

Mohammad Mehdi Ghorbani

**Problema de inversão de onda elástica no domínio do tempo baseado no método de otimização topológica**

São Paulo  
2021

Mohammad Mehdi Ghorbani

# **Problema de inversão de onda elástica no domínio do tempo baseado no método de otimização topológica**

Dissertação apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Ciências.

São Paulo  
2021

Mohammad Mehdi Ghorbani

# **Problema de inversão de onda elástica no domínio do tempo baseado no método de otimização topológica**

Versão Corrigida

Dissertação apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para obtenção do Título de Mestre em  
Ciências.

Área de Concentração:  
Engenharia de Controle e Automação  
Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

São Paulo  
2021

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

### Catálogo-na-publicação

Ghorbani, Mohammad Mehdi

Problema de inversão de onda elástica no domínio do tempo baseado no método de otimização topológica / M. M. Ghorbani -- versão corr.--São Paulo, 2021.

119 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Inversão Completa das Formas de Onda 2.Otimização topológica 3.Método dos elementos finitos 4.Modelo material I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Ghorbani, Mohammad Mehdi. **Problema de inversão de onda elástica no domínio do tempo baseado no método de otimização topológica**. 2021. 119 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_

Julgamento: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_

Julgamento: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. \_\_\_\_\_

Instituição: \_\_\_\_\_

Julgamento: \_\_\_\_\_

*Dedico este trabalho aos meus pais  
pelo apoio incondicional e incentivo  
ao longo de toda a minha vida.*

# AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, a quem expresso minha admiração e reconhecimento como exemplo de dedicação acadêmica, liderança, seu padrão de excelência, pela confiança depositada, por sua paciência e empenho para a realização desse trabalho. Os anos de convívio me proporcionaram enorme amadurecimento acadêmico, profissional e pessoal.

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, dando todo tipo de suporte e por serem modelos de perseverança compartilhando todo o seu amor e ensinamentos ao longo da minha vida e sempre me incentivando a buscar novos desafios.

A minha querida esposa e parceira de vida Maria Clara, por seu amor, companheirismo e paciência durante a este período. E pelos ótimos momentos que vivemos juntos.

À meus colegas do grupo de otimização topológica, Juliano, André, Paulo, Luís, Diego Alonso, Diego Prado, Hélio, Luís Garcia, João, Ruben, Francisco, Bruno para as discussões acadêmicas, conversas e os cafezinhos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FUSP) e Research Centre for Gas Innovation (RCGI) pelo concessão da bolsa de estudos para realização deste trabalho de mestrado. Esta pesquisa foi realizada em associação com o projeto em andamento de P&D registrado como ANP 20714-2, "Tecnologias de software para modelagem e inversão, com aplicações em imagens sísmicas"(Universidade de São Paulo/ Shell Brasil / ANP) - Desenvolvimento de técnicas numéricas e Software para Problemas de Inversão com Aplicações em Processamento Sísmico, patrocinado pela Shell Brasil sob a aplicação de P&D da ANP como "Compromisso de Investimentos com Pesquisa e Desenvolvimento.

Por fim, a todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho

# RESUMO

Os problemas inversos são de grande interesse em diversas áreas de conhecimento, com aplicações em problemas de imageamento médico, detecção de danos em estruturas e problemas geofísicos. Este trabalho está focado em problemas de identificação de parâmetros, em que busca-se obter imagens de uma subsuperfície analisada e identificar as propriedades do meio estudado. Nestas aplicações, as técnicas de inversão são utilizadas para encontrar imagens da subsuperfície em busca de reservatórios de óleo e gás. Nestas abordagens, em que as ondas acústicas/elásticas geradas através de uma fonte sísmica são propagadas na subsuperfície, e as respostas são coletadas utilizando uma rede de sensores. Neste trabalho, propõe-se uma Inversão Completa das Formas de Onda (FWI) no meio elástico isotrópico considerando o domínio de tempo empregando o método de otimização topológica. Dessa forma, as equações da onda elástica são discretizadas e resolvidas através do método de elementos finitos em regime transiente. O cálculo do gradiente da função objetivo é realizado pelo método adjunto e os modelos de velocidade são atualizados utilizando um método baseado em gradientes. A distribuição de material no domínio é obtida utilizando o modelo de material que permite definir um mapeamento entre as pseudo-densidades e as propriedades de Lamé. Além disso, o conceito de modelo de material é utilizado para propor uma nova parametrização para o problema de inversão elástica, modificando o espaço de soluções da otimização o que permite obter um mínimo local mais desejável durante a inversão. Dessa forma, o modelo de material é empregado para tornar um problema multiparamétrico em um problema monoparamétrico. Assim, técnicas de regularizações são utilizadas para melhorar a convergência do problema e evitar mínimos locais, e a parametrização empregada utilizando o modelo de material permite reduzir os pesos de regularizações a serem definidas. Três modelos de material distintos, SIMP, Pico e Von mises são investigados no contexto de problemas de identificação. Para a resolução do problema de elementos finitos utilizou-se o ambiente FEniCS, a implementação dos algoritmos é realizada na linguagem Python e suas bibliotecas, o cálculo das sensibilidades é realizado pelo diferenciador automático Pyadjoint, enquanto a otimização se deu utilizando um algoritmo da família quase-newton, L-BFGS-B. Observou-se neste trabalho a eficiência da otimização topológica na resolução de problemas inversos através da aplicação de exemplos numéricos em um domínio bidimensional.

**Palavras-chave:** Inversão Completa das Formas de Onda, Otimização topológica, Método dos elementos finitos, Modelo material, Problema Inverso, Regularizações, Fenics.



# ABSTRACT

Inverse problems are of great interest in several areas of study, with applications in medical imaging, damage detection of structures and geophysical problems. This work focuses on parameter identification problems, which seek to obtain images of an analyzed subsurface and identify the properties of the studied medium. In these applications, inversion techniques are used to find images of the subsurface in search of oil and gas reservoirs. In these approaches, in which acoustic/elastic waves generated through a seismic source are propagated in the subsurface, and the responses are collected using a sensor network. In this work, we propose a Full Waveform Inversion (FWI) in the isotropic elastic medium considering the time domain using a topology optimization approach. Thus, the elastic wave equations are discretized and solved through the finite element method in a transient regime. The objective function gradient calculation is performed by the adjoint method and the velocity models are updated using a gradient-based method. The distribution of material in the domain is obtained using the material model that allows defining a mapping between pseudo-densities and Lamé properties. In addition, the material model concept is used to propose a new parameterization for the elastic inversion problem, by modifying the optimization's solutions space, allows to obtain a more desirable local minimum during the inversion. In this way, the material model is used to convert a multiparametric problem into a monoparametric problem. Thus, regularization techniques are used to improve the convergence of the problem and avoid local minimums, the employed parameterization using the material model allows to reduce the weights of regularizations to be defined. Three distinct material models, SIMP, Peak and Von mises models are investigated in the context of identification problem. The implementation of the algorithms is carried out in the Python language and its libraries. To solve the finite element problem, the FEniCS environment was employed, and the computation of the sensitivities is performed by the automatic differentiation tool Pyadjoint, while the optimization was carried out using an algorithm of the quasi-Newton family, L-BFGS-B. The numerical examples in a two-dimensional domain show the efficiency of topology optimization in solving inverse problems.

**Keywords:** Full WaveForm Inversion, Topology Optimization, Finite Element Method, Material Model, Inverse Problem, Regularizations, Fenics.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Relação entre os problemas direto e inverso. . . . .	14
Figura 1.2 – Sistema com $N_e$ entradas, $N_s$ de saídas e $N_p$ parâmetros. . . . .	14
Figura 1.3 – a) Exploração sísmica (SANTOS, 2012) e b) ensaio não destrutivo (SEIDL, 2018). . . . .	16
Figura 1.4 – Processo de exploração geofísica para obtenção de óleo e gás. . . . .	16
Figura 1.5 – Ilustração da exploração sísmica marítima. . . . .	17
Figura 1.6 – a) Modelo de velocidade de referência b) estimativa inicial do modelo de velocidade. . . . .	19
Figura 1.7 – Fluxograma ilustrativo do processo de otimização topológica em um problema de inversão de onda. . . . .	21
Figura 2.1 – Forças atuando num elemento infinitesimal. . . . .	26
Figura 2.2 – Propagação de Onda longitudinal. . . . .	28
Figura 2.3 – Exemplo de onda cisalhante. . . . .	29
Figura 2.4 – Representação da fonte Ricker no domínio de tempo. . . . .	32
Figura 2.5 – Discretização de um domínio $\Omega$ em elementos finitos. . . . .	37
Figura 2.6 – Elementos triangulares utilizados para interpolar variável de estado e variável de projeto. . . . .	38
Figura 2.7 – Mapeamento entre o espaço de referência e o espaço Euclidiano. . . . .	39
Figura 3.1 – Distribuição de material no domínio de projeto. . . . .	51
Figura 3.2 – Influência de penalizador $p$ para o modelo de material. . . . .	53
Figura 3.3 – A influência de penalização no modelo de material Peak. . . . .	55
Figura 3.4 – A influência de penalização no modelo de material von mises. . . . .	57
Figura 5.1 – Estrutura interna do FEniCS. . . . .	72
Figura 5.2 – Abordagens de implementação da equação adjunta. . . . .	73
Figura 5.3 – Fluxograma do algoritmo de otimização topológica para inversão de onda. . . . .	74
Figura 6.1 – Posição das fontes e receptores. . . . .	76
Figura 6.2 – A malha utilizada durante as inversões. . . . .	76
Figura 6.3 – Modelo de velocidade Camembert. . . . .	78
Figura 6.4 – Modelo de velocidade com inclusão Retangular . . . . .	79
Figura 6.5 – Resultado da inversão para a pseudo-densidade utilizando o modelo de material SIMP considerando diferentes penalizações com crime inverso. . . . .	81
Figura 6.6 – Resultado da inversão para a propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material SIMP considerando diferentes penalizações com crime inverso. . . . .	82
Figura 6.7 – Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo SIMP. . . . .	83

Figura 6.8 – Resultado da inversão para pseudo densidade utilizando o modelo de material Pico com penalização fixa com crime inverso. . . . .	85
Figura 6.9 – Resultado da inversão para o parâmetro de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material Pico com penalização fixa com crime inverso. . . . .	86
Figura 6.10–Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo Pico com penalização fixa. . . . .	87
Figura 6.11–Resultado da inversão para a pseudo-densidade utilizando o modelo de material Pico com penalização automática com crime inverso. . . . .	89
Figura 6.12–Resultado da inversão para o parâmetro de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material Pico com penalização automática com crime inverso. . . . .	90
Figura 6.13–A evolução da penalização durante a otimização utilizando o modelo de material Pico com penalização automática. . . . .	91
Figura 6.14–Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo Pico com penalização automática. . . . .	92
Figura 6.15–Resultado da inversão para a pseudo densidade utilizando o modelo de material von Mises com crime inverso. . . . .	94
Figura 6.16–Resultado da inversão para o valor da propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material von Mises com crime inverso. . . . .	95
Figura 6.17–Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo von Mises. . . . .	96
Figura 6.18–As duas malhas utilizadas durante a inversão. . . . .	97
Figura 6.19–Evolução da otimização para modelo Camembert durante as iterações sem crime inverso utilizando o modelo de material SIMP. . . . .	98
Figura 6.20–Evolução da otimização para modelo com inclusão retangular durante as iterações sem crime inverso utilizando o modelo de material SIMP. . . . .	98
Figura 6.21–Resultado da inversão para a pseudo-densidade incluindo a regularização Tikhonov junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso. . . . .	100
Figura 6.22–Resultado da inversão para a propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) incluindo a regularização Tikhonov junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso. . . . .	101
Figura 6.23–Curva de convergência para a inversão incluindo a regularização Tikhonov. . . . .	102
Figura 6.24–Resultado da inversão para a pseudo-densidade incluindo a regularização de variação total junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso. . . . .	104
Figura 6.25–Resultado da inversão para propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) incluindo a regularização de variação total junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso. . . . .	105
Figura 6.26–Curva de convergência para a inversão incluindo a regularização Variação Total. . . . .	106

# LISTA DE SIGLAS

**EDP** Equação diferencial parcial

**FC** Form Compiler

**FFC** FEniCS Form Compiler

**FIAT** Finite element Automatic Tabulator

**FWI** Full waveform inversion

**MEF** Método dos Elementos Finitos

**NDT** Non Destructive Testing

**OT** Otimização Topológica

**SIMP** Solid Isotropic Material with Penalization

**TN** Tikhonov

**VT** Variação Total

**UFC** Unified Form-Assembly Code

**UFL** Unified Form Language

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Problema inverso</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Exploração sísmica</b>	<b>16</b>
1.2.1	Aquisição de dados	16
1.2.2	Processamento de dados	17
1.2.3	Interpretação de dados	17
1.2.4	Caracterização de reservatório	18
<b>1.3</b>	<b>Inversão do campo de onda completa (<i>Full waveform inversion, FWI</i>)</b>	<b>18</b>
<b>1.4</b>	<b>Método de Otimização Topológica</b>	<b>20</b>
<b>1.5</b>	<b>Otimização Topológica aplicado a problema de inversão</b>	<b>21</b>
<b>1.6</b>	<b>Objetivos</b>	<b>22</b>
1.6.1	Objetivos específicos	22
<b>1.7</b>	<b>Motivações</b>	<b>23</b>
<b>1.8</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DO PROBLEMA DIRETO</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS EM MEIO SÓLIDO ISOTRÓPICO</b>	<b>25</b>
2.1.1	Ondas longitudinais ou P	28
2.1.2	Ondas Cisalhantes ou S	29
2.1.3	Modelagem do termo fonte	31
2.1.4	Condições de contorno e Condição de contorno de amortecimento	32
<b>2.2</b>	<b>Métodos de discretização espacial</b>	<b>34</b>
<b>2.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos</b>	<b>36</b>
2.3.1	Elemento triangular	38
<b>2.4</b>	<b>Formulação de MEF</b>	<b>40</b>
<b>2.5</b>	<b>Considerações Numéricas</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>PROBLEMA INVERSO E OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA</b>	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelagem Acústica e Elástica</b>	<b>43</b>
3.1.1	Custo computacional	46
<b>3.2</b>	<b>Método de Otimização Topológica</b>	<b>48</b>
<b>3.3</b>	<b>Parametrização e Modelo de Material</b>	<b>50</b>
3.3.1	Modelo de Material SIMP	51
3.3.2	Modelo de Material Pico	53
3.3.3	Modelo de material von mises	55

<b>3.4</b>	<b>Considerações numéricas do problema inverso em otimização topológica</b>	<b>57</b>
3.4.1	Dependência da Malha . . . . .	57
3.4.2	Mínimos Locais . . . . .	57
<b>3.5</b>	<b>Crime Inverso</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>3.6</b>	<b>Função objetivo do problema inverso</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>3.7</b>	<b>Problema de otimização</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>3.8</b>	<b>Algoritmos de otimização</b> . . . . .	<b>60</b>
3.8.1	O método BFGS . . . . .	61
3.8.2	A abordagem L-BFGS . . . . .	62
<b>3.9</b>	<b>Regularização nos problemas de inversão</b> . . . . .	<b>63</b>
3.9.1	Regularização Tikhonov (TN) . . . . .	63
3.9.2	Regularização Variação Total (VT) . . . . .	63
3.9.3	Regularização na parametrização adotada . . . . .	64
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>4.1</b>	<b>Método adjunto</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>4.2</b>	<b>Análise de Sensibilidade do problema da onda elástica utilizando o método adjunto</b> . . . . .	<b>66</b>
4.2.1	A primeira condição de optimalidade (Problema de estado) . . . . .	67
4.2.2	A segunda condição de optimalidade (Problema adjunto) . . . . .	68
4.2.3	A terceira condição de optimalidade (Problema de controle) . . . . .	69
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.1</b>	<b>Solução de equações diferenciais</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.2</b>	<b>Soluções de equações diferenciais utilizando FEniCS</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.3</b>	<b>Solução de equações adjuntas</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>5.4</b>	<b>Solução da otimização topológica</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>6.1</b>	<b>Considerações gerais</b> . . . . .	<b>75</b>
6.1.1	Modelo Camembert . . . . .	77
6.1.2	Modelo com Inclusões Retangulares . . . . .	78
<b>6.2</b>	<b>Modelo de material SIMP</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>6.3</b>	<b>Modelo de material Pico</b> . . . . .	<b>84</b>
6.3.1	Penalização Fixa . . . . .	84
6.3.2	Penalização Automática . . . . .	88
<b>6.4</b>	<b>Modelo de material von Mises</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>6.5</b>	<b>Inclusão de Regularizações</b> . . . . .	<b>97</b>
6.5.1	Inclusão da Regularização Tikhonov . . . . .	99
6.5.2	Inclusão da Regularização Variação Total . . . . .	103

<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>107</b>
<b>7.1</b>	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>108</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>109</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Este capítulo introduz e contextualiza o problema de inversão de onda elástica, bem como apresenta suas aplicações. Portanto, busca-se abordar o problema utilizando um novo método de identificação de parâmetros, que é comparado aos métodos tradicionalmente utilizados em imageamento. Em seguida, o método de otimização topológica proposto para a resolução do problema de inversão elástica é descrito. Por fim, os objetivos e motivações do trabalho são apresentados.

## 1.1 Problema inverso

Um dos objetivos da computação científica é a simulação de fenômenos físicos como a propagação de calor, ondas sísmicas/eletromagnéticas ou deformações de estruturas sob cargas atuantes. Nestes casos, as propriedades do meio, como densidade, velocidade da onda ou condutividade térmica, bem como o estado inicial do processo em estudo como forças atuantes, condições de contorno são conhecidas. Problemas desta natureza são chamados problemas diretos. O processo começa com o conhecimento dos fatores causais de um sistema físico e depois calculam os seus efeitos únicos.

Existem outras categorias de problemas em que as propriedades do meio de interesse são desconhecidas. Nestas, o objetivo passa a ser obter informações sobre o sistema físico, a partir de medições indiretamente relacionadas às suas propriedades, como medindo temperatura ou deslocamento em determinadas posições. Problemas desta natureza são chamados problemas inversos, os quais se iniciam a partir da observação de um fenômeno físico (experimento), e em seguida busca-se encontrar suas causas. Portanto, trata-se de um processo de pesquisa oposto ao processo de estudo de problemas diretos, como ilustrado na Fig. 1.1.

Supondo que existe um modelo matemático que descreve um processo físico e assumindo que este modelo fornece uma descrição do sistema por trás do processo e das suas condições operacionais, pode-se obter uma descrição do sistema através de um conjunto de equações diferenciais ordinárias e/ou parciais e equações integrais, além de seus respectivos parâmetros. Assim, a análise de determinado processo físico por meio da modelagem matemática pode ser separada em três tipos distintos de problemas (BAUMEISTER; LEITAO, 2005) conforme ilustrado na Fig.1.2:

Dessa forma, define-se cada categoria de problema como:



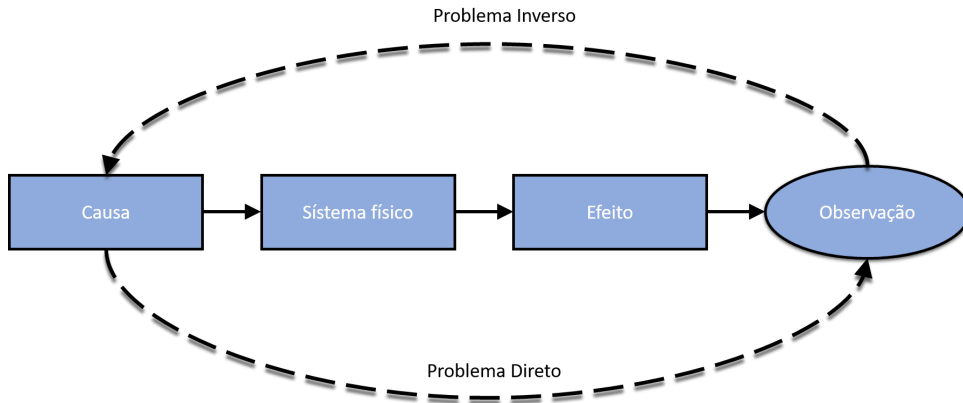


Figura 1.1 – Relação entre os problemas direto e inverso.

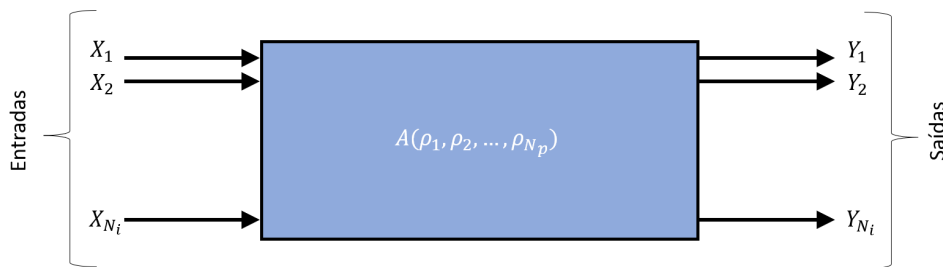


Figura 1.2 – Sistema com  $N_e$  entradas,  $N_s$  de saídas e  $N_p$  parâmetros.

Problema direto: Dado  $\mathbf{X} \in H_1$  e  $\rho \in U$ , encontrar

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_p})\mathbf{X} \quad (1.1)$$

onde o objetivo é determinar as saídas  $Y_i$  do modelo  $\mathbf{A}$ , dada as entradas  $\mathbf{X}$  e o sistema de parâmetros  $\rho_i$ ,

Problema inverso: pode ser dividido em problemas de reconstrução e problemas de identificação:

1. Problema de reconstrução:

Observado  $\mathbf{Y} \in H_2$  e o sistema de parâmetros  $\mathbf{A}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_p})$  conhecido, encontrar

$$\mathbf{X} \in H_1 \quad \text{tal que} \quad \mathbf{A}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_p})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (1.2)$$

onde o objetivo é dado o sistema de parâmetros  $\rho$ , e observado as saídas  $\mathbf{Y}$  do modelo  $\mathbf{A}$ , encontrar um conjunto de entradas  $\mathbf{X}$  correspondentes à saídas  $\mathbf{Y}$ .

2. Problema de identificação:

Dados  $\mathbf{X} \in H_1$  e  $\mathbf{Y} \in H_2$ , encontrar

$$\rho \in U \quad \text{tal que} \quad \mathbf{A}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_p})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (1.3)$$

onde o objetivo é, dado as entradas  $\mathbf{X}$  e as saídas  $\mathbf{Y}$  do sistema  $\mathbf{A}$ , encontrar o conjunto de parâmetros que relaciona as entradas  $\mathbf{X}$  e saídas.

Um problema é dito bem-posto quando satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais. Dessa forma, caso um dos requisitos acima não seja satisfeito, o problema é dito mal-posto (CEZARO; CEZARO, 2010).

Nos problemas inversos (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2018), deseja-se obter os parâmetros que melhor descrevem os dados observados, conforme algum experimento físico. Cada conjunto de parâmetros define um conjunto de dados sintéticos, que pode ser comparado aos dados medidos através de uma função erro. O objetivo da inversão é minimizar uma função objetivo, a qual é comumente definida como uma norma  $L_2$  da diferença entre os dados calculados e os dados sintéticos. Desta forma, é possível encontrar um conjunto de parâmetros que, por meio da modelagem, vai produzir o menor resíduo possível em relação aos dados observados.

Os problemas inversos são estudados em diversas áreas de conhecimento e tem diferentes aplicações, como acústica (POUDEL; LOU; ANASTASIO, 2019), imageamento médico (ARRIDGE, 1999), visão computacional (JONES, 1994), geofísica (SNIEDER; TRAMPERT, 1999), astronomia (BROWN, 1995) e testes não destrutivos (BILICZ et al., 2012). Nos estudos sobre testes não destrutivos (NDT), por exemplo, ondas ultrassônicas são utilizadas para inspecionar o interior de estruturas e identificar falhas ou inclusões. Assim, ondas mecânicas na faixa de kHz a MHz são empregadas para testar estruturas mecânicas com tamanhos de falha que vão de *mm* até *cm* (SCHMERR, 2016). O NDT com ultrassom permite a inspeção de estruturas simples, como placas ou blocos, bem como estruturas mais complexas, como tubos ou asas de avião, para danos internos, sem alterar suas propriedades físicas. Em aplicações médicas, um problema inverso pode ser resolvido com a finalidade de detectar doenças como câncer ou utilizando para obtenção de imagens do cérebro humano.

Outra área de aplicação se dá no contexto de exploração sísmica, que pode ser dividida em duas categorias: sísmica marítima e sísmica terrestre (GONZAGA, 2015). Na sísmica marítima um navio gera através de canhões de ar comprimido ondas acústicas, as quais propagam-se pelo mar e subsolo marinho. Portanto, no instante em que estas ondas se deparam com diferenças de propriedades nas interfaces, os fenômenos de reflexão e refração ocorrem. As amplitudes das ondas refletidas são registradas através de hidrofones espalhados na superfície do mar. Em seguida, a partir dos dados registrados é possível

estimar as características das camadas geológicas, tais como profundidade, velocidade, impedância acústica, e assim uma imagem da subsuperfície pode ser gerada. A Fig. 1.3 a) apresenta de forma esquemática o processo de uma aquisição sísmica e a Fig. 1.3 b) um ensaio de teste não destrutivo.

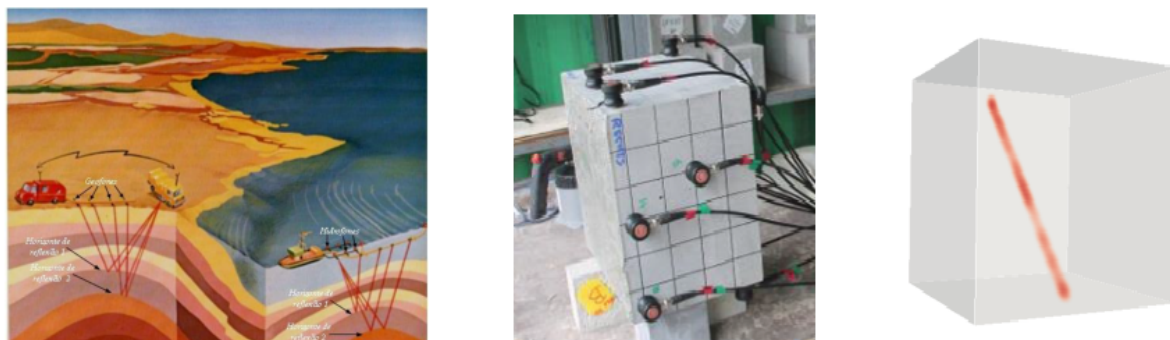


Figura 1.3 – a) Exploração sísmica (SANTOS, 2012) e b) ensaio não destrutivo (SEIDL, 2018).

## 1.2 Exploração sísmica

A exploração sísmica procura a criação de imagens da subsuperfície de interesse a partir de ondas registradas por sensores acima da superfície analisada. Dessa maneira, os geólogos e geofísicos podem identificar com alguma precisão a localização de reservatórios de hidrocarbonetos, diminuindo as chances de insucesso na perfuração. Esta técnica garante uma maior economia de tempo de execução e de custos, além da redução de danos ambientais. A principal aplicação desse método é na indústria de óleo e gás, em busca de reservatórios de hidrocarboneto. Entretanto, existem outras aplicações, como em pesquisas de reservatórios geotérmicos, sítios para armazenamento de gás carbônico e monitoramento de estruturas na engenharia civil.

Um levantamento sísmico pode ser dividido em quatro etapas principais (YILMAZ, 2001), aquisição, processamento, interpretação e caracterização de reservatório, e estão esquematizadas na Fig. 1.4.



Figura 1.4 – Processo de exploração geofísica para obtenção de óleo e gás.

### 1.2.1 Aquisição de dados

A primeira etapa da exploração sísmica consiste em aquisição de dados. Nesta, uma fonte sísmica é utilizada para produzir ondas acústicas que se propagam na subsuperfície

do subsolo. As ondas propagadas ao encontrarem diferenças de impedância entre duas camadas geológicas sofrem reflexões e refrações. As reflexões das ondas são capturadas através de uma rede de sensores espalhadas sobre a superfície, e a aquisição pode ser conduzida em ambiente *onshore* (terrestre) ou *offshore* (marítima), embora os processos sejam bem similares (VERMEER, 2002). Uma quantidade grande de dados é gerada ao realizar este procedimento repetidamente. A partir destes dados é possível estimar as propriedades das camadas geológicas, como profundidade, velocidade e impedância acústica. A Fig.1.5 ilustra esquematicamente o processo de aquisição sísmica marítima.

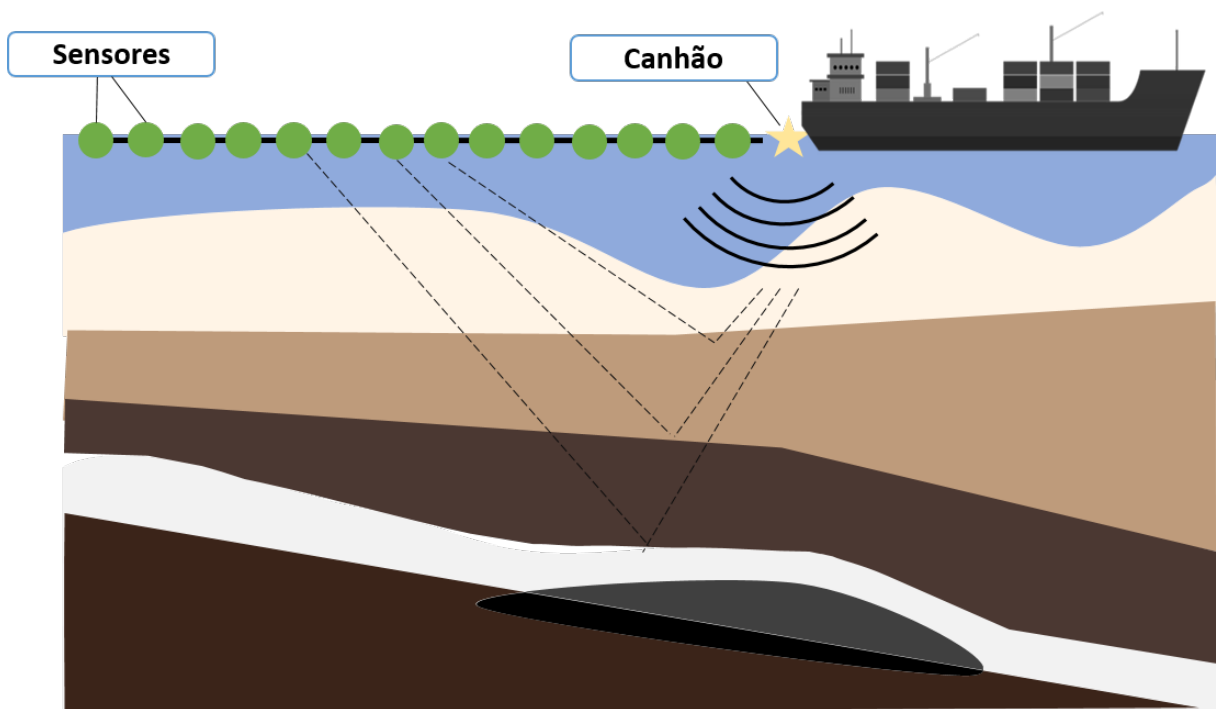


Figura 1.5 – Ilustração da exploração sísmica marítima.

### 1.2.2 Processamento de dados

Os dados coletados pelos sensores na etapa de aquisição não podem ser utilizados para uma interpretação direta, portanto devem ser processados primeiramente. Nesta etapa, os dados são filtrados para eliminar ruídos. Os procedimentos de processamento são aplicados nos dados sísmicos para convertê-los em uma imagem da subsuperfície, que mostrará as áreas geológicas. Isto é importante, pois os reservatórios de hidrocarbonetos podem ser encontrados apenas em áreas geológicas específicas (HAFFINGER, 2013).

### 1.2.3 Interpretação de dados

A interpretação de imagens permite que se encontre cenários geológicos que podem ter acontecido ao longo de milhões de anos. Como o óleo e gás podem se desenvolver e se acumular apenas em cenários geológicos específicos, a interpretação sísmica geralmente

resultará na identificação de possíveis reservatórios. As imagens não levam à identificação dos tipos de rochas, mas as propriedades reais físicas das rochas são de especial interesse, pois fornecem mais informações sobre a expectativa de hidrocarbonetos na área sob investigação. As propriedades da rocha podem ser recuperadas através da inversão total da forma de onda (HAFFINGER, 2013).

#### 1.2.4 Caracterização de reservatório

Nesta etapa, as técnicas de inversão, incluindo a inversão completa da forma de onda, desempenham um papel fundamental, pois têm o potencial de fornecer as propriedades da rocha, em vez de apenas informações estruturais.

### 1.3 Inversão do campo de onda completa (*Full waveform inversion, FWI*)

Problemas inversos surgem quando as medições de dados são obtidas e deseja-se estimar alguma propriedade desconhecida. Em outras palavras, é um método utilizado na inferência dos parâmetros de um modelo, os quais caracterizam um sistema em estudo por meio das observações.

A inversão completa da forma de onda é um método não linear de otimização para estimar e identificar as propriedades de um modelo de subsuperfície, originalmente introduzido no contexto geofísico. O ajuste é obtido por meio dos sinais capturados e ao dado modelado utilizando a forma completa da onda. Este método pode ser considerado como a extensão da migração de mínimos quadrados, em que a refletividade do subsolo é estimada fornecendo imagens estruturais da subsuperfície (VIRIEUX; CALANDRA; PLESSIX, 2011). A inversão completa da forma de onda ("Full waveform inversion (FWI)") permite que se estime os parâmetros reais do subsolo, como velocidades da onda  $P$  e da onda  $S$  ou o primeiro parâmetro de Lamé  $\lambda$  e o segundo parâmetro de Lamé  $\mu$ . As propriedades a serem estimadas dependem das hipóteses consideradas na modelagem da propagação da onda e a parametrização utilizada para representar a equação da onda. A FWI fornece informações de alta resolução da subsuperfície. Portanto, a inversão completa da forma de onda é benéfica para a caracterização dos reservatórios-alvo subsuperficiais. Devido à não linearidade entre os dados e as propriedades do modelo, o FWI é um processo iterativo que fornece pequenas melhorias do modelo estimado a cada iteração.

No contexto da sísmica de exploração, normalmente o campo de deslocamento é medido ao longo do tempo através de sensores espalhados apenas na superfície. Neste trabalho, este dado é denominado como o dado observado,  $u_{obs}$  ou também chamado modelo de referência.

Normalmente existem informações sobre a primeira estimativa do modelo  $m$ , dada pelo conhecimento a priori da geologia do local, dados de poço, entre outros aspectos, por isso já geralmente nos trabalhos constatados a estimativa inicial pode ser bem próxima à resposta final. Um exemplo para o modelo sintético Marmousi (MARTIN; WILEY; MARFURT, 2006) é apresentado na Fig. 1.6, do lado direito é o modelo que deseja-se reconstruir e o lado esquerdo é a estimativa inicial para a otimização.

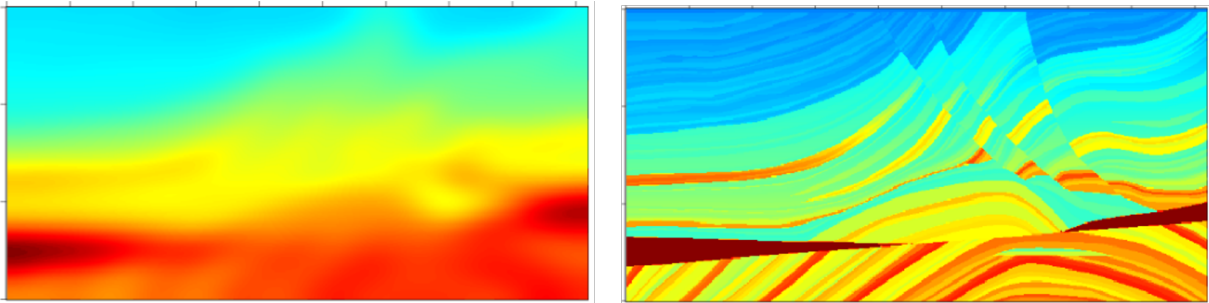


Figura 1.6 – a) Modelo de velocidade de referência b) estimativa inicial do modelo de velocidade.

Na inversão da forma de onda completa, o desajuste não linear entre os dados observados e os modelados é minimizado iterativamente, portanto, a propagação de ondas na subsuperfície precisa ser calculada a cada iteração. Idealmente, o conteúdo completo das formas de onda registradas é utilizado no FWI e a modelagem é realizada com a maior precisão possível, considerando a física completa da propagação de ondas, incluindo todos os tipos de ondas geradas (VIRIEUX; OPERTO, 2009).

O fluxo do FWI começa a partir de uma modelagem direta prevendo os dados do campo de deslocamento gerado através da onda nos locais dos receptores, utilizando um modelo inicial junto aos receptores, fontes e outros parâmetros de entrada. Após a realização do cálculo dos dados do campo de onda de modelagem nas posições do receptor, os dados residuais do campo de onda são calculados subtraindo os dados modelados dos conjuntos de dados observados, tiro por tiro, em cada local do receptor.

A maioria dos algoritmos de FWI disponíveis são baseados na aproximação da equação da onda acústica e não lida adequadamente com efeitos elásticos, como velocidade de cisalhamento, densidade ou quaisquer outros parâmetros de anisotropia (ANAGAW, 2014). A abordagem elástica apresenta uma representação mais adequada da física do problema devido à existência de outros tipos de onda. Na Seção 3.1 são discutidas de forma mais detalhada as diferenças entre a abordagem elástica e a abordagem acústica.

## 1.4 Método de Otimização Topológica

Existem diversas maneiras para resolver um problema inverso, entre eles o método de otimização topológica. A Otimização Topológica (OT) é um método de otimização baseado em gradiente com objetivo de distribuir materiais em um domínio de projeto fixo, de modo a maximizar ou minimizar uma função objetivo.

Um problema é dito bem-posto quando satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais. Dessa forma, caso um dos requisitos acima não seja satisfeito, o problema é dito mal-posto (CEZARO; CEZARO, 2010).

Encontre  $u \in V$  sujeito a

$$F_\rho(u, v) = 0, \quad \forall v \in V \quad (1.4)$$

onde a variável de estado  $u$  é a propriedade física governada pela equação de estado,  $v$  é uma função de teste utilizada nos elementos finitos e  $V$  é um espaço funcional apropriado, a partir de então denominado espaço de estado. O problema do OT na sua forma geral com a função objetivo denominada  $J(\rho)$  pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} J(\rho) \\ \text{s.a. } F_\rho(u, v) = 0, \quad \forall v \in V & \quad \text{Equação de estado} \\ h_j(\rho) = 0, \quad j = 1, \dots, n_h & \quad \text{Restrição de igualdade} \\ g_k(\rho) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n_g & \quad \text{Restrição de desigualdade} \\ \rho_i^l \leq \rho_i \leq \rho_i^u, \quad i = 1, \dots, n & \quad \text{Variável de projeto} \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde o objetivo é minimizar/maximizar uma função objetivo  $J(\rho)$  restrito pela equação de estado, restrições de igualdade, restrições de desigualdade e  $\rho$  é variável de projeto de modo que  $\rho \in \{0, 1\}$ .

Existem diversas abordagens de otimização topológica, que podem ser classificadas conforme a escolha das variáveis de projeto. A variável de controle pode ser binária, contínua ou híbrida. Entre as abordagens com variáveis contínuas existem métodos baseados em densidade (ALONSO; SILVA, 2021; SILVA; SALAS; SILVA, 2021; SA et al., 2021; SOUZA; SILVA, 2020), método Level Set (JR; FANCELLO; SILVA, 2020; PICELLI et al., 2018), método de derivadas topológicas, método *Phase field*. Entre as abordagens com variáveis discretas existem os métodos ESO (XIE; STEVEN, 1993), BESO (HUANG; XIE, 2009; MOREIRA et al., 2020) e TOBS (SIVAPURAM; PICELLI, 2018; PICELLI; SIVAPURAM; XIE, 2021; SOUZA et al., 2021). Estes diferentes métodos compartilham o mesmo propósito de distribuir material dentro de um determinado domínio de projeto respeitando os objetivos, restrições e condições de contorno previamente especificado. Uma revisão detalhada sobre os métodos

existentes e comparação entre várias abordagens de otimização topológica é apresentada por (SIGMUND; MAUTE, 2013). Uma das abordagens mais utilizadas no contexto de OT é o método de densidades, onde se procura a distribuição de pseudo-densidades  $\rho$ , que podem variar entre 0 (vazio) e 1 (sólido), em um domínio fixo. O método das densidades utiliza um modelo de material, entre os quais o mais conhecido é denominado "Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)" que foi introduzido por (BENDSØE, 1989)). Os detalhes sobre os modelos de material utilizados neste trabalho são apresentados na Seção de otimização.

## 1.5 Otimização Topológica aplicado a problema de inversão

Neste trabalho o método de otimização topológica baseado em densidade é utilizado para resolver o problema de inversão de onda elástica. A Figura 1.7 ilustra de forma esquemática o procedimento de otimização topológica para resolver o problema de inversão de onda.

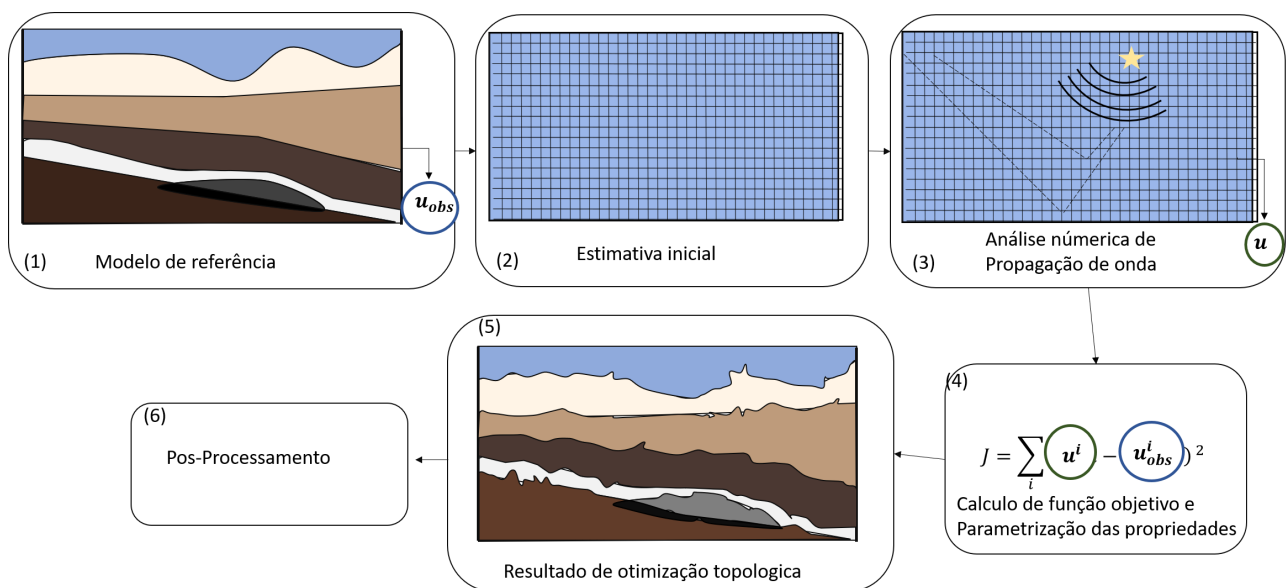


Figura 1.7 – Fluxograma ilustrativo do processo de otimização topológica em um problema de inversão de onda.

O primeiro passo consiste em definir o domínio do projeto e escolher o modelo de referência, onde o objetivo da inversão é reconstruir e ter uma aproximação deste modelo. O domínio do projeto é limitado pelas condições de contorno e condições iniciais. As fontes e receptores são posicionados em partes do domínio. Assim, uma análise numérica de propagação de onda é realizada no modelo de referência, e as respostas das reflexões das ondas são capturadas utilizando uma rede de sensores posicionadas anteriormente. Os dados de deslocamento capturados são armazenados para utilização posterior, comumente chamados de dados observados ou dados do fantoma. O modelo gerado pela análise numérica representa o campo de velocidade que será recuperado. O segundo passo



corresponde à escolha de uma estimativa inicial para o problema de otimização, podendo ser uma estimativa inicial homogênea, isto é, sem nenhuma informação a priori, ou pode partir de informações iniciais e estimativas próximas ao modelo de referência. Em seguida, este modelo de estimativa inicial é discretizado utilizando algum método numérico, por exemplo, o método das diferenças finitas ou elementos finitos. No terceiro passo, uma análise numérica de propagação de onda é realizada e o campo dos deslocamentos é armazenado, estes dados são chamados de dados calculados. O quarto passo consiste em fornecer os dados do modelo de referência e os dados do modelo calculado para o algoritmo de otimização topológica. Em um processo iterativo, o otimizador através do modelo de material, distribui o material no domínio de forma a minimizar a função objetivo especificada respeitando as restrições impostas no problema. O modelo de material permite modificar o espaço de soluções do problema ao introduzir uma nova parametrização e conseqüentemente resultar em um mínimo local mais adequado, além de tornar o problema menos mal posto. O objetivo é comumente definido como a norma quadrada da diferença entre os dois campos de referência e o campo calculado. No último passo, caso necessário, algum procedimento de pós-processamento pode ser aplicado para uma melhor interpretação dos resultados.

## 1.6 Objetivos

Este trabalho visa desenvolver uma metodologia para resolução de um problema de inversão elástica em um meio linear, elástico e isotrópico, utilizando o método de otimização topológica juntamente ao método de elementos finitos no domínio de tempo. A otimização topológica, baseada no método das densidades, é utilizada para parametrizar as propriedades de Lamé na equação transiente da onda elástica. O trabalho também tem como objetivo explorar os conceitos de modelos de materiais da otimização topológica no contexto de problemas inversos. Além disso, realizar um estudo de regularizações para melhorar a convergência da inversão.

### 1.6.1 Objetivos específicos

- Implementar um algoritmo para propagação de onda no meio elástico linear.
- Propor uma parametrização baseado no modelo de material para tornar um problema multi-parâmetro em mono-parâmetro.
- Explorar regularizações na otimização topológica para melhorar convergência.
- Propor uma metodologia que independe dos métodos numéricos MEF/MDF.

## 1.7 Motivações

Com o crescimento da indústria de óleo e gás e, mais especificamente, com a descoberta do pré-sal, cresce a importância de se identificar as camadas em subsuperfície com maior precisão. É necessário conhecer melhor o tipo de litologia da área a ser explorada, com a finalidade de evitar desastres ambientais e otimizar a busca de reservatórios. Assim, existe a necessidade de se ter ferramentas matemáticas e numéricas que possibilitem a simulação de fenômenos físicos, principalmente a propagação de ondas, que consigam fornecer respostas cada vez mais precisas com relação às propriedades em subsuperfície. A inversão da forma de onda completa é um dos métodos mais utilizados na indústria e academia para encontrar propriedades do subsolo. A otimização topológica trata-se de um método genérico para resolução de problemas baseados em gradiente com restrições de equações diferenciais, sendo aplicada em estudos sobre problemas inversos, mas pouco explorada no contexto geofísico.

A otimização topológica no contexto de problemas de identificação de parâmetros pode resultar em uma melhor convergência em problemas de inversão com múltiplos parâmetros, a utilização do modelo de material implica em diferentes parametrizações devido à modificação de espaço de soluções. O uso de modelo de material permite um mapeamento entre as propriedades de forma que possibilita transformar um problema multi-parâmetro em um problema mono-parâmetro, assim reduzindo a complexidade na resolução do problema. A escolha da parametrização é importante já que influencia os gradientes a serem calculados na sensibilidade, cada parametrização resulta em gradientes diferentes o que implica em mínimos locais distintos.

Outra dificuldade na resolução de problemas multiparamétricos é o uso de vários parâmetros de regularização para uma melhor convergência. O peso da regularização a ser definida aumenta conforme aumentam as propriedades de interesse, e uma consequência do uso de modelos de materiais é a redução dos parâmetros ajustados na regularização do problema de inversão. Além disso, a otimização topológica pode resultar em interfaces mais nítidas entre camadas durante a inversão devido à modificação de soluções de espaço causadas pelo modelo de material.

## 1.8 Organização do trabalho

Este trabalho dividi-se em sete capítulos: O primeiro capítulo introduziu os conceitos de problemas inversos e otimização topológica junto com os objetivos e motivações do trabalho. O capítulo 2 trata sobre a formulação teórica sobre a propagação de ondas elásticas no domínio de tempo para meio elástico isotrópico linear é apresentada, em seguida as condições de contornos e a modelagem da fonte de excitação são discutidas. A teoria de métodos de elementos finitos aplicada em problemas de propagação de onda elástica

junto à forma fraca da equação é apresentada. Além disso, a estabilidade condicional e a dispersão numérica são discutidas.

No capítulo 3, as principais teorias do problema de inversão são apresentadas. Assim, portanto a função objetivo e a formulação do método de otimização topológica são abordados juntamente aos modelos de materiais utilizados para parametrização das propriedades elásticas no problema de inversão. Além disso, se discute sobre o algoritmo de otimização utilizado.

No capítulo 4, a formulação do problema de otimização é apresentada, bem como o método adjunto é discutido para cálculo dos gradientes. Além de apresentar as condições de otimalidade e uma análise de sensibilidade em relação às variáveis de projeto, utilizadas no processo de otimização.

No capítulo 5, são discutidas as ferramentas computacionais utilizadas na implementação do problema de otimização topológica no problema de inversão. A implementação e resolução das equações diferenciais via elementos finitos são descritas, bem como a análise de sensibilidade via o método adjunto e o algoritmo de otimização.

No capítulo 6, são apresentados os resultados de inversão obtidos para a formulação proposta utilizando otimização topológica junto com os modelos de material. A fim de analisar a metodologia, utilizou-se dois modelos de velocidade combinados com diferentes inclusões. Dessa forma, os dois modelos de velocidades são analisados utilizando os diferentes modelos de materiais. Além disso, duas regularizações são empregadas para sair de mínimos locais e melhorar a convergência.

No capítulo 7, as conclusões da pesquisa juntamente com os trabalhos futuros são apresentados.

## 2 MODELAGEM DO PROBLEMA DIRETO

Este Capítulo dedica-se a apresentação das teorias clássicas do problema direto no contexto de inversão de ondas, em que se discute as equações governantes e a formulação teórica sobre propagação de ondas elásticas. O Capítulo também traz considerações numéricas sobre as condições de contorno e a modelagem da fonte de excitação, bem como discute o método numérico aplicado na resolução do problema de propagação de onda elástica.

### 2.1 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÁSTICAS EM MEIO SÓLIDO ISOTRÓPICO

O primeiro e segundo parâmetro de Lamé são de grande interesse para engenheiros e geofísicos que trabalham com problemas de identificação de parâmetros e exploração de hidrocarbonetos. Esses parâmetros podem ser utilizados, por exemplo, para determinar as velocidades de onda  $P$  e onda  $S$  além de caracterizar modelos de velocidades para determinada área estudada.

Para determinar a equação da onda elástica, considera-se inicialmente um elemento infinitesimal em equilíbrio estático, de massa  $dm$  e volume  $dV = dxdydz$ .  $\sigma_{ij}$  e  $\tau_{ij}$  são as tensões normais e cisalhantes, respectivamente, atuantes nas faces do elemento (BEDFORD; DRUMHELLER, 1994). O primeiro índice representa o plano em que a tensão é aplicada e o segundo índice a direção da tensão. Assim, as tensões aplicadas ao longo da direção  $x$  em cada face do elemento podem ser obtidas utilizando a expansão da série de Taylor em torno do centro do elemento ilustrado na Fig.2.1

A soma das forças na direção  $x$ ,  $dF_{S_x}$  resulta na força de superfície resultante:

$$\begin{aligned}
 dF_{S_x} = & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz \\
 & + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\
 & + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

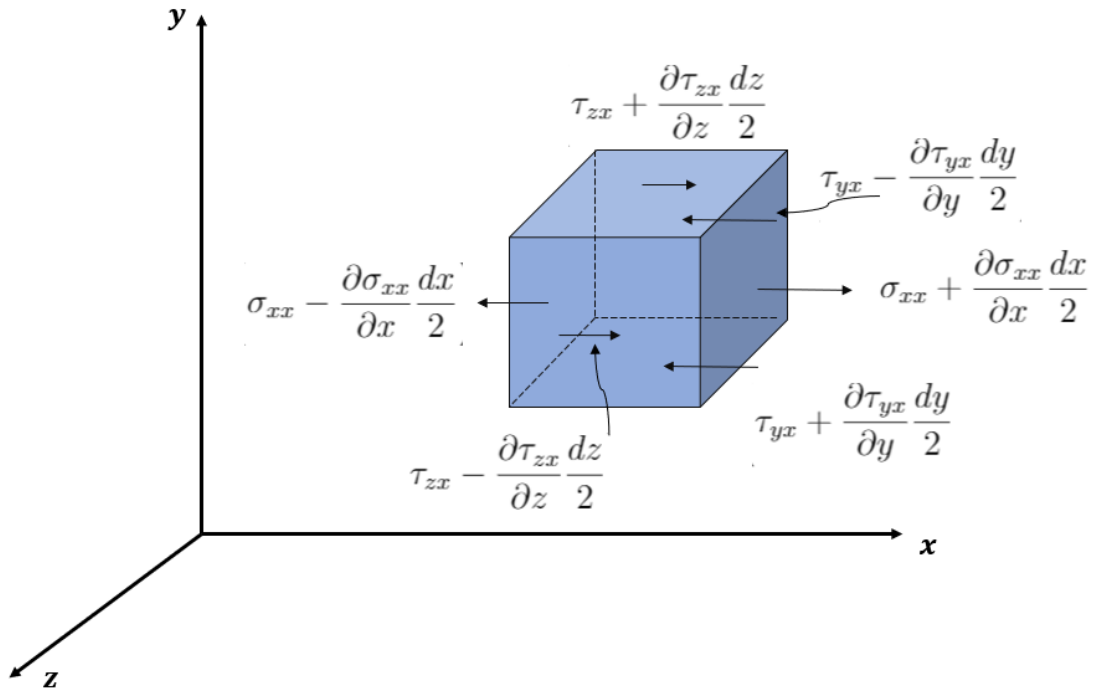


Figura 2.1 – Forças atuando num elemento infinitesimal.

Simplificando e rearranjando:

$$dF_{S_x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.2)$$

Considerando uma força de corpo  $dF_{B_x}$  por unidade de volume ao longo do eixo  $x$ , obtém-se uma força resultante de:

$$dF_x = dF_{S_x} + dF_{B_x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho b_x \right) dV \quad (2.3)$$

onde  $\rho$  é densidade. A equação de movimento pela segunda lei de Newton:

$$dF_x = dm \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dV \quad (2.4)$$

onde  $u_x$  é o deslocamento na direção  $x$ .

Igualando as Eq.(2.3) e Eq.(2.4), obtém-se na direção  $x$ :

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho b_x \quad (2.5)$$

De forma similar, a equação de movimento para outras direções  $y$  e  $z$  é obtida:

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho b_y \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho b_z \quad (2.7)$$

Para um material elástico linear a relação das tensões e deformações é expressa pela lei de Hooke generalizada. As deformações causadas por ondas sísmicas são pequenas, por isso, pode-se utilizar a hipótese de um meio linear. Para um meio isotrópico com propriedades independentes da direção, a relação do tensor das tensões  $\sigma$  e o tensor das deformações  $\epsilon$  é dada por:

$$\sigma = (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon \quad (2.8)$$

sendo que  $\mathbf{I}$  é matriz identidade,  $\epsilon$  é tensor das deformações,  $\lambda$  e  $\mu$  são os primeiro e segundo coeficientes de Lamé, respectivamente. A forma matricial do tensor das tensões é dada por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_{zz} \\ \tau_{yx} &= 2\mu \epsilon_{yx} \\ \tau_{zx} &= 2\mu \epsilon_{zx} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$  é o traço do tensor das deformações, o qual representa a dilatação do material. A deformação na direção  $x$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substituindo as equações das deformações e a tensão na equação de movimento,

chega-se em:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + \rho b_x \quad (2.12)$$

para direção x. Generalizando para as outras duas direções a equação da onda elástica na sua forma compacta é dada por (BEDFORD; DRUMHELLER, 1994):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} \quad (2.13)$$

No contexto da geofísica, a força de volume  $\rho \mathbf{b}$ , consiste em uma força gravitacional  $\mathbf{f}_g$  e uma força de fonte  $\mathbf{f}_s$ . A gravidade é muito importante para frequências baixas em sismologia, mas de forma geral, pode ser desprezada para as ondas de superfície em comprimentos de onda tipicamente observados. Neste trabalho, consideram-se apenas as forças geradas de excitação da fonte. Assim, a equação da onda é definida como:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_s \quad (2.14)$$

Nas próximas seções, a resolução destas equações será detalhada através da utilização do método dos elementos finitos.

### 2.1.1 Ondas longitudinais ou P

As ondas longitudinais caracterizam-se pela sua direção de propagação, que coincide com a direção da vibração do meio onde se propaga. Este é o caso das ondas P (primárias) em sísmica observadas na Fig.2.2.

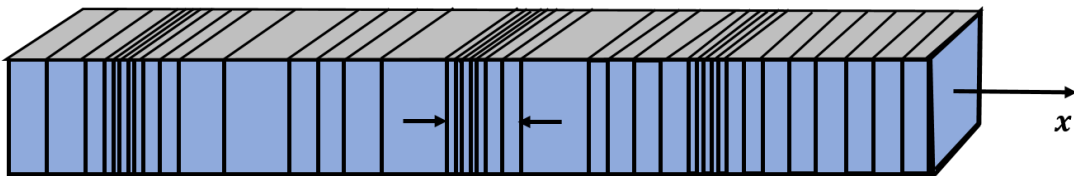


Figura 2.2 – Propagação de Onda longitudinal.

A expressão da onda P pode ser derivada da Eq.(2.13), aplicando o operador divergente na equação e desprezando as forças externas. A equação da onda elástica se resume a:

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = \nabla \cdot (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.15)$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.16)$$

onde foi utilizada a identidade  $\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u})$ . A Eq.( 2.16) pode escrita como:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu)\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.17)$$

empregando uma variável auxiliar  $\phi = \nabla \cdot \mathbf{u}$  :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi) = (\lambda + 2\mu)\nabla^2(\phi) \quad (2.18)$$

Dividindo ambos os lados pela densidade  $\rho$  obtém-se a equação da onda para propagação da dilatação:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

sendo  $V_p$  a velocidade de propagação, dado por:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.20)$$

### 2.1.2 Ondas Cisalhantes ou S

As ondas cisalhantes são aquelas em que a vibração no meio ocorre perpendicularmente à direção da propagação da onda, como mostrado na Fig.2.3. A rigidez é a única constante relacionada à velocidade de propagação destas ondas, como a rigidez em meios fluidos é zero não há propagação das ondas transversais nesses meios. As ondas transversais são mais lentas que as ondas longitudinais, logo, são registradas depois, por esta razão são denominadas ondas S ou secundárias.

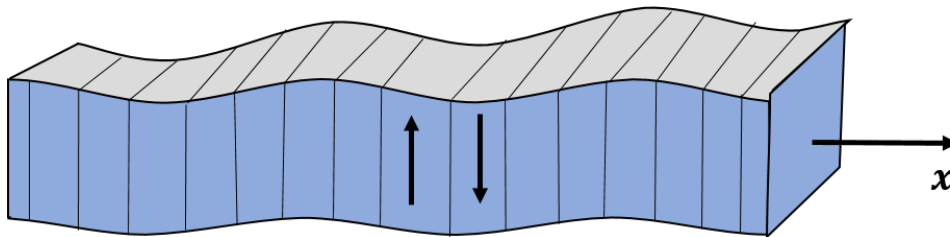


Figura 2.3 – Exemplo de onda cisalhante.

Aplicando o operador rotacional em ambos os lados da Eq.(2.13) e desprezando as forças de campo:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.21)$$

Algumas identidades tensoriais são utilizadas para manipulação das equações



1.  $\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{a}$  para um vetor  $\mathbf{a}$
2.  $\nabla \times \nabla F = 0$  para qualquer função escalar  $F$
3.  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$  para um vetor  $\mathbf{a}$

Utilizando a primeira identidade:

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}] \quad (2.22)$$

Simplificando e empregando a segunda identidade,

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.23)$$

considerado como  $\nabla \times \mathbf{u}$  na primeira identidade:

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.24)$$

$$-\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}) + \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.25)$$

substituindo Eq.(2.25) em Eq.(2.23), obtém-se

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}) + \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.26)$$

Por fim, voltando para equação Eq.(2.21) determina-se:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.27)$$

portanto, o primeiro termo do lado direito da equação é nulo, dado que o rotacional da divergência de um campo vetorial é zero. Assim,

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{u} = \mu \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.28)$$

ou,

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.29)$$

Considerando o vetor de rotação  $\psi = \nabla \times u$ ,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{V_s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

onde  $V_s$  é a velocidade cisalhante dada por:

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.31)$$

### 2.1.3 Modelagem do termo fonte

A estimativa da fonte representa um desafio para a inversão da forma de onda completa, pois, sua escolha influencia consideravelmente a qualidade dos resultados. Existem diferentes funções que tentam descrever a fonte de uma aquisição sísmica. No entanto, no caso de dados reais, a fonte geralmente deve ser estimada a partir do sismograma. A modelagem de dados com uma fonte diferente daquela usada nos dados observados produzirá diferenças nos sismogramas, o que pode levar a erros nos modelos de velocidades e gerar artefatos indesejados no resultado da inversão.

Portanto, é necessário estimar a fonte utilizada a partir dos dados observados sempre que a informação não estiver disponível. A alternativa mais simples para isso é supor que a primeira reflexão registrada nos receptores mais próximos da fonte possa manter a forma de onda da fonte. Assim, caso seja possível isolar esse evento no rastreamento sísmico, supõe-se que seja uma boa representação da fonte.

Na exploração geofísica a dimensão da fonte é muito menor do que a região do subsolo analisada. Portanto, é possível aproximar a fonte como excitação pontual. Geralmente a fonte precisa ser aplicada em um ponto da malha e isso é realizado através da utilização de uma função de delta de Dirac no espaço  $\delta$  e uma função temporal  $q(t)$

$$\mathbf{f}_s(x, y, t) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \mathbf{q}(t) \quad (2.32)$$

onde  $(x_0, y_0)$  são as posições da fonte e  $q(t)$  é a fonte de excitação. A  $\delta$ , conhecida como delta de Kronecker, implica que haja excitação apenas nos pontos de  $x = x_0, y = y_0$ .

A fonte utilizada nesse trabalho é uma derivada de função gaussiana, mais conhecida como "Ricker wavelet" também chamado chapéu mexicano. A "Ricker" tem um comportamento parecido com as fontes utilizadas na prática e é uma opção bastante utilizada na literatura. A sua expressão é dada por:

$$q(t) = \left(1 - 2\pi^2 f_0^2 \left(t - \frac{1}{f_0}\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_0^2 \left(t - \frac{1}{f_0}\right)^2} \quad (2.33)$$

onde  $t$  é o tempo e  $f_0$  é a frequência central da excitação.

Uma importante característica da fonte sísmica utilizada pela geofísica é que esta é limitada no intervalo de tempo e apresenta um espectro de frequências também limitado, ou seja, apresenta uma frequência máxima (SANTOS, 2012). A Figura 2.4 mostra a representação da fonte Ricker no domínio de tempo, o eixo  $x$  representa o tempo e o eixo  $y$  representa a amplitude da excitação.

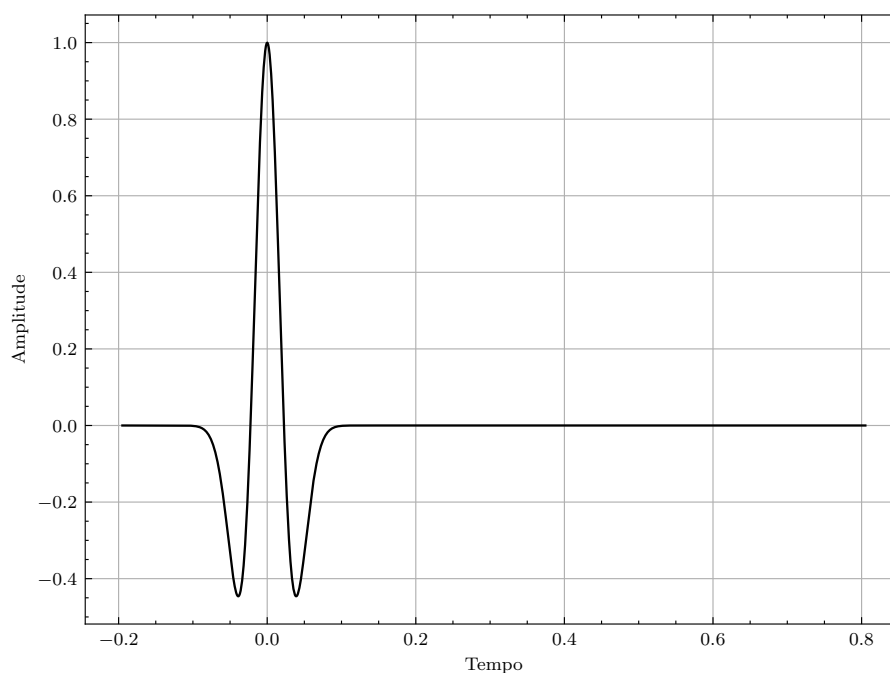


Figura 2.4 – Representação da fonte Ricker no domínio de tempo.

#### 2.1.4 Condições de contorno e Condição de contorno de amortecimento

As condições de contorno utilizadas em qualquer problema que envolve equações diferenciais parciais, podem ser divididas em dois tipos ou uma combinação entre elas. São elas as condições de contorno Dirichlet ou essencial, e condição de Neumann ou natural. A condição de Dirichlet especifica o valor da variável de estado em alguma parte do domínio como  $u = 0$  e a condição de Neumann especifica o valor da derivada normal da propriedade de interesse no contorno. A condição de Neumann representa um fluxo no contorno.

Nos problemas de propagação de ondas outras condições de contorno precisam ser utilizadas. Isso porque, na prática a onda se propaga infinitamente até que seja totalmente atenuada. A simulação das ondas utilizando algum método numérico em um domínio ilimitado requer tratamento especial. Para serem passíveis de solução em computadores com tempo e memória computacional limitado, esses limites artificiais são utilizados para simular o domínio infinito. Isso porque restringindo o domínio computacional a apenas uma

parte do verdadeiro domínio físico de interesse, são introduzidos contornos reflexivos que não existem na prática.

Duas soluções foram sugeridas para este fim: condições de contorno de absorção (ABCs) e as camadas de absorção. As condições de baixa ordem, que envolvem a primeira e a segunda derivadas do campo de ondas, foram originalmente propostas por (BERENGER et al., 1994) e (CLAYTON; ENGQUIST, 1977). Porém, a sua eficiência depende do ângulo de incidência da onda, ou seja, a absorção é perfeita apenas para ondas que se propagam normalmente até o contorno. As condições contorno de absorção de alta ordem superam parcialmente essas limitações (HIGDON, 1991), (KEYS, 1985). No entanto, estas condições não podem impedir reflexões fortes de ondas que se propagam quase paralelas à fronteira. As camadas de absorção podem apresentar problemas de instabilidade e de eficiência dependendo dos parâmetros do modelo. Uma revisão sobre trabalhos que abordam condições de absorção de alta ordem são discutidas em (GIVOLI, 2004).

Os modelos de camada são uma alternativa aos ABCs. As camadas limite absorventes são baseadas na introdução de uma região fina artificial e cercam o domínio de interesse, onde a equação original da onda é modificada de modo que as amplitudes das ondas incidentes decaem rapidamente. (CERJAN et al., 1985) propôs o primeiro modelo de camada de absorção, que consiste na multiplicação iterativa da onda incidente por números menores que 1. Essa é a técnica de camada de absorção mais simples e mais robusta. A camada *Perfectly Matched Layer* (PML) introduzido por (BERENGER et al., 1994), inicialmente na área de eletromagnetismo é a abordagem mais eficiente, ela é baseada em variantes da equação de onda que produzem ondas com amplitude exponencialmente decrescente. Posteriormente, foi aplicado em problemas de ondas elásticas (CHEW; LIU, 1996), (COLLINO; TSOGKA, 2001). (KRISTEK; MOCZO; GALIS, 2009) discute de forma geral as diversas formulações e conceitos de PML. O tema de camadas de absorção ainda é um tema aberto e tem sido explorado em diversos trabalhos (DARVISH; ZAKERI; RADKANI, 2018), (CHERN, 2019), (LIU et al., 2017), (PAKRAVAN et al., 2014). A camada PML requer adição e resolução de novas equações diferenciais o que adiciona um custo computacional tanto para o problema direto quanto para o problema inverso.

Neste trabalho é utilizada uma generalização de uma condição de contorno comumente empregada em problemas acústicos, chamada condição Clayton-Engquist, que relaciona a tração normal na fronteira às componentes normal e tangencial do campo de velocidade (CLAYTON; ENGQUIST, 1977).

$$\mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = v_p \rho \partial_t u_n + \sum_i v_s \rho \partial_t u_{r_i}, \quad \text{na } \Gamma \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{C}$  é o tensor de rigidez de quarta ordem,  $v_p$  definida em 2.20 e  $v_s$  definida em 2.31 são as velocidades das ondas primárias e secundárias. Apesar de existirem maneiras mais

eficientes para absorver as ondas nos contornos como discutido, esta abordagem é a mais apropriada em termos de custo computacional, já que não requer resolução de nenhuma nova equação ou aumento de domínio.

Além disso, por se tratar de um problema transiente, deve-se considerar que as condições iniciais de deslocamento e velocidade são nulos no instante inicial.

$$\mathbf{u}(x, y, t = 0) = 0 \quad (2.35)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x, y, t = 0) = 0 \quad (2.36)$$

## 2.2 Métodos de discretização espacial

Outro aspecto importante é a escolha do método numérico para resolver as equações da onda. A maioria dos problemas não podem ser resolvidos analiticamente, portanto, métodos numéricos são necessários para aproximar as suas soluções. Para resolver os problemas do meio contínuo, é possível fazer uma aproximação da sua solução utilizando algum método numérico. Em geral, as principais diferenças entre os métodos consistem na maneira como representam a solução exata por uma aproximada, e a maneira como essa solução aproximada satisfaz a Equação Diferencial Parcial (PDE). Existem diversos métodos numéricos para resolver as equações da onda, como, o Método de Diferenças Finitas (MDF) (VIRIEUX, 1986), (GAUTHIER; VIRIEUX; TARANTOLA, 1986), (LI et al., 2016), o Método de Elementos Finitos (MEF) (ZHANG, 2019), (COHEN et al., 2001), o método de Galerkin Descontínuo (DG) (DUMBSER; KÄSER, 2006), (KÄSER; DUMBSER, 2006), o Método de Elementos Espectrais (TROMP; KOMATITSCH; LIU, 2008), (KOMATITSCH et al., 2010), (KOMATITSCH; TROMP, 2002) e o Método de Volumes Finitos (DORMY; TARANTOLA, 1995), (ZHANG; ZHUANG; ZHANG, 2017).

Cada método tem suas vantagens e desvantagens, e a escolha do método deve considerar a sua aplicação e características do problema, para ter um resultado mais satisfatório. O MDF é o algoritmo mais antigo e popular na área sísmica, que aproxima o campo da onda em uma grid uniforme. Este método, apresenta um baixo custo computacional e a implementação é fácil de ser realizada (POURSARTIP; FATHI; TASSOULAS, 2020), além de ser muito eficiente em geometrias mais simples.

No entanto, o método de diferenças finitas convencional tem algumas desvantagens na modelagem. Em primeiro lugar, ocorre dispersão numérica severa quando uma grid grosseira é utilizada. Em segundo apresenta dificuldades em modelos que contêm um contraste alto de velocidade entre as camadas do modelo. Em terceiro, as superfícies onde existem falhas são difíceis de subdividir diretamente e uma condição de contorno de superfície livre

não pode ser satisfeita naturalmente e precisa ser tratada por equações extras e outros esquemas adicionais (MENG; FU, 2017). No entanto, este método apresenta problemas de dispersão numérica e dificuldades relacionadas à implementação de condições de contorno, principalmente na superfície livre (KOMATITSCH et al., 2001).

Poursartip, Fathi e Tassoulas (2020) aponta que o método de diferenças finitas pode ser inviável para problemas de larga escala, já que o espaçamento do "grid" precisa ser ajustado com base na velocidade da onda mais baixa em todo o domínio para manter a resolução satisfatória. Este ponto fica mais crítico no caso elástico, já que a menor velocidade do modelo é da onda cisalhante. Um espaçamento mais refinado no "grid" implica em um custo computacional mais alto e requer uma maior capacidade de memória para armazenamento dos dados e matrizes.

O Método dos Elementos Finitos pode ser uma alternativa na solução destes problemas. O MEF oferece mais flexibilidade na combinação de ordens de discretização e geometrias de elementos para simulação de domínios geometricamente complexos, fornecendo uma ferramenta conveniente para simulações sísmicas, especialmente para grandes bacias caracterizadas por heterogeneidade e forte característica topográfica (POURSARTIP; FATHI; TASSOULAS, 2020)

Além dos pontos citados, no caso de uma superfície livre irregular ou contraste nítido nas propriedades do meio, os métodos de diferenças finitas perdem a precisão, caso a interface não siga o "grid". O efeito de escada gerará erros locais de primeira ordem e como a solução é contínua, mas não diferenciável através de um contraste de impedância, também ocorrerá um erro local de segunda ordem (ZHEBEL et al., 2014). O efeito de escada acontece quando difrações indesejáveis são produzidos em modelo com interfaces de pequena inclinação separado por meios com fortes contrastes de impedância (NETO, 2005). Os métodos de diferenças finitas têm problemas onde existe um contraste alto de propriedade de materiais e topografia, porque eles assumem diferenciabilidade onde não existe. As modificações podem aliviar a redução da precisão, mas a um custo em termos de complexidade e tempo de computação (MULDER; SHAMASUNDAR, 2016).

O estudo do (ZHANG, 2019) aborda uma modelagem da onda elástica considerando um domínio tridimensional com geometrias mais complexas, o autor argumenta que ao contrário do método de diferenças finitas, os parâmetros invertidos utilizando o método dos elementos finitos são aproximados por um polinômio linear por partes em vez de valores pontuais, o que consegue melhorar a resolução da inversão. Em outro estudo, (CHIN-JOE-KONG; MULDER; VELDHUIZEN, 1999) salienta que o MEF é mais adequado para caso que haja uma diferença grande entre as camadas de velocidades.

No entanto, apesar da flexibilidade e alta precisão dos elementos finitos tradicionais, existem algumas ponderações que levam a MEF não se posicionar entre os métodos

mais comumente utilizados em problemas de inversão de onda. A principal delas é a exigência e requerimento de memória e resoluções de grandes sistemas lineares. No entanto, existem algumas estratégias como *mass lumping* e malhas adaptativas que resultam em condicionamento melhor das matrizes de massa e rigidez e possibilita uso de métodos explícitos para reduzir o tempo computacional (MULDER; SHAMASUNDAR, 2016). Os métodos de elementos finitos têm um custo computacional inerentemente maior, mas não sofrem perda de precisão se a malha segue as interfaces entre diferentes materiais e a topografia.

Em um estudo utilizando a abordagem acústica para um caso tridimensional, o método de diferenças finitas de oitava ordem com os elementos finitos de quarta ordem com *mass lumping* foi comparado em termos de acurácia e custo computacional (ZHEBEL et al., 2014). Os resultados mostram que para modelos simples com densidade e velocidade constantes, o método das diferenças finitas supera o método dos elementos finitos em pelo menos uma ordem de magnitude. Já considerando um modelo com complexidade geométrica e topografia bem descrita por tetraedros, os métodos de elementos finitos são cerca de duas ordens de magnitude mais rápidos do que os métodos de diferenças finitas, dada uma precisão de resolução prescrita. A comparação entre as duas abordagens é realizada em termo de escalabilidade e arquiteturas multi-cores. Os resultados mostram que elementos finitos apresenta uma melhor escalabilidade com o aumento de número de núcleos do que diferenças finitas (ZHEBEL et al., 2014).

Existem outros métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver as equações da onda, uma visão geral sobre esses métodos e discussão sobre as vantagens e desvantagens é apresentada em (VIRIEUX; CALANDRA; PLESSIX, 2011). Neste trabalho utiliza-se o método dos elementos finitos para resolução das equações da onda. A escolha do método é realizada por conveniência de implementação. A abordagem proposta é independente do método da resolução e pode ser empregado utilizando os outros métodos numéricos citados. Além disso, o método dos elementos finitos é a abordagem mais utilizada na literatura para problemas de otimização topológica. Uma linguagem de alto nível é empregada para implementação dos algoritmos, o que facilita o desenvolvimento utilizando este método numérico. Nos próximos tópicos, serão abordados uma introdução sobre o método e algumas considerações numéricas.

## 2.3 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico utilizado para aproximar a solução de equações diferenciais parciais. O domínio é dividido em subdomínios, denominados elementos, conectados por nós, onde cada nó tem um certo número de graus de liberdade (ZIENKIEWICZ et al., 1977). Portanto, a representação do modelo é dada em termos do

número de elementos, o número de nós por elemento e o número de graus de liberdade por nós. O valor na saída é interpolado em um único elemento com os valores obtidos nos nós utilizando funções de interpolação polinomial. Ao conectar os elementos, o campo desconhecido pode ser aproximado para todo o domínio. A discretização de um domínio pode ser realizada através de várias combinações de formas de elementos e número de nós em cada elemento (BATHE, 2006). A Fig. 2.5 representa um domínio arbitrário bidimensional discretizado utilizando elementos triangulares.

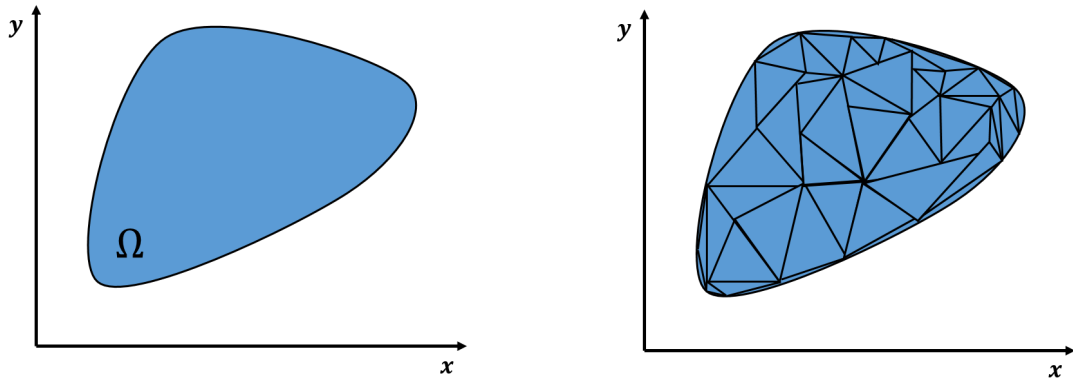


Figura 2.5 – Discretização de um domínio  $\Omega$  em elementos finitos.

A solução exata da equação diferencial  $\mathbf{u} \in U$  é aproximada utilizando uma solução  $\mathbf{u}_h \in U_h$ , onde  $U_h$  é o espaço das soluções admissíveis pela discretização de MEF sendo que  $U_h \subset U$ . Se a solução exata  $\mathbf{u}$  está fora do espaço  $U_h$ , existe um erro  $e$  entre a solução aproximada  $\mathbf{u}_h$  e a solução exata  $\mathbf{u}$  que pode ser diminuída refinando a malha ou aumentando o polinômio de interpolação.

Para resolver a equação 2.13 utilizando o MEF, o método de Galerkin é aplicado na forma fraca da equação. A forma fraca é obtida multiplicando toda equação por uma função teste e depois integrar o produto em todo domínio. Na formulação de Galerkin o mesmo espaço de funções é utilizado para a solução e a função teste.

Assim, multiplicando a Eq. 2.37, por exemplo, pela função teste  $\mathbf{v}$  e integrando no domínio:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \mu \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} f_s \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.37)$$

Aplicando o teorema de divergente:

$$\int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{v}) (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.38)$$



$$-\int_{\Omega} \mu \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot ds \quad (2.39)$$

$$\int_{\Omega} \mu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot ds \quad (2.40)$$

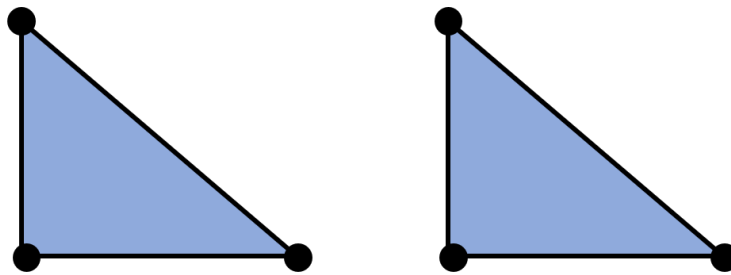
Substituindo Eq.(2.38), Eq.(2.39), Eq.(2.40) em Eq.(2.37), obtém-se a forma fraca da equação da onda elástica (LIAO, 2015):

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot ds + \int_{\Omega} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot ds - \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot ds \quad (2.41)$$

A implementação é realizada utilizando uma linguagem de domínio específico chamado Unified Form Language (UFL), a qual é muito próxima à linguagem matemática. No capítulo 5 é discutido com mais detalhes a implementação do problema.

### 2.3.1 Elemento triangular

No método dos elementos finitos, funções de interpolações são empregados para aproximar os valores das variáveis nos elementos utilizando os seus valores nodais. Neste trabalho são utilizados elementos triangulares de deformação constante (CST), também conhecido como T3. O deslocamento e a variável de projeto utilizados são interpolados utilizando esse elemento linear com três nós como ilustrado na Fig.2.6



a) Interpolação para deslocamento    b) Interpolação para variáveis de projeto

Figura 2.6 – Elementos triangulares utilizados para interpolar variável de estado e variável de projeto.

Considere que o domínio  $\Omega$  na Fig. 2.1 seja dividido em  $N_e$  elementos triangulares, isto

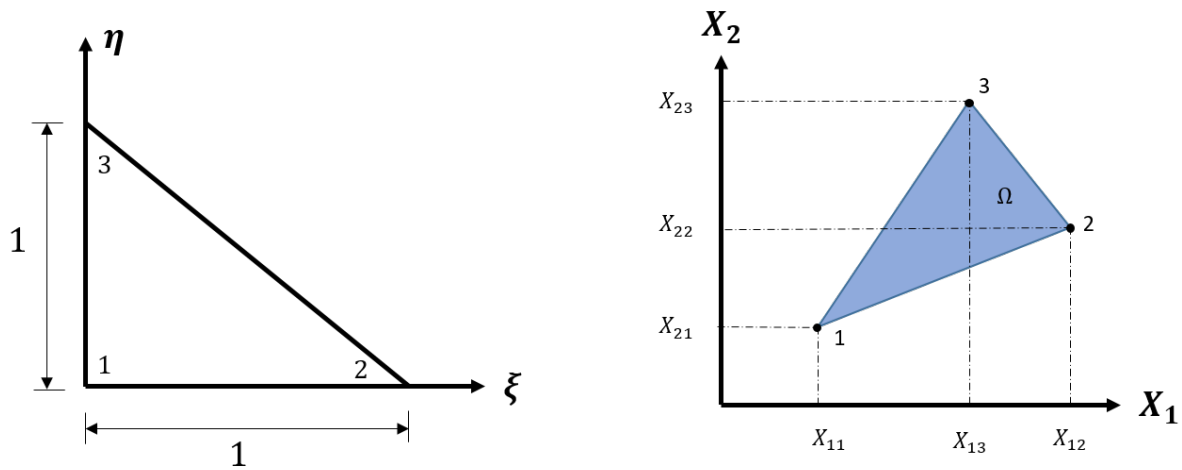


Figura 2.7 – Mapeamento entre o espaço de referência e o espaço Euclidiano.

é:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} T_e \quad (2.42)$$

Para calcular as integrais com eficiência, cada elemento triangular  $T_e$  é transformado de sistema de coordenadas cartesianas  $x - z$  em um elemento  $\hat{T}$  num sistema de coordenada de referência  $\xi - \eta$  como mostrado na Fig. 2.7. Os três vértices do elemento  $T_e$  são indicados por  $A_1(x_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, z_2)$  e  $A_3(x_3, z_3)$  o que correspondem com  $\hat{A}_1(0, 0)$ ,  $\hat{A}_1(1, 0)$  e  $\hat{A}_1(0, 1)$  na Fig. 2.7 respectivamente. A transformação entre os sistemas de coordenadas  $x - z$  em  $\xi - \eta$  é dado por:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta \end{cases} \quad (2.43)$$

Dentro de cada elemento  $T_e$ , as soluções das equações de estado são numericamente resolvidas usando uma combinação linear de funções de interpolação polinomial.

As funções de interpolação para o elemento de referência é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \hat{\phi}_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ \hat{\phi}_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (2.44)$$

Seja  $\phi_I$  a função de interpolação global em nó  $I$ . A restrição de  $\phi_I$  no elemento  $T_e$  é  $\hat{\phi}$

obedecendo:

$$\phi_i(x_j, z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.45)$$

para todos os  $ij$  em todos os nós, ou seja, tem valor unitário no nó atual e zero nos nós vizinhos.

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3 \\ z = (z_1 - z_3)\xi + (z_2 - z_3)\eta + z_3 \end{cases} \quad (2.46)$$

A relação entre as coordenadas  $(x - z)$  e  $(\xi - \eta)$  é linear, logo a matriz jacobiana  $J$ , que mapeia a derivada parcial em termos de coordenadas físicas  $(x - z)$  para a derivada parcial em termos de coordenadas de área  $(\xi - \eta)$  pode ser obtida por interpolação linear

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

## 2.4 Formulação de MEF

Utilizando a formulação fraca da equação da onda elástica, pode-se obter um sistema de equações diferenciais ordinárias introduzindo o subespaço de dimensão finita. Dividindo o domínio  $\Omega$  em  $N$  elementos, a Eq.(2.41) pode ser escrita de forma compacta e expressa de forma matricial de elementos finitos como (DELGADO, 2009):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F} \quad (2.48)$$

com as condições iniciais

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, y, t = 0) = 0 \quad (2.49)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{U}}}(x, y, t = 0) = 0 \quad (2.50)$$

onde a matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , representa a relação de rigidez entre todos os nós da malha e incorpora o tensor de rigidez do material que representa o material em cada elemento. A matriz de massa,  $\mathbf{M}$ , expressa da mesma forma como valores nos nós, representa a massa dos elementos. A resposta a uma força aplicada externamente,  $\mathbf{F}$ , é representada por deslocamentos  $\mathbf{U}$  e suas derivadas temporais de velocidade e aceleração nos nós.

A matriz de massa é dada por:

$$\mathbf{M} = \sum_e^N \int_{\Omega_e} \rho \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} d\Omega \quad (2.51)$$

e a matriz de rigidez por:

$$\mathbf{K} = \sum_e^N \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}_{\Omega_e} \quad (2.52)$$

onde cada componente da matriz de rigidez é definido como:

$$\mathbf{K}_{11} = - \int_{\Omega_e} [(\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\phi}_x + \mu \boldsymbol{\phi}_z^T \boldsymbol{\phi}_z] d\Omega \quad (2.53)$$

$$\mathbf{K}_{12} = - \int_{\Omega} [\lambda \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\phi}_z + \mu \boldsymbol{\phi}_z^T \boldsymbol{\phi}_x] d\Omega \quad (2.54)$$

$$\mathbf{K}_{21} = - \int_{\Omega_e} [\mu \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\phi}_z + \lambda \boldsymbol{\phi}_z^T \boldsymbol{\phi}_x] d\Omega \quad (2.55)$$

$$\mathbf{K}_{22} = - \int_{\Omega_e} [\mu \boldsymbol{\phi}_x^T \boldsymbol{\phi}_x + (\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\phi}_z^T \boldsymbol{\phi}_z] d\Omega \quad (2.56)$$

e as forças atuantes como:

$$\mathbf{F}_1^x = \int_{\Omega} f_x \boldsymbol{\phi}_i d\Omega \quad (2.57)$$

$$\mathbf{F}_1^z = \int_{\Omega} f_z \boldsymbol{\phi}_i d\Omega \quad (2.58)$$

Para a discretização do termo transiente de segunda ordem, é utilizado o método implícito de diferenças finitas centrais para aproximar a integração no tempo (DOYEN; ERN; PIPERNO, 2011), o deslocamento inicial e o instante anterior são utilizados para atualizar o próximo passo.

$$\ddot{\mathbf{U}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t-\Delta t} + \mathbf{U}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{U}_t) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right)^{-1} \left( \mathbf{F}_t - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}_t - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}_{t-\Delta t} \right) \quad (2.60)$$

O campo de onda no tempo  $t + \Delta t$  depende apenas das informações das etapas de tempo anteriores. A solução inicializada de tempo consecutivos  $t$  e  $t - \Delta t$  é utilizada para calcular o campo de onda para o próximo passo de tempo. Este processo é repetido até que o tempo final desejado seja alcançado.

## 2.5 Considerações Numéricas

Os métodos numéricos, em geral, estão sujeitos a condições de estabilidade e dispersão numérica por aproximarem um modelo contínuo por discretização do domínio. A estabilidade numérica está associada ao uso de integração no tempo, enquanto a dispersão numérica está associada essencialmente ao tamanho do espaçamento entre os nós da malha. Para garantir a estabilidade numérica e evitar a dispersão, alguns critérios precisam ser respeitados.

A dispersão numérica está relacionada à menor velocidade do modelo ( $V_{min}$ ) e a frequência máxima da fonte ( $f_{corte}$ ), assim considerando o tamanho de um elemento  $h$ , tem-se o espaçamento máximo permitido entre elementos como:

$$h \leq \frac{V_{min}}{K f_{corte}} \quad (2.61)$$

onde  $K$  é o número máximo de amostras por comprimento da onda correspondente à frequência máxima.

Segundo (CARCIONE; HERMAN; KROODE, 2002) o esquema de elementos finitos aplicado sobre uma malha regular comporta-se semelhantemente ao esquema de diferenças finitas.

Outro fator importante é a instabilidade de Courant. Essa instabilidade é relacionada ao intervalo de tempo. O intervalo  $dt$  deve ser menor que o tempo que a onda leva para viajar em dois pontos adjacentes considerando um espaçamento  $dh$ . Assim:

$$dt \leq \frac{dh}{b_2 \sqrt{2} V_{max}} \quad (2.62)$$

onde  $V_{max}$  é a velocidade máxima no modelo e  $b_2$  é um termo dependente da ordem do operador de diferenças finitas.

# 3 PROBLEMA INVERSO E OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo discute-se a formulação do método de otimização topológica e uso de modelos de materiais para identificação dos parâmetros de Lamé no problema de inversão. Algumas estratégias como regularização e filtros são apresentados para melhorar a convergência. Outro ponto abordado é o algoritmo de otimização utilizado.

## 3.1 Modelagem Acústica e Elástica

A escolha adequada da equação constitutiva e as hipóteses da modelagem física da propagação da onda é importante para representar com precisão a complexidade dos dados observados. A maioria das aplicações FWI atuais são baseadas na equação de onda acústica e na recuperação de modelos de velocidade de onda primária da subsuperfície. Portanto, os efeitos elásticos da subsuperfície são comumente negligenciados essencialmente para reduzir o número de parâmetros do modelo, as variáveis do campo de onda têm um impacto direto no custo computacional, tanto em termos de requisitos de CPU, quanto de memória, o que é mais agravante em casos tridimensionais. Além disso, a complexidade de modelar a amplitude com precisão e a falta de informações sobre a fonte, ou disponibilidade de estimativas iniciais precisas de densidade, velocidade de onda de cisalhamento e atenuação implica em considerar apenas os efeitos acústicos (TARANTOLA, 1986). Inverter para mais parâmetros também torna o problema inverso mais mal-posto, dado que há mais graus de liberdade na parametrização, o que aumenta as ambiguidades no espaço de soluções (AGUDO et al., 2020), a inversão pode ser sensível a vários parâmetros de diferentes maneiras (VIRIEUX; OPERTO, 2009). Portanto, atualmente é amplamente aceito aplicar a aproximação acústica para modelagem sísmica (BORISOV; SINGH, 2015). A abordagem acústica pode ser útil ao modelar a cinemática do campo de ondas, porém o efeito de amplitude das conversões entre as diferentes fases como ondas  $P$  e  $S$  em meios isotrópicos, é negligenciado. Essas conversões afetam as amplitudes de todas as chegadas, incluindo as primeiras ondas  $P$  (HOBRO; CHAPMAN; ROBERTSSON, 2013).

No entanto, ignorar os efeitos elásticos têm um impacto negativo na qualidade dos modelos de velocidade recuperados, especialmente porque as conversões de fase nas interfaces não são devidamente consideradas. A amplitude de todas as chegadas, incluindo as chegadas das ondas primárias ( $P$ ) também é afetada (HOBRO; CHAPMAN; ROBERTSSON, 2013). Abordar adequadamente a cinemática e a dinâmica das ondas sísmicas pode levar

a modelos reconstruídos de alta resolução. Além disso, na presença de interfaces de alto contraste, nas quais ocorrem ondas de conversão, efeitos elásticos podem dominar as seções sísmicas (MARELLI; MAURER; MANUKYAN, 2012). Considerando casos complexos de geologia, a abordagem acústica pode ser limitada, especialmente aqueles contendo contraste de grande velocidade (SOLANO; STOPIN; PLESSIX, 2013).

Considerando hipóteses para uma modelagem mais simplificada sobre a física da propagação de ondas, permite a aplicação eficiente de FWI para grandes conjuntos de dados 3-D à custa de reduzir a resolução do campo de ondas modelado. Além disso, tem um impacto negativo nas estimativas resultantes de FWI na presença de outros efeitos não modelados. No entanto, FWI quando aplicado em dados reais, pode apresentar alguns desafios adicionais. Os dados sísmicos reais contêm campos de ondas complexos, incluindo ondas de compressão, ondas de cisalhamento e suas interconversões, no entanto, o FWI acústico considera apenas ondas de compressão, mas não inclui as ondas de compressão convertidas e trata as outras ondas como ruído (FANG et al., 2020). Embora o FWI elástico considere todos os tipos de onda, os resultados da inversão podem ser comprometidos pela geometria de aquisição utilizada e a falta de informações sobre as ondas cisalhantes. Além disso, os resultados da inversão do FWI acústico a partir dos dados elásticos gerados por uma fonte explosiva são aceitáveis, enquanto os do FWI acústico dos dados elásticos criados por uma fonte de tensão normal direcional vertical são de precisão muito baixa (AGUDO et al., 2020).

No entanto, uma parte dos efeitos elásticos podem ser corrigidos na simulação acústica empregando certos procedimentos. Algumas técnicas podem ser utilizadas para corrigir a diferença de amplitude entre a onda  $P$  gerada no modelo acústico e elástico. Um procedimento de correção para simulações acústicas para alguns dos efeitos elásticos foi proposto por (CHAPMAN; HOBRO; ROBERTSSON, 2014), a um custo consideravelmente menor do que as simulações totalmente elásticas. No procedimento proposto, a correção para a simulação acústica é calculada utilizando uma segunda simulação acústica que melhora a dinâmica da propagação da onda  $P$ , mas ainda omite completamente as ondas de cisalhamento  $S$ . Os resultados obtidos com essa correção apresentam um grau de validação para o uso deste método para simular os efeitos elásticos nas chegadas de ondas  $P$  a baixo custo em modelos sedimentares. No entanto, a solução pode deteriorar em algumas regiões com ângulos mais amplos ou em casos que há propagação de onda através de muitas interfaces. Esta abordagem tem um custo de cerca do dobro de uma simulação acústica, mas ainda é bem menor que uma completamente elástica.

Uma continuação do trabalho para corrigir as dinâmicas da onda  $P$  foi realizado por (HOBRO; CHAPMAN; ROBERTSSON, 2013). Neste trabalho os resultados para um modelo bimatricial e mais dois modelos complexos sugerem que a modelagem acústica corrigida oferece uma boa aproximação para a onda  $P$  elástica em uma ampla gama de contrastes

de velocidade e ângulos de incidência dentro desses modelos. No entanto, em regiões com a presença do sal superior muito forte as reflexões causam degradação inaceitável no resultado para chegadas posteriores.

Em outro estudo com uma inversão 3D com dados reais onde o objetivo era comparar e avaliar os resultados obtidos pelo FWI acústico e elástico na presença de interface de contraste de alta velocidade, o desajuste total para o caso elástico apresentou uma redução de 10-15% menor do que o acústico, sugerindo que a abordagem elástica explica os dados observados melhor do que a abordagem acústica (MARJANOVIĆ, 1377). As imagens da velocidade de compressão obtidas utilizando às duas abordagens diferem significativamente, não apenas na magnitude da velocidade, mas também estruturalmente. Os autores concluem que os resultados obtidos na modelagem acústica são geologicamente menos plausíveis e sugerem o modelo elástico como uma representação mais apropriada para a subsuperfície. Assumindo o meio como acústico, as reflexões apresentam amplitude maior do que os dados reais. Este fato implica que para reduzir o desajuste, a inversão precisa ajustar a velocidade para reduzir a amplitude modelada levando a artefatos no modelo de velocidade. Os resultados sugerem que o efeito elástico poderia potencialmente ter um grande impacto nos modelos de velocidade final da subsuperfície obtidos do FWI acústico, especialmente na presença de contrastes de alta velocidade onde efeitos elásticos fortes são esperados.(MARJANOVIĆ, 1377)

Na presença de interfaces estendidas com contrastes significativos e geometrias de registro envolvendo grandes ângulos de incidência, as conversões  $P$  para  $S$  tornam-se significativas. Eles causam mudanças de amplitude e fase nas seções sísmicas. As inversões de forma de onda acústica aplicadas a tais dados transformam os efeitos sistemáticos em distorções nos modelos reconstruídos. Artefatos introduzidos pela aproximação acústica podem dominar a reconstrução do modelo. A incorporação de informações de ondas  $S$  (comprimentos de onda mais curtos) deve fornecer resultados superiores para inversões acústicas (MARELLI; MAURER; MANUKYAN, 2012). As diferenças mais significativas ocorrerão nas amplitudes das ondas  $P$  refletidas e transmitidas das interfaces, onde as propriedades variam rapidamente. Nas regiões distantes das interfaces, as propriedades são homogêneas ou variam suavemente e o acoplamento entre as ondas  $P$  e  $S$  é, portanto, insignificante (HOBRO; CHAPMAN; ROBERTSSON, 2013). Inversões acústicas de dados elásticos devem ser limitadas a modelos caracterizados por contrastes de baixa velocidade, ou para modelos com pequenas extensões espaciais (MARELLI; MAURER; MANUKYAN, 2012).

Além dos pontos citados, o uso de FWI elástico pode fornecer estimativas valiosas de alta resolução das razões  $V_p/V_s$  e densidade (SHIPP; SINGH, 2002). A razão entre os parâmetros elásticos podem atuar como um indicador de litologia, por exemplo, uma razão  $V_p/V_s$  baixa, frequentemente indica a presença de areias e podem fornecer informações



valiosas sobre o conteúdo do fluido o que auxilia em distinguir hidrocarbonetos de água (SEARS; SINGH; BARTON, 2008). Uma técnica chamada de *Amplitude versus offset* (AVO) é comumente utilizada para determinar a espessura, porosidade, densidade, velocidade, litologia e conteúdo de fluido das rochas. Uma limitação da análise do AVO utilizando apenas ondas  $P$  (caso acústico) está em produzir uma solução única, de modo que os resultados do AVO estão sujeitos a interpretações errôneas. Uma má interpretação comum é a falha em distinguir um reservatório cheio de gás com um reservatório com saturação de gás apenas parcial contendo água e gás. No entanto, a análise AVO utilizando a onda  $S$  e densidade permite a diferenciação dos graus de saturação de gás e permite uma melhor interpretação das análises.

As inversões de grandes dados marinhos de deslocamento devem ser totalmente elásticas, em vez de acústicas, a menos que tenha sido demonstrado que para o caso em questão como geometria de aquisição, modelo e profundidade da água, questões práticas, como atenuação de sedimentos macios de ondas de cisalhamento e tempo computacional que uma inversão apenas acústica fornece uma qualidade de imagem razoavelmente boa comparável à de uma inversão elástica (MORA; WU, 2018).

A abordagem elástica apresenta diversas melhorias para resolução dos modelos de velocidades invertidos, porém a grande limitação como mencionado anteriormente é o custo computacional. A título de exemplo, para evitar a dispersão espacial, um certo número de elementos são necessários por comprimento de onda. O número exato depende da ordem dos operadores espaciais utilizados no método numérico, mas o espaçamento entre os elementos deve ser proporcional aos comprimentos de onda na simulação. Assim, o espaçamento deve ser controlado pelo menor comprimento de onda ou velocidades mais baixas na simulação. No caso acústico, a velocidade mínima está associada a onda  $P$ , já no caso elástico, a velocidade mínima está associada a onda  $S$ . No entanto, em cada direção de propagação da onda estas fatores precisam ser considerados. Estas ponderações elevam significativamente o custo computacional, já que no caso elástico, requer uma malha mais refinada e um espaçamento de tempo  $dt$  menor para evitar dispersão. Assim, a proporção do espaçamento em simulações acústicas para elásticas pode ser definida como a proporção dessas velocidades mais baixas presentes no domínio (CHAPMAN; HOBRO; ROBERTSSON, 2014). No tópico a seguir, uma discussão mais detalhada sobre a comparação dos custos computacionais entre o modelo acústico e elástico é apresentada.

### 3.1.1 Custo computacional

No caso de custo computacional, as simulações acústicas apresentam um custo menor tanto em termos de memória quanto de tempo de processamento de CPU, comparado com as simulações elásticas. No meio acústico um dos parâmetros Lamé  $\mu$  é igual a zero, o que leva a negligenciar todos os três componentes de tensão de cisalhamento. A formulação

acústica substitui os três componentes de tensão normal por um único componente de pressão. Essas simplificações reduzem o número total de equações a serem resolvidas de nove no caso elástico para quatro no caso acústico. Um espaçamento espacial maior na malha pode ser utilizado para modelagem acústica para a mesma banda de frequência. O espaçamento temporal no caso acústico permite intervalos maiores para discretização do tempo, reduzindo assim o número total de passos de tempo (BORISOV; SINGH, 2015). O custo computacional total de uma simulação acústica é menor que uma elástica equivalente por quatro motivos:

1. Em um meio acústico, apenas dois parâmetros, velocidade e densidade, são necessários para descrever o meio em um determinado ponto. No meio elástico linear isotrópico requer três parâmetros, velocidade da onda  $P$ , velocidade da onda  $S$ , mais a densidade. Para um meio elástico anisotrópico geral, é necessário especificar 21 parâmetros elásticos mais a densidade. Este número pode ser reduzido considerando formas simétricas de anisotropia, como isotropia transversal. No entanto, em todos os casos, a modelagem acústica exige menos parâmetros do que o modelo elástico equivalente;
2. O número de variáveis de campo que devem ser calculadas e armazenadas durante a modelagem acústica também é significativamente menor do que na modelagem elástica. Para exemplificar, considerando um caso 3D na formulação acústica, quatro variáveis de campo, sendo três componentes da velocidade e uma de pressão são necessárias, enquanto para meios elásticos, linear isotrópico requer nove variáveis, sendo as três componentes de velocidade e os seis do tensor das tensões. O cálculo e armazenamento destes campos têm efeito direto no consumo e requerimento de memória;
3. Para obter o número necessário de pontos por comprimento de onda para evitar dispersão numérica, o espaçamento entre os elementos da malha deve ser escolhido para coincidir com a propagação na velocidade mínima no modelo. Além disso, o intervalo temporal necessário para manter a estabilidade é controlado pelas velocidades mínima e máxima do modelo;
4. Dado um determinado modelo de velocidade, no caso acústico e elástico, a velocidade máxima é mesma para ambos os casos, sendo a velocidade máxima da onda  $P$  do modelo. Entretanto, a velocidade mínima no caso acústico, é a menor velocidade de onda  $P$  do modelo, já no caso elástico, a menor velocidade de onda  $S$  do modelo é a velocidade mínima do domínio, o que implica em uma malha mais refinada e um intervalo temporal menor. Para um caso 3D, este requisito se aplica a todas às três dimensões espaciais mais o tempo, então o número de vezes que a equação de

onda deve ser resolvida para simulações acústicas equivalentes ( $N_{acústica}$ ) e elásticas ( $N_{elástica}$ ) são, portanto, relacionadas por (HOBRO; CHAPMAN; ROBERTSSON, 2013)

$$\frac{N_{elástica}}{N_{acústica}} = \left( \frac{V_P^{\min}}{V_S^{\min}} \right)^4 \quad (3.1)$$

Mesmo considerando o meio elástico como um sólido Poisson, ou seja,  $V_p = \sqrt{3}V_s$ , o custo da modelagem elástica aumenta por um fator de nove, e para modelos mais realistas com sedimentos de baixa velocidade de cisalhamento (por exemplo, perto do fundo do oceano), a razão pode estar entre uma a duas ordens de magnitude. Considerando o efeito geral desses fatores discutidos, é realista considerar a modelagem elástica como sendo três a seis vezes mais cara do que a modelagem acústica quando realizada no mesmo "grid" na abordagem de diferenças finitas, dependendo da implementação (HOBRO; CHAPMAN; ROBERTSSON, 2013).

## 3.2 Método de Otimização Topológica

A Otimização Topológica (OT) é um processo iterativo que determina a melhor distribuição de um volume limitado de material dentro de um determinado domínio. O processo de otimização redistribui material em todo o domínio para minimizar ou maximizar um objetivo específico. Esta técnica combina um método numérico de análise, geralmente o Método dos Elementos Finitos (MEF), junto com o modelo de material e algoritmos de otimização para determinar uma distribuição de material no interior de um domínio fixo. O método foi introduzido pela primeira vez para a distribuição ótima de material em estruturas contínuas por (BENDSOE; KIKUCHI, 1988).

Os primeiros problemas considerados foram de mecânica estrutural, dentre eles o problema mais popular é maximizar a rigidez de uma estrutura (minimizar "compliance"), onde o objetivo é tornar a estrutura mais rígida possível para um determinado conjunto de condições de carga (SIGMUND, 1997). Embora o método de otimização topológica tenha se originado na mecânica estrutural, já foi estendido para uma ampla gama de físicas, como acústica (DÜHRING; JENSEN; SIGMUND, 2008), fotônica (JENSEN; SIGMUND, 2011) e de fluidos (BORRVALL; PETERSSON, 2003).

A OT tem grande abrangência de aplicação, como no fenômeno de propagação de onda, em que o método foi aplicado em problemas de eletromagnetismo e acústica. No contexto de eletromagnetismo, foi aplicado para projeto de antenas (KIZILTAS et al., 2004), projeto de separadores de guia de ondas (JENSEN; SIGMUND, 2005), otimização de rotor de um motor de corrente contínua e sistema de blindagem magnética (HIDAKA; SATO; IGARASHI, 2014). Os dispositivos acústicos como buzina acústica (WADBRO; BERGGREN, 2006),

barreiras de som (DÜHRING; JENSEN; SIGMUND, 2008) e manto acústico (ANDKJÆR; SIGMUND, 2013) também foram otimizados com esta técnica.

Em problemas envolvendo a onda elástica, o método foi aplicado no projeto de bandas proibidas em cristais fotônicos (SIGMUND; JENSEN, 2003), projeto de estruturas de placas de cristal fonônicas (HALKJÆR; SIGMUND; JENSEN, 2005), maximização da atenuação em material compósito viscoelástico (ANDREASSEN; JENSEN, 2013), supressão de vibração de ondas e transporte de energia para placas (LARSEN et al., 2009), barreiras de ondas elásticas (SIGMUND et al., 2016), maximização de dissipação de ondas de pressão e cisalhamento (JENSEN, 2007), separação máxima de frequência natural (JENSEN; PEDERSEN, 2006) também utilizaram o método.

Em sísmica, no contexto de problemas de projeto, a aplicação da OT pode ser vista em projetos como os de estruturas mais rígidas sujeitas a cargas sísmicas (ZAKIAN; KAVEH, 2020), estruturas de suporte flexíveis que reduzem a resposta sísmica no arco (MIYAZU; OHSAKI; TSUDA, 2016) e na otimização de treliças simples considerando excitações sísmicas (HAJIRASOULIHA; PILAKOUTAS; MOGHADDAM, 2011). Um estudo do projeto de barreiras de ondas com diferentes configurações geométricas para reduzir a aceleração vertical do topo de uma fundação circular colocada na superfície do solo foi realizada por (DOLATSHAHI; REZAIIE; RAFIEE-DEHKHARGHANI, 2020).

A maior parte da literatura foca em estudos que envolvem projetos. No entanto, além de problemas de projeto, a otimização topológica apresenta aplicações em problemas inversos. Nestes, a OT foi utilizada para maximizar a sensibilidade do sistema de monitoramento de saúde estrutural em materiais compósitos laminados para detecção de falhas e delaminação (MARIANI et al., 2013), (MARIANI et al., 2018), localização de dano (RYUZONO et al., 2020), posicionamento ótimo de sensores (BRUGGI; MARIANI, 2013), minimização de discrepância entre especificações dinâmicas entre dois modelos (RYUZONO et al., 2020), suporte de túnel (YIN; YANG, 2000), aprimoramento de projetos de parafuso de ancoragem para túneis (NGUYEN et al., 2016), identificação de danos utilizando ondas ultrassônicas (RYUZONO et al., 2020), identificação de propriedades térmicas (TURTELTAUB, 2001), imageamento médico para distribuição de condutividade (LIMA et al., 2007), (MELLO et al., 2008) e distribuição de perfil de permissividade em problemas de imageamento por micro-ondas (KANG et al., 2002). No caso de inversão sísmica, as aplicações de otimização topológica são recentes e encontram-se poucas publicações. No domínio de tempo, a otimização topológica utilizando a abordagem level-set foi aplicado em inversão acústica (LANZMASTER et al., 2021). No domínio de frequência, a OT foi empregado em um problema multifásico utilizando o modelo SIMP e pico por (GONÇALVES et al., 2020; GONÇALVES; SILVA, 2021). Estes trabalhos consideraram o meio como acústico e utilizaram a modelagem acústica para representar a propagação de onda. Nenhum trabalho foi encontrado até este momento sobre inversão de onda utilizando a modelagem elástica

junto com a otimização topológica.

### 3.3 Parametrização e Modelo de Material

A otimização topológica consiste essencialmente em substituição do problema de otimização por um problema de distribuição de material em um domínio de projeto fixo  $\Omega$ . Bendsøe e Kikuchi (1988) introduziram uma função característica  $\gamma(\mathbf{x})$  que assume um valor discreto 0 e 1, como:

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{x}$  representa a posição no domínio de projeto fixo. No entanto, este requisito leva a problemas de programação não linear binária/inteira que podem limitar significativamente o tamanho dos problemas solucionados (HVEJSEL; LUND, 2011). A abordagem de densidade é comumente utilizada para contornar esta limitação e tratar de problemas de grande escala. Nesta abordagem, as variáveis são tratadas como contínuas e podem atingir valores intermediários durante o processo de otimização. A vantagem é que as informações do gradiente podem ser utilizadas de forma eficiente na busca por uma solução que aumente significativamente o tamanho de problemas computacionalmente tratáveis.

Contudo, a função característica  $\gamma(\mathbf{x})$  é substituída por uma função escalar contínua,  $0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1$ , cujo valor varia entre zero e um, que corresponde ao campo variável de projeto no problema de otimização topológica. A função característica é comumente chamada de pseudo-densidade, o que descreve a distribuição espacial no domínio.

Esta relação entre a propriedade físicas de interesse e a pseudo-densidade do material é comumente referida como esquema de interpolação ou modelo de material (BENDSØE; SIGMUND, 1999), onde a pseudo-densidade é definida como variável de projeto e será o parâmetro a ser otimizado durante a inversão. As propriedades de interesse correspondentes podem ser parametrizadas posteriormente utilizando o modelo de material junto com o valor do pseudo-densidade obtido.

A propriedade representada pelas pseudo-densidades em cada ponto do domínio pode variar entre a primeira e a segunda propriedade mediante o modelo de material empregado. Se o campo de densidade do material for igual a zero em um ponto no domínio do projeto, o ponto será ocupado com propriedade 1, onde  $\Omega_1$  é a região onde há um conjunto de pontos com esta propriedade. Da mesma forma, o campo de densidade do material é igual a 1 onde há presença de propriedade 2 conforme ilustrado na Fig.(3.1).

Existem diversos modelos de material que podem ser utilizados para definir a relação entre a pseudo-densidade e as propriedades de interesse, nos tópicos a seguir serão

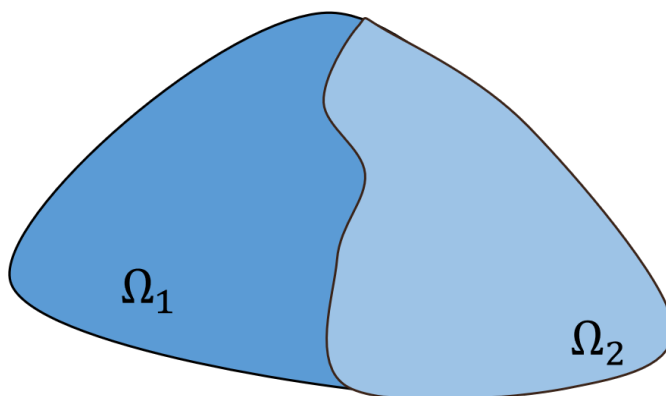


Figura 3.1 – Distribuição de material no domínio de projeto.

apresentados com mais detalhes os modelos empregados neste trabalho.

### 3.3.1 Modelo de Material SIMP

O modelo de material é definido para permitir que o material assuma valores de propriedades intermediárias, definindo uma função de interpolação. Nos problemas de projetos comumente essa abordagem consiste em modelar a presença de material com uma função de indicador de material, de modo que  $\rho = 0$  representa o vazio e  $\rho = 1$  onde o material está presente. De forma similar, nos problemas de identificação o modelo de material pode ser utilizado para distribuir dois materiais distintos, onde  $\rho$  nulo representa o primeiro material e  $\rho$  igual a um representando um segundo material com propriedades diferentes.

O modelo de densidade, também chamado de SIMP, surgiu originalmente em contexto de projetos estruturais. Nesse modelo, o tensor constitutivo do material em cada elemento é definido como uma função da densidade do material, variando de um valor muito pequeno representando vazios ou elementos fracos, a 1 representando sólidos ou elementos fortes. Note que os resultados otimizados utilizando esse esquema consistem principalmente de elementos cinzas, que representam valores de densidade intermediária. Para obter uma solução quase “preto-branca”, elementos cinza com densidades intermediárias precisam ser penalizados. A função de interpolação polinomial proposta por (BENDSØE, 1989; ZHOU; ROZVANY, 1991), uma das regras de penalização amplamente utilizada, assume a forma:

$$E(\rho) = [\rho(\mathbf{x})^p] \bar{E} \quad (3.3)$$

onde  $E$  é o tensor de rigidez interpolado,  $\bar{E}$  é um tensor de rigidez de um dado material,  $\rho(\mathbf{x})$  a função de densidade relativa no local representado por  $x$  e  $0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1$ , e  $p$  é termo de penalização com  $p \geq 1$ . O termo de penalização  $p$ , penaliza os valores das densidades intermediárias e, conseqüentemente, aproxima os valores de  $\rho(\mathbf{x})$  aos dois extremos de que representam sólido ou vazio.

O esquema de interpolação na Eq.( 3.3) pode ser aplicado a um problema em que o elemento considerado pode ser sólido ou vazio, ou intermediário. Em um problema de dois materiais, o elemento considerado é selecionado como um dos dois materiais fornecidos ou intermediário, e o esquema de interpolação pode ser declarado como:

$$E(x) = E_1 + (E_2 - E_1)\rho(\mathbf{x})^p \quad (3.4)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são as constantes de elasticidade de material 1 e 2, respectivamente.

O modelo SIMP da Eq.(3.4) pode ser facilmente estendido para outros problemas físicos onde há interesse em outras propriedades. Neste trabalho, utiliza-se o modelo SIMP para definir uma relação para interpolar os parâmetros de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  que são as propriedades de interesse no problema de otimização, assim o modelo de material é definido como:

$$\lambda_e(\rho) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \rho_e^{p_1} \quad (3.5)$$

$$\mu_e(\rho) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \rho_e^{p_2} \quad (3.6)$$

onde  $\rho_e$  é pseudo-densidade do material correspondente a cada elemento,  $p_1$  e  $p_2$  são as penalizações,  $\lambda_1$  e  $\mu_1$  são as constantes de Lamé para material 1 e  $\lambda_2$  e  $\mu_2$  são as constantes de Lamé para material 2.

O mesmo parâmetro de pseudo-densidade é utilizado para interpolar os dois modelos de materiais, o que possibilita transformar um problema otimização de múltiplos parâmetros em otimização de apenas uma variável de projeto, a pseudo-densidade. Esta parametrização permite inversão de múltiplos parâmetros empregando apenas uma variável de projeto, o que torna um problema múltiplo parâmetro a um problema mono parâmetro tornando o problema menos mal posto. A Fig.3.2 mostra o efeito da penalização  $p$  no modelo SIMP, onde a variável de projeto é representado no eixo  $x$  e a propriedade de interesse no eixo  $y$ .

No processo de otimização, o objetivo é obter uma solução de valores 0 ou 1 para a variável de projeto  $\rho$ , ou seja,  $\rho \simeq 0$  ou  $\rho \simeq 1$ . Portanto, quando  $\rho \simeq 0 \rightarrow \mu = \mu_1$  e  $\lambda = \lambda_1$ , representa as propriedades do primeiro material e quando ( $\rho \simeq 1 \rightarrow \mu = \mu_2$  e  $\lambda = \lambda_2$ ) representando a propriedade do segundo material. No entanto, valores intermediários podem ser obtidos durante a otimização para a variável de projeto, indicando um material intermediário.

A sensibilidade do modelo SIMP em relação à variável de projeto para o primeiro

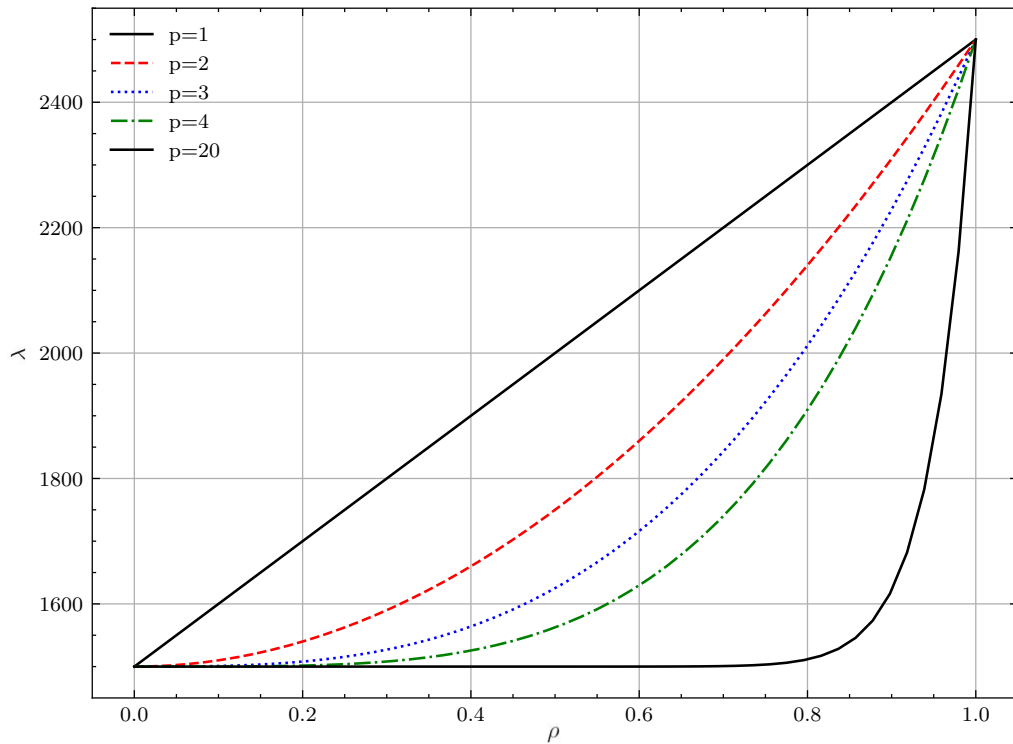


Figura 3.2 – Influência de penalizador  $p$  para o modelo de material.

parâmetro de Lamé é dada por:

$$\frac{\partial \lambda_j^S(x)}{\partial \rho_e} = p \rho_e^{p-1} \Delta \lambda_{ij}, \quad i = 1..N, j = 1, 2 \quad (3.7)$$

Para uma penalização  $p > 1$  a sensibilidade é nula se a variável de projeto correspondente é zero.

$$\left. \frac{\partial \lambda_j^S}{\partial \rho_e} \right|_{\rho_e=0} = p \rho_e^{p-1} \Delta \lambda_{ij} \Big|_{\rho_e=0} = 0, \quad p > 1, \quad i = 1..N, j = 1, 2 \quad (3.8)$$

As sensibilidades em relação a segundo parâmetro de Lamé podem ser definidos da mesma maneira.

### 3.3.2 Modelo de Material Pico

Além do modelo SIMP, existem outros modelos de materiais que podem ser utilizados para a distribuição do material no domínio de projeto. (YIN; ANANTHASURESH, 2001) propôs uma função baseada na distribuição normal para interpolar as propriedades dos materiais.



A função de distribuição normal é dada por:

$$w = \exp \left[ -\frac{(\rho - \bar{x}_m)^2}{2\sigma_m^2} \right] \quad (3.9)$$

onde  $\rho$  é a variável de projeto,  $\bar{x}_m$  é a média e  $\sigma$  é a penalização. A partir dessa função é possível escrever um modelo de material chamado "Peak" como:

$$\lambda = \lambda_1 \exp \left[ -\frac{(\rho - \bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] + \lambda_2 \exp \left[ -\frac{(\rho - \bar{x}_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \quad (3.10)$$

$$\mu = \mu_1 \exp \left[ -\frac{(\rho - \bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] + \mu_2 \exp \left[ -\frac{(\rho - \bar{x}_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \quad (3.11)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são os fatores de penalização,  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  são os valores médios das materiais candidatas,  $\lambda_1$  e  $\mu_1$  são os parâmetros de Lamé para material 1,  $\lambda_2$  e  $\mu_2$  são os parâmetros de Lamé para material 2, respectivamente.

A penalização  $\sigma$  tem o mesmo propósito que a penalização  $p$  no SIMP, desfavorecer materiais intermediários. Ao contrário do modelo SIMP, onde para penalizar é preciso aumentar o fator da penalidade, no modelo Pico o mesmo efeito decorre diminuindo o valor do  $\sigma$ .

Adotando um fator da penalidade  $\sigma$  pequena suficiente a função de distribuição normal se aproxima da função delta de Kronecker, ou seja, em algum ponto do espaço onde a pseudo-densidade  $\rho$  é igual à média  $\bar{x}_1$ , existe apenas um material exclusivo. No entanto, a escolha do sigma deve assumir valores positivos maior que um  $\epsilon$  para evitar mal condicionamento numérico. Uma vantagem do modelo Pico é que a variável de projeto pode assumir valores entre  $-\infty$  e  $+\infty$  e não tem uma restrição de limite imposta nas variáveis de projeto no problema de otimização.

Ajustando gradualmente os parâmetros da penalização nos modelos para criar vários picos, a solução final pode ser obtida para possuir materiais exclusivos, evitando valores intermediários. Esse modelo pode auxiliar para criar uma interface mais nítida entre as camadas invertidas no problema de inversão. A Fig. 3.3 mostra a influência da penalização no modelo *Peak* para o  $\lambda$  considerando 3 materiais, o mesmo efeito é apontado para o  $\mu$ , com o eixo  $x$  representando o valor da pseudo-densidade e no eixo  $y$  o valor da propriedade.

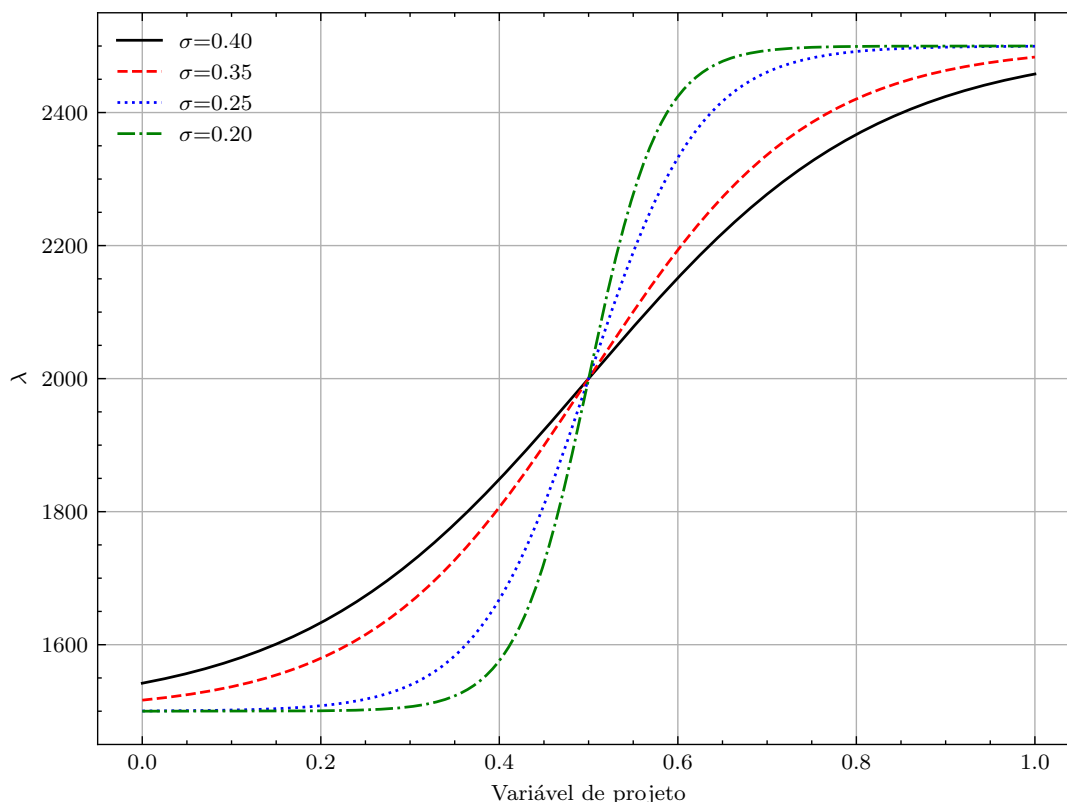


Figura 3.3 – A influência de penalização no modelo de material Peak.

### 3.3.3 Modelo de material von mises

O modelo de material é responsável por interpolar e parametrizar as propriedades do material entre zero e um ou entre duas propriedades distintas. Diversas funções contínuas podem ser utilizadas para aproximar a função delta, transformando-se no problema original de topológica, ou seja, um problema binário (YIN; ANANTHASURESH, 2001). Neste trabalho utiliza-se uma função contínua como modelo de material como alternativa ao modelo Pico. A função empregada é uma forma generalizada da distribuição gaussiana, conhecida na literatura como distribuição Tikhonov ou distribuição de von mises (GEORGIADIS; KALIALAKIS, 2014).

A distribuição de von mises é dada por:

$$w_i = \frac{e^{k \cos(x-\mu)}}{2\pi I_0(k)} \quad (3.12)$$

onde o  $\mu$  é a direção média da distribuição,  $I_0$  é a função modificada de Bessel com ordem zero, com a expressão:

$$I_0(\kappa) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\kappa^{2i}}{2^{2i} (i!)^2} \quad (3.13)$$

Assim utilizando esta função, pode se determinar um modelo de material como:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{2\pi I_0(\kappa)} \cdot \exp[\kappa \cos(\rho - x_1)] + \frac{\lambda_2}{2\pi I_0(\kappa)} \cdot \exp[\kappa \cos(\rho - x_2)] \quad (3.14)$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{2\pi I_0(\kappa)} \cdot \exp[\kappa \cos(\rho - x_1)] + \frac{\mu_2}{2\pi I_0(\kappa)} \cdot \exp[\kappa \cos(\rho - x_2)] \quad (3.15)$$

onde  $\rho$  é a variável de projeto,  $x_1, x_2$  são as médias,  $I_0$  a função modificada bessel de ordem zero e  $\kappa$  é o termo de penalização.

A função von mises é uma função continua definida em intervalo de 0 a  $2\pi$ , sendo semelhante à distribuição normal, exceto pelo fato de que as coordenadas são colocadas em um plano circular, o que pode ser considerado um análogo circular da distribuição normal (WANG et al., 2012). A média  $\mu$  pode ser qualquer número real e  $\kappa$  pode ser qualquer número real não negativo. Se  $\kappa = 0$ , a distribuição é uniforme e se os valores de  $\kappa$  são grandes, a distribuição se torna uma distribuição normal.

O modelo de von mises compartilha características similares ao modelo Pico, como, a inclusão de vários materiais no projeto sem aumentar as variáveis de projeto. Além disso, o modelo von mises não apresenta singularidade perto de zero, o que pode causar dispersão numérica no modelo Pico. No modelo Pico, para desfavorecer os materiais intermediários é realizada uma redução no fator de penalização. No modelo von mises o mesmo efeito ocorre aumentando o valor da penalização. Além disso, a penalização no modelo pico está elevada em quadrado o que implica em sensibilidade maior com a penalização, especialmente em valores pequenos próximos de zero. No modelo von mises, a relação da penalização é linear, o que induz a uma menor sensibilidade a penalização durante a otimização.

A influência da penalização  $\kappa$  no modelo de material pode ser observado na Figura 3.4

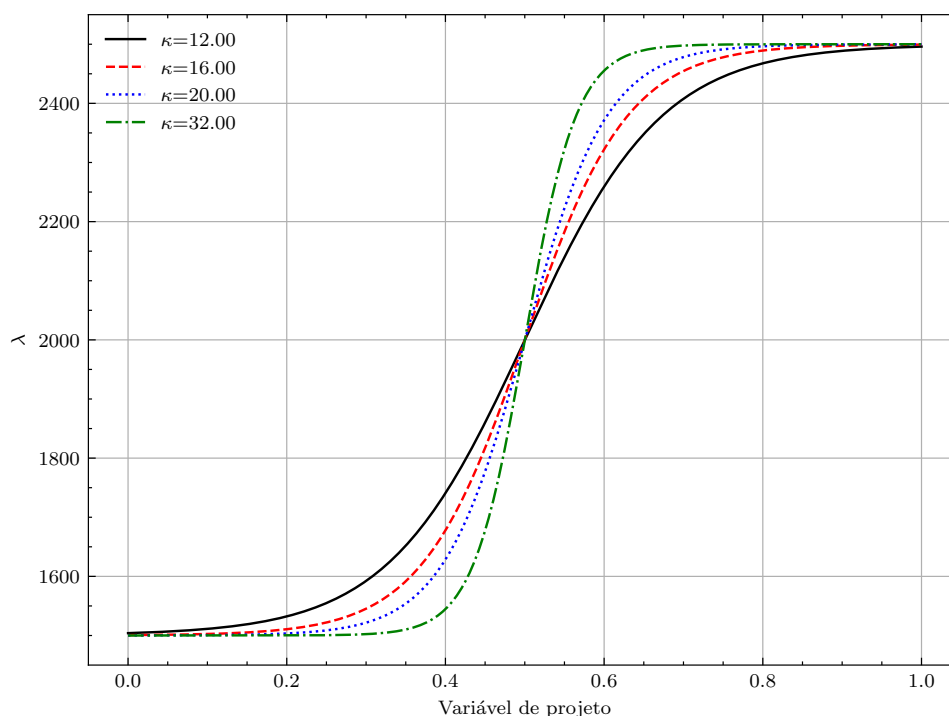


Figura 3.4 – A influência de penalização no modelo de material von mises.

### 3.4 Considerações numéricas do problema inverso em otimização topológica

Algumas Instabilidades numéricas podem surgir nos problemas inversos resolvidos pela otimização topológica. Isso pode causar alguns obstáculos na obtenção de resultados otimizados ou na interpretação dos resultados finais. Estes problemas podem ser divididos em dois tipos: dependência de malha e mínimos locais.

#### 3.4.1 Dependência da Malha

A dependência de malha refere-se ao problema de se gerar diferentes topologias para diferentes discretizações do domínio de projeto. Assim, para aliviar o problema de dependência de malha são comumente empregadas controle de restrições de complexidade como filtros.

#### 3.4.2 Mínimos Locais

O problema de mínimos locais refere-se a não obter a mesma solução final sob a mesma discretização com diferentes parâmetros do algoritmo ou de estimativa inicial. O método apresentado é uma abordagem baseada em gradiente, portanto, não é garantido mínimo global. Uma abordagem comumente utilizada que pode superar essa questão é empregar uma técnica de continuação. Por exemplo, no caso de SIMP, pode-se iniciar a

otimização com a penalização baixa e realizar o aumento gradual. Em contrapartida, no modelo *Peak*, inicia-se com um valor alto de penalização que é reduzido gradativamente.

Uma visão geral das instabilidades numéricas que podem ocorrer num problema de otimização topológica é fornecida por (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

### 3.5 Crime Inverso

Na resolução de problemas de inversão, no caso de ausência de dados experimentais é comum utilizar dados sintéticos para os valores de campo de referência. Quando os mesmos parâmetros são utilizados para modelagem do campo calculado e o modelo de referência, o problema inverso é menos mal-posto do que quando se utilizam dados experimentais. Isso ocorre porque os dados coletados têm ruídos incorporados, originados por diversos motivos, como calibração de sensores ou ruídos ambientais. Além disso, a solução obtida utilizando algum método numérico, apresenta erros numéricos associada a malha utilizada. A utilização da mesma malha na geração do modelo calculado e modelo de referência representa a adição do mesmo erro numérico nos dois modelos. Como os dados de referência são independentes do método numérico, a solução do problema inverso deve apresentar bons resultados independente da malha utilizada.

Substituir o problema original por um problema menos mal-posto devido a suposições que diferem da realidade é chamado de cometer um crime inverso (WIRGIN, 2004). O crime inverso pode ser evitado adicionando um ruído aleatório à observação calculada antes de utiliza-la como solução de referência em um problema inverso. Outra forma de evitar é utilizando malhas diferentes para calcular os dados do modelo da referência e depois resolver o problema inverso com outra malha. Entretanto, um estudo utilizando abordagens Bayesianas mostra que o nível de erro devido a discretização diferente pode ser significativamente maior que o ruído adicionado, em que é muito difícil prever a correlação entre eles. (KAPIO; SOMERSALO, 2007)

Neste trabalho, são utilizadas malhas com discretizações diferentes para evitar o crime inverso, tendo uma malha mais refinada para o problema direto e uma malha mais grosseira para o problema de inversão. No entanto, a abordagem empregada tem vantagens em relação ao custo computacional já que são resolvidos vários problemas diretos no problema de otimização para o cálculo da análise de sensibilidade, o que leva em menor tempo de simulação.

### 3.6 Função objetivo do problema inverso

O objetivo do trabalho é encontrar a distribuição dos parâmetros de Lamé  $\lambda(x)$  e  $\mu(x)$  no meio de interesse, considerando as hipóteses do meio elástico, linear e isotrópico. Dessa forma, consideram-se as fontes e a resposta registrada nos receptores na superfície do domínio como conhecidas. O problema do meio inverso pode assim, ser formulado como a minimização da diferença quadrática (ou desajuste) entre as medidas da resposta nos locais dos receptores e uma resposta calculada correspondente a uma distribuição de um modelo de referência no qual se conhece os parâmetros do material. Matematicamente, o problema do meio inverso pode ser convertido como um problema de otimização com

restrição de EDP como:

$$\min_{\rho} \mathcal{J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_{obs}^j)^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega dt + \mathcal{R}(\rho) \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{J}$  é a função objetivo a ser minimizada,  $\rho$  é a pseudo-densidade do modelo de material que é variável de projeto a ser otimizada,  $N_r$  indica o número total de receptores,  $N_s$  indica o número total de fontes,  $T$  é o tempo total da propagação da onda,  $\partial\Omega$  é a parte da superfície em que a resposta do receptor é coletada,  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamento obtido pelo problema direto junto com as condições iniciais e condições de contorno,  $\mathbf{u}_{obs}$  é o campo de referência,  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$  é a função de Delta de Dirac que permite medições nas localizações dos receptores  $x_j$  e  $\mathcal{R}(\rho)$  é um termo de regularização que pode ser utilizada para uma melhor convergência.

### 3.7 Problema de otimização

O objetivo do trabalho é minimizar a diferença entre o campo de deslocamento calculado e o deslocamento de um modelo de referência. O problema de otimização pode ser escrito como:

$$\min_{\rho} \quad \mathcal{J} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_{obs}^j)^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega dt + \mathcal{R}(\rho) \quad (3.17a)$$

$$\text{s.a.} \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.17b)$$

$$0 \leq \rho \leq 1. \quad (3.17c)$$

onde  $\mathcal{J}$  é a função objetivo, Eq.(3.17a) é a equação de propagação de onda no meio elástico, Eq.(3.17b) e Eq.(3.17c) são as restrições de caixa para variável de projeto.

### 3.8 Algoritmos de otimização

O método de otimização pode ser baseado ou não em gradientes. Os métodos que não calculam o gradiente como algoritmos genéticos ou estocásticos buscam a solução numa árvore de possíveis soluções geradas. Os métodos baseados em gradiente calculam a derivada em relação a algum parâmetro e dão um passo para o maior valor a ser minimizado. Segundo (SIGMUND; MAUTE, 2013) os métodos que não utilizam a informação pelos gradientes podem ser computacionalmente mais custoso quando as variáveis de projeto estão em ordem de milhares ou milhões, portanto, nesse trabalho adotou-se um método baseado em gradientes para resolução do problema FWI.

O FWI é um processo iterativo que tenta criar parâmetros de modelo de alta resolução da estrutura de subsuperfície da terra. A maioria dos esquemas de algoritmos numéricos de inversão de forma de onda completa existentes são baseados em um método iterativo local utilizando um método de gradiente conjugado descendente ou não linear mais acentuado. Este método considera apenas as derivadas de primeira ordem da função objetivo e negligência as derivadas de segunda ordem da função objetivo (matriz Hessiana). O método de gradiente steepest-descent geralmente escala mal (MÉTIVIER et al., 2012) a atualização de perturbação do modelo e leva muitas iterações e pode convergir para mínimos locais. Para aumentar a taxa de convergência, métodos de otimização de ordem superior, como os métodos newtonianos, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno de memória limitada (L-BFGS) (NOCEDAL, 1980), Gauss-Newton ou métodos de Newton completo, que consideram as informações das derivadas de segunda ordem da função objetivo, devem ser utilizados.

Nas aplicações de problema inverso diferentes trabalhos apontam a eficiência do L-BFGS-B. O método é da família de quasi-newton com memória limitada, ele calcula o gradiente e estima a inversa da matriz Hessiana em espaço de variáveis. O algoritmo é implementado utilizando o pacote de Trilinos o qual possui interface com o Fenics e pode facilmente ser incorporado ao código. O scipy também fornece esta interface, porém a versão do Trilinos oferece maiores opções para o controle dos parâmetros do otimizador.

Os métodos newtonianos geralmente convergem mais rapidamente do que o método de gradiente conjugado, mas isto envolve o custo de resolver um sistema mais denso de equações lineares (matriz Hessiana) a cada iteração exigida computacionalmente. Dos métodos newtonianos, é conhecido que o método completo de Newton converge mais rapidamente do que os métodos Gauss-Newton ou L-BFGS. Incorporando o inverso de derivadas de segunda ordem da função objetivo, o inverso da matriz Hessiana, no esquema de inversão numérica, não apenas acelera a taxa de convergência, mas também considera o efeito dos campos de ondas refletidos de energia de alta amplitude presentes nos dados. Além disso, o uso da inversa da matriz Hessiana na inversão numérica dimensiona melhor as energias de amplitude em áreas de subsuperfície pouco iluminadas devido à cobertura desigual da fonte receptora e remove artefatos indesejados que surgem no gradiente devido a vários campos de ondas refletidos (PRATT; SHIN; HICK, 1998).

### 3.8.1 O método BFGS

Os métodos de quase-Newton aproximam a inversa da Hessiana  $\mathbf{H}_K^{-1}$  utilizando a variação dos gradientes durante as iterações ao invés de calcular explicitamente a sua inversa. A partir de uma aproximação inicial da Hessiana  $\mathbf{H}_0$ , a inversa da Hessiana é atualizada em cada iteração para encontrar uma estimativa mais precisa (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).



A derivada da função objetivo em relação á variável de projeto  $\mathbf{m}$  e na direção de uma perturbação  $\delta\mathbf{m}$  é dada por:

$$\nabla E_k(\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}_k) = \nabla_m E_k(\mathbf{m}) + \mathbf{H}_k \delta\mathbf{m}_k \quad (3.18)$$

A atualização do modelo do método Newton na iteração  $k$  é então calculada como:

$$\delta\mathbf{m}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \nabla_m E_k \quad (3.19)$$

Se considerarmos a próxima iteração ( $k+1$ ), o seguinte requisito pode ser definido:

$$\nabla E_k(\mathbf{m}) \stackrel{!}{=} \nabla E_{k+1}(\mathbf{m} - \delta\mathbf{m}_k) \quad (3.20)$$

Reescrevendo o lado direito da Eq.(3.18):

$$\begin{aligned} \nabla E_k(\mathbf{m}) &= \nabla E_{k+1}(\mathbf{m}) - \mathbf{H}_{k+1} \delta\mathbf{m}_k \\ \nabla E_{k+1}(\mathbf{m}) - \nabla E_k(\mathbf{m}) &= \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k) \\ \gamma_k &= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{s}_k \end{aligned} \quad (3.21)$$

Essa equação é conhecida como equação secante e apresenta uma condição em que  $\mathbf{H}_{k+1}$  dependendo da variação o gradiente  $\gamma_k = \nabla E_{k+1} - \nabla E_k$  e o modelo muda com  $\mathbf{s}_k = \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k$ .

A equação secante também pode ser formulada para o inverso da Hessiana como:

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} \gamma_k = \mathbf{s}_k \quad (3.22)$$

$\mathbf{H}_{k+1}^{-1}$  é simétrico e positivo definido. Para atender a Eq.(3.22) a condição de curvatura  $\mathbf{s}_k^T \gamma_k > 0$  deve ser válida, o que pode ser garantido por um comprimento de passo adequado.

A equação da secante se define exclusivamente o  $\mathbf{H}_{k+1}^{-1}$ .

### 3.8.2 A abordagem L-BFGS

Uma das principais vantagens da abordagem BFGS é que ela evita o cálculo explícito de segundas derivadas. No entanto, não é adequada para problemas com um número alto de  $n$  de parâmetros do modelo, devido ao grande número de operações BFGS com  $O(n^2)$  e aos altos custos de armazenagem para a matriz grande e denso Hessiana. Para esses grandes problemas, foi desenvolvida uma variação da abordagem BFGS, conhecida como método BFGS de memória limitada (L-BFGS). Em vez de se calcular e armazenar a matriz Hessiana explicitamente, o L-BFGS armazena a alteração nos gradientes  $\gamma$  e nos modelos  $\mathbf{s}$  das últimas  $m$  iterações. Assim, utiliza informações de curvatura das iterações recentes para calcular uma aproximação da  $\mathbf{H}_{k+1}^{-1}$ .

### 3.9 Regularização nos problemas de inversão

Os problemas de identificação de parâmetros em geral possuem dados insuficientes e soluções não únicas, que, portanto, tornam os problemas mal-postos. Estes tipos de problemas precisam de informações prévias incorporadas ao problema inverso através de técnicas de regularização, para obter os resultados desejados. As estratégias de regularização aceleram a convergência do problema inverso, como as de Tikhonov (TN) (TIKHONOV, 1963) e Variação Total (VT) (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992) comumente utilizadas.

#### 3.9.1 Regularização Tikhonov (TN)

A primeira regularização empregada é definido como uma norma  $L_2$  do gradiente do parâmetro de controle como  $\lambda$  e  $\mu$

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \frac{R_\lambda}{2} \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \nabla \lambda \, d\Omega + \frac{R_\mu}{2} \int_{\Omega} \nabla \mu \cdot \nabla \mu \, d\Omega \quad (3.23)$$

onde  $R_\lambda$  e  $R_\mu$  são parâmetros de regularização que controlam a quantidade de penalidade aplicada nos  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente. Esta regularização é conhecida como Tikhonov (TIKHONOV et al., 1995), é o esquema mais utilizado na literatura. Normalmente, o esquema de TN impede que variações espacialmente rápidas de material se transformem em soluções para o problema do meio inverso e tende a produzir modelos mais suaves (GAO; HUANG, 2019). Portanto interfaces com uma variação grande de materiais não podem ser bem reconstruídas ao utilizar este esquema.

#### 3.9.2 Regularização Variação Total (VT)

A segunda regularização utilizada é definida em termos de seminorma dos parâmetros de controle. A sua expressão é dada por:

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \frac{R_\lambda}{2} \int_{\Omega} (\nabla \lambda \cdot \nabla \lambda + \delta)^{\frac{1}{2}} \, d\Omega + \frac{R_\mu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mu \cdot \nabla \mu + \delta)^{\frac{1}{2}} \, d\Omega \quad (3.24)$$

onde  $R_\lambda$  e  $R_\mu$  são parâmetros da regularização. Esta regularização conhecida como, Variação Total, impede que variações espacialmente rápidas de material se transformem em soluções para o problema do meio inverso e tende a produzir modelos mais suaves. Portanto, interfaces com uma variação grande de materiais não podem ser bem reconstruídas ao utilizar o esquema.

Ao contrário do TN, a regularização de variação total preserva interfaces com diferença grande entre as interfaces. Além disso, a VT ainda penaliza as oscilações espaciais de material em regiões-alvo suaves. Para modelos complexos ou dados que contem ruídos, a

regularização de VT de primeira ordem pode ser menos eficiente e outras variações desta regularização podem ser utilizadas (GAO; HUANG, 2019).

### 3.9.3 Regularização na parametrização adotada

As duas regularizações mais utilizadas na literatura, descritas nos tópicos anteriores, são geralmente empregadas em conjunto para uma convergência melhor. No entanto, quatro parâmetros devem ser controlados e a escolha adequada de cada parâmetro pode ser um desafio. Na abordagem de otimização topológica os dois parâmetros de Lamé podem ser parametrizados utilizando a pseudo-densidade, reduzindo o número de variáveis a serem invertidas. As duas regularizações para a pseudo-densidade podem ser definidas como:

$$\mathcal{R}(\rho) = \frac{R_\rho}{2} \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \nabla \rho \, d\Omega \quad (3.25)$$

$$\mathcal{R}(\rho) = \frac{R_\rho}{2} \int_{\Omega} (\nabla \rho \cdot \nabla \rho + \delta)^{\frac{1}{2}} \, d\Omega \quad (3.26)$$

onde o  $R_\rho$  é um parâmetro para controlar a pseudo-densidade e  $\delta$  torna  $R$  diferenciável quando o gradiente do parâmetro de controle desaparece. Nesta regularização, os quatro parâmetros utilizados na abordagem padrão são reduzidos a dois parâmetros, o que pode resultar em uma melhor convergência da otimização e o espaço de busca para o peso mais adequado é reduzido. Empregando um peso de regularização apropriado é possível evitar um mínimo indesejável e melhorar a convergência. A parametrização escolhida permite uma busca menos extensiva do peso ótimo para cada modelo estudado.

## 4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo são discutidos o método adjunto e é apresentada a análise de sensibilidade em relação às variáveis de projeto que serão utilizadas no processo de otimização

### 4.1 Método adjunto

Os gradientes da função objetivo em relação às variáveis de projeto são necessários para algoritmos de otimização. Existem algumas abordagens para calcular o gradiente, como o método de diferenças finitas e o método adjunto.

Na abordagem de diferenças finitas o gradiente do funcional na direção  $\delta m$  é aproximado calculando o quociente de diferença, para o caso de diferença central

$$\frac{d\tilde{J}(m)}{dm}\delta m = \frac{\tilde{J}(m + h\delta m) - \tilde{J}(m - h\delta m)}{2h} + \mathcal{O}(|h|^2) \quad (4.1)$$

quanto maior a ordem do diferenças finitas maior é a aproximação da derivada. A vantagem dessa abordagem é a facilidade de implementação. No entanto, a determinação de um comprimento de passo adequado  $h$  pode ser difícil. O custo computacional aumenta linearmente com a dimensão de  $m$ .

A outra abordagem, o método adjunto, pode ser definido como um método geral para calcular o gradiente de um funcional que depende de um conjunto de variáveis de estado, que são soluções obtidas do problema direto. As variáveis adjuntas são as soluções de um sistema linear adjunto e podem ser consideradas como variáveis que medem a perturbação do problema em relação às variáveis de estado (PLESSIX, 2006). Do ponto de vista numérico, essa abordagem é interessante pois apenas um sistema linear adicional precisa ser resolvido e geralmente o cálculo do gradiente com relação aos parâmetros do modelo é equivalente a uma ou duas avaliações da modelagem direta. Os gradientes da função objetivo, também chamados de sensibilidades, permitem avaliar como alterações nas variáveis de controle interferem no problema.

Considere um problema geral de interesse com um sistema de equações diferenciais parciais  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}$  e um funcional  $J(\mathbf{u}(m), m)$ , onde  $\mathbf{u}$  é a solução das EDP's no problema direto e  $m$  é a variável de controle. Calculando a derivada do funcional  $J$  em relação a  $m$  por meio da regra da cadeia (FUNKE, 2014), obtém-se:

$$\frac{dJ}{dm} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dm} + \frac{\partial J}{\partial m} \quad (4.2)$$

onde a derivada do  $\mathbf{u}$  em relação a  $m$  pode ser obtida derivando o problema direto, i.e.,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dm} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial m} = 0 \quad (4.3)$$

isolando a derivada da solução do problema direto em relação a variável de controle

$$\frac{d\mathbf{u}}{dm} = - \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial m} \quad (4.4)$$

substituindo Eq.4.4 em Eq.4.2,

$$\frac{dJ}{dm} = - \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial m} + \frac{\partial J}{\partial m} \quad (4.5)$$

o vetor adjunto  $\lambda^*$  pode ser definido como

$$\lambda^* = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \quad (4.6)$$

onde o asterisco representa transposto hermitiano, por fim o problema adjunto pode ser definido como:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \mathbf{u}} \lambda^* = \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.7)$$

assim a sensibilidade do funcional em relação ao variável de projeto é definido como:

$$\frac{dJ}{dm} = -\lambda^* \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial m} + \frac{\partial J}{\partial m} \quad (4.8)$$

O cálculo da solução adjunta  $\lambda$  requer apenas uma resolução linear, independente da dimensão de  $m$  o que é vantajoso para problema de onda elástica. O método de diferenças finitas pode ser utilizado como ferramenta de verificação(FUNKE, 2014).

## 4.2 Análise de Sensibilidade do problema da onda elástica utilizando o método adjunto

A análise de sensibilidade auxilia na determinação dos gradientes do funcional, ela indica como são efetuadas as variações na variável de estado quando as variáveis de controle são atualizadas. As equações adjuntas para onda elástica podem ser obtidas de diversas formas, como análise de perturbação e método de multiplicadores de Lagrange (PLESSIX, 2006).

O problema pode ser escrito na sua forma aumentada escrevendo o Lagrangiano do problema  $\mathcal{L}$ , onde o funcional  $F$  é aumentado junto com as equações de onda elástica

utilizando os multiplicadores de Lagrange, assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \rho) = & \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_m^j) \cdot (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_m^j) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( -(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( -\mu \nabla^2 \mathbf{u} \right) d\Omega dt - \boldsymbol{\xi} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

com

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x, 0) = 0 \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{u}$  é deslocamento a variável de estado,  $\boldsymbol{\xi}$  é o multiplicador de Lagrange.

Em seguida, busca-se satisfazer a condição de estacionariedade de  $\mathcal{L}$ , exigindo que a sua derivada de Fréchet ou sua primeira variação seja nula,

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \delta_s \mathcal{L} \\ \delta_m \mathcal{L} \\ \delta_c \mathcal{L} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

As condições de optimalidade para o problema são apresentadas a seguir.

#### 4.2.1 A primeira condição de optimalidade (Problema de estado)

A primeira variação do  $\mathcal{L}$  em relação ao multiplicador de Lagrange  $\boldsymbol{\xi}$  é dada por:

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{L} = 0 \quad (4.13)$$

ou ainda,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega dt = 0 \quad (4.14)$$

Como  $\boldsymbol{\xi}$  é arbitrário, para uma solução não trivial os termos multiplicados devem ser nulas. Com isso obtém-se a própria equação da onda. A primeira condição de optimalidade resulta no próprio problema direto de propagação de onda.

### 4.2.2 A segunda condição de optimalidade (Problema adjunto)

De forma similar, derivando o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  em relação a variável de estado  $u$  em direção ao  $v$  :

$$L_u(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \rho; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\mathbf{u} + \varepsilon v, \boldsymbol{\xi}, \rho) - L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \rho)}{\varepsilon} \quad (4.15)$$

assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, \rho; v) = & \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_m^j) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega dt - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) d\Omega dt}_I \\ & - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( -(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) d\Omega dt}_{II} - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( -\mu \nabla^2 \mathbf{v} \right) d\Omega dt}_{III} = 0 \quad (4.16) \end{aligned}$$

Cada termo é tratado individualmente e no fim são juntados novamente

$$(I) \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) d\Omega dt = \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right) d\Omega dt}_a - \boldsymbol{\xi} \dot{v} \Big|_0^T \quad (4.17)$$

$$(a) \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right) d\Omega dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} v \right) d\Omega dt + \dot{\boldsymbol{\xi}} v \Big|_0^T \quad (4.18)$$

o primeiro termo fica como:

$$(I) \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( \rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) d\Omega dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} v \right) d\Omega dt - \boldsymbol{\xi} \dot{v} \Big|_0^T + \dot{\boldsymbol{\xi}} v \Big|_0^T \quad (4.19)$$

aplicando o teorema de divergente no segundo termo:

$$\begin{aligned} (II) \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \left( -(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) d\Omega dt = & \int_0^T \int_{\Omega} \left( -(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) v \right) d\Omega dt - \\ & \int_0^T \int_{\partial \Omega} \left( -(\lambda + \mu) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) ds dt \quad (4.20) \end{aligned}$$

De forma similar, aplica-se o teorema divergente no terceiro termo:

$$(III) \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} \xi \left( -\mu \nabla^2 \mathbf{v} \right) d\Omega dt = \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} -\mu \nabla \xi \nabla \mathbf{v} d\Omega dt}_* - \int_0^T \int_{\partial\Omega} -\mu \xi \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot ds dt \quad (4.21)$$

$$(*) \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} -\mu \nabla \xi \nabla \mathbf{v} d\Omega dt = - \int_0^T \int_{\Omega} -\mu \nabla^2 \xi \mathbf{v} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} -\mu \nabla \cdot \xi \mathbf{v} ds dt \quad (4.22)$$

Reagrupando

$$(III) \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} \xi \left( -\mu \nabla^2 \mathbf{v} \right) d\Omega dt = - \int_0^T \int_{\Omega} -\mu \nabla^2 \xi \mathbf{v} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} -\mu \nabla \cdot \xi \mathbf{v} ds dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} -\mu \xi \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot ds dt \quad (4.23)$$

juntando todas as equações e substituindo de volta na Eq.(4.16),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\mathbf{u}, \xi, \rho; v) = & \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_m^j) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} v \right) d\Omega dt - \xi \dot{v} \Big|_0^T + \dot{\xi} v \Big|_0^T \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \left( -(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \xi) v \right) d\Omega dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left( -(\lambda + \mu) \nabla \cdot \xi \cdot v \cdot \mathbf{n} \right) ds dt - \int_0^T \int_{\Omega} -\mu \nabla^2 \xi \mathbf{v} d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\partial\Omega} -\mu \nabla \cdot \xi \mathbf{v} ds dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} -\mu \xi \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot ds dt = 0 \quad (4.24) \end{aligned}$$

### 4.2.3 A terceira condição de optimalidade (Problema de controle)

Como o  $v$  é arbitrário, então os termos que multiplicam devem ser nulas, assim chega-se no problema adjunto:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \xi) - \mu \nabla^2 \xi = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_s} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_{obs}^j) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (4.25a)$$

$$\text{s.a.} \quad \left( -\mu \nabla \cdot \xi - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \xi) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.25b)$$

$$\xi = 0. \quad (4.25c)$$

$$\dot{\xi} = 0. \quad (4.25d)$$

Pode-se notar que os operadores gradiente, laplaciano aplicados no problema adjunto são idênticos aos operadores existentes do problema de estado. Isso se deve ao fato de



que o problema é auto-adjunto.

# 5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas as ferramentas computacionais utilizadas para implementação do problema de otimização topológica aplicado ao problema de inversão. Deste modo, é discutido sobre o software empregado para a solução de EDP's utilizando o método de elementos finitos. Em seguida, a análise de sensibilidade via o método adjunto é apresentada. Por fim, a implementação da otimização e um fluxograma do algoritmo desenvolvido é apresentado.

## 5.1 Solução de equações diferenciais

As equações governantes da onda elástica podem ser resolvidas por meio de softwares que utilizam o método de elementos finitos para a resolução de suas equações diferenciais parciais. Por exemplo, os softwares comerciais Ansys e Abaqus têm pacotes predefinidos para os modelos de cada física, mas são pouco flexíveis para customização da implementação. Outro software comercial, COMSOL<sup>®</sup>, permite a inserção das equações na sua forma fraca, a implementação pode ser realizada ainda de forma manual utilizando o programa Matlab<sup>®</sup>. Apesar das facilidades, os softwares comerciais apresentam pouca flexibilidade no manuseio e customização da implementação, além de envolver custos de aquisição de licença. Em contra-partida, os softwares livres e *Open Source* têm ganhado bastante interesse devido à flexibilidade e a disponibilidade de algoritmos de forma pública. Entre eles podem ser citados os softwares deal.II (BANGERTH; HARTMANN; KANSCHAT, 2007), FreeFem++ (HECHT, 2012), NGSolve (SCHÖBERL, 2014) e FEniCS (ALNÆS et al., 2015). Estas plataformas são escritas na linguagem C++ e oferecem uma interface com maior flexibilidade para implementação de algoritmos numéricos. Entre estes softwares, o FEniCS apresenta interfaces para as linguagens C++ e Python, esta última possibilita a comunicação com as bibliotecas que permitem que as expressões sejam escritas numa linguagem de alto nível.

## 5.2 Soluções de equações diferenciais utilizando FEniCS

Os desenvolvedores da plataforma FEniCS o definem como uma biblioteca que contém vários componentes de software livre e códigos abertos, que tem a finalidade de resolver equações diferenciais de forma eficiente, utilizando o método dos elementos finitos de maneira automatizada. As equações diferenciais são escritas em sua forma fraca em UFL (ALNÆS et al., 2014) uma linguagem de domínio específico que permite uma notação próxima à matemática de forma compacta e intuitiva. Em seguida, FEniCS Form Compiler

(FFC) o compilador embutido do FEniCS interpreta a forma discreta da equação variacional e gera código na linguagem de C++ para montagem das matrizes no formato de Unified Form-Assembly Code (UFC). Este processo é realizado em conjunto com a biblioteca FIAT que permite o uso de diferentes espaços de funções e funções de base. As diferentes bibliotecas se comunicam utilizando o pacote DOLFIN, que permite interface para biblioteca de criação de malhas, escolha dos solvers e preconditionadores.

A comunicação entre todas as bibliotecas e módulos FEniCS é realizada através do DOLFIN. Este, possibilita também o uso de softwares externos para outras funcionalidades, incluindo pacotes de alta performance de álgebra linear como: PETSC, Trilinos e uBlas, bibliotecas de partição de malha como ParMETIS e SCOTCH e suporte de estruturas de formatos eficientes de I/O (HDF5). Além disso, é possível ter o processamento em paralelo com comunicação entre os nós dos processadores utilizando o MPI. A combinação dessas bibliotecas otimizadas origina uma plataforma eficiente ao mesmo tempo, flexível para geração de códigos de elementos finitos. A Fig.5.1 ilustra a estrutura interna do software FEniCS. Uma explicação detalhada de todos os seus componentes e a interação entre eles podem ser encontrados em (LOGG; MARDAL; WELLS, 2012).

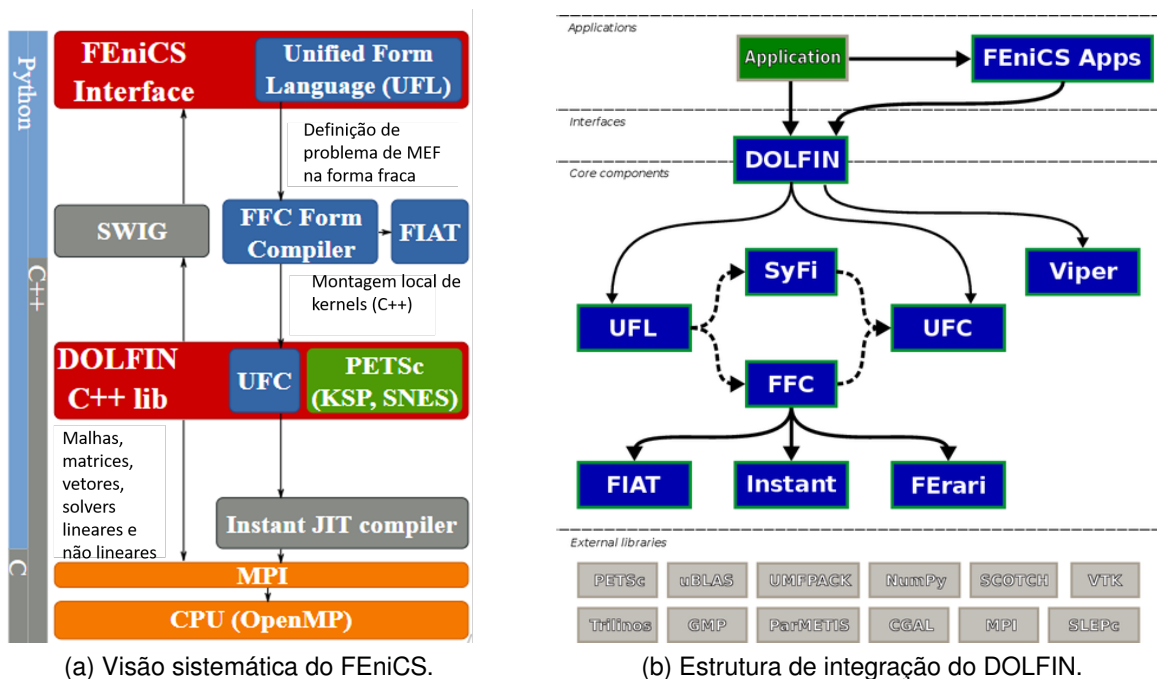


Figura 5.1 – Estrutura interna do FEniCS.

### 5.3 Solução de equações adjuntas

As equações adjuntas podem ser determinadas a partir da equação de estado de três maneiras, que serão apresentadas a seguir. A abordagem tradicional é derivar a forma

contínua das equações adjuntas a partir das equações de estado no contínuo, esse processo é realizado geralmente na derivação manual das equações (ver seções 4.1 e 4.2) ou por meio de diferenciação simbólica. Embora essa maneira permita que o programador tenha um grau de controle maior sobre cada operação de acesso à memória e ponto flutuante, a implementação desses códigos pode levar muito tempo (FARRELL et al., 2013).

Outra alternativa é derivar as equações com ferramentas de diferenciação automática a partir da equação de estado implementada previamente. Uma terceira maneira consiste em derivar as equações adjuntas após ter discretizado as equações de estado. A implementação desse método é possível utilizando o pacote *pyadjoint* que possibilita uma diferenciação automática de modelos adjuntos e tangentes lineares. Esta biblioteca registra a estrutura temporal das equações à medida que são resolvidas e a grava numa fita. A partir disto, pode-se manipular simbolicamente o sistema anotado e derivar a estrutura das equações adjuntas ou das equações lineares tangentes. A integração do *pyadjoint* e o FEniCS é realizada através do DOLFIN, interpretando o modelo adjunto e o convertendo para a mesma linguagem de alto nível da equação de estado. A Fig.5.2 mostra de forma resumida as abordagens para derivação de equações adjuntas no ambiente FEniCS.

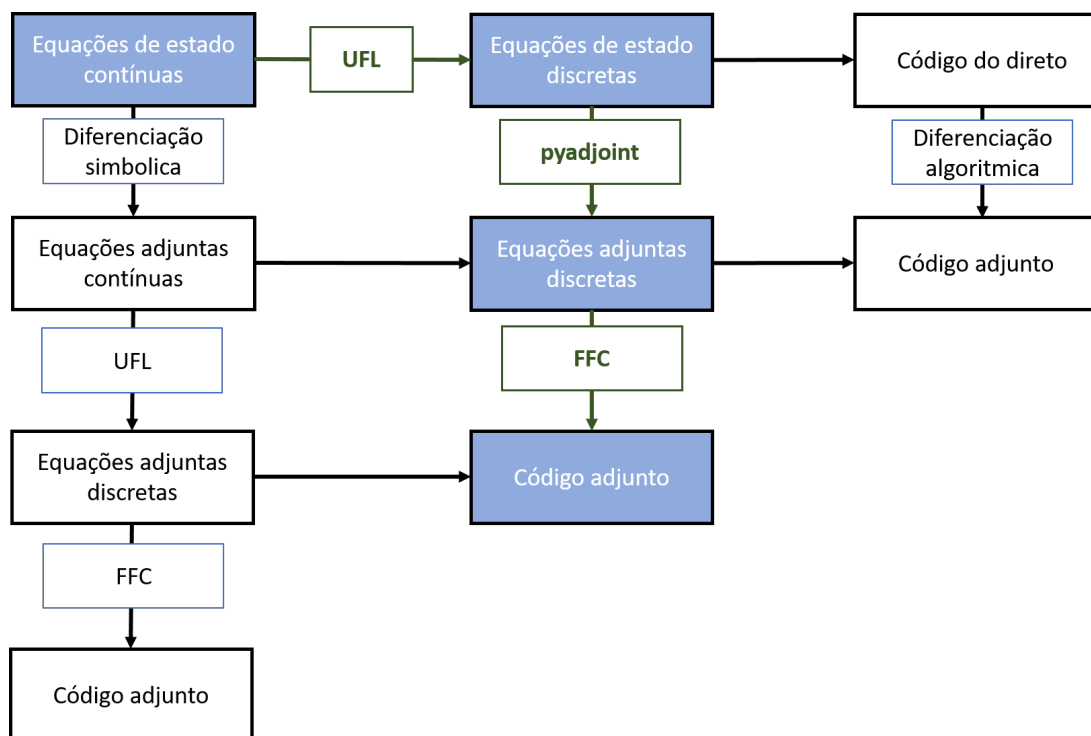


Figura 5.2 – Abordagens de implementação da equação adjunta.

A abordagem adotada pelo dolfin-adjoint é aplicável apenas aos modelos criados utilizando a interface Python do FEniCS, pois apenas a interface Python tem acesso durante o tempo de execução à descrição simbólica do problema direto no formato UFL. Outra vantagem do uso do diferenciador automático além de agilizar o processo de derivação

de adjunto, é a alocação eficiente de memória, e a análise de ponteiro é passível de ser paralelizada utilizando o MPI.

## 5.4 Solução da otimização topológica

Na implementação da otimização topológica, a parte de elementos finitos e o problema adjunto na linguagem python são considerados conjuntamente. Inicialmente é definido um domínio fixo junto aos elementos e o grau de interpolação para definir a malha. As condições iniciais e condições de contorno são definidos e um valor inicial para a variável de projeto é atribuído. Em seguida, as equações do estado são resolvidas utilizando o MEF. Obtidos os valores de deslocamento, a função objetivo é calculada e em seguida realizada uma análise de sensibilidade utilizando o método adjunto. Estes dados são fornecidos ao otimizador quasi-newton com memória limitada L-BFGS-B, em seguida é dado um passo de otimização e a variável do projeto é atualizada, conseqüentemente, os campos associados aos parâmetros de Lamé são atualizados. Esse processo é realizado até que o critério de convergência seja atingido. O fluxograma da implementação do problema junto com os softwares empregados são ilustrados na Fig.5.3

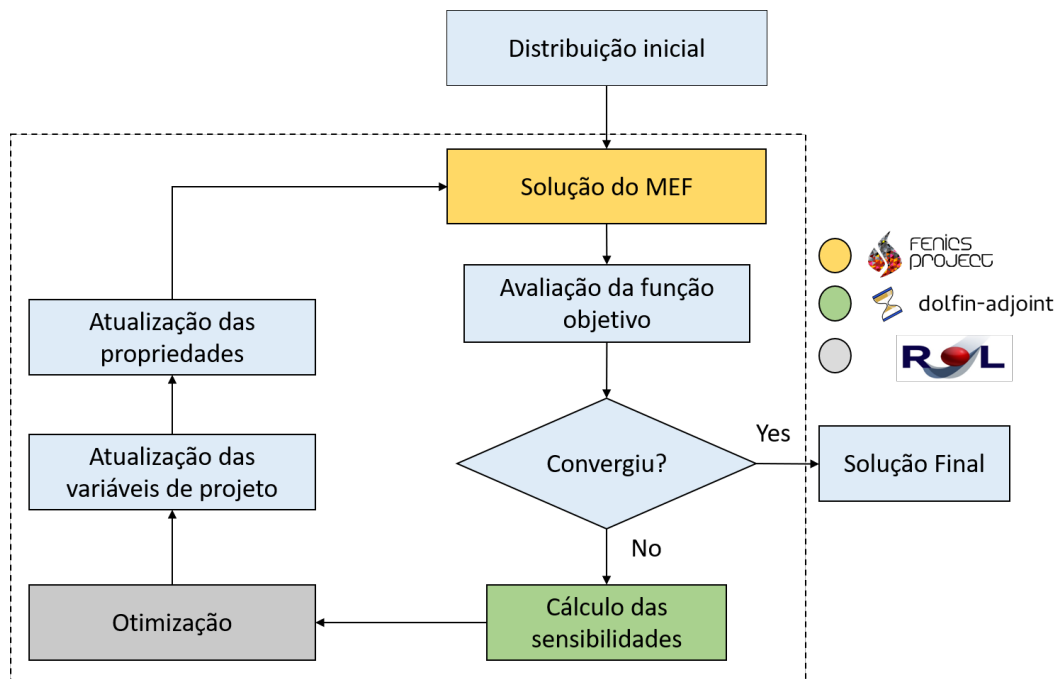


Figura 5.3 – Fluxograma do algoritmo de otimização topológica para inversão de onda.

## 6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados de inversão obtidos para a formulação proposta utilizando otimização topológica e uso de modelo de material. A fim de analisar a resposta obtida para a metodologia de inversão elástica, utilizaram-se dois modelos de velocidade combinados a dois materiais distintos, que possuem diferentes inclusões. Dessa forma, os dois modelos de velocidades são analisados utilizando os diferentes modelos de materiais. Além disso, duas regularizações são empregadas para sair de mínimos locais e melhorar a convergência.

### 6.1 Considerações gerais

Nesta seção, a formulação proposta é examinada por meio de dois exemplos numéricos com diferentes inclusões, os quais são resolvidos utilizando os modelos de materiais apresentados anteriormente.

Foi considerado um domínio com extensão de 500 por 500 metros em todos os experimentos ou simulações conduzidas nesta dissertação. Além disso, utilizaram-se três fontes igualmente espaçadas dentro do domínio, as quais são mantidas fixas, assim como os receptores conforme ilustrado na Figura 6.1. No que diz respeito a malha de elementos, considerou-se uma malha composta por 6400 elementos triangulares lineares com orientação diagonal representado na Figure 6.2. A densidade é considerada constante e igual a  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  em todo o domínio.

Nas simulações conduzidas utiliza-se uma fonte Ricker com frequência central de 2Hz para a excitação do domínio, implementado como força de volume definida na Equação 2.33. Pode-se verificar os parâmetros empregados para ambos os modelos na Tabela 6.1.

Parâmetros	Valores
$L$	500(m)
$H$	500(m)
$h_f$	90(m)
$h_s$	100(m)
$\Delta x$	$L/3$ (m)
$f$	2 Hz
$dt$	0.01
$T_{total}$	5 segundos

Tabela 6.1 – Parâmetros gerais utilizados nos exemplos numéricos.

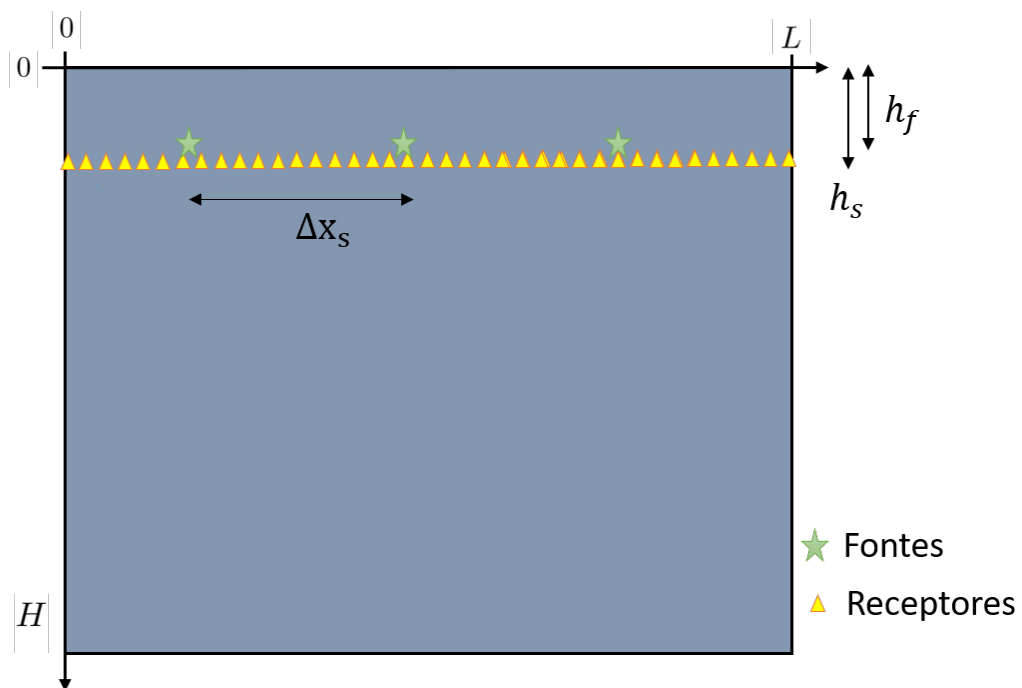


Figura 6.1 – Posição das fontes e receptores.

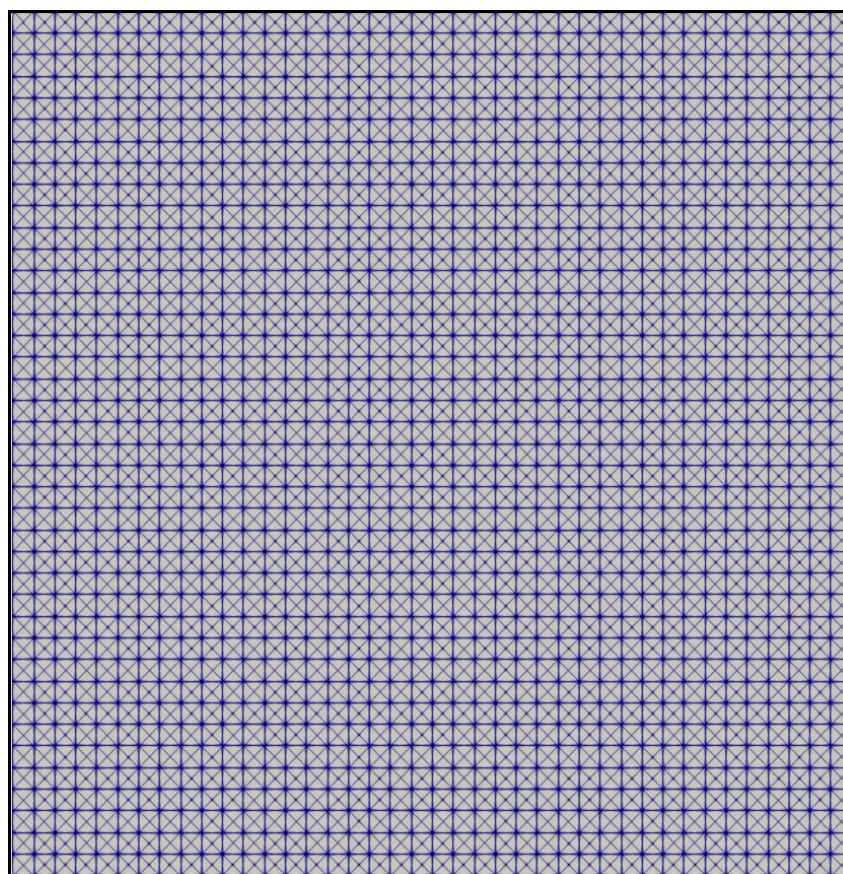


Figura 6.2 – A malha utilizada durante as inversões.

Para a modelagem dos dados calculados foram empregados os mesmos parâmetros adotados na modelagem dos dados observados. As propriedades dos modelos variam para as inclusões e o restante do domínio, a variação espacial da pseudo-densidade é definida como:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{para a inclusão.} \\ 0, & \text{para restante do domínio} \end{cases} \quad (6.1)$$

Os parâmetros de Lamé são parametrizados utilizando o modelo de material adotado para cada etapa empregando valores de propriedades  $\mu_{min} = 3.86\text{GPa}$ ,  $\mu_{max} = 5.86\text{GPa}$  e  $\lambda_{min} = 6.88\text{GPa}$ ,  $\lambda_{max} = 9.88\text{GPa}$ , de forma que os valores dos materiais no domínio são dados por:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 6.86\text{GPa}, & \text{para a inclusão.} \\ 9.88\text{GPa}, & \text{para restante do domínio} \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 3.86\text{GPa}, & \text{para a inclusão.} \\ 5.86\text{GPa}, & \text{para restante do domínio} \end{cases} \quad (6.3)$$

Assim estes valores dos parâmetros de Lamé são considerados na equação de onda elástica. A definição dos campos dos parâmetros do Lamé através dos valores da pseudo densidade são devido à parametrização adotada. Para integração no tempo emprega-se um esquema implícito de diferenças finitas centrais com passo de tempo  $t = 0.04$ , e a duração total da simulação é de 5 segundos. Os dados sintéticos de deslocamento são gerados para este modelo de velocidade, os quais são utilizados como os dados de referência para o algoritmo de otimização.

### 6.1.1 Modelo Camembert

O primeiro modelo considerado é composto por dois materiais. Este modelo é constituído por um meio homogêneo de velocidade constante, com uma anomalia circular na região central, com propriedade 30% superior ao restante do domínio. Trata-se de um modelo conhecido na literatura como modelo Camembert (GAUTHIER; VIRIEUX; TARANTOLA, 1986). As propriedades e configurações geométricas do modelo estão listadas na Tabela 6.2.



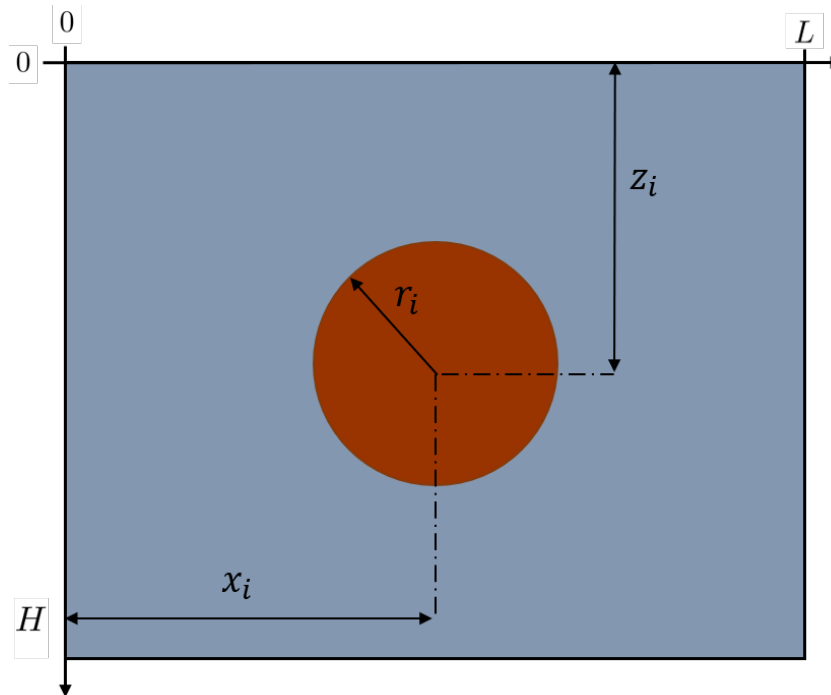


Figura 6.3 – Modelo de velocidade Camembert.

Parâmetros	Valores
$L$	500(m)
$H$	500(m)
$x_i$	250(m)
$z_i$	250(m)
$r_i x$	50(m)

Tabela 6.2 – Parâmetros gerais utilizados no modelo Camembert.

### 6.1.2 Modelo com Inclusões Retangulares

O segundo modelo analisado consiste em um meio homogêneo de velocidade constante, com duas anomalias retangulares na região central. As inclusões apresentam a mesma largura e estão separadas com material homogêneo. As propriedades e configurações geométricas do modelo estão listadas na Tabela 6.3.

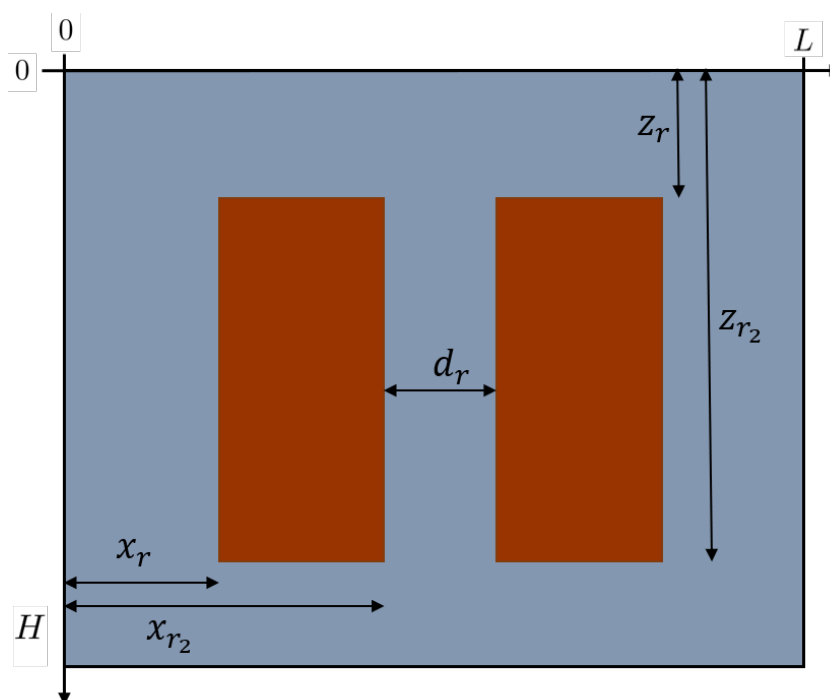


Figura 6.4 – Modelo de velocidade com inclusão Retangular

Parâmetros	Valores
$L$	500(m)
$H$	500(m)
$x_r$	100(m)
$x_{r2}$	200(m)
$d_r$	100(m)
$z_r$	100(m)
$z_{r2}$	400(m)

Tabela 6.3 – Parâmetros gerais utilizados no modelo com inclusões retangulares.

## 6.2 Modelo de material SIMP

O primeiro modelo de material considerado é o modelo SIMP, em que os campos de parâmetros de Lamé e os campos de pseudo densidade estão relacionados utilizando um modelo polinomial definido em Eq. (3.5) e Eq. (3.6). O modelo de SIMP é o modelo de material mais utilizado em otimização topológica, em que a penalização linear no modelo de material é o que mais se aproxima ao utilizar o valor de propriedade como variável de controle durante a otimização. A vantagem de utilizar o modelo de material é que este permite a busca por resultados mais discretos aumentando a penalização e desfavorecendo os materiais intermediários.

Os campos das primeira e segunda propriedades de Lamé são de interesse durante a inversão, porém isto implica em inversão multiparamétrico. Na parametrização proposta, o problema é convertido em um problema com uma variável de projeto, em que a pseudo densidade é invertida e posteriormente parametriza-se os campos associados utilizando o modelo de material. Para estimativa inicial da otimização considera-se um meio homogêneo com um valor intermediário para a pseudo densidade de  $\alpha = 0.50$ , de forma que o objetivo da otimização é distribuir o material no domínio minimizando a diferença de deslocamento nos campos de referência e campo calculado. Os resultados das inversões obtidas a partir de um meio homogêneo utilizando o modelo SIMP estão apresentadas na Figura 6.5.

Os resultados para o modelo Camembert se encontram na primeira coluna da figura, enquanto se encontra na segunda coluna os resultados do modelo de inclusão retangular. Cada linha representa os resultados obtidos para diferentes penalizações do modelo SIMP. Observa-se que as inclusões nos dois modelos e suas posições no domínio são identificados.

Os campos de propriedade de Lamé associados a cada uma das penalizações para ambos os modelos são apresentados na Figura 6.6. Observa-se que mesmo com uma penalização linear no modelo SIMP as inclusões em ambos os modelos são encontrados. Além de encontrar as suas posições, os valores de propriedades são bem próximos ao modelo de referência. Ao aumentar o valor da penalização, as regiões cinzas, indicando materiais intermediários são reduzidas. O resultado da inversão do modelo Camembert é bem próximo do modelo de referência, entretanto, no modelo com inclusão retangular ambas inclusões são recuperadas, porém, ainda se observa a existência de uma região cinza entre as duas inclusões. Pode-se tratar a situação, isto é, reduzir a região cinza através da consideração de uma malha mais refinada

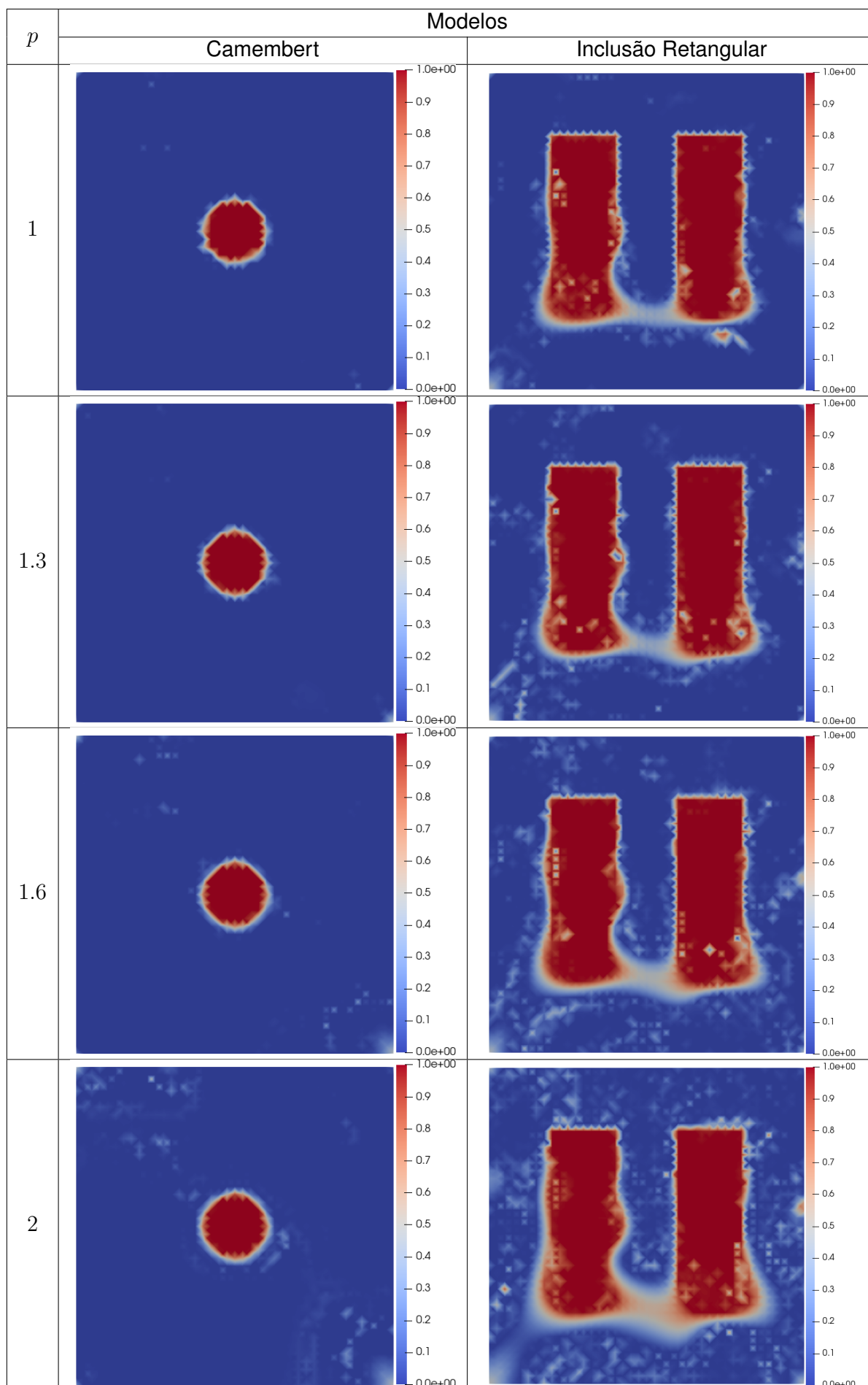


Figura 6.5 – Resultado da inversão para a pseudo-densidade utilizando o modelo de material SIMP considerando diferentes penalizações com crime inverso.

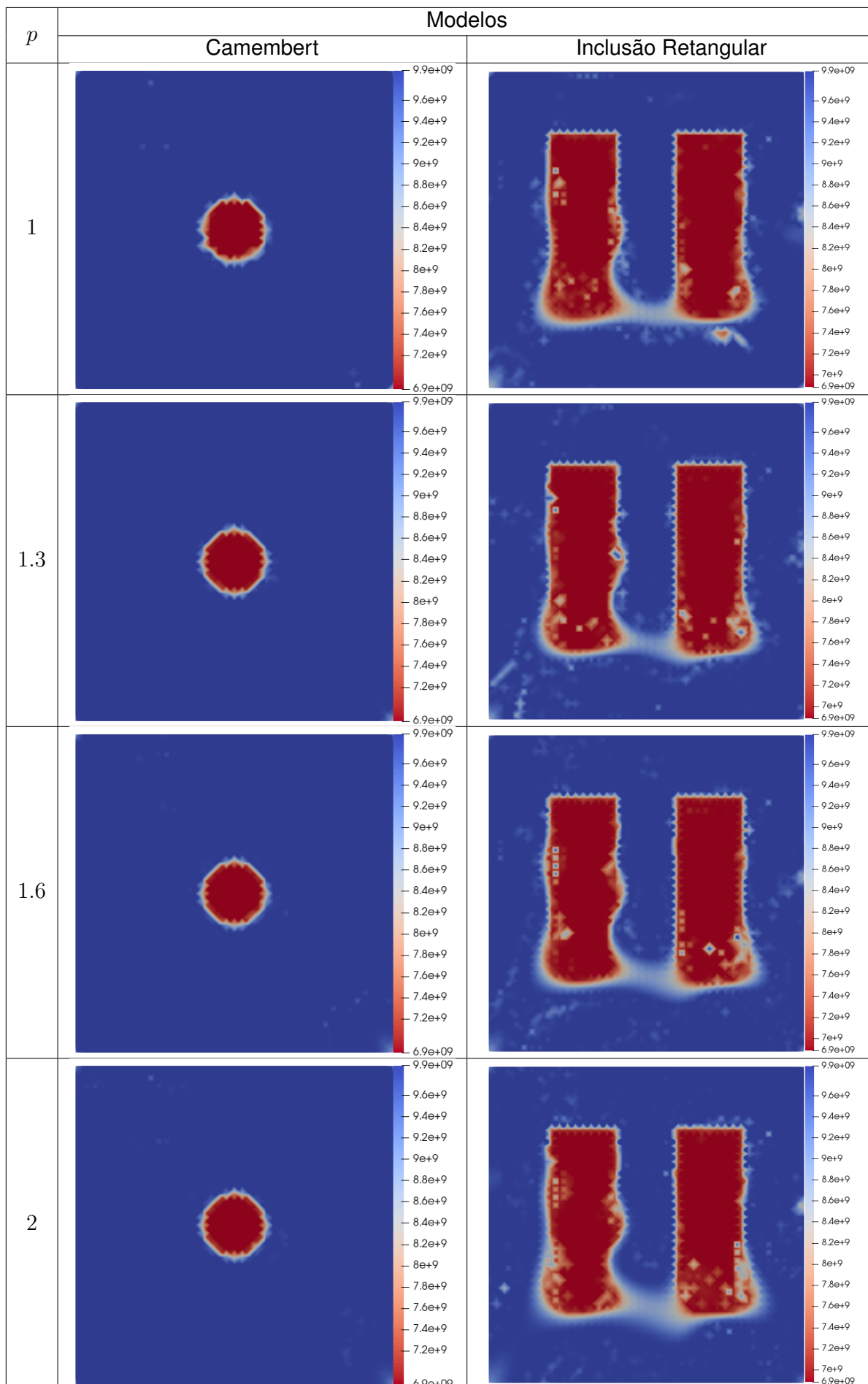
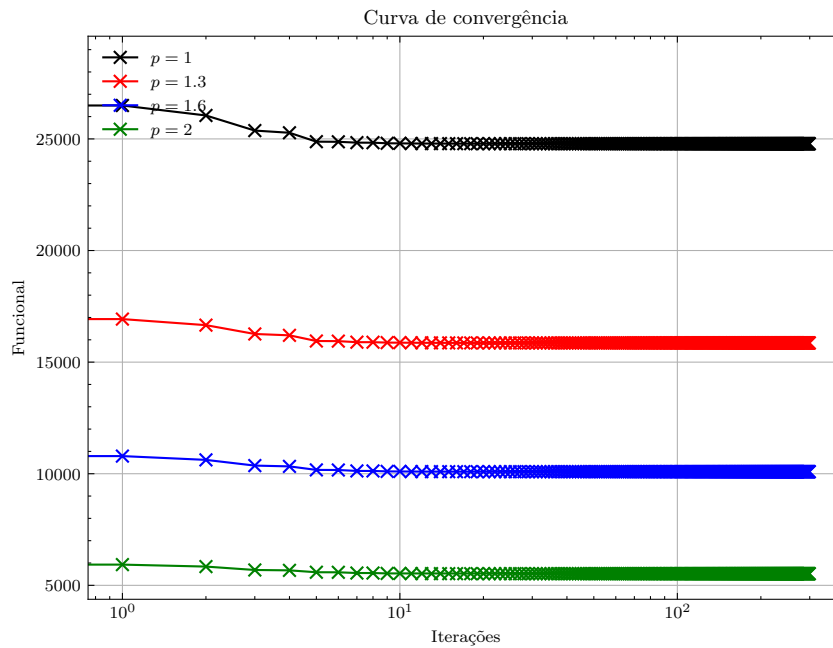
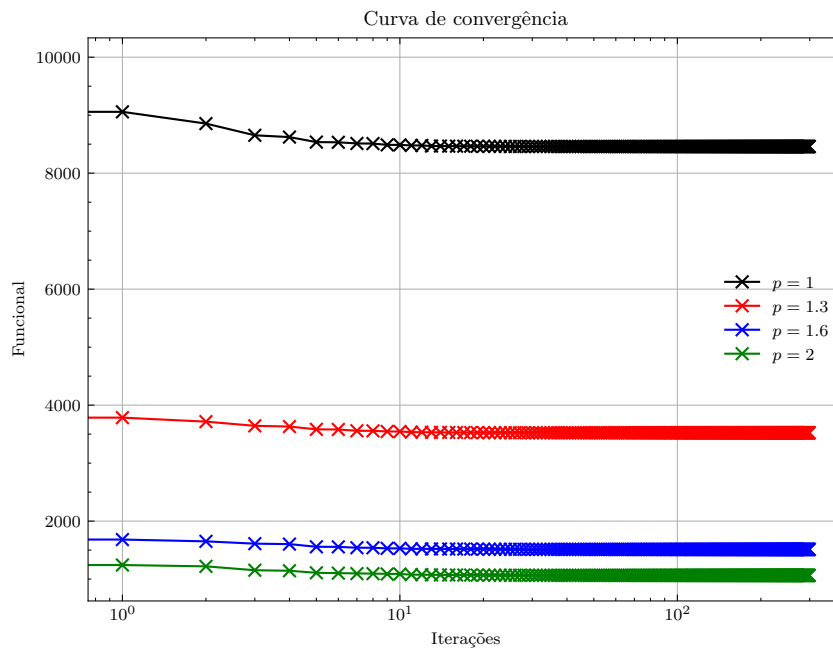


Figura 6.6 – Resultado da inversão para a propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material SIMP considerando diferentes penalizações com crime inverso.

A Figura 6.7 apresenta a evolução da função objetivo durante as iterações para ambos os modelos analisados. O eixo  $x$  representa as iterações e está em escala logarítmica para uma melhor comparação e o eixo  $y$  representa o valor do funcional. Os valores altos da função objetivo se devem à multiplicação de uma constante na função objetivo para melhorar a convergência e melhor escalonamento dos gradientes. Nota-se que o aumento na penalização do modelo de material implica em menores valores de função objetivo.



(a) Curva de convergência para o modelo camembert.



(b) Curva de convergência para o modelo com inclusões retangulares.

Figura 6.7 – Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo SIMP.

## 6.3 Modelo de material Pico

### 6.3.1 Penalização Fixa

O segundo modelo de material considerado é o modelo Pico, onde os campos de parâmetros de Lamé e os campos de pseudo densidade estão relacionados utilizando um modelo gaussiano definido na Equação (3.10). Este modelo é comumente utilizado em problemas de projeto com múltiplos materiais, no entanto, neste trabalho o seu uso é explorado dentro de problema de identificação. Neste modelo, para penalizar os materiais intermediários e reduzir regiões cinzas no domínio é necessário reduzir o valor da penalização. Este modelo é sensível ao valor de penalização, sendo que um valor alto pode implicar em divergência nos resultados e uma penalização muito pequena pode resultar em dispersão numérica.

O campo de pseudo-densidade otimizada para ambos os modelos estão apresentados na Figura 6.8. Quatro penalizações diferentes para o modelo de material são consideradas. A escolha da penalização depende da estimativa inicial utilizada, quanto mais próxima à estimativa inicial do modelo de referência, menor o valor da penalização a ser escolhido. É comum em otimização topológica considerar uma continuação nas penalizações, porém nesta seção as penalizações são mantidas fixas durante a otimização. Os campos associados ao primeiro parâmetro de Lamé estão apresentados na Figura 6.9.

Observa-se que para a penalização  $\sigma = 0.40$  e  $\sigma = 0.35$ , no caso do modelo Camembert, é identificada a posição da inclusão, porém difere estruturalmente. No caso do modelo com inclusão retangular, as inclusões são identificadas, mas os resultados apresentam materiais espúrios e as arestas verticais estão destorcidas. Vale ressaltar também que toda a região cinza presente no campo de pseudo densidade é eliminada, isso ocorre porque cada penalização resulta em campo diferente de parâmetros de Lamé, o que se deve a não linearidade do modelo de material.

Para as penalizações  $\sigma = 0.25$  e  $\sigma = 0.20$ , em ambos os modelos a posição e as inclusões são identificadas e as propriedades identificadas estão próximas ao modelo de referência. Observa-se que as inversões utilizando o modelo Pico para ambos os modelos apresentam resultados bem discretos com interfaces bem identificadas entre os materiais, sem apresentar região cinza com material intermediário.

Pelos resultados obtidos, o modelo de material pico com a penalização se demonstra eficiente para resolver o problema de inversão elástica e permite reduzir as regiões cinzas sem adição de nenhum termo de regularização à função objetivo.

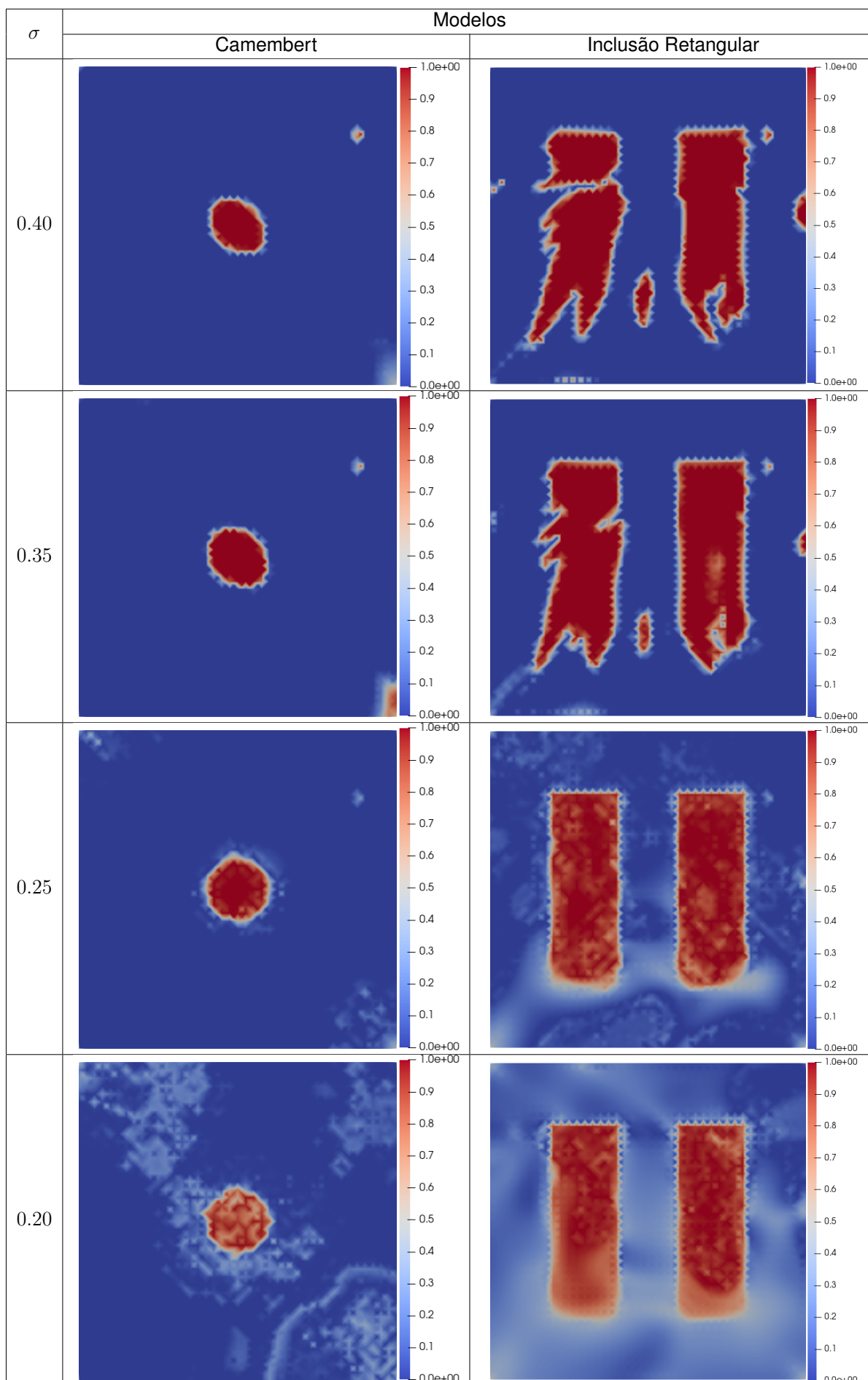


Figura 6.8 – Resultado da inversão para pseudo densidade utilizando o modelo de material Pico com penalização fixa com crime inverso.



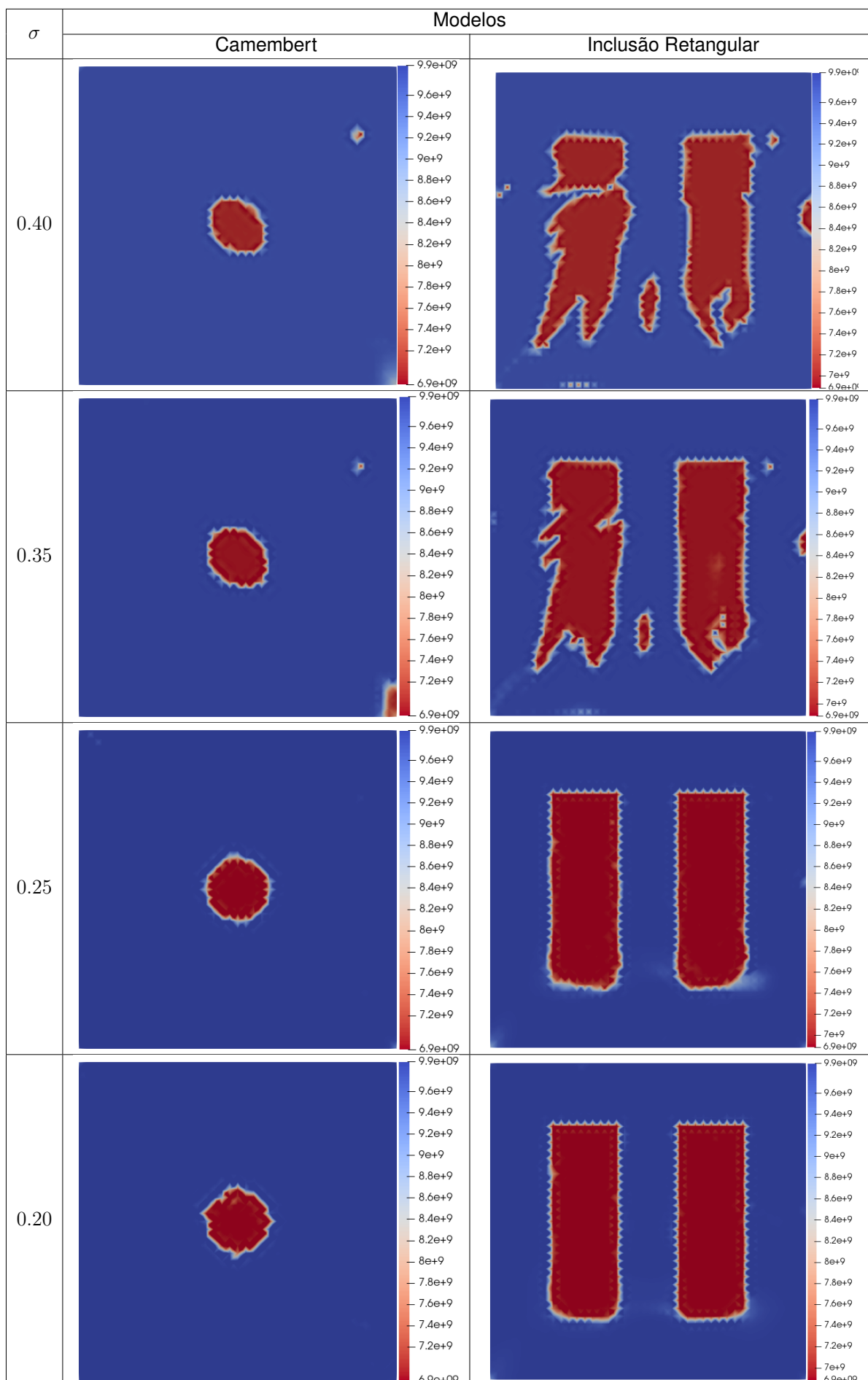
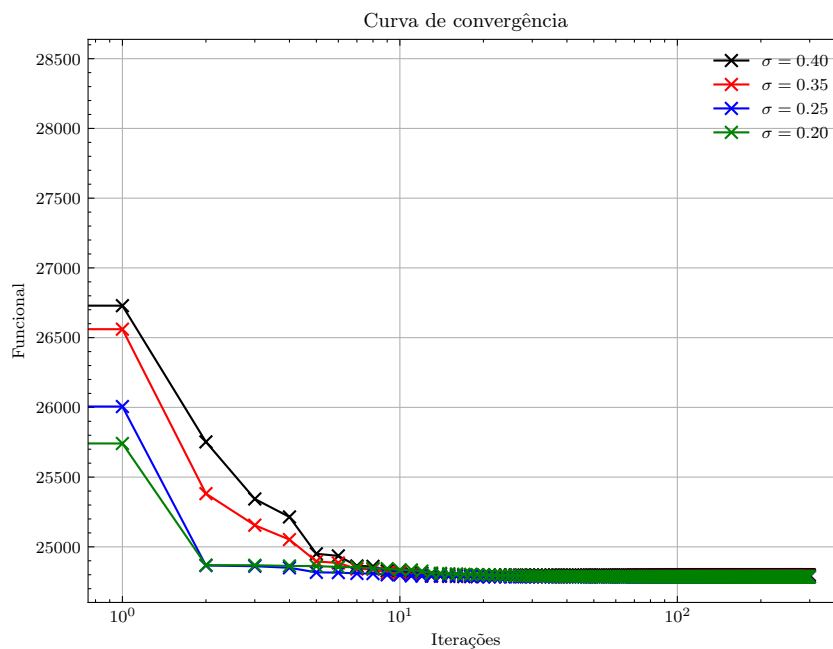
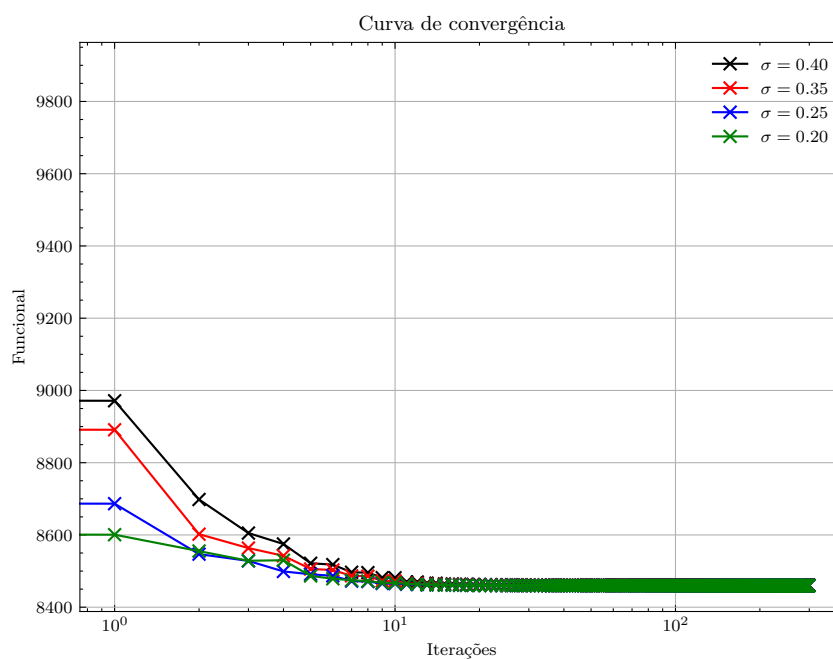


Figura 6.9 – Resultado da inversão para o parâmetro de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material Pico com penalização fixa com crime inverso.

As curvas de convergências para cada penalização estão apresentadas na Figura 6.10. Observa-se que um valor mais alto da penalização inicia com um valor mais alto de função objetivo.



(a) Curva de convergência para o modelo camembert.



(b) Curva de convergência para o modelo com inclusões retangulares.

Figura 6.10 – Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo Pico com penalização fixa.

### 6.3.2 Penalização Automática

Neste caso, da mesma forma que o caso anterior, o modelo de material considerado é o modelo Pico, onde os campos de parâmetros de Lamé e os campos de pseudo densidade estão relacionados utilizando um modelo gaussiano definido em 3.10. Neste caso, a diferença está em adicionar a penalização do modelo de material como variável de projeto. Assim o otimizador busca a melhor distribuição da pseudo densidade e a penalização apropriada para minimizar a função objetivo definida. Nos problemas de otimização topológica, em diversas situações é necessário realizar uma continuação no valor de penalização para obter uma resposta mais discreta e uma melhor convergência. No entanto, não existe uma metodologia definida da aplicação de continuação na penalização, o procedimento é comumente efetuada utilizando algum esquema heurístico e este pode diferir para cada caso e modelo analisado. Adicionando a penalização como variável de projeto, a busca pela penalização mais adequada é permitida, isto é, aquela que minimize a função objetivo e respeite as restrições definidas do problema.

As inversões são realizadas considerando as mesmas penalizações que a abordagem com a penalização fixa e os campos da pseudo-densidade resultantes estão representados na Figura 6.11, e aqueles resultantes das propriedades de Lamé após a parametrização podem ser verificados na Figura 6.12.

Observa-se que para a penalização  $\sigma = 0.40$  e  $\sigma = 0.35$ , a abordagem com a penalização automática resulta em uma inversão melhor apresentando um mínimo local mais adequado comparado a abordagem utilizando penalização fixa. O modelo Camembert resulta em uma inclusão oval, e a primeira inclusão do modelo com inclusão retangular não está bem representada. Na abordagem com penalização automática os dois modelos apresentam um mínimo local melhor, identificando a posição da estrutura de cada inclusão.

Para a penalização  $\sigma = 0.20$ , a inversão do modelo Camembert diverge, porém as duas inclusões retangulares são identificadas, isto é, as interfaces entre os dois materiais estão bem delimitadas. Para as duas primeiras penalizações, a abordagem com penalização automática resulta em mínimos locais mais adequados, comparado à abordagem com penalização fixa. Para valores menores de penalização o resultado da inversão é bem similar entre as duas abordagens. Incluindo a penalização como variável de projeto permite encontrar a penalização adequada para o modelo analisado e permite eliminar a busca heurística de penalização adequada.

A Figura 6.13 mostra a evolução da penalização do modelo de material ao longo das iterações. Observa-se que a penalização é minimizada durante as iterações ao longo das iterações até estabilizar. A curva de penalização adequada durante as iterações é obtida utilizando a função objetivo padrão e não foi adicionado nenhum termo relacionado a minimização da penalização na função objetivo.

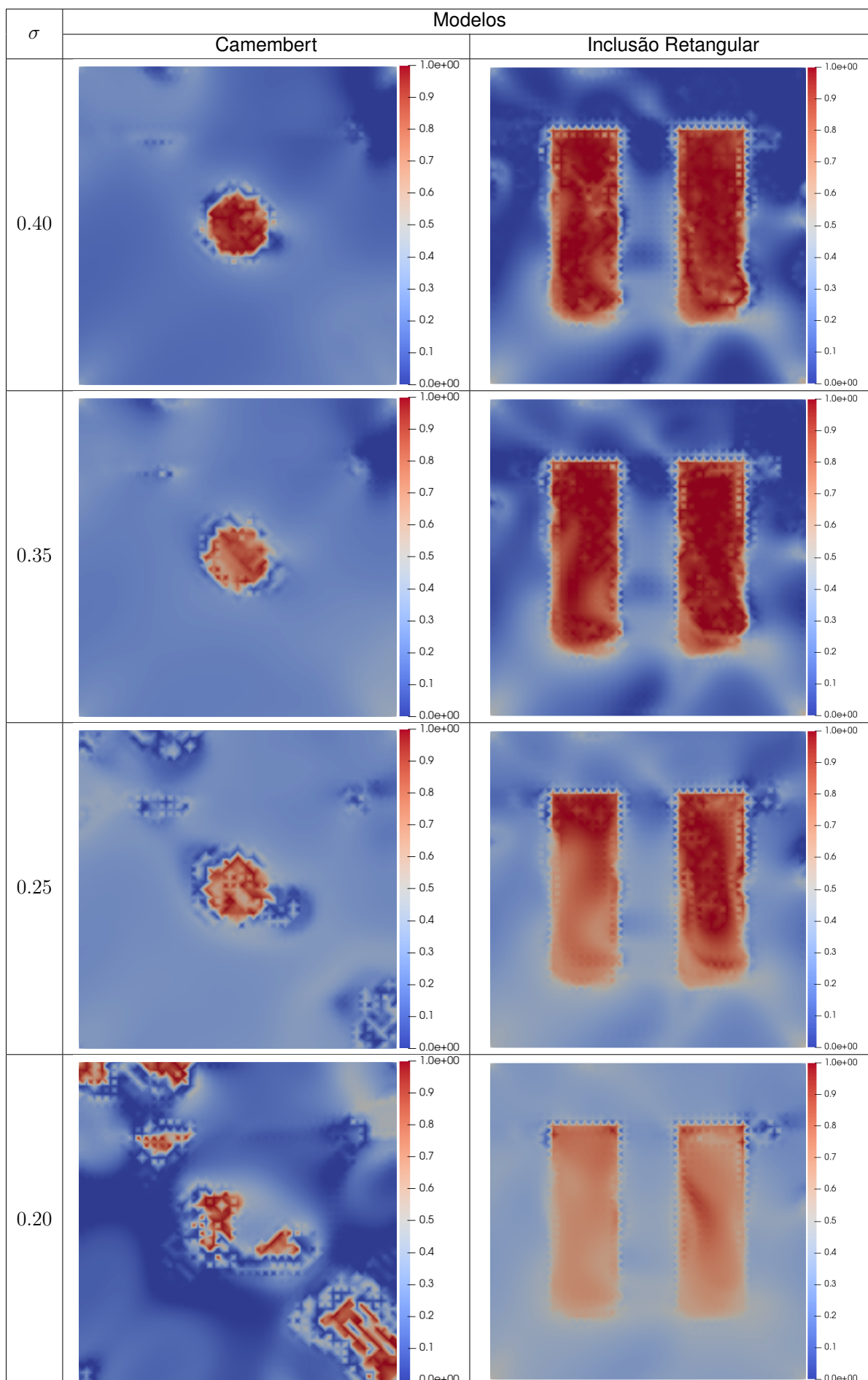


Figura 6.11 – Resultado da inversão para a pseudo-densidade utilizando o modelo de material Pico com penalização automática com crime inverso.

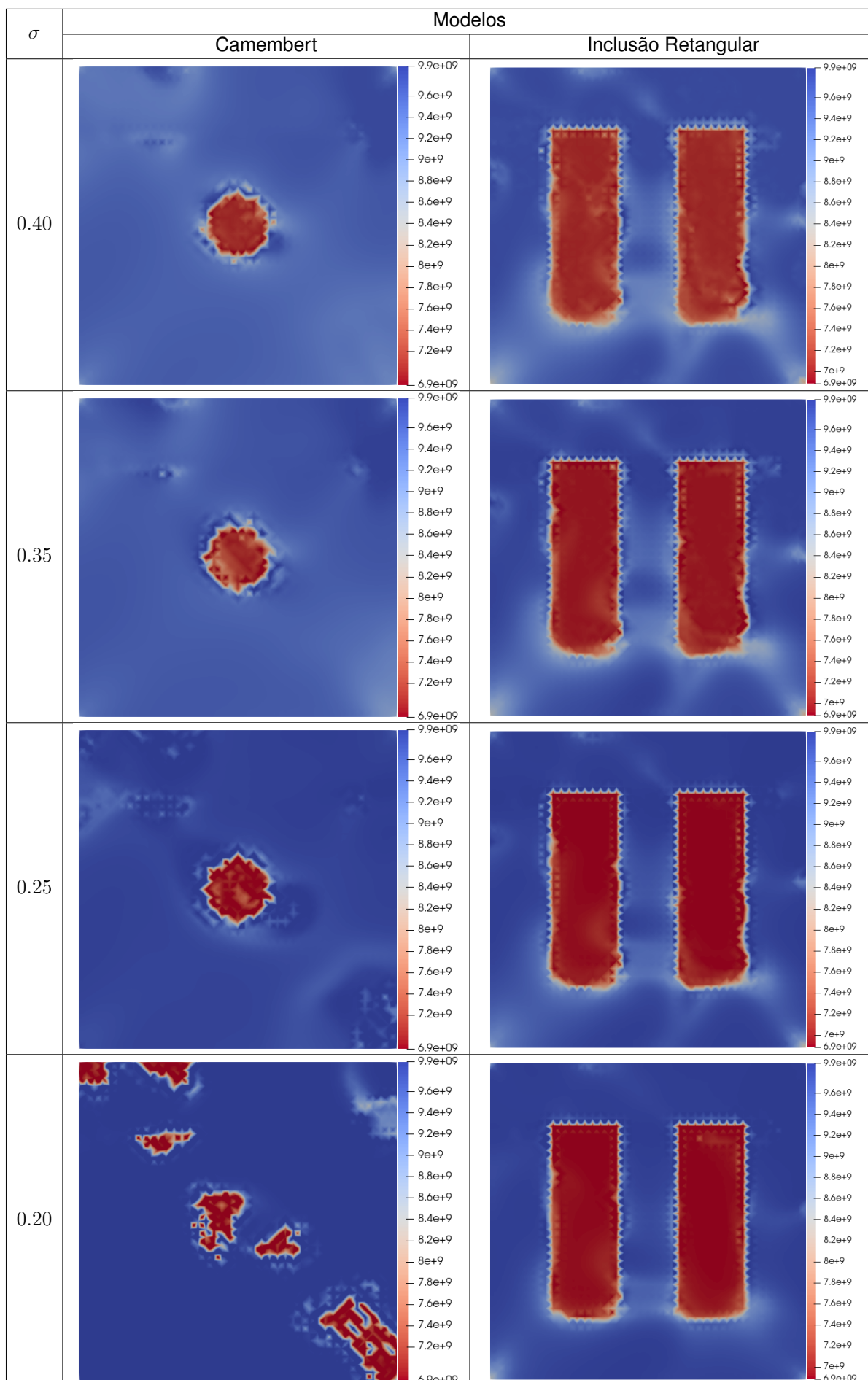


Figura 6.12 – Resultado da inversão para o parâmetro de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material Pico com penalização automática com crime inverso.

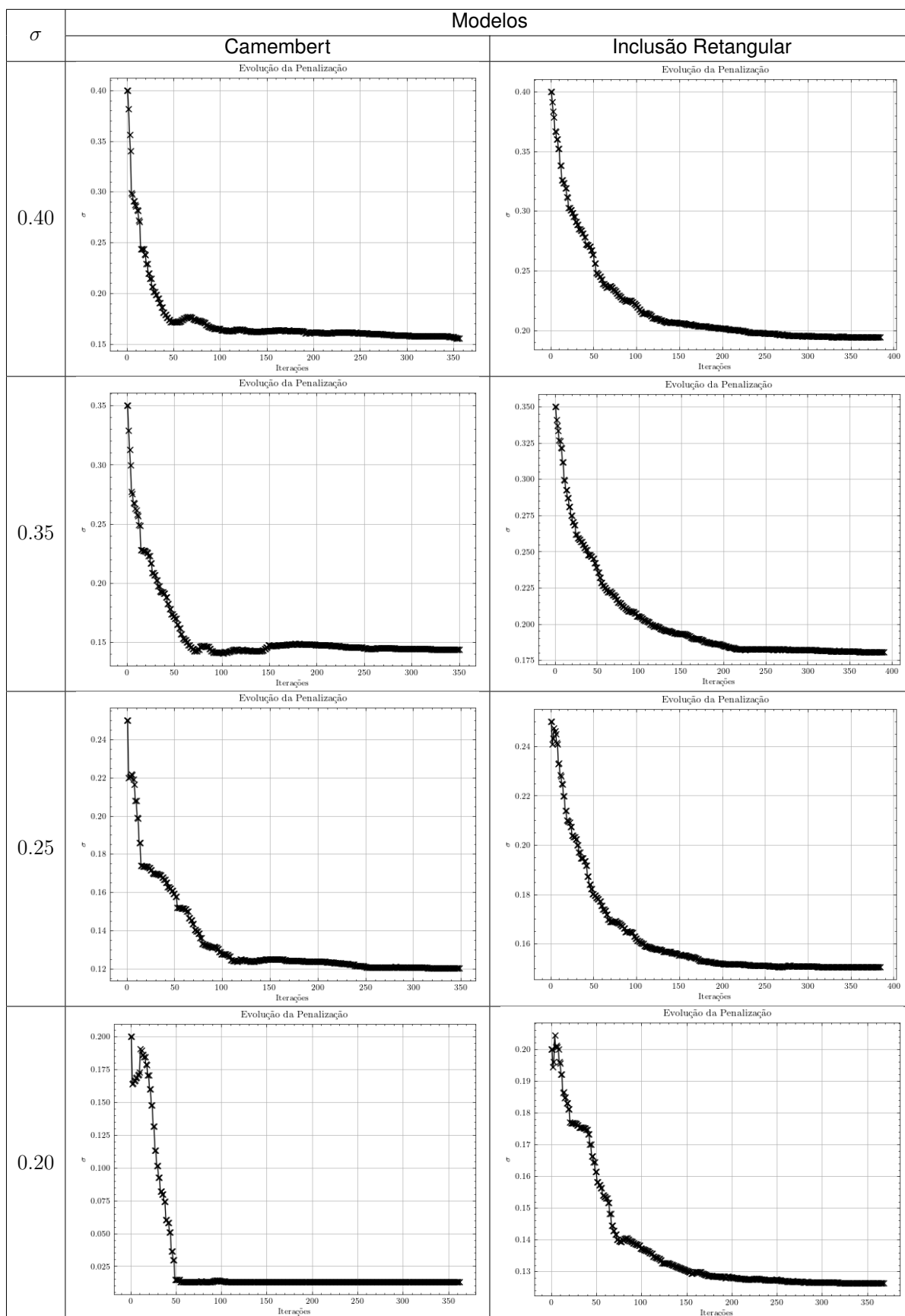
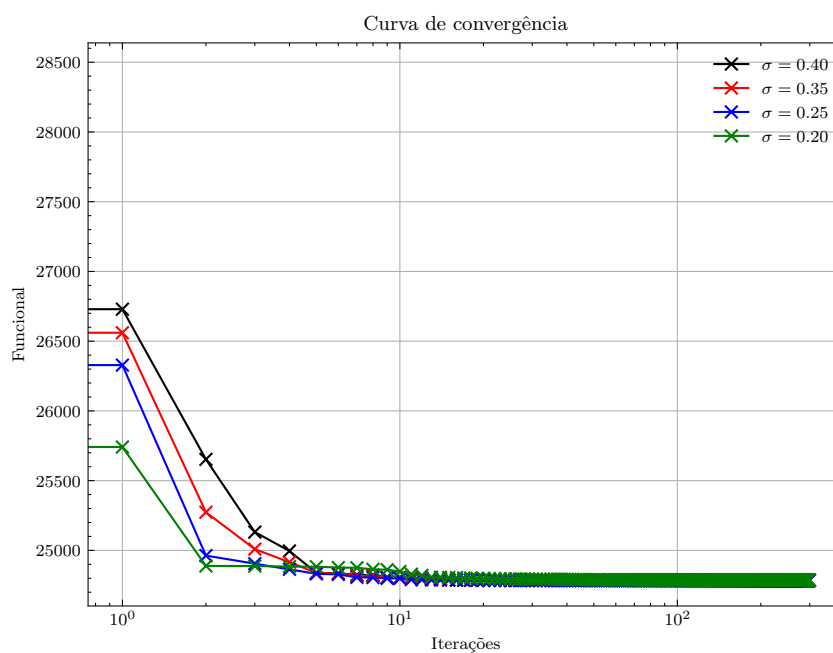
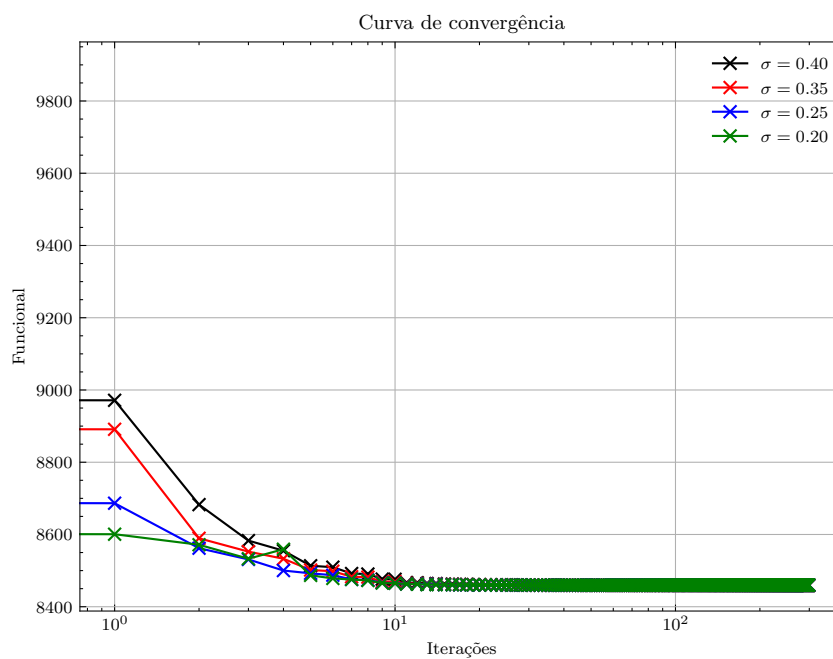


Figura 6.13 – A evolução da penalização durante a otimização utilizando o modelo de material Pico com penalização automática.

A Figura (6.14) exibe a evolução da função objetivo ao longo das iterações. Observa-se que quanto maior a penalização, maior a diferença inicial na função objetivo.



(a) Curva de convergência para o modelo Camembert.



(b) Curva de convergência para o modelo com inclusões retangulares.

Figura 6.14 – Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo Pico com penalização automática.

## 6.4 Modelo de material von Mises

Para este caso o modelo de material de von Mises definida em 3.14 é utilizado para relacionar as pseudo-densidades e os parâmetros de Lamé. Este modelo como descrito previamente apresenta características similares ao modelo de Pico. Pode ser considerado análogo à distribuição gaussiana definida em um círculo. O modelo de von Mises diferencia-se por não apresentar singularidade perto de valores próximos ao zero como no modelo gaussiano. Além disso, o modelo gaussiano pode apresentar em alguns casos a necessidade de penalizações pequenas, próximas a zero, para uma melhor definição das propriedades. Assim, um valor muito pequeno de penalização pode resultar em dispersão e instabilidade numérica. Este problema de instabilidade numérica não ocorre no modelo von Mises, dado que a função de interpolação não apresenta nenhuma singularidade. Além disso, diferente do modelo Pico, o modelo de von Mises desfavorece os materiais intermediários através do aumento no valor da penalização. Vale ressaltar que o modelo Pico possui um termo de penalização elevado ao quadrado, implicando em maior sensibilidade da otimização à penalização, especialmente para penalizações próximos a zero. Para o modelo de material von Mises esta relação é linear, implicando em uma menor sensibilidade a penalização.

A Figura 6.15 exibe o campo de pseudo densidades obtidas após a otimização empregando o modelo de von Mises. De forma análoga aos casos anteriores, estes campos são os resultados da inversão devido à parametrização escolhida. Os campos de interesses das propriedades de Lamé obtidos após parametrizar através do modelo de material estão apresentados na Figura 6.16. De forma análoga ao modelo Pico, cada campo parametrizado difere devido a não linearidade do modelo de material.

Em ambos os modelos, as posições e a forma das inclusões são detectadas. As interfaces entre os materiais são bem discretas e definidas, além de não apresentar regiões cinzas no domínio. Observa-se também que para as diferentes penalizações, as inclusões e as propriedades identificadas estão próximas ao modelo de referência.

Pelos resultados obtidos este modelo de material se demonstra eficiente para resolver o problema de inversão elástica e pode ser uma alternativa de utilização para modelo de material em problemas de otimização topológica.



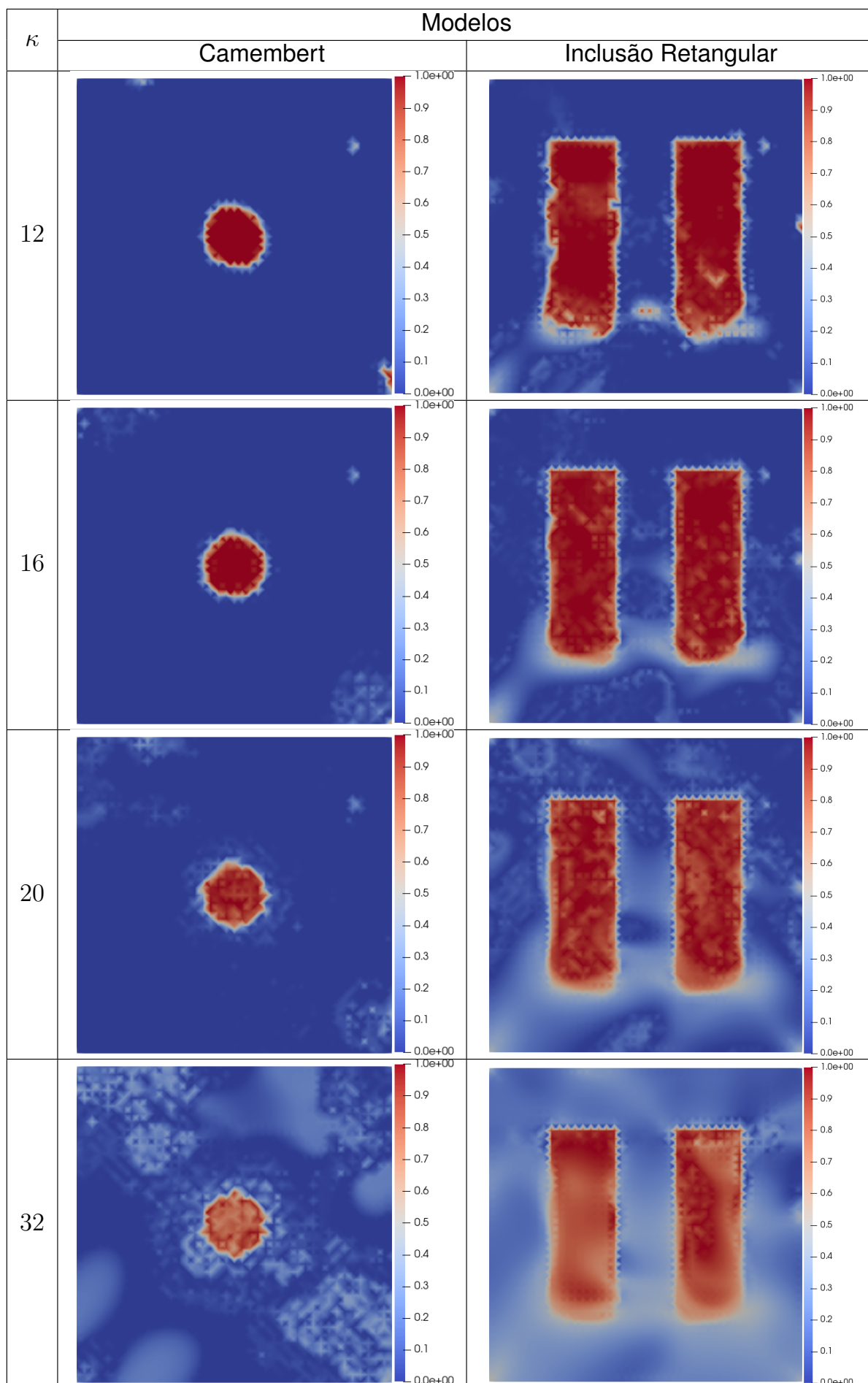


Figura 6.15 – Resultado da inversão para a pseudo densidade utilizando o modelo de material von Mises com crime inverso.

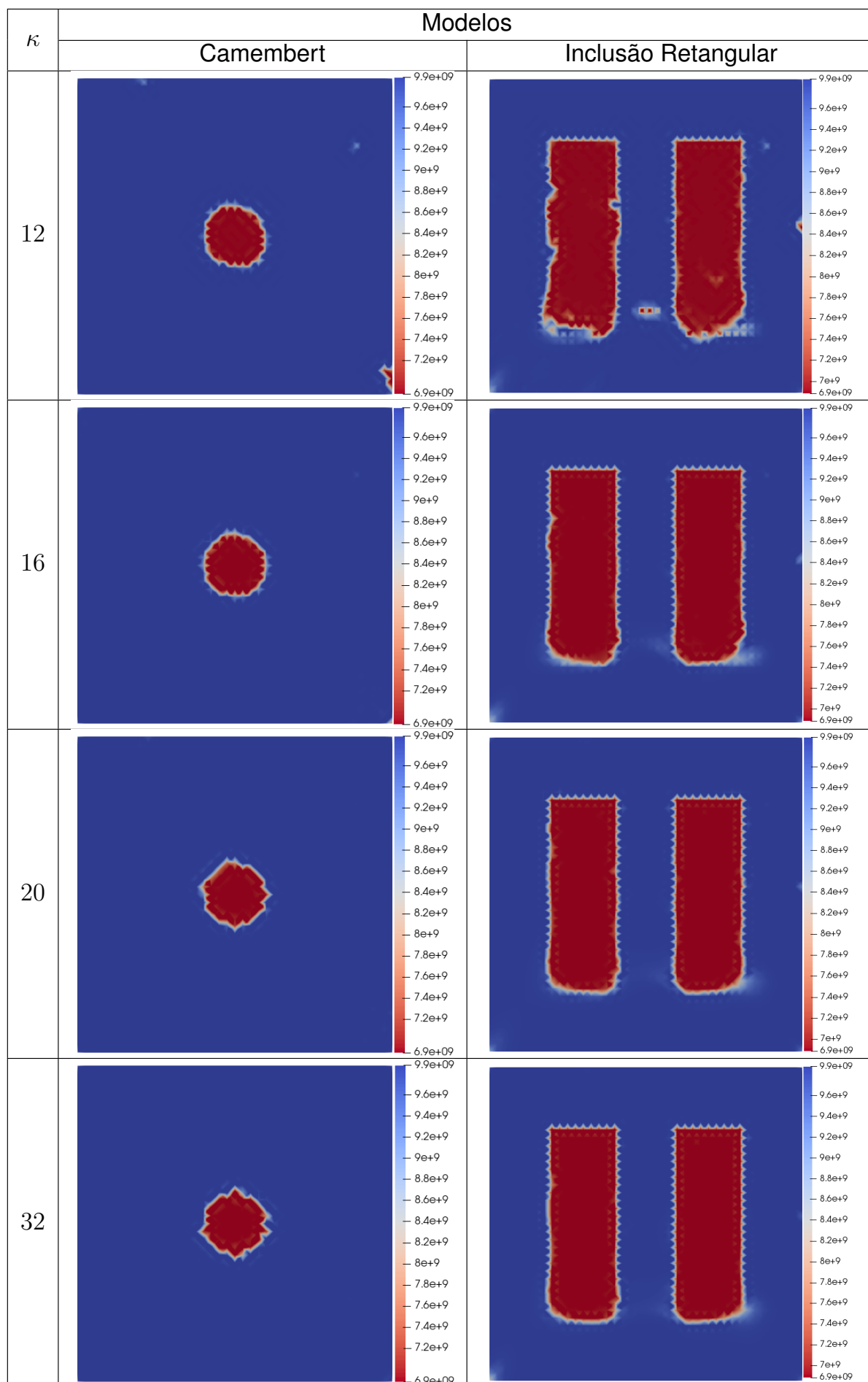
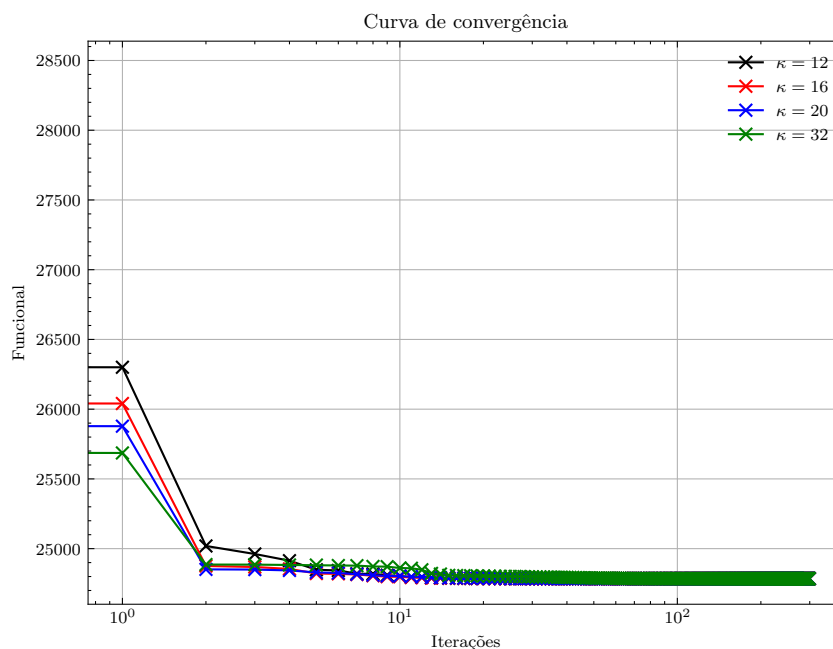
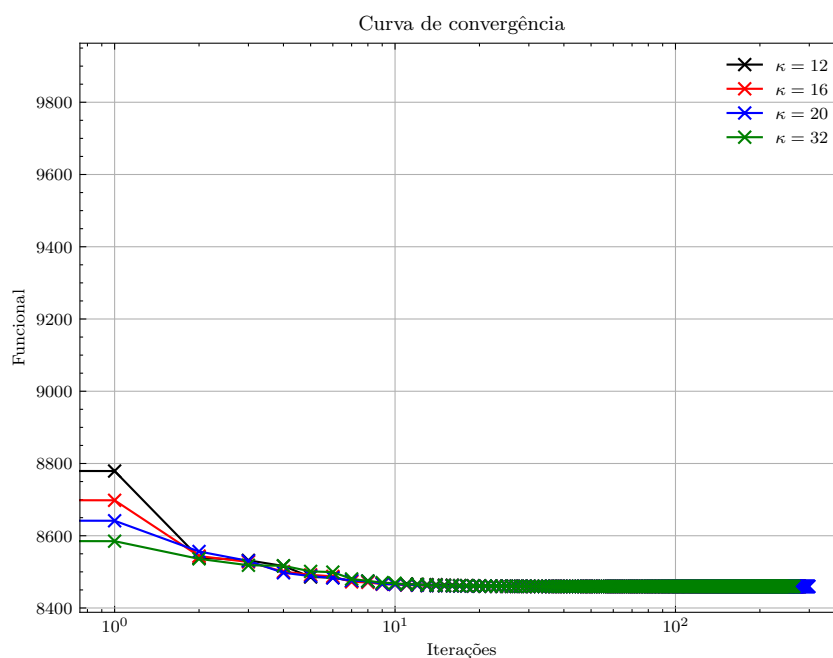


Figura 6.16 – Resultado da inversão para o valor da propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) utilizando o modelo de material von Mises com crime inverso.

A curva de convergência para este modelo de material está apresentada em 6.17. Observa-se que quando maior o valor da penalização menor o valor da função objetivo no início. Após as iterações todas as inversões resultam em valor de função objetivo bem similares.



(a) Curva de convergência para o modelo Camembert.



(b) Curva de convergência para o modelo com inclusões retangulares.

Figura 6.17 – Curva de convergência para a inversão utilizando o modelo von Mises.

## 6.5 Inclusão de Regularizações

No primeiro instante as inversões apresentadas são realizadas considerando as mesmas configurações para gerar os dados de referência e dados calculados, com a finalidade de demonstração do comportamento da inversão. Este procedimento permitiu testar e validar a formulação proposta para diferentes modelos de materiais. No entanto, para uma melhor avaliação do método proposto duas malhas de elementos finitos diferentes são utilizadas para geração dos dados de referência e os dados calculados. Com isso deseja-se investigar o comportamento da inversão no caso de inserção de erro no modelo computacional para sair do crime inverso, conforme discutido no capítulo anterior. A Figura (6.18) mostra as diferentes malhas utilizadas para evitar o crime inverso.

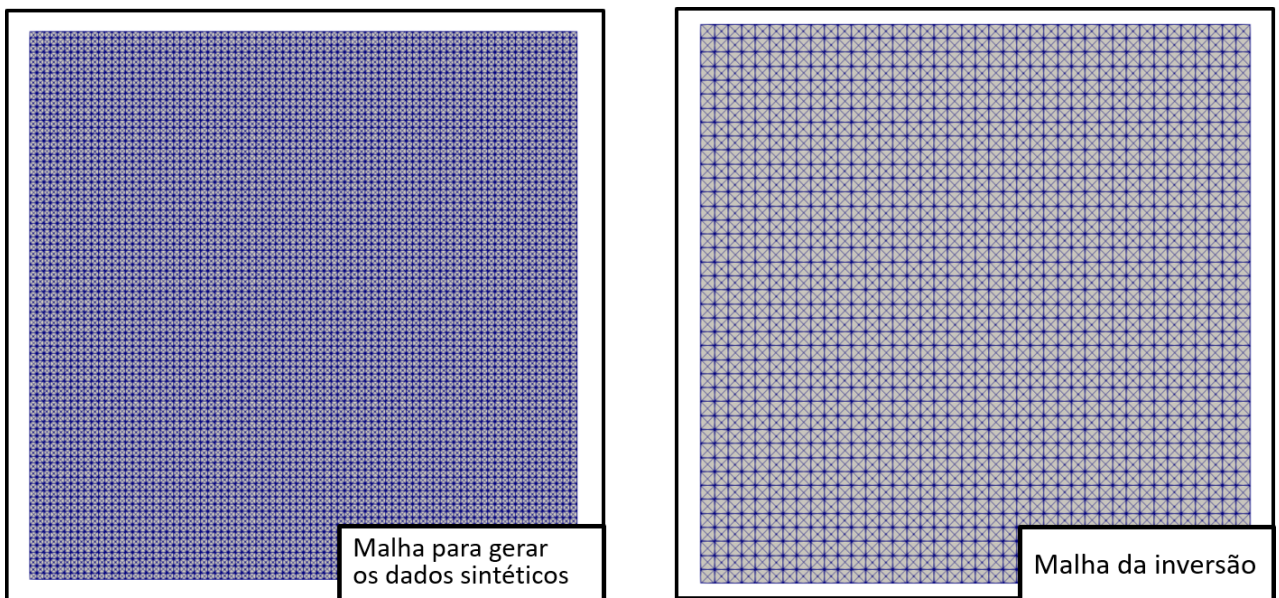


Figura 6.18 – As duas malhas utilizadas durante a inversão.

Uma malha mais refinada é utilizada para gerar os dados de referência e uma malha menos refinada para gerar os dados calculados. A malha mais refinada contém 25600 elementos triangulares e a malha mais grosseira contém 6400 elementos. Assim, a malha para gerar os dados de referência é quatro vezes mais refinada que a malha para os dados calculados. A Figura 6.19 mostra a evolução da otimização durante as iterações evitando crime inverso empregando malhas distintas. Ao empregar diferentes malhas durante a inversão deve-se atentar à escolha e à interpolação das fontes, de forma que a mesma fonte deve ser considerada em ambas as simulações. Caso as fontes interpoladas sejam diferentes, a otimização diverge e não há retorno de uma solução adequada.

Observa-se que a resposta é deteriorada devido à inserção de um erro numérico associado a malhas distintas. Materiais espúrios e indesejadas aparecem no domínio, devido à inserção do erro numérico, tornando o problema mais mal posto e levando a um mínimo local menos desejado. Comumente regularizações são adicionadas à função

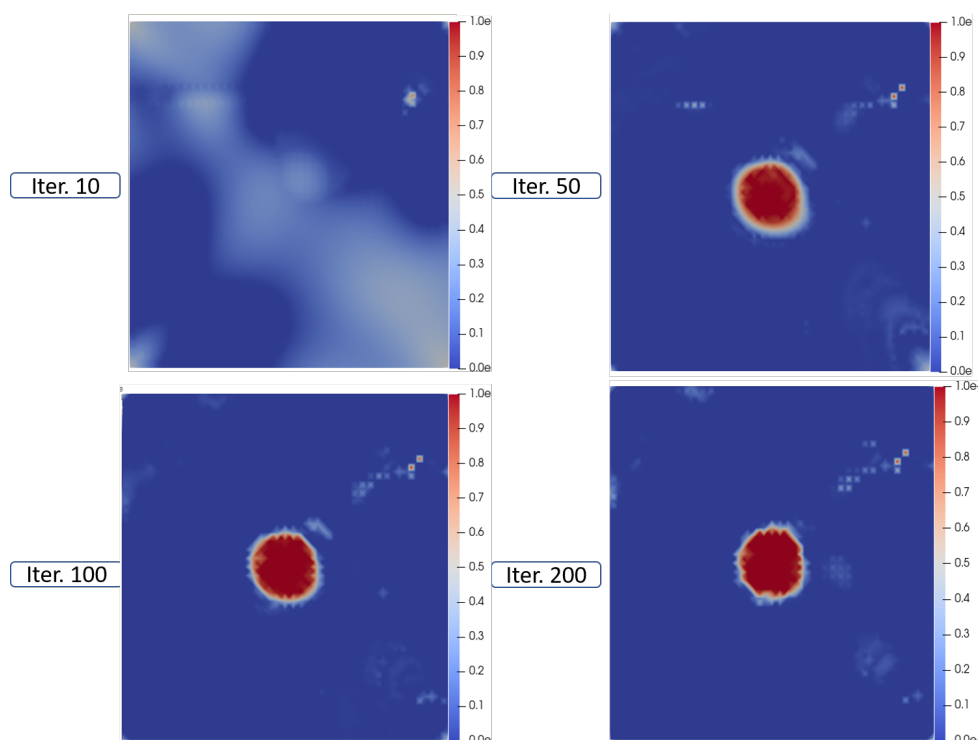


Figura 6.19 – Evolução da otimização para modelo Camembert durante as iterações sem crime inverso utilizando o modelo de material SIMP.

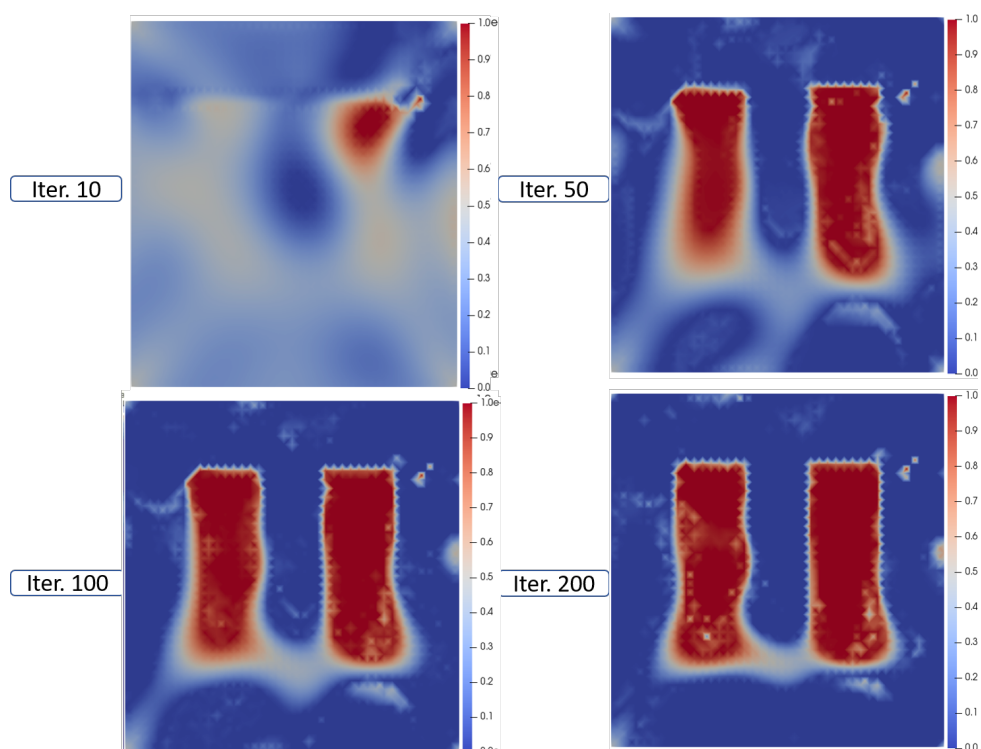


Figura 6.20 – Evolução da otimização para modelo com inclusão retangular durante as iterações sem crime inverso utilizando o modelo de material SIMP.

objetivo para melhorar a convergência, de maneira que foram adotadas duas regularizações

neste trabalho.

### 6.5.1 Inclusão da Regularização Tikhonov

Como pode ser visto pelos resultados da inversão sem o crime inverso, o problema se torna mais mal posto e apresenta múltiplos mínimos locais. Para melhorar a convergência a regularização definida em Eq.(3.25) é adicionada ao funcional. Esta regularização é baseada na norma  $L_2$  do gradiente. Assim o otimizador busca minimizar o *misfit* e a norma dos gradientes da variável de controle. As simulações são executadas utilizando as mesmas configurações geométricas que os casos anteriores, com a diferença de adição do termo de regularização. Esta primeira regularização é baseada na norma quadrática da variável de controle. Portanto, as inversões são realizadas considerando o modelo de material SIMP para relacionar as pseudo-densidade e as propriedades de Lamé. Assim como, todas as inversões foram obtidas a partir de uma estimativa inicial homogênea. A Figura (6.21) mostra os resultados de inversão após a convergência utilizando diferentes pesos da regularização. Os resultados para cada um dos modelos são apresentados em cada coluna, em que os campos associados a cada um dos pesos de regularização são apresentados na Figura 6.22. As propriedades foram parametrizadas utilizando o modelo SIMP com a penalização linear, e observa-se que as inversões apresentam um mínimo local mais desejado após adicionar a regularização. Dependendo do peso de regularização adotado a inversão apresenta mais regiões cinzas com materiais intermediários, mas de forma geral as respostas estão mais suaves.

Observa-se que o uso da parametrização proposta permite avaliar as inversões variando apenas um peso de regularização. Na abordagem tradicional, um peso de regularização seria utilizado para cada umas das propriedades de interesse, logo o número de pesos de regularizações a serem definidas aumentariam conforme aumenta as propriedades de interesse.

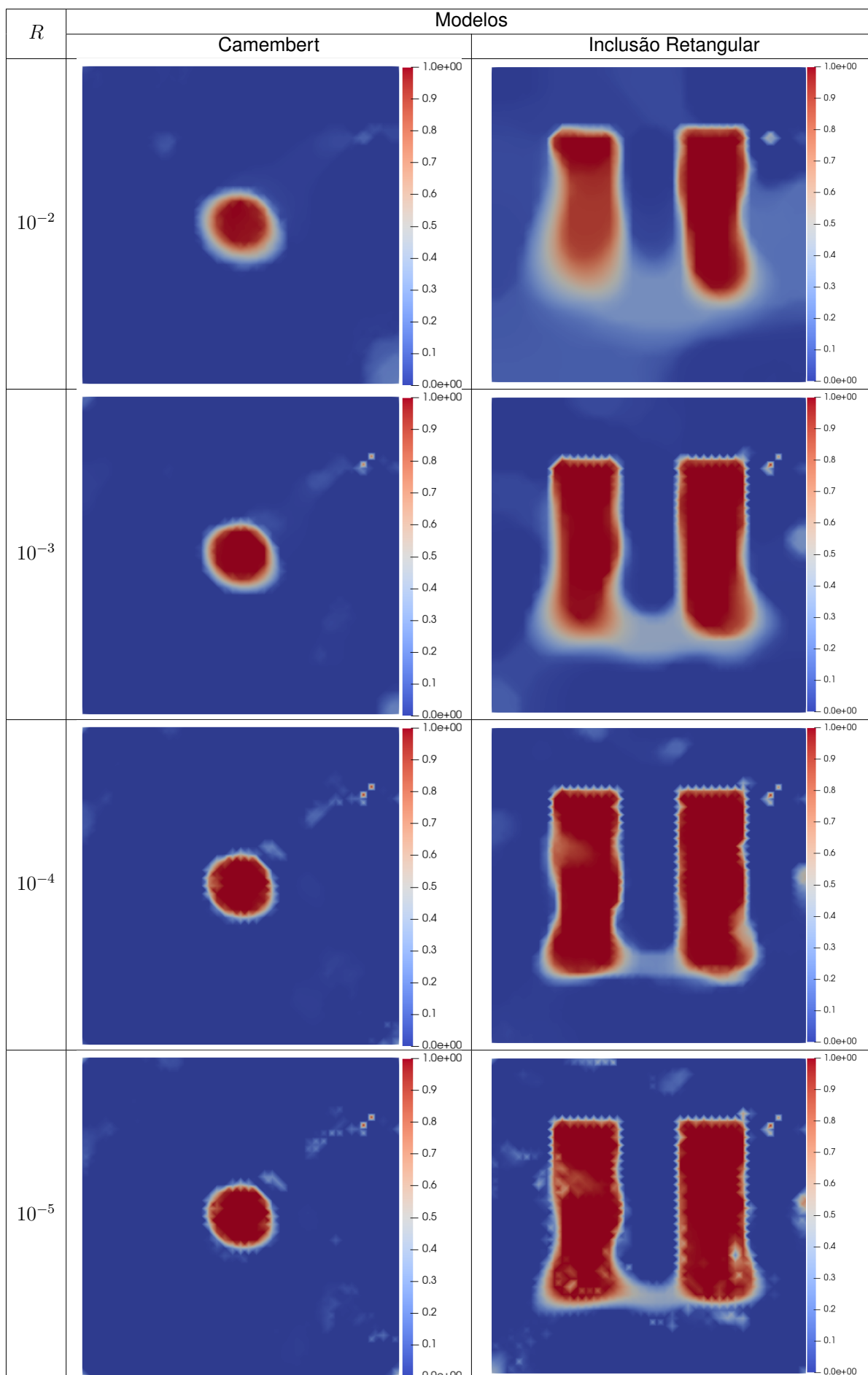


Figura 6.21 – Resultado da inversão para a pseudo-densidade incluindo a regularização Tikhonov junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso.

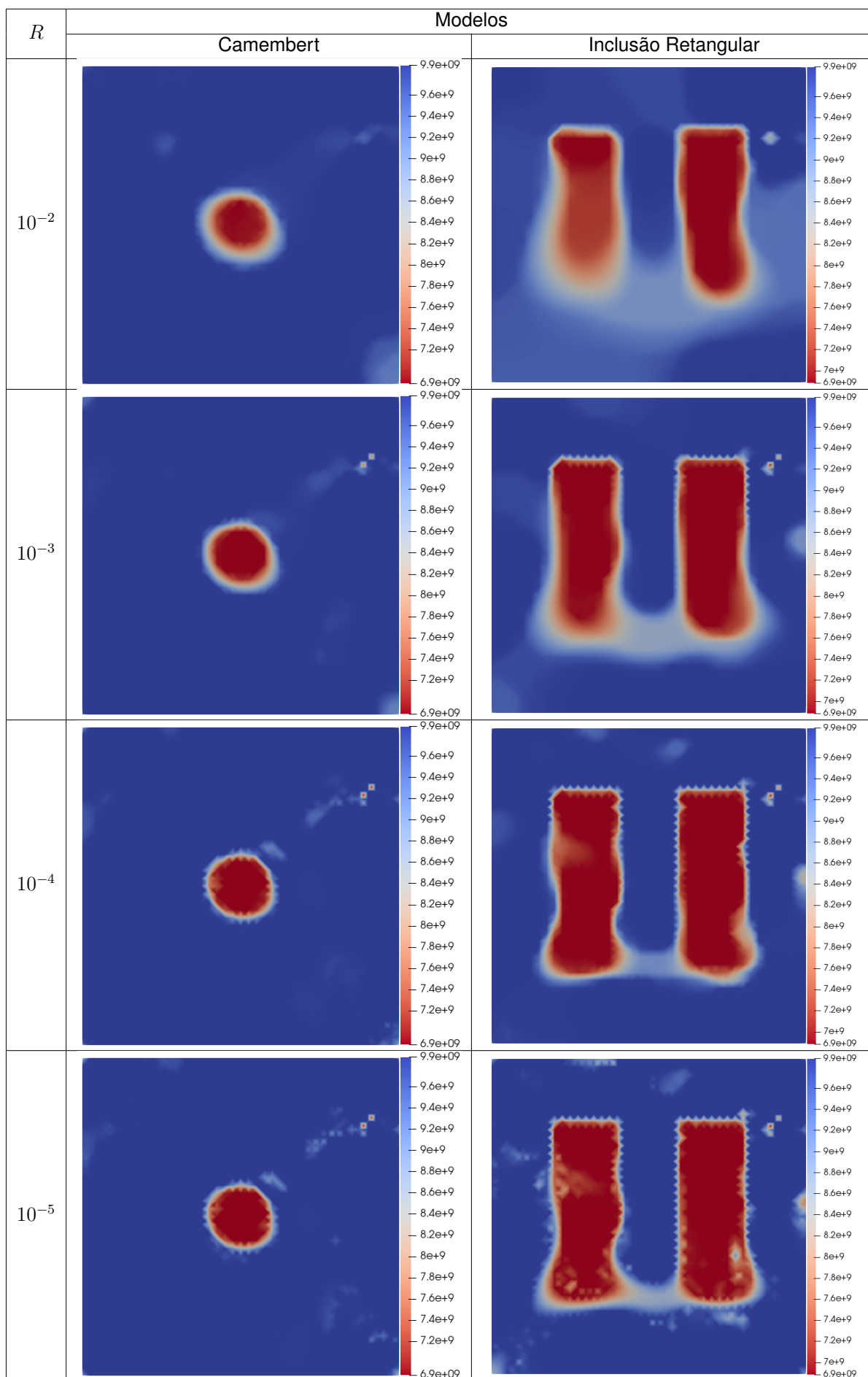
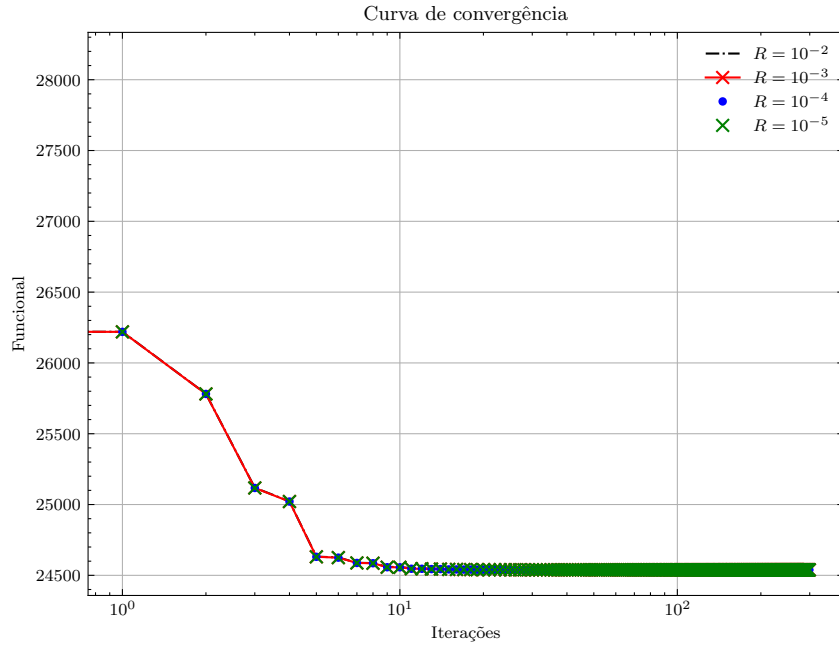


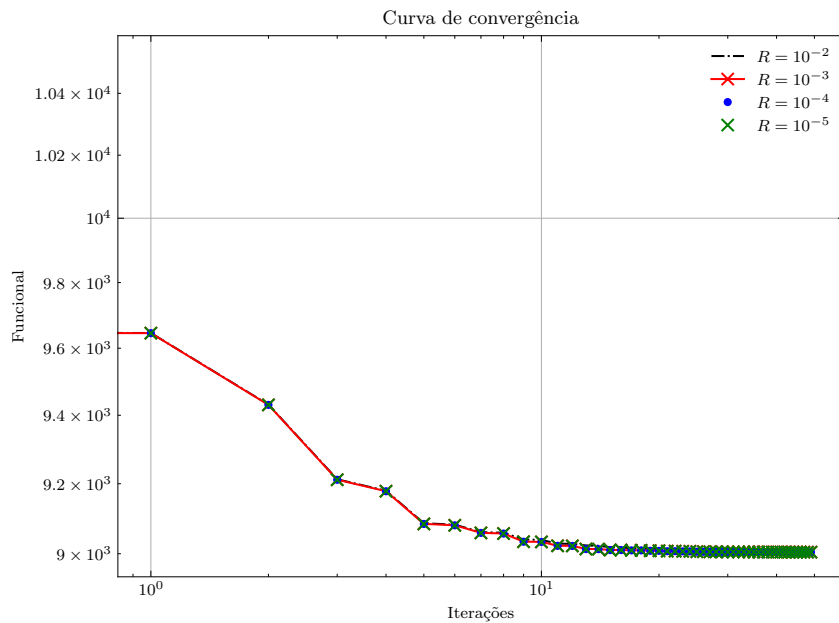
Figura 6.22 – Resultado da inversão para a propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) incluindo a regularização Tikhonov junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso.



A curva de convergência para o modelo de material SIMP com diferentes pesos de regularização está apresentada em 6.17. Observa-se que os valores de funcional estão bem próximos mesmo variando o peso das regularizações. Dessa forma, uma medida mais global pode representar melhor a diferença entre cada modelo, uma vez que o funcional considera apenas os resultados na região onde os sensores estão posicionados.



(a) Curva de convergência para o modelo Camembert.



(b) Curva de convergência para o modelo com inclusões retangulares.

Figura 6.23 – Curva de convergência para a inversão incluindo a regularização Tikhonov.

### 6.5.2 Inclusão da Regularização Variação Total

Neste caso a regularização 3.26 é adicionada a função objetivo. Esta regularização é baseada na semi-norma do gradiente da variável de controle. Como discutido anteriormente a parametrização proposta permite reduzir o número de pesos de regularização mesmo com o aumento de variáveis de projeto. Assim mesmo com duas propriedades de interesse apenas um peso de regularização é necessário. A Figura 6.24 mostra os resultados de inversão empregando essa regularização.

Pode-se observar que os resultados apresentam respostas mais suaves e menos materiais indesejáveis surgem no domínio. Assim, as inclusões em cada um dos modelos são identificadas, e a posição, e as propriedades dos campos invertidos são próximos ao modelo de referência.

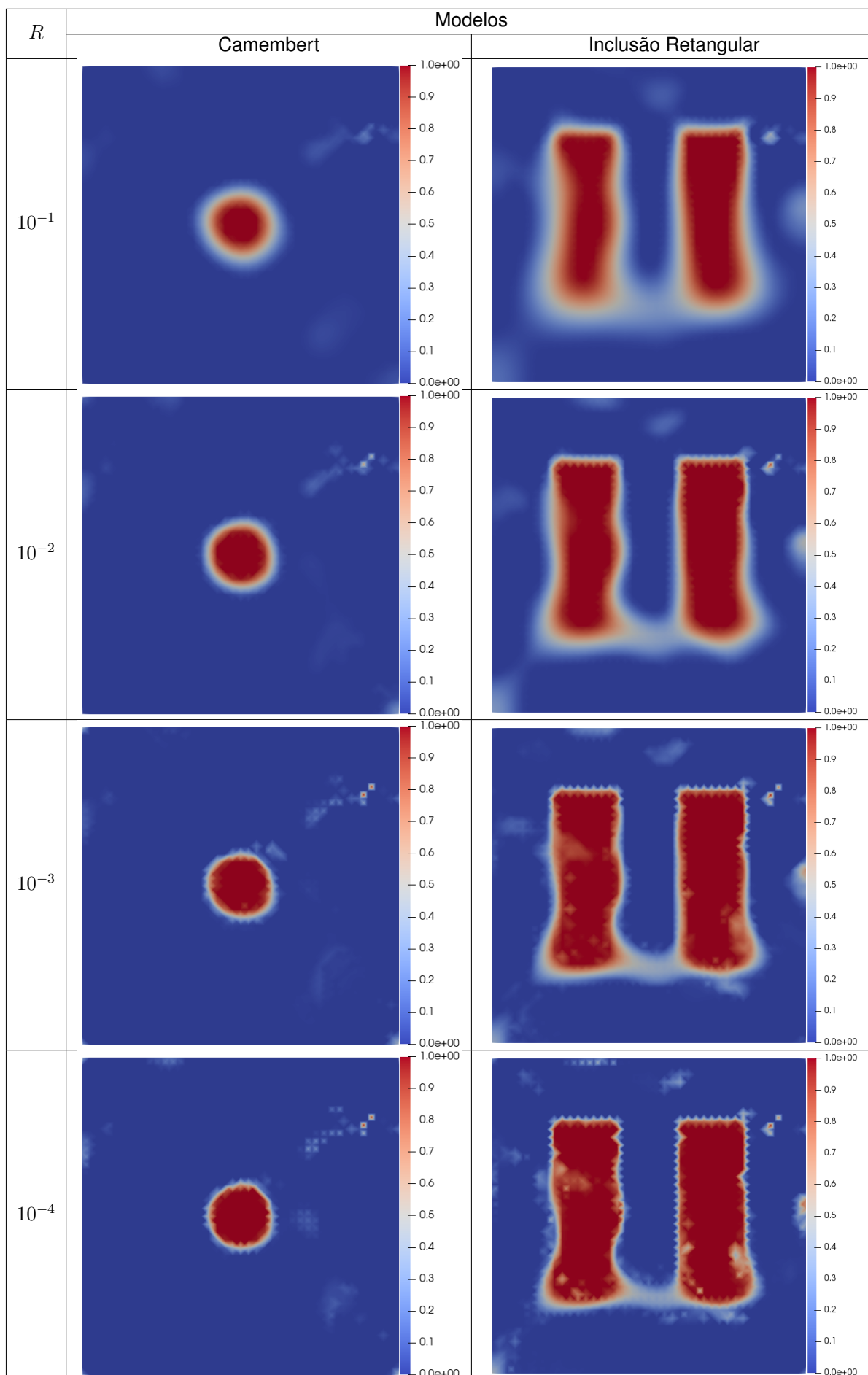


Figura 6.24 – Resultado da inversão para a pseudo-densidade incluindo a regularização de variação total junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso.

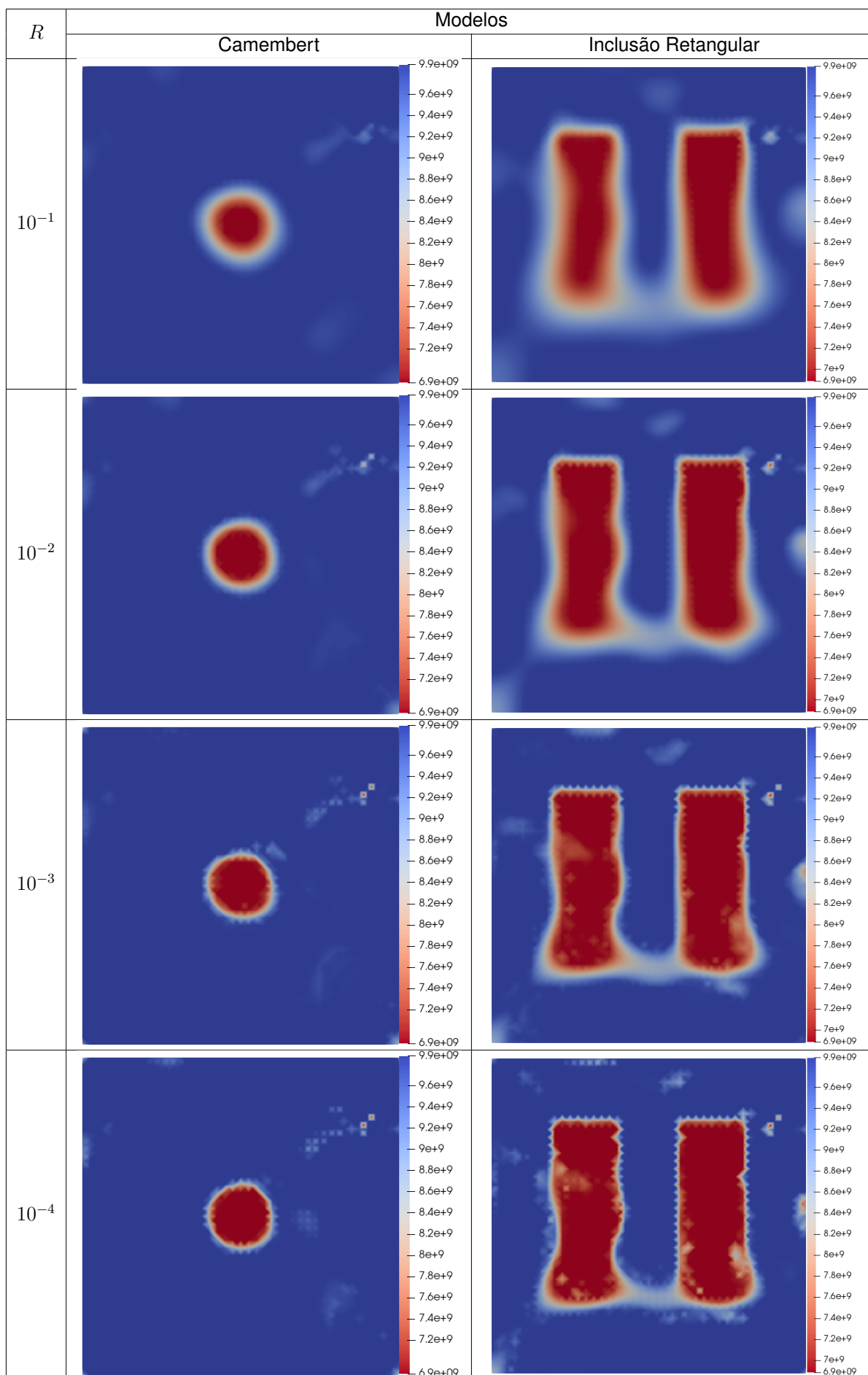
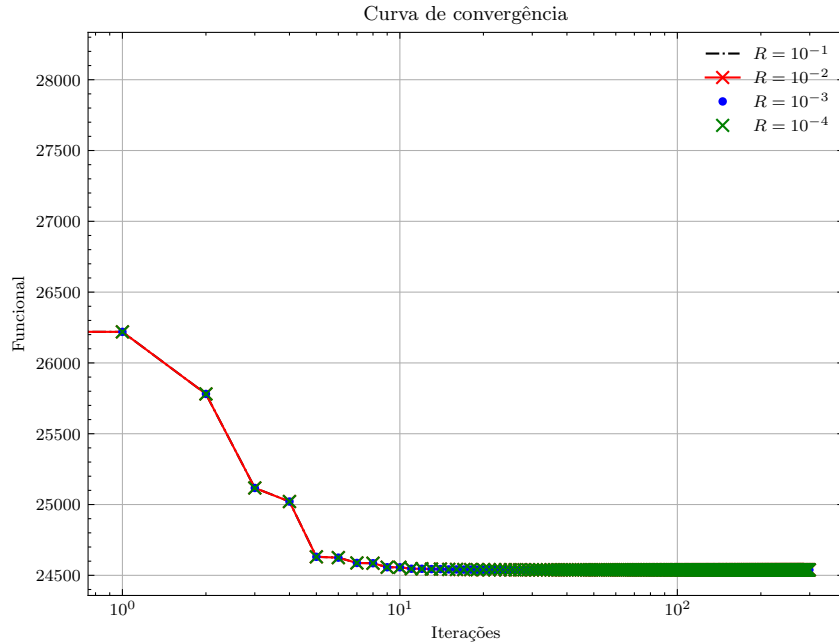
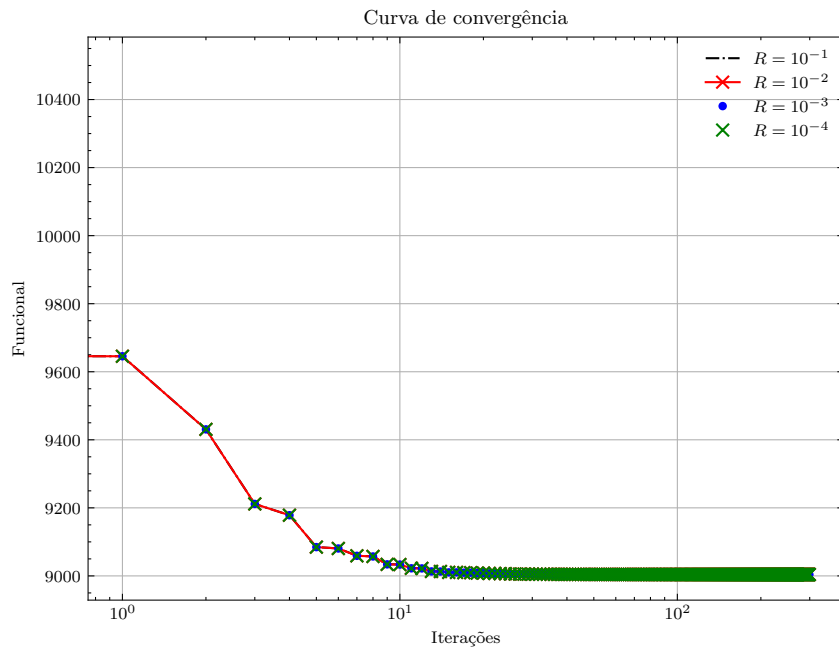


Figura 6.25 – Resultado da inversão para propriedade de Lamé ( $\lambda$ ) incluindo a regularização de variação total junto ao modelo de material SIMP sem crime inverso.

A curva de convergência para o modelo de material SIMP com diferentes pesos de regularização está apresentada em 6.17. Observa-se que os valores de funcional estão bem próximos mesmo variando o peso das regularizações. Dessa forma, obtém-se uma medida mais global que representa melhor a diferença entre cada modelo, uma vez que o funcional considera apenas os resultados na região onde os sensores estão posicionados.



(a) Curva de convergência para o modelo Camembert.



(b) Curva de convergência para o modelo com inclusões retangulares.

Figura 6.26 – Curva de convergência para a inversão incluindo a regularização Variação Total.

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma abordagem de otimização topológica para a resolução do problema de inversão da forma de onda completa multi-parâmetro elástico, de forma que desenvolveu-se um propagador de onda elástica no domínio do tempo através do método dos elementos finitos. Além disso, propôs-se uma abordagem para inversão elástica no domínio do tempo que se fundamenta em otimização topológica.

Dessa forma, as propriedades de Lamé são parametrizadas utilizando as pseudo densidades e modelos de material. Através da utilização do modelo de material é possível inverter o campo de pseudo densidades e posteriormente obter os campos associados aos parâmetros de Lamé interpolados no modelo. A parametrização obtida utilizando o modelo de material permitiu um mapeamento entre as propriedades e as pseudo densidades. Dessa forma, foi possível a transformação do problema multi-parâmetro analisado em um problema mono-parâmetro, reduzindo a complexidade do problema inverso.

Além disso, foram empregados três modelos de material para relacionar o campo de pseudo densidade com os parâmetros de Lamé. No modelo de material SIMP, a interpolação linear permitiu identificar os parâmetros, e apenas uma variável de projeto foi utilizada para interpolar ambos os parâmetros de Lamé. Neste modelo, a utilização de penalizações mais elevadas resulta em valores de funções objetivo menores, além de apresentar menos regiões cinzas desfavorecendo os materiais intermediários.

No modelo de material de Pico empregou-se duas abordagens, uma em que a penalização foi mantida constante durante a otimização, e outra em que otimizou-se a penalização juntamente a variável de projeto. Na primeira abordagem as inclusões foram identificadas, e os resultados apresentaram campos mais discretos e com interfaces mais definidas se comparado ao modelo SIMP. Entretanto, as inversões são sensíveis ao valor da penalização e podem levar a um mínimo local não desejado dependendo do valor da penalização. Na segunda abordagem a penalização é minimizada durante as iterações, permitindo eliminar uma busca heurística da penalização adequada ao problema. Ambas as inclusões são identificadas e obteve-se um mínimo melhor utilizando penalizações mais altas do que a abordagem da penalização fixa.

Por fim, o modelo de material Von Mises foi apresentado como uma alternativa de modelo de material para problemas de inversão utilizando otimização topológica. Analisando os resultados, obteve-se inclusões mais nítidas entre as interfaces dos materiais, apresentando resultados mais discretos se comparados ao modelo SIMP.

O trabalho também utiliza duas regularizações para tornar o problema menos mal

posto e melhorar a convergência após evitar o crime inverso. A primeira regularização foi baseada na norma quadrática do gradiente da variável de projeto e a segunda regularização foi baseada na norma semi-quadrática do gradiente da variável de projeto. Estas duas resultaram em um mínimo local melhor do que o caso sem nenhuma regularização.

O modelo de material se mostra vantajoso para a definição dos pesos de regularização, pois é possível reduzir o número de pesos a serem definidos. Na abordagem tradicional, este número aumenta proporcionalmente ao aumento no número de propriedades de interesse.

Além disso, o algoritmo implementado no ambiente FEniCS, com o pacote dolfin-Adjoint, mostrou-se eficaz para o problema de inversão elástico multiparamétrico no meio linear isotrópico, bem como otimizador L-BFGS-B provou-se eficiente para resolução de problemas de identificação de parâmetros. A abordagem proposta considerando modelos de material pode ser estendida para modelos anisotrópicos e resolver outros problemas de identificação multiparamétricos.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Como sugestões para a continuidade do trabalho apresentado, podem ser considerados os seguintes itens:

- Aplicação do PML (Perfectly Matched Layer) no algoritmo de elementos finitos, para criar uma camada artificial de absorção atenuando eficientemente as reflexões provocadas pela borda do modelo;
- Utilização de uma integração temporal explícita para reduzir o custo computacional;
- Combinação das regularizações propostas;
- Aplicar as metodologias propostas para casos com múltiplos materiais;
- Estender a abordagem da penalização automática para os outros modelos de materiais.

# REFERÊNCIAS

- AGUDO, Ò. C. et al. Mitigating elastic effects in marine 3-D full-waveform inversion. *Geophysical Journal International*, v. 220, n. 3, p. 2089–2104, 2020. ISSN 1365246X. Cited 2 times in pages 43 e 44.
- ALNÆS, M. et al. The fenics project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, v. 3, n. 100, 2015. Cited in page 71.
- ALNÆS, M. S. et al. Unified form language: A domain-specific language for weak formulations of partial differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM New York, NY, USA, v. 40, n. 2, p. 1–37, 2014. Cited in page 71.
- ALONSO, D. H.; SILVA, E. C. N. Topology optimization for blood flow considering a hemolysis model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 63, n. 5, p. 2101–2123, 2021. Cited in page 20.
- ANAGAW, A. Y. Full waveform inversion using simultaneous encoded sources based on first-and second-order optimization methods. 2014. Cited in page 19.
- ANDKJÆR, J.; SIGMUND, O. Topology optimized cloak for airborne sound. *Journal of Vibration and Acoustics*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 135, n. 4, 2013. Cited in page 49.
- ANDREASSEN, E.; JENSEN, J. S. Topology optimization of periodic microstructures for enhanced dynamic properties of viscoelastic composite materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 49, n. 5, p. 695–705, nov. 2013. Available from Internet: <<https://doi.org/10.1007/s00158-013-1018-2>>. Cited in page 49.
- ARRIDGE, S. R. Optical tomography in medical imaging. *Inverse problems*, IOP Publishing, v. 15, n. 2, p. R41, 1999. Cited in page 15.
- ASTER, R. C.; BORCHERS, B.; THURBER, C. H. *Parameter estimation and inverse problems*. [S.l.]: Elsevier, 2018. Cited in page 15.
- BANGERTH, W.; HARTMANN, R.; KANSCHAT, G. deal. ii—a general-purpose object-oriented finite element library. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM New York, NY, USA, v. 33, n. 4, p. 24–es, 2007. Cited in page 71.
- BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006. Cited in page 37.
- BAUMEISTER, J.; LEITAO, A. Topics in inverse problems. IMPA, 2005. Cited in page 13.
- BEDFORD, A.; DRUMHELLER, D. Elastic wave propagation. *John Wiley & Sons*, p. 151–165, 1994. Cited 2 times in pages 25 e 28.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, Springer, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989. Cited 2 times in pages 21 e 51.



BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Elsevier, 1988. Cited in page 48.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, Springer, v. 69, n. 9, p. 635–654, 1999. Cited in page 50.

BERENGER, J.-P. et al. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, New York, Academic Press., v. 114, n. 2, p. 185–200, 1994. Cited in page 33.

BILICZ, S. et al. Solution of inverse problems in nondestructive testing by a kriging-based surrogate model. *IEEE Transactions on Magnetics*, IEEE, v. 48, n. 2, p. 495–498, 2012. Cited in page 15.

BORISOV, D.; SINGH, S. C. Three-dimensional elastic full waveform inversion in a marine environment using multicomponent ocean-bottom cables: A synthetic study. *Geophysical Journal International*, v. 201, n. 3, p. 1215–1234, 2015. ISSN 1365246X. Cited 2 times in pages 43 e 47.

BORRVALL, T.; PETERSSON, J. Topology optimization of fluids in stokes flow. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 41, n. 1, p. 77–107, 2003. Cited in page 48.

BROWN, J. Overview of topical issue on inverse problems in astronomy. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 11, n. 4, p. 635, 1995. Cited in page 15.

BRUGGI, M.; MARIANI, S. Optimization of sensor placement to detect damage in flexible plates. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 45, n. 6, p. 659–676, 2013. Cited in page 49.

CARCIONE, J. M.; HERMAN, G. C.; KROODE, A. T. Seismic modeling. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 67, n. 4, p. 1304–1325, 2002. Cited in page 42.

CERJAN, C. et al. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 50, n. 4, p. 705–708, 1985. Cited in page 33.

CEZARO, A. D.; CEZARO, F. T. D. Problemas inversos e a matemática da tomografia computadorizada. *V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, UFPB, João Pessoa, 2010. Cited 2 times in pages 15 e 20.

CHAPMAN, C. H.; HOBRO, J. W.; ROBERTSSON, J. O. Correcting an acoustic wavefield for elastic effects. *Geophysical Journal International*, v. 197, n. 2, p. 1196–1214, 2014. ISSN 1365246X. Cited 2 times in pages 44 e 46.

CHERN, A. A reflectionless discrete perfectly matched layer. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 381, p. 91–109, 2019. Cited in page 33.

CHEW, W. C.; LIU, Q. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, World Scientific, v. 4, n. 04, p. 341–359, 1996. Cited in page 33.

- CHIN-JOE-KONG, M.; MULDER, W. A.; VELDHUIZEN, M. V. Higher-order triangular and tetrahedral finite elements with mass lumping for solving the wave equation. *Journal of Engineering Mathematics*, Springer, v. 35, n. 4, p. 405–426, 1999. Cited in page 35.
- CLAYTON, R.; ENGQUIST, B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the seismological society of America*, The Seismological Society of America, v. 67, n. 6, p. 1529–1540, 1977. Cited in page 33.
- COHEN, G. et al. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 38, n. 6, p. 2047–2078, 2001. Cited in page 34.
- COLLINO, F.; TSOGKA, C. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 66, n. 1, p. 294–307, 2001. Cited in page 33.
- DARVISH, A.; ZAKERI, B.; RADKANI, N. An optimized hybrid convolutional perfectly matched layer for efficient absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 356, p. 31–45, 2018. Cited in page 33.
- DELGADO, J. d. D. D. B. *High-order finite element methods for seismic wave propagation*. [S.l.]: The University of Texas at Austin, 2009. Cited in page 40.
- DOLATSHAHI, K. M.; REZAIE, A.; RAFIEE-DEHKHARGHANI, R. Topology optimization of wave barriers for mitigation of vertical component of seismic ground motions. *Journal of Earthquake Engineering*, Taylor & Francis, v. 24, n. 1, p. 84–108, 2020. Cited in page 49.
- DORMY, E.; TARANTOLA, A. Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Wiley Online Library, v. 100, n. B2, p. 2123–2133, 1995. Cited in page 34.
- DOYEN, D.; ERN, A.; PIPERNO, S. Time-integration schemes for the finite element dynamic signorini problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 33, n. 1, p. 223–249, 2011. Cited in page 41.
- DÜHRING, M. B.; JENSEN, J. S.; SIGMUND, O. Acoustic design by topology optimization. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 317, n. 3-5, p. 557–575, 2008. Cited 2 times in pages 48 e 49.
- DUMBSER, M.; KÄSER, M. An arbitrary high-order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—ii. the three-dimensional isotropic case. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 167, n. 1, p. 319–336, 2006. Cited in page 34.
- FANG, J. et al. The effects of elastic data on acoustic and elastic full waveform inversion. *Journal of Applied Geophysics*, Elsevier, v. 172, p. 103876, 2020. Cited in page 44.
- FARRELL, P. E. et al. Automated derivation of the adjoint of high-level transient finite element programs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 35, n. 4, p. C369–C393, 2013. Cited in page 73.
- FUNKE, S. *The automation of PDE-constrained optimisation and its applications*. Tese (Doutorado) — Imperial College London, 2014. Cited 2 times in pages 65 e 66.

- GAO, K.; HUANG, L. Acoustic-and elastic-waveform inversion with total generalized p-variation regularization. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, v. 218, n. 2, p. 933–957, 2019. Cited 2 times in pages 63 e 64.
- GAUTHIER, O.; VIRIEUX, J.; TARANTOLA, A. Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 7, p. 1387–1403, 1986. Cited 2 times in pages 34 e 77.
- GEORGIADIS, A.; KALIALAKIS, C. Evaluation of error vector magnitude due to combined iq imbalances and phase noise. *IET Circuits, Devices & Systems*, Wiley Online Library, v. 8, n. 6, p. 421–426, 2014. Cited in page 55.
- GIVOLI, D. High-order local non-reflecting boundary conditions: a review. *Wave motion*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 319–326, 2004. Cited in page 33.
- GONÇALVES, J. F. et al. Identification problem of acoustic media in the frequency domain based on the topology optimization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 62, n. 3, p. 1041–1059, 2020. Cited in page 49.
- GONÇALVES, J. F.; SILVA, E. C. An adaptive material interpolation for the reconstruction of p-wave velocity models with sharp interfaces using the topology optimization method. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, World Scientific, p. 2150016, 2021. Cited in page 49.
- GONZAGA, G. B. M. Métodos sísmicos aplicados à indústria de petróleo. *Caderno de Graduação-Ciências Exatas e Tecnológicas-UNIT-ALAGOAS*, v. 3, n. 1, p. 189–198, 2015. Cited in page 15.
- HAFFINGER, P. R. Seismic broadband full waveform inversion by shot/receiver refocusing. 2013. Cited 2 times in pages 17 e 18.
- HAJIRASOULIHA, I.; PILAKOUTAS, K.; MOGHADDAM, H. Topology optimization for the seismic design of truss-like structures. *Computers & structures*, Elsevier, v. 89, n. 7-8, p. 702–711, 2011. Cited in page 49.
- HALKJÆR, S.; SIGMUND, O.; JENSEN, J. S. Inverse design of phononic crystals by topology optimization. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, De Gruyter Oldenbourg, v. 220, n. 9-10, p. 895–905, 2005. Cited in page 49.
- HECHT, F. New development in freefem++. *Journal of numerical mathematics*, De Gruyter, v. 20, n. 3-4, p. 251–266, 2012. Cited in page 71.
- HIDAKA, Y.; SATO, T.; IGARASHI, H. Topology optimization method based on on-off method and level set approach. *IEEE transactions on magnetics*, IEEE, v. 50, n. 2, p. 617–620, 2014. Cited in page 48.
- HIGDON, R. L. Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 56, n. 2, p. 231–241, 1991. Cited in page 33.
- HOBRO, J. W.; CHAPMAN, C. H.; ROBERTSSON, J. O. A method for correcting acoustic finite-difference amplitudes for elastic effects. *Geophysics*, v. 79, n. 4, p. T243–T255, 2013. ISSN 19422156. Cited 4 times in pages 43, 44, 45 e 48.

- HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. *Computational Mechanics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 393–401, 2009. Cited in page 20.
- HVEJSEL, C. F.; LUND, E. Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 43, n. 6, p. 811–825, 2011. Cited in page 50.
- JENSEN, J. S. Topology optimization problems for reflection and dissipation of elastic waves. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 301, n. 1-2, p. 319–340, 2007. Cited in page 49.
- JENSEN, J. S.; PEDERSEN, N. L. On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1d and 2d scalar cases. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 289, n. 4-5, p. 967–986, 2006. Cited in page 49.
- JENSEN, J. S.; SIGMUND, O. Topology optimization of photonic crystal structures: a high-bandwidth low-loss t-junction waveguide. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 22, n. 6, p. 1191–1198, 2005. Cited in page 48.
- JENSEN, J. S.; SIGMUND, O. Topology optimization for nano-photonics. *Laser & Photonics Reviews*, Wiley Online Library, v. 5, n. 2, p. 308–321, 2011. Cited in page 48.
- JONES, A. Solving inverse problems in computer vision by scale space reconstruction. In: . [S.l.: s.n.], 1994. Cited in page 15.
- JR, H. E.; FANCELLO, E. A.; SILVA, E. C. N. Stress-constrained level set topology optimization for compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 362, p. 112777, 2020. Cited in page 20.
- KAIPIO, J.; SOMERSALO, E. Statistical inverse problems: discretization, model reduction and inverse crimes. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 198, n. 2, p. 493–504, 2007. Cited in page 59.
- KANG, N.-W. et al. A new 2-d image reconstruction algorithm based on fdtd and design sensitivity analysis. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, IEEE, v. 50, n. 12, p. 2734–2740, 2002. Cited in page 49.
- KÄSER, M.; DUMBSER, M. An arbitrary high-order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—i. the two-dimensional isotropic case with external source terms. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 166, n. 2, p. 855–877, 2006. Cited in page 34.
- KEYS, R. G. Absorbing boundary conditions for acoustic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 50, n. 6, p. 892–902, 1985. Cited in page 33.
- KIZILTAS, G. et al. Topology optimization of dielectric substrates for filters and antennas using simp. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer, v. 11, n. 4, p. 355–388, 2004. Cited in page 48.
- KOMATITSCH, D. et al. High-order finite-element seismic wave propagation modeling with mpi on a large gpu cluster. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 229, n. 20, p. 7692–7714, 2010. Cited in page 34.

KOMATITSCH, D. et al. Wave propagation in 2-d elastic media using a spectral element method with triangles and quadrangles. *Journal of Computational Acoustics*, World Scientific, v. 9, n. 02, p. 703–718, 2001. Cited in page 35.

KOMATITSCH, D.; TROMP, J. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation—i. validation. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 149, n. 2, p. 390–412, 2002. Cited in page 34.

KRISTEK, J.; MOCZO, P.; GALIS, M. A brief summary of some pml formulations and discretizations for the velocity-stress equation of seismic motion. *Studia Geophysica et Geodaetica*, Springer, v. 53, n. 4, p. 459, 2009. Cited in page 33.

LANZMASTER, D. et al. A level-set approach based on reaction–diffusion equation applied to inversion problems in acoustic wave propagation. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 37, n. 2, p. 025009, 2021. Cited in page 49.

LARSEN, A. A. et al. Topological material layout in plates for vibration suppression and wave propagation control. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 37, n. 6, p. 585–594, 2009. Cited in page 49.

LI, Y. et al. Frequency-domain full waveform inversion. *Journal of Seismic Exploration*, v. 25, p. 543–559, 2016. Cited in page 34.

LIAO, W. An adjoint-based jacobi-type iterative method for elastic full waveform inversion problem. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 267, p. 56–70, 2015. Cited in page 38.

LIMA, C. R. de et al. Electrical impedance tomography through constrained sequential linear programming: a topology optimization approach. *Measurement Science and Technology*, IOP Publishing, v. 18, n. 9, p. 2847, 2007. Cited in page 49.

LIU, X. et al. Hybrid absorbing boundary condition for three-dimensional elastic wave modeling. *Applied Geophysics*, Springer, v. 14, n. 2, p. 270–278, 2017. Cited in page 33.

LOGG, A.; MARDAL, K.-A.; WELLS, G. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 84. Cited in page 72.

MARELLI, S.; MAURER, H.; MANUKYAN, E. Validity of the acoustic approximation in full-waveform seismic crosshole tomography. *Geophysics*, v. 77, n. 3, 2012. ISSN 00168033. Cited 2 times in pages 44 e 45.

MARIANI, S. et al. Sensor deployment over damage-containing plates: A topology optimization approach. *Journal of intelligent material systems and structures*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 24, n. 9, p. 1105–1122, 2013. Cited in page 49.

MARIANI, S. et al. Optimal placement of MEMS sensors for damage detection in composite plates. *Micro and Nanosystems*, Bentham Science Publishers Ltd., v. 10, n. 1, p. 65–74, set. 2018. Available from Internet: <<https://doi.org/10.2174/1876402910666180417153602>>. Cited in page 49.

MARJANOVIĆ, M. Elastic versus acoustic 3-D Full Waveform Inversion at the East Pacific Rise 9°50N Milena. p. 68–70, 1377. Cited in page 45.

- MARTIN, G. S.; WILEY, R.; MARFURT, K. J. Marmousi2: An elastic upgrade for marmousi. *The leading edge*, Society of Exploration Geophysicists, v. 25, n. 2, p. 156–166, 2006. Cited in page 19.
- MELLO, L. A. M. et al. Three-dimensional electrical impedance tomography: a topology optimization approach. *IEEE transactions on biomedical engineering*, IEEE, v. 55, n. 2, p. 531–540, 2008. Cited in page 49.
- MENG, W.; FU, L. Y. Seismic wavefield simulation by a modified finite element method with a perfectly matched layer absorbing boundary. *Journal of Geophysics and Engineering*, v. 14, n. 4, p. 852–864, 2017. ISSN 17422140. Cited in page 35.
- MÉTIVIER, L. et al. Optimization schemes for full waveform inversion: the preconditioned truncated newton method. In: *SEG 2012*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–5. Cited in page 61.
- MIYAZU, Y.; OHSAKI, M.; TSUDA, S. Topology optimization of supporting structure for seismic response reduction of an arch. *Science China Technological Sciences*, Springer, v. 59, n. 6, p. 852–861, 2016. Cited in page 49.
- MORA, P.; WU, Z. Elastic versus acoustic inversion for marine surveys. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, v. 214, n. 1, p. 596–622, 2018. Cited in page 46.
- MOREIRA, J. B. D. et al. Multiscale topology optimization for frequency domain response with bi-material interpolation schemes. *Optimization and Engineering*, Springer, p. 1–33, 2020. Cited in page 20.
- MULDER, W. A.; SHAMASUNDAR, R. Performance of continuous mass-lumped tetrahedral elements for elastic wave propagation with and without global assembly. *Geophysical Journal International*, v. 207, n. 1, p. 414–421, 2016. ISSN 1365246X. Cited 2 times in pages 35 e 36.
- NETO, F. d. A. S. Modelagem acústica por diferenças finitas e elementos finitos em 2-d e 2, 5-d. *Revista Brasileira de Geofísica*, SciELO Brasil, v. 23, n. 4, p. 478–478, 2005. Cited in page 35.
- NGUYEN, T. et al. Improving rockbolt design in tunnels using topology optimization. *International Journal of Geomechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 16, n. 1, p. 04015023, 2016. Cited in page 49.
- NOCEDAL, J. Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation*, v. 35, n. 151, p. 773–782, 1980. Cited in page 61.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Cited in page 61.
- PAKRAVAN, A. et al. Hybrid perfectly-matched-layers for transient simulation of scalar elastic waves. *Structural Engineering and Mechanics*, Techno-Press, v. 51, n. 4, p. 685–705, 2014. Cited in page 33.
- PICELLI, R.; SIVAPURAM, R.; XIE, Y. M. A 101-line matlab code for topology optimization using binary variables and integer programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 63, n. 2, p. 935–954, 2021. Cited in page 20.

- PICELLI, R. et al. Stress-based shape and topology optimization with the level set method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 329, p. 1–23, 2018. Cited in page 20.
- PLESSIX, R.-E. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, v. 167, n. 2, p. 495–503, 2006. Cited 2 times in pages 65 e 66.
- POUDEL, J.; LOU, Y.; ANASTASIO, M. A. A survey of computational frameworks for solving the acoustic inverse problem in three-dimensional photoacoustic computed tomography. *Physics in Medicine & Biology*, IOP Publishing, v. 64, n. 14, p. 14TR01, 2019. Cited in page 15.
- POURSARTIP, B.; FATHI, A.; TASSOULAS, J. L. Large-scale simulation of seismic wave motion: A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier, v. 129, p. 105909, 2020. Cited 2 times in pages 34 e 35.
- PRATT, R. G.; SHIN, C.; HICK, G. Gauss–newton and full newton methods in frequency–space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 133, n. 2, p. 341–362, 1998. Cited in page 61.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: nonlinear phenomena*, North-Holland, v. 60, n. 1-4, p. 259–268, 1992. Cited in page 63.
- RYUZONO, K. et al. Topology optimization-based damage identification using visualized ultrasonic wave propagation. *Materials*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 13, n. 1, p. 33, 2020. Cited in page 49.
- SA, L. F. et al. Topology optimization of turbulent rotating flows using spalart–allmaras model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 373, p. 113551, 2021. Cited in page 20.
- SANTOS, J. d. *Modelagem da equação da onda acústica aplicada ao imageamento de estruturas geológicas*. 2012. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado-Coppe UFRJ. Rio de Janeiro: Instituto Alberto Luiz . . . , 2012. Cited 2 times in pages 7 e 16.
- SANTOS, J. L. R. *Modelagem da equação da onda acústica aplicada ao imageamento de estruturas geológicas*. [S.l.]: Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012. Cited in page 32.
- SCHMERR, L. W. *Fundamentals of ultrasonic nondestructive evaluation*. [S.l.]: Springer, 2016. Cited in page 15.
- SCHÖBERL, J. C++ 11 implementation of finite elements in ngsolve. 2014. Cited in page 71.
- SEARS, T. J.; SINGH, S.; BARTON, P. Elastic full waveform inversion of multi-component obc seismic data. *Geophysical Prospecting*, European Association of Geoscientists & Engineers, v. 56, n. 6, p. 843–862, 2008. Cited in page 46.
- SEIDL, R. *Full Waveform Inversion for Ultrasonic Nondestructive Testing*. Tese (Doutorado) — Technische Universität München, 2018. Cited 2 times in pages 7 e 16.

- SHIPP, R. M.; SINGH, S. C. Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine seismic streamer data. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 151, n. 2, p. 325–344, 2002. Cited in page 45.
- SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Journal of Structural Mechanics*, Taylor & Francis, v. 25, n. 4, p. 493–524, 1997. Cited in page 48.
- SIGMUND, O.; JENSEN, J. S. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 361, n. 1806, p. 1001–1019, 2003. Cited in page 49.
- SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 48, n. 6, p. 1031–1055, 2013. Cited 2 times in pages 21 e 60.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, Springer, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998. Cited in page 58.
- SIGMUND, O. et al. Topology optimization of two-dimensional elastic wave barriers. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 376, p. 95–111, 2016. Cited in page 49.
- SILVA, A. L. F. da; SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N. Topology optimization of composite hyperelastic material using spimfo-method. *Meccanica*, Springer, v. 56, n. 2, p. 417–437, 2021. Cited in page 20.
- SIVAPURAM, R.; PICELLI, R. Topology optimization of binary structures using integer linear programming. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 139, p. 49–61, 2018. Cited in page 20.
- SNIEDER, R.; TRAMPERT, J. Inverse problems in geophysics. In: *Wavefield inversion*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 119–190. Cited in page 15.
- SOLANO, C. P.; STOPIN, A.; PLESSIX, R. Synthetic study of elastic effects on acoustic full waveform inversion. In: EUROPEAN ASSOCIATION OF GEOSCIENTISTS & ENGINEERS. *75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2013*. [S.l.], 2013. p. cp–348. Cited in page 44.
- SOUZA, B. et al. Topology optimization of fluid flow by using integer linear programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, p. 1–20, 2021. Cited in page 20.
- SOUZA, E. M. de; SILVA, E. C. N. Topology optimization applied to the design of actuators driven by pressure loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 61, n. 5, p. 1763–1786, 2020. Cited in page 20.
- TARANTOLA, A. A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 10, p. 1893–1903, 1986. Cited in page 43.
- TIKHONOV, A. N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. In: *Dokl. Akad. Nauk*. [S.l.: s.n.], 1963. v. 151, p. 1035–1038. Cited in page 63.



- TIKHONOV, A. N. et al. *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 328. Cited in page 63.
- TROMP, J.; KOMATITSCH, D.; LIU, Q. Spectral-element and adjoint methods in seismology. *Communications in Computational Physics*, Global Science Press, v. 3, n. 1, p. 1–32, 2008. Cited in page 34.
- TURTELTAUB, S. Optimal material properties for transient problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 22, n. 2, p. 157–166, 2001. Cited in page 49.
- VERMEER, G. 3-d seismic survey design: *Soc. Expl. Geophys*, 2002. Cited in page 17.
- VIRIEUX, J. P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 4, p. 889–901, 1986. Cited in page 34.
- VIRIEUX, J.; CALANDRA, H.; PLESSIX, R.-É. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging. *Geophysical Prospecting*, European Association of Geoscientists & Engineers, v. 59, n. Modelling Methods for Geophysical Imaging: Trends and Perspectives, p. 794–813, 2011. Cited 2 times in pages 18 e 36.
- VIRIEUX, J.; OPERTO, S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 74, n. 6, p. WCC1–WCC26, 2009. Cited 2 times in pages 19 e 43.
- WADBRO, E.; BERGGREN, M. Topology optimization of an acoustic horn. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 196, n. 1-3, p. 420–436, 2006. Cited in page 48.
- WANG, Y. et al. A mixed von mises distribution for modeling soft biological tissues with two distributed fiber properties. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 49, n. 21, p. 2914–2923, 2012. Cited in page 56.
- WIRGIN, A. The inverse crime. *arXiv preprint math-ph/0401050*, 2004. Cited in page 59.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & structures*, Elsevier, v. 49, n. 5, p. 885–896, 1993. Cited in page 20.
- YILMAZ, Ö. *Seismic data analysis: Processing, inversion, and interpretation of seismic data*. [S.l.]: Society of exploration geophysicists, 2001. Cited in page 16.
- YIN, L.; ANANTHASURESH, G. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 23, n. 1, p. 49–62, 2001. Cited 2 times in pages 53 e 55.
- YIN, L.; YANG, W. Topology optimization for tunnel support in layered geological structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 47, n. 12, p. 1983–1996, 2000. Cited in page 49.
- ZAKIAN, P.; KAVEH, A. Topology optimization of shear wall structures under seismic loading. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Springer Science and Business Media LLC, v. 19, n. 1, p. 105–116, jan. 2020. Available from Internet: <<https://doi.org/10.1007/s11803-020-0550-5>>. Cited in page 49.

ZHANG, W. Elastic full waveform inversion on unstructured meshes by the finite element method. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 94, n. 11, p. 115002, 2019. Cited 2 times in pages 34 e 35.

ZHANG, W.; ZHUANG, Y.; ZHANG, L. A new high-order finite volume method for 3d elastic wave simulation on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 340, p. 534–555, 2017. Cited in page 34.

ZHEBEL, E. et al. A comparison of continuous mass-lumped finite elements with finite differences for 3-d wave propagation. *Geophysical Prospecting*, European Association of Geoscientists & Engineers, v. 62, n. 5, p. 1111–1125, 2014. Cited 2 times in pages 35 e 36.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. The coc algorithm, part ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 89, n. 1-3, p. 309–336, 1991. Cited in page 51.

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *The finite element method*. [S.l.]: McGraw-hill London, 1977. v. 3. Cited in page 36.