

LUIS FLAVIO SOARES NUNES

**UM MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FONTES
DE VIBRAÇÃO EM VIGAS**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia**

**São Paulo
2012**

LUIS FLAVIO SOARES NUNES

**UM MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FONTES
DE VIBRAÇÃO EM VIGAS**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia**

**Área de Concentração:
Engenharia de Controle e
Automação**

**Orientador:
Prof. Dr. Alexandre Kawano**

**São Paulo
2012**

FICHA CATALOGRÁFICA

Nunes, Luis Flavio Soares

**Um método de identificação de fontes de vibração em vigas
/ L.F.S. Nunes. -- São Paulo, 2012.**

38 p.

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de
Sistemas Mecânicos.**

**1. Vibrações 2. Problemas inversos 3. Vigas 4. Fontes de ruído
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II. t.**

Agradecimentos

Meus cordiais e sinceros agradecimentos envio ao Prof. Dr. Roberto Ramos Júnior, que participou dos primeiros encontros e seminários em que tive os contatos iniciais com o campo da Engenharia, ao Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo e Prof. Dr. Marcílio Alves, que forneceram importantes comentários e pertinentes sugestões e observações durante o exame de qualificação.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão aos meu orientador, Prof. Dr. Alexandre Kawano, como uma expressão de meu reconhecimento por sua infinita paciência, seu aconselhamento sempre oportuno e constante assistência durante todo o período em que fui aluno da Escola Politécnica.

Dedico finalmente este exemplar aos meus pais, Luís e Anna, exemplos de força e dedicação, pelo enorme apoio e compreensão demonstrados e que sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos da vida.

Resumo

Neste trabalho, procuramos resolver o problema direto da equação da viga de Euler-Bernoulli bi-engastada com condições iniciais nulas. Estudamos o problema inverso da viga, que consiste em identificar a fonte de vibração, modelada como um elemento em L^2 , usando como dado a velocidade de um ponto arbitrário da viga, durante um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno. A relevância deste trabalho na Engenharia encontra-se, por exemplo, na identificação de danos estruturais em vigas.

Palavras-chave: Fonte de vibração. Problema inverso. Viga de Euler-Bernoulli.

Abstract

In this work, we try to solve the direct problem of the clamped-clamped Euler-Bernoulli beam equation, with zero initial conditions. We study the inverse problem of the beam, consisting in the identification of the source of vibration, shaped as an element in L^2 , using as data the speed from an arbitrary point of the beam, during a time interval arbitrarily small. The relevance of this work in Engineering, for example, is in the identification of structural damage in beams.

Keywords: Source of vibration. Inverse problem. Euler-Bernoulli beam.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	3
2	Preliminares	5
2.1	Espaços Utilizados no Trabalho	5
2.1.1	Definições e Propriedades Básicas	5
2.2	Teorema Espectral	6
3	Resolução do Problema Direto	7
3.1	Solução da Equação Diferencial do Movimento	8
4	Solução do Problema Inverso e Experimentos Numéricos	17
4.1	Método de Identificação	21
4.2	Estabilidade	22
4.3	Experimentos Numéricos	23
4.3.1	Estabilidade	23
4.3.2	Elaboração dos Experimentos e Resultados	24
5	Conclusões Finais	27
	Referências Bibliográficas	29

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, desejamos recuperar a fonte de vibração da viga de Euler-Bernoulli, por meio da medição da velocidade de um determinado ponto dela, durante um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno, resolvendo, assim, um problema inverso da viga. De forma simplificada, podemos afirmar que um problema inverso procura, a partir das observações de um efeito ou de um fenômeno, determinar suas causas.

Um exemplo ilustrativo de problema inverso da Geofísica consiste na identificação de epicentros sísmicos. Embora o interior da Terra não ser diretamente observável, as manifestações de ondas na superfície podem ser medidas. Logo, um típico problema inverso consistiria em utilizar as medições das ondas sísmicas para determinar a localização do epicentro de um terremoto, analisando assim a propagação das ondas para a identificação de sua causa.

Como exemplo adicional, no problema direto da viga de Euler-Bernoulli procura-se determinar o deslocamento da viga, para quaisquer instantes de tempo e espaço, sendo conhecidos os parâmetros envolvidos, e as condições iniciais e de contorno. Por outro lado, o problema inverso consiste, por exemplo, na dedução da força de carregamento aplicada, a partir do conhecimento dos deslocamentos, em um dado intervalo de tempo, ou também algum parâmetro físico, como a rigidez EI , a densidade linear ρ , alguma condição de contorno, etc.

Os problemas inversos não possuem uma definição formal estrita. De maneira geral, eles podem ser descritos como tendo a finalidade de recuperar uma parte dos dados de

um problema direto correspondente, a partir da informação de sua solução.

A análise desses problemas contempla, essencialmente, três passos principais. O primeiro é a verificação da unicidade, seguido pela verificação estabilidade (de que pequenas perturbações nas medições de dados resultam identicamente em pequenas perturbações nas fontes) e, finalmente, a reconstrução (encontrar processos apropriados a fim de poder obter uma boa aproximação das incógnitas).

A relevância deste trabalho na Engenharia estrutural encontra-se, por exemplo, na identificação de danos estruturais em dos são visuais, ou métodos localizados experimentais, tais como testes acústicos ou ultra-sônicos, análise por ressonância magnética da estrutura, radiografia, etc. Todas essas técnicas exigem que o local do dano seja conhecido a priori, e que a parte da estrutura a ser inspecionada seja facilmente acessível. Por outro lado, para realizar essa identificação, apenas necessitaremos, como dado de medição, a velocidade de um ponto qualquer da viga.

Nesta pesquisa, pela determinação da força de carregamento aplicada em uma viga, podemos inferir em quais pontos da estrutura existem danos ou falhas estruturais, dado que uma variação na força aplicada induz uma respectiva variação nos parâmetros da viga.

Considere o operador linear adimensionalizado abaixo:

$$E = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2.$$

Seja a equação da viga de Euler-Bernoulli $Ew_0 = \delta$, em que δ é a força de carregamento aplicada. Considerando agora o operador \tilde{E} ,

$$\tilde{E} = (1 + \epsilon) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2,$$

que possui uma perturbação no primeiro fator, $\epsilon \in L^2(]0, L[)$, e que essencialmente modela a rigidez da viga. Suponha que a solução de $\tilde{E}w = \delta$ seja dada por $w = w_0 + \tilde{w}$. Então

$$\tilde{E}(w_0 + \tilde{w}) = (1 + \epsilon) \frac{\partial^2(w_0 + \tilde{w})}{\partial t^2} + \Delta^2(w_0 + \tilde{w}) = \delta$$

Distribuindo os termo entre parênteses, e utilizando $Ew_0 = \delta$, após algumas simplificações, obtemos

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} + \Delta^2 \tilde{w} = -\epsilon \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

e assim, aproximando $\partial^2 w_0 / \partial t^2$ por funções escada $\sum_{i=1}^k f_i(t_i, x)$, podemos identificar a perturbação ϵ , que é uma função em $L^2(]0, L[)$.

Nesse sentido, o trabalho apresentado tem por objetivo principal aplicar uma teoria matemática que permite a identificação da fonte de vibração de uma viga, a partir da análise de sua dinâmica.

1.1 Revisão Bibliográfica

Para problemas inversos em geral, Isakov [14] reúne diversos resultados sobre a estabilidade e unicidade da identificação de coeficientes de equações diferenciais parciais, abrangendo a teoria espectral inversa e apresentando alguns métodos numéricos de reconstrução.

O problema da viga vibrante é um dos problemas clássicos e de grande importância da Engenharia, e sua dinâmica estrutural foi analisada por diversos autores, por exemplo, por Timoshenko [41].

O trabalho de Barcilon em [2] e [3] discute que dados são necessários para determinar certas propriedades físicas das vigas, como o momento de inércia $I(x)$ e a área da seção transversal $A(x)$. Foi demonstrado, como condição suficiente, que são requeridos três espectros, referentes a três diferentes condições de contorno da viga. Acerca do método de reconstrução da viga, Barcilon encontrou uma solução para o caso em que o espectro consistia de pequenas perturbações na viga uniforme, descrito em [4], e posteriormente McLaughlin [22] desenvolveu o método de recuperação.

McLaughlin [23] utiliza um método de decomposição em um autossistema cujos autovalores e autovetores são utilizados para encontrar heterogeneidades em linhas de transmissão, e obter uma solução linearizada para o problema inverso. Em [24], a autora

estuda o problema inverso de identificação dos autovalores de uma equação auto-adjunta de quarta ordem.

Morassi [27] trata da identificação de danos em vigas vibrantes com um método baseado na alteração das frequências naturais. Verifica-se que a mudança dessas frequências possui relação com a variação de rigidez da viga, e o autor propõe um método de reconstrução baseado em um algoritmo iterativo. Em [28], o autor propõe que a sensibilidade de frequência para qualquer estrutura de viga pode ser explicitamente avaliada induzindo uma perturbação no sistema.

Liang [20] aborda algumas relações teóricas entre a variação das autofrequências e os pontos de trincas, e apresenta uma equação característica para o problema. Law [19] propõe um método no qual os parâmetros de uma fissura em uma estrutura são identificados a partir das medições de deslocamento e da deformação. A fissura é representada por um delta de Dirac. Na análise do problema inverso para a identificação da fenda, utiliza-se a técnica de otimização em conjunto com a regularização da solução. Biondi [5] também utiliza distribuições para representar as trincas na rigidez flexural $E(x)I(x)$ da viga.

Nicaise em [30] apresenta um método para determinar pontos de força da forma $\sum_{k=1}^K a_k \delta(x - \xi_k)$ por meio de medições na fronteira, para a equação da viga, adaptando alguns resultados de [6, 7, 43], e usando propriedades espectrais de operadores biharmonicos, e resultados de controle de [16, 18] além de operadores integrais descritos em [6, 43].

Em [15], os autores apresentam um teorema de unicidade para distribuições quase-periódicas, que pode ser usado, inclusive para a identificação da força aplicada na viga de Euler-Bernoulli. Neste trabalho, aplicaremos o método descrito nesse artigo, e procuraremos resolver o problema da viga definindo $f(x, t) = h(t)g(x)$, com $g(x)$ representada por um elemento pertencente ao espaço L^2 .

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espaços Utilizados no Trabalho

Neste capítulo abordaremos brevemente alguns resultados de análise funcional, com a finalidade de fixar a notação a ser usada no trabalho.

2.1.1 Definições e Propriedades Básicas

Os espaços de Sobolev de ordem inteira positiva são definidos sobre um aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Por definição, O espaço de Sobolev $H^k(\Omega)$ é formado pelo conjunto de todas as funções $u \in L^2(\Omega)$, de modo que para todo multi-índice a , com $|a| \leq k$, a derivada parcial $D^a u$ pertença a $L^2(\Omega)$, ou seja,

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^a u \in L^2(\Omega), \forall |a| \leq k\},$$

em que Ω é um aberto de \mathbb{R}^n . O número natural k é denominado ordem do espaço de Sobolev $H^k(\Omega)$.

A seguinte norma é definida no espaço $H^k(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

$H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Em particular temos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definição 2.1.1 Denotamos por

$$H_0^k(\Omega)$$

o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$, em que $C_c^\infty(\Omega)$ representa o espaço das funções $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω .

Definição 2.1.2 O espaço $C([0, \tau], H^p(\Omega))$ compreende todas as funções contínuas $u : [0, \tau] \subset \mathbb{R} \rightarrow H^p(\Omega)$, com

$$\|u\|_{C([0, \tau], H^p(\Omega))} \doteq \max_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\|_{H^p(\Omega)} \leq \infty.$$

Dada $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, quando necessário, fazemos a identificação, $Y \ni t \mapsto f(\cdot, t)$.

A demonstração do seguinte teorema pode ser vista em Adams [1], assim como uma apresentação detalhada sobre estes espaços.

Teorema 2.1.3 A inclusão $H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é contínua. Ademais, como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, e $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^m(\Omega)$, demonstra-se que $H_0^m(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

2.2 Teorema Espectral

A Teoria Espectral fornece uma maneira de compreender operadores lineares, decompondo o espaço em que eles atuam em espaços invariantes.

Definição 2.2.1 Um operador $T : H \rightarrow H$ em um espaço de Hilbert H é autoadjunto se $T = T^*$, ou equivalentemente, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, $x, y \in H$.

No capítulo seguinte, utilizaremos o teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em Kreyszig [17].

Teorema 2.2.2 Seja o operador compacto auto-adjunto $T : H \rightarrow H$ definido em um espaço de Hilbert H . Então existe uma base de Hilbert H , consistindo nos autovetores de H .

Capítulo 3

Resolução do Problema Direto

Neste capítulo, utilizaremos a seguinte equação governante da viga:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = g(x)h(t) \quad (3.1)$$

com $0 < x < L, 0 < t$. obtida com as seguintes hipóteses:

- a viga possui forma prismática;
- as seções planas perpendiculares ao eixo central permanecem planas após as deformações;
- o material da viga é elástico, isotrópico e homogêneo;
- as deflexões transversais são pequenas.

Em (3.1) $w(x, t)$ denota o deslocamento transversal, $g(x)h(t)$ a força transversal por unidade de comprimento, e $I(x)$ o momento de inércia da seção transversal, L é o comprimento da viga, ρ é a densidade do material, A é a área da seção perpendicular da viga, E é o módulo de elasticidade, $g \in L^2(]0, L[)$, $h \in \mathcal{C}^1$, $h(0) \neq 0$, e $I(x) = I$ constante.¹

A análise e dedução das fórmulas são encontrada em vários textos de Resistência de Materiais, ou por exemplo, em [25] ou [34], p.402.

¹Assumimos neste ponto que as seções transversais permanecem paralelas, e que a expressão permanece válida para a viga analisada neste estudo.

3.1 Solução da Equação Diferencial do Movimento

A equação (3.1) pode ser reescrita como

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = g(x)h(t), \quad 0 < x < L, 0 < t. \quad (3.2)$$

Consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = w(x, t) = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = L. \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = w(x, t) = 0, \quad \text{para } t = 0. \quad (3.4)$$

Lema 3.1.1 *Os autovetores do problema $\Delta^2 u = \lambda u$ constituem uma base hilbertiana de $H_0^2(\Omega)$.*

Demonstração: Procuramos os elementos de $H_0^2(\Omega)$ tais que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, dependente de u , de forma que

$$\Delta^2 u = \lambda u. \quad (3.5)$$

Inicialmente mostraremos a existência de um operador linear $T : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$ tal que $\Delta^2 T w = w$, $\forall w \in H_0^2(\Omega)$. Observe que ele não é a inversa de $\Delta^2 : H_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}$. Entretanto, na literatura T é, às vezes, denotado como Δ^{-2} . Usando o produto interno do $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\langle w, v \rangle = \langle \Delta^2 T w, v \rangle = [\nabla(\Delta T w), v]_{\partial\Omega} - [\Delta T w, \nabla v]_{\partial\Omega} + \langle \Delta T w, \Delta v \rangle.$$

Como os termos entre colchetes são nulos, chegamos à forma equivalente

$$\langle T w, v \rangle_{H_0^2} = \langle w, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Para provar a existência de $T : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$, considere, para $w \in H_0^2(\Omega)$ fixo, o

operador linear limitado

$$v \mapsto \langle v, w \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Pelo teorema de Riesz, existe um elemento $Tw \in H_0^2(\Omega)$ associado a cada $w \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\langle Tw, v \rangle_{H_0^2} = \langle w, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Perceba que, acima, estamos identificando o dual do $H_0^2(\Omega)$ com ele mesmo. É claro que T definido dessa forma é linear. Isto prova a existência de $T : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$ desejado.

Provamos agora que se $u \in H_0^2(\Omega)$ é autovetor de Δ^2 , com autovalor $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então u também é autovetor de T , com autovalor λ^{-1} , e reciprocamente.

De fato, se $u \in H_0^2(\Omega)$ é tal que $u = \lambda^{-1}\Delta^2u$, então

$$\langle Tu, v \rangle_{H_0^2} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda^{-1} \int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \lambda^{-1} \langle u, v \rangle_{H_0^2}, \quad \forall v \in H_0^2,$$

isto é, $Tu = \lambda^{-1}u$. Se $Tu = \lambda^{-1}u$, com $u \in H_0^2(\Omega)$, então $\Delta^2u = \lambda u$, pois

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Tu, v \rangle_{H_0^2} = \lambda^{-1} \langle u, v \rangle_{H_0^2} = \lambda^{-1} (\Delta^2u)(v),$$

em que a última expressão é interpretada como: $(\Delta^2u)(v) = \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Isso significa que para determinar os autovetores do problema (3.5), basta acharmos os autovetores do operador linear $T : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$. A principal vantagem é que podemos invocar o teorema espectral para operadores lineares compactos auto-adjuntos, pois T é compacto e auto-adjunto. A justificativa de que T é um operador compacto é dada a seguir.

Tomamos uma seqüência fracamente convergente $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$, $u_k \rightharpoonup u$. A inclusão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta, pois ela é a composição entre uma inclusão contínua ($H_0^2 \hookrightarrow H_0^1$) com uma compacta. A inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta pelo teorema de Rellich (vide [9], p. 272). Isso significa que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fortemente em $L^2(\Omega)$.

Como $\langle Tu, v \rangle_{H_0^2} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$, $\|Tu\|_{H_0^2(\Omega)} = \langle u, Tu \rangle_{L^2(\Omega)}$, e, além disso, existe $C > 0$

tal que $\|v\|_{L^2(\Omega)} < C\|v\|_{H_0^2(\Omega)}$, e para qualquer $v \in H_0^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \|Tu_k - Tu\|_{H_0^2(\Omega)}^2 &= \langle u_k - u, Tu_k - Tu \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \|Tu_k - Tu\|_{L^2(\Omega)} \\ &< C\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \|Tu_k - Tu\|_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daí concluímos que existe $C > 0$ tal que $\|Tu_k - Tu\|_{H_0^2(\Omega)} < C\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}$. Assim, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^2(\Omega)$ converge fortemente. Isso prova que $T : H_0^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega)$ é um operador linear compacto.

É imediato que T é auto-adjunto, pois

$$\langle Tu, v \rangle_{H_0^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \overline{\langle v, u \rangle_{L^2(\Omega)}} = \overline{\langle Tv, u \rangle_{H_0^2(\Omega)}} = \langle u, Tv \rangle_{H_0^2(\Omega)}.$$

Agora, invocamos o teorema 2.2.2, para concluir que existe uma base hilbertiana do $H_0^2(\Omega)$ formada pelos autovetores do problema (3.5). ■

Considere agora, a equação

$$\frac{d^4 S(x)}{dx^4} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} S(x) = \beta^4 S(x). \quad (3.6)$$

cuja solução, observando as condições iniciais

$$\frac{dS(x)}{dx} = S(x) = 0, \text{ para } x = 0 \text{ e } x = L, \quad (3.7)$$

é expressa por:

$$S_n(x) = C_n(\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \gamma_n(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)) \quad (3.8)$$

com

$$\gamma_n = \frac{\sinh \beta_n L - \sin \beta_n L}{\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L} \quad (3.9)$$

e $C_n^2 = (\int_0^L |\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \gamma_n(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)| dx)^{-1}$, e assim, $\|S_n\|_{L^2} = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$ satisfaz a equação $\cos \beta_n L \cosh \beta_n L = 1$. Desta condição, verifica-se que $\beta_n = O(n)$. Além disso, em [30] os autores demonstram que existe uma constante

$K > 0$, independente de n , tal que

$$|S_n(x)| < K, \quad \forall x \in [0, L], \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Verifica-se que o conjunto de funções $S = \{S_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ é ornonormal. Como $\mathcal{C}_c^\infty(]0, L[) \subset H_0^2(]0, L[) \subset L^2(]0, L[)$, e \mathcal{C}_c^∞ é denso em L^2 (vide [1] p. 28), segue que $H_0^2(]0, L[)$ é denso em $L^2(]0, L[)$. Assim, os autovetores do problema (3.5) formam uma base de $L^2(]0, L[)$, logo, pela equação (3.6), S é denso em $L^2(]0, L[)$.

Representaremos $g \in L^2(]0, L[)$ da forma:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n S_n(x) \quad (3.11)$$

Como $\infty > \|g\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n S(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2$, vemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

Realizando o método de separação de variáveis, podemos supor que a resposta dinâmica $w(x, t)$ possa ser representada por:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) S_n(x). \quad (3.12)$$

E assim, substituindo as equações (3.11) e (3.12) em (3.2), obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\beta_n^4 E I G_n(t) + \rho A G_n(t)'' - A_n h(t) \right) S_n(x) = 0 \quad (3.13)$$

Dessa forma, a expressão entre parênteses deve satisfazer:

$$\rho A G_n(t)'' + \beta_n^4 E I G_n(t) - A_n h(t) = 0. \quad (3.14)$$

Definindo agora

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E I}{\rho A}} \beta_n^2 = \beta_n^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho A}} \quad (3.15)$$

e resolvendo a equação diferencial (3.14), chegamos à expressão

$$G_n(t) = \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \int_0^t h(t - \tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Finalmente, por 3.12, chegamos à solução:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \left[\int_0^t h(t - \tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau \right] S_n(x). \quad (3.17)$$

O seguinte teorema encontra-se demonstrado em [9], p. 288:

Teorema 3.1.2 *Seja Ω aberto, limitado e $\partial\Omega$ suave. Seja m um inteiro não-negativo. Suponha que $u \in L^2(]0, T[; H^{m+2}(\Omega))$, com $u' \in L^2(]0, T[; H^m(\Omega))$. Então temos que $u \in C([0, T]; H^{m+1}(\Omega))$.*

Pela aplicação do teorema anterior, demonstramos o seguinte Lema:

Lema 3.1.3 *Seja w definida em (3.17). Assim, para todo $\tau > 0$, $w \in L^2(]0, \tau[; H^4(\Omega))$, $w \in C([0, \tau]; H^1(\Omega))$, $w' \in C([0, \tau]; H^3(\Omega))$.*

Demonstração: Temos que $\Omega =]0, L[$ é aberto, e $\partial\Omega = \{0, L\}$ é suave. Obtemos, por diferenciação e realizando integração por partes:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n^2 \rho A} \left[-h(0) \cos(\omega_n t) + h(t) + \int_0^t h'(t - \tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau \right] S_n(x); \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \left[h(0) \sin(\omega_n t) + \int_0^t h'(t - \tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau \right] S_n(x); \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\rho A} \left[h(0) \cos(\omega_n t) + \int_0^t h'(t - \tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau \right] S_n(x). \end{aligned}$$

Como $\omega_n = O(n^2)$, e que as funções de dentro dos colchetes são limitadas no tempo, concluímos que $\partial^2 w / \partial t^2 \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$. Analogamente, verifica-se que $\partial w / \partial t \in L^2(]0, T[; H^2(\Omega))$ e $w \in L^2(]0, T[; H^4(\Omega))$. Logo, pelo teorema (3.1.2), com $m = 0$ e $m = 2$, provamos o Lema. ■

Considerando a equação (3.18), como $O(d^k S_n(x) / dx^k) = O(n^k)$, vemos que o traço das funções w e $\frac{\partial w}{\partial x}$, em $x = 0$ e $x = L$ está bem definido, e pelo Lema (3.1.3) as condições iniciais e de contorno (3.3) e (3.4) são satisfeitas.

Observação: Vale sublinhar que a decisão da escolha do espaço da função $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n S_n(x)$ é determinada pela verificação das condições de contorno. Se as condições de contorno envolvessem derivadas maiores ordens, e com a hipótese de que estamos trabalhando em $L^2(\Omega)$, não teríamos regularidade suficiente para definir as condições de contorno na fronteira do espaço. Nesse caso apenas poderíamos definir a função g de (3.1) em $H^1(\Omega)$.

No caso em questão, vemos que a função $\partial^2 w / \partial t^2 \in L^2$, pois $(A_n) \in \ell^2$. Por outro lado, se na representação de $\partial^2 w / \partial t^2$ tivéssemos o fator $\frac{A_n}{\zeta}$, com $\zeta = O(n^k)$ no somatório, com $k \geq 1$, então poderíamos definir g ao menos no espaço H^{-1} . E assim, ampliaríamos os resultados deste estudo, pois poderíamos considerar como pontos de força uma soma arbitrária de delta de Diracs, por exemplo.

No prosseguimento de nosso estudo, desejamos encontrar uma condição suficiente para determinarmos, de forma única, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e por conseguinte, a distribuição g definida em (3.11). Assim, demonstraremos primeiramente o seguinte Lema:

Lema 3.1.4 *A solução (3.17), pode ser escrita como*

$$w(x, t) = \int_0^t h(t - \tau) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x) \right] d\tau, \quad (3.18)$$

para $t \in [0, T_0]$ e $x \in [0, L]$.

Demonstração: Para qualquer $x \in [0, L]$ fixo, considere a soma formal

$$\tau \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x), \quad (3.19)$$

para $\tau \in [0, t]$ e $t \leq T_0$. Tal soma define uma distribuição de ordem um na variável τ . De fato, para qualquer $\phi \in C^\infty([0, t])$, a sequência

$$\sigma \doteq \left(\left\langle \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x), \phi \right\rangle \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (3.20)$$

converge em \mathbb{C} . Além disso, é válida a seguinte estimativa,

$$\left| \left\langle \sum_{n=M}^N \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x), \phi \right\rangle \right| < K(t \sup_{\tau \in [0, t]} |\phi'(\tau)| + \phi(0) - \phi(t)) \sum_{n=M}^N \frac{A_n}{\omega_n^2 \rho A}, \quad (3.21)$$

em que K é a constante definida em (3.10). A partir desta estimativa, vemos que a sequência σ é Cauchy em \mathbb{C} , e assim, a distribuição de ordem um

$$T_x \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x), \quad (3.22)$$

é bem definida, para cada $x \in [0, L]$ fixado. Escolhendo, para qualquer $0 \leq t \leq T_0$, $h \in \mathcal{C}^1([0, t])$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \int_0^t h(t - \tau) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x) \right] d\tau = \langle T_x, h(t - \cdot) \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \sin(\omega_n \tau) S_n(x), h(t - \tau) \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n \rho A} \left[\int_0^t h(t - \tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau \right] S_n(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Iremos utilizar um resultado (Teorema 3.1.5), que encontra-se em [30], e cuja demonstração pode ser vista em [31] (vide também [6]). Para $T_0 > 0$, $h \in \mathcal{C}^1([0, t])$, em que $h(0) \neq 0$, definimos o operador $K : L^2(0, T_0) \rightarrow L^2(0, T_0)$ como

$$(K\psi)(t) = \int_0^t h(t - s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in]0, T_0[. \quad (3.23)$$

Definimos o espaço $\Lambda^\perp \subset L^2(0, T_0)$ como sendo

$$\Lambda^\perp = \{\eta \in L^2(0, T_0) : (h, \eta)_{L^2(0, T_0)} = 0\} \quad (3.24)$$

e o operador projeção $P : L^2(0, T_0) \rightarrow \Lambda^\perp$.

Teorema 3.1.5 *O operador $PK : L^2(0, T_0) \rightarrow \Lambda^\perp$ pode ser estendido a um operador*

limitado de $H^{-1}(0, T_0)$ para $L^2(0, T_0)$, satisfazendo a desigualdade

$$C^{-1} \|PK\psi\|_{L^2(0, T_0)} \leq \|\psi\|_{H^{-1}(0, T_0)} \leq C^{-1} \|PK\psi\|_{L^2(0, T_0)},$$

para alguma constante $C > 0$.

Agora, aplicando o Teorema 3.1.5 para a expressão (3.18), utilizando o conjunto de dados $\{w(x, t) = 0 : (x, t) \in \Omega \times]0, T_0[\}$, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) S_n(x) = 0, \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, T_0[. \quad (3.25)$$

Invocaremos neste ponto um teorema de unicidade para os coeficientes, em uma distribuição quase-periódica representada na forma (3.25). Antes apresentaremos a seguinte definição:

Definição 3.1.6 Dizemos que a seqüência $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **conjunto uniformemente discreto** se existe $\delta > 0$ tal que $i \neq j \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| > \delta$.

O resultado seguinte encontra-se demonstrado em [15]:

Teorema 3.1.7 Dado um conjunto $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uniformemente discreto, tal que existam $n_0 \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}_+$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |\lambda_n| > Cn^\alpha$, se $\alpha > 1$ e $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in s'$ (isto é, existe $q \in \mathbb{Z}_+$, tal que $(n^q a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$), então se existe $\tau > 0$ de modo que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{i\lambda_n t} = 0$, para todo $t \in [-\tau, \tau]$, temos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{0\}$.

Seja $x_0 \in \Omega$ e aplique o Teorema 3.1.7 na expressão (3.25). Concluímos que, se $S_n(x_0) \neq 0$, então $A_n = 0$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in \Omega$ tal que $S_n(x) \neq 0$. De fato, caso contrário, suponhamos que para $n_0 \in \mathbb{N}$, tenhamos $S_{n_0}(x) = 0$, para qualquer $x \in \Omega$. Então, a função $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ teria mais de uma única representação utilizando-se a base de Hilbert $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, o que é impossível.

Portanto, concluímos que o conjunto de dados $\{w(x, t) = 0 : (x, t) \in \Omega \times]0, T_0[\}$ é suficiente para determinarmos, de forma única, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e por conseguinte, a distribuição g definida em (3.11).

Resumimos no teorema seguinte o resultado de unicidade que acabamos de demonstrar.

Teorema 3.1.8 *Seja $T_0 > 0$ e $\Omega \subset]0, L[$ aberto, arbitrários. No problema (3.2), com $h \in \mathcal{C}^1([0, t])$, $h(0) \neq 0$ temos que o conjunto de dados $\{w(x, t) = 0 : (x, t) \in \Omega \times]0, T_0[\}$ é suficiente para determinarmos, de forma única, g definida em (3.11).*

Capítulo 4

Solução do Problema Inverso e Experimentos Numéricos

Neste capítulo, apresentaremos o método de identificação e os principais resultados do artigo [15], e que utilizaremos para a realização dos experimentos práticos. As demonstrações podem ser encontradas no referido texto.

Escolhemos representar a função $h(t)$ com uma série de cossenos, dado que essa série converge uniformemente para qualquer função par, de classe \mathcal{C}^1 , em $] -T_0, T_0[$ (vide [42]), dado que $\{\cos(\pi mt/T_0)\}$ é denso em $\mathcal{C}^1([0, T_0])$. Poderíamos ter escolhido uma série de senos, mas como devemos ter por hipótese $h(0) \neq 0$, essa representação necessitaria ter um fator constante, não nulo, o que dificultaria a representação de $w(x, t)$ ao truncarmos a série para obtermos a função h_M . Por essa razão, a escolha de uma série de cossenos resulta natural no caso.

Assim, com o objetivo de resolver a equação diferencial empregando uma série de Fourier para h , encontraremos, primeiramente, a solução com o termo geral, $h(t) = k_m \cos(\pi mt/T_0)$ em (3.17), com $T_0 > 0$ representando o período de medição da força de carregamento. Observe que sempre é possível escolher $T_0 > 0$ tal que

$$\{\omega_n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\pi m/T_0 : 0 < m < M\} = \emptyset \quad (4.1)$$

de forma que o conjunto

$$\Lambda = \{\omega_n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\pi m/T_0 : 0 < m < M\} \quad (4.2)$$

seja uniformemente discreto (conforme definido em (3.1.6)).

Substituindo h nessas equações, e considerando as mesmas condições iniciais, obtemos a solução abaixo:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n k_m}{(\omega_n^2 - (\pi m/T_0)^2) \rho A} [\cos(\pi m t/T_0) - \cos(\omega_n t)] S_n(x). \quad (4.3)$$

Supondo, então, uma aproximação de h por h_M , com $h_M \in \mathcal{C}^1$, como uma série finita conhecida a priori, da seguinte forma,

$$h_M(t) = \sum_{m=0}^M k_m \cos(\pi m t/T_0), \quad (4.4)$$

obtida através do truncamento da série de Fourier de $h \in \mathcal{C}^1$, no intervalo $] - T_0, T_0[$. Então verifica-se que $h_M \rightarrow h$ absoluta e uniformemente. Assim, se w_M satisfaz (3.2) com h substituído por h_M , então $w_M \rightarrow w$ uniformemente em $[0, L] \times [0, T_0]$. Podemos assim, gerar os dados para o problema inverso, pela solução de (3.2), com h_M no lugar da função original h .

Assim, podemos, por linearidade, substituir h_M em (3.17), e pela equação (4.3), obtemos a solução final seguinte.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\rho A} \sum_{m=0}^M \frac{k_m}{\omega_n^2 - (\pi m/T_0)^2} [\cos(\pi m t/T_0) - \cos(\omega_n t)] S_n(x). \quad (4.5)$$

Seja $x_0 \in]0, L[$ arbitrário. Definindo a função $U_{x_0} \in H^1(]0, \infty))$ como a velocidade de um ponto x_0 da viga, temos:

$$\begin{aligned}
U_{x_0}(t) &:= \frac{\partial w(x_0, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\rho A} \sum_{m=0}^M \frac{k_m}{\omega_n^2 - (\pi m/T_0)^2} [\cos(\pi m t/T_0) - \cos(\omega_n t)]' S_n(x_0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\rho A} \sum_{m=0}^M \frac{-k_m}{\omega_n^2 - (\pi m/T_0)^2} [(\pi m/T_0) \sin(\pi m t/T_0) - \omega_n \sin(\omega_n t)] S_n(x_0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\rho A} \sum_{m=0}^M \frac{k_m \omega_n}{(\pi m/T_0)^2 - \omega_n^2} \left[\frac{(\pi m/T_0)}{\omega_n} \sin(\pi m t/T_0) - \sin(\omega_n t) \right] S_n(x_0).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Definindo agora,

$$\alpha_{n,m} = A_n \frac{k_m \omega_n S_n(x_0)}{\rho A ((\pi m/T_0)^2 - \omega_n^2)} \tag{4.7}$$

e substituindo na expressão (4.6), temos:

$$U_{x_0}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^M \alpha_{n,m} \left[\frac{(\pi m/T_0)}{\omega_n} \sin(\pi m t/T_0) - \sin(\omega_n t) \right]. \tag{4.8}$$

Reescrevendo cada termo do somatório, da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_{n,m} (\pi m/T_0)}{\omega_n} \sin(\pi m t/T_0) - \alpha_{n,m} \sin(\omega_n t) = \\
&-\frac{i}{2} \left[\frac{\alpha_{n,m} (\pi m/T_0)}{\omega_n} \cos(\pi m t/T_0) + \frac{\alpha_{n,m} (\pi m/T_0)}{\omega_n} i \sin(\pi m t/T_0) \right] \\
&+ \frac{i}{2} \left[\frac{\alpha_{n,m} (\pi m/T_0)}{\omega_n} \cos(-\pi m t/T_0) + \frac{\alpha_{n,m} (\pi m/T_0)}{\omega_n} i \sin(-\pi m t/T_0) \right] \\
&+ \frac{i}{2} [\alpha_{n,m} \cos(\omega_n t) + \alpha_{n,m} i \sin(\omega_n t)] \\
&- \frac{i}{2} [\alpha_{n,m} \cos(-\omega_n t) + \alpha_{n,m} i \sin(-\omega_n t)],
\end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_{n,m} (\pi m t/T_0)}{\omega_n} \sin(\pi m t/T_0) - \alpha_{n,m} \sin(\omega_n t) = \\
&-\frac{i \alpha_{n,m} (\pi m t/T_0)}{2\omega_n} e^{\pi i m t/T_0} + \frac{i \alpha_{n,m} (\pi m t/T_0)}{2\omega_n} e^{-\pi i m t/T_0} + \frac{i \alpha_{n,m}}{2} e^{i\omega_n t} - \frac{i \alpha_{n,m}}{2} e^{-i\omega_n t}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos representar U_{x_0} da forma abaixo:

$$U_{x_0}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^M -\frac{i\alpha_{n,m}(\pi mt/T_0)}{2\omega_n} e^{\pi imt/T_0} + \frac{i\alpha_{n,m}(\pi mt/T_0)}{2\omega_n} e^{-\pi imt/T_0} + \frac{i\alpha_{n,m}}{2} e^{i\omega_n t} - \frac{i\alpha_{n,m}}{2} e^{-i\omega_n t} \right). \quad (4.9)$$

Como estamos lidando com séries absolutamente convergentes, podemos reescrever (4.9) como

$$U_{x_0}(t) = \sum_{m=0}^M \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{i\alpha_{n,m}(\pi mt/T_0)}{2\omega_n} e^{\pi imt/T_0} + \frac{i\alpha_{n,m}(\pi mt/T_0)}{2\omega_n} e^{-\pi imt/T_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^M \frac{i\alpha_{n,m}}{2} e^{i\omega_n t} - \frac{i\alpha_{n,m}}{2} e^{-i\omega_n t} \right). \quad (4.10)$$

Seja agora, $\lambda_{1,n} = (-1)^n \omega_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ e $\lambda_{2,m} = (-1)^m \frac{\pi}{T_0} \lceil \frac{m}{2} \rceil$, em que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ representa o menor inteiro x tal que $n/2 \leq x$. Dessa maneira, (4.10) pode ser reescrito como

$$U_{x_0}(t) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \mu_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} e^{i\lambda_{2,m} t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \nu_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} e^{i\lambda_{1,n} t}, \quad (4.11)$$

em que temos

$$\mu_m = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\alpha_{n,m}(\pi mt/T_0)}{2\omega_n}, \quad (4.12)$$

$$\nu_n = \sum_{m=0}^M \frac{i\alpha_{n,m}}{2}. \quad (4.13)$$

Agora, definindo $\Lambda_1 = (\lambda_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} \cup (\lambda_{2,m})_{m \in \mathbb{Z}_+}$ e reordenando Λ_1 em ordem crescente dos módulos de seus elementos, obtemos de Λ_1 uma nova sequência ordenada, $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Evidentemente, a expressão (4.11) pode ser colocada na forma

$$U_{x_0}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n e^{i\lambda_n t}. \quad (4.14)$$

em que a maioria dos coeficientes $\tilde{\alpha}_n$ pertence ao conjunto (ν_n) , com um número finito

apenas pertencendo ao conjunto (μ_m) .

Apresentamos a seguir o método que permite recuperar $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset s'$ a partir do conhecimento de U_{x_0} em um intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$.

4.1 Método de Identificação

Conforme o método de [15], utilizaremos uma família de funções definida como segue:

$$\phi_{1,m,\tau}(\xi) = \left[\frac{\sin((\xi - \lambda_m)\tau)}{(\xi - \lambda_m)\tau} \right]^2, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall \tau > 0. \quad (4.15)$$

Podemos observar que as suas transformadas de Fourier possuem suporte compacto:

$$\widehat{\phi_{1,m,\tau}}(t) = (H_\tau * H_\tau)(t)e^{-it\lambda_m}, \quad (4.16)$$

$$H_\tau(t) = \frac{1}{2\tau} \chi_{] -\tau, \tau [}(t), \quad \tau > 0, \quad (4.17)$$

com $m \in \mathbb{N}, \tau > 0$.

Agora, definimos

$$P_\tau(m, n) = \phi_{1,m,\tau}(\lambda_n),$$

e

$$B(m) = \langle U_{x_0}, \widehat{\phi_{1,m,\tau}} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\alpha}_n P_\tau(m, n). \quad (4.18)$$

Considere, agora, o operador $T : \ell^2 \rightarrow s'$, dado por $(\tilde{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (B(m))_{m \in \mathbb{N}}$.

Podemos observar que a aplicação de T pode ser interpretada como realizar o produto com uma matriz de ordem infinita:

$$\begin{bmatrix} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\tau(1,1) & P_\tau(1,2) & P_\tau(1,3) & \dots \\ P_\tau(2,1) & P_\tau(2,2) & P_\tau(2,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Para resolver o problema numérico, necessitamos realizar um truncamento nas matrizes de (4.19), e considerar o sistema obtido a partir dessa aproximação. Ou seja:

$$\begin{bmatrix} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\tau(1,1) & P_\tau(1,2) & \dots & P_\tau(1,N) \\ P_\tau(2,1) & P_\tau(2,2) & \dots & P_\tau(2,N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_\tau(N,1) & P_\tau(N,2) & \dots & P_\tau(N,N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(1) \\ \tilde{\alpha}(2) \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}(N) \end{bmatrix} = T_N \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(1) \\ \tilde{\alpha}(2) \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}(N) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Encontramos, pela resolução do sistema linear (4.20), recuperamos a seqüência truncada $\tilde{\alpha}$, conseguimos identificar os primeiros elementos da seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e também a função $g(x)$. Todas as operações formais descritas acima, incluindo as considerações de convergência, são demonstradas em [15].

4.2 Estabilidade

Suponhamos que a informação que temos à disposição seja $U_{x_0}(t) + e(t)$, em que $e(t)$ representa o erro de medição, e que pode ser limitado, a priori, em

$$\|e(t)\|_{L^2} \leq \epsilon_{erro}. \quad (4.21)$$

Então, definindo

$$B_e(m) = \langle e(t), \widehat{\phi_{1,m,\tau}} \rangle,$$

existe um limitante superior para $\|T_N^{-1}(B_e(m))\|_{m \in \{1, \dots, N\}}$, que estima o erro dos (α_n) recuperados, e que é dado por

$$\|T_N^{-1}(B_e(m))\|_{m \in \{1, \dots, N\}} \leq \epsilon_{erro} \sqrt{\frac{N+1}{2\tau}}. \quad (4.22)$$

Assim, vemos que, dependendo do intervalo de tempo τ considerado para a realização do experimento, teremos uma limitação na quantidade N de coeficientes da série de Fourier que modela a solução do problema. Por exemplo, se τ for um instante muito pequeno de tempo, da ordem de centésimos de segundos, então vemos que o erro dos coeficientes identificados pode ser ampliado consideravelmente.

Ao contrário, se τ puder ser escolhido, por exemplo, como 20s, então podemos utilizar

na série até 40 fatores, e garantir que o erro na função recuperada será menor ou igual do que o erro de medição.

4.3 Experimentos Numéricos

Encerraremos este trabalho com a realização de alguns experimentos numéricos, destinados a ilustrar a identificação da fonte de ruído da viga. Foi utilizado o software *Mathematica* [44] para a realização do experimento.

Nesta ilustração do problema, consideramos o seguinte conjunto de dados e parâmetros para a realização do experimento:

- Módulo de elasticidade $E = 200 \text{ GPa}$,
- Momento de inércia $I = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$,
- Comprimento da viga $L = 5 \text{ m}$,
- Ponto de medição da viga $x_0 = 1 \text{ m}$,
- Densidade linear $\rho = 19.3 \text{ kg/m}$,
- Área da seção transversal $A = 10^{-3} \text{ m}^2$,
- $h(t) = t^2$,
- $A_n = \frac{\cos(n)}{(n+8.9)^3}$.

Estamos considerando no experimento a função $h_M(t) = \pi^2/3 - 4 \cos(\frac{\pi}{T_0}t)$, como aproximação de $h(t) = t^2$, e $M = 1$.

4.3.1 Estabilidade

Desejamos ilustrar a aplicação da fórmula da seção (4.2). Seja $e(t)$ uma função aleatória, representando o erro de medição, tendo, por hipótese, $\|e(t)\|_{L^2} = 0.03$.

Assim, resulta que $\|T_N^{-1}(B_e(m))\|_{\ell^2} \leq 0.03 \sqrt{\frac{N+1}{2\tau}}$.

Supondo que o período de medição seja de $\tau = 0.10 \text{ s}$, vemos que se $N = 3$, já teremos uma ampliação de 9 vezes no erro da função a ser identificada. Necessitamos então,

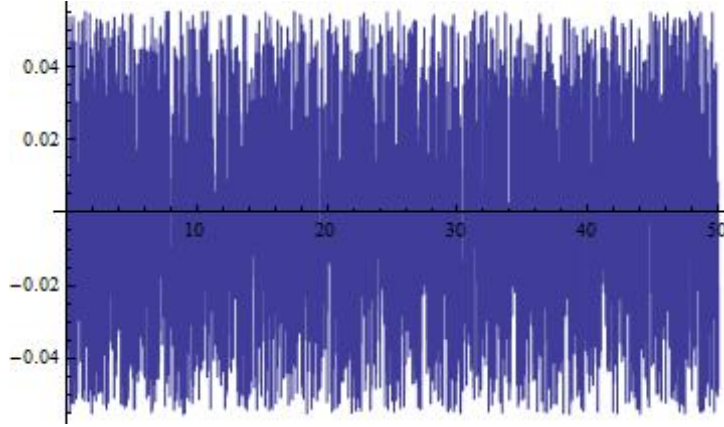


Figura 4.1: Ilustração da função erro $e(t)$

umentar o período de medição, mas essa possibilidade muitas vezes é limitada pelas condições físicas do sistema.

4.3.2 Elaboração dos Experimentos e Resultados

Utilizaremos a função $U_{x_0}(t) + e(t)$, descrita em (4.6) como a velocidade de um ponto x_0 da viga e tomaremos uma aproximação de w e U_{x_0} , respectivamente, como:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{14} \frac{A_n}{\rho A} \sum_{m=0}^1 \frac{k_m}{\omega_n^2 - (\pi m/T_0)^2} [\cos(\pi m t/T_0) - \cos(\omega_n t)] S_n(x) \quad (4.23)$$

e

$$U_{x_0}(t) = \sum_{n=1}^{28} \tilde{\alpha}_n e^{i\lambda_n t}. \quad (4.24)$$

Neste experimento, através da identificação de $\tilde{\alpha}_n$ e, por conseguinte, de $\alpha_{n,m}$, iremos recuperar os primeiros 10 coeficientes de A_n e dessa forma, podemos realizar uma estimativa da função $g(x)$. O intervalo de tempo escolhido será de $[-T_0, T_0]$, para $T_0 = 5, 10, 20$ e 30 s.

Através do método descrito na seção (4.1), consideramos os dados definidos anteriormente neste capítulo, e realizando a medição no ponto x_0 , obtemos os resultados ilustrados nos gráficos das figuras (4.2), (4.3) e (4.4).

Como as funções $S_n(x)$ consideradas em (3.8) possuem fatores hiperbólicos, conforme x e n aumentam, observa-se que a precisão exigida na identificação dos valores de (β_n) , e no cálculo de $S_n(x)$, se torna muito elevada para obter um resultado numérico com uma

acurácia satisfatória. Uma solução encontrada foi distribuir os fatores de modo que os termos hiperbólicos estivessem juntos, e trabalhamos com a função $\tilde{S}_n(x)$, dada por

$$\tilde{S}_n(x) = C_n[(\sinh \beta_n x + \gamma_n \cosh \beta_n x) - (\sin \beta_n x + \gamma_n \cos \beta_n x)] \quad (4.25)$$

Vemos na figura (4.5) alguns exemplos ilustrativos de como essa alteração consegue corrigir alguns dos erros de processamento numéricos.

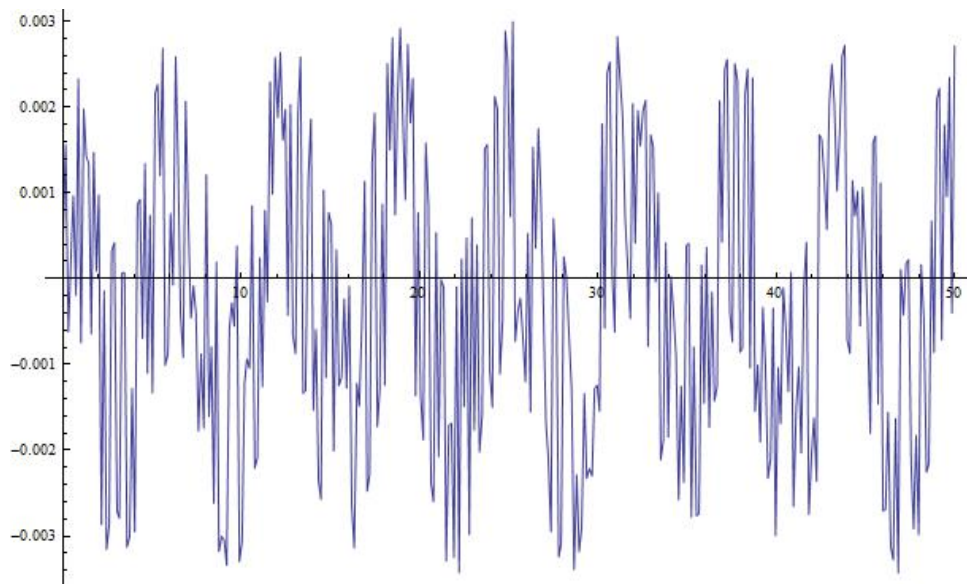


Figura 4.2: Ilustração de $w(1, t)$ nos instantes $t = 0s$ a $t = 50s$.

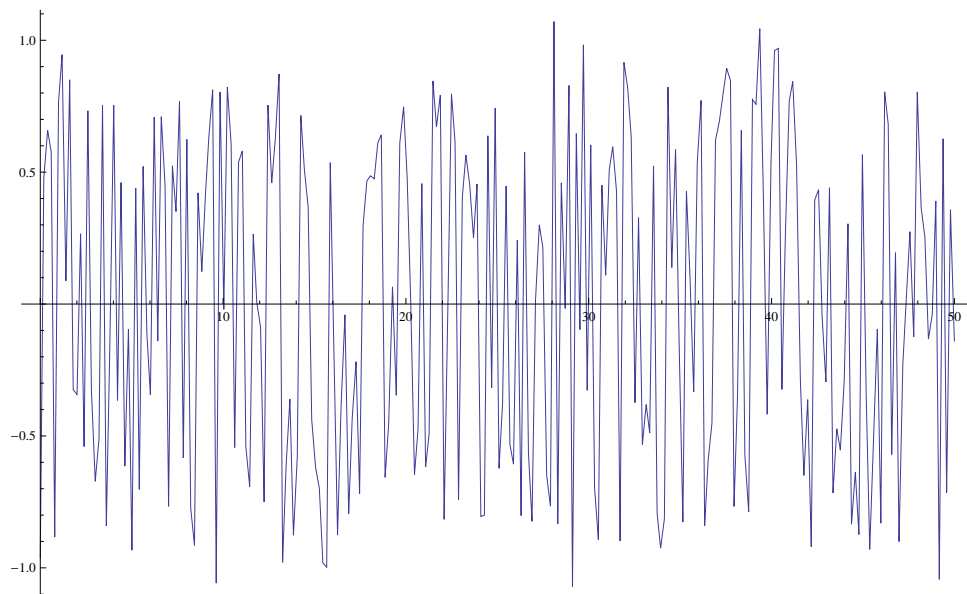


Figura 4.3: Ilustração de $U_{x_0}(t)$ nos instantes $t = 0s$ a $t = 50s$.

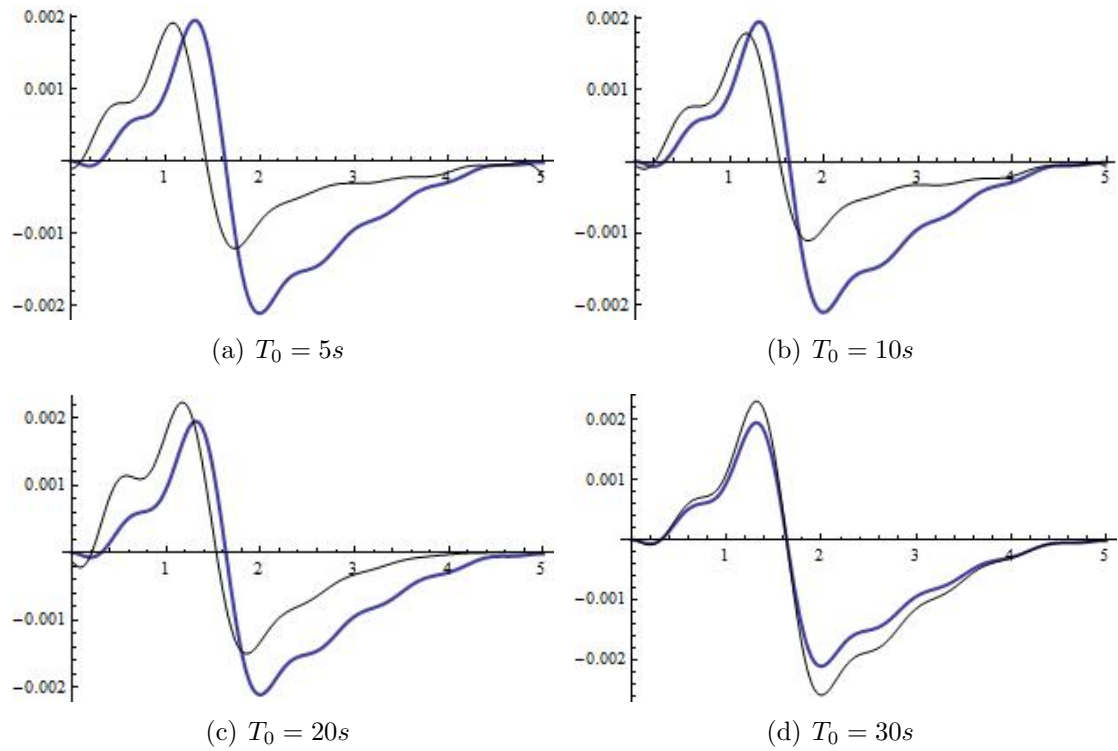


Figura 4.4: Ilustração da função $g(x)$ recuperada, em preto, juntamente com a função $g(x)$ original, em traçado mais grosso.

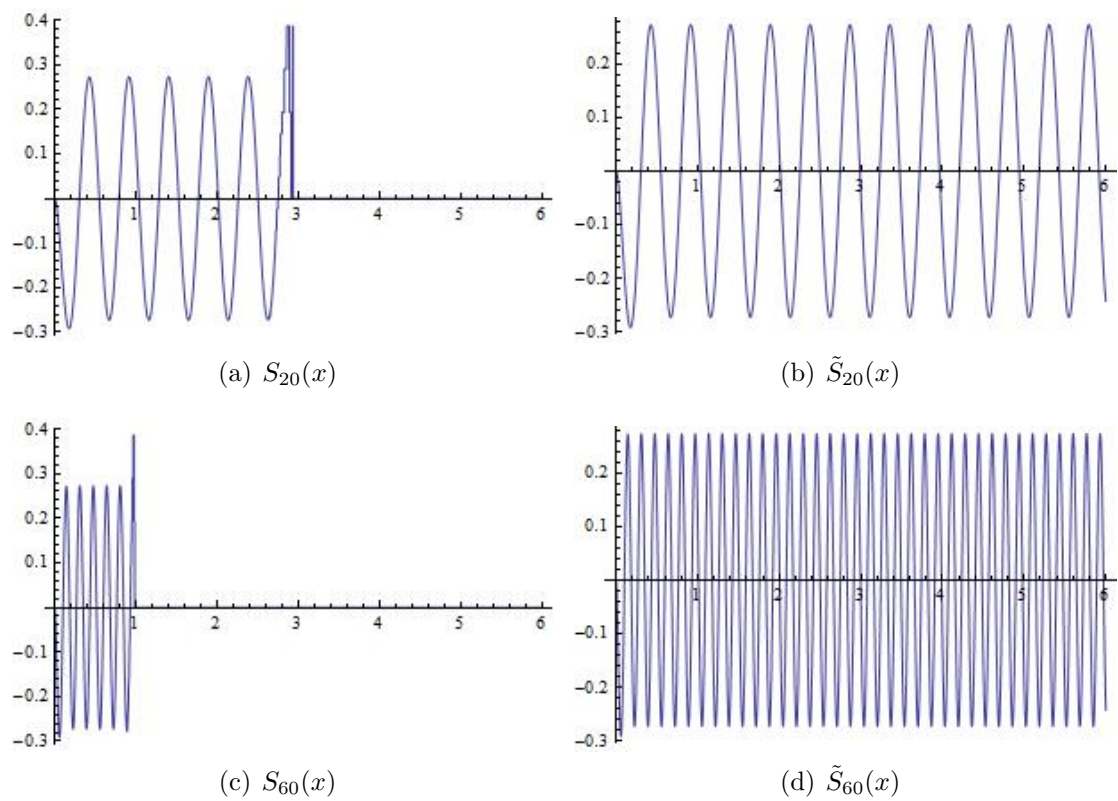


Figura 4.5: Gráficos das funções $S_n(x)$ e $\tilde{S}_n(x)$, para $n = 20$ e $n = 60$, exibindo a limitação numérica de processamento do *Mathematica*.

Capítulo 5

Conclusões Finais

Apresentamos a solução do problema direto da viga vibrante, e resolvemos o problema inverso a fim de encontrar a fonte de vibração por meio da medição da velocidade de um determinado ponto dela, em um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno. A relevância na Engenharia do trabalho está na identificação de danos estruturais em vigas.

Consideramos, no estudo, a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, devido à sua simplicidade e por permitir aproximações bastante razoáveis para muitos problemas. Também abordamos a solução do problema inverso e os resultados de unicidade que permite a recuperação da fonte de vibração da viga, através da identificação dos coeficientes da série que representa a força $g(x)$, e realizamos alguns experimentos numéricos ilustrativos.

Com este estudo, esperamos ter exposto uma teoria que pode permitir expandir alguns resultados dos trabalhos de Nicaise, citados na Revisão Bibliográfica. Como continuidade do trabalho, poderíamos considerar funções em outros espaços além do L^2 , como o H^{-1} , e assim, generalizar a pesquisa de outros autores que representam a força aplicada nesses espaços, mas como soma finita de delta de Diracs, ou inclusive, realizar a identificação de danos em vigas, com outras condições de contorno e de fronteira.

Outra possibilidade de desenvolvimento do trabalho consiste em realizar a recuperação também da função $h_M(t)$, através da série (K_m) . Além disso, acreditamos ser oportuno

fazer uma análise mais aprofundada da modelagem do experimento no *Mathematica*, de modo a ampliar o número de coeficientes identificados, e corrigir as distorções, de ordem computacional, devidas ao cálculo numérico das funções hiperbólicas.

Finalmente, poderíamos considerar a realização de alguns experimentos práticos, que permitiriam verificar e adaptar a teoria de acordo com os resultados a serem obtidos em laboratório.

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams, J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd edition, Pure and Applied Mathematics, 140, Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] V. Barcion. *On the solution of inverse eigenvalue problems of high orders*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 39, 143-154. 291, 391. 1974.
- [3] V. Barcion. *Inverse problems for a vibrating beam*. Journal of Applied Mathematics and Physics, 27, 346-358. 185, 392. 1976.
- [4] V. Barcion. *Problems for a vibrating beam*. Journal of Applied Mathematics and Physics, 27, 346-358. 185, 392. 1976.
- [5] B. Biondi, S. Caddemi, *Closed form solutions of Euler-Bernoulli beams with singularities*. International Journal of Solids and Structures 42, p.3027. 2005.
- [6] G. Bruckner; M. Yamamoto. *On the determination of point sources by boundary observations: uniqueness, stability and reconstruction*, Preprint WIAS, 252, Berlin, 1996.
- [7] G. Bruckner and M. Yamamoto, *Identification of point sources by boundary observations: uniqueness, stability and reconstruction*, in: E. A. Lipitakis ed., Hermis' 96, Proceedings of the third hellenic european conference on Math. and Informatics, Athens, LEA, 154-161, 1997.
- [8] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [9] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, AMS, Chelsea, 1998.
- [10] L. Fryba. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Noordhoff International, Groningen
- [11] G. M. Gladwell. *Inverse Problems in Vibration*, 400 pp., Martinus Noordhoff , 1986.
- [12] K. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover, New York, 1975.
- [13] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. pp. 49. 1902.
- [14] V. Isakov, *Uniqueness and stability in multi-dimensional inverse problems*, Inverse Problems 9 579. 1993.
- [15] A. Kawano, A. Zine, *Uniqueness and nonuniqueness results for a certain class of almost periodic distributions*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 43, No. 1, pp. 135-152, 2011.

- [16] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, **RMA 36**, Masson, Paris, 1994.
- [17] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, 1989.
- [18] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, tome 1, **RMA 8**, Masson, Paris, 1988.
- [19] S. S. Law, *Crack identification in beam from dynamic responses*. Journal of Sound and Vibration. Volume 285, Issue 4, p967. 2005.
- [20] R. Y. Liang, J. Hu, F. Choy *Theoretical Study of Crack-Induced Eigenfrequency Changes on Beam Structures*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, No. 2. 1992.
- [21] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, tome 1, RMA 8, Masson, Paris, 1988.
- [22] J. R. McLaughlin. *On constructing solutions to an inverse Euler-Bernoulli beam problem*, in F. Santosa et al (Eds) *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*. Philadelphia: SIAM, 341-347. 392, 393. 1984.
- [23] J. R. McLaughlin, S. Dediu. *Recovering inhomogeneities in a waveguide using eigensystem decomposition*, *Inverse Problems*, Vol. 22, June, 2006, pp.1227-1246. 2006.
- [24] J. R. McLaughlin, *An Inverse Eigenvalue Problem of Order Four*, *SIAM J. Math. Anal.* 7, p.646. 1974.
- [25] L. Meirovitch. *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill, New York, 2001.
- [26] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [27] A. Morassi. *Damage detection and generalized Fourier coefficients*. Journal of Sound and Vibration, Volume 302, p229. 2007.
- [28] A. Morassi. *Crack-Induced Changes in Eigenparameters of Beam Structures*. *J. Eng. Mech.* 119, 1798. 1993.
- [29] T. Myint-U; L. Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser Boston; 4th edition. 2006.
- [30] S. Nicaise, O. Zaïr, *Determination of point sources in vibrating beams by boundary measurements : Identifiability, stability and reconstruction results*, *Electronic Journal of Differential Equations*, 20 p1. 2004.
- [31] S. Nicaise and O. Zair. *Identifiability, stability and reconstruction results of point sources by boundary measurements in heterogeneous trees*. *Revista Matemática Complutense*, 16(1), 151-178, 2003.
- [32] F. I. Niordson. *A method of solving inverse eigenvalue problems*, *Recent Progress in Applied Mechanics: The Folke Odqvist Volume*. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 373-382. 1967.

-
- [33] V. G. Papanicolaou; D. Kravvaritis. *An inverse spectral problem for the Euler - Bernoulli equation for the vibrating beam*, Inverse Problems, 13, p1083. 1997.
- [34] S. S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley, 2nd Ed. 1990.
- [35] M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press Inc, California, 1980.
- [36] S. L. Sobolev. *On a Theorem of Functional Analysis*. Mat. Sb. 46 (1938), 471-496.
- [37] S. L. Sobolev. *Application of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Amer. Mat. Soc., Transl., Math Mono. 7 (1963).
- [38] W. T. Thomson. *Theory of vibration with applications*. Hemel Hempstead: George Allen and Unwin. (Second edition) 1981.
- [39] S. P. Timoshenko. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, "second" edition, 1961.
- [40] S. P. Timoshenko. *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*. Philosophical Magazine, p.125. 1922.
- [41] S. P. Timoshenko. *On the forced vibrations of bridges*. Philosophical Magazine. 6. 1922.
- [42] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. 2003
- [43] M. Yamamoto. *Stability, reconstruction and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method*, Inverse Problems, 11, p481. 1995.
- [44] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 8.0, Champaign, IL (2010).