UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

IAGO DE CARVALHO BARBEIRO

# Estruturas coerentes e modelos reduzidos para o escoamento ao redor de um cilindro no regime bidimensional periódico

São Paulo

2012

IAGO DE CARVALHO BARBEIRO

# Estruturas coerentes e modelos reduzidos para o escoamento ao redor de um cilindro no regime bidimensional periódico

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

**São Paulo**

**2012**

IAGO DE CARVALHO BARBEIRO

# Estruturas coerentes e modelos reduzidos para o escoamento ao redor de um cilindro no regime bidimensional periódico

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica de Energia e Fluidos

Orientador:
Prof. Dr. Julio Romano Meneghini

**São Paulo**

**2012**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 30 de abril de 2012

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Barbeiro, Iago de Carvalho**
**Estruturas coerentes e modelos reduzidos para o escoamento ao redor de um cilindro no regime bidimensional periódico / I.C. Barbeiro. -- São Paulo, 2012.**
**59 p.**

**Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1. Dinâmica dos fluidos 2. Modelos matemáticos 3. Estabilidade de sistemas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

# AGRADECIMENTOS

Ao professor Meneghini, pelo convite, pelo grande apoio e principalmente pela amizade ao longo desses anos. Ao professor Aranha, que me trouxe o desafio desta tese, pelas batalhas compartilhadas na compreensão dos problemas e na busca pelas questões.

À minha mãe e à minha irmã Fernanda queridas, pelo porto aconchegante sempre posto ao viajante quase sempre ausente. Ao meu pai, pela confiança e pelo suporte ao longo desses caminhos. Ao meu irmão Lincoln, companheiro nesses quase vinte e cinco anos, por me tentar ao risco das alegrias simples. Aos pequenos, Bianca e Matheus, pelas brincadeiras e pela alegria.

Aos grandes amigos do 54E: Freitas, Finamore, Furlaneto, Roque Jr., Fred, Luís, Doug e Ricardo, pela amizade infalível e pelos anos de churrascos e risadas.

Aos companheiros do NDF: Roque Jr. (de novo), pelos tantos socorros (não) técnicos; Pedrão, pela camaradagem; Ivan & Monica, pelos passeios e conversas; Gioria, pela prontidão e precisão; Brunoc, pelo primeiro código de *CFD* e pela revisão cuidadosa; Pjabardo, pelo *C++* e pelos brados; Pepe, pelas aulas de boxe; Baliño, também pelos churrascos; Fsaltara, pela primeira orientação; Clóvis, pelas discussões e recomendações; Lauro, pela atenção nas respostas; Fernanda, pela paciência; Ivone, pelo capricho; Stergios, Adson, Franzini, Nemoto, Provasi, Alfredo e Chaves, pelas conversas e cafés.

À Fernanda Canavêz, por ter acreditado no nosso mergulho, pelo afeto e, é claro, pelas vírgulas, gerúndios e outros realocados ou extraídos em prol da leitura deste texto.

Aos amigos de motocicletas: Marcio & Dó, Chico Landi e Tosi, pelos passeios, experiências, socorros e histórias que completaram esses anos com muito mais que 2 rodas.

À FAPESP, pela bolsa de doutorado.

À FINEP e à Petrobras, pelos financiamentos que possibilitaram esta pesquisa.

"En el fondo de un corredor, un no previsto muro me cerró el paso, una remota luz cayó sobre mí. Alcé los ofuscados ojos: en lo vertiginoso, en lo altíssimo, vi un círculo de cielo tan azul que pudo parecerme de púrpura. Unos peldaños de metal escalaban el muro. La fatiga me relajaba, pero subí, sólo deteniéndome a veces para torpemente sollozar de felicidad. Fui divisando capiteles y astrágalos, frontones triangulares y bóvedas, confusas pompas del granito y del mármol. Así me fue deparado ascender de la ciega región de negros laberintos entretejidos a la resplandeciente Ciudad."

*Jorge Luis Borges*

# RESUMO

Esta tese trata o escoamento ao redor de um cilindro logo após a sua primeira instabilidade, dentro do seu regime bidimensional periódico. A abordagem é principalmente teórica, passa por experimentos e culmina em uma importante parte numérica que complementa a teoria com evidências e ilustrações.

As principais contribuições são a análise sobre a composição modal da solução dentro do regime periódico e o método desenvolvido para identificar autovetores de uma linearização da equação de Navier-Stokes presentes em uma dada solução. As bases compostas pelos autovetores identificados servem para a projeção da equação de Navier-Stokes e dão a essência dos modelos reduzidos deste estudo.

A aplicação numérica apresentada para $Re = 60$ traz duas iterações do processo, com duas bases de autovetores de dimensões 12 e 24. Os modelos reduzidos são numericamente estáveis e a sua integração apresenta custo várias ordens mais baixo que o da simulação numérica completa. As séries temporais das coordenadas e as bases de autovetores possibilitam a recomposição do escoamento e a sua comparação com a simulação numérica de referência. A análise de aderência foi baseada nas médias temporais, nos valores de *Strouhal* e na estrutura dos harmônicos.

Ambos modelos reduzidos têm correspondência próxima com o comportamento assintótico do escoamento e a tendência convergente das iterações é clara. As simetrias espaciais e temporais dos harmônicos são facilmente identificadas na estrutura dos modelos, de forma que as bases construídas podem ser entendidas como conjuntos de estruturas coerentes do fenômeno.

**Palavras-chave:** ***escoamento ao redor do cilindro, estruturas coerentes, dinâmica linearizada, dinâmica não linear e modelos reduzidos.***

# ABSTRACT

This thesis concerns the flow past a cylinder just after its first bifurcation, within its two-dimensional periodic regime. The approach is mainly theoretical, goes through experiments and is concluded by an important numerical part which complements the theory with evidences and illustrations.

The main contributions are the analysis concerning the modal composition of the solution within the periodic regime and a method to identify eigenvectors of some linearizaton of the Navier-Stokes equation participating on a given solution. The bases spanned by the identified eigenvectors are employed in the projection of the Navier-Stokes equation and are central to the reduced models of this study.

The numerical results for $Re = 60$ present two iterations of the process, with two bases of dimensions 12 e 24. The reduced models are numerically stable and their integration is many orders less costly than that of the full simulation. The time series of the modal coordinates and the eigenvectors bases allow the recomposition of the flow and its comparison with the full simulation results. The convergence analysis was based on the time averages, the *Strouhal* number values and the harmonic structure.

Both reduced models have close correspondence with the asymptotic behavior of the flow and the convergent trend of the iterations is clear. The space and time symmetries of the harmonics have a simple representation within the structure of the models, therefore the identified bases can be understood as sets of coherent structures of the phenomenon.

**Keywords:** ***flow past a cylinder, coherent structures, linearized dynamics, nonlinear dynamics and reduced models.***

# LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Esta tese desenvolve um estudo fundamental sobre o escoamento ao redor de um cilindro logo após a sua primeira instabilidade, no início do regime bidimensional periódico. A abordagem é principalmente teórica, passa por experimentos e culmina em uma importante parte numérica que complementa a teoria com evidências e ilustrações.

O escoamento ao redor do cilindro é um importante protótipo dos escoamentos ao redor de corpos rombudos e a sua compreensão ainda desafia várias áreas da engenharia e das ciências fundamentais. Na engenharia uma grande preocupação vem do seu caráter oscilatório que deve ser levado em conta na concepção de estruturas que são projetadas para resistir à ação de correntes de ar ou água. Na física e na matemática ainda existem muitas questões cercando a sequência de regimes que levam este escoamento do seu estado estacionário aos turbulentos.

Na engenharia nacional, os maiores interesses vêm da indústria petrolífera, cuja produção é principalmente oriunda de poços submarinos. O problema está nas tubulações que conectam os poços às plataformas flutuantes: elas podem passar dos 2.000 metros de comprimento e devem resistir constantemente às fortes correntes da nossa costa sob a ação do fenômeno de vibrações induzidas por vórtices. Esse fenômeno está relacionado ao caráter oscilatório dos escoamentos ao redor de corpos rombudos que, nesse caso, é capaz de forçar vibrações com amplitudes da ordem do diâmetro dos tubos, preocupando os projetistas no que diz respeito à resistência das estruturas à fadiga. Nesse sentido, é esperado que a melhor compreensão dos fenômenos envolvidos gere ferramentas de cálculo mais sofisticadas que aumentem a segurança e a economia dos projetos.

Na vista da física e da matemática, os interesses focam na natureza dos comportamentos dinâmicos observados com o aumento do seu parâmetro, o número de *Reynolds*[1]. Tais comportamentos já foram, em grande parte, caracterizados experimentalmente e também reproduzidos numericamente, mas ainda carecem de bases teóricas consistentes para o estudo dos mecanismos envolvidos. Matematicamente, as mudanças de comportamento surgem de bifurcações que são responsáveis pelo aumento da complexidade dinâmica dos escoamentos, no que é chamado por Ruelle (1989) de rota para a turbulência.

Uma abordagem comum para o estudo dessas bifurcações parte de modelos reduzidos construídos através da projeção da equação de Navier-Stokes sobre pequenas bases de funções ou modos. Um exemplo clássico de modelo reduzido é o de Lorenz (1963), que trata numericamente a questão da sensibilidade de sistemas meteorológicos com relação às suas condições iniciais. O modelo de Lorenz é uma simplificação de um problema convectivo que leva em conta apenas os três modos mais relevantes de uma discretização em modos ortogonais e que, apesar de bastante simplificado, é capaz de reproduzir os comportamentos caóticos observados em problemas meteorológicos reais.

Os modos também são chamados de estruturas coerentes e determinam a essência dos modelos reduzidos. A sua definição matemática não é fixa e pode vir de várias fontes. Os modos desta tese são autovetores de uma linearização da equação de Navier-Stokes e o diferencial técnico aqui está no método de identificação dos autovetores mais relevantes, que foi desenvolvido durante este projeto e mostrou bons resultados na representação da primeira bifurcação e do regime periódico do escoamento.

O capítulo 2 deste texto começa com uma descrição do escoamento através de observações experimentais, onde são identificados os seus principais regimes dinâmicos e simetrias, e segue com o início da abordagem matemática do problema. Ainda nesse capítulo é introduzido o conceito estruturas coerentes que compõem o escoamento e a primeira análise do problema vem com a decomposição de séries temporais do regime periódico em harmônicos de Fourier.

[1]Definido no próximo capítulo.

No capítulo 3, é descrita a aplicação do método dos elementos finitos na discretização espacial do problema. São também apresentados o método de cálculo da solução estacionária e o esquema de marcha temporal empregados. Essa é a estrutura que possibilita a reprodução numérica do fenômeno e que dá subsídios para a sua análise dinâmica.

O tratamento do problema dinâmico é feito no capítulo 4 e começa pela análise da equação de evolução linearizada na solução estacionária, onde é discutida a estrutura gerada pelo seu espectro e sua base de autovetores. A não linearidade é então agregada a essa estrutura e possibilita o acoplamento dos autovetores, aumentando a complexidade das soluções possíveis e viabilizando a estabilidade do ciclo-limite observado nos experimentos e nas simulações numéricas.

O capítulo 5 aborda a composição modal da solução periódica e traz o método desenvolvido para identificaar os autovetores mais relevantes da solução periódica estudada. O método é apresentado com o apoio da teoria dos subespaços de *Krylov* e é baseado na equação de evolução linearizada associada a uma amostra tirada de uma simulação numérica do escoamento. A simetria demonstrada para os autovetores da linearização é incluída no método e, nesse ponto, são obtidos dois problemas característicos reduzidos: um relacionado aos autovetores simétricos e outro aos antissimétricos.

Os resultados numéricos apresentados no capítulo 6 têm $Re = 60$ e incluem as bases de autovetores identificados juntamente com os espectros reduzidos e a análise dos respectivos modelos obtidos através da projeção da equação de evolução nas bases. A comparação entre os modelos reduzidos e a simulação de referência é feita com base no comportamento assintótico das soluções e mostrou boa aderência no que confere à média temporal e à frequência dominante do escoamento.

# 2 O ESCOAMENTO E A ABORDAGEM

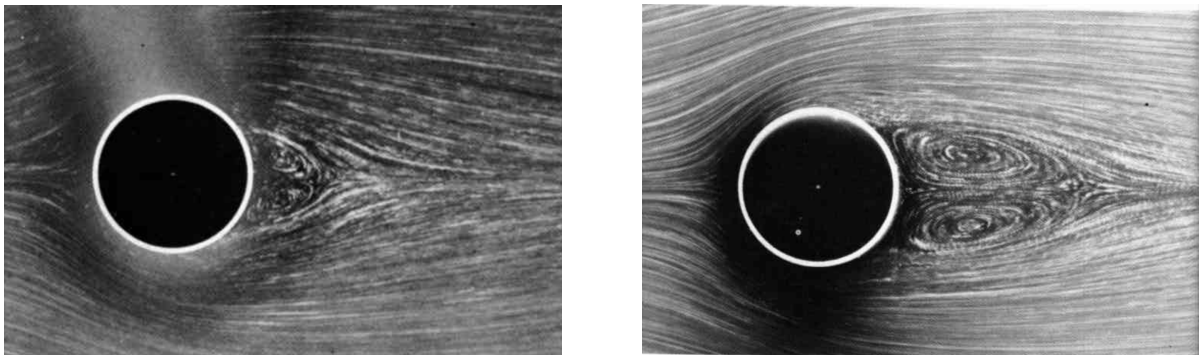
## 2.1 Observações experimentais

O escoamento ao redor de um cilindro é um sistema dinâmico autônomo cujo parâmetro é o seu número de *Reynolds*[1], adimensional amplamente utilizado em mecânica de fluidos na caracterização de escoamentos viscosos internos e externos. A sua complexidade dinâmica cresce com o número de *Reynolds*, seguindo uma sequência de bifurcações que o levam do seu estado estacionário estável aos regimes turbulentos. Nesta seção são apresentadas algumas tradicionais evidências experimentais que ilustram essa sequência.

Os experimentos de Coutanceau e Bouard (1977a) e Coutanceau e Bouard (1977b) indicam que o escoamento estacionário é observado até $Re \approx 40$. No início, o escoamento é super viscoso e mantém aderidas ao cilindro as suas linhas de corrente. Este padrão segue até $Re \approx 5$, quando acontece a separação da camada limite. Dessa separação tem origem o par de bolhas recirculantes que ficam coladas à jusante do cilindro e caracterizam o restante da faixa de regime estacionário. Durante todo o regime estacionário, a simetria do domínio e das condições de contorno também se mostra no escoamento, que é espelhado pelo plano contendo a direção da velocidade ao longe e o eixo do cilindro, como se vê na figura 2.1.

Esta também mostra o desenvolvimento das bolhas recirculantes, cujo comprimento cresce linearmente com o número de *Reynolds* até o surgimento da bifurcação para o regime transiente, em $Re \approx 40$. Nesse ponto surge uma perturbação oscilatória cres-

[1]Calculado a partir da velocidade incidente do escoamento $U_\infty$, do diâmetro do cilindro $D$ e da viscosidade cinemática do fluido $\nu$: $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$.



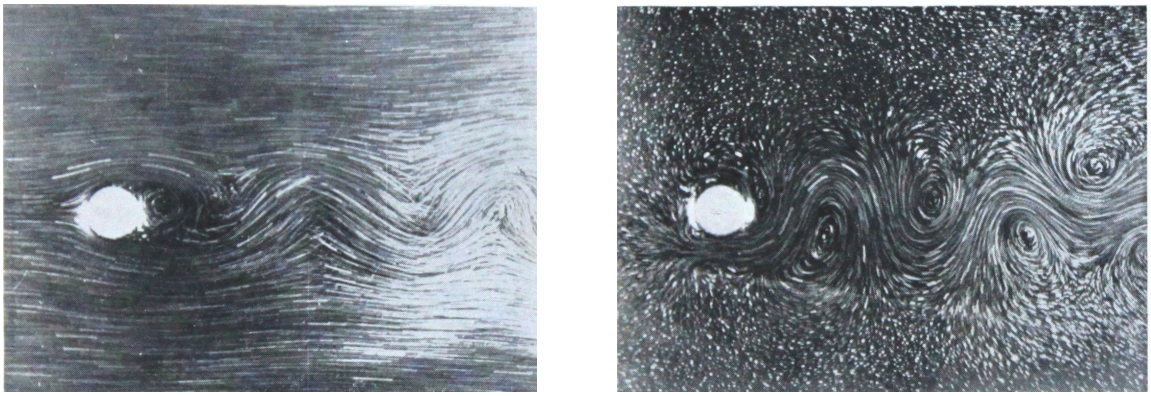
(a) Re=13.1 (b) Re=26

Figura 2.1: Extraído de Van Dyke (1982): desenvolvimento das bolhas estacionárias.

cente, que domina o escoamento e se desenvolve até uma amplitude de saturação, como em um ciclo-limite. Diminuindo o nível de perturbações e aumentando a precisão do experimento, é possível retardar a bifurcação, mas não indefinidamente. Esse processo se torna inviável depois de apenas algumas unidades de número de *Reynolds* e o escoamento entra definitivamente no regime transiente.

A bifurcação muda completamente a figura do escoamento e entra em cena o fenômeno de formação e desprendimento alternado de vórtices. O resultado é a conhecida esteira de *von Kármán*, que segue até os mais altos regimes. As duas fotografias da figura 2.2 trazem dois pontos de vista da esteira oscilatória para $Re = 250$. Na figura 2.2(a), a câmera está fixa ao referencial do cilindro e captura o escoamento incidente perturbado pela sua presença. Já na figura 2.2(b), a câmera tem a mesma velocidade do escoamento incidente, eliminando-o e deixando em evidência a perturbação composta pelos turbilhões de *von Kármán*.

Nas fotografias das figuras 2.1 e 2.2, os escoamentos carregam partículas refletoras capazes de reproduzir no negativo as trajetórias realizadas na janela de tempo da exposição fotográfica. Nos escoamentos estacionários a exposição pode ser longa e os traços de trajetória correspondem a segmentos das linhas de corrente do escoamento. Já nos transitórios, quanto menor for o tempo de exposição melhor será a aproximação das linhas de corrente instantâneas. A orientação e o comprimento dos traços dão uma aproximação do



(a) (b)

Figura 2.2: Extraído de Prandtl (1934): esteira de *von Kármán* com $Re = 250$: (a) câmera fixa ao referencial do cilindro, (b) câmera com a velocidade do escoamento incidente.

campo de velocidades local, bastando levar em conta o tempo de exposição da fotografia, lembrando que aqui também o erro cresce com esse tempo.

Uma característica marcante desse escoamento é a sua frequência dominante $f_s$, sentida nas oscilações da força de sustentação e observada nos campos de velocidade. O seu tratamento é feito com base no número de *Strouhal*, um adimensional muito utilizado na análise de escoamentos oscilatórios que é obtido com o auxílio de uma dimensão espacial e uma velocidade características do escoamento:

$$St = \frac{f_s D}{U_\infty}, \tag{2.1}$$

onde $D$ é o diâmetro do cilindro e $U_\infty$ é o módulo da velocidade do escoamento incidente.

No estudo experimental de Roshko (1953) são identificados três diferentes regimes dentro da faixa transiente do escoamento, marcando o aumento da sua complexidade dinâmica com o número de *Reynolds*. Junto com a primeira bifurcação instala-se um regime oscilatório regular, identificado principalmente pela sua esteira bidimensional e pelas frequências bem definidas que a compõem, sempre múltiplas naturais da frequência de *Strouhal*. Este é o *regime bidimensional periódico*, também chamado simplesmente de *regime estável*, o qual segue com mudanças contínuas de frequência e comprimento de onda adimensionais até $Re \approx 150$. Nessa vizinhança são observadas as primeiras

flutuações turbulentas. Elas trazem as primeiras tridimensionalidades do escoamento e também agem sobre a sua dinâmica fundamental. A partir desse ponto, a frequência dominante deixa de ser regular e passa a ser identificada em espectros mais largos, através dos seus picos. Este é o *regime de transição* que segue até $Re \approx 300$, quando as flutuações turbulentas se instalam de vez na esteira, dando início ao *regime irregular*, observado nesse estudo até $Re \approx 10.000$.

O estudo de Roshko (1953) também foi pioneiro na identificação de duas estruturas predominantes na parcela oscilatória do campo de velocidade. Através da análise das séries temporais de velocidade, medidas em vários pontos da esteira com o auxílio de anemômetros, foram observadas duas estruturas: uma pulsando com a frequência de *Strouhal*, e outra, de menor intensidade, pulsando duas vezes mais. A comparação entre medições feitas em pontos espelhados pelo plano médio do escoamento permitiram uma importante constatação sobre a distribuição espacial da intensidade das duas estruturas: a primeira é anti-simétrica em relação ao plano médio do escoamento, enquanto a segunda é simétrica.

Esse padrão de simetria relaciona as duas estruturas identificadas, que representam os dois primeiros harmônicos da série de Fourier do campo de velocidade, com as duas componentes da força aplicada pelo fluido sobre o cilindro: a integral de um campo de tensões anti-simétrico sobre a superfície do cilindro só pode ter resultante na direção normal ao plano de simetria, ou seja, na direção da força de sustentação, enquanto a integral de um campo de tensões simétrico só pode ter resultante na direção contida no plano de simetria e ortogonal ao cilindro, ou seja, na direção da força de arrasto. Por fim, essa relação é confirmada pelo fato da força de sustentação do cilindro oscilar principalmente com a frequência do primeiro harmônico e a força de arrasto com a frequência do segundo harmônico.

Esta seção não exaure as observações experimentais desse escoamento, principalmente no que diz respeito a suas tridimensionalidades, mas foca nas indicações mais

simples e importantes que caracterizam os diferentes regimes dinâmicos identificados. Entre estas se destaca a frequência dominante do escoamento, cuja regularidade pode ser aferida dos espectros das medições temporais e é determinante na identificação dos regimes. Uma referência bastante completa sobre esse escoamento é Zdravkovich (1997).

## 2.2 Equações do movimento fluido

O comportamento de um fluido viscoso é descrito matematicamente pelas equações de Navier-Stokes, que são a aplicação ao movimento fluido das três equações de balanço da mecânica: de massa, quantidade de movimento e energia. Considerando o escoamento incompressível e a massa específica do fluido uniforme, é possível simplificar as três equações e ainda desacoplar a equação de energia das outras duas. Esta pode ser então eliminada tomando o escoamento como isotérmico.

Os parâmetros principais do escoamento ao redor de um cilindro circular são o seu diâmetro $D$, a velocidade do escoamento ao longe $U_\infty$ e a viscosidade cinemática do fluido $\nu$. Utilizando esses parâmetros, é possível adimensionalizar as equações deixando em evidência o adimensional que caracteriza esse escoamento, o número de *Reynolds*

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu}. \tag{2.2}$$

O presente estudo toma as equações de Navier-Stokes em sua forma cartesiana e bidimensional, sendo o domínio fluido contido no plano da seção transversal do cilindro. O eixo $x$ está sempre alinhado com o escoamento ao longe, não perturbado, enquanto o eixo $y$ se encontra na direção transversal ao escoamento, ortogonal ao eixo do cilindro e ao eixo $x$. Seguindo as simplificações, estas são as equações do movimento fluido consideradas:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= -(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u} - \nabla p \\ \nabla.\mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ é o campo de velocidade bidimensional e $p$ é o campo escalar de pressão.

A primeira equação é o balanço de quantidade de movimento, proveniente da aplicação da segunda lei de Newton, e a segunda é o balanço de massa ou equação de continuidade. O lado esquerdo da primeira equação representa a variação temporal do campo de velocidade, enquanto o lado direito tem o termo convectivo e os dois termos de esforços internos, viscosos e de pressão, respectivamente.

O termo convectivo vem da adoção do referencial Euleriano e representa a aceleração que a partícula fluida deve sofrer para continuar seguindo a sua linha de corrente. Quando a soma dos esforços viscosos e de pressão não é capaz de anular o termo convectivo, existe um desbalanço e o escoamento é transiente ($\partial_t \mathbf{u} \neq \vec{0}$).

Uma abordagem teórica geral é tratar o cilindro imerso em um domínio fluido infinito com velocidade ao longe uniforme e unitária, eliminando completamente a influência das fronteiras externas. É possível levar esse tratamento também para a abordagem numérica, considerando uma ou mais dimensões do domínio infinitas, como em Lavinas, Barbeiro e Aranha (2007). Este trabalho optou pela utilização de domínios finitos, portanto, com todas fronteiras exteriores posicionadas a distâncias finitas do cilindro. No entanto, é mantida a intenção de minimizar a influência das fronteiras externas e os domínios finalmente utilizados são efetivamente extensos.

A primeira preocupação na definição de um domínio fluido finito é que ele contenha as regiões de interesse do estudo, as quais, nesse caso, são as vizinhanças do cilindro e a sua esteira. No que concerne à viabilidade do domínio para o cálculo, é necessário que se tenha informações suficientes sobre a solução do problema nos seus contornos. Isso porque, além de uma condição inicial, a equação de Navier-Stokes pede condições de contorno.

O domínio considerado é bidimensional, plano e delimitado por dois contornos fechados. O primeiro é interior ao domínio e define o contato entre o fluido e o cilindro. Já o segundo é exterior ao domínio e o separa do escoamento ao longe, também chamado

de não perturbado. No contorno que define o contato do fluido com o cilindro é aplicada a condição de aderência dos escoamentos viscosos, ao passo que no contorno exterior é imposto o valor de velocidade ao longe, não perturbada, uniforme e unitária.

A aplicação da condição de aderência é simples e no caso do cilindro fixo recai em impor velocidade nula ao longo de todo o contorno. A complicação da segunda condição está no posicionamento do contorno exterior, que influencia o resultado nas proximidaes do cilindro. Estudos experimentais de Coutanceau e Bouard (1977a) e numéricos de Lavinas, Barbeiro e Aranha (2007) mostram que domínios reduzidos limitam o crescimento das bolhas recirculantes das soluções estacionárias, além de contribuir para o aumento da força de arrasto sobre o cilindro. Tais estudos também mostram que aumentando o domínio é possível chegar em uma dimensão finita a partir da qual os resultados variam muito pouco e podem ser considerados semelhantes aos resultados obtidos com domínios muito maiores. Esse efeito é conhecido como blocagem e ambos os estudos também observam que a dimensão desejável para o domínio, no caso estacionário, cresce com o número de *Reynolds*.

## 2.3 Modos e estruturas coerentes

O conceito de estrutura coerente é bastante comum na abordagem de fenômenos envolvendo meios contínuos. A sua noção intuitiva vem da observação desses fenômenos nos quais padrões espaciais são identificados e associados a determinados comportamentos temporais. Em essência, a constatação de evidências dessa natureza leva à intuição de que existe algum mecanismo simplificado para o fenômeno que facilite a sua abordagem e compreensão.

O tratamento matemático desses problemas é usualmente feito através de equações a derivadas parciais, onde o conceito de estrutura coerente refere-se precisamente à separação das variáveis espaciais e temporais. Nesse contexto, as estruturas coerentes materializam-se na forma de funções espaciais chamadas de modos que servem para a

construção de soluções para as equações. Os modos não têm definição matemática prescrita nem forma única, de maneira que conjuntos distintos de modos podem apresentar performances semelhantes na aproximação de uma dada solução.

A construção de uma solução é feita compondo-se modos de um dado conjunto ponderados por coordenadas modais que, nos problemas transientes, são funções temporais. É conveniente que, dado um conjunto de modos, haja apenas uma composição de coordenadas equivalente a uma dada solução e para que isso seja sempre possível basta que o conjunto de modos tenha a mesma dimensão do espaço gerado por eles, ou seja, que ele seja uma base desse espaço. No caso dessa condição não ser evidente, é conveniente e simples ortogonalizar o conjunto de modos chegando-se à sua dimensão e a uma base modal associada. Por fim, é a projeção da dada equação a derivadas parciais nessa base que dá origem ao respectivo modelo reduzido, que tem as coordenadas modais como variáveis. Assim, uma solução aproximada com o auxílio de uma dada base modal toma a seguinte forma:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$

onde $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ é a solução aproximada, $q_i(t)$ são as coordenadas, $\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})$ são os modos e $n$ é a dimensão da base modal.

A abordagem mais tradicional para escoamentos oscilatórios considera modos vindos da base de autovetores do operador de Navier-Stokes linearizado em torno de uma solução estacionária ou periódica. Este é um caminho conservador, onde os modos têm sentido matemático e físico bem estabelecidos, mas vem com uma contrapartida importante: muitas vezes a grande dimensão dos problemas característicos envolvidos inviabiliza o cálculo da base completa de autovetores, obrigando a redução do foco dos estudos para pequenas regiões do espectro.

No caso da primeira bifurcação do escoamento ao redor de um cilindro, é comum os estudos se limitarem à região instável do espectro, calculando o par de valores e vetores característicos que a protagonizam, como em Jackson (1987). Com os elementos da análise

linear é possível determinar o tipo de bifurcação e também prever o comportamento a curto prazo das soluções transientes que partem do estado estacionário. Mas a influência do termo quadrático logo tira a solução do plano definido por esse par de autovetores, levando-a para um estado periódico assintótico que é, de fato, muito distante da previsão linear, dado que estável e com uma frequência muito distante da componente imaginária do par de autovalores instáveis, como mostra Barkley (2006).

Uma alternativa para a não linearidade é a expansão da solução do problema em séries assintóticas, considerando as primeiras interações não lineares dos autovetores instáveis. O modelo de Landau e Lifshitz (1959), bastante conhecido na literatura, quando expandido até terceira ordem, reproduz o ciclo-limite do fenômeno e apresenta uma correção para a frequência prevista pela componente imaginária do par de autovalores instáveis. No entanto, mesmo após a primeira correção assintótica, a sua frequência ainda é distante das observações experimentais, como é visto em Sipp e Lebedev (2007).

Duas técnicas vêm sendo bastante aplicadas na busca por estruturas coerentes em escoamentos: a decomposição de Karhunen-Loève, também conhecida como POD, de *Proper Orthogonal Decomposition*, e a decomposição em modos de Koopman. Ambas se baseiam em observações do fenômeno, que podem vir tanto de medições experimentais como de simulações numéricas e, por este motivo, são chamadas de empíricas, já que não têm relação implícita com o operador de Navier-Stokes.

A decomposição de Karhunen-Loève é baseada em uma matriz de covariância, a qual, nos estudos envolvendo escoamentos, conforme Holmes, Lumley e Berkooz (1988), é gerada a partir de um conjunto de amostras de campos de velocidade. Em princípio não há necessidade de organização temporal das amostras, mas é comum que sejam séries temporais. Os modos da decomposição são os autovetores da matriz de covariância, sendo que a relevância energética de cada um é dada pelo respectivo autovalor. Essa relevância é utilizada como critério na construção de bases reduzidas, onde os autovetores menos energéticos são descartados, como em Ma e Karniadakis (2002).

A teoria de Koopman fornece um operador linear capaz de reproduzir uma dada série temporal, mesmo que esta seja fruto de um fenômeno não linear, como mostram Mezic (2005) e Rowley et al. (2009). A não linearidade é compensada pela dimensão arbitrária do operador de Koopman, cujos autovetores, que no caso geral são complexos, são os modos procurados. Os autovalores complexos associados aos modos de Koopman fornecem a taxa de crescimento e a frequência com que eles participam da série temporal em questão. O produto final é um problema linear capaz de emular a evolução do problema não linear, pelo menos no trecho da sua história representado pela série temporal analisada. No caso de fenômenos periódicos, os modos de Koopman são equivalentes aos harmônicos de Fourier da série temporal, enquanto os autovalores são puramente imaginários e trazem as respectivas frequências dos harmônicos.

## 2.4 Decomposição em harmônicos

Partindo dos resultados de Roshko (1953) e do conceito das estruturas coerentes foi decidido que a decomposição do escoamento em seus harmônicos de Fourier traria elementos importantes para a análise do regime periódico. É desse passo que surgem os primeiros indícios sobre as funções espaciais que compõem a solução observada nos experimentos e nas simulações numéricas. Os resultados que seguem também aparecem em Barbeiro, Aranha e Meneghini (2007) e Korkischko et al. (2010).

As séries temporais dos campos de velocidade utilizadas nas decomposições apresentadas aqui têm duas origens: simulações numéricas e experimentos em água. As simulações numéricas foram computadas pelo código de elementos finitos construído no âmbito deste projeto e descrito no próximo capítulo, enquanto as medições experimentais foram realizadas no canal de água recirculante do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF), em parceria com o então doutorando Ivan Korkischko e utilizando a técnica de PIV (*Particle Image Velocimetry*, ver Adrian (1991)). O número de *Reynolds* para a comparação dos resultados foi fixado em 100, que é próximo do limite inferior imposto pelas instalações

experimentais. Em ambos os casos foram calculados desde o harmônico zero até o terceiro.

Nas simulações numéricas os harmônicos foram calculados em paralelo com a integração temporal. Contando com aproximadamente mil passos de tempo para cada período de oscilação da esteira, as integrais dos harmônicos foram calculadas com grande precisão utilizando o método dos trapézios sobre um intervalo de tempo equivalente a dez ciclos de oscilação da esteira. Já o cálculo dos harmônicos experimentais foi feito *a posteriori*, a partir das medições acumuladas pelo aparato de PIV. A capacidade do equipamento possibilitou a medição de 345 campos de velocidade equispaçadamente distribuídos em nove ciclos de oscilação da esteira. Nesse caso, os harmônicos foram calculados com o emprego do método dos mínimos quadrados e, apesar de bem menos detalhadas, as séries experimentais geraram resultados comparáveis aos numéricos.

As constatações mais notáveis dessa série de resultados vêm das relações de simetria espacial observadas nos harmônicos. Essas relações estão ligadas à geometria do domínio, que é simétrico em relação à linha média do escoamento definida pelo eixo $x$ e, por isso, tem todos os seus pontos $(x, y)$ associados a respectivos $(x, -y)$. Essa propriedade do domínio permite que qualquer função escalar $f(x, y)$ nele definida seja decomposta em uma parcela simétrica $f^s(x, y)$ e outra antissimétrica $f^a(x, y)$

$$\begin{aligned} f^s(x,y) &= \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(x,-y)\right) \\ f^a(x,y) &= \frac{1}{2}\left(f(x,y) - f(x,-y)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

que são complementares, dado que a sua soma leva de volta à função inicial. No caso de funções vetoriais, tais como campos de velocidade, a relação de simetria faz a mímica de um espelho posicionado na linha média do escoamento, associando os vetores $\mathbf{f}(x, y)$[2] aos seus reflexos $\mathbf{f}(x, -y)$. No caso em questão, de um plano bipartido por uma linha média, a simetria entre vetores posicionados em pontos opostos é constatada pela igualdade das componentes paralelas à linha média e pela simples oposição no sinal das componentes

[2] $\mathbf{f}(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$.

ortogonais à linha. Isso quer dizer que, em um campo vetorial simétrico[3], a componente paralela à linha é um campo escalar simétrico enquanto a componente ortogonal é um campo escalar antissimétrico

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^s(x,y) &= f_x^s(x,y)\mathbf{i} + f_y^a(x,y)\mathbf{j} \\ \mathbf{f}^a(x,y) &= f_x^a(x,y)\mathbf{i} + f_y^s(x,y)\mathbf{j}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde as parcelas simétricas e antissimétricas de $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ vêm de 2.5.

Dados os campos escalares $f(x,y)$ e $g(x,y)$ com o produto escalar e a norma usuais

$$\begin{aligned} \langle f(x,y), g(x,y)\rangle &= \int_\Omega f(x,y)g(x,y)d\Omega \\ \|f(x,y)\| &= \sqrt{\langle f(x,y), f(x,y)\rangle} \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $\Omega$ é o domínio em questão, é possível quantificar as parcelas simétrica e antissimétrica de $f(x,y)$ através da seguintes razões

$$R_s = \frac{\|f^s(x,y)\|}{\|f(x,y)\|};\ R_a = \frac{\|f^a(x,y)\|}{\|f(x,y)\|} \tag{2.8}$$

lembrando que

$$R_s + R_a = 1, \tag{2.9}$$

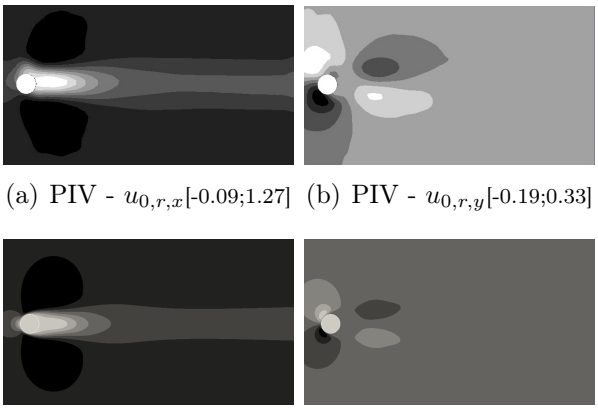
pois

$$\langle f^s(x,y), f^a(x,y)\rangle = 0 \tag{2.10}$$

para qualquer $f(x,y)$, por simetria. No que segue, utilizando essas razões, os campos são chamados de simétricos quando $R_s > 0.95$ e antissimétricos quando $R_a > 0.95$.

[3]Em um campo vetorial antissimétrico, o quadro se inverte, de modo que a componente paralela à linha de simetria é um campo escalar antissimétrico e a ortogonal é um campo escalar simétrico, garantindo que as parcelas simétrica e antissimétrica sejam complementares na reconstrução de $\mathbf{f}(x,y)$.

A seguir são apresentados campos escalares das componentes de velocidade $x$ e $y$ dos harmônicos de Fourier, nas figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6. Com exceção do termo zero, que é real puro, todos os outros são complexos[4] e, por isso, são apresentados em suas partes reais e imaginárias $r$ e $i$. Os contornos são apresentados em escalas de cinza e os extremos da escala são dados logo abaixo de cada figura entre colchetes (o sentido da escala é usual, do branco para o preto). Os diferentes harmônicos são apresentados em figuras separadas, contendo duas fileiras horizontais de imagens cada um, com a primeira referente aos experimentos (PIV) e a segunda referente às simulações numéricas (SIM). O enquadramento é o mesmo em todos os gráficos, com o cilindro posicionado à montante para enfatizar a região da esteira próxima, onde se localizam os máximos dos harmônicos.



(a) PIV - $u_{0,r,x}$[-0.09;1.27] (b) PIV - $u_{0,r,y}$[-0.19;0.33]

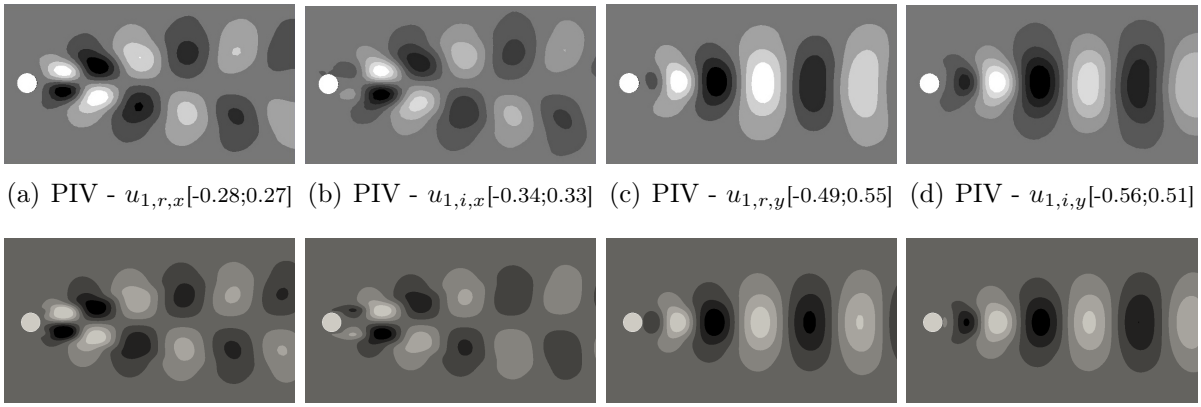
(c) SIM - $u_{0,r,x}$[-0.17;1.26] (d) SIM - $u_{0,r,y}$[-0.64;0.64]

Figura 2.3: Harmônico zero (média temporal): PIV & SIM.

A figura 2.3 traz o harmônico zero, que é simplesmente a média temporal do escoamento. A sua componente $x$ deixa em evidência a esteira média paralela, que começa logo atrás da região de recirculação e segue até grandes distâncias à jusante. Esse paralelismo é confirmado pelos contornos da componente $y$, que decaem logo após a região de recirculação. Assim como a solução estacionária, a média temporal é um campo de velocidade simétrico, com a sua componente escalar $x$ simétrica e a $y$ antissimétrica.

[4]Os harmônicos complexos são entidades oscilatórias definidas a menos de uma fase arbitrária $\theta$, de modo que um harmônico $\mathbf{u}_n^0(x,y) = \mathbf{u}_{n,r}^0(x,y) + i\mathbf{u}_{n,i}^0(x,y)$ é sempre equivalente às suas rotações complexas $\mathbf{u}_n^\theta(x,y) = e^{i\theta}\mathbf{u}_n^0(x,y)$, para qualquer ângulo $\theta$ real. Os harmônicos das séries numéricas e experimentais foram rotacionados até chegarem em fases próximas com o objetivo de facilitar a sua comparação visual.

O primeiro harmônico, visto na figura 2.4, é o protagonista da dinâmica do problema, oscilando com a frequência de *Strouhal* e contendo a instabilidade geradora do regime periódico. Como já havia sido notado por Roshko (1953), a principal componente da esteira de *von Kármán* é antissimétrica e lidera a hierarquia dos harmônicos com a maior amplitude. O seu comprimento de onda local[5] mostra o espaçamento entre os turbilhões, que não é uniforme, mas crescente à medida que os turbilhões são convectados. Esse comportamento é consequência da relação de dispersão fixada pela frequência de oscilação e a velocidade local da média temporal, que dita a velocidade de convecção dos turbilhões. A antissimetria implica em resultantes de força sobre o cilindro que têm direção ortogonal à linha de simetria, esclarecendo o comportamento da força de sustentação medida, que oscila predominantemente com frequência de *Strouhal*.



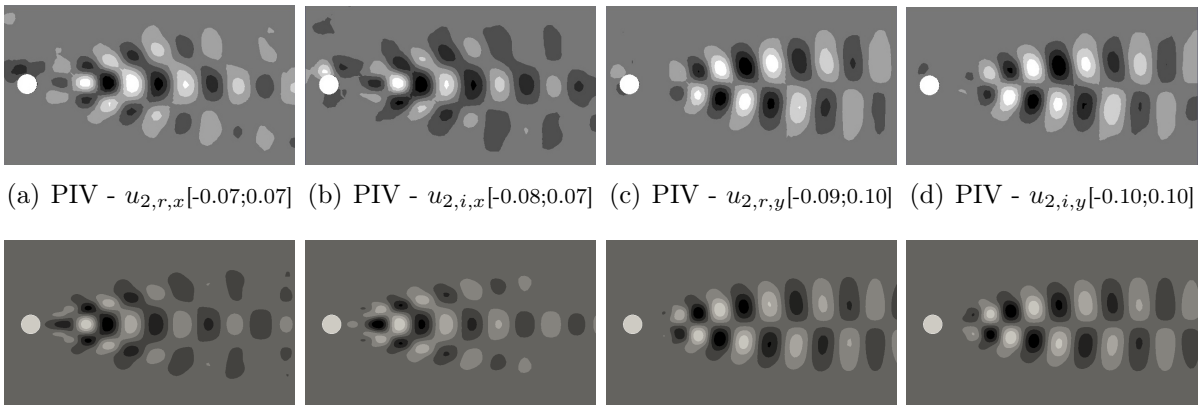
(a) PIV - $u_{1,r,x}$[-0.28;0.27] (b) PIV - $u_{1,i,x}$[-0.34;0.33] (c) PIV - $u_{1,r,y}$[-0.49;0.55] (d) PIV - $u_{1,i,y}$[-0.56;0.51]

(e) SIM - $u_{1,r,x}$[-0.41;0.41] (f) SIM - $u_{1,i,x}$[-0.41;0.41] (g) SIM - $u_{1,r,y}$[-0.60;0.63] (h) SIM - $u_{1,i,y}$[-0.56;0.64]

Figura 2.4: Primeiro harmônico: PIV & SIM.

A primeira parcela oscilatória simétrica vem com o segundo harmônico, visto na figura 2.5. Os seus valores máximos situam-se mais à jusante e a sua distribuição espacial respeita a mesma relação de dispersão descrita para o caso do primeiro harmônico, sendo que agora o comprimento de onda local deve ser a metade do primeiro, já que a sua frequência é o dobro e a velocidade média local é a mesma. É do segundo harmônico que vem a principal parcela oscilatória da força de arrasto medida no cilindro, pelo oposto da relação de simetria da força resultante explicada no parágrafo anterior.

[5]Medido em um corte feito na linha média ($y = 0$) da componente $y$ do primeiro harmônico.

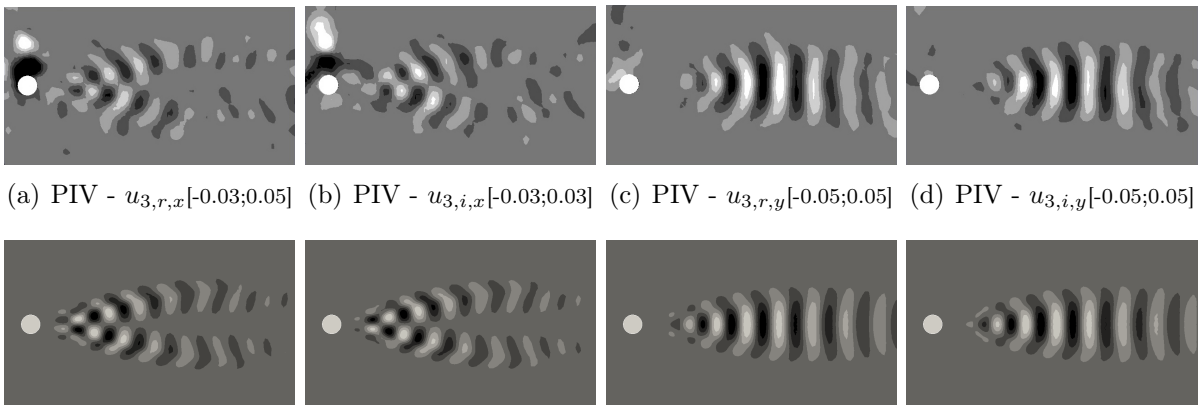


(a) PIV - $u_{2,r,x}$[-0.07;0.07] (b) PIV - $u_{2,i,x}$[-0.08;0.07] (c) PIV - $u_{2,r,y}$[-0.09;0.10] (d) PIV - $u_{2,i,y}$[-0.10;0.10]

(e) SIM - $u_{2,r,x}$[-0.11;0.11] (f) SIM - $u_{2,i,x}$[-0.12;0.12] (g) SIM - $u_{2,r,y}$[-0.13;0.13] (h) SIM - $u_{2,i,y}$[-0.13;0.13]

Figura 2.5: Segundo harmônico: PIV & SIM.

A antissimetria dos termos ímpares e a relação de dispersão também são constatadas no terceiro harmônico, apresentado na figura 2.6 com o seu comprimento de onda de um terço do fundamental. Os contornos ruidosos são decorrentes de uma região de sombra, isso porque o feixe de laser do equipamento de PIV, que incide ortogonalmente à fronteira inferior ($y = y_{min}$), é obstruído pela presença do cilindro, o que prejudica a qualidade da medição na região $0 < y < y_{max}$ e $-0.5D < x < 0.5D$.



(a) PIV - $u_{3,r,x}$[-0.03;0.05] (b) PIV - $u_{3,i,x}$[-0.03;0.03] (c) PIV - $u_{3,r,y}$[-0.05;0.05] (d) PIV - $u_{3,i,y}$[-0.05;0.05]

(e) SIM - $u_{3,r,x}$[-0.05;0.05] (f) SIM - $u_{3,i,x}$[-0.05;0.05] (g) SIM - $u_{3,r,y}$[-0.10;0.10] (h) SIM - $u_{3,i,y}$[-0.10;0.10]

Figura 2.6: Terceiro harmônico: PIV & SIM.

As constatações das simetrias temporais e espaciais são bastante fortes e ilustram a estrutura da composição modal da solução, que será retomada no capítulo 5. Por fim, a notável aderência dos resultados numéricos aos experimentais é um importante argumento para a validação do modelo discreto que servirá de base para o resto da análise.

# 3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

## 3.1 Discretização espacial

A discretização espacial das equações de Navier-Stokes é feita através do Método de Elementos Finitos, possibilitando o tratamento numérico do problema. O domínio é dividido em elementos triangulares que são agrupados em malhas não estruturadas e a formulação adotada é padrão. Utilizam-se polinômios de segundo grau para as velocidades e de primeiro grau para as das pressões, sempre garantindo a continuidade das funções entre os elementos. Essa configuração também é conhecida como elemento de *Taylor-Hood* e satisfaz a condição *div-stability*, como mostram Taylor e Hood (1973), Gunzburger (1989) e Brenner (2008).

Seguindo as referências do parágrafo anterior, as equações de quantidade de movimento e de continuidade passam pelos passos usuais da formulação fraca e tomam a forma integral, também semelhante à apresentada por Foias O. Manley e Temam (2004):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.\delta\mathbf{u}\right) d\Omega = &- \int_\Omega \left(\left(\left(\mathbf{u}.\nabla\right)\mathbf{u}\right).\delta\mathbf{u}\right) d\Omega \\
&+\frac{1}{Re}\int_\Omega \left(\nabla u.\nabla\delta u + \nabla v.\nabla\delta v\right) d\Omega - \int_\Omega \left(p\left(\nabla.\delta\mathbf{u}\right)\right) d\Omega \\
&-\frac{1}{Re}\int_{\partial\Omega} \left(\left(\nabla\mathbf{u}.\mathbf{n}\right)\delta\mathbf{u}\right) d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(p\left(\mathbf{n}.\delta\mathbf{u}\right)\right) d\partial\Omega \\
\int_\Omega \left(\left(\nabla.\mathbf{u}\right)\delta p\right) d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde a velocidade $\delta\mathbf{u} = \delta u\mathbf{i} + \delta v\mathbf{j}$ e a pressão $\delta p$ são as respectivas variáveis virtuais do método das potências virtuais, $\Omega$ é o domínio fluido bidimensional, $\partial\Omega$ é a fronteira do domínio e $\mathbf{n}$ é a normal exterior à fronteira. A integração por partes diminui a ordem do

termo de dissipação viscosa e também faz com que apareçam as integrais das tensões na fronteira, tanto viscosas quanto de pressão.

O passo seguinte é a substituição das variáveis contínuas de velocidade e pressão, físicas e virtuais, pelas análogas discretas, dadas pelas funções de forma ponderadas pelos valores nodais. Sendo um esquema de *Galerkin*, as variáveis físicas e virtuais são representadas pelo mesmo tipo de função de forma.

O valor de cada componente de velocidade é aproximado no interior de cada elemento de malha triangular pela soma de seis funções de forma quadráticas, ponderadas por seis valores nodais. Nesse tipo de elemento, os valores nodais coincidem com os valores da função aproximada nos nós, localizadas nos vértices dos triângulos e nos pontos médios de suas arestas. Para garantir a continuidade do campo de velocidade, elementos vizinhos compartilham tanto nós de vértices como de arestas, de forma que o número total de nós de cada componente de velocidade para uma dada malha é dado pela soma do seu número de vértices com o seu número de arestas. Sendo assim, o número de nós utilizados na representação de um campo de velocidade bidimensional é simplesmente o dobro desse valor:

$$n_U = 2(n_{\text{vértices}} + n_{arestas}), \tag{3.2}$$

onde $n_{\text{vértices}}$ é o número de vértices da malha e $n_{arestas}$ é o seu número de arestas.

A pressão é aproximada no interior de cada elemento de malha triangular pela soma de três funções de forma lineares, ponderadas por três valores nodais. Aqui também os valores nodais coincidem com os valores da função aproximada nos nós, localizadas apenas nos vértices dos triângulos. Os campos de pressão também devem ser contínuos e assim o número total de nós para uma dada malha coincide com o seu número de vértices, ou seja:

$$n_P = n_{\text{vértices}}. \tag{3.3}$$

Começando o tratamento discreto do problema, seguem os vetores de valores nodais de velocidade

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [U_1, \ldots, U_{n_U}] \\ \delta\mathbf{U} &= [\delta U_1, \ldots, \delta U_{n_U}], \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde os índices ímpares carregam os valores nodais da componente $x$ e os pares da componente $y$, na mesma ordem de nós. Logo abaixo são apresentados os vetores dos valores nodais de pressão

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [P_1, \ldots, P_{n_P}] \\ \delta\mathbf{P} &= [\delta P_1, \ldots, \delta P_{n_P}]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Após a introdução das variáveis discretas, a equação algébrica final da forma fraca fica composta predominantemente de termos bilineares nos valores nodais, físicos e virtuais, com coeficientes na forma de produtos das funções de forma e de suas derivadas integrados nos elementos da malha. As exceções são o termo convectivo, quadrático na velocidade física e linear na virtual, e as forças de vínculo que aqui incorporam a dependência na velocidade física

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U^t}.\mathbf{M}.\dot{\mathbf{U}} &= \int_\Omega \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.\delta\mathbf{u} \right) d\Omega \\ \delta\mathbf{U^t}.\mathbf{N}(\mathbf{U}).\mathbf{U} &= -\int_\Omega \left( \left( (\mathbf{u}.\nabla)\, \mathbf{u} \right).\delta\mathbf{u} \right) d\Omega \\ \delta\mathbf{U^t}.\mathbf{D}.\mathbf{U} &= \int_\Omega \left( \nabla u.\nabla\delta u + \nabla v.\nabla\delta v \right) d\Omega \\ \delta\mathbf{U^t}.\mathbf{R}.\mathbf{P} &= -\int_\Omega \left( p\, (\nabla.\delta\mathbf{u}) \right) d\Omega \\ \delta\mathbf{U^t}.\mathbf{F_v} &= -\frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega} \left( (\nabla\mathbf{u}.\mathbf{n})\, \delta\mathbf{u} \right) d\partial\Omega \\ \delta\mathbf{U^t}.\mathbf{F_p} &= \int_{\partial\Omega} \left( p\, (\mathbf{n}.\delta\mathbf{u}) \right) d\partial\Omega \\ \delta\mathbf{P^t}.\mathbf{R^t}.\mathbf{U} &= \int_\Omega \left( (\nabla.\mathbf{u})\, \delta p \right) d\Omega, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde os vetores $\dot{\mathbf{U}}$, $\mathbf{F_v}$ e $\mathbf{F_p}$ têm o mesmo formato do vetor $\mathbf{U}$ e carregam, respectivamente,

os valores nodais de $\partial_{\mathbf{t}}\mathbf{u}$, as forças de vínculo viscosas e as de pressão

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}} &= [\dot{U}_1, \ldots, \dot{U}_{n_U}] \\ \mathbf{F_v} &= [F_{v,1}, \ldots, F_{v,n_U}] \\ \mathbf{F_p} &= [F_{p,1}, \ldots, F_{p,n_U}].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Concatenando o par de vetores das variáveis físicas $\mathbf{U}$ e $\mathbf{P}$ e o par de vetores das variáveis virtuais $\delta\mathbf{U}$ e $\delta\mathbf{P}$, é possível remontar a equação 3.1 na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix}\delta\mathbf{U} \\ \delta P\end{bmatrix}^t \begin{bmatrix}\mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}} \\ P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\delta\mathbf{U} \\ \delta P\end{bmatrix}^t \begin{bmatrix}\frac{1}{Re}\mathbf{D} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) & \mathbf{R} \\ \mathbf{R^t} & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{U} \\ P\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\delta\mathbf{U} \\ \delta P\end{bmatrix}^t \begin{bmatrix}\mathbf{F_v} + \mathbf{F_p} \\ 0\end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

e, por fim, eliminando as variáveis virtuais $\delta\mathbf{U}$ e $\delta P$ e substituindo

$$\mathbf{K}(Re, \mathbf{U}) = \frac{1}{Re}\mathbf{D} + \mathbf{N}(\mathbf{U}), \tag{3.9}$$

chega-se a:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}} \\ P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{K}(Re, \mathbf{U}) & \mathbf{R} \\ \mathbf{R^t} & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{U} \\ P\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{F_v} + \mathbf{F_p} \\ 0\end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Nessa forma, o problema numérico ainda apresenta três complexidades importantes: a aplicação das condições de contorno, a derivada temporal de $\dot{\mathbf{U}}$ e a não linearidade do termo convectivo $\mathbf{N}(\mathbf{U})$. Todas são tratadas ainda neste capítulo, nas próximas seções.

## 3.2 Condições de contorno

A abordagem das condições de contorno é padrão, sendo que cada grau de liberdade posicionado na fronteira deve receber alguma informação externa prévia, na forma de uma condição do tipo natural ou do tipo essencial. O esquema de imposição das condições é

o mesmo, tanto no cálculo das soluções transientes quanto no das estacionárias, diferindo apenas em relação ao tipo da condição.

As integrais das tensões no contorno definem as forças de vínculo e são armazenadas nos vetores $\mathbf{F_v}$ e $\mathbf{F_p}$, sendo que os valores $F_{v,i}$ e $F_{p,i}$ (referentes a um dado grau de liberdade $i$) só participam efetivamente das equações dinâmicas dos graus de liberdade de contorno, pois valem zero nas equações dos graus de liberdade internos.

As condições do tipo natural são as que trazem informações para o cálculo das integrais de tensões referentes a certos graus de liberdade de contorno, possibilitando o cálculo dos valores $F_{v,i}$ e $F_{p,i}$, que completam as equações desses graus de liberdade. A sua implementação é direta, bastando calcular as integrais referentes aos graus de liberdade envolvidos e preencher as respectivas posições do vetor forçante do sistema.

Já as condições do tipo essencial são as que impõem valores a certos graus de liberdade de contorno. Nesse caso, não existe preocupação com o cálculo das integrais de contorno, uma vez que as equações dinâmicas dos graus de liberdade que recebem condições essenciais são descartadas, dando espaço às equações de vínculo. A implementação desse tipo de condição se resume a zerar as linhas da matriz referentes aos graus de liberdade em questão, colocando 1 apenas nas posições que coincidem com a diagonal principal e substituindo os valores da forçante pelos valores a serem impostos.

Uma vez resolvido o sistema, as forças de vínculo dos graus de liberdade que receberam condições essenciais podem ser calculadas através das respectivas equações dinâmicas que haviam sido descartadas.

## 3.3 Discretização temporal

Nessa fase do processo, logo após a discretização espacial das equações, é feita a discretização em relação ao tempo. Um esquema para o cálculo da derivada temporal do campo de velocidades é proposto e o termo $\dot{\mathbf{U}}$ sai da equação, dando lugar para uma expressão

contendo campos de velocidades de tempos vizinhos. A variável contínua de tempo $t$ é substituída pela discreta $t^n$ ou simplesmente $n$, seguindo:

$$\begin{aligned} t^n &= n\Delta t \\ \mathbf{U}^n &= \mathbf{U}(t^n) = \mathbf{U}(n\Delta t) \\ P^n &= P(t^n) = P(n\Delta t), \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\Delta t$ é o passo de tempo.

Aqui foi empregada uma variação do método de Euler, ver Deuflhard e Bornemann (2002), que aproxima a derivada temporal da velocidade em primeira ordem

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}. \tag{3.12}$$

Introduzindo o esquema na equação 3.10 e substituindo o termo convectivo por uma aproximação também de primeira ordem, chega-se ao seguinte esquema de marcha, que é semi-implícito

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Re}\mathbf{D} + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n) - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R^t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ P^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(\mathbf{U}^n)\mathbf{U}^n - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\mathbf{U}^n - \mathbf{F_v^n} - \mathbf{F_p^n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

onde:

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^n)\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{N}(\mathbf{U}^n)\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{N}(\mathbf{U}^{n+1})\mathbf{U}^n.$$

## 3.4 Solução estacionária

A estratégia escolhida para o cálculo da solução estacionária foi a imposição de $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$ seguida da resolução do problema não linear decorrente via método de ponto fixo. A informação de simetria observada nos experimentos é utilizada e o problema é resolvido em apenas metade do domínio, com a condição de simetria aplicada na fronteira que corresponde à linha média do escoamento, como em Fornberg (1984).

Por fim, o esquema iterativo decorrente do método de ponto fixo exige a recons-

trução e a resolução do seguinte sistema linear a cada passo $k$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Re}\mathbf{D} + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^k) & \mathbf{R} \\ \mathbf{R^t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{k+1} \\ P^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(\mathbf{U}^k)\mathbf{U}^k - \mathbf{F_v^k} - \mathbf{F_p^k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

onde:

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{U}^k)\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{N}(\mathbf{U}^k)\mathbf{U}^{k+1} + \mathbf{N}(\mathbf{U}^{k+1})\mathbf{U}^k.$$

## 3.5 Malha computacional

O código de elementos finitos desenvolvido utiliza elementos triangulares organizados em malhas não estruturadas bidimensionais. As vantagens desse tipo de discretização são a flexibilidade em geometrias complexas e a facilidade na construção de gradientes de refinamento elevados, bastante valorizada em problemas envolvendo camadas limite.

As malhas deste estudo são construídas utilizando o código computacional BAMG, de *Bidimensional Anisotropic Mesh Generator*, que é um gerador de malhas bidimensional, anisotrópico e adaptativo. O código é parte de um projeto desenvolvido por um grupo de pesquisa do INRIA, na França, e sua disponibilidade para fins de pesquisa é livre. Informações mais detalhadas sobre o método empregado no código são encontradas em Alauzet e Frey (2003a), Alauzet e Frey (2003b), Borouchaki e Fray (1998), Castro-Díaz F. Hecht e Pironneau (1997).

Para que a simetria do problema contínuo seja mantida, a malha também deve ser simétrica, não apenas em seu contorno mas em toda a sua extensão, elemento a elemento. Para garantir essa simetria, apenas uma metade da malha é construída pelo gerador e passada para o código de elementos finitos. A segunda metade é adicionada na fase de pré-processamento e a relação de nós e elementos simétricos é guardada para as análises posteriores. Essa relação é de grande importância para o método a ser apresentado e possibilita a decomposição de qualquer campo, escalar ou vetorial, em componentes

simétricas e antissimétricas (sempre em relação ao plano médio do escoamento).

## 3.6 Código computacional

O código computacional que calcula as matrizes elementares de 3.6 e monta o problema 3.10 é baseado nas bibliotecas *Getfem++* e *Gmm++*, de Pommier e Renard (2011), desenvolvidas em linguagem *C++* e distribuídas livremente para fins de pesquisa. Enquanto *Getfem++* é um biblioteca de elementos finitos flexível e eficiente que possibilita o cálculo das integrais elementares da formulação fraca 3.6 e o gerenciamento de dados geométricos e de graus de liberdade do problema; *Gmm++* é uma biblioteca de matrizes esparsas que auxilia na criação das matrizes e no seu gerenciamento, incluindo funções eficientes para as operações básicas.

A cada passo os sistemas 3.13 e 3.14 são montados com a ajuda das bibliotecas *Getfem++* e *Gmm++* e resolvidos com a utilização das rotinas do UMFPACK, que são de grande eficiência e também distribuídas livremente para fins de pesquisa, ver Davis (2002) e Davis e Duff (1999).

Por fim, os problemas característicos reduzidos descritos no capítulo 5 são resolvidos pelas funções da biblioteca computacional *LAPACK*, de Anderson et al. (1999).

# 4 DINÂMICA DO ESCOAMENTO

## 4.1 Dinâmica linearizada

A apresentação dos elementos para a análise da solução periódica começa na situação que antecede o seu aparecimento, a vizinhança do número de *Reynolds* logo anterior ao ponto de bifurcação. Nessa região, os experimentos levados a tempos suficientemente longos ainda chegam ao regime estacionário, mas, como mostram Coutanceau e Bouard (1977a), quanto maior a proximidade da bifurcação mais longos são os transientes que trazem o escoamento de uma situação perturbada de volta ao seu ponto fixo. A não linearidade do termo convectivo da equação de Navier-Stokes complica a sua análise, no entanto, considerando apenas os experimentos dentro dessa faixa e iniciados por estados moderadamente perturbados, é possível reescrever a equação em termos de uma perturbação $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ da sua solução estacionária $\mathbf{u}_e(\mathbf{x})$ e linearizá-la sem importantes perdas de generalidade:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}' &= -(\mathbf{u}_e.\nabla)\mathbf{u}' - (\mathbf{u}'.\nabla)\mathbf{u}_e + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}' - \nabla p' \\ \nabla.\mathbf{u}' &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

lembrando que o campo de velocidade total é obtido pela recomposição da solução estacionária com a perturbação $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_e(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ e que todas as condições de contorno do tipo essencial passam a ser homogêneas para a perturbação. Essa simplificação é válida quando o termo quadrático $-(\mathbf{u}'.\nabla)\mathbf{u}'$ descartado da equação de evolução é consideravelmente inferior ao linear e também decrescente com o tempo. Para tal, é suficiente que o módulo da perturbação seja bastante inferior à unidade e que a solução tenha tendência a voltar ao seu ponto fixo. Satisfeitas essas condições é possível afirmar que a evolução

não linear se comporta de forma muito semelhante à linearizada.

A vantagem matemática da linearização é a possibilidade de separar as variáveis temporais e espaciais e estudar a perturbação como uma sobreposição de soluções particulares com dependências temporais $e^{\lambda_i t}$ associadas a respectivos modos espaciais $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x})$. As soluções particulares são independentes e quando inseridas na equação 4.1 dão origem à equação característica

$$\begin{aligned} \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i &= -(\mathbf{u}_e.\nabla)\boldsymbol{\phi}_i - (\boldsymbol{\phi}_i.\nabla)\mathbf{u}_e + \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{\phi}_i - \nabla p_i \\ \nabla.\boldsymbol{\phi}_i &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

que é resolvida pelos pares de autovalores $\lambda_i$ e autovetores $\boldsymbol{\phi}_i$. O número de soluções da equação característica é dado pela dimensão do problema que, no caso contínuo, antes da discretização espacial, é infinita. Os autovalores podem ser reais, mas, no caso geral, são complexos

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i \tag{4.3}$$

e sempre acompanhados de seus conjugados $\bar{\lambda}_i$, de forma que o espectro apresentado no plano complexo é simétrico em relação ao eixo real. É evidente que os autovetores associados a autovalores complexos também o são

$$\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}_i^r(\mathbf{x}) + i\boldsymbol{\phi}_i^i(\mathbf{x}) \tag{4.4}$$

e que aparecem nas soluções reais acompanhados de seus conjugados $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i(\mathbf{x})$, sempre ponderados por respectivas coordenadas também complexas conjugadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{x},t) &= \sum_i \frac{1}{2}\left(c_i e^{\lambda_i t}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \bar{c}_i e^{\bar{\lambda}_i t}\bar{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x})\right) \\ &= \sum_i e^{\sigma_i t}\left[\left(c_i^r\boldsymbol{\phi}_i^r - c_i^i\boldsymbol{\phi}_i^i\right)\cos(\omega_i t) - \left(c_i^r\boldsymbol{\phi}_i^i + c_i^i\boldsymbol{\phi}_i^r\right)\sin(\omega_i t)\right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

A solução geral 4.5 define a evolução do problema linearizado a menos das coordenadas $c_i$ e $\bar{c}_i$, que são calculadas a partir da perturbação inicial imposta ao problema. Como pode ser visto, a parte real do autovalor $\sigma_i$ determina a taxa de crescimento do respectivo autovetor, enquanto a imaginária determina a sua frequência natural de pul-

sação. A taxa de crescimento de um autovetor é diretamente relacionada ao seu balanço energético, enquanto a sua frequência relaciona localmente o seu comprimento de onda à velocidade da solução estacionária.

Nos mais baixos números de *Reynolds*, dentro do regime estacionário e distante da primeira bifurcação, o termo viscoso é bastante importante e a dissipação logo leva estados perturbados de volta às soluções estacionárias. Isso indica que o espectro da linearização está completamente contido no semiplano $\sigma_i < 0$ e que todos os seus autovetores são estáveis por dissiparem mais energia do que recebem. A ruptura desse comportamento ocorre em $Re \approx 40$ e é marcada pelo aparecimento de uma perturbação oscilatória crescente com o tempo que domina o escoamento. No contexto da dinâmica linearizada, essa ruptura é causada por um par de autovetores cujos autovalores, não nulos, cruzam o eixo imaginário para o semiplano instável. Essa passagem é classificada na linguagem dos sistemas dinâmicos como uma bifurcação de *Hopf* e determina o início do regime oscilatório.

O trabalho de Jackson (1987) se baseia em uma discretização por elementos finitos e é pioneiro na abordagem numérica dessa bifurcação, onde foram calculados para o cilindro, bem como para alguns outros corpos rombudos, os pares de autovalores que cruzam o eixo imaginário e os respectivos pares de autovetores. Já em Noack e Eckelmann (1994), o modelo discreto do escoamento ao redor do cilindro é obtido com a projeção de *Galerkin* da equação de Navier-Stokes em uma reduzida base de funções derivadas do operador de Stokes. Utilizando apenas 58 funções de base, foram calculados o escoamento estacionário e o espectro completo do operador linearizado. Nesse estudo, além da caracterização da bifurcação pelo par de autovalores instáveis, é possível ter uma ideia da disposição dos autovalores na parte estável do espectro, seguindo o que se parece com uma parábola de eixo horizontal e cavidade voltada para o sentido negativo do eixo real.

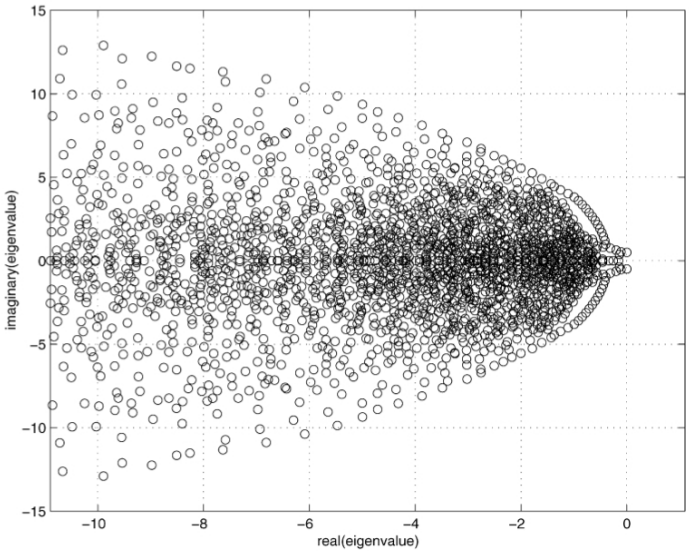



Figura 4.1: Espectro do operador discreto linearizado na solução estacionária do escoamento na bifurcação, em $Re = 46.05$, extraído de Lopez, Meneghini e Saltara (2008).

O estudo de Lopez, Meneghini e Saltara (2008) também é baseado em uma discretização por elementos finitos e tem o seu foco no ponto de bifurcação do escoamento ao redor de um cilindro circular que, para o seu modelo discreto, foi encontrado em $Re = 46.05$. Dentre seus resultados, está uma aproximação numérica do espectro da linearização no ponto de bifurcação, que apresenta a mesma topologia vista em Noack e Eckelmann (1994) em mais detalhes. A figura 4.1 traz uma reprodução desse espectro onde fica em evidência o par de autovalores que se destaca da nuvem e segue em direção ao semiplano instável.

Logo após a bifurcação, quando o par de autovalores adentra o plano instável, a evolução linearizada deixa de ser limitada e cresce indefinidamente com o seu expoente real positivo. No entanto, mesmo não tendo a mesma solução assintótica da evolução não linear, que é limitada e periódica, a evolução linearizada segue próxima a essa, pelo menos por um curto intervalo de tempo, desde que a perturbação inicial seja moderada. Esse é o limite da aderência entre a dinâmica linearizada e a não linear.

## 4.2 Dinâmica não linear

A análise da dinâmica não linear do escoamento é baseada em elementos obtidos com a linearização, como as informações do seu espectro e a sua base de autovetores. A solução pesquisada ainda é uma composição dos autovetores da linearização, mas a reabilitação do termo convectivo quadrático modifica consideravelmente a dinâmica do problema, de forma que o comportamento temporal das coordenadas modais não é mais simplesmente definido pelas exponenciais dos autovalores, mas por novas coordenadas $q_i(t)$ e $\bar{q}_i(t)$, que não são conhecidas a priori:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x},t) = \sum_i \frac{1}{2}\left(q_i(t)\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \bar{q}_i(t)\bar{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x})\right). \tag{4.6}$$

Apesar de não terem mais o mesmo papel suficiente na definição da evolução das coordenadas modais, os autovalores ainda têm utilidade na análise individual dos autovetores. Isso porque ainda são as suas partes reais $\sigma_i$ que determinam as suas trocas energéticas com o meio externo, enquanto o termo convectivo quadrático reabilitado é responsável apenas pelas trocas de energia entre os autovetores, como apontado por Landau e Lifshitz (1959).

Essa troca de energia interna rompe a independência dos autovetores prevista pela teoria linear e possibilita o balanço energético da solução periódica. As evoluções iniciadas por moderadas perturbações na direção dos autovetores instáveis devem crescer exponencialmente até que o termo convectivo quadrático torne-se importante e comece a interagir com os outros autovetores da base, todos estáveis, transferindo-lhes parte da energia dos autovetores instáveis. Essa transferência cresce com o aumento da amplitude do autovetor instável, diminuindo sua taxa de crescimento e proporcionando energia suficiente para que alguns autovetores estáveis também cresçam. Esse processo deve evoluir até o ponto de saturação assintótico observado nos experimentos, onde a amplitude das cordenadas dos autovetores envolvidos convergem fixando as taxas de transferência de energia.

Em síntese, a solução periódica protagonizada pelo par de autovetores instáveis também tem necessidade de autovetores estáveis na sua composição, para que estes dissipem a energia excedente recebida pelos primeiros e garantam o seu balanço energético. Comprovada a participação de autovetores estáveis na solução assintótica, vem a questão da identificação desses coadjuvantes dentro do seu subconjunto. As bases de autovetores tratadas aqui têm as dimensões determinadas pela discretização via elementos finitos e são suficientemente grandes para a inviabilizar o seu cálculo completo, de maneira que é imprescindível o desenvolvimento de um método capaz de identificar os autovetores de interesse mesmo sem ter acesso à base completa. A dinâmica do problema pode então ser recuperada de forma mais simples e organizada através da projeção da equação de Navier-Stokes nas bases formadas por esses autovetores de interesse, que devem ser os predominantes na solução periódica.

# 5 RECONSTRUÇÃO MODAL

A principal hipótese deste estudo é que seja possível reconstruir a solução periódica do escoamento utilizando bases compostas por números reduzidos de autovetores. Da projeção da equação de Navier-Stokes nessas bases são obtidos os modelos reduzidos para o escoamento, que são sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares nas coordenadas temporais dos autovetores. Por fim, a integração numérica desses modelos permite a emulação do problema completo, com as vantagens de ter um custo muito mais baixo e de apresentar a sua evolução nas coordenadas modais, possibilitando a análise da interação entre os autovetores e o papel da não linearidade na evolução da solução.

## 5.1 Simetria dos autovetores

A relação de simetria observada na geometria do domínio fluido, que já serviu na identificação das simetrias na solução estacionária e nos harmônicos de Fourier da solução periódica, agora é empregada na análise dos autovetores da linearização. O objetivo é mostrar que a base dos autovetores pode ser dividida em duas sub-bases complementares, compostas de autovetores puramente simétricos e antissimétricos. Essa informação é importante por permitir simplificações consideráveis no procedimento de identificação dos autovetores que predominam na solução.

O desenvolvimento começa pela consideração de um autovetor $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x})$ sem nenhuma simetria pré-definida, portanto, composto de uma parcela simétrica e outra antis-

simétrica

$$\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}_i^s(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\phi}_i^a(\mathbf{x}). \tag{5.1}$$

A existência de tal autovetor, com ambas as parcelas não nulas, não é conhecida *a priori* e a proposta que segue é demonstrar que o caso positivo implica a dupla multiplicidade do autovalor $\lambda_i$ associado e a possibilidade de separar a equação característica em duas outras independentes, uma com a parcela simétrica do autovetor e outra com a antissimétrica, corroborando assim a hipótese de que seja possível dividir a base de autovetores nas sub-bases mencionadas.

A dupla multiplicidade do autovalor $\lambda_i$ é demonstrada se for possível utilizar as relações de simetria para separar a equação característica do autovetor em duas outras independentes, escritas nas suas parcelas simétrica e antissimétrica. O primeiro passo nessa separação é a classificação de todos os termos quanto à simetria em questão, através da análise das derivadas parciais espaciais. A derivada parcial de um campo escalar $\phi^+(\mathbf{x})$ na direção da linha média ($\partial_x$) tem a mesma relação de simetria desse campo, enquanto a derivada parcial na direção ortogonal ($\partial_y$) tem a relação de simetria invertida

$$\begin{aligned} \partial_x \phi^+(\mathbf{x}) &= \psi^+(\mathbf{x}) \\ \partial_y \phi^+(\mathbf{x}) &= \psi^-(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{5.2}$$

e para os termos quadráticos é necessário notar que os produtos são simétricos quando ambas funções têm a mesma relação de simetria e antissimétricos nos casos mistos puros

$$\begin{aligned} \phi_i^+(\mathbf{x})\phi_j^+(\mathbf{x}) &= \psi^s(\mathbf{x}) \\ \phi_i^+(\mathbf{x})\phi_j^-(\mathbf{x}) &= \psi^a(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $+/+$ refere-se a simétrico/simétrico ou antissimétrico/antissimétrico e $+/-$ a simétrico/antissimétrico ou antissimétrico/simétrico. Assim, inserindo as parcelas do autovetor 5.1 na equação característica 4.2, utilizando 5.2 e 5.3 e lembrando das definições sobre

a simetria de campos vetoriais introduzidas na seção 2.4, chega-se a:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^s}^{\text{sim.}} + \overbrace{\lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^a}^{\text{a-sim.}} = & \overbrace{-(\mathbf{u}_e.\nabla)\boldsymbol{\phi}_i^s}^{\text{sim.}} - \overbrace{(\boldsymbol{\phi}_i^s.\nabla)\mathbf{u}_e}^{\text{sim.}} + \frac{1}{Re}\overbrace{\nabla^2\boldsymbol{\phi}_i^s}^{\text{sim.}} - \overbrace{\nabla p_i^s}^{\text{sim.}} \\
& \underbrace{-(\mathbf{u}_e.\nabla)\boldsymbol{\phi}_i^a}_{\text{a-sim}} - \underbrace{(\boldsymbol{\phi}_i^a.\nabla)\mathbf{u}_e}_{\text{a-sim}} + \frac{1}{Re}\underbrace{\nabla^2\boldsymbol{\phi}_i^a}_{a-sim} - \underbrace{\nabla p_i^a}_{\text{a-sim}} \\
\underbrace{\nabla.\boldsymbol{\phi}_i^s}_{sim.} + \underbrace{\nabla.\boldsymbol{\phi}_i^a}_{a-sim.} = & 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Um ponto chave na equação 5.4 é a simetria da solução estacionária $\mathbf{u}_e(\mathbf{x})$, fazendo com que todos os termos do operador linearizado conservem a simetria dos vetores aos quais eles são aplicados, possibilitando a separação da equação conforme desejado[1]

$$\begin{aligned}
\lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^s = & -(\mathbf{u}_e.\nabla)\boldsymbol{\phi}_i^s - (\boldsymbol{\phi}_i^s.\nabla)\mathbf{u}_e + \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{\phi}_i^s - \nabla p_i^s \\
\nabla.\boldsymbol{\phi}_i^s = & 0,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^a = & -(\mathbf{u}_e.\nabla)\boldsymbol{\phi}_i^a - (\boldsymbol{\phi}_i^a.\nabla)\mathbf{u}_e + \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{\phi}_i^a - \nabla p_i^a \\
\nabla.\boldsymbol{\phi}_i^a = & 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Portanto, fica demonstrado que a existência de um autovetor com parcelas simétrica e antissimétrica implica na dupla multiplicidade do seu autovalor associado e, consequentemente, na possibilidade de separar a base de autovetores em duas sub-bases complementares, a dos autovetores simétricos e a dos antissimétricos. Vale lembrar que a possibilidade de um autovetor com ambas parcelas não nulas é desconhecida *a priori* e que a não existência de tal autovetor já implicaria automaticamente a possibilidade de separação da base.

[1]Isso não seria verdade para os termos convectivos se $\mathbf{u}_e(\mathbf{x})$ tivesse uma parcela antissimétrica.

## 5.2 Análise dos harmônicos

Esta seção leva em conta as observações feitas na seção 2.4, sobre as simetrias dos harmônicos, juntamente com a constatação da seção 5.1, sobre a separação da base dos autovetores pela simetria, para estruturar uma previsão sobre os autovetores que devem compor a solução periódica. Esse passo deve dar subsídios para a compreensão e avaliação das bases reduzidas identificadas e dos respectivos modelos reduzidos para o fenômeno.

A ortogonalidade temporal dos harmônicos indica que eles devem ser compostos por conjuntos independentes de autovetores ponderados por coordenadas temporais próprias. Essa informação possibilita estimar o número mínimo de autovetores reais/complexos e simétricos/antissimétricos necessários na reconstrução da série de Fourier para que ao menos as relações de simetria dos seus harmônicos sejam respeitadas. No que segue, serão considerados apenas os harmônicos do zero ao terceiro.

Outras constatações importantes vêm do estudo de Noack et al. (2003), que também foi realizado dentro do regime bidimensional periódico e faz referência às diferenças entre a solução estacionária do escoamento e sua média temporal e também entre as parcelas real e imaginária do autovetor instável e os dois primeiros modos da decomposição de Karhunen-Loève que, nesse caso, correspondem às parcelas real e imaginária do primeiro harmônico de Fourier[2].

A média temporal do escoamento é um campo simétrico e a diferença em comparação à solução estacionária implica a simetria da parcela não nula da média temporal da perturbação $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$. É possível que essa parcela seja composta por autovetores simétricos complexos cujas coordenadas oscilem ao redor de médias não nulas, mas seria mais simples se ela fosse composta por autovetores simétricos reais, não oscilatórios, com comportamento assintótico constante. Aqui fica contabilizada a necessidade de pelo menos um autovetor simétrico real ou um par de simétricos complexos conjugados.

[2]É visível, da integração temporal do modelo reduzido apresentada por Noack et al. (2003), que as coordenadas dos dois dois primeiros modos são as únicas a oscilar com a frequência de *Strouhal*, fazendo assim a mímica das parcelas real e imaginária do primeiro harmônico de Fourier da solução.

Na composição da parcela da perturbação com média nula, são esperados conjuntos de autovetores complexos conjugados oscilatórios, que devem aparecer sincronizados em harmônicos, respeitando as respectivas simetrias. O autovetor instável, protagonista do regime oscilatório, deve estar contido no primeiro harmônico e a diferença entre eles, constatada por Noack et al. (2003), deve ser constituída de pelo menos um par de autovetores antissimétricos complexos conjugados. Por fim, o segundo harmônico pede pelo menos um par de autovetores complexos conjugados simétricos, enquanto o terceiro pede pelo menos um outro par de autovetores complexos conjugados antissimétricos.

Levando em conta as considerações feitas acima e supondo que a média temporal não contenha autovetores complexos, é possível concluir que a solução periódica é composta pela solução estacionária sobreposta por pelo menos um autovetor real simétrico, três pares de complexos conjugados antissimétricos e mais um par de complexos conjugados simétricos, ou seja, nove autovetores. Vale lembrar que estas são apenas as condições mínimas para que sejam respeitadas as simetrias da média temporal e dos três primeiros harmônicos oscilatórios, de forma que a dimensão final da base reduzida deve ser obtida iterativamente, através da análise de convergência dos modelos reduzidos.

## 5.3 Identificação dos autovetores

O método para identificar os autovetores que predominam na solução periódica é baseado na teoria de sistemas lineares (Arnold (1992) e Chicone (2006)) e tira as informações sobre o comportamento não linear do problema de uma única observação do escoamento, reproduzido por uma simulação numérica. Para concluir que uma amostra extraída em um instante qualquer dentro do regime periódico contém todas as informações necessárias para a sua reconstrução é suficiente considerar a hipótese de que o caráter oscilatório da solução periódica seja representado simplesmente pelo argumento das coordenadas complexas conjugadas e que todos os seus módulos se mantenham constantes. Dessa forma, medições feitas em instantes distintos diferem apenas pela fase das coordenadas

complexas e, por isso, são equivalentes no que diz respeito à ponderação dos autovetores na composição da solução completa, que é dada pelo módulo das suas coordenadas.

A exposição do método é baseada na teoria dos subespaços de *Krylov*, que trata a construção de subespaços isomorfos a certos subespaços de autovetores de um dado operador linear. Essa teoria é bastante comum em métodos de resolução de problemas característicos e de sistemas lineares de alta ordem e, nesta tese, é empregada na construção de subespaços aproximadamente isomorfos aos subespaços gerados pelos principais autovetores presentes em uma dada amostra da solução periódica. A projeção da linearização de Navier-Stokes nesses subespaços aproximadamente isomorfos reduz a dimensão dos problemas e conserva no seu espectro apenas autovalores associados a autovetores presentes na amostra. Essa redução de ordem viabiliza o cálculo de todos os autovetores das projeções, que são então convertidos em aproximações dos autovetores de interesse.

Dados um operador linear $\mathbf{A} : R^n \to R^n$ e um vetor $\mathbf{B} \in R^n$, que pode ser escrito como combinação linear dos autovetores $\mathbf{V}_i$ de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{V}_i, \tag{5.7}$$

onde alguns $c_i$ podem ser nulos, a teoria de *Krylov* diz que o subespaço gerado pelos autovetores associados aos $m \leq n$ coeficientes $c_i$ não nulos de 5.7 é isomorfo ao subespaço de *Krylov* de ordem $m$

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{\mathbf{B}, \mathbf{A}^1\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}\}, \tag{5.8}$$

ou seja, conforme Saad (2003)

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \text{ iso } \{\mathbf{V}_1^*, \mathbf{V}_2^*, \ldots, \mathbf{V}_3^*, \ldots, \mathbf{V}_m^*\}, \tag{5.9}$$

onde $\mathbf{V}_i^*$ são os autovetores que compõem $\mathbf{B}$ com $c_i \neq 0$ após reordenação. A dimensão $m$ não é conhecida *a priori*, de forma que, em geral, os métodos que empregam a teoria seguem aumentando a dimensão $r$ dos subespaços $\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ até que os seus vetores percam a independencia linear, quando $r > m$, ou até que outra condição seja satisfeita.

O centro do método é a linearização 4.1, apresentada aqui na forma matricial, obtida após a discretização pelo método dos elementos finitos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{L}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{U} + \mathbf{RP} \\ \mathbf{R}^t\mathbf{U} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\dot{\mathbf{U}}(t)$ e $\mathbf{U}(t)$ são vetores com os valores nodais de aceleração e velocidade, $\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}$ é a inércia, $\mathbf{L}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{U}$ incorpora a dissipação viscosa proporcional a $\frac{1}{Re}$ e a convecção linearizado em $\mathbf{U}_e$, $\mathbf{RP}$ é o gradiente de pressão e $\mathbf{R}^t\mathbf{U}$ é a divergência. Enfim, partindo de 5.10 chega-se à forma matricial da equação característica 4.2

$$\begin{aligned} \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i &= \mathbf{L}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{\Phi}_i + \mathbf{RP}_{\mathbf{\Phi}_i} \\ \mathbf{R}^t\mathbf{\Phi}_i &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

com os autovalores $\lambda_i$ e autovetores $\mathbf{\Phi}_i$ acompanhados pelas respectivas pressões $\mathbf{P}_{\mathbf{\Phi}_i}$.

Antes de prosseguir com o método, é conveniente fazer a integração temporal de 5.10 por um intervalo $\Delta t$, partindo de uma condição inicial qualquer $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}(t_n)$. Dessa forma, a evolução do problema passa ser discreta, marcada pelo passo temporal $\Delta t$ e definida pela seguinte equação de diferenças

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{L}^{\Delta t}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{U}_n \tag{5.12}$$

onde $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}(t_n + \Delta t)$. O operador da equação de diferenças pode prescindir do termo de pressão, englobando a sua ação juntamente com a da equação de continuidade, isso porque a pressão em um dado instante é univocamente definida pelo campo de velocidades através da resolução do problema linear 5.11, trocando-se $\mathbf{U}$ por $\dot{\mathbf{U}}$ na equação da continuidade. A equação característica associada à evolução discreta é análoga àquela com tempo contínuo, como mostra Guckenheimer e Holmes (1983)

$$\mu_i\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{L}^{\Delta t}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{\Phi}_i. \tag{5.13}$$

com os mesmo autovetores $\mathbf{\Phi}_i$ e autovalores $\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t}$.

Na sequência, a equivalência dos autovetores das equações características 5.11 e 5.13 e a relação biunívoca entre os seus autovalores são suficientes para confirmar o isomorfismo entre os subespaços de *Krylov* de mesma ordem gerados pelos seus operadores a partir de um dado vetor $\mathbf{U}_1$, de maneira que fica livre a escolha pelo operador numericamente mais conveniente.

Nessa aplicação, o vetor $\mathbf{U}_1$, que carrega os valores nodais de uma amostra da perturbação $\mathbf{U}'(t^*)$ tirada de uma simulação numérica[3], serve de base para a geração dos vetores do subespaço de *Krylov*

$$\mathbf{K}_i = \left(\mathbf{L}^{\Delta t}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\right)^{i-1} \mathbf{U}_1,\ i = 1, 2, \ldots, r; \tag{5.14}$$

que é equivalente à equação de diferenças 5.12

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{U}_1,\ \mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{L}^{\Delta t}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{K}_i,\ i = 2, 3, \ldots, r; \tag{5.15}$$

ou ainda, a uma série de amostras da evolução linear 5.10, com condição inicial $\mathbf{U}'(t^*)$ e tiradas em intervalos $\Delta t$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_1,\ \mathbf{K}_i = \mathbf{U}((i-1)\Delta t). \tag{5.16}$$

A opção 5.16 é a que melhor se adequa aos códigos computacionais já implementados. Nesse ponto, a amostra do regime periódico carregada pelo vetor $\mathbf{U}_1$ é utilizada como condição inicial do problema 5.10, que é integrado numericamente utilizando os mesmos parâmetros da simulação completa, conforme a descrição da seção 3.3. Assim, chega-se ao referido subespaço de *Krylov* de dimensão $r$ que é aproximadamente[4] isomorfo ao subespaço dos autovetores presentes na solução periódica

$$\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \ldots, \mathbf{K}_r\} = \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}(\Delta t), \mathbf{U}(2\Delta t), \ldots, \mathbf{U}((r-1)\Delta t)\}. \tag{5.17}$$

É nesse momento que entra em cena a simetria dos autovetores discutida na seção

[3] O tempo $t^*$ deve ser grande o suficiente para que a simulação numérica já esteja em regime periódico.
[4] O isomorfismo é dito aproximado por não se saber a priori a dimensão $r$ dos subespaços.

5.1. Os vetores da base de *Krylov* 5.17 são decompostos nas suas parcelas simétricas e antissimétricas e a base é dividida em duas sub-bases

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^s &= \{\mathbf{K}_1^s, \mathbf{K}_2^s, \mathbf{K}_3^s, \ldots, \mathbf{K}_r^s\}, \\ \mathcal{B}^a &= \{\mathbf{K}_1^a, \mathbf{K}_2^a, \mathbf{K}_3^a, \ldots, \mathbf{K}_r^a\}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

que também podem ser apresentadas matricialmente, com os vetores $\mathbf{K}_i^s$ e $\mathbf{K}_i^a$ dispostos em colunas

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s &= [\mathbf{K}_1^s, \mathbf{K}_2^s, \mathbf{K}_3^s, \ldots, \mathbf{K}_r^s], \\ \mathbf{K}_a &= [\mathbf{K}_1^a, \mathbf{K}_2^a, \mathbf{K}_3^a, \ldots, \mathbf{K}_r^a]. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Com as bases em mãos, são realizadas as projeções do problema característico 5.11 que dão origem aos seguintes problemas característicos de ordem reduzida $r$

$$\begin{aligned} \lambda_i^{*,s} \mathbf{K}_s^t \mathbf{M} \mathbf{K}_s \mathbf{\Phi}_i^{r,s} &= \mathbf{K}_s^t \mathbf{L} \mathbf{K}_s \mathbf{\Phi}_i^{r,s}, \\ \lambda_i^{*,a} \mathbf{K}_a^t \mathbf{M} \mathbf{K}_a \mathbf{\Phi}_i^{r,a} &= \mathbf{K}_a^t \mathbf{L} \mathbf{K}_a \mathbf{\Phi}_i^{r,a}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

sendo que os autovalores $\lambda_i^{*,s}$ e $\lambda_i^{*,a}$ são aproximações diretas dos autovalores de 5.11 e os autovetores $\mathbf{\Phi}_i^{r,s}$ e $\mathbf{\Phi}_i^{r,a}$ ainda precisam passar por conversões para fornecer as respectivas aproximações dos autovetores simétricos e antissimétricos de 5.11

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_i^{*,s} &= \mathbf{K}_s \mathbf{\Phi}_i^{r,s}, \\ \mathbf{\Phi}_i^{*,a} &= \mathbf{K}_a \mathbf{\Phi}_i^{r,a}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Por fim, os problemas característicos de ordem reduzida 5.20 são resolvidos numericamente por completo, fornecendo o espectro reduzido

$$\{\lambda_1^{*,s}, \lambda_2^{*,s}, \ldots, \lambda_r^{*,s}, \lambda_1^{*,a}, \lambda_2^{*,a}, \ldots, \lambda_r^{*,a}\}, \tag{5.22}$$

e, após a conversão 5.21, a referida base reduzida com $r$ autovetores simétricos e $r$ antissimétricos

$$\{\mathbf{\Phi}_1^{*,s}, \mathbf{\Phi}_2^{*,s}, \ldots, \mathbf{\Phi}_r^{*,s}, \mathbf{\Phi}_1^{*,a}, \mathbf{\Phi}_2^{*,a}, \ldots, \mathbf{\Phi}_r^{*,a}\}. \tag{5.23}$$

A divisão do problema pela simetria facilita o cálculo computacional, dado que

dois problemas característicos de ordem $r$ são, em geral, mais simples de serem tratados do que um de ordem $2r$. Outra vantagem é a imposição de que os autovetores sejam sempre obtidos nas suas formas simétrica pura ou antissimétrica pura, facilitando a sua associação com os harmônicos de Fourier.

## 5.4 Projeção não linear

A projeção não linear segue *Galerkin* e parte da equação de Navier-Stokes completa escrita na sua forma matricial compacta, obtida após a discretização pelo método dos elementos finitos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{L}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{U} + \mathbf{N}(\mathbf{U})\mathbf{U} + \mathbf{R}\mathbf{P}, \\ \mathbf{R}^t\mathbf{U} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

É conveniente apresentar a base reduzida 5.23 na forma matricial, com os seus autovetores dispostos em colunas

$$\mathbf{B} = [\mathbf{\Phi}_1^{*,s}, \mathbf{\Phi}_2^{*,s}, \ldots, \mathbf{\Phi}_r^{*,s}, \mathbf{\Phi}_1^{*,a}, \mathbf{\Phi}_2^{*,a}, \ldots, \mathbf{\Phi}_r^{*,a}], \tag{5.25}$$

de maneira que os vetores de valores nodais $\mathbf{U}$ e $\dot{\mathbf{U}}$ possam ser reescritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{q}(\mathbf{t}), \\ \dot{\mathbf{U}}(t) &= \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}), \end{aligned} \tag{5.26}$$

onde $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ são os vetores com as coordenadas dos autovetores e as suas respectivas derivadas temporais

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= [q_1^s(t), q_2^s(t), \ldots, q_r^s(t), q_1^a(t), q_2^a(t), \ldots, q_r^a(t)], \\ \dot{\mathbf{q}}(t) &= [\dot{q}_1^s(t), \dot{q}_2^s(t), \ldots, \dot{q}_r^s(t), \dot{q}_1^a(t), \dot{q}_2^a(t), \ldots, \dot{q}_r^a(t)]. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Os termos lineares de 5.24 são projetados de forma direta, como em 5.20, enquanto

o quadrático pede a seguinte decomposição

$$\mathbf{N}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{r} (q_i^s \mathbf{N}(\mathbf{\Phi}_i^{*,s})\mathbf{U} + q_i^a \mathbf{N}(\mathbf{\Phi}_i^{*,a})\mathbf{U}), \tag{5.28}$$

antes da projeção final

$$\mathbf{B}^t\mathbf{M}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^t\mathbf{L}^m_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{B}\mathbf{q} + \sum_{i=1}^{r} \left(q_i^s(t)\mathbf{B}^t\mathbf{N}(\mathbf{\Phi}_i^{*,s}) + q_i^a(t)\mathbf{B}^t\mathbf{N}(\mathbf{\Phi}_i^{*,a})\right)\mathbf{B}\mathbf{q}, \tag{5.29}$$

que também pode ser escrita de forma mais compacta

$$\mathbf{M}^{2r}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}^{2r}_{(Re,\mathbf{U}_e)}\mathbf{q} + \sum_{i=1}^{r} \left(q_i^s \mathbf{N}_i^{2r,s} + q_i^a \mathbf{N}_i^{2r,a}\right)\mathbf{q}, \tag{5.30}$$

lembrando que o fato dos autovetores terem divergência nula faz com que o termo de pressão da equação de quantidade de movimento e a equação de continuidade sejam ambos identicamente nulos. O sistema de equações ordinárias não lineares 5.30 tem ordem $2r$ e pode ser integrado no tempo utilizando o mesmo esquema apresentado na seção 3.3 para o problema completo, gerando as séries temporais das coordenadas $q_i^s$ e $q_i^a$.

# 6 APLICAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos da teoria para $Re = 60$, onde o escoamento já está no regime periódico e ainda é bidimensional. O número de autovetores simétricos e anti-simétricos do operador linear que participam da solução periódica não é conhecido *a priori* e deve ser aproximado pelo refinamento sucessivo da análise. Foram feitas duas iterações, a primeira com a identificação de 12 autovetores e a segunda com 24, sendo geradas duas bases de autovetores. O comportamento linear das bases é analisado através dos respectivos espectros reduzidos e o não linear através da projeção completa das equações de Navier-Stokes nas bases, que dá origem aos modelos reduzidos do escoamento.

## 6.1 Modelo discreto

A aplicação numérica da teoria apresentada começa pela criação de um modelo discreto do escoamento, através do método de elementos finitos, para servir como base da análise e paradigma para os modelos reduzidos.

O domínio fluido considerado cobre um disco com $400D$ de diâmetro centrado no cilindro, evitando qualquer efeito de blocagem. O gerador de malhas BAMG foi empregado para construir a triangulação sobre metade do domínio, sendo que a outra metade foi refletida na fase de pré-processamento do código principal. Com o processo adaptativo foi possível chegar a uma discretização com um total[1] de 2718 elementos triangulares, 4104 arestas e 1386 vértices, que correspondem espaços de funções de elementos finitos com as dimensões descritas na tabela 6.1.

[1]Total se refere ao domínio completo, com as suas duas metades conectadas pela linha de simétria.

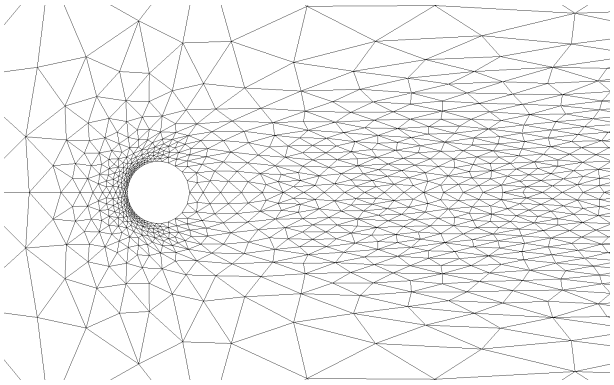


Figura 6.1: Malha computacional com 1386 vértices, 4104 arestas e 2718 elementos.

Tabela 6.1: Dimensões dos espaços de elementos finitos.

| | variável | tipo de elemento | dimensão |
|---|---|---|---|
| $n_U$ | Velocidade (2D) | P2 | 10.980 |
| $n_P$ | Pressão (escalar) | P1 | 1.386 |

A solução estacionária foi calculada utilizando o processo iterativo descrito na seção 3.4, que foi iniciado com um campo nulo homogêneo e convergiu em 10 iterações com resíduo próximo do zero da máquina. A figura 6.2 apresenta uma vista detalhada do resultado, com as bolhas recirculantes características da solução estacionária representadas por linhas de corrente sobrepostas ao gráfico de contornos de magnitude de velocidade.

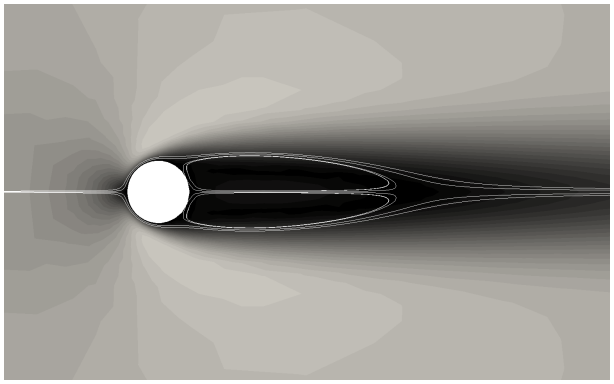


Figura 6.2: Solução estacionária para $Re = 60$: contornos de magnitude de velocidade e linhas de corrente definindo as bolhas recirculantes.

A integração numérica do problema não linear seguiu o esquema da seção 3.3, utilizando um passo de tempo adimensional de um centésimo e apresentando boa estabilidade numérica. O número de *Strouhal* da simulação numérica foi de 0.138, bem próximo da observação experimental de Williamson (1988) que apontou $St = 0.136$ para $Re = 60$. Tomando a solução estacionária como condição inicial, o problema transiente foi integrado até atingir o ciclo-limite e completar um pouco mais de 20 períodos do fenômeno, até o tempo $t^*$, onde foi tirada a amostra da perturbação $\mathbf{U}'(t^*)$, que pode ser vista na figura 6.3 somada à solução estacionária.

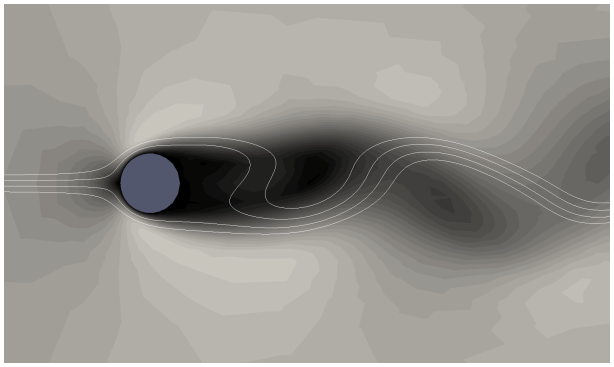


Figura 6.3: $\mathbf{U}(t^*)$=$\mathbf{U}_s$+$\mathbf{U}'(t^*)$: contornos de magnitude de velocidade.

## 6.2 Bases e espectros

As bases dos subespaços de *Krylov* são construídas a partir de amostras tiradas da integração temporal do operador linearizado. A condição inicial é dada pela amostra da perturbação $\mathbf{U}'(t^*)$ e o método de integração é o mesmo empregado no problema não linear, assim como o passo de tempo, que também foi de um centésimo.

A primeira iteração considerou as seis primeiras amostras dessa evolução linear, extraídas em intervalos de tempo unitários desde a condição inicial. Com as parcelas simétricas e antssimétricas de cada amostra foram gerados dois subespaços de *Krylov* de ordem seis, sobre os quais foi projetado o problema característico associado ao operador linearizado. Os problemas característicos reduzidos pela projeção foram resolvidos numericamente com o auxílio da biblioteca computacional LAPACK (Anderson et al. (1999))

e os seus espectros são apresentados sobrepostos na figura 6.4.

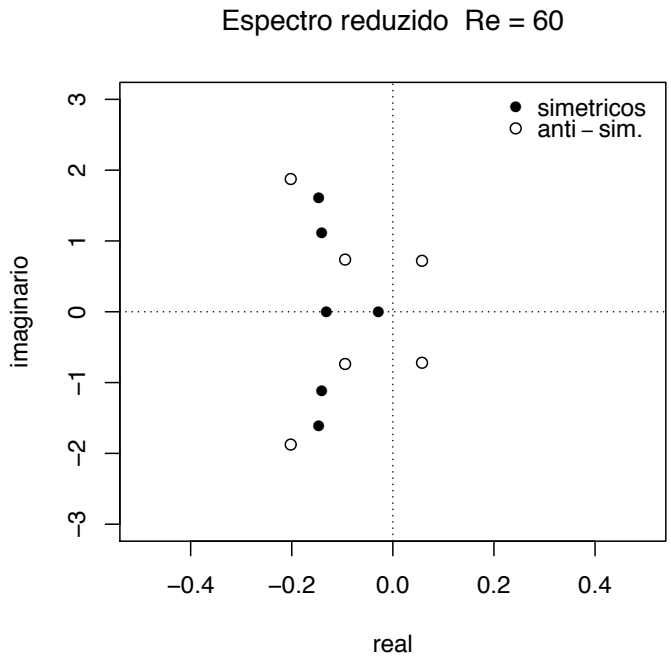



Figura 6.4: Espectro reduzido para $Re = 60$ com 12 autovalores, sendo 6 associados a autovetores simétricos (•) e mais 6 associados a autovetores anti-simétricos (∘).

O espectro da figura 6.4 confirma as três categorias de autovetores previstas na seção 2.4, com um par de simétricos reais, dois pares de simétricos oscilatórios e mais três pares de antissimétricos oscilatórios. O par de autovalores instáveis é facilmente identificado e também é confirmada sua associação a autovetores antissimétricos.

Na sequência foram consideradas duas vezes mais amostras, aumentando a dimensão de cada um dos problemas característicos reduzidos para 12. O espectro reduzido resultante, visto na figura 6.5 com 24 autovalores, apresenta a mesma topologia do primeiro, ainda com um par de autovalores instáveis oscilatórios associados a autovetores antissimétricos e um par de estáveis reais associados a autovetores simétricos. O que aumentou foi o número de autovalores estáveis e oscilatórios, tanto associados a autovetores simétricos quanto a antissimétricos.

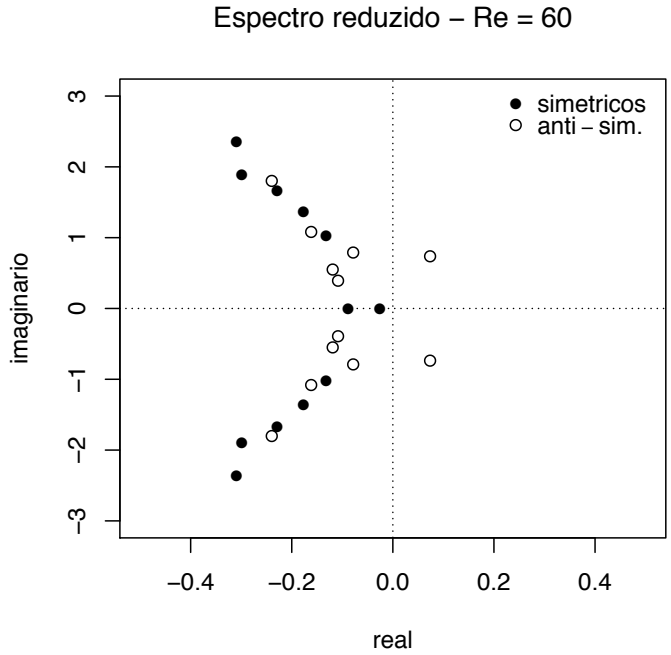



Figura 6.5: Espectro reduzido para $Re = 60$ com 24 autovalores, sendo 12 associados a autovetores simétricos (•) e mais 12 associados a autovetores anti-simétricos (∘).

## 6.3 Modelos reduzidos

As bases de autovetores calculadas na seção anterior são a essência dos modelos reduzidos, pois são elas que delimitam o espaço de soluções possíveis para o problema e servem de guia para a sua evolução. Nesta seção são apresentados os resultados da integração numérica dos modelos reduzidos obtidos com a projeção da equação de Navier-Stokes nas duas bases construídas.

A integração numérica foi realizada com o emprego dos mesmos método e passo de tempo da simulação temporal completa. Ambos os modelos reduzidos partiram da solução estacionária moderadamente perturbada na direção do autovetor instável e seguiram o seu crecimento até a saturação do ciclo-limite. No que segue, a análise sobre a aderência entre os modelos reduzidos e a simulação de referência é baseada no comportamento assintótico das soluções, onde são de grande importância a média temporal do escoamento e sua frequência de *Strouhal*.

A distância entre a solução estacionária e a média temporal da periódica está relacionada à importância da perturbação diante do escoamento completo e é uma medida da não linearidade do fenômeno. Na faixa estudada, apesar de bastante distintas, ambas apresentam a mesma topologia, com um par de bolhas recirculantes coladas à jusante do cilindro. A figura 6.6 traz a solução estacionária, em laranja, e a média temporal da simulação de referência, em branco, onde ficam evidente a semelhança topológia e a diferença nas dimensões das bolhas. A diferença é atribuída à parcela da perturbação com média temporal não nula que se sobrepõe à solução estacionária na composição da média temporal.

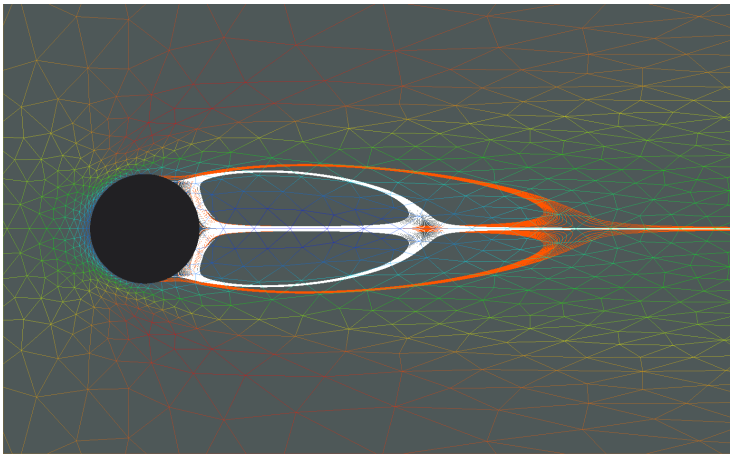


Figura 6.6: Linhas de corrente com as bolhas recirculantes da solução estacionária, em laranja, e da média temporal da simulação de referência, em branco.

A aderência das médias temporais dos dois modelos reduzidas é analisada na figura 6.7, onde as linhas de corrente médias dos dois modelos reduzidos são comparadas às da simulação de referência. As linhas amarelas constituem as bolhas recirculantes da média temporal do primeiro modelo reduzido, de 12 graus de liberdade, e já estão bastante próximas da referência dada pelas linhas brancas. Por fim, as linhas vermelhas, do modelo de 24 graus de liberdade, aproximam-se mais ainda da referência e quase as sobrepõem por completo.

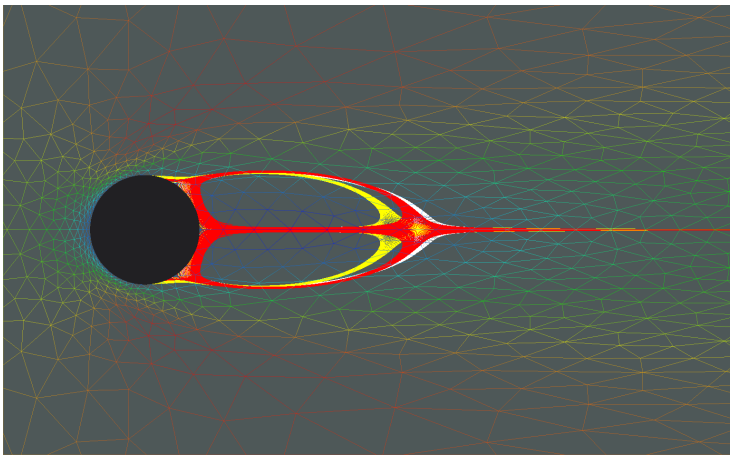


Figura 6.7: Médias temporais das linhas de corrente com as bolhas recirculantes da simulação de referência, em branco, do primeiro modelo reduzido ($n = 12$), em amarelo, e do segundo modelo reduzido, em vermelho ($n = 24$).

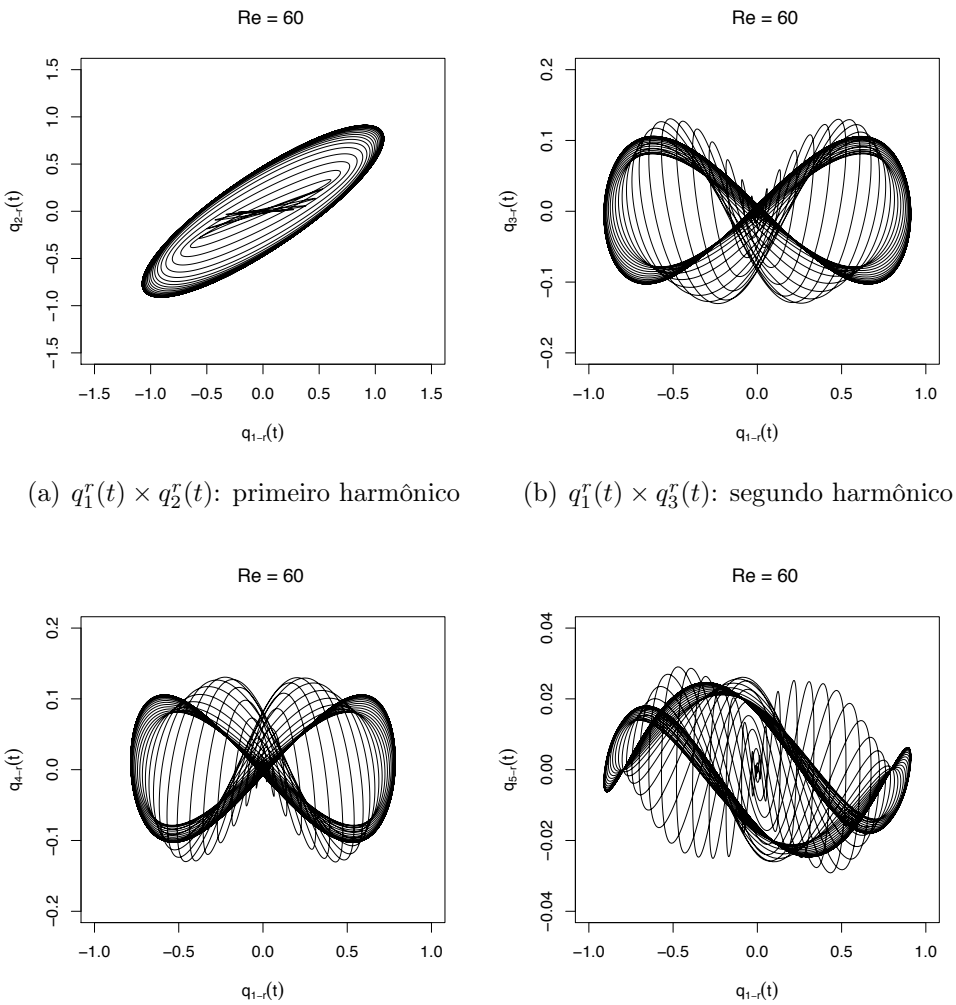
As frequências dominante dos dois modelos reduzidos também são muito próximas à observada na simulação de referência e no estudo experimental de Williamson (1988). A tabela 6.2 lista o número de *Strouhal* dos dois modelos reduzidos juntamente com os dois resultados de referência e deixa em evidência o padrão convergente das aproximações, com o número de *Strouhal* do segundo modelo coincidindo com o da simulação de referência até a terceira casa decimal.

Tabela 6.2: *Strouhal* para $Re = 60$.

| $St$ | fonte |
|---|---|
| 0.136 | Experimentos de Williamson (1988) |
| 0.135 | Modelo reduzido com 12 autovetores |
| 0.138 | Modelo reduzido com 24 autovetores |
| 0.138 | Simulação numérica deste estudo. |

A relação entre os autovetores e os harmônicos da solução periódica é analisada através das séries temporais das coordenadas dos autovetores, pela comparação das suas frequências predominantes com a frequência fundamental do problema, que é observada nas coordenadas do par de autovetores instáveis. As razões entre as frequências são pesquisadas com o emprego de gráficos paramétricos que comparam a frequência das coordenadas dos autovetores instáveis com as demais coordenadas oscilatórias. Esse processo

é ilustrado para a base de dimensão 12 na figura 6.8, onde, excluindo os dois autovetores reais, restam quatro pares de autovetores complexos conjugados, o que possibilita a construção de quatro gráficos paramétricos da componente real da coordenada do modo instável $q_1^r(t)$ com as demais. As figuras de *Lissajous* observadas confirmam que as razões entre as frequências são inteiras e possibilitam a associação direta de cada autovetor com um dado harmônico.




(a) $q_1^r(t) \times q_2^r(t)$: primeiro harmônico

(b) $q_1^r(t) \times q_3^r(t)$: segundo harmônico

(c) $q_1^r(t) \times q_4^r(t)$: segundo harmônico

(d) $q_1^r(t) \times q_5^r(t)$: terceiro harmônico

Figura 6.8: Identificação dos harmônicos a que pertencem os autovetores.

A figura 6.9 traz o mesmo espectro da figura 6.4, acrescido, todavia, de uma informação extra: um número do lado de cada autovalor identificando a qual dos harmônicos pertence cada um. Essa informação mostra que os harmônicos pares são compostos de autovetores simétricos e os ímpares de anti-simétricos, confirmando a relação obeservada nos harmônicos obtidos das simulações e das medições experimentais.

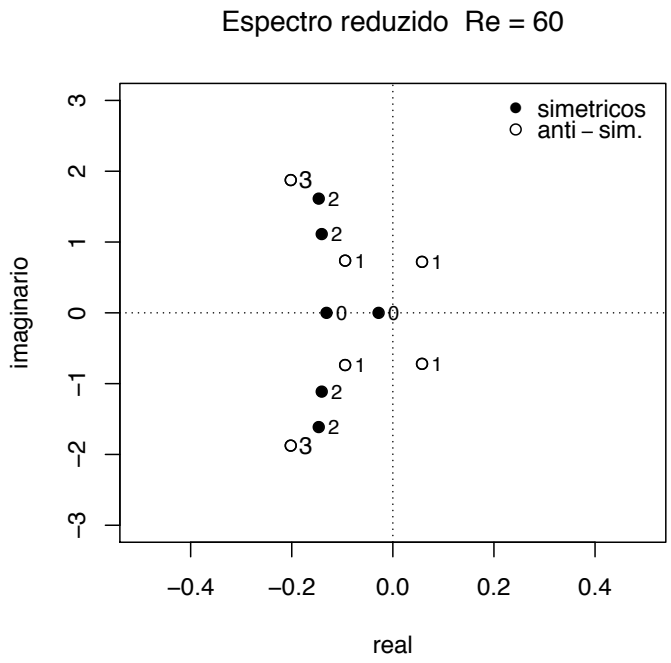



Figura 6.9: Espectro reduzido para $Re = 60$, o mesmo da figura 6.4, agora identificando a qual dos harmônicos pertence cada modo.

Os modelos reduzidos se mostraram bons representantes do fenômeno, tendo sido comprovada a sua aderência assintótica com a simulação de referência, do seu comportamento médio à sua frequência. Por fim, a sua estrutura espectral, que aparece de forma clara e organizada, comprova que as bases de autovetores obtidas representam com fidelidade o conceito de estrutura coerente apresentado na seção 2.3.

# 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este estudo abordou as três principais frentes de pesquisa em mecânica de fluidos, tendo se dedicado ao desenvolvimento de modelos teóricos, à construção de aplicações numéricas e à realização experimentos.

As principais contribuições desta tese são a análise sobre a composição modal da solução dentro do regime periódico e o método desenvolvido para identificar os autovetores de uma linearização da equação de Navier-Stokes presentes em uma dada solução. Os modelos reduzidos construídos representam bem o comportamento assintótico do escoamento e também reproduzem de forma simples a estrutura de simetrias temporais e espaciais observadas nos harmônicos das séries temporais, numéricas e experimentais. Dessa maneira, é possível afirmar que as bases de autovetores identificados pelo método desenvolvido neste projeto cumprem a meta esperada e se encaixam dentro do conceito de estruturas coerentes para o fenômeno.

Uma característica importante desse escoamento é a evidência da esteira de *von Kármán* mesmo em seus regimes turbulentos. Conforme Roshko (1953), a sua frequência dominante deixa de ser perfeitamente regular, mas ainda varia dentro de uma determinada faixa do espectro e é marcada por um pico bem definido. Os novos comportamentos observados com o aumento do número de *Reynolds* são normalmente relacionados ao aparecimento de novas bifurcações que trazem novos autovetores instáveis ao problema e aumentam a sua complexidade dinâmica.

A proposta de continuação deste trabalho inclui a aplicação do método desenvolvido nos regimes mais altos e visa a caracterização dos atratores mais complexos que o periódico. A análise deve seguir com o aumento do número de *Reynolds* e a busca por novas bifurcações que caracterizem as mudanças dinâmicas observadas nos experimentos e nas simulações numéricas. O objetivo é acompanhar as mudanças no espectro reduzido, que podem ser contínuas ou abruptas, e relacioná-las às mudanças de comportamento das séries temporais, como sugerido por Ruelle (1989). A análise dos modelos reduzidos deve complementar a informação dos respectivos espectros e possibilitar importantes medições acerca da interação entre os autovetores. No caso periódico, essa interação é relativamente simples e explica, por exemplo, o balanço energético e a relação entre harmônicos e autovetores. Já nos modelos contendo mais de um par de autovetores instáveis, são esperados comportamentos mais complexos relacionados à interação entre esses autovetores. Um passo importante deve ser a identificação de comportamentos caóticos nos modelos reduzidos com número de *Reynolds* superiores a 300, conforme se observa nos experimentos e nas simulações numéricas.

Durante o desenvolvimento deste projeto, o bolsista participou de nove publicações em congressos internacionais, sendo primeiro autor em seis delas, e também participou, como co-autor, de duas publicações em revistas internacionais, sendo a lista dessas publicações encontradas no apêndice A, apresentado após as referências.

# REFERÊNCIAS


ADRIAN, R. J. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 23, p. 261–304, 1991.

ALAUZET, F.; FREY, P. J. *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage - Partie I : aspects théoriques.* [S.l.], 2003.

ALAUZET, F.; FREY, P. J. *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage - Partie II : exemplesd'applications.* [S.l.], 2003.

ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; BLACKFORD, S.; DEMMEL, J.; DONGARRA, J.; CROZ, J. D.; GREENBAUM, A.; HAMMARLING, S.; MCKENNEY, A.; SORENSEN, D. *LAPACK Users' Guide.* Third. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. ISBN 0-89871-447-8 (paperback).

ARNOLD, V. I. *Ordinary Differential Equations.* [S.l.]: Springer, 1992.

BARBEIRO, I. C.; ARANHA, J. A. P.; MENEGHINI, J. R. Numerical investigation into the asymptotic solution of the viscous flow around a circular cylinder for Re $\leq$ 600. In: *Fifth Conference on Bluff Body and Vortex-Induced Vibrations.* [S.l.: s.n.], 2007.

BARKLEY, D. Linear analysis of the cylinder wake mean flow. *Europhysics Letters*, v. 75-5, p. 750–756, 2006.

BOROUCHAKI, F. H. H.; FRAY, P. Mesh gradation control. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 43, p. 1143 – 1165, 1998.

BRENNER, L. S. S. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* [S.l.]: Springer, 2008.

CASTRO-DíAZ F. HECHT, B. M. M. J.; PIRONNEAU, O. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 25, p. 475 – 491, 1997.

CHICONE, C. *Ordinary Differential Equations with Applications.* 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2006.

COUTANCEAU, M.; BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1. steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 79(2), p. 257–272, 1977.

COUTANCEAU, M.; BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 2. unsteady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 79(2), p. 231–256, 1977.

DAVIS, T. *UMFPACK version 4.0 User Guide*. 2002. Disponível em: <http://www.cise-.ufl.edu/research/sparse/umfpack/>.

DAVIS, T. A.; DUFF, I. S. A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1999.

DEUFLHARD, P.; BORNEMANN, F. *Scientific Computing with Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2002.

FOIAS O. MANLEY, R. R. C.; TEMAM, R. *Navier-Stokes Equations and Turbulence*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

FORNBERG, B. Steady viscous flow past a circular cylinder up to reynolds number 600*. *Journal of Computational Physics*, v. 61, p. 297–320, 1984.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. [S.l.]: Springer, 1983.

GUNZBURGER, M. D. *Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice and algorithms*. [S.l.]: Academic Press, 1989.

HOLMES, P.; LUMLEY, J.; BERKOOZ, G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988.

JACKSON, C. P. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.*, v. 182, p. 23 – 45, 1987.

KORKISCHKO, I.; BARBEIRO, I. C.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. Fourier decomposition of periodic flow using dpiv. In: *DFD10 Meeting of The American Physical Society*. [S.l.: s.n.], 2010.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. [S.l.]: Pergamon Press, 1959.

LAVINAS, P.; BARBEIRO, I. C.; ARANHA, J. A. P. 2d steady symmetric flow around a circular cylinder fot $re < 600$: sensibility to standard far-field boundary conditions and *wake impedance* alternative formulation. In: *Fifth Conference on Bluff Body and Vortex-Induced Vibrations*. [S.l.: s.n.], 2007.

LOPEZ, J. I. H.; MENEGHINI, J. R.; SALTARA, F. Discrete approximation to the global spectrum of the tangent operator for flow past a circular cylinder. *App. Num. Math.*, v. 58(8), p. 1159 – 1167, 2008.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. atmos. Sci*, v. 20, p. 130–141, 1963.

MA, X.; KARNIADAKIS, G. A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flow. *J. Fluid Mech.*, v. 458, p. 181 – 190, 2002.

MEZIC, I. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Nonlinear Dynamics*, v. 41, p. 309–325, 2005.

NOACK, B. R.; AFANASIEV, K.; MORZINSKI, M.; TADMOR, G.; THIELE, F. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, v. 497, p. 335 – 363, 2003.

NOACK, B. R.; ECKELMANN, H. A global stability analisys of the steady and periodic cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 352, p. 65–112, 1994.

POMMIER, J.; RENARD, Y. *Getfem++.An open source generic C++ library for finite element methods*. 2011. Disponível em: <http://www-gmm.insatoulouse.fr/getfem.>

PRANDTL, L. *Hydro- and Aeromechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1934.

ROSHKO, A. *On the developmente of turbulent wakes from vortex streets*. [S.l.], 1953.

ROWLEY, C. W.; MEZIC, S. B. I.; SCHLATTER, P.; HENNINGSON, D. S. Spectral analysis of nonlinear flows. *J. Fluid Mech.*, v. 641, p. 115 – 127, 2009.

RUELLE, D. *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.

SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

SIPP, D.; LEBEDEV, A. Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *J. Fluid Mech.*, v. 593, p. 333–358, 2007.

TAYLOR, C.; HOOD, P. A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element method. *Comput & Fluids*, v. 1, p. 73 – 100, 1973.

Van Dyke, M. *An Album of Fluid Motion*. [S.l.]: The Parabolic Press, 1982.

WILLIAMSON, C. H. K. Defining a universal strouhal-reynolds number relationship for the laminar vortex of a circular cylinder. *Physics of Fluids*, v. 31, n. 11, 1988.

ZDRAVKOVICH, M. M. *Flow Around Circular Cylinders: Fundamentals*. [S.l.]: Oxford University Press, 1997.

# APÊNDICE A – LISTA DE PUBLICAÇÕES

## A.1 Publicações em Revistas Internacionais (2)

ARANHA, J. A. P.; BURR, K. P.; BARBEIRO, I. C.; KORKISCHKO, I. ;MENEGHINI, J. R. - Flow around a slender circular cylinder: a case study on distributed Hppf Bifurcation. *Math. Prob. in Eng., v. 2009, ID 526945.*

GIORIA, R. S.; MENEGHINI, J. R. ; ARANHA, J. A. P. ; BARBEIRO, I. C; CARMO B.S. - Effect of the domain spanwise periodic length on DNS of the flow around a circular cylinder. In: *IJournal of Fluids and Structures, aceito para publicação*

## A.2 Publicações em Congressos Internacionais (9)

BARBEIRO, I. C.; ARANHA, J. A. P.; MENEGHINI, J. R. - Numerical investigation into the asymptotic solution of the viscous flow around a circular cylinder for $Re \leq 600$. In: *Fifth Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations - 2007.*

LAVINAS, P. N.; BARBEIRO, I. C.; ARANHA, J. A. P. - 2D steady symmetric flow around a circular cylinder for $Re < 600$: sensibility to standard far-field boundary conditions and "wake impedance"alternative formulation. In: *Fifth Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations - 2007.*

BARBEIRO, I. C.; KORKISCHKO, I. ; BURR, K. P.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. - On the asymptotic solution of the flow around a slender circular cylinder. In: *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, 2009*

BARBEIRO, I. C.; KORKISCHKO, I. ; BURR, K. P.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. - Physical reduced model for the flow past a circular cylinder. In: $62^{nd}$ *Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics, 2009*

BARBEIRO, I. C.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. - Nonlinear stability analysis of the flow past a cylinder: a geometrical reduced model. In: *IUTAM - Sixth Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations, 2010.*

GIORIA, R. S.; MENEGHINI, J. R. ; ARANHA, J. A. P. ; BARBEIRO, I. C; CARMO B.S. - Effect of the domain spanwise periodic length on DNS of the flow around a circular cylinder. In: *IUTAM - Sixth Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations, 2010.*

BARBEIRO, I. C.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. - Adaptive Meshes to Improve the Linear Stability Analysis of the Flow Past a Circular Cylinder. In: *IThe Sixth International Conference on Computational Fluid Dynamics, 2010.*

BARBEIRO, I. C.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. - The attractor manifold of the flow past a circular cylinder for $Re = 100$. In: $63^{rd}$ *Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics, 2010*

KORKISCHKO, I. ; BARBEIRO, I. C.; MENEGHINI, J. R.; ARANHA, J. A. P. - Fourier decomposition of periodic flow using DPIV. In: $63^{rd}$ *Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics, 2010*