

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**THIERRY CAIQUE LIMA MAGALHÃES**

**EFEITOS TÉRMICOS NA ESTABILIDADE DE ESCOAMENTOS EM  
SISTEMAS DE PETRÓLEO *OFFSHORE***

**SÃO PAULO**

**2023**



**THIERRY CAIQUE LIMA MAGALHÃES**

**EFEITOS TÉRMICOS NA ESTABILIDADE DE ESCOAMENTOS EM  
SISTEMAS DE PETRÓLEO *OFFSHORE***

**Versão Corrigida**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Energia e Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

**SÃO PAULO**

**2023**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

#### Catálogo-na-publicação

Magalhães, Thierry Caique Lima

Efeitos térmicos na estabilidade de escoamentos em sistemas de petróleo offshore / T. C. L. Magalhães -- versão corr. -- São Paulo, 2023.  
196 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Análise de estabilidade linear 2.Escoamento trifásico 3.Intermitência severa 4.Efeitos térmicos 5.Tecnologia de produção de petróleo I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e/ou instituições às quais presto minha homenagem. Certamente esses parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre estas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

A minha família, pelo carinho, incentivo e total apoio em todos os momentos da minha vida. Especialmente a minha tia Terezinha, que no início desse processo, proporcionou que esse sonho se tornasse possível.

À Isabella Pires, pelo companheirismo, apoio e pelo incentivo ao fazer o mestrado e além disso por está presente em todos os momentos.

À minha mãe, Margarida Teixeira Lima por toda luta, sacrifício, empenho e amor.

Ao meu pai, João Batista Luiz Magalhães pela coragem, força e inspiração.

Ao meu orientador, Jorge Luis Baliño que me mostrou os caminhos a serem seguidos e pela confiança depositada. Muito obrigado por todos os conselhos, tanto os pessoais quanto aos profissionais e ainda pela ajuda até mesmo antes de começarmos esse projeto!

Ao Gabriel e ao Ivanildo por todo auxílio na programação e esclarecimentos sobre dúvidas que aparecerem ao longo do trabalho.

Aos amigos Crisley e Ângelo, por toda ajuda e auxílio na programação. Obrigado amigos!

A todos os professores e colegas do departamento de engenharia mecânica da POLI, que contribuíram significativamente para a realização deste trabalho.

Agradeço aos amigos, professores e funcionários do Núcleo de Dinâmica e Fluidos (NDF) pelo bom ambiente e conhecimento adquirido ao longo do curso.

Agradeço a Agência Nacional de Petróleo (ANP) e ao PRH-06 e a (FINEP) pelo auxílio financeiro e pela bolsa concedida ao longo do período. Gostaria de agradecer especialmente as pessoas responsáveis pelo programa: Vilma, Lania Camilo, Sbragio e aos Professores Joaquim e Marcelo.

Por fim e mais importante, a DEUS por me proporcionar a conclusão deste grande objetivo que almejava desde criança.



## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo numérico sobre os efeitos térmicos na análise de estabilidade linear para o escoamento multifásico de petróleo em um sistema *pipeline-riser*. O modelo desenvolvido considera que o escoamento é unidimensional e trifásico em todo o sistema. As fases líquida e gasosa são consideradas compressíveis. Além disso, assume-se que o óleo e a água têm a mesma velocidade e estão homogeneizados. O padrão de escoamento no *pipeline* e no *riser* é determinado com base nas variáveis de estado e ângulo de inclinação local. A caracterização de fluidos e a transferência de massa entre as fases é feita a partir do modelo *black oil*, enquanto a fração de vazio depende do padrão de escoamento. A equação de conservação de energia é adicionada em uma metodologia desenvolvida anteriormente em Andreolli *et al.* (2018), a fim de se levar em conta o acoplamento térmico com as equações de conservação de massa e momento linear. Os resultados alcançados estão de acordo com uma análise isotérmica similar, embora uma pequena influência seja observada. Os efeitos térmicos alteraram a fronteira de estabilidade para uma velocidade superficial de gás crítica aproximadamente 3.2% maior. Portanto, os efeitos térmicos aumentam a região instável. Os desvios ocorreram devido ao efeito da temperatura na transferência de massa (vaporização), compressibilidade, expansão e propriedades termofísicas das fases. Os resultados obtidos destacam o potencial desta técnica, como sendo uma forma muito útil de avaliar a intermitência severa na produção de petróleo em sistemas *offshore*.

**Palavras-chave:** Análise de estabilidade linear. Escoamento trifásico. Intermitência severa. Efeitos térmicos. Tecnologia de produção de petróleo.





## ABSTRACT

CAIQUE LIMA MAGALHÃES, Thierry. **Thermal effects on flow stability in offshore oil systems**. 2023. 164 p. Dissertation (Master's Degree in Mechanical Engineering) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2023.

This work presents a numerical study on the thermal effects at linear stability analysis for the multiphase flow of oil in a pipeline-riser system. The developed model considers that the flow is one-dimensional and three-phase throughout the system. The liquid and gas phases are considered compressible. Furthermore, it is assumed that the oil and water have the same velocity and are homogenized. The flow pattern in the pipeline and riser is determined based on the state variables and local inclination angle. The characterization of fluids and the mass transfer between the phases are done from the black oil model while the void fraction depends on the flow pattern. The energy conservation equation is added in a methodology previously developed on Andreolli *et al.* (2018), in order to take into account the thermal coupling with the mass and momentum conservation equation. The results achieved are in agreement with a similar isothermal analysis, although a small influence is observed. Thermal effects changed the stability boundary to a critical superficial velocity for gas approximately 3,2% higher. Therefore, thermal effects increase the unstable region. The deviations occurred due to the effect of temperature on the mass transfer (vaporization), compressibility, expansion, and the thermophysical properties of the phases. The results obtained highlight the potential of this technique, as being a very useful way of evaluate severe slugging in offshore oil production systems.

**Keywords:** Linear stability analysis. Three-phase flow. Severe slugging. Thermal effects. Petroleum production technology.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistemas submarinos de produção de petróleo <i>offshore</i> . . . . .	2
Figura 2 – Etapas do ciclo de intermitência severa. . . . .	3
Figura 3 – Geometria geral do sistema de produção, adaptada de Andreolli <i>et al.</i> (2018)	28
Figura 4 – Geometria do sistema, adaptada de Nemoto e Baliño (2012). . . . .	54
Figura 5 – Perfil de temperatura obtido através dos parâmetros da Tabela 1. . . . .	55
Figura 6 – Perfis de pressão obtidos através dos parâmetros da Tabela 1. . . . .	56
Figura 7 – Perfis de velocidade superficial de gás obtidos através dos parâmetros da Tabela 1. . . . .	57
Figura 8 – Perfis de velocidade superficial de líquido obtidos através dos parâmetros da Tabela 1. . . . .	58
Figura 9 – Perfis de fração de vazio obtidos através dos parâmetros da Tabela 1. . . . .	59
Figura 10 – Comportamento do maior autovalor obtido variando-se a discretização da Figura 4. . . . .	60
Figura 11 – Mapas de estabilidade obtidos com os parâmetros da Tabela 1. . . . .	61
Figura 12 – Estudo paramétrico para o isolamento do duto utilizando o modelo proposto.	62
Figura 13 – Perfis de temperatura para diferentes valores da temperatura na ANM. . . . .	63
Figura 14 – Mapas de estabilidade para diferentes valores da temperatura na ANM. . . . .	64
Figura 15 – Perfis de pressão para diferentes valores da pressão no separador. . . . .	65
Figura 16 – Mapas de estabilidade para diferentes valores da pressão no separador. . . . .	65
Figura 17 – Mapas de estabilidade para diferentes valores do diâmetro interno. . . . .	66
Figura 18 – Mapas de estabilidade para diferentes valores da condutividade térmica efetiva.	67
Figura 19 – Processo flash da condição $(P, T)$ para a condição de referência $(SC)$ . . . . .	82



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros gerais de entrada para as simulações. . . . .	54
Tabela 2 – Faixas de validade da correlação de Lee <i>et al.</i> (1966). . . . .	91



## LISTA DE SIGLAS

ANM	Árvore de Natal Molhada
API	<i>American Petroleum Institute</i>
Catenária	Sistema real avaliado quanto à estabilidade
CM	Centro de massa - Abordagem para a velocidade da mistura
GARESC	Garantia de escoamento
<i>Lazy Wave</i>	Configuração geométrica de um sistema real de produção de petróleo
NPW	<i>No-pressure-wave</i> - Modelo sem ondas de pressão
SC	<i>Standard condition</i> - Condição de referência, definida como 60 <i>F</i> e 1 <i>atm</i> , também designada de condição padrão
S.I.	Sistema internacional de unidades





## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS LATINAS

$A$	Área da seção transversal da tubulação [ $m^2$ ]
$A_0$	Coefficiente adimensional para o cálculo da transferência de calor por condução [-]
$A_p$	Área da seção transversal do <i>pipeline</i> [ $m^2$ ]
$API$	Escala de densidade do óleo morto da norma API [-]
$A_1$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para a densidade da água do mar [ $kg/m^3$ ]
$A_2$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para o calor específico da água do mar [ $kJ/(kg K^2)$ ]
$A_3$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para a viscosidade da água do mar [-]
$b$	Parâmetro da equação de viscosidade de Beggs e Robinson (1975) para gás saturado [ $m^3/sm^3$ ]
$b_1$	Parâmetro da correlação de Lateef e Omeke (2011) para o calor específico do gás [ $kJ/kg K^2$ ]
$B_1$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para a densidade da água do mar [ $kg/m^3$ ]
$B_2$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para o calor específico da água do mar [ $kJ/(kg K^2)$ ]
$B_3$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para a viscosidade da água do mar [-]
$B_g$	Fator volume de formação do gás [-]
$B_l$	Fator volume de formação do líquido [-]
$B_o$	Fator volume de formação do óleo [-]
$B_{ob}$	Fator volume de formação do óleo no ponto de bolha [-]

$B_w$	Fator volume de formação da água [-]
$B_{sw}$	A razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos [-]
$C$	Constante de proporcionalidade na equação de Jansen <i>et al.</i> (1996) [-]
$C_d$	Parâmetro de distribuição na relação fluxo de deriva [-]
$C_{gp1}$	Parâmetro relacionado a pressão na condição de contorno no nó da ANM para o fluxo de gás [(m/s)/Pa]
$C_{gt1}$	Parâmetro relacionado a temperatura na condição de contorno no nó da ANM para o fluxo de gás [(m/s)/Pa]
$C_{lp1}$	Parâmetro relacionado a pressão na condição de contorno no nó da ANM para o fluxo de líquido [(m/s)/Pa]
$C_{lt1}$	Parâmetro relacionado a temperatura na condição de contorno no nó da ANM para o fluxo de líquido [(m/s)/Pa]
$C_o$	Fator de compressibilidade do óleo acima da pressão de bolha [Pa <sup>-1</sup> ]
$C_1$	Parâmetro um para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [-]
$C_2$	Parâmetro dois para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [-]
$C_3$	Parâmetro três para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [F]
$C_4$	Parâmetro quatro para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [-]
$C_5$	Parâmetro cinco para conversão do sistema <i>black-oil</i> para S.I. [-]
$C_{pg}$	Calor específico a pressão constante para o gás [kJ/(kg K)]
$C_{pl}$	Calor específico a pressão constante para o líquido [kJ/(kg K)]
$C_{po}$	Calor específico a pressão constante para o óleo [kJ/(kg K)]
$C_{psw}$	Calor específico a pressão constante para a água do mar [kJ/(kg K)]
$C_{pw}$	Calor específico a pressão constante para a água [kJ/(kg K)]
$D$	Diâmetro interno da tubulação [m]

$D_{ext}$	Diâmetro externo da tubulação [ $m$ ]
$\frac{D}{D_i}$	Operador de derivada material $[-]$
$D_1$	Parâmetro da correlação de Sharqawy <i>et al.</i> (2010) para o calor específico da água do mar [ $kJ/(kg K^2)$ ]
$e$	Energia específica da mistura [ $kJ/kg$ ]
$E_o$	Número de Eotvos $[-]$
$f$	Fator de atrito da mistura $[-]$
$f_g$	Fator de atrito para a fase gasosa $[-]$
$f_l$	Fator de atrito para a fase líquida $[-]$
$Fr$	Número de Froude $[-]$
$F_1, F_2, F_3$	Parâmetros da equação de viscosidade de gás $[-]$
$F_P$	Parâmetro para o cálculo do coeficiente convectivo interno na correlação de Tang e Ghajar (2007) $[-]$
$F_s$	Parâmetro para o cálculo do coeficiente convectivo interno na correlação de Tang e Ghajar (2007) $[-]$
$g$	Aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]
$G$	Fluxo mássico da mistura [ $kg/(s m^2)$ ]
$GOR$	Razão-gás-óleo $[-]$
$h$	Altura do <i>riser</i> vertical [ $m$ ]
$\hat{h}$	Entalpia específica da mistura [ $kJ/kg$ ]
$\hat{h}_g$	Entalpia específica do gás [ $kJ/kg$ ]
$\hat{h}_l$	Entalpia específica do líquido [ $kJ/kg$ ]
$\hat{h}_o$	Entalpia específica do óleo [ $kJ/kg$ ]
$\hat{h}_w$	Entalpia específica da água [ $kJ/kg$ ]
$h_{ext}$	Coeficiente convectivo para o fluxo externo [ $kJ/(m^2 K)$ ]

$h_{int}$	Coeficiente convectivo para o fluxo interno [ $kJ/(m^2 K)$ ]
$h_L$	Coeficiente convectivo para o fluxo de líquido [ $kJ/(m^2 K)$ ]
$\Delta \hat{h}_{vap}$	Entalpia de vaporização do óleo [ $kJ/Kmol$ ]
$I_1, I_2$	Parâmetros da equação de viscosidade da água [-]
$I$	Correção da inclinação [-]
$J_c$	Equivalente mecânico do calor [ $KJ$ ]
$\dot{j}_g$	Velocidade superficial de gás [ $m/s$ ]
$\dot{j}_{g0}$	Velocidade superficial de gás na condição SC [ $m/s$ ]
$\dot{j}_l$	Velocidade superficial do líquido [ $m/s$ ]
$\dot{j}_{l0}$	Velocidade superficial do líquido na condição SC [ $m/s$ ]
$\dot{j}_o$	Velocidade superficial do óleo [ $m/s$ ]
$\dot{j}_{o0}$	Velocidade superficial do óleo na condição SC [ $m/s$ ]
$\dot{j}_w$	Velocidade superficial da água [ $m/s$ ]
$\dot{j}_{w0}$	Velocidade superficial da água na condição SC [ $m/s$ ]
$k_g$	Condutividade térmica do gás [ $W/(m K)$ ]
$k_o$	Condutividade térmica do óleo [ $W/(m K)$ ]
$k_w$	Condutividade térmica da água [ $W/(m K)$ ]
$k_l$	Condutividade térmica do líquido [ $W/(m K)$ ]
$l$	Comprimento da <i>flowline</i> [ $m$ ]
$l_g$	Comprimento equivalente do volume de gás no <i>pipeline</i> [ $m$ ]
$M_a$	Massa molar do ar [ $kg/mol$ ]
$M_g$	Massa molar do gás livre [ $kg/mol$ ]
$m_{dg}$	Massa total de gás dissolvida <i>in situ</i> [ $kg$ ]
$m_{dgo}$	Massa de gás dissolvida no óleo <i>in situ</i> [ $kg$ ]

$m_{dgw}$	Massa de gás dissolvida na água <i>in situ</i> [kg]
$m_1$	Parâmetro da equação de viscosidade de Beal (1946) [-]
$m_2$	Parâmetro da equação de viscosidade de Vasquez e Beggs (1980) para óleo subsaturado [-]
$\dot{m}_g$	Vazão mássica de gás [kg/s]
$\dot{m}_l$	Vazão mássica de líquido [kg/s]
$N$	Número de nós de discretização [-]
$N_c$	Número de camadas de isolantes entre as paredes do duto [-]
$Nu$	Número de Nusselt [-]
$Nu_l$	Número de Nusselt para a fase líquida [-]
$Nu_{ext}$	Número de Nusselt para o escoamento externo [-]
$P$	Pressão no riser [Pa]
$P_{ANM}$	Pressão na ANM [Pa]
$P_b$	Pressão de bolha [Pa]
$P_c$	Perímetro aquecido [-]
$P_{pc}$	Pressão pseudocrítica [Pa]
$P_{pr}$	Pressão pseudoreduzida [Pa]
$Pr_g$	Número de Prandtl para o gás [-]
$Pr_l$	Número de Prandtl para o líquido [-]
$Pr_{sw}$	Número de Prandtl para a água do mar [-]
$P_s$	Pressão no separador [Pa]
$P_0$	Pressão de referência [Pa]
$q'$	Potência térmica por unidade de comprimento [W/m]
$q_0$	Fluxo de calor interno [W/m <sup>2</sup> ]

$Q_g$	Vazão volumétrica de gás <i>in situ</i> [ $m^3/s$ ]
$Q_{g0}$	Vazão volumétrica de gás na condição na condição SC [ $m^3/s$ ]
$Q_{gl0}$	Vazão volumétrica de gás livre na condição SC [ $m^3/s$ ]
$Q_{gs0}$	Vazão volumétrica de gás solubilizado na condição SC [ $m^3/s$ ]
$Q_l$	Vazão volumétrica de líquido <i>in situ</i> [ $m^3/s$ ]
$Q_{l0}$	Vazão volumétrica de líquido na condição SC [ $m^3/s$ ]
$Q_o$	Vazão volumétrica de óleo <i>in situ</i> [ $m^3/s$ ]
$Q_{o0}$	Vazão volumétrica de óleo na condição SC [ $m^3/s$ ]
$Q_w$	Vazão volumétrica de água <i>in situ</i> [ $m^3/s$ ]
$Q_{w0}$	Vazão volumétrica de água na condição SC [ $m^3/s$ ]
$\dot{Q}$	Potência térmica na parede interna [ $W$ ]
$r$	Conjunto de autovetores [-]
$r_{int}$	Raio interno da tubulação [ $m$ ]
$r_{ext}$	Raio externo da tubulação [ $m$ ]
$Ra$	Número de Rayleigh para o escoamento externo [-]
$R_g$	Constante universal dos gases [ $m^2/(s^2K)$ ]
$Re_{cm}$	Número de Reynolds para o centro de massa [-]
$Re_g$	Número de Reynolds para o gás [-]
$Re_l$	Número de Reynolds para o líquido [-]
$Re$	Número de Reynolds para a mistura [-]
$R_{so}$	Razão de solubilidade do óleo [-]
$R_{sl}$	Razão de solubilidade do líquido [-]
$R_{sw}$	Razão de solubilidade da água [-]

$s$	Coordenada de posição ao longo do <i>riser</i> [ $m$ ]
$S_g$	Perímetro molhado de gás na <i>flowline</i> [ $m$ ]
$S_l$	Perímetro molhado de líquido na <i>flowline</i> [ $m$ ]
$s_t$	Nó mais a jusante, nó do separador de produção ( $s = s_t$ ) [ $m$ ]
$t$	Tempo [ $s$ ]
$T$	Temperatura [ $K$ ]
$T_{ANM}$	Temperatura na ANM [ $K$ ]
$T_{int}$	Temperatura nas paredes internas do duto [ $K$ ]
$T_{ext}$	Temperatura nas paredes externas do duto [ $K$ ]
$T_k$	Temperatura em Kelvin [ $K$ ]
$T_o$	Temperatura de referência [ $K$ ]
$T_{pc}$	Temperatura pseudocrítica [ $K$ ]
$T_{pr}$	Temperatura pseudoreduzida [ $K$ ]
$U$	Coefficiente global de transferência de calor [ $w/(m^2 K)$ ]
$U_d$	Velocidade de deriva na relação de fluxo de deriva [ $m/s$ ]
$u_l$	Velocidade do líquido [ $m/s$ ]
$\hat{u}_g$	Energia interna específica do gás [ $kJ/kg$ ]
$\hat{u}_l$	Energia interna específica do líquido [ $kJ/kg$ ]
$u_o$	Velocidade do óleo [ $m/s$ ]
$u_w$	Velocidade da água [ $m/s$ ]
$V$	Volume total da seção transversal da tubulação [ $m^3$ ]
$v$	Velocidade do centro de massa [ $m/s$ ]
$V_g$	Volume de gás <i>in situ</i> [ $m^3$ ]
$V_{glo}$	Volume de gás livre na condição SC [ $m^3$ ]

$V_{gs0}$	Volume de gás solubilizado na condição SC [ $m^3$ ]
$V_{gdI0}$	Volume de gás dissolvido no líquido na condição SC [ $m^3$ ]
$V_{gdo0}$	Volume de gás dissolvido no óleo na condição SC [ $m^3$ ]
$V_{gdw0}$	Volume de gás dissolvido na água na condição SC [ $m^3$ ]
$V_o$	Volume de óleo <i>in situ</i> [ $m^3$ ]
$V_{o0}$	Volume de óleo na condição SC [ $m^3$ ]
$V_w$	Volume de gás <i>in situ</i> [ $m^3$ ]
$V_{w0}$	Volume de gás na condição SC [ $m^3$ ]
$WOR$	Razão-água-óleo [-]
$x$	Título mássico da mistura [ $m$ ]
$x_r$	Coordenada de posição da direção horizontal [ $m$ ]
$Y$	Percentual de salinidade da água em relação ao peso de sólidos [%]
$z$	Coordenada de posição da direção vertical [ $m$ ]
$Z_g$	Fator de compressibilidade dos gases reais [-]
$Z_o$	Fator de compressibilidade do óleo [-]
$Z_w$	Fator de compressibilidade da água [-]

#### LETRAS GREGAS

$\alpha$	Fração de vazio - fração volumétrica de gás [-]
$\alpha_l$	Fração volumétrica de líquido [-]
$\alpha_o$	Fração volumétrica de óleo [-]
$\alpha_w$	Fração volumétrica de água [-]
$\alpha_p$	Fração de vazio na região estratificada do <i>pipeline</i> [-]
$\alpha'$	Fração de vazio de frente de gás que penetra o líquido no <i>riser</i> [-]
$\beta$	Inclinação da <i>flowline</i> com relação à horizontal [ $^\circ$ ]
$\beta_{sw}$	Coefficiente de expansão volumétrica do escoamento externo [ $K^{-1}$ ]
$\Delta j_{o0}$	Incremento de velocidade superficial do óleo na condição SC [ $m/s$ ]



$\Delta s$	Tamanho dos elementos da malha unidimensional [ $m$ ]
$\Delta V_{wT}$	Parâmetro de correção do $B_w$ em relação à temperatura [-]
$\Delta V_{wP}$	Parâmetro de correção do $B_w$ em relação à pressão [-]
$\epsilon$	Rugosidade da tubulação [ $m$ ]
$\gamma_{API}$	Densidade do óleo morto na escala API [ $API$ ]
$\gamma_g$	Densidade do gás nas condições locais [-]
$\gamma_{g0}$	Densidade do gás da condição SC [-]
$\gamma_{gd}$	Densidade do gás dissolvido [-]
$\gamma_o$	Densidade do óleo morto [-]
$\Gamma$	Termo de transferência de massa [ $kg/(m^3 s)$ ]
$\lambda$	Conjunto de autovalores [-]
$\kappa$	Condutividade térmica genérica das paredes do duto [ $w/(m K)$ ]
$\kappa_{eff}$	Condutividade térmica efetiva do duto [ $w/(m K)$ ]
$\kappa_{sw}$	Difusividade térmica da água do mar [ $w/(m K)$ ]
$\phi$	Incremento angular [ $^\circ$ ]
$\phi_{f0}$	Multiplicador de duas fases [-]
$\mu$	Viscosidade da mistura [ $Pa s$ ]
$\mu_b$	Viscosidade do líquido em aderência com as paredes do duto [ $Pa s$ ]
$\mu_{jg}$	Coefficiente Joule-Thomson do gás [ $K Pa$ ]
$\mu_{jl}$	Coefficiente Joule-Thomson do líquido [ $K Pa$ ]
$\mu_{jo}$	Coefficiente Joule-Thomson do óleo [ $K Pa$ ]
$\mu_{jw}$	Coefficiente Joule-Thomson da água [ $K Pa$ ]
$\mu_b$	Viscosidade do líquido em aderência com as paredes do duto [ $Pa s$ ]

$\mu_g$	Viscosidade do gás [ $Pa\ s$ ]
$\mu_l$	Viscosidade do líquido [ $Pa\ s$ ]
$\mu_o$	Viscosidade do óleo saturado - óleo vivo [ $Pa\ s$ ]
$\mu_{ob}$	Viscosidade do óleo no ponto de bolha [ $Pa\ s$ ]
$\mu_{od}$	Viscosidade do óleo morto [ $Pa\ s$ ]
$\mu_w$	Viscosidade da água [ $Pa\ s$ ]
$\mu_{w0}$	Viscosidade da água na condição SC [ $Pa\ s$ ]
$\rho$	Massa específica da mistura [ $kg/m^3$ ]
$\rho$	Massa específica de forma genérica [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{a0}$	Massa específica do ar na condição SC [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{cv}$	Massa específica do centro de volume [ $kg/m^3$ ]
$\rho_g$	Massa específica do gás [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{g0}$	Massa específica do gás na condição SC [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{gd0}$	Massa específica do gás dissolvido no óleo na condição SC [ $kg/m^3$ ]
$\rho_l$	Massa específica do líquido [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{l0}$	Massa específica do líquido na condição SC [ $kg/m^3$ ]
$\rho_o$	Massa específica do óleo [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{o0}$	Massa específica do óleo na condição SC [ $kg/m^3$ ]
$\rho_w$	Massa específica da água [ $kg/m^3$ ]
$\rho_{w0}$	Massa específica da água na condição SC [ $kg/m^3$ ]
$\sigma$	Tensão interfacial do líquido [ $N/m$ ]
$\tau_i$	Tensão de cisalhamento interfacial entre o líquido e o gás [ $Pa$ ]
$\tau_{wg}$	Tensão de cisalhamento entre o gás e a parede [ $Pa$ ]

$\tau_{wl}$	Tensão de cisalhamento entre o líquido e a parede [Pa]
$\tau_{wm}$	Tensão de cisalhamento entre a mistura e a parede [Pa]
$\theta$	Inclinação local do <i>riser</i> com relação a vertical [°]
$\zeta$	Coefficiente de sub-relaxamento [-]



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	CARACTERIZAÇÃO DA INTERMITÊNCIA SEVERA	2
1.2	INTERMITÊNCIA SEVERA NA INDÚSTRIA DE PETRÓLEO	4
1.3	GARANTIA DO ESCOAMENTO	6
1.4	OBJETIVOS	7
1.5	ESTRUTURA DO TEXTO	8
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>11</b>
2.1	MODELAGEM DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS	11
2.2	ANÁLISE DE INTERMITÊNCIA SEVERA	13
2.3	ESTABILIDADE DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS	18
2.4	ANÁLISE TÉRMICA DO ESCOAMENTO MULTIFÁSICO	22
<b>3</b>	<b>MODELO</b>	<b>27</b>
3.1	GEOMETRIA DO SISTEMA	27
3.2	EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO	27
3.3	LEIS DE FECHAMENTO	29
3.3.1	Homogeneização das fases líquidas	29
3.3.2	Queda de pressão por atrito	30
3.3.3	Fração de vazio	31
3.3.4	Fluxo de calor	32
3.3.5	Caracterização dos fluidos	34
3.3.6	Termo de transferência de massa	36
3.4	ESTADO ESTACIONÁRIO	36
3.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO	39
3.6	EQUAÇÕES DINÂMICAS NA FORMA MATRICIAL	40
3.7	EQUAÇÕES DINÂMICAS PERTURBADAS	43
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>45</b>
4.1	GEOMETRIA DO SISTEMA DE PRODUÇÃO	45
4.2	DISCRETIZAÇÃO	45
4.3	ESPECTRO DE AUTOVALORES E CRITÉRIO DE ESTABILIDADE	46
4.4	PROCEDIMENTO NUMÉRICO	48
4.4.1	Estabilidade do estado estacionário	48
4.4.2	Construção da curva de estabilidade neutra	50
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>53</b>
5.1	ESTADO ESTACIONÁRIO	53
5.2	CONVERGÊNCIA DO MODELO	58
5.3	MAPAS DE ESTABILIDADE	60
5.4	ESTUDO PARAMÉTRICO	61
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>69</b>
6.1	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	69
6.2	RECOMENDAÇÕES	71

	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>73</b>
	<b>A – CARACTERIZAÇÃO DOS FLUIDOS</b> . . . . .	<b>81</b>
A.1	INTRODUÇÃO . . . . .	81
A.2	VARIÁVEIS INDEPENDENTES . . . . .	84
A.2.1	Densidade do óleo na condição padrão e densidade API . . . . .	84
A.2.2	Razão gás-óleo . . . . .	84
A.2.3	Razão água-óleo e razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos . . . . .	84
A.2.4	Densidade do gás livre na condição de referência . . . . .	85
A.2.5	Parâmetros de conversão para S.I. . . . .	85
A.2.6	Salinidade da água do mar . . . . .	86
A.3	FATOR VOLUME DE FORMAÇÃO DO GÁS . . . . .	86
A.3.1	Fator de compressibilidade do gás . . . . .	86
A.3.2	Pressão e temperatura pseudo-críticas . . . . .	87
A.4	MASSA ESPECÍFICA DO GÁS . . . . .	87
A.5	RAZÃO DE SOLUBILIDADE DO ÓLEO . . . . .	87
A.6	PRESSÃO DE BOLHA . . . . .	88
A.7	FATOR VOLUME DE FORMAÇÃO DE ÓLEO . . . . .	88
A.8	MASSA ESPECÍFICA DO ÓLEO . . . . .	89
A.9	FATOR VOLUME DE FORMAÇÃO DE ÁGUA . . . . .	89
A.10	MASSA ESPECÍFICA DA ÁGUA . . . . .	90
A.11	VISCOSIDADE DO GÁS . . . . .	90
A.12	VISCOSIDADE DO ÓLEO . . . . .	91
A.12.1	Viscosidade do óleo morto . . . . .	91
A.12.2	Viscosidade do óleo saturado . . . . .	92
A.12.3	Viscosidade do óleo subsaturado . . . . .	92
A.13	VISCOSIDADE DA ÁGUA . . . . .	93
A.13.1	Viscosidade da água na pressão de referência . . . . .	93
A.13.2	Viscosidade da água nas condições locais . . . . .	93
A.14	ENTALPIA DO GÁS . . . . .	94
A.14.1	Calor específico do gás natural . . . . .	95
A.14.2	Coefficiente Joule-Thomson do gás . . . . .	95
A.15	ENTALPIA DO ÓLEO . . . . .	96
A.15.1	Calor específico do óleo . . . . .	96
A.15.2	Coefficiente Joule-Thomson do óleo . . . . .	96
A.16	ENTALPIA DA ÁGUA . . . . .	96
A.16.1	Calor específico do água . . . . .	97
A.16.2	Coefficiente Joule-Thomson do óleo . . . . .	97
A.17	RELAÇÕES ALGÉBRICAS <i>BLACK-OIL</i> PARA A FASE LÍQUIDA . . . . .	97
A.17.1	Razão de solubilidade do líquido . . . . .	98
A.17.2	Fator volume de formação do líquido . . . . .	98
A.17.3	Massa específica do líquido na condição padrão . . . . .	98
A.17.4	Massa específica do líquido na condição local . . . . .	99
A.17.5	Viscosidade do líquido . . . . .	99
A.17.6	Entalpia do líquido . . . . .	99
	<b>APÊNDICE B – CARACTERIZAÇÃO DOS COEFICIENTES CON- VECTIVOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR</b> . . . . .	<b>101</b>
B.1	INTRODUÇÃO . . . . .	101

B.2	COEFICIENTE CONVECTIVO INTERNO . . . . .	101
B.3	COEFICIENTE CONVECTIVO EXTERNO . . . . .	103
<b>APÊNDICE C – EQUAÇÕES DINÂMICAS EM FORMA MATRICIAL 107</b>		
C.1	INTRODUÇÃO . . . . .	107
C.1.1	Termo de transferência de massa . . . . .	107
C.1.2	Equação de conservação de massa da fase líquida . . . . .	108
C.1.3	Equação de conservação de massa da fase gás . . . . .	109
C.1.4	Equação de conservação de energia . . . . .	110
C.1.5	Sistema na forma matricial . . . . .	111
<b>APÊNDICE D – EQUAÇÕES DINÂMICAS PERTURBADAS . . . . . 115</b>		
D.1	INTRODUÇÃO . . . . .	115
D.2	SISTEMA PERTURBADO . . . . .	115
D.2.1	Matriz perturbada $\tilde{A}$ . . . . .	117
D.2.2	Matriz perturbada $\tilde{B}$ . . . . .	119
D.2.3	Matriz perturbada $\tilde{C}$ . . . . .	121
<b>APÊNDICE E – EQUAÇÕES PERTURBADAS DISCRETIZADAS . . 123</b>		
E.1	INTRODUÇÃO . . . . .	123
E.2	EQUAÇÕES DISCRETIZADAS DAS PERTURBAÇÕES . . . . .	123
<b>APÊNDICE F – DERIVADAS DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS 135</b>		
F.1	INTRODUÇÃO . . . . .	135
F.2	DERIVADAS DE FUNÇÕES TERMODINÂMICAS . . . . .	135
F.2.1	Derivadas da razão de solubilidade gás-líquido . . . . .	135
F.2.2	Derivadas da razão de solubilidade gás-óleo . . . . .	136
F.2.3	Derivadas do fator volume de formação do líquido . . . . .	137
F.2.4	Derivadas do fator volume de formação do óleo . . . . .	138
F.2.5	Derivadas do fator volume de formação da água . . . . .	142
F.2.6	Derivadas do fator de compressibilidade do gás . . . . .	143
F.2.7	Derivadas do fator de compressibilidade do óleo . . . . .	144
F.2.8	Derivadas do fator de compressibilidade da água . . . . .	144
F.2.9	Derivadas da massa específica do gás . . . . .	145
F.2.10	Derivadas da massa específica do líquido . . . . .	146
F.2.11	Derivadas da viscosidade do gás . . . . .	147
F.2.12	Derivadas da viscosidade do óleo . . . . .	147
F.2.13	Derivadas da viscosidade da água . . . . .	149
F.2.14	Derivadas da viscosidade do líquido . . . . .	149
F.2.15	Derivadas da entalpia do gás . . . . .	150
F.2.16	Derivadas da entalpia do óleo . . . . .	150
F.2.17	Derivadas da entalpia da água . . . . .	151
F.2.18	Derivadas da entalpia do líquido . . . . .	152
F.3	DERIVADAS DO FLUXO MÁSSICO TOTAL . . . . .	153
F.3.1	Derivada do fluxo mássico em relação a velocidade superficial de gás . . . . .	153
F.3.2	Derivada do fluxo mássico em relação a velocidade superficial de líquido . . . . .	153
F.3.3	Derivada do fluxo mássico em relação a pressão . . . . .	154
F.3.4	Derivada do fluxo mássico em relação a temperatura . . . . .	154
F.4	DERIVADAS DO FLUXO DE CALOR INTERNO . . . . .	154

F.4.1	Derivada do fluxo de calor interno em relação a velocidade superficial de gás	154
F.4.2	Derivada do fluxo de calor interno em relação a velocidade superficial de líquido	155
F.4.3	Derivada do fluxo de calor interno em relação a pressão	155
F.4.4	Derivada do fluxo interno em relação a temperatura	155
F.5	DERIVADAS DA FRAÇÃO DE VAZIO	156
F.5.1	Derivada da fração de vazio em relação a velocidade superficial de gás	156
F.5.2	Derivada da fração de vazio em relação a velocidade superficial de líquido	157
F.5.3	Derivada da fração de vazio em relação a pressão	157
F.5.4	Derivada da fração de vazio em relação a temperatura	158
F.6	DERIVADAS DA MISTURA	159
F.6.1	Termos da equação de conservação de movimento linear	159
F.6.1.1	Termos do modelo centro de massa	160
F.6.2	Derivadas da massa específica da mistura	160
F.6.3	Derivadas da viscosidade da mistura	161
F.6.4	Derivadas da velocidade da mistura	162
F.6.5	Derivadas do Reynolds da mistura	162
F.6.6	Derivada do fator de atrito em relação ao Reynolds	163
F.6.7	Derivadas do produto entre o termo de atrito e a velocidade	163



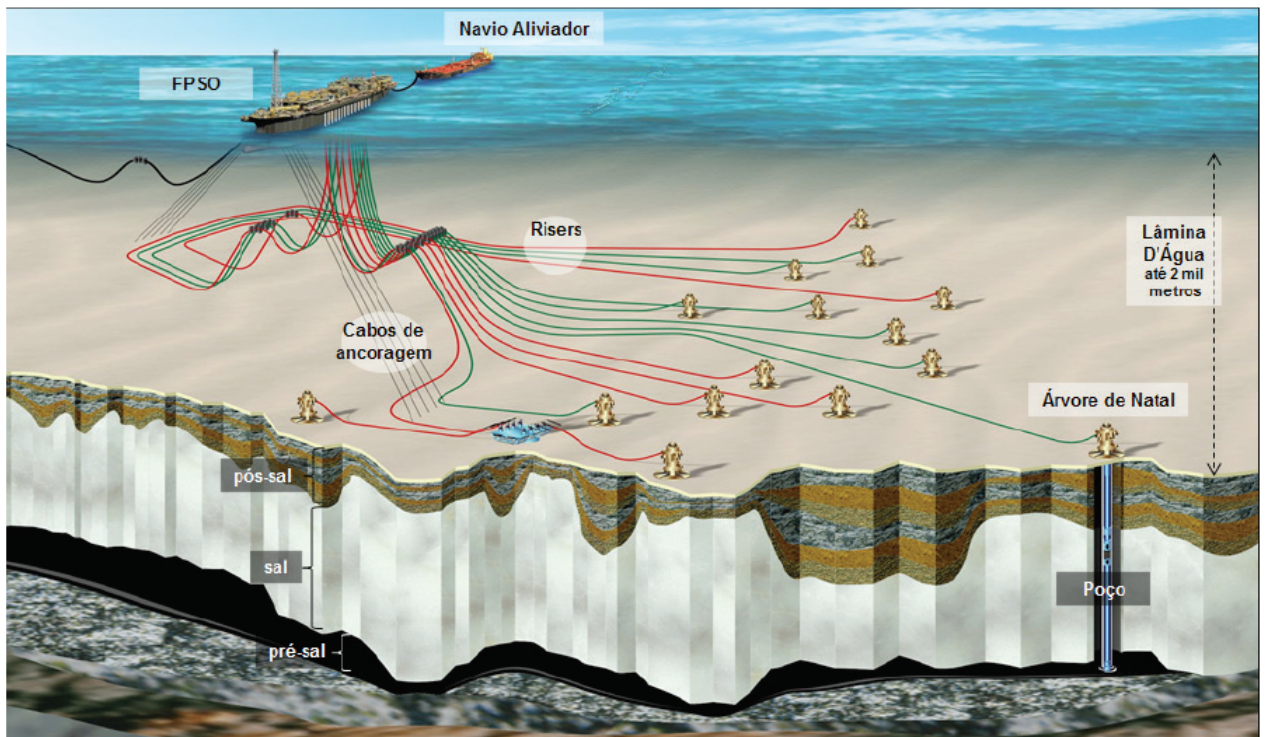
## 1 INTRODUÇÃO

Escoamentos multifásicos são observados frequentemente em diversos fenômenos naturais e processos industriais, o que torna sua análise essencial para a sociedade atual. Como exemplos de sistemas que apresentam esse tipo de escoamento, podemos citar: condensadores, evaporadores, trocadores de calor, destiladores, processos siderúrgicos, jatos e sprays, além dos dutos que transportam petróleo em águas profundas. Os escoamentos multifásicos são caracterizados por apresentar duas ou mais fases e ainda por essas fases serem fisicamente distintas uma das outras (DREW; PASSMAN, 1999). Uma dificuldade adicional encontrada nos estudos sobre escoamentos multifásicos é que a posição e a forma da interface entre as fases é desconhecida. Outros fatores também contribuem para a complexidade dos escoamentos multifásicos, especialmente a diferença de velocidades entre as fases e a sua geometria (configuração), sendo a base para a classificação dos diferentes padrões de escoamento e suas transições. As propriedades termofísicas (viscosidade, massa específica, tensão superficial) também influenciam diretamente no comportamento (WALLIS, 1969).

A necessidade de se extrair petróleo em águas profundas e/ou ultra-profundas, têm impulsionado o estudo do comportamento dos escoamentos multifásicos, especialmente nas plataformas de petróleo *offshore*. A Figura 1 apresenta a configuração de um sistema de produção típico. Os dutos são compostos de um trecho horizontal (*pipeline* ou *flowline*) que conduz os fluidos acompanhando a topografia do solo oceânico e um trecho vertical (*riser*) que eleva os fluidos até o separador multifásico, localizado na plataforma (NEMOTO, 2013).

Neste contexto, estudos sobre o escoamento multifásico de petróleo, sobretudo, da sua estabilidade nos sistemas de produção e exploração dos poços, são vitais para a indústria. Tradicionalmente nos sistemas de produção *offshore*, o padrão de escoamento mais comum é o intermitente, caracterizado por uma distribuição axial de gás e de líquido, onde o gás é transportado como bolhas entre as golfadas de líquido. Esse padrão de escoamento sob certas condições (mudanças de geometria e das variáveis que caracterizam o escoamento) pode mudar drasticamente e apresentar instabilidades fluidodinâmicas, ocasionando um fenômeno indesejado nos sistemas de produção de petróleo, conhecido por intermitência severa (ANDREOLLI, 2018).

Figura 1 – Sistemas submarinos de produção de petróleo *offshore*.



Fonte: Banco de imagens da Petrobras.

## 1.1 CARACTERIZAÇÃO DA INTERMITÊNCIA SEVERA

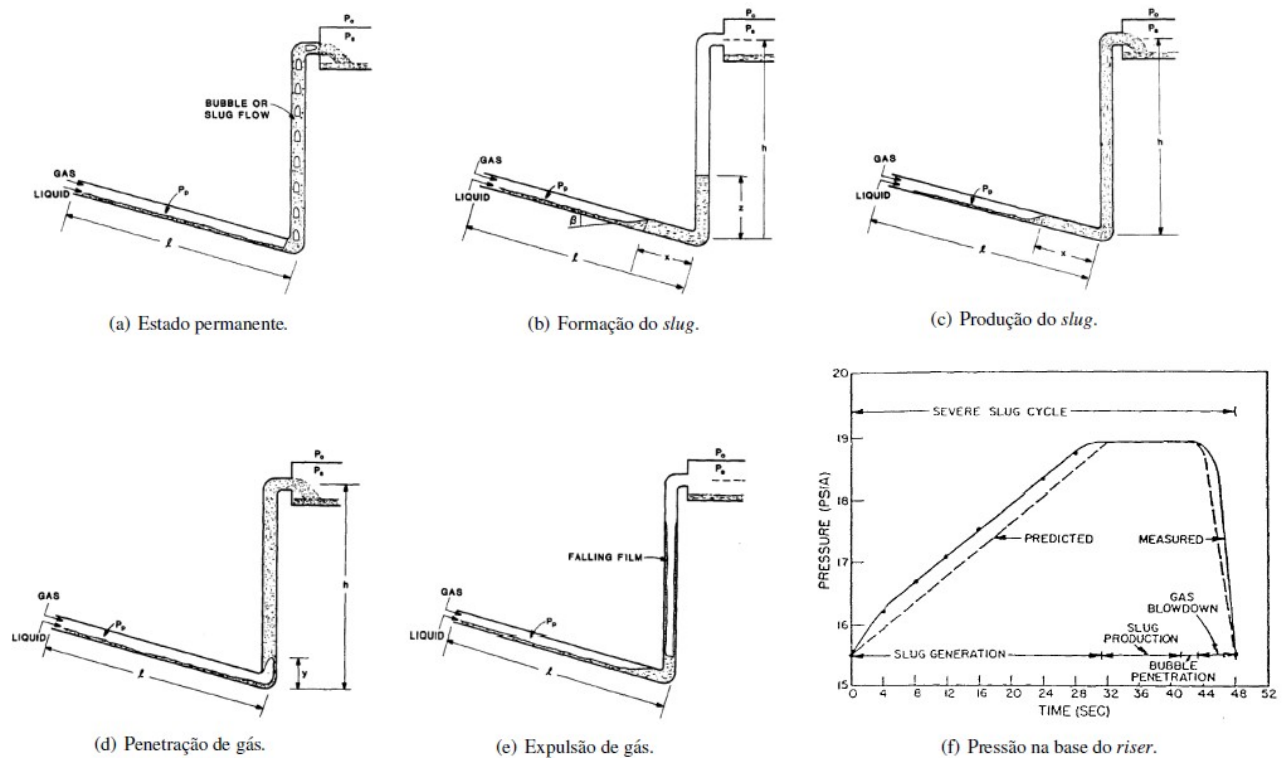
A intermitência severa ou "golfada severa" (*severe slugging*) é um fenômeno dominado pela topografia, caracterizado pela formação e produção cíclica de longas golfadas de líquido e a rápida expulsão de gás. Esta configuração pode ocorrer para baixas vazões de gás e líquido quando uma seção inclinada para baixo (*flowline*) é seguida por outra seção com inclinação ascendente (*riser*). Instabilidades hidrodinâmicas resultam da combinação de dois mecanismos que competem entre si: queda de pressão gravitacional ao longo do *riser* (principalmente devido à distribuição da fração de vazio) e compressibilidade do gás na *flowline* (LORIMER; ELLISON, 2000).

Os principais problemas causados pela intermitência severa em sistemas de produção offshore foram relatados em Wordsworth *et al.* (1998): (a) alta contrapressão média na cabeça do poço (Árvore de Natal Molhada), promovendo grandes perdas de produção, (b) altas vazões, gerando oscilações no sistema de controle de líquidos nos separadores da plataforma e eventualmente desligamento, e (c) flutuações na vazão no reservatório.

A intermitência severa pode ser caracterizada através dos estágios descritos por Taitel (1986): (a) regime permanente, (b) formação da golfada, (c) produção da golfada, (d) penetração

de gás e e) expulsão do gás. Schmidt (1977) apresentou as diferentes etapas da evolução da pressão na base do *riser*. A Figura 2 representa esse cenário.

Figura 2 – Etapas do ciclo de intermitência severa.



Fonte: Taitel (1986) e Schmidt (1977).

O regime permanente é atingido, caso a intermitência severa não ocorra. Neste caso, o sistema opera na condição de projeto e tipicamente o padrão de escoamento predominante no *pipeline* é o estratificado e no *riser* o intermitente. No entanto, desde que as perturbações se propaguem ao longo do escoamento, o ciclo de intermitência severa se inicia, com a etapa da formação da golfada, que consiste no acúmulo de líquido na base de *riser*, bloqueando a passagem de gás e aumentando o peso da coluna de líquido e aumentando a pressão na base do *riser*, conseqüentemente o gás é comprimido no *pipeline* e gera uma região de acúmulo de líquido. Quando o nível de líquido atinge o topo do *riser* e a passagem de gás continua bloqueada, observa-se a segunda etapa do ciclo, denominada de produção da golfada, em que o líquido se movimenta na direção do separador. O gás que estava bloqueado, continua penetrando o *pipeline*

e a frente de acumulação de líquido é empurrada, fazendo com que o gás alcance o topo do *riser*, ainda que a golfada de líquido permaneça adentrando o separador, mas com uma velocidade maior, caracterizando a etapa de penetração de gás. Por fim, ocorre uma expulsão violenta das bolhas de gás que atingem o topo do *riser*, tornando a coluna de líquido mais leve e diminuindo a pressão na base do *riser* e aumentando a vazão de gás. Essa rápida decompressão, faz com que o líquido restante no *riser* recue para a base do duto, retornando o processo a etapa de formação da golfada.

Devido à dificuldade de se analisar a intermitência severa e a necessidade de se obter uma produção programada e eficiente, prever e evitar esse fenômeno durante o projeto das instalações de exploração dos poços, tornou-se uma atividade indispensável, de modo que a produção contínua em níveis desejáveis, seja assegurada, visando garantir a lucratividade do empreendimento (LORIMER; ELLISON, 2000).

## 1.2 INTERMITÊNCIA SEVERA NA INDÚSTRIA DE PETRÓLEO

Alguns modelos e experimentos foram propostos, visando eliminar os efeitos da intermitência severa. Os mecanismos de mitigação são usados para reduzir ou evitar o fenômeno. Dentre as principais técnicas encontradas na literatura, podemos destacar: aumento de pressão no separador ou no topo do *riser*, restrição do escoamento por meio de uma válvula de controle (*choke*), injeção contínua de gás na base do *riser* (método da elevação artificial por *gas lift*). Outra técnica que vem sendo bastante utilizada é a "autoelevação" (*self lifting*).

Em Taitel (1986) e Baliño *et al.* (2010) o aumento da pressão no separador, ou o aumento da pressão no topo do *riser*, foi adotado como mecanismo de estabilização dos sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar. O principal motivo pela qual o aumento da pressão no separador possuir efeito estabilizante é que o aumento de pressão comprime a fase gasosa, tornando o sistema menos compressível. Uma vez que a diferença de pressão entre o reservatório e o separador é a força impulsionadora do escoamento nos sistemas de produção de petróleo, um aumento na pressão no separador provoca uma redução na vazão de produção, constituindo uma desvantagem na aplicação dessa técnica de mitigação de intermitência severa.

Em Jansen *et al.* (1996), Schmidt *et al.* (1980) e Yocum (1973) a estabilização do escoamento água-ar em sistemas *pipeline-riser* foi feita por uma válvula *choke* no topo do *riser*. O fechamento dessa válvula, pode acarretar um aumento na pressão do sistema, que por sua vez está em função da vazão dos fluidos, o que proporciona uma estabilização do sistema. A

manipulação da válvula é normalmente a ação utilizada nos sistemas de produção para estabilizar os diferentes padrões de escoamentos e mitigar as instabilidades hidrodinâmicas. Qualquer aumento de vazão no topo do *riser*, provoca um aumento na queda de pressão através da válvula, gerando um efeito de estabilização adicional. No entanto, o fechamento da válvula provoca uma diminuição na produção. A estabilização necessita de um *choking* (fechamento) minucioso, de forma que se garanta um aumento de pressão mínimo o suficiente para evitar a intermitência severa e, ao mesmo tempo, evitar perdas de produção (STORKAS; SKOGESTAD, 2007).

Em Jansen *et al.* (1996) e SCHMIDT *et al.* (1985), o método do *gas lift* foi utilizado como mecanismo de mitigação de instabilidade nos sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar. GUERRERO-SARABIA e FAIRUZOV (2013) e Poblano *et al.* (2005) adotaram essa técnica para a estabilização dos sistemas de petróleo, através da injeção contínua de gás na coluna de produção. A elevação artificial permite uma redução do gradiente de pressão e do peso da coluna de líquido, ocasionando a estabilização do escoamento. Todavia, as vazões de gás necessárias são relativamente altas para se observar um resultado significativo e nos sistemas de petróleo *offshore*, parte do gás produzido é usado para implementação do método. O custo operacional do *gas lift*, em termos financeiros, torna a operação muito cara, especialmente devido ao custo energético envolvido e na diminuição da produção. Portanto, uma redução significativa da intermitência severa, via *gas lift*, pode ser inviável financeiramente.

Em Tengesdal *et al.* (2003) e Tengesdal *et al.* (2005) a técnica denominada de "autoelevação" foi adotada para eliminar a intermitência severa em sistemas de produção de petróleo *offshore*, enquanto Azevedo *et al.* (2020) investigaram esse método em sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar. O princípio desta técnica é transferir gás do *pipeline* para o *riser* em um ponto acima da base do *riser*. Desse modo, a diferença de pressão entre o *pipeline* e os pontos de injeção no *riser* é a força impulsionadora para injeção de gás, eliminando a necessidade de forças externas (SARICA; TENGEDDAL, 2000).

Os princípios básicos da intermitência severa podem ser avaliados, através do comportamento dos sistemas água-ar, ainda que existam muitas limitações ao se extrapolar esses resultados para sistemas de produção de petróleo. O comprimento do *pipeline* e a altura do *riser* nos sistemas de petróleo *offshore* são muito maiores (da ordem de quilômetros) em comparação com os valores encontrados nas bancadas experimentais que utilizam água e ar como fluidos de trabalho. Portanto, os gradientes de pressão observados no escoamento de petróleo são muito diferentes dos obtidos nos escoamentos bifásicos água-ar. As grandes razões entre a pressão na

base e no topo do *riser*, ocasionam importantes efeitos de expansão na fase gasosa, invalidando os modelos baseados na premissa de uma fração de vazio constante no *riser* (NEMOTO, 2013).

Os modelos de estabilidade ou de intermitência severa, sejam esses mais simplificados (água-ar) ou mais elaborados (petróleo), pois apresentam maior complexidade na caracterização adequada dos fluidos, indicam que uma forma de se reduzir significativamente as instabilidades fluidodinâmicas é evitar trechos descendentes. Nos projetos de desenvolvimento da produção e instalação das plataformas, procura-se reduzir os potenciais riscos de intermitência severa posicionando a plataforma e distribuindo as linhas de produção de forma que se possa manter os poços com escoamento ascendente ao longo de toda extensão do leito submarino. Contudo, nem sempre essa distribuição de geometria é possível devido a diversos fatores como as características topográficas de fundo do reservatório e as diferentes configurações das tubulações flexíveis (catenária, *lazy-wave*, em forma de S) conforme relatado em Andreolli (2018).

### 1.3 GARANTIA DO ESCOAMENTO

Nos projetos de instalações e dutos de petróleo devem-se contemplar diversos aspectos operacionais e não apenas a capacidade do sistema de escoar o petróleo do ponto de vista de pressões. Os aspectos operacionais estão relacionados à garantia do escoamento. O termo “garantia do escoamento”, também conhecido em português por GARESC ou pelo termo em inglês *Flow Assurance*, tem o significado de garantir o fluxo de forma contínua através das tubulações, mantendo a sua eficiência operacional. Diversos aspectos estão relacionados à garantia do escoamento e devem ser considerados na fase de projeto e durante a produção e exploração dos poços para não ser comprometida a eficiência operacional. A desconsideração desses aspectos pode inviabilizar a produção nos reservatórios, ocasionando grandes perdas e desperdícios de recursos ao longo da produção do campo. A garantia de escoamento compreende as atividades relacionadas à previsão, prevenção, mitigação e remoção dos depósitos orgânicos (parafinas, hidratos, ceras e asfaltenos), inorgânicos (incrustações) e de outros fenômenos, tais como corrosão, emulsões, escoamento de óleos viscosos e intermitências severas. A ocorrência desses fenômenos diminui ou interrompe a capacidade de escoamento de um sistema. O tipo de óleo (composição) influencia nos tipos de problemas de garantia do escoamento. Por exemplo, problemas de parafinas e asfaltenos costumam ocorrer em escoamento de óleos mais leves. Quantitativamente, os problemas de garantia de escoamento são complicados de serem equacionados devido à complexidade das inúmeras cadeias que formam os hidrocarbonetos,

além das impurezas que sempre estão presentes no petróleo interferindo no seu comportamento físico-químico. A seguinte analogia pode ser feita nos estudos de GARESC: “Não existem dois óleos iguais assim como não existem dois vinhos iguais”. Portanto, naturalmente, esperam-se comportamentos distintos na garantia de escoamento mesmo entre óleos de °API semelhantes. Essa afirmação deve estar sempre em mente para não haver esquecimento da importância dos ensaios laboratoriais para avaliar os potenciais problemas de GARESC. As análises devem ser conduzidas em bancadas experimentais de GARESC a partir de amostras representativas do petróleo do projeto e/ou da produção do campo para avaliar os potenciais problemas e apontar soluções mais adequadas, do ponto de vista técnico e econômico (ANDREOLLI, 2016).

A intermitência severa pode potencializar os problemas de garantia de escoamento. Isso ocorre, pelo fato das oscilações de vazão acarretarem oscilações de pressão e temperatura que, por sua vez, são variáveis que influenciam diretamente na garantia do escoamento. Os hidratos, por exemplo, são um dos principais problemas no escoamento de petróleo. Quando acontece a intermitência severa em determinado poço produtor, é possível observar que o poço apresenta escoamento muito baixo ou nulo de líquido durante muitos minutos e até mesmo horas. Conseqüentemente, a temperatura dos fluidos ao longo da linha, torna-se muito baixa, ocasionando oscilações de pressão e a ocorrência de hidratos. Esse regime transiente, acarretado pela intermitência severa, é muito prejudicial para a operação do poço nos aspectos de garantia do escoamento, favorecendo o tamponamento de linhas. Em relação aos aspectos de processamento do petróleo, a intermitência severa também promove impactos negativos, gerando problemas operacionais na planta de processo (ANDREOLLI *et al.*, 2018).

#### 1.4 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo principal incluir a equação de conservação da energia e os efeitos térmicos em uma metodologia para avaliar a estabilidade do escoamento nos sistemas *offshore*, a partir da teoria da estabilidade linear, aplicando-se pequenas perturbações em torno da solução estacionária e substituindo essa perturbação no sistema de equações que regem o fenômeno físico. Nesse processo o sistema resultante é linearizado desprezando-se termos de alta ordem e a estabilidade é analisada, através dos autovalores e autovetores generalizados encontrados por meio da discretização das equações dinâmicas perturbadas e implementá-los numericamente no software Matlab MAGRAB *et al.* (2010). Como objetivos específicos citam-se:

- Elaboração de um modelo matemático, que inclua a equação da energia e os efeitos térmicos;
- Determinação do estado estacionário, adicionando os efeitos da transferência de calor ao longo do escoamento;
- Avaliação da estabilidade do escoamento de petróleo, a partir da inclusão dos efeitos da temperatura na abordagem de estabilidade linear;
- Determinação de mapas de estabilidade para os sistemas *pipeline-risers* considerados.
- Confrontação do estado estacionário e das curvas de estabilidade obtidos através do modelo térmico com os resultados gerados através das simulações isotérmicas de Andreolli *et al.* (2018).

## 1.5 ESTRUTURA DO TEXTO

No Capítulo 1 foi realizada a introdução. Em seguida, o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica acerca dos principais tópicos envolvidos no escoamento multifásico, dos modelos de intermitência severa, dos critérios de estabilidade, aplicação do método da estabilidade linear e ainda a análise térmica, visando uma contextualização com a indústria de petróleo *offshore*. Posteriormente, no Capítulo 3 apresentam-se os modelos matemáticos desenvolvidos para o sistema e as correlações utilizadas para o cálculo das propriedades termofísicas dos fluidos. As equações do modelo proposto devem ser discretizadas de modo a possibilitar a sua implementação numérica; tal metodologia é vista no Capítulo 4. O Capítulo 5 apresenta os resultados das simulações numéricas obtidas através do modelo proposto, o que possibilitou obter mapas de estabilidade e compará-los com os mapas determinados pelo modelo isotérmico de Andreolli *et al.* (2018). Ainda no Capítulo 5, será feito um estudo paramétrico para mostrar a influência de diferentes variáveis geométricas, operacionais e relacionadas à caracterização dos fluidos, para mostrar a sua influência na ocorrência da intermitência severa. O texto é finalizado no Capítulo 6 com as principais conclusões e perspectivas do trabalho e os próximos passos a serem realizados nesta linha de pesquisa, de modo a ampliar os resultados e análises dessa dissertação. Além da estrutura base da dissertação, que foi dividida em 6 Capítulos, 6 apêndices serão anexados, apresentando em detalhes o equacionamento de cada parte do modelo. No Apêndice A é apresentada a modelagem dos fluidos. O Apêndice B mostra as correlações utilizadas para determinação



dos coeficientes convectivos de transferência de calor. O Apêndice C apresenta a dedução das equações dinâmicas na forma matricial. No apêndice D é apresentada a dedução das equações dinâmicas perturbadas. No Apêndice E é feita a dedução do sistema discreto perturbado para implementação numérica do modelo e finalmente no Apêndice F são apresentadas as deduções das derivadas das propriedades termofísicas.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os principais tópicos envolvidos no entendimento e elaboração do modelo matemático para a análise de intermitência severa, dando continuidade à introdução realizada anteriormente. Aqui será abordado, com maior ênfase: modelagem de escoamentos multifásicos, análise de intermitência severa, modelagem da estabilidade de escoamentos multifásicos e a análise térmica do escoamento multifásico.

### 2.1 MODELAGEM DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS

A modelagem do escoamento multifásico envolve vários fenômenos complexos e acoplados, tais como: tensões superficiais e escorregamento entre as fases, processos relacionados ao equilíbrio e a interface entre as fases, transferência de calor e massa, propriedades dos fluidos ao longo do escoamento, dentre outras (SHOHAM, 2006). Em geral, duas classes de modelos são adotadas para analisar esse tipo de escoamento: Modelos de fases separadas (ou modelo de dois fluidos, ou ainda modelos mecanicistas) e modelos de mistura.

Os balanços de massa, quantidade de momento linear e energia em cada fase, aplicados nos modelos de fases separadas, são governados por dois conjuntos de equações de conservação (gás-líquido). Como resultado, o escoamento bifásico é descrito por seis equações diferenciais de conservação e três equações de interface. Por outro lado, os modelos de mistura, consideram uma ponderação entre as fases para determinar a fase da mistura. A equação de quantidade de momento linear e a equação da energia, são então aplicadas para a mistura. Neste caso, quatro equações de conservação (duas de massa, uma de quantidade de momento linear e uma de energia) e uma equação adicional de interface são adotadas para configurar o equilíbrio entre as fases, transferência de calor e massa e trocas de quantidade de momento linear e energia, o que faz com essa modelagem seja bem mais simples que a anterior (ISHII; HIBIKI, 2006).

Devido à complexidade dos escoamentos multifásicos, diferentes simplificações são aplicadas aos modelos de mistura, que são vastamente empregados na indústria de petróleo. Os modelos resultantes são classificados na literatura em classes A, B e C (BRILL; MUKHERJEE, 1999). Esses modelos buscam representar o comportamento do escoamento multifásico, através de um conjunto de parâmetros ajustados em condições laboratoriais, embora geralmente utilizem água-ar como fluido de trabalho e em pressões de operação relativamente menores que as

observadas nos sistemas *offshore*, além de dutos com diâmetros menores, o que acarreta alguns desvios nos resultados obtidos.

Os modelos, classe A, são os modelos homogêneos, onde é desconsiderado o escorregamento entre as fases e os padrões de escoamento. A massa específica da mistura é calculada com base na proporção gás-líquido na entrada da tubulação e assume-se que ambas as fases escoam com a mesma velocidade. Como exemplo, podemos citar o modelo de Poettmann e Carpenter (1952). Os modelos, classe B, consideram o deslizamento entre as fases, porém negligenciam os padrões de escoamento. Como o líquido e o gás apresentam diferentes velocidades, deve-se utilizar algum método para determinar a fração volumétrica de cada fase no duto. O modelo de Dukler e Hubbard (1975) apresenta essa abordagem. Os modelos, classe C, admitem o escorregamento entre as fases e os padrões de escoamento. Como exemplo, podemos considerar o modelo de Aziz *et al.* (1972). Esses modelos apresentam maior complexidade que os anteriores e métodos para determinar o padrão de escoamento e o fator de atrito, além das frações volumétricas das fases devem ser empregados (SHIPPEN; BAILEY, 2012).

Outra classe de modelo de mistura, utilizada para resolver problemas de engenharia que envolvem escoamentos multifásicos, é o modelo de deriva ou *drift flux* (ISHII; HIBIKI, 2003). Os modelos *drift flux* são aplicados para determinar a fração de vazio nos trechos, em que o padrão de escoamento não é estratificado. Além disso, eles consistem em equações algébricas que correlacionam a fração de vazio com as velocidades superficiais das fases gás e líquido, a velocidade de deriva e um parâmetro de distribuição de velocidade (ZUBER; FINDLAY, 1965). Diversas correlações empíricas são encontradas na literatura, para calcular a velocidade de deriva e o parâmetro de distribuição de velocidade, conforme apresentado em Bendkisen (1984), WOLDESEMAYAT e GHAJAR (2007) e BHAGWAT e GHAJAR (2012). Geralmente esses parâmetros dependem da geometria local e das condições de escoamento.

Embora esses modelos apresentem limitações, os mesmos são amplamente utilizados nos simuladores comerciais voltados à indústria de petróleo, como o *Pipesim* Schlumberger (2022) e o *Marlim*. Eles permitem a obtenção de resultados satisfatórios na elaboração da curva de produção e garantia de escoamento, gerando respostas rápidas e concisas. Os modelos mecanicistas são muito complexos para aplicações industriais, devido ao grande número de equações de conservação que descrevem o escoamento e a necessidade de várias relações constitutivas para fechamento do modelo e não necessariamente apresentam melhor desempenho frente aos modelos de mistura. Ainda assim, existem códigos computacionais, tais como *OLGA*

(SCHLUMBERGER, 2021) que utilizam os modelos puramente mecanicistas para simular o escoamento transiente de gás natural, óleo e água de formação em reservatórios, dutos e instalações.

## 2.2 ANÁLISE DE INTERMITÊNCIA SEVERA

A maioria dos estudos realizados sobre intermitência severa, foram desenvolvidos para *risers* verticais, onde se admite escoamento unidimensional e isotérmico, com uma equação de momento linear para a mistura em que apenas o termo gravitacional é considerado. Além disso, normalmente os fluidos utilizados nestes sistemas são água e ar a baixas pressões, em que a compressibilidade da fase líquida e a transferência de massa entre as fases são descartadas (AZEVEDO, 2017). Assim, os modelos resultantes costumam ter muitas simplificações para capturar o comportamento do escoamento em sistemas de produção de petróleo *offshore*. No entanto, esses modelos foram importantes para avaliar e descrever os principais parâmetros que influenciam a análise de intermitência severa. Dentre os principais modelos para a evolução da análise de intermitência severa estão: Schmidt *et al.* (1980), SCHMIDT *et al.* (1985), Taitel (1986), TAITEL *et al.* (1990), SARICA e SHOHAM (1991) e Baliño *et al.* (2010).

Schmidt *et al.* (1980) realizaram um estudo experimental da intermitência severa em sistemas *pipeline-riser* com escoamento multifásico. Os experimentos foram conduzidos, tomando ar e querosene como fluidos de trabalho. Os fluidos escoaram em sistemas de pequeno diâmetro, cerca de 5,08 cm, através de um *pipeline* de 30,48 m e seguiram para um *riser* vertical de 50 m. O *pipeline* foi submetido a diferentes inclinações:  $-5^\circ$ ,  $-2^\circ$ ,  $0^\circ$  e  $+5^\circ$  em relação à horizontal. Após diversos experimentos e observações, foi proposto um modelo matemático para analisar a formação da golfada de líquido na base do *riser*, adotando as seguintes simplificações: escoamento isotérmico; gradiente de pressão em função apenas da gravidade; vazão mássica de gás e líquido constantes; pressão constante no separador; interfaces horizontais entre o gás e o líquido. Os parâmetros de interesse do modelo são: a altura do líquido ao longo do sistema, a pressão no *pipeline*, a velocidade superficial do gás e o tempo de formação da golfada de líquido na base do *riser*. Os autores concluíram, por meio do modelo desenvolvido, que a intermitência severa ocorre apenas quando o *pipeline* apresenta ângulo de inclinação negativo (escoamento descendente no *pipeline* e ascendente no *riser*). Além disso, eles relataram que o aumento de pressão no topo do *riser*, promove uma estabilização do escoamento, podendo prevenir a ocorrência do fenômeno, a partir da instalação de uma válvula reguladora de pressão. Embora muito

limitado, este modelo foi capaz de identificar dois parâmetros que influenciam sensivelmente a análise de intermitência severa: inclinação do *pipeline* e a pressão no topo do *riser*.

SCHMIDT *et al.* (1985) desenvolveram um modelo matemático para avaliar a intermitência severa em sistemas *pipeline-riser*. As previsões do modelo hidrodinâmico estão em concordância com os resultados experimentais. As medições foram realizadas, mediante um aparato instrumental que foi montado, com um *pipeline* de 9,14 m e inclinação de  $-1^\circ$  e um *riser* vertical de 3,05 m. Água e ar escoaram por um sistema de pequeno diâmetro, de aproximadamente 2,54 cm. Os autores afirmam que a intermitência severa está condicionada ao *pipeline* apresentar inclinação negativa para que a golfada de líquido se forme na base do *riser* e que padrão de escoamento seja estratificado. Além disso, os autores apresentaram três condições para que a intermitência severa não ocorra: mudança do padrão de escoamento no *pipeline* de estratificado ondulado para golfadas ou dispersos, empregar uma vazão mássica de gás na base do *riser*, suficiente para compensar o aumento de pressão hidrostática na base do *riser*, devido ao escorregamento de líquido no *riser* e a entrada proveniente do *pipeline*, e estabilizar o escoamento no *riser*, através de um aumento da vazão volumétrica de gás que seja maior que a queda de pressão no *riser*. Eles ainda propõem a injeção de gás no *pipeline* ou no *riser*, como um modo de atenuar as grandes flutuações de pressão observadas na intermitência severa. Essas análises indicam que as baixas vazões das fases proporcionam a formação de instabilidades no escoamento.

Taitel (1986) apresentou um critério de estabilidade para avaliar a intermitência severa em sistemas *pipeline-riser*. Segundo o autor, a intermitência severa é um padrão de escoamento instável por está associada a grandes flutuações de pressão e vazão das fases, ocorrendo geralmente quando se observam pequenas vazões de gás e líquido. O critério foi obtido, por um balanço das forças que atuam sobre o líquido contido no *riser*, no início do estágio de expulsão do gás. A compressibilidade do gás é a força impulsionadora para a saída do líquido no *pipeline* e a pressão no separador (localizado no topo do *riser*), juntamente com a pressão da coluna de líquido no *riser*, agem no sentido oposto ao da expulsão. Portanto, se a força devido à compressibilidade do gás que penetra o *riser*, oriundo do *pipeline*, for maior que a soma das forças devido à pressão no separador e a pressão hidrostática da coluna de líquido no *riser*, o escoamento será instável. Desse modo, o aumento de pressão no topo do *riser* promove a estabilização do sistema. A seguinte desigualdade expressa o critério de estabilidade desenvolvido:

$$P_s > \rho_l g (1 - \alpha) \left[ \left( \frac{\alpha_p}{\alpha'} \right) L - H \right] \quad (1)$$

onde  $P_s$  representa a pressão no separador,  $\rho_l$  é a massa específica do líquido,  $g$  é a aceleração da gravidade local,  $\alpha$  é o valor médio da fração de vazio no *riser*,  $\alpha_p$  é a fração de vazio na região estratificada no *pipeline*,  $\alpha'$  é a fração de vazio da frente de gás que penetra o líquido contido no *riser*,  $L$  é o comprimento do *pipeline* e  $H$  a altura do *riser*.

O critério de estabilidade expresso pela desigualdade da Eq. (1) evidencia que o aumento de pressão no separador, de modo que a desigualdade seja satisfeita, possibilita que a intermitência severa seja eliminada e que o estado permanente, seja atingido. Além disso, a análise da Eq. (1) mostra que se aumentando a altura do *riser* e/ou diminuindo o comprimento do *pipeline*, mais estável torna-se o sistema. Os resultados obtidos foram comparados com os experimentos realizados por Schmidt *et al.* (1980), através de um gráfico que relaciona as velocidades superficiais de gás e líquido, exibindo boa concordância, identificando as regiões que ocorrem intermitência severa. Ainda que o separador, nos experimentos de Schmidt *et al.* (1980), não esteja localizado no topo do *riser*. Os desvios observados provavelmente ocorreram devido à consideração de modelos de parâmetros concentrados para o *pipeline* e *riser*, assim como à desconsideração do gás que entra no *pipeline* em comparação com o gás que sai do *pipeline* através da base do *riser*.

TAITEL *et al.* (1990) realizaram experimentos e desenvolveram um modelo para avaliar a intermitência severa em sistemas *pipeline-riser*. Água e ar foram adotados como fluido de trabalho. Baseado nas análises experimentais, os autores observaram que mesmo para um sistema estável, quando o gás penetra no *riser* cheio de líquido, a fração de vazio tende a oscilar. Este processo oscilatório pode ser amortecido e ocasionar o estado permanente, ou então continuar indefinidamente e resultar em um processo cíclico semelhante à intermitência severa. O modelo matemático proposto adotou as seguintes considerações: escoamento dominado pela gravidade, modelo *drift flux* para determinação da velocidade de propagação de bolhas no *riser*, valores médios constantes para a massa específica do gás (fixa em relação ao espaço e variável com o tempo) e a fração de vazio no *riser* e desconsideração da transferência de massa entre as fases. O modelo permite obter as variações de pressão no *pipeline*, fração de vazio média, vazão mássica de gás no *riser* e o acúmulo de líquido local. Os resultados do procedimento numérico foram comparados aos dados experimentais e apresentaram boa concordância, exceto para as fases de penetração e expulsão do gás. No entanto, notou-se que a medida que o ponto de operação se aproxima da fronteira de estabilidade, no espaço de parâmetros, as simulações numéricas, baseadas no método lagrangiano explícito para a discretização espacial, não convergiram.

SARICA e SHOHAM (1991) desenvolveram um modelo transiente simplificado para descrever a intermitência severa em sistemas *pipeline-riser* com uma formulação mais realista que as propostas anteriores, destacando-se os seguintes aspectos: parâmetros distribuídos no *riser* (variáveis dependentes do tempo e do espaço) e parâmetros concentrados (variáveis em função do tempo) no *pipeline*, escoamento unidimensional dominado pela gravidade, cálculo da fração de vazio no *pipeline*, admitindo-se escoamento estratificado, baseado no conceito de equilíbrio local proposto por Taitel e Dukler (1976), determinação da fração de vazio no *riser*, por meio do modelo *drift flux*, ausência da transferência de massa entre as fases e a fase líquida considerada incompressível. Partindo das equações de continuidade para as fases gás e líquido e uma equação de momento linear para a mistura, foi possível obter um sistema de equações diferenciais parciais e implementá-lo numericamente através do "método das direções características". As simulações foram comparadas aos experimentos realizados por FABRE *et al.* (1990), Vierkandt (1988) e Jansen *et al.* (1996) e com o modelo de Taitel (1986), demonstrando melhor concordância com os dados experimentais. No entanto, o modelo apresentou erros sistemáticos nos períodos de intermitência severa e não convergência para pontos de operação abaixo da fronteira de estabilidade elaborada por Taitel (1986). Os autores indicaram que a não-convergência do modelo para essas situações está relacionada a ausência dos termos de inércia na equação de momento linear e que para estes cenários eles são mais relevantes que os termos gravitacionais.

Baliño *et al.* (2010) desenvolveram um modelo matemático mais recente, para implementação numérica da análise de intermitência severa nos sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar, buscando eliminar muitas das simplificações vistas nos modelos anteriores. Posteriormente esse modelo foi tomado como base, para a análise de estabilidade linear realizada por Azevedo *et al.* (2015), que sob as mesmas condições de operação, apresentou excelente concordância com os experimentos conduzidos por Yamaguchi e Baliño (2015). As principais características do modelo são: escoamento unidimensional e isotérmico; escoamento dominado pela gravidade no *pipeline*; queda de pressão no *riser* em função da gravidade e do atrito; negligência dos termos de inércia na equação de momento linear para a mistura; fase líquida incompressível e gás com comportamento ideal; ausência da transferência de massa entre as fases; padrão de escoamento estratificado no *pipeline* e modelo *drift flux* para as transições entre os padrões de escoamento (anular, golfadas, bolhas, etc.) em função do ângulo de inclinação local. Desse modo, foi possível descrever o acúmulo de líquido no *pipeline*, nível de líquido e



ondas da fração de vazão no *riser*. O modelo foi utilizado para simular os dados experimentais para *risers* de geometria catenária relatados em (WORDSWORTH *et al.*, 1998). Os resultados mostraram uma boa concordância entre a análise numérica de intermitência severa e os ciclos experimentais. Além disso, foi observada uma excelente previsão das curvas de estabilidade e regimes de escoamento.

Baliño (2014) estendeu o modelo desenvolvido por Baliño *et al.* (2010) de modo que os efeitos de inércia na equação de momento linear para a mistura, tanto no *pipeline* quanto no *riser* pudessem ser considerados, além de mecanismos de mitigação de intermitência severa (*choking* e *gas lift*). Por meio da implementação numérica desse modelo foram gerados mapas de estabilidade que, ao serem comparados com dados experimentais publicados na literatura, exibiram excelentes resultados. Ainda que esses modelos apresentem grande evolução frente aos modelos anteriores para sistemas água-ar, eles possuem importantes limitações para capturar o comportamento do fenômeno de intermitência severa nas plataformas *offshore*, como: existência de apenas duas fases, negligência da compressibilidade da fase líquida e desconsideração da transferência de massa entre as fases. Ademais, nos sistemas de petróleo as variações de pressão nos *risers* são muito mais acentuadas, o que implica diretamente na expansão das fases e consequentemente no cálculo das propriedades termofísicas. Visando a elaboração de modelos mais práticos para aplicação à indústria de petróleo, Nemoto e Baliño (2012) desenvolveram um modelo dinâmico para investigar o escoamento de óleo, gás e água nos sistemas *pipeline-riser* a partir do modelo de Baliño *et al.* (2010). As simplificações citadas foram anteriormente eliminadas e a transferência de massa entre as fases e a caracterização dos fluidos foram determinadas através do modelo *black oil*. Assim, foi possível determinar a fronteira de estabilidade (uma envoltória que separa as regiões instáveis e estáveis) para todo o espectro de velocidades superficiais de gás e líquido, por meio de simulações computacionais do comportamento dinâmico do sistema. Andreolli *et al.* (2018) estenderam a análise de estabilidade linear realizada por Azevedo *et al.* (2015) buscando avaliar a intermitência severa em sistemas reais de produção para *risers* com geometria em catenária e *lazy wave*. Os Mapas de estabilidade obtidos, por meio da implementação numérica do modelo foram muito próximos dos encontrados por Nemoto e Baliño (2012), ainda que nessa análise seja adotada a consideração de parâmetros concentrados na *flowline*. No entanto, em ambos os modelos o escoamento foi descrito em condições isotérmicas. O modelo de estabilidade linear elaborado nessa tese, elimina essa simplificação e torna a análise de intermitência severa ainda mais realista. No capítulo 5 é feita uma comparação entre

os resultados do modelo isotérmico de Andreolli *et al.* (2018) com o modelo que inclui os efeitos térmicos presente nessa tese.

### 2.3 ESTABILIDADE DE ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS

Sistemas de produção de petróleo *offshore* são projetados para operar em regime permanente. Todavia, é possível que essa condição não exista. A estabilidade de um sistema *pipeline-riser* depende de um conjunto de parâmetros que comandam o estado operacional e pode ser obtida numericamente. A solução do estado estacionário, é dada como condição inicial para as simulações numéricas. Caso a solução não seja alterada com o tempo, a solução estacionária é estável, e este é o sistema permanente. Caso contrário, se a solução numérica muda ao longo do tempo, o estado estacionário é instável e não há regime permanente e ocorre o fenômeno de intermitência severa (ANDREOLLI, 2018).

Em geral, a estabilidade de um escoamento multifásico é representada por meio de um mapa com as velocidades superficiais do líquido e do gás nos eixos, mantendo os demais parâmetros constantes. A curva de estabilidade neutra é definida como a fronteira entre as regiões que apresentam escoamento instável e estável no espaço de parâmetros do sistema. Critérios simplificados de estabilidade foram desenvolvidos para *risers* verticais, via condições específicas do escoamento e são utilizados como alternativas às simulações numéricas transientes visando obter informações rápidas e concisas do sistema. Essas técnicas são aplicadas, devido ao alto custo computacional e o grande número de simulações realizadas para obter os mapas de estabilidade. Dentre esses critérios, podemos destacar os propostos por: Bøe (1981), Taitel (1986), POTS *et al.* (1987) e Jansen *et al.* (1996). Esses modelos desconsideram muitos fenômenos que ocorrem nos sistemas reais de produção de petróleo, uma vez que não foram deduzidos por modelos dinâmicos completos e, portanto, apresentam aplicabilidade reduzida. No entanto, são extremamente úteis como uma primeira estimativa para determinar as regiões que apresentam escoamento instável (AZEVEDO, 2017).

Bøe (1981) desenvolveu um critério para encontrar a fronteira de estabilidade e os diferentes regimes de escoamento em função das velocidades superficiais de líquido e gás, baseado na predominância de um padrão de escoamento estratificado no *pipeline* e no equilíbrio de pressão na base do *riser*, considerando que o mesmo está completamente cheio e contém apenas líquido. Essa condição foi imposta, devido à equalização de pressão no *riser*, através da adição de líquido na parte inferior e da queda de pressão no *pipeline* ocasionada pela adição de

gás. A partir do modelo de Schmidt *et al.* (1980), foi obtido o critério de estabilidade usado para obter a curva de estabilidade na faixa de velocidades superficiais mínimas de líquido em que a intermitência severa tende a ocorrer:

$$j_l \geq \left[ \frac{P_p}{\sin \beta_r \rho_l g L_g (1 - \alpha)} \right] j_g \quad (2)$$

onde  $j_l$  e  $j_g$  representam, respectivamente, as velocidades superficiais de líquido e de gás,  $P_p$  indica a pressão no *pipeline*,  $\beta_r$  é o ângulo de inclinação do *riser* com relação a vertical, enquanto  $L_g$  denota o comprimento equivalente do volume de gás no *pipeline*.

O limite superior da fronteira de estabilidade foi determinado, considerando-se a transição entre o padrão de escoamento estratificado para o intermitente e/ou anular:

$$j_g \leq (1 - \alpha)^{\frac{5}{2}} \left[ \frac{(\rho_l - \rho_g)}{\rho_g} g D \cos \beta_p \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

onde  $\rho_g$  indica a massa específica do gás,  $\beta_p$  o ângulo de inclinação do *pipeline* em relação a horizontal e  $D$  o diâmetro do duto.

POTS *et al.* (1987) estabeleceram um critério de estabilidade, baseado em um parâmetro definido como sendo a razão entre a pressão de gás no *pipeline* e a pressão hidrostática na base do *riser* completamente preenchido por líquido. As seguintes considerações foram adotadas pelo modelo: *riser* vertical, transferência de massa entre as fases e queda da altura de líquido no *riser* desconsideradas, e ainda a massa específica do gás desprezível frente à massa específica de líquido. Portanto, a razão entre as taxas de aumento de pressão pode ser expressa como:

$$\Pi_{ss} = \frac{R Z_c T}{\alpha_p L \gamma_g M_a g} \frac{\dot{m}_g}{\dot{m}_l} \quad (4)$$

onde  $\gamma_g = \frac{M_g}{M_a}$  representa a densidade do gás,  $M_g$  e  $M_a$  são respectivamente, as massas molares do gás e do ar,  $T$  a temperatura da mistura gás-líquido,  $Z_c$  é o fator de compressibilidade do gás,  $R = 8.314 J/(mol K)$  é a constante universal dos gases perfeitos, enquanto  $\dot{m}_g$  e  $\dot{m}_l$  são respectivamente, as vazões mássicas de gás e de líquido.

Se  $\Pi_{ss} < 1$ , então a intermitência severa tende a ocorrer. Além disso, este parâmetro também é utilizado para prever a intensidade da intermitência severa, uma vez que quanto menor for  $\Pi_{ss}$ , maior será o comprimento da golfada de líquido.

Jansen *et al.* (1996) avaliaram de forma experimental e teórica, mecanismos de mitigação de intermitência severa em sistemas *pipeline-riser*. Os autores estenderam o modelo de Taitel (1986) considerando a vazão de injeção de gás constante na base do *riser*. Além disso, ao se

incorporar os efeitos de injeção de gás pelo método *gas lift* e o aumento de pressão no topo do *riser* através de uma válvula choke, o critério de estabilidade pode ser reescrito como:

$$\frac{P_s}{P_o} > \frac{\frac{\alpha L}{\alpha'} - H}{\frac{P_o}{\Phi + \rho_l g}} + \frac{\frac{\alpha L}{\alpha'} \left( \Phi - \frac{K}{\rho_l g} \right) - \Phi H}{\frac{P_o}{\rho_l g}} - \frac{C j_l^2}{P_o} \quad (5)$$

onde  $\Phi$  representa a queda de altura média do líquido no *riser*,  $K$  e  $C$  indicam respectivamente, a constante de proporcionalidade e o coeficiente de estrangulamento da válvula chocke e  $P_o$  a pressão atmosférica local.

Por meio da Eq. (5) foram construídos mapas de estabilidade, que permitem visualizar as fronteiras que delimitam as regiões que ocorrem intermitência severa e a transição para as regiões que apresentam escoamento estável. Os resultados teóricos obtiveram excelente concordância com os dados experimentais e desvios pequenos em relação ao critério de Bøe (1981).

Uma alternativa mais eficiente do que as simulações numéricas transientes e os critérios de estabilidade é se avaliar a estabilidade de escoamentos multifásicos através da aplicação da teoria de estabilidade linear a sistemas dinâmicos completos, a partir de modelos mais realísticos. A análise de estabilidade linear é uma técnica poderosa, muito aplicada na engenharia para se estimar a estabilidade de um sistema dinâmico. Para executá-la, precisamos realizar os seguintes passos: a) Obter o estado estacionário, zerando as derivadas temporais no conjunto de equações governantes; b) Escrever as variáveis de estado, como sendo o seu valor no estado estacionário somada a uma perturbação infinitesimal; c) Substituir as variáveis de estado nas equações governantes e então linearizá-las, resultando em um sistema de equações dinâmicas perturbadas; d) Discretizar no espaço o sistema de equações perturbadas; e) Calcular o espectro de autovalores, determinando como as perturbações da solução estacionária evoluem com o tempo (ANDREOLLI *et al.*, 2018). A implementação numérica de modelos transientes a partir de códigos computacionais comerciais, resulta em análises longas e muito demoradas e em projetos que demandam a simulação de vários cenários, a aplicação deste método torna-se inviável e a análise de estabilidade linear pode ser uma técnica muito útil. A inclusão de um módulo de estabilidade linear nos simuladores comerciais, mesmo os permanentes, pode acarretar vários ganhos significativos a produção e exploração de poços nas plataformas *offshore*.

Dentre os principais estudos sobre a teoria de estabilidade linear aplicadas ao escoamento multifásico, podemos destacar: ZAKARIAN (2000), ALWAZZAN e THAN (2005), BURR *et al.* (2013) e Azevedo *et al.* (2015) para os sistemas água-ar. Análises aplicadas ao escoamento de petróleo também são encontradas na literatura, dentre as quais podemos citar:

FAIRUZOV (2001), GUERRERO-SARABIA e FAIRUZOV (2013) e Andreolli *et al.* (2018).

ZAKARIAN (2000) apresentou um estudo sobre a análise de estabilidade linear em sistemas *pipeline-riser* com escoamento água-ar, a partir de simplificações no modelo dinâmico para representar as equações de governo e na geometria do *riser*. As equações de continuidade para as fases gás e líquido, assim como a equação de conservação de momento linear (em que apenas o termo gravitacional foi considerado) foram integradas no espaço. Para fechar matematicamente o modelo, adotou-se uma relação algébrica *drift flux*, ocasionando um sistema de equações algébrico-diferencial. Segundo a análise de estabilidade linear, quando a fronteira de estabilidade é cruzada da região estável para a região instável, o espectro apresenta dois autovalores complexos conjugados que cruzam o eixo imaginário (a parte real se torna positiva). O autor afirma que a perda de estabilidade do estado estacionário, caracteriza uma bifurcação de Hopf supercrítica. Desse modo, pode-se concluir que o fenômeno de intermitência severa pode ser considerado uma instabilidade hidrodinâmica. Os mapas de estabilidade gerados mostraram uma boa concordância com os dados experimentais relatados na literatura, ainda que em alguns casos não tenha sido possível reproduzir a fronteira de estabilidade devido às simplificações consideradas. Azevedo (2017) estendeu o modelo de ZAKARIAN (2000), incorporando os efeitos do atrito e configurações em que o *riser* apresenta qualquer inclinação, como os casos de *risers* em catenária. Os autores adotaram parâmetros distribuídos na *flowline* e no *riser*, discretizando a geometria em  $N$  nós. Essa metodologia permitiu encontrar as curvas de estabilidade, até mesmo para as regiões em que ZAKARIAN (2000) não obteve sucesso. Além disso, é importante observar que a desconsideração do atrito já havia sido apontada em Baliño *et al.* (2010) como o principal responsável pela falta de convergência nos modelos anteriores de TAITEL *et al.* (1990); SARICA e SHOHAM (1991).

Azevedo *et al.* (2015) estenderam o modelo de Baliño *et al.* (2010) e adicionaram os efeitos dos mecanismos de mitigação no escoamento água-ar em sistemas *pipeline-riser*. O modelo considera equações de continuidade para as fases gasosa e líquida e admite escoamento unidimensional e em condição isotérmica. O líquido é considerado incompressível enquanto a fase gasosa é assumida como um gás ideal. Assumi-se uma equação simplificada de balanço de momento linear para a mistura gás-líquido em que a inércia foi negligenciada (NPW - Modelo *No Pressure Wave*) e o padrão de escoamento local é definido com base nas condições de escoamento e inclinação local. Desse modo, a intermitência severa é dominada principalmente pela gravidade e pela compressibilidade do gás no *pipeline*. Para fechamento matemático do

modelo, foram adotadas uma correlação *drift flux* para determinação da fração de vazio e uma correlação do multiplicador de duas fases para cálculo da queda de pressão por atrito, ambas em função do padrão de escoamento local. A injeção de gás e a válvula *choke* foram consideradas, respectivamente, na base e no topo do *riser*. A análise de estabilidade linear numérica foi comparada a resultados experimentais e numéricos relatados na literatura e apresentou excelente concordância.

## 2.4 ANÁLISE TÉRMICA DO ESCOAMENTO MULTIFÁSICO

Tradicionalmente, as análises de intermitência severa são realizadas na condição isotérmica, uma vez que os gradientes de temperatura são muito menores que os gradientes de pressão nos sistemas *pipeline-riser*. No entanto, a temperatura é um parâmetro importante na determinação das propriedades termofísicas e na transferência de massa entre as fases. Além disso, as análises térmicas visam assegurar as temperaturas mínimas necessárias para prevenir a formação de deposições orgânicas, tais como ceras, parafinas e hidratos nas paredes dos dutos. A inclusão da temperatura é feita por meio da equação de conservação de energia que, por sua vez, está acoplada com as equações de conservação de massa para cada fase e momento linear para a mistura. Em geral, as análises experimentais encontradas na literatura, foram conduzidas em bancadas que utilizam os fluidos água-ar e os modelos numéricos desenvolvidos para o escoamento multifásico de petróleo apresentam algumas simplificações: desconsideração do atrito e/ou energia cinética e evolução isotérmica. A distribuição de temperatura nos escoamentos multifásicos é frequentemente avaliada na indústria nuclear, contudo a indústria de petróleo apresenta alguns estudos promissores, dentre os quais podemos citar: Brill (1987), SAGAR *et al.* (1991), ALVES *et al.* (1992) e Duan *et al.* (2012).

Brill (1987) apresenta uma metodologia para obter o perfil de temperatura nos sistemas *pipeline-riser*. Adotou-se o modelo *black oil* para determinar as propriedades termofísicas das fases que compõem o petróleo, e partindo do princípio da conservação de energia, obtém-se uma equação diferencial que descreve a variação de entalpia ao longo do comprimento do *pipeline* em função da transferência de calor para o meio externo, da energia potencial e da energia cinética, conforme:

$$\frac{d\hat{h}}{dL} = -\frac{dq}{dL} - \frac{g \sin \theta}{J_c} - \frac{V}{J_c} \frac{dV}{dL} \quad (6)$$

onde  $q$  representa o calor transferido para as vizinhanças,  $J_c$  o equivalente mecânico do calor, enquanto  $h$  e  $V$  são respectivamente, a entalpia e a velocidade da mistura gás-líquido.

A Eq. (6) pode ser implementada numericamente, por meio de um algoritmo desenvolvido através do "método das diferenças finitas" permitindo o cálculo da queda de temperatura acoplada a queda de pressão. Ademais podem ser adicionados à Eq. (6) os efeitos transientes da condução de calor no aquecimento de rochas ao redor de poços. A influência do coeficiente Joule-Thomson foi negligenciada, o que pode acarretar desvios significativos para poços que apresentam alta vazão de gás.

Em SAGAR *et al.* (1991) é apresentado um modelo simplificado, desenvolvido a partir de dados de campo sobre o escoamento em poços, a fim de prever os perfis de temperatura em reservatórios de petróleo, considerando escoamento bifásico. O modelo desenvolvido pelos autores baseia-se em um balanço de energia total e assume condições de estado estacionário e que nenhum trabalho é realizado pelo fluido ao longo do escoamento. Usando os princípios da termodinâmica e combinando os efeitos da transferência de calor nos poços, energia potencial e cinética, e ainda o coeficiente Joule-Thomson no cálculo da entalpia específica da mistura, obtém-se uma equação diferencial ordinária para a temperatura:

$$\frac{dT}{dL} = -A_0 \left[ (T - T_e) + \frac{g}{g_c} \frac{\sin \theta}{J_c C_p A_0} - \frac{\mu_j}{A_0} \frac{dP}{dL} + \frac{V dV}{g_c J_c C_p} \right] \quad (7)$$

onde  $T_e$  indica a temperatura do meio externo,  $A_0$  é um coeficiente adimensional para o cálculo da transferência de calor por condução, enquanto  $C_p$  e  $\mu_j$  são respectivamente, o calor específico a pressão constante e o coeficiente Joule-Thomson da mistura.

Na Eq. (7), os mecanismos de transferência de calor por radiação e convecção foram ignorados na determinação do coeficiente global de transferência de calor. Para realizar a implementação numérica da Eq. (7) e encontrar os perfis de temperatura, é preciso obter informações sobre a composição dos hidrocarbonetos, calcular o gradiente de pressão e os termos de energia cinética. Os autores relataram ainda que ao compararmos os resultados do modelo simplificado com os dados de temperatura aferidos em diferentes poços, o erro absoluto médio foi de  $2,4^\circ F$ , indicando que o modelo é altamente preciso dentro da sua faixa de aplicação.

ALVES *et al.* (1992) apresentaram uma equação geral para a previsão da temperatura ao longo do escoamento multifásico de petróleo em sistemas *pipeline-riser*, válida para uma ampla faixa de ângulos de inclinação do duto. As principais simplificações adotadas foram: incompressibilidade da fase líquida, comportamento ideal do gás e aproximação *black oil* para

cálculo das propriedades termofísicas das fases. Os autores admitiram estado estacionário e consideraram um elemento diferencial do *pipeline* como volume de controle, para aplicar os balanços de massa, momento linear e energia, representados respectivamente por:

$$\frac{d}{dL}(\rho V) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d}{dL}(\rho V^2) = -\frac{dP}{dL} - \rho g \sin \theta - \frac{\tau \pi D}{A_p} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dL} \left[ \rho V \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] = -\frac{d}{dL}(PV) - \rho V g \sin \theta - \frac{q \pi D}{A_p} \quad (10)$$

onde  $A_p$  representa a área da seção transversal do *pipeline*, enquanto  $\tau$  é a tensão de cisalhamento na parede do duto.

A Eq. (10) foi convenientemente escrita explicitando-se a temperatura, por meio de manipulações algébricas e rearranjos dos termos das Eqs. (8) e (9). Além disso, a inclusão de uma análise da transferência de calor para as vizinhanças, a partir do coeficiente global de transferência de calor (considerando as geometrias do poço e do *pipeline* e ainda os principais mecanismos de transmissão de calor) e o cálculo da entalpia da mistura, em função do coeficiente Joule-Thomson, determinado através da aproximação *black oil*, resultaram na seguinte expressão:

$$\frac{dT}{dL} + \frac{U \pi D}{WC_p} T = \frac{U \pi D}{WC_p} T_e + \frac{1}{C_p} \left[ \mu_j C_p \frac{dP}{dL} - g \sin \theta - V \frac{dV}{dL} \right] \quad (11)$$

onde  $W$  representa a vazão mássica da mistura e  $U$  é o coeficiente global de transferência de calor.

Apesar da análise desenvolvida ser parecida com as anteriores, a Eq. (11) elimina algumas das simplificações assumidas e permite adicionar outras informações relevantes para a predição da temperatura, como os efeitos da convecção e radiação térmica ao longo do escoamento. Os autores compararam os resultados dos perfis de temperatura obtidos através da Eq. (11) com os reportados por diferentes modelos simplificados encontrados na literatura e concluíram que o modelo proposto apresenta bom desempenho em diferentes condições de escoamento e que apesar de próximas, as temperaturas em geral, foram menores do que as calculadas pelos métodos simplificados.

Mais recentemente, Duan *et al.* (2012) apresentou uma dedução da equação de conservação da energia para o escoamento bifásico gás-óleo em *pipelines*. Esta nova configuração da



equação de energia, considerou muitos parâmetros importantes para capturar com maior precisão o comportamento físico do escoamento, tais como: efeito Joule-Thomson, trabalho de fluxo, dissipação de energia devido ao atrito, impacto da ondulação do terreno e a transferência de calor para o ambiente. Os autores assumiram estado estacionário e explicitaram a temperatura, através do modelo matemático proposto e determinaram o resfriamento da mistura, a partir da implementação numérica do algoritmo computacional desenvolvido. Além disso, foi utilizada tanto a aproximação *black oil* quanto a modelagem composicional para a caracterização dos fluidos. Em ambos os casos, os resultados obtidos foram comparados com simulações computacionais realizadas no software *OLGA* (SCHLUMBERGER, 2021) e ensaios aferidos nos *pipelines* considerados. Uma vez que os desvios observados foram relativamente pequenos, concluiu-se que o modelo elaborado pode ser um método interessante para prever a distribuição de temperatura ao longo do *pipeline* e ainda que o coeficiente Joule-Thomson é o fator preponderante na sensibilidade da análise.



### 3 MODELO

Neste capítulo é apresentado o modelo matemático desenvolvido, assim como as simplificações e hipóteses assumidas. Foi considerado que o escoamento é unidimensional e trifásico ao longo do sistema. As fases gás e líquido são consideradas compressíveis. Além disso, é assumido que o óleo e a água possuem a mesma velocidade e estão homogeneizados. O padrão de escoamento no *pipeline* e no *riser* é determinado conforme as variáveis de estado e com o ângulo de inclinação local. A caracterização dos fluidos e a transferência de massa entre as fases é dada segundo o modelo *black oil*, enquanto a fração de vazio foi determinada em função do padrão do escoamento. A equação de conservação de energia é adicionada em uma metodologia elaborada anteriormente, de modo a se levar em conta o acoplamento térmico com as equações de conservação de massa e momento linear. Também serão apresentadas as condições de contorno para o escoamento e a formulação através da teoria de estabilidade linear para se obter as equações dinâmicas perturbadas que regem a estabilidade do campo base (estado estacionário).

#### 3.1 GEOMETRIA DO SISTEMA

A Figura 3 apresenta a geometria geral do sistema de produção considerado, para formular as equações de conservação. Estão explicitadas as coordenadas ao longo da trajetória  $s$ , as variáveis de estado ( $j_g$ ,  $j_l$ ,  $P$  e  $T$ ), a fração de vazio  $\alpha$  e o ângulo de inclinação do *riser*  $\theta$ .

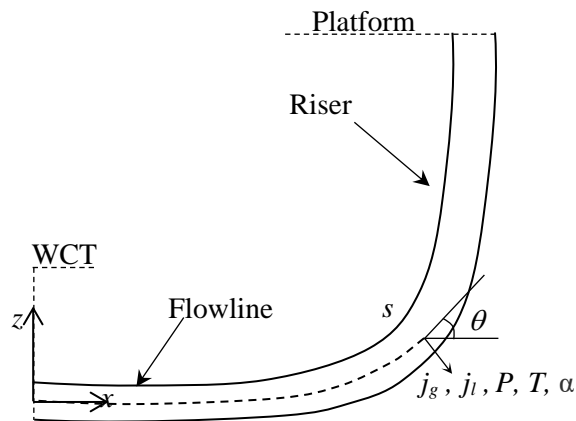
#### 3.2 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

O modelo de escoamento multifásico adotado, baseia-se no modelo de mistura e considera quatro equações de conservação: balanço de massa para as fases gasosa e líquida e equações simplificadas de balanço de momento linear e energia para a mistura gás-líquido. As equações de conservação de massa, assim como a equação de conservação de momento linear e leis de fechamento, exceto para a equação de conservação de energia, foram extraídas de Andreolli *et al.* (2018). As equações de balanço de massa para as fases gasosa e líquida consideradas nesse estudo são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \alpha) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_g j_g) = \Gamma \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_l (1 - \alpha)] + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_l j_l) = -\Gamma \quad (13)$$

**Figura 3 – Geometria geral do sistema de produção, adaptada de Andreolli *et al.* (2018)**



**Fonte: Próprio autor.**

Nas Eqs. (12) e (13),  $\Gamma$  representa o termo de transferência de massa e  $t$  o tempo.

Para a maioria dos transientes que ocorrem no transporte de óleo e gás, a resposta do sistema revela-se suficientemente lenta. O gradiente de pressão em geral, é dado pela soma das contribuições dos termos de inércia, gravidade e atrito. No entanto, os escoamentos são lentos nos sistemas *offshore*, conseqüentemente as ondas de pressão não tem efeito dominante comparadas as ondas de continuidade. A equação de conservação de momento linear será avaliada, conforme o modelo NPW (No Pressure Wave), em que as ondas acústicas são descartadas, ao negligenciar-se os termos de inércia (MASELLA *et al.*, 1998):

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_F - \rho g \sin \theta \quad (14)$$

$$\rho = \rho_g \alpha + \rho_o \alpha_o + \rho_w \alpha_w \quad (15)$$

$$\alpha + \alpha_o + \alpha_w = 1 \quad (16)$$

onde  $\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_F$  é o gradiente de pressão por atrito,  $P$  é a pressão,  $\rho$ ,  $\rho_o$  e  $\rho_w$  são respectivamente, as massas específicas da mistura, óleo e água,  $g$  representa a aceleração da gravidade local, enquanto  $\alpha_o$  e  $\alpha_w$  são, respectivamente, as frações volumétricas de óleo e de água.

A equação de conservação da energia selecionada, foi baseada em Wallis (1969) e descarta o fluxo de calor axial, fontes dissipativas e potências devido a tensões normais. Para ser consistente com a equação de conservação de momento linear, também serão negligenciados os termos relativos à energia cinética:

$$-\frac{q_0 P_c}{A} - G g \sin \theta = \frac{\partial}{\partial t} [\alpha \rho_g \hat{u}_g + (1 - \alpha) \rho_l \hat{u}_l] + \frac{\partial}{\partial s} [\rho_g j_g \hat{h}_g + \rho_l j_l \hat{h}_l] \quad (17)$$

$$G = \rho_g j_g + \rho_l j_l \quad (18)$$

onde  $q_0$  é o fluxo de calor nas paredes internas do duto (positivo quando sai do sistema),  $P_c$  o perímetro aquecido,  $G$  é o fluxo mássico total, calculado conforme a Eq. (18),  $\hat{u}_g$  e  $\hat{h}_g$  são a energia interna e a entalpia específicas do gás, respectivamente, enquanto  $\hat{u}_l$  e  $\hat{h}_l$  a energia interna e entalpia específicas para o líquido. Além disso, a Eq. (17) permite incorporar os efeitos do fluxo de calor nas paredes externas e a condução de calor através das paredes do duto.

### 3.3 LEIS DE FECHAMENTO

Para fechar matematicamente o problema, algumas relações constitutivas devem ser adicionadas.

#### 3.3.1 Homogeneização das fases líquidas

Uma vez que se assume, que as fases líquidas (óleo e água) estão homogeneizadas, a massa específica do líquido pode ser definida por:

$$\rho_l = \frac{\rho_o \alpha_o + \rho_w \alpha_w}{(1 - \alpha)} \quad (19)$$

A consideração de escoamento homogêneo para as fases líquidas, permite que as velocidades do óleo e da água sejam tratadas como idênticas e iguais a da fase líquida, ou seja:  $u_o = u_w = u_l$ . A partir dessa condição, as frações volumétricas de óleo e água podem ser calculadas por:

$$\alpha_o = j_o \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \quad (20)$$

$$\alpha_w = j_w \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \quad (21)$$

### 3.3.2 Queda de pressão por atrito

O gradiente de pressão por atrito na equação de balanço de momento linear, Eq. (14), será modelado através do multiplicador de duas fases  $\varphi_{f0}^2$ , definido em Wallis (1969) como sendo a razão entre o gradiente de pressão por atrito e o gradiente de pressão, admitindo-se que o fluxo mássico total  $G$  é composto apenas por líquido  $\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l$ :

$$\varphi_{f0}^2 = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_F}{\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l} \quad (22)$$

Por meio do fator de atrito de Darcy para o líquido pode-se escrever:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_l = \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (23)$$

onde  $f_l$  é o fator de atrito para o líquido, o fluxo mássico total e  $D_{int}$  o diâmetro interno do duto. Dessa maneira, a equação de conservação de movimento linear torna-se:

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \varphi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} + \rho g \sin \theta = 0 \quad (24)$$

Através dessa abordagem, várias correlações podem ser usadas para determinar o multiplicador de duas fases. Para a aproximação do modelo homogêneo, o fator de atrito resulta:

$$\varphi_{f0}^2 = \left(\frac{f}{f_l}\right) \left(\frac{\rho_l}{\rho}\right) \quad (25)$$

Os termos  $f$  e  $f_l$  são os fatores de atrito de Darcy para a mistura e para a fase líquida respectivamente, calculados a partir da correlação de CHEN (1979). Uma vez que o fator de atrito é determinado em função do número de Reynolds  $Re$  e da rugosidade absoluta  $\epsilon/D$ , para calcular o fator de atrito para a mistura e para o líquido, devemos determinar um valor representativo para o número de Reynolds:  $Re = \frac{GD}{\mu}$  e  $Re_l = \frac{GD}{\mu_l}$ . As variáveis  $\mu_l$  e  $\mu$  representam respectivamente as viscosidades da fase líquida e da mistura e são dadas pelas seguintes relações:

$$\mu = \mu_g \alpha + \mu_o \alpha_o + \mu_w \alpha_w \quad (26)$$

$$\mu_l = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_o + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_w \quad (27)$$

A correlação de CHEN (1979) para o cálculo dos fatores de atrito, pode ser expressa por:

$$f = \left\{ -4 \log_{10} \left[ \frac{1}{3,7065} \frac{\epsilon}{D} - \frac{5,0452}{Re} \log_{10} \left( \frac{1}{2,8257} \frac{\epsilon}{D} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}} \right) \right] \right\}^{-2} \quad (28)$$

### 3.3.3 Fração de vazio

Assume-se que existe uma relação algébrica entre a fração de vazio e as condições locais de escoamento:

$$\alpha = \alpha(j_g, j_l, P, T, \theta) \quad (29)$$

Conforme consta na Eq. (29), a fração de vazio é dada em função da inclinação do duto  $\theta = \theta(s)$ . Quando o sistema apresenta inclinações negativas, o padrão de escoamento geralmente é o estratificado, enquanto para inclinações positivas, considera-se que o padrão de escoamento é intermitente, como visto em Nemoto e Baliño (2012).

A fração de vazio para trechos em que o escoamento pode ser estratificado, é calculada implicitamente, através do modelo de equilíbrio local de Taitel e Dukler (1976):

$$\frac{\tau_{wg} S_g}{\alpha} - \frac{\tau_{wl} S_l}{1 - \alpha} + \tau_i S_i \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) + (\rho_l + \rho_g) A g \sin \theta = 0 \quad (30)$$

em que  $\tau_{wg}$ ,  $\tau_{wl}$  e  $\tau_i$  são as tensões de cisalhamento, respectivamente, entre o gás e a parede, entre o líquido e a parede e entre a interface gás-líquido. As variáveis  $S_g$ ,  $S_l$  e  $S_i$  são respectivamente, os perímetros molhados: para o gás, para o líquido e para a interface gás-líquido.

A fração de vazio para trechos em que o padrão de escoamento pode ser intermitente, é determinada pelo modelo *drift flux*, elaborado por Zuber e Findlay (1965):

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d} \quad (31)$$

$$j = j_g + j_l = j_g + j_o + j_w \quad (32)$$

onde  $j_o$  e  $j_w$  são respectivamente, as velocidades superficiais do óleo e da água.

A Eq. (31) permite incorporar diversas correlações para obter a fração de vazão, em função de um conjunto de variáveis do escoamento que buscam determinar os parâmetros empíricos:  $C_d$  (parâmetro de distribuição) e  $U_d$  (velocidade de deriva). Em geral, esses parâmetros dependem do ângulo de inclinação e das condições locais de escoamento, portanto:  $C_d = C_d(\alpha, P, j, T, \theta)$  e  $U_d = U_d(\alpha, P, j, T, \theta)$ . Neste estudo, adotou-se a correlação de Bendkisen (1984) para calcular os coeficientes do modelo *drift flux*:

$$C_d = \begin{cases} 1,05 + 0,15 \sin \theta & \text{para } Fr_j < 3,5 \\ 1,2 & \text{para } Fr_j \geq 3,5 \end{cases} \quad (33)$$

$$U_d = \begin{cases} \sqrt{gD} (0,35 \sin \theta + 0,54 \cos \theta) & \text{para } Fr_j < 3,5 \\ 0,35 \sqrt{gD} \sin \theta & \text{para } Fr_j \geq 3,5 \end{cases} \quad (34)$$

onde  $Fr_j$  é o número de Froude, definido como:

$$Fr_j = \frac{j}{\sqrt{gD}} \quad (35)$$

### 3.3.4 Fluxo de calor

A potência térmica por unidade de comprimento  $q'$  é dada por:

$$q' = \frac{d\dot{Q}}{ds} \quad (36)$$

em que  $\dot{Q}$  é a potência térmica na parede interna (positiva quando sai do sistema).

Desprezando a inércia térmica das diferentes camadas de isolante no duto e a condução axial, a potência térmica por unidade de comprimento é constante ao longo da espessura do duto. Para as diferentes  $N_c$  camadas de isolante entre as paredes do duto, com condutividade  $\kappa_i$  entre  $r_i$  e  $r_{i+1}$ , conforme Bergman *et al.* (2011) podemos escrever:

$$T_i - T_{i+1} = \frac{q'}{2\pi} \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\kappa_i} \quad (37)$$

Somando nas  $N_c - 1$  camadas:

$$T_{int} - T_{ext} = \frac{q'}{2\pi} \sum_1^{N_c-1} \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\kappa_i} \quad (38)$$



Analisando a resistência térmica por condução entre as paredes internas e externas do duto:

$$q' = 2\pi \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)} (T_{int} - T_{ext}) \quad (39)$$

onde  $T_{int}$  representa a temperatura das paredes internas, enquanto  $T_{ext}$  a temperatura das paredes externas do duto.

Definindo a condutividade térmica efetiva  $\kappa_{eff}$  como:

$$T_{int} - T_{ext} = \frac{q'}{2\pi} \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{\kappa_{eff}} \quad (40)$$

resulta:

$$\kappa_{eff} = \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{\sum_1^{N-1} \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\kappa_i}} \quad (41)$$

Acrescentando a convecção interna e externa:

$$T - T_{int} = \frac{q'}{2\pi r_{int} h_{int}} \quad (42)$$

$$T_{ext} - T_{sw} = \frac{q'}{2\pi r_{ext} h_{ext}} \quad (43)$$

em que  $T_{sw}$  representa a temperatura da água do mar no lado externo.

$$T - T_{sw} = \frac{q'}{2\pi} \left( \frac{1}{r_{int} h_{int}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{\kappa_{eff}} + \frac{1}{r_{ext} h_{ext}} \right) \quad (44)$$

Definindo a condutância térmica  $UA$  através da relação:

$$q' = UA(T - T_{sw}) \quad (45)$$

resulta:

$$UA = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{int}h_{int}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{\kappa_{eff}} + \frac{1}{r_{ext}h_{ext}}} \quad (46)$$

Finalmente, o fluxo de calor interno é dado por:

$$q_0 = \frac{q'}{2\pi r_{int}} \quad (47)$$

A transferência de calor por radiação ao longo do escoamento foi negligenciada na determinação do coeficiente global de transferência de calor  $U$ , visto que esse processo é mais relevante em altas temperaturas. Essa simplificação diminui a complexidade e implementação numérica do modelo, e para sistemas de petróleo *offshore*, não acarreta desvios significativos do comportamento físico real.

O coeficiente convectivo para a convecção forçada no lado interno  $h_{int}$ , como se trata de um escoamento multifásico, depende do padrão e do regime de escoamento no *pipeline* e no *riser*.

No entanto, Tang e Ghajar (2007) propuseram uma correlação geral, válida para qualquer padrão e regime de escoamento, além de qualquer inclinação do duto, desde que ascendente para calcular o coeficiente convectivo para o fluxo interno.

O coeficiente convectivo para o fluxo externo  $h_{ext}$ , por tratar-se de um escoamento monofásico por convecção natural, pode ser obtido por correlações do número de Nusselt para cilindros longos e inclinados. Desse modo, a correlação apresentada em Churchill e Chu (1975) foi adotada.

A caracterização das diferentes variáveis, além das correlações usadas para calculá-las, serão detalhadas no Apêndice B.

### 3.3.5 Caracterização dos fluidos

O petróleo é composto por diversos componentes, mediante inúmeras ramificações, acarretando uma grande combinação de compostos, de forma que se possa inferir que não existe dois petróleos iguais. Por isso, é muito complexa a modelagem através dos componentes que formam a mistura que constitui o petróleo (DANIELSON, 2003).

Segundo McCain (1990) o petróleo pode ser caracterizado através da modelagem composicional, que considera componente a componente, ou por meio do modelo *black oil*, que

define o petróleo como composto por uma fase líquida e uma fase gasosa, na mesma composição.

A aproximação *black oil* é amplamente utilizada na indústria, proporcionando resultados satisfatórios, sobretudo para óleos mais pesados, em que a análise cromatográfica não fornece informações sobre a maioria dos componentes.

Nesse estudo foi adotado o modelo *black oil* para a caracterização dos fluidos. A aproximação *black oil* considera a existência de dois componentes na mistura, o líquido e o gás. Para uma determinada condição  $(P, T)$  o modelo *black oil* admite que a fase líquida contém gás dissolvido e quando essa fase é estabilizada na condição padrão  $(SC)$ , a fase líquida é separada em gás e líquido.

O conjunto de variáveis de entrada que caracterizam o petróleo (medido na condição de referência) são as massas específicas de referência do óleo, gás e água, representadas respectivamente por  $\rho_{o0}$ ,  $\rho_{g0}$  e  $\rho_{w0}$ , razão gás-óleo  $GOR$  e razão água-óleo  $WOR$ .

As massas específicas de óleo, gás, água e líquido nas condições locais de pressão e temperatura são calculadas por:

$$\rho_o = \frac{\rho_{o0} + \rho_{g0} R_{so}}{B_o} \quad (48)$$

$$\rho_g = \frac{\rho_{g0}}{B_g} \quad (49)$$

$$\rho_w = \frac{\rho_{w0}}{B_w} \quad (50)$$

$$\rho_l = \frac{\rho_{l0} + \rho_{g0} R_{sl}}{B_l} \quad (51)$$

em que  $B_o(P, T)$ ,  $B_g(P, T)$ ,  $B_w(P, T)$  e  $B_l(P, T)$ , são respectivamente os fatores volumes de formação de óleo, gás, água e líquido, enquanto  $R_{so}(P, T)$  e  $R_{sl}(P, T)$  são respectivamente as razões de solubilidade gás-óleo e gás-líquido. Diversas correlações *black oil* podem ser usadas para calcular essas variáveis em função da pressão, temperatura e grau API do óleo (usado como maneira alternativa para determinar a massa específica), definido como:

$$API = \frac{141,5}{\gamma_{o0}} - 131,5 \quad (52)$$

onde a densidade do óleo  $\gamma_{o0}$  (adimensional) é definida na condição de referência e é dada por:

$$\gamma_{o0} = \frac{\rho_{o0}}{\rho_{w0}} \quad (53)$$

onde  $\rho_{o0}$  é a massa específica do óleo e  $\rho_{w0} = 999.014 \text{ kg/m}^3$  é a massa específica da água, ambas na condição de referência.

### 3.3.6 Termo de transferência de massa

O modelo de transferência de massa selecionado foi o desenvolvido por Nemoto e Baliño (2012), em que foi considerada a aproximação *black oil*. Assumindo-se que a transferência de massa ocorre, devido a mudanças na solubilidade do gás à medida que o óleo escoar com velocidade:  $u_l = \frac{j_o}{\alpha_o}$ , o termo de transferência de massa entre as fases, pode ser expresso por:

$$\Gamma = -\rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right) \quad (54)$$

## 3.4 ESTADO ESTACIONÁRIO

O estado estacionário é atingido zerando-se as derivadas parciais em relação ao tempo, nas equações de transporte.

Para avaliar-se a equação do balanço de massa para a fase gás no estado estacionário, deve-se zerar a derivada com relação ao tempo na Eq. (12), resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g) = \tilde{\Gamma} \quad (55)$$

O sobrescrito  $\sim$ , será aplicado para designar as variáveis no estado estacionário. Se substituirmos a Eq.(54) na Eq.(55) e zerarmos a derivada temporal, obtém-se que:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g) = -\rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial \tilde{R}_{sl}}{\partial s} \quad (56)$$

A relação entre as razões de solubilidade do gás no líquido e no óleo pode ser expressa através da seguinte expressão:

$$R_{sl} j_{l0} = R_{so} j_{o0} \quad (57)$$

Agora se substituirmos a Eq. (57) na Eq. (56), encontra-se:

$$\frac{\partial}{\partial S} (\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g) = -\rho_{g0} j_{o0} \frac{\partial \tilde{R}_{so}}{\partial S} \quad (58)$$

Integrando a Eq. (58) em relação ao espaço, entre a condição padrão ( $SC$ ) e a condição local ( $P, T$ ), considerando que  $R_{so}(SC) = 0$  e isolando  $\tilde{j}_g$ , obtém-se:

$$\tilde{j}_g = \frac{\rho_{g0} j_{g0} - \rho_{g0} j_{o0} \tilde{R}_{so}}{\tilde{\rho}_g} \quad (59)$$

Tomando a definição do fator volume de formação de gás  $B_g$ :

$$\tilde{B}_g = \frac{\tilde{V}_g}{V_{gl0}} = \frac{\rho_{g0}}{\tilde{\rho}_g} \quad (60)$$

Efetuada algumas manipulações algébricas e substituindo a Eq.(60) na Eq.(59), encontramos que:

$$\tilde{j}_g = \tilde{B}_g (j_{g0} - j_{o0} \tilde{R}_{so}) \quad (61)$$

Por meio da definição da razão gás-óleo  $GOR$ , pode-se escrever que:

$$\tilde{j}_g = \tilde{B}_g j_{o0} (GOR - \tilde{R}_{so}) \quad (62)$$

A velocidade superficial da fase líquida pode ser dada, em função da razão óleo-água  $WOR$ , através da seguinte expressão:

$$j_{l0} = j_{o0} (1 + WOR) \quad (63)$$

Substituindo a Eq. (63) na Eq. (62), finalmente encontramos que:

$$\tilde{j}_g = \tilde{B}_g j_{l0} \left( \frac{GOR - \tilde{R}_{so}}{1 + WOR} \right) \quad (64)$$

Através da definição do fator volume de formação de óleo, conseguimos relacionar as velocidades superficiais do óleo na condição de escoamento e na condição de referência:

$$\tilde{j}_o = \tilde{B}_o j_{o0} \quad (65)$$

Substituindo a Eq. (63) na Eq. (65), encontra-se:

$$\tilde{j}_o = \tilde{B}_o \frac{j_{l0}}{(1 + WOR)} \quad (66)$$

A velocidade superficial da água, pode ser escrita em função da velocidade superficial do óleo, por meio das definições de  $B_w$  e  $WOR$ , avaliadas no estado estacionário:

$$\tilde{j}_w = \tilde{B}_w j_{o0} WOR \quad (67)$$

Somando-se as Eqs. (66) e (67), substituindo na Eq. (32) e por meio de algumas manipulações algébricas, conseguimos demonstrar que:

$$\tilde{j}_l = j_{o0} \left( \tilde{B}_o + \tilde{B}_w WOR \right) \quad (68)$$

A fração de vazio  $\alpha$  será calculada conforme o padrão de escoamento, e seus parâmetros avaliados no estado estacionário, enquanto a velocidade superficial da mistura no estado estacionário é dada pela Eq. (32).

Se dividirmos a Eq. (32) por  $\tilde{j}_o$  e efetuarmos algumas manipulações algébricas, podemos descrever a fração de óleo na mistura, através da seguinte relação entre as velocidades superficiais:

$$\tilde{\alpha}_o = \frac{(1 - \tilde{\alpha})}{1 + \frac{\tilde{j}_w}{\tilde{j}_o}} \quad (69)$$

Conseqüentemente:

$$\tilde{\alpha}_w = 1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_o \quad (70)$$

A pressão ao longo do sistema será obtida por meio da discretização da equação de conservação de movimento, Eq. (24):

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} + \tilde{\varphi}_{f0}^2 \frac{1}{2} \tilde{f}_l \frac{\tilde{G}^2}{\tilde{\rho}_l D_{int}} + \tilde{\rho} g \sin \theta = 0 \quad (71)$$

A massa específica da mistura será dada pela Eq. (15), enquanto as do óleo, gás natural, água e da fase líquida, serão obtidas por meio da aproximação *black oil*, conforme as Eqs. (48), (49), (50) e (51).

A temperatura ao longo do sistema, será obtida por meio da discretização da equação de conservação de energia, Eq. (17), uma vez que almeja-se o estado estacionário, deve-se zerar a derivada temporal. A equação de conservação de energia está acoplada com as outras equações de balanço, principalmente através das propriedades termofísicas:

$$\begin{aligned}
& \frac{q_0 P_c}{A} + g \sin \theta (\tilde{\rho}_g \tilde{j}_g + \tilde{\rho}_l \tilde{j}_l) + \frac{\partial \tilde{j}_g}{\partial s} (\tilde{\rho}_g \tilde{h}_g) + \frac{\partial \tilde{j}_l}{\partial s} (\tilde{\rho}_l \tilde{h}_l) + \\
& \frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \left( \tilde{\rho}_g \tilde{j}_g \frac{\partial \tilde{h}_g}{\partial \tilde{P}} + \tilde{j}_g \tilde{h}_g \frac{\partial \tilde{\rho}_g}{\partial \tilde{P}} + \tilde{\rho}_l \tilde{j}_l \frac{\partial \tilde{h}_l}{\partial \tilde{P}} + \tilde{j}_l \tilde{h}_l \frac{\partial \tilde{\rho}_l}{\partial \tilde{P}} \right) + \\
& \frac{\partial \tilde{T}}{\partial s} \left( \tilde{\rho}_g \tilde{j}_g \frac{\partial \tilde{h}_g}{\partial \tilde{T}} + \tilde{j}_g \tilde{h}_g \frac{\partial \tilde{\rho}_g}{\partial \tilde{T}} + \tilde{\rho}_l \tilde{j}_l \frac{\partial \tilde{h}_l}{\partial \tilde{T}} + \tilde{j}_l \tilde{h}_l \frac{\partial \tilde{\rho}_l}{\partial \tilde{T}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{72}$$

As entalpias específicas das fases gás e líquido serão calculadas de acordo com o modelo *black oil*:

$$\tilde{h}_g = \tilde{C}_{pg} \tilde{T} - \tilde{\mu}_{jg} \tilde{C}_{pg} \tilde{P} + \Delta \tilde{h}_{vap} \tag{73}$$

$$\tilde{h}_l = \frac{\tilde{\rho}_o \alpha_o \tilde{h}_o + \tilde{\rho}_w \alpha_w \tilde{h}_w}{\tilde{\rho}_l} \tag{74}$$

$$\tilde{h}_o = \tilde{C}_{po} \tilde{T} - \tilde{\mu}_{jo} \tilde{C}_{po} \tilde{P} \tag{75}$$

$$\tilde{h}_w = \tilde{C}_{pw} \tilde{T} - \tilde{\mu}_{jw} \tilde{C}_{pw} \tilde{P} \tag{76}$$

onde  $C_p$  denota o calor específico e  $\mu_j$  o coeficiente Joule - Thomson de cada fase, enquanto  $\Delta h_{vap}$  é a entalpia de vaporização do óleo.

As definições das diferentes variáveis, assim como as correlações usadas para calculá-las, serão detalhadas pelo Apêndice A.

### 3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para resolver as equações diferenciais parciais que regem o problema, é necessário definir as condições de contorno e as condições iniciais (estado estacionário).

No nó final do sistema (nó mais a jusante) situa-se o separador de produção ( $s = s_t$ ). Para este nó, definiu-se que a pressão é constante:

$$P(s_t, t) = P_s \tag{77}$$

No nó inicial do sistema (nó mais a montante) situa-se a ANM ( $s = 0$ ). Para este nó estabeleceu-se que a temperatura é constante:

$$T(0, t) = T_{ANM} \quad (78)$$

Além disso, definiu-se ainda para este nó uma condição de fluxo de massa constante das fases de óleo e gás. Para a água não há transferência de massa, enquanto para as fases de óleo e gás, a condição limite para as velocidades superficiais são compatíveis com um teste flash em condições locais na ANM:

$$j_g(0, t) = \frac{GOR - R_{so}}{1 + WOR} B_g j_{l0} \quad (79)$$

$$j_o(0, t) = \frac{B_o}{1 + WOR} j_{l0} \quad (80)$$

$$j_w(0, t) = \frac{WOR}{1 + WOR} B_w j_{l0} \quad (81)$$

A velocidade superficial do líquido na entrada pode ser definida como:

$$j_l(0, t) = j_o(0, t) + j_w(0, t) = \frac{B_o + WOR}{1 + WOR} B_w j_{l0} \quad (82)$$

As velocidades superficiais nas fronteiras variam no estado transiente, uma vez que as Eqs. (79), (80) e (81) são calculadas para as condições locais.

A pressão local na entrada pode ser obtida integrando-se a Eq. (24), ocasionando:

$$P(0, t) = P_s - \int_0^s \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right) ds \quad (83)$$

A temperatura local no separador pode ser obtida integrando-se a Eq. (17), resultando em:

$$T(s_t, t) = T_{ANM} + \int_0^s \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right) ds \quad (84)$$

### 3.6 EQUAÇÕES DINÂMICAS NA FORMA MATRICIAL

Os modelos de escoamento unidimensionais multifásicos transientes podem ser expressos na forma matricial da seguinte maneira:

$$\{A\} + \underline{B} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = \{0\} \quad (85)$$



A matriz quadrada  $\underline{B}$  (tamanho 4 x 4), representa os termos relativos às derivadas temporais, enquanto a matriz quadrada  $\underline{C}$  (tamanho 4 x 4), representa os termos relativos às derivadas espaciais.

O vetor das variáveis de estado  $\{v\}$  (tamanho 4) foi definido como:

$$\{v\} = \left\{ j_g \quad j_l \quad P \quad T \right\}^T \quad (86)$$

Finalmente as matrizes da Eq. (85), podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{A\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad A_3 \quad A_4 \right\}^T \quad (87)$$

$$A_3 = \rho g \sin \theta + \varphi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (88)$$

$$A_4 = \frac{q_0 P_C}{A} + G g \sin \theta \quad (89)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \quad (90)$$

$$B_{11} = -\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (91)$$

$$B_{12} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (92)$$

$$B_{13} = (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (93)$$

$$B_{14} = (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (94)$$

$$B_{21} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (95)$$

$$B_{22} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (96)$$

$$B_{23} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (97)$$

$$B_{24} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (98)$$

$$B_{41} = \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (99)$$

$$B_{42} = \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (100)$$

$$B_{43} = \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - (1 - \alpha) \quad (101)$$

$$B_{44} = \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} \quad (102)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \quad (103)$$

$$C_{12} = \rho_l \quad (104)$$

$$C_{13} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (105)$$

$$C_{14} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (106)$$

$$C_{21} = \rho_g \quad (107)$$

$$C_{23} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (108)$$

$$C_{24} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (109)$$

$$C_{33} = 1 \quad (110)$$

$$C_{41} = \rho_g \hat{h}_g \quad (111)$$

$$C_{42} = \rho_l \hat{h}_l \quad (112)$$

$$C_{43} = \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \quad (113)$$

$$C_{44} = \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \quad (114)$$

A dedução completa do sistema matricial a partir das equações de conservação de massa, momento linear, reescritas em função das variáveis de estado, pode ser vista no Apêndice C.

### 3.7 EQUAÇÕES DINÂMICAS PERTURBADAS

A análise de estabilidade linear, consiste em aplicar uma perturbação infinitesimal nas equações que governam o problema e posteriormente linearizá-las em torno do estado estacionário. Devido à relação algébrica entre a fração de vazio e as demais variáveis, esta pode ser eliminada, o que reduz o número de variáveis de estado. As variáveis envolvidas na dinâmica do sistema são escritas em termos de um valor de estado estacionário (dependente somente da posição) e uma perturbação (dependente da posição e do tempo). Os termos para a perturbação das variáveis de estado serão indicados pelo sobrescrito  $\wedge$ .

$$j_g = \tilde{j}_g(s) + \hat{j}_g(s, t) \quad (115)$$

$$j_l = \tilde{j}_l(s) + \hat{j}_l(s, t) \quad (116)$$

$$P = \tilde{P}(s) + \hat{P}(s, t) \quad (117)$$

$$T = \tilde{T}(s) + \hat{T}(s, t) \quad (118)$$

O vetor das variáveis de estado pode ser descrito por:

$$\{v\} = \{\tilde{v}(s)\} + \{\hat{v}(s, t)\} \quad (119)$$

Desprezando os termos de segunda ordem nas perturbações, as equações dinâmicas perturbadas podem ser escritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\tilde{\underline{A}} \cdot \{\hat{v}\} + \tilde{\underline{B}} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \tilde{\underline{C}} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} = \{0\} \quad (120)$$

onde o vetor de variáveis de estado  $\{\hat{v}\}$  (tamanho 4) e as matrizes quadradas de coeficientes constantes:  $\tilde{\underline{A}}$ ,  $\tilde{\underline{B}}$  e  $\tilde{\underline{C}}$  (tamanho  $4 \times 4$ ) são dados:

$$\tilde{A}_{ij} = \left( \frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_k \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right) \tilde{\quad} \quad (121)$$

$$\tilde{B}_{ij} = (B_{ij}) \tilde{\quad} \quad (122)$$

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij}) \tilde{\quad} \quad (123)$$

As condições de contorno para as equações dinâmicas perturbadas, são as versões linearizadas das Eqs. (77), (78), (79) e (82):

$$\hat{P}(s_t, t) = 0 \quad (124)$$

$$\hat{T}(0, t) = 0 \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_g(0, t) = & \left[ (GOR - \tilde{R}_{so}) \left( \frac{\partial B_g}{\partial P} \right) \tilde{\quad} - \tilde{B}_g \left( \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right) \tilde{\quad} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{P}(0, t) + \\ & \left[ (GOR - \tilde{R}_{so}) \left( \frac{\partial B_g}{\partial T} \right) \tilde{\quad} - \tilde{B}_g \left( \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \right) \tilde{\quad} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{T}(s_t, t) \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_l(0, t) = & \left[ \left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right) \tilde{\quad} + WOR \left( \frac{\partial B_w}{\partial P} \right) \tilde{\quad} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{P}(0, t) + \\ & \left[ \left( \frac{\partial B_o}{\partial T} \right) \tilde{\quad} + WOR \left( \frac{\partial B_w}{\partial T} \right) \tilde{\quad} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \hat{T}(s_t, t) \end{aligned} \quad (127)$$

## 4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo apresenta-se a formulação matemática desenvolvida para discretizar as equações dinâmicas perturbadas, o critério de estabilidade para se avaliar o estado estacionário a partir do cálculo dos autovalores e autovetores generalizados e o procedimento numérico adotado para construção dos mapas de estabilidade.

### 4.1 GEOMETRIA DO SISTEMA DE PRODUÇÃO

O modelo matemático desenvolvido foi implementado numericamente no software *Matlab* (MAGRAB *et al.* (2010)) e permite a análise de diversas geometrias. A discretização é realizada considerando o primeiro nó na ANM e o último nó no separador. Na presente dissertação, a geometria avaliada é apresentada genericamente pela Figura 3. A origem do sistema de coordenadas foi definido na ANM, localizada no fundo do mar. A geometria é então discretizada em  $N$  nós e o sistema matricial perturbado é integrado ao longo da *flowline*.

### 4.2 DISCRETIZAÇÃO

O comprimento do duto é discretizado em  $N$  nós e a Eq. (120) é integrada no intervalo  $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ . Valores representativos para qualquer função  $\phi$  ou qualquer variável dentro do intervalo de integração são calculados através do valor médio entre os nós adjacentes:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} [\phi(\tilde{v}_i) + \phi(\tilde{v}_{i+1})] \quad (128)$$

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} (\hat{v}_i + \hat{v}_{i+1}) \quad (129)$$

As derivadas temporais e espaciais são aproximadas pelo do método das diferenças finitas:

$$\left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{(\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i)}{\Delta s_i} \quad (130)$$

$$\left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{d\hat{v}_i}{dt} + \frac{d\hat{v}_{i+1}}{dt} \right) \quad (131)$$

onde  $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ .

Uma vez que existem  $N - 1$  intervalos espaciais,  $4N - 4$  equações diferenciais ordinárias são obtidas em função dos valores nodais das perturbações das variáveis de estado. Para fechar matematicamente o problema, é acrescentado ao sistema de equações as versões linearizadas das condições de contorno, ou seja, a Eq. (124) aplicada ao último nó, assim como as Eqs. (125), (126) e (127) aplicadas ao primeiro nó:

$$\hat{P}_N = 0 \quad (132)$$

$$\hat{T}_1 = 0 \quad (133)$$

$$\hat{j}_{g1} + C_{gp1} \hat{P}_1 + C_{gt1} \hat{T}_N = 0 \quad (134)$$

$$\hat{j}_{l1} + C_{lp1} \hat{P}_1 + C_{lt1} \hat{T}_N = 0 \quad (135)$$

onde:

$$C_{gp1} = \left[ \left( GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left( \frac{\partial B_g}{\partial P} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left( \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (136)$$

$$C_{gt1} = \left[ \left( GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left( \frac{\partial B_g}{\partial T} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left( \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (137)$$

$$C_{lp1} = \left[ \left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right)^{\sim} + WOR \left( \frac{\partial B_w}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (138)$$

$$C_{lt1} = \left[ \left( \frac{\partial B_o}{\partial T} \right)^{\sim} + WOR \left( \frac{\partial B_w}{\partial T} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (139)$$

### 4.3 ESPECTRO DE AUTOVALORES E CRITÉRIO DE ESTABILIDADE

Discretizando e integrando as equações perturbadas em relação à posição e incluindo quatro linhas adicionais correspondentes as condições de contorno, obtém-se o seguinte sistema discreto em notação matricial:

$$\underline{G}^* \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \underline{H}^* \cdot \{ \hat{v} \} = \{ 0 \} \quad (140)$$

$$\{\hat{v}\}_j = \begin{cases} \hat{J}_{gj} & 1 \leq j \leq N \\ \hat{J}_{l_{j-N}} & N + 1 \leq j \leq 2N \\ \hat{P}_{j-2N} & 2N + 1 \leq j \leq 3N \\ \hat{T}_{j-3N} & 3N + 1 \leq j \leq 4N \end{cases} \quad (141)$$

em que  $\underline{G}^*$  e  $\underline{H}^*$  são matrizes quadradas de ordem  $(4N \times 4N)$  que são funções dos valores nodais da solução estacionária e  $\hat{v}$  é o vetor de perturbações das variáveis de estado (ordem  $4N$ ). A seguinte transformação é aplicada ao sistema:

$$\{\hat{v}\} = \{\hat{r}\} \exp(\lambda t) \quad (142)$$

Na Eq. (142) os parâmetros  $\lambda$  e  $\{\hat{r}\}$  representam respectivamente o conjunto de autovalores e os autovetores nodais associados. Por meio das Eqs. (140) e (142) encontra-se:

$$(\lambda \underline{G}^* + \underline{H}^*) \cdot \{\hat{r}\} = \{0\} \quad (143)$$

A transformação expressa pela Eq. (142) transforma a Eq. (140) em um problema de autovalores generalizado. Portanto, a Eq. (143) possui uma solução não-trivial quando satisfaz a equação característica:

$$\det(\lambda \underline{G}^* + \underline{H}^*) = 0 \quad (144)$$

Desse modo, é possível construir a curva de estabilidade neutra, que pode ser definida como uma hiper-superfície no espaço de parâmetros do sistema em que a maior parte real dos autovalores é igual a zero. A curva de estabilidade neutra representa a fronteira entre a regiões com escoamento instável e estável. Na região interna da curva situam-se os pontos de operação instáveis, enquanto na região externa encontram-se os pontos estáveis.

O julgamento da estabilidade do escoamento é feito analisando o espectro de autovalores  $\lambda$ . Se houver qualquer autovalor com parte real positiva, as perturbações serão amplificadas e o sistema torna-se instável. Se todos os autovalores apresentarem parte real negativa, as perturbações serão amortecidas e o sistema será estável.

## 4.4 PROCEDIMENTO NUMÉRICO

O procedimento numérico é dividido em duas etapas: a primeira consiste em se determinar a estabilidade de um determinado estado estacionário. A segunda consiste em, a partir do comportamento estável/instável de diversos estados estacionários, obter a curva de estabilidade neutra, ou fronteira de estabilidade, que delimita a região estável da região instável no espaço de parâmetros no plano das velocidades superficiais.

### 4.4.1 Estabilidade do estado estacionário

O primeiro passo para a construção dos mapas de estabilidade é obter o estado estacionário. Aqui, será descrito sequencialmente o procedimento adotado para elaboração das rotinas implementadas no software *Matlab* (MAGRAB *et al.* (2010)). Além disso, também será detalhado a implementação do método da estabilidade linear. Esse procedimento foi baseado nas rotinas elaboradas por Azevedo *et al.* (2015) e ANDREOLLI *et al.* (2017).

Inicialmente, definem-se as condições gerais do escoamento: grau API  $\gamma_{API}$ , massa específica da água na condição de referência  $\rho_{w0}$ , a razão água-óleo  $WOR$ , a densidade do gás  $\gamma_{g0}$  e a aceleração da gravidade local  $g$ .

As características geométricas da tubulação também são definidas: coordenadas, horizontal  $X_r$  e vertical  $Z_r$  do topo do *riser*, número de nós  $N$  internos aos nós principais, rugosidade  $\epsilon$  e diâmetros interno  $D_{int}$  e externo  $D_{ext}$  do duto.

Definem-se, as propriedades gerais do modelo para a construção da curva de estabilidade neutra: as velocidades superficiais na condição de referência  $j_{g0}$  e  $j_{l0}$ , precisão de cálculo, fator de sub-relaxamento e as razões gás-óleo  $GOR$  que definem o número de pontos da curva. Para cada  $GOR$  as rotinas calculam o respectivo ponto na fronteira de estabilidade por meio de um algoritmo de convergência que será detalhado na Seção 4.4.2.

Em sequência, definem-se as condições de contorno: pressão constante no separador  $P_s$ , temperatura constante na ANM  $T_{ANM}$  e as vazões mássicas constantes na entrada da tubulação, situadas no primeiro nó, calculadas a partir do processo termodinâmico de *flash* (modelo *black oil*) utilizando-se a velocidade superficial  $j_{l0}$  e as razões  $GOR$  e  $WOR$ . Ainda são definidas: o tipo de correlação da fração de vazio por padrão de escoamento (Bendiksen, Chexal, Bghawat ou Teoria de Equilíbrio local) e o tipo de correlação para o multiplicador de duas fases por padrão de escoamento (Mistura homogênea, Muller, Friedel ou Teoria de Equilíbrio local). Uma vez



que todos os parâmetros foram definidos, determina-se a geometria do sistema *pipeline-riser*, em função da discretização considerada (número de nós). Com todas as propriedades e condições do escoamento definidas, realiza-se o cálculo do estado estacionário com base nas equações da Seção 3.4. O cálculo é iterativo visto a dependência da pressão e temperatura nas equações constitutivas e nas leis de fechamento. A iteração é feita continuamente em cada nó.

A pressão é calculada a partir da plataforma, visto que a pressão é conhecida no separador. Em seguida, através dos valores de  $Q_{o0}$ ,  $G_{OR}$  e  $W_{OR}$  calcula-se  $j_g$  e  $j_l$  no último nó e determina-se, em função da inclinação local, o padrão de escoamento. Uma vez que o padrão de escoamento no nó  $N$  é conhecido, definem-se as correlações de fração de vazio e de multiplicador de duas fases e conseqüentemente, determina-se a fração de vazio no nó  $N$ .

O cálculo da pressão ao longo da tubulação é realizado a partir da discretização em  $N$  nós da Eq. (24), resultando:

$$P_{i-1} = P_i + \bar{\rho}_m g (z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{2} \overline{\phi_{f0}^2 f_l} \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (145)$$

Para  $N \geq i \geq 2$ . O traço superior denota o valor médio dado por:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi_{i-1} + \varphi_i) \quad (146)$$

Além de convergir a pressão, simultaneamente também devemos convergir a temperatura. A temperatura é calculada a partir da entrada do duto, visto que a temperatura é conhecida na ANM. Dada a temperatura no nó 1, o método estima sequencialmente a temperatura  $T_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq N - 1$ . O algoritmo é descrito como segue:

1. Definir uma estimativa inicial para os valores de pressão e temperatura;
2. Calcular as quantidades preditas com  $P_{i-1}^{pred}$ ,  $j_{g,i-1}^{pred}$  e  $j_{l,i-1}^{pred}$  a partir de respectivamente as Eqs. (145), (64) e (68).
3. Calcular  $T_{i+1}^{pred}$  a partir da Eq. (72).
4. Testar a convergência para  $P_i$  e  $T_i$  usando:

$$\varepsilon_1 = \frac{|P_i^{pred} - P_i|}{P_i} \quad (147)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{|T_i^{pred} - T_i|}{T_i} \quad (148)$$

5. Se  $\varepsilon_1 \leq \delta$  e  $\varepsilon_2 \leq \delta$  ( $\delta = 10^{-4}$  nesse teste) houve convergência para  $P_i$  e  $T_i$ . Senão, define-se uma nova iteração:

$$P_i = P_i + \zeta (P_i^{pred} - P_i) \quad (149)$$

$$T_i = T_i + \zeta (T_i^{pred} - T_i) \quad (150)$$

onde  $\zeta$  é o fator de sub-relaxamento ( $0 < \zeta \leq 1$ ) e retorna ao passo 2.

Calculado o estado estacionário, a próxima etapa é determinar os parâmetros das matrizes  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  do sistema contínuo, conforme Seção 3.7, e construir as matrizes  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  do sistema discreto. Finalmente, faz-se o cálculo dos autovalores.

Como a matriz  $\underline{G}$  não tem posto cheio, despreza-se a parte não finita dos autovalores, de ordem  $N - 1$ , referente as equações de conservação de momento e energia. Organizam-se os autovalores finitos em função da parte real, da maior para a menor.

O procedimento numérico para efetuar o cálculo dos autovalores foi desenvolvido através da sub-rotina EIGS. Ela é a implementação do código ARPACK, que é um conjunto de rotinas, inicialmente desenvolvido em Fortran 77 para resolver em larga escala problemas de autovalores e foi baseado em uma variação do processo de Arnoldi chamado Método do Reinício Implícito Arnoldi/Lanczos (IRAM). As rotinas do ARPACK são capazes de resolver problemas em grande escala simétricas, não simétricas e/ou problemas generalizados. Elas foram programadas para computar um subconjunto de valores próprios com recursos especificados pelo usuário, como os autovalores de maior parte real. Para cada solicitação, um conjunto de dados numéricos e precisos estão disponíveis (LEHOUCQ *et al.*, 1997).

#### 4.4.2 Construção da curva de estabilidade neutra

Nesta seção, apresenta-se uma rotina que procura a curva de estabilidade, iniciando a busca por um ponto localizado na região superior (baixa velocidade de gás e alta velocidade de líquido). Adota-se um método de bisseção para se determinar, com a precisão desejada, a condição de estabilidade neutra ou fronteira de estabilidade.

No presente trabalho os mapas de estabilidade foram obtidos, considerando a  $WOR$  constante. Além disso, em cada iteração para encontrar o ponto sobre a fronteira de estabilidade a  $GOR$  também foi mantida constante. Nesse processo varia-se a  $Q_{o0}$  e, conseqüentemente,  $Q_{g0}$  para manter constante a razão  $GOR$  até encontrar o ponto sobre a fronteira de estabilidade segundo um critério de convergência. Em um mapa construído com base em um plano cartesiano, sendo o eixo das abscissas dado por  $Q_{g0}$  e o eixo das ordenadas dado por  $Q_{o0}$ , cada reta que cruza a origem dos eixos define uma mistura de hidrocarbonetos específica, dado que a inclinação da reta é definida pelo inverso de  $GOR$ . Portanto, o mapa apresenta as regiões estáveis e instáveis para uma determinada geometria e um  $WOR$  fixo e contempla todos os  $GOR$  possíveis. Optou-se por se utilizar as variáveis de estado  $j_{o0}$  e  $j_{g0}$ , na construção dos mapas, ao invés das vazões volumétricas. Desse modo, as retas que cruzam a origem dos eixos continuam a definir diferentes misturas de hidrocarbonetos, uma vez que a inclinação de cada reta ainda equivale ao inverso da  $GOR$ .

De modo a permitir uma visualização mais detalhada para baixos valores de velocidades superficiais, é comum o uso do plano log-log para apresentação dos mapas de estabilidade. Os planos de estabilidade construídos no Capítulo 5 foram obtidos plotando-se, em escala log-log, no eixo horizontal  $j_{g0}$  e no eixo vertical  $j_{o0}$  fixando uma  $WOR$ . Observou-se que existe grande diferença entre a ordem de grandeza dessas duas variáveis de estado e critérios gerais baseados na bissecção como apresentado por Azevedo (2017) necessitam de inúmeras linhas de  $GOR$  para que o traçado do mapa seja representado adequadamente em todo o domínio de velocidades superficiais. Para tornar a determinação do mapa mais rápida, um conjunto de  $GOR$  representativas para o traçado são inseridos na rotina. Cada  $GOR$  representa uma linha que cruza a fronteira de estabilidade e o ponto sobre a curva é determinado com a precisão desejada. Ao se variar o conjunto de  $GOR$ , mantêm-se constantes a  $WOR$ ,  $P_s$  e  $T_{ANM}$ .

Inicialmente, define-se um ponto qualquer, no plano de velocidades superficiais. Verifica-se a estabilidade deste ponto. Aumenta-se a velocidade superficial de óleo em um incremento  $\Delta j_{o0}$  e define-se um novo ponto sobre a linha. Verifica-se a estabilidade deste ponto. Caso o mesmo seja instável, aumenta-se a velocidade de óleo em um incremento  $\Delta j_{o0}$ , caso contrário, subtrai-se da velocidade de óleo um valor  $\Delta j_{o0}/2$ . O procedimento segue até que se cruze a fronteira de estabilidade.

A cada nova iteração em que a fronteira de estabilidade é cruzada, o valor incremental é reduzido a metade e a operação de soma ou subtração é invertida. Dessa maneira, sucessi-

vamente, após  $k$  iterações obtém-se o primeiro ponto sobre a curva de estabilidade, tal que  $|(j_{o0}^{(k)} - j_{o0}^{(k-1)})/j_{o0}^{(k)}|$  seja menor que a precisão desejada.

Repete-se esse procedimento para cada  $GOR$ , obtendo-se assim a curva de estabilidade para um conjunto  $WOR$ ,  $P_s$  e  $T_{ANM}$  fixo. O procedimento pode ser repetido para outros conjuntos de  $WOR$ ,  $P_s$  e  $T_{ANM}$  obtendo-se assim outras curvas de estabilidade neutra.

## 5 RESULTADOS

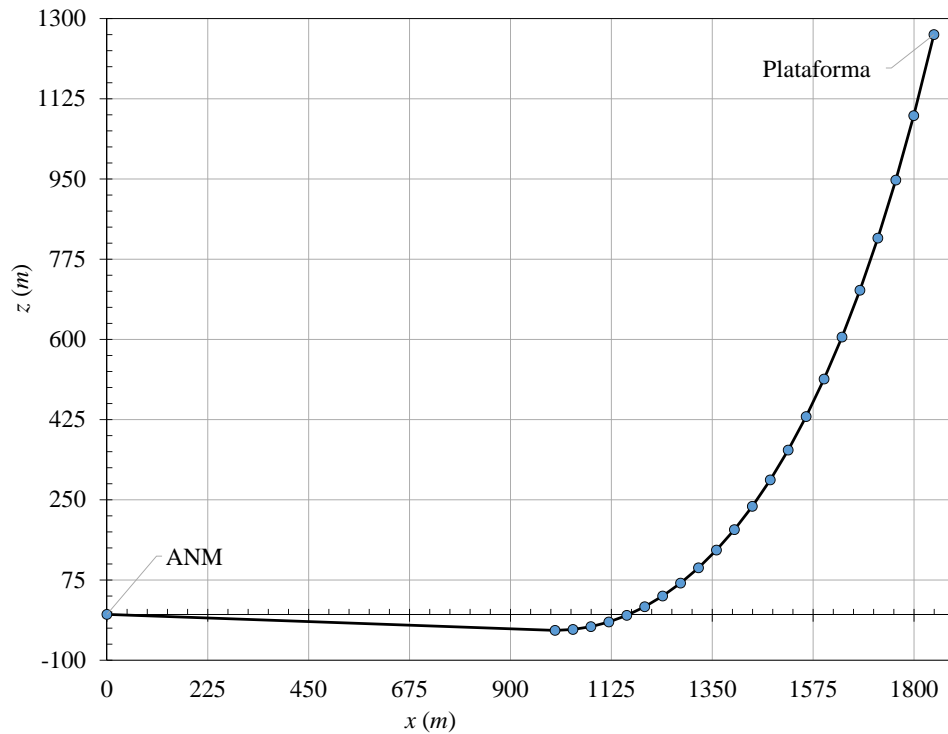
Neste capítulo são apresentados os principais resultados para a análise do estado estacionário, assim como do modelo dinâmico para avaliação da estabilidade do escoamento e um estudo de convergência, além de comparações entre resultados obtidos para cada um dos modelos e validações com dados experimentais e numéricos de outras referências. Ainda será vista uma interpretação do fenômeno de intermitência severa considerando os efeitos térmicos. A análise com base em estudo da literatura confronta o estado estacionário e as curvas de estabilidade obtidas pelo modelo proposto com os resultados encontrados por meio de simulações numéricas isotérmicas realizadas por Andreolli *et al.* (2018). A análise de convergência avalia a influência do número de nós nas simulações realizadas.

### 5.1 ESTADO ESTACIONÁRIO

O estado estacionário foi avaliado em um sistema de geometria catenária com dimensões semelhantes aos sistemas reais de produção de petróleo e foi publicado em Magalhães *et al.* (2022). O intuito é avaliar as principais variáveis do estado estacionário no escoamento multifásico de petróleo sob condições de altas pressões. A geometria considerada nessa análise é a geometria apresentada na Figura 4. Essa geometria é a mesma utilizada por Nemoto e Baliño (2012). A origem do sistema de coordenadas é apresentado na Figura 3. Foram observadas as velocidades superficiais de gás  $j_g$  e de líquido  $j_l$ , a fração de vazio  $\alpha$  e ainda os campos de pressão  $P$  e temperatura  $T$ . Os parâmetros gerais de entrada para as simulações são mostrados pela Tabela 1. Esses parâmetros expressam condições operacionais, propriedades termofísicas e aspectos construtivos do duto. O estado estacionário foi avaliado considerando-se parâmetros distribuídos na *flowline*.

A Figura 5 apresenta o campo de temperatura ao longo do escoamento. Observa-se que a temperatura máxima ocorre na base do *pipeline* e que a temperatura decresce ao longo do escoamento. O descenso de temperatura obtido foi de aproximadamente  $12\text{ K}$ . Também pode ser visto que não existem descontinuidades na distribuição de temperatura.

Figura 4 – Geometria do sistema, adaptada de Nemoto e Baliño (2012).



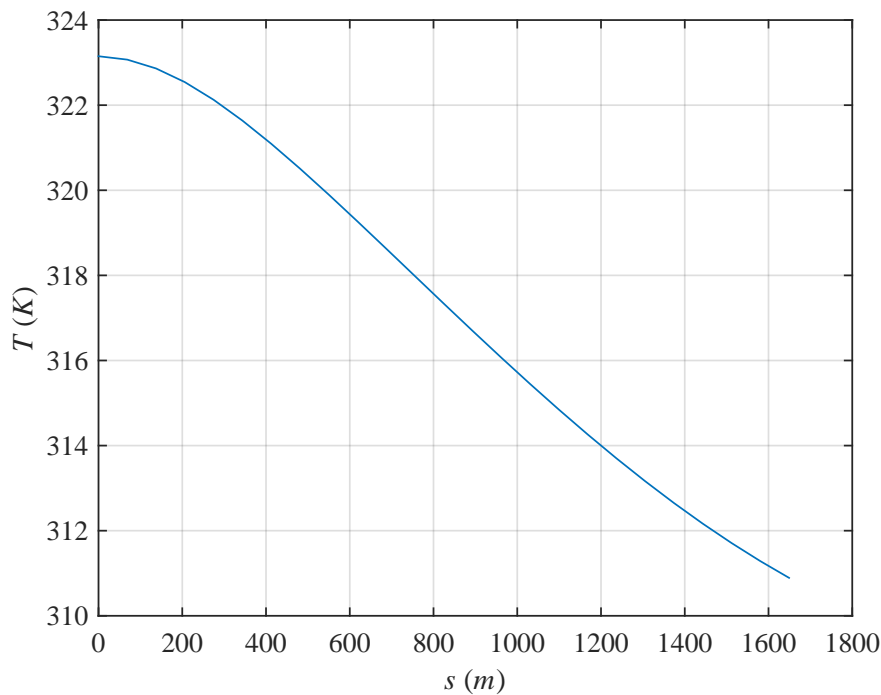
Fonte: Nemoto e Baliño (2012).

Tabela 1 – Parâmetros gerais de entrada para as simulações.

Símbolo	Variável	Valor
$D_{ext}$	Diâmetro externo	0,3693 m
$\kappa_{eff}$	Condutividade térmica efetiva	4 W/(m K)
$N$	Número de nós	101
$L$	Comprimento do <i>pipeline</i>	1000 m
$\gamma_{API}$	$^{\circ}API$	19
$\gamma_{g0}$	Massa específica do gás	0,6602
$\dot{j}_{o0}$	Velocidade superficial de óleo na condição de referência	0,5 m/s
$\dot{j}_{g0}$	Velocidade superficial de gás na condição de referência	50 m/s
$\rho_w$	Massa específica da água	999,014 kg/m <sup>3</sup>
$T_{ANM}$	Temperatura na ANM	323,15 K
$\varepsilon$	Rugosidade	$4,5 \times 10^{-5}$ m
$P_s$	Pressão no separador	25 bar
$\rho_{sw}$	Massa específica da água do mar	1024 kg/m <sup>3</sup>
$T_{sw}$	Temperatura da água do mar	277,15 K
$GOR$	Razão gás-óleo	145 sm <sup>3</sup> /sm <sup>3</sup>
$WOR$	Razão água-óleo	30%
$D$	Diâmetro interno	0,1016 m
$\beta$	Ângulo de inclinação do <i>pipeline</i>	2°
$X_r$	Comprimento horizontal do topo do riser	845 m
$Z_r$	Altura do topo do riser	1300 m

Fonte: Próprio autor.

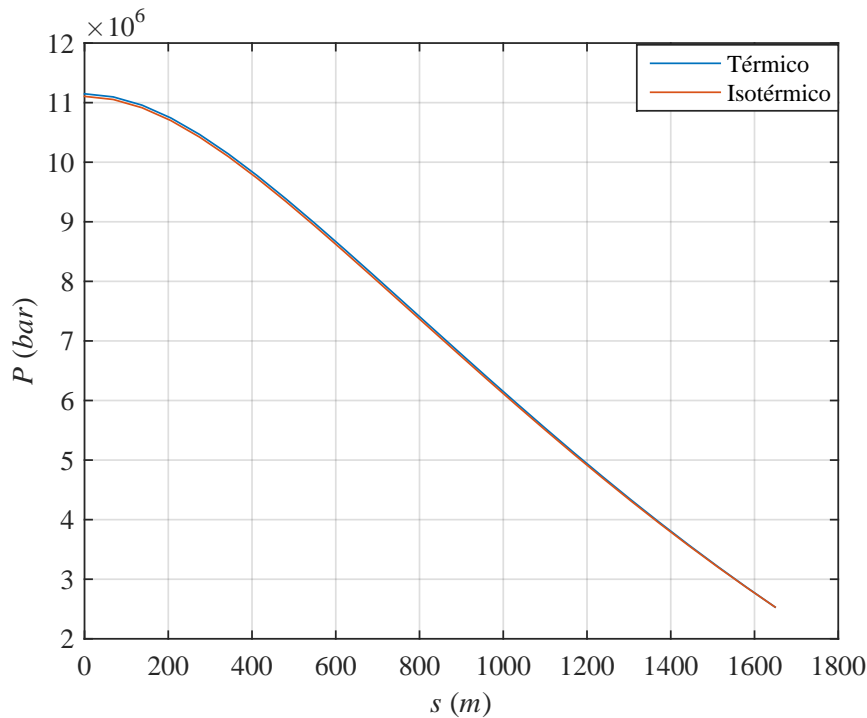
**Figura 5 – Perfil de temperatura obtido através dos parâmetros da Tabela 1.**



**Fonte: Próprio autor.**

A Figura 6 exibe o campo de pressão ao longo do escoamento. A curva em azul representa os resultados para o modelo que inclui os efeitos térmicos, enquanto a curva em laranja a temperatura constante na ANM usada pelo modelo isotérmico, baseado em Andreolli *et al.* (2018). Em ambos os casos, a maior pressão observada ocorre na base do *pipeline* e a pressão decresce ao longo do escoamento. Os descensos de pressão foram de aproximadamente 85 *bar*. Observa-se ainda que não existem descontinuidades nas distribuições de pressão. As pressões calculadas pelo modelo térmico são maiores do que as obtidas pelo modelo isotérmico. A diferença entre elas foi de aproximadamente 1,2%. Esses desvios ocorreram devido ao efeito da temperatura na transferência de massa (vaporização), compressibilidade, expansão e propriedades termofísicas das fases.

**Figura 6 – Perfis de pressão obtidos através dos parâmetros da Tabela 1.**

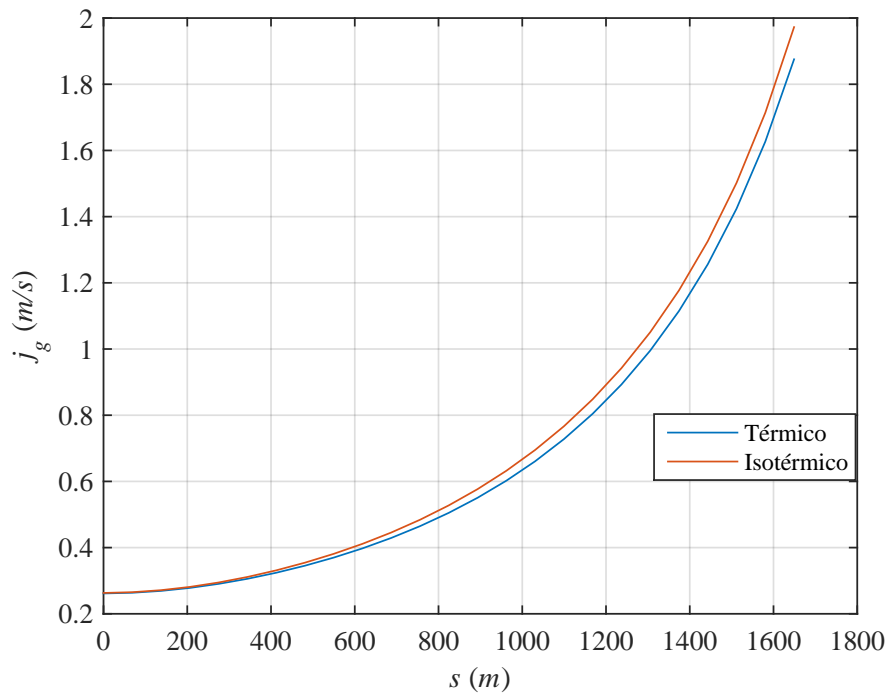


**Fonte: Próprio autor.**

A Figura 7 mostra a distribuição da velocidade superficial de gás ao longo do escoamento. A curva em azul representa os resultados para o modelo que inclui os efeitos térmicos, enquanto a curva em laranja a temperatura constante na ANM usada pelo modelo isotérmico, baseado em Andreolli *et al.* (2018). Em ambos os casos, a maior velocidade superficial de gás observada ocorreu no topo do *riser* e a velocidade superficial de gás aumenta ao longo do escoamento. Os perfis de velocidade superficial de gás apresentaram uma variação de aproximadamente  $1,7 \text{ m/s}$ . Observa-se ainda que não existem descontinuidades nos perfis de velocidade superficial de gás. As velocidades superficiais calculadas pelo modelo isotérmico são maiores do que as obtidas pelo modelo térmico. A diferença entre elas foi de aproximadamente  $2,5 \%$ . Esses desvios ocorreram devido ao efeito da temperatura na transferência de massa (vaporização) dos diferentes hidrocarbonetos que compõem o petróleo.



**Figura 7 – Perfis de velocidade superficial de gás obtidos através dos parâmetros da Tabela 1.**

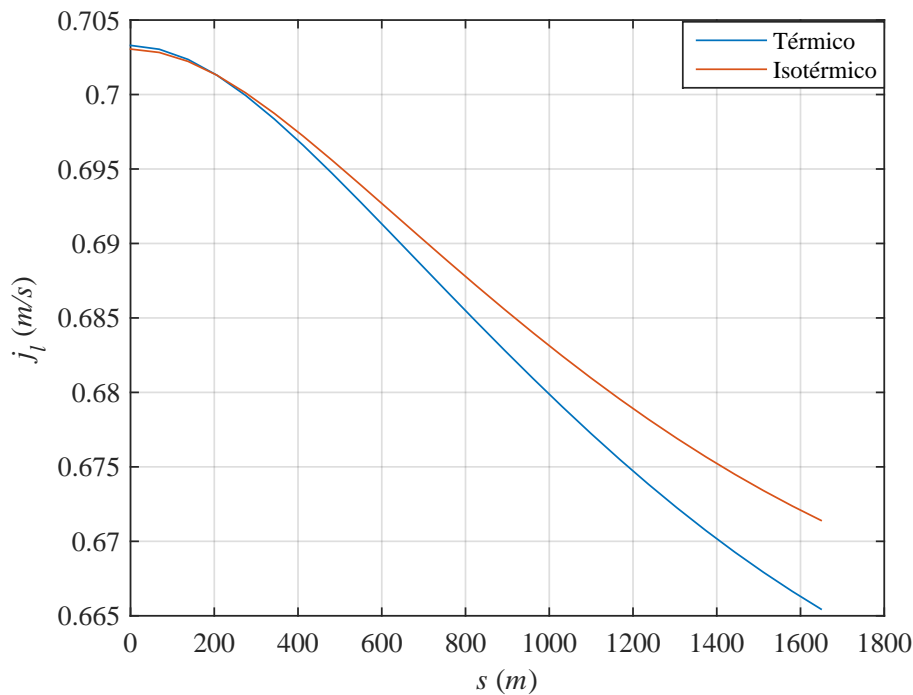


**Fonte: Próprio autor.**

A Figura 8 apresenta a distribuição da velocidade superficial de líquido ao longo do escoamento. A curva em azul representa os resultados para o modelo que inclui os efeitos térmicos, enquanto a curva em laranja a temperatura constante na ANM usada pelo modelo isotérmico, baseado em Andreolli *et al.* (2018). Em ambos os casos, a maior velocidade superficial de líquido observada ocorreu na base do *pipeline* e a velocidade superficial de líquido decresce ao longo do escoamento. Os perfis de velocidade superficial de líquido apresentaram uma variação de aproximadamente  $0,04\text{ m/s}$ . Observa-se ainda que não existem descontinuidades nos perfis de velocidade superficial de líquido. As velocidades superficiais calculadas pelo modelo isotérmico são maiores do que as obtidas pelo modelo térmico, exceto na região de entrada do *riser*. A diferença entre elas foi de aproximadamente  $0,8\%$ . Esses desvios ocorreram devido ao efeito da temperatura na transferência de massa (vaporização) dos diferentes hidrocarbonetos que compõem o petróleo.

A Figura 9 apresenta a distribuição da fração de vazio ao longo do escoamento. A curva em azul representa os resultados para o modelo que inclui os efeitos térmicos, enquanto a curva em laranja a temperatura constante na ANM usada pelo modelo isotérmico, baseado em Andreolli *et al.* (2018). Em ambos os casos, a maior fração de vazio observada ocorreu no topo do

**Figura 8 – Perfis de velocidade superficial de líquido obtidos através dos parâmetros da Tabela 1.**



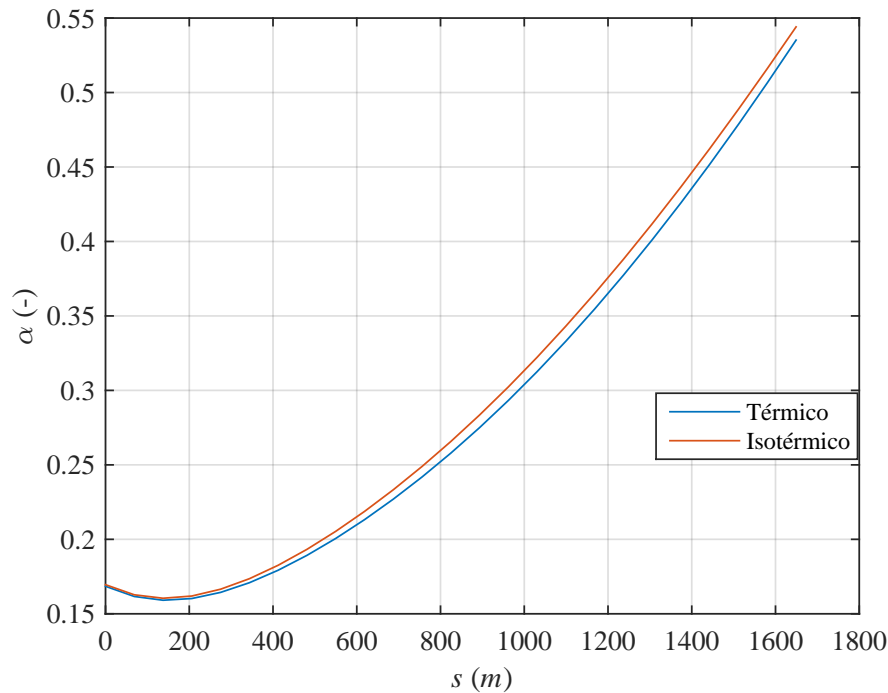
**Fonte: Próprio autor.**

*riser* e a fração de vazio aumenta ao longo do escoamento. As baixas frações de vazio na base do riser, indicam uma região de acúmulo de líquido no pipeline. Os perfis de fração de vazio tiveram uma variação de aproximadamente 0,35. Observa-se ainda que não existem descontinuidades nos perfis de fração de vazio. As frações de vazio calculadas pelo modelo isotérmico são maiores do que as obtidas pelo modelo térmico. A diferença entre elas foi de aproximadamente 3,3%. Esses desvios ocorreram devido ao efeito da temperatura na transferência de massa (vaporização) dos diferentes hidrocarbonetos que compõem o petróleo.

## 5.2 CONVERGÊNCIA DO MODELO

A análise dos autovalores permite avaliar a consistência do modelo numérico. A geometria considerada nessa análise é a apresentada na Figura 4. O objetivo de se utilizar uma geometria de dimensões encontradas em campos produtores de petróleo foi avaliar o comportamento dos autovalores do modelo quando aplicado para um sistema que possui vazões da ordem de grandeza das vazões observadas em campo onde fenômenos complexos, tais como: transferência de massa, expansão e compressibilidade das fases são mais relevantes. O comportamento do maior

**Figura 9 – Perfis de fração de vazio obtidos através dos parâmetros da Tabela 1.**

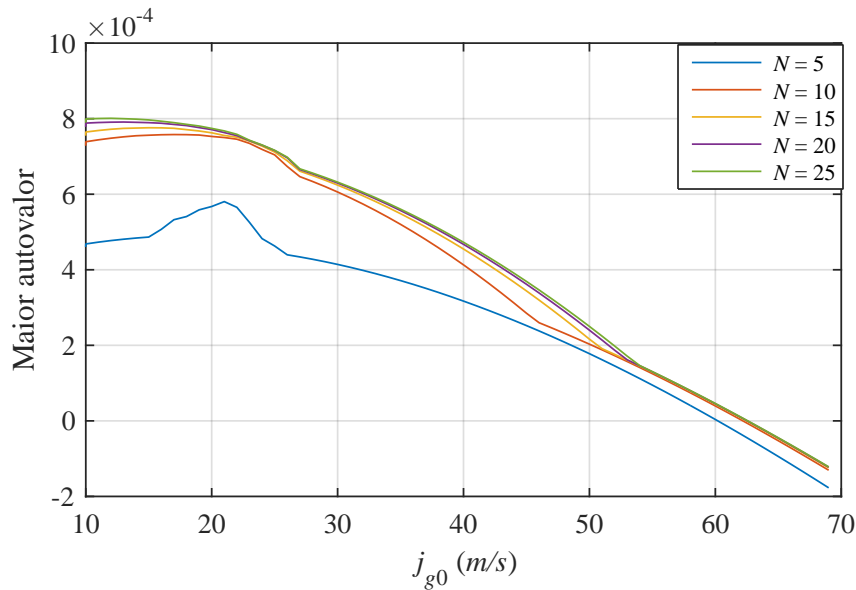


**Fonte: Próprio autor.**

autovalor para cada velocidade superficial de gás foi avaliado aumentando-se a discretização e mantendo-se a velocidade superficial de óleo fixa  $j_{o0} = 0,2 \text{ m/s}$ . Os dados de entrada são exibidos pela Tabela 1, exceto a velocidade superficial de gás visto que essa foi considerada variável.

A Figura 10 apresenta o comportamento da parte real do maior autovalor na proximidade da condição de estabilidade, variando-se a discretização. Nota-se que de fato ocorre a convergência do maior autovalor para todas as velocidades superficiais a medida que a discretização é aumentada. Observa-se que em todos os casos, para baixas velocidades superficiais de gás,  $0 \leq j_{g0} \leq 10 \text{ m/s}$ , o escoamento é estável (o maior autovalor é negativo), enquanto para as demais velocidades superficiais o escoamento é instável (o maior autovalor é positivo). A fronteira de estabilidade (o maior autovalor é igual a zero) ocorreu próxima de  $j_{g0} \approx 60 \text{ m/s}$ , estando em concordância com o mapa de estabilidade apresentado a seguir pela Figura 11. Observa-se ainda que solução varia pouco com a nodalização a partir da discretização com 20 nós e que conseqüentemente uma maior nodalização alteraria pouco os resultados das simulações, embora torne a análise mais precisa.

**Figura 10 – Comportamento do maior autovalor obtido variando-se a discretização da Figura 4.**

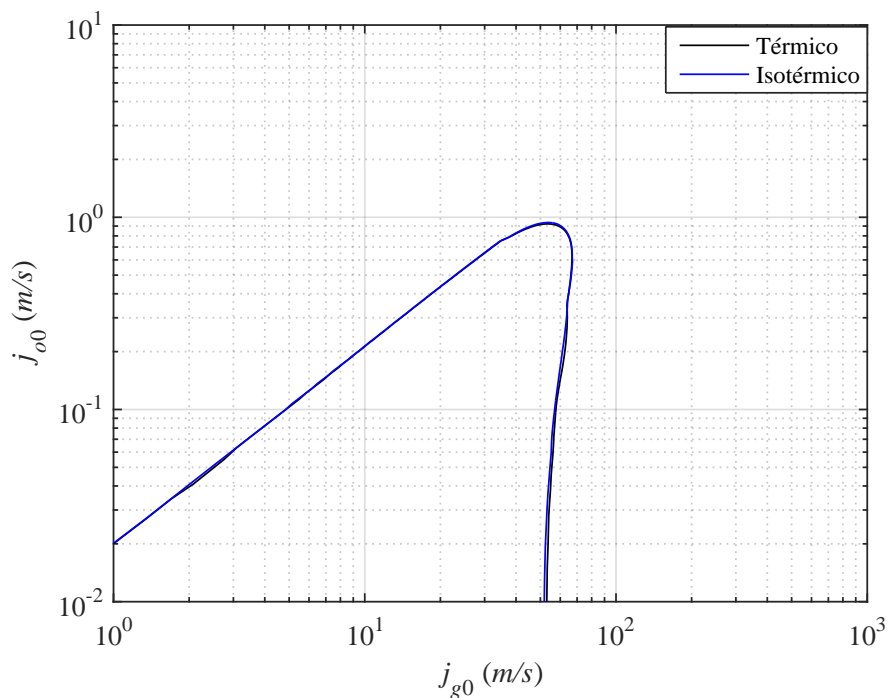


**Fonte: Próprio autor.**

### 5.3 MAPAS DE ESTABILIDADE

A geometria considerada para avaliar a estabilidade do escoamento, é a geometria apresentada na Figura 4. Novamente, a Tabela 1 apresenta os parâmetros de entrada para as simulações realizadas. A curva de estabilidade neutra obtida pelo modelo proposto será confrontada com a fronteira de estabilidade encontrada por uma análise isotérmica similar, baseada em Andreolli *et al.* (2018). Em ambas as análises, foi considerado parâmetros distribuídos na *flowline*. Apesar das diferenças nos modelos, devido à inclusão dos efeitos térmicos, espera-se que as curvas de estabilidade apresentem um traçado semelhante. A Figura 11 exhibe os diferentes mapas de estabilidade obtidos.

Figura 11 – Mapas de estabilidade obtidos com os parâmetros da Tabela 1.



Fonte: Próprio autor.

Nota-se que de fato existem pequenas diferenças entre as curvas, indicando que o presente modelo consegue capturar a fronteira de estabilidade sem a necessidade da aproximação isotérmica. Observa-se ainda que em todo o domínio de velocidades superficiais houve convergência entre os modelos. Os efeitos térmicos alteraram a fronteira de estabilidade para uma velocidade superficial de gás crítica aproximadamente 3,2% maior. Esses desvios ocorreram devido ao efeito da temperatura na transferência de massa (vaporização), compressibilidade, expansão e propriedades termofísicas das fases.

#### 5.4 ESTUDO PARAMÉTRICO

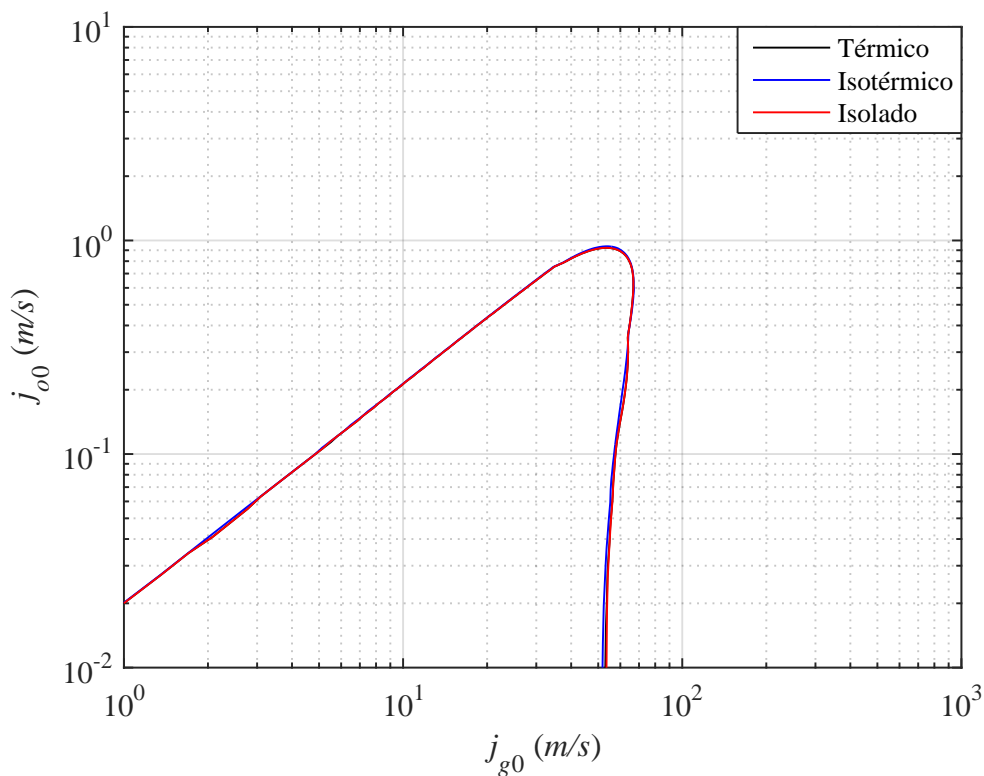
Com o intuito de avaliar os efeitos sobre o estado estacionário e a fronteira de estabilidade da variação de diferentes parâmetros usados na caracterização do escoamento, um estudo paramétrico foi realizado.

Os parâmetros considerados no estudo são variáveis independentes ou de entrada no modelo, dadas por: diâmetro interno da tubulação  $D$ ; condutividade térmica efetiva  $\kappa_{eff}$ ; pressão no separador  $P_s$ ; e temperatura na ANM  $T_{ANM}$ .

Os dados apresentados na Tabela 1 foram usados nas simulações, sendo que, para cada estudo paramétrico, determinado parâmetro teve seu valor modificado. Geralmente os parâmetros foram modificados em um valor acima e outro abaixo do apresentado na Tabela 1.

A Figura 12 apresenta os mapas de estabilidade em que o parâmetro de estudo foi o isolamento do duto. Trata-se de adicionar uma nova fronteira de estabilidade na Figura 11, considerando-se que o duto estava isolado, ou seja, desprezando a transferência de calor por condução entre as paredes do duto.

**Figura 12 – Estudo paramétrico para o isolamento do duto utilizando o modelo proposto.**



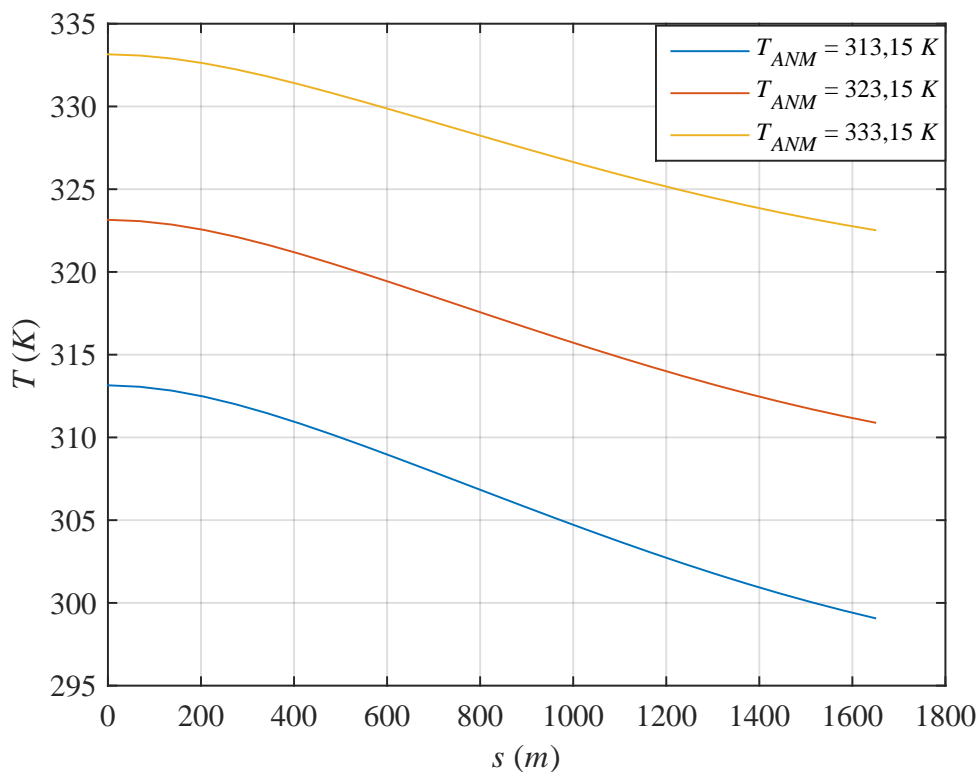
**Fonte: Próprio autor.**

Observam-se pequenas diferenças entre as curvas, contudo, o formato é semelhante, indicando que o presente modelo consegue capturar a fronteira de estabilidade a partir da idealização de sistema isolado. Nota-se ainda que em todo o domínio de velocidades superficiais houve convergência entre os modelos. A aproximação de sistema isolado resultou em uma mudança na fronteira de estabilidade para uma velocidade superficial de gás crítica aproximadamente 1 % maior em relação aos efeitos térmicos e 4,2 % maior frente ao modelo isotérmico. Portanto, o isolamento do duto tornou o sistema mais instável. Esses desvios ocorreram devido à influência

do isolamento na transferência de calor e conseqüentemente na queda de temperatura ao longo do escoamento.

A Figura 13 apresenta os campos de temperatura para diferentes valores da temperatura na ANM. Observa-se que o comportamento das curvas foram semelhantes ao encontrado na Figura 5. Maiores temperaturas de entrada resultaram em maiores temperaturas no separador. No entanto, quanto maior a temperatura na ANM, menor foi o gradiente de temperatura ao longo do escoamento.

**Figura 13 – Perfis de temperatura para diferentes valores da temperatura na ANM.**

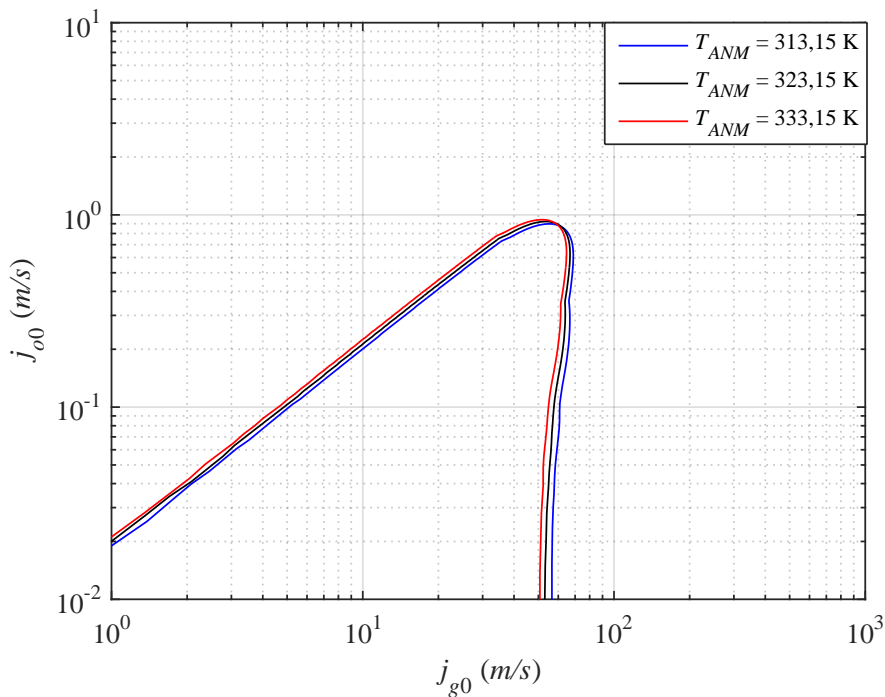


**Fonte: Próprio autor.**

A Figura 14 apresenta os mapas de estabilidade para diferentes valores da temperatura na ANM. Observa-se que o comportamento das curvas foi semelhante ao encontrado na Figura 11. Nota-se ainda que para baixas vazões de gás  $0 \leq j_{g0} \leq 40 \text{ m/s}$ , o aumento de temperatura na entrada, ocasionou um aumento da região instável. No entanto, para altas vazões de gás  $40 \leq j_{g0} \leq 70 \text{ m/s}$ , o aumento de temperatura na ANM torna o sistema mais estável. Isso acontece, pois para as baixas vazões de gás temos escoamento subsaturado, ou seja, pequenas frações de vazio. Nestes casos, o efeito da temperatura e conseqüentemente da viscosidade (queda de pressão por atrito) predomina sobre a gravidade (queda de pressão gravitacional).

No entanto, para altas vazões de gás (escoamento saturado), temos grandes frações de vazio, acarretando maiores densidades das fases e desse modo a queda de pressão têm efeito dominante em relação à queda de temperatura ao longo do escoamento.

**Figura 14 – Mapas de estabilidade para diferentes valores da temperatura na ANM.**



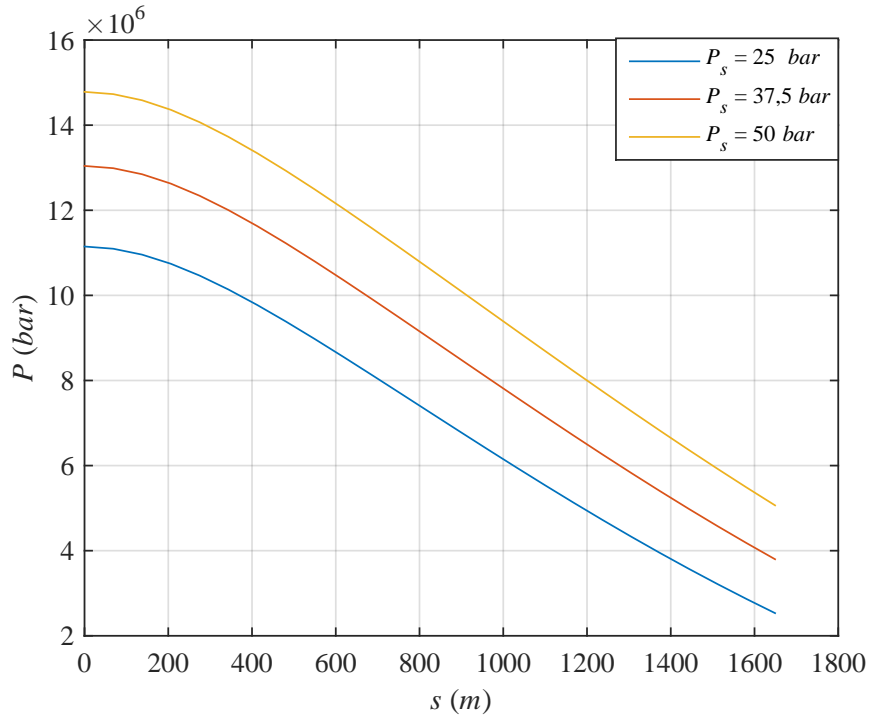
**Fonte: Próprio autor.**

A Figura 15 apresenta os campos de pressão para diferentes valores da pressão no separador. Observa-se que o comportamento das curvas foram semelhantes ao encontrado na Figura 6. Maiores pressões de saída resultaram em maiores pressões na ANM. Além disso, quanto maior a pressão no separador, maior foi o gradiente de pressão ao longo do escoamento.

A Figura 16 apresenta os mapas de estabilidade para diferentes valores da pressão no separador. Observa-se que o comportamento das curvas foi semelhante ao encontrado na Figura 11. Nota-se ainda que em todo o domínio de velocidades superficiais, o aumento de pressão no separador diminuiu a região instável, ou seja, possui efeito estabilizante. Este resultado está conforme as análises experimentais reportadas na literatura em (TAITEL, 1986) e (BALIÑO *et al.*, 2010) em que o aumento de pressão no separador foi usado como mecanismo de mitigação da intermitência severa.

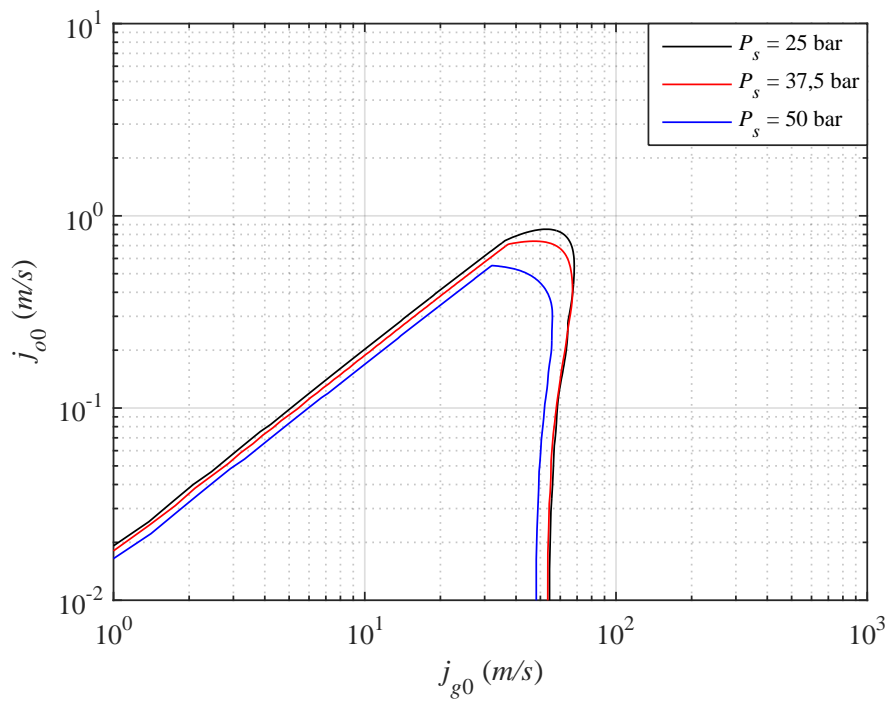


**Figura 15 – Perfis de pressão para diferentes valores da pressão no separador.**



Fonte: Próprio autor.

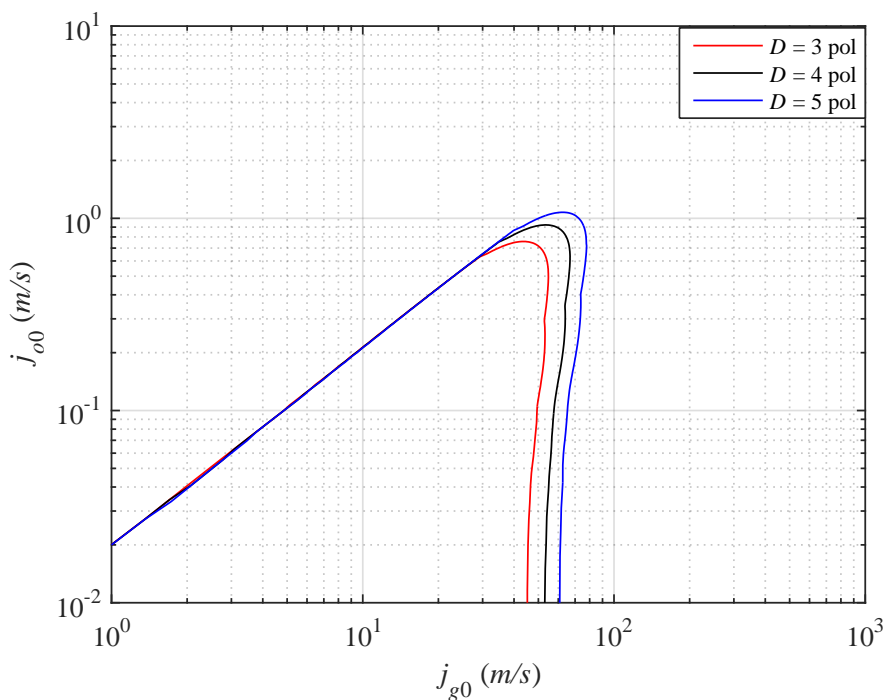
**Figura 16 – Mapas de estabilidade para diferentes valores da pressão no separador.**



Fonte: Próprio autor.

A Figura 17 apresenta os mapas de estabilidade para diferentes valores do diâmetro interno da tubulação. Observa-se que o comportamento das curvas foi semelhante ao encontrado na Figura 11. Nota-se ainda que em todo o domínio de velocidades superficiais, o aumento no diâmetro interno, resulta em um crescimento da região instável. Este resultado está conforme as análises encontradas em (NEMOTO, 2013) em que foi relatado que o diâmetro interno, deve ser minimizado para prevenir a intermitência severa.

**Figura 17 – Mapas de estabilidade para diferentes valores do diâmetro interno.**

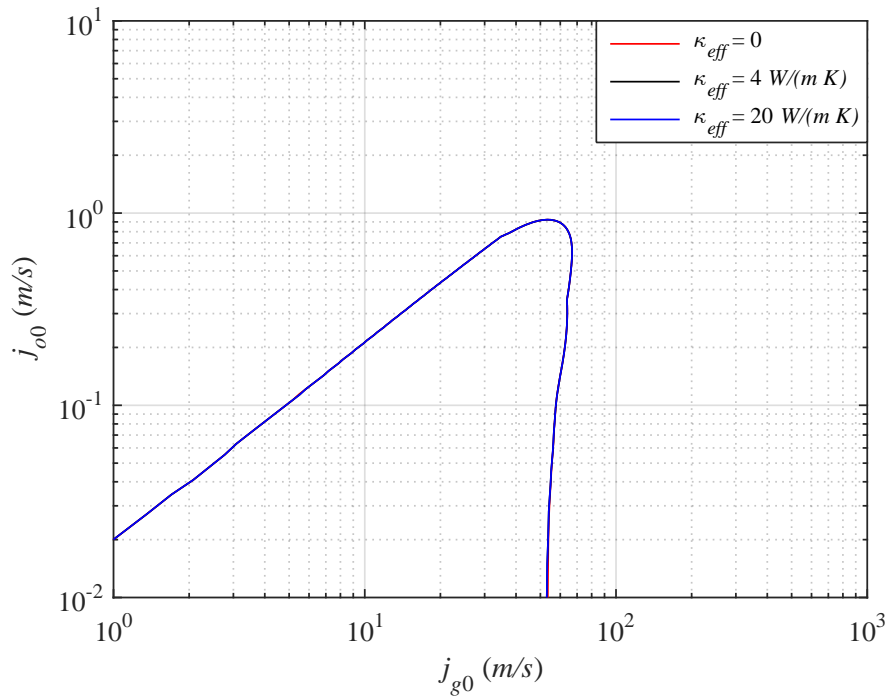


**Fonte: Próprio autor.**

A Figura 18 apresenta os mapas de estabilidade para diferentes valores da condutividade térmica efetiva. Observa-se que o comportamento das curvas foi semelhante ao encontrado na Figura 11. Nota-se que em relação ao caso idealizado (sistema isolado), o aumento da condutividade térmica efetiva acarreta uma mudança na fronteira de estabilidade para uma velocidade superficial de gás crítica aproximadamente 1% menor. No entanto, ao compararmos os casos reais sob diferentes condições de isolamento, verifica-se que o aumento na condutividade térmica efetiva resultou em uma alteração na curva de estabilidade neutra para uma velocidade superficial de gás crítica aproximadamente 0.2% maior. Esses desvios ocorreram devido à influência do isolamento na transferência de calor e consequentemente na queda de temperatura ao longo do escoamento. Portanto, diminuir o isolamento do duto (aumentar a condutividade

térmica efetiva) torna o sistema mais instável. Além disso, a influência do isolamento na fronteira de estabilidade é menor do que os outros parâmetros analisados.

**Figura 18 – Mapas de estabilidade para diferentes valores da condutividade térmica efetiva.**



**Fonte: Próprio autor.**



## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Este capítulo apresenta as principais conclusões acerca dessa etapa do trabalho, além de recomendações para futuros trabalhos sobre esta linha de pesquisa.

### 6.1 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O presente estudo incluiu os efeitos térmicos em uma metodologia desenvolvida anteriormente para a análise de intermitência severa em um sistema de produção de petróleo com base na teoria da estabilidade linear. A partir desse método foi desenvolvido um modelo robusto de escoamento multifásico e avaliada a estabilidade do escoamento em sistemas *pipeline-riser*, sem resolver no domínio do tempo as complexas equações que regem o escoamento.

Análises do estado estacionário (campo base) para a aplicação da teoria de estabilidade linear, foram realizadas em um sistema *pipeline-riser* com geometria catenária que apresenta escoamentos sob altas pressões, semelhante aos sistemas reais de produção de petróleo e comparadas com resultados de uma análise isotérmica similar, baseada no modelo de Andreolli *et al.* (2018). Os resultados obtidos apresentaram pequenos afastamentos em relação aos resultados do modelo isotérmico. As pressões calculadas pelo modelo térmico foram aproximadamente 1,2 % maiores, enquanto as velocidades superficiais de gás foram aproximadamente 2,5 % menores, uma vez que a troca de calor diminui a transferência de massa entre as fases; observam-se ainda desvios para a velocidade superficial de líquido e para a fração de vazão na ordem de 0,8 % e 3,3 %, respectivamente menores que as calculadas pelo modelo isotérmico. Portanto, no estado estacionário os efeitos térmicos possuem influência secundária no escoamento, uma vez que alteraram pouco as soluções para o campo base. A temperatura possui efeito dominante na determinação da viscosidade das fases e conseqüentemente na queda de pressão devido ao atrito. No entanto, o escoamento é dominado pela gravidade e desse modo, a pressão possui efeito preponderante na determinação das densidades das fases, possui maior influência no escoamento. Os desvios observados devem ser levados em conta, de modo a aumentar a confiabilidade dos resultados numéricos e um melhor planejamento da produção.

A análise de convergência do modelo demonstrou que a solução varia pouco com a nodalização a partir da discretização com 20 nós e que, conseqüentemente, uma maior nodalização não altera o comportamento das soluções, embora modifique os resultados das simulações, até

que se encontre uma condição ótima, determinada pela saturação numérica, permitindo descrever completamente o problema.

O mapa de estabilidade construído por Andreolli *et al.* (2018), através de simulações isotérmicas, foi reproduzido pelo modelo de estabilidade proposto. O mapa de estabilidade encontrado pelo modelo térmico se aproxima do mapa de estabilidade obtido pelo modelo isotérmico. As pequenas diferenças observadas foram atribuídas a influência da temperatura na transferência de massa (vaporização), compressibilidade, expansão e propriedades termofísicas das fases. Os efeitos térmicos deslocaram a fronteira de estabilidade para uma velocidade superficial de gás crítica aproximadamente 3,2 % maior. Os efeitos térmicos, ou seja, a queda de temperatura devido à inclusão da equação de conservação de energia, promoveram um aumento da região instável. O fato desse modelo conseguir produzir mapas de estabilidade sem a necessidade da aproximação isotérmica, indica o potencial dessa metodologia para aplicações na indústria. Um módulo de estabilidade que incluísse os efeitos térmicos, incorporado em códigos de simuladores comerciais permanentes, poderia proporcionar informações importantes principalmente em cenários de simulações em que as análises transientes se tornam proibitivas devido ao tempo de resposta e da quantidade de simulações necessárias.

Por meio de um estudo paramétrico foi possível avaliar a influência de diferentes variáveis relacionadas à geometria dos dutos, caracterização dos fluidos e parâmetros operacionais da plataforma sobre o estado estacionário e o formato dos mapas de estabilidade. O estudo permitiu analisar sistemas *pipeline-riser* em relação à ocorrência de intermitência severa. Como observado nas análises isotérmicas, constatou-se que um aumento de pressão no separador diminuiu a região instável. Porém, como a força impulsionadora do escoamento é a diferença de pressão entre o reservatório e o separador, nota-se ainda uma diminuição na vazão de produção. Além disso, um aumento no isolamento do duto, mantendo-se a geometria fixa ocasiona um efeito estabilizante no sistema. Para a temperatura na ANM, verificou-se que para baixos valores de *GOR* observa-se um aumento da região instável, enquanto para altos valores de *GOR* um aumento de temperatura na ANM acarreta uma estabilização do escoamento.

Nesse trabalho foi realizada uma análise de transferência de calor quase estática, os efeitos térmicos ocasionaram uma pequena correção sistemática em relação ao modelo isotérmico, de maneira que não se parece justificável acrescentar uma variável de estado adicional (a temperatura média no isolamento do duto) para incluir os efeitos da inércia térmica na análise de intermitência severa.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES

Com o intuito de promover melhorias futuras no modelo proposto, as seguintes recomendações são sugeridas:

- Confrontar a análise do estado estacionário com os resultados de simuladores comerciais de estado estacionário, para validar e aumentar a confiabilidade do modelo proposto;
- Incluir trechos de coluna de elevação para avaliar o poço como um sistema integrado ao reservatório e os efeitos do gradiente geotérmico na distribuição de temperatura;
- Aplicar o modelo para outras geometrias frequentemente encontradas nos sistemas de petróleo *offshore*, como a geometria *lazy-wave*;
- Incluir no modelo, uma nova correlação para determinar a viscosidade da mistura, levando-se em conta a formação de emulsões no líquido;
- Aplicar o modelo a sistemas com linhas maiores, entre 60 e 70 km, para avaliar o escoamento em regiões sob uma maior influência da viscosidade e dos efeitos térmicos.

Todas essas medidas poderiam ser avaliadas parametricamente quanto às alterações na fronteira de estabilidade. Desse modo, essas considerações também seriam variáveis de controle da intermitência severa nas plataformas de petróleo.





## REFERÊNCIAS

- AL-MARHOUN, M. A. The coefficient of isothermal compressibility of black oils. *In: SPE Middle East Oil Show*. Presented at Bahrain: [s.n.], 2015.
- ALVES, I. N.; ALHANATI, F. J. S.; SHOHAM, O. A unified model for predicting flowing temperature distribution in wellbores and pipelines. **SPE production Engineering**, v. 7, n. 4, p. 363–367, 1992.
- ALWAZZAN, J.; THAN, C. Linear stability analysis and experimental verification of stratified air-water flow in a horizontal bend. **Journal of Petroleum Science and Engineering, Elsevier**, v. 50, p. 299–307, 2005.
- ANDREOLLI, I. **Introdução à elevação e escoamento monofásico e multifásico de petróleo**. [S.l.]: Interciência, 2016. v. 1. 616 p.
- ANDREOLLI, I. **Estabilidade linear aplicada ao escoamento multifásico de petróleo**. 2018. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade de São paulo, São Paulo, Brasil, 2018.
- ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Linear stability theory analysis for oil flowlines. *In: ABCM. Proceeding of the IV Journeys in Multiphase Flow (JEM 2017)*. São Paulo, SP, Brazil: [s.n.], 2017.
- ANDREOLLI, I.; AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L. Stability solver for offshore oil production systems. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 171, p. 993–1006, 2018.
- AZEVEDO, G. R. **Estabilidade linear para intermitência severa em sistemas água-ar**. 2017. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade de São paulo, São Paulo, Brasil, 2017.
- AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; ANDREOLLI, I. Stability analysis for severe slugging including self-lifting. **SPE JOURNAL**, v. 26, n. 2, p. 716–736, 2020.
- AZEVEDO, G. R.; BALIÑO, J. L.; BURR, K. P. Linear stability analysis for severe slugging in air-water systems considering different mitigation mechanisms. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 73, p. 238–250, 2015.
- AZIZ, K.; GOVIER, G. W.; FOGARASI, M. Pressure drop in wells producing oil and gas. **Journal of Canadian Petroleum Technology**, v. 11, 1972.

BALIÑO, J. L. Modeling and simulation of severe slugging in air-water systems including inertial effects. **Journal of Computational Science**, v. 5, n. 3, p. 482–495, 2014.

BALIÑO, J. L.; BURR; NEMOTO, R. H. Modeling and simulation of severe slugging in air-water pipeline-riser systems. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 36, n. 8, p. 643–660, 2010.

BEAL, C. The viscosity of air, water, natural gas, crude oils and its associated gases at oil field temperatures and pressures. **Trans. AIME**, v. 165, p. 94–112, 1946.

BEGGS, D. H; ROBINSON, J. R. Estimating the viscosity of crude oil systems. **Journal of Petroleum Technology**, v. 27, n. 9, p. 1140–1141, 1975.

BENDKISEN, K. H. An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 10, n. 4, p. 467–483, 1984.

BERGMAN, T; LAVINE, A.S; INCROPERA, F. P; DEWITT, D. P. **Fundamentals of heat and mass transfer**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2011. 71 - 78 p.

BHAGWAT, S. M.; GHAJAR, A. J. Flow pattern and pipe orientation independent semiempirical void fraction correlation for a gas-liquid two phase flow based on the concept of drift flux model. **Proceedings of the ASME 2012 Summer Heat Transfer Conference**, Viena, Austria, 2012.

BRILL, J. P. Multiphase flow in wells. **Journal of petroleum technology**, v. 39, n. 1, p. 15–21, 1987.

BRILL, J. P.; MUKHERJEE, H. **Multiphase Flows in Wells**. Richardson, USA: Society of Petroleum Engineers, 1999. 156 p.

BROWN, G. G; KATZ, D. L; OBERFELL, G. G; ALDREN, R. C. **Natural gasoline and the volatile hydrocarbons**. Tulsa, Okla: Natural Gasoline Association of America, 1948. 92 p.

BURR, K. P.; BALIÑO, J. L.; AZEVEDO, G. R. Discretization effects on the linear numerical stability analysis of two-phase flows in pipeline-riser systems. *In: XXII International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)*. Ribeirão Preto, SP, Brazil: [s.n.], 2013. p. 1–12.

BØE, A. Severe slugging characteristics. part i: Flow regime for severe slugging. *In: Presented at Special Topics in Two-Phase Flow*. Trondheim, Norway: [s.n.], 1981.

CALDWELL, D. R. Thermal conductivity of sea water. **Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts**, v. 21, n. 2, p. 131–137, 1973.

CHEN, N. H. An explicit equation for friction factor in pipe. **Industrial and engineering chemistry fundamentals**, v. 18, n. 3, p. 296–297, 1979.

CHEW, J; JR, C. A Connaly. Viscosity correlation for gas-saturated crude oils. **Trans. AIME**, v. 216, p. 23–25, 1959.

CHURCHILL, S. W.; CHU, H. H. S. Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder. **International Journal Heat Mass Transfer**, v. 18, n. 9, p. 1049–1053, 1975.

COLLINS, A. G. **Petroleum engineering handbook**. Dallas: SPE: BRADLEY, H. B. (Ed.), 1987.

DANIELSON, T. J. Influence of fluid properties on multiphase flow prediction. *In: Proceedings of 11th International Conference on Multiphase Technology*. San Remo, Italy: [s.n.], 2003.

DREW, D. A.; PASSMAN, S. L. **Theory of multicomponent fluids**. New York: Springer-Verlag, 1999. 308 p.

DUAN, J. M.; WANG, W.; ZHANG, Y.; ZHENG, L. J.; LIU, H.S.; GONG, J. Energy equation derivation of the oil-gas flow in pipelines. **Oil and Gas Science and Technology–Revue d'IFP Energies nouvelles**, v. 68, n. 2, p. 341–352, 2012.

DUKLER, A. E.; HUBBARD, M. G. A model for gas-liquid slug flow in horizontal and near horizontal tubes. **Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 14, p. 337–347, 1975.

FABRE, J.; PERESSON, L. L.; CORTEVILLE, J.; ODELLO, R.; BOURGEOIS, T. Severe slugging in pipeline riser systems. **SPE Production Engineering**, v. 5, n. 3, p. 299–305, 1990.

FAIRUZOV, Y. V. Stability analysis of stratified oil/water flow in inclined pipelines. **SPE Production and Facilities**, v. 16, p. 14–21, 2001.

GAMBIL, W. R. Predict liquid heat capacities. **Chemical Engineering Journal**, v. 64, p. 243–248, 1957.

GUERRERO-SARABIA, I.; FAIRUZOV, Y. V. Linear and non-linear analysis of flow instability in gas-lift wells. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 108, p. 162–171, 2013.

HOLMAN, 1958. **Heat transfer**. New York, USA: McGraw Hill Book Company, 1958. 530 p.

ISHII, M.; HIBIKI, T. One-dimensional drift–flux model for two-phase flow in a large diameter pipe. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 46, p. 1773–1790, 2003.

ISHII, M.; HIBIKI, T. **Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow**. New York, USA: Springer, 2006.

JANSEN, F. E.; SHOHAM, O.; TAITEL, Y. The elimination of severe slugging - experiments and modeling. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 22, n. 6, p. 1055–1072, 1996.

KOZLOVSKIY, M.; GOBBLE, C.; CHICKOS, J. Vapor pressures and vaporization enthalpies of a series of esters used in flavors by correlation gas chromatography. **The Journal of Chemical Thermodynamics**, v. 86, p. 65–74, 2015.

LATEEF, A. K.; OMEKE, J. Specific heat capacity of natural gas expressed as a function of its specific gravity and temperature. *In: SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Presented at Abuja, Nigeria: [s.n.], 2011.

LEE, A. L.; GONZALEZ, M. H.; EAKIN, B. E. The viscosity of natural gases. **Journal of Petroleum Technology**, v. 18, n. 8, p. 39–48, 1966.

LEHOUCQ, R. B.; SORENSEN, D. C.; YANG, C. **ARPACK Users Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicit Restarted Arnoldi Methods**. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>: [s.n.], 1997.

LORIMER, S. E.; ELLISON, B. T. Design guideline for subsea oil systems. *In: Proceeding of the Facilities 2000: Facilities engineering into the next millenium*. [S.l.: s.n.], 2000.

MAGALHÃES, T.C.L.; AZEVEDO, G. R.; ANDREOLLI, I.; BALIÑO, J. L. Thermal effects in multiphase flow analysis for offshore oil systems. *In: \_\_\_\_\_. Multiphase Flow Dynamics: A Perspective from the Brazilian Academy and Industry*. Springer International Publishing, 2022. p. 25–35. ISBN 978-3-030-93456-9. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-93456-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-93456-9_3). Acesso em: 05 abr. 2023.

MAGRAB, E. B.; AZARM, S.; BELACHANDRAN, B.; DUNCAN, J. H.; HEROLD, K. H.; WALSH, G. C. **An Engineer's Guide to MATLAB**. New Jersey, USA: Pearson Prentice Hall, 2010.

MASELLA, J. M.; TRAN, Q. H.; FERRE, D.; PAUCHON, C. Transient simulation of twophase flows in pipes. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 24, n. 5, p. 739–755, 1998.

MCCAIN, W D. **The properties of petroleum fluids**. [S.l.]: Tulsa: PennWell Books, 1990.

NEMOTO, R. H. **MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE INTERMITÊNCIA SEVERA COM EFEITOS DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA**. 2013. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade de São paulo, São Paulo, Brasil, 2013.

NEMOTO, R. H; BALIÑO, J.L. Modeling and simulation of severe slugging with mass transfer effects. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 40, p. 144–157, 2012.

OZBEK, H.; PHILLIPS, S. L. Thermal conductivity of aqueous sodium chlorid solutions from 20 to 330°C. **Journal Chemical Engineering**, v. 25, n. 3, p. 263–267, 1980.

POBLANO, E.; CAMACHO, R.; FAIRUZOV, Y. V. Stability analysis of continuous-flow gas lift wells. **SPE Production and Facilities**, v. 20, n. 1, p. 70–79, 2005.

POETTMANN, F. H.; CARPENTER, P. G. **The Multiphase Flow of Gas, Oil and Water Through Vertical Flow Strings with Application to the Design and Gas-Lift Installations**. [S.l.]: Drill. Prod. Prac, 1952. v. 257. 257-317 p.

POTS, B. F. M.; BROMILOW, I. G.; KONIJN, M. J. W. F. Severe slug flow in offshore flowline/riser systems. **SPE Production Engineering**, v. 2, n. 4, p. 319–324, 1987.

RAMAKRISHNAN, H. **Experimental and Economic Evaluation of GTL Fluid Flow Properties and Effect on TAPS**. 2000. Dissertação (Mestrado) — University of Alaska, Fairbanks, 2000.

SAGAR, R.; DOTY, D. R.; SCHMLDT, Z. Predicting temperature profiles in a flowing well. **SPE Journal**, v. 6, n. 4, p. 441–448, 1991.

SARICA, C.; SHOHAM, O. A simplified transient model for pipeline-riser systems. **Chemical Engineering Science**, v. 46, n. 9, p. 2167–2179, 1991.

SARICA, C.; TENGESDAL, J. Ø. A new technique to eliminate severe slugging in pipeline/riser systems. *In: SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Dallas, Texas, Usa: paper SPE-63185-MS: [s.n.], 2000.

SCHLUMBERGER. **OLGA - Dynamic Multiphase flow simulator**. 2021. Disponível em: <https://www.software.slb.com/products/olga>. Acesso em: 05 abr. 2023.

SCHLUMBERGER. **PIPESIM - Steady-State Multiphase flow simulator**. 2022. Disponível em: <https://www.software.slb.com/products/pipesim>. Acesso em: 05 abr. 2023.

SCHMIDT, Z. **Experimental study of two-phase slug flow in a pipeline-riser system**. 1977. Tese (Doutorado) — The University of Thulsa, Tulsa, USA, 1977.

SCHMIDT, Z.; BRILL, J. P.; BEGGS, H. D. Experimental study of severe slugging in a two-phase-flow pipeline-riser system. **SPE Journal**, v. 20, n. 5, p. 407–414, 1980.

SCHMIDT, Z.; DOTY, D. R.; DUTTA-ROY, K. Severe slugging in offshore pipeline riser-pipe systems. **SPE Journal**, v. 25, n. 1, p. 27–38, 1985.

SHARQAWY, M. H; LIENHARD, J. H; ZUBAIR, S. M. Thermophysical properties of seawater: a review of existing correlations and data. **Desalination and water treatment**, v. 16, n. 1-3, p. 354–380, 2010.

SHIPPEN, M.; BAILEY, W. J. Steady-state multiphase flow-past, present, and future, with a perspective on flow assurance. **Energy and Fuels**, v. 26, p. 4145–4157, 2012.

SHOHAM, O. **Mechanistic modeling of gas-liquid two-phase flow in pipes**. Richardson, USA: Society of Petroleum Engineers, 2006. 408 p.

SIEDER, E. N; TATE, G. E. Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes. **Industrial and Engineering Chemistry**, v. 28, n. 12, p. 1429–1435, 1936.

STANDING, M. B. **Volumetric and phase behavior of oil field hydrocarbon systems**. Dallas - USA: Society of Petroleum Engineers - SPE, 1951. 130 p.

STANDING, M. B; KATZ, D. L. Density of natural gases. **Trans. AIME**, v. 146, n. 1, p. 140–149, 1942.

STORKAS, E.; SKOGESTAD, S. Contrallability analysis of two-phase pipeline-riser systems at riser slugging conditions. **Control Engineering Practice**, v. 15, p. 567–581, 2007.

TAITEL, Y. Stability of severe slugging. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 12, n. 2, p. 203–217, 1986.

TAITEL, Y.; DUKLER, A. E. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. **Aiche Journal**, v. 22, n. 1, p. 47–55, 1976.

TAITEL, Y.; VIERKANDT, S.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. Severe slugging in a riser system: experiments and modeling. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 16, n. 1, p. 57–68, 1990.

TANG, C. C.; GHAJAR, A. J. Validation of a general heat transfer correlation for non-boiling two-phase flow with different flow patterns and pipe inclination angles. *In: Proceedings of the 2005 ASME-JSME Thermal Engineering Heat Transfer Conference*. Vancouver, Canada: [s.n.], 2007.

TENGESDAL, J. Ø.; SARICA, C.; THOMPSON, L. Severe slugging attenuation for deepwater multiphase pipeline and riser systems. **SPE Production and Facilities**, v. 18, n. 4, p. 269–279, 2003.

TENGESDAL, J. Ø.; SARICA, C.; THOMPSON, L. A design approach for a "self-lifting" method to eliminate severe slugging in offshore production systems. **SPE Production and Facilities**, v. 20, n. 3, p. 201–206, 2005.

VASQUEZ, M; BEGGS, H. D. Correlations for fluid physical properties prediction. **Journal of Petroleum Technology**, v. 32, n. 6, p. 968–970, 1980.

VIERKANDT, 1988. **Severe slugging in a pipeline-riser system, experiments and modeling**. 1988. Dissertação (Mestrado) — Tulsa University Fluid Flow Projects, Okla, 1988.

WALLIS, G. B. **One-dimensional two-phase flow**. [S.l.]: United States: McGraw-Hill Book Company, 1969.

WOLDESEMAYAT, M. A.; GHAJAR, A. J. Comparison of void fraction correlations for different flow patterns in horizontal and upward inclined pipes. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 3, n. 4, p. 347–370, 2007.

WORDSWORTH, C.; DAS, I.; LOH, W. L.; MCNULTY, G.; LIMA, P. C.; BARBUTO, F. **Multiphase flow behavior in a catenary shaped riser**. California: CALtec Report No.: CR 6820, 1998. 157 p.

YAMAGUCHI, A. J.; BALIÑO, J. L. Experimental study of severe slugging in an air-water pipeline-riser system. In: **ABCM. Multiphase Flow Journey - JEM 2015**. Campinas, São Paulo, Brasil: [s.n.], 2015.

YOCUM, B. T. Offshore riser slug flow avoidance: mathematical model for design and optimization. In: **SPE European Meeting**. London, England: paper SPE4312: [s.n.], 1973.

ZAKARIAN, E. **Modélisation et Analyse des Instabilités de Écoulements Diphasiques dans les Conduites Pétrolières du Type Pipeline-riser**. 2000. 240 p. Tese (Doutorado) — Université Paris 13, Institut Galilée, Paris, 2000.

ZUBER, N.; FINDLAY, J. Average volumetric concentration in two-phase flowsystem. **Journal of Heat Transfer, ASME Trans.**, v. 10, p. 951–965, 1965.





## APÊNDICE A – CARACTERIZAÇÃO DOS FLUIDOS

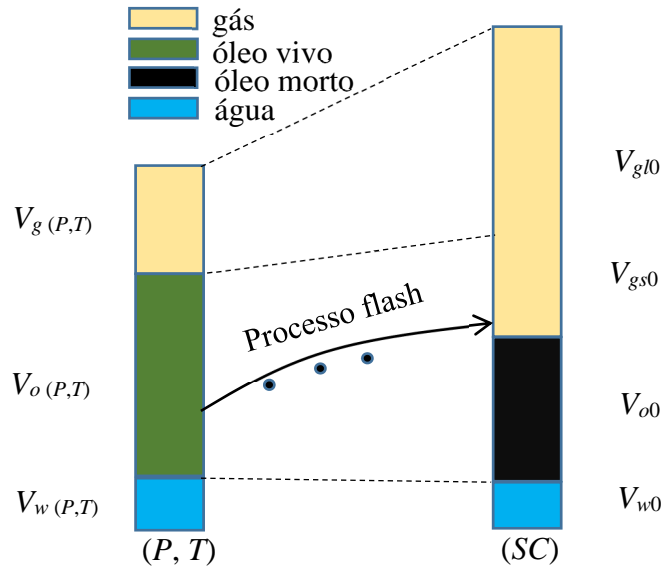
Neste apêndice serão apresentadas algumas definições das propriedades termofísicas dos fluidos envolvidos, assim como as correlações analíticas utilizadas para calculá-las.

### A.1 INTRODUÇÃO

Nessa dissertação foi considerado o modelo *black-oil* para caracterização dos fluidos, seguindo a abordagem utilizada em Andreolli (2018). Em relação a este trabalho, foram incluídas no modelo *black-oil*, as correlações para o cálculo das entalpias das fases e ainda os parâmetros necessários para determiná-las, como o calor específico a pressão constante e o coeficiente Joule-Thomson. Ao adotar-se o modelo *black-oil* deve-se definir um conjunto de correlações empíricas para representar as propriedades dos fluidos em função das condições termodinâmicas locais. Em geral, as correlações adotadas estão nas unidades americanas, embora se observe também a mistura de diferentes sistemas de unidades o que pode ocasionar erros na modelagem do escoamento. Por essa razão, optou-se em se converter as equações empíricas utilizadas nesse estudo para as unidades S.I. usando 5 constantes:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  e  $C_5$  as quais são apresentadas na Seção A.2.5. Nesse apêndice são apresentados o modelo *black-oil* completo e o conjunto de correlações adotadas no estudo. As principais correlações *black-oil* estão relacionadas as viscosidades e entalpias das fases, assim como a um conjunto de propriedades relacionadas principalmente à compressibilidade e solubilidade (razão de solubilidade do óleo  $R_{so}$ , fatores volumes de formação do óleo, água e gás, respectivamente  $B_o$ ,  $B_w$ ,  $B_g$ , razão gás-óleo  $GOR$  e razão água-óleo  $WOR$ ) definidas através do processo *flash* da condição  $(P, T)$  até a condição de referência, *standard condition* ( $SC$ ) conforme Figura 19. A condição  $SC$  é definida pelo API (*American Petroleum Institute*) como 1 atm e 60 °F. As variáveis mostradas na Figura 19 na condição  $(P, T)$  são, respectivamente, os volumes de gás, óleo vivo e água:  $V_{g(P,T)}$ ,  $V_{o(P,T)}$ ,  $V_{w(P,T)}$ . Já na condição  $SC$  tem-se, respectivamente, o volume de gás livre, gás solubilizado no óleo, óleo morto e água:  $V_{gl0}$ ,  $V_{gs0}$ ,  $V_{o0}$ ,  $V_{w0}$ . No presente modelo estão sendo desprezadas a solubilidade do gás na água e a vaporização da água, considerados muito pequenos (BRILL; MUKHERJEE, 1999).

O teste de *flash* é realizado sob condições de equilíbrio termodinâmico. Desse modo, sua aplicação constitui uma aproximação. Nas deduções seguintes, assumiu-se que as razões de volumes representativos são iguais às correspondentes razões de vazões volumétricas médias e,

**Figura 19 – Processo flash da condição  $(P, T)$  para a condição de referência  $(SC)$ .**



Fonte: Andreolli (2018).

se as áreas de passagem forem as mesmas, as correspondentes velocidades superficiais médias.

A razão gás-óleo,  $GOR$  é definida como a razão entre o volume total de gás e o volume de óleo, ambos medidos em condição de referência:

$$GOR = \frac{V_{gl0} + V_{gs0}}{V_{o0}} = \frac{Q_{gl0} + Q_{gs0}}{Q_{o0}} = \frac{j_{g0}}{j_{o0}} \quad (151)$$

onde  $Q_{gl0}$ ,  $Q_{gs0}$  e  $Q_{o0}$  são as vazões volumétricas médias, respectivamente do gas livre, gás solubilizado no óleo e óleo na  $SC$ .

A razão água-óleo é definida como a razão entre o volume de água e o volume de óleo, ambos aferidos na condição de referência:

$$WOR = \frac{V_{w0}}{V_{o0}} = \frac{Q_{w0}}{Q_{o0}} = \frac{j_{w0}}{j_{o0}} \quad (152)$$

onde  $Q_{w0}$  é a vazão volumétrica média de água na  $SC$  e  $j_{o0}$  e  $j_{w0}$  são, respectivamente, as velocidades superficiais do óleo e da água na  $SC$ .

A razão de solubilidade do óleo  $R_{so}$  é definida como a razão entre o volume de gás solubilizado no óleo na condição  $(P, T)$  e o respectivo volume de óleo, ambos medidos na  $SC$ :

$$R_{so} = \frac{V_{gs0}}{V_{o0}} = \frac{Q_{gs0}}{Q_{o0}} \quad (153)$$

A razão de solubilidade do líquido  $R_{sl}$  é definida como a razão entre o volume de gás

solubilizado no líquido na condição  $(P, T)$  e o respectivo volume de líquido, ambos medidos na  $SC$ . Como o gás solubilizado origina-se exclusivamente do óleo, pode-se escrever:

$$R_{sl} = \frac{V_{gs0}}{V_{l0}} = \frac{Q_{gs0}}{Q_{l0}} \quad (154)$$

onde  $V_{l0}$  e  $Q_{l0}$  são respectivamente o volume e vazão volumétrica em  $SC$  do líquido. O fator volume de formação do óleo  $B_o$  é definido como a razão entre o volume de água na condição  $(P, T)$  e o volume de óleo na  $SC$ :

$$B_o = \frac{V_o}{V_{o0}} = \frac{Q_{o(P,T)}}{Q_{o0}} \quad (155)$$

onde  $Q_{o(P,T)}$  representa a vazão volumétrica média de óleo na condição  $(P, T)$ . O fator volume de formação de água é definido como a razão entre o volume de água na condição  $(P, T)$  e o volume de água na condição  $SC$ :

$$B_w = \frac{V_w(P,T)}{V_{w0}} = \frac{Q_w(P,T)}{Q_{w0}} \quad (156)$$

onde  $Q_w(P,T)$  representa a vazão volumétrica média de água na condição  $(P, T)$ . O fator volume de formação do gás foi definido pela razão entre o volume de gás na condição  $(P, T)$  e o respectivo volume de gás na  $SC$ , considerando a mesma massa de gás:

$$B_g = \frac{V_g(P,T)}{V_{gl0}} = \frac{\rho_{g0}}{\rho_g} \quad (157)$$

onde  $\rho_{g0}$  e  $\rho_g$  são, respectivamente, a massa específica do gás nas condições  $SC$  e  $(P, T)$ .

Segundo McCain (1990) na modelagem *black oil*, a densidade relativa do gás, não sofre mudanças devido a variações de pressão e temperatura:

$$\gamma_g \cong \gamma_{g0} \quad (158)$$

$$\gamma_{dg} \cong \gamma_{g0} \quad (159)$$

onde  $\gamma_g$  é a densidade do gás nas condições locais, definida na Seção A.2.4 e  $\gamma_{dg}$  é a densidade do gás dissolvido no óleo. Uma vez que a densidade do gás, obtida na condição de referência, é constante ao longo do escoamento, no texto foi adotada unicamente a simbologia simplificada

$\gamma_{g0}$ .

## A.2 VARIÁVEIS INDEPENDENTES

As variáveis independentes são os dados de entrada utilizados nas correlações empíricas. Além da pressão  $P$  e temperatura  $T$ , esta seção apresenta outras variáveis independentes que serão necessárias para o no cálculo das propriedades termofísicas.

Como visto anteriormente, conforme o *American Petroleum Institute*, a condição de referência é definida como  $P_0 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$  e  $T_0 = 60^\circ \text{F} = 288,7 \text{ K} = 15,6^\circ \text{C}$ .

### A.2.1 Densidade do óleo na condição padrão e densidade API

O grau *API* do óleo é definido como:

$$API = \frac{141,5}{\gamma_{o0}} - 131,5 \quad (160)$$

onde a densidade do óleo  $\gamma_{o0}$  (adimensional) é calculada na condição padrão e é definida por:

$$\gamma_{o0} = \frac{\rho_{o0}}{\rho_{w0}} \quad (161)$$

onde  $\rho_{o0}$  é a massa específica do óleo e  $\rho_{w0} = 999,014 \text{ kg/m}^3 = 62,37 \text{ lbm/ft}^3$  é a massa específica da água, ambas na condição de referência.

### A.2.2 Razão gás-óleo

A razão gás-óleo *GOR* (adimensional), também conhecida por razão de solubilidade no ponto de bolha  $R_{s\text{bolha}}$ , foi definida anteriormente através da Eq. (151).

### A.2.3 Razão água-óleo e razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos

A razão água-óleo *WOR* (adimensional) é calculada por meio da Eq. (152).

A razão de água mais sedimentos a líquido mais sedimentos *BSW* (adimensional) é dada por:

$$BSW = \frac{V_{w0}}{V_{w0} + V_{o0}} = \frac{Q_{w0}}{Q_{w0} + Q_{o0}} = \frac{j_{w0}}{j_{w0} + j_{o0}} = \frac{j_{w0}}{j_{t0}} \quad (162)$$

A relação entre esses parâmetros, pode ser expressa por:

$$WOR = \frac{BSW}{1 - BSW} \quad (163)$$

#### A.2.4 Densidade do gás livre na condição de referência

A densidade do gás livre (adimensional) foi definida, na condição padrão  $\gamma_{g0}$ , como sendo a razão entre a massa específica do gás e a massa específica do ar, ambas aferidas na condição padrão:

$$\gamma_{g0} = \frac{\rho_{g0}}{\rho_{a0}} \quad (164)$$

onde  $\rho_{a0} = 1,223202 \text{ kg/m}^3 = 0,076362 \text{ lbm/ft}^3$  é a massa específica do ar de referência na condição padrão  $\gamma_{g0}$  e está no intervalo ( $0,57 \leq \gamma_{g0} \leq 1,68$ ), enquanto a variável  $Z_g$  representa o fator de compressibilidade do gás. A partir da equação dos gases reais e considerando que o fator de compressibilidade na condição de referência é igual à unidade, ou seja, os gases se comportam como gases ideais, pode-se demonstrar:

$$\gamma_{g0} = \frac{M_g}{M_a} \quad (165)$$

onde  $M_g$  denota a massa molar da mistura de gás livre na condição de referência  $M_a = 28,966 \text{ g/mol}$  é a massa molecular aparente da mistura de gases correspondente ao ar.

#### A.2.5 Parâmetros de conversão para S.I.

As correlações *black-oil*, em geral, utilizam unidades em diferentes sistemas. Nessa seção serão apresentados os parâmetros de conversão utilizados para obter os dados a partir das correlações no S.I. conforme apresentado em Andreolli (2018):

$$C_1 = 5,61456349;$$

$$C_2 = 0,000145037738;$$

$$C_3 = 1,8 T_k - 459,67 \text{ (conversão de K para } ^\circ\text{F)};$$

$$C_4 = 0,001;$$

$$C_5 = 1,8.$$

### A.2.6 Salinidade da água do mar

A salinidade da água  $Y$  (em porcentagem) é a razão entre a massa de sólidos dissolvidos em água pela massa total da amostra de água de formação (NEMOTO, 2013).

### A.3 FATOR VOLUME DE FORMAÇÃO DO GÁS

O volume de formação de gás, permite estabelecer uma relação entre dois estados termodinâmicos:  $(P, T)$  e  $(P_0, T_0)$  ocasionando:

$$\frac{P_0}{\rho_{g0} Z_{g0} T_0} = \frac{P}{\rho_g Z_g T} \quad (166)$$

Uma vez que  $Z_{g0} = 1$ , para o fator volume de formação de gás:

$$B_g = \frac{\rho_{g0}}{\rho_g} = \frac{P_0 Z_g T}{T_0 P} \quad (167)$$

Finalmente, reescrevendo as variáveis na condição padrão  $P_0 = 101325 Pa$ ,  $T_0 = 288,7 K$ ), obtém-se:

$$B_g = 350,96 \frac{Z_g T}{P} \quad (168)$$

onde a temperatura é dada em Kelvin e a pressão em  $Pa$ .

#### A.3.1 Fator de compressibilidade do gás

O fator de compressibilidade do gás (adimensional) pode ser obtido, correlacionando os dados do gráfico apresentado em Standing e Katz (1942):

$$Z_g = 1 - \frac{3,52 P_{pr}}{10^{0,9813} T_{pr}} + \frac{0,274 P_{pr}^2}{10^{0,8157} T_{pr}} \quad (169)$$

$$P_{pr} = \frac{P}{P_{pc}} \quad (170)$$

$$T_{pr} = \frac{T}{T_{pc}} \quad (171)$$

onde  $P_{pr}$  e  $T_{pr}$  representam, respectivamente, a pressão e temperatura pseudo-reduzidas da mistura de gás natural, enquanto  $P_{pc}$  e  $T_{pc}$  são, respectivamente, a pressão e temperatura absolutas pseudo-críticas (dependentes da composição molar) da mistura.

### A.3.2 Pressão e temperatura pseudo-críticas

Para o gás natural, Standing (1951) correlacionou os dados apresentados na carta de Brown *et al.* (1948) em função da densidade de gás, resultando em:

$$P_{pc} = \frac{1}{C_2} (677 + 15,0 \gamma_g - 37,5 \gamma_g^2) \quad (172)$$

$$T_{pc} = \frac{1}{C_5} (168 + 325 \gamma_g - 12,5 \gamma_g^2) \quad (173)$$

onde a temperatura foi obtida em Kelvin e a pressão em  $Pa$ .

## A.4 MASSA ESPECÍFICA DO GÁS

Na modelagem *black oil*, a densidade do gás não varia com as mudanças de pressão e temperatura, sendo considerada igual à condição padrão. Portanto, a partir da Eq. (157), encontra-se:

$$\rho_g \cong \frac{\rho_{g0}}{B_g} \quad (174)$$

Substituindo a Eq. (168) em (174):

$$\rho_g = \frac{P M_g}{R_g T Z_g} \quad (175)$$

ou ainda a partir da Eq. (165):

$$\rho_g = \frac{P \gamma_g M_a}{R_g T Z_g} \quad (176)$$

## A.5 RAZÃO DE SOLUBILIDADE DO ÓLEO

Adotou-se a correlação apresentada em Standing (1951), para determinar a razão de solubilidade do óleo:

Para  $P < P_b$ :

$$R_{so} = \gamma_g \left[ \left( \frac{P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125API - 0,00091T)} \right]^{1,2048} \quad (177)$$

Para  $P \geq P_b$ :

$R_{so} = GOR$ , onde  $P_b$  é a pressão de bolha. No S.I. a Eq. (177) torna-se:

$$R_{so} = \frac{1}{C_1} \gamma_g \left[ \left( \frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125API - 0,00091 C_3)} \right]^{1,2048} \quad (178)$$

## A.6 PRESSÃO DE BOLHA

A pressão de bolha  $P_b$  é determinada através da própria Eq. (177) substituindo  $R_{so}$  por  $GOR$  e  $P$  por  $P_b$ . Desse modo, obtém-se:

$$P_b = 18,2 \left[ \left( \frac{GOR}{\gamma_g} \right)^{0,83} 10^{0,00091T - 0,0125API} - 1,4 \right] \quad (179)$$

No S.I. a Eq. (179) torna-se:

$$P_b = \frac{1}{C_2} 18,2 \left[ \left( \frac{C_1 GOR}{\gamma_g} \right)^{0,83} 10^{0,00091 C_3 - 0,0125API} - 1,4 \right] \quad (180)$$

## A.7 FATOR VOLUME DE FORMAÇÃO DE ÓLEO

O fator volume de formação de óleo ao longo do escoamento será determinado, por meio da correlação de Standing (1951). Para pressões menores  $P_b$ , tem-se:

$$B_o = 0,9759 + 0,00012 \left[ R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25T \right]^{1,2} \quad (181)$$

Na Eq. (181), A temperatura está em  $^{\circ}F$  e  $R_{so}$  em scf/stb.

No S.I. a Eq. (181) torna-se:

$$B_o = 0,9759 + 0,00012 \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{1,2} \quad (182)$$

Para pressões maiores que  $P_b$ , o gás permanece na solução e o fator  $B_o$  representa puramente a compressibilidade do líquido:

$$B_o = B_{ob} \exp [-c_o(P - P_b)] \quad (183)$$



onde o termo  $B_{ob}$  é o fator volume de formação no ponto de bolha, obtido através da Eq. (181) substituindo  $R_{so} = GOR$  e  $B_o = B_{ob}$ .

Na Eq. (183),  $c_o$  foi obtida através da correlação de Vasquez e Beggs (1980):

$$c_o = \frac{-1433 + 5 GOR + 17,2T - 1180 \gamma_g + 12,61 API}{10^5 P} \quad (184)$$

No S.I. a Eq. (183) não precisa ser modificada. No entanto, a Eq. (184) torna-se:

$$c_o = \frac{-1433 + 5 C_1 GOR + 17,2 C_3 - 1180 \gamma_g + 12,61 API}{10^5 P} \quad (185)$$

## A.8 MASSA ESPECÍFICA DO ÓLEO

Aplicando-se um balanço de massa, considerando a hipótese que o óleo vivo é composto por gás solubilizado (MCCAIN, 1990):

$$\rho_o = \frac{\rho_{o0} + \rho_{g0} R_{so}}{B_o} \quad (186)$$

Na Eq. (186) admite-se que a densidade do gás dissolvido é igual à densidade do gás livre (aproximação *black-oil*). Essa equação abrange o intervalo de pressões:  $P > P_b$ . Nesse caso  $R_{so} = GOR$  e  $B_o$  depende de valores acima ou abaixo da  $P_b$ , determinado na Seção A.7.

## A.9 FATOR VOLUME DE FORMAÇÃO DE ÁGUA

A correlação para o fator volume de formação de água  $B_w$ , foi selecionada de McCain (1990):

$$B_w = (1 + \Delta V_{wP})(1 + \Delta V_{wT}) \quad (187)$$

$$\Delta V_{wT} = -1,0001 (10^{-2}) + 1,33391 (10^{-4}) T + 5,50654 (10^{-7}) T^2 \quad (188)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{wP} = & -1,95301 (10^{-9}) PT - 1,72834 (10^{-13}) P^2 T \\ & -3,58922 (10^{-7}) P - 2,25341 (10^{-10}) P^2 \end{aligned} \quad (189)$$

A correlação é válida nas faixas de temperaturas  $90^\circ F < T < 255^\circ F$  e pressões  $1 \text{ kpsia} < P < 5 \text{ kpsia}$ .

No S.I. a Eq. (187) não precisa ser alterada. No entanto, as Eqs. (188 e 189) tornam-se:

$$\Delta V_{wT} = -1,0001 (10^{-2}) + 1,33391 (10^{-4}) C_3 + 5,50654 (10^{-7}) C_3^2 \quad (190)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{wP} = & -1,95301 (10^{-9}) (C_2 P) C_3 - 1,72834 (10^{-13}) (C_2 P)^2 C_3 \\ & -3,58922 (10^{-7}) (C_2 P) - 2,25341 (10^{-10}) (C_2 P)^2 \end{aligned} \quad (191)$$

#### A.10 MASSA ESPECÍFICA DA ÁGUA

A massa específica da água na condição local  $(P, T)$  é determinada por meio da seguinte relação:

$$\rho_w = \frac{\rho_{w0}}{B_w} \quad (192)$$

#### A.11 VISCOSIDADE DO GÁS

A viscosidade do gás nas condições locais, pode ser obtida através da correlação de Lee *et al.* (1966), válida para pressões pseudo-reduzidas  $P_{pr} < 10$  e temperaturas pseudo-reduzidas, a partir da densidade relativa do gás, expressas na tabela 2, da seguinte forma:

$$\mu_g = F_1 10^{-4} \exp \left[ F_2 (\rho_g)^{F_3} \right] \quad (193)$$

onde:

$$F_1 = \frac{(9,379 + 16,07 M_g) T^{1,5}}{209,2 + 19260 M_g + T} \quad (194)$$

$$F_2 = 3,448 + \frac{986,4}{T} + 10,09 M_g \quad (195)$$

$$F_3 = 2,447 - 0,2224 F_2 \quad (196)$$

A viscosidade  $\mu_g$  é expressa em  $cP$ ,  $\rho_g$  é a massa específica dada em  $g/cm^3$ ,  $M_g$  é a massa molar do gás calculada em  $kg/mol$  e  $T$  é a temperatura em  $R$ .

No S.I. resulta em:

**Tabela 2 – Faixas de validade da correlação de Lee *et al.* (1966).**

Densidade relativa do gás	Temperatura pseudo-reduzida
$0,56 < \gamma_g < 0,9$	$1,3 < T_{pr} < 2,5$
$0,9 < \gamma_g < 1,2$	$1,1 < T_{pr} < 2,0$
$1,2 < \gamma_g < 1,5$	$1,1 < T_{pr} < 1,7$
$1,5 < \gamma_g < 1,7$	$1,1 < T_{pr} < 1,6$

$$\mu_g = C_4 F_1 10^{-4} \exp \left[ F_2 (C_4 \rho_g)^{F_3} \right] \quad (197)$$

$$F_1 = \frac{(9,379 + 16,07 M_g) (C_5 T)^{1,5}}{209,2 + 19260 M_g + (C_5 T)} \quad (198)$$

$$F_2 = 3,448 + \frac{986,4}{(C_5 T)} + 10,09 M_g \quad (199)$$

$$F_3 = 2,447 - 0,2224 F_2 \quad (200)$$

## A.12 VISCOSIDADE DO ÓLEO

Para determinar a viscosidade do óleo, deve-se considerar três condições termodinâmicas: óleo morto ( $P_0$ ), óleo vivo ( $P_0 < P \leq P_b$ ) e óleo subsaturado ( $P \geq P_b$ ). O comportamento da viscosidade muda para cada uma dessas condições e conseqüentemente diferentes correlações foram adotadas.

### A.12.1 Viscosidade do óleo morto

A viscosidade do óleo morto foi obtida por meio da correlação de Beal (1946):

$$\mu_{od} = \left( 0,32 + \frac{1,8 \cdot 10^7}{API^{4,53}} \right) \left( \frac{360}{T + 200} \right)^{m_1} \quad (201)$$

em que:

$$m_1 = 10^{(0,43 + \frac{8,33}{API})}$$

onde a  $T$  é dada em  $^{\circ}F$ .

No S.I., o parâmetro  $m_1$  é constante e a Eq. (201) torna-se:

$$\mu_{od} = C_4 \left( 0,32 + \frac{1,8 \cdot 10^7}{API^{4,53}} \right) \left( \frac{360}{C_3 + 200} \right)^{m_1} \quad (202)$$

### A.12.2 Viscosidade do óleo saturado

As curvas de viscosidade do óleo saturado  $\mu_o$  (em  $cP$ ) foram obtidas através da viscosidade do óleo morto  $\mu_{od}$ , propostas por Chew e Jr (1959) e correlacionadas por Beggs e Robinson (1975) do seguinte modo:

$$\mu_o = [10,715 (R_{so} + 100)^{-0,515}] (\mu_{od})^b \quad (203)$$

$$b = 5,44 (R_{so} + 150)^{-0,338} \quad (204)$$

onde  $R_{so}$  está em  $scf/stb$ . As faixas de validade dessa correlação são: temperatura entre  $295^\circ F$  e pressão até  $5250\ psig$ .

No S.I. as Eqs. (203) e (204) tornam-se:

$$\mu_o = C_4 [10,715 (C_1 R_{so} + 100)^{-0,515}] \left( \frac{1}{C_4} \mu_{od} \right)^b \quad (205)$$

$$b = 5,44 (C_1 R_{so} + 150)^{-0,338} \quad (206)$$

### A.12.3 Viscosidade do óleo subsaturado

A correlação de Vasquez e Beggs (1980) foi adotada para obter a viscosidade do óleo subsaturado:

$$\mu_o = \mu_{ob} \left( \frac{P}{P_b} \right)^{m_2} \quad (207)$$

$$m_2 = 2,6 P^{1,187} \exp(-11,513 - 8,98 \cdot 10^{-5} P) \quad (208)$$

onde  $\mu_{ob}$  é a viscosidade no ponto de bolha avaliada na equação (203) para  $R_{so} = GOR$  e as pressões são dadas em  $psia$ . A faixa de validade dessa correlação é para valores de pressões até  $9500\ psig$ .

No S.I. a Eq. (207) não precisa ser modificada, uma vez que  $\mu_{ob}$  é avaliada pela Eq. (205). No entanto, a Eq. (208) torna-se:

$$m_2 = 2,6 (C_2 P)^{1,187} \exp(-11,513 - 8,98 \cdot 10^{-5} (C_2 P)) \quad (209)$$

### A.13 VISCOSIDADE DA ÁGUA

A viscosidade da água foi definida para a condição padrão:  $P_0$  e para a condição local:  $P > P_0$

#### A.13.1 Viscosidade da água na pressão de referência

A viscosidade da água, em centiPoise, na pressão padrão, de acordo com Collins (1987) é dada por:

$$\mu_{w0} = I_1 T^{I_2} \quad (210)$$

$$I_1 = 109,574 - 8,40564 Y + 0,313314 Y^2 + 8,72213 \cdot 10^{-3} Y^3 \quad (211)$$

$$I_2 = -1,12166 + 2,63951 \cdot 10^{-2} Y - 6,79461 \cdot 10^{-4} Y^2 - 5,47119 \cdot 10^{-5} Y^3 + 1,55586 \cdot 10^{-6} Y^4 \quad (212)$$

onde  $T$  está em  $^{\circ}F$  e a salinidade  $Y$  é dada em porcentagem de peso de sólidos. As faixas de valores dessas variáveis para a correlação são:  $100^{\circ}F \leq T \leq 400^{\circ}F$  e salinidades até 26 %.

No S.I. apenas a Eq. (210) precisa ser modificada:

$$\mu_{w0} = C_4 I_1 C_3^{I_2} \quad (213)$$

#### A.13.2 Viscosidade da água nas condições locais

A viscosidade da água nas condições locais de escoamento, pode ser expressa conforme visto em Collins (1987):

$$\mu_w = \mu_{w0} [0,9994 + 4,0295 \cdot 10^{-5} (P + 14,7) + 3,1062 \cdot 10^{-9} (P + 14,7)^2] \quad (214)$$

As faixas de valores das variáveis nessa correlação são:  $86,5^\circ F \leq T \leq 167^\circ F$  e pressão até 14000 *psia*. A pressão  $P$  é dada em *psi*.

No S.I. a Eq. (214) torna-se:

$$\mu_w = \mu_{w0} [0,9994 + 4,0295 \cdot 10^{-5} (C_2 P + 14,7) + 3,1062 \cdot 10^{-9} (C_2 P + 14,7)^2] \quad (215)$$

#### A.14 ENTALPIA DO GÁS

Segundo Duan *et al.* (2012) a entalpia do gás, pode ser definida em função da pressão e temperatura locais:

$$\hat{h}_g = \hat{h}_g(P, T) \quad (216)$$

Tomando a diferencial da Eq. (216):

$$d\hat{h}_g = \left( \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} \right)_T dP \quad (217)$$

Ainda em Duan *et al.* (2012), o calor específico a pressão constante e o coeficiente Joule-Thomson, podem ser expressos da seguinte maneira:

$$C_p = \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial T} \right)_P \quad (218)$$

$$\mu_j = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_{\hat{h}} \quad (219)$$

Substituindo-se as Eqs.(218) e (219) na Eq. (217) e manipulando os termos, para a fase gás podemos escrever:

$$d\hat{h}_g = C_{pg} dT - \mu_{jg} C_{pg} dP \quad (220)$$

integrando-se a Eq. (220) a entalpia do gás nas condições locais pode ser obtida da seguinte forma:

$$\hat{h}_g(P, T) - \hat{h}_g(SC) = C_{pg}(T - T_0) - \mu_{jg} C_{pg}(P - P_0) + \Delta_{vap} \quad (221)$$

onde  $\Delta_{vap}$  é a entalpia de vaporização do gás solubilizado no óleo vivo.

Portanto:

$$\hat{h}_g(P, T) = C_{pg} T - \mu_{jg} C_{pg} P + \Delta_{vap} \quad (222)$$

A entalpia de vaporização do gás, pode ser calculada de acordo com Kozlovskiy *et al.* (2015):

$$\Delta_{vap} = \frac{70000}{M_g} \quad (223)$$

#### A.14.1 Calor específico do gás natural

Lateef e Omeke (2011) desenvolveram uma expressão para o calor específico do gás natural  $C_{pg}$  em base molar, em função da temperatura absoluta:

$$C_{pg} = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (224)$$

em que os coeficientes:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , estão em função da densidade relativa do gás natural  $\gamma_g$ .

$$a = 59,55 \gamma_g^2 - 97,86 \gamma_g + 56,46; \quad (225)$$

$$b = -0,170 \gamma_g^2 + 0,46755 \gamma_g - 0,15883; \quad (226)$$

$$c = 1,52903 \times 10^{-4} \gamma_g^2 - 3,57387 \times 10^{-4} \gamma_g + 1,65604 \times 10^{-4} \quad (227)$$

$$d = -4,5789 \times 10^{-8} \gamma_g^2 + 9,8468 \times 10^{-8} \gamma_g - 5,2019 \times 10^{-8} \quad (228)$$

#### A.14.2 Coeficiente Joule-Thomson do gás

ALVES *et al.* (1992), desenvolverem uma expressão analítica para determinar o coeficiente Joule-Thomson:

$$\mu_j = \frac{1}{\rho_g C_p} \left[ \frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} \right] \quad (229)$$

Para a fase gás, a Eq. (229) torna-se:

$$\mu_{jg} = \frac{1}{\rho_g C_{pg}} \left[ \frac{T}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial T} \right] \quad (230)$$

### A.15 ENTALPIA DO ÓLEO

Para o óleo, a Eq. (220) pode ser reescrita como:

$$d\hat{h}_o = C_{po} dT - \mu_{jo} C_{po} dP \quad (231)$$

integrando-se a Eq. (231), obtém-se a entalpia do óleo nas condições locais:

$$\hat{h}_o(P, T) - \hat{h}_o(SC) = C_{po}(T - T_0) - \mu_{jo} C_{po}(P - P_0) \quad (232)$$

Consequentemente:

$$\hat{h}_o(P, T) = C_{po} T - \mu_{jo} C_{po} P \quad (233)$$

#### A.15.1 Calor específico do óleo

O calor específico do óleo  $C_{po}$  será correlacionado em função da temperatura absoluta, por meio da expressão desenvolvida em Gambil (1957):

$$C_{po} = \frac{1684 + 3,389 T}{\sqrt{\gamma_o}} \quad (234)$$

#### A.15.2 Coeficiente Joule-Thomson do óleo

Aplicando-se a Eq. (229) para o óleo, podemos escrever:

$$\mu_{jo} = \frac{1}{\rho_o C_{po}} \left[ \frac{T}{Z_o} \frac{\partial Z_o}{\partial T} \right] \quad (235)$$

Al-Marhoun (2015), definiu o fator de compressibilidade do óleo  $Z_o$ , da seguinte forma:

$$Z_o = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V_o} \left( \frac{\partial V_o}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{B_o} \left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right)_T \quad (236)$$

onde  $V_o$  representa o volume de óleo.

### A.16 ENTALPIA DA ÁGUA

Para a água, a Eq. (220) torna-se:



$$d\hat{h}_w = C_{pw} dT - \mu_{jw} C_{pw} dP \quad (237)$$

integrando-se a Eq. (237), encontra-se a entalpia da água nas condições locais:

$$\hat{h}_w(P, T) - \hat{h}_w(SC) = C_{pw}(T - T_0) - \mu_{jw} C_{pw}(P - P_0) \quad (238)$$

Desse modo:

$$\hat{h}_w(P, T) = C_{pw} T - \mu_{jw} C_{pw} P \quad (239)$$

#### A.16.1 Calor específico do água

Segundo Holman (1958), o calor específico da água em função da temperatura absoluta, é dado por:

$$C_{pw} = \frac{4245 - 1841 T}{\rho_w} \quad (240)$$

#### A.16.2 Coeficiente Joule-Thomson do óleo

Para a água, a Eq. (229) pode ser reescrita, como:

$$\mu_{jw} = \frac{1}{\rho_w C_{pw}} \left[ \frac{T}{Z_w} \frac{\partial Z_w}{\partial T} \right] \quad (241)$$

Al-Marhoun (2015), definiu o fator de compressibilidade da água  $Z_w$ , como:

$$Z_w = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V_w} \left( \frac{\partial V_w}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{B_w} \left( \frac{\partial B_w}{\partial P} \right)_T \quad (242)$$

onde  $V_w$  denota o volume de água.

### A.17 RELAÇÕES ALGÉBRICAS *BLACK-OIL* PARA A FASE LÍQUIDA

Uma vez que o modelo considera uma homogeneização das fases óleo e água, nessa seção serão definidas algumas relações *black-oil* para fase líquida.

### A.17.1 Razão de solubilidade do líquido

Considerando o caso mais geral, em que o óleo e a água solubilizam o gás, podemos escrever:

$$R_{sl} = \frac{V_{gdw0} + V_{gdo0}}{V_{o0} + V_{w0}} \quad (243)$$

A Eq. (243) pode ser reescrita como:

$$R_{sl} = \frac{\frac{V_{gdw0}}{V_{w0}} \frac{V_{w0}}{V_{o0}} + \frac{V_{gdo0}}{V_{o0}}}{\frac{V_{o0}}{V_{o0}} + \frac{V_{w0}}{V_{o0}}} \quad (244)$$

Simplificando, a Eq. (244):

$$R_{sl} = \frac{WOR}{1 + WOR} R_{sw} + \frac{1}{1 + WOR} R_{so} \quad (245)$$

Desprezando o termo  $R_{sw}$ , finalmente temos que:

$$R_{sl} = \left( \frac{1}{1 + WOR} \right) R_{so} \quad (246)$$

### A.17.2 Fator volume de formação do líquido

$$B_l = \frac{V_o + V_w}{V_{o0} + V_{w0}} \quad (247)$$

A Eq. (247) pode ser expressa por:

$$B_l = \frac{\frac{V_o}{V_{o0}} + \frac{V_w}{V_{w0}} \frac{V_{w0}}{V_{o0}}}{\frac{V_{o0}}{V_{o0}} + \frac{V_{w0}}{V_{o0}}} \quad (248)$$

Simplificando, a Eq. (248) pode ser reescrita como:

$$B_l = \frac{WOR}{1 + WOR} B_w + \frac{1}{1 + WOR} B_o \quad (249)$$

### A.17.3 Massa específica do líquido na condição padrão

$$\rho_{l0} = \frac{\rho_{o0} V_{o0} + \rho_{w0} V_{w0}}{V_{o0} + V_{w0}} \quad (250)$$

Dividindo a Eq. (250) por  $V_{o0}$ , obtém-se:

$$\rho_{l0} = \frac{WOR}{1 + WOR} \rho_{w0} + \frac{1}{1 + WOR} \rho_{o0} \quad (251)$$

#### A.17.4 Massa específica do líquido na condição local

$$\rho_l = \frac{m_l}{v_l} = \frac{\rho_{g0} V_{gdlo} + \rho_{l0} V_{l0}}{B_l V_{l0}} \quad (252)$$

A Eq. (252) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\rho_l = \frac{\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0}}{B_l} \quad (253)$$

#### A.17.5 Viscosidade do líquido

A viscosidade do líquido,  $\mu_l$  é definida por:

$$\mu_l = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_o + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \mu_w \quad (254)$$

Pode-se demonstrar que a viscosidade da fase líquida também pode ser definida por:

$$\mu_l = \left( \frac{1}{\frac{WOR B_w}{B_o} + 1} \right) \mu_o + \left( 1 - \frac{1}{\frac{WOR B_w}{B_o} + 1} \right) \mu_w \quad (255)$$

#### A.17.6 Entalpia do líquido

Analogamente, a entalpia do líquido,  $\hat{h}_l$  é definida por:

$$\hat{h}_l = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \hat{h}_o + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \hat{h}_w \quad (256)$$

Pode-se demonstrar que a entalpia da fase líquida também pode ser expressa como:

$$\hat{h}_l = \left( \frac{1}{\frac{WOR B_w}{B_o} + 1} \right) \hat{h}_o + \left( 1 - \frac{1}{\frac{WOR B_w}{B_o} + 1} \right) \hat{h}_w \quad (257)$$



## APÊNDICE B – CARACTERIZAÇÃO DOS COEFICIENTES CONVECTIVOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

### B.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice serão realizadas algumas definições e a caracterização dos coeficientes convectivos de transferência de calor, assim como as correlações analíticas utilizadas para determiná-los. Foram selecionadas duas correlações para o número de Nusselt, muito citadas na literatura e com aplicações na indústria do petróleo. Além disso, serão apresentadas as propriedades termofísicas e demais parâmetros necessários para calculá-las.

### B.2 COEFICIENTE CONVECTIVO INTERNO

A correlação apresentada por Tang e Ghajar (2007) para cálculo do coeficiente convectivo para o fluxo interno é dada por:

$$h_{int} = h_L F_P \left\{ 1 + 0,55 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{0,1} \left( \frac{1-F_P}{F_P} \right)^{0,4} \left( \frac{Pr_g}{Pr_l} \right)^{0,25} \left( \frac{\mu_l}{\mu_g} \right)^{0,25} \times I^{0,25} \right\} \quad (258)$$

Na Eq. (258), a variável  $x$  representa o título mássico,  $h_L$  o coeficiente convectivo para a fase líquida,  $F_P$  é um fator que depende do padrão de escoamento e  $I$  é uma correção da inclinação do duto. O título mássico pode ser escrito em função das variáveis de estado, da seguinte forma:

$$x = \frac{\rho_g \dot{J}_g}{\rho_g \dot{J}_g + \rho_l \dot{J}_l} \quad (259)$$

o fator  $F_P$  é definido como:

$$F_P = (1 - \alpha) + \alpha F_s^2 \quad (260)$$

$$F_s = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\rho_g (u_g - u_l)^2}{g D (\rho_l - \rho_g)}} \right) \quad (261)$$

em que as velocidades das fases  $u_g$  e  $u_l$ , estão relacionadas com as suas respectivas velocidades superficiais:

$$u_g = \frac{j_g}{\alpha} \quad (262)$$

$$u_l = \frac{j_l}{(1 - \alpha)} \quad (263)$$

A correção da inclinação é baseada no número de Eotvos:

$$I = 1 + E_o |\sin \theta| \quad (264)$$

$$E_o = \frac{(\rho_l - \rho_g) g D^2}{\sigma} \quad (265)$$

onde  $\sigma$  representa a tensão interfacial.

Segundo WOLDESEMAYAT e GHAJAR (2007) a tensão interfacial para o líquido é igual a  $\sigma = 0,072969478 \text{ N/m}$ .

O coeficiente convectivo para a fase líquida, será obtido por meio da correlação de Sieder e Tate (1936) para o número de Nusselt  $Nu$ :

$$Nu_l = 0,027 \left( \frac{\mu_l}{\mu_b} \right)^{0,14} Re_l^{0,8} Pr_l^{\frac{1}{3}} \quad (266)$$

Para simplificar, vamos adotar que:

$$\frac{\mu_l}{\mu_b} \simeq 1 \quad (267)$$

onde  $\mu_b$  é a viscosidade do líquido em aderência com as paredes do duto e  $Pr_l$  é o número de Prandtl para a fase líquida.

Através da definição do número de Nusselt, temos que:

$$h_L = \frac{Nu_l k_l}{D} \quad (268)$$

Substituindo as Eqs. (266) e (267) na Eq. (268), encontra-se:

$$h_L = \frac{0,027 Re_l^{0,8} Pr_l^{\frac{1}{3}} k_l}{D} \quad (269)$$

Os parâmetros adimensionais podem ser reescritos, como:

$$Re_l = \frac{\rho_l j_l D}{\mu_l} \quad (270)$$

$$Pr_l = \frac{\mu_l}{C_{pl} k_l} \quad (271)$$

onde  $k_l$  representa a condutividade térmica para o líquido.

Analogamente para a fase gás, temos que:

$$Pr_g = \frac{\mu_g}{C_{pg} k_g} \quad (272)$$

De acordo com Ramakrishnan (2000) a condutividade térmica do óleo e do gás natural em função da temperatura absoluta, são dadas respectivamente por:

$$k_o = -6 \times 10^{-7} T^2 - 0.002 T + 0.1516 \quad (273)$$

$$k_g = 4 \times 10^{-6} T^2 - 0.0005 T + 0.1451 \quad (274)$$

A condutividade térmica do líquida, pode ser expressa por:

$$k_l = \frac{\rho_o \alpha_o k_o + \rho_w \alpha_w k_w}{\rho_l} \quad (275)$$

Ozbek e Phillips (1980) correlacionaram, a condutividade térmica da água em função da temperatura:

$$k_w = 0,5750 + 0,001645 T - 5,967 \times 10^{-6} T^2 \quad (276)$$

### B.3 COEFICIENTE CONVECTIVO EXTERNO

A correlação apresentada em Churchill e Chu (1975) para cálculo do número de Nusselt para o fluxo externo é dada por:

$$Nu_{ext} = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 Ra^{\frac{1}{6}}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr_{sw}} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{28}}} \right\}^2 \quad (277)$$

em que  $Ra$  é o número de Rayleigh e  $Pr_{sw}$  é o número de Prandtl para o escoamento externo.

Estes parâmetros adimensionais, foram definidos da seguinte forma:

$$Ra = \frac{g \sin \theta \beta_{sw} (T_{ext} - T_{sw}) D_{ext}^3}{\nu_{sw} \kappa_{sw}} \quad (278)$$

$$Pr_{sw} = \frac{\mu_{sw} C_{sw}}{k_{sw}} \quad (279)$$

onde  $\beta_{sw}$ ,  $\nu_{sw}$  e  $\kappa_{sw}$  são respectivamente, o coeficiente de expansão volumétrica, a viscosidade cinemática e a difusividade térmica da água do mar:

$$\kappa_{sw} = \frac{k_{sw}}{\rho_{sw} C_{psw}} \quad (280)$$

$$\mu_{sw} = \nu_{sw} \rho_{sw} \quad (281)$$

A densidade da água do mar  $\rho_{sw}$  em função da densidade da água  $\rho_w$  é dada por:

$$\rho_{sw} = \rho_w + A_1 + B_1^{\frac{3}{2}} + C_1 \quad (282)$$

onde:

$$A_1 = 0,824493 - 4,0899 \times 10^{-3} T_{sw} + 7,6438 \times 10^{-5} T_{sw}^2 - 8,2467 \times 10^{-7} T_{sw}^3 + 5,3875 \times 10^{-9} T_{sw}^4 \quad (283)$$

$$B_1 = -5,72466 \times 10^{-3} + 1,0227 \times 10^{-4} T_{sw} - 1,6546 \times 10^{-6} T_{sw}^2 \quad (284)$$

$$C_1 = 4,8314 \times 10^{-4} \quad (285)$$

A seguinte correlação foi proposta para determinar o calor específico da água do mar  $C_{sw}$  em função da salinidade  $S_p$ :

$$C_{psw} = A_2 + B_2 T_{sw} + C_2 T_{sw} + D_2 T_{sw} \quad (286)$$

onde:

$$A_2 = 5,328 - 9,76 \times 10^{-2} S_p + 4,04 \times 10^{-4} S_p^2 \quad (287)$$

$$B_2 = -6,913 \times 10^{-3} + 7,351 \times 10^{-4} S_p - 3,15 \times 10^{-6} S_p^2 \quad (288)$$



$$C_2 = 9,6 \times 10^{-6} - 1,927 \times 10^{-6} S_p + 8,23 \times 10^{-9} S_p^2 \quad (289)$$

$$D_2 = 2,5 \times 10^{-9} + 1,666 \times 10^{-9} S_p - 7,125 \times 10^{-12} S_p^2 \quad (290)$$

A correlação abaixo foi proposta para calcular a viscosidade da água do mar  $\mu_{sw}$  em função da viscosidade da água  $\mu_w$ :

$$\mu_{sw} = \mu_w (1 + A_3 + B_3^2) \quad (291)$$

$$A_3 = 1,541 + 1,998 \times 10^{-2} T_{sw} - 9,52 \times 10^{-5} T_{sw}^2 \quad (292)$$

$$B_3 = 7,974 - 7,561 \times 10^{-2} T_{sw} + 4,724 \times 10^{-4} T_{sw}^2 \quad (293)$$

Todas as expressões exibidas acima, para calcular as propriedades termofísicas da água do mar, foram obtidas de Sharqawy *et al.* (2010).

A condutividade térmica da água do mar, será calculada conforme Caldwell (1973):

$$k_{sw} = 1,3507 \times 10^{-3} + 4,061 \times 10^{-6} T_{sw}^2 - 1,412 \times 10^{-8} T_{sw}^3 \quad (294)$$

Através da definição do número de Nusselt:

$$h_{ext} = \frac{Nu_{ext} k_{sw}}{D_{ext}} \quad (295)$$

Substituindo-se as relações descritas acima na Eq.(295), obtemos o coeficiente convectivo do lado externo.



## APÊNDICE C – EQUAÇÕES DINÂMICAS EM FORMA MATRICIAL

### C.1 INTRODUÇÃO

Este apêndice apresenta o sistema contínuo com as quatro equações de conservação reescritas em função das variáveis de estado e o arranjo desse sistema na forma matricial, seguindo a abordagem de Andreolli (2018). Nas matrizes apresentadas neste trabalho, foram incluídas uma linha referente aos termos da equação de conservação de energia e uma coluna referente as derivadas espaciais e temporais da temperatura nas equações de conservação. Além disso, foi adicionada a temperatura no vetor das variáveis de estado. Portanto, o vetor de variáveis de estado de tamanho 4 e as matrizes de tamanho  $(4 \times 4)$ , são representados na forma matricial, pois se trata de um mecanismo importante para a implementação numérica.

#### C.1.1 Termo de transferência de massa

O termo de transferência de massa, Eq. (54), foi apresentado na Seção 3.3.6. Andreolli (2018) deduziu esse termo em função das variáveis de estado e o procedimento será convenientemente repetido aqui.

$$\Gamma = -\rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1 - \alpha}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial s} \right)$$

Uma vez que  $R_{sl} = f(P, T)$ , então pode-se escrever a  $R_{sl}$  em função das variáveis de estado:

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial t} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (296)$$

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial s} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (297)$$

Substituindo as Eqs. (296) e (297) na Eq. (54) encontra-se:

$$\Gamma = \frac{\partial P}{\partial t} \left[ -\rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \left( \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right) \right] + \frac{\partial T}{\partial t} \left[ -\rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \left( \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[ -\rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right) \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[ -\rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right) \right] \quad (298)$$

### C.1.2 Equação de conservação de massa da fase líquida

Nessa seção, a equação de conservação de massa da fase líquida será reescrita em função das variáveis de estado. Essa expressão analítica, juntamente com as demais equações de conservação, serão preponderantes para a determinação do sistema contínuo na forma matricial.

A equação de conservação de massa para a fase líquida é descrita pela Eq. (13), convenientemente repetida aqui:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_l (1 - \alpha)] + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_l j_l) = -\Gamma$$

Expandindo-se as derivadas da Eq. (13), visando determiná-las em função das variáveis de estado, encontra-se:

$$(1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial t} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial s} + \rho_l \frac{\partial j_l}{\partial s} = -\Gamma \quad (299)$$

Para expandir cada derivada da Eq. (299) admite-se que existe uma relação algébrica entre a fração de vazio e as variáveis de estado dada pela Eq. (31), onde o ângulo de inclinação local está apenas em função da posição, o que permite eliminar a fração de vazio, diminuindo o número de variáveis de estado. Além disso, a massa específica do líquido depende apenas da pressão e da temperatura. Portanto:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \frac{\partial j_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \frac{\partial j_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (300)$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} = \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (301)$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial s} = \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (302)$$

Substituindo as Eqs. (300), (301) e (302) na Eq. (299) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial s} [\rho_l] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[ j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[ j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] = -\Gamma \end{aligned} \quad (303)$$

Finalmente, substituindo o termo de transferência de massa expresso pela Eq. (298), na Eq. (303), encontra-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right. \\
& \quad \left. - \rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial t} \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right. \\
& \quad \left. - \rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1 - \alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial s} [\rho_l] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[ j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \\
& \quad \frac{\partial T}{\partial s} \left[ j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] = 0 \tag{304}
\end{aligned}$$

### C.1.3 Equação de conservação de massa da fase gás

A equação de conservação de massa da fase gás é expressa pela Eq. (12), convenientemente repetida aqui:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho_g j_g) = \Gamma$$

Expandindo-se as derivadas da Eq. (12) visando descrevê-las em função das variáveis de estado, obtém-se:

$$\alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial s} + \rho_g \frac{\partial j_g}{\partial s} = \Gamma \tag{305}$$

Para expandir cada derivada da Eq. (305) além de admitir a relação algébrica entre a fração de vazio e as variáveis de estado, considera-se que massa específica do gás depende apenas da pressão e da temperatura. Desse modo, encontra-se:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{306}$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial s} = \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \tag{307}$$

Substituindo as Eqs. (300), (306) e (307) na Eq. (305):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right] + \\
& \frac{\partial T}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_g}{\partial s} [\rho_g] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[ j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[ j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \right] = \Gamma \tag{308}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo o termo de transferência de massa expressa pela Eq. (298), na Eq. (308), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \frac{\partial P}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1-\alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \\ \frac{\partial T}{\partial t} \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \left( \frac{1-\alpha}{j_l} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] + \frac{\partial j_g}{\partial s} [\rho_g] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[ j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \right. \\ \left. \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] + \frac{\partial T}{\partial s} \left[ j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] = 0 \quad (309) \end{aligned}$$

#### C.1.4 Equação de conservação de energia

A equação de conservação de energia é expressa pela Eq. (17), convenientemente repetida aqui:

$$-\frac{q_0 P_c}{A} - G g \sin \theta = \frac{\partial}{\partial t} [\alpha \rho_g \hat{u}_g + (1-\alpha) \rho_l \hat{u}_l] + \frac{\partial}{\partial s} [\rho_g j_g \hat{h}_g + \rho_l j_l \hat{h}_l] \quad (310)$$

Na Eq. (310), a energia interna  $\hat{u}$ , pode ser expressa em função da entalpia  $\hat{h}$ , por meio da seguinte definição:

$$\hat{h} = \hat{u} + \frac{P}{\rho}; \quad (311)$$

Substituindo-se a Eq. (311) nas derivadas em relação ao tempo da Eq. (310) para o gás e para o líquido, o balanço de energia pode ser reescrito em função da entalpia da seguinte forma:

$$\frac{q_0 P_c}{A} + G g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial t} [\alpha \rho_g \hat{h}_g - \alpha P + (1-\alpha) \rho_l \hat{h}_l + \rho_l j_l] + \frac{\partial}{\partial s} [\rho_g j_g \hat{h}_g + \rho_l j_l \hat{h}_l] = 0 \quad (312)$$

Admitindo-se que as entalpias do gás e do líquido, dependem apenas da pressão e da temperatura, podemos escrever:

$$\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial s} = \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (313)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_l}{\partial s} = \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \quad (314)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial t} = \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (315)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_l}{\partial t} = \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (316)$$

Substituindo-se as Eqs. (313), (314), (315) e (316) na Eq. (312), resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{q_0 P_C}{A} + G g \sin \theta + \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial t} + \hat{h}_g \frac{\partial(\alpha \rho_g)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial P}{\partial t} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial t} + \\ & \hat{h}_l \frac{\partial[(1 - \alpha) \rho_l]}{\partial t} - (1 - \alpha) \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial s} + \hat{h}_g \frac{\partial(\rho_g j_g)}{\partial s} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial t} + \hat{h}_l \frac{\partial(\rho_l j_l)}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (317)$$

Finalmente, expandindo-se as derivadas da Eq. (317), encontra-se:

$$\begin{aligned} & \frac{q_0 P_C}{A} + G g \sin \theta + \frac{\partial j_g}{\partial t} \left[ \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] + \frac{\partial j_l}{\partial t} \left[ \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] + \\ & \frac{\partial P}{\partial t} \left[ \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - (1 - \alpha) \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial t} \left[ \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right] + \\ & \frac{\partial j_g}{\partial s} \left[ \rho_g \hat{h}_g \right] + \frac{\partial j_l}{\partial s} \left[ \rho_l \hat{h}_l \right] + \frac{\partial P}{\partial s} \left[ \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] + \\ & \frac{\partial T}{\partial s} \left[ \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] = 0 \end{aligned} \quad (318)$$

### C.1.5 Sistema na forma matricial

As Eqs. (304), (309), (24) e (318) através da abordagem matricial, podem ser reescritas em uma forma mais compacta. Extraindo-se os termos em função das derivadas temporais e espaciais das variáveis de estado, podemos escrever:

$$B_{21} \frac{\partial j_g}{\partial t} + B_{22} \frac{\partial j_l}{\partial t} + B_{23} \frac{\partial P}{\partial t} + B_{24} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{21} \frac{\partial j_g}{\partial s} + C_{23} \frac{\partial P}{\partial s} + C_{24} \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (319)$$

$$B_{11} \frac{\partial j_g}{\partial t} + B_{12} \frac{\partial j_l}{\partial t} + B_{13} \frac{\partial P}{\partial t} + B_{14} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{12} \frac{\partial j_g}{\partial s} + C_{13} \frac{\partial P}{\partial s} + C_{14} \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (320)$$

$$A_{31} + C_{33} \frac{\partial P}{\partial s} = 0 \quad (321)$$

$$A_{41} + B_{41} \frac{\partial j_g}{\partial t} + B_{42} \frac{\partial j_l}{\partial t} + B_{43} \frac{\partial P}{\partial t} + B_{44} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{41} \frac{\partial j_g}{\partial s} + C_{42} \frac{\partial j_l}{\partial s} + C_{43} \frac{\partial P}{\partial s} + C_{44} \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (322)$$

onde os coeficientes  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $C_{ij}$  são os coeficientes que acompanham as variáveis de estado das Eqs. (304), (309), (24) e (318).

Aplicando-se algumas manipulações algébricas, o sistema de equações dinâmicas na forma matricial pode ser escrito, de acordo com o apresentado na Seção 3.6, expresso pela Eq. (85):

$$\{A\} + \underline{B} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = \{0\} \quad (323)$$

A matriz quadrada  $\underline{B}$  (tamanho 4 x 4), representa os termos relativos às derivadas temporais, enquanto a matriz quadrada  $\underline{C}$  (tamanho 4 x 4), representa os termos relativos às derivadas espaciais.

O vetor das variáveis de estado  $\{v\}$  (tamanho 4) foi definido como:

$$\{v\} = \left\{ j_g \quad j_l \quad P \quad T \right\}^T \quad (324)$$

$$\{A\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad A_3 \quad A_4 \right\}^T \quad (325)$$

$$A_3 = \rho g \sin \theta + \varphi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D_{int}} \quad (326)$$

$$A_4 = \frac{q_0 P_C}{A} + G g \sin \theta \quad (327)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \quad (328)$$

$$B_{11} = -\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (329)$$

$$B_{12} = -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (330)$$



$$B_{13} = (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (331)$$

$$B_{14} = (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (332)$$

$$B_{21} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (333)$$

$$B_{22} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (334)$$

$$B_{23} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (335)$$

$$B_{24} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (336)$$

$$B_{41} = \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (337)$$

$$B_{42} = \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (338)$$

$$B_{43} = \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - (1 - \alpha) \quad (339)$$

$$B_{44} = \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} \quad (340)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \quad (341)$$

$$C_{12} = \rho_l \quad (342)$$

$$C_{13} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (343)$$

$$C_{14} = j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (344)$$

$$C_{21} = \rho_g \quad (345)$$

$$C_{23} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (346)$$

$$C_{24} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} - \rho_{g0} j_{o0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (347)$$

$$C_{33} = 1 \quad (348)$$

$$C_{41} = \rho_g \hat{h}_g \quad (349)$$

$$C_{42} = \rho_l \hat{h}_l \quad (350)$$

$$C_{43} = \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \quad (351)$$

$$C_{44} = \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \quad (352)$$

## APÊNDICE D – EQUAÇÕES DINÂMICAS PERTURBADAS

### D.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice serão apresentadas as equações dinâmicas perturbadas. Nas matrizes de Azevedo (2017) foram adicionadas uma linha, referente aos termos da equação de conservação de energia e uma coluna relativa às derivadas das propriedades termodinâmicas em relação à temperatura e ainda as derivadas espaciais e temporais da temperatura nas equações de conservação. Desse modo, o estado estacionário, o vetor de variáveis de estado de tamanho 4 e as matrizes de tamanho  $(4 \times 4)$ , são perturbados a partir de uma expansão em série de Taylor, considerando-se perturbações infinitesimais, ou seja, desprezando-se os termos de segunda ordem.

### D.2 SISTEMA PERTURBADO

O sistema dinâmico na forma matricial é descrito pela Eq. (85):

$$\{A\} + \underline{B} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} + \underline{C} \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = \{0\}$$

Pela teoria da estabilidade linear, cada termo da Eq. (85) deve ser perturbado da seguinte forma:

$$\{A\} \simeq \{\tilde{A}\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \quad (353)$$

$$\{\underline{B}\} \simeq \{\tilde{\underline{B}}\} + \left\{ \frac{\partial \underline{B}}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \quad (354)$$

$$\{\underline{C}\} \simeq \{\tilde{\underline{C}}\} + \left\{ \frac{\partial \underline{C}}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \quad (355)$$

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \quad (356)$$

$$\left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} = \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} \quad (357)$$

O sobrescrito  $\sim$  indica a avaliação no estado estacionário. Substituindo-se na Eq. (85), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} + \left( \{\tilde{B}\} + \left\{ \frac{\partial B}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \right) \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \\ \left( \{\tilde{C}\} + \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \right) \left( \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \right) \simeq \{0\} \end{aligned} \quad (358)$$

Reordenando os termos, encontra-se:

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}\} + \{\tilde{C}\} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} + \{\tilde{B}\} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \{\tilde{C}\} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} + \\ \left( \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \right) \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} + \left( \left\{ \frac{\partial B}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \right) \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \left( \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \right) \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \simeq \{0\} \end{aligned} \quad (359)$$

Por meio do estado estacionário, obtém-se:

$$\{\tilde{A}\} + \{\tilde{C}\} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} = \{0\} \quad (360)$$

Substituindo-se a Eq. (360) em (359) e desprezando seus dois últimos termos, pois são de segunda ordem, resulta em:

$$\left( \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \{\hat{v}\} \right) \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} = \left( \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} \right) \{\hat{v}\} \quad (361)$$

$$\left( \left\{ \frac{\partial \{A\}}{\partial v} \right\}^{\sim} + \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} \right) \{\hat{v}\} + \{\tilde{B}\} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \{\tilde{C}\} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} \simeq \{0\} \quad (362)$$

Pode-se escrever a Eq. (85) como:

$$\tilde{A} \cdot \{\hat{v}\} + \tilde{B} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \tilde{C} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} = 0 \quad (363)$$

Assim, ao compararmos as Eqs. (363) e (362), conclui-se que os coeficientes das matrizes perturbadas  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  e  $\tilde{C}$  são dadas, respectivamente, por:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\partial \{A\}}{\partial v} \right\}^{\sim} + \left\{ \frac{\partial C}{\partial v} \right\}^{\sim} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right\} \quad (364)$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{B}\} \quad (365)$$

$$\underline{\tilde{C}} = \{\underline{C}\}^{\sim} \quad (366)$$

Na notação indicial os termos que formam as matrizes perturbadas  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_{ij}$  e  $\tilde{C}_{ij}$  são dados por:

$$\tilde{A}_{ij} = \left( \frac{\partial A_i}{\partial v_j} + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial C_{ik}}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right)^{\sim} \quad (367)$$

$$\tilde{B}_{ij} = (B_{ij})^{\sim} \quad (368)$$

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij})^{\sim} \quad (369)$$

As matrizes quadradas de coeficientes constantes  $\underline{\tilde{A}}$ ,  $\underline{\tilde{B}}$  e  $\underline{\tilde{C}}$  apresentam tamanho  $4 \times 4$ , enquanto o vetor das variáveis de estado perturbados  $\{\hat{v}\}$  apresenta tamanho 4 e pode ser expresso, como:

$$\{\hat{v}\} = \left\{ \hat{j}_g \quad \hat{j}_l \quad \hat{P} \quad \hat{T} \right\}^T \quad (370)$$

### D.2.1 Matriz perturbada $\underline{\tilde{A}}$

Aplicando-se a Eq. (367), encontram-se todos os elementos da matriz  $\underline{\tilde{A}}$ . Os termos relacionados a equação de balanço da quantidade de movimento linear,  $\tilde{A}_{31}$ ,  $\tilde{A}_{32}$ ,  $\tilde{A}_{33}$  e  $\tilde{A}_{34}$  podem ser escritos em duas parcelas, sendo a primeira parcela relacionada a derivada do termo gravitacional e a segunda parcela relacionada à derivada da parcela de atrito. Analogamente, os termos relacionados a equação de balanço de energia,  $\tilde{A}_{41}$ ,  $\tilde{A}_{42}$ ,  $\tilde{A}_{43}$  e  $\tilde{A}_{44}$ , podem ser escritos em função da derivada do termo gravitacional, da derivada da parcela do fluxo de calor e ainda em relação às derivadas das variáveis de estado. Para as variáveis da equação de conservação de energia, como as entalpias e a energias internas, o sobrescrito  $\wedge$  não representa uma perturbação, mas sim o valor específico dessas propriedades.

$$\tilde{A}_{11} = 0 \quad (371)$$

$$\tilde{A}_{12} = \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \right)^{\sim} \quad (372)$$

$$\tilde{A}_{13} = \left[ \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial j_l}{\partial s} + \left( j_l \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} \right) \frac{\partial P}{\partial s} \right] \tilde{\quad} \quad (373)$$

$$\tilde{A}_{14} = \left[ \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial j_l}{\partial s} + \left( j_l \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial T^2} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial s} \right] \tilde{\quad} \quad (374)$$

$$\tilde{A}_{21} = \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \tilde{\quad} \quad (375)$$

$$\tilde{A}_{22} = 0 \quad (376)$$

$$\tilde{A}_{23} = \left[ \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial j_g}{\partial s} + \left( j_g \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} \right) \frac{\partial P}{\partial s} \right] \tilde{\quad} \quad (377)$$

$$\tilde{A}_{24} = \left[ \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial j_g}{\partial s} + \left( j_g \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial T^2} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial s} \right] \tilde{\quad} \quad (378)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{31} = \frac{\partial}{\partial j_g} (A_3) \tilde{\quad} &= \frac{\partial}{\partial j_g} \left( \rho_m g \text{sen } \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{\quad} = \\ &= \left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial j_g} g \text{sen } \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial j_g} \left( \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{\quad} \end{aligned} \quad (379)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{32} = \frac{\partial}{\partial j_l} (A_3) \tilde{\quad} &= \frac{\partial}{\partial j_l} \left( \rho_m g \text{sen } \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{\quad} = \\ &= \left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial j_l} g \text{sen } \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial j_l} \left( \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{\quad} \end{aligned} \quad (380)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{33} = \frac{\partial}{\partial P} (A_3) \tilde{\quad} &= \frac{\partial}{\partial P} \left( \rho_m g \text{sen } \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{\quad} = \\ &= \left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial P} g \text{sen } \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial P} \left( \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{\quad} \end{aligned} \quad (381)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{34} = \frac{\partial}{\partial T} (A_3) \tilde{\quad} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \rho_m g \text{sen } \theta + \phi_{f0}^2 \frac{1}{2} f_l \frac{G^2}{\rho_l D} \right) \tilde{\quad} = \\ &= \left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial T} g \text{sen } \theta + \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial T} \left( \phi_{f0}^2 f_l \frac{G^2}{\rho_l} \right) \right] \tilde{\quad} \end{aligned} \quad (382)$$

$$\tilde{A}_{41} = \left[ \frac{\partial G}{\partial j_g} g \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial q_0}{\partial j_g} \frac{P_c}{A} + \left( \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial s} + \left( \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \right] \tilde{\quad} \quad (383)$$

$$\tilde{A}_{42} = \left[ \frac{\partial G}{\partial j_l} g \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial q_0}{\partial j_l} \frac{P_c}{A} + \left( \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial s} + \left( \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \right] \tilde{\quad} \quad (384)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{43} = & \left[ \frac{\partial G}{\partial P} g \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial q_0}{\partial P} \frac{P_c}{A} + \left( \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right) \frac{\partial j_g}{\partial s} + \left( \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right) \frac{\partial j_l}{\partial s} \right] + \\ & \left[ \left( \rho_g j_g \frac{\partial^2 \hat{h}_g}{\partial P^2} + 2 j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2} + 2 j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2} + \rho_l j_l \frac{\partial^2 \hat{h}_l}{\partial P^2} \frac{\partial P}{\partial s} \right) \right] + \\ & \left[ \left( j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} \right) \frac{\partial T}{\partial s} \right] \tilde{\quad} \quad (385) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{43} = & \left[ \frac{\partial G}{\partial T} g \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial q_0}{\partial T} \frac{P_c}{A} + \left( \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \right) \frac{\partial j_g}{\partial s} + \left( \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right) \frac{\partial j_l}{\partial s} \right] + \\ & \left[ \left( j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} \right) \frac{\partial P}{\partial s} \right] + \\ & \left[ \left( \rho_g j_g \frac{\partial^2 \hat{h}_g}{\partial T^2} + 2 j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial T^2} + 2 j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} \frac{\partial \rho_l}{\partial T} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial T^2} + \rho_l j_l \frac{\partial^2 \hat{h}_l}{\partial T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial s} \right] \tilde{\quad} \quad (386) \end{aligned}$$

Finalmente, a matriz  $\tilde{A}$  pode ser expressa como:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} & 0 & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \quad (387)$$

## D.2.2 Matriz perturbada $\tilde{B}$

Aplicando-se a Eq. (368), encontram-se todos os elementos da matriz  $\tilde{B}$ .

$$\tilde{B}_{11} = \left( -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) \tilde{\quad} \quad (388)$$

$$\tilde{B}_{12} = \left( -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) \tilde{\quad} \quad (389)$$

$$\tilde{B}_{13} = \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] \tilde{\quad} \quad (390)$$

$$\tilde{B}_{14} = \left[ -\rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] \tilde{\quad} \quad (391)$$

$$\tilde{B}_{21} = \left( \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) \tilde{\quad} \quad (392)$$

$$\tilde{B}_{22} = \left( \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) \tilde{\quad} \quad (393)$$

$$\tilde{B}_{23} = \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right] \tilde{\quad} \quad (394)$$

$$\tilde{B}_{24} = \left[ \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{l0} \frac{(1 - \alpha)}{j_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right] \tilde{\quad} \quad (395)$$

$$\tilde{B}_{31} = 0 \quad (396)$$

$$\tilde{B}_{32} = 0 \quad (397)$$

$$\tilde{B}_{33} = 0 \quad (398)$$

$$\tilde{B}_{34} = 0 \quad (399)$$

$$\tilde{B}_{41} = \left[ \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \tilde{\quad} \quad (400)$$

$$\tilde{B}_{42} = \left[ \hat{h}_g \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] \tilde{\quad} \quad (401)$$



$$\tilde{B}_{43} = \left[ \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} \right] + \quad (402)$$

$$\left[ (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} - (1 - \alpha) \right] \quad (403)$$

$$\tilde{B}_{44} = \left[ \alpha \rho_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + \alpha \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_g \hat{h}_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right] + \quad (404)$$

$$\left[ (1 - \alpha) \rho_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + (1 - \alpha) \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \hat{h}_l \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right] \quad (405)$$

Finalmente, a matriz  $\tilde{B}$  pode ser escrita, como:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} & \tilde{B}_{14} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \tilde{B}_{23} & \tilde{B}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{B}_{41} & \tilde{B}_{42} & \tilde{B}_{43} & \tilde{B}_{44} \end{pmatrix} \quad (406)$$

### D.2.3 Matriz perturbada $\tilde{C}$

Aplicando-se a Eq. (369), encontram-se os elementos da matriz  $\tilde{C}$ .

$$\tilde{C}_{11} = 0 \quad (407)$$

$$\tilde{C}_{12} = \tilde{\rho}_l \quad (408)$$

$$\tilde{C}_{13} = \left( j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right) \quad (409)$$

$$\tilde{C}_{14} = \left( j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_{g0} j_{l0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right) \quad (410)$$

$$\tilde{C}_{21} = \tilde{\rho}_g \quad (411)$$

$$\tilde{C}_{22} = 0 \quad (412)$$

$$\tilde{C}_{23} = \left( j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_{g0} j_{i0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} \right) \tilde{\phantom{C}} \quad (413)$$

$$\tilde{C}_{24} = \left( j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_{g0} j_{i0} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} \right) \tilde{\phantom{C}} \quad (414)$$

$$\tilde{C}_{31} = 0 \quad (415)$$

$$\tilde{C}_{32} = 0 \quad (416)$$

$$\tilde{C}_{33} = 1 \quad (417)$$

$$\tilde{C}_{34} = 0 \quad (418)$$

$$\tilde{C}_{41} = \left( \rho_g \hat{h}_g \right) \tilde{\phantom{C}} \quad (419)$$

$$\tilde{C}_{42} = \left( \rho_l \hat{h}_l \right) \tilde{\phantom{C}} \quad (420)$$

$$\tilde{C}_{43} = \left[ \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right] \tilde{\phantom{C}} \quad (421)$$

$$\tilde{C}_{44} = \left[ \rho_g j_g \frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} + j_g \hat{h}_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_l j_l \frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} + j_l \hat{h}_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \right] \tilde{\phantom{C}} \quad (422)$$

Finalmente, a matriz  $\tilde{\underline{C}}$  pode ser escrita, como:

$$\tilde{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} \\ \tilde{C}_{21} & 0 & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} & 0 \\ \tilde{C}_{41} & \tilde{C}_{42} & \tilde{C}_{43} & \tilde{C}_{44} \end{pmatrix} \quad (423)$$

As derivadas que constituem os termos das matrizes  $\tilde{\underline{A}}$ ,  $\tilde{\underline{B}}$  e  $\tilde{\underline{C}}$  são deduzidas no Apêndice F.

## APÊNDICE E – EQUAÇÕES PERTURBADAS DISCRETIZADAS

### E.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice será apresentada a discretização do sistema dinâmico perturbado, conforme a abordagem de Andreolli (2018). Em relação a este trabalho, foram incluídas  $N - 1$  linhas e  $N$  colunas nas matrizes retangulares esparsas  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  e ainda  $N$  elementos no vetor dos valores nodais das variáveis de estado. Além disso, para fechar matematicamente o problema, foram acrescentadas  $N$  linhas nas matrizes discretizadas referentes as condições de contorno. Desse modo, as matrizes  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  possuem dimensões  $(4N - 4) \times 4N$ , o vetor  $\underline{\hat{v}}$  ordem  $4N$  e as matrizes quadradas  $\underline{G}^*$  e  $\underline{H}^*$  dimensão  $(4N \times 4N)$ . A discretização do sistema de equações perturbadas ao longo da geometria, transforma o problema contínuo em um problema discreto com um número finito de graus de liberdade. A geometria é discretizada em  $N$  nós e o sistema matricial perturbado é integrado. As condições de contorno são linearizadas e adicionadas ao sistema discretizado, ocasionando a igualdade entre o número de equações e o número de variáveis.

### E.2 EQUAÇÕES DISCRETIZADAS DAS PERTURBAÇÕES

O sistema matricial é representado pela Eq. (120), repetida convenientemente aqui:

$$\underline{\tilde{A}} \cdot \{\hat{v}\} + \underline{\tilde{B}} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \underline{\tilde{C}} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\} = 0 \quad (424)$$

O comprimento do duto é discretizado em  $N$  nós e a Eq. (424) é integrada no intervalo  $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ . Valores representativos para qualquer função  $\phi$  ou qualquer variável dentro do intervalo de integração são calculados através do valor médio entre os nós adjacentes:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} [\phi(\tilde{v}_i) + \phi(\tilde{v}_{i+1})] \quad (425)$$

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} (\hat{v}_i + \hat{v}_{i+1}) \quad (426)$$

As derivadas temporais e espaciais são aproximadas pelo do método das diferenças finitas:

$$\left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{(\hat{v}_{i+1} - \hat{v}_i)}{\Delta s_i} \quad (427)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{v}_i}{dt} + \frac{d\hat{v}_{i+1}}{dt}\right) \quad (428)$$

O sistema da Eq. (120) pode ser descrito na forma explícita, representando respectivamente as equações perturbadas de conservação de massa da fase líquida, de balanço de massa da fase gasosa, balanço da quantidade de movimento linear e energia:

onde  $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ .

O sistema da Eq. (120) pode ser descrito na forma explícita, representando respectivamente as equações perturbadas de conservação de massa da fase líquida, de balanço de massa da fase gasosa, balanço da quantidade de movimento linear e energia:

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_{11} \hat{j}_g + \tilde{A}_{12} \hat{j}_l + \tilde{A}_{13} \hat{P} + \tilde{A}_{14} \hat{T} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \\ & \tilde{B}_{13} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{B}_{14} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \tilde{C}_{11} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{12} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{13} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} + \tilde{C}_{14} \frac{\partial \hat{T}}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (429)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_{21} \hat{j}_g + \tilde{A}_{22} \hat{j}_l + \tilde{A}_{23} \hat{P} + \tilde{A}_{24} \hat{T} + \tilde{B}_{21} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \\ & \tilde{B}_{23} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{B}_{24} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \tilde{C}_{21} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{22} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{23} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} + \tilde{C}_{24} \frac{\partial \hat{T}}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (430)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_{31} \hat{j}_g + \tilde{A}_{32} \hat{j}_l + \tilde{A}_{33} \hat{P} + \tilde{A}_{34} \hat{T} + \tilde{B}_{31} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{32} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \\ & \tilde{B}_{33} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{B}_{34} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \tilde{C}_{31} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{32} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{33} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} + \tilde{C}_{34} \frac{\partial \hat{T}}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (431)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_{41} \hat{j}_g + \tilde{A}_{42} \hat{j}_l + \tilde{A}_{43} \hat{P} + \tilde{A}_{44} \hat{T} + \tilde{B}_{41} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial t} + \tilde{B}_{42} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial t} + \\ & \tilde{B}_{43} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \tilde{B}_{44} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \tilde{C}_{41} \frac{\partial \hat{j}_g}{\partial s} + \tilde{C}_{42} \frac{\partial \hat{j}_l}{\partial s} + \tilde{C}_{43} \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} + \tilde{C}_{44} \frac{\partial \hat{T}}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (432)$$

Integrando em relação à posição o sistema de equações no intervalo entre  $s_i \leq s \leq s_{i+1}$  e efetuando algumas manipulações algébricas, pode-se escrever a equação perturbada de conservação de massa da fase líquida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{11})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{11})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{11})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{11})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{14})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{14})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{14})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{14})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_{i+1} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{11})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{11})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{12})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{12})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{13})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{13})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{14})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{14})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} = 0 \tag{433}
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para a equação perturbada de conservação de massa da fase

gás:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{22})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{22})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{22})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{22})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{24})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{24})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{24})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{24})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_{i+1} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{21})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{21})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{23})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{23})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{24})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{24})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} = 0 \tag{434}
\end{aligned}$$

Analogamente, para a equação perturbada de conservação de momento linear:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{31})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{31})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{31})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{31})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{32})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{32})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{32})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{32})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{34})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{34})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{34})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{34})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_{i+1} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{31})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{31})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{32})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{32})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{33})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{33})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{34})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{T}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{34})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{T}_{i+1}}{dt} = 0
\end{aligned} \tag{435}$$

De maneira semelhante, para a equação de conservação de energia:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{41})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{41})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{41})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{41})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{gi+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{42})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{42})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{42})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{42})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{j}_{li+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{43})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{43})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{43})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{43})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{P}_{i+1} \\
& + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{44})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{44})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_i + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{A}_{44})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{44})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \right] \hat{T}_{i+1} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{41})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{41})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{42})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{42})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{43})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{43})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& \quad + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{44})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{T}_i}{dt} + \left[ \frac{1}{2}(\tilde{B}_{44})_{i+\frac{1}{2}} \right] \frac{d\hat{T}_{i+1}}{dt} = 0
\end{aligned} \tag{436}$$

As Eqs. (433), (434), (435) e (436) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
& (G_{11})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{11})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{12})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{12})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{13})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{13})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& + (G_{14})_{i,i} \frac{d\hat{T}_i}{dt} + (G_{14})_{i,i+1} \frac{d\hat{T}_{i+1}}{dt} \\
& + (H_{11})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{11})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& + (H_{12})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{12})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{13})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{13})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} \\
& + (H_{14})_{i,i} \hat{T}_i + (H_{14})_{i,i+1} \hat{T}_{i+1} = 0
\end{aligned} \tag{437}$$

$$\begin{aligned}
& (G_{21})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{21})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{22})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{22})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{23})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{23})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& + (G_{24})_{i,i} \frac{d\hat{T}_i}{dt} + (G_{24})_{i,i+1} \frac{d\hat{T}_{i+1}}{dt} \\
& + (H_{21})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{21})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& + (H_{22})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{22})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{23})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{23})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} \\
& + (H_{24})_{i,i} \hat{T}_i + (H_{24})_{i,i+1} \hat{T}_{i+1} = 0
\end{aligned} \tag{438}$$

$$\begin{aligned}
& (G_{31})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{31})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{32})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{32})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{33})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{33})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& + (G_{34})_{i,i} \frac{d\hat{T}_i}{dt} + (G_{34})_{i,i+1} \frac{d\hat{T}_{i+1}}{dt} \\
& + (H_{31})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{31})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& + (H_{32})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{32})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{33})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{33})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} \\
& + (H_{34})_{i,i} \hat{T}_i + (H_{34})_{i,i+1} \hat{T}_{i+1} = 0
\end{aligned} \tag{439}$$

$$\begin{aligned}
& (G_{41})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{gi}}{dt} + (G_{41})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{gi+1}}{dt} \\
& + (G_{42})_{i,i} \frac{d\hat{j}_{li}}{dt} + (G_{42})_{i,i+1} \frac{d\hat{j}_{li+1}}{dt} \\
& + (G_{43})_{i,i} \frac{d\hat{P}_i}{dt} + (G_{43})_{i,i+1} \frac{d\hat{P}_{i+1}}{dt} \\
& + (G_{44})_{i,i} \frac{d\hat{T}_i}{dt} + (G_{44})_{i,i+1} \frac{d\hat{T}_{i+1}}{dt} \\
& + (H_{41})_{i,i} \hat{j}_{gi} + (H_{41})_{i,i+1} \hat{j}_{gi+1} \\
& + (H_{42})_{i,i} \hat{j}_{li} + (H_{42})_{i,i+1} \hat{j}_{li+1} \\
& + (H_{43})_{i,i} \hat{P}_i + (H_{43})_{i,i+1} \hat{P}_{i+1} \\
& + (H_{44})_{i,i} \hat{T}_i + (H_{44})_{i,i+1} \hat{T}_{i+1} = 0
\end{aligned} \tag{440}$$

As submatrizes  $\underline{G}_{ij}$  e  $\underline{H}_{ij}$ , são obtidas comparando-se cada termo discretizado, Eq. (433) com Eq. (437), Eq. (434) com Eq. (438), Eq. (435) com Eq. (439) e Eq. (436) com Eq. (440). Uma vez que existem  $N - 1$  intervalos de integração para as Eq. (437) a (440), essas submatrizes são retangulares com dimensões  $(N - 1) \times N$ , com elementos dados por:

$$(G_{11})_{i,i} = (G_{11})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{11})_{i+\frac{1}{2}} \tag{441}$$

$$(G_{12})_{i,i} = (G_{12})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{12})_{i+\frac{1}{2}} \tag{442}$$



$$(G_{13})_{i,i} = (G_{13})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{13})_{i+\frac{1}{2}} \quad (443)$$

$$(G_{14})_{i,i} = (G_{14})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{14})_{i+\frac{1}{2}} \quad (444)$$

$$(H_{11})_{i,i} = (H_{11})_{i,i+1} = 0 \quad (445)$$

$$(H_{12})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (446)$$

$$(H_{12})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{12})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{12})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (447)$$

$$(H_{13})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (448)$$

$$(H_{13})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{13})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{13})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (449)$$

$$(H_{14})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{14})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{14})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (450)$$

$$(H_{14})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{14})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{14})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (451)$$

$$(G_{21})_{i,i} = (G_{21})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{21})_{i+\frac{1}{2}} \quad (452)$$

$$(G_{22})_{i,i} = (G_{22})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{22})_{i+\frac{1}{2}} \quad (453)$$

$$(G_{23})_{i,i} = (G_{23})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{23})_{i+\frac{1}{2}} \quad (454)$$

$$(G_{24})_{i,i} = (G_{24})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{B}_{24})_{i+\frac{1}{2}} \quad (455)$$

$$(H_{21})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (456)$$

$$(H_{21})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{21})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{21})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (457)$$

$$(H_{22})_{i,i} = (H_{22})_{i,i+1} = 0 \quad (458)$$

$$(H_{23})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (459)$$

$$(H_{23})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{23})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{23})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (460)$$

$$(H_{24})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{24})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{24})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (461)$$

$$(H_{24})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{24})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{24})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (462)$$

$$(G_{31})_{i,i} = (G_{31})_{i,i+1} = 0 \quad (463)$$

$$(G_{32})_{i,i} = (G_{32})_{i,i+1} = 0 \quad (464)$$

$$(G_{33})_{i,i} = (G_{33})_{i,i+1} = 0 \quad (465)$$

$$(G_{34})_{i,i} = (G_{34})_{i,i+1} = 0 \quad (466)$$

$$(H_{31})_{i,i} = (H_{31})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{31})_{i+\frac{1}{2}} \quad (467)$$

$$(H_{32})_{i,i} = (H_{32})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{32})_{i+\frac{1}{2}} \quad (468)$$

$$(H_{33})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (469)$$

$$(H_{33})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{33})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{33})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (470)$$

$$(H_{34})_{i,i} = (H_{34})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{34})_{i+\frac{1}{2}} \quad (471)$$

$$(G_{41})_{i,i} = (G_{41})_{i,i+1} = 0 \quad (472)$$

$$(G_{42})_{i,i} = (G_{42})_{i,i+1} = 0 \quad (473)$$

$$(G_{43})_{i,i} = (G_{43})_{i,i+1} = 0 \quad (474)$$

$$(G_{44})_{i,i} = (G_{44})_{i,i+1} = 0 \quad (475)$$

$$(H_{41})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{41})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{41})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (476)$$

$$(H_{41})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{41})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{41})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (477)$$

$$(H_{42})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{42})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{42})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (478)$$

$$(H_{42})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{42})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{42})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (479)$$

$$(H_{43})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{43})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{43})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (480)$$

$$(H_{43})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{43})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{43})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (481)$$

$$(H_{44})_{i,i} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{44})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{(\tilde{C}_{44})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (482)$$

$$(H_{44})_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\tilde{A}_{44})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{(\tilde{C}_{44})_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (483)$$

O sistema constituído pelas Eqs. (433) a (436), em notação matricial, pode ser escrito

por:

$$\underline{G} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{\underline{v}}}{\partial t} \right\} + \underline{H} \cdot \{\hat{\underline{v}}\} = \{0\} \quad (484)$$

onde:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \underline{G}_{14} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} & \underline{G}_{24} \\ \underline{G}_{31} & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} \\ \underline{G}_{41} & \underline{G}_{42} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} \end{pmatrix} \quad (485)$$

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} & \underline{H}_{14} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} & \underline{H}_{24} \\ \underline{H}_{31} & \underline{H}_{32} & \underline{H}_{33} & \underline{H}_{34} \\ \underline{H}_{41} & \underline{H}_{42} & \underline{H}_{43} & \underline{H}_{44} \end{pmatrix} \quad (486)$$

Na Eq. (484),  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  são matrizes retangulares esparsas com dimensões  $(4N-4) \times 4N$ , enquanto  $\hat{\underline{v}}$  é o vetor dos valores nodais das variáveis de estado perturbadas com  $4N$  componentes definidos pela Eq. (141):

$$\{\hat{\underline{v}}\}_j = \begin{cases} \hat{j}_{gj} & 1 \leq j \leq N \\ \hat{j}_{t_{j-N}} & N+1 \leq j \leq 2N \\ \hat{P}_{j-2N} & 2N+1 \leq j \leq 3N \\ \hat{T}_{j-3N} & 3N+1 \leq j \leq 4N \end{cases} \quad (487)$$

As condições de contorno devem ser inseridas, para o fechamento do sistema, de modo a obter a igualdade entre o número variáveis e o número de equações. Adotando a numeração dos nós da ANM, 1 e na plataforma,  $N$  e aplicando as Eqs. (488), (489), (490) e (491), nas condições linearizadas, então:

$$\hat{P}_N = 0 \quad (488)$$

$$\hat{T}_1 = 0 \quad (489)$$

$$\hat{j}_{g1} + C_{gp1} \hat{P}_1 + C_{gt1} \hat{T}_N = 0 \quad (490)$$

$$\hat{j}_{l1} + C_{lp1} \hat{P}_1 + C_{lt1} \hat{T}_N = 0 \quad (491)$$

onde:

$$C_{gp1} = \left[ \left( GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left( \frac{\partial B_g}{\partial P} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left( \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (492)$$

$$C_{gt1} = \left[ \left( GOR - \tilde{R}_{so} \right) \left( \frac{\partial B_g}{\partial T} \right)^{\sim} - \tilde{B}_g \left( \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (493)$$

$$C_{lp1} = \left[ \left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right)^{\sim} + WOR \left( \frac{\partial B_w}{\partial P} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (494)$$

$$C_{lt1} = \left[ \left( \frac{\partial B_o}{\partial T} \right)^{\sim} + WOR \left( \frac{\partial B_w}{\partial T} \right)^{\sim} \right] \frac{j_{l0}}{1 + WOR} \quad (495)$$

As matrizes quadradas  $\underline{G}^*$  e  $\underline{H}^*$  (dimensão  $4N \times 4N$ ) são definidas como as matrizes  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  ampliadas com as condições de contorno das Eqs. (488) a (491). Portanto, o problema completo de autovalores a ser solucionado é dado pela Eq. (496):

$$\underline{G}^* \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\} + \underline{H}^* \cdot \{ \hat{v} \} = \{ 0 \}$$



## APÊNDICE F – DERIVADAS DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS

### F.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice serão apresentadas as derivadas das propriedades termofísicas, seguindo a formulação de Andreolli (2018). Em relação a este trabalho, foram acrescentadas as derivadas das propriedades termofísicas em relação à temperatura e as derivadas dos termos da equação de conservação de energia em relação às variáveis de estado. Cada derivada foi calculada analiticamente para redução do erro do modelo numérico. A regra da cadeia foi aplicada, devido à dependência implícita de diversas variáveis das funções que compõem os termos das matrizes perturbadas.

### F.2 DERIVADAS DE FUNÇÕES TERMODINÂMICAS

Nesta seção serão apresentadas as expressões analíticas para as derivadas de funções relacionadas às propriedades termofísicas dos fluidos e são utilizadas nos coeficientes das matrizes perturbadas  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_{ij}$  e  $\tilde{C}_{ij}$  da Seção 3.7. Os coeficientes citados estão no Apêndice D.

#### F.2.1 Derivadas da razão de solubilidade gás-líquido

Por meio da Eq. (246) pode-se escrever:

**Derivada  $\frac{\partial R_{sl}}{\partial P}$ :**

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial P} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (496)$$

Derivando-se a Eq. (246):

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial R_{so}} = \frac{1}{1 + WOR} \quad (497)$$

Substituindo a Eq. (497) na Eq. (496), encontra-se

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial P} = \frac{1}{1 + WOR} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (498)$$

**Derivada  $\frac{\partial R_{sl}}{\partial T}$ :**

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial T} = \frac{1}{1 + WOR} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (499)$$

Substituindo a Eq. (497) na Eq. (499), encontra-se:

$$\frac{\partial R_{sl}}{\partial T} = \frac{\partial R_{sl}}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (500)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2}$ :**

A partir da Eq. (498) a derivada segunda da  $R_{sl}$  em relação a pressão, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} = \frac{1}{1 + WOR} \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \quad (501)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2}$ :**

A partir da Eq. (500) a derivada segunda da  $R_{sl}$  em relação a temperatura, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2} = \frac{1}{1 + WOR} \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial T^2} \quad (502)$$

## F.2.2 Derivadas da razão de solubilidade gás-óleo

Para  $P \leq P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial R_{so}}{\partial P}$ :**

Através da correlação de Standing (1951) no S.I, representada pela Eq.(178) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} &= \frac{1,2048 \gamma_g}{C_1} \left[ \frac{C_2}{18,2} 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right] \\ &\times \left[ \left( \frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^{0,2048} \end{aligned} \quad (503)$$

**Derivada  $\frac{\partial R_{so}}{\partial T}$ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} &= \frac{1,2048 \gamma_g}{C_1} \times \left[ \left( \frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) \times (1,49 \times 10^{-6} C_3 - 2,045 \times 10^{-5} API) \right] \\ &\times \left[ 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3 - 1)} \right]^{0,2048} \end{aligned} \quad (504)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2}$ :**

Derivando-se a Eq. (503) em relação a pressão, encontra-se:



$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} &= \frac{0,24674304 \gamma_g}{C_1} \left[ \frac{C_2}{18,2} 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^2 \\ &\times \left[ \left( \frac{C_2 P}{18,2} + 1,4 \right) 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^{-0,7952} \end{aligned} \quad (505)$$

Analogamente, para a temperatura obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial T^2} &= \frac{0,24674304 \gamma_g}{C_1} \left[ 2,628 \times 10^{-6} \left( \frac{C_2}{18,2} + 1,4 \right) \right] \\ &\times \left[ (2 \times 10^{-5} API - 1,456 \times 10^{-6} C_3 - 0,0016) 10^{(0,0125 API - 0,00091 C_3)} \right]^{-0,7952} \end{aligned} \quad (506)$$

Para  $P > P_b$ :

$$\frac{\partial R_{so}}{\partial P} = 0 \quad (507)$$

$$\frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} = 0 \quad (508)$$

$$\frac{\partial R_{so}}{\partial T} = 0 \quad (509)$$

$$\frac{\partial^2 R_{so}}{\partial T^2} = 0 \quad (510)$$

### F.2.3 Derivadas do fator volume de formação do líquido

**Derivada  $\frac{\partial B_l}{\partial P}$ :**

A partir da Eq. (249) pode-se escrever:

$$\frac{\partial B_l}{\partial P} = \frac{\partial B_l}{\partial B_o} \frac{\partial B_o}{\partial P} + \frac{\partial B_l}{\partial B_w} \frac{\partial B_w}{\partial P} \quad (511)$$

**Derivada  $\frac{\partial B_l}{\partial T}$ :**

$$\frac{\partial B_l}{\partial T} = \frac{\partial B_l}{\partial B_o} \frac{\partial B_o}{\partial T} + \frac{\partial B_l}{\partial B_w} \frac{\partial B_w}{\partial T} \quad (512)$$

Ainda considerando a Eq. (249), pode-se determinar  $\frac{\partial B_l}{\partial B_o}$  e  $\frac{\partial B_l}{\partial B_w}$

$$\frac{\partial B_l}{\partial B_o} = \frac{1}{1 + WOR} \quad (513)$$

$$\frac{\partial B_l}{\partial B_w} = \frac{WOR}{1 + WOR} \quad (514)$$

Substituindo as relações acima, nas Eqs. (511) e (512):

$$\frac{\partial B_l}{\partial P} = \left( \frac{1}{1 + WOR} \right) \frac{\partial B_o}{\partial P} + \left( \frac{WOR}{1 + WOR} \right) \frac{\partial B_w}{\partial P} \quad (515)$$

$$\frac{\partial B_l}{\partial T} = \left( \frac{1}{1 + WOR} \right) \frac{\partial B_o}{\partial T} + \left( \frac{WOR}{1 + WOR} \right) \frac{\partial B_w}{\partial T} \quad (516)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 B_l}{\partial P^2}$ :**

Através da Eq. (515), pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 B_l}{\partial P^2} = \left( \frac{1}{1 + WOR} \right) \frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} + \left( \frac{WOR}{1 + WOR} \right) \frac{\partial^2 B_w}{\partial P^2} \quad (517)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 B_l}{\partial T^2}$ :**

Analogamente, para a segunda derivada do fator de formação de líquido em relação a temperatura, temos que:

$$\frac{\partial^2 B_l}{\partial T^2} = \left( \frac{1}{1 + WOR} \right) \frac{\partial^2 B_o}{\partial T^2} + \left( \frac{WOR}{1 + WOR} \right) \frac{\partial^2 B_w}{\partial T^2} \quad (518)$$

#### F.2.4 Derivadas do fator volume de formação do óleo

Para  $P \leq P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial B_o}{\partial P}$ :**

A partir da Eq. (182) no S.I. podemos escrever:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \frac{\partial B_o}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (519)$$

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = 0,000144 \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25C_3 \right]^{0,2} \left[ C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \right] \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (520)$$

**Derivada  $\frac{\partial B_o}{\partial T}$ :**

Analogamente, para a derivada do fator volume de formação de óleo em relação a temperatura, podemos escrever:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \frac{\partial B_o}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (521)$$

$$\frac{\partial B_o}{\partial T} = 0,000144 \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{0,2} \left[ C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \right] \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (522)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2}$ :**

Para a segunda derivada, pode-se inserir a função ( $\phi_1$ ) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \phi_1 \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (523)$$

onde:

$$\phi_1 = \frac{\partial B_o}{\partial R_{so}} = 0,000144 C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{0,2} \quad (524)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} = \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial P} \right] + \phi_1 \left[ \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \right] \quad (525)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} &= 2,88 \cdot 10^{-5} \left[ C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \right]^2 \\ &\times \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{-0,8} + \phi_1 \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \end{aligned} \quad (526)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 B_o}{\partial T^2}$ :**

$$\frac{\partial B_o}{\partial T} = \phi_1 \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (527)$$

Novamente, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial^2 B_o}{\partial T^2} = \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \right] + \phi_1 \left[ \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial T^2} \right] \quad (528)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_o}{\partial T^2} &= 2,41 \cdot 10^{-5} \left[ C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \right]^2 \\ &\times \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{-0,8} + \phi_1 \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial T^2} \end{aligned} \quad (529)$$

Para  $P > P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial B_o}{\partial P}$ :**

Aplicando a regra da cadeia as Eqs. (183) e (185):

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right)_{c_o} + \left( \frac{\partial B_o}{\partial c_o} \right) \frac{\partial c_o}{\partial P} \quad (530)$$

onde:

$$\left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right)_{c_o} = -B_{ob} c_o \exp [-c_o (P - P_b)] = \phi \quad (531)$$

$$\left( \frac{\partial B_o}{\partial c_o} \right) = -B_{ob} (P - P_b) \exp [-c_o (P - P_b)] = \psi \quad (532)$$

$$\frac{\partial c_o}{\partial P} = \frac{1433 - 5 C_1 GOR - 17,2 C_3 + 1180 \gamma_g - 12,61 API}{10^5 P^2} = \varphi \quad (533)$$

**Derivada  $\frac{\partial B_o}{\partial T}$ :**

Analogamente para a temperatura, a partir da regra da cadeia as Eqs. (183) e (185), podem ser escritas como:

$$\frac{\partial B_o}{\partial T} = \left( \frac{\partial B_o}{\partial T} \right)_{c_o} + \left( \frac{\partial B_o}{\partial c_o} \right) \frac{\partial c_o}{\partial T} \quad (534)$$

onde:

$$\left(\frac{\partial B_o}{\partial T}\right)_{c_o} = -B_{ob} \exp [-c_o (P - P_b)] = \phi_2 \quad (535)$$

$$\frac{\partial c_o}{\partial T} = \frac{17,2}{10^5 P} = \varphi_2 \quad (536)$$

**Derivada**  $\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2}$ :

Para a segunda derivada, tomando as funções  $\phi_T$ ,  $\psi_T$  e  $\varphi_T$  definidas acima, podemos escrever:

$$\frac{\partial B_o}{\partial P} = \phi + \psi \varphi \quad (537)$$

$$\frac{\partial^2 B_o}{\partial P^2} = \frac{\partial \phi}{\partial P} + \frac{\partial \phi}{\partial c_o} \frac{\partial c_o}{\partial P} + \varphi \left[ \frac{\partial \psi}{\partial P} + \frac{\partial \psi}{\partial c_o} \frac{\partial c_o}{\partial P} \right] + \psi \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial P} \right] \quad (538)$$

onde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial P} = B_{ob} c_o^2 \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (539)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c_o} = \frac{\partial \psi}{\partial P} = -B_{ob} \exp [-c_o (P - P_b)] + B_{ob} c_o (P - P_b) \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (540)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_o} = B_{ob} (P - P_b)^2 \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (541)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P} = \frac{-2 (1433 - 5 C_1 GOR - 17,2 C_3 + 1180 \gamma_g - 12,61 API)}{10^5 P^3} \quad (542)$$

**Derivada**  $\frac{\partial^2 B_o}{\partial T^2}$ :

Repetindo o procedimento para a derivada segunda em relação à temperatura:

$$\frac{\partial B_o}{\partial T} = \phi_2 + \psi \varphi_2 \quad (543)$$

$$\frac{\partial^2 B_o}{\partial T^2} = \frac{\partial \phi_2}{\partial T} + \frac{\partial \phi_2}{\partial c_o} \frac{\partial c_o}{\partial T} + \varphi \left[ \frac{\partial \psi}{\partial T} + \frac{\partial \psi}{\partial c_o} \frac{\partial c_o}{\partial T} \right] + \psi \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial T} \right] \quad (544)$$

onde:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial T} = B_{ob} (P - P_b) \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (545)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial c_o} = \frac{\partial \psi}{\partial T} = B_{ob} (P - P_b)^2 \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (546)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_o} = -B_{ob} (P - P_b)^3 \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (547)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial T} = 0 \quad (548)$$

## F.2.5 Derivadas do fator volume de formação da água

**Derivada  $\frac{\partial B_w}{\partial P}$ :**

A partir das Eqs. (187) e (191) e aplicando a regra do produto, obtém-se:

$$\frac{\partial B_w}{\partial P} = (1 + \Delta V_{wT}) \frac{\partial \Delta V_{wP}}{\partial P} \quad (549)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta V_{wP}}{\partial P} = & -1,95301 \cdot 10^{-9} C_2 C_3 - 3,45668 \cdot 10^{-13} C_2^2 C_3 P - \\ & 3,58922 \cdot 10^{-7} C_2 - 4,50682 \cdot 10^{-10} C_2^2 P \end{aligned} \quad (550)$$

**Derivada  $\frac{\partial B_w}{\partial T}$ :**

Aplicando a mesma análise para a derivada em relação à temperatura, encontra-se:

$$\frac{\partial B_w}{\partial T} = (1 + \Delta V_{wP}) \frac{\partial \Delta V_{wT}}{\partial T} \quad (551)$$

$$\frac{\partial \Delta V_{wT}}{\partial T} = 1,33391 (10^{-4}) + 11,0131 (10^{-7}) C_3 \quad (552)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 B_w}{\partial P^2}$ :**

A segunda derivada de  $B_w$  em relação à pressão, é dada por:

$$\frac{\partial^2 B_w}{\partial P^2} = (1 + \Delta V_{wT}) \frac{\partial^2 \Delta V_{wP}}{\partial P^2} \quad (553)$$

onde:

$$\frac{\partial^2 \Delta V_{wP}}{\partial P^2} = -3,45668 \cdot 10^{-13} C_2^2 C_3 - 4,50682 \cdot 10^{-10} C_2^2 \quad (554)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 B_w}{\partial T^2}$ :**

A segunda derivada de  $B_w$  em relação à temperatura, é dada por:

$$\frac{\partial^2 B_w}{\partial T^2} = (1 + \Delta V_{wP}) \frac{\partial^2 \Delta V_{wT}}{\partial T^2} \quad (555)$$

onde:

$$\frac{\partial^2 \Delta V_{wT}}{\partial T^2} = 11,0131 (10^{-7}) \quad (556)$$

## F.2.6 Derivadas do fator de compressibilidade do gás

**Derivada  $\frac{\partial Z_g}{\partial P}$ :**

Tomando-se a Eq. (169), a derivada em relação à pressão é dada por:

$$\frac{\partial Z_g}{\partial P} = - \left( \frac{3,52}{P_{pc}} \right) (10^{-0,9813 T_{pr}}) + \left( \frac{0,548 P}{P_{pc}^2} \right) (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (557)$$

**Derivada  $\frac{\partial Z_g}{\partial T}$ :**

Analogamente, a derivada em relação à temperatura é calculada por:

$$\frac{\partial Z_g}{\partial T} = \left( \frac{-3,3855 T_{pr} P_{pr}}{T_{pc}} \right) (10^{-0,9813 T_{pr}}) + \left( \frac{0,1827 T_{pr} P_{pr}^2}{T_{pc}} \right) (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (558)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 Z_g}{\partial P^2}$ :**

A derivada segunda em relação à pressão é obtida a partir da Eq. (557):

$$\frac{\partial^2 Z_g}{\partial P^2} = \left( \frac{0,548}{P_{pc}^2} \right) (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (559)$$

**Derivada**  $\frac{\partial^2 Z_g}{\partial T^2}$ :

A derivada segunda em relação à temperatura é obtida a partir da Eq. (558):

$$\frac{\partial^2 Z_g}{\partial T^2} = \left( \frac{3,3222 T_{pr} P_{pr}}{T_{pc}^2} \right) (10^{-0,9813 T_{pr}}) - \left( \frac{0,1490 T_{pr} P_{pr}^2}{T_{pc}^2} \right) (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (560)$$

### F.2.7 Derivadas do fator de compressibilidade do óleo

Para  $P \leq P_b$ :

Através da Eq. (236), obtém-se a derivada em relação à temperatura:

$$\frac{\partial Z_o}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left[ -\frac{1}{B_o} \left( \frac{\partial B_o}{\partial P} \right) \right] \quad (561)$$

Substituindo-se as Eqs. (182) e (520) na Eq. (561):

$$\frac{\partial Z_o}{\partial T} = 5,76 (10^{-6}) \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{0,8} \left[ C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \right] \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (562)$$

Para  $P > P_b$ :

Analogamente, substituindo-se as Eqs. (185) e (530) na Eq. (561):

$$\frac{\partial Z_o}{\partial T} = c_o - \frac{17,2}{10^5 P^2} B_{ob} \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (563)$$

### F.2.8 Derivadas do fator de compressibilidade da água

A partir da Eq. (242), obtém-se a derivada em relação à temperatura:

$$\frac{\partial Z_w}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left[ -\frac{1}{B_w} \left( \frac{\partial B_w}{\partial P} \right) \right] \quad (564)$$

Substituindo-se as Eqs. (187) e (549) na Eq. (564):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_w}{\partial T} = & (1 + \Delta V_{wP}) \times (1,95301 \cdot 10^{-9} C_2 - 3,45668 \cdot 10^{-13} C_2^2 P) \\ & + (1 + \Delta V_{wP}) (1 + \Delta V_{wT}) \frac{\partial \Delta V_{wP}}{\partial P} \end{aligned} \quad (565)$$



### F.2.9 Derivadas da massa específica do gás

**Derivada  $\frac{\partial \rho_g}{\partial P}$ :**

Através da Eq. (175) pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial P} + \frac{\partial \rho_g}{\partial Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \quad (566)$$

Derivando a Eq. (175) e substituindo na Eq. (566), encontra-se:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{M_g}{R_g} \frac{1}{TZ_g} - \frac{M_g}{R_g} \frac{P}{TZ_g^2} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \quad (567)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial P} = \frac{M_g}{R_g} \frac{1}{TZ_g} \left[ 1 - \frac{P}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial P} \right] \quad (568)$$

**Derivada  $\frac{\partial \rho_g}{\partial T}$ :**

A partir da Eq. (175) pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial T} = \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T} + \frac{\partial \rho_g}{\partial Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial T} \quad (569)$$

Derivando a Eq. (175) e substituindo na Eq. (569), encontra-se:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial T} = -\frac{P}{R_g} \frac{M_g}{T^2 Z_g} - \frac{M_g}{R_g} \frac{P}{TZ_g^2} \frac{\partial Z_g}{\partial T} \quad (570)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial P^2}$ :**

Tomando as seguintes funções:  $\frac{\partial \rho_g}{\partial T} = \Phi_2$ ,  $\frac{\partial Z_g}{\partial T} = \Psi_2$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial T^2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial T} = f(Z_g, T, \Psi) \quad (571)$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial T^2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial T} + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial T} \right) Z_{g,\Psi} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial T} \quad (572)$$

Substituindo a derivada de cada uma das funções que formam a Eq. (572):

$$\frac{\partial^2 \rho_g}{\partial T^2} = \left( \frac{2P}{R_g} \frac{M_g}{Z_g} \frac{1}{T^3} \right) \frac{\partial Z_g}{\partial T} + \left( \frac{M_g}{R_g} \frac{P}{Z_g^2} \frac{1}{T^2} \right) \frac{\partial^2 Z_g}{\partial T^2} \quad (573)$$

## F.2.10 Derivadas da massa específica do líquido

**Derivada  $\frac{\partial \rho_l}{\partial P}$ :**

A partir da Eq. (253) pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial P} = \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \frac{\partial B_l}{\partial P} \quad (574)$$

Derivando a Eq. (253) em relação a  $R_{sl}$ , encontra-se:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} = \frac{\rho_{g0}}{B_l} \quad (575)$$

Derivando a Eq. (253) em relação a  $B_l$ , encontra-se:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} = -\frac{(\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0})}{B_l^2} \quad (576)$$

**Derivada  $\frac{\partial \rho_l}{\partial T}$ :**

Repetindo o procedimento descrito acima para a temperatura:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial T} = \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} + \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \frac{\partial B_l}{\partial T} \quad (577)$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial T} = \frac{\rho_{g0}}{B_l} \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} - \frac{(\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0})}{B_l^2} \frac{\partial B_l}{\partial T} \quad (578)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2}$ :**

A partir da Eq. (574) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial P^2} = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial P^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} + \\ \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \right) \frac{\partial B_l}{\partial P} + \frac{\partial^2 B_l}{\partial P^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \end{aligned} \quad (579)$$

Calculando-se:  $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial R_{sl}^2}$  e  $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial B_l^2}$  e aplicando-se as Eqs. (575) e (576), pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial R_{sl}^2} = -\frac{\rho_{g0}}{B_l^2} \frac{\partial B_l}{\partial P} \quad (580)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial B_l^2} = -\frac{\rho_{g0}}{B_l^2} \frac{\partial R_{sl}}{\partial P} + \frac{2(\rho_{g0} R_{sl} + \rho_{l0})}{B_l^3} \frac{\partial B_l}{\partial P} \quad (581)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \rho_l}{\partial T^2}$ :**

Analogamente, para a segunda derivada em relação à temperatura, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} \right) \frac{\partial R_{sl}}{\partial T} + \frac{\partial^2 R_{sl}}{\partial T^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial R_{sl}} + \\ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \right) \frac{\partial B_l}{\partial T} + \frac{\partial^2 B_l}{\partial T^2} \frac{\partial \rho_l}{\partial B_l} \end{aligned} \quad (582)$$

#### F.2.11 Derivadas da viscosidade do gás

**Derivada  $\frac{\partial \mu_g}{\partial P}$ :**

Partindo da Eq. (197), pode-se escrever:

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial P} = \frac{\partial \mu_g}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \quad (583)$$

Derivando a Eq. (197) e substituindo da Eq. (583), encontra-se:

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \rho_g} = (10^{-4} C_4^{F_3+1} \rho_g^{F_3-1} F_1 F_2 F_3) \exp \left[ F_2 (C_4 \rho_g)^{F_3} \right] \quad (584)$$

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial P} = (10^{-4} C_4^{F_3+1} \rho_g^{F_3-1} F_1 F_2 F_3) \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \exp \left[ F_2 (C_4 \rho_g)^{F_3} \right] \quad (585)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu_g}{\partial T}$ :**

Novamente, aplicando a Eq. (197):

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial T} = \frac{\partial \mu_g}{\partial \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \quad (586)$$

Substituindo-se a Eq. (584) na Eq. (586), resulta em:

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial T} = (10^{-4} C_4^{F_3+1} \rho_g^{F_3-1} F_1 F_2 F_3) \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \exp \left[ F_2 (C_4 \rho_g)^{F_3} \right] \quad (587)$$

#### F.2.12 Derivadas da viscosidade do óleo

Para  $P \leq P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial \mu_o}{\partial P}$ :**

Através das equações definidas para óleo saturado ( $P \leq P_b$ ), Eqs. (205) e (206) e aplicando-se a regra da cadeia de derivação, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial P} = \frac{\partial \mu_o}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} + \frac{\partial \mu_o}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial P} \quad (588)$$

onde:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial R_{so}} = -5,518225 C_1 C_4 \left( \frac{\mu_{od}}{C_4} \right)^b (C_1 R_{so} + 100)^{-1,515} \quad (589)$$

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial b} = 10,715 C_4 (C_1 R_{so} + 100)^{-0,515} \left( \frac{\mu_{od}}{C_4} \right)^b \ln \left( \frac{\mu_{od}}{C_4} \right) \quad (590)$$

$$\frac{\partial b}{\partial R_{so}} = -1,83872 C_1 (C_1 R_{so} + 150)^{-1,338} \quad (591)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu_o}{\partial T}$ :**

Analogamente para a derivada em relação à temperatura, temos que:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial T} = \frac{\partial \mu_o}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} + \frac{\partial \mu_o}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial R_{so}} \frac{\partial R_{so}}{\partial T} \quad (592)$$

Para  $P > P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial \mu_o}{\partial P}$ :**

Baseando-se nas equações no S.I. definidas para óleo subsaturado ( $P > P_b$ ), Eqs. (207) e (209), novamente utilizando a regra da cadeia de derivação, encontra-se:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial P} = \frac{\partial \mu_o}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial P} + \left( \frac{\partial \mu_o}{\partial P} \right) m_2 \frac{\partial P}{\partial P} \quad (593)$$

onde:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial m_2} = \mu_{ob} \left( \frac{P}{P_b} \right)^{m_2} \ln \left( \frac{P}{P_b} \right) \quad (594)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial P} = \exp(-11,513 - 8,98 \cdot 10^{-5} C_2 P) [3,0862 C_2^{1,187} P^{0,187} - 2,3348 \cdot 10^{-4} C_2^{2,187} P^{1,187}] \quad (595)$$

$$\left( \frac{\partial \mu_o}{\partial P} \right) m_2 = \mu_{ob} P_b^{-m_2} m_2 P^{m_2-1} \quad (596)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu_o}{\partial T}$ :**

Analogamente, para a derivada em relação à temperatura, podemos escrever:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial T} = \frac{\partial \mu_o}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial T} + \left( \frac{\partial \mu_o}{\partial T} \right) m_2 \frac{\partial T}{\partial T} \quad (597)$$

onde:

$$\frac{\partial \mu_o}{\partial m_2} = \mu_{ob} \left( \frac{P}{P_b} \right)^{m_2} \ln \left( \frac{P}{P_b} \right) \quad (598)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial T} = 0 \quad (599)$$

$$\left( \frac{\partial \mu_o}{\partial T} \right) m_2 = \left( \frac{P}{P_b} \right)^{m_2} \frac{\partial \mu_{ob}}{\partial T} \quad (600)$$

A única derivada que ainda não foi calculada é:  $\frac{\partial \mu_{ob}}{\partial T}$ . Por meio da Eq. (201), podemos escrever:

$$\frac{\partial \mu_{ob}}{\partial T} = \left( 0,32 + \frac{1,8 (10)^7}{AP I^{4,53}} \right) \left[ \frac{-360 m_1}{(C_3 + 200)^2} \right]^{(m_1-1)} \quad (601)$$

### F.2.13 Derivadas da viscosidade da água

**Derivada  $\frac{\partial \mu_w}{\partial P}$ :**

A partir da Eq. (215) obtém-se:

$$\frac{\partial \mu_w}{\partial P} = \mu_{w0} [4,0295 \cdot 10^{-5} C_2 + 6,2124 \cdot 10^{-9} (C_2 P + 14,7) C_2] \quad (602)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu_w}{\partial T}$ :**

Agora, derivando a Eq. (215) em relação a temperatura, encontra-se:

$$\frac{\partial \mu_w}{\partial T} = C_4 I_1 C_3^{(I_2-1)} [0,9994 + 4,0295 \cdot 10^{-5} (C_2 P + 14,7) + 3,1062 \cdot 10^{-9} (C_2 P + 14,7)] \quad (603)$$

### F.2.14 Derivadas da viscosidade do líquido

**Derivada  $\frac{\partial \mu_l}{\partial P}$ :**

Por meio da Eq. (27) obtém-se:

$$\frac{\partial \mu_l}{\partial P} = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \mu_o}{\partial P} + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \mu_w}{\partial P} \quad (604)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu_l}{\partial T}$ :**

Analogamente, derivando a Eq. (27) em relação à temperatura, encontra-se:

$$\frac{\partial \mu_l}{\partial T} = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \mu_o}{\partial T} + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \mu_w}{\partial T} \quad (605)$$

## F.2.15 Derivadas da entalpia do gás

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P}$ :**

Com base na Eq. (222), pode-se escrever:

$$\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial P} = -\mu_{jg} C_{pg} \quad (606)$$

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T}$ :**

Novamente, a partir da Eq. (222), encontra-se:

$$\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T} = C_{pg} \quad (607)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_g}{\partial P^2}$ :**

Substituindo-se a Eq. (230) na Eq. (606), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_g}{\partial P^2} = \frac{T}{\rho_g Z_g} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial Z_g}{\partial T} \right) \quad (608)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial Z_g}{\partial T} \right) = \frac{-3,3855 T_{pr}}{T_{pc} P_{pc}} (10^{-0,9813 T_{pr}}) + \frac{0,3654 T_{pr} P}{T_{pc} P_{pc}^2} (10^{-0,8157 T_{pr}}) \quad (609)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_g}{\partial T^2}$ :**

Substituindo-se a Eq. (224) na Eq. (607), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_g}{\partial T^2} = b + C T + 2 d T^2 \quad (610)$$

## F.2.16 Derivadas da entalpia do óleo

Para  $P \leq P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_o}{\partial P}$ :**

Com base na Eq. (220), pode-se escrever:

$$\frac{\partial \hat{h}_o}{\partial P} = -\mu_{jo} C_{po} \quad (611)$$

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_g}{\partial T}$ :**

Para a derivada em relação à temperatura, a partir da Eq. (220), obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{h}_o}{\partial T} = C_{po} \quad (612)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial P^2}$ :**

Substituindo-se a Eq. (235) na Eq. (611), encontra-se:

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial P^2} = \frac{T}{\rho_o Z_o} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial Z_o}{\partial T} \right) \quad (613)$$

Finalmente, substituindo-se a Eq. (562) na Eq. (613):

$$\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial Z_o}{\partial T} \right) = 5,76 (10^{-6}) \left[ C_1 R_{so} \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} + 1,25 C_3 \right]^{0,8} \left[ C_1 \left( \frac{\gamma_g}{\gamma_o} \right)^{0,5} \right] \frac{\partial^2 R_{so}}{\partial P^2} \quad (614)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial T^2}$ :**

A segunda derivada em relação à temperatura é obtida, substituindo-se a Eq. (234) na Eq. (612):

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial T^2} = \frac{3,389}{\sqrt{\gamma_o}} \quad (615)$$

Para  $P > P_b$ :

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial P^2}$ :**

Para pressões maiores que  $P_b$ , a única expressão para as derivadas acima que deve ser alterada é a  $\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial P^2}$ . Desse modo, substituindo-se a Eq. (563) na Eq. (613), encontra-se:

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial P^2} = \left( \frac{-34,4}{10^5 P^3} \right) \left( \frac{T}{\rho_o Z_o} \right) c_o B_{ob} \exp [-c_o (P - P_b)] \quad (616)$$

## F.2.17 Derivadas da entalpia da água

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial P}$ :**

Com base na Eq. (239), pode-se escrever:

$$\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial P} = -\mu_{jw} C_{pw} \quad (617)$$

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial T}$ :**

Novamente, a partir da Eq. (239), encontra-se:

$$\frac{\partial \hat{h}_w}{\partial T} = C_{pw} \quad (618)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial P^2}$ :**

Substituindo-se a Eq. (241) na Eq. (617), encontra-se:

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial P^2} = \frac{-T}{\rho_w Z_w} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial Z_w}{\partial T} \right) \quad (619)$$

Finalmente, substituindo-se a Eq. (565) na Eq. (619):

$$\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial Z_w}{\partial T} \right) = -3,45668 \cdot 10^{-13} C_2^2 (1 + \Delta V_{wP}) + (1 + \Delta V_{wP}) (1 + \Delta V_{wT}) \frac{\partial^2 \Delta V_{wP}}{\partial P^2} \quad (620)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial T^2}$ :**

A segunda derivada em relação à temperatura é obtida, substituindo-se a Eq. (240) na Eq. (618):

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial T^2} = \frac{1841}{\sqrt{\rho_w}} \quad (621)$$

## F.2.18 Derivadas da entalpia do líquido

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P}$ :**

Por meio da Eq. (256) obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{h}_l}{\partial P} = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \hat{h}_o}{\partial P} + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial P} \quad (622)$$

**Derivada  $\frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T}$ :**

Analogamente, derivando a Eq. (256) em relação à temperatura, encontra-se:

$$\frac{\partial \hat{h}_l}{\partial T} = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \hat{h}_o}{\partial T} + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial \hat{h}_w}{\partial T} \quad (623)$$



**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_l}{\partial P^2}$ :**

A segunda derivada em relação à pressão, é obtida a partir da Eq. (622):

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_l}{\partial P^2} = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial P^2} + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial P^2} \quad (624)$$

**Derivada  $\frac{\partial^2 \hat{h}_l}{\partial T^2}$ :**

A segunda derivada em relação à temperatura, é obtida a partir da Eq. (623):

$$\frac{\partial^2 \hat{h}_l}{\partial T^2} = \left( \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial^2 \hat{h}_o}{\partial T^2} + \left( \frac{\alpha_w}{\alpha_o + \alpha_w} \right) \frac{\partial^2 \hat{h}_w}{\partial T^2} \quad (625)$$

### F.3 DERIVADAS DO FLUXO MÁSSICO TOTAL

#### F.3.1 Derivada do fluxo mássico em relação a velocidade superficial de gás

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial j_g}$ :**

Derivando-se a Eq. (18) em relação a  $j_g$ , obtém-se:

$$\frac{\partial G}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} (\rho_g j_g) + \frac{\partial}{\partial j_g} (\rho_l j_l) \quad (626)$$

$$\frac{\partial G}{\partial j_g} = \rho_g \quad (627)$$

#### F.3.2 Derivada do fluxo mássico em relação a velocidade superficial de líquido

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial j_l}$ :**

Derivando-se a Eq. (18) em relação a  $j_l$ , encontra-se:

$$\frac{\partial G}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} (\rho_g j_g) + \frac{\partial}{\partial j_l} (\rho_l j_l) \quad (628)$$

$$\frac{\partial G}{\partial j_l} = \rho_l \quad (629)$$

### F.3.3 Derivada do fluxo mássico em relação a pressão

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial P}$ :**

Derivando-se a Eq. (18) em relação a  $P$ , temos que:

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} (\rho_g j_g) + \frac{\partial}{\partial P} (\rho_l j_l) \quad (630)$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \quad (631)$$

### F.3.4 Derivada do fluxo mássico em relação a temperatura

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial T}$ :**

Derivando-se a Eq. (18) em relação a  $T$ , resulta em:

$$\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (\rho_g j_g) + \frac{\partial}{\partial T} (\rho_l j_l) \quad (632)$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} \quad (633)$$

## F.4 DERIVADAS DO FLUXO DE CALOR INTERNO

### F.4.1 Derivada do fluxo de calor interno em relação a velocidade superficial de gás

**Derivada  $\frac{\partial q_0}{\partial j_g}$ :**

Derivando-se a Eq. (47) em relação a  $j_g$ , obtém-se:

$$\frac{\partial q_0}{\partial j_g} = \frac{(T - T_{sw})}{2 \pi r_{int}} \frac{\partial U A}{\partial j_g} \quad (634)$$

$$\frac{\partial U A}{\partial j_g} = 0,055 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{-0,9} \frac{\partial x}{\partial j_g} \quad (635)$$

$$\frac{\partial x}{\partial j_g} = \frac{\rho_g - j_g \rho_g^2}{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)} \quad (636)$$

#### F.4.2 Derivada do fluxo de calor interno em relação a velocidade superficial de líquido

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial j_l}$ :**

Derivando-se a Eq. (47) em relação a  $j_l$ , encontra-se:

$$\frac{\partial q_0}{\partial j_l} = \frac{(T - T_{sw})}{2\pi r_{int}} \frac{\partial UA}{\partial j_l} \quad (637)$$

$$\frac{\partial UA}{\partial j_l} = 0,055 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{-0,9} \frac{\partial x}{\partial j_l} \quad (638)$$

$$\frac{\partial x}{\partial j_g} = \frac{-\rho_l (\rho_g j_g)}{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)^2} \quad (639)$$

#### F.4.3 Derivada do fluxo de calor interno em relação a pressão

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial P}$ :**

Derivando-se a Eq. (47) em relação a  $P$ , temos que:

$$\frac{\partial q_0}{\partial P} = \frac{(T - T_{sw})}{2\pi r_{int}} \frac{\partial UA}{\partial P} \quad (640)$$

$$\frac{\partial UA}{\partial P} = 0,055 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{-0,9} \frac{\partial x}{\partial P} + 0,25 \left( \frac{\mu_l}{\mu_g} \right)^{-0,75} \left( \frac{\mu_g \frac{\partial \mu_l}{\partial P} - \mu_l \frac{\partial \mu_g}{\partial P}}{\mu_g^2} \right) \quad (641)$$

$$\frac{\partial x}{\partial j_g} = \frac{j_g (\rho_g j_g + \rho_l j_l) \frac{\partial \rho_g}{\partial P} - (\rho_g j_g) \left[ j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right]}{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)^2} \quad (642)$$

#### F.4.4 Derivada do fluxo interno em relação a temperatura

**Derivada  $\frac{\partial G}{\partial T}$ :**

Derivando-se a Eq. (47) em relação a  $T$ , resulta em:

$$\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{UA(T - T_{sw})}{2\pi r_{int}} \right) \quad (643)$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{UA}{2\pi r_{int}} \quad (644)$$

## F.5 DERIVADAS DA FRAÇÃO DE VAZIO

A relação constitutiva para modelo *drift flux*, é descrita pela Eq. (31), convenientemente repetida aqui:

$$\alpha = \frac{j_g}{C_d j + U_d}$$

onde  $C_d$  é o parâmetro de distribuição,  $U_d$  é a velocidade de deriva e  $j$  é a velocidade superficial da mistura  $j = j_g + j_l$ . Além disso, ambos os parâmetros são funções das variáveis de estado e da inclinação local.

$$C_d = C_d(\alpha, j_g, j_l, P, T, \theta) \quad (645)$$

$$U_d = U_d(\alpha, j_g, j_l, P, T, \theta) \quad (646)$$

### F.5.1 Derivada da fração de vazio em relação a velocidade superficial de gás

**Derivada  $\frac{\partial \alpha}{\partial j_g}$ :**

Derivando-se a Eq. (31) em relação a  $j_g$ , encontra-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{\partial}{\partial j_g} \left( \frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = \frac{1}{C_d j + U_d} - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial j_g} (C_d j + U_d) \quad (647)$$

$$\frac{\partial}{\partial j_g} (C_d j + U_d) = j \left( \frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (648)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{1}{C_d j + U_d} - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[ j \left( \frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \right] \quad (649)$$

Reordenando os termos, obtém-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{1 - \alpha \left( C_d + j \frac{\partial C_d}{\partial j_g} + \frac{\partial U_d}{\partial j_g} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left( j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (650)$$

As derivadas presentes na Eq. (655), foram calculadas a partir da correlação de Bendkisen (1984), em que os coeficientes são descritas por meio das Eqs. (33) e (34), resultando em:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_g} = \frac{C_d j_l + U_d}{(C_d j + U_d)^2} \quad (651)$$

### F.5.2 Derivada da fração de vazio em relação a velocidade superficial de líquido

**Derivada  $\frac{\partial \alpha}{\partial j_l}$ :**

Derivando-se a Eq. (31) em relação a  $j_l$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = \frac{\partial}{\partial j_l} \left( \frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial j_l} (C_d j + U_d) \quad (652)$$

$$\frac{\partial}{\partial j_l} (C_d j + U_d) = j \left( \frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (653)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[ j \left( \frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right) + C_d + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \right] \quad (654)$$

Reordenando os termos, encontra-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = - \frac{\alpha \left( C_d + j \frac{\partial C_d}{\partial j_l} + \frac{\partial U_d}{\partial j_l} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left( j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (655)$$

As derivadas apresentadas na Eq. (655), foram obtidas através da correlação de Bendkisen (1984), onde os coeficientes são descritos pelas Eqs. (33) e (34), resultando em:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial j_l} = \frac{-C_d j_g}{(C_d j + U_d)^2} \quad (656)$$

### F.5.3 Derivada da fração de vazio em relação a pressão

**Derivada  $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ :**

Derivando-se a Eq. (31) em relação a  $P$ , encontra-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial P} (C_d j + U_d) \quad (657)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} (C_d j + U_d) = j \left( \frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (658)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[ j \left( \frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right] \quad (659)$$

Reordenando os termos, obtém-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = - \frac{\alpha \left( j \frac{\partial C_d}{\partial P} + \frac{\partial U_d}{\partial P} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left( j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (660)$$

A partir da correlação de Bendkisen (1984), foram determinadas as derivadas apresentadas na Eq. (660), onde os coeficientes são descritos por meio das Eqs. (33) e (34), resultando em:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = 0 \quad (661)$$

#### F.5.4 Derivada da fração de vazio em relação a temperatura

**Derivada  $\frac{\partial \alpha}{\partial T}$ :**

Derivando-se a Eq. (31) em relação a  $T$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{j_g}{C_d j + U_d} \right) = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \frac{\partial}{\partial T} (C_d j + U_d) \quad (662)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} (C_d j + U_d) = j \left( \frac{\partial C_d}{\partial T} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial T} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \quad (663)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = - \frac{j_g}{(C_d j + U_d)^2} \left[ j \left( \frac{\partial C_d}{\partial T} + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right) + \frac{\partial U_d}{\partial T} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right] \quad (664)$$

Reordenando os termos, encontra-se:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = - \frac{\alpha \left( j \frac{\partial C_d}{\partial T} + \frac{\partial U_d}{\partial T} \right)}{C_d j + U_d + \alpha \left( j \frac{\partial C_d}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_d}{\partial \alpha} \right)} \quad (665)$$

Através da correlação de Bendkisen (1984), foram calculadas as derivadas apresentadas na Eq. (665), onde os coeficientes são descritos pelas Eqs. (33) e (34), resultando em:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0 \quad (666)$$

## F.6 DERIVADAS DA MISTURA

Nesta seção são apresentadas as expressões analíticas para as derivadas de funções relacionadas diretamente à mistura dos fluidos que constituem os coeficientes das matrizes perturbadas  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_{ij}$  e  $\tilde{C}_{ij}$  da Seção 3.7. Os coeficientes descritos estão detalhados no Apêndice D.

### F.6.1 Termos da equação de conservação de movimento linear

No estudo desenvolvido nessa dissertação, adotou-se um modelo específico (modelo estratificado de equilíbrio local) para o caso de escoamento horizontal ou descendente em que se considerava escoamento estratificado. Nos demais casos, altera-se adequadamente o multiplicador de duas fases  $\phi_{f0}^2$  conforme o modelo adotado no trecho específico da tubulação.

Para o caso de se adotar o modelo do centro de massa, o termo  $\phi_{f0}^2$  assume a seguinte forma:

$$\phi_{f0}^2 = \frac{f \rho v^2 \rho_l}{f_l G^2} \quad (667)$$

A velocidade da mistura  $v$  pode ser expressa por:

$$v = \frac{\rho_l \dot{j}_l + \rho_g \dot{j}_g}{\rho} = \frac{G}{\rho} \quad (668)$$

Para a equação de conservação de momento linear, Eq. (24), substituindo-se o termo  $\phi_{f0}^2$  e a Eq. (667) resulta, para o caso de trechos em que o padrão não é estratificado, a seguinte relação:

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \rho g \sin \theta + \frac{1}{2} f \frac{\rho v^2}{D} = 0 \quad (669)$$

Os termos matriciais perturbados relacionados à equação de balanço da quantidade de movimento linear são:  $\tilde{A}_{31}$ ,  $\tilde{A}_{32}$ ,  $\tilde{A}_{33}$  e  $\tilde{A}_{34}$ . Esses termos podem ser escritos em duas parcelas, sendo uma parcela relacionada a derivada do termo gravitacional e a outra parcela relacionada à derivada do atrito.

#### F.6.1.1 Termos do modelo centro de massa

A partir da Seção D.2.1 e da Eq. (669), pode-se escrever:

$$A_{31} = \left[ \frac{\partial \rho}{\partial j_g} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left( f v^2 \frac{\partial \rho}{\partial j_g} + \rho \frac{\partial}{\partial j_g} (f v^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (670)$$

$$A_{32} = \left[ \frac{\partial \rho}{\partial j_l} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left( f v^2 \frac{\partial \rho}{\partial j_l} + \rho \frac{\partial}{\partial j_l} (f v^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (671)$$

$$A_{33} = \left[ \frac{\partial \rho}{\partial P} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left( f v^2 \frac{\partial \rho}{\partial P} + \rho \frac{\partial}{\partial P} (f v^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (672)$$

$$A_{34} = \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} g \sin \theta + \frac{1}{2D} \left( f v^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} + \rho \frac{\partial}{\partial T} (f v^2) \right) \right] \tilde{\quad} \quad (673)$$

#### F.6.2 Derivadas da massa específica da mistura

Com base na Eq. (15), pode-se escrever:

**Derivada  $\frac{\partial \rho}{\partial j_g}$ :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial j_g} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (674)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial j_g} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} (\rho_g - \rho_l) \quad (675)$$

**Derivada  $\frac{\partial \rho}{\partial j_l}$ :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial j_l} = \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (676)$$



ou ainda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial j_l} = \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} (\rho_g - \rho_l) \quad (677)$$

**Derivada  $\frac{\partial \rho}{\partial P}$ :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial P} \quad (678)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + \frac{\partial \alpha}{\partial P} (\rho_g - \rho_l) \quad (679)$$

**Derivada  $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial T} \quad (680)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \alpha \frac{\partial \rho_g}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \rho_l}{\partial T} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} (\rho_g - \rho_l) \quad (681)$$

### F.6.3 Derivadas da viscosidade da mistura

A partir da Eq. (26), pode-se escrever:

**Derivada  $\frac{\partial \mu}{\partial j_g}$ :**

$$\frac{\partial \mu}{\partial j_g} = \mu_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} - \mu_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_g} \quad (682)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu}{\partial j_l}$ :**

$$\frac{\partial \mu}{\partial j_l} = \mu_g \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} - \mu_l \frac{\partial \alpha}{\partial j_l} \quad (683)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu_m}{\partial P}$ :**

$$\frac{\partial \mu}{\partial P} = (\mu_g - \mu_l) \frac{\partial \alpha}{\partial P} + \alpha \frac{\partial \mu_g}{\partial P} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \quad (684)$$

**Derivada  $\frac{\partial \mu}{\partial T}$ :**

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = (\mu_g - \mu_l) \frac{\partial \alpha}{\partial T} + \alpha \frac{\partial \mu_g}{\partial T} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mu_l}{\partial T} \quad (685)$$

#### F.6.4 Derivadas da velocidade da mistura

A partir da Eq. (668), pode-se escrever:

**Derivada  $\frac{\partial v}{\partial j_g}$ :**

$$\frac{\partial v}{\partial j_g} = \frac{\rho_g}{\rho} - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial j_g} \quad (686)$$

**Derivada  $\frac{\partial v}{\partial j_l}$ :**

$$\frac{\partial v}{\partial j_l} = \frac{\rho_l}{\rho} - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial j_l} \quad (687)$$

**Derivada  $\frac{\partial v}{\partial P}$ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial P} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial P} (\rho_g j_g + \rho_l j_l) - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial P} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right) - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} \end{aligned} \quad (688)$$

**Derivada  $\frac{\partial v}{\partial T}$ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial T} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial T} (\rho_g j_g + \rho_l j_l) - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( j_l \frac{\partial \rho_l}{\partial T} + j_g \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \right) - \frac{(\rho_g j_g + \rho_l j_l)}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \end{aligned} \quad (689)$$

#### F.6.5 Derivadas do Reynolds da mistura

Essas derivadas são utilizadas para se determinar a derivada do termo  $f v^2$ . Na abordagem do multiplicador de duas fases, com base no centro de massa, permite escrever uma expressão para número de Reynolds,  $Re_{cm} = \frac{\rho v D}{\mu}$ . Portanto:

**Derivada  $\frac{\partial Re}{\partial j_g}$ :**

$$\frac{\partial Re}{\partial j_g} = \frac{\partial Re}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial j_g} + \frac{\partial Re}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial j_g} + \frac{\partial Re}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial j_g} \quad (690)$$

$$\frac{\partial Re}{\partial \rho} = \frac{D v}{\mu} \quad (691)$$

$$\frac{\partial Re}{\partial v} = \frac{\rho D}{\mu} \quad (692)$$

$$\frac{\partial Re}{\partial \mu} = -\frac{\rho D v}{\mu^2} \quad (693)$$

**Derivada  $\frac{\partial Re}{\partial j_l}$ :**

$$\frac{\partial Re}{\partial j_l} = \frac{\partial Re}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial j_l} + \frac{\partial Re}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial j_l} + \frac{\partial Re}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial j_l} \quad (694)$$

**Derivada  $\frac{\partial Re}{\partial P}$ :**

$$\frac{\partial Re}{\partial P} = \frac{\partial Re}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\partial Re}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial P} + \frac{\partial Re}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \quad (695)$$

**Derivada  $\frac{\partial Re}{\partial T}$ :**

$$\frac{\partial Re}{\partial T} = \frac{\partial Re}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial Re}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial T} + \frac{\partial Re}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \quad (696)$$

#### F.6.6 Derivada do fator de atrito em relação ao Reynolds

Essas derivadas são utilizadas para se determinar a derivada do termo  $f v^2$ . Através da correlação para o fator de atrito, descrita pela Eq. (28), pode-se escrever:

$$\frac{\partial f}{\partial Re} = 0,125 R_1^{-0,875} \frac{\partial R_1}{\partial Re} \quad (697)$$

$$R_1 = \left(\frac{64}{Re}\right)^8 + 9,5 \left[ \ln \left( \frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) - \left( \frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \quad (698)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial Re} = -8 \left(\frac{64}{Re}\right)^7 \frac{64}{Re^2} - 152 R_2^{-17} \frac{\partial R_2}{\partial Re} \quad (699)$$

$$R_2 = \ln \left( \frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) - \left( \frac{2500}{Re} \right)^6 \quad (700)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial Re} = \left( \frac{1}{\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}}} \right) \left( \frac{-5,166}{Re^{1,9}} \right) + \frac{15000}{Re^2} \left( \frac{2500}{Re} \right)^5 \quad (701)$$

#### F.6.7 Derivadas do produto entre o termo de atrito e a velocidade

**Derivada  $\frac{\partial}{\partial j_g} (f v^2)$ :**

A partir das equações apresentadas na Seção F.6.1.1, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial j_g}(f v^2) = v^2 \frac{\partial f}{\partial Re} \frac{\partial Re}{\partial j_g} + 2 f v \frac{\partial v}{\partial j_g} \quad (702)$$

**Derivada  $\frac{\partial}{\partial j_i}(f v^2)$ :**

Analogamente para  $\frac{\partial}{\partial j_g}(f v^2)$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial j_i}(f v^2) = v^2 \frac{\partial f}{\partial Re} \frac{\partial Re}{\partial j_i} + 2 f v \frac{\partial v}{\partial j_i} \quad (703)$$

**Derivada  $\frac{\partial}{\partial P}(f v^2)$ :**

$$\frac{\partial}{\partial P}(f v^2) = v^2 \frac{\partial f}{\partial Re} \frac{\partial Re}{\partial P} + 2 f v \frac{\partial v}{\partial P} \quad (704)$$

**Derivada  $\frac{\partial}{\partial T}(f v^2)$ :**

$$\frac{\partial}{\partial T}(f v^2) = v^2 \frac{\partial f}{\partial Re} \frac{\partial Re}{\partial T} + 2 f v \frac{\partial v}{\partial T} \quad (705)$$