

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ONDAS LONGITUDINAIS EM BARRAS ELÁSTICAS

Boanerges Batista Pereira Filho

São Paulo, 1977

PREFÁCIO

Este trabalho visa a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia, sendo o primeiro trabalho desenvolvido no Departamento de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo sobre a propagação de ondas em meio contínuos.

No seu primeiro capítulo mostramos os fundamentos da dinâmica do ponto material, estando o seu desenvolvimento dirigido para a chamada Mecânica Analítica ou Lagrangiana, onde os entes fundamentais são os escalares energia cinética e potencial, diferindo desta forma da Mecânica Vetorial, ou Newtoniana, na qual devemos trabalhar com vetores.

O segundo capítulo é voltado ao conceito de onda e às ondas que se propagam em um meio elástico linear isotrópico infinito.

A propagação de ondas longitudinais em barras elásticas está dedicado o terceiro capítulo, onde mostramos as simplificações que permitem o seu exame e fazemos diversas aplicações, inclusive em barras não prismáticas.

Nos dois últimos capítulos examinamos o choque longitudinal de um corpo indeformável em uma barra elástica prismática, estando no quarto apresentadas soluções "quase" exatas e no quinto, as simplificações de caráter didático e prático, baseadas em análises mais simples.

Queremos agradecer ao Professor Decio Leal de Zagottis, que orientou e colaborou neste trabalho, e a todos que venham a comentá-lo e, principalmente, a continuá-lo.

FOREWORD

This work aims at the obtention of a Master Degree in Engineering, being, at the same time, the first work developed at the Departamento de Estruturas e Fundações, Universidade de São Paulo, on wave propagation in continuous media.

In the first chapter we show the fundamentals of the dynamics of particles, its development being directed to the so called Analytical or Lagrangian Mechanics, in which the fundamental items are the scalars kinetic and potential energy, thus distinguishing it from the Vectorial or Newtonian Mechanics, in which we are expected to work with vectors.

The second chapter is directed toward the wave concept, and to the waves which propagate in an infinite isotropic linear elastic medium.

The third chapter is dedicated to the propagation of longitudinal waves in elastic bars; in it we show the simplifications which allow its examination and we also point out several applications, including ones on non-prismatic bars.

In the two last chapters we examine the longitudinal shock of a rigid body on a prismatic elastic bar; in the fourth chapter we present "almost" exact solutions, and in the fifth, simplifications of a didactic and practical nature, based on the simplest analyses.

We would like to thank Professor Decio Leal de Zagottis, who gave us orientation and collaboration in this work, and to thank in advance all of those who will comment it, and, most of all, proceed with it.

INDICE

. Pág.

CAPÍTULO 1 - PRINCÍPIOS DA DINÂMICA

1.1	- Fundamentos	1.01
1.2	- O Princípio dos Trabalhos Virtuais	1.03
1.3	- As Equações de Lagrange	1.05
1.4	- Exemplos	1.07
1.5	- Energia Potencial	1.12
1.6	- O Princípio de Hamilton	1.15
1.7	- Exemplos	1.15
1.8	- Críticas e Comentários	1.35

CAPÍTULO 2 - ONDAS EM MEIOS CONTÍNUOS ELÁSTICOS

2.1	- O Conceito da Onda em um Meio Contínuo	2.01
2.2	- O Movimento em um Meio Elástico Linear	2.05
2.3	- Meio Elástico Linear Infinito	2.07
2.4	- Ondas Superficiais	2.11
2.5	- Críticas e Comentários	2.14

CAPÍTULO 3 - ONDAS LONGITUDINAIS EM BARRAS ELÁSTICAS

3.1	- Ondas Planas em Barras Prismáticas	3.01
3.2	- Exemplos	3.06
3.3	- A Solução de Pochhammer e de Chree	3.19
3.4	- Ondas Planas em Barras Não Prismáticas	3.21
3.5	- Carga Instantânea em Barra Tronco-Cônica	3.29
3.6	- Onda Esférica em Barra Cônica	3.33
3.7	- Críticas e Comentários	3.35

CAPÍTULO 4 - CHOQUE LONGITUDINAL EM BARRAS ELÁSTICAS

4.1 - Introdução	4.01
4.2 - Choque Longitudinal em Barras Elásticas	4.01
4.3 - Choque em Barra com Extremidade Arredondada	4.23
4.4 - Críticas e Comentários	4.24

CAPÍTULO 5 - APROXIMAÇÕES PARA O CHOQUE LONGITUDINAL

5.1 - Introdução	5.01
5.2 - Primeira Aproximação	5.01
5.3 - Segunda Aproximação	5.04
5.4 - Terceira Aproximação	5.07
5.5 - Quarta Aproximação	5.09
5.6 - Críticas e Comentários	5.11

1. PRINCÍPIOS DA DINÂMICA1.1 Fundamentos

A posição instantânea de um conjunto de N pontos materiais, no espaço, é obtida através do conhecimento das suas $3N$ coordenadas cartesianas

$$x_i ; y_i ; z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

sendo o ponto p localizado por $x_p ; y_p ; z_p$.

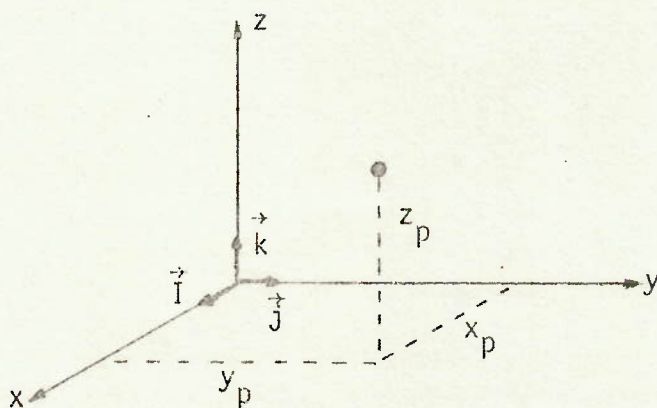


Figura 1-01

A localização dos pontos nos diversos instantes exige o conhecimento das $3N$ funções

$$x_i(t) ; y_i(t) ; z_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Admitindo que o sistema de referência seja inercial e que no ponto p atue a força

$$\vec{F}_p = X_p \vec{i} + Y_p \vec{j} + Z_p \vec{k}$$

temos

$$m_p \ddot{x}_p = X_p$$

$$m_p \ddot{y}_p = Y_p$$

$$m_p \ddot{z}_p = Z_p$$

onde a constante m_p é a massa do ponto p , e \ddot{x}_p , \ddot{y}_p e \ddot{z}_p são as componentes da sua aceleração. A velocidade do ponto vale

$$\vec{v}_p = \dot{x}_p \vec{I} + \dot{y}_p \vec{J} + \dot{z}_p \vec{K}$$

As hipóteses aqui utilizadas são as habituais no campo da mecânica de um sistema de pontos materiais (vide 1.8.1).

Muitas vezes a localização dos pontos é mais comodamente obtida através de $3N$ grandezas

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}$$

chamadas coordenadas generalizadas, funções do tempo, e relacionadas com as coordenadas cartesianas inerciais através das funções

$$x_i = f_i(q_j; t)$$

$$y_i = g_i(q_j; t)$$

$$z_i = h_i(q_j; t)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 3N)$$

As componentes da velocidade de cada ponto resultam:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial g_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial h_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

As igualdades

$$m_i \ddot{x}_i = X_i$$

$$m_i \ddot{y}_i = Y_i$$

$$m_i \ddot{z}_i = Z_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

podem ser multiplicadas por grandezas quaisquer, de mesma dimensão, e somadas, fornecendo

$$\sum_{i=1}^N m_i (A_i \ddot{x}_i + B_i \ddot{y}_i + C_i \ddot{z}_i) = \sum_{i=1}^N (A_i X_i + B_i Y_i + C_i Z_i)$$

Quando estas grandezas forem deslocamentos infinitesimais quaisquer, diremos que o segundo membro da igualdade é o trabalho virtual das forças que agem no sistema num certo instante

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^N (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

o qual, usando coordenadas generalizadas, pode ser reescrito na forma

$$\delta W^* = \sum_{j=1}^{3N} F_j^* \delta q_j$$

onde os coeficientes F_j^* são chamados por componentes da força generalizada que age no sistema de pontos

$$F_j^* = \sum_{i=1}^N (X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j})$$

e o tempo foi considerado fixo (vide 1.8.2).

1.2 O Princípio dos Trabalhos Virtuais

As forças que agem podem ser ativas F , ou reativas R , estas aparecendo para que sejam mantidas as imposições geométricas, ou vínculos, eventualmente existentes ao movimento do sistema de pontos.

$$F_j^* = F_j + R_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3N)$$

A partir de agora, consideraremos somente deslocamentos infinitesimais virtuais reversíveis compatíveis com os vínculos, o que nos fornece como trabalho virtual

$$\delta W = \sum_{j=1}^{3N} (F_j + R_j) \delta q_j$$

e o princípio dos trabalhos virtuais afirma que o equilíbrio do sistema existe se, e somente se, o trabalho virtual das forças ativas for zero, o que tem o mesmo significado que a nulidade do trabalho virtual das forças reativas (vide 1.8.3).

$$\sum_{j=1}^{3N} F_j \delta q_j = 0 = \sum_{j=1}^{3N} R_j \delta q_j$$

Este princípio, aparentemente dedicado à Estática, é fundamental no campo da Dinâmica, onde sua utilização exige a consideração de serem as forças de inércia forças ativas. Assim podemos afirmar que:

$$\sum_{i=1}^N m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \sum_{j=1}^{3N} F_j \delta q_j$$

onde os deslocamentos infinitesimais virtuais são reversíveis e compatíveis com os vínculos, não são consideradas as forças reativas e o tempo é fixo (vide 1.8.4).

Como

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta z_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

podemos escrever o princípio dos trabalhos virtuais através de

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{3N} F_j \delta q_j$$

Estes deslocamentos virtuais são independentes entre si, e podemos imaginá-los todos nulos, à exceção de um, resultando:

$$\sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_p} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_p} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_p} \right) \delta q_p = F_p \delta q_p$$

ou

$$\sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_p} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_p} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_p} \right) = F_p$$

1.3 As Equações de Lagrange

Vamos agora estabelecer relações que nos permitam reescrever a expressão anterior. Assim:

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_p} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_p} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_p} \right)$$

e então

$$\sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_p} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_p} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_p} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_p} \right) - \right. \\ \left. - \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_p} \right) - \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_p} \right) \right] = F_p$$

Também

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_p} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p}$$

pois

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_p} \left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial x_i}{\partial q_p}$$

e daí

$$\sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_p} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_p} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_p} \right) - \right. \\ \left. - \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_p} \right) - \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_p} \right) \right] = F_p$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_p} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_p} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_p} \right)$$

e como

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_p} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_p} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_p} \right) = \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p} \right)$$

de onde resulta

$$\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_p} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_p} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_p} - \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_p} - \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_p} \right) = F_p$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_p} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_p} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2} = F_p$$

A energia cinética do sistema de pontos é definida como

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}$$

e então encontramos que o princípio dos trabalhos virtuais nos fornece

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial T}{\partial q_p} = F_p$$

recebendo esta expressão o nome de equação de Lagrange.

A cada deslocamento virtual δq_j , não nulo, corresponde uma equação de Lagrange e, no total, ficamos com $3N$ equações diferenciais

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = F_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3N)$$

que traduzem o movimento do sistema. Convém novamente observar que nestas equações as forças reativas não são consideradas, e as forças de inércia já estão envolvidas na energia cinética; além disso, quando empregamos coordenadas generalizadas, a energia cinética deve ser escrita em função destas coordenadas (vide 1.8.5).

Até o presente não nos preocupamos com o fato de que os vínculos externos, ou internos, eventualmente existentes, possam permitir a localização dos N pontos por meio de um número menor de coordenadas que $3N$. Muitas vezes tal fato acontece, e é interessante utilizar este menor número de coordenadas. Assim, se tivermos V equações algébricas produzidas pelos vínculos, equações estas que nos permitam obter $3N - V = n$ coordenadas independentes, resultam n equações de Lagrange para caracterizar o movimento (vide 1.8.6).

Algumas vezes os vínculos fornecem equações não integráveis do tipo

$$\sum_{j=1}^{3N} c_{ij} dq_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, V)$$

onde os c_{ij} são funções das coordenadas, e então somos obrigados a trabalhar com as $3N$ equações de Lagrange, e com as V equações de vínculos. É evidente que no caso misto podemos reduzir o número de coordenadas para os vínculos dados por equações algébricas e reter as equações não integráveis (vide 1.8.7).

1.4 Exemplos

1.4.1 Vamos examinar a obtenção das equações que fornecem o movimento de uma massa m , que pode se deslocar sobre uma barra de massa desprezível, existindo uma força contrária a este deslocamento e proporcional à velocidade relativa entre massa e barra, e a mola de constante k e comprimento inicial l_0 . O movimento ocorre no plano xy .

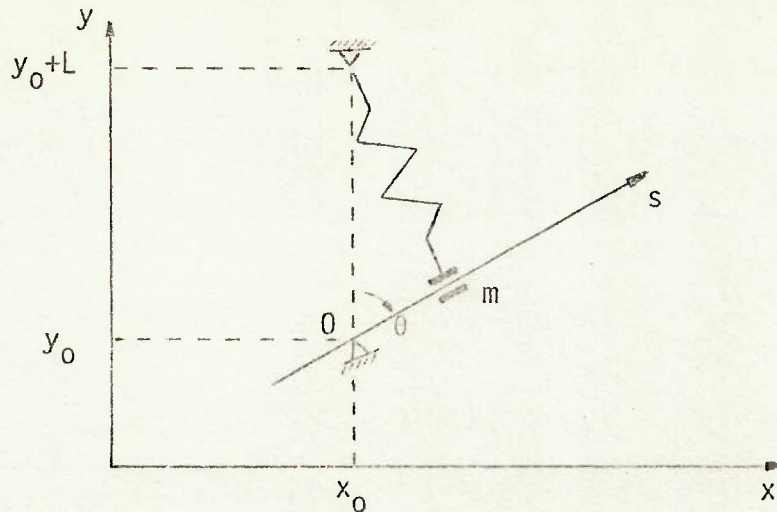


Figura 1-02

Temos dois graus de liberdade e vamos adotar como coordenadas generalizadas

$$q_1 = s$$

$$q_2 = \theta$$

como

$$x = x_0 + s \operatorname{sen} \theta$$

$$y = y_0 + s \operatorname{cos} \theta$$

resulta

$$\dot{x} = \dot{s} \operatorname{sen} \theta + s \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta$$

$$\dot{y} = \dot{s} \operatorname{cos} \theta - s \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta$$

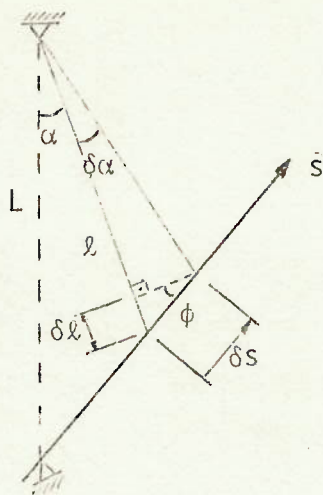
e então

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2)$$

Para obter a força generalizada F_1 vamos calcular o trabalho virtual quando se processa o deslocamento virtual δs , esquecendo as forças reativas e de inércia

$$\delta W_1 = F_1 \delta s$$

$$\delta W_1 = -m g \delta s \operatorname{cos} \theta - K \dot{s} \delta s + k(l - l_0) \delta s \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta \right)$$



$$\delta l = \delta s \operatorname{sen} \phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha - \theta$$

$$l = \sqrt{L^2 + s^2 - 2 s L \cos \theta}$$

$$\alpha = \arccos \frac{L^2 + l^2 - s^2}{2 L l}$$

Figura 1-03

Assim

$$F_1 = - m g \cos \theta - K \dot{s} + k(l - l_0) \cos(\alpha + \theta)$$

Ocorrendo $\delta \theta$ o deslocamento virtual $\delta \theta$ obtemos:

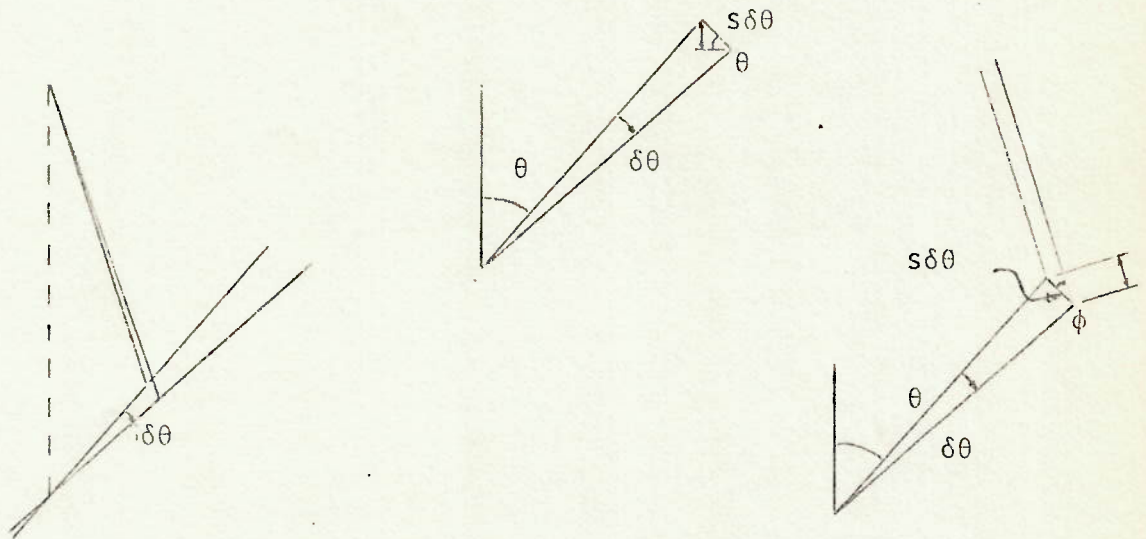


Figura 1-04

$$\delta W_2 = F_2 \delta \theta$$

$$\delta W_2 = m g s \delta \theta \operatorname{sen} \theta - k(l - l_0) s \delta \theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta\right)$$

e

$$F_2 = m g s \operatorname{sen} \theta - k(l - l_0) s \operatorname{sen}(\alpha + \theta)$$

As equações diferenciais do movimento resultam de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = F_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = F_2$$

1.4.2 Convém notar que, se a barra tivesse uma rotação obrigatória $\theta(t)$, teríamos um só grau de liberdade e a equação do movimento resultaria de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = F_1$$

1.4.3 Vamos agora examinar o sistema plano de três graus de liberdade, indicado a seguir, inexistindo atrito, com barra e mola de massas desprezíveis e ocorrendo o movimento da massa m_1 somente na direção de x . Adotaremos como coordenadas generalizadas x , θ e ℓ

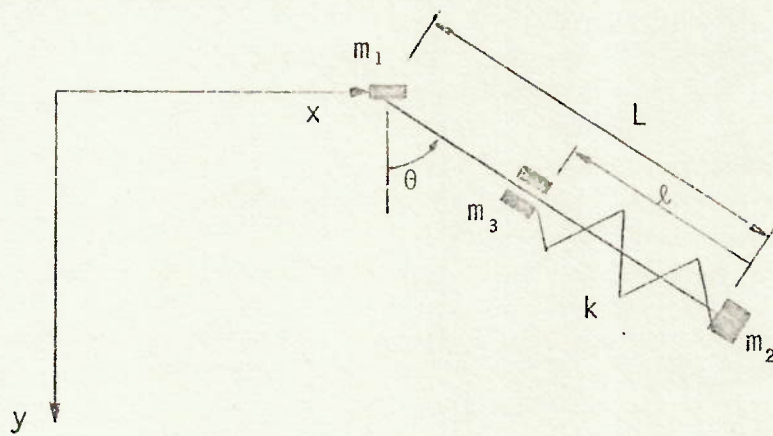


Figura 1-05

Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x + L \operatorname{sen} \theta \\ y_2 = L \operatorname{cos} \theta \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_3 = x + (L - \ell) \operatorname{sen}\theta \\ y_3 = (L - \ell) \operatorname{cos}\theta \end{cases}$$

e resulta

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L \operatorname{cos}\theta + \dot{\theta}^2 L^2) + \frac{m_3}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 (L - \ell)^2 + \dot{\ell}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(L - \ell) \operatorname{cos}\theta \right)$$

Vamos efetuar isoladamente os deslocamentos virtuais para obter as forças generalizadas. Assim, δx provoca $\delta W_x = 0$ e resulta $F_x = 0$.

Devido a $\delta\theta$ temos

$$\delta W_\theta = \left[-m_2 g L \operatorname{sen}\theta - m_3 g(L - \ell) \operatorname{sen}\theta \right] \delta\theta$$

e

$$F_\theta = -m_2 g L \operatorname{sen}\theta - m_3 g(L - \ell) \operatorname{sen}\theta$$

Finalmente, $\delta\ell$ provoca

$$\delta W_\ell = \left[-m_3 g \operatorname{cos}\theta - k(\ell - \ell_0) \right] \delta\ell$$

fornecendo

$$F_\ell = -m_3 g \operatorname{cos}\theta - k(\ell - \ell_0)$$

e com o uso das equações de Lagrange podemos obter as equações diferenciais do movimento.

É interessante observar que, de um modo geral, a troca de uma das coordenadas generalizadas provoca alterações em todas as forças generalizadas.

1.5 Energia Potencial

As equações de Lagrange nada mais são que uma generalização da Lei de Newton

$$m_p \ddot{X}_p = X_p$$

$$m_p \ddot{Y}_p = Y_p$$

$$m_p \ddot{Z}_p = Z_p$$

e na obtenção daquelas são de fundamental importância a energia cinética, que contém as forças de inércia, e o trabalho virtual onde colocamos as forças que agem no sistema; este último é es crito

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta q_i$$

como uma equação diferencial, que pode ou não ser integrada. Quando existir a função integral desta equação diferencial, ela será chamada por trabalho e, no caso geral, depende das coordenadas, das velocidades e do tempo

$$dU = dW$$

$$U = U(q_i ; \dot{q}_i ; t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Quando

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

diremos que a força é monogênica, e as equações de Lagrange ficam

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Vamos agora calcular

$$\frac{d}{dt} (T+U) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial(T+U)}{\partial t}$$

ou

$$\frac{d}{dt} (T+U) = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial(T+U)}{\partial t}$$

e

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial(T + U)}{\partial t}$$

Assim

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T + U) \right] + \frac{\partial(T + U)}{\partial t} = 0$$

Nos casos em que $(T + U)$ não depende explicitamente do tempo, temos

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T + U) = \text{constante}$$

recebendo esta constante o nome de energia E . Como quando T não depende explicitamente do tempo (vide 1.8.8)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

resulta

$$E = T - U + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

e chamamos por energia potencial a

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - U$$

A energia resulta portanto de

$$E = T + V$$

Como caso comum temos (vide 1.8.9):

$$U = U(q_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e

$$V = -U$$

resultando as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

como uma simplificação de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T + U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Existem então dois tipos de forças: o primeiro, que chamamos monogênico, permite a obtenção das equações do movimento a partir de dois escalares, energia cinética e energia potencial (ver de 1.8.10); o segundo tipo não permite este tratamento, sendo chamado poligênico. Podemos agora reescrever as equações de Lagrange, na sua forma mais geral, através de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T + U)}{\partial q_i} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

onde as forças monogênicas estão contidas no primeiro membro da igualdade. Estas forças são importantes pois nos permitem um tratamento variacional do problema, como veremos no próximo item.

As equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

também nos fornecem uma outra característica do movimento, chamada quantidade de movimento, e definida quando a energia cinética independe da coordenada generalizada q_j , isto é, quando

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

A quantidade de movimento do sistema na direção da coordenada q_j vale

$$Q_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

num certo instante. Nesta direção, no intervalo de tempo Δt , a quantidade de movimento do sistema varia de

$$\Delta Q_j = \int_{\Delta t} F_j dt$$

e quando a força generalizada F_j for nula, diremos que a quantidade de movimento se conserva, nesta direção. Assim, num sistema de referência cartesiano, inexistindo forças na direção x , por exemplo, a conservação da quantidade de movimento nesta direção é escrita como

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = \text{constante}$$

em qualquer instante.

1.6 O Princípio de Hamilton

A integral, chamada ação, calculada entre extremos fixos (vide 1.8.11)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i; \dot{q}_i; t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

tem o seu valor estacionário quando

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

segundo nos ensina o Cálculo das Variações. Constatamos portanto que a condição de ser a integral da função de Lagrange

$$L = T + U$$

estacionária, quando calculada entre dois extremos fixos, nos fornece as equações de Lagrange para o movimento. Este é o princípio de Hamilton, que afirma ser o movimento entre as posições fixas, inicial e final, tal que a ação, um funcional, seja estacionária. É evidente que a sua validade ocorre somente para forças monogênicas, ou seja, quando existe U tal que:

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

1.7 Exemplos

1.7.1 O movimento das massas m_1 e m_2 , ligadas às molas de constantes k_1 e k_2 e comprimento iniciais l_1 e l_2 , segundo a direção x , é obtido através de

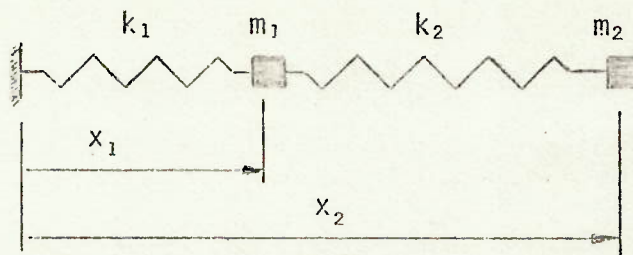


Figura 1-06

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{k_1}{2} (x_1 - l_1)^2 + \frac{k_2}{2} (x_2 - x_1 - l_2)^2$$

$$L = T - V$$

com as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

1.7.2 Vamos examinar o sistema anterior quando existe uma força aplicada na massa m_2 , com coordenadas generalizadas com origens nas posições de equilíbrio.

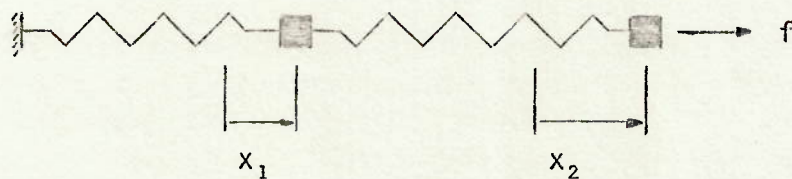


Figura 1-07

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{k_2}{2} x_2^2$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = f$$

1.7.3 Reexaminemos agora, usando a energia potencial, o sistema

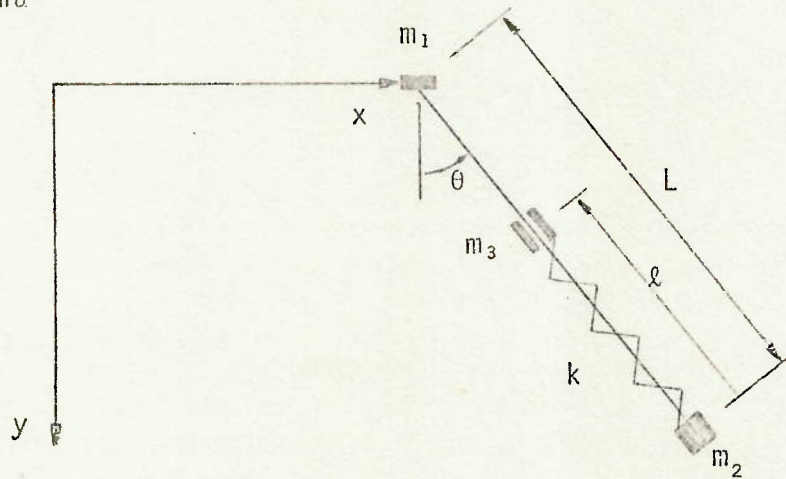


Figura 1-08

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} L \cos\theta + \dot{\theta}^2 L^2) + \frac{m_3}{2} \left[\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 (L - l)^2 + \dot{l}^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} (L - l) \cos\theta \right]$$

$$V = -m_2 g L \cos\theta - m_3 g (L - l) \cos\theta + \frac{k}{2} (l - l_0)^2$$

$$L = T - V$$

e podemos constatar a simplificação, no estudo, introduzido pelo tratamento das forças monogênicas através da energia potencial (vide 1.8.10).

1.7.4 Estas forças também permitem obter aproximações do movimento, com o auxílio do princípio de Hamilton. Assim, o repouso de uma massa m , que se desloca no eixo x com velocidade v , pode ser estudado através de

$$x = vt + a(t^2 - 10t)$$

que satisfaz as condições:

$$x = 0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$x = 10v \quad \text{para} \quad t = 10$$

Impondo que a ação \bar{A} é estacionária, obtemos a constante. Para tanto, calculemos a energia cinética

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \left(v + 2at - 10a \right)^2 = \frac{m}{2} \left(v^2 + 4a^2t^2 + \right. \\ \left. + 100a^2 - 40a^2t - 4vat - 20va \right)$$

e a potencial, que, neste caso, por ser o movimento horizontal, é nula.

A ação resulta de

$$A = \int_0^{10} (T - V) dt = \int_0^{10} T dt$$

$$A = \frac{m}{2} \left(10v^2 + \frac{4}{3} a^2 10^3 + a^2 10^3 - 20a^2 10^2 + 2va 10^2 - 200va \right)$$

e como ela deve ser estacionária, é preciso que

$$\frac{dA}{da} = 0$$

Obtemos então

$$\frac{8}{3} a 10^3 + a 10^3 - 4a 10^3 + 2v 10^2 - 200v = 0$$

que fornece

$$a = 0$$

As equações do movimento são

$$x = vt$$

$$\dot{x} = v$$

Obtivemos as equações exatas do movimento porque a solução tentada continha o movimento real da massa.

1.7.5 Vamos examinar diversas aproximações ao movimento de uma massa m ,



Figura 1-09

presa a uma mola de constante k , de modo que

$$\frac{m}{k} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^2$$

e sendo o movimento livre, na horizontal, com o eixo de referência tendo a posição de equilíbrio por origem. Obteremos, a seguir, a solução exata usando o princípio de Hamilton, com as condições (vide 1.8.12):

$$x = 10 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$x = -10 \quad \text{para} \quad t = 10$$

A energia cinética vale

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

e a potencial

$$V = \frac{k}{2} x^2$$

Do princípio citado, a integral

$$A = \int_0^t (T - V) dt = \int_0^t \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right) dt$$

é estacionária, ou seja

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(T - V)}{\partial x} = 0$$

que nos fornece

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

cuja solução é

$$x = 10 \cos \frac{\pi}{10} \cdot t$$

satisfazendo as condições impostas.

1.7.6 O princípio de Hamilton nos permite obter aproximações do movimento real quando conhecemos as posições nos instantes inicial e final, como já vimos. Vamos usar (vide 1.8.13):

$$x = at^2 + bt + 10$$

como aproximação ao movimento examinado no exemplo anterior.

As condições

$$x = 10 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$x = -10 \quad \text{para} \quad t = 10$$

exigem que

$$a \cdot 10 + b + 2 = 0$$

de onde resulta

$$\frac{db}{da} = -10$$

As energias cinética

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} (2at + b)^2$$

e potencial

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} (at^2 + bt + 10)^2$$

permitem calcular a ação

$$A = \int_0^{10} (T - V) dt = \frac{m}{2} \left[\frac{4}{3} a^2 10^3 + 2ab \cdot 10^2 + b^2 \cdot 10 \right] - \\ - \frac{k}{2} \left[\frac{a^2}{5} 10^5 + \frac{b^2}{3} 10^3 + 10^3 + \frac{ab}{2} 10^4 + \frac{2}{3} a 10^4 + b 10^3 \right]$$

que, devendo ser estacionária, exige que

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

resultando

$$a \left(\frac{2}{3} \frac{m}{k} + 10 \right) + b \left(\frac{5}{3} \right) = - \frac{10}{3}$$

equação esta que, juntamente com

$$a \cdot 10 + b = - 2$$

fornecem

$$a = 0,000000$$

$$b = - 2,000000$$

Vamos usar a energia, que neste caso deve se conservar, para testar a confiabilidade da solução (vide 1.8.14).

t	energia
0	70,26 k
1	52,26 k
2	38,26 k
3	28,26 k

Como ela varia muito, esta solução não é confiável. Podemos constatar este fato comparando a aproximação obtida com o resultado exato, já conhecido.

t	x	x real	erro %	\dot{x}	\dot{x} real	erro %
0	10,00	10,00	0,0	- 2,00	0,00	-
1	8,00	9,51	- 15,9	- 2,00	- 0,97	- 106,2
2	6,00	8,09	- 25,8	- 2,00	- 1,85	- 8,1
3	4,00	5,88	- 32,0	- 2,00	- 2,54	21,3

1.7.7 Como segunda aproximação, adotemos

$$x = at^3 + bt^2 + ct + 10$$

devendo ser

$$a 10^2 + b 10 + c + 2 = 0$$

para que a posição final seja verificada.

Resulta então

$$\frac{\partial c}{\partial a} = -100$$

$$\frac{\partial c}{\partial b} = -10$$

As energias cinética e potencial permitem o cálculo da ação:

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \left(3at^2 + 2bt + c \right)^2$$

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \left(at^3 + bt^2 + ct + 10 \right)^2$$

$$A = \int_0^{10} (T - V) dt = \frac{m}{2} \left[\frac{9}{5} a^2 10^5 + \frac{4}{3} b^2 10^3 + c^2 10 + 3ab 10^4 + \right. \\ \left. + 2ac 10^3 + 2bc 10^2 \right] - \frac{k}{2} \left[\frac{a^2}{7} 10^7 + \frac{b^2}{5} 10^5 + \frac{c^2}{3} 10^3 + 10^3 + \right. \\ \left. + \frac{ab}{3} 10^6 + \frac{2}{5} ac 10^5 + 5a 10^4 + \frac{bc}{2} 10^4 + \frac{2}{3} b 10^4 + c 10^3 \right]$$

Para que a ação seja estacionária, é preciso que:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 0$$

que fornecem

$$a \left[\frac{8m}{5k} 10 + \frac{4}{35} 10^3 \right] + b \left[\frac{m}{k} + \frac{100}{6} \right] + c \left[\frac{8}{3} \right] = -5$$

$$a \left[\frac{m}{k} 10 + \frac{10^3}{15} \right] + b \left[\frac{2m}{3k} + 10 \right] + c \left[\frac{5}{3} \right] = -\frac{10}{3}$$

as quais, juntas com

$$a 10^2 + b 10 + c = - 2$$

nos dão

$$a = 0,043 004$$

$$b = - 0,645 067$$

$$c = 0,150 202$$

Podemos testar a confiabilidade da aproximação obtida

t	energia
0	50,11 k
1	50,76 k
2	51,07 k
3	50,03 k
4	48,57 k
5	47,91 k
6	48,57 k
7	50,03 k
8	51,08 k
9	50,76 k
10	50,12 k
11	54,45 k
12	76,35 k

e verificar que os resultados devem ser aproveitáveis até $t = 10$, pois a energia não apresenta grandes variações neste intervalo.

Vamos comparar os resultados fornecidos pela aproximação com os exatos

t	x	x real	erro %	\dot{x}	\dot{x} real	erro %
0	10,00	10,00	0,0	0,15	0,00	-
1	9,55	9,51	0,4	- 1,01	- 0,97	- 4,1
2	8,06	8,09	- 0,4	- 1,91	- 1,85	- 3,2
3	5,81	5,88	- 1,2	- 2,56	- 2,54	- 0,8
4	3,03	3,09	- 1,9	- 2,95	- 2,99	1,3
5	0,00	0,00	0,0	- 3,08	- 3,14	2,0
6	- 3,03	- 3,09	1,9	- 2,95	- 2,99	1,3
7	- 5,81	- 5,88	1,2	- 2,56	- 2,54	- 0,8
8	- 8,06	- 8,09	0,4	- 1,91	- 1,85	- 3,2
9	- 9,55	- 9,51	- 0,4	- 1,01	- 0,97	- 4,1
10	- 10,00	- 10,00	0,0	0,15	0,00	-
11	- 9,16	- 9,51	3,7	1,57	0,97	61,9
12	- 6,78	- 8,09	16,2	3,25	1,85	75,7

e observar a validade do teste da energia.

1.7.8 Como terceira aproximação, usemos

$$x = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + 10$$

que para satisfazer a posição final exige que

$$a 10^3 + b 10^2 + c 10 + d + 2 = 0$$

de onde

$$\frac{\partial d}{\partial a} = - 10^3$$

$$\frac{\partial d}{\partial b} = - 10^2$$

$$\frac{\partial d}{\partial c} = - 10$$

As energias cinética e potencial são:

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d \right)^2$$

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \left(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + 10 \right)^2$$

e a ação resulta

$$\begin{aligned} A = \int_0^{10} (T - V) dt = \frac{m}{2} & \left[\frac{16}{7} a^2 10^7 + \frac{9}{5} b^2 10^5 + \frac{4}{3} c^2 10^3 + 10d^2 + \right. \\ & + 4ab 10^6 + \frac{16}{5} ac 10^5 + 2ad 10^4 + 3bc 10^4 + 2bd 10^3 + 2cd 10^2 \left. \right] - \\ & - \frac{k}{2} \left[\frac{a^2}{9} 10^9 + \frac{b^2}{7} 10^7 + \frac{c^2}{5} 10^5 + \frac{d^2}{3} 10^3 + 10^3 + \frac{ab}{4} 10^8 + \right. \\ & + \frac{2}{7} ac 10^7 + \frac{ad}{3} 10^6 + 4a 10^5 + \frac{bc}{3} 10^6 + \frac{2}{5} bd 10^5 + 5b 10^4 + \\ & \left. + \frac{cd}{2} 10^4 + \frac{2}{3} c 10^4 + d 10^3 \right] \end{aligned}$$

que para ser estacionária obriga que

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial c} = 0$$

As equações resultantes destas condições, juntas com

$$a 10^3 + b 10^2 + c 10 + d = -2$$

nos fornecem

$$a = 0,000\ 000$$

$$b = 0,043\ 001$$

$$c = -0,645\ 061$$

$$d = 0,150\ 347$$

e podemos testar a confiabilidade da solução através da conservação da energia. Contudo, as constantes aqui encontradas fazem esta aproximação ser praticamente igual à anterior, fornecendo ambas os mesmos resultados. Verificamos que o polinômio de terceiro grau aproxima melhor que o de quarto grau.

1.7.9 Vamos agora utilizar o método de Ritz, com o princípio de Hamilton, para aproximar o mesmo movimento, só que conhecendo os estados inicial e final, isto é,

$$x = 10 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$x = -10 \quad \text{para} \quad t = 10$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{para} \quad t = 10$$

Empreguemos como primeira aproximação

$$x = \frac{a}{4} t^4 + \frac{b}{3} t^3 - 5bt^2 - 50at^2 + 10$$

$$\dot{x} = at^3 + bt^2 - 10bt - 100at$$

e é preciso que

$$\frac{a}{4} 10^3 + \frac{b}{3} 10^2 - 50b - 5a 10^2 + 2 = 0$$

para que as condições fiquem verificadas. Daí

$$\frac{db}{da} = -15$$

Novamente as energias cinética e potencial

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \left(at^3 + bt^2 - 10bt - 100at \right)^2$$

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{a}{4} t^4 + \frac{b}{3} t^3 - 5bt^2 - 50at^2 + 10 \right)^2$$

permitem o cálculo da ação

$$A = \int_0^{10} (T - V) dt = \frac{m}{2} \left(\frac{16}{21} a^2 10^6 + \frac{b^2}{3} 10^4 + ab 10^5 \right) - \\ - \frac{k}{2} \left(\frac{535}{252} a^2 10^7 + \frac{65}{63} b^2 10^5 + \frac{149}{504} ab 10^7 + 10^3 - \frac{7}{3} a 10^5 - \right. \\ \left. - \frac{5}{3} b 10^4 \right)$$

que, para ser estacionária, exige que

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

ou

$$m \left(\frac{32}{21} a 10^6 - b 10^5 + b 10^5 - 15a 10^5 \right) = k \left(\frac{535}{126} a 10^7 - \right. \\ \left. - \frac{65}{21} b 10^6 + \frac{149}{504} b 10^7 - \frac{745}{168} a 10^7 - \frac{7}{3} 10^5 + 25 \times 10^4 \right)$$

As constantes são então obtidas de

$$a \left(\frac{50}{21} \frac{m}{k} + \frac{95}{504} 10^3 \right) + b \left(\frac{10^3}{72} \right) = \frac{5}{3}$$

$$a \left(\frac{10^3}{4} - 500 \right) + b \left(\frac{100}{3} - 50 \right) = - 2$$

valendo

$$a = 0,000\ 000$$

$$b = 0,120\ 000$$

O teste da conservação da energia

t	energia
0	50,00 k
1	50,47 k
2	50,04 k
3	48,30 k
4	46,40 k
5	45,59 k
6	46,40 k
7	48,30 k
8	50,04 k
9	50,47 k
10	50,00 k
11	52,63 k
12	68,52 k
13	117,15 k

mostra que a solução deve ser aproveitável até o instante 11. Assim

t	x	x real	erro %	\dot{x}	\dot{x} real	erro %
0	10,00	10,00	0,0	0,00	0,00	0,0
1	9,44	9,51	- 0,7	- 1,08	- 0,97	- 11,3
2	7,92	8,09	- 2,1	- 1,92	- 1,85	- 3,8
3	5,68	5,88	- 3,4	- 2,52	- 2,54	0,8
4	2,96	3,09	- 4,2	- 2,88	- 2,99	3,7
5	0,00	0,00	0,0	- 3,00	- 3,14	4,5
6	- 2,96	- 3,09	4,2	- 2,88	- 2,99	3,7
7	- 5,68	- 5,88	3,4	- 2,52	- 2,54	0,8
8	- 7,92	- 8,09	2,1	- 1,92	- 1,85	- 3,8
9	- 9,44	- 9,51	0,7	- 1,08	- 0,97	- 11,3
10	- 10,00	- 10,00	0,0	0,00	0,00	0,0
11	- 9,36	- 9,51	1,6	1,32	0,97	36,1

Nesta situação, em que conhecemos posição e velocidade iniciais, dispomos da energia real, que deve se conservar. No teste da confiabilidade da solução devemos observar se as energias fornecidas pela aproximação oscilam em torno do valor exato, sem dele se afastar muito.

É interessante notar que, nos instantes em que a energia potencial é muito maior que a cinética, sendo a energia próxima da real, o valor da posição é mais confiável que o da velocidade; este fato ocorre para $t = 11$.

Comparando com o exemplo anterior, devemos fazer duas observações. Em primeiro lugar, nos dois casos, embora partindo de polinômios de quarto grau, as melhores aproximações foram fornecidas por polinômios de terceiro grau ($a = 0$). Em segundo lugar, embora a velocidade seja exata nas extremidades para este caso e no anterior não, globalmente a aproximação fornecida pelo anterior é melhor, pois o polinômio aqui encontrado estava incluído na família lá considerada.

1.7.10 Como segunda aproximação usemos

$$x = \frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{4} t^4 + \frac{c}{5} t^5 - 5at^2 - \frac{10}{3} bt^3 - \frac{5}{2} ct^4 + 10$$

$$\dot{x} = at^2 + bt^3 + ct^4 - 10at - 10bt^2 - 10ct^3$$

que, para verificar todas as condições iniciais e finais exige que

$$200a + 1000b + 6000c = 24$$

de onde

$$\frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{1}{30}$$

$$\frac{\partial c}{\partial b} = -\frac{1}{6}$$

Podemos calcular as energias cinética

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \left(at^2 + bt^3 + ct^4 - 10at - 10bt^2 - 10ct^3 \right)^2$$

e potencial

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \left(\frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{4} t^4 + \frac{c}{5} t^5 - 5at^2 - \frac{10}{3} bt^3 - \frac{10}{4} ct^4 + 10 \right)^2$$

que nos fornece

$$\begin{aligned} A = \int_0^{10} (T - V) dt = \frac{m}{2} & \left(a^2 \frac{10^4}{3} + b^2 \frac{10^7}{105} + c^2 \frac{10^9}{252} + ab \frac{10^5}{3} + \right. \\ & + ac \frac{2}{105} 10^7 + bc \frac{10^8}{84} \left. \right) - \frac{k}{2} \left(a^2 \frac{13}{126} 10^6 + b^2 \frac{10^9}{504} + \right. \\ & + c^2 \frac{23}{396} 10^9 + 10^3 + ab \frac{10^8}{112} + ac \frac{71}{1512} 10^8 + bc \frac{23}{108} 10^8 - \\ & \left. - a \frac{10^5}{6} - b \frac{2}{3} 10^5 - c \frac{10^6}{3} \right) \end{aligned}$$

Ser esta integral estacionária exige que

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 0$$

ou seja,

$$0,46607a + 2,47312b + 15,74241c = 0,05556$$

$$0,94147a + 4,99285b + 32,76254c = 0,11111$$

Estas equações, juntamente com

$$200a + 1000b + 6000c = 24$$

fornece

$$a = 0,097087$$

$$b = 0,011370$$

$$c = -0,001132$$

Através da verificação da conservação da energia, podemos saber se a solução é confiável. Assim

t	energia
0	50,00 k
1	49,99 k
2	50,14 k
3	49,85 k
4	50,10 k
5	49,95 k
6	50,03 k
7	50,23 k
8	50,14 k
9	50,08 k
10	50,00 k

e como a energia oscila ao redor do valor exato 50 k, pouco divergindo deste, podemos afirmar que esta deve ser uma boa solução. Comparando a aproximação obtida com a solução exata, verificamos a justeza da afirmação feita.

t	x	x real	erro %	\dot{x}	\dot{x} real	erro %
0	10,00	10,00	0,0	0,00	0,00	0,0
1	9,51	9,51	0,0	- 0,97	- 0,97	0,0
2	8,10	8,09	0,1	- 1,85	- 1,85	0,0
3	5,89	5,88	0,2	- 2,54	- 2,54	0,0
4	3,10	3,09	0,3	- 2,99	- 2,99	0,0
5	0,01	0,00	-	- 3,14	- 3,14	0,0
6	- 3,08	- 3,09	0,3	- 2,99	- 2,99	0,0
7	- 5,88	- 5,88	0,0	- 2,55	- 2,54	- 0,4
8	- 8,10	- 8,09	- 0,1	- 1,85	- 1,85	0,0
9	- 9,52	- 9,51	- 0,1	- 0,97	- 0,97	0,0
10	- 10,00	- 10,00	0,0	0,00	0,00	0,0

1.7.11 Com relação ao mesmo problema, vamos agora buscar aproximações partindo do conhecimento do estado inicial somente

$$x = 10 \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$\dot{x} = 0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

Como primeira tentativa adotemos

$$x = at^2 + 10$$

$$\dot{x} = 2at$$

que satisfaz as condições iniciais. O princípio de Hamilton será a arma empregada, com o tempo final desconhecido; a energia permitirá a escolha do instante final, que fornece a constante procurada a , e a verificação da validade da solução obtida.

Assim

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} 4a^2 t^2$$

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \left(at^2 + 10 \right)^2$$

$$A = \int_0^t (T - V) dt = \frac{m}{2} \frac{4}{3} a^2 t^3 - \frac{k}{2} \left(\frac{a^2 t^5}{5} + \frac{20}{3} at^3 + 100t \right)$$

e o valor estacionário da integral exige que

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

de onde

$$a = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{8}{3} \frac{m}{k} - \frac{2}{5} t^2}$$

Vamos adotar valores para o tempo, resultando em valores da constante, e escolher os que fazem a energia média, no intervalo de tempo, igual à energia inicial, que deve se conservar. Assim, calcularemos

$$\int_0^t (T + V) dt = \frac{m}{2} \frac{4}{3} a^2 t^3 + \frac{k}{2} \left(\frac{a^2 t^5}{5} + \frac{20}{3} a t^3 + 100t \right)$$

para cada tempo final adotado e compararemos com o valor exato

$$50 k t$$

A igualdade fornece o instante final e, conseqüentemente, a constante procurada. Desta forma

t	a	$\int_0^t (T + V) dt$	50 k t
5	0,391719467	590,73 k	250 k
10	- 0,513570416	3207,24 k	500 k
20	- 0,050132468	603,19 k	1000 k
15	- 0,105852000	665,45 k	750 k
14	- 0,129749603	730,68 k	700 k
14,5	- 0,116793059	693,36 k	725 k
14,3	- 0,121705543	707,00 k	715 k
14,2	- 0,124292270	714,43 k	710 k
14,24	- 0,123246683	711,41 k	712 k

e resulta

$$a = - 0,123247$$

Para saber da confiabilidade da solução, vamos examinar a energia fornecida pela aproximação em diversos tempos intermediários

t	x	\dot{x}	energia
0	10,00	0,00	50 k
1	9,88	- 0,25	49,08 k
2	9,51	- 0,49	46,42 k
3	8,89	- 0,74	42,29 k
4	8,03	- 0,99	37,15 k

e, como a energia não se mantém próxima da real, não podemos confiar na solução obtida.

1.7.12 Como segunda aproximação, usemos

$$x = at^3 + bt^2 + 10$$

$$\dot{x} = 3at^2 + 2bt$$

que satisfaz as condições iniciais e, com o mesmo raciocínio, fornece

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} (3at^2 + 2bt)^2$$

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} (at^3 + bt^2 + 10)^2$$

$$A = \int_0^t (T - V) dt = \frac{m}{2} \left[\frac{9}{5} a^2 t^5 + 3abt^4 + \frac{4}{3} b^2 t^3 \right] - \\ - \frac{k}{2} \left[\frac{a^2 t^7}{7} + \frac{b^2 t^5}{5} + 100t + \frac{ab}{3} t^6 + 5at^4 + \frac{20}{3} bt^3 \right]$$

Ser esta integral estacionária exige que

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 0$$

resultando as constantes a e b do sistema obtido destas derivadas.

$$a \left(\frac{18}{5} \frac{m}{k} t - \frac{2}{7} t^3 \right) + b \left(3 \frac{m}{k} - \frac{t^2}{3} \right) = 5$$

$$a \left(3 \frac{m}{k} t - \frac{t^3}{3} \right) + b \left(\frac{8}{3} \frac{m}{k} - \frac{2}{5} t^2 \right) = \frac{20}{3}$$

A cada valor atribuído a t corresponde um par de constantes; o par eleito é o que fornece a energia média, no intervalo de tempo considerado, igual ao valor exato, previamente conhecido. Assim

t	a	b	$\int_0^t (T + V) dt$	50 k t
5	- 0,996899018	6,853505587	8358,47 k	250 k
10	0,040748973	- 0,605765690	482,30 k	500 k
9	0,066106301	- 0,863402179	608,20 k	450 k
9,5	0,051445710	- 0,717285488	532,06 k	475 k
9,8	0,044650532	- 0,647030342	499,78 k	490 k
9,9	0,042643322	- 0,625893945	490,68 k	495 k
9,86	0,043432170	- 0,634223446	494,23 k	493 k

e escolhemos

$$a = 0,043432$$

$$b = - 0,634223$$

que nos permite examinar a confiabilidade da aproximação

t	x	\dot{x}	energia
0	10,00	0,00	50 k
1	9,41	- 1,14	50,83 k
2	7,81	- 2,02	51,09 k
3	5,46	- 2,63	50,04 k
4	2,63	- 2,99	48,73 k
5	- 0,43	- 3,08	48,30 k
6	- 3,45	- 2,92	49,15 k
7	- 6,18	- 2,49	50,62 k
8	- 8,35	- 1,81	51,46 k
9	- 9,71	- 0,86	50,91 k
10	- 9,99	0,35	50,51 k
11	- 8,93	1,81	56,55 k
12	- 6,28	3,54	83,24 k

e descobrimos que devem ser aproveitáveis os resultados encontrados até $t = 10$, pois a energia oscila em torno do valor exato, sem dele se desviar muito.

A comparação com os valores exatos nos mostra a validade do aserto.

t	x	x real	erro %	\dot{x}	\dot{x} real	erro %
0	10,00	10,00	0,0	0,00	0,00	0,0
1	9,41	9,51	- 1,1	- 1,14	- 0,97	- 17,5
2	7,81	8,09	- 3,5	- 2,02	- 1,85	- 9,2
3	5,46	5,88	- 7,1	- 2,63	- 2,54	- 3,5
4	2,63	3,09	- 14,9	- 2,99	- 2,99	0,0
5	- 0,43	0,00	-	- 3,08	- 3,14	1,9
6	- 3,45	- 3,09	- 11,7	- 2,92	- 2,99	2,3
7	- 6,18	- 5,88	- 5,1	- 2,49	- 2,54	2,0
8	- 8,35	- 8,09	- 3,2	- 1,81	- 1,85	2,2
9	- 9,71	- 9,51	- 2,1	- 0,86	- 0,97	11,3
10	- 9,99	- 10,00	0,1	0,35	0,00	-

1.8 Críticas e Comentários

Neste capítulo inicial apresentamos os princípios da dinâmica voltados à obtenção das equações de Lagrange, assunto que julgamos não precisar ser comentado ou discutido neste trabalho porque foge da sua principal finalidade, e é largamente discutido por inúmeros autores.

Queremos aqui ressaltar o caráter variacional do princípio de Hamilton, o que permite obter aproximações do movimento com o uso do método de Ritz. Infelizmente não são todas as forças que permitem este tratamento variacional, restringindo o campo de aplicações deste princípio.

Fizemos exemplos da utilização do método de Ritz, junto com o princípio de Hamilton, em um movimento conhecido, obtendo aproximações para este movimento a partir de três tipos de condições:

- 1º. supondo conhecidas as posições inicial e final, as sim como os respectivos instantes,
- 2º. supondo conhecidos os estados (posição e velocidade) e instantes iniciais e finais,

39. supondo conhecido o estado inicial somente.

Tivemos oportunidade de comparar o desempenho do polinômio de quarto grau com os dois primeiros tipos de condições, observando que em ambos os casos a melhor aproximação é fornecida pelo polinômio de terceiro grau, e que o uso da primeira condição, menos restritiva que a segunda, fornece resultados globalmente melhores, já que o número de coeficientes livres é maior, o que permite um melhor ajuste do polinômio de aproximação.

Quando empregamos o terceiro tipo de condição, sô chegamos a usar o polinômio de terceiro grau por causa do grande número de operações matemáticas, que seria necessário efetuar, com o uso de um polinômio de maior grau. Apesar disto, podemos comparar este caso com os dois anteriores porque neles, embora partindo com polinômios de quarto grau, recaímos nos de terceiro grau; podemos então observar que este último tipo de condição é o que resulta na pior aproximação de todas, embora o número de coeficientes livres seja igual ao do primeiro tipo de condição. Isto se deve ao fato de que, neste último caso, conhecemos muito bem a situação inicial (posição e velocidade), mas nada sabemos sobre a final, enquanto que nas primeiras condições existiam informações sobre as situações inicial e final. Aliás, o princípio de Hamilton exige o conhecimento das posições e instantes iniciais e finais; no terceiro caso justamente procuramos o instante e posição finais usando a energia média.

Queremos ainda lembrar do uso da energia como um teste para avaliar a confiabilidade da solução fornecida pela aproximação.

1.8.1 Achamos que não cabe a este trabalho a discussão das hipóteses da mecânica de um sistema de pontos materiais, que são:

1^a. em relação a um sistema de referência cartesiano inercial vale

$$\vec{F}_p = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_p)$$

2^a. a massa envolvida deve ser maior que a das partículas atômicas

3^a. a velocidade deve ser menor que a da luz

4^a. a massa não pode ser muito grande

5^a. o intervalo de tempo não pode ser muito grande.

1.8.2 Consideramos o tempo fixo porque pretendemos chegar ao princípio dos trabalhos virtuais, onde os deslocamentos virtuais são arbitrários, mas compatíveis com os vínculos, e calculados num certo instante fixo. Aliás, o princípio dos trabalhos virtuais fornece o equilíbrio do sistema num certo instante, e é por isso que o tempo é fixo.

1.8.3 Entendemos como forças reativas as que decorrem da proibição de um certo movimento, e não as que "dificultam" o movimento. Assim, se o movimento de uma massa \bar{m} não puder ocorrer na direção x , existindo atrito, a força reativa que consideramos é perpendicular a x , sendo a força de atrito, na direção x , encarada como força ativa. De um modo mais geral, a força reativa é a parte da força introduzida pelo vínculo que permite a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, ou seja, a obtenção da nulidade do trabalho virtual das forças reativas.

1.8.4 Quando os deslocamentos virtuais não podem ser reversíveis, o trabalho virtual das forças ativas não pode ser positivo.

O princípio dos trabalhos virtuais é muito importante para a mecânica, sendo o elo de ligação entre os diversos tratamentos que existem neste campo.

1.8.5 Para obter a energia cinética

$$T = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}$$

em função das coordenadas generalizadas, devemos usar as relações

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{y}_i = \dots$$

$$\dot{z}_i = \dots$$

1.8.6 Normalmente, trabalhar com as $3N$ equações de Lagrange e com as V equações algébricas dos vínculos não apresenta qualquer vantagem.

1.8.7 As equações não integráveis de vínculos são normalmente utilizadas com o método dos multiplicadores de Lagrange, que no Cálculo das Variações é estudado como um condicionamento.

1.8.8 A energia se conserva desde que $(T + U)$ não dependa explicitamente do tempo. A energia cinética depende explicitamente do tempo quando um vínculo for móvel ou quando uma coordenada generalizada não for inercial.

1.8.9 O caso mais comum é

$$U = U(q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mas podemos definir a energia potencial como

$$V = -U$$

desde que o trabalho não dependa da velocidade.

1.8.10 No caso mais geral usamos o trabalho U para obter as forças monogênicas. O uso da energia potencial V é mais comum e menos geral.

1.8.11 Extremos fixos significa que conhecemos as posições e instantes iniciais e finais.

1.8.12 Nesta aplicação o princípio de Hamilton não mostra qualquer vantagem e aparece como um disfarce nas equações de Lagrange, já que a sua característica variacional não está explorada neste caso.

1.8.13 Nesta aplicação o princípio de Hamilton mostra a sua vantagem, pois o seu caráter variacional é explorado pelo método de Ritz.

1.8.14 A conservação da energia exige que, nos instantes intermediários, o seu valor varie muito pouco.

2. ONDAS EM MEIOS CONTÍNUOS ELÁSTICOS2.1 O Conceito de Onda em um Meio Contínuo

A posição de um ponto de um meio contínuo, em relação ao sistema de referência inercial $x y z$, é obtida através de

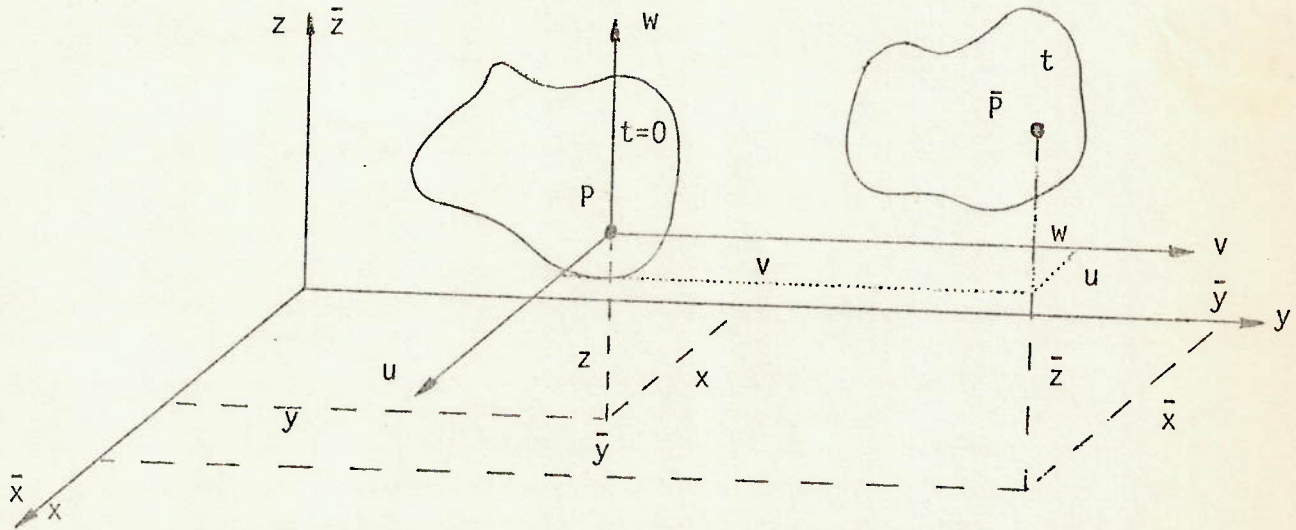


Figura 2-01

$$\bar{x} = x + u(x, y, z, t)$$

$$\bar{y} = y + v(x, y, z, t)$$

$$\bar{z} = z + w(x, y, z, t)$$

sendo u , v e w funções contínuas do ponto na posição inicial e do tempo.

Vamos imaginar que no instante considerado exista no meio uma superfície que o divida em duas regiões, de modo que:

- 1º - as funções u , v e w são contínuas, assim como todas as suas derivadas até a ordem i , em qualquer das duas partes;
- 2º - pelo menos uma das derivadas da ordem i não é contínua nos pontos da superfície limítrofe, com as outras derivadas envolvidas contínuas também aí, ou seja, as derivadas parciais em relação a x , y , z e t até a ordem i , inclusive.

Satisfeitas estas condições, diremos que se propaga no meio uma onda de ordem i , e a superfície de separação será chamada frente de onda.

Assim, existindo no meio uma onda de segunda ordem,

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}$$

são contínuas, em todo o meio, e, pelo menos uma dentre as derivadas de ordem dois:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}$$

idem para v e w

$\bar{\psi}$ é contínua em cada região mas não o é na frente de onda, com as outras contínuas em todo o meio.

Vamos agora supor que no instante t a frente de onda tenha por equação

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = 0$$

e contenha o ponto \bar{A} ; podemos encontrar a superfície (vide 2.5.1)

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

que, no instante inicial, contém os pontos atualmente situados na frente de onda; o ponto \bar{A} encontrava-se em A, pertencente a $\psi = 0$

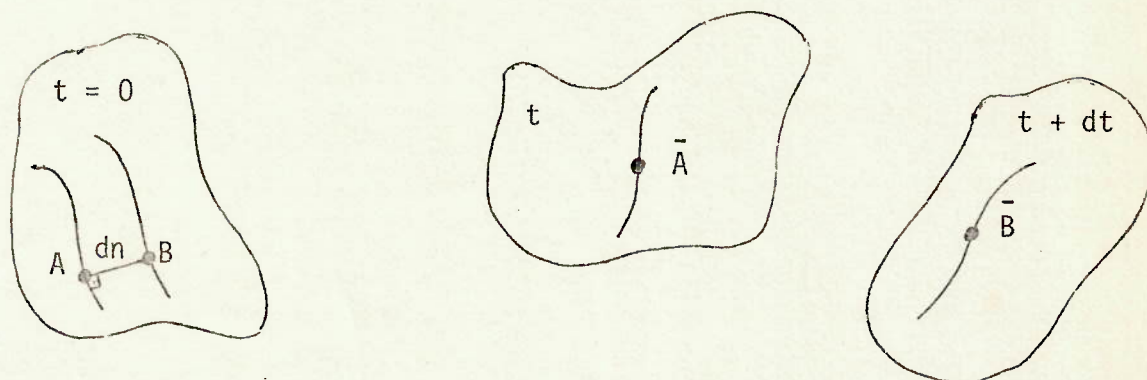


Figura 2-02

No instante $t + dt$, a frente de onda contém novos pontos, entre eles \bar{B} , que pertenciam a uma outra superfície do estado inicial, sendo B a posição inicial de \bar{B} .

Vamos imaginar que B situa-se na normal, em A , a superfície que representa inicialmente a frente de onda do instante t . Podemos então definir velocidade de propagação da onda, no ponto A , como sendo

$$\omega = \frac{dn}{dt}$$

cujo sentido é positivo quando, escolhida uma das duas regiões do meio, ele está voltado para fora da parte eleita.

A definição feita mostra que a velocidade de propagação depende do instante inicial escolhido. Nas nossas aplicações iremos sempre adotar como estado inicial o de repouso.

Trabalhando somente com o instante inicial, que está representando o que se passa nos outros instantes, sejam α , β e γ os cosenos diretores da normal, em A , a superfície que representa a frente de onda; temos

$$\alpha = \frac{1}{d} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\beta = \frac{1}{d} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\gamma = \frac{1}{d} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

com

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}$$

cujo sinal é o de ψ na região não escolhida do meio.

A superfície que, no instante inicial, representa a frente de onda no instante $t + dt$, tem por equação

$$\psi(x + \alpha dn; y + \beta dn; z + \gamma dn; t + dt) = 0$$

que, desenvolvendo em série de Taylor, desprezando os infinitesimos de ordem superior, e lembrando que $\psi(x, y, z, t) = 0$, fornece (vide 2.5.2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \alpha dn + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta dn + \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma dn + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = 0$$

resultando para a velocidade de propagação

$$\omega = - \frac{1}{d} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Diremos que a onda $\bar{\psi}$ é plana quando

$$\psi(x, y, z, t) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = 0$$

forem equações de planos; a onda será esférica ou cilíndrica conforme estas superfícies forem esféricas ou cilíndricas, respectivamente.

Podemos ainda definir a velocidade atual de propagação da onda, quando consideramos o instante atual t como sendo o inicial; e a velocidade de deslocamento da onda, como sendo a velocidade que a frente de onda realmente apresenta, segundo a normal no ponto considerado, em relação ao referencial inercial adotado. Esta última é decorrente da velocidade atual de propagação e da velocidade que o ponto apresenta no instante considerado. Um desenvolvimento análogo ao feito para obter a velocidade de propagação nos fornece

$$\frac{- \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}\right)^2}}$$

como velocidade de deslocamento.

No item 3.2.1 do próximo capítulo, examinaremos o efeito da aplicação súbita de uma força na extremidade livre de uma barra prismática engastada



Figura 2-03

o que provoca uma onda plana de ordem um, chamada onda de choque. No item seguinte, aplicaremos uma carga senoidal



Figura 2-04

que resulta numa onda plana de segunda ordem.

Uma situação em que não existe onda é encontrada no item 3.2.3, quando tratamos das vibrações livres (vide 2.5.3).

2.2 O Movimento em um Meio Elástico Linear

Nas conhecidas equações do movimento

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Z$$

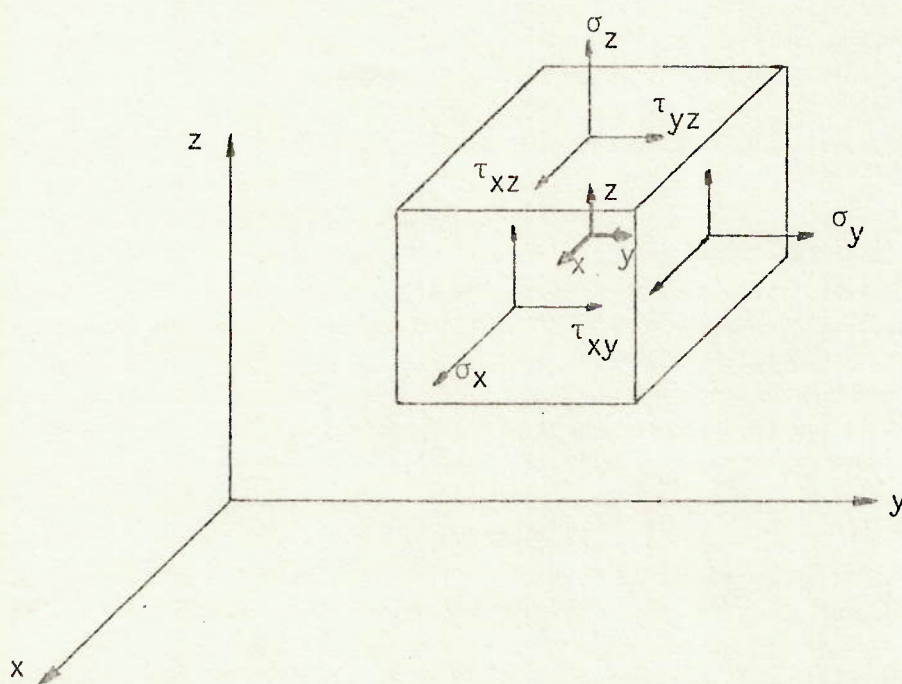


Figura 2-05

admitidos que são pequenos os deslocamentos e as deformações, vamos imaginar que não existam as forças de massa X , Y e Z , e usar a lei de Hooke

$$\sigma_x = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_x = \lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

onde λ e G são as constantes de Lamé, sendo a última o módulo de elasticidade transversal; a constante λ está relacionada com o módulo de elasticidade E e com o coeficiente de Poisson ν através de

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Assim obtemos

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma_{xz})$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_y) + \frac{\partial}{\partial x} (G\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma_{yz})$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (\lambda\epsilon_v + 2G\epsilon_z) + \frac{\partial}{\partial x} (G\gamma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma_{yz})$$

e com o uso das relações entre deslocamentos e deformações

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

resultam

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_V}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (\text{I})$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_V}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad (\text{II})$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_V}{\partial z} + G \nabla^2 w \quad (\text{III})$$

sendo ∇^2 o operador

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Estas são as equações do movimento num meio elástico linear.

2.3 Meio Elástico Linear Infinito

Vamos mostrar que num tal meio somente podem se propagar dois tipos de onda, com velocidades de propagação diferentes. A existência do primeiro tipo é provada com as derivações da expressão (I) em relação à variável x

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \epsilon_V}{\partial x^2} + G \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u,$$

da equação (II) em relação a y

$$\rho \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \epsilon_V}{\partial y^2} + G \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v,$$

e de (III) em relação a z

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \epsilon_V}{\partial z^2} + G \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w,$$

que somadas fornecem

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_V = (\lambda + 2G) \nabla^2 \epsilon_V$$

acarretando uma onda cujo efeito é o de variação no volume, sendo por isto chamada onda de dilatação, e de velocidade de propagação

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

O segundo tipo de onda aparece com a subtração das derivadas de duas das equações; assim, derivando a expressão (I) em relação a y

$$\rho \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u$$

e a (II) em relação a x

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} + G \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 v$$

e subtraindo, resulta

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

que é uma onda cuja velocidade de propagação vale

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Com as equações (I) e (III), obtemos

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

e com (II) e (III)

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

que são ondas do mesmo tipo, com igual velocidade de propagação ω_2 .

A demonstraçãõ de que sãõ somente estes os tipos de ondas possí
veis ẽ facilmente feita. Suponhamos que exista uma onda para a
qual

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

ou seja, nãõ ocorra rotaçãõ; existe entãõ uma funçãõ potencial
 ψ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

e

$$\epsilon_v = \nabla^2 \psi$$

de onde

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} = \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} = \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} = \nabla^2 w$$

As equações (I), (II) e (III) ficam entãõ

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 w$$

fornecendo ondas de dilatação, que também são chamadas por ondas irrotacionais (vide 2.5.4). A hipótese de termos ondas que não variem o volume fornece

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = G \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = G \nabla^2 w$$

que são as ondas do segundo tipo, por este motivo chamadas ondas equivolúmetricas (2.5.5).

Concluimos então que, qualquer que seja a onda que percorre um meio elástico linear isotrópico infinito, ela é a resultante destes dois tipos possíveis de onda. E também que a distorção pode estar presente nestes dois tipos de onda, embora a variação volumétrica só seja possível na onda irrotacional (vide 2.5.6).

As equações de onda, aqui encontradas, são equações diferenciais do tipo

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = h^2 \nabla^2 H \quad H = H(x, y, z, t)$$

sendo H um deslocamento, cuja solução é

$$H = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \Phi^*(x + ht \operatorname{sen}\theta \cos\phi; y + ht \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi; z + ht \cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \Phi(x + ht \operatorname{sen}\theta \cos\phi; y + ht \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi; z + ht \cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta \right]$$

satisfazendo as condições iniciais

$$H = \Phi(x, y, z) \quad \text{para} \quad t = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Phi^*(x, y, z) \quad \text{para} \quad t = 0$$

A idéia contida nesta solução é a seguinte: conhecido o estado do meio, ou seja, posições e velocidades dos seus pontos, num certo instante t_0 , o estado de um determinado ponto no instante

t é obtido a partir de uma média do que ocorreu, no instante t_0 , nos pontos da superfície esférica de raio $h(t - t_0)$ e centro no ponto considerado, pois os cossenos diretores dos raios da esfera são (vide 2.5.7):

$$\cos\theta \cos\phi$$

$$\cos\theta \sin\phi$$

$$\sin\theta$$

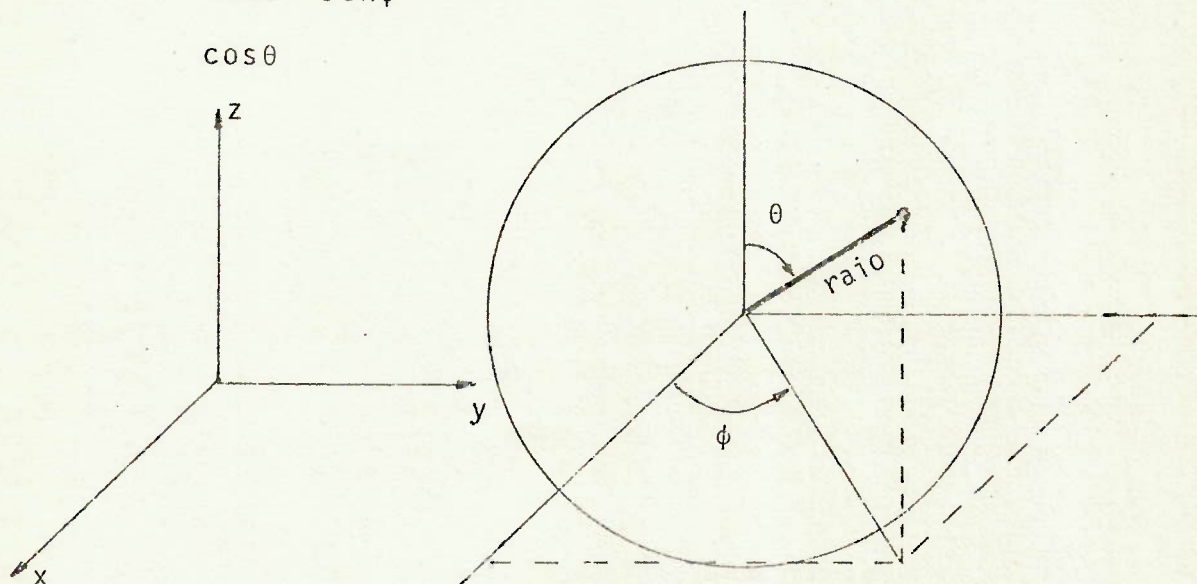


Figura 2-06

e o elemento de área da superfície esférica é

$$(ht)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

A velocidade de propagação h da onda fica perfeitamente compreensível: imaginemos uma frente de onda, de deslocamento nulo, que separa a região já perturbada da ainda em repouso, e seja um ponto da região não perturbada, distante d da frente de onda no instante inicial considerado; este ponto pertencerá à frente de onda no instante $\frac{d}{h}$ após o inicial, pois a superfície esférica, de raio d , toca a frente de onda na posição primeira para este instante (vide 2.5.8).

2.4 Ondas Superficiais

Quando o meio elástico linear é limitado podem aparecer ondas de outro tipo, que se propagam na superfície limítrofe e tem pequena penetração no meio, sendo chamadas "Ondas Superficiais". Lord Rayleigh estudou estas ondas para uma superfície limítrofe

plana e obteve resultados que se aplicam em terremotos e em suas superfícies de líquidos.

Vamos supor o plano limítrofe coincidente com o par $(x; y)$ e o eixo z voltado para o interior do meio. Seja ainda a onda plana se deslocando na direção do eixo x e $v = 0$, o que explica fenômenos que se passam longe da região perturbadora do meio. Os deslocamentos não dependem de y e podemos definir as novas funções potenciais ψ e ψ^* tais que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial z}$$

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x}$$

Daí

$$\epsilon_v = \nabla^2 \psi$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \nabla^2 \psi^*$$

ficando separados os efeitos de dilatação, relacionados com ψ , dos efeitos de rotação, ligados a ψ^* . As equações do movimento

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

ficam

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + G \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi^*$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi - G \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^*$$

e são satisfeitas para

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \psi = \omega_1^2 \nabla^2 \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \psi^* = \omega_2^2 \nabla^2 \psi^*$$

cuja solução é

$$\psi = F(z) e^{i(at-bx)}$$

$$\psi^* = H(z) e^{i(at-bx)}$$

que, com as condições de serem nulas as tensões no plano limítrofe, fornece

$$u = bc \left[e^{-dz} - \frac{2df}{f^2 + b^2} e^{-fz} \right] \text{sen}(at - bx)$$

$$w = cd \left[e^{-dz} - \frac{2b^2}{f^2 + b^2} e^{-fz} \right] \text{cos}(at - bx)$$

A velocidade de propagação desta onda

$$\omega_3 = \frac{a}{b}$$

depende do coeficiente de Poisson ν do material, sendo um pouco inferior à velocidade das ondas equivolúmetricas (vide 2.5.9).

ν	ω_3
0,25	0,9194 ω_2
0,29	0,9258 ω_2
0,50	0,9554 ω_2

Medições feitas durante terremotos indicam que a primeira onda a aparecer é a de dilatação, cuja velocidade é a maior; a seguir vem a onda equivolúmetrica e no fim a onda superficial, cujos efeitos são mais danosos.

No diagrama abaixo mostramos as amplitudes dos deslocamentos horizontal e vertical da onda superficial de Rayleigh para o aço, onde Λ é o comprimento da onda e w_0 a amplitude do deslocamento vertical no plano limítrofe.

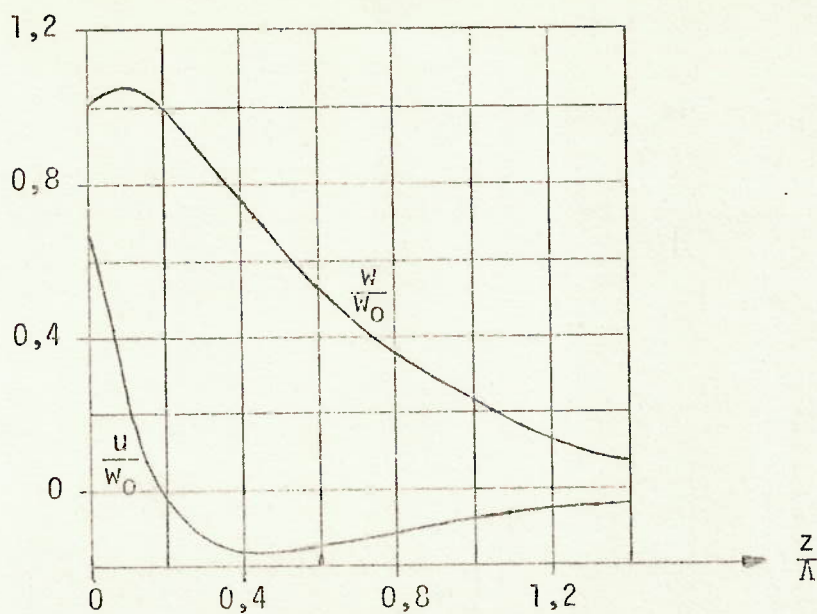


Figura 2-07

Notar que o máximo deslocamento horizontal ocorre na superfície e que existe um plano pouco profundo em que ele é nulo; para maiores profundidades o deslocamento é negativo e tendendo para zero. Já os deslocamentos verticais têm inicialmente maiores amplitudes, cujo máximo ocorre a pequena profundidade e decrescem rapidamente.

Num terremoto, estes deslocamentos verticais deveriam ser os mais temidos, embora na prática não o sejam, existindo casos em que não ocorrem. Love explicou esta incongruência com variações nas características do material e mostrou a existência de ondas que não penetram no material, se propagando na camada superficial do meio.

2.5 Críticas e Comentários

Neste capítulo apresentamos inicialmente a conceituação precisa de onda em um meio contínuo, a qual foi difícil de ser encontrada pois nos parece que os autores atuais julgam ser a mesma mais simples do que realmente o é. Definimos, da mesma forma, também frente de onda e as velocidades de propagação, atual de propagação e de deslocamento da onda.

Quando obtivemos a expressão da velocidade de propagação, poderíamos também ter chegado a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma = - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

sendo o primeiro membro da igualdade a derivada da superfície, que inicialmente representa a frente de onda, em relação à direção normal a ela, em cada ponto.

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

No caso particular de uma onda plana $u(x; t)$, de ordem um, que começa a se propagar num meio inicialmente em repouso, a frente de onda é representada por:

$$u(x; t) = 0$$

e resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ou seja, a velocidade que o ponto da frente de onda adquire é ω vezes a sua deformação, com seus sentidos trocados.

A seguir, desde que os deslocamentos e as deformações sejam pequenos e a lei de Hooke válida, provamos de maneira inquestionável a existência de somente dois tipos de onda que podem se propagar num meio contínuo infinito isotrópico. Seria também possível provar tal fato quando o material é visco-elástico, obedecendo as leis de Maxwell ou as de Kelvin-Voigt; não o fizemos por pretendermos nos restringir aos materiais elástico lineares isotrópicos.

Para completar o capítulo, passamos rapidamente pelas ondas superficiais de Rayleigh, por acharmos o assunto sem maior importância para este trabalho específico, a não ser a de saber da sua existência e da sua aplicação, e também a de mostrar que, quando existe uma superfície limítrofe num meio contínuo, fica invalidada a dualidade de ondas provada para tal meio. Voltando às ondas superficiais, não conhecemos qualquer prova da unicidade da onda de Rayleigh em um material homogêneo; talvez seja este um indício da dificuldade real, de estudar a propagação de ondas em meios limitados sem o uso de simplificações.

- 2.5.1 Esta superfície depende do tempo porque, a cada instante, novos pontos pertencem à frente de onda ψ .
- 2.5.2 O procedimento usado, comum entre engenheiros, fornece resultados exatos, embora pareça que foram feitas simplificações durante o desenvolvimento. Os matemáticos chamam este procedimento de heurístico, cuja vantagem é a rapidez de obtenção dos mesmos resultados que seriam encontrados, de uma maneira mais trabalhosa, utilizando uma conceituação matematicamente mais perfeita.
- 2.5.3 A inexistência de onda, ou seja, da superfície de descontinuidade, ocorre na vibração livre em regime permanente, ou então para perturbações especiais.

- 2.5.4 Para chegar à equação anterior desta onda, basta derivar a primeira expressão em relação a x , a segunda em relação a y , e a terceira em relação a z , e somar.
- 2.5.5 Para obter as equações anteriores deste tipo de onda, basta derivar a primeira expressão em relação a y e a segunda em relação a x , e subtrair. As outras duas combinações fornecem as outras duas equações iniciais.
- 2.5.6 As equações obtidas regem as ondas e os movimentos em que não existe onda para um tal meio. Apesar de só utilizarmos a palavra onda, convém termos presente a possibilidade de existir um movimento sem descontinuidade.
- 2.5.7 Podemos também imaginar que cada ponto do meio seja uma fonte de perturbações, e o movimento final é o resultante destas infinitas perturbações. Este é o princípio de Huygens.
- 2.5.8 No início do movimento de um meio, a frente de onda sempre apresenta deslocamento nulo, porque ele é contínuo em todo o meio.
- Notar que h é velocidade de propagação porque H é um deslocamento.
- 2.5.9 A velocidade de propagação desta onda não é ω_1 ou ω_2 porque nas equações

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \omega_1^2 \nabla^2 \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \omega_2^2 \nabla^2 \psi^*$$

as funções potenciais ψ e ψ^* não são deslocamentos.

3. ONDAS LONGITUDINAIS EM BARRAS ELÁSTICAS

3.1 Ondas Planas em Barras Prismáticas

3.1.1 Uma onda que percorre uma barra

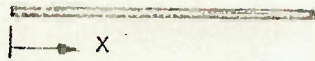


Figura 3-01

de modo que

$$v = w = 0$$

tem

$$u = u(x, t)$$

e é plana e irrotacional, porque

$$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

e, das equações do movimento de um meio elástico linear

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon_w}{\partial z} + G \nabla^2 w$$

podemos concluir que

$$u = u(x, t)$$

resultando também, como equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

e como velocidade de propagação

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

Esta onda não provoca tensões de cisalhamento, mas existem as tensões normais

$$\sigma_x = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

sendo que as últimas evitam os deslocamentos transversais.

3.1.2 Uma outra possibilidade de existência de onda é obtida quando

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

ou seja,

$$\sigma_y = \lambda \epsilon_v + 2G \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\sigma_z = \lambda \epsilon_v + 2G \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \frac{\partial u}{\partial x}$$

pois

$$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Usando como hipótese adicional

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

obtemos a equação do movimento na direção longitudinal

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cuja velocidade de propagação vale

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Para que esta última hipótese seja verificada, é preciso que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\lambda}{\lambda + G} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ou seja,

$$u = u(x, y, z, t)$$

e a onda não deve ser plana. Com algumas limitações, que estímaremos no item 3.3, iremos considerar esta onda como sendo plana, para as dimensões transversais da barra.

3.1.3 Se, juntamente com

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

impusermos que

$$u = u(x, t)$$

resulta

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \frac{\lambda G}{\lambda + G} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

e a equação da onda longitudinal fica

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\lambda^2}{\lambda + G} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\lambda G}{\lambda + G} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pois

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A onda será plana se

$$v = - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \frac{\partial u}{\partial x} y + g(z)$$

$$w = - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \frac{\partial u}{\partial x} z + g'(y)$$

existindo tensões de cisalhamento e rotações.

3.1.4 Quando o coeficiente de Poisson for nulo

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = 0$$

todos os casos anteriores fornecem

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

valendo

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

3.1.5 Vamos utilizar como equação da onda

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

admitindo que

$$u = u(x, t)$$

e

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

isto é, a onda longitudinal é plana e as tensões normais são constantes na seção transversal. Esta é uma simplificação que apresenta bons resultados para barras, dentro de limites que estimaremos no item 3.3, fornece a equação diferencial da onda numa forma simples para aplicações e pode ser deduzida a partir de idéias elementares.

Para chegar a esta equação de onda, basta examinar um elemento de barra, imaginando que as seções transversais, de área S , inicialmente planas, permaneçam planas, e que a tensão normal seja constante na seção transversal (vide 3.7.1)

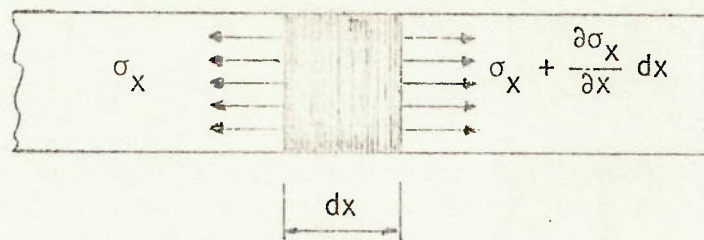


Figura 3-02

Assim

$$S\sigma_x + \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta equação diferencial da onda pode ser resolvida de duas maneiras:

1º - A solução de d'Alembert é

$$u = F(\omega t - x) + G(\omega t + x)$$

sendo F e G funções arbitrárias dos argumentos indicados, o que nos mostra a possibilidade de existirem duas ondas, que se propagam em sentidos opostos, com a mesma velocidade de propagação ω , pois o valor de F é o mesmo para $(\omega t_0 - x_0)$ e para $\omega(t_0 + \Delta t) - (x_0 + \omega \Delta t)$, e o de G se repete para $(\omega t_0 + x)$ e para $\omega(t_0 + \Delta t) + (x_0 - \omega \Delta t)$.

Esta solução é cômoda no estudo da onda a partir do início do processo de perturbação da barra.

2º - A separação de variáveis

$$u = XT$$

com X função sô de x e T sô de t, fornece

$$\frac{T''}{T} = \omega^2 \frac{X''}{X} = k$$

sendo k uma constante. Este tratamento é indicado para examinar a barra quando a causa da perturbação cessou há muito.

3.2 Exemplos

3.2.1 Seja uma barra prismática em repouso, engastada na sua extremidade $x = \ell$ e recebendo, a partir do tempo zero, uma força constante na extremidade $x = 0$.

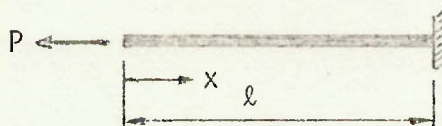


Figura 3-03

$$u = F(\omega t - x) + G(\omega t + x)$$

Como $u = 0$ para $x = \ell$ obtemos

$$F(\omega t - \ell) = -G(\omega t + \ell)$$

ou

$$G(\zeta) = -F(\zeta - 2\ell)$$

Assim (vide 3.7.2)

$$u = F(\omega t - x) - F(\omega t + x - 2\ell)$$

ou seja, a solução do problema é a superposição de uma onda que se desloca no sentido positivo $F(\omega t - x)$ com a mesma onda (refletida) se deslocando no sentido negativo $F(\omega t + x - 2\ell)$.

Nos instantes iniciais $0 \leq t < \frac{\ell}{\omega}$ não existe a onda refletida e temos

$$u = F_0(\omega t - x)$$

Para $x = 0$ e $t \geq 0$ deve ser

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} = P$$

$$-F_0'(\zeta) = \frac{P}{ES}$$

$$F_0(\zeta) = -\frac{P}{ES} \zeta + K_0$$

Portanto

$$u = - \frac{P}{ES} (\omega t - x) + K_0$$

e $K_0 = 0$ pois $u = 0$ para $x = t = 0$ (vide 3.7.3).

Assim

$$u = - \frac{P}{ES} (\omega t - x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{ES}$$

e no instante $0 < t < \frac{\ell}{\omega}$ a barra se encontra no estado representado pela seguinte figura:



Figura 3-04

Para $\frac{\ell}{\omega} \leq t < \frac{2\ell}{\omega}$ ocorre reflexão no engastamento e obtemos

$$u = - \frac{P}{ES} (\omega t - x) + \frac{P}{ES} (\omega t + x - 2\ell)$$

onde o segundo termo é nulo se $\omega t + x - 2\ell < 0$. Nestes instantes, os deslocamentos na barra são resultantes da onda inicial

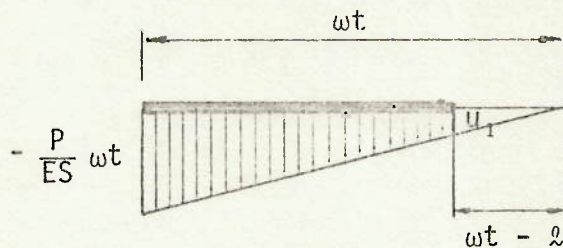


Figura 3-05

e da onda refletida

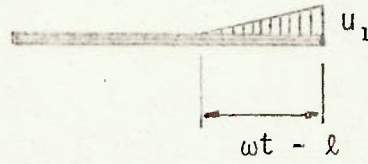


Figura 3-06

ou seja:

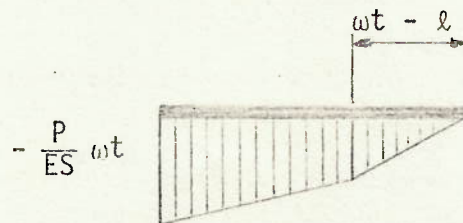


Figura 3-07

O mesmo raciocínio é aplicável às deformações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{ES} + \frac{P}{ES}$$

ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{ES} \quad \text{para} \quad \omega t + x - 2\ell < 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2P}{ES} \quad \text{para} \quad \omega t + x - 2\ell \geq 0$$

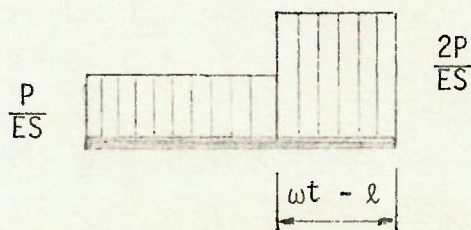


Figura 3-08

Nos instantes $\frac{2\ell}{\omega} \leq t < \frac{4\ell}{\omega}$, para $x = 0$, gera-se uma nova onda $F_1(\omega t - x)$, que, juntamente com a onda refletida, fornece

$$u = F_1(\omega t - x) + \frac{P}{ES} (\omega t + x - 2\ell)$$

e como em $x = 0$ deve ser $ES \frac{\partial u}{\partial x} = P$, obtemos

$$-F_1'(\zeta) + \frac{P}{ES} = \frac{P}{ES}$$

ou

$$F_1(\zeta) = K_1$$

Como o deslocamento na extremidade em que age a força deve ser contínuo, resulta

$$K_1 = -2\ell \frac{P}{ES}$$

e então

$$u = -2\ell \frac{P}{ES} + \frac{P}{ES} (\omega t + x - 2\ell)$$

No instante $\frac{2\ell}{\omega} \leq t < \frac{3\ell}{\omega}$ os deslocamentos e deformações na barra são

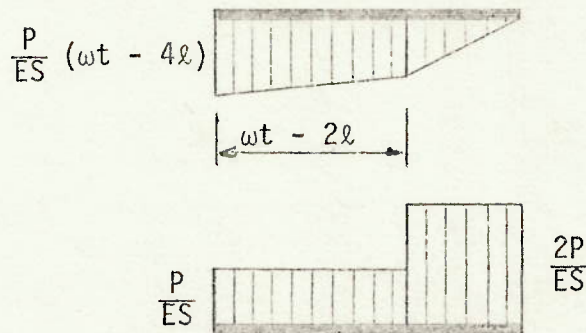


Figura 3-09

em que as partes esquerdas são regidas pelas novas equações

$$u = -2\ell \frac{P}{ES} + \frac{P}{ES} (\omega t + x - 2\ell)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{ES}$$

e as partes direitas ainda pelas anteriores.

No instante $t = \frac{3\ell}{\omega}$ a barra se encontra como se tivesse recebido a carga muito lentamente (carga estática)

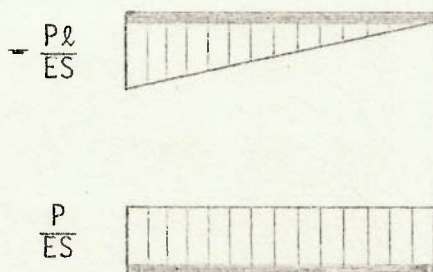


Figura 3-10

devendo ser este também o seu estado no final do processo ora examinado.

Para os instantes $\frac{3\ell}{\omega} \leq t < \frac{4\ell}{\omega}$ a onda refletida é de deslocamentos constantes,

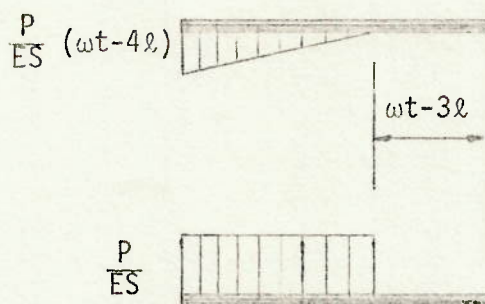


Figura 3-11

Quando $t = \frac{4\ell}{\omega}$ a barra se encontra sem quaisquer deslocamentos ou deformações, iniciando-se um novo ciclo igual ao estudado, onde observamos que o máximo deslocamento ocorre para $x = 0$ e $t = \frac{2\ell}{\omega}$, valendo $-2 \frac{P\ell}{ES}$, e a máxima deformação é $2 \frac{P}{ES}$ ocorrendo nos instantes $\frac{2\ell}{\omega} \leq t < \frac{3\ell}{\omega}$.

O tratamento do problema aqui feito não conduz ao já indicado estado final, esperado após um longo tempo, porque não consideramos o atrito interno do material.

- 3.2.2 Vamos examinar as tensões que agem numa barra prismática, fixa numa extremidade e começando a receber uma carga senoidal na outra.

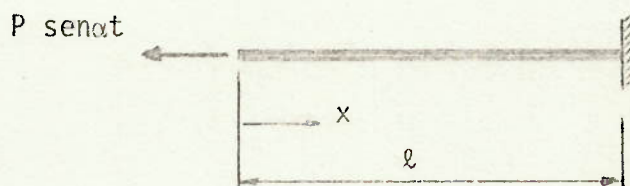


Figura 3-12

Como já vimos, a solução do problema com a extremidade fixa em $x = l$ é

$$u = F(\omega t - x) - F(\omega t + x - 2l)$$

valendo $F(\zeta) = 0$ para $\zeta \leq 0$ pois a viga estava em repouso.

Na extremidade $x = 0$ temos

$$P \text{ sen } \alpha t = ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$P \text{ sen } \alpha t = -ES F'(\zeta) - ES F'(\zeta - 2l)$$

e a onda gerada na barra é obtida através de

$$F(\zeta) = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \cos \frac{\alpha}{\omega} \zeta - F(\zeta - 2l) + K$$

causando $F(\zeta - 2l)$ a onda refletida no engastamento.

Para os instantes $0 \leq t < \frac{l}{\omega}$ só existe a onda gerada, que é de segunda ordem, e

$$u = F_0(\omega t - x) = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) + K_0$$

como para $x = t = 0$ temos $u = 0$ resulta $K_0 = -\frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha}$ e (vide 3.7.4)

$$u = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - 1 \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{S} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x)$$

A máxima tensão normal que age na barra é obtida da última expressão, resultando

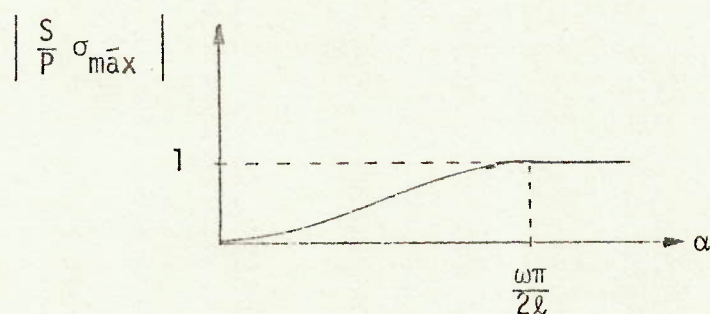


Figura 3-13

Quando $\frac{\ell}{\omega} \leq t < \frac{2\ell}{\omega}$ existe a onda refletida em parte da barra e

$$u = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{S} \left[\operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) \right]$$

sendo nulas as últimas parcelas para $\omega t + x - 2\ell < 0$

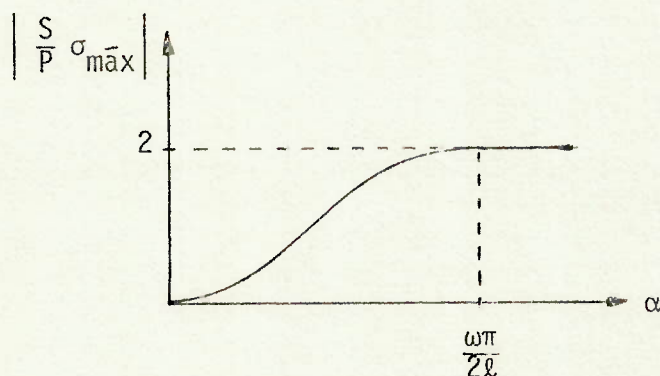


Figura 3-14

Para $\frac{2\ell}{\omega} \leq t < \frac{4\ell}{\omega}$ aparece

$$u = F_1(\omega t - x) - F_0(\omega t + x - 2\ell)$$

sendo a nova onda gerada F_1 , obtida com

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} = P \operatorname{sen} \alpha t$$

para $x = 0$. Assim

$$F_1(\zeta) = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \cos \frac{\alpha}{\omega} \zeta - F_0(\zeta - 2\ell) + K_1$$

e

$$u = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x - 2\ell) + 1 \right] + \\ + K_1 - \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) - 1 \right]$$

sendo $K_1 = -\frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha}$ obtido da continuidade dos deslocamentos na seção $x = 0$ no instante $\omega t = 2\ell$. Daí

$$u = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x - 2\ell) - \right. \\ \left. - \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) + 1 \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{S} \left[\operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x - 2\ell) + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) \right]$$

Estas expressões são válidas nos instantes $\frac{2\ell}{\omega} \leq t < \frac{3\ell}{\omega}$ para $x \leq \omega t - 2\ell$; nas outras seções, as equações anteriores continuam válidas. Para $\frac{3\ell}{\omega} \leq t < \frac{4\ell}{\omega}$ as atuais expressões aplicam-se quando $x < 4\ell - \omega t$; caso contrário devemos considerar a nova onda refletida, resultando

$$u = \frac{P}{ES} \frac{\omega}{\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x - 2\ell) - \right. \\ \left. - \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) + \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 4\ell) \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{S} \left(\sin \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x) - \sin \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - x - 2\ell) + \right. \\ \left. + \sin \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 2\ell) - \sin \frac{\alpha}{\omega} (\omega t + x - 4\ell) \right)$$

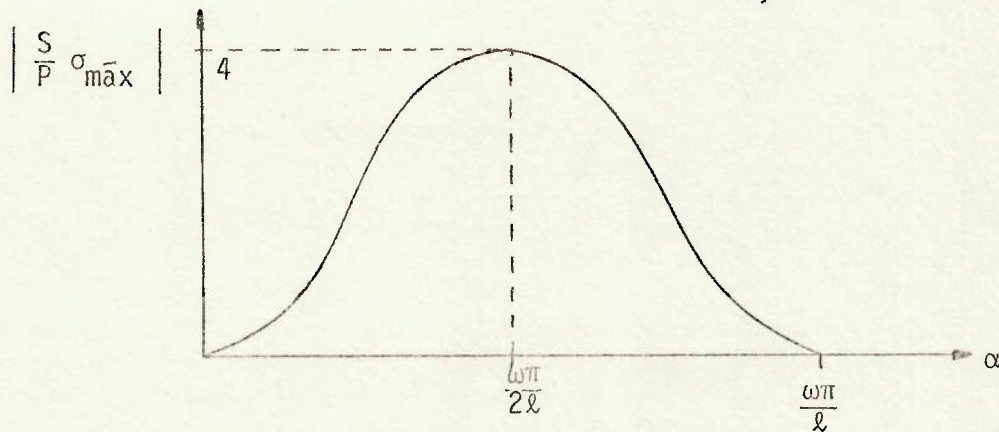


Figura 3-15

A última expressão da tensão pode ser escrita como

$$\sigma = 4 \frac{P}{S} \cos \frac{\alpha}{\omega} (\omega t - 2\ell) \cos \frac{\alpha}{\omega} (x - \ell) \sin \frac{\alpha}{\omega} \ell$$

que nos mostra ser a seção fixa a mais solicitada e a máxima tensão aparecendo para $\frac{2\ell\alpha}{\omega} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Quando $\frac{\ell\alpha}{\omega} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ resulta a nulidade da tensão com esta nova reflexão da onda. Nos intervalos de tempo seguintes obtemos sucessivos acréscimos da tensão máxima, o que nos mostra não ser verdade a usual consideração

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S}$$

exceto na seção $x = 0$; podemos ainda notar o gradativo aumento da máxima tensão para as frequências excitadoras de ressonância da barra, validando a comum afirmação que devemos passar rapidamente pelas frequências próprias durante o processo de obtenção do regime da carga permanente, a qual não deve ter frequência próxima da de ressonância do sistema.

3.2.3 Vamos obter as frequências próprias na vibração livre das barras prismáticas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A separação de variáveis nos fornece

$$\frac{T''}{T} = \omega^2 \frac{X''}{X} = k = -\eta^2$$

sendo η uma constante. Daí obtemos

$$T'' + \eta^2 T = 0$$

$$X'' + \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^2 X = 0$$

cujas soluções são:

$$T = A_1 \operatorname{sen} \eta t + A_2 \operatorname{cos} \eta t$$

$$X = B_1 \operatorname{sen} \frac{\eta}{\omega} x + B_2 \operatorname{cos} \frac{\eta}{\omega} x$$

As condições de contorno para uma barra livre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \text{ e } x = \ell$$

fornecem

$$-B_1 \frac{\eta}{\omega} 1 - B_2 \frac{\eta}{\omega} 0 = 0$$

$$B_1 \frac{\eta}{\omega} \operatorname{cos} \frac{\eta \ell}{\omega} - B_2 \frac{\eta}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\eta \ell}{\omega} = 0$$

que exigem ser

$$\operatorname{sen} \frac{\eta \ell}{\omega} = 0$$

Nestas condições as frequências próprias são

$$f = \frac{\eta}{2\pi} = 0, \frac{\omega}{2\ell}, \frac{\omega}{\ell}, \frac{3\omega}{2\ell}, \dots$$

correspondentes às soluções

$$\frac{\eta \ell}{\omega} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Para uma barra com as duas extremidades fixas, temos

$$u = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \ell$$

ou

$$B_1 \cdot 0 + B_2 \cdot 1 = 0$$

$$B_1 \operatorname{sen} \frac{\eta \ell}{\omega} + B_2 \operatorname{cos} \frac{\eta \ell}{\omega} = 0$$

e deve ser

$$\operatorname{sen} \frac{\eta \ell}{\omega} = 0$$

que fornece as mesmas frequências próprias obtidas no caso anterior, quando imaginamos que as duas extremidades da barra eram livres.

Examinando agora a barra com uma extremidade fixa e outra livre, ou seja

$$u = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{para} \quad x = \ell$$

fornecendo

$$B_1 \cdot 0 + B_2 \cdot 1 = 0$$

$$B_1 \frac{\eta}{\omega} \operatorname{cos} \frac{\eta \ell}{\omega} - B_2 \frac{\eta}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\eta \ell}{\omega} = 0$$

ou

$$\operatorname{cos} \frac{\eta \ell}{\omega} = 0$$

As frequências próprias são

$$f = \frac{\omega}{4\ell}, \frac{3\omega}{4\ell}, \frac{5\omega}{4\ell}, \dots$$

Ao separarmos as variáveis adotamos a constante k negativa para realizar o estudo feito; o valor positivo da constante nos fornece a solução em senos e cossenos hiperbólicos, ou seja, em exponenciais, que resolve o problema do choque, por exemplo; o \bar{v}

Por nulo da constante resolve o problema estático. Notar que não temos onda no caso aqui desenvolvido.

3.2.4 Como último exemplo, vamos examinar o caso da barra com uma extremidade fixa e com a outra sendo obrigada a se deslocar segundo uma lei senoidal



Figura 3-16

$$u = A \operatorname{sen} \alpha t \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{com} \quad A \quad \text{e} \quad \alpha \quad \text{constantes}$$

A separação de variáveis fornece

$$T = A_1 \operatorname{sen} \eta t + A_2 \operatorname{cos} \eta t$$

$$X = B_1 \operatorname{sen} \frac{\eta}{\omega} x + B_2 \operatorname{cos} \frac{\eta}{\omega} x$$

Na extremidade não fixa temos

$$u = B_2 T = A \operatorname{sen} \alpha t$$

e

$$T = \frac{A}{B_2} \operatorname{sen} \alpha t$$

Como

$$\frac{T''}{T} = -\alpha^2 = -\eta^2$$

obtemos

$$\eta = \pm \alpha$$

onde o sinal positivo é o que resolve o nosso problema. Para a extremidade fixa

$$B_1 \operatorname{sen} \frac{\eta l}{\omega} + B_2 \operatorname{cos} \frac{\eta l}{\omega} = 0$$

ou

$$\frac{B_2}{B_1} = -\operatorname{tg} \frac{\eta l}{\omega} = -\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{\omega}$$

Assim

$$u = \frac{A}{B_2} \operatorname{sen} \alpha t \left(- \frac{B_2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha \ell}{\omega}} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} x + B_2 \cos \frac{\alpha}{\omega} x \right)$$

ou

$$u = \frac{A}{\operatorname{sen} \frac{\alpha \ell}{\omega}} \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \frac{\alpha}{\omega} (\ell - x)$$

As tensões que agem na barra são obtidas de

$$\sigma = - \frac{\alpha}{\omega} \frac{AE}{\operatorname{sen} \frac{\alpha \ell}{\omega}} \operatorname{sen} \alpha t \cos \frac{\alpha}{\omega} (\ell - x)$$

e para $x = 0$

$$\sigma = - \frac{\alpha}{\omega} \frac{AE}{\operatorname{sen} \frac{\alpha \ell}{\omega}} \operatorname{sen} \alpha t \cos \frac{\alpha \ell}{\omega} = \frac{P}{S} \operatorname{sen} \alpha t$$

correspondendo à aplicação de uma carga senoidal. A máxima tensão que age na barra fica

$$\left| \frac{S}{P} \sigma_{\max} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\alpha}{\omega} (\ell - x)}{\cos \frac{\alpha \ell}{\omega}} \right| \text{ quando } \operatorname{sen} \alpha t = 1$$

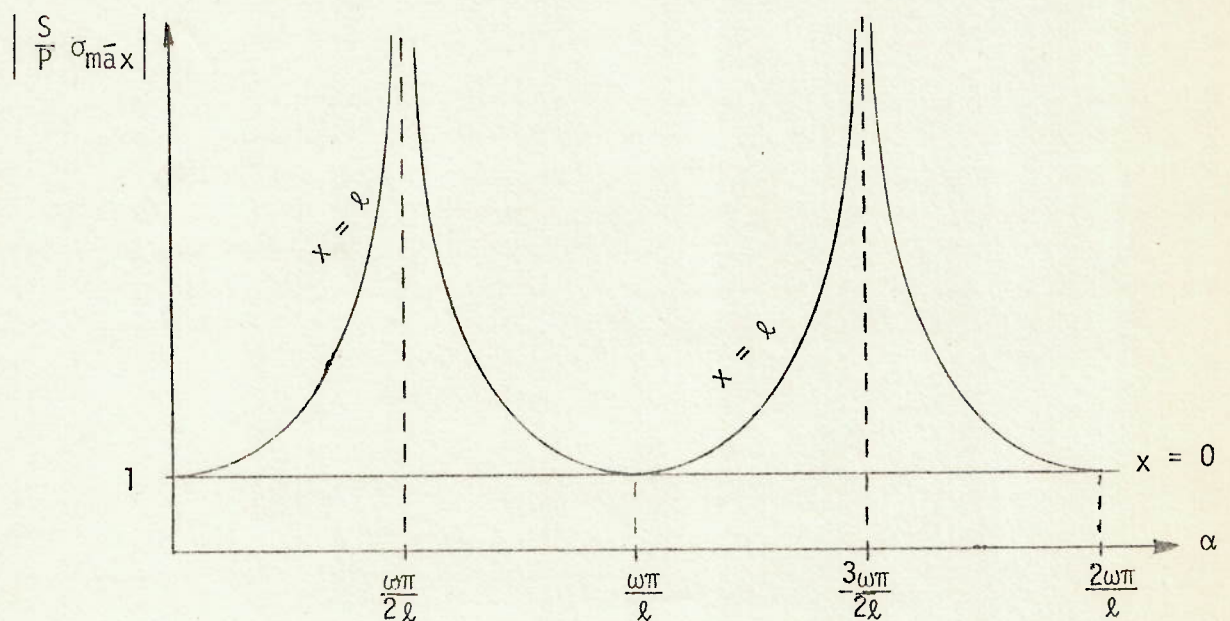


Figura 3-17

Podemos então reafirmar não ser verdade

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{S}$$

3.3 A Solução de Pochhammer e de Chree

Pochhammer em 1876 e, independentemente, Chree em 1899, obtiveram resultados exatos para as vibrações de uma barra cilíndrica infinita com o uso de coordenadas cilíndricas

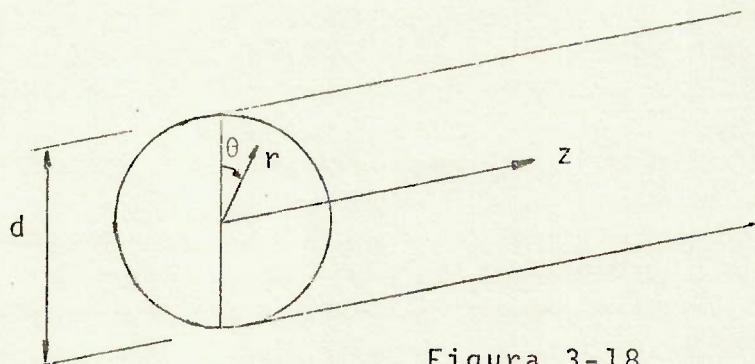


Figura 3-18

Chamando por u^* , v^* e w^* os correspondentes deslocamentos às coordenadas r , θ e z , as equações do movimento ficam

$$\rho \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \theta} - 2G \frac{\partial \Omega_r}{\partial z} + 2G \frac{\partial \Omega_z}{\partial r}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega_\theta) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta}$$

sendo a deformação volumétrica

$$\epsilon_v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^*) + \frac{1}{r} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial w^*}{\partial z}$$

e as rotações

$$2 \Omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} - \frac{\partial v^*}{\partial z}$$

$$2 \Omega_{\theta} = \frac{\partial u^*}{\partial z} - \frac{\partial w^*}{\partial r}$$

$$2 \Omega_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v^*) - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)$$

As tensões

$$\sigma_r = \lambda \epsilon_v + 2G \frac{\partial u^*}{\partial r}$$

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^*}{r} \right) \right)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial r} \right)$$

devem ser nulas para $2r = d$.

A solução encontrada é do tipo

$$u^* = UF$$

$$v^* = VF$$

$$w^* = WF$$

onde

$$F = e^{i\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z + 2\pi f t\right)}$$

com Λ sendo o comprimento da onda e f a sua frequência, e U , V e W são funções de r e θ . Para ondas longitudinais adotamos $v^* = 0$ e as funções U e W independentes de θ , ou seja, cada ponto vibra no seu plano rz , de um mesmo modo para iguais r ; as expressões encontradas para U e W envolvem funções de Bessel de ordens zero e um. Desenvolvendo estas funções em séries de potências, e considerando os termos até segundo grau, podemos obter

$$f \Lambda = \omega \left[1 - \pi^2 \left(\frac{vd}{2\Lambda} \right)^2 \right]$$

que nos mostra ser a velocidade de propagação da onda real $f \Lambda$ próxima de ω quando $\frac{vd}{2\Lambda}$ é pequeno.

Assim, podemos adotar que quando

$$\frac{2\Lambda}{\sqrt{d}} > 10$$

a velocidade de propagação é praticamente ω , No caso em que $v = 0$, existe a igualdade.

Vamos usar esta comparação entre velocidades de propagação como um indício de que a hipótese, de termos onda plana, deve ser boa quando for verificada a desigualdade acima indicada (vide 3.7.5).

Para barras não cilíndricas devemos adotar, a favor da segurança, a maior dimensão da seção transversal como sendo d .

Desde que seja

$$\omega \approx f \Lambda$$

a desigualdade citada fica

$$\frac{2\omega}{v} > 10 f d$$

e para aços temos

$$33 > f d$$

com f em hertz e d em metros. A aproximação deve ser boa para a maioria das aplicações usuais.

3.4 Ondas Planas em Barras Não Prismáticas

3.4.1 O raciocínio que nos forneceu a aproximação usada, quando empregado em barras retas não prismáticas fornece

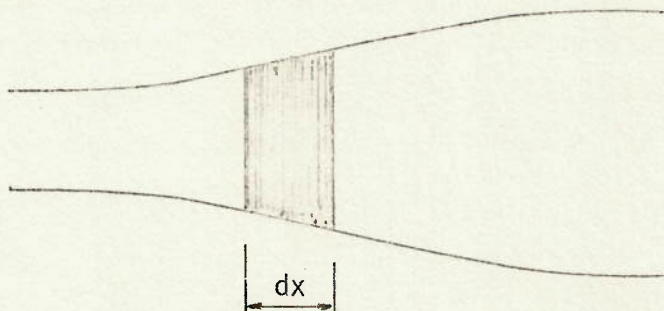


Figura 3-19

$$S \sigma_x + \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (S + dS) \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right)$$

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E \frac{dS}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Usando a separação de variáveis encontramos

$$u = XT$$

$$XT'' = \omega^2 X'' T + \omega^2 \frac{S'}{S} X' T$$

$$\frac{T''}{T} = \omega^2 \frac{X''}{X} + \omega^2 \frac{S'}{S} \frac{X'}{X} = k$$

$$T'' - k T = 0$$

$$T = A_1 e^{\sqrt{k} t} + A_2 e^{-\sqrt{k} t}$$

$$X'' + \frac{S'}{S} X' - \frac{k}{\omega^2} X = 0$$

Esta última equação diferencial linear homogênea de segunda ordem e coeficientes variáveis pode ser transformada na equação de Riccati (vide 3.7.6)

$$y' + \frac{S'}{S} y + y^2 = \frac{k}{\omega^2}$$

através da mudança

$$y = \frac{X'}{X}$$

A solução da equação de Riccati depende de uma solução particular, dificilmente encontrada, o que nos mostra ser bastante complexo o tratamento ora indicado. Podemos resolver alguns casos assumindo uma solução e constatando a lei de seções transversais resultante.

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{k}{\omega^2} X - X''}{X'}$$

Isto corresponde a obter uma solução particular da equação de Riccati, e devemos encontrar a sua solução geral para então chegar à solução do problema. Este procedimento é trabalhoso e pode resultar na solução de um problema sem aplicação prática.

3.4.2 Um caso simples que podemos estudar é o da barra cujas áreas das seções transversais são regidas por

$$S = S_0 e^{ax}$$

resultando nas equações diferenciais de coeficientes constantes

$$T'' - k T = 0$$

$$X'' + aX' - \frac{k}{\omega^2} X = 0$$

A solução depende do discriminante da equação do segundo grau

$$r^2 + a r - \frac{k}{\omega^2} = 0$$

cujas raízes são

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2}}$$

$$r_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2}}$$

Assim, se $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2} > 0$ e $k > 0$ temos

$$T = A_1 e^{\sqrt{k} t} + A_2 e^{-\sqrt{k} t}$$

$$X = B_1 e^{r_1 x} + B_2 e^{r_2 x}$$

se $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2} > 0$ e $k = 0$, temos

$$T = A_1 t + A_2$$

$$X = B_1 e^{r_1 x} + B_2 e^{r_2 x}$$

se $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2} > 0$ e $-\eta^2 = k < 0$, temos

$$T = A_1 \operatorname{sen} \eta t + A_2 \operatorname{cos} \eta t$$

$$X = B_1 e^{r_1 x} + B_2 e^{r_2 x}$$

se $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2} = 0$ temos

$$T = A_1 \operatorname{sen} \eta t + A_2 \operatorname{cos} \eta t$$

$$X = (B_1 x + B_2) e^{-\frac{a}{2} x}$$

e se $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k}{\omega^2} < 0$, temos

$$T = A_1 \operatorname{sen} \eta t + A_2 \operatorname{cos} \eta t$$

$$X = \left[B_1 \operatorname{sen} \gamma x + B_2 \operatorname{cos} \gamma x \right] e^{-\frac{a}{2} x}$$

com $\gamma = \sqrt{-\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{k}{\omega^2}}$

Através desta última alternativa, podemos descobrir as vibrações próprias da barra, por exemplo de extremidades livres

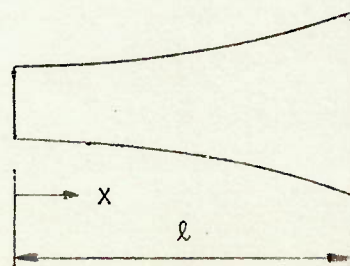


Figura 3-20

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T \left(B_1 \gamma \cos \gamma x - B_2 \gamma \sin \gamma x \right) e^{-\frac{a}{2} x} -$$

$$- T \frac{a}{2} \left(B_1 \sin \gamma x + B_2 \cos \gamma x \right) e^{-\frac{a}{2} x}$$

Das condições de contorno obtemos

$$B_1 \gamma - \frac{a}{2} B_2 = 0$$

$$B_1 \gamma \cos \gamma \ell - B_2 \gamma \sin \gamma \ell - \frac{a}{2} B_1 \sin \gamma \ell - \frac{a}{2} B_2 \cos \gamma \ell = 0$$

e então $\sin \gamma \ell = 0$, ou seja, as frequências naturais são

$$f = \frac{\eta}{2\pi} \quad \text{com} \quad \eta = \omega \sqrt{\gamma^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad e$$

$$\gamma = \frac{\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{3\pi}{\ell}, \dots$$

e existe a dependência da frequência natural com a geometria da barra. A velocidade de propagação da onda também tem esta dependência, pois podemos escrever

$$T = A \sin(\eta t + \Phi)$$

$$X = B e^{-\frac{a}{2} x} \sin(\gamma x + \Omega)$$

e ainda

$$u = \frac{AB}{2} e^{-\frac{a}{2} x} \left(\cos(\eta t - \gamma x + \Phi - \Omega) - \cos(\eta t + \gamma x + \Phi + \Omega) \right)$$

sendo A , B , Φ e Ω constantes; a citada velocidade vale

$$\omega^* = \frac{\eta}{\gamma} = \omega \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2\gamma}\right)^2}$$

variando também com a frequência da onda que se propaga.

3.4.3 Alguns outros tipos de barras podem ser estudados quando adotamos

$$u = y \left(F(\omega t - x) + G(\omega t + x) \right)$$

sendo y uma função só de x , e F e G funções quaisquer dos argumentos indicados. Dentro desta idéia, a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{S'}{S} \frac{\partial u}{\partial x}$$

fornece, com

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 y \left(F'' + G'' \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \left(-F' + G' \right) + y' \left(F + G \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y \left(F'' + G'' \right) + 2y' \left(-F' + G' \right) + y'' \left(F + G \right)$$

$$2\omega^2 y' \left(-F' + G' \right) + \omega^2 y'' \left(F + G \right) + \omega^2 \frac{S'}{S} y \left(-F' + G' \right) + \omega^2 \frac{S'}{S} y' \left(F + G \right) = 0$$

A lei de áreas da seção transversal é obtida de

$$2y' + \frac{S'}{S} y = 0$$

$$y'' + \frac{S'}{S} y = 0$$

que devem ter a mesma solução

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{S}} = \int \frac{C_2}{S} dx + C_3$$

e portanto

$$S = (ax + b)^2$$

$$y = \frac{C}{ax + b}$$

Para uma barra em tronco de cone reto, temos

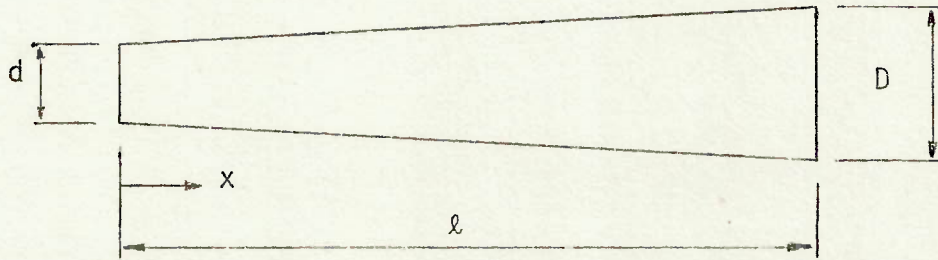


Figura 3-21

$$S = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D-d}{l} x + d \right)^2$$

$$y = \frac{C}{\frac{D-d}{l} x + d}$$

$$u = \frac{C}{\frac{D-d}{l} x + d} \left(F(\omega t - x) + G(\omega t + x) \right)$$

e se a extremidade $x = l$ for fixa, resulta

$$u = \frac{C}{\frac{D-d}{l} x + d} \left(F(\omega t - x) - F(\omega t + x - 2l) \right)$$

Vamos então usar, sendo α uma constante

$$F(\zeta) = A_1 \operatorname{sen} \alpha \zeta + B_1 \operatorname{cos} \alpha \zeta$$

para obter as frequências próprias da barra. Assim

$$u = \frac{C}{\frac{D-d}{l} x + d} \left(A \operatorname{cos} \alpha (\omega t - l) + B \operatorname{sen} \alpha (\omega t - l) \right) \operatorname{sen} \alpha (x - l)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(A \cos \alpha(\omega t - \ell) + B \operatorname{sen} \alpha(\omega t - \ell) \right) \left(\frac{\alpha C \cos \alpha \left(\frac{x - \ell}{\ell} x + d \right)}{\frac{D - d}{\ell} x + d} - \frac{D - d}{\ell} \frac{C \operatorname{sen} \alpha(x - \ell)}{\left(\frac{D - d}{\ell} x + d \right)^2} \right)$$

e estando livre a outra extremidade obtemos

$$\operatorname{tg} \alpha \ell = \alpha \ell \frac{d}{d - D}$$

cujas soluções

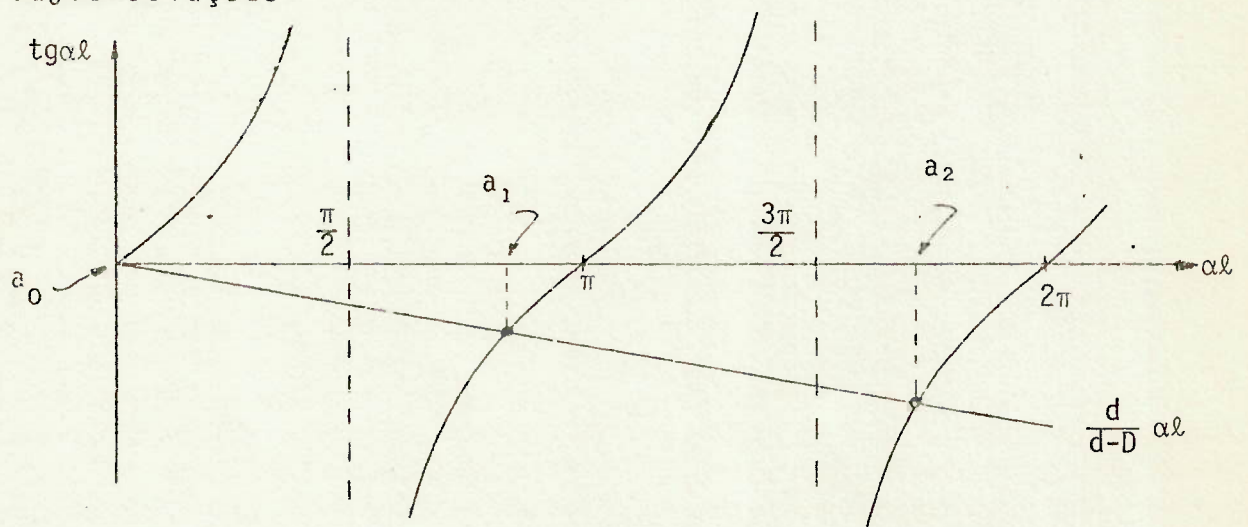


Figura 3-22

fornece as frequências procuradas

$$f = \frac{\alpha \omega}{2\pi} = \alpha \ell \frac{\omega}{2\pi \ell} = a_i \frac{\omega}{2\pi \ell} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

que novamente dependem da geometria da barra, embora a velocidade de propagação da onda plana seja a constante $\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Para a barra cônica não existe a dependência da frequência com a geometria e então

$$f = a_i \frac{\omega}{2\pi \ell} \quad \text{com} \quad a_i = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

3.5 Carga Instantânea em Barra Tronco-Cônica

Vamos examinar o efeito da aplicação instantânea de uma carga numa barra em tronco de cone reto, lembrando que em 3.2.1 estudamos este fato numa barra prismática

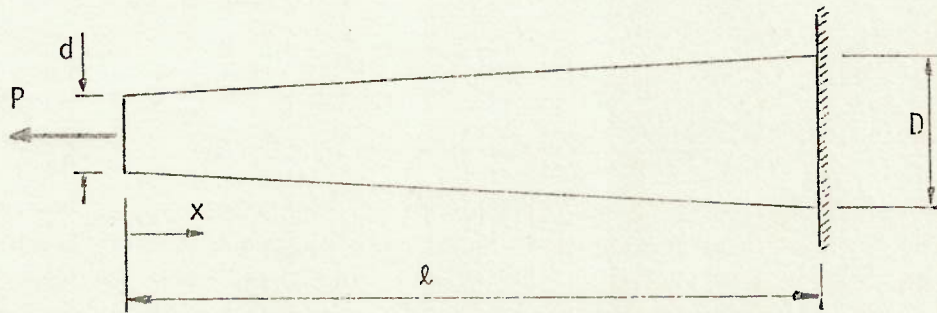


Figura 3-23

Já sabemos que os deslocamentos nesta barra são fornecidos por

$$u = \frac{C}{\frac{D-d}{l} x + d} \left[F(\omega t - x) + G(\omega t + x) \right]$$

e como o deslocamento é nulo no engastamento, concluímos que

$$G(\zeta) = -F(\zeta - 2\ell)$$

Enquanto $0 \leq t < \frac{\ell}{\omega}$, não existe a onda refletida, ou seja

$$G = 0$$

e podemos encontrar F_0 da condição

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{ES} \quad \text{para} \quad x = 0$$

Assim

$$\frac{P}{ES} = -C \frac{D-d}{\ell d^2} F_0(\zeta) - \frac{C}{d} F_0'(\zeta)$$

e resulta

$$F_0(\zeta) = K_0 e^{-\frac{D-d}{d\ell} \zeta} - \frac{P}{ES} \frac{d}{C} \frac{d\ell}{D-d}$$

de onde encontramos

$$u = \frac{C}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(K_0 e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t - x)} - \frac{P}{ES} \frac{d}{C} \frac{d\ell}{D-d} \right)$$

Como o deslocamento \bar{e} é nulo no instante inicial, resulta

$$K_0 = \frac{P}{ES} \frac{d}{C} \frac{d\ell}{D-d}$$

e

$$u = \frac{P}{ES} \frac{d\ell}{D-d} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t - x)} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{ES} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t - x)} - \frac{P}{ES} \left(\frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \right)^2 \cdot \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t - x)} - 1 \right)$$

Nestes instantes a barra apresenta deslocamentos

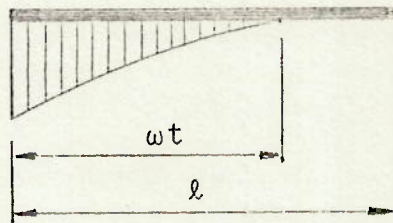


Figura 3-24

e deformações

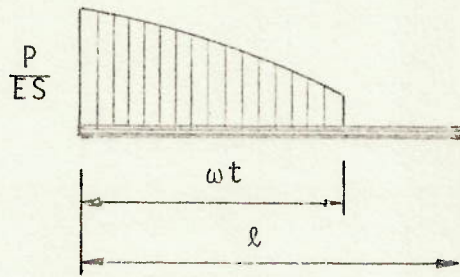


Figura 3-25

que não apresentam semelhança com os que ocorrem numa barra prismática (vide 3.7.7).

Nos instantes $\frac{2l}{\omega} > t \geq \frac{l}{\omega}$ as expressões anteriores continuam válidas para as seções que tem

$$x < 2l - \omega t$$

e nas outras seções da barra existe a onda refletida, resultando em

$$u = \frac{P}{ES} \frac{d\ell}{D-d} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t - x)} - e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{ES} \left(\frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \right)^2 \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t - x)} - e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right) + \frac{P}{ES} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t - x)} + e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

Nestes instantes, os deslocamentos e deformações na barra se apresentam

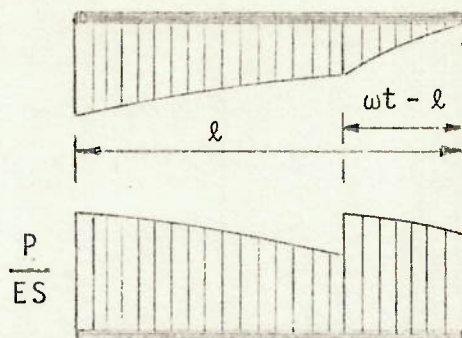


Figura 3-26

Nos instantes

$$\frac{2l}{\omega} \leq t < \frac{4l}{\omega}$$

gera-se uma nova onda na seção onde se aplica a carga, de modo que

$$u = \frac{C}{D-d} \frac{d}{x+d} F_1 - \frac{P}{ES} \frac{d\ell}{D-d} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x+d} \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t + x - 2\ell)} - 1 \right)$$

ou seja, a nova onda gerada e a refletida, verifique

$$\frac{P}{ES} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para} \quad x = 0$$

Obtemos assim

$$F_1 = K_1 e^{-\frac{D-d}{d\ell} \zeta} - \frac{2P}{ES} \frac{d}{C} \left(\frac{d\ell}{D-d} - \zeta e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\zeta - 2\ell)} \right)$$

e então

$$u = \frac{CK_1}{\frac{D-d}{\ell} x+d} e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t - x)} - \frac{2P}{ES} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x+d} \left(\frac{d\ell}{D-d} - (\omega t - x) e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t - x - 2\ell)} \right) + \frac{P}{ES} \frac{d\ell}{D-d} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x+d} \left(1 - e^{-\frac{D-d}{d\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

A continuidade do deslocamento na seção livre para o instante $\frac{2\ell}{\omega}$ nos permite escrever

$$\frac{P}{ES} \frac{d\ell}{D-d} \left(e^{-2 \frac{D-d}{d}} - 1 \right) = \frac{CK_1}{d} e^{-2 \frac{D-d}{d}} - \frac{2P}{ES} \left(\frac{d\ell}{D-d} - 2\ell \right)$$

e obtemos

$$K_1 = \frac{P}{ES} \frac{d}{C} \left(\frac{d\ell}{D-d} + \left(\frac{d\ell}{D-d} - 4\ell \right) e^{2 \frac{D-d}{d}} \right)$$

Daí

$$u = \frac{P}{ES} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(\frac{d\ell}{D-d} + \left(\frac{d\ell}{D-d} - 4\ell \right) e^{2 \frac{D-d}{d}} \right) e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t - x)} - \frac{2P}{ES} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(\frac{d\ell}{D-d} - (\omega t - x) e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t - x - 2\ell)} \right) - \frac{P}{ES} \frac{d\ell}{D-d} \frac{d}{\frac{D-d}{\ell} x + d} \left(e^{-\frac{D-d}{d\ell} (\omega t + x - 2\ell)} - 1 \right)$$

3.6 Onda Esférica em Barra Cônica

Para uma barra cônica podemos estudar ondas esféricas admitindo que a tensão normal seja constante em intensidade, direção e sentido, nos pontos de uma seção esférica com centro no vértice do cone, cujo ângulo deve ser pequeno, ou sendo o comprimento da onda grande em comparação com o maior diâmetro do cone na região estudada.

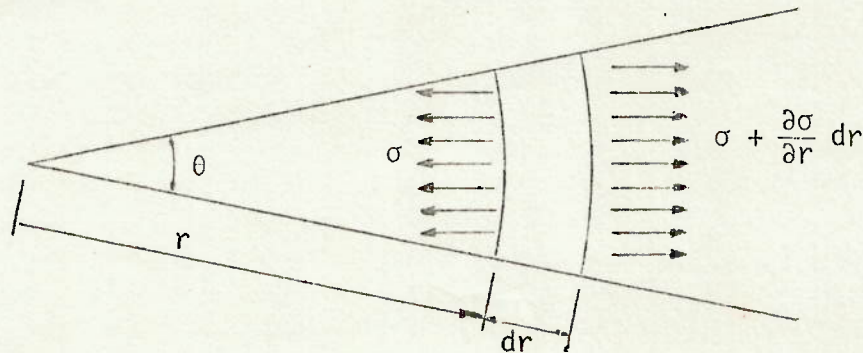


Figura 3-27

Assim

$$\sigma r^2 \theta + \rho r^2 \theta dr \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr \right) (r + dr)^2 \theta$$

e como $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial r}$ resulta

$$\frac{\partial^2 (ur)}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 (ur)}{\partial r^2}$$

cuja solução é

$$u = \frac{1}{r} \left[F(\omega t - r) + G(\omega t + r) \right]$$

sendo este caso muito semelhante ao anteriormente examinado. Se considerarmos a onda, a seguir definida, se propagando para o vértice do cone, aã chegando em $t = 0$ temos

$$u = \frac{A}{r} \left[e^{-B(r + \omega t)} - 1 \right] \quad \text{com } B > 0$$

e a tensão que age nas seções esféricas

$$\sigma = - \frac{ABE}{r} e^{-B(r + \omega t)} + \frac{AE}{r^2} \left[1 - e^{-B(r + \omega t)} \right]$$

nos mostra que a primeira perturbação corresponde a uma compressão e que nas seções onde r é muito maior que $|\omega t|$ resta a tensão de tração

$$\sigma = \frac{AE}{r^2}$$

Desta forma, à medida que a onda se propaga, existe uma região comprimida situada entre a frente de onda, localizada por

$$r_0 = - \omega t$$

e a seção definida por r , cujo comprimento é $(r - r_0)$; o restante já perturbado da barra está tracionado. Podemos precisar a região comprimida fazendo $\sigma = 0$, ou seja

$$B e^{-B(r + \omega t)} = \frac{1}{r} \left[1 - e^{-B(r + \omega t)} \right]$$

$$(1 + Br) e^{-B(r - r_0)} = 1$$

e obtemos

Br_0	8,0	4,0	2,0	1,0	0,5	0,25
$B(r - r_0)$	2,44	1,94	1,50	1,15	0,85	0,63

nos mostrando que a região comprimida diminui quanto mais próximo do vértice está a frente da onda. A barra fica toda tracionada quando a perturbação atinge o vértice do cone e a partir deste instante é preciso considerar a onda refletida. Estes fenômenos também são encontrados com a onda plana tratada em 3.4 para a barra cônica.

3.7 Críticas e Comentários

Neste capítulo examinamos ondas longitudinais que se propagam em barras, sem definir o que é uma onda longitudinal porque não encontramos tal definição. Observando os autores imaginamos a existência de três tipos de ondas que podem existir numa barra:

- 1º - ondas longitudinais, cujo principal efeito deve se assemelhar ao de uma força normal
- 2º - ondas "transversais", onde o efeito preponderante deve ser semelhante ao do momento fletor (conceito correspondente ao choque transversal)
- 3º - ondas torcionais, cujo efeito principal deve ser semelhante ao do momento de torção.

Não pretendemos que sejam estas as definições procuradas, mas fornecer uma idéia sobre tal classificação.

No item 3.1 mostramos algumas ondas longitudinais possíveis de existir numa barra, desde que certas condições estejam satisfeitas. Dentre elas destacamos a apresentada em 3.1.2, porque é a aproximação comum que aqui está apresentada de uma maneira mais clara que a usual (a mostrada em 3.1.5); podemos então observar que a onda não é plana, a tensão normal não é constante na seção transversal e podem, ou não, existir tensões de cisalhamento.

Quando usamos esta aproximação estamos errando ao imaginar a onda como sendo plana; a variação da tensão normal nos pontos de uma seção transversal decorre da onda não ser plana.

Achamos que talvez seja compensadora a pesquisa de uma solução exata com as hipóteses feitas nesta aproximação.

O campo de validade desta aproximação, estimado através da solução de Pochhammer e Chree, nos parece ser inseguro, já que esta única solução exata conhecida resolve as vibrações em uma barra cilíndrica infinita, inexistindo onda em tal solução. Não julgamos que a simples comparação entre velocidades de propagação nos permita avaliar, bem, a validade de uma aproximação; uma outra solução exata para uma barra finita, com uma onda nela se propagando, permitiria uma conclusão mais confiável sobre a aplicabilidade da aproximação usada.

Usando como único critério, para estimar esta aplicabilidade da aproximação, o de comparar velocidades de propagação, não entendemos porque a onda mostrada no item 3.1.3 não é citada na literatura, já que ela é plana e sua velocidade de propagação

$$\sqrt{\frac{2G}{\rho}}$$

pode se aproximar da obtida na solução exata $f\Lambda$, pois

$$f\Lambda = \sqrt{\frac{2G}{\rho}} \sqrt{1 + \nu} \left(1 - \pi^2 \left(\frac{\nu d}{2\Lambda} \right)^2 \right)$$

Aliás, existem pares de valores ν e $\frac{\nu d}{2\Lambda}$, dentre os quais

ν	$\frac{\nu d}{2\Lambda}$
0	0
0,1	0,0687
0,2	0,0940
0,3	0,1116
0,4	0,1253
0,5	0,1364

que fornecem a igualdade das velocidades de propagação.

Dependendo do coeficiente de Poisson, as duas aproximações aqui citadas fornecem velocidades de propagação mais, ou menos, próximas entre si.

v	$\sqrt{\frac{E}{2G}}$
0	1
0,1	1,0488
0,2	1,0954
0,3	1,1402
0,4	1,1832
0,5	1,2247

Neste capítulo fizemos diversas aplicações com a aproximação comum, usando os dois tipos de solução para a equação diferencial da onda longitudinal, de modo a obter familiaridade com a sua utilização.

A seguir abordamos um assunto de raras referências, que é a propagação de ondas longitudinais em barras não prismáticas. Acreditamos que existam dois problemas principais que fazem os autores esquecer deste tópico:

- 1º - a dificuldade matemática na solução da equação diferencial linear homogênea, de segunda ordem e coeficientes variáveis, ou da equação de Riccati, em que ela pode ser transformada
- 2º o desconhecimento de qualquer solução exata que possa fornecer indícios sobre a validade da utilização da aproximação neste caso.

No nosso trabalho mostramos alguns casos em que a solução é conhecida e indicamos a possibilidade de serem encontradas, com muita sorte, outras soluções que possam apresentar interesse prático.

A validade da aproximação pode ser obtida com o conhecimento de soluções numéricas para o equacionamento exato dos problemas estudados através desta aproximação. Não conhecemos qualquer resultado de solução numérica.

Encontramos na literatura a solução apresentada em 3.6 para a barra cônica, na qual se propaga a onda indicada, com tensões normais constantes, inclusive em direção, em superfícies esféricas com centro no vértice do cone. Não sabemos de qualquer justificativa que faça esta nova aproximação ser melhor que a obtida com a onda plana.

Finalizando, queremos lembrar que neste campo são muitas as perguntas e poucas as respostas, o que o faz propício à pesquisa, embora existam muitas dificuldades a vencer, que talvez o tenham deixado no atual estado.

3.7.1 Estas hipóteses traduzem a realidade quando o coeficiente de Poisson for nulo. Se tal não ocorrer, admitimos que a frente de onda é praticamente plana.

3.7.2 ζ está representando o argumento da função, seja ele $(\omega t - x)$ ou $(\omega t + x)$ ou (ωt)

3.7.3 Para $x = t = 0$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{P\omega}{ES} = - \omega \frac{\partial u}{\partial x}$$

como era esperado, já que esta é a frente de onda que inicia a perturbação do meio.

3.7.4 Para $x = t = 0$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

porque

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e esta é a frente de onda que começa a perturbação da barra.

3.7.5 Como não temos solução exata para outros casos que não este, a comparação possível de ser feita é entre velocidades de propagação.

3.7.6 A solução da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem e coeficiente variáveis depende do conhecimento de uma solução particular, dificilmente encontrada.

3.7.7 Não existe uma barra prismática de diâmetro equivalente, e também não existe um fator multiplicativo, função da seção (tal como a relação entre áreas das seções transversais da barra real e de uma prismática), que aplicada aos resultados do estudo da barra prismática forneça os resultados para o caso atual.

4. CHOQUE LONGITUDINAL EM BARRAS ELÁSTICAS

4.1 Introdução

O problema de explicar racionalmente o choque entre corpos sempre preocupou os estudiosos da Mecânica; Galileu já reconhecia a existência de trabalho envolvido no processo do impacto, mas foi Newton quem forneceu as leis que regem o fenômeno e a noção do coeficiente de restituição, bastante usado até os nossos dias.

O choque entre corpos deformáveis foi estudado por Bernoulli, Navier, Poisson, Young e Cox, dentre outros, mas foi Boussinesq quem apresentou a Saint-Venant a mais prática solução do choque longitudinal de um corpo indeformável numa barra elástica, que iremos examinar no próximo item; Saint-Venant resolveu o problema do choque transversal em barras utilizando uma série de Fourier.

Sears empregou a teoria do contato de Hertz para examinar o choque longitudinal em barras, e Timoshenko, com a mesma arma, estudou o impacto transversal nas barras; como veremos neste capítulo, esta teoria é de difícil manuseio e sua base não é muito firme.

O choque em materiais trabalhando na fase plástica também, foi tratado por vários estudiosos, dentre os quais Donnell, Karman, Duwez, Taylor, Lee, Symonds e Malvern; não examinaremos este assunto.

4.2 Choque Longitudinal em Barras Elásticas

4.2.1 Vamos examinar o que ocorre com uma barra prismática, de material elástico-linear, quando uma de suas seções transversais extremas recebe o impacto de um corpo considerado indeformável, de peso P e cuja velocidade é V_0 no instante do primeiro contato. O material da barra tem massa específica ρ , módulo de elasticidade E , e S é a área da seção transversal da barra de comprimento l . Inicialmente a barra está em repouso, com uma extremidade fixa, e o primeiro contacto ocorre no instante inicial. Vamos supor que as tensões normais sejam constantes nos pontos da seção agredida, variando somente com o tempo.

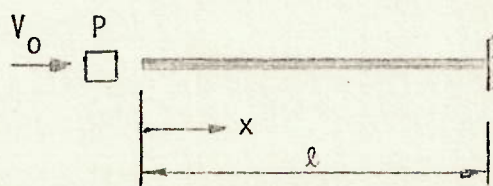


Figura 4-01

Como já vimos, a equação diferencial do movimento da barra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tem por solução

$$u = F(\omega t - x) + G(\omega t + x)$$

que, com a condição de ser

$$u = 0 \quad \text{para} \quad x = \ell$$

fica

$$u = F(\omega t - x) - F(\omega t + x - 2\ell)$$

com a última parcela representando a onda refletida no engastamento.

Na seção em que ocorre o contato entre barra e corpo agressor, vale

$$\frac{P}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para} \quad x = 0$$

enquanto durar o contato, que cessa com a nulidade de

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

e subsequente troca de sinal, se imaginarmos a persistência do contato.

A função $F(\zeta)$ resulta desta expressão da ação e reação entre corpo e barra. Assim, nos instantes $0 \leq \omega t < \ell$ não existe a onda refletida pelo engastamento e

$$\frac{P}{g} \omega^2 F_0''(\zeta) = -ES F_0'(\zeta)$$

representando ζ o argumento da função F_0 , a gerada nestes instantes iniciais.

A equação diferencial acima tem por solução

$$F_0 = K_0 \frac{P\omega^2}{ESg} e^{-\frac{ESg}{P\omega^2} \zeta} + k_0$$

ou, como $\frac{P\omega^2}{ESg} = \frac{P\ell}{Q}$,

$$F_0 = K_0 \frac{P\ell}{Q} e^{-\frac{Q}{P\ell} \zeta} + k_0$$

Daí

$$u = K_0 \frac{P\ell}{Q} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} + k_0$$

e as constantes resultam das condições iniciais

$$u = 0 \quad \text{para} \quad x = t = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \quad \text{para} \quad x = t = 0$$

ou seja

$$- K_0 \frac{P\ell}{Q} = k_0$$

$$- K_0 \omega = V_0$$

e então, nestes instantes iniciais

$$u = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left[1 - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)}$$

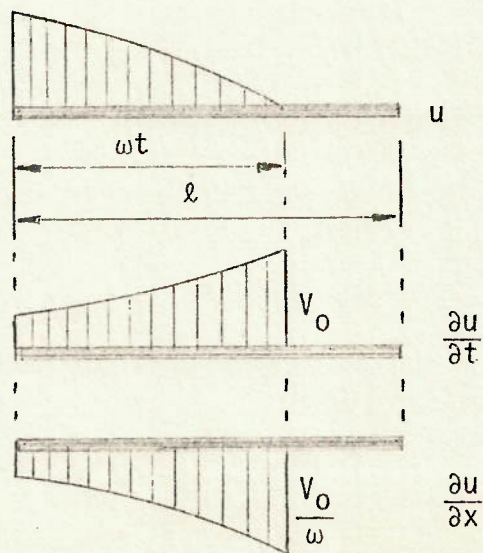


Figura 4-02

A quantidade de movimento se conserva pois

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} V + \int_0^{\omega t} \rho S \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{P}{g} V_0 e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t} + \rho S V_0 \frac{P\ell}{Q} - \\ - \rho S V_0 \frac{P\ell}{Q} e^{-\frac{P\ell}{Q} \omega t} &= \frac{P}{g} V_0 \end{aligned}$$

como esperávamos, já que não agem forças externas no sistema barra-corpo agressor nestes instantes iniciais; na expressão anterior usamos $V = V(t)$ para representar $\frac{\partial u}{\partial t}$ na seção agredida.

A energia do sistema também se conserva, pois

$$\begin{aligned} \frac{P}{2g} V^2 + \int_0^{\omega t} \frac{\rho S}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^{\omega t} \frac{ES}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx &= \frac{P}{2g} V_0^2 e^{-\frac{2Q}{P\ell} \omega t} + \\ + \left(\frac{\rho S}{2} \frac{P\ell}{2Q} V_0^2 + \frac{ES}{2} \frac{P\ell}{2Q} \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 \right) &\left[1 - e^{-\frac{2Q}{P\ell} \omega t} \right] = \frac{P}{2g} V_0^2 \end{aligned}$$

Quando $\ell \leq \omega t < 2\ell$, aparece na barra a onda refletida. Para as seções tais que $x \geq 2\ell - \omega t$ temos

$$u = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \left(-e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} + e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_0}{\omega} \left(-e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} \right)$$

e nas outras seções continuam válidas as expressões antigas, pois a onda refletida pelo engastamento ainda não as alcançou.

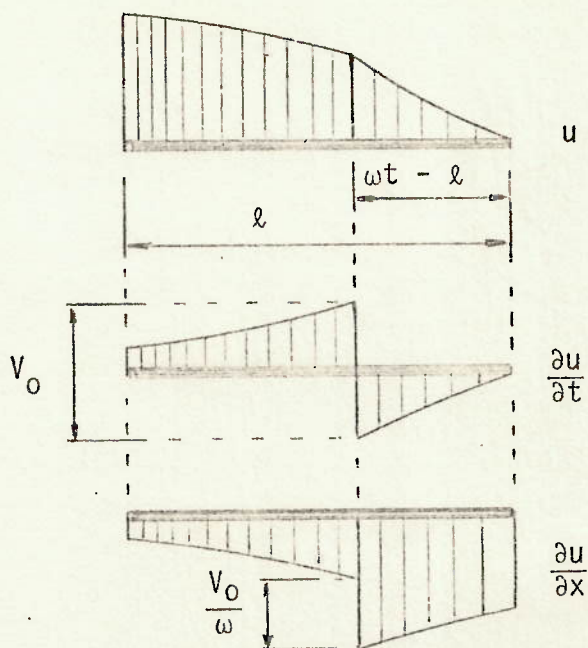


Figura 4-03

A quantidade de movimento não mais se conserva, embora continue válida a conservação da energia.

Nos instantes $2l \leq \omega t < 4l$ gera-se nova onda F_1 , na seção agredida, que juntamente com a refletida

$$u = F_1(\omega t - x) - \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

satisfazem a condição de contato entre barra e corpo agressor; é desta condição que resulta a nova onda gerada. Assim

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \left[\omega^2 F_1''(\zeta) + V_0 \frac{Q\omega}{P\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\zeta - 2\ell)} \right] = \\ = ES \left[-F_1'(\zeta) - \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\zeta - 2\ell)} \right] \end{aligned}$$

cuja solução é

$$F_1 = K_1 \frac{P\ell}{Q} e^{-\frac{Q}{P\ell}\zeta} + 2 \frac{V_0}{\omega} \left(\zeta + \frac{P\ell}{Q} \right) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\zeta - 2\ell)} + k_1$$

de onde

$$u = K_1 \frac{P\ell}{Q} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} + 2 \frac{V_0}{\omega} (\omega t - x + \frac{P\ell}{Q}) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} +$$

$$+ k_1 - \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

As constantes de integração valem

$$K_1 = -\frac{V_0}{\omega} - 4 \frac{V_0}{\omega} \frac{Q}{P} e^{2\frac{Q}{P}} - \frac{V_0}{\omega} e^{2\frac{Q}{P}}$$

$$k_1 = 0$$

e resultam das continuidades do deslocamento e da velocidade, no instante $\frac{2\ell}{\omega}$, para a seção agredida.

Desta forma, nos instantes $2\ell < \omega t < 3\ell$, o movimento da barra é regido pelas equações (vide 4.4.1):

$$u = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} - 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2Q}{P\ell} (\omega t - x - 2\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} + e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

para $x \leq \omega t - 2\ell$, e

$$u = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} \right)$$

para $x > \omega t - 2\ell$

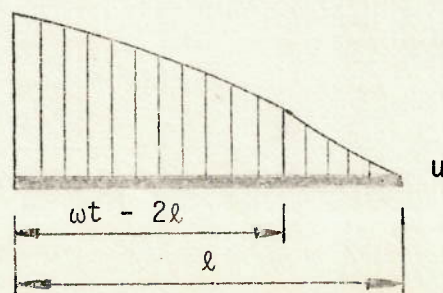


Figura 4-04

Nos instantes $3\ell \leq \omega t < 4\ell$ a nova onda gerada \bar{e} refletida pelo engastamento e as equações do movimento ficam:

$$u = \frac{V_0 P\ell}{\omega Q} \left(e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{2Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} + e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} \right)$$

para $x < 4\ell - \omega t$, e

$$u = \frac{V_0 P\ell}{\omega Q} \left(e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x)} + \right. \\ \left. + \frac{2Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - x - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 4\ell)} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 2\ell)} - \frac{2Q}{P\ell}(\omega t + x - 4\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t + x - 4\ell)} \right)$$

para $x \geq 4\ell - \omega t$.

Esta última expressão \bar{e}

$$u = F_1(\omega t - x) - F_1(\omega t + x - 2\ell)$$

4.2.2 Vamos estabelecer a sequência das funções

$$F_i(\zeta) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

que representam as ondas geradas na seção agredida, a partir dos instantes (vide 4.4.2)

$$\frac{2\ell}{\omega} i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

A equação do movimento aplicável à seção agredida nos instantes $2\ell i \leq \omega t < 2\ell i + 2\ell$ \bar{e}

$$u = F_i(\omega t - x) - F_{i-1}(\omega t + x - 2\ell)$$

em que a primeira parcela do segundo membro da igualdade representa a onda gerada a partir do instante $\frac{2\ell i}{\omega}$, e a segunda \bar{e} a

onda anterior refletida pela seção fixa.

A condição de contato entre corpo agressor e barra

$$\frac{P}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para} \quad x = 0$$

fornece

$$F_i''(\zeta) + \frac{Q}{P\ell} F_i'(\zeta) = F_{i-1}''(\zeta - 2\ell) - \frac{Q}{P\ell} F_{i-1}'(\zeta - 2\ell)$$

cuja solução é

$$F_i(\zeta) = K_i \frac{P\ell}{Q} e^{-\frac{Q}{P\ell}\zeta} + k_i + \int e^{-\frac{Q}{P\ell}\zeta} d\zeta \int e^{\frac{Q}{P\ell}\zeta} \left(F_{i-1}''(\zeta - 2\ell) - \frac{Q}{P\ell} F_{i-1}'(\zeta - 2\ell) \right) d\zeta$$

ou seja, conhecida a função F_{i-1} , gerada a partir do instante $\frac{2\ell}{\omega}(i-1)$, obtemos a função F_i , gerada a partir do instante $\frac{2\ell}{\omega}i$. As constantes de integração K_i e k_i resultam das condições de continuidade do deslocamento e da velocidade na seção agredida, no instante do início da geração da nova onda, isto é

$$F_i(2\ell i) - F_{i-1}(2\ell i - 2\ell) = F_{i-1}(2\ell i) - F_{i-2}(2\ell i - 2\ell)$$

para o deslocamento, e

$$F_i'(2\ell i) - F_{i-1}'(2\ell i - 2\ell) = F_{i-1}'(2\ell i) - F_{i-2}'(2\ell i - 2\ell)$$

para a velocidade.

Obtemos desta forma a sequência de funções:

$$F_0(\zeta) = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q}{P\ell}\zeta} \right)$$

$$F_1(\zeta) = F_0(\zeta) + \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(-1 + \left(1 + 2 \frac{Q}{P} \frac{\zeta - 2\ell}{\ell} \right) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\zeta - 2\ell)} \right)$$

$$F_2(\zeta) = F_1(\zeta) + \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left\{ 1 - \left[1 + 2 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 \left(\frac{\zeta - 4\ell}{\ell} \right)^2 \right] e^{-\frac{Q}{P\ell}(\zeta - 4\ell)} \right\}$$

$$F_3(\zeta) = F_2(\zeta) + \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left\{ -1 + \left[1 + 2 \frac{Q}{P} \frac{\zeta - 6\ell}{\ell} - \right. \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 \left(\frac{\zeta - 6\ell}{\ell} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{Q}{P} \right)^3 \left(\frac{\zeta - 6\ell}{\ell} \right)^3 \right] e^{-\frac{Q}{P\ell}(\zeta - 6\ell)} \right\}$$

e podemos escrever a equação do movimento da barra num instante qualquer (vide 4.4.3); assim, para $6\ell \leq \omega t < 7\ell$, temos

$$u = F_3(\omega t - x) - F_2(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x \leq \omega t - 6\ell$$

$$u = F_2(\omega t - x) - F_2(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x > \omega t - 6\ell$$

e quando $3\ell \leq \omega t < 4\ell$ temos

$$u = F_1(\omega t - x) - F_0(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x < 4\ell - \omega t$$

$$u = F_1(\omega t - x) - F_1(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x \geq 4\ell - \omega t$$

A validade destas equações ocorre enquanto existir o contato do corpo agressor com a barra.

4.2.3 Vamos determinar em que instante ocorre o fim do choque, ou seja, cessa o contato entre barra e corpo agressor. Tal fato significa que, na seção agredida

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para} \quad x = 0$$

se anula, e trocaria o seu sinal se continuássemos a estudar o fenômeno com a equação fornecida pelo contato.

Nesta seção, nos instantes $0 \leq \omega t < 2\ell$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t}$$

que não se anula, e o choque nunca termina neste intervalo de tempo. Na barra semi-infinita é somente esta a equação do seu movimento, e para ela existe sempre o seu contato com o corpo agressor.

Para a mesma seção, nos instantes $2\ell \leq \omega t < 4\ell$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_0}{\omega} \left(2 \frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} - 2 e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t} \right)$$

que se anula quando

$$0 < \frac{P}{Q} < 1,7283$$

e troca de sinal, o que significa que o choque termina neste intervalo de tempo, para a relação entre massas do corpo agressor e da barra situada no intervalo indicado.

No intervalo $4\ell \leq \omega t < 6\ell$ temos na seção agredida

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_0}{\omega} \left(- e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t} - 2 e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} + \right. \\ \left. + 2 \frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} - 2 e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 4\ell)} + \right. \\ \left. + 6 \frac{Q}{P\ell} (\omega t - 4\ell) e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 4\ell)} - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{Q}{P\ell} \right)^2 (\omega t - 4\ell)^2 e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 4\ell)} \right) \end{aligned}$$

que fornece o fim do choque neste intervalo quando

$$1,7283 < \frac{P}{Q} < 4,1511$$

Para $6\ell \leq \omega t < 8\ell$ ocorre o fim do choque quando

$$4,1511 < \frac{P}{Q} < 7,35$$

O instante do término do choque pode ser obtido com a nulidade de

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para} \quad x = 0$$

correspondente à relação entre massas considerada. Assim, se $\frac{P}{Q} = 1$, temos

$$2 \frac{\omega t - 2\ell}{\ell} e^{-\frac{\omega t - 2\ell}{\ell}} - 2e^{-\frac{\omega t - 2\ell}{\ell}} - e^{-\frac{\omega t}{\ell}} = 0$$

e o instante do fim do choque é tal que

$$\omega t = 3,0677 \ell$$

4.2.4 Vamos agora determinar o máximo deslocamento $u_{\text{máx}}$ que sofre a extremidade agredida, para a qual, nos instantes $2\ell i \leq \omega t < 2\ell(i+1)$, temos

$$u = F_i(\omega t) - F_{i-1}(\omega t - 2\ell)$$

Para que este máximo ocorra é preciso que

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} = F'_i(\omega t) - F'_{i-1}(\omega t - 2\ell) = 0$$

Assim, no intervalo $0 \leq \omega t < 2\ell$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t}$$

não se anula, e não existe máximo deslocamento neste intervalo.

Já para $2\ell \leq \omega t < 4\ell$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \left[e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t} - \left(1 + 2 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 2\ell}{\ell} \right) e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} + \right. \\ \left. + 2e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} - e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} \right]$$

se anulando quando

$$0 < \frac{P}{Q} < 5,686$$

e o instante do máximo deslocamento \bar{e} é obtido de

$$\frac{\omega t}{\ell} = \frac{1}{2} \frac{P}{Q} e^{-2 \frac{Q}{P}} + 2$$

Resulta então (vide 4.4.4)

$$u_{\text{m\acute{a}x}} = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left[-1 + 2e^{-\frac{e}{2} - 2 \frac{Q}{P}} \right]$$

quando $0 < \frac{P}{Q} < 5,686$.

Nos instantes $4\ell \leq \omega t < 6\ell$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \left(e^{-\frac{Q}{P\ell} \omega t} - 2 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 2\ell}{\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 2\ell)} - \right. \\ \left. - 2 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 4\ell}{\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 4\ell)} + 2 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \left(\frac{\omega t - 4\ell}{\ell}\right)^2 e^{-\frac{Q}{P\ell} (\omega t - 4\ell)} \right) \end{aligned}$$

que se anula quando

$$5,686 < \frac{P}{Q} < 13,816$$

no instante

$$\begin{aligned} \frac{\omega t}{\ell} = 4 + \frac{P}{2Q} (1 + e^{-2 \frac{Q}{P}}) - \frac{P}{2Q} \left[(1 + e^{-2 \frac{Q}{P}})^2 + \right. \\ \left. + 8 \frac{Q}{P} e^{-2 \frac{Q}{P}} - 2e^{-4 \frac{Q}{P}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Conhecida a relação entre massas, pertencente ao intervalo ora considerado, obtemos o instante em que ocorre o máximo deslocamento, e podemos obter este máximo através de

$$u_{\max} = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left(1 + 2e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 2\ell)} - \right. \\ \left. - \left(2 + 4 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 4\ell}{\ell} \right) e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 4\ell)} \right)$$

Nos instantes $6\ell \leq \omega t < 8\ell$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \left(e^{-\frac{Q}{P\ell}\omega t} - 2 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 2\ell}{\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 2\ell)} - \right. \\ - 2 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 4\ell}{\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 4\ell)} + 2 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \left(\frac{\omega t - 4\ell}{\ell}\right)^2 e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 4\ell)} - \\ - 2 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 6\ell}{\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 6\ell)} + 4 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \left(\frac{\omega t - 6\ell}{\ell}\right)^2 e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 6\ell)} - \\ \left. - \frac{4}{3} \left(\frac{Q}{P}\right)^3 \left(\frac{\omega t - 6\ell}{\ell}\right)^3 e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 6\ell)} \right)$$

se anula para (vide 4.4.5)

$$13,816 < \frac{P}{Q} < 25,16$$

no instante obtido de

$$1 + 4 \frac{Q}{P} e^{4 \frac{Q}{P}} + 8 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 e^{4 \frac{Q}{P}} + 8 \frac{Q}{P} e^{6 \frac{Q}{P}} + 64 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 e^{6 \frac{Q}{P}} + \\ + \frac{256}{3} \left(\frac{Q}{P}\right)^3 e^{6 \frac{Q}{P}} - \frac{\omega t - 2\ell}{\ell} \left(2 \frac{Q}{P} e^{2 \frac{Q}{P}} + 2 \frac{Q}{P} e^{4 \frac{Q}{P}} + \right. \\ \left. + 8 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 e^{4 \frac{Q}{P}} + 2 \frac{Q}{P} e^{6 \frac{Q}{P}} + 32 \left(\frac{Q}{P}\right)^2 e^{6 \frac{Q}{P}} + 64 \left(\frac{Q}{P}\right)^3 e^{6 \frac{Q}{P}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\omega t - 2\ell}{\ell} \right)^2 \left[2 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 e^{4 \frac{Q}{P}} + 4 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 e^{6 \frac{Q}{P}} + 16 \left(\frac{Q}{P} \right)^3 e^{6 \frac{Q}{P}} \right] -$$

$$- \left(\frac{\omega t - 2\ell}{\ell} \right)^3 \frac{4 \left(\frac{Q}{P} \right)^3}{3} e^{6 \frac{Q}{P}} = 0$$

que fornece

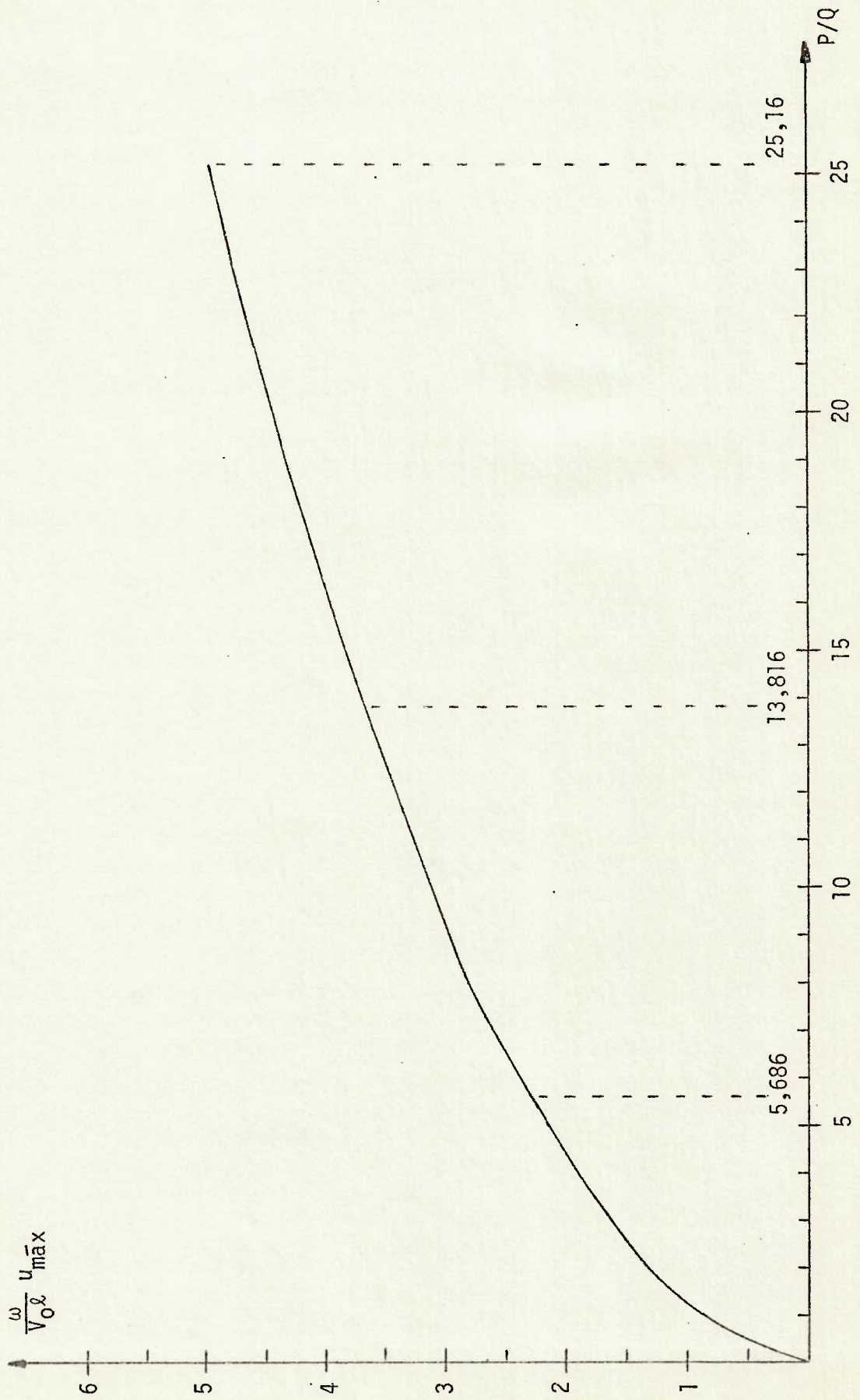
$$u_{\max} = \frac{V_0}{\omega} \frac{P\ell}{Q} \left\{ -1 + 2e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 2\ell)} - 2e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 4\ell)} - \right.$$

$$- 4 \frac{Q}{P} \frac{\omega t - 4\ell}{\ell} e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 4\ell)} + 4 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 \left(\frac{\omega t - 6\ell}{\ell} \right)^2 e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 6\ell)} +$$

$$\left. + 2e^{-\frac{Q}{P\ell}(\omega t - 6\ell)} \right\}$$

no instante obtido da relação entre massas considerada.

Apresentamos a seguir um gráfico dos máximos deslocamentos da seção agredida para as relações entre massas do corpo agressor e da barra.



4.2.5 Antes de determinarmos o máximo módulo da deformação $\epsilon_{\text{máx}}$, provocada pelo choque, vamos examinar as funções

$$F'_i(\zeta)$$

pois elas constituem as expressões cujos máximos procuraremos. A equação do contato entre barra e corpo agressor

$$\frac{P}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{para} \quad x = 0$$

fornece

$$F''_i(\zeta) + \frac{Q}{P\ell} F'_i(\zeta) = F''_{i-1}(\zeta - 2\ell) - \frac{Q}{P\ell} F'_{i-1}(\zeta - 2\ell)$$

ou integrando

$$F'_i(\zeta) = F'_{i-1}(\zeta - 2\ell) - \frac{Q}{P\ell} \left(F_i(\zeta) + F_{i-1}(\zeta - 2\ell) \right) + K$$

sendo K uma constante de integração.

Enquanto durar o choque temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - F'_i(\zeta) - F'_{i-1}(\zeta - 2\ell) < 0$$

na seção agredida, e concluímos que

$$F_i(\zeta) + F_{i-1}(\zeta - 2\ell)$$

é crescente enquanto existir o contato barra-corpo agressor.

Como

$$F'_0(\zeta) = \frac{V_0}{w} e^{-\frac{Q}{P\ell} \zeta}$$

é decrescente, resulta que

$$F'_1(\zeta) = F'_0(\zeta - 2\ell) - \frac{Q}{P\ell} \left[F_1(\zeta) + F_0(\zeta - 2\ell) \right] + K$$

é também decrescente. Utilizando as expressões análogas para as sucessivas funções $F'_i(\zeta)$, descobrimos que estas funções são todas decrescentes, e, portanto, seus máximos valem

$$F'_0(0) = \frac{V_0}{\omega}$$

$$F'_1(2\ell) = \frac{V_0}{\omega} \left[1 + e^{-2 \frac{Q}{P}} \right]$$

$$F'_2(4\ell) = \frac{V_0}{\omega} \left[1 + \left(1 - 4 \frac{Q}{P} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} + e^{-4 \frac{Q}{P}} \right]$$

$$F'_3(6\ell) = \frac{V_0}{\omega} \left[1 + \left(1 - 8 \frac{Q}{P} + 8 \frac{Q^2}{P^2} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} + \right. \\ \left. + \left(1 - 8 \frac{Q}{P} \right) e^{-4 \frac{Q}{P}} + e^{-6 \frac{Q}{P}} \right]$$

Podemos agora pesquisar o máximo módulo da deformação que surge na barra. As deformações que nela existem são fornecidas por:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = F'_i(\omega t - x) + F'_{i-1}(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x \leq \omega t - 2\ell i$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = F'_{i-1}(\omega t - x) + F'_i(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x > \omega t - 2\ell i$$

nos instantes $2\ell i < \omega t < 2\ell i + \ell$ e, para os instantes $2\ell i + \ell \leq \omega t < 2\ell(i+1)$, elas resultam de

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = F'_i(\omega t - x) + F'_{i-1}(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x < 2\ell(i+1) - \omega t$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = F'_i(\omega t - x) + F'_i(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x \geq 2\ell(i+1) - \omega t$$

Observamos que um dentro os seguintes valores

$$2F'_i(2\ell i)$$

$$2F'_{i-1}(2\ell i - 2\ell)$$

$$2 F'_{i-2} (2\ell i - 4\ell)$$

$$\vdots$$

$$2 F'_0 (0)$$

resultantes respectivamente de:

$$F'_i (\omega t - x) + F'_i (\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x = \ell \text{ e } \omega t = 2\ell i + \ell$$

$$F'_{i-1} (\omega t - x) + F'_{i-1} (\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x = \ell \text{ e } \omega t = 2\ell i - \ell$$

$$F'_{i-2} (\omega t - x) + F'_{i-2} (\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x = \ell \text{ e } \omega t = 2\ell i - 3\ell$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$F'_0 (\omega t - x) + F'_0 (\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x = \ell \text{ e } \omega t = \ell$$

representa o máximo módulo das deformações escritas anteriormente, mesmo quando o contato cessar antes de ocorrer este máximo, o que pode acontecer no intervalo $2\ell i < t < 2\ell i + \ell$, por que a onda F'_i é gerada antes deste fim do choque e continua se propagando na barra, sendo refletida pelo engastamento e então fornecendo o máximo

$$2 F'_i (2\ell i)$$

Desta forma, para obtermos o resultado pretendido, precisaremos verificar qual destes máximos é o maior para a relação $\frac{P}{Q}$ adotada. Assim, quando

$$0 < \frac{P}{Q} < 1,7283$$

o choque termina num instante $2\ell < \omega t < 4\ell$; devemos escolher como máxima deformação a maior dentre:

$$2 F'_0 (0) = 2 \frac{V_0}{\omega}$$

$$2 F'_1 (2\ell) = 2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + e^{-2 \frac{Q}{P}} \right)$$

e então

$$\epsilon_{\bar{m}ax} = - 2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + e^{- 2 \frac{Q}{P}} \right)$$

jã que $F'_1(2\ell) \geq F'_0(0)$.

Quando

$$1,7283 < \frac{P}{Q} < 4,1511$$

o choque termina num instante $4\ell \leq \omega t < 6\ell$ e a máxima deformação resulta do maior valor dentre

$$2F'_1(2\ell) = 2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + e^{- 2 \frac{Q}{P}} \right)$$

$$2F'_2(4\ell) = 2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + (1 - 4 \frac{Q}{P}) e^{- 2 \frac{Q}{P}} + e^{- 4 \frac{Q}{P}} \right)$$

Como

$$2F'_2(4\ell) - 2F'_1(2\ell) = 2 \frac{V_0}{\omega} \left(e^{- 4 \frac{Q}{P}} - 4 \frac{Q}{P} e^{- 2 \frac{Q}{P}} \right)$$

é positiva quando $\frac{P}{Q} > 5,686$, concluímos que

$$\epsilon_{\bar{m}ax} = - 2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + e^{- 2 \frac{Q}{P}} \right)$$

é válida para $0 < \frac{P}{Q} < 4,1511$.

Quando

$$4,1511 < \frac{P}{Q} < 7,35$$

o choque termina num instante $6\ell < \omega t < 8\ell$ e a máxima deformação resulta do maior dentre os valores:

$$2F'_1(2\ell)$$

$$2F'_2(4\ell)$$

$$2F'_3(6\ell)$$

Como

$$2F_3'(6\ell) - 2F_2'(4\ell) = 2 \frac{V_0}{\omega} \left(e^{-6 \frac{Q}{P}} - 8 \frac{Q}{P} e^{-4 \frac{Q}{P}} - \left(4 \frac{Q}{P} - 8 \frac{Q^2}{P^2} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} \right)$$

é positiva para $\frac{P}{Q} > 13,816$, concluímos que

$$\epsilon_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = -2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + e^{-2 \frac{Q}{P}} \right) \quad \text{para } 0 < \frac{P}{Q} < 5,686$$

$$\epsilon_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = -2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \left(1 - 4 \frac{Q}{P} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} + e^{-4 \frac{Q}{P}} \right) \quad \text{para } 5,686 < \frac{P}{Q} < 7,35$$

Quando $\frac{P}{Q} > 7,35$ o choque termina num instante maior que $\frac{8\ell}{\omega}$, e precisamos comparar

$$2F_4'(8\ell)$$

com

$$2F_3'(6\ell)$$

para o intervalo considerado, da relação entre massas do corpo e da barra, cujo extremo superior desconhecemos. Para obtermos $F_4'(8\ell)$ basta lembrar que a condição de continuidade da velocidade na seção agredida, para o instante $\frac{8\ell}{\omega}$, é

$$F_4'(8\ell) - F_3'(6\ell) = F_3'(8\ell) - F_2'(6\ell)$$

que fornece

$$2F_4'(8\ell) = 2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \left(1 - 12 \frac{Q}{P} + 24 \frac{Q^2}{P^2} - \frac{32}{3} \frac{Q^3}{P^3} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} + \left(1 - 16 \frac{Q}{P} + 32 \frac{Q^2}{P^2} \right) e^{-4 \frac{Q}{P}} + \left(1 - 12 \frac{Q}{P} \right) e^{-6 \frac{Q}{P}} + e^{-8 \frac{Q}{P}} \right)$$

e resulta que

$$2F'_4(8\ell) > 2F'_3(6\ell)$$

quando $\frac{P}{Q} > 25,16$.

Embora não conhecendo os intervalos seguintes de duração do choque para as relações entre massas, podemos esperar a validade das seguintes expressões para a máxima deformação, baseados nos acontecimentos encontrados no desenvolvimento feito

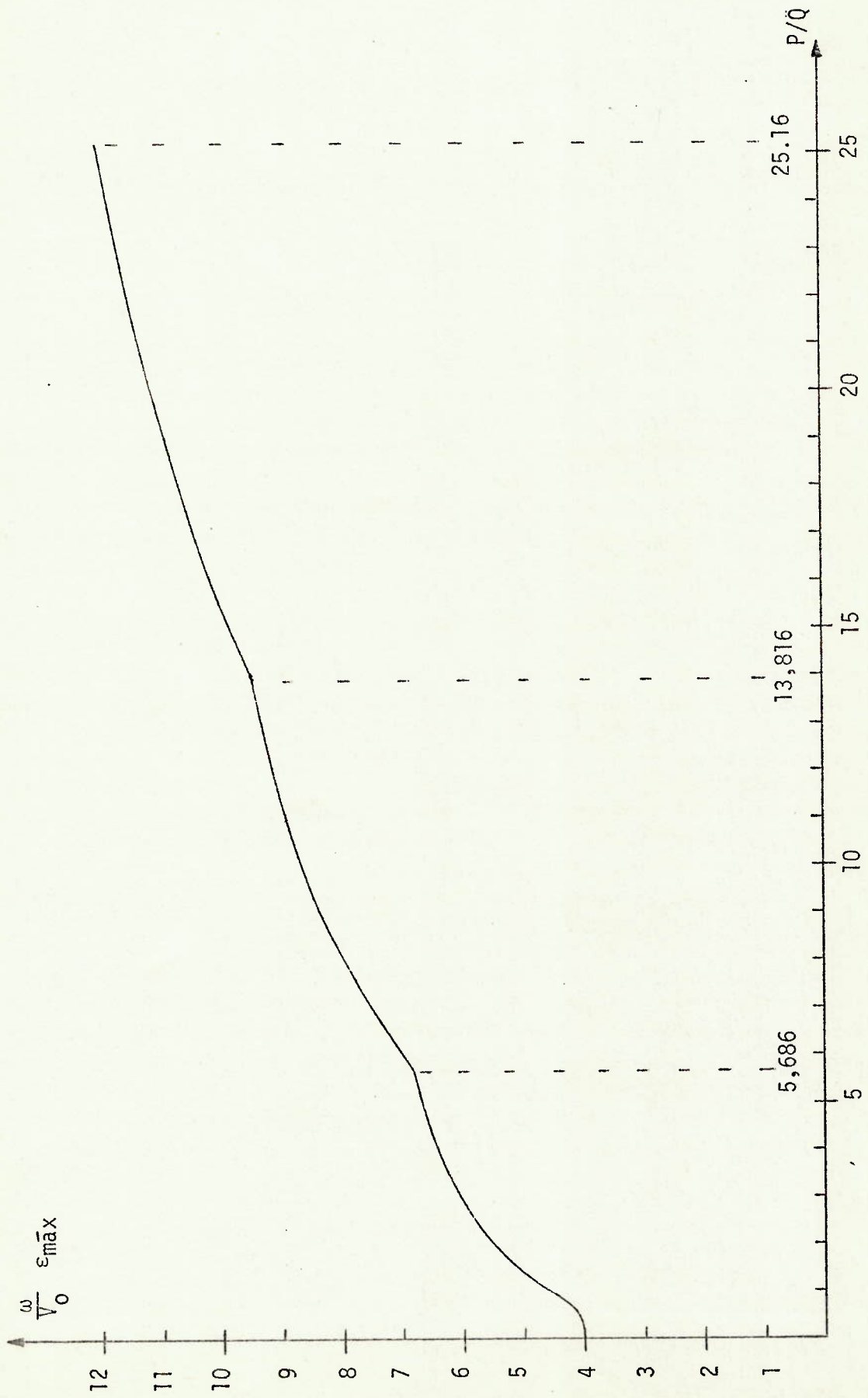
$$\epsilon_{\bar{m}ax} = -2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + e^{-2 \frac{Q}{P}} \right) \quad \text{para } 0 < \frac{P}{Q} < 5,868$$

$$\epsilon_{\bar{m}ax} = -2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \left(1 - 4 \frac{Q}{P} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} + e^{-4 \frac{Q}{P}} \right) \quad \text{para } 5,686 < \frac{P}{Q} < 13,816$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\bar{m}ax} = -2 \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \left(1 - 8 \frac{Q}{P} + 8 \frac{Q^2}{P^2} \right) e^{-2 \frac{Q}{P}} + \right. \\ \left. + \left(1 - 8 \frac{Q}{P} \right) e^{-4 \frac{Q}{P}} + e^{-6 \frac{Q}{P}} \right) \quad \text{para } 13,816 < \frac{P}{Q} < 25,16 \end{aligned}$$

É interessante observar que a seção do engastamento é a mais solicitada pelo choque, pois as máximas deformações se passam ao ocorrer a reflexão da frente da onda.

Apresentamos a seguir um gráfico das máximas deformações para as relações entre massas do corpo agressor e da barra; devemos notar que a curva obtida não é simplesmente aproximável com funções comuns.



4.3 Choque em Barra com Extremidade Arredondada

A teoria do choque que acabamos de examinar é de difícil verificação experimental, pois a condição de serem as tensões normais constantes nos pontos da seção agredida é quase impossível de ser realizada, já que deveria existir um contato perfeito entre planos.

Vamos então tentar examinar o choque entre uma esfera e uma barra cilíndrica, cuja extremidade agredida tem um arredondamento de raio R .

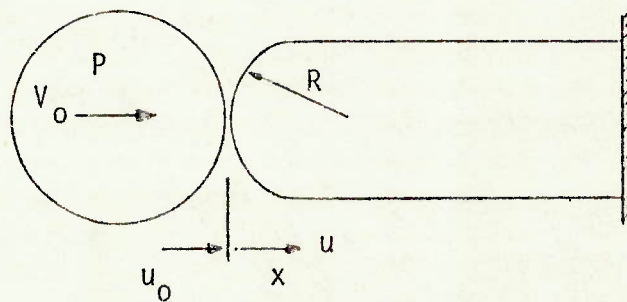


Figura 4-05

Sendo N a força de contato, o deslocamento da esfera é dado por

$$u_0 = v_0 t - \frac{g}{P} \int_0^t dt \int_0^t N dt$$

e o deslocamento da seção agredida da barra pode ser (vide 4.4.6)

$$u = \frac{1}{\rho S \omega} \int_0^t N dt$$

Ocorre portanto uma penetração

$$u_0 - u = v_0 t - \frac{g}{P} \int_0^t dt \int_0^t N dt - \frac{1}{\rho S \omega} \int_0^t N dt$$

que, usando a teoria do contato de Hertz, vale

$$u_0 - u = \left(\frac{N}{K} \right)^k$$

sendo K e k constantes. Obtemos assim a equação

$$\left(\frac{N}{K}\right)^k = v_0 t - \frac{g}{P} \int_0^t dt \int_0^t N dt - \frac{1}{\rho S \omega} \int_0^t N dt$$

que fornece a força de contato enquanto não houver onda refletida chegando na região do contato.

O movimento da barra pode ser estudado usando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

com a condição de ser

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{N}{\rho S \omega} \quad \text{para} \quad x = 0$$

O tratamento matemático do processo é bastante trabalhoso, e os resultados fornecidos são razoáveis quando comparados com os obtidos experimentalmente. Diversas alterações foram tentadas, como a consideração de existir deformação plástica na região de contato, mas o tratamento matemático e os resultados fornecidos não foram melhores.

4.4 Críticas e Comentários

A solução, apresentada a Saint-Venant por Boussinesq, do choque longitudinal de um corpo indeformável numa barra prismática elástica é muito elegante, e permite um tratamento matemático relativamente simples para o fenômeno. A principal crítica que a ela podemos fazer se refere à tensão normal constante nos pontos da seção agredida, teoricamente aceitável desde que a onda seja plana, mas praticamente irrealizável pois exige um perfeito contato entre planos. Seus resultados são relativamente próximos dos obtidos experimentalmente com um corpo de extremidade agressora plana e uma barra de extremidade agredida levemente arredondada.

Esta solução de Boussinesq mostra a energia do sistema barra-corpo agressor se conservando, ocorrendo a transformação de parte da energia cinética do corpo em energias cinética e de deformação na barra.

Não podemos classificar este choque como elástico ou anelástico, pois durante o contato o corpo cede à barra toda a sua energia cinética inicial e, a partir do momento de velocidade nula, que é o do máximo deslocamento, a barra devolve energia ao corpo até que cesse o contato e o corpo se afaste da barra

com uma velocidade V^* , de sentido oposto à inicial V_0 . Obtemos então o coeficiente de restituição

$$- \frac{V^*}{V_0}$$

que varia entre zero e um, casos extremos obtidos respectivamente para a barra de comprimento infinito, quando o choque seria anelástico, e para a barra de comprimento nulo, sendo então o choque elástico.

O raciocínio usado por Boussinesq presta-se também ao estudo do choque longitudinal entre duas ou mais barras, de extremidades fixas ou não, com ou sem corpos agredindo-as, e ainda resolve o problema do choque longitudinal de um corpo numa barra vertical,

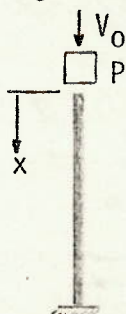


Figura 4-06

sem a consideração da influência, no movimento da barra, das forças de massa (aceleração da gravidade) que nela atuam. A equação do contato fica

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P \quad \text{para } x = 0$$

A rápida explanação que fizemos sobre o choque longitudinal numa barra com extremidade arredondada deve-se às complicações matemáticas envolvidas na solução, principalmente quando consideramos a onda refletida chegando na região do choque. Além disso, a aplicação da teoria de Hertz a um contato dinâmico carece de fundamento teórico e as tensões geradas na região agredida não devem ser constantes num plano desta região de contato.

Algumas alterações tentadas fornecem resultados bons quando comparados com os obtidos experimentalmente, mas baseiam-se em fatos quase empíricos, que fornecem motivos às mais variadas críticas.

Este é um campo ainda aberto à pesquisa, embora, ou talvez melhor, porque sua aplicação não seja de grande importância.

Imaginamos que o primeiro passo seja a solução do contato dinâmico entre corpos elásticos, por exemplo esferas, o que deve apresentar inúmeras dificuldades, dentre elas a variação das regiões em contato com o tempo.

4.4.1 A validade destas expressões exige que continue a existir o contato entre o corpo agressor e a seção agredida da barra.

4.4.2 Por exemplo, a onda F_3 é gerada a partir do instante $\frac{6\ell}{\omega}$

4.4.3 Nos instantes $2\ell i \leq \omega t < 2\ell i + \ell$ temos

$$u = F_i(\omega t - x) - F_{i-1}(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x \leq \omega t - 2\ell i$$

$$u = F_{i-1}(\omega t - x) - F_{i-1}(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x > \omega t - 2\ell i$$

e nos instantes $2\ell i + \ell \leq \omega t < 2\ell(i + 1)$ temos

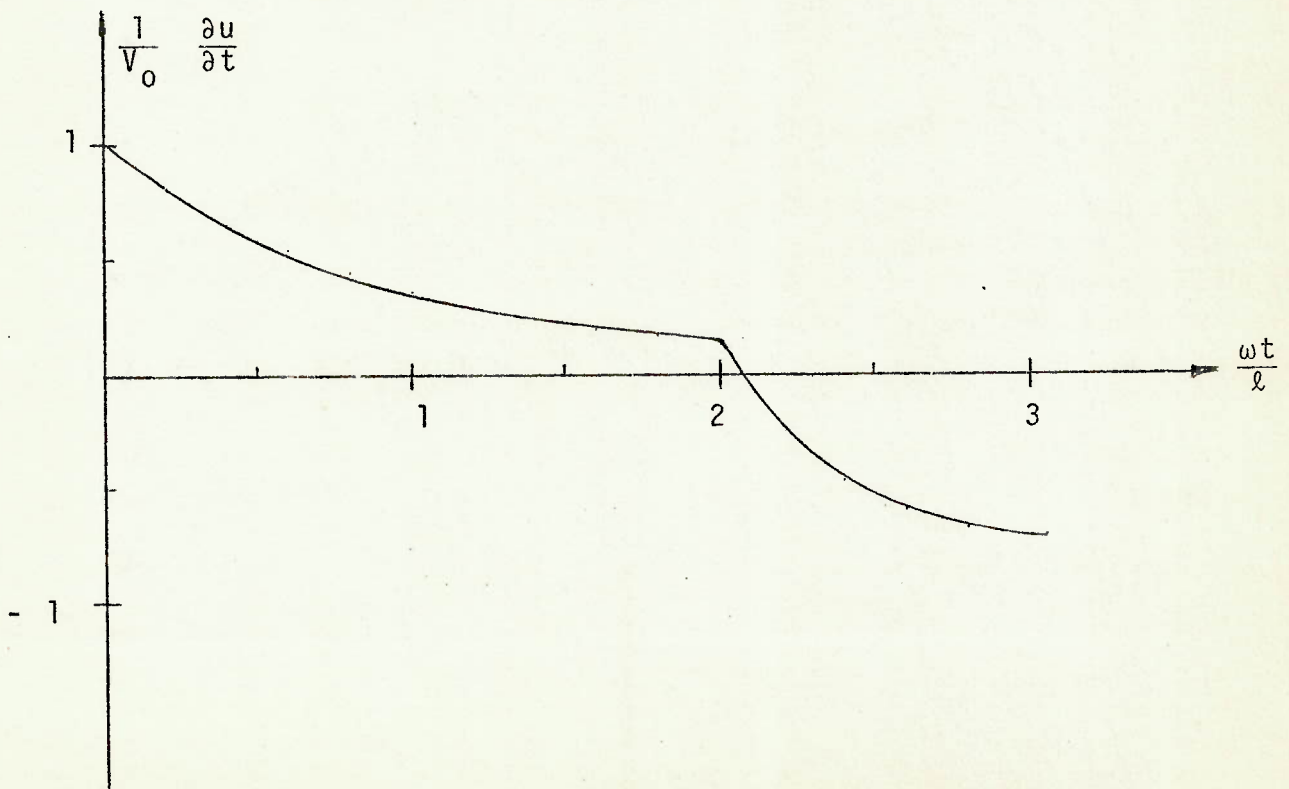
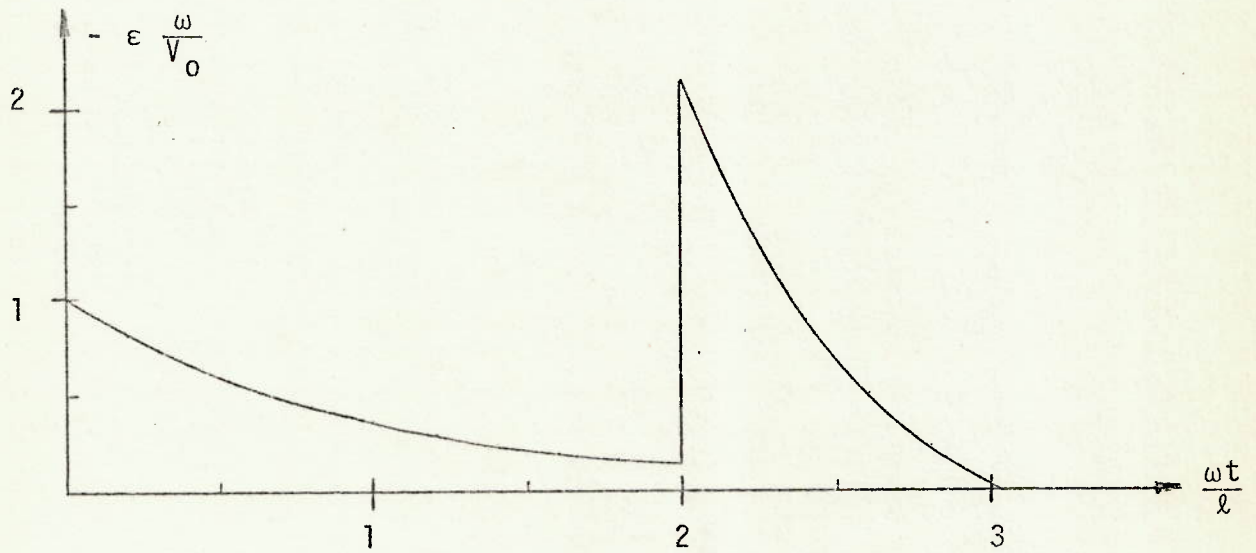
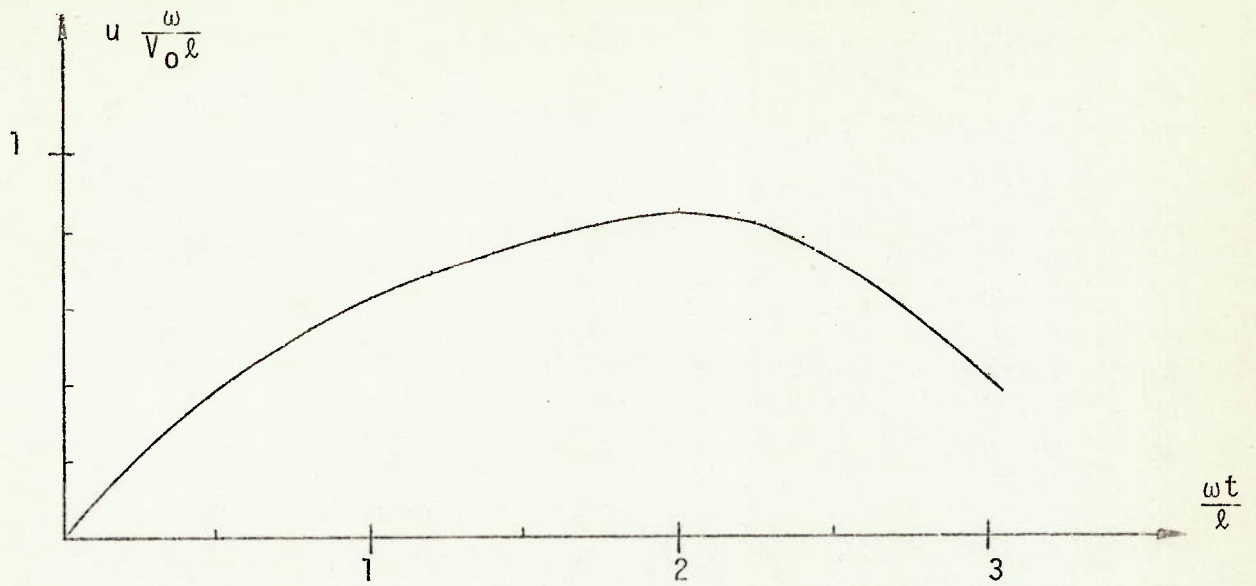
$$u = F_i(\omega t - x) - F_{i-1}(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x < 2\ell(i + 1) - \omega t$$

$$u = F_i(\omega t - x) - F_i(\omega t + x - 2\ell) \quad \text{para } x \geq 2\ell(i + 1) - \omega t$$

4.4.4 Não existe a possibilidade do choque terminar antes de ter ocorrido o máximo deslocamento.

4.4.5 A rigor deveríamos comparar as diversas expressões, que fornecem o máximo deslocamento, para localizar as suas validades, e chegaríamos aos resultados indicados.

Vamos mostrar, a seguir, diagramas que fornecem os deslocamentos, deformações e velocidades da seção agredida, durante o choque, para $\frac{P}{Q} = 1$



4.4.6 Esta expressão realmente não pode ser aplicada nesta situação porque:

- 1º - a área da seção transversal na região agredida não é a área constante das seções transversais da barra prismática
- 2º - nesta região agredida, não prismática, a velocidade de propagação da onda não deve ser ω
- 3º - a onda nesta região não deve ser plana.

5. APROXIMAÇÕES PARA O CHOQUE LONGITUDINAL

5.1 Introdução

Vamos nos ocupar do problema de determinar o máximo deslocamento que aparece numa barra prismática atingida por um corpo, de peso P , cuja velocidade no instante do impacto é V_0 ; estaremos também interessados na obtenção da máxima tensão, ou deformação, que age na barra.

Utilizaremos o princípio dos trabalhos virtuais, o conceito de energia e a conservação da quantidade de movimento para efetuar as aproximações, esta última sendo válida apenas no início do choque, até o instante anterior ao que os apoios começam a reagir.

A determinação do máximo deslocamento que aparece na barra será feita usando vários raciocínios, que fornecem resultados próximos da solução dita exata, examinada no capítulo anterior, que é o choque longitudinal elástico em uma barra prismática, com uma extremidade fixa e a outra sendo agredida por um corpo, de modo que nesta seção transversal as tensões normais sejam constantes. Obter a máxima tensão normal que age na barra é um problema de solução bastante difícil, pois tal fato se verifica para um certo instante e numa determinada seção transversal; apenas indicaremos algumas expressões que fornecem resultados utilizáveis no choque longitudinal, pois não nos foi possível efetuar suas deduções dentro de um mínimo de racionalidade.

A nosso ver, os tratamentos a serem feitos são bons para estudar os efeitos globais na estrutura, como é o deslocamento máximo, mas mostram-se insuficientes na análise localizada e instantânea, que é o caso da tensão máxima.

As aproximações que faremos devem ser também aplicáveis, em termos de máximo deslocamento, para o choque longitudinal em uma barra prismática com ponta arredondada, e também para o choque transversal. Não acreditamos que a tensão máxima, indicada, aproxime a que se verifica realmente na estrutura, nestes casos.

5.2 Primeira Aproximação

A idéia mais simples para examinar o choque, já utilizada em 1807 por Thomas Young, é a de que toda a energia que o corpo agressor possui se transforma em energia de deformação na barra, sendo as deformações proporcionais às que existem quando da aplicação estática de uma carga na seção agredida. Assim, para a barra horizontal



Figura 5-01

$$\frac{P}{2g} V_0^2 = \frac{ES\ell}{2} \epsilon^2 = \frac{ES}{2\ell} u_{\max}^2$$

de onde

$$u_{\max} = V_0 \sqrt{\frac{P\ell}{gES}}$$

Como $E = \omega^2 \rho$ e o peso da barra vale

$$Q = \rho S \ell g$$

resulta

$$u_{\max} = \frac{V_0 \ell}{\omega} \sqrt{\frac{P}{Q}}$$

Quando o corpo agressor \bar{e} tamb \bar{e} m capaz de fornecer energia potencial \bar{a} barra ap \bar{o} s o contato inicial,



Figura 5-02

devemos igualar a energia de deformação

$$\mathcal{E} = \frac{ES}{2\ell} u_{\max}^2$$

\bar{a} energia que o corpo transmite \bar{a} barra

$$\frac{P}{2g} V_0^2 + P u_{\max}$$

Nesta primeira aproximação não consideramos a in \bar{e} rcia que a barra apresenta e, porisso, podemos prever que seus resultados s \bar{o} ser \bar{a} o aceit \bar{a} veis quando a massa da barra for muito pequena em re-
lação \bar{a} massa do corpo agressor. O efeito aqui desprezado \bar{e} o da vibraç \bar{a} o que aparece na barra, que ret \bar{e} m energia cin \bar{e} tica e de deformação.

Com relaço \bar{a} \bar{a} m \bar{a} xima tens \bar{a} o normal que age na barra, o racioc \bar{i} -
nio da exist \bar{e} ncia de um \bar{u} nico fator din \bar{a} mico, ou seja, uma s \bar{o}

constante que, multiplicada por um efeito estaticamente produzido, forneça este efeito quando a causa é dinâmica, a nosso ver não tem consistência, pois é embaraçoso afirmar que a relação entre deslocamentos seja a mesma que entre tensões, ou deformações, já que os primeiros são resultantes das últimas, e valores errados destas podem fornecer resultados satisfatórios para aqueles quando os erros cometidos nas deformações se compensam.

Vamos indicar a expressão

$$\sigma_{\max} = E \epsilon_{\max} = E \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{P}{Q}} \right)$$

para o choque longitudinal na barra horizontal, sem qualquer justificativa além dos valores aproximados fornecidos.

A comparação entre resultados, apresentada a seguir, refere-se ao choque longitudinal na barra horizontal.

P/Q	$\frac{\omega}{V_0 \ell} u_{\max}$	$\frac{\omega}{V_0 \ell} u_{\max}$ exato	erro%	$\frac{\omega}{V_0} \epsilon_{\max}$	$\frac{\omega}{V_0} \epsilon_{\max}$ exato	erro%
0,01	0,100	0,010	900,0	2,005	2,000	0,3
0,02	0,141	0,020	605,0	2,010	2,000	0,5
0,05	0,224	0,050	348,0	2,025	2,000	1,2
0,1	0,316	0,100	216,0	2,049	2,000	2,4
0,25	0,500	0,250	100,0	2,118	2,001	5,9
0,5	0,707	0,491	44,0	2,225	2,037	9,2
4/7	0,756	0,554	36,4	2,254	2,060	9,4
2/3	0,817	0,634	28,8	2,291	2,100	9,1
4/5	0,894	0,736	21,6	2,342	2,164	8,2
1	1,000	0,869	15,1	2,414	2,271	6,3
4/3	1,155	1,052	9,8	2,528	2,446	3,3
2	1,414	1,330	6,4	2,732	2,736	- 0,1
8/3	1,633	1,545	5,7	2,915	2,945	- 1,0
4	2,000	1,907	4,9	3,236	3,213	0,7
5,686	2,385	2,314	3,0	3,586	3,407	5,3
6	2,450	2,355	4,0	3,646	3,505	4,0
8	2,828	2,818	0,4	4,000	3,991	0,2
12	3,464	3,411	1,5	4,606	4,562	1,0
13,816	3,717	3,672	1,2	4,849	4,727	2,6
16	4,000	3,962	1,0	5,123	5,091	0,6
20	4,472	4,434	0,9	5,583	5,586	- 0,1
24	4,899	4,863	0,7	6,000	5,930	1,2
25,16	5,016	4,974	0,8	6,115	6,023	1,5

Constatamos então que os deslocamentos acompanham os reais quando a massa da barra é menor que a do corpo, como já esperávamos; nesta situação as deformações são também próximas. A deformação é também próxima, nas grandes massas da barra, porque na expressão indicada o valor dois é preponderante sobre a relação entre massas, que perde o seu significado, e a solução exata tende para dois com o decréscimo da massa do corpo agressor.

5.3 Segunda Aproximação

Vamos agora imaginar que o efeito inicial do choque seja o de acelerar a barra, estabelecendo-se uma velocidade V_1 comum entre corpo agressor e seção agredida; as velocidades v_1 , existentes nas outras seções da barra, resultam da hipótese de serem elas proporcionais aos deslocamentos que apareceriam, com a aplicação estática de uma força normal na seção agredida, nas mesmas seções. A conservação da quantidade de movimento nos fornece estas velocidades.

A energia cinética que o sistema barra-corpo agressor possui é, a partir de então, transformada em energia de deformação, o que nos permite obter o máximo deslocamento que aparece na estrutura.

Assim, para o choque longitudinal na barra horizontal, resulta

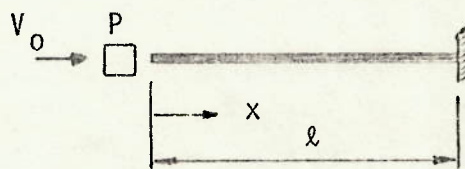


Figura 5-03

$$\frac{P}{g} V_0 = \frac{P}{g} V_1 + \int_0^l \rho S v_1 dx$$

com

$$v_1 = \frac{V_1}{l} (l - x)$$

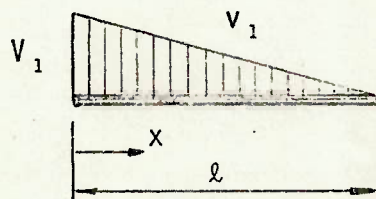


Figura 5-04

pois
$$u = \frac{u_0}{l} (l - x)$$

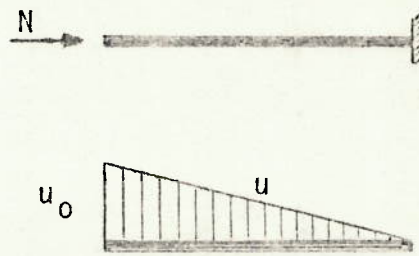


Figura 5-05

quando da aplicação estática de uma carga na seção agredida. Obtemos então

$$V_1 = V_0 \frac{P/Q}{P/Q + 0,5}$$

A energia cinética do sistema barra-corpo agressor vale, após estes instantes iniciais em que ocorre a aceleração da barra,

$$\frac{P}{2g} V_1^2 + \int_0^l \frac{\rho S}{2} v_1^2 dx = \frac{P}{2g} V_1^2 + \frac{Q}{6g} V_1^2$$

que, sendo transformada em energia de deformação, fornece

$$\frac{ES}{2l} u_{\max}^2 = V_1^2 \left(\frac{P}{2g} + \frac{Q}{6g} \right)$$

com deformações proporcionais às estaticamente produzidas.

Resulta então

$$u_{\max} = \frac{V_1 l}{\omega} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{P}{Q}}$$

ou

$$u_{\max} = \frac{V_0 l}{\omega} \frac{P/Q}{P/Q + 0,5} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{P}{Q}}$$

A aplicação da conservação da quantidade de movimento nos permitiu a separação de uma parte da energia, inicialmente disponível, para os efeitos vibratórios que ocorrem na barra.

Vamos indicar a expressão

$$\epsilon_{\bar{m}\bar{x}} = \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \frac{1}{P/Q + 0,5} \sqrt{\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + \frac{4}{3}\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + \frac{P}{Q} + \frac{1}{4}} \right)$$

para obter a máxima deformação que surge na barra.

A comparação dos resultados, fornecidos por esta aproximação, com os exatos, nos mostra ser esta solução muito melhor que a anterior, e globalmente superior às que faremos a seguir. Infelizmente não nos foi possível justificar a expressão que fornece a máxima tensão, ou deformação.

P/Q	$\frac{\omega}{V_0 l} u_{\bar{m}\bar{x}}$	$\frac{\omega}{V_0 l} u_{\bar{m}\bar{x}}$ exato	erro%	$\frac{\omega}{V_0} \epsilon_{\bar{m}\bar{x}}$	$\frac{\omega}{V_0} \epsilon_{\bar{m}\bar{x}}$ exato	erro%
0,01	0,012	0,010	20,0	2,000	2,000	0,0
0,02	0,023	0,020	15,0	2,000	2,000	0,0
0,05	0,056	0,050	12,0	2,002	2,000	0,1
0,1	0,110	0,100	10,0	2,006	2,000	0,3
0,25	0,255	0,250	2,0	2,032	2,001	1,5
0,5	0,457	0,491	- 7,0	2,099	2,037	3,1
4/7	0,507	0,554	- 8,5	2,121	2,060	3,0
2/3	0,571	0,634	- 9,9	2,152	2,100	2,5
4/5	0,655	0,736	- 11,0	2,196	2,164	1,5
1	0,770	0,869	- 11,4	2,262	2,271	0,0
4/3	0,939	1,052	- 10,7	2,372	2,446	- 3,0
2	1,222	1,330	- 8,1	2,579	2,736	- 5,7
8/3	1,459	1,545	- 5,6	2,766	2,945	- 6,0
4	1,850	1,907	- 3,0	3,103	3,213	- 3,4
5,686	2,255	2,314	- 2,6	3,467	3,407	1,8
6	2,323	2,355	- 1,4	3,529	3,505	0,7
8	2,717	2,818	- 3,6	3,895	3,991	- 2,4
12	3,371	3,411	- 1,2	4,517	4,562	- 1,0
13,816	3,630	3,672	- 1,1	4,765	4,727	0,8
16	3,919	3,962	- 1,1	5,045	5,091	- 0,9
20	4,399	4,434	- 0,8	5,512	5,586	1,3
24	4,832	4,863	- 0,6	5,935	5,930	0,1
25,16	4,951	4,974	- 0,5	6,051	6,023	0,5

5.4 Terceira Aproximação

Utilizemos o mesmo raciocínio anterior, somente alterando o cálculo da velocidade comum entre corpo agressor e seção agredida.

Para tanto, seja R a reação que o apoio aplica na barra; podemos escrever o seu equilíbrio



Figura 5-06

$$-\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} + \int_0^{\ell} \rho S dx \frac{\partial v}{\partial t} + R = 0$$

Usando a mesma distribuição de velocidades que no caso anterior

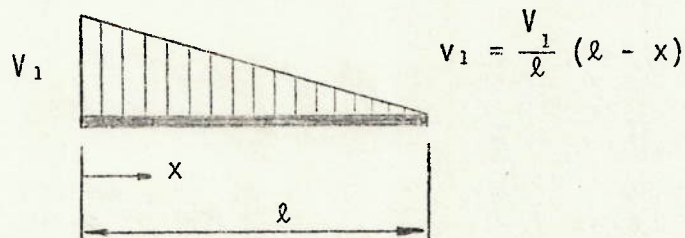


Figura 5-07

podemos utilizar o princípio dos trabalhos virtuais, adotando como deslocamentos virtuais $V_1 \delta t$ para a seção agredida e $v_1 \delta t$ para as demais seções da barra. Assim

$$-\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} V_1 \delta t - \int_0^{\ell} \rho S dx \frac{\partial v}{\partial t} v_1 \delta t = 0$$

pois o deslocamento virtual no apoio é nulo.

No pequeno, mas finito, intervalo de tempo em que ocorre a aceleração da barra, podemos imaginar que os deslocamentos virtuais sejam constantes, e então a última expressão fornece, após integrada neste pequeno intervalo de tempo

$$\frac{P}{g} (V_1 - V_0)V_1 + \int_0^{\ell} \rho S dx v_1^2 = 0$$

de onde resulta (vide 5.6.1):

$$V_1 = \frac{V_0}{1 + \frac{Q}{3P}}$$

A energia cinética que o sistema barra-corpo agressor possui

$$\frac{P}{2g} V_1^2 + \int_0^{\ell} \frac{Q}{2\ell g} v_1^2 dx$$

é transformada em energia de deformação, e

$$u_{\max} = \frac{V_0 \ell}{\omega} \sqrt{1 + \frac{P/Q}{Q/3P}}$$

A expressão que indicamos para calcular a máxima deformação é

$$\epsilon_{\max} = \frac{V_0}{\omega} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{P/Q}{Q/3P}} \right)$$

Os resultados fornecidos por esta aproximação são bons, como observamos na comparação de resultados feita a seguir.

P/Q	$\frac{\omega}{V_0 \ell} u_{\max}$	$\frac{\omega}{V_0 \ell} u_{\max}$ exato	erro%	$\frac{\omega}{V_0} \epsilon_{\max}$	$\frac{\omega}{V_0} \epsilon_{\max}$ exato	erro%
0,01	0,017	0,010	70,0	2,000	2,000	0,0
0,02	0,034	0,020	70,0	2,001	2,000	0,0
0,05	0,081	0,050	62,0	2,003	2,000	0,2
0,1	0,152	0,100	52,0	2,011	2,000	0,6
0,25	0,327	0,250	31,0	2,052	2,001	2,6
0,5	0,548	0,491	11,6	2,140	2,037	5,1
4/7	0,601	0,554	8,4	2,167	2,060	5,2
2/3	0,667	0,634	5,2	2,202	2,100	4,9
4/5	0,752	0,736	2,1	2,251	2,164	4,0
1	0,866	0,869	- 0,4	2,323	2,271	2,3
4/3	1,033	1,052	- 1,8	2,438	2,446	- 3,4
2	1,309	1,330	- 1,5	2,648	2,736	- 3,2
8/3	1,540	1,545	- 0,3	2,836	2,945	- 3,7
4	1,922	1,907	0,8	3,166	3,213	- 1,5
5,686	2,318	2,314	0,1	3,524	3,407	3,4
6	2,383	2,355	1,2	3,585	3,505	2,3
8	2,771	2,818	- 1,7	3,946	3,991	- 1,1
12	3,417	3,411	0,2	4,560	4,562	0,0
13,816	3,673	3,672	0,0	4,807	4,727	1,7
16	3,959	3,962	- 0,1	5,083	5,091	- 0,2
20	4,435	4,434	0,0	5,547	5,586	- 0,7
24	4,865	4,863	0,0	5,967	5,930	0,6
25,16	4,983	4,974	0,2	6,082	6,023	1,0

5.5 Quarta Aproximação

Vamos admitir que parte da energia que o corpo agressor possui é empregada em acelerar a barra, sendo o restante da sua energia transformada em energia de deformação. Assim, a energia gasta na aceleração da barra é

$$\frac{P}{2g} (V_0^2 - V_1^2) = \int_0^{\ell} \frac{\rho S}{2} v_1^2 dx$$

e, novamente assumindo que

$$v_1 = \frac{V_1}{\ell} (\ell - x)$$

resulta

$$V_1 = V_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{Q}{3P}}}$$

O restante da energia que o corpo agressor possui

$$\frac{P}{2g} V_1^2$$

é transformada em energia de deformação, fornecendo

$$u_{\max} = \frac{V_0 \ell}{\omega} \sqrt{\frac{P/Q}{1 + \frac{Q}{3P}}}$$

Esta aproximação fornece resultados idênticos aos da anterior, pois em ambas a mesma energia cinética é transformada em energia de deformação (vide 5.6.2).

No presente caso estamos calculando a energia gasta pelo corpo na aceleração da barra porque, partindo da equação do equilíbrio da barra

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} = \int_0^{\ell} \rho S \frac{\partial v}{\partial t} dx + F$$

e, calculando o trabalho que estas forças executam na aceleração da barra

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} V dt = - \int_0^{\ell} \rho S \frac{\partial v}{\partial t} dx v dt$$

e, integrando entre os instantes inicial e final da aceleração, obtemos

$$\frac{P}{2g} (V_0^2 - V_1^2) = \int_0^{\ell} \frac{\rho S}{2} v_1^2 dx$$

que é a equação usada na obtenção da energia gasta na aceleração da barra.

5.6 Críticas e Comentários

Neste último capítulo examinamos como obter o máximo deslocamento e a máxima tensão, que aparecem numa barra prismática elástica, causados pelo choque longitudinal de um corpo indeformável. Os exames feitos baseiam-se em proposições elementares, e em fatos distantes dos que realmente ocorrem por ocasião do choque, tais como:

- 1º - as aproximações foram feitas baseadas na hipótese de ser o choque anelástico, o que realmente não ocorre, exceto para a barra de comprimento infinito
- 2º - quando pretendemos introduzir nas aproximações o efeito da massa da barra, o fazemos assumindo uma distribuição linear de velocidades, na barra, nos instantes iniciais do choque, velocidades estas que partem de zero na seção fixa e têm máximo valor na seção agredida; realmente as velocidades na barra, nestes instantes iniciais, são maiores na região da seção fixa e é mínima na seção agredida.

Excetuando a primeira aproximação feita, separamos uma parte da energia cinética, que o corpo agressor possui inicialmente, para os efeitos vibratórios da barra, efeitos que envolvem energias cinética e de deformação; o restante da energia do corpo agressor imaginamos estar transformada, no exato instante do máximo deslocamento, em energia de deformação, com deformações constantes em toda a barra. Esta idéia nos parece razoável, pois, no instante do máximo deslocamento, a velocidade é realmente nula na seção agredida e o nível da energia de deformação na barra deve estar próximo do seu máximo.

Achamos interessante descrever a transferência de energia que ocorre durante o choque:

- 1º - nos instantes iniciais, a energia cinética do corpo é parcialmente cedida à barra em iguais proporções de energias cinética e de deformação
- 2º - após a primeira reflexão da onda no engastamento, continua ocorrendo o fornecimento de energia à barra pelo corpo, só que a energia de deformação fica maior que a cinética, na barra
- 3º - no instante do máximo deslocamento da seção agredida, o corpo agressor não mais possui energia
- 4º - após este instante, a barra começa a devolver energia ao corpo até o final do contato
- 5º - o corpo se afasta da barra com parte da energia cinética que inicialmente possuía, restando energias cinética e de deformação na barra.

Desta forma, quando pretendemos obter aproximações para o máximo deslocamento, imaginamos que toda a energia inicial do corpo está, no instante deste máximo, distribuída na barra como energias cinética e de deformação, esta última dividida em duas parcelas, de modo que uma parcela não produza deslocamento na seção agredida, estando ligada a efeitos vibratórios, e a outra parcela está uniformemente distribuída na barra, com deformações constantes.

As expressões indicadas para a máxima deformação resultam da relação

$$\epsilon_{\max} = \frac{V_0}{\omega} + \sqrt{\left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u_{\max}}{\ell}\right)^2}$$

que descobrimos ser aplicável ao choque longitudinal, mas cuja dedução não conseguimos realizar.

A validade desta relação mostra a inexistência de um único fator dinâmico, comumente empregado.

Finalizando, queremos lembrar que estas aproximações estão voltadas para o choque longitudinal estudado por Boussinesq, onde as tensões normais são constantes nos pontos da seção agredida; quando tal situação não se verificar, acreditamos que não deve ser significativa a alteração produzida no valor do máximo deslocamento, mas a máxima deformação deve ficar bem modificada.

5.6.1 Esta última expressão pode ser reescrita como

$$\frac{PV_0^2}{2g} - \left[\frac{PV_1^2}{2g} + \int_0^{\ell} \frac{\rho S}{2} v_1^2 dx \right] = \frac{P}{2g} (V_0 - V_1)^2 + \int_0^{\ell} \frac{\rho S}{2} (0 - v_1)^2 dx$$

nos mostrando que variações bruscas na velocidade

$(V_0 - V_1)$ para o corpo

$(0 - v_1)$ para as seções da barra

provocam uma transformação da energia cinética, que no nosso caso resulta em efeitos vibratórios. A energia cinética transformada em efeitos vibratórios vale

$$\frac{P}{2g} (V_0 - V_1)^2 + \int_0^l \frac{\rho S}{2} (0 - v_1)^2 dx$$

5.6.2 A energia de deformação na aproximação anterior vale

$$\mathcal{E} = \frac{P}{2g} \left(\frac{V_0}{1 + \frac{Q}{3P}} \right)^2 + \frac{Q}{2lg} \left(\frac{V_0}{1 + \frac{Q}{3P}} \right)^2 \int_0^l \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 dx$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{P}{2g} \frac{V_0^2}{1 + \frac{Q}{3P}}$$

Podemos entender esta identidade de resultados observando que nas duas aproximações usamos o princípio dos trabalhos virtuais, só que com deslocamentos virtuais diferentes:

- na atual aproximação, os deslocamentos virtuais são os que ocorrem durante a aceleração, e obtemos então o trabalho gasto na aceleração da barra
- na aproximação anterior, os deslocamentos virtuais são os que existem no final da aceleração da barra, ou seja, estamos esquecendo do trabalho gasto durante a aceleração. É por isso que obtemos a energia cinética que sobra no sistema corpo-barra após a aceleração.

BIBLIOGRAFIA

- Appel, P.
"Traité de Mécanique Rationnelle"
Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1941
- Clebsh, A.
"Théorie de l'Elasticité des Corps Solides"
Dunod, Editeur, Paris, 1883
- Elsgol'tz, L.
"Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional"
Editorial Mir, Moscou, 1969
- Goldsmith, W.
"Impact - The Theory and Physical Behaviour of
Colliding Solids"
Edward Arnold (Publishers) Ltd., London, 1960
- Johnson, W.
"Impact Strength of Materials"
Edward Arnold (Publishers) Ltd., London 1972
- Kolsky, H.
"Stress Waves in Solids"
Dover Publications, Inc., New York, 1963
- Lanczos, C.
"The Variational Principles of Mechanics"
University of Toronto Press, Toronto, 1966
- Landau, L. e Lifchitz, E.
"Mécanique"
Editions de La Paix, Moscou
- Love, A. E. H.
"A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity"
Cambridge University Press, London, 1934
- Smirnov, V.
"Cours de Mathématiques Supérieures"
Editions Mir, Moscou, 1969
- Timoshenko, S. e Goodier, J. N.
"Theory of Elasticity"
Kōgakusha Company, Ltd, Tokyo
- Wells, D. A.
"Theory and Problems of Lagrangian Dynamics"
McGraw-Hill Book Company, New York, 1967
Schaum's Outline Series