

07

CONSULTA
FD-3731

São Paulo
2004

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.
Área de Concentração:
Engenharia de Controle e
Automação Mecânica

**OTIMIZAÇÃO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DA PASSAGEM
POR VELOCIDADES CRÍTICAS
DE UM ROTOR FLEXÍVEL CONTÍNUO**

JAMES SANCHES ALVES

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia de Controle e
Automação Mecânica

Orientador:
Prof. Dr.
Agenor de Toledo Fleury

São Paulo
2004

**OTIMIZAÇÃO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DA PASSAGEM
POR VELOCIDADES CRÍTICAS
DE UM ROTOR FLEXÍVEL CONTÍNUO**

JAMES SANCHES ALVES

AGRADECIMENTOS

A todos os colegas do CTMSP (Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo) sem a ajuda dos quais, a parte experimental deste trabalho não teria sido realizada.
Ao prof. Fleury, orientador e amigo.
A minha família e Maria Inês pelo apoio constante.

RESUMO

Rotores flexíveis são encontrados em um grande número de máquinas como turbomáquinas e ultracentrífugas. Estes rotores têm de passar por velocidades críticas de flexão para atingirem a velocidade nominal. O presente trabalho desenvolve um modelo de rotor flexível contínuo. As relações de ortogonalidade das autofunções são demonstradas, obtendo um modelo discretizado utilizando o princípio da superposição modal. As equações de movimento de um exemplo numérico de rotor são obtidas com a série de superposição modal considerando os seis primeiros modos de vibrar. Simulações numéricas são feitas obtendo as frequências naturais, as autofunções (precessões diretas e retrógradas), curvas de resposta em frequência e respostas ao desbalanço no domínio do tempo. Uma rotina de otimização é desenvolvida para encontrar as forças de atuação, em malha aberta, de mancais magnéticos ativos, que minimizam os deslocamentos do rotor, submetido a determinadas configurações de desbalanço, na passagem por velocidades críticas. Uma bancada de testes é projetada e construída. Os testes feitos com essa bancada demonstram boa concordância entre os resultados obtidos com o modelo teórico e os observados com a mesma.

Flexible rotors are found in several types of machines like turbomachinery and ultracentrifuges. These rotors have to pass through bending critical speeds to achieve the nominal speed. The present work develops a flexible continuum rotor model. The eigenfunction orthogonality relationships are deduced in order to obtain a discrete model by means of the modal superposition principle. The rotor's equations of motion are derived, for a numerical example, with the modal superposition series considering the first six vibration modes. Numerical simulations allow to get the natural frequencies, eigenfunctions (backward and forward precessions), the system frequency responses and the unbalance responses in the time domain. An optimization procedure is developed to find the open loop magnetic bearings actuating forces that minimize the rotor's vibration displacements at the critical speeds. A test rig is designed and manufactured. The tests performed achieve good agreement among the theoretical and the experimental results.

ABSTRACT

ERRATA

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
27	6ª	rigidezes	a rigidez
23	20ª	em (3.28) e (3.29)	em (3.28) e (3.31)

PÁGINA	EQUAÇÃO	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
23	(3.39)	$M_{y_2} = -EIx_2''$	$M_{y_2} = -EIx_1''$
23	(3.38)	$M_{y_1} = -EIx_1''$	$M_{y_1} = -EIx_2''$
23	(3.37)	$M_{x_2} = -EIy_2''$	$M_{x_2} = -EIy_1''$
23	(3.36)	$M_{x_1} = -EIy_1''$	$M_{x_1} = -EIy_2''$
21	(3.18)	$m \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial Z^2}$	$m \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial t^2}$

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
11	10ª	Schiele	Schiele
10	10ª	sistema	sistema
7	14ª	D'Alembert	D'Alembert

$$C^s = [c1_1 \dots c8_1 \dots c1_{t+1} \dots c8_{t+1} \dots c1_n \dots c8_n]^s; \quad t = 1, 2, 3, \dots, n-2$$

$$B^s = [0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0] \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-2$$

$$A^s = \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,8} & \dots & d_{1,8/j+1} & \dots & d_{1,8(j+1)} & \dots & d_{1,8(n-1)+1} & \dots & d_{1,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{8,1} & \dots & d_{8,8} & \dots & d_{8,8/j+1} & \dots & d_{8,8(j+1)} & \dots & d_{8,8(n-1)+1} & \dots & d_{8,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1+t,1} & \dots & d_{1+t,8} & \dots & d_{1+t,8/j+1} & \dots & d_{1+t,8(j+1)} & \dots & d_{1+t,8(n-1)+1} & \dots & d_{1+t,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{t+1,1} & \dots & d_{t+1,8} & \dots & d_{t+1,8/j+1} & \dots & d_{t+1,8(j+1)} & \dots & d_{t+1,8(n-1)+1} & \dots & d_{t+1,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,8} & \dots & d_{n-1,8/j+1} & \dots & d_{n-1,8(j+1)} & \dots & d_{n-1,8(n-1)+1} & \dots & d_{n-1,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n,1} & \dots & d_{n,8} & \dots & d_{n,8/j+1} & \dots & d_{n,8(j+1)} & \dots & d_{n,8(n-1)+1} & \dots & d_{n,8n} \end{bmatrix}$$

LEIA-SE:

$$C^s = [c1_1 \dots c8_1 \dots c1_t \dots c8_t \dots c1_n \dots c8_n]^s; \quad t = 2, 3, \dots, n-1$$

$$B^s = [0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0] \quad ; \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

$$A^s = \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,8} & \dots & d_{1,8/j+1} & \dots & d_{1,8(j+1)} & \dots & d_{1,8(n-1)} & \dots & d_{1,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{8,1} & \dots & d_{8,8} & \dots & d_{8,8/j+1} & \dots & d_{8,8(j+1)} & \dots & d_{8,8(n-1)} & \dots & d_{8,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{t+1,1} & \dots & d_{t+1,8} & \dots & d_{t+1,8/j+1} & \dots & d_{t+1,8(j+1)} & \dots & d_{t+1,8(n-1)} & \dots & d_{t+1,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,8} & \dots & d_{n-1,8/j+1} & \dots & d_{n-1,8(j+1)} & \dots & d_{n-1,8(n-1)} & \dots & d_{n-1,8n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n,1} & \dots & d_{n,8} & \dots & d_{n,8/j+1} & \dots & d_{n,8(j+1)} & \dots & d_{n,8(n-1)} & \dots & d_{n,8n} \end{bmatrix}$$

ONDE SE LÊ:

PÁGINA	30
SISTEMA DE EQUAÇÕES	(3.78)

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
47	3ª	décimo quinto	décimo quarto
53	1ª	4.2	4.3

PÁGINA	LINHA	APÓS	ACRESCENTE-SE
44	16ª	coeficiente de amortecimento adimensional ξ modal	garante que a introdução de um pequeno amortecimento modal não alterará significativamente as frequências naturais e autofunções.

PÁGINA	EQUAÇÃO	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
43	(3.141)	r_1, γ	$\int_l^0 r_1, \gamma dz$
43	(3.141)	r_2, γ	$\int_l^0 r_2, \gamma dz$

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
41	1ª	em (3.131) ou (3.132)	em (3.126) ou (3.127)

PÁGINA	EQUAÇÃO	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
40	(3.126)	$+\int_l^0 (v_j, G_{nj}) dz$	$-\int_l^0 (v_j, G_{nj}) dz$

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
38	2ª	(3.113), substituindo em (3.111) e (3.112)	(3.112), substituindo em (3.110) e (3.111)
40	10ª	substituindo em (3.122) e (3.123)	substituindo em (3.123) e (3.124)

PÁGINA	FIGURA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
90	4.51	1ª crítica	na rotação de 25,67 Hz
91	4.52	1ª crítica	na rotação de 25,67 Hz

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
102	5ª	$G_s = 7,42 \times 10^{-5}$ m/V	$G_s^{-1} = 7,42 \times 10^{-5}$ m/V
102	6ª	Identificação dos atuadores magnéticos	Identificação das características dos atuadores magnéticos
103	1ª	dos anel	do anel
110	20ª	dos discos	do disco

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	CONSIDERE
136	8ª	SILVEIRA, M.E.	O início de uma nova referência, pois faltou um espaço depois da linha anterior.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS
LISTA DE TABELAS
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS
LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	1.1 Justificativa e importância.....	2
2	1.2 Objetivos.....	2
3	1.3 Descrição do sistema.....	3
4	1.4 Contribuições.....	4
4	1.5 Sumário estruturado.....	4
6	2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
13	3 MODELAGEM DO ROTOR.....	13
14	3.1 Equações de movimento.....	14
21	3.2 Soluções síncronas.....	21
26	3.3 Condições de contorno.....	26
32	3.4 Relações de ortogonalidade.....	32
42	3.5 Análise modal e modelo final na forma de estados.....	42
46	4 SIMULAÇÕES.....	46
46	4.1 Modelo da bancada.....	46
49	4.2 Valores numéricos do rotor.....	49
51	4.3 Diagramas de Campbell.....	51
53	4.4 Autofunções.....	53
59	4.5 Forças e deslocamentos.....	59
63	4.6 Respostas em frequência.....	63
72	4.7 Simulação no tempo da resposta ao desbalanceo.....	72
76	4.8 Otimização da passagem pelas críticas com atuação magnética.....	76

5 PROJETO DO EXPERIMENTO.....	92
5.1 Projeto, fabricação e montagem da bancada.....	92
5.2 Ensaios realizados.....	100
6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS E COMPARAÇÕES.....	114
6.1 Curvas de resposta em frequência sem amortecedor ativo.....	114
6.2 Curvas de resposta em frequência com amortecedor ativo.....	118
6.3 Balançamento.....	123
6.4 Balançamento Eletrônico.....	125
7 CONCLUSÕES.....	128
7.1 Conclusões.....	128
7.2 Sugestões para futuros trabalhos.....	129
A CÁLCULO DOS VALORES DE INÉRCIA E RIGIDEZ DO ROTOR.....	130
BIBLIOGRAFIA.....	133

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Desenho de conjunto da bancada de teste	3
Figura 3.1 - Elemento de rotor	13
Figura 3.2 - Deslocamentos de um corte de um elemento de rotor	15
Figura 3.3 - Composição dos esforços	20
Figura 3.4 - Composição do rotor	27
Figura 3.5 - Molas de flexão	28
Figura 4.1 - Esquema da bancada de ensaios	46
Figura 4.2 - Diagrama de Campbell do 1º modo	51
Figura 4.3 - Diagrama de Campbell do 2º modo	52
Figura 4.4 - Diagrama de Campbell do 3º modo	52
Figura 4.5 - Autofunções do 1º modo na rotação de 1 Hz	53
Figura 4.6 - Autofunções do 2º modo na rotação de 1 Hz	54
Figura 4.7 - Autofunções do 3º modo na rotação de 1 Hz	54
Figura 4.8 - Autofunções do 4º modo na rotação de 1 Hz	55
Figura 4.9 - Autofunções do 5º modo na rotação de 1 Hz	55
Figura 4.10 - Autofunções do 6º modo na rotação de 1 Hz	56
Figura 4.11 - Autofunções do 1º modo na rotação de 180 Hz	56
Figura 4.12 - Autofunções do 2º modo na rotação de 180 Hz	57
Figura 4.13 - Autofunções do 3º modo na rotação de 180 Hz	57
Figura 4.14 - Autofunções do 4º modo na rotação de 180 Hz	58
Figura 4.15 - Autofunções do 5º modo na rotação de 180 Hz	58
Figura 4.16 - Autofunções do 6º modo na rotação de 180 Hz	59
Figura 4.17 - Desbalanço	60
Figura 4.18 - Esquema dos atuadores magnéticos	61
Figura 4.19 - Força dos atuadores	62
Figura 4.20 - Posicionamento dos sensores de deslocamento	63
Figura 4.21 - Resposta em freq. com força em X^{di} , deslocamento em X^{asi} , 1ª crítica	64
Figura 4.22 - Resposta em freq. com força em X^{di} , deslocamento em Y^{di} , 1ª crítica	65
Figura 4.23 - Resposta em freq. com força em X^{di} , deslocamento em X^{asi} , 1ª crítica	65
Figura 4.24 - Resposta em freq. com força em X^{di} , deslocamento em Y^{asi} , 1ª crítica	66

Figura 4.25 - Resposta em freq. com força em X^{dt} , deslocamento em X^{ds1} 2ª crítica.....	66
Figura 4.26 - Resposta em freq. com força em X^{dt} , deslocamento em Y^{dt} 2ª crítica.....	67
Figura 4.27 - Resposta em freq. com força em X^{dt} , deslocamento em X_s^{ds1} 2ª crítica.....	67
Figura 4.28 - Resposta em freq. com força em X^{dt} , deslocamento em Y_s^{ds1} 2ª crítica.....	68
Figura 4.29 - Resposta em freq. força girante direta em dl, deslocamento em X_s^{ds1}	70
Figura 4.30 - Resposta em freq. força girante direta em dl, deslocamento em Y_s^{ds1}	70
Figura 4.31 - Resposta em freq. força girante retrógrada em dl, desloc. em X_s^{ds1}	71
Figura 4.32 - Resposta em freq. força girante retrógrada em dl, desloc. em Y_s^{ds1}	71
Figura 4.33 - Modelo de simulação no tempo.....	72
Figura 4.34 - Resposta ao desbalanço na 1ª crítica.....	74
Figura 4.35 - Orbits da resposta ao desbalanço na 1ª crítica.....	74
Figura 4.36 - Resposta ao desbalanço na 2ª crítica.....	75
Figura 4.37 - Orbits da resposta ao desbalanço na 2ª crítica.....	75
Figura 4.38 - Diagrama de blocos da rotina de otimização.....	77
Figura 4.39 - Resposta ao desbalanço com atuação magnética 1ª crítica.....	80
Figura 4.40 - Orbits da resposta ao desbalanço com atuação magnética 1ª crítica.....	80
Figura 4.41 - Força de atuação magnética 1ª crítica.....	81
Figura 4.42 - Orbits da força de atuação magnética 1ª crítica.....	81
Figura 4.43 - Resposta ao desbalanço com atuação magnética 2ª crítica.....	82
Figura 4.44 - Orbits da resposta ao desbalanço com atuação magnética 2ª crítica.....	82
Figura 4.45 - Orbits da força de atuação magnética 2ª crítica.....	83
Figura 4.46 - Orbits da força de atuação magnética 2ª crítica.....	83
Figura 4.47 - Resposta ao desbalanço com atuação magnética e idc 1ª crítica.....	88
Figura 4.48 - Orbits da resp. ao desbalanço com atuação magnética e idc 1ª crítica.....	88
Figura 4.49 - Força de atuação magnética com idc 1ª crítica.....	89
Figura 4.50 - Orbits força de atuação magnética com idc 1ª crítica.....	89
Figura 4.51 - Resposta ao desbalanço com atuação magnética $\xi = 1 \times 10^{-3}$ 1ª crítica.....	90
Figura 4.52 - Resposta ao desbalanço com atuação magnética $\xi = 0$ 1ª crítica.....	91
Figura 5.1 - Desenho de conjunto da bancada.....	93
Figura 5.2 - Fotografia da bancada fabricada.....	100
Figura 5.3 - Curva de calibração do sensor de deslocamento.....	101

103	Figura 5.4 - Esquema do amortecedor ativo.....
107	Figura 5.5 - Resposta em frequência do filtro do amortecedor ativo.....
108	Figura 5.6 - Esquema de medição para o balanceamento
109	Figura 5.7 - Esquema do ensaio de resposta de frequência.....
111	Figura 5.8 - Esquema do ensaio de balanceamento eletrônico.....
113	Figura 5.9 - Foto da bancada em ensaio.....
115	Figura 6.1 - Resp. em freq. sem amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s1}^{ast}
115	Figura 6.2 - Resp. em freq. sem amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s2}^{ast}
116	Figura 6.3 - Resp. em freq. sem amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s1}^{ast}
116	Figura 6.4 - Resp. em freq. sem amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s2}^{ast}
118	Figura 6.5 - Resp. em freq. com amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s1}^{ast}
119	Figura 6.6 - Resp. em freq. com amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s2}^{ast}
119	Figura 6.7 - Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s1}^{ast}
120	Figura 6.8 - Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s2}^{ast}
120	Figura 6.9 - Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 60 Hz, desloc. em X_{s1}^{ast}
121	Figura 6.10 - Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 60 Hz, desloc. em X_{s2}^{ast}
124	Figura 6.11 - Resposta ao Desbalanço.....

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	- Dados numéricos dos elementos do rotor	50
Tabela 4.2	- Dados numéricos dos nós do rotor	50
Tabela 4.3	- Frequências naturais e rotações críticas teóricas	53
Tabela 4.4	- Configurações de Desbalanço para simulação	73
Tabela 4.5	- Soluções ótimas para as correntes dos atuadores	79
Tabela 4.6	- Correntes ótimas com idc para a 1ª crítica	86
Tabela 4.7	- Correntes ótimas com $idc < 0,1A$ para a 1ª crítica	87
Tabela 6.1	- Frequências naturais com o rotor parado	117
Tabela 6.2	- Frequências naturais na rotação de 20 Hz	117
Tabela 6.3	- Freqs. naturais e ξ s. com amortecedor ativo com o rotor parado	121
Tabela 6.4	- Freqs. naturais e ξ s. com amortecedor ativo na rotação de 20 Hz	122
Tabela 6.5	- Freqs. naturais e ξ s. com amortecedor ativo na rotação de 60 Hz	122
Tabela 6.6	- Desbalanços modais residuais	123
Tabela 6.7	- Rotações e Amplitudes dos picos da resposta ao desbalanço	124
Tabela 6.8	- Correntes de minimização das passagens pelas críticas	125
Tabela 6.9	- Deslocamentos na passagem pela 1ª crítica sem Bale	126
Tabela 6.10	- Deslocamentos na passagem pela 1ª crítica com Bale	126
Tabela 6.11	- Deslocamentos na passagem pela 2ª crítica sem Bale	126
Tabela 6.12	- Deslocamentos na passagem pela 2ª crítica com Bale	126
Tabela A1	- Dimensões e materiais do eixo e anéis	131
Tabela A2	- Valores de inércia do eixo e anéis	131
Tabela A3	- Dimensões dos discos	131
Tabela A4	- Valores de inércia dos discos	132

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	- <i>Alternated current</i> , corrente alternada
AD	- Conversor analógico-digital
Amort.	- Amortecedor
Bale	- Balançoamento eletrônico
DC	- <i>Direct current</i> , corrente contínua
Desloc.	- Deslocamento
FFT	- <i>Fast Fourier transform</i> , transformada rápida de Fourier
Freq.	- Frequência
IP	- Índice de performance
Resp.	- Resposta
TTL	- <i>Transistor transistor logic</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	- Rotação (constante)
t	- tempo
dZ	- comprimento infinitesimal de um elemento de rotor
I_n	- Sistema de referência inercial
X, Y, Z	- Eixos do sistema de referência inercial
R	- Sistema de referência relativo
x, y, z	- Eixos do sistema de referência relativo
S	- Sistema de referência solidário
x_s, y_s, z_s	- Eixos do sistema de referência solidário
v, w	- deslocamentos angulares em torno dos eixos X e Y
$T_{I_n \rightarrow R}$	- Matriz de transformação de coordenadas de I_n para R
$T_{R \rightarrow I_n}$	- Matriz de transformação de coordenadas de R para I_n
$T_{R \rightarrow S}$	- Matriz de transformação de coordenadas de R para S
$T_{S \rightarrow R}$	- Matriz de transformação de coordenadas de S para R
$\sum F$	- Somatória de forças
$\sum M$	- Somatória de momentos
l_i	- Comprimento do i -ésimo elemento de rotor
m_i	- Massa por unidade de comprimento do i -ésimo elemento de rotor
J_i	- Momento transversal de inércia por unidade de comprimento do i -ésimo elemento de rotor
J_p	- Momento polar de inércia por unidade de comprimento do i -ésimo elemento de rotor
EI_i	- Módulo de elasticidade multiplicado pelo momento de inércia de elemento de rotor
f_i	- força por unidade de comprimento do i -ésimo elemento de rotor
M	- Momento fletor
T	- Força cortante
ω_i	- Frequência natural do i -ésimo modo de vibrar

- Autovalores do *i*-ésimo modo de vibrar e do *k*-ésimo elemento de rotor $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}$
- Autofunções que multiplicam funções temporais cossenoidais e senoidais das frequências naturais, respectivamente, do eixo X, do *i*-ésimo modo de vibrar e do *k*-ésimo elemento de rotor x_{1i}, x_{2i}
- Autofunções que multiplicam funções temporais cossenoidais e senoidais das frequências naturais, respectivamente, do eixo Y, do *i*-ésimo modo de vibrar e do *k*-ésimo elemento de rotor y_{1i}, y_{2i}
- Rigidez de mola linear do *i*-ésimo nó do rotor K_i
- Flexibilidade de mola de flexão do *i*-ésimo nó do rotor F_i
- Função degrau unitário u
- Delta de Kronecker δ_{ij}
- Coordenadas generalizadas modais do *i*-ésimo modo de vibrar n_1, n_2
- Coeficiente de amortecimento ξ
- Matriz dinâmica do modelo de rotor na forma de estados **A**
- Matriz de entrada do modelo de rotor na forma de estados **B**
- Matriz de saída do modelo de rotor na forma de estados **C**
- Força pontual, no eixo X, no baricentro do disco d1 $F_{X^{d1}}$
- Força pontual, no eixo Y, no baricentro do disco d1 $F_{Y^{d1}}$
- Força pontual, no eixo X, no baricentro do disco d2 $F_{X^{d2}}$
- Força pontual, no eixo Y, no baricentro do disco d2 $F_{Y^{d2}}$
- Força pontual, no eixo X, no baricentro do disco d3 $F_{X^{d3}}$
- Força pontual, no eixo Y, no baricentro do disco d3 $F_{Y^{d3}}$
- Força pontual, no eixo X, no baricentro do disco d4 $F_{X^{d4}}$
- Força pontual, no eixo Y, no baricentro do disco d4 $F_{Y^{d4}}$
- Deslocamento, no eixo X, do baricentro do disco d1 X^{d1}
- Deslocamento, no eixo Y, do baricentro do disco d1 Y^{d1}
- Deslocamento, no eixo X, do baricentro do disco d4 X^{d4}

Y^{d4}	- Deslocamento, no eixo Y , do baricentro do disco d4
X^{ast1}	- Deslocamento, no eixo X , do baricentro do anel as1
Y^{ast1}	- Deslocamento, no eixo Y , do baricentro do anel as1
X^{ast2}	- Deslocamento, no eixo X , do baricentro do anel as2
Y^{ast2}	- Deslocamento, no eixo Y , do baricentro do anel as2
F_g	- Força girante
s	- Variável de Laplace
L	- Transformada de Laplace
i_{dc}	- Corrente contínua aplicada nos atuadores magnéticos
K_{mx}	- Constante do atuador magnético, proporcional ao deslocamento, da lei de força linearizada
K_m	- Constante do atuador magnético, proporcional à corrente, da lei de força linearizada
G^a	- Ganho do amplificador de potência
G_s	- Ganho dos sensores de deslocamento
$F(s)$	- Função de transferência do filtro do amortecedor ativo
A_e	- Matriz dinâmica do amortecedor ativo na forma de estados
B_e	- Matriz de entrada do amortecedor ativo na forma de estados
C_e	- Matriz de saída do amortecedor ativo na forma de estados

- d - densidade ou massa específica
- d_e - Diâmetro externo de um elemento de rotor
- d_i - Diâmetro interno de um elemento de rotor

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Rotores flexíveis são encontrados em um grande número de máquinas. Em especial, podem ser citadas turbomáquinas e ultracentrifugas. Estes rotores operam em altas rotações e, muitas vezes, têm um grande comprimento. Isto os torna supercríticos, ou seja, para atingirem a velocidade nominal, têm de passar por uma ou mais velocidades críticas, notadamente as correspondentes aos modos de flexão. Nestas velocidades, dependendo das características dinâmicas do rotor, as vibrações laterais, excitadas pelo desbalanceamento, podem se tornar excessivas. Para minimizar tal problema, duas providências básicas devem ser tomadas:

- executar o balanceamento flexível do rotor, para tantos modos de vibrar quantos tiverem que ser ultrapassados.

- dimensionar os mancais de maneira que forneçam amortecimento suficiente aos mesmos modos.

A literatura é rica no estudo de procedimentos de passagem por velocidades críticas em rotores com mancais passivos. Tessarzik et. al (1976) propõe um método de balanceamento para rotores que passam por múltiplas velocidades críticas. Schweitzer; Müller (1970), estudam a otimização dinâmico-estrutural de rotor e mancais, para a minimização da amplitude de resposta na ressonância. Muitos outros trabalhos seguem as mesmas linhas.

Mais recentemente, com o advento de mancais ativos, especialmente os mancais magnéticos (Alves et. al, 1996), trabalhos que tentam encontrar a lei de atuação de tais mancais para minimizar a vibração na passagem por críticas têm sido publicados. Dentre estes, alguns, como o trabalho de Zampieri; Schiehlen (1979), propõem um controle dos mancais com realimentação de estados (deslocamentos e velocidades). Outros, como o de Knospe et. al (1992), propõem uma atuação dos mancais em malha aberta (sem realimentação de estados). O presente trabalho irá seguir esta última proposta, ou seja, tentará encontrar a lei de atuação de mancais

magnéticos, em malha aberta, para minimizar as vibrações nas passagens por velocidades críticas.

1.1 Justificativa e importância

Os controles, em malha fechada dos mancais ativos de rotores flexíveis supercríticos, são projetados para proverem, aos mesmos, amortecimento suficiente para a passagem por todas as velocidades críticas. Além disso, devem garantir a estabilidade do sistema dentro de toda a faixa de operação do mesmo (Alves et. al, 1996). O requisito de garantia de estabilidade faz com que nem sempre se tenha atuação ótima em cima de todas as críticas.

Estando o rotor balanceado, é de se esperar que, durante a aceleração do mesmo, não haja problemas nas passagens pelas críticas. Porém, durante o processo ao qual o rotor estará submetido, mudanças no balanceamento do mesmo podem ocorrer, provocadas por rupturas, gradientes térmicos, deposição de materiais de processo e outros. Caso isso ocorra, o rotor terá problemas na passagem pelas críticas durante a frenagem.

Este trabalho pretende estudar a viabilidade e, se possível, desenvolver um sistema em malha aberta que auxilie a passagem por críticas em rotores que possuem mancais ativos que, por requisitos de projeto, não têm todos os modos correspondentes às velocidades críticas bem amortecidos ou foram desbalanceados durante sua operação.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem os seguintes objetivos:

- Modelar um rotor flexível contínuo, com parâmetros distribuídos de inércia e rigidez, para estudos de vibrações de flexão. São considerados os efeitos de massa, inércia de rotação transversal e efeito giroscópico. São consideradas deformações de viga (sem cisalhamento), de flexibilidades internas (simétricas) de acoplamentos e de mancais externos. O rotor deve ser simétrico (composto de elementos cilíndricos) e não possuir amortecimento interno. Os mancais podem ter rigidezes assimétricas mas

não têm amortecimento. Não são consideradas vibrações de força longitudinal, bem como, possíveis acoplamentos entre esses tipos de vibração.

- Simular a resposta do modelo de rotor, submetido a forças de desbalanceamento e forças não lineares de atuadores magnéticos.

- Obter as forças dos atuadores magnéticos que minimizem a vibração na

passagem por velocidades críticas, sob diferentes configurações de desbalanceamento.

- Projetar e fabricar uma bancada de testes para a realização de ensaios que validem o modelo e simulações.

1.3 Descrição do sistema

O sistema a ser modelado, simulado, fabricado e testado pode ser visto no desenho de conjunto da bancada de testes da figura 1.1:

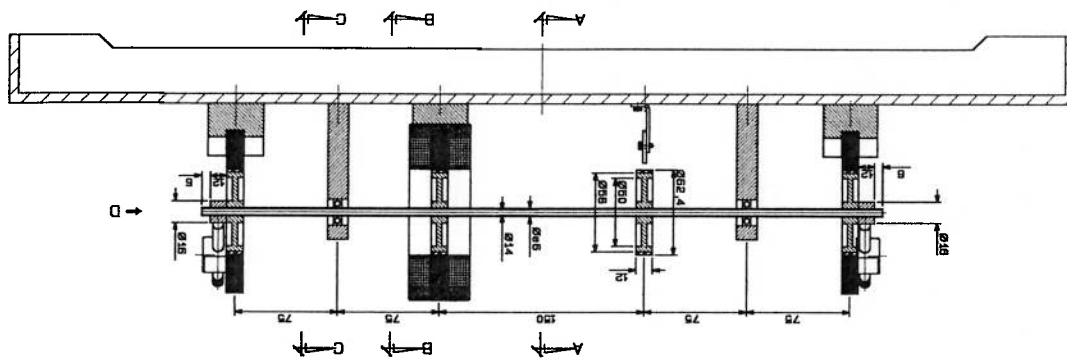


Figura 1.1: Desenho de conjunto da bancada de testes

O sistema é composto de um rotor flexível bi-apoiado em rolamentos autocompensadores cujos suportes são fixados em uma base. O rotor é constituído por um eixo e quatro discos. Nos discos das extremidades, situam-se os atuadores magnéticos que proporcionam atuação em dois eixos ortogonais (X e Y). O terceiro disco, da esquerda para a direita, é o rotor de um motor. O segundo disco é um disco igual aos anteriores.

Os atuadores e o motor têm estatores que são fixados na base.

Nos atuadores do atuador esquerdo são fixados dois sensores de deslocamento defasados espacialmente de 90°. Os sensores estão defasados dos atuadores de 45° (no plano XY) por razões construtivas (cabecira das bobinas). Estes sensores têm o deslocamento de um anel adjacente ao disco. Da mesma forma, há sensores adjacentes ao atuador direito.

Montado na base, sob o segundo disco, encontra-se um sensor ótico que lê uma marca feita neste disco, proporcionando a leitura de rotação e sincronismo, além de servir como referência de fase.

1.4 Contribuições

Este trabalho modela o rotor da figura 1.1 considerando-o como composto por elementos contínuos com parâmetros, de inércia e rigidez, distribuídos. Embora isso não fosse necessário, pois o rotor poderia ter sido modelado por métodos de parâmetros concentrados como, por exemplo, o método da matriz de transferência ou outros métodos de discretização como o método dos elementos finitos, acredita-se que esta modelagem seja uma contribuição, dada a escassez sobre essa abordagem, para rotores, na literatura.

A resposta de um sistema giroscópico contínuo através do teorema da expansão e análise modal, também pode ser considerada uma contribuição, pois não foram encontrados muitos trabalhos sobre o assunto, sobretudo com exemplos práticos.

Como se verá no capítulo 5, o método experimental de geração de uma força de atuação magnética rotativa síncrona com a rotação, pode ser considerada uma contribuição, pois os trabalhos sobre o assunto não descrevem os experimentos.

1.5 Sumário estruturado

Será feita, a seguir, uma breve descrição dos capítulos seguintes.

No capítulo 2, encontra-se uma revisão bibliográfica sobre os assuntos tratados neste trabalho.

No capítulo 3, apresenta-se a modelagem do rotor contínuo. A solução exata dos autovalores, frequências naturais e autofunções são obtidas. As relações de ortogonalidade das autofunções são demonstradas e, através das mesmas e do teorema da expansão, a discretização através da análise modal do sistema contínuo é conseguida na forma de estados.

No capítulo 4, as equações obtidas no capítulo 3 são utilizadas para simulações do modelo de rotor. A discretização modal é feita para os seis primeiros modos. Os diagramas de Campbell são plotados, bem como as autofunções. Algumas curvas de resposta em frequência são obtidas, com excitações em um eixo e com excitações rotativas. Respostas no tempo a determinadas configurações de desbalanço, juntamente com a atuação de forças não lineares dos atuadores magnéticos, são simuladas. Finalmente, através de uma rotina de otimização, a história de atuação ótima dos atuadores magnéticos, para minimizar a resposta ao desbalanço em duas velocidades críticas, é obtida.

No capítulo 5 é feita uma descrição da bancada que é utilizada nos experimentos mostrando, brevemente, seus componentes. Posteriormente, os ensaios realizados são descritos.

No capítulo 6 os resultados experimentais são apresentados e comparados com os resultados teóricos obtidos das simulações.

No capítulo 7 as principais conclusões deste trabalho são apresentadas.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, as principais referências bibliográficas consultadas neste trabalho são apresentadas, descrevendo-se brevemente o conteúdo de cada uma delas.

Como referência da teoria de dinâmica e vibrações mecânicas, utilizou-se Meirovitch (1977). Neste livro são estudados fenômenos de vibração em sistemas discretos com parâmetros concentrados (descritos com sistemas de equações diferenciais ordinárias) como: vibrações livres, o problema dos autovalores, a ortogonalidade dos autovalores, resposta a excitações, o teorema da expansão, que afirma que o espaço de configuração pode ser expandido por uma combinação linear dos autovalores, o que permite a análise modal, que é a resposta do sistema descrita como superposição dos autovalores e coordenadas generalizadas modais temporais. Depois são estudados sistemas contínuos com parâmetros distribuídos (descritos com sistemas de equações diferenciais parciais). Primeiramente são investigadas, como é o caso deste trabalho, soluções exatas para as equações, pelo método da separação de variáveis. Obtêm-se os autovalores e autofunções, para o problema de condições de contorno, para sistemas com geometria simples. Para esses sistemas, também são investigadas a ortogonalidade das autofunções, o teorema da expansão e a resposta através da discretização por análise modal, que é o procedimento que este trabalho adota. Dada a complexidade de soluções exatas para sistemas de geometria complexa, o livro aborda métodos aproximados como: Rayleigh-Ritz, Galerkin, modos assumidos. Os dois primeiros métodos, com variações, adotam soluções aproximadas para as autofunções de alguns modos, que devem ser funções diferenciáveis até a ordem do problema dos autovalores e obedecerem as condições de contorno. No último método, a discretização do sistema ocorre antes da obtenção das equações de movimento, supondo a resposta do mesmo como uma série finita do produto de funções espaciais (funções admissíveis) por funções temporais. Esses métodos têm como limitação a dificuldade de obtenção de funções admissíveis para sistemas com geometria complicada pois as mesmas têm que ser definidas no domínio inteiro da estrutura. O livro aborda, então, o método que é extremamente

utilizado atualmente que é o método dos elementos finitos. Neste método, o sistema é discretizado definindo funções admissíveis sobre pequenos sub-domínios chamados elementos. Os deslocamentos do sistema todo são obtidos através de funções de interpolação dos deslocamentos dos chamados nós que se situam nas fronteiras dos elementos. Aplicando-se as equações de movimento (Lagrange), resolve-se o sistema discretizado. Neste livro não há exemplos de modelagem de rotores.

Lalanne et al (1984) apresenta abordagem semelhante, porém mais reduzida, à do livro acima. Acrescenta, no entanto, a modelagem, por elementos finitos, de rotores constituídos de eixos com deformações de viga e discos de inércia.

Lanczos (1986) é um clássico na aplicação de métodos variacionais em problemas mecânicos. Neste livro estão os conceitos da chamada mecânica analítica como: coordenadas generalizadas, espaço de configuração, sistemas holonômicos e não holonômicos, o princípio dos trabalhos virtuais, o princípio de D'Alembert, o de Hamilton e as equações de Lagrange. Neste livro foram encontradas as equações de Euler para as rotações de um corpo rígido.

Gasch; Pfitzner (1975) é uma referência básica no estudo de dinâmica de rotores. Os principais fenômenos relacionados às vibrações laterais destes são estudados através de um modelo simples conhecido como rotor de Laval. O mesmo é composto de um disco com inércia e um eixo flexível sem massa, modelado como uma simples mola com rigidez, apoiado em mancais. Os fenômenos estudados incluem o efeito giroscópico, precessões diretas e retrógradas, velocidades críticas excitadas por desbalanceamento, influência de assimetrias nos mancais e no próprio rotor, influência do amortecimento interno e outros.

Vance (1988), foi outro livro de dinâmica de rotores utilizado. No mesmo, também é estudado o rotor de Laval (conhecido como Jeffcott pelos americanos). Vibrações laterais e torsionais são estudadas pelo método da matriz de transferência (Myklestad-Prohl). Este é um método de parâmetros concentrados onde o rotor é dividido em estações. As mesmas podem ser do tipo disco, que incluem efeitos de inércia e giroscópicos, do tipo mancal, com forças concentradas de rigidez e amortecimento e do tipo eixo, modelados sem massa e com uma rigidez equivalente (viga no caso de vibrações laterais). Para cada estação, aplicando as equações

adequadas, encontra-se uma matriz que relaciona esforços e deslocamentos da saída com os da entrada. A matriz do sistema completo é o produto das matrizes de todas as estações. Considerando o movimento como sendo harmônico e aplicando condições de contorno, obtêm-se os autovalores (frequências naturais) e autovetores (modos de vibrar). Este livro aborda também, aspectos práticos da tecnologia de rotores, especialmente de turbo-máquinas, como, por exemplo, mancais, selos, balanceamento, instabilidades causadas por mancais hidrodinâmicos, medidas, diagnose de problemas e manutenção.

Em Schultz; Melsa (1967), encontram-se os conceitos de variáveis de estado, observabilidade e controlabilidade de sistemas lineares.

Dorf; Bishop (1995), apresenta os conceitos de controle clássico como a transformada de Laplace, funções de transferência, funções de resposta em frequência. inclui exemplos de cálculos utilizando o programa Matlab™.

Kirk (1970) é referência básica na teoria de controle ótimo. Além da teoria, há, também, uma abordagem prática, com a apresentação de algoritmos de otimização.

Butkov (1983) serviu como referência para problemas de contorno e operadores auto-adjuntos.

Alguns trabalhos apresentam análises com modelagem multi-corpos de rotores. Nessa análise, os rotores são modelados como corpos rígidos unidos por elementos de rigidez, amortecimento e vínculos sobre os quais derivam-se as equações analíticas, lineares ou não lineares, de movimento, através das equações de Newton (translação) e Euler (rotação) ou das equações de Lagrange. Obviamente, essas soluções analíticas só são possíveis para sistemas com geometria simples e com poucos graus de liberdade. Dentre trabalhos deste tipo, podem ser citados: Schiehlen; Weber (1977), Schweitzer; Müller (1970), Müller (1981). No primeiro, são feitos estudos de estabilidade em um rotor vertical pivotado e com uma suspensão composta de molas e amortecedores em sua parte inferior. Tal rotor, tem momentos de inércia diferentes nos três eixos principais. A estabilidade é investigada analiticamente através do teorema de Hurwitz e encontram-se as relações entre os momentos de inércia e os parâmetros da suspensão que proporcionam movimento estável. Um ponto interessante deste trabalho é a apresentação das equações de

Euler, para as rotações de um corpo rígido, num sistema de referência rotativo. No segundo trabalho, um rotor rígido vertical com suspensões elásticas, em cima e embaixo, compostas de massa, mola e amortecedor, é modelado. Depois, através de simulação numérica, é feita uma otimização paramétrica, do rotor e da suspensão, para três critérios: máxima estabilidade, mínima amplitude de resposta na ressonância e mínima amplitude de resposta em altas rotações. No terceiro trabalho, a estabilidade de rotores com amortecimento interno e com assimetrias internas e nos mancais é investigada. Num sistema com essas últimas características, as equações de movimento têm termos senoidais com frequência igual a duas vezes a rotação o que ocasiona instabilidades em algumas velocidades.

Rotores modelados por métodos discretos possuem a conhecida matriz giroscópica anti-simétrica. Isso causa uma complicação, em relação a sistemas não giroscópicos conservativos, onde as matrizes de massa e rigidez são simétricas, na hora de demonstrar as relações de ortogonalidade que permitem o teorema da expansão e a análise modal. Meirovitch (1975), propõe o método de se descrever um sistema giroscópico por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem ou no espaço de estados. O problema de autovalores para um sistema desse tipo possui n pares de autovalores complexos conjugados (imaginários puros) e n pares de autovalores complexos conjugados. As relações de ortogonalidade são demonstradas para esse sistema e o teorema da expansão passa a enunciar que o espaço de estado pode ser expandido por uma combinação linear das partes reais e imaginárias dos autovalores.

Métodos de modelagem como o da matriz de transferência e elementos finitos geram modelos numéricos de muitos graus de liberdade e, portanto, muito grandes. Tais modelos não são adequados para, por exemplo, serem utilizados no projeto de sistemas de controle. Kane; Torby (1991) apresentam um método de redução modal onde as matrizes do sistema na forma de estados são particionadas em graus de liberdade a serem dispensados e graus de liberdade a serem retidos. Calculando os autovalores à direita e os autovalores à esquerda do sistema completo e, também, particionando-os em graus de liberdade a serem dispensados e graus de liberdade a serem retidos, calculam-se matrizes de transformação que, juntamente

com as matrizes particionadas do sistema completo, levam a matrizes de um novo sistema que só contém os graus de liberdade retidos.

Para o desenvolvimento do modelo de rotor flexível contínuo, alguns trabalhos foram fundamentais. Pedersen (1972) modela um rotor contínuo, com parâmetros de inércia e rigidez distribuídos. O rotor é bi-apoiado em mancais com rigidez e amortecimento. O rotor é modelado como viga de Timoshenko que leva em conta os efeitos de cisalhamento e possui amortecimento interno. O modelo teórico é desenvolvido mas as soluções exatas não são obtidas nem se realiza uma análise modal. Alguns exemplos numéricos simples são calculados pelo método de Galerkin. Em D'Eleutério ; Hughes (1984), o sistema de equações diferenciais parciais de um sistema giroscópico contínuo, similarmente ao que foi feito por Meirovitch (1975) no caso discreto, é colocado na forma de um sistema temporal de primeira ordem. A diferença, como se verá no capítulo 3, reside no fato de, ao invés de matrizes numéricas (caso discreto), o sistema é descrito por matrizes com operadores diferenciais espaciais. Supondo a separação de variáveis, o problema de autovalores tem como solução pares de autovalores complexos conjugados (imaginários puros) correspondentes a autofunções também complexas conjugadas. As relações de ortogonalidades são demonstradas, o princípio da expansão aplicado e a resposta do sistema dada como superposição das partes reais e imaginárias das autofunções (análise modal). Parker; Sathe (1999) obtêm a solução exata para um disco montado em um eixo flexível, obtendo os autovalores, as autofunções e a resposta por meio de análise modal. Utiliza a solução exata para avaliar o método de Galerkin e conclui que, para rotações não muito altas, o método obtém bons resultados.

Alguns trabalhos de otimização, aplicados a rotores, com o objetivo de reduzir vibrações, realizam uma otimização paramétrica dinâmico-estrutural. Pode-se citar Steffen; Marcelin (1987) que modelam um rotor por elementos finitos e, através do método do lagrangiano aumentado (com uma função de penalidade exterior), calculam parâmetros como a distância de um disco até os mancais e a seção transversal do eixo, para maximizar a diferença entre a segunda e a terceira frequências naturais, à uma dada rotação. Diewald; Nordmann (1990) utilizam o método dos gradientes e o método Gauss-Newton para impor algumas características, como frequências naturais e amortecimento, ao rotor de uma bomba

hidráulica. Conclui que o método Gauss-Newton é melhor. Genta (2000), apresenta um código desenvolvido em Matlab™ que modela rotores por elementos finitos. No mesmo, pode-se utilizar elementos de discos, eixos, mancais hidrodinâmicos e mancais magnéticos. Utiliza o pacote de otimização do Matlab para otimizações. Silveira (2001) modela um rotor, com eixos de material composto, por elementos finitos e, através do método Quasi-Newton, otimiza os ângulos de laminação do eixo para minimizar vibrações síncronas e assíncronas e obter posições desejadas de frequências naturais.

Outros trabalhos de otimização para minimização de vibração em rotores, utilizam forças ativas externas. Zampieri; Schielen (1979) modelam um rotor de Laval que tem, nas extremidades, além de molas e amortecedores, atuadores. Projetam um controle ótimo (com realimentação de estados) com o critério de minimização do funcional quadrático. Introduzem, então, um modelo de excitação senoidal e cossenoidal (desbalanço) na forma de mais duas variáveis de estado. Através de um observador de ordem completa (inclusive da excitação), projetam um controle com compensação da excitação. Comparando com os resultados obtidos com o controle ótimo, mostram que somente através da compensação da excitação se consegue um comportamento livre de vibração para uma determinada frequência. Lépre; Araujo (1993) modelam um rotor com três discos pelo método da matriz de transferência. Aplicando forças magnéticas nos discos, conseguem reduzir a vibração do rotor, mesmo para frequências de atuação não síncronas com a rotação. Concluem que a melhor redução ocorre quando os atuadores estão posicionados no mesmo disco onde está aplicado o desbalanço. Chen; Darlow (1988) montaram um rotor pivotado com um mancal magnético ativo na extremidade. Além do controle de posição do mancal, acrescentam uma força rotativa para minimizar a vibração transmitida aos estatores do mesmo. Kanemitsu et. al (1990), Knospe et. al (1992) e Shi; Zhou (2001) apresentam uma técnica que consiste em aplicar no rotor, através de atuadores magnéticos, uma força rotativa síncrona com a rotação que tente anular a resposta ao desbalanço do mesmo. Tal técnica é chamada em Knospe et. al (1992) de controle em malha aberta devido ao fato de não haver realimentação de estado. O sincronismo é obtido com um sensor de medida de rotação e referência de fase (*key-*

phasor). Variando-se a amplitude e a fase da força rotativa e através de cálculos de coeficientes de influência, determina-se a força de minimização da vibração. Goodmann (1964) e Tessarzik et. al (1976) mostram o procedimento de balanceamento de rotores flexíveis, que passam por múltiplas velocidades críticas, através do método dos coeficientes de influência o qual será utilizado neste trabalho nos ensaios de balanceamento. Alves et. al (1996) mostra os principais componentes de atuadores magnéticos ativos os quais serão utilizados nas simulações e experimentos deste trabalho.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DO ROTOR

Neste capítulo o modelo de rotor flexível será obtido. O objetivo é o estudo das vibrações transversais de flexão. Para tanto, o rotor será constituído de elementos flexíveis contínuos cilíndricos para os quais se aplica a teoria de viga de Bernoulli-Euler, ou seja, são consideradas as deformações ocasionadas por tensões normais causadas por momentos fletores e desconsideradas aquelas causadas por tensões de cisalhamento oriundas de forças cortantes. A figura 3.1 mostra um elemento do rotor num sistema de referência inercial.

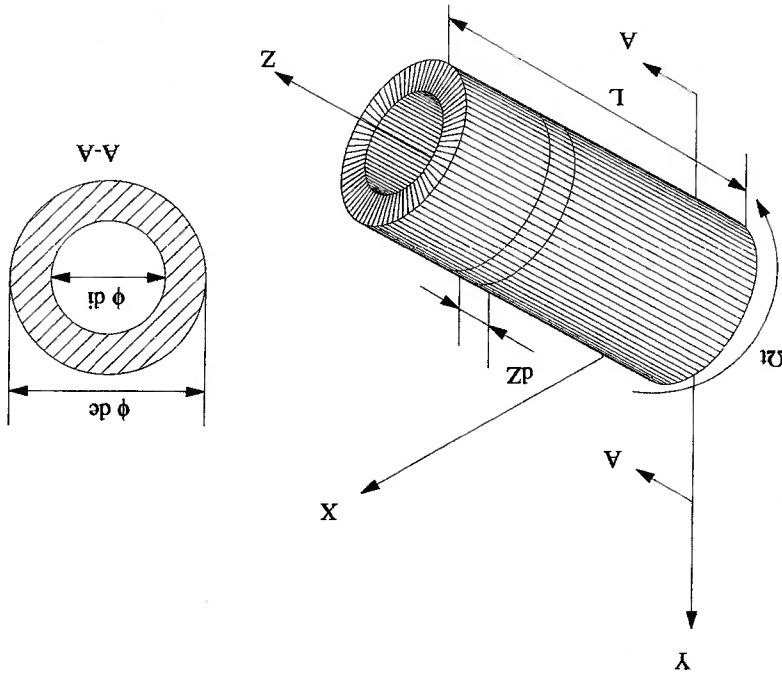


Figura 3.1: Elemento de rotor.

L é o comprimento do elemento, de e di os diâmetros, externo e interno respectivamente, de sua seção transversal e Ω , a rotação do rotor considerada constante

Os elementos poderão ter diâmetros de seção diferentes para efeito dos cálculos de dados de inércia e rigidez. Por exemplo, se houver um volante montado sobre um eixo, pode-se considerar o diâmetro interno do eixo e o externo do volante para os cálculos de inércia (Apêndice A) e apenas os diâmetros, interno e externo, do eixo para os cálculos de rigidez. Isto é útil considerando-se que, neste caso, a seção resistente é somente a do eixo embora o mesmo compareça, junto com o volante, para compor os valores de inércia.

Os elementos foram chamados cilíndricos e contínuos porque, ao longo de todos seus comprimentos, devem ter as seções, de inércia e rigidez, constantes. Para elementos de rotor com geometria mais complexa como discos cônicos, rotores de turbinas com pás, anéis superpostos de materiais diferentes e outros, diâmetros equivalentes constantes devem ser calculados tanto para o cálculo de propriedades de inércia como para as de rigidez. Assim também deve-se proceder em relação às propriedades de materiais (massa específica e módulo de elasticidade) diferentes para o mesmo elemento.

Um procedimento de modelagem semelhante é encontrado em Pedersen (1972).

3.1 Equações de movimento

Para que as equações de movimento de um elemento de rotor sejam obtidas, considere um corte do mesmo de comprimento infinitesimal dZ como na figura 3.1. Os deslocamentos lineares e angulares podem ser vistos na figura 3.2.

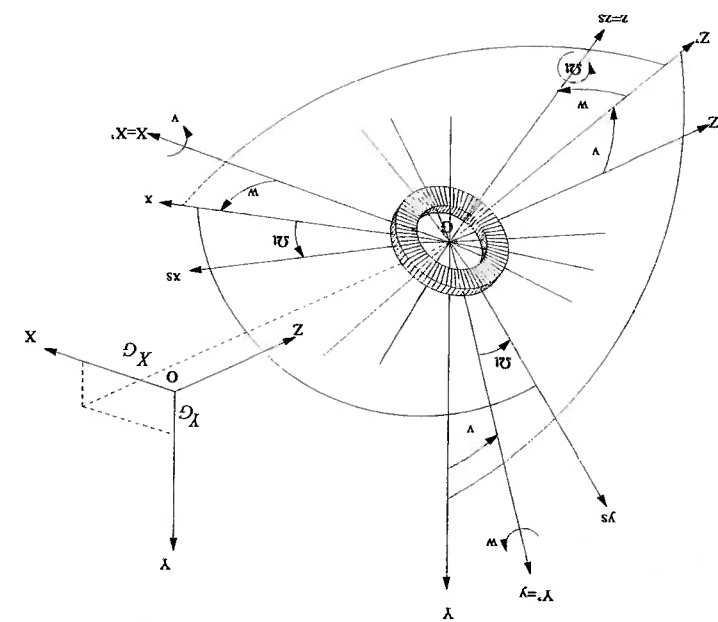


Figura 3.2: Deslocamentos de um corte de um elemento de rotor.

Para se chegar à posição final genérica do corte de comprimento dz , primeiramente desloca-se o baricentro do mesmo (G) de X_G e Y_G no sistema de coordenadas $OXYZ$ que é um referencial inercial (I^n). Após isto, executa-se uma sequência de deslocamentos angulares como abaixo:

- v em torno do eixo X chegando-se ao sistema $GX'Y'Z'$.
- w em torno do eixo Y' chegando-se ao sistema $Gxyz$ aqui chamado de relativo (R).
- Ωt , onde t é tempo, em torno do eixo z chegando-se, finalmente, ao sistema $Gxsysz$ solidário ao elemento (S).

De acordo com a figura 3.2, definem-se as seguintes matrizes de transformação de coordenadas:

$$T_{I^n \leftarrow R} = \begin{bmatrix} \cos(w) & \text{sen}(v)\text{sen}(w) & -\cos(v)\text{sen}(w) \\ 0 & \cos(v) & \text{sen}(v) \\ \text{sen}(w) & -\text{sen}(v)\cos(w) & \cos(v)\cos(w) \end{bmatrix}$$

matriz de transformação de coordenadas de I^n para R .

$$T_{R \rightarrow I_n} = \begin{bmatrix} \cos(w) & 0 & \cos(v)\text{sen}(w) & -\cos(v)\text{sen}(w) \\ \text{sen}(v)\text{sen}(w) & \cos(v) & \cos(v)\text{cos}(w) & \cos(v)\text{cos}(w) \\ \text{sen}(w) & 0 & \cos(v)\text{cos}(w) & \cos(v)\text{cos}(w) \\ \cos(w) & 0 & -\text{sen}(v)\text{cos}(w) & -\text{sen}(v)\text{cos}(w) \end{bmatrix}, \text{ de } R \text{ para } I_n.$$

$$T_{R \rightarrow S} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \text{sen}(\Omega t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(\Omega t) & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } R \text{ para } S.$$

$$T_{S \rightarrow R} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\text{sen}(\Omega t) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(\Omega t) & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } S \text{ para } R.$$

Uma vez que somente as vibrações flexionais transversais nos eixos X e Y são de interesse deste trabalho e que os ângulos v e w são linearizáveis, as matrizes $T_{I_n \rightarrow R}$

e $T_{R \rightarrow I_n}$ ficam reduzidas a:

$$T_{I_n \rightarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w \\ 0 & 1 & v \\ w & -v & 1 \end{bmatrix}, T_{R \rightarrow I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w \\ 0 & 1 & -v \\ -w & v & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.1 Esforços de Inércia

Assumindo que o corte de elemento da figura 3.2 tem massa por unidade de comprimento m constante e aplicando a segunda lei de Newton obtêm-se:

$$\sum F_x = m dZ \ddot{X}_G \tag{3.1}$$

$$\sum F_y = m dZ \ddot{Y}_G \tag{3.2}$$

onde $\sum F_x$ é a resultante de forças na direção X e $\sum F_y$ na direção Y .

Nota: Ponto (\cdot) representa derivada temporal $(\frac{\partial}{\partial t})$.

Observando-se que o rotor é cilíndrico (simétrico) e perfeitamente balanceado, o sistema de coordenadas S constitui-se de eixos principais de inércia.

Chamando $j_{Gxs} = j_{Gys} = j_l$ os momentos de inércia por unidade de comprimento do corte de elemento em relação aos eixos x_s e y_s respectivamente, aqui chamados de momento transversal de inércia de massa da seção transversal e $j_{Gzs} = j_p$ o momento de inércia por unidade de comprimento em relação ao eixo z_s , aqui chamado de momento polar de inércia de massa da seção transversal (vide cálculos no apêndice A), as equações de Euler (Lanczos, 1986) neste sistema são escritas como:

$$\sum M_{Gxs} = (j_l \omega_{xs} + (j_p - j_l) \omega_{ys} \omega_{zs}) dZ \quad (3.3)$$

$$\sum M_{Gys} = (j_l \omega_{ys} + (j_l - j_p) \omega_{xs} \omega_{zs}) dZ \quad (3.4)$$

$$\sum M_{Gzs} = 0.$$

onde $\sum M_{Gxs}$, $\sum M_{Gys}$, ω_{xs} , ω_{ys} , ω_{zs} são a somatória de momentos na direção x_s , a somatória de momentos na direção y_s e as velocidades angulares nas direções x_s , y_s e z_s , respectivamente.

As velocidades angulares são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \omega_{xs} \\ \omega_{ys} \\ \omega_{zs} \end{Bmatrix} = T_{R \rightarrow S} \cdot T_{I_n \rightarrow R} \cdot \begin{Bmatrix} \psi \\ \omega \\ 0 \end{Bmatrix} + T_{R \rightarrow S} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Como são procuradas as equações no referencial inercial, deve-se levar em conta a transformação de volta:

$$\begin{Bmatrix} \sum M_{GX} \\ \sum M_{GY} \\ 0 \end{Bmatrix} = T_{R \rightarrow I_n} \cdot T_{S \rightarrow R} \cdot \begin{Bmatrix} \sum M_{Gxs} \\ \sum M_{Gys} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Substituindo as equações (3.5) em (3.3) e (3.4) e pré-multiplicando ambos os lados do sistema de equações resultante pela matriz de transformação do sistema (3.6), obtêm-se:

3.1.2 Esforços de rigidez

Os deslocamentos lineares e angulares (a menos da rotação Ω) além de funções temporais, serão tratados a partir daqui como funções espaciais da posição longitudinal Z do baricentro de cada corte de elemento, ou seja:

$$X_G = X(Z, t), Y_G = Y(Z, t), v = v(Z, t), w = w(Z, t) \tag{3.8}$$

Os momentos fletores são esforços internos e, portanto, são definidos no referencial solidário S (Lalanne; Berthier, 1984). De acordo com a teoria de viga de Bernoulli-Euler, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} v^s(z^s, t) &= -\frac{\partial y^s(z^s, t)}{\partial z^s}, w^s(z) = \frac{\partial x^s(z^s, t)}{\partial z^s} \\ M^{fvs} &= EI \frac{\partial v^s(z^s, t)}{\partial z^s} = -EI \frac{\partial^2 y^s(z^s, t)}{\partial z^s{}^2} \\ M^{fxs} &= -EI \frac{\partial w^s(z^s, t)}{\partial z^s} = -EI \frac{\partial^2 x^s(z^s, t)}{\partial z^s{}^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde F, I, M^{fvs}, M^{fxs} são o módulo de elasticidade, o momento de inércia de área da seção transversal (iguais em x^s e y^s e, para o cálculo de I , vide apêndice A), o momento fletor na direção x^s e o momento fletor na direção y^s , respectivamente.

Lembrando que:

$$\begin{Bmatrix} \Omega \\ w^s \\ v^s \end{Bmatrix} = T_{R \leftarrow S} \cdot T_{I_n \leftarrow R} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ w \\ v \end{Bmatrix} + T_{R \leftarrow S} \cdot \begin{Bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

e,

$$(3.11) \quad \begin{Bmatrix} M_{fx} \\ M_{fy} \\ 0 \end{Bmatrix} = T_{R \leftarrow I_n} \cdot T_{S \leftarrow R} \cdot \begin{Bmatrix} M_{fxs} \\ M_{fys} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo as equações (3.10) nas equações de momentos fletores (3.9) e pré-multiplicando ambos os lados do sistema de equações resultante pela matriz de transformação do sistema (3.11), de forma que as equações sejam obtidas no referencial inercial, obtêm-se:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} M_{fx} &= EI \frac{\partial v}{\partial Z} = -EI \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial Z^2} \\ M_{fy} &= -EI \frac{\partial w}{\partial Z} = -EI \frac{\partial^2 X(Z,t)}{\partial Z^2} \end{aligned}$$

Além disto,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} v(Z,t) &= -\frac{\partial Z}{\partial Y(Z,t)} \\ w(Z,t) &= \frac{\partial Z}{\partial X(Z,t)} \end{aligned}$$

É interessante notar que não há dependência temporal nas equações (3.12) devido ao fato de o rotor ser simétrico (seção circular) e isotrópico. Em caso de anisotropia o equacionamento acima deve ser feito no referencial solidário S (Müller, 1981).

3.1.3 Composição dos esforços

Para que, finalmente, as equações de movimento sejam obtidas, considere uma projeção do corte de elemento de rotor no plano OYZ como na figura 3.3.

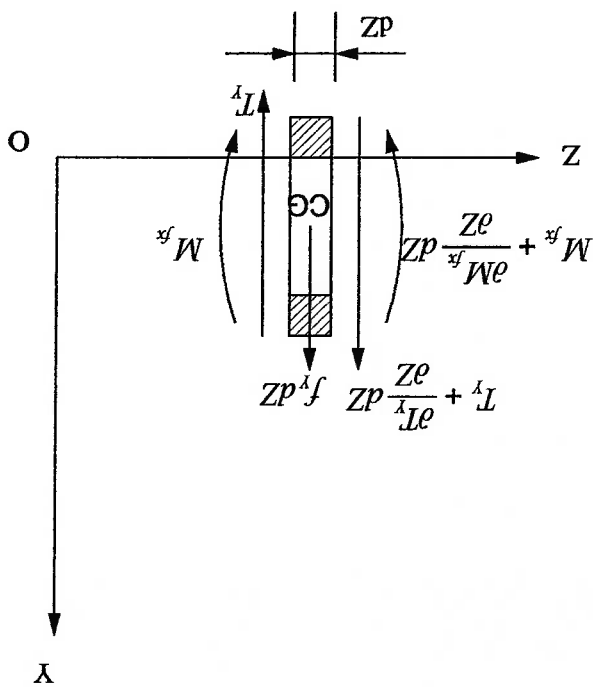


Figura 3.3: Composição dos esforços

T_y é a força cortante e f_y uma força externa por unidade de comprimento na direção Y .

Fazendo a somatória de forças obtem-se:

$$\sum F_y = \left(\frac{\partial T_y}{\partial Z} + f_y \right) dz \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.2), tem-se:

$$\frac{\partial T_y}{\partial Z} + f_y = m \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

Fazendo a somatória de momentos e desprezando termos de segunda ordem

obtem-se:

$$(3.16) \quad \sum M_{GX} = \left(\frac{\partial M_{FX}}{\partial Z} - T_Y \right) dz$$

Substituindo (3.16) em (3.7), tem-se:

$$(3.17) \quad T_Y = -j_l \frac{\partial^2 v(Z,t)}{\partial t^2} - j_p \Omega \frac{\partial w(Z,t)}{\partial t} + \frac{\partial M_{FX}}{\partial Z}$$

Substituindo (3.17) em (3.15), tem-se:

$$(3.18) \quad \frac{\partial^2 M_{FX}}{\partial Z^2} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(-j_l \frac{\partial^2 v(Z,t)}{\partial t^2} - j_p \Omega \frac{\partial w(Z,t)}{\partial t} \right) + f_Y = m \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial Z^2}$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.18) e lembrando que EI, j_l, j_p, m, Ω são

constantes, obtêm-se a equação final:

$$(3.19) \quad m \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial Z^2} - j_l \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial Y(Z,t)}{\partial Z} \right) + j_p \Omega \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial Y(Z,t)}{\partial t} \right) + EI \frac{\partial^4 Y(Z,t)}{\partial Z^4} = f_Y$$

Procedendo de maneira análoga no plano OXZ obtêm-se:

$$(3.20) \quad m \frac{\partial^2 X(Z,t)}{\partial Z^2} - j_l \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial Z} \right) - j_p \Omega \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial t} \right) + EI \frac{\partial^4 X(Z,t)}{\partial Z^4} = f_X$$

3.2 Soluções síncronas

Fazendo os esforços externos f_X e f_Y nulos (equações homogêneas) em

(3.19) e (3.20), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$(3.21) \quad m \frac{\partial^2 X(Z,t)}{\partial Z^2} - j_l \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial Z} \right) - j_p \Omega \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial t} \right) + EI \frac{\partial^4 X(Z,t)}{\partial Z^4} = 0$$

Para efeito de cálculo das condições de contorno, de (3.12), (3.13) e (3.17) obtêm-se:

$$m \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial t^2} - j_1 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial Y(Z,t)}{\partial t^2} \right) + j_1 \Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial Z} \right) + EI \frac{\partial^4 Y(Z,t)}{\partial Z^4} = 0 \quad (3.22)$$

$$M_y = -EI \frac{\partial^2 X(Z,t)}{\partial Z^2} \quad (3.23)$$

$$T_y = j_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial Y(Z,t)}{\partial Z} \right) - j_1 \Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial Z} \right) - EI \frac{\partial^3 Y(Z,t)}{\partial Z^3} \quad (3.24)$$

Similarmente para X:

$$M_x = -EI \frac{\partial^2 Y(Z,t)}{\partial Z^2} \quad (3.25)$$

$$T_x = j_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial X(Z,t)}{\partial Z} \right) + j_1 \Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y(Z,t)}{\partial Z} \right) - EI \frac{\partial^3 X(Z,t)}{\partial Z^3} \quad (3.26)$$

Supondo que as soluções das equações (3.21) e (3.22) possam ser expressas pelo produto de funções espaciais por funções temporais oscilantes de mesma frequência ω (soluções síncronas), adota-se:

$$\begin{aligned} X(Z,t) &= x_1(Z) \cos(\omega t) + x_2(Z) \sin(\omega t) \\ Y(Z,t) &= y_1(Z) \cos(\omega t) + y_2(Z) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.21) e (3.22) e igualando termos em $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$, têm-se:

$$m \omega^2 x_1 - j_1 \omega^2 x_1'' + j_1 \Omega \omega y_2'' - EI k_1'' = 0 \quad (3.28)$$

$$m \omega^2 x_2 - j_1 \omega^2 x_2'' - j_1 \Omega \omega y_1'' - EI k_2'' = 0 \quad (3.29)$$

$$m\omega^2 y_1 - j^i \omega^2 y_1'' - j^p \Omega \omega x_2'' - E I y_1''' = 0 \quad (3.30)$$

$$m\omega^2 y_2 - j^i \omega^2 y_2'' + j^p \Omega \omega x_1'' - E I y_2''' = 0 \quad (3.31)$$

onde linha (') denota $\frac{\partial}{\partial Z}$.

Da mesma forma, substituindo (3.27) em (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26):

$$T_{x_1} = -j^i \omega^2 x_1' + j^p \Omega \omega y_2' - E I x_1'' \quad (3.32)$$

$$T_{x_2} = -j^i \omega^2 x_2' - j^p \Omega \omega y_1' - E I x_2'' \quad (3.33)$$

$$T_{y_1} = -j^i \omega^2 y_1' - j^p \Omega \omega x_2' - E I y_1'' \quad (3.34)$$

$$T_{y_2} = -j^i \omega^2 y_2' + j^p \Omega \omega x_1' - E I y_2'' \quad (3.35)$$

$$M_{x_1} = -E I y_1'' \quad (3.36)$$

$$M_{x_2} = -E I y_2'' \quad (3.37)$$

$$M_{y_1} = -E I x_1'' \quad (3.38)$$

$$M_{y_2} = -E I x_2'' \quad (3.39)$$

Considerando o sistema com as equações (3.28) e (3.31), supõe-se que o mesmo tenha soluções que são funções de forma espaciais chamadas autofunções do tipo:

$$x_1 = c_1 \cos(\beta Z) + c_2 \operatorname{sen}(\beta Z) + c_3 \operatorname{cosh}(\beta Z) + c_4 \operatorname{senh}(\beta Z) \quad (3.40)$$

$$y_2 = c_5 \cos(\beta Z) + c_6 \operatorname{sen}(\beta Z) + c_7 \operatorname{cosh}(\beta Z) + c_8 \operatorname{senh}(\beta Z) \quad (3.41)$$

onde β é chamado de autovalor e $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ são constantes a serem determinadas.

Substituindo (3.40) e (3.41) em (3.28) e (3.29) e igualando os termos das funções trigonométricas e hiperbólicas obtêm-se os seguintes sistemas de equações:

$$\begin{bmatrix} m\omega^2 + j^i \omega^2 \beta^2 - E I \beta^4 & -j^p \Omega \omega \beta^2 \\ -j^p \Omega \omega \beta^2 & m\omega^2 + j^i \omega^2 \beta^2 - E I \beta^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Obtêm-se um sistema idêntico ao (3.42) para as constantes c_2 e c_6 .

$$(3.43) \quad \begin{bmatrix} m\omega^2 - j'\omega^2\beta^2 - EIB^4 & jps2\omega\beta^2 \\ jps2\omega\beta^2 & m\omega^2 - j'\omega^2\beta^2 - EIB^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c7 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se um sistema idêntico ao (3.43) para as constantes $c4$ e $c8$.

Os valores válidos (reais) de β para os quais o sistema (3.42) admite solução não trivial são aqueles que tornam nulo seu determinante característico. Estes valores

são:

$$(3.44) \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{2EI}{j'\omega^2 - j^p\Omega\omega + \sqrt{4EIm\omega^2 + (j^p\Omega\omega - j'\omega^2)^2}}}$$

$$(3.45) \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2EI}{j'\omega^2 + j^p\Omega\omega + \sqrt{4EIm\omega^2 + (-j^p\Omega\omega - j'\omega^2)^2}}}$$

Substituindo (3.44) em qualquer das equações do sistema (3.42) chega-se a:

$$(3.46) \quad c1=c5; c2=c6$$

Substituindo (3.45) em qualquer das equações do sistema (3.42) chega-se a:

$$(3.47) \quad c1=-c5; c2=-c6$$

Da mesma forma, procurando os valores válidos de β para o sistema (3.43)

acha-se:

$$(3.48) \quad \beta_3 = \sqrt{\frac{2EI}{-j'\omega^2 + j^p\Omega\omega + \sqrt{4EIm\omega^2 + (-j^p\Omega\omega + j'\omega^2)^2}}}$$

$$(3.49) \quad \beta_4 = \sqrt{\frac{2EI}{-j'\omega^2 - j^p\Omega\omega + \sqrt{4EIm\omega^2 + (j^p\Omega\omega + j'\omega^2)^2}}}$$

Substituindo (3.48) em qualquer das equações do sistema (3.43) chega-se a:

$$(3.50) \quad c_3 = c_7; \quad c_4 = c_8$$

Substituindo (3.49) em qualquer das equações do sistema (3.43) chega-se a:

$$(3.51) \quad c_3 = -c_7; \quad c_4 = -c_8$$

Notar que os autovalores β_1 e β_3 proporcionam autofunções $y_2 = x_1$. De

(3.27) nota-se que $x_1(Z)$ é a parte da solução $X(Z, t)$ multiplicada por $\cos(\omega t)$ e $y_2(Z)$ a parte de $Y(Z, t)$ multiplicada por $\sin(\omega t)$. Assim, essa é uma autofunção girante com frequência, ou melhor, rotação angular, ω no mesmo sentido da rotação Ω e conhecida como precessão direta.

Notar, ainda, que β_2 e β_4 ocasionam autofunções $y_2 = -x_1$. Através do mesmo raciocínio, conclui-se que essa é uma autofunção girante de rotação ω no sentido oposto ao da rotação Ω e é conhecida como precessão retrógrada.

Como, para uma dada rotação Ω , as duas soluções, direta e retrógrada, estarão presentes, as soluções (3.40) e (3.41) devem ser reescritas (Parker; Sathé, 1999) como:

$$(3.52) \quad x_1 = c_1 \cos(\beta_1 Z) + c_2 \sin(\beta_1 Z) + c_3 \cosh(\beta_3 Z) + c_4 \sinh(\beta_3 Z) + c_5 \cos(\beta_2 Z) + c_6 \sin(\beta_2 Z) + c_7 \cosh(\beta_4 Z) + c_8 \sinh(\beta_4 Z)$$

$$y_2 = c_1 \cos(\beta_1 Z) + c_2 \sin(\beta_1 Z) + c_3 \cosh(\beta_3 Z) + c_4 \sinh(\beta_3 Z) - c_5 \cos(\beta_2 Z) - c_6 \sin(\beta_2 Z) - c_7 \cosh(\beta_4 Z) - c_8 \sinh(\beta_4 Z)$$

(3.53)

Com um desenvolvimento análogo para o sistema com as equações (3.29) e

(3.30), chega-se a:

3.3 Condições de contorno

Para que as autofunções x_1 e y_2 sejam obtidas, deve-se aplicar condições de

contorno ao sistema de equações (3.52) e (3.53) de modo que sejam determinadas as constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ e c_8 . O mesmo vale para as autofunções x_2 e y_1

do sistema de equações (3.54) e (3.55) e as respectivas constantes $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$ e c_{16} .

As autofunções assim obtidas, para cada frequência natural ω , constituem as soluções (3.27) para o sistema homogêneo constituído de (3.21) e (3.22).

As condições de contorno podem ser naturais (Meirovitch, 1977), que envolvem valores determinados para esforços sollicitantes (momentos fletores e forças cortantes) em pontos determinados do elemento de rotor, ou geométricas, que determinam condições ou compatibilidades de deslocamentos lineares ou angulares, para pontos do mesmo elemento. Essas condições de contorno dependem, normalmente, da vinculação do rotor.

3.3.1 Composição do rotor e vinculações

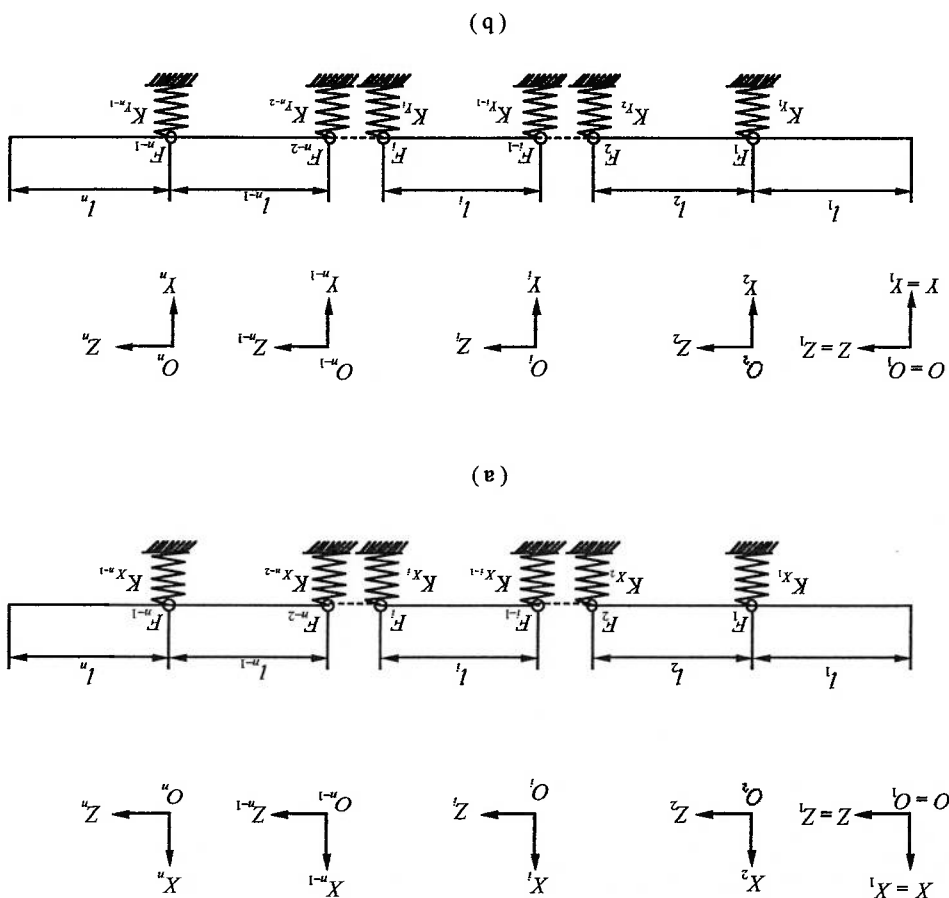
Até agora, foi visto o equacionamento e as soluções para um elemento flexível contínuo do rotor. Como o rotor poderá ser composto por muitos elementos, deve-se estabelecer as vinculações entre eles e deles com a carga (referencial inercial) de forma a se determinar as condições gerais de contorno.

A figura 3.4 (a) mostra a composição do modelo de rotor proposto no plano OXZ e 3.4 (b) no plano OYZ .

Como pode ser visto, o rotor é constituído de n elementos sendo que o i -ésimo elemento tem as propriedades l_i, m_i, j_i, f_i, EI_i constantes. O primeiro e o último elementos têm as extremidades livres. Nos pontos de ligação entre dois elementos, aqui chamados de nós, podem ser aplicadas molas lineares ligadas à carga de constante K_i e molas de flexão internas de flexibilidade F_i . As primeiras para simular rigidezes de possíveis mancais e as segundas para simular flexibilidades de acoplamentos flexíveis. Não são considerados amortecimentos, sejam eles externos, de mancais, ou internos, de acoplamentos. Há $n-1$ nós.

As condições de contorno para cada elemento serão aplicadas em sistemas locais de coordenadas $O_i X_i Y_i Z_i$, sendo que, no final, as autofunções de todo o rotor serão obtidas no sistema global $OXYZ$.

Figura 3.4: Composição do rotor



As forças nas molas lineares são dadas por:

$$F_{X_i} = -K_{X_i} X_i(l_i) = -K_{X_i} X_{i+1}(0) \quad (3.56)$$

$$F_{Y_i} = -K_{Y_i} Y_i(l_i) = -K_{Y_i} Y_{i+1}(0) \quad (3.57)$$

Os momentos nas molas de flexão são dados, de acordo com as figuras 3.5, (a) e (b), por:

$$M_{f_{X_{i+1}}}(l_i) = M_{f_{X_{i+1}}}(0) = \frac{1}{l_i} (v'_{i+1}(0) - v'_i(l_i)) \quad (3.58)$$

$$M_{f_{Y_{i+1}}}(l_i) = M_{f_{Y_{i+1}}}(0) = \frac{1}{l_i} (w'_{i+1}(0) - w'_i(l_i)) \quad (3.59)$$

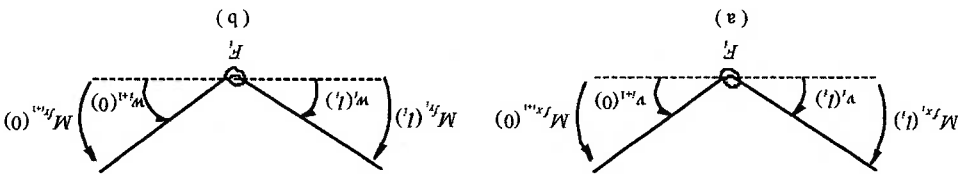


Figura 3.5: Molas de flexão.

Substituindo (3.13) em (3.58) e (3.59):

$$M_{f_{X_{i+1}}}(l_i) = M_{f_{X_{i+1}}}(0) = -\frac{1}{l_i} (X'_{i+1}(0) - X'_i(l_i)) \quad (3.60)$$

$$M_{f_{Y_{i+1}}}(l_i) = M_{f_{Y_{i+1}}}(0) = -\frac{1}{l_i} (X'_{i+1}(0) - X'_i(l_i)) \quad (3.61)$$

Notar que as molas lineares podem ter constantes diferentes nas direções X e Y (mancas anisotrópicos), mas as de flexão devem ter constantes iguais nas duas direções.

3.3.2 Montagem do determinante característico

Para que as constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ e c_8 das autofunções x_{1i} e y_{2i} , sejam determinadas para cada elemento do rotor, aplicam-se as seguintes condições de contorno:

Para o primeiro elemento:

$$M_{x_{1i}}(0) = 0 \quad (3.62)$$

$$M_{y_{2i}}(0) = 0 \quad (3.63)$$

$$T_{x_{1i}}(0) = 0 \quad (3.64)$$

$$T_{y_{2i}}(0) = 0 \quad (3.65)$$

Para o n -ésimo elemento:

$$M_{x_{1n}}(l^n) = 0 \quad (3.66)$$

$$M_{y_{2n}}(l^n) = 0 \quad (3.67)$$

$$T_{x_{1n}}(l^n) = 0 \quad (3.68)$$

$$T_{y_{2n}}(l^n) = 0 \quad (3.69)$$

Para o i -ésimo nó, com o auxílio das equações (3.56) e (3.57) para as forças nas molas lineares e (3.60) e (3.61) para os momentos nas molas de flexão:

$$x_{1i+1}(0) = x_{1i}(l_i) \quad (3.70)$$

$$y_{2i+1}(0) = y_{2i}(l_i) \quad (3.71)$$

$$M_{x_{1i+1}}(0) = -\frac{H_i}{l} (y_{2i+1}'(0) - y_{2i}'(l_i)) \quad (3.72)$$

$$M_{y_{2i+1}}(0) = -\frac{H_i}{l} (x_{1i+1}'(0) - x_{1i}'(l_i)) \quad (3.73)$$

$$M_{x_{1i+1}}(0) = 0 \quad (3.74)$$

$$M_{y_{2i+1}}(0) = 0 \quad (3.75)$$

$$T_{x_{1i+1}}(0) = -T_{x_{1i}}(l_i) \quad (3.76)$$

$$T_{y_{2i+1}}(0) = -T_{y_{2i}}(l_i) \quad (3.77)$$

Vale notar que as autofunções x_{1i} e y_{2i} são funções definidas nos sistemas de

coordenadas locais com origem em O_i , com os seguintes domínios:

$$x_{l_1} = x_{l_1}(Z_{l_1}), \quad A \ Z_{l_1} \in \mathfrak{R} \ \in 0 \leq Z_{l_1} \leq l_1$$

$$y_{z_1} = y_{z_1}(Z_{l_1}), \quad A \ Z_{l_1} \in \mathfrak{R} \ \in 0 \leq Z_{l_1} \leq l_1$$

Substituindo as equações (3.36) e (3.39) dos momentos fletores $M_{x_{l_1}}$ e $M_{y_{z_1}}$, (3.32) e (3.35) das forças cortantes $T_{x_{l_1}}$ e $T_{y_{z_1}}$, (3.52) e (3.53) das autofunções x_{l_1} e y_{z_1} e (3.44), (3.45), (3.48) e (3.49) dos autovalores β_{l_1} , β_{z_1} , β_3 e β_4 , respectivamente, nas equações de contorno de (3.62) a (3.77), monta-se um sistema de equações do seguinte tipo:

$$A_s \cdot C_s = B_s \tag{3.78}$$

onde:

$$A_s = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,8} & a_{1,8/j+1} & a_{1,8n-1} & a_{1,8n} \\ a_{8,1} & a_{8,8} & a_{8,8/j+1} & a_{8,8n-1} & a_{8,8n} \\ a_{8l+1,1} & a_{8l+1,8} & a_{8l+1,8/j+1} & a_{8l+1,8n-1} & a_{8l+1,8n} \\ a_{8(l+1),1} & a_{8(l+1),8} & a_{8(l+1),8/j+1} & a_{8(l+1),8n-1} & a_{8(l+1),8n} \\ a_{8n-1,1} & a_{8n-1,8} & a_{8n-1,8/j+1} & a_{8n-1,8n-1} & a_{8n-1,8n} \\ a_{8n,1} & a_{8n,8} & a_{8n,8/j+1} & a_{8n,8n-1} & a_{8n,8n} \end{bmatrix}$$

$$C_s = [c_1 \dots c_8 \dots c_{l_1} \dots c_{8l} \dots c_{8n} \dots c_{8l}]; \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$B_s = [0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0]; \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

O sistema de equações (3.78) só admite solução não trivial se o determinante da matriz A_s , chamado de determinante característico, for nulo. Os valores de ω para os quais tal condição é atingida, são as chamadas frequências naturais do sistema. O

conjunto das soluções é um conjunto enumerável. Para cada valor de ω , calculam-se os autovalores de cada elemento β_{1i} , β_{2i} , β_{3i} e β_{4i} através das equações (3.44), (3.45), (3.48) e (3.49). Substituindo, cada valor de ω em (3.78), obtêm-se os valores das constantes c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 , c_7 e c_8 , de cada elemento em função do valor de uma delas adotado arbitrariamente (unitário por exemplo). Por meio destas constantes e das equações (3.52) e (3.53), calculam-se as autofunções x_{1i} e y_{2i} de cada elemento.

Finalmente, para cada frequência ω , calcula-se a autofunção correspondente para o rotor completo. Para tanto, olhando na figura 3.4, considere:

$$l_0 = 0$$

$$O_i = \sum_{j=1}^{j_i} l_{j-1}$$

(3.79)

onde O_i é a coordenada Z , no sistema de coordenadas global com origem em O , da origem dos sistemas de coordenadas locais de cada elemento de rotor O_i .

Definindo a função degrau unitário como sendo:

$$n(Z - O_i) = \begin{cases} 1 & \text{para } Z \geq O_i \\ 0 & \text{para } Z < O_i \end{cases}$$

As autofunções do rotor completo no sistema de coordenadas global são dadas por:

$$x_i(Z) = \sum_{n=1}^{n=Z} [n(Z - O_i)^{l-1} - n(Z - O_{i-1})^{l-1}] \cdot x_{i-1}(Z - O_{i-1})$$

$$y_i(Z) = \sum_{n=1}^{n=Z} [n(Z - O_i)^{l-1} - n(Z - O_{i-1})^{l-1}] \cdot y_{i-1}(Z - O_{i-1})$$

(3.80)

onde l é o comprimento total do rotor.

$$A \quad Z \in \mathfrak{R} \quad \in \quad 0 \leq Z \leq l$$

Com um desenvolvimento totalmente análogo, determinam-se as autofunções $x_2(z)$ e $y_1(z)$.

3.4 Relações de ortogonalidade

Os procedimentos adotados a seguir detalham, para esta modelagem, o que é proposto por D'Eleutério; Hughes (1984).

Pode-se colocar o sistema de equações (3.19) e (3.20) na forma de equações diferenciais de primeira ordem ou no espaço de estados. Para tanto, definem-se os operadores:

$$M = \begin{bmatrix} m - j_l \frac{\partial z}{\partial t} & 0 \\ 0 & m - j_l \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} j_p \sigma \frac{\partial z}{\partial t} & 0 \\ 0 & -j_p \sigma \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} EI \frac{\partial^4}{\partial z^4} & 0 \\ 0 & EI \frac{\partial^4}{\partial z^4} \end{bmatrix}$$

Adotando os operadores acima em (3.19) e (3.20), têm-se:

$$M\dot{d} + Gd + Kd = f_e \tag{3.81}$$

$$\text{onde, } d = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad e f_e = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

Definindo, ainda, os operadores:

$$E = \begin{bmatrix} M & \bullet \\ \bullet & K \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} G & \bullet \\ \bullet & K \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \bullet \\ f_e \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

onde (\bullet) é o operador nulo de ordem 2 (matricial ou vetorial), reescreve-se (3.81)

como:

$$E\dot{r} + Fr = \gamma \tag{3.84}$$

Como foi visto, as soluções para (3.81) sem o termo forçante são dadas por (3.27). Derivando-se (3.27) em relação ao tempo, têm-se:

$$\begin{aligned} \dot{X}(Z,t) &= -\omega x_1(Z) \operatorname{sen}(\omega t) + \omega x_2(Z) \operatorname{cos}(\omega t) \\ \dot{Y}(Z,t) &= -\omega y_1(Z) \operatorname{sen}(\omega t) + \omega y_2(Z) \operatorname{cos}(\omega t) \end{aligned} \quad (3.85)$$

De maneira similar ao feito no espaço de configurações de (3.27), chamando a solução no espaço de estados de:

$$\mathbf{r}(Z,t) = \mathbf{r}_1(Z) \operatorname{cos}(\omega t) + \mathbf{r}_2(Z) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.86)$$

e substituindo o vetor de estados de (3.83), (3.27) e (3.85) em (3.86), chega-se às autofunções no espaço de estados:

$$\mathbf{r}_1(Z) = \begin{bmatrix} \omega x_2(Z) \\ \omega y_2(Z) \\ x_1(Z) \\ y_1(Z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(Z) = \begin{bmatrix} -\omega x_1(Z) \\ -\omega y_1(Z) \\ x_2(Z) \\ y_2(Z) \end{bmatrix}$$

que, para o *i*-ésimo modo, com frequência ω_i , serão dadas por:

$$\mathbf{r}_{1i}(Z) = \begin{bmatrix} \omega_i x_{2i}(Z) \\ \omega_i y_{2i}(Z) \\ x_{1i}(Z) \\ y_{1i}(Z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2i}(Z) = \begin{bmatrix} -\omega_i x_{1i}(Z) \\ -\omega_i y_{1i}(Z) \\ x_{2i}(Z) \\ y_{2i}(Z) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Substituindo (3.86) em (3.84) sem o termo forçante, obtêm-se:

$$-\omega_i \mathbf{E} \mathbf{r}_{1i} + \mathbf{I} \mathbf{r}_{2i} = 0 \quad (3.88)$$

$$\omega_i \mathbf{E} \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{I} \mathbf{r}_{1i} = 0 \quad (3.89)$$

Pré-multiplicando a equação (3.88) por \mathbf{r}_{1i}^t , a autofunção para o *i*-

ésimo modo e integrando de 0 a *l*, obtêm-se:

$$(3.90) \quad -\omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{M} \mathbf{V}^i) dZ - \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{G} \mathbf{u}^i) dZ + \omega^j \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^i) dZ = 0$$

$$(3.91) \quad \text{onde, } \mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix} e \quad \mathbf{V}^i = \begin{bmatrix} \gamma_{1i} \\ \gamma_{2i} \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando a equação (3.89) por \mathbf{r}_1^i , obtém-se:

$$(3.92) \quad -\omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^i) dZ + \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{G} \mathbf{u}^i) dZ + \omega^j \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^i) dZ = 0$$

Pré-multiplicando a equação (3.88) por \mathbf{r}_2^i , obtém-se:

$$(3.93) \quad \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{V}^i) dZ + \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{u}^i) dZ - \omega^j \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{V}^i) dZ = 0$$

Pré-multiplicando a equação (3.89) por \mathbf{r}_2^i , obtém-se:

$$(3.94) \quad \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^i) dZ - \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{V}^i) dZ - \omega^j \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^i) dZ = 0$$

Expandindo as integrais das expressões de (3.90) a (3.94), juntamente com as

condições de contorno de (3.62) a (3.77), para o rotor completo, obtém-se:

$$(3.95) \quad -\omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{M} \mathbf{V}^i) dZ - \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{G} \mathbf{u}^i) dZ + \omega^j \int_1^2 (\mathbf{V}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^i) dZ = -\omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^i) dZ - \omega^j \omega^i \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{V}^i) dZ - \omega^j \int_1^2 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^i) dZ + \int_1^k (\gamma_{1k}^i) (x_{2k}^i) (Z^k) dZ + \int_1^k (\gamma_{2k}^i) (x_{1k}^i) (Z^k) dZ + \int_1^k (\gamma_{1k}^i) (Z^k) dZ + \int_1^k (\gamma_{2k}^i) (Z^k) dZ$$

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma - \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0) \mathcal{S}^{x_d} \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega - = ZP(\nu \mathcal{G}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega -$$

(3.101)

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma - \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0) \mathcal{S}^{x_d} \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega = ZP(\nu \mathcal{G}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega$$

(3.100)

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma - \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0) \mathcal{S}^{x_d} \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega = ZP(\nu \mathcal{G}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega$$

(3.99)

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma - \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0) \mathcal{S}^{x_d} \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega - = ZP(\nu \mathcal{G}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega -$$

(3.98)

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma \int_{\gamma_1}^0) \}^l + \\ + (ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma \int_{\gamma_1}^0) \}^l m \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega = ZP(\nu \mathcal{M}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega$$

(3.97)

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma \int_{\gamma_1}^0) \}^l + \\ + (ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma \int_{\gamma_1}^0) \}^l m \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega = ZP(\nu \mathcal{M}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega$$

(3.96)

$$\{[(ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma \int_{\gamma_1}^0) \}^l + \\ + (ZP(Z)^{x_1} \gamma(Z)^{x_2} x \int_{\gamma_1}^0 + ZP(Z)^{x_1} x(Z)^{x_2} \gamma \int_{\gamma_1}^0) \}^l m \int_{\gamma_1}^0 \sum_{u=1}^{l=x} \}^l \omega^f \omega - = ZP(\nu \mathcal{M}, \nu) \int_{\gamma_1}^0 \omega^f \omega -$$

$$(3.102) \quad \int_l^0 \omega^j \mathbf{K}_V^j dZ = \omega^j \sum_n^k [EI^k (Z) x_n^{2j,k} (Z) x_n^{2j,k} (Z) dZ] + \int_{l_k}^0 \gamma_n^{2j,k} (Z) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = \omega^j \sum_n^k [EI^k (Z) x_n^{2j,k} (Z) x_n^{2j,k} (Z) dZ] + \int_{l_k}^0 \gamma_n^{2j,k} (Z) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{G}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = 0$$

$$(3.103) \quad \int_l^0 \omega^j \mathbf{K}_U^j dZ = \omega^j \sum_n^k [EI^k (Z) x_n^{2j,k} (Z) x_n^{2j,k} (Z) dZ] + \int_{l_k}^0 \gamma_n^{2j,k} (Z) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{G}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = 0$$

$$(3.104) \quad \int_l^0 \omega^j \mathbf{K}_V^j dZ = -\omega^j \sum_n^k [EI^k (Z) x_n^{2j,k} (Z) x_n^{2j,k} (Z) dZ] + \int_{l_k}^0 \gamma_n^{2j,k} (Z) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{G}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = 0$$

$$(3.105) \quad \int_l^0 \omega^j \mathbf{K}_U^j dZ = \omega^j \sum_n^k [EI^k (Z) x_n^{2j,k} (Z) x_n^{2j,k} (Z) dZ] + \int_{l_k}^0 \gamma_n^{2j,k} (Z) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{G}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = 0$$

$$(3.106) \quad \int_l^0 \omega^j \mathbf{K}_V^j dZ = -\omega^j \sum_n^k [EI^k (Z) x_n^{2j,k} (Z) x_n^{2j,k} (Z) dZ] + \int_{l_k}^0 \gamma_n^{2j,k} (Z) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{G}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = 0$$

(3.107)

$$0 = \int_l^0 \omega^j \mathbf{K}_U^j dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{G}_V^j) dZ + \omega^j \int_l^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{K}_U^j) dZ = 0$$

A equação (3.92) pode ser reescrita como:

Os índices j e i representam o j -ésimo e o i -ésimo modos, respectivamente e o índice k representa o k -ésimo elemento de rotor.

Olhando para (3.96), (3.100) e (3.104), percebe-se que os operadores M e K de (3.107) são auto-adjuntos (Butkov, 1983) e G é anti auto-adjunto. Logo, (3.107) pode ser escrita como:

$$(3.108) \quad -\omega' \omega'' \int_1^0 \int_2^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{M} \mathbf{v}^j) dZ - \omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ + \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0$$

Analogamente, reescreve-se (3.93) como:

$$(3.109) \quad \omega' \omega'' \int_2^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{M} \mathbf{u}^j) dZ - \omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{G} \mathbf{u}^j) dZ - \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0$$

Somando (3.92) com (3.93):

$$\omega' [-\omega'' \int_2^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{M} \mathbf{u}^j) dZ + \omega'' \int_1^0 \int_2^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{M} \mathbf{v}^j) dZ + \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{G} \mathbf{u}^j) dZ + \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ] - \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{K} \mathbf{v}^j) dZ + \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0$$

(3.110)

Somando (3.108) com (3.109):

$$(3.111) \quad \omega' [\omega'' \int_2^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{M} \mathbf{u}^j) dZ - \omega'' \int_1^0 \int_2^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{M} \mathbf{v}^j) dZ - \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{G} \mathbf{u}^j) dZ - \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ] + \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{K} \mathbf{v}^j) dZ - \omega' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0$$

Somando (3.110) com (3.111):

$$0 = [\omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{M} \mathbf{u}^j) dZ - \omega' \omega'' \int_1^0 \int_2^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{M} \mathbf{v}^j) dZ - \omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{G} \mathbf{u}^j) dZ - \omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ] + \omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{u}^j, \mathbf{K} \mathbf{v}^j) dZ - \omega' \omega'' \int_1^0 \int_1^0 (\mathbf{v}^j, \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0$$

Se $t \neq j$:

$$(3.112) \quad \int_I^0 \omega' \omega^j [\int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}^j dZ - \int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^j dZ] + \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{v}^j) dZ - \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0$$

Isolando os termos em \mathbf{K} de (3.113), substituindo em (3.111) e (3.112) e assumindo que ω_j e $\omega_j' \neq 0$, chega-se a:

$$(3.113) \quad (\omega_j + \omega_j') [\int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}^j dZ - \int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^j dZ] + \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{u}^j) dZ + \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ = 0 \quad (3.113)$$

$$(3.114) \quad (\omega_j + \omega_j') [\int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^j dZ - \int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}^j dZ] - \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{v}^j) dZ - \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{u}^j) dZ - \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ = 0 \quad (3.114)$$

Isolando os termos em \mathbf{G} em (3.113) ou (3.114), e substituindo no resultado da subtração de (3.108), obtém-se:

$$(3.115) \quad \omega' \omega^j [\int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{u}^j dZ] - \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{v}^j) dZ = 0 \quad (3.115)$$

Isolando os termos em \mathbf{G} em (3.113) ou (3.114), e substituindo no resultado da subtração de (3.92) por (3.109), obtém-se:

$$(3.116) \quad -\omega' \omega^j [\int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}^j dZ] + \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ = 0 \quad (3.116)$$

Isolando o termo em \mathbf{M} de (3.115) e substituindo em (3.92), obtém-se:

$$(3.117) \quad -\omega' \omega^j [\int_I^0 \mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{v}^j dZ + \omega' \omega^j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{v}^j) dZ + \omega' \omega^j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{u}^j) dZ] = 0 \quad (3.117)$$

Isolando o termo em \mathbf{M} de (3.116) e substituindo em (3.93), obtém-se:

$$(3.118) \quad \int_I^0 \omega' \omega' \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ + \omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{G} \mathbf{u}' dZ - \omega' \int_I^0 \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ = 0$$

Se $t=j$, através de (3.96), (3.97), (3.100), (3.101), (3.104) e (3.105) verifica-

se, de imediato, que:

$$(3.119) \quad \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{G} \mathbf{V}' dZ = 0; \quad \int_I^0 \mathbf{u}' \mathbf{M} \mathbf{V}' dZ = \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{M} \mathbf{u}' dZ; \quad \int_I^0 \mathbf{u}' \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ = \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ$$

A substituição dessas relações (3.119) em (3.92) e (3.93) leva à conclusão que as relações de ortogonalidade (3.115), (3.116), (3.117) e (3.118) permanecem

válidas.

Reescrevendo a equação (3.90) como:

$$(3.120) \quad -\omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{M} \mathbf{V}' dZ - \omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{G} \mathbf{u}' dZ + \omega' \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ = 0$$

(3.120) pode, ainda, ser escrita como:

$$(3.121) \quad -\omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{M} \mathbf{V}' dZ + \omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{u}' \mathbf{G} \mathbf{V}' dZ + \omega' \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ = 0$$

Analogamente, reescreve-se a equação (3.94) como:

$$(3.122) \quad \omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{u}' \mathbf{M} \mathbf{u}' dZ + \omega' \omega' \int_I^0 \mathbf{V}' \mathbf{G} \mathbf{u}' dZ - \omega' \int_I^0 \mathbf{u}' \mathbf{K}_V \mathbf{K}_V' dZ = 0$$

Somando (3.90) com (3.94):

$$(3.123) \quad \omega^j [-\omega^j \int_1^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz + \omega^j \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz - \omega^j \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{v}_t) dz - \omega^j \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{u}_t) dz] - \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{u}_t) dz + \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{v}_t) dz = 0$$

Somando (3.121) com (3.122):

$$(3.124) \quad \omega^j [\omega^j \int_1^0 (\mathbf{V}^j \mathbf{M} \mathbf{v}_t) dz + \omega^j \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz + \omega^j \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{v}_t) dz + \omega^j \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{u}_t) dz] + \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{v}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{u}_t) dz = 0$$

Somando (3.123) com (3.124):

$$(\omega^j + \omega^j) [\omega^j \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}_t) dz] + \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{v}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{u}_t) dz = 0$$

Se $\omega^j \neq 0$:

$$(3.125) \quad \omega^j \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}_t) dz + \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K} \mathbf{v}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K} \mathbf{u}_t) dz = 0$$

Isolando os termos em \mathbf{K} de (3.125), substituindo em (3.122) e (3.123) e

assumindo que $\omega^j \neq 0$, chega-se a:

$$(3.126) \quad (\omega^j - \omega^j) \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{v}_t) dz + \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{u}_t) dz = 0$$

$$(3.127) \quad (\omega^j - \omega^j) \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M} \mathbf{v}_t) dz - \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M} \mathbf{u}_t) dz + \int_1^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G} \mathbf{v}_t) dz + \int_1^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{G} \mathbf{u}_t) dz = 0$$

Isolando os termos em \mathbf{G} em (3.126) ou (3.127), e substituindo no resultado da subtração de (3.90) por (3.121), obtêm-se:

$$(3.128) \quad (\omega_j - \omega'_j) \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K}_{\mathbf{v}^j}) dZ + (\omega_j - \omega'_j) \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 0$$

$$(3.129) \quad \text{Se } i \neq j, \quad \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 0$$

$$(3.130) \quad \text{Se } i = j, \quad \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{M}_{\mathbf{u}^j}) dZ + \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K}_{\mathbf{v}^j}) dZ = 2\omega'_j$$

Onde $2\omega'_j$ é um fator de normalização escolhido.

Isolando o termo em \mathbf{M} de (3.129) e (3.130) e substituindo em (3.94) chega-se a:

$$(3.131) \quad \text{Se } i \neq j, \quad \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 0$$

$$(3.132) \quad \text{Se } i = j, \quad \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{K}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{G}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 2\omega'_j$$

Analogamente, isolando os termos em \mathbf{G} em (3.131) ou (3.132), e substituindo no resultado da subtração de (3.94) por (3.122), obtêm-se:

$$(3.133) \quad (\omega_j - \omega'_j) \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M}_{\mathbf{v}^j}) dZ + (\omega_j - \omega'_j) \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 0$$

$$(3.134) \quad \text{Se } i \neq j, \quad \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 0$$

$$(3.135) \quad \text{Se } i = j, \quad \omega'_j \int_I^0 (\mathbf{v}^j \mathbf{M}_{\mathbf{v}^j}) dZ + \int_I^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{u}^j}) dZ = 2\omega'_j$$

Isolando o termo em M de (3.134) e (3.135) e substituindo em (3.90) chega-

se a:

$$\text{Se } i \neq j, \omega_i \int_1^0 \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_i dZ - \omega_i \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{G} \mathbf{u}_i dZ + \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j dZ = 0 \quad (3.136)$$

$$\text{Se } i = j, \omega_i \int_1^0 \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_i dZ - \omega_i \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{G} \mathbf{u}_i dZ + \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j dZ = 2\omega_i^3 \delta_{ij} \quad (3.137)$$

Resumindo as relações de ortogonalidade :

$$\begin{aligned} \omega_i \omega_j \int_1^0 \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j dZ + \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j dZ &= 2\omega_i^2 \delta_{ij} \\ \omega_i \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j dZ + \omega_j \omega_i \int_1^0 \mathbf{u}_j^T \mathbf{G} \mathbf{v}_j dZ + \omega_j \int_1^0 \mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j dZ &= 2\omega_i^3 \delta_{ij} \\ \omega_i \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j dZ + \int_1^0 \mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j dZ &= 2\omega_j^2 \delta_{ij} \\ \omega_i \int_1^0 \mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j dZ - \omega_i \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{G} \mathbf{u}_j dZ + \omega_j \int_1^0 \mathbf{v}_j^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j dZ &= 2\omega_j^3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

3.5 Análise modal e modelo final na forma de estados

De acordo com as relações de ortogonalidade acima demonstradas, as autofunções formam uma base no espaço de configuração do sistema. A resposta do mesmo, conforme o teorema da expansão modal, pode, assim, ser descrita pela superposição de autofunções da seguinte forma:

$$\mathbf{r}(Z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [\mathbf{r}_1^i(Z) \eta_1^i(t) + \mathbf{r}_2^i(Z) \eta_2^i(t)] \quad (3.139)$$

onde, $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$ são coordenadas generalizadas modais.

Substituindo (3.139) em (3.84):

$$(3.140) \quad \sum_{l=1}^{\infty} [\eta_1(t) \text{Er}_1(Z) + \eta_2(t) \text{Er}_2(Z)] + \sum_{l=1}^{\infty} [\eta_1(t) \text{Tr}_1(Z) + \eta_2(t) \text{Tr}_2(Z)] = \gamma$$

Pré-multiplicando (3.140) primeiro por \mathbf{r}_1' , e, depois por \mathbf{r}_2' , e integrando de

0 a l obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_1' \text{Er}_1] dZ + \eta_2 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_1' \text{Er}_2] dZ + \eta_1 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_1' \text{Tr}_1] dZ + \\ & + \eta_2 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_1' \text{Tr}_2] dZ = \mathbf{r}_1' \gamma \end{aligned}$$

(3.141)

$$\begin{aligned} & \eta_1 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_2' \text{Er}_1] dZ + \eta_2 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_2' \text{Er}_2] dZ + \eta_1 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_2' \text{Tr}_1] dZ + \\ & + \eta_2 \int_{\infty}^0 [\mathbf{r}_2' \text{Tr}_2] dZ = \mathbf{r}_2' \gamma \end{aligned}$$

Substituindo (3.82), (3.83), (3.87) e (3.91) em (3.141), fica-se com:

$$\begin{aligned} & \eta_1 \int_{l=1}^{\infty} \int_{l=1}^0 [\omega^j \omega^j \mathbf{M}_{\mathbf{V}}^j dZ + \mathbf{Z} dZ + \int_{l=1}^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{U}}^j) dZ] + \\ & + \int_{l=1}^{\infty} \int_{l=1}^0 [\omega^j \omega^j \mathbf{M}_{\mathbf{U}}^j dZ + \int_{l=1}^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{V}}^j) dZ] + \\ & + \eta_2 \int_{l=1}^{\infty} \int_{l=1}^0 [\omega^j \omega^j \mathbf{V}^j dZ + \mathbf{Z} dZ + \int_{l=1}^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{V}}^j) dZ] + \\ & + \eta_1 \int_{l=1}^{\infty} \int_{l=1}^0 [\omega^j \omega^j \mathbf{V}^j dZ + \mathbf{Z} dZ + \int_{l=1}^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{U}}^j) dZ] + \\ & + \eta_2 \int_{l=1}^{\infty} \int_{l=1}^0 [\omega^j \omega^j \mathbf{U}^j dZ + \mathbf{Z} dZ + \int_{l=1}^0 (\mathbf{u}^j \mathbf{K}_{\mathbf{U}}^j) dZ] = \omega^j \int_{l=1}^0 (\mathbf{v}^j f^j) dZ \end{aligned}$$

(3.142)

$$\begin{aligned}
& \eta_{i_1} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} [-\omega^j \omega_l \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j \mathbf{M}_V^l) dZ + \int_l^0 (\mathbf{v}_l^j \mathbf{K}_U^l) dZ] \right\} + \\
& + \eta_{i_2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} [\omega^j \omega_l \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j \mathbf{M}_U^l) dZ + \int_l^0 (\mathbf{v}_l^j \mathbf{K}_V^l) dZ] \right\} + \\
& + \eta_{i_3} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} [-\omega^j \omega_l \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j \mathbf{G}_V^l) dZ - \omega_l \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j \mathbf{K}_U^l) dZ - \omega_l \int_l^0 (\mathbf{v}_l^j \mathbf{K}_V^l) dZ] \right\} + \\
& + \eta_{i_4} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} [\omega^j \omega_l \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j \mathbf{G}_U^l) dZ - \omega_l \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j \mathbf{K}_V^l) dZ + \omega_l \int_l^0 (\mathbf{v}_l^j \mathbf{K}_U^l) dZ] \right\} = -\omega^j \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j f^e) dZ
\end{aligned}
\tag{3.143}$$

Substituindo as relações de ortonormalização (3.115), (3.116), (3.117), (3.118) e (3.130) e (3.138) em (3.142) e (3.143) chega-se a:

$$\begin{aligned}
2\omega_2 \delta_{ij} \eta_{i_1} + 2\omega_3 \delta_{ij} \eta_{i_2} &= \omega^j \int_l^0 (\mathbf{v}_l^j f^e) dZ \\
2\omega_2 \delta_{ij} \eta_{i_2} - 2\omega_3 \delta_{ij} \eta_{i_1} &= -\omega^j \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j f^e) dZ
\end{aligned}
\tag{3.144}$$

Fazendo $i=j$ em (3.144) e dividindo por $2\omega_2$, têm-se as equações para cada modo na forma de estados:

$$\begin{aligned}
\eta_{i_1} + \omega' \eta_{i_2} &= \frac{1}{2\omega_2} \int_l^0 (\mathbf{v}_l^j f^e) dZ \\
\eta_{i_2} - \omega' \eta_{i_1} &= -\frac{1}{2\omega_2} \int_l^0 (\mathbf{u}_l^j f^e) dZ
\end{aligned}
\tag{3.145}$$

Notar que, se for colocado um termo direto multiplicando η_{i_1} na primeira equação de (3.145) e multiplicando η_{i_2} na segunda, e, se os mesmos forem numericamente percentagens de ω' , este termo corresponderá a um coeficiente de amortecimento adimensional ξ modal. Assim:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 + \xi \omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 &= \frac{1}{1} \int_0^{2\omega_1} (v_1' f_2) dZ \\
 \eta_2 + \xi \omega_1 \eta_2 - \omega_1 \eta_1 &= -\frac{1}{1} \int_0^{2\omega_1} (u_1' f_2) dZ
 \end{aligned}$$

(3.146)

A saída em deslocamento do sistema, levando em conta (3.82), (3.83), (3.86),

(3.91) e (3.139) será dada por:

$$d(Z, t) = \sum_{l=1}^{\infty} [u_1(Z) \eta_1(t) + v_1(Z) \eta_2(t)]$$

(3.147)

Neste capítulo as equações obtidas no capítulo anterior serão aplicadas para modelar e simular a bancada de ensaios. Os estudos ficarão restritos aos três primeiros modos, diretos e retrogrados, cujos diagramas de Campbell e autofunções serão obtidas. Serão, também, levantadas algumas funções de resposta em frequência e simuladas respostas, no tempo, a algumas configurações de desbalanço em duas velocidades críticas. Finalmente, através de uma rotina de otimização, serão obtidas as forças ótimas nos atuadores magnéticos para se passar por velocidades críticas sob determinadas condições de desbalançamento do rotor.

4.1 Modelo da bancada

A figura 4.1 representa esquematicamente a bancada de ensaios que (vide

figura 5.1.)

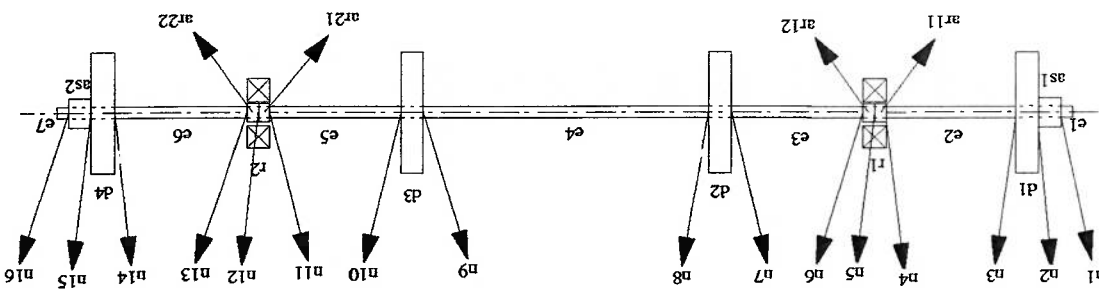


Figura 4.1: Esquema da bancada de ensaios

A mesma será modelada com dezessete elementos de rotor. O primeiro (e1) e o décimo sétimo (e7) são pontas de eixo. O segundo (as1) e o décimo sexto (as2) são anéis onde estão posicionados os sensores de deslocamento que, por razões construtivas, não estão colocados sobre os discos onde estão os atuadores. O terceiro (d1), o oitavo (d2), o décimo (d3) e o décimo quinto (d4) são discos. Em d1 e d4

estão os atuadores magnéticos. Em d3 está o rotor do motor e em d2, que é um rotor igual aos anteriores, está a marca para o sensor ótico de rotação e referência de fase. O quarto (e2), o sétimo (e3), o nono (e4), o décimo primeiro (e5) e o décimo quinto (e6) são elementos de eixo. O quinto (ar1), sexto (ar12), décimo segundo (ar21) e décimo terceiro (ar22) elementos, são os anéis internos dos rolamentos, r1 e r2, que são incorporados ao rotor. Cada um deles foi dividido em dois para que a rigidez dos rolamentos seja colocada no nó entre eles, ou seja, na linha de centro do rolamento. Os valores de inércia compõem-se da soma dos valores dos discos ou anéis com os do eixo. Já a rigidez é creditada somente ao eixo. Há dezesseis nós, e nos nós 5 e 12, como já foi dito, são colocadas molas de alta rigidez para simular a rigidez do rolamento.

Haverá forças externas representando o desbalanço nos quatro discos sendo que, nos das extremidades (d1 e d4), além das forças de desbalanço, poderão ser aplicadas forças externas pontuais de atuação magnética de controle nas direções X e Y. As saídas de interesse do modelo, serão os deslocamentos X e Y em cima dos discos que contêm os atuadores (d1 e d4) e os deslocamentos X e Y em cima dos anéis (as1 e as2) onde estão colocados os sensores de proximidade.

Como foi dito, a série de superposição das autofunções modais será truncada em seis modos, três diretos e três retrogrados. Assim, o sistema é descrito na forma de estados como:

$$\dot{\eta} = A\eta + Bu$$

$$d = C\eta$$

(4.1)

onde,

$$\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5 \ \eta_6 \ \eta_7 \ \eta_8 \ \eta_9 \ \eta_{10} \ \eta_{11} \ \eta_{12}]^T$$

são as coordenadas generalizadas modais do primeiro ao sexto modos no espaço de estados.

$$f^e = [FX^{d1}\delta(Z-G^{d1}) \ FY^{d1}\delta(Z-G^{d1}) \ FX^{d2}\delta(Z-G^{d2}) \ FY^{d2}\delta(Z-G^{d2}) \ FX^{d3}\delta(Z-G^{d3}) \ FY^{d3}\delta(Z-G^{d3}) \ FX^{d4}\delta(Z-G^{d4}) \ FY^{d4}\delta(Z-G^{d4})]^T$$

São forças pontuais nas direções X e Y aplicadas nos CGs, de coordenadas no eixo Z iguais a G_{a1} , G_{a2} , G_{a3} , G_{a4} , dos discos $d1$, $d2$, $d3$ e $d4$ respectivamente. δ é o delta de Dirac.

$$d = \begin{bmatrix} X_{a1} & Y_{a1} & X_{a4} & Y_{a4} & X_{a3} & Y_{a3} & X_{a2} & Y_{a2} \end{bmatrix} \quad \text{são os deslocamentos,}$$

em X e Y dos CGs dos discos $d1$ e $d4$ e dos anéis $as1$ e $as2$ respectivamente.

Através das equações (3.146) e (3.147), chega-se a:

$$A = \begin{bmatrix} -\xi\omega_1 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -\xi\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi\omega_2 & -\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & -\xi\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi\omega_3 & -\omega_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 & -\xi\omega_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi\omega_4 & -\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 & -\xi\omega_4 & 0 & 0 & \omega_4 & -\xi\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi\omega_5 & -\omega_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_5 & -\xi\omega_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\xi\omega_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi\omega_6 & -\omega_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1^2(GP1) & x_1^2(GP2) & x_1^2(GP3) & x_1^2(GP4) & x_1^2(GP5) & x_1^2(GP6) \\ x_2^2(GP1) & x_2^2(GP2) & x_2^2(GP3) & x_2^2(GP4) & x_2^2(GP5) & x_2^2(GP6) \\ x_3^2(GP1) & x_3^2(GP2) & x_3^2(GP3) & x_3^2(GP4) & x_3^2(GP5) & x_3^2(GP6) \\ x_4^2(GP1) & x_4^2(GP2) & x_4^2(GP3) & x_4^2(GP4) & x_4^2(GP5) & x_4^2(GP6) \\ x_5^2(GP1) & x_5^2(GP2) & x_5^2(GP3) & x_5^2(GP4) & x_5^2(GP5) & x_5^2(GP6) \\ x_6^2(GP1) & x_6^2(GP2) & x_6^2(GP3) & x_6^2(GP4) & x_6^2(GP5) & x_6^2(GP6) \\ x_1^1(GP1) & x_1^1(GP2) & x_1^1(GP3) & x_1^1(GP4) & x_1^1(GP5) & x_1^1(GP6) \\ x_2^1(GP1) & x_2^1(GP2) & x_2^1(GP3) & x_2^1(GP4) & x_2^1(GP5) & x_2^1(GP6) \\ x_3^1(GP1) & x_3^1(GP2) & x_3^1(GP3) & x_3^1(GP4) & x_3^1(GP5) & x_3^1(GP6) \\ x_4^1(GP1) & x_4^1(GP2) & x_4^1(GP3) & x_4^1(GP4) & x_4^1(GP5) & x_4^1(GP6) \\ x_5^1(GP1) & x_5^1(GP2) & x_5^1(GP3) & x_5^1(GP4) & x_5^1(GP5) & x_5^1(GP6) \\ x_6^1(GP1) & x_6^1(GP2) & x_6^1(GP3) & x_6^1(GP4) & x_6^1(GP5) & x_6^1(GP6) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1^1(GP1) & x_1^2(GP1) & x_1^3(GP1) & x_1^4(GP1) & x_1^5(GP1) & x_1^6(GP1) \\ x_2^1(GP1) & x_2^2(GP1) & x_2^3(GP1) & x_2^4(GP1) & x_2^5(GP1) & x_2^6(GP1) \\ x_3^1(GP1) & x_3^2(GP1) & x_3^3(GP1) & x_3^4(GP1) & x_3^5(GP1) & x_3^6(GP1) \\ x_4^1(GP1) & x_4^2(GP1) & x_4^3(GP1) & x_4^4(GP1) & x_4^5(GP1) & x_4^6(GP1) \\ x_5^1(GP1) & x_5^2(GP1) & x_5^3(GP1) & x_5^4(GP1) & x_5^5(GP1) & x_5^6(GP1) \\ x_6^1(GP1) & x_6^2(GP1) & x_6^3(GP1) & x_6^4(GP1) & x_6^5(GP1) & x_6^6(GP1) \\ x_1^1(GP2) & x_1^2(GP2) & x_1^3(GP2) & x_1^4(GP2) & x_1^5(GP2) & x_1^6(GP2) \\ x_2^1(GP2) & x_2^2(GP2) & x_2^3(GP2) & x_2^4(GP2) & x_2^5(GP2) & x_2^6(GP2) \\ x_3^1(GP2) & x_3^2(GP2) & x_3^3(GP2) & x_3^4(GP2) & x_3^5(GP2) & x_3^6(GP2) \\ x_4^1(GP2) & x_4^2(GP2) & x_4^3(GP2) & x_4^4(GP2) & x_4^5(GP2) & x_4^6(GP2) \\ x_5^1(GP2) & x_5^2(GP2) & x_5^3(GP2) & x_5^4(GP2) & x_5^5(GP2) & x_5^6(GP2) \\ x_6^1(GP2) & x_6^2(GP2) & x_6^3(GP2) & x_6^4(GP2) & x_6^5(GP2) & x_6^6(GP2) \\ x_1^1(GP3) & x_1^2(GP3) & x_1^3(GP3) & x_1^4(GP3) & x_1^5(GP3) & x_1^6(GP3) \\ x_2^1(GP3) & x_2^2(GP3) & x_2^3(GP3) & x_2^4(GP3) & x_2^5(GP3) & x_2^6(GP3) \\ x_3^1(GP3) & x_3^2(GP3) & x_3^3(GP3) & x_3^4(GP3) & x_3^5(GP3) & x_3^6(GP3) \\ x_4^1(GP3) & x_4^2(GP3) & x_4^3(GP3) & x_4^4(GP3) & x_4^5(GP3) & x_4^6(GP3) \\ x_5^1(GP3) & x_5^2(GP3) & x_5^3(GP3) & x_5^4(GP3) & x_5^5(GP3) & x_5^6(GP3) \\ x_6^1(GP3) & x_6^2(GP3) & x_6^3(GP3) & x_6^4(GP3) & x_6^5(GP3) & x_6^6(GP3) \\ x_1^1(GP4) & x_1^2(GP4) & x_1^3(GP4) & x_1^4(GP4) & x_1^5(GP4) & x_1^6(GP4) \\ x_2^1(GP4) & x_2^2(GP4) & x_2^3(GP4) & x_2^4(GP4) & x_2^5(GP4) & x_2^6(GP4) \\ x_3^1(GP4) & x_3^2(GP4) & x_3^3(GP4) & x_3^4(GP4) & x_3^5(GP4) & x_3^6(GP4) \\ x_4^1(GP4) & x_4^2(GP4) & x_4^3(GP4) & x_4^4(GP4) & x_4^5(GP4) & x_4^6(GP4) \\ x_5^1(GP4) & x_5^2(GP4) & x_5^3(GP4) & x_5^4(GP4) & x_5^5(GP4) & x_5^6(GP4) \\ x_6^1(GP4) & x_6^2(GP4) & x_6^3(GP4) & x_6^4(GP4) & x_6^5(GP4) & x_6^6(GP4) \\ x_1^1(GP5) & x_1^2(GP5) & x_1^3(GP5) & x_1^4(GP5) & x_1^5(GP5) & x_1^6(GP5) \\ x_2^1(GP5) & x_2^2(GP5) & x_2^3(GP5) & x_2^4(GP5) & x_2^5(GP5) & x_2^6(GP5) \\ x_3^1(GP5) & x_3^2(GP5) & x_3^3(GP5) & x_3^4(GP5) & x_3^5(GP5) & x_3^6(GP5) \\ x_4^1(GP5) & x_4^2(GP5) & x_4^3(GP5) & x_4^4(GP5) & x_4^5(GP5) & x_4^6(GP5) \\ x_5^1(GP5) & x_5^2(GP5) & x_5^3(GP5) & x_5^4(GP5) & x_5^5(GP5) & x_5^6(GP5) \\ x_6^1(GP5) & x_6^2(GP5) & x_6^3(GP5) & x_6^4(GP5) & x_6^5(GP5) & x_6^6(GP5) \\ x_1^1(GP6) & x_1^2(GP6) & x_1^3(GP6) & x_1^4(GP6) & x_1^5(GP6) & x_1^6(GP6) \\ x_2^1(GP6) & x_2^2(GP6) & x_2^3(GP6) & x_2^4(GP6) & x_2^5(GP6) & x_2^6(GP6) \\ x_3^1(GP6) & x_3^2(GP6) & x_3^3(GP6) & x_3^4(GP6) & x_3^5(GP6) & x_3^6(GP6) \\ x_4^1(GP6) & x_4^2(GP6) & x_4^3(GP6) & x_4^4(GP6) & x_4^5(GP6) & x_4^6(GP6) \\ x_5^1(GP6) & x_5^2(GP6) & x_5^3(GP6) & x_5^4(GP6) & x_5^5(GP6) & x_5^6(GP6) \\ x_6^1(GP6) & x_6^2(GP6) & x_6^3(GP6) & x_6^4(GP6) & x_6^5(GP6) & x_6^6(GP6) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [FX^{d1} \quad FY^{d1} \quad FX^{d2} \quad FY^{d2} \quad FX^{d3} \quad FY^{d3} \quad FX^{d4} \quad FY^{d4}]$$

4.2 Valores numéricos do rotor

A tabela 4.1 mostra os valores de inércia e rigidez, calculados no apêndice A, além dos comprimentos (vide figura 5.1), dos elementos do rotor.

Tabela 4.1: Dados numéricos dos elementos do rotor

Nº	Elemento	L [m]	m [Kg/m]	J_p [Kg.m]	J'_p [Kg.m]	EI [N.m ²]
1	e1	$6,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52
2	as1	$12,00 \times 10^{-3}$	$521,38 \times 10^{-3}$	$1,77 \times 10^{-5}$	$8,86 \times 10^{-6}$	3,52
3	d1	$12,00 \times 10^{-3}$	$7397,81 \times 10^{-3}$	$3,61 \times 10^{-3}$	$1,81 \times 10^{-3}$	3,52
4	e2	$66,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52
5	ar11	$3,00 \times 10^{-3}$	$475,58 \times 10^{-3}$	$7,96 \times 10^{-6}$	$3,98 \times 10^{-6}$	3,52
6	ar12	$3,00 \times 10^{-3}$	$475,58 \times 10^{-3}$	$7,96 \times 10^{-6}$	$3,98 \times 10^{-6}$	3,52
7	e3	$66,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52
8	d2	$12,00 \times 10^{-3}$	$7397,81 \times 10^{-3}$	$3,61 \times 10^{-3}$	$1,81 \times 10^{-3}$	3,52
9	e4	$138,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52
10	d3	$12,00 \times 10^{-3}$	$7397,81 \times 10^{-3}$	$3,61 \times 10^{-3}$	$1,81 \times 10^{-3}$	3,52
11	e5	$66,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52
12	ar21	$3,00 \times 10^{-3}$	$475,58 \times 10^{-3}$	$7,96 \times 10^{-6}$	$3,98 \times 10^{-6}$	3,52
13	ar22	$3,00 \times 10^{-3}$	$475,58 \times 10^{-3}$	$7,96 \times 10^{-6}$	$3,98 \times 10^{-6}$	3,52
14	e6	$66,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52
15	d4	$12,00 \times 10^{-3}$	$7397,81 \times 10^{-3}$	$3,61 \times 10^{-3}$	$1,81 \times 10^{-3}$	3,52
16	as2	$12,00 \times 10^{-3}$	$521,38 \times 10^{-3}$	$1,77 \times 10^{-5}$	$8,86 \times 10^{-6}$	3,52
17	e7	$6,00 \times 10^{-3}$	$43,44 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	3,52

Tabela 4.2: Dados numéricos dos nós do rotor

Nº	K_x [N/m]	K_y [N/m]	F [rad/N.m]
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	$1,00 \times 10^{10}$	$1,00 \times 10^{10}$	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0
11	0	0	0
12	$1,00 \times 10^{10}$	$1,00 \times 10^{10}$	0
13	0	0	0
14	0	0	0
15	0	0	0
16	0	0	0

4.3 Diagramas de Campbell

Foram desenvolvidas rotinas no programa MATLAB™ 5.2.1 para o cálculo das frequências naturais, autofunções e a montagem das matrizes **A**, **B** e **C**, para posteriores simulações, levando em conta os seis primeiros modos. Para tanto, monta-se o sistema de equações 3.78 com os dados numéricos da tabela 4.2. As frequências naturais são obtidas através da busca dos valores nulos do determinante característico por meio de uma rotina que utiliza o algoritmo *regula falsi* (Lanzarini; Franco, 1980). As autofunções para cada frequência natural são calculadas e ortonormalizadas de acordo com as relações da seção 3.4. De posse das frequências naturais e das autofunções normalizadas, montam-se as matrizes **A**, **B** e **C** do sistema de equações 4.1.

As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram a variação das frequências naturais dos três primeiros modos, considerando aqui que o modo direto com o seu equivalente retrogrado contam como apenas um modo, em função da rotação. Tais figuras são conhecidas como diagramas de Campbell. A rotação foi limitada em 180 Hz para não haver cruzamento de frequências de modos.

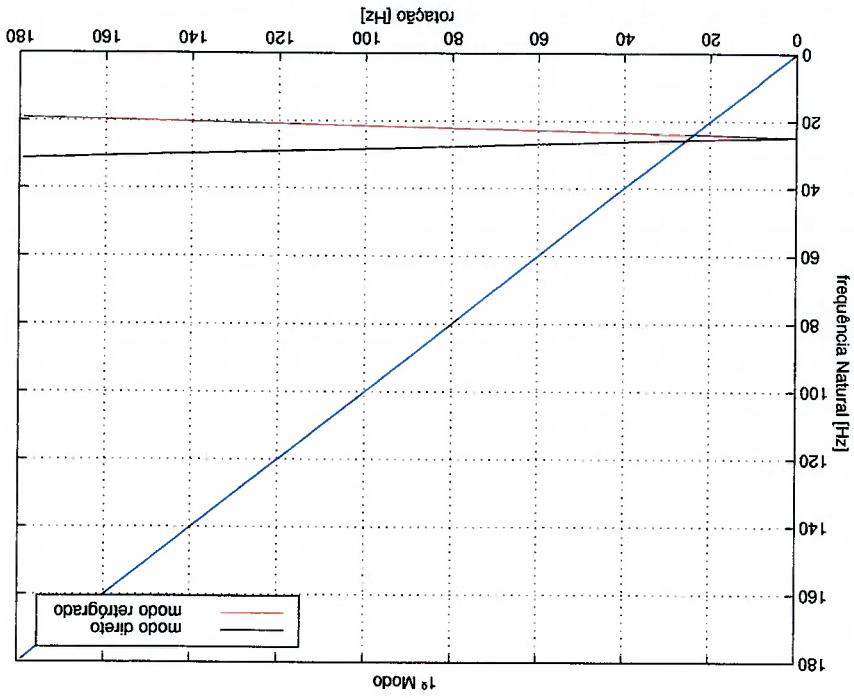


Figura 4.2: Diagrama de Campbell do 1º modo

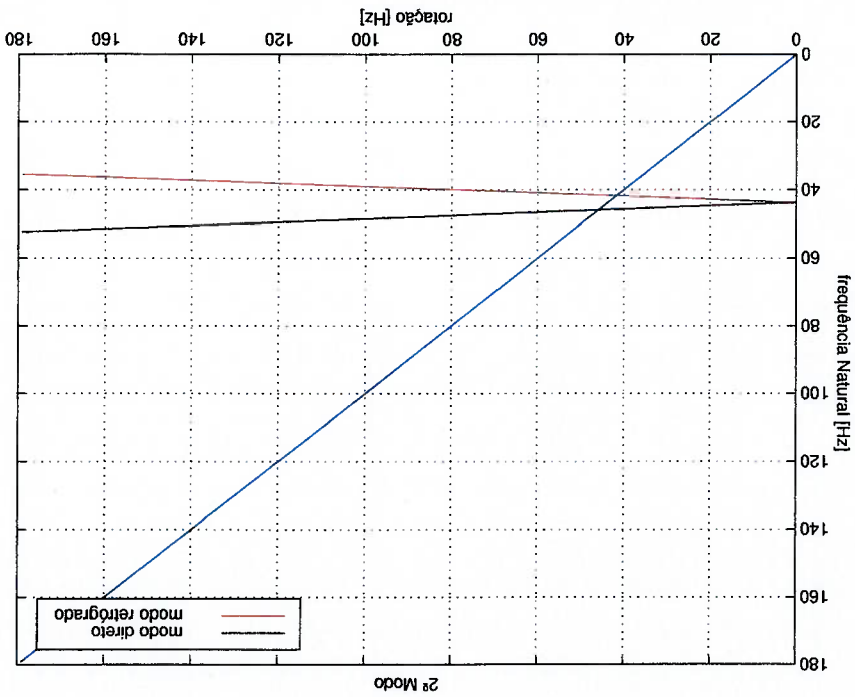


Figura 4.3: Diagrama de Campbell do 2º modo

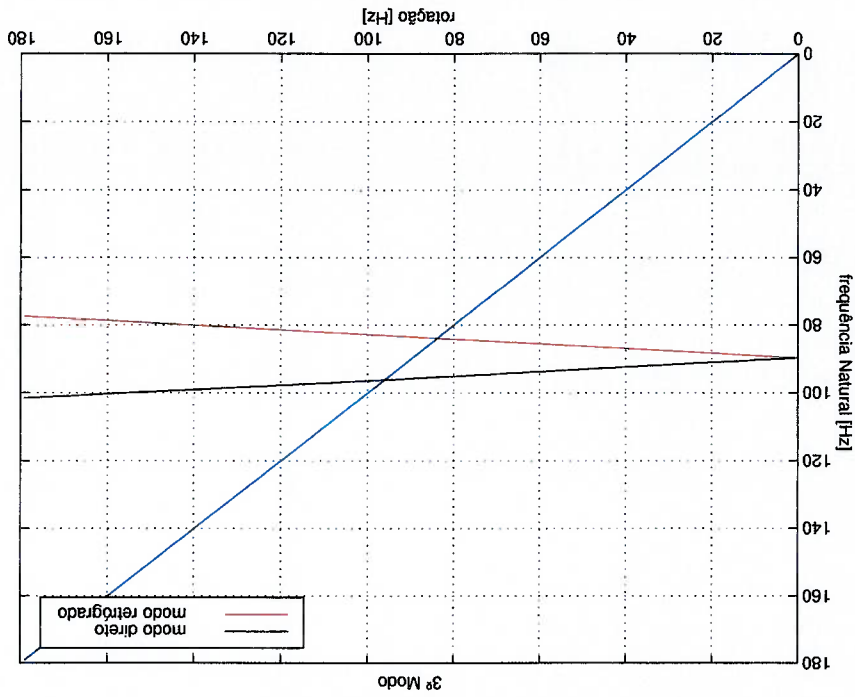


Figura 4.4: Diagrama de Campbell do 3º modo

Nas figuras acima, a reta azul corresponde àquela na qual a frequência natural é igual à rotação. As rotações nas quais esta reta intercepta as curvas das frequências correspondentes aos modos diretos são conhecidas como rotações críticas. A tabela

4.2 mostra as três primeiras frequências naturais (rotação nula) e as três primeiras rotações críticas.

Modo	Freq. Natural [Hz]	Rotação Crítica [Hz]
1°	24,78	25,67
2°	43,73	45,94
3°	89,64	96,16

Tabela 4.3: Frequências naturais e rotações críticas teóricas

4.4 Autofunções

A título de exemplo, as autofunções, já normalizadas, para duas rotações, 1 e 180 Hz, são plotadas nas figuras abaixo. Agora, cada modo, direto ou retrogrado, é entendido como um modo independente, de modo que são plotadas as autofunções dos seis primeiros modos.

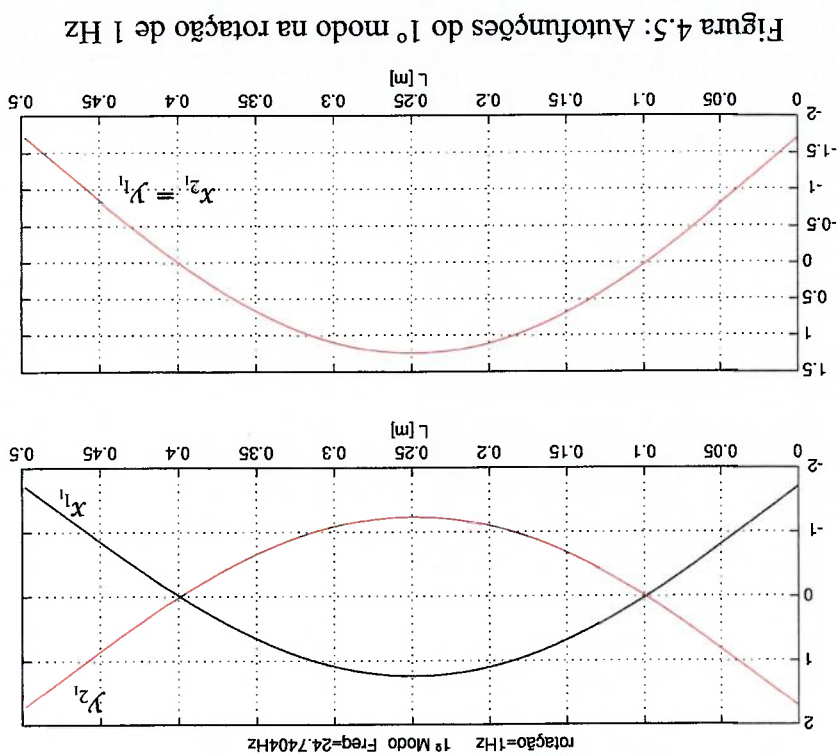


Figura 4.5: Autofunções do 1º modo na rotação de 1 Hz

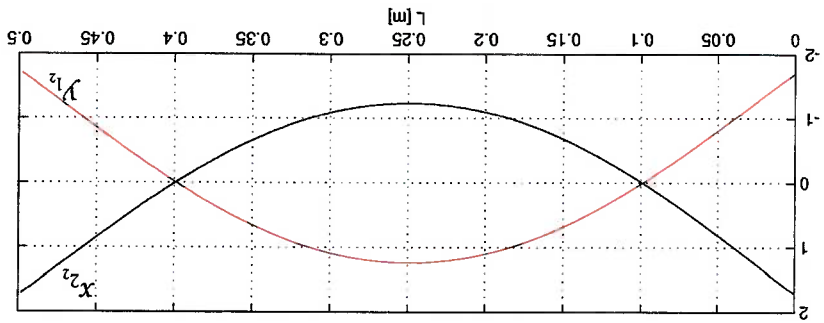
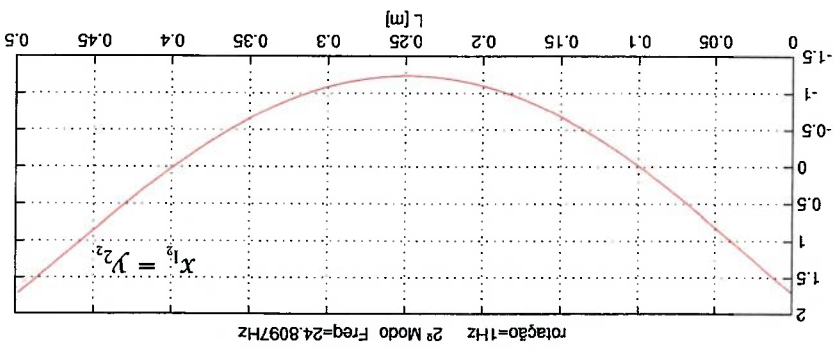


Figura 4.6: Autofunções do 2º modo na rotação de 1 Hz

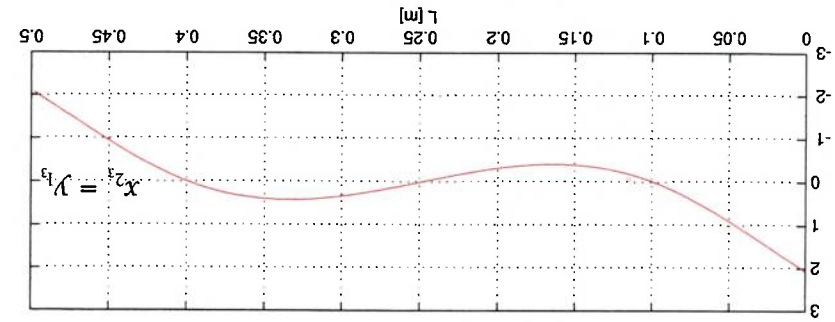
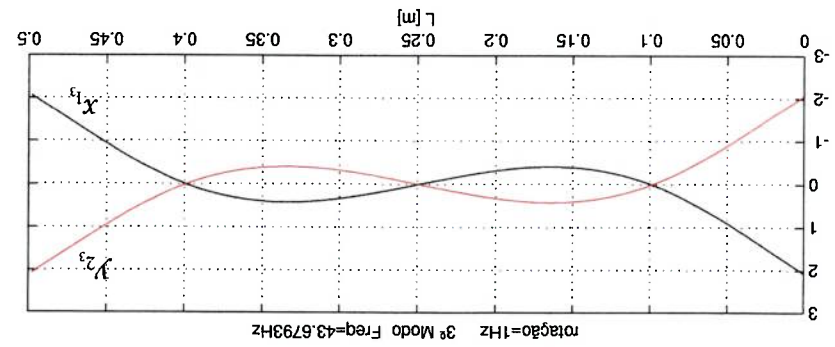
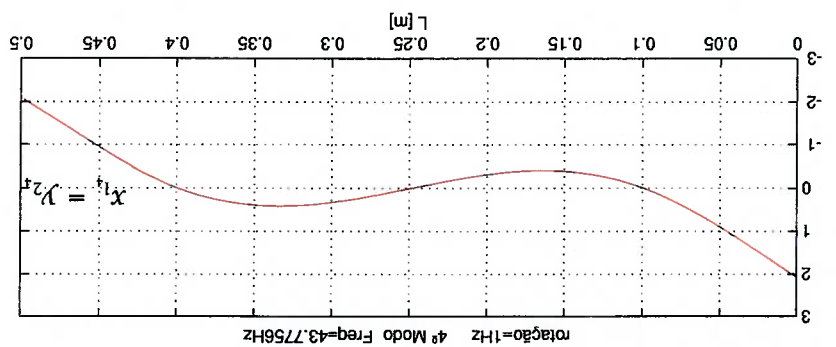
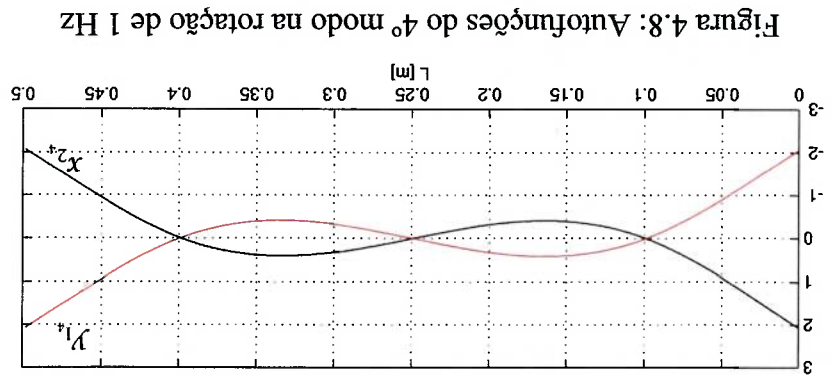
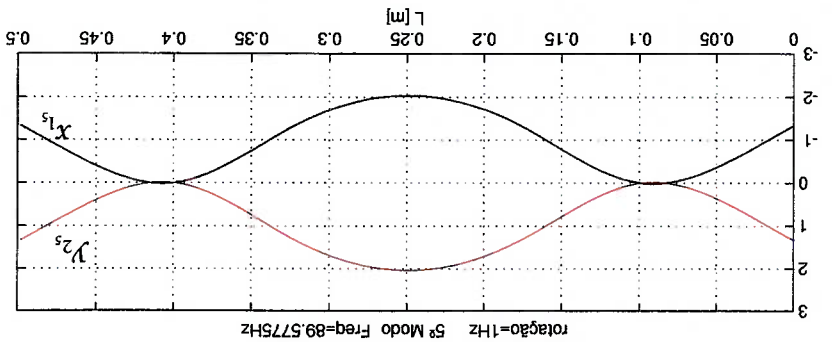
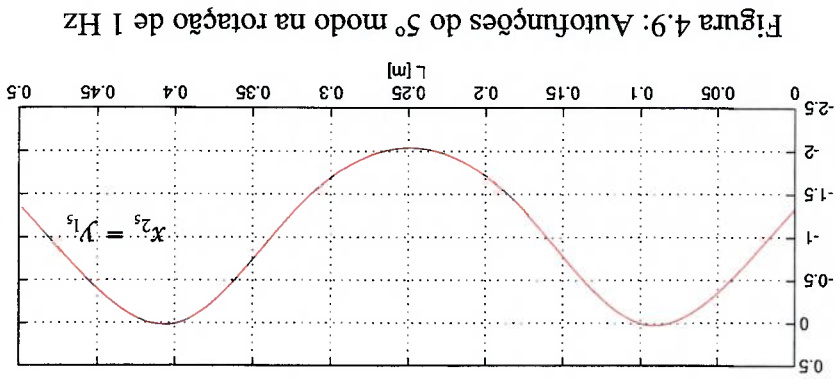


Figura 4.7: Autofunções do 3º modo na rotação de 1 Hz



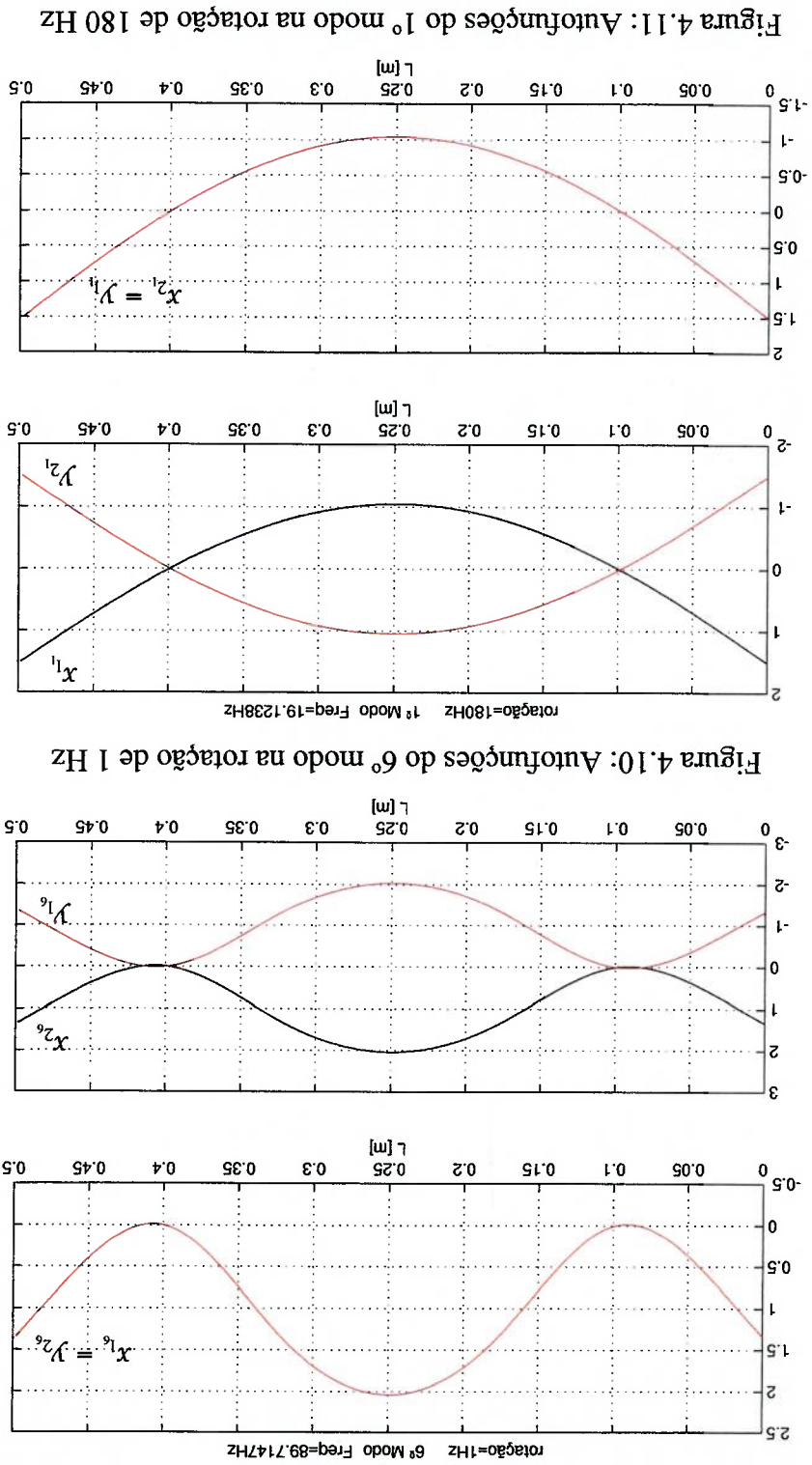


Figura 4.10: Autofunções do 6º modo na rotação de 1 Hz

Figura 4.11: Autofunções do 1º modo na rotação de 180 Hz

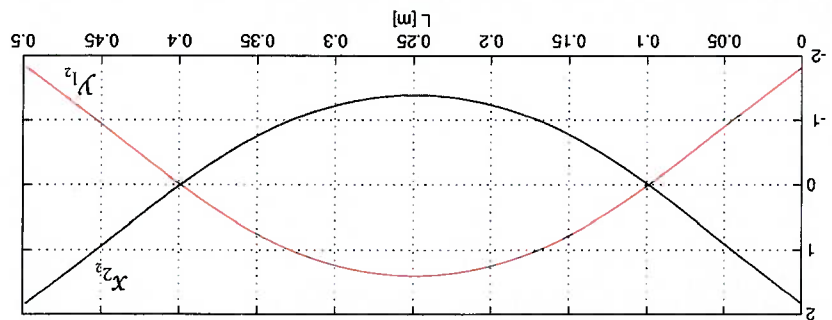
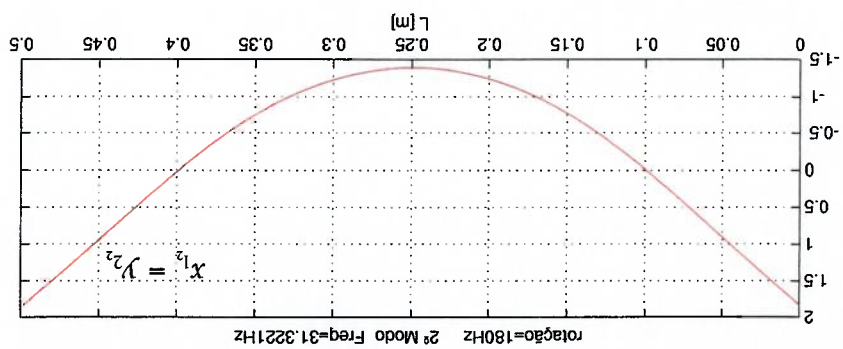


Figura 4.12: Autofunções do 2º modo na rotação de 180 Hz

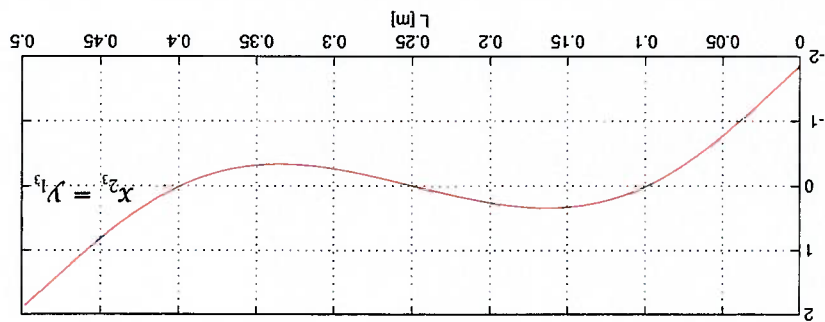
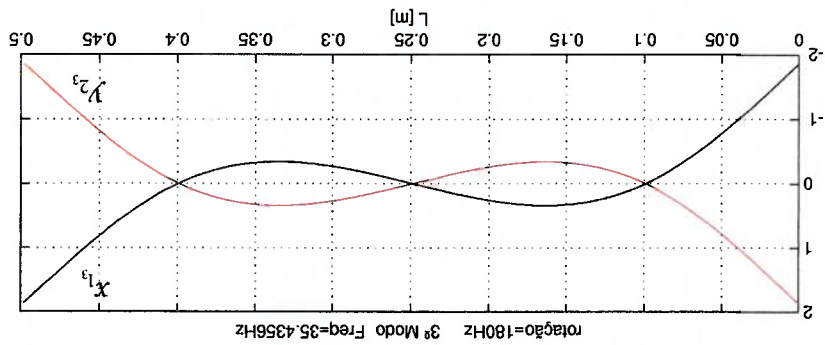


Figura 4.13: Autofunções do 3º modo na rotação de 180 Hz

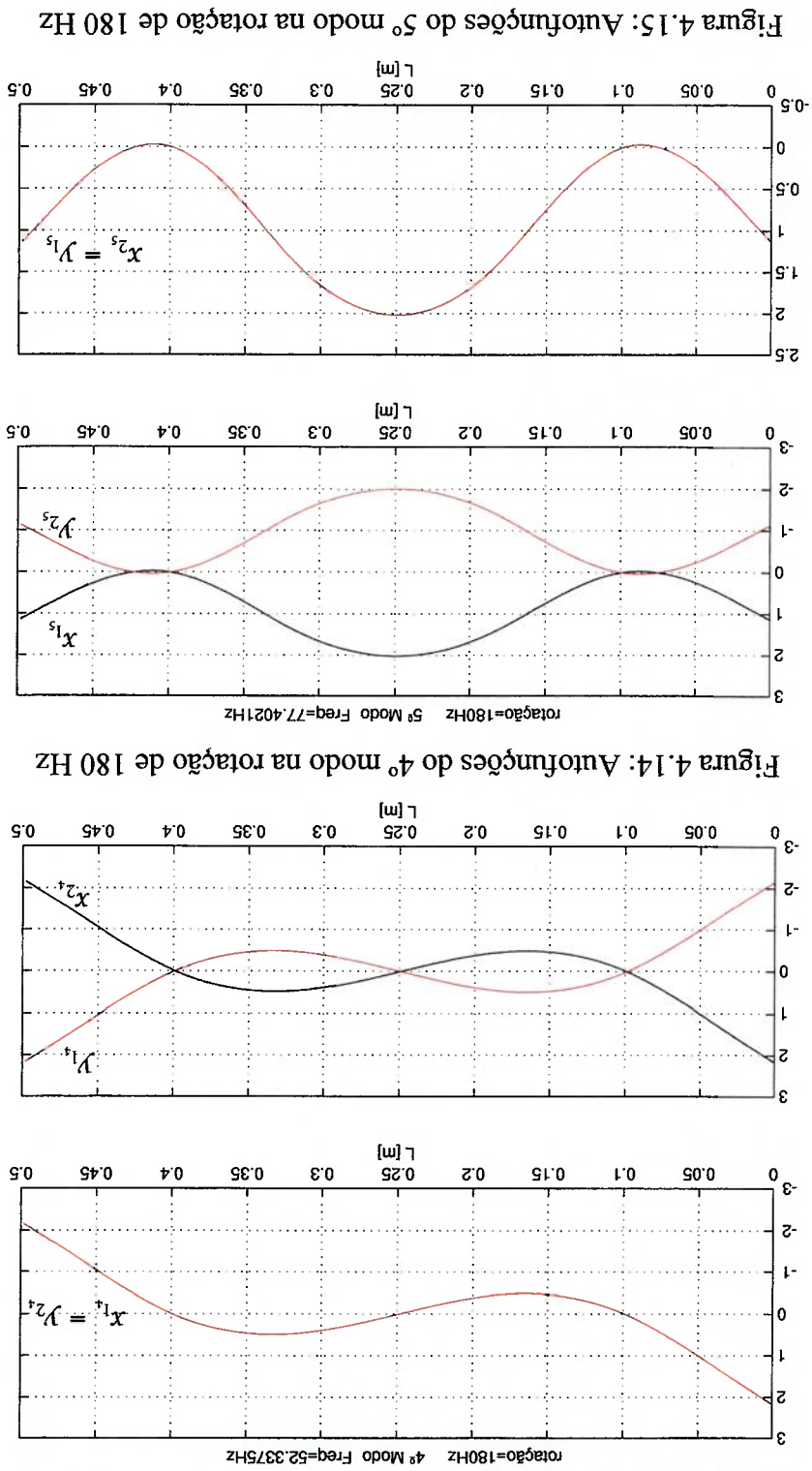


Figura 4.14: Autofunções do 4º modo na rotação de 180 Hz

Figura 4.15: Autofunções do 5º modo na rotação de 180 Hz

Uma coisa a observar nas autofunções é que os nós (pontos com autofunção nula), coincidem com os rolamentos devido a alta rigidez dos mesmos, especialmente se comparadas à alta flexibilidade do eixo.

4.5 Forças e deslocamentos

As forças e deslocamentos que serão usadas nas simulações seguintes serão descritas a seguir.

4.5.1 Forças de desbalanço

As forças de desbalanço serão modeladas como forças externas representadas por massas pontuais excêntricas nos quatro discos como na figura esquemática 4.17:

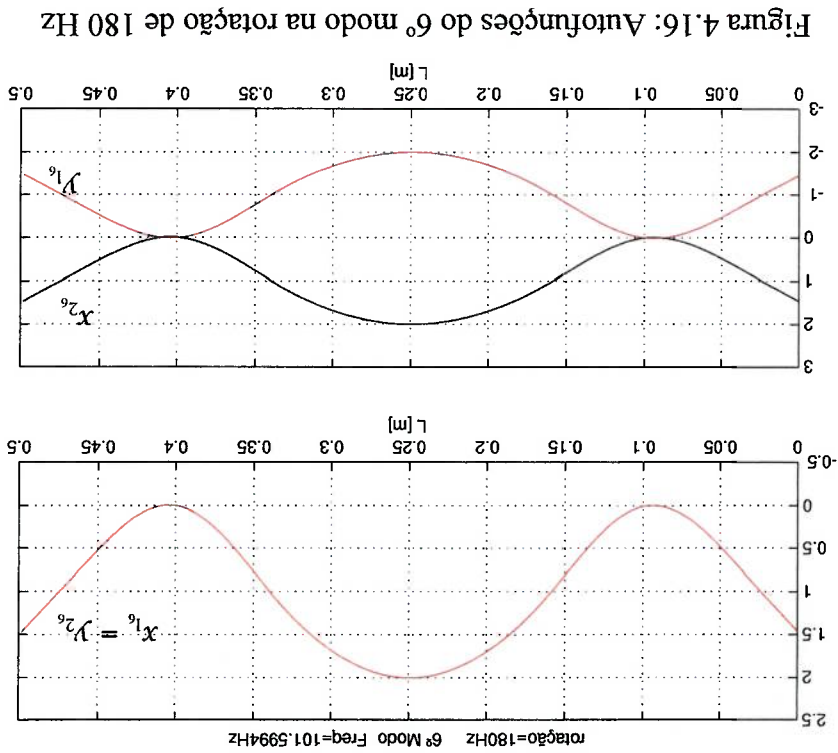


Figura 4.16: Autofunções do 6º modo na rotação de 180 Hz

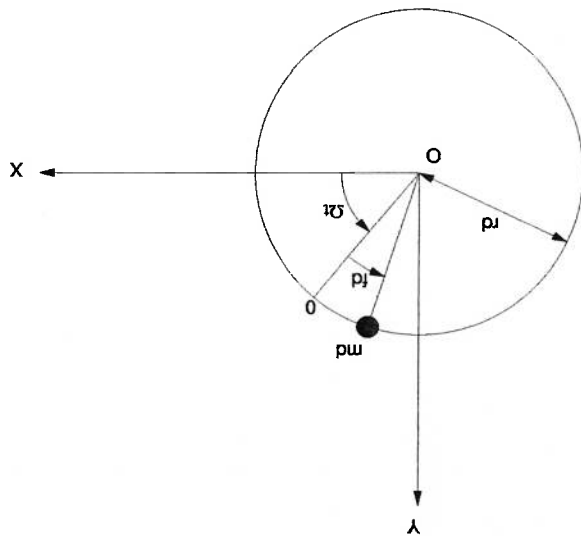


Figura 4.17: Desbalanceo

onde, m_d é a massa de desbalanceo, r_d o raio que será igual ao raio do disco onde serão colocadas as massas de balanceamento, f_d a fase medida a partir de um 0° arbitrário marcado no disco e Ω é a rotação.

Assim,

$$F_d^x(t) = m_d r_d \Omega^2 \cos(\Omega t + f_d),$$

$$F_d^y(t) = m_d r_d \Omega^2 \sin(\Omega t + f_d)$$

(4.2)

são as forças de desbalanceo nos eixos X e Y, respectivamente.

4.5.2 Forças dos atuadores magnéticos

Os atuadores magnéticos ativos só produzem forças de atração. Para se conseguir força em ambos os sentidos, colocam-se duas bobinas diametralmente opostas para cada eixo de atuação, definindo dois semi-eixos, um positivo e outro negativo, como na figura esquemática 4.18:

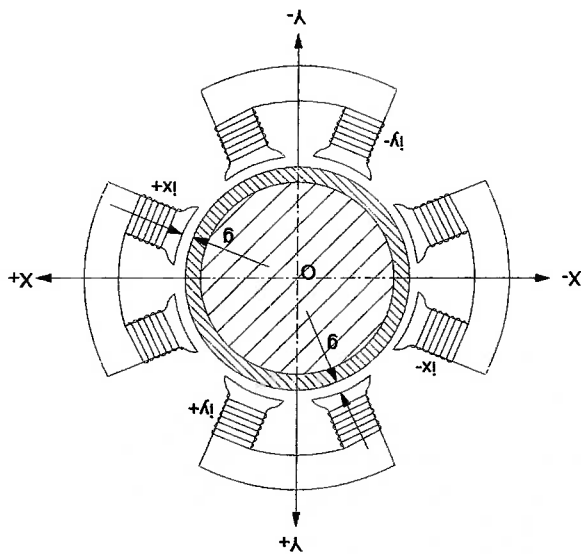


Figura 4.18: Esquema dos atuadores magnéticos

onde,

$ix+$, $ix-$, $iy+$ e $iy-$ são as correntes nas bobinas dos semi-eixos X positivo, X negativo, Y positivo e Y negativo respectivamente. A corrente total de atuação para cada eixo é retificada de tal forma que somente a parcela positiva (semi-ciclo positivo) é enviada ao semi-eixo positivo e, analogamente, somente a parcela negativa (semi-ciclo negativo) é enviada ao semi-eixo negativo dado que, para o atuador, independentemente do sinal da corrente o mesmo exercerá força de atração.

g é o entreferro ou *gap*.

A lei de força dos atuadores é quadrática com a corrente e inversamente quadrática com o *gap*. Assim:

$$F_{x^+}(t) = \frac{K_{m,i^+}(t)^2}{(g - X(t))^2}; \quad F_{x^-}(t) = -\frac{K_{m,i^-}(t)^2}{(g + X(t))^2} \quad (4.3)$$

onde: F_{x^+} , F_{x^-} são as forças nos semi-eixos X^+ e X^- , respectivamente e K_m

a constante ou ganho do atuador. Expressão análoga vale para o eixo Y .

Para o atuador em questão, obteve-se a curva de força da figura 4.19, com o

disco centrado e para o *gap* de projeto de 1,3 mm:

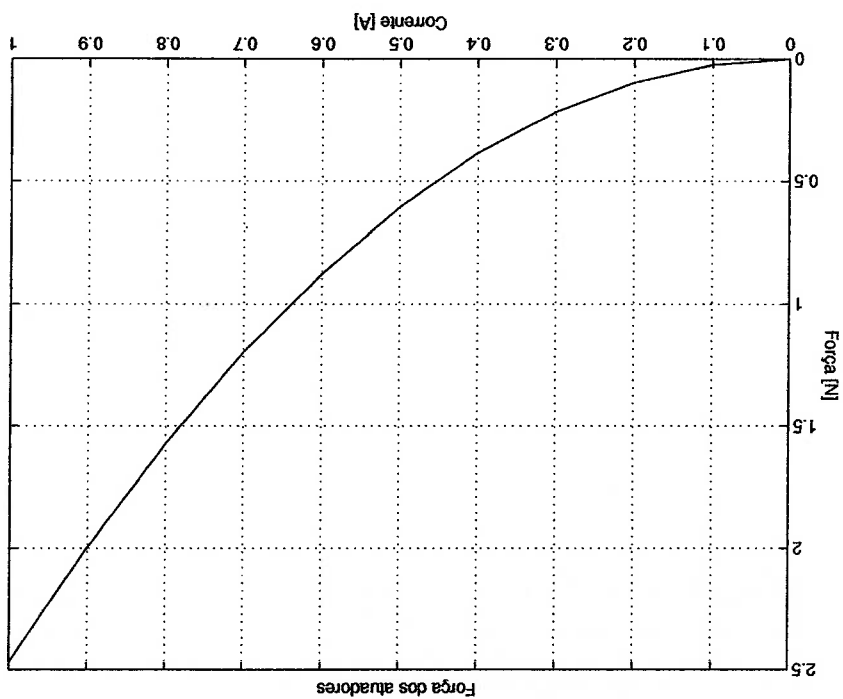


Figura 4.19: Força dos atuadores

Com esta curva, obtém-se a constante magnética: $K_m = 4,171 \times 10^{-6} \frac{\text{N.m}^2}{\text{A}^2}$.

4.5.3 Deslocamentos de interesse

Como já foi visto, os atuadores encontram-se nos discos d1 e d4. Os deslocamentos X e Y destes discos saem diretamente da primeira à quarta linhas do vetor d . Estes deslocamentos são importantes para as simulações que levam em conta a dependência inversamente quadrática com os mesmos, dos atuadores.

Os deslocamentos X e Y dos anéis as1 e as2, adjacentes aos discos d1 e d4 respectivamente, onde situam-se os sensores de deslocamento, saem da quinta à oitava linha do vetor d . Ocorre que, devido à falta de espaço causada pela cabeceira das bobinas, o suporte dos sensores foi deslocado de 45° em relação aos eixos X e Y como se vê na figura 4.20:

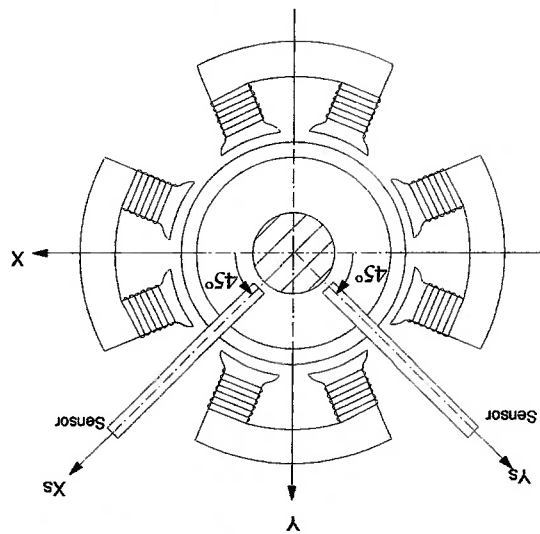


Figura 4.20: Posicionamento dos sensores de deslocamento

Assim, faz-se necessária a seguinte correção:

$$K_{S_{asi}} = \frac{X_{asi} + Y_{asi}}{2 \cdot \cos(45)}, \quad Y_{S_{asi}} = \frac{Y_{asi} - X_{asi}}{2 \cdot \cos(45)} \text{ ou,}$$

$$K_{S_{asi}} = \frac{X_{asi} + Y_{asi}}{\sqrt{2}}, \quad Y_{S_{asi}} = \frac{Y_{asi} - X_{asi}}{\sqrt{2}}$$

O mesmo é válido para o anel as2.

4.6 Respostas em frequência

Algumas curvas de resposta em frequência serão obtidas por simulação numérica e, posteriormente, serão comparadas com os resultados experimentais.

4.6.1 Força em apenas um eixo

Nas curvas de 4.21 a 4.28, utiliza-se como excitação uma força unitária linearizada no eixo X do atuador do disco d1 e as saídas são os deslocamentos do

próprio disco (X_{dl} , Y_{dl}) e os deslocamentos do anel adjacente ao mesmo nas direções dos dois sensores de deslocamento (X_{asl} , Y_{asl}).

Utilizou-se, para tanto, o comando *freqresp* do MATLAB™. Foi adotado um coeficiente de amortecimento modal $\xi = 1,00 \times 10^{-3}$ para todos os modos e as curvas foram feitas para a primeira e a segunda rotações críticas.

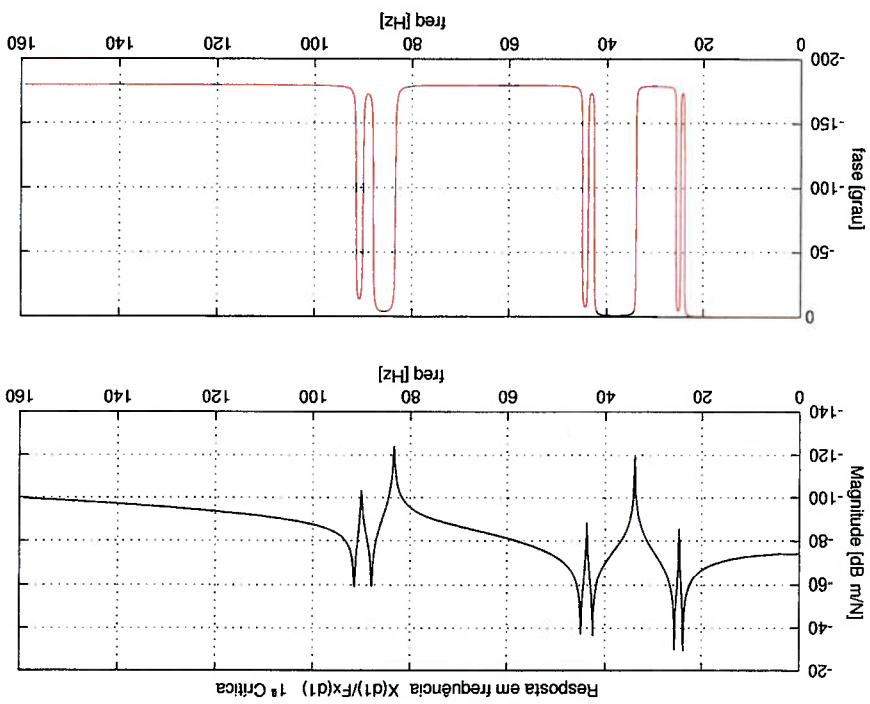


Figura 4.21: Resposta em freq. com força em X_{dl} , deslocamento em X_{asl} 1ª crítica

Figura 4.22: Resposta em freq. com força em X_{d1} , deslocamento em X_{s1} 1ª crítica

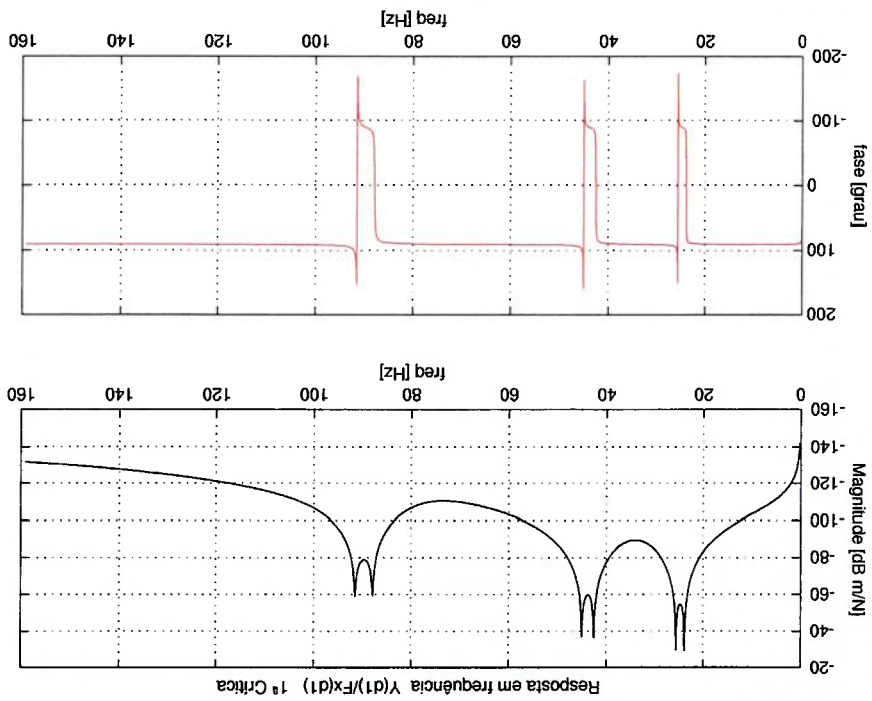


Figura 4.23: Resposta em freq. com força em X_{d1} , deslocamento em X_{s1} 1ª crítica

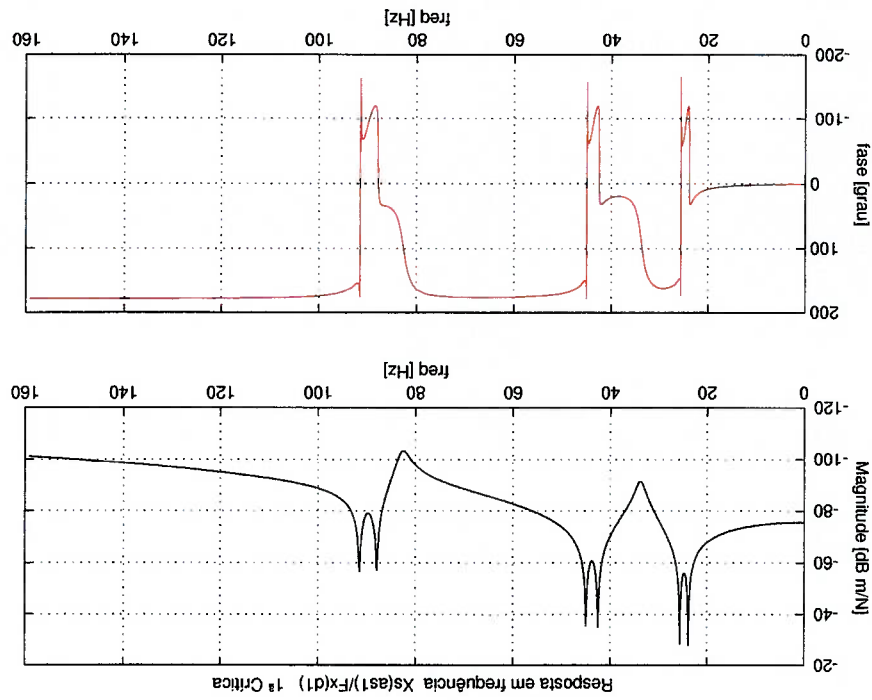


Figura 4.24: Resposta em freq. com força em X^{dl} , deslocamento em Y^{asl} , 1ª crítica

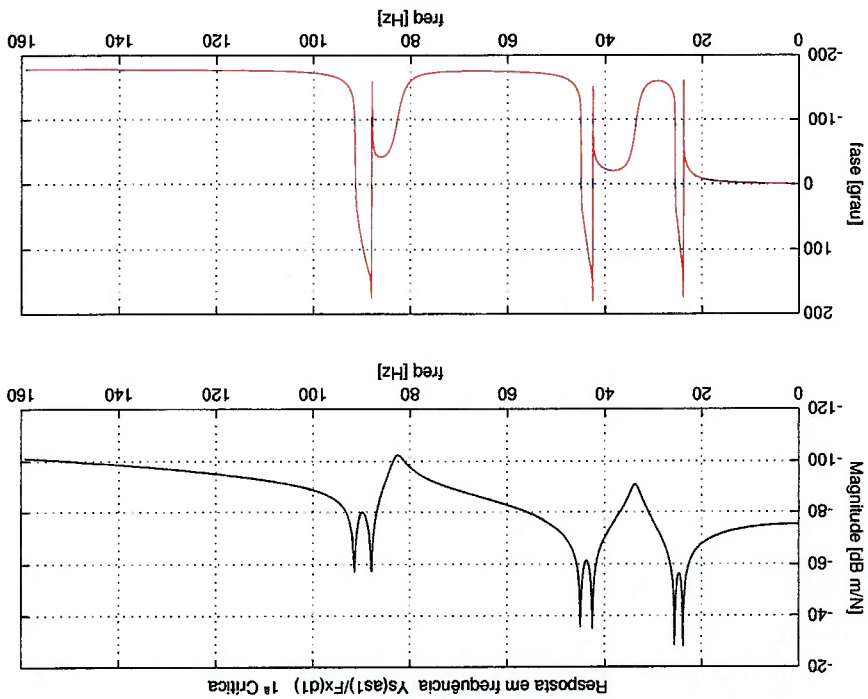


Figura 4.25: Resposta em freq. com força em X^{dl} , deslocamento em X^{dl} , 2ª crítica

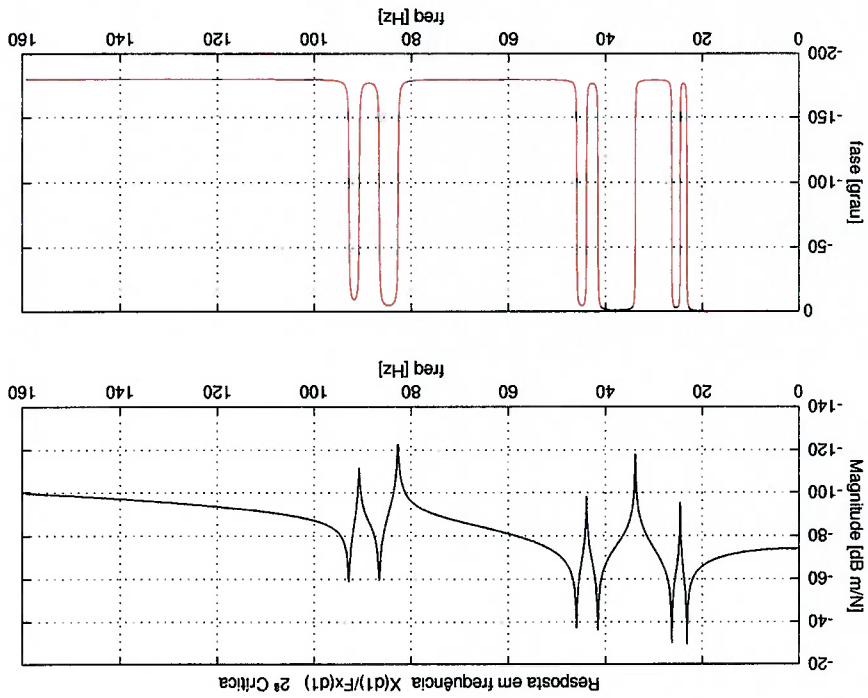


Figura 4.26: Resposta em freq. com força em X^{pl} , deslocamento em X^{pl} 2ª crítica

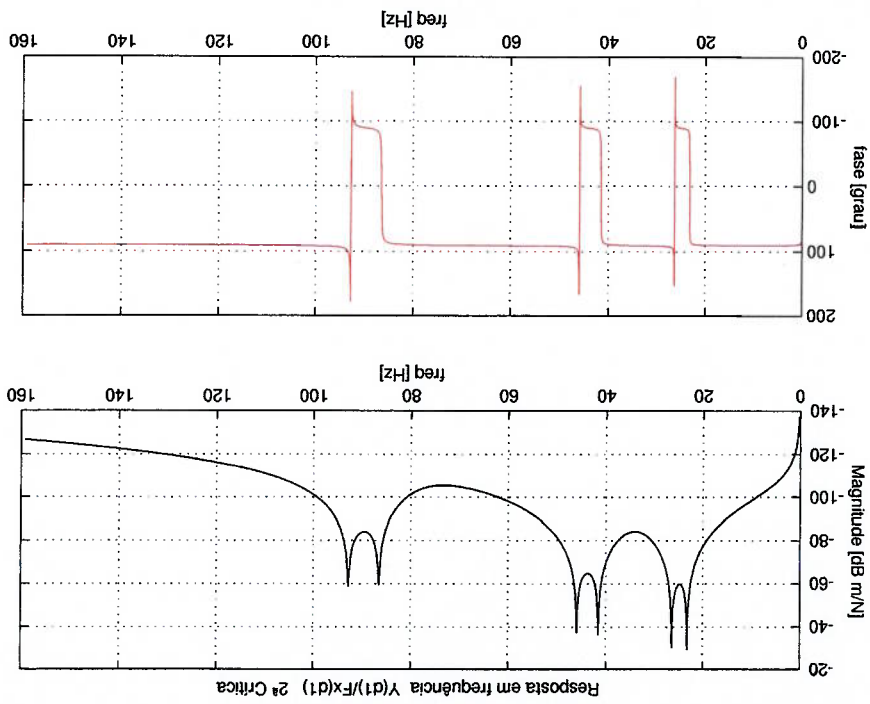
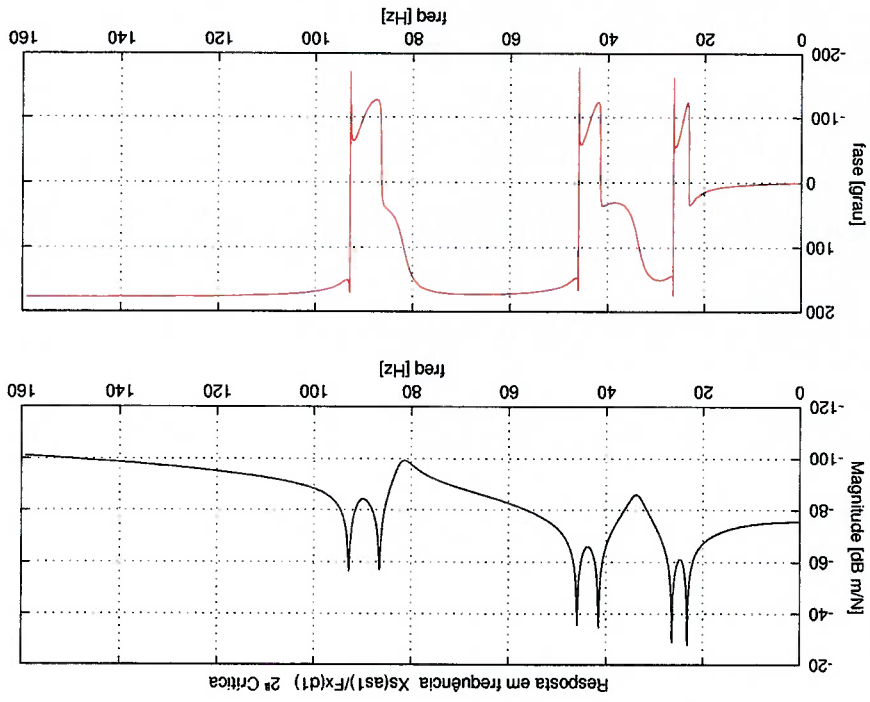


Figura 4.27: Resposta em freq. com força em X^{pl} , deslocamento em X^{ast} 2ª crítica



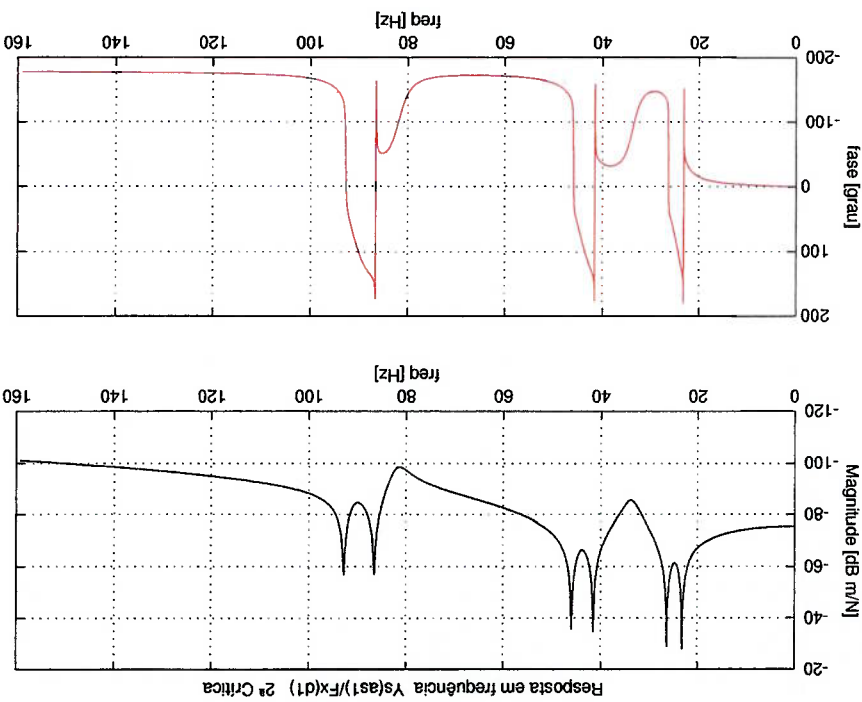


Figura 4.28: Resposta em freq. com força em X^{di} , deslocamento em Y_s^{ast} , 2ª crítica

Nota-se que, excitando o rotor com uma força em apenas um eixo, excitam-se os seis modos, os três diretos e os três retrógrados.

4.6.2 Força girante

Outra simulação em frequência, é a excitação do rotor, através dos atuadores, por uma força girante, ou fasor, no mesmo sentido ou em sentido contrário ao da rotação. Para se gerar uma força girante no mesmo sentido da rotação (direta), deve-se ter uma força cossenoidal no eixo X e uma força senoidal em Y ou,

$$F_x^X(t) = F_g \cdot \cos(\Omega t)$$

$$F_y^Y(t) = F_g \cdot \sin(\Omega t)$$

Para uma força girante no sentido contrário, inverte-se o sinal da senóide em Y ou,

$$F_x(t) = F_g \cdot \cos(\Omega t)$$

$$F_y(t) = -F_g \cdot \sin(\Omega t)$$

Dado que o comando *freqresp* do MATLAB utiliza resposta senoidal, para utilizá-lo com o intuito acima, deve-se lembrar que:

$$L(\sin(\Omega t)) = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$L(\cos(\Omega t)) = \frac{s}{s^2 + \Omega^2}$$

onde L denota a transformada de Laplace e Ω a frequência. Como, para se executar a resposta em frequência em regime permanente, basta fazer $s = i\Omega$, onde i é a unidade imaginária, no domínio da frequência a função cossenoidal só difere da senoidal de um produto por i . Assim, multiplicando por i os termos em x da matriz \mathbf{B} , obtém-se para este eixo uma resposta em frequência cossenoidal. Para inverter-se o sentido da rotação multiplica-se os termos em y da matriz \mathbf{B} por -1 .

Desta forma, executa-se a resposta em frequência com entrada de força unitária cossenoidal em X obtendo-se como saídas duas curvas de deslocamentos em X e Y . Depois, executa-se a resposta em frequência com entrada de força unitária senoidal em Y , positiva para força girante direta ou negativa para força girante retrógrada, obtendo-se, também, como saídas, duas curvas de deslocamentos em X e Y . Para se obter a curva final para cada eixo, utilizando o princípio da superposição dos efeitos, somam-se as duas curvas de saída, correspondentes a cada uma das duas entradas, do mesmo eixo.

Nas curvas de 4.29 a 4.32 executa-se tal procedimento com a força girante (F_g) no disco $d1$ e leituras em X_{gs1} e Y_{gs1} do anel asl , na segunda rotação crítica.

Figura 4.29: Resposta em freq. força girante direta em dl, deslocamento em X_{s1}

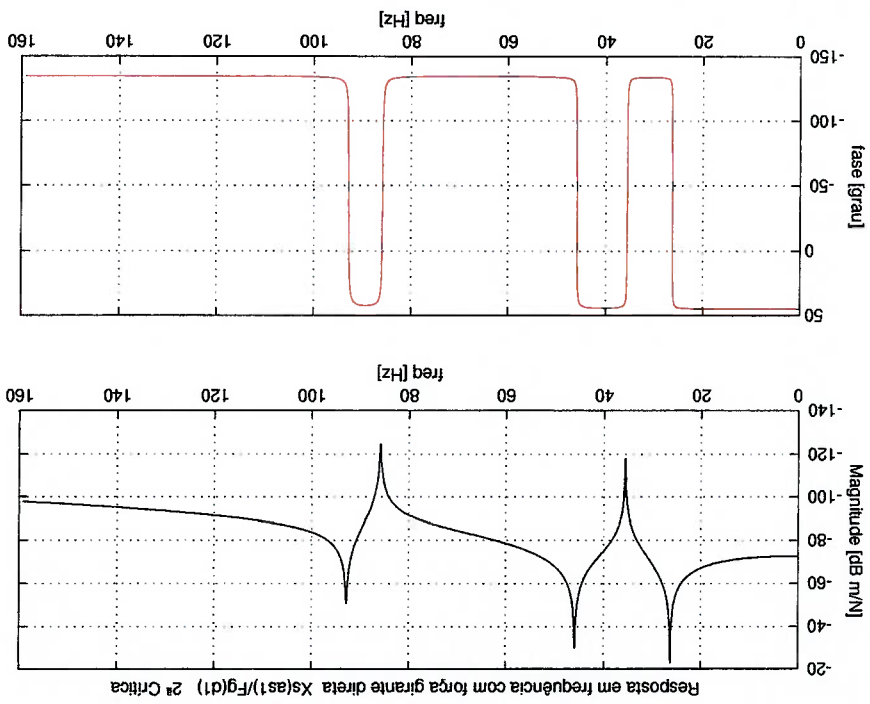
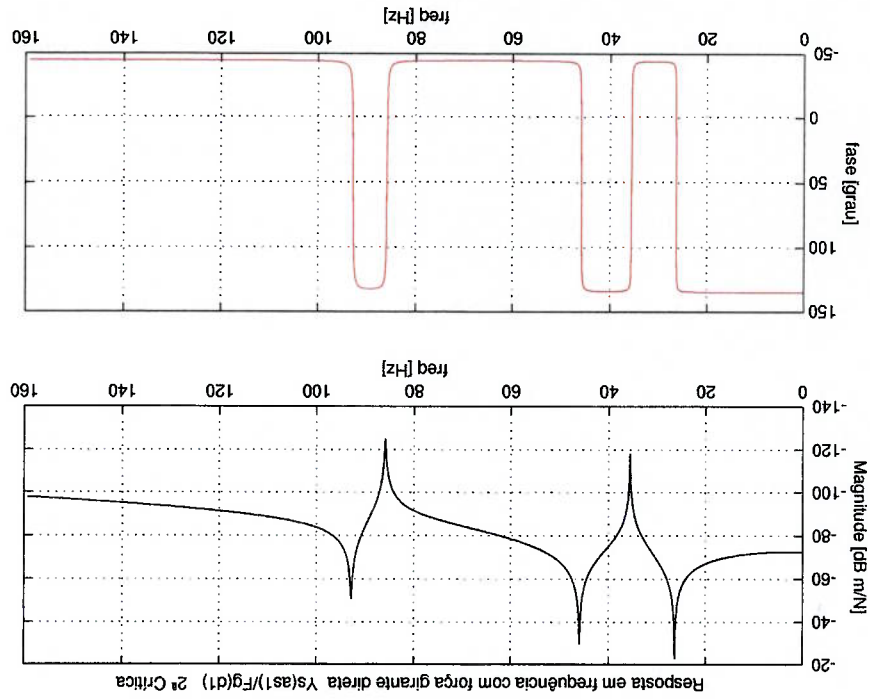


Figura 4.30: Resposta em freq. força girante direta em dl, deslocamento em Y_{s1}



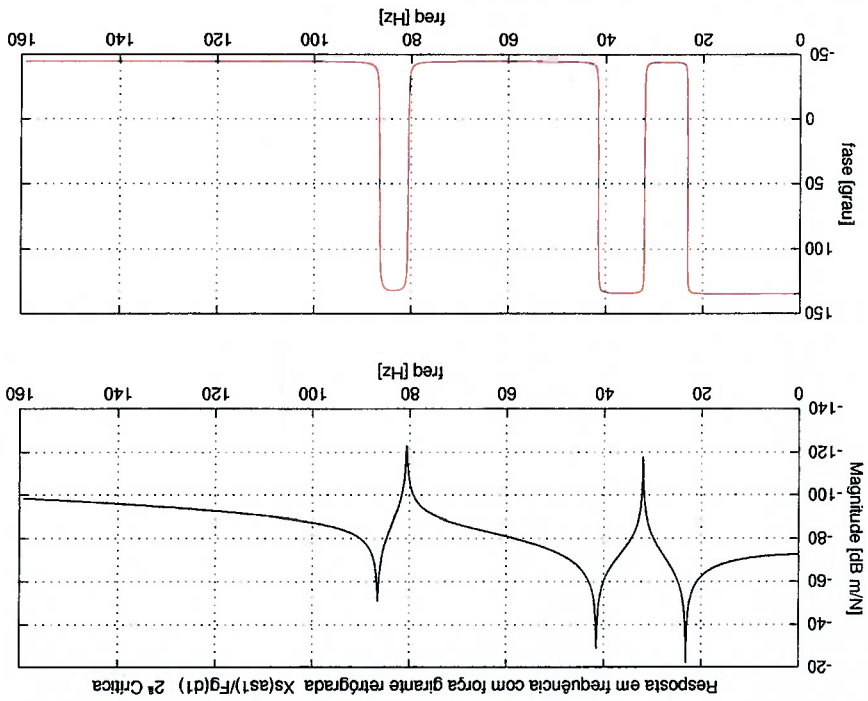


Figura 4.31: Resposta em freq. força girante retrógrada em d1, desloc. em Xs^{ds1}

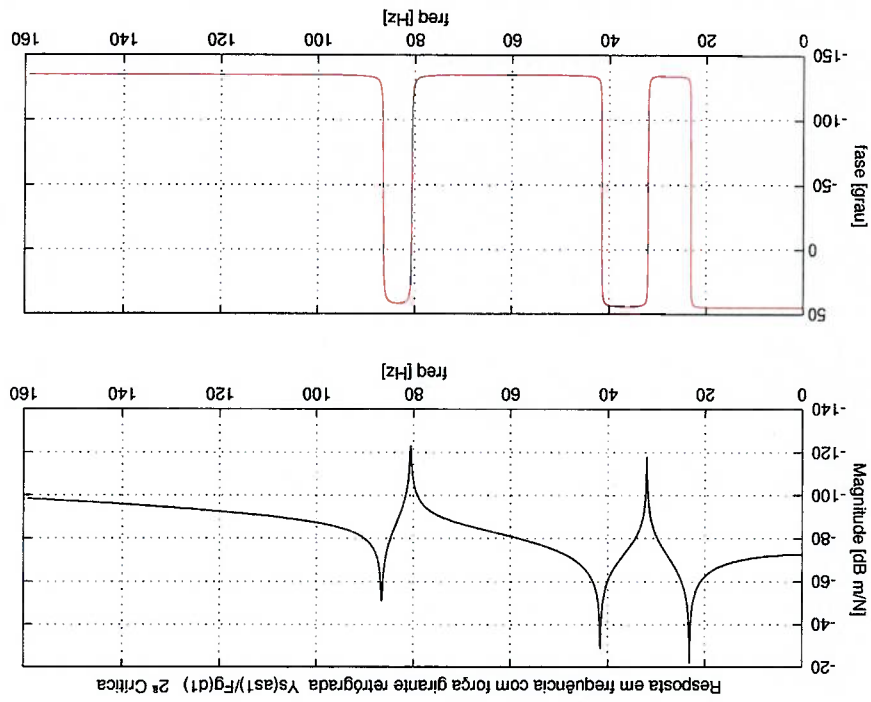


Figura 4.32: Resposta em freq. força girante retrógrada em d1, desloc. em Vs^{ds1}

Observa-se que, como era de se esperar, a força girante direta só excita os modos diretos. Este é o caso das forças de desbalanço, cuja resposta, nas rotações

críticas, se pretende minimizar neste trabalho. Por outro lado, uma força girante retrograda só excita os modos retrogrados. Tal fato mostra que o modelo está consistente.

4.7 Simulação no tempo da resposta ao desbalanço

Montou-se um modelo no programa Simulink™ para simular a resposta a configurações de desbalanço impostas ao modelo de rotor aqui desenvolvido. Como já foi dito, forças pontuais de desbalanço poderão ser colocadas nos quatro discos além de forças nos atuadores magnéticos dos discos d1 e d4. A figura 4.33 mostra um macro diagrama de blocos do modelo de simulação:

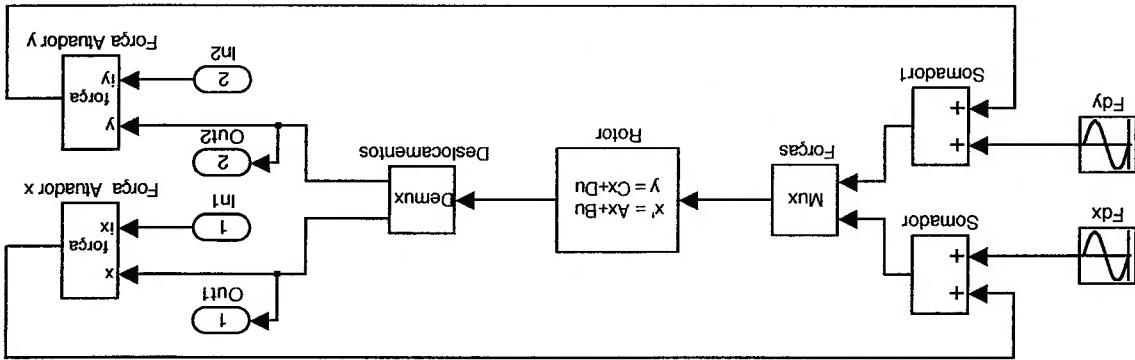


Figura 4.33: Modelo de simulação no tempo

Na figura 4.33 o bloco Rotor representa o modelo de rotor através das matrizes A , B e C (matriz D nula) que definem um sistema linear com o comando ss no Matlab™. Os blocos Fdx e Fdy são geradores senoidais que representam as componentes nos eixos X e Y , respectivamente, da força de desbalanço de acordo com as equações 4.2. O bloco Mux multiplexa convenientemente, de acordo com a matriz B , as oito entradas de força, a saber, as componentes X e Y das forças nos quatro discos. Na figura consta apenas um disco mas no modelo completo estão incluídos os quatro. Da mesma forma, o bloco Demux demultiplexa os oito deslocamentos de saída de acordo com a matriz C . Estes deslocamentos estarão disponíveis, para plotagem ou serem utilizados por outras rotinas externas, nas portas de saída $Out1$ e $Out2$. Os blocos chamados Força

utilizam como entradas os deslocamentos em X e Y de um disco onde há atuadores magnéticos e as correntes nos respectivos eixos, i_x e i_y , que estarão disponíveis nas entradas $In1$ e $In2$, as quais podem ser geradas dentro do próprio Simulink™ ou enviadas por uma rotina externa e geram as forças nos atuadores magnéticos, de acordo com as equações 4.3, que serão somadas, nos somadores, às forças de desbalanço do eixo correspondente.

As respostas ao desbalanço foram calculadas nos eixos X^{as2} e Y^{as2} na primeira e segunda rotações críticas com as configurações de desbalanço de acordo com a tabela 4.4 e nenhuma força de atuação magnética. Adotou-se um coeficiente de amortecimento modal $\xi = 1 \times 10^{-3}$ para todos os modos. Utilizou-se como algoritmo de integração o *ode4* do Simulink™, o qual utiliza uma fórmula explícita de Runge-Kutta. O passo de integração (fixo) utilizado, foi de 1×10^{-3} s.

Tabela 4.4: Configurações de Desbalanço para simulação

Disco	1ª rotação crítica			2ª rotação crítica		
	md [Kg]	rd [m]	fd [°]	md [Kg]	rd [m]	fd [°]
1	1×10^{-4}	30×10^{-3}	0	1×10^{-4}	30×10^{-3}	0
2	1×10^{-4}	30×10^{-3}	180	1×10^{-4}	30×10^{-3}	180
3	1×10^{-4}	30×10^{-3}	180	1×10^{-4}	30×10^{-3}	0
4	1×10^{-4}	30×10^{-3}	0	1×10^{-4}	30×10^{-3}	180

Da tabela 4.4 e das figuras que mostram as autofunções do segundo modo (1ª crítica) e do quarto modo (2ª crítica), pode-se perceber que as fases dos desbalanços foram escolhidas de maneira a excitar o máximo possível os respectivos modos e, assim, obter a máxima resposta nas críticas. As figuras 4.34 e 4.35 mostram a resposta ao desbalanço da tabela 4.4 na primeira crítica, no tempo e a órbita ($X \times Y$) da mesma resposta, respectivamente. As figuras 4.36 e 4.37 fazem o mesmo para a segunda crítica.

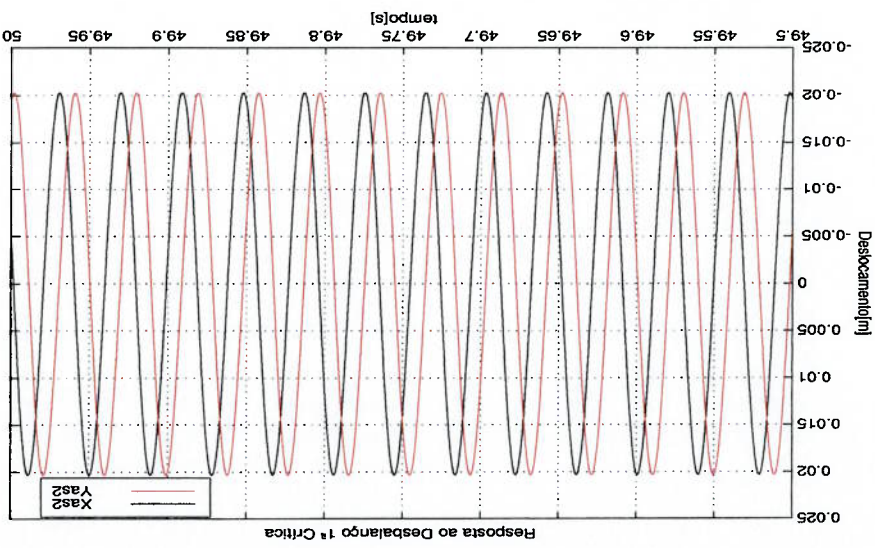


Figura 4.34: Resposta ao desbalanço na 1ª crítica

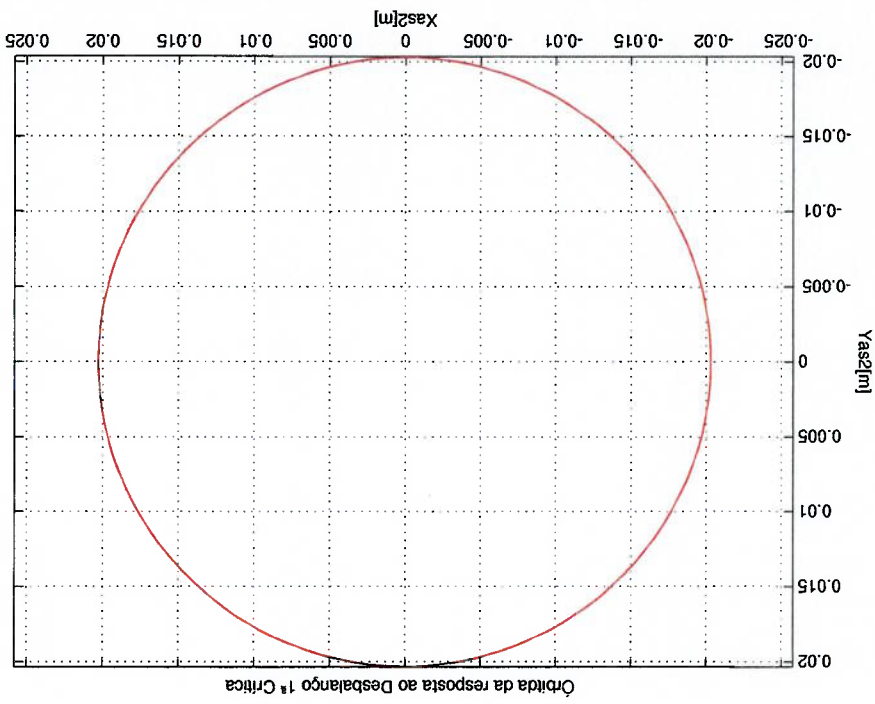


Figura 4.35: Órbita da resposta ao desbalanço na 1ª crítica

Nas figuras acima, foram simulados 50 s no tempo para que se atingisse o tempo de acomodação necessário para se considerar somente a resposta em regime permanente dados os baixos coeficientes de amortecimento modais. Foram plotados os últimos 0.5 s de simulação. Nota-se que, para estas configurações de desbalanço e coeficientes de amortecimento, as respostas são demasiadamente grandes, em torno

Figura 4.37: Órbita da resposta ao desbalanço na 2ª crítica

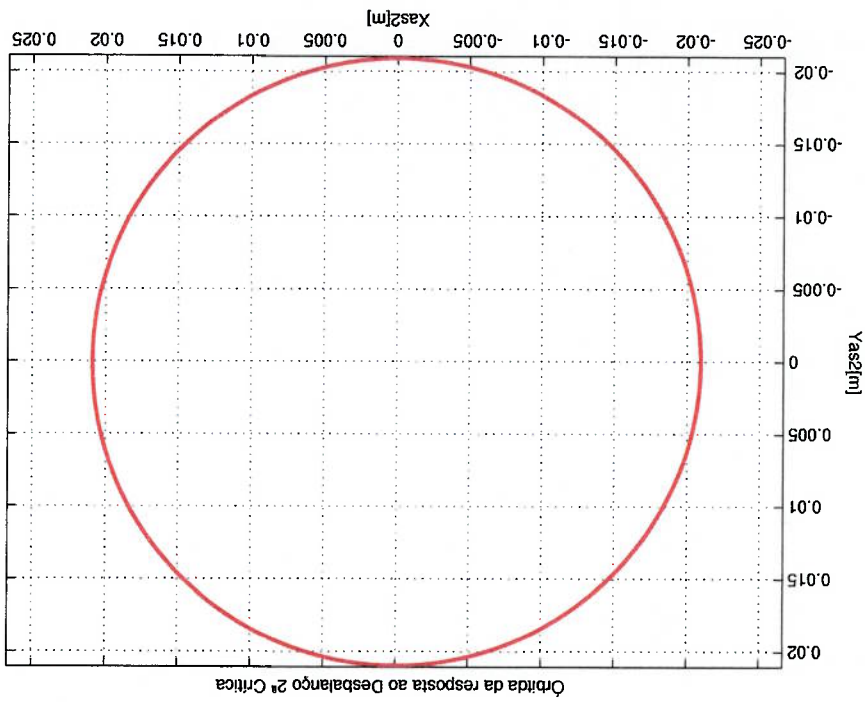
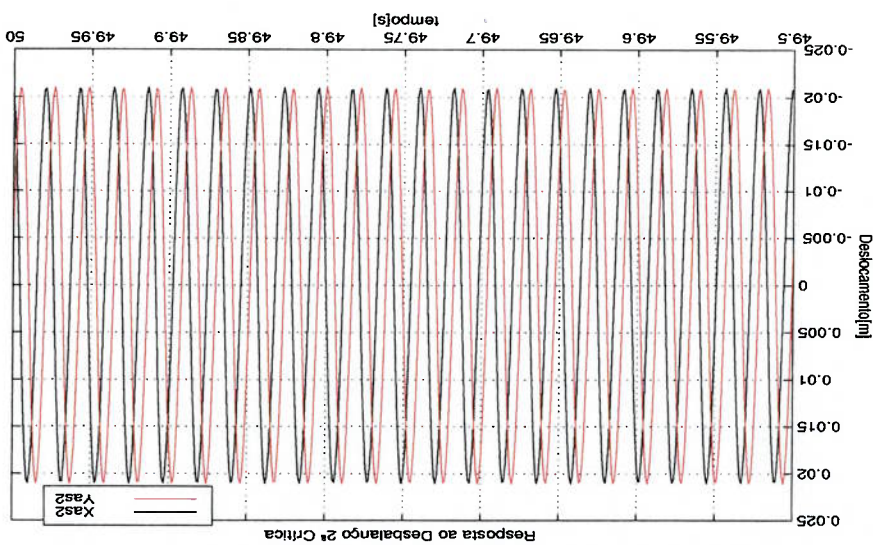


Figura 4.36: Resposta ao desbalanço na 2ª crítica



de 20 mm, o que faria com que os discos batessem nos estatores dos mancais considerando o *gap* de 1,3 mm. É esta resposta que se tentará minimizar a seguir.

4.8 Otimização da passagem pela crítica com atuação magnética

Agora, além das configurações de desbalanço da tabela 4.4, devem ser determinadas as histórias das correntes de entrada nos atuadores magnéticos, como no modelo esquemático da figura 4.33, dos discos d1 e d4, que minimizem as respostas ao desbalanço nas duas primeiras velocidades críticas. O que se propõe é a determinação dessas correntes como variáveis de controle em malha aberta, ou seja, sem nenhuma realimentação de estados, quer seja, através de medições diretas ou, utilizando observadores.

4.8.1 Controlabilidade e observabilidade

Observando as curvas das autofunções percebe-se que os atuadores e sensores não se encontram em nós de nenhuma delas o que deve garantir a ausência de problemas de controlabilidade e observabilidade. Apesar disto, investigando, obtêm-se para a faixa de rotações de interesse (até 100 Hz):

$$\begin{aligned} \text{Ordem do sistema : } & 12 \\ \text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{11}B] &= 12 \\ \text{rank}[C', A'C', (A')^2C', \dots, (A')^{11}C'] &= 12 \end{aligned}$$

As condições acima (Schultz; Melsa, 1967) garantem a controlabilidade e observabilidade do sistema, ressaltando que as mesmas são válidas para sistemas lineares o que não ocorre com os atuadores.

4.8.2 Rotina de otimização

Para dar conta da proposta da seção 4.8, montou-se uma rotina de otimização no Matlab™ como no diagrama de blocos:

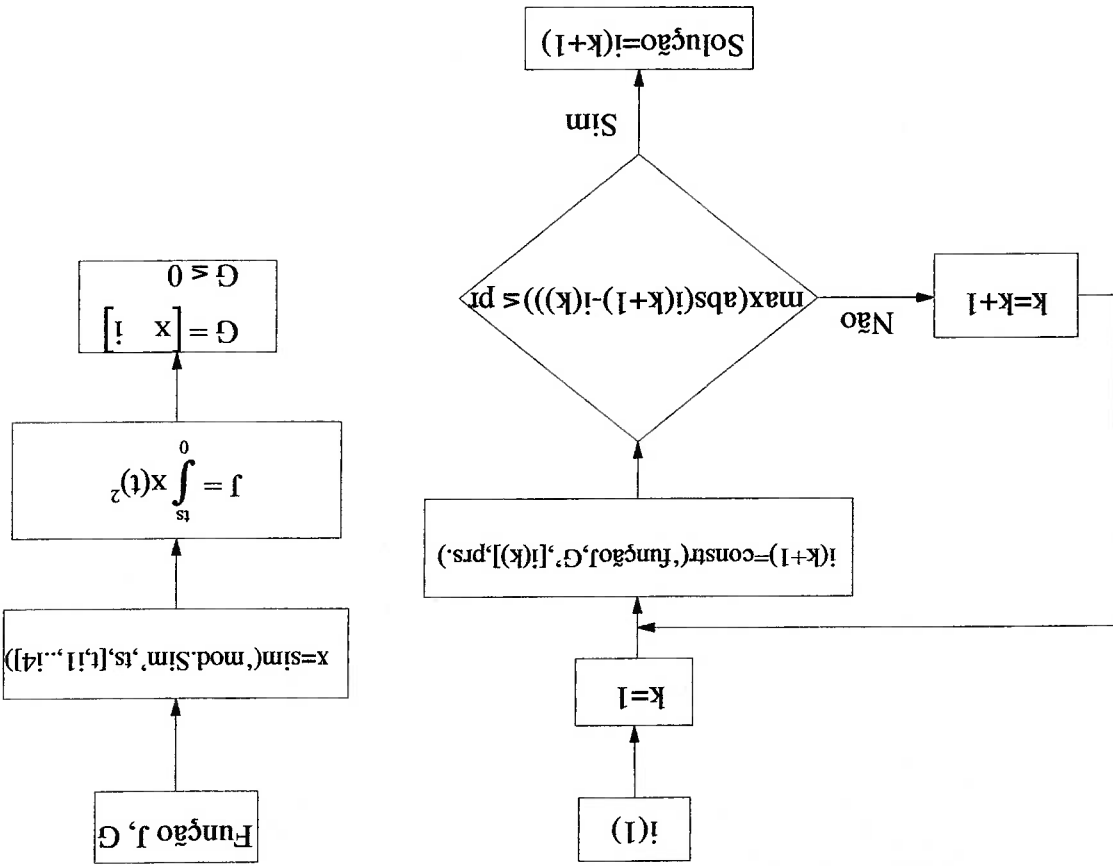


Figura 4.38: Diagrama de blocos da rotina de otimização

O diagrama da esquerda representa a rotina principal e o da direita representa a função que define o índice de performance (IP) ou funcional a ser minimizado (J). As funções $i(t)$, que são variáveis de controle, são as correntes que serão enviadas aos atuadores dos discos $d1$ e $d4$. As funções $x(t)$, que são variáveis de estado, representam os deslocamentos destes discos e/ou os deslocamentos dos anéis dos sensores.

A rotina trabalha da seguinte maneira:

Adotam-se correntes iniciais $i(1)$. As correntes seguintes $i(k+1)$ serão calculadas com a função *constr* do Matlab™. Essa função encontra os valores de $i(k+1)$ que minimizam o IP J (escalar) sujeito a vínculos de desigualdade G, que é um vetor ou matriz cujos elementos podem conter vínculos de contorno das variáveis de controle e/ou de estados. Esses vínculos devem ser escritos levando em conta que a função *constr* sempre minimizará J respeitando a restrição $G \leq 0$, onde 0 é a matriz

nula de mesma ordem que G . Dentro do comando *constr* deve ser definido o nome da função que calcula J e G , no diagrama chamada de função J, G , os valores iniciais que serão mandadas à mesma, $i(k)$, além de precisões, prs , para J e $i(t)$. O comando *constr* só permite o cálculo de uma variável $i(t)$ para minimizar J . Não obstante, $i(t)$ pode ser um vetor tão grande quanto se queira guardando, obviamente, restrições de memória e tempo de processamento. Desta forma, se houver mais de uma função $i(t)$, como é o caso aqui, pois existem quatro atuadores, concatenam-se todas em um só vetor $i(t)$ e, depois, dentro da função J, G desconcatenam-se convenientemente as várias $i_j(t)$ de $i(t)$. Dentro da função J, G , os deslocamentos x são obtidos através do comando *sim* do Matlab™ que realiza a simulação do modelo de rotor e representa os vínculos dinâmicos do problema de controle ótimo. Tal comando deve conter o nome do modelo Simulink™ usado, no diagrama, mod.Sim, o tempo final de simulação, ts e uma matriz que contém na primeira coluna o vetor tempo, t , que deve ser pré-determinado numa pré-simulação com o modelo mod.Sim o qual já deve conter o passo e o algoritmo de integração adequados às simulações que serão usadas na otimização. As outras colunas da matriz são as correntes $i(t)$ que são vetores que terão a mesma dimensão do vetor tempo. Os deslocamentos x sairão pelas portas Out como no modelo da figura 4.33 e as correntes entrarão pelas portas In da mesma figura. De posse dos deslocamentos, calcula-se J que é a integral no tempo de 0 até ts dos quadrados dos deslocamentos dos discos $d1$ e $d4$ e dos anéis $as1$ e $as2$ que, por sua vez, são as respostas às configurações de desbalanceamento que estão presentes no mod.Sim. Neste trabalho não se utilizou vínculos de contorno de tal sorte que a matriz G é nula. Uma vez obtidas $i(k+1)$, que minimizam J , pela função *constr*, calcula-se a norma infinita da diferença da solução $i(k+1)$ e $i(k)$ como no diagrama. No mesmo, max é máximo e abs o módulo ou valor absoluto. Se esta norma for superior a determinado valor ($1 \cdot 10^{-10}$), reinicia-se o processo com a solução $i(k+1)$. Isso auxilia, pois há limitações no número máximo de cálculos de valores de J na função *constr*. Além disso, se o chute inicial não for bom, a mesma função não consegue bons resultados o que torna necessárias novas otimizações.

A função *constr*, utiliza um método de programação quadrática sequencial onde um sub problema de programação quadrática é resolvido e estimativas do hessiano e do lagrangiano são atualizadas.

É interessante notar que a função *constr* é concebida para a minimização de funções não lineares, ou seja, otimização de parâmetros. Porém, utilizada como no diagrama da figura 4.38 funciona para a minimização de funcionais submetidos a vínculos dinâmicos já que cada elemento dos vetores $i(k)$ são um ponto na história temporal de $i(t)$, ou seja, otimizam-se funções $i(t)$ que minimizam o funcional J de acordo com as equações diferenciais do rotor submetido a forças de desbalanço.

4.8.3 Resultados obtidos

Os parâmetros de simulação utilizados no modelo mod.sim, bem como os desbalanços foram os mesmos da seção 4.7 ou seja, estudou-se a passagem pelas primeira e segunda velocidades críticas.

Nas primeiras tentativas as correntes $ix_{p1}, iy_{p1}, ix_{p4}$ e iy_{p4} dos atuadores nos eixos X e Y dos discos d1 e d4, respectivamente, foram adotadas como arbitrarias, ou seja, cada ponto no tempo de suas histórias era uma variável a ser otimizada. Simulando 5 s com um passo de 0,001 s e quatro funções, têm-se 20004 parâmetros a serem otimizados. Com um chute inicial nulo para as correntes, a convergência ficou muito difícil. Adotando-se como chute inicial forças girantes diretas (fasores) síncronas com a rotação, como as forças de desbalanço, as soluções convergiram para funções do mesmo tipo, embora ruidosas. Resolveu-se, então, simplificar o problema de otimização considerando as correntes como fasores síncronos com a rotação ou seja, cossenoidais em X e senoisdais em Y nos dois discos. Desta forma, ficou-se com apenas quatro parâmetros a serem otimizados, a saber, as amplitudes e fases dos fasores dos discos d1 e d4. Para os desbalanços da tabela 4.4 obteve-se:

Atuador		Amplitude [A]	Fase [°]	1ª rotação crítica	
i_{p1}	0,25322	180	0,39067	180	0
i_{p4}	0,25322	180	0,39067	180	0
		2ª rotação crítica			

Tabela 4.5: Soluções ótimas para as correntes dos atuadores

As figuras abaixo mostram os resultados da resposta ao desbalanço no anel as2, no tempo e sua órbita. Plotaram-se, também, as forças nos atuadores X e Y do disco d4.

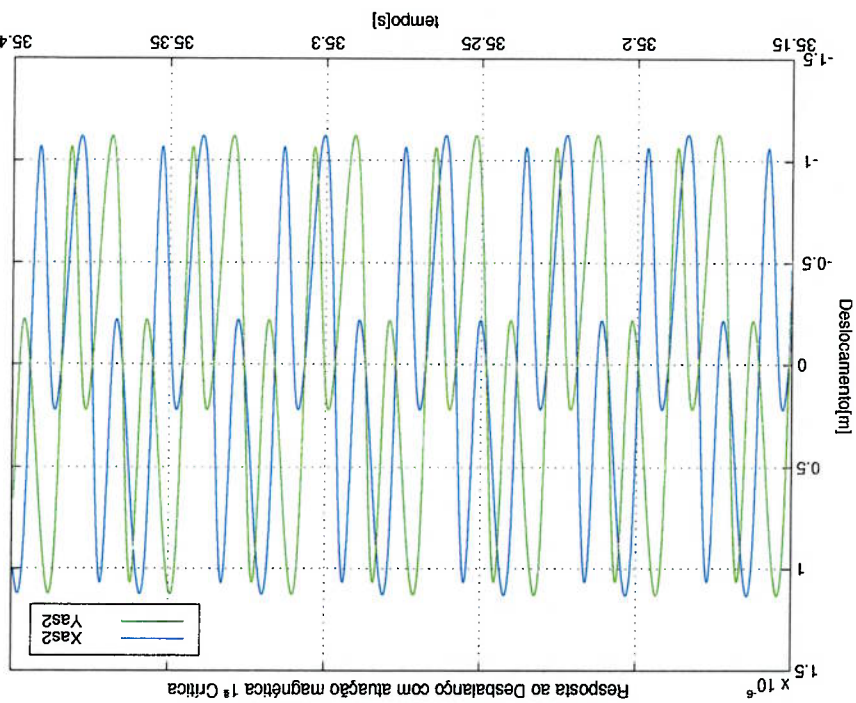


Figura 4.39: Resposta ao desbalanço com atuação magnética 1ª crítica

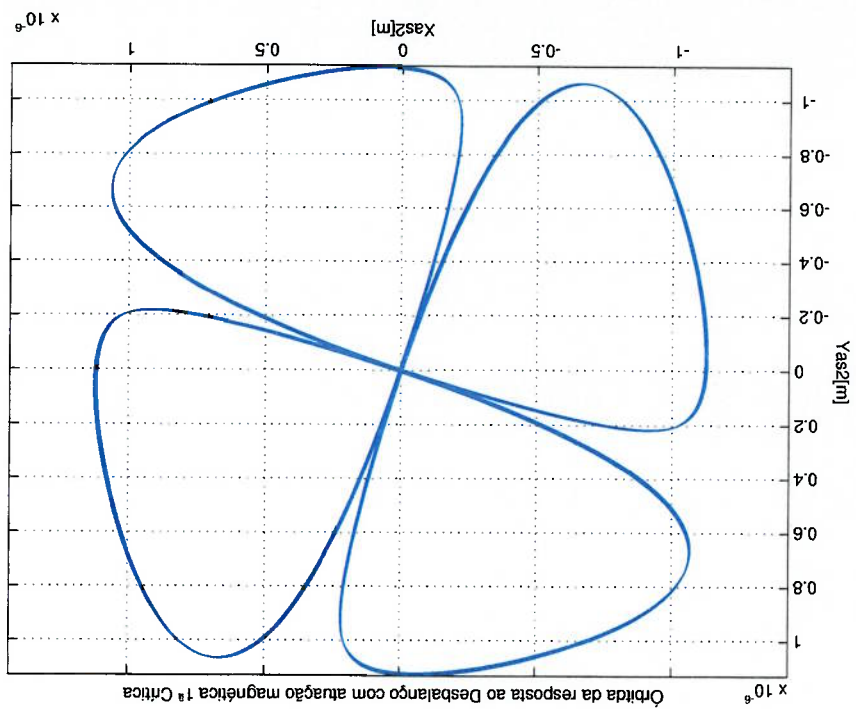


Figura 4.40: Órbita da resposta ao desbalanço com atuação magnética 1ª crítica

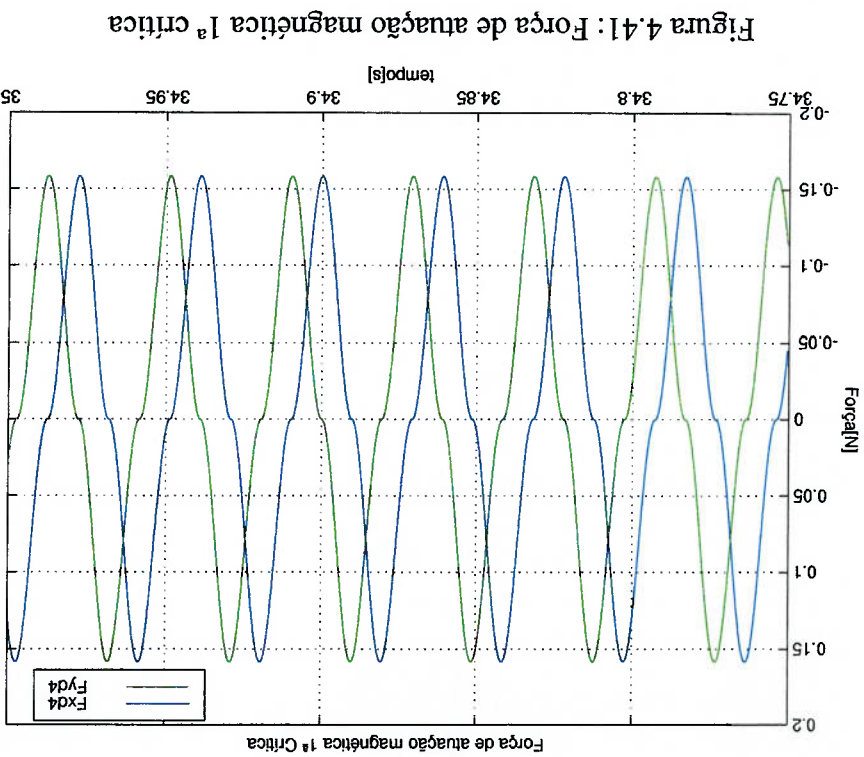


Figura 4.41: Força de atuação magnética 1ª crítica

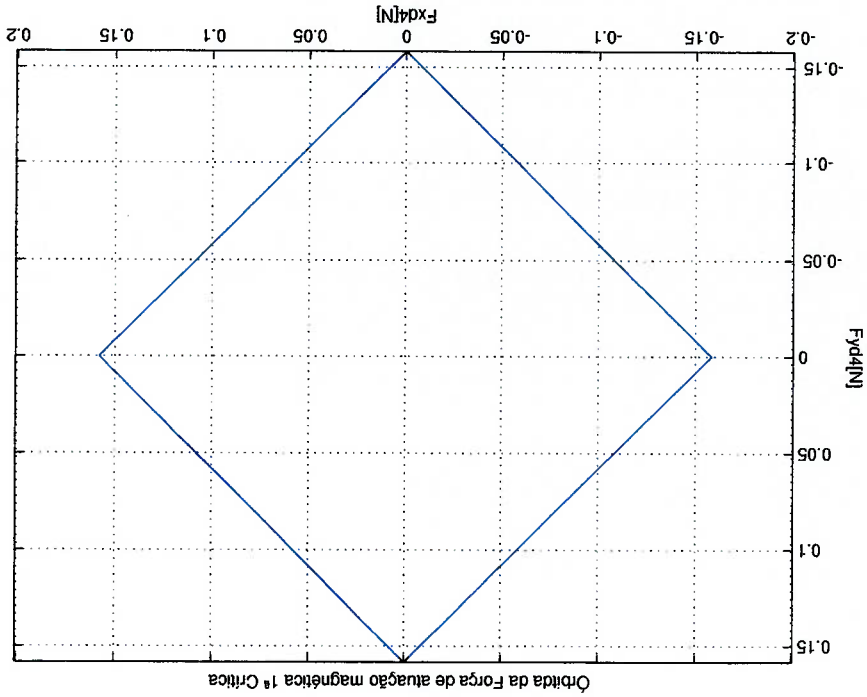


Figura 4.42: Orbita da força de atuação magnética 1ª crítica

Figura 4.43: Resposta ao desbalanço com atuação magnética 2ª crítica

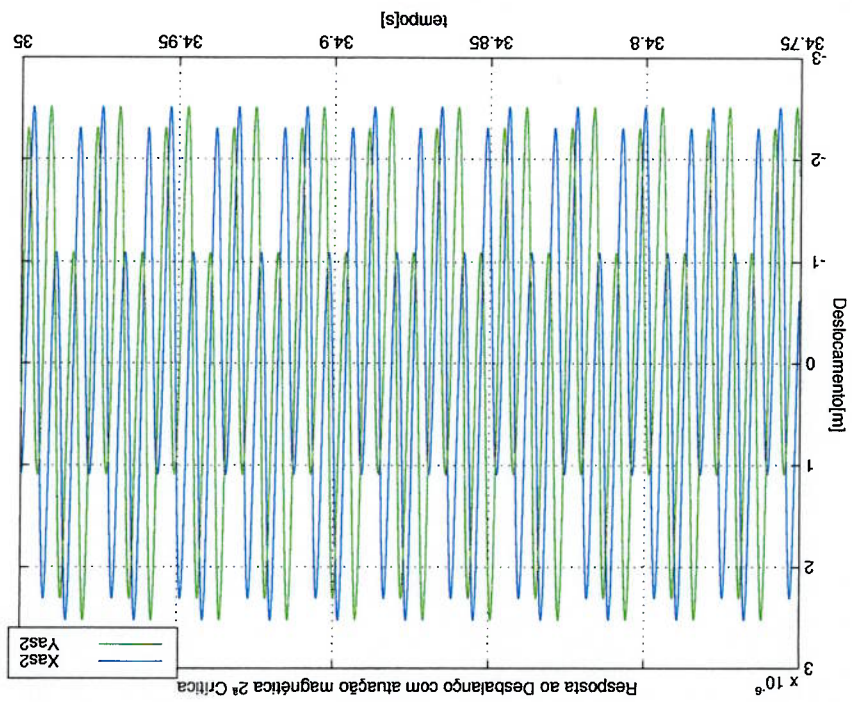
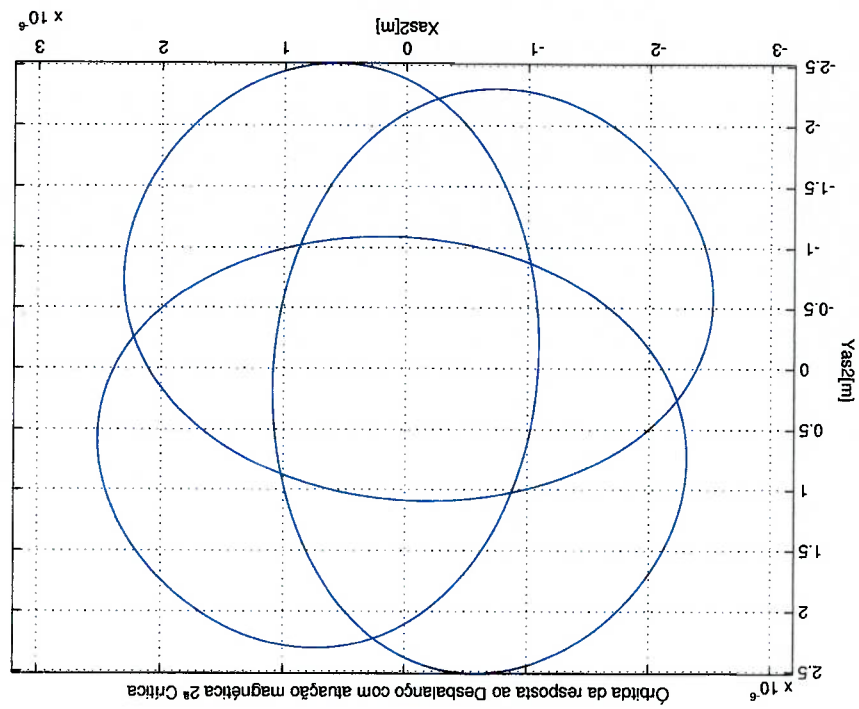


Figura 4.44: Órbita da resposta ao desbalanço com atuação magnética 2ª crítica



Nas figuras, percebe-se um forte conteúdo harmônico. Isto porque a lei de força, quadrática com a corrente, possui harmônicos, sobretudo os ímpares e, destes,

Figura 4.45: Órbita da força de atuação magnética 2ª crítica

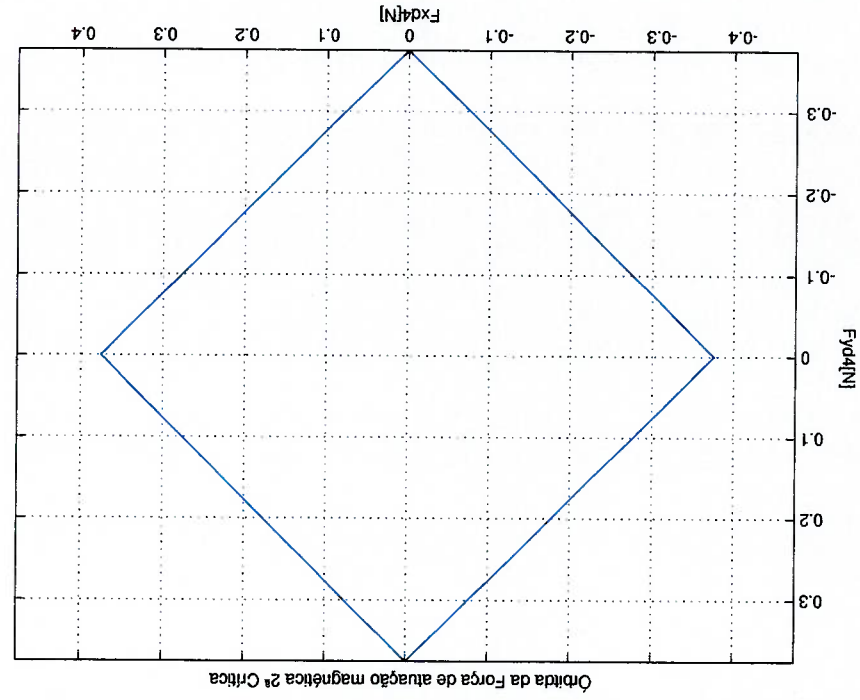
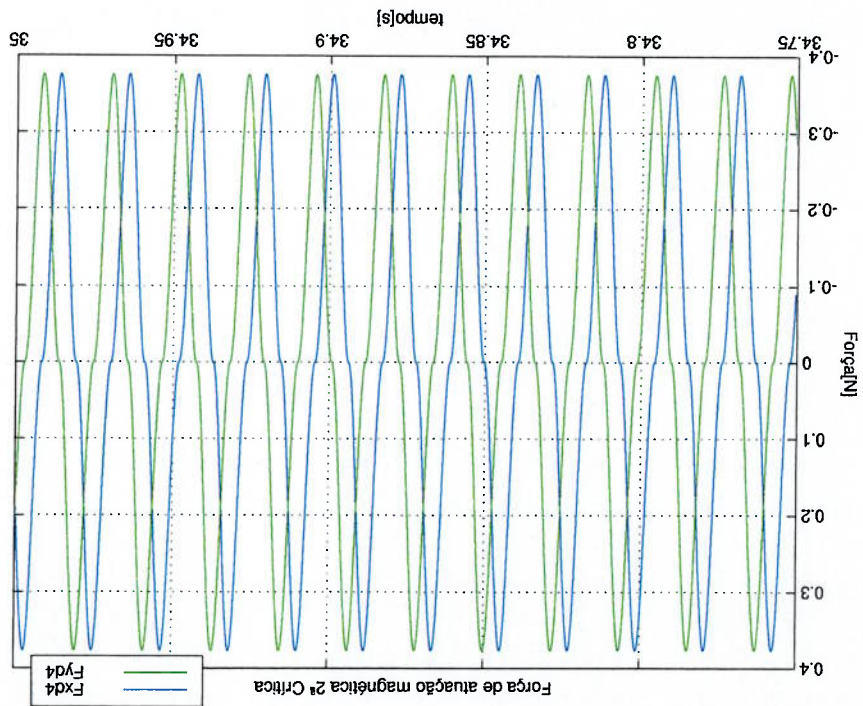


Figura 4.46: Órbita da força de atuação magnética 2ª crítica



especialmente o terceiro. Com o terceiro harmônico, as órbitas apresentam quatro pontas ou laços cujos aspectos dependem da percentagem desta distorção harmônica em relação à frequência fundamental. No caso das forças, além do terceiro harmônico, a órbita parece um quadrado porque em torno do ponto de corrente nula há uma inflexão pois a força é nula para corrente nula.

Fazendo-se a transformada de Fourier (FFT) da força de passagem pela primeira crítica (figura 4.41), obtêm-se as seguintes amplitudes na frequência fundamental, ou seja, as componentes síncronas com a rotação:

$F_{ax^{da}} = F_{ay^{da}} = 0,1342$ N, as forças nos atuadores nos eixos X e Y do disco

d4 que são iguais às dos atuadores do disco d1.

Imaginando as forças de desbalanço da primeira crítica da tabela 4.4 como um fasor apenas no plano XZ (somente forças em X) com força positiva na fase de 0° e negativa em 180°, têm-se o seguinte vetor de amplitudes de forças de desbalanço:

$$\mathbf{u}_a = [7,81 \times 10^{-2} \quad 0 \quad -7,81 \times 10^{-2} \quad 0 \quad 7,81 \times 10^{-2} \quad 0]^T$$

Fazendo o mesmo com as componente síncronas dos fasores de atuação dos discos d1 e d4, de acordo com a tabela 4.5:

$$\mathbf{u}_a = [-0,1342 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0,1342 \quad 0]^T$$

Multiplicando os dois vetores acima pela matriz B, têm-se as entradas de força modais no sistema. Assim:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_a = [-1,12 \times 10^{-3} \quad 1,12 \times 10^{-3} \quad 1,082 \times 10^{-3} \quad -1,082 \times 10^{-3} \quad 4,51 \times 10^{-7} \quad -4,51 \times 10^{-7} \quad 5,01 \times 10^{-7} \quad -5,01 \times 10^{-7} \quad 6,49 \times 10^{-5} \quad -6,49 \times 10^{-5} \quad -5,72 \times 10^{-5} \quad 5,72 \times 10^{-5}]^T$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_a = \begin{bmatrix} 1,12 \times 10^{-3} & -1,12 \times 10^{-3} & -1,081 \times 10^{-3} & 1,081 \times 10^{-3} & -5,76 \times 10^{-7} & 5,76 \times 10^{-7} \\ -6,39 \times 10^{-7} & 6,39 \times 10^{-7} & 2,01 \times 10^{-4} & -2,01 \times 10^{-4} & -2,04 \times 10^{-4} & 2,04 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Comparando os dois vetores acima, verifica-se que o vetor de forças modais de atuação, somado ao de desbalanço, anula as quatro primeiras linhas deste. Como as duas primeiras linhas referem-se ao primeiro modo retrogrado e a terceira e quarta ao primeiro modo direto, conclui-se que as forças de atuação fizeram o balançamento flexível do primeiro modo. Esta técnica de passagem pela crítica será utilizada experimentalmente neste trabalho e, chamada aqui de balançamento eletrônico (bale).

Sabendo que o conteúdo harmônico das forças de atuação é devido à lei de força, quadrática com a corrente, deve-se tentar algo que a deixe mais linear.

Truncando a expansão em série de Taylor das expressões da lei de força (equação 4.3) até a primeira ordem, têm-se:

Para o semi-eixo positivo:

$$\begin{aligned} Fx_+(i, X) &= Fx_+(i_0, X_0) + \frac{\partial Fx_+(i_0, X_0)}{\partial X} (X - X_0) + \frac{\partial Fx_+(i_0, X_0)}{\partial i} (i - i_0) \\ Fx_+(i, X) &= \frac{K_m i_0^2}{2} (g - X_0)^2 + \frac{2K_m i_0^2}{2} (g - X_0)^3 (X - X_0) + \frac{2K_m i_0^2}{2} (g - X_0)^2 (i - i_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Da mesma forma, para o semi-eixo negativo:

$$Fx_-(i, X) = -\frac{K_m i_0^2}{2} (g + X_0)^2 + \frac{2K_m i_0^2}{2} (g + X_0)^3 (X - X_0) - \frac{2K_m i_0^2}{2} (g + X_0)^2 (i - i_0) \quad (4.5)$$

Fazendo $X_0 = 0$; $i_0 = -i_{dc}$ em (4.4) e $i_0 = i_{dc}$ em (4.5), ou seja, somando uma corrente contínua com o sinal de corrente que vai para o semi-eixo positivo e subtraindo a mesma corrente contínua da corrente que vai para o semi-eixo negativo e somando (4.4) com (4.5):

$$F_x(i, X) = \frac{4K_{i2}^{m_{dc}}}{g_3} X(t) - \frac{4K_{i2}^{m_{dc}}}{g_2} i(t) \quad (4.6)$$

$$K_{mx} = \frac{4K_{i2}^{m_{dc}}}{g_3} e K_{mi} = \frac{4K_{i2}^{m_{dc}}}{g_2},$$

$$F_x(i, X) = K_{mx} X(t) - K_{mi} i(t) \quad (4.7)$$

O primeiro termo de (4.7), proporcional a $X(t)$, representa uma mola com constante K_{mx} . Na verdade, devido ao sinal positivo, é uma anti-mola e deve ser colocada no nó, que coincide com o ponto de atuação da força, do modelo de rotor, como uma rigidez negativa. O segundo termo, representa a força linearizada com a corrente e a constante K_{mi} é a que deve ser utilizada em projeto de controles que considerem o sistema, como um todo, linear.

Colocando-se i_{dc} no modelo de força dos quatro atuadores do diagrama da figura 4.33 e rodando a rotina de otimização para a primeira crítica, com a mesma configuração de desbalanço, considerando este novo parâmetro a ser otimizado, obtive-se:

1ª rotação crítica		Atuador	Amplitude [A]	Fase [°]
		i_{d1}	$2,36 \times 10^{-2}$	180
		i_{d4}	$2,36 \times 10^{-2}$	180
		i_{dc}	0,58	-

Tabela 4.6: Correntes ótimas com idc para a 1ª crítica

Estranhando que a solução tenha dado i_{dc} bem maior que as correntes alternadas (AC), calculou-se K_{mx} através da equação 4.7 e da tabela 4.6 obtendo-se:

$$K_{mx} = 2,53 \times 10^3 \text{ N/m}$$

Colocando-se essa rigidez, negativa, nos nós próximos aos atuadores e calculando-se as frequências naturais para esta rotação, que equivalia à 1ª crítica (25,67 Hz), obtive-se o valor de 16,90 Hz para a 1ª crítica. Explicando melhor, as forças dos atuadores com esta corrente DC abaixam as frequências naturais fazendo

com que, estes estejam atuando acima da 1ª crítica e abaixo da 2ª (39,13 Hz), numa região de resposta baixa do rotor.

Calculando-se a força proporcional à corrente AC linearizada de 4.7, obtêm-se:

$F_a = 0,1343 \text{ N}$, que, como foi visto, é a força de balanceamento eletrônico

dos atuadores, ou seja, a linearização foi realmente efetiva.

Pode-se dizer que esta técnica, de abaixar a crítica acrescentando correntes

DC altas nos atuadores, é fazer com que a crítica passe pelo rotor e não o rotor pela

crítica. Apesar de interessante, não é a técnica enfatizada neste trabalho, pois só é

válida para rotores muito flexíveis, como o caso aqui, onde a rigidez acrescentada

pelas correntes DC é significativa comparada à do rotor.

Limitando, na rotina de otimização, as correntes DC ao valor de 0,1 A,

quando não há alteração significativa das frequências naturais, obtêm-se as seguintes

soluções:

1ª rotação crítica		Atuador	Amplitude [A]	Fase [°]
		id1	0,185	180
		id4	0,185	180
		idc	$5,75 \times 10^{-2}$	-

Tabela 4.7: Correntes ótimas com $idc < 0,1 \text{ A}$ para a 1ª crítica

As figuras abaixo mostram os resultados da resposta ao desbalanceamento no anel as2, no tempo e sua órbita, com as correntes da tabela 4.7. Plotaram-se, também, as forças nos atuadores X e Y do disco d4.

Figura 4.47: Resposta ao desbalanço com atuação magnética e idc 1ª crítica

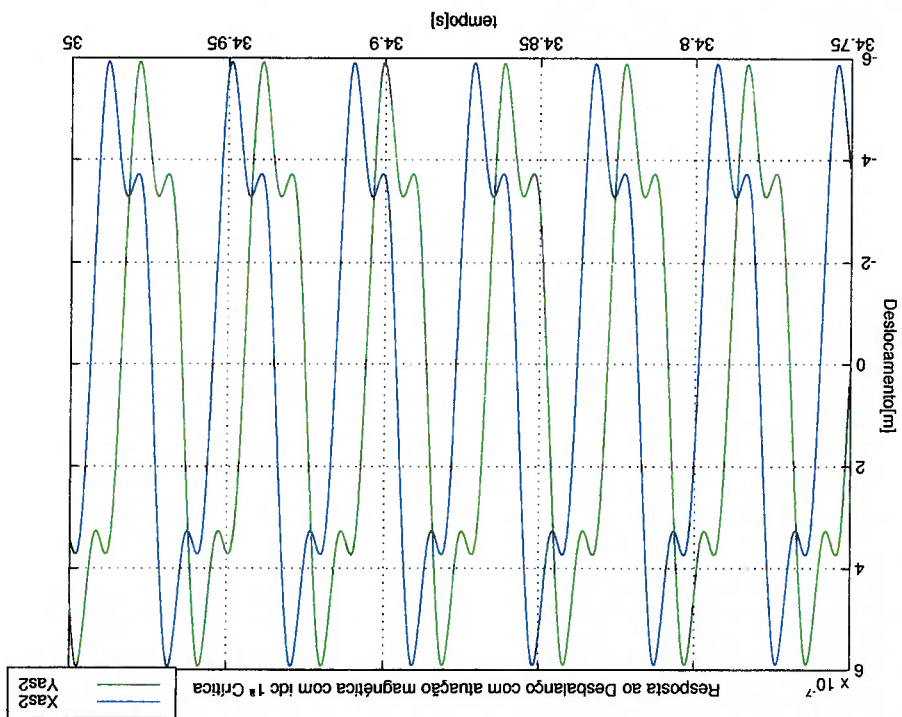
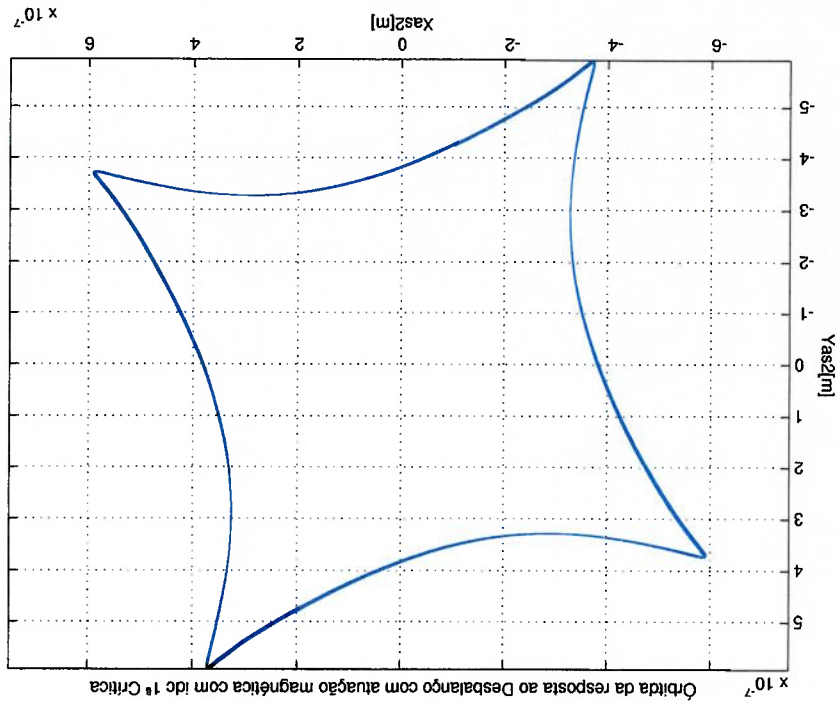


Figura 4.48: Órbita da resp. ao desbalanço com atuação magnética e idc 1ª crítica



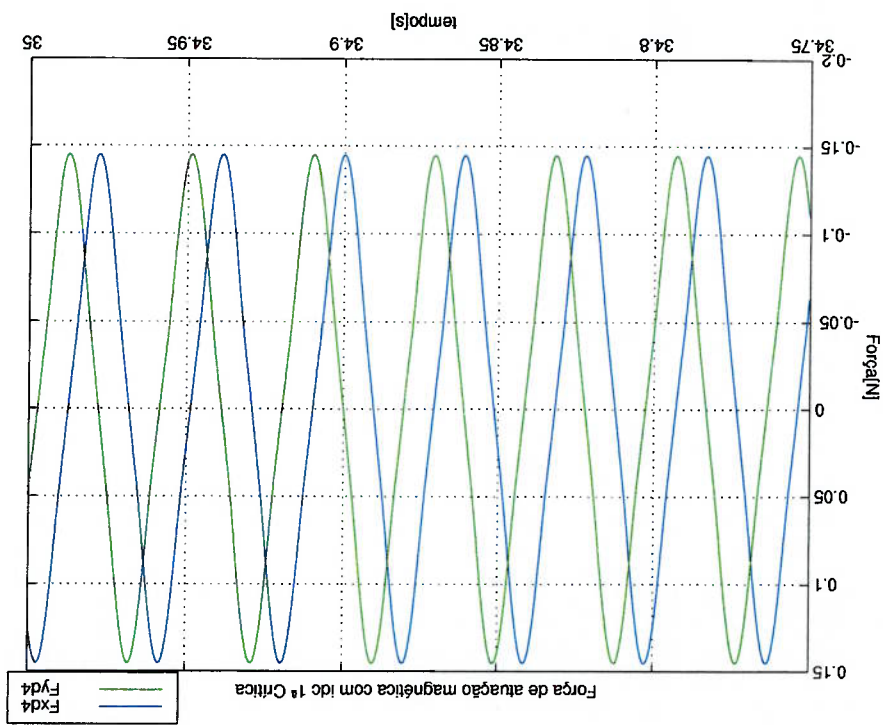


Figura 4.49: Força de atuação magnética com idc 1ª crítica

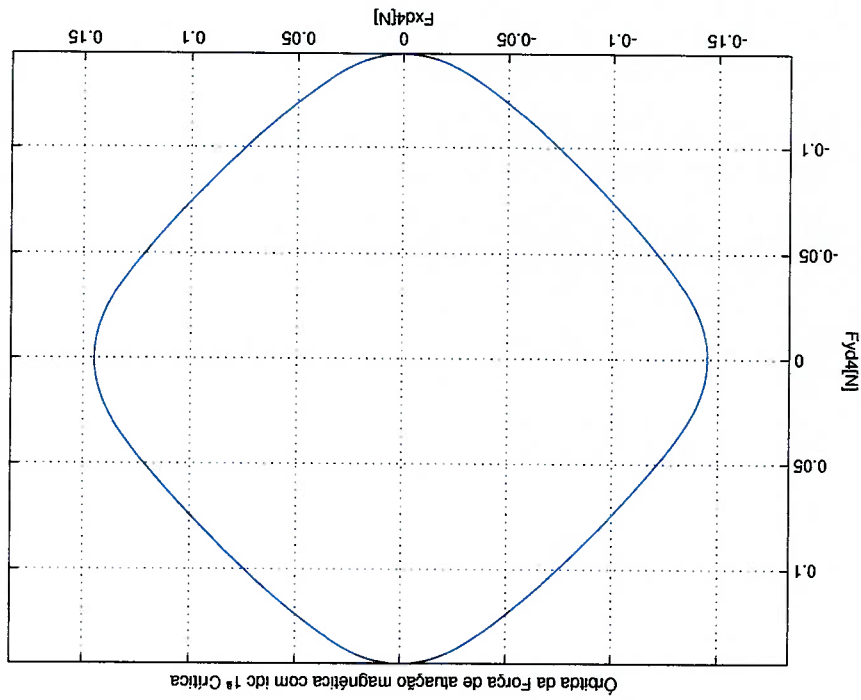


Figura 4.50: Órbita força de atuação magnética com idc 1ª crítica

Das figuras, percebe-se que, além de haver uma diminuição na resposta ao desbalanço, houve diminuição no conteúdo harmônico. Nas curvas de força, percebe-se, também, que deixa de existir a inflexão em torno do zero.

Como último comentário deste capítulo, deve-se dizer que as atuações em malha aberta, sem realimentação de estados, como o proposto, não devem alterar as características intrínsecas ao sistema como, frequências naturais e características de estabilidade, sendo somente adequada à resposta forçada, como é o caso da resposta ao desbalanço. Ressalvas devem ser feitas, pois a dependência inversamente quadrática com os deslocamentos nos atuadores é uma realimentação de estados assim como a presença de correntes DC nos mesmos, como foi visto, acrescenta rigidez negativa ao sistema, o que é uma realimentação de estados. Para correntes DC e deslocamentos pequenos, porém, as atuações não devem interferir na estabilidade do sistema. Para ilustrar tal afirmação, a figura 4.51 mostra a resposta ao desbalanço na 1ª crítica com os desbalanços da tabela 4.4 e as atuações da tabela 4.7 com coeficientes de amortecimento modais $\xi = 1 \times 10^{-3}$ e a figura 4.52 faz o mesmo com amortecimento nulo. O tempo de simulação é de 50 s.

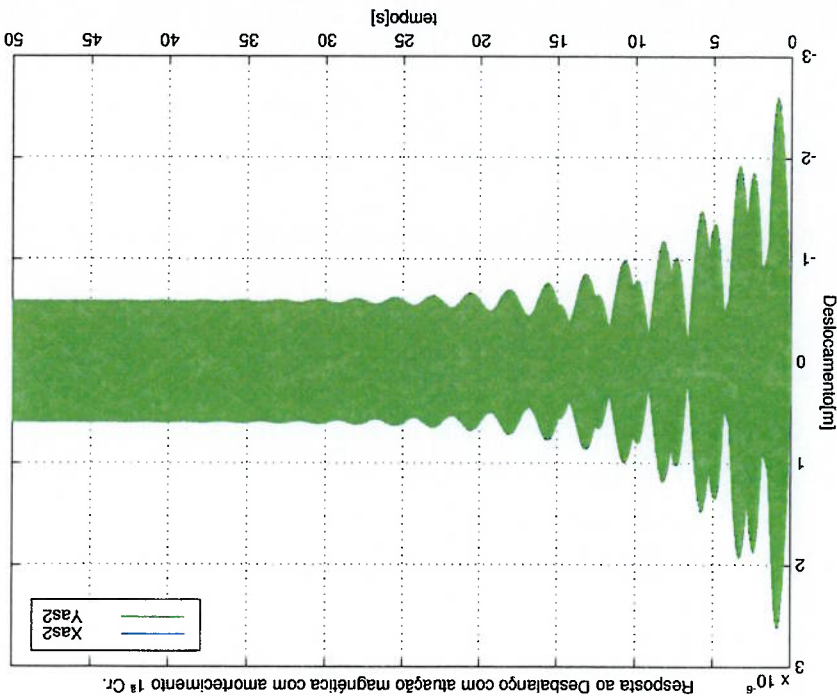


Figura 4.51: Resposta ao desbalanço com atuação magnética $\xi = 1 \times 10^{-3}$ 1ª crítica

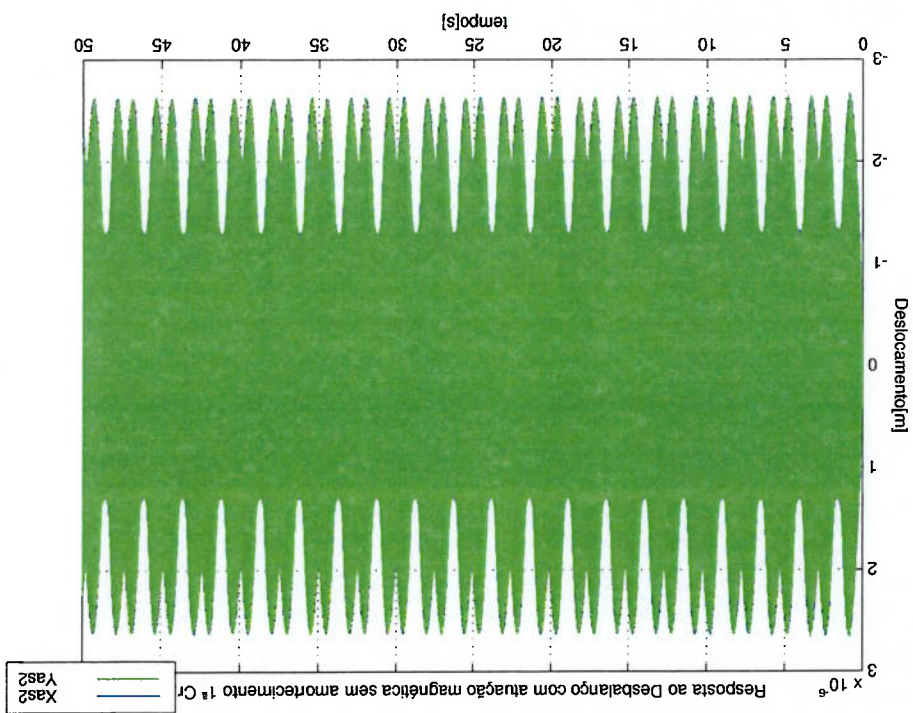


Figura 4.52: Resposta ao desbalanço com atuação magnética $\xi = 0$ 1ª crítica

Da figura 4.51 percebe-se que o transiente provocado pelas forças de desbalanço provoca modulações ou batimentos que desaparecem com o tempo, desaparecendo em regime permanente. Na figura 4.52 tais modulações permanecem, o que mostra que as atuações magnéticas não introduziram amortecimento ao sistema.

CAPÍTULO 5

PROJETO DO EXPERIMENTO

Neste capítulo, serão descritos o projeto e a fabricação da bancada de ensaios. Cada componente da mesma será descrito sucintamente pois não faz parte do escopo deste trabalho o detalhamento do dimensionamento e fabricação de tais componentes. Posteriormente, os ensaios realizados serão descritos.

5.1 Projeto, fabricação e montagem da bancada

A bancada foi projetada para representar experimentalmente os cálculos e simulações teóricas do capítulo 4, a saber, a medição de frequências diretas e retrogradadas, para diversas rotações, de modos de viga de um rotor flexível, a plotagem experimental de funções de transferência entre sensores e atuadores magnéticos posicionados no rotor e medição das forças de atuação necessárias à passagem de, pelo menos, duas velocidades críticas.

A figura 5.1 apresenta um desenho de conjunto do projeto final da bancada.

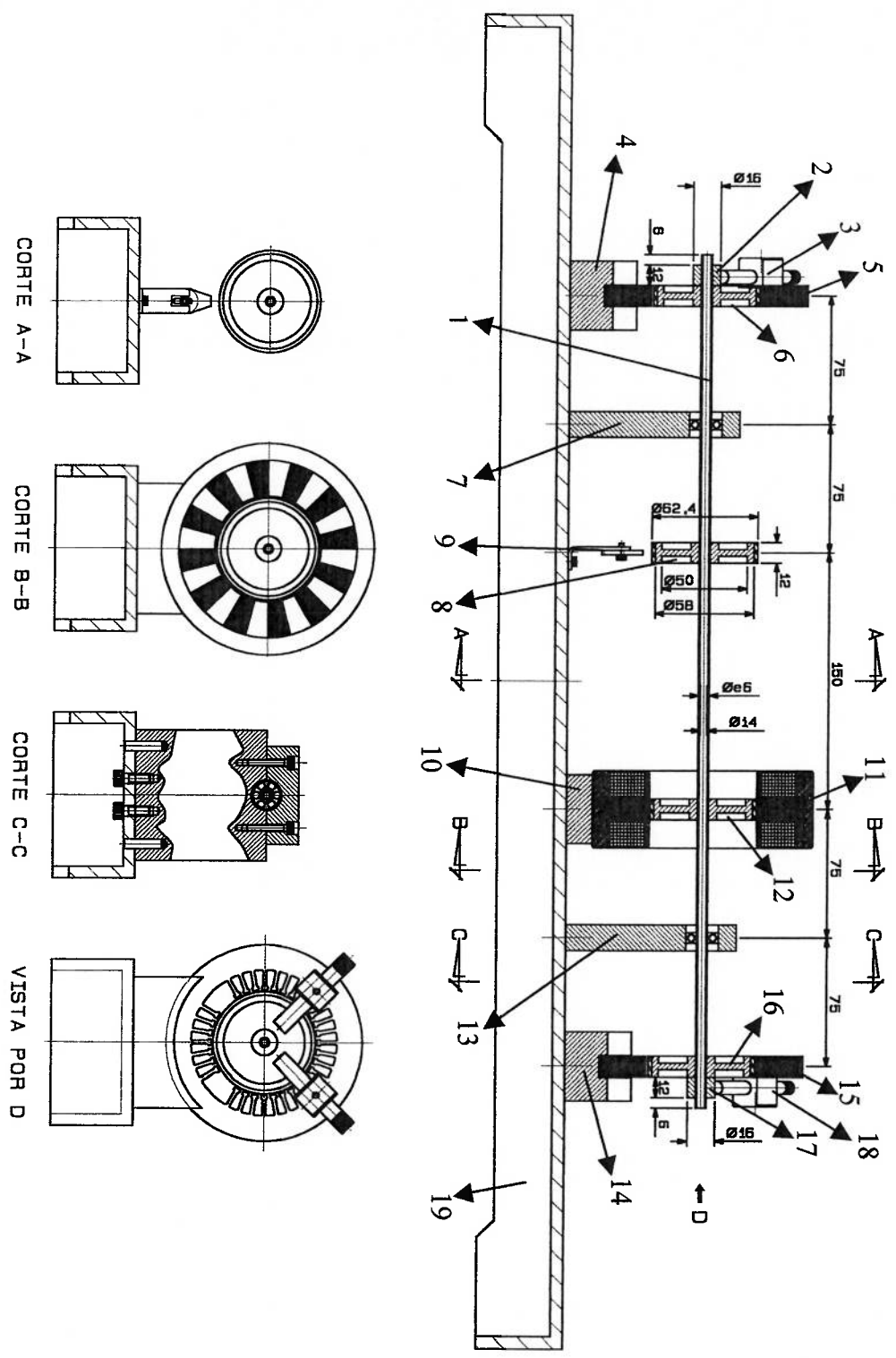


Figura 5.1: Desenho de conjunto da bancada

1Fixo
2anel dos sensores de deslocamento esquerdos ou anel as1
3Sensores de deslocamento esquerdos
4Suporte do estator dos atuadores magnéticos esquerdos
5Estator dos atuadores magnéticos esquerdos
6Rotor dos atuadores magnéticos esquerdos ou disco de inércia d1
7Suporte do rolamento esquerdo
8Rotor do sensor de rotação e referência de fase ou disco d2
9Sensor de rotação e referência de fase
10Suporte do estator do motor
11Estator do motor
12Rotor do motor ou disco d3
13Suporte do rolamento direito
14Suporte do estator dos atuadores magnético direitos
15Estator dos atuadores magnéticos direitos
16Rotor dos atuadores magnéticos direitos ou disco de inércia d4
17Anel dos sensores de deslocamento direitos ou anel as2
18Sensores de deslocamento direitos
19Base da bancada

Alguns requisitos iniciais de projeto determinaram a configuração final da

figura 5.1, como será visto a seguir:

Os estatores, tanto do motor como dos atuadores, como será visto adiante, são feitos de material laminado. Como os únicos pacotes de lâminas já estampadas disponíveis eram as do motor, pois esse motor, que já estava pronto, é utilizado em outras bancadas de ensaio, as mesmas foram utilizadas nos estatores do motor e dos atuadores. Isto, a priori, determinou o diâmetro externo e o comprimento dos rotores dos atuadores e do motor. Outro elemento que se tinha disponível era o eixo de alumínio bem flexível e que é encontrado comercialmente. Isto, também, determinou o diâmetro interno dos rotores dos atuadores e do motor, além do diâmetro interno dos rolamentos. Como pode-se ver na figura 5.1, os rotores possuem um anel externo, de material laminado para os atuadores e de aço para o do motor, por

razões que serão vistas mais tarde. Isto torna esses anéis relativamente pesados. Desta forma, optou-se por fazer o restante dos rotores na forma de polia, para alívio de peso e utilizando como material o alumínio. O rotor do sensor de rotação foi feito igual ao do motor por facilidade de manutenção e simetria. As outras dimensões restantes, como, o comprimento do eixo, a posição dos rolamentos, e dos rotores, foram definidas interativamente com os cálculos de frequências naturais do capítulo 4, levando em conta os critérios:

- Três velocidades críticas na faixa de 20 a 100 Hz.
- Posicionamento dos atuadores nas extremidades e fora dos nós dos modos correspondentes às três críticas.

Será feita, a seguir, uma descrição sucinta de cada componente da bancada e da montagem final.

5.1.1 Componentes mecânicos da bancada

A base da bancada é constituída de chapas de aço soldadas na forma de um perfil U invertido. Sua face superior é aplainada e convenientemente furada para a fixação dos suportes dos atuadores, dos rolamentos e dos mancais, além do sensor de rotação. As chapas laterais são cortadas até as proximidades das extremidades de forma que só parte delas (pés) fique em contato com a superfície da mesa onde serão realizados os ensaios. Essa parte também é aplainada.

Os suportes dos estatores dos atuadores e do motor são de alumínio. Suas bases planas são fixadas na base da bancada através de dois pinos guia, para dar precisão de posicionamento e dois parafusos. Essa fixação é igual a dos suportes dos rolamentos que pode ser vista no corte C-C. Na parte superior dos suportes dos estatores dos atuadores, em forma de meia-cana, é usinada uma canaleta onde o pacote de lâminas dos atuadores são coladas através de cola epoxi (araldite). O estator do motor já contém o pacote de lâminas preso a um anel externo de alumínio através de resinação. Este anel é colado diretamente na face em meia-cana do suporte do estator do motor o qual não tem canaleta usinada.

Os suportes dos rolamentos são constituídos de duas peças de alumínio. A peça inferior também é presa na bancada por dois pinos guia e dois parafusos (corte C-C). A parte superior desta, juntamente com a peça superior formam um suporte bipartido para o rolamento, usando-se em cada uma delas meio círculo de diâmetro igual ao externo do rolamento. Desbastando-se um pouco a face da peça superior e, aparafusando-a (com dois parafusos) na peça inferior, fixa-se o rolamento.

Os rotores ou discos dos atuadores e do motor são constituídos de duas peças, uma polia e um anel exterior. As polias são feitas de alumínio. Os anéis dos rotores dos atuadores são feitos de um pacote de lâminas de ferro-silício, material que possui boas características magnéticas. Depois de usinados os diâmetros interno e externo do pacote de lâminas, com algum sobremetal no diâmetro externo, cada lâmina é colada uma a uma na polia. Depois disto, o diâmetro externo do conjunto sofre uma usinagem de acabamento para acertar a dimensão e corrigir as imperfeições. O anel do rotor do motor é feito de um aço especial (*marging*) e, também é colado na polia. O rotor do sensor de rotação é igual ao rotor do motor.

Os anéis onde atuarão os sensores de deslocamento são feitos de alumínio e se fizeram necessários por causa do pequeno diâmetro do eixo comparado ao diâmetro da ponta de prova dos sensores.

Os rolamentos são autocompensadores de esferas SKF™ 126, para que haja apenas restrição de deslocamentos lineares, deixando livres os deslocamentos angulares, ficando o rotor, de acordo com as hipóteses da modelagem do capítulo 3.

O eixo, como já foi dito, é feito de alumínio e é encontrado comercialmente nas dimensões da figura 5.1. O trabalho com ele foi cortá-lo e, principalmente, desempená-lo.

As polias, anéis e rolamentos são colados no eixo. Todas as peças passaram por metrologia e ajustadas de maneira que o erro crítico, a saber, o erro de batida entre os estatores e rotores dos atuadores e motor ficasse inferior a 0,1 mm.

5.1.2 Componentes eletro-mecânicos e sensores da bancada

5.1.2.1 Atuadores

Os atuadores de cada disco, como já foi visto no capítulo 4, são compostos de quatro semi-eixos, dois contrapostos para cada eixo X e Y . Cada semi-eixo faz força apenas de atração e a presença de dois contrapostos garante força nos dois sentidos. No estator, cada semi-eixo compõe-se de um conjunto de bobinas cujo núcleo é constituído de material laminado ferro-magnético, no caso, ferro-silício, para evitar perdas. As lâminas dos estatores desta bancada, como foi dito, não foram especialmente projetadas devido a dificuldade de se estampar lâminas novas (para poucas unidades pode-se fabricar por eletro-erosão). As lâminas existentes do motor foram aproveitadas para servir de atuador radial. As bobinas, dentro desta limitação, foram enroladas para tal fim. Da figura 5.1 vista D, nota-se que há um corte nos núcleos de bobina entre um conjunto de bobinas de um semi-eixo e outro para evitar interferência magnética entre semi-eixos. A força de atração é criada pela excitação das bobinas com uma corrente elétrica enviada pelos amplificadores de potência. Cria-se um fluxo magnético cujo circuito passa pelo núcleo das bobinas e é fechado através do material ferro-magnético do rotor que pode ser maciço mas, também para evitar perdas, recomenda-se que seja material laminado como é o caso aqui. O entreferro ou *gap* que é a diferença entre o raio do estator e o do rotor da bancada fabricada ficou em 1,0 mm diferente do de projeto (1,3 mm). Com *gaps* menores consegue-se a mesma força com correntes menores mas diminui-se a tolerância a erros geométricos. O cálculo da força teórica com a corrente e o *gap* é feito por elementos finitos (Alves et. al, 1996) e a curva teórica para o *gap* de projeto é apresentada na figura 4.19 do capítulo 4.

5.1.2.2 Amplificadores de Potência

São os dispositivos eletrônicos que recebem os sinais de controle em tensão e os convertem em uma corrente proporcional que será enviada às bobinas dos atuadores. Os amplificadores a serem utilizados na bancada são do tipo chamado de transcondutância. São fontes de corrente que possuem um circuito de controle com

medida e realimentação da corrente de saída. Isto garante, para determinadas faixas de frequência, a proporcionalidade da corrente de saída com a entrada em tensão, independentemente da impedância (indutância e resistência) das bobinas dos atuadores. Em outras palavras, a dinâmica dos atuadores advinda de sua impedância pode ser desprezada de tal forma que a conversão de tensão em corrente pode ser considerada como um simples ganho. Cada estágio de potência que será utilizado, recebe o sinal completo de um eixo, soma um nível DC (que será a corrente DC, que pode ser modificada), converte-o em corrente, ceifa a parte negativa, através de diodos, e envia a corrente resultante ao semi eixo positivo. Da mesma forma, subtrai do sinal completo o mesmo nível DC, converte-o em corrente, ceifa a parte positiva e envia a corrente resultante ao semi-eixo negativo. O ganho do estágio de potência utilizado é:

$$G_a = 0.25 \text{ A/V}$$

5.1.2.3 Motor

O motor é um motor trifásico de histerese. É um motor de indução que compõe-se de um conjunto de bobinas trifásicas no estator que criam um campo girante que atua sobre um anel metálico ferromagnético, no caso um aço especial chamado *maraging*, chamado anel de histerese. É um motor síncrono, ou seja, havendo torque disponível, a rotação do rotor entra em sincronismo com a frequência do campo girante. Este motor é acionado por um equipamento eletrónico chamado conversor estático de frequências, através do qual pode-se variar a frequência do campo girante enviado ao motor, bem como a potência (tensão e corrente). A frequência do conversor pode ser fixada em um determinado valor fazendo com que, como já foi dito, se houver torque, o rotor acelere até ficar síncrono com essa frequência, ou variar de acordo com um sinal de entrada que deve ser uma onda quadrada enviada por um gerador de funções ou por um sensor de velocidade existente no rotor. Durante o período de aceleração, haverá escorregamento, que é a diferença entre a frequência do conversor (campo girante) e a do rotor. É recomendável que o escorregamento não seja muito alto pois isto causa

aquecimento no rotor. O conversor também possui um circuito de frenagem que faz com que o motor funcione como freio. Resumindo, o conversor permite que se varie a rotação do motor.

5.1.2.4 Sensores de deslocamento

Os sensores de deslocamento são sensores magnéticos induzidos por correntes parasitas (*eddy current*). Compõe-se de uma bobina (ponta de prova) integrante de um circuito ressonante que é excitado por uma onda com frequência na faixa de poucos MHz. Variando-se a distância desta bobina em relação a uma superfície condutora homogênea, variam-se as perdas e consequentemente, o fator de amortecimento do circuito ressonante, variando a amplitude de saída de tal circuito. Esse sinal de saída é demodulado através de um detector de envoltória. Na bancada, utiliza-se um sensor deste tipo da empresa Bently Nevada™.

Como pode ser visto na figura 5.1 vista D, os sensores de deslocamento estão posicionados em suportes aparafusados nos estatores dos atuadores. Estes suportes permitem o ajuste da posição dos sensores em relação aos anéis. Como foi dito na seção 4.5.3, devido ao tamanho da cabeceira das bobinas, os sensores não puderam ficar alinhados com os atuadores e sim a 45° dos mesmos.

5.1.2.5 Sensor de rotação

O sensor de rotação e referência de fase é um sensor ótico reflexivo. Compõe-se de um foto-diodo emissor e um foto-transistor receptor de infra-vermelho. Fazendo-se uma marca (preta) que contraste com a cor do disco d2 (ago), posicionando-se o sensor a uma distância adequada (seu suporte permite ajuste) do disco e através de ajustes em um circuito eletrônico de condicionamento, consegue-se como saída, um sinal com nível baixo de tensão na parte clara do disco e nível alto na parte escura. Se a marca preta envolver meio perímetro do disco (180°), consegue-se uma onda quadrada. Os níveis de tensão, com o circuito empregado, obedecem ao padrão TTL, ou seja, 0 V nível baixo e 5V nível alto.

5.1.2.5 Bancada fabricada

A figura 5.2 mostra uma fotografia da bancada fabricada

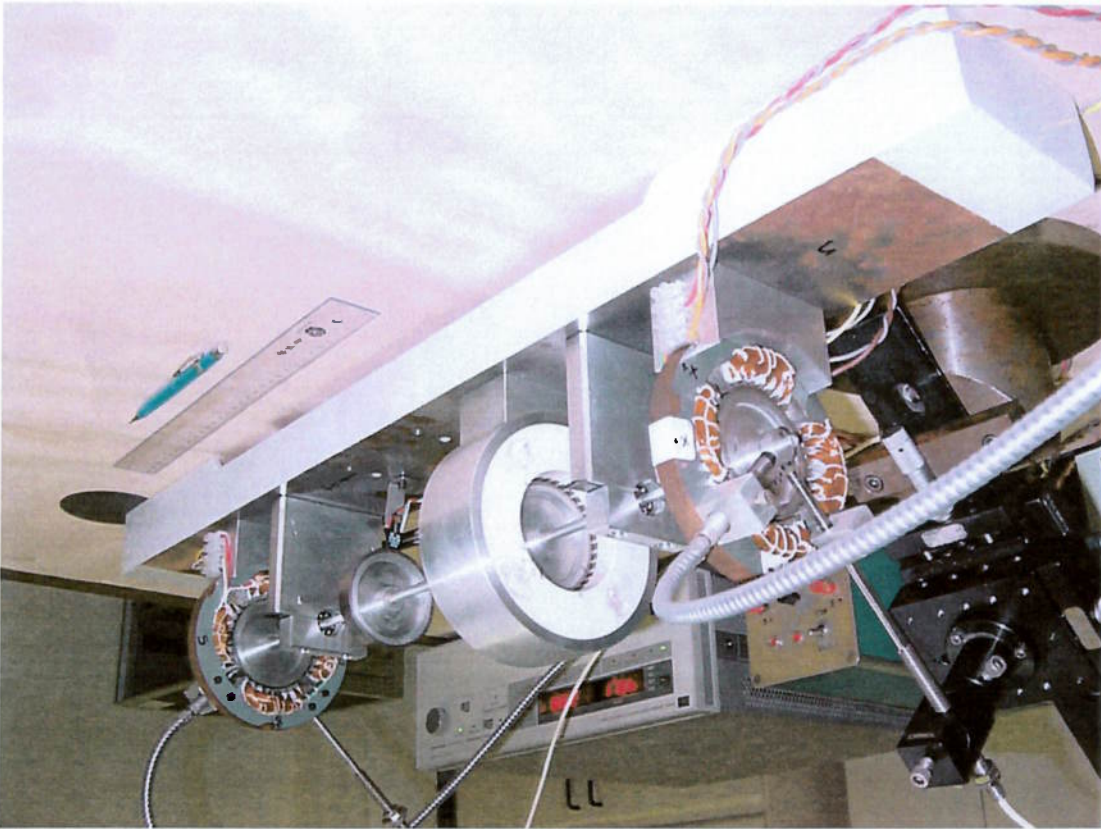


Figura 5.2: Fotografia da bancada fabricada

Notar que um dos sensores de deslocamento posicionado no anel as2 não está afixado em seu suporte preso ao estator do atuador, mas em um dispositivo micrométrico de translação que permite com que a curva de calibração do mesmo seja obtida.

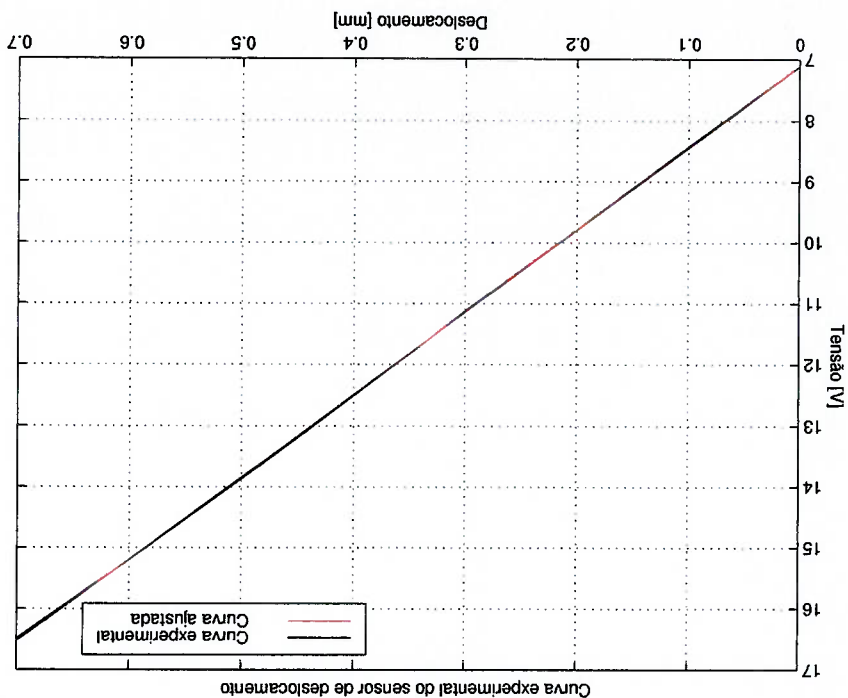
5.2 Ensaios realizados

Os ensaios realizados são os seguintes:

5.2.1 Identificação dos sensores de deslocamento

As curvas de calibração dos sensores de deslocamento atuando sobre os anéis de alumínio da bancada (as1 e as2) foram obtidas através do dispositivo micrométrico mostrado na figura 5.2. O procedimento consiste em encostar a ponta de prova no anel, anotando a voltagem de saída do sensor. Girando o tambor micrométrico no sentido de afastar a ponta de prova do anel, anota-se a distância da mesma ao anel e a correspondente voltagem, obtendo-se a curva de calibração.

As curvas de calibração dos quatro sensores são semelhantes e uma delas pode ser vista na figura 5.3.



Na figura 5.3, além da curva experimental, consta uma curva advinda de uma regressão linear (curva ajustada). Plotou-se, como pode-se notar, apenas a faixa de deslocamento onde há boa linearidade do sensor. A ponta de prova é colocada na metade dessa faixa, aproximadamente 0,4 mm e os deslocamentos que são lidos

devem ser inferiores a 0,4 mm. Com o sensor posicionado a 0,4 mm do anel, há uma tensão DC de 12,5 V. É conveniente subtrair uma tensão DC de mesmo valor, de maneira a se trabalhar em torno do zero. O ganho deste sensor, obtido com o ajuste linear é:

$$G_s = 13,47 \text{ V/mm ou } G_s = 7,42 \times 10^{-5} \text{ m/V}$$

5.2.2 Identificação dos atuadores magnéticos

A folga ou *gap* medida entre os estatores e rotores da bancada efetivamente fabricada ficou em $g=1$ mm, diferente da de projeto (1,3 mm). As correntes DC de todos os semi-eixos enviadas pelos estágios de potência foram fixadas todas em $i_{dc}=0,085$ A.

Os atuadores magnéticos foram identificados colocando-se pequenos pesos no disco d4 e anotando as tensões do sensor Y_{az} . Conseguiu-se uma constante linear de mola: $G_f = 0,525$ N/V. Aplicando-se pequenas correntes DC no atuador Y_{a4} do mesmo disco e anotando as tensões do mesmo sensor obteve-se a constante linear: $G_{idc} = 4,2$ V/A. Supondo que os deslocamentos são pequenos (2×10^{-5} m) o bastante para não ter influência na força magnética, obtém-se a constante linearizada de força versus corrente da expressão 4.7:

$$K_{mi} = G_f \cdot G_{idc} = 2,21 \text{ N/A}$$

Substituindo os valores acima nas expressões 4.7 e 4.6, obtêm-se:

$$K^m = 6,5 \times 10^{-6} \text{ N.m}^2 / \text{A}^2$$

$$K^{mx} = 187,85 \text{ N/m}$$

5.2.3 Amortecedor ativo

Nos ensaios com rodada que serão descritos a seguir, os baixos amortecimentos modais do rotor causaram dificuldades, sobretudo em velocidades supercríticas. Decidiu-se, então, implementar um amortecedor ativo nos atuadores X

5.4 mostra um esquema da implementação: e Y do disco d4 realimentando-os com os sinais dos sensores do anel as2. A figura

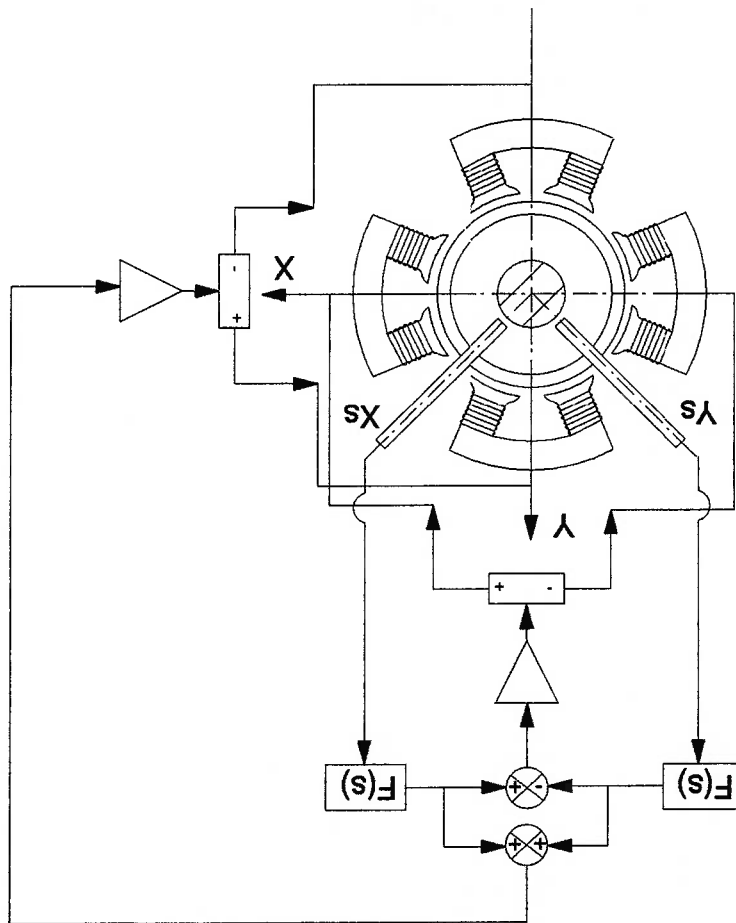


Figura 5.4: Esquema do amortecedor ativo

Na figura 5.4, os sinais dos sensores X_s e Y_s dos sensores do anel as2 passam por um filtro $F(s)$. A soma dos sinais (em tensão) dos sensores filtrados é enviada ao amplificador de potência que a converte em corrente (inversora para realimentação negativa) que, por sua vez, é enviada aos atuadores do eixo Y do disco d4. Da mesma forma, a diferença é enviada aos atuadores do eixo X. Lembrando que os sensores situam-se a 45° dos eixos dos atuadores, mostra-se que:

$$H_x(s) = G_a G_s X(s) \frac{\sqrt{2}}{2} F(s)$$

$$H_y(s) = G_a G_s Y(s) \frac{\sqrt{2}}{2} F(s)$$

onde, $X(s)$ é a diferença dos sinais dos dois sensores, $Y(s)$ é a soma. $H_x(s)$ é a corrente enviada aos atuadores do eixo X do disco d4 e $H_y(s)$ é a corrente enviada aos atuadores do eixo Y do mesmo disco.

s é a variável de Laplace.

Nas simulações no tempo, o filtro $F(s)$ é implementado através do bloco *TransferFcn* do Simulink™. As entradas em corrente do disco d4 $H_x(t)$, $H_y(t)$ estão nas sétima e oitava linhas do vetor u e as saídas X e Y do anel as2 nas sétima e oitava linhas do vetor d no sistema de equações (4.1).

Para a obtenção das curvas de resposta em frequência teóricas deve-se obter as matrizes do sistema linearizado com os amortecedores ativos no disco d4. Para isso, acrescenta-se a constante linearizada de força:

$$H_{xy}(s) = K_m G_a G_s X(s) \frac{\sqrt{2}}{2} F(s)$$

$$H_{yx}(s) = K_m G_a G_s Y(s) \frac{\sqrt{2}}{2} F(s)$$

onde, $H_{xy}(s)$ é a força linearizada do amortecedor ativo no eixo X do disco d4 e $H_{yx}(s)$ a força linearizada do amortecedor ativo no eixo Y do mesmo disco.

O filtro $F(s)$ foi projetado para que houvesse amortecimento nos quatro primeiros modos, diretos e retrogrados e interferir o mínimo possível em baixas e altas frequências. Sua implementação, analógica, consistiu de um circuito RC série mais um estágio ativo de ganho presente nos próprios somadores dos sinais dos sensores. A função de transferência do filtro implementado é dada por:

$$F(s) = \frac{8259s + 3197}{s^2 + 2,878 \times 10^4 s + 3,969 \times 10^6}$$

(5.2)

Substituindo (5.2) em (5.1):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} H_{Xf}(s) &= K_m G_a G_s \frac{\sqrt{2}}{8259s + 3197} \left(\frac{s^2 + 2,878 \times 10^4 s + 3,969 \times 10^6}{s^2 + 2,878 \times 10^4 s + 3,969 \times 10^6} \right) X(s) \\ H_{Yf}(s) &= K_m G_a G_s \frac{\sqrt{2}}{8259s + 3197} \left(\frac{s^2 + 2,878 \times 10^4 s + 3,969 \times 10^6}{s^2 + 2,878 \times 10^4 s + 3,969 \times 10^6} \right) Y(s) \end{aligned}$$

As equações (5.3) podem ser postas na forma de variáveis de estado

(Ogata, 1970) por:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \dot{X}_f(t) &= A_e X_f(t) + B_e X(t) \\ Y_f(t) &= A_e Y_f(t) + B_e Y(t) \\ H_{Xf}(t) &= C_e X_f(t) \\ H_{Yf}(t) &= C_e Y_f(t) \end{aligned}$$

onde,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & -3,969 \times 10^6 \\ 1 & -2,878 \times 10^4 \end{bmatrix}; \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_e = K_m \begin{bmatrix} 3197 & 8259 \end{bmatrix}$$

(5.5)

$$X_f(t) = \begin{bmatrix} X_{1f}(t) \\ X_{2f}(t) \end{bmatrix}, \quad Y_f(t) = \begin{bmatrix} Y_{1f}(t) \\ Y_{2f}(t) \end{bmatrix}, \quad K_m = K_m G_a G_s \frac{\sqrt{2}}$$

Colocando (5.4) na forma matricial:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_f \\ \dot{Y}_f \end{bmatrix} &= A_f \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} + B_f \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H_{Xf} \\ H_{Yf} \end{bmatrix} &= C_f \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{onde, } A_f = \begin{bmatrix} A_e & 0 \\ 0 & A_e \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} B_e & 0 \\ 0 & B_e \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} C_e & 0 \\ 0 & C_e \end{bmatrix}$$

Lembrando que $X(t)$ e $Y(t)$ (as entradas do sistema (5.6)) são as saídas em deslocamento do sistema de equações (4.1) e encontram-se nas sétima e oitava linhas do vetor d e que $H_{Xf}(t)$ e $H_{Yf}(t)$ (as saídas do sistema (5.6)) são as entradas em força do mesmo sistema de equações e estão nas sétima e oitava linhas do vetor u , juntando-se (4.1) com (5.6) fica-se com o sistema de equações em malha fechada com realimentação negativa :

$$\begin{bmatrix} \eta_f \\ \eta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B C^e \\ B C^g & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \eta_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n \times 2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 8} & B_f \\ 0_{4 \times 8} & B_f \end{bmatrix} u_f \quad (5.7)$$

$$d = \begin{bmatrix} H_f \\ C \\ 0_{8 \times 4} \\ C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \eta_f \end{bmatrix}$$

onde,

$$\eta_f = \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix}, \quad B^e = [0_{4 \times 6}], \quad -B_f = [C^e = 0_{6 \times 4}], \quad u_f = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} H_{Xf} \\ H_{Yf} \end{bmatrix}$$

n é a ordem do modelo do rotor (ordem da matriz A equivalente ao dobro do número de modos de vibrar considerado).

O sistema de equações (5.7) permite o cálculo das frequências naturais e dos coeficientes de amortecimento do rotor com o amortecedor ativo através do cálculo dos autovalores de sua matriz dinâmica. Permite, também, a obtenção de curvas de resposta em frequência, considerando as entradas e saídas desejadas, que serão comparadas às obtidas experimentalmente no capítulo 6.

A curva de resposta em frequência do filtro projetado e implementado pode ser vista na figura 5.5:

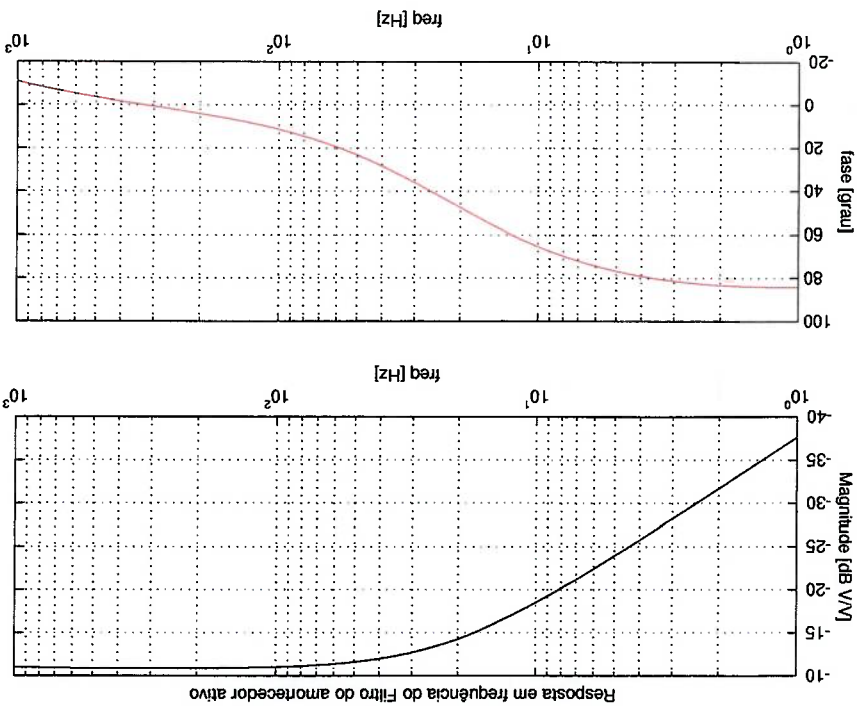


Figura 5.5: Resposta em frequência do filtro do amortecedor ativo

5.2.4 Balançamento

O rotor deve ser balanceado de modo que o resíduo máximo de desbalanço seja o simulado na seção 4.7, tabela 4.4. Esse balanceamento foi feito para o 1º modo (1ª crítica) e para o 2º modo (2ª crítica). O procedimento utilizado é o método dos coeficientes de influência (Goodmann, 1964). Resumidamente, neste método roda-se o rotor e, em determinadas rotações, são feitas leituras de vibração síncrona com a rotação em módulo e fase (fasor) em sensores posicionados ao longo do rotor. Depois, coloca-se (ou retira-se) massas de teste em diferentes planos posicionados ao longo do eixo longitudinal do rotor. Essas massas, em cada plano, são colocadas em posições angulares definidas em relação a um 0º arbitrário mas que normalmente situa-se na marca do sensor de rotação que também dá a referência de fase para as medidas de rotação. Desta forma, também as massas são fasores. Para cada massa teste colocada em determinado plano, roda-se o rotor e executam-se medidas de vibração nas mesmas rotações e sensores da rodada inicial. Determina-se a influência de cada massa teste, situada em cada plano, em cada sensor e em cada rotação,

subtraindo-se a vibração, neste sensor, equivalente à rodada com esta massa, nessa rotação, da vibração, no mesmo sensor e rotação, da rodada inicial. Dividindo-se o resultado pela massa teste, determina-se a influência que uma massa unitária colocada neste plano causa na vibração deste sensor nessa rotação. Isto é chamado de coeficiente de influência. Supondo que só haja essa massa teste, determina-se a correção dividindo-se o oposto da vibração inicial por este coeficiente. Com ns sensores, nr rotações e nm massas teste, monta-se um sistema de equações complexo (as contas descritas acima são entre fasores) de $ns \times nr$ equações com nm incógnitas. Esse procedimento é altamente dependente da linearidade do sistema pois baseia-se na proporcionalidade e superposição dos efeitos.

Para o caso da bancada, são colocadas massas de teste nos quatro discos e as leituras são feitas nos sensores dos anéis $as1$ e $as2$, utilizando o sensor ótico como referência de fase e medida de rotação. As rotações de medida mais adequadas foram determinadas experimentalmente e os resultados serão vistos no capítulo 6. A figura 5.6 mostra esquematicamente como foram feitas as medidas:

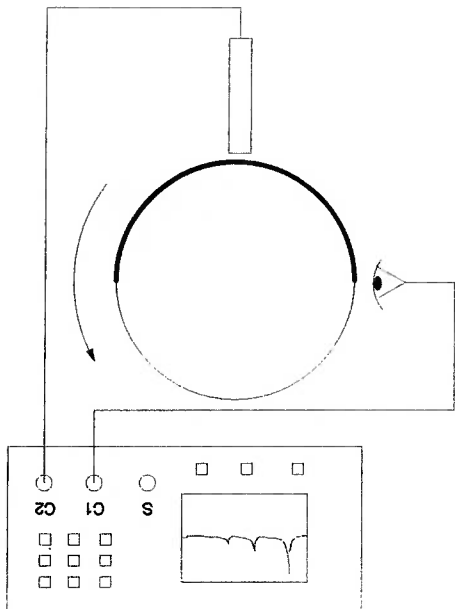


Figura 5.6: Esquema de medição para o balanceamento

O equipamento mostrado é um analisador de sinais digital HPTM 3567A. No canal 1 do mesmo, $c1$, entra-se com o sinal TTL do sensor de rotação. No canal 2, $c2$, lê-se o sinal de um dos sensores de deslocamento. A amplitude do fasor de

vibração é obtido através da leitura da componente síncrona do espectro (FFT) do canal 2. A fase do mesmo fasor é obtida através da leitura do ângulo da função de transferência entre o canal 2 e o canal 1 na frequência equivalente à rotação.

5.2.5 Respostas em frequência

Os atuadores magnéticos podem ser utilizados, mesmo com o rotor rodando, como um excitador do mesmo sem contato. Isto é extremamente útil para se determinar características dinâmicas, como frequências naturais e coeficientes de amortecimento. O esquema deste ensaio pode ser visto na figura 5.7.

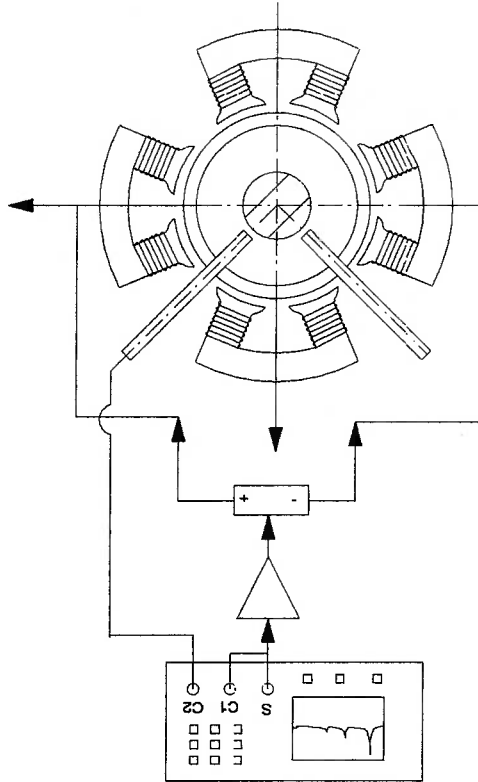


Figura 5.7: Esquema do ensaio de resposta em frequência

O analisador de sinais é o mesmo do ensaio de balançamento. A sua saída, S, é um gerador de sinais que pode realizar varreduras senoidais com passo constante ou variável. Restringindo-se a banda de frequência de análise (*zoom*), consegue-se resoluções em frequência bastante refinadas. Pode gerar outros tipos de sinais,

também, como ruído pseudo-aleatório. Para medidas mais acuradas, pode-se realizar médias no domínio da frequência.

A figura 5.7 mostra um eixo sendo excitado pelo gerador de sinais do analisador que envia o sinal em tensão para o amplificador de potência que, como foi visto, envia os semi-ciclos positivo e negativo da corrente para os semi-eixos correspondentes. O mesmo sinal é enviado ao canal 1 do analisador. O canal 2, recebe o sinal de um dos sensores de deslocamento. Fazendo-se uma varredura em frequência da excitação, levanta-se a curva de resposta em frequência de deslocamento por força obtendo-se a curva, em frequência, da função de transferência senoidal entre o canal 2 e o canal 1. Obviamente, deve-se levar em conta o ganho do sensor G_s , no canal 2 e o ganho do estágio de potência G_a e do atuador, no canal 1. Este último, para pequenas amplitudes de excitação, é o ganho da lei de força linearizada K_m , identificado.

Como foi visto na seção 4.6.1, excitando o rotor em apenas 1 eixo, como na figura 5.7, excitam-se os modos diretos e retrógrados. Desta forma, pretende-se, com este ensaio, validar o modelo teórico de rotor desenvolvido por este trabalho. Na bancada, a excitação foi colocada no eixo X do disco d1, já que os atuadores do disco d4 foram utilizados para a implementação do amortecedor ativo.

5.2.5 Balançamento eletrônico

Este ensaio pretende, através dos atuadores dos discos d1, obter as forças ótimas de passagem pelas, ao menos, duas primeiras velocidades críticas, as quais foram simuladas na seção 4.8. A figura 5.8 apresenta um esquema do ensaio realizado:

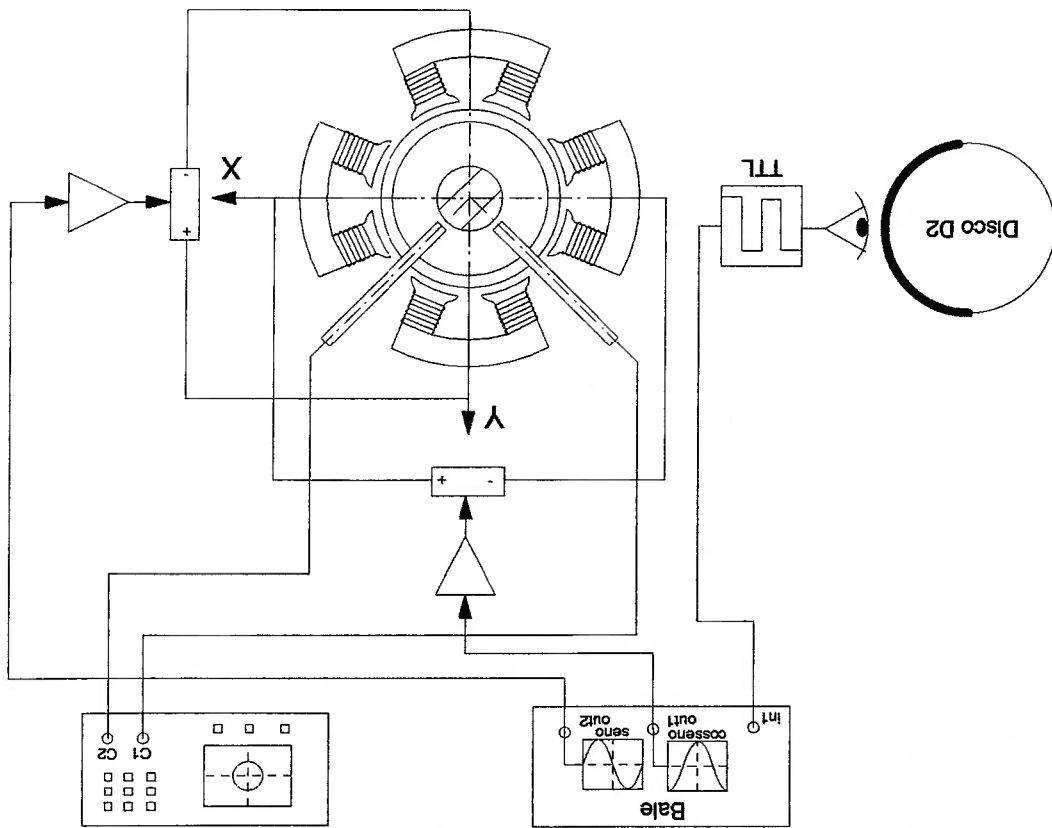


Figura 5.8: Esquema do ensaio de balançamento eletrônico

Na figura 5.8, o módulo chamado Bale recebe o sinal TTL oriundo do sensor de rotação (situado no disco d2) , gera uma cossenoíde síncrona com o mesmo, e envia ao atuador do eixo X e uma senóide, também síncrona, e a envia ao eixo Y. Pode-se variar a amplitude e fase desses sinais (iguais para os dois). Injeta-se, assim, uma força girante direta nos atuadores e, através do mesmo método dos coeficientes de influência dos ensaios de balançamento, calcula-se a amplitude e fase da mesma para que se minimize a resposta ao desbalanço na passagem pelas críticas.

O módulo Bale foi implementado com o auxílio de um micro-computador PC pentium™ 300 MHz e uma placa de aquisição NI AT-MIO-64E-3 da National Instruments™ conectada no barramento EISA do computador. Essa placa possui 64 canais analógicos de entrada (*single ended*) e 2 canais analógicos de saída. Seu conversor AD tem uma resolução de 12 bits e frequência de amostragem total de até 500 KHz. Permite *trigger* analógico e sincronização dos canais de saída com um *trigger* de entrada.

O programa que executa a geração dos sinais foi desenvolvido no software LabVIEW™ 6.0. Ele utiliza a entrada do sensor ótico como trigger analógico. A taxa de amostragem pode ser modificada pelo operador e também pode-se definir o nível de *trigger* bem como se o mesmo ocorre na borda de subida ou descida. O programa calcula a frequência, com um número de amostras definidas pelo operador e gera um seno e um cosseno, cuja amplitude e fase em relação ao sinal de *trigger* podem ser modificadas pelo operador. Esses sinais são gerados em um *buffer* com um número de pontos que pode ser definido pelo operador, e sempre contém um número inteiro de ciclos. Esse *buffer* é descarregado aos canais de saída, sincronizadamente com o *trigger* de entrada. Uma vez descarregado o *buffer*, reinicia-se o processo no próximo sinal de *trigger*. Nos testes, dois problemas ocorreram. Se o número de pontos para o cálculo da frequência é aumentado, melhora-se a precisão em sua medida. Porém há um aumento de lentidão e os sinais de saída perdem um pouco o sincronismo o que é traduzido por uma escorregada na fase até o próximo *trigger*. Na prática isso se traduz como uma pulsação na órbita dos sensores de deslocamento. Outro problema é o número de pontos do *buffer*. Se o mesmo é pequeno, ocorre uma desconinuidade nos sinais de saída entre as descarregadas de um *buffer* e outro o que faz com que o rotor sofra um impacto (*bump*) cíclico. Se é grande, aumenta a lentidão ocorrendo escorregada de fase e a pulsação acima descrita. Os valores ótimos destes parâmetros foram verificados experimentalmente e conseguiu-se bons resultados com a rotação do rotor bem estabilizada em determinados valores que serão vistas no capítulo 6. Não se conseguiu bons resultados com o rotor acelerando ou freando. Como cada placa tem dois canais de saída, diferentemente das simulações da seção 4.8, essa técnica só foi utilizada nos dois atuadores, X e Y do disco d1. Os níveis máximos de saída para os amplificadores de potência são ± 5 V.

A figura 5.9 mostra uma foto panorâmica da bancada em ensaio com todos equipamentos conectados.

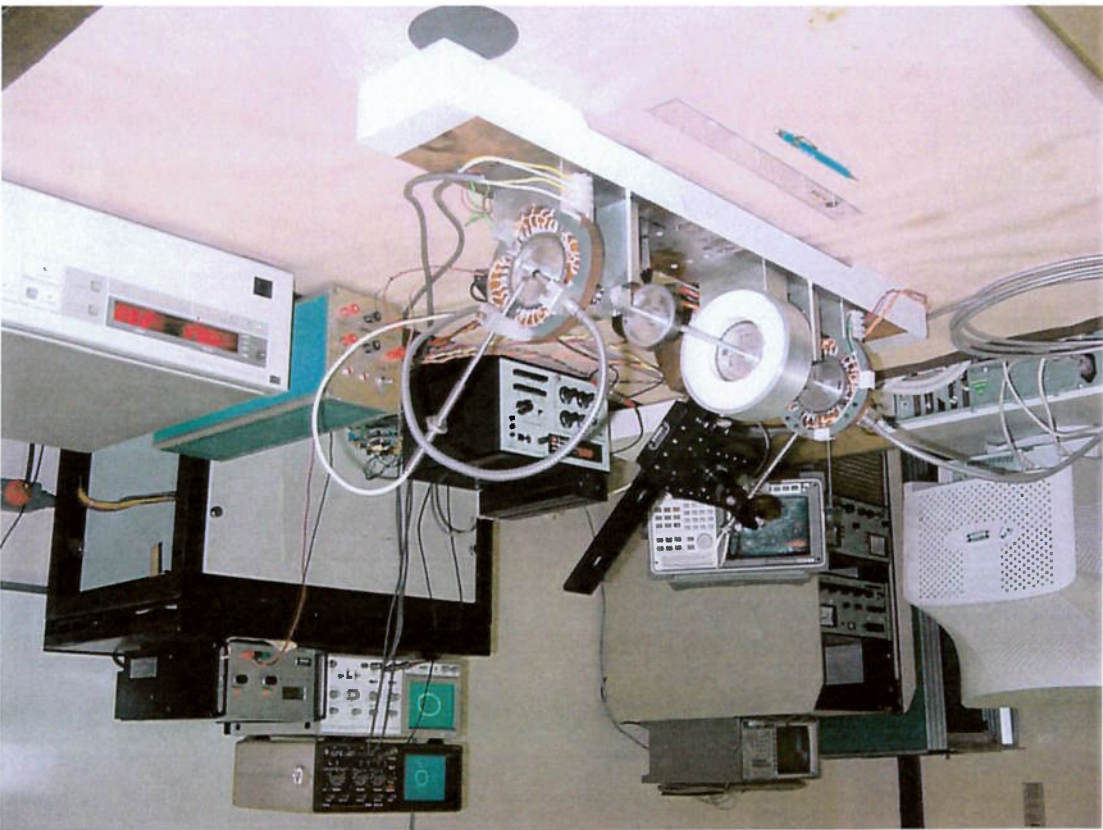


Figura 5.9: Foto da bancada em ensaio

RESULTADOS EXPERIMENTAIS E COMPARAÇÕES

Neste capítulo, os resultados dos ensaios realizados, que foram descritos no capítulo 5, serão apresentados e comparados com os resultados teóricos.

6.1 Curvas de resposta em frequência sem amortecedor ativo

Este ensaio, como descrito na seção 5.2.5, obteve algumas curvas de resposta em frequência sem o amortecedor ativo. Só foi possível obtê-las para rotações subcríticas devido ao fato de instabilidades aparecerem em rotações supercríticas dado os baixos amortecimentos providos pelos rolamentos ao rotor. Utilizou-se o atuador do eixo Y do disco d1 como excitador e, como saídas, foram medidos os sinais dos sensores X_{s1} e X_{s2} do anéis as1 e as2, respectivamente. As curvas abaixo mostram os resultados para o rotor parado e na rotação de 20 Hz. Para o rotor parado, as curvas foram obtidas através de varredura senoidal. Com o rotor rodando, melhores resultados foram obtidos utilizando como excitação ruído aleatório juntamente com a execução de médias no domínio da frequência. Junto com as curvas experimentais, estão plotadas curvas teóricas. Para o cálculo destas últimas, utilizou-se um coeficiente de amortecimento modal de $\xi = 5 \times 10^{-3}$.

Figura 6.1: Resp. em freq. sem amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s1}

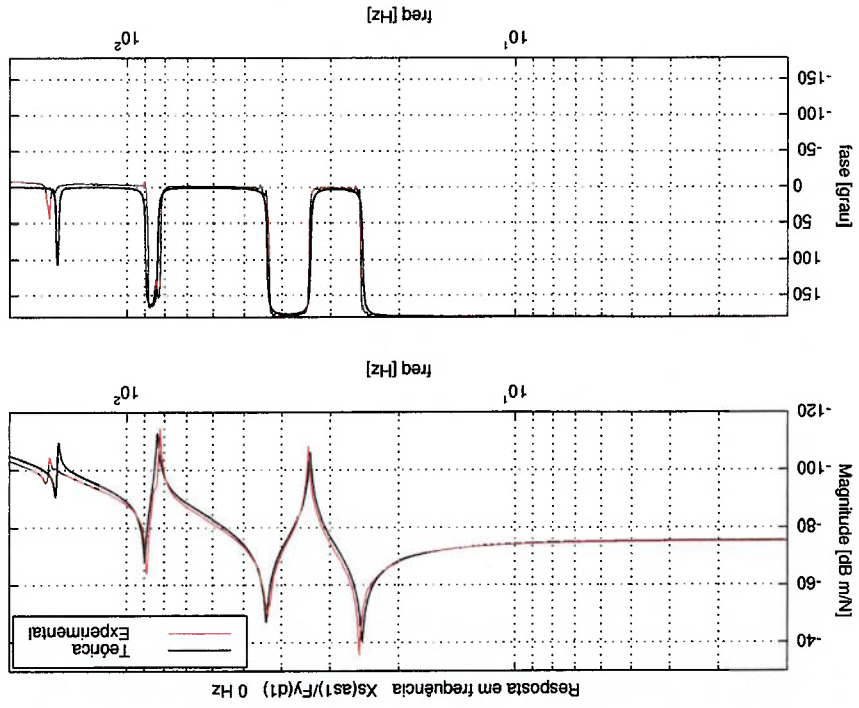


Figura 6.2: Resp. em freq. sem amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s2}

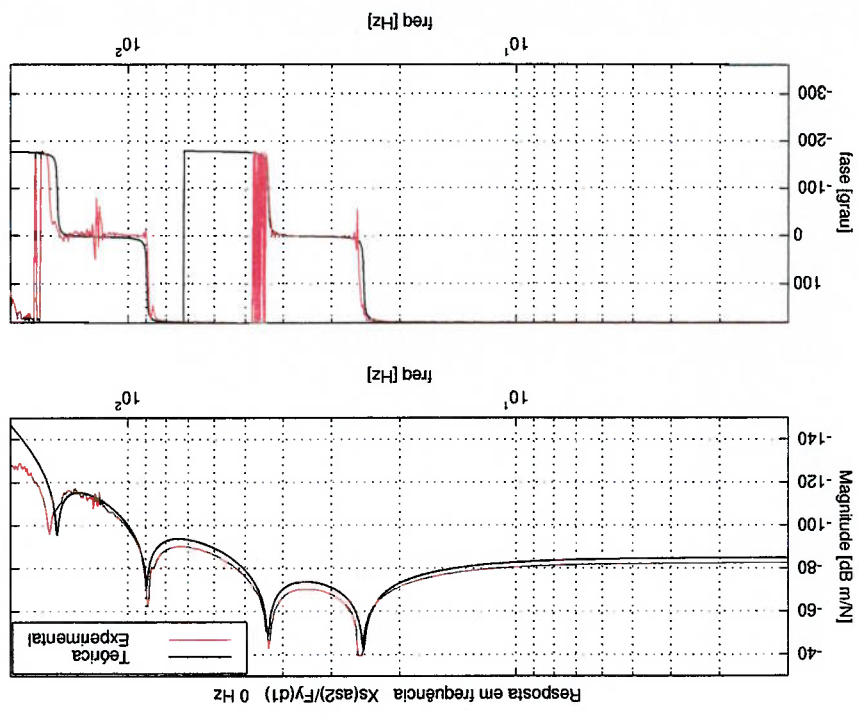


Figura 6.3: Resp. em freq. sem amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s1}^{as1}

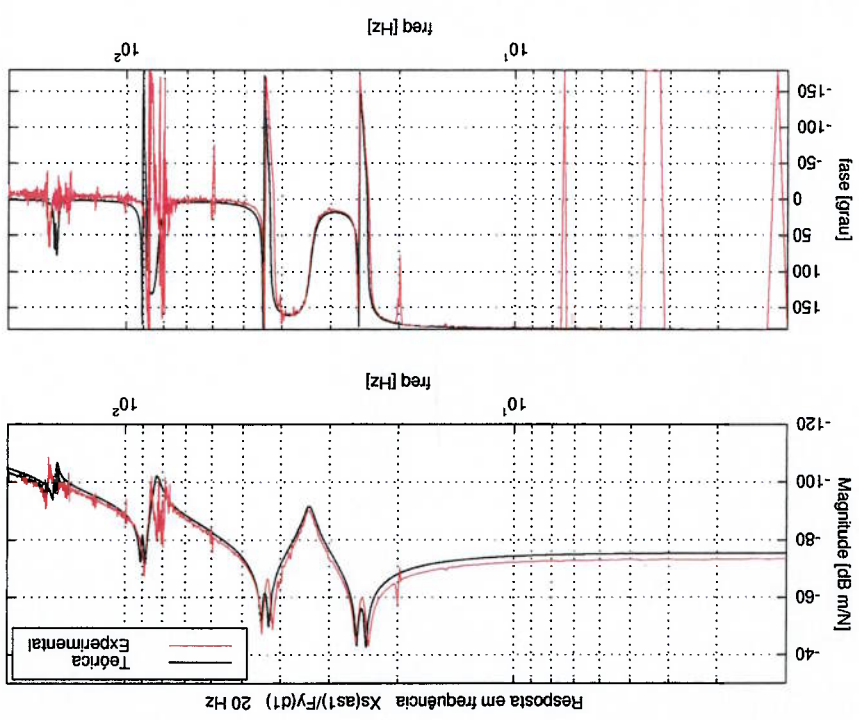
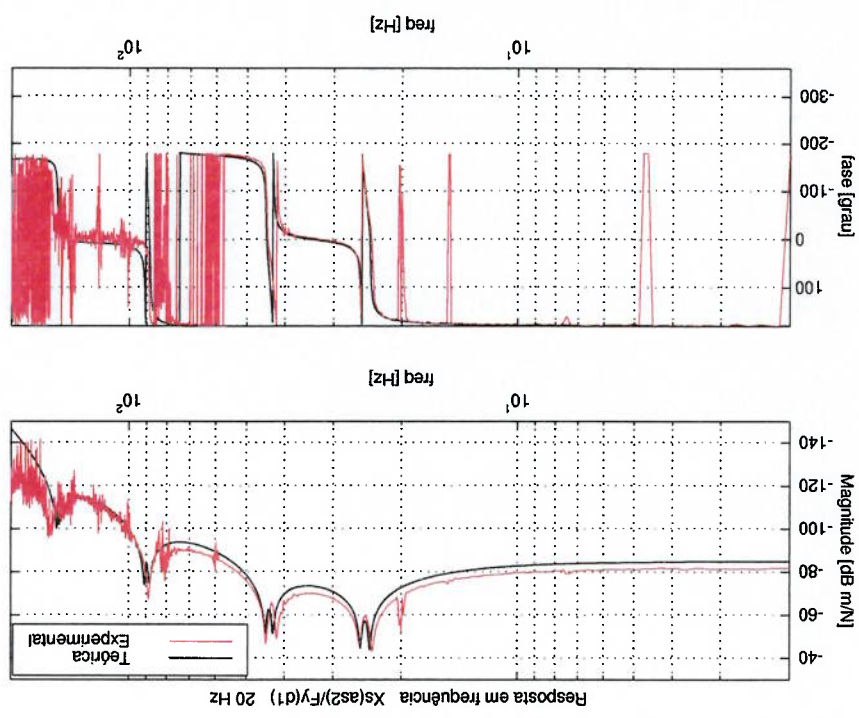


Figura 6.4: Resp. em freq. sem amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s2}^{as2}



As tabelas 6.1 e 6.2 mostram uma comparação das frequências naturais teóricas e experimentais para o rotor parado e na rotação de 20 Hz:

Tabela 6.1: Frequências naturais com o rotor parado

Modo	Freqs. Teóricas [Hz]	Freqs. Experimentais [Hz]	Erro [%]
1º	24,78	25,18	1,59
2º	43,73	43,25	1,11
3º	89,64	88,31	1,51
4º	151,81	159,78	4,98

Tabela 6.2: Frequências naturais na rotação de 20 Hz

Modo	Freqs. Teóricas [Hz]	Freqs. Experimentais [Hz]	Erro [%]
1º	24,09	23,75	1,43
2º	25,47	25,63	0,62
3º	42,77	41,88	2,12
4º	44,69	44,50	0,43
5º	88,27	-	-
6º	91,02	88,88	2,41

Observando as curvas das figuras de 6.1 a 6.4 e as tabelas 6.1 e 6.2, observa-se boa concordância entre os resultados experimentais e teóricos. Com o rotor parado, tem-se um erro máximo de 4,98 % para o 4º modo. Com o rotor em 20 Hz, foi difícil a identificação do 5º modo que é o modo equivalente ao retrogrado do 3º modo do rotor parado. Deixou-se, também, de anotar os modos, direto e retrogrado, correspondentes ao 4º modo do rotor parado. Estes modos, como pode ser visto nas autofunções da seção 4.4, têm os nós das autofunções, dois deles impostos pelos rolamentos, muito próximos. Sendo assim, é razoável afirmar que as deformações causadas por cisalhamento, as quais são desconsideradas pelo modelo de rotor, passam a ser importantes.

6.2 Curvas de resposta em frequência com amortecedor ativo

As curvas de resposta em frequência com o amortecedor ativo descrito na seção 5.2.3 foram obtidas da mesma maneira que a descrita na seção 6.1. As figuras, de 6.5 a 6.10, mostram os resultados obtidos com o rotor parado, na rotação de 20 Hz e na rotação de 60 Hz (máxima rotação atingida pelo rotor) juntamente com curvas obtidas com o modelo teórico.

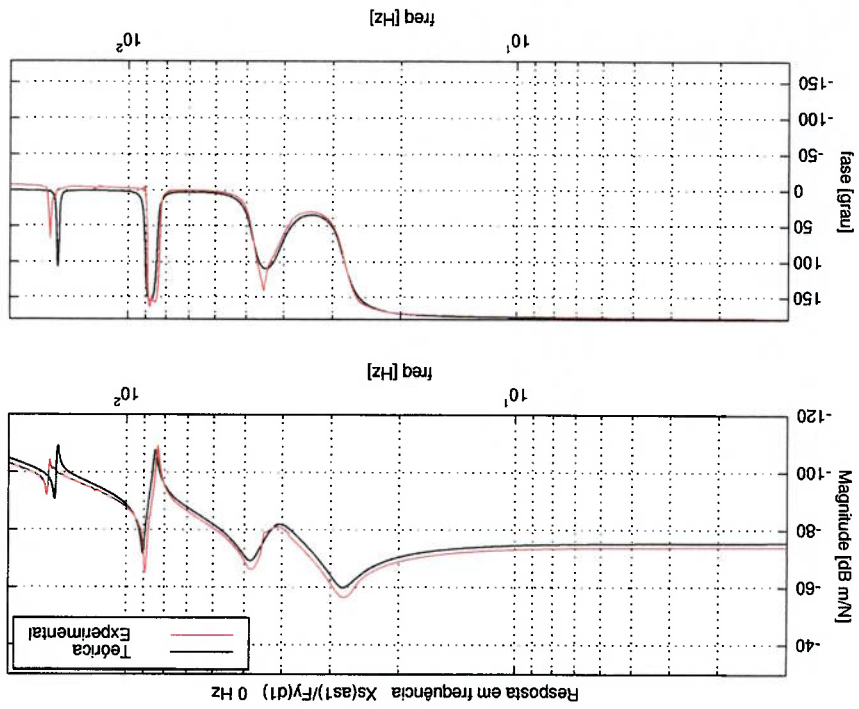


Figura 6.5: Resp. em freq. com amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{zst}

Figura 6.6: Resp. em freq. com amortecedor ativo, rotor parado, desloc. em X_{s2}

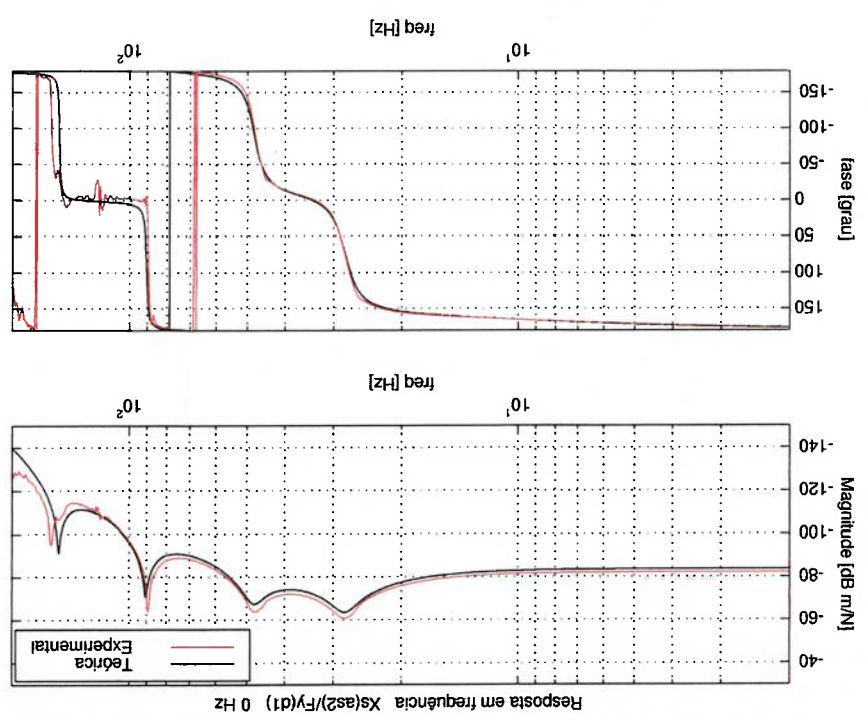


Figura 6.7: Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s1}

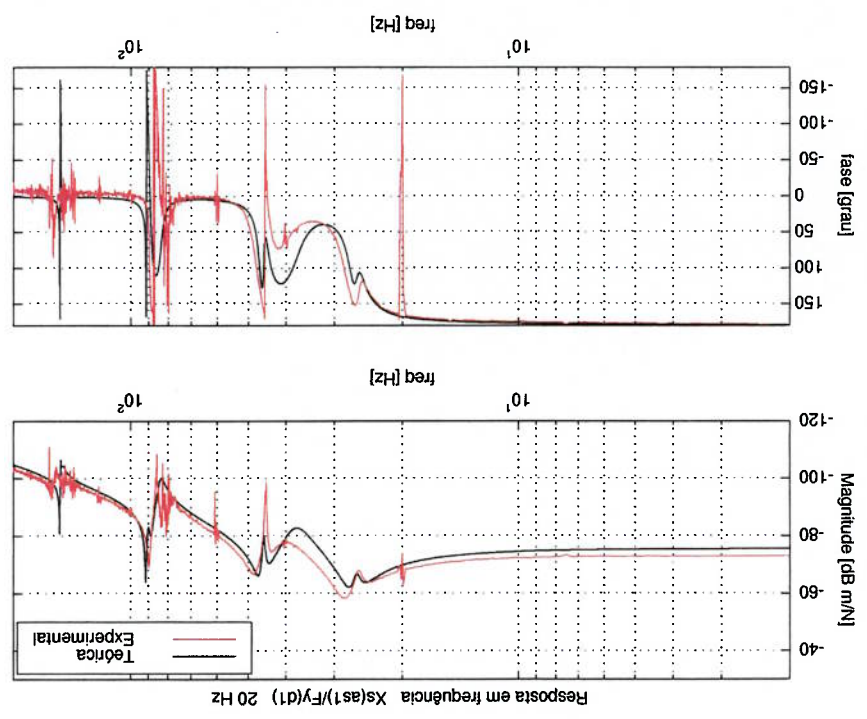


Figura 6.8: Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 20 Hz, desloc. em X_{s2}

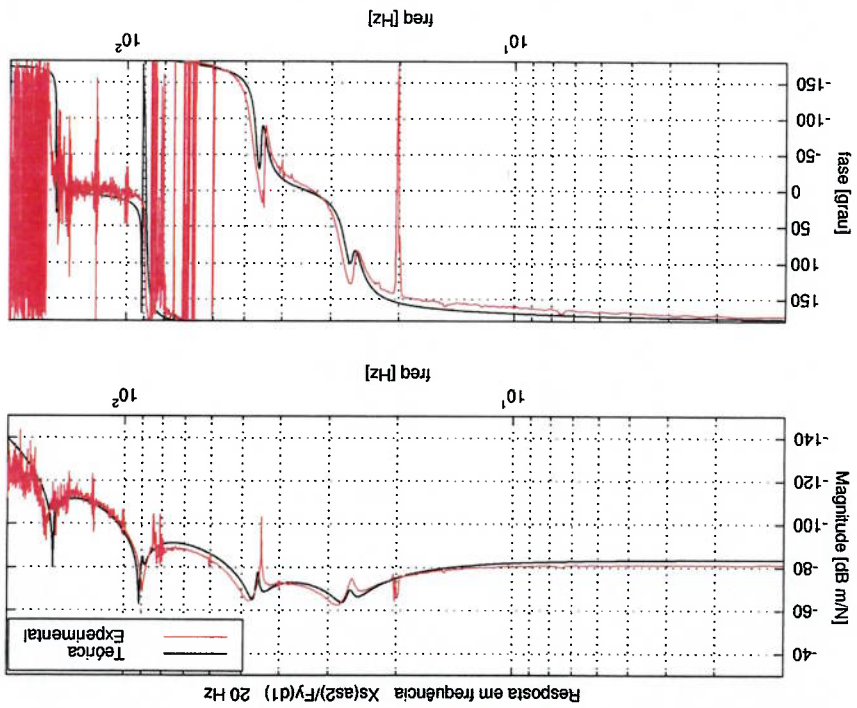
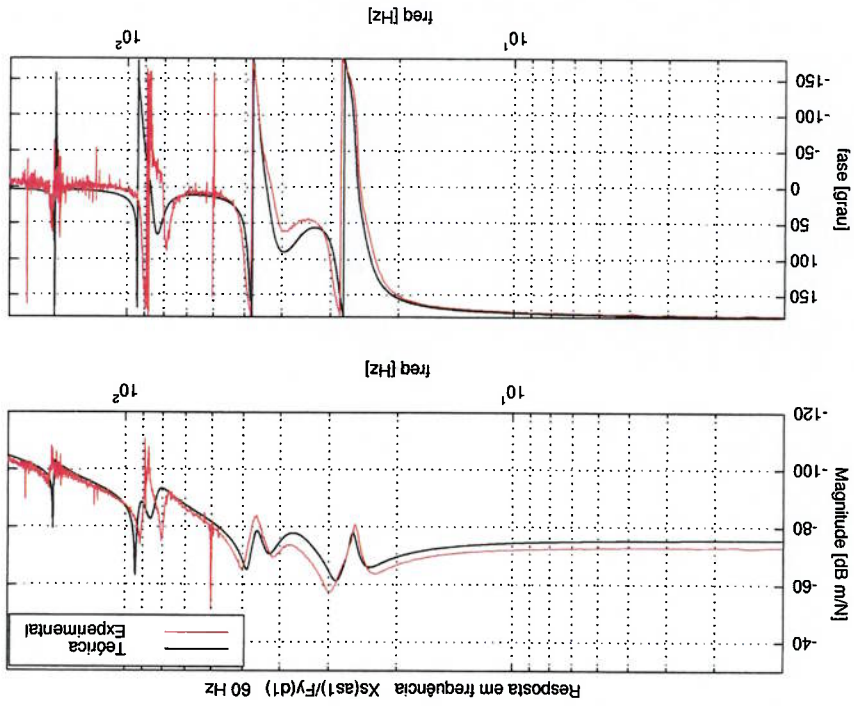


Figura 6.9: Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 60 Hz, desloc. em X_{s1}



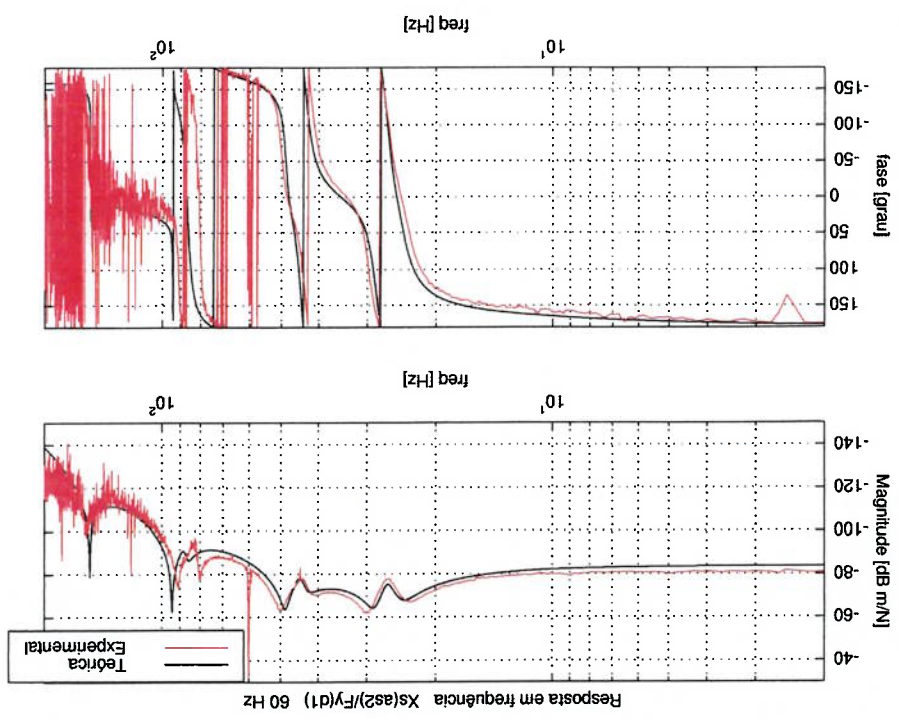


Figura 6.10: Resp. em freq. com amort. ativo, rotação de 60 Hz, desloc. em X_{s2}

As tabelas de 6.3 a 6.5 mostram as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento, ξ , teóricos e experimentais obtidos com o rotor parado, nas rotações de 20 Hz e 60 Hz. Estes valores modais experimentais foram identificados pelo método da largura de pico (Lalanne et al, 1984).

Modo	Teórica		Experimental	
	Freq. Nat. [Hz]	ξ	Freq. Nat. [Hz]	ξ
1º	27,99	$6,4 \times 10^{-2}$	27,93	$5,86 \times 10^{-2}$
2º	47,99	$4,73 \times 10^{-2}$	47,70	$4,04 \times 10^{-2}$
3º	90,45	$7,22 \times 10^{-3}$	89,34	$3,5 \times 10^{-3}$

Tabela 6.3: Freqs. naturais e ξ s. com amortecedor ativo com o rotor parado

Tabela 6.4: Freqs. naturais e ξ s. com amortecedor ativo na rotação de 20 Hz

Modo	Técnica		Experimental	
	Freq. Nat. [Hz]	ξ	Freq. Nat. [Hz]	ξ
1º	25,75	$5,46 \times 10^{-2}$	25,38	$3,89 \times 10^{-2}$
2º	27,18	$4,23 \times 10^{-2}$	28,13	$4,87 \times 10^{-2}$
3º	44,78	$3,25 \times 10^{-2}$	44,38	$1,96 \times 10^{-2}$
4º	46,71	$2,19 \times 10^{-2}$	47,88	$3,4 \times 10^{-2}$
5º	88,66	$1,10 \times 10^{-2}$	—	—
6º	91,42	$2,02 \times 10^{-3}$	89,50	$5,52 \times 10^{-3}$

Tabela 6.5: Freqs. naturais e ξ s. com amortecedor ativo na rotação de 60 Hz

Modo	Técnica		Experimental	
	Freq. Nat. [Hz]	ξ	Freq. Nat. [Hz]	ξ
1º	24,36	$6,80 \times 10^{-2}$	23,63	$6,59 \times 10^{-2}$
2º	28,64	$3,89 \times 10^{-2}$	29,75	$3,45 \times 10^{-2}$
3º	42,85	$4,40 \times 10^{-2}$	41,88	$4,14 \times 10^{-2}$
4º	48,66	$2,02 \times 10^{-2}$	50,00	$2,25 \times 10^{-2}$
5º	85,89	$2,10 \times 10^{-2}$	80,38	$6,73 \times 10^{-3}$
6º	94,16	$2,00 \times 10^{-3}$	91,38	$8,89 \times 10^{-3}$

Observando as figuras e as tabelas, observa-se, mais uma vez, boa concordância entre os valores teóricos e experimentais. A implementação do amortecedor ativo foi bem sucedida uma vez que os coeficientes de amortecimento ξ passaram da ordem de grandeza de 10^{-3} , sem o amortecedor, para a ordem de 10^{-2} com ele. Isto possibilitou as rodadas em velocidades supercríticas sem instabilidades. A origem destas não foi estudada por não fazerem parte do escopo deste trabalho, mas é sabido na literatura que rotores com baixos amortecimentos externos estão sujeitos a instabilidades em velocidades supercríticas causadas por assimetrias internas, amortecimentos internos e outros. Mais uma vez, também, as maiores

discordâncias ocorreram nos 5° e 6° modos correspondentes ao direto e retrogrado do 3° modo do rotor parado. Como já foi dito, a proximidade dos nós das autofunções destes modos aliada à ausência de cisalhamento no modelo teórico, justificam as diferenças.

6.3 Balançamento

O balançamento foi executado como descrito na seção 5.2.4. Foram balanceados os 2° e 4° modos que são modos diretos (os retrogradados não são excitados pelo desbalançamento). Primeiramente o rotor foi balanceado para o 2° modo colocando uma configuração de massas de teste nos quatro discos excitadora somente deste modo, de acordo com as autofunções do mesmo da seção 4.4. As medidas foram feitas na rotação de 25 Hz. Depois disto, com o mesmo procedimento, foi balanceado o 4° modo na rotação de 45 Hz. Este método é conhecido como balançamento modal. Uma vez determinados os coeficientes de influência modais nestas rotações e colocadas as massas de correção, medindo as vibrações nestas rotações, calculou-se o desbalanço residual para os dois modos. A tabela 6.6 mostra os desbalanços residuais estimados para os mesmos.

Tabela 6.6: Desbalanços modais residuais

2° modo rotação = 25 Hz		4° modo rotação = 45 Hz				
Disco	md [Kg]	rd [m]	fd [°]	md [Kg]	rd [m]	fd [°]
1	6×10^{-5}	25×10^{-3}	-162	3×10^{-5}	25×10^{-3}	-49
2	6×10^{-5}	25×10^{-3}	18	3×10^{-5}	25×10^{-3}	131
3	6×10^{-5}	25×10^{-3}	18	3×10^{-5}	25×10^{-3}	-49
4	6×10^{-5}	25×10^{-3}	-162	3×10^{-5}	25×10^{-3}	131

md é a massa de desbalanço, rd a excentricidade do mesmo equivalente ao raio dos discos onde foram colocadas as massas de correção e fd é o ângulo do desbalanço. A figura 6.11 mostra uma curva da resposta ao desbalanço, feita com o analisador de sinais, medida com o sensor X_{s1} .

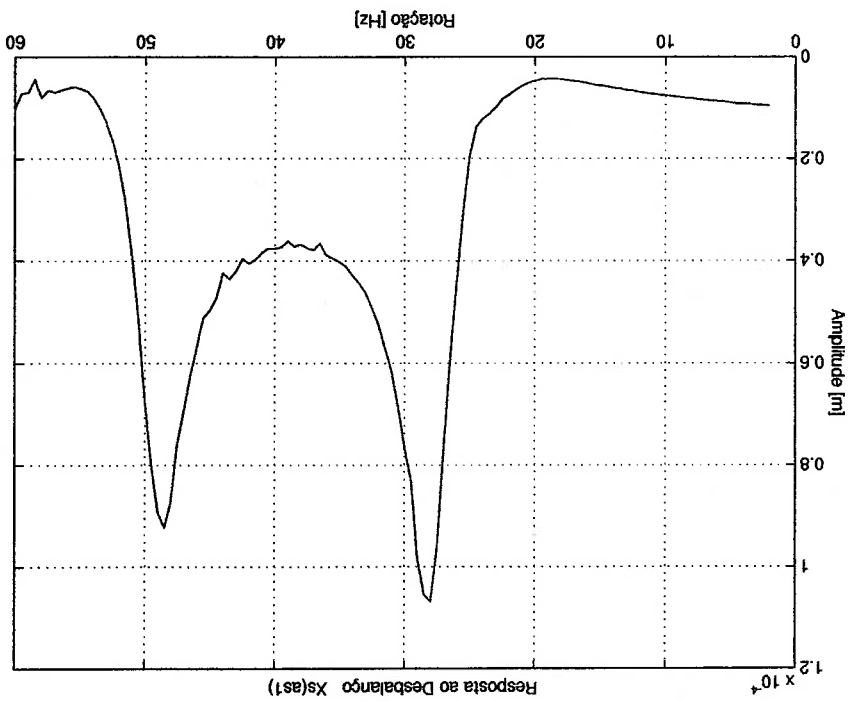


Figura 6.11: Resposta ao Desbalanço

A tabela 6.7 mostra as rotações onde foram atingidos os picos de vibração bem como suas amplitudes.

Resposta ao Desbalanço $X_{s(as1)}$ [m]	
1ª Crítica (28 Hz)	$1,07 \times 10^{-4}$
2ª Crítica (49 Hz)	$9,23 \times 10^{-5}$

Tabela 6.7: Rotações e Amplitudes dos picos da resposta ao desbalanço

6.4 Balançamento Eletrônico

Neste ensaio, descrito na seção 5.2.5, o módulo Bale utilizou uma frequência de amostragem de 1024 Hz e 512 amostras para o cálculo da rotação. O *buffer* para a geração das senóide e cossenóide síncronas ficou com 2048 pontos.

Determinou-se a corrente ótima que minimizou a resposta ao desbalanço na 1ª velocidade crítica estabilizando a rotação do rotor em 25 Hz. Aplicando correntes de teste nos atuadores X e Y do disco $d1$ e medindo os deslocamentos nos sensores dos eixos X_{zst1} (disco $d1$) e X_{zst2} (disco $d4$), determina-se a corrente que minimiza tais deslocamentos pelo método dos coeficientes de influência. O mesmo procedimento foi aplicado para a minimização dos deslocamentos na passagem pela 2ª velocidade crítica com a rotação do rotor estabilizada em 50 Hz. A tabela 6.8 mostra as correntes ótimas experimentais encontradas juntamente com as correntes ótimas teóricas encontradas na rotina de otimização cujas simulações utilizam como excitações os desbalanços modais residuais da tabela 6.6.

<i>idi</i>							
1ª Crítica (25 Hz)				2ª Crítica (50 Hz)			
Teórico		Experimental		Teórico		Experimental	
Ampl.[A]	Fase[°]	Ampl.[A]	Fase[°]	Ampl.[A]	Fase[°]	Ampl.[A]	Fase[°]
0,047	14	0,030	4	0,083	134	0,053	145

Tabela 6.8: Correntes de minimização das passagens pelas críticas

Observa-se que, tanto as correntes teóricas quanto as experimentais aplicadas no disco $d1$ têm fases que, aproximadamente, se opõem às fases dos desbalanços residuais do mesmo disco, ou seja, as correntes tentam anular os desbalanços modais residuais. Há diferenças entre as amplitudes teóricas e experimentais que podem ser creditadas à imprecisão na estimativa dos desbalanços residuais visto que seus valores são pequenos.

As tabelas 6.9 e 6.10 mostram os deslocamentos, teóricos e experimentais, nos sensores com e sem o balançamento eletrônico, respectivamente, na otimização da passagem pela 1ª crítica. As tabelas 6.11 e 6.12 fazem o mesmo para a 2ª crítica.

Tabela 6.9: Deslocamentos na passagem pela 1ª crítica sem Bale

Deslocamentos sem Bale		1ª Crítica (25 Hz)	
Teórico		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
Experimental		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
$7,34 \times 10^{-5}$	$5,29 \times 10^{-5}$	$2,09 \times 10^{-5}$	$1,10 \times 10^{-5}$

Tabela 6.10: Deslocamentos na passagem pela 1ª crítica com Bale

Deslocamentos com Bale		1ª Crítica (25 Hz)	
Teórico		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
Experimental		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
$1,03 \times 10^{-5}$	$8,38 \times 10^{-6}$	$4,70 \times 10^{-6}$	$1,15 \times 10^{-6}$

Tabela 6.11: Deslocamentos na passagem pela 2ª crítica sem Bale

Deslocamentos sem bale		2ª Crítica (50 Hz)	
Teórico		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
Experimental		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
$1,02 \times 10^{-4}$	$1,31 \times 10^{-4}$	$7,72 \times 10^{-5}$	$1,07 \times 10^{-4}$

Tabela 6.12: Deslocamentos na passagem pela 2ª crítica com Bale

Deslocamentos com bale		2ª Crítica (50 Hz)	
Teórico		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
Experimental		X_{s1}^{as1} [m]	X_{s2}^{as2} [m]
$1,13 \times 10^{-5}$	$2,17 \times 10^{-5}$	$4,54 \times 10^{-5}$	$9,01 \times 10^{-5}$

Percebe-se que a redução nos deslocamentos conseguida com o balanceamento eletrônico experimental, na passagem pela 1ª crítica, foi tão boa quanto a conseguida teoricamente. Já na segunda crítica, a redução experimental, apesar de ter ocorrido, ficou bem abaixo da teórica. Deve-se relatar que neste segundo caso, as descontinuidades e escorregadas de fase das senóides e cossenóides síncronas, relatadas na seção 5.2.5, foram piores e dificultaram o ensaio. Apesar disto, o princípio do balanceamento eletrônico proposto foi comprovado. Ficou difícil, também, a obtenção de uma curva semelhante à da figura 6.11 com o módulo Bale implementado, devido à dificuldade de se fazer o balanceamento eletrônico com a rotação variando.

Como última observação, deve-se dizer que o módulo Bale foi implementado em somente um disco por falta de equipamento, mas as simulações da seção 4.8 mostram que os melhores resultados são obtidos com o Bale implementado nos dois discos cujos deslocamentos se quer minimizar.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Neste capítulo, as principais conclusões deste trabalho serão apresentadas. Posteriormente serão sugeridas propostas para trabalhos futuros.

7.1 Conclusões

As conclusões deste trabalho são as seguintes:

- Um modelo de rotor flexível contínuo com deformações de viga de Bernoulli-Euler foi obtido com sucesso.

- As relações de ortogonalidade entre as autofunções foram demonstradas possibilitando a discretização do modelo, através do teorema da expansão, truncando a série de superposição das autofunções até o modo de vibrar desejado.

- Simulações numéricas com um modelo de uma bancada projetada foram realizadas obtendo as frequências naturais, os diagramas de Campbell, curvas de resposta em frequência e a resposta ao desbalanço no domínio do tempo.

- Uma rotina de otimização para a obtenção das forças ótimas de atuação em malha aberta de mancais magnéticos ativos não lineares para a minimização da resposta ao desbalanço em passagens por velocidades críticas foi desenvolvida.

- As forças ótimas de atuação em malha aberta de mancais magnéticos ativos não lineares para a minimização da resposta ao desbalanço em passagens por velocidades críticas são aquelas que minimizam o desbalanço modal equivalente a esta velocidade, através da geração de uma força girante síncrona e no mesmo sentido que a mesma o que foi chamado de balançamento eletrônico (bale). Os resultados serão melhores se houver atuadores em todos os pontos do rotor onde se quer minimizar os deslocamentos.

- As forças de atuação em malha aberta dos mancais magnéticos ativos não crescem amortecimento ao sistema.

- Uma bancada experimental foi projetada, construída e ensaiada com sucesso.

- Os ensaios de identificação, obtenção de curvas de resposta em frequência e balançamento, mostraram boa concordância entre os resultados obtidos por simulação teórica e os obtidos experimentalmente validando, assim, o modelo. Em modos de frequências mais elevadas os erros aumentam devido a descon sideração das deformações provocadas por cisalhamento no modelo teórico.

- Um amortecedor ativo utilizando os atuadores magnéticos de um dos discos do rotor realimentados por sensores de deslocamentos próximos ao mesmo disco foi implementado com sucesso. Isto se fez necessário devido ao surgimento de instabilidades do rotor da bancada em velocidades supercríticas.

- Um módulo de balançamento eletrônico foi implementado com uma placa de aquisição de sinais de um micro-computador PC. Tal módulo funcionou bem para velocidades constantes e não funcionou bem com o rotor acelerando ou freando. De qualquer maneira, o princípio do balançamento eletrônico ficou validado.

7.2 Sugestões para futuros trabalhos

As sugestões para trabalhos futuros são as seguintes:

- Acrescentar ao modelo teórico de rotor flexível contínuo as deformações causadas por tensões de cisalhamento oriundas de forças cortantes.
- Desenvolver o módulo de balançamento eletrônico para que o mesmo funcione bem durante a aceleração e a frenagem do rotor e estime automaticamente, sem a necessidade de um operador, as correntes de correção do desbalanço.
- Retirar os rolamentos da bancada utilizando os mancais magnéticos da mesma para suportar o rotor. A partir daí, comparar diferentes técnicas de controle em malha fechada para a otimização da passagem por velocidades críticas.

APÊNDICE A

CÁLCULO DOS VALORES DE INÉRCIA E RIGIDEZ DO ROTOR

Os elementos do rotor são cilíndricos (vide figura 5.1). Deve-se calcular, para cada um deles, a densidade linear, o momento de inércia transversal por unidade de comprimento, o momento de inércia polar por unidade de comprimento e o momento de inércia de área da seção transversal.

Pedersen (1972), mostra que são válidas as fórmulas:

$$\begin{aligned} m &= \rho \frac{\pi (d_e^2 - d_i^2)}{4}; \\ j_p &= \frac{m (d_e^2 + d_i^2)}{8}; \\ j_i &= \frac{j_p}{2}; \\ I &= \frac{\pi (d_e^4 - d_i^4)}{64}. \end{aligned} \quad (A1)$$

onde, ρ , m , j_p , j_i , I , d_e , d_i são a massa específica, a densidade linear, o momento de inércia polar por unidade de comprimento, o momento de inércia transversal por unidade de comprimento, o momento de inércia de área da seção transversal, o diâmetro externo e o diâmetro interno, respectivamente.

I Valores de Inércia

Os materiais utilizados, aço, ferro-silício e alumínio, têm as seguintes massas específicas:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{aço}} &= \rho_{\text{fe-si}} = 7850 \text{ Kg/m}^3 \\ \rho_{\text{alumínio}} &= 2766 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

Para o eixo, anéis dos sensores, e anéis dos rolamentos, as fórmulas (A1) são aplicadas diretamente, tendo em vista que os mesmos têm as dimensões da tabela A1:

Tabela A1: Dimensões e materiais do eixo e anéis

Material	d_e [m]	d_i [m]	
eixo	6×10^{-3}	4×10^{-3}	Alumínio
anéis dos rolamentos	$10,3 \times 10^{-3}$	6×10^{-3}	Aço
anéis dos sensores	16×10^{-3}	6×10^{-3}	Alumínio

Obtêm-se os resultados:

Tabela A2: Valores de inércia do eixo e anéis

m [Kg/m]	J_p [Kg.m]	J_i [Kg.m]	
$4,34 \times 10^{-2}$	$2,82 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-7}$	eixo
$4,32 \times 10^{-1}$	$7,68 \times 10^{-6}$	$3,84 \times 10^{-6}$	anéis dos rolamentos
$4,78 \times 10^{-1}$	$1,74 \times 10^{-5}$	$8,72 \times 10^{-6}$	anéis dos sensores

Os discos são constituídos de uma polia de alumínio e um anel de aço. Como a polia tem uma alma que não ocupa toda a extensão do disco, calcula-se a massa total do disco, dividindo-o em uma polia (com um anel interno, alma e anel externo) mais o anel de aço. Divide-se essa massa pelo comprimento do disco, obtendo, assim, sua densidade linear. Depois disto, aplicam-se as fórmulas A1 com a densidade linear obtida, o diâmetro externo do anel de aço e o diâmetro interno da polia. As dimensões são as seguintes:

Tabela A3: Dimensões dos discos

d_e [m]	d_i [m]	l [m]	
16×10^{-3}	6×10^{-3}	12×10^{-3}	anel interno
50×10^{-3}	16×10^{-3}	4×10^{-3}	alma
58×10^{-3}	50×10^{-3}	12×10^{-3}	anel externo
$62,4 \times 10^{-3}$	58×10^{-3}	12×10^{-3}	anel de aço

l é comprimento.

Lembrando que a massa total é dada por $M = \rho \frac{\pi(d_e^2 - d_i^2)l}{4}$, têm-se os

resultados:

M [Kg]	m [Kg/m]	J_p [Kg.m]	J_i [Kg.m]
$8,82 \times 10^{-2}$	7,35	$3,61 \times 10^{-3}$	$1,81 \times 10^{-3}$

Tabela A4: Valores de inércia dos discos

É importante lembrar que os valores de inércia dos anéis e discos devem ser

somados aos do eixo.

2 Valores de rigidez

O único valor de rigidez que importa é a rigidez à flexão do eixo. A mesma é obtida do produto EI , onde E é o módulo de Young. Para o alumínio utilizado,

$$E = 6,9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

Desta forma, calculando-se I da equação (A1), com os valores da tabela A1 e

com o valor de E acima, tem-se:

$$EI = 3,52 \text{ N.m}^2.$$

BIBLIOGRAFIA

- ALVES, J. S. ; BETTI, F. ; PIERRI, P. S. ; PORSCH, M. C. Sistemas de Controle para Mancais Magnéticos Ativos. *Anais do I Simposio de Automática Aplicada*, pp.135-140, Sociedade Brasileira de Automática, São Paulo, Setembro 1996.
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. Trad. de João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1983.
- CHEN, H.M. ; DARLOW, M.S. Magnetic Bearing With Rotating Force Control. *Journal of Tribology*, v.110, pp. 100-105, Transactions of the ASME, January 1988.
- D'ELEUTÉRIO, G.M.T.; HUGHES, P.C. Dynamics of Gyroelastic Continua. *Journal of Applied Mechanics*, v.51, pp. 415-422, Transactions of the ASME, 1984.
- DIEWALD, W. ; NORDMANN, R. Parameter Optimization for the Dynamics of Rotating Machinery. *Proceedings of the 3rd International Conference on Rotating Machine Dynamics*, ROTORDYNAMICS, pp.51-55, Editions du CNRS, Lyon, September 1990.
- DORF, R.C. ; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC Publishing Company, 1995.
- GASCH, R. ; PFÜTZNER, H. *Rotorodynamik*. Berlin, Springer-Verlag, 1975.
- GENTA, G. ; BRUSA E. Rotordynamic Analysis in the Design of Rotating Machinery. *Proceedings of International Workshop on Multidisciplinary Optimization*, Pretoria, August 2000.

- GOODMANN, T. P. A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections. *Journal of Engineering for Industry*, pp. 273-279, Transactions of the ASME, August 1964.
- KANE, K. ; TORBY, B. J. The Extended Modal Reduction Method Applied to Rotor Dynamic Problems. *Journal of Vibration and Acoustics*, v.113, pp. 79-84, Transactions of the ASME, January 1991.
- KANEMITSU, Y. ; OHSAWA, M. ; WATANABE, K. Real Time Balancing Of a Flexible Rotor Supported by Magnetic Bearing. *Proceedings of the 3rd International Conference on Rotating Machine Dynamics, ROTORDYNAMICS*, pp.51-55, Editions du CNRS, Lyon, September 1990.
- KIRK, D.E. *Optimal Control Theory*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1970.
- KNOSPE, C.R. ; HUMPHRIS, R.R. ; MASLEN, E.H. ; ALLAIRE, P. E. Active Balancing of a High Speed Rotor in Magnetic Bearings. *Proceedings of the International Conference on Rotating Machine Dynamics, ROTORDYNAMICS* 92, pp.19-26, Springer-Verlag, Venice, April 1992.
- LabVIEW™ USER MANUAL.
- LALANNE, M. ; BERTHIER, P. ; HAGOPIAN, J.D. *Mechanical Vibrations for Engineers*. Chichester, John Wiley and Sons, 1984.
- LANZOS, C. *The Variational Principles Of Mechanics*. New York, Dover Publications Inc., 1986.
- LANZARINI, C. ; FRANCO, N. M. B. *Tópicos de Cálculo Numérico*. Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, São Carlos, 1980.

- LEFORE, F. P. N. ; ARAUJO, C. A. Controle da Vibração de Rotores Flexíveis Usando Forças Magnéticas Externas. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*. v.XV, n.4, pp. 342-349, ABCM- Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1993.
- MATLAB™ OPTIMIZATION TOOLBOX USER'S GUIDE.
- MATLAB™ FUNCTIONS REFERENCE, volumes 1e 2.
- MEIROVITCH, L. A modal Analysis for the Response of Linear Gyroscopic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, v.42, pp. 446-450, Transactions of the ASME, June 1975.
- MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. International Student Edition, McGraw-Hill Inc., 1977.
- MÜLLER, P.C. Allgemeine lineare Theorie für Rotorsysteme ohne oder mit kleinen Unsymmetrien. *Ingenieur Archiv*, v.51, pp. 61-74, Springer Verlag, 1981.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall Inc., 1970.
- PARKER, R.G. ; SATHE, P.J. Exact Solutions for the Free and Forced Vibration of a Rotating Disk-Spindle System. *Journal of Sound and Vibration*, v.223, pp. 445-465, Academic Press, 1999.
- PEDERSEN P.T. On Forward and Backward Precession of Rotors. *Ingenieur Archiv*, v. 42, pp. 26-41, Springer-Verlag, 1972.
- SCHIEHLEN, W. O. ; WEBER, H. I. On the Stability of Stauder's Permanent Rotations of a Gyroscope with Damping. *Ingenieur Archiv*, v.46, pp. 281-292, Springer Verlag, 1977.

- SCHULTZ, D.G. ; MELSA, J.L. State functions and linear control systems. New York, McGraw-Hill Book Company, 1967.
- SCHWEITZER, G. ; MÜLLER, P. C. Theoretical and Experimental Optimization of a High-Speed Rotor. **ASME Winter Annual Meeting**, Paper 70-WA/Aut-11, New York, 1970.
- SHI, J. ; ZHOU, S. Active Balancing and Vibration Control of Rotating Machinery: A Survey. **The Shock and Vibration Digest**, pp. 361-371, September 2001.
- SILVEIRA, M.E. **Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores em eixos Bobinados**. Florianópolis, 2001. 114p. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Santa Catarina.
- STEFFEN, V. J. ; MARCELIN, J. L. Dynamic Optimization of Rotors. **Anais do IX Congresso Brasileiro De Engenharia Mecânica- COBEM 87**, pp. 725-728, ABCM- Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Florianópolis, Dezembro 1987.
- TESSARZIK J. M. ; BADGLEY R. H. ; FLEMING, D. P. Experimental Evaluation of Multiphase-Multispeed Rotor Balancing Through Multiple Critical Speeds. **Journal of Engineering for Industry**, pp. 988-998, Transactions of the ASME, August 1976.
- VANCE, J.M. **Rotor Dynamics Of Turbomachinery**. New York, John Wiley & Sons, 1988.
- ZAMPIERI, D. E. ; SCHIEHLEN, W. Influência de Mancais Ativos no Comportamento Dinâmico de um Rotor Horizontal. **Anais do v Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica COBEM 79**, pp. c-044-c-053, ABCM, Campinas, Dezembro 1979.