

DANIEL OLIONI ANDERSSON

**PROJETO DE UM MANIPULADOR DE REALIMENTAÇÃO DE
FORÇAS**

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

São Paulo, 2005

OK

DANIEL OLIONI ANDERSSON

**PROJETO DE UM MANIPULADOR DE REALIMENTAÇÃO DE
FORÇAS**

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

Orientador:

Prof.Dr.Agenor de Toledo Fleury

São Paulo, 2005

Aos meus pais,
Sidnei e Ana Maria.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury pela brilhante orientação e a disposição de dar sempre um bom caminho nos momentos difíceis.

Ao Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho por fornecer conhecimentos e ajudas preciosas para a elaboração desse trabalho.

Ao Rogério Eduardo Santana pela ajuda, boas opiniões e pelas conversas durante esse período.

Ao Prof.Dr. Jaime Roizenblatt pela idéia que deu origem a esse projeto.

Aos meus irmãos Sidnei e Vanessa.

Resumo

O uso da Realidade Virtual para o treinamento de determinadas atividades já é bastante comum em algumas áreas (treinamento de pilotos de aviões) enquanto em outras ainda está em fase de estudo. O treinamento cirúrgico de médicos é uma dessas áreas em que a Realidade Virtual é bastante promissora, mas que no entanto ainda não é algo que se possa utilizar de maneira vasta na prática. Um dos principais motivos para este fato é a dificuldade de se produzir um dispositivo capaz de fornecer ao usuário as respostas táteis condizentes com as de uma cirurgia real. Este fato pode ser observado nos altos custos dos manipuladores de realimentação de forças normalmente vendidos no mercado.

Visto esse cenário, este trabalho visa projetar e analisar um dispositivo de realimentação de forças para sua aplicação em simulador de cirurgias oftalmológicas usando Realidade Virtual.

Por fim, um protótipo foi implementado baseado nas simulações numéricas do modelo matemático do dispositivo.

Abstract

The use of Virtual Reality for training purposes is already very common in some areas (like training of aircraft pilots), but it remains as a proof of concept in other areas. Medical training is one of those areas where Virtual Reality has a huge potential but it is not widely spread yet. The main reason for this is the difficulty in building a device able to provide the user a haptic feedback similar to real surgery. This fact can be observed in the high cost of force feedback manipulator commonly sold in the market. Due to this scenario, this work aims to project and analyze a low cost force feedback device to be applied in an ophthalmologic surgical simulator using Virtual Reality. At last, a prototype has been built based on the numerical simulations of the mathematical model of the designed force feedback device.

Índice

1. Introdução.....	1
1.1. Realidade Virtual e sua Aplicação no Campo Cirúrgico	2
1.2. Objetivos.....	7
1.3. Breve Descrição de uma Cirurgia de Catarata.....	8
2. Escolha do mecanismo.....	11
2.1. Tipos de Mecanismos.....	13
2.2. Número de Graus de Liberdade Necessários.....	16
2.3. O mecanismo escolhido.....	16
3. Estudo Cinemático do Mecanismo	18
3.1. Nomenclatura das Partes	19
3.2. Dimensões Relevantes.....	20
3.3. Graus de Liberdade	22
3.4. Cinemática Inversa de Posição	22
3.5. Cinemática Direta	34
3.6. Matriz Jacobiana	38
3.7. Cinemáticas Direta e Inversa de Velocidades e Acelerações.....	40
3.8. Volume de Trabalho.....	43
3.9. Determinação das Dimensões do Mecanismo	45
4. Dinâmica	50
4.1. Dinâmica Direta	50
4.2. Dinâmica Inversa	59
4.3. Dinâmica Direta através da Dinâmica Inversa	63
5. Estratégias de Controle	65
5.1. Impedância.....	66
5.2. Admitância.....	75
6. Modelo Dinâmico do Manipulador.....	80
6.1. Atuadores.....	80
6.2. Sensor de Forças	84
6.3. Modelo Final do Manipulador	86
6.4. Parâmetros do Modelo	88

7. Simulação do Manipulador	91
7.1. Simulação do Manipulador para a Primeira Estratégia de Controle.....	91
7.2. Simulação do Manipulador para a Segunda Estratégia de Controle.....	96
7.3. Simulação do Manipulador para a Terceira Estratégia de Controle	108
7.4. Manipulador com Controle Multivariável.....	116
8. Construção do protótipo.....	124
9. Resultados experimentais.....	129
9.1. Resultados Experimentais para a Primeira Estratégia de Controle.....	129
9.2. Resultados Experimentais para a Segunda Estratégia de Controle.....	133
9.3. Resultados Experimentais para a Terceira Estratégia de Controle	138
10. Conclusões Finais	144
11. Referências Bibliográficas	146
12. Apêndice A.....	150
13. Apêndice B- Resultados da Dinâmica Direta para Algumas Situações.....	152
14. Apêndice C-Rotinas de MatLab®	154

Lista de Figuras

Figura 1-Deformação de um cilindro utilizando um modelo linear.	5
Figura 2-Deformação de um cilindro usando um modelo não linear.	5
Figura 3-Execução de corte de tecido em um simulador de cirurgia de fígado.	6
Figura 4- Algoritmo simplificado de solução de Navier-Stokes.....	6
Figura 5 – Primeira incisão.	9
Figura 6 – Segunda incisão.	9
Figura 7 – Introdução da pinça.	10
Figura 8 – Facoemulsificação.....	10
Figura 9 – Aspiração dos pedaços do cristalino opaco.....	10
Figura 10 – Inserção do novo cristalino.....	10
Figura 11- Realimentação de forças e monitoramento de posição em seis graus de liberdade.	11
Figura 12- Realimentação de forças em três graus de liberdade (translações) e monitoramento de posição em seis graus de liberdade (translações e rotações). ...	11
Figura 13-Dispositivo de realimentação de forças da Force Dimension.	12
Figura 14- Dispositivo de realimentação de forças de Tsumaki et al. [13].	12
Figura 15-Dispositivo de realimentação de forças em detalhe[13].	13
Figura 16-Robô Puma.	13
Figura 17-Mecanismo Delta.....	14
Figura 18-Hexa [14].....	15
Figura 19-Plataforma de Stewart [14].	15
Figura 20-Hexaglide [14].....	16
Figura 21-Mecanismo Delta.....	18
Figura 22-Nomenclatura das peças 1/3.....	19
Figura 23-Nomenclatura das peças 2/3.....	19
Figura 24-Nomenclatura das peças 3/3.....	20
Figura 25-Medidas relevantes.	21
Figura 26-Sistemas de coordenadas 1/3.....	24
Figura 27-Sistemas de coordenadas 2/3.....	24
Figura 28-Sistemas de coordenadas 3/3.....	25

Figura 29-Sequência de transformações.	27
Figura 30-Eschema do algoritmo da cinemática direta.	37
Figura 31-Restrições cinemáticas.	52
Figura 32-Sub-cadeias cinemáticas e forças de interação.	59
Figura 33-Manipulador de um grau de liberdade.	66
Figura 34-Ambiente virtual.	67
Figura 35-Eschema do manipulador.	71
Figura 36-Diagrama de blocos do sistema (impedância).	71
Figura 37-Diagrama de blocos (admitância).	75
Figura 38-Motor elétrico cc.	80
Figura 39-Sensor de forças.	85
Figura 40-Ambiente Virtual.	91
Figura 41- Diagrama de blocos do sistema simulado.	94
Figura 42-Diagrama de blocos do manipulador com o controle de posição.	101
Figura 43-Gráfico do lugar das raízes para a função de transferência (7.2.1) com o seu respectivo controlador.	103
Figura 44-Diagrama de blocos do sistema simulado.	104
Figura 45-Diagrama de bloco do controlador.	104
Figura 46 Gráfico do lugar das raízes para a função de transferência (7.3.1) com o seu respectivo controlador.	111
Figura 47-Diagrama de blocos do sistema simulado.	112
Figura 48-Diagrama de bloco do controlador.	112
Figura 49- Diagrama de blocos do sistema simulado.	119
Figura 50 - Arranjo geral do experimento.	125
Figura 51 - Interface com encoders.	125
Figura 52 - Interface de potência.	126
Figura 53 - Manipulador.	126
Figura 54 - Sensor de força.	127
Figura 55 - Ambiente virtual.	128

Lista de Gráficos

Gráfico 1-Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.....	95
Gráfico 2-Posição da plataforma.....	95
Gráfico 3-Tensões elétricas aplicadas aos atuadores.....	96
Gráfico 4-Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.....	105
Gráfico 5-Posição da plataforma.....	105
Gráfico 6-Posição X da plataforma em comparação com a referência do Xref do ambiente virtual.	106
Gráfico 7-Posição Y da plataforma em comparação com a referência do Yref do ambiente virtual.	106
Gráfico 8-Posição Z da plataforma em comparação com a referência do Zref do ambiente virtual.	107
Gráfico 9-Tensões elétricas aplicadas aos atuadores.....	107
Gráfico 10- Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.....	113
Gráfico 11-Posição da plataforma.	114
Gráfico 12-Comparação entre a força medida F_{xm} e sua referência F_{xref}	114
Gráfico 13-Comparação entre a força medida F_{ym} e sua referência F_{yref}	115
Gráfico 14-Comparação entre a força medida F_{zm} e sua referência F_{zref}	115
Gráfico 15-Tensões aplicadas aos atuadores.....	116
Gráfico 16 - Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.....	120
Gráfico 17 - Posição da plataforma.	120
Gráfico 18 - Tensões aplicadas aos motores.	121
Gráfico 19 - Posição X da plataforma em comparação com a referência do Xref do ambiente virtual.	121
Gráfico 20 - Posição Y da plataforma em comparação com a referência do Yref do ambiente virtual.	122
Gráfico 21 - Posição Z da plataforma em comparação com a referência do Zref do ambiente virtual.	122

Gráfico 22 – Componente X da posição da plataforma.....	130
Gráfico 23 - Componente Y da posição da plataforma.	130
Gráfico 24 - Componente Z da posição da plataforma.....	131
Gráfico 25 - Tensão aplicada ao motor 1.....	131
Gráfico 26 - Tensão aplicada ao motor 2.....	132
Gráfico 27 - Tensão aplicada ao motor 3.....	132
Gráfico 28 - Força aplicada pelo usuário ao manipulador (direção Z).....	133
Gráfico 29 - Componente X da posição da plataforma.	134
Gráfico 30 - Componente Y da posição da plataforma.	134
Gráfico 31 - Componente Z da posição da plataforma.....	135
Gráfico 32 - Tensão aplicada ao motor 1.....	135
Gráfico 33 - Tensão aplicada ao motor 2.....	136
Gráfico 34 - Tensão aplicada ao motor 3.....	136
Gráfico 35 - Referência de posição (componente Z).....	137
Gráfico 36 - Força aplicada pelo usuário ao manipulador (direção Z).....	137
Gráfico 37 - Comparação entre a posição Z da plataforma e sua referência.	138
Gráfico 38 -Componente X da posição da plataforma.	139
Gráfico 39 - Componente Y da posição da plataforma.	139
Gráfico 40 - Componente Z da posição da plataforma.....	140
Gráfico 41 - Tensão aplicada ao motor 1.....	140
Gráfico 42 - Tensão aplicada ao motor 2.....	141
Gráfico 43 - Tensão aplicada do motor 2.....	141
Gráfico 44 - Referência de força na direção Z.....	142
Gráfico 45 - Força aplicada pelo usuário ao manipulador (direção Z).....	142
Gráfico 46 - Comparação entre força aplicada pelo usuário e respectiva referência. .	143

Lista de Símbolos

L_B	Lado do triângulo equilátero que forma a base do mecanismo Delta
L_p	Lado do triângulo equilátero que forma a plataforma do mecanismo
Delta	
a_1	Extensão longitudinal dos ligamentos inferiores 1,2 e 3 do mecanismo
Delta	
a_2	Comprimento das hastes que estão entre as juntas esféricas do mecanismo
Delta	
e	Distância entre as hastes do mecanismo Delta.
n	Número de peças de um mecanismo
n_{p1}	Número de pares cinemáticos com um grau de liberdade.
n_{p2}	Número de pares cinemáticos com dois graus de liberdade.
n_{p3}	Número de pares cinemáticos com três graus de liberdade.
n_{p4}	Número de pares cinemáticos com quatro graus de liberdade.
n_{p5}	Número de pares cinemáticos com cinco graus de liberdade.
O_{ij}	Ponto j da perna i do mecanismo
$O_{ij} - x_{ij}y_{ij}z_{ij}$	Sistema de coordenadas j da perna i do mecanismo
H_B^A	Matriz de transformação homogênea entre o sistema de coordenadas cuja origem é o ponto O_A e o sistema de coordenadas cuja origem é o ponto O_B
P_i	Ponto médio do lado i da plataforma do mecanismo Delta.
R_B^A	Matriz de rotação entre os sistema de coordenadas A e B.
O_{ij}^{ab}	Ponto O_{ij} descrito no sistema de coordenadas cuja origem é o ponto O_{ab}
X, Y, Z	Coordenadas da plataforma em relação ao sistema de coordenadas da base do mecanismo ($O - x_o y_o z_o$)
J	Matriz Jacobiana
x	Vetor de coordenadas, tal que $x = [X \ Y \ Z]^T$

q	Vetor de coordenadas, tal que $q = [\theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \theta_{31}]$
q_i	Vetor de coordenadas, tal que $q_i = [\theta_{i1} \quad \theta_{i2} \quad \theta_{i3}]$
W	Volume de trabalho do mecanismo
η	índice de isotropia
f_k	restrição cinemática k
M_i	Matriz de massa da perna i do mecanismo
M	Matriz de massa do mecanismo Delta
C_i	Matriz giroscópica da perna i do mecanismo
C	Matriz giroscópica do mecanismo Delta
G_i	Matriz de esforços gravitacionais da perna i do mecanismo
G	Matriz de esforços gravitacionais do mecanismo Delta
$F_x^{ext}, F_y^{ext}, F_z^{ext}$	Componentes da força aplicada a plataforma
M_m	Massa do manipulador
b_m	Amortecimento do manipulador
x_m	Posição do manipulador
v_m	Velocidade do manipulador
F_m	Força desenvolvida pelo atuador do manipulador
F_h	Força que usuário aplica ao manipulador
M_v	Massa do ambiente virtual
K_v	Rigidez do ambiente virtual
b_v	Amortecimento do ambiente virtual
M_s	Massa do sensor de força.
C	Amortecimento do sensor de força
K	Rigidez do sensor de forças
F_C	Força de controle.
L	Indutância da armadura do motor cc.
R	Resistência elétrica do motor cc.
J_m	Momento de inércia do rotor do motor.

n Fator de redução

U_i Tensão elétrica aplicada ao motor da perna i .

θ_{im} Ângulo de giro do motor da perna i .

θ_{i1} Posição angular em relação a vertical do ligamento inferior i do

mecanismo Delta

τ_i Matriz de forças generalizadas da perna i .

τ Vetor de forças generalizadas do mecanismo Delta.

λ Matriz dos multiplicadores de Lagrange

1.Introdução

A utilização de computadores e outros componentes tecnológicos em aplicações médicas e cirúrgicas tem se tornada a tal ponto ampla que já se considera uma nova e rica vertente tecnológica, comumente chamada de Computer-Aided-Surgery (CAS). Assim como suas predecessoras industriais (CAD, CAM, CIM,etc), esta também incorpora uma série de diferentes metodologias e técnicas de atuação dentro de si. O que está dentro do campo de pesquisa do CAS vai desde o desenvolvimento de robôs cirúrgicos e cirurgias guiadas por imagem, até o projeto de simuladores de operações médicas com a utilização de Realidade Virtual.

A Cirurgia Auxiliada por Computador já atingiu um nível bastante razoável de desenvolvimento; no entanto, importantes contribuições ainda devem ser dadas. A construção de um simulador cirúrgico é um importante passo para adentrar esse novo campo tecnológico, e, por sua vez, a construção de um manipulador de realimentação de forças constitui um passo fundamental na construção de um simulador cirúrgico.

Um dos principais desafios em projetos desse gênero é fazer com que a Engenharia e a Ciência da Computação absorvam o conhecimento de um cirurgião de maneira que seja possível a criação de um sistema eficiente e utilizável na prática. Ainda é importante considerar que a implementação de um simulador cirúrgico depende de várias outras sub-disciplinas: computação gráfica, criação de algoritmos, detecção de colisões, projeto de interface homem-máquina, métodos de integração numérica, mecânica de precisão e outras.

O principal ponto que justifica os esforços de construir um simulador é o fato de que atualmente médicos residentes ganham experiência através de treinamento supervisionado em pacientes. O problema desse método de ensino vem de que o aprendizado se dá em oportunidades aleatórias de se encontrar um paciente em que se possa treinar um determinado procedimento. A proposta desse trabalho traz a oportunidade de alterar de modo positivo essa realidade. Como um simulador físico, é possível tornar mais homogêneo o conhecimento e o domínio das técnicas entre os residentes. Todos teriam a mesma oportunidade de treinar quantas vezes fossem necessárias um determinado procedimento sem colocar em risco qualquer paciente. Tornar-se-ia, também, muito mais fácil realizar o treinamento de uma cirurgia em

cenários diferentes; as simulações poderiam conter diferentes variações anatômicas (sexo, idade, tamanho...), patologias e diferentes condições de ambientes (sala de emergência, pronto socorro...).

Especula-se também que o simulador pode proporcionar um modo de avaliação mais exato. O sistema poderia armazenar dentro de si um padrão ideal de um determinado procedimento cirúrgico, e ao final de uma simulação, o usuário poderia saber o quão próximo esteve desse padrão ideal e assim avaliar o seu desempenho, podendo determinar em quais pontos falhou e em quais obteve sucesso.

Vários foram os motivos que levaram a construção do manipulador ser o foco desse trabalho. O primeiro é o fato deste desempenhar um papel fundamental na simulação, e mesmo assim, ainda hoje consistir em um dos principais obstáculos na implementação de um simulador cirúrgico. Pode-se dizer que a reprodução de sons e imagens atualmente já é suficientemente desenvolvida para criação desse sistema, no entanto, isso ainda não se pode afirmar ao que se refere à reprodução de forças e sensações táteis. O tato é um sentido muito utilizado pelo médico durante um procedimento cirúrgico. Um simulador dotado de um manipulador que é incapaz de reproduzir de maneira fiel forças e outras sensações táteis de uma cirurgia real torna-se ineficiente e pouco útil no treinamento médico.

O contexto geral em que está inserido esse trabalho também justifica seu início pelo manipulador, conforme se explicará em detalhes no tópico Objetivos deste texto.

1.1. Realidade Virtual e sua Aplicação no Campo Cirúrgico

Até o presente momento falou-se de simuladores, mas ainda não se relatou exatamente o que venham a ser esses e quais são as partes que os constituem. Pode-se definir um simulador cirúrgico como um dispositivo capaz de oferecer ao usuário estímulos visuais, sonoros, táteis ou até mesmo olfativos de maneira a dar a este a impressão de que realmente se encontra executando uma cirurgia. Faz-se a hipótese de que a construção de um simulador desse gênero implica na utilização de Realidade Virtual (RV). Isso vem da própria definição comumente encontrada, que a descreve como sendo a combinação de interface homem-computador, gráficos, sensores e computação de alto desempenho que permite o usuário se sentir imerso em um ambiente artificial e possa interagir com ele.

A simulação de situações por meio da RV encontrou viabilidade técnica a partir do momento em que os computadores se tornaram potentes o suficiente para realizar cálculos gráficos complexos em tempo real. Na área da aviação, há muito a RV já encontra utilidade efetiva. Uma importante etapa do treinamento de pilotos de aeronaves comerciais e militares é feita em simuladores de vôo há décadas. Por outro lado, a simulação de procedimentos cirúrgicos que usam RV aos poucos vai se mostrando viável. Existem trabalhos realizados que vão desde a simulação de tarefas mais simples como uma punctura lombar (Gorman e outros [1]), até procedimentos completos como cirurgias oftalmológicas (Sinclair, Peifer, Halebian e outros [2]) e tarefas complexas como uma laparoscopia (Downes, Cavusoglu e outros [3]). No entanto, ao contrário do exemplo da aviação, no campo cirúrgico o atual nível de desenvolvimento dessa tecnologia ainda não permite sua utilização de maneira ampla e efetiva.

Para a maior compreensão de como as coisas se processam, é interessante analisar os componentes mais comuns que fazem parte não apenas dos simuladores cirúrgicos, mas de toda a gama de simuladores que usam RV. Estes se encontram listados a seguir, e se descreve qual o seu papel:

Óculos de realidade virtual – É através desses óculos especiais que o médico em treinamento toma contato com as imagens geradas pelo sistema. Ao invés de utilizar esses óculos, poder-se-ia utilizar um monitor normal de computador. No entanto, os óculos oferecem ao usuário uma imagem diferente a cada olho e ligeiramente defasadas – cada olho recebe a imagem correspondente à imagem do cenário que cada um perceberia numa situação real - proporcionando uma sensação de profundidade e de tridimensionalidade muito maior.

Detector de posição e orientação – Trata-se de um sistema de sensores que deve se mover conjuntamente com a cabeça do usuário, transmitindo informações de posição e orientação ao programa principal para que as imagens dos cenários gerados correspondam ao ponto de vista de observação do mesmo.

Manipulador – Como já mencionado, esse será a principal contribuição desse trabalho. Podemos defini-lo como um corpo físico ligado a um mecanismo dotado de atuadores e sensores capazes de reproduzir forças e torques resultantes da interação do usuário com o ambiente virtual. O projeto e a configuração podem depender muito do instrumento cirúrgico que se deseja simular. No entanto, o ideal é que este seja capaz de ao menos

detectar a posição e orientação do corpo e também que seja capaz de reproduzir forças e torques nas três direções.

Software de Simulação – Esse é o elemento que controla e assume diversas responsabilidades dentro da simulação e, como se poderá ver, cada uma dessas é bastante complexa. A primeira delas corresponde a criar e atualizar as imagens do cenário virtual, sendo que essas imagens devem ser compatíveis com o ponto de vista do usuário do sistema e com a posição e orientação do corpo físico do manipulador. Exemplificando, supondo que em uma dada a simulação o manipulador represente um bisturi, o software deve apresentar ao usuário, através dos óculos de realidade virtual, a imagem de um cenário contendo um bisturi de modo que tanto o cenário quanto o bisturi tenham suas posições compatíveis, respectivamente, com a posição do usuário e do corpo do manipulador.

Uma outra atribuição do software é detectar a colisões entre os diversos elementos do ambiente virtual. Então, continuando com o exemplo do bisturi, supõe-se que o usuário movimente este bisturi até atingir um órgão ou alguma estrutura do paciente. No momento da colisão, essa deve ser informada ao sistema para que os devidos procedimentos sejam tomados. Detecção de colisões podem se tornar algo que requeira uma grande capacidade computacional quando os cenários virtuais se tornam mais complexos e o número de objetos virtuais aumentam.

Uma outra obrigação do software é calcular a força que deverá ser fornecida pelo manipulador ao usuário resultante de uma colisão do instrumento cirúrgico com uma estrutura do paciente virtual. Isso se torna algo bastante desafiador quando pensamos que os tecidos humanos são bastante anisotrópicos e as características viscoelastoplásticas podem variar muito de um ponto para outro. É importante ressaltar que o software também fica a cargo de armazenar todos os modelos físicos e anatômicos da área que será alvo da cirurgia virtual. O cálculo das forças, então, dependerá muito de quão bom são os modelos físicos e anatômicos. Outro fato que deve ser observado na reprodução de forças é de que esta é realizada por um controle digital, isto é, os sinais que o software envia para os atuadores do manipulador estão sujeitos a uma certa taxa de atualização (da mesma maneira, os sinais provenientes dos sensores do manipulador também estão sujeitos a uma certa taxa de amostragem). Meier, Rawn e Krummel [4] aconselham que essa taxa não seja inferior a 1kHz. Caso não se consiga atender essa

recomendação, o usuário sentirá o manipulador vibrando, o que pode comprometer de forma drástica a simulação do tato.

O cálculo das deformações dos tecidos e órgãos também representa um outro problema. Além do fato já mencionado desses serem extremamente anisotrópicos, estes também estão sujeitos a grandes deformações, devida à baixa rigidez dos tecidos humanos. O resultado disso é que modelos de deformações lineares podem não ser apropriados.

As figuras 1 e 2 extraídas do trabalho de Picinbono, Delingette e Ayache [5] mostram as diferenças obtidas na deformação de um cilindro usando um modelo linear de deformação contra um não linear.

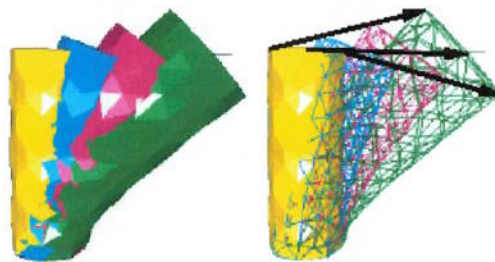


Figura 1-Deformação de um cilindro utilizando um modelo linear.



Figura 2-Deformação de um cilindro usando um modelo não linear.

No modelo de deformações lineares, os pontos da malha seguem uma trajetória retilínea, o que resulta em distorções. Quando se compara esse método com um não linear, vê-se que esse último produz resultados mais próximos do que acontece na realidade.

Ainda existem outras tarefas que o software deve realizar e que ainda são alvos de pesquisas. Duas delas são simular cortes e incisões, e simular sangramentos. A figura

a seguir mostra um exemplo de um algoritmo que permite realizar corte em tecidos de um fígado numa laparoscopia.

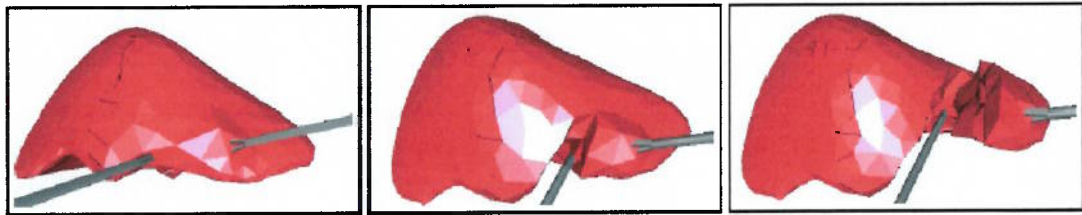


Figura 3-Execução de corte de tecido em um simulador de cirurgia de fígado.

Um sangramento corresponde ao escoamento de um fluido. Fazer a simulação desse fenômeno em tempo real integrando a equação a derivadas parciais de Navier-Stokes com os algoritmos numéricos atuais ainda é algo inviável. Kass e Miller [6] propõem uma solução nesse caso, que é a simulação do escoamento do sangue em uma superfície plana (um escoamento bidimensional), chamada superfície auxiliar, e depois projetar os resultados obtidos na superfície onde realmente ocorre o fenômeno. A figura abaixo esquematiza esse procedimento.

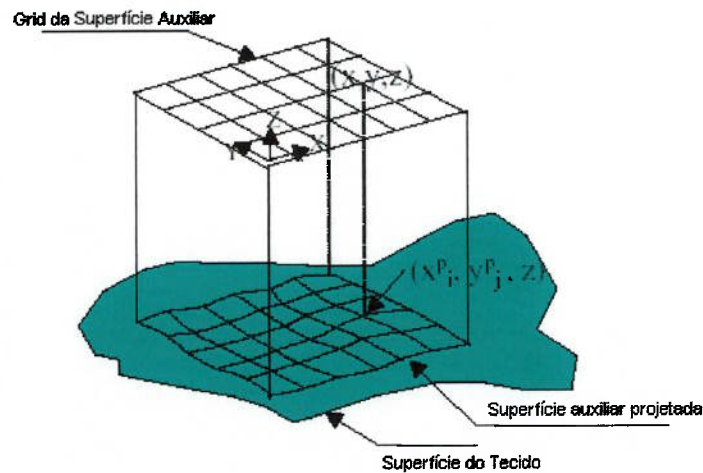


Figura 4- Algoritmo simplificado de solução de Navier-Stokes

O desafio maior da construção desse software é fazer com que esse realize uma série de tarefas complexas do ponto de vista computacional em tempo real. Por exemplo, viu-se que a utilização de modelos não-lineares de deformação traz resultados

mais satisfatórios. No entanto, sua integração numérica requer mais tempo para atingir a convergência, o que poderia inviabilizar a utilização desses últimos. Uma série de propostas e novos algoritmos tem sido apresentadas para superar essa situação. Viu-se que a taxa de atualização das forças deve ser de no mínimo 1kHz, o que é difícil face a série de outras tarefas que o software deve realizar. Mark, Randolph, Finch, Van Verth, e Taylor [7] sugerem então separar o loop de controle de forças do restante do processamento do simulador. O exemplo do algoritmo de sangramento comentado no parágrafo anterior também é uma interessante proposta para tornar os cálculos mais rápidos. Novos métodos de menor custo computacional para o cálculo de deformações (Basdogan [8]) e de detecção de colisões também já foram apresentados (Klosowski, Held e outros [9]).

Fica como recomendação geral a necessidade de se procurar sempre métodos numéricos mais eficientes. Em suma, pode-se dizer que, no desenvolvimento do software, vista a capacidade de processamento dos computadores atuais mais acessíveis, dois compromissos conflitantes terão que ser atendidos: velocidade de processamento e máxima reprodução da realidade.

1.2. Objetivos

Podemos resumir o objetivo desse trabalho da seguinte maneira: construir um manipulador de desempenho e custos compatíveis com a finalidade de utilizá-lo em treinamento médico.

A atenção que deve ser dada ao manipulador se justifica não apenas pela importância que este assume em um simulador de realidade virtual, mas também pela dificuldade que se tem para a sua construção de modo atender a todas as expectativas e especificações de projeto. Exige um excelente sistema de realimentação de forças, de maneira a reproduzir, com a mais alta fidelidade, sensações táteis reais, posicionamento preciso, alta sensibilidade de medição e altas taxas de processamento interno de dados. São dificuldades importantes, porém contornáveis, que se incorporam nos preços cobrados no mercado. Os custos de um manipulador de bom desempenho estão entre US\$ 20.000 e US\$ 60.000, tornando inviável sua utilização e multiplicação em atividades de ensino médico. A proposta ora encaminhada visa superar esse problema.

Existem incontáveis procedimentos que podem ser treinados via um simulador e dificilmente um determinado manipulador seria aplicável em qualquer um desses procedimentos. Portanto, neste trabalho, considera-se bastante conveniente escolher um determinado procedimento como base para a tomada de requisitos de projeto.

O procedimento escolhido nesse trabalho é a cirurgia oftalmológica de catarata. Essa escolha pode ser entendida pelo fato de tal procedimento ser bastante comum e exigir uma grande habilidade motora do médico. Este constitui um procedimento cujo treinamento com a utilização de um simulador torna-se bastante interessante.

O próximo item faz uma breve descrição de uma cirurgia de catarata com o objetivo de se fazer um levantamento dos requisitos mecânicos do manipulador.

1.3. Breve Descrição de uma Cirurgia de Catarata

Este tópico tem como objetivo descrever uma cirurgia de catarata, dando enfoque à caracterização dos movimentos dos instrumentos envolvidos em um procedimento como esse. As informações aqui contidas foram retiradas da observação de vídeos disponíveis no site <http://www.stlukeseye.com/> [10]. São ao todo seis vídeos que podem ser assistidos por meio dos links abaixo:

http://www.stlukeseye.com/videos/live/live_2_99.rm [10]

http://www.stlukeseye.com/videos/live/live_3_99.rm [10].

http://www.stlukeseye.com/videos/live/live_4_99.rm [10].

http://www.stlukeseye.com/videos/live/live_5_99.rm [10].

http://www.stlukeseye.com/videos/live/live_6_21_99.rm [10].

http://www.stlukeseye.com/videos/live/live_6_28_99.rm [10].

Uma outra fonte de informações para esse trabalho foi encontrada no site <http://www.alconlabs.com/br/eo/surgery/atarata.jhtml> [11]. O procedimento adotado segue os seguintes passos:

1) Uma incisão é feita pelo primeiro instrumento utilizado, conforme mostra a figura 5. A movimentação desse instrumento é na direção de seu eixo longitudinal.



Figura 5 – Primeira incisão.

2) No local da incisão é introduzido um pequeno tubo e a seguir um outro tubo é introduzido no orifício construído pelo primeiro. Esse segundo tubo introduz um fluido. A direção preferencial de movimentação desses tubos também é a de seus eixos longitudinais. A seguir um outro instrumento faz uma segunda incisão numa posição mais à direita (toma-se como referência as imagens obtidas). Esse instrumento realiza o corte em uma direção perpendicular ao seu eixo longitudinal. A figura 6 mostra tanto o segundo tubo quanto o instrumento que faz a pré-incisão mais à direita.



Figura 6 – Segunda incisão.

3) Essa incisão mais à direita é aprofundada formando uma abertura que atinge uma região mais interna ao olho. A ampliação é feita por uma espécie de bisturi cuja região de corte é triangular e sua movimentação se dá na direção de seu eixo longitudinal. Durante esse processo, o olho é fixado por uma pinça.

4) Essa incisão que atinge a região mais interna do olho e chega até ao cristalino serve de passagem para os outros instrumentos da cirurgia. Assim, o passo seguinte é introduzir uma pinça por esse corte. Essa pinça abre e fecha fazendo movimentos no plano (figura 7). Sua função é fazer uma abertura na cápsula anterior do cristalino para permitir a passagem do instrumento que faz a facoemulsificação.

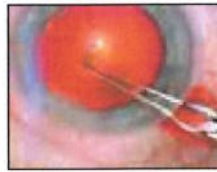


Figura 7 – Introdução da pinça.

5) A facoemulsificação é realizada por uma sonda que quebra (emulsifica) o cristalino opaco em pequenos pedaços (figura 8). A incisão realizada que permite a passagem dessa sonda é de apenas 3.2mm [11].



Figura 8 – Facoemulsificação.

6) Por fim, a região é limpa e os pedaços do cristalino opaco são aspirados para fora do olho por meio de uma sonda (figura 9). Após isso o novo cristalino sintético é inserido (figura 10). Nesse tipo de técnica não é necessário se fazer sutura uma vez que as incisões são muito pequenas e acabam se cicatrizando sozinhas.



Figura 9 – Aspiração dos pedaços do cristalino opaco.



Figura 10 – Inserção do novo cristalino.

2. Escolha do mecanismo

A arquitetura do mecanismo exerce influência significativa no desempenho do manipulador. A escolha de uma arquitetura não conveniente pode tornar o manipulador não utilizável na prática, o que torna essa escolha um ponto nevrálgico desse projeto.

Primeiramente apresentam-se alguns mecanismos de manipuladores já disponíveis comercialmente. Um interessante exemplo de um sistema de realimentação de forças já disponível é o **PHANTOM™**, desenvolvido pela *Sensable* (<http://www.sensable.com/>). Abaixo estão imagens de diferentes modelos desse sistema.



Figura 11- Realimentação de forças e monitoramento de posição em seis graus de liberdade.

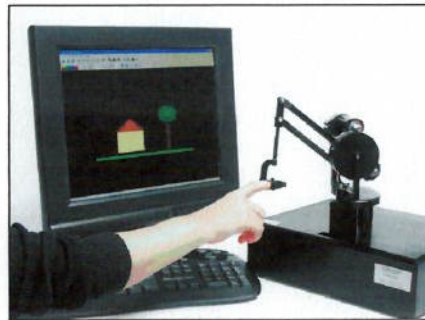


Figura 12- Realimentação de forças em três graus de liberdade (translações) e monitoramento de posição em seis graus de liberdade (translações e rotações).

Existe um outro dispositivo comercialmente disponível baseado na arquitetura do mecanismo Delta. Este é produzido pela *Force Dimension* (<http://www.forcedimension.com>) em modelos que possuem três e seis graus de

liberdade para a realimentação de forças. A figura 13 mostra uma figura desse dispositivo.



Figura 13-Dispositivo de realimentação de forças da Force Dimension.

As próximas figuras mostram um manipulador que também utiliza o mecanismo Delta desenvolvido por Tsumaki, Naruse, Nenchev e Uchiyama [12] na Universidade Tohoku, Japão.

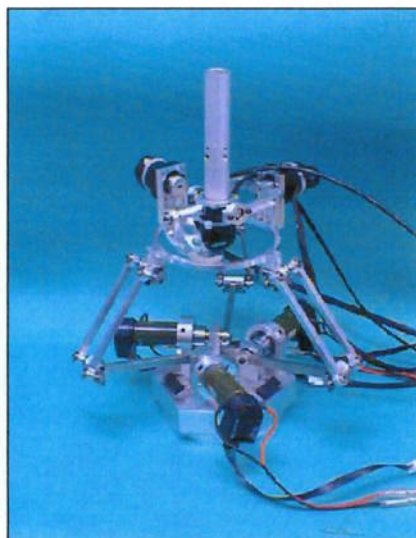


Figura 14- Dispositivo de realimentação de forças de Tsumaki et al. [13].

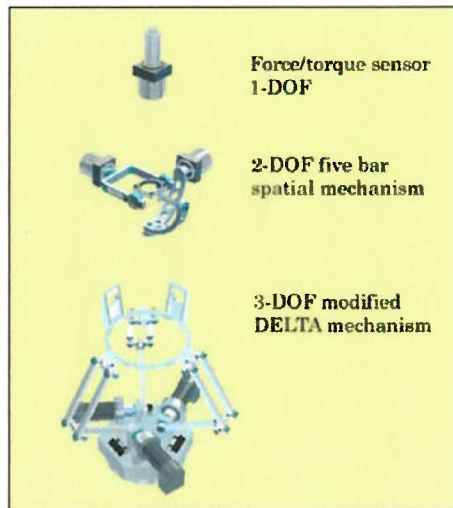


Figura 15-Dispositivo de realimentação de forças em detalhe[13].

2.1.Tipos de Mecanismos

Dois tipos principais de paradigmas de arquiteturas de mecanismos podem ser distinguidos: mecanismos seriais e mecanismos paralelos. Os mecanismos seriais são aqueles que suas peças são ligadas em série uma a outra. Como exemplo desse tipo, tem-se o mecanismo do robô Puma, mostrado na próxima figura.



Figura 16-Robô Puma.

Por sua vez, um mecanismo paralelo é dotado de duas ou mais cadeias cinemáticas independentes que se unem em uma única peça. Um exemplo desse tipo de mecanismo é o robô Delta, conforme mostra a próxima figura.



Figura 17-Mecanismo Delta.

Essa discussão é muito importante para esse trabalho, uma vez que o mecanismo a ser adotado para a realimentação de forças seguirá umas dessas duas linhas de arquitetura, sendo que essas possuem diferenças e características que podem ser decisivas no desempenho do manipulador.

Os mecanismos paralelos têm as vantagens de serem mais rígidos, posicionamento mais acurado e conseguem atingir maiores velocidades, e como desvantagem, um espaço de trabalho reduzido e, em geral, com a presença de singularidades internas. Já os mecanismos seriais têm como principal vantagem um maior espaço de trabalho e as singularidades internas ao espaço de trabalho são bem menos frequentes. Uma qualidade dos mecanismos denominada isotropia também é um ponto importante. A isotropia é a capacidade do mecanismo aplicar forças e torques em direções quaisquer, de forma homogênea, em todo o espaço de trabalho. Nesse requisito os mecanismos paralelos costumam deixar a desejar.

Pesando-se os prós e contras decidiu-se que o mecanismo mais aconselhável para esse tipo de projeto é o paralelo. Como visto, ele é dotado de uma rigidez maior, qualidade relevante uma vez que se quer realizar realimentação de forças, posicionamento mais acurado, também muito importante para a realização de movimentos suaves e precisos. Com relação ao reduzido espaço de trabalho, pode-se dizer que isso não será crítico já que a aplicação prevista se dará em um simulador de

cirurgias oftálmicas, onde os movimentos são por natureza bastante pequenos não exigindo um grande espaço de trabalho do mecanismo. Sobre a baixa isotropia dos mecanismos paralelos, esse problema pode ser contornado através de processos de otimização.

No que já existe disponível comercialmente, pode-se dizer que o Phantom segue uma arquitetura serial, e o dispositivo oferecido pela *Force Dimension* é predominantemente paralelo (diz-se predominantemente porque apenas a parte do mecanismo responsável pelas translações seguem uma arquitetura paralela, enquanto os graus de liberdade das rotações seguem uma arquitetura serial).

As próximas figuras mostram possibilidades de mecanismos de realimentação de seis graus de liberdade totalmente paralelos.

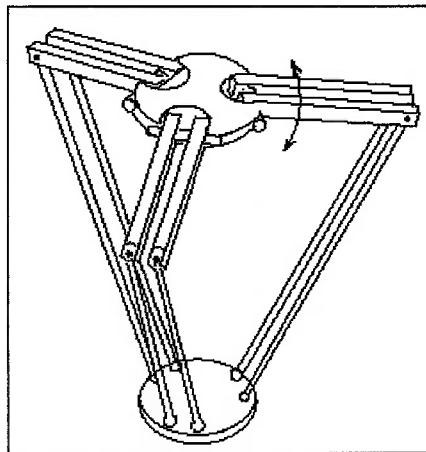


Figura 18-Hexa [14].

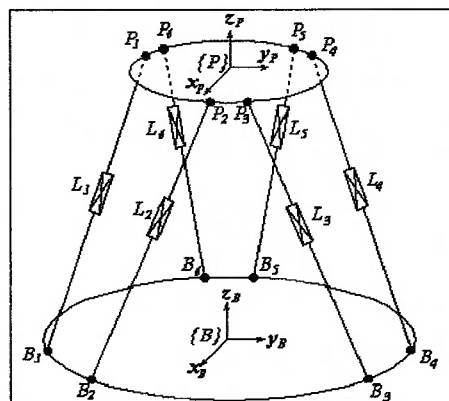


Figura 19-Plataforma de Stewart [14].

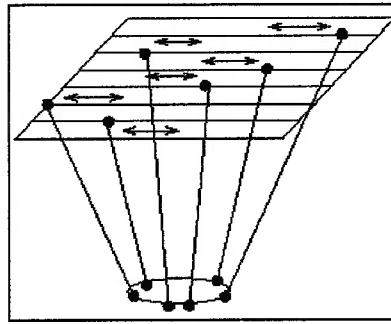


Figura 20-Hexaglide [14].

2.2.Número de Graus de Liberdade Necessários

São necessários seis graus de liberdade tanto para a realimentação de forças quanto para a movimentação, caso se queira representar de maneira completa um certo corpo em ambiente de realidade virtual (ou até mais, como no caso de uma pinça que se abre e fecha, quando seriam necessários sete graus de liberdade para representá-la). No entanto, para atingir esse objetivo final de construir um manipulador de seis graus de liberdade, julga-se necessário passar por uma etapa intermediária que é projetar e implementar um manipulador com uma quantidade menor de graus de liberdade que eventualmente sirva de base para o projeto no manipulador de seis graus de liberdade. Visto isto e o fato de que, ao final deste trabalho, deve-se ter em mãos um manipulador utilizável, faz-se a hipótese simplificadora que a interação entre os instrumentos cirúrgicos e os tecidos é pontual, isto é, apenas forças e nenhum torque são transmitidos entre os instrumentos e os tecidos. Isto pode ser traduzido em termos físicos em um manipulador que tenha realimentação de forças em três graus de liberdade.

2.3.O mecanismo escolhido

Vistos os pontos apresentados, considera-se que o mecanismo mais conveniente para o presente trabalho é o Delta, cuja plataforma está ligada por meio de uma junta esférica a um corpo que represente um determinado instrumento cirúrgico. Esse manipulador tem, assim, seis graus de liberdade para a movimentação e a realimentação

de forças se dá apenas em três direções (ponto de contato entre o instrumento e o tecido).

A hipótese da interação pontual foi elaborada a partir da observação de vídeos de cirurgias de catarata e, se essa estiver próxima do que acontece na realidade, a adoção do mecanismo Delta parece ser uma boa escolha dentro da linha dos manipuladores paralelos. Uma outra vantagem é que esse projeto serviria de base para a construção de um manipulador com realimentação de forças em seis graus de liberdade semelhante ao manipulador oferecido pela *Force Dimension*.

3. Estudo Cinemático do Mecanismo

A idéia básica que está por trás do mecanismo Delta é o uso de paralelogramos - mecanismo do tipo quadrilátero articulado cujos comprimentos das peças não adjacentes são iguais - que tem como característica o fato de um dos seus ligamentos permanecer com uma orientação constante dada a movimentação do ligamento adjacente a este. A utilização de três paralelogramos conectados a uma plataforma restringe qualquer movimentação angular fazendo com que a plataforma apenas translade. O ligamento do paralelogramo, que tem a orientação constante, tem movimentação solidária a um dos lados da plataforma, e o ligamento oposto a este (não adjacente) conecta-se a uma peça presa à base através de uma junta de revolução. O deslocamento angular das peças conectadas à base compreendem os três movimentos de entrada e a translação da plataforma em três direções é o movimento de saída. Abaixo, a figura mostra o mecanismo Delta.

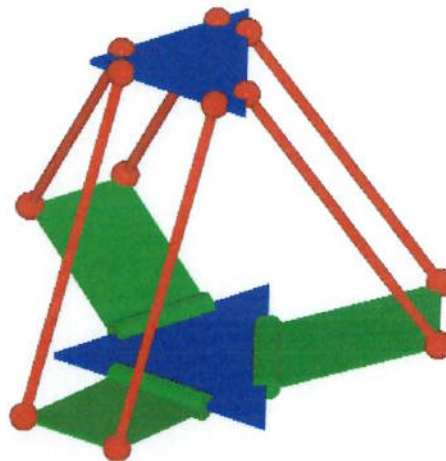


Figura 21-Mecanismo Delta.

Criado por Reymond Clavel, professor da EPFL - École Polytechnique Fédérale de Lausanne [15], no final da década de oitenta do século passado, esse mecanismo possui aplicações bastante importantes. Na indústria, devido às altas acelerações que consegue atingir, é bastante utilizado nas operações chamadas pick and place (operação em que, por exemplo, um determinado produto deve ser retirado da esteira de onde vem sendo transportado, e colocado em sua embalagem).

3.1.Nomenclatura das Partes

Antes de se iniciar o estudo cinemático e dinâmico do mecanismo Delta, é necessário expor a terminologia adotada, bem como apresentar de maneira mais detalhada as peças que compõem o mecanismo.

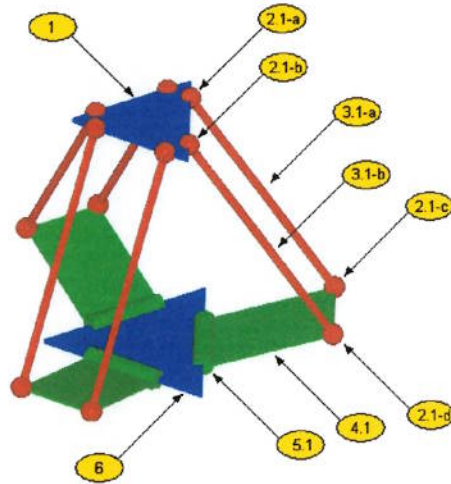


Figura 22-Nomenclatura das peças 1/3.

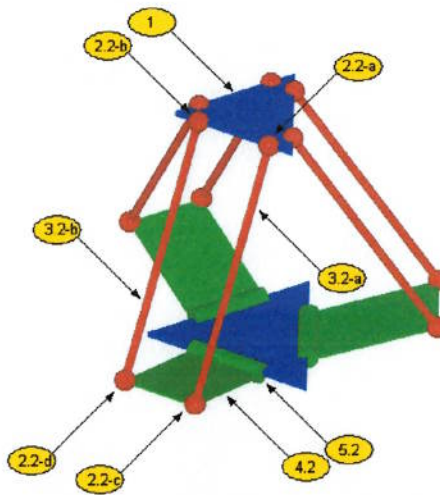


Figura 23-Nomenclatura das peças 2/3.

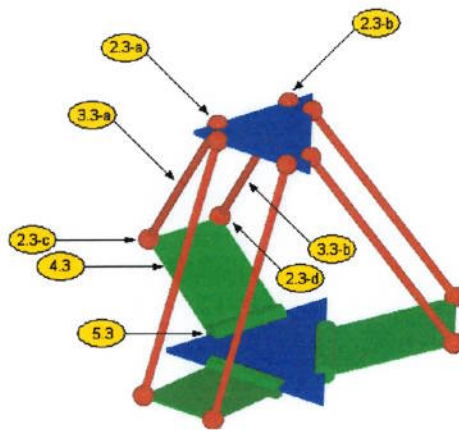


Figura 24-Nomenclatura das peças 3/3.

Legenda:

1-plataforma.

2.1.a, 2.1.b, 2.1.c, 2.1.d, 2.2.a, 2.2.b, 2.2.c, 2.2.d, 2.3.a, 2.3.b, 2.3.c, 2.3.d - juntas esféricas.

3.1.a, 3.1.b, 3.2.a, 3.2.b, 3.3.a, 3.3.b – hastes.

4.1-ligamento inferior 1, 4.2-ligamento inferior 2, 4.3-ligamento inferior 3.

5.1-junta de revolução 1, 5.2-junta de revolução 2, 5.3-junta de revolução 3.

6-base do mecanismo.

As peças 2.1.a, 2.1.b, 2.1.c, 2.1.d, 3.1.a, 3.1.b, 4.1 e 5.1 formam o que é chamado perna 1 do mecanismo, ou simplesmente perna. As peças 2.2.a, 2.2.b, 2.2.c, 2.2.d, 3.2.a, 3.2.b, 4.2 e 5.2 forma a perna 2 e 2.3.a, 2.3.b, 2.3.c, 2.3.d, 3.3.a, 3.3.b, 4.3 e 5.3 formam a perna 3.

3.2.Dimensões Relevantes

A próxima figura assinala as dimensões relevantes para continuação da análise desse mecanismo.

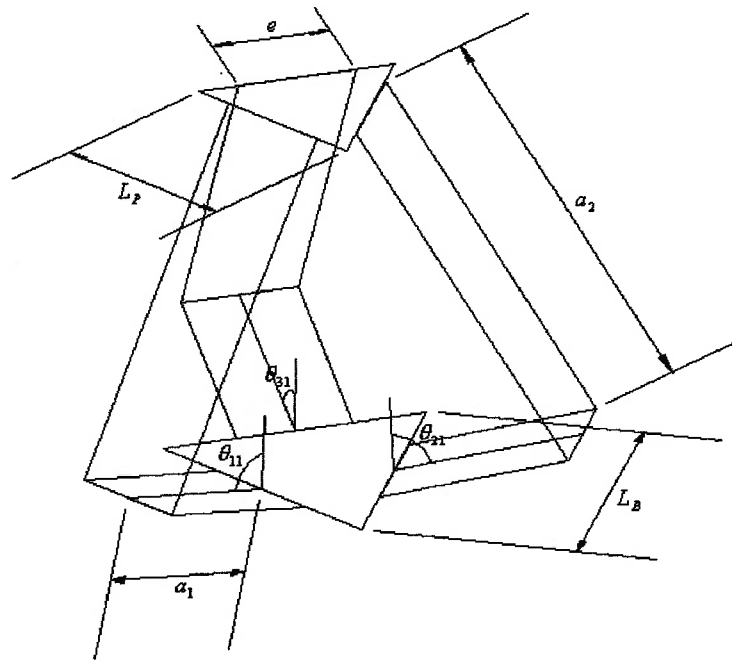


Figura 25-Medidas relevantes.

L_B -Lado do triângulo equilátero que forma a base.

L_P -Lado do triângulo equilátero que forma a plataforma.

a_1 -Extensão longitudinal dos ligamentos inferiores 1,2 e 3.

a_2 -Comprimento das hastes que estão entre as juntas esféricas.

θ_{11} -Posição angular em relação a vertical do ligamento inferior 1. Esse ângulo também corresponde a posição angular da junta de revolução 1.

θ_{21} -Posição angular em relação a vertical do ligamento inferior 1. Esse ângulo também corresponde a posição angular da junta de revolução 2.

θ_{31} -Posição angular em relação a vertical do ligamento inferior 3. Esse ângulo também corresponde a posição angular da junta de revolução 3.

e -distância entre as hastes.

3.3. Graus de Liberdade

Pela descrição já exposta do mecanismo Delta é sabido que este possui três graus de liberdade. Este item visa demonstrar tal característica e analisá-la em maiores detalhes. O número de graus de um mecanismo é dado pela relação abaixo:

$$GM = 6(n-1) - 5n_{p1} - 4n_{p2} - 3n_{p3} - 2n_{p4} - n_{p5} \quad (3.3.1)$$

Onde:

GM : número de graus de liberdade do mecanismo.

n : número de peças.

n_{p1} : número de pares cinemáticos com um grau de liberdade.

n_{p2} : número de pares cinemáticos com dois graus de liberdade.

n_{p3} : número de pares cinemáticos com três graus de liberdade.

n_{p4} : número de pares cinemáticos com quatro graus de liberdade.

n_{p5} : número de pares cinemáticos com cinco graus de liberdade.

O mecanismo Delta tem $n = 11$ (base, ligamentos inferiores 1,2 e 3, seis hastes de tamanho a_2 e a plataforma), $n_{p1} = 3$ (juntas de rotação que ligam a base às hastes de tamanho a_1), $n_{p2} = 0$, $n_{p3} = 12$ (são no total seis hastes e nas duas extremidades de cada uma dessas existem juntas esféricas), $n_{p4} = 0$, $n_{p5} = 0$. Aplicando-se esses valores à relação (3.3.1), obtém-se $GM = 9$. Três desses graus provem da translação da plataforma. Os outros seis graus que faltam para completar o total vem da livre movimentação que as hastes de tamanho a_2 tem ao redor de seu próprio eixo longitudinal.

3.4. Cinemática Inversa de Posição

O objetivo da cinemática inversa de posição é obter o deslocamento angular dos ligamentos inferiores θ_{11}, θ_{21} e θ_{31} dada as três coordenadas cartesianas X, Y e Z ,

medidas em relação os sistemas de coordenadas fixo na base, que definem a posição do centro geométrico da plataforma.

Para uma maior sistematização, convencionou-se neste texto que um sub-escrito i será incluso na representação de qualquer elemento ou variável relativo a uma perna i do mecanismo (por exemplo, θ_{i1} representa θ_{11}, θ_{21} e θ_{31} quando $i = 1, 2, 3$, nessa ordem, uma vez que esses ângulos são relativos respectivamente à primeira, segunda e terceira pernas do mecanismo). Da mesma maneira, sub-escrito p e o serão inclusos em variáveis e elementos pertencentes à plataforma e à base do mecanismo, respectivamente.

Os ângulos θ_{11}, θ_{21} e θ_{31} também serão chamados daqui para diante de posição dos atuadores e como se verá no estudo da dinâmica, estes corresponderão ao conjunto de coordenadas generalizadas.

Para se fazer o estudo cinemático, o primeiro passo é estabelecer sistemas de coordenadas ao longo da estrutura do mecanismo. Foram definidos os seguintes sistemas:

- Da plataforma ($O_p - x_p y_p z_p$) - origem O_p se localiza no centro geométrico da mesma.
- Da base ($O - x_o y_o z_o$) - origem O se localiza no centro geométrica da mesma.
- Três sistemas de coordenadas designados por $O_{i1} - x_{i1} y_{i1} z_{i1}$, cujas origens O_{i1} se encontram nos pontos médios do triângulo equilátero que forma a base.
- Três sistemas de coordenadas designados por $O_{i2} - x_{i2} y_{i2} z_{i2}$, cujas origens O_{i2} se encontram respectivamente nos extremos dos ligamentos inferiores 1, 2 e 3. Esses sistemas estão fixos aos ligamentos e assim tem movimentação solidária aos mesmos.
- Três sistemas de coordenadas $O_{i3} - x_{i3} y_{i3} z_{i3}$ e mais três sistemas de coordenadas $O_{i4} - x_{i4} y_{i4} z_{i4}$ cujas respectivas origens O_{i3} e O_{i4} estão em cada uma das extremidades superiores das duas hastes da perna i . Todos têm movimentação solidária às hastes.

As figuras 26, 27 e 28 mostram os sistemas acima descritos.

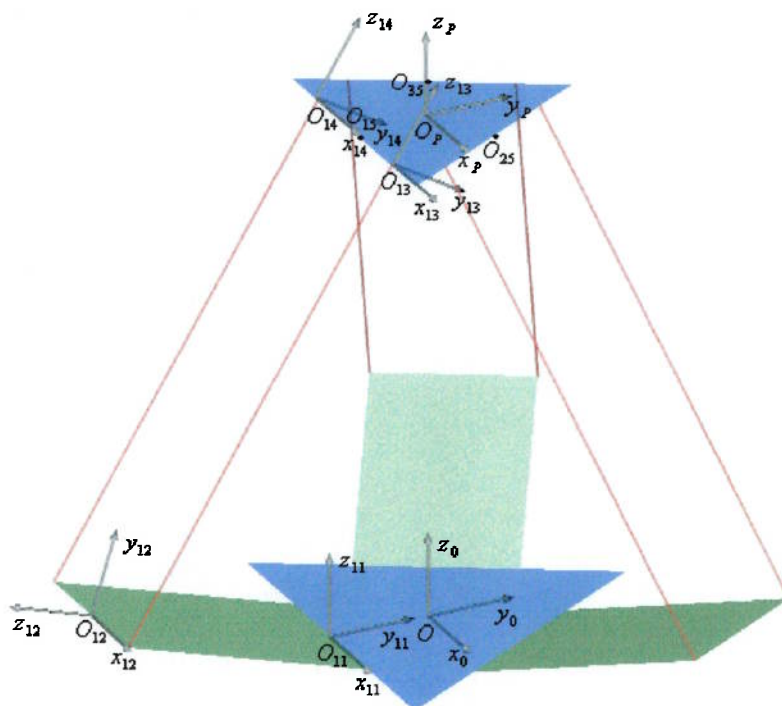


Figura 26-Sistemas de coordenadas 1/3.

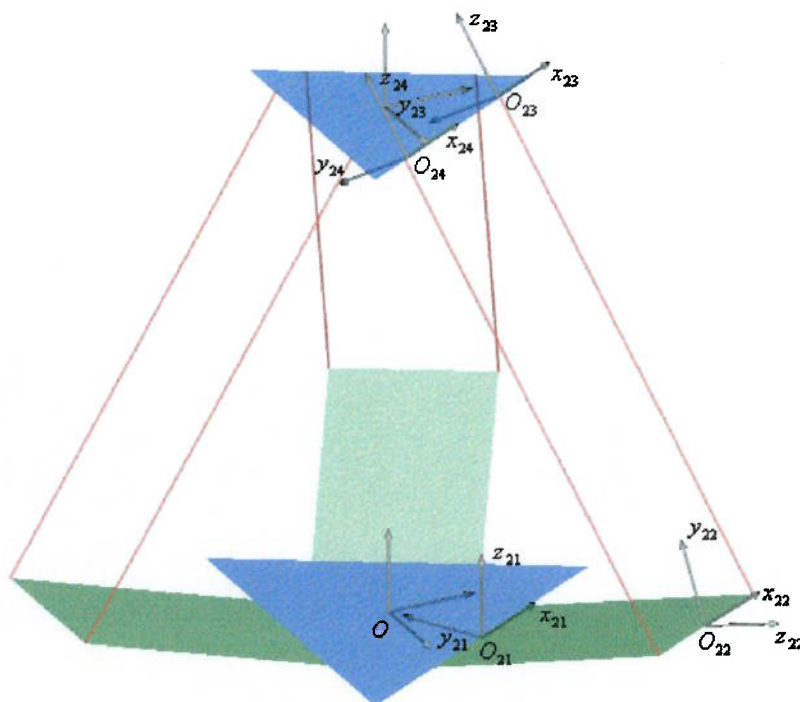


Figura 27-Sistemas de coordenadas 2/3.

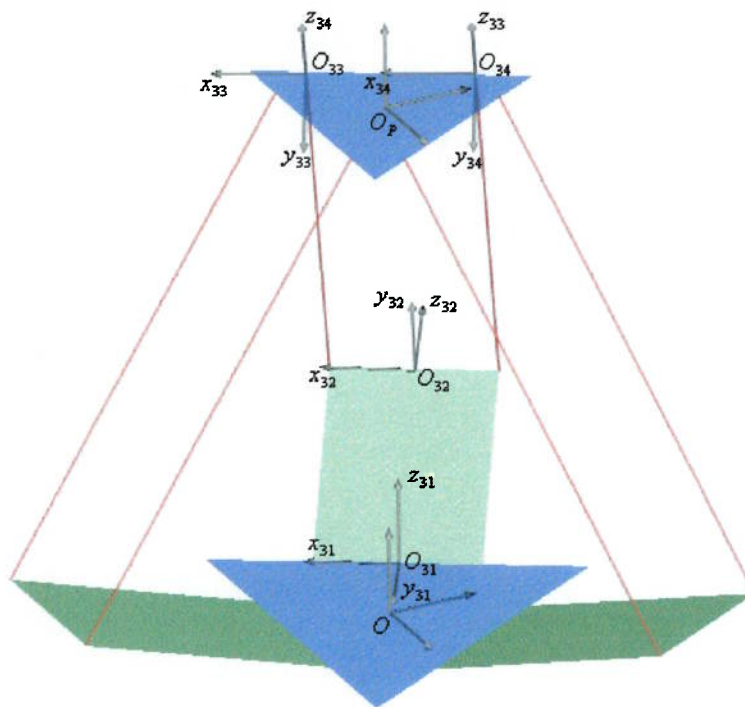


Figura 28-Sistemas de coordenadas 3/3.

Uma vez definidos os sistemas de coordenadas, apresentam-se agora as matrizes de transformações homogêneas que serão utilizadas no desenvolvimento da cinemática do mecanismo. São essas:

$$H_O^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

$$H_O^{n1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\text{sen}(\alpha_i) & 0 & d_{xi} \\ \text{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & d_{yi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

$$H_{n1}^{n2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{n1}) & -\text{sen}(\theta_{n1}) & -a_1 \text{sen}(\theta_{n1}) \\ 0 & \text{sen}(\theta_{n1}) & \cos(\theta_{n1}) & a_1 \cos(\theta_{n1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

$$H_{i2}^{i3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{esp}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{i2}) & -\sin(\theta_{i2}) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_{i2}) & \cos(\theta_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i3}) & 0 & \sin(\theta_{i3}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_{i3}) & 0 & \cos(\theta_{i3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

$$H_{i2}^{i4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{esp}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{i2}) & -\sin(\theta_{i2}) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_{i2}) & \cos(\theta_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i3}) & 0 & \sin(\theta_{i3}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_{i3}) & 0 & \cos(\theta_{i3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

- H_O^P é a matriz de transformação homogênea que leva um ponto descrito no sistema de coordenadas da plataforma a ser descrito no sistemas de coordenadas da base. Essa matriz é montada levando-se em conta o conhecimento prévio de que a plataforma tem sua orientação constante.
- H_O^{i1} é a matriz de transformação homogênea que leva um ponto descrito no sistema de coordenadas $O_{i1} - x_{i1}y_{i1}z_{i1}$ a ser descrito no sistemas de coordenadas da base.
- H_{i1}^{i2} é a matriz de transformação homogênea que leva um ponto descrito no sistema de coordenadas $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$ a ser descrito no sistema $O_{i1} - x_{i1}y_{i1}z_{i1}$
- H_{i2}^{i3} é a matriz de transformação homogênea entre o sistema $O_{i3} - x_{i3}y_{i3}z_{i3}$ e o sistema $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$. Partindo do sistema $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$, essa transformação é composta por uma translação de $e/2$ na direção x seguida de uma rotação de θ_{i2} em torno do eixo x e de uma segunda rotação de θ_{i3} em torno do eixo y . Por fim, realiza-se uma translação de a_2 na direção z . Nessa seqüência (esquematisada na figura 29), cada transformação é feita em relação ao sistema de coordenadas que resulta da transformação anterior.

- H_{i2}^{i4} é a matriz de transformação homogênea entre o sistema $O_{i4} - x_{i4}y_{i4}z_{i4}$ e o sistema $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$. Esta é montada de maneira semelhante a transformação H_{i2}^{i3} , com a diferença que a primeira transformação da seqüência é uma translação de $-e/2$ na direção x .

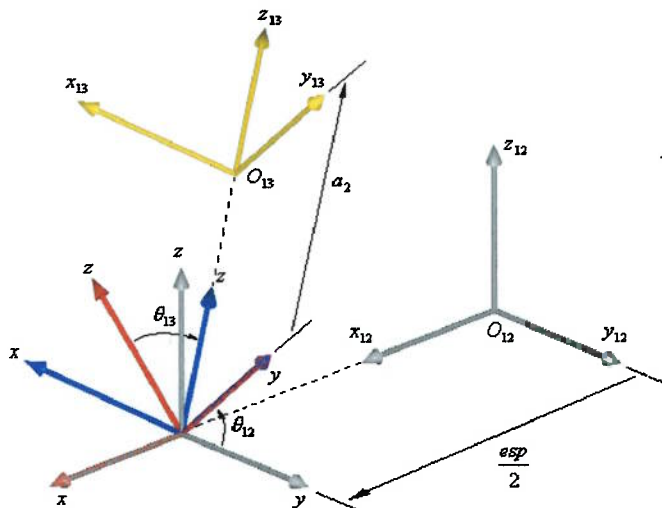


Figura 29-Seqüência de transformações.

Para o equacionamento da cinemática inversa deve-se impor que, para uma determinada perna do mecanismo, a distância entre o extremo do ligamento inferior e o ponto médio do lado do triângulo da plataforma referente a essa perna seja constante e igual a a_2 . Fazendo-se isso para cada uma das três pernas do mecanismo chegamos a três equações capazes de determinar as três incógnitas θ_{11} , θ_{12} e θ_{13} , dada uma posição da plataforma.

Os pontos P_1 , P_2 e P_3 designarão os pontos médios dos lados da plataforma relativos respectivamente às pernas 1, 2 e 3.

$$|O_{i2} - P_i| = a_2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.6)$$

Os pontos P_i e O_{i2} devem ser descritos no sistema de coordenadas da base. Tem-se então:

$$P_i^O = H_o^P P_i^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{xP_i} \\ d_{yP_i} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

$$O_{i2}^O = H_o^{i1} H_{i1}^{i2} O_{i2}^{i2} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\text{sen}(\alpha_i) & 0 & d_{xi} \\ \text{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & d_{yi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{i1}) & -\text{sen}(\theta_{i1}) & -a_1 \text{sen}(\theta_{i1}) \\ 0 & \text{sen}(\theta_{i1}) & \cos(\theta_{i1}) & a_1 \cos(\theta_{i1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

Onde,

P_i^O - ponto P_i descrito no sistema de coordenadas da base.

P_i^P - ponto P_i descrito no sistema de coordenadas da plataforma.

O_{i2}^O - ponto O_{i2} descrito no sistema de coordenadas da base.

O_{i2}^{i2} - ponto O_{i2} descrito no sistema de coordenadas cuja origem é o próprio ponto O_{i2} .

Os sobrescritos nos pontos fornecem a indicação do sistema de coordenadas em que estão sendo descritos.

Observe que os pontos são representados por matrizes de dimensões 4×1 em que a última linha, que corresponde a soma unitária, serve para compatibilizar com o uso de matrizes homogêneas.

Os valores dos parâmetros d_{xP_i} , d_{yP_i} , α_i , d_{xi} e d_{yi} dependem das dimensões do mecanismo, conforme mostra a próxima tabela.

Parâmetro	d_{xP_i}	d_{yP_i}	α_i	d_{x_i}	d_{y_i}
$i = 1$	0	$-\frac{L_P\sqrt{3}}{6}$	0°	0	$-\frac{L_B\sqrt{3}}{6}$
$i = 2$	$\frac{L_P}{4}$	$\frac{L_P\sqrt{3}}{12}$	120°	$\frac{L_B}{4}$	$\frac{L_B\sqrt{3}}{12}$
$i = 3$	$-\frac{L_P}{4}$	$\frac{L_P\sqrt{3}}{12}$	240°	$-\frac{L_B}{4}$	$\frac{L_B\sqrt{3}}{12}$

Tabela 1-Valores dos parâmetros.

A expressão abaixo fornece as três equações necessárias para completar a cinemática inversa.

$$|P_i^O - O_{i2}^O| = a_2 \quad i = 1,2,3 \quad (3.4.9)$$

O desenvolvimento da expressão (3.4.9) para $i = 1,2,3$, com os termos P_i^O e O_{i2}^O substituídos por suas respectivas expressões encontradas nas equações (3.4.7) e (3.4.8), leva às equações escalares abaixo:

$$X^2 + a_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta_{11}) a_1 L_B - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta_{11}) a_1 L_P + 2 \sin(\theta_{11}) a_1 Y + \frac{1}{12} L_B^2 - \frac{1}{6} L_P L_B + \frac{\sqrt{3}}{3} L_B Y + \frac{1}{12} L_P^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} L_P Y + Y^2 - 2 \cos(\theta_{11}) a_1 Z + Z^2 - a_2^2 = 0 \quad (3.4.10)$$

$$X^2 + \left(\frac{1}{2} L_P - \frac{1}{2} L_B - \sqrt{3} \sin(\theta_{21}) a_1 \right) X + a_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta_{21}) a_1 L_B - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\theta_{21}) a_1 L_P - a_2^2 + \frac{1}{12} L_B^2 - \frac{1}{6} L_P L_B - \sin(\theta_{21}) a_1 Y + \frac{1}{12} L_P^2 + \frac{\sqrt{3}}{6} L_P Y + Y^2 - 2 \cos(\theta_{21}) a_1 Z - \frac{\sqrt{3}}{6} L_B Y + Z^2 = 0 \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned}
& X^2 + \left(-\frac{1}{2}L_P + \frac{1}{2}L_B + \sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta_{31})a_1 \right) X + a_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}(\theta_{31})a_1L_B - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}(\theta_{31})a_1L_P - a_2^2 + \frac{1}{12}L_B^2 - \\
& - \frac{1}{6}L_PL_B - \operatorname{sen}(\theta_{31})a_1Y + \frac{1}{12}L_P^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}L_PY + Y^2 - 2\cos(\theta_{31})a_1Z - \frac{\sqrt{3}}{6}L_BY + Z^2 = 0
\end{aligned}
\tag{3.4.12}$$

As expressões (3.4.10), (3.4.11) e (3.4.12) são designadas de maneira genérica, respectivamente para $i = 1, 2, 3$, por:

$$R_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) = 0 \tag{3.4.13}$$

Pode-se perceber que as equações da cinemática inversa acima são desacopladas. Tal fato é comum a todos os mecanismos paralelos.

A solução do sistema formado pelas expressões (3.4.10), (3.4.11) e (3.4.12) é bastante complexa; no entanto, é possível realizar uma mudança de variáveis que torna o trabalho substancialmente mais fácil.

Para uma perna i faz-se a seguinte substituição de variável na expressão $R_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) = 0$:

$$\cos(\theta_{i1}) = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2} \quad \operatorname{sen}(\theta_{i1}) = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \quad \text{onde} \quad t_i = \tan\left(\frac{\theta_{i1}}{2}\right) \tag{3.4.14}$$

Feita essa substituição, multiplica-se os dois lados da igualdade por $1+t_i^2$.

Assim chega-se a três equações polinomiais em substituição as três equações trigonométricas. Esses polinômios são:

$$c_{11}t_1^2 + c_{12}t_1 + c_{13} = 0 \tag{3.4.15}$$

$$c_{21}t_2^2 + c_{22}t_2 + c_{23} = 0 \tag{3.4.16}$$

$$c_{31}t_3^2 + c_{32}t_3 + c_{33} = 0 \tag{3.4.17}$$

$$c_{11} = \frac{1}{12}L_P^2 + X^2 - \frac{1}{6}L_PL_P + \frac{\sqrt{3}}{3}L_BY - \frac{\sqrt{3}}{3}L_PY + Y^2 + 2a_1Z + \frac{1}{12}L_B^2 + Z^2 + a_1^2 - a_2^2 \tag{3.4.18}$$

$$c_{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_1L_B + 4a_aY - \frac{2\sqrt{3}}{3}a_1L_P \quad (3.4.19)$$

$$c_{13} = -\frac{1}{6}L_B L_P + Z^2 + \frac{1}{12}L_B^2 - a_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}L_P Y + Y^2 - 2a_1Z + \frac{1}{12}L_P^2 + a_1^2 + X^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}L_B Y \quad (3.4.20)$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2}L_B X + \frac{1}{12}L_B^2 + \frac{1}{12}L_P^2 + \frac{1}{2}L_P X + X^2 - \frac{1}{6}L_B L_P - \frac{\sqrt{3}}{6}L_B Y + \frac{\sqrt{3}}{6}L_P Y + Y^2 + 2a_1Z + Z^2 + a_1^2 - a_2^2 \quad (3.4.21)$$

$$c_{22} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_1L_B - 2\sqrt{3}a_1X - 2a_1Y - \frac{2\sqrt{3}}{3}a_1L_P \quad (3.4.22)$$

$$c_{23} = -\frac{1}{6}L_B L_P + Z^2 + \frac{1}{12}L_B^2 - a_2^2 + \frac{1}{12}L_P^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}L_P Y - \frac{1}{2}L_B X + Y^2 - 2a_1Z + a_1^2 + \frac{1}{2}L_P X + X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}L_B Y \quad (3.4.23)$$

$$c_{31} = \frac{1}{2}L_B X + \frac{1}{12}L_B^2 + \frac{1}{12}L_P^2 - \frac{1}{2}L_P X + X^2 - \frac{1}{6}L_B L_P - \frac{\sqrt{3}}{6}L_B Y + \frac{\sqrt{3}}{6}L_P Y + Y^2 + 2a_1Z + Z^2 + a_1^2 - a_2^2 \quad (3.4.24)$$

$$c_{32} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_1L_B + 2\sqrt{3}a_1X - 2a_1Y - \frac{2\sqrt{3}}{3}a_1L_P \quad (3.4.25)$$

$$c_{33} = -\frac{1}{6}L_B L_P + Z^2 + \frac{1}{12}L_B^2 - a_2^2 + \frac{1}{12}L_P^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}L_P Y + \frac{1}{2}L_B X + Y^2 - 2a_1Z + a_1^2 - \frac{1}{2}L_P X + X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}L_B Y \quad (3.4.26)$$

Extraindo-se as raízes dos polinômios acima, obtém-se os valores de t_1 , t_2 e t_3 .

Para se chegar aos valores dos ângulos basta fazer:

$$\theta_{1i} = 2\arctg(t_i) \quad (3.4.27)$$

Como t_1 , t_2 e t_3 provêm da solução de um polinômio de segundo grau, temos duas soluções possíveis para cada uma dessas incógnitas, o que acarreta em duas soluções possíveis para cada um dos ângulos θ_{11} , θ_{21} e θ_{31} . Assim, a combinação dessas soluções gera ao todo oito soluções possíveis para a cinemática inversa do mecanismo Delta. Todas essas soluções podem ser fisicamente factíveis, no entanto a

decisão de qual é a solução mais conveniente dependerá de uma análise posterior dos resultados obtidos.

Para que a cinemática inversa de posição esteja completa, ainda é necessário encontrar a posição das hastes que juntam os ligamentos inferiores à plataforma. Esta posição é caracterizada pelo ângulos θ_{i2} e θ_{i3} , $i = 1, 2, 3$.

Primeiro definimos os pontos O_{i5} como sendo os pontos médios dos segmentos de reta que unem os pontos O_{i3} e O_{i4} . Os pontos O_{i5} coincidem com os pontos P_i . No entanto, esses dois grupos de pontos estão definidos de maneira distinta. Tal distinção será útil na análise dinâmica do mecanismo Delta.

O passo seguinte é definir os vetores $\vec{v}_{i2/i5}^{i2}$ que unem os pontos O_{i2} e O_{i5} . Esses vetores terão a mesma orientação das hastes, uma vez que permanecem sempre paralelos a elas.

Os pontos O_{i3} e O_{i4} descritos, respectivamente nos sistemas de coordenadas $O_{i3} - x_{i3}y_{i3}z_{i3}$ e $O_{i4} - x_{i4}y_{i4}z_{i4}$ ficam:

$$O_{i3}^{i3} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (3.4.28) \quad O_{i4}^{i4} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (3.4.29)$$

Logo, as expressões dos pontos O_{i5} em relação aos sistemas $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$ é:

$$O_{i5}^{i2} = \frac{1}{2} (H_{i2}^{i3} O_{i3}^{i3} + H_{i2}^{i4} O_{i4}^{i4}) \quad (3.4.30)$$

As três primeiras linhas de O_{i5}^{i2} formam as componentes dos vetores $\vec{v}_{i2/i5}^{i2}$ descrito nos sistemas $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$.

$$\vec{v}_{i2/i5}^{i2} = \begin{bmatrix} O_{i5(1,1)}^{i2} \\ O_{i5(2,1)}^{i2} \\ O_{i5(3,1)}^{i2} \end{bmatrix} \quad (3.4.31)$$

$O_{i5(i,j)}^{i2}$ é o elemento da linha i e coluna j da matriz O_{i5}^{i2} .

Desenvolvendo a expressão (3.4.31), obtém-se:

$$\vec{v}_{i2/i5}^{i2} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i3})a_2 \\ -\sin(\theta_{i2})\cos(\theta_{i3})a_2 \\ \cos(\theta_{i2})\cos(\theta_{i3})a_2 \end{bmatrix} \quad (3.4.32)$$

Esses vetores dependem apenas de θ_{i2} e θ_{i3} . Deve-se agora encontrar uma outra forma de se chegar a esses mesmos vetores de maneira que não dependam das variáveis. Observando que os pontos P_i coincidem com os pontos O_{i5} , constata-se que as expressões de $P_i^O - O_{i2}^O$, que dependem apenas de X, Y, Z e de θ_{i1} , fornecem os vetores da maneira procurada. No entanto, estes são descritos em relação ao sistema de coordenadas da base. Deve-se, então, reescrevê-los na mesma base dos vetores $\vec{v}_{i2/i5}^{i2}$ para seja possível realizar uma comparação.

Uma vez que se tenha disponível uma matriz de transformação homogênea H_B^A qualquer, dada a própria definição de como estas são construídas, pode-se obter a matriz de rotação R_B^A , que leva um vetor descrito no sistema de coordenadas A para o sistema de coordenadas B. R_B^A corresponde a sub-matriz formada pelos elementos que estão entre a primeira e a terceira linha e a primeira e terceira coluna da matriz H_B^A .

$$R_B^A = \begin{bmatrix} H_{B(1,1)}^A & H_{B(1,2)}^A & H_{B(1,3)}^A \\ H_{B(2,1)}^A & H_{B(2,2)}^A & H_{B(2,3)}^A \\ H_{B(3,1)}^A & H_{B(3,2)}^A & H_{B(3,3)}^A \end{bmatrix} \quad (3.4.33)$$

$H_{B(i,j)}^A$ é o elemento da linha i e coluna j da matriz H_B^A .

Visto que já se tem desenvolvidas as matrizes H_{i2}^O , conclui-se que as matrizes de rotações R_O^{i2} também estão disponíveis. No entanto, a matriz de interesse é a R_{i2}^O , que leva um vetor descrito no sistema da base a ser descrito no sistema $O_{i2} - x_{i2}y_{i2}z_{i2}$. Já que R_{i2}^O é o inverso da matriz R_O^{i2} e como as matrizes de rotações são orto-normais, pode-se escrever:

$$R_{i2}^O = (R_O^{i2})^T \quad (3.4.34)$$

Torna-se possível montar um vetor descrito no sistema $O_{12} - x_{12}y_{12}z_{12}$ que liga os pontos O_{12} e O_{15} e que não dependam das variáveis que estão sendo procuradas.

Lembrando que as pontos P_i^O e O_{12}^O são matrizes de dimensão 4x1 em que a última linha corresponde à soma unitária que compatibiliza a representação desses com as matrizes homogêneas, cria-se então os vetores $\vec{u}_{i2/15}^O$, cujas componentes correspondem às três primeiras linhas de $P_i^O - O_{12}^O$.

Todas essas considerações levam à seguinte expressão:

$$\vec{u}_{i2/15}^{i2} = R_{i2}^O \vec{u}_{i2/15}^O = \begin{bmatrix} A_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) \\ B_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) \\ C_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) \end{bmatrix} \quad (3.4.35)$$

Fazendo-se $\vec{v}_{i2/15}^{i2} = \vec{u}_{i2/15}^{i2}$, chegam-se as expressão finais que fornecem as orientações das hastes:

$$\sin(\theta_{i3})\alpha_2 = A_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) \quad (3.4.36)$$

$$-\sin(\theta_{i2})\cos(\theta_{i3})\alpha_2 = B_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) \quad (3.4.37)$$

$$\cos(\theta_{i2})\cos(\theta_{i3})\alpha_2 = C_i(X, Y, Z, \theta_{i1}) \quad (3.4.38)$$

Finaliza-se assim a cinemática inversa. Dados X, Y e Z , através das expressões apresentadas é possível se obter $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}$.

As rotinas para MatLab[®] que executam a cinemática inversa estão no apêndice C.

3.5. Cinemática Direta

O objetivo da cinemática direta é encontrar a posição da plataforma (X, Y e Z), dada as posições dos atuadores (θ_{11}, θ_{21} e θ_{31}). Uma alternativa para a realização da cinemática direta é através de um algoritmo não iterativo. As expressões polinomiais (3.4.15), (3.4.16) e (3.4.17) obtidas na cinemática inversa podem ser manipuladas algebricamente de maneira a colocá-las na forma abaixo:

$$X^2 + K_{11}X + Y^2 + K_{12}Y + Z^2 + K_{13}Z + K_{14} = 0 \quad (3.5.1)$$

$$X^2 + K_{21}X + Y^2 + K_{22}Y + Z^2 + K_{23}Z + K_{24} = 0 \quad (3.5.2)$$

$$X^2 + K_{31}X + Y^2 + K_{32}Y + Z^2 + K_{33}Z + K_{34} = 0 \quad (3.5.3)$$

Onde,

$$K_{11} = 0 \quad (3.5.4)$$

$$K_{12} = \left(-L_p\sqrt{3} - t_1^2 L_p\sqrt{3} + 12t_1 a_1 + L_b\sqrt{3} + t_1^2 L_b\sqrt{3} \right) / (3 + 3t_1^2) \quad (3.5.5)$$

$$K_{13} = (2t_1^2 a_1 - 2a_1) / (1 + t_1^2) \quad (3.5.6)$$

$$K_{14} = \left((-a_2^2 + a_1^2 - L_B L_p / 6 + L_B^2 / 12 + L_p^2 / 12) t_1^2 + (a_1 L_B 2\sqrt{3} / 3 - a_1 L_p 2\sqrt{3} / 3) t_1 - L_B L_p / 6 + L_B^2 / 12 + a_1^2 + L_p^2 / 12 - a_2^2 \right) / (1 + t_1^2) \quad (3.5.7)$$

$$K_{21} = - \left(4t_2 a_1 \sqrt{3} - L_p + L_B - t_2^2 L_p + t_2^2 L_B \right) / (2 + 2t_2^2) \quad (3.5.8)$$

$$K_{22} = \left(-L_B\sqrt{3} + L_p\sqrt{3} - t_2^2 L_B\sqrt{3} - 12t_2 a_1 + t_2^2 L_p\sqrt{3} \right) / (6t_2^2 + 6) \quad (3.5.9)$$

$$K_{23} = (2t_2^2 a_1 - 2a_1) / (t_2^2 + 1) \quad (3.5.10)$$

$$K_{24} = \left((-a_2^2 - L_p L_B / 6 + a_1^2 + L_p^2 / 12 + L_B^2 / 12) t_2^2 + L_p^2 / 12 + a_1^2 + L_B^2 / 12 - L_B L_p / 6 - a_2^2 + (-a_1 L_p 2\sqrt{3} / 3 + a_1 L_B 2\sqrt{3} / 3) t_2 \right) / (t_2^2 + 1) \quad (3.5.11)$$

$$K_{31} = \left(4t_3 a_1 \sqrt{3} - t_3^2 L_p - L_p + t_3^2 L_B - L_B \right) / (2t_3^2 + 2) \quad (3.5.12)$$

$$K_{32} = \left(L_p\sqrt{3} + t_3^2 L_p\sqrt{3} - t_3^2 L_B\sqrt{3} - L_B\sqrt{3} - 12t_3 a_1 \right) / (6 + 6t_3^2) \quad (3.5.13)$$

$$K_{33} = (2t_3^2 a_1 - 2a_1) / (1 + t_3^2) \quad (3.5.14)$$

$$K_{34} = \left((-a_2^2 + a_1^2 - L_B L_p / 6 + L_B^2 / 12 + L_p^2 / 12) t_3^2 + L_B / 12 + (-a_1 L_p 2\sqrt{3} / 3 + a_1 L_B 2\sqrt{3} / 3) t_3 + L_p / 12 - L_B L_p / 6 + a_1^2 - a_2^2 \right) / (1 + t_3^2) \quad (3.5.15)$$

Para que tal sistema não-linear seja resolvido, subtrai-se a equação (3.5.3) das equações (3.5.1) e (3.5.2). O resultado desse procedimento gera duas equações lineares na variáveis X , Y e Z .

$$(K_{11} - K_{31})X + (K_{12} - K_{32})Y + (K_{13} - K_{33})Z = -(K_{14} - K_{34}) \quad (3.5.16)$$

$$(K_{21} - K_{31})X + (K_{22} - K_{32})Y + (K_{23} - K_{33})Z = -(K_{24} - K_{34}) \quad (3.5.17)$$

Resolvendo essas equações nas variáveis X e Y , chega-se a:

$$X = C_{11}Z + C_{12} \quad (3.5.18)$$

$$Y = C_{21}Z + C_{22} \quad (3.5.19)$$

$$C_{11} = \frac{(K_{22}K_{13} + K_{23}K_{32} - K_{32}K_{13} - K_{23}K_{12} + K_{33}K_{12} - K_{22}K_{33})}{(-K_{11}K_{22} + K_{11}K_{32} + K_{12}K_{21} - K_{12}K_{31} + K_{31}K_{22} - K_{32}K_{21})} \quad (3.5.20)$$

$$C_{12} = \frac{(K_{34}K_{12} - K_{22}K_{34} + K_{24}K_{32} - K_{32}K_{14} - K_{24}K_{12} - K_{22}K_{14})}{(-K_{11}K_{22} + K_{11}K_{32} + K_{12}K_{21} - K_{12}K_{31} + K_{31}K_{22} - K_{32}K_{21})} \quad (3.5.21)$$

$$C_{21} = \frac{(K_{11}K_{23} - K_{11}K_{33} - K_{13}K_{21} + K_{13}K_{31} - K_{31}K_{23} + K_{33}K_{21})}{(-K_{11}K_{22} + K_{11}K_{32} + K_{12}K_{21} - K_{12}K_{31} + K_{31}K_{22} - K_{32}K_{21})} \quad (3.5.22)$$

$$C_{22} = \frac{(K_{11}K_{24} - K_{14}K_{21} - K_{11}K_{34} - K_{31}K_{24} + K_{14}K_{31} + K_{34}K_{21})}{(-K_{11}K_{22} + K_{11}K_{32} + K_{12}K_{21} - K_{12}K_{31} + K_{31}K_{22} - K_{32}K_{21})} \quad (3.5.23)$$

Substituindo-se essa solução de X e Y na equação (3.5.1), chega-se ao seguinte polinômio em Z :

$$(C_{11}^2 + C_{21}^2 + 1)Z^2 + (2C_{22}C_{21} + 2C_{12}C_{11} + K_{13} + K_{12}C_{21} + K_{11}C_{11})Z + (C_{12}^2 + C_{22}^2 + K_{11}C_{12} + K_{12}C_{22} + K_{14}) = 0 \quad (3.5.24)$$

Extraindo-se as raízes desse polinômio, obtêm-se as duas soluções possíveis de Z . Os valores de X e Y são obtidos substituindo-se os valores de Z em (3.5.18) e (3.5.19).

Uma segunda alternativa é a construção de um algoritmo iterativo baseado na matriz Jacobiana do mecanismo. Por definição, a matriz Jacobiana faz o mapeamento entre os diferenciais de dois sistemas de coordenadas distintos (para um mecanismo qualquer, as relações de cinemática de posição correspondem a transformação de coordenadas). O esquema se baseia na seguinte relação aproximada envolvendo a matriz Jacobiana.

$$\Delta x \cong J\Delta q \quad (3.5.25)$$

Designa-se por q_{ref} o vetor de posições dos atuadores para qual se quer calcular a posição da plataforma x_{ref} . O algoritmo numérico necessita de uma estimativa inicial x_o para a posição da plataforma. Faz-se, então, a cinemática inversa para x_o , o que produzirá os ângulos dos atuadores, q_o , correspondentes a essa estimativa inicial. Aplicando-se essas variáveis na equação de diferenças (3.5.25), tem-se.

$$x_{ref} - x_o \cong J(q_{ref} - q_o) \quad (3.5.26)$$

$$x_{ref} \cong x_o + J(q_{ref} - q_o) \quad (3.5.27)$$

A expressão (3.5.27) fornece uma solução aproximada para x_{ref} . A idéia é utilizar essa solução aproximada de x_{ref} como valor inicial para uma nova iteração e assim obter uma solução ainda mais acurada para x_{ref} . As iterações são feitas até que algum critério de parada seja alcançado. A próxima figura mostra um esquema do funcionamento do algoritmo:

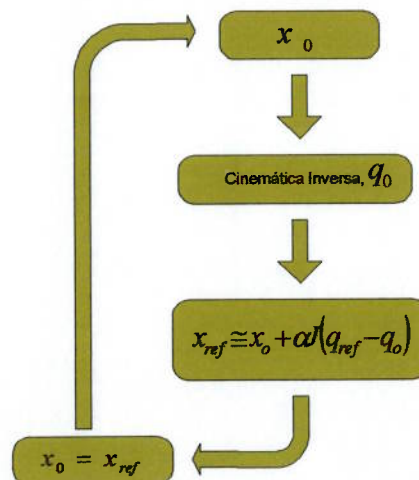


Figura 30-Esquema do algoritmo da cinemática direta.

O fator α serve para regular a convergência. Como as aproximações são lineares, valores grandes de α fazem com que a convergência seja atingida mais rapidamente. No entanto, se esse valor for excessivamente grande, uma oscilação na resposta ou, até mesmo, a divergência do método numérico, pode acontecer. Se o valor

de α for pequeno, a convergência fica assegurada. Entretanto, o método torna-se mais lento, necessitando de mais iterações para convergir.

Para completar a cinemática direta resta ainda desenvolver a expressão que localiza os pontos O_{i5} dado os ângulos $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}$. Essa expressão será útil no estudo das equações dinâmicas.

Escrevendo os pontos O_{i3} e O_{i4} em relação ao sistema de coordenadas da base:

$$O_{i3}^O = H_0^{i1} H_{i1}^{i2} H_{i2}^{i3} O_{i3}^{i3} \quad (3.5.28)$$

$$O_{i4}^O = H_0^{i1} H_{i1}^{i2} H_{i2}^{i4} O_{i4}^{i4} \quad (3.5.29)$$

$$O_{i5}^O = \frac{1}{2} (O_{i3}^O + O_{i4}^O) \quad (3.5.30)$$

Como as expressões de O_{i3}^O e O_{i4}^O dependem apenas de $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}$ a expressão acima de O_{i5}^O já é a equação procurada.

As rotinas para MatLab[®] que executam a cinemática direta estão disponíveis no apêndice C.

3.6. Matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana também faz a relação entre velocidades dos atuadores e velocidades da plataforma. Para se obter essa matriz, deve-se derivar as relações R_i (expressão (3.4.13)) do item anterior em relação ao tempo. Fazendo-se as derivadas, obtém-se:

$$J_q \dot{q} - J_x \dot{x} = 0 \quad (3.6.1)$$

Onde:

$$J_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial \theta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_2}{\partial \theta_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_3}{\partial \theta_{31}} \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial X} & \frac{\partial R_1}{\partial Y} & \frac{\partial R_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial R_2}{\partial X} & \frac{\partial R_2}{\partial Y} & \frac{\partial R_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial R_3}{\partial X} & \frac{\partial R_3}{\partial Y} & \frac{\partial R_3}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (3.6.3)$$

$$x = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{31} \end{bmatrix} \quad (3.6.5)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (3.6.6)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \end{bmatrix} \quad (3.6.7)$$

Resolvendo a equação (3.6.1) para \dot{x} , chega-se a matriz Jacobiana:

$$J = -J_x^{-1} J_q \quad (3.6.8)$$

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (3.6.9)$$

Calculando-se J_q , chega-se a:

$$J_q = \begin{bmatrix} j_{q11} & 0 & 0 \\ 0 & j_{q22} & 0 \\ 0 & 0 & j_{q33} \end{bmatrix} \quad (3.6.10)$$

Onde,

$$j_{q11} = \frac{1}{3} a_1 (\cos(\theta_{11}) L_B \sqrt{3} - \cos(\theta_{11}) L_P \sqrt{3} + 6 \cos(\theta_{11}) Y + 6 \sin(\theta_{11}) Z) \quad (3.6.11)$$

$$j_{q22} = -\frac{1}{3} a_1 (-\cos(\theta_{21}) L_B \sqrt{3} + \cos(\theta_{21}) L_P \sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cos(\theta_{21}) X + 3 \cos(\theta_{21}) Y - 6 \sin(\theta_{21}) Z) \quad (3.6.12)$$

$$j_{q33} = \frac{1}{3} a_1 (\cos(\theta_{31}) L_B \sqrt{3} - \cos(\theta_{31}) L_P \sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cos(\theta_{31}) X - 3 \cos(\theta_{31}) Y + 6 \sin(\theta_{31}) Z) \quad (3.6.13)$$

Calculando-se J_x , chega-se a:

$$J_x = \begin{bmatrix} j_{x11} & j_{x12} & j_{x13} \\ j_{x21} & j_{x22} & j_{x23} \\ j_{x31} & j_{x32} & j_{x33} \end{bmatrix} \quad (3.6.14)$$

$$j_{x11} = 2X \quad (3.6.15)$$

$$j_{x21} = -\sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta_{21})a_1 - \frac{1}{2}L_B + \frac{1}{2}L_P + 2X \quad (3.6.16)$$

$$j_{x31} = \sqrt{3} \operatorname{sen}(\theta_{31})a_1 + \frac{1}{2}L_B - \frac{1}{2}L_P + 2X \quad (3.6.17)$$

$$j_{x12} = 2 \operatorname{sen}(\theta_{11})a_1 + \frac{1}{3}L_B \sqrt{3} - \frac{1}{3}L_P \sqrt{3} + 2Y \quad (3.6.18)$$

$$j_{x22} = \operatorname{sen}(\theta_{21})a_1 - \frac{1}{6}L_B \sqrt{3} + \frac{1}{6}L_P \sqrt{3} + 2Y \quad (3.6.19)$$

$$j_{x32} = -\operatorname{sen}(\theta_{31})a_1 - \frac{1}{6}L_B \sqrt{3} + \frac{1}{6}L_P \sqrt{3} + 2Y \quad (3.6.20)$$

$$j_{x13} = -2 \cos(\theta_{11})a_1 + 2Z \quad (3.6.21)$$

$$j_{x23} = -2 \cos(\theta_{21})a_1 + 2Z \quad (3.6.22)$$

$$j_{x33} = -2 \cos(\theta_{31})a_1 + 2Z \quad (3.6.23)$$

Dois fatos sobre a matriz Jacobiana devem ser ressaltados. O primeiro deles é que, ao se determinar as cinemáticas direta e inversa de posições do mecanismo, as cinemáticas direta e inversa de velocidades se tornam bem simples, uma vez que as velocidades dos atuadores e da plataforma são relacionadas de maneira linear através da matriz Jacobiana. O segundo fato é que as configurações singulares do mecanismo ocorrem quando o determinante da matriz Jacobiana é nulo.

3.7. Cinemáticas Direta e Inversa de Velocidades e Acelerações

A cinemática direta de velocidade consiste em determinar a velocidade da plataforma dadas as velocidade angulares dos atuadores. A matriz Jacobiana faz diretamente a relação entre a $\dot{x} = [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]^T$ e $\dot{q} = [\dot{\theta}_{11} \ \dot{\theta}_{21} \ \dot{\theta}_{31}]$.

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (3.7.1)$$

Para se realizar a cinemática direta de acelerações basta derivarmos a relação já apresentada $J_q \dot{q} + J_x \dot{x} = 0$.

$$J_q \dot{q} + J_q \ddot{q} + J_x \dot{x} + J_x \ddot{x} = 0 \quad (3.7.2)$$

Isolando \ddot{x} ,

$$\ddot{x} = J_x^{-1}(-J_x \dot{x} - J_q \dot{q} - J_q \ddot{q}) \quad (3.7.3)$$

As cinemáticas inversas de velocidades e acelerações podem ser obtidas através de manipulação algébrica das expressões de cinemática direta acima apresentadas. Para a cinemática inversa de velocidades tem-se:

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{x} \quad (3.7.4)$$

E de acelerações:

$$\ddot{q} = J_q^{-1}(-J_q \dot{q} - J_x \dot{x} - J_x \ddot{x}) \quad (3.7.5)$$

Dentro deste item sobre cinemática de velocidades e acelerações, também serão desenvolvidas as expressões de velocidades e acelerações para os pontos O_{i5} em função de $\dot{\theta}_{i1}, \dot{\theta}_{i2}, \dot{\theta}_{i3}$. Isto será feito tendo-se a hipótese de que as pernas do mecanismo funcionam de modo independente, isto é, as posições dos pontos O_{i5} serão escritos em função de $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}$. As expressões obtidas são importantes para o desenvolvimento do modelo dinâmico.

Admite-se que as velocidades dos pontos O_{i5} serão calculadas em relação ao sistema de coordenadas da base e, então, o sobrescrito que as identifica será suprimido. Abaixo o ponto O_{i5} está descrito em relação ao sistema de coordenadas da base. A quarta linha que fazia com que a sua representação fosse compatível com a utilização das matrizes de transformações homogêneas é eliminada.

$$O_{i5} = \begin{bmatrix} O_{i5}^x(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}) \\ O_{i5}^y(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}) \\ O_{i5}^z(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}) \end{bmatrix} \quad (3.7.6)$$

Agora o sobrescrito indica a componente segundo cada eixo. Para obter a velocidade dos pontos O_{i5} deriva-se suas expressões em relação ao tempo. Fazendo isso obtém-se:

$$\dot{O}_{i5} = \begin{bmatrix} \frac{\partial O_{i5}^x}{\partial \theta_{i1}} & \frac{\partial O_{i5}^x}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial O_{i5}^x}{\partial \theta_{i3}} \\ \frac{\partial O_{i5}^y}{\partial \theta_{i1}} & \frac{\partial O_{i5}^y}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial O_{i5}^y}{\partial \theta_{i3}} \\ \frac{\partial O_{i5}^z}{\partial \theta_{i1}} & \frac{\partial O_{i5}^z}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial O_{i5}^z}{\partial \theta_{i3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \\ \dot{\theta}_{i3} \end{bmatrix} \quad (3.7.7)$$

Definindo as matrizes Jacobianas J_i e os vetores q_i como:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial O_{i5}^x}{\partial \theta_{i1}} & \frac{\partial O_{i5}^x}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial O_{i5}^x}{\partial \theta_{i3}} \\ \frac{\partial O_{i5}^y}{\partial \theta_{i1}} & \frac{\partial O_{i5}^y}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial O_{i5}^y}{\partial \theta_{i3}} \\ \frac{\partial O_{i5}^z}{\partial \theta_{i1}} & \frac{\partial O_{i5}^z}{\partial \theta_{i2}} & \frac{\partial O_{i5}^z}{\partial \theta_{i3}} \end{bmatrix} \quad (3.7.8)$$

$$q_i = \begin{bmatrix} \theta_{i1} \\ \theta_{i2} \\ \theta_{i3} \end{bmatrix} \quad (3.7.9)$$

Pode-se agora escrever as velocidades \dot{O}_{i5} de uma maneira mais compacta.

$$\dot{O}_{i5} = J_i \dot{q}_i \quad (3.7.10)$$

Para se obter as acelerações dos pontos O_{i5} deriva-se em relação ao tempo a expressão para \dot{O}_{i5} acima.

$$\ddot{O}_{i5} = \dot{J}_i \dot{q}_i + J_i \ddot{q}_i \quad (3.7.11)$$

As expressões da cinemática inversa de velocidades e acelerações vêm da manipulação algébrica das expressões anteriores:

$$\dot{q}_i = J_i^{-1} \dot{O}_{i5} \quad (3.7.12)$$

$$\ddot{q}_i = J_i^{-1} (\ddot{O}_{i5} - \dot{J}_i \dot{q}_i) \quad (3.7.13)$$

Quando volta-se a pensar que as pernas estão conectadas à plataforma e devido ao fato dessa ser um corpo que apenas translada (e lembrando que nesse caso os pontos O_{i5} se movem solidários a plataforma), pode-se reescrever as expressões anteriores como:

$$\dot{q}_i = J_i^{-1} \dot{x} \quad (3.7.14)$$

$$\ddot{q}_i = J_i^{-1} (\ddot{x} - \dot{J}_i \dot{q}_i) \quad (3.7.15)$$

3.8. Volume de Trabalho

Calcular o volume de trabalho de forma analítica para o robô delta pode se tornar algo extremamente complexo. Assim, utilizou-se um método numérico (o mesmo utilizado por Tsai e Stamper [16]) para a execução dessa tarefa.

Esse método consiste nos seguintes passos:

Define-se um cubo de dimensões a, b e c suficientemente grandes de maneira que o volume de trabalho do manipulador esteja inteiramente contido nesse cubo.

1. Seleciona-se um grande número de pontos, n_{total} , igualmente espaçados no interior do cubo descrito no passo anterior. Uma outra maneira de se explicar este passo é imaginar que se definiu um reticulado no interior do cubo e que a intersecção das linhas definem os pontos.
2. Para cada um dos pontos definidos no passo anterior faz-se a verificação se o ponto está no volume de trabalho do manipulador ou não. Essa verificação é feita por meio da cinemática inversa quando a plataforma ocupa a posição do ponto. Se os ângulos θ_{11} , θ_{21} e θ_{31} forem reais, isso

significa que o ponto pertence ao volume de trabalho do manipulador. Se para um determinado ponto a cinemática inversa produzir algum dos ângulos com parte imaginária não nula, isso significa que o ponto está fora da área de trabalho. Ao final desse passo deve-se chegar a um número n_{in} que corresponde ao número total de pontos que estão no interior do volume de trabalho.

3. O volume de trabalho, W , é calculada através de uma proporção entre o número total de pontos definidos no passo 2 e o número total de pontos que estão no interior do volume de trabalho.

$$W = \frac{n_{in}}{n_{total}} V \quad (3.8.1)$$

Onde $V = abc$ que corresponde ao volume do cubo definido no primeiro passo.

Em termos práticos, o valor de volume de trabalho obtido por esse algoritmo não corresponde ao real por algumas razões. A primeira delas é que nos cálculos realizados considerou-se que as movimentações das juntas não sofrem qualquer tipo de restrição, o que não se verifica na prática. Por exemplo, as juntas esféricas no modelo teórico podem realizar movimentações angulares com qualquer amplitude, quando na verdade juntas desse tipo tem sua movimentação restringida devido a seus aspectos construtivos. A segunda razão se deve aos aspectos construtivos do mecanismo em si. Por exemplo, uma vez o implementado o mecanismo, devido a problemas de colisões entre as peças, apenas a região do espaço de trabalho com $Z > 0$ será utilizada. Existe ainda o fato de que ainda possam existir singularidades internas ao espaço de trabalho, e isso vem a ser mais um fator que, na prática, diminui o valor teórico obtido para volume de trabalho obtido pelo método numérico em questão.

No Apêndice C encontra-se a implementação para MatLab[®] da função que faz o cálculo do espaço de trabalho pelo método exposto neste item.

3.9. Determinação das Dimensões do Mecanismo

Como já citado no item 2.1, o menor volume de trabalho, o maior número de configurações singulares (frequentemente internas ao espaço de trabalho) e a baixa isotropia são apontados como os principais pontos negativos dos mecanismos paralelos frente aos seriais. Além disso, conforme Ottaviano e Ceccarelli [17], o desempenho de um mecanismo paralelo pode variar muito conforme as dimensões de suas peças e posições das articulações, e essa sensibilidade em relação aos parâmetros de projeto costuma ser bem maior do que geralmente ocorre em mecanismos seriais.

A maneira encontrada para superar essas desvantagens é a adoção de algum critério de desempenho e a elaboração do projeto de maneira a maximizar tal critério. Diversos podem ser os critérios aplicáveis, por exemplo: volume de trabalho, rigidez, destreza, etc. A maximização de um determinado critério não necessariamente significa a maximização de outro.

A destreza como critério de otimização é algo relativamente recente. Ela pode ser pensada como a capacidade do mecanismo de aplicar força ou torque em alguma direção arbitrária. A isotropia do mecanismo é uma grandeza relacionada com a destreza. A isotropia é a capacidade do mecanismo aplicar forças e torques de maneira uniforme ao longo do volume do trabalho.

Visto que a matriz Jacobiana do mecanismo faz o mapeamento entre as forças e velocidades dos atuadores e as forças e velocidades do efetuador, é natural que algum índice de destreza ou isotropia (como descrito) passasse por alguma característica da matriz Jacobiana.

Uma possível conceituação de índice de destreza, η , é estabelecida da seguinte maneira:

$$\eta = \int_v \frac{1}{\lambda} dW \quad (3.9.1),$$

onde λ é o número de condicionamento da matriz Jacobiana. Esse índice é o mesmo utilizado por Tsai e Stamper [16] e foi originalmente desenvolvido por Park e Brockett [18] e Gosselin e Angeles [19].

O número de condicionamento é, de certa maneira, uma medida da inversibilidade de uma matriz. Quando um mecanismo assume uma posição singular, a matriz Jacobiana torna-se não inversível, e logo seu número de condicionamento torna-se infinito. Já que, nessa situação, o mecanismo perde por completo a capacidade de aplicar forças ou torques, nasce daí a idéia da utilização do inverso do condicionante como uma medida local da destreza do mecanismo. A integração do inverso do condicionante ao longo do espaço de trabalho tem como intenção a elaboração de um índice global de destreza.

Uma outra alternativa de índice de desempenho é o seguinte:

$$\eta = \int_W \frac{\min|\lambda|}{\max|\lambda|} dW \quad (3.9.2)$$

Conforme Lum et al [20], o integrando do índice acima - razão entre o menor e o maior autovalor da matriz Jacobiana - é uma medida da isotropia do mecanismo. Dada uma configuração qualquer, este índice está entre 0 a 1. Este índice quando nulo significa que o mecanismo está em uma configuração singular e perdeu um grau de liberdade, isto é, existe uma direção em que o mecanismo não é capaz de atuar. Uma isotropia unitária significa que os autovalores da matriz Jacobiana são todos iguais, dessa forma, o mecanismo pode se mover de maneira igual em qualquer direção. Como no índice anterior (equação (3.9.1)), a integração ao longo do espaço de trabalho visa a criação de um índice global.

Apresentadas essas considerações, as dimensões do mecanismo foram obtidas utilizando-se o índice de isotropia (eq. (3.9.2)) conforme processo de otimização paramétrico mostrado a seguir:

$$\text{Max } \eta = \int_W \frac{\min|\lambda|}{\max|\lambda|} dW$$

$$a_1, a_2, L_p, L_B$$

tal que

$$W \geq 0.01m^2$$

$$a_1 + a_2 \leq 0.15m$$

$$0.04m \leq a_1 \leq 0.12m$$

$$0.04m \leq a_2 \leq 0.12m$$

$$0.07m \leq L_p \leq 0.12m$$

$$0.07m \leq L_B \leq 0.12m$$

Colocando em palavras: quer-se maximizar a isotropia com relação as variáveis de projeto a_1, a_2, L_p e L_B de maneira que a área de trabalho seja superior a $0.01m^2$, as variáveis de projeto L_p e L_B devem estar entre $0.07m$ e $0.12m$, as variáveis de projeto a_1, a_2 devem estar entre $0.04m$ e $0.12m$ e sua soma não deve ultrapassar a $0.15m$. Essa última restrição foi colocada para que as dimensões das peças do mecanismo não cresçam indefinidamente - uma vez que o índice de destreza cresce com as variáveis de projeto a_1 e a_2 . As demais restrições foram impostas para que as dimensões obtidas estivessem dentro de uma faixa em que a construção fosse facilitada (por exemplo, uma plataforma de lado $0.01m$ é fisicamente factível, no entanto, do ponto de vista construtivo tal dimensão traria problemas).

O cálculo analítico do índice global de destreza é inviável, e a implementação de um método numérico novamente torna-se necessário. Este método (também encontrado no trabalho de Tsai e Stamper [16]) é muito semelhante ao usado no cálculo do espaço de trabalho, e consiste nos seguintes passos:

1. Define-se um cubo de dimensões a,b e c suficientemente grandes de maneira que o volume de trabalho do manipulador esteja inteiramente contido nesse cubo.

2. Seleciona-se um grande número de pontos, n_{total} , igualmente espaçados no interior do cubo descrito no passo anterior. Uma outra maneira de se explicar esse passo é imaginar que se definiu um reticulado no interior do cubo e que a intersecção das linhas definem os pontos. Em suma, o volume do cubo é discretizado.
3. Para cada um dos pontos definidos no passo anterior faz-se a verificação se o ponto está no volume de trabalho do manipulador ou não. Para cada ponto que se encontra no interior do volume de trabalho, calcula-se o índice local de isotropia ($\min|\lambda|/\max|\lambda|$) e multiplica-se esse pelo elemento de volume correspondente a discretização realizada. Se o ponto está fora da área de trabalho a isotropia é considerada nula.
4. Para cada ponto no interior da área de trabalho encontramos um termo calculado conforme o passo 3. Através da soma de todos esse termos obtém-se o índice global de isotropia.

No Apêndice C encontra-se a implementação para MatLab[®] da função que faz o cálculo do índice global de isotropia ora apresentado.

Aqui vale uma observação que vale tanto para o cálculo do volume de trabalho quanto para o índice global de isotropia; uma discretização maior (o que corresponde a um número maior de pontos definidos no passo 1) gera um valor mais exato, no entanto o custo computacional aumenta consideravelmente.

Utilizando a função “fmincon” da Toolbox de otimização do MatLab[®] para solucionar o problema acima proposto, chegou-se as seguintes dimensões para o mecanismo:

$$a_1 = 0.063m$$

$$a_2 = 0.087m$$

$$L_p = 0.07m$$

$$L_B = 0.12m$$

As restrições ativas são as seguintes:

$$L_p \geq 0.07m$$

$$L_B \leq 0.12m$$

$$a_1 + a_2 \leq 0.15m$$

O volume de trabalho dadas as dimensões encontradas é de $0.004475m^3$, portanto a restrição $W \geq 0.01m^2$ é satisfeita.

4. Dinâmica

De maneira análoga ao que é feito na cinemática, o estudo da dinâmica de um mecanismo pode ser dividido em duas partes: dinâmica direta e dinâmica inversa. O objetivo da dinâmica direta é determinar a aceleração do mecanismo dados os torques e as forças aplicados a ele. Enquanto isso, a dinâmica inversa tem por objetivo determinar forças e torques aplicados ao mecanismo, dada uma certa configuração e as correspondentes velocidades e acelerações.

Primeiramente será desenvolvida a dinâmica direta e depois a dinâmica inversa do mecanismo Delta. Por fim será apresentado um método de dinâmica direta baseada na dinâmica inversa.

4.1. Dinâmica Direta

A importância da dinâmica direta vem do fato de que essa fornece as leis de movimento do mecanismo, tornando possível a realização de simulações numéricas a respeito do comportamento dinâmico do mesmo.

As duas maneiras mais conhecidas com as quais se é possível obter as equações de movimento de um mecanismo são: Newton-Euler e Lagrange. A formulação de Newton-Euler é baseada na segunda Lei de Newton que relaciona forças e momento de um sistema. A formulação de Lagrange, por sua vez, descreve o comportamento dinâmico do sistema em função de energia e trabalho. A vantagem desse último método é que as forças de restrição e as que não realizam trabalho são automaticamente eliminadas.

Nesse estudo, optou-se pela formulação de Lagrange por essa permitir uma generalização na obtenção das equações de movimento.

Seja q_1, \dots, q_n um conjunto de coordenadas generalizadas capaz de localizar um sistema dinâmico por completo. E sejam T e U respectivamente as energias cinética e potencial totais armazenadas em um sistema dinâmico. O Lagrangeano é definido como:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U \quad (4.1.1)$$

Em função do Lagrangeano, as equações de movimento do mecanismo são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.2)$$

Onde Q_i é a força generalizada relacionada à coordenada generalizada q_i .

O primeiro passo é encontrar um conjunto de coordenadas generalizadas que determinam a localização do mecanismo Delta. A escolha mais natural são os ângulos θ_{11}, θ_{21} e θ_{31} correspondentes as posições dos atuadores. No entanto, a dificuldade de se escrever o Lagrangeano desse mecanismo de uma forma fechada em função dessas variáveis é suficientemente grande a ponto de se considerar tal tarefa infactível. Este fato é bastante comum em mecanismos paralelos. Em vista disso, o procedimento mais recomendado é dividir o mecanismo em sub-cadeias abertas independentes. Através da imposição de restrições cinemáticas garante-se o fechamento da cadeia na configuração original do mecanismo paralelo. Propõe-se, então, dividir o mecanismo Delta em quatro partes: três pernas e a plataforma móvel. A adoção dessa divisão faz com que os pontos O_i não mais coincidam com os pontos P_i . A figura 31 mostra essa divisão.

A tabela a seguir mostra o conjunto de coordenadas generalizadas que definem as posições de cada uma das sub-cadeias quando essas são consideradas como sendo independentes.

Plataforma	X, Y, Z
Perna 1	$\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}$
Perna 2	$\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}$
Perna 3	$\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}$

Tabela 2-Coordenadas generalizadas das sub-cadeias.

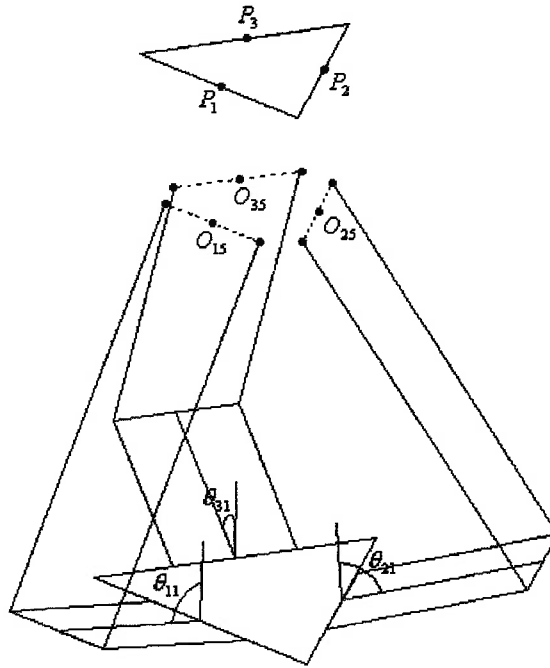


Figura 31-Restrições cinemáticas.

A equação de Lagrange que contempla a adição de restrições (Lanczos [21]) para um sistema dinâmico qualquer é a seguinte:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - (\lambda_1 A_{1i} + \lambda_2 A_{2i} + \dots + \lambda_m A_{mi}) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.3),$$

onde $A_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$ (4.1.4) e onde $f_k = f_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$ representa uma restrição dada da forma $f_k = 0$.

Tendo em vista a divisão proposta, as restrições, já colocadas na forma $f_k = 0$, que garantem o mecanismo Delta em sua forma original são as seguintes:

$$f_1 = O_{15}^x(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}) - P_1^x(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.5) \quad f_2 = O_{15}^y(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}) - P_1^y(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.6)$$

$$f_3 = O_{15}^z(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}) - P_1^z(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.7) \quad f_4 = O_{25}^x(\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}) - P_2^x(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.8)$$

$$f_5 = O_{25}^y(\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}) - P_2^y(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.9) \quad f_6 = O_{25}^z(\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}) - P_2^z(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.10)$$

$$f_7 = O_{35}^x(\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}) - P_3^x(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.11) \quad f_8 = O_{35}^y(\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}) - P_3^y(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.12)$$

$$f_9 = O_{35}^z(\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}) - P_3^z(X, Y, Z) = 0 \quad (4.1.13)$$

Os sobrescritos em O_{i5} e P_i indicam as componentes desses pontos segundo cada eixo. As sub-cadeias atuando de maneira independente totalizam doze coordenadas generalizadas. A imposição de nove restrições faz com que o sistema como um todo tenha três graus de liberdade, como era esperado.

A aplicação da equação de Lagrange para as sub-cadeias independentes leva a quatro conjuntos de equações diferenciais independentes:

Para cada perna i ,

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) + G_i(q_i) = \tau_i \quad (4.1.14)$$

Onde,

$M_i(q_i)$ -matriz de massa da perna i .

$C_i(q_i, \dot{q}_i)$ -matriz giroscópica da perna i .

$G_i(q_i)$ -matriz de forças devido a gravidade da perna i .

τ_i -matriz de forças generalizadas da perna i .

$q_i = [\theta_{i1} \ \theta_{i2} \ \theta_{i3}]^T$ -matriz de coordenadas generalizadas da perna i .

Para a plataforma,

$$M_p(q_p)\ddot{q}_p + C_p(q_p, \dot{q}_p) + G_p(q_p) = \tau_p \quad (4.1.15)$$

Onde,

$M_p(q_p)$ -matriz de massa da plataforma.

$C_p(q_p, \dot{q}_p)$ -matriz giroscópica da plataforma.

$G_p(q_p)$ -matriz de forças devido a gravidade da plataforma.

τ_p -matriz de forças generalizadas da plataforma.

$q_p = [X \ Y \ Z]^T$ -matriz de coordenadas generalizadas da plataforma.

No apêndice A estão descritas, de maneira explícita, as matrizes de massa, giroscópica e de esforços gravitacionais em função dos parâmetros do sistema.

A imposição das restrições cinemáticas (4.1.5) a (4.1.13) às equações diferenciais acima ((4.1.14) e (4.1.15)), conforme a equação de Lagrange na forma (4.1.3), leva ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau + A^T \lambda \quad (4.1.16)$$

$$q = [\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13} \ \theta_{21} \ \theta_{22} \ \theta_{23} \ \theta_{31} \ \theta_{32} \ \theta_{33} \ X \ Y \ Z]^T \quad (4.1.17)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{1(1,1)} & M_{1(1,2)} & M_{1(1,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{1(2,1)} & M_{1(2,2)} & M_{1(2,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{1(3,1)} & M_{1(3,2)} & M_{1(3,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{2(1,1)} & M_{2(1,2)} & M_{2(1,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{2(2,1)} & M_{2(2,2)} & M_{2(2,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{2(3,1)} & M_{2(3,2)} & M_{2(3,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{3(1,1)} & M_{3(1,2)} & M_{3(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{3(2,1)} & M_{3(2,2)} & M_{3(2,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{3(3,1)} & M_{3(3,2)} & M_{3(3,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{P(1,1)} & M_{P(1,2)} & M_{P(1,3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{P(2,1)} & M_{P(2,2)} & M_{P(2,3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{P(3,1)} & M_{P(3,2)} & M_{P(3,3)} \end{bmatrix} \quad (4.1.18)$$

$M_{i(j,k)}$ é o elemento da linha j e coluna k da matriz de massa M_i da perna i do mecanismo.

$$C(q, \dot{q}) = [C_{1(1,1)} \ C_{1(2,1)} \ C_{1(3,1)} \ C_{2(1,1)} \ C_{2(2,1)} \ C_{2(3,1)} \ C_{3(1,1)} \ C_{3(2,1)} \ C_{3(3,1)} \ C_{P(1,1)} \ C_{P(2,1)} \ C_{P(3,1)}]^T$$

$C_{i(j,k)}$ é o elemento da linha j e coluna k da matriz giroscópica C_i da perna i do mecanismo.

$C_{P(i,j)}$ é o elemento da linha i e coluna j da matriz giroscópica C_P da plataforma.

$$G(q, \dot{q}) = [G_{1(1,1)} \ G_{1(2,1)} \ G_{1(3,1)} \ G_{2(1,1)} \ G_{2(2,1)} \ G_{2(3,1)} \ G_{3(1,1)} \ G_{3(2,1)} \ G_{3(3,1)} \ G_{P(1,1)} \ G_{P(2,1)} \ G_{P(3,1)}]^T$$

$G_{i(j,k)}$ é o elemento da linha j e coluna k da matriz de esforços gravitacionais G_i da perna i do mecanismo.

$G_{P(i,j)}$ é o elemento da linha i e coluna j da matriz de esforços gravitacionais G_P da plataforma.

$$\tau = [\tau_{11} \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{21} \quad \tau_{22} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31} \quad \tau_{32} \quad \tau_{33} \quad F_x^{ext} \quad F_y^{ext} \quad F_z^{ext}]^T$$

τ é o vetor de forças generalizadas.

O elemento da linha j e coluna k da matriz A da equação (4.1.16) corresponde à derivada parcial da restrição j (já colocada na forma $f_k = 0$) em relação a coordenada generalizada k do sistema ao qual se deve impor as restrições, conforme a expressão abaixo.

$$A_{(i,k)} = \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \quad (4.1.19)$$

Explorando as relações de dependência entre as restrições e as coordenadas generalizadas, pode-se chegar a seguinte matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial O_{15}^x}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial O_{15}^x}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial O_{15}^x}{\partial \theta_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial P_1^x}{\partial X} & -\frac{\partial P_1^x}{\partial Y} & -\frac{\partial P_1^x}{\partial Z} \\ \frac{\partial O_{15}^y}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial O_{15}^y}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial O_{15}^y}{\partial \theta_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial P_1^y}{\partial X} & -\frac{\partial P_1^y}{\partial Y} & -\frac{\partial P_1^y}{\partial Z} \\ \frac{\partial O_{15}^z}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial O_{15}^z}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial O_{15}^z}{\partial \theta_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial P_1^z}{\partial X} & -\frac{\partial P_1^z}{\partial Y} & -\frac{\partial P_1^z}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial O_{25}^x}{\partial \theta_{21}} & \frac{\partial O_{25}^x}{\partial \theta_{22}} & \frac{\partial O_{25}^x}{\partial \theta_{23}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial P_2^x}{\partial X} & -\frac{\partial P_2^x}{\partial Y} & -\frac{\partial P_2^x}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial O_{25}^y}{\partial \theta_{21}} & \frac{\partial O_{25}^y}{\partial \theta_{22}} & \frac{\partial O_{25}^y}{\partial \theta_{23}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial P_2^y}{\partial X} & -\frac{\partial P_2^y}{\partial Y} & -\frac{\partial P_2^y}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial O_{25}^z}{\partial \theta_{21}} & \frac{\partial O_{25}^z}{\partial \theta_{22}} & \frac{\partial O_{25}^z}{\partial \theta_{23}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial P_2^z}{\partial X} & -\frac{\partial P_2^z}{\partial Y} & -\frac{\partial P_2^z}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial O_{35}^x}{\partial \theta_{31}} & \frac{\partial O_{35}^x}{\partial \theta_{32}} & \frac{\partial O_{35}^x}{\partial \theta_{33}} & -\frac{\partial P_3^x}{\partial X} & -\frac{\partial P_3^x}{\partial Y} & -\frac{\partial P_3^x}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial O_{35}^y}{\partial \theta_{31}} & \frac{\partial O_{35}^y}{\partial \theta_{32}} & \frac{\partial O_{35}^y}{\partial \theta_{33}} & -\frac{\partial P_3^y}{\partial X} & -\frac{\partial P_3^y}{\partial Y} & -\frac{\partial P_3^y}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial O_{35}^z}{\partial \theta_{31}} & \frac{\partial O_{35}^z}{\partial \theta_{32}} & \frac{\partial O_{35}^z}{\partial \theta_{33}} & -\frac{\partial P_3^z}{\partial X} & -\frac{\partial P_3^z}{\partial Y} & -\frac{\partial P_3^z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (4.1.20)$$

Na expressão da matriz A acima pode-se identificar sub-matrizes que correspondem as matrizes J_1 , J_2 e J_3 (ver expressão (3.7.8)) já desenvolvidas nesse trabalho no ítem sobre cinemática.

Pelo fato de a plataforma ser um corpo rígido que apenas translada, os pontos P_1 , P_2 e P_3 , assim como qualquer outro ponto pertencente a plataforma, tem a mesma velocidade do ponto O_p (o centro da plataforma). Logo, as matrizes Jacobianas J_{P_1} , J_{P_2} e J_{P_3} são todas identidades e serão referidas de maneira indistinta como matrizes J_p . Assim, tem-se:

$$\dot{P}_1 = J_p \dot{O}_p \quad (4.1.21) \quad \dot{P}_2 = J_p \dot{O}_p \quad (4.1.22) \quad \dot{P}_3 = J_p \dot{O}_p \quad (4.1.23)$$

Por fim, as equações dinâmicas do mecanismo Delta podem ser reescritas de uma forma mais compacta:

$$\begin{bmatrix} M_1(q_1) & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & M_2(q_2) & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & M_3(q_3) & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & M_p(q_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q_1, \dot{q}_1) \\ C_2(q_2, \dot{q}_2) \\ C_3(q_3, \dot{q}_3) \\ C_p(q_p, \dot{q}_p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(q_1) \\ G_2(q_2) \\ G_3(q_3) \\ G_p(q_p) \end{bmatrix} = \tau - \begin{bmatrix} J_1^T & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & J_2^T & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & J_3^T \\ -J_p^T & -J_p^T & -J_p^T \end{bmatrix} \lambda \quad (4.1.24)$$

Onde

$$J_p = J_{P_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i^x}{\partial X} & \frac{\partial P_i^x}{\partial Y} & \frac{\partial P_i^x}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_i^y}{\partial X} & \frac{\partial P_i^y}{\partial Y} & \frac{\partial P_i^y}{\partial Z} \\ \frac{\partial P_i^z}{\partial X} & \frac{\partial P_i^z}{\partial Y} & \frac{\partial P_i^z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.25)$$

Ou simplesmente, conforme já foi dito acima:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau - A^T \lambda \quad (4.1.26)$$

Resta ainda determinar o vetor de multiplicadores de Lagrange λ . Até o momento, as restrições foram definidas em função de posições. No entanto, essas também podem ser definidas em função de velocidades. Por exemplo, colocando a

restrição $O_{15} - P_1 = 0$ em termos de velocidades, chega-se a $\dot{O}_{15} - \dot{P}_1 = 0$. Escrevendo todas as restrições em termos de velocidades, tem-se a seguinte expressão:

$$A\dot{q} = 0 \quad (4.1.27)$$

Derivando a expressão acima:

$$\dot{A}\dot{q} + A\ddot{q} = 0 \quad (4.1.28)$$

Na equação de movimento do mecanismo Delta isola-se o termo \ddot{q} .

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}[-C(q, \dot{q}) - G(q) + \tau - A^T \lambda] \quad (4.1.29)$$

Fazendo-se a substituição de \ddot{q} na expressão (4.1.28):

$$\dot{A}\dot{q} + AM(q)^{-1}[-C(q, \dot{q}) - G(q) + \tau - A^T \lambda] = 0 \quad (4.1.30)$$

Isolando o termo λ da equação acima, chega-se:

$$\lambda = (AM(q)^{-1} A^T)^{-1} [\dot{A}\dot{q} + AM(q)^{-1}(-C(q, \dot{q}) - G(q) + \tau)] \quad (4.1.31)$$

Agora, estão disponíveis todas as expressões que possibilitam a realização da dinâmica direta do mecanismo, bem como a simulação do comportamento dinâmico desse. Um aspecto importante é que para a realização de simulações dinâmicas, devido ao método adotado para a obtenção das equações, torna-se necessária uma quantidade extra de condições iniciais. São necessárias as condições iniciais para todas as variáveis do vetor q e \dot{q} .

Um segundo aspecto é que a expressão de λ acima não é conveniente no caso da sua utilização em simulações. Devido aos erros inerentes a qualquer simulação numérica e ao conseqüente acúmulo desses erros no transcorrer da simulação, as restrições passam pouco a pouco a não serem mais respeitadas. Isso acaba por acarretar em inconsistências do ponto de vista físico nos resultados obtidos. No caso desse

trabalho, a partir de determinado instante de simulação (tal instante depende do método de integração) a plataforma passava a não estar mais junto às pernas do mecanismo.

Torna-se necessária uma expressão alternativa e aproximada de λ para superar o problema. Essa nova expressão vem da interpretação física de que λ é uma medida da violação microscópica das restrições impostas. Conforme Lanczos [21], na equação de restrição $f = 0$, o lado direito não seria nulo, mas na verdade ε vezes λ , onde ε é uma constante positiva que tende a zero a medida que a força que mantém a restrição aumenta tendendo a infinito. Surge, então, a idéia do método da penalização que nada mais é do que substituir o vetor λ por um vetor de forças proporcionais ao tamanho da violação da restrição. No caso do mecanismo, isto significa adicionar molas e amortecedores que mantenham as sub-cadeias unidas. Quanto maior a rigidez da mola e o amortecimento (isto é, quanto maior for a penalização) mais próxima do real se torna a resposta obtida. É importante notar também que a penalização não pode ser aumentada de maneira arbitrária, uma vez que isso pode trazer problemas de mau condicionamento numérico. Também, deve-se lembrar que este método consiste em uma aproximação, logo comportamentos não previstos podem ocorrer.

A expressão de λ pelo método da penalização no caso do mecanismo Delta fica:

$$\lambda = Kc(q) + D\dot{c} \quad (4.1.32)$$

$$c = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9]^T \quad (4.1.33)$$

$$\dot{c} = \begin{bmatrix} J_1 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -J_p \\ 0_{3 \times 3} & J_2 & 0_{3 \times 3} & -J_p \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & J_3 & -J_p \end{bmatrix} \dot{q} \quad (4.1.34)$$

K e D são matrizes diagonais cujos elementos podem ser ajustados por meio de simulações, lembrando que esses valores devem ser escolhidos de maneira que a simulação tenha um resultado factível e que não tornem o problema mal condicionado do ponto de vista numérico.

Existem várias outras maneiras de se obter o equacionamento necessário para realizar a simulação do mecanismo (ver Kővecses, Piedœuf, Lange [22] para um resumo e classificação desses). No entanto os métodos aqui apresentados produziram

resultados bastante satisfatórios, razão pela qual não serão apresentadas ou discutidas possíveis alternativas.

4.2. Dinâmica Inversa

A motivação para a construção da dinâmica inversa está no fato de que essa abre caminho para um método bastante interessante de elaboração da dinâmica direta (conforme será visto no próximo item).

A dinâmica inversa também pode ser obtida pela dinâmica direta já desenvolvida no item anterior. No entanto, será desenvolvido um algoritmo de dinâmica inversa que independe dos multiplicadores de Lagrange. O objetivo é encontrar os torques dos atuadores τ_{i1} , dadas as acelerações $\ddot{\theta}_{i1}$, as velocidades $\dot{\theta}_{i1}$ e as posições θ_{i1} .

O primeiro passo desse desenvolvimento, assim como na dinâmica direta, é dividir o mecanismo em sub-cadeias cinemáticas como mostra a próxima figura.

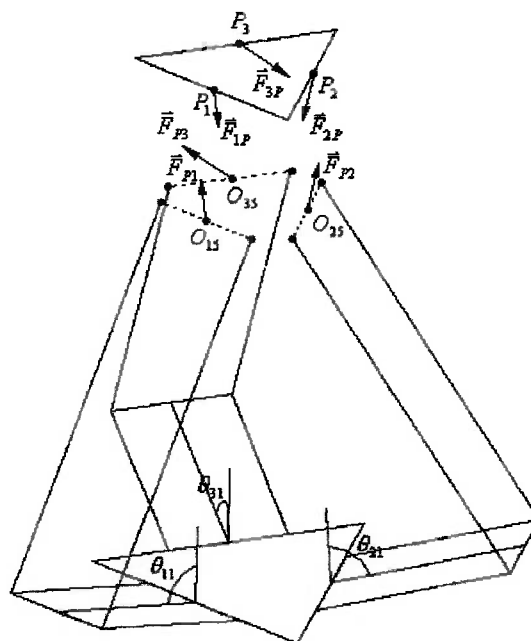


Figura 32-Sub-cadeias cinemáticas e forças de interação.

Como não se fará uso de imposição de restrições cinemáticas, deve-se evidenciar as forças \vec{F}_{1P} , \vec{F}_{2P} , \vec{F}_{3P} , \vec{F}_{P1} , \vec{F}_{P2} e \vec{F}_{P3} de interação entre as cadeias. Como os pares \vec{F}_{1P} e \vec{F}_{P1} , \vec{F}_{2P} e \vec{F}_{P2} , \vec{F}_{3P} , \vec{F}_{P3} são de ação e reação, pode-se escrever:

$$\vec{F}_{1P} = -\vec{F}_{P1} \quad \vec{F}_{2P} = -\vec{F}_{P2} \quad \vec{F}_{3P} = -\vec{F}_{P3} \quad (4.2.1)$$

Escrevendo-se essas forças na forma matricial e evidenciando as componentes em relação ao sistema de coordenadas da base, tem-se:

$$F_{1P} = [F_{1Px} \quad F_{1Py} \quad F_{1Pz}]^T \quad (4.2.2)$$

$$F_{2P} = [F_{2Px} \quad F_{2Py} \quad F_{2Pz}]^T \quad (4.2.3)$$

$$F_{3P} = [F_{3Px} \quad F_{3Py} \quad F_{3Pz}]^T \quad (4.2.4)$$

Abaixo estão as equações dinâmicas das pernas e da plataforma (usando a mesma terminologia do item anterior) levando em conta as forças de interação:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) + G_i(q_i) = \tau_i - J_i^T F_{iP} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2.5)$$

$$M_P(q_P)\ddot{q}_P + C_P(q_P, \dot{q}_P) + G_P(q_P) = \tau_P + J_P^T F_{1P} + J_P^T F_{2P} + J_P^T F_{3P} \quad (4.2.6)$$

Observando que:

- Apesar de a priori ter-se apenas conhecimento dos valores $\ddot{\theta}_{i1}$, $\dot{\theta}_{i1}$ e θ_{i1} , através da cinemática direta (já desenvolvida em itens anteriores) pode-se obter todas as outras variáveis cinemáticas relevantes: $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}, \theta_{12}, \theta_{13}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}, \ddot{\theta}_{12}, \ddot{\theta}_{13}, \theta_{22}, \theta_{23}, \dot{\theta}_{22}, \dot{\theta}_{23}, \ddot{\theta}_{22}, \ddot{\theta}_{23}, \theta_{32}, \theta_{33}, \dot{\theta}_{32}, \dot{\theta}_{33}, \ddot{\theta}_{32}$ e $\ddot{\theta}_{33}$.
- As juntas relativas aos ângulos $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{32}$ e θ_{33} são passivas, logo $\tau_{12} = 0, \tau_{13} = 0, \tau_{22} = 0, \tau_{23} = 0, \tau_{32} = 0$ e $\tau_{33} = 0$.

Cada sistema de equações referentes a uma perna i tem quatro incógnitas ($F_{iPx}, F_{iPy}, F_{iPz}$ e τ_{i1}), totalizando então doze incógnitas. Como as incógnitas presentes na equação dinâmica da plataforma já aparecem nas equações das pernas, continua-se a ter ao todo doze incógnitas no problema. As pernas e a plataforma do mecanismo fornecem três equações cada, totalizando doze equações. Dessa forma, feitas as

multiplicações matriciais em (4.2.5) e (4.2.6) , chega-se a um sistema linear de ordem 12, mostrado abaixo:

$$Ax = B \quad (4.2.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} -J_{1(1,1)}^T & -J_{1(1,2)}^T & -J_{1(1,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -J_{1(2,1)}^T & -J_{1(2,2)}^T & -J_{1(2,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{1(3,1)}^T & -J_{1(3,2)}^T & -J_{1(3,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{2(1,1)}^T & -J_{2(1,2)}^T & -J_{2(1,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{2(2,1)}^T & -J_{2(2,2)}^T & -J_{2(2,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{2(3,1)}^T & -J_{2(3,2)}^T & -J_{2(3,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{3(1,1)}^T & -J_{3(1,2)}^T & -J_{3(1,3)}^T & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{3(2,1)}^T & -J_{3(2,2)}^T & -J_{3(2,3)}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{3(3,1)}^T & -J_{3(3,2)}^T & -J_{3(3,3)}^T & 0 & 0 & 0 \\ J_{P(1,1)}^T & J_{P(1,2)}^T & J_{P(1,3)}^T & J_{P(1,1)}^T & J_{P(1,2)}^T & J_{P(1,3)}^T & J_{P(1,1)}^T & J_{P(1,2)}^T & J_{P(1,3)}^T & 0 & 0 & 0 \\ J_{P(2,1)}^T & J_{P(2,2)}^T & J_{P(2,3)}^T & J_{P(2,1)}^T & J_{P(2,2)}^T & J_{P(2,3)}^T & J_{P(2,1)}^T & J_{P(2,2)}^T & J_{P(2,3)}^T & 0 & 0 & 0 \\ J_{P(3,1)}^T & J_{P(3,2)}^T & J_{P(3,3)}^T & J_{P(3,1)}^T & J_{P(3,2)}^T & J_{P(3,3)}^T & J_{P(3,1)}^T & J_{P(3,2)}^T & J_{P(3,3)}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

$$x = [F_{1Px} \quad F_{1Py} \quad F_{1Pz} \quad F_{2Px} \quad F_{2Py} \quad F_{2Pz} \quad F_{3Px} \quad F_{3Py} \quad F_{3Pz} \quad \tau_{11} \quad \tau_{21} \quad \tau_{31}]^T \quad (4.2.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} M_{1(1,1)}\ddot{\theta}_{11} + M_{1(1,2)}\ddot{\theta}_{12} + M_{1(1,3)}\ddot{\theta}_{13} + C_{1(1,1)} + G_{1(1,1)} \\ M_{1(2,1)}\ddot{\theta}_{11} + M_{1(2,2)}\ddot{\theta}_{12} + M_{1(2,3)}\ddot{\theta}_{13} + C_{1(2,1)} + G_{1(2,1)} \\ M_{1(3,1)}\ddot{\theta}_{11} + M_{1(3,2)}\ddot{\theta}_{12} + M_{1(3,3)}\ddot{\theta}_{13} + C_{1(3,1)} + G_{1(3,1)} \\ M_{2(1,1)}\ddot{\theta}_{21} + M_{2(1,2)}\ddot{\theta}_{22} + M_{2(1,3)}\ddot{\theta}_{23} + C_{2(1,1)} + G_{2(1,1)} \\ M_{2(2,1)}\ddot{\theta}_{21} + M_{2(2,2)}\ddot{\theta}_{22} + M_{2(2,3)}\ddot{\theta}_{23} + C_{2(2,1)} + G_{2(2,1)} \\ M_{2(3,1)}\ddot{\theta}_{21} + M_{2(3,2)}\ddot{\theta}_{22} + M_{2(3,3)}\ddot{\theta}_{23} + C_{2(3,1)} + G_{2(3,1)} \\ M_{3(1,1)}\ddot{\theta}_{31} + M_{3(1,2)}\ddot{\theta}_{32} + M_{3(1,3)}\ddot{\theta}_{33} + C_{3(1,1)} + G_{3(1,1)} \\ M_{3(2,1)}\ddot{\theta}_{31} + M_{3(2,2)}\ddot{\theta}_{32} + M_{3(2,3)}\ddot{\theta}_{33} + C_{3(2,1)} + G_{3(2,1)} \\ M_{3(3,1)}\ddot{\theta}_{31} + M_{3(3,2)}\ddot{\theta}_{32} + M_{3(3,3)}\ddot{\theta}_{33} + C_{3(3,1)} + G_{3(3,1)} \\ M_{P(1,1)}\ddot{X} + M_{P(1,2)}\ddot{Y} + M_{P(1,3)}\ddot{Z} + C_{P(1,1)} + G_{P(1,1)} - F_x^{ext} \\ M_{P(2,1)}\ddot{X} + M_{P(2,2)}\ddot{Y} + M_{P(2,3)}\ddot{Z} + C_{P(2,1)} + G_{P(2,1)} - F_y^{ext} \\ M_{P(3,1)}\ddot{X} + M_{P(3,2)}\ddot{Y} + M_{P(3,3)}\ddot{Z} + C_{P(3,1)} + G_{P(3,1)} - F_z^{ext} \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

O desenvolvimento da dinâmica inversa está completo, uma vez que os torques τ_{11} , τ_{21} e τ_{31} estão entre as variáveis obtidas com a solução do sistema linear acima.

Particularmente nesse caso, pode-se reduzir a ordem do sistema de 12 para 9. Isso é feito utilizando-se as equações provenientes das duas últimas linhas das matrizes que formam o sistema de equações de cada uma das pernas. Juntamente com as três equações da plataforma, tem-se ao todo nove equações e nove incógnitas. Nesse novo sistema estão ausentes os torques τ_{11} , τ_{21} e τ_{31} . Abaixo está apresentado o sistema de ordem 9.

$$Ax = B \quad (4.2.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} -J_{1(2,1)}^T & -J_{1(2,2)}^T & -J_{1(2,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{1(3,1)}^T & -J_{1(3,2)}^T & -J_{1(3,3)}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{2(2,1)}^T & -J_{2(1,2)}^T & -J_{2(1,3)}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{2(3,1)}^T & -J_{2(3,2)}^T & -J_{2(3,3)}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{3(2,1)}^T & -J_{3(2,2)}^T & -J_{3(2,3)}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{3(3,1)}^T & -J_{3(3,2)}^T & -J_{3(3,3)}^T \\ J_{P(1,1)}^T & J_{P(1,2)}^T & J_{P(1,3)}^T & J_{P(1,1)}^T & J_{P(1,2)}^T & J_{P(1,3)}^T & J_{P(1,1)}^T & J_{P(1,2)}^T & J_{P(1,3)}^T \\ J_{P(2,1)}^T & J_{P(2,2)}^T & J_{P(2,3)}^T & J_{P(2,1)}^T & J_{P(2,2)}^T & J_{P(2,3)}^T & J_{P(2,1)}^T & J_{P(2,2)}^T & J_{P(2,3)}^T \\ J_{P(3,1)}^T & J_{P(3,2)}^T & J_{P(3,3)}^T & J_{P(3,1)}^T & J_{P(3,2)}^T & J_{P(3,3)}^T & J_{P(3,1)}^T & J_{P(3,2)}^T & J_{P(3,3)}^T \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

$$x = [F_{1Px} \quad F_{1Py} \quad F_{1Pz} \quad F_{2Px} \quad F_{2Py} \quad F_{2Pz} \quad F_{3Px} \quad F_{3Py} \quad F_{3Pz}]^T \quad (4.2.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} M_{1(2,1)}\ddot{\theta}_{11} + M_{1(2,2)}\ddot{\theta}_{12} + M_{1(2,3)}\ddot{\theta}_{13} + C_{1(2,1)} + G_{1(2,1)} \\ M_{1(3,1)}\ddot{\theta}_{11} + M_{1(3,2)}\ddot{\theta}_{12} + M_{1(3,3)}\ddot{\theta}_{13} + C_{1(3,1)} + G_{1(3,1)} \\ M_{2(2,1)}\ddot{\theta}_{21} + M_{2(2,2)}\ddot{\theta}_{22} + M_{2(2,3)}\ddot{\theta}_{23} + C_{2(2,1)} + G_{2(2,1)} \\ M_{2(3,1)}\ddot{\theta}_{21} + M_{2(3,2)}\ddot{\theta}_{22} + M_{2(3,3)}\ddot{\theta}_{23} + C_{2(3,1)} + G_{2(3,1)} \\ M_{3(2,1)}\ddot{\theta}_{31} + M_{3(2,2)}\ddot{\theta}_{32} + M_{3(2,3)}\ddot{\theta}_{33} + C_{3(2,1)} + G_{3(2,1)} \\ M_{3(3,1)}\ddot{\theta}_{31} + M_{3(3,2)}\ddot{\theta}_{32} + M_{3(3,3)}\ddot{\theta}_{33} + C_{3(3,1)} + G_{3(3,1)} \\ M_{P(1,1)}\ddot{X} + M_{P(1,2)}\ddot{Y} + M_{P(1,3)}\ddot{Z} + C_{P(1,1)} + G_{P(1,1)} - F_x^{ext} \\ M_{P(2,1)}\ddot{X} + M_{P(2,2)}\ddot{Y} + M_{P(2,3)}\ddot{Z} + C_{P(2,1)} + G_{P(2,1)} - F_y^{ext} \\ M_{P(3,1)}\ddot{X} + M_{P(3,2)}\ddot{Y} + M_{P(3,3)}\ddot{Z} + C_{P(3,1)} + G_{P(3,1)} - F_z^{ext} \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

A solução do sistema acima fornece as componentes das forças de interação entre pernas e plataforma. Os torques τ_{11} , τ_{21} e τ_{31} devem ser calculados posteriormente utilizando-se as equações provenientes da primeira linha das matrizes da equações de movimento das pernas, conforme mostrado a seguir:

$$\tau_{11} = J_{1(1,1)}^T F_{1Px} + J_{1(1,2)}^T F_{1Py} + J_{1(1,3)}^T F_{1Pz} + M_{1(1,1)} \ddot{\theta}_{11} + M_{1(1,2)} \ddot{\theta}_{12} + M_{1(1,3)} \ddot{\theta}_{13} + C_{1(1,1)} + G_{1(1,1)}$$

(4.2.15)

$$\tau_{21} = J_{2(1,1)}^T F_{2Px} + J_{2(1,2)}^T F_{2Py} + J_{2(1,3)}^T F_{2Pz} + M_{2(1,1)} \ddot{\theta}_{21} + M_{2(1,2)} \ddot{\theta}_{22} + M_{2(1,3)} \ddot{\theta}_{23} + C_{2(1,1)} + G_{2(1,1)}$$

(4.2.16)

$$\tau_{31} = J_{3(1,1)}^T F_{3Px} + J_{3(1,2)}^T F_{3Py} + J_{3(1,3)}^T F_{3Pz} + M_{3(1,1)} \ddot{\theta}_{31} + M_{3(1,2)} \ddot{\theta}_{32} + M_{3(1,3)} \ddot{\theta}_{33} + C_{3(1,1)} + G_{3(1,1)}$$

(4.2.17)

No Apêndice C encontra-se a rotina para MatLab[®] que executa a dinâmica inversa.

4.3. Dinâmica Direta através da Dinâmica Inversa

Será apresentada agora uma maneira de se obter a dinâmica direta por meio da dinâmica inversa. Essa abordagem possibilita construir uma matriz de massa de dimensões 3×3 , bem como matrizes de esforços giroscópicos e gravitacionais de dimensões 3×1 para o mecanismo Delta. Para um determinado instante de tempo e uma dada configuração do mecanismo, pode-se encontrar um conjunto de equações conforme a expressão:

$$M \cdot \ddot{q} + C + G = \Gamma + J^T \tau_p \quad (4.3.1)$$

M é uma matriz de massa de dimensões 3×3 do mecanismo como um todo; C é o vetor de esforços giroscópicos e G é o vetor de esforços gravitacionais, ambos de dimensões 3×1 .

$q = [\theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \theta_{31}]^T$ é a matriz de coordenadas generalizadas do mecanismo;

$\Gamma = [\tau_{11} \quad \tau_{21} \quad \tau_{31}]^T$ é a matriz de forças generalizadas do mecanismo delta (torques aplicados pelos atuadores).

As expressões de J e τ_p são as mesmas encontradas em (3.6.8) e (4.1.14).

Começando pela determinação da matriz M , executa-se a dinâmica inversa nas condições abaixo:

$$\ddot{\theta}_{11} = 1, \quad \ddot{\theta}_{21} = 0, \quad \ddot{\theta}_{31} = 0;$$

$$\dot{\theta}_{11} = 0, \dot{\theta}_{21} = 0, \dot{\theta}_{31} = 0$$

$$g = 0 \quad \tau_p = 0$$

Nessas condições, anulando-se as velocidades e a aceleração da gravidade, as matrizes C e G se anulam. Como $\ddot{\theta}_{11} = 1$, e as outras acelerações são nulas, a multiplicação da matriz de massa pela matriz de acelerações das coordenadas generalizadas resultará na primeira coluna da matriz de massa. Conclui-se que os torques obtidos na dinâmica inversa correspondem a primeira coluna da matriz M . Para a determinação das outras colunas o trabalho é análogo. Generalizando, para se obter a coluna n da matriz M , faz-se a dinâmica inversa com forças aplicadas a plataforma, velocidades e gravidade todas nulas e com todas as acelerações nulas, exceto a aceleração da coordenada generalizada n , que deve ser igual à unidade.

Para a determinação da matriz C , a idéia é a mesma. Faz-se a dinâmica inversa nas condições $\tau_p = 0, \ddot{\theta}_{11} = 0, \ddot{\theta}_{21} = 0, \ddot{\theta}_{31} = 0$ e $g = 0$. Como velocidades $\dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{21}$ e $\dot{\theta}_{31}$ usam-se os valores com os quais efetivamente se quer calcular a dinâmica direta. Os torques resultantes correspondem a matriz C .

Por último, calcula-se a matriz G . A dinâmica inversa é calculada nas condições $\tau_p = 0, \ddot{\theta}_{11} = 0, \dot{\theta}_{11} = 0, \ddot{\theta}_{21} = 0, \dot{\theta}_{21} = 0, \ddot{\theta}_{31} = 0, \dot{\theta}_{31} = 0$ e $g = -9.8$. O vetor de torques obtidos corresponde a matriz G .

Uma vez obtidas as matrizes M, C e G , a dinâmica direta pode ser completada pela expressão abaixo:

$$\ddot{q} = M^{-1}(-C - G + \Gamma + J^T \tau_p) \quad (4.3.2)$$

No Apêndice C encontra-se a rotina para MatLab[®] que executa a dinâmica direta pelo método exposto nesse item.

Para uma comparação e validação desses métodos, no apêndice B estão, para algumas situações, os resultados da dinâmica direta através da dinâmica inversa (dinâmica inversa calculada conforme o item 4.2) e os resultados da dinâmica direta conforme calculada no item 4.1.

5. Estratégias de Controle

Em um computador, a maioria dos dispositivos e periféricos que fazem a interface com o usuário estabelecem um canal unidirecional de informação. Por exemplo, um homem através do mouse e teclado é apenas capaz de enviar informações ao computador, enquanto pelo monitor consegue apenas receber informações do computador. Já em um manipulador de realimentação de forças existe um fluxo de informação em duas vias. O usuário interage com o manipulador e esse envia as informações dessa interação ao computador. Esse último, por sua vez, envia de volta ao manipulador as informações necessárias para que a realimentação de forças seja feita de maneira conveniente. Essa análise serve para distinguir e entender como interagem os três elementos principais de um sistema de realimentação de forças que, como se pode ver, são: usuário, manipulador e ambiente virtual (este último, “contido” no computador). O objetivo principal é fazer com que o usuário uma vez em contato com o manipulador tenha as sensações de estar em contato com um ambiente real, e não com o manipulador em si.

Existem duas estratégias básicas de se implementar o manipulador para que o objetivo apresentado seja atendido. A primeira é fazer com que o manipulador meça uma posição, velocidade ou aceleração que caracterize a interação entre o usuário e o manipulador e em contra-partida forneça ao usuário uma determinada força. Na segunda possibilidade de implementação acontece o inverso, o manipulador deve medir uma força resultante de interação entre o usuário e manipulador e impor ao usuário uma determinada posição, velocidade ou aceleração. É comum nesse tipo de estudo se fazer uma analogia com a teoria de circuitos elétricos, onde uma velocidade é representada por uma corrente, como medida de fluxo, e força por tensão elétrica, como medida de esforço. Dessa maneira, a primeira estratégia apresentada é comumente chamada de implementação de impedância (a entrada é a variável de fluxo e a saída é a variável de esforço), enquanto a segunda é chamada de implementação de admitância (a entrada é variável de esforço e a saída é a variável de fluxo). Um exemplo de implementação onde o manipulador age como uma admitância é o WYSIWYF desenvolvido na Universidade Carnegie Mellon [23]. Já o Phantom, desenvolvido pelo MIT [24], é um

exemplo de implementação onde o manipulador age como uma impedância. Sampaio [25] mostra um manipulador que é testado segundo esses dois tipos de implementação.

Os próximos itens visam explorar melhor cada umas dessas implementações.

5.1. Impedância

A figura abaixo mostra o esquema de um manipulador de um grau de liberdade.

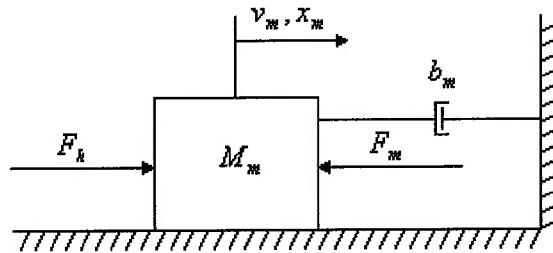


Figura 33-Manipulador de um grau de liberdade.

Onde,

M_m : massa do manipulador.

b_m : amortecimento.

x_m : posição do manipulador.

v_m : velocidade.

F_m : força desenvolvida pelo atuador do manipulador.

F_h : força que usuário aplica ao manipulador.

Quando o usuário aplica uma força F_h no manipulador ele deve ter a sensação de estar interagindo com um ambiente virtual que é constituído de um sistema massa-mola-amortecedor representado na figura 34.

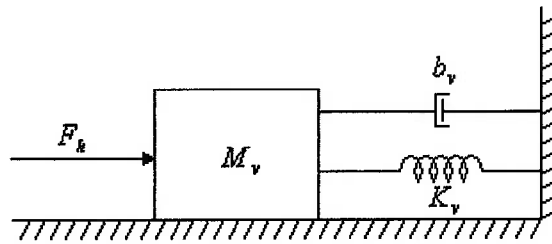


Figura 34-Ambiente virtual.

M_v : massa do ambiente virtual.

K_v : rigidez do ambiente virtual.

b_v : amortecimento do ambiente virtual.

A equação de movimento do manipulador é:

$$M_m \ddot{x}_m + b_m \dot{x}_m = F_h + F_m \quad (5.1.1)$$

No caso de o manipulador ser implementado como sendo uma impedância, a variável x_m é medida e necessita-se estabelecer uma força F_m para que o manipulador se comporte como o ambiente virtual. Uma maneira de se fazer isso é impondo a seguinte lei de realimentação:

$$F_m = (M_m - M_v) \ddot{x}_m + (b_m - b_v) \dot{x}_m - K_v x_m \quad (5.1.2)$$

Assim, aplicando-se essa realimentação ao manipulador, chegamos a seguinte equação diferencial:

$$M_v \ddot{x}_m + b_v \dot{x}_m + K_v x_m = F_h \quad (5.1.3)$$

Vê-se então pela equação acima que o usuário ao interagir com o manipulador por meio da força F_h estará na verdade sendo submetido a um sistema com características iguais ao ambiente virtual que se deseja simular.

De maneira bastante similar, essa estratégia é amplamente utilizada em projetos que já se encontram desenvolvidos. É necessário apenas medir posições, o que pode ser facilmente feito de maneira barata e robusta através, por exemplo, de um encoder digital. É, então, importante ressaltar que tal implementação é mais conveniente em ambientes virtuais em que predominam as forças proporcionais ao deslocamento (por exemplo, uma rigidez de uma mola ou de uma parede virtual no momento em que essa é pressionada). Isso se deve justamente ao fato de se estar medindo apenas posições. Se quisermos reproduzir uma força de inércia, o sinal de posição deve ser derivado duas vezes em relação ao tempo para que o termo referente a essa força seja introduzido. O fato é que na prática essa dupla derivação pode trazer problemas por amplificar ruídos de alta frequência (uma única derivação já costuma ser problemática, uma segunda poderia eventualmente inutilizar o sinal). Além disso, o uso de encoders digitais (o que geralmente ocorre) traz a necessidade da derivação numérica do sinal de posição e tal procedimento produz resultados não satisfatórios. Frente a esse problema o procedimento geralmente adotado é a eliminação do termo que contém a segunda derivada da posição ($(M_m - M_v)\ddot{x}_m$) da lei de realimentação. Assim, devido à impossibilidade de se reproduzir forças proporcionais à aceleração, os manipuladores de impedância geralmente tem uma estrutura com pouca inércia de modo a interferir ao mínimo em uma movimentação livre do usuário. Um ambiente em que o usuário interaja com um objeto livre dotado de massa muito grande fica praticamente vedado a essa implementação (uma vez que nesse caso as forças de inércia são dominantes). Apenas a título de exemplo, o funcionamento do manipulador Phantom [24] expõe de maneira clara o fato apresentado acima. Este é um manipulador de três graus de liberdade (os três de translação) em um esquema de impedância. O usuário interage com o manipulador por meio do dedo indicador cuja ponta fica encaixado em uma junta esférica (para que não haja transmissões de torques). No momento em que este encosta o seu dedo em uma restrição rígida do ambiente virtual a realimentação é ativada e tal rigidez será sentida de maneira bastante fiel ao desejado. Ao movimentar o dedo livremente pelo espaço sem obstáculos virtuais e devido à ausência de realimentação, o usuário acabará sentido as forças provenientes da inércia do manipulador. No entanto, devido à baixa inércia com que tal manipulador é construído, essas forças na maioria das vezes não chegam a prejudicar a simulação.

O caso apresentado até esse momento é aplicável a um sistema linear e unidimensional. No entanto, através da Teoria de Robótica é possível expandir, dentro de certas hipóteses, o controle de impedância para o caso de um manipulador qualquer de vários graus de liberdades em que, de modo geral, observa-se uma dinâmica não linear.

As equações dinâmicas de um manipulador são dadas pela seguinte forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma \quad (5.1.4)$$

Onde,

q -vetor de coordenadas generalizadas ($n \times 1$).

M - matriz de massa ($n \times n$).

C - matriz giroscópica.

G - Matriz de esforços gravitacionais.

Γ - Vetor de forças generalizadas ($n \times 1$).

Define-se x como sendo a posição do efetuador no sistema de coordenadas das tarefas (o sistema de coordenadas das tarefas pode estar, por exemplo, solidário a algum objeto de interesse do ambiente virtual). Queremos que, dado um certo deslocamento a partir de uma posição x_d surja uma força F (também descrita no sistema de coordenadas de tarefas) proporcional a esse deslocamento. Cria-se então um matriz de rigidez K_p que corresponde a rigidez que se deseja que o usuário sinta ao entrar em contato com o efetuador nas diversas direções do sistema de coordenadas do espaço de tarefas. De modo geral, K_p é uma matriz diagonal. Visto isso, tem-se a seguinte relação:

$$F = -K_p(x - x_d) \quad (5.1.5)$$

Essa força devida a rigidez pode ser obtida por meio de torques na juntas do manipulador da seguinte maneira:

$$\Gamma = J^T K_p (x - x_d) \quad (5.1.6)$$

Onde Γ é o torque aplicado às juntas do manipulador e J é a matriz Jacobiana do manipulador, também expressa no sistema de coordenadas das tarefas. Pode-se também introduzir termos relativos às forças viscosas, assim o torque aplicado às juntas deve ser dado por:

$$\Gamma = -J^T [K_p (x - x_d) + K_d (\dot{x})] \quad (5.1.7)$$

K_d pode ser interpretado como o amortecimento que se deseja que o ambiente virtual tenha. Em suma, temos que a força $-[K_p (x - x_d) + K_d (\dot{x})]$ no espaço de tarefas é transformada em torques na juntas após a multiplicação pela matriz Jacobiana transposta.

Esse desenvolvimento pode ser encontrado no trabalho de Asada e Slotine [26], que ainda mostram que essa abordagem é bastante robusta, mas está limitada a situações em que o manipulador está submetido a situações de baixas velocidades e acelerações (situações em que as forças de inércia e giroscópicas não são relevantes), isto é, uma situação quase que estática. Além disso, existe ainda a questão das forças gravitacionais que atuam nos ligamentos do manipulador. Quando o usuário interage com o efetuador, a expressão de torque acima não garante que o usuário não sentirá a carga proveniente do peso dos ligamentos. Uma maneira de contornar esse problema é a adição de um torque que compense a atuação da gravidade, então tem-se finalmente a seguinte expressão:

$$\Gamma = G(q) - J^T [K_p (x - x_d) + K_d (\dot{x})] \quad (5.1.8)$$

Pode-se dizer que essa extensão para um manipulador qualquer da implementação de impedância ignora a dinâmica do manipulador. Além disso, como se pode ver, não existe realmente um controle efetivo das forças de interação entre usuário e manipulador. O que se fez até o momento foi tentar alterar a relação existente entre posição (ou outra variável cinemática) e força.

Analisa-se agora uma implementação em que existe efetivamente um controle de forças. As figuras a seguir servirão de base para o desenvolvimento no caso unidimensional dessa implementação em que existe uma malha de realimentação dedicada ao controle de forças.

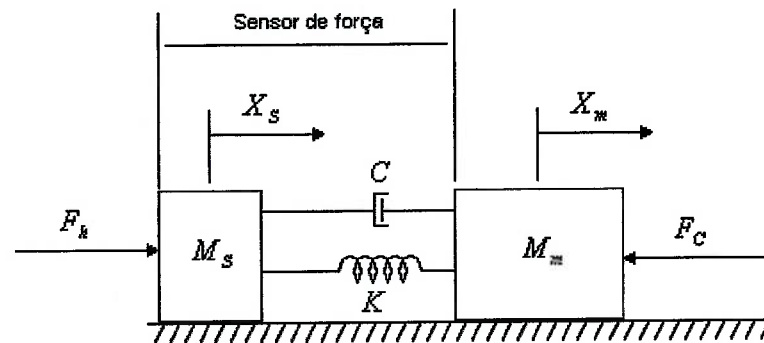


Figura 35-Esquema do manipulador.

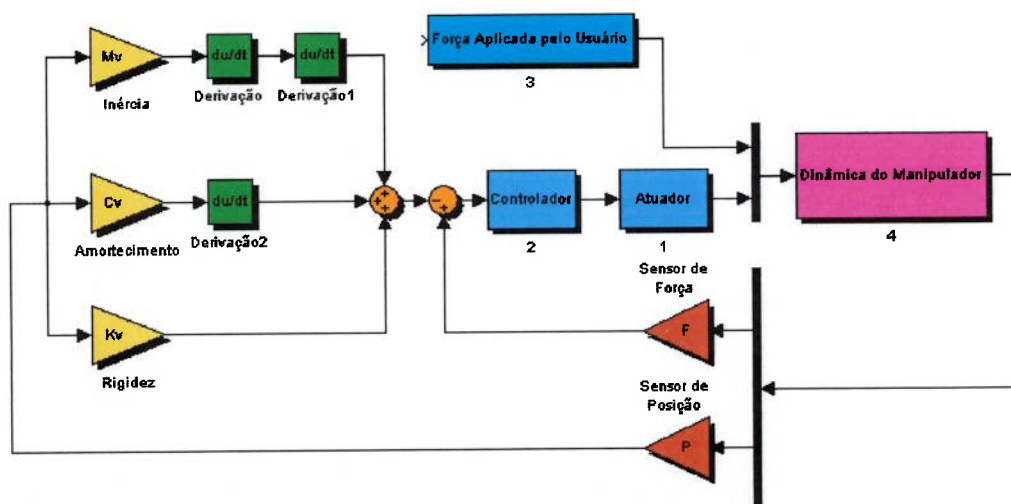


Figura 36-Diagrama de blocos do sistema (impedância).

M_s - massa do sensor de força.

C - amortecimento do sensor de força.

K - rigidez do sensor de forças.

M_m -massa do manipulador.

F_C -força de controle.

F_h -força aplicada pelo usuário.

O sistema é basicamente o mesmo utilizado para desenvolvimento do caso unidimensional da abordagem anterior; a principal diferença está na presença de um sensor de força que admite-se ser capaz de medir a força de interação entre o usuário e o manipulador e cuja dinâmica é caracterizada pela rigidez K e pelo amortecimento C .

Com base na figura 35 do manipulador e no diagrama de blocos da figura 36, serão agora desenvolvidas as equações diferenciais e funções de transferência para uma análise mais apurada dessa técnica.

Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro às massas M_m e M_s , chega-se a:

$$\ddot{x}_s M_s + C(\dot{x}_s - \dot{x}_m) + K(x_s - x_m) = F_h \quad (5.1.9)$$

$$\ddot{x}_m M_m + C(\dot{x}_m - \dot{x}_s) + K(x_m - x_s) = F_C \quad (5.1.10)$$

A idéia é então criar uma lei de controle por realimentação capaz de manter essa força de interação em um valor de referência F_{ref} . Uma vez que a força de interação medida seja $F_m = K(x_s - x_m)$, uma possibilidade para essa lei de controle pode ser:

$$F_C = K_p(F_m - F_{ref}) + sK_d(F_m - F_{ref}) + \frac{1}{s}K_i(F_m - F_{ref}) \quad (5.1.11)$$

O valor de F_{ref} dependerá do ambiente virtual cujas características se deseja reproduzir pelo manipulador. Conforme mostra o diagrama de blocos do sistema da figura 36, a dinâmica de ambiente virtual é caracterizado pela inércia M_v , amortecimento C_v e pela rigidez K_v . Dessa maneira, tem-se:

$$F_{ref} = M_v \ddot{x}_m + C_v \dot{x}_m + K_v x_m \quad (5.1.12)$$

Tendo-se as equações (5.1.9), (5.1.10) e (5.1.12), e a equação de controle (5.1.11), e admitindo-se condições iniciais nulas, as funções de transferências de interesse são:

$$H_1 = \frac{X_s(s)}{F_h(s)} = \frac{n_{14}s^4 + n_{13}s^3 + n_{12}s^2 + n_{11}s + n_{10}}{d_{16}s^6 + d_{15}s^5 + d_{14}s^4 + d_{13}s^3 + d_{12}s^2 + d_{11}s + d_{10}} \quad (5.1.13)$$

$$n_{14} = K_d \quad n_{13} = K_d C_v + M_m + K_p M_v$$

$$n_{12} = C + K_p C_v + K_i M_v + K_d K_v + K_d K \quad n_{11} = K_i C_v + K + K_p K_v + K_p K$$

$$n_{10} = K_i K_v + K_i K$$

$$d_{16} = M_s K_d M_v \quad d_{15} = M_s K_p M_v + K_d M_v C + M_s K_d C_v + M_s M_m$$

$$d_{14} = M_s K_p C_v + K_d C_v C + M_s K_d K + M_m C + K_d M_v K + K_p M_v C + M_s K_d K_v + M_s K_i M_v + M_s C$$

$$d_{13} = K_d K_v C + M_s K_p K_v + K_d C_v K + K_i M_v C + M_s K_i C_v + K M_m + M_s K_p K + M_s K + C K_p C_v + K K_p M_v$$

$$d_{12} = K_p K_v C + K_d K_v K + K_p C_v K + M_s K_i K_v + M_s K_i K + K_i C_v C + K_i M_v K$$

$$d_{11} = K_i C_v K + K_i K_v C + K_p K_v K \quad d_{10} = K_i K_v K$$

$$H_2 = \frac{X_m(s)}{F_h(s)} = \frac{n_{22}s^2 + n_{21}s + n_{20}}{d_{26}s^6 + d_{25}s^5 + d_{24}s^4 + d_{23}s^3 + d_{22}s^2 + d_{21}s + d_{20}} \quad (5.1.14)$$

$$n_{22} = C + K_d K$$

$$n_{21} = K_p K + K$$

$$n_{20} = K_i K$$

$$d_{26} = d_{16}$$

$$d_{25} = d_{15}$$

$$d_{24} = d_{14}$$

$$d_{23} = d_{13}$$

$$d_{22} = d_{12}$$

$$d_{21} = d_{11}$$

$$d_{20} = d_{10}$$

Com as funções de transferência H_1 e H_2 , e admitindo-se a hipótese de pólos estáveis, isto é, os pólos possuem parte real negativa, pode-se através do Teorema do

Valor Final calcular o valor de regime de x_m e x_s . Quando o usuário aplica uma entrada de degrau unitário no sistema, tem-se:

$$F_h(s) = \frac{1}{s} \quad (5.1.15)$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_s(s) \quad (5.1.16)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX_s(s) = \frac{1}{K} + \frac{1}{K_v} \quad (5.1.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_m(s) \quad (5.1.18)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX_m(s) = \frac{1}{K_v} \quad (5.1.19)$$

É possível também calcular o valor da força em regime pelo limite abaixo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sK(X_s - X_m) \quad (5.1.20)$$

Efetuada o limite da expressão acima, verifica-se que este equivale à unidade, o que é esperado, uma vez que o usuário dá uma entrada unitária de força no sistema.

Quando o ambiente virtual corresponde a uma movimentação livre de uma massa, K_v e C_v são nulos. Nesse caso, não existe sentido em caracterizar a posição de regime para uma entrada de força do usuário. O que interessa analisar é a aceleração em regime. Assim faz-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_s(s) \quad (5.1.21)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_s(s) = \frac{1}{M_v + M_s} \quad (5.1.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_m(s) \quad (5.1.23)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_m(s) = \frac{1}{M_v + M_s} \quad (5.1.24)$$

O valor da força medida em regime nesse caso de movimentação livre é:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sK(X_s - X_m) = \frac{M_v}{M_v + M_s} \quad (5.1.25)$$

Como conclusão geral desses resultados, pode-se dizer que para essa técnica seja efetiva, a massa do sensor M_s deve ser bem menor que a massa do ambiente virtual M_v , e que a rigidez do sensor K deve ser bem elevada (consideravelmente maior que a rigidez do ambiente virtual).

5.2. Admitância

A próxima figura apresenta um diagrama de blocos da implementação de um controle de realimentação de forças no esquema de admitância.

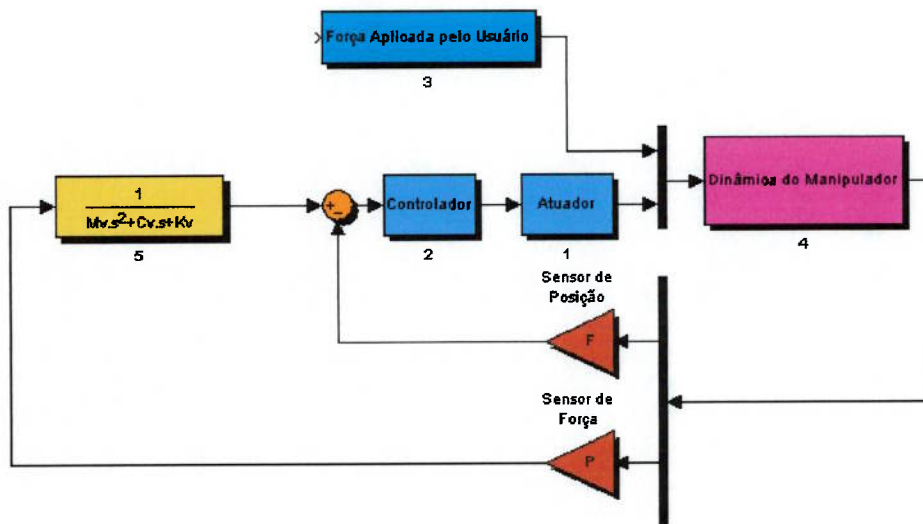


Figura 37-Diagrama de blocos (admitância).

Nesse diagrama vê-se a existência de uma malha interna de controle de posição. A referência de posição é dada pela saída do bloco 5. Esse bloco consiste na integração de um sistema com as mesmas características do ambiente virtual que o manipulador deve representar. A entrada do bloco 5 é a força medida pelo sensor de forças instalado no manipulador.

Serão desenvolvidas as funções de transferência dessa implementação usando-se o mesmo manipulador utilizado no item anterior para o controle de forças. As equações dinâmicas do manipulador são as mesmas ((5.1.9) e (5.1.10)). No entanto, utiliza-se um controlador proporcional-integral-derivativo (PID) para a controle de posição na malha interna:

$$F_C = K_p (X_{ref} - X_m) + sK_d (X_{ref} - X_m) + \frac{1}{s} K_i (X_{ref} - X_m) \quad (5.2.1)$$

Pelo diagrama de blocos vê-se que:

$$\frac{X_{ref}}{F_m} = \frac{1}{M_v s^2 + C_v s + K_v} \quad (5.2.2)$$

Com as equações no domínio de s e com a devida manipulação algébrica, chega-se às funções de transferências de interesse.

$$H_1 = \frac{X_s(s)}{F_h(s)} = \frac{n_{15}s^5 + n_{14}s^4 + n_{13}s^3 + n_{12}s^2 + n_{11}s + n_{10}}{d_{17}s^7 + d_{16}s^6 + d_{15}s^5 + d_{14}s^4 + d_{13}s^3 + d_{12}s^2 + d_{11}s + d_{10}} \quad (5.2.3)$$

$$n_{15} = M_m M_v$$

$$n_{14} = M_m C_v + K_d M_v + M_v C$$

$$n_{13} = K M_v + C_v C + K_p M_v + M_m K_v + K_d C_v$$

$$n_{12} = K_p C_v + K_v C + K C_v + K_d K_v + K_d K + K_i M_v$$

$$n_{11} = K_p K_v + K_v K + K_p K + K_i C_v$$

$$n_{10} = K_i K + K_i K_v$$

$$d_{17} = M_s M_m M_v$$

$$d_{16} = M_s M_v C + M_s K_d M_v + M_s M_m C_v + M_m M_v C$$

$$d_{15} = M_s C C_v + M_s K M_v + M_s K_d C_v + K_d M_v C + M_m M_v K + M_s M_m K_v + M_m C_v C + M_s K_p M_v$$

$$d_{14} = M_s K_p C_v + M_s C_v K + M_m C_v K + M_s K_v C + M_s K_d K + C K_p M_v +$$

$$+ M_s K_d K_v + M_s K_i M_v + K_d C_v C + K K_d M_v + M_m K_v C$$

$$d_{13} = K M_m K_v + K K_p M_v + M_s K K_v + K K_d C_v + M_s K_p K + M_s K_p K_v +$$

$$+ M_s K_i C_v + K_i M_v C + K_p C_v C + C K_d K_v$$

$$d_{12} = K_d K_v K + K_p K_v C + K_i C_v C + K_i M_v K + M_s K_i K_v + M_s K_i K + K_p C_v K$$

$$d_{11} = K_p K_v K + K_i K_v C + K_i C_v K$$

$$d_{10} = K_i K_v K$$

$$H_2 = \frac{X_m(s)}{F_h(s)} = \frac{n_{24}s^4 + n_{23}s^3 + n_{22}s^2 + n_{21}s + n_{20}}{d_{27}s^7 + d_{26}s^6 + d_{25}s^5 + d_{24}s^4 + d_{23}s^3 + d_{22}s^2 + d_{21}s + d_{20}} \quad (5.2.4)$$

$$n_{24} = M_v C$$

$$n_{13} = M_v K + C_v C$$

$$n_{12} = C_v K + K_d K + K_v C$$

$$n_{11} = K_v K + K_p K$$

$$n_{10} = K_i K$$

$$d_{27} = d_{17}$$

$$d_{26} = d_{16}$$

$$d_{25} = d_{15}$$

$$d_{24} = d_{14}$$

$$d_{23} = d_{13}$$

$$d_{22} = d_{12}$$

$$d_{21} = d_{11}$$

$$d_{20} = d_{10}$$

Com as funções de transferência H_1 e H_2 , e admitindo a hipótese que os pólos dessas possuem parte real negativa, e utilizando o Teorema do Valor Final, calcula-se o valor em regime de x_m e x_s . Da mesma maneira que no item anterior, usuário produz uma entrada tipo degrau unitário no sistema.

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_s(s) \quad (5.2.5)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX_s(s) = \frac{1}{K} + \frac{1}{K_V} \quad (5.2.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_m(s) \quad (5.2.7)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX_m(s) = \frac{1}{K_V} \quad (5.2.8)$$

O valor da força medida em regime vem do cálculo do seguinte limite.

$$\lim_{s \rightarrow 0} sK(X_s - X_m) = 1 \quad (5.2.9)$$

Para o caso particular de movimentação livre no Ambiente Virtual, a acelerações em regime são obtidas por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_s(s) \quad (5.2.10)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_s(s) = \frac{1}{M_V + M_S} \quad (5.2.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_m(s) \quad (5.2.12)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot s^2 X_m(s) = \frac{1}{M_V + M_S} \quad (5.2.13)$$

A força medida em regime nesse caso de movimentação livre é:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sK(X_s - X_m) = \frac{M_V}{M_V + M_S} \quad (5.2.14)$$

Os resultados obtidos no controle de posição são os mesmos obtidos no controle de força quando o sistema entra em regime e, portanto, podemos tirar as mesmas conclusões: a massa do sensor M_s deve ser bem menor que a massa do ambiente virtual M_v , e que a rigidez do sensor K deve ser bem elevada.

6. Modelo Dinâmico do Manipulador

Além do mecanismo Delta, o manipulador de realimentação de forças que é alvo deste estudo também é composto por três atuadores e um sensor de forças em três direções. Este último se localiza na plataforma do mecanismo medindo as forças aplicadas pelo usuário ao manipulador. O modelo dinâmico do mecanismo já foi desenvolvido nos item 4. Assim, ainda falta desenvolver o modelo dos atuadores e do sensor de forças, e estabelecer como esses elementos se relacionam com o mecanismo.

Uma vez completo o modelo matemático, o desempenho do manipulador frente às estratégias de controle apresentadas no item 10 poderá ser avaliado por meio de simulações numéricas.

6.1. Atuadores

Motores de corrente contínua (motor cc) são os atuadores escolhidos para esse projeto. A próxima figura mostra o esquema que serve para a montagem do modelo dinâmico desse tipo de atuador. Este desenvolvimento, baseado no realizado por Spong [27], será feito para o motor da primeira perna, no entanto, a modelagem é idêntica para as outras pernas mudando apenas a nomenclatura.

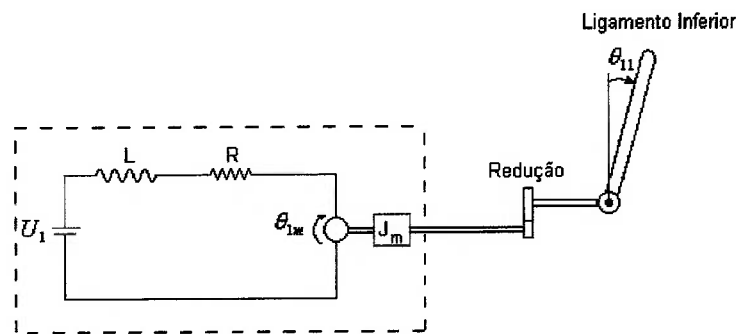


Figura 38-Motor elétrico cc.

L: Indutância da armadura do motor cc.

R: Resistência elétrica do motor cc.

J_m : Momento de inércia do rotor do motor.

n: Fator de redução

U_1 : Tensão elétrica aplicada ao motor da primeira perna.

θ_{1m} : Ângulo de giro do motor da primeira perna.

θ_{11} : Posição angular do ligamento inferior da primeira perna.

Como os três motores utilizados são idênticos, esse ângulo poderia ser

θ_{21} ou θ_{31}

Começando pelo circuito elétrico, aplicando-se a Lei de Kirchhoff para tensão pode-se extrair:

$$\frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} + i_1 + \frac{K_v}{R} \dot{\theta}_{1m} = \frac{U_1}{R} \quad (6.1.1)$$

i_1 : corrente elétrica no motor da primeira perna.

K_v : constante de velocidade do motor.

Para um motor cc, a seguinte relação é válida:

$$\tau_{1r} = K_T i_1 \quad (6.1.2)$$

K_T : constante de torque do motor.

τ_{1r} : torque desenvolvido pelo motor que é aplicado a redução

O fato é que na maioria dos casos o fator L/R (constante elétrica de tempo do motor) é tão pequeno que pode ser considerada como sendo nulo para o equacionamento do problema. Dessa maneira, pode-se reescrever a equação (6.1.1) da seguinte maneira:

$$i_1 = \frac{U_1}{R} - \frac{K_v}{R} \dot{\theta}_{1m} \quad (6.1.3)$$

Assim, usando a equação (6.1.2) e (6.1.3), chega-se a:

$$\tau_{1r} = \frac{K_T U_1}{R} - \frac{K_T K_v}{R} \dot{\theta}_{1m} \quad (6.1.4)$$

Já que devido a redução $\dot{\theta}_{1m} = n\dot{\theta}_{11}$, pode-se escrever :

$$\tau_{1r} = \frac{K_T U_1}{R} - \frac{K_T K_v}{R} \dot{\theta}_{11} n \quad (6.1.5)$$

A expressão acima representa o torque desenvolvido pelo motor da primeira perna em função da tensão nele aplicada.

Deve-se também adicionar a influência da inércia do rotor do motor. Além disso, existem atrito viscoso e atrito seco que também devem ser levados em conta.

Para que o modelo dinâmico possa contemplar a inércia do rotor, analisa-se agora a equação proveniente da aplicação do Teorema do Momento Angular ao motor cc.

$$J_m \ddot{\theta}_{1m} = \tau_{1_atrito} + \tau_{1r} - \frac{\tau_1}{n} \quad (6.1.6)$$

O termo $\frac{\tau_1}{n}$ representa o torque que o mecanismo aplica ao motor. A divisão por n se deve a redução.

Como $\ddot{\theta}_{1m} = n\ddot{\theta}_{11}$, a equação acima pode ser escrita da forma:

$$J_m n^2 \ddot{\theta}_{11} = n\tau_{1_atrito} + n\tau_{1r} - \tau_1 \quad (6.1.7)$$

Uma vez substituída a expressão de τ_{1r} obtida, chega-se a:

$$J_m n^2 \ddot{\theta}_{11} = n\tau_{1_atrito} + n \left(\frac{K_T U_1}{R} - \frac{K_T K_v}{R} \dot{\theta}_{11} n \right) - \tau_1 \quad (6.1.8)$$

Essa equação acima pode ser somada à equação da dinâmica do mecanismo onde existe o termo τ_1 . Dessa maneira, a inserção do atuador está completa para a primeira perna.

Generalizando a expressão (6.1.8) para a perna i do mecanismo, tem-se:

$$J_m n^2 \ddot{\theta}_{i1} = n \tau_{i_atrito} + n \left(\frac{K_T U_i}{R} - \frac{K_T K_v}{R} \dot{\theta}_{i1} n \right) - \tau_i \quad (6.1.9)$$

Agora o termo τ_{i_atrito} correspondente ao efeito do atrito seco e do atrito viscoso será analisado. Primeiramente:

$$\tau_{at} = \text{sign}(\dot{\theta}_{im}) c \quad (6.1.10)$$

$$\tau_{visc} = b \dot{\theta}_{im} \quad (6.1.11)$$

Onde,

τ_{at} : torque de atrito seco.

c : constante de atrito seco.

τ_{visc} : atrito viscoso.

b : constante de atrito viscoso.

A função $\text{sign}(x)$ é dada por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (6.1.12)$$

Assim a expressão de τ_{i_atrito} é:

$$\tau_{i_atrito} = \text{sign}(\dot{\theta}_{i1}) c + b n \dot{\theta}_{i1} \quad (6.1.13)$$

A expressão acima já emprega as velocidades do ligamento inferior ao invés da velocidade angular do rotor.

Colocando o equacionamento obtido (expressões (6.1.9) e (6.1.13)) na forma de matrizes, tem-se:

$$M_m \ddot{q} = \Gamma_{atrito} + \alpha U - \beta \dot{q} - \Gamma \quad (6.1.14)$$

Onde M_m , α e β são matrizes diagonais cujos elementos das respectivas diagonais são iguais a $J_m n^2$, nK_T/R e $bn + n^2 K_T K_v / R$. A matriz $U = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T$ corresponde a tensão aplicada aos motores. Lembra-se aqui que $\Gamma = [\tau_{11} \ \tau_{21} \ \tau_{31}]^T$. A expressão da matriz Γ_{atrito} é:

$$\Gamma_{atrito} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\dot{\theta}_{11}) c \\ \text{sign}(\dot{\theta}_{21}) c \\ \text{sign}(\dot{\theta}_{31}) c \end{bmatrix} \quad (6.1.15)$$

6.2. Sensor de Forças

O sensor de forças será modelado hipoteticamente como uma massa pontual sujeita a forças elásticas e viscosas em direções perpendiculares. Também se considera que os deslocamentos são suficientemente pequenos de maneira que o deslocamento em uma direção não afete a medição de força em uma direção perpendicular. A figura a seguir mostra a massa m_s do sensor sujeita as forças elásticas e viscosas e também a força \vec{F}^{ext} aplicada pelo usuário.

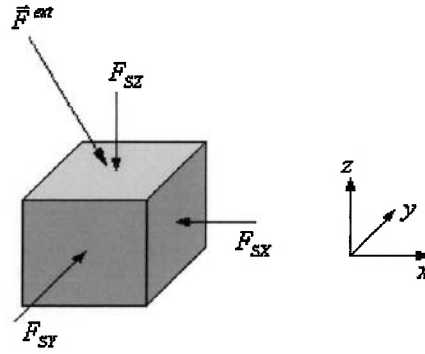


Figura 39-Sensor de forças.

A posição da massa m_s é definida pelas coordenadas X_s, Y_s e Z_s em relação ao sistema de coordenadas da base. Define-se também a matriz F_s corresponde as elásticas aplicadas a massa m_s :

$$F_s = \begin{bmatrix} F_{sX} \\ F_{sY} \\ F_{sZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_s(X_s - X) - c_s(\dot{X}_s - \dot{X}) \\ -k_s(Y_s - Y) - c_s(\dot{Y}_s - \dot{Y}) \\ -k_s(Z_s - Z) - c_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}) \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

As equações dinâmicas do sensor resultantes da aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro a massa m_s são as seguintes:

$$m_s \ddot{X}_s = -k_s(X_s - X) - c_s(\dot{X}_s - \dot{X}) + F_x^{ext} \quad (6.2.2)$$

$$m_s \ddot{Y}_s = -k_s(Y_s - Y) - c_s(\dot{Y}_s - \dot{Y}) + F_y^{ext} \quad (6.2.3)$$

$$m_s \ddot{Z}_s = -k_s(Z_s - Z) - c_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}) + F_z^{ext} \quad (6.2.4)$$

Vê-se que a dinâmica do sensor é caracterizada pela rigidez k_s e pela viscosidade c_s . As equações acima colocadas de uma forma matricial ficam da seguinte maneira:

$$M_s \ddot{q}_s = -K_s(q_s - q_P) - C_s(\dot{q}_s - \dot{q}_P) + F^{ext} \quad (6.2.5)$$

Ou de modo mais simples:

$$M_s \ddot{q}_s = F_s + F^{ext} \quad (6.2.6)$$

Onde M_s , K_s e C_s são matrizes diagonais em que os elementos não nulos são iguais respectivamente a m_s , k_s e c_s . O vetor de coordenadas do sensor está representado por q_s , assim $q_s = [X_s \ Y_s \ Z_s]^T$. $F^{ext} = [F_x^{ext} \ F_y^{ext} \ F_z^{ext}]^T$ corresponde a força aplicada ao sensor pelo usuário do manipulador.

A saída do sensor, isto é, as forças medidas nas direções x , y e z são respectivamente:

$$F_{xm}^{ext} = -K_s(X_s - X) \quad (6.2.7)$$

$$F_{ym}^{ext} = -K_s(Y_s - Y) \quad (6.2.8)$$

$$F_{zm}^{ext} = -K_s(Z_s - Z) \quad (6.2.9)$$

6.3. Modelo Final do Manipulador

Para a formulação do modelo matemático do manipulador com atuadores e o sensor de forças, primeiramente recapitula-se a equação (4.3.1), proveniente da dinâmica do mecanismo Delta:

$$M \cdot \ddot{q} + C + G = \Gamma + J^T \tau_p \quad (6.3.1)$$

Na expressão acima, as forças aplicadas à plataforma τ_p equivalem à reação das forças elásticas e viscosas aplicadas a massa m_s do sensor de forças. Assim, tem-se:

$$M \cdot \ddot{q} + C + G = \Gamma + J^T F_s \quad (6.3.2)$$

A expressão anterior, somada a expressão (6.1.14) desenvolvida na modelagem dos atuadores fica:

$$(M + M_m) \cdot \ddot{q} + C + G = \Gamma_{arrivo} + \alpha U - \beta \dot{q} + J^T F_s \quad (6.3.3)$$

A expressão acima, juntamente com a expressão (6.2.6) da modelagem dos sensores, formam o conjunto de equações necessárias para a simulação do manipulador. Assim, o sistema completo é:

$$(M + M_m) \cdot \ddot{q} + C + G = \Gamma_{arrivo} + \alpha U - \beta \dot{q} + J^T F_s \quad (6.3.4)$$

$$M_s \ddot{q}_s = F_s + F^{ext} \quad (6.3.5)$$

A criação de uma versão linear do sistema acima em função das variáveis que definem a posição da plataforma é bastante conveniente para esse trabalho. No entanto, para que a construção desse sistema linear seja possível, algumas hipóteses devem ser admitidas. São essas:

1. O manipulador funciona em baixas velocidades.
2. A plataforma do manipulador se movimenta próxima a um ponto definido.
3. Existe um torque aplicado ao manipulador que compensa os efeitos da força peso.

O sistema acima em função das coordenadas da plataforma, q_p , fica da seguinte forma:

$$(M + M_m) J^{-1} \ddot{q}_p - \dot{M} J \ddot{q}_p + C + G = \Gamma_{arrivo} + \alpha U - \beta J^{-1} \dot{q}_p + J^T F_s \quad (6.3.6)$$

$$M_s \ddot{q}_s = F_s + F^{ext} \quad (6.3.7)$$

Da primeira hipótese, pode-se considerar que as matrizes C , \dot{M} e J são nulas. Através da hipótese 2, pode-se considerar que a matriz M e J são constantes e portanto não variam em função da posição do mecanismo. Fazendo-se a terceira hipótese, a matriz G é eliminada. Além disso, deve-se levar em conta que esse sistema terá um controle no espaço das coordenadas da plataforma. Assim qualquer entrada de tensão U no manipulador corresponde a uma saída $E = [E_x \ E_y \ E_z]^T$ proveniente do controlador

multiplicada pela matriz Jacobiana transposta. Dessa maneira, os sinais de controle terão a dimensão de torque nos atuadores.

Fazendo-se ainda a consideração adicional que as forças de atrito são nulas, o sistema na sua versão linear fica:

$$(M^* + M_m)J^{*-1}\ddot{q}_p = \alpha J^T E - \beta J^{-1}\dot{q}_p + J^{*T} F_s \quad (6.3.8)$$

$$M_s \ddot{q}_s = F_s + F^{ext} \quad (6.3.9)$$

Onde M^* e J^* são respectivamente a matrizes de massa M e a matriz Jacobiana J calculadas no ponto ao redor do qual se faz a linearização.

O sistema linear obtido pode não ser apropriado para a simulação do manipulador. No entanto, fornece um bom instrumento para a elaboração e análise dos controladores que serão desenvolvidos mais a frente nesse trabalho.

6.4. Parâmetros do Modelo

A tabela abaixo mostra os valores numéricos adotados para os parâmetros do sistema para que as simulações possam ser executadas.

Parâmetro	Comentário	Valor
L_B	-	0.12m
L_P	-	0.07m
a_1	-	0.063m
a_2	-	0.087m
C_{11}	Parâmetro que define o centro de massa dos ligamentos inferiores	0.0315m

C_{12}	Parâmetro que define o centro de massa das hastes	$0.0435m$
m_1	Massa dos ligamentos inferiores (peça de alumínio de dimensões 3x40x87mm)	$0.0204kg$
m_2	Massa das hastes (tubo delgado de aço com 4 mm de diâmetro e massas concentradas de 18g nas extremidades)	$0.0389kg$
I_{1x}	Momento de inércia ao redor do eixo x dos ligamentos inferiores(eixos passam pelo centro de massa e a orientação é a mesma dos eixos do sistema de coordenadas de movimentação solidária a essa peça)	$6.7666 \cdot 10^{-6} kgm^2$
I_{1y}	Momento de inércia ao redor do eixo y dos ligamentos inferiores(eixos passam pelo centro de massa e a orientação é a mesma dos eixos do sistema de coordenadas de movimentação solidária a essa peça)	$9.4729 \cdot 10^{-6} kgm^2$
I_{1z}	Momento de inércia ao redor do eixo z dos ligamentos inferiores(eixos passam pelo centro de massa e a orientação é a mesma dos eixos do sistema de coordenadas de movimentação solidária a essa peça)	$2.7369 \cdot 10^{-6} kgm^2$
I_{2x}	Momento de inércia ao redor do eixo x das hastes (eixos passam pelo centro de massa e a orientação é a mesma dos eixos do sistema de coordenadas de movimentação solidária a essa peça)	$3.1317 \cdot 10^{-4} kgm^2$
I_{2y}	Momento de inércia ao redor do eixo y das hastes (eixos passam pelo centro de massa e a orientação é a mesma dos eixos do sistema de coordenadas de movimentação solidária a essa peça)	$3.1317 \cdot 10^{-4} kgm^2$
I_{2z}	Momento de inércia ao redor do eixo z das hastes (eixos passam pelo centro de massa e a orientação é a mesma dos eixos do sistema de coordenadas de movimentação solidária a essa peça)	$5.8811 \cdot 10^{-9} kgm^2$

n	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	6.3
R	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	4.33 Ω
K_V	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	0.0218Vs/rad
K_T	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	0.0218N/A
b	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	1.4 · 10 ⁻⁶ Nms/rad
J_m	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	1.6000 · 10 ⁻⁶ kgm ²
c	Dado referente ao motor cc modelo GM8724S008 (marca Pittman)	0.0025Nm

Tabela 3 – Valores dos parâmetros do manipulador.

7. Simulação do Manipulador

Serão apresentados os resultados obtidos para a simulação do manipulador segundo as estratégias de controle apresentadas no item 5.

O ambiente virtual utilizado nas simulações do manipulador consiste de duas paredes dotadas de uma certa rigidez e viscosidade e formam um angulo reto na intersecção dos seus planos. A parede vertical se encontra no plano $y = 0.01m$ e a parede vertical se encontra no plano $z = 0.086m$ (em relação ao sistema de coordenadas da base). A próxima figura mostra o ambiente.

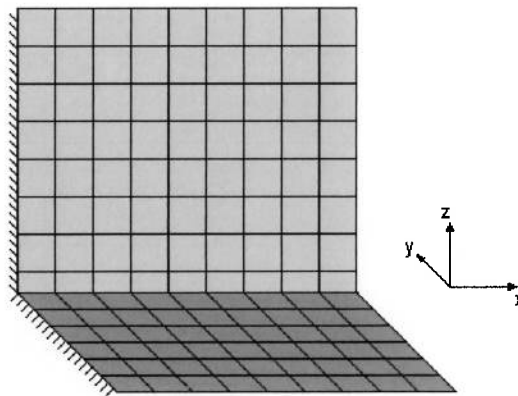


Figura 40-Ambiente Virtual.

Apesar de o ambiente virtual ser o mesmo para todas as simulações realizadas, a sua implementação não é a mesma. Cada diferente implementação será apresentada no tópico referente à estratégia de controle onde é utilizada.

7.1. Simulação do Manipulador para a Primeira Estratégia de Controle

A estratégia de controle a ser utilizada é aquela em que existe uma alteração da impedância do mecanismo por meio de uma lei de realimentação. Para o manipulador em questão, a realimentação é a seguinte:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = -J^T (K_p \tilde{x} + K_D \dot{\tilde{x}}) \quad (7.1.1)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} X - x_d \\ Y - y_d \\ Z - z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y - 0.01 \\ Z - 0.086 \end{bmatrix} \quad (7.1.2) \quad \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (7.1.3)$$

A lei de realimentação acima constitui a própria implementação do ambiente virtual e, como se pode ver, já leva em conta a posição das paredes do ambiente virtual proposto. As matrizes K_p e K_D determinam a rigidez e a viscosidade. Estas assumem os seguinte valores conforme as coordenadas X , Y e Z da plataforma:

1. $Z > 0.86$ e $Y < 0.01$ - Movimentação livre.

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $Z \leq 0.86$ e $Y < 0.01$ - Contato com a parede horizontal.

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{parede} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{parede} \end{bmatrix}$$

3. $Z > 0.86$ e $Y \geq 0.01$ - Contato com a parede vertical.

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{parede} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{parede} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $Z \leq 0.86$ e $Y \geq 0.01$ - Contato com as paredes vertical e horizontal.

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{parede} & 0 \\ 0 & 0 & K_{parede} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{parede} & 0 \\ 0 & 0 & C_{parede} \end{bmatrix}$$

Quando o centro da plataforma atinge uma das paredes ($Y > 0.01$ ou $Z < 0.086$), o usuário passa a sentir uma rigidez e uma viscosidade. Quando ocorre uma situação de movimentação livre no ambiente virtual, o usuário sentirá a dinâmica do mecanismo passivo.

Para a realização das simulações numéricas, os valores escolhidos respectivamente para K_{parede} e C_{parede} foram $8 \cdot 10^4 V/m$ e $4000 Vs/m$. É importante notar que esses valores não correspondem efetivamente a rigidez e ao amortecimento das paredes virtuais, uma vez que o controle não aplica diretamente torques ao mecanismo. A rigidez e o amortecimento efetivos dependerão das características do motor cc.

Como condições iniciais, todas as velocidades são nulas e o centro da plataforma se encontra na posição $X = 0m$, $Y = 0m$, $Z = 0.091m$ em relação ao sistema de coordenadas da base.

Uma vez que na prática a implementação do ambiente virtual é feita com um microcomputador pessoal, as simulações são realizadas com uma realimentação digital com uma frequência de amostragem de 1KHz.

A próxima figura mostra o diagrama de blocos do sistema simulado (construído com a Simulink do MatLab, ferramenta com a qual se realizou essa e todas as outras simulações numéricas desse trabalho).

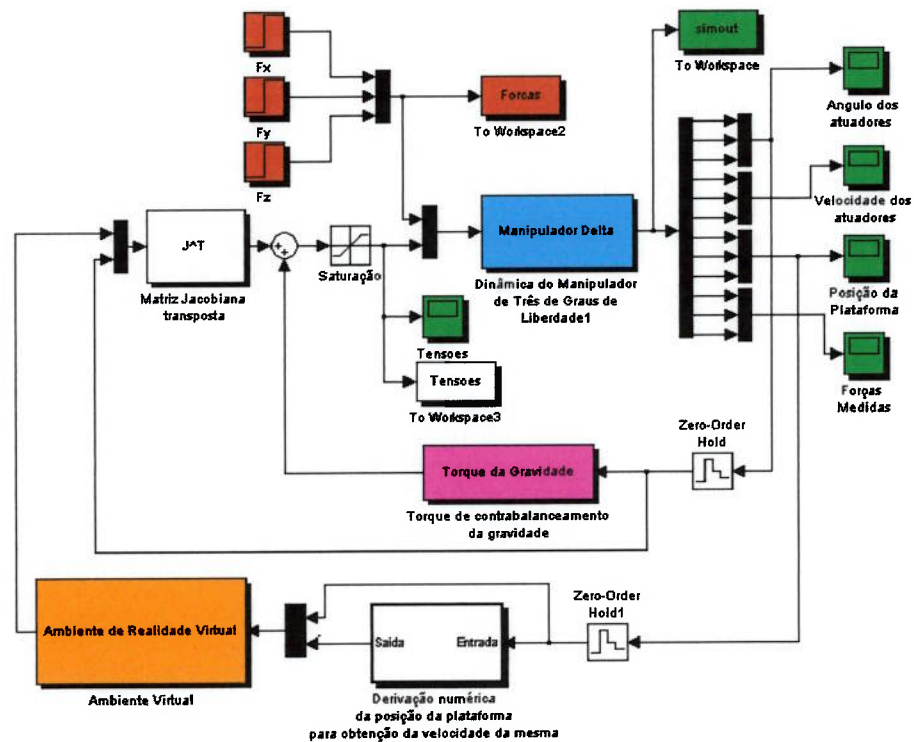


Figura 41- Diagrama de blocos do sistema simulado.

No diagrama de blocos da figura 41, pode-se ver que existe também aplicado ao manipulador um torque que tem por finalidade anular a força peso que atua no mecanismo. O bloco em laranja, que corresponde ao ambiente virtual, tem como entradas a posição e a velocidade da plataforma. Sua saída corresponde a matriz $-(K_P \tilde{x} + K_D \dot{\tilde{x}})$.

Os próximos gráficos mostram as componentes das forças aplicadas ao manipulador pelo usuário e os resultados obtidos nas simulações para essas entradas. Apesar dessa estratégia não requerer um sensor de forças, o modelo do manipulador que foi utilizado na simulação inclui esse sensor.

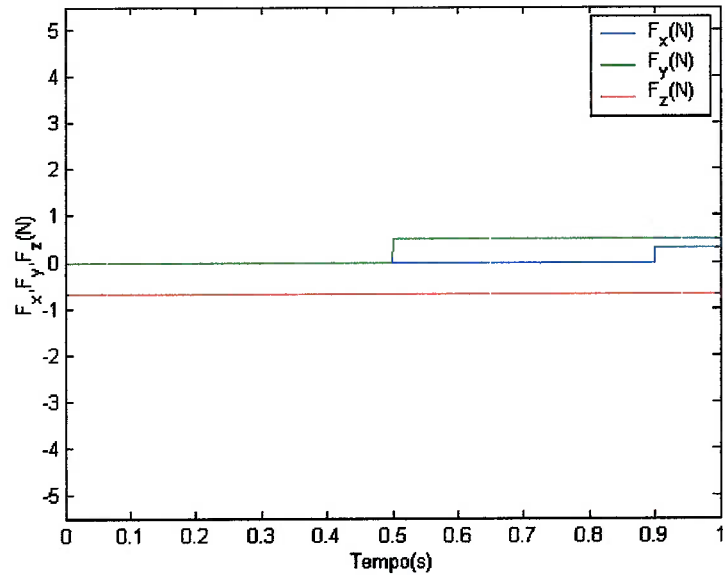


Gráfico 1-Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.

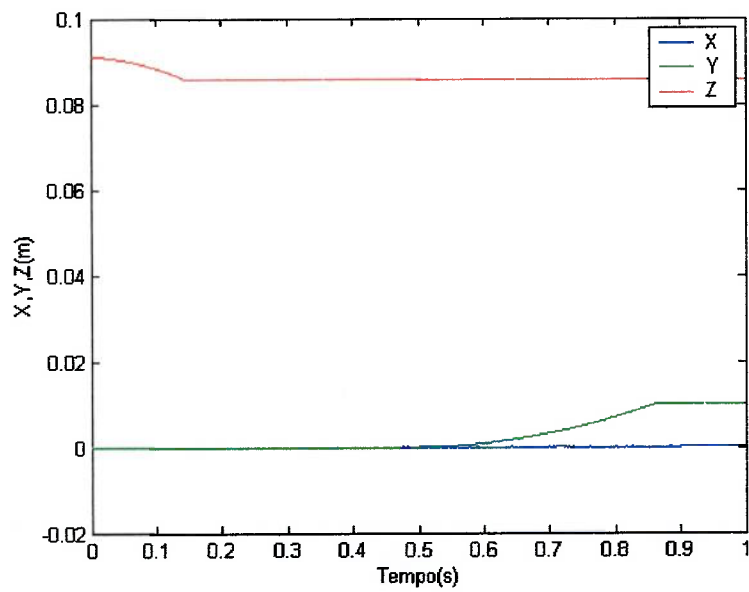


Gráfico 2-Posição da plataforma.

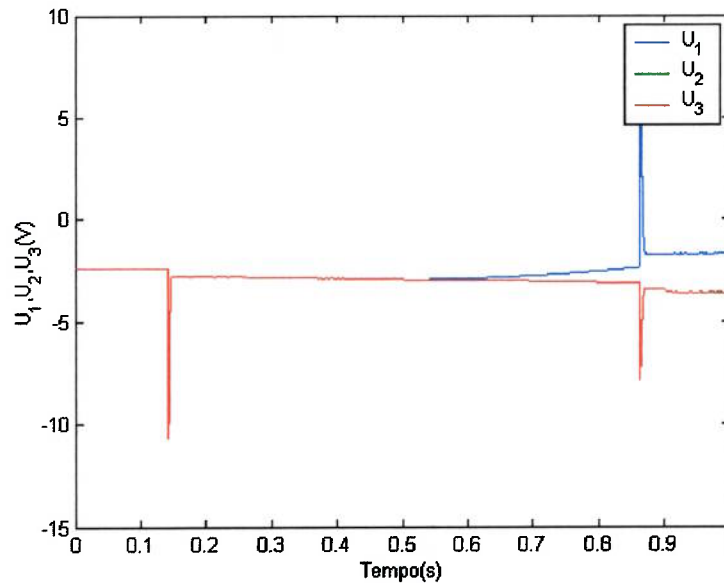


Gráfico 3-Tensões elétricas aplicadas aos atuadores.

No gráfico 1, observa-se que logo no primeiro instante existe uma força de $-0.7N$ na direção Z aplicada ao manipulador que faz com que a plataforma se movimente na direção da parede horizontal do ambiente virtual. No instante de $0.14s$ a plataforma colide com a parede horizontal. No instante de $0.5s$ uma força de $0.5N$ é aplicada na direção Y que faz com que a plataforma se movimente em direção a parede vertical. A colisão ocorre no instante de $0.86s$. Por último, uma força de $0.3N$ é aplicada na direção X . Devido a baixa intensidade dessa força, o manipulador pouco se movimenta na direção X .

O gráfico 3 mostra que em nenhum momento houve saturação dos atuadores (conforme as especificações do motor utilizado para a implementação do modelo do manipulador, a tensão aplicada a este não deve ultrapassar a $12V$), no entanto vê-se que ocorrem picos nas tensões aplicadas aos motores nos momentos em que ocorrem colisões com as paredes virtuais.

7.2.Simulação do Manipulador para a Segunda Estratégia de Controle

Nessa segunda alternativa de projeto do manipulador, será explorada a estratégia de controle em que se medem forças e se impõe posição. A forma do ambiente virtual é a mesma da possibilidade anterior, isto é, existe uma parede vertical e uma horizontal

nas mesmas localizações. No entanto, o modo como esse é implementado é diferente, fazendo-se necessária a adoção de algumas especificações. Essas, em função da posição do manipulador, são.

1. $Z > 0.86$ e $Y < 0.01$

É o caso da movimentação livre (diferente do que ocorre na estratégia apresentada no item 7.1, o manipulador se torna ativo nessa condição). O ambiente virtual experimentado pelo usuário deve corresponder a uma massa m_v de $0.050kg$ ao se movimentar em qualquer direção.

2. $Z \leq 0.86$ e $Y < 0.01$

O manipulador deve se comportar como um sistema tipo massa-mola-amortecedor (rigidez $K_v = 80000N/m$, viscosidade $b_v = 100Ns/m$ e massa $m_v = 0.050kg$) quando se movimenta perpendicular a parede horizontal, e como uma massa de $0.050kg$ quando se move paralelo a esta parede.

3. $Z > 0.86$ e $Y \geq 0.01$

O manipulador deve se comportar como um sistema tipo massa-mola-amortecedor (rigidez $K_v = 80000N/m$, viscosidade $b_v = 100Ns/m$ e massa $m_v = 0.050kg$) quando se movimenta perpendicular a parede vertical, e como uma de $0.050kg$ quando se move paralelo a esta parede.

4. $Z \leq 0.86$ e $Y \geq 0.01$

O manipulador deve se comportar como um sistema tipo massa-mola-amortecedor (rigidez $K_v = 80000N/m$, viscosidade $b_v = 100Ns/m$ e massa $m_v = 0.050kg$) quando se movimenta perpendicular a parede vertical e horizontal.

A força aplicada no manipulador pelo usuário é medida pelo sensor localizado na plataforma, sendo que o valor lido serve de entrada para o ambiente virtual. Este por sua vez, integra numericamente um sistema dinâmico que fica submetido a uma força igual a lida pelo sensor, e com as mesmas características que se deseja que o usuário experimente. Essa integração tem como saída uma referência de posição que será imposta ao manipulador através de um controlador em malha fechada.

Vista a maneira como o ambiente virtual é implementado e as suas especificações dadas acima, abaixo estão os sistemas que devem ser integrados por este nas quatro situações possíveis:

1. $Z > 0.86$ e $Y < 0.01$ - Movimentação livre.

Coordenada x

$$\dot{v}_x = Av_x + Bu_x$$

$$y_x = Cv_x + Du_x$$

$$v_x = \begin{bmatrix} X_{ref} \\ \dot{X}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_x = F_{xm}^{ext}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad B = [0]$$

Coordenada y

$$\dot{v}_y = Av_y + Bu_y$$

$$y_y = Cv_y + Du_y$$

$$v_y = \begin{bmatrix} Y_{ref} \\ \dot{Y}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_y = F_{ym}^{ext}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad B = [0]$$

Coordenada z

$$\dot{v}_z = Av_z + Bu_z$$

$$y_z = Cv_z + Du_z$$

$$v_z = \begin{bmatrix} Z_{ref} \\ \dot{Z}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_z = F_{zm}^{ext}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad B = [0]$$

2. $Z \leq 0.86$ e $Y < 0.01$ - Contato com a parede horizontal.

Coordenada x

$$\dot{v}_x = Av_x + Bu_x$$

$$y_x = Cv_x + Du_x$$

$$v_x = \begin{bmatrix} X_{ref} \\ \dot{X}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_x = F_{xm}^{ext}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad B = [0]$$

Coordenada y

$$\dot{v}_y = Av_y + Bu_y$$

$$y_y = Cv_y + Du_y$$

$$v_y = \begin{bmatrix} Y_{ref} \\ \dot{Y}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_y = F_{ym}^{ext}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad B = [0]$$

Coordenada z

$$\dot{v}_z = Av_z + Bu_z$$

$$y_z = Cv_z + Du_z + E_z$$

$$v_z = \begin{bmatrix} Z_{ref} \\ \dot{Z}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_v/m_v & -b_v/m_v \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_z = F_{zm}^{ext}$$

$$E_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.086 \cdot K_v/m_v \end{bmatrix}$$

3. $Z > 0.86$ e $Y \geq 0.01$ - Contato com a parede vertical.

Coordenada x

$$\dot{v}_x = Av_x + Bu_x$$

$$y_x = Cv_x + Du_x$$

$$v_x = \begin{bmatrix} X_{ref} \\ \dot{X}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_v^{-1} \end{bmatrix} \quad u_x = F_{xm}^{ext}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad B = [0]$$

Coordenada y

$$\dot{v}_y = Av_y + Bu_y$$

$$y_y = Cv_y + Du_y + E_y$$

$$v_y = \begin{bmatrix} Y_{ref} \\ \dot{Y}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_V/m_V & -b_V/m_V \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_V^{-1} \end{bmatrix} \quad u_y = F_{ym}^{ext}$$

$$E_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \cdot K_V/m_V \end{bmatrix}$$

Coordenada z

$$\dot{v}_z = Av_z + Bu_z$$

$$y_z = Cv_z + Du_z$$

$$v_z = \begin{bmatrix} Z_{ref} \\ \dot{Z}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_V^{-1} \end{bmatrix} \quad u_z = F_{zm}^{ext}$$

$$C = [1 \ 0] \quad B = [0]$$

4. $Z \leq 0.86$ e $Y \geq 0.01$ - Contato com as paredes vertical e horizontal.

Coordenada x

$$\dot{v}_x = Av_x + Bu_x$$

$$y_x = Cv_x + Du_x$$

$$v_x = \begin{bmatrix} X_{ref} \\ \dot{X}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_V^{-1} \end{bmatrix} \quad u_x = F_{xm}^{ext}$$

$$C = [1 \ 0] \quad B = [0]$$

Coordenada y

$$\dot{v}_y = Av_y + Bu_y$$

$$y_y = Cv_y + Du_y + E_y$$

$$v_y = \begin{bmatrix} Y_{ref} \\ \dot{Y}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_V/m_V & -b_V/m_V \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_V^{-1} \end{bmatrix} \quad u_y = F_{ym}^{ext}$$

$$E_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \cdot K_V/m_V \end{bmatrix}$$

Coordenada z

$$\dot{v}_z = Av_z + Bu_z$$

$$y_z = Cv_z + Du_z + E_z$$

$$v_z = \begin{bmatrix} Z_{ref} \\ \dot{Z}_{ref} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_V/m_V & -b_V/m_V \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_V^{-1} \end{bmatrix} \quad u_z = F_{zm}^{ext}$$

$$E_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.086 \cdot K_V/m_V \end{bmatrix}$$

Para qualquer possibilidade de posição do manipulador, o ambiente virtual fornece uma referência dada por X_{ref} , Y_{ref} e Z_{ref} . Uma primeira possibilidade de controle para a imposição dessa referência é o fechamento da malha de posição adotando-se apenas um ganho proporcional. Simulações numéricas mostraram que a adoção deste controle gera resultados ruins, principalmente no que se refere à resposta transitória. Surge então a idéia da utilização de um compensador em avanço.

Na verdade, como a posição é composta por três variáveis, elaborou-se um compensador para cada direção. A figura abaixo mostra o diagrama de blocos do manipulador com o controle de posição.

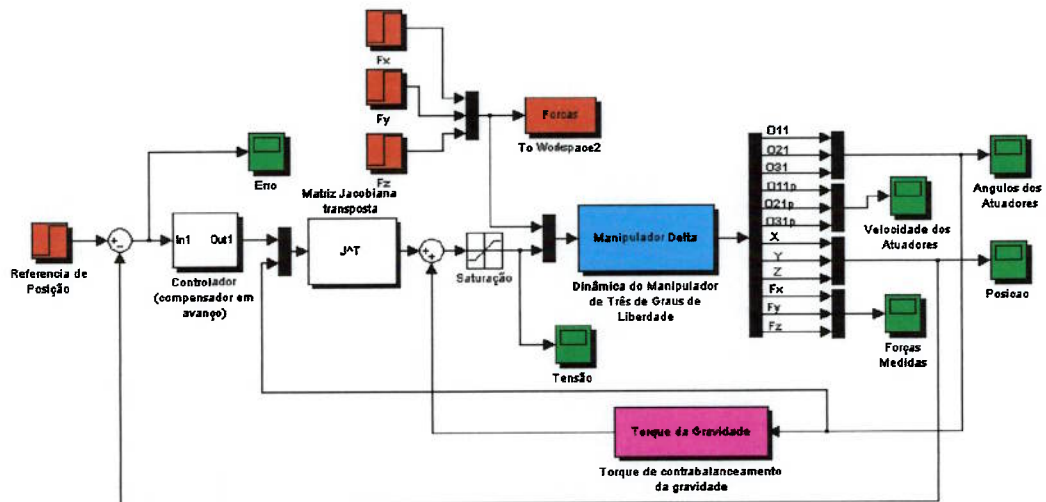


Figura 42-Diagrama de blocos do manipulador com o controle de posição.

Para o projeto desse compensador utilizou-se a versão linear do modelo matemático do manipulador (equações (6.3.8) e (6.3.9)). A partir desse modelo, fazendo-se a hipótese de que as forças aplicadas pelo usuário no manipulador são nulas, e após uma redução de ordem feita com a função “minreal” da Toolbox de controle do

MatLab[®], chegou-se a três sistemas SISO's dotados das seguintes funções de transferências:

$$\frac{X}{E_x} = \frac{0.07925s^2 + 224.1s + 3.17e005}{s^4 + 2901s^3 + 4.108e006s^2 + 1.073e007s} \quad (7.2.1)$$

$$\frac{Y}{E_y} = \frac{0.07925s^2 + 224.1s + 3.17e005}{s^4 + 2901s^3 + 4.108e006s^2 + 1.073e007s} \quad (7.2.2)$$

$$\frac{Z}{E_z} = \frac{0.09817s^2 + 277.6s + 3.927e005}{s^4 + 2920s^3 + 4.137e006s^2 + 1.814e007s} \quad (7.2.3)$$

As saídas das funções de transferências acima são cada uma das componentes da posição da plataforma. As entradas são os elementos da matriz E, cuja multiplicação pela matriz Jacobiana transposta, conforme visto na montagem do sistema linear no item 11.3, resulta na matriz contendo as tensões a serem aplicadas nos atuadores.

Após uma série de simulações e análises dos gráficos dos lugares das raízes, chegou-se as seguintes funções de transferências para os compensadores para as direções X, Y e Z:

$$C_x = \frac{0.021s+1}{0.003s+1} \quad (7.2.4) \quad C_y = \frac{0.021s+1}{0.003s+1} \quad (7.2.5) \quad C_z = \frac{0.017s+1}{0.003s+1} \quad (7.2.6)$$

A figura 43 mostra o gráfico do lugar das raízes da função de transferência (7.2.1) com o compensador (7.2.4). Os gráficos dos lugares das raízes relativos ao sistema em malha fechada na direção Y e Z não serão mostrados uma vez que são quase idênticos ao da direção X.

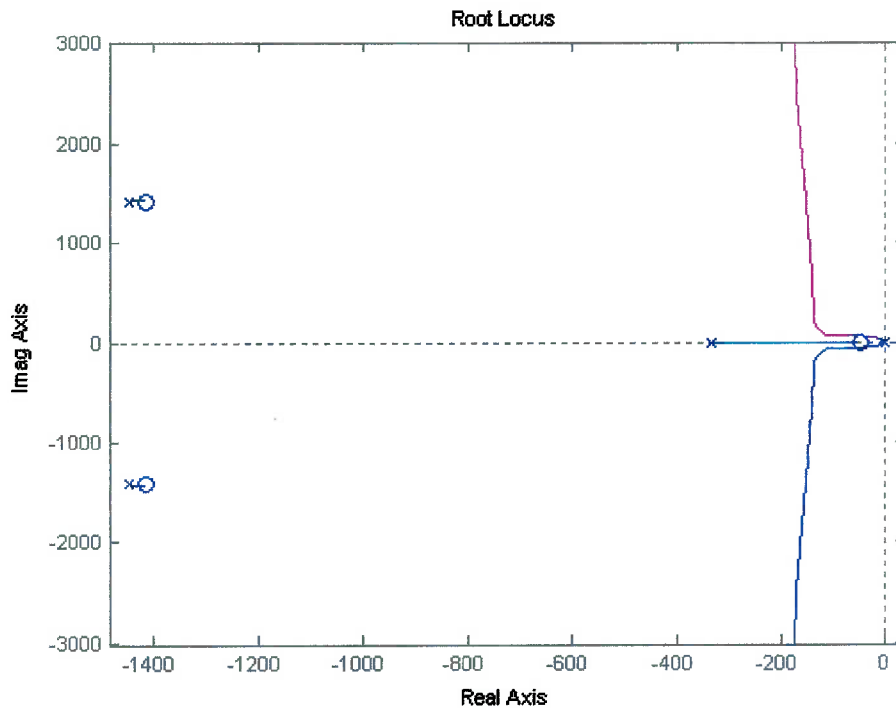


Figura 43-Gráfico do lugar das raízes para a função de transferência (7.2.1) com o seu respectivo controlador.

O ganho escolhido para os controladores na três direções é o mesmo:

$$G_x = G_y = G_z = 79100 \quad (7.2.7)$$

Os pólos em malha fechada para as funções de transferências (7.2.1), (7.2.2) e (7.2.3) com seus respectivos controladores e os ganhos acima são:

Direção X -127, -106+70i, -106-70i, -1310+568i, -1310-568i

Direção Y -115, -110+75i, -110-75i, -1450+1410i, -1450-1410i

Direção Z -146, -94.6+90.1i, -94.6-90.1i, -1460+1410i, -1460-1410i

Agora serão apresentados os resultados da simulação numérica do manipulador. Como condições iniciais, todas as velocidades são nulas e o centro da plataforma se encontra na posição $X = 0m$, $Y = 0m$, $Z = 0.091m$ (posição ao redor da qual também foi feita a linearização do sistema utilizado para o projeto dos compensadores). Como os compensadores serão implementados com a utilização de um computador pessoal, esses

foram discretizados com a aproximação bilinear de Tustin a uma taxa de amostragem de 1kHz. Para essa simulação, o modelo usado para o manipulador é o não linear (o modelo linear só foi usado para dar apoio ao projeto dos compensadores).

As próximas figuras mostram o sistema completo simulado (já contendo o ambiente virtual e os compensadores):

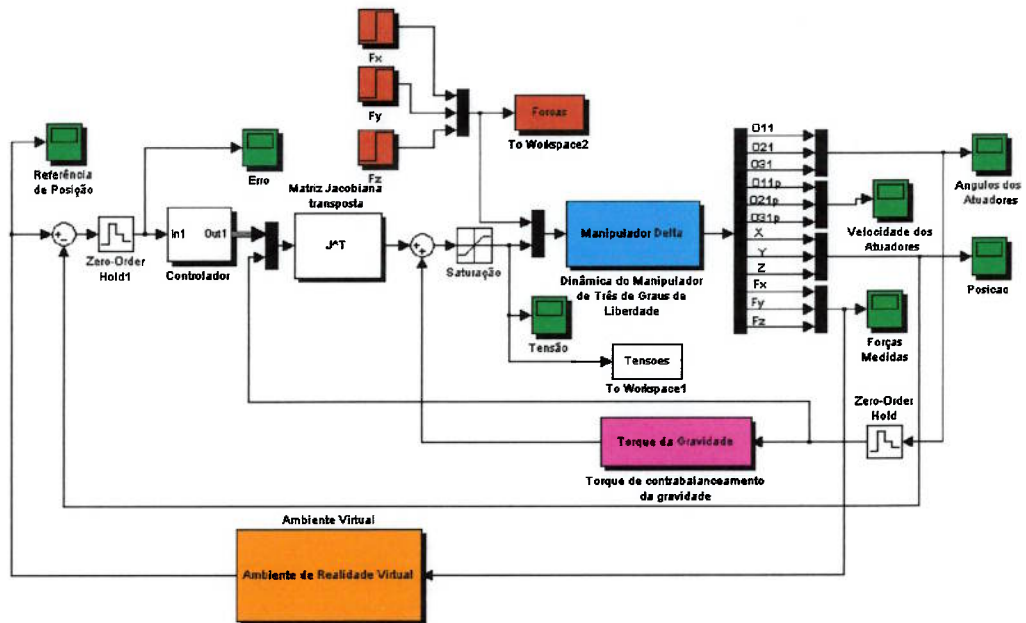


Figura 44-Diagrama de blocos do sistema simulado.

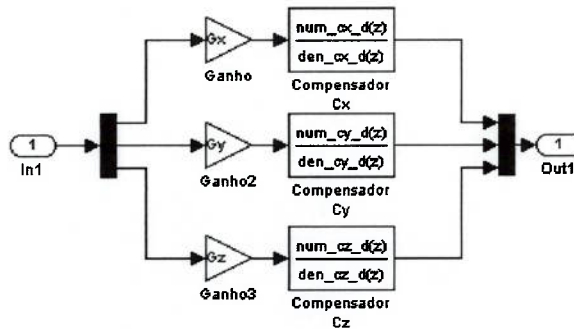


Figura 45-Diagrama de bloco do controlador.

A próxima figura mostra as forças aplicadas pelo usuário no manipulador ao longo da simulação.

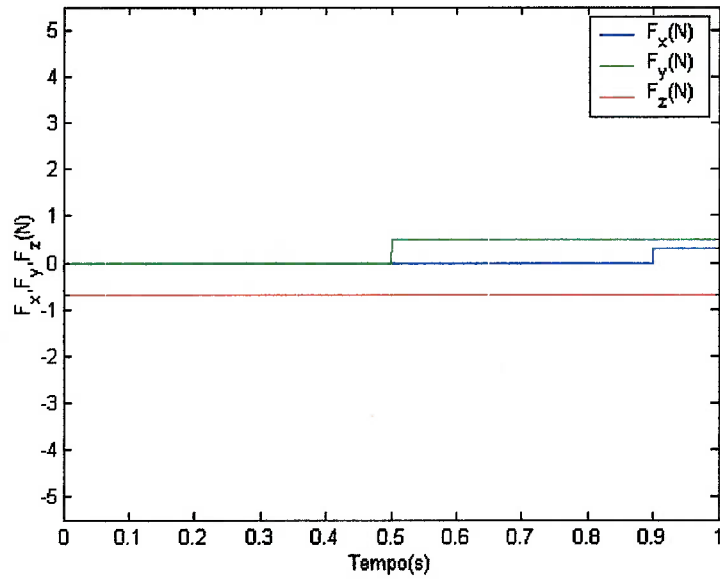


Gráfico 4-Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.

O gráfico abaixo mostra a posição da plataforma frente às entradas de forças mostradas no gráfico anterior.

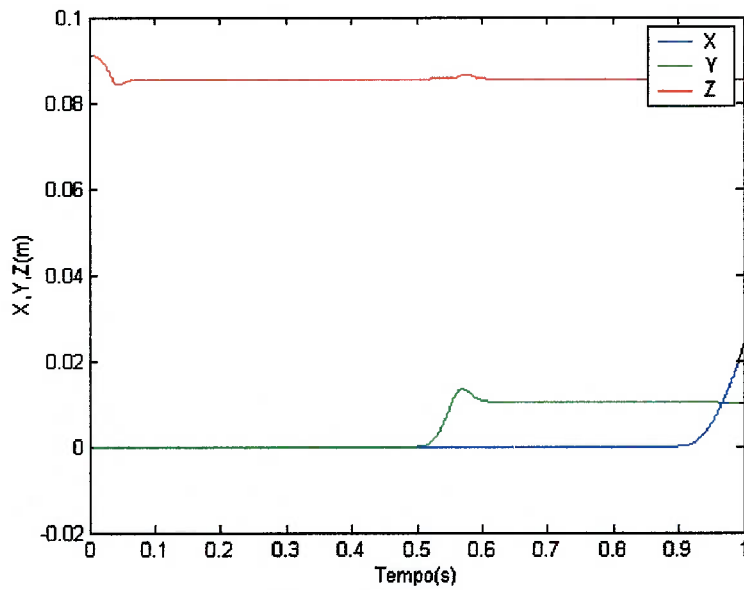


Gráfico 5-Posição da plataforma.

Os próximos gráficos mostram a posição da plataforma em comparação com a referência de posição fornecida pelo ambiente virtual.

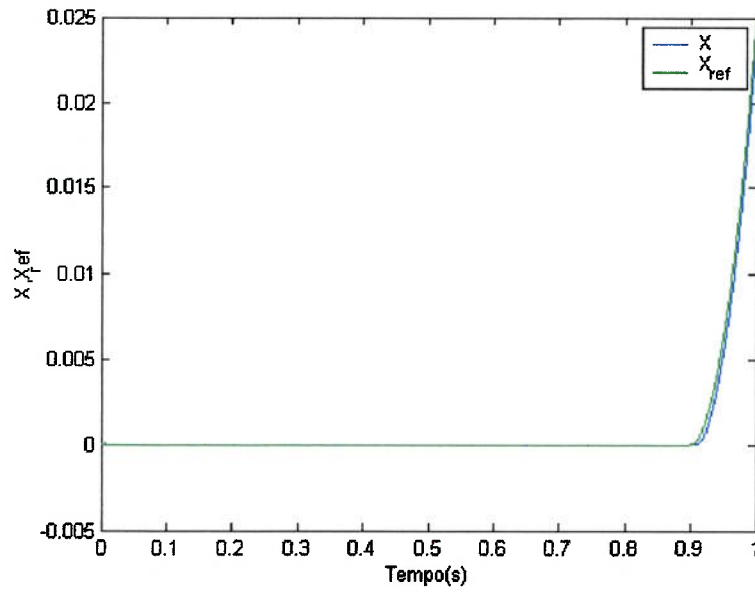


Gráfico 6-Posição X da plataforma em comparação com a referência do Xref do ambiente virtual.

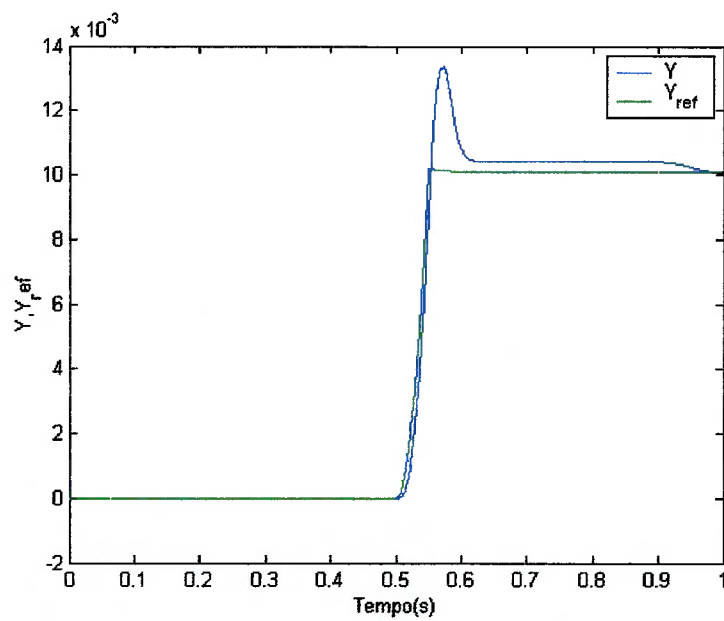


Gráfico 7-Posição Y da plataforma em comparação com a referência do Yref do ambiente virtual.

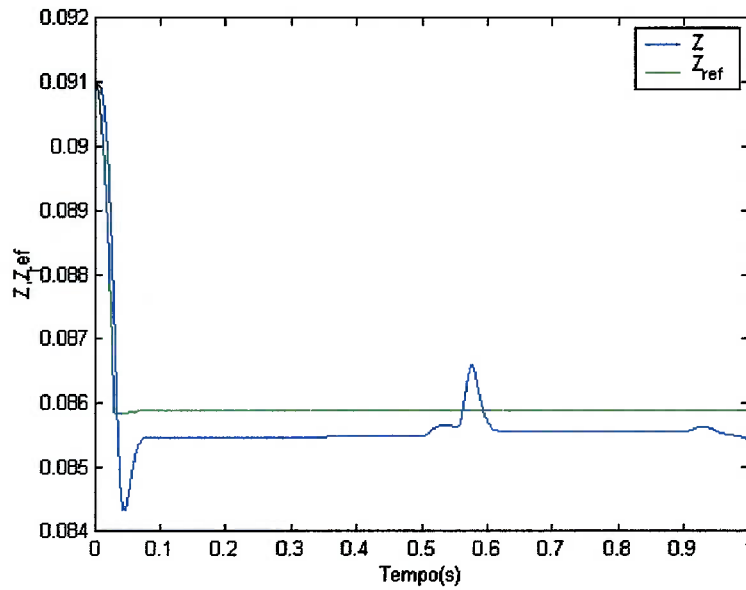


Gráfico 8-Posição Z da plataforma em comparação com a referência do Zref do ambiente virtual.

Por último, o gráfico a seguir mostra as tensões aplicadas aos atuadores.

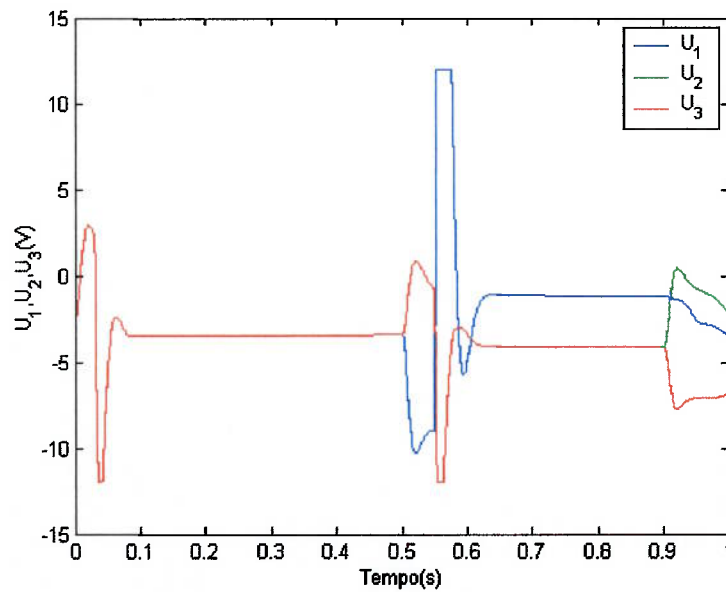


Gráfico 9-Tensões elétricas aplicadas aos atuadores.

O gráfico 4 mostra que a maneira e a intensidade com que as forças são aplicadas pelo usuário são iguais ao que ocorre na simulação feita para o manipulador com a primeira estratégia de controle (item 7.1). Sendo assim, a movimentação do manipulador é semelhante à verificada na estratégia anterior. A plataforma se desloca

até atingir a parede horizontal e logo após, com a aplicação da força em Y , atinge a parede vertical. Por último, uma força aplicada em X faz com que o manipulador de movimento nessa direção.

Constata-se pelos gráficos 6, 7 e 8 que o controle tem um bom desempenho em uma movimentação livre. No entanto, para as restrições rígidas (paredes virtuais) existe uma diferença maior entre referência e a posição efetivamente ocupada pela plataforma. Novamente, uma situação crítica acontece quando existe uma transição entre a movimentação livre a uma restrição rígida, quando picos de tensões causam uma saturação em 12V nas tensões aplicadas aos atuadores.

7.3. Simulação do Manipulador para a Terceira Estratégia de Controle

Neste tópico será analisada a estratégia de controle em que existe a leitura das variáveis cinemáticas (posição, velocidades e acelerações) e o controle impõe uma determinada força ao usuário em função dessas variáveis.

As especificações para a construção do ambiente virtual são as mesmas utilizadas na estratégia anterior (item 7.2), no entanto, a implementação deste novamente se dá de maneira diferente. Dessa vez, o ambiente virtual tem como saída uma força de referência que corresponde à força aplicada a um sistema dinâmico quando este se encontra em um estado dado em função das variáveis cinemáticas medidas (estas últimas que agora são as entradas do ambiente virtual). Por exemplo, se o ambiente virtual corresponde a uma massa de 0.1Kg, e a aceleração medida da plataforma é de $1m/s^2$, a força de referência gerada será de 0.1N, uma vez que essa é a força necessária para desenvolver a aceleração lida em uma massa igual à do ambiente virtual.

Dessa forma, as forças de referência que devem ser geradas pelo ambiente virtual proposto para as quatro situações possíveis são:

1. $Z > 0.86$ e $Y < 0.01$ - Movimentação livre.

Coordenada x

$$F_{x_ref} = m_V \ddot{X}$$

Coordenada y

$$F_{y_ref} = m_V \ddot{Y}$$

Coordenada z

$$F_{z_ref} = m_V \ddot{Z}$$

2. $Z \leq 0.86$ e $Y < 0.01$ - Contato com a parede horizontal.

Coordenada x

$$F_{x_ref} = m_V \ddot{X}$$

Coordenada y

$$F_{y_ref} = m_V \ddot{Y}$$

Coordenada z

$$F_{z_ref} = m_V \ddot{Z} + b_V \dot{Z} + K_V (Z - 0.86)$$

3. $Z > 0.86$ e $Y \geq 0.01$ - Contato com a parede vertical.

Coordenada x

$$F_{x_ref} = m_V \ddot{X}$$

Coordenada y

$$F_{y_ref} = m_V \ddot{Y} + b_V \dot{Y} + K_V (Y - 0.01)$$

Coordenada z

$$F_{z_ref} = m_V \ddot{Z}$$

4. $Z \leq 0.86$ e $Y \geq 0.01$ - Contato com as paredes vertical e horizontal.

Coordenada x

$$F_{x_ref} = m_V \ddot{X}$$

Coordenada y

$$F_{y_ref} = m_V \ddot{Y} + b_V \dot{Y} + K_V (Y - 0.01)$$

Coordenada z

$$F_{z_ref} = m_v \ddot{Z} + b_v \dot{Z} + K_v (Z - 0.86)$$

Para a imposição da referência da força dada por F_{x_ref} , F_{y_ref} e F_{z_ref} novamente serão utilizados compensadores em avanço, um para cada direção, no sistema em malha fechada com realimentação negativa.

O modelo linear do manipulador será utilizado para o projeto do sistema compensado. Faz-se a hipótese que a massa do sensor de força m_s está fixa. Após uma redução de ordem, é possível se chegar às seguintes funções de transferências:

$$\frac{F_{xm}}{E_1} = \frac{-3170}{s^2 + 73.34s + 9.994e004} \quad (7.3.1)$$

$$\frac{F_{ym}}{E_2} = \frac{-3170}{s^2 + 73.34s + 9.994e004} \quad (7.3.2)$$

$$\frac{F_{zm}}{E_3} = \frac{-3927}{s^2 + 92.06s + 1.238e005} \quad (7.3.3)$$

As funções de transferências acima têm como saídas as forças medidas. Após algumas simulações e análises dos gráficos dos lugares das raízes, foram obtidos os seguintes compensadores para que o sistema siga a referência de força de maneira satisfatória:

$$C_{Fx} = \frac{0.002s + 1}{0.0003s + 1} \quad (7.3.4); \quad C_{Fy} = \frac{0.002s + 1}{0.0003s + 1} \quad (7.3.5); \quad C_{Fz} = \frac{0.0018s + 1}{0.0003s + 1} \quad (7.3.6)$$

Os ganhos dos compensadores são iguais e valem:

$$G_{Fx} = G_{Fy} = G_{Fz} = 220 \quad (7.3.7)$$

A próxima figura mostra o gráfico do lugar das raízes da função de transferência (7.3.1) com o compensador (7.3.4).

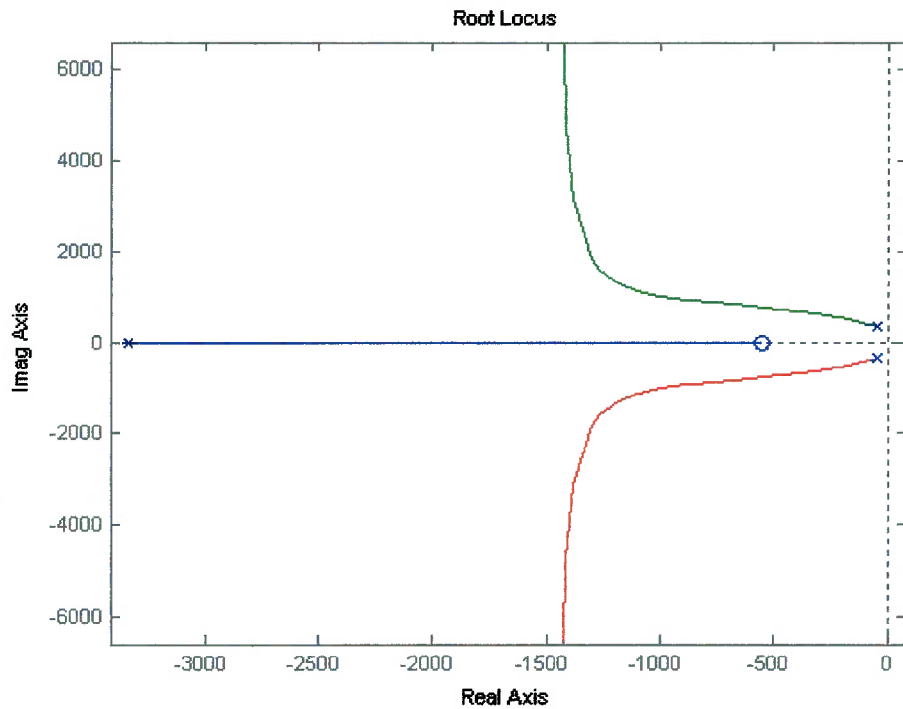


Figura 46 Gráfico do lugar das raízes para a função de transferência (7.3.1) com o seu respectivo controlador.

Os pólos em malha fechada dos sistemas com controle de forças nas direções X , Y e Z são os seguintes:

Direção X -1120, $-1170+1020i$, $-1170-1020i$

Direção Y -1120, $-1170+1020i$, $-1170-1020i$

Direção Z -1280, $-1090+1100i$, $-1090-1100i$

A próxima figura mostra o diagrama de blocos do sistema simulado (já com o ambiente virtual e o controle de forças).

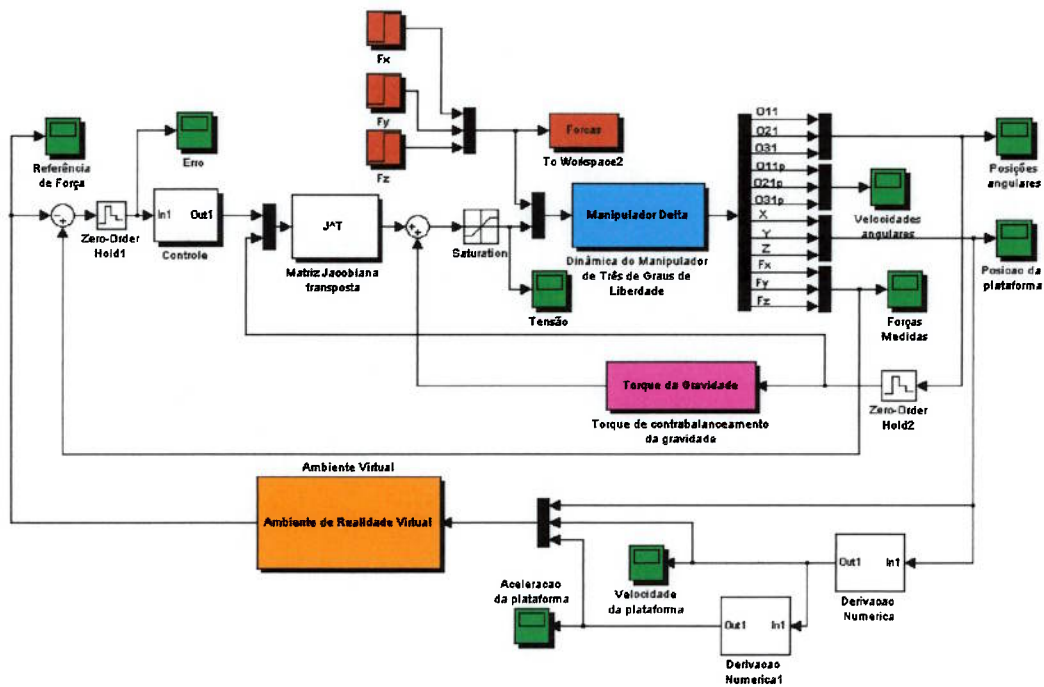


Figura 47-Diagrama de blocos do sistema simulado.

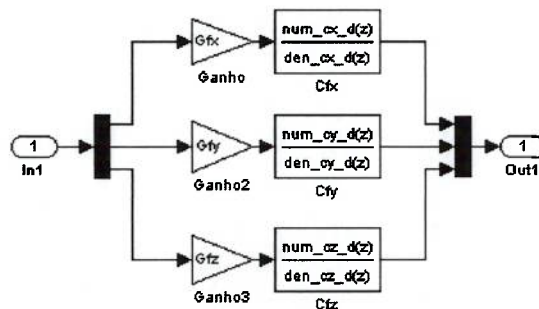


Figura 48-Diagrama de bloco do controlador.

As simulações foram realizadas com os compensadores sendo discretizados com a aproximação bilinear de Tustin a uma frequência de 1Khz. Outro ponto importante é o fato de que a velocidade e a aceleração da plataforma (que junto com a posição da plataforma compõem as entradas do ambiente virtual) tiveram de ser obtidas através de derivações numéricas. Como essas derivações ampliam as componentes de alta frequência do sinal discretizado de posição, utilizou-se um filtro após cada uma dessas derivações. Esses filtros correspondem a sistemas de primeira ordem com ganho unitário em regime. Estes também foram discretizados pela aproximação bilinear de

Tustin a mesma taxa de amostragem de 1Khz. A frequência de corte escolhida para esses filtros foi de $200rad/s$. Apesar dessa frequência não ser a maior do que a frequência recomendável de 1Khz, esta foi a maior frequência com a qual se pode obter sinais de velocidade e aceleração com qualidade suficientes.

Serão apresentados os resultados da simulação realizada, onde as forças aplicadas pelo usuário são iguais as aplicadas nas simulações dos itens anteriores.

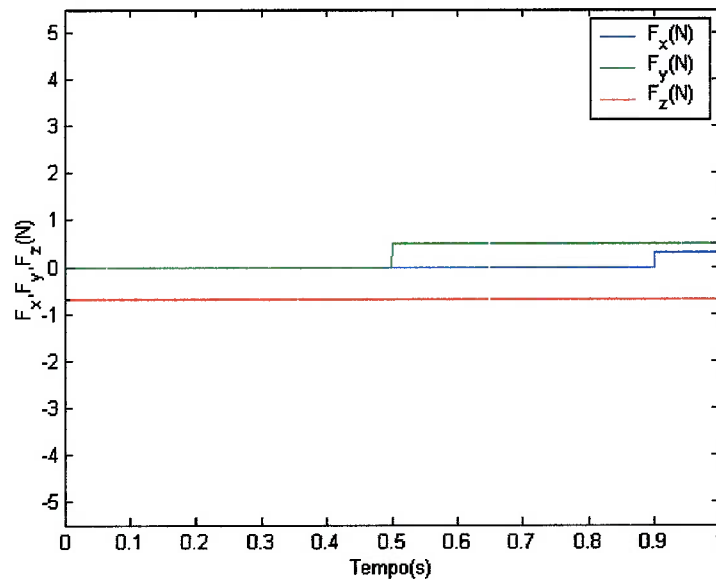


Gráfico 10- Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.

O próximo gráfico mostra a evolução da posição da plataforma frente às entradas de força do gráfico anterior.

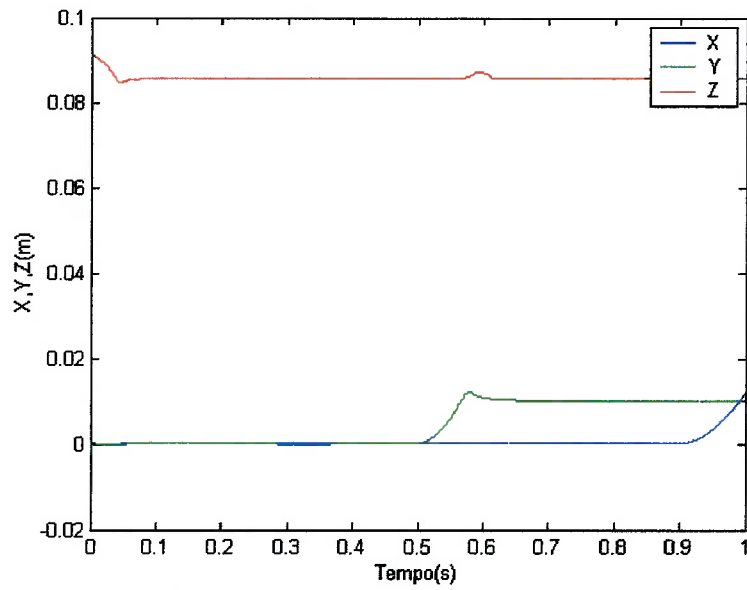


Gráfico 11-Posição da plataforma.

Visto que agora o sistema deve seguir uma referência de força, os gráficos a seguir mostram as forças medidas juntamente com suas respectivas referências a fim de que se possa fazer uma avaliação dos resultados obtidos na simulação.

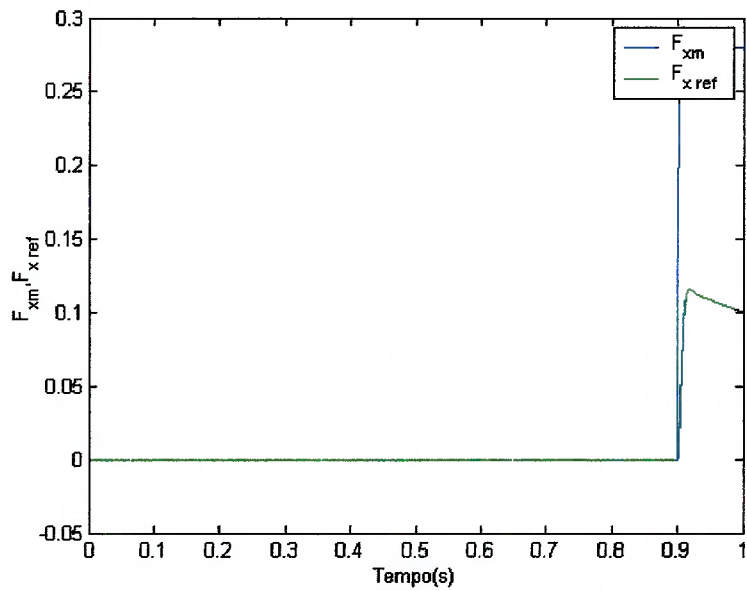


Gráfico 12-Comparação entre a força medida F_{xm} e sua referência F_{xref} .

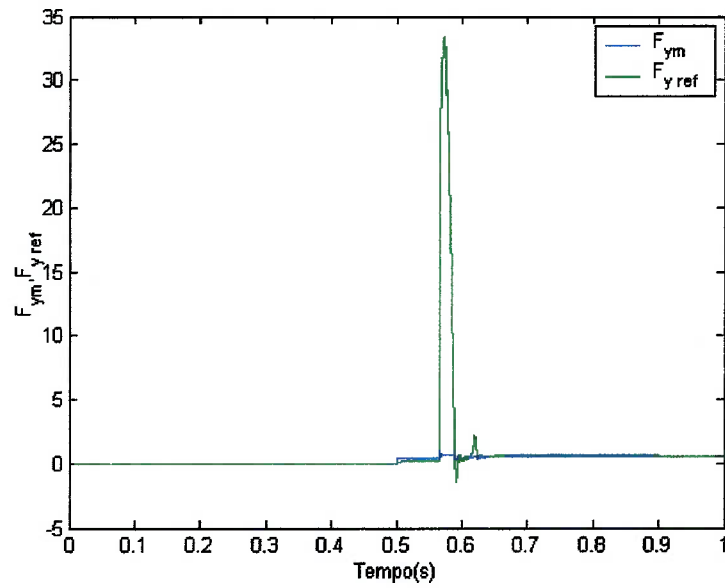


Gráfico 13-Comparação entre a força medida F_{ym} e sua referência F_{yref} .

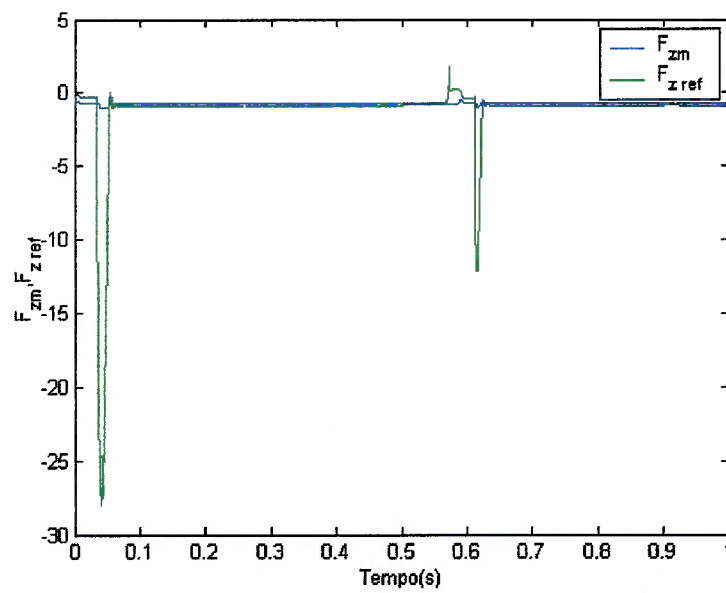


Gráfico 14-Comparação entre a força medida F_{zm} e sua referência F_{zref} .

O último gráfico mostra as tensões aplicadas nos atuadores ao longo do tempo.

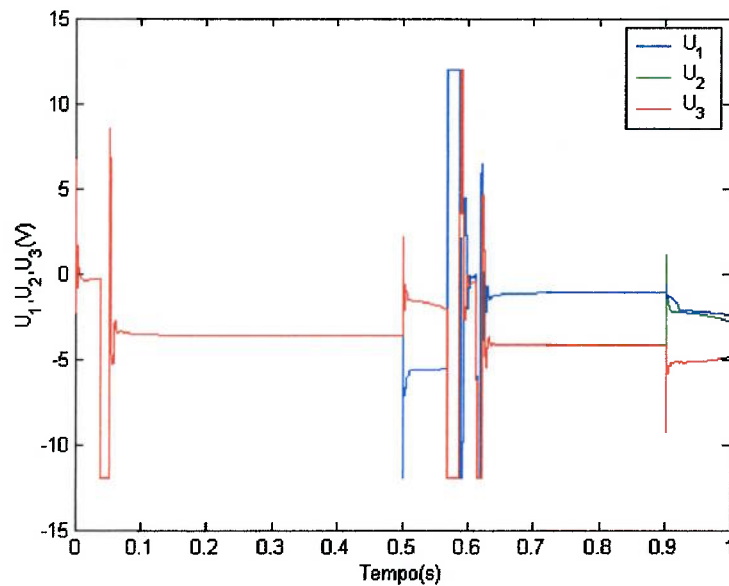


Gráfico 15-Tensões aplicadas aos atuadores.

Mais uma vez, os resultados da simulação mostram que o ponto crítico é a transição de uma movimentação livre para uma restrição rígida. Os gráficos 12, 13 e 14 mostram isso de maneira mais clara. Por exemplo, na direção y, a força de referência no momento do contato com a parede virtual passa de 30N. Como os atuadores são incapazes de reproduzir tal força, seguir a referência torna-se impossível.

7.4.Manipulador com Controle Multivariável

Nos subitens anteriores, não importando a estratégia adotada, o controle SISO foi usado para imposição de força ou posição ao manipulador. Este item visa a análise de um controle multivariável por alocação de polos para o controle de posição. Mais uma vez, o modelo linear será usado para a determinação do controle, enquanto as simulações para análise de desempenho serão realizadas com o sistema não linear.

Devido ao fato de alguns dos pólos do sistema em questão serem excessivamente rápidos (pólos relacionados ao sensor de forças), o que na prática dificulta a estimativa do vetor completo de variáveis de estado, será implementado um controle no espaço modal utilizando-se um modelo do manipulador com ordem reduzida onde os polos mais rápidos foram eliminados. Para tanto, utilizou-se um desenvolvimento semelhante ao encontrado no livro de Takahashi, Rabins e Auslander[28].

Inicialmente parte-se do sistema linear do manipulador de forma que as tensões aplicadas aos motores são as variáveis de controle, e a posição e velocidade da plataforma (nas três direções) são as saídas. Assim, o sistema fica na forma já conhecida,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

O passo seguinte é determinar uma transformação de coordenadas $x = Tx^*$ de maneira a colocar o sistemas em uma forma canônica a fim de se determinar quais são o modos que dominam a dinâmica do sistema e eliminar os modos que tem um decaimento mais rápido.

Aplicando-se essa transformação ao sistema, este toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= \Lambda x^* + u^* \\ y &= Fx^*\end{aligned}$$

tal que,

$$\begin{aligned}\Lambda &= T^{-1}AT \\ u^* &= Hu, \quad H = T^{-1}B \\ F &= CT\end{aligned}$$

A matriz F e H podem ser colocadas da seguinte forma,

$$F = [F_m \quad \Delta F_m]$$

$$H = \begin{bmatrix} H_r \\ \Delta H_r \end{bmatrix}$$

Para o caso do manipulador que é alvo desse estudo, tem-se um sistema de ordem $n = 12$ e seis polos dominantes. Fez-se então uma redução de ordem do sistema para

$q = 6$ eliminando-se as seis últimas colunas e linhas da matriz Λ de maneira a se manter apenas o efeito dos seis polos dominantes na resposta do sistema. Essa redução será ideal no caso em que $\Delta F_m = 0$ e $\Delta H_r = 0$ (essas matrizes no presente caso têm respectivamente ordens 6×6 e 6×3). Para que tal redução seja possível as condições $\det H_r \neq 0$ e $\det F_m \neq 0$ também devem ser obedecidas. Para o sistema do manipulador, tem-se que $\Delta F_m \neq 0$ e $\Delta H_r \neq 0$, no entanto, tais matrizes são muito próximas de serem nulas, o que valida a redução de ordem realizada. Tem-se então que o sistema de ordem $q = 6$ sobre o qual será construído um controle de posição será o seguinte:

$$\begin{aligned}\dot{x}_q^* &= \Lambda_q x_q^* + H_r u \\ y &= F_m x_q^*\end{aligned}$$

Para o sistema acima determinou-se por alocação um controle da seguinte forma:

$$u = -K_q^* x_q^*$$

Os polos dominantes em malha fechada escolhidos foram os seguintes:

$$s_i = -80; \quad i = 1, 2, 3$$

$$s_i = -60; \quad i = 1, 2, 3$$

O diagrama de blocos do sistema não linear aplicando-se o controle por alocação de polos é mostrado na figura a seguir:

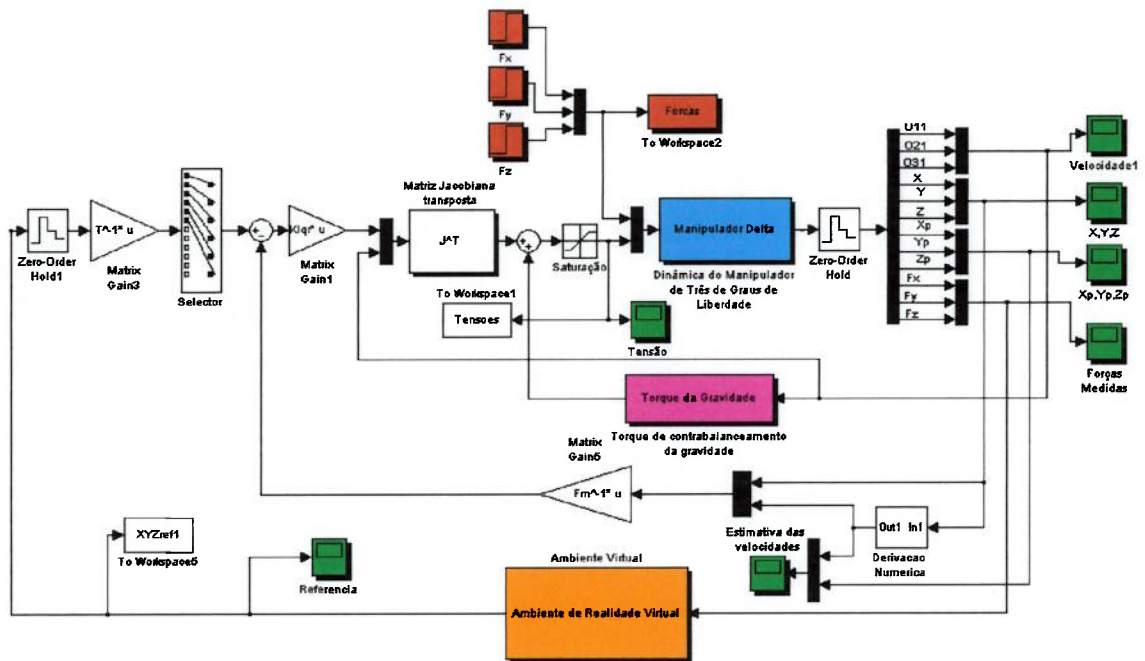


Figura 49- Diagrama de blocos do sistema simulado.

Para a realização da simulação, as forças aplicadas pelo usuário ao manipulador, bem como a definição do ambiente virtual, foram as mesmas usadas nos itens anteriores.

Os resultados da simulação realizada são mostrados nos gráficos a seguir:

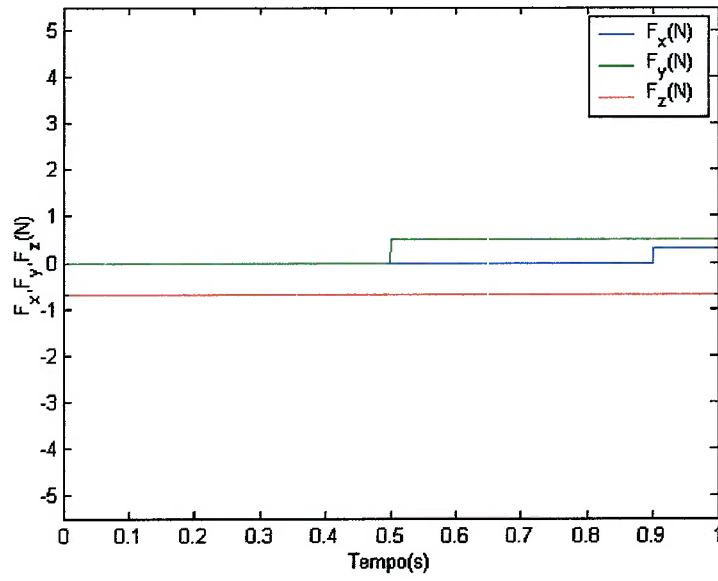


Gráfico 16 - Forças aplicadas pelo usuário do manipulador.

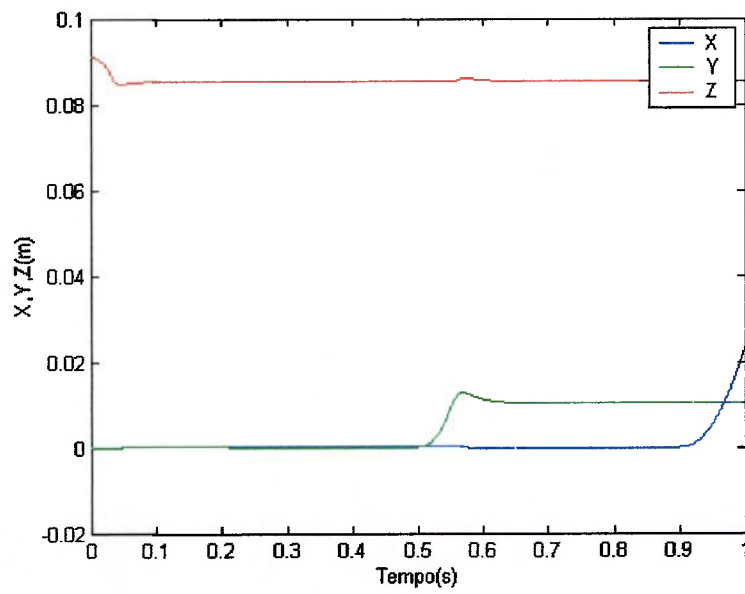


Gráfico 17 - Posição da plataforma.

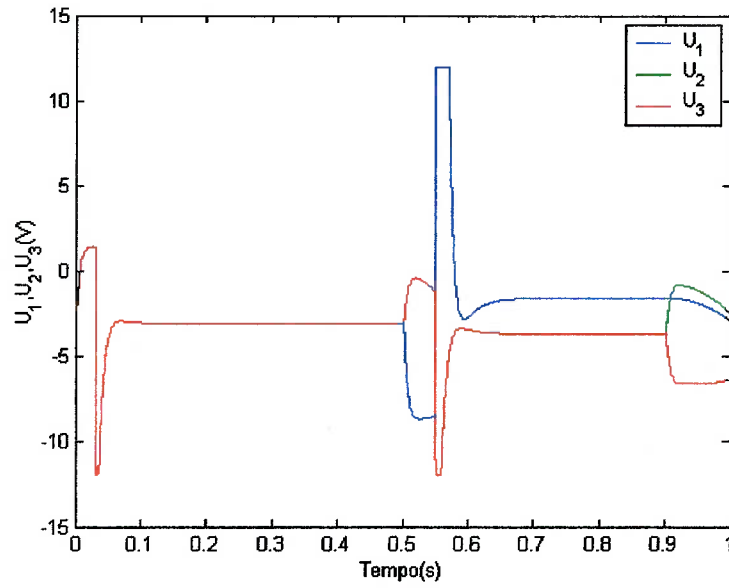


Gráfico 18 - Tensões aplicadas aos motores.

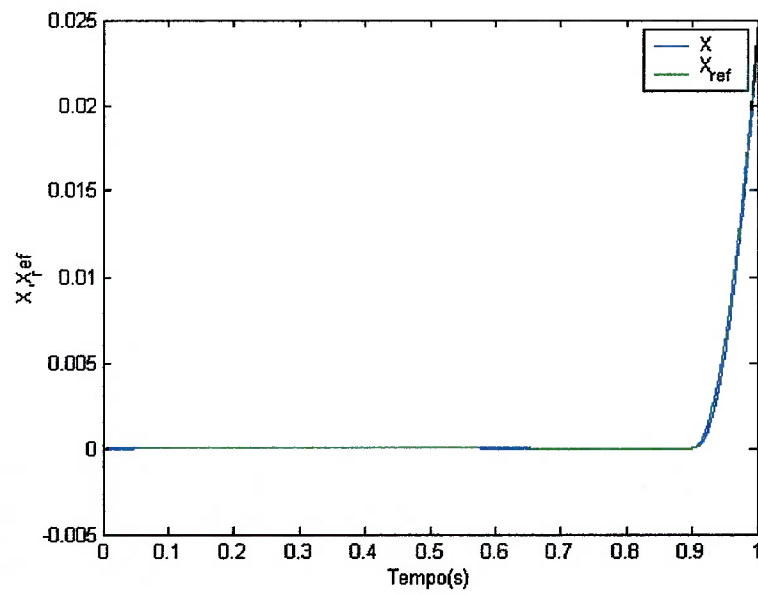


Gráfico 19 - Posição X da plataforma em comparação com a referência do Xref do ambiente virtual.

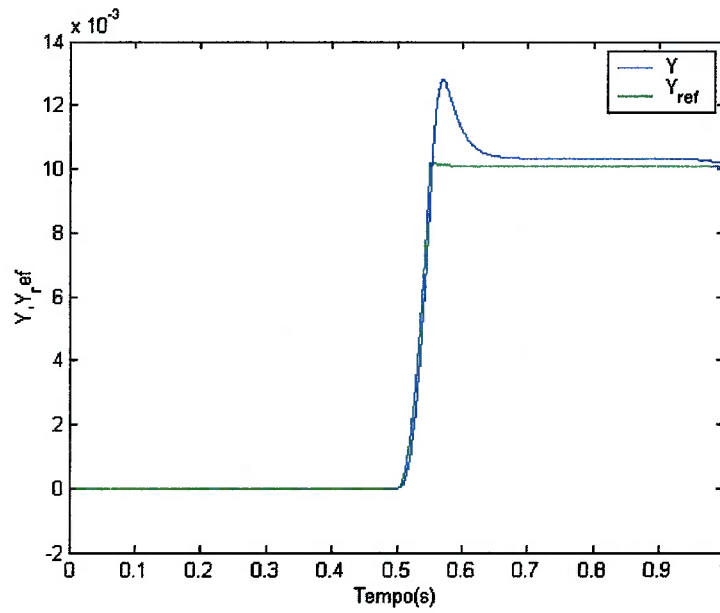


Gráfico 20 - Posição Y da plataforma em comparação com a referência do Yref do ambiente virtual.

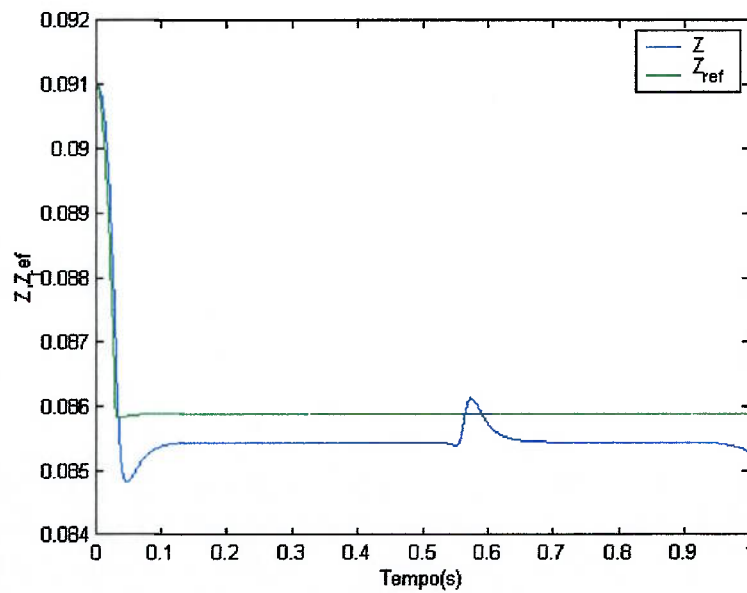


Gráfico 21 - Posição Z da plataforma em comparação com a referência do Zref do ambiente virtual.

Como se pode ver, os resultados obtidos são semelhantes aos encontrados para o controle SISO. No entanto, isto não significa que qualquer estratégia de controle multivariável venha também a ter resultados semelhantes. Outras estratégias podem ser

adotadas de maneira a se explorar melhor a interação entre as variáveis de estado do sistema. O objetivo deste item é mostrar a possibilidade de se aplicar controles mais elaborados ao manipulador.

8. Construção do protótipo

A partir da elaboração do modelo matemático e das simulações realizadas, foi possível montar um protótipo para verificação do comportamento real do manipulador Delta submetido às técnicas de controle apresentadas. O arranjo geral do experimento consiste dos seguintes elementos:

- Mecanismo Delta. Suas dimensões de construção foram as mesmas aplicadas nas simulações. Como atuadores, foram utilizados motores de corrente contínua (da marca Pittman, acoplados a redutores com fator de redução de 6.3:1) também com características semelhantes as definidas nas simulações. Para a medição da posição das pernas do mecanismo foram usados encoders incrementais acoplados diretamente ao rotor dos motores. Esses encoders são dotados de uma resolução de 512 linhas por volta.
- Interface dos Encoders. Essa placa de circuito impresso, cujo projeto e implementação também são resultados desse trabalho, lê os impulsos vindos dos encoders determinando a posição das pernas do mecanismo.
- Computador PC 133MHz de clock. Usando sistema operacional DOS, esse computador foi utilizado para o desenvolvimento e execução da programação de controle do manipulador. Esse computador também possui uma placa de aquisição de dados com entradas e saídas analógicas que foi utilizada para comunicação do computador com o restante do sistema.
- Interface de potência. Essa placa recebe os sinais vindos do computador (por meio das entradas e saídas analógicas da placa de aquisição) e transforma esse sinal em uma tensão com potência adequada para o acionamento dos motores do manipulador.
- Sensor de força. Esse sensor lê apenas forças na direção vertical aplicadas pelo usuário (na direção z tomando-se como referência o sistema de coordenadas usado nas simulações). Consiste de um anel metálico com quatro strain-gages ligados em ponte de Wheatstone. Foi montado também um circuito para a amplificação e tratamento do sinal proveniente do sensor.

As figuras a seguir mostram o arranjo do experimento montado.

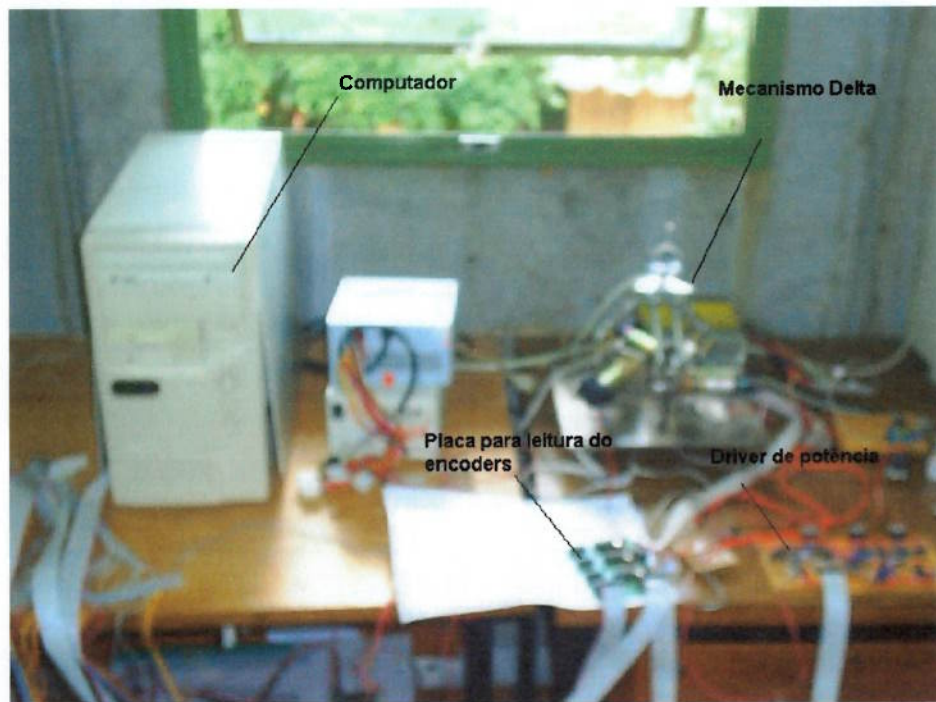


Figura 50 - Arranjo geral do experimento.

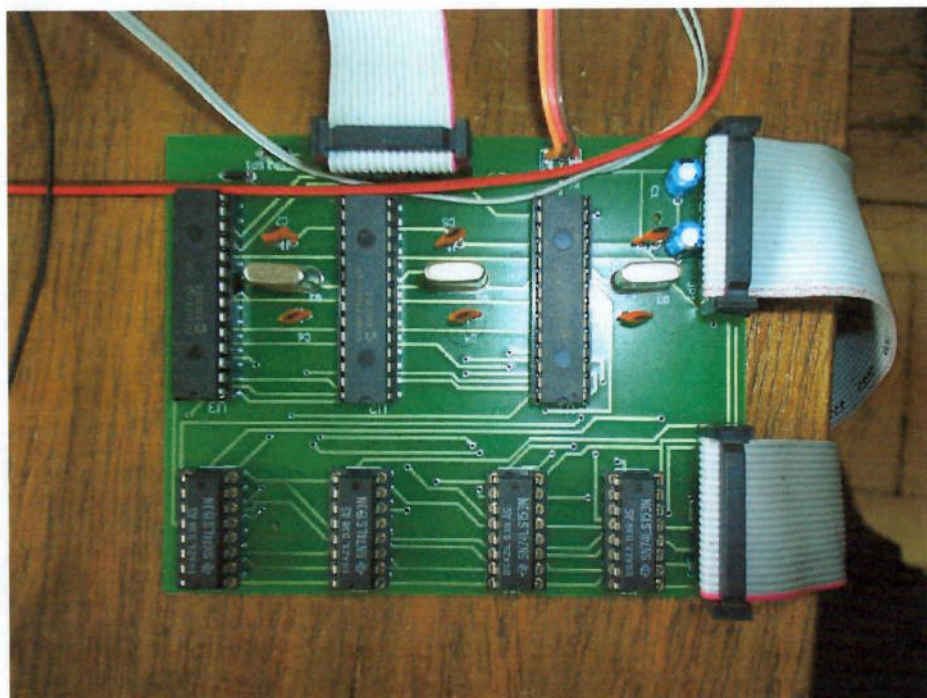


Figura 51 - Interface com encoders.

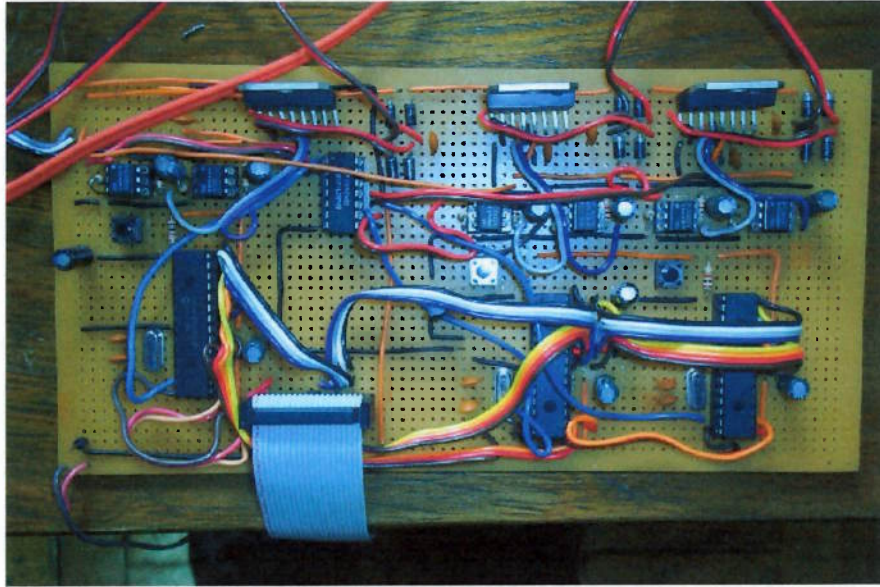


Figura 52 - Interface de potência.



Figura 53 - Manipulador.

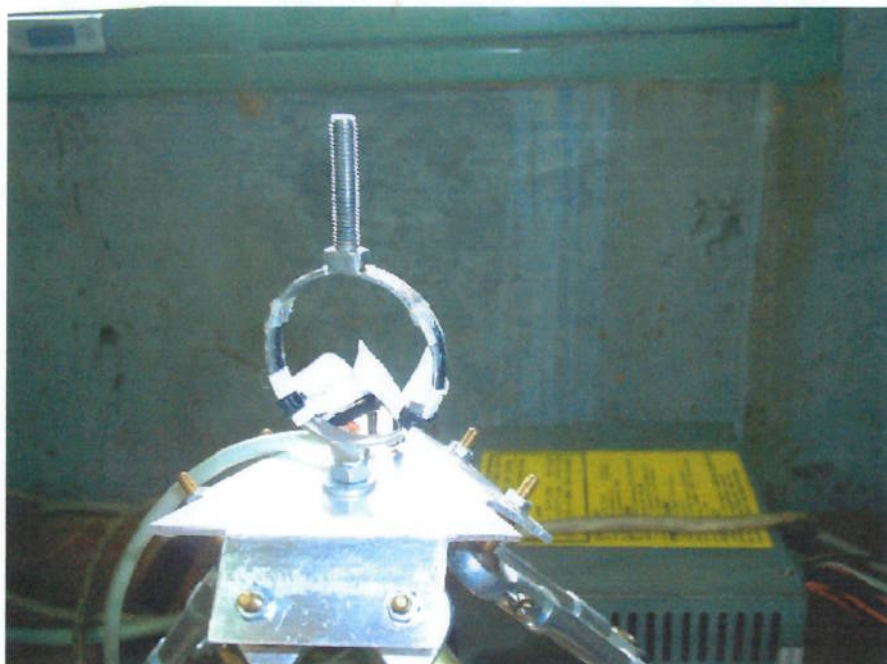


Figura 54 - Sensor de força.

Um segundo computador foi usado para a elaboração gráfica de um ambiente virtual. O computador que realiza o controle envia por meio de sua porta paralela as informações de posição do manipulador para este segundo computador de maneira a se construir uma imagem de um ambiente virtual. A próxima figura mostra a imagem do ambiente virtual.

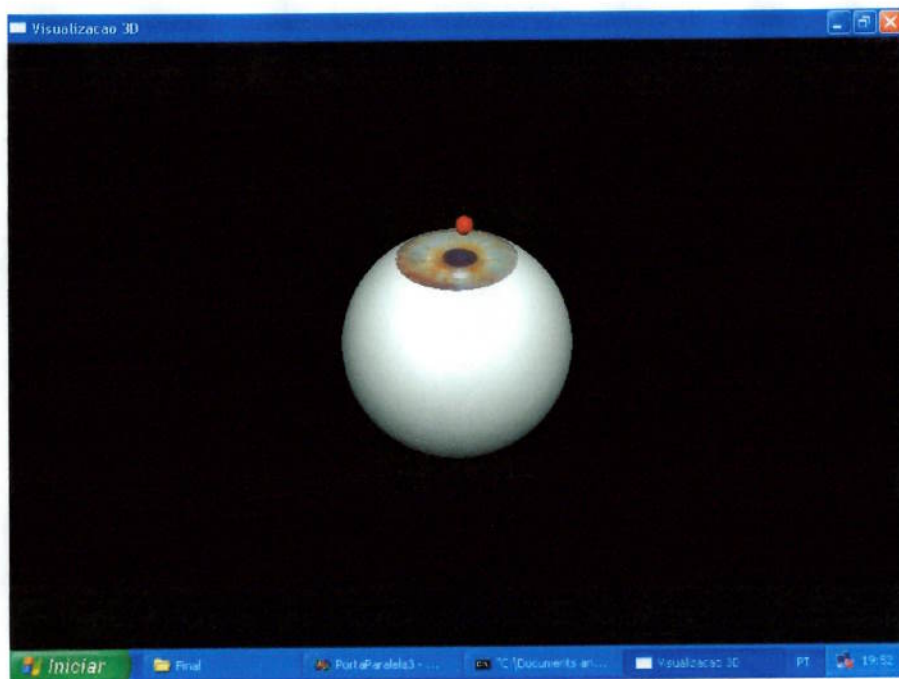


Figura 55 - Ambiente virtual.

Conforme mostra a figura acima, o gráfico do ambiente virtual tenta representar um olho humano. O ambiente virtual implementado no controle é um plano (localizado em $Z=0.91$, conforme o plano horizontal implementado nas simulações). Para a realização dos testes desse protótipo, o plano do ambiente virtual foi colocado em uma posição praticamente no topo da figura do olho humano (tomando-se como referência a figura acima apresentada). O ponto vermelho representa a posição ocupada pela plataforma do manipulador.

9. Resultados experimentais

As três técnicas de controle SISO apresentadas foram testadas. As simulações realizadas deram base para a definição dos parâmetros para construção do protótipo (dimensões, potência dos motores, etc). No entanto, não se tem como objetivo fazer um validação do modelo matemático elaborado. O que se pretende é completar esse trabalho apontando quais são as dificuldades e pontos relevantes a serem considerados ao se montar um manipulador desse gênero, bem como analisar de forma qualitativa o desempenho de um manipulador real.

A principal diferença entre o que foi definido nas simulações e o que foi efetivamente implementado no protótipo está no fato de que no protótipo não foram aplicados aos motores os torques que visavam anular o peso do mecanismo. A implementação do cálculo desse torque chegou a ser realizada e testada no protótipo. No entanto, verificou-se que, por ser custoso do ponto de vista computacional e por limitações de velocidade do computador utilizado, a taxa de amostragem do controle caiu fazendo com que a margem de estabilidade do sistema caísse muito. Por fim, devido a essas circunstâncias, considerou-se melhor fazer a análise dos resultados do protótipo sem esse torque mas com uma taxa de amostragem adequada (em torno de 1KHz).

Nos itens a seguir são apresentados na forma de gráficos os resultados experimentais obtidos, juntamente com os comentários pertinentes.

9.1. Resultados Experimentais para a Primeira Estratégia de Controle

Nesse primeiro arranjo, o usuário procura realizar movimentos circulares no plano XY e ao mesmo tempo efetua uma movimentação de ida e volta na direção Z fazendo com que o manipulador atinja de maneira intermitente uma parede virtual no plano XY (em $Z=0.091\text{m}$) .

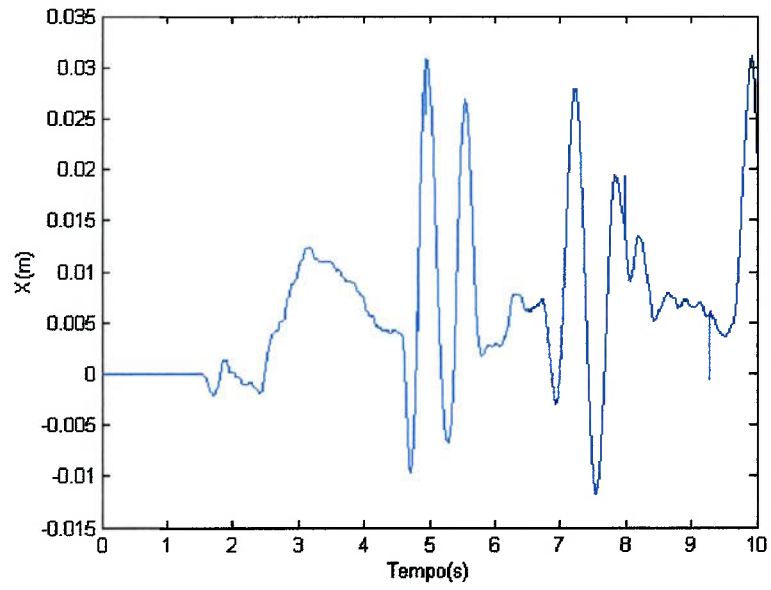


Gráfico 22 – Componente X da posição da plataforma.

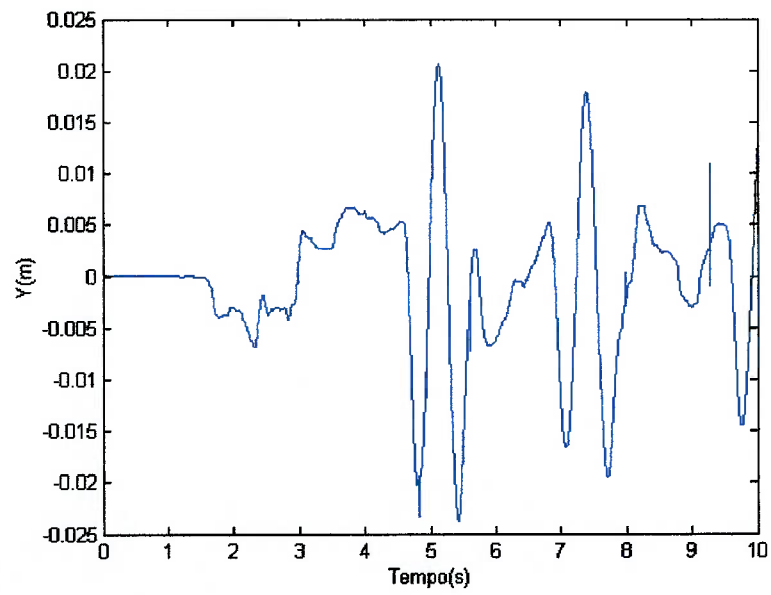


Gráfico 23 - Componente Y da posição da plataforma.

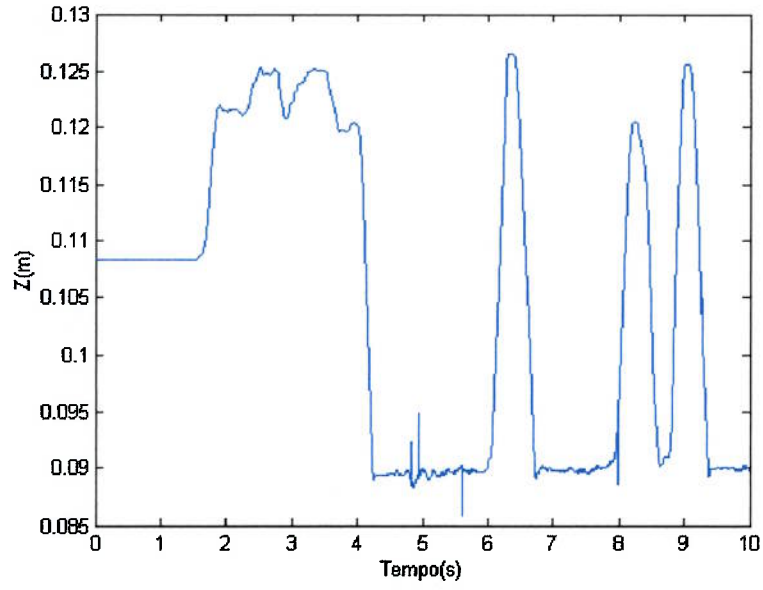


Gráfico 24 - Componente Z da posição da plataforma.

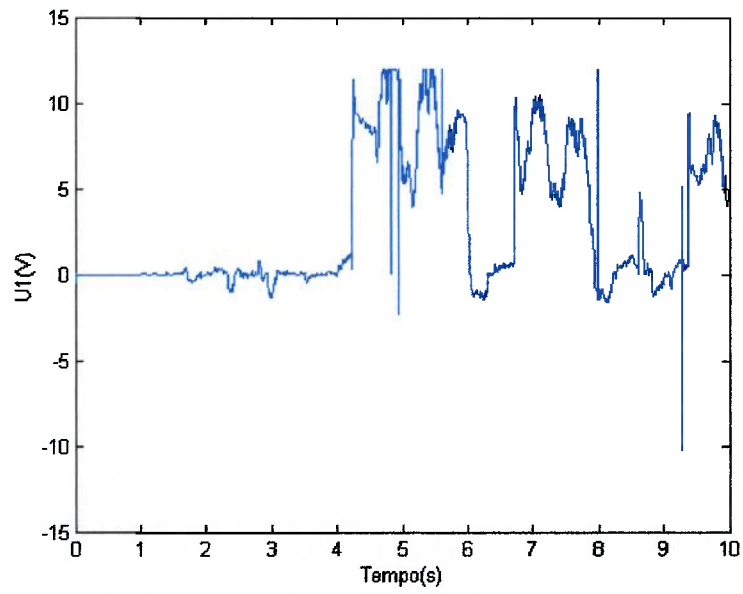


Gráfico 25 - Tensão aplicada ao motor 1.

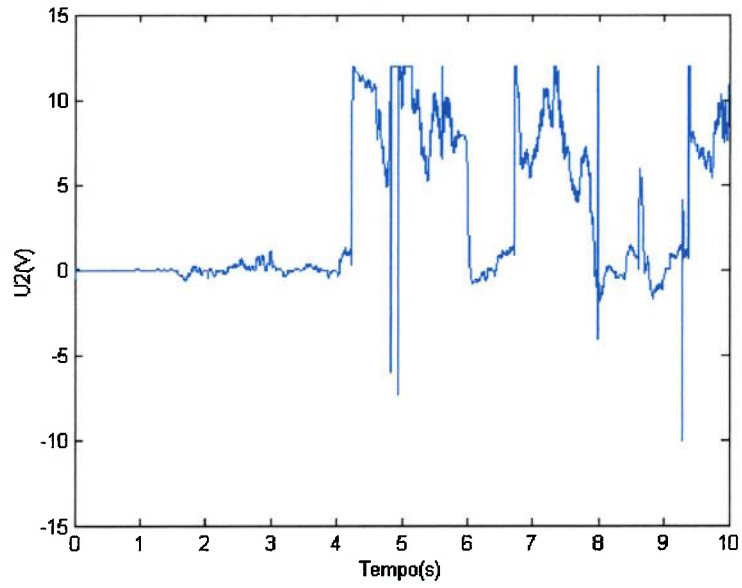


Gráfico 26 - Tensão aplicada ao motor 2.

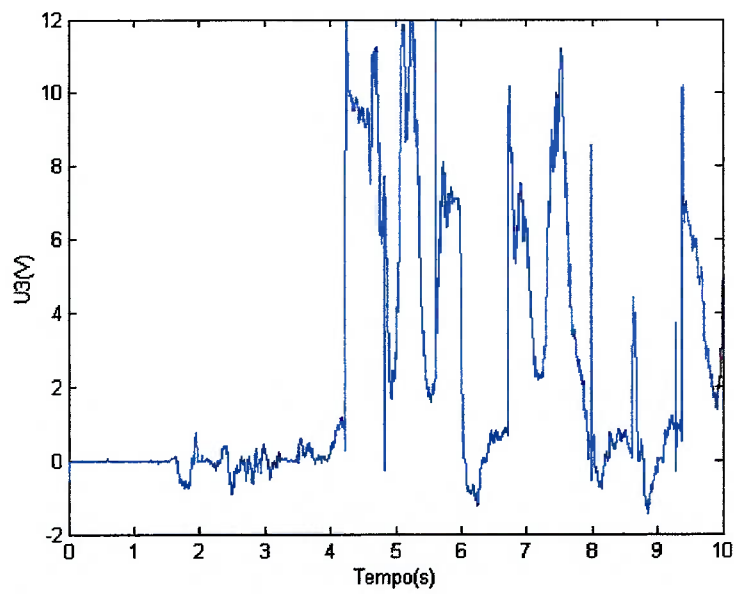


Gráfico 27 - Tensão aplicada ao motor 3.

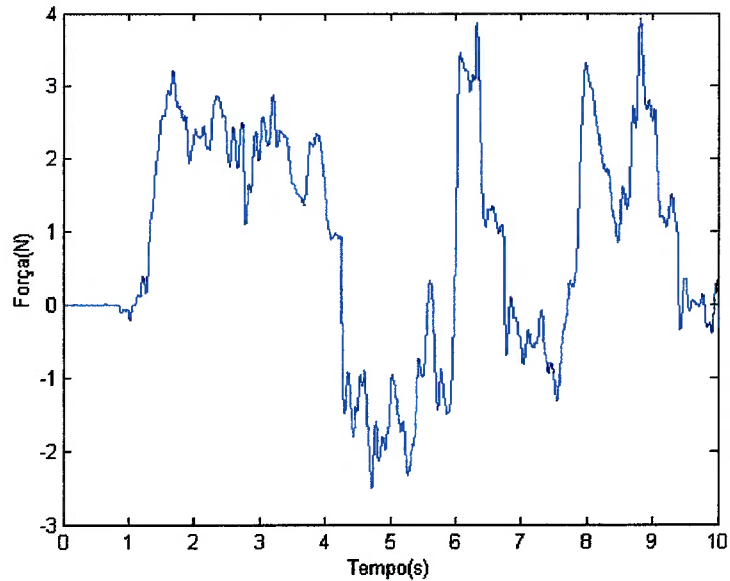


Gráfico 28 - Força aplicada pelo usuário ao manipulador (direção Z).

No gráfico 24, pode-se ver que o usuário realmente encontra uma parede em $Z=0.091\text{m}$. Esta técnica apresentou um bom resultado para as restrições rígidas no ambiente virtual.

Os problema dessa técnica no que tange as movimentações livres puderam ser verificados no protótipo. Quando o manipulador está em uma posição fora da parede virtual, a sensação de tato do usuário fica fortemente influenciada pelo peso e inércia do mecanismo.

9.2.Resultados Experimentais para a Segunda Estratégia de Controle

Devido às limitações do sensor de força, o desempenho dessa técnica só pode ser analisado na direção Z. O ambiente virtual foi implementado de maneira diferente com relação ao apresentado nas simulações. No protótipo, o ambiente virtual consiste de um sistema massa-mola-amortecedor implementado digitalmente de maneira que o estado no instante $n+1$ é calculado utilizando a posição da plataforma no estado n . Isso explica o fato de a referência de posição e a posição efetivamente ocupada pela plataforma serem sempre muito próximos (ver figura 77).

Os parâmetros para o ambiente virtual foram os mesmo adotados nas simulações.

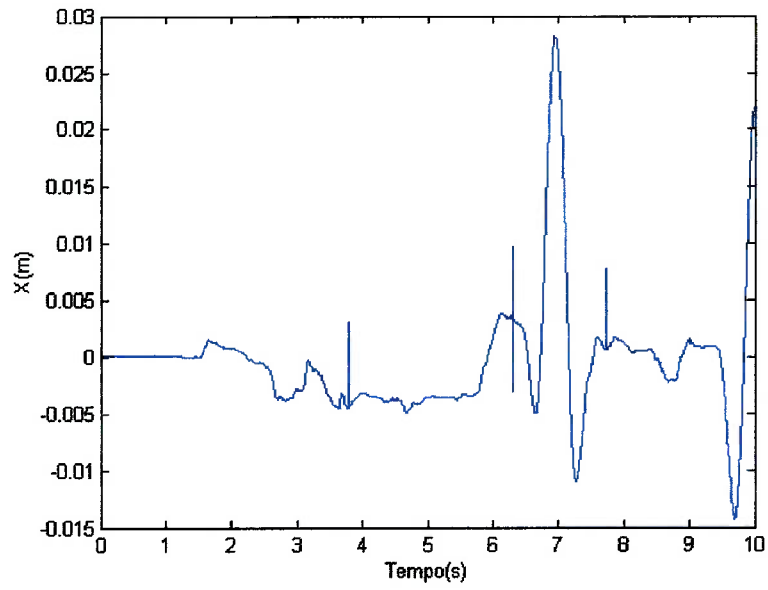


Gráfico 29 - Componente X da posição da plataforma.

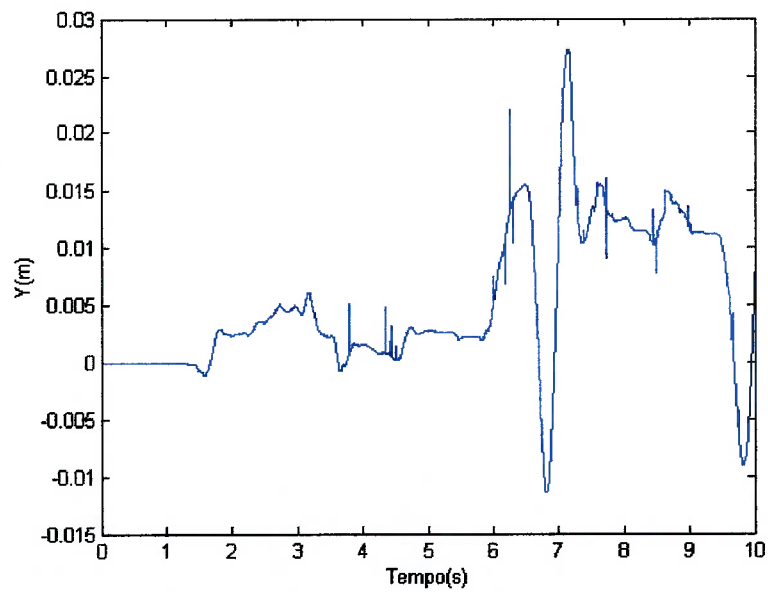


Gráfico 30 - Componente Y da posição da plataforma.

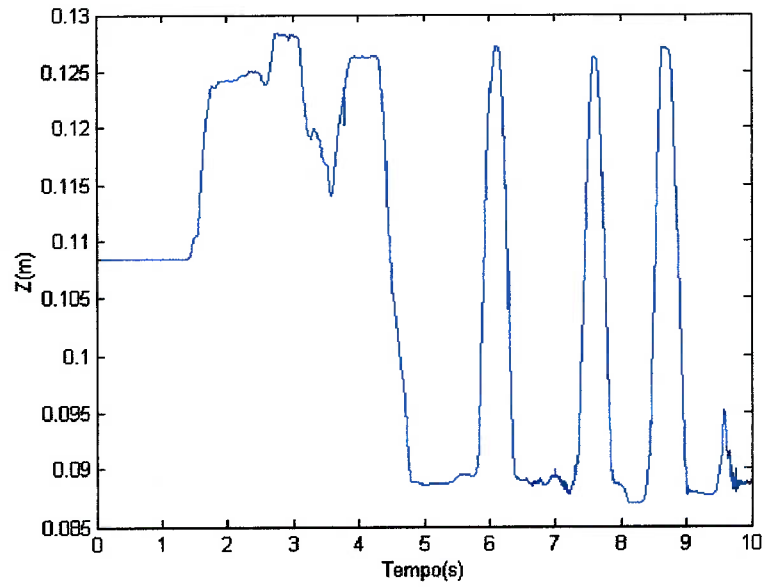


Gráfico 31 - Componente Z da posição da plataforma.

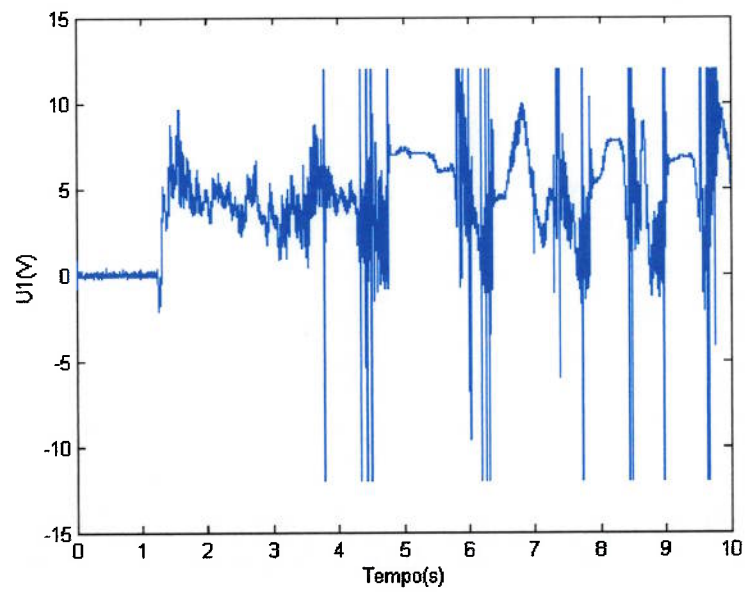


Gráfico 32 - Tensão aplicada ao motor 1.

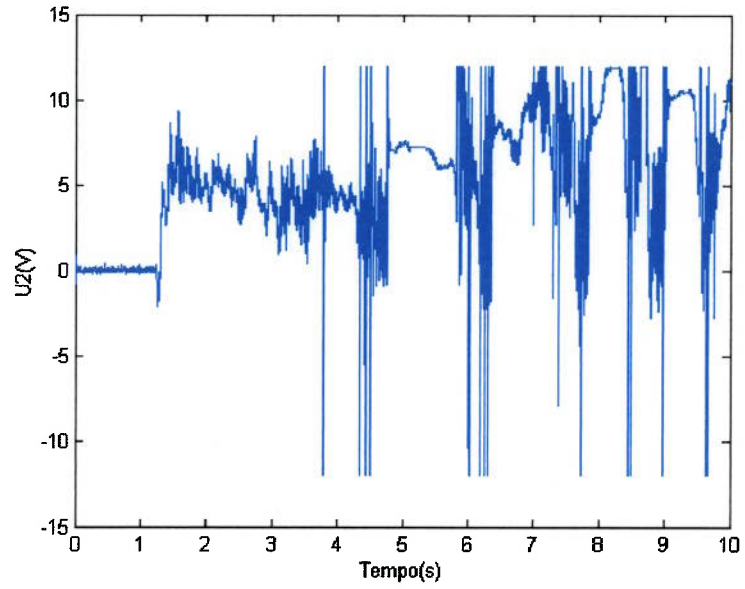


Gráfico 33 - Tensão aplicada ao motor 2.

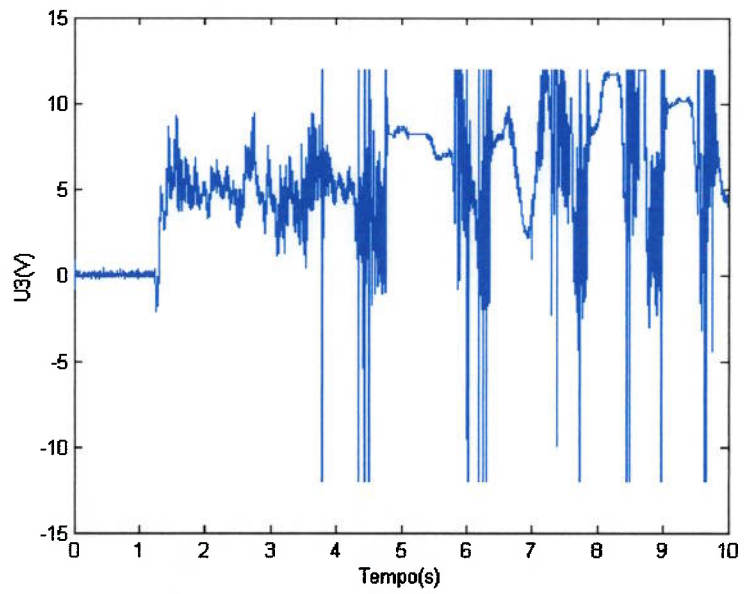


Gráfico 34 - Tensão aplicada ao motor 3.

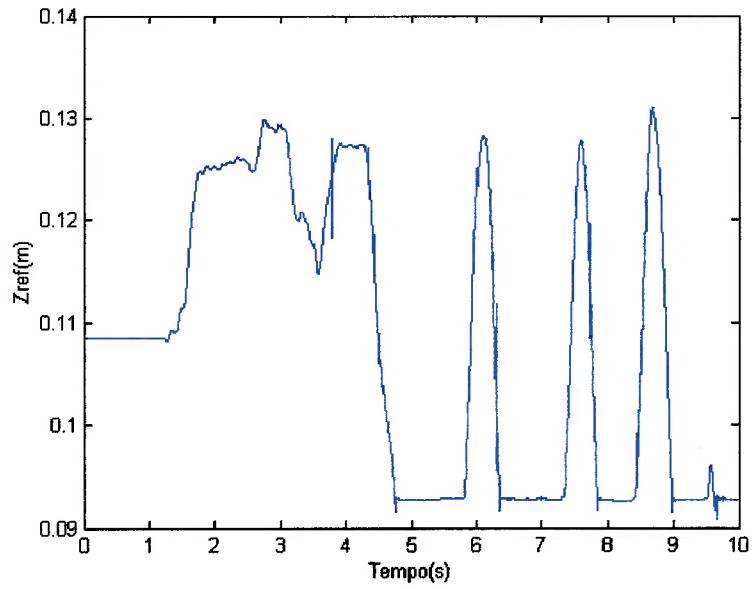


Gráfico 35 - Referência de posição (componente Z).

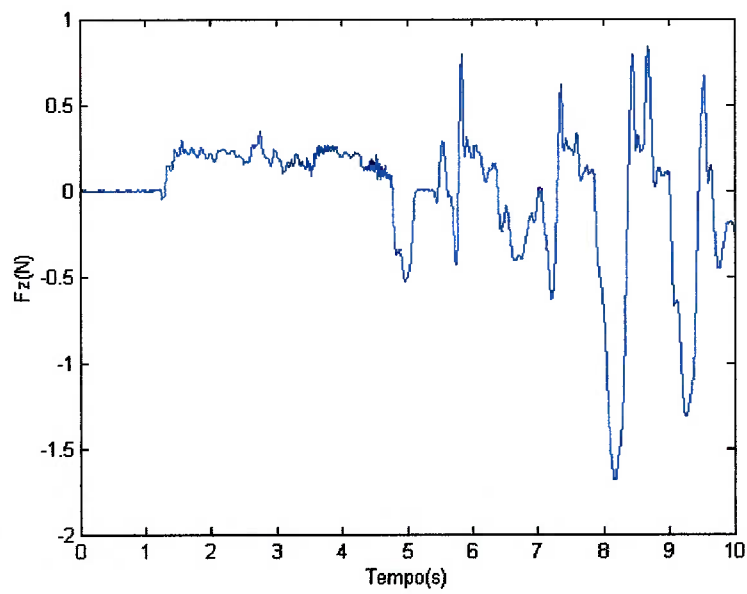


Gráfico 36 - Força aplicada pelo usuário ao manipulador (direção Z).

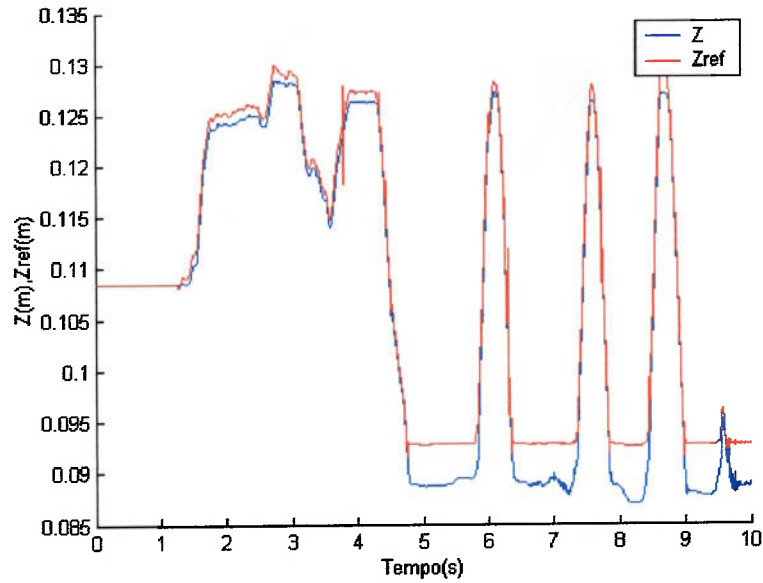


Gráfico 37 - Comparação entre a posição Z da plataforma e sua referência.

Essa técnica apresentou bons resultados tanto para as restrições rígidas, como para as movimentações livres. Apesar de não se apresentar uma quantificação, pode-se perceber uma diminuição significativa da inércia sentida pelo usuário durante a movimentação livre.

9.3. Resultados Experimentais para a Terceira Estratégia de Controle

Para essa terceira estratégia de controle, os melhores resultados foram obtidos para as restrições rígidas. Houve uma percepção de mudança de inércia no contato com o manipulador, mas tal mudança não teve a mesma qualidade encontrada na segunda estratégia. A principal dificuldade para implementação dessa técnica está na derivação da aceleração a partir do sinal de posição da plataforma.

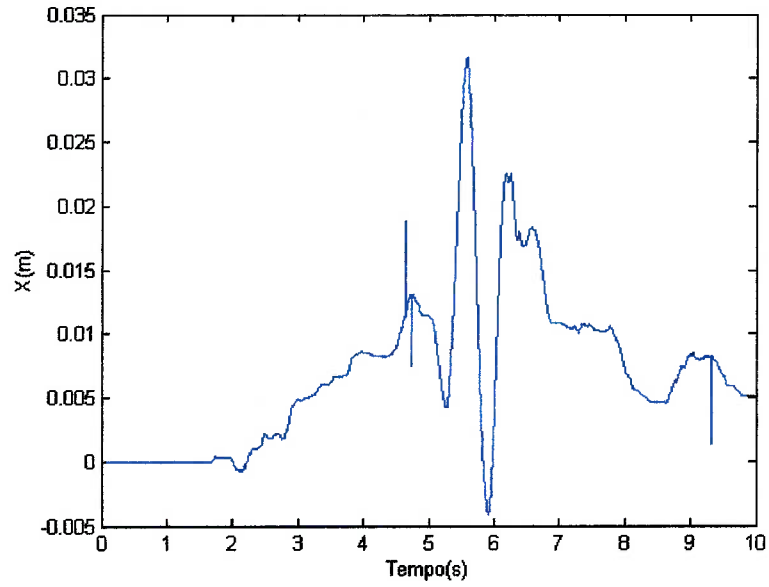


Gráfico 38 -Componente X da posição da plataforma.

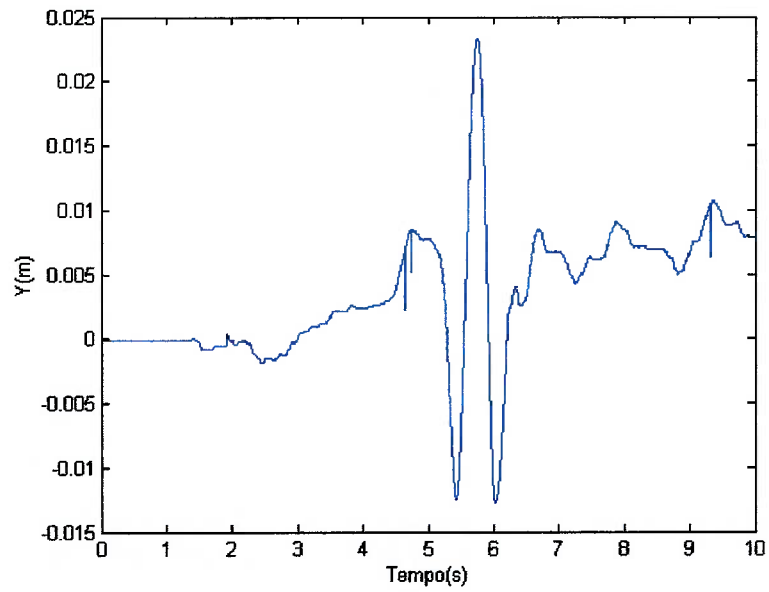


Gráfico 39 - Componente Y da posição da plataforma.

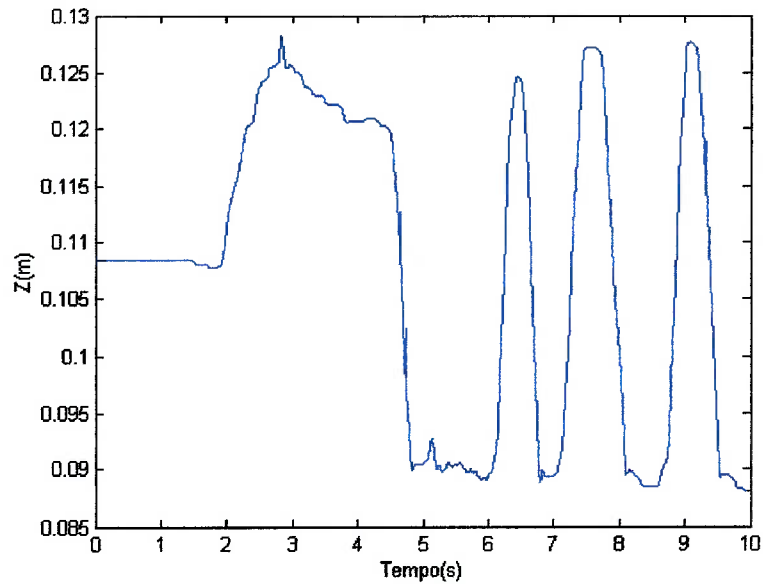


Gráfico 40 - Componente Z da posição da plataforma.

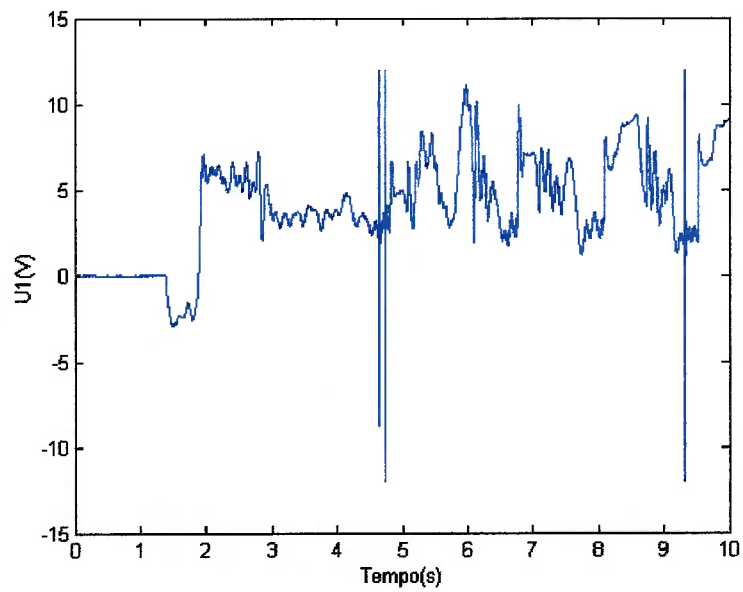


Gráfico 41 - Tensão aplicada ao motor 1.

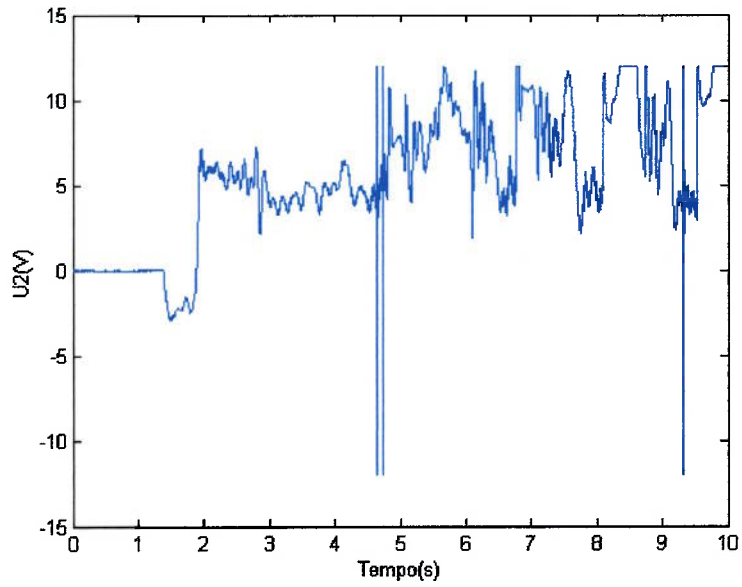


Gráfico 42 - Tensão aplicada ao motor 2.

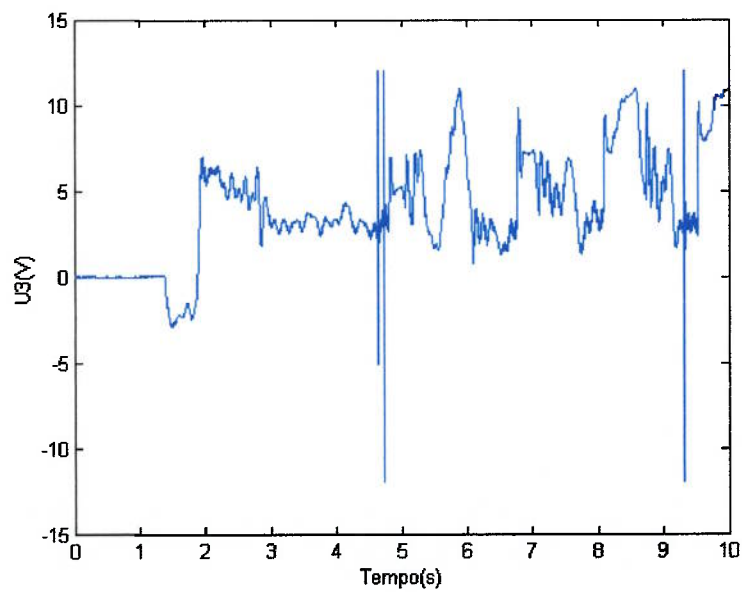


Gráfico 43 - Tensão aplicada do motor 2.

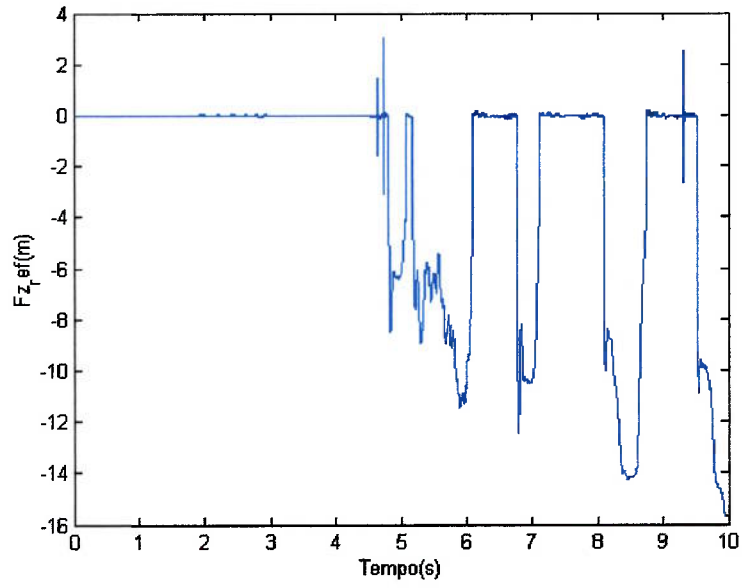


Gráfico 44 - Referência de força na direção Z.

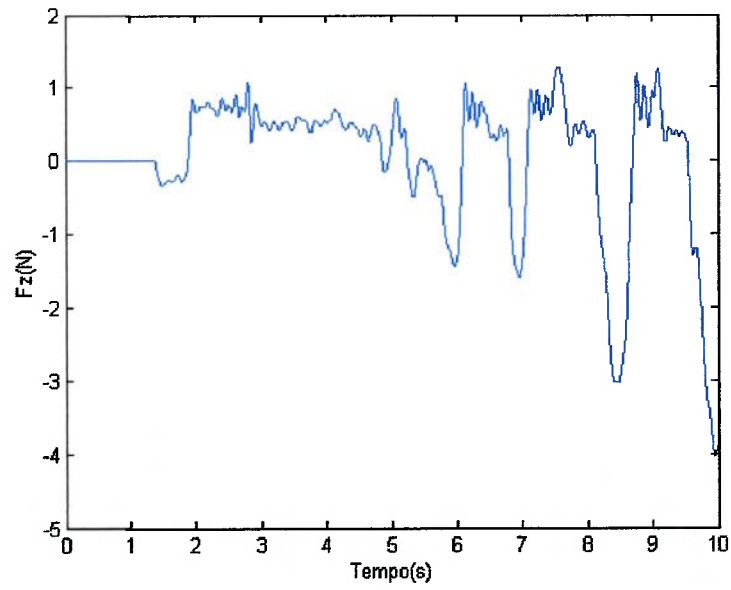


Gráfico 45 - Força aplicada pelo usuário ao manipulador (direção Z).

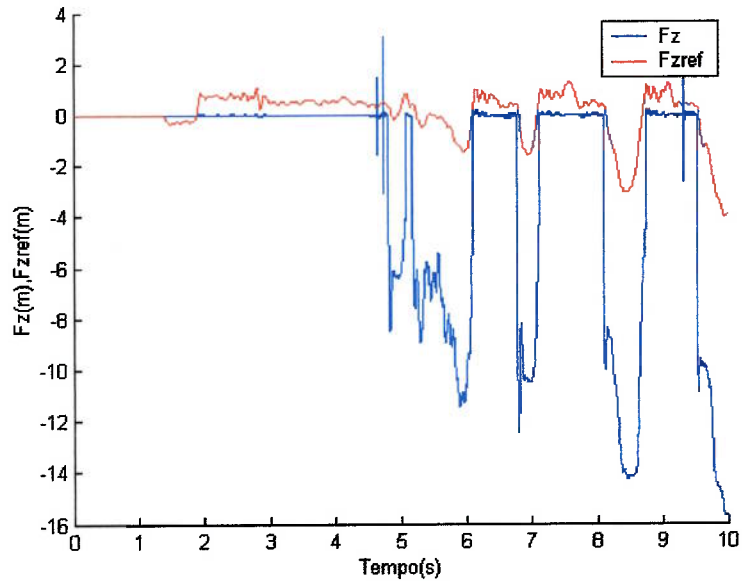


Gráfico 46 - Comparação entre força aplicada pelo usuário e respectiva referência.

No gráfico que faz a comparação entre a força medida e sua respectiva referência, pode-se perceber que um desvio bastante significativo entre essas duas variáveis. Tal desvio poderia ser minimizado com a adoção de um ganho maior no controle. No entanto, verificou-se que esse maior ganho causava instabilidades, o que limitou o desempenho do manipulador.

10. Conclusões Finais

As simulações mostram que, de modo geral, o manipulador teve um bom desempenho para as estratégias de controle apresentadas. No entanto, algumas observações devem ser feitas. A primeira delas é que todas as simulações foram feitas tendo-se em vista um certo conjunto de características do ambiente virtual. No entanto tais características podem variar (o ambiente virtual pode ser uma massa menor durante a movimentação livre, por exemplo), e assim o desempenho do manipulador deverá variar em função disso.

Um outro ponto importante está na modelagem da interação do usuário com o manipulador. Considerou-se, nesse trabalho, que essa interação consiste apenas de uma força diretamente aplicada sem qualquer dependência com relação a qualquer variável. No entanto, isto pode não corresponder à realidade. A região do corpo humano que fica em contato com o manipulador tem suas próprias características dinâmicas. Essas características podem variar de pessoa para pessoa, ou até mesmo com a intensidade da força de interação. O problema está no fato de que o sistema formado pelo manipulador e o usuário, quando se utiliza de controles digitais, pode ser instável. Conforme constata Hasser [29], um mesmo manipulador pode ser estável para uma pessoa e instável para outras. Ou ainda, uma mesma pessoa usando um mesmo manipulador pode formar um sistema instável ou estável, isto dependendo apenas da força utilizada pela pessoa para interagir com o manipulador. Este fato também foi constatado no protótipo construído nesse trabalho. Para uma determinada sintonização do controle, um contato mais suave com o manipulador resultava em uma situação estável. Ao se aplicar mais força no contato com o manipulador, o sistema se tornava instável.

Por último, tem-se a questão do desempenho do manipulador durante a transição da movimentação livre para a parede virtual. Dentro do paradigma de manipulador apresentado nesse trabalho, dimensionar o manipulador para essa situação crítica provavelmente significará atuadores mais potentes ou a fatores de reduções maiores. No caso de se optar por atuadores mais potentes, estes provavelmente terão inércias maiores, o que tornará o sistema mais lento, assim prejudicando o desempenho do manipulador nas situações normais de uso. Já no caso de se optar por um fator de redução maior, além de um certo aumento de inércia, também se tem o problema do

atrito maior, o que prejudicaria a fidelidade com que o manipulador fornece as forças ao usuário. O que se quer mostrar é que existe uma solução de compromisso. Um bom desempenho durante uma movimentação livre provavelmente significará um desempenho pior durante o impacto com a parede virtual e vice-versa.

O protótipo do manipulador mostrou bons resultados e, após algumas melhorias, pode se tornar um artefato totalmente utilizável para a aplicação inicialmente proposta (treinamento médico). Dos fatores que influenciam o desempenho do manipulador, o fator de maior peso para o presente caso foi a estabilidade de controle. Pode-se constatar que conforme se aumenta o ganho, um comportamento mais condizente com o que é definido pelo ambiente virtual se verifica. Entretanto, a partir de certo momento, um ganho ainda maior passa a causar instabilidade no manipulador. Ainda sobre o controle, nas segunda e terceira estratégias de controle, um outro fato notado foi que um determinado ganho que seja adequado para uma restrição rígida pode não ser adequado para uma movimentação livre. Com relação aos ganhos determinados teoricamente através do modelo elaborado, constatou-se que para uma restrição rígida, os ganhos deveriam ser menores, já para a movimentação livre, os ganhos poderiam ser aumentados. Por exemplo, na segunda estratégia, de controle de posição, o ganho teoricamente determinado que resultaria em um bom desempenho tanto para uma restrição rígida quanto para uma movimentação livre foi de 79100. No manipulador construído, o ganho máximo possível de maneira a não ocorrer instabilidades em uma restrição rígida foi de 60100. Já para a movimentação livre, o ganho pode chegar até o valor de 200100.

Eventuais melhorias nesse manipulador devem se concentrar principalmente em estratégias de controle ou formas construtivas que proporcionem maior estabilidade tanto para restrições rígidas como para movimentações livres. Uma estratégia de ganhos variáveis pode ser uma abordagem para trabalhos futuros.

11.Referências Bibliográficas

[1] Gorman, P., Krummel, T., Webster, R., Smith M., Hutchens, D., “A Prototype Haptic Lumbar Puncture Simulator”, Medicine Meets Virtual Reality, 2000.

[2] Sinclair, J.Michael; Peifer, John W.; Haleblian, Ray; Luxenberg Malcom N.; Green, Keith; Hull, David S. Computer-simulated Eye Surgery. A Novel Teaching Method for Residents and Practioners. 1994.

[3] Downes,Michael., Cavusoglu, M.C., Gantert, W., Way, L. W., Tendick, F., “Virtual Enviroment for Traning Critical Skills in Laparoscopic Surgey”, Proceedings of Medicine Meets Virtual Reality VI, San Diego, CA, January 1998, pp. 316-322.

[4] Meier, Andreas H; Rawn L, Chantal; Krummel, Thomas M.. “Virtual Reality: Surgical Application- Challenge for the New Millennium”, Journal of the American College of Surgeons 192 (3) (2001) pp. 372-384.

[5] Picinbono, Guillaume; Delingette, Hervé; Ayache, Nicholas. “Non-linear and Anisotropic elastic soft tissue models for medical simulation”. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol. 2, pp. 1370-1375, 2001.

[6] Kass, M., Miller, G., 1990, “Rapid, Stable Fuid Dynamics for Computer Graphics,” Computer Graphics, Vol.24, No.4, 1990, pp 49-57.

[7] Mark, Willian R.; Randolph, Scott C.; Finch, Mark; Van Verth M., James; Taylor, Russel M.. “Adding Force Feedback to Graphics Systems: Issues and Solutions”. Computer Graphics: Proceeding of Siggraph, pp.447 -452, August 1996.

[8] Basdogan, C.,”Real-time Dynamics of Deformable Finite Element Models”, Stanford Workshop on Surgical Simulation”,2001

[9] Klosowki, J.T., Held, M., Mitchell, J.S.B., Sowizral, H., Zikan, K., "Efficient Collision Detection Using Bounding of k-DOPs", IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Volume 4, Issue 1, 1998.

[10] <http://www.stlukeseye.com/>

[11] <http://www.alconlabs.com/br/eo/surgery/catarata.jhtml>

[12] Tsumaki, Y., Naruse, H., Nenchev, D. N., Uchiyama, M., "Design of a Compact 6-DOF Haptic Interface", Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, (1998/5/16-20), 2580-2585.

[13] <http://www.space.mech.tohoku.ac.jp/research/haptic/haptic-e.html>

[14] Página web do [Prof. Jean-Pierre Merlet](#).

[15] <http://www.parallemic.org/Reviews/Review002.html>

[16] Tsai, L. Stamper, R.E., Walsh, G.C. "Optimization of a Three DOF Translational Platform for Well-Conditioned Workspace." Mechanical Engineering Department and Institute for Systems Research. University of Maryland. August 30, 1997.

[17] Ottaviano, E., Ceccarelli, M. "Optimal Design of CAPAMAN (Cassino Parallel Manipulator) with Prescribed Workspace." Laboratory of Robotics and Mechatronics, DiMSAT - University of Cassino.

[18] Park, F., Brockett, R. "Kinematic dexterity of robotic mechanisms," The international Journal of Robotics Research, vol. 13, pp. 1-15, 1994.

[19] Gosselin, C., Angeles, J. "A Global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators." ASME Journal of Mechanical Design, vol. 113, pp. 220-226, 1991.

[20] Lum, M. J.H., Rosen, j., Sinanan M.N., Hannaford, B., "Kinematic Optimization of a Spherical Mechanism for a Minimally Invasive Sugical Robot", Department of Eletrictical Engineering, Department Sugery, University of Washington. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation. New Orleans, April 2004.

[21] Lanczos, C. "The Variational Principle of Mechanics", fourth edition, 1986.

[22] Kövecses, J., Piedœuf, J., Lange C., "Methods for Dynamic Models of Parallel Robots and Mechanisms", Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec, Canda, 2002.

[23] Yokokohji, Y., Holli, R. L., Kanade, T., "What you can See Is What You can Fell."-Development of a Visual/Hapitc Interface to Virtual Environment-. The Robotics Institute. Carnegie Mellon University, 1996.

[24] Massie, T.H., Salisbury, J. K., "The Phantom Haptic Interface: A Device for Probing Virtual Objects," Proc. Asme International Mechanical Engineering Congress and Exhibition, Chicago, 1994.

[25] Sampaio, M. M., "Design of Active Sidestick Controllers", Tese apresentada à Divisão de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico da Aeronautica, São José dos Campos, SP-Brasil, 2002.

[26] Asada, H., Slotine, J., E., "Robot Analysis and Control", New York, N. Y.: J. Weley. 1986.

[27] Spong, M.W. "Robot Dynamics and Control", 1989.

[28] Takahashi, Y., Rabins, J. M., Auslander, D. M., "Control and Dynamic Systems", 1970.

[29] Hasser,C., J.,“The Effects of Displacement Quantization and Zero-order hold on the Limit Cycle Behavior of Haptic Knobs”, Dissertation submitted to the Department of Mechanical Engineering of Stanford University, december, 2001.

12.Apêndice A

Matriz de massa da perna i do mecanismo:

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{i(1,1)} & M_{i(1,2)} & M_{i(1,3)} \\ M_{i(2,1)} & M_{i(2,2)} & M_{i(2,3)} \\ M_{i(3,1)} & M_{i(3,2)} & M_{i(3,3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{i(1,1)} &= 2m_2a_1^2 - 2m_2C_{12}a_2 + m_2a_2^2 + m_2C_{12}^2 + m_2C_{12}^2 \cos(2\theta_{i3}) + m_2a_2^2 \cos(2\theta_{i3}) - 2m_2C_{12}a_2 \cos(2\theta_{i3}) \\ &- 2m_2a_1C_{12} \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) - 2m_2a_1C_{12} \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) + 2m_2a_1a_2 \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) \\ &+ 2m_2a_1a_2 \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_1C_{11}^2 - 2m_1C_{11}a_1 + m_1a_1^2 + I_{1x} + I_{2x} + I_{2x} \cos(2\theta_{i3}) + I_{2z} - I_{2z} \cos(2\theta_{i3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{i(1,2)} &= -2m_2C_{12}a_2 + m_2a_2^2 + m_2C_{12}^2 + m_2C_{12}^2 \cos(2\theta_{i3}) \\ &- 2m_2C_{12}a_2 \cos(2\theta_{i3}) + m_2a_2^2 \cos(2\theta_{i3}) + m_2a_1a_2 \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_2a_1a_2 \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) \\ &- m_2a_1C_{12} \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) - m_2a_1C_{12} \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) + I_{2x} + I_{2x} \cos(2\theta_{i3}) + I_{2z} - I_{2z} \cos(2\theta_{i3}) \end{aligned}$$

$$M_{i(1,3)} = -m_2a_1C_{12} \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_2a_1C_{12} \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) - m_2a_1a_2 \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_2a_1a_2 \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2})$$

$$\begin{aligned} M_{i(2,1)} &= -2m_2C_{12}a_2 + m_2a_2^2 + m_2C_{12}^2 + m_2C_{12}^2 \cos(2\theta_{i3}) \\ &- 2m_2C_{12}a_2 \cos(2\theta_{i3}) + m_2a_2^2 \cos(2\theta_{i3}) + m_2a_1a_2 \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_2a_1a_2 \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) \\ &- m_2a_1C_{12} \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) - m_2a_1C_{12} \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) + I_{2x} + I_{2x} \cos(2\theta_{i3}) + I_{2z} - I_{2z} \cos(2\theta_{i3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{i(2,2)} &= -2m_2C_{12}a_2 + m_2a_2^2 + m_2C_{12}^2 + m_2C_{12}^2 \cos(2\theta_{i3}) + m_2a_2^2 \cos(2\theta_{i3}) - 2m_2C_{12}a_2 \cos(2\theta_{i3}) \\ &+ I_{2x} + I_{2x} \cos(2\theta_{i3}) + I_{2z} + I_{2z} - I_{2z} \cos(2\theta_{i3}) \end{aligned}$$

$$M_{i(2,3)} = 0$$

$$M_{i(3,1)} = -m_2a_1C_{12} \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_2a_1C_{12} \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) - m_2a_1a_2 \cos(-\theta_{i3} + \theta_{i2}) + m_2a_1a_2 \cos(\theta_{i3} + \theta_{i2})$$

$$M_{i(3,2)} = 0$$

$$M_{i(3,3)} = 2m_2C_{12}^2 - 4m_2C_{12}a_2 + 2m_2a_2^2 + 2I_{2y}$$

Matriz giroscópica da perna i do mecanismo:

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{i(1,1)} \\ C_{i(2,1)} \\ C_{i(3,1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{i(1,1)} = & 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2m_2a_1\sin(\theta_{12})\cos(\theta_{12})(C_{12} - a_2) - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})(m_2C_{12}^2\cos(\theta_{13}) + m_2a_2^2\cos(\theta_{13})) \\ & - 2m_2C_{12}a_2\cos(\theta_{13}) - m_2a_1C_{12}\cos(\theta_{12}) + m_2a_1a_2\cos(\theta_{12}) + \cos(\theta_{13})I_{2x} - I_{2z}\cos(\theta_{13})) \\ & + 2m_2a_1\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_{12})\cos(\theta_{13})(C_{12} - a_2) - 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})(2m_2C_{12}^2\cos(\theta_{13}) - 4m_2C_{12}a_2\cos(\theta_{13})) \\ & 2m_2a_2^2\cos(\theta_{13}) + m_2a_1a_2\cos(\theta_{12}) - m_2a_1C_{12}\cos(\theta_{12}) + 2\cos(\theta_{13})I_{2x} - 2I_{2z}\cos(\theta_{13})) \\ & + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3m_2a_1\cos(\theta_{12})\sin(\theta_{13})(C_{12} - a_2) + 2\dot{\theta}_3^2m_2a_1\sin(\theta_{12})\cos(\theta_{13})(C_{12} - a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{i(2,1)} = & 2\cos(\theta_{13})(\sin(\theta_{12})\dot{\theta}_1^2a_1C_{12} - \sin(\theta_{12})\dot{\theta}_1^2a_1a_2 - 4\sin(\theta_{13})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3C_{12}a_2 + 2\sin(\theta_{13})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3a_2^2 \\ & 2\sin(\theta_{13})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3C_{12}^2 - 4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})C_{12}a_2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})a_2^2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})C_{12}^2)m_2 \\ & - 2\cos(\theta_{13})(2\sin(\theta_{13})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3I_{2x} - 2\sin(\theta_{13})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3I_{2z} - 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})I_{2z} + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\sin(\theta_{13})I_{2x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{i(3,1)} = & 2\sin(\theta_{13})(-2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_{12}^2\cos(\theta_{13}) + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_{12}a_2\cos(\theta_{13}) - \dot{\theta}_1^2a_2a_1\cos(\theta_{12}) + \dot{\theta}_1^2C_{12}a_1\cos(\theta_{12})) \\ & - \dot{\theta}_1^2a_2^2\cos(\theta_{13}) - \dot{\theta}_1^2C_{12}\cos(\theta_{13}) - \dot{\theta}_2^2\cos(\theta_{13})C_{12}^2 + 2\dot{\theta}_2^2\cos(\theta_{13})C_{12}a_2 - \dot{\theta}_2^2\cos(\theta_{13})a_2^2 \\ & - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2a_2^2\cos(\theta_{13}) + 2\dot{\theta}_1^2C_{12}a_2\cos(\theta_{13})m_2 - 2\sin(\theta_{13})(-\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_{13})I_{2x} + \dot{\theta}_1^2I_{2z}\cos(\theta_{13})) \\ & - I_{2x}\cos(\theta_{13})\dot{\theta}_2^2 + I_{2z}\cos(\theta_{13})\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2I_{2z}\cos(\theta_{13}) - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_{13})I_{2x}) \end{aligned}$$

Matriz de esforços gravitacionais da perna i do mecanismo:

$$G_i = \begin{bmatrix} G_{i(1,1)} \\ G_{i(2,1)} \\ G_{i(3,1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_{i(1,1)} = & (m_1\sin(\theta_{11})C_{11} - m_1\sin(\theta_{11})a_1 + m_2C_{12}\sin(\theta_{13} + \theta_{12} + \theta_{11}) + m_2C_{12}\sin(-\theta_{13} + \theta_{12} + \theta_{11})) \\ & - m_2a_2\sin(\theta_{13} + \theta_{12} + \theta_{11}) - m_2a_2\sin(-\theta_{13} + \theta_{12} + \theta_{11}) - 2m_2\sin(\theta_{11})a_1)g \end{aligned}$$

$$G_{i(2,1)} = 2m_2g\cos(\theta_{13})(C_{12} - a_2)(\sin(\theta_{11})\cos(\theta_{12}) + \cos(\theta_{11})\sin(\theta_{12}))$$

$$G_{i(3,1)} = -2m_2g\sin(\theta_{13})(C_{12} - a_2)(-\cos(\theta_{11})\cos(\theta_{12}) + \sin(\theta_{11})\sin(\theta_{12}))$$

13.Apêndice B- Resultados da Dinâmica Direta para Algumas Situações.

Para o cálculo da dinâmica direta nesse apêndice, as dimensões, massas e inércias do mecanismos são as mesmas utilizadas nas simulações do manipulador (ver tabela 3).

Situação 1 (movimento devido apenas a gravidade)

$$\theta_{11} = 1.1992\text{rad} \quad \theta_{21} = 1.1992\text{rad} \quad \theta_{31} = 1.1992\text{rad}$$

$$\dot{\theta}_{11} = 0 \quad \dot{\theta}_{21} = 0 \quad \dot{\theta}_{31} = 0$$

$$\tau_{11} = 0 \quad \tau_{21} = 0 \quad \tau_{31} = 0$$

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0.07\text{m}$$

$$F_x^{ext} = 0 \quad F_y^{ext} = 0 \quad F_z^{ext} = 0$$

Para os dois métodos de dinâmica direta apresentados, os valores de aceleração obtidos foram:

$$\ddot{\theta}_{11} = 88.203\text{rad/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{21} = 88.203\text{rad/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{31} = 88.203\text{rad/s}^2$$

Situação 2

$$\theta_{11} = 0.4997\text{rad} \quad \theta_{21} = 0.6168\text{rad} \quad \theta_{31} = 1.0125\text{rad}$$

$$\dot{\theta}_{11} = 1 \quad \dot{\theta}_{21} = -1 \quad \dot{\theta}_{31} = 1$$

$$\tau_{11} = 0 \quad \tau_{21} = 0 \quad \tau_{31} = 0$$

$$X = -0.02 \quad Y = 0.02 \quad Z = 0.11\text{m}$$

$$F_x^{ext} = 0 \quad F_y^{ext} = 0 \quad F_z^{ext} = 0$$

Para os dois métodos de dinâmica direta apresentados, os valores de aceleração obtidos foram:

$$\ddot{\theta}_{11} = 55.66\text{rad/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{21} = 62.393\text{rad/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{31} = 80.214\text{rad/s}^2$$

Situação 3

$$\theta_{11} = 1.0544\text{rad} \quad \theta_{21} = 0.89358\text{rad} \quad \theta_{31} = 0.53135\text{rad}$$

$$\dot{\theta}_{11} = 1 \quad \dot{\theta}_{21} = -1 \quad \dot{\theta}_{31} = 1$$

$$\tau_{11} = 0.1N \cdot m \quad \tau_{21} = 0.1N \cdot m \quad \tau_{31} = 0.2N \cdot m$$

$$X = 0.02 \quad Y = -0.02 \quad Z = 0.10m$$

$$F_x^{ext} = 0.1N \quad F_y^{ext} = -0.2N \quad F_z^{ext} = 3N$$

Para os dois métodos de dinâmica direta apresentados, os valores de aceleração obtidos foram:

$$\ddot{\theta}_{11} = 101.83\text{rad/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{21} = 109.23\text{rad/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{31} = 160.90\text{rad/s}^2$$

14. Apêndice C - Rotinas de MatLab[®]

Nesse apêndice estão as funções em MatLab[®] que executam as seguintes tarefas:

1. Cinemática inversa
2. Cinemática direta
3. Cálculo do Volume de trabalho
4. Cálculo do índice global de isotropia
5. Dinâmica Inversa
6. Dinâmica direta

```
function Teta=funcaocineinversa(x,a1,a2,Lb,Lp)

%funcao que realiza a cinematica inversa de um robo tipo delta
%Teta=funcaocineinversa(x,a1,a2,Lb,Lp)
%Teta=[011 021 031
%      011 021 031];
%x->vetor com as posições X,Y e Z da plataforma
%a1->comprimento dos ligamentos inferiores
%a2->comprimento das hastes
%Lb->A base do robo delta e um triangulo equilatero de lado Lb
%Lp->A plataforma do robo delta ´e um triangulo equilatero de lado Lp
%Dica de valores para teste
% Lb=1;
% Lp=1;
% a1=0.5;
% a2=0.5;

X=x(1);
Y=x(2);
Z=x(3);

polinomio1 =[ (a1^2-1/6*Lb*Lp+2*a1*Z+1/12*Lb^2+Z^2-a2^2+X^2+1/3*Lb*3^(1/2)*Y
+1/12*Lp^2+Y^2-1/3*Lp*3^(1/2)*Y)
+(4*a1*Y+2/3*a1*Lb*3^(1/2)-2/3*a1*Lp*3^(1/2))
+Z^2-1/3*Lp*3^(1/2)*Y+1/3*Lb*3^(1/2)*Y-1/6*Lb*Lp-2*a1*Z-a2^2+X^2+1/12*Lp^2+Y^2+a1^2+1/12*Lb^2];

polinomio2 =[ (Z^2+1/12*Lp^2-1/6*Lb*Lp+1/12*Lb^2+2*a1*Z+X^2+a1^2-1/6*Lb*3^(1/2)*Y-a2^2+1/2*Lp*X-1/2*Lb*X+Y^2+1/6*Lp*3^(1/2)*Y)
+(2/3*3^(1/2)*a1*Lb-2/3*3^(1/2)*a1*Lp-2*a1*Y-2*3^(1/2)*a1*X)
-2*a1*Z+Z^2-1/6*Lb*Lp+1/6*Lp*3^(1/2)*Y-1/6*Lb*3^(1/2)*Y+X^2-1/2*Lb*X-a2^2+1/2*Lp*X+1/12*Lp^2+Y^2+a1^2+1/12*Lb^2];

polinomio3 =[ (Z^2-a2^2+X^2+1/2*Lb*X+1/12*Lb^2-1/6*Lb*Lp+1/6*Lp*3^(1/2)*Y-1/2*Lp*X+1/12*Lp^2+2*a1*Z-1/6*Lb*3^(1/2)*Y+a1^2+Y^2)
+(2*3^(1/2)*a1*X-2*a1*Y-2/3*3^(1/2)*a1*Lp+2/3*3^(1/2)*a1*Lb)
-a2^2+X^2+Y^2+a1^2-2*a1*Z-1/2*Lp*X+Z^2-1/6*Lb*Lp+1/2*Lb*X+1/12*Lp^2-1/6*Lb*3^(1/2)*Y+1/12*Lb^2+1/6*Lp*3^(1/2)*Y];
```

```
raizes1=roots(polinomio1);  
raizes2=roots(polinomio2);  
raizes3=roots(polinomio3);
```

```
O11=2*atan(raizes1);  
O21=2*atan(raizes2);  
O31=2*atan(raizes3);
```

```
Teta=[O11(1,1) O21(1,1) O31(1,1)  
      O11(2,1) O21(2,1) O31(2,1)];
```

```
function x=funcaocinediretaRapida4(Teta,a1,a2,Lb,Lp)

%função que realiza a cinematica direta de um robo tipo delta
%x=funcaocinediretaRapida4(Teta,a1,a2,Lb,Lp,Xinicial,gama)
%x->posição da plataforma/devolve uma matriz 2x3, da seguinte maneira
%[[X11 X12 X13
% X21 X22 X23]]
%X11 e X12 = X; X12 e X22 = Y; X13 e X23 = Z;
%Teta->vetor com angulos dos ligamentos inferiores
%a1->comprimento dos ligamentos inferiores
%a2->comprimento das hastes
%Lb->A base do robo delta e um triangulo equilatero de lado Lb
%Lp->A base do robo delta e um triangulo equilatero de lado Lp
%Dica de valores para teste
% Lb=1;
% Lp=1;
% a1=0.5;
% a2=0.5;

O11=Teta(1);
O21=Teta(2);
O31=Teta(3);

t1=tan(O11/2);
t2=tan(O21/2);
t3=tan(O31/2);

K11=0;

K12=(-Lp*3^(1/2)-t1^2*Lp*3^(1/2)+12*t1*a1+Lb*3^(1/2)+t1^2*Lb*3^(1/2))/(3+3*
t1^2);

K13=(2*t1^2*a1-2*a1)/(1+t1^2);

K14=(-a2^2+a1^2-1/6*Lb*Lp+1/12*Lb^2+1/12*Lp^2)*t1^2+(2/3*a1*Lb*3^(1/2)-2/3
*a1*Lp*3^(1/2))*t1-1/6*Lb*Lp+1/12*Lb^2+a1^2+1/12*Lp^2-a2^2)/(1+t1^2);

K21=-(4*t2*3^(1/2)*a1-Lp+Lb-t2^2*Lp+t2^2*Lb)/(2*t2^2+2);

K22=(-Lb*3^(1/2)+Lp*3^(1/2)-t2^2*Lb*3^(1/2)-12*t2*a1+t2^2*Lp*3^(1/2))/(6*t2
^2+6);

K23=+(2*t2^2*a1-2*a1)/(t2^2+1);
```


$$K24 = \left((-a^2 - 1/6 * Lb * Lp + a^2 + 1/12 * Lp^2 + 1/12 * Lb^2) * t^2 + 1/12 * Lp^2 + a^2 + 1/12 * Lb^2 - 1/6 * Lb * Lp - a^2 + (-2/3 * a^1 * Lp * 3^{(1/2)} + 2/3 * a^1 * Lb * 3^{(1/2)}) * t \right) / (t^2 + 1);$$

$$K31 = (4 * t^3 * 3^{(1/2)} * a^1 - t^3 * Lp - Lp + Lb + t^3 * Lb) / (2 * t^3 + 2);$$

$$K32 = (Lp * 3^{(1/2)} + t^3 * Lp * 3^{(1/2)} - t^3 * Lb * 3^{(1/2)} - Lb * 3^{(1/2)} - 12 * t^3 * a^1) / (6 + 6 * t^3^2);$$

$$K33 = (2 * t^3^2 * a^1 - 2 * a^1) / (1 + t^3^2);$$

$$K34 = \left((-a^2 + a^2 - 1/6 * Lb * Lp + 1/12 * Lb^2 + 1/12 * Lp^2) * t^3 + 1/12 * Lb^2 + (-2/3 * a^1 * Lp * 3^{(1/2)} + 2/3 * a^1 * Lb * 3^{(1/2)}) * t + 1/12 * Lp^2 - 1/6 * Lb * Lp + a^2 - a^2 \right) / (1 + t^3^2);$$

$$C11 = (K22 * K13 + K23 * K32 - K32 * K13 - K23 * K12 + K33 * K12 - K22 * K33) / (-K11 * K22 + K11 * K32 + K12 * K21 - K12 * K31 + K31 * K22 - K32 * K21);$$

$$C12 = (K34 * K12 - K22 * K34 + K24 * K32 - K32 * K14 - K24 * K12 + K22 * K14) / (-K11 * K22 + K11 * K32 + K12 * K21 - K12 * K31 + K31 * K22 - K32 * K21);$$

$$C21 = (K11 * K23 - K11 * K33 - K13 * K21 + K13 * K31 - K31 * K23 + K33 * K21) / (-K11 * K22 + K11 * K32 + K12 * K21 - K12 * K31 + K31 * K22 - K32 * K21);$$

$$C22 = (K11 * K24 - K14 * K21 - K11 * K34 - K31 * K24 + K14 * K31 + K34 * K21) / (-K11 * K22 + K11 * K32 + K12 * K21 - K12 * K31 + K31 * K22 - K32 * K21);$$

$$\text{polinomio} = [(C11^2 + C21^2 + 1) + (2 * C22 * C21 + 2 * C12 * C11 + K13 + K12 * C21 + K11 * C11) + C12^2 + 2 * C22^2 + K11 * C12 + K12 * C22 + K14];$$

$$Z = \text{roots}(\text{polinomio});$$

$$X = C11 * Z + C12;$$

$$Y = C21 * Z + C22;$$

$$x = [X \ Y \ Z];$$

```
function V=VolumedeTrabalho(a1,a2,Lb,Lp,Ox2_inf,Ox2_sup,Ox3_inf,Ox3_sup,discretizacao,Zpositivo,Figuras)
```

```
%função que calcula area de trbalho de um robo tipo delta
```

```
%V=funcaocineinversa(a1,a2,Lb,Lp)
```

```
%a1->comprimento dos ligamentos conectados a base
```

```
%a2->comprimento dos ligamentos conectados a plataforma
```

```
%Lb->A base do robo delta ´e um triangulo equilatero de lado Lb
```

```
%Lp->A plataforma do robo delta ´e um triangulo equilatero de lado Lp
```

```
%Ox2->corresponde ao modulo do limite de deslocamento angular dos angulos 0, 12, 022, 032.
```

```
%Ox3->corresponde ao modulo do limite de deslocamento angular dos angulos 0, 13, 023, 033.
```

```
%discretizacao->discretizacao do volume de trabalho
```

```
%Zpositivo->Variavel boolena que quando igual a considera apenas Z>0 no calculos realizados
```

```
%Figuras->Variavel boolena que quando igual a 1, mostra as figuas. Se for 0 nao mostra as figuras
```

```
Ext=a1+a2+1*Lp+1*Lb;
```

```
Xinf=-Ext/1.9;
```

```
Xsup=+Ext/1.9;
```

```
Yinf=-Ext/1.9;
```

```
Ysup=+Ext/1.9;
```

```
if Zpositivo==1
```

```
    Zinf=0.00001;
```

```
else
```

```
    Zinf=-1.21*(a1+a2);
```

```
end
```

```
Zsup=1.21*(a1+a2);
```

```
n=discretizacao;
```

```
ntotal=n^3;
```

```
Nespaco=0;
```

```
Nespaco_restrito=0;
```

```
X=linspace(Xinf,Xsup,n);
```

```
Y=linspace(Yinf,Ysup,n);
```

```
Z=linspace(Zinf,Zsup,n);  
  
PVolume=zeros(n,n,n);  
PVolume_restrito=zeros(n,n,n);  
  
for i=1:n  
    for j=1:n  
        for k=1:n  
            Teta=funcaocineinversa([X(i) Y(j) Z(k)],a1,a2,Lb,Lp);  
            aux=[max(Teta(:,1)) max(Teta(:,1)) max(Teta(:,1))];  
            Teta=aux;  
            if imag(Teta(1,1))==0 & imag(Teta(1,2))==0 & imag(Teta(1,3))==0  
                Nespaco=Nespaco+1;  
                PVolume(i,j,k)=1;  
                Teta_ pernas=funcaocineinversa_ pernas_v2([X(i) Y(j) Z(k)],Te  
ta,a1,a2,Lb,Lp);  
                if Teta_ pernas(1,1)<Ox2_sup & Teta_ pernas(1,2)<Ox2_sup & Te  
ta_ pernas(1,3) < Ox2_sup & Teta_ pernas(2,1)<Ox3_sup & Teta_ pernas(2,2)<Ox3_  
sup & Teta_ pernas(2,3)<Ox3_sup & Teta_ pernas(1,1)>Ox2_inf & Teta_ pernas(1,2  
)>Ox2_inf & Teta_ pernas(1,3)>Ox2_inf & Teta_ pernas(2,1)>Ox3_inf & Teta_ pern  
as(2,2)>Ox3_inf & Teta_ pernas(2,3)>Ox3_inf  
                    Nespaco_restrito=Nespaco_restrito+1;  
                    PVolume_restrito(i,j,k)=1;  
                end  
            end  
        end  
    end  
end  
  
if Figuras==1
```

```
hold on
for i=1:n
    for j=1:n
        for k=1:n
            if PVolume(i,j,k)==1
                plot3(X(i),Y(j),Z(k),'.')
            end
        end
    end
end
axis equal

figure
hold on
for i=1:n
    for j=1:n
        for k=1:n
            if PVolume_restrito(i,j,k)==1
                plot3(X(i),Y(j),Z(k),'.')
            end
        end
    end
end
axis equal

figure
Altura=zeros(n,n);
for j=1:n
    for k=1:n
```

```
    for i=1:n
        if PVolume(i,j,k)==1
            if Altura(j,k)>X(i)
                Altura(j,k)=X(i);
            end
        end
    end
end

end

[z y]=meshgrid(Z,Y);
surf(z,y,-Altura);

axis equal
figure

Altura=zeros(n,n);

for j=1:n
    for k=1:n
        for i=1:n
            if PVolume_restrito(i,j,k)==1
                if Altura(j,k)>X(i)
                    Altura(j,k)=X(i);
                end
            end
        end
    end
end

end

end
```

```
[z y]=meshgrid(Z,Y);  
surf(z,y,-Altura);
```

```
axis equal
```

```
end %Figuras==1
```

```
V=[ ((Xsup-Xinf)*(Ysup-Yinf)*(Zsup-Zinf))*Nespaco)/ntotal  
    ((Xsup-Xinf)*(Ysup-Yinf)*(Zsup-Zinf))*Nespaco_restrito)/ntotal];
```

```
function Destreza=funcaoisotropia(a1,a2,Lb,Lp,discretizacao,Zpositivo)

%função que calcula inidice global de isotropia de um robo tipo delta
%V=funcaocineinversa(a1,a2,Lb,Lp)
%a1->comprimento dos ligamentos conectados a base
%a2->comprimento dos ligamentos conectados a plataforma
%Lb->A base do robo delta ´e um triangulo equilatero de lado Lb
%Lp->A plataforma do robo delta ´e um triangulo equilatero de lado Lp
%discretizacao->discretizacao do volume de trabalho
%Zpositivo->Variavel booleana que quando igual a considera apenas Z>0 no cal✓
culos realizados

Ext=a1+a2+1*Lp+1*Lb;

Xinf=-Ext/2;
Xsup=+Ext/2;

Yinf=-Ext/2;
Ysup=+Ext/2;

if Zpositivo==1
    Zinf=0.0001;
else
    Zinf=-1.21*(a1+a2);
end

Zsup=1.21*(a1+a2);

n=discretizacao;

ntotal=n^3;

Nespaco=0;

X=linspace(Xinf,Xsup,n);
Y=linspace(Yinf,Ysup,n);
Z=linspace(Zinf,Zsup,floor(n/2));

dX=(Xsup-Xinf)/n;
dY=(Ysup-Yinf)/n;
dZ=(Zsup-Zinf)/(n/2);

dV=dX*dY*dZ;
```

Isotropia=0;

V=0;

for i=1:n

for j=1:n

for k=1:(n/2)

Teta=funcaocineinversa([X(i) Y(j) Z(k)],a1,a2,Lb,Lp);
aux=[max(Teta(:,1)) max(Teta(:,1)) max(Teta(:,1))];
Teta=aux;

O1=Teta(1,1);

O2=Teta(1,2);

O3=Teta(1,3);

x=X(i);

y=Y(j);

z=Z(k);

if imag(Teta(1,1))==0 & imag(Teta(1,2))==0 & imag(Teta(1,3))==0

Nespaco=Nespaco+1;

PVolume(i,j,k)=1;

Jq = [[1/3*a1*(cos(O1)*Lb*3^(1/2)-cos(O1) ✓
*Lp*3^(1/2)+6*cos(O1)*y+6*sin(O1)*z), 0, ✓
0] ✓

[0, -1/3*a1*(-3^(1/2)*cos(O2)*Lb+3^(1/2)* ✓
cos(O2)*Lp+3*3^(1/2)*cos(O2)*x+3*cos(O2)*y-6*sin(O2)*z), ✓
0] ✓

[0, 1/3*a1*(3^(1/2)* ✓
cos(O3)*Lb-3^(1/2)*cos(O3)*Lp+3*3^(1/2)*cos(O3)*x-3*cos(O3)*y+6*sin(O3)*z] ✓
]; ✓

Jx = [[2*x, 2*sin(O1) ✓
*a1+1/3*Lb*3^(1/2)-1/3*Lp*3^(1/2)+2*y, -2*cos(✓
O1)*a1+2*z] ✓

[-3^(1/2)*sin(O2)*a1-1/2*Lb+1/2*Lp+2*x, -sin(O2) ✓
*a1-1/6*Lb*3^(1/2)+1/6*Lp*3^(1/2)+2*y, -2*cos(✓
O2)*a1+2*z] ✓

[3^(1/2)*sin(O3)*a1+1/2*Lb-1/2*Lp+2*x, -sin(O3) ✓
*a1-1/6*Lb*3^(1/2)+1/6*Lp*3^(1/2)+2*y, -2*cos(✓
O3)*a1+2*z] ✓

];


```
J=-inv(Jx)*Jq;  
lambda=eig(J);  
lambda=abs(lambda);  
Isotropia=Isotropia+dV*(min(lambda)/max(lambda));
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
function Torque=funcaoDinamicaInversa(O,Op,Opp,Fext,g)
```

```
%funcao que realiza a dinamica Inversa de um mecanismo tipo delta  
%Realiza a dinamica inversa de mecanismo delta  
%Torque=funcaoDinamicaInversa(O,Op,Opp,Fext,xo)  
%Torque->torque dos atuadores  
%O->posicao dos atuadores  
%Op->velocidade dos atuadores  
%Opp->aceleracao dos atuadores  
%Fext->forca externa que atua na plataforma  
%g->valor da gravidade(colocar 0 se quiser modelo sem gravidade)  
%xo->chute para a posicao inicial da plataforma
```

```
%Entradas da dinamica inversa
```

```
O11=O(1);  
O21=O(2);  
O31=O(3);
```

```
O11p=Op(1);  
O21p=Op(2);  
O31p=Op(3);
```

```
O11pp=Opp(1);  
O21pp=Opp(2);  
O31pp=Opp(3);
```

```
fextX=Fext(1);  
fextY=Fext(2);  
fextZ=Fext(3);
```

```
%chama os parametros do sistema  
Parametros
```

```
%calcula a posicao da plataforma dada a posicao dos atuadores(O11,O21 e O31  
)
```

```
x=funcaocinediretaRapida4([O11 O21 O31],a1,a2,Lb,Lpt);
```

```
x=x(1,:);
```

```
X=x(1,1);  
Y=x(1,2);  
Z=x(1,3);
```

%matrizes Jq e Jx

```
Jq(:,1)=[[ 1/3*(cos(O11)*Lb*3^(1/2)-cos(O11)*Lpt*3^(1/2)+6*cos(O11)*Y+6*Z*sin(O11))*a1
          [
          0]
          [
          0]];

```

```
Jq(:,2)=[[
          0]
          [ -1/3*(-3^(1/2)*cos(O21)*Lb+3^(1/2)*cos(O21)*Lpt+3*3^(1/2)*cos(O21)*X+3*cos(O21)*Y-6*Z*sin(O21))*a1]
          [
          0]];

```

```
Jq(:,3)=[[
          0]
          [
          0]
          [ 1/3*(3^(1/2)*cos(O31)*Lb-3^(1/2)*cos(O31)*Lpt+3*3^(1/2)*cos(O31)*X-3*cos(O31)*Y+6*Z*sin(O31))*a1]];

```

```
Jx(:,1)=[[
          2*X]
          [ -3^(1/2)*a1*sin(O21)-1/2*Lb+1/2*Lpt+2*X]
          [ 3^(1/2)*a1*sin(O31)+1/2*Lb-1/2*Lpt+2*X]];

```

```
Jx(:,2)=[[ 2*a1*sin(O11)+1/3*Lb*3^(1/2)-1/3*Lpt*3^(1/2)+2*Y]
          [ -a1*sin(O21)-1/6*Lb*3^(1/2)+1/6*Lpt*3^(1/2)+2*Y]
          [ -a1*sin(O31)-1/6*Lb*3^(1/2)+1/6*Lpt*3^(1/2)+2*Y]];

```

```
Jx(:,3)=[[ -2*a1*cos(O11)+2*Z]
          [ -2*a1*cos(O21)+2*Z]
          [ -2*a1*cos(O31)+2*Z]];

```

%calcula a velocidade da plataforma

```
xp=inv(Jx)*(-Jq*[O11p O21p O31p]');
Xp=xp(1,1);
Yp=xp(2,1);
Zp=xp(3,1);

```

```
Jxp =[[
          2*Xp,
          2*a1*cos(O11)*O11p+2*Yp,
          2*a1*sin(O11)*O11p+2*Zp]
          [ -3^(1/2)*a1*cos(O21)*O21p+2*Xp,
          -a1*cos(O21)*O21p+2*Yp,
          -3^(1/2)*a1*cos(O31)*O31p+2*Xp,
          -a1*cos(O31)*O31p+2*Yp,
          -2*a1*cos(O11)+2*Zp,
          -2*a1*cos(O21)+2*Zp,
          -2*a1*cos(O31)+2*Zp]];

```

```
2*a1*sin(O21)*O21p+2*Zp]
[ 3^(1/2)*a1*cos(O31)*O31p+2*Xp, -a1*cos(O31)*O31p+2*Yp,
2*a1*sin(O31)*O31p+2*Zp]]];
```

```
Jqp(:,1)=[ [ (1/3*(-sin(O11)*Lb*3^(1/2)+sin(O11)*Lpt*3^(1/2)-6*sin(O11)*Y+6*
cos(O11)*Z)*O11p+2*cos(O11)*Yp+2*sin(O11)*Zp)*a1]
[
[
0]
0]]];
```

```
Jqp(:,2)=[ [
0]
[ (1/3*(-3^(1/2)*sin(O21)*Lb+3^(1/2)*sin(O21)*Lpt+3*3^(1/2)*sin(O
21)*X+3*sin(O21)*Y+6*cos(O21)*Z)*O21p-3^(1/2)*cos(O21)*Xp-cos(O21)*Yp+2*sin
(O21)*Zp)*a1]
[
0]]];
```

```
Jqp(:,3)=[ [
0]
[ (1/3*(-3^(1/2)*sin(O31)*Lb+3^(1/2)*sin(O31)*Lpt-3*3^(1/2)*sin(O
31)*X+3*sin(O31)*Y+6*cos(O31)*Z)*O31p+3^(1/2)*cos(O31)*Xp-cos(O31)*Yp+2*sin
(O31)*Zp)*a1]]];
```

```
%calcula aceleracao da plataforma
```

```
xpp=inv(Jx)*(-Jxp*xp-Jqp*[O11p O21p O31p]'-Jq*[O11pp O21pp O31pp]');
```

```
%Pernas
```

```
%aux=funcaocineinversa_pernas_v2(x,[O11 O21 O31],a1,a2,Lb,Lpt)
aux=funcaocineinversa_pernas_v3(x,[O11 O21 O31],a1,a2,Lb,Lpt);
```

```
O12=aux(1,1);
O13=aux(2,1);
O22=aux(1,2);
O23=aux(2,2);
O32=aux(1,3);
O33=aux(2,3);
```

```
Jacob1 =[[
                                                    0, ✓
                                                    0, ✓
                                                    cos(O13)*a2]
    [-1/2*a2*cos(O13-O11-O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)-a1*cos(O11), ✓
    -1/2*a2*cos(O13-O11-O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12), 1/✓
    2*a2*cos(O13-O11-O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)]
    [-1/2*a2*sin(O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13-O11-O12)-a1*sin(O11), ✓
    -1/2*a2*sin(O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13-O11-O12), -1/✓
    2*a2*sin(O13+O11+O12)-1/2*a2*sin(O13-O11-O12)]];

```

```
Jacob2 =[[ 1/4*3^(1/2)*a2*cos(-O23+O21+O22)+1/4*3^(1/2)*a2*cos(O23+O21+O22) ✓
+1/2*3^(1/2)*a1*cos(O21), 1/4*3^(1/2)*a2*cos(-O23+O ✓
21+O22)+1/4*3^(1/2)*a2*cos(O23+O21+O22), -1/2*cos(O23)*a2-1/4*3^(1/2) ✓
)*a2*cos(-O23+O21+O22)+1/4*3^(1/2)*a2*cos(O23+O21+O22)]
    [ 1/4*a2*cos(-O23+O21+O22)+1/4*a2*cos(O23+ ✓
O21+O22)+1/2*a1*cos(O21), 1/4*a2*cos(O23+O21+O22) ✓
s(-O23+O21+O22)+1/4*a2*cos(O23+O21+O22), 1/2*3^(1/2)*cos(O2 ✓
3)*a2-1/4*a2*cos(-O23+O21+O22)+1/4*a2*cos(O23+O21+O22)]
    [-1/2*a2*sin(O23+O21+O22)-1/2*a2*sin(- ✓
O23+O21+O22)-a1*sin(O21), -1/2*a2*sin(O23+O21+O22) ✓
n(O23+O21+O22)-1/2*a2*sin(-O23+O21+O22), ✓
-1/2*a2*sin(O23+O21+O22)+1/2*a2*sin(-O23+O21+O22)]];

```

```
Jacob3 =[[ -1/4*3^(1/2)*a2*cos(-O33+O31+O32)-1/4*3^(1/2)*a2*cos(O33+O31+O32) ✓
)-1/2*3^(1/2)*a1*cos(O31), -1/4*3^(1/2)*a2*cos(-O33 ✓
+O31+O32)-1/4*3^(1/2)*a2*cos(O33+O31+O32), -1/2*cos(O33)*a2+1/4*3^( ✓
1/2)*a2*cos(-O33+O31+O32)-1/4*3^(1/2)*a2*cos(O33+O31+O32)]
    [ 1/4*a2*cos(-O33+O31+O32)+1/4*a2*cos(O33 ✓
+O31+O32)+1/2*a1*cos(O31), 1/4*a2*cos(O33+O31+O32) ✓
cos(-O33+O31+O32)+1/4*a2*cos(O33+O31+O32), -1/2*3^(1/2)*cos ✓
(O33)*a2-1/4*a2*cos(-O33+O31+O32)+1/4*a2*cos(O33+O31+O32)]
    [-1/2*a2*sin(O33+O31+O32)-1/2*a2*sin( ✓
-O33+O31+O32)-a1*sin(O31), -1/2*a2*sin(O33+O31+O32) ✓
sin(O33+O31+O32)-1/2*a2*sin(-O33+O31+O32), ✓
-1/2*a2*sin(O33+O31+O32)+1/2*a2*sin(-O33+O31+O32)]];

```

```
aux=inv(Jacob1)*xp;
O12p=aux(2,1);
O13p=aux(3,1);
```

```
aux=inv(Jacob2)*xp;
O22p=aux(2,1);
O23p=aux(3,1);
```

```
aux=inv(Jacob3)*xp;
O32p=aux(2,1);
O33p=aux(3,1);
```

Jacob1p=[[

0,

0,

```
    -sin(O13)*a2*O13p]
    [(1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12)+a1*sin(O11))
*O11p+(1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O12p+(-1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O13p,
(1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O11p+(1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O12p+(-1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O13p,
(-1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O11p+(-1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O12p+(1/2*a2*sin(-O13+O11+O12)+1/2*a2*sin(O13+O11+O12))*O13p];
    [(-1/2*a2*cos(-O13+O11+O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)-a1*cos(O11))
*O11p+(-1/2*a2*cos(-O13+O11+O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12))*O12p+(-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)+1/2*a2*cos(-O13+O11+O12))*O13p,
(-1/2*a2*cos(-O13+O11+O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12))*O11p+(-1/2*a2*cos(-O13+O11+O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12))*O12p+(-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)+1/2*a2*cos(-O13+O11+O12))*O13p,
(-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)+1/2*a2*cos(-O13+O11+O12))*O11p+(-1/2*a2*cos(O13+O11+O12)+1/2*a2*cos(-O13+O11+O12))*O12p+(-1/2*a2*cos(-O13+O11+O12)-1/2*a2*cos(O13+O11+O12))*O13p];
```

```
Jacob2p=[[(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22)-1/2*3^(1/2)*a1*sin(O21))*O21p+(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O22p+(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O23p,
(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O21p+(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O22p+(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O23p,
(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O21p+(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O22p+(1/2*sin(O23)*a2-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*3^(1/2)*a2*sin(O23+O21+O22))*O23p];
    [(-1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22)-1/2*a1*sin(O21))*O21p+(-1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O22p+(1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O23p,
(-1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O21p+(-1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O22p+(1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O23p,
(1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O21p+(1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O22p+(-1/2*3^(1/2)*sin(O23)*a2-1/4*a2*sin(-O23+O21+O22)-1/4*a2*sin(O23+O21+O22))*O23p];
    [(-1/2*a2*cos(O23+O21+O22)-1/2*a2*cos(-O23+O21+O22)-a1*cos(O21))*O21p+(-1/2*a2*cos(O23+O21+O22)-1/2*a2*cos(-O23+O21+O22))*O22p+(-1/2*a2*cos(O23+O21+O22)+1/2
```

```
*a2*cos(-023+021+022))*023p,  
(-1/2*a2*cos(023+021+022)-1/2*a2*cos(-023+021+022))  
) *021p+(-1/2*a2*cos(023+021+022)-1/2*a2*cos(-023+021+022))*022p+(-1/2*a2*co  
s(023+021+022)+1/2*a2*cos(-023+021+022))*023p,  
(-1/2*a2*cos(023+021+022)+1/2*a2  
*cos(-023+021+022))*021p+(-1/2*a2*cos(023+021+022)+1/2*a2*cos(-023+021+022))  
) *022p+(-1/2*a2*cos(023+021+022)-1/2*a2*cos(-023+021+022))*023p]]];
```

```
Jacob3p=[(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-033+031+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032)  
) +1/2*3^(1/2)*a1*sin(031))*031p+(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-033+031+032)+1/4*3^(1/2)  
2)*a2*sin(033+031+032))*032p+(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-033+031+032)+1/4*3^(1/2)  
*a2*sin(033+031+032))*033p,  
(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-03  
3+031+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032))*031p+(1/4*3^(1/2)*a2*sin(-033+0  
31+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032))*032p+(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-033+031  
+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032))*033p,  
(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-0  
33+031+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032))*031p+(-1/4*3^(1/2)*a2*sin(-033  
+031+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032))*032p+(1/2*sin(033)*a2+1/4*3^(1/2  
) *a2*sin(-033+031+032)+1/4*3^(1/2)*a2*sin(033+031+032))*033p]
```

```
[  
sin(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032)-1/2*a1*sin(031))*031p+(-1/4*a2*si  
n(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))*032p+(1/4*a2*sin(-033+031+032)-1/4  
*a2*sin(033+031+032))*033p,  
(-1/4*a2*sin(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))  
*031p+(-1/4*a2*sin(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))*032p+(1/4*a2*sin(  
-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))*033p,  
(1/4*a2*sin(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))*031p+  
(1/4*a2*sin(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))*032p+(1/2*3^(1/2)*sin(03  
3)*a2-1/4*a2*sin(-033+031+032)-1/4*a2*sin(033+031+032))*033p]
```

```
[  
a2*cos(033+031+032)-1/2*a2*cos(-033+031+032)-a1*cos(031))*031p+(-1/2*a2*cos  
(033+031+032)-1/2*a2*cos(-033+031+032))*032p+(-1/2*a2*cos(033+031+032)+1/2*  
a2*cos(-033+031+032))*033p,  
(-1/2*a2*cos(033+031+032)-1/2*a2*cos(-033+031+032))*  
031p+(-1/2*a2*cos(033+031+032)-1/2*a2*cos(-033+031+032))*032p+(-1/2*a2*cos(  
033+031+032)+1/2*a2*cos(-033+031+032))*033p,  
(-1/2*a2*cos(033+031+032)+1/2*a2*co  
s(-033+031+032))*031p+(-1/2*a2*cos(033+031+032)+1/2*a2*cos(-033+031+032))*0  
32p+(-1/2*a2*cos(033+031+032)-1/2*a2*cos(-033+031+032))*033p]]];
```

```
aux=inv(Jacob1)*(xpp-Jacob1p*[011p 012p 013p]');  
012pp=aux(2,1);  
013pp=aux(3,1);
```

```
aux=inv(Jacob2)*(xpp-Jacob2p*[021p 022p 023p]');  
022pp=aux(2,1);  
023pp=aux(3,1);
```

```
aux=inv(Jacob3)*(xpp-Jacob3p*[031p 032p 033p]');
```

```
O32pp=aux(2,1);
```

```
O33pp=aux(3,1);
```

```
Equacoes
```

```
M1=H(1:3,1:3);
```

```
M2=H(4:6,4:6);
```

```
M3=H(7:9,7:9);
```

```
M4=H(10:12,10:12);
```

```
C1=C(1:3,:);
```

```
C2=C(4:6,:);
```

```
C3=C(7:9,:);
```

```
G1=G(1:3,:);
```

```
G2=G(4:6,:);
```

```
G3=G(7:9,:);
```

```
G4=G(10:12,:);
```

```
%Esquema do Sistema
```

```
Sistema=zeros(9,9);
```

```
Jacob1t=Jacob1';
```

```
Sistema(1:2,1:3)=-Jacob1t(2:3,:);
```

```
BSistema1=M1*[O11pp O12pp O13pp]'+C1+G1;
```

```
BSistema=BSistema1(2:3,:);
```

```
Jacob2t=Jacob2';
```

```
Sistema(3:4,4:6)=-Jacob2t(2:3,:);
```

```
BSistema2=M2*[O21pp O22pp O23pp]'+C2+G2;
```

```
BSistema(3:4,:)=BSistema2(2:3,:);
```

```
Jacob3t=Jacob3';
```

```
Sistema(5:6,7:9)=-Jacob3t(2:3,:);
```

```
BSistema3=M3*[O31pp O32pp O33pp]'+C3+G3;
```

```
BSistema(5:6,:)=BSistema3(2:3,:);
```

```
Sistema(7:9,1:3)=eye(3);
```

```
Sistema(7:9,4:6)=eye(3);
```

```
Sistema(7:9,7:9)=eye(3);
```

```
BSistema(7:9,:)=M4*xpp-[fextX fextY fextZ]'+G4;
```



```
Fxx=inv(Sistema)*BSistema;
```

```
%Calculo dos Torques
```

```
Torque11=M1(1,:)*[O11pp O12pp O13pp]'+C1(1,1)+G1(1,1)+Jacob1t(1,:)*(1)*Fx✓  
x(1:3,:);
```

```
Torque21=M2(1,:)*[O21pp O22pp O23pp]'+C2(1,1)+G2(1,1)+Jacob2t(1,:)*(1)*Fx✓  
x(4:6,:);
```

```
Torque31=M3(1,:)*[O31pp O32pp O33pp]'+C3(1,1)+G3(1,1)+Jacob3t(1,:)*(1)*Fx✓  
x(7:9,:);
```

```
Torque=[Torque11 Torque21 Torque31];
```

```
function Opp=funcaoDinamicaDireta(O,Op,g,Torque,Fp)
%funcao que calcula a Dinamica Direta de um mecanimso tipo delta
%O->posicao dos atuadores [O11 O21 O31]
%Op->velocidade angular dos atuadores [O11p O21p O31p]
%Op->aceleracao angular dos atuadores [O11pp O21pp O31pp]
%g->aceleracao da gravidade
%Torque->torque aplicado pelos atuadores
%Fp->forca aplicada a plataforma
```

```
O11=O(1);
O21=O(2);
O31=O(3);
```

```
O11p=Op(1);
O21p=Op(2);
O31p=Op(3);
```

```
Torque11=Torque(1);
Torque21=Torque(2);
Torque31=Torque(3);
```

```
%calcula da matriz de massa
```

```
q=0;
qp=[0 0 0];
Fext=[ 0 0 0];
qpp=[1 0 0];
aux1=funcaoDinamicaInversa(q,qp,qpp,Fext,0);
```

```
qpp=[0 1 0];
aux2=funcaoDinamicaInversa(q,qp,qpp,Fext,0);
```

```
qpp=[0 0 1];
aux3=funcaoDinamicaInversa(q,qp,qpp,Fext,0);
```

```
H=[aux1' aux2' aux3'];
```

```
%calcula da matriz C
```

```
qp=Op;
Fext=[0 0 0];
qpp=[0 0 0];
aux4=funcaoDinamicaInversa(q,qp,qpp,Fext,0);
```

```
C=aux4;
```

```
%calcula a matriz G
```

```
qp=[0 0 0];
qpp=[0 0 0];
```

```
Fext=[0 0 0];
```

```
aux5=funcaoDinamicaInversa(q,qp, qpp, Fext, g);
```

```
G=aux5;
```

```
%calcula torques devido a forca externa na plataforma
```

```
qp=[0 0 0];
```

```
qpp=[0 0 0];
```

```
aux6=funcaoDinamicaInversa(q,qp, qpp, Fp, 0);
```

```
TorqueFext=-aux6;
```

```
Opp=inv(H)*(-C'-G'+TorqueFext'+[Torque11 Torque21 Torque31]');
```