

Arthur Horn dos Santos

Dinâmica de manipuladores robóticos com juntas flexíveis: uma abordagem via Metodologia Modular de Modelagem e controle por modos deslizantes

São Paulo
2023

Arthur Horn dos Santos

Dinâmica de manipuladores robóticos com juntas flexíveis: uma abordagem via Metodologia Modular de Modelagem e controle por modos deslizantes

Versão Original

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de Controle e Automação Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. Celso Pupo Pesce

Co-orientador:
Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

São Paulo
2023

Catálogo-na-publicação

Santos, Arthur Horn dos

Dinâmica de manipuladores robóticos com juntas flexíveis: uma abordagem via Metodologia Modular de Modelagem e controle por modos deslizantes/ A. H. D. Santos – São Paulo, 2023.

108p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Modelagem Matemática. 2. Mecânica Analítica. 3. Dinâmica não-linear. 4. Controle não-linear. 5. Mecânica Computacional. I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica. II.t.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus. E à minha sobrinha, Rafaela
Horn dos Santos Sam Felippo

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela graça, por ver meus caminhos, por me guiar e por me sarar.

À minha mãe, Ana Eliza Horn dos Santos, por todo amor e carinho dedicado a mim.

Ao meu pai, Dr. Everaldo Bispo dos Santos, pelo apoio financeiro e por conseguir extrair o máximo de mim.

À minha irmã, Dra. Elize Horn dos Santos, pela fraternidade ímpar e pelo apoio nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Celso Pupo Pesce, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino, pelos valiosíssimos ensinamentos, pela dedicação no desenvolvimento deste trabalho e pelas discussões enriquecedoras.

Ao Amigo e Irmão de Fé, Luiz Carlos da Rocha Lima, pelos ensinamentos e exemplos, que me fizeram evoluir, não só como profissional, mas como homem.

Aos meus grandes amigos (em ordem alfabética): Eduardo Gonçalves Junior, Dr. Felipe Nacarato, Guilherme de Sousa Feitosa, Jonathan Horn Portasio, Nicholas Queiroz Avedissian, Renato Sam Felippo e Rodolfo Torti Kalil Horta, pelo companheirismo durante a vida. Vocês são inesquecíveis.

*“Portanto, seja comendo, seja bebendo, seja fazendo qualquer outra coisa,
fazei tudo para a glória de Deus”*

(1CORÍNTIOS 10:31)

RESUMO

O projeto de manipuladores eficientes e de baixo peso é uma necessidade emergente de engenharia.

O uso de modelos matemáticos que representem a dinâmica complexa destes manipuladores se torna indispensável tanto na fase de projeto mecânico como no projeto de controle.

O presente trabalho aborda as principais técnicas de modelagem matemática de manipuladores robóticos de juntas flexíveis, analisando suas características e suas particularidades, visando a eficiência para se obter equações diferenciais do movimento. É especialmente destacada a influência do uso de modelo matemático com coordenadas redundantes na obtenção de uma lei de controle não linear por modos deslizantes. Mais especificamente, a Metodologia Modular de Modelagem (MMM) proposta por Orsino (2016).

A MMM tem como ponto de partida para a dedução de equações de movimento, alguns modelos matemáticos já previamente conhecidos de subsistemas e as correspondentes equações vinculares. Os algoritmos propostos baseiam-se em recursões de operadores de projeção para a imposição *a posteriori* de vínculos (sem a necessidade de definir multiplicadores indeterminados de Lagrange), de acordo com uma hierarquia definida pelo próprio usuário para a montagem do modelo a partir de seus subsistemas.

Em relação a obtenção do modelo matemático de sistemas mecânicos com muitos graus de liberdade, a MMM mostra suas vantagens quando comparada a abordagens convencionais, nas quais tipicamente se depara com a grande complexidade de se expressar os modelos em função de um conjunto mínimo de variáveis ou com a inconveniência de se utilizar multiplicadores indeterminados sempre que se deseja introduzir variáveis redundantes.

No que se refere a estimativa de estados aumentados que incluem acelerações generalizadas e suas derivadas temporais, o presente trabalho utiliza-se do filtro de Kalman estendido, conforme exposto por Badamchizadeh, Hassanzadeh e Fallah (2010).

Palavras chave: Modelagem Matemática. Mecânica Analítica. Dinâmica não-linear. Controle não-linear. Mecânica Computacional.

ABSTRACT

The design of efficient, lightweight manipulators is an emerging engineering need.

The use of mathematical models that represent the complex dynamics of these manipulators become indispensable both in mechanical and control system design phases.

The present work approaches the main techniques of mathematical modeling of robotic manipulators of flexible joints, analyzes its characteristics and its particularities, aiming at efficiently obtaining differential equations of motion. The influence of using a mathematical model with redundant coordinates in obtaining a nonlinear control law by sliding modes is especially highlighted. More specifically, the Modular Modeling Methodology (MMM) proposed by Orsino (2016).

The MMM has as a starting point for deducing equations of motion, some previously known mathematical models of subsystems and the corresponding constraints equations. The proposed algorithms are based on recursions of projection operators for the *a posteriori* imposition of links (without the need to define undetermined Lagrange multipliers), according to a hierarchy defined by the user for assembling the model from its subsystems.

Regarding obtaining the mathematical model of mechanical systems with many degrees of freedom, the MMM shows its advantages when compared to conventional approaches, in which it is typically faced with the great complexity of expressing the models in terms of a minimum set of variables or with the inconvenience of using undetermined multipliers whenever you want to introduce redundant variables.

With regard to the estimation of augmented states that include generalized accelerations and their time derivatives, the present work uses the extended Kalman filter, as explained by Badamchizadeh, Hassanzadeh and Fallah (2010).

Palavras-Chave: Mathematical Modeling. Analytical Mechanics. Non-Linear Dynamics. Non-linear Control. Computational Mechanics.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	x
Notação	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	3
2 Revisão da Literatura e Fundamentação Teórica	4
2.1 Estado da Arte	4
2.2 Equação de Lagrange	7
2.3 Equação de Gibbs Appell	9
2.4 Metodologia Modular de Modelagem	10
2.5 Controle não linear por modos deslizantes	14
2.6 Filtro de Kalman Estendido	18
3 Estudos de caso	20
3.1 Manipulador de elo único com junta flexível	20
3.1.1 Cinemática	21
3.1.2 Equações Diferenciais do Movimento	22
3.1.3 Controle por modos deslizantes	23
3.1.4 Simulação	24
3.2 Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade com juntas flexíveis	32
3.2.1 Cinemática	34
3.2.2 Equações Diferenciais do Movimento	35

3.2.3	Controle por modos deslizantes	36
3.2.4	Simulação 1	36
3.2.5	Simulação 2	48
3.2.6	Simulação 3	64
4	Considerações Finais	77
	Referências	79
	Apêndice A - Filtro estendido de Kalman	82
	Apêndice B - Determinação da Trajetória do Estudo de Caso da Sec. 3.1	85
	Apêndice C - Matrizes de Rotação	87
	Apêndice D - Determinação da Trajetória do Estudo de Caso da Sec. 3.2	88

LISTA DE FIGURAS

1.1	Manipulador Robótico de 6 Graus de Liberdade.	2
2.1	Modelagem hierárquica	11
2.2	Procedimento de modelagem.	11
2.3	Trajatória da partícula de massa m	13
2.4	Derivada temporal do erro de acompanhamento x erro de acompanhamento.	15
2.5	Segunda derivada temporal do erro de acompanhamento x Derivada temporal do erro de acompanhamento x erro de acompanhamento.	16
2.6	<i>Chattering</i> como resultado de comutações de controle imperfeitas.	16
3.1	Manipulador de elo único com junta flexível.	21
3.2	Posição x Tempo.	26
3.3	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 7 a 8 s.	26
3.4	Velocidade Angular x Tempo.	27
3.5	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 7 a 8 s.	27
3.6	Aceleração Angular x Tempo	28
3.7	Detalhe do histórico temporal da aceleração angular para o intervalo de 7 a 8 s.	28
3.8	Derivada da aceleração angular x Tempo	29
3.9	Detalhe do histórico temporal da derivada da aceleração angular para o intervalo de 3 a 7 s.	29
3.10	Superfície de Deslizamento x Tempo	30
3.11	Torque x Tempo	30

3.12	$(q_1 - q_{1m}) \times$ Tempo	31
3.13	Erro de acompanhamento x Tempo	31
3.14	Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade	33
3.15	Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade	33
3.16	Posição x Tempo.	38
3.17	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 3 a 4 s.	38
3.18	Velocidade Angular x Tempo.	39
3.19	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 6 a 8 s.	39
3.20	Posição x Tempo.	39
3.21	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 3 a 4 s.	40
3.22	Velocidade Angular x Tempo.	40
3.23	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 3 a 4 s.	40
3.24	Posição x Tempo.	41
3.25	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 3 a 4 s.	41
3.26	Velocidade Angular x Tempo.	41
3.27	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 3 a 4 s.	42
3.28	Torque 1 x Tempo.	42
3.29	Torque 2 x Tempo.	43
3.30	Torque 3 x Tempo.	43
3.31	Superfície 1 de Deslizamento x Tempo	44
3.32	Superfície 2 de Deslizamento x Tempo	44
3.33	Superfície 3 de Deslizamento x Tempo	44
3.34	$(q_1 - q_{1m}) \times$ Tempo	45

3.35	$(q_2 - q_{2m}) \times \text{Tempo}$	45
3.36	$(q_3 - q_{3m}) \times \text{Tempo}$	46
3.37	Erro de acompanhamento x Tempo	46
3.38	Erro de acompanhamento x Tempo	47
3.39	Erro de acompanhamento x Tempo	47
3.40	Posição x Tempo.	51
3.41	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.	51
3.42	Velocidade angular x Tempo.	52
3.43	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.	52
3.44	Posição x Tempo.	52
3.45	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.	53
3.46	Velocidade angular x Tempo.	53
3.47	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.	53
3.48	Posição x Tempo.	54
3.49	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.	54
3.50	Velocidade angular x Tempo.	54
3.51	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.	55
3.52	Posição x_c x Tempo.	55
3.53	Posição y_c x Tempo.	56
3.54	Posição z_c x Tempo.	56
3.55	Velocidade $\dot{x}_c(t)$ x Tempo.	56
3.56	Velocidade $\dot{y}_c(t)$ x Tempo.	57
3.57	Velocidade $\dot{z}_c(t)$ x Tempo.	57

3.58	Aceleração $\ddot{x}_c(t)$ x Tempo.	57
3.59	Aceleração $\ddot{y}_c(t)$ x Tempo.	58
3.60	Aceleração $\ddot{z}_c(t)$ x Tempo.	58
3.61	Derivada da Aceleração $\ddot{x}_c(t)$ x Tempo.	58
3.62	Derivada da Aceleração $\ddot{y}_c(t)$ x Tempo.	59
3.63	Derivada da Aceleração $\ddot{z}_c(t)$ x Tempo.	59
3.64	Torque 1 x Tempo.	59
3.65	Torque 2 x Tempo.	60
3.66	Torque 3 x Tempo.	60
3.67	Superfície 1 x Tempo.	60
3.68	Superfície 2 x Tempo.	61
3.69	Superfície 3 x Tempo.	61
3.70	$(q_1 - q_{1m})$ x Tempo	62
3.71	$(q_2 - q_{2m})$ x Tempo	62
3.72	$(q_3 - q_{3m})$ x Tempo	62
3.73	Erro de acompanhamento x Tempo	63
3.74	Erro de acompanhamento x Tempo	63
3.75	Erro de acompanhamento x Tempo	63
3.76	Posição x Tempo.	66
3.77	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 3 s.	66
3.78	Velocidade angular x Tempo.	67
3.79	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 3 s.	67
3.80	Posição x Tempo.	67
3.81	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 3 s.	68
3.82	Velocidade angular x Tempo.	68

3.83	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 3 s.	68
3.84	Posição x Tempo.	69
3.85	Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 3 s.	69
3.86	Velocidade angular x Tempo.	69
3.87	Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 3 s.	70
3.88	Posição x_c x Tempo.	70
3.89	Posição y_c x Tempo.	71
3.90	Posição z_c x Tempo.	71
3.91	Deslocamento no Plano y-z.	71
3.92	Torque 1 x Tempo.	72
3.93	Torque 2 x Tempo.	72
3.94	Torque 3 x Tempo.	72
3.95	Superfície 1 x Tempo.	73
3.96	Superfície 2 x Tempo.	73
3.97	Superfície 3 x Tempo.	73
3.98	$(q_1 - q_{1m})$ x Tempo	74
3.99	$(q_2 - q_{2m})$ x Tempo	74
3.100	$(q_3 - q_{3m})$ x Tempo	74
3.101	Erro de acompanhamento x Tempo	75
3.102	Erro de acompanhamento x Tempo	75
3.103	Erro de acompanhamento x Tempo	75

LISTA DE TABELAS

3.1	Parâmetros de Simulação - Manipulador de elo único.	24
3.2	Parâmetros de Simulação - Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade.	37
3.3	Resultados - Erro de acompanhamento e defasagem entre ângulo do elo e junta.	48
3.4	Parâmetros de Simulação - Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade.	48
3.5	Resultados - Erro de acompanhamento e defasagem entre ângulo do elo e junta.	64
3.6	Parâmetros de Simulação - Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade.	65
3.7	Resultados - Erro de acompanhamento e defasagem entre ângulo do elo e junta.	76

NOTAÇÃO

Neste texto, muitos símbolos são utilizados e cada um tem sua aplicação específica, conforme listado abaixo.

Símbolos	Descrição
$a, Z, \alpha, \Omega, \dots$	Escalares
$\mathbf{a}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Psi}, \dots$	Matriz Coluna
$\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \dots$	Matrizes quadradas ou retangulares
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \dots$	Versores
$\underline{O}, \underline{P}, \underline{G}_1, \dots$	Pontos
A, B, N, \dots	Corpos rígidos, Sistema de coordenada
$\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{S}, \dots$	Sistema multicorpos

A respeito das descrições cinemáticas do sistemas, considera-se a seguinte notação:

- \mathbf{R}_I^H é a matriz de rotação entre as bases dos sistemas de coordenadas H e I
- $\mathbf{p}_{\underline{G}|\underline{O}}^F$ é a matriz coluna com seus componentes expressos no sistemas de coordenadas F, do vetor posição do ponto \underline{G} em relação ao ponto \underline{O} .
- $\boldsymbol{\omega}_{H|I}^F$ é a matriz coluna com seus componentes expressos no sistemas de coordenadas F, do vetor velocidade angular do corpo H em relação ao sistema de coordenadas (ou corpo rígido) I.

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o desenvolvimento da tecnologia e a crescente demanda por produtividade, acarretou o interesse de muitos pesquisadores no desenvolvimento de manipuladores robóticos eficientes e de baixo peso.

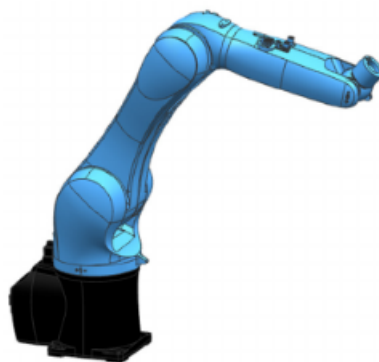
Manipuladores robóticos são dispositivos mecânicos, desenvolvidos para interagir fisicamente com o ambiente, submetendo seu órgão terminal (ou efetuator) a uma trajetória definida em sua programação, de forma a realizar tarefas, muitas vezes, impossíveis de serem realizadas por um ser humano.

De acordo com Lopes (2002), um manipulador robótico é composto por:

- (1) Manipulador: conjunto de elos ligados por juntas, formando cadeias cinemáticas que definem uma estrutura mecânica.
- (2) Atuadores: dispositivos que produzem movimento, convertendo energia pneumática, hidráulica ou elétrica, em energia mecânica.
- (3) Sensores: dispositivos usados para fornecer ao controlador informação sobre o estado do manipulador e do ambiente.
- (4) Controlador: dispositivo, tipicamente baseado em microcomputador, que controla o movimento do manipulador. Usa os modelos do manipulador e do ambiente e a informação fornecida pelo operador e pelos sensores.
- (5) Unidade de potência: dispositivo que tem por objetivo proporcionar energia aos atuadores.

O uso de manipuladores robóticos aumenta de forma significativa a cada ano, onde suas aplicações são abrangentes. Atualmente, na indústria, as aplicações mais comuns incluem operações de montagem, tarefas colaborativas, usinagem, soldagem e pintura. A figura 1.1 ilustra o tipo de manipulador robótico mais utilizado na indústria.

Figura 1.1: Manipulador Robótico de 6 Graus de Liberdade.



Fonte: Horn, Malvezzi e Orsino (2020)

Existem diversos tipos de manipuladores robóticos. Esses tipos variam com base na estrutura cinemática, tipos de juntas e quantidades de graus de liberdades. Entre os tipos mais comuns destacam-se os robôs de coordenadas cartesianas, robôs de coordenadas cilíndricas, robôs de coordenadas esféricas, robôs com articulações horizontais e robôs com articulações verticais (LOPES,2002).

O momento atual apresenta uma tendência de desenvolvimento de manipuladores de baixo peso, pois estes têm a vantagem de operarem em uma velocidade maior e consumirem menos energia. O desenvolvimento de manipuladores leves, muitas vezes implica em elementos constituintes de rigidez reduzida.

No projeto de engenharia de manipuladores robóticos é necessário o desenvolvimento de um modelo matemático representativo capaz de fornecer informações para que os engenheiros de projeto possam otimizar seu desempenho e sua utilização. Neste contexto, o modelo matemático é utilizado para o dimensionamento dos componentes mecânicos que irão compor a estrutura do manipulador, além de subsidiar o projeto de controle.

O desenvolvimento de manipuladores leves, muitas vezes implica em uma rigidez reduzida. A flexibilidade das juntas dos manipuladores robóticos surge da geometria e das propriedades elásticas dos materiais que compõem os atuadores e os sistemas de transmissão mecânica. De fato, modelos matemáticos de manipuladores reais que são desenvolvidos sob a hipótese da junta rígida são considerados simplistas, uma vez que a rigidez da junta pode ter um efeito significativo sobre o seu comportamento dinâmico, especialmente quando o atuador exerce esforços de magnitude elevada, da mesma ordem de magnitude daqueles permitidos pelas juntas flexíveis.

Com o intuito de alcançar uma alta versatilidade em aplicações, o desenvolvimento de manipuladores com muitos graus de liberdade tornou-se indispensável. O fato desse tipo de sistema possuir muitos graus de liberdade, aliado ao da flexibilidade das juntas acarreta uma grande complexidade no desenvolvimento de modelos matemáticos.

Sob a ótica de controle de sistemas mecânicos, quando as juntas de um manipulador são consideradas flexíveis, o número de atuadores se torna inferior ao de graus de liberdade, fazendo com que eles sejam classificados como sistemas mecânicos sub-atuados. O controle dessa classe de sistemas mecânicos tipicamente se utiliza da dinâmica dos próprios sistemas na tentativa de alcançar um desempenho satisfatório em termos de precisão, eficiência ou robustez.

1.1 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo principal abordar as principais técnicas de modelagem matemática de manipuladores robóticos de juntas flexíveis, analisando suas características e suas particularidades, e discutindo quão eficientes são para a obtenção de equações diferenciais do movimento. Este trabalho também visa ressaltar a influência do uso de modelos matemáticos com coordenadas redundantes na obtenção da lei de controle não linear obtida por meio de modos deslizantes. Por fim, discutir a utilização do filtro de Kalman estendido na estimativa de estados aumentados que incluam aceleração e sua derivada temporal (tipicamente denominada "tranco" ou, em inglês, "jerk").

A sequência do texto está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, a revisão bibliográfica traz o estado da arte da modelagem e controle de manipuladores robóticos. No Capítulo 2, também é apresentada a fundamentação teórica, com o intuito de definir parte da base científica necessária para o entendimento da dissertação. No Capítulo 3 apresenta-se estudos de casos, onde a teoria exposta no Capítulo 2 pôde ser aplicada de forma contundente em exemplos realistas. No Capítulo 4 discute-se a utilização dos diferentes métodos de modelagem dinâmica de manipuladores e seu impacto na obtenção da lei de controle não linear.

2 REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Estado da Arte

Dwivedy (2006) analisou um total de 433 artigos publicados entres os anos de 1974 e 2005 para apresentar uma revisão da literatura relacionada a análises dinâmicas de manipuladores robóticos flexíveis, considerando tanto a flexibilidade da junta quanto a flexibilidade do elo. Neste contexto, ressaltou-se a necessidade de mais análises considerando a flexibilidade da junta com atrito e folgas. Concluiu-se também que, em quase todos os casos, foram considerados modelos linearizados, o que reduz a complexidade da lei de controle.

Rahimi e Nazemizadeh (2014) apresentaram uma revisão da literatura da análise dinâmica e técnicas de controle inteligente para manipuladores robóticos flexíveis. Esta revisão mostrou que a utilização do método de parâmetro concentrado na modelagem dinâmica não fornece resultados precisos. Concluiu-se também que, apesar das vantagens significativas do método dos elementos finitos sobre as técnicas de solução analítica, esta abordagem é mais complexa do que o método de modos assumidos.

Subudhi e Morris (2002) apresentaram uma técnica de modelagem dinâmica para um manipulador com múltiplos elos flexíveis e juntas flexíveis, baseada em uma formulação combinada de Euler-Lagrange e métodos de modos assumidos. Nesta formulação, considerou-se como hipótese, o movimento do manipulador apenas no plano vertical e pequenas deformações. Para tratar as complexidades de controle associadas a um manipulador de junta e elo flexíveis, um modelo obtido através do método de perturbação singular foi formulado e usado para projetar um controlador de ordem reduzida. O modelo generalizado resultante foi validado numericamente.

Nanos e Papadopoulos (2015) estudaram a dinâmica de manipuladores espaciais considerando que as flexibilidades dos corpos que constituem o mani-

pulador estão inteiramente concentradas nas juntas. Neste estudo, obteve-se o modelo dinâmico utilizando-se a abordagem de Lagrange. Desta forma, a lei de controle foi projetada utilizando-se a técnica de Controle por Torque Computado, cujo esforço computacional é viável em aplicações espaciais.

Zaare, Soltanpour e Moattari (2019) apresentaram um controle por modos deslizantes baseado em tensão para controlar a posição de manipuladores seriais de junta flexível e elo rígido na presença de incertezas estruturadas e não estruturadas. Neste trabalho, usou-se a ideia de uma estratégia de controle conjunto independente, onde as equações dinâmicas são decompostas em um número finito de subsistemas independentes. A estabilidade foi provada pelo método direto de Lyapunov e experimentalmente, onde o modelo do manipulador utilizado no experimento foi obtido através das equações de Euler-Lagrange.

Chen e Guo (2019) investigaram o problema de controle de rastreamento tolerante a falhas para uma classe de sistema de manipulador de junta flexível de elo único. Neste artigo, uma abordagem de controle por modos deslizantes é projetada considerando incerteza paramétrica e perturbação.

Almeida (2013) desenvolveu uma abordagem na modelagem dinâmica e do projeto de sistemas de controle para um robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade, desenvolvido para tarefas de pega-e-põe (*pick-and-place*). Neste trabalho, empregou-se o método de Lagrange e o princípio dos trabalhos virtuais na obtenção de modelos dinâmicos baseados em hipóteses simplificadoras de corpos rígidos. Para o projeto de controle, utilizou-se as técnicas de torque computado e torque computado estendido. Em conclusão, o princípio dos trabalhos virtuais mostrou-se mais eficiente em termos de desenvolvimento analítico e recomendou-se a não utilização da formulação Newton-Euler, devido a necessidade de cálculo dos esforços vinculares.

Hartmann (2018) comparou sete estratégias de controle para robôs paralelos, de acordo com os seguintes critérios: a exatidão na trajetória, o comprimento controlável, a dispersão das trajetórias em diferentes períodos de tempo, e o consumo de energia. Em ordem decrescente, os tipos de controle que apresentaram melhores resultados foram: o PID descentralizado, o controle por torque computado com *feedforward*, e o controle por modos deslizantes, também com *feedforward*.

Coutinho (2019) desenvolveu um algoritmo de modelagem cinemática e dinâmica para mecanismos paralelos translacionais. Outrossim, concebeu uma

nova lei de controle não linear robusto baseada no Controle por Modos Deslizantes. Os resultados experimentais confirmam o caráter promissor da lei de controle proposta.

Coutinho e Hess-Coelho (2021) propuseram duas técnicas de controle híbrida. A primeira técnica é derivada a partir da combinação de um controle proporcional derivativo com um controle por modos deslizantes modificado. A segunda técnica combina controle por torque computado com uma versão estendida de controle por modos deslizantes. As modificações propostas na técnica de controle por modos deslizantes objetivaram reduzir tanto o erro de acompanhamento quanto o fenômeno de *chattering*.

Alam, Ahmad e Iqbal (2019) investigaram algoritmos de controle não linear para rastreamento de trajetória desejada de um manipulador flexível submetido a perturbações. A dinâmica do manipulador é derivada com base na abordagem de Euler-Lagrange seguida pelo projeto de leis de controle não lineares. Naquele artigo especificamente, o controle de modo deslizante tradicional e o controle de modo deslizante integral não demonstraram desempenho adequado devido à dinâmica complexa do sistema.

Ma, Schilling e Schmid (2006) desenvolveram um controle de modo deslizante com *backstepping* adaptativo de sistemas dinâmicos não lineares com incertezas de modelo. O método de controle proposto adequado para sistemas mecatrônicos combina as vantagens do controle por modos deslizantes e a metodologia de *backstepping*. O desempenho é ilustrado por experimentos com um manipulador de junta flexível.

Fateh (2012) e Zheng et al. (2018) ressaltam que as leis de controles obtidas para o torque apresentam a limitação de estarem inerentemente envolvidas na complexidade da dinâmica do manipulador, caracterizada pela não linearidade, incerteza e flexibilidade da junta. Porém, ainda que a lei de controle não seja obtida para o torque, a análise de desempenho do mesmo é parte do projeto do controle. Desta forma, para o desenvolvimento de uma simulação representativa, é necessário a obtenção de um modelo matemático do sistema em questão.

Na maioria dos artigos citados, as equações diferenciais de movimento foram obtidas usando as equações de Lagrange em sua forma usual, sem a adoção de multiplicadores indeterminados, o que, para sistemas holônomos como é o caso de mecanismos robóticos típicos, implica em um número de coordenadas igual ao de graus de liberdade, resultando em equações diferenciais de movi-

mento e leis de controle não lineares mais complexas, quando o sistema tem muitos graus de liberdade.

Neste contexto, a utilização de um conjunto de coordenadas generalizadas redundantes no processo de modelagem, aparece como uma possibilidade de simplificar algebricamente o sistema de equações diferenciais de movimento e, conseqüentemente, as leis de controle obtidas através da técnica de controle por modos deslizantes.

Devido ao uso de um conjunto de coordenadas generalizadas redundantes no formalismo Lagrangeano, surge a necessidade de se utilizar multiplicadores indeterminados de Lagrange (Horn; Malvezzi; Orsino, 2020). Orsino (2016) propôs a Metodologia Modular de Modelagem (MMM) em que o ponto de partida para a dedução de equações de movimento são alguns modelos matemáticos já previamente conhecidos de subsistemas e as correspondentes equações vinculares. Os algoritmos propostos baseiam-se em recursões de operadores de projeção para a imposição *a posteriori* de vínculos (sem a necessidade de definir multiplicadores), de acordo com uma hierarquia definida pelo próprio usuário para a montagem do modelo a partir de seus subsistemas. Dentre estes, destaca-se um algoritmo cuja proposta é baseada no cálculo de complementos ortogonais de matrizes jacobianas, derivadas das equações de vínculos entre os subsistemas.

A MMM fornece uma abordagem geral que pode ser aplicada para modelar mecanismos de topologias usuais ou redundantes (cinematicamente ou em atuação), sem qualquer restrição quanto ao número de graus de liberdade. Como consequência, a MMM pode tornar o trabalho do projetista/analista relativamente mais fácil, uma vez que ele pode utilizar uma biblioteca de subsistemas como ponto de partida para a tarefa de definição dos vínculos entre os subsistemas (Hess-Coelho; Orsino; Malvezzi, 2021).

2.2 Equação de Lagrange

Considere um sistema multicorpos \mathcal{M} composto por vínculos holonomos. Considere que \mathcal{M} tem ν graus de liberdade e que $\mathbf{q}(t)$ é o conjunto mínimo de coordenadas generalizadas que determina a configuração deste sistema mecânico em qualquer instante de tempo t . Assim, as equações que modelam a

dinâmica deste sistema mecânico são:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_q, \quad (2.1)$$

onde, \mathbf{f}_q é vetor de forças generalizadas. A equação (2.1) é a equação de Lagrange¹ exposta pela primeira vez no livro *Méchanique Analytique* em 1788, e surge como uma possibilidade na modelagem matemática de sistemas mecânicos de massa constante, sem a utilização de coordenadas redundantes (Pesce, 2003; Pesca e Casetta, 2014; Orsino e Pesca, 2015). L é a Lagrangiana do sistema mecânico definida como a diferença entre a energia cinética (T) e a energia potencial (V). Desta forma,

$$L = T - V, \quad (2.2)$$

com,

$$L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (2.3)$$

Considerando a energia cinética para um sistema mecânico composto por corpos rígidos (Pesce, 2009) pode-se escrever,

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{G_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{J}_{G_i} \boldsymbol{\omega}_i, \quad (2.4)$$

onde m_i é a massa do corpo i , \mathbf{v}_{G_i} é a velocidade do centro de massa do corpo i , $\boldsymbol{\omega}_i$ é o vetor de velocidade angular do corpo rígido, único para cada instante considerado e \mathbf{J}_{G_i} é a matriz de inércia do corpo i (associada a um sistema de eixos cartesianos de origem G_i).

Sendo \mathbf{f}_k o vetor de forças conservativas que agem na posição definida pelo vetor posição \mathbf{r}_k , a energia potencial pode ser definida como (Meirovitch, 2010):

$$\mathbf{f}_k = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_k}, \quad (2.5)$$

o vetor de forças generalizadas \mathbf{f}_q associado as forças não conservativas que agem em \mathcal{M} pode ser definido através do conceito de trabalho virtual, conforme definido por Hamill (2014):

$$\delta W = \mathbf{f}_q \delta \mathbf{q}. \quad (2.6)$$

A Equação de Lagrange é, talvez, a equação mais utilizada para a modela-

¹Alguns textos clássicos consideram a nomenclatura "Equação de Lagrange" restrita ao caso de sistemas Hamiltonianos (caso em que as equações de Euler-Lagrange constituem a solução do problema variacional associado ao enunciado original do Princípio de Hamilton). Neste texto, no entanto, "Equação de Lagrange" será usada em um contexto comum à área de dinâmica multicorpos, em que mesmo esforços generalizados de natureza não-conservativa são considerados.

gem matemática de sistemas mecânicos multicorpos. A utilização das equações de Lagrange na modelagem de sistemas mecânicos multicorpos exibem a vantagem de não necessitar do cálculo das acelerações das massas dos corpos que compõem o sistema multicorpos.

2.3 Equação de Gibbs Appell

Considere o sistema multicorpos S composto por vínculos holônomos ou não-holônomos. Considere que S tem ν graus de liberdade. Para este sistema, considere a Equação de Gibbs-Appell descrita independentemente por Josiah Willard Gibbs em 1879 e Paul Émile Appell em 1900 (Baruh, 2015),

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f} , \quad (2.7)$$

onde \mathbf{u} é o conjunto de quase velocidades independentes para as quais, na vizinhança de um determinado estado, existe uma transformação local que permite expressar $\dot{\mathbf{q}}$ como uma função de t , \mathbf{q} e \mathbf{u} (Orsino, 2019),

$$\dot{\mathbf{q}} = \underline{\phi}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) . \quad (2.8)$$

O processo de escolha de quase velocidades para um sistema começa por definir variáveis candidatas \mathbf{u} em termos de t , \mathbf{q} e \mathbf{u} ,

$$\dot{\mathbf{u}} = u(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) , \quad (2.9)$$

define-se a matriz jacobiana \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) , \quad (2.10)$$

e se \mathbf{u} é linear em relação a $\dot{\mathbf{q}}$, então:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(t, \mathbf{q}) . \quad (2.11)$$

A função Gibbs-Appell de S pode ser definida como (Baruh, 2015),

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{a}_{Gi} \cdot \mathbf{a}_{Gi} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{H}_{Gi} + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_{Gi}) , \quad (2.12)$$

onde m_i é a massa do corpo i , \mathbf{a}_{Gi} é a aceleração do centro de massa do corpo i , $\boldsymbol{\omega}_i$ é o vetor de velocidade angular do corpo rígido, $\boldsymbol{\alpha}_i$ é o vetor de aceleração angular do corpo rígido e \mathbf{H}_{Gi} é a matriz de momento angular do corpo i .

Finalmente, \mathbf{f} tem a definição de força generalizada e pode ser descrita através da seguinte equação,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\underline{K}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{\underline{K}}}{\partial \mathbf{u}}, \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{f}_{\underline{K}}$ é a força que age no ponto \underline{K} e $\mathbf{v}_{\underline{K}}$ é a velocidade do ponto \underline{K} .

A utilização da equação de Gibbs-Appell para a modelagem matemática de sistemas mecânicos multicorpos exhibe a vantagem do emprego de um conjunto de quase velocidades diferente do trivial, como por exemplo, uma combinação linear da derivada temporal de coordenadas generalizadas. Entretanto, a utilização da equação de Gibbs-Appell exhibe a desvantagem da necessidade do cálculo das acelerações lineares e angulares dos corpos que constituem o sistema mecânico.

Papastavridis (1998) provou a equivalência entre as equações de Lagrange e as equações de Gibbs-Appell especificamente quando os vínculos que compõem o sistema mecânica são holônomos.

2.4 Metodologia Modular de Modelagem

Orsino (2016) desenvolveu uma Metodologia Modular de Modelagem, para tratar de sistemas multicorpos holonômicos ou não holonômicos, concebendo-os como uma hierarquia de modelos matemáticos. Explorando a modularidade que estes sistemas tipicamente exibem, foi proposta uma metodologia geral recursiva, de forma a conciliar a utilização das técnicas de modelagem já existentes e consolidadas na literatura. O algoritmo desta metodologia é baseado no teorema fundamental que estabelece as condições para computar operadores de projeção recursivamente.

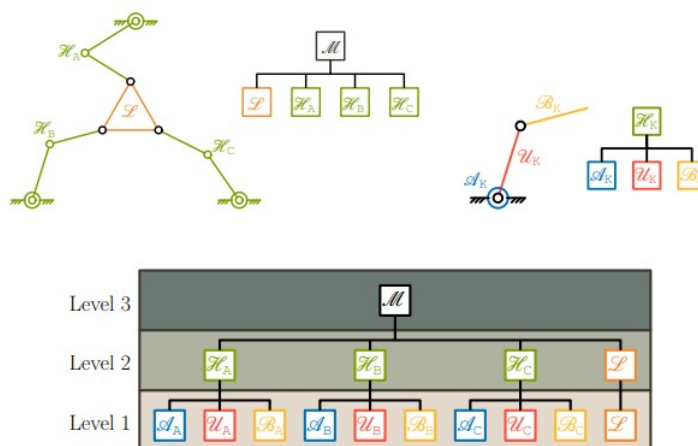
Um sistema multicorpos, por exemplo, pode ser concebido como um conjunto de módulos mecatrônicos montados, cada um deles sendo um corpo único ou um subsistema de multicorpos mais simples.

A ideia central desta metodologia parte do princípio de que um modelo consistente para um sistema mecânico complexo pode ser obtido a partir de uma coleção de equações de movimento já existentes que descreveriam a dinâmica de cada um de seus subsistemas isolados, desde que as restrições entre esses subsistemas possam ser descritas por um sistema de equações.

Em um determinado nível hierárquico, o modelo é obtido a partir das equações de movimento e das equações de vínculo do nível hierárquico imediata-

mente inferior, onde todos os modelos dentro desta hierarquia são expressos em termos do mesmo conjunto de variáveis redundantes, e que o aumento da complexidade de um nível para o seu superior está associado à imposição de restrições.

Figura 2.1: Modelagem hierárquica

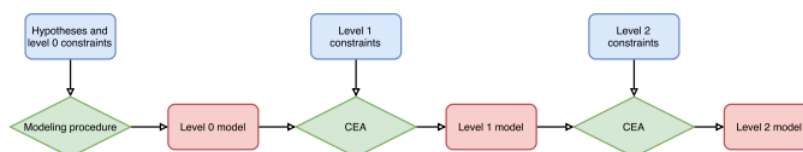


Fonte: Orsino, 2019

Com o intuito de sistematizar a modelagem matemática de sistemas mecânicos, Orsino determinou etapas para obtenção dos modelos.

- (1) Escrever as hipóteses fundamentais.
- (2) Relaxar os vínculos do sistema mecânico.
- (3) Obter os modelos matemáticos do sistema relaxado.
- (4) Obter as equações de vínculos em função do conjunto de coordenadas generalizadas.
- (5) Aplicar o algoritmo de imposição de vínculos (CEA)².

Figura 2.2: Procedimento de modelagem.



Fonte: Orsino, 2019

²Constraint Enforcement Algorithm

Conforme mencionado, a metodologia parte das equações dos sistemas mecânicos relaxados (Nível hierárquico mais baixo),

$$M(t, \mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) , \quad (2.14)$$

e de suas respectivas equações de vínculo do sistema relaxado (nível hierárquico hierárquico mais baixo):

$$\mathbf{A}_r(t, \mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) , \quad (2.15)$$

obtém-se as equações de vínculo do sistema vinculado (nível hierárquico r+1):

$$\mathbf{A}_{r+1}(t, \mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_{r+1}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.16)$$

ou

$$\begin{cases} \mathbf{A}_r(t, \mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \tilde{\mathbf{A}}_{r+1}(t, \mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{b}}_{r+1}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{cases} . \quad (2.17)$$

No nível hierárquico r+1, além dos vínculos pré-existentes no nível r, adicionam-se alguns outros, aumentando assim o sistema de equações de restrição. A MMM explora exatamente o fato de que o operador de projeção de um nível já leva previamente em consideração as projeções realizadas nos níveis anteriores

Teorema 1. (Orsino, 2017). Considere $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r, \dots, \mathbf{A}_s]$ como uma família indexada de matrizes com entradas complexas que satisfazem a seguinte condição:

$$\mathbf{A}_{r+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r \\ \tilde{\mathbf{A}}_{r+1} \end{bmatrix} . \quad (2.18)$$

Seja \mathbf{S}_r caracterizado como um operador linear no núcleo de \mathbf{A}_r . Pode-se afirmar que se \mathbf{C}_{r+1} é definido como um operador linear sobrejetor no núcleo de $\mathbf{B}_{r+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{r+1} \mathbf{S}_r$ então, $\mathbf{S}_{r+1} = \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{C}_{r+1}$ é um operador linear sobrejetor no núcleo de \mathbf{A}_{r+1} .

Demonstração. Pode-se afirmar que: $\ker(\mathbf{A}_{r+1}) \subset \ker(\mathbf{A}_r) \subset \mathbb{C}^n$. Considere \mathbf{S}_r como um operador linear no núcleo de \mathbf{A}_r e assumamos que $\mathbf{S}_{r+1} = \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{C}_{r+1}$ é um operador linear no núcleo de \mathbf{A}_{r+1} . Desta forma, pode-se afirmar que:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{r+1} \mathbf{S}_r \mathbf{C}_{r+1} = \mathbf{0} , \quad (2.19)$$

portanto, se C_{r+1} define uma transformação linear no núcleo de $\tilde{A}_{r+1}S_r$, Então, $S_{r+1} = S_r C_{r+1}$ define uma transformação linear no núcleo de A_{r+1} . \square

Aplica-se o algoritmo implícito recursivo para obter-se o sistema vinculado :

$$B_{r+1} = A_{r+1}S_r \quad (2.20)$$

$$im(C_{r+1}) = ker(B_{r+1}) \quad (2.21)$$

$$S_{r+1} = S_r C_{r+1} \quad (2.22)$$

sendo que:

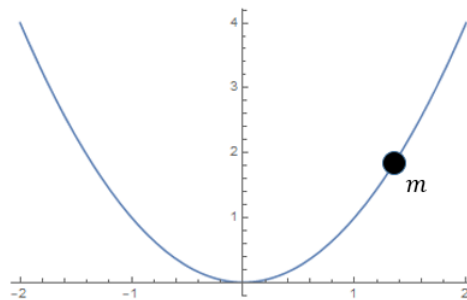
$$S_0 = 1 \quad (2.23)$$

assim, a equação diferencial do movimento associada ao (r+1)-éssimo nível hierárquico pode ser definida:

$$S_{r+1}^T M \ddot{q} = S_{r+1}^T f . \quad (2.24)$$

Exemplo elementar: considere uma partícula de massa m , ilustrada na figura abaixo, que se desloca no plano horizontal e está vinculada, sem atrito, a uma trajetória definida pela seguinte equação.

Figura 2.3: Trajetória da partícula de massa m .



Fonte: o autor

$$y = f(x) = x^2 . \quad (2.25)$$

Considerando esta partícula sem vínculo, seu sistema de equações diferenciais do movimento é facilmente obtido através da segunda lei de Newton:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} . \quad (2.26)$$

Com o objetivo de obter a equação de vínculo na forma apresentada na equação (2.15), derivou-se duas vezes a equação (2.25) em relação ao tempo:

$$\ddot{y} = 2(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} -2x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = 2\dot{x}^2 , \quad (2.28)$$

é fácil notar que:

$$\mathbf{A}_{r+1}(t, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{b}_{r+1}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2\dot{x}^2 . \quad (2.30)$$

Desta forma, uma possível expressão para \mathbf{S}_{r+1} :

$$\mathbf{S}_{r+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2x} \\ 1 \end{bmatrix} , \quad (2.31)$$

substituindo na equação (2.24):

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2x} & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \frac{f_x}{2x} + f_y . \quad (2.32)$$

2.5 Controle não linear por modos deslizantes

Conforme exposto em Slotine (1990). Considere um sistema dinâmico não linear descrito pelo seguinte modelo:

$$\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \mathbf{b}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} , \quad (2.33)$$

onde \mathbf{q} é o vetor de estados,

$$\mathbf{q}^{(n)} = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & \dots & q^{(n)} \end{bmatrix}^T , \quad (2.34)$$

e \mathbf{u} é o vetor das entradas.

Considere também a matriz coluna do erro de acompanhamento definido pela diferença entre os valores das coordenadas generalizadas \mathbf{q} no instante t e

os valores desejados das coordenadas generalizadas \mathbf{q}_d no instante t :

$$\mathbf{e}_q = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d . \quad (2.35)$$

Define-se uma superfície s no espaço dos estados para um sistema de ordem n pela equação:

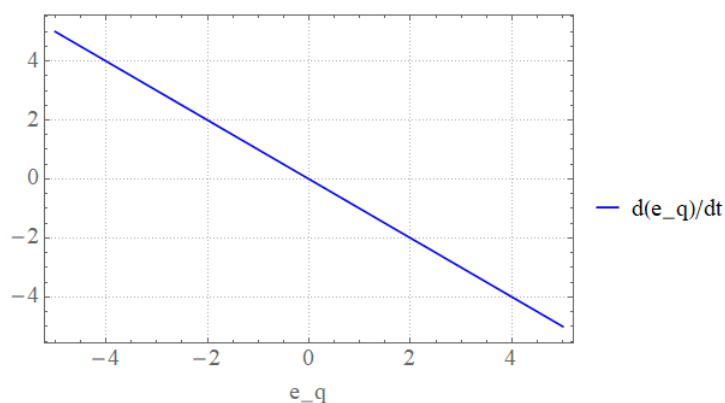
$$s(\mathbf{q}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \mathbf{e}_q , \quad (2.36)$$

onde λ é uma constante positiva.

Desta forma, manter o erro de acompanhamento nulo é equivalente a manter a trajetória em s , pois, a única solução para a equação diferencial (2.36) é $\mathbf{e}_q = 0$. Para $n = 2$ tem-se:

$$\dot{\mathbf{e}}_q + \lambda \mathbf{e}_q = 0 \quad (2.37)$$

Figura 2.4: Derivada temporal do erro de acompanhamento x erro de acompanhamento.

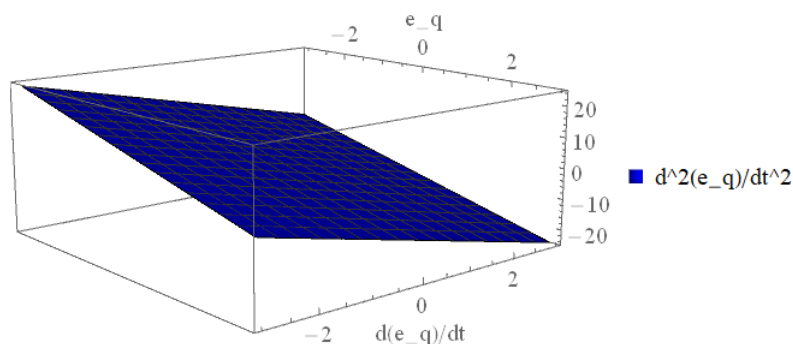


Fonte: o autor

Para $n = 3$ tem-se:

$$\ddot{\mathbf{e}}_q + 2\lambda \dot{\mathbf{e}}_q + \lambda^2 \mathbf{e}_q = 0 . \quad (2.38)$$

Figura 2.5: Segunda derivada temporal do erro de acompanhamento x Derivada temporal do erro de acompanhamento x erro de acompanhamento.



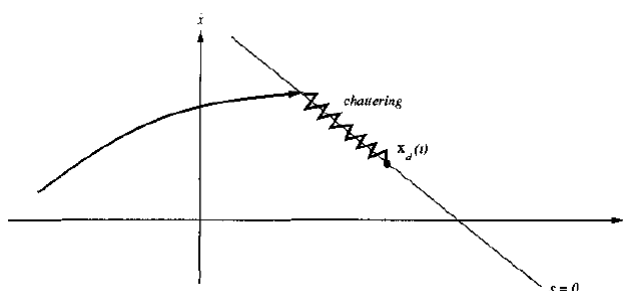
Fonte: o autor

Inicialmente, com o intuito de projetar uma lei de controle não linear que faça com que $s = 0$ considerou-se:

$$\dot{s}(\mathbf{q}, t) = -K \text{sign } s, \quad (2.39)$$

porém, como a implementação das comutações de controle associadas é necessariamente imperfeita (por exemplo, na prática a comutação não é instantânea e o valor de s não é conhecido com precisão infinita), isso pode induzir o fenômeno de *chattering* (Slotine, 1990) (Figura: 2.6).

Figura 2.6: *Chattering* como resultado de comutações de controle imperfeitas.



Fonte: Slotine, 1990

Desta forma, com o objetivo de prevenir a ocorrência de *chattering* considera-se uma transição contínua:

$$\dot{s}(\mathbf{q}, t) = -K \arctan(S/\phi), \quad (2.40)$$

onde ϕ é uma constante positiva e K é uma constante positiva conhecida como ganho.

Considerando a função positiva definida de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (2.41)$$

e derivando no tempo, tem-se:

$$\dot{V} = s\dot{s} \quad (2.42)$$

$$\dot{V} = s[-K \arctan(s/\phi)] \quad (2.43)$$

Uma vez que $s[K \arctan(s/\phi)]$ será sempre positivo, é possível concluir que, \dot{V} é uma função semi negativa definida. Vale ressaltar que, a análise de estabilidade de sistemas não autônomos é, em geral, mais complicada do que a de sistemas autônomos, devido à dificuldade de encontrar funções de Lyapunov negativas definidas. O Lema de Barbalat fornece um resultado importante e simples, que tem o intuito de remediar parcialmente esta dificuldade.

Lema(Barbalat) (Slotine, 1990): Se a função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito em $t \rightarrow \infty$, e se $f'(x)$ é uniformemente contínuo, então $f'(x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$

Com o intuito de definir uma função uniformemente contínua, considere que $g(t)$ é contínua em $[0, \infty)$, se:

$$\forall t_1, \forall R > 0, \exists \eta(R, t_1) > 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R \quad (2.44)$$

Considera-se a função g uniformemente contínua em $[0, \infty)$, se:

$$\forall R > 0, \exists \eta(R) > 0, \forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R \quad (2.45)$$

Uma outra forma conveniente de avaliar se uma função diferenciável é uniformemente contínua, é avaliar se sua derivada é limitada através do teorema das diferenças finitas:

$$\forall t, \forall t_1, \exists t_2 (t_1 \leq t_2 \leq t) \text{ de tal modo que } g(t) - g(t_1) = g'(t_2)(t - t_1) \quad .$$

Portanto, se $R_1 > 0$ é um limite superior da função $|g'(t)|$, pode-se utilizar $\eta = R/R_1$ independentemente de t_1 para avaliar a definição de continuidade

uniforme (Slotine, 1990).

Para utilizar o Lema de Barbalat, obteve-se a derivada temporal de \dot{V} , deste modo:

$$\ddot{V} = \dot{s}^2 + s\ddot{s} \quad (2.46)$$

$$\dot{V} = \dot{s}^2 - \frac{K\phi\dot{s}}{\phi^2 + s^2} . \quad (2.47)$$

Analisando a equação (2.47), é possível concluir que \ddot{V} é limitada e, desta forma, a aplicação do Lema de Barbalat indica que $e_q \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

2.6 Filtro de Kalman Estendido

O Filtro de Kalman foi desenvolvido pelo engenheiro Rudolf Kálmán em 1960 (Kalman, 1960), como uma alternativa para estimar variáveis desconhecidas, a partir de medições realizadas no domínio do tempo com ruídos estatísticos e modelos matemáticos.

O Filtro de Kalman manifesta uma dinâmica de ciclos consecutivos de predição e filtragem. A dinâmica desses ciclos é derivada e interpretada na estrutura das funções de densidade de probabilidade gaussianas. Quando a dinâmica do estado do sistema ou a dinâmica da observação é não linear, as funções de densidade de probabilidade condicional que fornecem a estimativa do erro quadrático médio mínimo não são mais gaussianas. Uma abordagem não ótima para resolver o problema, no quadro de filtros lineares, é o filtro de Kalman Estendido. O Filtro de Kalman estendido implementa um filtro de Kalman para uma dinâmica de sistema que resulta da linearização da dinâmica do Filtro não linear original em torno das estimativas de estado anteriores (Ribeiro, 2004).

No escopo da robótica, o filtro de Kalman tem diversas aplicações. São exemplos: sistemas de visão robótica; processos de navegação autônoma; rastreamento de trajetória; processamento de sinais; controle de mecanismos.

Ao utilizar-se da técnica de controle por modos deslizantes, em sua forma clássica, é requerido que a posição, velocidade, aceleração e sobre-aceleração (também conhecida como tranco ou *jerk*) estejam disponíveis. Badamchizadeh, Hassanzadeh e Fallah (2010) propuseram um filtro de Kalman Estendido e um filtro de Kalman *Unscented*³ para estimar a aceleração e sua derivada (tranco

³O filtro de Kalman *Unscented* é uma revisão do filtro de Kalman. A premissa básica por trás

ou *jerk*) do elo a partir da posição e velocidade. Neste trabalho, um robô manipulador de cinco barras de juntos flexíveis foi considerado como estudo de caso. Os resultados da simulação verificaram a eficácia do método proposto.

Considere um processo em que seu estado verdadeiro pode ser descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{w}(t) \quad (2.48)$$

e sua observação pode ser descrita por:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{v}(t) , \quad (2.49)$$

onde $\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são ruídos de processo e observação respectivamente. Estes ruídos são assumidos, por hipótese, de distribuição normal e média nula.

$$\mathbf{w}(t) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(t)) \quad (2.50)$$

$$\mathbf{v}(t) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}(t)) . \quad (2.51)$$

Para inicializar as estimativas, considere:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = E[\mathbf{x}(t_0)] \quad (2.52)$$

$$\mathbf{P}(t_0) = Var[\mathbf{x}(t_0)] . \quad (2.53)$$

Desta forma, torna-se possível realizar as estimativas através de:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{z}(t) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t))) \quad (2.54)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}(t)^T - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) , \quad (2.55)$$

onde a matriz de ganho de Kalman é definida por:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}(t)^T\mathbf{R}(t) , \quad (2.56)$$

sendo que, a matriz de transição de estado e observação são definidas pelos seguintes Jacobianos:

$$\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{H}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t)} . \quad (2.58)$$

do filtro de Kalman *Unscented* é baseada na ideia de que é mais fácil aproximar uma distribuição gaussiana do que aproximar uma função não linear arbitrária (Badamchizadeh; Hassanzadeh; Fallah, 2010).

3 ESTUDOS DE CASO

Neste capítulo serão apresentados dois estudos de casos. O primeiro estudo de caso trata de um exemplo clássico de um manipulador de elo único. O segundo caso trata de um manipulador robótico de 6 graus de liberdade, que pode ser utilizado em diversas aplicações industriais.

A motivação da escolha destes sistemas mecânicos se deve a que:

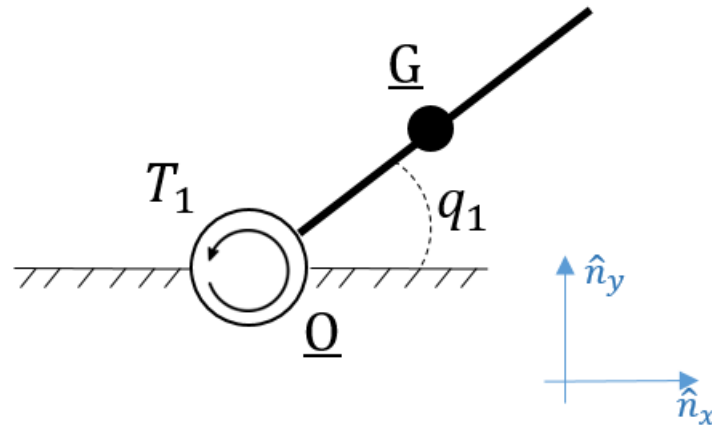
1. o primeiro exemplo é dotado de uma cinemática simples, isso torna a obtenção das equações diferenciais do movimento, da lei de controle e do filtro de Kalman estendido mais didática;
2. o segundo exemplo é considerado um caso prático, de forma que, toda a metodologia apresentada no capítulo 2 é aplicada em um exemplo realista.

Estes exemplos serão apresentados em ordem crescente de complexidade, no que tange à obtenção das equações diferenciais do movimento.

3.1 Manipulador de elo único com junta flexível

Considere o elo com o centro de gravidade no ponto \underline{G} , ilustrado pela figura 4.1, de massa m , comprimento L e momento de inércia em torno de $\underline{G}\hat{n}_z$ igual a J_z . A junta de revolução representada no ponto \underline{O} é flexível, modelada como uma mola de torção linear, de constante k . O momento de inércia do rotor do atuador em torno de $\underline{O}\hat{n}_z$ é igual a J_M cuja orientação é definida a partir de um ângulo q_M medido em relação ao eixo $\underline{O}\hat{n}_x$. Assuma, por hipótese, que não há atrito.

Figura 3.1: Manipulador de elo único com junta flexível.



3.1.1 Cinemática

Considere a posição do ponto \underline{G} no sistema de coordenadas $N = (\underline{O}, \hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z)$, solidário a um referencial inercial:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L \cdot \cos(q_1) & \frac{1}{2}L \cdot \sin(q_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

derivando em relação ao tempo, tem-se:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\dot{q}_1 L \cdot \sin(q_1) & \frac{1}{2}\dot{q}_1 L \cdot \cos(q_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

derivando novamente no tempo:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\ddot{q}_1 L \cdot \sin(q_1) - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 L \cdot \cos(q_1) & \frac{1}{2}\ddot{q}_1 L \cdot \cos(q_1) - \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 L \cdot \sin(q_1) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Velocidade e aceleração angulares do elo podem ser definidas por:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{q}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Assim, a partir da equação (2.6), as equações de vínculos podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (3.6)$$

onde:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}L \cdot \sin(q_1) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}L \cdot \cos(q_1) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{b}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}L \cdot \dot{q}_1^2 \cdot \cos(q_1) \\ -\frac{1}{2}L \cdot \dot{q}_1^2 \sin(q_1) \end{Bmatrix} . \quad (3.9)$$

3.1.2 Equações Diferenciais do Movimento

3.1.2.1 Equação de Lagrange

Para determinar as equações diferenciais do movimento através das equações de Lagrange, é necessário definir a energia cinética e a energia potencial do sistema em função do conjunto mínimo de coordenadas generalizadas. Portanto,

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}J_z\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_M\dot{q}_M^2 \quad (3.10)$$

$$V = mgy + \frac{1}{2}k(q_1 - q_M)^2 . \quad (3.11)$$

Desta forma, substituindo as equações (3.10) e (3.11) na equação de Lagrange é possível obter as equações diferenciais do movimento:

$$\begin{bmatrix} \frac{mL^2}{4} + J_z & 0 \\ 0 & J_M \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}mgL \cos(q_1) \\ T_1 \end{Bmatrix} . \quad (3.12)$$

3.1.2.2 Metodologia Modular de Modelagem

Considerando o manipulador sem vínculos (nível hierárquico 0), tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais do movimento:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{q}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ T_1 \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

aplicando o procedimento exposto na seção 2.4 e considerando as equações de vínculo (3.6). Neste exemplo simples, somente há um nível hierárquico. Portanto, basta obter uma matriz S que seja o complemento ortogonal de A, apresentada em (3.6):

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}L \sin q_1 & 0 \\ \frac{1}{2}L \cos q_1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

desta forma, é possível obter as equações diferenciais do movimento:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}mL \sin(q_1) & \frac{1}{2}mL \cos(q_1) & J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_M \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ q_1 \\ q_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}mgL \cos(q_1) \\ T_1 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

3.1.3 Controle por modos deslizantes

Considerando a superfície de deslizamento para $n = 4$, tem-se:

$$s = (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_d) + 3\lambda(\dot{q}_1 - \dot{q}_d) + 3\lambda^2(q_1 - q_d) + \lambda^3(q_1 - q_d). \quad (3.16)$$

Derivando no tempo,

$$\dot{s} = (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_d) + 3\lambda(\dot{q}_1 - \dot{q}_d) + 3\lambda^2(q_1 - q_d) = -K \arctan(s/\phi). \quad (3.17)$$

Desta forma, é possível obter a lei de controle não linear, substituindo:

$$\ddot{q}_1 = f(\ddot{q}_1, \dot{q}_1, q_1, \ddot{q}_M), \quad (3.18)$$

na equação (3.17), obtendo-se assim, a lei de controle não linear:

$$T_1 = f(\ddot{q}_1, \dot{q}_1, q_1, q_M) . \quad (3.19)$$

Analisando a equação (3.19), é possível notar que, a lei de controle não linear está em função de variáveis desconhecidas. Uma vez que, em um problema prático, sensores de posição e velocidade forneceriam sinais ruidosos, nesta simulação utilizou-se o filtro de Kalman exposto na seção 3.6 com o intuito de estimar as variáveis desconhecidas. O apêndice A contém o equacionamento utilizado para o filtro de Kalman estendido.

3.1.4 Simulação

Esta simulação tem como objetivo principal ser didática. Desta forma, considerou-se uma trajetória suave e sem trancos. A trajetória desejada para esta simulação será uma volta completa do elo único em relação ao eixo $\underline{O}\hat{n}_z$.

3.1.4.1 Parâmetros

Para a simulação, considerou-se os seguintes parâmetros.

Tabela 3.1: Parâmetros de Simulação - Manipulador de elo único.

Parâmetro	Valor	Unidade
Massa (m)	2,5	kg
Momento de Inércia (J_z)	0,2	kg.m ²
Momento de Inércia (J_M)	0,001	kg.m ²
Gravidade (g)	9,81	m/s ²
Rigidez da Junta (k)	100	N.m/rad
Comprimento do Elo (l)	1	m
Constante da superfície deslizante (λ)	10	1/s
Ganho do Controlador (K)	5000	m/s ⁴
Espessura da camada limite	0,01	m/s ³

3.1.4.2 Cinemática

Para determinar a trajetória desejada, considerou-se os seguintes valores no instante inicial (t_i) e no instante final (t_f) de simulação:

$$q_d(t_i) = 0 \quad (3.20)$$

$$q_d(t_f) = 2\pi \quad (3.21)$$

$$\dot{q}_d(t_i) = \dot{q}_d(t_f) = 0 \quad (3.22)$$

$$\ddot{q}_d(t_i) = \ddot{q}_d(t_f) = 0 \quad (3.23)$$

$$\ddot{\ddot{q}}_d(t_i) = \ddot{\ddot{q}}_d(t_f) = 0 \quad (3.24)$$

De forma a satisfazer as condições supramencionadas, considerou-se o seguinte polinômio de sétimo grau:

$$q_d(t) = a.t^7 + b.t^6 + c.t^5 + d.t^4 + e.t^3 + f.t^2 + g.t + h \quad (3.25)$$

Sendo a, b, c, d, e, f, g e h constantes escalares a serem determinadas de forma a satisfazer os requisitos de planeamento de trajetória.

O apêndice B apresenta o procedimento utilizado para determinar as constantes mencionadas acima.

3.1.4.3 Resultados

Nesta seção apresenta-se os resultados da simulação numérica. Todos os gráficos apresentam séries temporais e tem como objetivo principal analisar o comportamento dinâmico do sistema mecânico no domínio do tempo.

Figura 3.2: Posição x Tempo.

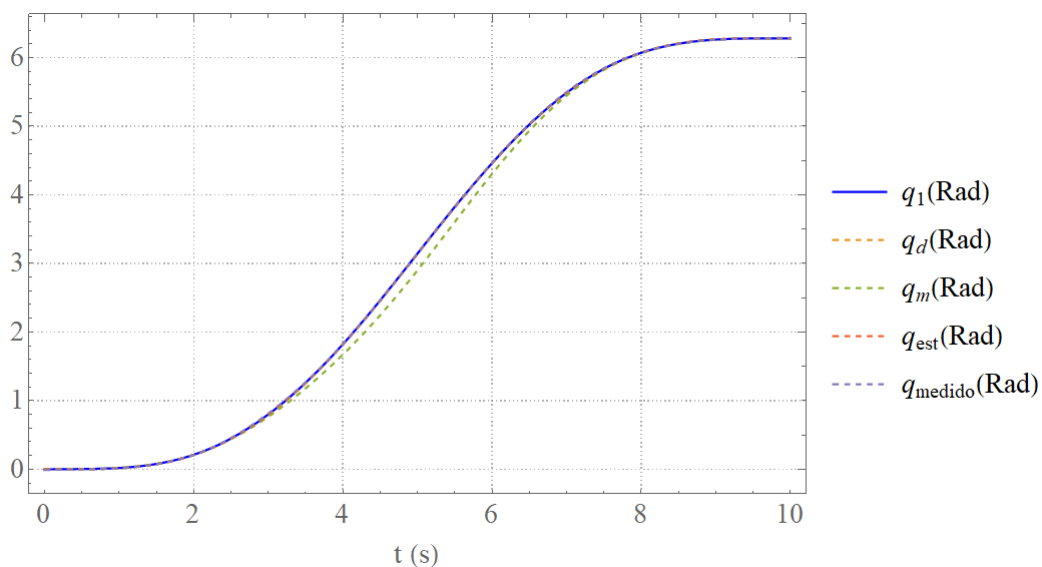
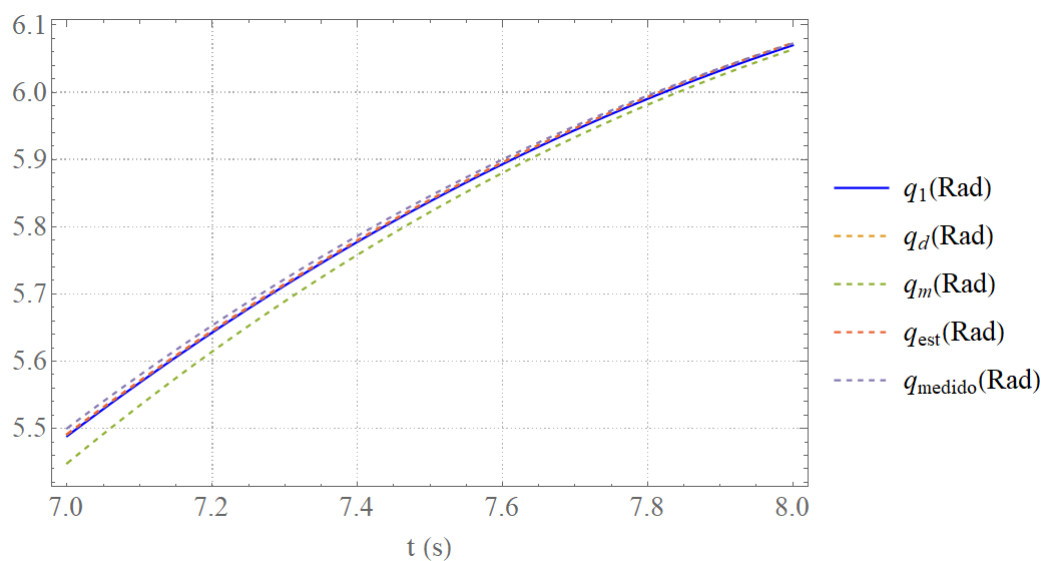


Figura 3.3: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 7 a 8 s.



Nas figuras 3.2 e 3.3 percebe-se que a lei de controle proposta proporciona um pequeno erro de acompanhamento de forma que, q_1 praticamente coincide com a trajetória desejada. Nota-se que a coordenada generalizada q_m não coincide com q_1 . Isto ocorre devido a flexibilidade da junta.

Figura 3.4: Velocidade Angular x Tempo.

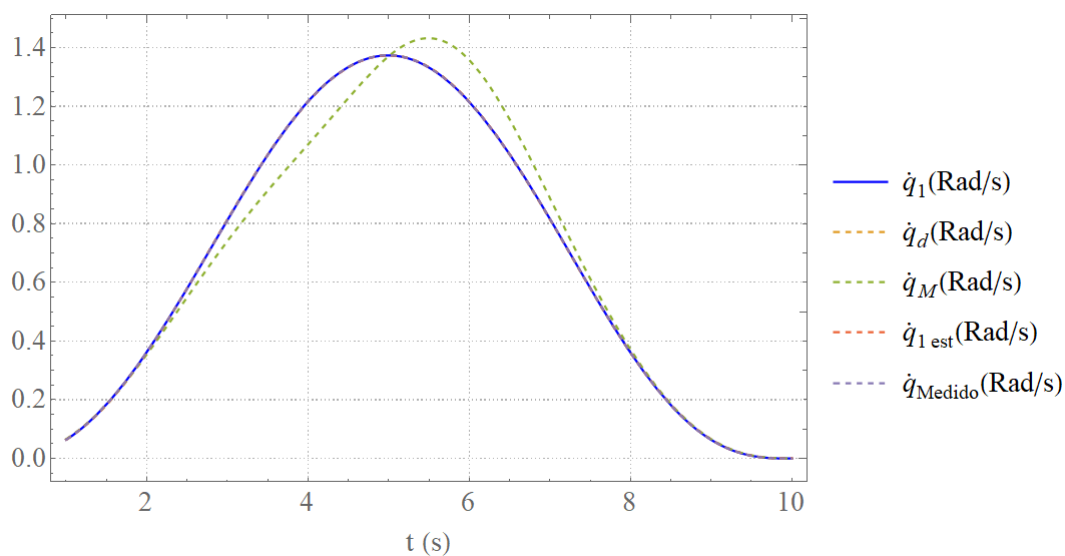
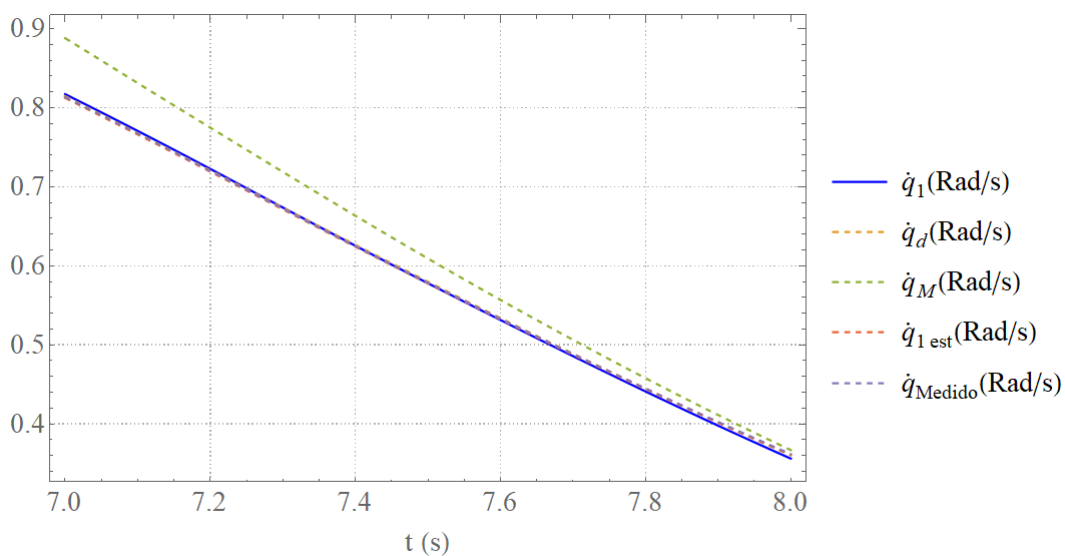


Figura 3.5: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 7 a 8 s.



Ao analisar as figuras 3.4 e 3.5 nota-se que, conforme esperado, a velocidade angular $\dot{q}_{1\ est}$ aproximou-se mais da trajetória desejada do que a velocidade angular \dot{q}_1 . De fato, a lei de controle é função dos estados estimados, uma vez que não se tem acesso aos estados reais. Este fato ressalta a importância da utilização de um estimador com uma eficiência satisfatória.

Figura 3.6: Aceleração Angular x Tempo

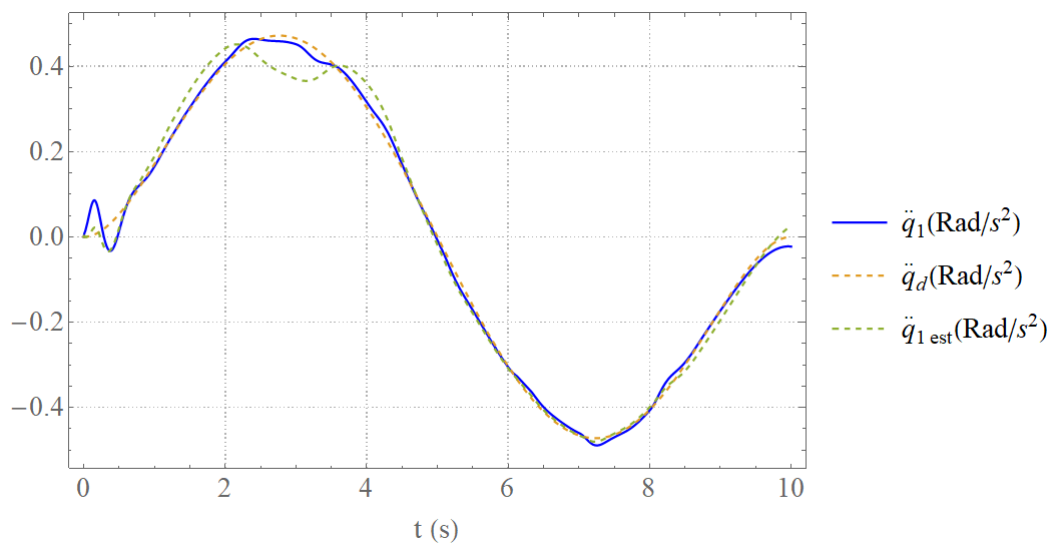


Figura 3.7: Detalhe do histórico temporal da aceleração angular para o intervalo de 7 a 8 s.

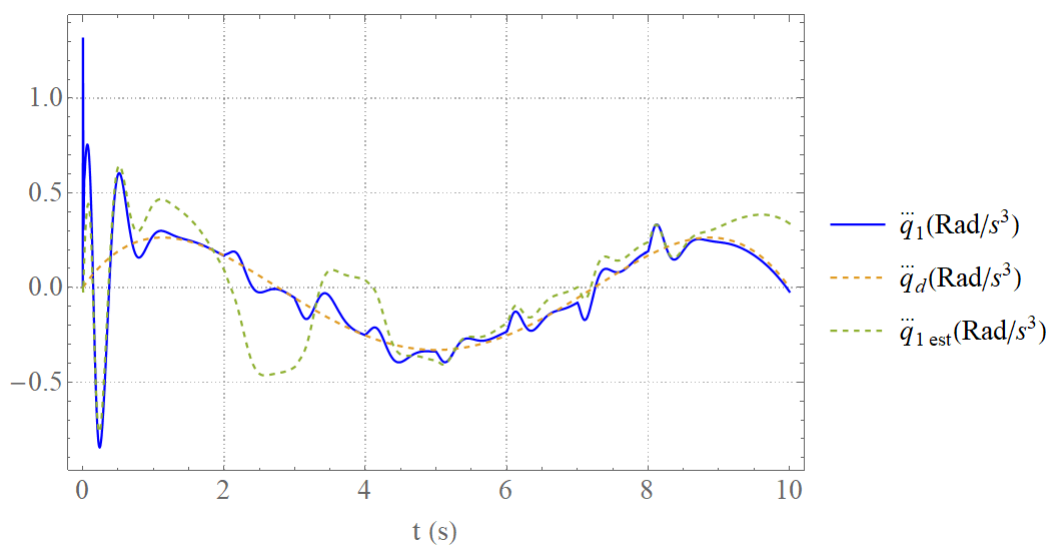


Figura 3.8: Derivada da aceleração angular x Tempo

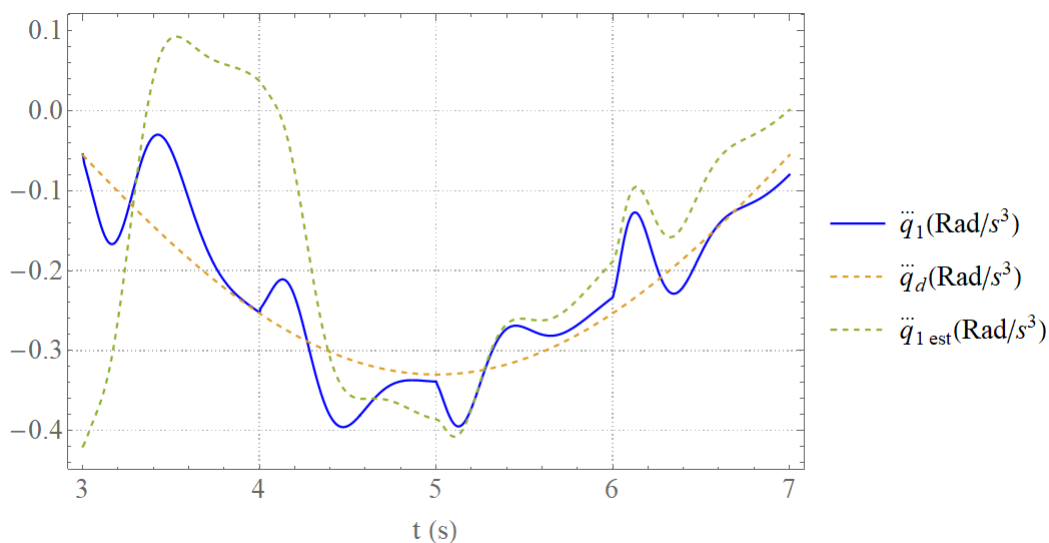
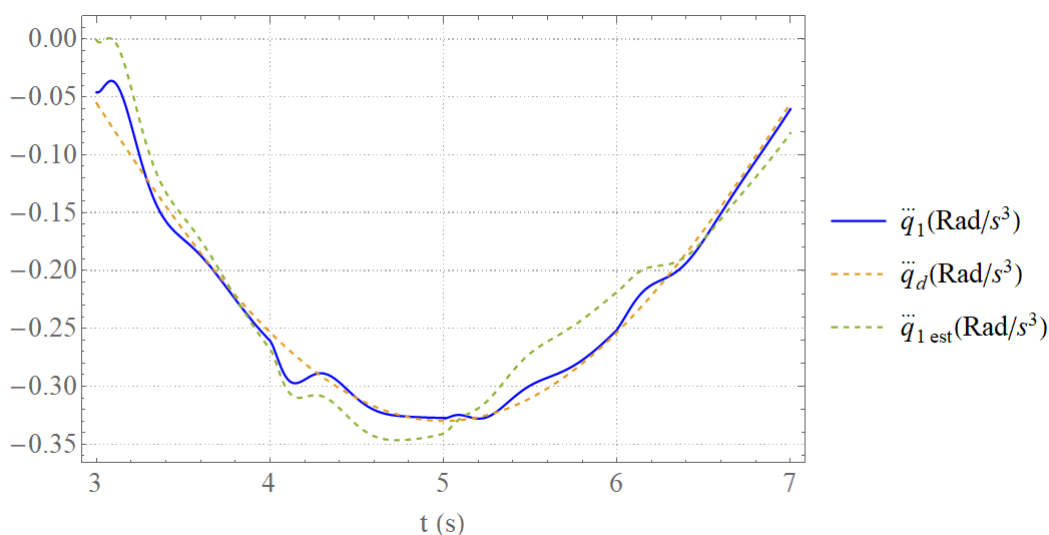
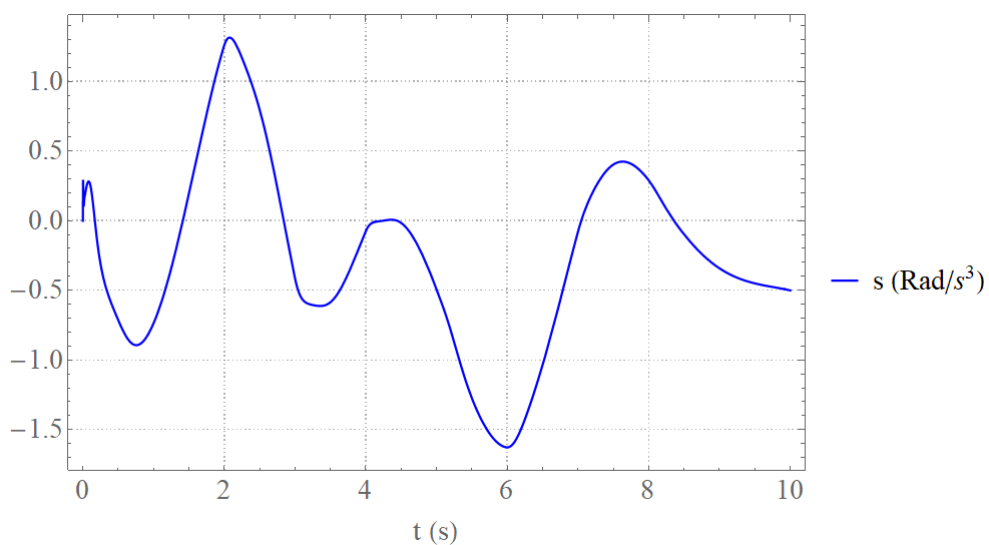
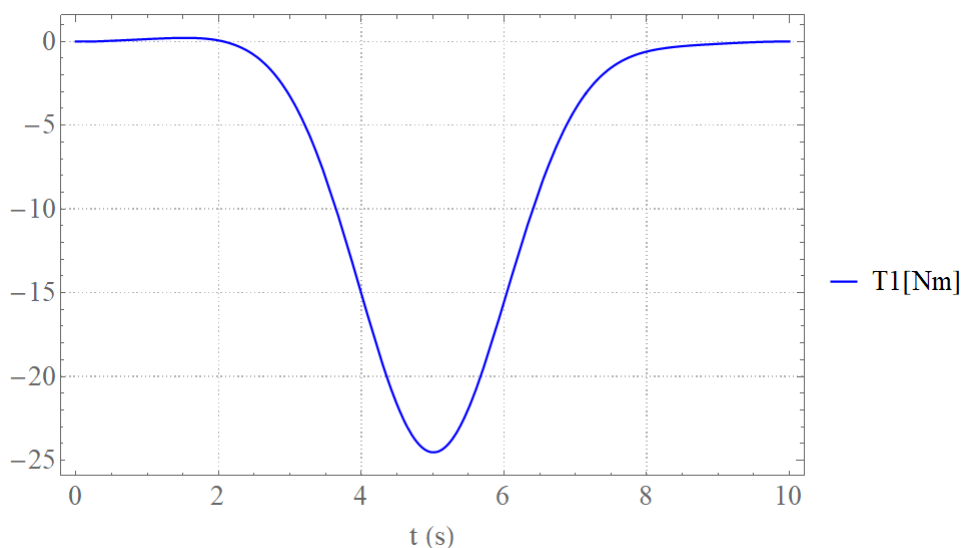


Figura 3.9: Detalhe do histórico temporal da derivada da aceleração angular para o intervalo de 3 a 7 s.

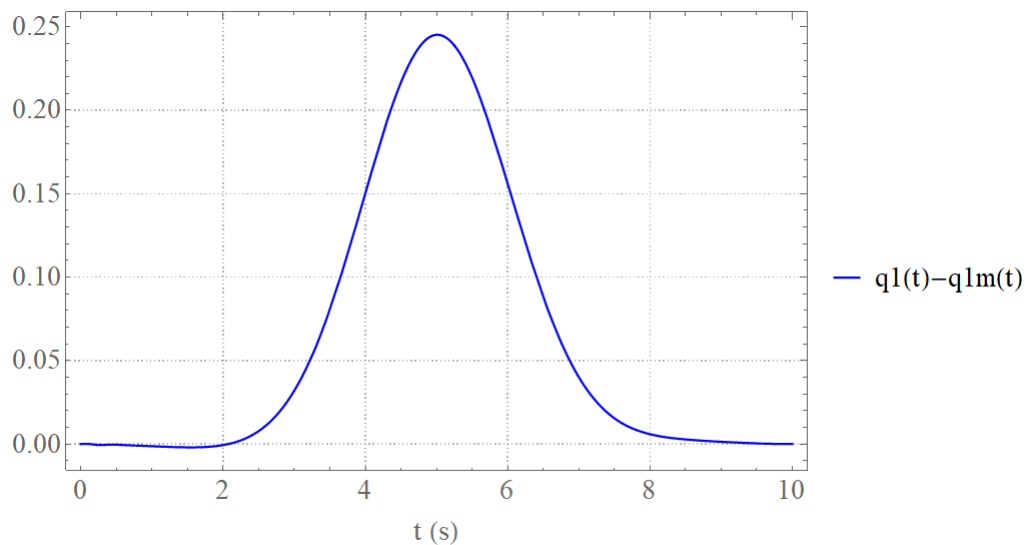


Nas figuras 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 percebe-se uma diferença significativa dos valores de estados reais da aceleração angular e sua derivada (\dot{q}_1 e \ddot{q}_1), com respeito aos estados estimados e os estados desejados. Esta diferença implica, de certa forma, em um torque de perturbação pois, caso os estados reais fossem conhecidos, a lei de controle seria função dos estados reais e não das estimativas dos estados reais.

Figura 3.10: Superfície de Deslizamento x Tempo**Figura 3.11: Torque x Tempo**

Na figura 3.10 percebe-se que a dinâmica do erro de acompanhamento é estável pois a variável s apresenta-se próximo a zero durante a simulação.

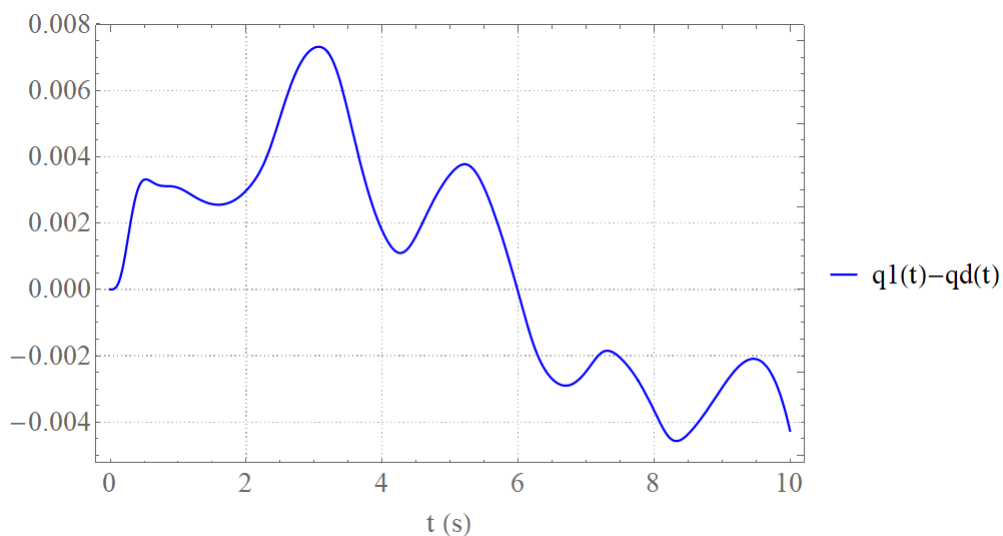
Na figura 3.11 é passível notar que o esforço de controle não exibe *chattering* e é possível de ser realizado.

Figura 3.12: $(q_1 - q_{1m}) \times$ Tempo

Na figura 3.12 é possível notar que a defasagem angular é máxima no instante que o módulo do torque exercido pelo atuador é máximo. Seu valor eficaz pode ser avaliado através da seguinte equação:

$$(q_1 - q_{1m})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} (q_1 - q_{1m})^2 dt} . \quad (3.26)$$

No presente caso o valor eficaz resulta $1,048 \cdot 10^{-1} rad$

Figura 3.13: Erro de acompanhamento x Tempo

Na figura 3.13 é possível notar que o erro de acompanhamento apresenta baixos valores no domínio do tempo quando comparado à defasagem angular ilustrada no gráfico da figura 3.12. Seu valor eficaz pode ser avaliado através

da seguinte equação:

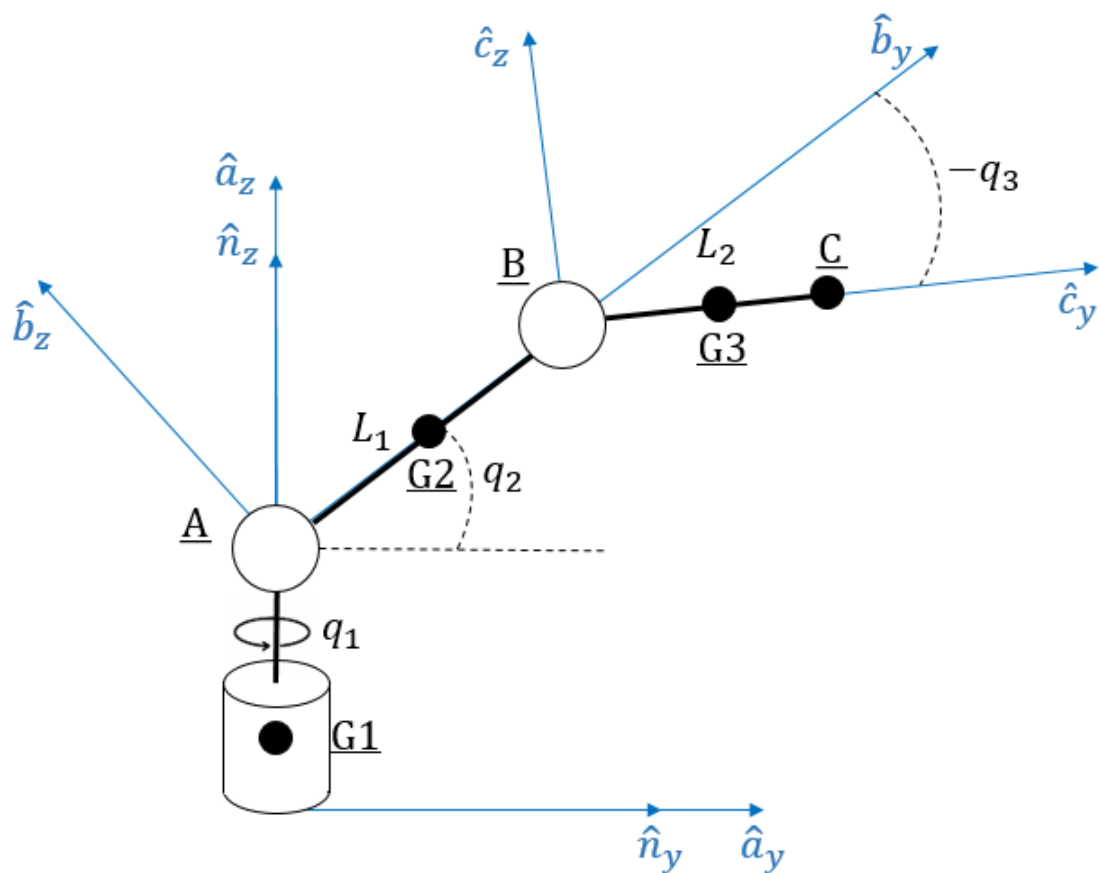
$$(q_1 - q_d)_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} (q_1 - q_d)^2 dt} , \quad (3.27)$$

que, no presente caso, o valor eficaz resulta $3,466 \cdot 10^{-3} rad$. Este valor é cerca de 3% do valor eficaz apresentado pela defasagem dos ângulos.

3.2 Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade com juntas flexíveis

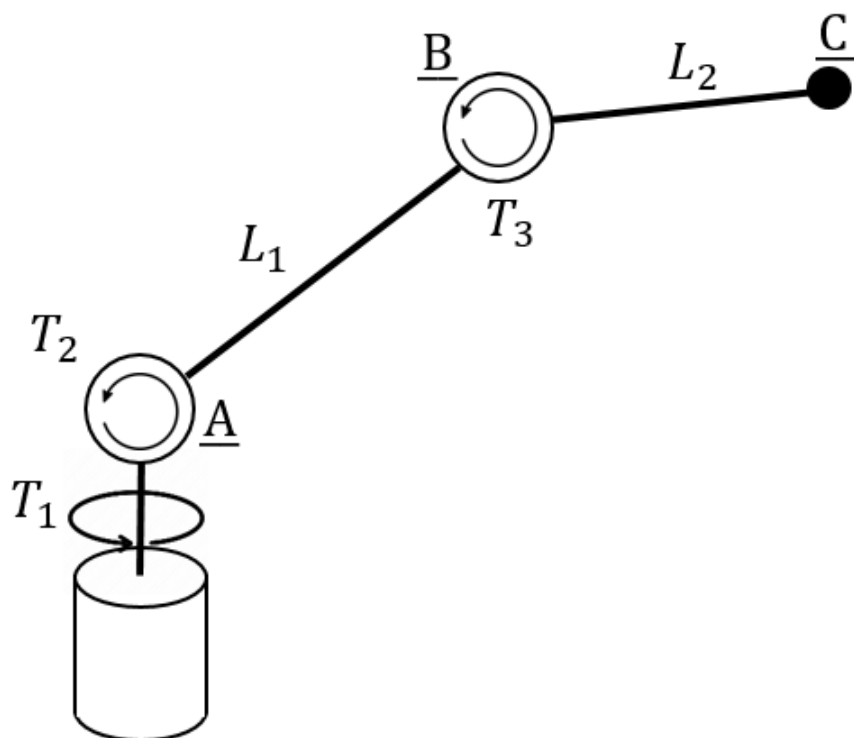
Considere o manipulador robótico de 6 graus de liberdade \mathcal{A} ilustrado na figura 3.13. O corpo A tem seu centro de gravidade no ponto \underline{G}_1 , massa m_1 , tensor de inércia em torno dos seus eixos principais igual a \underline{J}_A e girar em torno do eixo $\underline{O}\hat{n}_z$ do referencial inercial N. O eixo $\underline{G}_1\hat{a}_y$, do sistemas de coordenadas que coincide com os eixos principais de inércia do corpo A, forma um angulo q_1 com o eixo $\underline{G}_1\hat{n}_y$. O corpo B tem seu centro de gravidade no ponto \underline{G}_2 , massa m_2 , comprimento L_1 e tensor de inércia em torno dos seus eixos principais igual a \underline{J}_B . O eixo $\underline{A}\hat{b}_y$, do sistemas de coordenadas que coincide com os eixos principais de inércia do corpo B, forma um angulo q_2 com o plano formado pelos eixos $\underline{G}_1\hat{a}_x$ e $\underline{G}_1\hat{a}_y$. O corpo B está articulado e pode rotacionar em relação ao eixo que passa pelo ponto \underline{A} e é paralelo ao eixo $\underline{A}\hat{b}_x$. O corpo C tem seu centro de gravidade no ponto \underline{G}_3 , massa m_3 , comprimento L_2 e tensor de inércia em torno dos seus eixos principais igual a \underline{J}_C . O corpo C também está articulado e pode girar em torno do eixo que passa pelo ponto \underline{B} e é paralelo ao eixo $\underline{B}\hat{c}_x$. Todas as juntas são flexíveis e modeladas como molas de torção lineares de constante k , e seus elementos rotativos possuem momento de inercia em relação ao seu eixo de rotação igual a J_M . Considere, por hipótese, que a distância entre o ponto \underline{G}_1 e o ponto \underline{A} é desprezível e que não há atrito nos vínculos. Considere também, que este manipulador contém um efetuador D no ponto \underline{C} . Este efetuador tem dimensões desprezíveis, é solidário ao corpo C, tem massa m_4 e tensor de inércia em torno dos seus eixos principais igual a \underline{J}_D .

Figura 3.14: Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade



A figura 3.14 ilustra as juntas em que os torques estão sendo aplicados.

Figura 3.15: Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade



3.2.1 Cinemática

Considere as posições dos pontos \underline{G}_1 , \underline{G}_2 , \underline{G}_3 e \underline{C} em relação à origem do referencial inercial N. O Apêndice C apresenta as matrizes de rotação utilizadas nesta modelagem.

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_2|\underline{O}}^N = \mathbf{R}_A^N \mathbf{R}_B^A \underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_2|\underline{O}}^B \quad (3.28)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{B}|\underline{O}}^N = \mathbf{R}_A^N \mathbf{R}_B^A \underline{\mathbf{p}}_{\underline{B}|\underline{O}}^B \quad (3.29)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_3|\underline{O}}^N = \mathbf{R}_A^N \mathbf{R}_B^A \mathbf{R}_C^B \underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_3|\underline{B}}^C + \underline{\mathbf{p}}_{\underline{B}|\underline{O}}^N \quad (3.30)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{C}|\underline{O}}^N = \mathbf{R}_A^N \mathbf{R}_B^A \mathbf{R}_C^B \underline{\mathbf{p}}_{\underline{C}|\underline{B}}^C + \underline{\mathbf{p}}_{\underline{B}|\underline{O}}^N, \quad (3.31)$$

sendo,

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_1|\underline{O}}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_2|\underline{O}}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0,5L_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.33)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{B}|\underline{O}}^B = \begin{bmatrix} 0 & L_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.34)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_3|\underline{B}}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0,5L_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.35)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{\underline{C}|\underline{B}}^C = \begin{bmatrix} 0 & L_2 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.36)$$

Derivando no tempo tem-se:

$$\underline{\mathbf{v}}_{\underline{G}_j|\underline{O}}^N = \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{p}}_{\underline{G}_j|\underline{O}}^N \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \quad (3.37)$$

$$\underline{\mathbf{v}}_{\underline{C}|\underline{O}}^N = \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{p}}_{\underline{C}|\underline{O}}^N, \quad (3.38)$$

e derivando no tempo novamente, tem-se:

$$\underline{\mathbf{a}}_{\underline{G}_j|\underline{O}}^N = \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{v}}_{\underline{G}_j|\underline{O}}^N \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \quad (3.39)$$

$$\underline{\mathbf{a}}_{\underline{C}|\underline{O}}^N = \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{v}}_{\underline{C}|\underline{O}}^N. \quad (3.40)$$

As velocidades angulares dos corpos descritas no sistema de coordenadas

solidário ao próprio corpo e coincidentes com os eixos principais de inércia são:

$$\omega_{A|N}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.41)$$

$$\omega_{B|A}^B = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.42)$$

$$\omega_{C|B}^C = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.43)$$

$$\omega_{D|B}^C = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.44)$$

$$\omega_{B|N}^B = (\mathbf{R}_B^A)^T \cdot \omega_{A|N}^A + \omega_{B|A}^B \quad (3.45)$$

$$\omega_{C|N}^C = (\mathbf{R}_C^B)^T \cdot \omega_{B|N}^B + \omega_{C|B}^C \quad (3.46)$$

$$\omega_{D|N}^C = (\mathbf{R}_C^B)^T \cdot \omega_{B|N}^B + \omega_{D|B}^C \quad (3.47)$$

Assim, a partir das equações 3.39 e 3.40, as equações de vínculos podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.48)$$

3.2.2 Equações Diferenciais do Movimento

3.2.2.1 Equação de Lagrange

Para determinar as equações diferenciais do movimento através das equações de Lagrange, é necessário definir a energia cinética e a energia potencial do sistema em função do conjunto mínimo de coordenadas generalizadas. Portanto,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{v}_{G_i|O}^N \cdot \mathbf{v}_{G_i|O}^N + \frac{1}{2} \sum_{j=A}^D ((\omega_{j|N}^j \mathbf{J}_j)^T \omega_{j|N}^j) \quad (3.49)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 m_i g z_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 k (q_j - q_{jM})^2 \quad (3.50)$$

desta forma, é possível obter as equações diferenciais do movimento:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = T_i \quad (3.51)$$

3.2.2.2 Metodologia Modular de Modelagem

Considerando os cinco corpos que formam o manipulador sem vínculos, tem-se a seguinte energia cinética e energia potencial.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=A}^D ((\boldsymbol{\omega}_{j|N}^j)^T \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_{j|N}^j) \quad (3.52)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 m_i g z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 k (q_j - q_{jM})^2 \quad (3.53)$$

Aplicando o procedimento exposto na seção 3.4 e considerando as equações de vínculo (3.48) é possível obter as equações diferenciais do movimento do sistema vinculado.

3.2.3 Controle por modos deslizantes

Considerando a superfície de deslizamento para $n = 4$, tem-se:

$$\mathbf{s} = (\ddot{q}_i - \ddot{q}_{id}) + 3\lambda(\dot{q}_i - \dot{q}_{id}) + 3\lambda^2(q_i - q_{id}) + \lambda^3(q_i - q_{id}) , \quad (3.54)$$

derivando no tempo,

$$\dot{\mathbf{s}} = (\ddot{q}_i - \ddot{q}_{id}) + 3\lambda(\dot{q}_i - \dot{q}_{id}) + 3\lambda^2(q_i - q_{id}) + \lambda^3(\dot{q}_i - \dot{q}_{id}) , \quad (3.55)$$

desta forma, é possível obter a lei de controle não linear, substituindo:

$$\ddot{\mathbf{q}} = f(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (3.56)$$

na equação (3.48), obtendo-se assim, a lei de controle não linear

$$T_i = f(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_M) . \quad (3.57)$$

3.2.4 Simulação 1

Esta simulação tem como objetivo principal analisar o comportamento dinâmico do manipulador, quando uma trajetória desejada senoidal é imposta.

3.2.4.1 Parâmetros

Tabela 3.2: Parâmetros de Simulação - Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade.

Parâmetro	Valor	Unidade
Massa (m_1)	30	kg
Massa (m_2)	30	kg
Massa (m_3)	30	kg
Massa (m_4)	20	kg
Momento de Inércia (J_{Az})	0,03	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Bx})	0,16	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{By})	0,01	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Bz})	0,16	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Cx})	0,16	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Cy})	0,01	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Cz})	0,16	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Dx})	0,001	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Dy})	0,001	kg.m ²
Momento de Inércia (J_{Dz})	0,001	kg.m ²
Momento de Inércia (J_M)	0,001	kg.m ²
Gravidade (g)	9,81	m/s ²
Rigidez da Junta (k)	6000	N.m/rad
Comprimento (L_1)	0,5	m
Comprimento (L_2)	0,5	m
Constante da superfície deslizante (λ)	3	1/s
Ganho do Controlador (K)	10	m/s ⁴
Espessura da camada limite	1	m/s ³

3.2.4.2 Cinemática

Neste exemplo, a trajetória desejada é uma senóide definida pelas equações:

$$q_{1d} = q_1(0) + 0,2q_1(0) \sin\left(\frac{2\pi}{15}t\right) \quad (3.58)$$

$$q_{2d} = q_2(0) + 0,2q_2(0) \sin\left(\frac{2\pi}{15}t\right) \quad (3.59)$$

$$q_{3d} = q_3(0) + 0,2q_3(0) \sin\left(\frac{2\pi}{15}t\right) \quad (3.60)$$

3.2.4.3 Resultados

Nesta seção apresenta-se os resultados da simulação numérica. Os gráficos apresentam séries temporais e tem como objetivo principal analisar o comportamento dinâmico do sistema mecânico no domínio do tempo.

Figura 3.16: Posição x Tempo.

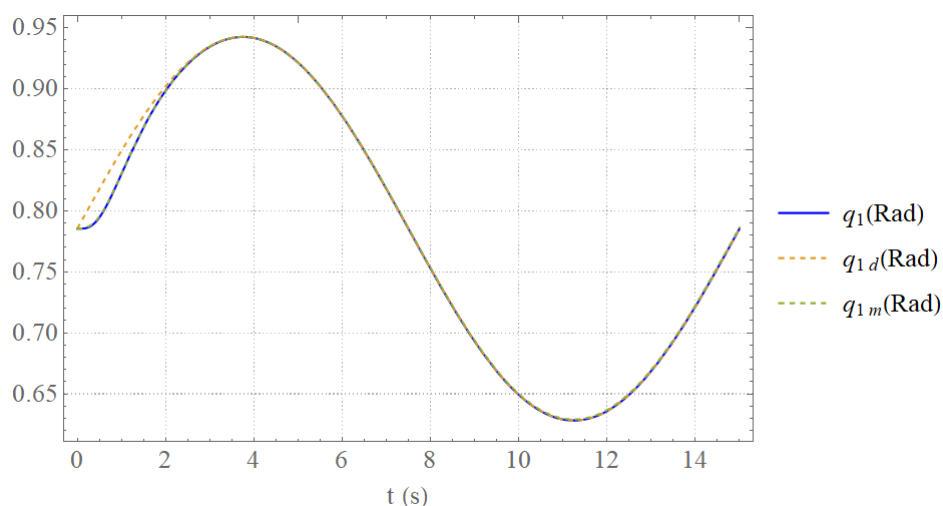


Figura 3.17: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 3 a 4 s.

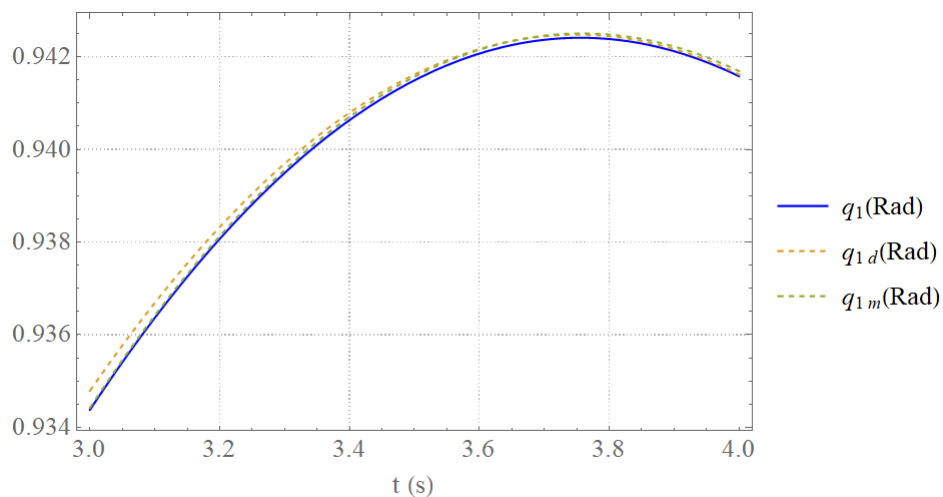


Figura 3.18: Velocidade Angular x Tempo.

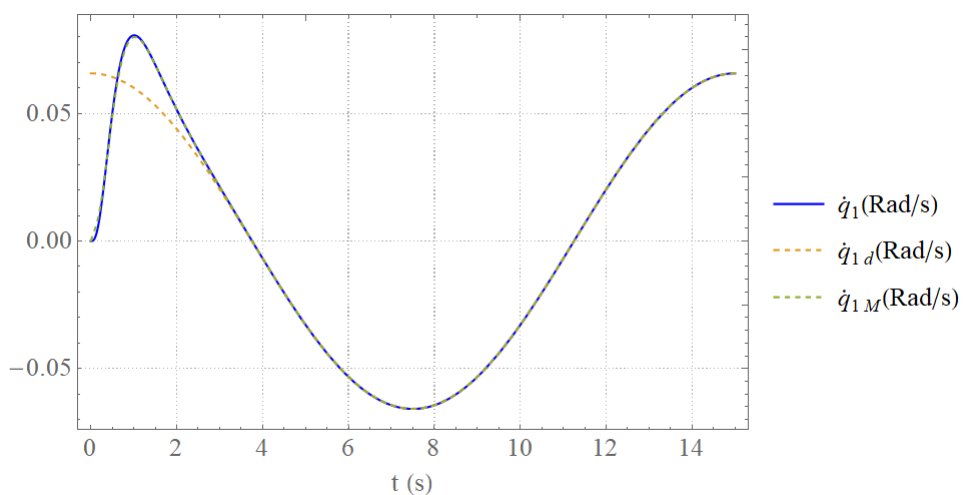


Figura 3.19: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 6 a 8 s.

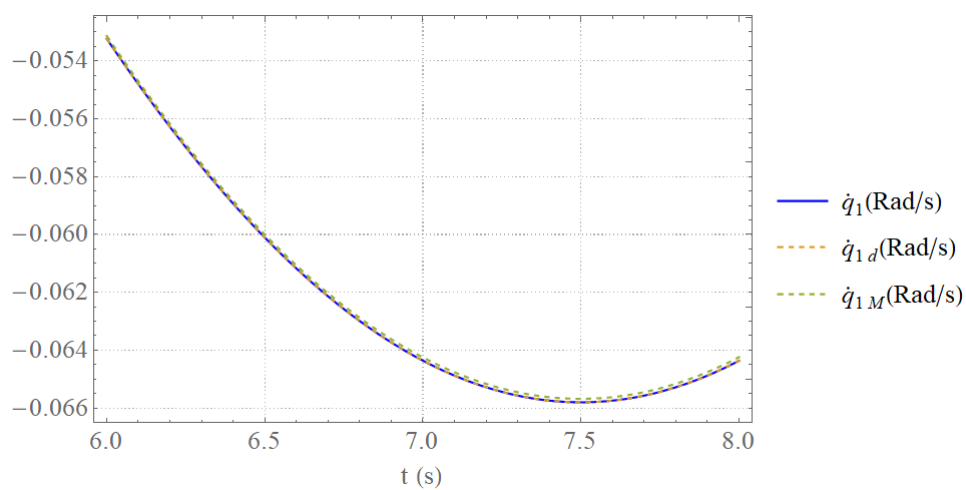


Figura 3.20: Posição x Tempo.

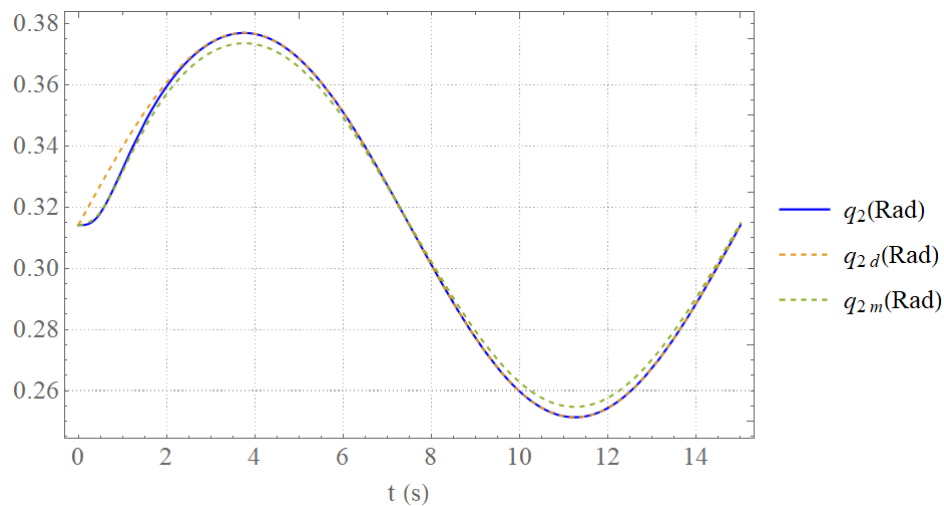


Figura 3.21: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 3 a 4 s.

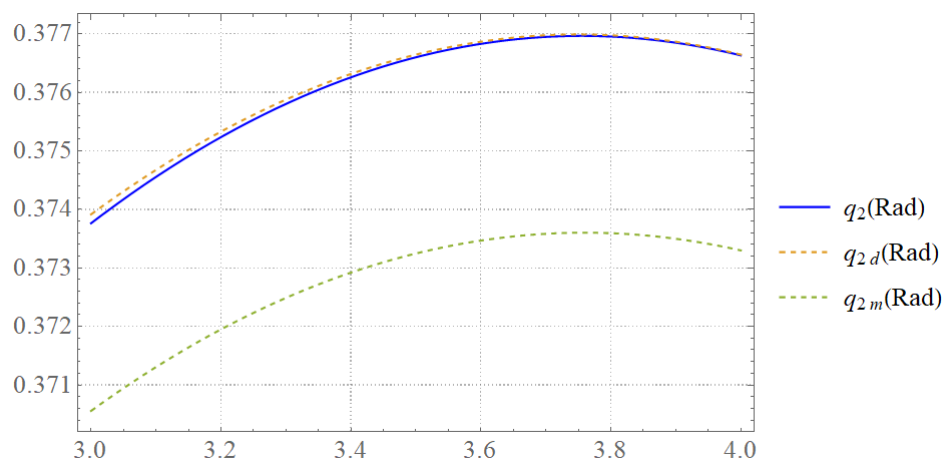


Figura 3.22: Velocidade Angular x Tempo.

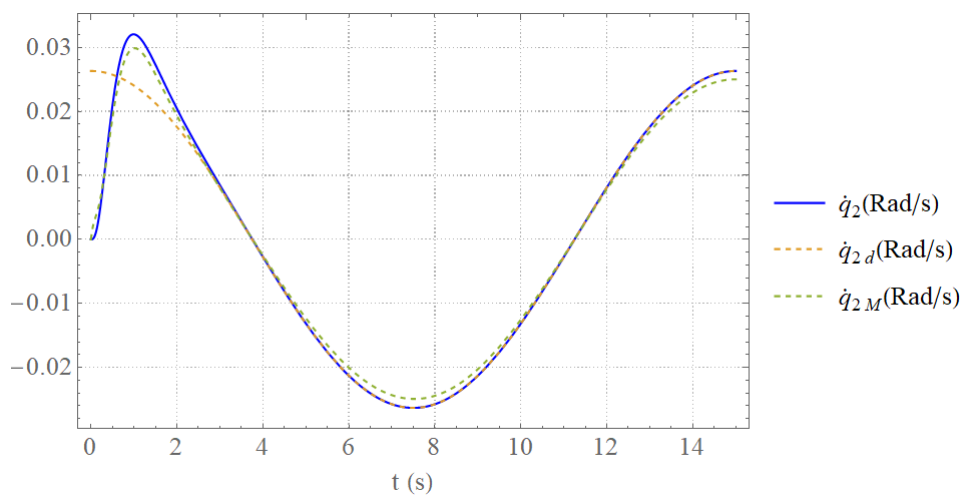


Figura 3.23: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 3 a 4 s.

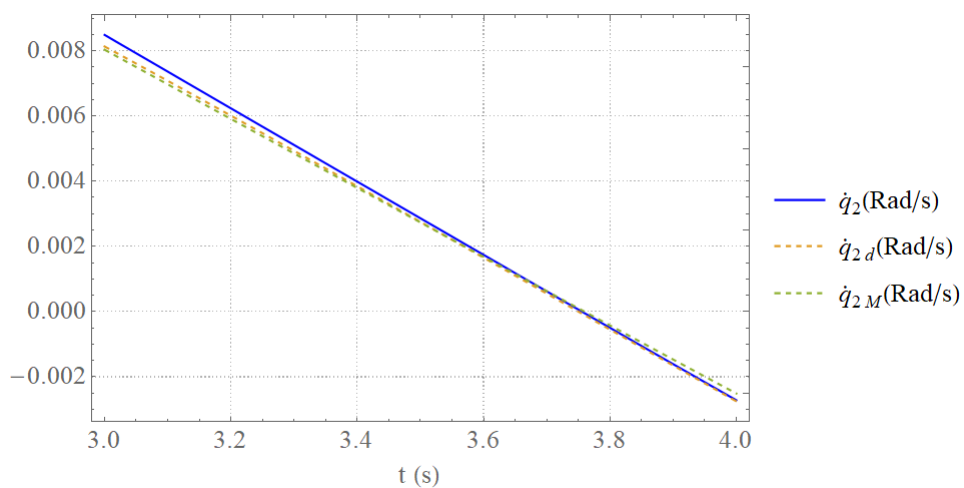


Figura 3.24: Posição x Tempo.

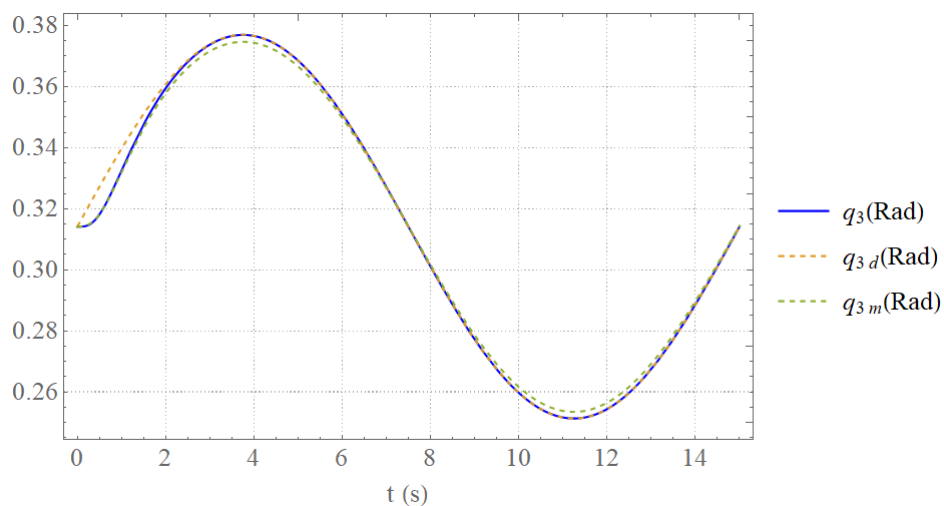


Figura 3.25: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 3 a 4 s.

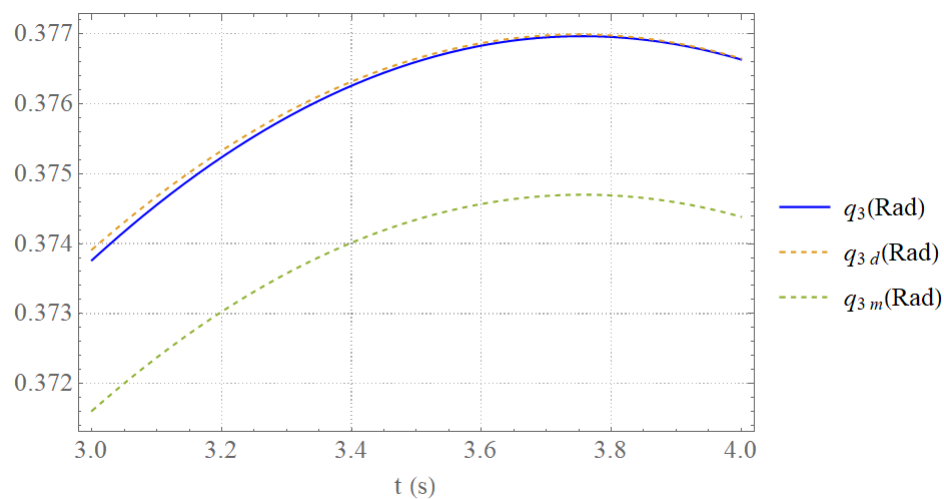


Figura 3.26: Velocidade Angular x Tempo.

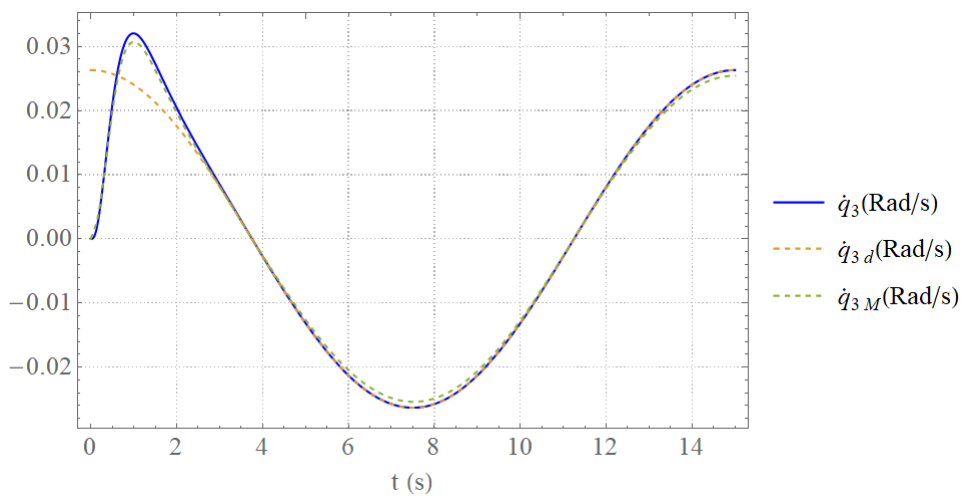
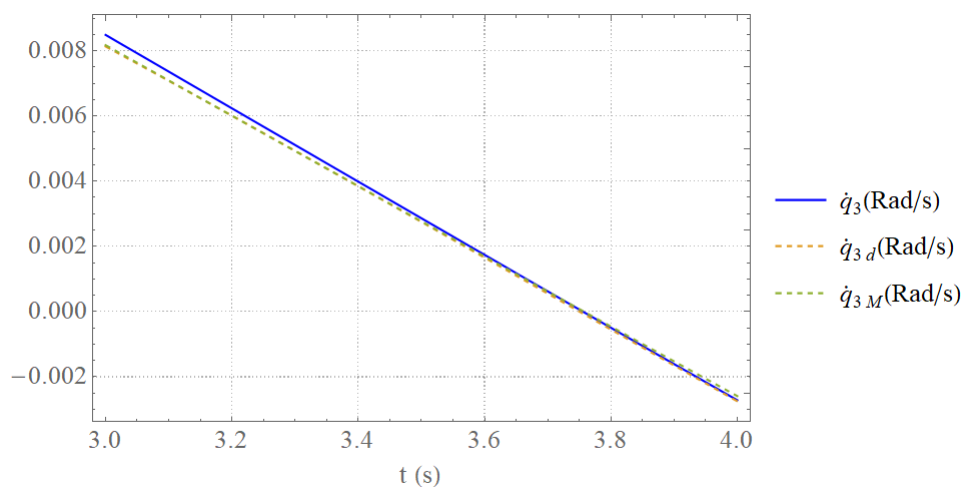


Figura 3.27: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 3 a 4 s.



Nas figuras 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27 percebe-se que a lei de controle proposta conduziu a um pequeno erro de acompanhamento de forma que às evoluções temporais das coordenadas generalizadas parecem coincidentes com as desejadas.

Vale ressaltar que, analisando as figuras que ilustram o detalhe histórico de posição angular e da velocidade angular, é possível perceber que, devido à flexibilidade de cada uma das juntas, existe uma defasagem entre o ângulo do elo e o respectivo ângulo do motor.

Figura 3.28: Torque 1 x Tempo.

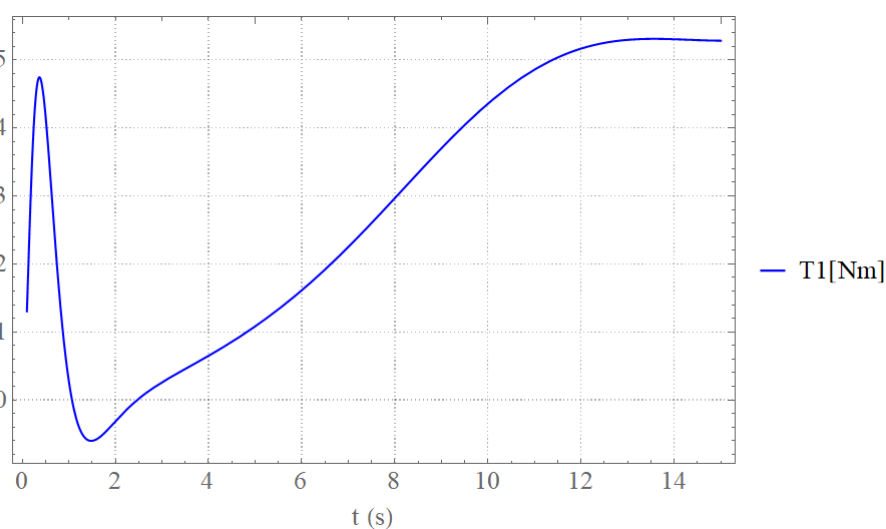
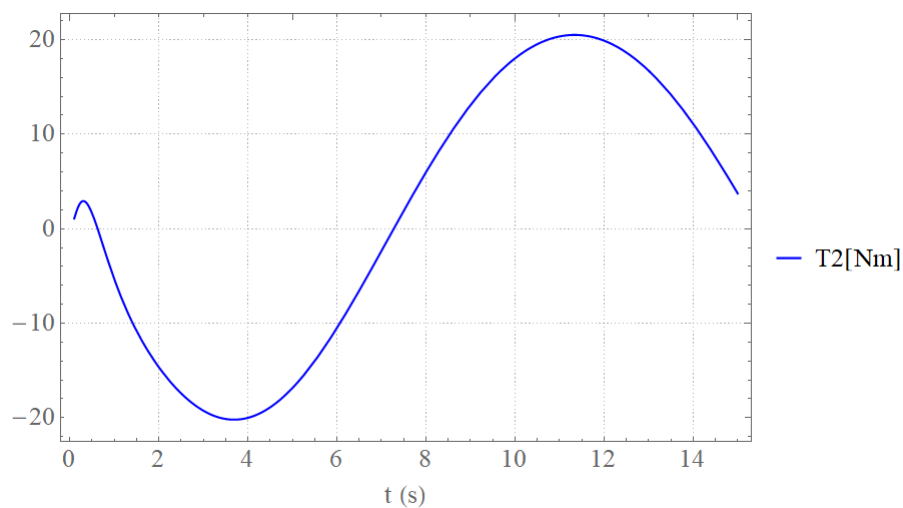
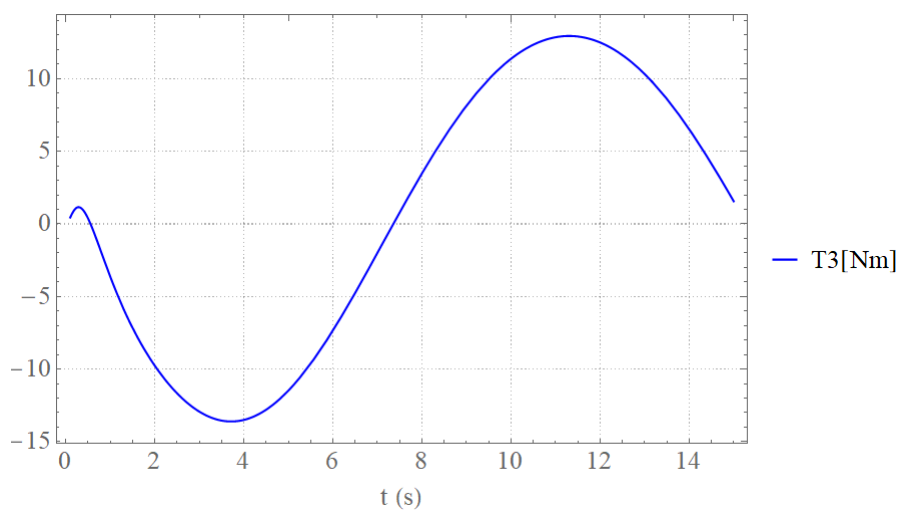
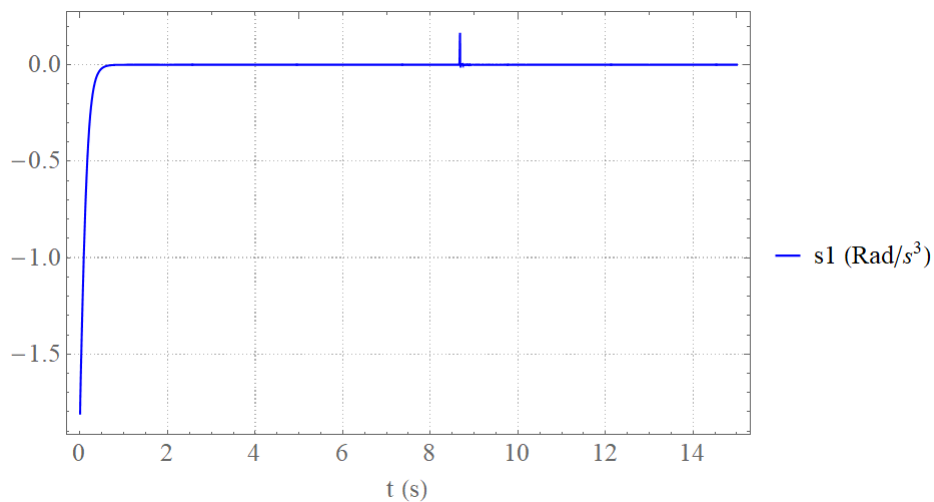
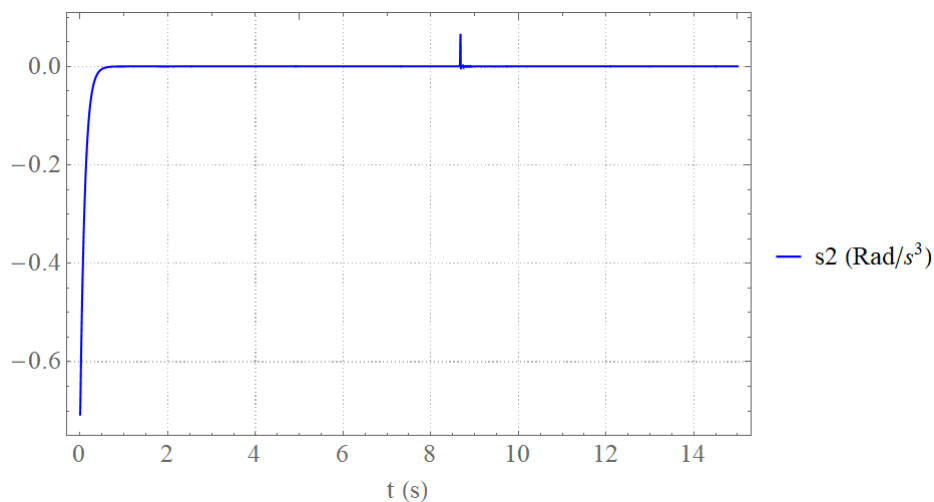
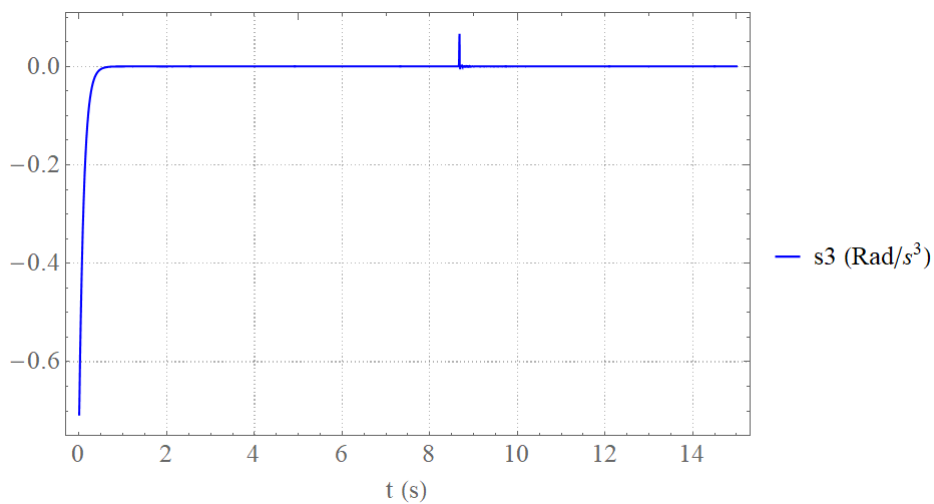


Figura 3.29: Torque 2 x Tempo.**Figura 3.30:** Torque 3 x Tempo.

Nas figuras 3.28, 3.29, 3.30 percebe-se que o esforço de controle se manteve com valores aceitáveis, porque passíveis de serem realizados e não apresentarem a ocorrência do fenômeno de *chattering*.

Figura 3.31: Superfície 1 de Deslizamento x Tempo**Figura 3.32:** Superfície 2 de Deslizamento x Tempo**Figura 3.33:** Superfície 3 de Deslizamento x Tempo

Nas figuras 3.31, 3.32 e 3.33 percebe-se que a dinâmica do erro de acompanhamento é estável pois a variável s apresenta-se próximo a zero durante a

simulação.

Nota-se também que, devido às condições iniciais não pertencerem à trajetória desejada, as variáveis s_1 , s_2 , s_3 apresentam valores diferentes de zero no instante inicial.

Figura 3.34: $(q_1 - q_{1m}) \times$ Tempo

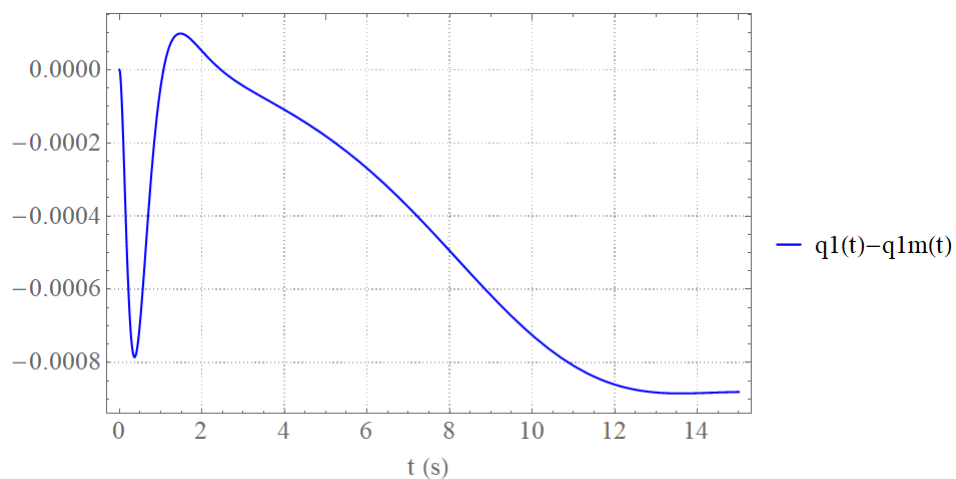


Figura 3.35: $(q_2 - q_{2m}) \times$ Tempo

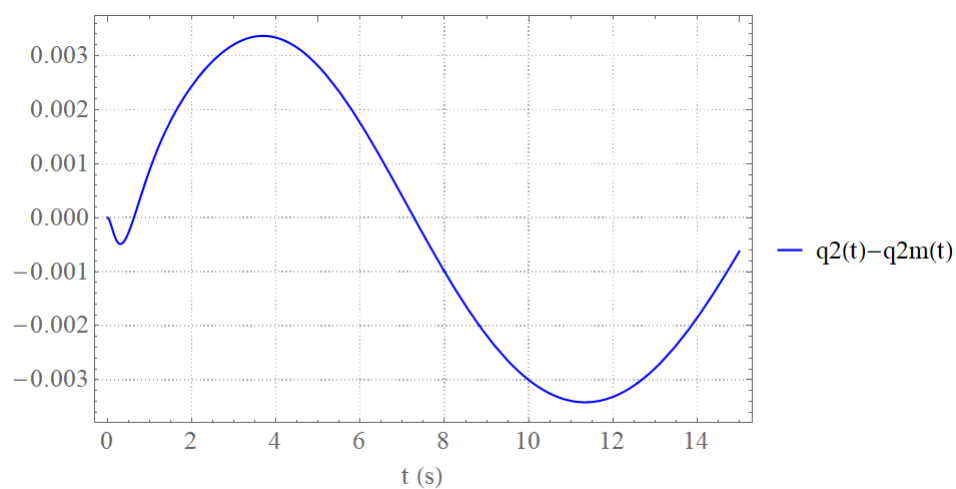
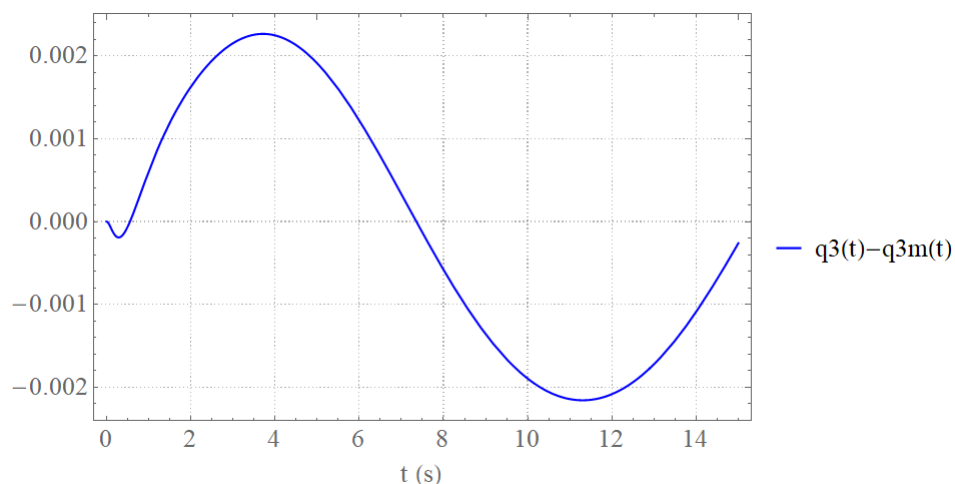


Figura 3.36: $(q_3 - q_{3m}) \times$ Tempo

Nas figuras 3.34, 3.35 e 3.36 é possível notar que a defasagem angular é máxima no instante que o módulo do torque exercido pelo atuador é máximo. Seus valores eficazes podem ser avaliados através da seguinte equação:

$$(q_i - q_{im})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} (q_i - q_{im})^2 dt} . \quad (3.61)$$

No presente caso, os valores eficazes para a defasagem angular para q_1 , q_2 e q_3 resultam em, respectivamente: $5,780 \cdot 10^{-4} rad$, $2,424 \cdot 10^{-3} rad$ e $1,569 \cdot 10^{-3} rad$

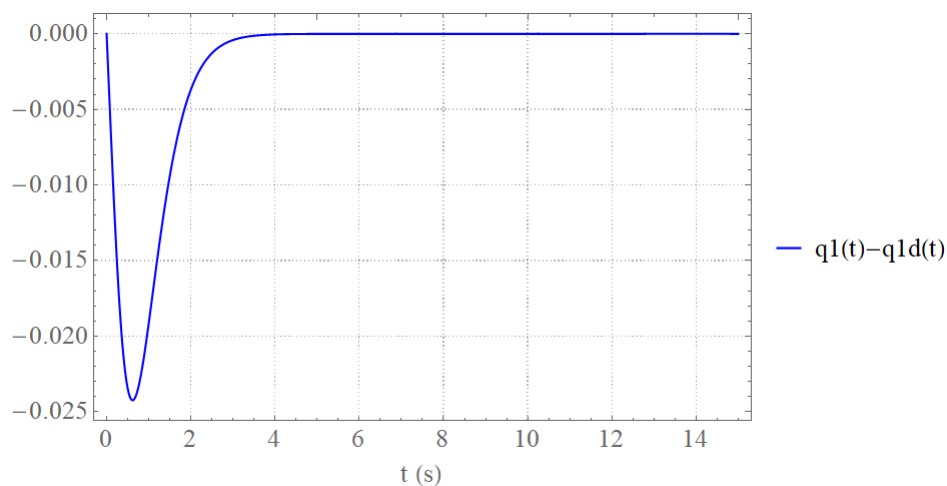
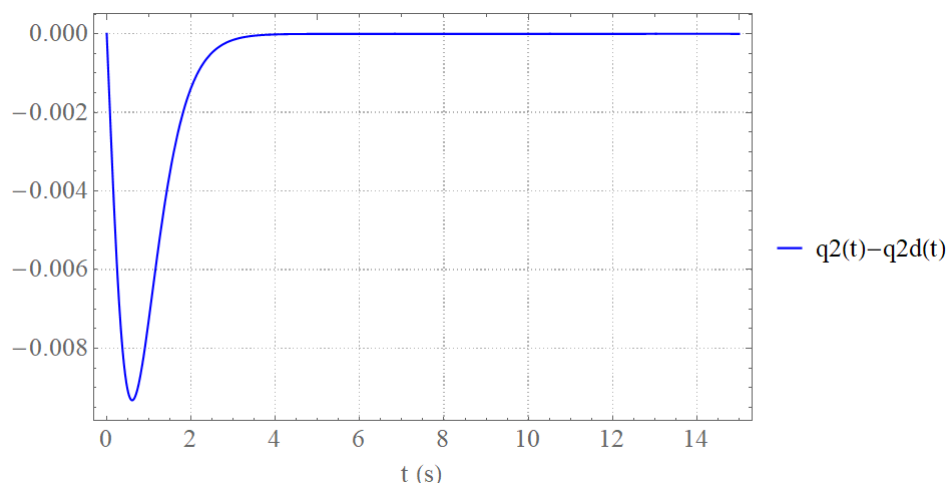
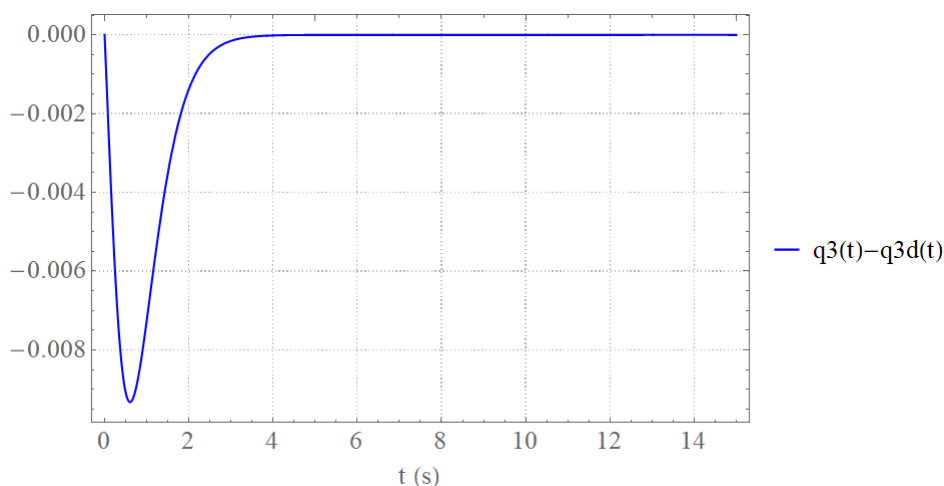
Figura 3.37: Erro de acompanhamento x Tempo

Figura 3.38: Erro de acompanhamento x Tempo**Figura 3.39:** Erro de acompanhamento x Tempo

Nas figuras 3.37, 3.38 e 3.39 é possível notar que os erros de acompanhamento apresentam um comportamento estável no domínio do tempo e seus valores eficazes podem ser avaliados através da seguinte equação.

$$(q_i - q_{id})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_{t_i}^{t_s} (q_i - q_{id})^2 dt} \quad (3.62)$$

No presente caso, excluindo o período transitório, onde o erro de acompanhamento não alcançou a superfície de escorregamento, ou seja, tomando $t_i = 2s$, os valores eficazes resultam em $4,849 \cdot 10^{-5} rad$, $1,793 \cdot 10^{-5} rad$ e $1,797 \cdot 10^{-5} rad$ respectivamente, para os erros de acompanhamento de q_1 , q_2 e q_3 . Estes valores são respectivamente, cerca de: 8%, 0,7% e 1,1% dos valores eficazes apresentados pela defasagem dos ângulos (vide Tabela 3.3).

Tabela 3.3: Resultados - Erro de acompanhamento e defasagem entre ângulo do elo e junta.

Valor Eficar de $(q_i - q_{im})$	Valor Eficar de $(q_i - q_{id})$	$q_i - q_{id} / q_i - q_{im}$
$5,780.10^{-4}$ rad	$4,849.10^{-5}$ rad	8%,
$2,424.10^{-3}$ rad	$1,793.10^{-5}$ rad	0,7%
$1,569.10^{-3}$ rad	$1,797.10^{-5}$ rad	1,1%

3.2.5 Simulação 2

O objetivo principal desta simulação é analisar o comportamento dinâmico do manipulador em um cenário realista, muito comum em aplicações industriais como por exemplo o *pick and place*.

3.2.5.1 Parâmetros

Para esta simulação, considera-se os mesmos parâmetros da simulação apresentada em 3.2.4. Com exceção das seguintes grandezas, apresentadas na Tabela 3.4:

Tabela 3.4: Parâmetros de Simulação - Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade.

Parâmetro	Valor	Unidade
Constante da superfície deslizante (λ)	4	1/s
Ganho do Controlador (K)	20	m/s^4
Espessura da camada limite	0.9	m/s^3

3.2.5.2 Cinemática

O objetivo é mover o efetuador localizado no ponto \underline{C} de uma posição inicial $\mathbf{p}_{\underline{C}|\underline{O}}^N(i)$ para uma posição final $\mathbf{p}_{\underline{C}|\underline{O}}^N(f)$, sendo:

$$\mathbf{p}_{\underline{C}|\underline{O}}^N(i) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}^T \quad (3.63)$$

e,

$$\mathbf{p}_{\underline{C}|\underline{O}}^N(f) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}^T . \quad (3.64)$$

Para que a trajetória possa ser estipulada, foram determinadas as posições angulares, em seus instantes inicial e final. Desta forma, considerou-se a posição cartesiana do ponto \underline{C} em função das posições angulares:

$$\mathbf{p}_{\underline{C}|\underline{O}}^N = \begin{bmatrix} x_c(t) & y_c(t) & z_c(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.65)$$

sendo,

$$x_c(t) = [L_2 \cos(q_2(t) + q_3(t)) + L_1 \cos(q_2(t))] \cdot \cos q_1(t) \quad (3.66)$$

$$y_c(t) = [L_2 \cos(q_2(t) + q_3(t)) + L_1 \cos(q_2(t))] \cdot \sin q_1(t) \quad (3.67)$$

$$z_c(t) = L_2 \sin(q_2(t) + q_3(t)) + L_1 \sin(q_2(t)) . \quad (3.68)$$

Isto posto, tornou-se possível criar um sistema de equações para determinar as posições angulares em t_i :

$$\begin{cases} [L_2 \cos(q_2(t_i) + q_3(t_i)) + L_1 \cos(q_2(t_i))] \cdot \cos q_1(t_i) = 0,3 \\ [L_2 \cos(q_2(t_i) + q_3(t_i)) + L_1 \cos(q_2(t_i))] \cdot \sin q_1(t_i) = 0,3 \\ L_2 \sin(q_2(t_i) + q_3(t_i)) + L_1 \sin(q_2(t_i)) = 0,3 \end{cases} \quad (3.69)$$

e um sistema de equações para determinar as posições angulares em t_f :

$$\begin{cases} [L_2 \cos(q_2(t_f) + q_3(t_f)) + L_1 \cos(q_2(t_f))] \cdot \cos q_1(t_f) = 0,5 \\ [L_2 \cos(q_2(t_f) + q_3(t_f)) + L_1 \cos(q_2(t_f))] \cdot \sin q_1(t_f) = 0,4 \\ L_2 \sin(q_2(t_f) + q_3(t_f)) + L_1 \sin(q_2(t_f)) = 0,2 \end{cases} \quad (3.70)$$

Resolvendo os sistemas de equações construídos acima foi possível determinar as posições angulares nos instantes inicial e final da trajetória, com 4 algarismos significativos:

$$\begin{cases} q_{1d}(t_i) = 0,7854 \\ q_{2d}(t_i) = 1,640 \\ q_{3d}(t_i) = -2,049 \end{cases} \quad (3.71)$$

e,

$$\begin{cases} q_{1d}(t_f) = 0,6747 \\ q_{2d}(t_f) = 1,138 \\ q_{3d}(t_f) = -1,671 \end{cases} \quad (3.72)$$

Além disso, é imposto que:

$$\dot{\mathbf{q}}_d(t_i) = \dot{\mathbf{q}}_d(t_f) = 0 \quad (3.73)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d(t_i) = \ddot{\mathbf{q}}_d(t_f) = 0 \quad (3.74)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d(t_i) = \ddot{\mathbf{q}}_d(t_f) = 0 \quad (3.75)$$

sendo,

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} q_{1d} & q_{2d} & q_{3d} \end{bmatrix}^T \quad (3.76)$$

De forma a satisfazer as condições supramencionadas, assim como no exemplo do manipulador de um grau de liberdade, considerou-se os seguintes polinômios de sétimo grau:

$$\mathbf{q}_d(t) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

sendo $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$ e h_i constantes escalares a serem determinadas de forma a satisfazer as condições iniciais e finais apresentadas nas equações (3.70) a (3.74).

O Apêndice D apresenta o procedimento utilizado para determinar as constantes mencionadas acima.

3.2.5.3 Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados da simulação numérica. Os gráficos mostram séries temporais e tem como objetivo principal analisar o comportamento dinâmico do sistema mecânico no domínio do tempo.

Figura 3.40: Posição x Tempo.

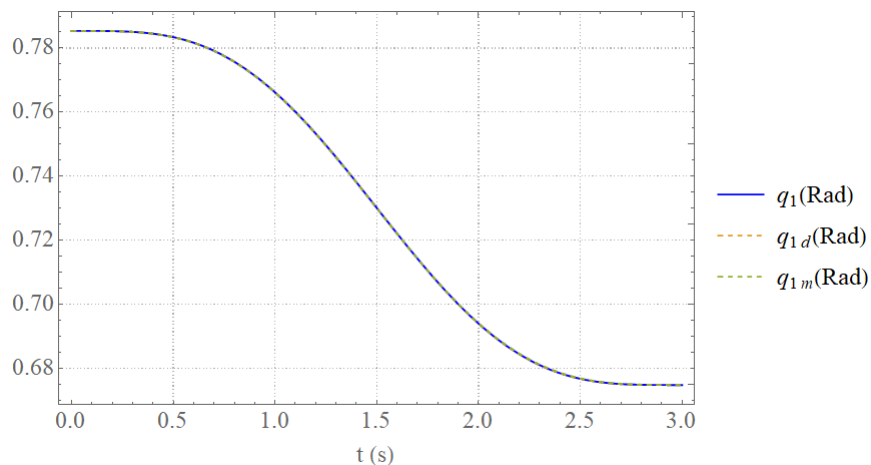


Figura 3.41: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.

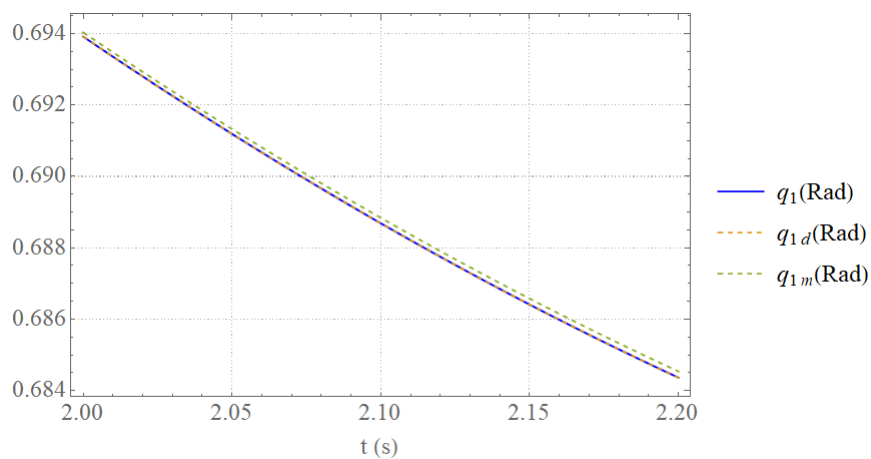


Figura 3.42: Velocidade angular x Tempo.

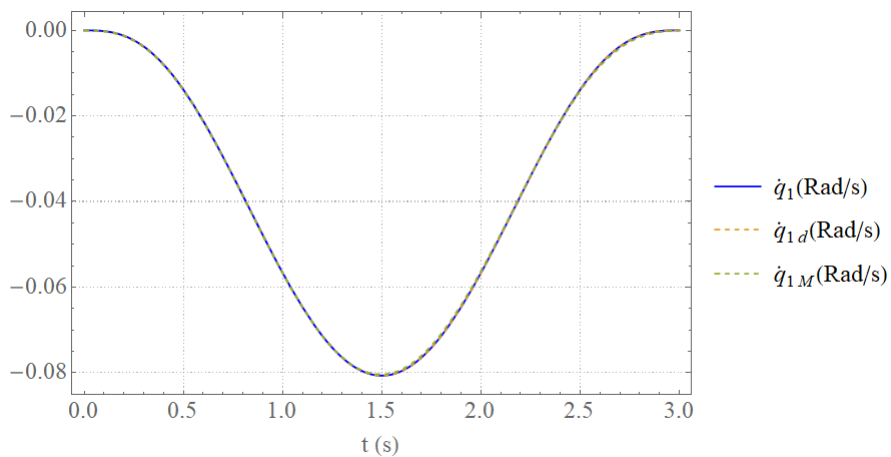


Figura 3.43: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.

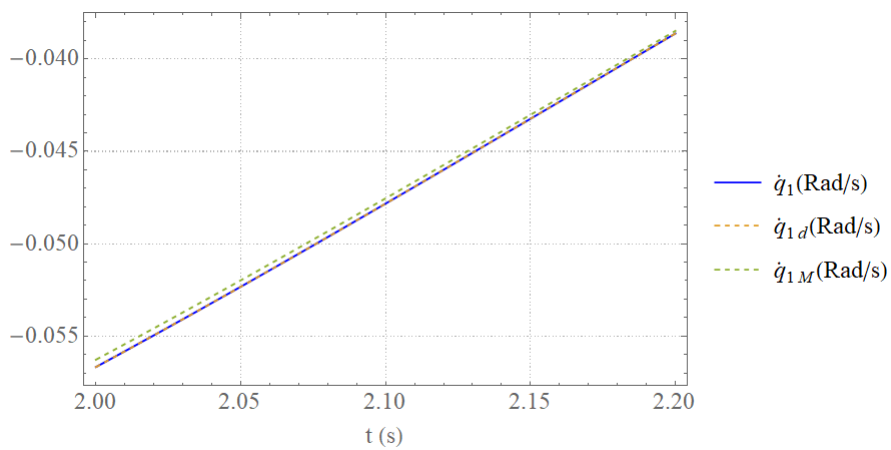


Figura 3.44: Posição x Tempo.

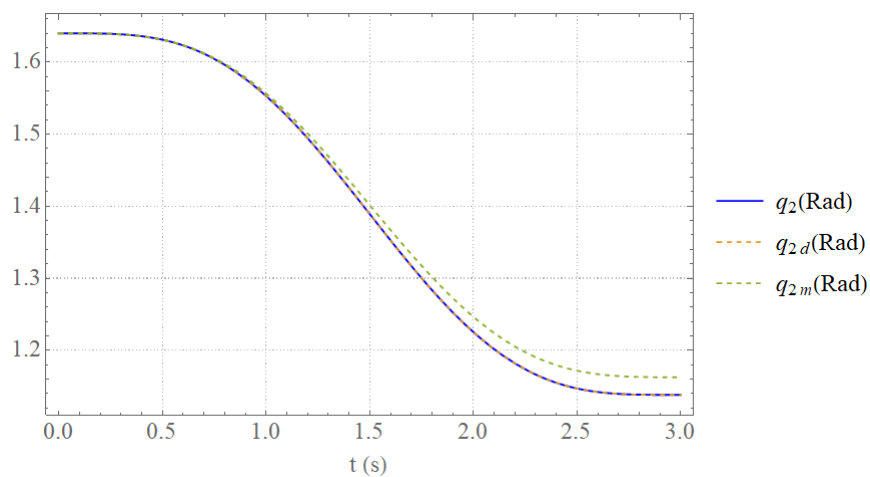


Figura 3.45: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.

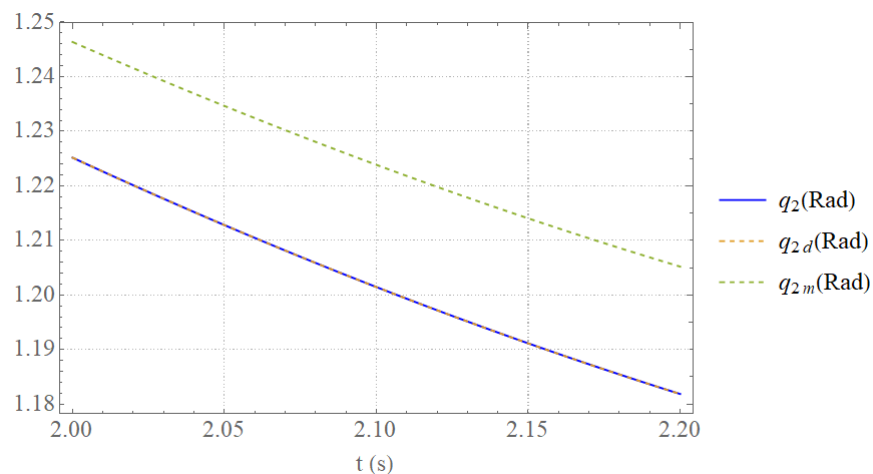


Figura 3.46: Velocidade angular x Tempo.

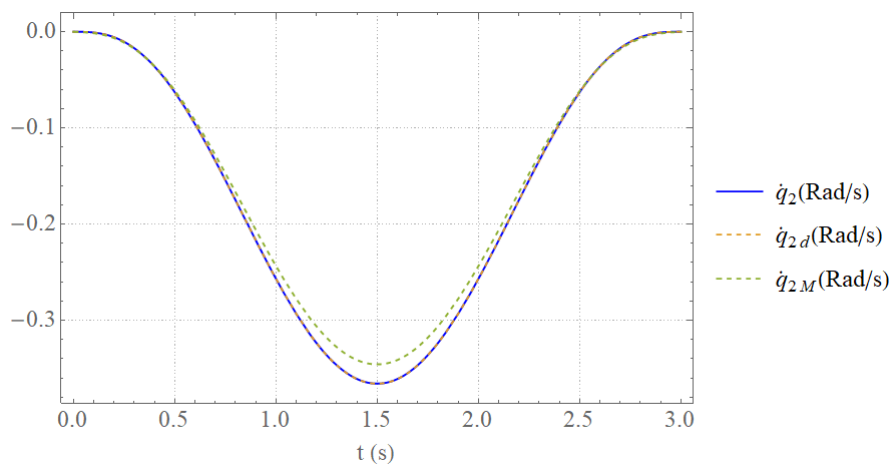


Figura 3.47: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.

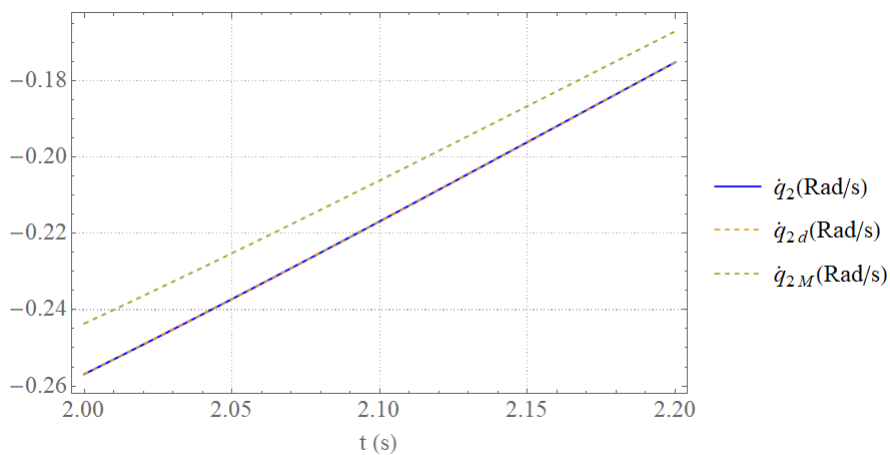


Figura 3.48: Posição x Tempo.

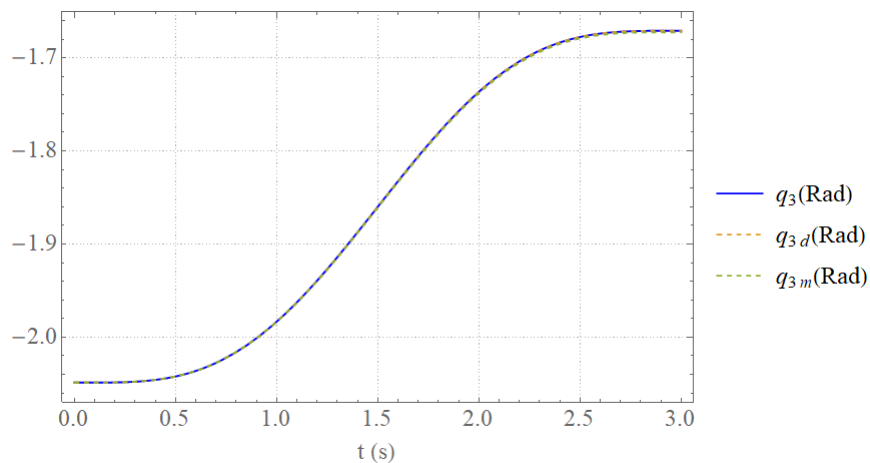


Figura 3.49: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.

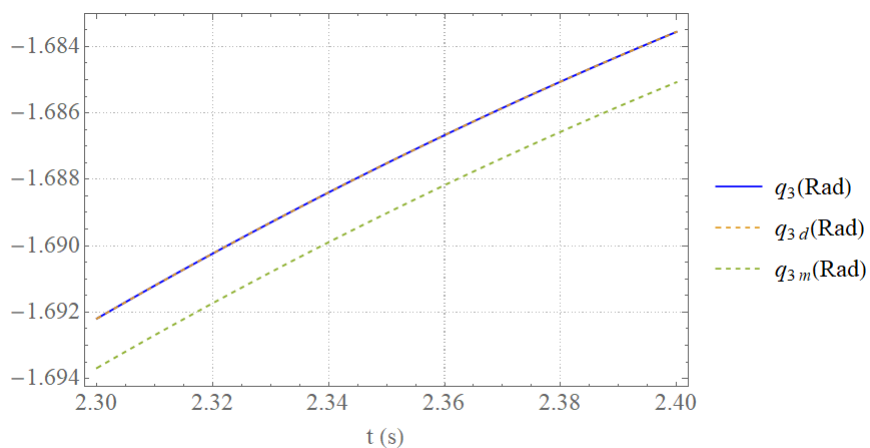


Figura 3.50: Velocidade angular x Tempo.

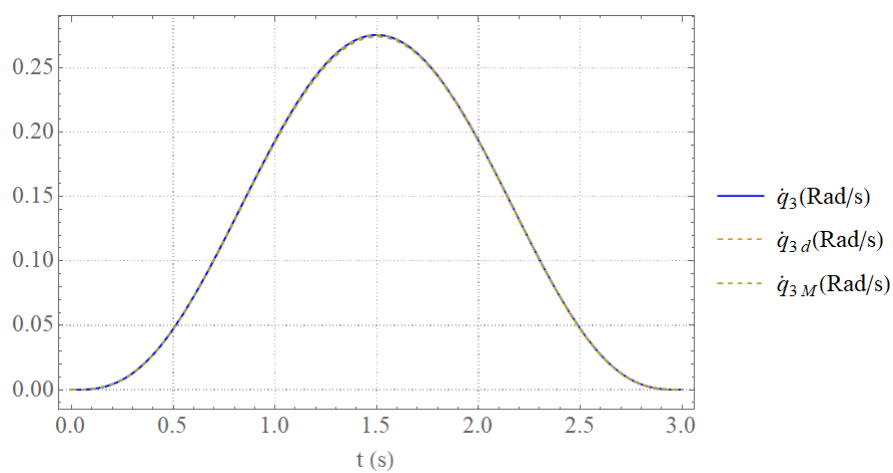
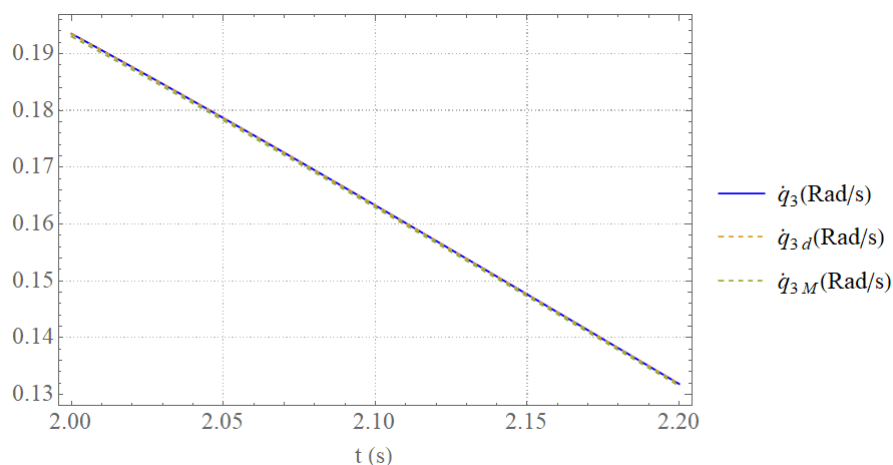


Figura 3.51: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 2.2 s.



Analisando as figuras 3.40, 3.42, 3.44, 3.46, 3.48 e 3.50, é possível perceber que, conforme demonstrado na seção 3.2.5.2, a posição e a velocidade apresentam os valores impostos.

Analisando as figuras 3.41, 3.43, 3.45, 3.47, 3.49 e 3.51 é possível perceber o ângulo de defasagem esperada entre os ângulos de orientação do autador e do elo que ocorre devido à flexibilidade da junta.

Figura 3.52: Posição x_c x Tempo.

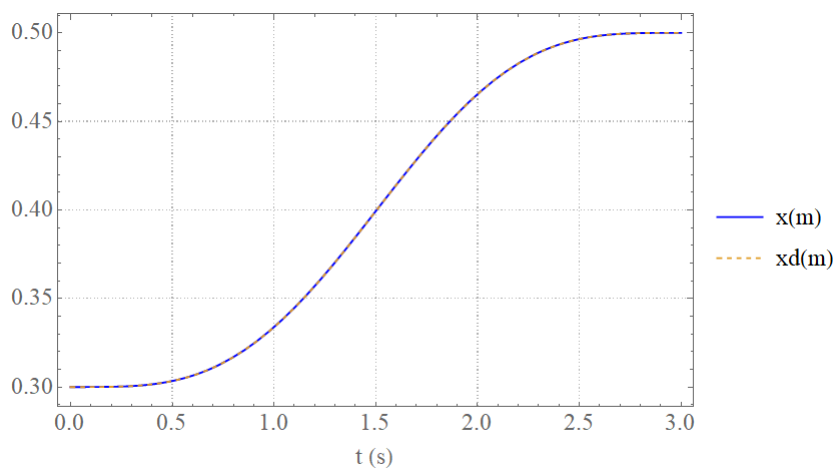
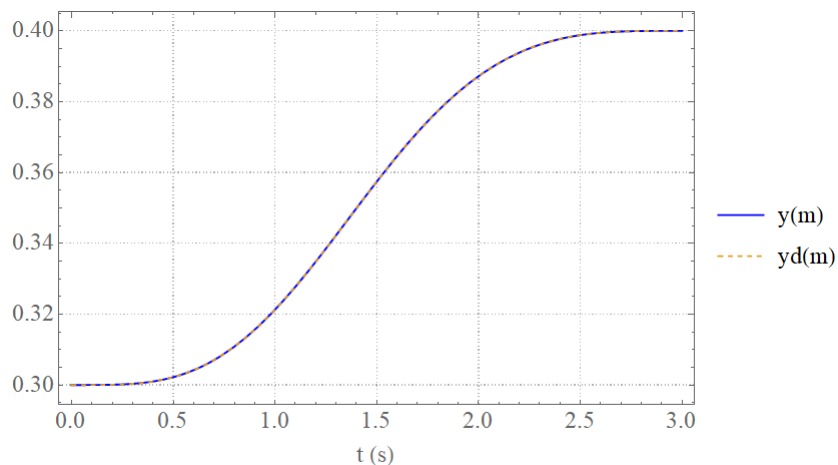
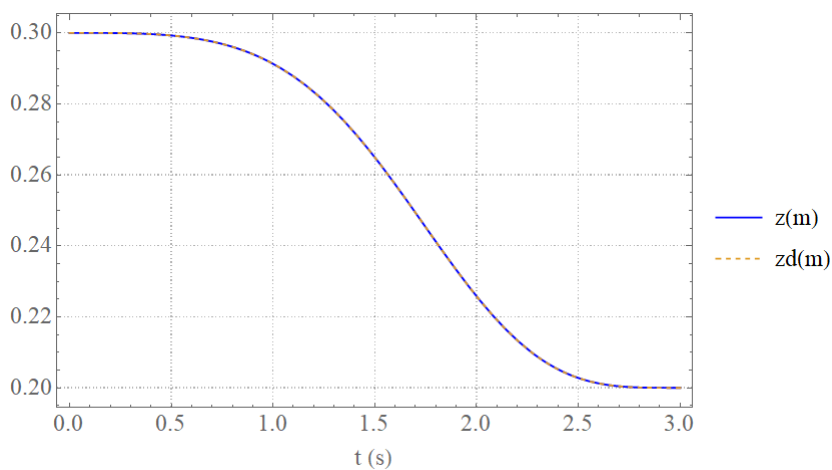


Figura 3.53: Posição y_c x Tempo.**Figura 3.54:** Posição z_c x Tempo.

Nas figuras 3.52, 3.53 e 3.54 nota-se que as posições inicial e final do efetuador do manipulador são as requeridas na seção 3.2.5.2

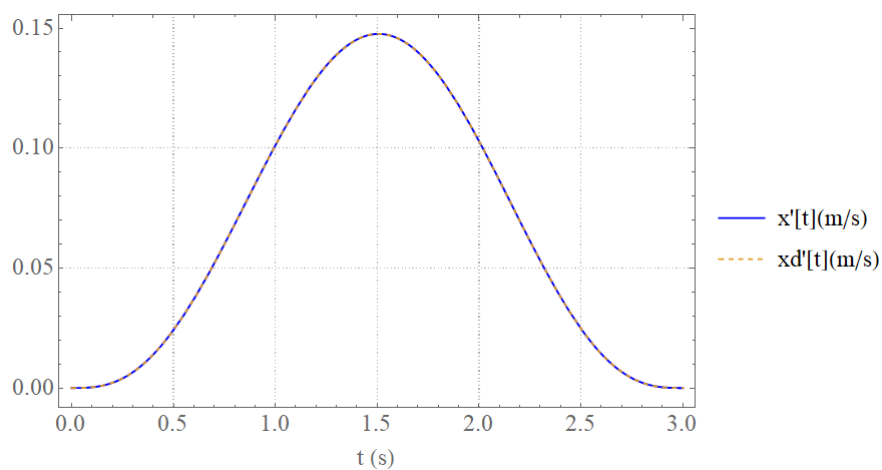
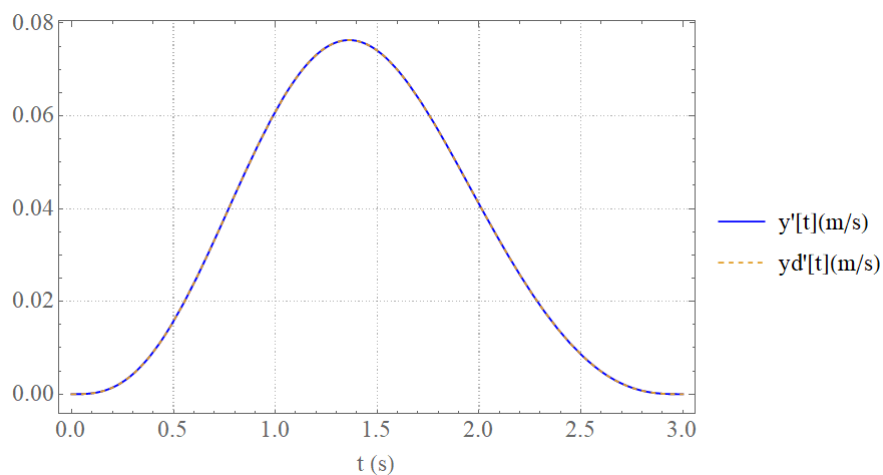
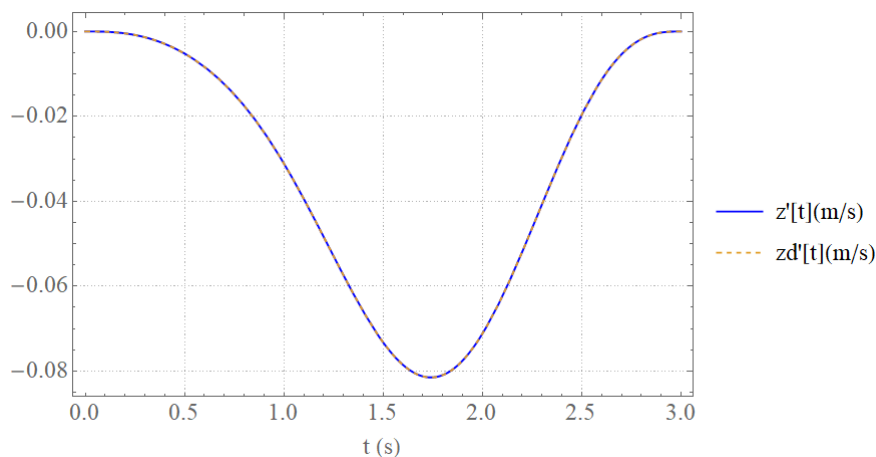
Figura 3.55: Velocidade $\dot{x}_c(t)$ x Tempo.

Figura 3.56: Velocidade $\dot{y}_c(t)$ x Tempo.**Figura 3.57:** Velocidade $\dot{z}_c(t)$ x Tempo.

Nas figuras 3.55, 3.56 e 3.57 nota-se que as velocidades do efetuador do manipulador são nulas nos instantes inicial e final, de forma a evitar esforços impulsivos, conforme requerido na seção 3.2.5.2

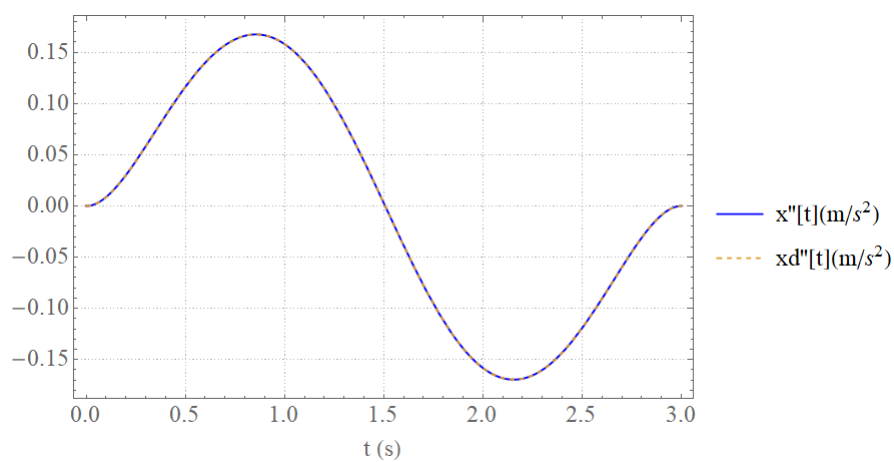
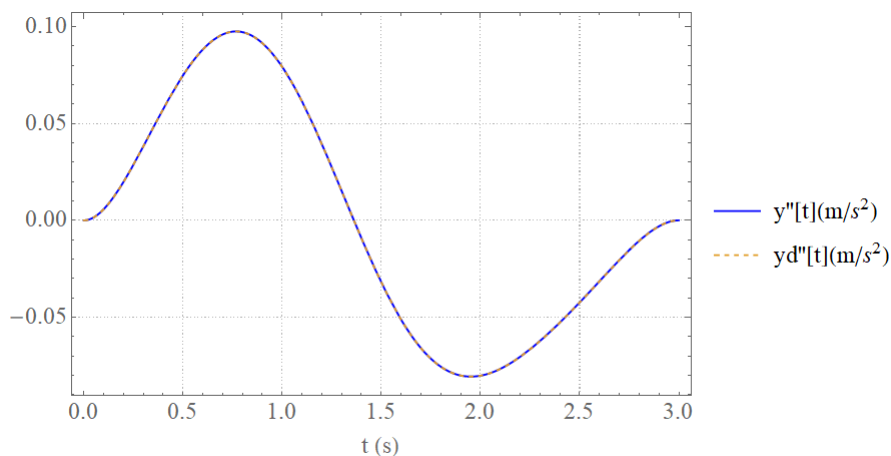
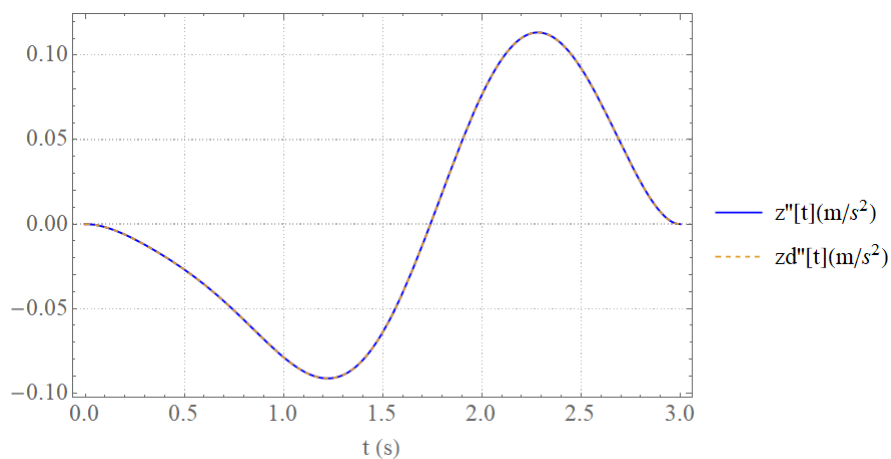
Figura 3.58: Aceleração $\ddot{x}_c(t)$ x Tempo.

Figura 3.59: Aceleração $\ddot{y}_c(t)$ x Tempo.**Figura 3.60:** Aceleração $\ddot{z}_c(t)$ x Tempo.

Nas figuras 3.58, 3.59 e 3.60 nota-se que as acelerações do efetuador do manipulador são nulas nos instantes inicial e final, de forma a evitar trancos, conforme requerido na seção 3.2.5.2

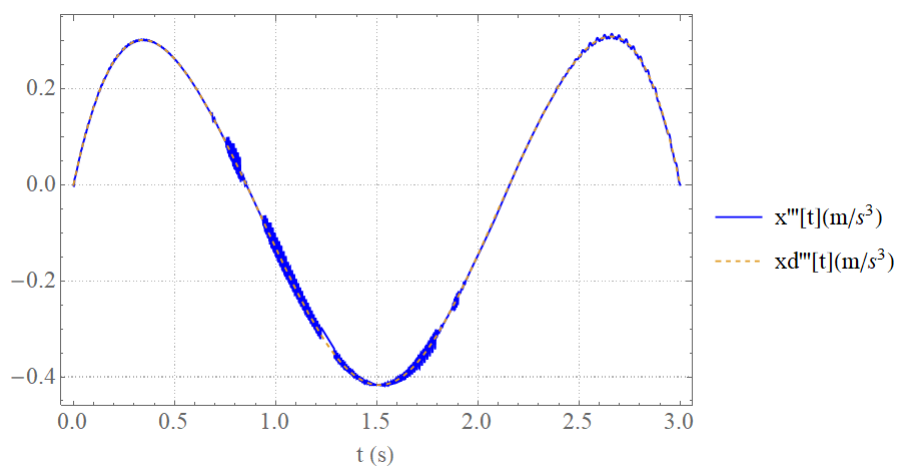
Figura 3.61: Derivada da Aceleração $\ddot{x}_c(t)$ x Tempo.

Figura 3.62: Derivada da Aceleração $\ddot{y}_c(t)$ x Tempo.

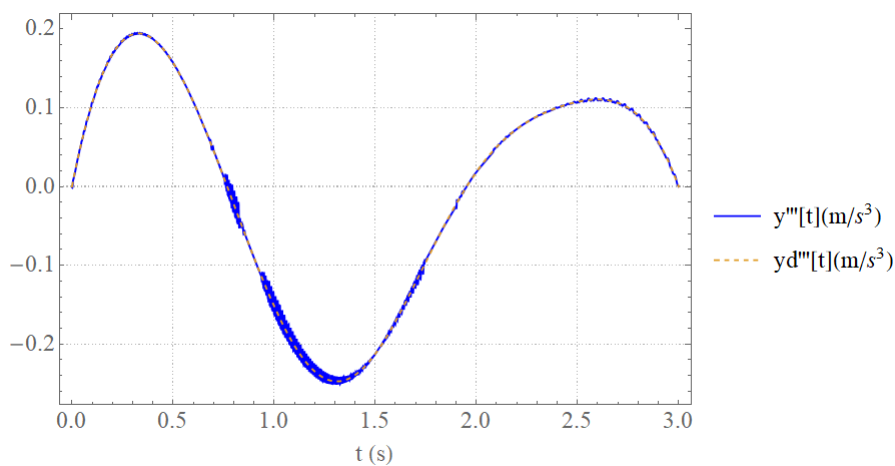
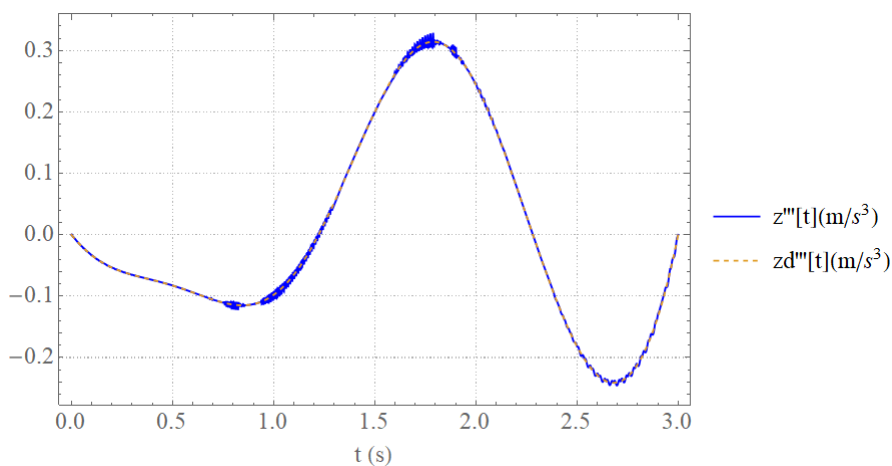


Figura 3.63: Derivada da Aceleração $\ddot{z}_c(t)$ x Tempo.



Nas figuras 3.61, 3.62 e 3.63 nota-se que as derivadas das acelerações do efetuador do manipulador são nulas no instante inicial e final, de forma a evitar trancos, conforme requerido na seção 3.2.5.2

Figura 3.64: Torque 1 x Tempo.

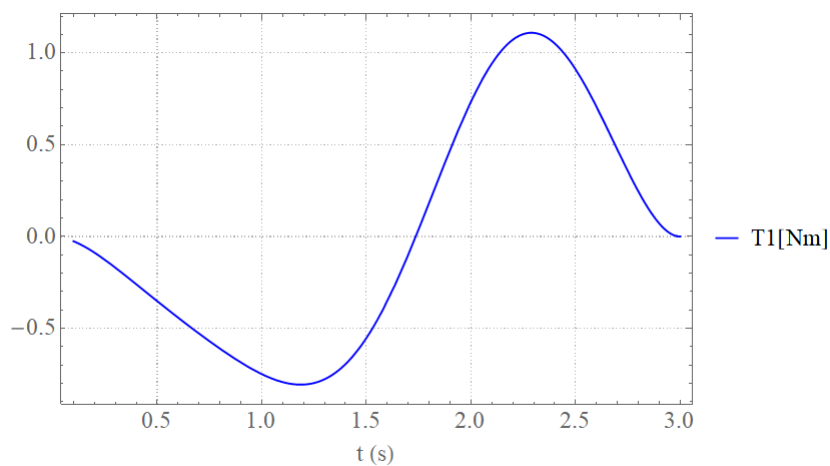


Figura 3.65: Torque 2 x Tempo.

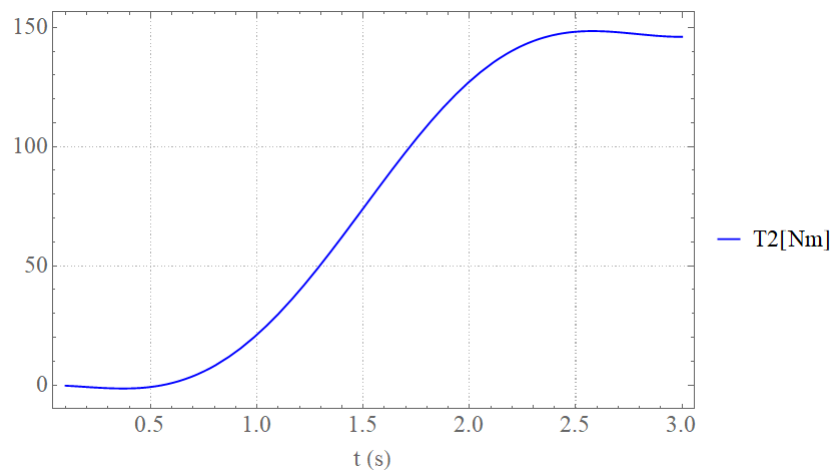
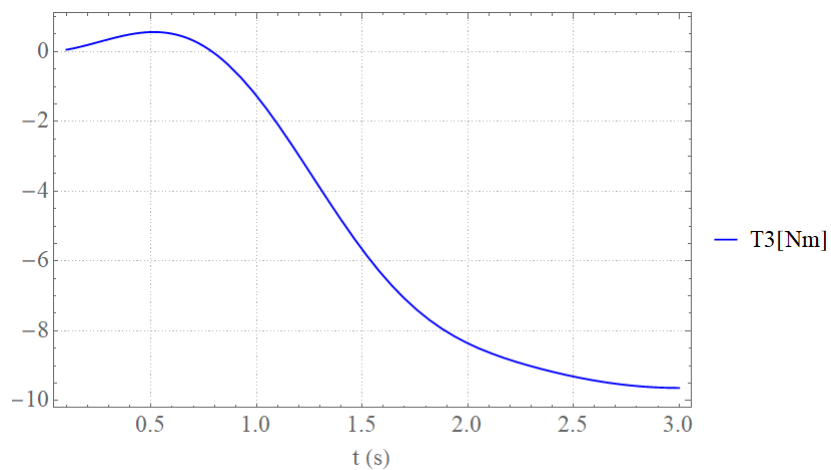


Figura 3.66: Torque 3 x Tempo.



Nas figuras 3.64, 3.65, 3.66 percebe-se que o esforço de controle se manteve com valores aceitáveis, e possíveis de serem realizados. Vale evidenciar a não ocorrência do fenômeno de *chattering*.

Figura 3.67: Superfície 1 x Tempo.

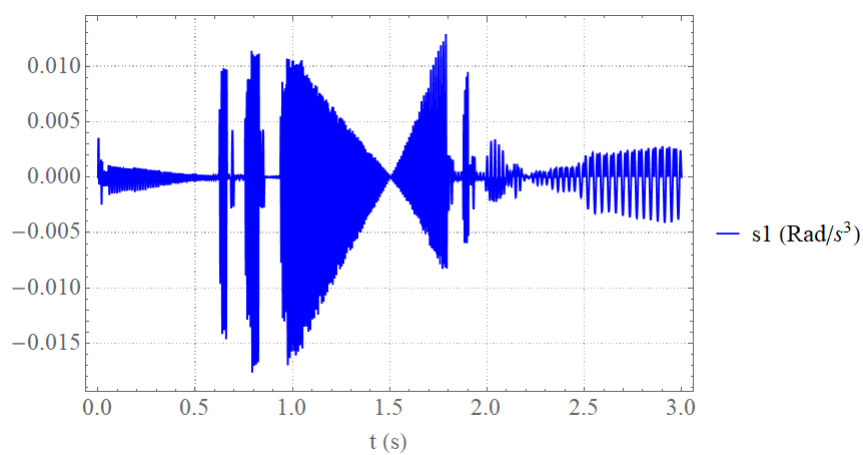


Figura 3.68: Superfície 2 x Tempo.

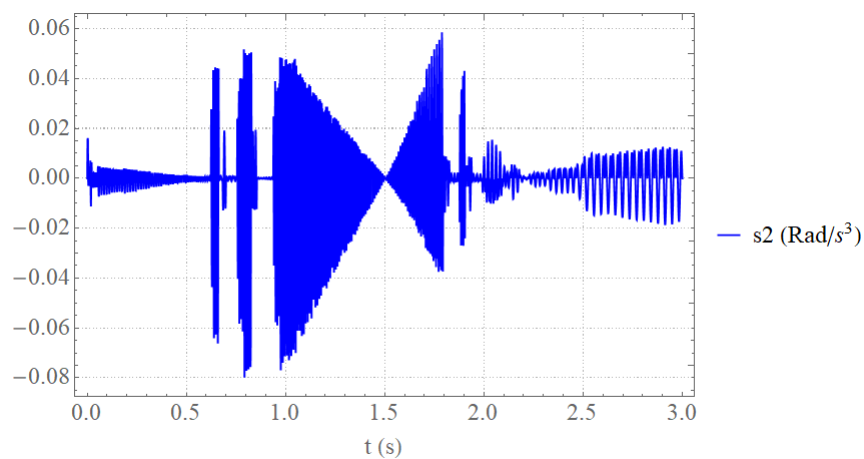
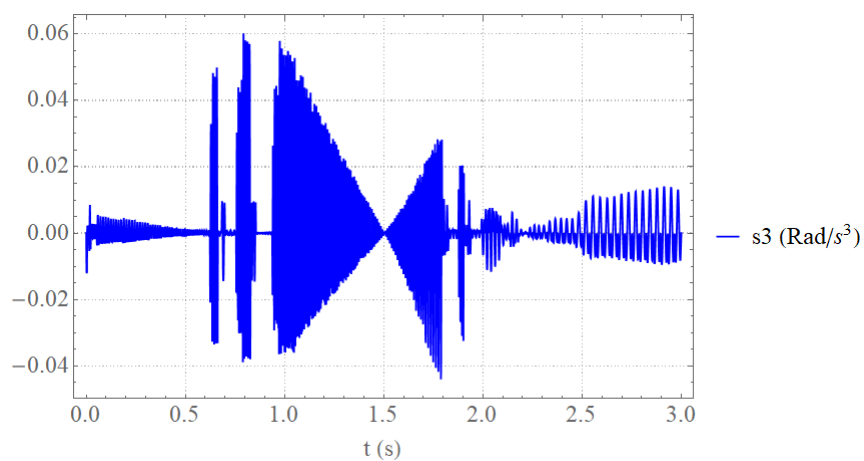
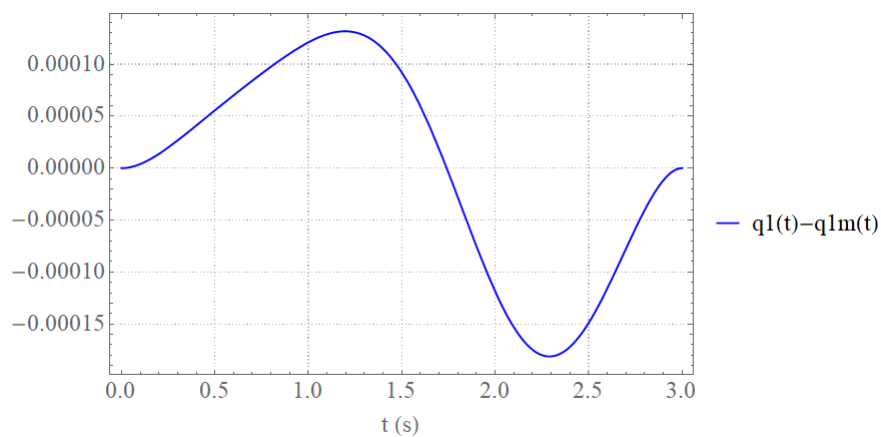
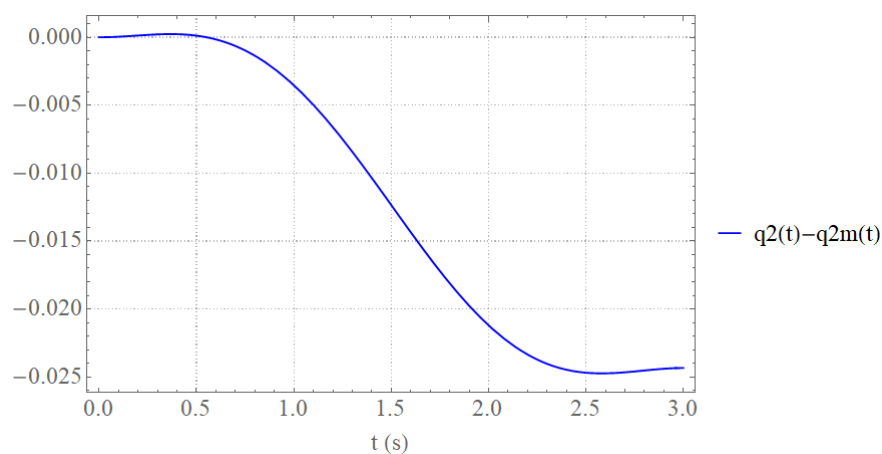
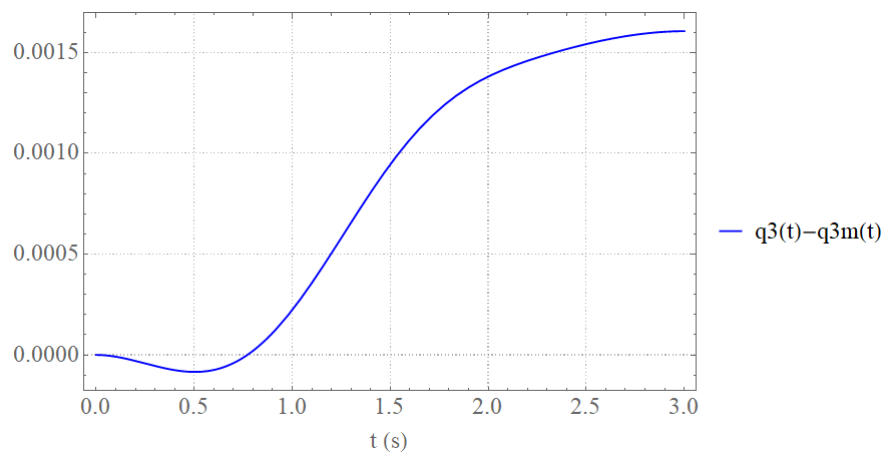


Figura 3.69: Superfície 3 x Tempo.



Nas figuras 3.67, 3.68 e 3.69 percebe-se que a dinâmica do erro de acompanhamento é estável pois o valor da variável s se apresenta próximo a zero durante a simulação.

Nota-se também que, devido às condições iniciais pertencerem à trajetória desejada, as variáveis s_1 , s_2 , s_3 apresentam valores iguais a zero no instante inicial.

Figura 3.70: $(q_1 - q_{1m}) \times$ Tempo**Figura 3.71:** $(q_2 - q_{2m}) \times$ Tempo**Figura 3.72:** $(q_3 - q_{3m}) \times$ Tempo

Nas figuras 3.70, 3.71 e 3.72 é possível notar que a defasagem angular é máxima no instante que o módulo do torque exercido pelo atuador é máximo. Seus valores eficazes podem ser avaliados através da seguinte equação:

$$(q_i - q_{im})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} (q_i - q_{im})^2 dt} . \quad (3.78)$$

No presente caso, os valores eficazes para a defasagem angular para q_1 , q_2 e q_3 resultam em, respectivamente: $1,017 \cdot 10^{-4} rad$, $1,592 \cdot 10^{-2} rad$ e $1,043 \cdot 10^{-4} rad$

Figura 3.73: Erro de acompanhamento x Tempo

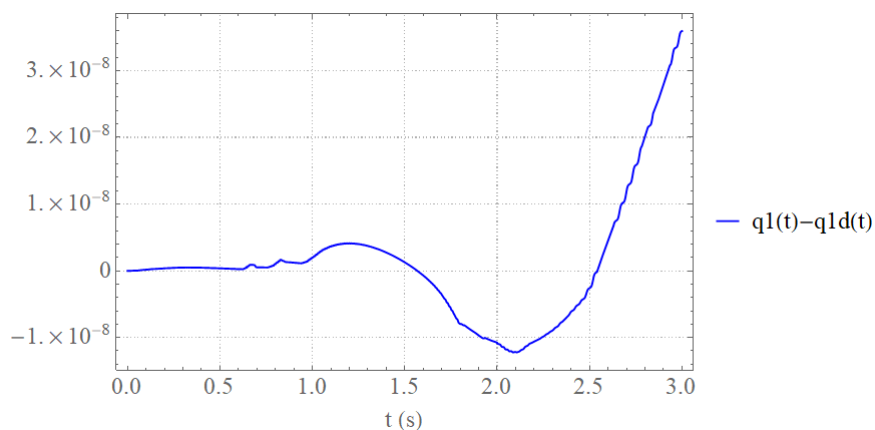


Figura 3.74: Erro de acompanhamento x Tempo

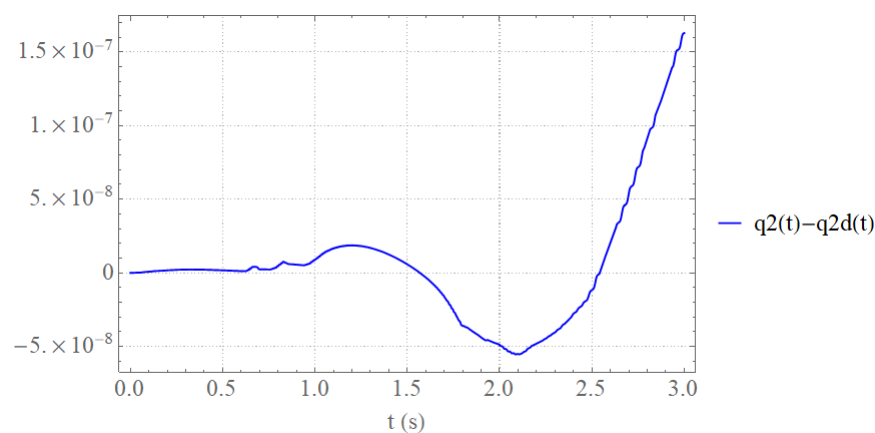
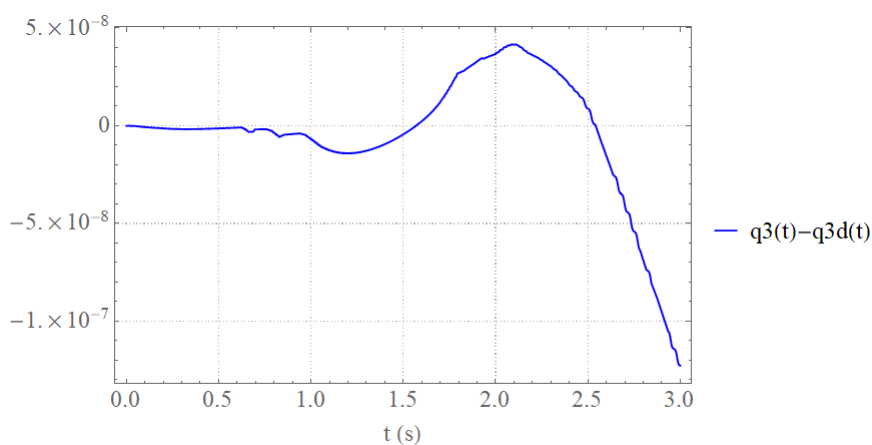


Figura 3.75: Erro de acompanhamento x Tempo



Nas figuras 3.73, 3.74 e 3.75 é possível notar que os erros de acompanhamento apresentam um comportamento estável no domínio do tempo e seus valores eficazes podem ser avaliados através das seguintes equações.

$$(q_i - q_{id})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} (q_i - q_{id})^2 dt} \quad (3.79)$$

No presente caso, os valores eficazes resultam em $9,443 \cdot 10^{-8} rad$, $4,281 \cdot 10^{-8} rad$ e $3,224 \cdot 10^{-8} rad$ respectivamente, para os erros de acompanhamento de q_1 , q_2 e q_3 . Estes valores são respectivamente, cerca de: 0,1%, 0,0003% e 0,03% dos valores eficazes apresentados pela defasagem dos ângulos (vide Tabela 3.5).

Tabela 3.5: Resultados - Erro de acompanhamento e defasagem entre ângulo do elo e junta.

Valor Eficaz de $(q_i - q_{im})$	Valor Eficaz de $(q_i - q_{id})$	$q_i - q_{id} / q_i - q_{im}$
$1,017 \cdot 10^{-4} rad$	$9,443 \cdot 10^{-8} rad$	0,1%,
$1,592 \cdot 10^{-2} rad$	$4,281 \cdot 10^{-8} rad$	0,0003%
$1,043 \cdot 10^{-4} rad$	$3,224 \cdot 10^{-8} rad$	0,03%

3.2.6 Simulação 3

O objetivo principal desta simulação é analisar o comportamento dinâmico do manipulador em um cenário realista, onde o efetuador é solicitado a se mover em uma trajetória definida no espaço das tarefas. Existem diversas aplicações industriais onde este tipo de cenário é encontrado. São exemplos: usinagem, soldagem, montagem e cirurgias realizadas com auxílio de manipuladores robóticos.

3.2.6.1 Parâmetros

Para esta simulação, considera-se os mesmos parâmetros da simulação apresentada na Subsec. 3.2.4. Com exceção das grandezas apresentadas na Tab. 3.6.:

Tabela 3.6: Parâmetros de Simulação - Manipulador Robótico de 6 graus de liberdade.

Parâmetro	Valor	Unidade
Constante da superfície deslizando (λ)	5	1/s
Ganho do Controlador (K)	1000	m/s^4
Espessura da camada limite	0.1	m/s^3

3.2.6.2 Cinemática

Nesta simulação, a cinemática proposta visa reproduzir um caso prático, onde é necessário que o efetuador se movimente em uma linha reta com velocidade e aceleração controladas, como por exemplo em uma operação de soldagem ou usinagem. Para tanto, considerou-se que o efetuador se desloque segundo as seguintes equações:

$$x_c(t) = 0,3 \quad (3.80)$$

$$y_c(t) = 0,1 + 0,1t \quad (3.81)$$

$$z_c(t) = 0,3 \quad (3.82)$$

Sabe-se que, para este manipulador:

$$x_c(t) = [L_2 \cos(q_2(t) + q_3(t)) + L_1 \cos(q_2(t))] \cdot \cos q_1(t) \quad (3.83)$$

$$y_c(t) = [L_2 \cos(q_2(t) + q_3(t)) + L_1 \cos(q_2(t))] \cdot \sin q_1(t) \quad (3.84)$$

$$z_c(t) = L_2 \sin(q_2(t) + q_3(t)) + L_1 \sin(q_2(t)) \quad (3.85)$$

Portanto,

$$\begin{cases} [L_2 \cos(q_{2d}(t) + q_{3d}(t)) + L_1 \cos(q_{2d}(t))] \cdot \cos q_{1d}(t) = 0,3 \\ [L_2 \cos(q_{2d}(t) + q_{3d}(t)) + L_1 \cos(q_{2d}(t))] \cdot \sin q_{1d}(t) = 0,1 + 0,1t \\ L_2 \sin(q_{2d}(t) + q_{3d}(t)) + L_1 \sin(q_{2d}(t)) = 0,3 \end{cases} \quad (3.86)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, é possível obter:

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q}_d(t) \quad (3.87)$$

3.2.6.3 Resultados

Nesta seção apresenta-se os resultados da simulação numérica. Os gráficos apresentam, em sua grande maioria, séries temporais e tem como objetivo principal analisar o comportamento dinâmico do sistema mecânico no domínio do tempo.

Figura 3.76: Posição x Tempo.

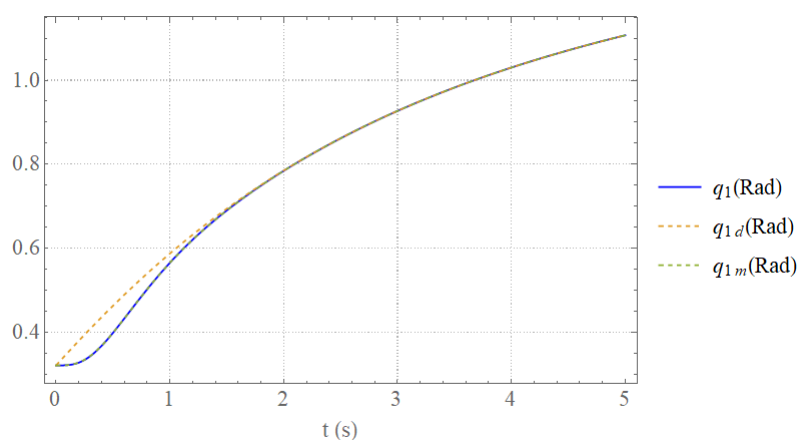


Figura 3.77: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 3 s.

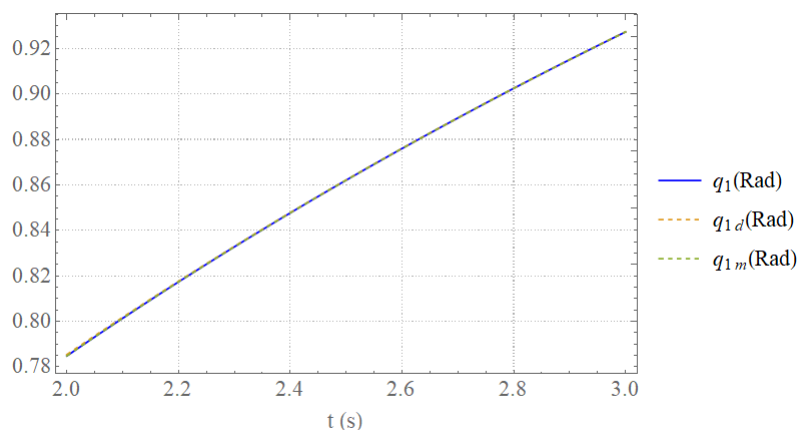


Figura 3.78: Velocidade angular x Tempo.

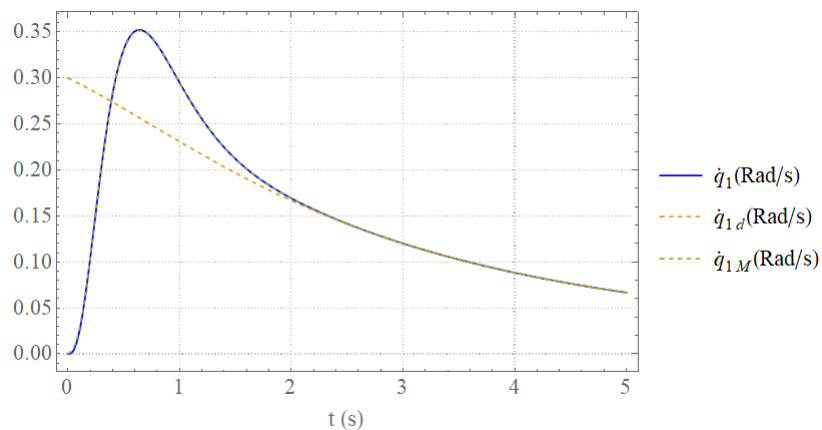


Figura 3.79: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 3 s.

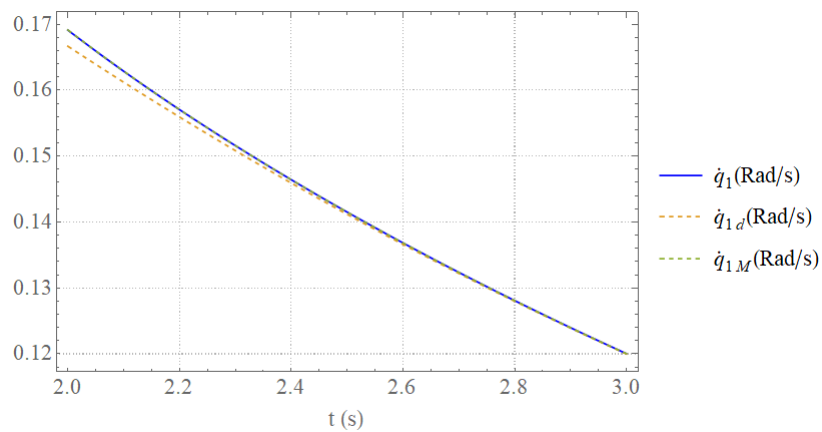


Figura 3.80: Posição x Tempo.

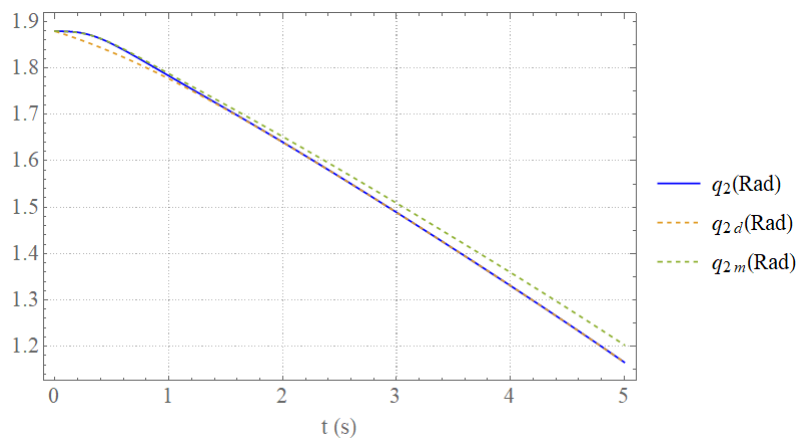


Figura 3.81: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 3 s.

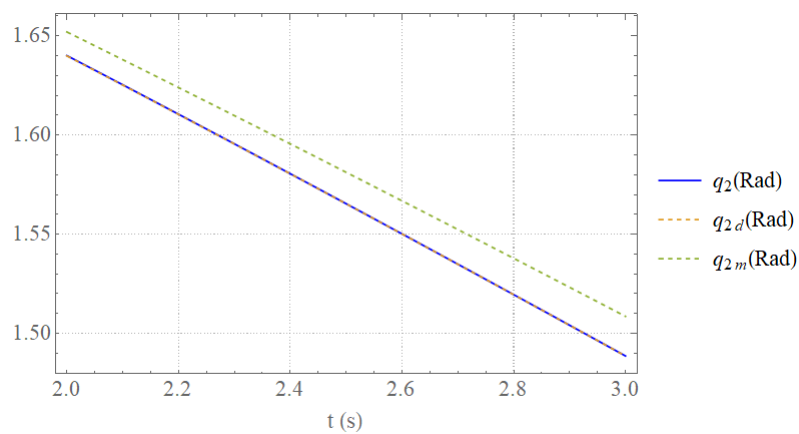


Figura 3.82: Velocidade angular x Tempo.

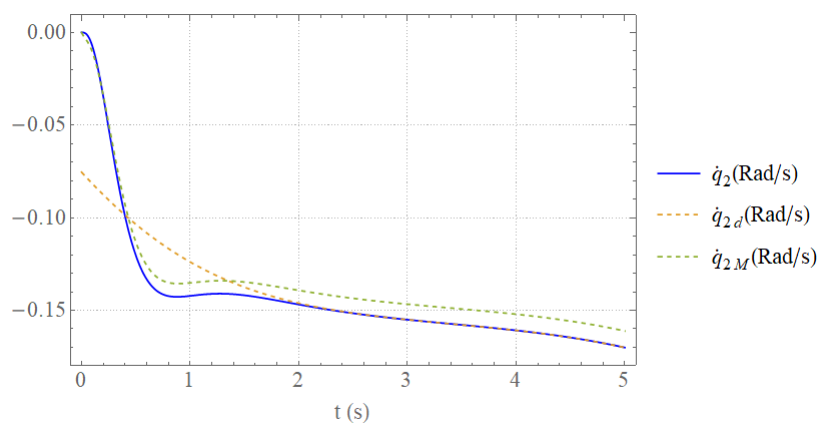


Figura 3.83: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 3 s.

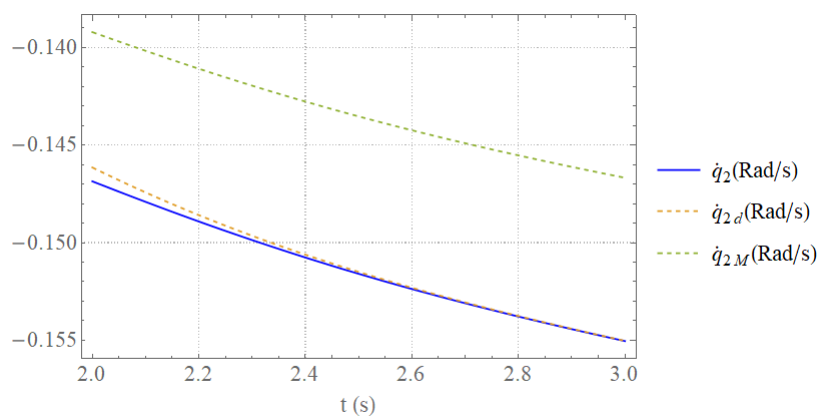


Figura 3.84: Posição x Tempo.

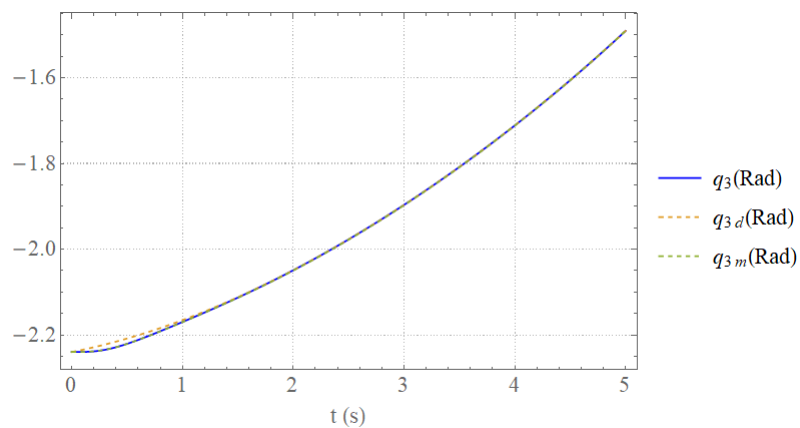


Figura 3.85: Detalhe do histórico temporal da posição angular para o intervalo de 2 a 3 s.

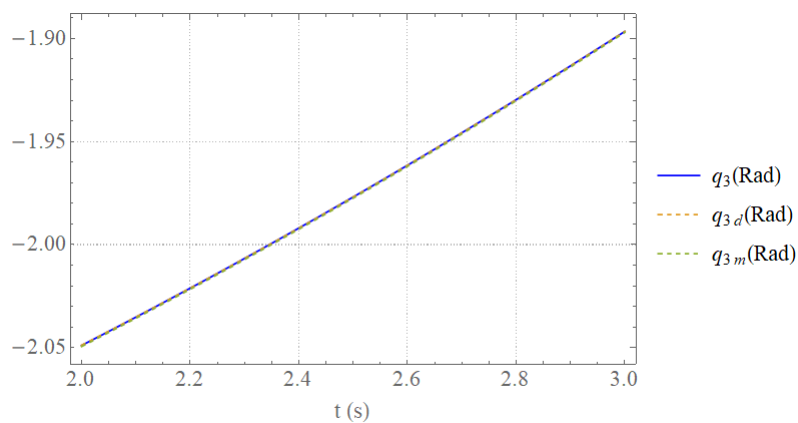


Figura 3.86: Velocidade angular x Tempo.

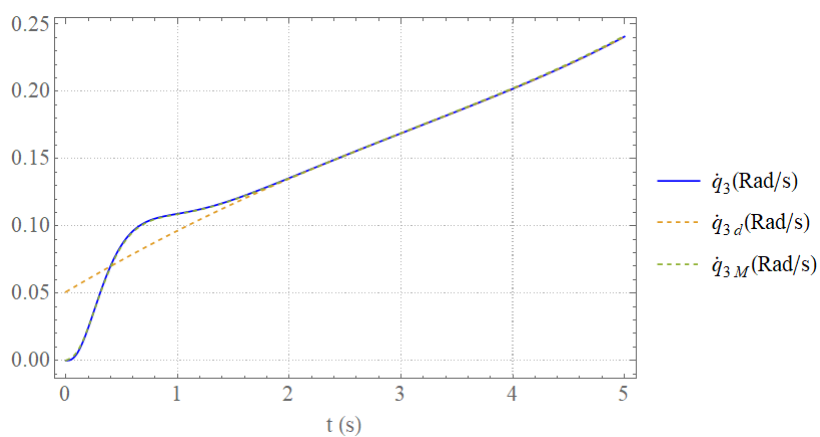
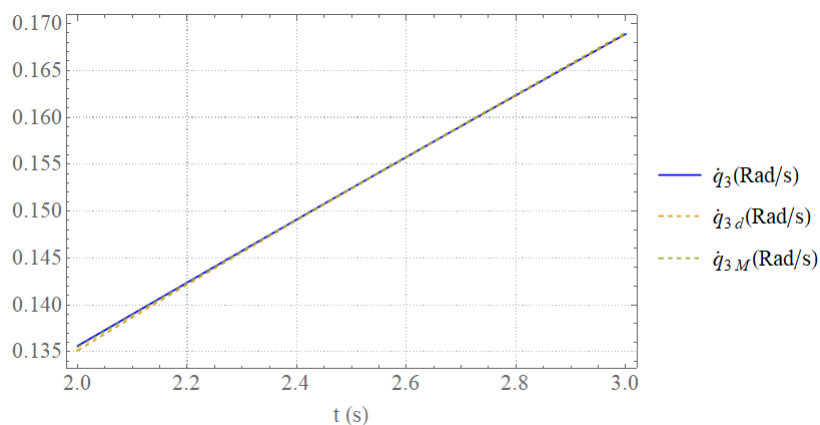


Figura 3.87: Detalhe do histórico temporal da velocidade angular para o intervalo de 2 a 3 s.



Analisando as figuras 3.76, 3.78, 3.80, 3.82, 3.84 e 3.86 é possível perceber que, conforme demonstrado na seção 3.2.6.2, a posição e a velocidade apresentam os valores impostos.

Analisando as figuras 3.77, 3.79, 3.81, 3.83, 3.85 e 3.87 é possível perceber o ângulo de defasagem entre a junta e o elo que ocorre devido a flexibilidade da junta.

Figura 3.88: Posição x_c x Tempo.

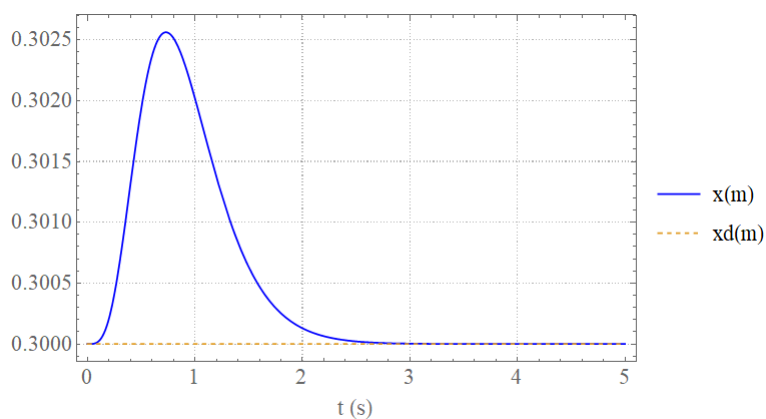
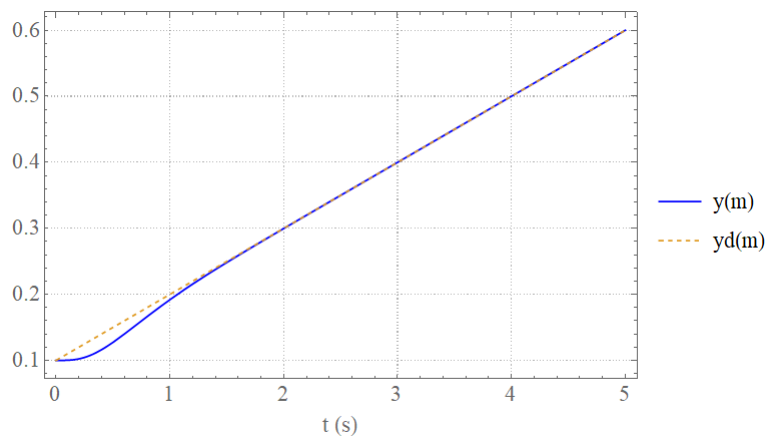
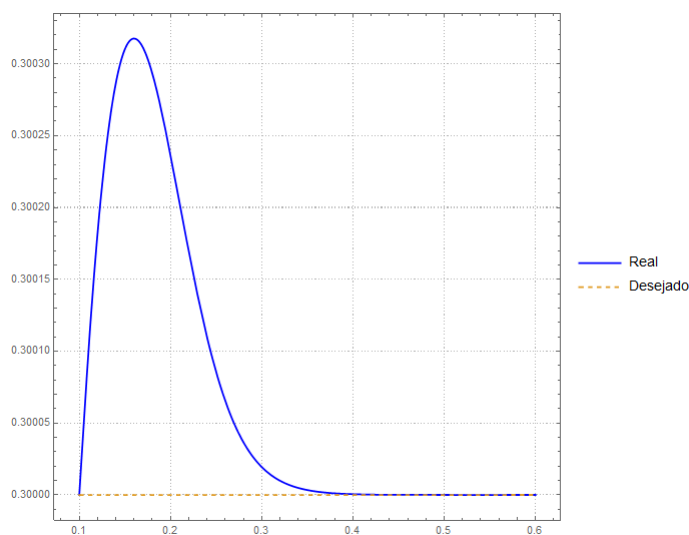
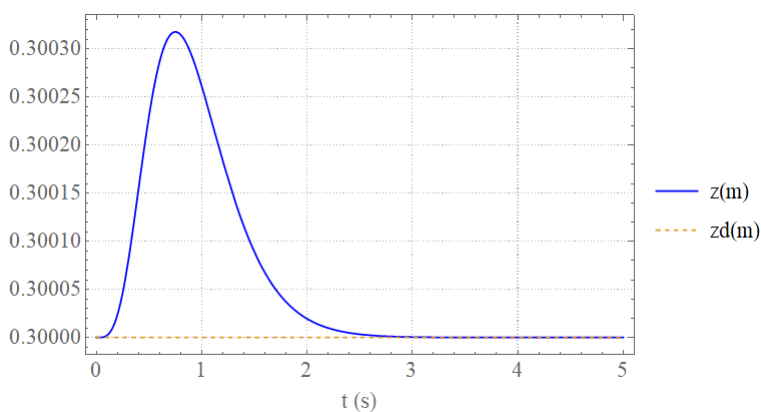
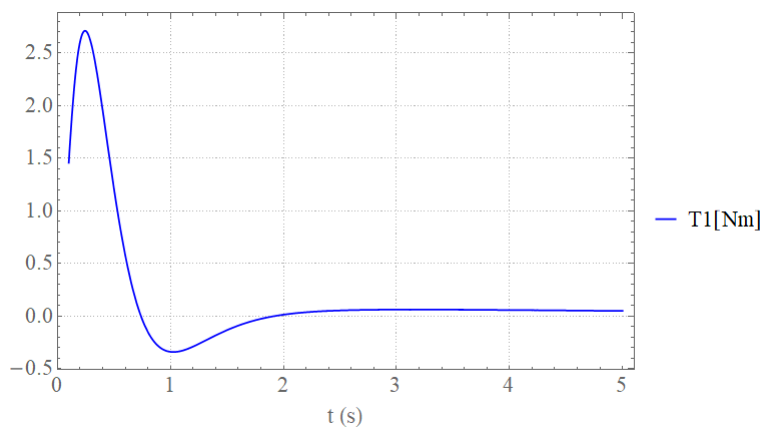
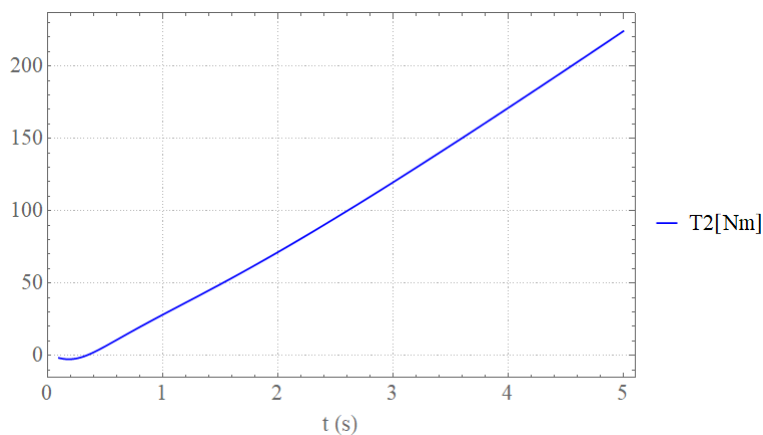
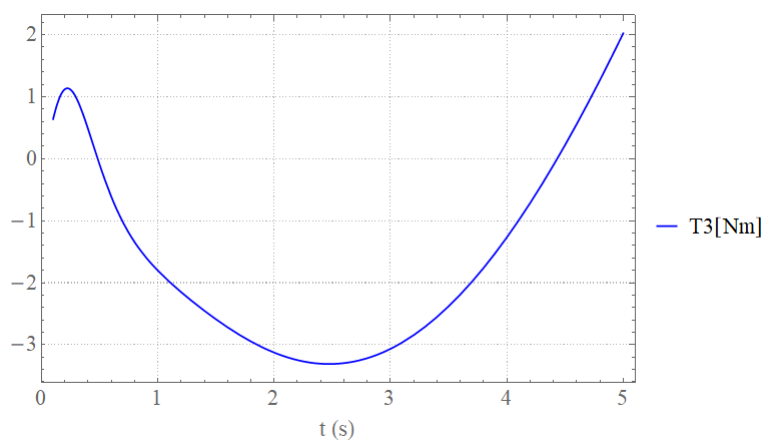
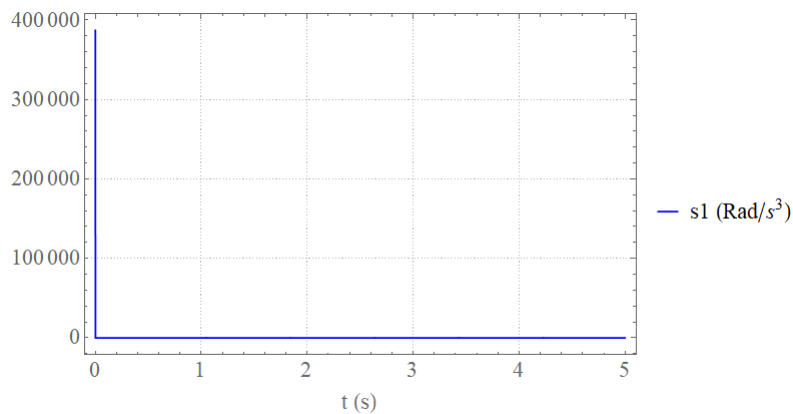
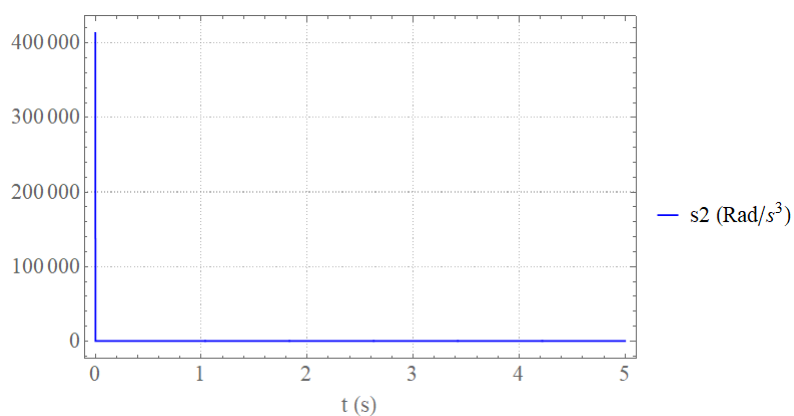
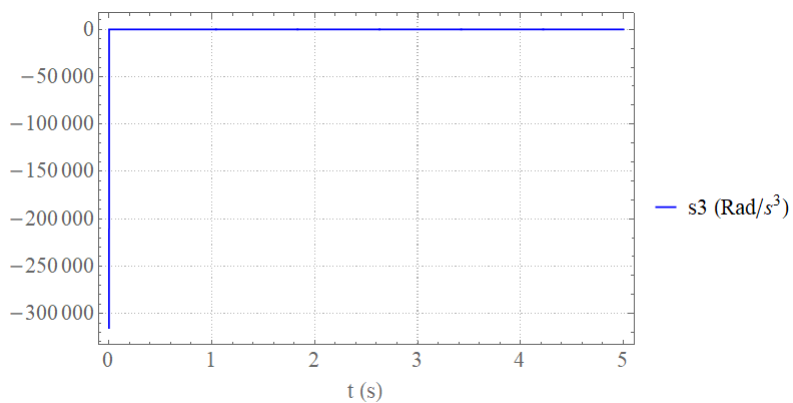


Figura 3.89: Posição y_c x Tempo.**Figura 3.90:** Posição z_c x Tempo.**Figura 3.91:** Deslocamento no Plano y-z.

As figuras 3.88, 3.89 e 3.90 mostram as trajetórias das coordenadas cartesianas do efetuador do manipulador. É possível perceber que devido ao fato de as condições iniciais não coincidirem com a trajetória desejada, no início da trajetória um pequeno erro de acompanhamento aparece.

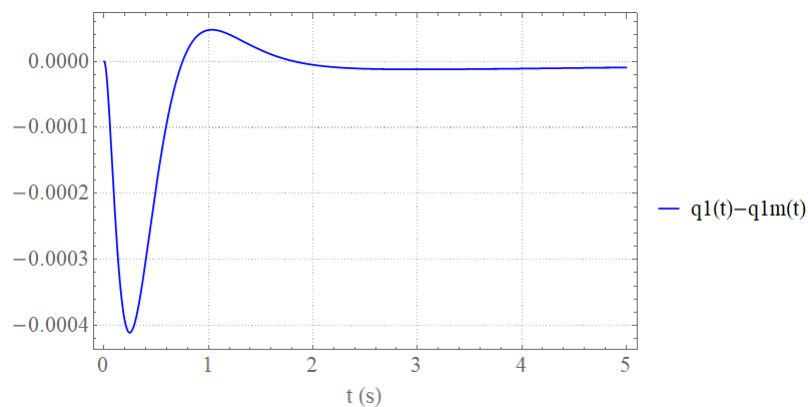
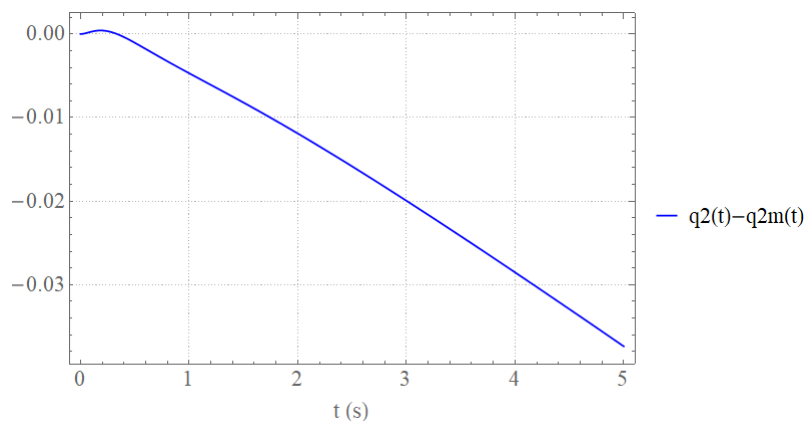
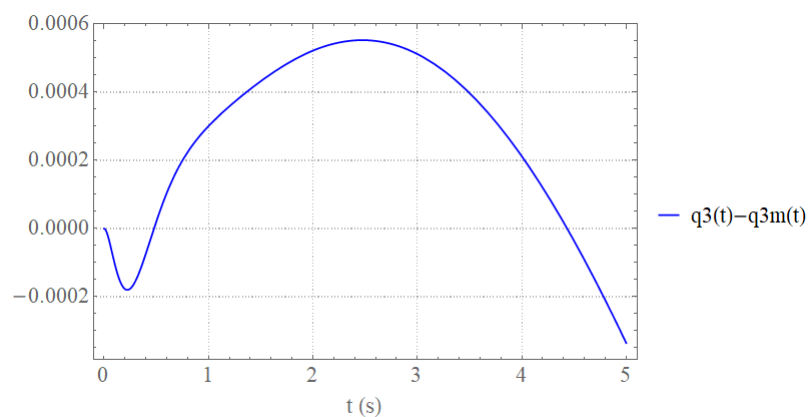
Figura 3.92: Torque 1 x Tempo.**Figura 3.93:** Torque 2 x Tempo.**Figura 3.94:** Torque 3 x Tempo.

Nas figuras 3.92, 3.93, 3.94 percebe-se que o esforço de controle se manteve em valores aceitáveis, e possíveis de serem realizados. Vale evidenciar a não ocorrência do fenômeno de *chattering*.

Figura 3.95: Superfície 1 x Tempo.**Figura 3.96:** Superfície 2 x Tempo.**Figura 3.97:** Superfície 3 x Tempo.

Nas figuras 3.95, 3.96 e 3.97 percebe-se que a dinâmica do erro de acompanhamento é estável pois a variável s se apresenta próximo a zero durante a simulação.

Nota-se também que, devido as condições iniciais não pertencerem a trajetória desejada, as variáveis s_1 , s_2 , s_3 apresentam valores diferentes de zero no instante inicial.

Figura 3.98: $(q_1 - q_{1m}) \times$ Tempo**Figura 3.99:** $(q_2 - q_{2m}) \times$ Tempo**Figura 3.100:** $(q_3 - q_{3m}) \times$ Tempo

Nas figuras 3.98, 3.99 e 3.100 é possível notar que a defasagem angular é máxima no instante que o módulo do torque exercido pelo atuador é máximo. Seus valores eficazes podem ser avaliados através da seguinte equação:

$$(q_i - q_{im})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} (q_i - q_{im})^2 dt} . \quad (3.88)$$

No presente caso, os valores eficazes para a defasagem angular para q_1 , q_2 e q_3 resultam em, respectivamente: $1,005 \cdot 10^{-4} rad$, $2,009 \cdot 10^{-2} rad$ e $3,714 \cdot 10^{-4} rad$

Figura 3.101: Erro de acompanhamento x Tempo

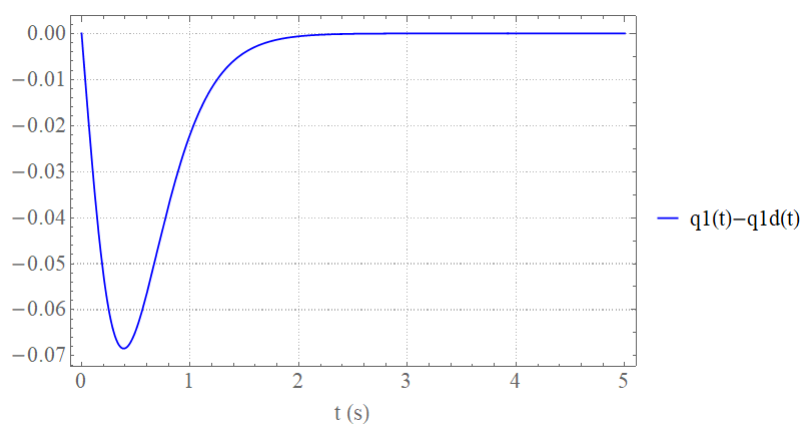


Figura 3.102: Erro de acompanhamento x Tempo

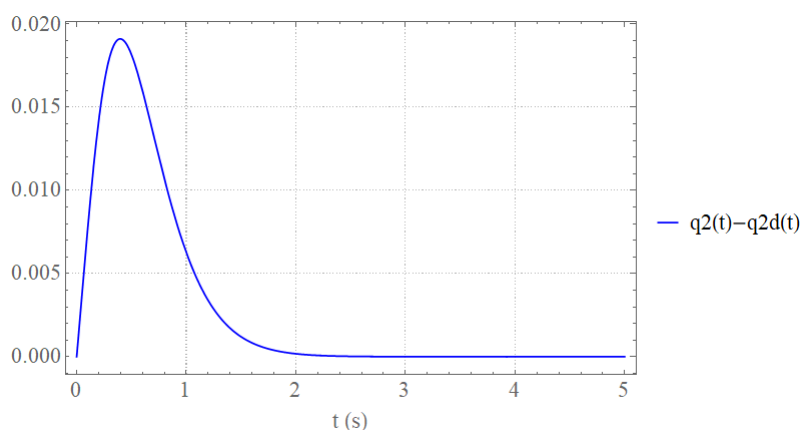
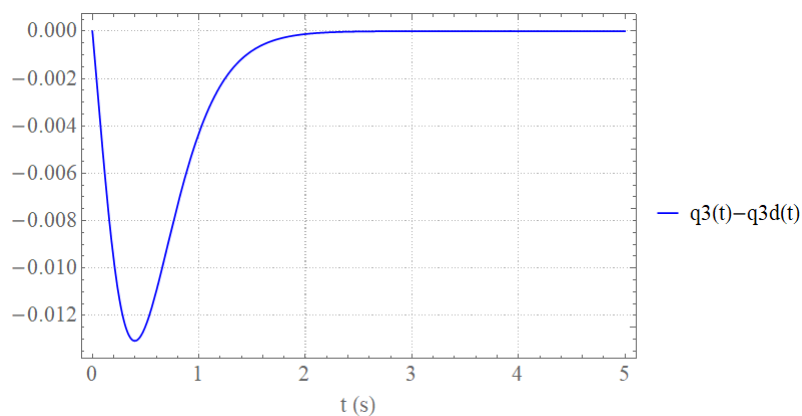


Figura 3.103: Erro de acompanhamento x Tempo



Nas figuras 3.101, 3.102 e 3.103 é possível notar que os erros de acompanhamento apresentam um comportamento estável no domínio do tempo e seus valores eficazes podem ser avaliados através das seguintes equações.

$$(q_i - q_{id})_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_s} \int_{t_i}^{t_s} (q_i - q_d)^2 dt} . \quad (3.89)$$

No presente caso, excluindo o período transitório, onde o erro de acompanhamento não alcançou a superfície de escorregamento, ou seja, tomando $t_i = 2s$, os valores eficazes resultam em $9,724 \cdot 10^{-5} rad$, $2,627 \cdot 10^{-5} rad$ e $1,942 \cdot 10^{-5} rad$ respectivamente, para os erros de acompanhamento de q_1 , q_2 e q_3 . Estes valores são respectivamente, cerca de: 97%, 0,13% e 5,25% dos valores eficazes apresentados pela defasagem dos ângulos (vide Tabela 3.7).

Tabela 3.7: Resultados - Erro de acompanhamento e defasagem entre ângulo do elo e junta.

Valor Eficaz de $(q_i - q_{im})$	Valor Eficaz de $(q_i - q_{id})$	$q_i - q_{id} / q_i - q_{im}$
$1,005 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$9,724 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	97%,
$2,009 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$	$2,627 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	0,13%
$3,714 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$1,942 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$	5,25%

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os chamados manipuladores robóticos são largamente utilizados na indústria em geral, como uma alternativa para automatização e aumento de produtividade e segurança de processos produtivos. O projeto de manipuladores eficientes e de baixo peso é uma necessidade emergente de engenharia. Desta forma, modelos matemáticos que representam a dinâmica complexa destes manipuladores tornam-se indispensáveis tanto na fase de projeto mecânico como no projeto de controle

Referindo-se tão somente à estratégia adotada neste texto, quando o modelo matemático contempla o fato das juntas serem flexíveis, tornou-se necessário derivar as equações diferenciais do movimento até a quarta ordem.

No Capítulo 3, considerou-se dois manipuladores de juntas flexíveis onde suas equações diferenciais do movimento foram obtidas através das equações de Lagrange, de Gibbs-Appell e da Metodologia Modular de Modelagem.

No manipulador de elo único (Seção 3.1), a dificuldade em se obter as equações diferenciais do movimento mostrou-se equivalente, considerando-se as três abordagens seguidas no presente trabalho.

No manipulador robótico de 6 graus de liberdade (Seção 3.2) as vantagens da utilização da Metodologia Modular de Modelagem se tornaram mais evidentes. A grande complexidade das expressões da energia cinética, energia potencial e aceleração em função de um conjunto mínimo de coordenadas generalizadas ressaltaram os benefícios do uso de uma Metodologia de Modelagem Modular, que contempla o uso de um conjunto de coordenadas generalizadas redundantes, proporcionando, em troca, maior simplicidade na expressão das equações de movimento.

O uso da técnica de projeto de controle não linear por modos deslizantes mostrou-se efetivo para manter o erro de acompanhamento limitado. No manipulador robótico de 6 graus de liberdade, a maior simplicidade do modelo matemático obtido acarretou em uma lei de controle não linear também mais

simples, em comparação à lei de controle não linear obtida por meio das equações de Lagrange ou das equações de Gibbs-Appell.

No manipulador de elo único, o filtro de Kalman, mostrou-se suficiente para estimar os estados desconhecidos.

Nas simulações apresentadas nas subseções 3.1.4 e 3.2.5, a utilização de um polinômio interpolador de sétimo grau mostrou-se essencial para garantir uma trajetória suave até o nível da terceira derivada temporal das posições.

Vale ressaltar que a utilização de uma técnica de controle robusta mostrou-se uma estratégia essencial, tendo em vista que o estado do sistema não é completamente acessível à medição, sendo necessário o uso de filtro não-linear (no caso, o filtro estendido de Kalman) para sua estimativa. Desta forma, a diferença entre o torque obtido considerando os estados estimados e o torque que seria obtido considerando os estados reais, pode ser tratada como um esforço de perturbação, o que, neste estudo de caso, não foi suficiente para afastar a trajetória da superfície de deslizamento.

REFERÊNCIAS

ALAM, Waqar et al. Robust sliding mode control for flexible joint robotic manipulator via disturbance observer. **Interdisciplinary Description of Complex Systems: INDECS**, v. 17, n. 1-B, p. 85-97, 2019 .

ALMEIDA, Rynaldo Zanotele Hemerly de. **Modelagem dinâmica e controle de robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade**. 2013. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BADAMCHIZADEH, Mohammad Ali; HASSANZADEH, Iraj; ABEDINPOUR FALLAH, Mehdi. Extended and unscented kalman filtering applied to a flexible-joint robot with jerk estimation. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 2010, 2010.

BARUH, Haim. **Applied dynamics**. Boca Raton: CRC press, 2015.

BARUH, Haim. Another look at the describing equations of dynamics. **Chinese Society of Mechanical Engineers, Journal**, v. 21, n. 1, p. 15-23, 2000.

BAUMGARTE, Joachim. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 1, n. 1, p. 1-16, 1972.

CHEN, Yong; GUO, Bin. Sliding mode fault tolerant tracking control for a single-link flexible joint manipulator system. **IEEE Access**, v. 7, p. 83046-83057, 2019.

COUTINHO, André G.; HESS-COELHO, Tarcisio A. **Improving the performance of parallel robots by applying distinct hybrid control techniques**. *Robotica*, v. 40, n. 4, p. 951-975, 2022.

COUTINHO, André Garnier. **Contribuições à modelagem dinâmica e ao controle de manipuladores paralelos**. 2019. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

DWIVEDY, Santosha Kumar; EBERHARD, Peter. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. **Mechanism and machine theory**, v. 41, n. 7, p. 749-777, 2006.

FATEH, Mohammad Mehdi. Robust control of flexible-joint robots using voltage control strategy. **Nonlinear Dynamics**, v. 67, n. 2, p. 1525-1537, 2012.

HAMILL, Patrick. **A student's guide to Lagrangians and Hamiltonians**. Cambridge University Press, 2014.

HARTMANN, Vítor Neves. **Contribuição ao controle experimental de robôs paralelos**. 2018. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

HESS-COELHO, Tarcisio Antonio; ORSINO, Renato Maia Matarazzo; MALVEZZI, Fernando. Modular modelling methodology applied to the dynamic analysis of parallel mechanisms. **Mechanism and Machine Theory**, v. 161, p. 104332, 2021.

HORN, Arthur; MALVEZZI, Fernando; ORSINO, Renato MM. On the use of Maggi's equation in the dynamic modeling of multibody systems. **Vibroengineering Procedia**, v. 32, p. 166-171, 2020.

KALMAN, Rudolph Emil. A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960.

LAGRANGE, Joseph Louis. **Mécanique analytique**. Mallet-Bachelier, 1853.

LOPES, Antônio M. Modelação cinemática e dinâmica de manipuladores de estrutura em série. 2016, Porto: FEUP, 2001.

MA, Lei; SCHILLING, Klaus; SCHMID, Christian. Adaptive backstepping sliding-mode control with application to a flexible-joint manipulator. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 39, n. 16, p. 55-60, 2006.

MATARAZZO ORSINO, Renato Maia; HESS-COELHO, Tarcisio Antonio. A contribution on the modular modelling of multibody systems. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 471, n. 2183, p. 20150080, 2015.

MEIROVITCH, Leonard. **Methods of analytical dynamics**. Courier Corporation, 2010.

NANOS, Kostas; PAPADOPOULOS, Evangelos G. On the dynamics and control of flexible joint space manipulators. **Control Engineering Practice**, v. 45, p. 230-243, 2015.

ORSINO, Renato Maia Matarazzo. **A contribution on modeling methodologies for multibody systems**. 2016. Tese de Doutorado. University of São Paulo, Brazil.

ORSINO, Renato Maia Matarazzo. Recursive modular modelling methodology for lumped-parameter dynamic systems. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 473, n. 2204, p. 20160891, 2017.

ORSINO, Renato Maia Matarazzo; PESCE, Celso Pupo. Readdressing the classic falling U-chain problem by a modular nonlinear FEM approach. **Acta Mechanica**, v. 229, n. 7, p. 3107-3122, 2018.

ORSINO, Renato Maia Matarazzo. Quasi-velocities, Gibbs-Appell equations and Principle of Relaxation of the Constraints. Class Notes ,2019.

ORSINO, Renato Maia Matarazzo. Modular Modeling Methodology. Class Notes ,2019.

PAPASTAVRIDIS, John G. A panoramic overview of the principles and equations of motion of advanced engineering dynamics. 1998.

PESCE, Celso Pupo. The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position. **J. Appl. Mech.**, v. 70, n. 5, p. 751-756, 2003.

PESCE, Celso Pupo. Dinâmica dos corpos rígidos. Monografia, PME/EPUSP, 2009.

PESCE, Celso Pupo; CASETTA, Leonardo. Systems with mass explicitly dependent on position. In: **Dynamics of mechanical systems with variable mass**. Springer, Vienna, 2014. p. 51-106.

RAHIMI, H. N.; NAZEMIZADEH, M. Dynamic analysis and intelligent control techniques for flexible manipulators: a review. **Advanced Robotics**, v. 28, n. 2, p. 63-76, 2014.

RIBEIRO, Maria Isabel. Kalman and extended kalman filters: Concept, derivation and properties. **Institute for Systems and Robotics**, v. 43, p. 46, 2004.

SARKKA, Simo. On unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems. **IEEE Transactions on automatic control**, v. 52, n. 9, p. 1631-1641, 2007.

SLOTINE, Jean-Jacques E. et al. **Applied nonlinear control**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.

SPONG, Mark W. Modeling and control of elastic joint robots. 1987.

SUBUDHI, B. A. M. S.; MORRIS, Alan S. Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints. **Robotics and Autonomous Systems**, v. 41, n. 4, p. 257-270, 2002.

SOLTANPOUR, Mohammad Reza et al. Voltage based sliding mode control of flexible joint robot manipulators in presence of uncertainties. **Robotics and Autonomous Systems**, v. 118, p. 204-219, 2019.

ZAARE, Saeed; SOLTANPOUR, Mohammad Reza; MOATTARI, Mazda. Adaptive sliding mode control of n flexible-joint robot manipulators in the presence of structured and unstructured uncertainties. **Multibody System Dynamics**, v. 47, n. 4, p. 397-434, 2019.

ZHENG, Kunming; HU, Youmin; WU, Bo. Model-free development of control systems for a multi-degree-of-freedom robot. **Mechatronics**, v. 53, p. 262-276, 2018.

APÊNDICE A – FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

Este apêndice tem como objetivo apresentar o procedimento utilizado na Sec. 3.1 para estimar os estados do manipulador de elo único, para tanto, considere a seguinte transformação de variável:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ q_M \\ \dot{q}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A partir dessa transformação, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{w}(t) \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{-x_2^2}{2}mgl \sin x_1 + \frac{x_3}{2}mgl \cos x_1 + k \left\{ [k(x_1 - x_5) + T_1] \frac{1}{J_M} - x_3 \right\} + w_1(t) \\ x_5 \\ [k(x_1 - x_5) + T_1] \frac{1}{J_M} + w_2(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Sendo sua observação descrita por:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} x_1 + v_1(t) \\ x_2 + v_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ x_5 + v_5(t) \\ x_6 + v_6(t) \end{Bmatrix} . \quad (\text{A.4})$$

Para inicializar as estimativas, considera-se a condição inicial igual a estimativa inicial, sendo assim:

$$\widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) . \quad (\text{A.5})$$

Por simplicidade, considerou-se que o estado real da condição inicial é conhecido, de forma que:

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{0} , \quad (\text{A.6})$$

Desta forma, torna-se possível realizar as estimativas através de:

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{z}(t) - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}(t))) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}(t)^T - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) , \quad (\text{A.8})$$

sendo:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{2k^2}{J_m} - mgl\widehat{x}_2^2 \cos \widehat{x}_1 - mgl\widehat{x}_3 \sin \widehat{x}_1\right) \frac{1}{2J} & \frac{-mgl\widehat{x}_2 \sin \widehat{x}_1}{J} & \frac{-2k+mgl \cos \widehat{x}_1}{2J} & 0 & \frac{-k^2}{J_m J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_m} & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{J_m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

e a matriz de ganho de Kalman é definida por:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}(t)^T\mathbf{R}(t) \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B – DETERMINAÇÃO DA TRAJETÓRIA DO ESTUDO DE CASO DA SEC. 3.1

Considere o seguinte polinômio que determina a posição desejada no domínio do tempo:

$$q_d(t) = a.t^7 + b.t^6 + c.t^5 + d.t^4 + e.t^3 + f.t^2 + g.t + h . \quad (\text{B.1})$$

Derivando para obter a derivada da aceleração, tem-se:

$$\dot{q}_d(t) = 7a.t^6 + 6b.t^5 + 5c.t^4 + 4d.t^3 + 3e.t^2 + 2f.t + g \quad (\text{B.2})$$

$$\ddot{q}_d(t) = 42a.t^5 + 30b.t^4 + 20c.t^3 + 12d.t^2 + 6e.t + 2f \quad (\text{B.3})$$

$$\ddot{\ddot{q}}_d(t) = 210a.t^4 + 120b.t^3 + 60c.t^2 + 24d.t + 6e . \quad (\text{B.4})$$

Para o instante inicial $t_i = 0$, tem-se:

$$e = f = g = h = 0 . \quad (\text{B.5})$$

Para o instante final $t_f = 10$, tem-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^7 a + 10^6 b + 10^5 c + 10^4 d = 2\pi \\ 7 \cdot 10^6 a + 6 \cdot 10^5 b + 5 \cdot 10^4 c + 4 \cdot 10^3 d = 0 \\ 42 \cdot 10^5 a + 30 \cdot 10^4 b + 20 \cdot 10^3 c + 12 \cdot 10^2 d = 0 \\ 210 \cdot 10^4 a + 120 \cdot 10^3 b + 60 \cdot 10^2 c + 24 \cdot 10^1 d = 0 \end{array} \right. . \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o sistema de equações B.6, é possível obter as constantes necessárias para que a trajetória atenda aos requisitos impostos.

Desta forma, a solução com quatro algarismos significativos é:

$$a = 1,257 \cdot 10^{-5} \quad (\text{B.7})$$

$$b = 4,398 \cdot 10^{-4} \quad (\text{B.8})$$

$$c = -5,278 \cdot 10^{-3} \quad (\text{B.9})$$

$$d = 2,199 \cdot 10^{-2} \quad (\text{B.10})$$

APÊNDICE C – MATRIZES DE ROTAÇÃO

Matrizes de rotação referentes ao modelo matemático do estudo de caso apresentado na Sec. 3.2:

$$\mathbf{R}_A^N = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{R}_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_2 & -\sin q_2 \\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{R}_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & -\sin q_3 \\ 0 & \sin q_3 & \cos q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

APÊNDICE D - DETERMINAÇÃO DA TRAJETÓRIA DO ESTUDO DE CASO DA SEC. 3.2

Considere os seguintes polinômios que determinam as posições desejadas no domínio do tempo:

$$\mathbf{q}_d(t) = D \begin{bmatrix} t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{q}_d(t) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{bmatrix} \cdot \quad (\text{D.2})$$

Derivando para obter a derivada da aceleração, tem-se:

$$\dot{\mathbf{q}}_d(t) = \begin{bmatrix} 7a_1 & 6b_1 & 5c_1 & 4d_1 & 3e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 7a_2 & 6b_2 & 5c_2 & 4d_2 & 3e_2 & 2f_2 & g_2 \\ 7a_3 & 6b_3 & 5c_3 & 4d_3 & 3e_3 & 2f_3 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d(t) = \begin{bmatrix} 42a_1 & 30b_1 & 20c_1 & 12d_1 & 6e_1 & 2f_1 \\ 42a_2 & 30b_2 & 20c_2 & 12d_2 & 6e_2 & 2f_2 \\ 42a_3 & 30b_3 & 20c_3 & 12d_3 & 6e_3 & 2f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\dddot{\mathbf{q}}_d(t) = \begin{bmatrix} 210a_1 & 120b_1 & 60c_1 & 24d_1 & 6e_1 \\ 210a_2 & 120b_2 & 60c_2 & 24d_2 & 6e_2 \\ 210a_3 & 120b_3 & 60c_3 & 24d_3 & 6e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{bmatrix} . \quad (\text{D.5})$$

Considerando as condições impostas no instante inicial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7854 \\ 1,640 \\ -2,049 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{D.9})$$

Finalmente, considerando as condições impostas no instante final, tem-se:

$$\begin{cases} t_f^7 a_1 + t_f^6 b_1 + t_f^5 c_1 + t_f^4 d_1 + h_1 = 0,6747 \\ 7t_f^6 a_1 + 6t_f^5 b_1 + 5t_f^4 c_1 + 4t_f^3 d_1 = 0 \\ 42t_f^5 a_1 + 30t_f^4 b_1 + 20t_f^3 c_1 + 12t_f^2 d_1 = 0 \\ 210t_f^4 a_1 + 120t_f^3 b_1 + 60t_f^2 c_1 + 24t_f^1 d_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{cases} t_f^7 a_2 + t_f^6 b_2 + t_f^5 c_2 + t_f^4 d_2 + h_2 = 1,138 \\ 7t_f^6 a_2 + 6t_f^5 b_2 + 5t_f^4 c_2 + 4t_f^3 d_2 = 0 \\ 42t_f^5 a_2 + 30t_f^4 b_2 + 20t_f^3 c_2 + 12t_f^2 d_2 = 0 \\ 210t_f^4 a_2 + 120t_f^3 b_2 + 60t_f^2 c_2 + 24t_f^1 d_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{cases} t_f^7 a_3 + t_f^6 b_3 + t_f^5 c_3 + t_f^4 d_3 + h_3 = -1,671 \\ 7t_f^6 a_3 + 6t_f^5 b_3 + 5t_f^4 c_3 + 4t_f^3 d_3 = 0 \\ 42t_f^5 a_3 + 30t_f^4 b_3 + 20t_f^3 c_3 + 12t_f^2 d_3 = 0 \\ 210t_f^4 a_3 + 120t_f^3 b_3 + 60t_f^2 c_3 + 24t_f^1 d_3 = 0 \end{cases} . \quad (\text{D.12})$$

Resolvendo os sistemas de equações lineares acima, é possível obter as constantes que tornam possível obter a trajetória desejada:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,001012 & -0,01062 & 0,03825 & -0,04781 & 0 & 0 & 0 & 0,7854 \\ 0,004588 & -0,04817 & 0,1734 & -0,2167 & 0 & 0 & 0 & 1,640 \\ -0,003455 & 0,03627 & -0,1306 & 0,1633 & 0 & 0 & 0 & -2,049 \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$