

Rovilson Mafalda

**Resolução de problemas de tangências por inversões
e aplicações à Engenharia**

**Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção de
título de Doutor em Engenharia**

SÃO PAULO

2007

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL

Rovilson Mafalda

**Resolução de problemas de tangências por inversões
e aplicações à Engenharia**

Área de concentração:

Engenharia de Construção Civil e Urbana

Orientador:

Prof. Dr. Alexandre Kawano

SÃO PAULO

2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

São Paulo, 28 de junho de 2007.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Mafalda, Rovilson

Resolução de problemas de tangências por inversões e aplicações à Engenharia / R. Mafalda. – ed.rev.– São Paulo, 2007.

70 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Construção Civil.

1. Desenho geométrico 2. Problemas de tangências 3. Transformações geométricas - inversão I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Construção Civil. II. t.

Aos meus pais, Antonio e Noemia e ao meu filho Jonas.

Agradecimentos

Ao meu mestre e orientador, o Prof. Dr. Alexandre Kawano, pelo esforço além do dever para garantir êxito neste projeto. Obrigado pela atenção e dedicação com que conduziu minha orientação ao longo da elaboração desta tese. Obrigado pela colaboração com suas preciosas sugestões e atenção dispensada.

Aos professores João Roberto D. Petreche, Eduardo Toledo Santos, Sergio Leal Ferreira, Luiz Reynaldo de Azevedo Cardoso, Brenda Chaves Coelho Leite e Cheng Liang-Yee pelo apoio dado durante a execução deste trabalho.

À professora Maria Helena Willey Rodrigues pelos livros presenteados. Ao professor C. Ernesto S. Lindgren pelas sugestões dadas. Ao professores Paul Szombor-Murray e Gunter Weiss pelas referências sugeridas.

À minha esposa Josiane pelo carinho e compreensão.

À Deus por permitir a realização deste trabalho.

Resumo

Neste estudo é proposto um método para resolução de problemas de tangências, especificamente para o décimo caso do problema de Apolônio. Este método é baseado na transformação geométrica inversão e no uso do conceito de feixes de circunferências. Além de permitir a resolução de todas as configurações do problema, ele é aplicável também à resolução de outros problemas.

Através do trabalho indicamos a importância do tema Desenho Geométrico no ensino de Desenho que há muito tempo enfatiza apenas o desenvolvimento da visualização espacial. Destacamos ao longo do texto como o ensino de Desenho Geométrico pode ser utilizado eficazmente para fomentar o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes através da prática de demonstrações.

Abstract

A new method to solve the tenth case of Apollonius problem is presented in this study. This method is based on the geometric transformation called inversion and the concept of coaxal circumferences. Besides allowing the resolution of all configurations of the problem, it can also be used to solve other problems.

We indicate the importance of the subject about geometric constructions in teaching Drawing, which, since a long time ago has given attention only to the development of the spatial visualization ability. We detach along the text how the teaching of geometric construction can be used efficiently to foment the deductive logical reasoning of the students through the practice of demonstrations.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	1
1.1	Motivações	1
1.2	Objetivo da tese	8
2	Conceitos básicos	9
2.1	Introdução	9
2.1.1	Potência de ponto	9
2.1.2	Homotetia	12
3	A transformação geométrica inversão	17
3.1	Introdução	17
3.1.1	Inversões de retas e circunferências	18
3.1.2	Propriedades da inversão	22
4	Feixes de circunferências	24
4.1	Introdução	24
4.2	Feixes ortogonais de circunferências	27
4.3	Inversões de feixes de circunferências	29
4.3.1	Propriedades dos feixes de circunferências	30
4.3.2	A inversão e a homotetia	31
5	Resolução de problemas de tangências	35

5.1	Introdução	35
5.2	Eixos de homotetias	35
5.2.1	Circunferências secantes	38
5.2.2	Circunferências tangentes	40
5.3	Método proposto	41
5.3.1	Número de intersecções	44
5.3.2	Discussão	45
5.3.3	Alinhar três circunferências	48
5.3.4	Circunferências congruentes	50
5.3.5	O problema de Apolônio	52
5.4	Diagrama de Voronoi para circunferências	56
6	Conclusões	62
	Referências	65
	Apêndice A – Métodos de solução de problemas de tangências	67
A.1	Introdução	67
A.1.1	Método de Joseph Diaz Gergonne	67
A.1.2	Método de August Ferdinand Moebius	68

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de Voronoi para um conjunto de circunferências.	5
1.2	Ajustamentos de raios; soluções falsas.	6
1.3	a)Pólos do eixo Θ_3 b)Pontos de tangência.	7
2.1	Eixo radical e circunferências ortogonais.	11
2.2	Ângulo interior à α	11
2.3	Retas homotéticas.	13
2.4	Centros de homotetia.	14
2.5	Centros de homotetias diretas; alinhamento.	15
2.6	Centros de homotetias inversas e direta; alinhamento.	16
3.1	Inversão de pontos.	17
3.2	Inversão de uma circunferência; primeiro caso.	19
3.3	Inversão de uma circunferência; segundo caso.	20
3.4	Preservação de ângulos.	22
4.1	Construção de $\alpha_1 \in (\alpha\Delta)$	25
4.2	Outra construção de $\alpha_1 \in (\alpha\Delta)$	26
4.3	Tipos de feixes de circunferências.	27
4.4	Feixes ortogonais de circunferências.	28
4.5	Centro de homotetia direta; centro de inversão.	31
4.6	Centro de homotetia inversa; centro de inversão.	32
4.7	Construção do inverso negativo P_r	33
4.8	Inversa negativa; preservação de ângulos.	34
5.1	Eixo de homotetias; caso 1.	36
5.2	Eixo de homotetias; caso 2.	38

5.3	Eixo de homotetias; caso 3.	39
5.4	Eixo de homotetias; caso 4	40
5.5	Eixo de homotetias; caso 5	41
5.6	Feixes que contém as soluções do problema.	42
5.7	Soluções no feixe $\Delta_1\Theta'_1$	43
5.8	Pontos de tangências procurados.	44
5.9	Configurações de circunferências.	45
5.10	Outras configurações de circunferências.	46
5.11	Circunferência ϵ ; intersecção entre os feixes.	47
5.12	Circunferências α' , β' e γ' alinhadas.	49
5.13	Circunferências tangentes; abstração.	51
5.14	Inversão das circunferências α , β e γ	52
5.15	Determinação dos centros de inversão.	53
5.16	Problema de Apolônio; três pontos.	54
5.17	Problema de Apolônio; três retas.	55
5.18	Determinação do feixe que contém a solução procurada.	57
5.19	Vértice de um diagrama de Voronoi para circunferências.	58
5.20	Fluxograma de informações; primeira parte.	59
5.21	Algoritmo; fluxograma de informações; segunda parte.	60
A.1	Método de Joseph Diaz Gergonne.	68
A.2	Método das transformações de Moebius; primeira etapa.	69
A.3	Método das transformações de Moebius: segunda etapa	70

Lista de Tabelas

1.1	Tema Educação gráfica: números de artigos por sub-tema.	2
1.2	Problema de Apolônio: número de casos.	3
5.1	Número de intersecções; oito soluções	44
5.2	Número de intersecções para uma solução	56

1 Introdução

1.1 Motivações

O Desenho Geométrico e a Geometria Descritiva formam a base de toda a teoria necessária para um curso de Desenho. Ambos fomentam no estudante uma certa disciplina lógica e induzem o exercício de capacidades mentais para a solução de problemas lógico-geométricos. Desenvolvem a habilidade de argumentação escrita e falada. A importância do Ensino de Desenho para desenvolver estas habilidades é reconhecida desde o início do século XX. Thomas E. French (FRENCH, 1976), professor de Desenho para Engenharia, autor de vários livros sobre Desenho Técnico e um dos maiores defensores do Ensino de Desenho declarou em 1913 no encontro anual da *Society for the Promotion Engineering Education*:

"... pela natureza do tema, temos em nossas mãos um conteúdo excepcional para desenvolver o hábito de se pensar com clareza, o mais difícil dos hábitos de se fixar, e para treinar a imaginação construtiva, a habilidade perceptiva que nos habilita a pensar em três dimensões, a visualizar rápido e precisamente, para construir uma imagem mental clara."

Nesta declaração o autor (FRENCH, 1976), expressa sua preocupação com duas características: *o hábito de se pensar com clareza* e *o treino da habilidade perceptiva de visualização*. Tais características são indícios de que deve existir equilíbrio entre os temas que são ministrados no ensino de Desenho, afim de permitir que tais habilidades sejam desenvolvidas nos estudantes.

Com o passar dos anos, este equilíbrio que acreditamos ser a marca do ensino de Desenho foi rompido. As preocupações neste ensino foram aos poucos tendendo para o lado de uma única habilidade, a visualização espacial e do tema Geometria Descritiva. Uma das explicações para isso, é que acredita-se que o ensino de Desenho tem exclusividade no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial. Por outro lado, acredita-se que *o pensar com clareza* e o raciocínio lógico-dedutivo são habilidades que devem ser desenvolvidas pelo ensino da Matemática.

Um sinal claro do desequilíbrio entre os temas ministrados no ensino de Desenho atualmente pode ser visto pelo número de publicações por assunto, classificados no tema Educação Gráfica e apresentados nos dois principais eventos que congregam professores de Desenho: o *Graphica 2005 - VI Conference on Graphics Engineering for Arts and Design* e o *ICGG 2006 - 12th International Conference on Geometry and Graphics*, em suas edições mais recentes, como mostra a tabela 1.1.

Nos anais do *Graphica 2005*¹, entre os artigos que foram enquadrados no tema Educação Gráfica, o percentual dos que tratam do assunto Visualização Espacial é 22,5 %. O percentual do número de artigos sobre Geometria Descritiva é de 32,5 %, enquanto que, o percentual do número de artigos que tratam de Desenho Geométrico é de 8,5 %. Nos anais do *ICGG 2006*, a situação é similar. Nos artigos enquadrados no tema Educação Gráfica, o percentual daqueles cujo assunto é Geometria Descritiva é de 30 %, enquanto que o percentual de artigos que tratam o assunto Visualização Espacial é de 22,5 %. Apenas estes dois sub-temas representam mais de 50% dos trabalhos apresentados, enquanto que o percentual de artigos que tratam de Desenho Geométrico é de 7,5 %.

Tabela 1.1: Tema Educação gráfica: números de artigos por sub-tema.

<i>Evento</i>	<i>N. artigos</i>	<i>Educ. gráfica</i>	<i>Gd</i>	<i>Ve</i>	<i>Fe</i>	<i>3d</i>	<i>Cr</i>	<i>Dg</i>	<i>Ou</i>
Graphica 2005	123	45 - (36 %)	14	6	9	6	5	5	0
ICGG 2006	109	40 - (37 %)	12	9	6	4	4	3	3

Gd - Geometria Descritiva: uso de programas, criação de tutorias, teoria.

Ve - Visualização Espacial: artigos teóricos, experimentos, aplicação de testes.

Fe - Ferramentas de Ensino: programas CAD genéricos, infra-estrutura, equipamentos.

3d - Modelamento 3d: ensino utilizando modelamento tridimensional.

Cr - Currículo de cursos: modelos de currículos, reestruturação de cursos.

Dg - Desenho Geométrico: Construções com régua e compasso e com programas de geometria dinâmica.

Ou - Outros temas: visualização de curvas.

Pelos dados da tabela 1.1 pode-se concluir que o ensino de Desenho, atualmente está focalizado no desenvolvimento da habilidade visualização espacial e no ensino da Geometria Descritiva, no qual a prática de demonstrações raramente aparece. Já o Desenho Geométrico, que é por excelência um tema para a prática da realização de demonstrações, está praticamente abandonado. Ainda que este conte,

¹Nos anais deste evento não há o tema Educação Gráfica. A classificação dos artigos neste tema foi feita por este autor entre os trabalhos classificados nos temas: Expressão Gráfica e conhecimento científico, Desenvolvimento tecnológico e Prática profissional.

hoje com os programas de Geometria Dinâmica que facilitam a realização de construções geométricas complexas. Ora, mesmo os problemas de Geometria Descritiva são mais eficientemente resolvidos por raciocínios lógicos, como pode atestar qualquer professor experiente de Desenho, do que por tentativas de "visualizar uma situação no espaço".

Outro sinal de que a prática da realização de demonstrações está desaparecendo do ensino de Desenho está na apostila da disciplina PCC 2121 - Geometria Gráfica para Engenharia da EPUSP (KAWANO A. ; SANTOS, 2006), de um dos cursos de Engenharia mais tradicionais do Brasil. Nela, apenas um exercício requer a realização de demonstração.

Através da tese indicamos que o Desenho Geométrico pode ser um excelente meio para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes.

Um dos temas mais freqüentes e interessantes em Desenho Geométrico é *tangências*. O enunciado dos problemas desse tema pode ser resumido no seguinte: dados três elementos geométricos que podem ser individualmente pontos, retas e circunferências, deve-se construir circunferências que sejam tangentes aos três elementos dados. São possíveis ao todo, dez casos como mostra a tabela 1.2 (VIÈTE, 1982). O mais desafiador é aquele no qual os três elementos são circunferências, pois dependendo do arranjo entre elas, são possíveis oito soluções.

Tabela 1.2: Problema de Apolônio: número de casos.

<i>Caso</i>	<i>Descrição do caso</i>
primeiro caso	três pontos
segundo caso	três retas
terceiro caso	dois pontos e uma reta
quarto caso	duas retas e um ponto
quinto caso	dois pontos e uma circunferência
sexto caso	um ponto e duas circunferências
sétimo caso	duas retas e uma circunferência
oitavo caso	duas circunferências e uma reta
nono caso	uma circunferência um ponto e uma reta
décimo caso	três circunferências

A história deste problema tem início no livro IV da obra *Elementos* de Euclides de Alexandria (325 a.C. - 265 a.C.). Nele, o autor mostra como construir uma circunferência que passa por três pontos, bem como, construir uma circunferência tangente a três retas. Posteriormente, Apolônio de Perga (262 a.C. - 190 a.C.) generalizou este problema para a construção de circunferências tangentes a arranjos formados por pontos, retas e circunferências, dando assim origem aos dez casos do problema. A obra na qual supostamente foram publicadas as soluções deste problema, *Tangências*, perdeu-se. As informações que se têm sobre sua existência e autoria são baseadas no trabalho *Enciclopédia* de Pappus de Alexandria (290 a.C. - 350 a.C.) (FRÈRE, 1912).

Exceto tentativas de reconstrução, por estudiosos árabes, do trabalho *Tangências* que se supõem terem sido feitas, o problema de Apolônio esteve esquecido até o período histórico do Renascimento, quando François Viète (1540 - 1603) propôs ao matemático Adrianus Romanus (1561 - 1615), o problema de se construir circunferências tangentes a três outras. Romanus resolveu o caso do problema no qual são dadas três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ com centros distintos, mutuamente externas e não secantes, cujas relações entre os raios são $r_1 < r_2 < r_3$. Ele encontrou uma solução analítica utilizando seções cônicas - o centro da circunferência que é tangente externa às três circunferências dadas foi encontrado como resultado da intersecção entre duas hipérbolas. A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a duas circunferências. Como a hipérbole é uma curva que não pode ser construída com régua e compasso, Viète não ficou satisfeito com essa solução, e em 1600 publicou o trabalho *L'Apollonius Français* que contém soluções para os dez casos do problema juntamente com a demonstração de que não é possível construir com régua e compasso a solução de Romanus. A referência (SANTOS S. A.; TREVISAN, 2002) é uma boa introdução à resolução de problemas de tangências utilizando seções cônicas. Posteriormente, estudiosos como Rene Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665) e Isaac Newton (1642 - 1727) também estudaram este problema (FRÈRE, 1912).

Problemas de tangências são frequentes na Engenharia em situações como cálculos de polias e engrenagens. Recentemente, métodos de resolução de problemas de tangência voltaram a receber atenção por causa de sua aplicação na construção de um diagrama de Voronoi para conjuntos de circunferências. Esses diagramas têm aplicações, por exemplo, em problemas de caminhos mais curtos e empacotamento de cabos. Dado um conjunto S de circunferências externas, a construção de um diagrama de Voronoi consiste em determinar para cada circunferência C de S qual é a região dos pontos do plano que estão mais próximos a ela do que de qualquer outra

em S como ilustra a figura 1.1 (KIM D. ; SUGIHARA, 2001).

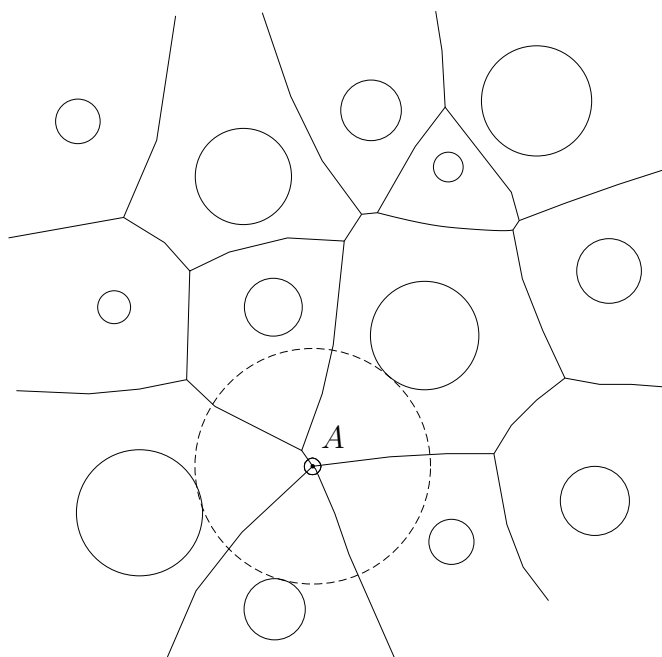


Figura 1.1: Diagrama de Voronoi para um conjunto de circunferências.

A construção de um vértice do diagrama de Voronoi é exatamente o problema de se encontrar o centro da circunferência que é tangente externa a três outras circunferências dadas. Por exemplo, o vértice A na figura 1.1. Neste caso, as arestas do diagrama são arcos das hipérboles. A obtenção dos vértices segundo (KIM D. ; SUGIHARA, 2001) é usualmente feita por cálculos computacionais para achar a intersecção das hipérboles que são os lugares geométricos de equidistância entre duas circunferências. Esse é um processo computacionalmente caro. Talvez por isso, recentemente os mesmos autores, (KIM D. ; SUGIHARA, 2006) propuseram que a resolução deste problema fosse feita com base em duas transformações: uma delas, é chamada por eles de *radius adjustment* (ajustamento de raios) e a outra é a inversão. A autoria deste método é em geral creditada a August Ferdinand Moebius (1790 - 1868). Este método pode ser de solução pode ser resumido no seguinte:

Problema 1.1.1. *Construir circunferências tangentes a três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ com centros distintos, externas e não secantes, cujas relações entre os raios são $r_1 < r_2 < r_3$.*

A transformação de ajustamento de raios é a seguinte: toma-se a circunferência de menor raio, neste caso α , e subtrai-se o valor r_1 de seu raio. Seja α_1 a circunferência de raio nulo e centro no ponto A . Para que as circunferências que são tangentes à α , β e γ mantenham-se tangentes a elas, β e γ devem ter, conforme o caso, seus

raios aumentados ou diminuídos do valor r_1 . O problema inicial é transformado em quatro sub-problemas. Encontrar circunferências que passam pelo ponto A e sejam tangentes às circunferências $\beta_{(B,r_2\pm r_1)}$ e $\gamma_{(C,r_3\pm r_1)}$. Seja o sub-problema:

Sub-problema 1.1.1. *Construir circunferências que passam pelo ponto A e sejam tangentes às circunferências $\beta_2 = \beta_{(B,r_2-r_1)}$ e $\gamma_2 = \gamma_{(C,r_3-r_1)}$.*

Utilizando a transformação geométrica inversão, o problema é reduzido à construção das retas tangentes às circunferências transformadas. Como elas são não-secantes, existem quatro retas tangentes a elas, e o sub-problema tem quatro soluções. Quando se volta ao problema inicial, é necessário descartar duas das soluções obtidas como mostra a figura 1.2, pois ao fazer o ajustamento dos raios Sf_1 e Sf_2 não são soluções do problema original. Isso significa que no problema original com as três circunferências, devemos descartar oito soluções falsas. Outras informações sobre este método podem ser vista na referência (COOLIDGE, 1916).

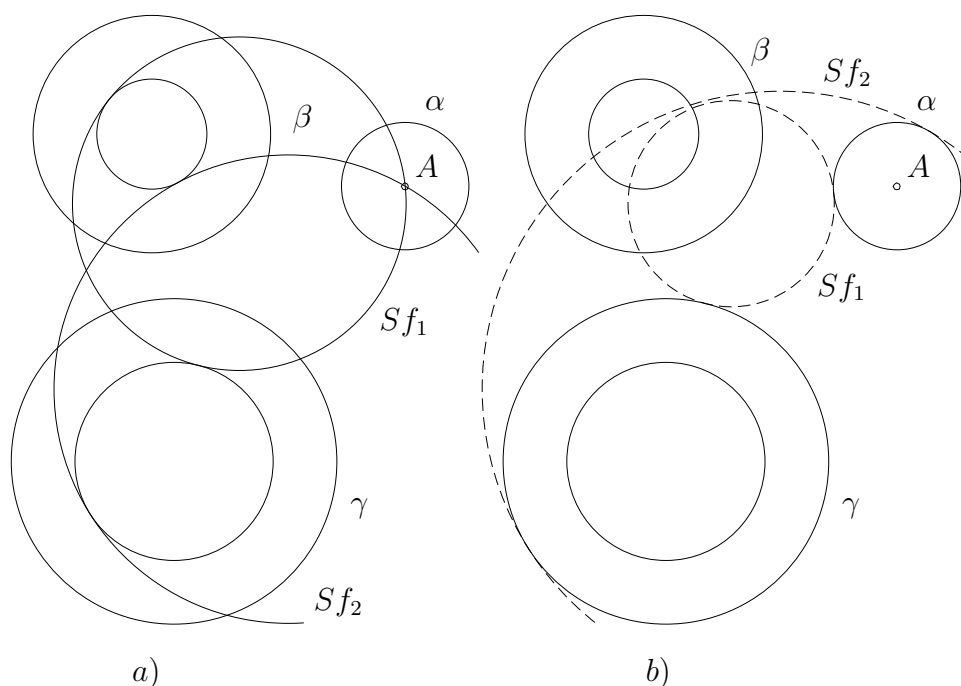


Figura 1.2: Ajustamentos de raios; soluções falsas.

No método de Joseph Diaz Gergonne (PAPELIER, 1925), as soluções também são obtidas com o uso da transformação inversão. Esse método pode ser resumido no seguinte: encontram-se os centros de homotetia das circunferências α , β e γ . Os seis pontos encontrados determinam quatro retas, Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 e Θ_4 , chamadas de eixos de homotetia. O próximo passo é encontrar os pólos dos eixos de homotetia em relação às circunferências α , β e γ . Por serem quatro retas, são obtidos doze pólos, sendo quatro no interior de cada circunferência. Na figura 1.3 a), mostramos

os pólos do eixo Θ_3 . Depois, os pólos são unidos com o centro radical, E , das três circunferências. As retas que unem os pólos ao centro radical determinam em cada uma das três circunferências oito pontos. Os vinte e quatro pontos totais obtidos são os pontos de tangência das oito soluções do problema. A figura 1.3 b), ilustra a obtenção de duas soluções S_1 e S_2 . Outras informações sobre este método podem ser vistas na referência (COOLIDGE, 1916).

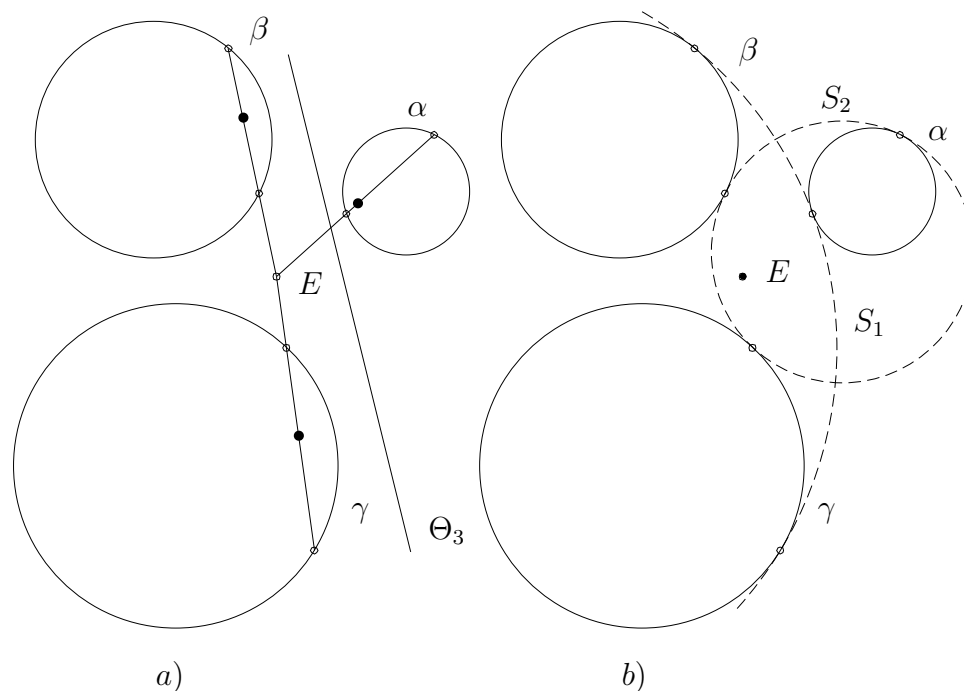


Figura 1.3: a) Pólos do eixo Θ_3 b) Pontos de tangência.

Neste trabalho propomos um método para resolver o problema 1.1.1 usando apenas uma transformação geométrica, a inversão. Mais do que oferecer um método alternativo aos métodos existentes para resolver este problema, o objetivo é mostrar o potencial do Desenho Geométrico para o estudo de problemas práticos. Desenvolvemento um método que permite a resolução de todas as configurações do problema com base no conceito de feixe de circunferências e da transformação geométrica inversão. A vantagem em relação ao método de Moebius é que o problema é resolvido exclusivamente pela inversão. Em relação aos métodos de Gergonne e Moebius, ele pode ser aplicado para resolver outros problemas que são:

1. Transformar por inversão três circunferências de raios diferentes em outras três que têm raios iguais.
2. Transformar por inversão três circunferências em outras três cujos centros estejam alinhados.

1.2 Objetivo da tese

Desenvolver um novo método de solução para o décimo caso do problema de Apolônio usando feixes de circunferências e a transformação geométrica inversão. Isso é mostrado no capítulo cinco.

Espera-se com isto, contribuir para a valorização do Desenho Geométrico enquanto conteúdo de cursos de Desenho para Engenharia, bem como motivar outros estudos sobre o tema Desenho Geométrico.

O trabalho foi desenvolvido sem referências à figuras, que em geral representam apenas uma situação específica. As figuras colocadas no trabalho têm caráter ilustrativo. O leitor é convidado a fazer suas próprias figuras se forem necessárias para comprovar os teoremas apresentados.

O trabalho está organizado em seis capítulos. No capítulo dois apresentam-se conhecimentos básicos sobre Desenho Geométrico utilizados ao longo do estudo. No capítulo três apresentam-se as principais propriedades da transformação geométrica inversão. No capítulo quatro apresenta-se o conceito de feixes de circunferências. No capítulo cinco apresenta-se o método proposto e sua aplicação para a resolução dos seguintes problemas:

1. Construir circunferências tangentes a três circunferências dadas.
2. Transformar por inversão três circunferências que possuem raios iguais em três outras que possuem raios diferentes.
3. Transformar por inversão três circunferências em três outras circunferências cujos centros estão alinhados.

Paralelamente, faz-se uma comparação dos métodos mais utilizados para resolver o problema de se construir circunferências tangentes a três outras em termos do número de intersecções que são necessárias para obtenção das soluções. Após a análise dos métodos, apresenta-se um algoritmo para calcular vértices de diagramas de Voronoi para circunferências.

No capítulo seis são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 Conceitos básicos

2.1 Introdução

Introduzimos conceitos que serão utilizados no trabalho. A motivação é mais a de fixar a notação do que apresentar fatos novos. Boas referências para o material aqui apresentado são: (MARMO, 1965), (MORGADO A.C. ; WAGNER, 1974) e (CARVALHO, 1978).

Definição 2.1.1. *Lugar geométrico é um conjunto de pontos do plano que possuem uma determinada propriedade e só eles a possuem.*

Por exemplo, uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$, com centro no ponto O e de raio r , (r pode ter medida nula) é o lugar geométrico dos pontos que distam r de O .

2.1.1 Potência de ponto

Definição 2.1.2. *Dado um ponto P e uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$, o ponto P pode ser interno, pertencente ou externo à $\alpha_{(O,r)}$. Se $\overline{OP} < r$ o ponto P é interno $\alpha_{(O,r)}$. Se $\overline{OP} = r$ o ponto P pertence a $\alpha_{(O,r)}$. Se $\overline{OP} > r$ o ponto P é externo $\alpha_{(O,r)}$.*

Teorema 2.1.1. *Sejam uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ e um ponto $P \notin \alpha$. Se as retas que são concorrentes em P interceptam α nos pontos A e B , C e D , E e F etc., então*

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF} = \dots \quad (2.1)$$

Caso o ponto P seja externo à circunferência α , e a reta que passa por P é tangente à circunferência α no ponto T , então tem-se também:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PE} \times \overline{PF} = \dots \quad (2.2)$$

A demonstração deste teorema pode ser vista na referência (MARMO, 1965).

Definição 2.1.3. *Sejam um ponto P e uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$. Chama-se potência do ponto P em relação à circunferência α , $Pot(P)_\alpha$, qualquer um dos produtos $\overline{PA} \times \overline{PB}$, $\overline{PC} \times \overline{PD}$, onde A e B , C e D são os pontos de intersecção de retas secantes à $\alpha_{(O,r)}$ que passam por P . No caso em que a reta que passa por P é tangente à circunferência α no ponto T , $Pot(P)_\alpha = \overline{PT}^2$. Se o ponto é externo à circunferência $\alpha_{(O,r)}$, $Pot(P)_\alpha > 0$. Se o ponto é interno à circunferência $\alpha_{(O,r)}$, $Pot(P)_\alpha < 0$. Se o ponto pertence à circunferência $\alpha_{(O,r)}$, $Pot(P)_\alpha = 0$.*

Definição 2.1.4. *Dadas duas circunferências não concêntricas α e β , chama-se eixo radical o lugar geométrico dos pontos que têm igual potência em relação à α e β .*

Lema 2.1.1. *Dadas duas circunferências α e β , o eixo radical Δ é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros de α e de β .*

A demonstração deste lema pode ser vista nas referências (MARMO, 1965) e (MORGADO A.C. ; WAGNER, 1974).

Definição 2.1.5. *O ângulo entre duas circunferências secantes $\alpha_{(A,r_1)}$ e $\beta_{(B,r_2)}$ é aquele que é formado pelas retas tangentes às circunferências nos pontos de intersecção, medido entre as duas semi-retas externas às circunferências.*

Definição 2.1.6. *Dois circunferências secantes $\alpha_{(A,r_1)}$ e $\beta_{(B,r_2)}$ são ortogonais se as retas tangentes a elas nos pontos de intersecção forem perpendiculares. A figura 2.1 ilustra esta condição.*

Definição 2.1.7. *O ângulo entre uma reta s secante a uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ é aquele que é formado pela reta s e as retas tangentes à $\alpha_{(O,r)}$ nos pontos de intersecção, medido entre as semi-retas externas à circunferência.*

Proposição 2.1.1. *Os pontos do eixo radical Δ externos às circunferências $\alpha_{(O_1,r_1)}$ e $\beta_{(O_2,r_2)}$ são o lugar geométrico dos pontos P , centros das circunferências ortogonais à α e β .*

Demonstração. Dado $P \in \Delta$, os segmentos de reta tangentes às circunferências α e β que passam por P possuem o mesmo comprimento. Sejam C e D os pontos onde segmentos de reta que passam pelo ponto P são tangentes às circunferências α e β respectivamente. Os ângulos $P\hat{C}O_1$ e $P\hat{D}O_2$ formados são retos. Portanto, a circunferência $\epsilon_{(P,\overline{PC})}$ é ortogonal às circunferências α e β como ilustra a figura 2.1.

Seja o ponto $Q \in \Delta$ o centro de uma circunferência $\phi_{(Q,r_3)}$, ortogonal às circunferências α e β . Note que Q não pertence ao interior de nenhuma das circunferências.

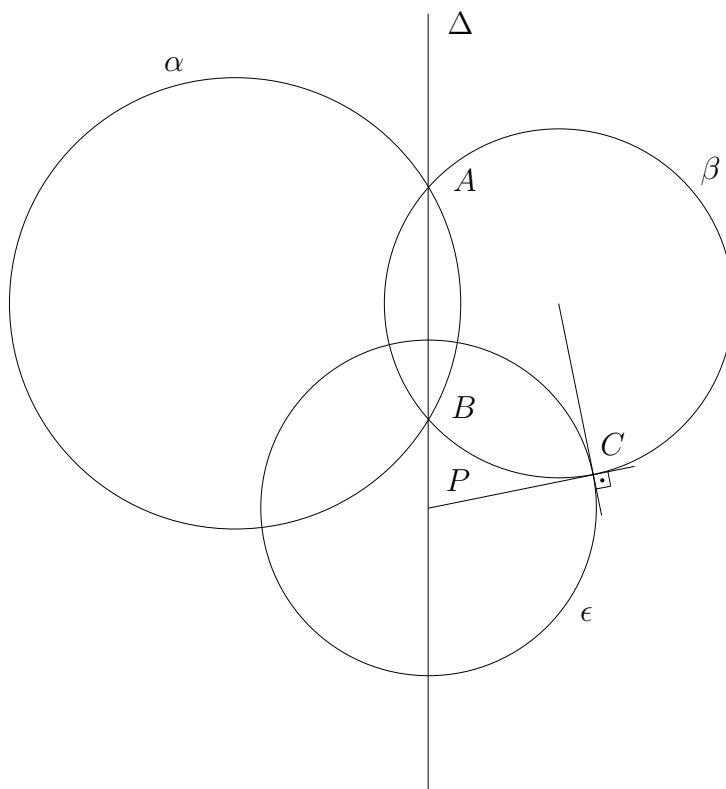


Figura 2.1: Eixo radical e circunferências ortogonais.

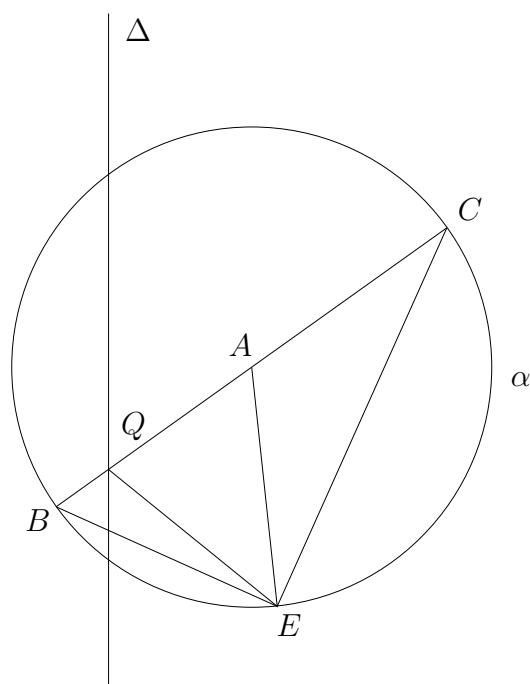


Figura 2.2: Ângulo interior à α .

Se pertencer, por exemplo, ao interior de α , o ângulo \widehat{AEQ} será sempre menor que o ângulo reto como ilustra a figura 2.2. E é um ponto qualquer de α .

Seja F um dos pontos onde uma circunferência $\phi_{(Q,r_3)}$ intercepta $\alpha_{(A,r_1)}$ e, G

um dos pontos onde ϕ intercepta $\beta_{(B,r_2)}$. Como ϕ é ortogonal às circunferências α e β , os ângulos $Q\hat{F}A$ e $Q\hat{G}B$ são retos. Como os pontos F e G pertencem a ϕ , os segmentos tangentes à α e β , \overline{QF} e \overline{QG} , têm a mesma medida. Então, $Pot(Q)_\alpha = \overline{QF}^2 = Pot(Q)_\beta = \overline{QG}^2$. Logo, Q pertence ao eixo radical Δ . \square

Na realização de demonstrações de lugares geométricos deve-se atentar para o seguinte fato: para que um ou mais elementos geométricos sejam um lugar geométrico deve-se demonstrar não apenas que eles possuem uma dada propriedade, mas que apenas eles a possuem. A demonstração desta propriedade do eixo radical deve ser incluída no programa de Desenho Geométrico, uma vez que este lugar geométrico é utilizado na resolução de oito dos dez casos do problema de Apolônio.

Corolário 2.1.1. *Seja γ uma circunferência que admite com α e β , Δ como eixo radical. A circunferência $\phi_{(Q,r_3)}$ é ortogonal à circunferência γ .*

Demonstração. Sejam A , B e C pontos onde retas que passam pelo ponto Q são tangentes às circunferências α , β e γ . Então, $Pot(Q)_\alpha = Pot(Q)_\beta = Pot(Q)_\gamma$. Logo, $\overline{QA} = \overline{QB} = \overline{QC} = r_3$. \square

Definição 2.1.8. *Sejam uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ e uma reta t que não intercepta α . Seja uma reta r que passa pelo ponto O e é perpendicular à reta t no ponto Q . Sejam as retas que passam pelo ponto Q e são tangentes à α nos pontos A e B . Chama-se pólo da reta t em relação a α o ponto P , resultado da intersecção do segmento \overline{AB} com a reta r .*

2.1.2 Homotetia

Construção 2.1.1. *Dados um número k e dois pontos distintos O e P , constrói-se a reta OP . Sobre essa reta, constrói-se a distância $\overline{OP'}$ resultante da multiplicação da distância \overline{OP} pelo número $|k|$. O ponto P' obtido é chamado homotético do ponto P . A distância $\overline{OP'}$ é construída no mesmo sentido de \overline{OP} se $k \geq 0$ e, no sentido contrário de \overline{OP} se $k < 0$.*

O ponto O é chamado de centro de homotetia direta se a distância $\overline{OP'}$ é construída no mesmo sentido de \overline{OP} ou centro de homotetia inversa se a distância $\overline{OP'}$ é construída no sentido contrário de \overline{OP} .

Definição 2.1.9. *Dados um ponto O sobre uma reta r e um número k , a transformação que a cada ponto P de r associa um ponto P' , no mesmo sentido de \overline{OP} , tal que $OP' = |k| \times OP$, chama-se homotetia direta. Se $k < 0$, $OP' = |k| \times OP$ está no sentido inverso de \overline{OP} a homotetia é chamada inversa.*

Definição 2.1.10. Duas figuras F_1 e F_2 são chamadas homotéticas se e somente se a cada ponto da figura F_1 , $P_{(F_1)}$, por um centro de homotetia O , corresponde um ponto na figura F_2 , $P_{(F_2)}$, sobre a reta $OP_{(F_1)}$, tal que $P_{(F_2)} \times |k| = P_{(F_1)}$.

Lema 2.1.2. A figura homotética de uma reta t é uma reta t' paralela à reta t .

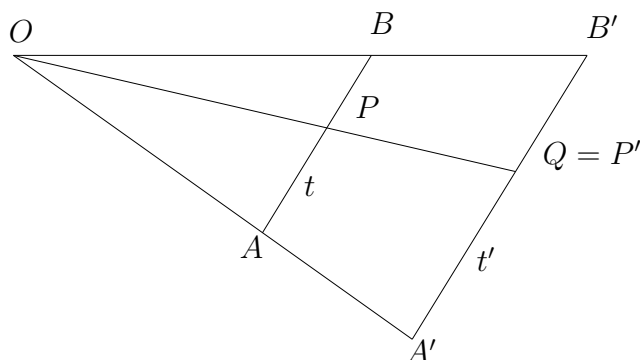


Figura 2.3: Retas homotéticas.

Demonstração. Sejam um centro de homotetia O e uma razão $k \neq 0$. Sejam A e B dois pontos distintos da reta t . Sejam os pontos A' e B' os pontos homotéticos dos pontos A e B na reta t' . Sejam F_1 a figura formada pelos pontos O , A e B e F_1' a figura formada pelos pontos O , A' e B' . Se os pontos A , B e O não estão alinhados, a proporção entre os lados dos triângulos OAB e $OA'B'$,

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k, \quad (2.3)$$

mostra que os triângulos OAB e $OA'B'$ são semelhantes pela razão k . Portanto, os lados dos triângulos definidos pelos segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são paralelos. Sejam P um ponto do segmento \overline{AB} . Por semelhança dos triângulos, a relação entre os pontos P e P' , suposto homotético do ponto P , é $OP \times k = OP'$. Seja Q o ponto homotético do ponto P . Pela definição de homotetia, $OQ = OP \times k$. Mas, $OP \times k = OP'$. Logo $Q = P'$. A figura 2.3 ilustra esta demonstração. \square

Lema 2.1.3. A figura homotética de uma circunferência é uma circunferência.

Demonstração. Sejam P um ponto de uma circunferência α com centro em um ponto A . Sejam P' e A' os homotéticos dos pontos P e A por uma homotetia de centro O e razão $k \neq 0$. Como a medida do segmento \overline{PA} é constante, se o ponto P girar em torno de A descrevendo a circunferência α , o ponto P' descreverá uma circunferência α' de centro A' e raio $\overline{A'P'}$. \square

Lema 2.1.4. Duas circunferências α e β com centros e raios distintos, como ilustra a figura 2.4, possuem dois centros de homotetia.

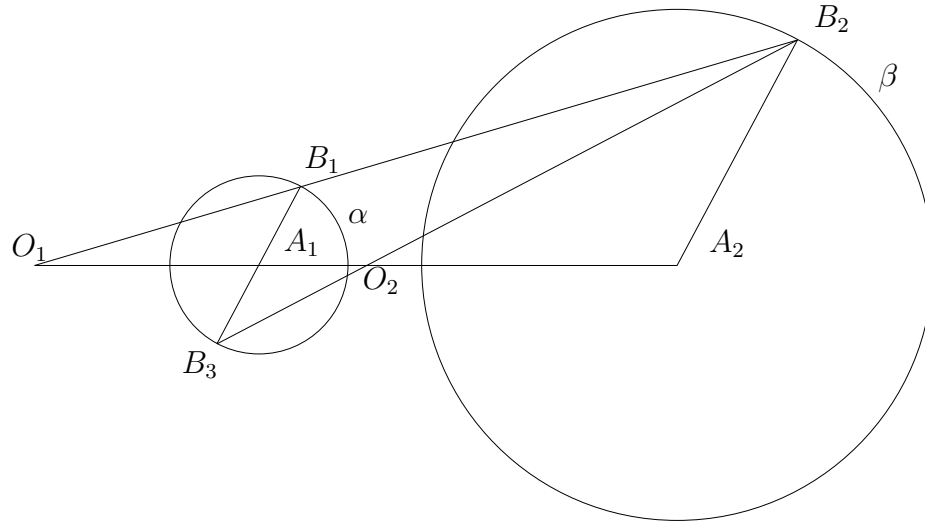


Figura 2.4: Centros de homotetia.

Demonstração. Sejam os pontos A_1 e A_2 os centros das circunferências α e β respectivamente. Seja o segmento $\overline{A_1B_1}$ um raio da circunferência α paralelo a um raio $\overline{A_2B_2}$ da circunferência β . Como $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são segmentos dispostos paralelamente, eles são homotéticos. Seja $k = \overline{A_2B_2}/\overline{A_1B_1}$ sua razão e O_1 seu centro. Se os segmentos $\overline{A_1B_3}$ e $\overline{A_2B_2}$ são dispostos paralelamente, mas possuem sentidos contrários, eles são homotéticos por uma razão $-k = \overline{A_2B_2}/\overline{A_1B_3}$ cujo centro é o ponto O_2 . \square

Lema 2.1.5. *Três circunferências $\alpha_{(Q_1,r_1)}$, $\beta_{(Q_2,r_2)}$ e $\gamma_{(Q_3,r_3)}$, externas, de raios diferentes possuem os centros de homotetia direta alinhados. Cada centro direto está alinhado com dois centros inversos.*

Demonstração. Sejam os raios das circunferências $r_1 < r_2 < r_3$ e, $\overline{A_1B_1}$ um diâmetro da circunferência α . Sejam $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_3B_3}$ os diâmetros homotéticos diretos de $\overline{A_1B_1}$ nas circunferências β e γ respectivamente. As razões de homotetia são $k_1 = \overline{A_2B_2}/\overline{A_1B_1}$, $k_2 = \overline{A_3B_3}/\overline{A_1B_1}$ e $k_3 = \overline{A_3B_3}/\overline{A_2B_2}$. O centro da homotetia direta dos segmentos $\overline{A_3B_3}$ e $\overline{A_1B_1}$ é o ponto O_{13} . O centro da homotetia direta dos segmentos $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_1B_1}$ é o ponto O_{12} . O centro da homotetia direta dos segmentos $\overline{A_3B_3}$ e $\overline{A_2B_2}$ é o ponto O_{23} . Sejam as figuras F_1 , F_2 e F_3 . A figura F_1 é formada pelos pontos A_1 , B_1 e pelo ponto O_{13} . A figura F_3 é formada pelos pontos A_3 , B_3 e O_{13} . A figura F_2 é formada pelos pontos A_2 , B_2 e pelo ponto O'_{13} , homotético do ponto O_{13} pela homotetia de centro O_{12} e razão k_1 . As figuras F_1 e F_3 são homotéticas pela razão k_2 e centro O_{13} . A figura F_1 é homotética às figuras F_2 e F_3 , logo, F_2 e F_3 são homotéticas entre si pela homotetia de centro O_{23} e razão k_3 . Pela homotetia entre as figuras F_1 e F_2 , o ponto homotético do ponto O'_{13} é o ponto

O_{13} . Pela homotetia entre as figuras F_2 e F_3 , o ponto homotético do ponto O'_{13} é o ponto O_{13} . Como a reta $O'_{13}O_{13}$ passa pelos pontos O_{12} e O_{23} , os pontos O_{12} , O_{13} e O_{23} estão alinhados.

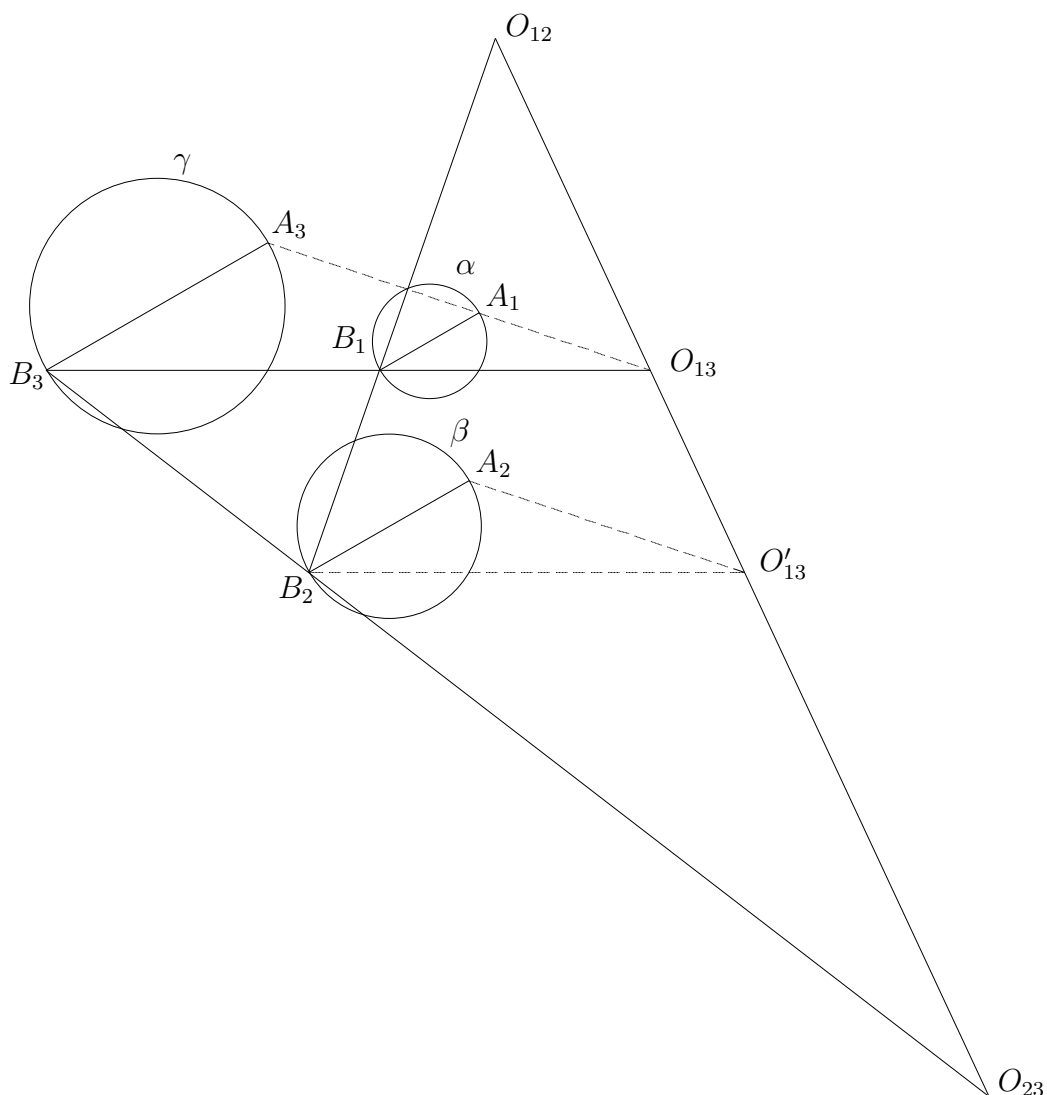


Figura 2.5: Centros de homotetias diretas; alinhamento.

Seja $\overline{A_2B_2}$ o diâmetro homotético direto de $\overline{A_1B_1}$ nas circunferências β . Seja $\overline{A_3B_3}$ o diâmetro homotético inversos de $\overline{A_1B_1}$ na circunferência γ . As razões de homotetia são $k_1 = \overline{A_2B_2}/\overline{A_1B_1}$, $-k_2 = \overline{A_3B_3}/\overline{A_1B_1}$ e $-k_3 = \overline{A_3B_3}/\overline{A_2B_2}$. O centro da homotetia direta dos segmentos $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_1B_1}$ é o ponto O_{12} . O centro da homotetia inversa dos segmentos $\overline{A_3B_3}$ e $\overline{A_1B_1}$ é o ponto Q_{13} . O centro da homotetia inversa dos segmentos $\overline{A_3B_3}$ e $\overline{A_2B_2}$ é o ponto Q_{23} . Sejam as figuras F_4 , F_5 e F_6 . A figura F_5 é formada pelos pontos A_2 , B_2 e pelo ponto Q_{23} . A figura F_6 é formada pelos pontos A_3 , B_3 e Q_{23} . A figura F_4 é formada pelos pontos A_1 , B_1 e pelo ponto Q'_{23} , homotético do ponto Q_{23} pela homotetia direta de centro O_{12} e razão k_2 . A figura F_4 é homotética às figuras F_5 e F_6 , logo, F_5 e F_6 são homotéticas entre si pela

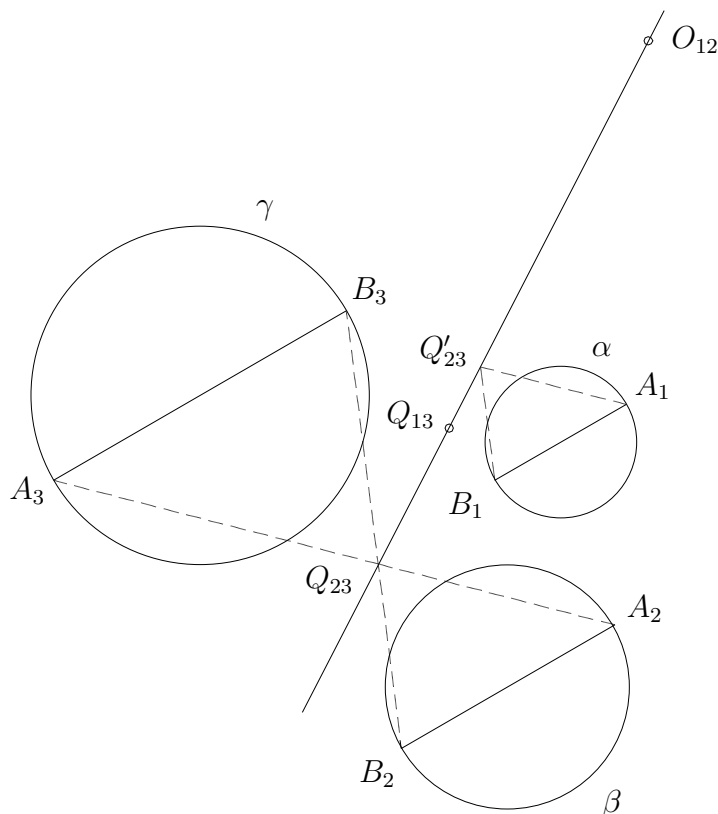


Figura 2.6: Centros de homotetias inversas e direta; alinhamento.

da homotetia de centro Q_{23} e razão $-k_3$. Pela homotetia entre as figuras F_4 e F_5 , o ponto homotético do ponto Q_{23} é o ponto Q'_{23} . Pela homotetia entre as figuras F_4 e F_6 , o ponto homotético do ponto Q_{13} é o ponto Q_{23} . Como a reta $Q'_{23}Q_{23}$ passa pelos pontos Q_{12} e Q_{13} , os pontos Q_{12} , Q_{13} e Q_{23} estão alinhados. Para os outros centros inversos o raciocínio é análogo. \square

Definição 2.1.11. *Chama-se eixo de homotetias diretas a reta que passa por dois centros de homotetias diretas.*

Definição 2.1.12. *Chama-se eixo de homotetias inversas a reta que passa por dois centros de homotetias inversas.*

A representação gráfica das etapas da demonstração do lema 2.1.5 requer a realização de várias construções geométricas. Entretanto ela pode ser feita considerando-se apenas segmentos de reta como exemplificado na referência (MORGADO A.C. ; WAGNER, 1974).

Refazer uma demonstração existente é uma maneira de adquirir experiência quanto a maneira de se construir argumentos. Posteriormente, esta experiência é utilizada na criação de novas demonstrações, tanto de fatos já demonstrados como de novos. Esse é a nosso ver um dos requisitos para a formação investigativa do estudante.

3 A transformação geométrica inversão

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado um resumo sobre transformação geométrica inversão. Boas referências para o material aqui apresentado são: (COXETER H. S. ; GREITZER, 1967), (ALTSCHILLER-COURT, 1952) e (JONHSON, 1960).

Construção 3.1.1. *Dada uma circunferência $\sigma_{(O,r)}$ e um ponto P externo à σ , constrói-se um segmento de reta tangente pelo ponto P à σ no ponto A . O ponto obtido pela intersecção da reta perpendicular ao segmento \overline{OP} que passa por A , P' , é chamado inverso do ponto P . Se o ponto P é interno à σ mas $P \neq O$, constrói-se um segmento de reta perpendicular à \overline{OP} por P que intercepta σ em pontos C . O ponto P' , inverso de P , é obtido pela intersecção da reta tangente à σ no ponto C com segmento \overline{OP} .*

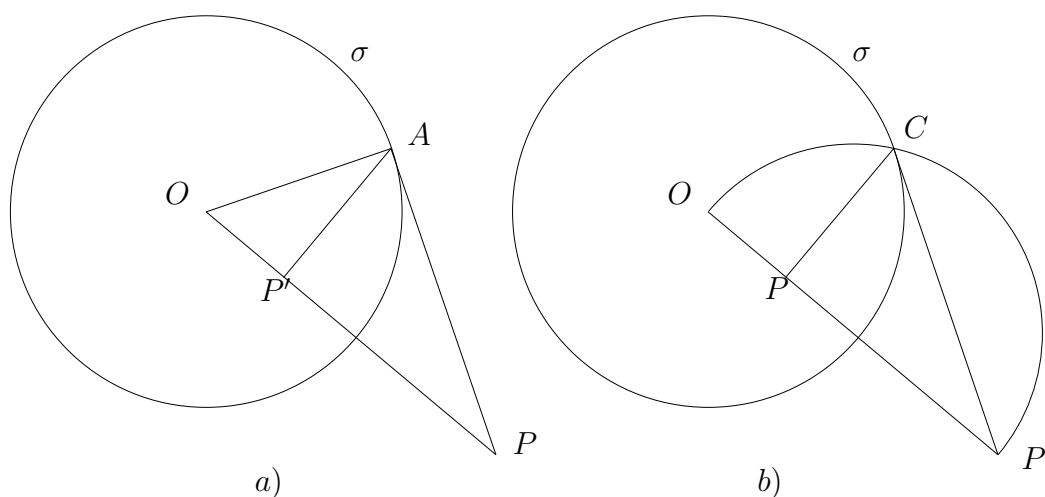


Figura 3.1: Inversão de pontos.

Nos casos ilustrados na figura 3.1, a relação entre P e P' pode ser descrita por semelhança de triângulos. Sejam OAP e $OP'A$ os triângulos formados no caso em

que P é externo a σ , figura 3.1 a). Como eles são retângulos, $\overline{OP} \times \overline{OP'} = \overline{OA}^2$. Como $OA = r$, então $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$. Sejam os triângulos formados, OPC e OCP' , no caso em que P é interno a σ , figura 3.1 b). Eles são retângulos também, portanto $\overline{OP} \times \overline{OP'} = \overline{OC}^2$. Como $OC = r$, então $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.

Definição 3.1.1. *Dada uma circunferência $\sigma_{(O,r)}$, a transformação geométrica que leva um ponto P ao ponto P' como descrito na construção 3.1.1 chama-se inversão. Se $P \in \sigma$, então tome $P' = P$.*

A circunferência σ é chamada de circunferência de inversão e r^2 de potência de inversão. Se P' é o inverso de P , P é o inverso de P' . Isto é, $(P')' = P$. Enquanto P se mantém no interior de σ , seu inverso está no exterior. Quanto mais próximo P está de σ , mais próximo seu inverso de σ . Quando P se aproxima do centro de inversão, P' fica cada vez mais distante de O .

3.1.1 Inversões de retas e circunferências

A inversão de uma circunferência resulta em outra circunferência ou uma reta. Isto depende da posição relativa da circunferência a ser invertida α , em relação a circunferência de inversão σ . A figura 3.2 ilustra o primeiro caso e a figura 3.3 ilustra o segundo caso.

Lema 3.1.1. *A figura inversa de uma circunferência α que passa pelo centro de inversão é uma reta.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1,r_1)}$ a circunferência de inversão e $\alpha_{(O_2,r_2)}$ a circunferência que passa pelo centro de inversão O_1 . Seja $A \neq O_1$ o ponto onde a reta O_1O_2 intercepta α . Pelo ponto A' , inverso do ponto A , constrói-se uma reta t perpendicular a reta O_1O_2 . Seja $B \neq O_1$ o ponto onde uma reta s que passa pelo ponto O_1 intercepta a circunferência α . Seja C o ponto onde a reta s intercepta a reta t . Note que o ponto B pode pertencer, ser interno ou externo à circunferência σ .

Se a reta $s \neq O_1O_2$, os triângulos formados, ABO_1 e $CA'O_1$, são semelhantes, pois o ângulo $\angle AO_1B$ é comum aos dois triângulos e os ângulos $\angle O_1\hat{A}'B'$ e $\angle O_1\hat{B}A$ são retos. Portanto,

$$\frac{\overline{O_1B}}{\overline{O_1A'}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1C}}, \quad (3.1)$$

ou seja, $\overline{O_1C} \times \overline{O_1B} = r_1^2$. Logo, o ponto C é o inverso do ponto B .

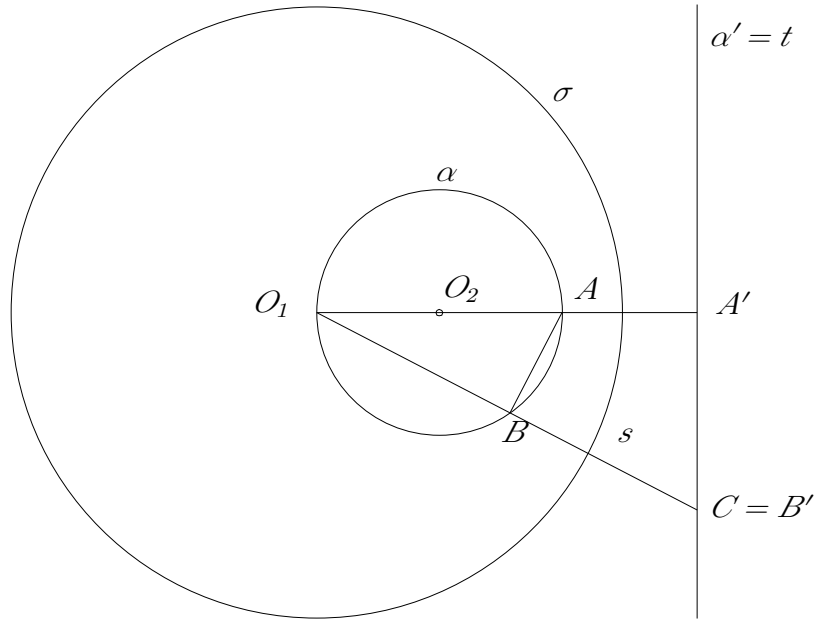


Figura 3.2: Inversão de uma circunferência; primeiro caso.

Se a reta $s = O_1O_2$, o ponto A coincide com o ponto B . O ponto C coincide com o ponto A' . Por isso, o ponto C é inverso do ponto B . \square

Como B descreve a circunferência α , exceto $B = O_1$, B' descreve a reta t .

Lema 3.1.2. *A figura inversa de uma reta t que não passa pelo centro de inversão é uma circunferência que passa pelo centro de inversão.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1, r_1)}$ a circunferência de inversão e t a reta que não passa pelo centro de inversão. Seja A o ponto de intersecção de uma reta s , que passa pelo ponto O_1 e é perpendicular à reta t . Seja A' o inverso do ponto A . Seja $u \neq s$ uma reta por O_1 que intercepta a reta t num ponto B . Seja B' o inverso do ponto B . Seja α a circunferência que passa pelos pontos A' , B' e O_1 . Seja v uma reta que passa por O_1 e intercepta α no ponto C e a reta t no ponto D .

Se a reta $v \neq u$, os triângulos formados, $A'CO_1$ e ADO_1 são semelhantes, pois o ângulo $\angle A\widehat{O}_1C$ é comum aos dois triângulos e os ângulos $\angle C\widehat{A}'O_1$ e $\angle A\widehat{D}O_1$ são retos. Portanto,

$$\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1D}} = \frac{\overline{O_1C}}{\overline{O_1A'}}, \quad (3.2)$$

ou seja, $\overline{O_1D} \times \overline{O_1C} = r_1^2$. Logo, o ponto C é o inverso do ponto D .

Se as retas $v = u$, o ponto C coincide com o ponto B e o ponto C' coincide com o ponto B' . Se as retas $v = s$, o ponto A coincide com o ponto C e o ponto

C' coincide com o ponto A' . □

Como o ponto C descreve a reta t o ponto $C' = D$ descreve a circunferência α , exceto $D = O_1$.

Lema 3.1.3. *A inversa de uma reta t que passa pelo centro de inversão coincide com sua inversa t' .*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1, r_1)}$ a circunferência de inversão e t a reta a ser invertida. Seja $A \neq O_1$ um ponto da reta t e A' seu inverso. Como a reta t passa pelo centro de inversão O_1 , o ponto A' está sobre t . Uma vez que o ponto A descreve a reta t , A' descreve a reta t' que coincide com reta t . □

Lema 3.1.4. *A figura inversa de uma circunferência α que não passa pelo centro de inversão O_1 , é uma circunferência α' que não passa por O_1 .*

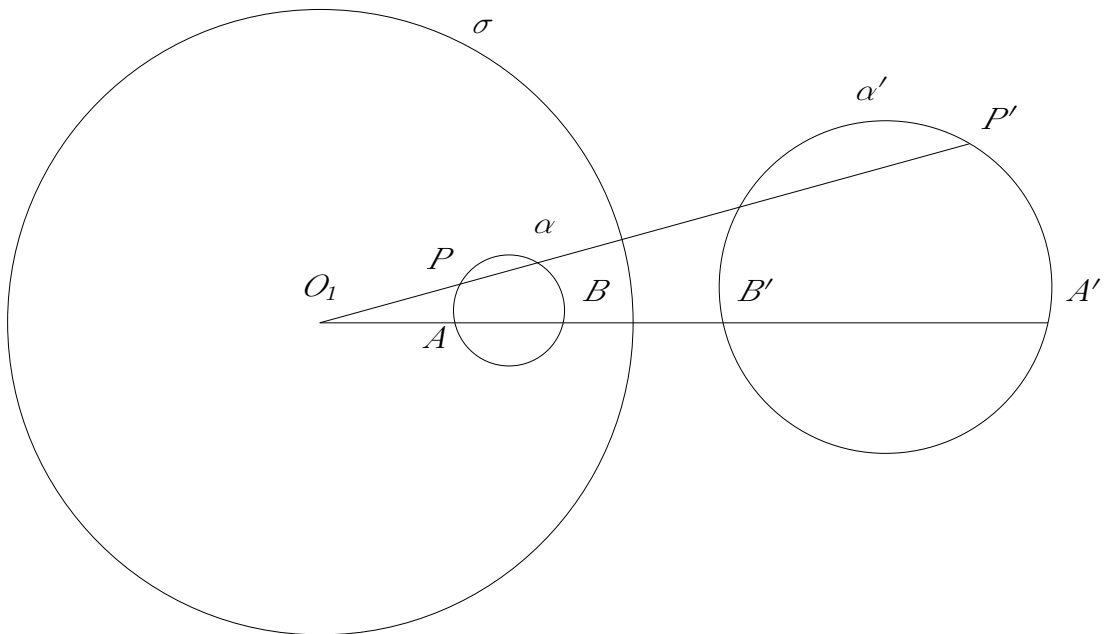


Figura 3.3: Inversão de uma circunferência; segundo caso.

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1, r_1)}$ a circunferência de inversão e α a circunferência a ser invertida. Sejam A e B os pontos onde a reta s que passa pelo ponto O_1 intercepta α . Seja P um ponto de α . Sejam A' , B' e P' os inversos dos pontos A , B e P . Pela definição de inversão $\overline{O_1A} \times \overline{O_1A'} = \overline{O_1P} \times \overline{O_1P'}$. Então,

$$\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{O_1P'}}{\overline{O_1A'}}. \quad (3.3)$$

Seja $P \neq A$, $P \neq B$. Sejam os triângulos O_1AP e $O_1A'P'$. Eles são semelhantes pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, pois os lados correspondentes que formam o ângulo $\widehat{\angle PO_1A}$, que é comum, nos dois triângulos são proporcionais como mostra a expressão 3.3. Então, sejam $O_1\widehat{AP} = \theta_1$ e $O_1\widehat{BP} = \theta_2$. O ângulo θ_1 é igual a soma dos ângulos internos opostos, \widehat{ABP} e \widehat{APB} . Como $O_1\widehat{P'A'} = O_1\widehat{AP} = \theta_1$ e $O_1\widehat{P'B'} = O_1\widehat{BP} = \theta_2$,

$$A'\widehat{P'B'} = P\widehat{AO_1} - O_1\widehat{P'B'} = \theta_1 - \theta_2 = A\widehat{PB}. \quad (3.4)$$

Como os ângulos $A\widehat{PB}$ e $A'\widehat{P'B'}$ são iguais, P' descreve a circunferência α' . A circunferência α' não passa por O_1 pois pelo lema 3.1.1, a inversa da circunferência α' caso esta passe pelo centro de inversão é uma reta. Os inversos de A e de B pertencem à α' . \square

Para qualquer reta que passa pelo ponto O_1 e intercepta a circunferência α nos pontos A e B a potência do ponto O_1 é

$$\overline{O_1A} \times \overline{O_1B} = Pot_{(O_1, \alpha)} \quad (3.5)$$

Seja A' é o ponto inverso de A na circunferência α' . Pela definição de inversão,

$$\overline{O_1A} \times \overline{O_1A'} = r_1^2. \quad (3.6)$$

A divisão da expressão 3.6 pela expressão 3.5 resulta:

$$\frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1B}} = \frac{r_1^2}{Pot_{(O_1, \alpha)}}. \quad (3.7)$$

Esse resultado mostra que enquanto B descreve a circunferência α , A' descreve a circunferência α' . Mostra também que como a razão $r_1^2/Pot_{(O_1, \alpha)}$ é constante, o centro de inversão O_1 é também centro de homotetia dos pontos B e A' . Portanto, as circunferências α e α' são homotéticas pelo centro O_1 e a razão $r_1^2/Pot_{(O_1, \alpha)}$. Se a potência do ponto O_1 for positiva, o ponto O_1 é centro de homotetia direta. Considerando que σ e α não são concêntricas, se a potência do ponto O_1 for negativa O_1 é centro de homotetia inversa. Seja r_2 o raio de α e r_3 o raio de α' . A relação entre r_2 e r_3 é:

$$r_3 = r_2 \times \left| \frac{r_1^2}{Pot_{(O_1, \alpha)}} \right|. \quad (3.8)$$

3.1.2 Propriedades da inversão

Teorema 3.1.1. *Se uma reta t e uma circunferência α são tangentes, suas inversas são tangentes no ponto P' inverso do ponto P .*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1, r_1)}$ a circunferência de inversão. A reta t e a circunferência α são transformadas em retas ou circunferências. Como apenas o ponto P é comum, as inversas de t e α são tangentes no ponto P' . \square

Proposição 3.1.1. *Se duas retas interceptam-se sob um ângulo θ , suas inversas interceptam-se sob o mesmo ângulo θ .*

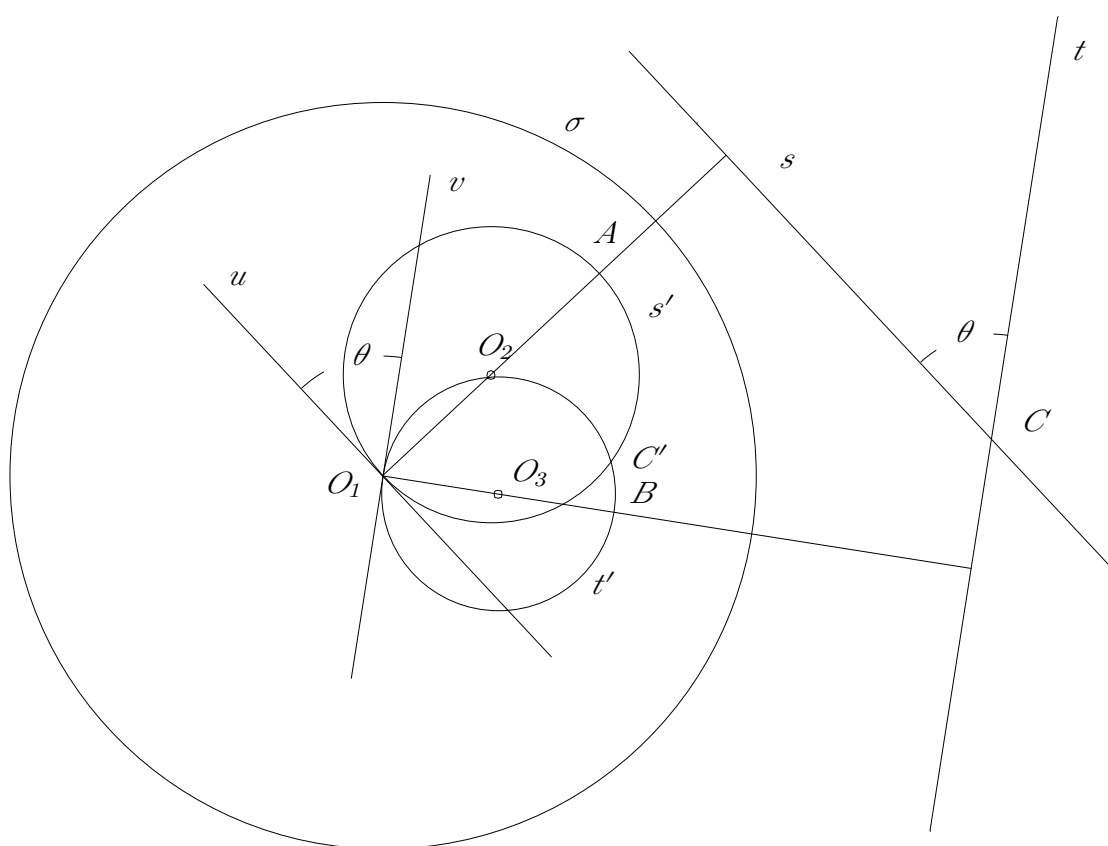


Figura 3.4: Preservação de ângulos.

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1, r_1)}$ a circunferência de inversão. Sejam s e t as retas que interceptam-se sob um ângulo θ num ponto C . Se o ponto C coincide com o centro de inversão O_1 , a preservação do ângulo θ é consequência imediata do lema 3.1.3.

Se as retas s e t não passam pelo centro de inversão O_1 , elas são transformadas nas circunferências s' e t' que passam pelo centro de inversão como ilustra a figura 3.4. Seja O_2 o centro da circunferência s' . Pela construção da inversa de uma reta

que não passa pelo centro de inversão, a reta O_1O_2 intercepta s' no ponto $A \neq O_1$ e é perpendicular à reta s . Como o segmento $\overline{O_1A}$ é diâmetro da circunferência s' , a reta u , tangente à s' no ponto O_1 , é paralela à reta s . Seja O_3 o centro da circunferência t' . Pela construção da inversa de uma reta que não passa pelo centro de inversão, a reta O_1O_3 intercepta t' no ponto $B \neq O_1$ e é perpendicular à reta t . Como o segmento $\overline{O_1B}$ é diâmetro da circunferência t' , a reta v , tangente à t' no ponto O_1 , é paralela à reta t . Portanto, u e v formam o mesmo ângulo θ que s e t .

Se apenas uma das retas, por exemplo, t , passa pelo centro de inversão O_1 , pelo lema 3.1.3, a reta t é transformada na reta t' que coincide com t . Pelo lema 3.1.1, a reta s é transformada na circunferência s' que passa pelo centro de inversão. Seja O_2 o centro da circunferência s' . Pela construção da inversa de uma circunferência que passa pelo centro de inversão, a reta O_1O_2 intercepta s' no ponto $A \neq O_1$ e é perpendicular à reta s . Como o segmento $\overline{O_1A}$ é diâmetro da circunferência s' , a reta u , tangente à s' no ponto O_1 , é paralela à reta s . Como a reta t' coincide com a reta t e a reta u é paralela à reta s , as retas u e t' formam o mesmo ângulo θ que as retas s e t . \square

O ângulo entre uma reta e uma circunferência é o ângulo formado entre a reta dada e as retas tangentes nos pontos de intersecção. Do mesmo modo, o ângulo entre duas circunferências é o ângulo formado entre as retas tangentes nos pontos de intersecção. Como a condição de tangência é preservada na inversão e o ângulo entre duas retas é preservado, segue que a inversão preserva ângulos.

Corolário 3.1.1. *Se uma reta t que passa pelo centro de inversão e uma circunferência α que não passa pelo centro de inversão interceptam-se sob um ângulo θ , suas inversas interceptam-se sob o mesmo ângulo.*

Corolário 3.1.2. *Se uma reta t que não passa pelo centro de inversão e uma circunferência α que não passa pelo centro de inversão interceptam-se sob um ângulo θ , suas inversas interceptam-se sob o mesmo ângulo.*

Corolário 3.1.3. *Se duas circunferências não passam pelo centro de inversão e interceptam-se sob um ângulo θ , suas inversas interceptam-se sob o mesmo ângulo.*

Na realização de demonstrações, deve-se sempre procurar os argumentos mais simples, pois quando isto é feito, em geral, a demonstração tem poucos passos. No estudo de transformações geométricas, deve-se primeiramente observar o comportamento do ponto, da reta e por fim das curvas como é o caso da circunferência. Depois, deve-se observar o comportamento de relações entre eles como a preservação de ângulos. Este roteiro foi utilizado nesse capítulo.

4 Feixes de circunferências

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados um resumo sobre feixes de circunferências. Boas referências para o material aqui apresentado são: (COXETER H. S. ; GREITZER, 1967), (ALTSCHILLER-COURT, 1952) e (JONHSON, 1960).

Definição 4.1.1. *Dadas uma reta Δ e uma circunferência α , chama-se feixe de circunferências $\alpha\Delta$ o conjunto de circunferências que admitem com α , Δ como eixo radical.*

Observação 4.1.1. *Note que duas circunferências concêntricas não admitem um eixo radical Δ , pois $\nexists P$ equipotente a elas. A justificativa é a seguinte: seja P um ponto. Seja A o ponto onde a reta s , que passa pelo ponto P , tangencia β . Seja B o ponto onde a reta t , que passa pelo ponto P , tangencia α . Sejam os triângulos retângulos OBP e OAP . As hipotenusas dos triângulos são iguais ao segmento \overline{OP} , mas $\overline{OB} \neq \overline{OA}$. Logo, $\overline{PA} \neq \overline{PB}$.*

Definição 4.1.2. *Pontos limites são os centros das circunferências de raio nulo de um feixe de circunferências.*

Lema 4.1.1. *Uma reta Δ e uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$, determinam um feixe de circunferências $\alpha\Delta$ que pode ser de três tipos: tangente, secante ou não-secante.*

Demonstração. Se α é tangente à Δ , seja P o ponto de tangência. Pelo lema 2.1.1, a reta Π que contém os centros das circunferências do feixe $\alpha\Delta$ passa por O e é perpendicular à Δ no ponto P . Para todo ponto Q de Π seja a circunferência $\alpha_{1(Q,\overline{QP})}$. Pela construção, Δ é o eixo radical de α e α_1 .

Se α é secante à Δ , sejam S e T os pontos de intersecção. Pelo lema 2.1.1, a reta Π que contém os centros das circunferências do feixe $\alpha\Delta$ passa por O e é perpendicular a Δ no ponto U . Para todo ponto Q de Π seja a circunferência $\alpha_{1(Q,\overline{QS=QT})}$. Pela construção, Δ é o eixo radical de α e α_1 .

Se α não intercepta Δ , pelo lema 2.1.1, a reta Π que contém os centros das circunferências do feixe $\alpha\Delta$ passa pelo ponto O e é perpendicular à Δ no ponto U . Fazemos a construção de $\alpha_1 \in (\alpha\Delta)$ como mostra a figura 4.1. Seja ϵ a circunferência ortogonal à α que tem centro no ponto U . Sejam S e T os pontos onde ϵ intercepta Π . Seja Q um ponto de Π . Seja t a reta que passa pelo ponto Q e é tangente à ϵ no ponto P . Seja α_1 a circunferência com centro em Q e raio \overline{QP} . Se $Q = S$, α_1 possui raio nulo. Para qualquer $Q \in \Pi$ com $\overline{QU} > \overline{SU}$, α_1 e ϵ são ortogonais por construção. Δ é o eixo radical de α e α_1 , pois ϵ é ortogonal às circunferências α e α_1 e tem centro em $U \in \Delta$, que é pela proposição 2.1.1, o lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais à α e α_1 e pelo lema 2.1.1, é perpendicular à reta que une os centros das circunferências α e α_1 .

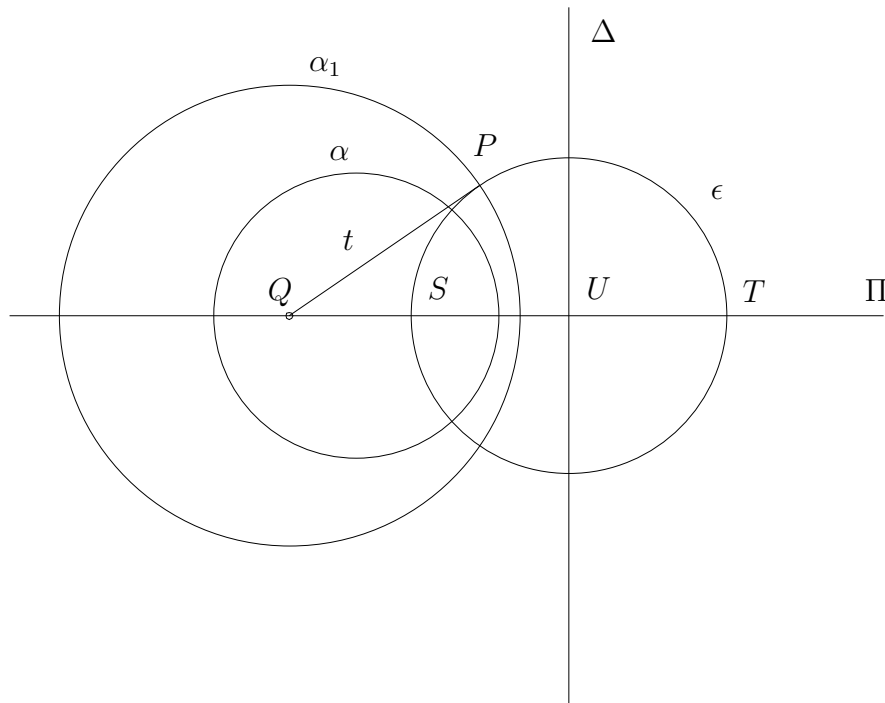


Figura 4.1: Construção de $\alpha_1 \in (\alpha\Delta)$.

Provemos agora que ϵ é a menor circunferência, com centro em Δ , ortogonal à α . De fato, seja s a reta que passa pelo ponto U e é tangente à α no ponto A . Seja $V \neq U$ um ponto de Δ . Seja B o ponto onde a reta z que passa por V é tangente à α . Consideremos os triângulos UAO e VBO . Como eles são retângulos, temos que $\overline{UA}^2 + r^2 = \overline{UO}^2$ e $\overline{VB}^2 + r^2 = \overline{VO}^2$. Subtraindo-se as expressões temos que $\overline{UA}^2 - \overline{VB}^2 = \overline{UO}^2 - \overline{VO}^2 < 0$. Logo, $\overline{UA}^2 < \overline{VB}^2$.

Provemos que, se Q está no interior de ϵ , Q não pode ser centro de circunferência pertencente ao feixe $\alpha\Delta$. Pelo corolário 2.1.1, ϵ é ortogonal a todas as circunferências do feixe $\alpha\Delta$. Se Q é interior à ϵ , usando o mesmo argumento usando na proposição

2.1.1, podemos concluir que Q não é centro de circunferência ortogonal à ϵ . \square

A construção de $\alpha_1 \in (\alpha\Delta)$ pode ser feita também como ilustrado na figura 4.2. Estando definido um feixe não-secante $(\alpha\Delta)$, outras circunferência do feixe podem ser obtidas tomando-se um ponto P de Δ . Pelo ponto P constrói-se uma circunferência ortogonal à circunferência α . Se ϵ é ortogonal à α , pela proposição 2.1.1, ϵ é ortogonal a todas as circunferências do feixe $(\alpha\Delta)$. Como os centros das circunferências do feixe $(\alpha\Delta)$ estão na reta Π , toda reta tangente à ϵ que intercepta Π , à intercepta no centro de uma circunferência do feixe $(\alpha\Delta)$. Os raios das circunferências de $(\alpha\Delta)$ são os segmentos de retas delimitados pelos pontos de intersecção em Π e pontos de tangências em ϵ .

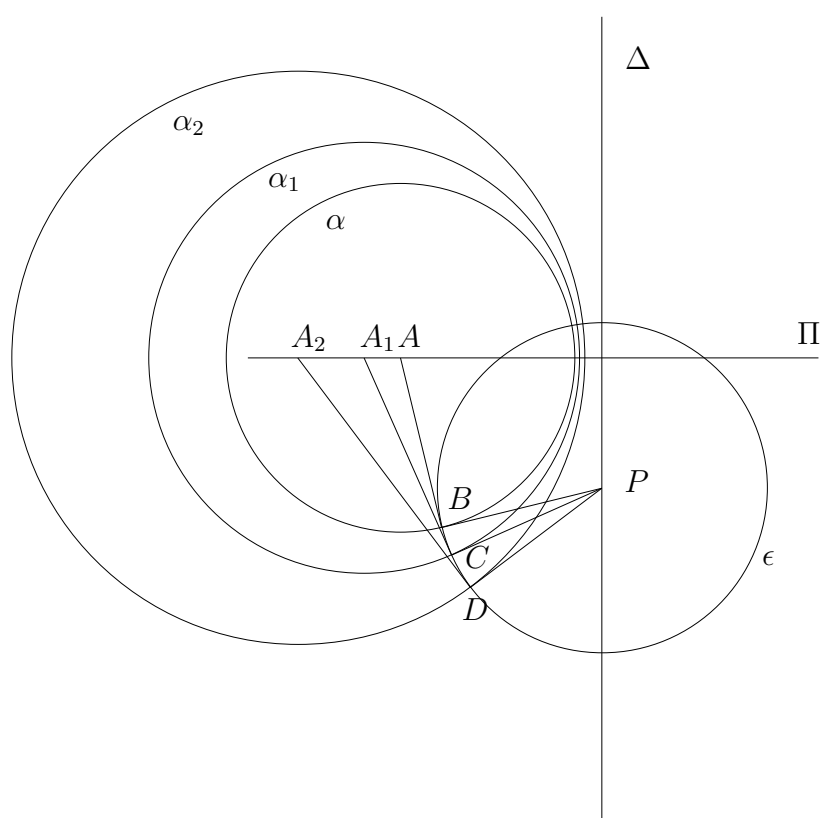


Figura 4.2: Outra construção de $\alpha_1 \in (\alpha\Delta)$.

Após esta demonstração, o leitor pode verificar que as ilustrações do feixe tangente e do feixe secante podem ser suprimidas na figura 4.3. Elas foram mantidas entretanto, para chamar a atenção do leitor quanto a sua necessidade.

Corolário 4.1.1. *Duas circunferências não concêntricas α e β determinam um feixe de circunferências $\alpha\beta$.*

Demonstração. Duas circunferências não concêntricas α e β determinam um eixo radical Δ , portanto, determinam um feixe de circunferências $\alpha\beta$. \square

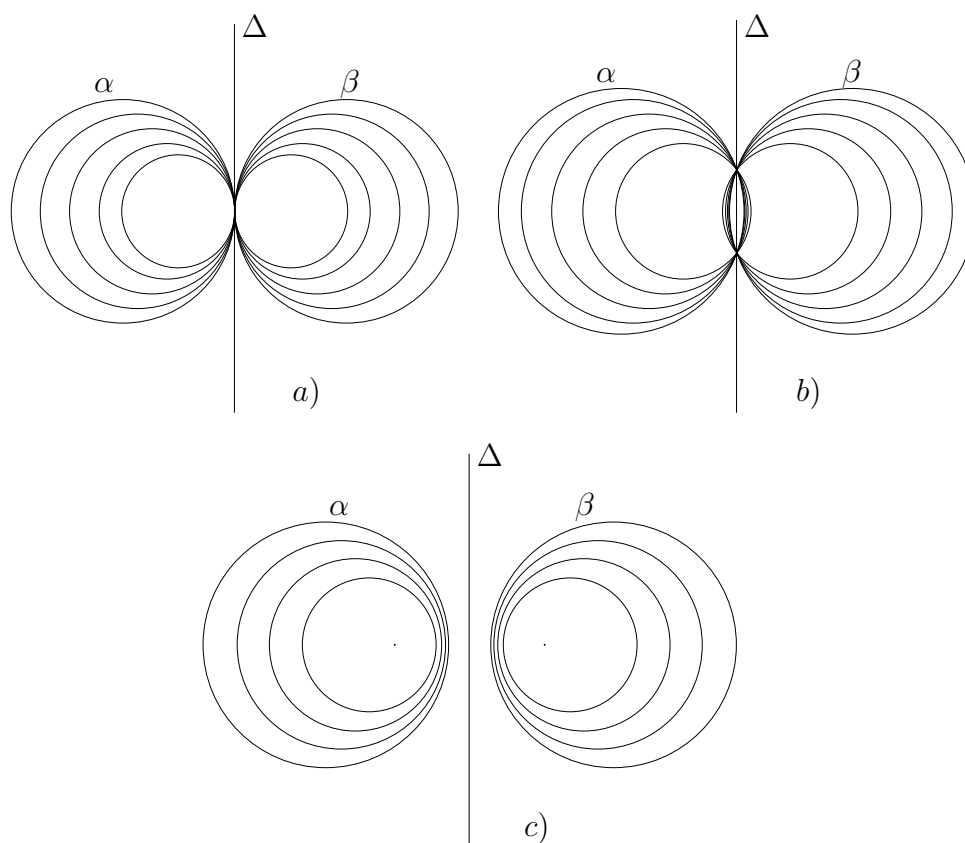


Figura 4.3: Tipos de feixes de circunferências.

4.2 Feixes ortogonais de circunferências

Definição 4.2.1. *Dois feixes de circunferências, $\alpha\Delta$ e $\epsilon\Pi$, são chamados ortogonais se as circunferências de ambos interceptam-se sob ângulos retos.*

Proposição 4.2.1. *Para todo feixe de circunferências $\alpha\Delta$ existe um único feixe $\epsilon\Pi$, tal que $\alpha\Delta$ e $\epsilon\Pi$ são ortogonais. Se $\alpha\Delta$ é tangente, $\epsilon\Pi$ é tangente. Se $\alpha\Delta$ é secante, $\epsilon\Pi$ é não-secante.*

Demonstração. Seja $\alpha\Delta$ um feixe tangente determinado por uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ tangente à reta Δ no ponto P . Pela proposição 2.1.1, Δ é o lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais à $\alpha\Delta$. Como queremos um feixe ortogonal à $\alpha\Delta$, tomemos $Q \in \Delta$ arbitrário. Trace uma circunferência ϵ com centro em Q e raio \overline{QP} . A circunferência ϵ é ortogonal a α por construção. Pelo lema 4.1.1, todas as circunferências obtidas por esse processo geram $\epsilon\Pi$.

Seja $\alpha\Delta$ é um feixe secante determinado por uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ secante à reta Δ nos pontos S e T . Pela proposição 2.1.1, os pontos de Δ externos a α são o lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais à $\alpha\Delta$. Como queremos

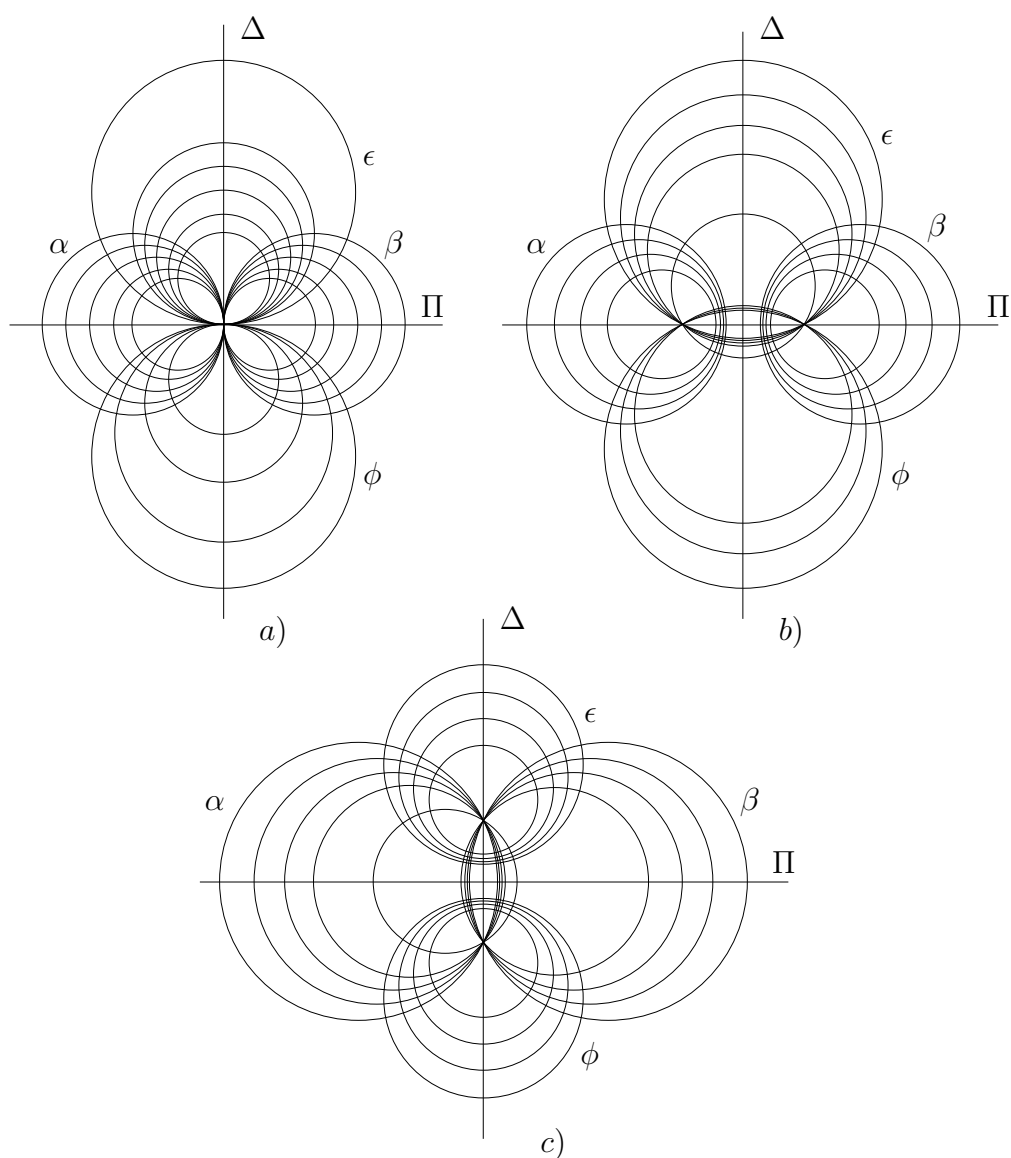


Figura 4.4: Feixes ortogonais de circunferências.

um feixe ortogonal à $\alpha\Delta$, tomemos $Q \in \Delta$ externo à α . Seja t a reta que passa pelo ponto Q e é tangente à α no ponto P . Seja ϵ a circunferência com centro em Q e raio \overline{QP} . Pela construção, o ângulo $\angle O\hat{P}Q$ é reto, logo α e ϵ são ortogonais. Pelo lema 4.1.1, todas as circunferências obtidas por esse processo geram $\epsilon\Pi$ que é um feixe não-secante. \square

Nesta demonstração, o leitor pode verificar o processo de formação dos feixes de circunferências e de seus feixes ortogonais. A figura 4.4 ilustra os três tipos de feixe de circunferências e seus respectivos ortogonais.

4.3 Inversões de feixes de circunferências

Lema 4.3.1. *O inverso de um feixe tangente de circunferências $\alpha\Delta$ é outro feixe tangente de circunferências $(\alpha\Delta)'$ ou um conjunto de retas paralelas.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão. Seja P o ponto de tangência entre α e β . Se $O = \alpha \cap \Delta$, pelo lema 3.1.1 $(\alpha\Delta)$ é transformado em um conjunto de retas paralelas pois as circunferências do feixe possuem apenas um ponto em comum. Senão, $(\alpha\Delta)$ é transformado em um feixe tangente $(\alpha\Delta)'$. \square

Lema 4.3.2. *O inverso de um feixe secante de circunferências $\alpha\Delta$ é outro feixe secante de circunferências $(\alpha\Delta)'$ ou um conjunto de retas concorrentes.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão. Sejam S e T os pontos onde α é secante à Δ . Se $O = S$ ou $O = T$, pelo lema 3.1.1 $(\alpha\Delta)$ é transformado em um conjunto de retas concorrentes pois as circunferências do feixe possuem dois pontos em comum. Senão, $(\alpha\Delta)$ é transformado em um feixe secante $(\alpha\Delta)'$. \square

Lema 4.3.3. *O inverso de um feixe não-secante de circunferências $\alpha\Delta$ é outro feixe não-secante de circunferências $(\alpha\Delta)'$ ou um conjunto de circunferências concêntricas.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão. Sejam S e T os centros das circunferências de raio nulo do feixe $(\alpha\Delta)$. Pela proposição 4.2.1, S e T são pontos de intersecção do feixe $(\epsilon\Pi)$, ortogonal à $(\alpha\Delta)$. Logo, pelo lema 4.3.2, se $O = S$ ou $O = T$, $(\epsilon\Pi)$ é transformado em um conjunto de retas concorrentes. Como a inversão preserva ângulos, proposição 3.1.1, $(\alpha\Delta)$ é transformado em um conjunto de circunferências concêntricas. Nos demais casos, $(\alpha\Delta)$ é transformado em um feixe não-secante $(\alpha\Delta)'$. \square

Corolário 4.3.1. *O eixo radical Δ de um feixe de circunferências $\alpha\Delta$ pode ser invertido em uma circunferência do feixe $(\alpha\Delta)'$.*

Demonstração. Lemas 3.1.1, 3.1.2, 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3. \square

Corolário 4.3.2. *Sejam $\alpha\Delta$ e $\epsilon\Pi$ feixes ortogonais. Os inversos dos feixes $\alpha\Delta$ e $\epsilon\Pi$ são também ortogonais.*

Demonstração. Pela proposição 3.1.1, os inversos dos feixes $\alpha\Delta$ e $\epsilon\Pi$ são ortogonais quer seus inversos sejam feixes ou não. \square

Corolário 4.3.3. *Se um feixe secante $\alpha\Delta$ é transformado por inversão em um conjunto de retas concorrentes, o feixe ortogonal à $\alpha\Delta$, $\epsilon\Pi$, é transformado em um conjunto de circunferências concêntricas.*

Demonstração. Proposição 3.1.1, lema 4.3.3 e corolário 4.3.2. □

Lema 4.3.4. *Os pontos limites S e T de um feixe não-secante de circunferências $\alpha\Delta$ são o lugar geométrico dos pontos, centros de inversão, que transformam o feixe $\alpha\Delta$ em um conjunto de circunferências concêntricas.*

Demonstração. Sejam $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão e Π a reta perpendicular a Δ que passa pelo centro de α . Sejam S e T os centros das circunferências de raio nulo do feixe ($\alpha\Delta$). Se $O = S$ ou $O = T$, pelo lema 4.3.3 ($\alpha\Delta$) é transformado em um conjunto de circunferências concêntricas. Senão, seja O tal que α' , Δ' , Π' sejam circunferências. A circunferência Π' é ortogonal à α' e a Δ' . Logo, o centro de Π' é um ponto do eixo radical das circunferências Δ' , α' . Portanto, Δ' e α' não são concêntricas. □

4.3.1 Propriedades dos feixes de circunferências

Lema 4.3.5. *Toda circunferência que passa por um ponto A e por seu inverso A' é ortogonal a circunferência de inversão.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão. Seja $A \neq O$ um ponto e A' seu inverso. Seja α uma circunferência que passa pelos pontos A e A' . Pela definição de potência de ponto, $Pot(O)_\alpha = \overline{OA} \times \overline{OA'}$. Pela definição de inversão, $\overline{OA} \times \overline{OA'} = r^2$. Portanto, $Pot(O)_\alpha = r^2$. Logo, o comprimento dos segmentos de reta tangente por O à α é $\sqrt{r^2} = r$. □

Lema 4.3.6. *Seja α uma circunferência que não passa pelo centro de inversão e α' sua inversa. Se uma circunferência ϵ passa por um ponto P de α e por seu inverso P' em α' , então ϵ intercepta α e α' sob o mesmo ângulo.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão. Seja ϵ a circunferência que passa pelos pontos P e P' . Pelo lema 4.3.5, ϵ é ortogonal à σ . Logo, $\epsilon' = \epsilon$. Pela proposição 3.1.1, o ângulo entre ϵ e α é preservado na inversão. Logo, ϵ intercepta α' e α sob o mesmo ângulo. □

Lema 4.3.7. *Se uma circunferência ϵ intercepta uma circunferência α e sua inversa α' sob mesmo ângulo, ϵ é ortogonal a circunferência de inversão.*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O,r)}$ a circunferência de inversão. Se ϵ não intercepta α e α' sob o mesmo ângulo, então $\epsilon \neq \epsilon'$. Logo, ϵ não é ortogonal a σ , pois se fosse $\epsilon = \epsilon'$. \square

Lema 4.3.8. *Seja α uma circunferência e β sua inversa. A circunferência que inverte α em β pertence ao feixe formado por α e β .*

Demonstração. Seja $\sigma_{(O_1,r_1)}$ a circunferência que inverte $\alpha_{(O_2,r_2)}$ em $\beta_{(O_3,r_3)}$. Seja Δ_1 o eixo radical entre α e β . Seja ϵ uma circunferência ortogonal às circunferências α e β . O eixo radical Δ_1 passa pelo centro de ϵ e é perpendicular à reta O_2O_3 . Como ϵ intercepta α e β sob o mesmo ângulo, pelo lema 4.3.7, ϵ é ortogonal à σ . Seja Δ_2 o eixo radical entre σ e α . Como o eixo radical Δ_2 passa pelo centro de $\epsilon = \epsilon'$ e é perpendicular à reta O_2O_3 , $\Delta_1 = \Delta_2$. \square

4.3.2 A inversão e a homotetia

Lema 4.3.9. *Dadas duas circunferências $\alpha_{(O_2,r_2)}$ e $\beta_{(O_3,r_3)}$, cuja relação entre os raios é $r_2 < r_3$ como mostra a figura 4.5, o centro de homotetia direta, O_1 , de α e β é centro da inversão de α em β .*

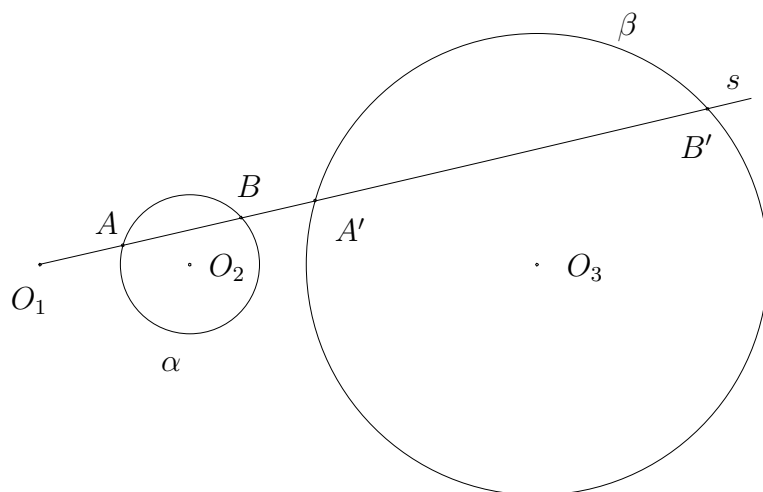


Figura 4.5: Centro de homotetia direta; centro de inversão.

Demonstração. Seja s uma reta secante a α que passa pelo ponto O_1 e intercepta α . Sejam A e B os pontos onde s intercepta α . Sejam A' e B' os pontos homotéticos dos pontos A e B em β . Pela definição de homotetia temos:

$$\frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1B'}}{\overline{O_1B}}. \quad (4.1)$$

Então,

$$\overline{O_1A'} \times \overline{O_1B} = \overline{O_1A} \times \overline{O_1B'}. \quad (4.2)$$

Para qualquer reta que passa pelo ponto O_1 e intercepte α nos pontos A e B a potência do ponto O_1 é:

$$\overline{O_1A} \times \overline{O_1B} = Pot_{(O_1, \alpha)}, \quad (4.3)$$

então,

$$\overline{O_1A'} \times \overline{O_1B} = k \times Pot_{(O_1, \alpha)}. \quad (4.4)$$

Como $k \times Pot_{(O_1, \alpha)}$ é constante, A' é inverso de B . Logo, O_1 é centro de inversão que transforma α em β . \square

Lema 4.3.10. *Dadas duas circunferências secantes $\alpha_{(O_3, r_3)}$ e $\beta_{(O_4, r_4)}$, cuja relação entre os raios é $r_3 < r_4$ como mostra a figura 4.6, o centro inverso de homotetia de α e β , O_2 , é também centro de inversão de α em β .*

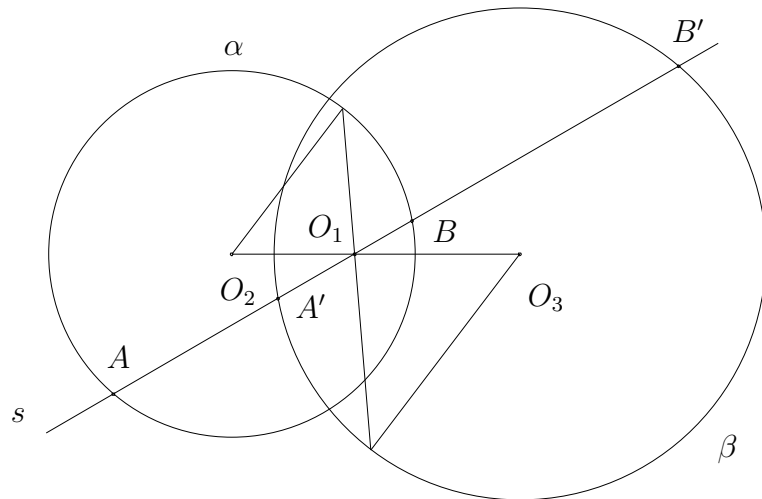


Figura 4.6: Centro de homotetia inversa; centro de inversão.

Demonstração. Seja uma reta s secante à α que passa pelo ponto O_2 . Denote por C e D os pontos onde s intercepta α . Sejam C' e D' os pontos homotéticos dos pontos C e D em β . Pela definição de homotetia temos:

$$\frac{\overline{O_2C'}}{\overline{O_2C}} = \frac{\overline{O_2D'}}{\overline{O_2D}}, \quad (4.5)$$

então,

$$\overline{O_2C'} \times \overline{O_2D} = \overline{O_2C} \times \overline{O_2D'}. \quad (4.6)$$

Para qualquer reta que passa pelo ponto O_2 e intercepta α em pontos C e D , a potência do ponto O_2 é

$$\overline{O_2C} \times \overline{O_2D} = Pot_{(O_2,\alpha)}. \quad (4.7)$$

Note que o ponto O_2 é interno às circunferências α e β . Então,

$$\overline{O_2C'} \times \overline{O_2D} = k \times Pot_{(O_2,\alpha)}. \quad (4.8)$$

Note que k e $Pot_{(O_2,\alpha)}$ são negativos. Como $k \times Pot_{(O_2,\alpha)}$ é constante, C' é inverso de D . Logo, O_2 é centro de inversão que transforma α em β . \square

Vimos nesta demonstração que quando duas circunferências α e β são secantes, o centro inverso de homotetia de α em β , O_2 , é também centro de inversão de α em β . Veremos na seção seguinte que propriedade tem o centro de homotetia inversa quando α e β são não-secantes.

Construção 4.3.1. Dada uma circunferência $\sigma_{(O,r)}$ e um ponto P , constrói-se seu inverso, P' . Rotaciona-se o ponto P' em torno de O 180° para obter P_r , o ponto inverso negativo de P . A figura 4.7 ilustra um exemplo.

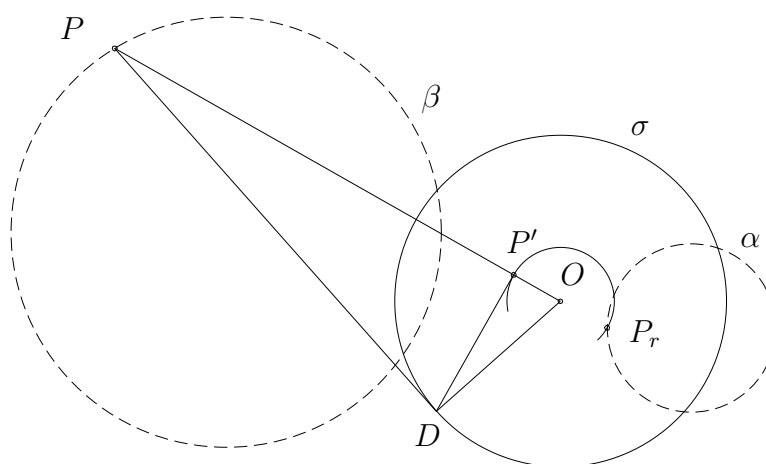


Figura 4.7: Construção do inverso negativo P_r .

Definição 4.3.1. Dada uma circunferência $\sigma_{(O,r)}$, a transformação geométrica que leva um ponto P ao ponto P_r como mostra a construção 4.3.1 chama-se inversão negativa. Se $P \in \sigma$, então tome P_r como o simétrico de P em relação a O .

Se P_r é o inverso negativo de P , P é o inverso negativo de P_r . Isto é, $(P_r)_r = P$. Enquanto P se mantém no interior de σ , seu inverso negativo está no exterior. Quanto mais próximo P está de σ , mais próximo seu inverso negativo está de σ . Quando P se aproxima do centro de inversão, P_r fica cada vez mais distante de O . A diferença é que na inversão negativa P e P_r estão em sentidos opostos da reta OP . A expressão que define a inversão com potência negativa é $\overline{OP} \times \overline{OP_r} = r^2$. Ela significa apenas que se trata de uma inversão normal seguida de uma rotação em torno de O . Veremos agora o que acontece com uma circunferência que passa por pontos inversos negativos.

Lema 4.3.11. *Seja α uma circunferência que não passa pelo centro de inversão e α_r sua inversa negativa. Se uma circunferência δ_1 passa por um ponto P de α e por seu inverso P_r em α_r , então $\delta_1 = \delta_{1r}$ e intercepta α e α_r sob o mesmo ângulo.*

Demonstração. Seja um ponto A de δ_1 . Seja A_r o inverso negativo de A . O ponto A está em uma circunferência δ_1 . Logo, $OA \times OA_r = r^2$ e $\overline{AA_r}$ é corda de circunferência. Então, $A_r \in \delta_1$. Na inversão negativa $\delta_{1r} = \delta_1$. Logo, δ_1 intercepta α e α_r sob o mesmo ângulo. \square

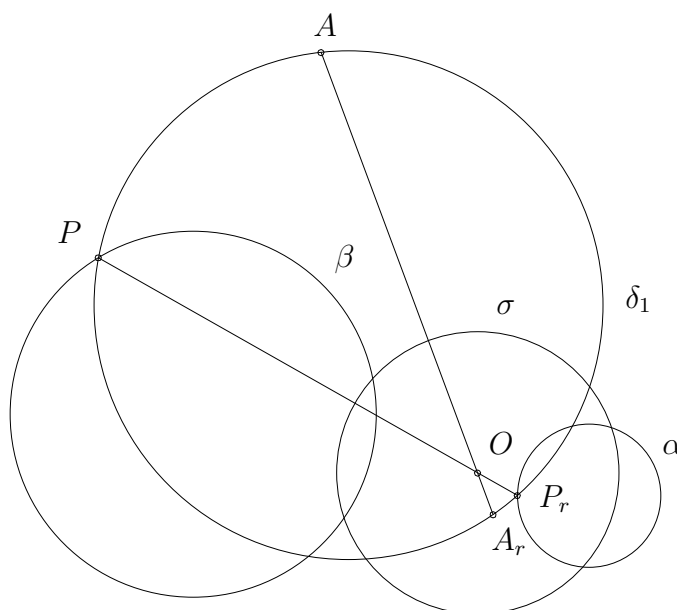


Figura 4.8: Inversa negativa; preservação de ângulos.

Observação 4.3.1. *Os lemas 4.3.6, 4.3.11 estabelecem que dizer que uma circunferência intercepta outras sob o mesmo ângulo, equivale a dizer que esta circunferência passa por pontos inversos segundo os centros de inversão das circunferências dadas tomadas duas a duas.*

5 Resolução de problemas de tangências

5.1 Introdução

Neste capítulo é proposto um método de solução baseado em feixes de circunferências e na transformação geométrica que aplicável aos seguintes problemas:

1. Construir circunferências tangentes a três circunferências dadas.
2. Transformar por inversão três circunferências de raios diferentes em outras três que têm raios iguais.
3. Transformar por inversão três circunferências em outras três cujos centros estejam alinhados.

Apresentamos também uma comparação entre os métodos mais conhecidos e o método proposto em termos do tipo e do número de intersecções necessárias para obtenção das soluções do problema de se construir circunferências tangentes a três outras dadas. Por último, propomos um algoritmo para obtenção de vértices de diagramas de Voronoi para circunferências.

5.2 Eixos de homotetias

Nesta seção vamos demonstrar que os eixos de homotetias formados por três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ são eixos radicais de um par de circunferências tangentes a elas. Como as circunferências α , β e γ podem ser internas ou externas a uma determinada solução, existem oito soluções. Primeiro, vamos analisar o caso em que as três circunferências possuem centros distintos, são externas e não secantes e possuem raios $r_1 < r_2 < r_3$.

Vamos mostrar agora que o eixo direto de homotetia Θ_1 coincide com o eixo radical definido pelas soluções δ_1 e δ_2 . A solução δ_1 é externa às circunferências α , β

e γ . As circunferências α , β e γ são internas à solução δ_2 como mostra a figura 5.1.

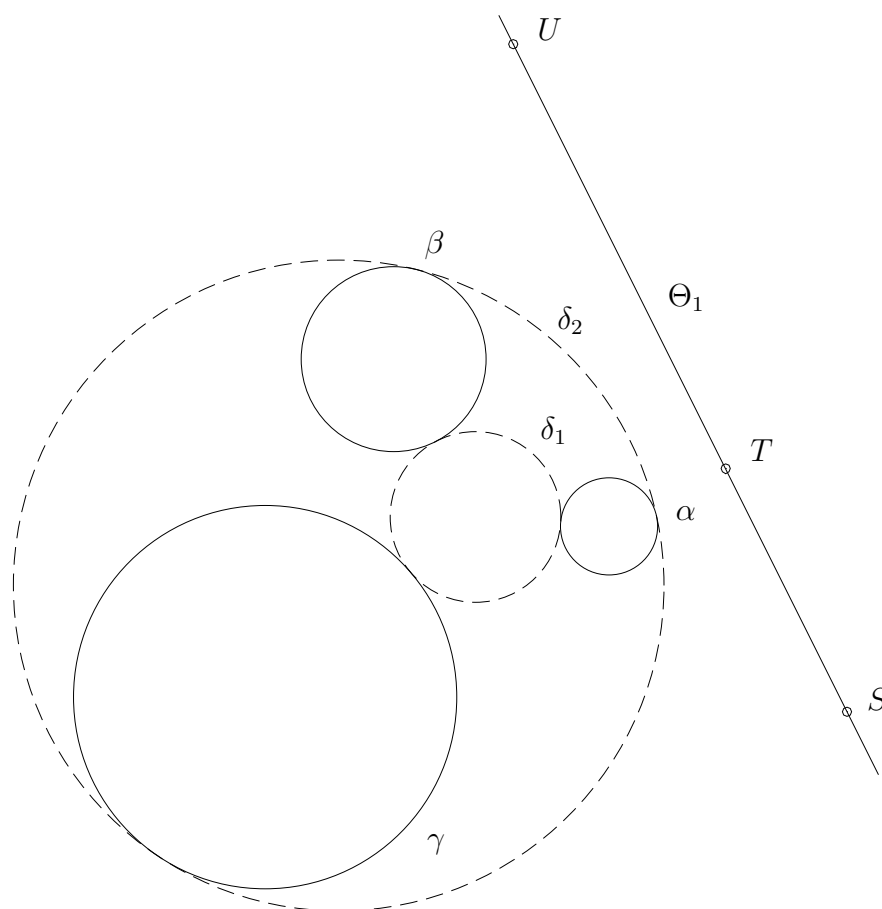


Figura 5.1: Eixo de homotetias; caso 1.

Seja S o centro da circunferência de inversão σ_1 , que transforma α em β . Seja T o centro da circunferência de inversão σ_2 , que transforma α em γ . Seja U o centro da circunferência de inversão σ_3 , que transforma β em γ . Note que o ponto S é o centro da homotetia direta que transforma α em β . Note que o ponto T é o centro da homotetia direta que transforma α em γ . Note que o ponto U é o centro da homotetia direta que transforma β em γ .

Seja D um ponto na circunferência α . Seja E o ponto inverso de A na circunferência β obtido pela circunferência de inversão σ_1 . Seja F o inverso do ponto D na circunferência γ , obtido pela circunferência de inversão σ_2 . Seja δ_i a circunferência que passa pelos pontos D , E e F . Pelo lema 4.3.6, δ_i intercepta α , β e γ sob o mesmo ângulo. Seja G um ponto na circunferência α . Seja H o ponto inverso de G na circunferência β obtido pela circunferência de inversão σ_1 . Seja I o inverso do ponto G na circunferência γ , obtido pela circunferência de inversão σ_2 . Seja δ_j a circunferência que passa pelos pontos G , H e I . Pelo lema 4.3.6, δ_j intercepta α , β e γ sob o mesmo ângulo.

Pelo lema 4.3.7, σ_1 é ortogonal à δ_i e δ_j . Logo, pela proposição 2.1.1, o eixo radical de δ_i e δ_j passa pelo ponto S , centro da circunferência σ_1 . Pelo lema 4.3.7, σ_2 é ortogonal à δ_i e δ_j . Logo, pela proposição 2.1.1, o eixo radical de δ_i e δ_j passa pelo ponto T , centro da circunferência σ_2 . Pelo lema 4.3.7, σ_3 é ortogonal à δ_i e δ_j . Logo, pela proposição 2.1.1, o eixo radical de δ_i e δ_j passa pelo ponto U , centro da circunferência σ_3 . Logo, os pontos S , T e U estão alinhados. Conclui-se que as circunferências que interceptam α , β e γ sob ângulos iguais, passando por pontos inversos segundo σ_1 , σ_2 e σ_3 pertencem ao mesmo feixe de circunferências e têm a reta Θ_1 como eixo radical. As soluções δ_1 e δ_2 pertencem ao feixe $\delta_i\delta_j$.

Essa parte da demonstração é idêntica a que é utilizada no método de Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) para resolver o problema 1.1.1 (PAPELIER, 1925), exceto pela construção dos argumentos. A demonstração de Poncelet é para duas soluções apenas. Segundo a referência (FRÈRE, 1912) ela foi completada por outro estudioso mas não tivemos acesso. O fato de que os eixos de homotetias inversas coincidem com os eixos radicais dos outros três pares de soluções é conhecido e utilizado, por exemplo na referência (GISH D.; RIBANDO, 2004). Não encontramos entretanto, referência que contém esta demonstração. Então fizemos a nossa.

Sejam o eixo de homotetias inversas Θ_2 e as soluções δ_3 e δ_4 como ilustra a figura 5.2. A solução δ_3 é externa às circunferências α , β e interna à γ . A solução δ_4 é interna às circunferências α , β e externa à circunferência γ . O feixe formado por δ_3 e δ_4 é secante. Seja S o centro da circunferência de inversão σ_1 , que transforma α em β . Seja Q o centro da circunferência de inversão negativa σ_4 , que transforma α em γ . Seja V o centro da circunferência de inversão negativa σ_5 , que transforma β em γ .

Seja J um ponto na circunferência α . Seja K o ponto inverso de J na circunferência β , obtido pela circunferência de inversão σ_1 . Seja L o inverso negativo do ponto J na circunferência γ . Seja ω_i a circunferência que passa pelos pontos J , K e L . Pelos lemas 4.3.6 e 4.3.11, a circunferência δ_i intercepta α , β e γ sob o mesmo ângulo. Seja M um ponto na circunferência α . Seja N o ponto inverso de M na circunferência β , obtido pela circunferência de inversão σ_1 . Seja O o inverso negativo do ponto M na circunferência γ . Seja ω_j a circunferência que passa pelos pontos M , N e O . Pelos lemas 4.3.6 e 4.3.11 a circunferência δ_j intercepta α , β e γ sob o mesmo ângulo.

Pelo lema 4.3.6, σ_1 é ortogonal à ω_i e ω_j . Pela proposição 2.1.1, o eixo radical de ω_i e ω_j passa pelo ponto S . Pelo lema 4.3.11, σ_4 intercepta ω_i e ω_j sob o mesmo ângulo. Logo, a inversa negativa de ω_i , ω_{ir} coincide com ω_i . Do mesmo modo, a

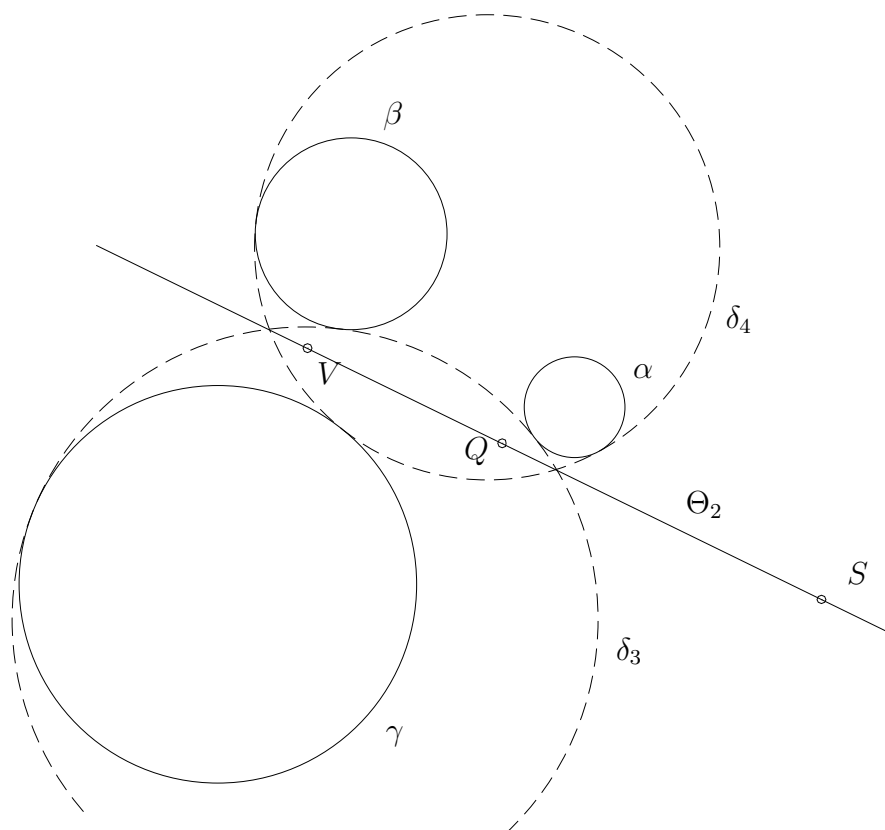


Figura 5.2: Eixo de homotetias; caso 2.

inversa negativa de ω_j , ω_{jr} coincide com ω_j . Como ω_i e ω_j permanecem inalteradas na inversão por σ_4 , o ponto Q possui para elas a mesma potência. Logo, Q é um ponto do eixo radical de ω_i e ω_j . Pelo lema 4.3.11, σ_5 intercepta ω_i e ω_j sob o mesmo ângulo. Logo, a inversa negativa de ω_i , ω_{ir} coincide com ω_i . Do mesmo modo, a inversa negativa de ω_j , ω_{jr} coincide com ω_j . Como ω_i e ω_j permanecem inalteradas na inversão por σ_5 , o ponto V possui para elas a mesma potência. Logo, V é um ponto do eixo radical de ω_i e ω_j . Portanto, os pontos S , Q e V estão alinhados.

Conclui-se que neste caso as circunferências que interceptam α , β e γ sob ângulos iguais, passam por pontos inversos segundo σ_1 , σ_4 e σ_5 pertencem ao mesmo feixe de circunferências e têm Θ_2 como eixo radical. As soluções δ_3 e δ_4 pertencem ao feixe $\omega_i\omega_j$. A análise dos outros eixos de homotetias inversas é idêntica a esta pois cada um passa por um centro de homotetia direta.

5.2.1 Circunferências secantes

Sejam três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ secantes que possuem raios $r_1 < r_2 < r_3$. Vamos mostrar que o eixo de homotetias inversas Θ_3 coincide com o eixo radical definido pelas soluções δ_5 e δ_6 . A solução δ_5 mantém α , β internas e γ externa.

A solução δ_6 mantém α, β externas γ interna como mostra a figura 5.3.

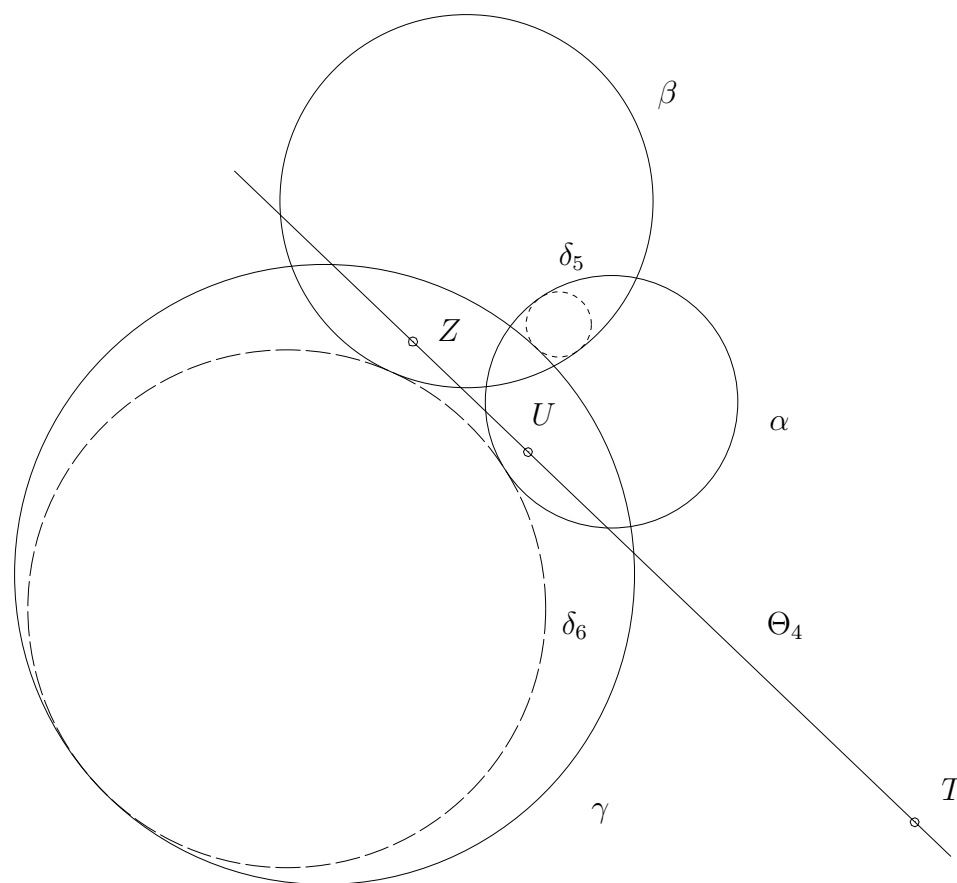


Figura 5.3: Eixo de homotetias; caso 3.

Seja T o centro da circunferência de inversão σ_4 , que transforma α em β . Note que o ponto T é o centro da homotetia direta que transforma α em β . Seja U o centro da circunferência de inversão σ_5 , que transforma α em γ . Note que o ponto U é o centro da homotetia inversa que transforma α em γ . Seja Z o centro da circunferência de inversão σ_6 , que transforma β em γ . Note que o ponto Z é o centro da homotetia inversa que transforma β em γ .

Seja A um ponto na circunferência α . Seja B o ponto inverso de A na circunferência β , obtido pela circunferência de inversão σ_4 . Seja C o inverso do ponto A na circunferência γ , obtido pela circunferência de inversão σ_5 . Seja ι_i a circunferência que passa pelos pontos A, B e C . Pelo lema 4.3.6, toda circunferência que passa pelos pontos A e B intercepta α e β sob o mesmo ângulo. Toda circunferência que passa pelos pontos C e A intercepta γ e α sob o mesmo ângulo. Logo, a circunferência ι_i intercepta α, β e γ sob o mesmo ângulo. Seja D um ponto na circunferência α . Seja E o ponto inverso de D na circunferência β , obtido pela circunferência de inversão σ_4 . Seja F o inverso do ponto A na circunferência γ , obtido pela circunferência de inversão σ_5 . Seja ι_j a circunferência que passa pelos pontos

D , E e F . A circunferência ι_j intercepta α , β e γ sob o mesmo ângulo.

Pelo lema 4.3.7, σ_4 é ortogonal à ι_3 e ι_4 . Pela proposição 2.1.1, o eixo radical de ι_i e ι_j passa pelo ponto T . Pelo lema 4.3.7, σ_5 é ortogonal à ι_3 e ι_4 . Logo, o ponto U pertence ao eixo radical de ι_i e ι_j . Pelo lema 4.3.7, σ_6 é ortogonal à ι_i e ι_j . Logo, o ponto Z pertence ao eixo radical de ι_i e ι_j . Logo, os pontos T , U e Z estão alinhados. Conclui-se que as circunferências que interceptam α , β e γ sob ângulos iguais, passando por pontos inversos segundo σ_4 , σ_5 e σ_6 pertencem ao mesmo feixe de circunferências e têm a reta Θ_3 como eixo radical. As soluções δ_5 e δ_6 pertencem ao feixe $\iota_i \iota_j$.

5.2.2 Circunferências tangentes

Sejam três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ tangentes que possuem raios $r_1 < r_2 < r_3$ como ilustra a figura 5.4.

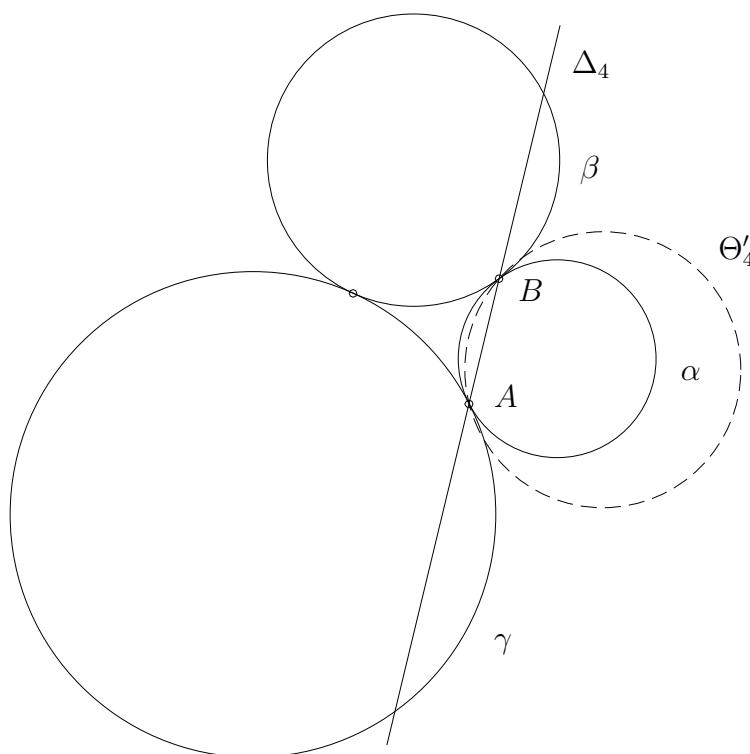


Figura 5.4: Eixo de homotetias; caso 4

Vamos mostrar que o eixo de homotetias inversas Δ_4 não contém soluções para o problema. Sejam α' , β' e γ' as circunferências inversas de α , β e γ . Seja Θ_4 o eixo de homotetias inversas das circunferências α' , β' e γ' que passa pelos centros de homotetias inversas A' e B' . Quando invertemos de volta, temos novamente as circunferências α , β e γ e Θ'_4 que é uma circunferência que passa pelos centros de

homotetias inversas A e B . Sejam Δ_4 o eixo de homotetias inversas que passa pelos centros de homotetia A e B . Como a circunferência $\alpha \in \Theta'_4\Delta_4$, pelo lema 4.1.1, não existem circunferências tangentes a α no feixe $\Theta'_4\Delta_4$ pois este é secante. Logo, os feixes de circunferências determinados pelos eixos de homotetias inversas no caso em que as três circunferências são tangentes não contém soluções para o problema. Neste caso há apenas duas soluções definidas pelo eixo de homotetias diretas.

No caso em que apenas duas das três circunferências são tangentes, como ilustra a figura 5.5, os eixos de homotetias inversas que contém o centro de homotetia inversa A , contém apenas uma solução do problema. Como no caso anterior, o ponto A é um dos pontos onde o feixe $\Theta'_5\Delta_5$ é secante. Como o outro ponto, C , está sobre a circunferência α , C é também o ponto de tangência em α da solução procurada, pois não há dois pontos de tangências de uma mesma circunferência com outra.

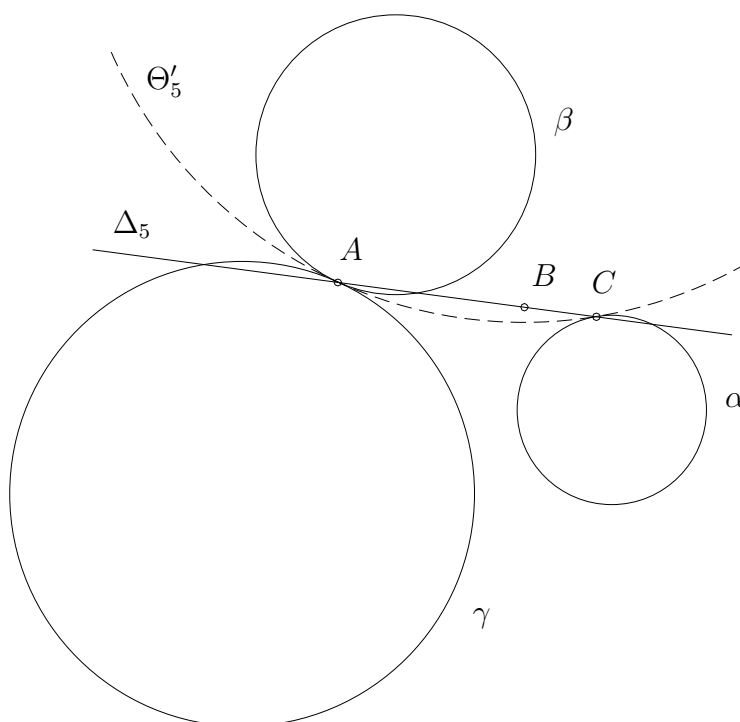


Figura 5.5: Eixo de homotetias; caso 5

5.3 Método proposto

Problema 5.3.1. *Construir circunferências tangentes à três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ com centros distintos, externas e não secantes, cujas relações entre os raios são $r_1 < r_2 < r_3$.*

Construção 5.3.1. *Seja o problema 1.1.1. Primeiro, invertamos as circunferências α , β e γ em relação a uma circunferência de inversão arbitrária $\sigma_{(O,r)}$ de modo resulte*

em três circunferências $\alpha'_{(A,r_1)}$, $\beta'_{(B,r_2)}$ e $\gamma'_{(C,r_3)}$, cujos raios são $r_1 < r_2 < r_3$. Sejam α' , β' e γ' as inversas de α , β e γ em relação a $\sigma_{(O,r)}$. Sejam Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 e Θ_4 , os eixos de homotetia das circunferências α' , β' e γ' . Sejam Θ'_1 , Θ'_2 , Θ'_3 e Θ'_4 as inversas das retas Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 e Θ_4 . Sejam Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 e Δ_4 os eixos de homotetias das circunferências α , β e γ como ilustra a figura 5.6.

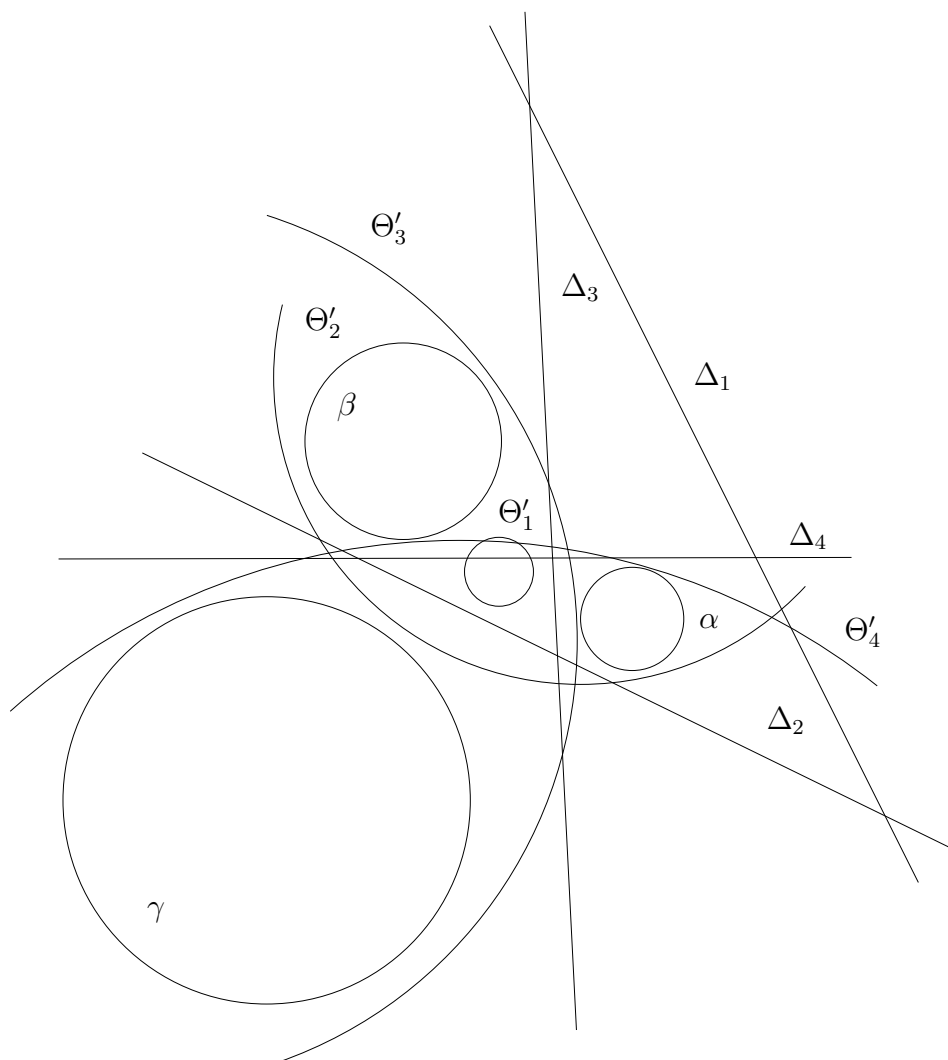


Figura 5.6: Feixes que contém as soluções do problema.

Tomemos como exemplo a resolução do feixe (que é não-secante) Seja $\Theta'_1\Delta_1$ o feixe determinado pela circunferência Θ'_1 e pela reta Δ_1 como ilustra a figura 5.7. Para construir as soluções associadas a este feixe precisamos encontrar pontos no eixo radical Δ_1 que sejam equipotentes às circunferências do feixes e às circunferências α , β e γ . Seja Π a reta que passa pelo centro de Θ'_1 e é perpendicular à Δ_1 no ponto D . Seja ϕ_1 uma circunferência ortogonal à Θ'_1 que pertence ao feixe ortogonal à $\Delta_1\Theta'_1$. Como Θ'_1 é não secante às circunferências α , β e γ , seja $\epsilon_1 \in \Delta_1\Theta'_1$ a circunferência secante a α , β e γ .

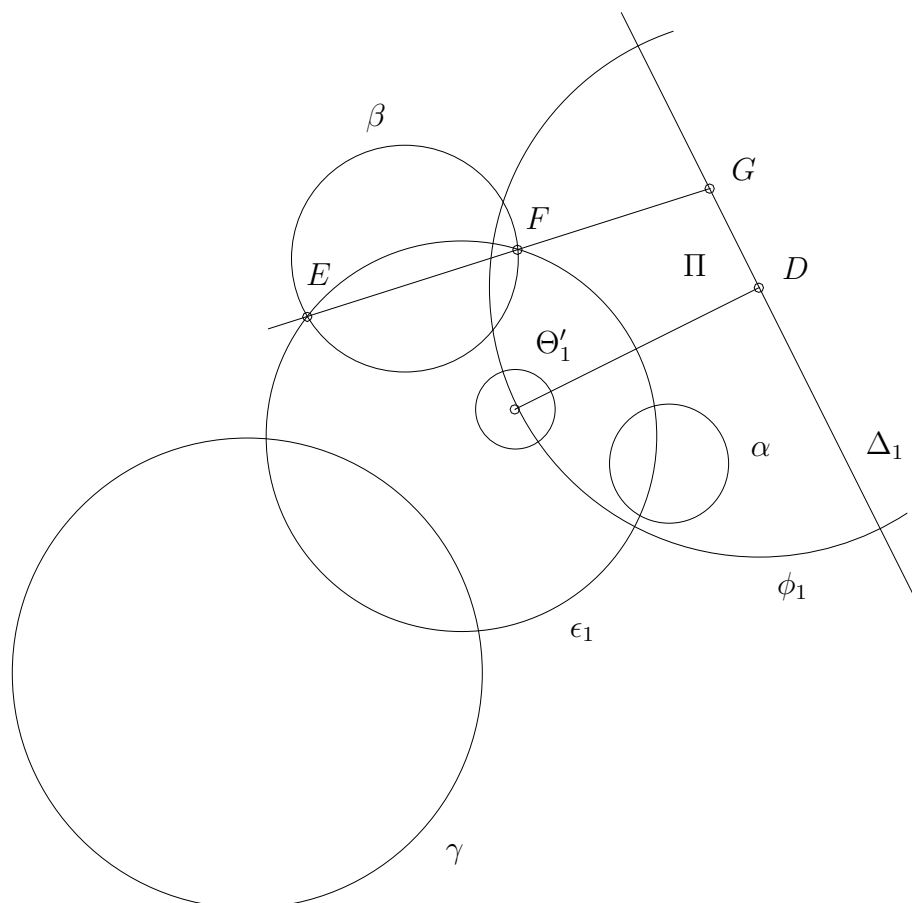


Figura 5.7: Soluções no feixe $\Delta_1\Theta'_1$.

Seja EF uma das cordas resultantes da intersecção de α , β e γ com ϵ_1 como ilustra a figura 5.7. Seja G o ponto de intersecção da reta EF com a Δ . Seja ω_1 a circunferência cujo diâmetro é o segmento \overline{GB} . A circunferência ω_1 determina os pontos H e I sobre a circunferência β que são dois dos pontos de tangência procurados. Seja ω_2 a circunferência cujo diâmetro é determinado pelo centro de α e o ponto resultante da intersecção da corda produzida em α pela circunferência ϵ_1 . A circunferência ω_2 determina os pontos J e K sobre a circunferência α que são dois dos pontos de tangência procurados. Seja ω_3 a circunferência cujo diâmetro é determinado pelo centro de γ e o ponto resultante da intersecção da corda produzida em γ pela circunferência ϵ_1 . A circunferência ω_3 determina os pontos L e M sobre a circunferência γ que são dois dos pontos de tangência procurados. Os pontos H , J e L formam uma solução δ_1 e I , K e M a solução δ_2 como ilustra a figura 5.8.

As outras seis soluções são obtidas do mesmo modo. Encontram-se pontos equipotentes às circunferências dadas e as circunferências dos feixes $\Theta'_2\Delta_2$, $\Theta'_3\Delta_3$ e $\Theta'_4\Delta_4$ nos respectivos eixos radicais. Através destes pontos equipotentes encontramos os pontos de tangências procurados.

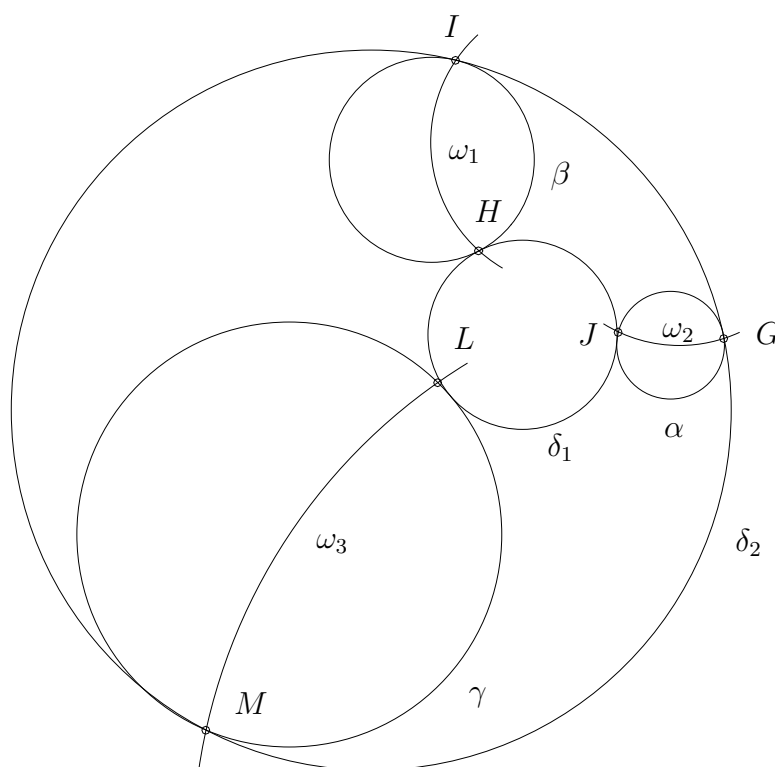


Figura 5.8: Pontos de tangências procurados.

5.3.1 Número de intersecções

Para o problema 5.3.1, os números e tipos de intersecções que precisam ser determinadas, na comparação com outros métodos de solução mostrados no capítulo 1 e anexo 1, para obtenção das oito soluções do problema são mostradas na tabela 5.2. Os números de intersecções referem-se a construções com régua e compasso. Os tipos de intersecções utilizados nesta análise são: reta e reta (**rr**), reta e circunferência (**rc**) e circunferência e circunferência (**cc**). Na tabela 5.1 proposto (1) refere-se aos números de intersecções da solução simplificada apresentada na subsecção 5.3.2.

Tabela 5.1: Número de intersecções; oito soluções

Método	Tipo rr	Tipo rc	Tipo cc	Total
Viète	20	12	12	44
Proposto (1)	17	9	24	50
Poncelet	16	22	21	59
Moebius	32	32	28	92
Proposto (2)	36	25	32	93
Gergonne	52	24	36	112

5.3.2 Discussão

Por este método podem-se obter também as soluções das configurações de três circunferências mostradas nas figuras 5.9 e 5.10.

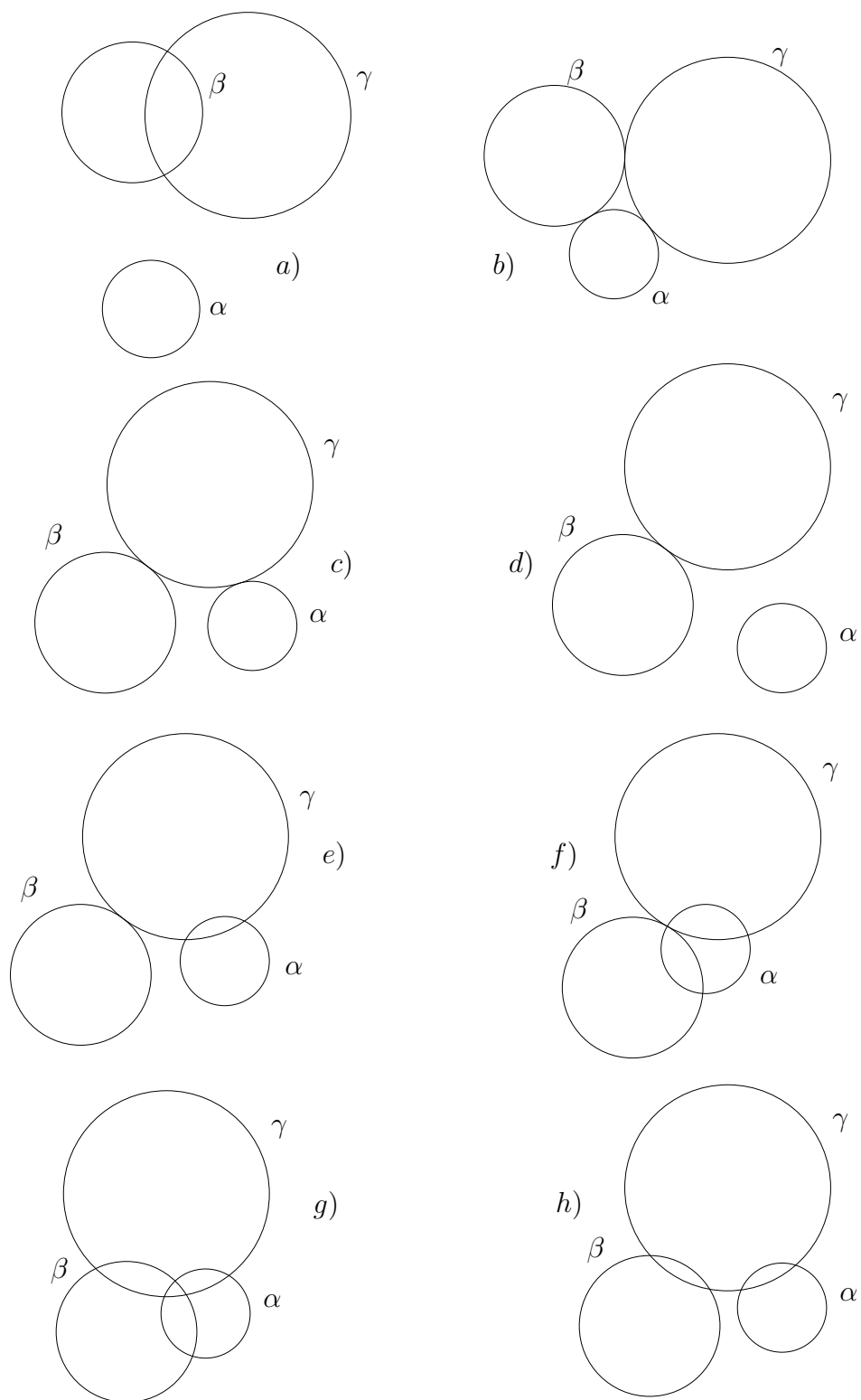


Figura 5.9: Configurações de circunferências.

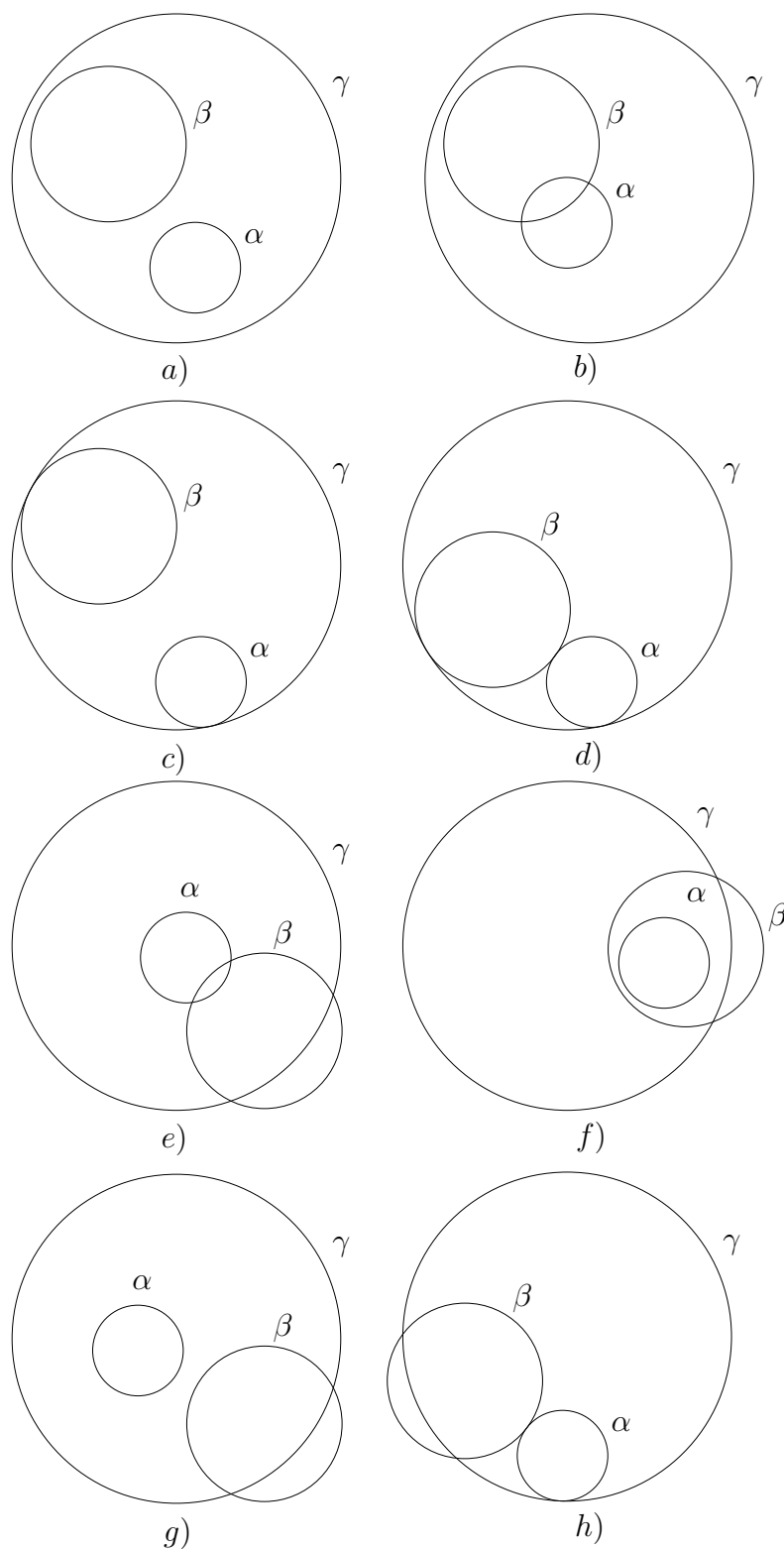


Figura 5.10: Outras configurações de circunferências.

Quando as circunferências α , β e γ possuem raios iguais o eixo de homotetias diretas não está definido. Pelo lema 4.3.3, neste caso duas das soluções estão associadas a um conjunto de circunferências concêntricas.

Vamos agora analisar o que ocorre com as oito soluções do problema 5.3.1 quando

as circunferências α , β e γ são invertidas em relação a circunferência ϵ , que é ortogonal a elas como ilustra a figura 5.11.

Seja Z o centro radical de α , β e γ . Seja ϵ a circunferência que é ortogonal a α , β e γ . Quando α , β e γ são invertidas em relação a ϕ , as inversas α' , β' e γ' coincidem com α , β e γ . Como existem oito soluções, quatro delas são invertidas nas outras quatro. Sejam $\delta_1, \delta_3, \delta_5$ e δ_7 quatro soluções. Sejam $\delta_2, \delta_4, \delta_6$ e δ_8 as outras quatro soluções. A circunferência δ_2 é inversa de δ_1 . A circunferência δ_4 é inversa de δ_3 . A circunferência δ_6 é inversa de δ_5 . A circunferência δ_8 é inversa de δ_7 .

Pelo lema 4.1.1 e corolário 4.1.1, cada um dos pares de soluções forma um feixe de circunferências. Pelo lema 4.3.8, como a circunferência ϵ inverte as circunferências soluções duas a duas, ϵ pertence aos quatro feixes de circunferências formados. Os pontos A , B , C, D e F pertencem a circunferência ϵ , por isso, ϵ é chamada de circunferência de seis pontos.

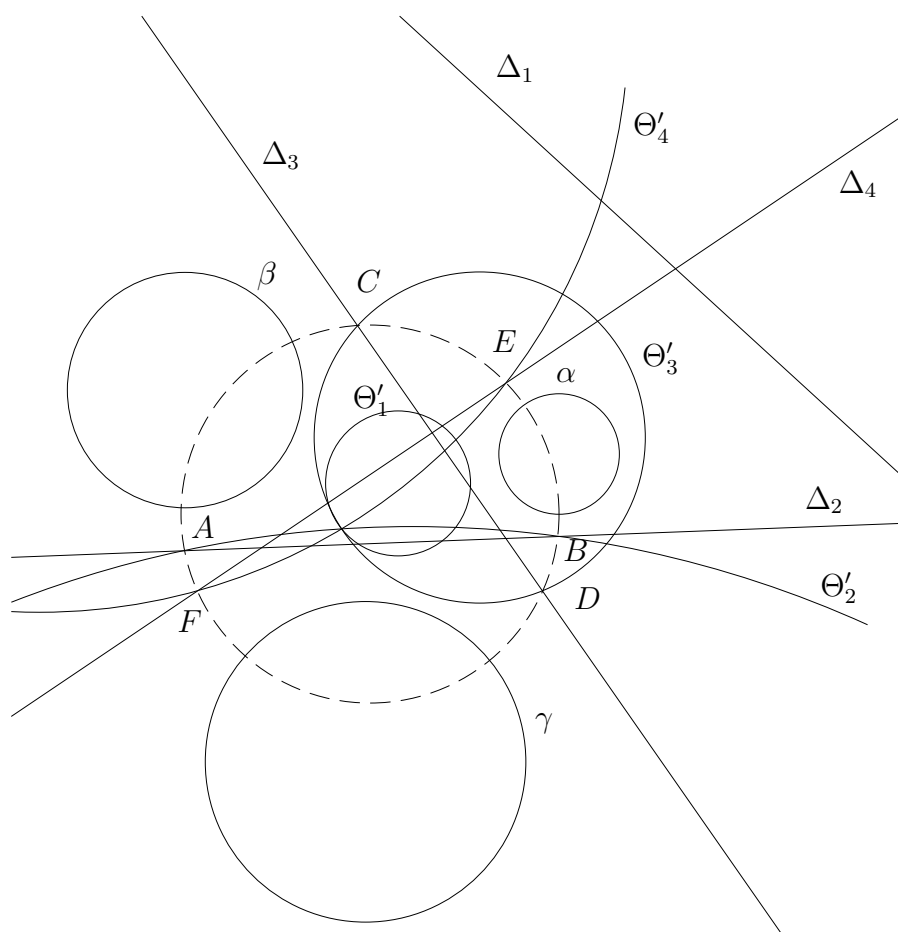


Figura 5.11: Circunferência ϵ ; intersecção entre os feixes.

Para obter as oito soluções do problema basta encontrar o centro radical Z construir a circunferência ϵ que é ortogonal às circunferências α , β e γ . Nas intersecções

de ϵ com os eixos de homotetias definem-se três dos feixes que contém, cada um, duas soluções do problema. As soluções associadas ao feixe não-secante $\epsilon\Delta_1$ são obtidas do modo exemplificado no início da seção método proposto.

Esta simplificação só pode ser aplicada nos casos em que a potência do centro radical é positiva, pois se for negativa, pelo lema 2.1.1, ϵ não pode ser construído.

5.3.3 Alinhar três circunferências

Problema 5.3.2. *Transformar por inversão três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ com centros distintos, não-secantes, cujas relações entre os raios são $r_1 < r_2 < r_3$, em três outras circunferências α' , β' e γ' que possuam centros alinhados.*

Na referência (PAPELIER, 1925), este problema é resolvido supondo-se que as três circunferências α' , β' e γ' , inversas de α , β e γ possuem os centros sobre uma reta r . Quando a reta r é invertida por uma circunferência de inversão, σ , cujo centro não pertence a r e a nenhuma das circunferências dadas, obtém-se as circunferências α , β e γ e r' que agora é uma circunferência. Como os ângulos são preservados na inversão a circunferência r' é uma circunferência ortogonal às circunferências α , β e γ , do mesmo modo que a circunferência ϵ ilustrada na figura 5.11. Desta análise e pelo lema 2.1.1, concluímos que se o centro radical estiver sobre uma das circunferências α , β e γ ou for interno a uma delas o problema não tem solução.

A idéia da aplicação do método proposto para resolver o problema 5.3.2 está no modo como a circunferência ϵ , ortogonal às circunferências α , β e γ é obtida. Duas a duas, as circunferências α e β ; α e γ ; β e γ podem ser transformadas em circunferências concêntricas. Para isso, pelo lema 4.3.3, o centro de inversão deve ser um dos pontos limites dos feixes $\alpha\beta$, do feixe $\alpha\gamma$ ou do feixe $\beta\gamma$. Quando quaisquer duas circunferências forem transformadas em concêntricas, α' , β' e γ' estarão alinhadas.

Para a solução geral, encontramos a circunferência ϵ do seguinte modo: invertemos as circunferências α , β e γ . Encontramos os eixos de homotetia das circunferências α' , β' e γ' . Eles são Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 e Θ_4 . Invertemos de volta e obtemos Θ'_1 , Θ'_2 , Θ'_3 e Θ'_4 que são agora circunferências, como mostra a figura 5.11. Encontramos os eixos de homotetia de α , β e γ ; Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 e Δ_4 . Sejam A e B os pontos onde o feixe $\Theta'_2\Delta_2$ é secante. Sejam C e D os pontos onde o feixe $\Theta'_3\Delta_3$ é secante. Sejam E e F os pontos onde o feixe $\Theta'_4\Delta_4$ é secante. Como a circunferência ϵ pertence a estes feixes, ϵ passa pelos pontos A , B , C , D , E e F . Escolhido um pontos de ϵ como centro de inversão, as circunferências α , β e γ são transformadas em circunferências alinhadas como mostra a figura 5.12. As circunferências inversas, α' , β' e γ' alternam

suas posições entre internas e externas de acordo com a posição do centro de inversão sobre ϵ .

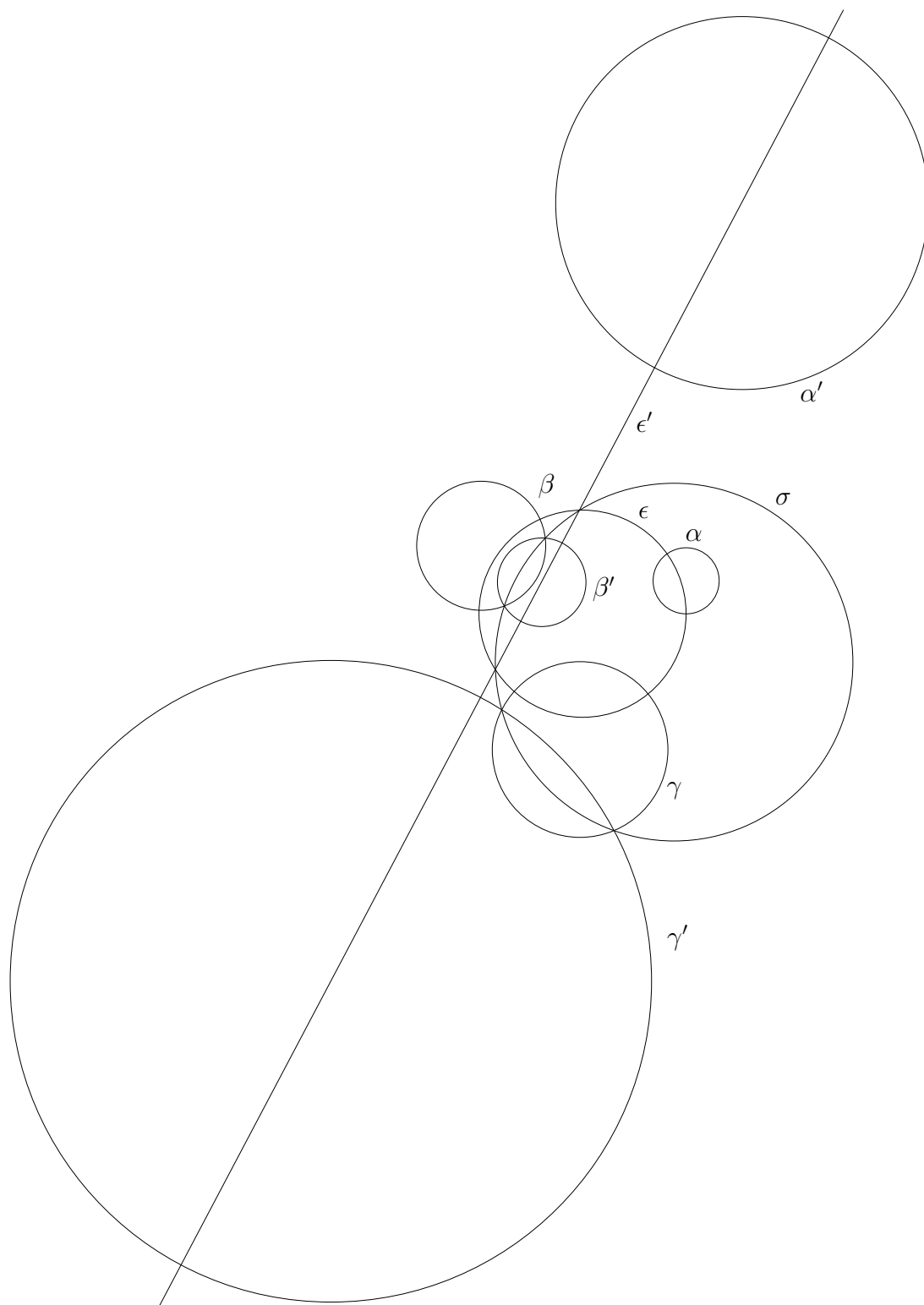


Figura 5.12: Circunferências α' , β' e γ' alinhadas.

5.3.4 Circunferências congruentes

Problema 5.3.3. Transformar por inversão três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ com centros distintos, cujas relações entre os raios são $r_1 < r_2 < r_3$, em três outras circunferências α' , β' e γ' que possuam raios iguais.

Na referência (PAPELIER, 1925), este problema é resolvido do seguinte modo: Seja P o centro da circunferência de inversão, σ_1 , que transforma α em β . Seja Q o centro da circunferência de inversão, σ_2 , que transforma α em γ . Seja R o centro da circunferência de inversão, σ_3 , que transforma β em γ .

Seja $\phi_{(D,r)}$ uma circunferência de inversão. Para que α e β e γ sejam transformadas por inversão em circunferências que possuem o mesmo raio r_4 , os raios r_α , r_β e r_γ devem multiplicados por uma razão tal que

$$r_4 = r_\alpha \times \left| \frac{r_\phi^2}{Pot(D)_\alpha} \right|, \quad (5.1)$$

$$r_4 = r_\beta \times \left| \frac{r_\phi^2}{Pot(D)_\beta} \right|, \quad (5.2)$$

$$r_4 = r_\gamma \times \left| \frac{r_\phi^2}{Pot(D)_\gamma} \right|. \quad (5.3)$$

Fica claro que este problema tem solução apenas se σ_1 , σ_2 e σ_3 determinam um feixe secante. Neste caso, sejam D e E , os pontos onde as circunferências σ_1 , σ_2 e σ_3 interceptam-se. Escolhe-se um deles como centro de inversão, por exemplo o ponto A . Ao inverter as circunferências α , β e γ , obtém-se α' , β' e γ' que possuem o mesmo raio.

5.3.4.1 Solução proposta

A idéia da aplicação do método proposto para resolver este problema começa com uma abstração que é imaginar que as circunferências traçadas mostradas na figura 5.13, δ_1 e δ_2 , podem ser invertidas em circunferências concêntricas.

Sabemos que o eixo radical das circunferências δ_1 e δ_2 coincide com o eixo direto de homotetia das circunferências α , β e γ . Então, invertamos as circunferências α , β e γ . Encontramos o eixo direto de homotetia Θ_1 das circunferências α' , β' e γ' como mostra a figura 5.14. Invertamos de volta e obtemos α , β , γ e Θ'_1 que é agora uma circunferência. Encontramos o eixo direto de homotetia de α , β e γ , Δ_1 e assim

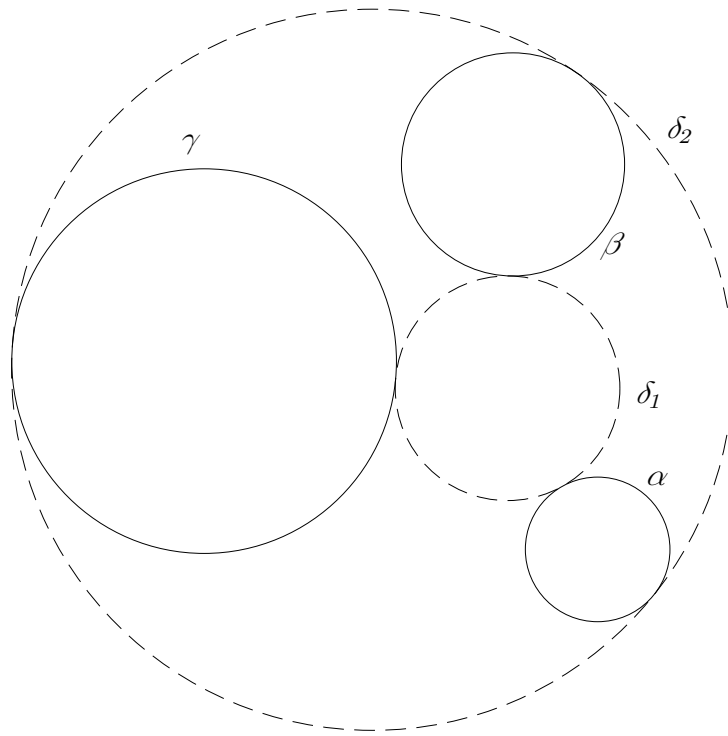


Figura 5.13: Circunferências tangentes; abstração.

determinamos o feixe $\Theta'_1\Delta_1$ que contém as circunferências tracejadas.

Por este método, apenas se o feixe $\Theta'_1\Delta_1$ for não-secante o problema tem solução. Os pontos, centros de inversão procurados, pelo lema 4.3.3, são os pontos limites do feixe $\Theta'_1\Delta_1$. Seja T um ponto de Δ_1 . Seja ϵ uma circunferência com centro em T , ortogonal à Θ'_1 . Seja U outro ponto de Δ_1 . Seja ϕ uma circunferência com centro em U , ortogonal à Θ'_1 . Pelo lema 4.1.1, ϵ e ϕ interceptam-se nos pontos limites do feixe $\Theta'_1\Delta_1$. Sejam D e E os pontos limites procurados. Tomando um deles como centro de inversão, as circunferências α , β e γ são transformadas em circunferências α' , β' e γ' que possuem o mesmo raio. A figura 5.15 ilustra esta situação.

5.3.4.2 Inversão para um determinado raio

Sejam as potências do ponto D em relação as circunferências $Pot(D)_\alpha$, $Pot(D)_\beta$ e $Pot(D)_\gamma$. Seja $\sigma_{(D,r)}$ a circunferência de inversão. Se a potência de inversão, r_σ^2 , for igual a potência do ponto D em relação a α , $Pot(D)_\alpha$, segue que σ e α são ortogonais. Logo, α , β e γ serão invertidas em α' , β' e γ' que possuem o mesmo raio de α . Para qualquer outro valor desejado para, por exemplo, o raio de α' ,

$$r_{\alpha'} = r_\alpha \times \left| \frac{r_\sigma^2}{Pot(D)_\alpha} \right|, \quad (5.4)$$

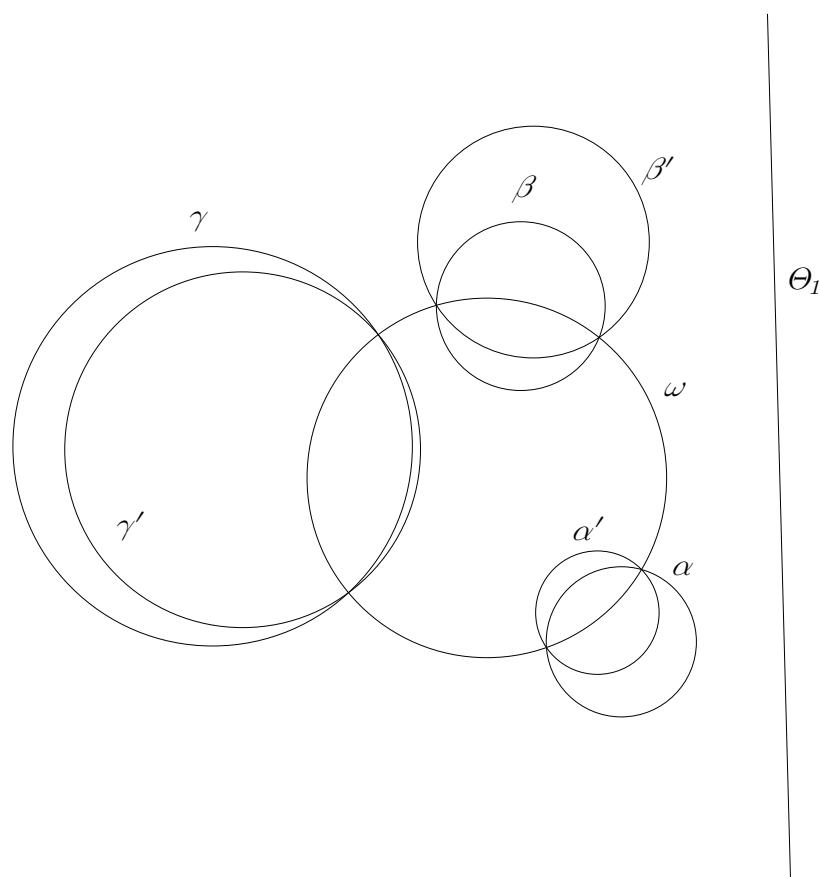


Figura 5.14: Inversão das circunferências α , β e γ .

ou,

$$r_{\sigma}^2 = r_{\alpha'} \times \left| \frac{Pot(D)_{\alpha}}{r_{\alpha}} \right|. \quad (5.5)$$

Então, o raio da circunferência de inversão σ para que α' tenha um determinado valor de raio é

$$r_{\sigma} = \sqrt{\frac{r_{\alpha'} \times Pot(D)_{\alpha}}{r_{\alpha}}}. \quad (5.6)$$

No método existente utiliza-se o feixe secante $\sigma_1\sigma_2$ formado pelas circunferências de inversão σ_1 , σ_2 e σ_3 . Na solução proposta, usa-se o feixe ortogonal ao feixe $\sigma_1\sigma_2$ que é definido pelas circunferências δ_1 e δ_2 .

5.3.5 O problema de Apolônio

Através do método proposto é possível resolver os dez casos do problema de Apolônio. Na comparação com os outros métodos de solução dois casos chamam a atenção. O caso em que são dadas três pontos e o caso em que são dadas três retas.

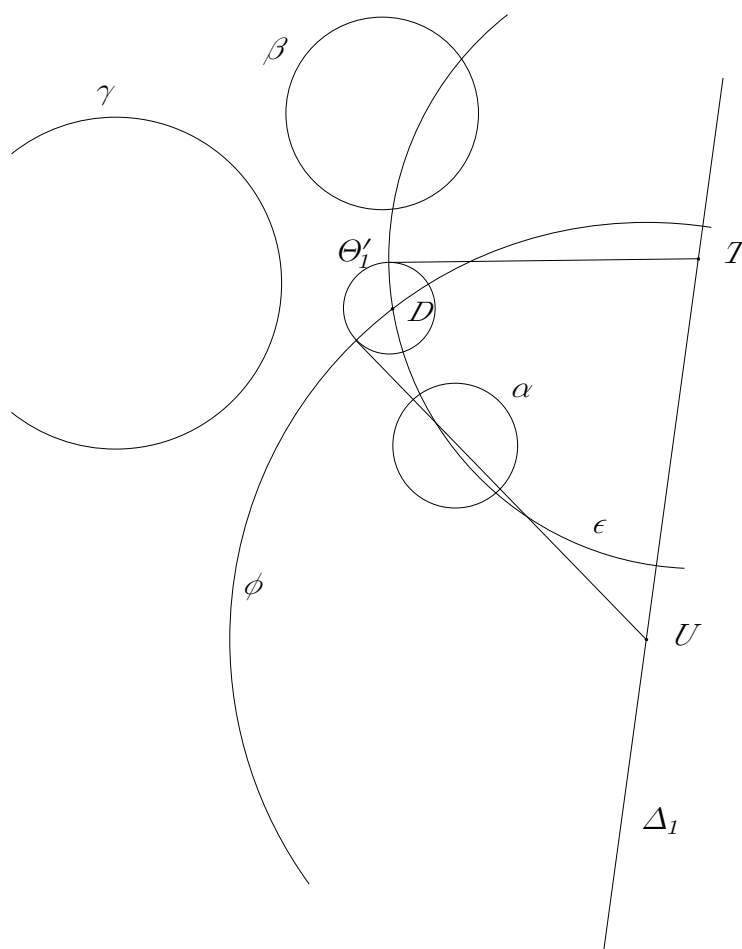


Figura 5.15: Determinação dos centros de inversão.

No caso em que são dados três pontos A , B e C sabemos que a solução procurada passa por eles, portanto dois a dois eles definem um feixe secante de circunferências. Primeiro, invertamos os três em relação a uma circunferência σ cujo centro não está sobre A , B ou C , figura 5.16 a). Encontramos os eixos radicais dos feixes procurados, retas $A'B'$, $B'C'$ e $C'D'$, em relação aos três pontos inversos, A' , B' e C' , figura 5.16 b).

Ao invertamos de volta e o problema se reduz a encontrar nos feixes definidos pelos eixos AB , BC e CD e seus inversos, que agora são circunferências, uma circunferência que pertença a um dos feixes e é tangente a uma terceira circunferência de raio nulo, A , B ou C , figura 5.16 b). Como cada um dos três eixos AB , BC e CD , passam por dois pontos da circunferência procurada, α pertence aos três feixes determinados. De outro modo, α é a intersecção entre eles.

Para determinar o centro de α constrói-se as mediatrizes de dos segmentos AB e BC ou CD . Na intersecção destas mediatrizes está o ponto P , centro da circunferência solução α , figura 5.16 c). Trata-se da solução clássica, mas pelo método

proposto podemos explicá-la utilizando o conceito de feixe de circunferências e inversão.

O modo clássico de se utilizar a inversão neste caso em que são dados três pontos é tomar um dos três como centro de inversão. O problema é transformado na construção de uma reta que passa pelos inversos de dois deles. Invertendo de volta, a reta encontrada é transformada em uma circunferência que passa pelo centro de inversão, ou seja, na solução do problema.

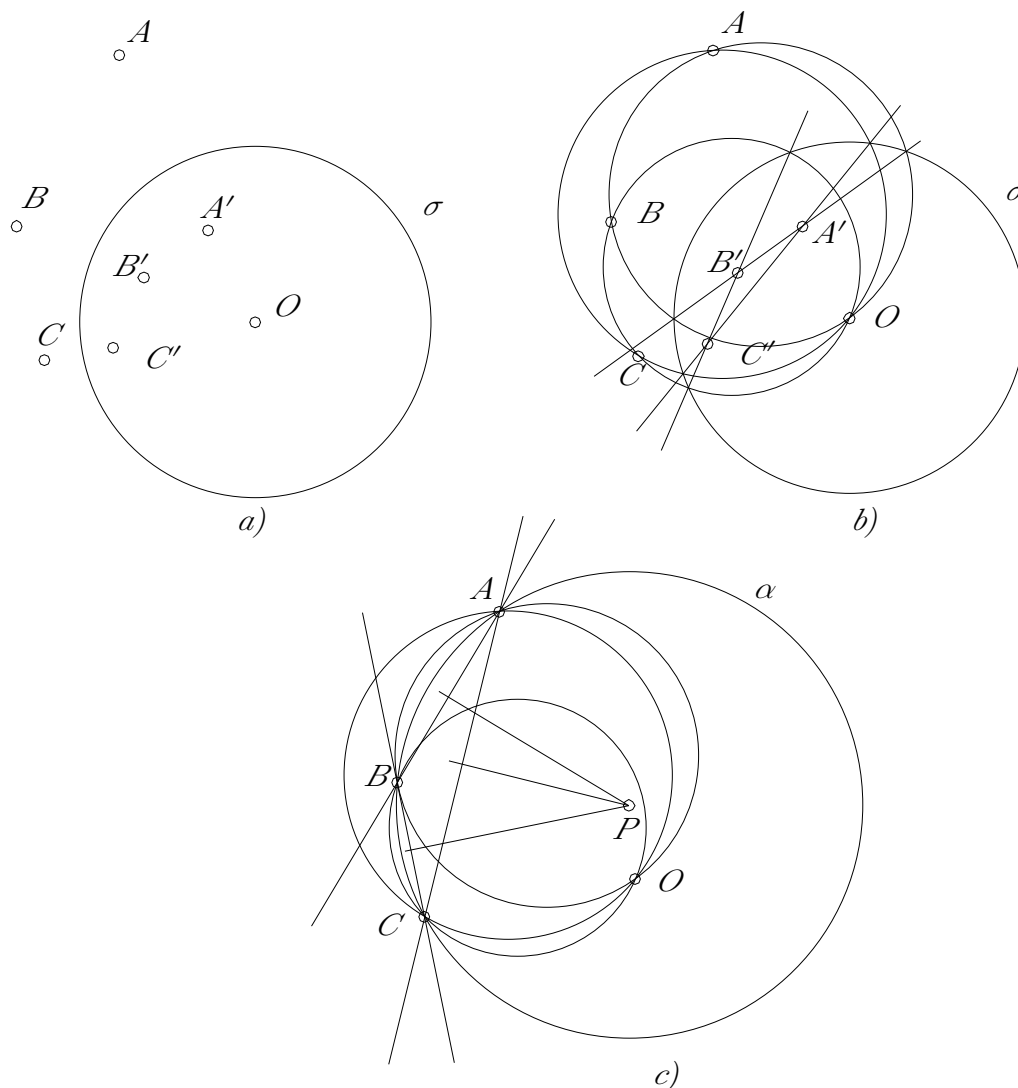


Figura 5.16: Problema de Apolônio; três pontos.

No caso em que são dadas três retas r , s e t elas são primeiramente invertidas em três circunferências como ilustra a figura 5.17 a). Encontramos os eixos de homotetias das circunferências r' , s' e t' Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 e Θ_4 , figura 5.17 b). Quando invertemos de volta, os eixos de homotetias são agora as circunferências Θ'_1 , Θ'_2 , Θ'_3 e Θ'_4 . As circunferências r' , s' e t' voltam a ser as retas r , s e t como ilustra a figura 5.17 c). Como não é possível determinar os eixos de homotetias dos

elementos iniciais, pelo lema 4.3.3 as soluções procuradas pertencem a conjunto de circunferências concêntricas, figura 5.17 c).

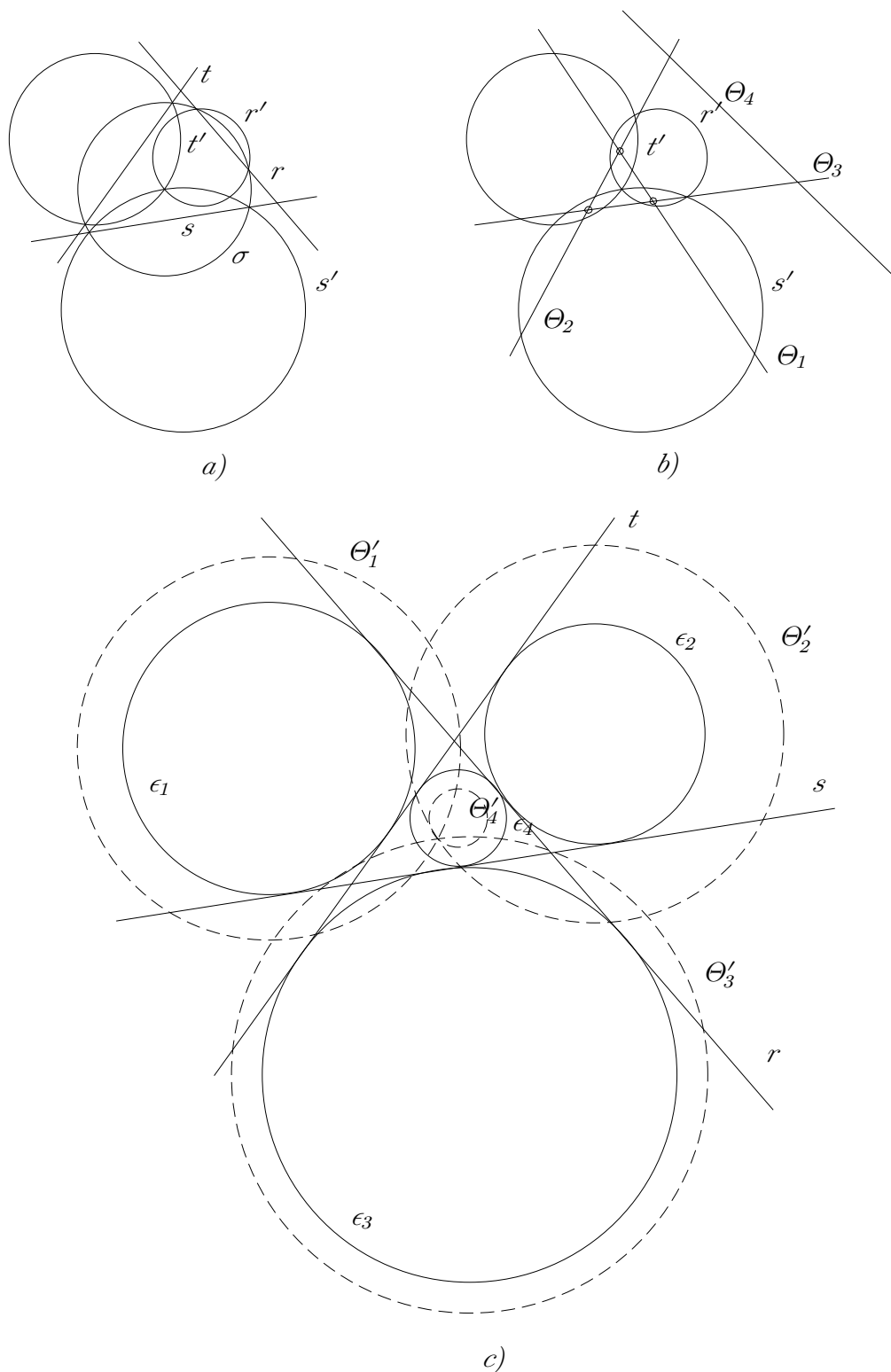


Figura 5.17: Problema de Apolônio; três retas.

O método proposto é portanto um método geral para solução do problema de Apolônio, pois por meio dele podemos resolver todos os casos e configurações de

três elementos com o uso de uma inversão apenas (ida e volta) e o conceito de feixe de circunferências. A solução do caso em que são dadas três retas pelos métodos de Moebius e de Viète não é possível devido a necessidade da transformação de ajustamento de raios. Nos casos dos métodos de Poncelet e de Gergonne o problema não é o ajustamento de raios mais a necessidade dos eixos de homotetias que não existem quando os três elementos são retas.

5.4 Diagrama de Voronoi para circunferências

O algoritmo proposto nesta secção é baseado na análise do número de intersecções para se encontrar o centro da circunferência de menor raio que é tangente as três circunferências, problema 5.3.1, considerando-se construções com régua e compasso. Os tipos de intersecções são os mesmos utilizados na tabela 5.1.

Na tabela 5.2 são mostrados os números de intersecções para obtenção do centro da circunferência que coincide com o vértice do diagrama de Voronoi. No caso do método proposto, o número de intersecções computado refere-se a solução simplificada apresentada na subsecção 5.3.2, para uma solução, mais a transformação de ajustamento de raios.

Tabela 5.2: Número de intersecções para uma solução

Método	Tipo rr	Tipo rc	Tipo cc	Total
Viète	4	3	2	9
Proposto	5	0	10	15
Poncelet	7	5	6	18
Moebius	7	6	7	20
Gergonne	13	6	9	28

Como mostra a tabela 5.2, o menor número de intersecções para obter o vértice do diagrama de Voronoi é obtido pelo método de Viète. A primeira etapa deste método de resolução é idêntica a descrita para o problema 1.1.1. A segunda etapa é encontrar o centro de homotetia direta das circunferências β_1 e γ_1 , ponto F como ilustra a figura 5.18. Se considerarmos que α_1 é uma circunferência de raio nulo, o centro de homotetia direta entre β_1 e α_1 é o próprio ponto A . Logo, os pontos F e A determinam um eixo de homotetias diretas das três circunferências.

Demonstramos anteriormente que este eixo é eixo radical do feixe que contém a solução procurada. Para determinar este feixe devemos encontrar uma circunferência que intercepte β_1 e γ_1 sob o mesmo ângulo, segundo o centro de inversão F , e

passa pelo ponto A . Seja ϵ essa circunferência. No caso ilustrado na figura 5.18, ϵ é secante à reta AF nos pontos A e H . Assim, o feixe que contém a solução procurada é secante. Neste ponto, o problema se resume a construir uma circunferência que passa por dois pontos, A e H , e é tangente a circunferência γ_1 ou β_1 .

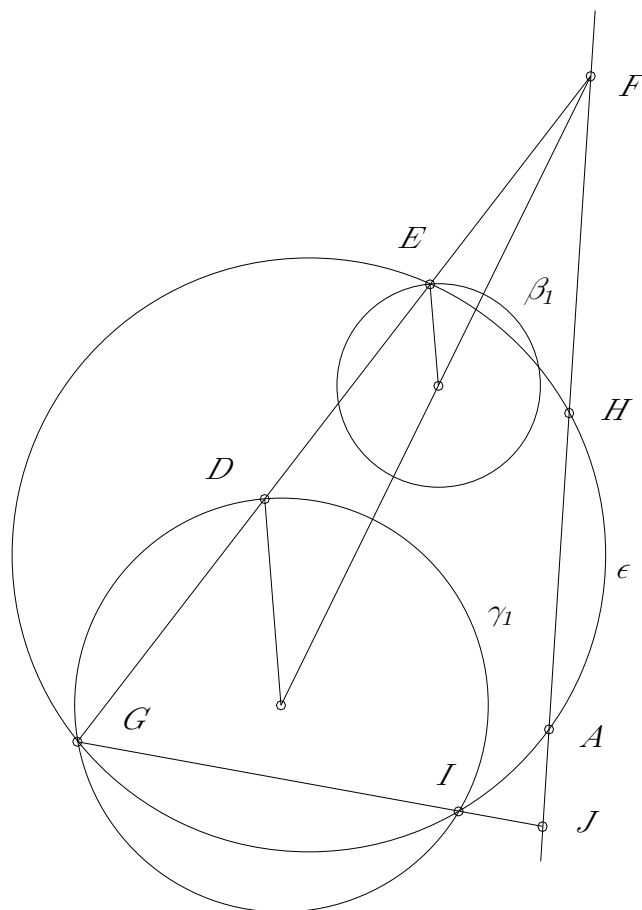


Figura 5.18: Determinação do feixe que contém a solução procurada.

A construção da solução procurada pode ser resumida do seguinte modo: seja D um ponto da circunferência γ_1 . Seja E o homotético do ponto D na circunferência β_1 . Seja F o centro de homotetia direta entre β_1 e γ_1 , obtido pela intersecção da reta BC com a reta DE . Seja G o outro ponto de intersecção da reta DE com a circunferência γ_1 . Pelo lema 4.3.9, os pontos E e G são inversos. Seja ϵ a circunferência que passa pelos pontos A , E e G . A circunferência ϵ determina sobre γ_1 o ponto I . Seja GI o eixo radical de γ_1 e ϵ . Seja J o ponto de intersecção das retas GI e FA . Seja ϕ a circunferência que passa cujo diâmetro é o segmento \overline{JC} . Seja K uma das intersecções entre ϕ e γ_1 como mostra a figura 5.19. A intersecção das mediatrizes dos segmentos \overline{AK} e \overline{KH} ou \overline{AH} é o vértice de Voronoi, (vV) procurado.

Nas figuras 5.20 e 5.21 mostramos o fluxograma de informações, desmembrado em duas partes por causa do tamanho das figuras, do algoritmo para calcular vértices

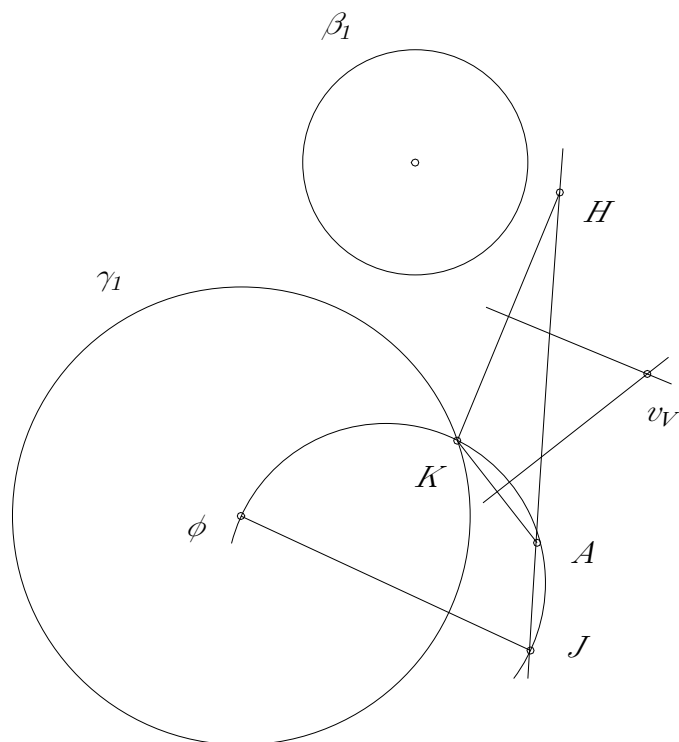


Figura 5.19: Vértice de um diagrama de Voronoi para circunferências.

de um digrama de Voronoi para circunferências. A primeira etapa do algoritmo é **ler e ordenar** informações de três circunferências de acordo com a relação $r_3 > r_2 > r_1$. A circunferência de maior raio será $\gamma_{(C,r_3)}$. A circunferência de raio intermediário será $\beta_{(B,r_2)}$ e a de menor raio será $\alpha_{(A,r_1)}$.

O próximo passo é **ajustar os raios** das três circunferências. A circunferência α é transformada na circunferência $\alpha_1(A, r_1 - r_1)$, a circunferência β na circunferência $\beta_1(B, r_2 - r_1)$ e a circunferência γ na circunferência $\gamma_1(C, r_3 - r_1)$. O próximo passo é encontrar pontos homotéticos nas circunferências γ_1 e β_1 . A reta BC é construída. O algoritmo **calcula** as intersecções entre a reta BC e a circunferência γ_1 , pontos D e E . Depois, o algoritmo **sorteia** um ponto, F , na circunferência γ_1 e verifica se F coincide com D ou E . Se coincidir, o algoritmo **sorteia** o ponto F novamente. Senão, segue em frente. Esse procedimento é devido a necessidade de encontrarmos o centro de homotetia direta de γ_1 e β_1 . Encontrado o ponto F , a reta CF é construída. Depois, o algoritmo constrói uma reta paralela à reta CF que passa pelo ponto B , reta BG . O algoritmo **calcula** as intersecções entre a reta BG e a circunferência β_1 , pontos G e H . A reta FG é construída. O algoritmo **calcula** a intersecção entre as retas FG e CB e **verifica** se o ponto encontrado, I , pertence ao intervalo $[C, B]$. Se pertencer, a reta FH é construída e o algoritmo **calcula** intersecção entre as retas CB e FH , ponto I . Com esse procedimento fica garantido que I é o centro de homotetia direta de β_1 e γ_1 . O algoritmo **calcula** as intersecções da reta FH com a

circunferência γ_1 , pontos F e J .

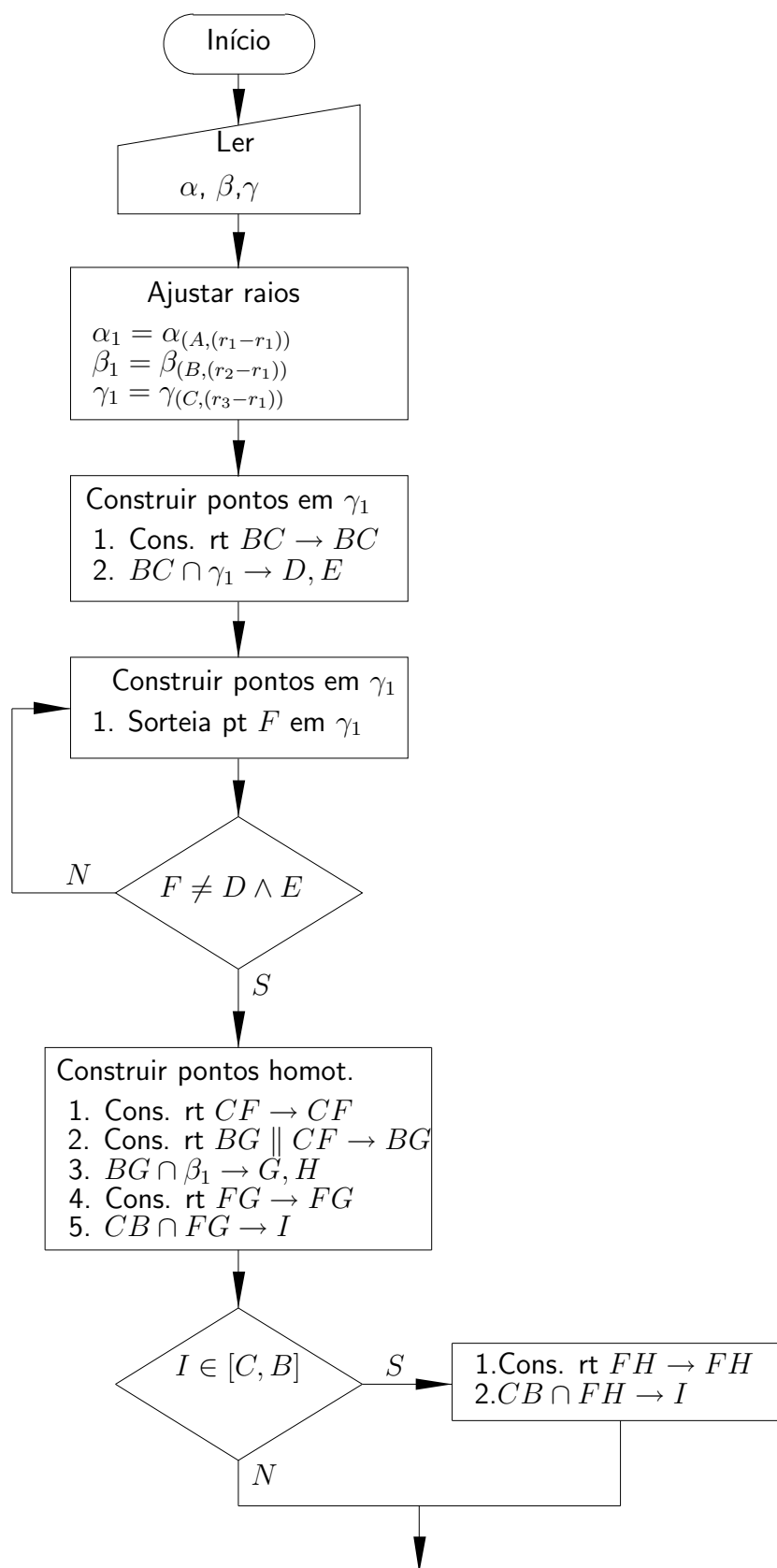


Figura 5.20: Fluxograma de informações; primeira parte.

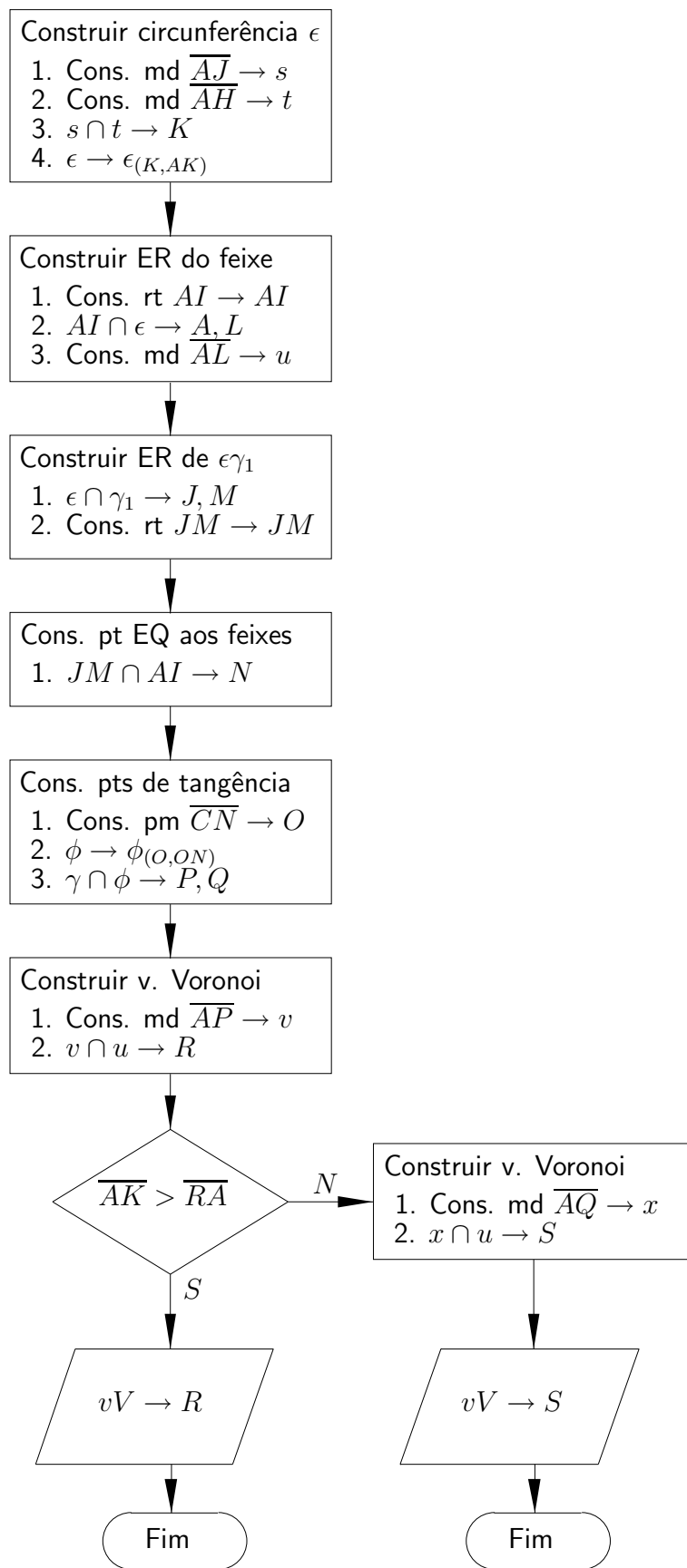


Figura 5.21: Algoritmo; fluxograma de informações; segunda parte.

O próximo passo é **construir uma circunferência do feixe procurado**. A mediatriz de AJ , reta s , é construída. A mediatriz de JH , reta t , é construída. O algoritmo **calcula** a intersecção entre as retas s e t , ponto K . Constrói-se a circunferência $\epsilon_{(K,AK)}$. O próximo passo é **construir o eixo radical** do feixe que contém a circunferência procurada. A reta AI , eixo radical procurado, é construída. O algoritmo **calcula** a intersecção entre ϵ e a reta AI , pontos A e L . A mediatriz de AL , reta u , é construída.

O próximo passo é **construir o eixo radical** do feixe $\epsilon\gamma_1$ e os pontos de tangências. O algoritmo **calcula** as intersecções entre ϵ e γ_1 , pontos J e M . A reta JM é construída. O algoritmo **calcula** a intersecção entre as retas JM e AI , ponto N . O ponto médio do segmento \overline{CN} , ponto O é construído. A circunferência $\phi_{(O,ON)}$ é construída. O algoritmo **calcula** as intersecções entre γ_1 e ϕ , pontos P e Q . A mediatriz do segmento \overline{PA} , reta v , é construída. O algoritmo **calcula** a intersecção entre as retas u e v , ponto R . Neste ponto do processamento, o algoritmo **verifica** se escolheu o ponto de tangência correto, P ou Q . O critério de decisão é baseado na seguinte proposição:

Proposição 5.4.1. *Seja $\epsilon\Pi$ um feixe secante de circunferências em pontos A e B . Seja α uma circunferência que não é interna à menor circunferência do feixe $\epsilon\Pi$ e, os pontos A ou B não são internos nem pertencem a α . A circunferência α não é tangente nem secante à Π . Existem duas circunferências tangentes à α no feixe $\epsilon\Pi$.*

Demonstração. Se ϵ uma circunferência do feixe $\epsilon\phi$ secante à α em pontos A e B . Seja Δ o eixo α e ϵ . Se Δ intercepta Π , seja P o ponto de intersecção. O ponto P possui para as circunferência do feixe e para α a mesma potência, e por ele é possível traçar duas retas tangentes à circunferência α em ponto U e V . Logo, há duas circunferências no feixe $\epsilon\phi$ tangentes a α . Se a reta Δ é paralela à Π , o ponto P não está definido. Isso indica que o centro de α está sobre a mediatriz do segmento \overline{AB} . Há também neste caso duas circunferências no feixe $\epsilon\phi$ tangentes a α . \square

O algoritmo **compara** os segmentos \overline{AR} e \overline{AK} . Se $\overline{AK} > \overline{AR}$ então $R = vV$. Senão, a mediatriz de QA , reta x , é construída. O algoritmo **Calcula** a intersecção entre as retas x e v , ponto S . Como $\overline{AK} > \overline{AS}$, $S = vV$ e está terminado o cálculo do vértice de Voronoi para as circunferências α , β e γ .

6 Conclusões

Nesta tese foi proposto um método de solução para o décimo caso do problema de tangências baseado no uso de feixes de circunferências e na transformação geométrica inversão. Adicionalmente à resolução deste problema, o método proposto é aplicável também na resolução dos seguintes problemas:

1. Transformar por inversão três circunferências de raios distintos em três outras que possuem o mesmo raio.
2. Transformar por inversão três circunferências em três outras que possuem centros alinhados.

O método proposto e os problemas resolvidos mostram que a prática do Desenho Geométrico fomenta o raciocínio lógico-dedutivo o que leva à descoberta de novos conhecimentos. As demonstrações realizadas ao longo do trabalho reforçam que o estudo do desenho geométrico deve ser baseado em demonstrações. Esse exercício tem efeito benéfico na formação do estudante, pois cria uma cultura de aprendizagem com mais autonomia na demonstração de fatos e construção de argumentos.

No capítulo dois foram reunidos os conhecimentos básicos para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo três foram apresentadas a transformação geométrica inversão e suas propriedades básicas. Organizamos estes conhecimentos a partir da inversão de pontos depois passamos à inversão de retas e circunferências. Por último, apresentamos a propriedade da preservação de ângulos, que foi fundamental nas demonstrações subsequentes.

No capítulo quatro apresentamos a definição de feixe de circunferências e de feixes ortogonais de circunferências. Em seguida, apresentamos demonstrações de como os feixes se comportam quando transformados por inversão.

No capítulo cinco apresentamos um método de solução para o décimo caso do problema de Apolônio. Este método pode ser aplicado na resolução de outros dois

problemas e é uma síntese dos conhecimentos apresentados nos capítulos dois, três e quatro. Este capítulo ilustra, do ponto de vista educacional, a importância da prática de demonstrações, que passo a passo contribuíram para edificar os conhecimentos utilizados no desenvolvimento do método.

O grau de complexidade das construções geométricas das soluções apresentadas no capítulo pode ser considerado um impedimento se considerarmos sua realização com régua e compasso. Hoje em dia, estas limitações podem ser superadas com o uso de programas de Geometria Dinâmica, ou mesmo um programa de Auxílio ao Desenho. Com isso, as transformações geométricas, por exemplo a inversão, que desapareceu dos livros de Desenho Geométrico nos anos 70¹, podem ser realizadas hoje com a mesma simplicidade com a qual se usa um editor de textos. Com o uso de programas de computador, a complexidade das construções não é mais um impedimento à sua realização. Vale reforçar que as figuras auxiliam muito a compreensão das demonstrações, mas esta não deve ser ênfase no processo de demonstração.

O Ensino de Desenho em cursos de Engenharia tem atualmente enfatizado o ensino da Geometria Descritiva, e os profissionais que se ocupam deste ensino têm tido como principal preocupação o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial dos estudantes. O perigo que vemos com isso é que os estudantes estão perdendo uma excelente oportunidade, talvez a melhor que eles têm ao longo de sua vida escolar, de ter contato com a realização de demonstrações o que sem dúvida torna a formação em desenho mais sólida. Por isso, propomos a volta da realização de demonstrações no ensino do tema Desenho Geométrico, e que este ensino seja privilegiado nos cursos de Desenho destinados a formação de Engenheiros. Por exemplo, num curso que é dado em um semestre, com 100 minutos de aula por semana, os estudantes devem realizar ao menos quatro exercícios problemas que envolvam demonstrações. Propomos que estes exercícios sejam os seguintes:

- Demonstrar que, dado um ponto P e uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$, a potência do ponto P em relação a circunferência α , $Pot(P)_\alpha$ é qualquer um dos produtos $\overline{PA} \times \overline{PB}$, $\overline{PC} \times \overline{PD}$, onde A e B , C e D são os pontos de intersecção de retas secantes à $\alpha_{(O,r)}$ que passam por P e no caso em que a reta que passa por P é tangente a circunferência α no ponto T , que essa potência é \overline{PT}^2 .
- Demonstrar que os pontos do eixo radical Δ externos às circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$ e $\beta_{(B,r_2)}$ são o lugar geométrico dos pontos P , centros das circunferências ortogonais à α e β .

¹As únicas referências nacionais que citam esta transformação encontradas pelo autor foram (LORRIGIO, 1968) e (SILVA A. P. ; FERRARA, 1966)

- Demonstrar que uma reta Δ e uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$, determinam um feixe de circunferências $\alpha\Delta$ que pode ser de três tipos: tangente, secante e não-secante.
- Demonstrar que para todo feixe de circunferências $\alpha\Delta$ existe um único feixe $\epsilon\Pi$, tal que $\alpha\Delta$ e $\epsilon\Pi$ são ortogonais. Se $\alpha\Delta$ é tangente, $\epsilon\Pi$ é tangente. Se $\alpha\Delta$ é secante, $\epsilon\Pi$ é não-secante.

Propomos também a volta do ensino da transformação geométrica inversão, pois esta tem aplicação em todos os casos do problema de Apolônio. Em alguns deles, a construção da solução por inversão é mais simples do que a construção da solução pelo método tradicional (VIÈTE, 1982). Um belo exemplo, é o caso em que são dados um ponto, uma reta e uma circunferência. Usando inversão, este problema é reduzido à construção das retas tangentes a duas circunferências (COOLIDGE, 1916).

Com o método proposto resolvemos todas as configurações do décimo caso do problema de Apolônio, e também outros dois problemas clássicos de uma maneira original. Outros métodos, como o de Gergonne, permitem a obtenção das soluções para todas as configurações mas, o método proposto tem a vantagem de resolver outros problemas. Por fim, o método proposto unifica os outros métodos de solução para o problema 1.1.1 citados ao longo do trabalho.

Qualquer que seja a configuração de três circunferências, α , β e γ podemos resolver o problema com um único procedimento. Pelo método proposto, a configuração na qual as três circunferências são congruentes e estão alinhadas é resolvida pelo mesmo procedimento aplicado quando as três circunferências não estão alinhadas e possuem raios diferentes. Para resolver esta configuração pelo método de Gergonne, deve-se supor a existência de uma reta imprópria, cujo pólo é o centro de inversão.

Para o problema de se transformar três circunferências de raios distintos em três que possuem raios iguais, o método proposto permite resolver todos os casos que tem solução. Para o problema de se transformar três circunferências cujos centros não estão alinhados em três outras, cujos centros estão alinhados, o método proposto permite resolver todos os casos que tem solução.

Como sugestão de trabalho a ser desenvolvido, sugere-se estender o desenvolvimento do algoritmo para calcular vértices de Voronoi para os casos em que as três circunferências possam ser secantes, ter raios iguais ou estarem alinhadas. E também, casos em que duas ou três destas condições ocorram ao mesmo tempo.

Referências

- ALTSHILLER-COURT, N. *College Geometry: An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*. New York, 2ª edição: Barnes and Noble Inc., 1952. (Barnes and Noble College Outline Series).
- CARVALHO, B. A. *Desenho Geométrico*. Rio de Janeiro, 3ª edição: Ao Livro Técnico S/A - Indústria e Comércio, 1978.
- COOLIDGE, J. L. *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford: Clarendon Press, 1916.
- COXETER H. S. ; GREITZER, S. L. *Geometry revisited*. Toronto: Randon House, 1967.
- FRENCH, T. E. The educational side of engineering drawing. *The Engineering Design Graphics Journal*, v. 40, n. 3, p. 32–35, 1976.
- FRÈRE, G.-M. *Exercices de Géométrie*. Paris: J. de Gigord, número 267, 1912. (Cours de Mathématiques Élémentaires).
- GISH D.; RIBANDO, J. M. Apollonius problem: A study of solutions and their connections. *American Journal of Undergraduate Research*, v. 3, n. 1, p. 15–26, 2004.
- JONHSON, R. A. *Advanced Euclidian Geometry: An elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle*. New York: Dover Publications, Inc., 1960.
- KAWANO A. ; SANTOS, E. T. *PCC2121 - Geometria Gráfica para Engenharia*. São Paulo: b, 2006.
- KIM D. ; SUGIHARA, K. Voronoi diagram of a circle set from voronoi diagram of a point set: ii. geometry. *Computer Aided Geometric Design*, v. 18, n. 6, p. 563–585, 2001.
- KIM D. ; SUGIHARA, K. Apollonius tenth problem via radius adjustment and Möbius transformations. *Computer-Aided Design*, v. 38, p. 14–21, 2006.
- LORRIGIO, P. *Desenho Geométrico*. São Paulo: Não indicado, 1968.
- MARMO, C. *Curso de Desenho: Métodos I*. São Paulo: Gráfica Editora Hamburg, 1965.
- MORGADO A.C. ; WAGNER, E. *Geometria II: métrica plana*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora s.a., 1974.
- PAPELIER, G. *Exercices de Géométrie Moderne*. Paris: Librairie Vuibert, 1925.
- SANTOS S. A.; TREVISAN, A. L. O problema de Apolônio: Seus aspectos históricos e computacionais. In: *Relatório de pesquisa*. [S.I.]: Fapesp 02/13369-8, 2002.

SILVA A. P. ; FERRARA, A. A. P. *Geometria aplicada*. São Paulo: L.P.M. Editora, 1966.

VIÈTE, F. L'apollonius français. In: JEAN, P. (Ed.). *Ceuvres Mathématiques - Deuxième partie: Ceuvres géométriques, trigonométrie, suite de la relation du calendrier véritablement grégorien*. [S.l.]: pg. 96-115, Librairie A. Blanchard, 1982.

Apêndice A – Métodos de solução de problemas de tangências

A.1 Introdução

Boas referências para os métodos de solução de problemas de tangências aqui apresentados são por exemplo (PAPELIER, 1925), (COOLIDGE, 1916).

Problema A.1.1. *Construir circunferências tangentes à três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ com centros distintos, externas e não secantes, cujas relações entre os raios são $r_1 < r_2 < r_3$.*

A.1.1 Método de Joseph Diaz Gergonne

Definição A.1.1. *Sejam uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ e uma reta t . Seja a reta r que passa pelo ponto O e é perpendicular à reta t no ponto Q . Chama-se pólo da reta t em relação a α , o ponto Q' inverso do ponto Q . Se a reta t passa pelo centro de inversão, o pólo da reta t não está definido.*

Definição A.1.2. *Sejam uma circunferência $\alpha_{(O,r)}$ e um ponto P . Chama-se reta polar do ponto P , a reta t que passa por P' , inverso de P e é perpendicular à reta OP . Se o ponto P coincide com o centro de inversão, a reta polar do ponto P não está definida.*

Construção A.1.1. *Seja T o centro da homotetia direta de α e β . Seja S o centro da homotetia direta de α e γ . Seja T o centro da homotetia direta de β e γ . Seja Δ_1 o eixo externo de homotetia. Seja Z o centro radical das circunferências α , β e γ . Seja ϕ a circunferência ortogonal às circunferências α , β e γ . Note que o ponto Z é o centro da circunferência ϕ . Seja H o pólo da reta Δ_1 em relação a circunferência α . Seja I o pólo da reta Δ em relação a circunferência β . Seja J o pólo da reta Δ_1 em relação a circunferência γ . Sejam A e D os pontos onde a reta ZH intercepta α . Sejam B e E os pontos onde a reta ZI intercepta β . Sejam C e F os pontos onde a reta ZJ intercepta γ .*

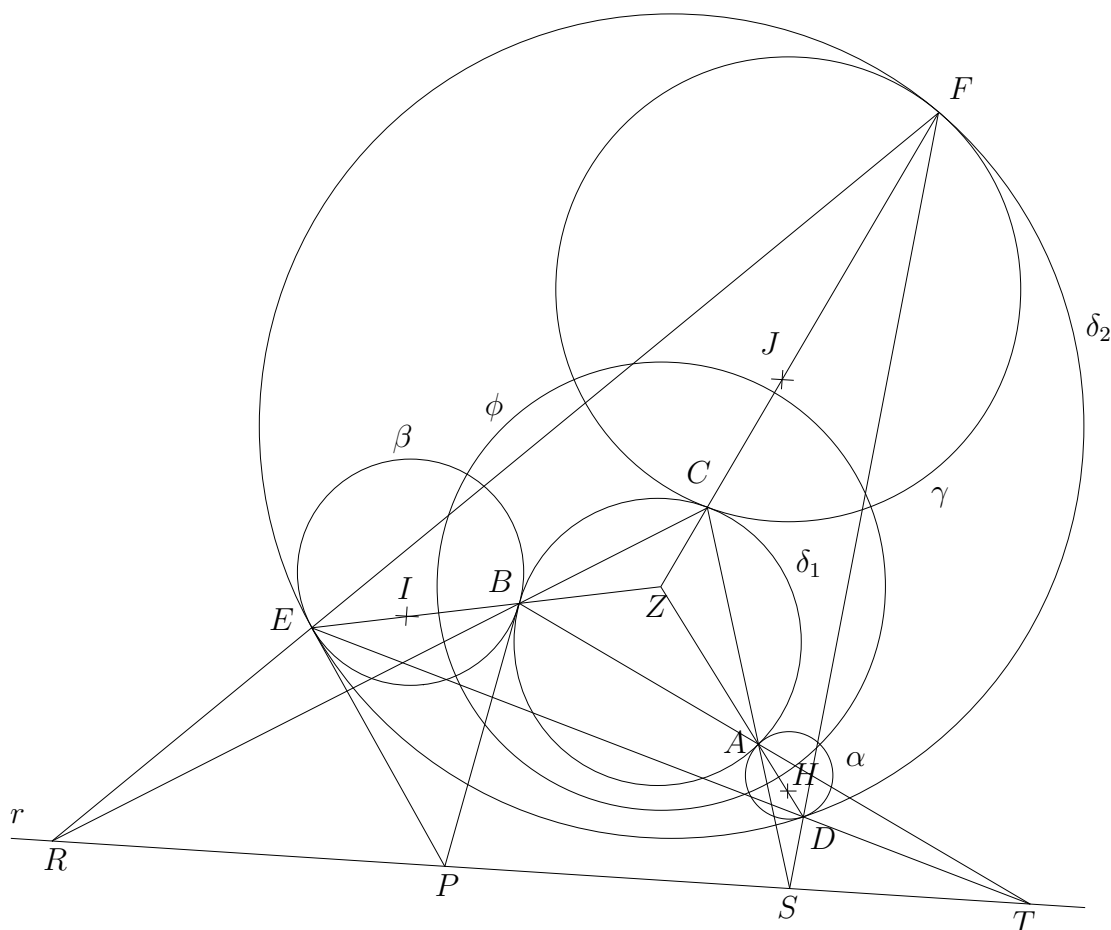


Figura A.1: Método de Joseph Diaz Gergonne.

A circunferência ϕ_1 é ortogonal às circunferências α , β e γ . Então, as inversas α' , β' e γ' em relação a ϕ_1 coincidem com α , β e γ . Pela construção os pontos A e D são inversos em relação a ϕ_1 . Pela construção os pontos B e E são inversos em relação a ϕ_1 . Pela construção os pontos C e F são inversos em relação a ϕ_1 . Os pontos A , B e C formam uma solução, δ_1 . Os pontos D , E e F formam a outra, δ_2 .

No caso em que as três circunferências são congruentes, $r_1 = r_2 = r_3$, o eixo externo de homotetia é uma reta indeterminada. Se admitirmos o ponto no infinito, então o polo desta reta em relação às circunferências dadas coincidem com seus centros, e então as duas soluções associadas a este eixo são determinadas.

A.1.2 Método de August Ferdinand Moebius

Este método de solução baseia-se na transformação do problema em outro mais simples. Toma-se a circunferência de menor raio, neste caso α , e subtrai-se o valor r_1 de seu raio. Seja α_1 a circunferência de raio nulo e centro no ponto A . Para que as circunferências tangentes à α , β e γ , permaneçam tangentes à β e γ e passem

pelo ponto A , β e γ devem ter seus raios aumentados ou diminuídos. Assim, o problema é transformado em quatro sub-problemas. Encontrar circunferências que passam pelo ponto A e são tangentes às circunferências $\beta_{(B,r_2\pm r_1)}$ e $\gamma_{(C,r_3\pm r_1)}$. Seja o sub-problema:

Sub-problema A.1.1. *Encontrar circunferências que passam pelo ponto A e são tangentes às circunferências $\beta_2 = \beta_{(B,r_2+r_1)}$ e $\gamma_2 = \gamma_{(C,r_3+r_1)}$.*

Construção A.1.2. *Seja ϕ a circunferência de inversão que possui centro em A . Sejam β'_2 e γ'_2 as circunferências inversas β_2 e γ_2 . Se β'_2 e γ'_2 são não secantes, sejam s , t , u e v as retas tangentes a elas. As retas s , t , u e v são transformadas nas circunferências s' , t' , u' e v' que passam pelo centro de inversão A .*

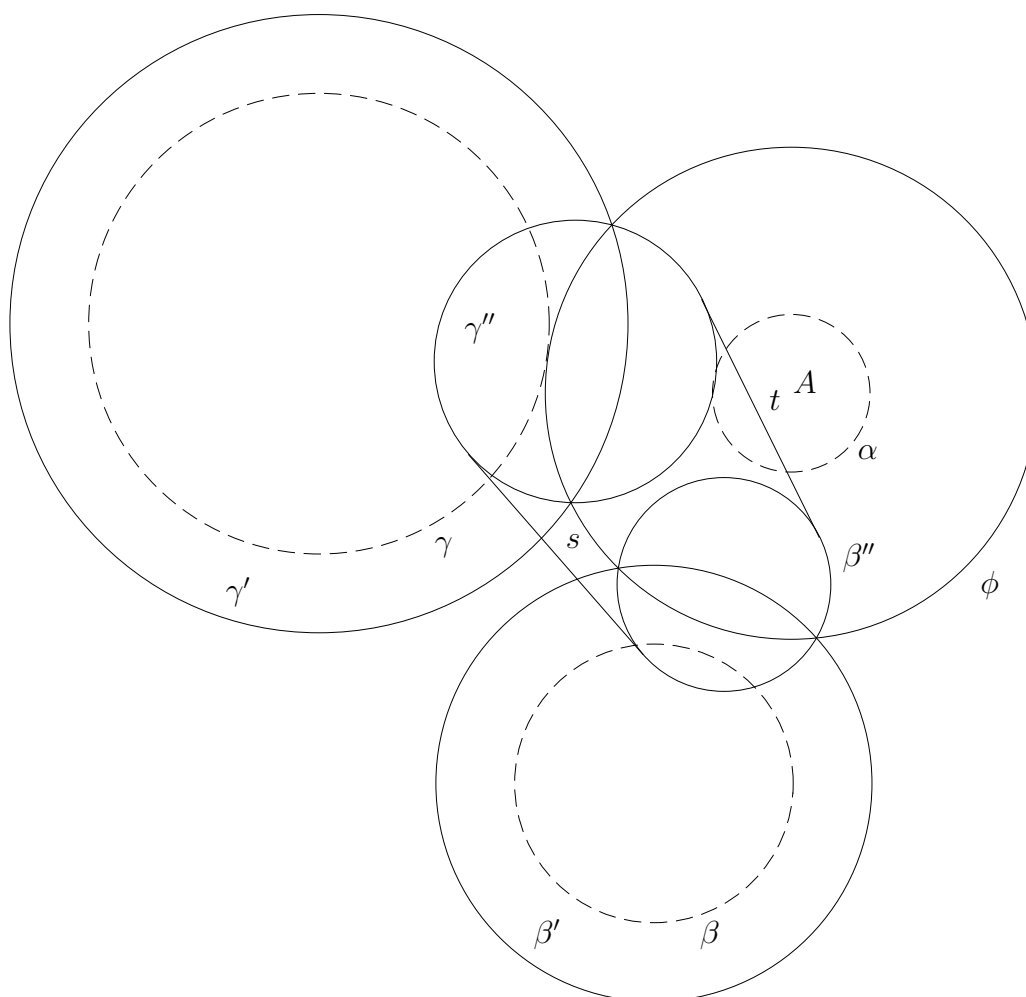


Figura A.2: Método das transformações de Moebius; primeira etapa.

O problema inicial foi transformado em quatro sub-problemas cada um com quatro soluções. Como o problema inicial admite oito soluções, é necessário descartar oito das soluções obtidas. Para voltar ao problema inicial desfaz-se as contrações e dilatações aplicadas à α , β e γ . Note que estas transformações mantêm os centros

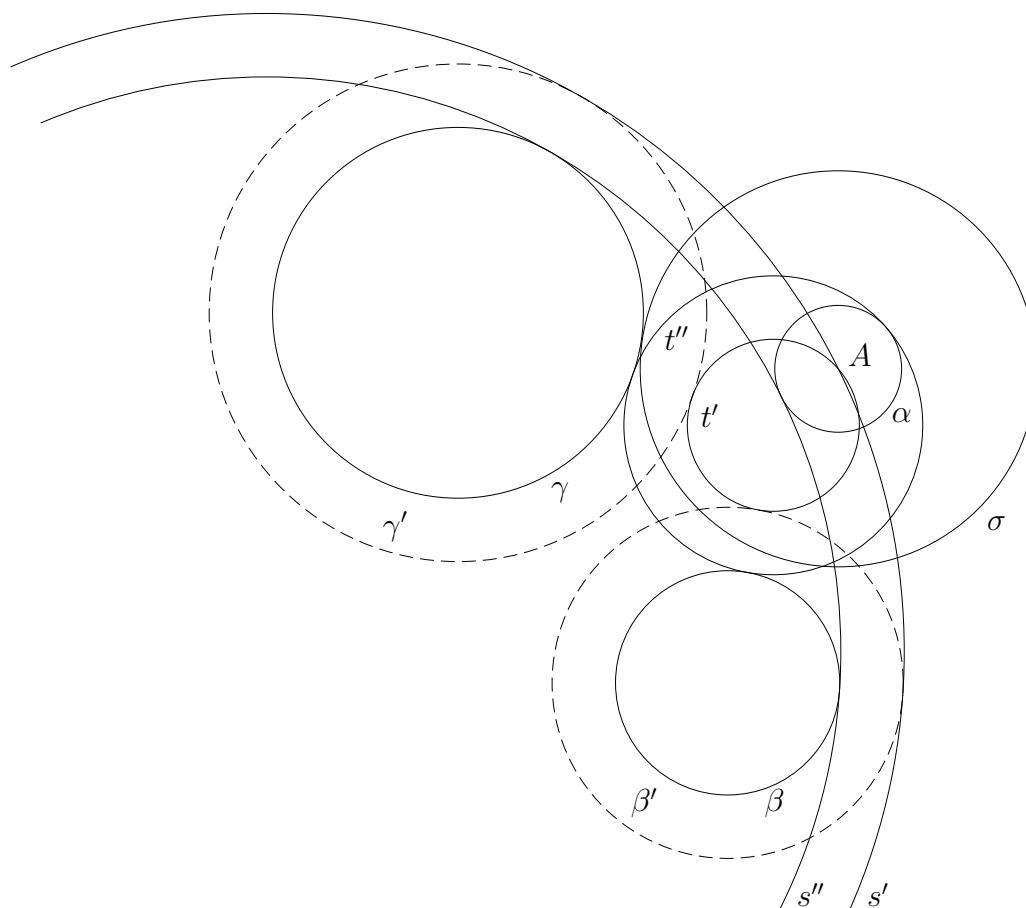


Figura A.3: Método das transformações de Moebius: segunda etapa

das circunferências fixos. Como as soluções δ_3 e δ_4 são internas e externas elas não permanecem tangentes pois β_2 e γ_2 terão seus raios diminuídos. Portanto, apenas δ_1 e δ_2 permanecem tangentes à α , β e γ .