

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

RODRIGO MAGALHÃES CRUZ ALVES SILVA

**Determinação de parâmetros cinemáticos e dinâmicos para predição do
comportamento de manipuladores de arquitetura paralela**

SÃO PAULO

2022

RODRIGO MAGALHÃES CRUZ ALVES SILVA

Determinação de parâmetros cinemáticos e dinâmicos para predição do comportamento de manipuladores de arquitetura paralela

Versão corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Malvezzi

SÃO PAULO

2022

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Magalhães Cruz Alves Silva, Rodrigo

Determinação de parâmetros cinemáticos e dinâmicos para predição do comportamento de manipuladores de arquitetura paralela / R. Magalhães Cruz Alves Silva -- versão corr. -- São Paulo, 2022.

98 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Manipuladores (Desempenho) 2.Arquiteturas Paralelas 3.Rigidez
4.Frequências naturais 5.Parâmetros concentrados I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Nome: Rodrigo Magalhães Cruz Alves Silva

Título: Determinação de parâmetros cinemáticos e dinâmicos para predição do comportamento de manipuladores de arquitetura paralela.

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação.

Aprovado em: 09 de novembro de 2021

Banca examinadora

Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho

Instituição: EP - USP

Prof.^a Dr.^a Maíra Martins da Silva

Instituição: EESC - USP

Prof.^a Dr.^a Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Instituição: UNICAMP - Externo

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pela orientação e pelo constante apoio em todos os momentos.

Ao orientador Prof. Tarcísio, pela paciência, por todo o conhecimento transmitido ao longo do desenvolvimento deste trabalho, e o aprimoramento para a minha formação acadêmica.

Ao coorientador Prof. Fernando Malvezzi pela participação assídua, incentivo e relevantes contribuições para este trabalho.

Aos meus colegas de laboratório Décio de Moura Rinaldi e Vitor Neves Hartmann pelo apoio e reconhecida disposição para ajudar.

Ao pessoal do GMSIE-USP pelo auxílio e suporte para a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Renato Maia Matarazzo Orsino e Prof. Marcílio Alves, membros da banca do meu exame de qualificação, pelas valiosas recomendações que muito contribuíram para a versão final desta dissertação.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio a esta pesquisa (Processo: 133844/2018-8).

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão desta dissertação.

RESUMO

O presente trabalho trata da análise dos modelos cinemático e dinâmico de um manipulador de cinemática paralela assimétrico investigando parâmetros para a melhoria do desempenho em termos de rigidez e frequências naturais ao longo do espaço de trabalho, buscando condições nas quais as propriedades reais e ideais sejam próximas, e assim prever com exatidão o seu comportamento. Os mapeamentos da rigidez e das frequências naturais do manipulador foram obtidos por meio do método dos parâmetros concentrados, assumindo a existência de atuadores virtuais como uma alternativa para considerar os efeitos de flexibilidade dos elos do manipulador. Além disso, a influência da cadeia passiva também foi levada em consideração ao manter a orientação do efetuador sob a ação da carga externa. Quando esses efeitos são considerados, a matriz Jacobiana associada ao espaço dos atuadores sofre uma mudança em sua dimensão e considerações adicionais são necessárias para determinar a matriz de rigidez de uma dada configuração do manipulador. Para efeito de comparação, os mapeamentos foram realizados também pelo método dos elementos finitos para verificar sua efetividade. A utilização do método dos parâmetros concentrados, associados à inclusão de atuadores virtuais, permitiu uma formulação mais simples e eficaz da rigidez e das frequências naturais do efetuador quando comparado com o método dos elementos finitos. Finalmente, foi feita uma comparação com dados de rigidez e frequência natural obtidos com o mecanismo real, representando assim mais uma alternativa para a análise das características dos manipuladores paralelos no espaço de trabalho, fornecendo resultados que servirão como pano de fundo para a síntese paramétrica do mecanismo.

Palavras-chave: Manipuladores paralelos. Rigidez. Frequências naturais. Método dos parâmetros concentrados.

ABSTRACT

This work deals with the analysis of the model of an asymmetric parallel manipulator investigating parameters for improving the performance in terms of stiffness and natural frequencies throughout the workspace, seeking conditions in which the real and ideal properties are close, and thus accurately predict its behavior. The mapping of the stiffness and natural frequencies of the manipulator was obtained by using the lumped parameters method, assuming the existence of virtual actuators as an alternative to consider the flexibility effects of the manipulator links. In addition, the passive chain effect was also be taken into account to maintain constant the end effector orientation in relation to the loading. When these effects are considered, the Jacobian matrix associated to the space of the actuators undergoes a change in size and additional considerations are required to determine the stiffness matrix for a configuration of the manipulator. As a comparison, the mapping was also performed through the finite element method to verify its effectiveness. The use of the lumped parameters method which is associated with the inclusion of virtual actuators allows a simpler and more efficient formulation of stiffness and frequencies of the end effector when compared to the use of the finite element method. Finally, a comparison was made between the simulation by the math model and the experimental data obtained from a real mechanism. The results obtained represent an alternative for analyzing parallel manipulator's behaviour.

Keywords: Parallel manipulators. Stiffness. Natural frequencies. Lumped parameters method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplos de robôs de cinemática serial (a) (KUKA, 2019) e paralela (b) (ADEPT, 2010).....	20
Figura 2 - Exemplos de manipuladores de cinemática serial: (a) SCARA (DAS; DÜLGER, 2005); (b) robô articulado (MATSUOKA et al., 1999); (c) robô cartesiano (DADFARNIA et al., 2004).....	22
Figura 3 - Exemplos de robôs paralelos de comprimento variável (a) Neos-Tricept Da ABB (MERLET, 2010) e (b) M-840 Hexalight (KLIMCHIK, 2011).....	25
Figura 4 - Arquiteturas diversas de robôs paralelos (a) FlexPicker IRB 360-3/1130 (ABB ROBOTICS, 2013), (b) Tripteron (LECOURS; GOSSELIN, 2009) e (c) Orthoglide (PASHKEVICH; WENGER; CHABLAT, 2005).	25
Figura 5 - Classificação de robôs industriais a partir de sua arquitetura (PRÓPRIO).	26
Figura 6 - (a) Manipulador $2RSS + PPaP$ com os tipos de juntas indicadas e (b) modelo matemático com as dimensões e a numeração dos elos (indicadas em parênteses) (PRÓPRIO).	32
Figura 7 - Limite inferior do cursor do efetuador (PRÓPRIO).....	33
Figura 8 - Limite superior do cursor do efetuador (PRÓPRIO).....	34
Figura 9 - Soluções possíveis para os atuadores na cinemática inversa do manipulador $2RSS+PPaP$. Para melhor visualização, a cadeia central do mecanismo não foi representada (PRÓPRIO).	37
Figura 10 - Espaço de trabalho do manipulador $2RSS+PPaP$ e a área do espaço de trabalho útil para o mapeamento da rigidez e frequências naturais (indicado pelo retângulo) (SILVA; HESS-COELHO, 2019).....	38
Figura 11 - Configuração singular referente ao limite do espaço de trabalho do mecanismo (a) e no interior do espaço de trabalho do manipulador (b) (PRÓPRIO).	38
Figura 12 - Esquema do mecanismo usando elementos de mola para considerar as várias fontes de flexibilidade dos elos (SILVA; HESS-COELHO, 2019).....	40
Figura 13 - Viga contínua e mola de torção equivalente (SILVA; HESS-COELHO, 2019).	41

Figura 14 - Versão plana do mecanismo $2RSS+PPaP$ usando elementos de mola para representar as fontes de elasticidade. Em azul, as coordenadas dos atuadores e, em verde, as coordenadas do efetuador (PRÓPRIO).	44
Figura 15 - Erros de precisão e exatidão na direção X do efetuador obtidas experimentalmente ao longo do espaço de trabalho útil. (PRÓPRIO).	50
Figura 16 - Erros de exatidão e precisão na direção Y do efetuador obtidas experimentalmente ao longo do espaço de trabalho útil. (PRÓPRIO).	51
Figura 17 - Mapeamentos da primeira (a) e segunda (b) frequências naturais do efetuador em Hz obtidas experimentalmente ao longo do espaço de trabalho útil. (PRÓPRIO).	52
Figura 18 - Mapeamento para o deslocamento em mm na direção y do efetuador (indicado pelas curvas de nível) usando o Método dos Parâmetros Concentrados devido à uma carga externa e unitária em x (a) e y (c), e usando o Método dos Elementos Finitos devido a uma carga externa e unitária em x (b) e y (d) ao longo do espaço de trabalho útil (SILVA; HESS-COELHO, 2019).	55
Figura 19 - Mapeamento da primeira frequência natural em Hz (indicada pelas curvas de nível) usando o Método dos Parâmetros Concentrados (a) e o Método dos Elementos Finitos (b), assim como usando o software de elementos finitos comercial para algumas configurações (indicadas pelos pontos) ao longo do espaço de trabalho útil (SILVA; HESS-COELHO, 2019).	56
Figura 20 - Versão plana do mecanismo $2RSS+PPaP$ sem considerar o efeito da cadeia passiva no efetuador por meio de um vínculo cinemático artificial de duas juntas prismáticas ideais (indicadas pelas linhas tracejadas) (PRÓPRIO).	58
Figura 21 - Mapeamento para o deslocamento em mm na direção y do efetuador (indicado pelas curvas de nível) com a cadeia passiva devido à uma carga externa e unitária em x (a) e y (c), e sem a cadeia passiva devido à uma carga externa e unitária em x (b) e y (d) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).	59
Figura 22 - Mapeamento da primeira frequência natural em Hz (indicada pelas curvas de nível) modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).	60
Figura 23 - Mapeamento da segunda frequência natural em Hz (indicada pelas curvas de nível) modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).	60

Figura 24 - Mapeamento dos autovetores da primeira frequência natural em Hz modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).....	61
Figura 25 - Mapeamento dos autovetores da segunda frequência natural em Hz modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).....	61
Figura 26 - Mapeamentos da primeira (a) e segunda (b) frequências naturais em Hz do efetuador ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).	62
Figura 27 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando o módulo dos valores da exatidão ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).	64
Figura 28 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando os valores de exatidão nas respectivas direções ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).	65
Figura 29 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando os valores de precisão como estimativa para as folgas ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).	67
Figura 30 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando os valores de rigidez por meio da inversão da matriz compliância ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos, e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).	69
Figura 31 - Mapeamentos do deslocamento para a aplicação de uma carga de 3,2N em x (a) e em y (b), ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos, e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros para os elos dos manipuladores (SILVA; HESS-COELHO, 2019).....	54
Tabela 2 - Convergência da primeira frequência natural no software de elementos finitos comercial na posição (0; 0,500)m (SILVA; HESS-COELHO, 2019).....	56
Tabela 3 - Comparação de frequências naturais com o software comercial de elementos finitos (SILVA; HESS-COELHO, 2019).....	57
Tabela 4 - Parâmetros para os elos do manipulador $2RSS+PPaP$ (PRÓPRIO).	58

LISTA DE SÍMBOLOS

A_i	área da seção transversal do elo i ($i = 1, \dots, 4$)
B_i	coeficientes das equações de laço fechado para a cinemática inversa ($i=1, \dots, 6$)
c	matriz de flexibilidade ou compliância
c_{ij}	elementos ij da matriz c ($i,j=1,2$)
C_{qi}	matriz jacobiana do elo i no espaço dos atuadores
C_{xi}	matriz jacobiana do elo i no espaço do efetuador
E	módulo de elasticidade
$e_{exatXhor}$	erro de exatidão em x devido à carga horizontal
$e_{exatXver}$	erro de exatidão em x devido à carga vertical
e_{exatX0}	erro de exatidão em x sem carga
$e_{exatYhor}$	erro de exatidão em y devido à carga horizontal
$e_{exatYver}$	erro de exatidão em y devido à carga vertical
e_{exatY0}	erro de exatidão em y sem carga
$e_{precXhor}$	erro de precisão em x devido à carga horizontal
e_{precX0}	erro de precisão em x sem carga
$e_{precYhor}$	erro de precisão em y devido à carga horizontal
e_{precY0}	erro de precisão em y sem carga
f	vetor composto pelas equações de laço fechado f_i
f_e	vetor de forças aplicado no efetuador
f_i	equação de laço fechado i ($i=1, \dots, 3$)
F	força atuando na extremidade da viga
i	relação de transmissão
I_{Ai}	segundo momento de área do elo i ($i=1,2$)
I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}	momentos de inércia principais do elo i
J	matriz jacobiana
J'	definição alternativa da matriz jacobiana
$J_{entrada}$	momento de inércia no eixo de entrada
$J_{eqsaida}$	momento de inércia equivalente no eixo de saída
J_{ij}	elementos ij da matriz J ($i,j=1, \dots, 3$)

J_q	matriz resultante da derivada de f em relação a q
J_x	matriz resultante da derivada de f em relação a x
J_{qext}	matriz resultante da derivada de f em relação a q , considerando os atuadores virtuais
J_{qextij}	elemento ij da matriz J_{qext}
J_{xij}	elemento ij da matriz J_x
k	rigidez experimental original
k_i	rigidez da mola i ($i=1, \dots, 7$)
k_{novo}	novo valor da rigidez experimental
k_t	rigidez da mola de torção
K_{Tmr}	rigidez à torção do conjunto moto redutor
K_q	matriz de rigidez no espaço dos atuadores
K_x	matriz de rigidez cartesiana
L	comprimento da viga
L_c	comprimento do cursor
L_i	comprimento do elo i ($i=0, \dots, 8$)
m_i	massa do elo i
M_q	matriz de inércia do mecanismo no espaço dos atuadores
M_x	matriz de inércia do mecanismo no espaço do efetuador
M_{qi}	matriz de inércia do elo i no espaço dos atuadores
M_{xi}	matriz de inércia do elo i no espaço do efetuador
n_e	número de elos do mecanismo
p	valor de folga usado tendo como base erros de precisão
q	vetor das coordenadas dos atuadores
q_i	coordenadas do atuador i ($i=1, \dots, 3$)
\dot{q}	vetor de velocidades dos atuadores
r_i	distância da extremidade do elo i até o seu centro de massa
T	energia cinética do sistema
T_i	energia cinética do elo i
u, w	variáveis de substituição para identidades trigonométricas
U, W	matrizes genéricas
v_i	módulo da velocidade do centro de massa do elo i
\mathbf{v}_i	vetor velocidade do centro de massa do elo i

x	vetor das coordenadas do efetuador
x_B, y_B, θ_B	coordenada x, y e inclinação do efetuador, respectivamente
\dot{x}	vetor de velocidades do efetuador
δ	deflexão na extremidade da viga
δ	vetor deflexão do efetuador
θ	ângulo de inclinação da mola de torção
φ	inclinação da cadeia passiva
ϕ	autovetor
Ω	frequência natural
ω_i	módulo da velocidade angular do elo i
ω_i	vetor velocidade angular do elo i

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
1.1. Objetivos gerais e específicos.....	18
1.2. Organização do texto	18
1.3. Publicações decorrentes do trabalho	19
2. REVISÃO DE LITERATURA	20
2.1. Arquitetura e classificações	20
2.1.1. Robôs de arquitetura serial	21
2.1.2. Robôs de arquitetura paralela	23
2.2. Rigidez dos manipuladores	26
2.3. Análise dinâmica dos manipuladores	29
3. METODOLOGIA	31
3.1. Breve descrição do manipulador	31
3.2. Cinemática inversa do mecanismo e espaço de trabalho.....	32
3.3. Formulação da matriz de rigidez	39
3.3.1. Matriz de rigidez do pentágono articulado.....	39
3.3.2. Matriz de rigidez da versão plana do mecanismo 2RSS+PPaP	44
3.4. Formulação da matriz de inércia	47
3.5. Rigidez e inércia do conjunto moto redutor	48
3.6. Propriedades do mecanismo obtidas experimentalmente.....	49
4. RESULTADOS.....	53
4.1. Resultados dos modelos teóricos.....	53
4.1.1. Pentágono articulado	53
4.1.2. Versão plana do mecanismo 2RPP+PPaP	57
4.2. Comparação dos resultados teóricos com os experimentais .	62
4.2.1. Comparação teórico experimental das frequências naturais...	62

4.2.2. Comparação teórico experimental do mapeamento da rigidez	63
4.2.2.1. Rigidez via diferença de exatidão com e sem carga nas direções correspondentes	63
4.2.2.2. Precisão como estimativa para as folgas.....	65
4.2.2.3. Rigidez via inversão da matriz compliância	67
4.2.2.4. Trabalhando com flexibilidade como alternativa de representação.....	69
5. DISCUSSÃO	71
6. CONCLUSÕES	74
7. TRABALHOS FUTUROS.....	76
8. REFERÊNCIAS.....	77
APÊNDICE A – Formulação da matriz de rigidez do mecanismo com as juntas virtuais	83
APÊNDICE B – Formulação da matriz de inércia no espaço do efetuador	85
APÊNDICE C – Comentários acerca das rotinas para os modelos teóricos.....	92
ANEXO A – Motor Maxon RE 40 (datasheet).....	94
ANEXO B – Redutor Planetário Maxon GP 42 (datasheet).....	95
ANEXO C – Descrição dos dados experimentais	96

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a maioria dos robôs industriais são baseados em uma categoria definida como cinemática serial, isto é, os elos e os atuadores são dispostos em série, um após o outro até a extremidade livre do efetuador, onde está localizado um manipulador ou ferramenta. Contudo, há uma crescente investigação na aplicação dos mecanismos definidos como de cinemática paralela na área industrial. Estes são caracterizados pela presença de cadeias cinemáticas independentes agindo de forma simultânea na extremidade onde está o efetuador (CRAIG, 1989).

Esta nova arquitetura mostrou-se promissora devido a algumas características inerentes. A rigidez estrutural, acurácia e resposta dinâmica rápida revelaram-se adequadas para fins de operações de usinagem e manipulação, quando comparados ao uso de mecanismos de cinemática serial (MAJOU et al., 2007). Entretanto, esta arquitetura mostrou também algumas desvantagens. Uma delas é a existência de um espaço de trabalho mais complexo, o que dificulta sua aplicação. Outra desvantagem é a não-linearidade existente entre as posições dos atuadores e a do efetuador, o que pode representar um problema sério, uma vez que na maioria das aplicações são necessários movimentos constantes durante a operação, assim é requerido um controle não linear dos atuadores (WANG; WANG; WU, 2019; WENGER; GOSELIN; CHABLAT, 2007).

Para superar estas desvantagens, alguns trabalhos foram propostos. Um exemplo foi o processo de otimização da arquitetura de um mecanismo de estrutura paralela, o *orthoglide*, a fim de aproximar o espaço de trabalho a um cubo, com características definidas de isotropia regulares (CHABLAT; WENGER, 2003). A regularidade e a isotropia foram obtidas por meio da síntese de um mecanismo que apresentava as três cadeias cinemáticas iguais, resultando assim em um mecanismo de cinemática paralela simétrico. Um exemplo de otimização do espaço de trabalho de um mecanismo de estrutura paralela assimétrico foi realizado por Pashkevich, Klimchik e Chablat (2010).

Com relação à rigidez dos mecanismos, Majou et al. (2007) realizaram uma análise paramétrica e qualitativa do mesmo mecanismo estudado por Chablat e Wenger (2003), o *orthoglide*, utilizando o Método dos Parâmetros Concentrados, a fim de identificar de forma mais rápida os elos do mecanismo que influenciam a rigidez

de forma mais crítica na configuração isotrópica, onde é esperado que as configurações nas operações de usinagem estejam próximas. O trabalho de Pashkevich, Chablat e Wenger (2010) propôs uma análise mais sofisticada da rigidez de mecanismos de cinemática serial e paralela, levando-se em conta efeitos não lineares, como o fenômeno de flambagem e a pré-carga em juntas passivas, na rigidez de diversos mecanismos, tendo realizado uma análise no manipulador *orthoglide*.

Além da síntese de tipo, outro tópico importante para o projeto é a síntese paramétrica, que pode ser definida como o processo de busca dos parâmetros do mecanismo, sejam estes cinemáticos ou dinâmicos, conforme determinado critério (ERDMAN; SANDOR, 1997). Entre os métodos propostos, o mapeamento de propriedades, a análise de sensibilidade e a otimização são destacados. O mapeamento de propriedades refere-se à representação gráfica, plana ou tridimensional, da distribuição de algumas propriedades dentro do espaço de trabalho, tais como a rigidez e as frequências naturais, úteis para estágios posteriores do desenvolvimento do sistema (PASHKEVICH; CHABLAT; WENGER, 2009). A análise de sensibilidade avalia como um sistema é sensível à variação de certos parâmetros em relação a um determinado critério considerado relevante. A otimização, por sua vez, é a utilização de técnicas numéricas associadas à busca de parâmetros considerados ótimos (HAFTKA; GÜRDAL, 2012), uma vez que maximizam ou minimizam uma função associada ao desempenho do mecanismo. A função pode representar matematicamente, por exemplo, o tamanho do espaço de trabalho (RODRIGUEZ et al., 2019) ou, possivelmente, o grau de anisotropia de uma propriedade (ZHAO, 2013). Mesmo com a obtenção de uma estrutura mecânica apropriada para uma tarefa, problemas relevantes relacionados não podem ser ignorados para a operação em si. Neste sentido se apresentam as configurações singulares, sejam elas internas ou da fronteira do espaço de trabalho, os erros de posicionamento do efetuador associado ao controle dos atuadores (ARIAN; ISAKSSON; GOSSELIN, 2020), além da influência das folgas nas juntas (WANG; WANG, 2019). Estes são apenas exemplos de eventuais problemas que podem influenciar no desempenho do mecanismo.

1.1. Objetivos gerais e específicos

O objetivo geral do presente trabalho é contribuir por meio de formas mais adequadas para a modelagem, simulação e verificação de consistência com valores reais de mecanismos de cinemática paralela.

Os objetivos específicos consistem na aplicação do Método dos Parâmetros Concentrados para o levantamento da rigidez e frequências naturais ao longo do espaço de trabalho para o manipulador de cinemática paralela assimétrico $2R_{SS}+PPaP$ e verificar a aderência destes resultados com dados obtidos de um mecanismo real.

1.2. Organização do texto

Na sequência do texto, o Capítulo 2 faz uma breve revisão de literatura enumerando as arquiteturas encontradas em robôs industriais. A seguir são abordados tópicos na análise de rigidez de mecanismos, enfatizando os mecanismos de cinemática paralela. Também foi feita uma breve revisão sobre análise dinâmica de mecanismos e os métodos comumente aplicados.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia utilizada para a determinação do espaço de trabalho da versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$, bem como modelos para a avaliação da rigidez ao longo do espaço de trabalho e das frequências naturais, por meio de um modelo simplificado que não considera a influência da cadeia passiva e outro modelo que leva em consideração na análise a influência da cadeia passiva do manipulador.

O Capítulo 4 apresenta resultados dos mapeamentos da rigidez e da primeira frequência natural do mecanismo ao longo do espaço de trabalho obtidos pelo Método dos Parâmetros Concentrados e faz comparações com mapeamentos utilizando o Método dos Elementos Finitos. A seguir também é feita uma comparação de modelos de parâmetros concentrados investigando a influência da cadeia passiva nos resultados.

O Capítulo 5 apresenta uma discussão dos resultados obtidos e faz uma síntese do que foi abordado nos capítulos de Metodologia e Resultados por meio de

uma descrição mais sucinta e qualitativa da trajetória ao longo do desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 6 aborda as conclusões parciais já obtidas e finalmente no Capítulo 7 estão indicadas propostas para a continuidade do trabalho.

1.3. Publicações decorrentes do trabalho

Parte do conteúdo desta dissertação foi publicada em um artigo em anais de congresso no International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME) e outro artigo aceito no International Congress of Mechanical Engineering (COBEM).

- SILVA, R. M. C. A.; HESS-COELHO, T. A. **Analysis of a parallel manipulator for determination of promising kinematic and dynamic parameters**. 18th DINAME - INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS. **Proceedings**...Buzios: 2019.
- SILVA, R. M. C. A.; MALVEZZI, F.; HESS-COELHO, T. A. **Analysis of an asymmetric parallel manipulator for determination of promising kinematic and dynamic parameters**. 25th COBEM – INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING . **Proceedings**...Uberlândia: 2019. In press.

O primeiro artigo tem a contribuição neste texto por meio da cinemática inversa e resultados dos mapeamentos do mecanismo do pentágono articulado, bem como serviu de subsídios para a formulação do mecanismo do segundo artigo sem a modelagem da flexibilidade da cadeia passiva. O segundo artigo contribuiu com os modelos e os mapeamentos das duas versões planas do mecanismo assimétrico $2RSS+PPaP$, levando-se em conta a rigidez da cadeia passiva e a sua ausência, permitindo uma comparação que serviu de base para se obter parte das conclusões do texto.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Esta seção está dividida em três partes. A primeira consiste em uma breve introdução sobre a classificação e onde os mecanismos de cinemática paralela estão inseridos, bem como a apresentação de diversas arquiteturas e suas características. A segunda consiste na avaliação da rigidez dos mecanismos, apresentando os métodos utilizados e sua evolução ao longo do tempo ao se considerar os mais diversos efeitos encontrados na estrutura dos mecanismos, além das aplicações em mecanismos paralelos. Por fim foi feita uma descrição relacionada à análise dinâmica com uma breve comparação entre os vários métodos aplicáveis em robôs, dentre eles o Método dos Parâmetros Concentrados, que teve um maior destaque nos capítulos posteriores.

2.1. Arquitetura e classificações

Com relação à arquitetura, todos os robôs industriais podem ser classificados essencialmente em dois grupos. O primeiro grupo inclui robôs com arquitetura serial, que são atualmente os mais comuns. O segundo grupo reúne manipuladores com arquitetura paralela (MERLET, 2010). Exemplos típicos de robôs dos dois grupos são apresentados na Figura 1.



Figura 1 - Exemplos de robôs de cinemática serial (a) (KUKA, 2019) e paralela (b) (ADEPT, 2010).

2.1.1. Robôs de arquitetura serial

Esse tipo de robô é baseado em cadeias cinemáticas compostas de elos rígidos conectados por juntas ativas. As articulações podem ser rotacionais ou translacionais. A principal vantagem dos robôs seriais é o grande espaço de trabalho em relação ao seu próprio volume e espaço físico ocupado. Mas, como os manipuladores seriais têm estrutura cinemática aberta, todos os erros são acumulados e amplificados de elo para elo. Além disso, é difícil obter altos valores de rigidez e propriedades dinâmicas simultaneamente. Por exemplo, robôs com rigidez elevada geralmente são pesados e não conseguem desenvolver altas velocidades. Além disso, o seu peso próprio induz tensões significativas indesejáveis nas juntas ativas, o que reduz sua capacidade de carga. Por outro lado, robôs de arquitetura serial com elos de pouca massa possuem baixa rigidez e não podem fornecer alta carga devido a erros significativos de posição. Essas questões reduzem a eficiência e as áreas de aplicação de tais manipuladores. No entanto, algumas limitações relacionadas a erros de fabricação podem ser removidas por meio de controle avançado (WANG; MILLS, 2005).

De acordo com sua arquitetura cinemática, os manipuladores seriais podem ser classificados em três grupos principais: (a) robôs SCARA, (b) robôs articulados e (c) robôs cartesianos. Vale ressaltar que algumas vezes a classificação do robô inclui outros tipos de manipuladores (cilíndricos, esféricos etc.), mas estes estão inclusos no grupo dos robôs articulados. O acrônimo SCARA significa "*Selective Compliant Assembly Robot*". Esse tipo de robô é baseado em um manipulador de 4 eixos (Figura 2a) que garante movimento em qualquer ponto dentro de sua área de trabalho e a rotação do efetuador em torno do eixo vertical. Para esta arquitetura, o movimento vertical em Z é independente e é fornecido por um atuador linear, enquanto três juntas rotacionais com eixos paralelos garantem toda a gama de translações e rotações no plano XY. Devido a essa arquitetura específica (com três juntas rotacionais paralelas), o SCARA é compatível com o plano XY, e é bastante rígido na direção Z. O recurso de conformidade seletiva torna esse robô altamente adequado para muitos tipos de operações de montagem. Devido ao fato de possuir peças móveis relativamente leves, fornece propriedades dinâmicas favoráveis. Isso faz com que o SCARA seja ideal para aplicações de *pick-and-place*, paletização, e empacotamento

de produtos e embalagens, o que exige movimentos rápidos e repetitivos (DAS; DÜLGER, 2005).

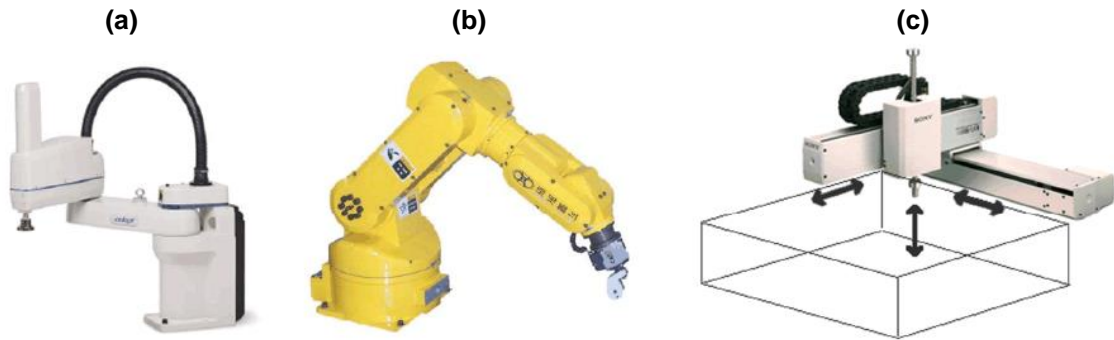


Figura 2 - Exemplos de manipuladores de cinemática serial: (a) SCARA (DAS; DÜLGER, 2005); (b) robô articulado (MATSUOKA et al., 1999); (c) robô cartesiano (DADFARNIA et al., 2004).

O segundo grupo inclui robôs articulados (Figura 2b), também conhecidos como "braços antropomórficos". Sua estrutura mecânica é baseada em juntas rotacionais. Normalmente, os robôs articulados têm cinco ou seis eixos controlados, embora existam robôs com sete ou mais juntas acionadas. Essa estrutura fornece uma destreza elevada, de modo que os robôs têm a capacidade de alcançar posições através de obstáculos e garantir praticamente qualquer posição e orientação do efetuator dentro do espaço de trabalho. A vantagem essencial dos robôs articulados é que eles são muito compactos e fornecem um maior espaço de trabalho em relação ao seu tamanho. (ABELE; WEIGOLD; ROTHENBÜCHER, 2007). No entanto, devido à complexidade da sua cinemática direta e inversa, a tarefa de controle é relativamente mais complicada, sendo difícil obter, por exemplo, um movimento linear do efetuator a partir do controle no espaço dos atuadores. Portanto, cálculos intensivos são necessários para transformar a posição do efetuator nas posições dos atuadores e vice-versa, mas esse problema já não é significativo devido à capacidade de processamento dos computadores modernos. O potencial dos robôs articulados os tornam adequados para uma ampla variedade de aplicações industriais, incluindo operações de soldagem, usinagem e manipulação (OLABI et al., 2010).

O terceiro grupo inclui robôs cartesianos (Figura 2c), que têm essencialmente a mesma arquitetura cinemática das máquinas CNC convencionais. As principais diferenças estão nas áreas de controle, linguagem de programação e

projeto mecânico do efetuador, o que para os robôs cartesianos é mais versátil. A estrutura mecânica de tais robôs é baseada em três juntas ativas prismáticas, cujos eixos são mutuamente ortogonais. Esse arranjo garante um controle simples quando qualquer movimento no espaço X-Y-Z é obtido pela atuação direta das juntas. Robôs cartesianos têm um espaço de trabalho retangular, cujo volume pode ser aumentado facilmente (KLIMCHIK, 2011). Um envelope de trabalho extremamente grande é assegurado pelos robôs *Gantry*, também pertencentes à família Cartesiana, onde um dos eixos horizontais é suportado em ambas as extremidades. Devido à sua estrutura mecânica, os robôs cartesianos fornecem elevada rigidez e boa precisão, mas sua destreza é bastante limitada, em determinadas situações eles não podem alcançar objetos. Além disso, para satisfazer a grande necessidade do espaço de trabalho, eles precisam de grandes volumes para operar. Devido à sua rigidez, esses robôs são muito atrativos para aplicações de usinagem, mas apenas para situações em que a orientação da ferramenta deve permanecer inalterada durante a operação (SICILIANO; KHATIB, 2016).

2.1.2. Robôs de arquitetura paralela

Este tipo de robô consiste em um mecanismo de cadeia fechada, cujo efetuador está ligado à base por várias cadeias cinemáticas independentes (MERLET, 2010). As cadeias cinemáticas são compostas por vários elos conectados entre si por juntas ativas e passivas (rotacionais ou translacionais). Tal cinemática ainda oferece várias vantagens essenciais, como rigidez estrutural elevada e alta capacidade dinâmica. Outra vantagem importante dos robôs paralelos é a precisão, uma vez que os erros do efetuador são calculados pela média dos erros das cadeias cinemáticas, em oposição aos robôs seriais, onde os erros são acumulados (TLUSTY; ZIEGERT; RIDGEWAY, 1999). Além disso, por meio de um arranjo especial das cadeias cinemáticas, é possível garantir alta rigidez e propriedades dinâmicas simultaneamente. Esta característica torna os robôs paralelos adequados tanto para aplicações de *pick-and-place* (HESS-COELHO et al., 2005) quanto para aplicações de usinagem de alta velocidade (ZHANG, 2014).

No entanto, os robôs paralelos têm um espaço de trabalho muito complexo e uma relação altamente não linear entre as velocidades no espaço dos atuadores e no espaço cartesiano. Conseqüentemente, algumas de suas características, tais como velocidade, precisão e rigidez, diferem em cada configuração e dependem das direções de movimento. Outra desvantagem dos manipuladores paralelos é a pequena amplitude de movimento, devido à configuração paralela. Estes são os principais obstáculos para a aplicação da máquina de robôs paralelos (REHSTEINER et al., 1999).

Atualmente, existe uma grande variedade de manipuladores paralelos, alguns exemplos são apresentados na Figura 3 e na Figura 4. Dependendo da arquitetura, eles podem ser divididos em dois grupos que diferem pelo tipo de conexão entre a base e as cadeias seriais (CHABLAT; WENGER, 2003).

O primeiro grupo contém manipuladores com estruturas de comprimento variável. A maioria dos robôs desse grupo emprega a arquitetura de Gough-Stewart, tem 6 graus de liberdade e são chamados de *Hexapods* (MERLET, 2010). Eles fornecem precisão e exatidão elevadas, boa rigidez e alta relação entre carga e peso. Devido a essas vantagens essenciais, os *Hexapods* são frequentemente usados em simuladores de voo, usinagem de precisão, robôs cirúrgicos e outras áreas. Pela variação dos comprimentos dos elos, os *Hexapods* podem satisfazer o espaço de trabalho de diversas dimensões, mas o aumento do comprimento dos elos tem um efeito direto na precisão. O principal problema técnico do *Hexapod* é o atrito elevado nas articulações esféricas. Exemplos típicos de manipuladores paralelos pertencentes a este grupo são apresentados na Figura 3, eles também incluem VARIAX, HEXA, TRICEPT, TRIPOD, e outros (GELDART et al., 2003; PIERROT et al., 2009; TSAI; JOSHI, 2000).

O segundo grupo inclui manipuladores com atuadores fixos na base. Estes se distinguem pelo número de juntas ativas e sua posição relativa em relação aos demais. Em geral, possuem 5 a 6 graus de liberdade, embora existam manipuladores com 3 graus de liberdade translacionais ou rotacionais que empregam elos baseados em paralelogramos da mesma forma que os robôs Delta (HESS-COELHO, 2007; MAJOU et al., 2007). Estes manipuladores são mais atrativos para operações *pick and place* e de usinagem, devido à menor massa móvel quando comparados com os

Hexapods. Contudo, exigem grandes volumes para se garantir um espaço de trabalho grande. Alguns exemplos deste tipo de manipulador estão representados na Figura 4.

Para concluir, uma síntese da classificação geral das arquiteturas é mostrada na Figura 5.



Figura 3 - Exemplos de robôs paralelos de comprimento variável (a) Neos-Tricept Da ABB (MERLET, 2010) e (b) M-840 Hexalight (KLIMCHIK, 2011).

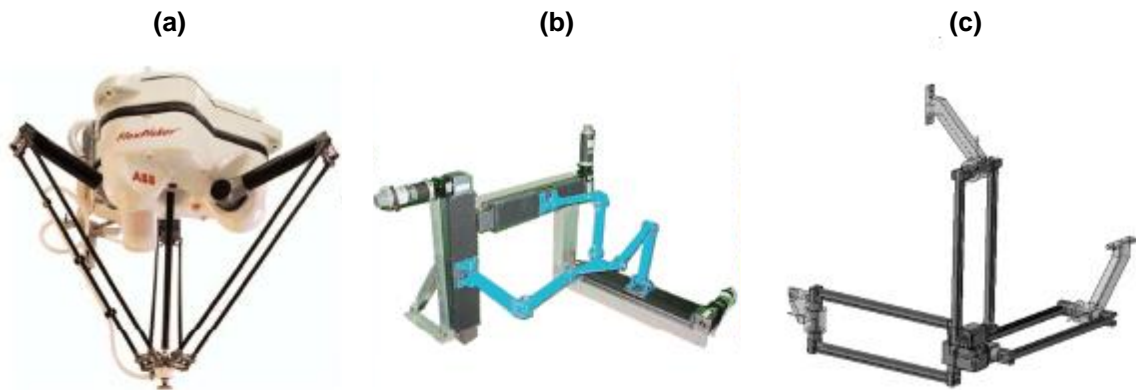


Figura 4 - Arquiteturas diversas de robôs paralelos (a) FlexPicker IRB 360-3/1130 (ABB ROBOTICS, 2013), (b) Tripteron (LECOURS; GOSSELIN, 2009) e (c) Orthoglide (PASHKEVICH; WENGER; CHABLAT, 2005).

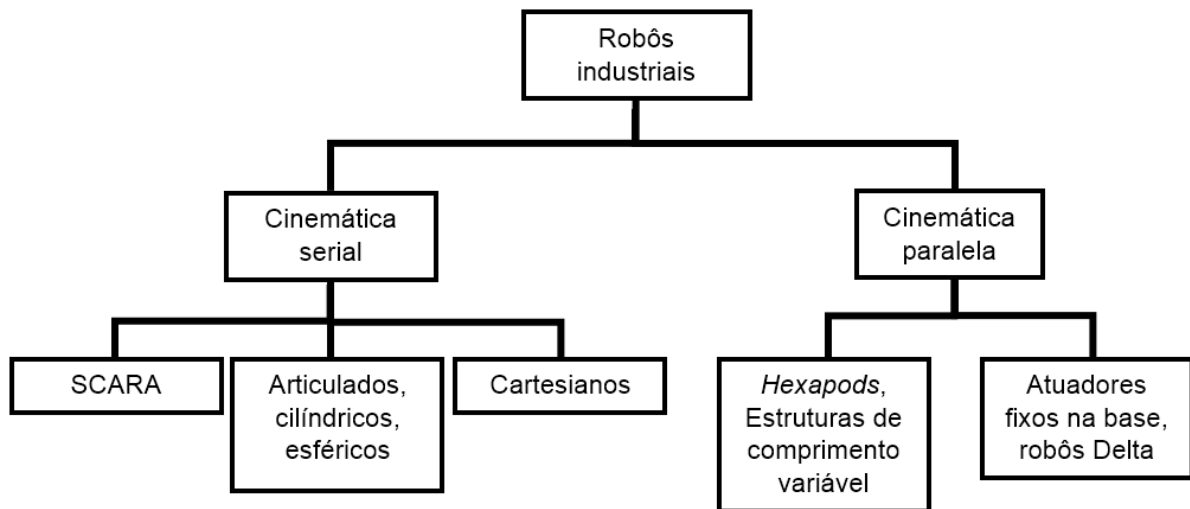


Figura 5 - Classificação de robôs industriais a partir de sua arquitetura (PRÓPRIO).

2.2. Rigidez dos manipuladores

A rigidez de um manipulador industrial é um dos indicadores de desempenho mais importantes em qualquer aplicação (ANGELES; PARK, 2008). Para robôs industriais com aplicações em usinagem, o requisito principal é a precisão na localização de uma ferramenta durante o trabalho de uma peça sob a ação do carregamento externo. Da mesma forma, nas aplicações *pick-and-place*, a rigidez define velocidades e acelerações admissíveis a fim de evitar deslocamentos indesejáveis devido às forças de inércia (NOF, 1999). No caso de grandes manipuladores robóticos, deformações elásticas de componentes mecânicos sob esforços associados às tarefas, e sob seu o peso próprio, induzem também a erros de posição significativos (MEGGIOLARO, 2005).

Da mesma forma que na mecânica estrutural geral (HJELMSTAD, 2007), a análise de rigidez avalia a resistência do manipulador frente às deformações causadas por uma força externa ou torque aplicado no efetuador (DUFFY, 2007). Na robótica, a modelagem de rigidez é usualmente baseada no Método dos Parâmetros Concentrados, também referido em alguns trabalhos como Método das Juntas Virtuais (*VJM, Virtual Joint Modeling*), que descreve elementos flexíveis como rígidos, enquanto uma mola virtual localizada nas articulações do manipulador leva em consideração sua flexibilidade (PASHKEVICH; CHABLAT; WENGER, 2009). A rigidez

do manipulador, bem como várias outras propriedades, depende de sua configuração (ALICI; SHIRINZADEH, 2005). Além disso, em geral, a relação entre a força e a deflexão é não-linear, enquanto para pequenas deformações, que normalmente é considerado como uma condição operacional, podem ser aproximadas por uma relação linear. Numericamente, essa propriedade é definida pela matriz de rigidez, que fornece a relação linear entre o deslocamento do efetuador e o carregamento externo que causa essa mudança na configuração do mecanismo (KOSEKI et al., 2002).

Na robótica, a matriz de rigidez K_x é geralmente referida como a matriz de rigidez cartesiana e deve ser distinguida da matriz de rigidez no espaço dos atuadores K_q , que descreve a relação entre forças e deslocamentos dos atuadores (CIBLAK; LIPKIN; GEORGIA, 2014). O desenvolvimento matemático para este cálculo originou-se do trabalho de Salisbury (SALISBURY, 1980), que obteve uma expressão de forma fechada para a matriz de rigidez cartesiana de um manipulador de cinemática serial, considerando que a fonte de elasticidade estaria concentrada apenas nos atuadores. Seguindo esta metodologia, Gosselin (1990) estendeu este resultado para o caso dos manipuladores paralelos, onde os elos foram considerados rígidos, as juntas passivas ideais e a hipótese de o manipulador paralelo ser montado sem esforços internos adicionais. O desenvolvimento adicional dessa abordagem permitiu levar em consideração a rigidez dos elos considerando o efeito conjunto do elo rígido com molas lineares e torcionais (ZHANG; GOSSELIN, 2002). Uma modificação recente do Método dos Parâmetros Concentrados, proposta por Pashkevich, Klimchik e Chablat (2010), trata de matrizes de rigidez de tamanho 6×6 que são calculadas a partir de experimentos em modelos de elementos finitos e são capazes de levar em consideração acoplamentos entre as deflexões em translação e rotação, considerando a forma real do elo e suas particularidades. Esta última proposta aumentou significativamente a precisão da modelagem do Método dos Parâmetros Concentrados para análise de rigidez, preservando sua alta eficiência computacional. Atualmente, existem diferentes variações deste método, que diferem em pressupostos de modelagem e técnicas numéricas (MAJOU et al., 2007). Elas foram desenvolvidas para diferentes arquiteturas cinemáticas, mas ainda há uma série de questões em aberto.

Atualmente, a maioria dos trabalhos relacionados é dedicada à modelagem de rigidez de mecanismos de cinemática serial. Eles incluem a análise de rigidez de manipuladores seriais convencionais, isto é, sem articulações passivas, (PIGOSKI; GRIFFIS; DUFFY, 1998) e também alguns resultados para cadeias seriais com articulações passivas. Em particular, em Pashkevich, Klimchik e Chablat (2010) uma solução algorítmica foi proposta. Esta solução produz matrizes de rigidez deficientes. Apesar de sua simplicidade computacional, o método não é capaz de produzir uma expressão analítica para a matriz desejada. Embora já tenha sido obtida uma forma analítica fechada aplicando-se a técnica de inversão de blocos de Frobenius (GANTMACHER; BRENNER, 2005).

Para manipuladores paralelos, a modelagem de rigidez é normalmente realizada para todas as cadeias cinemáticas simultaneamente (WEI; SIMAAN, 2010), por meio das equações de equilíbrio cinetostáticas agregadas (QUENNOUELLE; GOSSELIN, 2008; YI; FREEMAN, 1993). Em contraste com esses trabalhos, existe outra abordagem baseada em um procedimento de duas etapas, que inclui modelagem de rigidez de todas as cadeias cinemáticas separadamente e, em seguida, agregá-las em um modelo único. Esta abordagem tem sido usada por vários autores (PASHKEVICH; KLIMCHIK; CHABLAT, 2010; ZHANG et al., 2004), mas a técnica de agregação relacionada foi reduzida a simples somatórios de matrizes de rigidez cartesianas para as cadeias cinemáticas e as cargas externas aplicadas aos seus pontos finais. Isto corresponde a arquiteturas estritamente paralelas, onde as extremidades de todas as cadeias cinemáticas estão alinhadas e combinadas no ponto de referência final da plataforma. Além disso, foi assumido implicitamente que as cadeias cinemáticas são perfeitas. No entanto, na prática, a arquitetura do manipulador paralelo é geralmente bem complexa. Em particular, as cadeias cinemáticas podem ser ligadas a diferentes pontos da plataforma final. Além disso, a geometria da cadeia cinemática geralmente difere da nominal, o que causa alguns esforços internos durante a montagem. Estes motivam o desenvolvimento da técnica de agregação do modelo de rigidez para manipuladores paralelos.

2.3. Análise dinâmica dos manipuladores

A maioria dos manipuladores robóticos existentes é projetada e construída de maneira a maximizar a rigidez na tentativa de minimizar a vibração do efetuador para obter o menor erro de posição. Essa rigidez elevada é alcançada por meio de um projeto de peças com mais massa. Assim, os manipuladores rígidos existentes se mostram ineficientes em termos de consumo de energia e de velocidade em relação à carga útil operacional. Além disso, a operação de robôs de alta precisão é severamente limitada por sua deflexão dinâmica, que persiste por um período após a conclusão de um movimento. O tempo necessário para essa vibração cessar representa atraso nas operações subsequentes, entrando em conflito direto com a demanda de maior produtividade (SHABANA, 1997). Esses compromissos conflitantes entre alta velocidade e alta precisão tornam a tarefa de projeto de manipuladores robóticos um problema de pesquisa desafiador. Além disso, muitos manipuladores industriais enfrentam o problema das vibrações dos braços durante movimentos de alta velocidade. Para melhorar a produtividade industrial, é necessário reduzir o peso dos elos e ao mesmo tempo aumentar sua velocidade de operação (WASFY; NOOR, 2003).

Os sistemas robóticos com elos flexíveis são sistemas dinâmicos contínuos caracterizados por um número infinito de graus de liberdade e são governados por equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares acopladas. A solução exata de tais sistemas não é viável na prática e o modelo dimensional infinito também impõe severas restrições ao projeto dos controladores. Portanto, geralmente eles são discretizados por meio de determinados métodos, são eles: Métodos dos Modos Assumidos (CHEN, 2001) , Método dos Elementos Finitos (WANG; MILLS, 2005; ZHANG, 2015) e o Método dos Parâmetros Concentrados (LIANG et al., 2017; REZAEI; AKBARZADEH; AKBARZADEH-T., 2012).

O Método do Modo Assumido e o Método dos Elementos Finitos usam a formulação Lagrangiana ou a formulação recursiva de Newton-Euler. Na formulação do modelo de modo assumido, a flexibilidade do elo geralmente é representada por uma série modal finita truncada em termos de funções de modo e amplitudes variáveis no tempo. A principal desvantagem desse método é a dificuldade em encontrar modos

para elos com seções transversais não regulares e manipuladores de múltiplos elos (THEODORE; GHOSAL, 1995). Muitos autores usaram o Método dos Elementos Finitos, onde as deformações elásticas são analisadas assumindo um movimento rígido conhecido do corpo e, posteriormente, sobrepondo a deformação elástica com o movimento rígido do corpo. Para resolver um grande conjunto de equações diferenciais derivadas do Método dos Elementos Finitos, muitas condições de contorno devem ser consideradas, que são, na maioria das situações, incertas para manipuladores flexíveis (HASTINGS; BOOK, 1987). No uso do Método do Modo Assumido para derivar as equações de movimento dos manipuladores flexíveis, apenas os primeiros modos são geralmente mantidos pelo truncamento e os outros modos são desprezados. No Método de Parâmetros Concentrados, que é o mais simples para fins de análise, o manipulador é modelado como sistema de molas e massas, que geralmente não produz resultados suficientemente precisos (KHALIL; GAUTIER, 2000).

Ainda a respeito do Método dos Parâmetros Concentrados, Yoshikawa, Ohta e Kanaoka (2001) buscaram melhorar a precisão dos resultados, por meio de métodos de identificação de parâmetros do modelo dinâmico de manipuladores flexíveis com base no modelo de juntas passivas virtuais, que foram verificados por meio de experimentos. Gasparetto (2004) desenvolveu um modelo dinâmico para mecanismos planares de elos flexíveis usando um modelo equivalente de elos rígidos e validou experimentalmente o mesmo para um mecanismo de cinco barras. Shigang (1998) estudou a dinâmica de robôs flexíveis com redundância cinemática e flexibilidade nas juntas e elos para deformação mínima do efetuador.

3. METODOLOGIA

O capítulo de metodologia compreende uma descrição do mecanismo com relação à topologia, a cinemática inversa e a determinação do espaço de trabalho do manipulador. Em outra etapa, são determinadas as matrizes de rigidez e de inércia, tanto do mecanismo $2\underline{RSS} + \underline{PPaP}$ como de uma versão mais simplificada (pentágono articulado). Finalmente, o capítulo é concluído com o levantamento das propriedades de rigidez e inércia do conjunto moto redutor, responsável pelo acionamento do manipulador, e a descrição das propriedades do mecanismo obtidas experimentalmente, dados estes que serão comparados com os resultados obtidos pelos modelos.

3.1. Breve descrição do manipulador

Na Figura 6, está mostrado o manipulador que será objeto de estudo. Este possui três membros ativos que conectam uma base fixa a um efetuador. Em sua concepção, utilizou-se o Método Alternativo de síntese do tipo, proposto por HESS-COELHO (2007), no qual os graus de liberdade do efetuador são impostos por uma das cadeias cinemáticas, no caso, a cadeia central. Usando a notação R , P e S para indicar juntas rotativa, prismática e esférica, respectivamente, e o símbolo Pa representando uma subcadeia do tipo paralelogramo articulado, suas duas cadeias cinemáticas periféricas podem ser descritas como do tipo \underline{RSS} , enquanto sua cadeia cinemática central é descrita como \underline{PPaP} . As Letras sublinhadas indicam juntas ativas. Assim, a arquitetura do mecanismo é do tipo $2\underline{RSS} + \underline{PPaP}$.

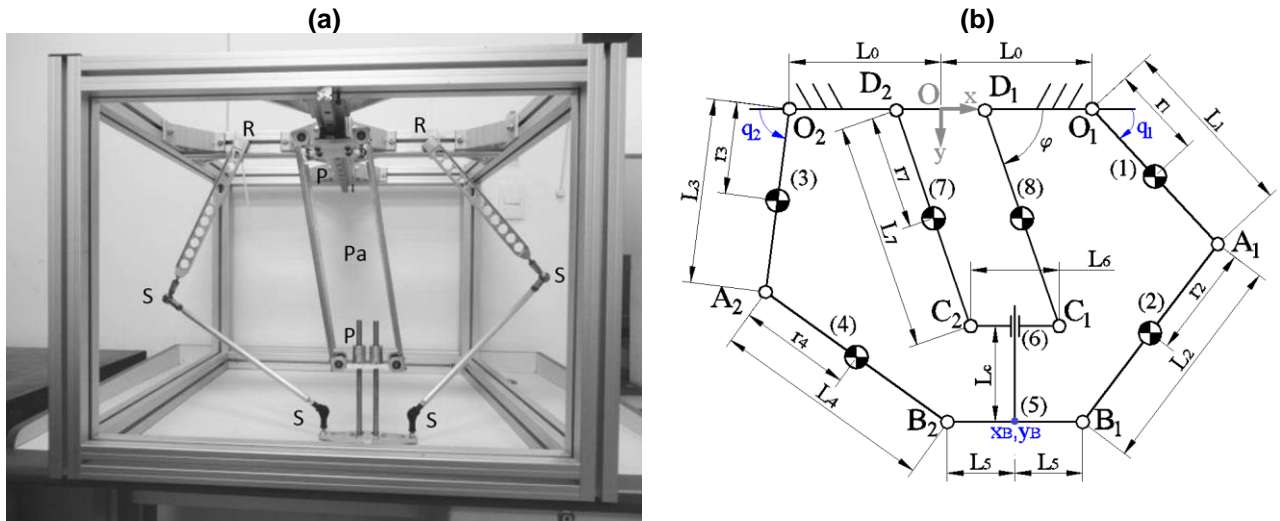


Figura 6 - (a) Manipulador $2\underline{R}SS + \underline{P}Pa\underline{P}$ com os tipos de juntas indicadas e (b) modelo matemático com as dimensões e a numeração dos elos (indicadas em parênteses) (PRÓPRIO).

Embora possua planos de simetria geométrica, o mecanismo é assimétrico, sob a ótica da topologia, pois os membros não possuem a mesma sequência de juntas e um dos membros não possui nenhuma junta ativa na sua versão plana (MOHAMED; DUFFY, 2010).

O desenvolvimento de todas as etapas da concepção deste manipulador foi baseado em vários aspectos de robôs manipuladores de arquitetura paralela comerciais, especificamente o FlexPicker IRB 360-3/1130 (ABB ROBOTICS, 2013) e o Adept Quattro s650H (ADEPT, 2010).

3.2. Cinemática inversa do mecanismo e espaço de trabalho

Para determinar o espaço de trabalho do mecanismo, várias posições foram atribuídas ao efetuador e a cinemática inversa foi aplicada a fim de verificar se existe um conjunto de configurações dos atuadores que seja capaz de posicionar o efetuador no ponto determinado. Embora o mecanismo originalmente tenha 3 graus de liberdade, todo o desenvolvimento foi feito no plano xy , conforme indicado na Figura 6b. Caso a cinemática inversa forneça valores complexos para os atuadores, significa que o ponto está fora do espaço de trabalho do efetuador, caracterizando uma singularidade no limite do espaço de trabalho. Esta restrição garante que os atuadores assumam configurações em que o efetuador permaneça dentro do limite do espaço de trabalho levando em conta apenas as duas cadeias laterais. Para se

considerar o limite promovido pelo paralelogramo articulado e o cursor do efetuator, que garante apenas o movimento de translação do efetuator, tem-se uma relação que limita o espaço de trabalho ao limite do cursor (Figura 7)

$$\sqrt{L_7^2 - x_B^2} + L_c \geq y_B \quad (1)$$

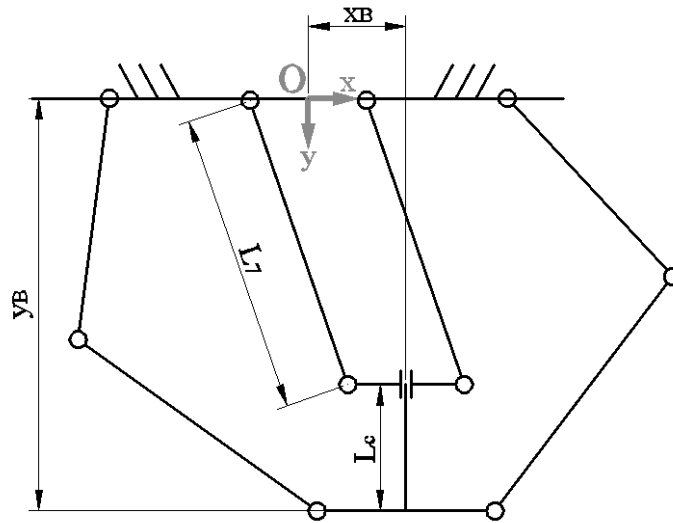


Figura 7 - Limite inferior do cursor do efetuator (PRÓPRIO).

Outra limitação imposta pelo paralelogramo é que o efetuator não deve permanecer a uma altura maior que a do elo horizontal do paralelogramo, esta limitação é dada por (Figura 8):

$$\sqrt{L_7^2 - x_B^2} \leq y_B \quad (2)$$

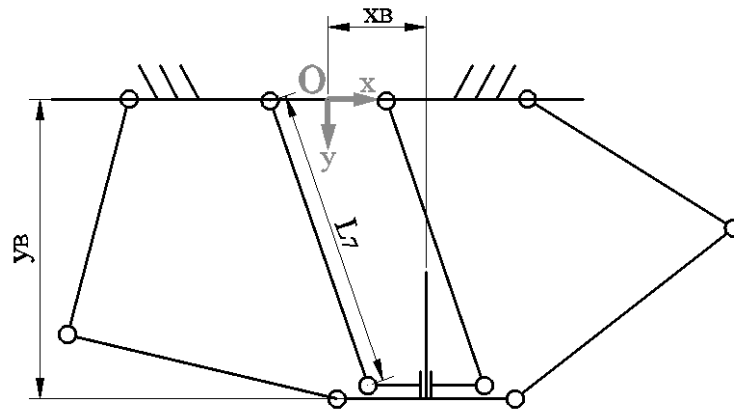


Figura 8 - Limite superior do cursor do efetuator (PRÓPRIO).

Para realizar a cinemática inversa, é necessário determinar as equações de laço fechado do mecanismo (NORTON, 2010). Para o membro \underline{RSS} do lado direito da estrutura cinemática, uma vez que os comprimentos dos elos inferiores (2) e (4) nos membros \underline{RSS} são constantes, então

$$f_1(q_1, q_2, x_B, y_B) = (-L_1 \cos q_1 - L_0 + x_B + L_5)^2 + (-L_1 \sin q_1 + y_B)^2 - L_2^2 = 0 \quad (3)$$

Sendo f_1 a equação de laço fechado do membro do lado direito do mecanismo. Analogamente, obtém-se a equação de laço fechado f_2 para o membro \underline{RSS} do lado esquerdo

$$f_2(q_1, q_2, x_B, y_B) = (L_3 \cos q_2 + L_0 + x_B - L_5)^2 + (-L_3 \sin q_2 + y_B)^2 - L_4^2 = 0 \quad (4)$$

Para a cinemática inversa, os termos $\sin q_1$, $\sin q_2$, $\cos q_1$ e $\cos q_2$ da Equação (3) e da Equação (4) são agrupados, resultando em

$$B_1 \sin q_1 + B_2 \cos q_1 + B_3 = 0 \quad (5)$$

$$B_4 \sin q_2 + B_5 \cos q_2 + B_6 = 0 \quad (6)$$

Sendo

$$B_1 = -2 L_1 y_B \quad (7)$$

$$B_2 = -2 L_1 x_B + 2 L_0 L_1 - 2 L_1 L_5 \quad (8)$$

$$B_3 = L_0^2 - 2 L_0 L_5 - 2 L_0 x_B + L_1^2 - L_2^2 + L_5^2 + 2 L_5 x_B + x_B^2 + y_B^2 \quad (9)$$

$$B_4 = -2 L_3 y_B \quad (10)$$

$$B_5 = -2 L_3 L_5 + 2 L_0 L_3 + 2 L_3 x_B \quad (11)$$

$$B_6 = L_3^2 + L_0^2 - 2 L_0 L_5 + 2 L_0 x_B - L_4^2 + L_5^2 - 2 L_5 x_B + x_B^2 + y_B^2 \quad (12)$$

Para resolver o problema da cinemática inversa, as seguintes identidades trigonométricas foram usadas (TSAI, 1999)

$$u = \operatorname{tg} \frac{q_1}{2} \quad (13)$$

$$\cos q_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad (14)$$

$$\operatorname{sen} q_1 = \frac{2u}{1+u^2} \quad (15)$$

Estas identidades relacionam uma variável angular, no caso q_1 , com uma nova variável u . Aplicando estas relações na Equação (5) e, analogamente na Equação (6), relacionando q_2 por meio de uma nova variável w e agrupando os fatores das mesmas, vem:

$$(B_3 - B_2)u^2 + (2B_1)u + (B_2 + B_3) = 0 \quad (16)$$

$$(B_6 - B_5)w^2 + (2B_4)w + (B_5 + B_6) = 0 \quad (17)$$

Retornando às identidades trigonométricas

$$q_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\text{sen}q_1}{\text{cos}q_1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2u}{1-u^2} \right) \quad (18)$$

$$q_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\text{sen}q_2}{\text{cos}q_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2w}{1-w^2} \right) \quad (19)$$

A solução das equações quadráticas (16) e (17) fornecem 4 configurações possíveis para as cadeias desenvolverem uma única configuração do efetuador, conforme Figura 9. Para todo o desenvolvimento ao longo do espaço de trabalho, o conjunto de soluções escolhidos para q_1 e q_2 estão restritos aos valores compreendidos entre 0 rad e $\pi/2 \text{ rad}$. Assim, é assegurado que as configurações das cadeias periféricas $O_1A_1B_1$ e $O_2A_2B_2$ estarão posicionadas para fora (Figura 9c), evitando possível interferência entre as cadeias cinemáticas periféricas e o paralelogramo articulado.

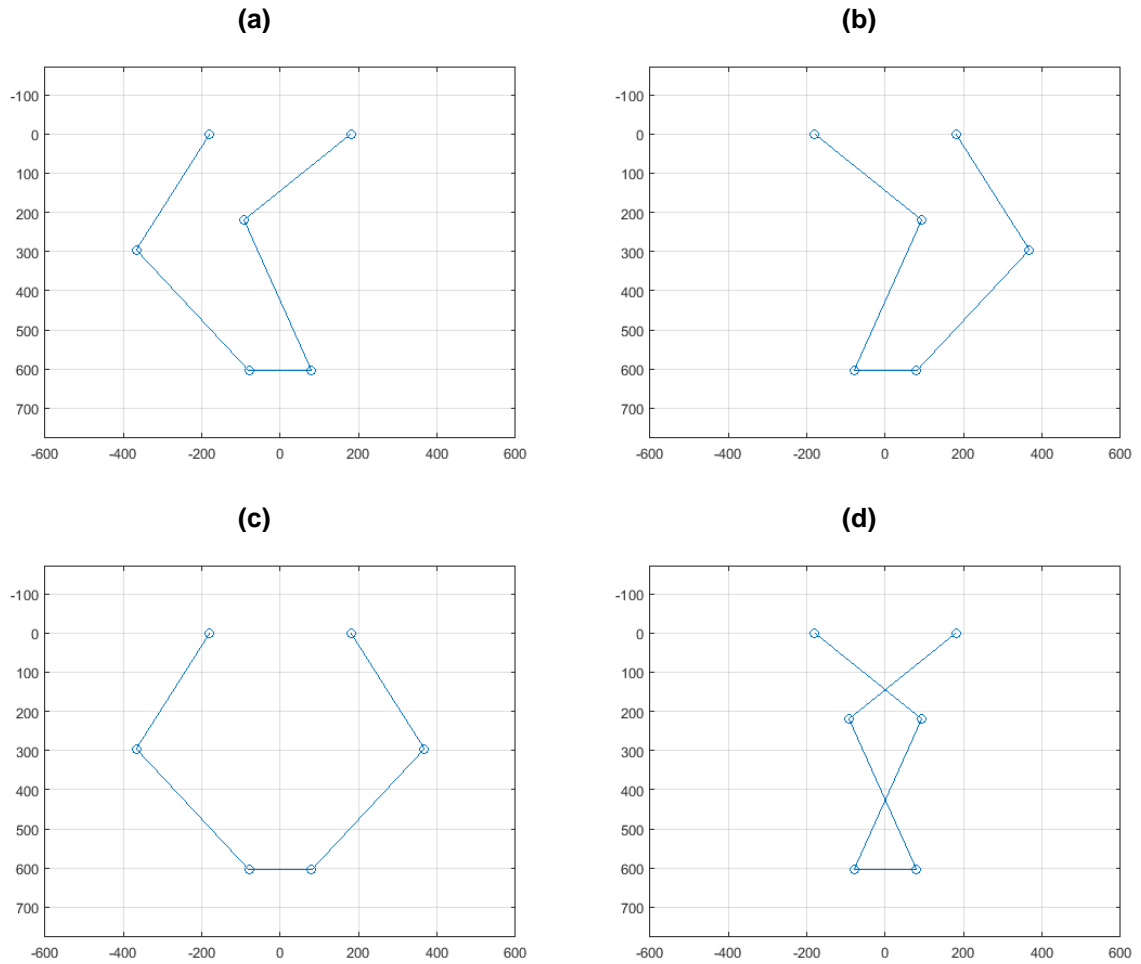


Figura 9 - Soluções possíveis para os atuadores na cinemática inversa do manipulador $2RSS+PPaP$. Para melhor visualização, a cadeia central do mecanismo não foi representada (PRÓPRIO).

Para os casos em que a solução é possível, isto é, sem soluções complexas, presença de singularidades do limite do espaço de trabalho ou do cursor do efetuador, foi determinado um esboço do espaço de trabalho do mecanismo pelo método da discretização (HESS-COELHO e MALVEZZI, 2007), apresentado na Figura 10.

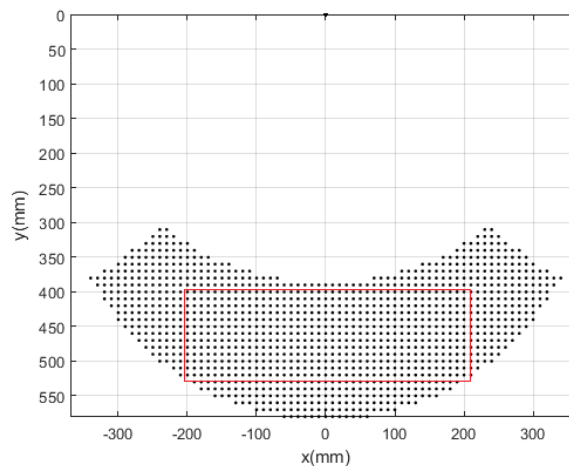


Figura 10 - Espaço de trabalho do manipulador $2RSS+PPaP$ e a área do espaço de trabalho útil para o mapeamento da rigidez e frequências naturais (indicado pelo retângulo) (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Ainda relacionado ao espaço de trabalho, foi realizada uma investigação de singularidades associadas ao limite do espaço de trabalho e no seu interior. O estudo destas singularidades consiste no estudo das matrizes jacobianas J_q e J_x do mecanismo. A singularidade ocorre quando o determinante de uma dessas matrizes ou de ambas se torna nulo, fazendo com que o manipulador perca um de seus graus de liberdade nesta configuração, prejudicando sua controlabilidade e rigidez (CRAIG, 1989, HESS-COELHO e MALVEZZI, 2015). Na Figura 11 estão indicados exemplos de configurações para os dois tipos de singularidades encontrados. Vale observar que a singularidade mostrada na Figura 11b não é realmente alcançada no mecanismo original devido à restrição imposta pelo comprimento do cursor do efetuator.

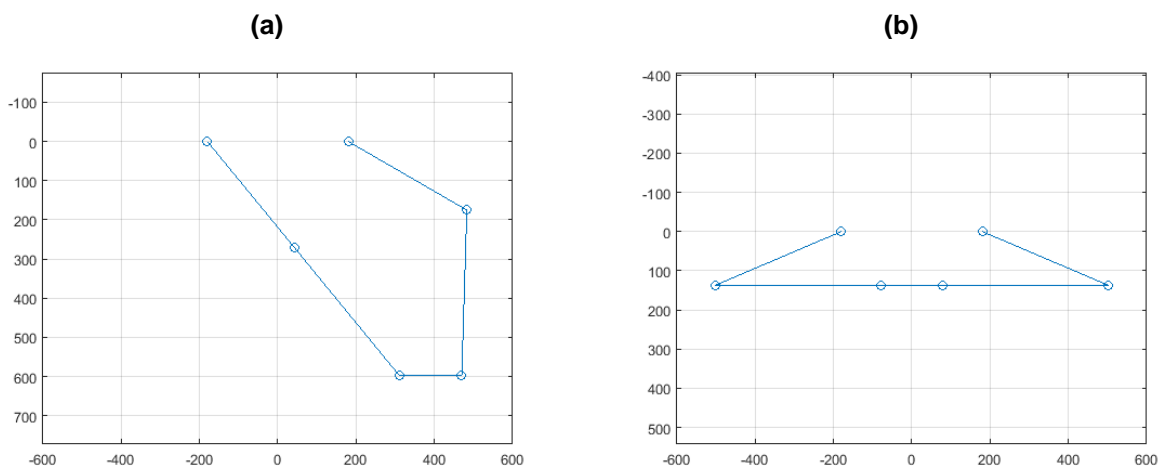


Figura 11 - Configuração singular referente ao limite do espaço de trabalho do mecanismo (a) e no interior do espaço de trabalho do manipulador (b) (PRÓPRIO).

3.3. Formulação da matriz de rigidez

Para a determinação da matriz de rigidez foi descrito, inicialmente, a modelagem para um modelo mais simples de mecanismo de cinemática paralela, representado pelo pentágono articulado. Em seguida, foi feito o desenvolvimento para a versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$, que requer considerações adicionais devido à necessidade de se contabilizar a presença da cadeia passiva no mecanismo.

3.3.1. Matriz de rigidez do pentágono articulado

No presente trabalho, o Método dos Parâmetros Concentrados (GOSSELIN, 1990) foi aplicado levando-se em consideração a rigidez dos elos do mecanismo, a fim de se obter o mapeamento da rigidez ao longo do espaço de trabalho do mecanismo, sendo possível investigar como os parâmetros do manipulador afetam a rigidez e a frequência natural no interior do espaço de trabalho. A análise foi linear, não se levando em conta, portanto, os efeitos de não linearidades geométricas, do material, flambagem etc. Como simplificação, a cadeia cinemática central não foi considerada na análise, pois não foi considerado nenhum momento aplicado no efetuator. Outra simplificação foi desprezar as dimensões do efetuator, já que no mecanismo original o efetuator apresenta um movimento apenas de translação e neste modelo não será uma fonte de flexibilidade. Assim, $L_5 = 0$, e os pontos B_1 e B_2 coincidirão, como pode ser visto na Figura 12.

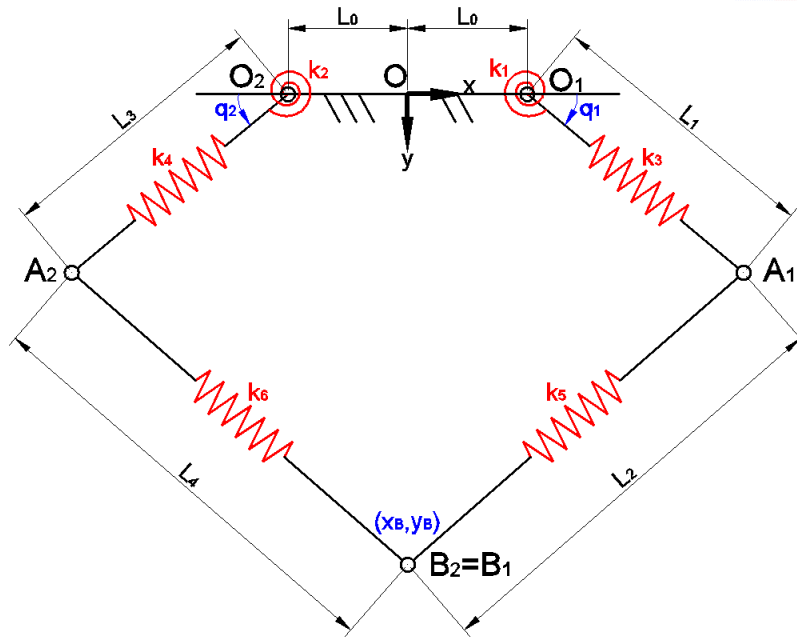


Figura 12 - Esquema do mecanismo usando elementos de mola para considerar as várias fontes de flexibilidade dos elos (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Para um mecanismo de cinemática paralela, a matriz de rigidez cartesiana, considerando como fontes de flexibilidade apenas os atuadores do mecanismo, é dada por (ZHANG et al., 2004)

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_q \mathbf{J} \quad (20)$$

Sendo \mathbf{J} a matriz jacobiana relacionando as velocidades dos atuadores e as velocidades do efetuador e \mathbf{K}_q é uma matriz de rigidez diagonal, definida como a matriz de rigidez no espaço dos atuadores, que relaciona as forças e os respectivos deslocamentos nos atuadores. A relação entre as velocidades dos atuadores e do efetuador é dada por

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (21)$$

Sendo $\dot{\mathbf{x}}$ o vetor das componentes cartesianas da velocidade do efetuador, $\dot{\mathbf{q}}$ é o vetor das velocidades dos atuadores e \mathbf{J}_q e \mathbf{J}_x são dados por

$$J_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (22)$$

$$J_q = -\frac{\partial f}{\partial q} \quad (23)$$

Sendo f um vetor de dimensão n que relaciona implicitamente os vetores x e q , as equações de laço fechado das cadeias cinemáticas.

Para se considerar outras fontes de flexibilidade do manipulador, tais como os elos, assume-se que existam atuadores virtuais agindo sobre os graus de liberdade associados aos deslocamentos dos elos que se deseja considerar como fonte de flexibilidade. No caso do manipulador em estudo na Figura 12, considerou-se a existência de atuadores lineares virtuais nos quatro elos (O_1A_1 , O_2A_2 , A_1B_1 e A_2B_2) e dois atuadores rotativos nas articulações da base do manipulador (pontos O_1 e O_2), cujos valores de rigidez são atribuídos com os valores obtidos pela rigidez dos elos reais para os deslocamentos relativos associados. No caso dos atuadores rotativos, ainda é possível considerar a flexibilidade devido aos atuadores e aos próprios elos simplesmente considerando uma associação de molas de torção em série.

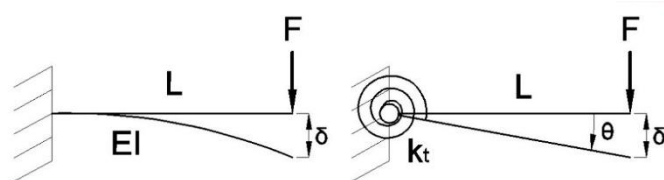


Figura 13 - Viga contínua e mola de torção equivalente (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Uma viga linear engastada, sujeita à flexão, pode ser modelada por uma barra articulada com uma mola de torção (ZHANG, 2014), conforme ilustrado na Figura 13, onde F é uma força aplicada na extremidade, E o módulo de elasticidade, L o comprimento da viga, I é o segundo momento de área da viga, e δ é a deflexão na extremidade da viga. O objetivo é determinar a rigidez da mola de torção equivalente que produzirá a mesma deflexão na extremidade da viga sob a ação da carga F . A deflexão no final de uma viga contínua e uniforme devido a um carregamento em sua extremidade é dada por

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad (24)$$

Assumindo a hipótese de pequenas deformações, a relação entre a rotação e a deflexão de uma viga rígida é dada aproximadamente por

$$\theta \simeq \frac{\delta}{L} \quad (25)$$

Aplicando o princípio do trabalho e energia entre a viga e a mola de torção k_t .

$$\frac{1}{2}F\delta = \frac{1}{2}k_t\theta^2 \quad (26)$$

Substituindo as Equações (24) e (25) na Equação (26), a rigidez da mola de torção equivalente é obtida para a viga contínua

$$k_t = \frac{FL}{\theta} = \frac{3EI}{L} \quad (27)$$

No caso de uma viga linear sob a ação de esforços axiais, esta deve ser substituída por um elo rígido com uma mola linear localizada no mesmo. Por meio dos mesmos princípios aplicados à viga linear sob flexão para obter a mola de torção equivalente, é possível determinar a rigidez da mola linear.

Ao considerar a existência desses atuadores virtuais, a matriz J_q torna-se retangular, impossibilitando a inversão de J na definição da matriz de rigidez na Equação (20). Para resolver este problema, as propriedades do inverso do produto de matrizes são aplicadas (ZHANG; GOSELIN, 2002), resultando em

$$K_x = (J'K_q^{-1}J'^T)^{-1} \quad (28)$$

Sendo J' uma definição alternativa da matriz jacobiana (vide Apêndice A). Para haver uma distinção entre o mecanismo original e sua versão considerando os atuadores virtuais, será definido agora a matriz J_{qext} como uma versão estendida de

J_q , uma vez que se torna retangular, portanto, bastando substituir J_q por J_{qext} na Equação (28). Determinando as derivadas parciais para obter as matrizes J_{qext} e J_x considerando a influência dos atuadores virtuais, vem:

$$J_{qext} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial L_1} & \frac{\partial f_1}{\partial L_3} & \frac{\partial f_1}{\partial L_2} & \frac{\partial f_1}{\partial L_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial L_1} & \frac{\partial f_2}{\partial L_3} & \frac{\partial f_2}{\partial L_2} & \frac{\partial f_2}{\partial L_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{qext11} & 0 & J_{qext13} & 0 & 2L_2 & 0 \\ 0 & J_{qext21} & 0 & J_{qext24} & 0 & 2L_4 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_B} & \frac{\partial f_1}{\partial y_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_B} & \frac{\partial f_2}{\partial y_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_B - L_0 - L_1 \cos q_1) & 2(y_B - L_1 \sin q_1) \\ 2(x_B + L_0 + L_3 \cos q_2) & 2(y_B - L_3 \sin q_2) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Sendo

$$J_{qext11} = (x_B - L_0 - L_1 \cos q_1)(-2L_1 \sin q_1) + (y_B - L_1 \sin q_1)(2L_1 \cos q_1) \quad (31)$$

$$J_{qext21} = (x_B + L_0 + L_3 \cos q_2)(2L_3 \sin q_2) + (y_B - L_3 \sin q_2)(2L_3 \cos q_2) \quad (32)$$

$$J_{qext13} = (2 \cos q_1)(-L_1 \cos q_1 - L_0 + x_B) + (2 \sin q_1)(+y_B - L_1 \sin q_1) \quad (33)$$

$$J_{qext24} = (2 \sin q_2)(y_B - L_3 \sin q_2) - (2 \cos q_2)(L_3 \cos q_2 + L_0 + x_B) \quad (34)$$

A matriz de rigidez no espaço dos atuadores K_q é dada por

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{A1}}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_{A3}}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_3}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_4}{L_4} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Os elementos da diagonal principal k_i ($i = 1 \dots 6$) são molas com o valor de rigidez axial e à flexão igual aos elos representados, A_i ($i = 1 \dots 4$) é a área da seção transversal do elo i e I_{A1} , I_{A3} são o segundo momento da área dos elos 1 e 3, respectivamente.

3.3.2. Matriz de rigidez da versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$

A seguir será obtida a matriz de rigidez do mecanismo original $2R_{SS}+PPaP$ em sua versão plana e levando-se em conta a influência da cadeia passiva com o paralelogramo, conforme indicado na Figura 14.

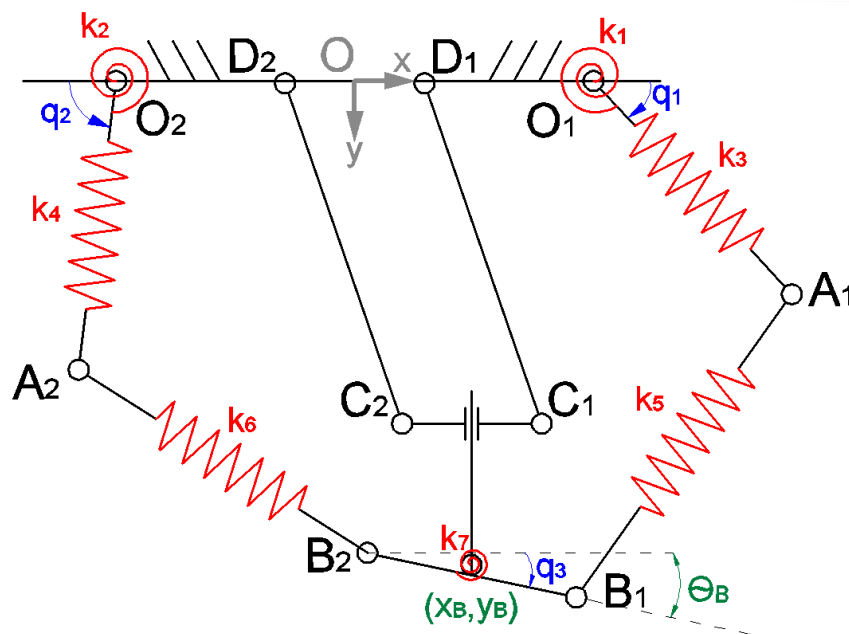


Figura 14 - Versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$ usando elementos de mola para representar as fontes de elasticidade. Em azul, as coordenadas dos atuadores e, em verde, as coordenadas do efetuador (PRÓPRIO).

Essencialmente a cinemática é a mesma do pentágono articulado, no entanto, para se levar em conta a rigidez da cadeia passiva, foi incluído um grau de liberdade extra no efetuador θ_B levando-se em conta a sua inclinação, bem como uma coordenada q_3 , que auxiliará na representação da rigidez total da cadeia passiva. Introduzindo uma equação de laço fechado adicional, e reescrevendo as equações de laço fechado das cadeias periféricas RSS, obtém-se:

$$f_1(q_1, q_2, x_B, y_B, \theta_B) = (-L_1 \cos q_1 - L_0 + x_B + L_5 \cos \theta_B)^2 + (-L_1 \sin q_1 + y_B + L_5 \sin \theta_B)^2 - L_2^2 = 0 \quad (36)$$

$$f_2(q_1, q_2, x_B, y_B, \theta_B) = (L_3 \cos q_2 + L_0 + x_B - L_5 \cos \theta_B)^2 + (-L_3 \sin q_2 + y_B - L_5 \sin \theta_B)^2 - L_4^2 = 0 \quad (37)$$

$$f_3(q_3, \theta_B) = \theta_B - q_3 = 0 \quad (38)$$

Analogamente ao pentágono articulado, para este mecanismo as matrizes jacobianas são dadas por

$$J_{qext} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial L_1} & \frac{\partial f_1}{\partial L_3} & \frac{\partial f_1}{\partial L_2} & \frac{\partial f_1}{\partial L_4} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial L_1} & \frac{\partial f_2}{\partial L_3} & \frac{\partial f_2}{\partial L_2} & \frac{\partial f_2}{\partial L_4} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial L_1} & \frac{\partial f_3}{\partial L_3} & \frac{\partial f_3}{\partial L_2} & \frac{\partial f_3}{\partial L_4} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{qext11} & 0 & J_{qext13} & 0 & 2L_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{qext22} & 0 & J_{qext24} & 0 & 2L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_B} & \frac{\partial f_1}{\partial y_B} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_B} & \frac{\partial f_2}{\partial y_B} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_B} & \frac{\partial f_3}{\partial y_B} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-L_0 + x_B - L_1 \cos q_1 + L_5 \cos \theta_B) & 2(y_B - L_1 \sin q_1 + L_5 \sin \theta_B) & J_{x13} \\ 2(L_0 + x_B + L_3 \cos q_2 - L_5 \cos \theta_B) & 2(y_B - L_3 \sin q_2 - L_5 \sin \theta_B) & J_{x23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Sendo

$$J_{qext11} = 2L_1 \cos q_1 (y_B - L_1 \sin q_1 + L_5 \sin \theta_B) - 2L_1 \sin q_1 (-L_0 + x_B - L_1 \cos q_1 + L_5 \cos \theta_B) \quad (41)$$

$$J_{qext22} = 2L_3 (L_0 + x_B + L_3 \cos q_2 - L_5 \cos \theta_B) \sin q_2 + 2L_3 \cos q_2 (y_B - L_3 \sin q_2 - L_5 \sin \theta_B) \quad (42)$$

$$J_{qext13} = 2 \cos q_1 (-L_0 + x_B - L_1 \cos q_1 + L_5 \cos \theta_B) + 2 \sin q_1 (y_B - L_1 \sin q_1 + L_5 \sin \theta_B) \quad (43)$$

$$J_{qext24} = 2 \sin q_2 (y_B - L_3 \sin q_2 - L_5 \sin \theta_B) - 2 \cos q_2 (L_0 + x_B + L_3 \cos q_2 - L_5 \cos \theta_B) \quad (44)$$

$$J_{x13} = 2 L_5 \cos \theta_B (y_B - L_1 \sin q_1 + L_5 \sin \theta_B) - 2 L_5 \sin \theta_B (-L_0 + x_B - L_1 \cos q_1 + L_5 \cos \theta_B) \quad (45)$$

$$J_{x23} = 2 L_5 \sin \theta_B (L_0 + x_B + L_3 \cos q_2 - L_5 \cos \theta_B) - 2 L_5 \cos \theta_B (y_B - L_3 \sin q_2 - L_5 \sin \theta_B) \quad (46)$$

A matriz de rigidez no espaço dos atuadores K_q é dada por

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{A1}}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_{A3}}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_3}{L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_4}{L_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 \end{bmatrix} \quad (47)$$

O elemento k_7 representa a influência da rigidez da cadeia passiva na inclinação do efetuador e é dada por

$$k_7 = \left(\frac{1}{2L_6 \tan^2 \varphi_{A_6} E} + \frac{L_7}{4L_6^2 \sin^2 \varphi_{A_7} E} + \frac{L_8}{4L_6^2 \sin^2 \varphi_{A_8} E} + \frac{L_6}{6EI_{A_6}} \right)^{-1} \quad (48)$$

A obtenção da rigidez da cadeia passiva é feita pelo mesmo procedimento já descrito para a mola de torção equivalente ao deslocamento da extremidade da viga contínua engastada. Contudo, neste caso foram considerados os efeitos de rigidez axial dos elos (6), (7) e (8) e rigidez à flexão do elo (6) (vide Figura 6). A formulação da rigidez dessas juntas virtuais está indicada em (ZHANG; GOSELIN, 2002).

3.4. Formulação da matriz de inércia

A obtenção da matriz de inércia de um mecanismo no espaço do efetuador \mathbf{M}_x pode ser obtida por meio da forma geral das equações dinâmicas do movimento, expressas no espaço do efetuador (TSAI, 1999). Ela é composta pela soma das matrizes de inércia no espaço do efetuador de cada elo que compõe o mecanismo \mathbf{M}_{xi} , e é dada por

$$\mathbf{M}_x = \sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{M}_{xi}) \quad (49)$$

Sendo n_e o número de elos do mecanismo. Uma descrição da obtenção da matriz de inércia dos elos e as expressões para os modelos do manipulador estão no Apêndice B. Com a matriz de massa do mecanismo no espaço cartesiano, é possível formular o problema de autovalor e autovetor para a determinação das frequências naturais do mecanismo, dados por

$$(\mathbf{K}_x - \Omega^2 \mathbf{M}_x) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (50)$$

Sendo Ω a frequência natural do mecanismo e $\boldsymbol{\phi}$ é o autovetor associado. É importante notar que as frequências e os modos de vibração estão associados a cada posição do mecanismo.

3.5. Rigidez e inércia do conjunto moto redutor

Embora existam várias fontes de rigidez no mecanismo, a maior parte do deslocamento em geral deve-se à presença do conjunto de redutores responsáveis pelos acionamentos (TSAI, 1999). Para uma comparação factível com os valores experimentais, é necessário considerar a influência desta fonte de rigidez, além do efeito da inércia do redutor e do próprio motor no modelo do mecanismo. Para isso, a seguir está uma descrição das informações do conjunto moto redutor (vide página de catálogo no Anexo A), bem como a forma como ele foi considerado nos modelos.

- Inércia do redutor GP42C (em relação ao eixo de entrada) = 15 gcm²
- Relação de transmissão $i = 43:1$ (343/8 exato)
- Inércia do motor = 142 gcm²

A inércia equivalente de uma carga em relação ao eixo de saída de uma transmissão $J_{eqsaída}$ é obtida por meio da equivalência de energia cinética e, portanto, dos momentos de inércia entre os eixos de entrada e saída do redutor e suas respectivas velocidades angulares, cuja relação se dá pela relação de transmissão i .

$$J_{eqsaída} = J_{entrada} \cdot i^2 \quad (51)$$

Esta expressão foi aplicada tanto para o redutor quanto para o motor, uma vez que a rotação de saída é a mesma rotação dos elos do mecanismo sujeitos à flexão ligados ao redutor.

Para a rigidez torsional do moto redutor, K_{Tmr} , foi considerada uma estimativa inicial com base no torque contínuo máximo (15 Nm) e no backlash do redutor (1°), conforme consta no catálogo no Anexo B.

$$K_{Tmr} = 15 \text{ Nm}/1^\circ = 15.180/\pi \text{ rad} = 859,43 \text{ Nm/rad} \quad (52)$$

Para contabilizar a influência da rigidez torsional no modelo teórico, foi feita uma associação de molas torsionais em série entre a do conjunto motoredutor e a mola equivalente da rigidez à flexão da barra, uma vez que ambas estarão sujeitas ao mesmo torque do elo acionado, resultando em uma única mola torsional. Com relação à inércia, foram somados os momentos de inércia do conjunto moto redutor e da barra sujeita à ação do torque aplicado para a obtenção de uma inércia equivalente do conjunto.

3.6. Propriedades do mecanismo obtidas experimentalmente

Para efeitos de comparação com os resultados teóricos obtidos até agora, resultados experimentais obtidos por Rinaldi (2018), são apresentados na Figura 15 e Figura 16, na forma de gráficos sobre diversas propriedades do mecanismo paralelo $2RSS+PPaP$ ao longo do espaço de trabalho útil (vide Figura 10). Uma breve descrição de como os resultados foram obtidos está indicado no Anexo C. Estas propriedades foram comparadas sob alguns aspectos para mostrar o nível de aderência destes resultados com aqueles obtidos pelos modelos teóricos.

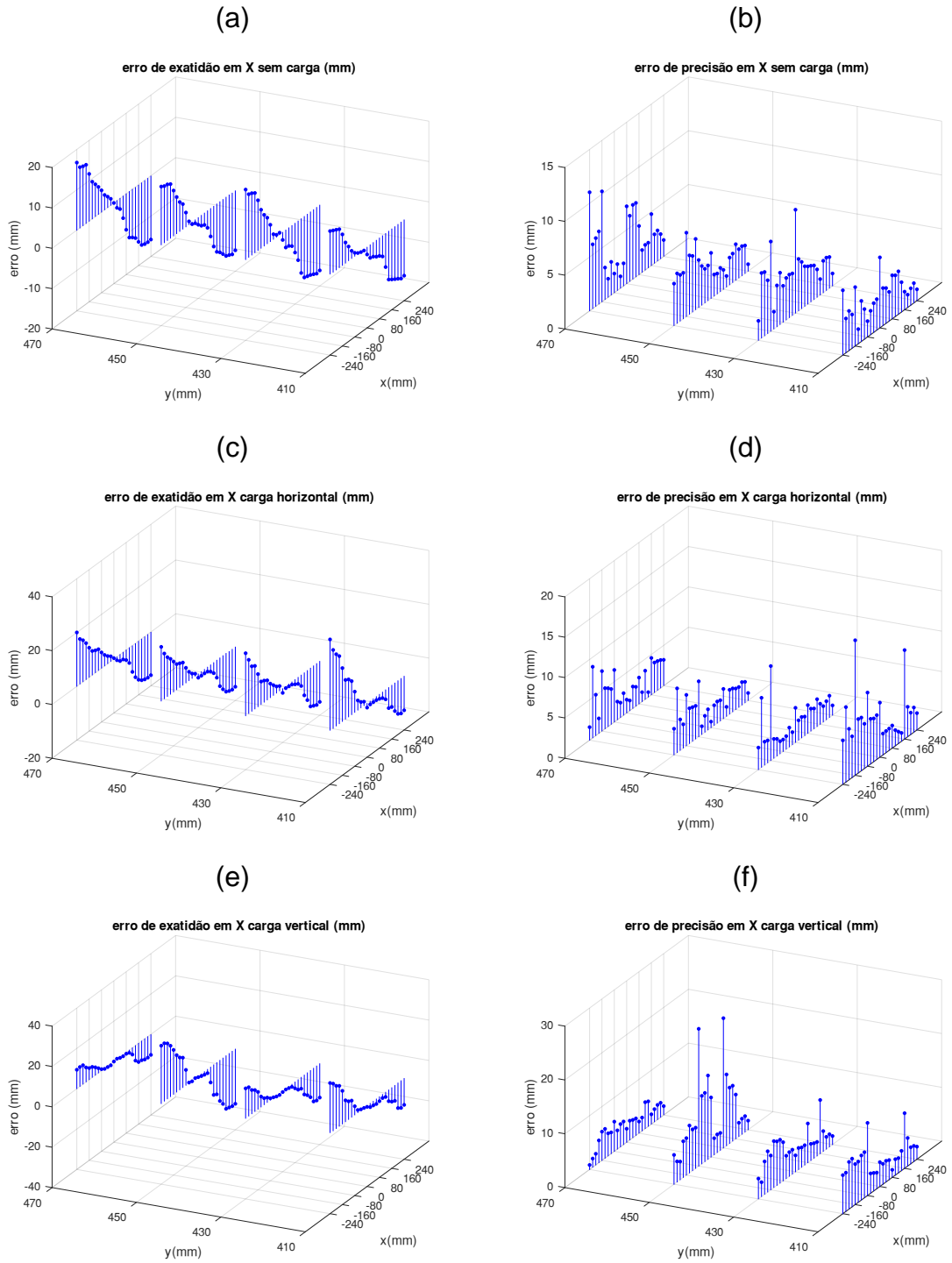


Figura 15 - Erros de precisão e exatidão na direção X do efetuador obtidas experimentalmente ao longo do espaço de trabalho útil. (PRÓPRIO).

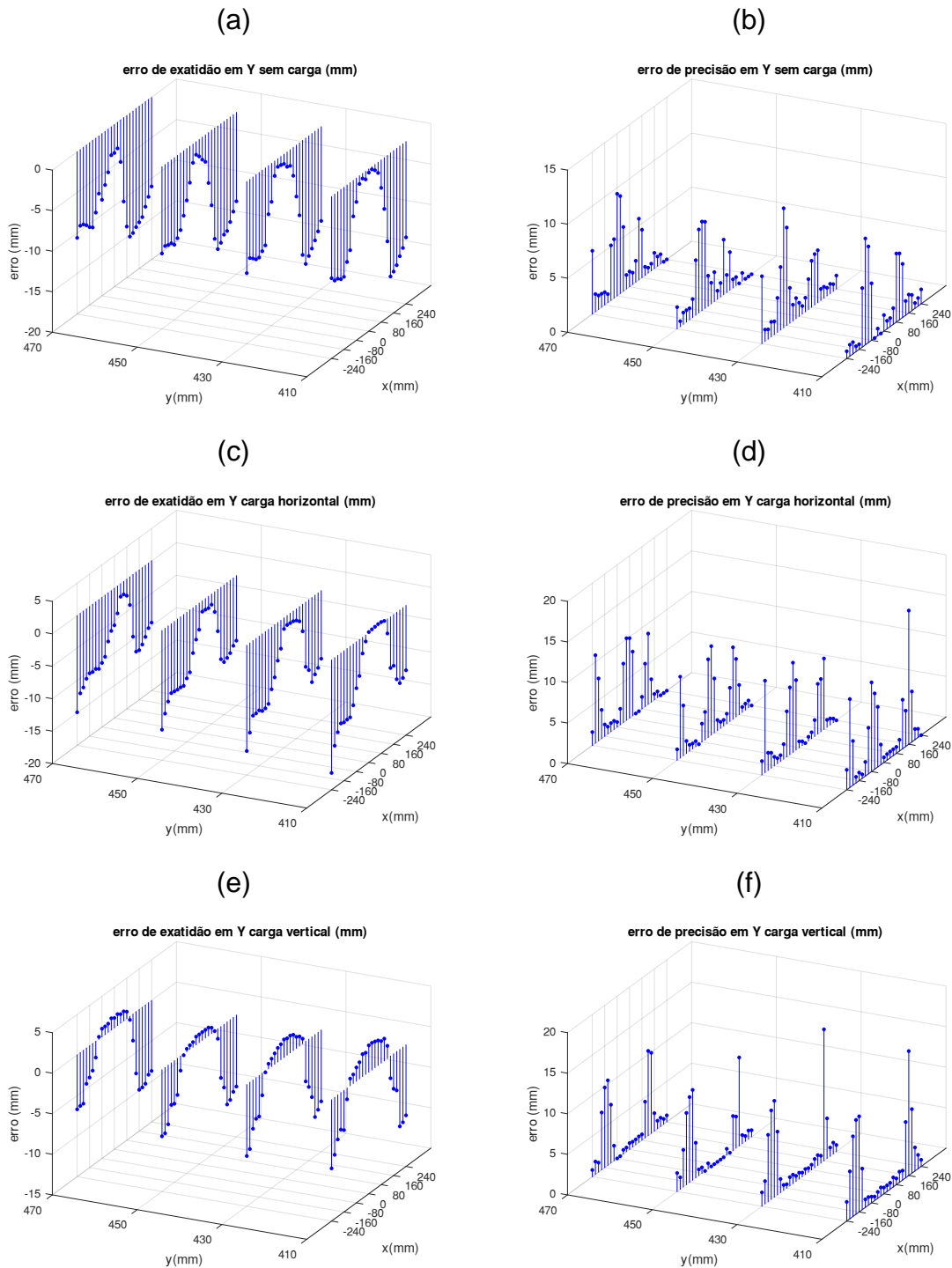


Figura 16 - Erros de exatidão e precisão na direção Y do efetuador obtidas experimentalmente ao longo do espaço de trabalho útil. (PRÓPRIO).

Os valores de exatidão do efetuador do mecanismo foram obtidos por meio da comparação entre cada posição determinada para o efetuador e a posição de fato obtida via sistema de controle. Este procedimento foi repetido nove vezes para cada ponto e o valor médio representativo foi escolhido como a exatidão em uma dada

configuração. A precisão foi determinada por meio do desvio padrão da diferença entre a mesma repetição desta comparação entre a posição desejada e a de fato obtida via sistema de controle, sendo este valor multiplicado por 3 para uma confiabilidade de 95%. Para se avaliar a influência do carregamento no desempenho do efetuador, foi aplicada uma carga no efetuador por meio de uma massa de 322,3 g (3,2 N), tanto na direção vertical, como na horizontal do efetuador, e repetidos os mesmos procedimentos já aplicados para o efetuador sem carga. Na Figura 17 a seguir estão indicados os valores obtidos para a primeira e segunda frequências fundamentais do mecanismo.

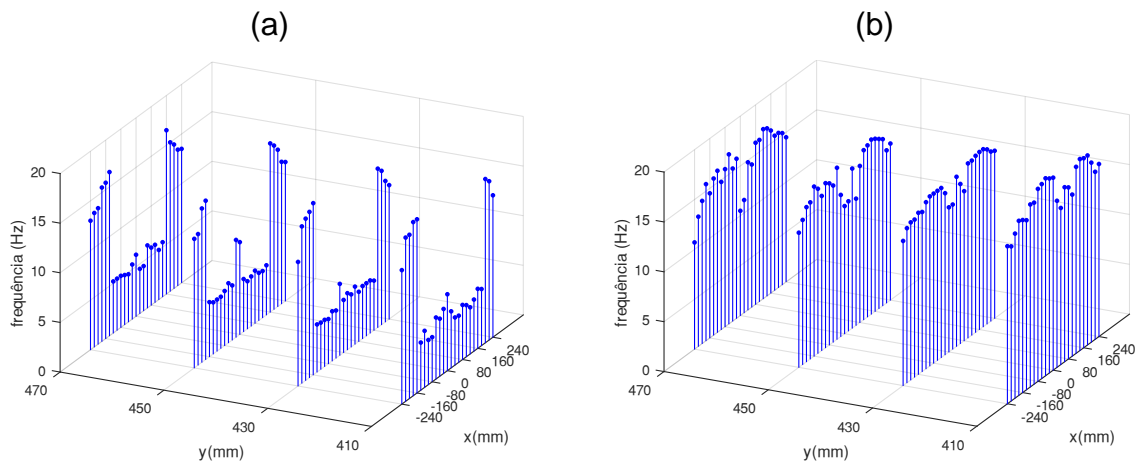


Figura 17 - Mapeamentos da primeira (a) e segunda (b) frequências naturais do efetuador em Hz obtidas experimentalmente ao longo do espaço de trabalho útil. (PRÓPRIO).

A obtenção dos valores foi feita por meio de um golpe percussivo unitário na direção de interesse. A vibração resultante é medida por meio de aparatos para medição baseado em equipamento de interferometria laser e os resultados indicados na forma de frequência natural amortecida do sistema. Duas direções são analisadas: a vertical, associada ao primeiro modo de vibração, e a horizontal, associada ao segundo modo.

4. RESULTADOS

Para avaliar os resultados do Método dos Parâmetros Concentrados, foi feito inicialmente uma comparação com o Método dos Elementos Finitos, tanto por meio de rotinas em MatLab[®] quanto com o software comercial Abaqus[®] avaliando o mapeamento das propriedades de rigidez do efetuator e a primeira frequência natural do mecanismo ao longo do espaço de trabalho por meio do modelo do pentágono articulado, que é um mecanismo estritamente de cinemática paralela e passível de aplicar os métodos para comparação. Em seguida, foi feita uma investigação da influência da presença da cadeia passiva do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$ comparando um modelo com a cadeia passiva, e outro sem, avaliando diferenças nos mapeamentos, contudo, aplicando o Método dos Parâmetros Concentrados nos dois modelos. Uma breve descrição das rotinas usadas no trabalho, bem como o acesso a elas, está indicada no Apêndice C.

Com valores de rigidez e inércia do conjunto moto redutor e os valores experimentais de rigidez e frequências, foram feitas comparações com o modelo e os valores experimentais para verificar a aderência dos resultados, foram feitas diversas considerações sobre os valores de rigidez em particular.

4.1. Resultados dos modelos teóricos

Os resultados dos modelos teóricos foram divididos em duas partes. A primeira apresenta os dados relacionados à modelagem do pentágono articulado, enquanto a segunda mostra os resultados obtidos para a versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$, seguindo o desenvolvimento dos modelos descritos no capítulo de Metodologia.

4.1.1. *Pentágono articulado*

Para os dados do manipulador fornecidos na Tabela 1, um mapeamento da rigidez no efetuator do mecanismo é obtido para a região indicada na Figura 10 (referente ao espaço de trabalho do mecanismo), assumindo a aplicação de uma força unitária na direção positiva de y . Admitiu-se que os atuadores reais são bloqueados

em cada configuração e que eles não apresentam flexibilidade, levando-se em conta apenas as fontes de flexibilidade dos elos do mecanismo. Também foi considerado que os elos têm a massa e a área da seção transversal uniformes ao longo do seu comprimento. Para comparação, o mesmo mapeamento é feito por meio do Método dos Elementos Finitos, conforme indicado na Figura 18.

Para os modelos em elementos finitos, foram utilizados elementos de pórticos para os elos e rótulas para modelar as juntas rotativas e liberar o momento fletor, representando de forma adequada a cinemática do mecanismo.

No presente estudo, foi usado um computador com processador Intel® Core i5 - 36100M 2,30 GHz, 4 GB de memória DDR3. Todas as simulações numéricas para obtenção dos mapeamentos foram realizadas utilizando rotinas no MatLab®. O tempo de execução dos mapeamentos utilizando o modelo em parâmetros concentrados foi de 8,89s, e os mapeamentos realizados por elementos finitos foi em 1h 3min 8s.

Tabela 1 - Parâmetros para os elos dos manipuladores (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Dimensões (mm)	Massa (kg)	Área dos elos (mm ²)	Segundo momento de área (mm ⁴)	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson
L ₀ = 180					
L ₁ = L ₃ = 350	m ₁ = m ₃ = 0,321	A ₁ = A ₃ = 220,0	I _{A1} = I _{A3} = 1,47 · 10 ⁴	69	0,3
L ₂ = L ₄ = 422	m ₂ = m ₄ = 0,213	A ₂ = A ₄ = 160,6	I _{A2} = I _{A4} = 2,05 · 10 ³		
L ₅ = 0					

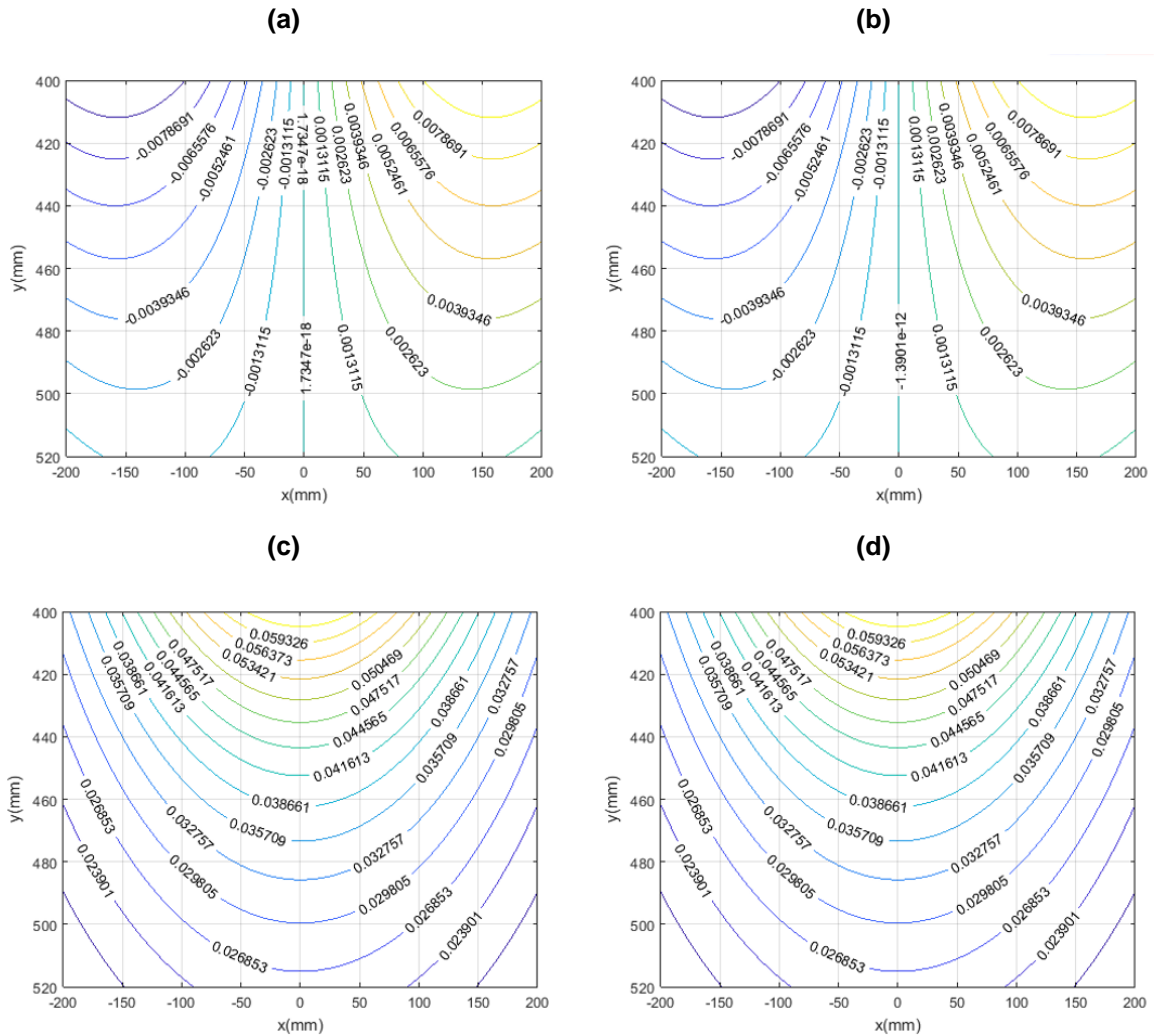


Figura 18 - Mapeamento para o deslocamento em mm na direção y do efetador (indicado pelas curvas de nível) usando o Método dos Parâmetros Concentrados devido à uma carga externa e unitária em x (a) e y (c), e usando o Método dos Elementos Finitos devido a uma carga externa e unitária em x (b) e y (d) ao longo do espaço de trabalho útil (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Para o mapeamento da primeira frequência natural do mecanismo, algumas simulações foram realizadas em um software comercial de elementos finitos, o Abaqus®, em uma posição específica do efetador (0; 0,500) m. A Tabela 2 resume o processo de discretização dos elos e o comportamento da primeira frequência natural para uma posição especificada no espaço de trabalho.

Tabela 2 - Convergência da primeira frequência natural no software de elementos finitos comercial na posição (0; 0,500)m (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Densidade da malha (elementos/elo)	Frequência (Hz)	Variação(%)
1	49,93	-
10	58,01	13,93
25	58,09	0,14
50	58,11	0,02
100	58,11	0,01
200	58,11	0,00
500	58,11	0,00

Como o valor da primeira frequência natural convergiu para o valor de 58,11 Hz, foram utilizados 100 elementos de pórtico para cada elo do mecanismo. Na Figura 19 é apresentado o mapeamento realizado com o Método dos Parâmetros Concentrados e com o Método dos Elementos Finitos, além de algumas simulações usando o software comercial de elementos finitos para algumas configurações do espaço de trabalho (12 pontos indicados). Uma comparação entre os valores obtidos nas respectivas posições do efetador é apresentada na Tabela 3.

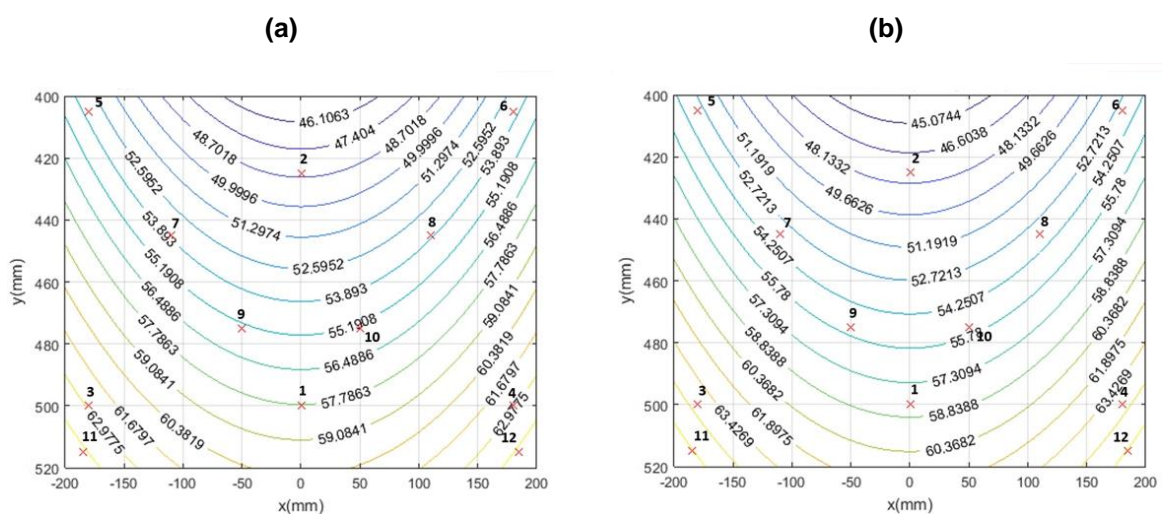


Figura 19 - Mapeamento da primeira frequência natural em Hz (indicada pelas curvas de nível) usando o Método dos Parâmetros Concentrados (a) e o Método dos Elementos Finitos (b), assim como usando o software de elementos finitos comercial para algumas configurações (indicadas pelos pontos) ao longo do espaço de trabalho útil (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Tabela 3 - Comparação de frequências naturais com o software comercial de elementos finitos (SILVA; HESS-COELHO, 2019).

Ponto	Posição do efetuador (x _B ,y _B) (mm)	Software comercial (Hz)	Mapeamento parâmetros concentrados (Hz)	Erro mapeamento parâmetros concentrados (%)	Mapeamento elementos finitos MatLab® (Hz)	Erro Mapeamento elementos finitos MatLab® (%)
1	(0;500)	58,11	57,84	-0,46	58,30	0,33
2	(0;425)	47,47	48,54	2,25	47,60	0,27
3	(-180;500)	64,28	62,84	-2,24	64,48	0,32
4	(180;500)	64,28	62,84	-2,24	64,48	0,32
5	(-180;405)	53,05	53,52	0,89	53,22	0,32
6	(180;405)	53,05	53,52	0,89	53,22	0,32
7	(-110;445)	53,31	53,75	0,82	53,48	0,31
8	(110;445)	53,31	53,75	0,82	53,48	0,31
9	(-50;475)	55,24	55,40	0,30	55,40	0,30
10	(50;475)	55,24	55,40	0,30	55,40	0,30
11	(-185;515)	66,37	64,48	-2,86	66,59	0,32
12	(185;515)	66,37	64,48	-2,86	66,59	0,32

4.1.2. Versão plana do mecanismo 2RPP+PPaP

Para os dados do manipulador fornecidos na Tabela 4, um mapeamento da rigidez do mecanismo é obtido na Figura 21 para a região do espaço de trabalho do mecanismo indicada na Figura 10, assumindo a aplicação de uma força unitária na direção positiva de y, da mesma forma que no modelo do pentágono articulado. A Figura 22 e a Figura 23 mostram os mapeamentos da primeira e segunda frequências naturais do mecanismo, enquanto que a Figura 24 e a Figura 25 representam os autovetores das respectivas frequências a fim de identificar os modos de vibração correspondentes. A título de comparação, os mesmos mapeamentos foram feitos sem considerar a cadeia passiva, assumindo assim que o efetuador permanecerá na posição horizontal por meio de um vínculo cinemático artificial de duas juntas prismáticas ideais, conforme indicado na Figura 20.

Tabela 4 - Parâmetros para os elos do manipulador $2R_{SS}+PPaP$ (PRÓPRIO).

Dimensões (mm)	Massa (kg)	Área dos elos (mm ²)	Segundo momento de área (mm ⁴)	Módulo de Young (GPa)	Coefficiente de Poisson
$L_0 = 180$					
$L_1 = L_3 = 350$	$m_1 = m_3 = 0,321$	$A_1 = A_3 = 220,0$	$I_{A1} = I_{A3} = 1,47 \cdot 10^4$	69	0,3
$L_2 = L_4 = 422$	$m_2 = m_4 = 0,213$	$A_2 = A_4 = 160,6$	$I_{A2} = I_{A4} = 2,05 \cdot 10^3$		
$L_5 = 160$	$m_5 = 0,650$				
$L_6 = 100$	$m_6 = 0,143$		$I_{A6} = 1,47 \cdot 10^4$		
$L_7 = L_8 = 385$	$m_7 = m_8 = 0,134$	$A_7 = A_8 = 160,6$			

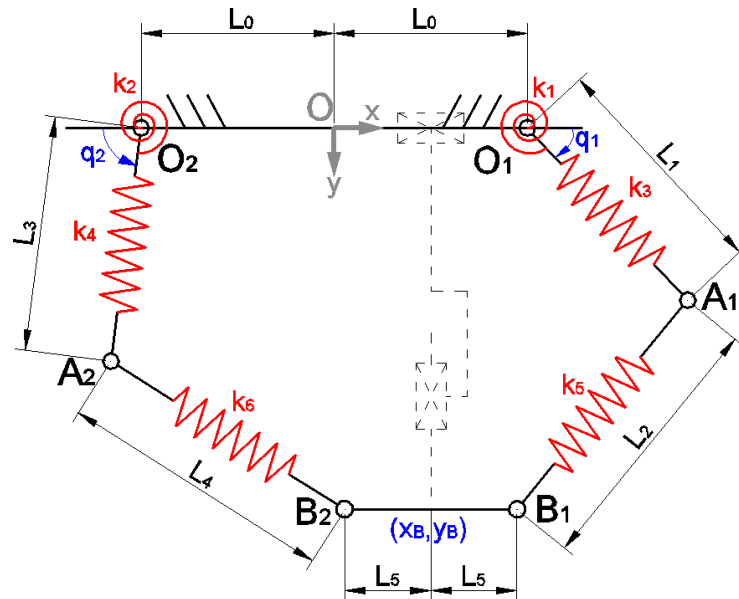


Figura 20 - Versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$ sem considerar o efeito da cadeia passiva no efetuador por meio de um vínculo cinemático artificial de duas juntas prismáticas ideais (indicadas pelas linhas tracejadas) (PRÓPRIO).

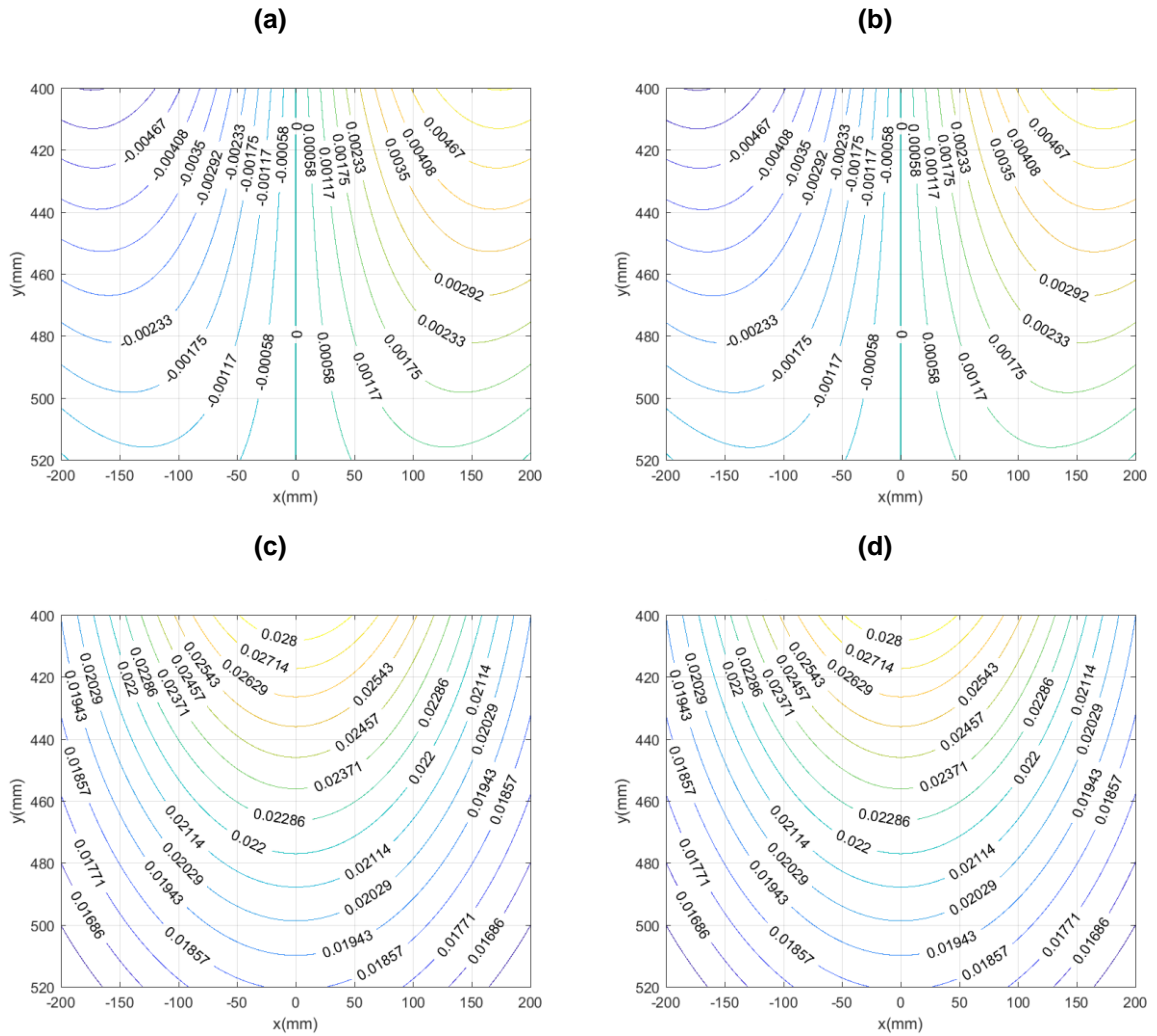


Figura 21 - Mapeamento para o deslocamento em mm na direção y do efetivador (indicado pelas curvas de nível) com a cadeia passiva devido à uma carga externa e unitária em x (a) e y (c), e sem a cadeia passiva devido à uma carga externa e unitária em x (b) e y (d) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).

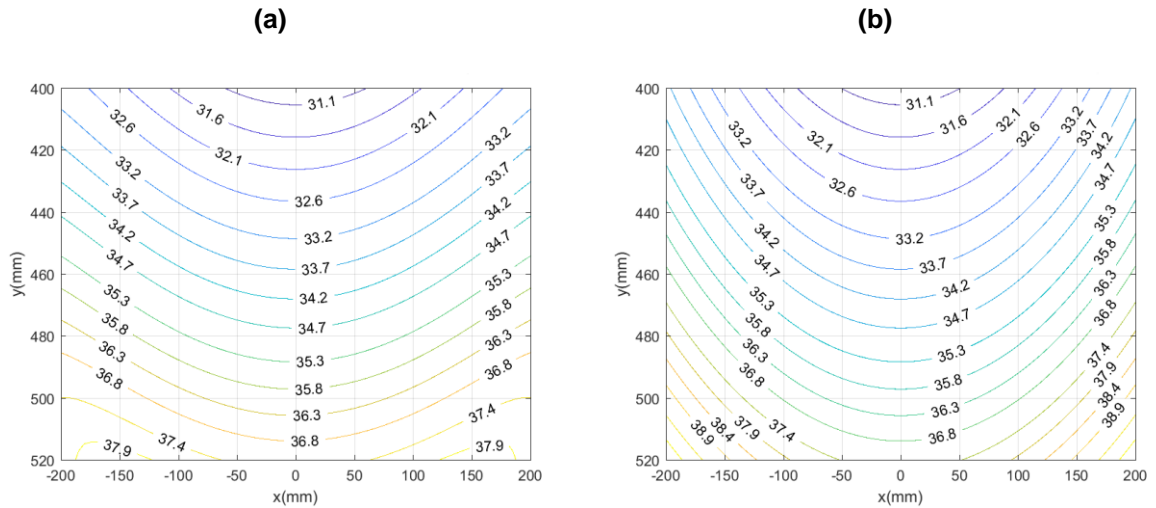


Figura 22 - Mapeamento da primeira frequência natural em Hz (indicada pelas curvas de nível) modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).

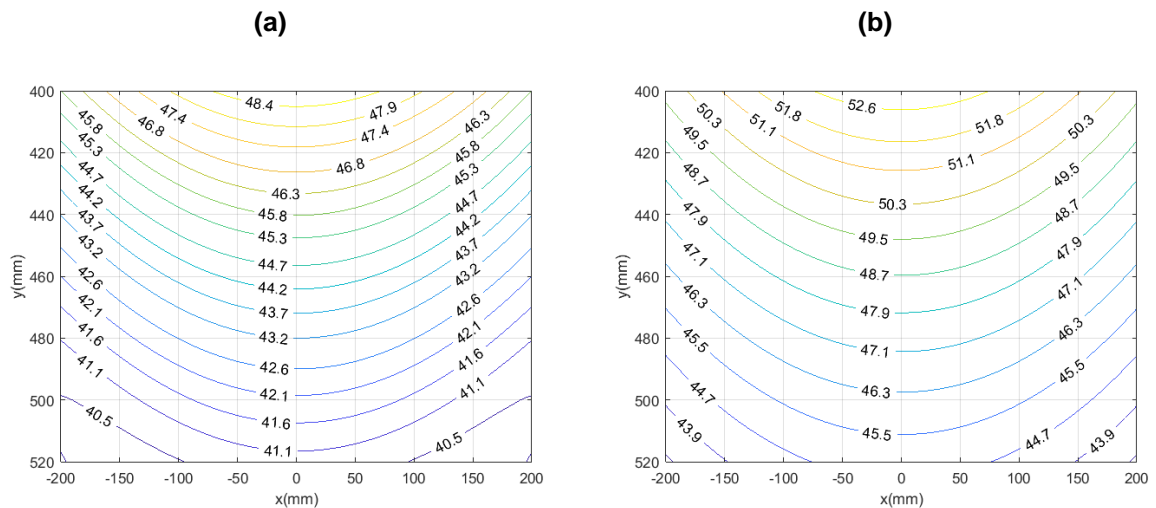


Figura 23 - Mapeamento da segunda frequência natural em Hz (indicada pelas curvas de nível) modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).

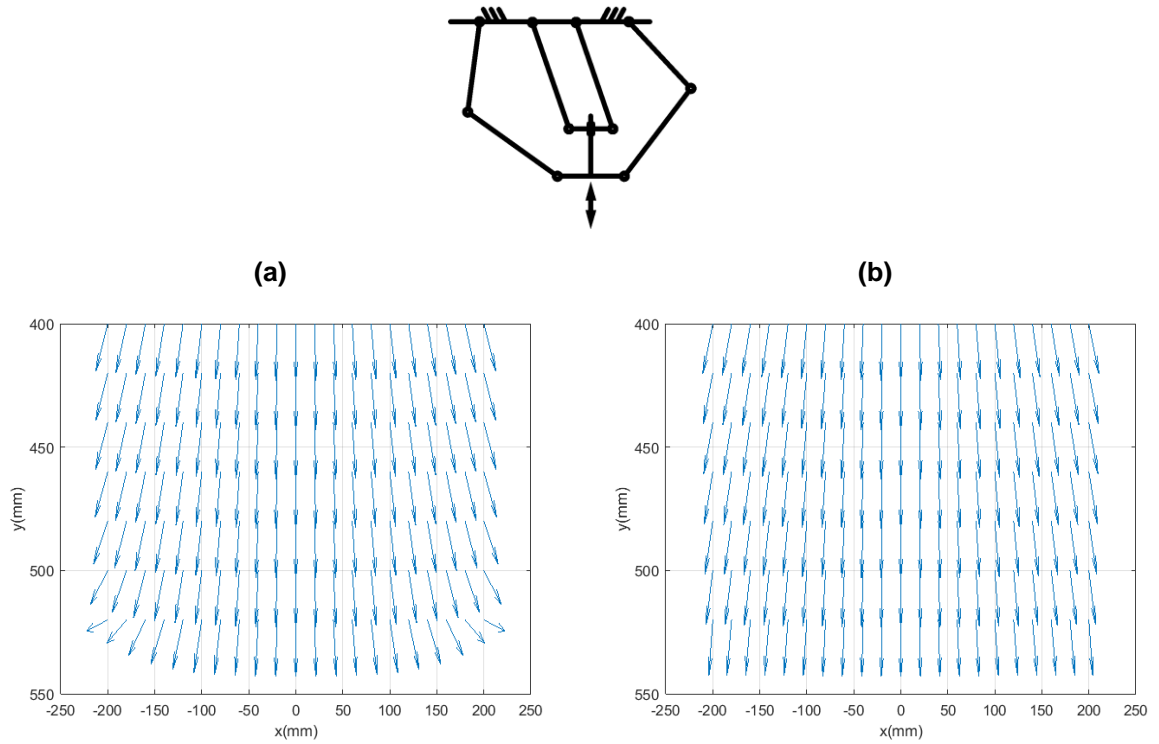


Figura 24 - Mapeamento dos autovetores da primeira frequência natural em Hz modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).

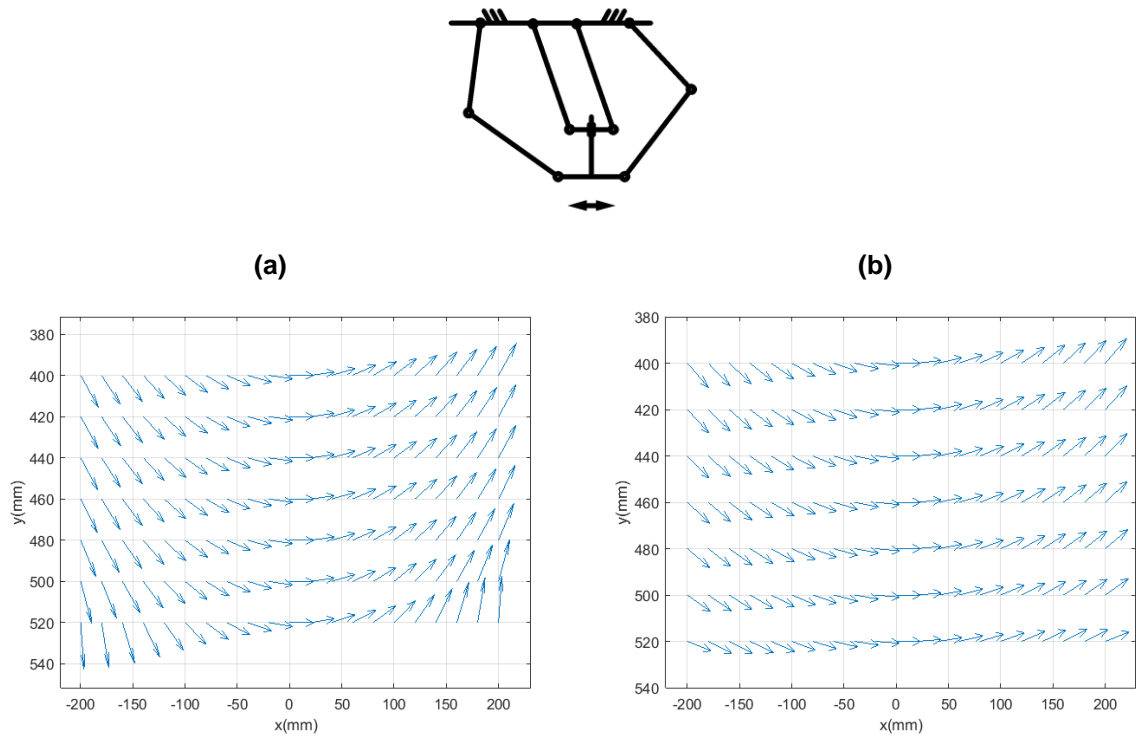


Figura 25 - Mapeamento dos autovetores da segunda frequência natural em Hz modelada com a cadeia passiva (a) e sem a cadeia passiva (b) ao longo do espaço de trabalho útil (PRÓPRIO).

4.2. Comparação dos resultados teóricos com os experimentais

Na seção anterior, foram comparados modelos teóricos para verificar a aderência dos resultados obtidos pelo método dos parâmetros concentrados e pelo método dos elementos finitos a fim de se verificar a consistência dos resultados na comparação. Nesta seção, foi feita uma comparação entre os resultados do modelo de parâmetros concentrados obtidos na seção anterior e os resultados experimentais do manipulador obtidos por Rinaldi (2018) já apresentados na seção de metodologia. Vale ressaltar que também foram incorporados ao modelo teórico os efeitos de inércia e rigidez do conjunto moto redutor, indicados na Seção 3.5. Primeiro foram comparados os mapeamentos das duas primeiras frequências naturais, e em seguida, a rigidez do manipulador.

4.2.1. Comparação teórico experimental das frequências naturais

Na análise das frequências naturais, uma comparação foi feita com os resultados experimentais e está indicada na Figura 26.

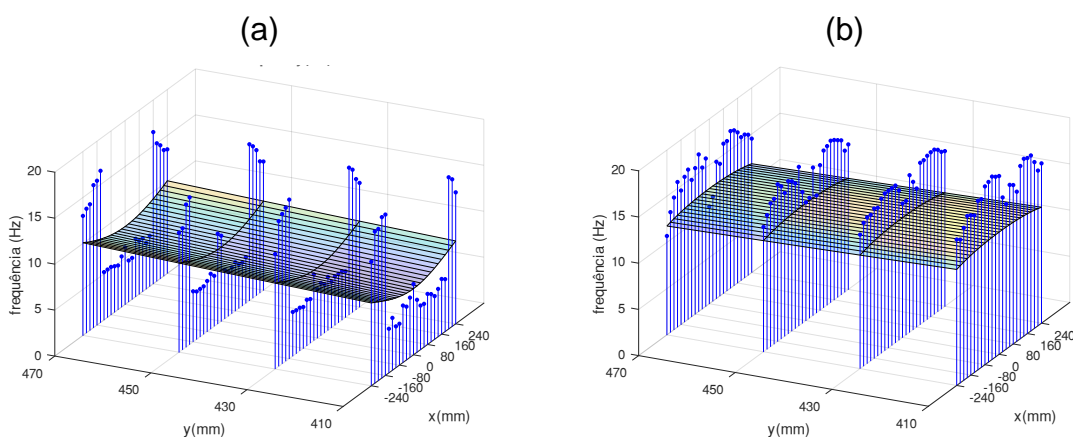


Figura 26 - Mapeamentos da primeira (a) e segunda (b) frequências naturais em Hz do efetuador ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).

Pela figura é possível verificar que os valores teóricos são da mesma ordem de grandeza dos valores experimentais, embora existam as irregularidades nos gráficos, conforme o que já foi observado em Rinaldi (2018), que justificou isso pelo efeito de atrito e folga nas juntas que mascaram os valores da rigidez, além dos fenômenos de *stick slip* e atrito nas guias lineares. Com relação aos mapeamentos de frequência, ainda é possível verificar maior aderência entre os resultados, o que se deve inicialmente ao fato de que esta representa valores mais robustos e que são representativos da estrutura, e menos sensíveis do que os valores de rigidez.

4.2.2. Comparação teórico experimental do mapeamento da rigidez

Devido à vários fatores que influenciaram nos resultados experimentais e à quantidade de informações levantadas, foram propostas algumas formas para comparar a rigidez do efetuador em relação a um carregamento externo atuante. A primeira delas consistiu em definir a rigidez como a razão entre a carga externa e a diferença nos valores de exatidão para os casos com e sem carga a fim de se determinar um valor de deslocamento correspondente à aplicação da carga. A segunda, considerando o fato de que os valores de rigidez experimental são mais baixos do que os teóricos, utilizaram-se os valores de precisão como uma estimativa para as folgas que existem no efetuador, para assim desconsiderar dos valores de deslocamento e obter maior aderência nos valores. A terceira consiste em obter uma matriz de rigidez a partir da matriz compliância (flexibilidade) dos valores experimentais formados por meio da exatidão com e sem carga. Por fim, a última procurou uma outra forma de abordagem comparando a flexibilidade ao invés da rigidez.

4.2.2.1. Rigidez via diferença de exatidão com e sem carga nas direções correspondentes

Inicialmente, foi feita uma comparação entre os dados originais da rigidez obtidos em Rinaldi (2018), que consiste em considerar o deslocamento como sendo a diferença entre o módulo da exatidão com uma carga de 3,2 N e o módulo da exatidão sem carga, conforme mostrado na Figura 27.

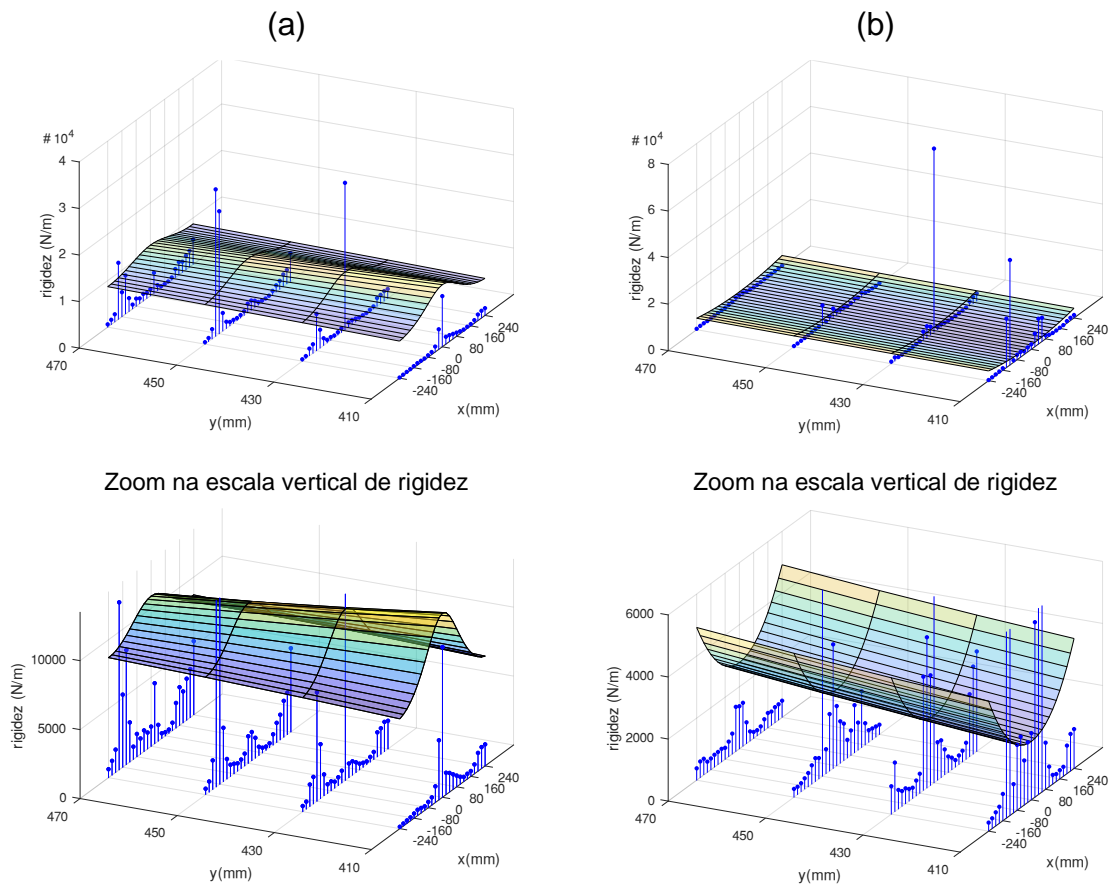


Figura 27 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando o módulo dos valores da exatidão ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).

Pode-se observar que existem valores pontuais nos mapeamentos que atingem valores excessivamente elevados, a princípio relacionados com o fato de que os valores de exatidão com e sem carga estarem muito próximos, e na definição de rigidez, esta diferença se apresenta no denominador da equação, fazendo com que em determinadas configurações o valor de rigidez atinja valores elevados.

Outra característica observada é uma diferença geral nos valores experimentais e teóricos, que podem ser observados apenas quando apenas o trecho inicial da escala de rigidez é destacado, não indicando aqueles valores elevados. No geral, os valores da rigidez na direção x estão mais afastados, provavelmente devido à definição de rigidez em que os valores de exatidão em x e y acabam contabilizados sem se levar em conta em que direção os deslocamentos estão de fato agindo.

Na Figura 28 foi feito outro mapeamento experimental da rigidez, porém considerando-se a diferença nos valores de exatidão com e sem carga apenas nas

direções correspondentes, numa tentativa de reduzir a diferença nos valores de rigidez teórico e experimental observados na Figura 28. Desta vez foram mostrados apenas os mapeamentos com um trecho inicial da escala de rigidez, desprezando os valores excessivos de rigidez nos gráficos.

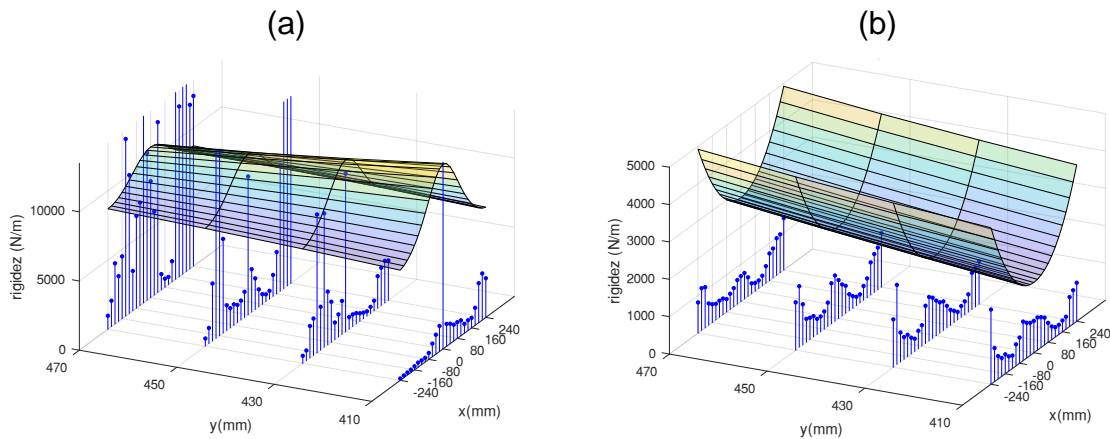


Figura 28 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando os valores de exatidão nas respectivas direções ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).

Pode-se observar que não houve uma mudança geral na diferença entre os valores teóricos e os experimentais nos dois mapeamentos. No entanto, o mapeamento da rigidez em y não apresentou mais valores excessivos, e a forma geral dos pontos parece ter uma forma genérica da superfície teórica, com exceção dos valores em torno de $x = 0$ mm.

Provavelmente esta diferença nos valores esteja relacionada ao fenômeno de folgas nas juntas do mecanismo, uma vez que elas estejam sendo contabilizadas juntamente com a deformação, fazendo com que os valores de rigidez se apresentem menores do que realmente o são.

4.2.2.2. Precisão como estimativa para as folgas

A princípio a precisão está associada com o posicionamento do efetuator via sistema de controle (repetibilidade), e não com as folgas que o mecanismo apresenta.

Desprezando os picos na rigidez, verificou-se realmente uma diferença nos valores da rigidez em y na Figura 28, chegando a valores experimentais de cerca de dez vezes menores que os teóricos, não muito diferentes dos valores discrepantes em x. A alternativa da precisão (triplo do desvio padrão da amostra) como forma de descontar as folgas nos deslocamentos usados para a determinação da rigidez (diferença da exatidão com carga e exatidão sem carga), será então aplicada para uma estimativa da rigidez em x e y.

A forma usada para descontar as folgas $p(x_B, y_B)$, consideradas como o próprio valor da precisão, da rigidez experimental original, $k(x_B, y_B)$, para se obter a nova rigidez experimental $k_{novo}(x_B, y_B)$ está apresentada pela equação a seguir. Os termos x_B e y_B referem-se a uma configuração do efetuator no espaço de trabalho útil. Essencialmente descontou-se o valor da precisão na exatidão para reduzir uma parte do deslocamento reconhecido como fonte de folgas e assim determinar um novo valor de rigidez.

$$k(x_B, y_B) = \frac{3,2}{e(x_B, y_B)} \Rightarrow e(x_B, y_B) - p(x_B, y_B) = \frac{3,2}{k(x_B, y_B)} - p(x_B, y_B) \Rightarrow k_{novo}(x_B, y_B) = \frac{3,2}{\left| \frac{3,2}{k(x_B, y_B)} - p(x_B, y_B) \right|} \quad (53)$$

A folga $p(x_B, y_B)$ foi contabilizada extraíndo o maior valor de forma absoluta, assim como foi na exatidão para o cálculo da rigidez

$$p(x_B, y_B) = \left| \sqrt{e_{precXhor}^2 + e_{precYhor}^2} - \sqrt{e_{precX0}^2 + e_{precY0}^2} \right| \quad (54)$$

Sendo $e_{precXhor}$ o erro de precisão em x devido à carga horizontal, e_{precX0} o erro de precisão em x sem carga, $e_{precYhor}$ o erro de precisão em y devido à carga horizontal e e_{precY0} o erro de precisão em y sem carga. Assim é possível, a partir do valor da rigidez, descontar do valor do deslocamento, o valor da folga supostamente sendo a precisão. O valor de 3,2 N refere-se à carga vertical e horizontal aplicadas nos ensaios experimentais da rigidez. Na Figura 29 é mostrado o resultado desta forma de contabilizar as folgas.

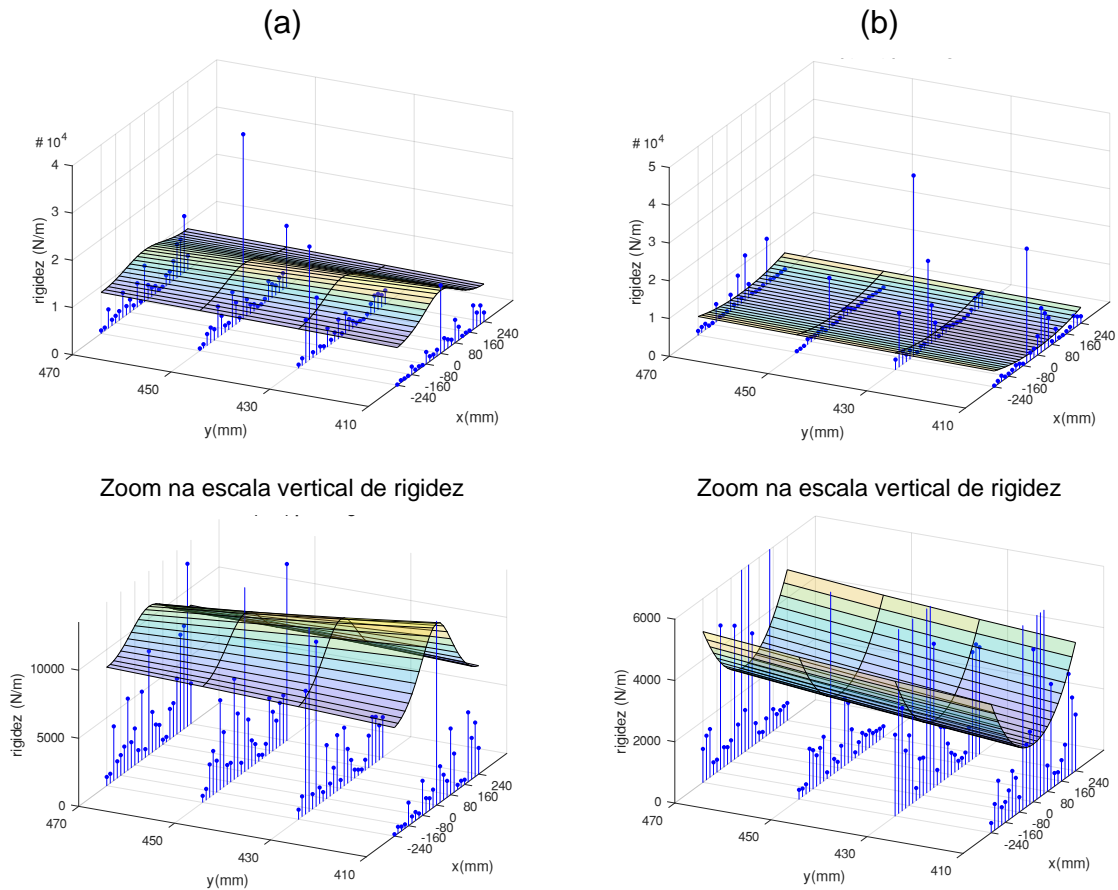


Figura 29 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando os valores de precisão como estimativa para as folgas ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).

Com os valores de precisão usados como folgas, não houve melhora na aderência dos valores na rigidez em x e y. Este resultado é um provável indicativo de que os erros cinemáticos associados ao posicionamento são maiores do que os erros associados à deformação do mecanismo devido à aplicação de carga, e os erros associados à presença de folgas nas juntas.

4.2.2.3. Rigidez via inversão da matriz compliância

Uma forma de obter a matriz de rigidez é por meio da inversão da matriz de flexibilidade ou compliância $\mathbf{c}(x_B, y_B)$ do efetuador na posição (x_B, y_B)

$$\delta(x_B, y_B) = \mathbf{c}(x_B, y_B) \mathbf{f}_e(x_B, y_B) \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_y(x_B, y_B) \\ \delta_z(x_B, y_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}(x_B, y_B) & c_{12}(x_B, y_B) \\ c_{21}(x_B, y_B) & c_{22}(x_B, y_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y(x_B, y_B) \\ f_z(x_B, y_B) \end{bmatrix} \quad (55)$$

Sendo $\delta(x_B, y_B)$ e $f_e(x_B, y_B)$ os vetores de deslocamento e força no efetuador para uma dada configuração, respectivamente. Com a matriz de rigidez determinada, basta extrair os valores da diagonal principal para obter os valores dos mapeamentos da rigidez apresentados até então.

Os elementos da matriz compliância podem ser obtidos por meio da diferença entre os valores de exatidão com e sem carga para as direções x e y da Figura 15 e Figura 16. Mas os valores da exatidão foram obtidos para uma carga de 3,2 N, tanto na vertical como na horizontal, além de que ainda existe a exatidão para o caso sem carga. Assim, basta dividir este valor de deslocamento por 3,2 N para saber o valor de exatidão para a aplicação de uma carga unitária, supondo válida a hipótese de regime linear. Assim os valores dos elementos da matriz compliância são dados por:

$$c_{11} = \frac{e_{exatXhor}}{3,2} - e_{exatX0} \quad (56)$$

$$c_{12} = \frac{e_{exatXver}}{3,2} - e_{exatX0} \quad (57)$$

$$c_{21} = \frac{e_{exatYhor}}{3,2} - e_{exatY0} \quad (58)$$

$$c_{22} = \frac{e_{exatYver}}{3,2} - e_{exatY0} \quad (59)$$

Sendo $e_{exatXhor}$ o erro de exatidão em x devido à carga horizontal, $e_{exatXver}$ o erro de exatidão em x devido à carga vertical, e_{exatX0} o erro de exatidão em x sem carga, $e_{exatYhor}$ o erro de exatidão em y devido à carga horizontal, $e_{exatYver}$ o erro de exatidão em y devido à carga vertical, e_{exatY0} o erro de exatidão em y sem carga e c_{11} , c_{12} , c_{21} e c_{22} são os elementos da matriz de flexibilidade ou compliância. Na Figura 30 é mostrado o mapeamento obtido a partir da extração dos elementos c_{11} e c_{22} , que são, respectivamente, o deslocamento na direção x devido a uma carga unitária aplicada na direção x e deslocamento na direção y devido a uma carga unitária aplicada na direção y.

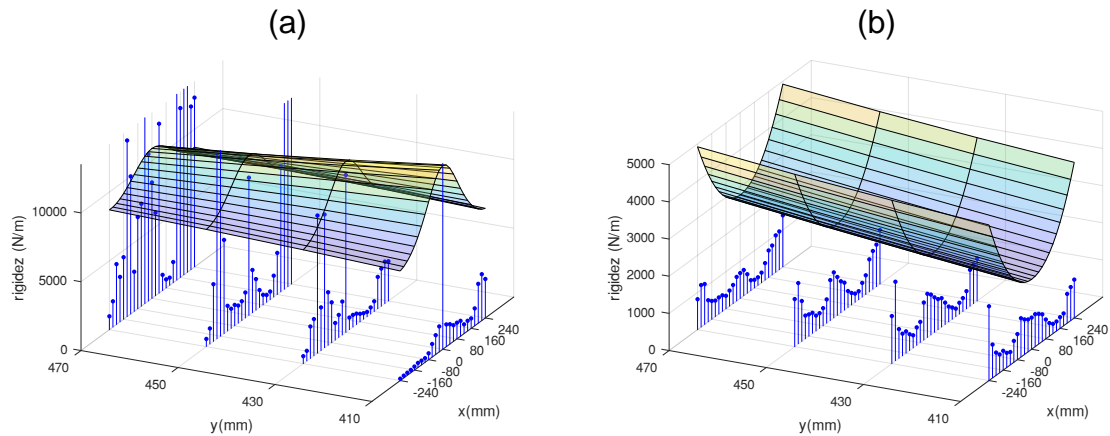


Figura 30 - Mapeamentos da rigidez em x (a) e em y (b), usando os valores de rigidez por meio da inversão da matriz compliância ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos, e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).

Tanto a matriz de flexibilidade quanto a de rigidez não foram simétricas, ou seja, o Princípio da Reciprocidade de Maxwell-Betti e consequentemente o Princípio da Superposição não são válidos, indicando uma não linearidade no comportamento do mecanismo, seja devido às folgas e atrito, ou à não-linearidade geométrica inerente à cinemática.

4.2.2.4. Trabalhando com flexibilidade como alternativa de representação

Devido à questão da diferença baixa entre os valores de exatidão e o problema de valores abruptos ao longo do mapeamento, foi feito um tipo de comparação alternativo que, ao invés de trabalhar com a rigidez de maneira convencional, trabalhou-se com os deslocamentos como resposta à aplicação de um determinado carregamento, no caso, a carga de 3,2 N. Assim, mesmo que os valores de exatidão com e sem carga sejam próximos, o mapeamento resultante não apresentaria picos repentinos ao longo do espaço de trabalho, e seria possível identificar características importantes na comparação dos valores teórico e experimental. Na Figura 31 estão indicados os resultados desta forma alternativa de representação.

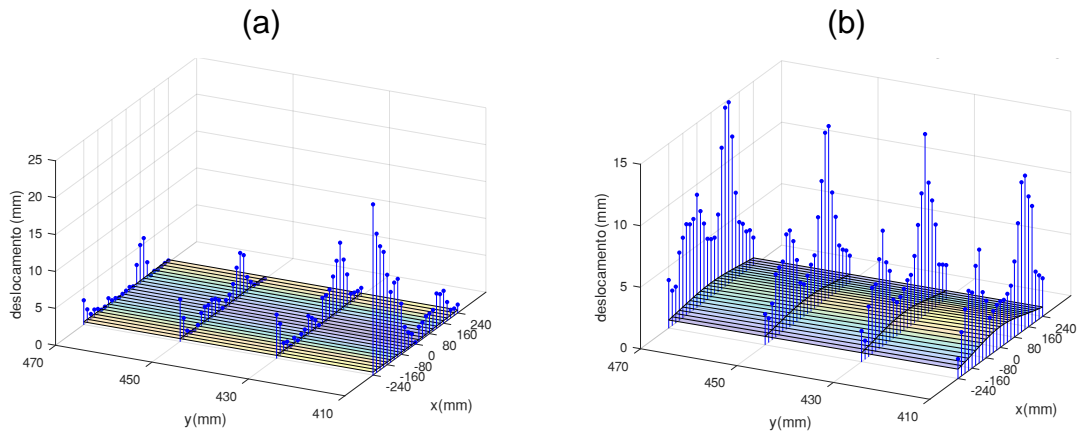


Figura 31 - Mapeamentos do deslocamento para a aplicação de uma carga de 3,2N em x (a) e em y (b), ao longo do espaço de trabalho útil, sendo os dados experimentais indicados pelos pontos, e os dados teóricos indicados pelas superfícies. (PRÓPRIO).

No caso da flexibilidade na direção y , observaram-se dois picos mais ou menos na região dos valores de $x = 100$ mm e $x = -100$ mm. Observaram-se também alterações bruscas nestas mesmas regiões nos mapeamentos iniciais de exatidão nas Figura 15 e Figura 16, assim como na primeira frequência natural na Figura 26a, sendo um indicativo de que possa existir uma alteração importante nas forças de atrito nestas configurações. Cabe agora investigar como o atrito na guia linear varia ao longo do espaço de trabalho.

5. DISCUSSÃO

O presente trabalho buscou propor modelos para fazer previsões acerca do comportamento de determinadas propriedades do mecanismo $2RSS+PPaP$ agindo no plano e como elas variam ao longo do espaço de trabalho útil, no caso, a rigidez em duas direções devido à ação de uma carga externa e as frequências fundamentais e seus modos, para o comportamento dinâmico em operação.

Devido à complexidade da cinemática do mecanismo e a interação entre o efetuator, as duas cadeias cinemáticas ativas e a cadeia passiva, foi escolhido inicialmente o modelo do pentágono articulado, que consideraria apenas a influência das cadeias ativas e desprezaria, a princípio, a cadeia passiva em termos de sua influência na rigidez e inércia do mecanismo. Esta hipótese foi adotada inicialmente, uma vez que a função da cadeia passiva era de apenas conservar a orientação do efetuator e a massa de seus componentes seriam menores devido ao fato de que no mecanismo real foram fabricadas em alumínio.

Com relação à escolha do método para levantar estas propriedades, foi escolhido o modelo de parâmetros concentrados, pois uma vez que a análise foi repetida para várias configurações do mecanismo, cada análise deveria ser realizada com um esforço computacional menor, e ainda assim apresentar resultados suficientemente precisos. Um outro motivo para a escolha foi a possibilidade de inclusão de *atuadores virtuais* que poderiam ser incorporados ao modelo, e assim, permitiriam a possibilidade de aumentar gradualmente a complexidade do modelo e contabilizar a influência de mais fatores do mecanismo.

Para embasar os resultados desta formulação, foi criada uma rotina em elementos finitos para executar a mesma tarefa, impondo algumas restrições quanto ao tipo e o número de elementos, uma vez que esta formulação se mostrou computacionalmente custosa para o mapeamento de propriedades ao longo do espaço de trabalho. Também foi utilizado um programa de elementos finitos comercial para confrontar os resultados, porém, neste caso, foi trabalhado em apenas algumas configurações.

Uma vez executadas todas estas etapas, foi investigada a influência da rigidez e inércia da cadeia passiva nas propriedades do mecanismo, uma vez que este mecanismo é assimétrico do ponto de vista topológico. Contudo, houve apenas uma

comparação entre dois modelos. O primeiro, similar ao pentágono articulado, com uma mudança em que se considerou a dimensão do efetuador e um vínculo cinemático artificial perfeitamente rígido que mantinha a orientação do efetuador, mas ainda resultando em um mecanismo com dois graus de liberdade. Já o segundo consistiu em um modelo que considerava a influência da cadeia passiva, cuja rigidez foi contabilizada por meio de uma única mola de torção, representando um modelo de 3 graus de liberdade. Observou-se uma pequena diferença com relação à rigidez da cadeia passiva, revelando-se elevada o suficiente para manter a orientação do mecanismo. Entretanto, foi perceptível a influência da massa dos componentes da cadeia passiva, por meio da redução nos valores das frequências naturais e na mudança na direção dos modos de vibração. Embora houvesse pequenas variações nos resultados, o modelo que contabilizou os efeitos da cadeia passiva foi adotado nas análises subsequentes.

A seguir, foram levantados os valores de rigidez e inércia do conjunto moto redutor para o acionamento do mecanismo. Até este momento os modelos não consideraram a presença do moto redutor, assim os resultados dos modelos representaram apenas o comportamento de inércia e rigidez dos elos. A rigidez do redutor foi considerada por meio de associação em série com a mola de torção que representa o efeito de flexão dos elos acionados das cadeias ativas. A inércia do moto redutor foi considerada por meio de uma inércia de rotação equivalente somada à inércia do elo acionado. Com estes valores levantados, foi possível uma primeira comparação com os resultados obtidos experimentalmente.

O objetivo da comparação com os modelos experimentais foi o de verificar a aderência destes para se avaliar a possibilidade de prever o comportamento do mecanismo e assim propor aprimoramentos no mecanismo real. Verificou-se aderência nos valores da primeira e segunda frequências naturais do mecanismo. Esta aderência já é um resultado promissor para o projeto de mecanismos de cinemática paralela, não apenas para o desempenho, como também para a área de controle, uma vez que os valores de frequência natural assumem um papel importante na sintonização dos parâmetros de ganho de controladores PID, torque computado ou qualquer outra estratégia de controle (ALMEIDA, 2013). Nos valores de rigidez observaram-se algumas diferenças, além da presença de picos nos valores, tais como a presença de um deslocamento no conjunto de valores de cada mapeamento. Isto fica mais claro nos valores de rigidez na direção y , para os quais também houve uma

correspondência melhor do que na rigidez na direção x , indicando a presença de outros fatores influenciando nos resultados experimentais além da rigidez.

6. CONCLUSÕES

Considerando os resultados obtidos na análise de rigidez, observou-se que os resultados da consideração dos atuadores virtuais no modelo matemático foram satisfatórios, revelando a consistência do Método dos Parâmetros Concentrados e o seu menor custo computacional, uma vez que a matriz de rigidez obtida referiu-se somente ao efetuador (tamanho 2×2 para o pentágono articulado e 3×3 para a versão plana do mecanismo $2R_{SS}+PPaP$), enquanto a matriz obtida pelo Método dos Elementos Finitos foi maior. Com o processo sendo repetido para cada posição do efetuador ao longo do espaço de trabalho, o Método de Elementos Finitos se torna menos adequado para mapear o manipulador.

No mapeamento das frequências naturais do pentágono articulado, foi possível identificar variações nos valores da primeira frequência natural. Isso se deve às simplificações na formulação da matriz de massa do elemento de viga, que concentra suas massas nas extremidades do elemento, não se levando em conta suas características contínuas de massa e rigidez, assim como as vibrações transversais dos elos continuamente ao longo de seu comprimento. No entanto, mesmo com essas simplificações, o modelo ainda apresentou boa correlação com o modelo de elementos finitos, representando uma alternativa para a avaliação de parâmetros associados ao projeto de controle e precisão deste e de outros mecanismos.

Na investigação da influência da cadeia passiva, os resultados obtidos indicam que a rigidez dessa cadeia, considerando apenas a rigidez dos elos, tem uma grande relevância em manter a orientação do efetuador. Isto foi mostrado pela similaridade nos deslocamentos na Figura 21. O mesmo não ocorreu nos mapeamentos das frequências naturais, embora os valores estejam próximos. Uma hipótese para justificar a diferença está no aumento dos efeitos inerciais no mecanismo ao incluir a cadeia passiva, reduzindo o valor da frequência ao longo do espaço de trabalho.

Na comparação entre os resultados dos modelos e os experimentais, os valores das frequências fundamentais apresentaram uma boa correspondência. Isto está associado com a natureza robusta dos valores de frequências naturais como uma característica da estrutura, isso pode ser verificado pelo quociente de Rayleigh usado

para a determinação analítica da frequência natural de um sistema genérico. Contudo pode-se verificar um crescimento abrupto nestes valores em posições determinadas do espaço de trabalho.

Quanto à comparação dos valores de rigidez, verificou-se um afastamento maior entre os resultados do modelo e os valores experimentais. Uma hipótese para isso está no fato de como os valores experimentais foram obtidos, onde não foi possível distinguir com clareza entre os erros de natureza geométrica dos componentes do mecanismo e os erros cinemáticos associados ao posicionamento do efetuador via sistema de controle. Estes resultados indicam uma relação complexa do efeito das juntas e das cadeias cinemáticas na posição do efetuador do mecanismo paralelo. Sendo os valores abruptos provavelmente associados aos fenômenos de atrito e *stick slip* nas juntas e o deslocamento geral no conjunto de valores associada à presença de folgas nas juntas. Outro aspecto a ser ressaltado é que o mecanismo real é originalmente um mecanismo espacial, com as juntas e a cinemática trabalhando em três dimensões, enquanto os modelos foram criados de forma simplificada em duas dimensões, com juntas também bidimensionais.

7. TRABALHOS FUTUROS

Como indicação para trabalhos futuros, pode-se citar

- Refazer os experimentos com o manipulador por meio de outra metodologia para o levantamento da rigidez do mecanismo em relação à uma carga externa, buscando distinguir entre as fontes de erros geométricos e cinemáticos;
- Uma investigação mais detalhada sobre os fatores que influenciam nos valores abruptos em alguns valores na rigidez experimental;
- O aprimoramento dos modelos para se incluir o efeito dos fenômenos de atrito, *stick slip*, folgas nas juntas e não linearidade geométrica da estrutura;
- Investigação mais sofisticada do mecanismo com relação à influência da rigidez da cadeia passiva nas propriedades do mecanismo;
- De posse dos modelos propostos, realizar uma síntese paramétrica dinâmica do mecanismo, propondo melhorias nas propriedades ao longo do espaço de trabalho, sobretudo com relação à rigidez do manipulador e às frequências naturais.

Além das sugestões mencionadas, pode-se também enfatizar a possibilidade de se realizar os experimentos em um mecanismo mais simples em termos do número de componentes e juntas, uma vez que o número elevado de juntas gera incertezas dos mais variados tipos e o acúmulo dos erros, dificultando a identificação das fontes dos erros e gerando possíveis distorções nos resultados obtidos.

8. REFERÊNCIAS

ABB ROBOTICS. **IRB 360 FlexPicker ROB0082EN_F**. Disponível em: <<https://new.abb.com/products/robotics/es/robots-industriales/irb-360>>. Acesso em 10 set. 2021.

ABELE, E.; WEIGOLD, M.; ROTHENBÜCHER, S. Modeling and identification of an industrial robot for machining applications. **CIRP annals**, v. 56, n. 1, p. 387–390, 2007.

ALICI, G.; SHIRINZADEH, B. Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 21, n. 4, p. 554–564, 2005.

ALMEIDA, R. Z. H. **Modelagem dinâmica e controle de robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2013.

ANGELES, J.; PARK, F. C. Performance evaluation and design criteria. **Springer handbook of robotics**, p. 229–244, 2008.

ARIAN, A.; ISAKSSON, M.; GOSSELIN, C. Kinematic and dynamic analysis of a novel parallel kinematic Schönflies motion generator. **Mechanism and Machine Theory**, v. 147, 2020.

CHABLAT, D.; WENGER, P. Architecture optimization of a 3-DOF translational parallel mechanism for machining applications, the orthoglide. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 19, n. 3, p. 403–410, 2003.

CHEN, W. Dynamic modeling of multi-link flexible robotic manipulators. **Computers and Structures**, v. 79, n. 2, p. 183–195, 2001.

CIBLAK, N.; LIPKIN, H. Synthesis of Cartesian stiffness for robotic applications. **Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation**, v. 3, n. February 1999, p. 2147–2152, 1999.

CRAIG, J. J. **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**. 2nd. ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.

DADFARNIA, M. et al. An observer-based piezoelectric control of flexible Cartesian robot arms: theory and experiment. **Control Engineering Practice**, v. 12, n. 8, p. 1041–1053, 2004.

DAS, M. T.; DÜLGER, L. C. Mathematical modelling, simulation and

experimental verification of a scara robot. **Simulation Modelling Practice and Theory**, v. 13, n. 3, p. 257–271, 2005.

DUFFY, J. **Statics and kinematics with applications to robotics**. [s.l.] Cambridge University Press, 2007.

ERDMAN, A. G.; SANDOR, G. N. **Mechanism Design (3rd Ed.): Analysis and Synthesis (Vol. 1)**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1997.

GANTMACHER, F. R.; BRENNER, J. L. **Applications of the Theory of Matrices**. [s.l.] Courier Corporation, 2005.

GASPARETTO, A. On the modeling of flexible-link planar mechanisms: experimental validation of an accurate dynamic model. **Journal of dynamic systems, measurement, and control**, v. 126, n. 2, p. 365–375, 2004.

GELDART, M. et al. A direct comparison of the machining performance of a variax 5 axis parallel kinetic machining centre with conventional 3 and 5 axis machine tools. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 43, p. 1107–1116, 2003.

GOSELIN, C. Stiffness Mapping for Parallel Manipulators. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 6, n. 3, p. 377–382, 1990.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2012. v. 11

HASTINGS, G. G.; BOOK, W. J. A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 7, n. 1, p. 61–64, 1987.

HESS-COELHO, T. A.; BRANCHINI, D. M.; MALVEZZI, F. **A New Family of 3-DOF Parallel Robot Manipulators for Pick-and-Place Operations**. In: 18th International Congress of Mechanical Engineering, 2005, Ouro Preto.

HESS-COELHO, T. A.; MALVEZZI, F. **Workspace of 3RSS+CP Parallel Mechanisms**. In: 12th IFToMM World Congress, 2007,, 2007. Workspace of 3RSS+CP Parallel Mechanisms, 2007.

HESS-COELHO, T. A.; MALVEZZI, F. **Kinematic Analysis of 3 RSS+CP Parallel Mechanisms**. Mechanisms and Machine Science. 1ed.: Springer International Publishing, 2015, v. 31, p. 33-40.

HESS-COELHO, T. A. **An alternative procedure for type synthesis of parallel mechanisms**. 12th IFToMM World Congress, Besançon, France, Paper. **Anais...2007**

HJELMSTAD, K. D. **Fundamentals of structural mechanics**. [s.l.]

Springer Science & Business Media, 2007.

KHALIL, W.; GAUTIER, M. **Modeling of mechanical systems with lumped elasticity**. Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065). **Anais...IEEE**, 2000

KLIMCHIK, A. **Enhanced stiffness modeling of serial and parallel manipulators for robotic based processing of high performance materials**. 2011. Tese de doutorado.

KOSEKI, Y. et al. Kinematic analysis of a translational 3-dof micro-parallel mechanism using the matrix method. **Advanced Robotics**, v. 16, n. 3, p. 251–264, 2002.

KUKA. **Industrial robots**. Disponível em: <<http://www.kuka-robotics.com/br/>>. Acesso em 10 set. 2021..

LECOURS, A.; GOSSELIN, C. Determination of the workspace of a 3-p rpr parallel mechanism for human-robot collaboration. **Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering**, v. 33, n. 4, p. 609–618, 2009.

LIANG, D. et al. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and investigation of a redundantly actuated parallel manipulator with multiple actuation modes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 403, p. 129–151, 2017.

MAJOU, F. et al. Parametric stiffness analysis of the Orthoglide. **Mechanism and Machine Theory**, v. 42, n. 3, p. 296–311, 2007.

MATSUOKA, S. et al. High-speed end milling of an articulated robot and its characteristics. **Journal of materials processing technology**, v. 95, n. 1–3, p. 83–89, 1999.

MEGGIOLARO, M. A.; DUBOWSKY, S.; MAVROIDIS, C. Geometric and elastic error calibration of a high accuracy patient positioning system. **Mechanism and Machine Theory**, v. 40, n. 4, p. 415–427, 2005.

MERLET, J. P. **Parallel Robots**. 2nd. ed. [s.l.] Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.

MOHAMED, M. G.; DUFFY, J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators. **Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design**, v. 107, n. 2, p. 226, 2010.

NOF, S. Y. **Handbook of industrial robotics**. [s.l.] John Wiley & Sons, 1999.

NORTON, R. L. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos**. [s.l.] McGraw Hill Brasil, 2010.

OLABI, A. et al. Feedrate planning for machining with industrial six-axis robots. **Control Engineering Practice**, v. 18, n. 5, p. 471–482, 2010.

PASHKEVICH, A.; CHABLAT, D.; WENGER, P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators. **Mechanism and Machine Theory**, v. 44, n. 5, p. 966–982, 2009.

PASHKEVICH, A.; CHABLAT, D.; WENGER, P. Stiffness Analysis Of Multi-Chain Parallel Robotic Systems. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 41, n. 3, p. 127–132, 2010.

PASHKEVICH, A.; KLIMCHIK, A.; CHABLAT, D. Enhanced stiffness modeling of serial manipulators with passive joints. **Advances in Robot Manipulators**, p. 331–359, 2010.

PASHKEVICH, A.; WENGER, P.; CHABLAT, D. Design strategies for the geometric synthesis of Orthoglide-type mechanisms. **Mechanism and Machine Theory**, v. 40, n. 8, p. 907–930, 2005.

PIERROT, F. et al. Optimal design of a 4-DOF parallel manipulator: From academia to industry. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 25, n. 2, p. 213–224, 2009.

PIGOSKI, T.; GRIFFIS, M.; DUFFY, J. Stiffness mappings employing different frames of reference. **Mechanism and Machine Theory**, v. 33, n. 6, p. 825–838, 1998.

QUENNOUELLE, C.; GOSSELIN, C. M. Stiffness matrix of compliant parallel mechanisms. In: **Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design**. [s.l.] Springer, 2008. p. 331–341.

REHSTEINER, F. et al. Putting parallel kinematics machines (PKM) to productive work. **CIRP Annals-Manufacturing Technology**, v. 48, n. 1, p. 345–350, 1999.

REZAEI, A.; AKBARZADEH, A.; AKBARZADEH-T., M. R. An investigation on stiffness of a 3-PSP spatial parallel mechanism with flexible moving platform using invariant form. **Mechanism and Machine Theory**, v. 51, p. 195–216, 2012.

RINALDI, D. DE M. **Caracterização mecânica de um robô manipulador paralelo de 3 graus de liberdade**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2018.

RODRIGUEZ, E. et al. Design and dimensional synthesis of a Linear Delta robot with single legs for additive manufacturing. **Journal of the Brazilian Society of**

Mechanical Sciences and Engineering, v. 41, n. 11, 2019.

SALISBURY, J. K. **Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates**. 1980 19th IEEE conference on decision and control including the symposium on adaptive processes. **Anais...IEEE**, 1980

SHABANA, A. A. Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 2, p. 189–222, 1997.

SHIGANG, Y. Redundant Robot Manipulators With Joint and Link Flexibility-. v. 33, n. 1, p. 103–113, 1998.

SICILIANO, B.; KHATIB, O. **Springer handbook of robotics**. [s.l.] Springer, 2016.

SILVA, R. M. C. A.; HESS-COELHO, T. A. **Analysis of a parallel manipulator for determination of promising kinematic and dynamic parameters**. 18th DINAME. **Anais...Buzios**: 2019

TECHNOLOGY, A. **Adept Quattro s650H 09366-004 Rev. E**. Disponível em: <<http://www.adept.com/products/robots/parallel/quattro-s650h/downloads>>. Acesso em 12 set. 2021.

THEODORE, R. J.; GHOSAL, A. Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multilink Manipulators. **The International Journal of Robotics Research**, v. 14, n. 2, p. 91–111, 1995.

TLUSTY, J.; ZIEGERT, J.; RIDGEWAY, S. Fundamental comparison of the use of serial and parallel kinematics for machines tools. **CIRP Annals-Manufacturing Technology**, v. 48, n. 1, p. 351–356, 1999.

TSAI, L.-W. **Robot Analysis and Design: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators**. 1st. ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

TSAI, L.-W.; JOSHI, S. Kinematics and optimization of a spatial 3-UPU parallel manipulator. **Journal of Mechanical Design**, v. 122, n. 4, p. 439–446, 2000.

WANG, G.; WANG, L. Dynamics investigation of spatial parallel mechanism considering rod flexibility and spherical joint clearance. **Mechanism and Machine Theory**, v. 137, p. 83–107, 2019.

WANG, L.; WANG, D.; WU, J. Dynamic performance analysis of parallel manipulators based on two-inertia-system. **Mechanism and Machine Theory**, v. 137, p. 237–253, 2019.

WANG, X.; MILLS, J. K. FEM dynamic model for active vibration control of

flexible linkages and its application to a planar parallel manipulator. **Applied Acoustics**, v. 66, n. 10, p. 1151–1161, 2005.

WASFY, T. M.; NOOR, A. K. Computational strategies for flexible multibody systems. **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, n. 6, p. 553–613, 2003.

WEI, W.; SIMAAN, N. Design of planar parallel robots with preloaded flexures for guaranteed backlash prevention. **Journal of Mechanisms and Robotics**, v. 2, n. 1, p. 1–10, 2010.

WENGER, P.; GOSSELIN, C.; CHABLAT, D. A Comparative Study of Parallel Kinematic Architectures for Machining Applications. 2007.

YI, B.; FREEMAN, R. A. Geometric analysis of antagonistic stiffness in redundantly actuated parallel mechanisms. **Journal of Robotic systems**, v. 10, n. 5, p. 581–603, 1993.

YOSHIKAWA, T.; OHTA, A.; KANAOKA, K. **State estimation and parameter identification of flexible manipulators based on visual sensor and virtual joint model**. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164). **Anais...IEEE**, 2001

ZHANG, D. et al. Analysis of parallel kinematic machine with kinetostatic modelling method. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 20, n. 2, p. 151–165, 2004.

ZHANG, D. **Parallel Robotic Machine Tools**. [s.l.] Springer Publishing Company, Incorporated, 2014.

ZHANG, D.; GOSSELIN, C. M. Kinetostatic modeling of parallel mechanisms with a passive constraining leg and revolute actuators. **Mechanism and Machine Theory**, v. 37, n. 6, p. 599–617, 2002.

ZHANG, Q.; ZHANG, X. Dynamic analysis of planar 3-RRR flexible parallel robots under uniform temperature change. **JVC/Journal of Vibration and Control**, v. 21, n. 1, p. 81–104, 2015.

ZHAO, Y. Dynamic optimum design of a three translational degrees of freedom parallel robot while considering anisotropic property. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 29, n. 4, p. 100–112, 2013.

APÊNDICE A – Formulação da matriz de rigidez do mecanismo com as juntas virtuais

Devido ao fato de que a matriz jacobiana não será quadrada ao se considerar os atuadores virtuais, será utilizada a propriedade da inversa do produto de matrizes, a fim de que possa ser possível calcular a matriz de rigidez sem a necessidade de se inverter a matriz J_q . Esta propriedade é dada por

$$(UW)^{-1} = W^{-1}U^{-1} \quad (60)$$

Definindo uma matriz jacobiana alternativa da seguinte forma

$$J' = J_x^{-1}J_q \quad (61)$$

Esta nova definição é obtida resolvendo-se a equação para as velocidades do efetuador

$$\dot{x} = J'\dot{q} \quad (62)$$

A matriz de rigidez para mecanismos de cinemática paralela (TSAI, 1999) é dada por

$$K_x = J^T K_q J \quad (63)$$

Embora seja possível calcular J' diretamente considerando a influência dos atuadores virtuais, uma vez que a matriz J_x é quadrada e não singular, ainda não é possível determinar a matriz de rigidez, já que J' não é quadrada e é necessária à sua inversão. Para contornar este problema, será necessário inverter a Equação (63) e aplicar a propriedade da inversa do produto de matrizes, dada pela Equação (60). Assim, tem-se:

$$\mathbf{K}_x = (\mathbf{J}'\mathbf{K}_q^{-1}\mathbf{J}'^T)^{-1} \quad (64)$$

Agora é possível determinar a matriz de rigidez em função desta nova definição da matriz jacobiana.

APÊNDICE B – Formulação da matriz de inércia no espaço do efetuador

A energia cinética do sistema T é obtida pela soma da energia cinética de cada elo que compõe o mecanismo T_i e, para o caso em que os eixos do referencial do elo i forem eixos principais de inércia, é dada por

$$T = \sum_{i=1}^{n_e} T_i = \sum_{i=1}^{n_e} \frac{1}{2} (m_i v_i^2 + I_{xi} \omega_{xi}^2 + I_{yi} \omega_{yi}^2 + I_{zi} \omega_{zi}^2) \quad (65)$$

Sendo n_e o número de elos do mecanismo, m_i é a massa do elo i , $\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}$ são os componentes das velocidades angular, v_i é o módulo da velocidade do centro de massa do elo i , e I_{xi}, I_{yi} e I_{zi} são os momentos de inércia principais do elo i . Expressando as componentes de velocidade do centro de massa $\mathbf{v}_i = (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})^T$ e velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi})^T$ do elo i em termos das velocidades generalizadas do sistema

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \\ \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{qi} \dot{\mathbf{q}} \quad (66)$$

Sendo \mathbf{V}_i um vetor reunindo todas as componentes de velocidade do centro de massa e angulares do elo i e \mathbf{C}_{qi} é definida como a matriz jacobiana do elo i no espaço dos atuadores, ou seja, a matriz que relaciona as velocidades do centro de massa e angular com as velocidades dos atuadores $\dot{\mathbf{q}}$. Uma outra forma de representar a energia cinética de cada elo é dada por (TSAI, 1999).

$$T_i = \frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_{xi} & v_{yi} & v_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_{xi} & \omega_{yi} & \omega_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Reunindo os termos de velocidade linear e rotacional em uma única matriz

$$T_i = \frac{1}{2} \mathbf{V}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{V}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_{xi} & v_{yi} & v_{zi} & \omega_{xi} & \omega_{yi} & \omega_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \\ \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Substituindo a Equação (66) na Equação (68)

$$T_i = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{qi} \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}_i (\mathbf{C}_{qi} \dot{\mathbf{q}}) \quad (69)$$

Com a seguinte propriedade da transposta do produto de matrizes

$$(\mathbf{UW})^T = \mathbf{W}^T \mathbf{U}^T \quad (70)$$

Aplicando esta propriedade na Equação (69) e voltando na energia cinética total do mecanismo, tem-se

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} [\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{C}_{qi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{qi}) \dot{\mathbf{q}}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{qi} \dot{\mathbf{q}} \quad (71)$$

Sendo \mathbf{M}_{qi} definida como a matriz de inércia do elo i no espaço dos atuadores. Assim a matriz de inércia do mecanismo \mathbf{M}_q no espaço dos atuadores vale

$$\mathbf{M}_q = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{M}_{qi} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{C}_{qi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{qi} \quad (72)$$

Aplicando a definição convencional de matriz jacobiana para mecanismos de cinemática paralela.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{x}} \quad (73)$$

Substituindo a Equação (73) na Equação (71) e aplicando novamente a propriedade do produto de matrizes Equação (70)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} [(\mathbf{J}\dot{\mathbf{x}})^T (\mathbf{C}_{qi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{qi}) (\mathbf{J}\dot{\mathbf{x}})] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} [\dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{C}_{qi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{qi} \mathbf{J}) \dot{\mathbf{x}}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{M}_{xi}) \dot{\mathbf{x}} \quad (74)$$

Sendo \mathbf{M}_{xi} definida como a matriz de inércia do elo i no espaço do efetuador. Assim a matriz de inércia do mecanismo no espaço do efetuador \mathbf{M}_x vale

$$\mathbf{M}_x = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{M}_{xi} = \sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{J}^T \mathbf{C}_{qi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{qi} \mathbf{J}) \quad (75)$$

Sendo

$$\mathbf{C}_{xi} = \mathbf{C}_{qi} \mathbf{J} \quad (76)$$

a matriz jacobiana do elo i no espaço do efetuador, ou seja, a matriz que relaciona as velocidades do centro de massa e angular do elo i com as velocidades do efetuador $\dot{\mathbf{x}}$.

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \\ \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{xi} \dot{\mathbf{x}} \quad (77)$$

Assim a matriz de inércia do mecanismo no espaço do efetuador pode alternativamente ser dada por

$$\mathbf{M}_x = \sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{M}_{xi}) = \sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{J}^T \mathbf{C}_{qi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{qi} \mathbf{J}) = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{C}_{xi}^T \mathbf{M}_i \mathbf{C}_{xi} \quad (78)$$

Para o pentágono articulado, as matrizes jacobianas dos elos \mathbf{C}_{xi} estão descritas a seguir

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x1} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -J_{11}r_1 \text{sen}q_1 & -J_{12}r_1 \text{sen}q_1 \\ J_{11}r_1 \text{cos}q_1 & J_{12}r_1 \text{cos}q_1 \\ J_{11} & J_{12} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x2} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{L_2} - \frac{J_{11}L_1(L_2-r_2)\text{sen}q_1}{L_2} & -\frac{J_{12}L_1(L_2-r_2)\text{sen}q_1}{L_2} \\ \frac{J_{11}L_1(L_2-r_2)\text{cos}q_1}{L_2} & \frac{r_2}{L_2} + \frac{J_{12}L_1(L_2-r_2)\text{cos}q_1}{L_2} \\ \frac{J_{11}L_1\text{sen}q_1+1}{L_1\text{sen}q_1-y_B} & \frac{J_{12}L_1\text{sen}q_1}{L_1\text{sen}q_1-y_B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} v_{x3} \\ v_{y3} \\ \omega_{z3} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x3} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} J_{21}r_3 \text{sen}q_2 & J_{22}r_3 \text{sen}q_2 \\ J_{21}r_3 \text{cos}q_2 & J_{22}r_3 \text{cos}q_2 \\ -J_{21} & -J_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} v_{x4} \\ v_{y4} \\ \omega_{z4} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x4} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{r_4}{L_4} + \frac{J_{21}L_3(L_4-r_4)\text{sen}q_2}{L_4} & \frac{J_{22}L_3(L_4-r_4)\text{sen}q_2}{L_4} \\ \frac{J_{21}L_3(L_4-r_4)\text{cos}q_2}{L_4} & \frac{r_4}{L_4} + \frac{J_{22}L_3(L_4-r_4)\text{cos}q_2}{L_4} \\ \frac{1-J_{21}L_3\text{sen}q_2}{L_3\text{sen}q_2-y_B} & -\frac{J_{22}L_3\text{sen}q_2}{L_3\text{sen}q_2-y_B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} \quad (82)$$

Sendo J_{ij} ($i, j = 1, 2$) os elementos da matriz jacobiana convencional, dados por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L_0 - x_B + L_1 \cos q_1}{L_1 [y_B \cos q_1 + (L_0 - x_B) \sin q_1]} & \frac{y_B - L_1 \sin q_1}{L_1 [y_B \cos q_1 + (L_0 - x_B) \sin q_1]} \\ \frac{L_0 + x_B + L_3 \cos q_2}{L_3 [y_B \cos q_2 + (L_0 + x_B) \sin q_2]} & \frac{y_B - L_3 \sin q_2}{L_3 [y_B \cos q_2 + (L_0 + x_B) \sin q_2]} \end{pmatrix} \quad (83)$$

Para a versão plana do mecanismo $2\underline{RSS} + \underline{PPaP}$, as matrizes jacobianas dos elos \mathbf{C}_{xi} estão descritas a seguir

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x1} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -J_{11} r_1 \sin q_1 & -J_{12} r_1 \sin q_1 & -J_{13} r_1 \sin q_1 \\ J_{11} r_1 \cos q_1 & J_{12} r_1 \cos q_1 & J_{13} r_1 \cos q_1 \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x2} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{L_2} - \frac{J_{11} L_1 (L_2 - r_2) \sin q_1}{L_2} & -\frac{J_{12} L_1 (L_2 - r_1) \sin q_1}{L_2} & -\frac{J_{13} L_1 (L_2 - r_2) \sin q_1}{L_2} - \frac{L_5 r_2 \sin \theta_B}{L_2} \\ \frac{J_{11} L_1 (L_2 - r_2) \cos q_1}{L_2} & \frac{r_2}{L_2} + \frac{J_{12} L_1 (L_2 - r_2) \cos q_1}{L_2} & \frac{J_{13} L_1 (L_2 - r_2) \cos q_1}{L_2} + \frac{L_5 r_2 \cos \theta_B}{L_2} \\ \frac{1 + J_{11} L_1 \sin q_1}{-y_B + L_1 \sin q_1 - L_5 \sin \theta_B} & \frac{J_{12} L_1 \sin q_1}{-y_B + L_1 \sin q_1 - L_5 \sin \theta_B} & \frac{J_{13} L_1 \sin q_1 - L_5 \sin \theta_B}{-y_B + L_1 \sin q_1 - L_5 \sin \theta_B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} v_{x3} \\ v_{y3} \\ \omega_{z3} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x3} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} J_{21} r_3 \sin q_2 & J_{22} r_3 \sin q_2 & J_{23} r_3 \sin q_2 \\ J_{21} r_3 \cos q_2 & J_{22} r_3 \cos q_2 & J_{23} r_3 \cos q_2 \\ -J_{21} & -J_{22} & -J_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} v_{x4} \\ v_{y4} \\ \omega_{z4} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x4} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{r_4}{L_4} + \frac{J_{21} L_3 (L_4 - r_4) \sin q_2}{L_4} & \frac{J_{22} L_3 (L_4 - r_4) \sin q_2}{L_4} & \frac{J_{23} L_3 (L_4 - r_4) \sin q_2}{L_2} + \frac{L_5 r_4 \sin \theta_B}{L_4} \\ \frac{J_{21} L_3 (L_4 - r_4) \cos q_2}{L_4} & \frac{r_4}{L_4} + \frac{J_{22} L_3 (L_4 - r_4) \cos q_2}{L_4} & \frac{J_{23} L_3 (L_4 - r_4) \cos q_2}{L_4} - \frac{L_5 r_4 \cos \theta_B}{L_4} \\ \frac{1 - J_{21} L_3 \sin q_2}{-y_B + L_3 \sin q_2 + L_5 \sin \theta_B} & -\frac{J_{22} L_3 \sin q_2}{-y_B + L_3 \sin q_2 + L_5 \sin \theta_B} & \frac{L_5 \sin \theta_B - J_{23} L_3 \sin q_2}{-y_B + L_3 \sin q_2 + L_5 \sin \theta_B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} v_{x5} \\ v_{y5} \\ \omega_{z5} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x5} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} v_{x6} \\ v_{y6} \\ \omega_{z6} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x6} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{tg\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\mathbf{V}_7 = \begin{bmatrix} v_{x7} \\ v_{y7} \\ \omega_{z7} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x7} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{r_7}{L_7} & 0 & 0 \\ -\frac{r_7}{L_7 tg\varphi} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_7 sen\varphi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$\mathbf{V}_8 = \begin{bmatrix} v_{x8} \\ v_{y8} \\ \omega_{z8} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{x8} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{r_7}{L_7} & 0 & 0 \\ -\frac{r_7}{L_7 tg\varphi} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_7 sen\varphi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (91)$$

Sendo J_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) os elementos da matriz jacobiana convencional dados por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (92)$$

Sendo

$$J_{11} = \frac{-L_0 + x_B - L_1 \cos q_1 + L_5 \cos \theta_B}{L_1 (y_B \cos q_1 + (L_0 - x_B) \sin q_1 - L_5 \sin (q_1 - \theta_B))} \quad (93)$$

$$J_{12} = \frac{y_B - L_1 \sin q_1 + L_5 \sin \theta_B}{L_1 (y_B \cos q_1 + (L_0 - x_B) \sin q_1 - L_5 \sin (q_1 - \theta_B))} \quad (94)$$

$$J_{13} = \frac{L_5 (y_B \cos \theta_B - L_1 \sin (q_1 - \theta_B) + (L_0 - x_B) \sin \theta_B)}{L_1 (y_B \cos q_1 + (L_0 - x_B) \sin q_1 - L_5 \sin (q_1 - \theta_B))} \quad (95)$$

$$J_{21} = \frac{L_0 + x_B + L_3 \cos q_2 - L_5 \cos \theta_B}{L_3 (y_B \cos q_2 + (L_0 + x_B) \sin q_2 - L_5 \sin (q_2 + \theta_B))} \quad (96)$$

$$J_{22} = \frac{y_B - L_3 \text{sen} q_2 - L_5 \text{sen} \theta_B}{L_3 (y_B \cos q_2 + (L_0 + x_B) \text{sen} q_2 - L_5 \text{sen}(q_2 + \theta_B))} \quad (97)$$

$$J_{23} = \frac{L_5 (-y_B \cos \theta_B + (L_0 + x_B) \text{sen} \theta_B + L_3 \text{sen}(q_2 + \theta_B))}{L_3 (y_B \cos q_2 + (L_0 + x_B) \text{sen} q_2 - L_5 \text{sen}(q_2 + \theta_B))} \quad (98)$$

APÊNDICE C – Comentários acerca das rotinas para os modelos teóricos

A seguir é apresentado um roteiro geral das rotinas em MatLab® utilizadas para gerar os resultados teóricos. Elas podem ser encontradas em <<https://github.com/rodrigomagalhaes10/mecanismo paralelo>>.

Rotina elementos finitos do pentágono articulado (Figura 12)

1. Dados da geometria dos elos.
2. Definição dos valores do espaço de trabalho e a densidade de pontos.
3. Criação de dois *loops* para cada um dos graus de liberdade a fim de se realizar toda a análise para cada configuração.
4. Cinemática inversa para a obtenção das coordenadas dos atuadores.
5. Coordenadas dos pontos que compõem os elos do mecanismo para uma dada configuração.
6. Divisão dos elos do mecanismo em elementos finitos e obtenção das tabelas de nós e conectividade.
7. Atribuição de propriedades aos elementos (área da seção transversal, módulo de elasticidade, segundo momento de área, densidade e rótulas) e aos nós (restrições e forças).
8. Novo *loop* para a montagem da matriz de rigidez dos elementos e de massa e as respectivas matrizes da estrutura total na dada configuração e fim deste mesmo *loop*.
9. Criando a matriz de rigidez e massa eliminando as linhas e colunas dos graus de liberdade restritos.
10. Obtenção das frequências e modos naturais de vibração e deslocamentos nos nós devido à aplicação de forças no efetuator do mecanismo para uma única configuração e fim dos dois *loops* iniciais dos graus de liberdade.
11. Plotagem dos mapeamentos.

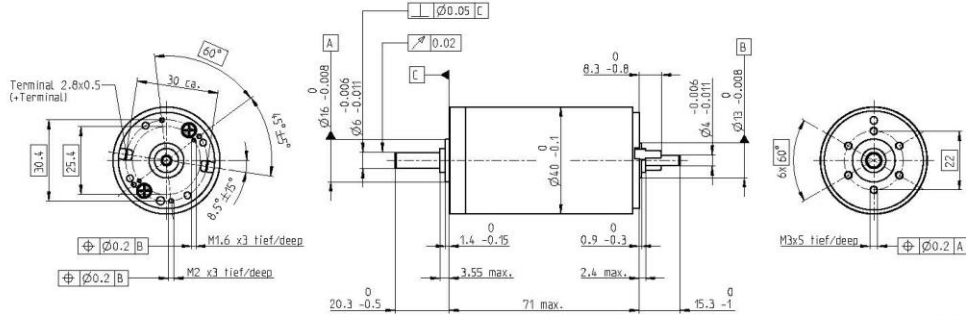
Rotina parâmetros concentrados do pentágono articulado, mecanismo $2R_{SS}+PPaP$ sem a influência da cadeia passiva (2 graus de liberdade, Figura 20) e mecanismo $2R_{SS}+PPaP$ com a influência da cadeia passiva (3 graus de liberdade, Figura 14)

1. Dados da geometria dos elos.
2. Definição dos valores do espaço de trabalho e a densidade de pontos.
3. Criação de dois *loops* para cada um dos graus de liberdade a fim de se realizar toda a análise para cada configuração.
4. Cinemática inversa para a obtenção das coordenadas dos atuadores.
5. Coordenadas dos pontos que compõem os elos do mecanismo para uma dada configuração.
6. Matrizes jacobianas J_x , J_q (podendo J_q ser maior pela inclusão de “atuadores virtuais” escolhidos de forma a modelar o efeito desejado da estrutura) e a matriz de rigidez local dos atuadores (χ).
7. Obtenção da matriz de compliância e de rigidez e os deslocamentos do efetuador para cargas aplicadas no efetuador.
8. Expressar as velocidades cartesianas de cada elo em função das velocidades do efetuador por meio da matriz jacobiana original (determinar as matrizes C_{xi}).
9. Com as matrizes de massa local de cada elo obter a matriz de massa da estrutura expressa em termos da velocidade do efetuador.
10. Com K e M obter as frequências naturais e fim dos dois *loops* iniciais dos graus de liberdade.
11. Plotagem dos mapeamentos.

ANEXO A – Motor Maxon RE 40 (datasheet)

maxon RE motor

RE 40 Ø40 mm, Graphite Brushes, 150 Watt



M 1:2

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Part Numbers

148866 148867 148877 218008 218009 218010 218011 218012 218013 218014

Motor Data	148866	148867	148877	218008	218009	218010	218011	218012	218013	218014
Values at nominal voltage										
1 Nominal voltage	V	12	24	48	48	48	48	48	48	48
2 No load speed	rpm	6920	7580	7590	6420	5560	3330	2690	2130	1720
3 No load current	mA	241	137	68.6	53.7	43.7	21.9	16.6	12.5	9.66
4 Nominal speed	rpm	6380	6940	7000	5810	4930	2710	2060	1510	1080
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	94.9	177	187	186	180	189	190	192	190
6 Nominal current (max. continuous current)	A	6	6	3.17	2.66	2.23	1.4	1.13	0.909	0.73
7 Stall torque	mNm	1720	2420	2560	2040	1620	1020	814	655	523
8 Stall current	A	105	80.2	42.4	28.6	19.7	7.43	4.79	3.06	1.97
9 Max. efficiency	%	88	91	92	91	91	89	89	88	86
Characteristics										
10 Terminal resistance	Ω	0.115	0.299	1.13	1.68	2.44	6.46	10	15.7	24.4
11 Terminal inductance	mH	0.024	0.082	0.33	0.46	0.613	1.7	2.62	4.14	6.41
12 Torque constant	mNm/A	16.4	30.2	60.3	71.3	82.2	137	170	214	266
13 Speed constant	rpm/V	581	317	158	134	116	69.7	56.2	44.7	35.9
14 Speed / torque gradient	rpm/mNm	4.05	3.14	2.97	3.16	3.45	3.29	3.31	3.27	3.29
15 Mechanical time constant	ms	5.89	4.67	4.28	4.2	4.19	4.16	4.15	4.15	4.15
16 Rotor inertia	gcm ²	139	142	137	127	116	121	120	121	120

Specifications

- Thermal data**
- 17 Thermal resistance housing-ambient 4.7 K/W
 - 18 Thermal resistance winding-housing 1.9 K/W
 - 19 Thermal time constant winding 41.5 s
 - 20 Thermal time constant motor 809 s
 - 21 Ambient temperature -30...+100°C
 - 22 Max. winding temperature +155°C

- Mechanical data (ball bearings)**
- 23 Max. speed 12000 rpm
 - 24 Axial play 0.05 - 0.15 mm
 - 25 Radial play 0.025 mm
 - 26 Max. axial load (dynamic) 5.6 N
 - 27 Max. force for press fits (static) (static, shaft supported) 110 N
 - 28 Max. radial load, 5 mm from flange 1200 N

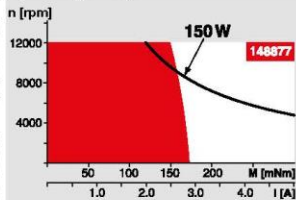
- Other specifications**
- 29 Number of pole pairs 1
 - 30 Number of commutator segments 13
 - 31 Weight of motor 480 g

Values listed in the table are nominal. Explanation of the figures on page 64.

- Option**
- Preloaded ball bearings

* Industrial version with radial shaft seal ring (resulting in increased no load current). IP54 protection only if mounted on brush side, in compliance with maxon modular system.

Operating Range



Comments

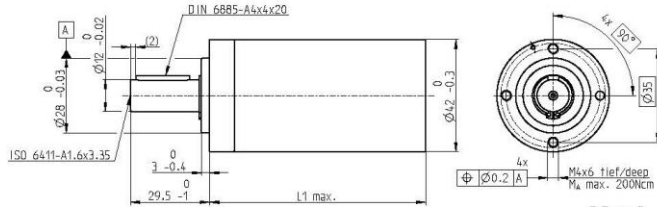
- Continuous operation**
In observation of above listed thermal resistance (lines 17 and 18) the maximum permissible winding temperature will be reached during continuous operation at 25°C ambient.
= Thermal limit.
- Short term operation**
The motor may be briefly overloaded (recurring).
- Assigned power rating**

maxon Modular System

<p>Planetary Gearhead Ø42 mm 3 - 15 Nm Page 345</p> <p>Planetary Gearhead Ø52 mm 4 - 30 Nm Page 350</p>	<p>Recommended Electronics: Notes Page 30</p> <ul style="list-style-type: none"> ESCON Mod. 50/5 427 ESCON 50/5 428 ESCON 70/10 428 EPOS2 24/5 435 EPOS2 50/5 435 EPOS2 70/10 435 EPOS2 P 24/5 438 EPOS4 Module/CB 50/5 442 EPOS4 Module 50/8 443 EPOS4 Comp. 50/8 CAN 443 MAXPOS 50/5 447 	<p>Encoder MR 256 - 1024 CPT, 3 channels Page 405</p> <p>Encoder HED_ 5540 500 CPT, 3 channels Page 413/416</p> <p>Brake AB 28 24 VDC 0.4 Nm Page 458</p> <p>Industrial Version IP54* Encoder HEDL 9140 Page 419</p> <p>Brake AB 28 Page 459</p> <p>End cap Page 463</p>
---	--	---

ANEXO B – Redutor Planetário Maxon GP 42 (datasheet)

Planetary Gearhead GP 42 C Ø42 mm, 3–15 Nm Ceramic Version



Technical Data	
Planetary Gearhead	straight teeth
Output shaft	stainless steel
Bearing at output	preloaded ball bearings
Radial play, 12 mm from flange	max. 0.06 mm
Axial play at axial load	0 mm
	< 5 N
	> 5 N
Max. axial load (dynamic)	max. 0.3 mm
Max. force for press fits	150 N
	300 N
Direction of rotation, drive to output	=
Max. continuous input speed	8000 rpm
Recommended temperature range	-40...+100°C
Number of stages	1 2 3 4
Max. radial load, 12 mm from flange	120 N 240 N 360 N 360 N

maxon gear

Gearhead Data	Part Numbers									
	203113	203115	203119	203120	203124	203129	203128	203133	203137	203141
1 Reduction	3.5:1	12:1	26:1	43:1	81:1	156:1	150:1	285:1	441:1	756:1
2 Absolute reduction	7/2	49/4	26	343/6	2187/27	156	240/16	1539/54	441	756
10 Mass inertia	14	15	9.1	15	9.4	9.1	15	15	14	14
3 Max. motor shaft diameter	10	10	8	10	8	8	10	10	10	10
1 Reduction	4.3:1	15:1	36:1	53:1	91:1	216:1	186:1	319:1	488:1	936:1
2 Absolute reduction	13/3	91/6	36/1	637/12	91	216/1	4429/54	637/2	4398/6	936
10 Mass inertia	9.1	15	5.0	15	15	5.0	15	15	9.4	9.1
3 Max. motor shaft diameter	8	10	4	10	10	4	10	10	8	8
1 Reduction	6:1	19:1	66:1	113:1	230:1	353:1	546:1	1296:1		
2 Absolute reduction	9/1	189/6	1163/18	336/3	6267/26	2853/21	546	1296/1		
10 Mass inertia	4.9	9.4	15	9.4	15	9.4	14	5.0		
3 Max. motor shaft diameter	4	8	10	8	10	8	10	4		
1 Reduction	21:1	74:1	126:1	257:1	394:1	676:1				
2 Absolute reduction	21	147/2	126	1029/4	1163/3	676				
10 Mass inertia	14	15	14	15	15	9.1				
3 Max. motor shaft diameter	10	10	10	10	10	8				
4 Number of stages	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4
5 Max. continuous torque	Nm	3.0	7.5	7.5	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0
6 Max. intermittent torque at gear output	Nm	4.5	11.3	11.3	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5
7 Max. efficiency	%	90	81	81	72	72	72	64	64	64
8 Weight	g	260	360	360	460	460	560	560	560	560
9 Average backlash no load	°	0.6	0.8	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
11 Gearhead length L1**	mm	41.0	55.5	55.5	70.0	70.0	84.5	84.5	84.5	84.5

*No combination with EC 45 (150/250 W) and EC 40-4
**for EC 45 (ref. L1 is -3.6 mm)



maxon Modular System											
+ Motor	Page	+ Sensor	Page	Brake	Page	Overall length [mm] = Motor length + gearhead length + (sensor/brake) + assembly parts					
RE 35, 90 W	130					112.1	126.6	126.6	141.1	141.1	141.1
RE 35, 90 W	130	MR	405			123.5	138.0	138.0	152.5	152.5	152.5
RE 35, 90 W	130	HED_5540	413/415			132.8	147.3	147.3	161.8	161.8	161.8
RE 35, 90 W	130	DCT 22	421			130.2	144.7	144.7	159.2	159.2	159.2
RE 35, 90 W	130			AB 28	458	148.2	162.7	162.7	177.2	177.2	177.2
RE 35, 90 W	130	HED_5540	413/415	AB 28	458	165.4	179.9	179.9	194.4	194.4	194.4
RE 40, 150 W	132					112.1	126.6	126.6	141.1	141.1	141.1
RE 40, 150 W	132	MR	405			123.5	138.0	138.0	152.5	152.5	152.5
RE 40, 150 W	132	HED_5540	413/416			132.8	147.3	147.3	161.8	161.8	161.8
RE 40, 150 W	132	HEDL 9140	419			166.2	180.7	180.7	195.2	195.2	195.2
RE 40, 150 W	132			AB 28	458	148.2	162.7	162.7	177.2	177.2	177.2
RE 40, 150 W	132			AB 28	459	156.2	170.7	170.7	185.2	185.2	185.2
RE 40, 150 W	132	HED_5540	413/416	AB 28	458	165.4	179.9	179.9	194.4	194.4	194.4
RE 40, 150 W	132	HEDL 9140	419	AB 28	459	176.7	191.2	191.2	205.7	205.7	205.7
EC 40, 170 W	219					121.1	135.6	135.6	150.1	150.1	150.1
EC 40, 170 W	219	HED_5540	414/416			144.5	159.0	159.0	173.5	173.5	173.5
EC 40, 170 W	219	Res 26	422			148.3	162.8	162.8	177.3	177.3	177.3
EC 40, 170 W	219			AB 32	460	163.8	178.3	178.3	192.8	192.8	192.8
EC 40, 170 W	219	HED_5540	414/416	AB 32	460	182.2	196.7	196.7	211.2	211.2	211.2
EC 45, 150 W	220					152.3	166.8	166.8	181.3	181.3	181.3
EC 45, 150 W	220	HEDL 9140	419			167.9	182.4	182.4	196.9	196.9	196.9
EC 45, 150 W	220	Res 26	422			152.3	166.8	166.8	181.3	181.3	181.3
EC 45, 150 W	220			AB 28	459	159.7	174.2	174.2	188.7	188.7	188.7
EC 45, 150 W	220	HEDL 9140	419	AB 28	459	176.7	191.2	191.2	205.7	205.7	205.7
EC 45, 250 W	221					185.1	199.6	199.6	214.1	214.1	214.1
EC 45, 250 W	221	HEDL 9140	419			200.7	215.2	215.2	229.7	229.7	229.7
EC 45, 250 W	221	Res 26	422			185.1	199.6	199.6	214.1	214.1	214.1
EC 45, 250 W	221			AB 28	459	192.5	207.0	207.0	221.5	221.5	221.5
EC 45, 250 W	221	HEDL 9140	419	AB 28	459	209.5	224.0	224.0	238.5	238.5	238.5

ANEXO C – Descrição dos dados experimentais

A seguir é apresentado uma descrição geral da obtenção dos dados experimentais utilizados neste trabalho. Maiores detalhes podem ser obtidos em Rinaldi (2018).

DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS

O trabalho foi desenvolvido em três etapas, de modo a avaliar cada uma das propriedades para a caracterização mecânica do robô. Na primeira etapa, levantou-se a distribuição do erro de posicionamento do efetuador, tanto no que diz respeito à exatidão quanto à precisão. Na segunda, determinou-se a rigidez do mecanismo mediante à aplicação de uma carga externa em direções definidas. Por fim, para a determinação da frequência natural amortecida, submete-se a estrutura a uma carga que se aproxima de uma excitação impulsiva. Nas seções seguintes, a preparação da máquina e os passos seguidos serão descritos detalhadamente.

LEVANTAMENTO DOS DADOS EXPERIMENTAIS

Erros de exatidão e precisão: para a determinação do erro de posicionamento, adota-se a seguinte estratégia:

a) Geram-se pontos a serem atingidos pelo efetuador, via sistema de controle, que correspondem a posição prescrita a ser atingida sobre trajetórias retilíneas, simétricas em relação ao plano $X=0$, em diferentes alturas.

b) Registra-se a posição efetivamente atingida em X e em Y com o sistema de medição proposto.

c) Comparam-se os resultados.

Rigidez nos eixos X e Y: para a medição dos erros de posicionamento oriundos de forças externas, uma carga adicional é aplicada ao efetuador através de uma massa ligada em sua extremidade. O valor dessa massa, incluindo seus suportes, é de 322,3g. No caso da medição com carga vertical, essa massa é pendurada diretamente sob o efetuador.

Frequência Natural: neste ensaio a preparação da máquina e sua movimentação são feitas da mesma forma como descrito no levantamento da rigidez. A diferença dá-se na maneira como os dados são adquiridos pelo sistema de medição. Utiliza-se a medição por deslocamento, com escala de $40\mu\text{m/V}$ e frequência de aquisição de 20kHz. O efetuator é submetido a um golpe percussivo unitário na direção de interesse. A vibração resultante é medida pelo laser e os resultados expostos na forma da frequência natural amortecida do sistema. Não são realizadas medições com cargas externas para este ensaio. Duas direções são analisadas: a horizontal e a vertical. Na primeira, o dispositivo excita a estrutura na região do efetuator, no eixo horizontal. A medição é feita diretamente, com o laser. Analogamente, para o segundo caso, o efetuator é excitado na direção vertical. A diferença é que a medição é realizada com o auxílio de um espelho a 45° , para que o feixe de laser atinja o refletor posicionado sob o efetuator.