbf{Q}$, enquanto que as figuras 8.29b e 8.29c mostram o módulo da covariância do erro de velocidade e o módulo da covariância do erro de posição, os quais representam os desvios dos erros de estimativa de velocidade e posição, respectivamente. Verifica-se que a adição dos landmarks como medidas externas não causou a divergência do FKAS, e limitou com sucesso o desvio de posição ao valor estipulado em $e_{pMAX}/3 = 2,2\ \mathrm{m}$.




(a) (b) (c)

Figura 8.29 – Traço da matriz Q (a) e módulos das covariâncias dos erros de velocidade (b) e posição (c)

A figura 8.30 mostra os erros das posições estimadas nos checkpoints e no ponto final. Comparando com a figura 8.20, observa-se a significativa redução dos erros proporcionada pelas medidas de landmark, principalmente no eixo $z$ como já destacado. O erro final de posição reduziu de 13 m para 3,1 m.




(a) (b)

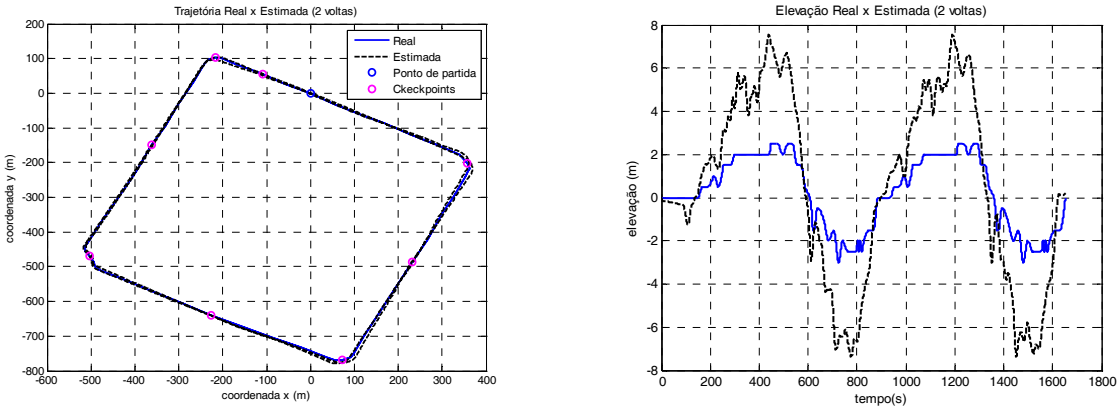
Figura 8.30 – Erro de estimação de posição nos *checkpoints* (a) e de posição final (b)

Novamente, vê-se neste caso que o erro de posição no ponto final ficou dentro do intervalo de confiança estipulado $3\sigma_p = 6,6\ \mathrm{m}$, mas não nos *checkpoints* intermediarios, indicando que as fontes de incerteza incluídas no modelo de fusão sensorial podem estar subdimensionadas.

Entretanto, a incerteza de estimativa de posição foi limitada pela adição das medidas de landmark conforme previamente estipulado, corroborando o critério proposto neste trabalho.

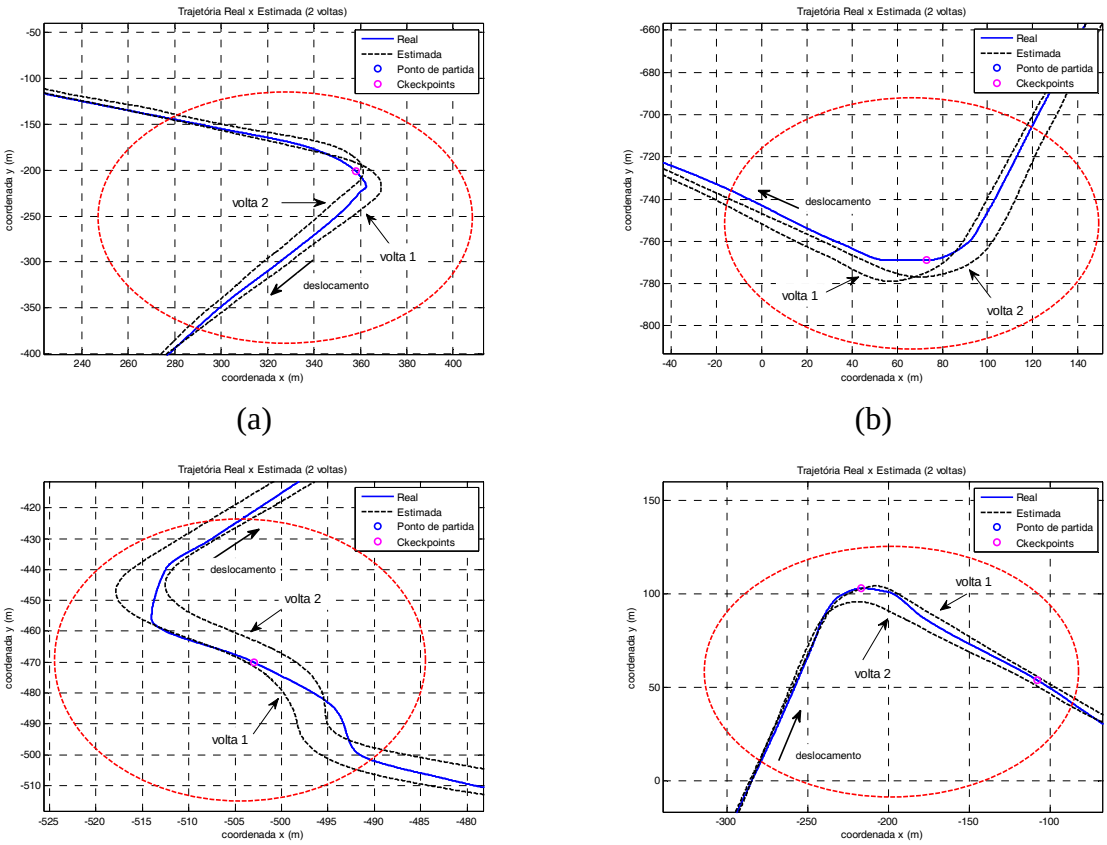
### 8.3.5. RECONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA EM PERCURSO DE LONGA DURAÇAO

Para investigar a eficiência do FKAS sobre o efeito cumulativo de deriva dos sensores inerciais, um teste com duas voltas consecutivas sobre o trajeto foi efetuado. Tal como no teste anterior a fusão utilizou UMI, velocidade e landmarks. A distancia percorrida foi de aproximadamente 5,5 km com tempo de percurso de aproximadamente 28 minutos. Assim como no teste anterior, os landmarks foram inseridos ao longo da trajetória separados aproximadamente 400 metros um do outro. A figura 8.31 mostra o resultado da reconstrução da trajetória, enquanto que a figura 8.32 detalha a reconstrução nos trechos de curvas no sentido do deslocamento (horário).




(a) (b)

Figura 8.31 – Trajetória reconstruída com duas voltas consecutivas



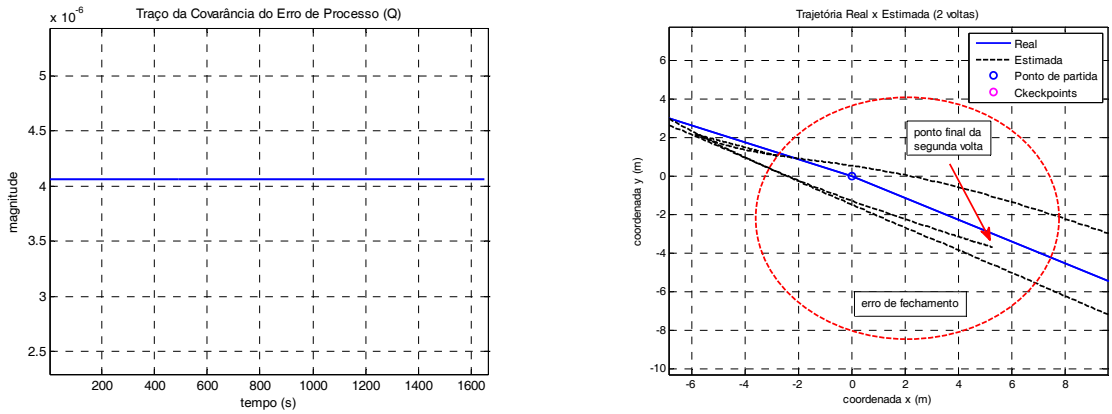

(a) (b)

(c) (d)

Figura 8.32 – Detalhes da reconstrução nos trechos de curva primeira (a), segunda (b), terceira (c) e quarta curva (d)

Os detalhes ilustrados pela figura 8.32, fornecem uma análise qualitativa do efeito da deriva dos sensores. Eles foram inseridos nesta seção para que se possa ter uma idéia do quanto a trajetória reconstruída diverge da trajetória real nos trechos de curva, pois a deriva de giroscópio tende a se acentuar quando o veículo

passa por esses trechos, sendo que no caso deste teste em particular os trechos curvos possuem predominância horária e, portanto, a deriva de giroscópio tenderá a se acumular numa única direção.




(a) (b)

Figura 8.33 – Traço da matriz $\mathbf{Q}$ (a) e erro de estimação de posição final (b)

Devido ao processo de integração, os sensores inerciais de baixo desempenho como os que foram usados neste trabalho são duramente degradados pelo tempo. No entanto, analisando o resultado da figura 8.31 vê-se que a trajetória estimada adere à trajetória real, indicando que o FKAS é eficiente e estima com relativa precisão os estados de posição mesmo para trajetos mais longos.

A figura 8.33a mostra a evolução no tempo do traço da matriz $\mathbf{Q}$, e assim como nos casos anteriores a matriz $\mathbf{Q}$ manteve-se estável indicando que o filtro permanece não divergindo.

A figura 8.33b mostra que o erro final de posição ficou por volta de $e_{pFinal} = 6,4\,m$, evidenciando que ouve um aumento do erro de fechamento se comparado com o teste anterior, onde o erro final de posição era de 3,1 m. No entanto, mesmo com o aumento, o erro de posição no ponto final permaneceu dentro do intervalo de confiança estipulado $\left(3\sigma_p = 6,6\,\mathrm{m}\right)$.

O erro de reconstrução no eixo $z$ manteve a mesma magnitude do teste anterior (figura 8.31b) não evidenciando nenhuma piora devido ao teste em trechos mais longos, provavelmente pelos mesmos motivos expostos na seção 8.3.4.

Assim como no teste anterior, a incerteza de estimativa de posição foi limitada pela adição das medidas de landmark, corroborando novamente o critério proposto.

# 9. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Esta tese teve como foco principal, o desenvolvimento e construção de um algoritmo de fusão sensorial para navegação terrestre baseado em unidade de medição inercial (UMI) de baixo desempenho e Filtro Estendido de Kalman. Toda a modelagem matemática foi desenvolvida tendo como referência o sistema de navegação inercial *strapdown* (SNIS).

Foi realizada uma extensa revisão bibliográfica acerca do problema do SINS e constatou-se que a grande massa crítica têm investigado a fusão SNIS/GPS.

Não se verificou na literatura atual nenhuma publicação relatando a fusão aqui proposta. Em se tratando da literatura nacional em particular, este assunto ainda é bastante incipiente, porém de fundamental importância estratégica para o país.

Equipamentos de navegação dotados de sensores inerciais de boa precisão são caros e indisponíveis para a comunidade civil, restando à mesma recorrer aos equipamentos de baixo desempenho também denominados *low-grade*.

Portanto, o grande desafio é criar mecanismos que através de modelos matemáticos e algoritmos computacionais elevem a classe dos sensores de baixo desempenho.

Nesse aspecto, os principais fatores que motivaram a investigação de modelos e algoritmos que elevassem o grau de precisão do SNIS se deram pela baixa precisão dos sensores inerciais e a incapacidade de se navegar utilizando somente estes sensores.

Os modelos desenvolvidos e investigados foram baseados nas técnicas de estimação de estados e estimação de erros de estados, sobre os quais se aplicou a fusão sensorial.

A partir desses modelos desenvolveu-se e testou-se um SNIS para um veículo terrestre, baseado na fusão sensorial de uma UMI de baixo desempenho, um hodômetro (do qual se extrai medidas de velocidade) e uma bússola eletrônica.

Para verificar a reconstrução da trajetória e também apoiar a fusão sensorial, foram instaladas marcas topográficas (*landmarks*) ao longo da trajetória de teste, possibilitando obter suas coordenadas sempre que o veículo passar por elas.

Por meio das coordenadas obtidas, torna-se possível determinar os erros de posições estimadas nesses pontos.

Todas as estimativas de estados e de erros de estados foram processadas por um algoritmo inovador, denominado *Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado* (FKAS). O FKAS atua como núcleo da fusão sensorial, incorporando ponderadamente medidas de sensores ao modelo dinâmico do sistema, para produzir estimativas de estados otimizadas e com mínima incerteza.

Para avaliar as incertezas das posições estimadas pelo FKAS, desenvolveu-se um critério quantitativo para se determinar *a priori*, a extensão máxima de trajetória que se pode reconstruir com uma determinada confiabilidade desejada (dado os sensores disponíveis).

Conjuntos reduzidos de *landmarks* foram utilizados como sensores fictícios (pontos de observação) para testar o critério de confiabilidade proposto.

Na etapa de execução dos testes, os resultados mostraram que, contando somente com os sensores inerciais de baixo desempenho, a navegação terrestre torna-se inviável após algumas dezenas de segundos. No

entanto quando é acrescentada medida externa de velocidade na fusão com os mesmos sensores inerciais, os resultados são muito superiores, e os erros de estimativas são reduzidos da ordem de $10^5 m$ para $10^1 m$, com erro final de estimativa de posição de aproximadamente de 13 metros.

Embora tenha melhorado substancialmente a navegação, a fusão com medidas de velocidade não conseguiu manter os erros de posição nos pontos de observação dentro do critério proposto e também não conseguiu controlar os erros de deriva de orientação, tendo sido necessário adicionar ao processo de fusão uma medida de orientação fornecida por uma bússola eletrônica.

Constatou-se que a fusão hodômetro/bússola não atingiu o desempenho esperado, sendo que em alguns trechos do teste a degradação da navegação foi ampliada.

Esta constatação inesperada levou o autor a supor que, ou a bússola foi instalada inapropriadamente e/ou necessita-se aprimorar o seu modelo. Com relação à primeira hipótese cabe ressaltar que todos os procedimentos recomendados pelo fabricante foram rigorosamente obedecidos. Restou, portanto, a questão do modelo, e neste ponto o autor sugere como contribuição futura, que seja feita uma investigação mais aprofundada no sensor, visando se determinar um modelo mais realista.

A terceira fusão sensorial baseou-se na utilização de medidas de velocidade apoiada por um conjunto de seis landmarks, separados aproximadamente 400 metros um do outro. Nesta fusão sensorial os resultados permitiram reconstruir trajetórias com deslocamentos da ordem de 2,7 km (ou 15 minutos) com erro final de estimativa de posição (erro de fechamento) de aproximadamente de 3 metros.

Por fim um teste com duas voltas consecutivas sobre o trajeto foi efetuado. O principal objetivo deste teste foi investigar a resposta do FKAS sobre o efeito cumulativo da deriva dos sensores inerciais. Tal como no terceiro teste, a fusão utilizou medidas de velocidade apoiada por um conjunto de landmarks,

separados aproximadamente 400 metros um do outro. Nesta fusão os resultados permitiram reconstruir trajetórias com deslocamentos da ordem de 5,5 km (ou 28 minutos) com erro final de estimativa de posição (erro de fechamento) de aproximadamente de 6,4 metros.

O critério adotado para restringir os erros de posição, verificando-se o módulo dos elementos diagonal da matriz $\mathbf{P}$ permitiu manter o erro de posição no ponto final dentro do intervalo de confiança estipulado $(3\sigma_P = 6{,}6\,\mathrm{m})$, no entanto este critério não restringiu os erros de posição na maioria dos *checkpoints* intermediários, indicando que as fontes de incerteza incluídas no modelo de fusão sensorial podem estar subdimensionadas, como será discutido logo adiante.

Por outro lado, a incerteza de estimativa de posição foi limitada pela adição das medidas de landmark conforme previamente estipulado, corroborando o critério proposto neste trabalho.

O subdimensionamento das incertezas de ruídos a que o autor se refere, são os valores de ruídos de sensores que foram adotados na fusão sensorial. Estes ruídos foram retirados do certificado de calibração do fabricante da UMI VG700AA, porém durante a fase de testes finais, constatou-se que UMI apresentava intermitente oscilação de leitura do giroscópio $\omega_z$, indicando estar avariada. Neste sentido, torna-se difícil quantificar o quanto esta oscilação afeta os demais sensores da UMI e por este motivo foi introduzido um giroscópio com 1 grau de liberdade (descrito no capítulo 7) para apoiar e substituir quando necessário o giroscópio $\omega_z$ da UMI VG700AA.

Também cabe ressaltar que a autonomia de navegação utilizando-se somente esta categoria de sensores inerciais é de algumas dezenas de segundos, sendo que no caso da fusão proposta este tempo foi testado com relativo sucesso em trajetos de 28 minutos, o que corresponde a um ganho expressivo de autonomia de navegação a um custo relativamente baixo, se comparado ao preço de sensores inerciais de classe mais elevada.

Baseado em tudo o que foi exposto, no modelo proposto e nos resultados obtidos concluí-se que o FKAS é uma solução satisfatória e promissora para este tipo de aplicação, devendo sua estrutura ser mais bem avaliada em trabalhos futuros e se for o caso aperfeiçoada ou modificada.

Como ponto de partida para aperfeiçoar o FKAS o autor propõe que os estados de posição (*landmarks*) sejam aumentados, passando a incorporar medidas de orientação juntamente com as medidas de coordenadas. Acredita-se que com esta proposta a deriva de orientação será minimizada sempre que o veículo passar pelo *landmark*, pois antes de se iniciar a navegação, as coordenadas geográficas e a orientação dos *landmarks* podem ser previamente obtidas em regime estacionário estabilizado, o que evita variações como aquelas percebidas pela bússola eletrônica ao se deslocar sobre a trajetória.

Como última reflexão o autor ressalta que, além do algoritmo proposto, desenvolvido e testado, uma vasta quantidade de modelos matemáticos aplicados à navegação inercial terrestre foi unificada neste trabalho. Neste sentido, o autor acredita ter dado alguma contribuição para a comunidade de “navegação inercial”, destacando-se principalmente a comunidade nacional, cuja literatura acerca do tema ainda encontra-se bastante reduzida.

# REFERÊNCIAS


ARULAMPALAM, M. S. et al. *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, v. 50, n. 2, p. 174 – 188, Feb 2002.

BAR-ITZHACK, I.; OSHMAN, Y. *Atittude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, p. 128 – 135, 1984.

BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R. ***Estimation and Tracking: Principles, Techiniques and Software***. USA: Artech House, 1993.

BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R. ***Estimation With Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software***. USA: John Wiley and Sons, 2001.

BIJKER, J.; STEYN, W. *Kalman Filter Configurations for a Low-Cost Loosely Integrated Inertial Navigation System on Airship*. Elsevier, Control Engineering Practice, 2008.

BRANDT, A.; GARDNER, J. F. *Constrained Navigation Algorithms for Strapdown Inertial Navigation Systems with Reduced Set of Sensors*. Proceedings of American Control Conference. USA, p. 1848 – 1852, Jun 2008.

BROOKNER, E. ***Tracking and Kalman Filtering Made Easy***. USA: John Wiley & Sons, Inc, 1998.

BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. ***Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering***. 3. ed.. New York, USA: John Wiley and Sons, 1997.

CAMPOS, V. A. et al. *Filtros de Partículas Aplicados à Estimação de Trajetórias*. XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, 2004.

CAMPOS, V. A. et al. *Trajectory Estimation of a PIG Using a Low Cost Inertial Measurement Unit and Odometry*. VI INDUSCON, Joinville, 2004.

CAMPOS, V. A. F. ***Aplicação do Filtro de Kalman e dos Filtros de Amostras à Estimação de Trajetórias em Navegação Inercial***. 2004. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

CARRARA, V.; MILANI, P. G. *Controle de uma Mesa de Mancal a Ar de um Eixo Equipada com Giroscópio e Roda de Reação*. V Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial, p. 97 – 102, Rio de Janeiro, 2008.

CGEE. ***Tecnologia Inercial no Brasil 2007-2010: a rota para seu estabelecimento na indústria***. 2006.106 p. Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, Brasília, 2006.

CHATFIELD, A. B. ***Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation***. USA: The American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 174, 1997.

CROSSBOW. *Measurement of a Vehicle's Dynamic Motion - Combine Angular Rate Sensors with Accelerometers*. CROSSBOW IMU Application Note, USA, 1999.

CROSSBOW. ***VG700AA User´s Manual***. (Document 7430-0074-01), September 2002.

DMITRIYEV, S. P. et al. *Nonlinear Filtering Methods Application in INS Alignment*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, v.33, n.1, p. 260 – 271, Jan 1997.

DOROBANTU, R.; ZEBHAUSER, B. *Field Evaluation of Low Cost Strapdown IMU by means GPS*. Technische Universität München, Germany, 1999.

EL-SHEIMY, N.; HOU, H.; NIU, X. *Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, v. 57, n. 1, p. 140-149, Jan 2008.

FRANÇA JUNIOR, J. A. ***Simulação e Implementação em Tempo Real de Sistemas de Navegação Inercial Integrados INS/GPS***. 2009. Dissertação (Mestrado) - Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2009.

FRASER, D. C.; POTTER, J. E. *The Optimum Linear Smoother as a Combination of Two Optimum Linear Filters*. IEEE Transactions on Automatic Control, p. 387 – 390, 1969.

FURUKAWA, C. M. ***Navegação de um Veículo Autônomo por Ultra-Som em Ambiente Estruturado***. 1992. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

GARROTTI, J. C. *Modelagem e Simulação de um Girômetro Sintonizado Dinamicamente em um CAD Eletrônico*. 2003. Dissertação (Mestrado) - Instituto Nacional de Pesquisas espaciais, São José dos Campos – SP, 2003.

GELB, A. et al. ***Applied optimal Estimation***. USA: MIT Press, 1986.

GELB, A. *Synthesis of a Very Accurate Inertial Navigation System*. IEEE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics, p. 119 – 128, Jun 1965.

GEMAEL, C. ***Introdução ao Ajustamento de Observações***. Curitiba: Editora da UFPR, 1994.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. ***Matrix Computations***. 3. Ed.. USA: The Johns Hopkins University Press, 1996.

GRENON, G.; AN, E.; SMITH, S. *Enhancement of the Inertial Navigation System of the Florida Atlantic University Autonomous Underwater Vehicles*. Institute of Ocean and System Engineering – Sea Tech, Florida Atlantic University, Florida, 2000.

GREWAL, M. S.; HENDERSON, V. D.; MIYASAKO, R. S. *Applications of Kalman Filtering to the Calibration and Alignment of Inertial Navigation Systems*. USA: IEEE Transactions on Automatic Control, v. 36, n. 1, p. 4 – 13, Jan 1991.

GREWAL, M. S.; WEILL, L. R.; ANDREWS, A. P. ***Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration***. New York, USA: John Wiley & Sons, 2001.

GUIVANT, J. et al. *Autonomous Navigation and Map building Using Laser Range Sensors in Outdoor Applications*. Journal of Robotic Systems, v. 17, n. 10, p. 565 – 583, October 2000.

GUL, F. et al. *GPS/SINS Navigation Data Fusion Using Quaternion Model and Unscented Kalman Filter*. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, p. 1854 -1859, Jun 2006.

GUSTAFSSON, F. et al. *Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, Special Issue on Monte Carlo Methods for Statistical Signal Processing, pp. 1 – 13, 2001.

HANSON, A. J. ***Visualizing Quaternions***. USA: Elsevier, 2006.

HARTIKAINEN, J.; SARKA, S. *Optimal filters and smoother – a manual for Matlab toolbox EKF/UKF*. Helsinki University of Technology, Feb 2008.

HOUSHANGI, N.; AZIZI, F. *Accurate Mobile Robot Position Determination Using Unscented Kalman Filter*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, p. 846-851, May 2005.

IEEE STD 962. (1997). (R2003). *Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros*, Annex C. IEEE, 2003.

JAZWINSKI, A. H. ***Stochastic Process and Filtering Theory***. Mathematic in Science and Engineering vol.64 – USA: Academic Press, 1970.

JORDAN, S. K. *Effects of Geodetic Uncertainties on a Damped Inertial Navigation System*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems Vol. Aes-9, n. 5, p. 741 – 752, Sep 1973.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. *A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems*. The University of Oxford - Robotics Research Group, Department of Engineering Science, Oxford, 2004.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*. Proceedings of the IEEE, v. 92, p. 401 – 422, Mar 2004.

JURMAN, D. et al. *Calibration and Data Fusion Solution for the Miniature Attitude and Heading Reference System*. Elsevier Sensors and Actuators A 138, p. 411 – 420, 2007.

KALMAN, E. R.; BUCY, R. *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*. Journal of Basic Engineering. Transactions ASME Series D, vol. 83, pp. 95 – 108, USA, 1961.

KALMAN, R. E. A. *New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Journal of Basic Engineering. Transactions ASME Series D, v. 82, p. 35 – 45, USA, 1960.

KHAN, M. E. *Matrix Inversion Lemma and Information Filter*. Honeywell Technology Solutions Lab, Bangalore, 2008.

KIM, A. ***Development of Sensor Fusion Algorithms for MEMS-Based Strapdown Inertial Navigation Systems***. 2004. Dissertação (Mestrado) – University of Waterloo, Waterloo, 2004.

KONG, X. *INS Algorithm Using Quaternion Model for Low Cost IMU.* Elsevier Control Engineering Practice, p. 221 – 246, 2004.

KUGA, H. K. et al. *Experimentos de Alinhamento de Unidade de Medida Inercial Baseada em MEMS*. V Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial, p. 56 – 61, Rio de Janeiro, 2008.

KUGA, H. K. et al. *Integração de Sistema DGPS e Unidade Inercial para Navegação Precisa de Aeronave em Tempo-Real*. V Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial, p. 80 – 84, Rio de Janeiro, 2008.

KURITSKY, M. M.; GOLDSTEIN, M. S. *Inertial Navigation*. Proceedings of the IEEE. Vol. 71. No. 10, p. 1156 – 1176, Oct. 1983.

LAWRENCE, A. ***Modern Inertial Technology – Navigation, Guidance and Control.*** 2. Ed. New York, USA: Springer-Verlag, 1998.

LEONDES, C. T. et al. *Nonlinear Smoothing Theory*. IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, p. 63 – 71, 1970

LING-JUAN, M. et al. *Derivation of nonlinear error equations of strapdown inertial navigation system using quaternion*. SICE 2002 - Proceedings of the 41st SICE Annual Conference, p. 636 – 640, 2002.

MARKLEY, F. L. *Attitude Error Representation for Kalman Filtering*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, NASA's Goddard Space Flight Center, 2003a.

MARKLEY, F. L. *Attitude Estimation or Quaternion Estimation*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, NASA's Goddard Space Flight Center, 2003b.

MARQUES FILHO, E. A.; KUGA, H. K.; RIOS NETO, A. *Integrated GPS/INS Navigation System Based on a Gyroscope-Free IMU*. Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, Guaratinguetá, SP, May 2006.

MAYBECK, P. S. ***Stochastic Models, Estimation and Control***, v.1. USA: Academic Press, Inc., 1976.

NASCIMENTO JUNIOR, C. L. ***Estudo Comparativo de Combate à Divergência de Filtros de Kalman***. 1988. Dissertação (Mestrado) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos - SP, 1988.

NASH JR., R. A. *The Estimation and Control of Terrestrial Inertial Navigation System Errors Due to Vertical Deflections*. IEEE Transactions on Automatic Control, p. 329 – 338, Aug 1968.

NUTTALL, J. D. *Requirements for Gyroscopes for Inertial Navigation*. IEE Proceedings, v. 132, n. 5, p. 250 – 254, Oct 1985.

OJEDA, L. et al. *Precision Calibration of Fiber - Optics Gyroscopes for Mobile Robot Navigation*. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, Apr 2000.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. ***Probability, Random Variables and Stochastic Processes*.** 4. Ed. New York, USA: McGraw Hill, 2001.

PINGYUAN, C.; TIANLAI, X. *Data Fusion Algorithm for INS/GPS/Odometer Integrated Navigation System*. IEEE Transactions on Automatic Control, p. 1893 – 1897, Aug 2007.

QING-HAO, M. et al. *Adaptative Extend Kalman Filter (AEKF) – Based Mobile Robot Localization Using Sonar*. Cambridge University Press, v. 18, p. 459-473, UK, 2000.

RIOS NETO, A. *Estimation of Aircraft Aerodynamic Derivatives Using Extended Kalman Filter*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Campinas, 2000.

ROGERS, R. M. ***Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems*.** Virginia, USA: AIAA Education Series, 2000.

SADOVNYCHIY S. *Correction Methods and Algorithms for Inertial Navigation System Working Inside of Pipelines*. IEEE Fourth Congress of Electronics, Robotics and Automotive Mechanics, p. 625 – 630, 2007.

SANTANA, D. D. S. et al. *Estimação de Trajetórias Utilizando Sistema de Navegação Inercial Strapdown*. XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, 2004.

SANTANA, D. D. S.; FURUKAWA, C. M. *Determinação de Trajetória Terrestre Utilizando Unidade de Medição Inercial de Baixo Desempenho e Fusão Sensorial*. Rio de Janeiro: VI Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial, Rio de Janeiro, 2010.

SANTANA, D. D. S.; FURUKAWA, C. M.; MARUYAMA, N. *Fusão Sensorial Não Linear Aplicada à Determinação de Trajetória de um PIG Equipado com Unidade de Medição Inercial de Baixo Desempenho.* IX INDUSCON, São Paulo, 2010. Artigo aceito para publicação.

SAVAGE, P. G. *Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design*. Part1. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21(1), p.19 – 28, 1998a.

SAVAGE, P. G. *Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design*. Part2. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21(2), p. 208-221, 1998b.

SHIN, E. ***Accuracy Improvement of Low Cost INS/GPS for Land Applications***. 2001. Dissertação (Mestrado) - The University of Calgary, Calgary, 2001.

SHIN, E.; EL-SHEIMY, N. *Navigation Kalman Filter Design for Pipeline Pigging*. The Journal of Navigation, p. 283 – 295, 2005.

SIMON, D. ***Optimal State Estimation***. USA: John Wiley & Sons, 2006.

STEIN, P. S.; SALVI DOS REIS, N. R. *Sistema Integrado de Navegação para o Robô Ambiental Híbrido na Floresta Amazônica*. Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto INPE, p. 7103-7105, Florianópolis, abril 2007.

STOCKWELL, W. (2002a). *Bias Stability Measurement: Allan Variance*. USA: Crossbow Technology, Inc., 2002. http://www.xbow.com.

STOCKWELL, W. (2002b). Angular Random Walk. Crossbow Technology, Inc., 2002. http://www.xbow.com.

STOVAL, S. H. *Basic Inertial Navigation*. California, USA: Naval Air Warfare Center Weapons Division, (report number NAWCWPNS TM 8128), September 1997.

SUKKARIEH, S. ***Low Cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles***. 2000. (PhD) - Australian Centre for Field Robotics, Department of Mechanical and Mechatronic Engineering of University of Sydney, Sydney 2000.

TAE-GYOO, L.; CHANG-KY S. *Estimation Technique of Fixed Sensor Errors for SDINS Calibration*. International Journal of Control, Automation, and Systems, v. 2, n. 4, p. 536 – 541, Dec 2004.

TEIXEIRA, B. O. S. et al. *Filtragem de Kalman com Restrições para Sistemas Não-Lineares: Revisão e Novos Resultados*. SBA Controle & Automação, Campinas, v. 21, n. 2, Mar 2010.

TITTERTON, D. H.; WESTON, J. L. ***Strapdown Inertial Navigation Technology*.** London, UK: Peter Peregrinus - IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series 5, 1997.

TOLEDO-MOREO, R. et al. *High-Integrity IMM-EKF-Based Road Vehicle Navigation With Low-Cost GPS/SBAS/INS*. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, v. 8, n. 3, p. 491 – 511, Sep 2007.

TORRES, J. M. C.; HEMERLY E. M. *Caracterização de Sensor Inercial e Aplicação em Barco Autônomo*. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.

TRIGO, F. C. ***Estimação Não Linear de Parâmetros Através dos Filtros de Kalman na Tomografia por Impedância Elétrica***. 2005. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

TRIGO, F. C.; GONZALES-LIMA, R. *Iterated Extended Kalman Filterwith Adaptive State Noise Estimation For Electrical Impedance Tomography*. Procedings of TMSi 2005. Sao Paulo, Jul 2005.

WALCHKO, K. J. ; MASON, P. A. C. *Inertial Navigation*. Florida Conference on Recent Advances in Robotics, Florida 2002a.

WALCHKO, K. J. et al. *Embedded Low Cost Inertial Navigation System*. University of Florida, Gainesville, 2002b.

WALDMANN, J. *Feedforward Ins Aiding: An Investigation of Maneuvers for In-Flight Alignment*. Revista Controle & Automação, v.18, n. 4, p. 459 – 470, Campinas, Out 2007.

WEINRED, A.; BAR-ITZHACK, I. Y. *The Psi-Angle Error Equation in Strapdown Inertial Navigation Systems*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems v. Aes-14, n. 3, p. 539 – 542, May 1978.

WESTON, J. L.; TITTERTON, D. H. *Modern Inertial Navigation Technology and its Application*. Electronics & Communication Engineering Journal, p. 49 – 64, Apr 2000.

WGS-84. “Departament of Defense World Geodetic System 1984: *Its Definition and Relationship With Local Geodetic Systems*”. Belgium: DMA TR 8350.2, September 1984.

WOODMAN, O. J. *An Introduction to Inertial Navigation*. University of Cambridge, August 2007.

YU, J., et al. *An off-line navigation of a geometric PIG using a modified nonlinear fixed-interval smoothing filter*. Elsevier Control Engineering Practice, p. 1403 – 1411, 2005.

ZHU, R. et al. *A Linear Fusion Algorithm for Attitude Determination Using Low Cost MEMS-Based Sensors*. Elsevier Control Engineering Practice, p. 322 – 328, 2007.