

JOSÉ RODOLFO SCARATI MARTINS
ENGENHEIRO CIVIL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 1981

HIDRODINÂMICA BIDIMENSIONAL
ESTUDO EM MODELO MATEMÁTICO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
ESCOLA POLITÉCNICA DA USP
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE MESTRE EM ENGENHARIA
HIDRAULICA.

Orientador: Prof. Dr. GIORGIO BRIGHETTI, Depto. Eng. Hidráulica

São Paulo, 1989

À Harumi e Beatriz.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos os que, direta ou indiretamente colaboraram para conclusão deste trabalho.

Em particular, ficam aqui registrados os especiais agradecimentos:

- ao *Prof. Dr. Giorgio Brighetti*, pela orientação e confiança ao longo de oito anos de trabalho;
- ao *Prof. Dr. Podalyro Amaral de Souza*, pela participação, incentivo e experiência pessoal emprestados;
- ao *Prof. Dr. Kikuo Tamada*, que na qualidade de Diretor Técnico da F.C.T.H, garantiu o apoio técnico e logístico necessário ao desenvolvimento do trabalho;
- aos engenheiros *Ricardo Daruiz Borsari e Francisco Martins Fadiga Jr.*, pelo trabalho de revisão do texto e elaboração dos softwares gráficos;
- aos colegas *Eng. Hamilton Pires, Angela Maria Moromizato, Iara Iasue Isii, Carmen L. Cosentino e Elza Maria Maciel*, pelo apoio durante a elaboração, organização do texto, desenhos e referências bibliográficas.

RESUMO

A modelação matemática do escoamento em duas dimensões é uma ferramenta importante para a pesquisa hidráulica e o desenvolvimento de projetos.

Nesta dissertação é apresentado um estudo da hidrodinâmica bidimensional através de modelos matemáticos, sendo inicialmente introduzidas as equações básicas da mecânica dos fluidos que regem o movimento em duas direções. Em seguida são discutidos alguns modelos apresentados pela bibliografia, de onde podem ser obtidas valiosas informações sobre a técnica de modelação.

Após a apresentação do método das diferenças finitas, um modelo matemático implícito é proposto para a aplicação em estudos bidimensionais onde é necessário o cálculo detalhado do campo de velocidades, evitando-se as restrições devido a estabilidade e acuracidade do método de diferenças.

Como conclusão, são apresentados alguns exemplos de aplicação e comparações dos resultados com outros modelos.

ABSTRACT

Numerical modelling of two-dimensional flow is very important as a tool for hydraulic research and design.

This work starts with a review of basic fluid mechanics equations of the wave motion in two-directions. Then some aspects of models proposed by several authors are discussed.

The Finite Difference method is presented and an implicit model is proposed for application in detailed studies. The stability and accuracy are investigated to recognize the range of model application.

Some practical examples and comparisons are shown to test model capabilities.

3.2 Modelo de Três Estágios.....	33
3.3 Modelo IMOC.....	39
3.4 Modelo Explícito de Fronteira Móvel.....	43
3.5 Modelo Tipo Célula Fechada.....	47
3.6 Trabalhos Recentes.....	53

CAPÍTULO 4 - MODELAÇÃO MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL

4.1 Introdução.....	57
4.2 Resolução das Equações Básicas.....	59
4.2.1 Métodos de Solução.....	59
a) Solução Analítica.....	59
b) Soluções Numéricas.....	61
4.2.2 O Método das Diferenças Finitas.....	63
a) Análise de Estabilidade.....	68
b) Análise de Acuracidade.....	77
4.2.3 Escolha do Esquema de Diferenças.....	80
4.3 Formulação do Modelo Hidrodinâmico Bidimensional....	81
4.3.1 Equações em Diferenças Finitas.....	81
4.3.2 Solução Numérica.....	91
a) Algoritmo de Dupla Varredura.....	91
b) Condições de Contorno.....	94
c) Extrapolação das Variáveis.....	96
4.3.3 Estabilidade e Acuracidade.....	97

CAPÍTULO 5 - EXPLORAÇÃO DO MODELO BIDIMENSIONAL

5.1 O Sistema MBD.....	102
5.1.1 Entrada de Dados.....	103
5.1.2 Cálculo Hidráulico.....	105
5.1.3 Saída de Dados.....	111
5.2 Testes e Comparações.....	111
5.2.1 Testes.....	113
a) Entrada de um Afluente.....	113
b) Obstáculo.....	119
c) Espigão de Proteção de Margens e Ensecadeira.....	124
5.2.2 Comparações.....	132

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES	138
APÊNDICE I - Tabelas e Gráficos de Amortecimento e Dispersão.	140
APÊNDICE II - Listagem dos Programas Desenvolvidos.....	189
APÊNDICE III - Equações do Modelo de LEENDERTSE.....	248
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	268

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{l,m}$	→ Coeficiente do Modelo IMOC
a	→ Variável auxiliar ($e^{\sigma_n \Delta x_i} - 1$)
A	→ Área da seção transversal
A_i, A_j	→ Coeficientes do Modelo de LEENDERTSE
A_s	→ Área da Célula
A_i, A_j, A'_i, A'_j	→ Coeficientes do Modelo Implícito Proposto
$b_{l,m}$	→ Coeficiente do Modelo IMOC
b	→ Produto $k \Delta t$
B	→ Largura da seção transversal
B_i, B_j	→ Coeficientes do Modelo de LEENDERTSE
B_i, B_j, B'_i, B'_j	→ Coeficientes do Modelo Implícito Proposto
c	→ Celeridade Teórica das Pequenas Perturbações = \sqrt{gh}
\tilde{c}	→ Celeridade Numérica das Ondas
C_{10}	→ Coeficiente de Arrasto devido ao Vento, na altura padrão de 10 m
C	→ Coeficiente de Chèzy

- C^{-x}, C^{-y} → Coeficientes de Chèzy médios em x e y
- $C_{i,j}, C_{i,j}$ → Coeficientes de Chèzy médios em i e j
- C_i, C_j, C'_i, C'_j → Coeficientes do Modelo Implícito Proposto
- div → Operador escalar divergente
- D_i, D_j, D'_i, D'_j → Coeficientes do Modelo Implícito Proposto
- e → Número de Neper = 2,71828
- E_i, E_j, E'_i, E'_j → Coeficientes do Modelo Implícito Proposto
- f_c → Resultante das forças de campo
- f_e → Resultante das forças externas ao elemento fluido
- f_p → Resultante das forças de pressão
- f_r → Resultante das forças de Coriolis
- f_t → Resultante das forças devido às tensões de cisalhamento
- $f, f^t_{i,j}, f^{t+1}_{i,j}$ → Grandeza genérica f, em t e t+1
- $F^{(x)}, F^{(y)}$ → Forças oriundas das tensões de cisalhamento devido os esforços de vento e pressão barométrica, nas direções x e y
- $[F], [F_{\Delta}]$ → Função Matricial F, contínua e discreta
- FCU, FCV → Funções da Velocidade
- g → Aceleração da gravidade
- $grad$ → Operador gradiente

G	→ Grandeza genérica
\bar{G}	→ Grandeza genérica média no tempo
\tilde{G}	→ Grandeza genérica resultante da última iteração
h	→ Altura do elemento fluido, cota do Nível D'água
\bar{h}	→ h médio em duas direções
h^{-x}, h^{-y}	→ h médio em relação a x ou y
h_x, h_y	→ Diferença de h em relação a x e y
h_x, h_y, h_t	→ Derivada de h em relação a x , y ou t
h_x^-, h_y^-, h_t^-	→ Derivada de h em relação às variáveis reduzidas \bar{x} , \bar{y} e \bar{t}
$\bar{h}_{xx}, \bar{h}_{yy}, \bar{h}_{tt}$	→ Derivada segunda em relação a x, y e t
h_Q, h_P, h_K	→ Cota do N. A. relativas aos pontos Q, P e K da malha
h_o	→ Profundidade média
h_n	→ Amplitude h da n ésima componente da Série de Fourier
H	→ Profundidade ou amplitude da onda
H_o	→ Profundidade inicial ou amplitude inicial das ondas
H_1	→ Profundidade arbitrária adotada
\vec{i}	→ Versor unitário na direção x
i	→ Índice dos pontos de uma malha de diferenças em x

i	→ Número complexo = $\sqrt{-1}$
I_o, I_r	→ Função da solução de Poisson-Parceval
\vec{j}	→ Versor unitário na direção y
j	→ Índice dos pontos de uma malha de diferenças em y
k	→ Coeficiente de Prandtl
K	→ Coeficiente de descarga
L	→ Comprimento de onda
$[L], [L_\Delta]$	→ Operador matricial diferencial, contínuo e discreto
M	→ Índice do último ponto de uma linha j de uma malha de diferenças
N	→ Índice do último ponto de uma coluna i de uma malha de diferenças
P_o	→ Pressão atmosférica
p	→ Pressão normal à face do elemento de fluido
$P_{i,j,t}$	→ Ponto de uma malha de características no instante t
P_i, P_j	→ Coeficientes do Método de Dupla Varredura
$P(t)$	→ Função da precipitação
q	→ Vazão por unidade de comprimento linear
Q	→ Vazão
Q_i, Q_j	→ Coeficientes do Método de Dupla Varredura

$Q_{i,j}$	→ Vazão entre a célula i e a célula adjacente j
r_i, r_j	→ Coeficientes do Modelo de LEENDERTSE
$\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$	→ Coeficientes do Modelo IMOC
$\bar{r}_{1x}, \bar{r}_{2y}, \bar{r}_{3t}$	→ Coeficientes do Modelo IMOC, em variáveis reduzidas
R_h	→ Raio Hidráulico
R_E	→ Raio Hidráulico de Engelund
R_i, R_j	→ Coeficientes do Método de Dupla Varredura
R_c	→ Relação de Courant = $c \Delta t / \Delta x$
$R(x), R(y)$	→ Componente devido à tensão de cisalhamento junto ao fundo nas direções x e y
R	→ Coeficiente de Difusão do Modelo de Três Estágios
R_1	→ Fator de Amortecimento
R_2	→ Fator de Dispersão
S_x	→ Inclinação do Fundo, na direção x
S_y	→ Inclinação do Fundo, na direção y
S_i, S_j	→ Coeficientes do Método de Dupla Varredura
t	→ Relativo ao instante de tempo t
\bar{t}	→ Variável de tempo reduzida (Modelo IMOC)
t_0	→ Instante de tempo médio (Modelo IMOC)

u	→ Velocidade pontual na direção x
U	→ Velocidade na direção x, média vertical
\bar{U}	→ Média da velocidade U em duas direções
U^*	→ Velocidade U oriunda da última iteração
U_A, U_C, U_K	→ Velocidade U relativa aos pontos A, C e K de uma malha de diferenças
U_n	→ Amplitude U da enésima componente da série de Fourier
U_0	→ Velocidade inicial na direção x
U_x, U_y, U_t	→ Derivada de U em relação a x, y ou t
$U_{\bar{x}}, U_{\bar{y}}, U_{\bar{t}}$	→ Derivada de U em relação às variáveis reduzidas \bar{x} , \bar{y} e \bar{t}
v	→ Velocidade pontual na direção y
V	→ Velocidade na direção y, média vertical
\hat{v}	→ Velocidade total do ponto
∇	→ Operador vetorial Nabla
\forall	→ Volume do elemento fluido
\bar{V}	→ Média da velocidade V em duas direções
V_{10}	→ Velocidade padrão do vento medida a 10 m de altura
V_A, V_C, V_K	→ Velocidade V relativa aos pontos A, C e K de uma malha de diferenças

V_x, V_y, V_t	→ Derivada de V em relação a x, y ou t
$V_{\bar{x}}, V_{\bar{y}}, V_{\bar{t}}$	→ Derivada de V em relação às variáveis reduzidas \bar{x} , \bar{y} e \bar{t}
w	→ Velocidade pontual da direção z
x	→ Coordenada espacial na direção x
\bar{x}	→ Variável reduzida (Modelo IMOC)
$[X], [X_{\Delta}]$	→ Vetor de incógnitas, contínuo e discreto
y	→ Coordenada espacial na direção y
\bar{y}	→ Variável reduzida (Modelo IMOC)
z_i	→ Cota do N.A. da célula i
z_o	→ Ordem de grandeza da espessura da camada limite
Z	→ Cota de fundo em relação ao plano de referência
Z^{-x}, Z^{-y}	→ Cota de fundo, média em x ou y

α, β	→ Parâmetros do modelo IMOC
β	→ Coeficiente de Quantidade de Movimento
$\beta, \beta_n^I, \beta_n^R$	→ Velocidade de fase, com componentes real e imaginária da enésima componente da Série de Fourier
γ	→ Massa específica da água
Γ	→ Função de ponderação do coeficiente de descarga
Δ	→ Diferença finita de 1 ^a ordem
Δ^2	→ Diferença finita de 2 ^a ordem
Δ^4	→ Diferença finita de 4 ^a ordem
ε	→ Coeficiente de atrito lateral
θ	→ Coeficiente de implicidade
λ	→ Variável auxiliar = $e^{\sigma_n \Delta t i} - 1$
ν	→ Viscosidade cinemática da água
π	→ 3,14159268
ρ	→ Massa específica da água
ρ_a	→ Massa específica do ar
σ_n	→ Número de onda do enésimo componente da Série de Fourier
τ	→ Variável auxiliar de tempo

- $\vec{\tau}_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ → Tensão de cisalhamento na face normal ao eixo x do elemento fluido e suas componentes em \vec{j} e \vec{k}
- $\vec{\tau}_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ → Tensão de cisalhamento na face normal ao eixo y do elemento fluido e suas componentes em \vec{i} e \vec{k}
- $\vec{\tau}_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ → Tensão de cisalhamento na face normal ao eixo z do elemento fluido e suas componentes em \vec{i} e \vec{j}
- $\vec{\tau}_b, \tau_{bx}, \tau_{by}$ → Tensão de cisalhamento no elemento fluido junto ao fundo, e componentes na direção x e y
- $\vec{\tau}_v, \tau_{vx}, \tau_{vy}$ → Tensão de cisalhamento no elemento fluido à superfície, e componentes na direção x e y
- ψ, Φ → Coeficientes do modelo IMOC
- Ω → Velocidade angular da terra

OBS.: Grandezas dimensionais referenciadas ao S. I.

LISTA DE FIGURAS

- FIGURA N^o. 2.2.1 Conservação da Massa no Elemento Fluido
- FIGURA N^o. 2.2.2 Tensões de Cisalhamento nas Faces do Elemento
- FIGURA N^o. 2.3.1 Elemento de Volume no Escoamento Bidimensional
- FIGURA N^o. 2.3.2 Elemento de Volume - Escoamento Unidimensional
- FIGURA N^o. 2.3.3 Seção Transversal - Escoamento Unidimensional
- FIGURA N^o. 3.1.1 Plano de Referência
- FIGURA N^o. 3.1.2 Malha Característica
- FIGURA N^o. 3.1.3 Celeridade da Onda Calculada-LEENDERTSE (1967)
- FIGURA N^o. 3.1.4 Batimetria e Malha de Cálculo - Estuário Reno
- FIGURA N^o. 3.1.5 Vazão pela Seção Y=4
Efeito do Passo de Cálculo
- FIGURA N^o. 3.1.6 Níveis D'Água - Efeito do Termo de Detrito
- FIGURA N^o. 3.1.7 Níveis Calculados e Observados
(Silveira e Tucci - 1988)
- FIGURA N^o. 3.1.8 Mapa de Correntes (Silveira e Tucci - 1988)
- FIGURA N^o. 3.2.1 Esquema da Malha de Pontos
(Benqué-Haugel-Violet)

FIGURA N ^o . 3.2.2	Estudo do Porto de Calais (Benqué-Haugel-Violet)
FIGURA N ^o . 3.3.1	Discretização Utilizada pelo Modelo IMOC
FIGURA N ^o . 3.4.1	Malha de Cálculo (Zech, Sorel & Vansnick-1983)
FIGURA N ^o . 3.4.2	Experimento Numérico - Fronteira Móvel (Zech, Sorel & Vansnick - 1983)
FIGURA N ^o . 3.5.1	Modelo com Células Fechadas
FIGURA N ^o . 3.5.2	Conservação de Massa numa Célula
FIGURA N ^o . 3.5.3	Delta do Rio Mekong - Área de Estudo
FIGURA N ^o . 3.5.4	Delta do Rio Mekong - Limnigramas (Cunge-1975)
FIGURA N ^o . 3.6.1	Barragem La Boca - Modelo Bidimensional com Elementos Finitos
FIGURA N ^o . 4.2.1	Malha de Características de um Escoamento Unidimensional
FIGURA N ^o . 4.2.2	Malha Ortogonal de Diferenças Finitas para um Escoamento Bidimensional
FIGURA N ^o . 4.2.3	Esquema Explícito - Diagrama do Fator de Amortecimento
FIGURA N ^o . 4.2.4	Esquema de Preissmann - Diagrama do Fator de Amortecimento
FIGURA N ^o . 4.2.5	Esquema Explícito - Diagrama do Fator de Dispersão
FIGURA N ^o . 4.2.6	Esquema de Preissmann - Diagrama do Fator de Dispersão

FIGURA N ^o .	4.3.1	Malha de Pontos Utilizada
FIGURA N ^o .	4.3.2	Representação das Condições de Contorno
FIGURA N ^o .	5.1.1	Edição de Dados de Campo
FIGURA N ^o .	5.1.2	Legenda dos Pontos - Tela de Dados
FIGURA N ^o .	5.1.3	Condição de Contorno de um Ponto
FIGURA N ^o .	5.1.4	Fluxograma Geral do Modelo MBD
FIGURA N ^o .	5.2.1	Afluente - Mapa de Velocidades - Condição Inicial
FIGURA N ^o .	5.2.2	Afluente - Mapa de Nível D'Água - Condição Inicial
FIGURA N ^o .	5.2.3	Afluente - Limnigramas das Condições de Contorno
FIGURA N ^o .	5.2.4	Afluente - Vazão do Afluente
FIGURA N ^o .	5.2.5	Afluente - Hidrogramas nas Seções de Extremidade
FIGURA N ^o .	5.2.6	Afluente - Equilíbrio de Níveis nas Extremidades
FIGURA N ^o .	5.2.7	Afluente - Velocidades Máximas - Nível Mínimo
FIGURA N ^o .	5.2.8	Afluente - Níveis D'Água - Nível Mínimo
FIGURA N ^o .	5.2.9	Afluente - Módulo e Direção da Velocidade no Ponto (20,17)
FIGURA N ^o .	5.2.10	Obstáculo - Limnigramas de Contorno

- FIGURA N^o. 5.2.11 Obstáculo - Mapa de Velocidades
- Níveis e Vazões Máximos
- FIGURA N^o. 5.2.12 Obstáculo - Hidrogramas nas Seções de
Extremidade
- FIGURA N^o. 5.2.13 Obstáculo - Hidrogramas nos Sub-Canais
- FIGURA N^o. 5.2.14 Obstáculo - Mapa de Nível D'Água no
Instante de Níveis Máximos
- FIGURA N^o. 5.2.15 Obstáculo - Módulo e Direção da Velocidade
- Ponto (25,10)
- FIGURA N^o. 5.2.16 Obstáculo - Velocidades a Montante e Jusante
- FIGURA N^o. 5.2.17 Espigão - Mapa de Velocidades
- Condição Inicial
- FIGURA N^o. 5.2.18 Espigão - Limnigramas da Condição de Contorno
- FIGURA N^o. 5.2.19 Espigão - Mapa de Velocidades
- Níveis e Vazões Máximos
- FIGURA N^o. 5.2.20 Espigão - Mapa de Níveis D'Água
- Níveis e Vazões Máximos
- FIGURA N^o. 5.2.21 Espigão - Velocidade na Cabeça
- FIGURA N^o. 5.2.22 Espigão - Velocidades na Direção x
- Pontos (22,9) e (22,3)
- FIGURA N^o. 5.2.23 Espigão - Mapa de Velocidades Após a
Inversão do Sentido de Fluxo
- FIGURA N^o. 5.2.24 Espigão - Mapa de Níveis D'Água
- Espigão com Fluxo em Sentido Contrário

- FIGURA N^o. 5.2.25 Espigão - Hidrograma - Seção
- FIGURA N^o. 5.2.26 Ensecadeira - Condições de Contorno
- FIGURA N^o. 5.2.27 Ensecadeira - Hidrogramas nas Seções
X = 2 e X = 39
- FIGURA N^o. 5.2.28 Ensecadeira - Mapa de Velocidades
- Instante de Nível Máximo
- FIGURA N^o. 5.2.29 Ensecadeira - Mapa de Níveis D'Água
- Instante de Nível Máximo
- FIGURA N^o. 5.2.30 Condições de Contorno para Obtenção
do Regime Permanente
- FIGURA N^o. 5.2.31 Geometria do Canal de Teste
- FIGURA N^o. 5.2.32 Velocidades Calculadas nos Dois Modelos
- FIGURA N^o. 5.2.33 Condições de Contorno Fornecidas
Est. Rheno (LEENDERTSE, 1967)
- FIGURA N^o. 5.2.34 Mapa de Velocidades - Nível Máximo - Enchente
- FIGURA N^o. 5.2.35 Mapa de Velocidades - Nível Mínimo - Vazante
- FIGURA N^o. 5.2.36 Níveis D'Água - Vazante
- FIGURA N^o. 5.2.37 Velocidades Calculadas nos Dois Modelos
- FIGURA N^o. 5.2.38 Vazões Calculadas nos Dois Modelos
- Seção Y = Z

LISTA DE TABELAS

- TABELA N^o. 3.2.1 Fator de Amortecimento - Modelo de Três Estágios
- TABELA N^o. 4.2.1 Fator de Amortecimento - Modelo Explícito
- TABELA N^o. 4.2.2 Fator de Dispersão - Modelo Explícito

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O emprego de modelos matemáticos na engenharia hidráulica consolidou-se como uma ferramenta básica de projeto e pesquisa, ao lado dos modelos físicos e analógicos. Esta ascensão tem como suportes: de um lado, a grande difusão dos computadores e microcomputadores, que barateia os custos operacionais dos modelos, e de outro, o avanço da técnica hidráulico-computacional, que confere aos modelos acuracidade e confiabilidade.

De fato, a técnica da modelação matemática tem sido muito útil para a hidráulica, principalmente quando existe a necessidade de estudo de grandes áreas, cuja modelação física se apresenta como muito custosa, ou ainda, na simulação de fenômenos não permanentes, que exigem modelos físicos altamente sofisticados. Quando estas razões não se fazem presentes, ocorre uma outra, relativa à rapidez com que a informação pode ser obtida de um modelo matemático, quando o mesmo já está desenvolvido e calibrado.

Nas áreas fluvial e marítima, os modelos hidrodinâmicos unidimensionais para cálculo de transitórios em canais, reservatórios e estuários, estão relativamente bem desenvolvidos e são aplicados de forma corriqueira ao dimensionamento de extravasores, estudos de proteção contra inundações, comportamento de estuários e outros.

Os modelos bidimensionais, utilizados para determinação do campo

de velocidades e níveis d'água, vem sendo empregados nos estudos marítimos de grande porte e estudos de circulação em lagos.

Modelos de caráter tridimensional são ainda aplicados, em estudos de meio ambiente, a problemas de qualidade da água, circulação vertical em reservatórios e outros.

Verifica-se entretanto, que em muitas atividades de projeto, o emprego dos modelos matemáticos mais sofisticados não é feito de forma ampla, recorrendo-se ainda, de forma dependente, aos modelos físicos. É o caso, por exemplo, dos estudos de proteção de portos e terminais marítimos, projetos de desvio e fechamento de rios e a verificação da influência de obstáculos no escoamento, que podem ser bem enfocados através dos modelos bidimensionais.

Nestes tipos de trabalho, os projetos são desenvolvidos com base em formulações unidimensionais e posteriormente testados nos modelos reduzidos. Gera-se com isso a necessidade de grande quantidade de ensaios que consomem tempo, recursos e muitas vezes impedem o estudo mais detalhado de uma solução final.

A não utilização de modelos matemáticos bidimensionais para estes fins, se deve, em parte, à dinâmica de um projeto de engenharia, que não pode se vincular ao desenvolvido de uma ferramenta de cálculo específica, e cujos resultados nas etapas iniciais são incertos e imprevisíveis. Por outro lado, o desenvolvimento de uma tecnologia de modelação que não objetive uma aplicação específica imediata não é motivante para o pesquisador nem encontra meios ou instituições financiadoras.

A observação de estudos e projetos de grandes obras, notadamente portos e hidrelétricas, indica que modelos capazes de determinar o campo de velocidades detalhados podem ser muito úteis como indicativos de soluções, permitindo um estudo de alternativas a nível de projeto como também a condição do estudo em modelo físico, de forma mais objetiva e voltado para detalhes, com grande economia de tempo.

Uma avaliação preliminar do emprego de modelos bidimensionais mostra que os mesmos são utilizados nos estudos marítimos, de comportamento de estuários e escoamento em reservatórios e lagos devido ao efeito de vento sobre a superfície. Algumas aplicações são também encontradas na hidrologia, para cálculo do escoamento superficial em áreas inundadas. São portanto, de forma geral, destinados à aplicação em grandes áreas, onde se admite um baixo grau de detalhamento.

Quando utilizados em estudos detalhados como por exemplo a determinação do campo de velocidades ao redor de um espigão durante a passagem de uma enchente, estes modelos apresentam dificuldades com a estabilidade das soluções numéricas e acuracidade, não podendo ser simplesmente transpostos de uma aplicação para outra.

A evidente contribuição que estes modelos podem dar à engenharia hidráulica, bem como a necessidade de pesquisa para conhecimento e solução dos problemas ligados a sua utilização, motivaram a elaboração deste trabalho.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Neste trabalho objetiva-se o estudo do escoamento hidráulico em duas dimensões de modo que, partindo-se das equações básicas, seja possível a formulação de um modelo matemático de solução, aplicável às situações usuais da engenharia hidráulica.

Dentro destas premissas, inicialmente são deduzidas as equações básicas do escoamento quase-horizontal, as conhecidas equações de *Navier-Stokes*, e aplicadas aos escoamentos em duas e uma dimensão, obtendo-se assim as equações de *Saint-Venant*.

A seguir, é apresentada uma análise de diversos estudos relativos

à modelação bidimensional, abrangendo o emprego de técnicas como diferenças finitas explícitas e implícitas, método das características, elementos finitos e outros. Nesta análise, especial atenção é dedicada às aplicações feitas pelos autores, os resultados obtidos e os problemas levantados em função dos métodos adotados.

Após esta revisão bibliográfica, são analisados os métodos de solução das equações básicas e em particular o método das diferenças finitas. Os principais esquemas de discretização, implícitos e explícitos, são enfocados sob os aspectos de estabilidade e acuracidade com a utilização do método de *Von-Neumann*.

Com os fundamentos obtidos na revisão bibliográfica e análise dos esquemas de discretização disponíveis são formuladas as equações de um modelo hidrodinâmico bidimensional baseado num esquema de diferenças finitas implícito.

O algoritmo de solução proposto baseia-se no *Algoritmo dos Caminhos Alternados*, com os termos não lineares ponderados no tempo e calculados de forma iterativa.

A estabilidade da solução proposta é estudada através de equações teóricas, estabelecendo-se os limites de aplicação em função da discretização espacial e temporal, bem como do coeficiente de implicidade θ .

O modelo assim resultante é desenvolvido em termos de software, sendo realizados experimentos numéricos com casos hipotéticos para verificação da representatividade, estabilidade e convergência. Os resultados são comparados com os obtidos, para as mesmas condições, através do modelo clássico de LEENDERTSE.

Finalmente, são apresentadas as conclusões sobre a adequabilidade do esquema proposto e um plano para prosseguimento das pesquisas e aplicação a casos reais.

2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO ESCOAMENTO QUASE - HORIZONTAL

2.1 INTRODUÇÃO

A análise do movimento dos fluidos, de uma forma genérica, pode ser realizada a partir das equações básicas da mecânica, as conhecidas *Leis de Newton*, e das duas primeiras leis da termodinâmica. A essência destas leis pode ser resumida nos seguintes postulados (ABBOTT, 1979):

(1) Um corpo conserva seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme enquanto não é submetido a uma ação externa.

(2) O esforço instantâneo aplicado a um corpo é proporcional ao produto de sua massa instantânea pela sua aceleração instantânea.

(3) Ação e reação são esforços de mesmo módulo e direção, com sentidos opostos.

(4) Num sistema isolado, o trabalho dispendido para a passagem de um estado A para outro estado B é totalmente determinado pela diferença entre as energias nestes estados terminais A e B.

(5) Existe uma tendência de parte da natureza se apresentar em estado de desordem progressiva.

Através das equações fundamentais da física, neste capítulo objetiva-se estabelecer as relações fundamentais entre as variáveis hidráulicas (profundidade, velocidade, pressão e etc), de modo a expressar em termos de leis de conservação, as funções da massa e do momento aplicáveis ao escoamento bidimensional e, em seguida particularizadas, para o escoamento unidimensional de rios e canais.

Serão tratados aqui os escoamentos à superfície livre nos quais a aceleração vertical é tão pequena que pode ser desprezada. Tais escoamentos são chamados por BIRKHOFF (in ABBOTT, 1979) de escoamentos *quase-horizontais*, e englobam, por generalização os escoamentos realmente horizontais e aqueles formados pelo movimento de ondas de longo período. De fato, os escoamentos quase-horizontais são muito frequentes na natureza, como os movimentos permanentes e gradualmente variados nos canais, a propagação de ondas de enchente e os efeitos das ondas de maré.

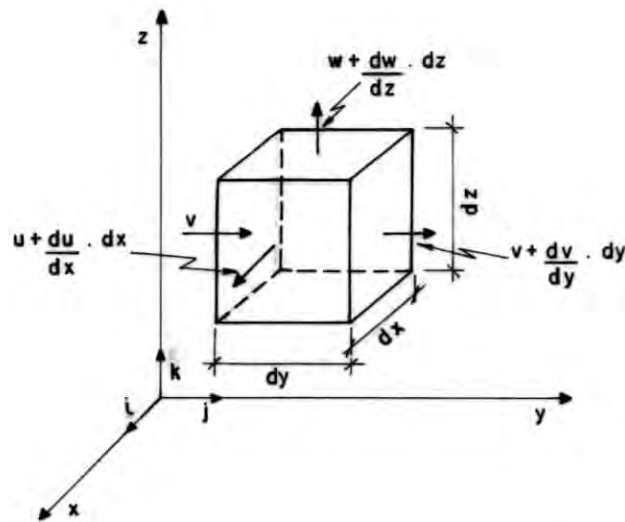
Todos os outros movimentos, nos quais a aceleração vertical tem influência importante, são enfeixados na categoria denominada de ondas de curto período ou simplesmente *ondas curtas*.

2.2 EQUAÇÕES BÁSICAS DO ESCOAMENTO FLUIDO

2.2.1 Conservação da Massa

O princípio da conservação da massa num escoamento quase horizontal pode ser estudado considerando-se um volume de controle genérico através do qual o fluido se movimenta. Este movimento será referenciado a um sistema tri-ortogonal de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sendo suas grandezas definidas segundo as coordenadas (x, y, z) . Esta definição corresponde ao conhecido tratamento Euleriano.

Considerando o elemento indicado na Figura 2.1.1, o fluxo líquido que passa pela superfície do elemento, na direção x é:



CONSERVAÇÃO DA MASSA NO ELEMENTO FLUIDO

FIGURA 2.2.1

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{i})dy dz - \rho \left[(\vec{u} \cdot \vec{i})dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{u} \cdot \vec{i})dy dz \right] dx \quad [2.2.1]$$

que, efetuado o produto escalar resulta:

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz$$

sendo u a componente na direção \underline{x} do vetor velocidade, dado genericamente por:

$$\vec{V} = (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}).$$

Considerando as demais direções obtém-se:

$$- \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz \right\}$$

A variação de massa dentro do elemento vale:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) dx dy dz$$

e logo, reescrevendo a equação por unidade de volume obtém-se a expressão para a lei da conservação da massa ou continuidade:

$$- \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right\} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho) \quad [2.2.2]$$

ou

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0 \quad [2.2.3]$$

2.2.2 Conservação da Quantidade de Movimento

A conservação da quantidade de movimento deriva-se da lei de Newton. Considerando-se a resultante das forças externas sobre o elemento indicado na Figura 2.2.1, de massa infinitesimal (ρdV):

$$\vec{f}_e = (\rho dV) \frac{d\vec{V}}{dt}$$

A aceleração sobre o elemento, representada pelo termo ($d\vec{V}/dt$) é dada por:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

onde ∇ é o operador nabla, definido por $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.
Rearranjando as expressões anteriores, resulta:

$$\vec{f}_e = (\rho dV) \left[(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] \quad [2.2.4]$$

As forças externas podem ser divididas nas componentes: de campo, rotacional, de pressão e de cisalhamento. Nas aplicações usuais, as forças de campo resumem-se à gravidade, que tem direção vertical:

$$- \vec{f}_c = g \rho dV \vec{k} \quad [2.2.5]$$

A componente rotacional deriva da rotação da terra e é função da massa da partícula, velocidade e do parâmetro de Coriolis (Ω), definindo-se por:

$$\vec{f}_r = \Omega \rho dV (v \vec{i} - u \vec{j}) \quad [2.2.6]$$

sendo Ω função da velocidade angular de rotação da terra e da latitude.

As forças de pressão atuam normalmente nas faces do elemento e, de maneira análoga ao efetuado na equação [2.2.1], pode-se escrever:

$$- \vec{f}_p = \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \vec{k} \quad [2.2.7]$$

As forças de cisalhamento são caracterizadas pelas tensões tangenciais às faces do elemento. Estas podem ser escritas através da soma das componentes em cada face, resultando no conjunto de equações abaixo:

$$\vec{\tau}_x = \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\tau}_x) dx = \left[\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) dx \right] \vec{j} + \left[\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) dx \right] \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_y + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{\tau}_y) dy = \left[\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) dy \right] \vec{i} + \left[\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) dy \right] \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j}$$

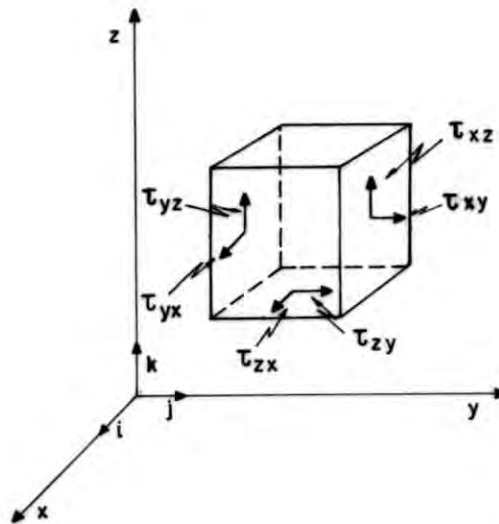
$$\vec{\tau}_z + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\tau}_z) dz = \left[\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) dz \right] \vec{i} + \left[\tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) dz \right] \vec{j}$$

Calculando-se o esforço resultante obtém-se:

$$\begin{aligned} -f_t = & \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) \right] \vec{j} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) \right] \vec{k} \right\} dx dy dz \quad [2.2.8] \end{aligned}$$

Substituindo-se as equações [2.2.5], [2.2.6], [2.2.7] e [2.2.8] em [2.2.4] e colocando-se em termos de unidade de massa resulta a equação da conservação da quantidade de movimento na forma diferencial:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z - \frac{1}{\rho dV} f_t + \vec{f}_r = \left[(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] \quad [2.2.9]$$



TENSÕES DE CISCALHAMENTO NAS FACES DO ELEMENTO FLUIDO

FIGURA 2.2.2

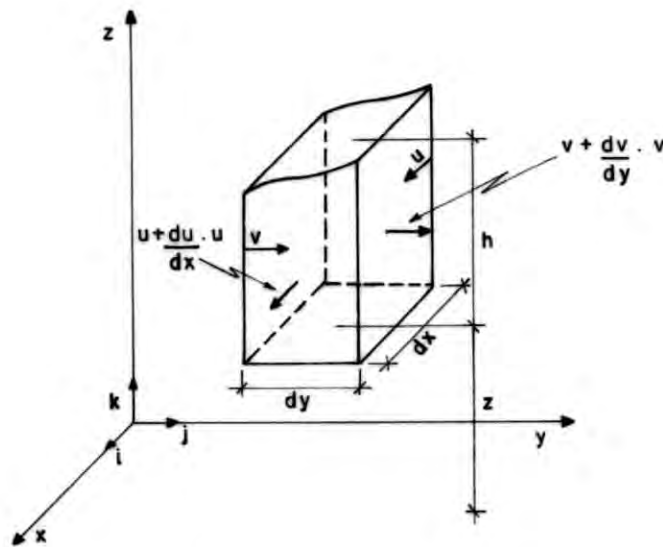
2.3 APLICAÇÃO AO ESCOAMENTO QUASE-HORIZONTAL

2.3.1 Escoamento Bidimensional

A teoria clássica do movimento quase-horizontal despreza a aceleração vertical das partículas de fluido por esta ser muito pequena em relação à aceleração da gravidade. Da mesma forma, as velocidades verticais $w \hat{k}$ são desprezadas em se tratando de ondas de longo período.

O elemento fluido indicado na Figura 2.3.1 representa a característica do escoamento bidimensional quase-horizontal, sendo limitado na parte superior pela superfície livre e na inferior por um contorno fixo.

A altura finita h do elemento representa a profundidade, de modo que o elemento de volume dV , implícito nas equações [2.2.3] e [2.2.8], é definido por $(dx dy h)$.



ELEMENTO DE VOLUME NO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL

FIGURA 2.3.1

As velocidades médias nas direções x e y do elemento, podem ser consideradas como:

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dz \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dz$$

A equação [2.2.3] conduz imediatamente à equação da continuidade no escoamento bidimensional, supondo-se o fluido homogêneo em todas as direções:

$$h \frac{\partial U}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad [2.3.1]$$

Analisando-se a equação geral da quantidade de movimento pode-se escrever, para o segundo membro:

$$\left[c \nabla \cdot \vec{v} \right] \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial t} \vec{j} + \left[U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right] \vec{i} + \left[U \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} \right] \vec{j}$$

As forças intervenientes no primeiro membro podem ser detalhadas como segue:

- pressão: adotando-se uma distribuição hidrostática no elemento, e sendo a pressão função da altura h do elemento mais a pressão atmosférica $p = \rho gh + p_0$, obtém-se:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = \left[-g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p_0) \right] \vec{i} + \left[-g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p_0) \right] \vec{j}$$

- cisalhamento: no elemento da Figura 2.3.1, as forças de cisalhamento serão consideradas na face de contato com o contorno fixo e na superfície livre. Esta idéia representa de forma conveniente os atritos de fundo e o efeito de vento na superfície. Admitindo que o sinal da tensão é positivo (+) quando a tensão e a velocidade a ela relacionada tem o mesmo sentido, e negativo (-), quando em sentidos opostos e admitindo também esta tensão é uniforme no plano de atuação tem-se:

$$-\frac{1}{\rho dV} \vec{f}_t = -\frac{1}{\rho h} \left[(\tau_{bx} - \tau_{wx}) \vec{i} + (\tau_{by} - \tau_{wy}) \vec{j} \right]$$

As tensões τ_b são determinadas em função de um fator de resistência e do quadrado da velocidade na direção especificada. Este fator de resistência depende da rugosidade do contorno e da profundidade, como indica a expressão:

$$\tau_b = \rho g C^{-2} V |V|$$

Da mesma forma, a tensão τ_w depende de relação semelhante dada por:

$$\tau_w = \rho_a C_{10} V_{10}^2$$

onde V_{10} é a velocidade do vento na altura padrão de 10 m.

Substituindo-se os termos acima na equação [2.2.9] obtém-se as equações da conservação da quantidade de movimento na forma bidimensional, já feitas as decomposições nas direções \hat{i} e \hat{j} e desprezada a variação da pressão atmosférica:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{U(U^2 + V^2)^{1/2}}{C^2 h} - \frac{\tau_{wx}}{\rho h} - \Omega V = 0 \quad [2.3.2]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{V(U^2 + V^2)^{1/2}}{C^2 h} - \frac{\tau_{wy}}{\rho h} + \Omega U = 0 \quad [2.3.3]$$

2.3.2 Escoamento Unidimensional

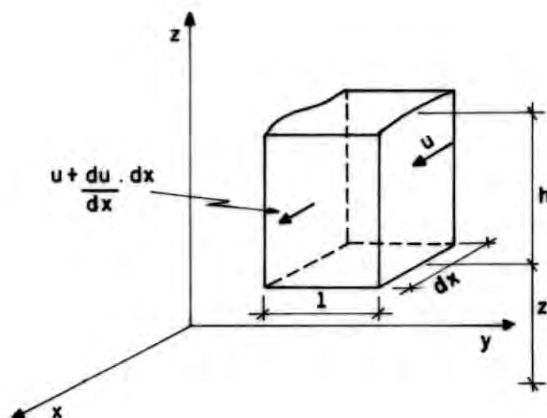
O escoamento unidimensional quase-horizontal comporta-se como uma particularização do escoamento genérico. Considerando-se um elemento de fluido de largura unitária e altura finita h , como o mostrado na Figura 2.3.2, e aplicando-se a equação [2.2.3] obtém-se, para a equação da continuidade:

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad [2.3.4]$$

A equação [2.2.9] aplicada à direção x resulta:

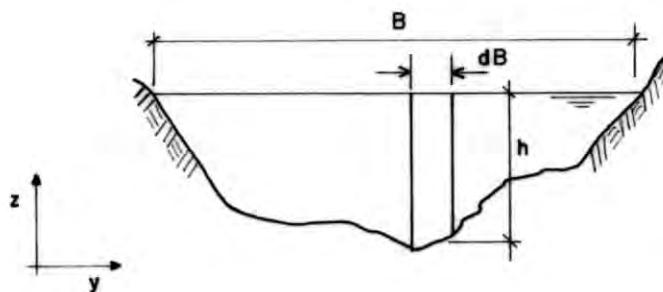
$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + u \frac{\partial}{\partial x}(uh) + g h \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{u|u|}{C^2} = 0 \quad [2.3.5]$$

A generalização, passando-se de um elemento de largura unitária para um rio natural, pode ser obtida através da integração das equações [2.3.4] e [2.3.5] na largura da seção, conforme indica a Figura 2.3.3.



ELEMENTO DE VOLUME - ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL

FIGURA 2.3.2



SEÇÃO TRANSVERSAL - ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL

FIGURA 2.3.3

Considerando um elemento na seção de largura dB , profundidade h e velocidade média u , a área total da seção e a vazão são dadas por:

$$A = \int_0^B h \, dB$$

$$Q = \int_0^B u \, h \, dB$$

e a equação da continuidade transforma-se em:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad [2.3.6]$$

Admitindo-se as hipóteses:

- (1) relação $(\partial h / \partial x)$ constante ao longo da seção transversal;
- (2) não ocorrência de intercâmbio de massa entre um elemento e outro da seção transversal

e definindo:

- (3) coeficiente de quantidade de movimento:

$$\beta = \frac{\int_0^B \frac{u^2 h}{A U^2} dB}{\int_0^B u^2 h dB} = \frac{A}{Q^2} \int_0^B u^2 h dB$$

- (4) Raio Hidráulico de Engelund [in ABBOTT (1979)]:

$$R_E = \frac{\int_0^B \frac{C^2 h^2 dB}{C^2 \beta A}}$$

pode-se reescrever a equação [2.4.2] na forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 A R_E} = 0 \quad [2.3.7]$$

que é a equação diferencial da quantidade de movimento. As relações [2.3.6] e [2.3.7] são as equações clássicas de *Saint Venant* para o escoamento unidimensional.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura específica sobre modelação bidimensional é extensa e variada. Para o tema concorrem tanto as pesquisas teóricas sobre a solução das equações diferenciais resultantes, como também os experimentos numéricos desenvolvidos para adaptação ou melhoria de um determinado tipo de modelo numa aplicação particular.

A seguir são compilados alguns trabalhos que, de forma aproximada, representam a linha evolutiva dos estudos de modelação matemática bidimensional. São apresentados modelos básicos em diferenças finitas explícitas e implícitas, modelos com solução pelo método das características, modelos de células fechadas e ainda trabalhos recentes que utilizam grandes computadores e a técnica dos elementos finitos.

3.1 ESQUEMA DE LEENDERTSE

Um dos primeiros trabalhos sobre a hidrodinâmica do escoamento bidimensional e sua modelação matemática foi desenvolvido por Jan LEENDERTSE em 1967, para a Força Aérea dos Estados Unidos (USAF). A importância do trabalho, pelo fato de conter estudos de estabilidade numérica e acuracidade, levou outros pesquisadores a se aprofundarem no chamado "*Algoritmo dos Caminhos Alternados*", a tal ponto que em 1975, ABBOTT passou a classificá-lo como um tema básico da hidráulica computacional.

Inicialmente o trabalho apresenta as equações do escoamento bidimensional quase-horizontal em variáveis de Euler partindo das

equações básicas de Navier-Stokes. As seguintes expressões são obtidas:

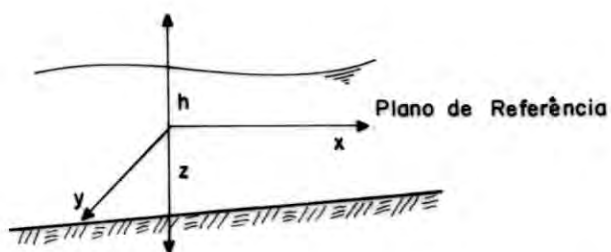
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h+Z)U] + \frac{\partial}{\partial y}[(h+Z)V] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{U(U^2+V^2)^{1/2}}{C^2(h+Z)} - \Omega V = F^{(x)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{V(U^2+V^2)^{1/2}}{C^2(h+Z)} + \Omega U = F^{(y)}$$

[3.1.1]

onde h é a cota do nível d'água e Z a cota do fundo em relação ao plano de referência, como pode se observar na figura 3.1.1. Os valores de $F^{(x)}$ e $F^{(y)}$ são as expressões das parcelas oriundas das tensões de cisalhamento devido aos esforços de vento e pressão barométrica e Ω é a componente devido a rotação da terra.



- + Nível D'água
- o Cota de Fundo
- Velocidade U
- | Velocidade V

FIGURA 3.1.1

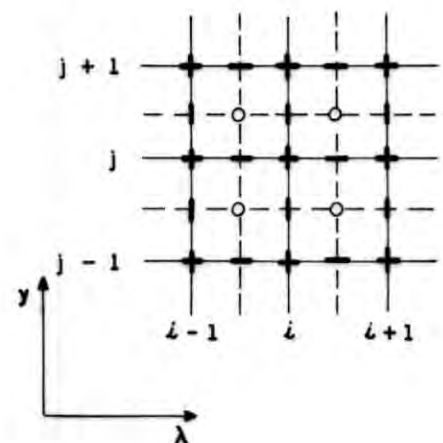


FIGURA 3.1.2

3.1.1 Esquema Numérico

Para a integração destas equações o autor propôs o uso de um esquema de diferenças finitas parcialmente implícito, centrado no tempo e no espaço, escrito sobre uma malha *ortogonal* de pontos conforme indicado na figura 3.1.2. O algoritmo para o cálculo é tal que, num primeiro passo, com intervalo de tempo $\Delta t/2$, são calculados implicitamente os valores de $h^{t+1/2}$ e $U^{t+1/2}$ a partir dos valores de U , V e h no instante t e explicitamente $V^{t+1/2}$, a partir de $h^{t+1/2}$ e $U^{t+1/2}$ recém calculados.

Num segundo passo, também com intervalo de tempo $\Delta t/2$, são calculados h^{t+1} e V^{t+1} a partir de $h^{t+1/2}$, $U^{t+1/2}$ e $V^{t+1/2}$ e finalmente U^{t+1} em função de h^{t+1} e V^{t+1} . Este esquema equivale a proceder duas varreduras sobre o plano horizontal Oxy , a primeira partindo de t até $t+\Delta t/2$, calculando-se h e U de forma implícita e V de forma explícita, e a segunda indo de $t+\Delta t/2$ até $t+1$, calculando-se h e V de forma implícita e U explicitamente. Devido a esta alternância de cálculo o algoritmo recebeu a designação de "ADI-Alternating Direction Algorithm" ou Algoritmo dos Caminhos Alternados.

As equações em diferenças finitas resultantes para o primeiro passo são as seguintes:

■ ponto $i+1/2, j$

$$-r_{i+1/2} U_{i+1/2}^{t+1/2} + h_i^{t+1/2} + r_{i+1/2} U_{i+1/2}^{t+1/2} = A_i^t$$

[3.1.2]

■ para o ponto i, j

$$-r_i h_i^{t+1/2} + \left[1 + \left(\frac{dU}{dx} \right)_{i+1/2}^t \right] U_{i+1/2}^{t+1/2} + r_{i+1} h_i^{t+1/2} = B_{i+1/2}^t$$

[3.1.3]

■ para o ponto $i, j+1/2$

$$V_i^{t+1/2} = V_i^t - \frac{1}{2} \Delta t \Omega \bar{U}^{t+1/2} - \frac{1}{2} \Delta t \bar{U}^{t+1/2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^t -$$

$$- \frac{1}{2} \Delta t V_i^{t+1/2} \left(\frac{dV}{dy} \right)^t - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} g h_y^t - R(y)_{j+1/2}^{t+1/2}$$

[3.1.4]

sendo :

$$r_{i-1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{i-1/2, j}^{-x} + Z_{i-1/2, j}^{-y})$$

$$r_{i+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{i+1/2, j}^{-x} + Z_{i+1/2, j}^{-y})$$

$$r_i = g \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad r_{i+1} = g \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$A_i = h_{i, j}^t - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[V_{i, j+1/2}^t (h_{i, j+1/2}^{-y} + Z_{i, j+1/2}^{-x}) - \right.$$

$$\left. - V_{i, j-1/2}^t (h_{i, j-1/2}^{-y} + Z_{i, j-1/2}^{-x}) \right]$$

$$B_{i+1/2} = U_{i+1/2}^t + \frac{1}{2} \left[\Delta t \Omega - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} (U_{i+1/2, j+1}^t - U_{i+1/2, j-1}^t) \right] \bar{V} -$$

$$- R(x)_{i+1/2}^t$$

$$R(x)_{i+1/2}^t = \frac{1}{2} g \Delta t U_{i+1/2}^t \frac{\sqrt{(U^t)^2 + (\bar{V}^t)^2}}{(h^{-x} + Z^{-y}) (C^{-x})^2}$$

$$R(y)_i^{t+1/2} = \frac{1}{2} g \Delta t V_i^{t+1/2} \frac{\sqrt{(\bar{U}^{t+1/2})^2 + (V_i^t)^2}}{(h^{-x} + Z^{-y}) (C^{-x})^2}$$

[3.1.5]

As grandezas médias utilizadas, abaixo descritas apenas para a variável h , são extensivas às demais:

$$h_{i,j}^{-x} = \frac{1}{2} (h_{i+1/2,j} + h_{i-1/2,j})$$

$$h_{i,j}^{-y} = \frac{1}{2} (h_{i,j+1/2} + h_{i,j-1/2})$$

$$h_x = (h_{i+1/2,j} - h_{i-1/2,j})$$

$$h_y = (h_{i,j+1/2} - h_{i,j-1/2})$$

$$\bar{h}_{i,j} = \frac{1}{4} (h_{i-1/2,j-1/2} + h_{i-1/2,j+1/2} + h_{i+1/2,j-1/2} + h_{i+1/2,j+1/2})$$

[3.1.6]

Para o segundo passo, as equações podem ser reescritas da mesma forma:

■ ponto i, j

$$-r_{j-1/2} V_{j+1/2}^{t+1} + h_j^{t+1} + r_{j+1/2} V_{j+1/2}^{t+1} = A_j^{t+1/2}$$

[3.1.7]

■ para o ponto $i, j+1/2$

$$-r_j h_j^{t+1} + \left[1 + \left(\frac{dV}{dx} \right)_{j+1/2}^{t+1/2} \right] V_{j+1/2}^{t+1} + r_{j+1} h_j^{t+1} = B_{j+1/2}^{t+1/2}$$

[3.1.8]

■ para o ponto $i+1/2, j$

$$\begin{aligned}
 U_{i+1/2}^{t+1} = & U_{i+1/2}^t - \frac{1}{2} \Delta t \Omega \bar{U}^{t+1} + \frac{1}{2} \Delta t \bar{V}^{t+1} \left(\frac{dU}{dx} \right)^{t+1/2} - \\
 & - \frac{1}{2} \Delta t U_i^{t+1} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{t+1/2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} g h_y^{t+1/2} - RC(x)_{j+1/2}^{t+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.9}$$

onde :

$$r_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta y} (ch_{i,j}^{-y} + Z_{i,j}^{-x})$$

$$r_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (ch_{i,j}^{-x} + Z_{i,j}^{-y})$$

$$r_j = g \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad r_{j+1} = g \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 A_j = & h_{i,j}^{t+1/2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[U_{i+1/2,j}^{t+1/2} (ch_{i+1/2,j}^{-x} + Z_{i+1/2,j}^{-y}) - \right. \\
 & \left. - U_{i-1/2,j}^{t+1/2} (ch_{i-1/2,j}^{-y} + Z_{i-1/2,j}^{-x}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{j+1/2} = & V_{j+1/2}^{t+1/2} + \frac{1}{2} \left[\Delta t \Omega - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{i+1,j+1/2}^{t+1/2} - V_{i-1,j+1/2}^{t+1/2}) \right] \bar{U} - \\
 & - RC(y)_{j+1/2}^{t+1/2}
 \end{aligned}$$

$$RC(x)_j^{t+1} = \frac{1}{2} g \Delta t U_{i+1/2}^{t+1} \frac{\sqrt{(U^{t+1/2})^2 + (\bar{V}^{t+1})^2}}{(h^{-x} + Z^{-y}) (C^{-x})^2}$$

$$RC(y)_{j+1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{2} g \Delta t V_{j+1/2}^{t+1/2} \frac{\sqrt{(\bar{U}^{t+1/2})^2 + (V^{t+1/2})^2}}{(h^{-y} + Z^{-x}) (C^{-y})^2}
 \tag{3.1.10}$$

A representação dos termos convectivos das equações do momento foi feita utilizando-se diferenças finitas centradas, devido às instabilidades observadas durante o processo de teste numérico:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2\Delta x}(U_{i+3/2,j} - U_{i-1/2,j})$$

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{2\Delta y}(U_{i+1/2,j+1} - U_{i+1/2,j-1})$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{i,j+1/2} = \frac{1}{2\Delta x}(V_{i+1,j+1/2} - V_{i-1,j+1/2})$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)_{i,j+1/2} = \frac{1}{2\Delta y}(V_{i,j+3/2} - V_{i,j-1/2})$$

[3.1.11]

As equações [3.1.2] e [3.1.3] aplicadas para todas as linhas j da malha de pontos permitem a construção de um sistema linear com N incógnitas de nível d'água e $N-1$ incógnitas de velocidade U . A solução é obtida através de um método de eliminação, iniciando-se pela condição de contorno do último ponto N .

Calculados os valores de $U^{t+1/2}$ e $h^{t+1/2}$, são determinados os valores de $V^{t+1/2}$ pela expressão [3.1.4], para todas as colunas i .

Com relação aos contornos, para os de tipo fechado, ou "água-terra", assume-se que a velocidade perpendicular a ele seja nula, que sempre existe uma profundidade no ponto e que a amplitude negativa da variação de nível não excederá a profundidade disponível. Definido desta forma, o contorno será situado, na malha de pontos, exatamente onde as velocidades U ou V são calculadas e a cota de fundo conhecida. Nos contornos abertos "água-água", o nível d'água em função do tempo deverá ser conhecido nos pontos onde h é definido.

Junto aos contornos, o cálculo das diferenças apresentadas em [3.1.6] é impossível. Devem ser feitas aproximações, por exemplo, extrapolando-se o valor da velocidade no cálculo da derivada ou linearizando a equação, o que equivale a omissão do termo da derivada convectiva. O uso de uma derivada não centrada, como será visto no Capítulo 4, introduz instabilidades numéricas no esquema.

Os termos de resistência do escoamento $R(x)$ e $R(y)$ englobam o coeficiente de atrito C . Este coeficiente é função da rugosidade do fundo e da profundidade. As expressões para o cálculo de seu valor nos escoamentos em duas dimensões não estão consagradas, sendo utilizadas aproximações.

Em seu trabalho original, LEENDERTSE apresentou duas aproximações para o cálculo do coeficiente C , utilizando fórmulas do escoamento unidimensional. Na primeira aproximação o valor de C foi estimado no ponto onde o nível d'água é definido, utilizando a profundidade média dos quatro pontos adjacentes para o cálculo.

Na segunda aproximação o valor de C foi definido nos pontos onde a profundidade é conhecida, utilizando-se para o cálculo o nível d'água do ponto central subsequente. O valor de C associado a cada velocidade U ou V é a média dos valores de C adjacentes ao ponto de velocidade.

3.1.2 Estabilidade e Precisão

A precisão numérica e estabilidade de cálculo foram pesquisadas pelo autor através do método de *Von Neumann*. A essência do método e seus objetivos serão tratados adiante, no Capítulo 4, porém basicamente consiste em imaginar que as equações diferenciais, simplificadas, tem solução teórica possível, através de séries de Fourier.

Substituindo-se este resultado teórico na equação de diferenças do método é possível concluir sobre a existência de efeitos

amplificadores na solução, que farão as grandezas U, V e h crescerem de forma incontrolada, ou ainda verificar o atraso ou adiantamento da propagação das ondas.

Esta análise é feita para escoamentos unidimensionais apenas, uma vez que nos bidimensionais o problema é bem mais complexo pela infinidade de direções que os vetores velocidade podem apresentar. Entretanto, admitem-se como válidos para os escoamentos bidimensionais os resultados obtidos das equações unidimensionais.

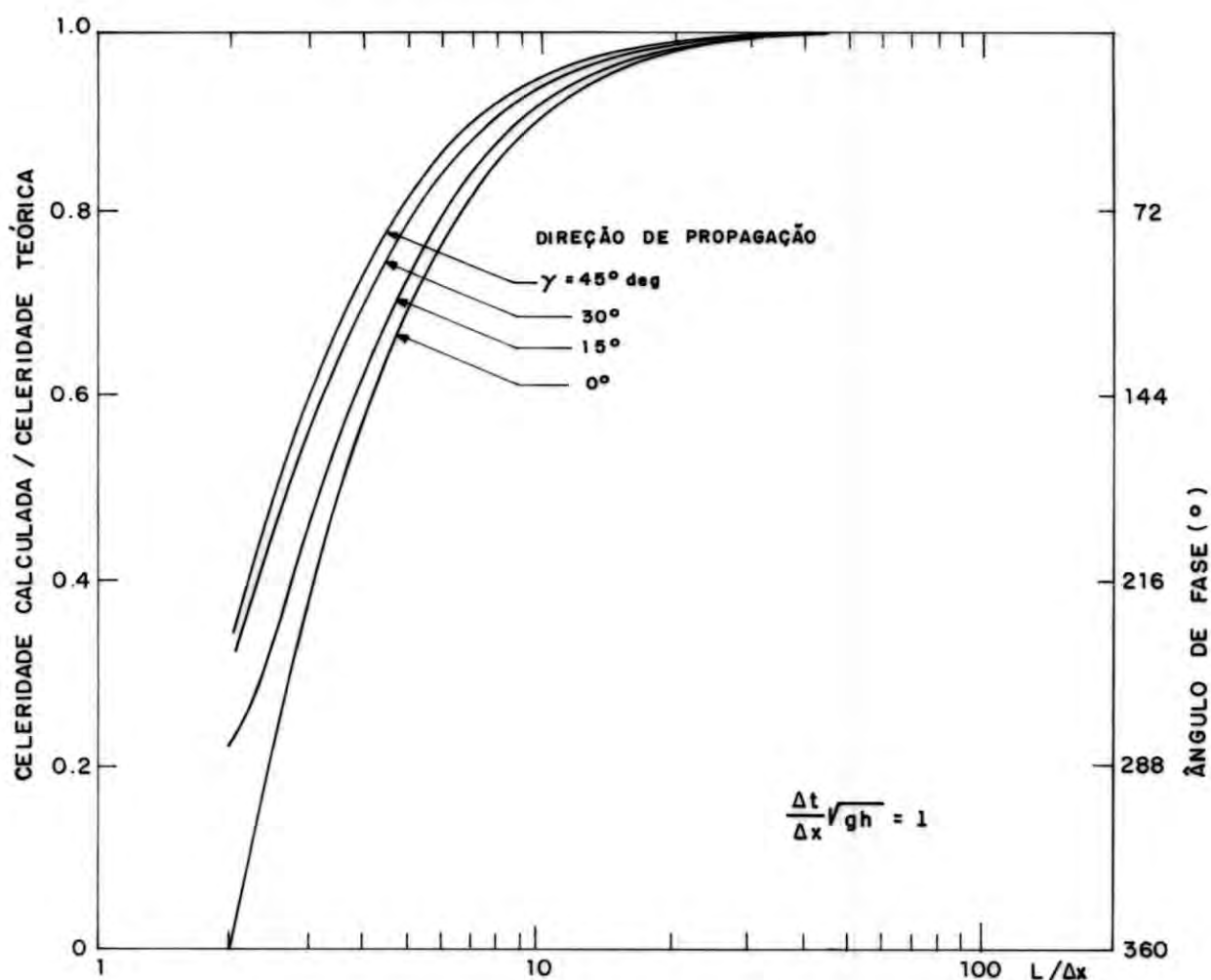
A aplicação desta metodologia ao esquema multi-operacional descrito acima, eliminados os termos de rugosidade e convectivos, mostra que o esquema é incondicionalmente estável. Entretanto, como a influência dos fatores de Coriolis e de rugosidade dificultam muito a análise teórica e sabendo ainda que nos modelos simplificados a introdução deste termo leva a uma maior estabilização, o autor propõe que esta pesquisa seja feita em termos numéricos, ou seja, através da simulação de casos práticos.

O estudo da deformação da celeridade da onda representada no modelo foi feito considerando o mesmo método de *Von Neumann*, obtendo-se o diagrama característico do atraso da onda para o esquema específico. O diagrama apresentado pelo autor está indicado na figura 3.1.3, de onde se pode concluir que para a relação $L/\Delta x$ (comprimento da onda sobre o número de pontos representados) acima de 20, o atraso não será significativo se adotada a condição $(\Delta t/\Delta x)(gh)^{1/2}$ igual a unidade.

3.1.3 Experimentos Numéricos

Diante das dúvidas sobre a estabilidade e precisão do modelo, foram realizados vários testes, todos eles aplicados a estuários ou correntes marítimas. O modelo foi aplicado para testes da Baía de Tokyo, ao Mar do Norte e ao Estuário do Rio Reno. Esta última aplicação apresenta-se como mais interessante uma vez que foram pesquisados os efeitos do passo de cálculo (Δt), o efeito da

iteração no cálculo das profundidades h e da consideração da velocidade implícita das expressões de $R(x)$ e $R(y)$ de [3.1.5] e [3.1.10].



CELERIDADE DA ONDA CALCULADA - LEENDERTSE (1967)

FIGURA 3.1.3

A figura 3.1.4 mostra a área estudada e a malha de pontos utilizada, de espaçamento 400 m, sendo os cálculos realizados com intervalo de tempo de 180 s. A comparação das velocidades medidas e calculadas indica uma boa concordância entre o modelo e a natureza.

Na figura 3.1.5 observa-se o efeito do passo de tempo na precisão do cálculo de vazão e na figura 3.1.6 pode-se ver o efeito da modificação do termo de atrito.

3.1.4 Outras Aplicações

CASALÁS (1986) e posteriormente SILVEIRA e TUCCI (1988) aplicaram com sucesso o modelo proposto por LEENDERTSE ao complexo formado pelo Rio Guaíba e Lagoa dos Patos, no Rio Grande do Sul, simulando o efeito de circulação no lago provocada pelo vento. Foram introduzidas inovações com relação ao cálculo dos efeitos de atrito, onde foram consideradas as tensões laterais e de fundo.

Para as tensões de fundo, o parâmetro C foi proposto na forma:

$$C = \frac{g^{1/2}}{k} \ln \left[\frac{(h - Z)}{z_0} - 1 \right] \quad [3.1.12]$$

onde k é um coeficiente linear adimensional que determina o comprimento de mistura em função da proximidade a uma parede rígida, segundo a da Teoria da Turbulência de Prandtl. O valor de k para água limpa é 0,4 sendo que, com sedimentos em suspensão, o valor diminui. O parâmetro z_0 é uma medida da ordem de grandeza da espessura da camada limite.

Para as tensões laterais, acrescentou-se nas equações do momento o termo $-1/\rho \varepsilon \text{ grad } \vec{V}$, onde ε é o coeficiente de atrito lateral, definido por:

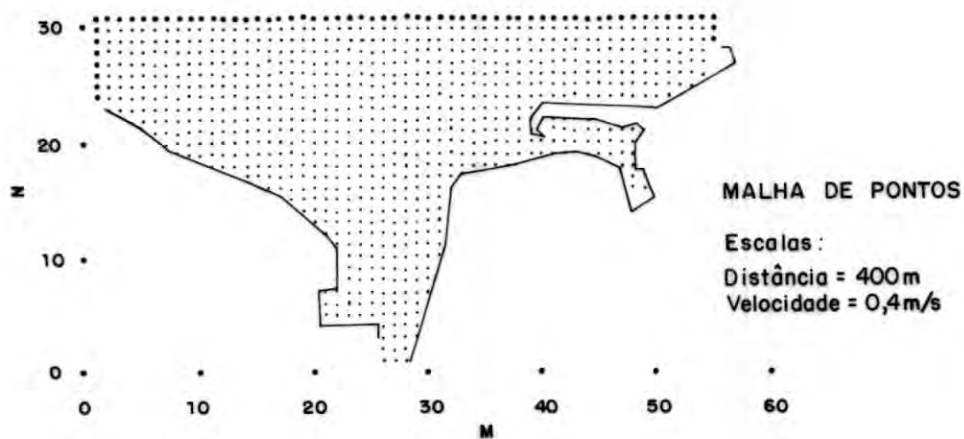
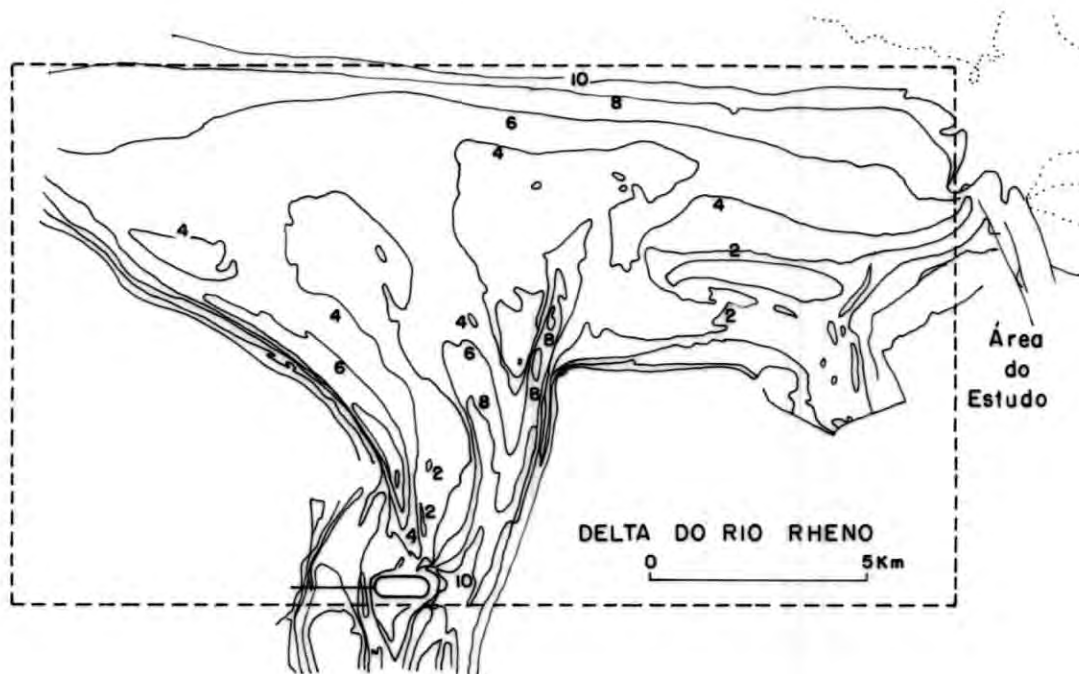
$$\varepsilon = \frac{\rho k}{8C} \left[g(h - z)(U^2 + V^2) \right]^{1/2} \quad [3.1.13]$$

Para as tensões devido ao vento, adotou-se a expressão padronizada

$$\tau = \rho_a C_{10} V_{10}^2$$

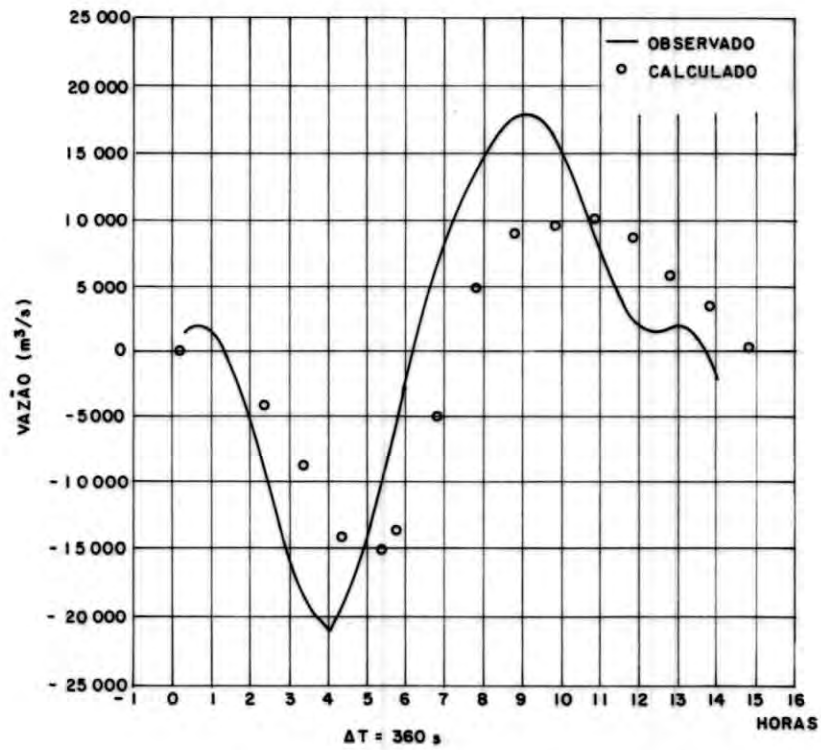
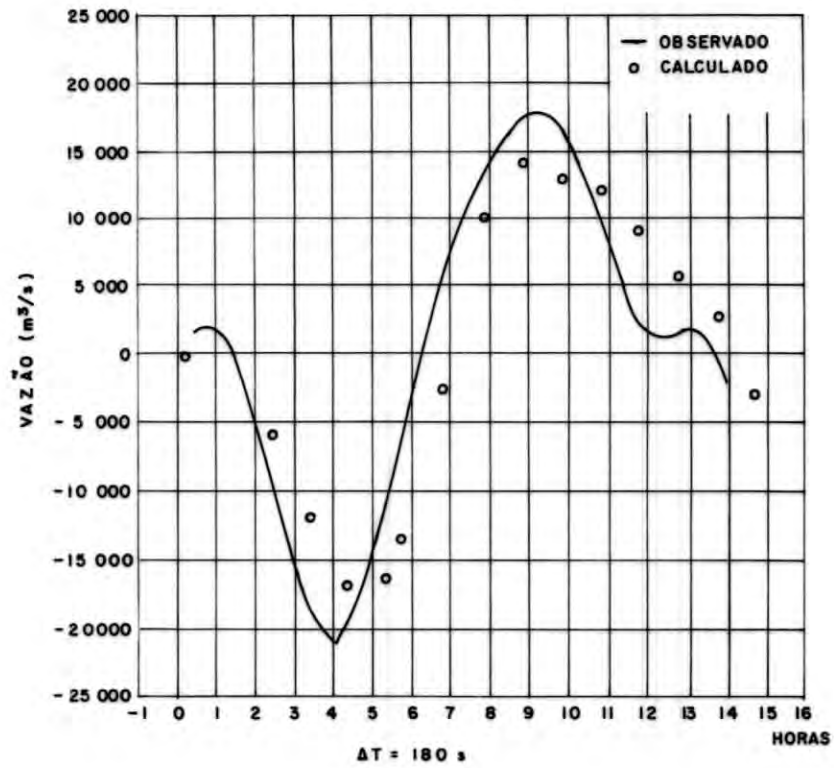
[3.1.14]

onde ρ_a é a massa específica do ar, V_{10} é a velocidade padrão medida a 10 m de altura acima da superfície livre e C_{10} é o coeficiente de arraste admitido.



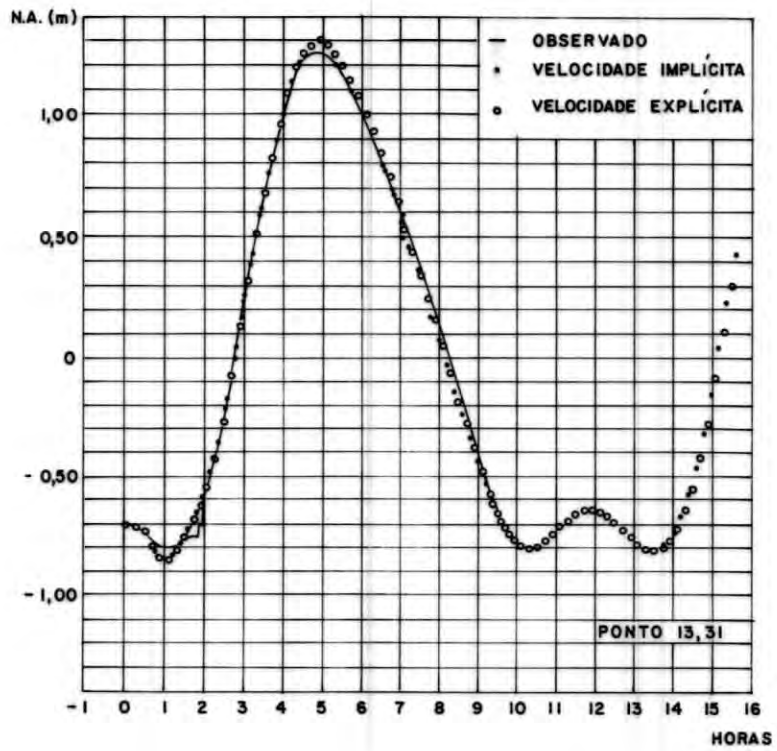
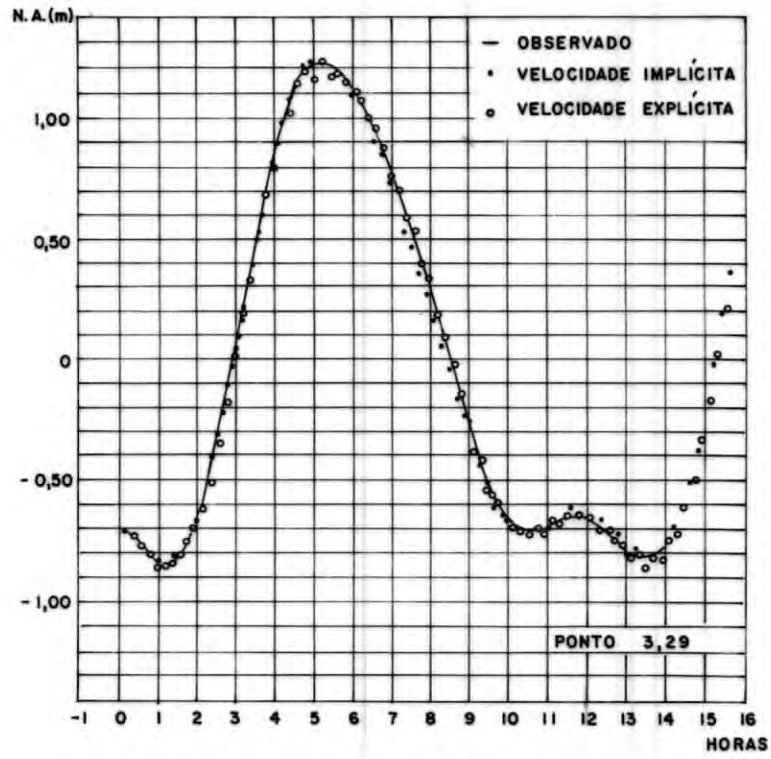
BATIMETRIA E MALHA DE CÁLCULO - ESTUÁRIO RHENO

FIGURA 3.1.4



VAZÃO PELA SEÇÃO Y = 4 - EFEITO DO PASSO DE CÁLCULO

FIGURA 3.1.5



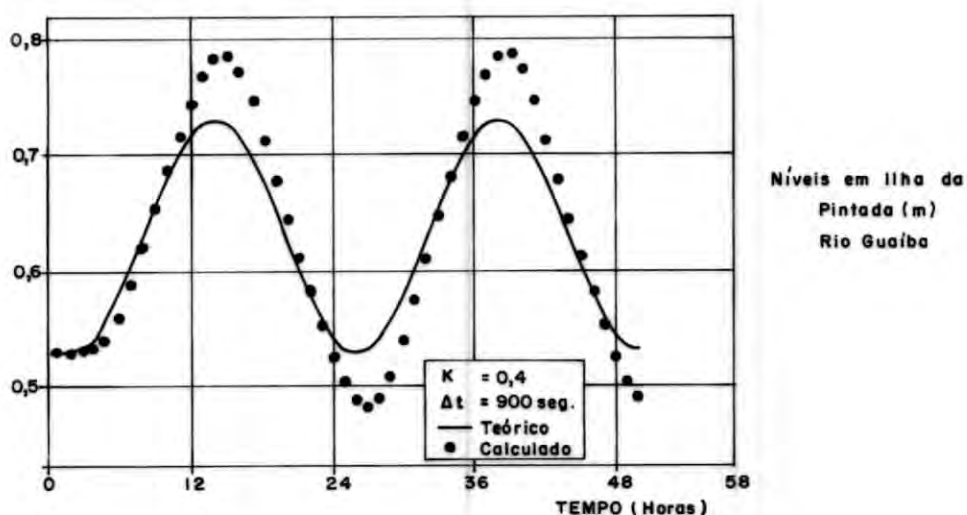
NÍVEIS D'ÁGUA - EFEITO DO TERMO DE ATRITO

FIGURA 3.1.6

A malha de cálculo utilizada na aplicação apresentava espaçamento de célula de 1 Km e o modelo foi calibrado nos parâmetros k e C_{10} com dados de vazão e velocidade do vento medidos em campo. Desta calibração resultou para o fator k o valor 0,35, correspondente ao coeficiente de Chèzy 65, com uma profundidade média de 4 m.

As simulações efetuadas indicaram que o modelo tem boa representação da celeridade da onda, porém apresentando uma tendência de amplificação dos níveis, como se observa na figura 3.1.7. A figura 3.1.8 mostra um mapa de velocidades calculado onde se nota um interessante esvaziamento do trecho de rio simulado. As maiores velocidades medidas situam-se em torno de 5 cm/s para ventos de até 6 m/s.

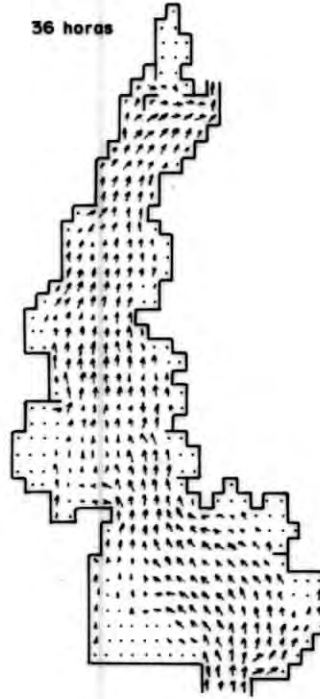
VERWEY (1984) indica uma série de aplicações do modelo desenvolvido por LEENDERTSE e posteriormente bastante aperfeiçoado para aplicação na região dos Deltas Holandeses. Os resultados práticos indicaram uma boa acuracidade (diferenças médias de 5 cm) para o nível d'água. Para esta aplicação foi utilizado passo de cálculo de 75 s e uma malha de 800 m contendo 9000 pontos. Uma simulação típica de 24 horas no modelo leva até 2 horas de processamento em computador IBM-3033.



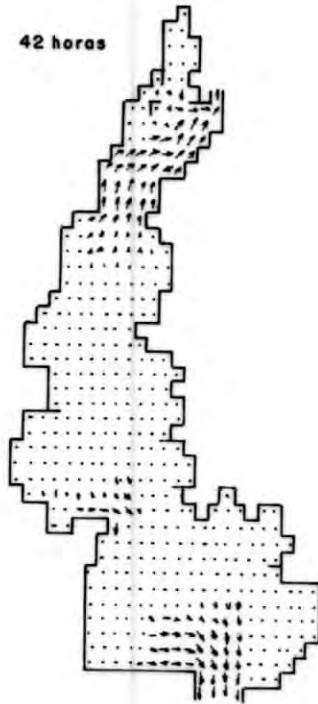
NÍVEIS CALCULADOS E OBSERVADOS (SILVEIRA E TUCCI - 1988)

FIGURA 3.1.7

36 horas



42 horas



MAPA DE CORRENTES (SILVEIRA E TUCCI - 1988)

FIGURA 3.1.8

3.2 MODELO DE TRÊS ESTÁGIOS

Os engenheiros BENQUÉ, HAUGEL e VIOLET(1982), da *Electricité de France, Chateau*, propuseram um modelo para o cálculo do escoamento bidimensional baseado na subdivisão das equações básicas do movimento de acordo com o sentido físico dos seus termos. Assim, o movimento pode ser caracterizado como a soma de três estágios separados, da forma:

$$\begin{array}{l}
 \text{Convecção} \\
 \\
 \text{Difusão} \\
 \\
 \text{Propagação}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\
 \\
 \frac{\partial U}{\partial t} = \Omega V + R \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial V}{\partial t} = -\Omega U + R \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\
 \\
 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\
 \frac{\partial U}{\partial t} + g (h - Z) \frac{\partial h}{\partial x} + R(x) = 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + g (h - Z) \frac{\partial h}{\partial y} + R(y) = 0
 \end{array} \right.$$

[3.2.1]

onde h indica a superfície da água, U e V são as componentes das velocidades nas duas direções, $R(x)$ e $R(y)$ indicam as componentes devido a tensão de cisalhamento junto ao fundo e R é um coeficiente de difusão.

Através deste esquema cada parcela do escoamento é calculada separadamente e na ordem de apresentação das equações [3.2.1], em função de sua importância para o cálculo que se deseja realizar. As equações [3.2.1] podem ainda ser divididas na forma de varreduras de um sistema em diferenças finitas, tornando-se:

$$\begin{array}{l}
 \text{Varredura X} \\
 \text{Varredura Y}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial y} = 0
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \text{Convecção} \\
 \\
 \end{array}
 \quad [3.2.2]$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Varredura X} \\
 \text{Varredura Y}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \frac{\partial U}{\partial t} = \Omega V + R \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial V}{\partial t} = R \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial U}{\partial t} = R \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial V}{\partial t} = -\Omega U + R \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \text{Difusão} \\
 \\
 \end{array}
 \quad [3.2.3]$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Varredura X} \\
 \text{Varredura Y}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial U}{\partial t} + gCh - \mathcal{D} \frac{\partial h}{\partial x} + R(x) = 0 \\
 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + gCh - \mathcal{D} \frac{\partial h}{\partial y} + R(y) = 0
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \text{Propagação} \\
 \\
 \end{array}
 \quad [3.2.4]$$

As dez equações são resolvidas em sequência através de métodos numéricos como o método das características ou de diferenças finitas. Pode ser demonstrado que o erro no fracionamento das equações é de primeira ordem no tempo. As equações [3.2.2] são todas do tipo :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (uf)}{\partial x} = 0$$

e podem ser resolvidas através de um método de características que para o caso é incondicionalmente estável. As equações [3.2.3] podem ser resolvidas através de diferenças finitas centradas no espaço e no tempo, obtendo-se de cada duas equações um sistema linear solúvel pelo método da dupla varredura.

As equações [3.2.4] são discretizadas em segunda ordem no espaço e no tempo e necessitam ser combinadas linearmente, duas a duas, para a solução. Discretizando-se por um esquema de diferenças de quatro pontos pode-se obter tal sistema linear em matriz tridiagonal resolvendo-se através de dupla varredura.

Apesar de incondicionalmente estável, o método apresentado somente pode ser utilizado nos escoamentos bidimensionais admitindo-se a Condição de Courant $c(\Delta t/\Delta x)$ abaixo de 5. Com Números de Courant acima de cinco, a separação direcional do cálculo da propagação cria uma polarização das velocidades no sentido dos eixos coordenados.

Esta restrição é bastante desfavorável na simulação de áreas relativamente pequenas, que exigem uma malha de discretização com espaçamento apertado. Isto obrigará a um passo de cálculo Δt pequeno, o que além de encarecer o processamento faz com que a propagação dos erros de truncamento comprometa o resultado.

Para eliminar o problema da polarização os autores desenvolveram outro algoritmo para discretização e cálculo da equação da propagação, integrando o termo de atrito na equação de difusão.

Sob estas condições a etapa de propagação pode ser reescrita:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + gCh - Z \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + gCh - Z \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad [3.2.5]$$

Estas equações podem ser discretizadas, em diferenças, na forma:

$$\frac{h^{t+1} - h^t}{\Delta t} + \text{div } U = 0$$

$$\frac{U^{t+1} - U^t}{\Delta t} + gCh - Z \text{ grad } h = 0$$

onde U^t é o valor obtido no cálculo do estágio anterior (difusão). Introduzindo-se o coeficiente de implicidade θ de modo que $\theta=1$ torna o método totalmente implícito e $\theta = 0$ totalmente explícito, obtém-se:

$$\frac{h^{t+1} - h^t}{\Delta t} + \theta \text{ div } U^{t+1} + (1-\theta) \text{ div } U^t = 0$$

$$\frac{U^{t+1} - U^t}{\Delta t} + gCh^t - Z \theta \text{ grad } h^{t+1} + gCh^t - Z (1-\theta) \text{ grad } h^t = 0$$

Eliminando-se U^{t+1} , chega-se à equação de cálculo:

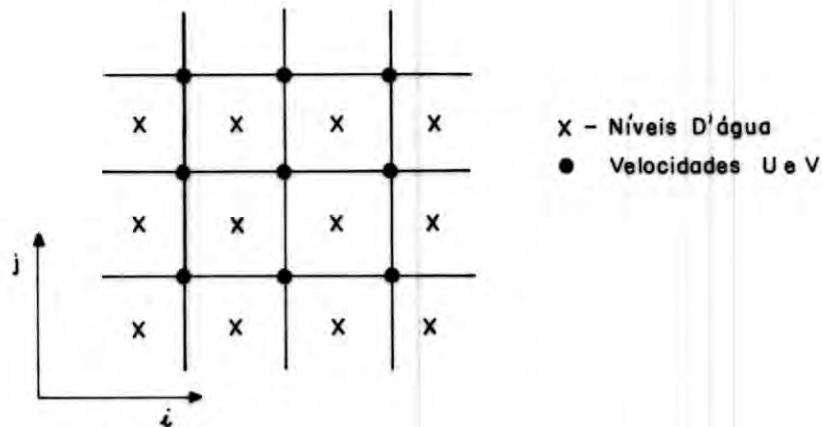
$$\frac{h^{t+1}}{\Delta t^2} - \theta^2 \operatorname{div} \left[g(h^t - Z) \operatorname{grad} h^{t+1} \right]$$

$$= \frac{h^t}{\Delta t^2} - \theta(1-\theta) \operatorname{div} \left[g(h^t - Z) \operatorname{grad} h^t \right] + \frac{\theta}{\Delta t} \operatorname{div} U' + \frac{(1-\theta)}{\Delta t} \operatorname{div} U^t$$

$$U^{t+1} = U' - \Delta t g(h^t - Z) \left[\theta \operatorname{grad} h^{t+1} + (1-\theta) \operatorname{grad} h^t \right]$$

[3.2.6]

A malha de pontos utilizada para a discretização é tal que as velocidades U e V podem ser calculadas no mesmo ponto. Assim, a mesma malha que é utilizada nas equações [3.2.3] e [3.2.4] pode também ser utilizada para as equações [3.2.6] (Figura 3.2.1).



ESQUEMA DA MALHA DE PONTOS (BENQUE, HAUGEL & VIOLET)

FIGURA 3.2.1

O método para solução destas últimas equações é o dos caminhos alternados, realizando-se porém uma iteração para que o valor de h nas duas varreduras seja o mesmo. Os autores estimam em torno de 10 iterações para convergência do processo, com Número de Courant igual a 20.

A análise de estabilidade e acuracidade efetuada para o modelo indica que para valores do coeficiente de implicidade θ variando entre 0,5 e 1, Número de Courant variando entre 0,1 e 100 e número de pontos da malha pelo comprimento da onda entre 3 e 1000, o erro de fase não varia muito em função de θ . Conclui-se também que para um dado Número de Courant, a onda amortecida corresponde àquela de período igual a quatro vezes o passo de cálculo Δt .

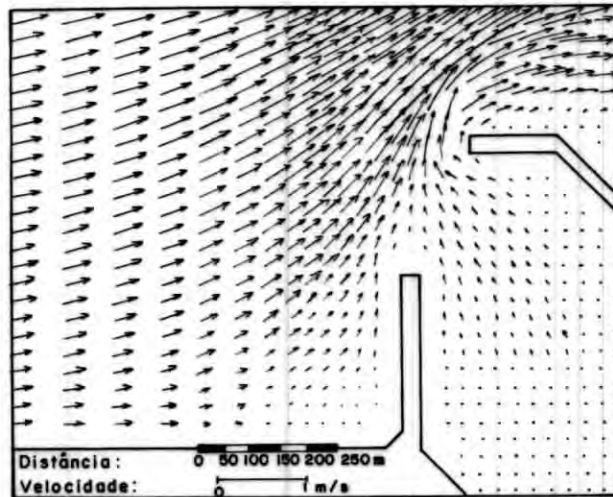
A tabela [3.2.1] apresenta o amortecimento da onda para $\theta=1$ em função do Número de Courant $c(\Delta t/\Delta x)$. Observa-se que para $c(\Delta t/\Delta x)$ até 10, o amortecimento da onda é inferior a 20%. Se esta precisão for admitida, um canal de 10 m de profundidade, propagando uma onda de período 12 horas (maré) exigirá, no cálculo de uma malha de 50 m, um passo de cálculo da ordem de 60 s.

Pode-se portanto concluir que um modelo bidimensional desta forma constituído não apresenta problemas com relação ao critério de Courant. Os problemas existentes se relacionam a não linearidade dos termos convectivos em geral, que ocorrem quando da simulação de pequenas áreas (Δx pequeno).

O modelo foi aplicado para simulação do escoamento marítimo nas costas da França (Região de Brest), e também num cálculo detalhado do Porto de Calais. Neste cálculo foi utilizado uma malha com espaçamento 75 m e Número de Courant entre 10 e 20, para velocidades calculadas de até 1 m/s. A figura 3.2.2 apresenta um resultado típico do modelo.

TABELA 3.2.1

$(\Delta t/\Delta x)$	1	2	3	6	10	20	30	60	100
H/H ₀	0.98	0.96	0.94	0.88	0.82	0.67	0.55	0.33	0.19



ESTUDO DO PORTO DE CALAIS (BENQUE, HAUGEL & VIOLET)

FIGURA 3.2.2

3.3 MODELO IMOC

Considerando que todos os modelos para simulação matemática do escoamento bidimensional estavam baseados em Diferenças Finitas ou em Elementos Finitos e portanto limitados nas condições de estabilidade de Courant, SCHMITZ, SEUS e CZIRWITZKY (1983) propuseram um método de características baseado nas soluções analíticas.

O objetivo do método é eliminar os problemas de precisão e aproximações lineares dos métodos mais usuais e teve origem na experiência dos autores com a modelação unidimensional empregando o método das características.

Partindo das equações do movimento incluindo os termos convectivos não lineares, obtém-se:

$$U_t + U U_x + V U_y + gh_x = -g (S_x + U (U^2 + V^2)^{1/2} / c^2 h)$$

$$V_t + U V_x + V V_y + gh_y = -g (S_y + V (U^2 + V^2)^{1/2} / c^2 h)$$

$$h_t + U h_x + V h_y + h U_x + h V_y = 0$$

[3.3.1]

onde os termos U_t, U_x e U_y indicam as diferenciais em relação aos índices e os produtos convectivos indicam:

$$U U_x = U^t U_x + (U - U^t) U_x, \quad U^t \text{ conhecido}$$

Aplicando-se a mudança de variável:

$$\bar{x} = x - U^t t; \quad \bar{y} = y - V^t t; \quad \bar{t} = t$$

as equações [3.3.1] resultam em:

$$\bar{U}_t + g \bar{h}_x = \bar{r}_1$$

$$\bar{V}_t + g \bar{h}_y = \bar{r}_2$$

$$\bar{h}_t + h^t \bar{U}_x + h^t \bar{V}_y = \bar{r}_3 \quad [3.3.2]$$

Os coeficientes do segundo membro das equações [3.3.2] contém os termos de atrito e as parcelas não lineares das equações do momento na forma transformada. As equações [3.3.2] permitem a obtenção de uma relação do tipo da equação geral da onda:

$$\bar{h}_{tt} - c^2 (\bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy}) = \psi \quad [3.3.3]$$

sendo que

$$c^2 = g h^t \quad \text{e} \quad \psi = \bar{r}_{g_t} - h^t (\bar{r}_{1_x} + \bar{r}_{2_y})$$

A solução analítica desta equação é a clássica solução de Poisson-Parceval, que é dada por:

$$\bar{h}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[I_0(\bar{h}) \right] + I_0(\bar{h}_{\bar{t}}) + \int_0^{\bar{t}} I(\psi) d\tau \quad [3.3.4]$$

onde

$$I_{\tau}(f) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{\alpha^2 + \beta^2 \leq c^2 (\bar{t} - \tau)^2} \frac{f(x+\alpha, y+\beta, \tau)}{[c^2(\bar{t} - \tau)^2 - \alpha^2 - \beta^2]^{1/2}} d\alpha d\beta \quad [3.3.5]$$

Substituindo os parâmetros α e β por:

$$\alpha = c (\bar{t} - \tau) \text{sen } \psi \cos \Phi ; 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = c (\bar{t} - \tau) \text{sen } \psi \text{sen } \Phi ; 0 < \Phi < 2\pi$$

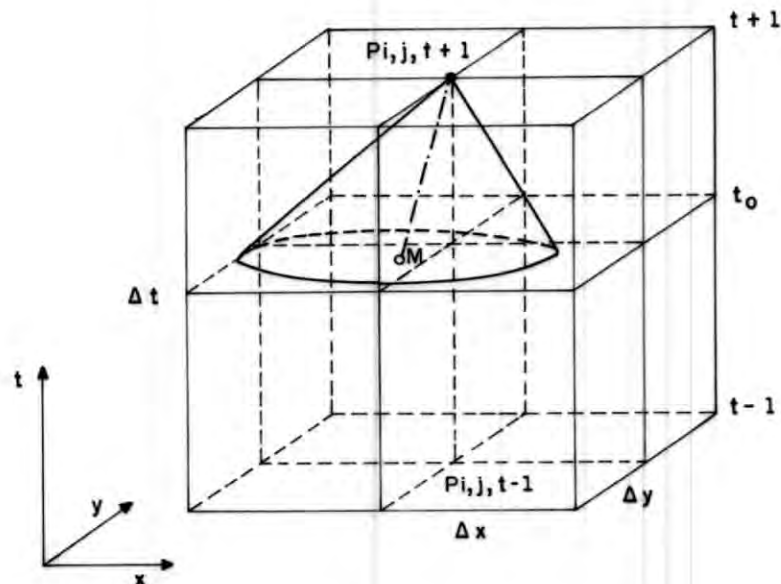
a equação [3.3.5] resulta

$$I_{\tau}(f) = \frac{(\bar{t} - \tau)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F \text{sen } \psi d\psi d\Phi$$

$$F = f \left(\bar{x} + c (\bar{t}-\tau) \operatorname{sen}\psi \cos\phi, \bar{x} + c (\bar{t}-\tau) \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi, \tau \right) \quad [3.3.6]$$

A equação [3.3.6] representa a exata solução para a variável \bar{h} das equações do escoamento bidimensional, e pode ser facilmente re-transformada em $h(x,y,t)$, apenas a partir do valor de \bar{h}_t e \bar{h} no instante \bar{t} . A integral tripla pode ser calculada numericamente, através de uma discretização como a indicada na figura 3.3.1, onde cada quatro pontos são representados por um central $P_{i,j,t}$.

O cálculo para uma incógnita $h(x_i, y_j, t+1)$ no ponto $P_{i,j,t+1}$ é executado utilizando os valores das variáveis de 13 pontos da malha, conhecidas no instante $t-1 \leq t_0 \leq t+1$.



DISCRETIZAÇÃO UTILIZADA PELO MODELO IMOC

FIGURA 3.3.1

Expressando a variável h na forma de uma somatória ponderada:

$$h(P_{i,j,t+1}) = \sum_{l^2+m^2 < 4} \left[a_{l,m} h(x_{i+l}, y_{j+m}, t_0) + b_{l,m} (x_{i+l}, y_{j+m}, t_0) \right]$$

[3.3.7]

e utilizando a fórmula de Taylor nesta expressão e na equação [3.3.4], obtém-se por comparação os coeficientes $a_{l,m}$ e $b_{l,m}$ e o valor de h . De forma semelhante podem ser obtidas as outras grandezas U e V .

As vantagens do método, apontadas pelos autores, são relativas à independência do Número de Courant, à rapidez de cálculo, uma vez que a integração das equações torna o processo explícito, e a possibilidade de utilização de malhas com espaçamento não constante, de modo que geometrias mais complexas podem ser descritas com maior detalhe e simuladas.

3.4 MODELO EXPLÍCITO DE FRONTEIRA MÓVEL

Objetivando o cálculo do escoamento nas planícies de inundação, ora atingidas pela água ora descobertas, ZECH, SOREL e VANSNICK (1983) apresentaram um modelo em diferenças finitas explícito onde o cálculo também é feito através de um algoritmo de caminhos alternados bastante semelhante ao de LEENDERTSE.

As equações básicas são discretizadas sobre a malha indicada na figura 3.4.1, sendo que as cotas de fundo são informadas nos cruzamentos da malha, as velocidades são calculadas nas laterais e os níveis d'água são considerados no centro da quadrícula.

O cálculo é idealizado em dois passos, sendo que no primeiro são calculadas as velocidades U e V a partir dos valores de U, V e Z no instante t . No segundo passo, as profundidades Z são calculadas a partir dos valores de U e V obtidos no primeiro passo.

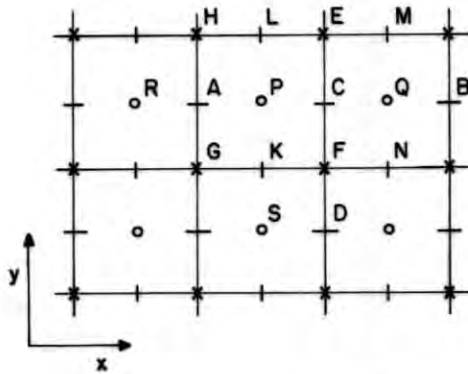
A discretização é feita centrada no tempo e excêntrica no espaço, em função do sinal da velocidade. Assim, os termos convectivos da equação do momento são considerados, por exemplo, para o ponto C da figura 3.4.1:

se $U > 0$

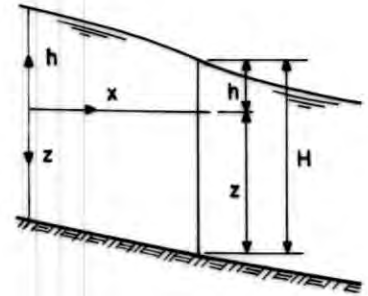
$$U \frac{\partial U}{\partial x} \cong U_C (U_C - U_A) / \Delta x$$

se $U < 0$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} \cong U_C (U_B - U_C) / \Delta x$$



o Nível D'água
 - Velocidade U
 | Velocidade V
 x Batimetria



MALHA DE CÁLCULO (ZECH, SOREL & VANSNICK - 1983)

FIGURA 3.4.1

Desta forma, supondo valores positivos de U e V, as equações em diferenças finitas do primeiro passo ficam:

$$\begin{aligned} (U_C^{t+1} - U_C^t) / \Delta t = & - \left[U_C^t (U_C^t - U_A^t) / \Delta x + \bar{V}_C^t (U_C^t - U_D^t) / \Delta y + \right. \\ & \left. + g (h_Q^t - h_P^t) / \Delta x + \frac{g U_C^t \left[(\bar{U}_C^t)^2 + (\bar{V}_C^t)^2 \right]^{1/2}}{C^2 \bar{h}_C^t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (V_K^{t+1} - V_K^t) / \Delta t = & - \left[\bar{U}_K^t (V_K^t - V_O^t) / \Delta x + V_K^t (V_K^t - V_O^t) / \Delta y + \right. \\ & \left. + g (h_P^t - h_S^t) / \Delta y + \frac{g V_K^t \left[(\bar{U}_K^t)^2 + (\bar{V}_K^t)^2 \right]^{1/2}}{C^2 \bar{h}_K^t} \right] \end{aligned}$$

[3.4.1]

Os valores médios indicados são:

$$\bar{V}_C = (V_K + V_L + V_M + V_N)/4 \quad \text{e} \quad \bar{h}_C = (h_P + h_Q)/2 + (Z_E + Z_F)/2$$

Da mesma forma, para o segundo passo é utilizada a equação da continuidade, resultando:

$$\begin{aligned} (h_P^{t+1} - h_P^t) / \Delta t = & - \left\{ \bar{U}_P^t (h_P^t - Z_R^t) / \Delta x + \bar{V}_P^t (h_P^t - h_S^t) / \Delta y + \right. \\ & + \bar{U}_P^{t+1} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_P + \bar{V}_P^{t+1} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_P + \\ & \left. + (h_P^t + \bar{Z}_P) \left[(U_C^{t+1} - U_A^{t+1}) / \Delta x + (V_L^{t+1} - V_K^{t+1}) / \Delta y \right] \right\} \end{aligned}$$

[3.4.2]

$$\bar{U}_P = (U_A + U_C)/2$$

$$\bar{V}_P = (V_L + V_K)/2$$

$$\bar{Z}_P = (Z_E + Z_F + Z_G + Z_H)/4$$

A modelação das áreas ora cobertas ora descobertas pela água apresenta dois problemas principais: a variação da área de integração e o crescimento abrupto do termo de atrito quando a profundidade se torna muito pequena. Para evitar estas dificuldades, os autores propõe considerar uma profundidade arbitrária de valor H_1 , somada à profundidade real H . O termo de atrito pode ser reescrito:

$$RC(x) = \frac{U (U^2 + V^2)^{1/2}}{C^2 (H + H_1)}$$

Este simples procedimento é suficiente para evitar altos fatores de atrito com profundidades muito pequenas, sem entretanto, introduzir distúrbios na precisão quando H é grande.

Com a subida e descida do nível, novas células são introduzidas e retiradas do cálculo. Para introdução de uma nova célula no cálculo durante a enchente, os autores indicam que é perigoso calcular a profundidade pela extrapolação, por exemplo, das profundidades das duas células adjacentes. A fim de evitar instabilidades durante o cálculo, uma nova célula somente é introduzida quando o nível médio de quatro células adjacentes indicar na nova célula uma profundidade superior a 2 cm.

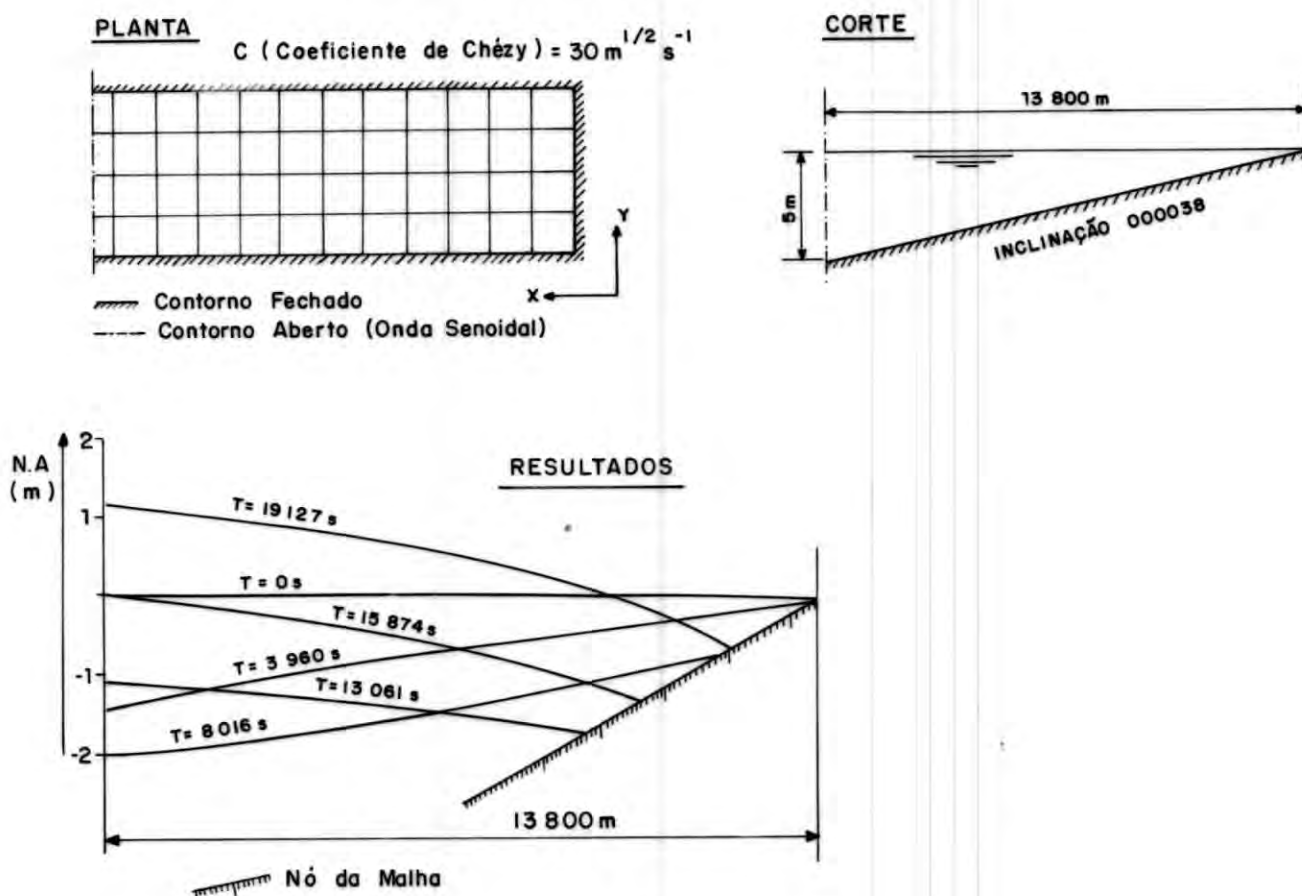
Para a retirada de uma célula do cálculo, o mesmo critério é utilizado, ou seja, quando a profundidade atingir 2 cm, o volume correspondente é guardado e re-introduzido quando a célula voltar a ser coberta pelas águas. Este procedimento evita a descontinuidade devido a interrupção do cálculo num ponto, impedindo que o modelo apresente uma amplificação do volume trocado entre uma célula e outra.

A análise de estabilidade do esquema explícito, feita a partir do procedimento de *Von Neumann* leva a seguinte condição:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{-V + \sqrt{V^2 + g \left(\frac{H}{2}\right)^2}}{gH} \quad [3.4.3]$$

Este critério não apresenta problemas na simulação de áreas relativamente grandes, com profundidades pequenas, porém, sua aplicação na topografia de rios de grande profundidade exige a diminuição do intervalo de tempo de cálculo e, conseqüentemente, longos tempos de processamento.

A figura 3.4.2 apresenta um resultado deste modelo para um canal retangular aberto em apenas uma extremidade, com uma inclinação de fundo constante, e sujeito a uma variação de nível senoidal na extremidade aberta. A malha utilizada tem espaçamento de 1000 m e o período da onda é de aproximadamente 8 horas, sendo estes parâmetros bastante favoráveis em termos das condições de estabilidade de [3.4.3].



EXPERIMENTO NUMÉRICO - FRONTEIRA MÓVEL (ZECH, SOREL & VANSNICK)

FIGURA 3.4.2

3.5 MODELO TIPO CÉLULA FECHADA

Estes modelos são caracterizados pelo cômputo do escoamento através das fronteiras de células contíguas, porém tratadas

isoladamente em termos de balanço de volume. É o tipo de modelo mais antigo na classe dos bidimensionais, e tem aplicação restrita a grandes regiões sujeitas a inundações, sendo também utilizados por alguns modelos hidrológicos de transformação chuva-vazão como rotina interna.

O modelo mais famoso deste tipo foi o desenvolvido para a Sogreah (Cunge, 1975), aplicado ao Delta do Rio Mekong, no Vietnã.

O princípio do modelo consiste na subdivisão da área modelada em células de grande tamanho, admitindo-se que o escoamento entre uma célula e outra adjacente, num instante de tempo t seja função apenas dos níveis d'água na duas células, e que o volume de armazenamento de uma célula é diretamente relacionado ao nível d'água z desta célula.

Com estas hipóteses, podem ser aplicadas as equações do movimento unidimensional para as duas direções isoladamente. A hipótese de que a vazão é função única do nível d'água permite que os termos convectivos de inércia da equação básica possam ser desprezados. A figura 3.5.1 mostra um exemplo da discretização em células de uma área sujeita a inundações.

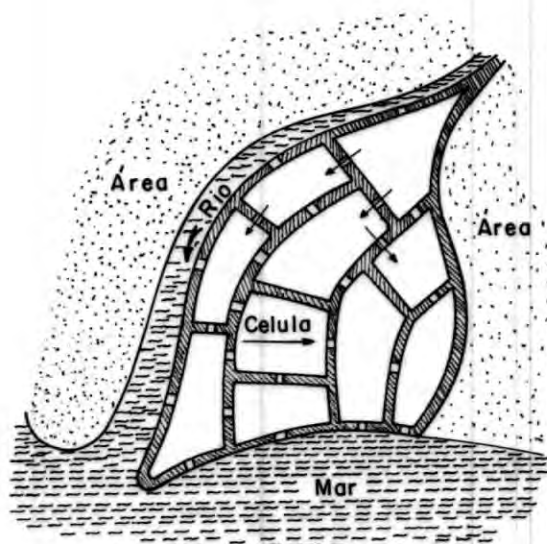
A primeira equação básica deste tipo de modelo é a da continuidade numa célula. A partir do esquema da figura 3.5.2, pode-se escrever, para a conservação da massa de uma célula a equação:

$$A_{ei} \frac{\partial z_i}{\partial t} = P_i(t) + \sum_j Q_{i,j}(z_i, z_j) \quad [3.5.11]$$

onde A é a área da célula, P uma função da precipitação sobre a célula, Q a vazão entre a célula i e a célula adjacente j , sendo que j pode assumir o índice de todas as células adjacentes.

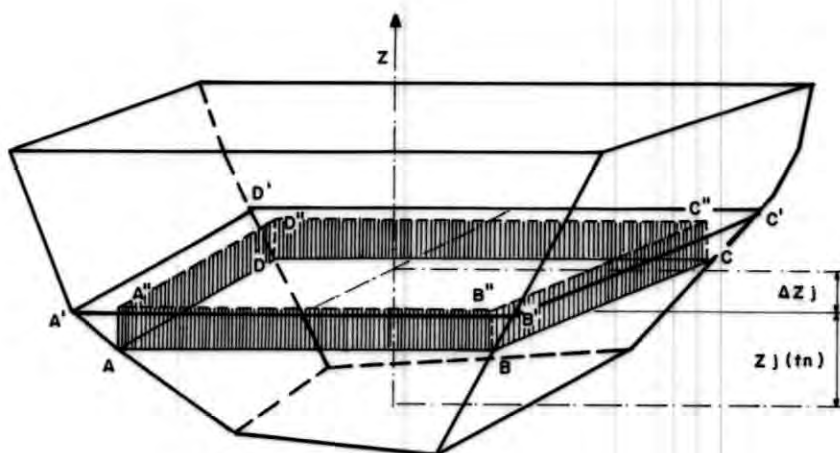
Com relação à vazão entre as células, são admitidas duas formas de intercâmbio, a denominada livre, onde não existem obstáculos para a passagem do fluxo entre uma célula (caso de duas células na

calha principal de um rio) e a controlada, onde a lei de vazão é do tipo soleira (planícies de inundação).



MODELO COM CÉLULAS FECHADAS

FIGURA 3.5.1



CONSERVAÇÃO DE MASSA NUMA CÉLULA

FIGURA 3.5.2

A equação do momento aplicada ao escoamento unidimensional também deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{A} \right) + \frac{Q}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{A} \right) + g \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{K^2} = 0 \quad [3.5.2]$$

Considerando que o termo convectivo é desprezado por se tratar de um escoamento quase-horizontal onde a variação de nível é muito pequena em relação ao tempo e ao espaço, a equação [3.5.2] se resume a:

$$g \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{K^2} = 0$$

que será portanto a lei de vazão entre duas células adjacentes. A consideração desta lei pode ser feita de diversas maneiras, uma das quais é a utilização de um esquema implícito da forma:

$$Q_{i,j}^{t+1}[z_i(\tau), z_j(\tau)] = \theta Q_{i,j}^{t+1} + (1-\theta) Q_{i,j}^t \quad [3.5.3]$$

onde $0 \leq \theta < 1$ e $t\Delta t \leq \tau \leq (t+1)\Delta t$.

Considerando que o intervalo de tempo de cálculo Δt pode ser assumido pequeno, adota-se para $Q_{i,j}$ expressões desenvolvidas em série de Taylor:

$$Q_{i,j}^{t+1} = Q_{i,j}^t + \left[\frac{\partial Q}{\partial z} \right]_i^t \Delta z_i + \left[\frac{\partial Q}{\partial z} \right]_j^t \Delta z_j \quad [3.5.4]$$

Substituindo [3.5.3] e [3.5.4] em [3.5.1] obtém-se a expressão final do modelo:

$$A_{si} \frac{\Delta z_i}{\Delta t} = P_i + \sum_j Q_{i,j}^t + \theta \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial Q}{\partial z} \right]_i^t \Delta z_i + \sum_j \left[\frac{\partial Q}{\partial z} \right]_j^t \Delta z_j \right\} \quad [3.5.5]$$

A equação [3.5.5] quando aplicada ao conjunto de células resulta num sistema de equações cujas incógnitas são os Δz_i , e que podem ser solucionadas através de um processo matricial.

Deve ser observado que o modelo desta forma proposto apresenta problemas na definição do passo de cálculo Δt , que deve ser pequeno em vista das simplificações efetuadas, bem como pelo próprio esquema numérico. Outro aspecto a ser observado se assemelha ao já mencionado no modelo de fronteira móvel, quando a profundidade se torna muito pequena, e o termo de atrito cresce exageradamente, introduzindo problemas no cálculo da vazão entre uma célula e outra com ligação do tipo livre.

Para estes casos os autores propõe o cálculo da derivada $(\partial Q/\partial z)$ através de uma função do tipo:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)_i = \Gamma(\bar{z}_{i,j}) \sqrt{|z_j - z_i|} \quad [3.5.6]$$

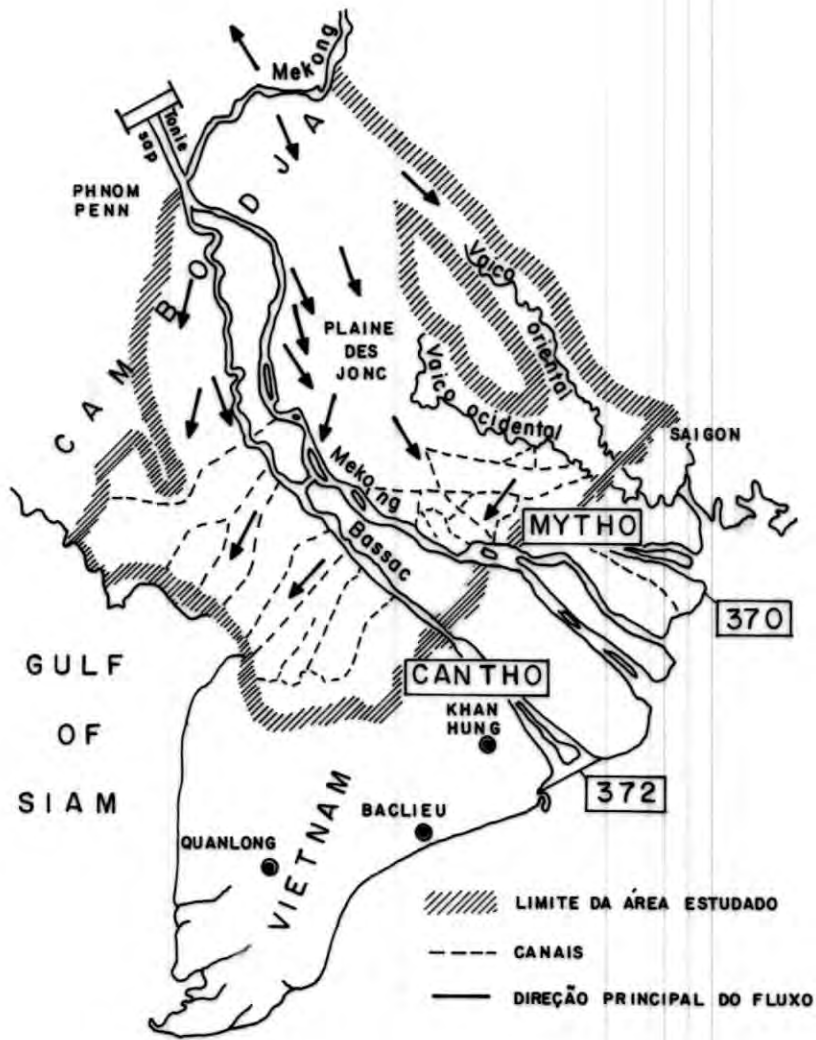
onde

$$\bar{z}_{i,j} = \alpha z_j + (1-\alpha) z_i$$

$$\Gamma(\bar{z}_{i,j}) = \frac{C A R_h^{2/3}}{\sqrt{\Delta x}}$$

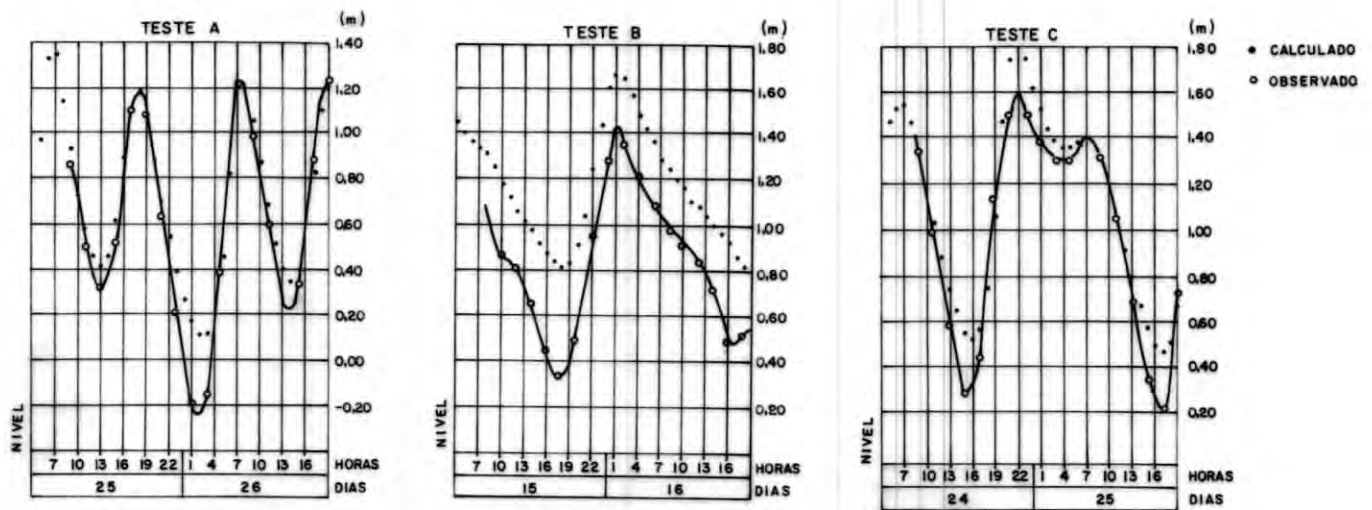
Assim, com a adoção do coeficiente $\alpha=0$ ou $\alpha=1$ elimina-se a influência do nível d'água muito pequeno da célula que está para ser descoberta durante a descida da enchente, por exemplo.

A figura 3.5.3 apresenta a área de aplicação do modelo na região do Delta do Rio Mekong, e as células utilizadas no cálculo, tal como foi descrito por CUNGE (1975). Foram utilizadas células de diversos tamanhos, desde 400 Km² até 1 Km². A área média das células é de 170 Km², equivalente a um quadrado de 13 Km de lado. O modelo foi calibrado no parâmetro rugosidade (função Γ) e na posição das soleiras, em função dos hidrogramas observados. A figura 3.5.4 ilustra os resultados obtidos.



DELTA DO RIO MEKONG - ÁREA DE ESTUDO

FIGURA 3.5.3



DELTA DO RIO MEKONG - LIMNIGRAMAS (CUNGE - 1975)

FIGURA 3.5.4

3.6 TRABALHOS RECENTES

Praticamente todos os métodos de simulação para escoamentos bidimensionais continuam sendo pesquisados e aprimorados, não se delineando, através da análise de trabalhos recentes, a formação de uma preferência entre os pesquisadores.

WUBS (1987) apresentou um modelo em diferenças finitas explícito, com discretização de segunda ordem (Δ^2) e quarta ordem (Δ^4), obtendo bons resultados na aplicação a malhas com Δx de 45 m, e Número de Courant em torno de 6. O intervalo de tempo de cálculo neste exemplo, bastante reduzido, ficou em torno de 7.5 s, porém o longo tempo de cálculo compensava-se com a utilização de um super computador.

A estabilidade conseguida por WUBS para Números de Courant relativamente altos, em esquemas explícitos, se deve a uma técnica de alisamento espacial dos termos convectivos, de atrito e de inércia. Sem este alisamento, o Número de Courant máximo seria em torno de 1,5.

Foi estabelecido ainda um critério interessante relativo à determinação da condição inicial da simulação, o chamado "*Regime Permanente*". Para obtenção desta situação, foram realizados processamentos em regime permanente durante o tempo suficiente para que os níveis d'água variassem, entre um instante e outro, menos do que 1 mm. Na aplicação, com Courant igual a 6, foi necessária a simulação de 6 horas de escoamento permanente para o estabelecimento da situação inicial, pelo critério admitido.

MOLINES (1986) descreve um modelo hidrodinâmico bidimensional também em diferenças finitas para cálculo dos efeitos de vento sobre o Lago Maracaibo na Venezuela e Golfo da Venezuela. O modelo segue a mesma malha para discretização proposta por LEENDERTSE (figura 3.1.2), porém com metodologia de cálculo diferente em relação ao Algoritmo dos Caminhos Alternados, denominada pelo autor de método "preditor-corretor".

Neste método são calculados, no passo inicial de tempo $t + \Delta t/2$ os valores do campo de velocidades U e V a partir do tempo t , utilizando-se um esquema de derivadas não centradas para montante. Os níveis d'água h são calculados explicitamente no instante $t + \Delta t/2$ a partir do campo de velocidades obtido neste instante.

No segundo passo, calcula-se o campo de velocidades para o tempo $t + \Delta t$ a partir dos valores no tempo t , porém utilizando um esquema centrado para avaliar as derivadas, a partir dos valores do passo preditor no tempo $t + \Delta t/2$. Como o esquema de derivadas centradas é por si só instável, utiliza-se um termo estabilizador do tipo $\nu \Delta V$, onde ν é uma viscosidade numérica, determinada aproximadamente por $\nu \cong U^2 \Delta t/2$. O conjunto dos dois passos dá uma precisão de segunda ordem à solução final.

Para a estimativa da vazão nas fronteiras abertas onde não se conhecia o nível d'água, os autores propõe a adoção de uma lei do tipo onda progressiva, ou seja, admitindo-se que pela fronteira aberta ocorra a passagem de uma onda de amplitude H de modo que:

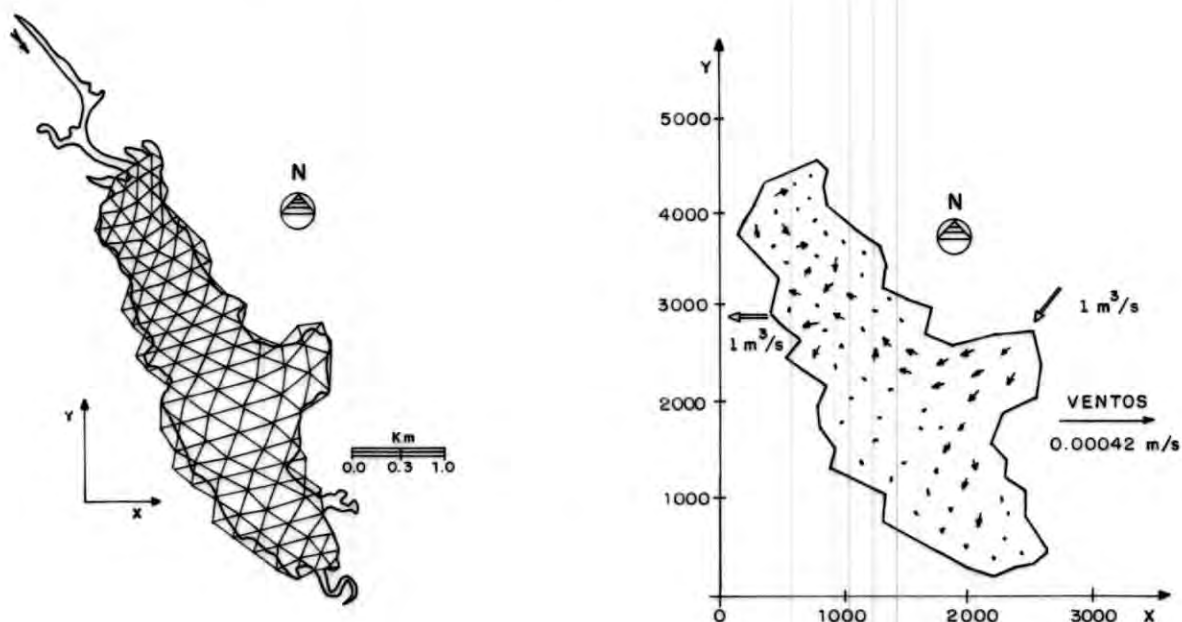
$$q = \sqrt{gH} (h - Z) \quad [3.6.1]$$

Foram realizados experimentos numéricos com o método proposto em três situações diferentes, abrangendo malhas de cálculo de 1 Km de lado, 9,58 Km e 11,90 Km. As profundidades médias correspondentes são de 30 m, 2 m e 30 m, tendo sido utilizados passos de cálculo de 225 s, 50 s e 450 s. Destes dados observa-se que foi respeitada a condição de Courant de estabilidade, inerente aos esquemas explícitos.

A utilização da técnica dos elementos finitos na simulação do escoamento bidimensional vem sendo feita desde a década passada, porém sem apresentar vantagens claras em relação ao método das diferenças finitas. De fato, muitos modelos foram utilizados com sucesso, como o modelo de BREBIA (1984) para o Mar do Norte e o de GRAY (1987).

Entretanto, alguns problemas semelhantes aos encontrados nos esquemas de diferenças finitas foram notados pelos autores, como por exemplo, a ocorrência de oscilações espúrias e amplificação nos níveis calculados. Para controle destes efeitos são utilizados artifícios como por exemplo, o aumento irreal da rugosidade de fundo, a utilização de uma viscosidade numérica, a deformação das condições de contorno, ou ainda, a adoção de um passo de cálculo Δt pequeno, que provoca um grande amortecimento nas amplitudes.

A origem destas perturbações situa-se na aplicação do método às equações do escoamento considerando a continuidade e o momento integrados ao longo da profundidade (GRAY e KINMARK, 1987). Estes autores provam que uma discretização do tipo $Q_{i+1} - Q_{i-1}$ provoca oscilações numéricas no cálculo da linha d'água.



MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

MAPA DE CORRENTES - CHEIA TÍPICA

BARRAGEM LA BOCA - MODELO BIDIMENSIONAL COM ELEMENTOS FINITOS

FIGURA 3.6.1

Independente destes problemas, alguns modelos têm obtido resultados de sucesso, como o apresentado por VICTORICA, ROMERO e SAN ROMAN (1986). Neste trabalho a técnica é aplicada a um caso favorável de circulação lacustre sob a ação do vento, com

profundidade em torno de 12 metros e espaçamento da malha de 200 m. A malha de elementos finitos utilizada é apresentada na figura 3.6.1, onde se observa, para a vazão de enchente típica, que as velocidades são muito baixas, situação esta favorável a uma maior estabilidade.

4 MODELAÇÃO MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL

4.1 INTRODUÇÃO

Modelar matematicamente um fenômeno significa representar um processo físico através de equações que, por meio de seus parâmetros, permitam a determinação numérica de alguma grandeza representativa do fenômeno. As consagradas equações da hidráulica clássica, como as fórmulas de Darcy ou de Chézy, utilizadas nos projetos e cálculos, são exemplos característicos de ferramentas matemáticas utilizadas para simular um dado fenômeno.

Segundo o exposto acima, o modelo matemático estende-se além do conceito de *algoritmo de cálculo de um parâmetro*, sendo representado pelo conjunto de equações básicas, simplificações adotadas, rotinas de solução, dados básicos e qualidades do resultado produzido.

ABBOTT (1979) estabeleceu que o valor de um modelo matemático pode ser determinado a partir do julgamento de dois quesitos básicos que devem ser atendidos: *relevância e confiabilidade*.

O primeiro quesito relaciona-se à importância relativa do modelo na técnica usual, ou seja, a utilidade prática do refinamento introduzido pelo modelo, no contexto dos recursos que se dispõe para seu emprego. A segunda exigência diz respeito à acuracidade com que o mesmo consegue representar numericamente a realidade modelada.

Assim, ao se formular um modelo matemático, objetiva-se

representar o mais fielmente possível uma realidade física, a partir de dados básicos, equações da física e recursos de cálculo, dentro de um contexto prático de custo/benefício.

Não se pode desconsiderar porém, que um modelo qualquer, seja físico ou matemático, não produz mais informações do que as de antemão introduzidas. O modelo apenas as organiza de forma acessível e compreensível, seja na forma visual ou de medição, para os modelos físicos, ou na forma de gráficos, tabelas, mapas, no caso dos matemáticos.

A formulação de um modelo matemático inicia-se após a constatação da necessidade de um tipo de informação e da disponibilidade de equações matemáticas capazes de fornecer esta informação. A partir daí, seleciona-se um método de resolução destas equações, um algoritmo de cálculo, definem-se os dados necessários e a forma de apresentação dos resultados.

Como estas atividades são englobados no *software* de cálculo, este muitas vezes é confundido com o próprio modelo, quando de fato, constitui-se apenas em seu executor.

Neste capítulo, após definidas a necessidade e as equações básicas, são apresentados os tipos de soluções possíveis para o problema, enfocados sob o aspecto de estabilidade e acuracidade. Por fim é formulado um modelo de diferenças finitas implícito. O *software* executor do modelo é apresentado no capítulo seguinte.

4.2 RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS

4.2.1 Métodos de Solução

a) Solução Analítica

O primeiro passo para resolução das equações básicas apresentadas em [2.3.1] consiste na busca da integração analítica. Evidentemente, os processos em que a solução desta forma é possível admitem grandes hipóteses simplificadoras. Um exemplo deste tipo de solução, que será útil posteriormente é apresentado a seguir. Sejam as equações básicas:

$$h \frac{\partial U}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad [2.3.1]$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{U(U^2+V^2)^{1/2}}{C^2 h} - \frac{\tau_{wx}}{\rho h} - \Omega V = 0 \quad [2.3.2]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{V(U^2+V^2)^{1/2}}{C^2 h} - \frac{\tau_{wy}}{\rho h} + \Omega U = 0 \quad [2.3.3]$$

e as seguintes hipóteses:

- o escoamento é razoavelmente alinhado que pode ser assumido unidimensional, sem transferências laterais de massa;
- os termos convectivos $h(\partial V/\partial y)$ e $V(\partial U/\partial y)$ podem ser desprezados supondo-se que V é muito menor que a velocidade de propagação das ondas $(gh)^{1/2}$;

■ os efeitos de cisalhamento junto ao fundo e na superfície podem ser negligenciados, bem como o efeito de rotação da terra;

■ a superfície do escoamento é praticamente horizontal e a profundidade é constante h_0 .

As equações básicas resultam em:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad [4.2.1]$$

Resolvendo-se o sistema por eliminação, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad c = \sqrt{gh}$$

Esta equação diferencial admite uma solução do tipo oscilatória, em *Série de Fourier*, na forma:

$$h(x,t) = \sum_n h_n e^{[\alpha_n x + \beta_n t]i}$$

$$U(x,t) = \sum_n U_n e^{[\alpha_n x + \beta_n t]i} \quad [4.2.2]$$

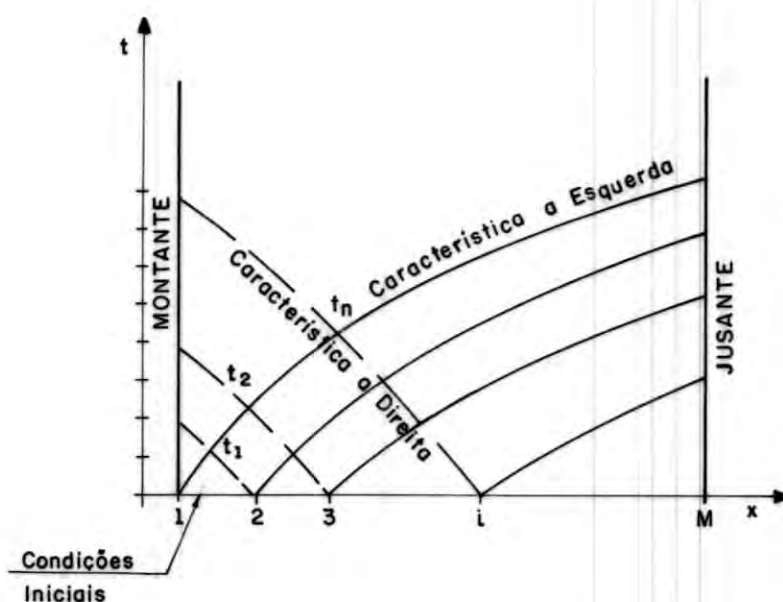
onde h_n e U_n são constantes do n ésimo termo da série, obtidas a partir das condições de contorno do problema e α e β são números reais definidos por $\alpha = 2\pi/L$ e $\beta = 2\pi/T$, L e T respectivamente o comprimento e o período da onda.

Dadas as simplificações assumidas, o resultado espelhado em [4.2.2] pouco se aplica na prática, sendo aquelas expressões úteis, entretanto, na análise de estabilidade e acuracidade dos esquemas de diferenças finitas tratados adiante.

b) Soluções Numéricas

As soluções numéricas baseiam-se na substituição dos termos das equações básicas por outros de forma que as primeiras, de funções contínuas, passam a ser definidas em pontos ou elementos discretos de uma malha. A técnica utilizada para esta substituição define os diferentes métodos de solução. Quando os termos são substituídos por funções características de um determinado ponto, o método denomina-se das *Características*. Quando as diferenciais das equações são substituídas por diferenças, denomina-se *Diferenças Finitas*, quando por elementos contínuos, de *Elementos Finitos*.

O Método das Características é conhecido desde 1905, e foi inicialmente proposto por Massau (in MAHMOOD e YEVJEVICH, 1975) para permitir a integração gráfica de equações para águas pouco profundas. O princípio básico é criar num plano (x, t) um conjunto de curvas características, de modo que os pontos procurados se encontrem na intersecção destas curvas, conforme mostra a figura 4.2.1.

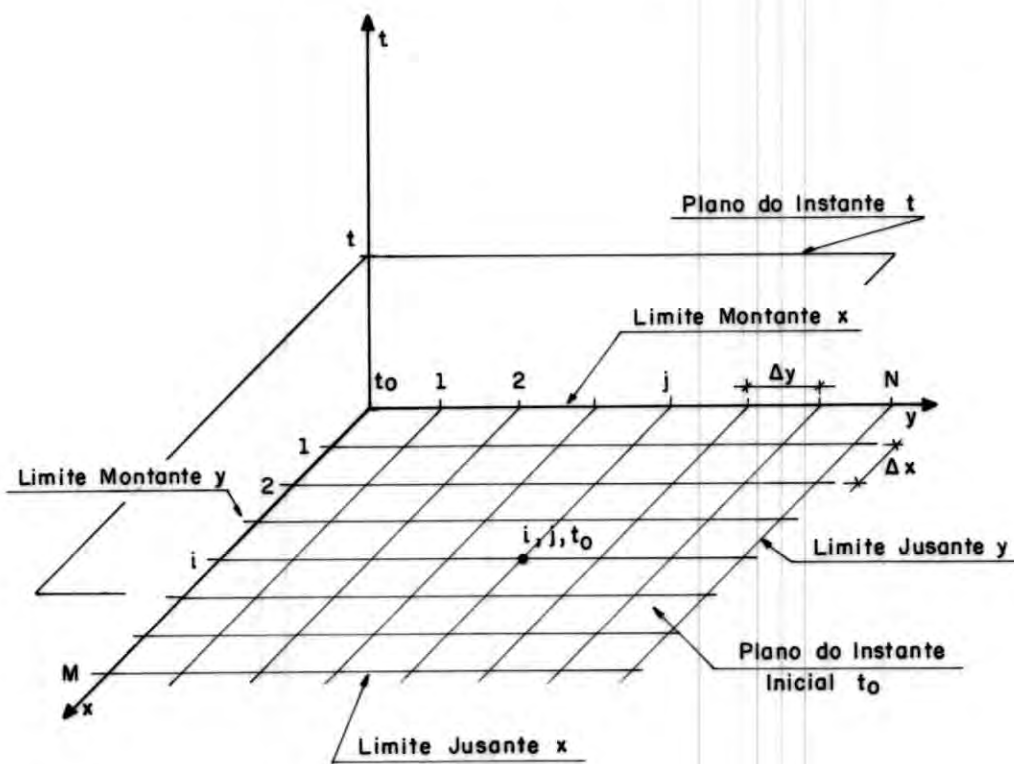


MALHA DE CARACTERÍSTICAS DE UM ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL

FIGURA 4.2.1

Segundo CUNGE (1975), a dificuldade maior do método está na sua compreensão e não no seu uso, existindo porém algumas dificuldades que levam os pesquisadores a preferir o método das diferenças finitas. Para exemplificar, o autor acima cita que uma modificação simples para introdução do armazenamento lateral em planícies de inundação fora do escoamento exige uma grande modificação nas equações características e no algoritmo de cálculo.

O método das Diferenças Finitas consiste na substituição das diferenciais da equação básica por diferenças, solucionando-as nos pontos finitos de uma malha de coordenadas, como na Figura 4.2.2.



MALHA ORTOGONAL DE DIFERENÇAS FINITAS - ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL

FIGURA 4.2.2

Existem dois tipos básicos de esquemas de diferenças finitas, os explícitos, onde um ponto na linha $t+1$ pode ser calculado independentemente dos demais pontos na mesma linha, apenas como função dos pontos em t , e os implícitos, onde os pontos da linha t são calculados em grupo, ou seja são interdependentes.

Como já evidenciado no Capítulo 3, os esquemas de diferenças finitas são os mais empregados pelos autores em geral, tanto pela facilidade de abordagem de geometrias complexas quanto pelo fato de apresentarem equações com aspecto computacional. Acrescenta-se a estas vantagens, segundo VERWEY, CUNGE e HOLLY (1980), a maior estabilidade e acuracidade, como será demonstrado adiante.

4.2.2 O Método das Diferenças Finitas

A solução de uma equação diferencial pela substituição em diferenças finitas pode ser proposta considerando-se um operador diferencial a ser aplicado num vetor de incógnitas, resultando numa função F. Esta notação foi inicialmente proposta por LEENDERTSE (1967) e formalmente estabelecida por ABBOTT (1979).

$$[L] [X] = [F] \quad [4.2.3]$$

onde a notação [L] indica um vetor matricial. Um esquema de diferenças finitas deve representar a equação [4.2.3] em pontos definidos de uma malha equi-espçada Δ na forma:

$$[L_{\Delta}] [X_{\Delta}] = [F_{\Delta}] \quad [4.2.4]$$

Aplicando-se este conceito às equações [2.3.1], [2.3.2] e [2.3.3], e desprezando-se os termos de atrito, rotação e convectivos, para a direção x obtém-se um exemplo simplificado da utilização deste método:

$$[L] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \quad [X] = \left[\begin{array}{cc} h & hU \\ U_h & \frac{1}{2}U^2 + gh \end{array} \right] \quad [F] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

[4.2.5]

A justificativa do método reside no fato de que quando Δx e Δt tendem a zero, ou seja, a malha é suficientemente pequena, os valores da equação de diferenças se igualam aos valores da equação diferencial. Assim, a precisão da representação proposta em [4.2.4], bem como sua acuracidade dependerão dos valores Δx e Δt assumidos para a discretização.

Por precisão entende-se o grau de proximidade com que a equação de diferenças representa a equação diferencial, num determinado ponto. Acuracidade é a capacidade do método de reproduzir os termos da equação diferencial sem introduzir fatores estranhos, de magnitude suficiente para afetar a solução final, ou seja, sem alterar a física do fenômeno.

Outro fator importante numa aproximação de diferenças finitas é a estabilidade, que significa a capacidade do método de refletir o comportamento das equações diferenciais, nas suas tendências de amplificar ou amortecer o fenômeno que representam, pelo fato de representarem apenas pontos discretos do fenômeno.

As formas de discretização das parcelas das equações diferenciais variam numa faixa extremamente larga. Estas variações foram criadas na busca de soluções específicas e algumas se tornaram célebres em função de apresentarem melhor estabilidade. Alguns exemplos típicos de esquemas explícitos apresentados por ABBOTT (1975) são listados a seguir.

O esquema explícito mais simples que pode ser empregado é o denominado centrado no espaço e progressivo no tempo, conforme apontam as equações abaixo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{j+1}^t - U_j^t}{\Delta x} \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_j^{t+1} - U_j^t}{\Delta t}$$

[4.2.6]

ABBOTT mostra que este esquema é incondicionalmente instável a menos que sejam também utilizados os termos de atrito da equação do momento. Outro esquema explícito bastante utilizado é o difusivo, onde a derivada espacial é centrada e a derivada temporal é difusa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{j+1}^t - U_{j-1}^t}{2\Delta x} \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_j^{t+1} - \left[\alpha U_j^t + \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) (U_{j+1}^t + U_{j-1}^t) \right]}{\Delta t}$$

[4.2.7]

O fator α , de ponderação, permite que o esquema seja totalmente difusivo ($\alpha=0$) ou totalmente progressivo ($\alpha=1$), e sua estabilidade é limitada à faixa indicada pela equação abaixo:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{|U_0 \pm \sqrt{gh_0}|} \qquad [4.2.8]$$

Outro esquema de utilização frequente é o *Leap-Frog*, onde as duas derivadas são centradas, sendo as aproximações dadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_j^{t+1} - U_j^{t-1}}{2\Delta t} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{j+1}^t - U_{j-1}^t}{2\Delta x} \qquad [4.2.9]$$

Este esquema também é estável se observada a mesma condição de [4.2.8].

Os esquemas implícitos foram desenvolvidos devido às dificuldades de estabilidade geradas pelos métodos explícitos, que impõe um

tempo de cálculo Δt muito pequeno, quando se obedecem condições do tipo de [4.2.8]. Os esquemas mais célebres (CUNGE, HOLLY E VERWEY, 1980) são os apresentados por *Preissmann*, *Abbott-Ionescu* e *Vasiliev*.

No esquema de *Preissmann*, as variáveis são discretizadas centradas no espaço e ponderadas no tempo, na forma:

$$f(x, t) = \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{t+1} + f_j^{t+1}) + \left(\frac{1-\theta}{2}\right) (f_{j+1}^t + f_j^t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (f_{j+1}^{t+1} - f_j^{t+1}) + \left(\frac{1-\theta}{\Delta x}\right) (f_{j+1}^t - f_j^t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{j+1}^{t+1} - f_{j+1}^t + f_j^{t+1} - f_j^t}{2\Delta t}$$

[4.2.10]

onde θ é um coeficiente de ponderação da implicidade. Este esquema também é conhecido como esquema de quatro pontos e é muito utilizado nos modelos unidimensionais pois pode ser totalmente linearizado. Em termos de estabilidade e acuracidade CUNGE, HOLLY E VERWEY (1980) e ABBOTT(1979) indicam que o esquema é incondicionalmente estável se θ for admitido igual a $1/2$.

O esquema alternado proposto por ABBOTT (1979) e IONESCU é caracterizado por discretizar em intervalos de tempo alternados as variáveis U e h , utilizando as seguintes funções:

■ para a equação da continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (U_{j+1}^{t+1} - U_j^{t+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (U_{j+1}^t - U_j^t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (h_j^{t+1} - h_j^t) \quad [4.1.11]$$

■ para a equação do momento:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (U_{j-1}^{t+1} - U_{j-1}^t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (h_j^{t+1} - h_{j-2}^{t+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (h_j^t - h_{j-2}^t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{x_j - x_{j-1}}{x_j - x_{j-2}} \right] (h_{j-2}^{t+1} - h_{j-2}^t) + \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{x_{j-1} - x_{j-2}}{x_j - x_{j-2}} \right] (h_{j-2}^{t+1} - h_{j-2}^t)$$

[4.2.12]

Segundo CUNGE, HOLLY E VERWEY, (1980), o método não apresenta erros de amplificação ou amortecimento (estabilidade), porém deforma a celeridade das ondas simuladas. Tem a vantagem em relação ao esquema de Preissmann de diminuir em duas vezes o número de operações, sendo mais econômico.

O esquema implícito proposto por Vasiliev define U e h em todos os pontos do sistema escolhido, da mesma forma que o de Preissmann, adotando porém a derivada espacial apenas na forma futura:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (f_j^{t+1} - f_j^t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (f_{j+1}^{t+1} - f_{j-1}^{t+1})$$

[4.2.13]

O esquema é também incondicionalmente estável, porém a desvantagem, segundo o que apresenta CUNGE, HOLLY E VERWEY (1980) é o grande número de diagonais na matriz de solução do sistema resultante, além da exigência de duas condições de contorno para cada extremidade.

Todos estes esquemas, tanto implícitos como explícitos têm a finalidade de buscar a estabilidade através de ponderações diferentes das derivadas, já que o caso ideal de todas as derivadas centradas não é possível sempre, devido aos problemas de contorno. A adequação de cada esquema deve ser verificada antes de seu emprego.

a) Análise de Estabilidade

Quando um método numérico é instável, uma pequena perturbação, por exemplo um erro de truncamento, cresce com o tempo, amplificando-se de forma muitas vezes exponencial, afetando assim as amplitudes das grandezas calculadas. Muitas vezes porém o crescimento do erro não é tão rápido e somente pode ser detetado após muitos intervalos de cálculo. É o caso dos escoamentos quase-horizontais onde a esquematização do termo de atrito não é bem aproximada.

A análise da estabilidade de uma solução genérica de diferenças finitas pode ser feita pelo critério de *Von Neumann*, utilizado por diferentes autores como LEENDERTSE (1967), VERWEY (1980), ABBOTT (1979), SOUZA e PRICE (1980). O método porém, somente permite a análise de equações lineares, ou seja, daquelas onde os termos convectivos e de atrito são possíveis de serem linearizados, mas é de grande valia na decisão do esquema a ser usado num modelo.

Para demonstração do método, considera-se inicialmente a solução teórica de uma equação com apenas os termos lineares do momento na direção x, admitindo válida a hipótese da solução apresentada nas equações [4.2.2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad [4.2.14]$$

A solução teórica é admitida diferenciável pelo menos uma vez, para qualquer x e t . Substituindo-se as equações [4.2.2] em [4.2.14] obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum U_n e^{[\sigma_n x + \beta_n t] i} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum U_n e^{[\sigma_n x + \beta_n t] i} \right) = 0$$

$$\sum \left(U_n e^{[\sigma_n x + \beta_n t] i} \beta_n i - c U_n e^{[\sigma_n x + \beta_n t] i} \sigma_n i \right) = 0$$

do que resulta:

$$\sum (\beta_n i - c \sigma_n i) = 0$$

e

$$c = \frac{\beta_n}{\sigma_n} \quad [4.2.15]$$

que é a velocidade de propagação da onda, em cada termo n da série. Da equação [4.2.2] observa-se que a parcela $e^{\beta_n t i}$ é um fator multiplicativo que pode assumir valores maiores ou menores que a unidade, sendo genericamente denominado de *fator de amortecimento*. Desejando-se discretizar a equação [4.2.14] por um esquema de diferenças finitas explícito, do tipo difusivo, aplicam-se as diferenças abaixo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_j^{t+\Delta t} - \frac{1}{2} (U_{j+1}^t + U_{j-1}^t)}{\Delta t} \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{j+1}^t - U_{j-1}^t}{2\Delta x}$$

à equação original, obtendo-se:

$$\frac{U_j^{t+\Delta t} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^t + U_{j-1}^t)}{\Delta t} - c \left[\frac{U_{j+1}^t - U_{j-1}^t}{2\Delta x} \right] = 0 \quad [4.2.16]$$

A solução teórica para pontos discretos $U(j\Delta x, t\Delta t)$ é:

$$U(j\Delta x, t\Delta t) = \sum U_n e^{[\alpha_n j\Delta x + \beta_n t\Delta t]i}$$

Substituindo na equação [4.2.16] e dividindo por ambos os membros por $U_n e^{[\alpha_n j\Delta x + \beta_n t\Delta t]i}$, obtém-se para o enésimo termo da série:

$$\frac{e^{\beta_n \Delta t i}}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \left[e^{\alpha_n \Delta x i} + e^{-\alpha_n \Delta x i} \right] + \frac{c}{2\Delta x} \left[e^{\alpha_n \Delta x i} - e^{-\alpha_n \Delta x i} \right]$$

Utilizando-se as relações trigonométricas (PISKUNOV, 1957):

$$\frac{1}{2} (e^{\theta i} - e^{-\theta i}) = \text{sen}(\theta)i \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} (e^{\theta i} + e^{-\theta i}) = \text{cos}(\theta)$$

pode-se finalizar:

$$e^{\beta_n \Delta t i} = \text{cos}(\alpha_n \Delta x) + c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(\alpha_n \Delta x)i \quad [4.2.17]$$

Por intermédio de [4.2.17] verifica-se que β_n é um número complexo, tendo sido inicialmente definido como um número real. Desta forma, o fator de amortecimento é a parte real do número complexo β_n . Assim, escrevendo-se o β_n como a soma de uma parte real e outra imaginária obtém-se:

$$\beta_n = \beta_n^R + \beta_n^I i$$

Daí vem:

$$e^{\beta_n \Delta t} i = e^{-\beta_n^I \Delta t} \left[\cos(\beta_n^R \Delta t) + \text{sen}(\beta_n^R \Delta t) i \right]$$

[4.2.18]

Igualando-se [4.2.17] e [4.2.18] pode-se escrever:

$$e^{-\beta_n^I \Delta t} \cos(\beta_n^R \Delta t) = \cos(\alpha_n \Delta x)$$

$$e^{-\beta_n^I \Delta t} \text{sen}(\beta_n^R \Delta t) i = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(\alpha_n \Delta x) i$$

[4.2.19]

Quadrando as expressões [4.2.19] e somando, obtém-se a forma final do fator de amortecimento:

$$e^{-\beta_n^I \Delta t} = \left[\cos^2(\alpha_n \Delta x) + c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \text{sen}^2(\alpha_n \Delta x) \right]^{1/2}$$

[4.2.20]

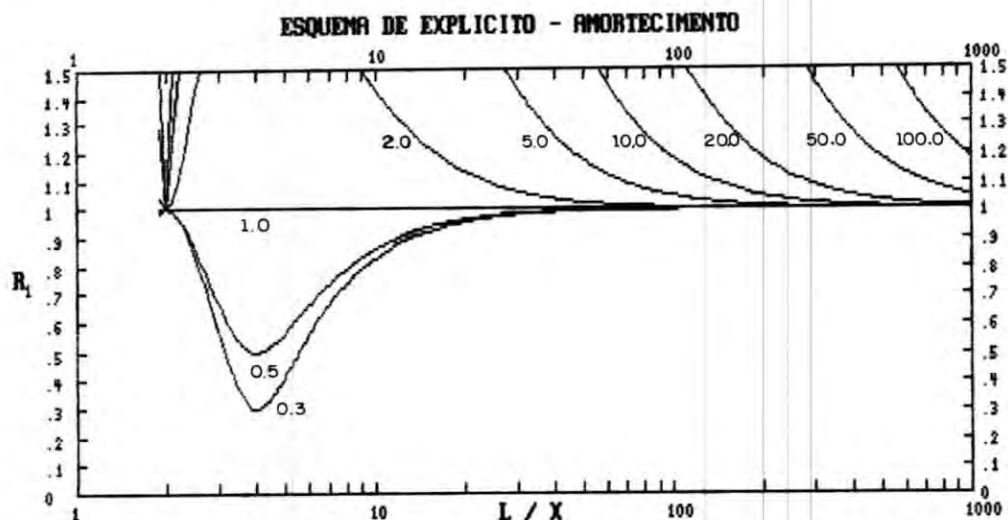
Analisando-se a expressão [4.2.20], pode-se concluir que o fator de amortecimento só será unitário quando o termo $c(\Delta t/\Delta x)$ for unitário. Caso contrário o sistema sofrerá amplificação do enésimo componente [$c(\Delta t/\Delta x) > 1$], sendo portanto instável, ou então terá amortecimento [$c(\Delta t/\Delta x) < 1$]. O termo $c(\Delta t/\Delta x)$ é conhecido como *Número de Courant* ou *Condição de Courant*.

FREAD (1974) generalizou o conceito de fator de amortecimento, definindo R_i como o quociente entre o amortecimento do esquema de diferenças finitas e o amortecimento da solução teórica:

$$R_i = \frac{e^{-\tilde{\beta}_n^I \Delta t}}{e^{-\beta_n^I \Delta t}}$$

[4.2.21]

onde o sinal \sim indica o termo proveniente do esquema de diferenças. A figura 4.2.3 e a tabela 4.2.1 indicam os valores da relação R_1 para alguns valores notáveis de $c(\Delta t/\Delta x)$, em função do parâmetro $L/\Delta x$, que representa a precisão da malha de cálculo, ou seja, o número de pontos da malha de cálculo no interior do comprimento de onda mais um.



ESQUEMA EXPLÍCITO - DIAGRAMA DO FATOR DE AMORTECIMENTO
FIGURA 4.2.3

TABELA 4.2.1
FATOR DE AMORTECIMENTO R_1

$c\Delta t/\Delta x$	$L/\Delta x$										
	2	3	4	5	7	10	15	20	30	50	100
0.3	1.00	0.56	0.30	0.42	0.67	0.83	0.92	0.95	0.98	0.99	0.99
0.5	1.00	0.66	0.50	0.57	0.74	0.86	0.94	0.96	0.98	0.99	1.00
1.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2.0	1.00	1.80	2.00	1.93	1.68	1.43	1.22	1.13	1.06	1.02	1.01
5.0	1.00	4.35	4.52	4.77	3.81	3.05	2.23	1.81	1.43	1.17	1.04

Verifica-se que para valores de $L/\Delta x$ inferiores a 10 ocorrem as maiores discrepâncias em relação ao amortecimento teórico da onda, e que para valores acima de 100 estas diferenças não ultrapassam 5%. Assim, conclui-se que o fenômeno estará bem representado para valores $L/\Delta x$ acima de 100, e razoavelmente

representado para valores entre 10 e 100. Nota-se ainda neste esquema explícito utilizado, que a não obediência da relação $c(\Delta t/\Delta x) = 1$ pode ser compensada por uma melhor representação da onda modelada.

No caso de se utilizar uma discretização do tipo implícita, como por exemplo a proposta por Preissmann, a análise de estabilidade pode ser feita da mesma maneira. Substituindo as equações [4.2.10] na equação simplificada da continuidade e do momento:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + kU = 0$$

[4.2.21]

onde K representa o termo das tensões de atrito $g \frac{|U|}{C^2 h}$, obtém-se:

$$\frac{1}{2\Delta t} (h_{i+1}^{t+1} - h_{i+1}^t + h_i^{t+1} - h_i^t) + h_0 \left(\frac{\theta}{\Delta x} (U_{i+1}^{t+1} - U_i^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_{i+1}^t - U_i^t) \right) = 0$$

$$\frac{1}{2\Delta t} (U_{i+1}^{t+1} - U_{i+1}^t + U_i^{t+1} + U_i^t) + g \left(\frac{\theta}{\Delta x} (h_{i+1}^{t+1} - h_i^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (h_{i+1}^t - h_i^t) \right) +$$

$$+ K \left(\frac{\theta}{2} (U_{i+1}^{t+1} + U_i^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (U_{i+1}^t + U_i^t) \right) = 0$$

Substituindo-se pela solução teórica em série de Fourier e dividindo-se pelo fator $e^{[i(\alpha_n \Delta x + \beta_n t \Delta t)]}$, as duas equações resultam, para o enésimo termo da série:

$$h_n (e^{\beta_n \Delta t i} - 1)(e^{\sigma_n \Delta x i} + 1) + U_n \geq e^{\frac{\Delta t}{\Delta x}} h_0 (e^{\beta_n \Delta t i} - 1)(e^{\sigma_n \Delta x i} - 1) +$$

$$+ U_n \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} h_0 (e^{\sigma_n \Delta x i} - 1) = 0$$

$$U_n (e^{\beta_n \Delta t i} - 1)(e^{\sigma_n \Delta x i} + 1) + h_n \geq e^{\frac{\Delta t}{\Delta x}} g (e^{\beta_n \Delta t i} - 1)(e^{\sigma_n \Delta x i} - 1) +$$

$$+ h_n \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} g (e^{\sigma_n \Delta x i} - 1) + k U_n e^{\Delta t} (e^{\beta_n \Delta t i} - 1)(e^{\sigma_n \Delta x i} + 1) +$$

$$+ k U_n \Delta t (e^{\sigma_n \Delta x i} + 1) = 0$$

[4.2.23]

Substituindo: $\tan(\sigma_n \Delta x / 2) i = \frac{(e^{\sigma_n \Delta x i} - 1)}{(e^{\sigma_n \Delta x i} + 1)}$

$$\lambda = (e^{\beta_n \Delta x i} - 1)$$

As equações [4.2.23] podem ser reescritas como:

$$\lambda h_n + \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} h_0 \tan(\sigma_n \Delta x / 2) i [e^{\lambda} + 1] U_n = 0$$

$$\geq \frac{\Delta t}{\Delta x} g \tan(\sigma_n \Delta x / 2) i [e^{\lambda} + 1] h_n + \left\{ \lambda + \Delta t k [e^{\lambda} + 1] \right\} U_n = 0$$

[4.2.24]

As equações [4.2.24] formam um sistema linear homogêneo em U_n e h_n , de modo que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Assim, resolvendo a equação do segundo grau que resulta:

$$\lambda = e^{\beta_n \Delta t} - 1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-8 \theta G^2 R_c^2 + \Delta t k}{(-1 + 4\theta^2 R_c^2 G^2 - \theta \Delta t k)} \pm \frac{\left[\Delta t^2 k^2 + 16 R_c^2 G^2 \right]^{1/2}}{(-1 + 4\theta^2 R_c^2 G^2 - \theta \Delta t k)} \right\}$$

[4.2.25]

onde $R_c = (\Delta t / \Delta x)(g h)^{1/2}$ e $G = \tan(\sigma_n \Delta x / 2) i$.

Como sabe-se que:

$$\beta = \beta^R + \beta^I i$$

logo:

$$e^{\beta_n \Delta t} = e^{\beta_n^R \Delta t} - \beta_n^I \Delta t = e^{-\beta_n^I \Delta t} (\cos \beta_n^R \Delta t + \text{sen } \beta_n^R \Delta t i)$$

Dai, separando-se a parte real e a parte imaginária:

$$e^{-\beta_n^I \Delta t} \cos \beta_n^R \Delta t = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{8 \theta R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) + \Delta t k}{1 + 4\theta^2 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) + \theta \Delta t k} \right\}$$

$$e^{-\beta_n^I \Delta t} \text{sen } \beta_n^R \Delta t i = \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[16 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) - \Delta t^2 k^2 \right]^{1/2}}{1 + 4\theta^2 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) + \theta \Delta t k} \right\} i$$

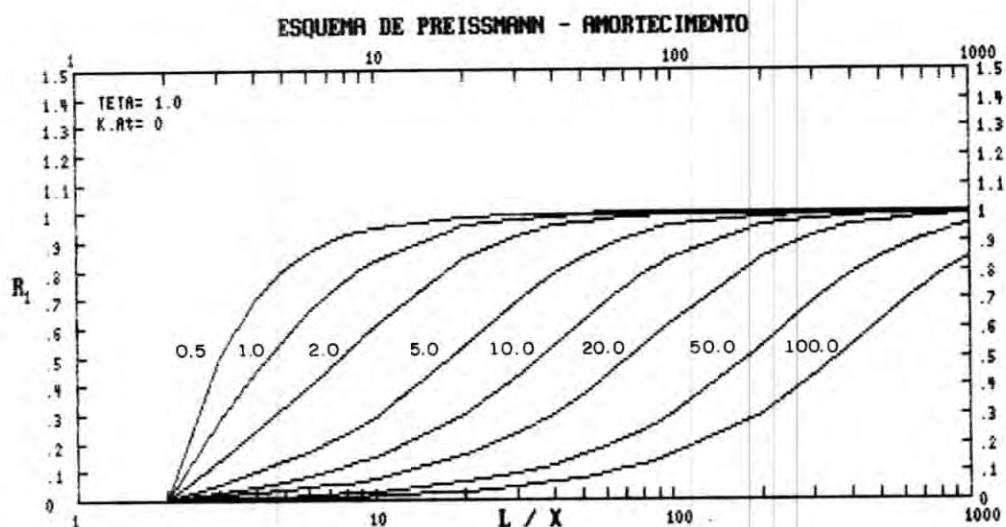
[4.2.26]

Quadrando os dois termos e somando:

$$e^{-\beta_n^I \Delta t} = \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} \frac{8 \theta R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) + \Delta t k}{1 + 4\theta^2 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) + \theta \Delta t k} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{\left(16 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) - \Delta t^2 k^2 \right)^{1/2}}{1 + 4\theta^2 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x / 2) + \theta \Delta t k} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad [4.2.27]$$

onde $e^{-\beta_n^I \Delta t}$ é o amortecimento produzido pela discretização numérica de Preissmann. A figura 4.2.4 apresenta valores de R_1 calculados através de [4.2.27], para alguns valores de R_c e θ , considerado o produto $k\Delta t=0$.

Pode-se verificar que para $\theta=1/2$ o esquema é sempre estável, independentemente da relação R_c . Para valores $\theta < 1/2$ o esquema tem amplificação e para valores de θ na faixa $1/2 < \theta < 1$, o esquema apresenta amortecimento numérico. No Apêndice I estão apresentadas tabelas com os valores de R_1 para toda a faixa de valores de θ .



b) Análise de Acuracidade

A acuracidade, conforme definido anteriormente, é a capacidade do método numérico representar a física compreendida nas equações básicas. A utilização de pontos finitos para representação de uma equação diferencial introduz, além do efeito de estabilidade, uma deformação na celeridade da onda numérica, em relação a da onda teórica.

Seguindo a metodologia anterior, a celeridade da onda teórica foi definida como $c = (\beta_n/\sigma_n)$. Das equações [4.2.19], para o esquema explícito obtém-se:

$$\tan(\beta_n^R \Delta t) = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan(\sigma_n \Delta x)$$

ou seja

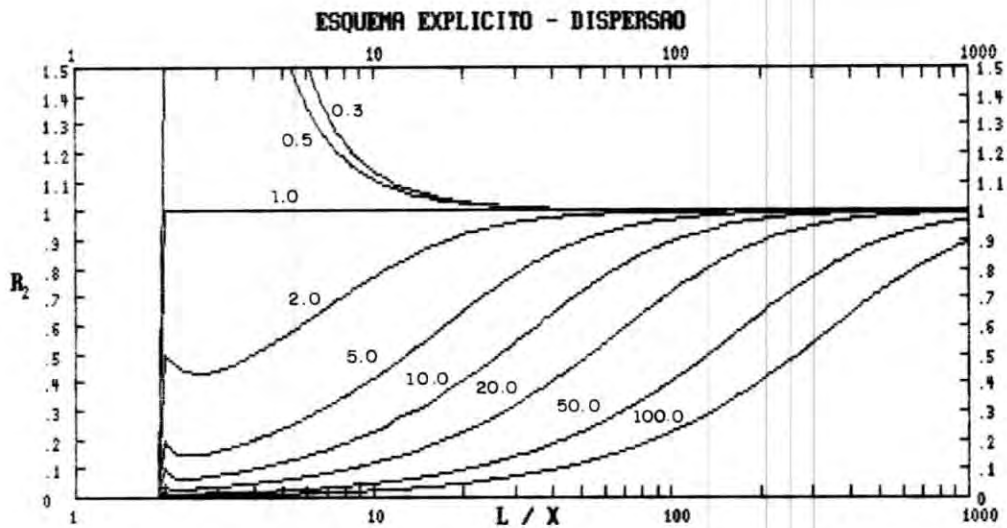
$$\beta_n^R = \frac{1}{\Delta t} \arctan \left[c \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan(\sigma_n \Delta x) \right] \quad [4.2.28]$$

Pode-se então definir a celeridade da onda numérica como $\tilde{c} = \beta_n^R/\sigma_n$ e da mesma forma que em [4.2.21], a relação R_2 como sendo o quociente entre a celeridade da onda numérica e a celeridade da onda teórica:

$$R_2 = \frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\arctan \left[c \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan(\sigma_n \Delta x) \right]}{\sigma_n c \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta x} \quad [4.2.29]$$

A figura 4.2.5 e a Tabela 4.2.2 mostram o comportamento do fator R_2 para diferentes graus de representação da onda ($L/\Delta x$) e para diferentes valores do Número de Courant. Verifica-se que para valores $(L/\Delta x)=2$ a onda numérica tem celeridade nula se $c(\Delta t/\Delta x) > 1$, aproximando-se da teórica a partir de $(L/\Delta x) > 50$. No

caso de $c(\Delta t/\Delta x) < 1$ o comportamento é o mesmo, sendo que a celeridade é aumentada.



ESQUEMA EXPLÍCITO - DIAGRAMA DO FATOR DE DISPERSÃO
FIGURA 4.2.5

TABELA 4.2.2
FATOR R_2

$c\Delta t/\Delta x$	$L/\Delta x$						
	2	5	10	20	50	100	200
0.3	0	1.98	1.13	1.03	1.05	1.00	1.00
0.5	0	1.53	1.11	1.03	1.04	1.00	1.00
1.0	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2.0	0	0.56	0.77	0.92	0.99	0.99	1.00
5.0	0	0.24	0.41	0.65	0.89	0.97	0.99

Para o esquema implícito das equações [4.2.10], a partir das equações [4.2.26] obtém-se:

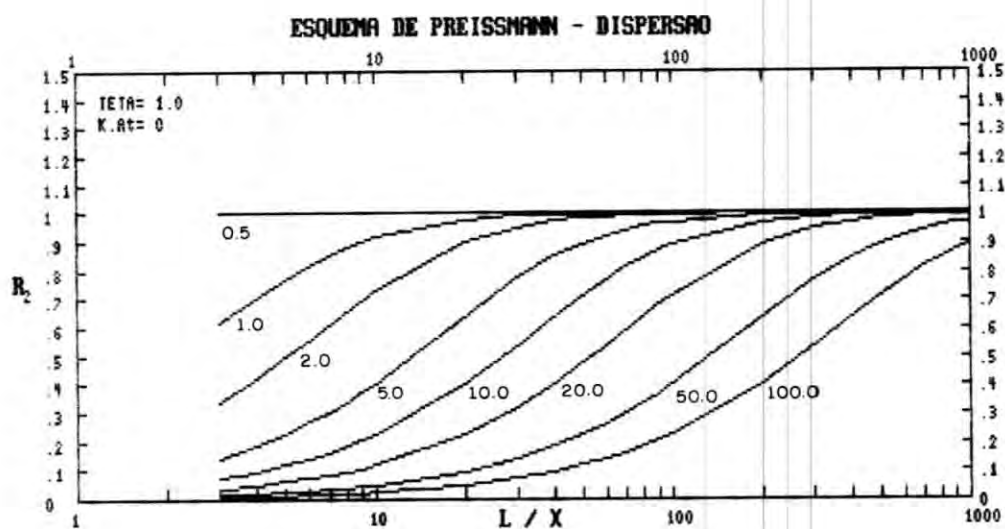
$$\tan(\beta_n^R \Delta t) = \pm \frac{\left[16 R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x/2) - \Delta t^2 k^2\right]^{1/2}}{2 + 8\sigma R_c^2 \tan^2(\sigma \Delta x/2)(e-1) + \Delta t k (2e-1)}$$

[4.2.30]

Procedendo da mesma forma que em [4.2.29], é possível o cálculo do fator R_2 em função de θ e $L/\Delta x$, para diferentes valores de R_c . A figura 4.2.6 apresenta alguns resultados típicos.

Os resultados para diferentes valores de θ estão apresentados no Apêndice I. Verifica-se que a menos do particular valor de $R_c=1$, mesmo para $\theta=1/2$ existe deformação na celeridade das ondas calculadas. Por este motivo ABBOTT (1975) recomenda a adoção de θ acima de 0.6 .

A introdução das tensões de atrito tem efeito estabilizante, como indicam os resultados do Apêndice I. Esta conclusão é válida também para os métodos explícitos, o que permite que alguns modelos possam operar com Número de Courant acima da unidade, facilitando a escolha de θ e R_c .



4.2.3 Escolha do Esquema de Diferenças

A partir do exposto em [4.2.2] pode-se concluir que os esquemas implícitos são preferíveis uma vez que podem ser estáveis independentemente do parâmetro de Courant R_c , enquanto que os esquemas explícitos estão a ele vinculado.

Esta conclusão, na verdade, não é tão imediata, uma vez que outros parâmetros devem ser avaliados, como a natureza da aplicação é o método de cálculo. Se o modelo destina-se à aplicação em situações onde se possa adotar malha de cálculo relativamente grande sem prejuízo da representação da onda, o método explícito será mais vantajoso, uma vez que o passo de cálculo, obedecidas as condições de Courant, ainda será confortável e o erro controlado. Um modelo implícito, que tenha em seu método de cálculo passagens iterativas, neste caso não será tão eficiente.

Esta última conclusão é de fato importante para as aplicações propostas neste estudo. No caso de simulações detalhadas, o intervalo espacial Δx é imposto em função das dimensões envolvidas no projeto e da onda a ser simulada. A condição de Courant quando aplicada, leva a passos de cálculo muito pequenos e conseqüentemente maiores erros de truncamento.

Por exemplo, adotando-se uma malha de pontos com intervalo 50 m, num escoamento de profundidade 5 m, o intervalo de tempo máximo seria da ordem de 7 segundos, o que exigiria cerca de 12000 operações para o cálculo por exemplo, de um transitório de período 24 horas. Um esquema implícito que permitisse trabalhar com R_c em torno de 10, sem distorções seria evidentemente mais vantajoso em relação ao erro de truncamento.

Com relação ao tempo de máquina, a vantagem que um esquema pode apresentar em relação a outro será função do método de cálculo, e da quantidade de iterações necessárias. Estas iterações, embora não propaguem o erro, consomem tempo.

4.3 FORMULAÇÃO DO MODELO HIDRODINÂMICO BIDIMENSIONAL

4.3.1 Equações em Diferenças Finitas

A transformação das equações básicas em diferenças finitas necessita da definição dos pontos nos quais aquelas equações serão calculadas. O conjunto destes pontos, que formam a malha de cálculo, deve aproximar o mais fielmente possível a geometria do problema, bem como facilitar a especificação das diferenças.

A malha ortogonal proposta por LEENDERTSE (1967) (figura 4.3.1) é bastante cômoda para definição das condições de contorno, além de definir todas as grandezas de forma centrada. Assim, as velocidades são definidas nos semi-intervalos Δx e Δy , os níveis d'água nos pontos x e y , e os dados geométricos são representados nos cruzamentos dos semi-intervalos de Δx e Δy .

As linhas de contorno do corpo d'água passarão pelo centro das células e nos pontos onde a velocidade é definida ou conhecida, como na interface 'água-terra' ou na interface $V=f(t)$. Quando o nível d'água num ponto (i,j) é conhecido, o contorno deverá passar por este ponto. A figura 4.3.2 exemplifica a definição dos pontos interiores e de contorno segundo esta malha.

Considera-se um esquema de diferenças de tal forma que uma grandeza genérica G e suas diferenciais possam ser expressas por:

$$G(x,y,t) = \theta G_{i,j}^{t+1} + (1-\theta) G_{i,j}^t = \theta \Delta G_{i,j} + G_{i,j}^t$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,y,t) = \frac{1}{\Delta t} \left[G_{i,j}^{t+1} - G_{i,j}^t \right] = \frac{\Delta G_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\theta}{\Delta x}(G_{i,j}^{t+1} - G_{i-1,j}^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x}(G_{i,j}^t - G_{i-1,j}^t)$$

ou

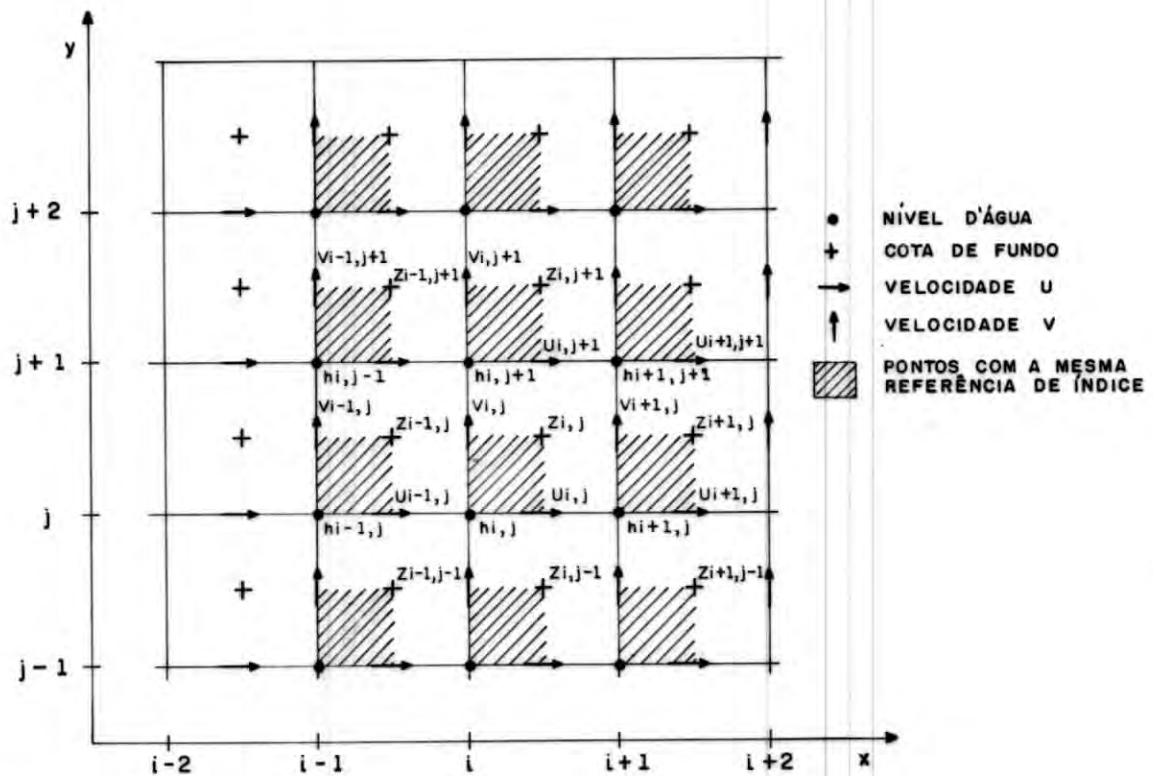
$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\theta}{\Delta x}(\Delta G_{i,j} - \Delta G_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta x}(G_{i,j}^t - G_{i-1,j}^t)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t) = \frac{\theta}{\Delta y}(G_{i,j}^{t+1} - G_{i,j-1}^{t+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta y}(G_{i,j}^t - G_{i,j-1}^t)$$

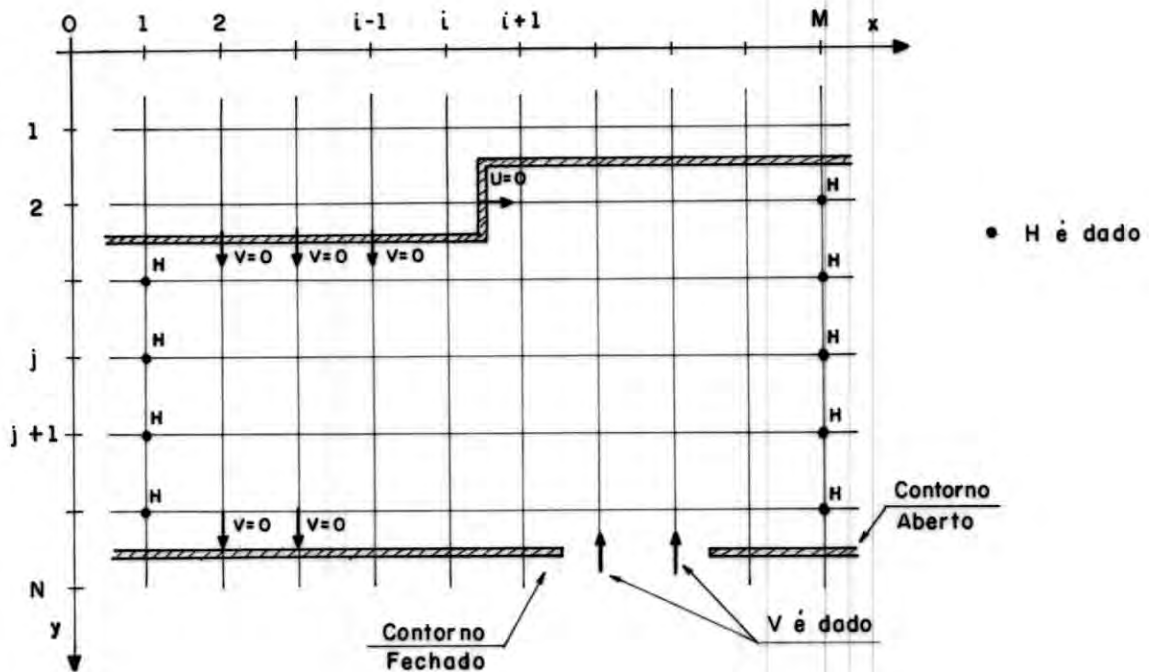
ou

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t) = \frac{\theta}{\Delta y}(\Delta G_{i,j} - \Delta G_{i,j-1}) + \frac{1}{\Delta y}(G_{i,j}^t - G_{i,j-1}^t)$$

[4.3.1]



MALHA DE PONTOS UTILIZADA
FIGURA 4.3.1



REPRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

FIGURA 4.3.2

Para facilidade de notação, as grandezas no instante conhecido t serão simplesmente designadas por $G_{i,j}$. As grandezas localizadas nos pontos intermediários da malha (U , V e Z) serão designadas pelos índices do nó imediatamente anterior. Assim, cada par i, j será associado as quatro grandezas U , V , h e Z à direita e acima do nó correspondente. Esta representação além de facilitar a formulação das equações, permite que as mesmas sejam facilmente transformadas em linguagem computacional.

Para cada ponto encontram-se três incógnitas, duas de velocidade e uma de nível, sendo que podem ser aplicadas as três equações básicas. O método de solução que se propõe consiste em aplicar, em duas etapas dentro do intervalo Δt , a equação da continuidade e do momento simultaneamente, tendo como incógnitas h , U e V .

Na primeira etapa, as equações são aplicadas entre os pontos $(i-1, j) - (i, j)$, resolvendo-se as incógnitas h^{t+1} e U^{t+1} e com V^{t+1} implícito. Na segunda etapa, são resolvidos h^{t+1} e V^{t+1} utilizando-se U^{t+1} obtido do primeiro passo. A ligação temporal

entre as duas etapas é feita pelos termos não lineares das equações, que são tomados entre os instantes t e $t+1$, ponderados através de θ . Genericamente, esta ligação é representada por:

$$\bar{G}_{i,j} = \theta \tilde{G}_{i,j}^{t+1} + (1-\theta)G_{i,j}^t = \theta \Delta \tilde{G}_{i,j} + G_{i,j} \quad [4.3.2]$$

onde o símbolo \sim indica o valor disponível na iteração imediatamente anterior.

Por este processo, na primeira iteração são calculados através de uma varredura no eixo O^X os valores de h e U , utilizando-se os valores de V do instante anterior. Na varredura O^Y os termos não lineares são introduzidos ponderados no tempo e o valor de U^{t+1} é utilizado para determinação de h^{t+1} e V^{t+1} . O procedimento é reiterado até a convergência de h , U e V .

As equações para a varredura O^X do primeiro passo, numa linha j podem ser descritas, utilizando-se a notação de CUNGE, HOLLY e VERWEY (1980) por:

■ continuidade:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (h-Z) \frac{\partial U}{\partial x} + (h-Z) \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right] \left[\theta \Delta U_{i,j} + U_{i,j} \right] - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i-1,j} - Z_{i-1,j} \right] \left[\theta \Delta U_{i-1,j} + U_{i-1,j} \right] + \\ + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right] \left[\theta \Delta V_{i,j} + V_{i,j} \right] - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j-1} - Z_{i,j-1} \right] \left[\theta \Delta V_{i,j-1} + V_{i,j-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad [4.3.3]$$

Impondo-se como incógnitas ΔU e Δh , a equação reduz-se a:

$$A_{i-1} \Delta U_{i-1,j} + B_i \Delta h_{i,j} + C_i \Delta U_{i,j} = E_i \quad [4.3.4]$$

onde os parâmetros são definidos por:

$$A_{i-1} = - \frac{\rho \Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i-1,j} - Z_{i-1,j} \right]$$

$$B_i = 1$$

$$C_i = \frac{\rho \Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right]$$

$$\begin{aligned} E_i = & \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i-1,j} - Z_{i-1,j} \right] U_{i-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right] U_{i,j} - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right] \left[\rho \Delta v_{i,j} + v_{i,j} \right] - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j-1} - Z_{i,j-1} \right] \left[\rho \Delta v_{i,j-1} + v_{i,j-1} \right] \end{aligned} \quad [4.3.5]$$

■ momento:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{U(U^2 + V^2)^{1/2}}{c^2 h} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Delta U_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[e \Delta U_{i,j} + U_{i,j} \right] \left[\bar{U}_{i+1,j} - \bar{U}_{i,j} \right] + \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta y} \bar{V}_{i,j} \left[\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j} \right] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[c e \Delta h_{i+1,j} + h_{i+1,j} \right] - \\
& - \left[c e \Delta h_{i,j} + h_{i,j} \right] + g \Delta t \left[\frac{\left[e \Delta U_{i,j} + U_{i,j} \right] \left[\bar{U}_{i,j}^2 + \bar{V}_{i,j}^2 \right]^{1/2}}{C_{i,j}^2 \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right]} \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.3.6}$$

Procedendo da mesma forma, a equação resulta:

$$B'_i \Delta h_{i,j} + C'_i \Delta U_{i,j} + D'_{i+1} \Delta h_{i+1,j} = E'_i \tag{4.3.7}$$

onde os coeficientes são:

$$B'_i = -g e \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$C'_i = 1 + e \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{U}_{i+1,j} - \bar{U}_{i,j} \right] + g \Delta t \left[\frac{\left[\bar{U}_{i,j}^2 + \bar{V}_{i,j}^2 \right]^{1/2}}{C_{i,j}^2 \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right]} \right]$$

$$D'_i = g e \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
E'_i = & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{U}_{i+1,j} - \bar{U}_{i,j} \right] U_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \bar{V}_{i,j} \left[\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i,j} \right] - \\
& - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{i+1,j} - h_{i,j} \right] - g \Delta t U_{i,j} \left[\frac{\left[\bar{U}_{i,j}^2 + \bar{V}_{i,j}^2 \right]^{1/2}}{C_{i,j}^2 \left[\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right]} \right]
\end{aligned}
\tag{4.3.8}$$

As grandezas médias espaciais são indicadas por um traço sobre o índice respectivo e representam:

$$U_{i,j}^- = (U_{i,j} + U_{i-1,j})/2$$

$$U_{i,j}^- = (U_{i,j} + U_{i,j-1})/2$$

$$h_{i,j}^- = (h_{i,j} + h_{i+1,j})/2$$

$$h_{i,j}^- = (h_{i,j} + h_{i,j+1})/2$$

$$V_{i,j}^- = (V_{i,j} + V_{i,j-1})/2$$

$$V_{i,j}^- = (V_{i,j} + V_{i-1,j})/2$$

$$Z_{i,j}^- = (Z_{i,j} + Z_{i-1,j})/2$$

$$Z_{i,j}^- = (Z_{i,j} + Z_{i,j-1})/2$$

$$U_{i,j}^- = (U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j-1})/4$$

$$V_{i,j}^- = (V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1} + V_{i-1,j-1})/4$$

[4.3.9]

As equações para a varredura O^Y do segundo passo, da mesma forma são:

■ continuidade:

$$\begin{aligned}
 \Delta h_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} - z_{i,j} \right] \left[\theta \Delta U_{i,j} + U_{i,j} \right] - \\
 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i-1,j} - z_{i-1,j} \right] \left[\theta \Delta U_{i-1,j} + U_{i-1,j} \right] + \\
 + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j} - z_{i,j} \right] \left[\theta \Delta V_{i,j} + V_{i,j} \right] - \\
 - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j-1} - z_{i,j-1} \right] \left[\theta \Delta V_{i,j-1} + V_{i,j-1} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3.10}$$

Impondo-se como incógnitas ΔV e Δh , a equação reduz-se a:

$$A_{j-1} \Delta V_{i,j-1} + B_j \Delta h_{i,j} + B_j \Delta V_{i,j} = E_j \tag{4.3.11}$$

onde os parâmetros são definidos por:

$$A_{j-1} = - \frac{\theta \Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j-1} - z_{i,j-1} \right]$$

$$B_j = 1$$

$$C_j = \frac{\theta \Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j} - z_{i,j} \right]$$

$$\begin{aligned}
E_j = \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j-1} - z_{i,j-1} \right] v_{i,j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} - z_{i,j} \right] v_{i,j} - \\
- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} - z_{i,j} \right] \left(e \Delta U_{i,j} + U_{i,j} \right) + \\
+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i-1,j} - z_{i-1,j} \right] \left(e \Delta U_{i,j-1} + U_{i,j-1} \right)
\end{aligned}
\tag{4.3.12}$$

■ momento:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{v(U^2 + v^2)^{1/2}}{c^2 h} = 0 \\
\Delta v_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{U}_{i,j} \left[\bar{v}_{i+1,j} - \bar{v}_{i,j} \right] + \\
\frac{\Delta t}{\Delta y} \left[e \Delta v_{i,j} + v_{i,j} \right] \left[\bar{v}_{i,j+1} - \bar{v}_{i,j} \right] + g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(e \Delta h_{i,j+1} + h_{i,j+1}) - \right. \\
\left. - (e \Delta h_{i,j} + h_{i,j}) \right] + g \Delta t \left[\frac{\left[e \Delta v_{i,j} + v_{i,j} \right] \left[\bar{v}_{i,j}^2 + \bar{U}_{i,j}^2 \right]^{1/2}}{c_{i,j}^2 \left[\bar{h}_{i,j} - z_{i,j} \right]} \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.3.13}$$

Procedendo da mesma forma, a equação resulta em:

$$B'_j \Delta h_{i,j} + C'_j \Delta v_{i,j} + D'_{j+1} \Delta h_{i+1,j} = E'_j
\tag{4.3.14}$$

onde os coeficientes são:

$$B'_j = -g \theta \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$C'_j = 1 + \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\bar{v}_{i,j+1} - \bar{v}_{i,j} \right) + g \Delta t \left[\frac{\left(\bar{v}_{i,j}^2 + \bar{u}_{i,j}^2 \right)^{1/2}}{C_{i,j}^2 \left(\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right)} \right]$$

$$D'_j = g \theta \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$E'_j = -\frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\bar{v}_{i,j+1} - \bar{v}_{i,j} \right) v_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{u}_{i,j} \left(\bar{v}_{i+1,j} - \bar{v}_{i,j} \right) -$$

$$- g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{i,j+1} - h_{i,j} \right) - g \Delta t v_{i,j} \left[\frac{\left(\bar{v}_{i,j}^2 + \bar{u}_{i,j}^2 \right)^{1/2}}{C_{i,j}^2 \left(\bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} \right)} \right]$$

[4.3.15]

Nestas equações, os termos não lineares foram sempre aproximados pela média dos valores dos pontos adjacentes a *montante* e a *jusante*, e os termos convectivos do momento foram calculados centrados. Assim, para um ponto no interior da malha:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_{i,j} \frac{1}{2\Delta x} \left(U_{i+1,j} - U_{i-1,j} \right)$$

Esta aproximação apresentará problemas junto aos contornos, onde os pontos $U_{i+1,j}$ e $U_{i-1,j}$ podem não ser definidos. Nestes casos pode ser utilizada uma extrapolação dos valores do interior da malha, desde que não sejam provocadas instabilidades.

4.3.2 Solução Numérica

a) Algoritmo de Dupla Varredura

Seguindo o esquema proposto, na primeira varredura as equações [4.3.4] e [4.3.7] devem ser solucionadas, assumindo-se na primeira iteração, que \bar{h} , \bar{U} e \bar{V} são os valores iniciais, e nas demais, o valor ponderado indicado por [4.3.2].

As duas equações aplicadas a cada linha j permitem a obtenção de um sistema de $2M-1$ equações, onde M representa o número de pontos na linha. Passam a existir portanto M incógnitas de nível e $M-1$ incógnitas de velocidade U , associadas na forma:

$$A_{i-1} \Delta U_{i-1,j} + B_i \Delta h_{i,j} + C_i \Delta U_{i,j} = E_i$$

$$B'_i \Delta h_{i,j} + C'_i \Delta U_{i,j} + D'_{i+1} \Delta h_{i+1,j} = E'_i$$

Admitindo por hipótese a relação:

$$\Delta h_{i,j} = P_i \Delta U_{i,j} + Q_i \quad [4.3.16]$$

da primeira das equações acima tem-se que:

$$P_i = -\frac{C_i}{B_i} \quad \text{e} \quad Q_i = \frac{E_i - A_i \Delta U_{i-1}}{B_i}$$

Substituindo na segunda equação vem:

$$\Delta U_{i,j} = \frac{-D'_i}{\frac{C'_i + P_i B'_i}{R_i}} \Delta h_{i+1,j} + \frac{E'_i - B'_i Q_i}{\frac{C'_i + P_i B'_i}{S_i}} \quad [4.3.17]$$

$$\Delta U_{i,j} = R_i \Delta h_{i+1,j} + S_i \quad [4.3.18]$$

Mas como $\Delta U_{i-1} = R_{i-1} \Delta h_{i,j} + S_{i-1}$, pode se reescrever a expressão [3.3.16] :

$$\Delta h_{i,j} = \frac{-C_i}{\frac{B_i + A_i R_{i-1}}{P_i}} \Delta U_{i,j} + \frac{E_i - A_i S_{i-1}}{\frac{B_i + A_i R_{i-1}}{Q_i}} \quad [4.3.19]$$

Logo, o sistema formado para uma linha pode ser resolvido através de duas varreduras, através de fórmulas de recorrência. Partindo-se de uma condição conhecida no primeiro ponto da linha (contorno) calculam-se para i crescente os coeficientes A , B , C , E , B' , C' , D' , e E' através de [4.3.5] e [4.3.8] e também P , Q , R e S através de [4.3.17] e [4.3.19].

Com a condição conhecida do último ponto, determinam-se para i decrescente, os valores de Δh_i e ΔU_i , com o uso combinado das equações [4.3.16] e [4.3.18].

As fórmulas de recorrência resumem-se a:

$$P_i = \frac{-C_i}{B_i + A_i R_{i-1}} \quad Q_i = \frac{E_i - A_i S_{i-1}}{B_i + A_i R_{i-1}}$$

$$R_i = \frac{-D'_i}{C'_i + P_i B'_i} \quad S_i = \frac{E'_i - B'_i Q_i}{C'_i + P_i B'_i}$$

$$\Delta U_{i,j} = R_i \Delta h_{i+1,j} + S_i$$

$$\Delta h_{i,j} = P_i \Delta U_{i,j} + Q_i$$

[4.3.20]

Na segunda etapa, a varredura em $O^{\wedge}Y$ é efetuada aplicando-se a cada coluna i as equações [4.3.11] e [4.3.14].

$$A_{j-1} \Delta V_{i,j-1} + B_j \Delta h_{i,j} + C_j \Delta V_{i,j} = E_j$$

$$B'_j \Delta h_{i,j} + C'_j \Delta U_{i,j} + D'_{j+1} \Delta h_{i+1,j} = E'_j$$

Com um procedimento análogo ao acima descrito, podem ser obtidas as equações de recorrência para esta etapa, sendo o processo de cálculo efetuado da mesma forma.

$$P_j = \frac{-C_j}{B_j + A_j R_{j-1}} \qquad Q_j = \frac{E_j - A_j S_{j-1}}{B_j + A_j R_{j-1}}$$

$$R_j = \frac{-D'_j}{C'_j + P'_j B'_j} \qquad \sigma_i = \frac{E'_j - B'_j Q_j}{C'_j + P'_j B'_j}$$

$$\Delta V_{i,j} = R_j \Delta h_{i,j+1} + S_j$$

$$\Delta h_{i,j} = P_j \Delta V_{i,j} + Q_j$$

[4.3.21]

Os valores de ΔU , ΔV e Δh obtidos de um cálculo completo das duas etapas (em $O^{\wedge}X$ e $O^{\wedge}Y$) são em seguida utilizados na reiteração do

mesmo cálculo. As iterações prosseguem até a convergência dos valores de ΔU , ΔV e Δh , quando então passam a ser conhecidos os valores de U^{t+1} , V^{t+1} e h^{t+1} .

b) Condições de Contorno

Vários tipos de condições de contorno são possíveis nos problemas práticos, entretanto colocam-se como mais frequentes as fronteiras fechadas (terra-água) e as fronteiras abertas. Nestas últimas o nível d'água, a velocidade ou a lei cota-descarga devem ser conhecidos em função do tempo.

Se o contorno é do tipo fechado, a velocidade perpendicular a ele é nula. Assim, considerando o ponto inicial de uma linha j , o ponto imediatamente anterior, $j-1$, tem a velocidade nula se representar um contorno do tipo fechado. Desta forma, para este ponto escreve-se:

$$U_{o,j} = 0$$

$$R_o = 0 \quad \text{e} \quad S_o = 0 \quad [4.3.22]$$

Para o último ponto da linha, $U_{M,j} = 0$, uma vez que o contorno passa exatamente pelo local onde este valor é definido.

Se o contorno é aberto e a velocidade dada em função do tempo, têm-se, para os pontos extremos:

$$U_{o,j}^{t+1} = F_u(t+1)$$

$$R_o = 0 \quad \text{e} \quad S_o = U_{o,j}^{t+1} - U_{o,j}^t$$

$$U_{M,j}^{t+1} = F_u(t+1).$$

[4.3.23]

Se o nível d'água é conhecido, para o primeiro ponto pode-se escrever:

$$\Delta h_{1,j} = F_h(t+1) - h_{1,j}^t$$

$$P_1 = 0 \quad \text{e} \quad Q_1 = \Delta h_{1,j}$$

[4.3.24]

Sendo o ponto inicial de uma linha ou coluna situado no local onde uma lei cota-descarga é conhecida, pode-se obter previamente uma relação do tipo:

$$h = F(U)$$

Sendo:

$$h_{1,j}^{t+1} = F(U^t) + \left[\frac{dF}{dU} \right]^t \Delta U_{1,j}$$

$$\Delta h_{1,j} = \left[\frac{dF}{dU} \right]^t \Delta U_{1,j} = P_1 \Delta U_{1,j} + Q_1$$

então:

$$P_1 = \left[\frac{dF}{dU} \right]^t \quad \text{e} \quad Q_1 = 0$$

[4.3.25]

Se a relação for conhecida para o último ponto da linha:

$$\Delta h_{M,j} = \left[\frac{dF}{dU} \right]^t \Delta U_{M,j} = P_M \Delta U_{M,j} + Q_M$$

$$\Delta U_{M,j} = \frac{Q_M}{\left[\frac{dF}{dU} \right]^l - P_M}$$

[4.3.26]

As expressões para as condições de contorno das colunas i são inteiramente análogas a estas apresentadas para as linhas j .

c) Extrapolação das Variáveis

No cálculo dos coeficientes de [4.3.5], [4.3.8], [4.3.12] e [4.3.15], as velocidades que aparecem nos termos convectivos das equações de momento podem encontrar-se fora do campo de pontos definido. É o caso de uma linha j em que um ou mais pontos são contornos para as correspondentes colunas i .

LEENDERTSE (1967) e ABBOTT (1975) propõe que nestes casos os termos convectivos sejam omitidos, considerando seu pequeno peso em relação aos termos de inércia. Uma aproximação como esta cria diferenças no cálculo das duas etapas, resultando num processo onde os valores oscilam entre uma iteração e outra sem convergir dentro da precisão especificada.

Outra aproximação consiste em extrapolar os valores do interior do campo para os pontos não definidos. Esta extrapolação, se linear, equivale à tomada de uma derivada não centrada, que como se observa no item 4.2.2, não conduz a um esquema de diferenças estável. Por outro lado, como nas análises de estabilidade não se considera o efeito amortecedor das tensões de atrito de fundo, mesmo uma extrapolação não linear pode resultar num esquema estável.

ABBOTT (1979) recomenda por fim que em cada modelo sejam pesquisados os efeitos das extrapolações assumidas, através de testes numéricos com situações extremas. Nestes testes, os efeitos destas hipóteses, bem como do critério de representação da

rugosidade são manifestados em conjunto permitindo uma conclusão sobre a qualidade do resultado.

4.3.3 Estabilidade e Acuracidade

A análise da estabilidade do esquema proposto no item anterior pode ser feita de maneira análoga à apresentada em [4.2.2] para o esquema implícito de quatro pontos de *Preissmann*. A análise é feita para cada passo separadamente, desprezando os termos não lineares da equação do momento.

Admitindo-se as seguintes hipóteses:

- o escoamento tem uma profundidade básica h_0 sobre a qual se propaga a onda;
- o termo relativo às tensões de atrito pode ser estimado pela relação linear $k U$, onde $K = |U|/C^2 h_0$;

a equação da continuidade se reduz a:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Substituindo o esquema numérico empregado:

$$h_j^{t+1} - h_j + h_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[e (U_{j+1} - U_j)^{t+1} + (1-e) (U_{j+1} - U_j)^t \right] = 0$$

Utilizando a solução teórica em série de Fourier (equações 4.2.2), no enésimo termo da série obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & h_n \left(e^{[\sigma_n j \Delta x + \beta_n (t+1) \Delta t] i} - h_n e^{[\sigma_n j \Delta x + \beta_n \Delta t] i} \right) + \\
 & h_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \theta U_n \left(e^{[\sigma_n (j+1) \Delta x + \beta_n (t+1) \Delta t] i} - e^{[\sigma_n j \Delta x + \beta_n (t+1) \Delta t] i} \right) + \\
 & h_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} (1-\theta) U_n \left(e^{[\sigma_n (j+1) \Delta x + \beta_n t \Delta t] i} - e^{[\sigma_n j \Delta x + \beta_n t \Delta t] i} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Dividindo-se a última equação por $e^{[\sigma_n j \Delta x + \beta_n t \Delta t] i}$ e rearranjando:

$$\left(e^{\beta_n \Delta t i} - 1 \right) h_n + h_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{\sigma_n \Delta x i} - 1 \right) \left[\theta \left(e^{\beta_n \Delta t i} - 1 \right) + 1 \right] U_n = 0$$

[4.3.27]

Para a equação da quantidade de movimento pode-se escrever:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + K U = 0$$

Introduzindo os termos das equações de diferenças finitas:

$$\begin{aligned}
 U_j^{t+1} - U_j + g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\theta (h_{j+1} - h_j)^{t+1} + (1-\theta) (h_{j+1} - h_j)^t \right) + \\
 + k \left(\theta U_j^{t+1} + (1-\theta) U_j^t \right) = 0
 \end{aligned}$$

Substituindo os elementos da solução teórica, dividindo os termos por $e^{[\sigma_n j \Delta x + \beta_n t \Delta t] i}$ e arranjando de forma análoga:

$$g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[e^{\alpha_n \Delta x i} - 1 \right] \left[e \left[e^{\beta_n \Delta t i} - 1 \right] + 1 \right] h_n +$$

$$+ \left[\left[e^{\beta_n \Delta t i} - 1 \right] \left(1 + e k \Delta t \right) + k \Delta t \right] U_n = 0$$

[4.3.28]

Fazendo:

$$\lambda = \left[e^{\beta_n \Delta t i} - 1 \right] \quad a = \left[e^{\alpha_n \Delta x i} - 1 \right] \quad b = k \Delta t$$

as equações [4.3.27] e [4.3.28] formam um sistema homogêneo em U_n e h_n que tem solução, portanto o determinante da matriz dos coeficientes é nulo. Assim:

$$\begin{bmatrix} \lambda & h_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} a (e \lambda + 1) \\ g \frac{\Delta t}{\Delta x} a (e \lambda + 1) & \lambda (1 + e b) + b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\lambda \left[\lambda (1 + e b) + b \right] - g h_0 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[e \lambda + 1 \right]^2 = 0$$

[4.3.29]

Resolvendo a equação quadrática:

$$\lambda = \frac{-b + 2eR_c^2 a^2 + \left[b^2 + 4R_c^2 a^2 \right]^{1/2}}{2(1 - e^2 R_c^2 a^2 + e b)}$$

[4.3.30]

onde $R_c = \sqrt{gh_0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Sendo λ um número complexo, de forma análoga ao apresentado em [4.2.2] pode-se escrever:

$$e^{\beta_n \Delta t i} = e^{-\beta_n^I \Delta t i} \left[\cos(\beta_n^R \Delta t) + \sin(\beta_n^R \Delta t) i \right] \quad [4.3.31]$$

Para que o esquema apresente estabilidade, $|e^{\beta_n \Delta t i}| \leq 1$, ou seja, a parte real do complexo deve obedecer:

$$e^{-\beta_n^I \Delta t i} \leq 1$$

No Apêndice I estão apresentados na forma de tabelas e gráficos, os valores calculados de R_1 , para faixa usual de θ e $\sigma \Delta x$, e Números de Courant entre 0.5 e 100.

Por estes resultados observa-se que o esquema é instável para alguns Números de Courant se θ inferior a 0.5, tornando-se incondicionalmente estável para θ acima deste valor. Pode-se concluir também que uma melhor discretização espacial faz o amortecimento tender a unidade para qualquer valor de θ e $L/\Delta x$.

A acuracidade do esquema pode ser avaliada através da expressão

$$\tilde{c} = \frac{\beta_n^R}{\sigma_n}$$

Da equação [4.3.31] pode-se escrever:

$$\operatorname{tg}(\beta_n^R \Delta t) = \sin(\beta_n^R \Delta t) / \cos(\beta_n^R \Delta t)$$

onde os valores de $\sin(\beta_n^R \Delta t)$ e $\cos(\beta_n^R \Delta t)$ podem ser obtidos pelo argumento do complexo obtido de [4.3.29].

No Apêndice I estão apresentados os valores de $R_2 = \tilde{c}/c$, calculados para a faixa usual de θ , R_c e $L/\Delta x$, de onde se conclui que o esquema não apresenta dispersão das ondas numéricas.

Os resultados acima dizem respeito a qualquer das etapas individuais do cálculo, ou seja, às varreduras isoladas numa direção. O método de *Von Neumann* não permite afirmar se a condição de estabilidade das etapas separadas é suficiente para garantir a estabilidade do processo completo. Esta verificação deve ser feita através de experimentos numéricos com o modelo.

5 EXPLORAÇÃO DO MODELO BIDIMENSIONAL

5.1 O SISTEMA MDBD

Seguindo o conceito firmado no item 4.1, as equações propostas em 4.3 necessitam ser associadas a um sistema computacional que permita o tratamento dos dados geométricos básicos e das condições de contorno, realize os cálculos e apresente os resultados de forma ordenada.

Neste sentido foi desenvolvido o sistema denominado MDBD, que constitui-se num conjunto de programas para microcomputador escritos em linguagem BASIC, englobando as rotinas de entrada dos dados, a rotina de cálculo hidráulico e rotinas de resultados, com saídas em forma gráfica.

O sistema compõe-se de três módulos, cada um composto de diversos programas. O módulo inicial destina-se a edição de dados geométricos de campo, informações sobre as condições de contorno e de rugosidade. O segundo módulo é o de cálculo hidráulico, sendo que nele podem ser incluídas rotinas outros modelos diferentes do proposto neste trabalho. Este recurso destina-se a realização das comparações do item 5.2.2, utilizando-se os mesmos dados hidrogeométricos de entrada.

O módulo de resultados permite a visualização das respostas do modelo na forma de gráficos de velocidade, nível e vazão em função do tempo, mapas velocimétricos e listagens convencionais.

5.1.1 Entrada de Dados

Toda a entrada de dados fundamenta-se na discretização segundo a malha de cálculo apresentada na figura 4.3.1. Através deste esquema, as informações batimétricas, de nível d'água, velocidade na direção X e na direção Y dos pontos localizados a direita e acima do nó da malha são informadas como se localizadas sobre o nó.

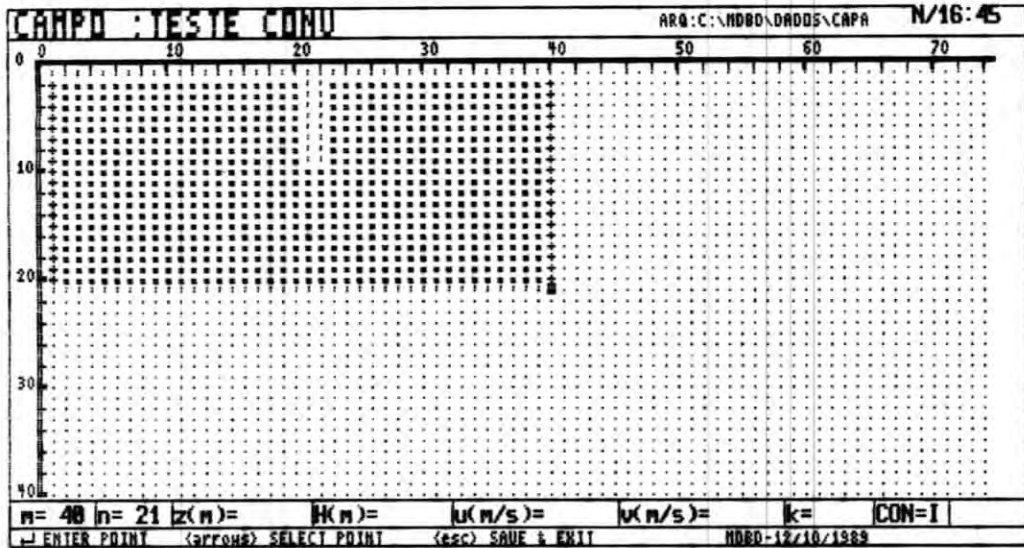
A entrada destes dados é feita diretamente sobre uma tela em que é representada a malha ortogonal básica do sistema. Esta malha tem espaçamento igual nas duas direções e está orientada de modo que as coordenadas dos pontos crescem para a direita e para baixo, sendo a origem localizada na extremidade superior esquerda. A figura 5.1.1 indica a tela de entrada de dados numa aplicação típica.

Através desta tela, os dados topobatimétricos, de rugosidade e profundidade inicial são informados ponto a ponto, bem como as velocidades iniciais e as condições de contorno. A identificação dos pontos onde há escoamento ou onde são fornecidas condições de contorno é feita através de uma legenda própria, indicada na figura 5.1.2.

Este conjunto de dados de entrada forma o denominado *arquivo de dados de campo*, utilizado no módulo seguinte para o cálculo hidráulico.

As condições de contorno tipo *terra-água* são reconhecidas na etapa de cálculo, diretamente da comparação entre o nível d'água e a cota batimétrica do ponto relacionado. Para as demais condições informadas no arquivo de campo, ou seja, níveis ou velocidades em função do tempo, devem ser informadas as leis de variação destas grandezas.

Estas leis são discretizadas na forma de um vetor em função de um intervalo de tempo de dados definido no início do processamento.



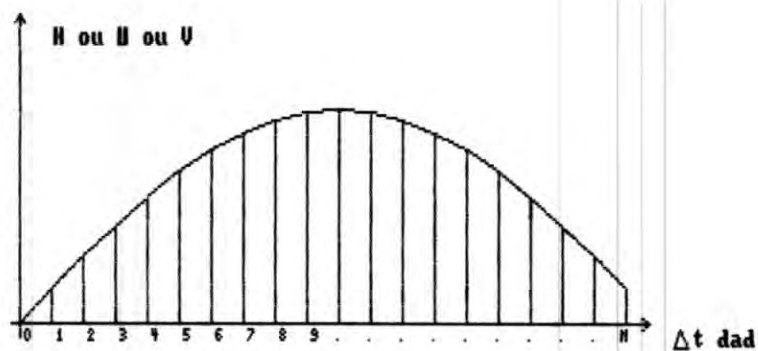
EDIÇÃO DE DADOS DE CAMPO

FIGURA 5.1.1

LEGENDA DOS PONTOS
TELA DE DADOS
FIGURA 5.1.2

■	PONTO COM ESCOAMENTO
+	COND. CONT. NIVEL
	COND. CONT U
≡	COND CONT. U

Assim, informam-se apenas os pontos suficientes para uma boa descrição da lei de variação, obtendo-se os intermediários por interpolação. Este procedimento permite uma grande economia de memória do computador e tempo de processamento. A figura 5.1.3 exemplifica a forma como são informadas as condições de contorno.



CONDIÇÃO DE CONTORNO DE UM PONTO

FIGURA 5.1.3

Antes de se iniciar a entrada de dados propriamente dita, os mesmos devem ser preparados, a partir de uma planta topo-batimétrica em escala adequada, sobre a qual é lançada a malha de pontos a ser utilizada. O espaçamento da malha é definido inicialmente em função dos detalhes da geometria em estudo, considerados os limites de estabilidade e acuracidade definidos em 4.3.3, e ajustado posteriormente em função de resultados obtidos dos primeiros processamentos.

5.1.2 Cálculo Hidráulico

O cálculo hidráulico, efetuado após a leitura dos dados de campo e das informações de contorno, é realizado em duas etapas. Na primeira etapa são calculadas todas as linhas j da malha com o uso das equações [4.3.4] a [4.3.9], e das fórmulas de recorrência [4.3.20]. Na segunda etapa são calculadas todas as colunas i , com o uso das equações [4.3.11] a [4.3.15] e expressões de recorrência [4.3.21].

As condições de contorno são introduzidas com o uso das equações [4.3.22] a [4.3.26], em ambas as etapas do cálculo. A seguir apresentam-se as expressões desenvolvidas na forma computacional, utilizadas no módulo de cálculo:

■ primeira etapa - cálculo da linha j

$$A_i = \frac{\theta}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i-1,j} - Z_{i-1,j} - Z_{i-1,j-1} \right) \quad [5.1.1]$$

$$B_i = 1 \quad [5.1.2]$$

$$C_i = \frac{\theta}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{h}_{i+1,j} + \bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} - Z_{i,j-1} \right) \quad [5.1.3]$$

$$D_i = 0$$

[5.1.4]

$$\begin{aligned} E_i = & -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{i,j} \left[\bar{h}_{i+1,j} + \bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} - Z_{i,j-1} \right] - \\ & -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{i-1,j} \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i-1,j} - Z_{i-1,j} - Z_{i-1,j-1} \right] - \\ & -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j+1} + \bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} - Z_{i-1,j} \right] \left[e^{\Delta V_{i,j}} + V_{i,j} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i,j-1} - Z_{i,j-1} - Z_{i-1,j-1} \right] \left[e^{\Delta V_{i,j-1}} + V_{i,j-1} \right] \end{aligned}$$

[5.1.5]

$$A'_i = 0$$

[5.1.6]

$$B'_i = -g e \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

[5.1.7]

$$\begin{aligned} C'_i = & 1 + \frac{e}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{U}_{i+1,j} + \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i-1,j} \right] + \\ & + g e \Delta t \frac{\left\{ \bar{U}_{i,j}^2 + \frac{1}{16} \left[\bar{V}_{i+1,j} + \bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{i,j-1} + \bar{V}_{i+1,j} \right]^2 \right\}^{1/2}}{\frac{1}{8} \left[C_{i,j} + C_{i+1,j} \right]^2 \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i+1,j} - Z_{i,j} - Z_{i,j-1} \right]} \end{aligned}$$

[5.1.8]

$$D'_i = g e \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

[5.1.9]

$$\begin{aligned}
E'_i = & -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{i,j} \left[\bar{U}_{i+1,j} + \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i-1,j} \right] - \\
& - \frac{1}{8} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{V}_{i+1,j} + \bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{i+1,j} + \bar{V}_{i,j-1} \right] \circ \\
& \circ \left[\bar{U}_{i,j+1} + \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i,j-1} \right] - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{i+1,j} - h_{i,j} \right] - \\
& - g \Delta t U_{i,j} \frac{\left\{ \bar{U}_{i,j}^2 + \frac{1}{16} \left[\bar{V}_{i+1,j} + \bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{i,j-1} + \bar{V}_{i+1,j} \right]^2 \right\}^{1/2}}{\frac{1}{8} \left[C_{i,j} + C_{i+1,j} \right]^2 \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i+1,j} - Z_{i,j} - Z_{i,j-1} \right]}
\end{aligned}$$

[5.1.10]

$$\begin{aligned}
P_i &= \frac{C_i}{B_i + A_i R_{i-1}} & Q_i &= \frac{E_i - A_i S_{i-1}}{B_i + A_i R_{i-1}} \\
R_i &= \frac{D'_i}{C'_i + B'_i P_i} & S_i &= \frac{E'_i - B'_i Q_i}{C'_i + B'_i P_i}
\end{aligned}$$

[5.1.11]

$$\begin{aligned}
\Delta U_{i,j} &= R_i \Delta h_{i+1,j} + S_i \\
\Delta h_{i,j} &= P_i \Delta U_{i,j} + Q_i
\end{aligned}$$

[5.1.12]

■ segunda etapa - cálculo da coluna i

$$A_j = \frac{g}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i,j-1} - Z_{i,j-1} - Z_{i-1,j-1} \right]$$

[5.1.13]

$$B_j = 1$$

[5.1.14]

$$C_j = \frac{\theta}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{h}_{i,j+1} + \bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} - Z_{i-1,j} \right]$$

5.1.15]

$$D_j = 0$$

[5.1.16]

$$\begin{aligned} E_j = & -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j} \left[\bar{h}_{i,j+1} + \bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} - Z_{i-1,j} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j-1} \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i,j-1} - Z_{i,j-1} - Z_{i-1,j-1} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i+1,j} + \bar{h}_{i,j} - Z_{i,j} - Z_{i,j-1} \right] \left[\theta \Delta U_{i,j} + U_{i,j} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i-1,j} - Z_{i-1,j} - Z_{i-1,j-1} \right] \left[\theta \Delta U_{i-1,j} + U_{i-1,j} \right] \end{aligned}$$

[5.1.17]

$$A'_j = 0$$

[5.1.18]

$$B'_j = -g \theta \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

[5.1.19]

$$C'_j = 1 + \frac{\theta}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\bar{v}_{i,j+1} + \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j-1} \right] +$$

$$+ g \theta \Delta t \frac{\left\{ \frac{1}{16} \left[\bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} + \bar{v}_{i+1,j} \right]^2 + \bar{v}_{i,j}^2 \right\}^{1/2}}{\frac{1}{8} \left[C_{i,j} + C_{i,j+1} \right]^2 \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i,j+1} - Z_{i,j} - Z_{i-1,j} \right]}$$

[5.1.20]

$$D'_j = g \theta \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

[5.1.21]

$$\begin{aligned}
E'_j = & - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j} \left[\bar{v}_{i,j+1} + \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j-1} \right] - \\
& - \frac{1}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i-1,j-1} \right] \circ \\
& \circ \left[\bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_{i-1,j} \right] - g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[h_{i,j+1} - h_{i,j} \right] - \\
& - g \Delta t v_{i,j} \frac{\left\{ \frac{1}{16} \left[\bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} + \bar{v}_{i+1,j} \right] + \bar{v}_{i,j}^2 \right\}^{1/2}}{\frac{1}{8} \left[c_{i,j} + c_{i,j+1} \right]^2 \left[\bar{h}_{i,j} + \bar{h}_{i,j+1} - z_{i,j} - z_{i-1,j} \right]}
\end{aligned}
\tag{5.1.22}$$

$$\begin{aligned}
P_j = \frac{C_j}{B_j + A_j R_{j-1}} & \qquad Q_j = \frac{E_j - A_j S_{j-1}}{B_j + A_j R_{j-1}} \\
R_j = \frac{D'_j}{C'_j + B'_j P_j} & \qquad S_j = \frac{E'_j - B'_j Q_j}{C'_j + B'_j P_j}
\end{aligned}
\tag{5.1.23}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_{i,j} &= R_j \Delta h_{i,j+1} + S_j \\
\Delta h_{i,j} &= P_j \Delta V_{i,j} + Q_j
\end{aligned}
\tag{5.1.24}$$

Nestas equações os termos indicados por \circ representam o valor ponderado no tempo, como indicado em [4.3.2]. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{i,j} &= \theta \Delta \tilde{h}_{i,j} + h_{i,j} \\
\bar{u}_{i,j} &= \theta \Delta \tilde{u}_{i,j} + u_{i,j} \\
\bar{v}_{i,j} &= \theta \Delta \tilde{v}_{i,j} + v_{i,j}
\end{aligned}
\tag{5.1.25}$$

onde o símbolo \sim indica o valor na última iteração.

O algoritmo de cálculo, utilizando as equações acima pode ser escrito como:

1. Com a condição de contorno do primeiro ponto da primeira linha da malha, calcula-se P_o , Q_o , R_o e S_o do ponto imediatamente anterior, utilizando as equações [5.1.1] a [5.1.11]. Sendo a primeira iteração, assume-se \bar{U} , \bar{V} e \bar{h} como U , V e h .
2. Com os valores obtidos no passo anterior, calcula-se sucessivamente P_i , Q_i , R_i e S_i até o último ponto da linha.
3. A partir da condição de contorno do último ponto, e utilizando-se [5.1.12], calculam-se os valores de Δh e ΔU .
4. Repetem-se os passos 1, 2 e 3, até a última linha da malha.
5. Calculam-se os valores de \bar{U} e \bar{h} com os resultados dos passos anteriores, através de [5.1.25].
6. Com a condição de contorno do primeiro ponto da primeira coluna da malha, calcula-se P_o , Q_o , R_o e S_o do ponto imediatamente anterior, utilizando as equações [5.1.13] a [5.1.23].
7. Com os valores obtidos no passo anterior, calcula-se sucessivamente P_j , Q_j , R_j e S_j até o último ponto da coluna.
8. A partir da condição de contorno do último ponto, e utilizando-se [5.1.24], calculam-se os valores de Δh e ΔV .
9. Repetem-se os passos 6, 7 e 8, até a última coluna da malha.
10. Verifica-se a convergência de Δh para todos os pontos da malha. Em caso afirmativo retorna-se ao passo 1. para o próximo intervalo Δt .

11. Calculam-se os valores de \bar{h} e \bar{V} através de [5.1.25], retornando-se ao passo 6 para uma nova iteração.

O fluxograma representativo do algoritmo acima é indicado na figura 5.1.4.

5.1.3 Saída de Dados

Neste módulo são incluídas as rotinas para apresentação dos resultados calculados no módulo anterior, que foram previamente armazenados em disco. As saídas possíveis são: mapa de correntes num instante especificado, mapa de nível d'água no instante especificado, listagem de níveis d'água e velocidades para um dado instante, diagramas $U \times t$ e $V \times t$ para um ponto selecionado, diagrama módulo-direção da velocidade de um ponto, limnigrama de um ponto e vazão através de uma seção.

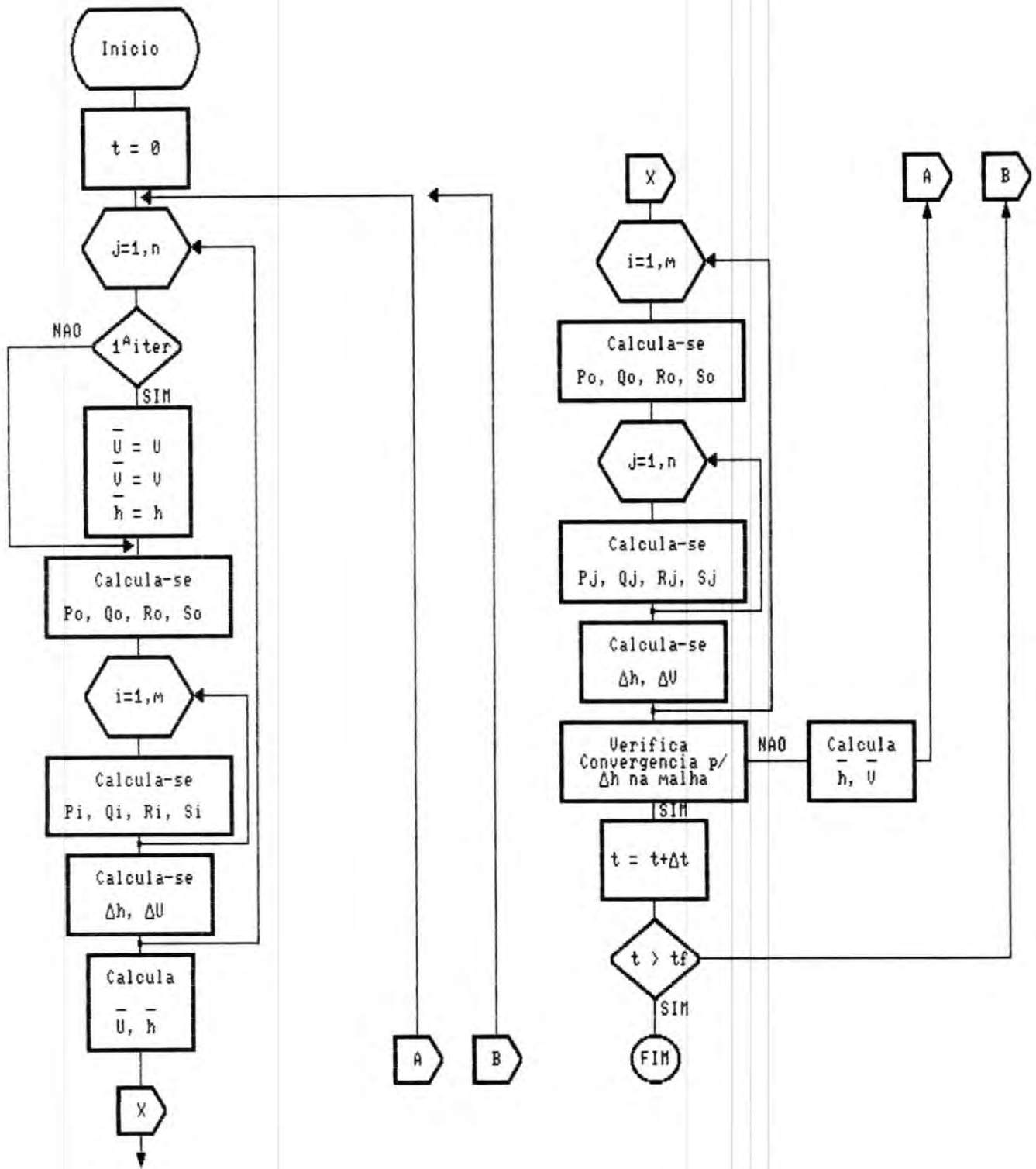
As listagens de todos os programas desenvolvidos em linguagem BASIC estão apresentadas no Apêndice II.

5.2 TESTES E COMPARAÇÕES

Os testes iniciais do modelo MBD foram realizados para um canal hipotético, com geometria retilínea e onde a topo-batimetria e os elementos de contorno foram escolhidos de forma a indicar não só a capacidade de simulação como também vícios e distorções que possam ser gerados.

Este procedimento, que consiste na escolha de condições severas de teste, é recomendado por ABBOT (1979) para checar o comportamento das equações numéricas e também levantar pontos que devem ser pesquisados antes das aplicações práticas reais.

Algoritmo de Calculo



FLUXOGRAMA GERAL DO MODELO MBD
FIGURA 5.1.4

Após os testes iniciais foram realizadas comparações com os resultados obtidos por LEENDERTSE (1967) na aplicação do modelo original deste ao estuário do Rio Reno.

5.2.1 Testes

Para a realização dos testes foi simulado um canal retilíneo com 800 m de comprimento por 400 m de largura, adotando-se uma malha de cálculo com espaçamento de 40 m. A topo-batimetria imposta procurou simular um trecho de rio ou estuário, onde existe um talvegue principal mais profundo e margens inundadas mais rasas.

Não foram consideradas áreas de inundação nestes testes. No Apêndice II estão listados os dados de entrada de batimetria e rugosidade utilizados nestas simulações.

Todos os testes foram realizados partindo-se de uma cota inicial do nível d'água igual a 12,00 m, correspondente a uma profundidade média de 3,5 m. Foi também admitido um coeficiente de rugosidade n de Manning constante para todos os pontos, igual a 0,025. O intervalo de tempo adotado para os cálculos foi de 20 s, que corresponde a um número de Courant igual a 3,0. O fator de implicidade também foi considerado constante para todos os testes e igual a 0,7. Com estes parâmetros, o grau de representação da onda $L/\Delta x$ é superior a 12.000, não se esperando amortecimentos ou defasagens importantes das ondas simuladas.

Foram simuladas quatro situações diferentes: a entrada de um afluente no canal, um obstáculo ao fluxo, um espigão de proteção de margem e uma ensecadeira.

a) Entrada de um Afluente

O estudo da entrada de um afluente num corpo d'água é

interessante porque permite a verificação da representação da difusão e da continuidade. Para este teste, a contribuição foi introduzida na forma de uma velocidade constante de 0,5 m/s nos pontos 18 a 22 da margem esquerda do canal. Nas extremidades leste e oeste foram admitidas condições de contorno do tipo nível d'água em função do tempo.

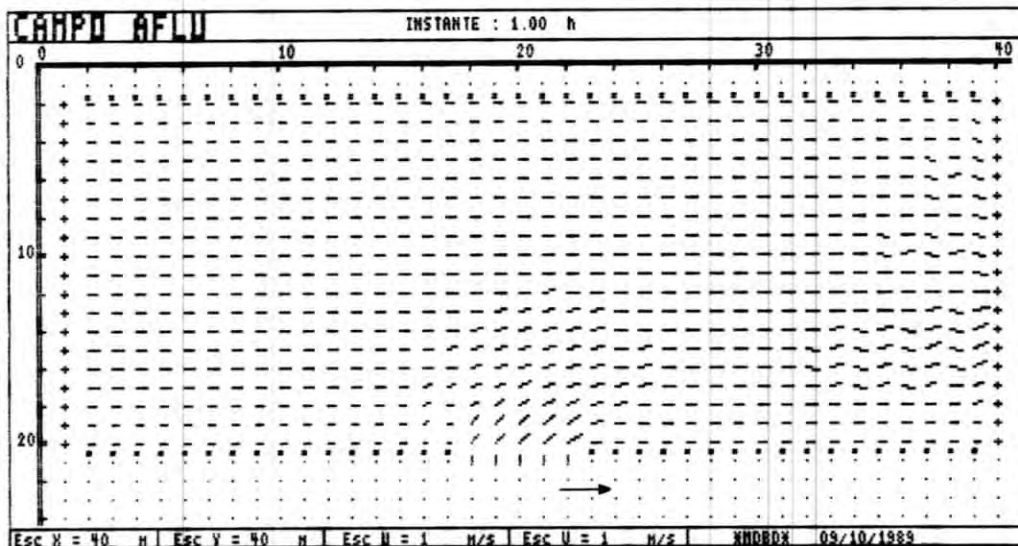
A simulação foi efetuada impondo-se inicialmente um tempo para estabilização do regime permanente de uma hora, definido em testes executadas de antemão, seguido de uma onda de maré típica. Na figura 5.2.1 pode-se observar o mapa de velocidades após o tempo para estabilização do regime permanente, notando-se que o escoamento é direcionado de leste para oeste.

A figura 5.2.2 mostra as linhas de mesmo nível d'água no mesmo instante, podendo-se visualizar a perda de carga no canal. Na figura 5.2.3 estão representados os limnigramas adotados como condição de contorno para esta simulação.

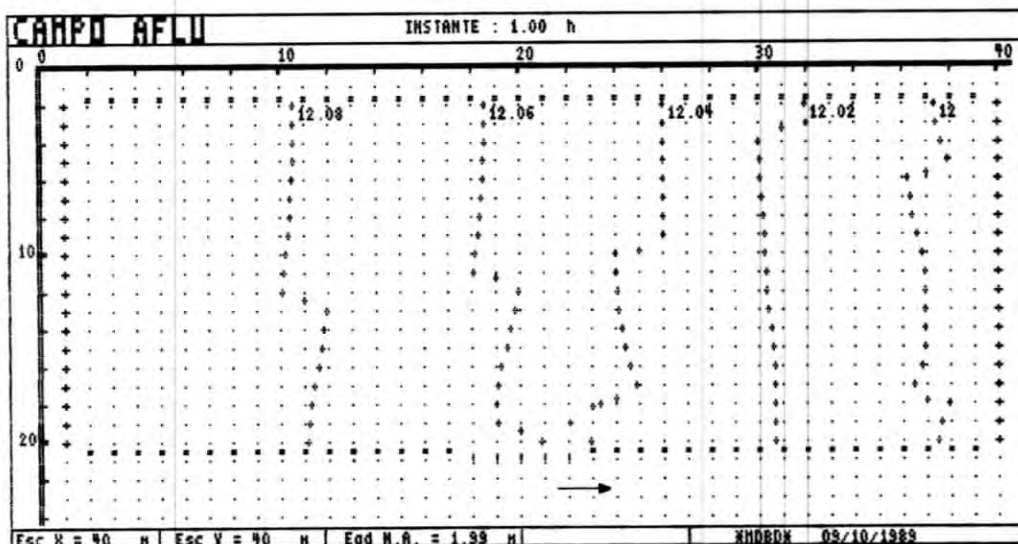
As vazões escoadas na seção da confluência e nas seções de extremidade estão apresentadas nas figuras 5.2.4 e 5.2.5, de onde se verifica o aumento na vazão da seção $X = 39$, devido a contribuição do afluente.

Os instantes das máximas velocidades coincidiram neste caso com o os picos da *preamar* e *baixamar*, notando-se ainda uma situação interessante no instante onde o nível d'água nas extremidades se equilibra, resultando o escoamento devido apenas a da contribuição do afluente. Os mapas de velocidade destes instantes estão indicados nas figuras 5.2.6 e 5.2.7, bem como o mapa do nível d'água na baixamar mínima (Figura 5.2.8).

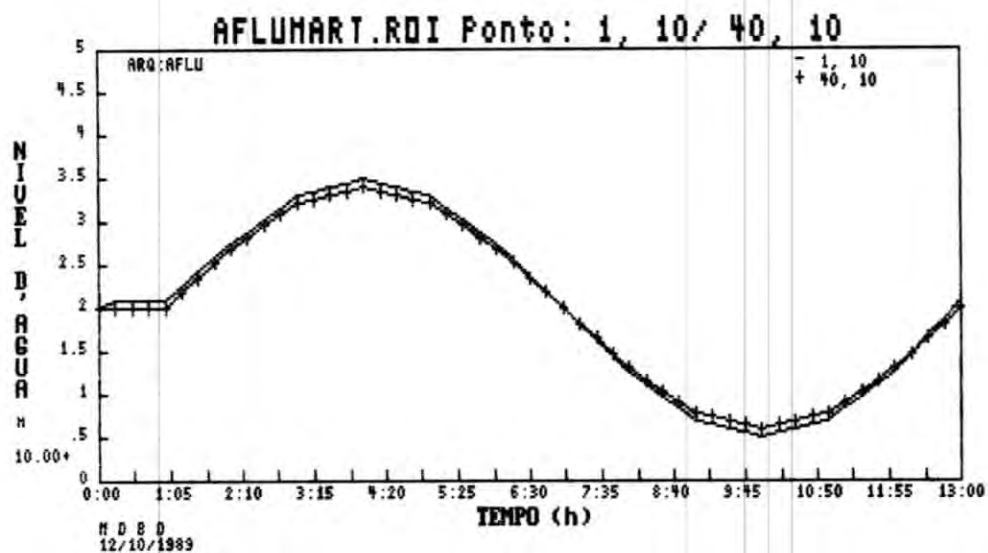
As velocidades não atingem em geral valores superiores a 0,5 m/s, mesmo junto a entrada do afluente. Na figura 5.2.9 pode-se observar o módulo e direção da velocidade no ponto (20,17), localizado nesta região.



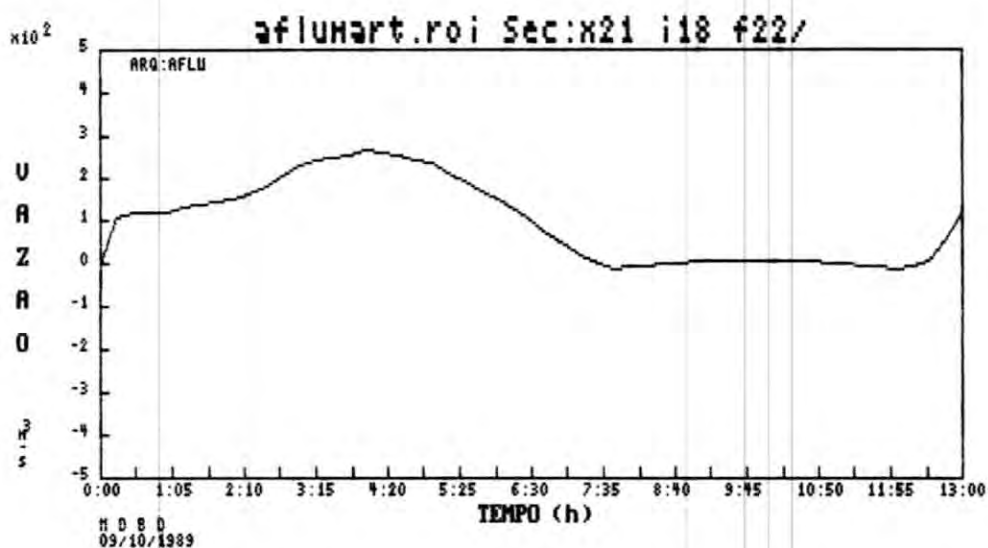
AFLUENTE
 MAPA DE VELOCIDADES - CONDIÇÃO INICIAL
 FIGURA 5.2.1



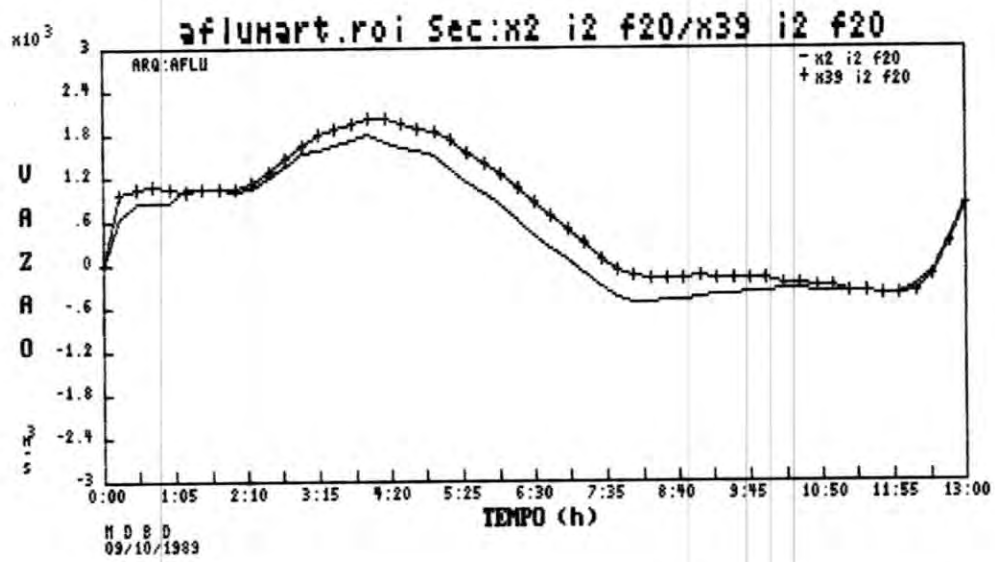
AFLUENTE
 MAPA DE NÍVEL D'ÁGUA - CONDIÇÃO INICIAL
 FIGURA 5.2.2



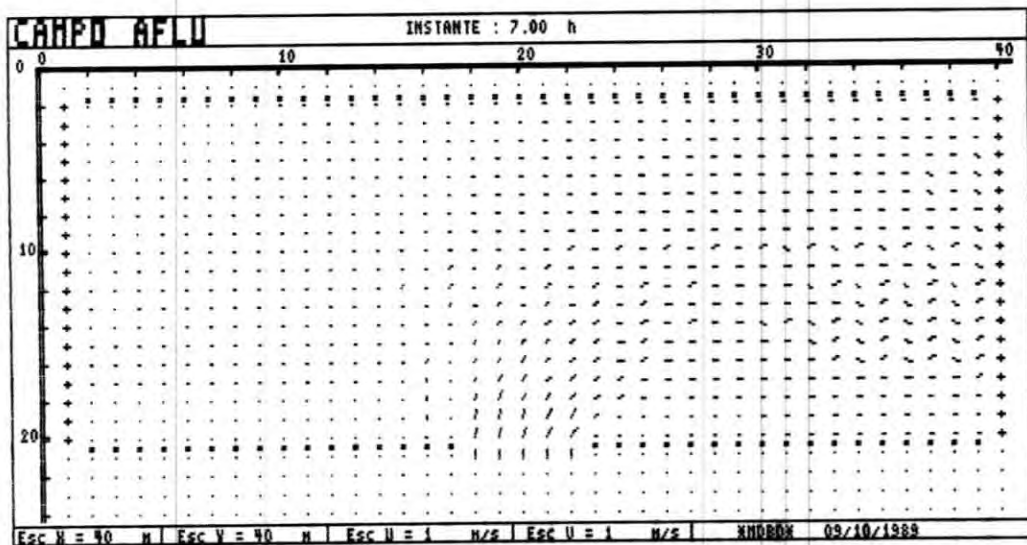
AFLUENTE
LIMNIGRAMAS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
FIGURA 5.2.3



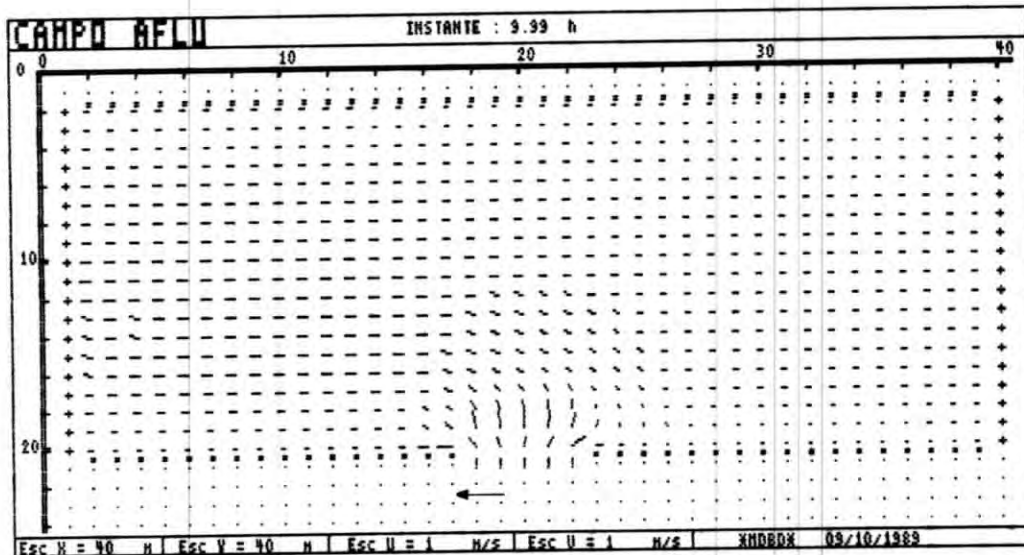
AFLUENTE
VAZÃO DO AFLUENTE
FIGURA 5.2.4



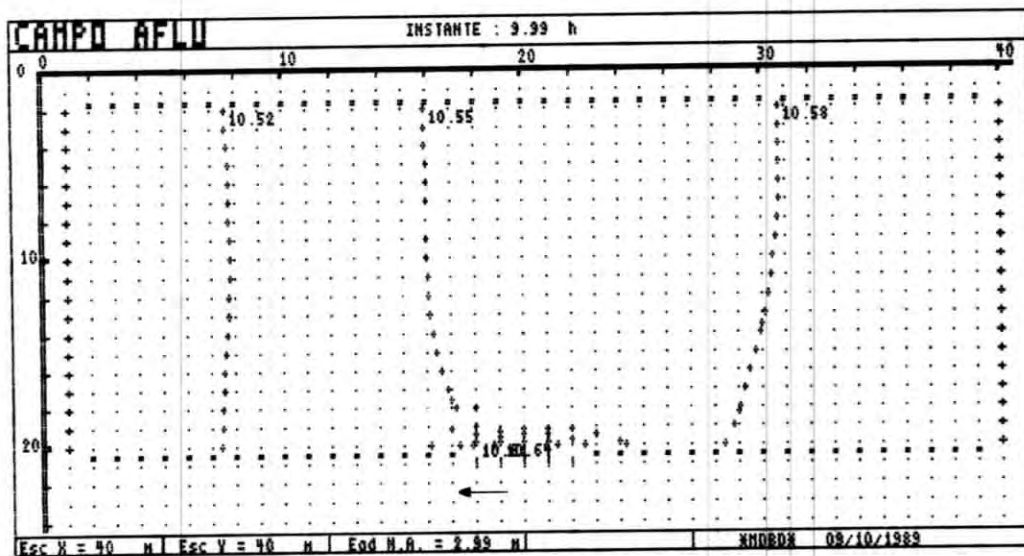
AFLUENTE
 HIDROGRAMAS NAS SEÇÕES DE EXTREMIDADE
 FIGURA 5.2.5



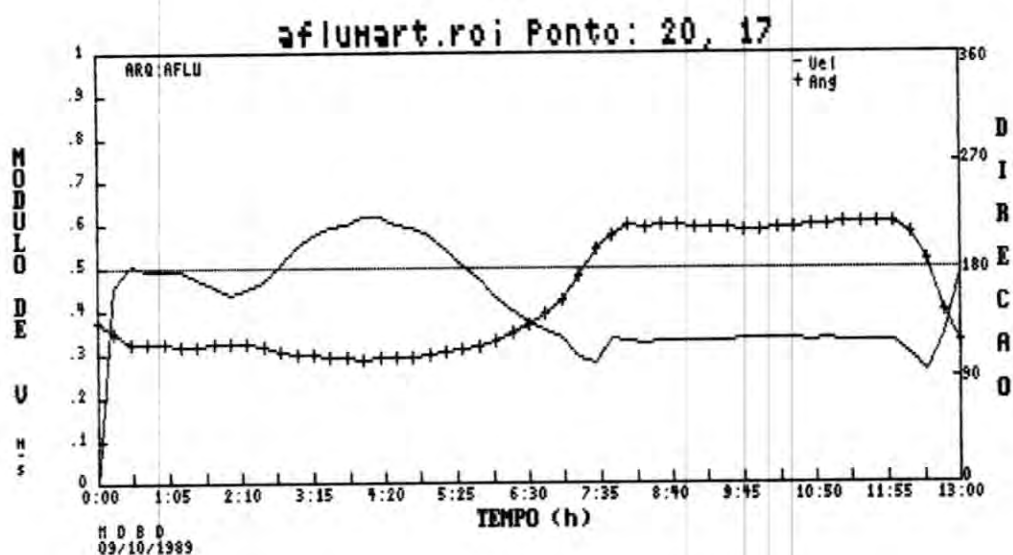
AFLUENTE
 EQUILIBRIO DE NIVEIS NAS EXTREMIDADES
 FIGURA 5.2.6



AFLUENTE
 VELOCIDADES MÁXIMAS - NÍVEL MÍNIMO
 FIGURA 5.2.7



AFLUENTE
 NÍVEIS D'ÁGUA - NÍVEL MÍNIMO
 FIGURA 5.2.8



AFLUENTE
MÓDULO E DIREÇÃO DA VELOCIDADE NO PONTO (20,17)

FIGURA 5.2.9

b) Obstáculo

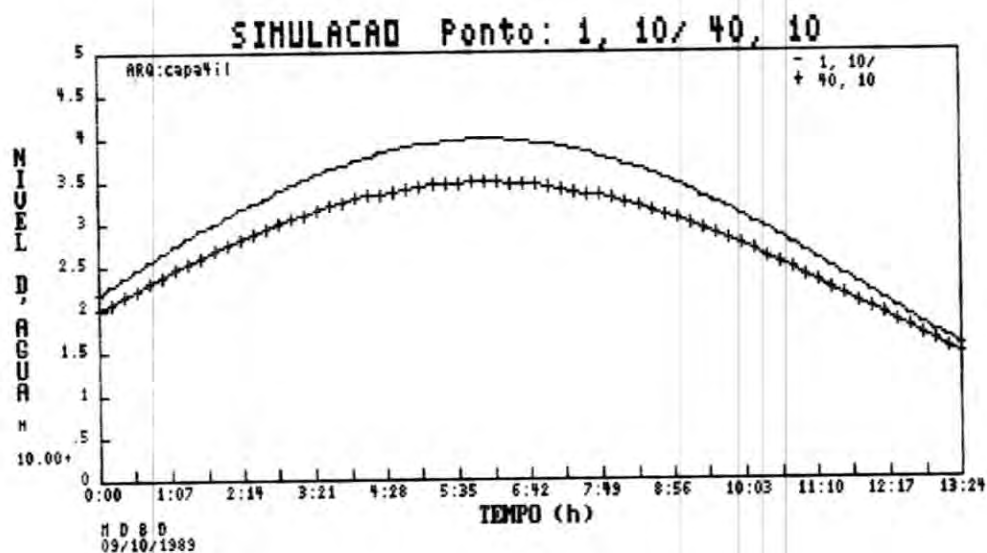
O fluxo ao redor de um obstáculo, como por exemplo uma ilha, pode ser estudado para a determinação da partição de vazão entre os canais que se formam e análise das perturbações que ocorrem a montante ou jusante. Para tanto, foi introduzido no canal padrão utilizado acima um obstáculo em forma de uma ilha e simulada a passagem de uma cheia representada pelo hidrograma da figura 5.2.10.

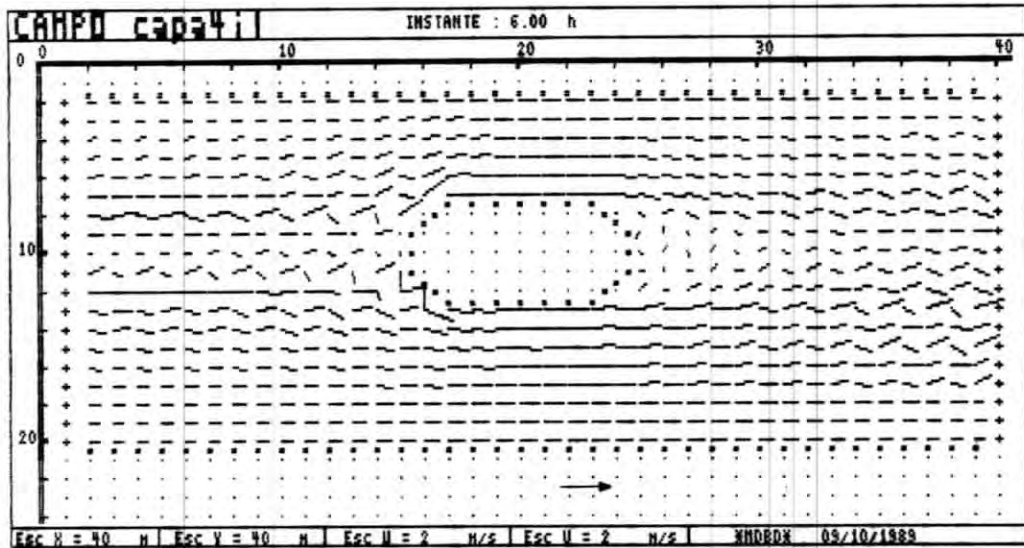
Na figura 5.2.11 observa-se o mapa de velocidades obtido para o instante de nível e vazão, onde se nota a esteira formada a jusante da ilha, e ainda as perturbações a montante. Na extremidade oeste do canal observa-se também uma alternância das direções das velocidades. Estas perturbações, descritas por ABBOTT (1979) como *zig-zag* das velocidades, são ocasionadas pela má discretização temporal do fenômeno, devido ao uso de malhas ortogonais, e ainda pela forma de introdução da condição de contorno.

A figura 5.2.16 mostra os hidrogramas nas seções de extremidade, onde se nota uma pequena defasagem entre as seções de leste e oeste. Na figura 5.2.13, os hidrogramas escoados nos dois canais formados pela ilha indicam uma maior vazão pelo canal direito (no sentido do escoamento), que apresenta também maiores profundidades e velocidades.

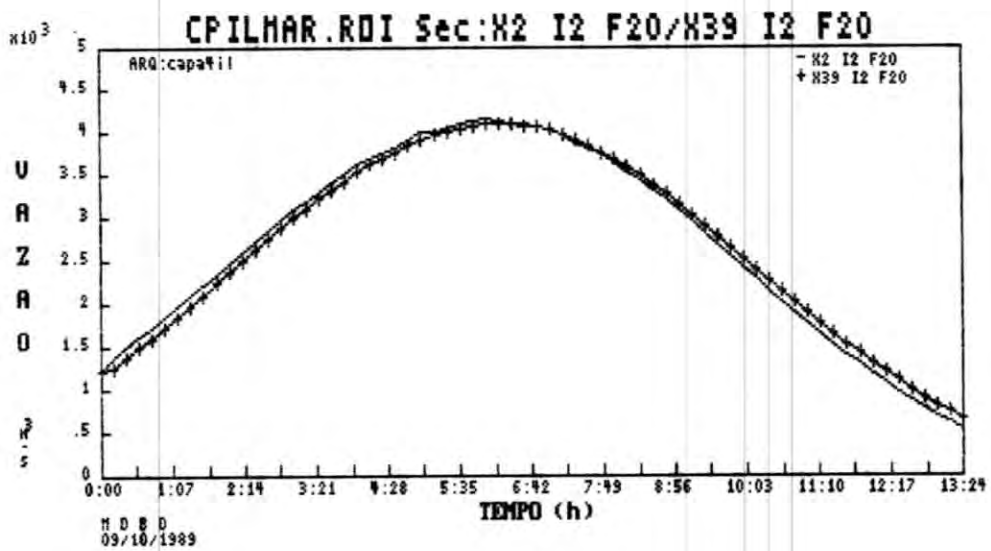
A perda de carga devido ao obstáculo pode ser observada na figura 5.2.14, notando-se que o gradiente de linha d'água é maior no canal direito, sendo as curvas de igual nível d'água mais concentradas. Este resultado é compatível ao esperado uma vez que o canal direito além de mais estreito, tem menores profundidades.

As velocidades nos pontos influenciados pelo obstáculo apresentam variação de módulo e direção ao longo da cheia, como se observa na figura 5.2.15. Através da figura 5.2.16 pode se observar a diferença entre as velocidades na direção X, de dois pontos localizados sob um mesmo eixo longitudinal do canal ($y = 10$), sendo um a montante e outro a jusante do obstáculo.

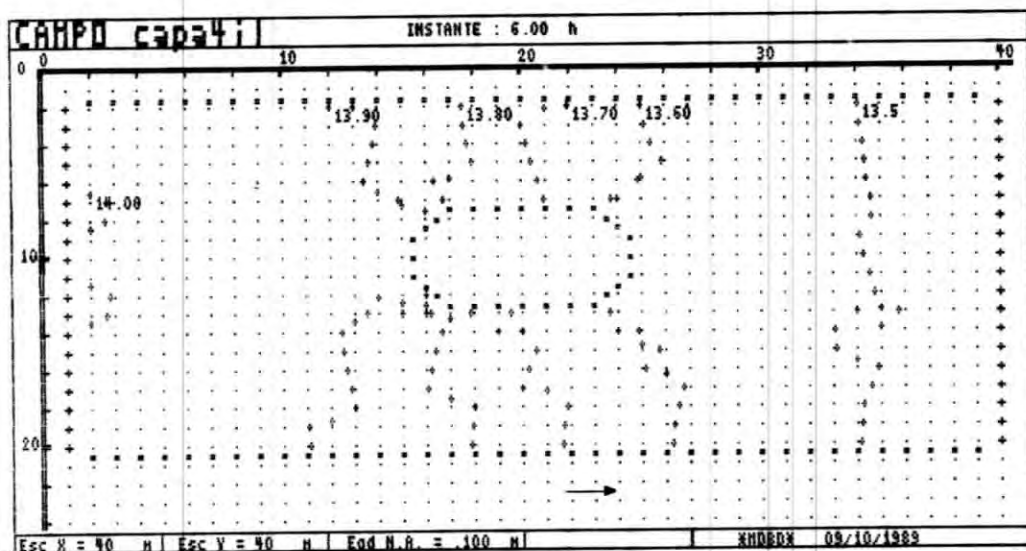
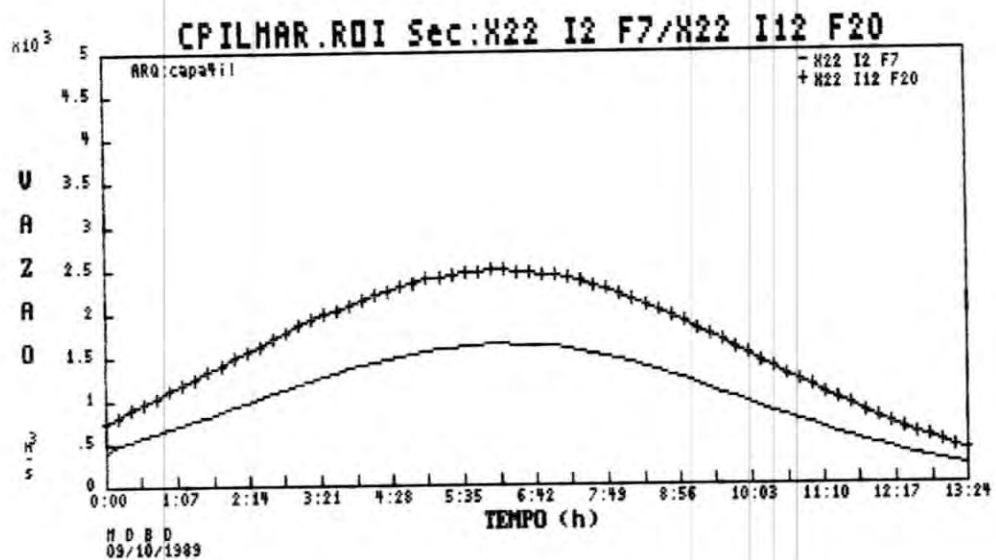


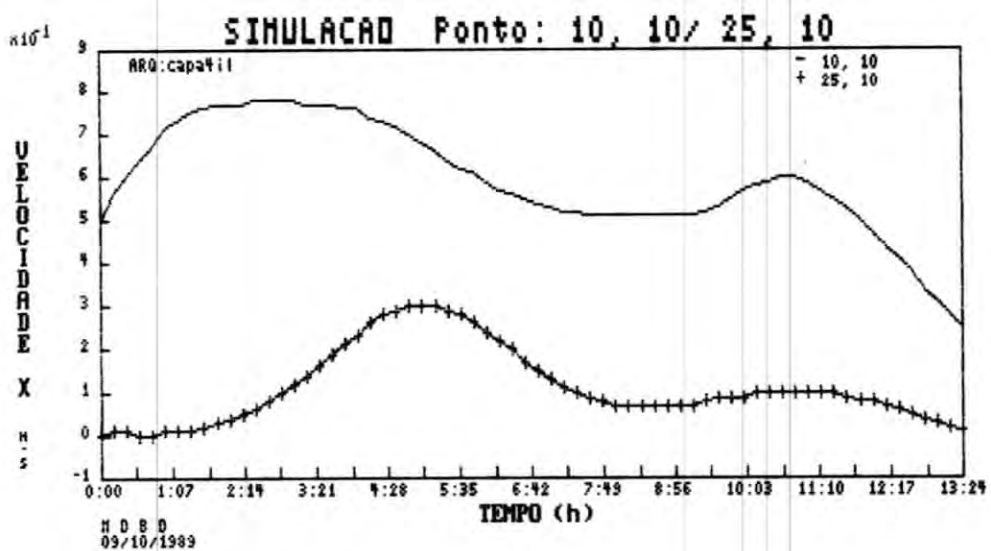
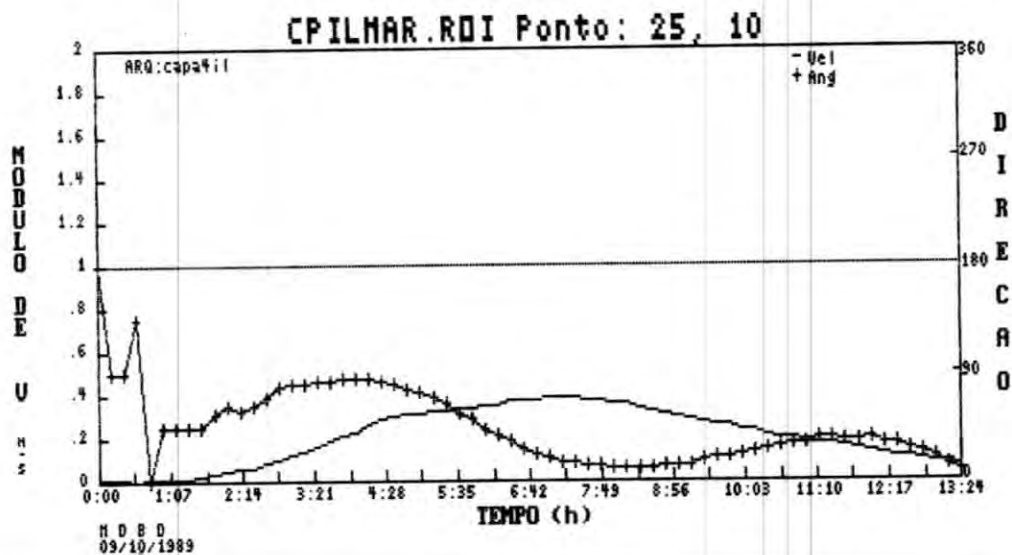


OBSTÁCULO
 MAPA DE VELOCIDADES - NÍVEIS E VAZÕES MÁXIMOS
 FIGURA 5. 2. 11



OBSTÁCULO
 HIDROGRAMAS NAS SEÇÕES DE EXTREMIDADE
 FIGURA 5. 2. 12





c) Espigão de Proteção de Margens e Ensecadeira

Os efeitos de um espigão de proteção de margens ou de uma ensecadeira podem ser estudados através do modelo para determinação de sua eficiência bem como das velocidades junto aos pontos críticos do maciço. Estes testes são importantes para verificação da estabilidade numérica do modelo quando apenas alguns pontos são submetidos a velocidades elevadas, como é o caso destas obras.

Um espigão de largura 40 m foi introduzido no canal padrão utilizado para estes testes, obedecendo aos critérios de representação indicados em 4.3.1, ou seja, o talude do espigão é suposto simplesmente vertical.

Na figura 5.2.17 pode-se observar a geometria imposta para o espigão, juntamente com o mapa de velocidades após transcorrida a primeira hora de simulação, destinada a estabilização de uma condição de regime permanente, de acordo com as condições de contorno fornecidas nas extremidades (Figura 5.2.18).

Nas figuras 5.2.19 e 5.2.20 encontram-se os mapas das velocidades e níveis para o instante de nível máximo, de onde se pode observar a zona de proteção proporcionada pelo espigão e a perda de carga introduzida pelo mesmo no escoamento.

As velocidades críticas localizam-se na extremidade do espigão, sendo praticamente nulas na zona de proteção, como se pode depreender das figuras 5.2.21 e 5.2.22.

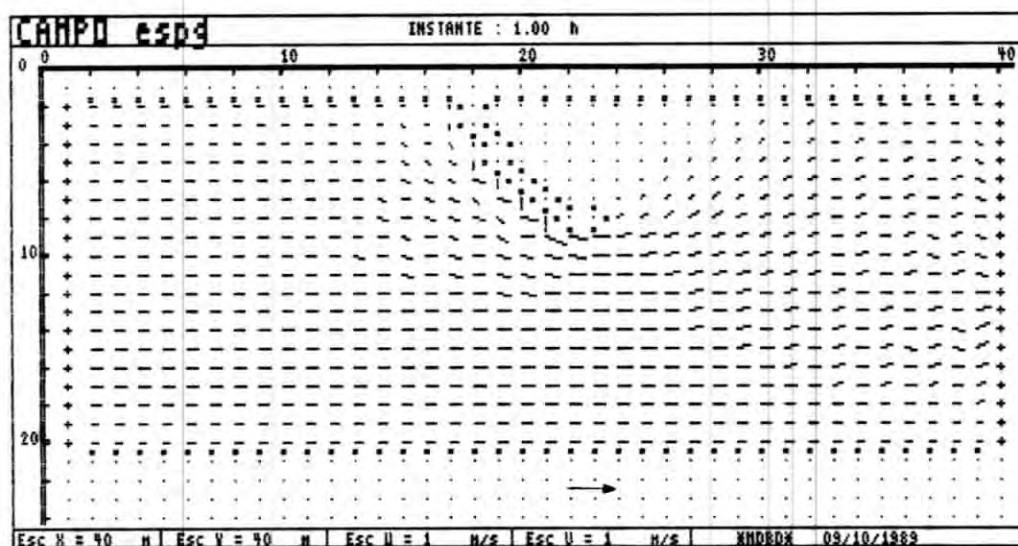
As figuras 5.2.23 e 5.2.24 apresentam os mapas de velocidades e níveis no instante 11,9 horas, correspondente ao nível mínimo da maré hipotética simulada, de onde se pode verificar que a proteção do espigão, com o escoamento em sentido contrário, é bem menor.

Na figura 5.2.25 observa-se o hidrograma pela seção $X = 22$, de onde se conclui que a vazão máxima atingiu aproximadamente 1700 m³/s, valores este também obtido como vazão máxima na seção mais a

leste do exemplo apresentado no item a. Como os dois exemplos utilizaram-se da mesma condição de contorno, pode-se concluir portanto que o espigão não introduziu uma perda de carga considerável no trecho em estudo.

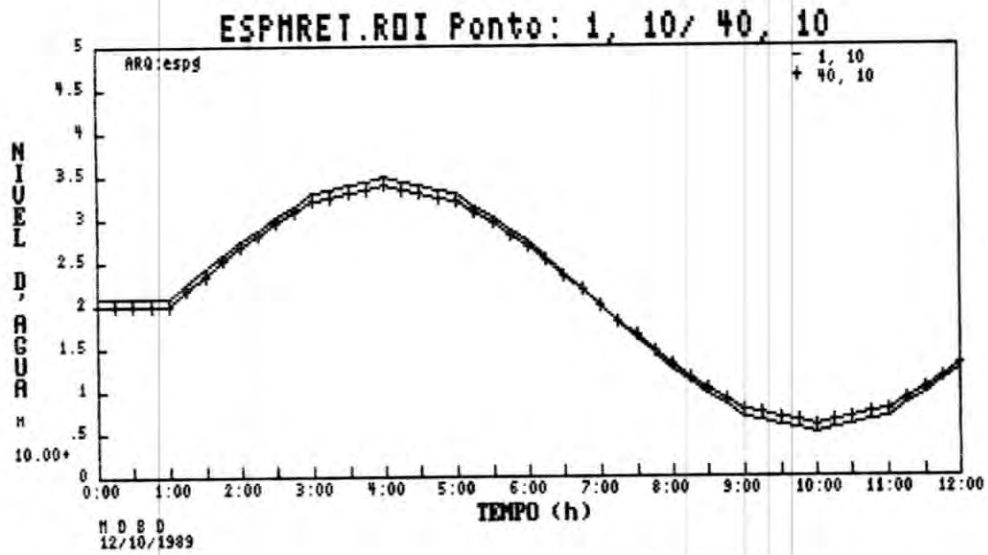
O efeito de uma ensecadeira numa das margens pode ser analisado de forma semelhante ao do espigão. As figuras 5.2.26 a 5.2.29 representam as condições de contorno, hidrogramas, mapas de velocidade e nível d'água para esta situação.

Em ambos os casos pode ser observado no mapa de velocidades uma distorção da velocidade V nos contornos tipo terra-água do espigão e da ensecadeira. Esta distorção ocorre devido ao modo como esta condição é introduzida, impondo-se a velocidade U nula no ponto.

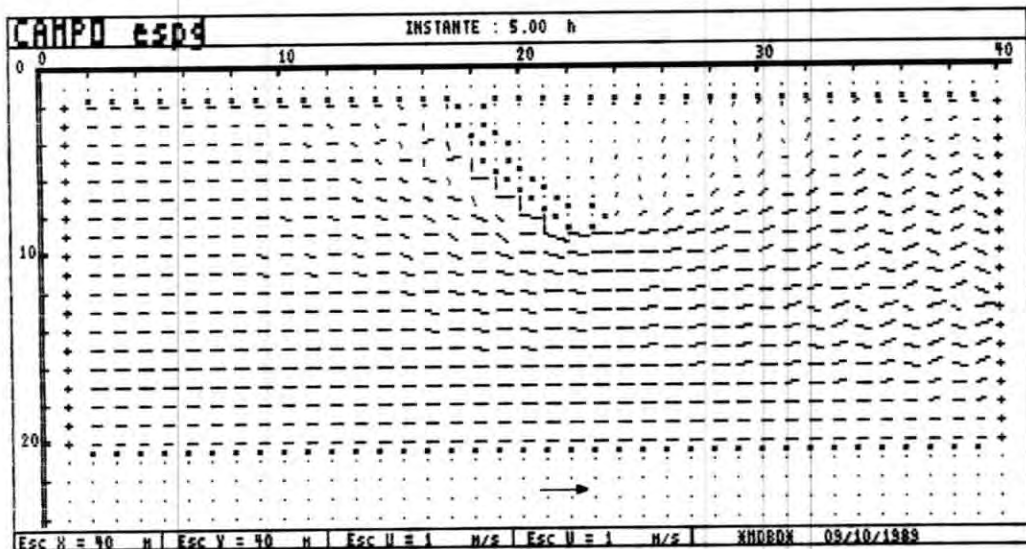


ESPIGÃO
MAPA DE VELOCIDADES - CONDIÇÃO INICIAL

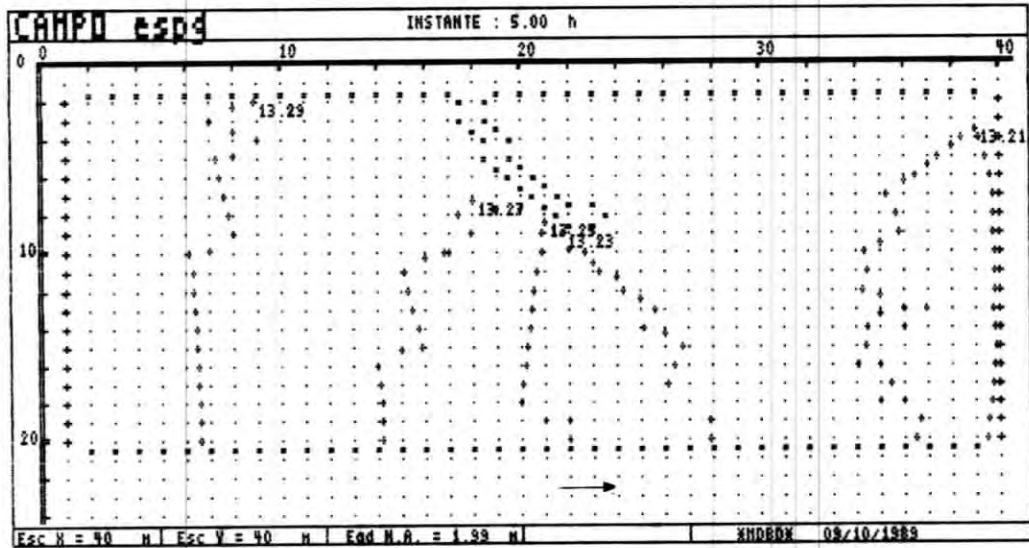
FIGURA 5. 2. 17



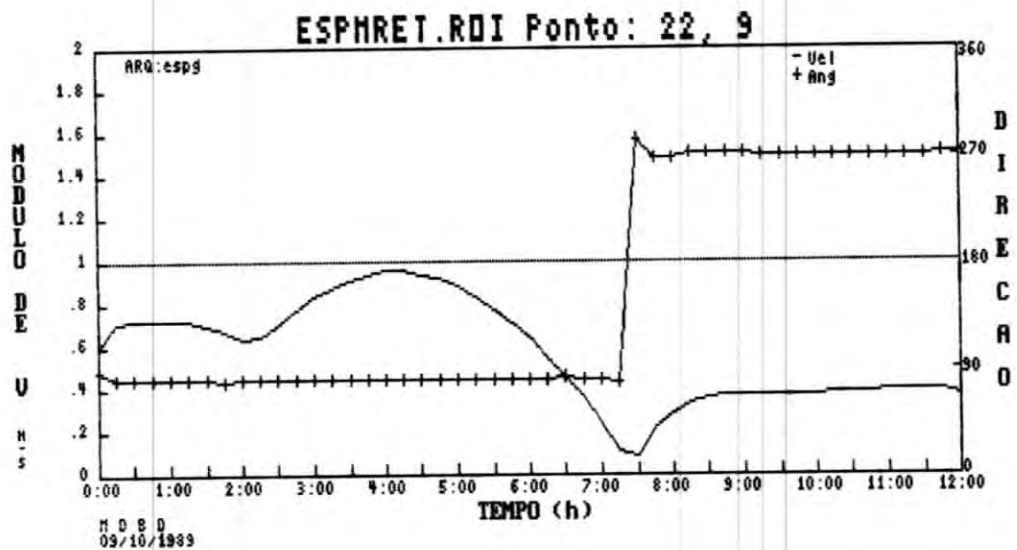
ESPIGAO
LIMNIGRAMAS DA CONDIÇÃO DE CONTORNO
FIGURA 5. 2. 18



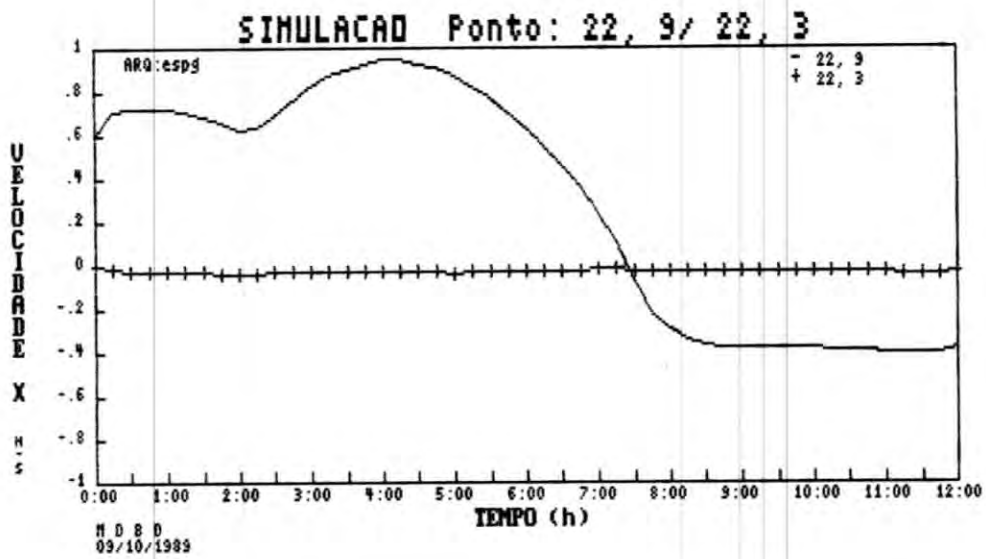
ESPIGAO
MAPA DE VELOCIDADES - NÍVEIS E VAZÕES MÁXIMOS
FIGURA 5. 2. 19



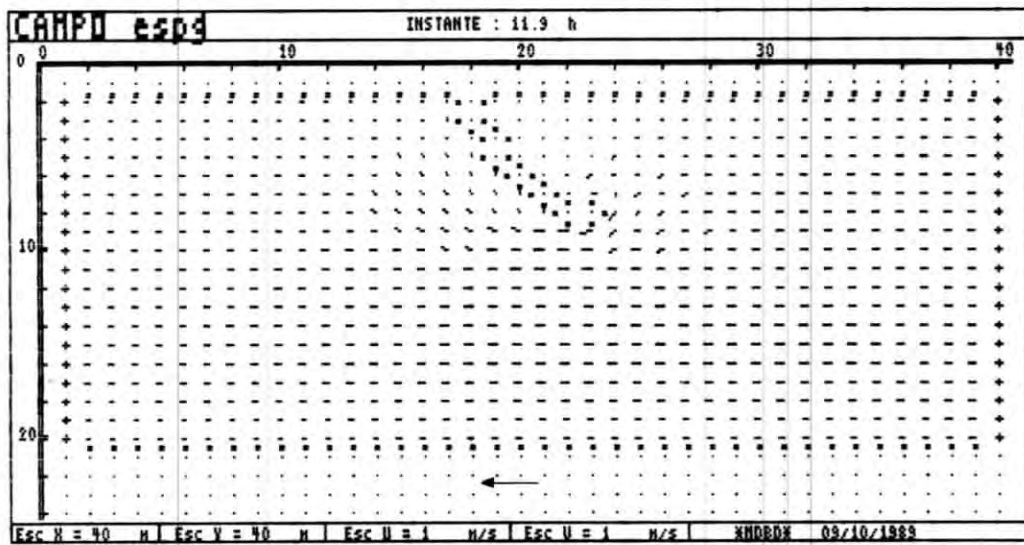
ESPIGÃO
 MAPA DE NÍVEIS D'ÁGUA - NÍVEIS E VAZÕES MÁXIMOS
 FIGURA 5. 2. 20



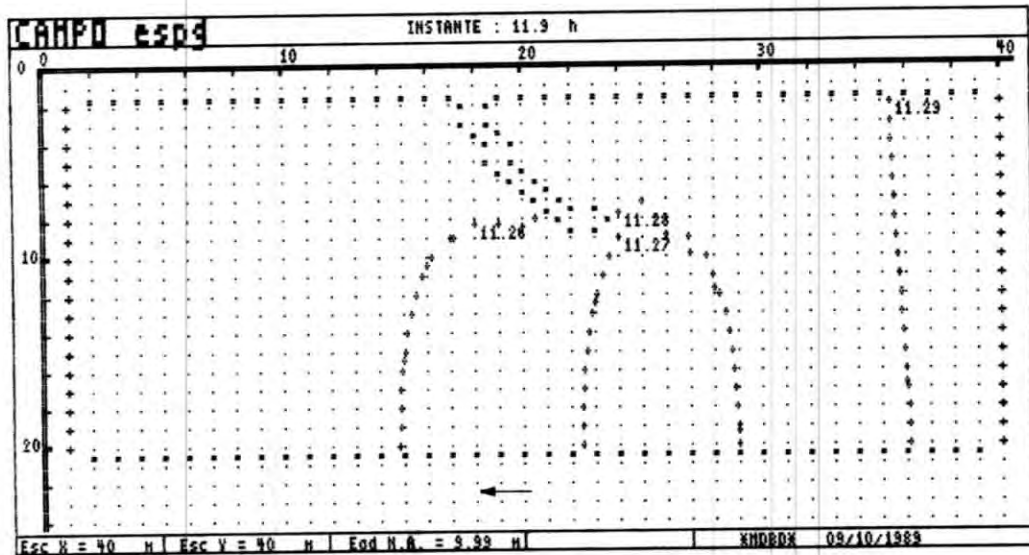
ESPIGÃO
 VELOCIDADE NA CABEÇA DO ESPIGÃO
 FIGURA 5. 2. 21



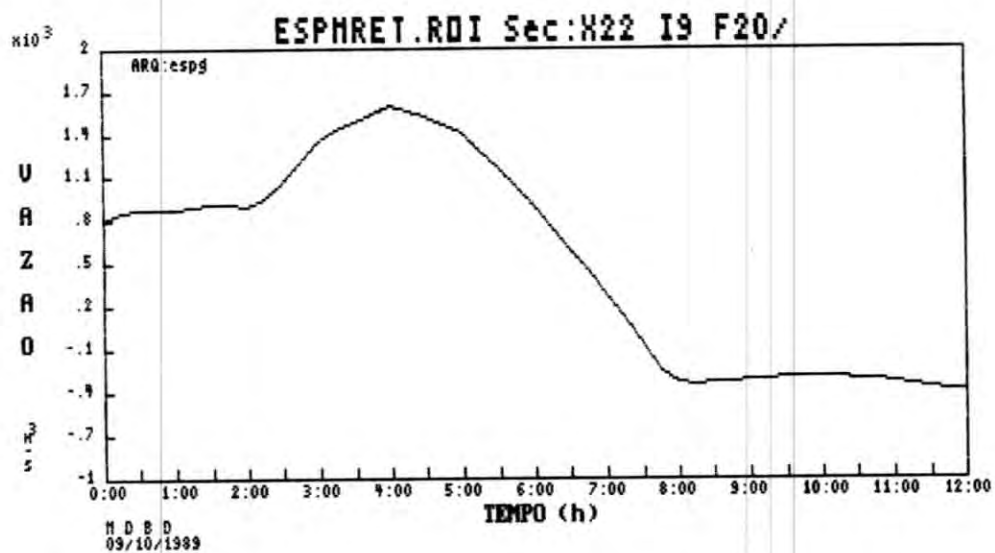
ESPIGÃO
VELOCIDADES NA DIREÇÃO X - PONTOS (22,9) E (22,3)
FIGURA 5. 2. 22



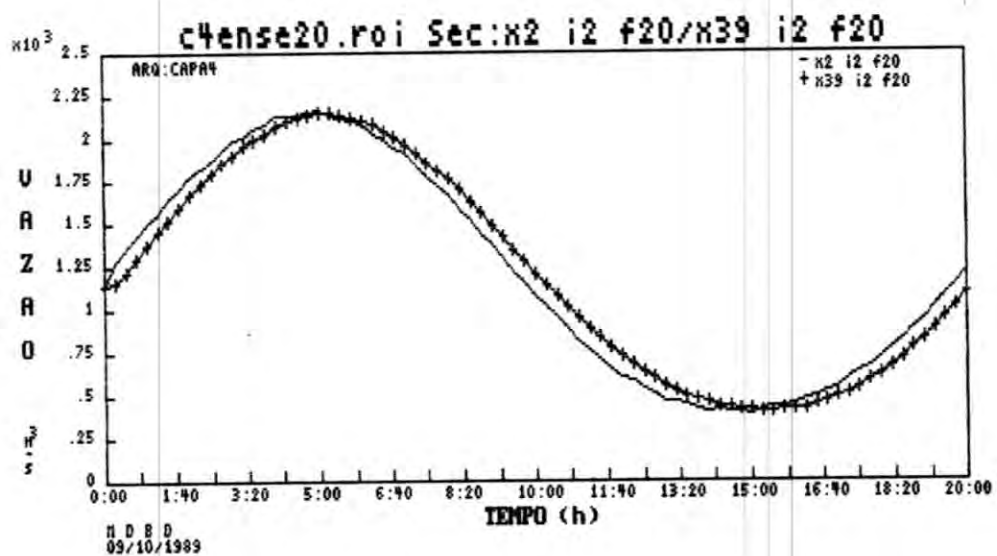
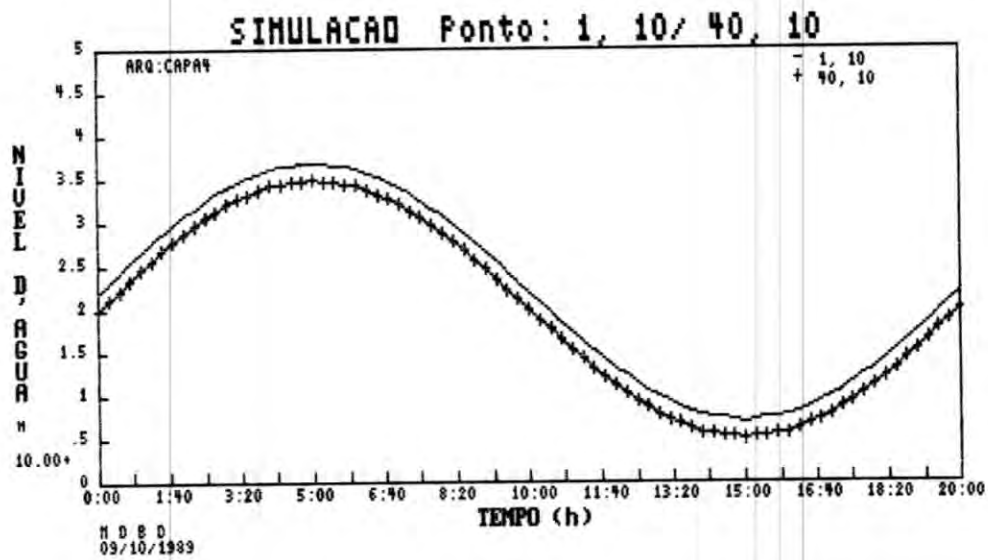
ESPIGÃO
MAPA DE VELOCIDADES APÓS A INVERSÃO DO SENTIDO DE FLUXO
FIGURA 5. 2. 23

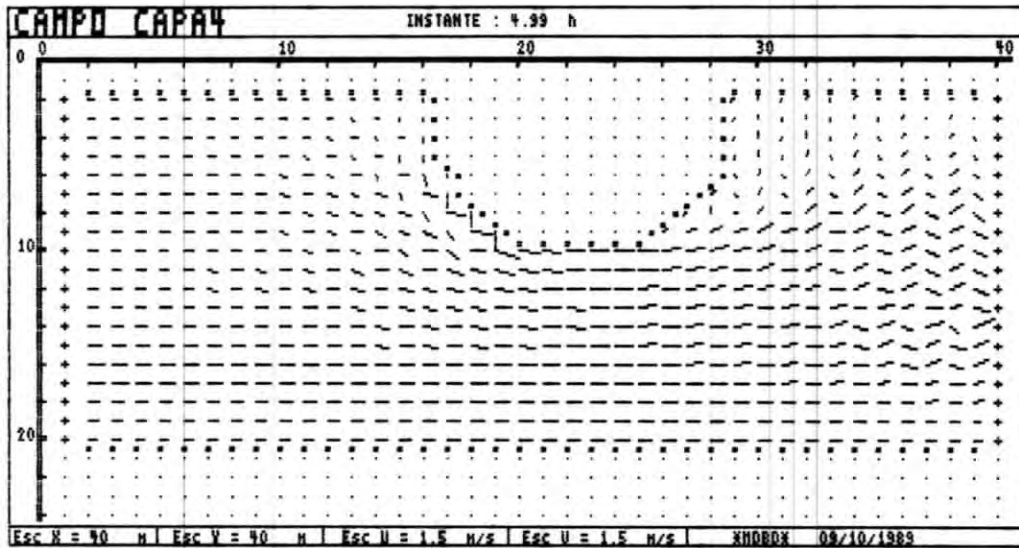


ESPIGAO
MAPA DE NÍVEIS D'ÁGUA - ESPIGAO COM FLUXO EM SENTIDO CONTRÁRIO
FIGURA 5. 2. 24

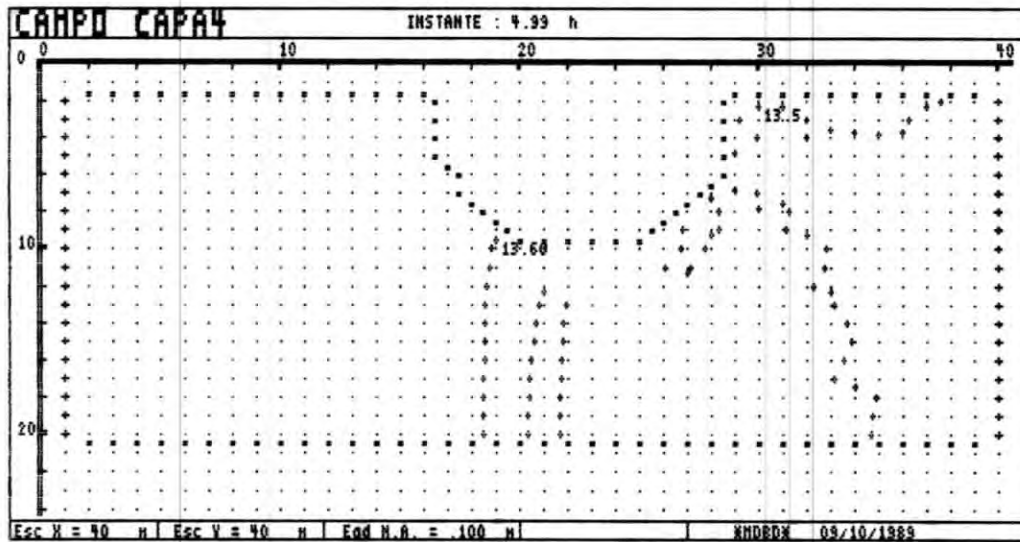


ESPIGAO
HIDROGRAMA - SEÇÃO DO ESPIGAO
FIGURA 5. 2. 25





ENSECADEIRA
MAPA DE VELOCIDADES - INSTANTE DE NÍVEL MÁXIMO
FIGURA 5. 2. 28



ENSECADEIRA
MAPA DE NÍVEIS D'ÁGUA - INSTANTE DE NÍVEL MÁXIMO
FIGURA 5. 2. 29

5.2.2 Comparações

Para comparação, foi utilizado o modelo misto proposto por LEENDERTSE (1967), apresentado no item 3.2. As equações utilizadas para o cálculo foram desenvolvidas computacionalmente e programadas em linguagem basic. Estas equações estão apresentadas no Apêndice III.

Inicialmente foi utilizado para comparação o mesmo canal padrão do item anterior, onde tentou-se simular a condição indicada figura 5.2.30. Os limnigramas desta figura representam a simulação utilizada no item anterior para obtenção da condição inicial de regime permanente.

O modelo de LEENDERTSE não permitiu a simulação do canal representado na figura 5.2.31, para o intervalo de tempo de 20s, adotado em todos os exemplos do item anterior, nem para intervalos sucessivamente menores até a unidade. Em todos os testes, a marcha de cálculo foi interrompida devido a amplificação exagerada das velocidades.

A figura 5.2.32 apresenta uma comparação das velocidades determinadas pelo modelo implícito MDBD e pelo modelo de LEENDERTSE, para intervalo de tempo de cálculos igual a 20 s. Observa-se através deste gráfico a perda de convergência devido a instabilidade numérica do esquema de diferenças adotado por LEENDERTSE, para esta situação de número de Courant (3,0) e $L/\Delta x$.

A adoção de intervalos de tempo menores que a unidade demandaria grande tempo de processamento, incompatível com a aplicação em microcomputadores, além de aumentar a propagação dos erros de truncamento. Verifica-se que para aplicações detalhadas como as apresentadas acima, o modelo explícito de LEENDERTSE não é recomendável.

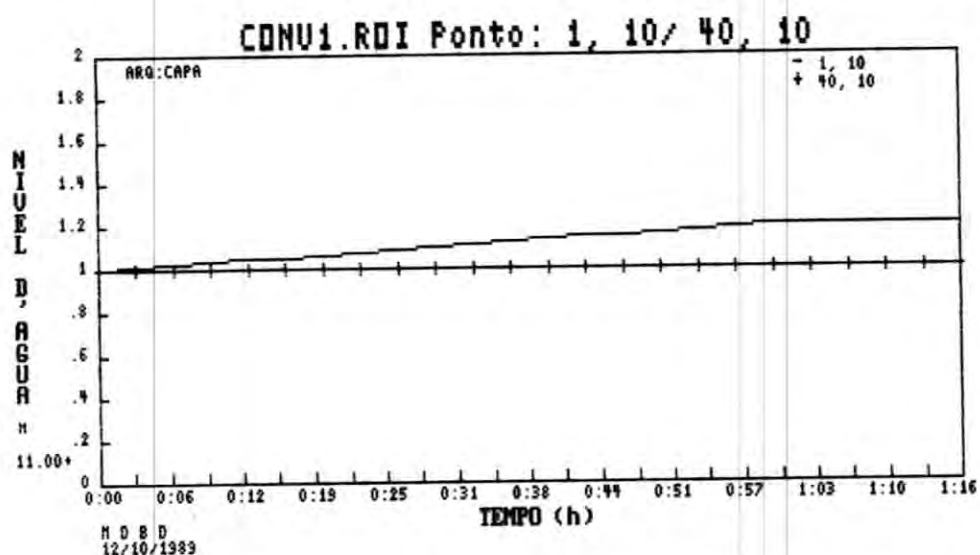
Para fins de comparação, os dados do estuário do Rio Reno, apresentados no trabalho original de LEENDERTSE, foram processados

através dos dois modelos. No estudo original foi utilizada uma malha de 400 m de espaçamento e um intervalo de tempo de cálculo de 180 s. Para o cálculo agora realizado, foram utilizados os mesmos dados batimétricos e de rugosidade, que se encontram listados no Apêndice III.

O passo de tempo adotado foi de 90 s, e as condições de contorno foram ligeiramente simplificadas, adotando-se um nível comum para os pontos nas seções $X = 1$, $Y = 31$ e $X = 55$. Os limnigramas adotados estão apresentados na figura 5.2.33.

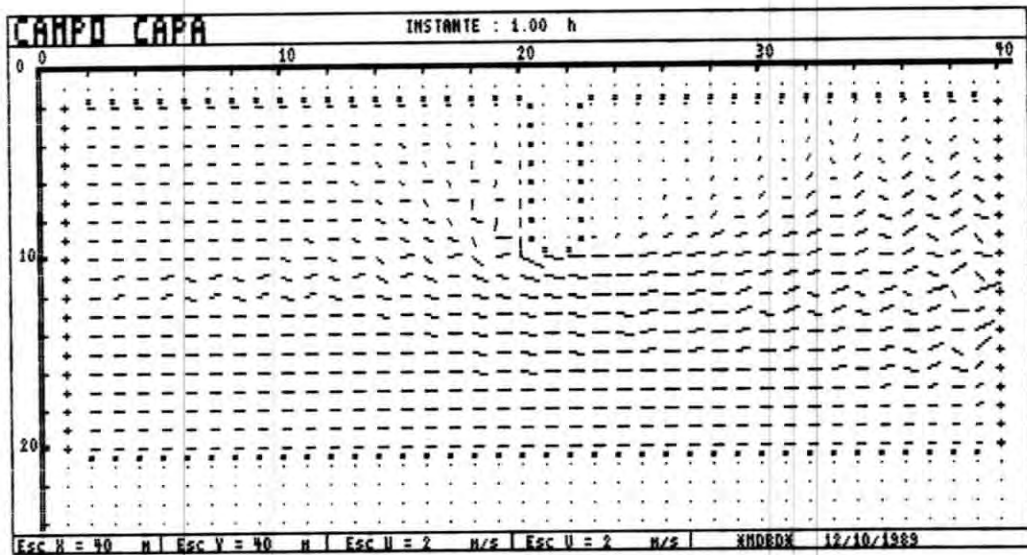
As figuras 5.2.34 e 5.2.35 mostram mapas de velocidades obtidos através do modelo implícito MDD, em instantes característicos da enchente e vazante. A figura 5.2.36 dá uma idéia dos níveis d'água no estuário, num instante da vazante, observando-se que a conformação das linhas de mesmo nível dá uma idéia da propagação da onda de vazante.

A figura 5.2.37 apresenta a comparação de velocidades pontuais calculadas através dos dois modelos, e a figura 5.2.37 mostra a comparação das vazões calculadas, na seção $Y = 2$, de onde se conclui a compatibilidade dos resultados.



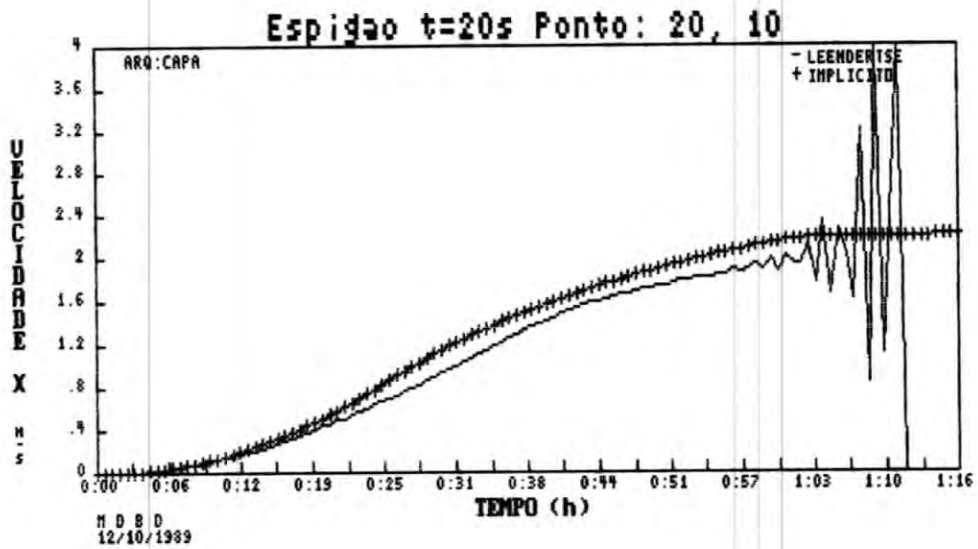
CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OBTENÇÃO DO REGIME PERMANENTE

FIGURA 5.2.30



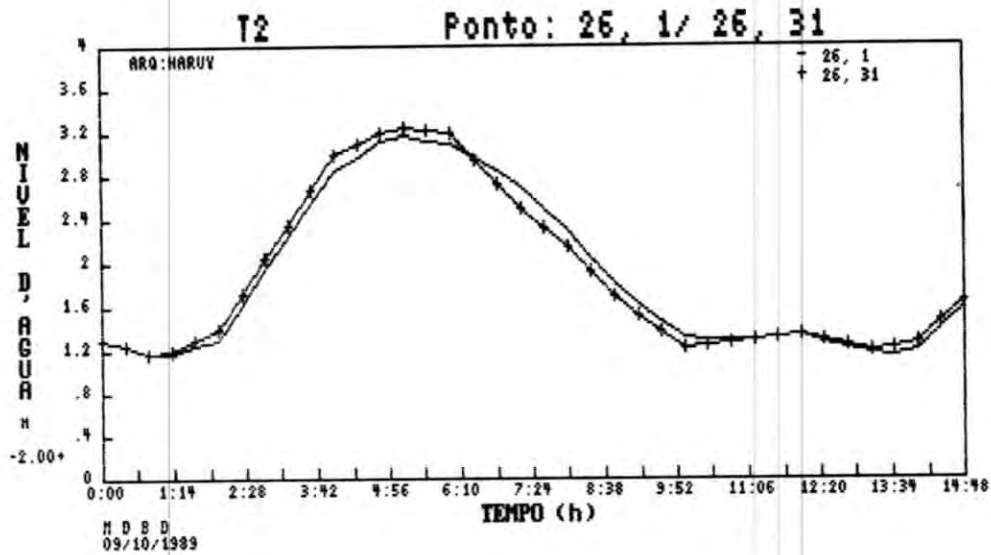
GEOMETRIA DO CANAL DE TESTE

FIGURA 5. 2. 31



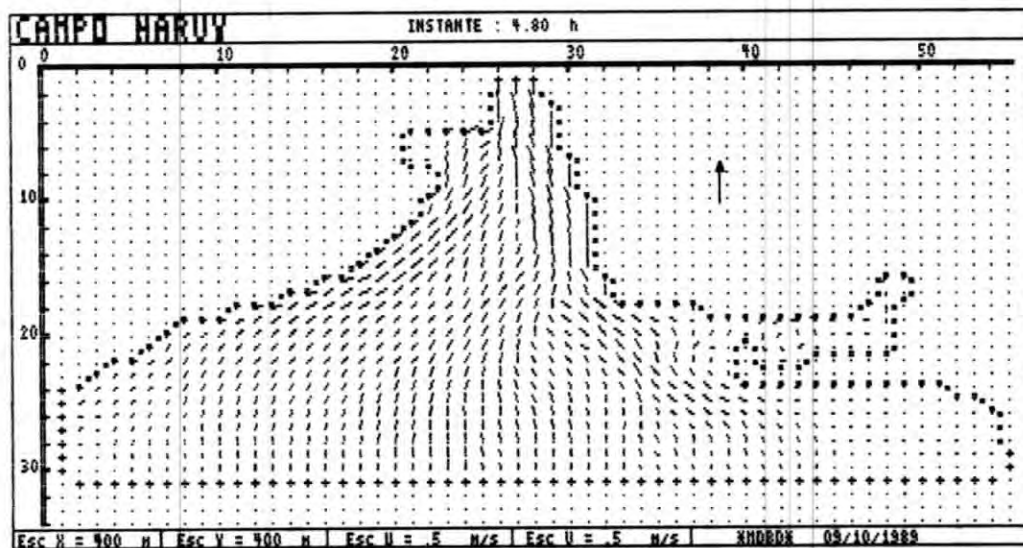
VELOCIDADES CALCULADAS NOS DOIS MODELOS

FIGURA 5. 2. 32



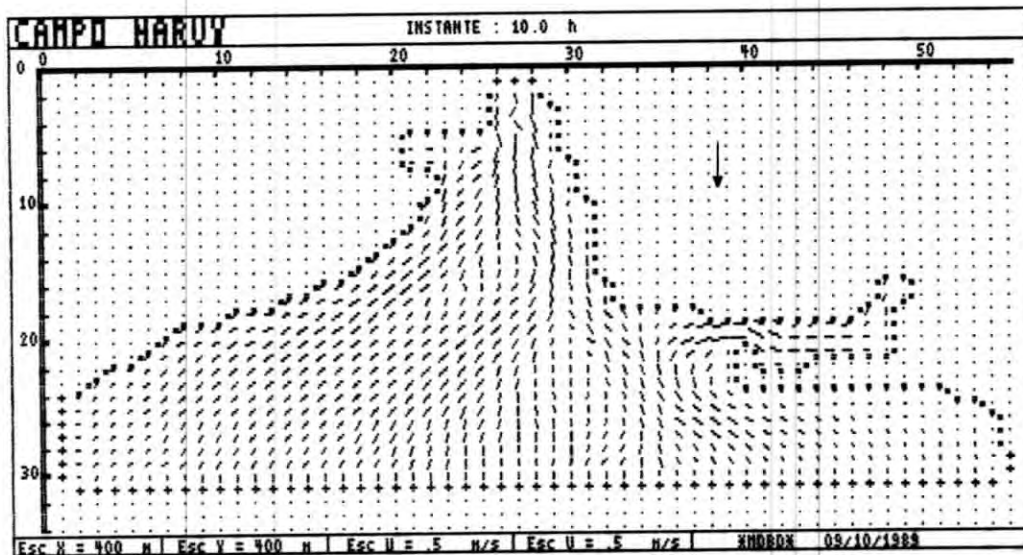
CONDIÇÕES DE CONTORNO FORNECIDAS - EST. RHENO (LEENDERTSE, 1967)

FIGURA 5. 2. 33



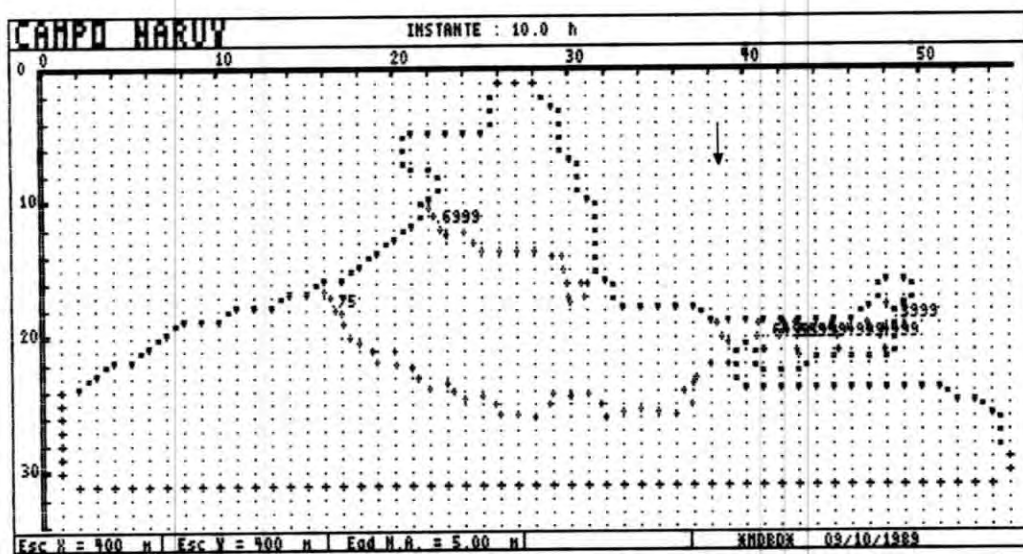
MAPA DE VELOCIDADES - NIVEL MAXIMO - ENCHENTE

FIGURA 5. 2. 34



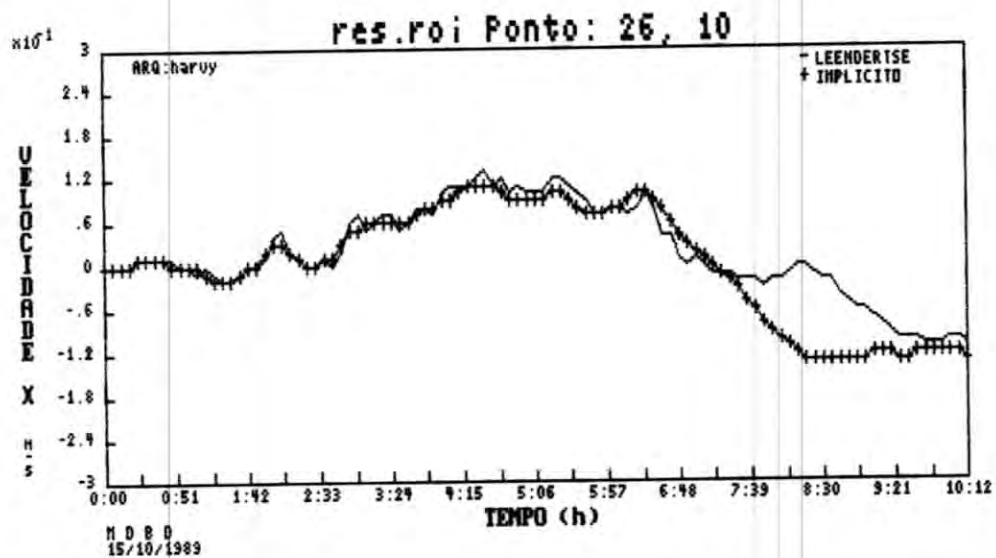
MAPA DE VELOCIDADES - NÍVEL MÍNIMO - VAZANTE

FIGURA 5.2.35



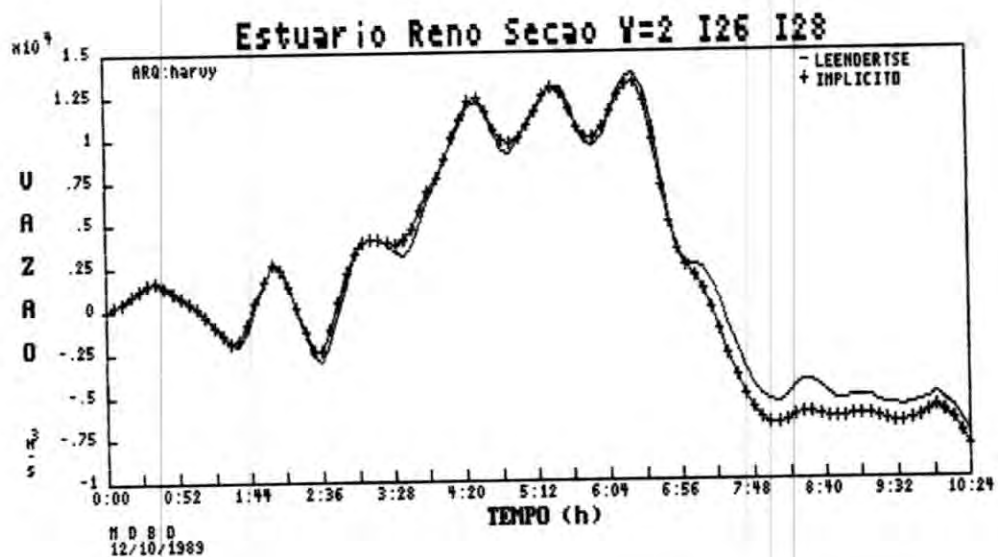
NÍVEIS D'ÁGUA - VAZANTE

FIGURA 5.2.36



VELOCIDADES CALCULADAS NOS DOIS MODELOS

FIGURA 5. 2. 37



VAZÕES CALCULADAS NOS DOIS MODELOS - SEÇÃO Y = 2

FIGURA 5. 2. 38

6 CONCLUSÕES

A modelação do escoamento hidrodinâmico bidimensional quase-horizontal pode ser realizada através de modelos implícitos sem grande sacrifício do intervalo de tempo de cálculo.

Os exemplos apresentados no Capítulo 5 indicam que muitos estudos hidráulicos podem ser desenvolvidos com o auxílio destes modelos, principalmente se os mesmos estiverem associados a um software que permita a organização e apresentação dos resultados de forma concisa.

O modelo implícito apresentado tem estabilidade e acuracidade determinadas em função dos parâmetros R_c , θ e $L/\Delta x$, sendo incondicionalmente estável e não apresentando dispersão das ondas numéricas se $\theta \geq 0,5$.

Os exemplos utilizados para exploração do modelo indicam que a forma de consideração das condições de contorno e dos termos de rugosidade quando a profundidade é pequena tem influência nos resultados, devendo ser investigadas outras formas através de exemplos reais.

A comparação entre os resultados do modelo MDBD e aqueles obtidos através do modelo misto de LEENDERTSE (1967) mostra uma total compatibilidade entre os mesmos, tanto em amplitudes como em fase da onda.

Os testes numéricos mostram alguns aspectos que necessitam ser pesquisados, na sequência do desenvolvimento desta técnica de modelação. Os principais aspectos levantados são citados a seguir.

1. Representação do termo de atrito, que no modelo proposto é calculado diretamente através das velocidades e da rugosidade do ponto. Outras formas podem ser verificadas, como a utilização da rugosidade média ao redor do ponto onde a profundidade é definida, ou ainda a utilização de outra definição para o termo de atrito, através da teoria da turbulência.
2. Definição da condição de contorno tipo *terra-água*, que no modelo proposto provoca distorção nas velocidades junto aos contornos fixos como no exemplo do espigão e da ensecadeira. Esta definição está associada à forma de cálculo das diferenciais junto aos contornos.
3. Simulação de casos reais que necessitem de calibração das rugosidades e ajuste dos parâmetros θ , Δt e Δx , para determinação da sensibilidade do modelo a estes parâmetros.
4. Simulação de casos que impliquem em variações de fronteira, como por exemplo a aplicação a zonas de inundação, canais ou outros dispositivos de descarga que podem apresentar ou não escoamento durante a simulação, lançamento de espigões de proteção ou ensecadeiras.
5. Pesquisa para utilização de malhas de cálculo que permitam a melhoria da representação dos contornos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOTT, M.B. - Computational hydraulics: elements of the theory of free surface flows. London, Pitman, 1979. 324p. (Monographs and Surveys in Water Resources Engineering, 1).
- _____. - Intermediate hydraulics: nearly-horizontal flows. In: CURSO INTERN. sobre ENGENHARIA HIDRÁULICA e SANITÁRIA. - /Lectures in/ International Courses in Hydraulic and Sanitary Engineering. 4a.ed. Delft, 1975. 182p.
- BENQUÉ, J.P.; HAUGUEL, A. & VIOLLET, P.L. - Numerical models in environmental fluid mechanics. Edited by M.B. Abbott and J.A. Cunge. Boston, Pitman, 1982. 160p. (Engineering Applications of Computational Hydraulics, v.2; Monographs and Surveys in Water Resources Engineering, 6).
- BREBIA, C.A. - The Finite Element Method in the design of hydraulic structures. - In: NOVAK, P., ed. - Developments in hydraulic engineering. London/New York, Elsevier Applied Science /1984/ v.1, pp.45-110.
- CASALÁS, A.B. - Modelo de correntologia bidimensional utilizando microcomputador. In: CONG.LATINO AMERICANO sobre MÉTODOS COMPUTACIONAIS para ENGENHARIA, 7^o, São Carlos, SP., Nov. 4-7, 1986. - Anais. São Paulo, 1986. pp.714-723.
- CUNGE, J.A. - Two-dimensional modelling of flood plains. In: MAHMOOD, K.; YEVJEVICH, V. & MILLER JR., W.A. - Unsteady flow in open channels. Fort Collins, Colo., Water Resources Publ., 1975. v.2, Chapter 17, pp.705-762.

- CUNGE, J.A.; HOLLY JR., A.M. & VERWEY, A. - Practical aspects of computational river hydraulics. Boston, Pitman, 1980. 420p. (Monographs and Surveys in Water Resources Engineering, 3).
- DUBE, S.K.; SINHA, P.C. & ROY, G.D. - Numerical simulation of storm surges in Bangladesh using a bay-river coupled model. COASTAL ENGINEERING, 1986, 10(196):85-101.
- FREAD, D.L. - Numerical Properties of Implicit Four-Point Finite Difference equations of unsteady flow, 1974, NOAA Technical Memo Nws Hydro-18, U.S. National Weather Service, Silver Spring, Maryland.
- GRAY, W.G. & KINMARK, I.P.E. - Finite element surface flow simulation using wave equations. In: CONGR. da ASSOC. INTERN. de PESQ. HIDRÁULICAS, 22^o, Lausanne, Suíça, 1987. - Proceedings of technical session B: Topics in hydraulic modelling. Editors: J.A. Cunge and P. Ackers. Lausanne, Suíça, AIHR, 1987. 1v., pp.113-119.
- GRUBERT, J.P. - Numerical computation of two-dimensional flows. J. of the WATERWAYS HARBORS and COASTAL ENGINEERING DIV., 1976, 102(WW1):1-12.
- LEENDERTSE, J.J. - Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation. Santa Monica, Ca., The Rand Corporation, 1967. 165p. (Memorandum RM-5294-PR).
- LIGGETT, J.A. & CUNGE, J.A. - Numerical methods of solution of the unsteady flow equations. In: MAHMOOD, K., ed. - Unsteady flow in open channels; edited by K. Mahmood, V. Yevjevich and W.A. Miller Jr. Fort Collins, Colo., Water Resources Publ., 1975. v.1, pp. 89-182.
- MOLINES, J.M. - Un modelo de circulacion debida al viento en la zona del lago de Maracaibo-Venezuela. In: CONGR. LATINO-AMER.

- de HIDRÁULICA - Anais. São Paulo, Comitê Regional Latino-Americano de AIPH, 1986. v.1, pp.349-359.
- PRICE, R.K.; BETTES, R. & SAMUELS, P.G. - Numerical river modelling: course notes. Wallingford, Hydraulics Research Station, 1979. /78p./.
- SAMUELS, P.G. - Computational modelling of flows in embanked rivers. In: CONF.INTERN. sobre ASPECTOS HIDRÁULICOS em ENCHENTES & CONTROLE de ENCHENTES, Londres, Sept. 1983. - Papers presented at the International Conference on the Hydraulic Aspects of Floods & Flood Control; organized and sponsored by BHRA Fluid Engineering. Granfield, 1983. 1v., pp.257-270, Paper H1.
- SCHMITZ, G.; SEUS, G.J. & CZIRWITZKY, H.J. - Simulating two dimensional flood flow. In: CONF. INTERN. sobre ASPECTOS HIDRÁULICOS em ENCHENTES & CONTROLE de ENCHENTES, Londres, Sept. 1983. - Papers presented at the International Conference on the Hydraulic Aspects of Floods & Flood Control; organized and sponsored by BHRA Fluid Engineering. Granfield, 1983. 1v., pp.195-206, Paper G1.
- SILVEIRA, A.L.L. da & TUCCI, C.E.M. - Simulação do escoamento bidimensional no Guaíba. CADERNO de RECURSOS HÍDRICOS, ABHR, 1988, 6(1):79-104.
- TUCCI, C.E.M. - Hidrodinâmica de rios e canais. COMUNICAÇÃO TÉCNICA CTH, 1980(9):1-202.
- VERWEY, A. - The role of computational hydraulics in the hydraulic design of structures. In: NOVAK, P., ed. - Developments in hydraulic engineering. London/New York, Elsevier Applied Science /1984/ v.1, pp.1-43.
- VICTORICA A., J.L. de; ROMERO L., F. & SAN ROMÁN G., O.R. - Modelacion de la hidrodinamica de embalses. In: CONGR.

LATINO AMER. de HIDRÁULICA. - Anais. São Paulo, Comitê Regional Latino-Americano da AIPH, 1986. v.1, pp.400-406.

WUBS, F.W. - Shallow-water flow computations by an explicit method on the Cyber 205. In: CONGR. da ASSOC.INTERN.de PESQ.HIDRÁULICAS, 22^o, Lausanne, Suíça, 1987. - Proceedings of technical session B: Topics in hydraulic modelling. Editors: J.A. Cunge and P. Ackers. Lausanne, Suíça, AIHR, 1987. 1v., pp.71-76.

ZECH, Y.; SOREL, M.C. & VANSNICK, M. - Mathematical modelling of floods in rivers flooding and uncovering of flood plains. In: CONF.INTERN. sobre ASPECTOS HIDRÁULICOS em ENCHENTES & CONTROLE de ENCHENTES, Londres, Sept. 1983. - Papers presented at the International Conference on the Hydraulic Aspects of Floods & Flood Control; organized and sponsored by BHRA Fluid Engineering. Granfield, 1983. 1v., pp.217-228, Paper G3.