

MATEUS HENRIQUE FERREIRA DE ARAUJO

**Análise Cineto-Estática de Mecanismos do Tipo PRRRP
Utilizados como Máquinas-ferramenta de Arquitetura
Paralela**

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
para a Obtenção de Título
no Programa de Mestrado
Acadêmico em Engenharia.

São Paulo
2007



MATEUS HENRIQUE FERREIRA DE ARAUJO

**Análise Cineto-Estática de Mecanismos do Tipo PRRRP
Utilizados como Máquinas-ferramenta de Arquitetura
Paralela**

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
para a Obtenção de Título
no Programa de Mestrado
Acadêmico em Engenharia.

Engenharia Mecânica de
Projeto e Fabricação.

Orientador: Prof. Dr.
Tarcísio A. Hess Coelho.

São Paulo
2007

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho pela excelente orientação na condução deste trabalho.

A minha esposa Bárbara pelo apoio e paciência.

Aos meus pais pelas oportunidades oferecidas para a minha educação.

Resumo

Este trabalho apresenta análises de cinemática e estática de mecanismos do tipo PRRRP para no futuro serem utilizados no projeto de uma máquina-ferramenta de arquitetura paralela para operações de usinagem. Dentro da família de mecanismos estudados encontra-se a máquina-ferramenta Genius 500 da Cross Hüller.

Abstract

This dissertation shows kineto-static analysis on PRRP mechanism for the design of a parallel kinematics mechanism oriented to machine-tool. Inside this family of mechanism is the Genius 500 machine-tool from Cross Hüller.

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 Máquina Variax | 18 |
| Figura 1.2 Máquina Hexapod | 19 |
| Figura 1.3 V100 de fabricação da Index..... | 20 |
| Figura 1.4Máquina Pegasus da Reichenbauer..... | 20 |
| Figura 1.5 Quickstep da Krause e Mauser..... | 21 |
| Figura 1.6 SKM 400 da Heckert..... | 21 |
| Figura 1.7 Ecospeed da DS Technologies..... | 22 |
| Figura 1.8 Tricept da Neos Robotics..... | 22 |
| Figura 1.9 Tricenter DMT 100 da Deckel Maho. | 22 |
| Figura 1.10 Genius 500 da Cross Hüller. | 23 |
| Figura 1.11 Bobcat da Lamb Technicon..... | 23 |
| Figura 1.12 Eclipse da SENA Technologies..... | 24 |
| Figura 1.13 Mecanismo eclipse..... | 24 |
| Figura 1.14 Fonte (KIM et al., 2001). | 24 |
| Figura 1.15 Máquina cartesiana paralela. | 25 |
| Figura 2.1 Níveis de estudo dos PKM (MERLET, 2000) | 26 |
| Figura 2.2 Máquina-ferramenta paralela atuada por cabos. | 27 |
| Figura 2.3 Genius 500 em diferentes posições do mecanismo paralelo | 31 |
| Figura 3.1 Ilustração esquemática da arquitetura do mecanismo. | 32 |
| Figura 3.2 Ilustração representativa do espaço de trabalho..... | 38 |
| Figura 4.1 Ilustração exemplificando o cálculo da área do espaço de trabalho..... | 41 |
| Figura 4.2 Espaço de trabalho discretizado a cada passo dos atuadores. | 44 |
| Figura 4.3 Espaço de trabalho mostrando as regiões favoráveis em verde. | 45 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.4 Velocidade do atuador 1 - h_1 | 45 |
| Figura 4.5 Velocidade no atuador 2 – h_2 | 46 |
| Figura 4.6 Direções que serão utilizadas nos testes. | 46 |
| Figura 5.1 Ilustração do mecanismo e seu respectivo espaço de trabalho. | 53 |
| Figura 5.2 Ilustração mostrando a precisão do espaço de trabalho. | 53 |
| Figura 5.3 Quanto mais próximo da singularidade maior a distorção..... | 54 |
| Figura 5.4 Velocidade no atuador 1 – direção Y. | 55 |
| Figura 5.5 Velocidade no atuador 2 – direção Y. | 55 |
| Figura 5.6 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente. | 55 |
| Figura 5.7 Velocidades no atuador 1 - direção X..... | 56 |
| Figura 5.8 Velocidades no atuador 2 - direção X..... | 56 |
| Figura 5.9 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente. | 56 |
| Figura 5.10 Velocidade no atuador 1 – direção 45° | 57 |
| Figura 5.11 Velocidade do atuador 2 – direção 45° | 57 |
| Figura 5.12 Projeção das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente. | 58 |
| Figura 5.13 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores. | 58 |
| Figura 5.14 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores. | 59 |
| Figura 5.15 Número de condição do mecanismo, coordenadas dos atuadores e coordenadas cartesianas respectivamente. | 59 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.16 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 60 |
| Figura 5.17 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 60 |
| Figura 5.18 Mecanismo com o espaço de trabalho..... | 61 |
| Figura 5.19 Ilustração mostrando as regiões de maior precisão do espaço de trabalho em verde..... | 62 |
| Figura 5.20 Distribuição do deslocamento no espaço de trabalho..... | 62 |
| Figura 5.21 Velocidade no atuador 1 – direção 45°..... | 63 |
| Figura 5.22 Velocidades do atuador 2 – direção 45°..... | 64 |
| Figura 5.23 Projeção das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente..... | 64 |
| Figura 5.24 Velocidades do atuador 1 – direção X..... | 65 |
| Figura 5.25 Velocidades do atuador 2 – direção X..... | 65 |
| Figura 5.26 Projeção das velocidades dos atuadores 1 e 2..... | 65 |
| Figura 5.27 Velocidades no atuador 1 – direção Y..... | 66 |
| Figura 5.28 Velocidades no atuador 2 – direção Y..... | 66 |
| Figura 5.29 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2..... | 67 |
| Figura 5.30 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 67 |
| Figura 5.31 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 2 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 68 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.32 Número de condição do mecanismo, coordenadas dos atuadores e coordenadas cartesianas respectivamente..... | 68 |
| Figura 5.33 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 69 |
| Figura 5.34 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 69 |
| Figura 5.35 Ilustração do mecanismo e seu espaço de trabalho..... | 70 |
| Figura 5.36 Regiões de diferentes precisões no espaço de trabalho..... | 71 |
| Figura 5.37 Distribuição do deslocamento no espaço de trabalho..... | 71 |
| Figura 5.38 Velocidades no atuador 1 – direção Y..... | 72 |
| Figura 5.39 Velocidades no atuador 2 – direção Y..... | 72 |
| Figura 5.40 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente..... | 73 |
| Figura 5.41 Velocidades no atuador 1 – direção X..... | 73 |
| Figura 5.42 Velocidades no atuador 2 – direção X..... | 74 |
| Figura 5.43 Projeções das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente..... | 74 |
| Figura 5.44 Velocidades do atuador 1 – direção 45°..... | 75 |
| Figura 5.45 Velocidades do atuador 2 – direção 45°..... | 75 |
| Figura 5.46 Projeções das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente..... | 75 |
| Figura 5.47 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 76 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.48 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 2 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 77 |
| Figura 5.49 Número de condição do mecanismo, coordenadas dos atuadores e coordenadas cartesianas respectivamente..... | 77 |
| Figura 5.50 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 78 |
| Figura 5.51 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 78 |
| Figura 5.52 – Modelo do mecanismo da máquina Genius 500..... | 79 |
| Figura 5.53 Resolução do mecanismo no espaço de trabalho..... | 81 |
| Figura 5.54 – Resolução no espaço de trabalho, coordenadas dos atuadores..... | 81 |
| Figura 5.55 Velocidade no atuador 1 para a direção 45°..... | 82 |
| Figura 5.56 Velocidade no atuador 2 para a direção 45°..... | 82 |
| Figura 5.57 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente para a direção 45°..... | 83 |
| Figura 5.58 Velocidade no atuador 1 para a direção X..... | 83 |
| Figura 5.59 Velocidade no atuador 2 para a direção X..... | 83 |
| Figura 5.60 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente para a direção X..... | 84 |
| Figura 5.61 Velocidade no atuador 1 para direção Y..... | 84 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.62 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 85 |
| Figura 5.63 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 2 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 85 |
| Figura 5.64 Número de condição do mecanismo no espaço de trabalho em coordenadas cartesianas | 86 |
| Figura 5.65 Número de condição do mecanismo no espaço de trabalho em coordenadas dos atuadores | 87 |
| Figura 5.66 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 87 |
| Figura 5.67 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores..... | 88 |
| Tabela 5.1 Tabela de Decisão..... | 88 |
| Figura 6.1 Elemento de treliça 2D utilizado na modelagem. Fonte (FELIPPA) | 90 |
| Figura 6.2 Deslocamento em X no efetuador | 94 |
| Figura 6.3 Deslocamento em Y no efetuador | 95 |
| Figura 6.4 Soma do deslocamento no efetuador | 95 |
| Figura 6.5 Gráfico da primeira freqüência natural do mecanismo no seu espaço de trabalho..... | 97 |

Lista de Símbolos

- α Ângulo construtivo do mecanismo
- h_1 Valor do deslocamento no atuador 1
- h_2 Valor do deslocamento no atuador 2
- A Área
- L Comprimento das barras
- E_m Módulo de Elasticidade do material
- G_m Módulo de Cisalhamento do material
- I_{yy} Momento principal de inércia referente ao eixo Y
- I_{zz} Momento principal de inércia referente ao eixo Z
- J_{xx} Momento polar inércia
- τ Vetor de forças generalizadas no efetuador
- J Jacobiano
- K Matriz de Rígidez
- u Vetor deslocamento
- f Vetor forças generalizadas nos atuadores

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 15 |
| 1.1 | Objetivo..... | 16 |
| 1.2 | Divisão do Trabalho..... | 17 |
| 1.3 | Exemplos de Máquinas de Usinagem com Arquitetura Paralela | 17 |
| 2 | Revisão Bibliográfica | 26 |
| 3 | Cinemática do Mecanismo Paralelo Tipo PRRRP | 32 |
| 3.1 | Graus de Mobilidade..... | 33 |
| 3.2 | Análise Cinemática de Posição..... | 33 |
| 3.2.1 | Cinemática Inversa | 34 |
| 3.2.2 | Cinemática Direta..... | 35 |
| 3.3 | Jacobianos | 36 |
| 3.4 | Espaço de Trabalho..... | 36 |
| 4 | Critérios de Desempenho..... | 38 |
| 4.1 | Cálculo da Área do Espaço de Trabalho | 40 |
| 4.1.1 | Cálculo da Área do Quadrilátero | 42 |
| 4.1.2 | Cálculo da Área da Região Superior | 42 |
| 4.1.3 | Calculo da Área da Região Inferior..... | 42 |
| 4.2 | Resolução no Espaço de Trabalho (Princípio da Alavanca) | 43 |
| 4.3 | Velocidade dos Atuadores dada a Trajetória da Ferramenta (VAT) | 45 |
| 4.4 | Elipse de Manipulação | 46 |
| 4.5 | Máxima Velocidade ao Atuador e Trajetória do Efetuador (MVA) | 48 |
| 4.6 | Máxima Força Transmitida ao Atuador e Trajetória do Efetuador (MFTA) ... | 50 |
| 5 | Comparação dos Mecanismos PRRRP Sugeridos | 51 |
| 5.1 | Mecanismos..... | 52 |

| | |
|---|----|
| 5.1.1 $\alpha = 30^\circ$, L = 250 mm, Fuso mínimo = 155, Fuso máximo = 280..... | 53 |
| 5.1.1.1 Área do Espaço de Trabalho | 53 |
| 5.1.1.2 Resolução no Espaço de Trabalho..... | 53 |
| 5.1.1.3 VAT..... | 54 |
| 5.1.1.4 MVA..... | 58 |
| 5.1.1.5 Número de Condição do Jacobiano..... | 59 |
| 5.1.1.6 MFTA..... | 60 |
| 5.1.2 $\alpha = 45^\circ$, L = 250 mm, Fuso mínimo = 155, Fuso máximo = 310..... | 61 |
| 5.1.2.1 Área do Espaço de Trabalho | 61 |
| 5.1.2.2 Resolução do Espaço de Trabalho..... | 62 |
| 5.1.2.3 VAT..... | 63 |
| 5.1.2.4 MVA..... | 67 |
| 5.1.2.5 Número de Condição do Jacobiano | 68 |
| 5.1.2.6 MFTA..... | 69 |
| 5.1.3 $\alpha = 60^\circ$, L = 250 mm, Fuso mínimo = 155, Fuso máximo = 480..... | 70 |
| 5.1.3.1 Área do Espaço de Trabalho | 70 |
| 5.1.3.2 Resolução no Espaço de Trabalho..... | 71 |
| 5.1.3.3 VAT..... | 72 |
| 5.1.3.4 MVA..... | 76 |
| 5.1.3.5 Número de Condição do Jacobiano | 77 |
| 5.1.3.6 MFTA..... | 78 |
| 5.1.4 Mecanismo da Genius 500..... | 79 |
| 5.1.4.1 Área do Espaço de Trabalho | 80 |
| 5.1.4.2 Resolução no Espaço de Trabalho..... | 81 |
| 5.1.4.3 VAT..... | 82 |
| 5.1.4.4 MVA..... | 85 |
| 5.1.4.5 Número de Condição do Jacobiano | 86 |
| 5.1.4.6 MFTA..... | 87 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.1.5 | Matriz de Comparação..... | 88 |
| 6 | Análise Utilizando MEF do Mecanismo Paralelo | 90 |
| 6.1 | Análise Estática do Mecanismo..... | 90 |
| 6.1.1 | Definição do Elemento | 90 |
| 6.1.2 | Matriz de Rígidez | 91 |
| 6.1.3 | Implementação do Modelo | 91 |
| 6.1.4 | Condições de Contorno..... | 93 |
| 6.1.5 | Deslocamento do Efetuador | 93 |
| 6.2 | Análise Modal Simplificada do Mecanismo | 96 |
| 7 | Conclusão | 98 |
| 8 | Referências | 99 |
| 9 | Anexos – Rotinas no <i>Mathematica v5.0</i> | 103 |

1 Introdução

A maioria das máquinas-ferramenta para operações de usinagem possui arquitetura formada por estruturas cinemáticas seriais, ou seja, o mecanismo é construído em série, com atuadores uns sobre os outros.

Recentemente, a indústria e a comunidade científica têm desenvolvido máquinas-ferramenta com arquitetura formada por estrutura cinemática paralela, ou mista entre serial e paralela, combinando as duas.

A primeira máquina cinemática paralela (PKM) comercial foi a Variax (Khol, 1994), ver figura 1.1, seguida da Hexapod e outras como mostra o subcapítulo 1.3 deste trabalho.

Estas máquinas atingiram variados níveis de sucesso e suas aplicações foram limitadas por fatores como espaço de trabalho reduzido, precisão posicional e calibração.

Um *mecanismo paralelo* pode ser definido como um mecanismo de cadeia fechada em que o órgão terminal (plataforma móvel) esteja conectado a uma base fixa por meio de pelo menos duas cadeias cinemáticas independentes (COELHO, 2005 apud MERLET, 2000).

A arquitetura paralela permite reduzir a massa em movimento, pois há liberdade na escolha da junta da cadeia fechada que será atuada, devido à dependência entre elas, possibilitando aos atuadores ficarem na base.

Colocando várias cadeias cinemáticas em paralelo, cada uma com seu próprio atuador, geralmente levam às seguintes potenciais vantagens:

- Maior capacidade de carga;
- Maiores acelerações;
- Maior rigidez mecânica;
- Menor massa em movimento;
- Maior freqüência natural;
- Construção modular, já que vários componentes podem ser idênticos;

- Possibilidade de colocar os atuadores na base, o que leva:
 - Seleção de motores com maior capacidade, já que apresentam pouca influência na inércia do manipulador;
 - Facilidade de refrigeração dos atuadores;
 - Facilidade de isolamento dos motores, por exemplo, em atmosferas explosivas;

Ainda como vantagem das PKM pode-se citar que no mecanismo paralelo, devido à sua topologia típica, minimiza-se o acúmulo de erros dos atuadores, fator que contribui para sua alta precisão de posicionamento/orientação (COELHO, 2005 apud SOUZA, 1997).

Em contrapartida, comparando com mecanismos seriais, apresentam as seguintes desvantagens:

- Espaço de trabalho limitado;
- O modelo cinemático é difícil de determinar;
- Presença de singularidades no espaço de trabalho, o que leva à incontrolabilidade e deterioração do mecanismo;

Desde o lançamento comercial da Variax em 1994 muitos se interessaram com suas potenciais vantagens e iniciaram a construção e estudos de protótipos com vários graus de liberdade e diferentes estruturas. Estes estudos, no entanto, começaram a ser voltados para máquinas com menor complexidade e menor número de graus de liberdade. As topologias de arquiteturas serial e paralela foram unidas, de forma a somar suas vantagens, constituindo uma arquitetura chamada máquina de arquitetura mista, unindo os principais benefícios das duas arquiteturas.

1.1 Objetivo

O presente trabalho tem como principal objetivo a análise estática e cinemática de mecanismos paralelos plano do tipo PRRRP, para serem utilizados no projeto de uma máquina-ferramenta com arquitetura mista. O mecanismo paralelo possuindo duas cadeias fechadas movimentará a ferramenta, e uma cadeia aberta movimentará a mesa de fixação da peça, constituindo a máquina-ferramenta com arquitetura mista, conforme definição.

O ambiente de análise aqui presente pode ser usado para a análise de outras variedades de mecanismos e os anexos mostram as rotinas desenvolvidas no software *Mathematica 5.0*.

1.2 Divisão do Trabalho

O trabalho é dividido em nove capítulos. Inicia-se pela apresentação de algumas das máquinas-ferramentas que estão comercialmente disponíveis, segue com a apresentação dos modelos de mecanismo paralelo propostos e sua análise cinemática e estática.

A análise cineto-estática das configurações propostas de mecanismos paralelos é comparada utilizando o mapeamento de índices de desempenho no espaço de trabalho, como o número de condição do Jacobiano, sobrevelocidade nos atuadores, transmissão das forças de usinagem aos atuadores e resolução relativa à máquina cartesiana.

A seguir é feito o cálculo do deslocamento no efetuador, devido às forças de usinagem externas, em todo o espaço de trabalho. O deslocamento foi resolvido por modelo em elementos finitos de uma das arquitetura construtivas sugeridas.

Seguido da conclusão, das referências bibliográficas e dos anexos pertinentes.

1.3 Exemplos de Máquinas de Usinagem com Arquitetura Paralela

A máquina Variax (Khol, 1994), fabricada pela Giddings&Lewis, consiste de uma plataforma sustentada por 6 membros de comprimento variável que, por sua vez estão

conectados a uma base fixa. A plataforma contém a ferramenta de corte acoplada ao seu próprio conjunto moto-redutor. Construtivamente, os 6 membros são fusos de esferas recirculantes que se movimentam pela ação de 6 atuadores independentes. A peça a ser usinada encontra-se fixa à base. A sua configuração geométrica não necessita de uma estrutura adicional que sustente e guie suas partes móveis como ocorre em máquinas convencionais (COELHO, 2005).



Giddings & Lewis: Variax

Manufacturer: Giddings & Lewis

Application: 5-axis machining

Architecture: a standard Gough-Stewart platform

Workspace: 630×630×630 mm
±25° about A/B-axis

Accuracy: 11 µm (volumetric)

Max. Traverse Rate: 66 m/min

Max. Acceleration: 1 g

Spindle: 40 kW, up to 24,000 rpm

Max. Thrust: 31 kN

Footprint: 8.2×7.6 m

Height: 4.6 m

Figura 1.1 Máquina Variax.



Ingersoll: Octahedral Hexapod VOH-1000

Manufacturer: Ingersoll

Application: 4-sided, 5-axis contour machining

Architecture: a standard Gough-Stewart platform

Workspace: 1000×1000×1200 mm
±15° about A/B-axis

Accuracy: 20 µm (volumetric performance)

Max. Feed Rate: 30 m/min

Max. Traverse Rate: 30 m/min

Max. Acceleration: 4.8 m/s²

Spindle: 37.5 kW, up to 20,000 rpm

Max. Tool Weight: 12 kg

Figura 1.2 Máquina Hexapod

Diferentemente da Variax, a Hexapod da Ingersoll (Weck, Schumacher, 1998) apresenta uma estrutura invertida se comparada à sua antecessora. De fato, as extremidades inferiores de seus membros são conectadas à sua plataforma, enquanto as extremidades superiores vinculam-se à sua base. Devido a esta característica, a base necessita ser sustentada por uma estrutura adicional. Em ambas as arquiteturas, disponibilizam-se seis graus de liberdade para o órgão terminal - três translações e três rotações – onde se pode observar também a complexidade desta solução, caracterizada pelo alto acoplamento existente entre as coordenadas de posição e orientação do órgão terminal (COELHO, 2005).



INDEX-Werke: VerticalLine V100
(a.k.a. 41 HP Vertical Chucker with Double Kinematic-Rod Linked Spindle)

Manufacturer: INDEX-Werke

Application: 3-axis machining (turning, milling, laser hardening, laser welding, grinding, assembling)

Architecture: a Delta-robot type 3-DOF parallel mechanism

Workspace: 250×250×150 mm

Max. Traverse Rate: 60 m/min

Max. Acceleration: 1 g

Spindle: 10.5 kW, up to 10,000 rpm
50 Nm max. torque
130 mm max. chuck size

Tooling System: ø25 mm cylindrical shank DIN 69880
8~12 tool stations

Footprint: 2.1×2.1 m

Height: 2.3 m

Figura 1.3 V100 de fabricação da Index.

A V100 tem a arquitetura de um robô Delta.



Figura 1.4 Máquina Pegasus da Reichenbacher.



Krause & Mauser: Quickstep

Manufacturer: Krause & Mauser

Application: High Speed Cutting

Architecture: a 3-DOF translational PKM

Workspace: 630×630×500 mm

Max. Traverse Rate: 100 m/min

Max. Acceleration: 2 g

Spindle: 45 kW, up to 15,000 rpm

Max. Feed Force: 11,450 N

Figura 1.5 Quickstep da Krause e Mauser.



Kinematic:

X, Y, Z, B

Ability of 3-Axes Machining

Max. Velocity:

100 m/min (3,937 in/min)

Max. Acceleration: 1 g

Spindle Power: 31 kW

Spindle Speed: 15,000 r.p.m.

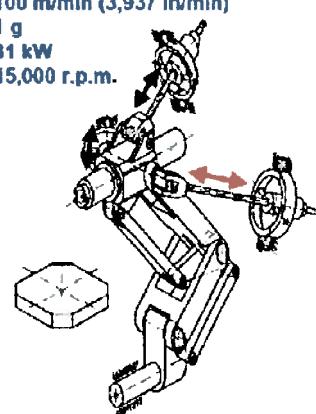


Figura 1.6 SKM 400 da Heckert.

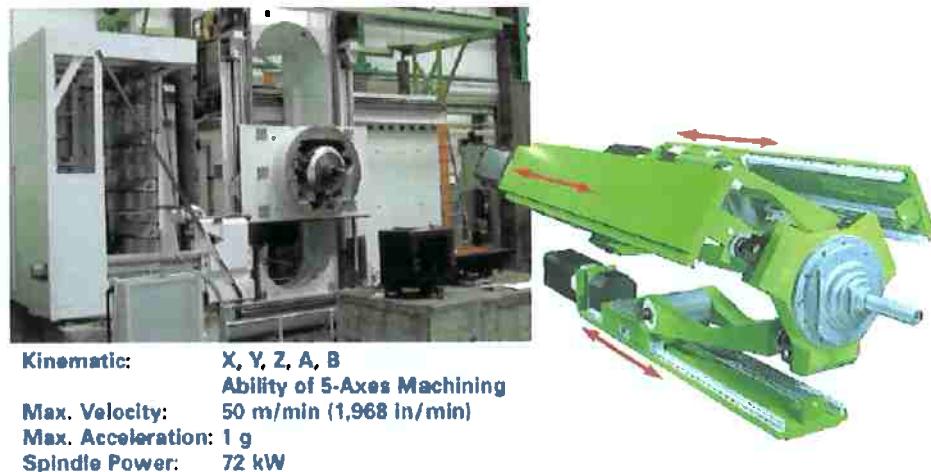


Figura 1.7 Ecospeed da DS Technologies.

Há também máquinas de arquitetura mista, onde são aliados os benefícios tanto das cadeias fechadas e paralelas quanto das cadeias abertas para movimentação da mesa fixadora e orientação da ferramenta.

Alguns exemplos são apresentados abaixo:

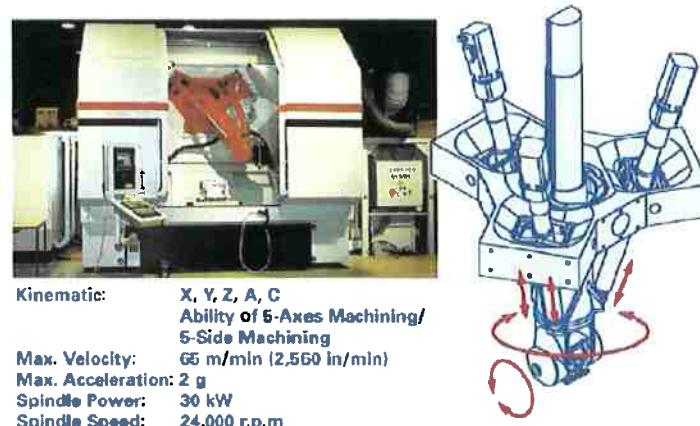


Figura 1.8 Tricept da Neos Robotics.



Figura 1.9 Tricenter DMT 100 da Deckel Maho.

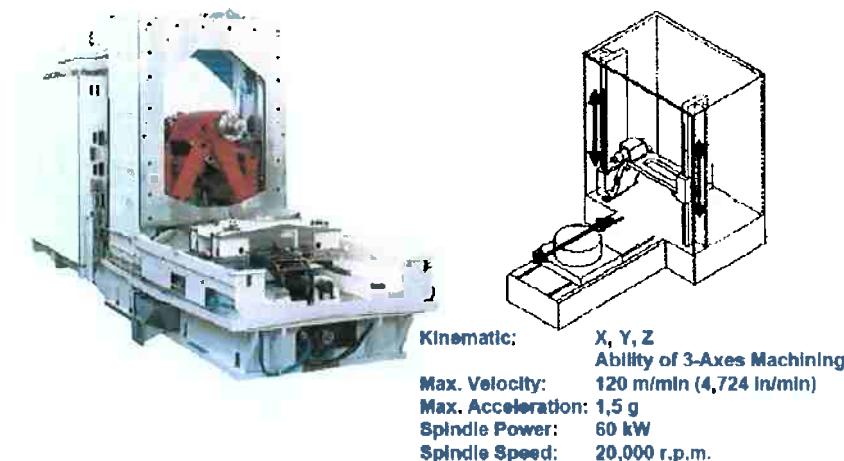


Figura 1.10 Genius 500 da Cross Hüller.

O mecanismo da máquina Genius 500 é estudado neste trabalho.

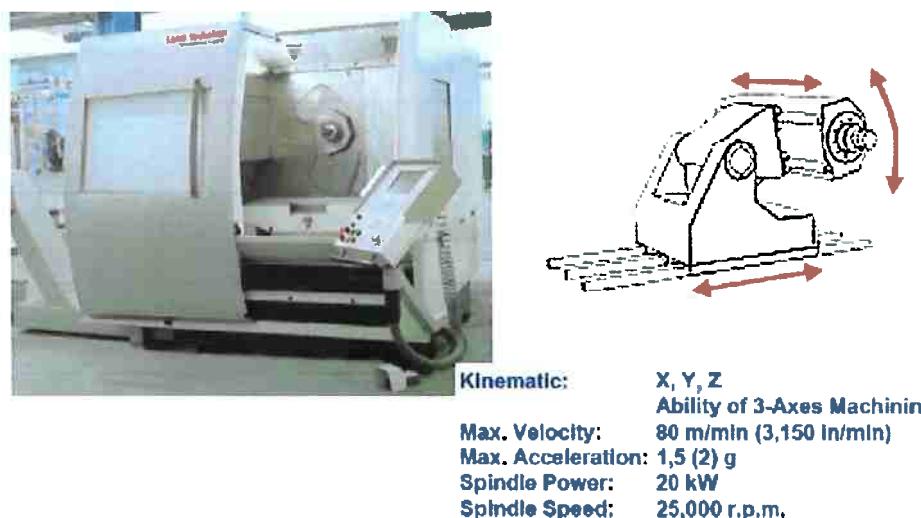


Figura 1.11 Bobcat da Lamb Technicon.

A criatividade no projeto de máquinas com arquitetura paralela gerou projetos inovadores, tais como a máquina Eclipse proposta por (KIM;RYU;PARK,1998), esta máquina torna possível a usinagem em cinco faces com a mesma fixação.



Figura 1.12 Eclipse da SENA Technologies.

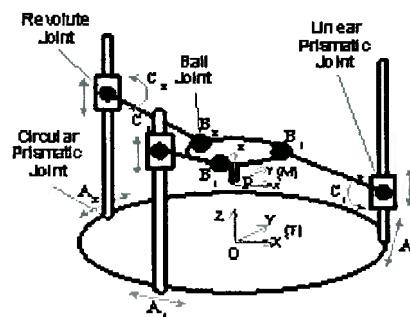


Figura 1.13 Mecanismo eclipse.

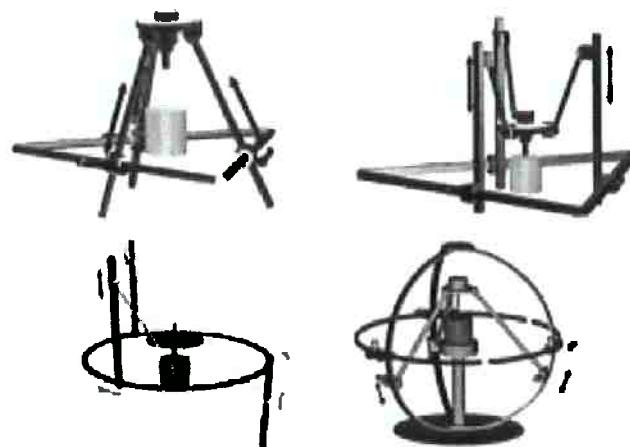


Fig. 2. Conceptual design evolution of the Eclipse.

Figura 1.14 Fonte (KIM et al., 2001).

E a máquina cartesiana de arquitetura paralela, de (TSAL;KIM, 2003)

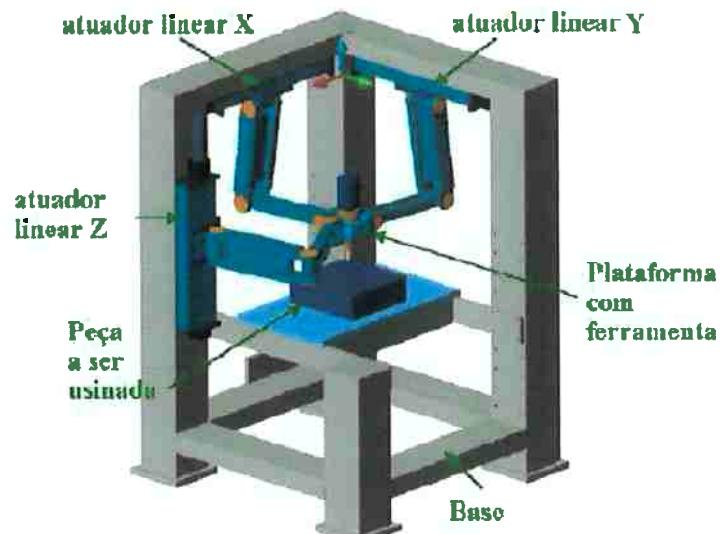


Figura 1.15 Máquina cartesiana paralela.

2 Revisão Bibliográfica

O estudo de mecanismos paralelos que serão utilizados como máquinas-ferramenta possue uma ampla gama de possibilidades. Assim como seus similares seriais, estes mecanismos podem ser estudados em diversos níveis.

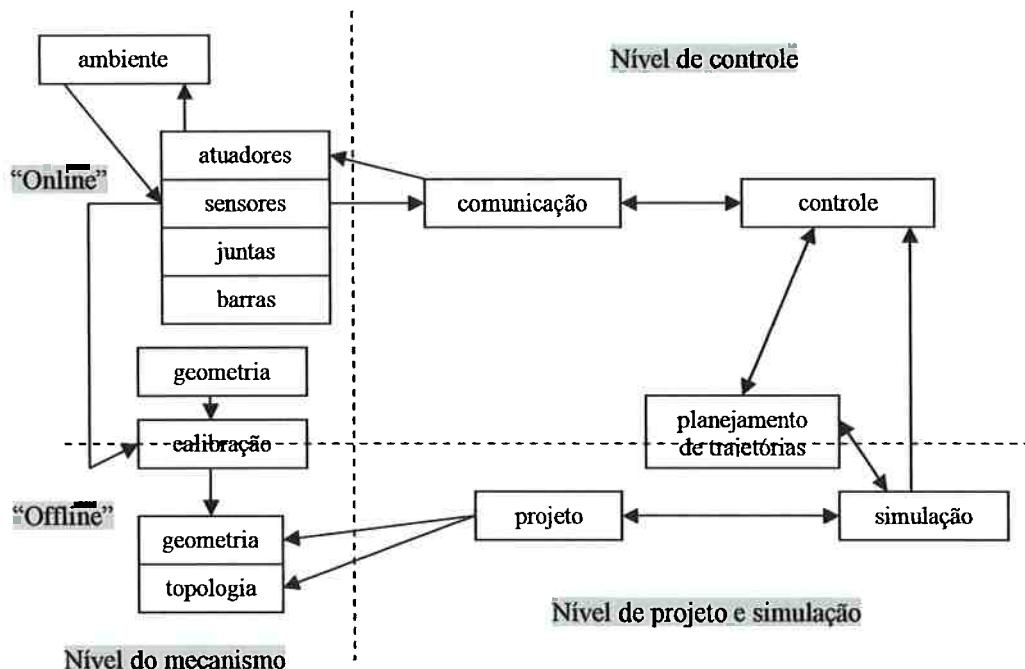


Figura 2.1 Níveis de estudo dos PKM (MERLET, 2000)

Entretanto, existem especificidades nas máquinas paralelas que os distinguem fortemente, necessitando de estudos mais completos. Algumas destas especificidades são detalhadas a seguir.

As juntas, atuadores e sensores da máquina paralela requerem pares cinemáticos com freqüentemente grandes amplitudes e às vezes altos carregamentos. As juntas existentes no mercado necessitam ser reprojetadas especificamente para os robôs paralelos. Já existem esforços neste sentido (FRANKE;OTREMBA;JANICKE, 2002). Além disso, as juntas deverão ser capazes de incorporar sensores capazes de medir parcialmente ou totalmente sua amplitude, visto que estas informações são importantes para a cinemática direta.

Assim como as máquinas-ferramentas seriais, algumas máquinas paralelas têm utilizado atuadores lineares, como exemplos: Genius 500 da Cross Hüller, Pegasus, Urane Sx da Renault Automation, entre outras. Entretanto o uso de fusos de esferas recirculantes com guias, cuja tecnologia é bastante conhecida, ainda é o tipo de atuador mais utilizado.

Existem também máquinas-ferramenta paralelas que são atuadas por fios ao invés de barras rígidas. Este tipo de atuador é utilizado, por exemplo, no projeto RoboCrane do NIST (BOSTELMAN;JACOFF; et al., 2000). Esta forma de atuação modifica o espaço de trabalho controlável como mostra (VERHOEVEN;MILLER, 2000), pois os fios devem estar permanentemente sob tensão.



Figura 2.2 Máquina-ferramenta paralela atuada por cabos.

É sabido que o desempenho alcançado por um mecanismo depende fortemente de sua topologia, ou como as barras e juntas são distribuídas e, também, das dimensões destes componentes. Isto é uma verdade especialmente em mecanismo de cadeias fechadas, que são altamente sensíveis a estes dois aspectos. (MERLET, 2000).

A síntese de mecanismos paralelos ainda é um campo pouco explorado. E é um dos principais problemas que afastam estes mecanismos do uso prático. O uso de mecanismos paralelos como máquinas-ferramenta têm mostrado que não basta o projetista ter experiência em projetos de máquinas seriais e preocupar-se somente com os componentes mecânicos e

fabricação. Sem levar em conta a análise envolvida no mecanismo, pode acabar com uma máquina de baixo desempenho.

A síntese topológica do mecanismo paralelo é muito complexa, e depende fortemente da tarefa imposta ao mecanismo. O número de graus de liberdade necessários para a execução da tarefa é o ponto de partida. Após, o processo de síntese é feito, em sua maioria, intuitivamente.

Faltam métodos capazes de automatizar a síntese topológica de mecanismos paralelos e, como agravante, a síntese topológica não pode ser desvinculada da síntese dimensional, como é o caso das máquinas seriais. (MERLET, 2000)

Mecanismos paralelos são altamente sensíveis ao dimensionamento: um exemplo clássico é o de variando-se em 10% o raio da plataforma móvel numa plataforma de Stewart-Gough, pode-se variar em até 700% a mínima rigidez do robô em seu espaço de trabalho. (MERLET, 2000)

Além disso, alguns critérios de desempenho são antagônicos, como por exemplo, espaço de trabalho e precisão. Um mecanismo com alta precisão terá um espaço de trabalho reduzido.

Os critérios de desempenho da máquina-ferramenta são muito importantes para o projeto da mesma. Seja qual for o projeto, é necessário um ambiente de análise avaliado pelos critérios de desempenho.

Nas máquinas seriais cartesianas que possuem mecanismos PPP, a maior parte do espaço de trabalho cartesiano possue critérios de desempenho (por exemplo: máximas velocidades, forças de transmissão, precisão e rigidez) constantes. Isto não se aplica às máquinas paralelas que possuem relações de entrada/saída não lineares, espaços de trabalho de geometria complexa e freqüentemente apresentam o seu jacobiano não isotrópico. Conseqüentemente os critérios de desempenho podem variar fortemente para diferentes

pontos no espaço de trabalho e também para diferentes direções neste ponto, o que representa um cuidado a ser tomado para a tarefa de usinagem.

Para que o mecanismo paralelo possa atuar como máquina-ferramenta é necessário que seu espaço de trabalho seja isento de singularidades e colisões entre suas barras. A presença de singularidades é avaliada utilizando o jacobiano, matematicamente a singularidade é presenciada quando o determinante deste jacobiano é igual a zero. Porém nas proximidades da singularidade a máquina paralela perde sua rigidez cinemática e, portanto, sua capacidade de realizar esforços no efetuador.

Alguns índices foram criados na tentativa de medir a distância das singularidades de tal forma que a máquina possa exercer plenamente sua função. A maioria usa o determinante, o número de condição ou o mínimo valor singular do jacobiano para avaliar o mau condicionamento e caracterizar a destreza de manipuladores robóticos.

Os valores singulares mínimo e máximo do jacobiano representam os eixos principais de um elipsóide (chamado elipsóide de manipulação, definido por (YOSHIKAWA, 1985) para mecanismos seriais e utilizado por (GOSSELIN;ANGELES, 1990), (MERLET, 2000), (BHATTACHARYA, et al, 1990), entre outros, em mecanismos paralelos). O determinante do jacobiano, $\det(J)$, representa o volume deste elipsóide. O número de condição é a raiz quadrada da razão entre o mínimo pelo máximo valor singular de J e possui valor mínimo unitário de acordo com a definição.

O número de condição do jacobiano representa a distorção de uma esfera unitária sob a transformação imposta pelo jacobiano (ANGELES, 1997). A matriz jacobiana é dita isotrópica quando seu número de condição permanece unitário. Como o jacobiano depende da posição do mecanismo este é dito isotrópico em seu espaço de trabalho quando esse índice for unitário em todo seu espaço de trabalho.

É sabido que o jacobiano representa as transformações de velocidades entre o efetuador e atuadores e também as forças transmitidas pelo efetuador aos atuadores (dualidade cinemática-estática). Portanto o número de condição do jacobiano no espaço de trabalho serve para avaliar a distribuição das velocidades e forças transmitidas neste espaço de trabalho.

Muitas vezes, os critérios de desempenho das máquinas ferramentas são computacionalmente difíceis de serem calculados e apresentam unidades e ordem de grandeza não coincidentes. Por esta razão, a otimização do projeto de máquinas-ferramenta paralela utilizando funções-custo é dificultado, já que podem conduzir a um mínimo local e a sensibilidade dos pesos possue grande interferência no resultado. No entanto muitos esforços vêm sido realizados nesta área, tais como (ASTANIN; USOV, 2000), (FANG; MERLET, 2005) e outros.

Para que a máquina-ferramenta paralela realize satisfatoriamente sua tarefa, é necessário que possua um bom controle. Este controle deve atender às necessidades específicas da máquina paralela, tais como cálculo das cinemáticas inversa e direta em tempo real.

Infelizmente os controladores existentes hoje para máquinas-ferramentas convencionais, ao serem adaptados em máquinas-ferramentas paralelas não cumprem a função com o desempenho requerido e são responsáveis por até 70% do erro induzido na fabricação da peça (MERLET, 2000).

Isto justifica o investimento necessário no aprimoramento do controle de tais máquinas.

O presente trabalho irá focar na análise do desempenho cinemático e estático de diferentes mecanismos planos PRRRP, incluindo o mecanismo da máquina ferramenta-paralela híbrida Genius 500 da Cross Hüller (STENGELE, 2003) e sugerir, através de análise

de sensibilidade, nova topologia similar com o intuito de melhorar o desempenho cinemático-estático.



Figura 2.3 Genius 500 em diferentes posições do mecanismo paralelo.

3 Cinemática do Mecanismo Paralelo Tipo PRRRP

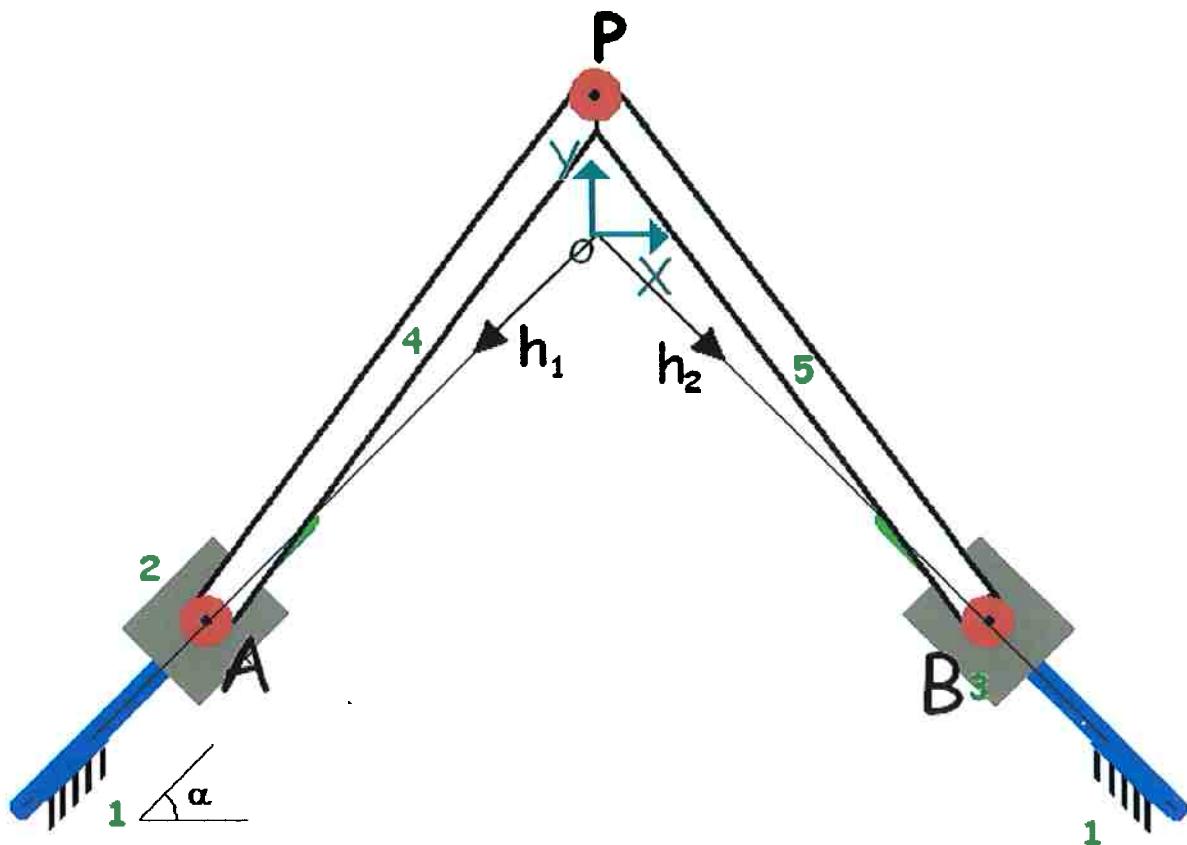


Figura 3.1 Ilustração esquemática da arquitetura do mecanismo.

O mecanismo proposto é um mecanismo de 5 barras do tipo PRRRP, ou seja, possui duas juntas prismáticas e três juntas de revolução. As juntas prismáticas são ativas e representam os dois atuadores do mecanismo e as juntas de revolução são passivas. Na figura 3.1 mostra-se uma representação esquemática da arquitetura do mecanismo. O ponto P é a junta de revolução que une as barras 4 e 5, os pontos A e B representam as juntas de deslizamento (mesas dos fusos) assim como as juntas de revolução montadas acima das mesas e que as conectam nas barras 4 e 5. A origem dos sistemas de coordenadas é o ponto O. $\{O, X, Y\}$ representa o sistema de coordenadas globais do sistema. Os atuadores 1 e 2 possuem sistema de coordenadas $\{O, h_1\}$ e $\{O, h_2\}$ respectivamente.

As juntas de deslizamentos são atuadas por motores ligados aos fusos de transmissão.

O mecanismo possui dois graus de liberdade, portanto o controle completo é realizado através destes dois conjuntos de transmissão (motores + fusos).

3.1 Graus de Mobilidade

De acordo com a relação de Gruebler e Kutzbach (NORTON, 2001), o mecanismo possui dois graus de liberdade:

$$GM = 3(n-1) - 2n_{pl} - n_{p2}$$

$$GM = 3(5-1) - 2 \cdot 5 = 2$$

3.2 Análise Cinemática de Posição

Ao contrário dos mecanismos seriais onde um movimento imposto ao efetuador é facilmente representado pelos movimentos nos atuadores, os mecanismos paralelos necessitam uma transformação de coordenadas, das coordenadas globais cartesianas do efetuador para as coordenadas locais dos atuadores, para controlar a máquina.

Para o correto posicionamento do efetuador através dos atuadores é necessário calcular a cinemática inversa e direta do mecanismo. Este cálculo é similar ao da cinemática de posição de robôs seriais, sendo necessário conhecer cada posição das juntas para saber a posição/orientação do efetuador.

Sabendo que o ponto O é a origem do sistema de coordenadas cartesianas e também do sistema local de coordenadas de cada atuador, como definido na figura 3.1:

$$\mathbf{P} - \mathbf{O} = \mathbf{X} + \mathbf{i} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{O} = h_1 e^{i(180+\alpha)}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{O} = h_2 e^{i(-\alpha)}$$

$$||\mathbf{P} - \mathbf{A}|| = L$$

$$||\mathbf{P} - \mathbf{B}|| = L$$

Sendo que:

L é o comprimento das barras;

h₁ é a distância entre a origem e o ponto A;

h₂ é a distância entre a origem e o ponto B;

3.2.1 Cinemática Inversa

A cinemática inversa do mecanismo, ou seja, dada uma posição **X** e **Y** do efetuador calcular as coordenadas **h₁** e **h₂** dos atuadores, é dada pelas equações:

Para a coordenada **h₁** e sabendo que o comprimento da barra 4 é fixo igual a **L**:

$\|P-A\| = L$, isolando o termo **h₁** resulta em:

$$h_1 = -X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] - \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha])^2}$$

$$h_1 = -X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] + \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha])^2}$$

A equação apresenta estas duas soluções possíveis, a solução que representa o mecanismo da maneira ilustrada na figura 3.1 é a segunda equação (a que apresenta sinal positivo antes da raiz). A outra solução representa o mecanismo invertido.

De maneira análoga para a coordenada **h₂**:

$\|P-B\| = L$, isolando o termo **h₂** resulta em:

$$h_2 = X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] - \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha])^2}$$

$$h_2 = X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] + \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha])^2}$$

Das duas soluções possíveis, a que representa o mecanismo proposto é a segunda (sinal positivo antes da raiz). A outra representa o mecanismo invertido.

Portanto:

$$h_1 = -X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] + \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha])^2}$$

$$h_2 = X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] + \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha])^2}$$

As equações acima representam a cinemática inversa do mecanismo.

3.2.2 Cinemática Direta

A cinemática direta do mecanismo, ou seja, dadas as coordenadas h_1 e h_2 saber a posição X e Y do efetuador pode ser feita resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \|P-A\|^2 = L^2 \\ \|P-B\|^2 = L^2 \end{cases}$$

Para as variáveis X e Y , portanto:

$$X = -(\sec[\alpha] (h_1 - h_2) (\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) \\ - \sin[\alpha] \sqrt{-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)}) \\ / (2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)))$$

E

$$Y = -\frac{1}{2} \sin[\alpha] (h_1 + h_2) \\ - \frac{\sqrt{-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)}}{2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)}$$

Ou,

$$X = -(\sec[\alpha] (h_1 - h_2) (\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) \\ + \sin[\alpha] \sqrt{-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)}) \\ / (2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)))$$

E,

$$Y = \frac{1}{2} (-\sin[\alpha] (h_1 + h_2) \\ + \frac{\sqrt{-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)}}{h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2})$$

Assim como no cálculo da cinemática inversa o sistema apresenta duas soluções. A solução que representa o mecanismo proposto é a segunda, como exposta acima.

3.3 Jacobianos

Derivando as equações representativas das coordenadas X , Y , h_1 e h_2 , obtém-se:

$$\begin{pmatrix} X + h_1 \cos[\alpha] & Y + h_1 \sin[\alpha] \\ X - h_2 \cos[\alpha] & Y + h_2 \sin[\alpha] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 - X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] & 0 \\ 0 & -h_2 + X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$J_X = \begin{pmatrix} X + h_1 \cos[\alpha] & Y + h_1 \sin[\alpha] \\ X - h_2 \cos[\alpha] & Y + h_2 \sin[\alpha] \end{pmatrix}$$

E

$$J_Q = \begin{pmatrix} -h_1 - X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] & 0 \\ 0 & -h_2 + X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] \end{pmatrix},$$

Simplificando:

$$J_Q \cdot \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = J_X \cdot \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = J_Q^{-1} J_X \cdot \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} -\frac{X + h_1 \cos[\alpha]}{h_1 + X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y + h_1 \sin[\alpha]}{h_1 + X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} \\ \frac{-X + h_2 \cos[\alpha]}{h_2 - X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y + h_2 \sin[\alpha]}{h_2 - X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix},$$

Portanto,

$$J = \left(\begin{array}{cc} -\frac{X + h_1 \cos[\alpha]}{h_1 + X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y + h_1 \sin[\alpha]}{h_1 + X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} \\ \frac{-X + h_2 \cos[\alpha]}{h_2 - X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y + h_2 \sin[\alpha]}{h_2 - X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha]} \end{array} \right),$$

A equação do Jacobiano J mostrada acima representa o vínculo entre as velocidades dos atuadores e a velocidade do efetuador.

3.4 Espaço de Trabalho

Há três tipos de abordagens para avaliação do espaço de trabalho: a geométrica, a baseada na discretização, e a baseada na otimização (COELHO, 2005).

A abordagem geométrica (BONEV; RYU, 2001), consiste no emprego de operações “booleanas” sobre volumes de entidades primitivas (cilindros, esferas, etc).

No método de discretização, forma-se o espaço de trabalho a partir de um reticulado (“grid”) regular. Verifica-se para cada um dos nós do reticulado a sua relação de pertinência ao espaço de trabalho (COELHO, 2005).

A abordagem baseada no emprego de métodos de otimização compreende a definição de funções que devam ser maximizadas ou minimizadas, além da satisfação de restrições de igualdade e/ou desigualdade. Ainda dentro desta abordagem, pode-se mencionar o procedimento sugerido por Boudreau & Gosselin (2001) que se baseia na seleção dos parâmetros de um mecanismo paralelo de modo a este se movimentar dentro de um espaço de trabalho especificado, utilizando algoritmo genético (COELHO, 2005).

Sob um ponto de vista prático, a avaliação do espaço de trabalho de um mecanismo paralelo deve considerar que os seus movimentos estão sujeitos a restrições devidas basicamente a três fatores: limites mecânicos em suas juntas passivas, interferência entre seus membros e limitações de curso inerentes aos atuadores (COELHO, 2005 apud MERLET, 2000).

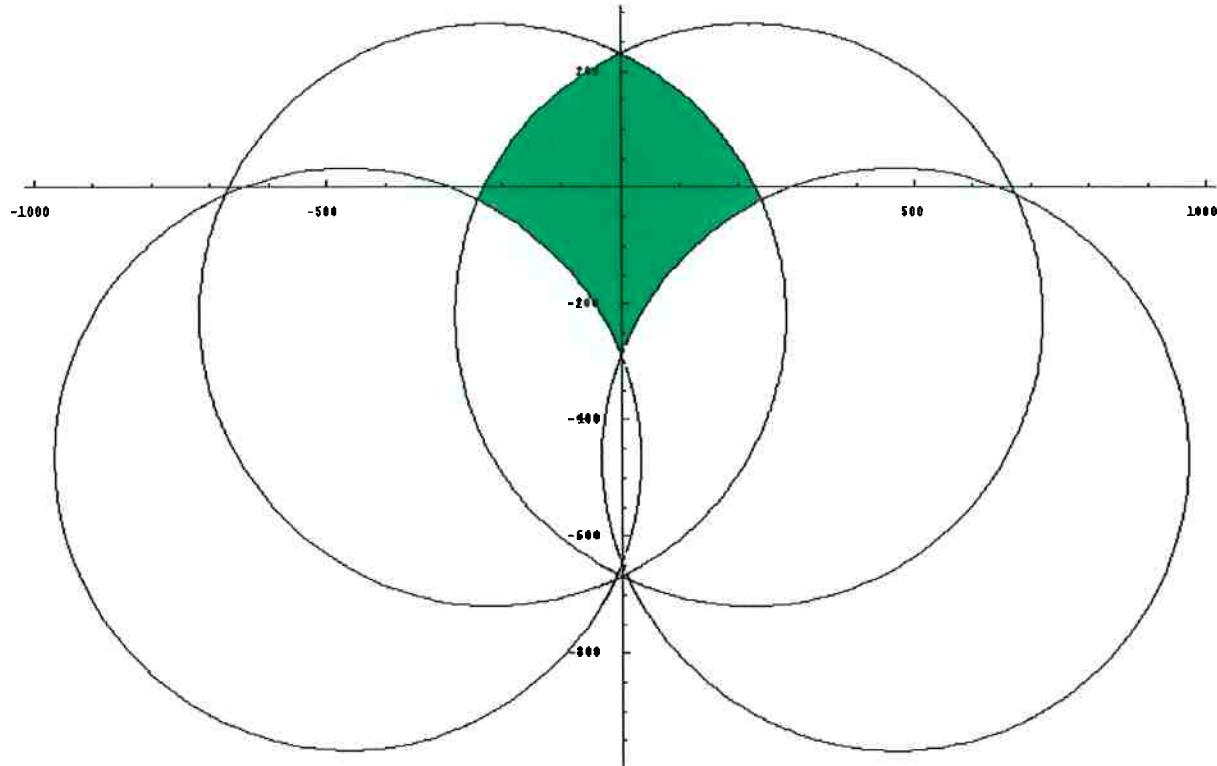


Figura 3.2 Ilustração representativa do espaço de trabalho.

Os limites do espaço de trabalho do mecanismo podem ser obtidos geometricamente através da limitação de cada cadeia cinemática pelos finais de curso delimitados. Na figura 3.2 observam-se claramente quatro circunferências de raio igual a L , as cujos centros estão do lado esquerdo são respectivamente os extremos da cadeia cinemática da barra 4 e ponto A no início e fim de curso, as circunferências do lado direito são da outra cadeia cinemática simétrica.

O espaço de trabalho do mecanismo está hachurado de verde na figura 3.2e é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

4 Critérios de Desempenho

Como exposto anteriormente os mecanismos paralelos são altamente sensíveis ao dimensionamento. Além disso, alguns critérios de desempenho são antagônicos, como por

exemplo, espaço de trabalho e precisão. Um mecanismo com alta precisão terá um espaço de trabalho reduzido.

Como maneira de avaliar o projeto do mecanismo para dada tarefa são utilizados comparações entre alguns índices de desempenho. Seja qual for o projeto, é necessário um ambiente de análise avaliado pelos critérios de desempenho.

Nas máquinas seriais cartesianas que possuem mecanismos PPP, a maior parte do espaço de trabalho cartesiano possue critérios de desempenho (por exemplo: máximas velocidades, forças de transmissão, precisão e rigidez) constantes. Isto não se aplica às máquinas paralelas que possuem relações de entrada/saída não lineares, espaços de trabalho de geometria complexa e freqüentemente apresentam o seu jacobiano não isotrópico. Conseqüentemente os critérios de desempenho podem variar fortemente para diferentes pontos no espaço de trabalho e também para diferentes direções neste ponto.

Para que o mecanismo paralelo possa atuar como máquina-ferramenta é necessário que seu espaço de trabalho seja isento de singularidades e colisões entre suas barras. A presença de singularidades é avaliada utilizando o jacobiano, matematicamente a singularidade é presenciada quando o determinante deste jacobiano é igual a zero. Porém nas proximidades da singularidade a máquina paralela perde sua rigidez cinemática e, portanto, sua capacidade de realizar esforços no efetuador.

Alguns índices foram criados na tentativa de medir a distância das singularidades de tal forma que a máquina possa exercer plenamente sua função. A maioria usa o determinante, o número de condição ou o mínimo valor singular do jacobiano para avaliar o mau condicionamento e caracterizar a destreza de manipuladores robóticos.

Os valores singulares mínimo e máximo do jacobiano representam os eixos principais de um elipsóide (chamado elipsóide de manipulação, definido por (YOSHIKAWA, 1985) para mecanismos seriais e utilizado por (GOSSELIN;ANGELES, 1990), (MERLET,

2000), (BHATTACHARYA, et al, 1990) entre outros, em mecanismos paralelos). O determinante do jacobiano, $\det(\mathbf{J})$, representa o volume deste elipsóide. O número de condição é a raiz quadrada da razão entre o mínimo pelo máximo valor singular de \mathbf{J} e possui valor mínimo unitário de acordo com a definição.

O número de condição do jacobiano representa a distorção de uma esfera unitária sob a transformação imposta pelo jacobiano (ANGELES, 1997). Matematicamente ele mostra o condicionamento numérico do problema, um alto valor no número de condição significa um mau-condicionamento. A matriz jacobiana é dita isotrópica quando seu número de condição permanece unitário. Como o jacobiano depende da posição do mecanismo este é dito isotrópico em seu espaço de trabalho quando esse índice for unitário em todo seu espaço de trabalho.

É sabido que o jacobiano representa as transformações de velocidades entre o efetuador e atuadores e também as forças transmitidas pelo efetuador aos atuadores (dualidade cinemática-estática). Portanto o número de condição do jacobiano no espaço de trabalho serve para avaliar a distribuição das velocidades e forças transmitidas neste espaço de trabalho.

Os índices de desempenho escolhidos para tomada de decisões neste trabalho são significativos para o projeto do mecanismo PRRRP com o intuito de futura utilização como máquina ferramenta paralela. Estes são mapeados em todo o espaço de trabalho mostrando regiões favoráveis para dada tarefa de usinagem e os seus valores extremos são utilizados como forma de comparação entre os diversos mecanismos analisados.

4.1 Cálculo da Área do Espaço de Trabalho

Com as mesmas guias lineares, numa arquitetura do tipo cartesiana, a área do espaço de trabalho do mecanismo seria: *comprimento útil da guia 1 x comprimento útil da guia 2*. Ou (*comprimento útil*)² caso as guias tivessem o mesmo comprimento útil.

No mecanismo paralelo a área do espaço de trabalho pode variar bastante de acordo com a configuração escolhida.

A área deste espaço de trabalho pode ser calculada pela área formada pelo quadrilátero que tem como vértices os pontos coincidentes dois a dois das circunferências apresentadas anteriormente, somando-se as regiões da parte de cima que estão fora do quadrilátero e subtraindo as regiões da parte de baixo que não fazem parte do espaço de trabalho, como mostra a figura 4.1.

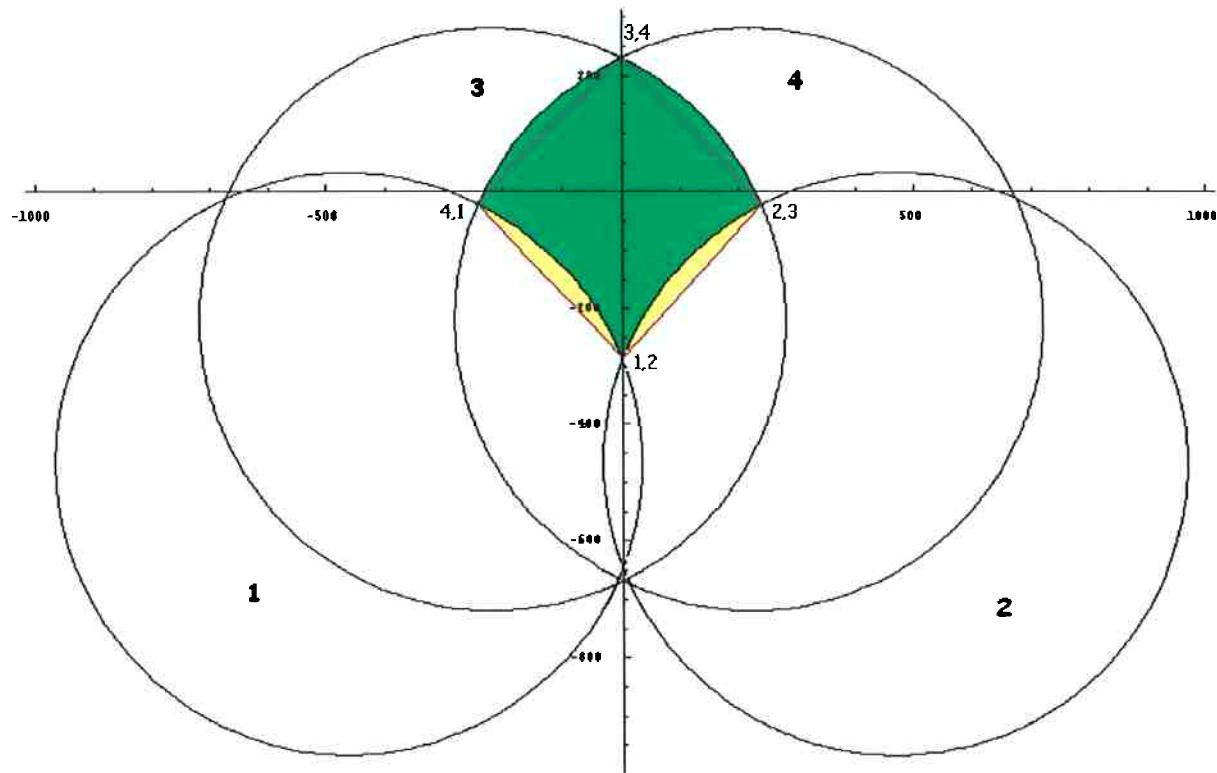


Figura 4.1 Ilustração exemplificando o cálculo da área do espaço de trabalho.

As circunferências são assim definidas:

$$1 \rightarrow (x - \operatorname{Re}[\minimo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\minimo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 = L^2$$

$$2 \rightarrow (x - \operatorname{Re}[\minimo e^{i(-\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\minimo e^{i(-\alpha)}])^2 = L^2$$

$$3 \rightarrow (x - \operatorname{Re}[\maximo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\maximo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 = L^2$$

$$4 \rightarrow (x - \operatorname{Re}[\maximo e^{i(-\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\maximo e^{i(-\alpha)}])^2 = L^2$$

Onde **mínimo** e **maximo** representam os finais de curso dos atuadores.

Resolvendo as intersecções e escolhendo as que se adequam ao espaço de trabalho acha-se os quatros pontos que possibilitam o cálculo da área do quadrilátero (contorno em vermelho) na figura 4.1.

$$\text{Ponto[1]} = (1, 2), \text{ Ponto[2]} = (2, 3), \text{ Ponto[3]} = (3, 4), \text{ Ponto[4]} = (4, 1)$$

4.1.1 Cálculo da Área do Quadrilátero

$$A_Q = b \cdot h, \text{ onde } b = \text{Ponto[4]}_x - \text{Ponto[2]}_x \text{ e } h = \frac{\text{Ponto[1]}_y - \text{Ponto[3]}_y}{2}$$

O índice subscrito representa qual coordenada do ponto deve ser tomada.

4.1.2 Cálculo da Área da Região Superior

Como o mecanismo proposto é simétrico basta calcular a área de uma região superior.

$$b = \sqrt{(\text{Ponto[4]}_x - \text{Ponto[1]}_x)^2 + (\text{Ponto[4]}_y - \text{Ponto[1]}_y)^2}$$

$$h = \cos\left[\frac{\gamma}{2}\right] L$$

$$\sin\left[\frac{\gamma}{2}\right] = \frac{\frac{b}{2}}{L}$$

$$A_s = \frac{\pi L^2 \gamma}{2 \pi}$$

$$A_{LS} = A_s - \frac{bh}{2}$$

A_{LS} representa a área de uma lente superior.

4.1.3 Calculo da Área da Região Inferior

De maneira análoga para as regiões inferiores:

$$b = \sqrt{(\text{Ponto[2]}_x - \text{Ponto[3]}_x)^2 + (\text{Ponto[2]}_y - \text{Ponto[3]}_y)^2}$$

$$h = \cos\left[\frac{\gamma}{2}\right] L$$

$$\sin\left[\frac{\gamma}{2}\right] = \frac{b}{L}$$

$$A_s = \frac{\pi L^2 \gamma}{2 \pi}$$

$$A_{LI} = A_s - \frac{bh}{2}$$

A_{LI} representa área de uma lente superior.

Portanto a área do espaço de trabalho deste mecanismo pode ser escrita como:

$$A_T = A_Q + 2A_{LS} - 2A_{LI}$$

Ou seja, a área total é igual à área do quadrilátero mais duas vezes a área da região superior subtraindo duas vezes a área da região inferior.

De posse deste valor é possível compará-lo com o valor da área do mecanismo serial equivalente (mesmo comprimento útil das guias).

4.2 Resolução no Espaço de Trabalho (Princípio da Alavanca)

Devido à sua arquitetura, o mecanismo proposto pode ampliar ou reduzir um deslocamento realizado pelo atuador para o efetuador.

Suponhamos que o mecanismo seja controlado por meio de malha semi-fechada, ou seja, o controle é efetuado através de encoder nos atuadores. Em todo o espaço de trabalho de uma máquina cartesiana, um erro na leitura do encoder implica em um movimento igual na mesa ou efetuador, ou seja, suas cinemáticas inversa e direta são iguais. Já no mecanismo paralelo isto não é verdade. O espaço de trabalho possui regiões onde se amplifica o deslocamento, tornando-o menos favorável à usinagem (diminuição da resolução da máquina), e em contrapartida também propicia regiões favoráveis no espaço de trabalho.

Estas regiões podem ser avaliadas visualmente plotando-se o espaço de trabalho variando discretizado os atuadores, como mostra a figura a seguir:

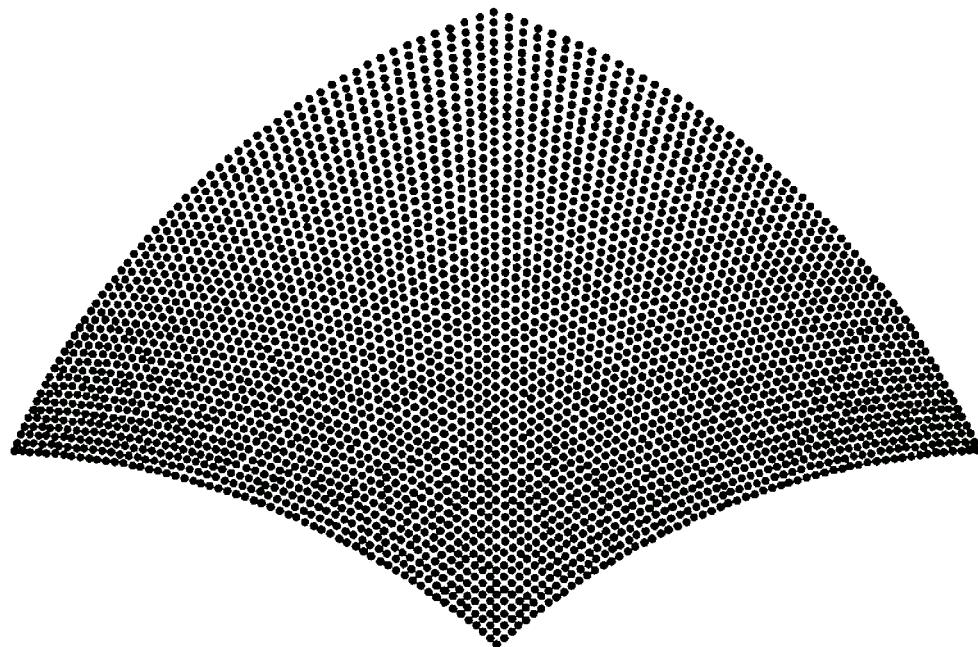


Figura 4.2 Espaço de trabalho discretizado a cada passo dos atuadores.

Vê-se claramente uma maior concentração de pontos nas laterais do espaço de trabalho, indicando uma região onde pode haver aumento de resolução da máquina. Já na região superior do espaço de trabalho há uma amplificação do deslocamento.

Como maneira de quantificar e avaliar as regiões de diferentes resoluções em relação à resolução da máquina cartesiana equivalente foi criado o seguinte algoritmo.

Considerando o mesmo deslocamento \mathbf{d} nos atuadores (um deslocamento em cada atuador), o deslocamento total do efetuador numa máquina cartesiana será de $2\mathbf{d}$. Variando-se o mesmo deslocamento \mathbf{d} em cada atuador, no mecanismo paralelo o deslocamento do efetuador terá uma parcela referente ao deslocamento do primeiro atuador mais uma parcela referente ao movimento do segundo atuador.

Caso este deslocamento do efetuador numa máquina paralela seja maior que $2\mathbf{d}$ (igual ao deslocamento do efetuador numa máquina serial cartesiana), a região do espaço de trabalho ficará pintada de vermelho, e se for menor ou igual ficará pintada de verde. O verde

indica uma maior resolução, na região do espaço de trabalho, em relação à resolução de uma máquina cartesiana.

A figura 4.3 mostra o espaço de trabalho onde foi realizado este condicionamento.

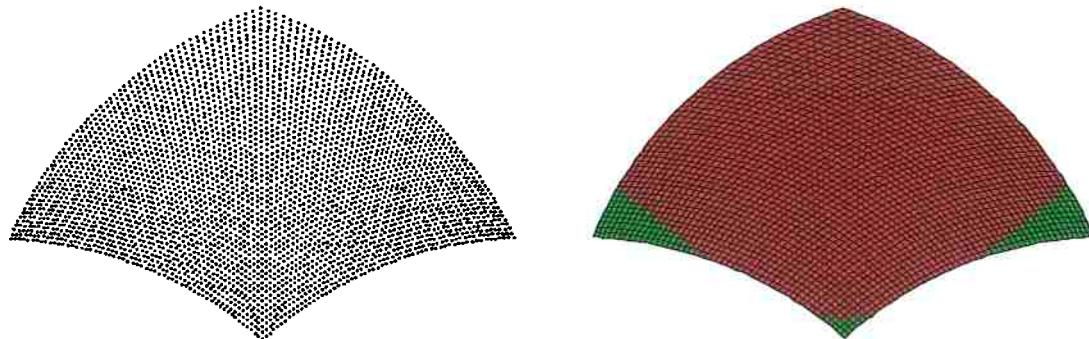


Figura 4.3 Espaço de trabalho mostrando as regiões favoráveis em verde.

4.3 Velocidade dos Atuadores dada a Trajetória da Ferramenta (VAT)

Assim como o deslocamento pode ser amplificado, a velocidade realizada pelo atuador pode superar o limite deste. De maneira análoga foi criado outro algoritmo onde se colore de verde a região que a velocidade do atuador não ultrapassa o módulo da velocidade do efetuador e vermelho onde a velocidade do atuador é maior que a do efetuador.

Exemplo:

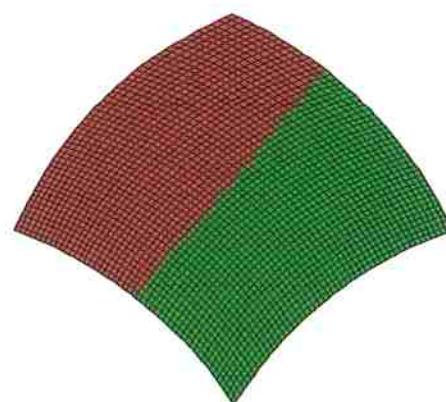


Figura 4.4 Velocidade do atuador 1 - h_1 .

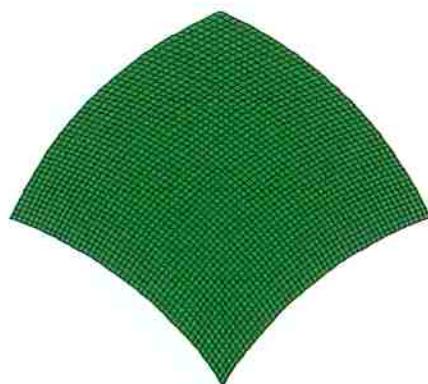


Figura 4.5 Velocidade no atuador 2 – h_2 .

No entanto, no caso da velocidade, as regiões hachuradas do espaço de trabalho não são sempre as mesmas. Dependendo da direção e sentido da trajetória executada pela ferramenta, um ou outro atuador será mais requisitado. Devido à simetria proposta para o mecanismo os testes de velocidades serão realizados utilizando-se, por exemplo, três direções no primeiro quadrante. Para os testes serão utilizadas: 0° , 45° e 90° no sentido de h_1 negativo, como mostra a figura 4.6.

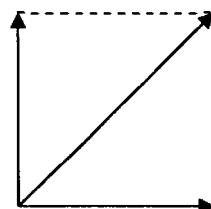


Figura 4.6 Direções que serão utilizadas nos testes.

4.4 Elipse de Manipulação

A elipse de manipulação de velocidade do mecanismo é um índice de desempenho utilizado na literatura (LIU, 2006 apud GOSSELIN;ANGELES, 1991), que é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{h}} \\ \dot{\mathbf{x}}^T &= \dot{\mathbf{h}}^T \cdot \mathbf{J}^{1T} \\ \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{h}}^T \cdot (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{h}}\end{aligned}$$

Onde :

\mathbf{J} é o jacobiano

$\dot{\mathbf{h}}$ é o vetor de velocidades dos atuadores

e, $\dot{\mathbf{x}}$ é o vetor de velocidades do efetuador.

Tomando o vetor das velocidades dos atuadores unitário:

$$|\dot{\mathbf{h}}|^2 = \dot{\mathbf{h}}^T \dot{\mathbf{h}} = 1$$

Utilizando esta condição é possível calcular os extremos da norma do vetor de velocidades do efetuador. Para tanto se escreve o Lagrangeano com a condição de igualdade acima imposta:

$$L_v = \dot{\mathbf{h}}^T \cdot (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{h}} - \lambda_v (\dot{\mathbf{h}}^T \dot{\mathbf{h}} - 1)$$

Derivando e igualando a zero calcula-se os extremos:

$$\frac{\partial L_v}{\partial \lambda_v} = 0 : \dot{\mathbf{h}}^T \dot{\mathbf{h}} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L_v}{\partial \dot{\mathbf{h}}^T} = 0 : (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{h}} - \lambda_v \dot{\mathbf{h}} = 0$$

Da equação acima é possível visualizar que o multiplicador de Lagrange λ_v é na verdade o autovalor da matriz $(\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$. Então a norma do vetor das velocidades do efetuador é:

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{h}}^T \cdot (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}}^T \lambda_v \dot{\mathbf{h}} = \lambda_v$$

Logo,

$$|\mathbf{v}_{\max}| = \sqrt{\max(|\lambda_{vi}|)} , \quad (i = 1, 2)$$

$$|\mathbf{v}_{\min}| = \sqrt{\min(|\lambda_{vi}|)} , \quad (i = 1, 2)$$

Os máximos e mínimos valores formam a elipse de manipulação de velocidade cujos eixos encontram-se na direção dos autovetores da matrix $(\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$. Ao efetuador do mecanismo podem ser impostas as máximas (mínimas) velocidades nas direções do maior (menor) eixo da elipse. Estas velocidades são relativas à circunferência unitária de velocidades imposta aos atuadores.

Estabelecendo valores limites para estas velocidades é possível estabelecer o máximo e mínimo curso dos atuadores.

O elipsóide de manipulação é dependente da pose do mecanismo, portanto varia no espaço de trabalho.

4.5 Máxima Velocidade ao Atuador e Trajetória do Efetuador (MVA)

Para o projeto de máquinas ferramentas seria interessante a composição do problema da elipse de manipulação de maneira invertida. Ou seja, calcular a máxima velocidade nos atuadores, com referência a circunferência unitária agora no vetor da velocidade do efetuador, e a direção da trajetória que causa este máximo (direção e sentido da velocidade do efetuador). O problema desta abordagem é que calculando os extremos (máxima e mínima velocidade) desta maneira, deixa-se de analisar individualmente cada atuador, pois o extremo é calculado somando as velocidades dos atuadores. Pode-se com isto deixar de analisar uma posição e trajetória onde um atuador está fortemente sobre carregado e outro pouco carregado, cuja soma seja menor que um caso onde ambos estejam mediamente carregados.

Uma abordagem para contornar este problema é calcular a velocidade máxima de cada atuador independentemente para a circunferência de velocidades unitárias imposta ao efetuador e mapear o sentido e direção da trajetória que causa esta máxima velocidade neste atuador, da seguinte maneira:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_1 = (J_{11} \quad J_{12})$$

$$\mathbf{J}_2 = (J_{21} \quad J_{22})$$

$\dot{h}_1 = J_1 \cdot \dot{x}$, portanto,

$$\dot{h}_1 = (J_{11} \ J_{12}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Onde :

J_1 é a primeira linha do jacobiano

\dot{h}_1 é a velocidade do atuador 1

e, \dot{x} é o vetor de velocidades do efetuador.

Impondo a condição de circunferência unitária ao vetor velocidade no efetuador,

$$|\dot{x}|^2 = \dot{x}^T \dot{x} = 1$$

Fazendo o Lagrangeano,

$$L_v = J_1 \cdot \dot{x} - \lambda_v (\dot{x}^T \dot{x} - 1)$$

Derivando e igualando a zero,

$$\frac{\partial L_v}{\partial \lambda_v} = 0 : \dot{x}^T \dot{x} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L_v}{\partial \dot{x}} = 0 : J_1 - \lambda_v \dot{x}^T = 0$$

Portanto,

$$(J_{11} \ J_{12}) = \lambda_v (\dot{x} \ \dot{y})$$

Estas duas equações junto com a condição de circunferência unitária formam um sistema de três equações:

$$\begin{cases} J_{11} = \lambda_v \cdot \dot{x} \\ J_{12} = \lambda_v \cdot \dot{y} \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema é possível recuperar a máxima velocidade do atuador um e a direção do vetor da velocidade unitária no efetuador que acarretou esta velocidade, logo a direção da trajetória que realiza o extremo de velocidade no atuador.

Para a máxima velocidade no atuador dois basta resolver o sistema análogo.

Vale a pena lembrar que como o Jacobiano é dependente da pose do mecanismo, este sistema é calculado para várias posições do espaço de trabalho a fim de obter um mapeamento destas velocidades.

4.6 Máxima Força Transmitida ao Atuador e Trajetória do Efetuador (MFTA)

Devido à dualidade cinemática e estática, de acordo com o princípio do trabalho virtual (LIU et al.,2006 apud WALDRON;HUNT,1988). Temos que:

$$\tau = \mathbf{J}^T f$$

Onde f é o vetor das forças ou torques nos atuadores e τ é o vetor generalizado de forças e torques no efetuador, em coordenadas cartesianas. \mathbf{J} é a matriz Jacobiana como definida no capítulo 3.

Usando aproximação semelhante ao índice de desempenho de Máxima Velocidade ao Atuador e Trajetória do Efetuador (MVA) é possível realizar operação semelhante para as forças de usinagem estáticas transmitidas a cada atuador. Da seguinte maneira:

considerando força de magnitude unitária no efetuador,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{pmatrix}$$

Onde \mathbf{J} é o jacobiano do mecanismo.

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{21} \\ \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tau = \mathbf{J}^T \cdot f$$

$$f = (\mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \tau$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{J}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1 = (\mathbf{T}_{11} \quad \mathbf{T}_{12})$$

$$\mathbf{T}_2 = (\mathbf{T}_{21} \quad \mathbf{T}_{22})$$

$$f_1 = \mathbf{T}_1 \cdot \tau , \text{ portanto,}$$

$$f_1 = (\mathbf{T}_{11} \quad \mathbf{T}_{12}) \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

Onde :

\mathbf{T}_1 é a primeira linha da matriz \mathbf{T}

f_1 é a força no atuador 1

e, τ é o vetor de forças no efetuador.

$$| \tau |^2 = \tau^T \tau = 1$$

$$L_F = T_1 \cdot \tau - \lambda_F (\tau^T \tau - 1)$$

$$\frac{\partial L_F}{\partial \lambda_F} = 0 : \tau^T \tau - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L_F}{\partial \tau} = 0 : T_1 - \lambda_F \tau^T = 0$$

$$(T_{11} \ T_{12}) = \lambda_F (F_X \ F_Y)$$

$$\begin{cases} T_{11} = \lambda_F \cdot F_X \\ T_{12} = \lambda_F \cdot F_Y \\ F_X^2 + F_Y^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se a máxima força transmitida ao atuador um e a respectiva trajetória do efetuador que ocasionou este extremo. Para realizar a força transmitida ao atuador 2 é feita operação análoga.

5 Comparação dos Mecanismos PRRRP Sugeridos

Modificando alguns parâmetros construtivos do mecanismo, como ângulo α , comprimento das barras L e final de curso dos fusos (**mínimo** e **maximo**), é possível mudar sensivelmente o comportamento do mecanismo.

No entanto, para não perder a controlabilidade do mecanismo é preciso que não haja singularidades dentro do espaço de trabalho.

Como o objetivo do mecanismo é ser utilizado como uma máquina de usinagem, será vantajoso que o espaço de trabalho possua regiões onde exista um aumento de resolução, para um corte mais preciso.

Também será vantajoso que no espaço de trabalho sejam minimizadas as regiões onde o atuador desenvolve uma velocidade (ou força) muito superior à velocidade (ou força) do efetuador, já que restringiria, ou até mesmo proibiria o uso de certas regiões para algumas trajetórias.

Utilizando os mesmos fusos, a construção de uma mesa cartesiana determina uma área formada pelos comprimentos úteis destes fusos. A área do espaço de trabalho do mecanismo paralelo será calculada para efeito de comparação com a área da mesa cartesiana.

Uma análise do número de condição do jacobiano também será realizada com o intuito de mostrar a isotropia do mecanismo no espaço de trabalho.

Por fim será feita uma tabela comparando os máximos de cada critério no espaço de trabalho do mecanismo.

5.1 Mecanismos

O comprimento **L** do mecanismo tem grande influência na flecha formada no extremo do efetuador, quanto menor o seu comprimento mais rígido será o mecanismo fora de seu plano.

O valor **mínimo** para h_1 e h_2 é devido a restrições físicas de construção da máquina, não sendo aconselháveis valores menores que 150 mm devido a possíveis interferências entre as barras, juntas e fuso.

O valor **maximo** para h_1 e h_2 deve ser menor que $h_1, h_2 \leq L/\cos \alpha$, pois um valor maior implica em singularidade no espaço de trabalho e mudança da configuração do mecanismo e respectivas equações cinemáticas.

Três configurações são propostas e serão analisadas nos critérios de desempenho sugeridos.

Também será analisado o mecanismo da máquina-ferramenta mista Genius 500 da Cross Hüller, cujo mecanismo pertence à mesma família.

5.1.1 $\alpha = 30^\circ$, $L = 250$ mm, Fuso mínimo = 155, Fuso máximo = 280

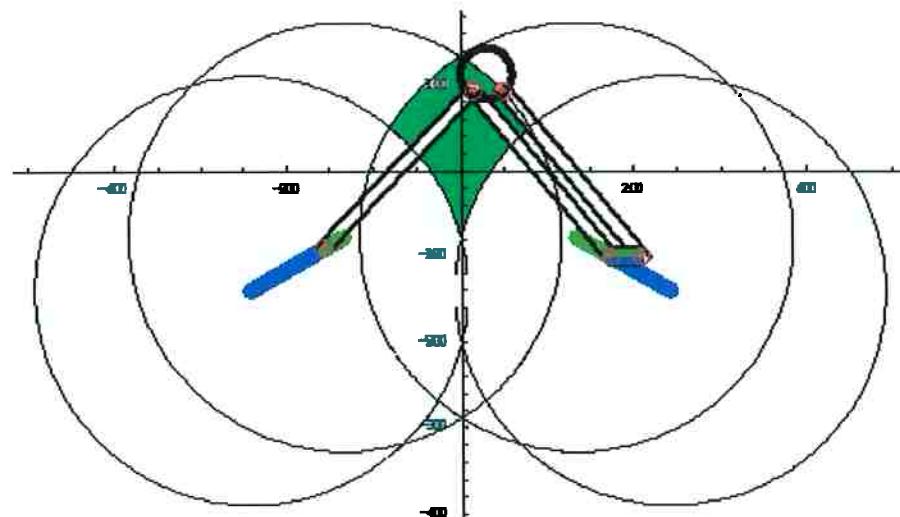


Figura 5.1 Ilustração do mecanismo e seu respectivo espaço de trabalho.

5.1.1.1 Área do Espaço de Trabalho

A área do espaço de trabalho do mecanismo é **15.729,1 mm²** e a razão entre esta área e a formada por uma mesa cartesiana com os mesmos comprimentos úteis dos fusos é **1,00666**, o que indica que são aproximadamente iguais.

5.1.1.2 Resolução no Espaço de Trabalho

O espaço de trabalho é mais preciso na parte superior, como indica a figura 5.2:

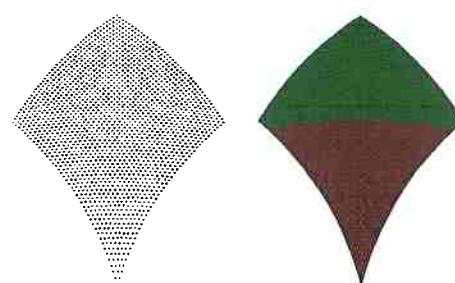


Figura 5.2 Ilustração mostrando a precisão do espaço de trabalho.

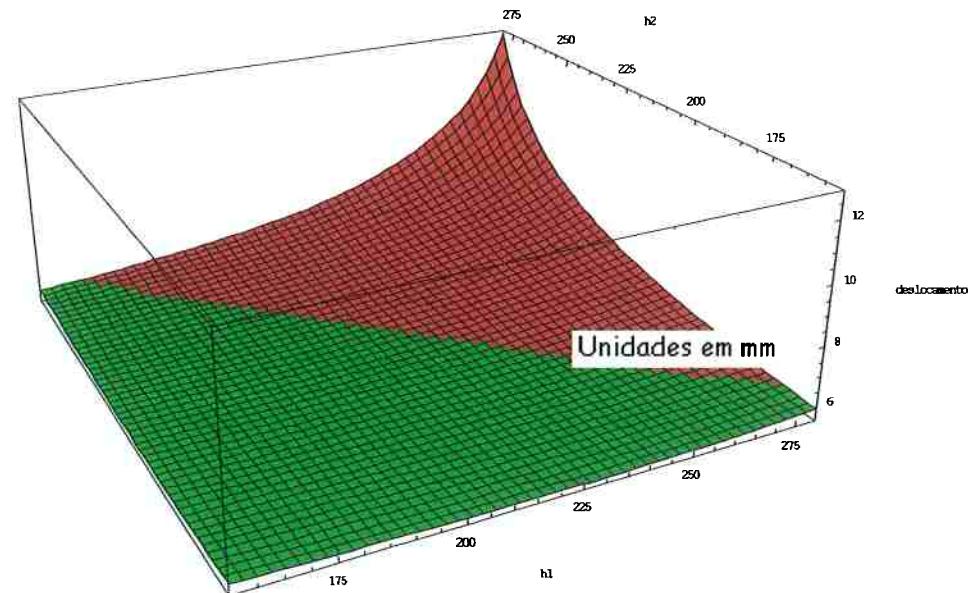


Figura 5.3 Quanto mais próximo da singularidade maior a distorção.

As figuras 5.2 e 5.3 mostram a distorção do espaço de trabalho quanto maior a proximidade com a singularidade. O passo d utilizado para os gráficos acima foi **3 unidades** em cada atuador, portanto o deslocamento medido para comparação com mecanismo serial é **6 unidades** (valor igual a dois passos). Ou seja, todo deslocamento acima de **6 unidades** nas figuras 5.2 e 5.3 está colorido de vermelho, e abaixo colorido de verde.

É importante ressaltar que a resolução do mecanismo chega a cair pela metade da resolução da máquina cartesiana equivalente na parte inferior do espaço de trabalho, tornando esta região pouco propícia a usinagem de precisão.

5.1.1.3 VAT

Para a análise das velocidades dos atuadores foram plotados gráficos levando em conta três velocidades no efetuador (trajetórias), na direção **X**, **Y** e **45°** no primeiro quadrante.

$$\mathbf{Vx} = 0, \mathbf{Vy} = 1$$

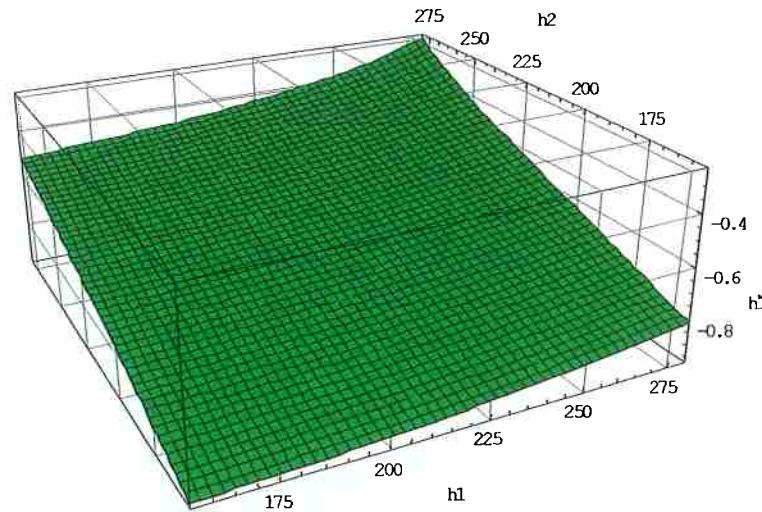


Figura 5.4 Velocidade no atuador 1 – direção Y.

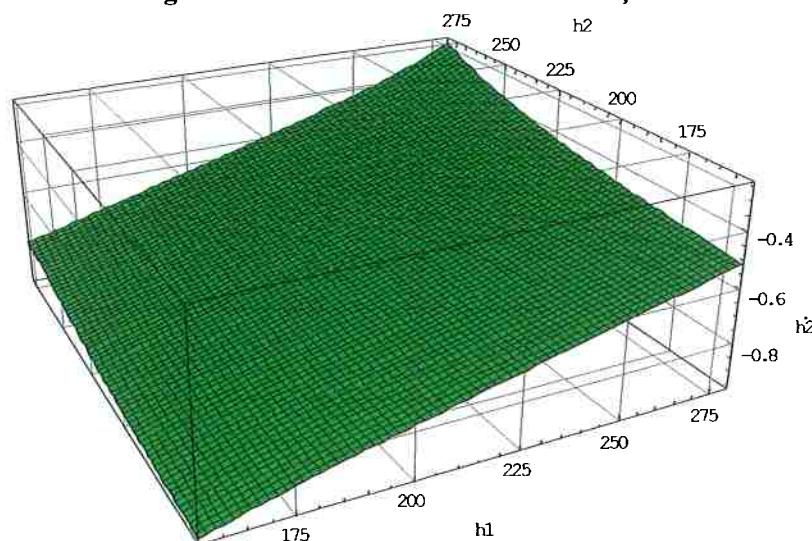


Figura 5.5 Velocidade no atuador 2 – direção Y.

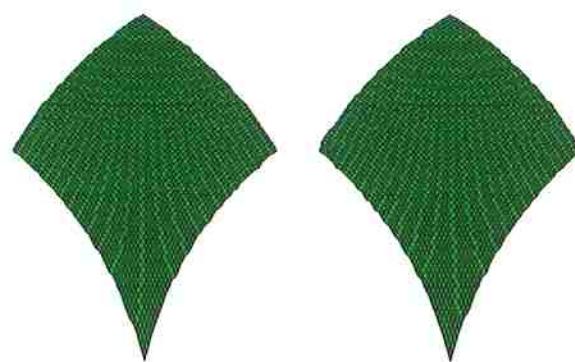


Figura 5.6 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente.

Para trajetórias na direção Y em nenhuma região do espaço de trabalho algum atuador supera a velocidade imposta ao efetuador.

$\mathbf{Vx} = 1, \mathbf{Vy} = 0,$

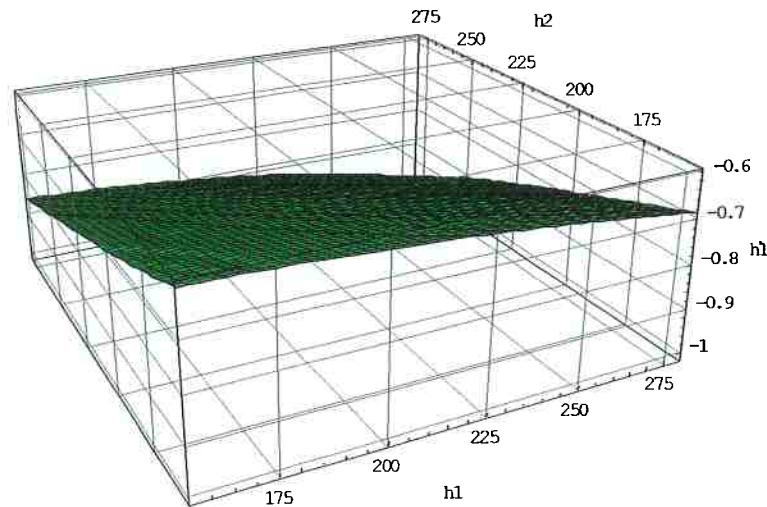


Figura 5.7 Velocidades no atuador 1 - direção X.

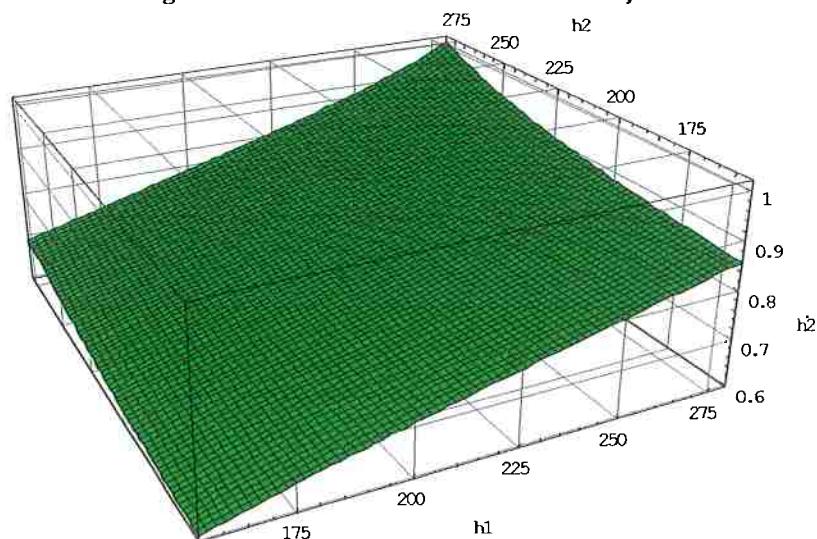


Figura 5.8 Velocidades no atuador 2 - direção X.

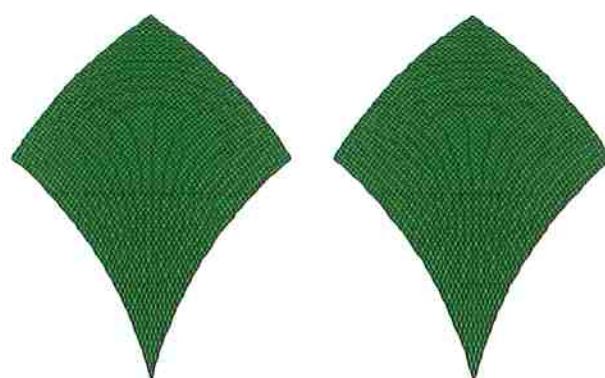


Figura 5.9 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente.

Para trajetórias do efetuador na direção X não há problemas de velocidades nos atuadores, salvo pequena região na parte inferior onde a velocidade supera a do efetuador em ambos os atuadores.

$$V_x = \sqrt{2}/2, V_y = \sqrt{2}/2 \rightarrow 45^\circ$$

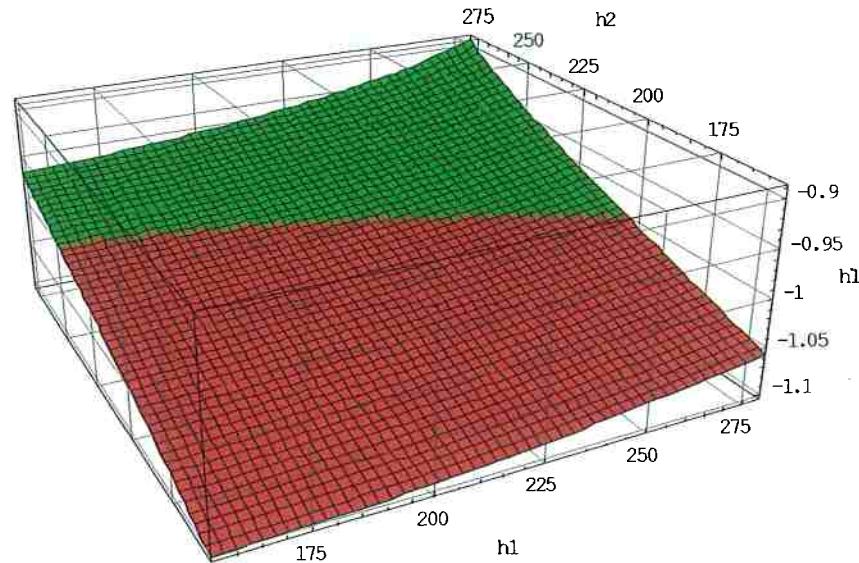


Figura 5.10 Velocidade no atuador 1 – direção 45°.

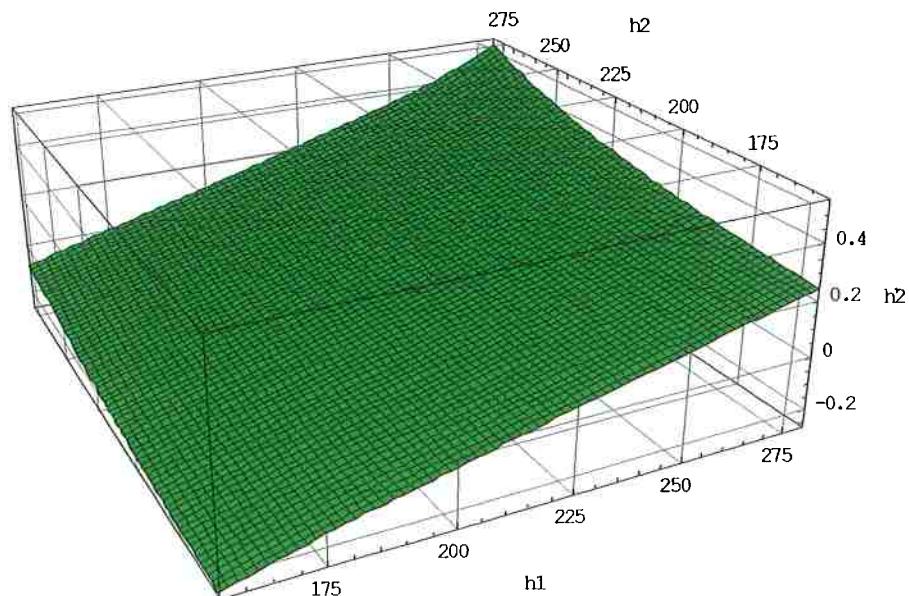


Figura 5.11 Velocidade do atuador 2 – direção 45°.

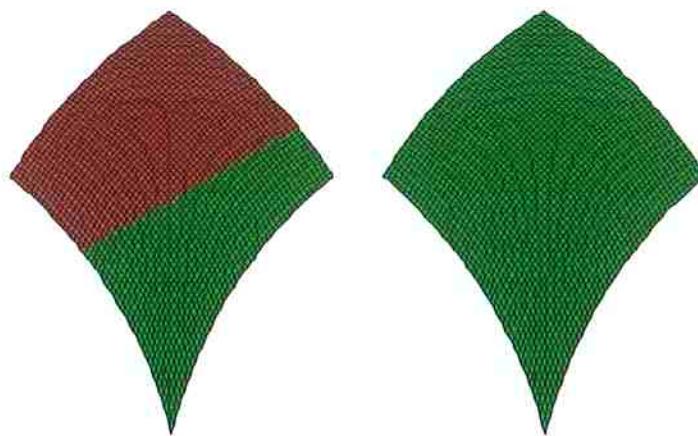


Figura 5.12 Projeção das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente.

Para trajetórias a quarenta e cinco graus um dos atuadores apresenta velocidade superior ao efetuador em grande parte do espaço de trabalho, esta sobrevelocidade nos pontos onde ocorre é no máximo de 11%. Esta região é também uma região de maior precisão do mecanismo, como visto anteriormente.

5.1.1.4 MVA

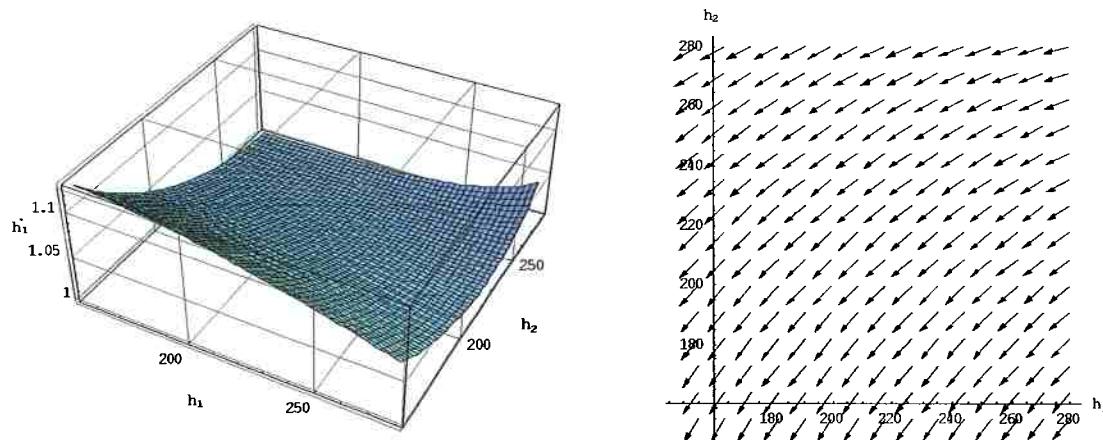


Figura 5.13 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.13 a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 1 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.13 (b). Pela figura 5.13 (a)

pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 1 no espaço de trabalho é de 12 %.

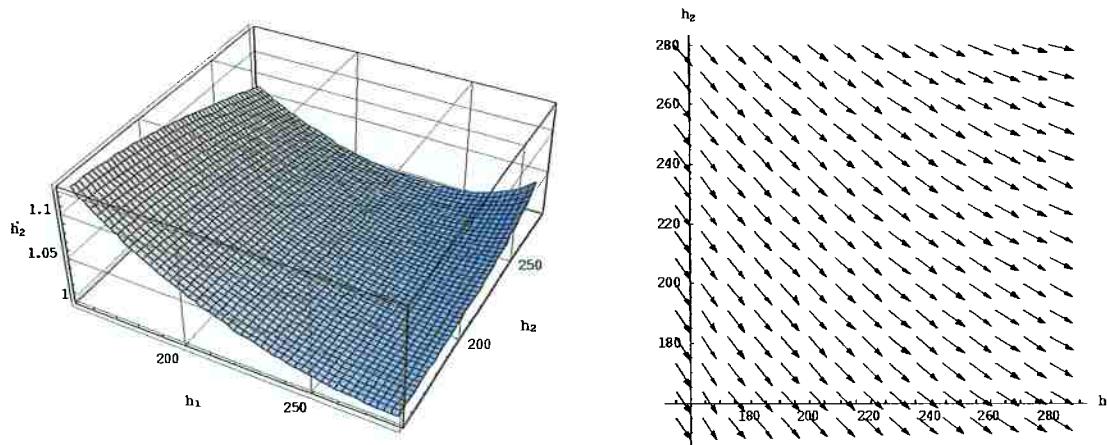


Figura 5.14 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.14 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 2 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.14 (b). Pela figura 5.14 (a) pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 2 no espaço de trabalho é de 12 %.

5.1.1.5 Número de Condição do Jacobiano

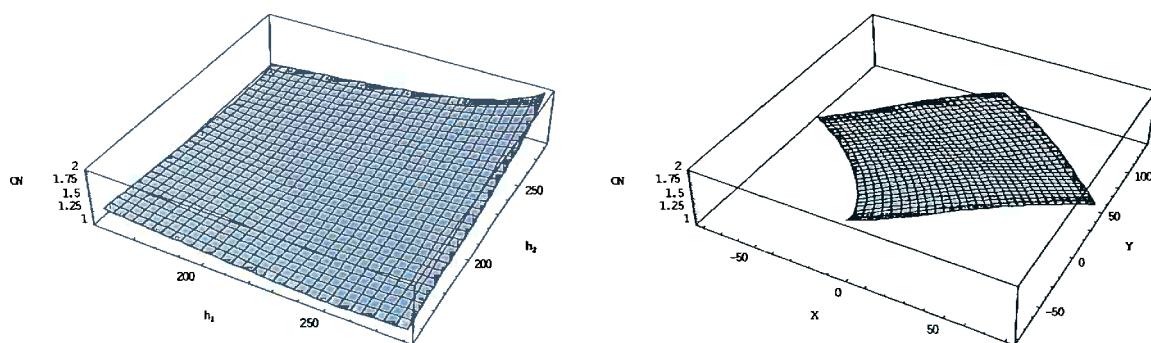


Figura 5.15 Número de condição do mecanismo, coordenadas dos atuadores e coordenadas cartesianas respectivamente.

O número de condição do mecanismo mostra que o mecanismo possui isotropia em uma faixa do espaço de trabalho, porém na fronteira do espaço de trabalho a anisotropia pode chegar a dobrar, quanto mais anisotrópico o mecanismo pior a sua controlabilidade.

5.1.1.6 MFTA

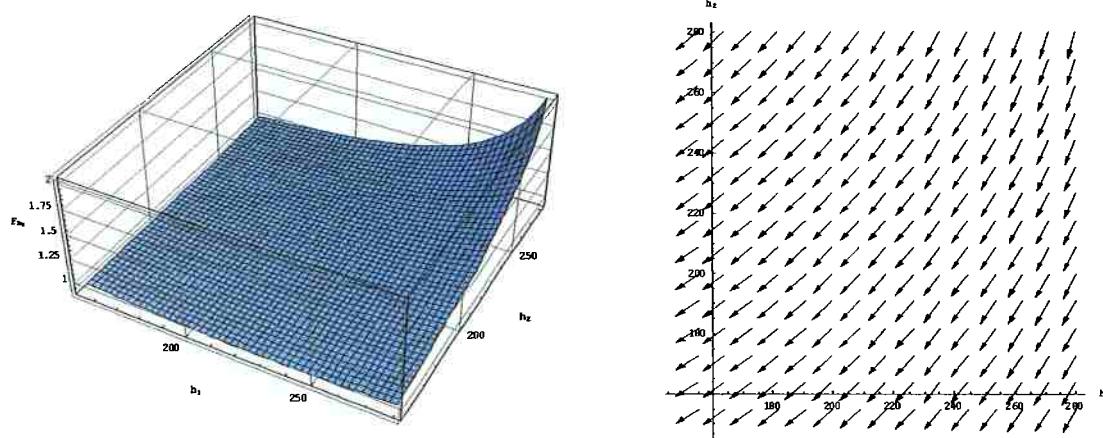


Figura 5.16 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.16 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 1 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.16 (b). Pela figura 5.16 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho é igual a 200% da força imposta ao efetuador.

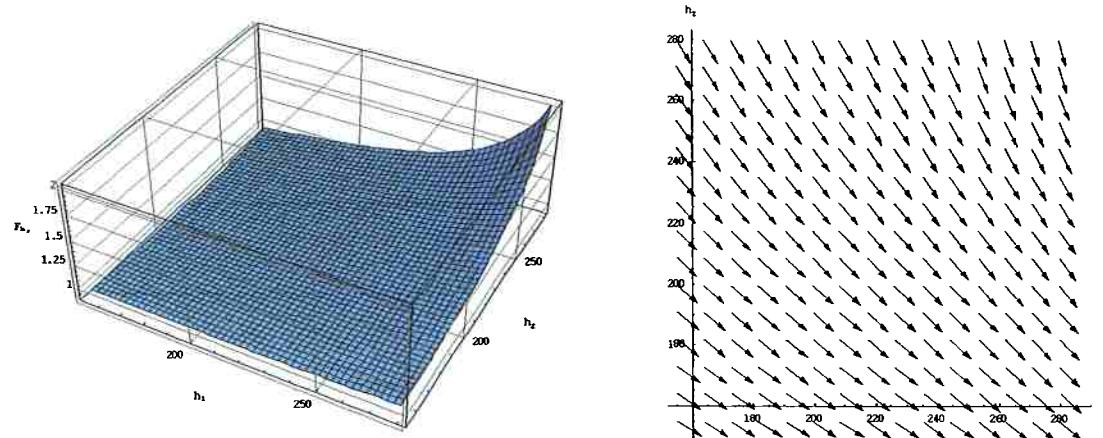


Figura 5.17 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.17 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 2 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.17 (b). Pela figura 5.17 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 2 no espaço de trabalho é igual a 200% da força imposta ao efetuador. Este ganho na força transmitida aos atuadores é mais crítico na parte inferior do espaço de trabalho do mecanismo.

5.1.2 $\alpha = 45^\circ$, $L = 250$ mm, Fuso mínimo = 155, Fuso máximo = 310

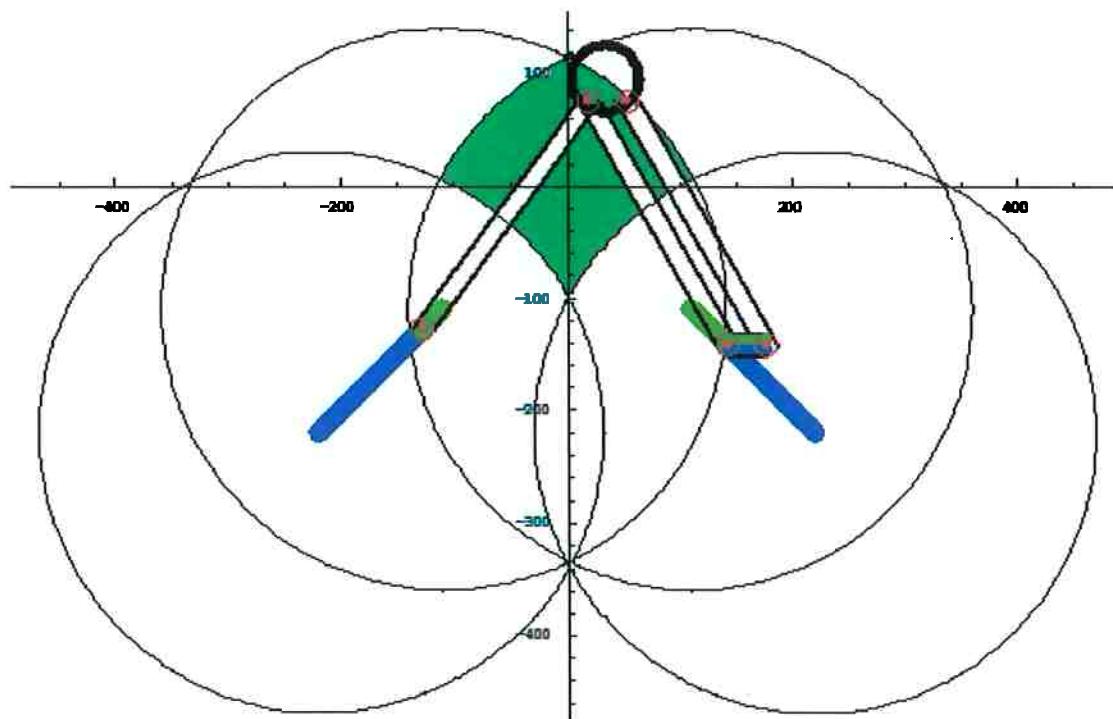


Figura 5.18 Mecanismo com o espaço de trabalho.

5.1.2.1 Área do Espaço de Trabalho

A área formada pelo espaço de trabalho do mecanismo é $24.036,2 \text{ mm}^2$ e a relação entre esta área e a formada por uma mesa cartesiana de mesmos comprimentos úteis dos fusos é 1,00047 o que indica que são aproximadamente iguais.

5.1.2.2 Resolução do Espaço de Trabalho

O espaço de trabalho possui regiões com maior precisão como indica a figura 5.19.

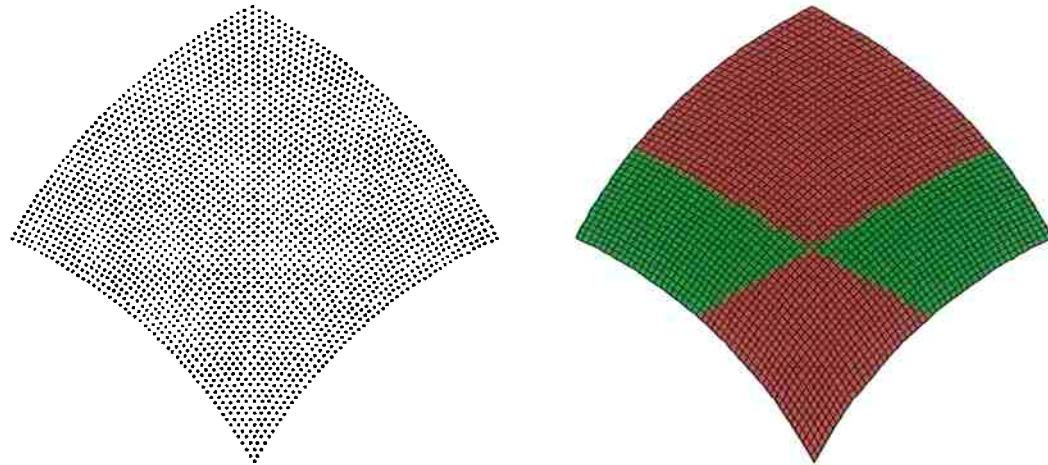


Figura 5.19 Ilustração mostrando as regiões de maior precisão do espaço de trabalho em verde.

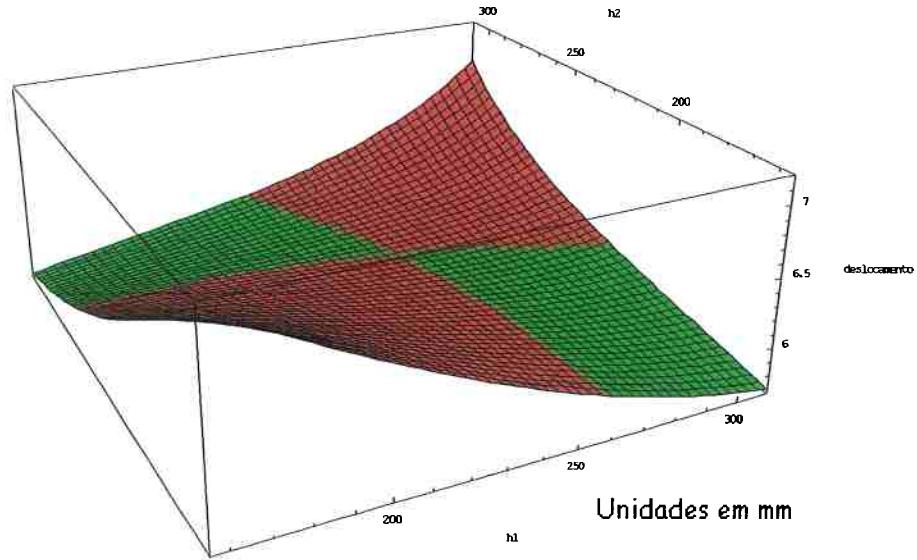


Figura 5.20 Distribuição do deslocamento no espaço de trabalho.

Esta configuração de mecanismo apresenta uma distribuição mais simétrica, com relação à precisão, de certas regiões do espaço de trabalho. Como pode ser visto na figura 5.20 a precisão nos extremos não é tão disparate quanto na configuração anterior. A resolução do mecanismo cai para aproximadamente 85% da resolução do mecanismo serial cartesiano na pior resolução de seu espaço de trabalho.

O espaço de trabalho foi plotado com passo igual a **3 unidades** em ambos os atuadores, portanto está hachurado de verde o que se encontra abaixo de **6 unidades** e vermelho o que está acima de **6 unidades**. Os valores máximos atingidos são próximos de **7 unidades**, o que demonstra uma melhor distribuição da precisão no espaço de trabalho.

5.1.2.3 VAT

Novamente para os testes de velocidades foram utilizadas velocidades no efetuador nas direções **X, Y e 45°**.

$$V_x = \sqrt{2}/2, V_y = \sqrt{2}/2, 45^\circ.$$

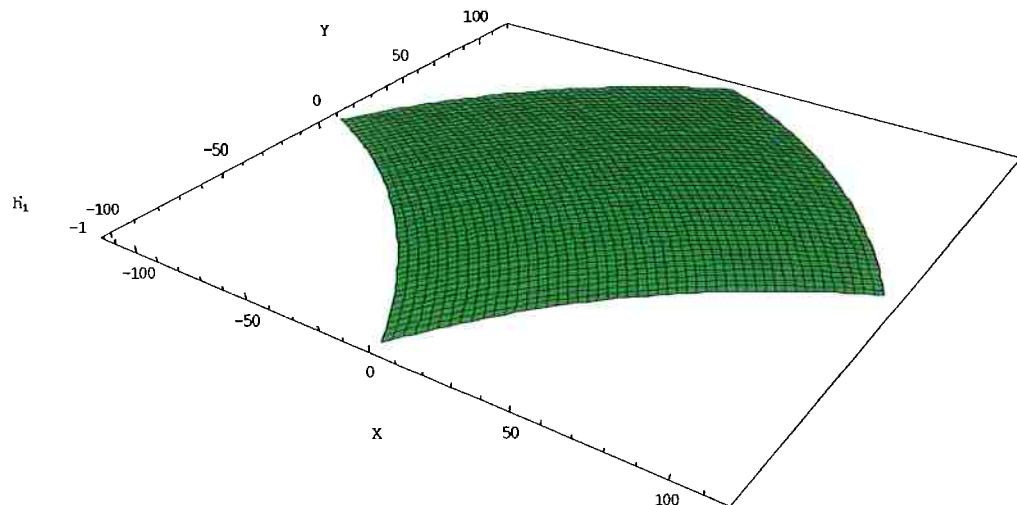


Figura 5.21 Velocidade no atuador 1 – direção 45°.

Vê-se que a velocidade do atuador um é igual em módulo à velocidade do efetuador já que o atuador possui a mesma direção da trajetória.

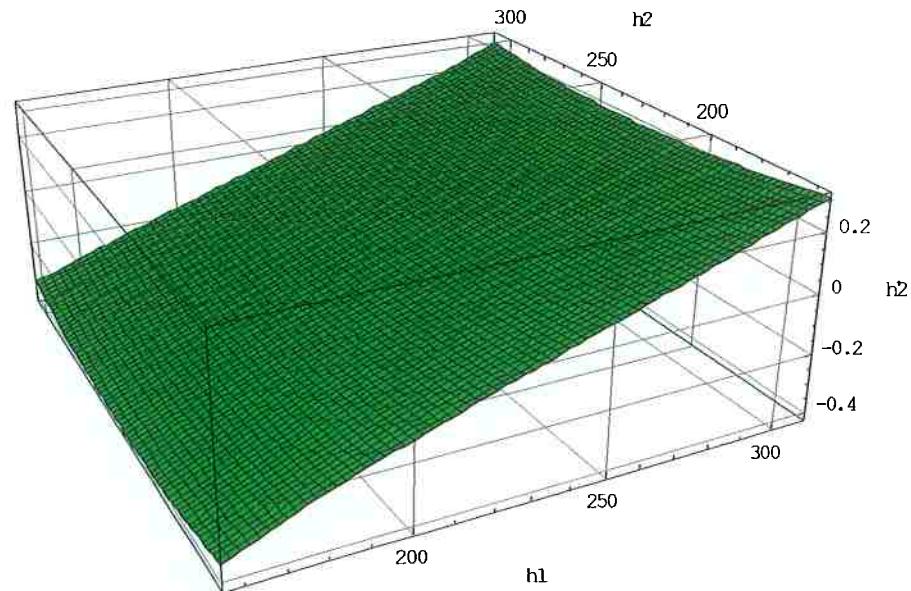


Figura 5.22 Velocidades do atuador 2 – direção 45°.

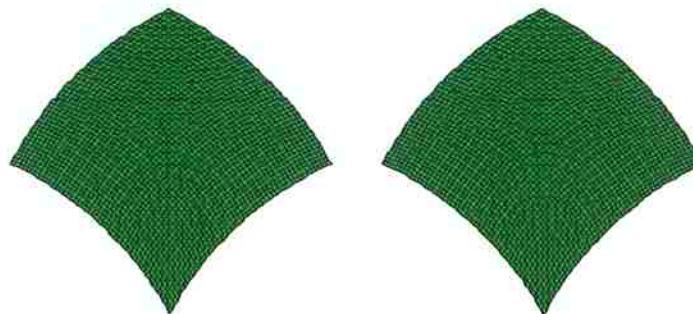


Figura 5.23 Projeção das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente.

No espaço de trabalho não há problemas de superação de velocidade nos atuadores para trajetórias a 45°.

$$\mathbf{Vx} = 1, \mathbf{Vy} = 0$$

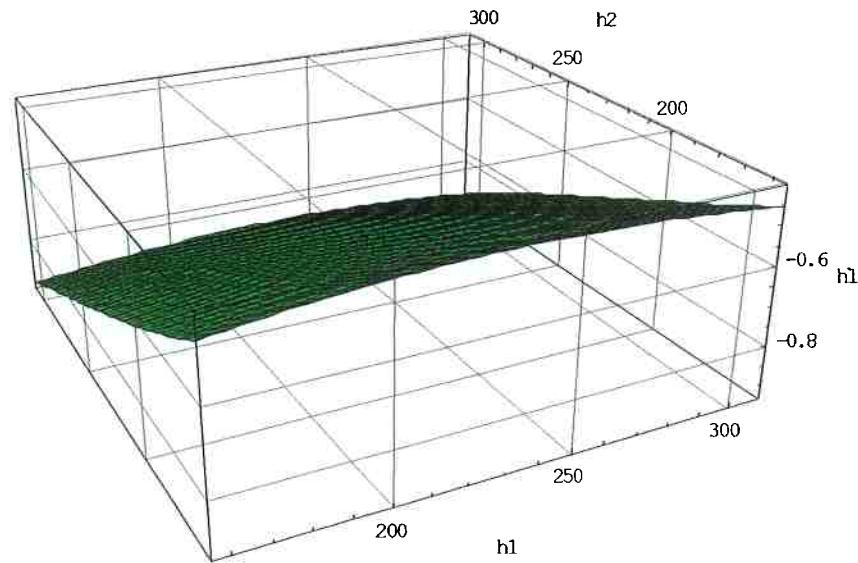


Figura 5.24 Velocidades do atuador 1 – direção X.

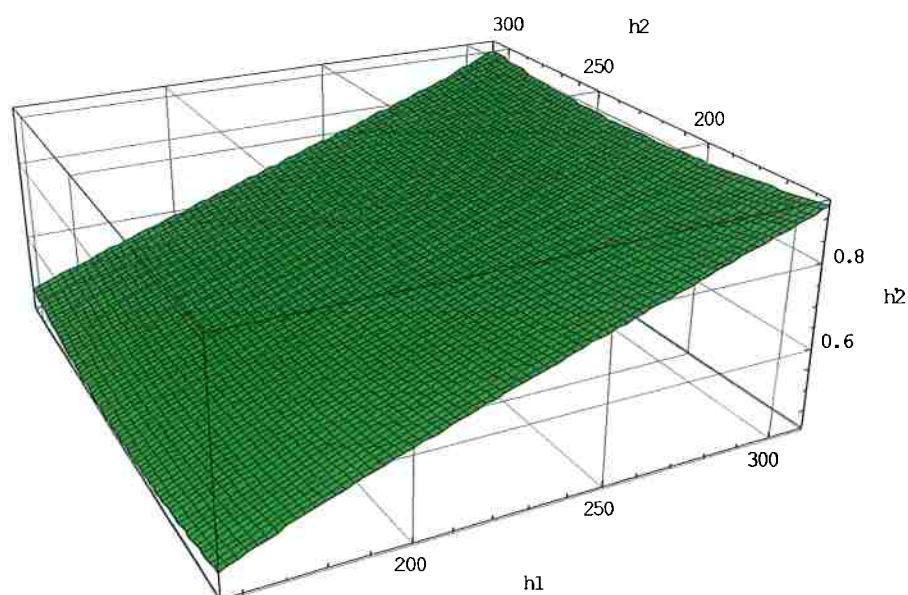


Figura 5.25 Velocidades do atuador 2 – direção X.

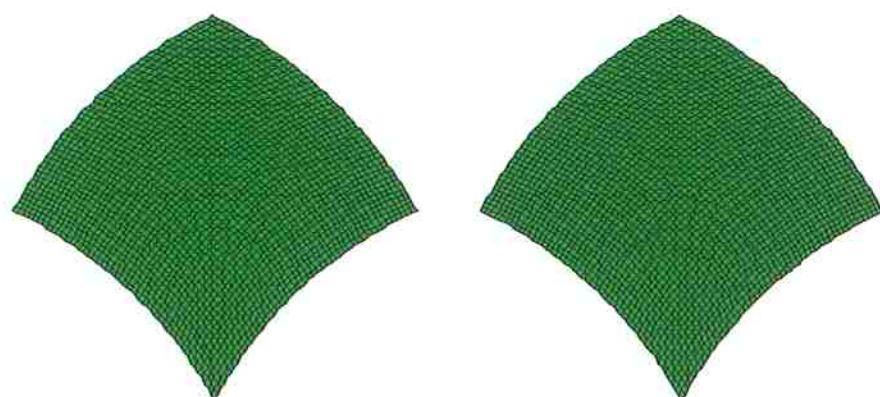


Figura 5.26 Projeção das velocidades dos atuadores 1 e 2.

No espaço de trabalho também não há problemas de superação de velocidade nos atuadores para trajetórias na direção X.

$$Vx = 0, Vy=1$$

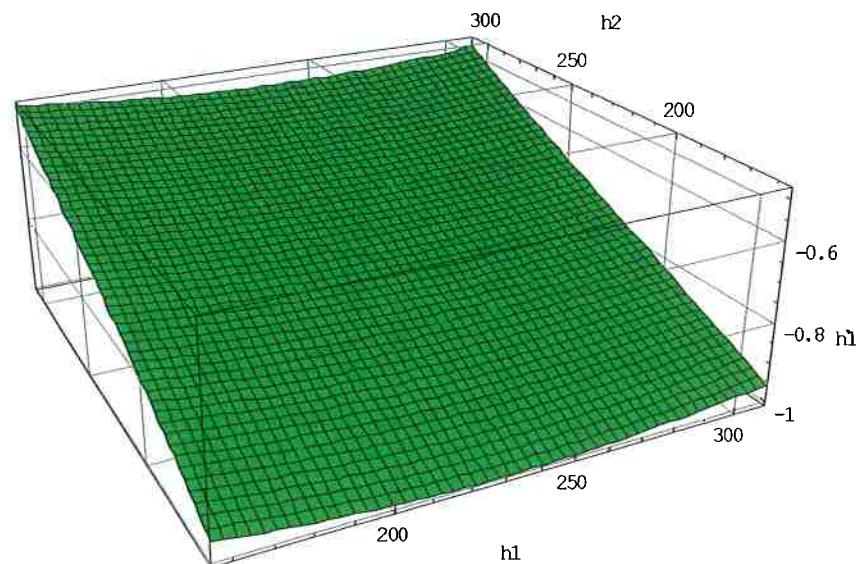


Figura 5.27 Velocidades no atuador 1 – direção Y.

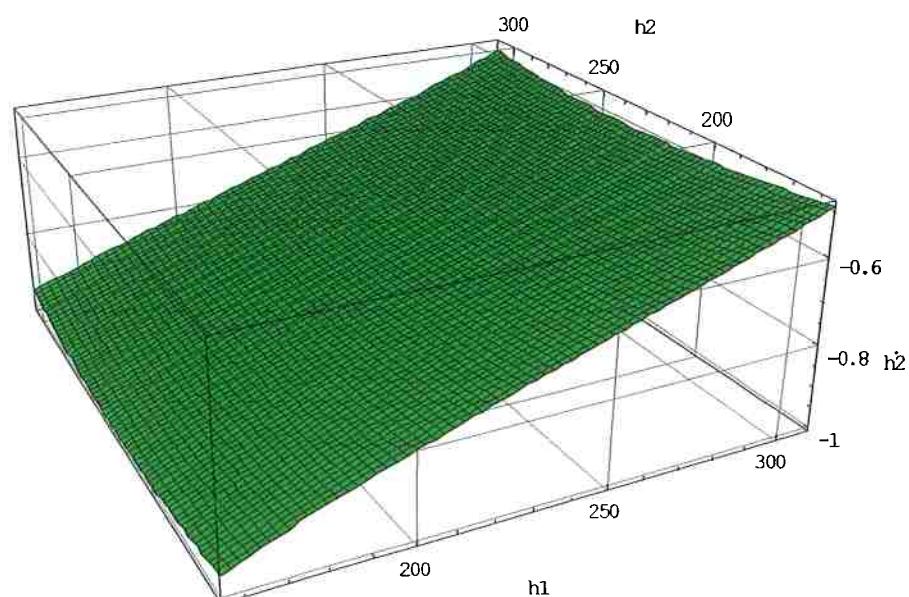


Figura 5.28 Velocidades no atuador 2 – direção Y.

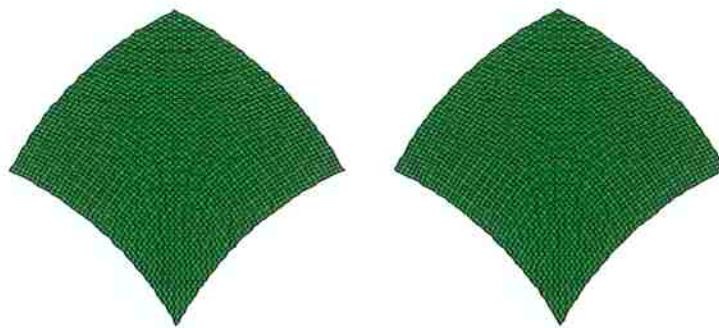


Figura 5.29 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2.

Também não há problemas de velocidades nos atuadores para trajetórias na direção Y.

5.1.2.4 MVA

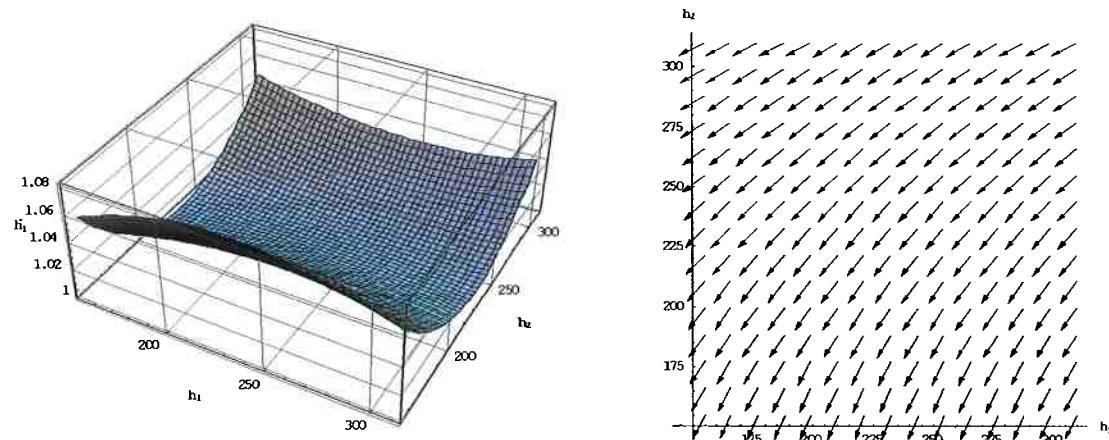


Figura 5.30 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.30 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 1 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.30 (b). Pela figura 5.30 (a) pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 1 no espaço de trabalho é de 8%.

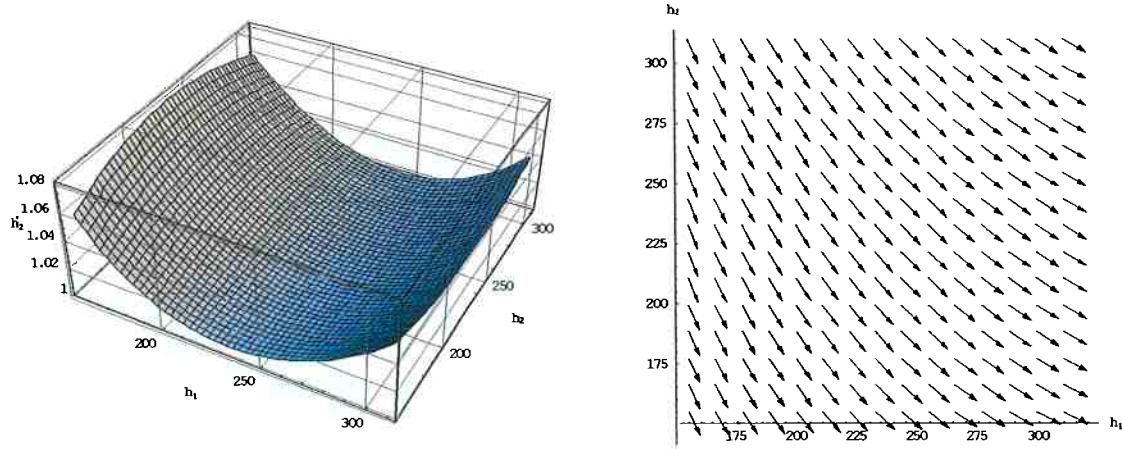


Figura 5.31 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 2 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.31 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 2 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.31 (b). Pela figura 5.31 (a) pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 2 no espaço de trabalho é de 8%.

5.1.2.5 Número de Condição do Jacobiano

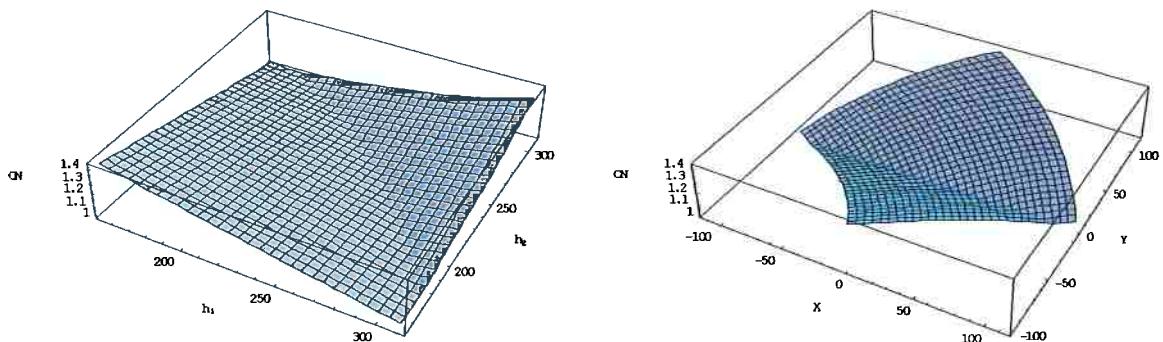


Figura 5.32 Número de condição do mecanismo, coordenadas dos atuadores e coordenadas cartesianas respectivamente.

O número de condição do mecanismo mostra que o mecanismo possui isotropia em uma faixa do espaço de trabalho, porém na fronteira do espaço de trabalho a anisotropia pode chegar a 1,4. Quanto mais anisotrópico o mecanismo pior a sua controlabilidade.

5.1.2.6 MFTA

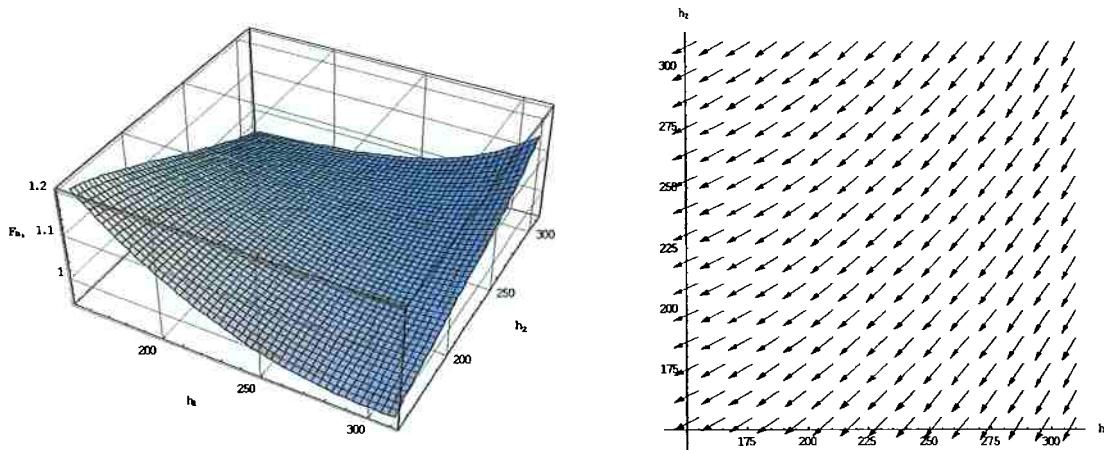


Figura 5.33 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.33 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 1 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.33 (b). Pela figura 5.33 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho é igual a 120% da força imposta ao efetuador.

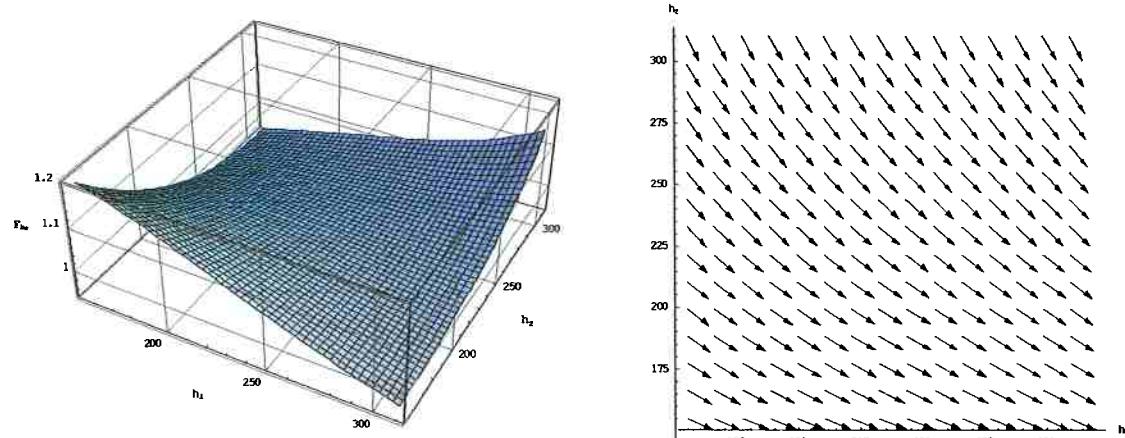


Figura 5.34 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.34 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 2 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.34 (b). Pela figura 5.34 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 2 no espaço de trabalho

é igual a 120% da força imposta ao efetuador. Este ganho na força transmitida aos atuadores é mais crítico na partes inferiores e superiores do espaço de trabalho do mecanismo.

5.1.3 $\alpha = 60^\circ$, $L = 250$ mm, Fuso mínimo = 155, Fuso máximo = 480

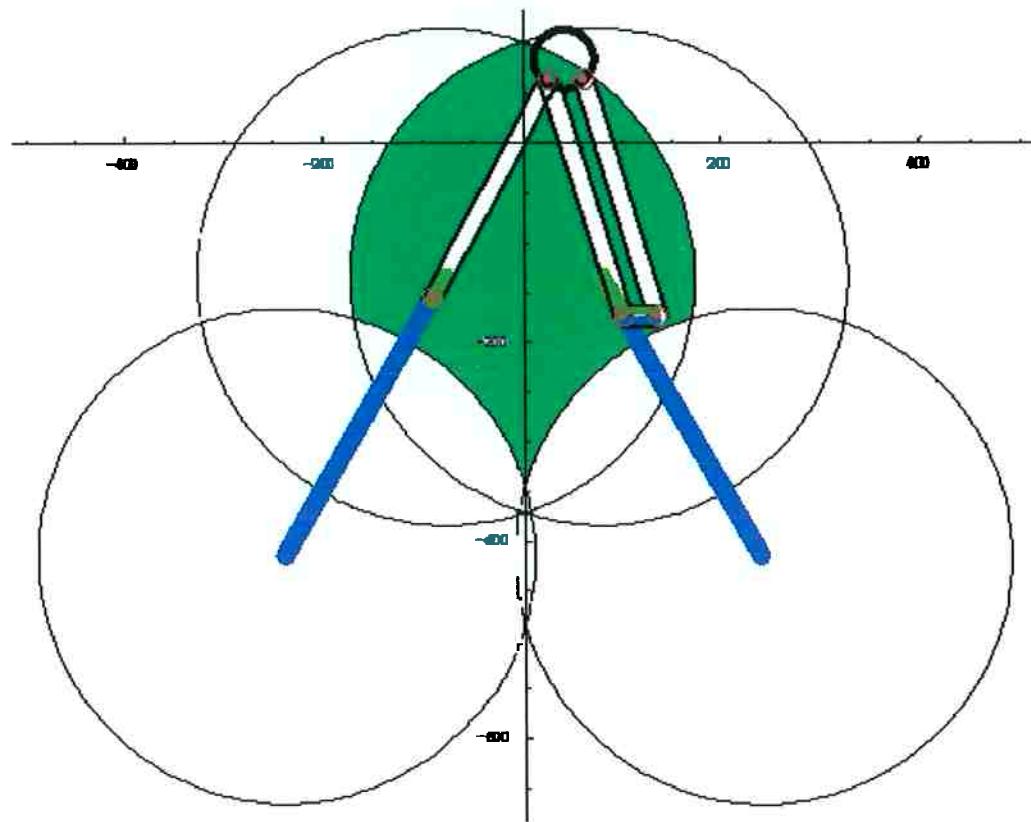


Figura 5.35 Ilustração do mecanismo e seu espaço de trabalho.

5.1.3.1 Área do Espaço de Trabalho

A área do espaço de trabalho do mecanismo é **93.161,6 mm²** e a relação com a área realizada por uma mesa cartesiana contendo fusos de mesmo comprimento é **0,88203**, o que indica que nesta configuração o mecanismo possui menor área de espaço de trabalho em relação à mesa cartesiana.

5.1.3.2 Resolução no Espaço de Trabalho

O espaço de trabalho possui uma área de maior precisão contínua e de tamanho adequado, como sugere a figura 5.36.

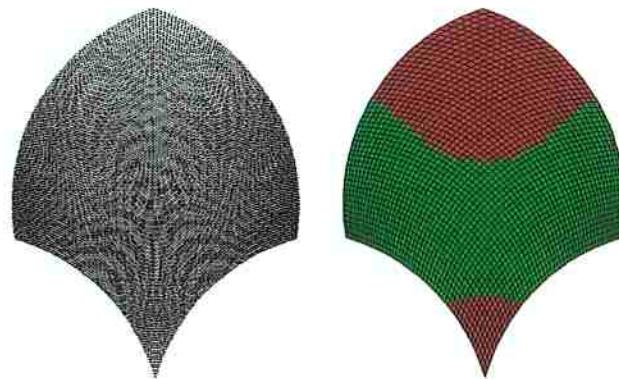


Figura 5.36 Regiões de diferentes precisoes no espaço de trabalho.

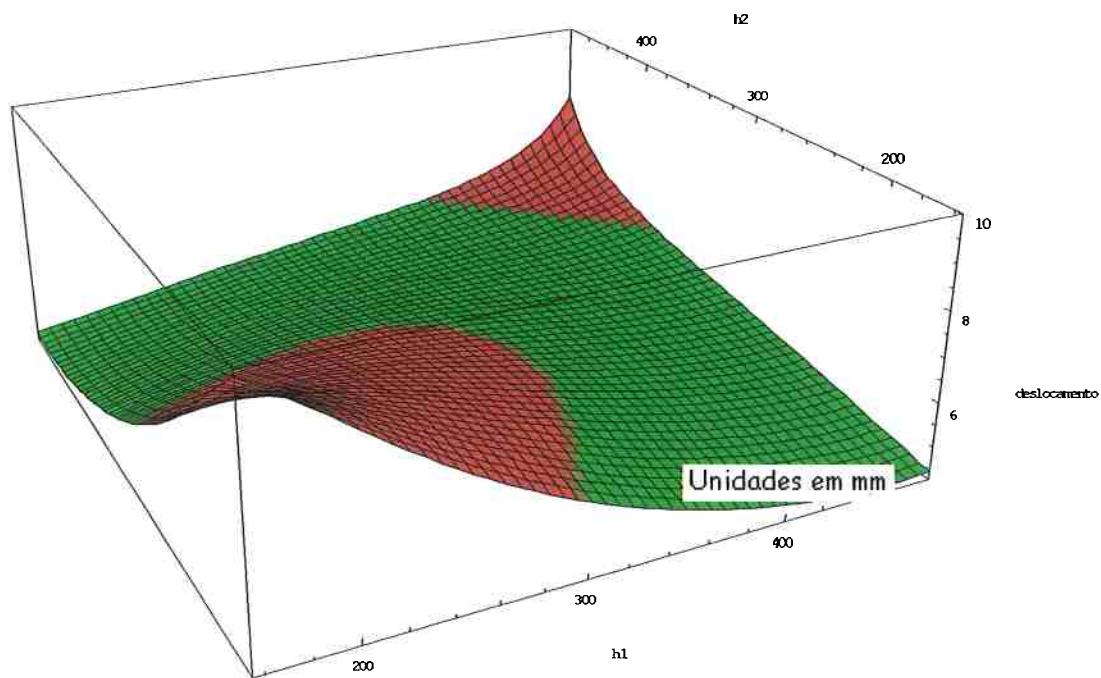


Figura 5.37 Distribuição do deslocamento no espaço de trabalho.

A resolução do mecanismo na parte superior do espaço de trabalho pode chegar a 60% da resolução do mecanismo cartesiano equivalente. Porém, no meio do espaço de trabalho, este pode ter sua resolução igual a 109 % da resolução do mecanismo cartesiano, mostrando um acréscimo de precisão que pode ser útil para dada tarefa.

5.1.3.3 VAT

Assim como nas configurações anteriores, os testes das velocidades dos atuadores foram realizados tomando-se três direções, **X**, **Y** e **45°**,

$$Vx=0, Vy=1$$

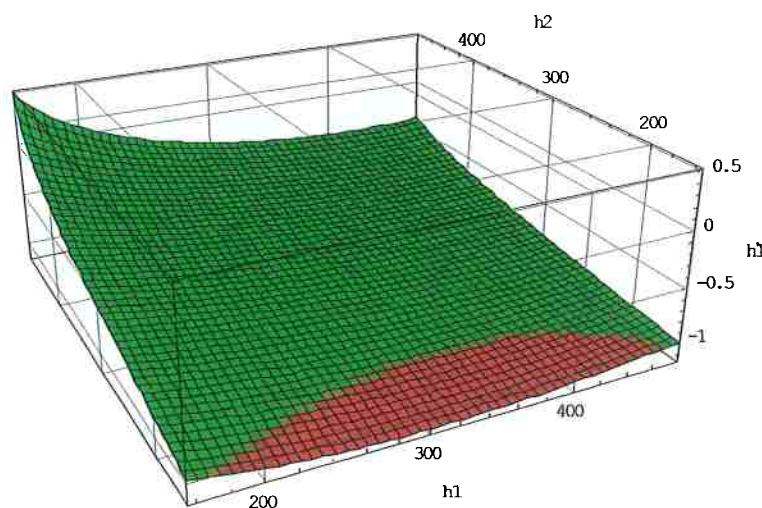


Figura 5.38 Velocidades no atuador 1 – direção Y.

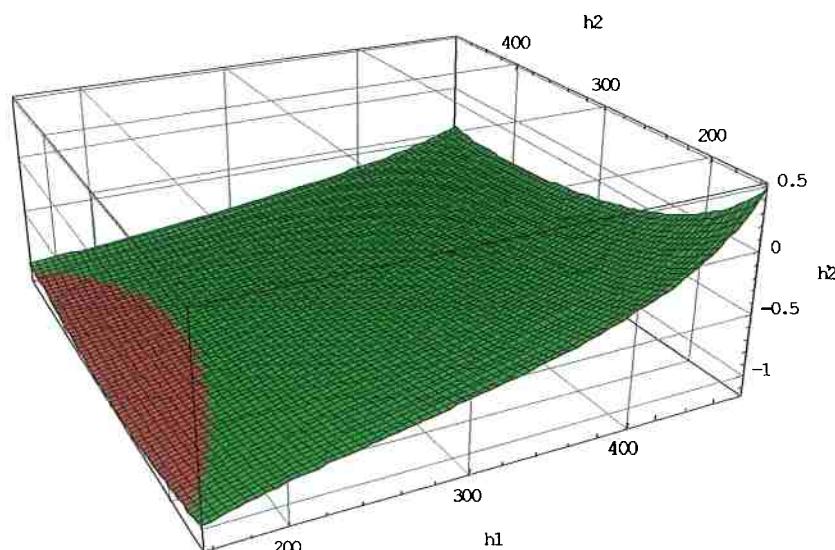


Figura 5.39 Velocidades no atuador 2 – direção Y.

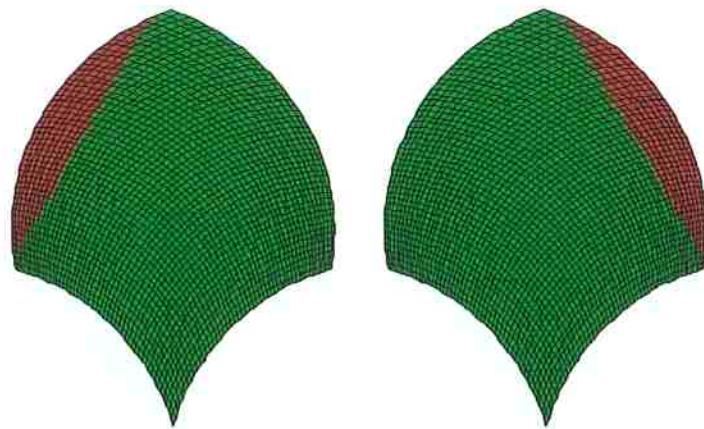


Figura 5.40 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente.

Vê-se uma pequena superação de 12% nas velocidades dos atuadores em regiões laterais do espaço de trabalho para trajetórias na direção Y.

$$Vx=1, Vy=0$$

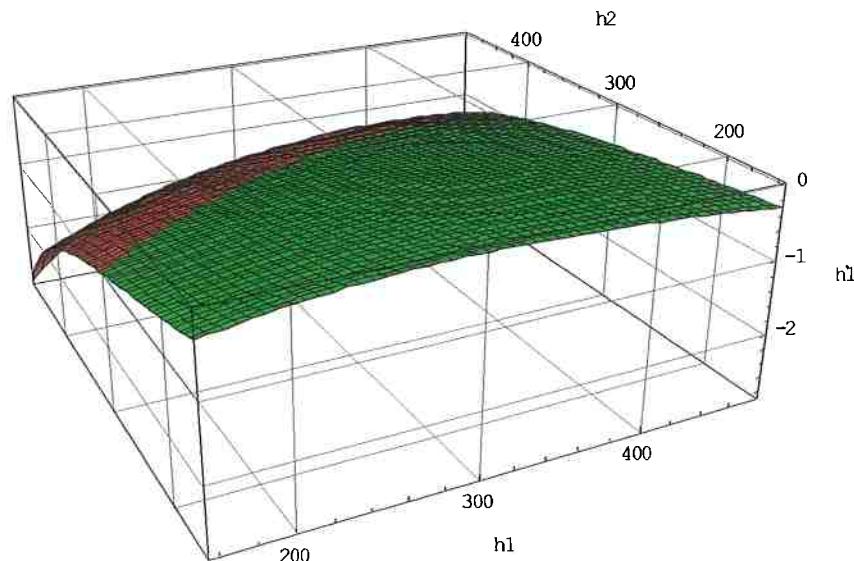


Figura 5.41 Velocidades no atuador 1 – direção X.

Na figura acima se constata um aumento de 150% da velocidade do efetuador para o atuador 1 em certa região do espaço de trabalho, o que pode vir a danificar os atuadores se esta região for solicitada pela trajetória da usinagem em alta velocidade.

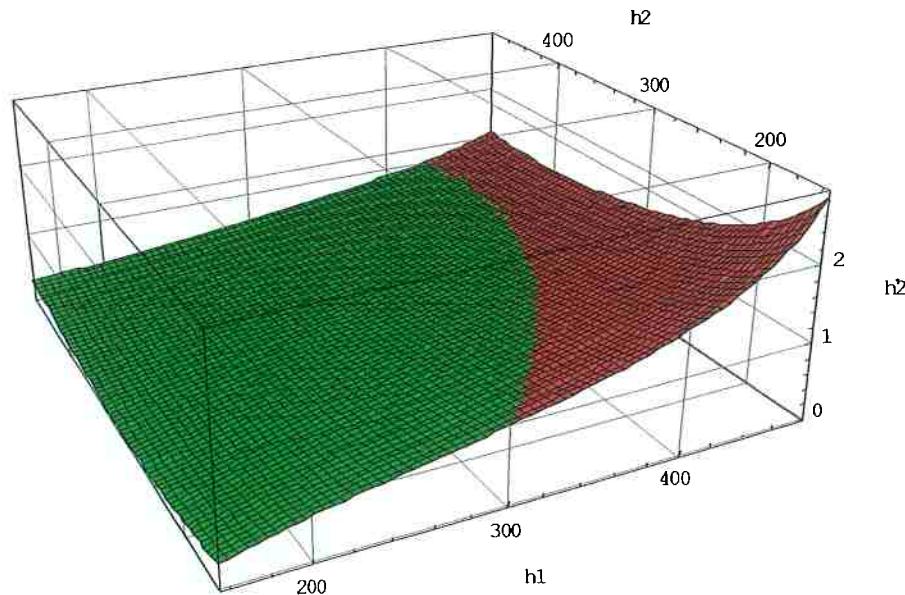


Figura 5.42 Velocidades no atuador 2 – direção X.

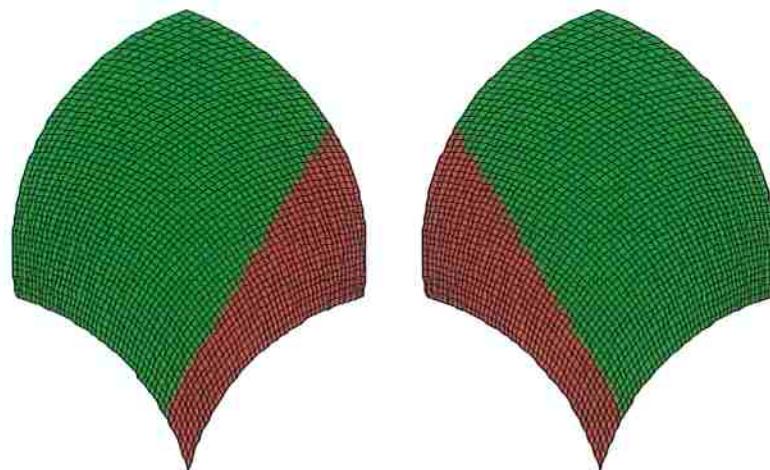


Figura 5.43 Projeções das velocidades dos atuadores 1 e2 respectivamente.

Nesta configuração, para trajetórias do efetuador na direção X, pode ocorrer uma grande superação na velocidade dos atuadores (podendo chegar a até 150%), o que pode vir a ser prejudicial para a máquina e para os atuadores.

$$V_x = \sqrt{2}/2, V_y = \sqrt{2}/2 \rightarrow 45^\circ$$

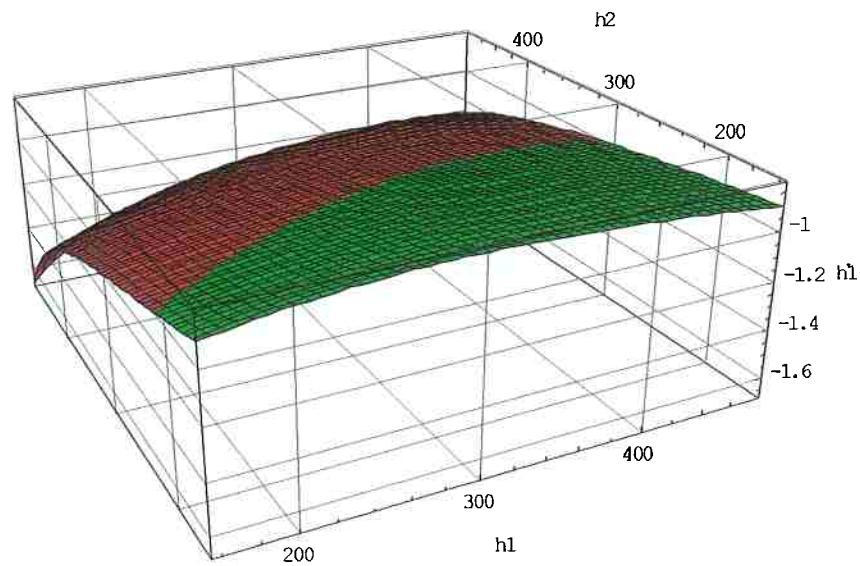


Figura 5.44 Velocidades do atuador 1 – direção 45°.

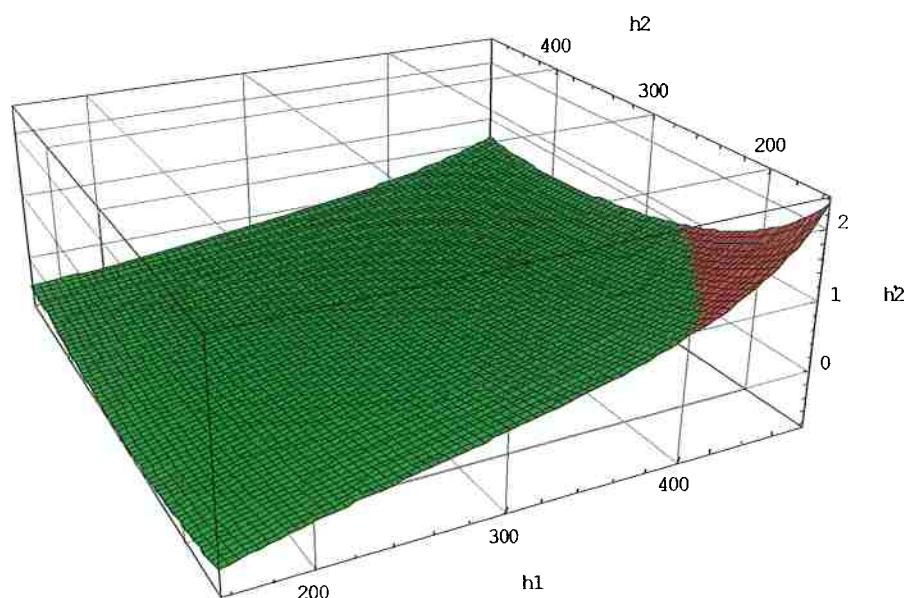


Figura 5.45 Velocidades do atuador 2 – direção 45°.

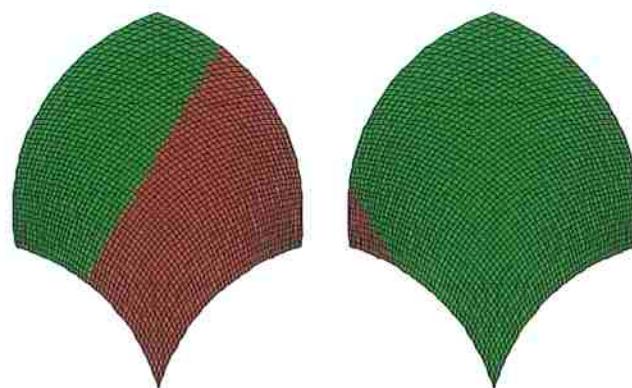


Figura 5.46 Projeções das velocidades dos atuadores 1 e 2 respectivamente.

Para trajetórias a quarenta e cinco graus o mecanismo apresenta uma ampla região no espaço de trabalho onde existe uma superação da velocidade do efetuador em um dos atuadores. Esta superação é da ordem de 60% como mostra a figura 5.44 e pode chegar a até 120% como mostra a figura 5.45.

5.1.3.4 MVA

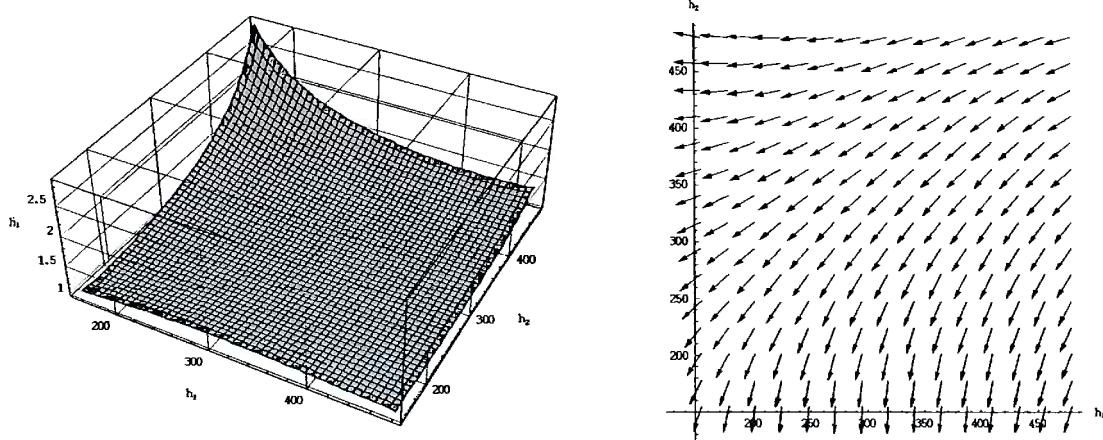


Figura 5.47 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.47 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 1 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.47 (b). Pela figura 5.47 (a) pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 1 no espaço de trabalho é de 180%.

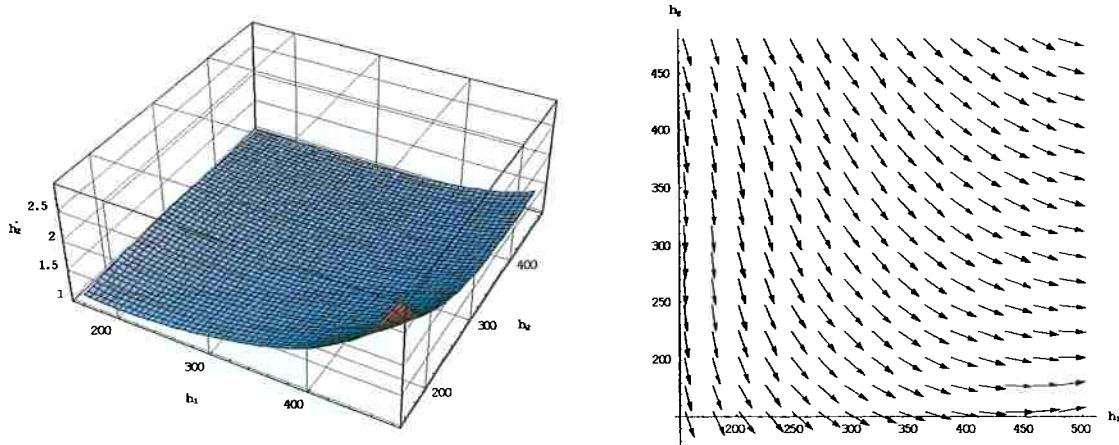


Figura 5.48 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 2 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.48 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 2 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.48 (b). Pela figura 5.48 (a) pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 2 no espaço de trabalho é de 180%.

5.1.3.5 Número de Condição do Jacobiano

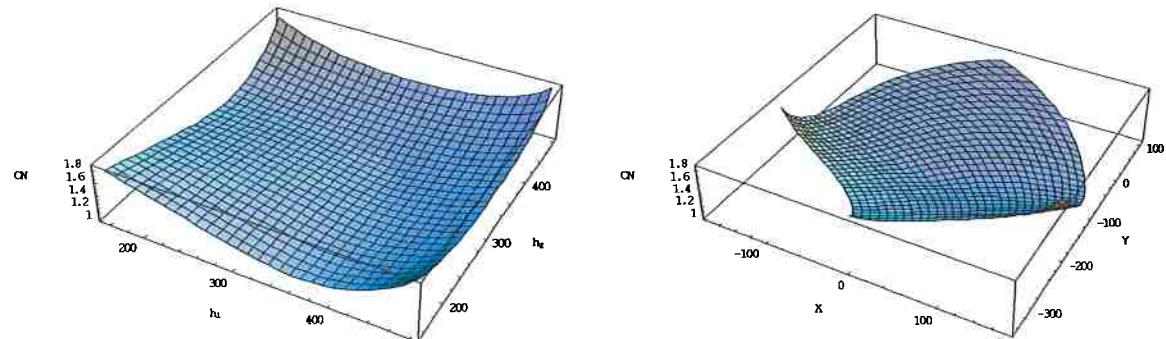


Figura 5.49 Número de condição do mecanismo, coordenadas dos atuadores e coordenadas cartesianas respectivamente.

O número de condição do mecanismo mostra que o mecanismo possui isotropia em uma faixa do espaço de trabalho, porém na fronteira do espaço de trabalho a anisotropia pode chegar a 1,8. Quanto mais anisotrópico o mecanismo pior a sua controlabilidade.

5.1.3.6 MFTA

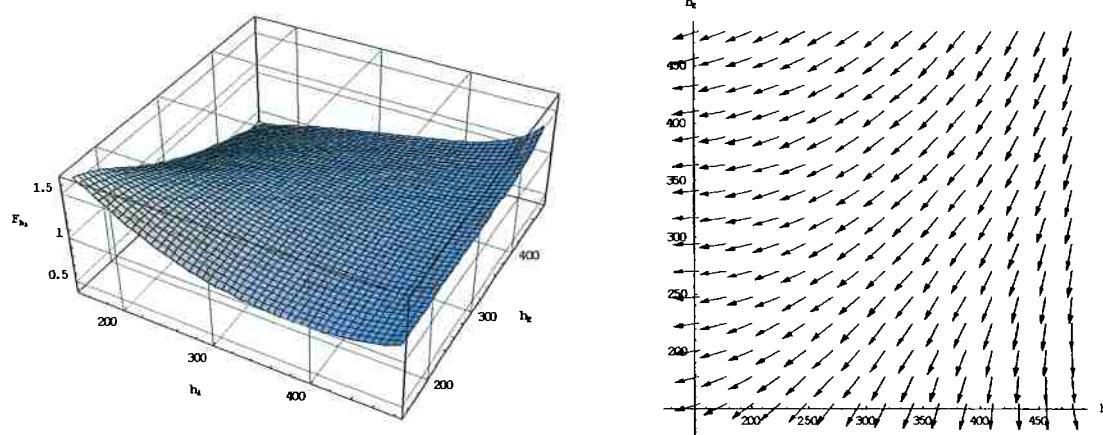


Figura 5.50 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.50 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 1 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.50 (b). Pela figura 5.50 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho é igual a 150% da força imposta ao efetuador.

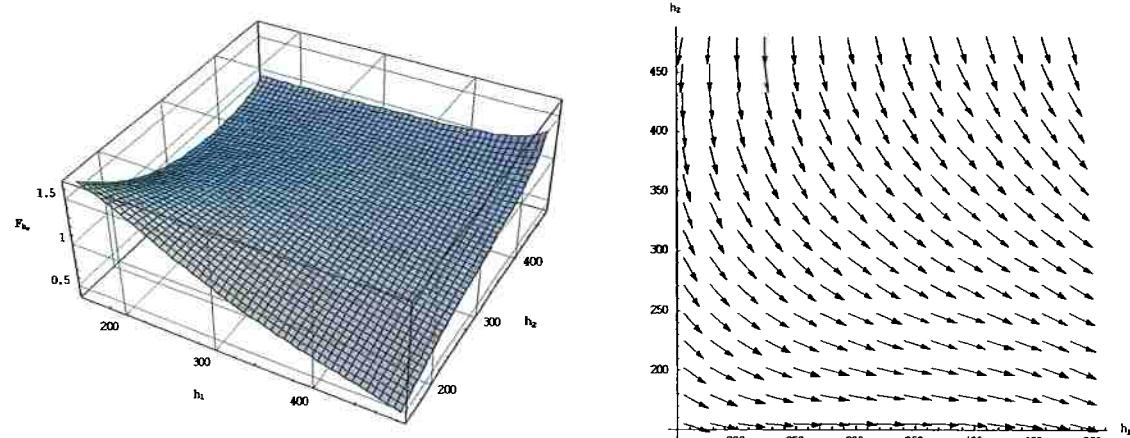


Figura 5.51 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.51 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 2 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.51 (b). Pela figura 5.51 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 2 no espaço de trabalho é igual a 150% da força imposta ao efetuador. Este ganho na força transmitida aos atuadores é mais crítico na partes inferiores e superiores do espaço de trabalho do mecanismo.

5.1.4 Mecanismo da Genius 500

$$M = 315 \text{ mm}, L = 708 \text{ mm}, \text{ Fuso mínimo} = 0 \text{ mm}, \text{ Fuso máximo} = 315 \text{ mm}$$

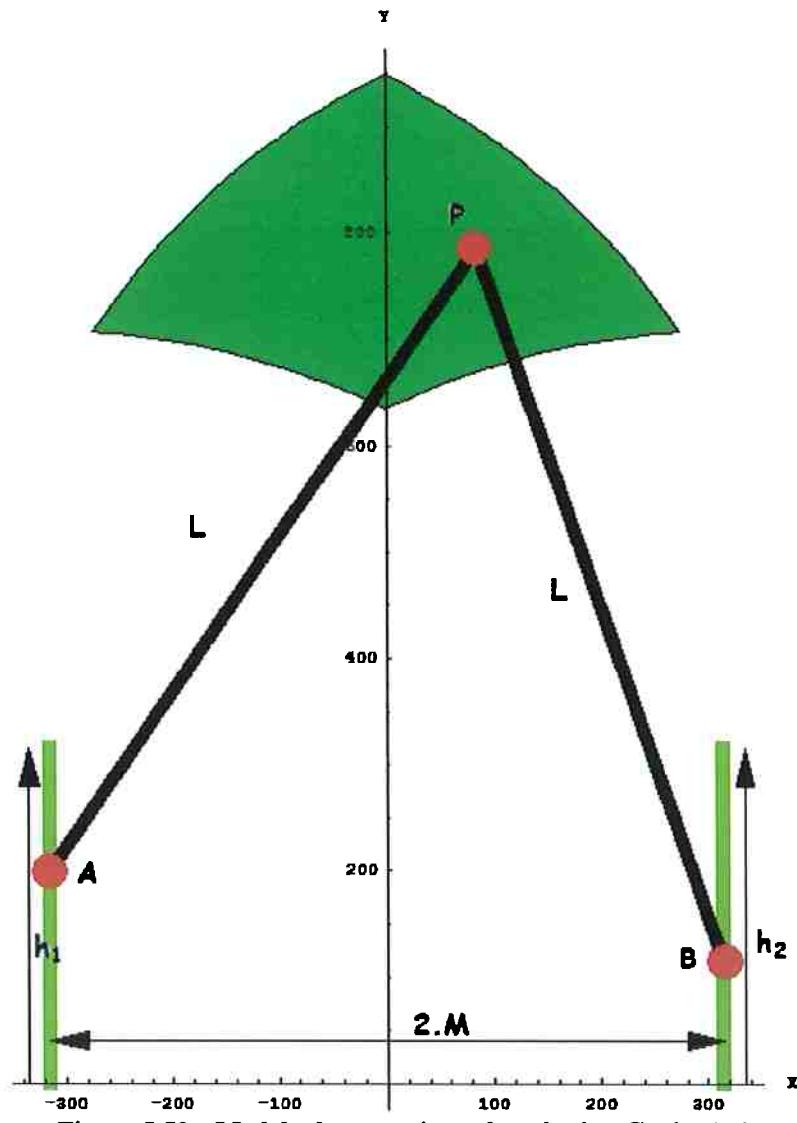


Figura 5.52 – Modelo do mecanismo da máquina Genius 500.

Assim como no modelo anterior é necessário saber de antemão as cinemáticas inversa e direta do mecanismo para avaliar seu desempenho.

$$\mathbf{P} = \mathbf{X} + \mathbf{i} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M} + \mathbf{i} \mathbf{h}_1$$

$$\mathbf{B} = +\mathbf{M} + \mathbf{i} \mathbf{h}_2$$

, sabendo que $\|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| = \mathbf{L}$ e $\|\mathbf{P}-\mathbf{B}\| = \mathbf{L}$, e isolando nas variáveis \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 , obtém-se a cinemática inversa do mecanismo:

$$\mathbf{h}_1 = \sqrt{\mathbf{L}^2 - (\mathbf{M} + \mathbf{X})^2} + \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{h}_2 = \sqrt{(\mathbf{L} + \mathbf{M} - \mathbf{X})(\mathbf{L} - \mathbf{M} + \mathbf{X})} + \mathbf{Y}$$

Utilizando o mesmo sistema, porém isolando as variáveis \mathbf{X} e \mathbf{Y} , obtém-se a cinemática direta:

$$\mathbf{X} = \left(\sqrt{-\mathbf{M}^2 (4\mathbf{M}^2 + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2) (-4(\mathbf{L} - \mathbf{M})(\mathbf{L} + \mathbf{M}) + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2)} (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2) \right) / (2\mathbf{M}(4\mathbf{M}^2 + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2))$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\sqrt{-\mathbf{M}^2 (4\mathbf{M}^2 + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2) (-4(\mathbf{L} - \mathbf{M})(\mathbf{L} + \mathbf{M}) + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2)}}{4\mathbf{M}^2 + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)^2} + \frac{1}{2} (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2)$$

Derivando e colocando na forma matricial encontra-se o Jacobiano:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{h}}_1 \\ \dot{\mathbf{h}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(\mathbf{M}+\mathbf{X})}{\sqrt{\mathbf{L}^2-(\mathbf{M}+\mathbf{X})^2}} & 1 \\ \frac{(\mathbf{M}-\mathbf{X})}{\sqrt{(\mathbf{L}+\mathbf{M}-\mathbf{X})(\mathbf{L}-\mathbf{M}+\mathbf{X})}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{(\mathbf{M}+\mathbf{X})}{\mathbf{h}_1-\mathbf{Y}} & 1 \\ \frac{(\mathbf{M}-\mathbf{X})}{\mathbf{h}_2-\mathbf{Y}} & 1 \end{pmatrix}$$

5.1.4.1 Área do Espaço de Trabalho

A área ocupada pelo espaço de trabalho do mecanismo é igual a $92.857,5 \text{ mm}^2$, caso os mesmos fusos fossem utilizados em uma configuração serial a área seria $315^2 = 99.225 \text{ mm}^2$. Portanto a área ocupada pelo espaço de trabalho do mecanismo é menor na razão de $0,935828$.

5.1.4.2 Resolução no Espaço de Trabalho

Quanto à precisão no espaço de trabalho, foi utilizado o mesmo algoritmo citado anteriormente e obteve-se o seguinte:

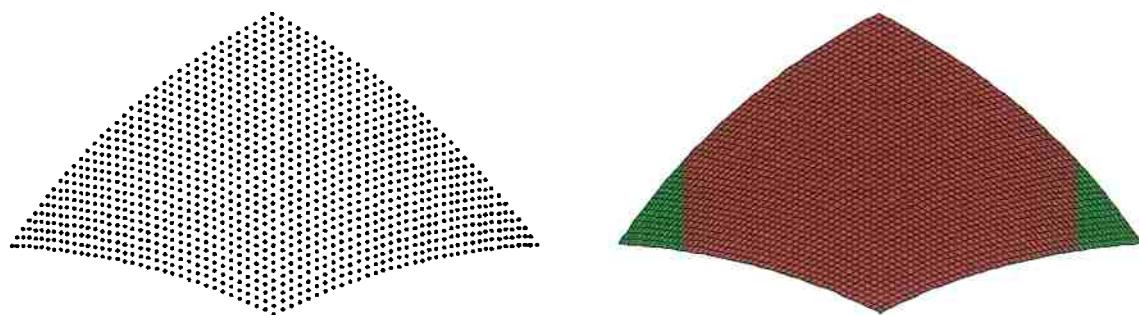


Figura 5.53 Resolução do mecanismo no espaço de trabalho.

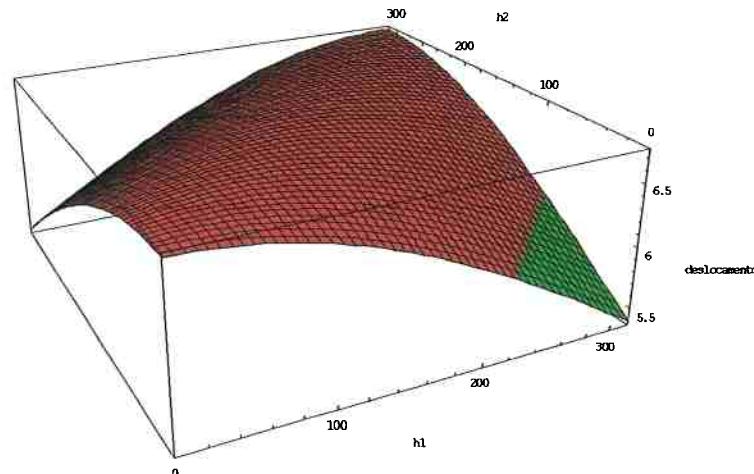


Figura 5.54 – Resolução no espaço de trabalho, coordenadas dos atuadores.

A figura 5.54 mostra que quase todo o espaço de trabalho possui uma resolução maior que a máquina cartesiana equivalente, este aumento é de no máximo 11%.

5.1.4.3 VAT

Assim como nas configurações anteriores, os testes das velocidades dos atuadores foram realizados tomando-se três direções, **X**, **Y** e **45°**, o módulo da velocidade imposta ao efetuador é sempre igual a unidade para efeito de comparação.

$$V_x = \sqrt{2}/2, V_y = \sqrt{2}/2, 45^\circ$$

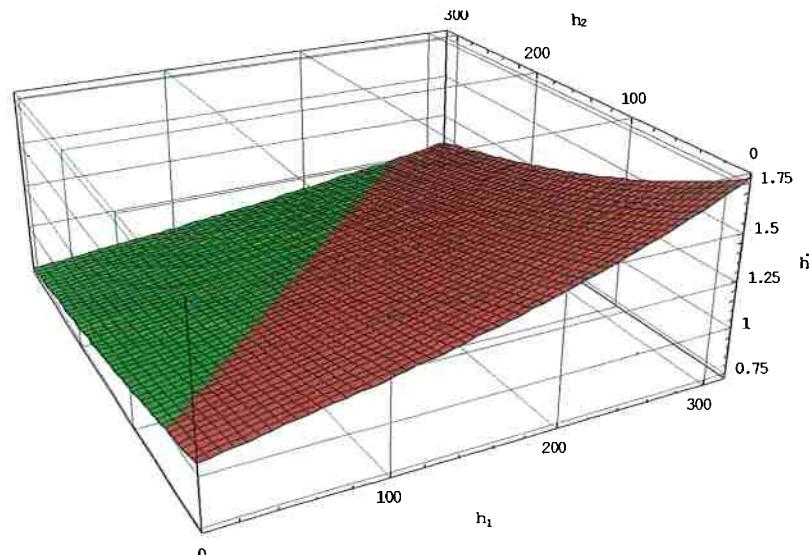


Figura 5.55 Velocidade no atuador 1 para a direção 45° .

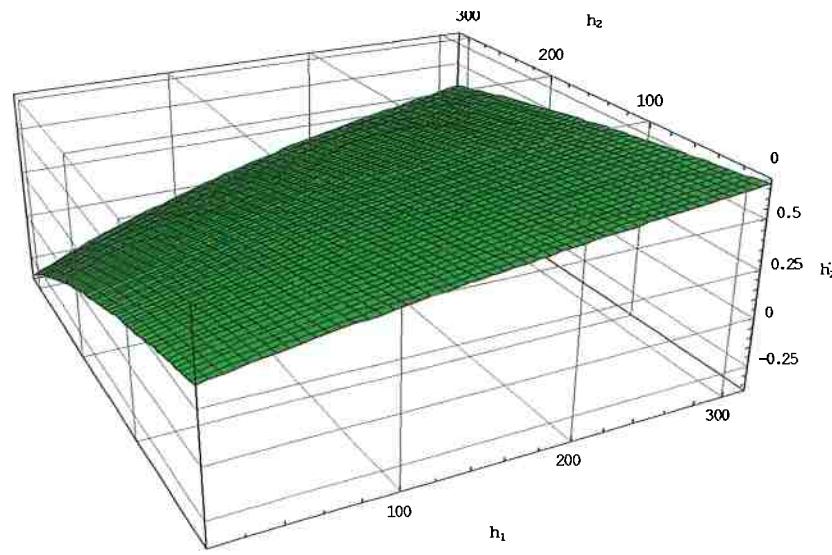


Figura 5.56 Velocidade no atuador 2 para a direção 45° .

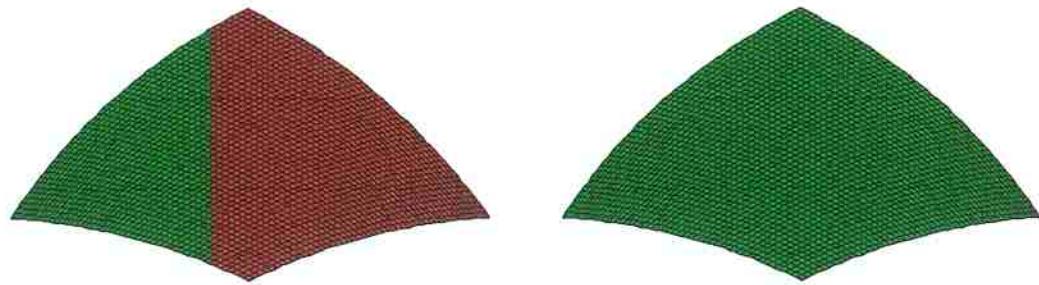


Figura 5.57 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente para a direção 45° .

Para trajetórias a 45° o mecanismo apresenta sobrevelocidade de até 75% em um dos atuadores o que pode vir a danificar ou exigir em demasia do controlador do motor do atuador.

$$Vx=1, Vy=0$$

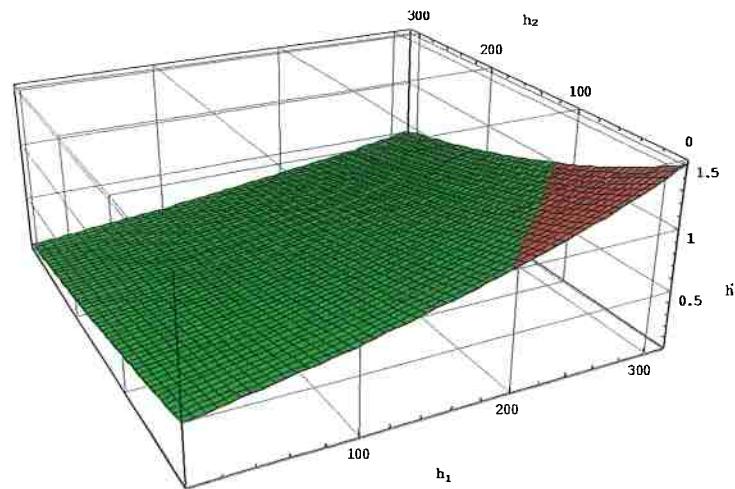


Figura 5.58 Velocidade no atuador 1 para a direção X.

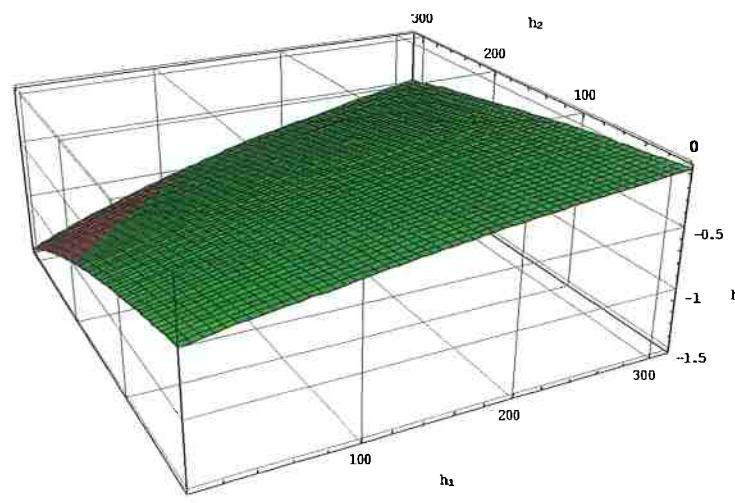


Figura 5.59 Velocidade no atuador 2 para a direção X.

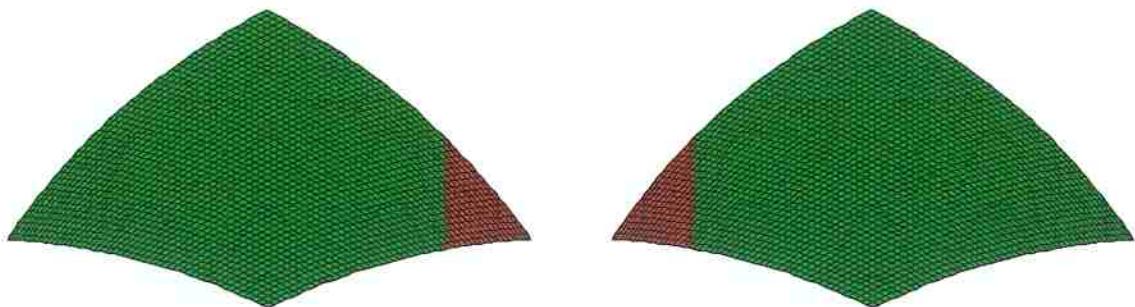


Figura 5.60 Projeção das velocidades nos atuadores 1 e 2 respectivamente para a direção X.

Há uma pequena região de sobrevelocidade nos atuadores para trajetórias na direção X. Porém esta sobrevelocidade chega a 50%.

$$Vx=0, Vy=1$$

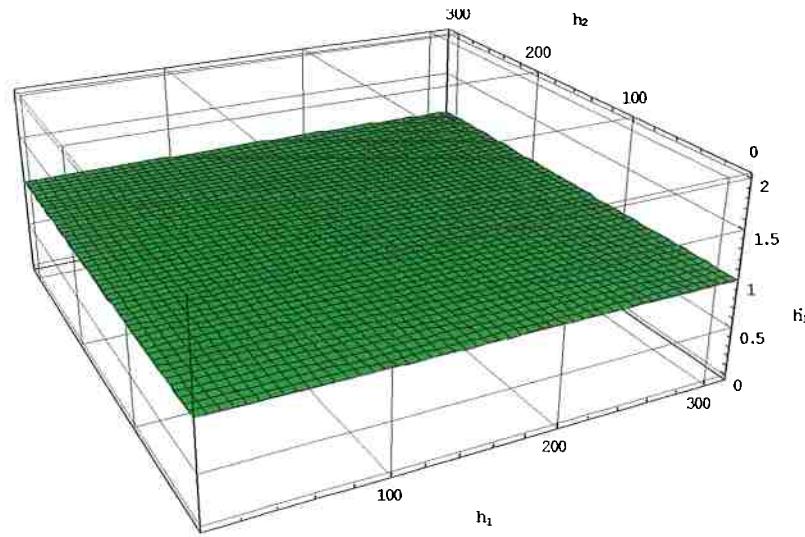


Figura 5.61 Velocidade no atuador 1 para direção Y.

Devido à arquitetura do mecanismo este é isotrópico para a direção Y, como pode ser comprovado através do Jacobiano e também mostrado na figura 5.61, logo não haverá modificações nas velocidades dos atuadores para a direção Y.

5.1.4.4 MVA

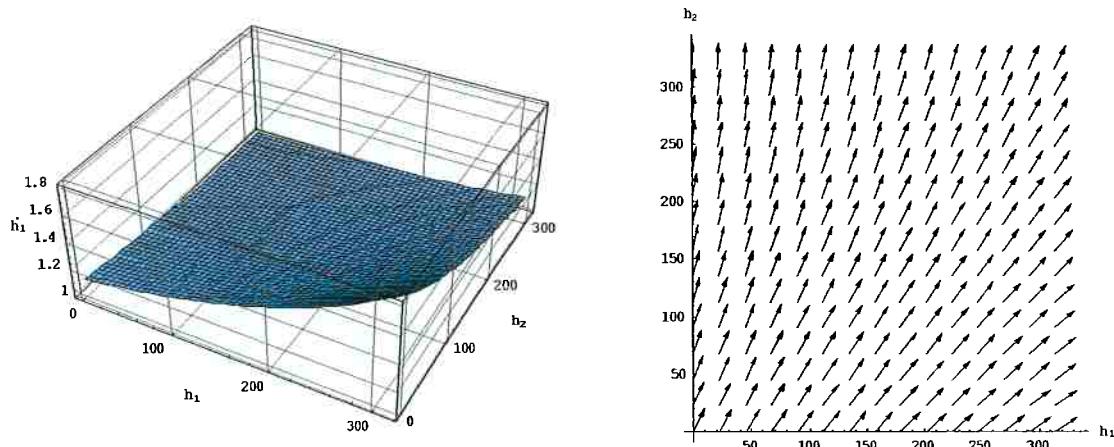


Figura 5.62 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.62 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 1 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.62 (b). Pela figura 5.62 (a) pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 1 no espaço de trabalho é de 80%.

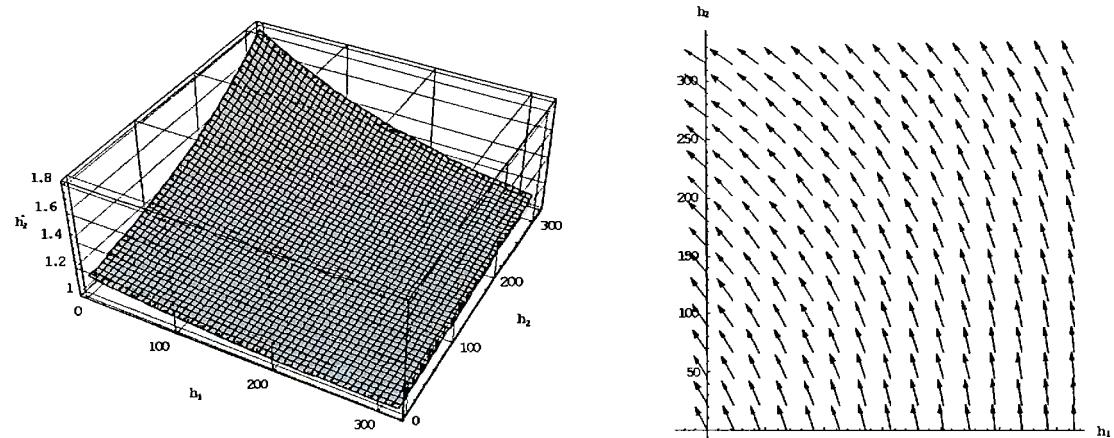


Figura 5.63 a) Módulo da máxima velocidade no atuador 2 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da velocidade imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.63 (a) mostra o valor da máxima velocidade no atuador 2 causada por uma velocidade imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.63 (b). Pela figura 5.63 (a)

pode-se ver que a máxima sobrevelocidade possível do atuador 2 no espaço de trabalho é de 80%.

5.1.4.5 Número de Condição do Jacobiano

Uma forma de conhecer a isotropia do mecanismo, ou seja, qual o grau da distorção imposta à velocidade e força através do Jacobiano é conhecer o número de condição do Jacobiano no espaço de trabalho.

Este número é a razão das raízes quadradas entre o máximo valor singular e o mínimo valor singular da matriz jacobiano J , e por definição possui valor mínimo unitário, ou seja, isotrópico.

A figura 5.64 mostra o número de condição do mecanismo no seu espaço de trabalho.

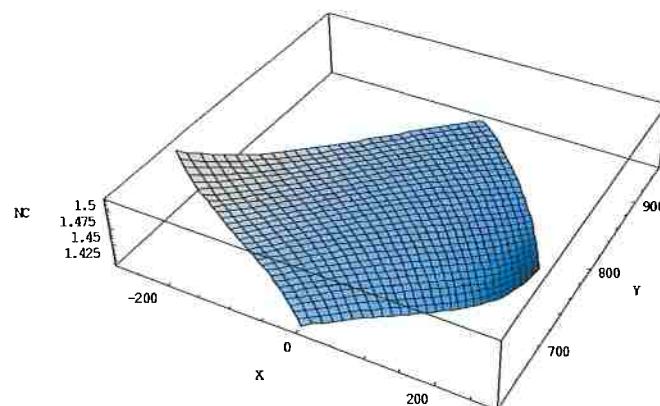


Figura 5.64 Número de condição do mecanismo no espaço de trabalho em coordenadas cartesianas.

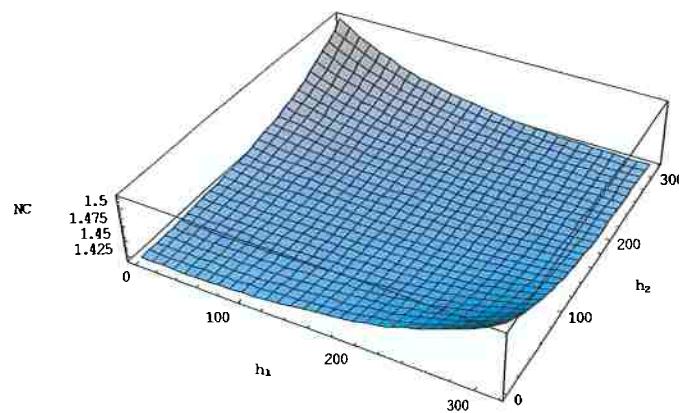


Figura 5.65 Número de condição do mecanismo no espaço de trabalho em coordenadas dos atuadores.

As figuras 5.64 e 5.65 mostram que o mecanismo é anisotrópico em todo o espaço de trabalho, seu valor podendo chegar a 1,5.

5.1.4.6 MFTA

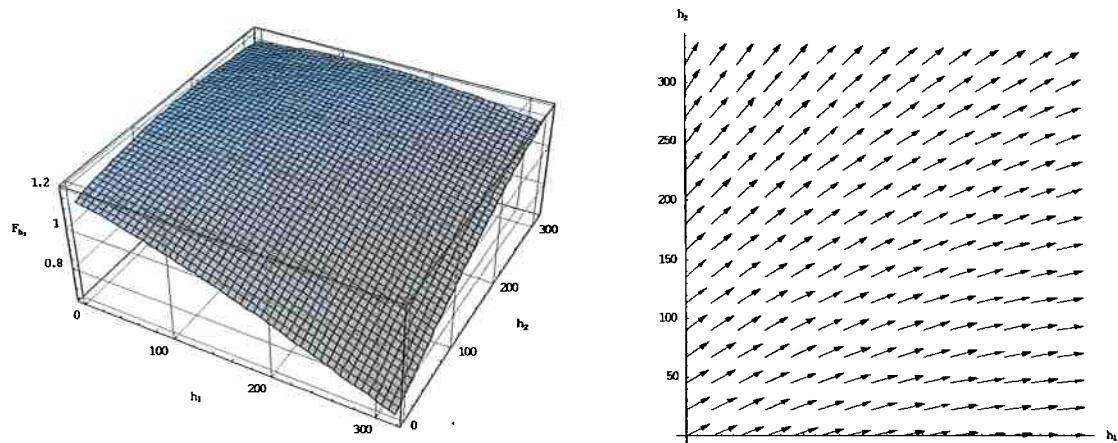


Figura 5.66 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, b) Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.66 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 1 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.66 (b). Pela figura 5.66 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho é igual a 120% da força imposta ao efetuador.

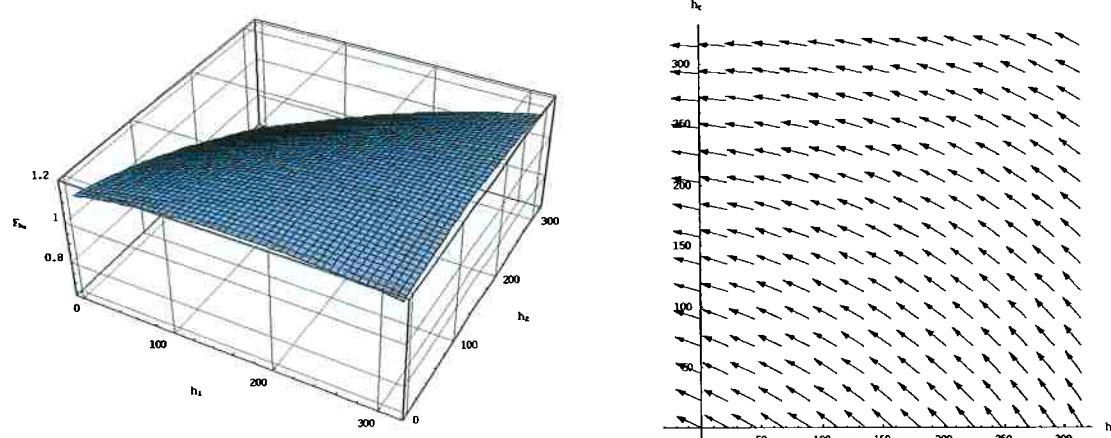


Figura 5.67 a) Módulo da máxima força transmitida ao atuador 1 no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores, **b)** Direção da força imposta ao efetuador (trajetória) mapeada no espaço de trabalho – coordenadas dos atuadores.

A figura 5.67 (a) mostra o valor da máxima força transmitida ao atuador 2 causada por uma força unitária imposta ao efetuador na direção mostrada na figura 5.67 (b). Pela figura 5.67 (a) pode-se ver que a máxima força transmitida ao atuador 2 no espaço de trabalho é igual a 120% da força imposta ao efetuador.

5.1.5 Matriz de Comparação

Para avaliar os mecanismos propostos foi criada uma tabela de decisões preenchida com os máximos valores obtidos por cada mecanismo em cada critério de desempenho:

| | Área | Resolução | VAT | MVA | NC | MFTA |
|---------------------|--------|-----------|------|------|-----|------|
| $\alpha = 30^\circ$ | 100% | 50% | 11% | 12% | 2.0 | 200% |
| $\alpha = 45^\circ$ | 100% | 85% | 0% | 8% | 1.4 | 120% |
| $\alpha = 60^\circ$ | 88,20% | 60% | 150% | 180% | 1.8 | 150% |
| Genius 500 | 93,58% | 89% | 75% | 80% | 1.5 | 120% |

Tabela 5.1 Tabela de Decisão.

Da tabela pode-se verificar que o mecanismo com $\alpha = 45^\circ$ apresenta melhor condição em quatro dos cinco critérios analisados. Perdendo somente na Resolução, mas como foi visto no texto a resolução do mecanismo é bem distribuída no seu espaço de trabalho.

Tanto os mecanismos com $\alpha = 30^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$ são perdedores em três dos critérios analisados e representam mecanismos com baixo desempenho cinemático e estático.

O mecanismo da máquina Genius 500 não possui grandes desvios na comparação com os outros mecanismos, salvo nas máximas velocidades impostas aos atuadores onde o valor da sobrevelocidade pode chegar a 80%, que é bem superior aos 8% do mecanismo com $\alpha = 45^\circ$.

6 Análise Utilizando MEF do Mecanismo Paralelo

O mecanismo paralelo realizará operações de usinagem, carregando a ferramenta de corte em seu efetuador.

Para dimensionamento dos seus componentes estruturais torna-se necessário uma maneira de avaliar sua rigidez e consequentemente uma parcela do deslocamento imposto à máquina devido às forças externas de usinagem.

Efetivamente, o cálculo da flecha no extremo do efetuador é o método que será utilizado neste trabalho.

A modelagem do mecanismo em elementos finitos torna possível o cálculo do deslocamento imposto ao efetuador em todo o espaço de trabalho, como veremos adiante.

6.1 Análise Estática do Mecanismo

6.1.1 Definição do Elemento

O mecanismo foi modelado utilizando elementos de treliça em 2D, como mostra a figura 6.1.

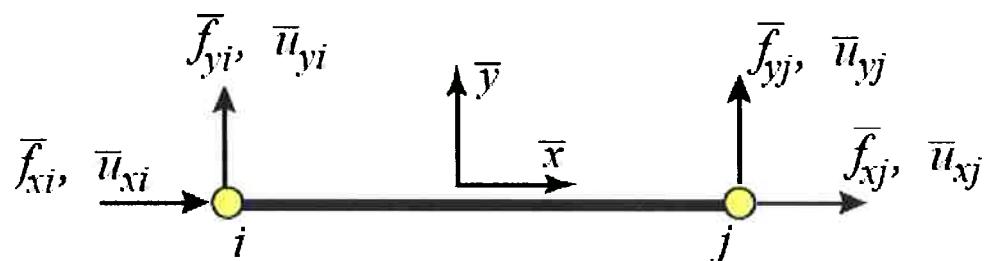


Figura 6.1 Elemento de treliça 2D utilizado na modelagem. Fonte (FELIPPA)

O elemento é prismático e possui dois nós: i e j , posicionados nos centróides das seções transversais terminais do elemento. Estes definem o eixo \tilde{x} , cujo sentido vai do ponto i ao j .

Dois graus de liberdade globais são definidos em cada nó. Duas translações: \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y .

6.1.2 Matriz de Rígidez

Os deslocamentos são arranjados da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}^e = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2}]^T,$$

e as forças:

$$\mathbf{f}^e = [f_{x1} \ f_{y1} \ f_{x2} \ f_{y2}]^T.$$

O material da viga é caracterizado pelo módulo de elasticidade E . Uma propriedade da seção transversal é necessária, a área A . O comprimento do elemento é designado por L . A matriz de rigidez local 4×4 , foi retirada do curso “online” de (FELIPPA) e está exposta a seguir.

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.1.3 Implementação do Modelo

O modelo em elementos finitos do mecanismo paralelo foi implementado utilizando o programa *Mathematica v5.0*, e conferido utilizando ANSYS v10.

Foi utilizado o método da rigidez direta para o cálculo das deformações, ou seja, $\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u}$, onde \mathbf{f} representa o vetor de forças expresso nas coordenadas globais, \mathbf{K} a matriz de rigidez global do mecanismo e \mathbf{u} representa o vetor dos deslocamentos, também expresso nas coordenadas globais.

Se a matriz \mathbf{K} possuir determinante diferente de zero, ela pode ser invertida, o que leva, $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}$. Esta maneira de calcular os deslocamentos representa o método da rigidez direta.

O método da rigidez direta pode ser dividido nas seguintes etapas:

- *Desconexão;*

A desconexão representa a quebra do modelo em elementos.

- *Localização;*

Nesta etapa são numerados os elementos e formados os seus sistemas de coordenadas locais.

- *Formação do elemento;*

Aqui são definidas as matrizes de rigidez de cada elemento nas coordenadas locais.

- *Globalização;*

Nesta etapa há as transformações entre as coordenadas locais de cada elemento para as coordenadas globais do modelo.

- *Conexão;*

Os elementos com coordenadas globais são unidos, formando os vetores *força*, *deformação* e a matriz de rigidez global do sistema;

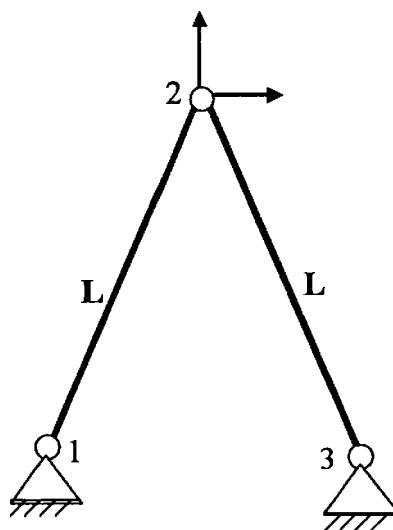
- *Aplicação das condições de contorno;*

As condições de contorno são aplicadas ao modelo.

- *Solução;*

As duas primeiras etapas são conceituais, pois não há processamento envolvido e fazem parte da definição do problema. As demais fazem parte do processamento propriamente dito.

Para a análise em MEF do mecanismo, foi utilizado um modelo com dois elementos e três nós ,representando as duas barras do mecanismo e as três juntas de rotação. As juntas prismáticas não foram modeladas, sendo similar a análise do modelo nas diversas posições do espaço de trabalho.



6.1.4 Condições de Contorno

Os graus de liberdade que representam os atuadores são diretamente vinculados a estrutura da máquina e para efeito de análise simplificada do mecanismo são considerados os seus deslocamentos nulos.

6.1.5 Deslocamento do Efetuador

A máquina estará sujeita a forças externas oriundas do processo de usinagem. Estas forças de usinagem são aplicadas no efetuador.

Foi feita a análise estática em diversas posições do mecanismo com $\alpha = 45^\circ$ compreendendo todo o espaço de trabalho. As forças utilizadas foram de 1N no sentido positivo de cada eixo das coordenadas globais do sistema e posicionadas no efetuador.

Os resultados são plotados nos gráficos a seguir.

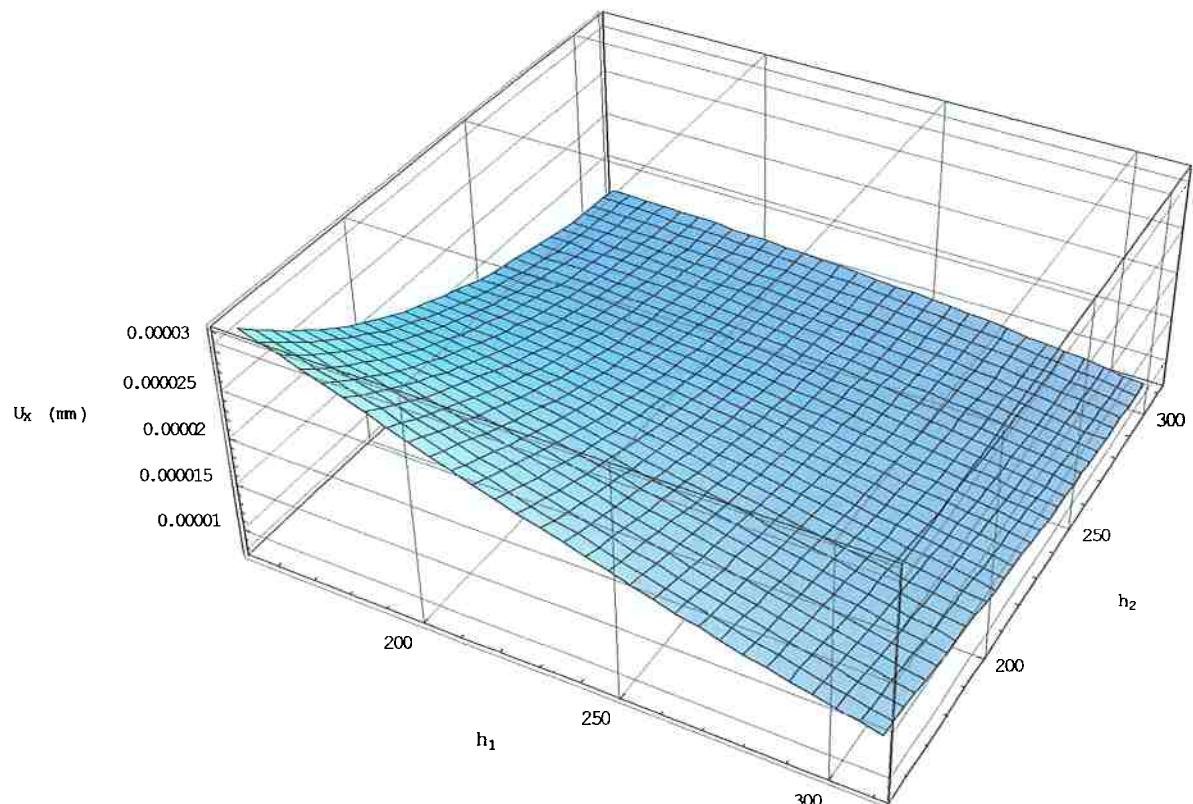


Figura 6.2 Deslocamento em X no efetuador.

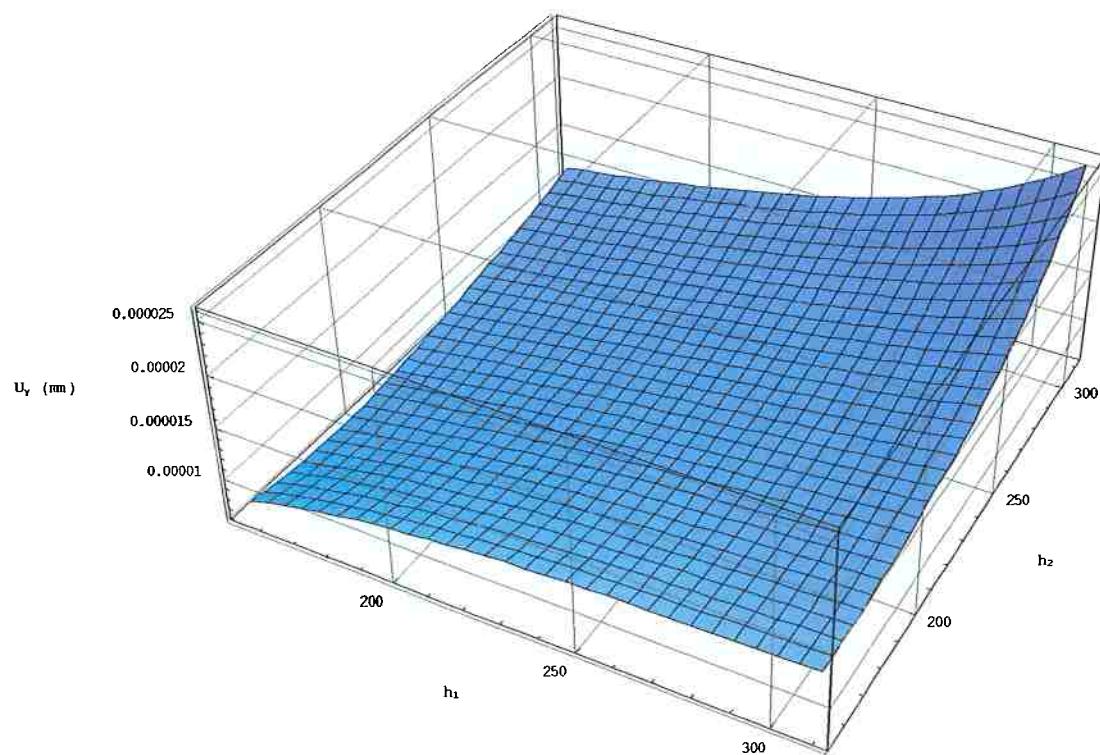


Figura 6.3 Deslocamento em Y no efetuador.

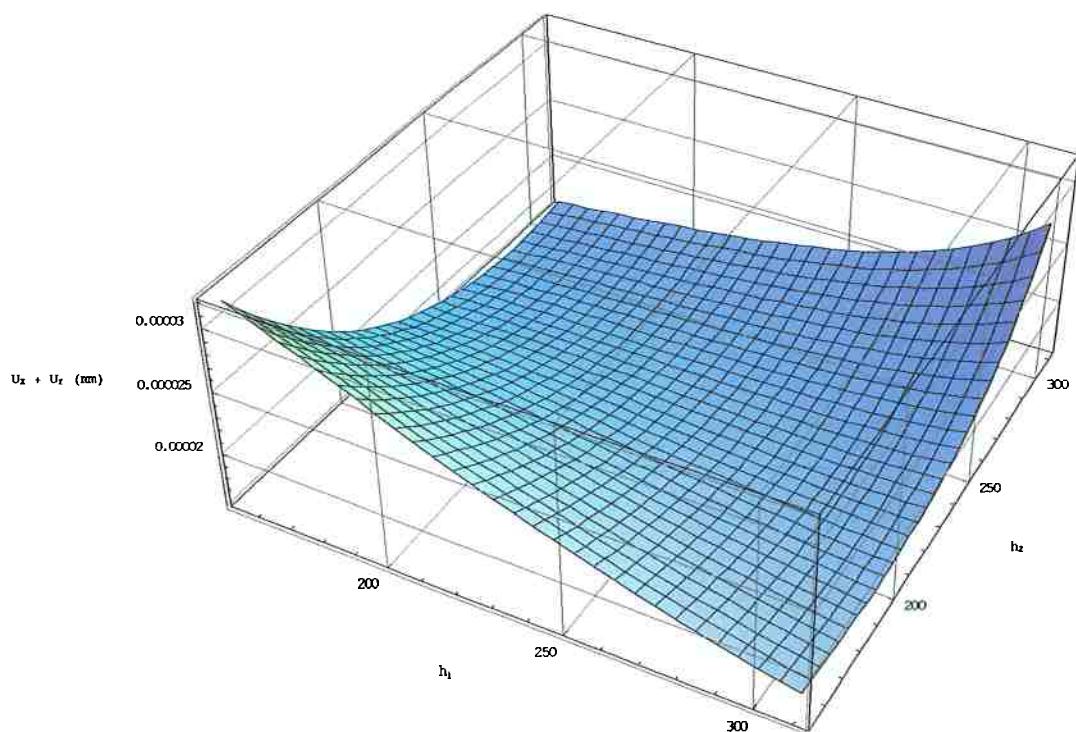


Figura 6.4 Soma do deslocamento no efetuador.

O deslocamento máximo mostrado na figura 6.4 é de 3×10^{-5} mm e ocorre quando ambos os atuadores estão no seu batente mínimo.

Os parâmetros geométricos da seção transversal utilizadas para as barras foram os seguintes, $A = 100 \text{ mm}^2$; e o módulo de elasticidade de Young do material foi de 210 GPa.

6.2 Análise Modal Simplificada do Mecanismo

Sabendo que a análise dinâmica da máquina-ferramenta governa fortemente o seu projeto, para o mecanismo com $\alpha = 45^\circ$ foi calculada a menor freqüência natural para diversas posições do espaço de trabalho.

Foram assumidos o mesmo modelo e os mesmos elementos de treliça utilizados na análise estática. A matriz de massa utilizada foi a matriz de massa concentrada, como indicada a seguir:

$$\bar{\mathbf{M}}_L^e = \frac{1}{2} \rho A \ell \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde A é a área da seção transversal do elemento, ρ é a densidade linear do material do elemento e L o comprimento da barra.

- O resultado da primeira freqüência natural do mecanismo é mostrado na figura 6.5:

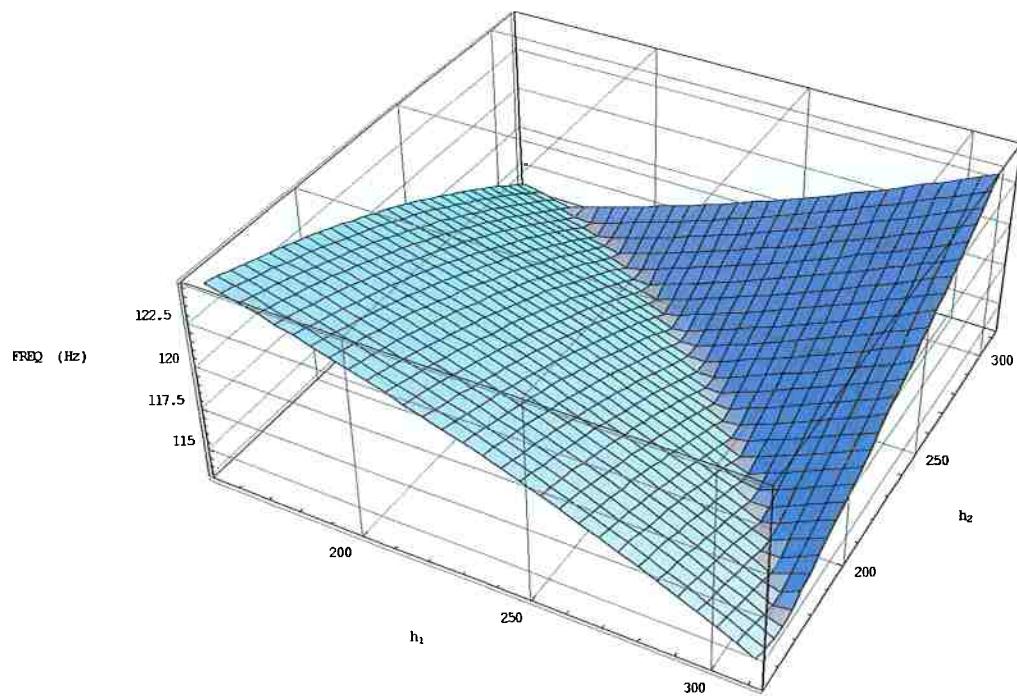


Figura 6.5 Gráfico da primeira freqüência natural do mecanismo no seu espaço de trabalho.

Vale a pena notar que a freqüência natural encontra seus valores mais baixos justamente onde o mecanismo é isotrópico (comparando a figura 6.5 e a figura 5.32).

7 Conclusão

O ambiente de análise proposto neste trabalho permite obter dados essenciais sobre a distribuição das velocidades e forças do mecanismo plano para o projeto da máquina-ferramenta paralela:

O mapeamento das condições estáticas do mecanismo no espaço de trabalho permite localizar e julgar trajetórias específicas para certas tarefas, implicando em melhor precisão, facilidade de controle e implementação otimizada desta tarefa.

Baseado nos critérios de desempenho propostos é possível realizar comparações entre diferentes arquiteturas construtivas do mecanismo e selecionar o que melhor se adapta.

O mapeamento do erro de posicionamento do efetuador, devido à deformação elástica das barras, em todo o espaço de trabalho permite um simplificado projeto estrutural estático da máquina pela máxima flecha admitida.

O cálculo das forças de usinagem transmitidas aos atuadores em todo o espaço de trabalho, auxilia o dimensionamento dos motores e fusos no que tange as forças estáticas envolvidas na usinagem.

A análise dinâmica da máquina não foi realizada a fundo neste trabalho e fica como sugestão para trabalhos posteriores que queiram seguir este projeto. A construção de protótipos que verifiquem experimentalmente este trabalho também é sugerida.

8 Referências

Bonev, I.; Ryu, J., “A geometrical method for computing the constant-orientation workspace of 6-PRRS parallel manipulators”. Mechanism and Machine Theory, vol. 36, 2001b, pp 1-13.

Coelho, T. A. H., “Topologia, análise e síntese de mecanismos paralelos tridimensionais”, Relatório Final de Estágio Pós-Doutoral no Exterior (*Stanford University*), Processo CAPES no. 0471/01-1, Novembro 2002, 27 p.

Merlet, J. P., “Parallel robots”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000

Raszl, G., “Avaliação do potencial de utilização de um mecanismo paralelo como máquina-ferramenta”, Dissertação de mestrado apresentada na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, T. A. H. Coelho (orientador), São Paulo, 2003

Felippa, C. A., web “Lectures in Introduction to Finite Element Methods”, no endereço <http://caswww.colorado.edu/courses.d/IFEM.d/Home.html>, atualizado irregularmente.

Kim, L.-W., Tsai, H.S. – “Design Optimization of a Cartesian Parallel Manipulator” – Journal of Mechanical Design, vol. 125 (pg. 43-51) – ASME, 2003.

Kim, J – Park, F.C. et al; - “Design and Analysis of a Redundantly Actuated Parallel Mechanism for Rapid Machining” – IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, N°4, Agosto 2001, pp 423-434.

Kim, J. – Ryu, S. – Park, C. – “Eclipse: an Overactuated Parallel Mechanism for Rapid Machining” – ASME International Mechanical Engineering Congress 1998.

Waldron, K.J.; Hunt, K.H., “Series-parallel dualities in actively coordinated mechanisms”, Robotics Research 4, 1988, pp 175-181.

Franke H.J., Otremba R., and Janicke T., “Methodical development of optimized passive joints.” In *1st Int. Colloquium, Collaborative Research Centre 562*, pg 119-130, Braunschweig, January, February, March, April, May, June, July, August, September, October, November, December, Summer 29-30, 2002.

Bostelman, R., Jacoff, A., Proctor, F., Kramer, T., Wavering, A., "Cable-Based Reconfigurable Machines for Large Scale Manufacturing," Proceedings of the 2000 Japan-USA Symposium on Flexible Automation-Intern'l Conf. on New Technological Innovation for the 21st Century, Ann Arbor, MI, 7/23-26/2000.

Verhoeven R. and Miller M., “Estimating the controllable workspace of tendon-based Stewart platforms. ”,In *ARK*, pages 277-284, Piran, 6January, February, March, April, May, June, July, August, September, October, November, December, Summer 25-29, 2000.

On-line através do grupo de discussão EMC-users, em
<https://lists.sourceforge.net/lists/listinfo/emc-users>.

Wolfram, S., “The Mathematica Book”, Wolfram Media Inc, quarta edição, 1999.

Site do Linux CNC (EMC Project) - www.linuxcnc.org

Site do RTAI -www.rtai.org

Site dos drivers COMEDI - www.comedi.org

Alici G. and Shirinzadeh B., "Optimum synthesis of planar parallel manipulators based on kinematic isotropy and force balancing.", *Robotica*, 22(1):97-108, 2004.

Chablat D., Wenger P., and Angeles J., "The isoconditionning loci of a class of closed-chain manipulators.", In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pages 1970-1975, Louvain, 18-20 Mai 1998.

Wenger P., Chablat D., "Kinematic Analysis of a New Parallel Machine Tool: The Orthoglide", <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/hebergement/Publications/2000/429.pdf>, 2000.

Yoshikawa T., "Manipulability of Robotic Mechanisms", *The Int. J. Robotics Res.*, Vol. 4, No. 2, pp. 3-9., 1985.

Angeles J, "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems", Springer-Verlag, New York. . 1997.

Stewart D., "A Platform with 6 Degrees of Freedom", Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, 180(Part 1, 15), pp. 371-386. 1965.

Franke H.J., Otremba R., and Janicke T., "Methodical development of optimized passive joints." , 1st Int. Colloquium, Collaborative Research Centre 562, páginas 119-130, 2002.

Albus J., Bostelman R., and Dagalakis N., "The NIST ROBOCRANE.", J. of Robotic Systems, 10(5):709-724, 1993.

Verhoeven R. and Miller M. "Estimating the controllable workspace of tendon-based Stewart platforms." , em ARK, páginas 277-284, Piran, 2000.

Gosselin C. "Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators.", ASME J. of Mechanical Design, 112(3):331-336. 1990.

Astanin V.O. and Usov V.V. "Multi-objective synthesis of machining center configurations with parallel structure kinematics.", em 2nd Chemnitzer Parallelkinematik Seminar, páginas 299-312, Chemnitz, 12-13 Abril 2000.

H. Fang and J-P. Merlet. "Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis." Mechanism and Machine Theory, 40(2):151--171, Fevereiro 2005.

9 Anexos – Rotinas no *Mathematica v5.0*

- Análise Cinemática do Mecanismo Paralelo;
- Modelo do Mecanismo Paralelo em MEF;
- Precisão no Espaço de Trabalho;
- Forças nos Atuadores;
- MVA, MFTA

Analise Cinematica

do Mecanismo Paralelo

$$\mathbf{P} - \mathbf{O} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{O} = h_1 e^{i(\pi+\alpha)} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{O} = h_2 e^{i(-\alpha)} \quad (1.3)$$

$$||\mathbf{P} - \mathbf{A}|| = L \quad (1.4)$$

$$||\mathbf{P} - \mathbf{B}|| = L \quad (1.5)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X} + i\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{A} = h_1 e^{i(\pi+\alpha)}$$

$$e^{i(\pi+\alpha)} h_1$$

$$\mathbf{B} = h_2 e^{i(-\alpha)}$$

$$e^{-i\alpha} h_2$$

CINEMATICA INVERSA (POS)

```

FullSimplify[Solve[ComplexExpand[Abs[P - A]] == L, h1]]
{{h1 == -X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] - Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] + Y Sin[\alpha])^2], 
  h1 == -X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] + Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] + Y Sin[\alpha])^2]}}

{{h1 == -X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] - Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] + Y Sin[\alpha])^2], 
  h1 == -X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] + Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] + Y Sin[\alpha])^2]}}

FullSimplify[Solve[ComplexExpand[Abs[P - B]] == L, h2]]
{{h2 == X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] - Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha])^2], 
  h2 == X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] + Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha])^2]}}

{{h2 == X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] - Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha])^2], 
  h2 == X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha] + Sqrt[L^2 - X^2 - Y^2 + (X Cos[\alpha] - Y Sin[\alpha])^2]}}

```

CINEMATICA DIRETA (POS)

```

FullSimplify[Solve[
  {ComplexExpand[Abs[P - A]]^2 = L^2, ComplexExpand[Abs[P - B]]^2 = L^2}, {X, Y}]]

{X → - (Sec[α] (h1 - h2)
  (Cos[α]^2 (h1 + h2) (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2) - Sin[α] √(-Cos[α]^2 (h1 + h2)^2
  (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2) (-4 L^2 + h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2))) /
  (2 (h1 + h2) (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)), Y → - 1/2 Sin[α] (h1 + h2) -
  √(-Cos[α]^2 (h1 + h2)^2 (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2) (-4 L^2 + h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)) /
  2 (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)}]
, {X → - (Sec[α] (h1 - h2) (Cos[α]^2 (h1 + h2) (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2) +
  Sin[α] √(-Cos[α]^2 (h1 + h2)^2 (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2) (-4 L^2 + h1^2 + 2
  Cos[2 α] h1 h2 + h2^2))) / (2 (h1 + h2) (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)),
  Y → 1/2 (-Sin[α] (h1 + h2) + (√(-Cos[α]^2 (h1 + h2)^2 (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)
  (-4 L^2 + h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)) / (h1^2 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h2^2)))}]}

```

JACOBIANOS

```

func1 = ComplexExpand[Abs[P - A]]^2 - L^2
-L^2 + (X + Cos[α] h1)^2 + (Y + Sin[α] h1)^2

func1 = -L^2 + (X + Cos[α] h1)^2 + (Y + Sin[α] h1)^2
-L^2 + (X + h1 Cos[α])^2 + (Y + h1 Sin[α])^2

func2 = ComplexExpand[Abs[P - B]]^2 - L^2
-L^2 + (X - Cos[α] h2)^2 + (Y + Sin[α] h2)^2
func2 = -L^2 + (X - Cos[α] h2)^2 + (Y + Sin[α] h2)^2
-L^2 + (X - h2 Cos[α])^2 + (Y + h2 Sin[α])^2

Collect[Dt[func1, Constants → {L, α}], {Dt[Y, Constants → {L}],
Dt[h1, Constants → {L}], Dt[X, Constants → {L}]}, FullSimplify]
2 ((X + h1 Cos[α]) Dt[X, Constants → {L, α}] + Dt[Y, Constants → {L, α}]
(Y + h1 Sin[α]) + Dt[h1, Constants → {L, α}] (h1 + X Cos[α] + Y Sin[α]))

Collect[Dt[func2, Constants → {L, α}], {Dt[Y, Constants → {L}],
Dt[h2, Constants → {L}], Dt[X, Constants → {L}]}, FullSimplify]
2 ((X - h2 Cos[α]) Dt[X, Constants → {L, α}] + Dt[Y, Constants → {L, α}]
(Y + h2 Sin[α]) + Dt[h2, Constants → {L, α}] (h2 - X Cos[α] + Y Sin[α]))

```

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} X + h_1 \cos[\alpha] & Y + h_1 \sin[\alpha] \\ X - h_2 \cos[\alpha] & Y + h_2 \sin[\alpha] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} -h_1 - X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] & 0 \\ 0 & -h_2 + X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
 J_x &= \begin{pmatrix} X + h_1 \cos[\alpha] & Y + h_1 \sin[\alpha] \\ X - h_2 \cos[\alpha] & Y + h_2 \sin[\alpha] \end{pmatrix} \\
 &\{\{X + h_1 \cos[\alpha], Y + h_1 \sin[\alpha]\}, \{X - h_2 \cos[\alpha], Y + h_2 \sin[\alpha]\}\} \\
 J_q &= \begin{pmatrix} -h_1 - X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] & 0 \\ 0 & -h_2 + X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] \end{pmatrix} \\
 &\{ \{-h_1 - X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha], 0\}, \{0, -h_2 + X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha]\} \} \\
 \text{FullSimplify}[\text{MatrixForm}[\text{Inverse}[J_q].J_x]] \\
 & \begin{pmatrix} \frac{X+h_1 \cos[\alpha]}{h_1+X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y+h_1 \sin[\alpha]}{h_1+X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} \\ -\frac{X+h_2 \cos[\alpha]}{h_2-X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y+h_2 \sin[\alpha]}{h_2-X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{X+h_1 \cos[\alpha]}{h_1+X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y+h_1 \sin[\alpha]}{h_1+X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} \\ \frac{-X+h_2 \cos[\alpha]}{h_2-X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y+h_2 \sin[\alpha]}{h_2-X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

DESENHO

```

<<Graphics`Graphics3D` 

 $\alpha = \frac{45\pi}{180};$ 
 $h_1 = 210;$ 
 $h_2 = 210;$ 
 $\minimo = 155;$ 
 $L = 250;$ 
 $\maximo = 310;$ 

coisa = L;

 $X = -(\operatorname{Sec}[\alpha] (h_1 - h_2) (\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2) + \sin[\alpha] \sqrt{(-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2))}) / (2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2)))$ 

```

0

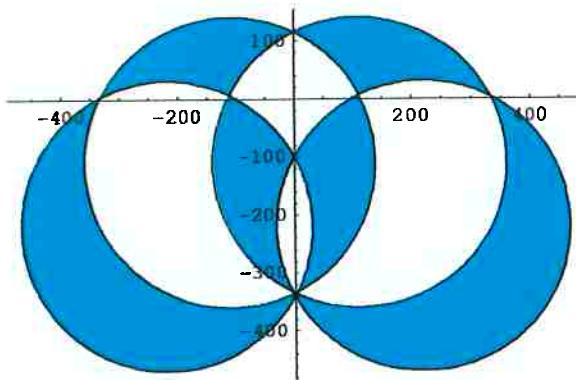
$$Y = \frac{1}{2} \left(-\sin[\alpha] (h_1 + h_2) + \frac{\sqrt{-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2)}}{h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2} \right) \frac{1}{2} (-210 \sqrt{2} + 10 \sqrt{1618})$$

Espaço de Trabalho

```
<< Graphics`InequalityGraphics`
```

```
Workspace =
```

```
InequalityPlot[Xor[(x - Re[minimo e^(i (x+α))])^2 + (y - Im[minimo e^(i (x+α))])^2 ≤ L^2,
(x - Re[minimo e^(i (-α))])^2 + (y - Im[minimo e^(i (-α))])^2 ≤ L^2,
(x - Re[maximo e^(i (x+α))])^2 + (y - Im[maximo e^(i (x+α))])^2 ≥ L^2,
(x - Re[maximo e^(i (-α))])^2 + (y - Im[maximo e^(i (-α))])^2 ≥ L^2],
{x}, {y}, Axes → True];
```



```
Fusol = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.02], Line[
{{Re[minimo e^(i (x+α))], Im[minimo e^(i (x+α))]}, {Re[h1 e^(i (x+α))], Im[h1 e^(i (x+α))]}]}];
```

```
Fuso2 = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.02], Line[
{{Re[minimo e^(i (-α))], Im[minimo e^(i (-α))]}, {Re[h2 e^(i (-α))], Im[h2 e^(i (-α))]}]}];
```

```
Barrale = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005],
Line[{{X - 10, Y}, {Re[h1 e^(i (x+α))] - 10, Im[h1 e^(i (x+α))]}]}];
```

```
Barrald = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005],
Line[{{X + 10, Y}, {Re[h1 e^(i (x+α))] + 10, Im[h1 e^(i (x+α))]}]}];
```

```
General::spell1 : Possible spelling error: new
symbol name "Barrald" is similar to existing symbol "Barrale". More...
```

```
Barra2e = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005],
Line[{{X - 10, Y}, {Re[h2 e^(i (-α))] - 10, Im[h2 e^(i (-α))]}]}];
```

```
Barra2d = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005],
Line[{{X + 10, Y}, {Re[h2 e^(i (-α))] + 10, Im[h2 e^(i (-α))]}]}];
```

```
General::spell1 : Possible spelling error: new
symbol name "Barra2d" is similar to existing symbol "Barra2e". More...
```

```

Barra3e = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005],
Line[{{X + 25, Y}, {Re[h2 ei (-α)] + 25, Im[h2 ei (-α)]}}]}];

Barra3d = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005],
Line[{{X + 45, Y}, {Re[h2 ei (-α)] + 45, Im[h2 ei (-α)]}}]}];

General::spell1 : Possible spelling error: new
symbol name "Barra3d" is similar to existing symbol "Barra3e". More...

Barra4c = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005], Line[
{{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)] + 10}, {Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)] + 10}}]}];

Barra4c2 = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01], Line[
{{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)] + 5}, {Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)] + 5}}]}];

Barra4b2 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01], Line[
{{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)] - 5}, {Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)] - 5}}]}];

General::spell1 : Possible spelling error: new
symbol name "Barra4b2" is similar to existing symbol "Barra4c2". More...

Barra4b = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.005], Line[
{{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)] - 10}, {Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)] - 10}}]}];

General::spell1 : Possible spelling error: new
symbol name "Barra4b" is similar to existing symbol "Barra4c". More...

Pont01 = Graphics[
{RGBColor[0, 0, 0], PointSize[0.01], Point[{Re[h1 ei (π+α)], Im[h1 ei (π+α)]}}];

Pont02 = Graphics[
{RGBColor[0, 0, 0], PointSize[0.01], Point[{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)]}}};

Pont03 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], PointSize[0.01], Point[{X, Y}]}];

Pont04 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0],
PointSize[0.01], Point[{Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)]}}};

Pont05 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], PointSize[0.01], Point[{X + 35, Y}]}];

Art1 = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Disk[{Re[h1 ei (π+α)], Im[h1 ei (π+α)], 10}]};

Art2 = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Disk[{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)], 10}]};

Art3 = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Disk[{X, Y}, 10}]];

Art4 =
Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Disk[{Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)], 10}]};

Art5 = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Disk[{X + 35, Y}, 10}]];

Art6 =
Graphics[{RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.01], Circle[{X + 15, Y + 20}, 30]}];

fullbarra1 = Graphics[
{RGBColor[1, 1, 1], Thickness[0.004], Polygon[{{X - 10, Y}, {X + 10, Y},
{Re[h1 ei (π+α)] + 10, Im[h1 ei (π+α)]}, {Re[h1 ei (π+α)] - 10, Im[h1 ei (π+α)]}}]}];

fullbarra2 = Graphics[
{RGBColor[1, 1, 1], Thickness[0.004], Polygon[{{X - 10, Y}, {X + 10, Y},
{Re[h2 ei (-α)] + 10, Im[h2 ei (-α)]}, {Re[h2 ei (-α)] - 10, Im[h2 ei (-α)]}}]}];

```

```

fullbarra3 = Graphics[
  {RGBColor[1, 1, 1], Thickness[0.004], Polygon[{{X + 25, Y}, {X + 45, Y},
    {Re[h2 ei (-α)] + 45, Im[h2 ei (-α)]}, {Re[h2 ei (-α)] + 25, Im[h2 ei (-α)]}}]}];

fullbarra4 = Graphics[{RGBColor[1, 1, 1], Thickness[0.004], Polygon[
  {{Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)] + 10}, {Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)] + 10},
  {Re[h2 ei (-α)] + 35, Im[h2 ei (-α)] - 10}, {Re[h2 ei (-α)], Im[h2 ei (-α)] - 10}}]}];

Curso1 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
  Thickness[0.02], Line[{{Re[minimo ei (π+α)], Im[minimo ei (π+α)]},
  {Re[maximo ei (π+α)], Im[maximo ei (π+α)]}}]}];

Curso2 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
  Thickness[0.02], Line[{{Re[minimo ei (-α)], Im[minimo ei (-α)]},
  {Re[maximo ei (-α)], Im[maximo ei (-α)]}}]}];

Mesal = Graphics[{RGBColor[0.5, 0.5, 0.5], Thickness[0.004],
  Polygon[{{Re[(h1 - 25) ei (π+α)] - 15, Im[(h1 - 25) ei (π+α)] + 15},
  {Re[(h1 - 25) ei (π+α)] + 15, Im[(h1 - 25) ei (π+α)] - 15},
  {Re[(h1 + 25) ei (π+α)] + 15, Im[(h1 + 25) ei (π+α)] - 15},
  {Re[(h1 + 25) ei (π+α)] - 15, Im[(h1 + 25) ei (π+α)] + 15}}]}];

- Graphics -

Mesa2 = Graphics[{RGBColor[0.5, 0.5, 0.5], Thickness[0.004],
  Polygon[{{Re[(h2 - 25) ei (-α)] - 15, Im[(h2 - 25) ei (-α)] - 15},
  {Re[(h2 - 25) ei (-α)] + 15, Im[(h2 - 25) ei (-α)] + 15},
  {Re[(h2 + 25) ei (-α)] + 15, Im[(h2 + 25) ei (-α)] + 15},
  {Re[(h2 + 25) ei (-α)] - 15, Im[(h2 + 25) ei (-α)] - 15}}]}];

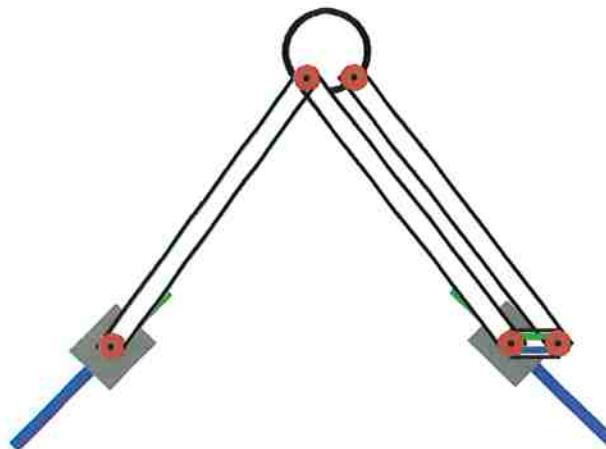
```

Desenho do Mecanismo e Espaço de Trabalho

```

Show[Art6, Curso1, Curso2, Fusol, Fuso2, Mesal, Mesa2, fullbarra1, fullbarra2,
  fullbarra3, fullbarra4, Barrale, Barrald, Barra2e, Barra2d, Barra3e,
  Barra3d, Barra4c, Barra4b, Barra4c2, Barra4b2, Art1, Art2, Art3, Art4,
  Art5, Pontol, Ponto2, Ponto3, Ponto4, Ponto5, AspectRatio -> Automatic];

```



```
Show[Workspace, 4];
```

$$\mathbb{N}[h_1 = -X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] - \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha])^2}]$$

-284.429

$$\mathbb{N}[h_1 = -X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] + \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] + Y \sin[\alpha])^2}]$$

210.

$$\mathbb{N}[h_2 = X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] - \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha])^2}]$$

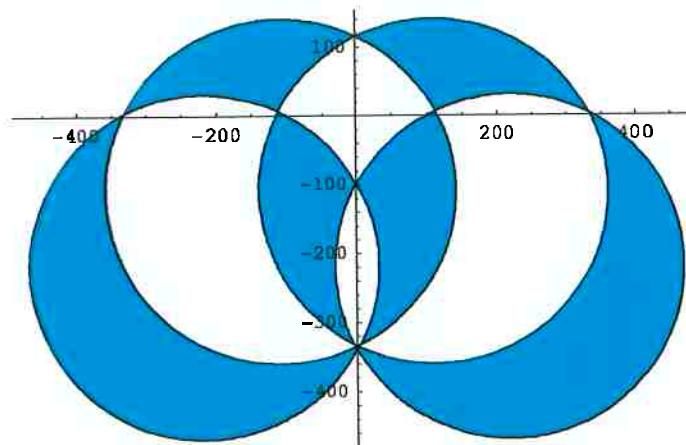
-284.429

$$\mathbb{N}[h_2 = X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha] + \sqrt{L^2 - X^2 - Y^2 + (X \cos[\alpha] - Y \sin[\alpha])^2}]$$

210.

Workspace =

```
InequalityPlot[Xor[(x - Re[minimo e^(i (x+α))])^2 + (y - Im[minimo e^(i (x+α))])^2 ≤ L^2,
(x - Re[minimo e^(i (-α))])^2 + (y - Im[minimo e^(i (-α))])^2 ≤ L^2,
(x - Re[maximo e^(i (x+α))])^2 + (y - Im[maximo e^(i (x+α))])^2 ≥ L^2,
(x - Re[maximo e^(i (-α))])^2 + (y - Im[maximo e^(i (-α))])^2 ≥ L^2], {x}, {y}];
```



Calculo da Area

```
ClearAll[β, l, x, y, mn, mx];
```

Calcular os quatro pontos de intercepcionao dos circulos (1, 2, 3, 4 → Antihorario)

portanto 1 → $(x - \operatorname{Re}[\minimo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\minimo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 = L^2$,

2 → $(x - \operatorname{Re}[\minimo e^{i(-\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\minimo e^{i(-\alpha)}])^2 = L^2$,

3 → $(x - \operatorname{Re}[\maximo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\maximo e^{i(\pi+\alpha)}])^2 = L^2$,

4 → $(x - \operatorname{Re}[\maximo e^{i(-\alpha)}])^2 + (y - \operatorname{Im}[\maximo e^{i(-\alpha)}])^2 = L^2$. Ponto[1] = (1, 2),

Ponto[2] = (2, 3), Ponto[3] = (3, 4), Ponto[4] = (4, 1).

```

circ[1] = (x - Re[mn e^(i (π+β))])2 + (y - Im[mn e^(i (π+β))])2 == 12
(y - Im[e^(i (π+β)) mn])2 + (x - Re[e^(i (π+β)) mn])2 == 12

circ[2] = (x - Re[mn e^(i (-β))])2 + (y - Im[mn e^(i (-β))])2 == 12
(y - Im[e^(-i β) mn])2 + (x - Re[e^(-i β) mn])2 == 12

circ[3] = (x - Re[mx e^(i (π+β))])2 + (y - Im[mx e^(i (π+β))])2 == 12
(y - Im[e^(i (π+β)) mx])2 + (x - Re[e^(i (π+β)) mx])2 == 12

circ[4] = (x - Re[mx e^(i (-β))])2 + (y - Im[mx e^(i (-β))])2 == 12
(y - Im[e^(-i β) mx])2 + (x - Re[e^(-i β) mx])2 == 12

Solve[{circ[1], circ[2]}, {x, y}];

N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, 1 → L}]]

{{x → 0., y → -334.296}, {x → 0., y → 115.093}]

Ponto[1] = {x, y} /. {%%[2]};

Solve[{circ[2], circ[3]}, {x, y}];

N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, 1 → L}]]

{{x → 2.18058, y → -335.346}, {x → -111.782, y → 6.54174}]

Ponto[2] = {x, y} /. {%%[2]};

Solve[{circ[3], circ[4]}, {x, y}];

N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, 1 → L}]]

{{x → 0., y → -339.411}, {x → 0., y → -98.9949}]

Ponto[3] = {x, y} /. {%%[2]};

Solve[{circ[4], circ[1]}, {x, y}];

N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, 1 → L}]]

{{x → -2.18058, y → -335.346}, {x → 111.782, y → 6.54174}]

Ponto[4] = {x, y} /. {%%[2]};

```

Area do Quadrilatero

Agora calcular a area do quadrilatero formado por esses pontos e diminuir as lentes de baixo assim como adicionar as lentes de cima.

$$\text{QuadrilateroA} = b \cdot h, \text{ onde } b = \text{Ponto}[4]_x - \text{Ponto}[2]_x \text{ e } h = \frac{\text{Ponto}[1]_y - \text{Ponto}[3]_y}{2}$$

```

AQ =  $\left( \frac{\text{Ponto}[1][1, 2] - \text{Ponto}[3][1, 2]}{2} \right) (\text{Ponto}[4][1, 1] - \text{Ponto}[2][1, 1]);$ 
N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
23931.2
quadrilatero = %;

```

Area das Lentes Superiores

$\sin\left[\frac{\gamma}{2}\right] = \frac{b}{l}$, $h = \cos\left[\frac{\gamma}{2}\right] l$, $A_s = \frac{\pi l^2 \gamma}{2\pi}$, $A_{LS} = A_s - \frac{bh}{2}$,
 $b = \sqrt{(\text{Ponto}[4]_x - \text{Ponto}[1]_x)^2 + (\text{Ponto}[4]_y - \text{Ponto}[1]_y)^2}$
 $b = \sqrt{(\text{Ponto}[4][1, 1] - \text{Ponto}[1][1, 1])^2 + (\text{Ponto}[4][1, 2] - \text{Ponto}[1][1, 2])^2};$
 $\gamma = 2 \arcsin\left[\frac{b}{l}\right];$

```

N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
0.633819
As =  $\frac{l^2 \gamma}{2};$ 
N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
19806.8
h =  $\cos\left[\frac{\gamma}{2}\right] l;$ 
ALS = As -  $\frac{b * h}{2};$ 
N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
1299.77
superiores = %;

```

Lentes inferiores

$\sin\left[\frac{\gamma}{2}\right] = \frac{b}{l}$, $h = \cos\left[\frac{\gamma}{2}\right] l$, $A_s = \frac{\pi l^2 \gamma}{2\pi}$, $A_{LI} = A_s - \frac{bh}{2}$,
 $b = \sqrt{(\text{Ponto}[2]_x - \text{Ponto}[3]_x)^2 + (\text{Ponto}[2]_y - \text{Ponto}[3]_y)^2}$

```

b = Sqrt[(Ponto[2][1, 1] - Ponto[3][1, 1])^2 + (Ponto[3][1, 2] - Ponto[2][1, 2])^2];

 $\gamma = 2 \text{ArcSin}\left[\frac{\frac{b}{2}}{1}\right];$ 

N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
```

0.62505

$$A_s = \frac{l^2 \gamma}{2};$$

```
N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
```

19532.8

$$h = \text{Cos}\left[\frac{\gamma}{2}\right] l;$$

$$A_{L1} = A_s - \frac{b * h}{2};$$

```
N[ReplaceAll[%, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}]]
```

1247.25

```
inferiores = %;
```

Area Total

```

Area Total = Aq + 2 A_Ls - 2 A_L1

At = quadrilatero + 2 * superiores - 2 * inferiores;

Print["Area total = ", %, " mm2"]

Area total = 24036.2 mm2

Print["Razao Cartesiano total = ",
  N[ReplaceAll[At, {mx → maximo, mn → minimo, β → α, l → L}] /
    (maximo - minimo)^2]]

```

Razao Cartesiano total = 1.00047

TESTE VELOCIDADE

```
ClearAll[α, L, R, S, X, Y, A, B]
```

$$x = - \left(\sec[\alpha] (A - B) \left(\cos[\alpha]^2 (A + B) (A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2) + \sin[\alpha] \right. \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{-\cos[\alpha]^2 (A + B)^2 (A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2) (-4L^2 + A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2)} \right) \right) / (2 (A + B) (A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2));$$

$$y = \frac{1}{2} \left(-\sin[\alpha] (A + B) + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{-\cos[\alpha]^2 (A + B)^2 (A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2) (-4L^2 + A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2)}}{A^2 + 2 \cos[2\alpha] AB + B^2} \right);$$

alpha = $\frac{45\pi}{180}$;
Long = coisa;
maximocurso = maximo;
minimocurso = minimo;

$v_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 $v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

General::spell1 :
Possible spelling error: new symbol name "Long" is similar to existing symbol "Log". More...

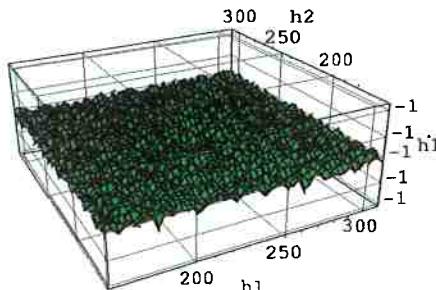
$$N[modulo = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}]$$

1.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{X+A \cos[\alpha]}{A+X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y+A \sin[\alpha]}{A+X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} \\ -\frac{X+B \cos[\alpha]}{B-X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} & -\frac{Y+B \sin[\alpha]}{B-X \cos[\alpha]+Y \sin[\alpha]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix};$$

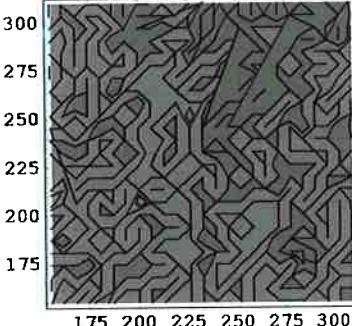
testel = ReplaceAll[V1, {alpha → alpha, L → Long, R → vx, S → vy}];
post1 = ReplaceAll[V1, {L → Long, R → vx, S → vy}];
teste2 = ReplaceAll[V2, {alpha → alpha, L → Long, R → vx, S → vy}];
post2 = ReplaceAll[V2, {L → Long, R → vx, S → vy}];

graph1 = Plot3D[
{teste1, If[modulo ≥ teste1 ≥ -modulo, RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]]},
{A, minimocurso, maximocurso}, {B, minimocurso, maximocurso},
ViewPoint → {-1., -2., 1.}, AxesLabel → {h1, h2, h3},
Mesh → True, PlotPoints → 50, PlotRange → All, FaceGrids → All];



```

graph3 = ContourPlot[teste1, {A, minimocurso, maximocurso},
{B, minimocurso, maximocurso}, Contours -> 40];



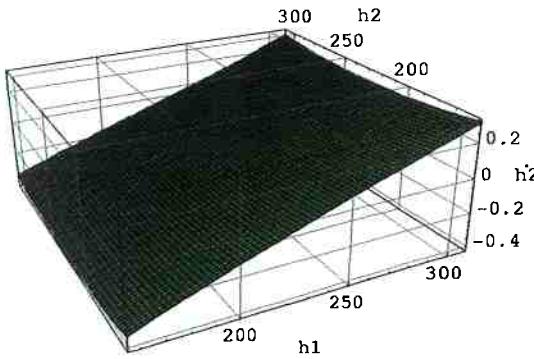
```



```

graph2 = Plot3D[
teste2, If[modulo > teste2 > -modulo, RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]],
{A, minimocurso, maximocurso}, {B, minimocurso, maximocurso},
ViewPoint -> {-1., -2., 1.}, AxesLabel -> {h1, h2, h2},
Mesh -> True, PlotPoints -> 70, PlotRange -> All, FaceGrids -> All];

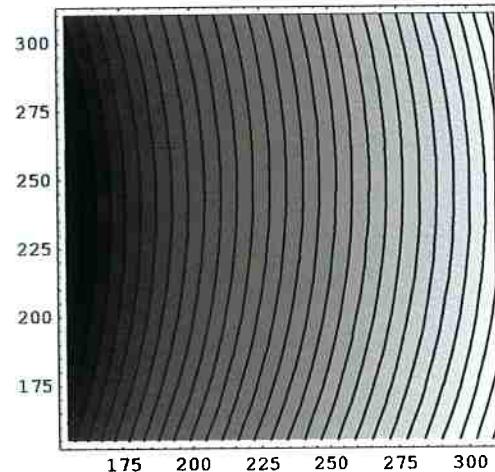
```


```

graph4 = ContourPlot[teste2, {A, minimocurso, maximocurso},
{B, minimocurso, maximocurso}, Contours -> 30];

```

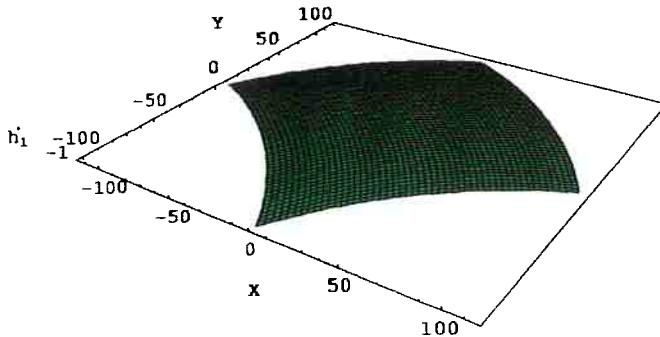

```

x1 = ReplaceAll[X, {alpha -> alpha, L -> Long}];

y1 = ReplaceAll[Y, {alpha -> alpha, L -> Long}];

```

```
grafico12 = ParametricPlot3D[{X1, Y1, teste1,
  If[modulo > teste1 > -modulo, RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}],
  {A, minimocurso, maximocurso}, {B, minimocurso, maximocurso},
  AxesLabel -> {"X", "Y", "h1"}, PlotPoints -> 50, PlotRange -> All,
  Lighting -> False, ViewPoint -> {1` , -1.5` , 1.`}];
```



```
atuador1 =
Show[ Project[grafico12, {{0.1, 0, 0}, {0, 0.1, 0}}, {0, 0, 0.00001}, {0, 0, 0}],
  ViewPoint -> {0.000, 0.000, 1.000}, Boxed -> False, Axes -> False];
```

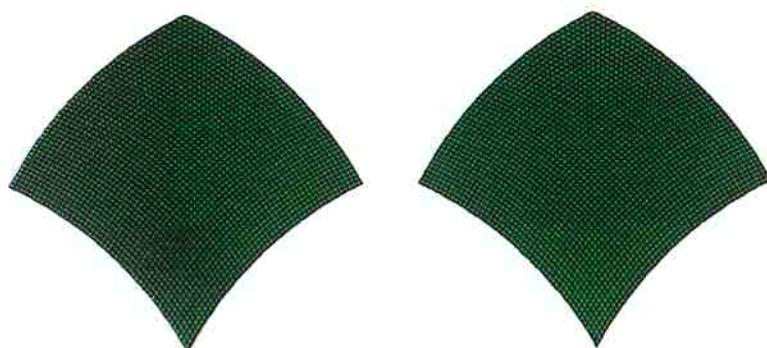


```
grafico22 = ParametricPlot3D[{X1, Y1, teste2,
  If[modulo > teste2 > -modulo, RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}],
  {A, minimocurso, maximocurso}, {B, minimocurso, maximocurso},
  AxesLabel -> {"X", "Y", "h2"}, PlotPoints -> 50, PlotRange -> All,
  Lighting -> False, ViewPoint -> {1` , -1.5` , 1.`}];
```

```
atuador2 =
Show[ Project[grafico22, {{0.1, 0, 0}, {0, 0.1, 0}}, {0, 0, 0.00001}, {0, 0, 0}],
  ViewPoint -> {0.000, 0.000, 1.000}, Boxed -> False, Axes -> False];
```



```
Show[GraphicsArray[{atuador1, atuador2}]];
```



MVA - Mecanismos 30,45,60

```

<< Graphics`PlotField`  
  

 $\alpha = \frac{45\pi}{180}; L = 250; minimocurso = 155;$   

 $maximocurso = 310;$   
  

 $X = -(\operatorname{Sec}[\alpha] (h_1 - h_2) (\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2) +$   

 $\sin[\alpha] \sqrt{(-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2)$   

 $(-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2))}) / (2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2));$   
  

 $Y = \frac{1}{2} (-\sin[\alpha] (h_1 + h_2) +$   

 $(\sqrt{(-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2))}) /$   

 $(h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2));$   
  

 $J1 = \left( -\frac{x+h_1 \cos[\alpha]}{h_1+x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} - \frac{y+h_1 \sin[\alpha]}{h_1+x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} \right);$   
  

 $J2 = \left( \frac{-x+h_2 \cos[\alpha]}{h_2-x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} - \frac{y+h_2 \sin[\alpha]}{h_2-x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} \right);$   
  

ClearAll[A, B, λ]  
  

grafatul =  

ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,  

J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1], {A, B, λ}][[2]]] > 0,  

Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A, J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},  

{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,  

J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],  

{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},  

BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},  

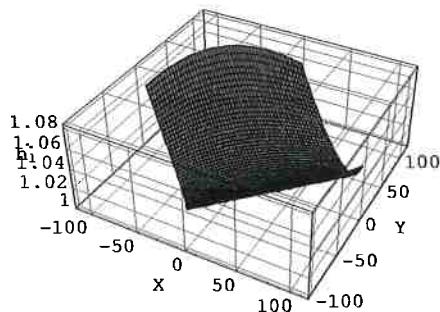
PlotPoints → 50,  

AxesLabel → {"X", "Y", "h1"},  

PlotRange → All,  

FaceGrids → All];

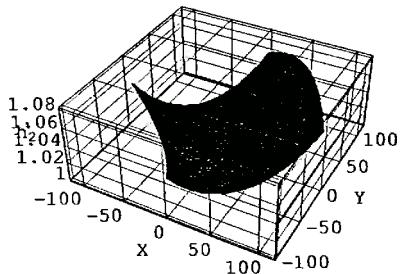
```



```

grafatu2 =
ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints -> 50,
AxesLabel -> {"X", "Y", "h2"},
PlotRange -> All,
FaceGrids -> All];

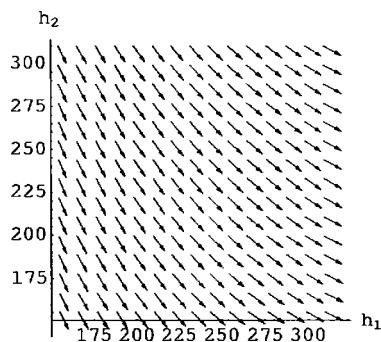
```



```

vetor2 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints -> 15, Axes -> True,
AxesLabel -> {"h1", "h2"}];

```



```

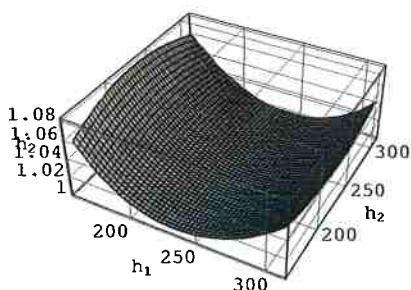
vetor1 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A, J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints → 15, Axes → True,
AxesLabel → {"h1", "h2"}];

h2
300
275
250
225
200
175
150
125
100
75
50
25
0
175 200 225 250 275 300 h1

grafat2 = ParametricPlot3D[
{h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]}}},
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints → 50,
AxesLabel → {"h1", "h2", "h3"},
PlotRange → All,
FaceGrids → All];

```

General::spell1 :
Possible spelling error: new symbol name "grafat2" is similar to existing symbol "grafatu2". More...

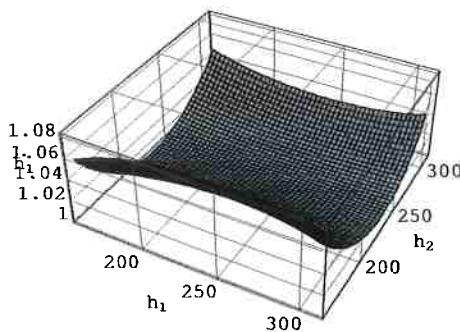


```

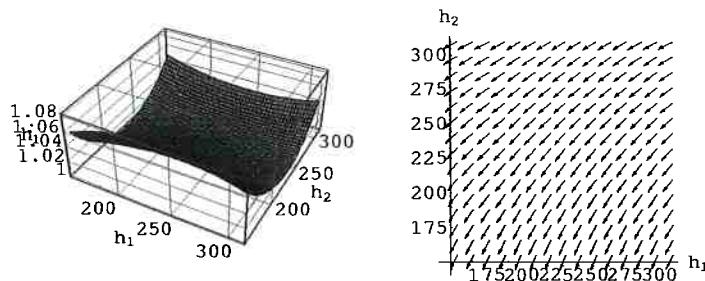
grafat1 = ParametricPlot3D[
  {h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
    J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
    Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A, J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
    {A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
    J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
  {h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
  BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
  PlotPoints -> 50,
  AxesLabel -> {"h1", "h2", "h1"},
  PlotRange -> All,
  FaceGrids -> All];

```

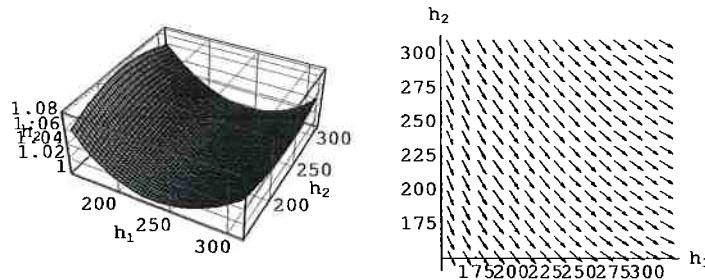
General::spell1 :
Possible spelling error: new symbol name "grafat1" is similar to existing symbol "grafat1". More...



```
Show[GraphicsArray[{grafat1, vetor1}]];
```



```
Show[GraphicsArray[{grafat2, vetor2}]];
```



```

α =  $\frac{30\pi}{180}$ ; L = 250; minimocurso = 155;
maximocurso = 280;

```

```

X = - (Sec[\alpha] (h1 - h2) (Cos[\alpha]2 (h1 + h2) (h12 + 2 Cos[2 \alpha] h1 h2 + h22) +
Sin[\alpha] \sqrt{(-Cos[\alpha]2 (h1 + h2)2 (h12 + 2 Cos[2 \alpha] h1 h2 + h22)
(-4 L2 + h12 + 2 Cos[2 \alpha] h1 h2 + h22))}) / (2 (h1 + h2) (h12 + 2 Cos[2 \alpha] h1 h2 + h22));

Y =  $\frac{1}{2} \left( -\sin[\alpha] (h_1 + h_2) + \right.$ 

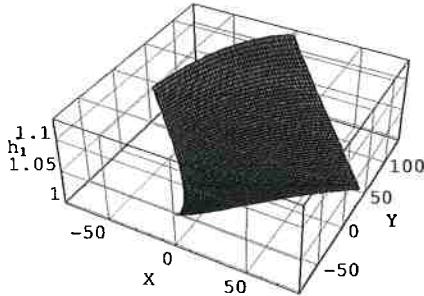
$$\left. \left( \sqrt{(-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2))} / (h_1^2 + 2 \cos[2 \alpha] h_1 h_2 + h_2^2) \right) \right);$$


J1 =  $\left( -\frac{x+h_1 \cos[\alpha]}{h_1+x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} - \frac{y+h_1 \sin[\alpha]}{h_1+x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} \right);$ 
J2 =  $\left( \frac{-x+h_2 \cos[\alpha]}{h_2-x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} - \frac{y+h_2 \sin[\alpha]}{h_2-x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]} \right);$ 

ClearAll[A, B, \lambda]

grafatul =
ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[\lambda, If[ReplaceAll[\lambda, Solve[{J1[[1]][[1]] == \lambda * A,
J1[[1]][[2]] == \lambda * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, \lambda}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] == \lambda * A, J1[[1]][[2]] == \lambda * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, \lambda}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == \lambda * A,
J1[[1]][[2]] == \lambda * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, \lambda}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios \rightarrow {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints \rightarrow 50,
AxesLabel \rightarrow {"X", "Y", "h1" },
PlotRange \rightarrow All,
FaceGrids \rightarrow All];

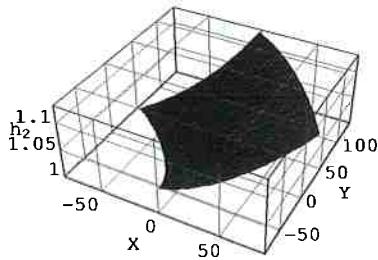
```



```

grafatu2 =
ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints -> 50,
AxesLabel -> {"X", "Y", "h2"},
PlotRange -> All,
FaceGrids -> All];

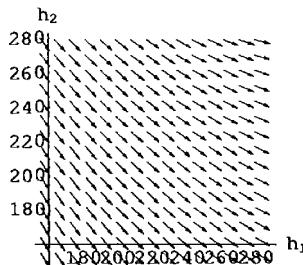
```



```

vetor2 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints -> 15, Axes -> True,
AxesLabel -> {"h1", "h2"}];

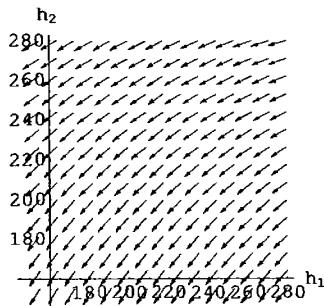
```



```

vetor1 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A, J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints → 15, Axes → True,
AxesLabel → {"h1", "h2"}];

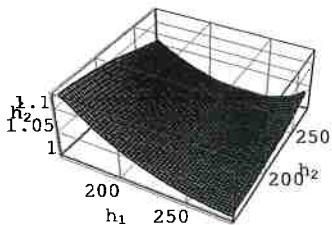
```



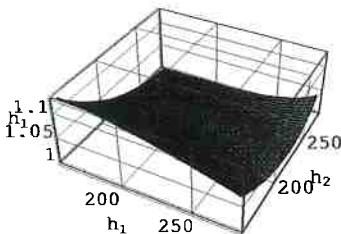
```

grafat2 = ParametricPlot3D[
{h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints → 50,
AxesLabel → {"h1", "h2", "h3"},
PlotRange → All,
FaceGrids → All];

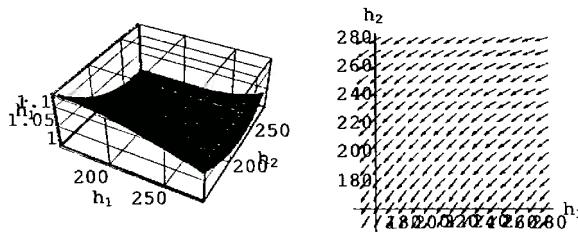
```



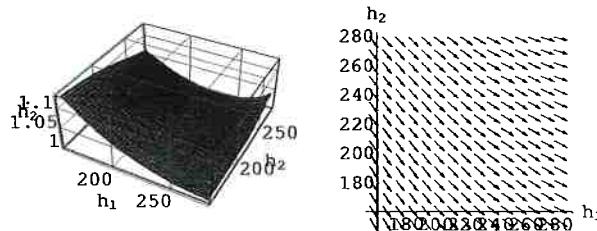
```
grafat1 = ParametricPlot3D[
{h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A, J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A, J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[1]]]}, {h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints → 50,
AxesLabel → {"h1", "h2", "h1"},
PlotRange → All,
FaceGrids → All];
```



```
Show[GraphicsArray[{grafat1, vetor1}]];
```



```
Show[GraphicsArray[{grafat2, vetor2}]];
```



```
α =  $\frac{60\pi}{180}$ ; L = 250; minimocurso = 155;
maximocurso = 480;
```

$$x = - \left(\sec[\alpha] (h_1 - h_2) (\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) + \sin[\alpha] \sqrt{(-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2))}) \right) / (2 (h_1 + h_2) (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2));$$

$$y = \frac{1}{2} \left(-\sin[\alpha] (h_1 + h_2) + \left(\sqrt{(-\cos[\alpha]^2 (h_1 + h_2)^2 (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) (-4 L^2 + h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2))} \right) / (h_1^2 + 2 \cos[2\alpha] h_1 h_2 + h_2^2) \right);$$

```

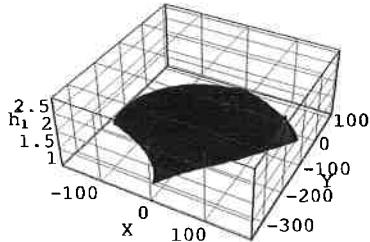
J1 = { - $\frac{x+h_1 \cos[\alpha]}{h_1+x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]}$  -  $\frac{y+h_1 \sin[\alpha]}{h_1+x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]}$  };

J2 = {  $\frac{-x+h_2 \cos[\alpha]}{h_2-x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]}$  -  $\frac{y+h_2 \sin[\alpha]}{h_2-x \cos[\alpha]+y \sin[\alpha]}$  };

ClearAll[A, B, λ]

grafatul =
ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A, J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints -> 50,
AxesLabel -> {"X", "Y", "h1"}, PlotRange -> All,
FaceGrids -> All];

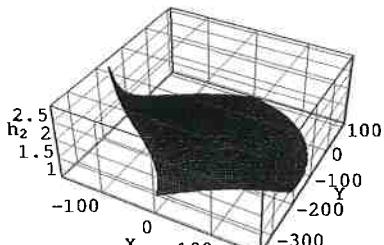
```



```

grafatu2 =
ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A, J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints -> 50,
AxesLabel -> {"X", "Y", "h2"}, PlotRange -> All,
FaceGrids -> All];

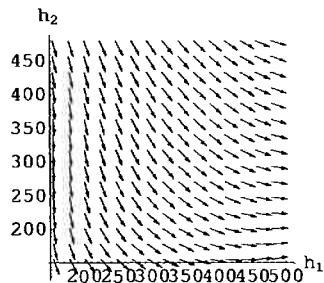
```



```

vetor2 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints → 15, Axes → True,
AxesLabel → {"h1", "h2"}];

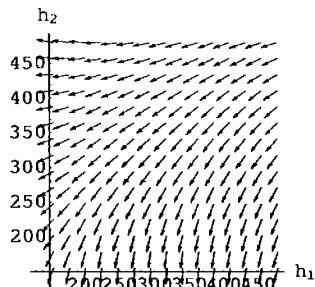
```



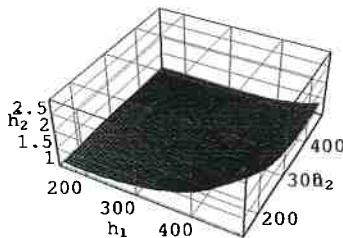
```

vetor1 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A, J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints → 15, Axes → True,
AxesLabel → {"h1", "h2"}];

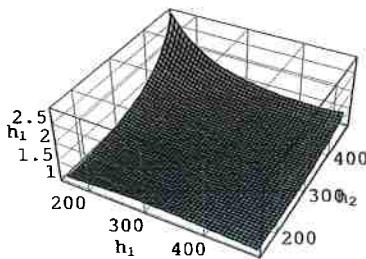
```



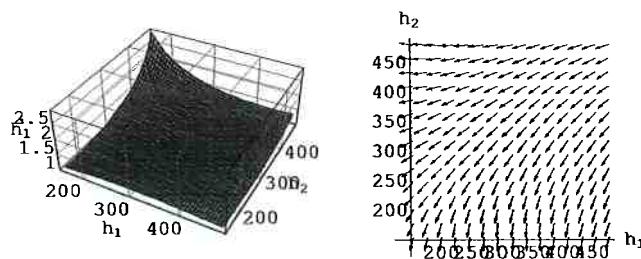
```
grafat2 = ParametricPlot3D[
  {h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
    J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
    Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A, J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
    {A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] = λ * A,
    J2[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
  {h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
  BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},
  PlotPoints → 50,
  AxesLabel → {"h1", "h2", "h2"}, PlotRange → All,
  FaceGrids → All];
```



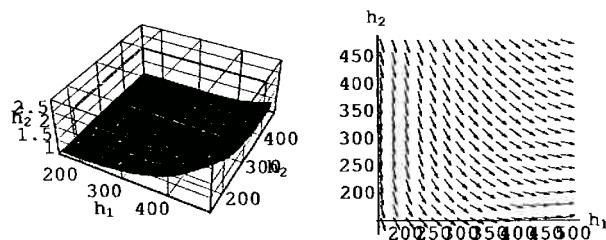
```
grafat1 = ParametricPlot3D[
  {h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
    J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
    Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A, J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1},
    {A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] = λ * A,
    J1[[1]][[2]] = λ * B, A^2 + B^2 = 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
  {h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
  BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},
  PlotPoints → 50,
  AxesLabel → {"h1", "h2", "h1"}, PlotRange → All,
  FaceGrids → All];
```



```
Show[GraphicsArray[{grafat1, vetor1}]];
```



```
Show[GraphicsArray[{grafat2, vetor2}]];
```



Modelo Treliça plano - Estatico e Modal

```

In[1]:= α = 45 π;
          180;
minimo = 155;
L = 250;
maximo = 310;

In[5]:= A = 100;
Ro = 7830 * 10-9;
Em = 210 * 103;

In[8]:= X = - (Sec[α] (h1 - h2) (Cos[α]2 (h1 + h2) (h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22) +
Sin[α] √(-Cos[α]2 (h1 + h2)2 (h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22)
(-4 L2 + h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22))) / (2 (h1 + h2) (h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22));

In[9]:= X = FullSimplify[X];

In[10]:= Y = 1/2 (-Sin[α] (h1 + h2) +
(√(-Cos[α]2 (h1 + h2)2 (h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22) (-4 L2 + h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22)) /
(h12 + 2 Cos[2 α] h1 h2 + h22)));

In[11]:= Y = FullSimplify[Y];

In[12]:= 

ElemStiff2DTwoNodeBar[((x1_,y1_), (x2_,y2_)), {Em_,A_}] := Module[
{c,s,dx=x2-x1,dy=y2-y1,L,Ke},
L=Sqrt[dx^2+dy^2]; c=dx/L; s=dy/L;
Ke=(Em*A/L)* {{c^2, c*s, -c^2, -c*s},
{c*s, s^2, -s*c, -s^2},
{-c^2, -s*c, c^2, s*c},
{-s*c, -s^2, s*c, s^2}};
Return[Ke]
];

In[13]:= 

ElemMass2DTwoNodeBar[((x1_,y1_), (x2_,y2_)), {Ro_,A_}] := Module[
{c,s,dx=x2-x1,dy=y2-y1,L,Ma},
L=Sqrt[dx^2+dy^2]; c=dx/L; s=dy/L;
Ma=(Ro*A*L/2)* {{c^2+s^2, 0, 0, 0},
{0, c^2+s^2, 0, 0},
{0, 0, c^2+s^2, 0},
{0, 0, 0, c^2+s^2}};
Return[Ma]
];

```



```
In[31]:= M = Table[0, {6}, {6}];
Print["Initialized master mass matrix:"];
Print[M // MatrixForm]

Initialized master mass matrix:


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


In[34]:= K = MergeElemIntoMasterStiff[Ke1, {1, 2, 5, 6}, K];
Print["Master stiffness after member merge:"];
Print[K // MatrixForm];

In[37]:= M = MergeElemIntoMasterStiff[Me1, {1, 2, 5, 6}, M];
Print["Master mass after member merge:"];
Print[M // MatrixForm];

Master mass after member merge:


$$\begin{pmatrix} \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{8000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{8000} \end{pmatrix}$$


In[40]:= MatrixForm[N[ReplaceAll[K, {h1 → 200, h2 → 250}]]]

Out[40]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 43693.3 & 41965.9 & 0. & 0. & -43693.3 & -41965.9 \\ 41965.9 & 40306.7 & 0. & 0. & -41965.9 & -40306.7 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -43693.3 & -41965.9 & 0. & 0. & 43693.3 & 41965.9 \\ -41965.9 & -40306.7 & 0. & 0. & 41965.9 & 40306.7 \end{pmatrix}$$


In[41]:= MatrixForm[N[ReplaceAll[M, {h1 → 200, h2 → 250}]]]

Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.097875 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.097875 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.097875 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.097875 \end{pmatrix}$$


In[42]:= K = MergeElemIntoMasterStiff[Ke2, {5, 6, 3, 4}, K];
Print["Master stiffness after member merge:"];
Print[K // MatrixForm];
```

```
In[45]:= M = MergeElemIntoMasterStiff[Me2, {5, 6, 3, 4}, M];
Print["Master mass after member merge:"];
Print[M // MatrixForm];
```

Master mass after member merge:

$$\begin{pmatrix} \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{4000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{4000} \end{pmatrix}$$

```
In[48]:= MatrixForm[N[ReplaceAll[K, {h1 → 200, h2 → 250}]]]
```

```
Out[48]//MatrixForm=
{{43693.3, 41965.9, 0., 0., -43693.3, -41965.9},
 {41965.9, 40306.7, 0., 0., -41965.9, -40306.7},
 {0., 0., 25555.5, -38646.8, -25555.5, 38646.8},
 {0., 0., -38646.8, 58444.5, 38646.8, -58444.5},
 {-43693.3, -41965.9, -25555.5, 38646.8, 69248.8, 3319.02},
 {-41965.9, -40306.7, 38646.8, -58444.5, 3319.02, 98751.2}}
```

```
In[49]:= MatrixForm[N[ReplaceAll[M, {h1 → 200, h2 → 250}]]]
```

```
Out[49]//MatrixForm=
{{0.097875, 0., 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0.097875, 0., 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0.097875, 0., 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0.097875, 0., 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0.19575, 0.},
 {0., 0., 0., 0., 0., 0.19575}}
```

In[50]:=

```
ModifiedMasterStiffForDBC[pdof_, K_] := Module[
{i, j, k, nk=Length[K], np=Length[pdof], Kmod=K},
For [k=1, k<=np, k++, i=pdof[[k]];
For [j=1, j<=nk, j++, Kmod[[i, j]]=Kmod[[j, i]]=0];
Kmod[[i, i]]=1];
Return[Kmod]
];
ModifiedMasterForcesForDBC[pdof_, f_] := Module[
{i, k, np=Length[pdof], fmod=f},
For [k=1, k<=np, k++, i=pdof[[k]]; fmod[[i]]=0];
Return[fmod]
];

```

```
In[52]:= Print[K // MatrixForm];
Kmod = ModifiedMasterStiffForDBC[{1, 2, 3, 4}, K];
Print["Master stiffness modified for displacement B.C.:"];
Print[Kmod // MatrixForm];
f = {0, 0, 0, 0, 1, 1}; Print["Force vector:"; Print[f];
fmod = ModifiedMasterForcesForDBC[{1, 2, 3, 4}, f];
Print["Force vector modified for displacement B.C."]; Print[fmod];
```

Force vector:

{0, 0, 0, 0, 1, 1}

Force vector modified for displacement B.C.:

{0, 0, 0, 0, 1, 1}

```
In[59]:= Print[M // MatrixForm];
Mmod = ModifiedMasterStiffForDBC[{1, 2, 3, 4}, M];
Print["Master mass modified for displacement B.C."];
Print[Mmod // MatrixForm];
```

$$\begin{pmatrix} \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{783}{8000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{4000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{4000} \end{pmatrix}$$

General::spell :

Possible spelling error: new symbol name "Mmod" is similar to existing symbols {Kmod, Mod}. More...

Master mass modified for displacement B.C.:

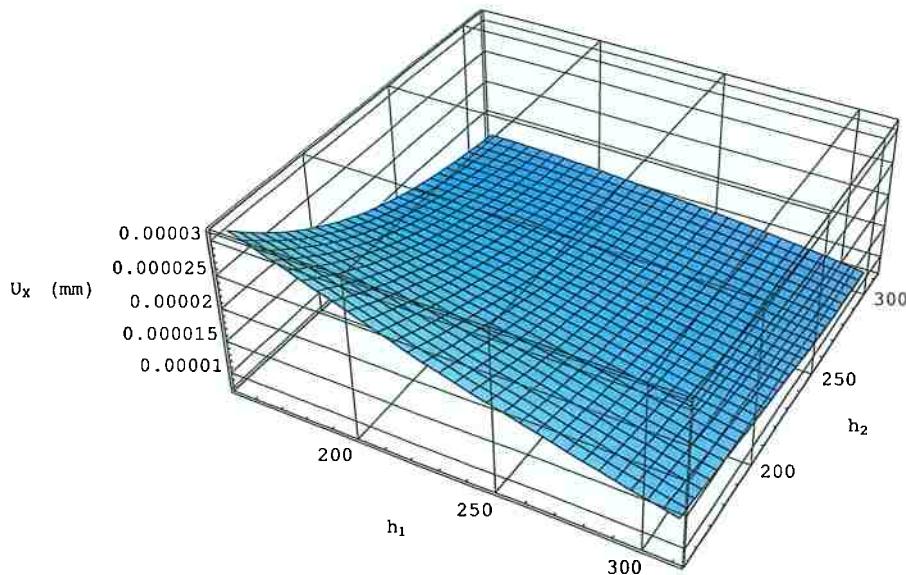
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{4000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{783}{4000} \end{pmatrix}$$

```
In[63]:= u = MatrixForm[Simplify[Inverse[Kmod].fmod]]
```

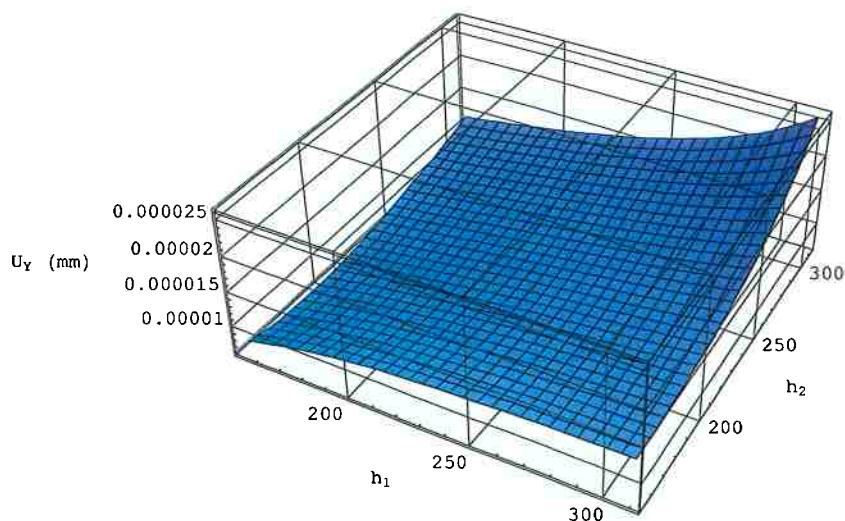
Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{125 (-250000 h_1^2 + h_1^4 + 2 h_1^3 h_2 - h_1^2 + 2 h_1 h_2 (-125000 + h_2^2))}{84 (-250000 + h_1^2 + h_2^2) (h_1^2 + h_2^2)^2} \\ \frac{125 (-250000 h_1^2 + h_1^4 - 2 h_1^3 h_2 - h_1^2 - 2 h_1 h_2 (-125000 + h_2^2))}{84 (-250000 + h_1^2 + h_2^2) (h_1^2 + h_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

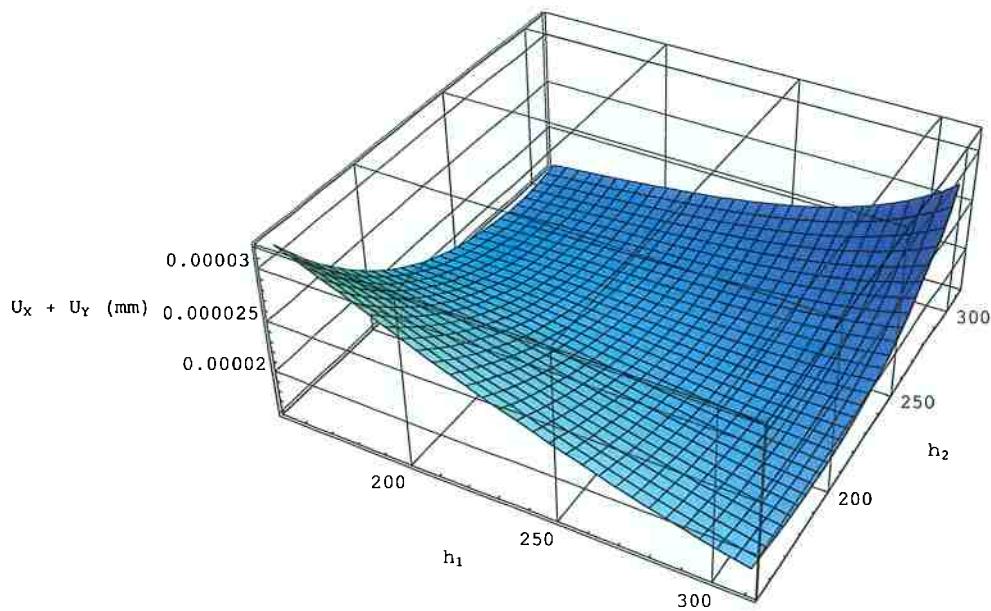
```
In[66]:= ParametricPlot3D[{h1, h2, ReplaceAll[u[[1, 5]], {A → 100, Em → 210 * 103]},{h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange → All, BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids → All, AxesLabel → {"h1", "h2", "Ux (mm)"}];
```



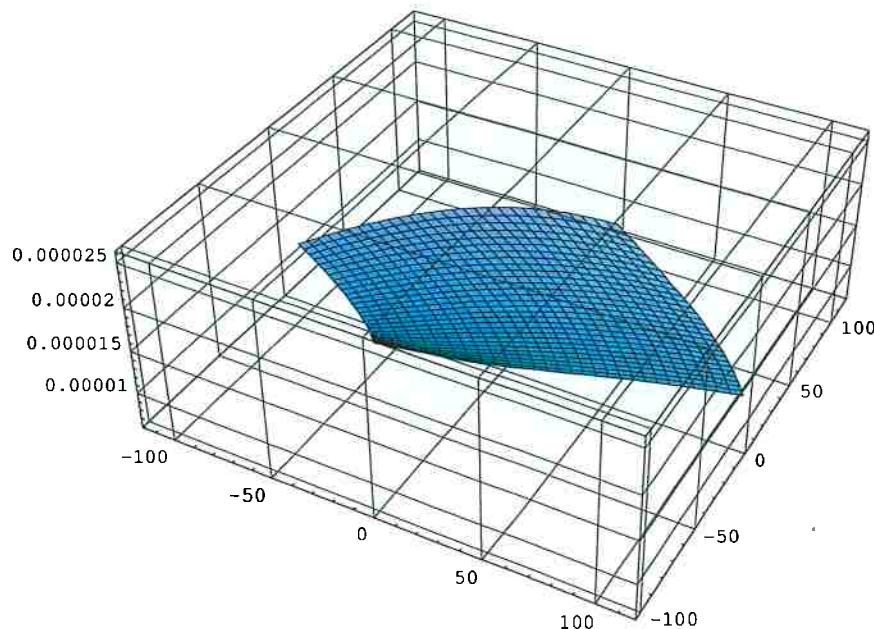
```
In[67]:= ParametricPlot3D[{h1, h2, ReplaceAll[u[[1, 6]], {A → 100, Em → 210 * 103]},{h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange → All, BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids → All, AxesLabel → {"h1", "h2", "Uy (mm)"}];
```



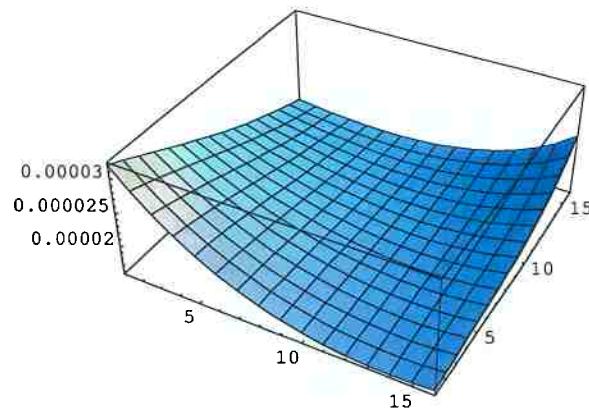
```
In[68]:= ParametricPlot3D[
{h1, h2, ReplaceAll[ $\sqrt{u[[1, 6]]^2 + u[[1, 5]]^2}$ , {A → 100, Em → 210 * 103}]}, 
{h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange → All,
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids → All,
AxesLabel → {"h1", "h2", "Ux + Uy (mm)"}];
```



```
In[69]:= ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[u[[1, 6]], {A → 100, Em → 210*10^3]}},  
{h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange → All,  
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids → All];
```

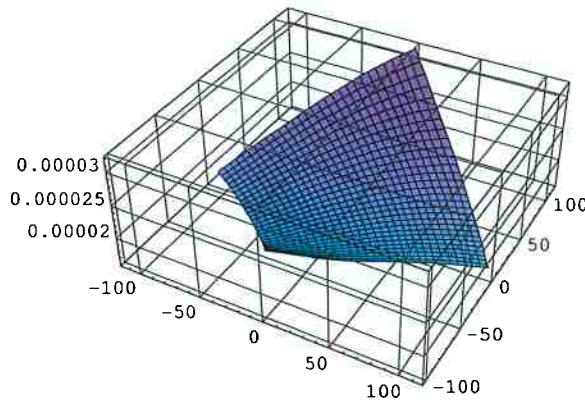


```
In[70]:= ListPlot3D[Table[  
ReplaceAll[√u[[1, 6]]^2 + u[[1, 5]]^2, {h1 → i, h2 → j, A → 10*10, Em → 210*10^3}],  
{i, 155, 310, 10}, {j, 155, 310, 10}], PlotRange → All]
```



```
Out[70]= - SurfaceGraphics -
```

```
In[71]:= ParametricPlot3D[
{X, Y, ReplaceAll[Sqrt[u[[1, 6]]^2 + u[[1, 5]]^2], {A → 100, Em → 210*10^3}]},
{h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange → All,
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids → All];
```



```
In[72]:= N[ReplaceAll[u[[1, 6]], {h1 → 155, h2 → 155, A → 100, Em → 210*10^3}]]
```

```
Out[72]= 7.36863 × 10-6
```

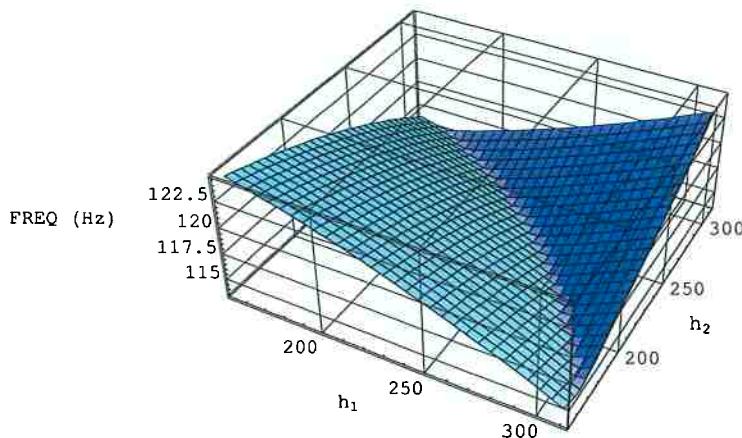
```
In[73]:= N[ReplaceAll[u[[1, 5]], {h1 → 155, h2 → 155, A → 100, Em → 210*10^3}]]
```

```
Out[73]= 0.0000309697
```

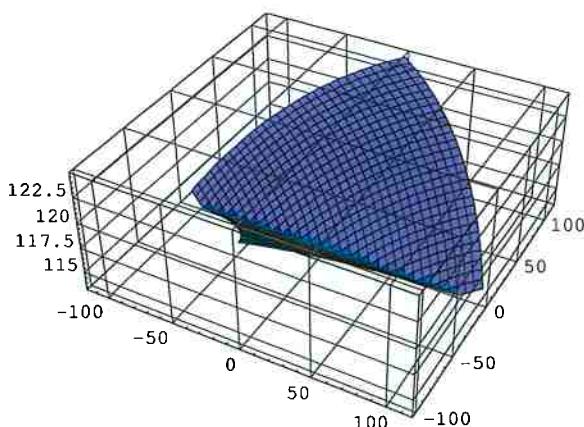
```
In[74]:= N[ReplaceAll[Sqrt[u[[1, 6]]^2 + u[[1, 5]]^2], {h1 → 305, h2 → 305, A → 100, Em → 210*10^3}]]
```

```
Out[74]= 0.0000246059
```

```
In[80]:= ParametricPlot3D[{h1, h2, Max[Re[Sqrt[Eigenvalues[Inverse[M].K][[1]]]] / Sqrt[100]}, {h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange -> All, BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids -> All, AxesLabel -> {"h1", "h2", "FREQ (Hz)"}];
```



```
In[78]:= ParametricPlot3D[{X, Y, Max[Re[Sqrt[Eigenvalues[Inverse[M].K][[1]]]] / Sqrt[100]}], {h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}, PlotRange -> All, BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2}, FaceGrids -> All];
```



Desenho do Mecanismo do Genius 500

```

<<Graphics`Arrow`  
  

M = 315;  
  

L = 708;  
  

h1 = 200; h2 = 115;  
  

min = 0; max = 315;  
  

A = -M + i h1  

-315 + 200 i  
  

B = +M + i h2  

315 + 115 i  
  

X =  $\left( \sqrt{-M^2 (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2) (-4 (L - M) (L + M) + (h_1 - h_2)^2)} (h_1 - h_2) \right) / (2 M (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2))$   

 $\frac{17 \sqrt{\frac{1600931}{16165}}}{2}$   
  

Y =  $\frac{\sqrt{-M^2 (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2) (-4 (L - M) (L + M) + (h_1 - h_2)^2)}}{4 M^2 + (h_1 - h_2)^2} + \frac{1}{2} (h_1 + h_2)$   

 $\frac{315}{2} + 63 \sqrt{\frac{1600931}{16165}}$   
  

ponto1 = {Re[A], Im[A]}  

{-315, 200}  
  

ponto2 = {Re[B], Im[B]}  

{315, 115}  
  

ponto3 = {X, Y}  

 $\left\{ \frac{17 \sqrt{\frac{1600931}{16165}}}{2}, \frac{315}{2} + 63 \sqrt{\frac{1600931}{16165}} \right\}$   
  

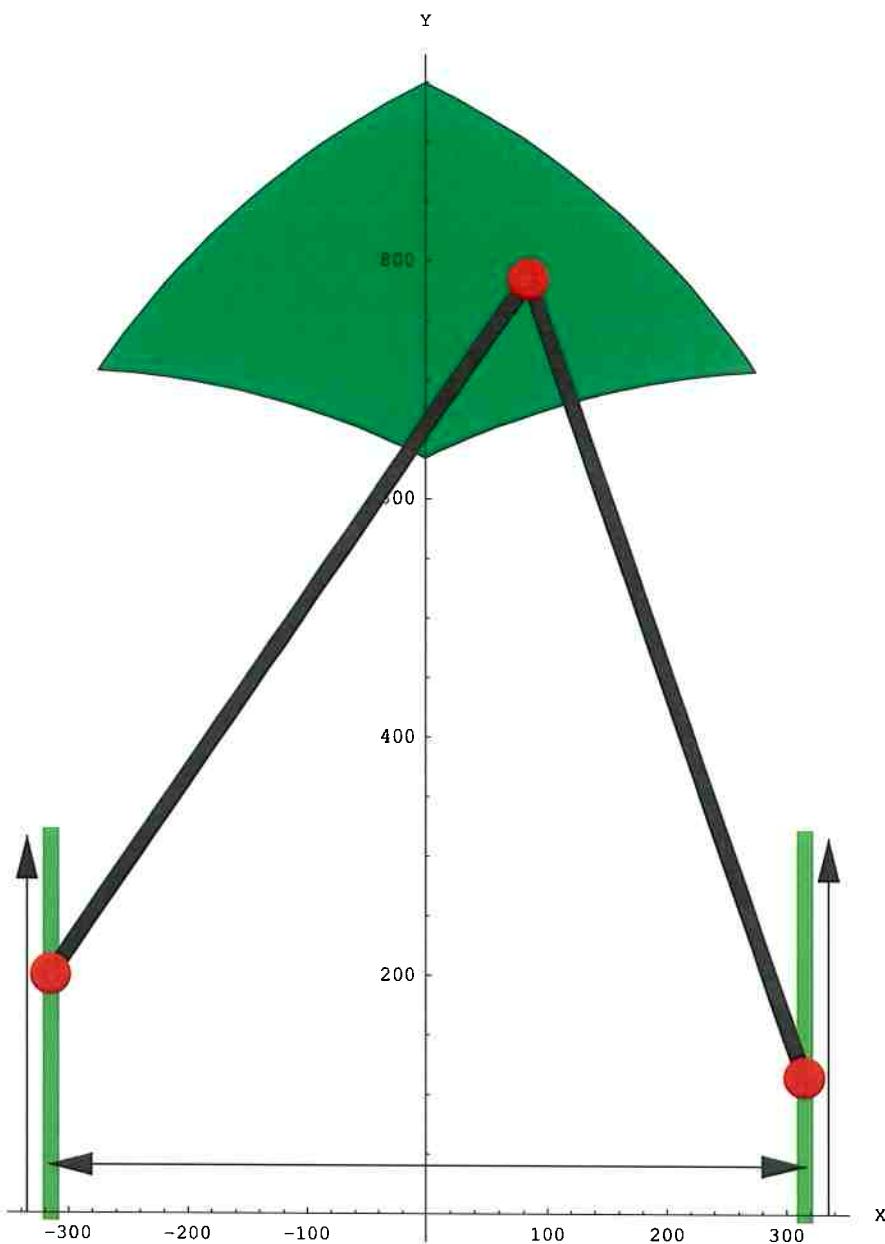
N[%]  

{84.5897, 784.459}  
  

<< Graphics`InequalityGraphics`  


```

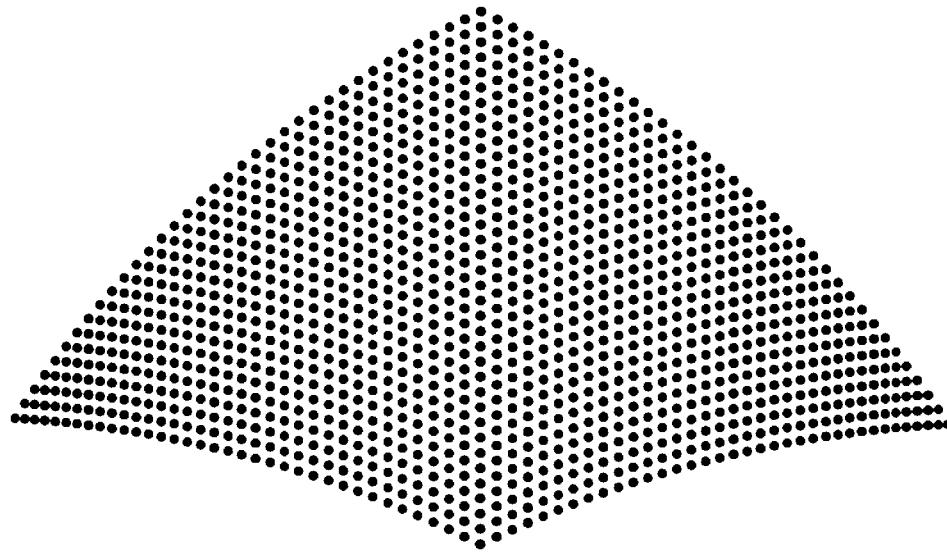
```
Show[workspace, Graphics[{Thickness[.02],
  RGBColor[0.5, 0.8, 0.2], Line[{{Re[B], max}, {Re[B], min}}]}], Graphics[
{Thickness[.02], RGBColor[0.5, 0.8, 0.2], Line[{{Re[A], max}, {Re[A], min}}]}],
Graphics[{Thickness[.02], Line[{ponto1, ponto3}]}],
Graphics[{Thickness[.02], Line[{ponto2, ponto3}]}],
Graphics[{Thickness[.002], Arrow[{0, 40}, {Re[B], 40}]}],
Graphics[{Thickness[.002], Arrow[{0, 40}, {Re[A], 40}]}],
Graphics[{Thickness[.002], Arrow[{Re[A] - 20, min}, {Re[A] - 20, max}]}],
Graphics[{Thickness[.002], Arrow[{Re[B] + 20, min}, {Re[B] + 20, max}]}], Graphics[
{PointSize[0.05], RGBColor[1, 0, 0], Point[ponto3], Point[ponto1], Point[ponto2]}]],
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All, Axes -> True,
Ticks -> Automatic, AxesLabel -> {"X", "Y"}];
```



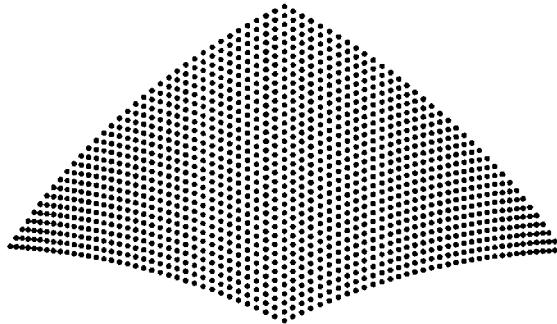
Precisao do Mecanismo Genius 500

```
<< Graphics`Graphics3D`  
<< Graphics`ParametricPlot3D`  
  
M = 315;  
  
L = 708;  
  
minimo = 0; maximo = 315;  
  
A = -M + i h1;  
  
B = +M + i h2;  
  
X =  
  
$$\left( \sqrt{-M^2 (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2) (-4 (L - M) (L + M) + (h_1 - h_2)^2)} (h_1 - h_2) \right) / (2 M (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2));$$
  
Y = 
$$\frac{\sqrt{-M^2 (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2) (-4 (L - M) (L + M) + (h_1 - h_2)^2)}}{4 M^2 + (h_1 - h_2)^2} + \frac{1}{2} (h_1 + h_2);$$
  
  
passo = 3;  
modulo = 3;  
  
X2 = ReplaceAll[X, h1 → (h1 + passo)];  
Y2 = ReplaceAll[Y, h1 → (h1 + passo)];  
X3 = ReplaceAll[X, h2 → (h2 + passo)];  
Y3 = ReplaceAll[Y, h2 → (h2 + passo)];
```

```
PointParametricPlot3D[{X, Y, 0}, {h1, minimo, maximo, 3*passo},
{h2, minimo, maximo, 3*passo}, Boxed -> False,
AspectRatio -> Automatic, ViewPoint -> {0.000, 0.000, 1.000}];
```



```
mateus = Show[ Project[% , {{0.1, 0, 0}, {0, 0.1, 0}, {0, 0, 0.00001}, {0, 0, 0}}, 
ViewPoint -> {0.000, 0.000, 1.000}, Boxed -> False,
Axes -> False, AspectRatio -> Automatic];
```

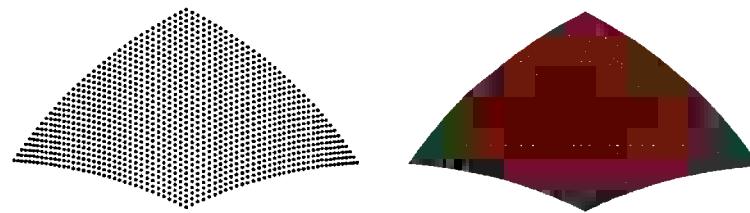


```
graph1 = ParametricPlot3D[
{x, y, 2*L*ArcSin[ $\frac{\sqrt{\text{Abs}[x_2-x]^2+\text{Abs}[y_2-y]^2}}{2}$ ] $\frac{2}{L}$ ] + 2*L*ArcSin[ $\frac{\sqrt{\text{Abs}[x_3-x]^2+\text{Abs}[y_3-y]^2}}{2}$ ] $\frac{2}{L}$ ], If[
2*modulo  $\geq$  2*L*ArcSin[ $\frac{\sqrt{\text{Abs}[x_2-x]^2+\text{Abs}[y_2-y]^2}}{2}$ ] $\frac{2}{L}$ ] + 2*L*ArcSin[ $\frac{\sqrt{\text{Abs}[x_3-x]^2+\text{Abs}[y_3-y]^2}}{2}$ ] $\frac{2}{L}$ ],
RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]], {h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo},
ViewPoint -> {3.687, -8.014, 1.783}, AxesLabel -> {h1, h2, h1},
PlotPoints -> 50, PlotRange -> All, Lighting -> False];
```

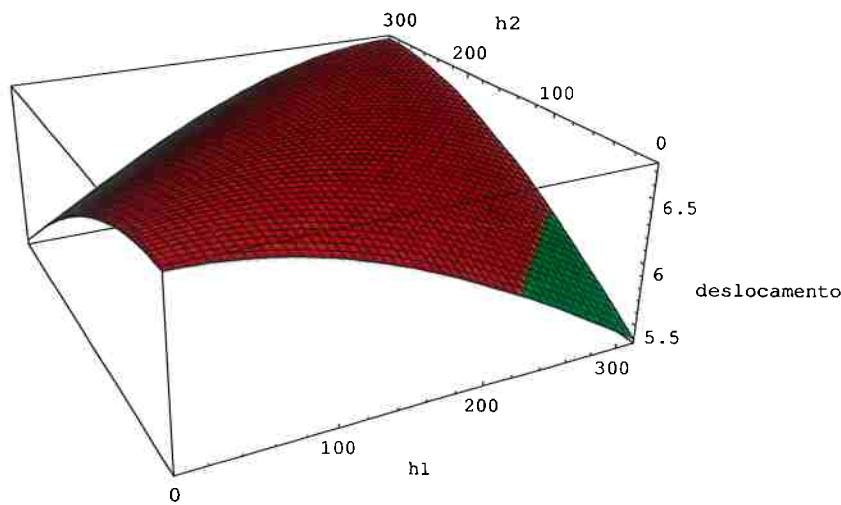
```
mateus2 = Show[ Project[graph1, {{0.1, 0, 0}, {0, 0.1, 0}, {0, 0, 0.00001}, {0, 0, 0}},  
ViewPoint -> {0.000, 0.000, 1.000}, Boxed -> False,  
Axes -> False, AspectRatio -> Automatic];
```



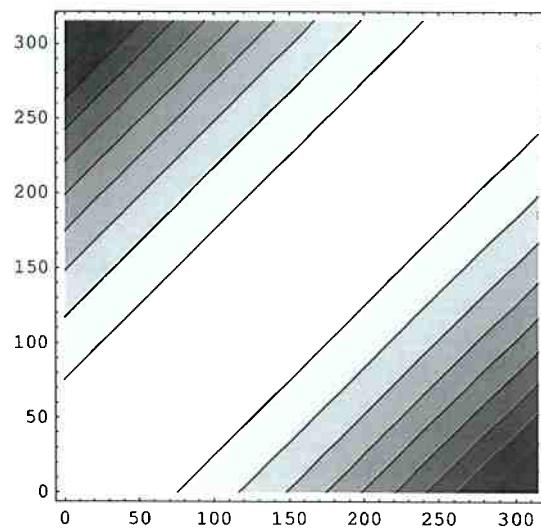
```
Show[GraphicsArray[{mateus, mateus2}]];
```



```
graph1 =  
Plot3D[{2 * L * ArcSin[ $\frac{\sqrt{Abs[X2-X]^2+Abs[Y2-Y]^2}}{2}$ ]  
L] + 2 * L * ArcSin[ $\frac{\sqrt{Abs[X3-X]^2+Abs[Y3-Y]^2}}{2}$ ], If[  
2 * modulo >= 2 * L * ArcSin[ $\frac{\sqrt{Abs[X2-X]^2+Abs[Y2-Y]^2}}{2}$ ]  
L] + 2 * L * ArcSin[ $\frac{\sqrt{Abs[X3-X]^2+Abs[Y3-Y]^2}}{2}$ ],  
RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]]}, {h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo},  
ViewPoint -> {-1., -2., 1.}, AxesLabel -> {h1, h2, "deslocamento"},  
Mesh -> True, PlotPoints -> 50, PlotRange -> All];
```



```
ContourPlot[2 * L * ArcSin[ $\frac{\sqrt{\text{Abs}[x_2-x]^2+\text{Abs}[y_2-y]^2}}{2}$ ] $]$  + 2 * L * ArcSin[ $\frac{\sqrt{\text{Abs}[x_3-x]^2+\text{Abs}[y_3-y]^2}}{2}$ ] $]$ ,  
{h1, minimo, maximo}, {h2, minimo, maximo}];
```

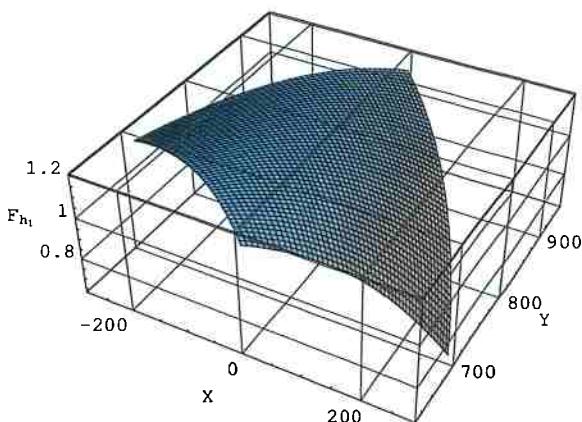


MFTA do Mecanismo Genius

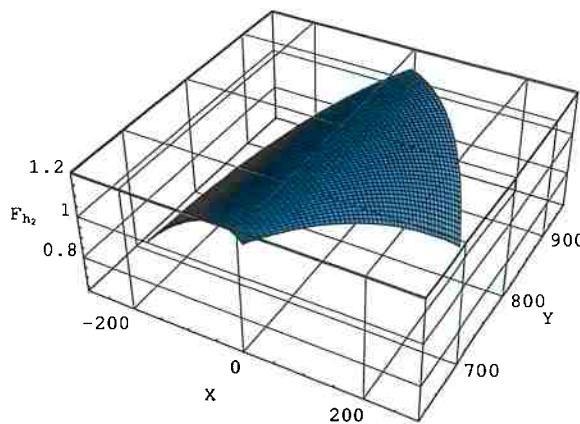
```

<<Graphics`PlotField`  
  
M = 315;  
L = 708;  
minimocurso = 0; maximocurso = 315;  
  
X =  
  
$$\left( \sqrt{-M^2 (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2) (-4 (L - M) (L + M) + (h_1 - h_2)^2)} (h_1 - h_2) \right) / (2 M (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2));$$
  
Y = 
$$\frac{\sqrt{-M^2 (4 M^2 + (h_1 - h_2)^2) (-4 (L - M) (L + M) + (h_1 - h_2)^2)}}{4 M^2 + (h_1 - h_2)^2} + \frac{1}{2} (h_1 + h_2);$$
  
J = FullSimplify[Inverse[Transpose[
$$\begin{pmatrix} -\frac{(M+X)}{h_1-Y} & 1 \\ \frac{(M-X)}{h_2-Y} & 1 \end{pmatrix}]]];  
J1 = (J[[1]][[1]] J[[1]][[2]]);  
J2 = (J[[2]][[1]] J[[2]][[2]]);  
ClearAll[A, B, λ]  
  
grafatul =  
  ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,  
          J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}] [[2]]] > 0,  
          Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A, J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},  
          {A, B, λ}] [[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,  
          J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}] [[1]]]]},  
  {h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},  
  BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},  
  PlotPoints → 50,  
  AxesLabel → {"X", "Y", "Fh1"},  
  PlotRange → All, FaceGrids → All];$$

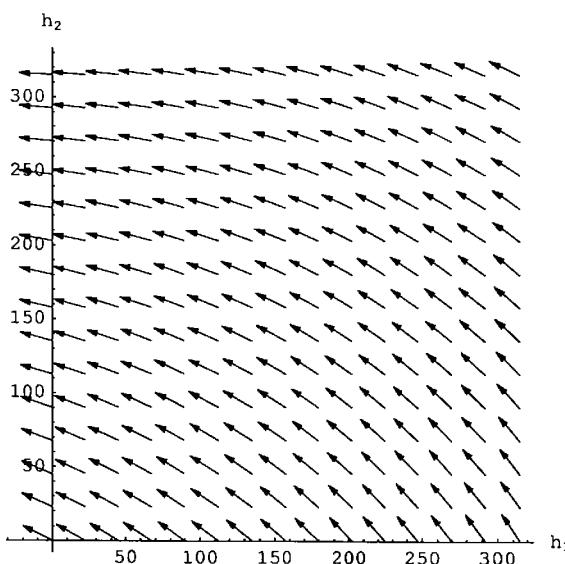
```



```
grafatu2 =
ParametricPlot3D[{X, Y, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A, J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints -> 50,
AxesLabel -> {"X", "Y", "Fh2"},
PlotRange -> All, FaceGrids -> All];
```



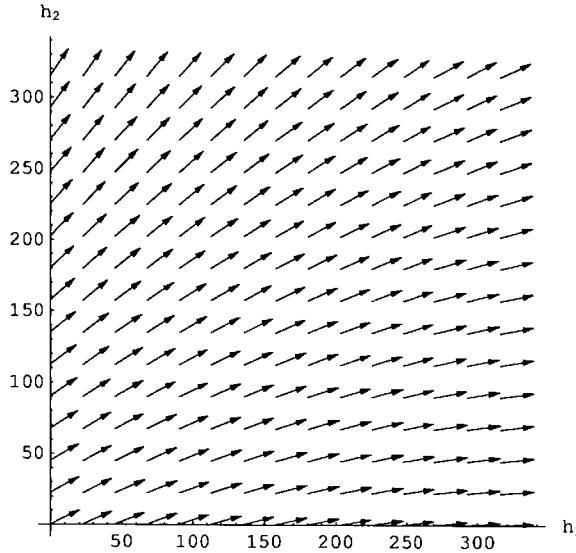
```
vetor2 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A, J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]}],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints -> 15, Axes -> True,
AxesLabel -> {"h1", "h2"}];
```



```

vetor1 =
PlotVectorField[ReplaceAll[{A, B}, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A, J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]]],
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
PlotPoints → 15, Axes → True,
AxesLabel → {"h1", "h2"}];

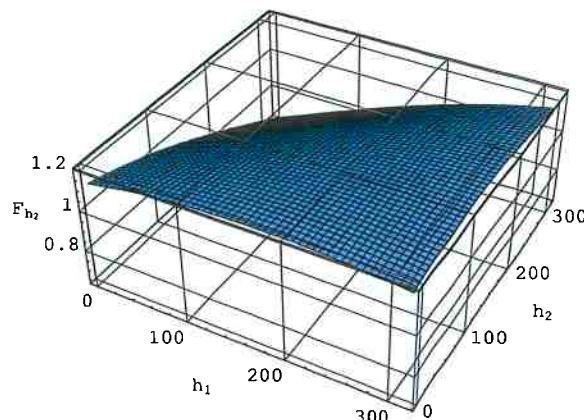
```



```

grafat2 = ParametricPlot3D[
{h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A, J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
{A, B, λ}][[2]], Solve[{J2[[1]][[1]] == λ * A,
J2[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]}}},
{h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
BoxRatios → {0.5, 0.5, 0.2},
PlotPoints → 50,
AxesLabel → {"h1", "h2", "Fh2"},
PlotRange → All, FaceGrids → All];

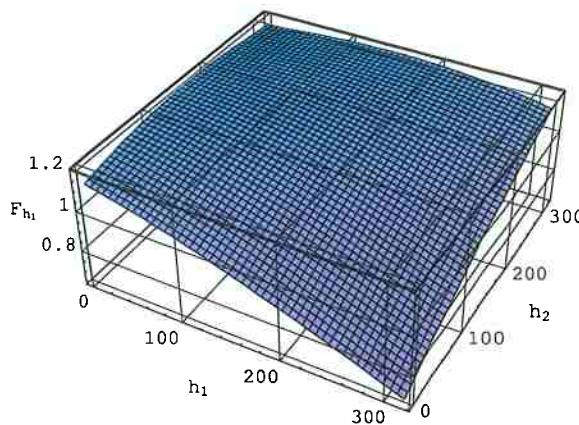
```



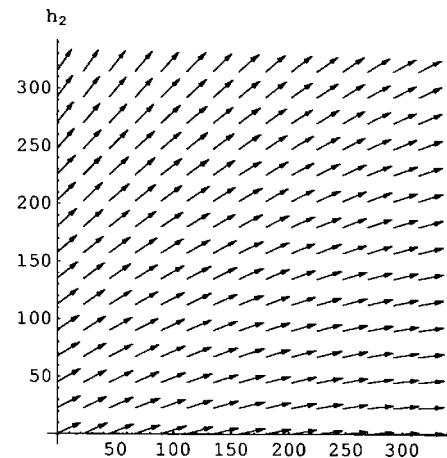
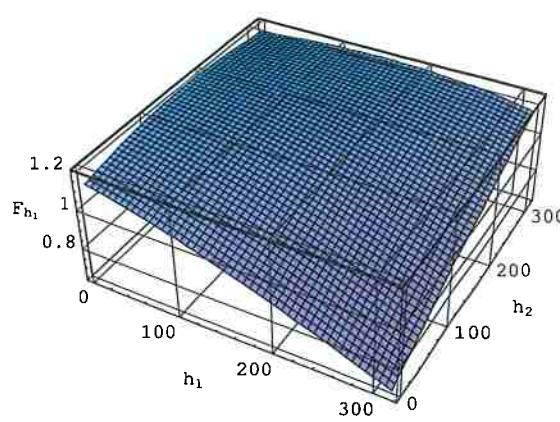
```

grafat1 = ParametricPlot3D[
  {h1, h2, ReplaceAll[λ, If[ReplaceAll[λ, Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
    J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[2]]] > 0,
    Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A, J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1},
    {A, B, λ}][[2]], Solve[{J1[[1]][[1]] == λ * A,
    J1[[1]][[2]] == λ * B, A^2 + B^2 == 1}, {A, B, λ}][[1]]]}],
  {h1, minimocurso, maximocurso}, {h2, minimocurso, maximocurso},
  BoxRatios -> {0.5, 0.5, 0.2},
  PlotPoints -> 50,
  AxesLabel -> {"h1", "h2", "Fh1" },
  PlotRange -> All, FaceGrids -> All];

```



```
Show[GraphicsArray[{grafat1, vetor1}]];
```



```
Show[GraphicsArray[{grafat2, vetor2}]];
```

