

HENRIQUE CHIARADIA FALCÃO CURCI

Análise Numérica do Dano de Materiais Cimentícios Aplicada a Problemas
Termoelásticos e Geometricamente Não Lineares

São Paulo

2022

HENRIQUE CHIARADIA FALCÃO CURCI

Análise Numérica do Dano de Materiais Cimentícios Aplicada a Problemas
Termoelásticos e Geometricamente Não Lineares

Versão Corrigida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Moraes Barreto Campello

São Paulo

2022

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Curci, Henrique Chiaradia Falcão

Análise numérica do dano de materiais cimentícios aplicada a problemas termoelásticos e geometricamente não lineares / H. C. F. Curci -- versão corr. -- São Paulo, 2022.

121 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Análise Não Linear de Estruturas 2.Mecânica do Dano
3.Estruturas de Concreto 4.Temperatura 5.Método dos Elementos Finitos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

E o tempo faz estradas

Cordel do Fogo Encantado

AGRADECIMENTOS

Pela consolidação de todos os conceitos e pelo suporte no dia a dia, o autor agradece a ajuda dos Professores Eduardo de Moraes Barreto Campello e Henrique Campelo Gomes, bem como ao Laboratório de Mecânica Computacional (em especial representado pelos colegas e amigos Tiago, Débora, Ricardo, André, Celso, Lucas e Guiomar, bem como tantos outros que passaram pelas mesas do LMC) pela ajuda nas dúvidas, algumas destas acadêmicas, que surgiram ao longo deste longo processo de vivência e aprendizado.

O autor também agradece o apoio da ANFACER pelo fomento que permitiu o desenvolvimento deste mestrado através do projeto de pesquisa do qual participou. Deste projeto, agradece também a Renan Andrade e Flávio Leal Maranhão, que ao longo destes anos frutificaram muitos momentos de aprendizagem e ótimas experiências.

Agradeço também à minha família, em especial aos meus pais Ana e Luiz e à minha vó Wanda, tanto pela paciência e presença nos momentos difíceis quanto pela alegria compartilhada em todas as conquistas destes últimos anos.

E à Giulliana, com quem dou um passo à frente na estrada.

RESUMO

Este trabalho trata da discussão e da implementação de um modelo computacional baseado no método dos elementos finitos que contemple a análise da mecânica do dano em meios contínuos voltada a materiais cimentícios e de comportamento frágil, como concretos e argamassas. Esta aplicação é feita através de um código computacional desenvolvido pelo autor de modo a incluir o modelo de dano associado a uma formulação geometricamente não linear que também contempla efeitos térmicos e deformações prescritas aplicadas ao domínio do problema. O material é representado por meio dos modelos constitutivos hiperelásticos de Kirchhoff-Saint-Venant e o neo-Hookiano de Ciarlet-Simo. O modelo de dano adotado é o clássico de Mazars [1984], considerando isotropia do dano e do material, e destinado à aplicação em problemas com carregamentos monotônicos. A avaliação do dano é feita através das abordagens local e não-local do campo de deformações equivalentes. A adoção do método dos elementos finitos é feita para a discretização de modelos de domínio bidimensional (em problemas de estado plano de deformações), e a solução do problema não linear avaliada através do método de Newton-Raphson tradicional, com controle de carregamentos e deslocamentos, além do método da corda. Exemplos são desenvolvidos para apresentar a aplicabilidade que o código implementado dispõe quanto ao material hiperelástico, ao problema térmico e ao problema de dano, associados ou não.

Palavras-chave: Análise Não Linear de Estruturas, Mecânica do Dano, Estruturas de Concreto, Temperatura, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

This work discusses and implements a finite-element-based computational model that considers continuum damage mechanics applied to brittle materials such as concrete and mortar. An in-house computational code is developed to include a damage model combined with a geometrically nonlinear formulation that also accounts for thermal deformations. The hyperelastic Kirchhoff-Saint-Venant and the neo-Hookean Ciarlet-Simo materials are considered, combined with the well-known isotropic damage model of Mazars [1984] to simulate monotonically loaded problems. The damage evaluation is done based on both local and nonlocal approaches for the equivalent strain field. The resulting nonlinear problem for two-dimensional (plane strain) finite element discretizations is solved through both a standard Newton-Raphson scheme (with either load or displacement control) and an arc-length method. Several examples are analyzed to test the applicability of the developed code for the associated hyperelastic materials, thermoelastic deformations and damage problems.

Keywords: Nonlinear analysis of structures, Damage Mechanics, Concrete Structures, Temperature, Finite Element Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<i>Figura 1 – Consumo aparente de cimento no Brasil e por regiões, e variação do PIB da Construção Civil, em valores relativos, com pico (100%) no 1º trimestre de 2014</i>	<i>9</i>
<i>Figura 2 – (a) Relação tensão-deformação ($\sigma \times \epsilon$) da pasta de cimento endurecida, do agregado graúdo (brita) e do concreto simples. (b) Evolução do comportamento do concreto sob compressão axial.</i>	<i>10</i>
<i>Figura 3 - Exemplos de degradação de materiais cimentícios e estruturas de concreto sob efeito de dano material, resultando em propagação de fissuras em sistema adesivo (a), falha estrutural e fraturamento (b) e instabilidade com grandes deslocamentos (c).</i>	<i>11</i>
<i>Figura 4 – Representação da mudança de área resistente pela degradação progressiva em barra sob ensaio uniaxial de tração.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 5 - Aplicação dos conceitos de tensão efetiva e do princípio de equivalência das deformações para exemplo simplificado uniaxial.</i>	<i>18</i>
<i>Figura 6 – Diferentes resultados de microtomografias computadorizadas para (A) – polímero e (B) – concreto, com escalas para referência.</i>	<i>20</i>
<i>Figura 7 - Comportamento do concreto em ensaio de tração simples. a) Resultado experimental. b) Modelo idealizado. c) Modelo idealizado simplificado.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 8 - Representação do limiar entre a faixa de degradação bem representada pela Mecânica do Dano (nucleação e propagação de microfissuras) e a faixa representada pela Mecânica da Fratura (surgimento e propagação de fraturas macroscópicas discretas, ou macrofissuras).</i>	<i>26</i>
<i>Figura 9 - Configurações de referência e deformada de um sólido.</i>	<i>28</i>
<i>Figura 10 - Representação do estado plano de deformação e sua simplificação quanto às deformações esperadas no sólido analisado.</i>	<i>30</i>
<i>Figura 11 – Transformação representada pelas configurações de referência, deformada e intermediária fictícia, representando a transformação proporcionada pelas deformações térmicas (caracterizadas por $F\theta$).....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 12 - Modos de dano e curvas relativas ao comportamento do concreto comprimido representando cada modo associado.</i>	<i>44</i>
<i>Figura 13 – Representação qualitativa do espaço de deformações com possibilidades para a função f e a evolução de dano.</i>	<i>45</i>
<i>Figura 14 - Ilustração da região mapeada para abordagem não local das deformações, com a relação entre os pontos A e B e a função Φ.</i>	<i>54</i>
<i>Figura 15 – Vizinhança para um ponto de integração (n) de um elemento (E) na borda do domínio.</i>	<i>55</i>
<i>Figura 16 – (a) Sequência de varredura dos elementos contíguos, segundo critério do algoritmo. (b) Função exponencial Φ avaliada nos elementos do domínio</i>	<i>56</i>
<i>Figura 17 – Representação de uma malha de elementos com uma reentrância alongada. Pontos P, Q e R apresentados com suas respectivas áreas de varredura para verificação da deformação não local.</i>	<i>57</i>

<i>Figura 18 – Representação de elemento bidimensional triangular de 6 nós, com indicação das áreas auxiliares associadas a um ponto P do domínio do elemento e exemplificação da coordenada natural L relativa ao nó 1 e avaliada nos demais nós.....</i>	<i>60</i>
<i>Figura 19 - Ilustração da influência da localização dos pontos para a não simetria da matriz de rigidez tangente do problema de dano sob análise não local.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 20 – Efeito da assimetria devido à deformação não local na matriz de rigidez, considerando a contribuição dos graus de liberdade dos elementos T e U que contém respectivamente os pontos X_2 e X_3 no exemplo da Figura 19. T_1 a T_{12} são os graus de liberdade do elemento T, e U_1 a U_{12} do elemento U, equivalentemente.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 21 – Fluxograma do método iterativo de Newton-Raphson com controle de carregamento para resolução do problema não linear.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 22 - Representação de gráfico com a curva força-deslocamento descrita através do resultado capturado com passos controlados de carregamento, baseados no método de Newton-Raphson.</i>	<i>75</i>
<i>Figura 23 - Representação de gráfico com a curva força-deslocamento descrita através do resultado capturado com passos controlados por deslocamento, baseados no método de Newton-Raphson.</i>	<i>78</i>
<i>Figura 24 – Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.1.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 25 – Malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.2.</i>	<i>85</i>
<i>Figura 26 – Exemplo 4.2: Campo de deslocamentos do prisma para 50%, 99%, 150% e 500% da força crítica. Mapa de cores com deslocamento total (m) e deformada em escala real.</i>	<i>87</i>
<i>Figura 27 - Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.3</i>	<i>88</i>
<i>Figura 28 - Exemplo 4.3: Deformadas da estrutura nos pontos A, B, C e D.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 29 - Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.4</i>	<i>91</i>
<i>Figura 30 - Exemplo 4.4: Deformada e campos de temperatura (em °C) e tensões (em MPa).....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 31 - Exemplo 4.4: Deformada e deslocamentos totais (em m) para barra com aquecimento exagerado.....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 32 – Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.5.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 33 - Exemplo 4.5: Evolução das temperaturas (°C) e dos deslocamentos (m) para 60%, 100% e 400% da temperatura crítica. Deformadas em escala real e escala ampliada nas soluções iniciais.....</i>	<i>96</i>
<i>Figura 34 - Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.6. Detalhe para o defeito incluído na face inferior da viga.</i>	<i>97</i>
<i>Figura 35 – Exemplo 4.6: Deformada (x500) e deslocamentos horizontais (m) no último passo antes da não-convergência do método iterativo.</i>	<i>98</i>
<i>Figura 36 – Exemplo 4.6: Tensão principal de tração T_1 (MPa) no passo de carregamento antes do surgimento e crescimento de dano.</i>	<i>99</i>
<i>Figura 37 – Exemplo 4.6: Tensão principal de tração T_1 (MPa) no último passo antes da não-convergência do método iterativo por controle de carregamentos.</i>	<i>99</i>
<i>Figura 38 – Exemplo 4.6: Campo de dano D na região do defeito no último passo antes da não-convergência do método iterativo.....</i>	<i>100</i>

<i>Figura 39 - Exemplo 4.6: Campo de cores dos parâmetros α_C e α_T para um passo de carregamento antes do surgimento e crescimento de dano.</i>	<i>100</i>
<i>Figura 40 – Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.7.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 41- Exemplo 4.8: Deformadas e campos de dano para os pontos A, B e C do Gráfico 17.....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 42- Exemplo 4.8: Deformadas e campos de dano para o ponto B do Gráfico 17, considerando diferentes distâncias limites para abordagem não local.....</i>	<i>108</i>

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Curvas de evolução da tensão de tração em função da deformação axial com a variação dos parâmetros AT e BT	49
Gráfico 2 – Evolução das parcelas do dano em função da deformação axial com a variação do parâmetro AT (tração simples).	49
Gráfico 3 - Curvas de evolução da tensão de compressão em função da deformação axial com a variação dos parâmetros AC e BC (compressão simples).	50
Gráfico 4 – Evolução das parcelas do dano em função da deformação axial com a variação dos parâmetros AC (compressão simples).	50
Gráfico 5 - Resposta global do modelo de Mazars aos ensaios monotônicos de tração (curvas em vermelho) e compressão (curvas em azul), com evolução das tensões (linha cheia) e danos (linha tracejada).	51
Gráfico 6 - Exemplo 4.1: Comportamento esperado dos modelos constitutivos de Ciarlet-Simo, Kirchhoff-St. Venant e Linear, comparado aos resultados de carregamento uniaxial com $\nu = 0$ e $\nu = 0,4$. A resposta linear considera $\nu = 0$	83
Gráfico 7 – Exemplo 4.1: Comparação das curvas de estiramento pela tensão dos materiais de Ciarlet-Simo e Kirchhoff-St. Venant com $\nu=0,4$	84
Gráfico 8 - Exemplo 4.2: Relação entre carregamento aplicado (normalizada pela força crítica) e o deslocamento transversal do ponto central da malha, apresentados em três escalas diferentes.	86
Gráfico 9 - Exemplo 4.3: Resposta dos deslocamentos vertical e horizontal do ponto P para modelos com materiais de CS e KSV, em comparação com resultados de referência bibliográfica	89
Gráfico 10 - Exemplo 4.5: Relação entre variação de temperaturas na viga (normalizada pela variação de temperatura crítica) e o deslocamento vertical do ponto central da borda esquerda da viga. Resultados para controle de carregamentos, com detalhes em diferentes escalas e comparação entre soluções por diferentes métodos de resolução numérica.	95
Gráfico 11 - Exemplo 4.7: Resposta de tensão x deformação da estrutura sob ensaio de carregamento e descarregamento, à tração e à compressão.	102
Gráfico 12 - Exemplo 4.7: Resposta idêntica à do Gráfico 11, com destaque à região da resposta à tração.	103
Gráfico 13 - Exemplo 4.7: Evolução do dano e de suas componentes à tração e compressão para os passos de controle de deslocamentos. Os círculos verdes destacam os pontos apresentados no Gráfico 11.	103
Gráfico 14 - Exemplo 4.8: Variação da deflexão vertical da borda esquerda da viga sob aumento uniforme de temperatura para diferentes casos com variação da temperatura entre as faces superior e inferior.	106

<i>Gráfico 15 - Exemplo 4.8: Evolução do dano e das tensões horizontais ao longo da altura da borda esquerda da viga para 50% (cinza), 100% (verde), 105% (azul) e 112% (vermelho - ponto limite) da temperatura crítica, para o caso com diferença inicial de temperatura de 0,2 °C.....</i>	<i>106</i>
<i>Gráfico 16 - Exemplo 4.8: Evolução do dano e das tensões horizontais ao longo da altura da borda esquerda da viga para 50% (cinza), 100% (verde), 105% (azul) e 110% (vermelho - ponto limite) da temperatura crítica, para o caso com diferença inicial de temperatura de 2,0 °C.....</i>	<i>107</i>
<i>Gráfico 17 - Exemplo 4.8: Variação da deflexão vertical da borda esquerda da viga sob aumento uniforme de temperatura. Problema resolvido sob abordagem não-local e controle de carregamentos.</i>	<i>108</i>

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1 - Valores das Coordenadas Naturais e Funções de Forma avaliadas nos pontos de integração (pontos de Gauss).....</i>	<i>61</i>
<i>Tabela 2 - Propriedades geométricas e mecânicas para o exemplo 4.1.....</i>	<i>82</i>
<i>Tabela 3 - Propriedades geométricas e mecânicas para o exemplo 4.2.....</i>	<i>85</i>
<i>Tabela 4 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.4.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabela 5 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.5.....</i>	<i>93</i>
<i>Tabela 6 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.6.....</i>	<i>97</i>
<i>Tabela 7 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.7.....</i>	<i>101</i>
<i>Tabela 8 – Exemplo 4.7: Sequência de carregamentos e descarregamentos do exemplo, apresentados através dos passos e a variação de deslocamentos impostas em cada sequência.</i>	<i>102</i>
<i>Tabela 9 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.8.....</i>	<i>105</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras gregas

Símbolo	Definição
α	Coefficiente de dilatação térmica ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
α_C	Parâmetro de peso ao dano à compressão
α_T	Parâmetro de peso ao dano à tração
Γ, Γ^r	Superfície de contorno do sólido
Γ_t, Γ_t^r	Superfície de contorno do sólido com prescrição de tensões (c.c. de Neumann)
Γ_w, Γ_u^r	Superfície de contorno do sólido com prescrição de deslocamentos (c.c. de Dirichlet)
γ_i	Vetor coluna i de L
$\delta \mathbf{u}$	Campo de deslocamentos virtuais
$\delta \mathbf{u}_e$	Vetor de deslocamentos virtuais do elemento e
$\delta W_{ext}, \delta W_{ext}^e$	Trabalho virtual dos esforços externos
$\delta W_{int}, \delta W_{int}^e$	Trabalho virtual dos esforços internos
$\delta \gamma_i$	Vetor coluna i do gradiente dos deslocamentos virtuais
$\delta \mathbf{r}$	Vetor de deslocamentos virtuais globais
δ	Espessura do sólido (m)
δ_{ij}	Delta de Kronecker
∇	Operador gradiente
$\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}_k^n$	Vetor de deslocamentos incrementais (no passo k e iteração n)
$\Delta \lambda, \Delta \lambda_k^n$	Incremento do parâmetro de controle (no passo k e iteração n)
$\Delta \theta$	Varição de temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
$\Delta \theta^f$	Varição de temperatura fixada ($^{\circ}\text{C}$)
ΔS_{AB}	Norma do vetor distância entre pontos A e B
$\boldsymbol{\varepsilon}_E$	Vetor de agrupamento das componentes de \mathbf{E}_e
ε	Deformação (m/m)
ε_i	Deformação principal (autovalor i) de \mathbf{E}_e (m/m)
ε_{Ci}	Deformação principal (autovalor i) de \mathbf{E}_C (m/m)
ε_{Ti}	Deformação principal (autovalor i) de \mathbf{E}_T (m/m)
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente local (m/m)
$\bar{\varepsilon}$	Deformação equivalente não local (m/m)
ϵ_{ijk}	Permutação cíclica de Levi-Civita
ϵ_{adm}	Erro admissível
ϵ_R	Erro relativo ao vetor de forças desbalanceadas
ϵ_r	Erro relativo ao vetor de deslocamentos nodais

Símbolo	Definição
η	Segunda componente da derivada do dano pelos deslocamentos nodais
$\theta, \theta^f, \theta^r$	Temperatura (°C)
Λ	1º parâmetro de Lamé (N/m ²)
λ	Parâmetro de controle de carregamentos
λ_R	Parâmetro de controle de carregamentos
λ_θ	Parâmetro de controle de temperaturas
μ	Módulo de cisalhamento – 2º parâmetro de Lamé (N/m ²)
ν	Coefficiente de Poisson
ξ_i	Vetor coluna i de \mathbf{E} (m/m)
ξ_{ei}	Vetor coluna i de \mathbf{E}_e (m/m)
$\rho, \rho_\theta, \rho_r$	Massa específica nas configurações (kg/m ³)
σ_i	Vetor coluna i de \mathbf{S} (N/m ²)
σ_{ei}	Vetor coluna i de \mathbf{S}_e (N/m ²)
σ	Tensão aparente (N/m ²)
σ_i	Tensão principal (autovalor i) de \mathbf{T}_e (N/m ²)
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva (N/m ²)
τ_i	Vetor coluna i de \mathbf{P} (N/m ²)
τ_{ei}	Vetor coluna i de \mathbf{P}_e (N/m ²)
ν_θ	Função de transformação térmica
$\bar{\Phi}_i$	Matriz antissimétrica de \mathbf{f}_i
Φ	Função peso da abordagem não-local
ψ_{arco}	Parâmetro de forma do elipsoide da solução no método da corda
ψ_e	Função de potencial de energia livre termodinâmico
ψ_e^D	Função ψ_e sob efeito de dano
ψ_e^{CS}	Função ψ_e de Ciarlet-Simo
ψ_e^{KSV}	Função ψ_e de Kirchhoff-Saint Venant
$\Omega, \Omega^\theta, \Omega^r$	Domínio do sólido

Letras latinas e outras

Símbolo	Definição e unidade (S.I.)
A_C	Primeiro parâmetro de dano à compressão
A_e	Área do elemento e
A_{ek}	Área auxiliar do elemento e relativo ao nó k
A_T	Primeiro parâmetro de dano à tração
\mathbf{B}	Matriz de deformação das funções de forma
B_C	Segundo parâmetro de dano à compressão
B_T	Segundo parâmetro de dano à tração
\mathbf{b}, \mathbf{b}^r	Vetor de forças de volume por unidade volumétrica (N/m ²)
\mathbf{C}	Tensor da relação constitutiva (N/m ²)
$\tilde{\mathbf{C}}$	Tensor efetivo da relação constitutiva (N/m ²)
\mathbf{C}_{ij}	Tensores dos módulos elásticos de rigidez tangente (N/m ²)
\mathbf{C}	Tensor direito de deformação total de Cauchy-Green
\mathbf{C}_e	Tensor direito de deformação elástica de Cauchy-Green
\mathcal{D}_{int}	Dissipação de energia interna
D	Parâmetro escalar de dano
D_C	Parâmetro escalar de dano à compressão
D_T	Parâmetro escalar de dano à tração
d_{lim}	Distância limite na abordagem não local (m)
dS, dS^θ, dS^r	Área infinitesimal nas configurações
dV, dV^θ, dV^r	Volume infinitesimal nas configurações
\mathbb{E}^3	Espaço Euclidiano tridimensional
\mathbf{E}	Tensor deformação de Green Lagrange
\mathbf{E}_e	Parte elástica de \mathbf{E}
\mathbf{E}_θ	Parte térmica de \mathbf{E}
\mathbf{E}_C	Componente das deformações principais relativo à compressão
\mathbf{E}_T	Componente das deformações principais relativo à tração
E	Módulo de elasticidade (N/m ²)
\tilde{E}	Módulo de elasticidade efetivo (N/m ²)
\mathbf{e}_i	Versor i do espaço Euclidiano \mathbb{E}^3
\mathbf{e}_r	Versor do grau de liberdade considerado para controle de deslocamentos
\mathbf{F}	Gradiente das deformações totais
\mathbf{F}_e	Parte elástica de \mathbf{F}
\mathbf{F}_θ	Parte térmica de \mathbf{F}
\mathbf{f}_i	Vetor coluna i de \mathbf{F}
\mathbf{f}_{ei}	Vetor coluna i de \mathbf{F}_e

Símbolo	Definição e unidade (S.I.)
$\mathbf{f}_{int}, \mathbf{f}_{int}^e$	Vetor de variação das forças internas sob efeito da variação de temperaturas internas, global e no elemento e
f	Função da superfície limite de crescimento de dano
f_d	Função de restrição do controle de deslocamentos
f'	Primeira componente da derivada do dano pelos deslocamentos nodais
f_{ct}	Resistência do material à tração
\mathbb{G}_e	Tensor de quarta ordem da relação constitutiva do par $\{\mathbf{P}_e, \mathbf{F}_e\}$
\mathbf{g}_i	Vetor coluna i do tensor dos cofatores associados à inversão de \mathbf{C}
\mathbf{g}_{ei}	Vetor coluna i do tensor dos cofatores associados à inversão de \mathbf{C}_e
\mathcal{H}_1	Espaço de Hilbert
J	Jacobiano da transformação total
J_e	Parte elástica de J
J_θ	Parte térmica de J
\mathbf{K}_T	Matriz global de rigidez tangente
\mathbf{K}_{T0}	Matriz global de rigidez tangente sem dano
\mathbf{k}_T^e	Matriz de rigidez tangente do elemento e
\mathbf{k}_{T0}^e	Matriz de rigidez tangente do elemento e sem dano
K_D	Parâmetro de deformação máximo no tempo
K_0	Parâmetro de deformação limítrofe
\mathcal{L}_2	Espaço linear das funções contínuas e quase sempre contínuas quadrado-integráveis
\mathbf{L}	Gradiente dos deslocamentos totais
L_k	Coordenadas naturais
l_c	Comprimento característico do meio contínuo não local
\mathbf{N}	Matriz das funções de forma
N_i	Função de forma relativa ao nó i do elemento
Nel	Número de elementos do domínio discretizado
\mathbf{n}, \mathbf{n}^r	Vetor normal unitário
\mathbf{P}	Primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff (N/m ²)
\mathbf{P}_e	Parte elástica de \mathbf{P} (N/m ²)
pg_n	Pontos de integração dos elementos (quadratura de Gauss)
\mathbf{R}	Vetor de forças desbalanceadas
$\mathbf{R}_{ext}, \mathbf{R}_{ext}^e$	Vetor de forças externas globais e no elemento e
$\mathbf{R}_{ext,Ref}$	Vetor de forças externas globais de referência ($\lambda = 1$)
$\mathbf{R}_{int}, \mathbf{R}_{int}^e$	Vetor de forças internas globais e no elemento e
\mathbf{R}_{int0}	Vetor de forças internas globais sem dano
\mathbf{r}	Vetor de deslocamentos nodais

Símbolo	Definição e unidade (S.I.)
\mathcal{S}	Subespaço de Hilbert das funções de aproximação
\mathbf{S}	Segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff (N/m ²)
\mathbf{S}_e	Parte elástica de \mathbf{S} (N/m ²)
S	Área total de seção transversal (m ²)
\tilde{S}	Área íntegra de seção transversal (m ²)
S_D	Área danificada de seção transversal (m ²)
\mathbf{T}	Tensor das tensões de Cauchy (N/m ²)
$\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{t}}^r$	Vetor de tensões superficiais prescritas (N/m ²)
t	Medida de tempo
\mathbf{u}	Vetor deslocamento (m)
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor deslocamento prescrito
$\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_{e1}, \mathbf{u}_{e2}$	Vetores de deslocamentos nodais do elemento e
u_p	Deslocamento prescrito para controle de deslocamentos
u_k	Deslocamento de grau de liberdade para controle de deslocamentos
\mathcal{V}	Subespaço de Hilbert das funções peso
V, V_A	Função volume da abordagem não-local no ponto A
\mathbf{w}	Funções peso no subespaço \mathcal{V}
w_{pg}	Pesos dos pontos de integração
\mathbf{x}, \mathbf{x}^r	Vetor posição
$\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_e^r$	Vetor posição dos nós do elemento e
$-\dot{Y}$	Taxa de dissipação de energia interna pela formação de dano

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Objetivo	12
1.2	Estrutura do Texto.....	13
1.3	Notação e Convenções Adotadas.....	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Considerações quanto à Mecânica do Dano	15
2.2	Considerações quanto à termodinâmica dos processos irreversíveis....	22
2.3	Validade da teoria e novas fronteiras.....	25
3	O PROBLEMA MECÂNICO.....	27
3.1	Cinemática e equações de equilíbrio do problema plano.....	27
3.2	Transformação termoelástica	31
3.1	Modelo Constitutivo de Ciarlet-Simo (CS)	35
3.2	Modelo Constitutivo de Kirchhoff - Saint Venant (KSV).....	38
3.3	Forma Fraca do problema estrutural	40
3.4	Consideração do Dano aplicado a materiais cimentícios.....	41
	Hipóteses do embasamento termodinâmico	41
	O modelo de dano de Mazars	43
3.5	Abordagem não local na Mecânica do Dano	51
3.6	Resolução pelo Método dos Elementos Finitos.....	58
	Elemento triangular T6 em coordenadas naturais	60
	Equilíbrio	61
	Avaliação da Matriz de Rigidez Tangente	65
	Primeiro Termo (f')	67
	Segundo Termo (η)	67
	Terceiro Termo (derivada da deformação equivalente não local)	68
3.7	Resolução do problema numérico.....	72

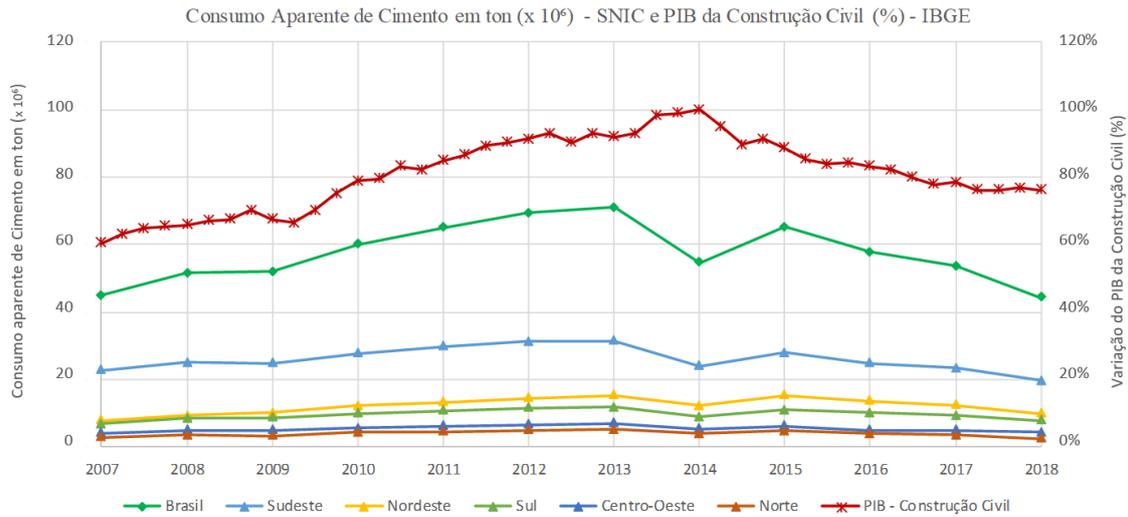
3.7.1	Método de Newton-Raphson com controle de carregamento.....	72
3.7.2	Método de Newton-Raphson com controle de deslocamentos.....	75
3.7.3	Método da corda	78
3.7.4	Outras abordagens.....	79
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	81
4.1	Avaliação dos materiais neo-Hookiano de Ciarlet-Simo e de Kirchhoff-Saint Venant	82
4.2	Flambagem elástica de estrutura biapoiada	84
4.3	Validação do método da corda com teste do pórtico de Lee (Lee's Frame benchmark test)	87
4.4	Equilíbrio de placa metálica sob efeito térmico.....	90
4.5	Flambagem termoelástica de parede biapoiada	93
4.6	Ensaio de viga à flexão a 4 pontos com dano	96
4.7	Ensaio de estrutura sob carregamentos externos e Dano.....	101
4.8	Ensaio de parede sob variação de temperatura com Dano.....	104
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	110
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	112
	ANEXO A – CÁLCULO DA DERIVAÇÃO DA DEFORMAÇÃO EQUIVALENTE PELOS TERMOS DE Ee	119

1 INTRODUÇÃO

Considera-se essencial o emprego de produtos e materiais de origem cimentícia dentro dos diversos sistemas construtivos que compõem as estruturas e obras da Engenharia Civil, não apenas no Brasil mas também no mundo todo. Diferentes sistemas construtivos que empregam esses materiais, como alvenaria estrutural, paredes de concreto e sistemas pré-moldados, por exemplo, estão em plena evolução tecnológica, visando à racionalização dos insumos e avanços na produtividade. Observa-se que o uso desse insumo, tanto pela indústria da Construção Civil quanto pelos consumidores finais, tem razoável correlação com o desenvolvimento do Produto Interno Bruto (PIB), sobretudo quando considerada a parcela da produção da Construção Civil. Devido a isso, é usual considerar o consumo de cimento como um dos “termômetros” da economia do país. A Figura 1 apresenta, neste contexto, o consumo aparente de cimento no Brasil entre os anos de 2007-2018 e a evolução do PIB da Construção Civil no mesmo período. Desde o uso da argamassa de assentamento, de reparo e do concreto no sistema estrutural de edificações, em pavimentos e obras de arte, até o uso de argamassas colantes e de rejuntamento nos sistemas de vedação e revestimento, os produtos cimentícios devem cumprir (em conjunto com os agregados, aditivos e água) uma variedade de propriedades específicas e requisitos que dependem de suas características mecânicas, físico-químicas, da composição e da função dentro dos sistemas construtivos que constituem. Essas propriedades são tanto relacionadas à trabalhabilidade do material fresco no momento da aplicação quanto ao desempenho à retração, aderência, permeabilidade e comportamento reológico em geral [1].

O concreto e a argamassa são em geral constituídos por um elemento aglomerante hidráulico (cimento *Portland* ou cal, para argamassas), água (formando a chamada pasta de cimento), agregados miúdos (areia) e, para o concreto, agregados graúdos (brita). Ainda há a possibilidade da utilização de aditivos químicos para melhorar a trabalhabilidade, reduzir ou reter água, incorporar ar, adicionar ação impermeabilizante, alterar propriedades elásticas, entre outros efeitos desejados. Há também a possibilidade de se reforçar a matriz do concreto e da argamassa com fibras sintéticas, metálicas e/ou naturais, de forma a se melhorar a distribuição de tensões, a resistência do material à tração e controlar a abertura de fissuras, por exemplo.

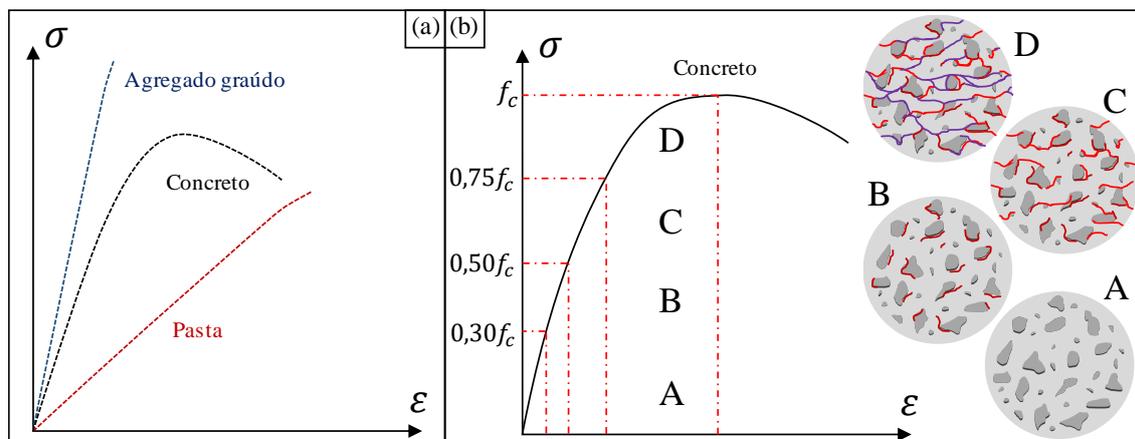
Figura 1 – Consumo aparente de cimento no Brasil e por regiões, e variação do PIB da Construção Civil, em valores relativos, com pico (100%) no 1º trimestre de 2014



Fonte: Dados do Sindicato Nacional da Indústria do Cimento - SNIC - e do IBGE.

Ensaaios de caracterização do comportamento da pasta de cimento endurecido, dos agregados graúdos e do concreto, como apresentado por Mehta e Monteiro [2], indicam as diferentes respostas que esses materiais apresentam sob ensaio de compressão. Isoladamente, a pasta de cimento e o agregado graúdo convencionais apresentam comportamento elástico-frágil até a sua ruptura. Já o concreto simples apresenta comportamento não linear intermediário entre seus materiais componentes, conforme ilustrado qualitativamente pela Figura 2 (a). O comportamento não linear do material pode ser relacionado ao mecanismo de formação e propagação de fissuras no concreto e na argamassa que partem, em geral, de vazios pré-formados e fissuras localizadas nas zonas de transição entre pasta e agregados [3]. Segundo Mehta e Monteiro [2] e com base na evolução das tensões e deformações mostradas na Figura 2 (b) em “faixas” apresentadas por Hanai [3], a rigidez inicial do concreto comprimido passa a ser afetada à medida que o crescimento dessas fissuras aumenta nas zonas de transição (para tensões de até $0,30f_c$, sendo f_c a resistência do concreto à compressão simples – faixa “A” da Figura 2 (b)), alterando o fluxo de tensões e, a partir de aproximadamente $0,50f_c$ (após a faixa “B” e na faixa “C”), o crescimento das microfissuras passa a atingir a matriz do concreto. A união dessas microfissuras na matriz do concreto diminui a rigidez do material e ocasiona instabilidade do sistema, sendo que a partir de $0,75f_c$ (faixa “D”) o sistema pode chegar à ruptura sob carregamento constante.

Figura 2 – (a) Relação tensão-deformação ($\sigma \times \varepsilon$) da pasta de cimento endurecida, do agregado graúdo (brita) e do concreto simples. (b) Evolução do comportamento do concreto sob compressão axial.

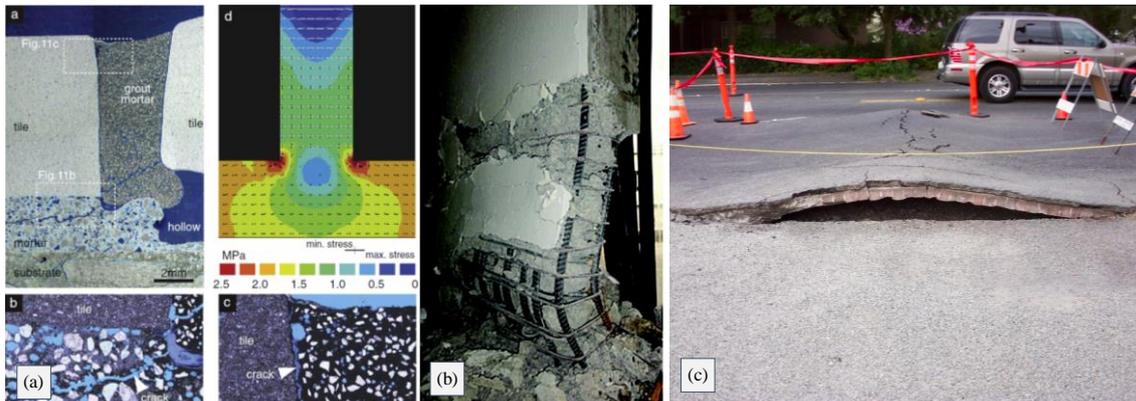


Fonte: Autoria própria, baseado em Glucklich, apud Mehta, Monteiro [2] e Hanai [3].

Não são somente carregamentos externos aplicados aos materiais cimentícios que podem provocar a degradação parcial ou total desses sistemas ao longo do tempo. Estados de tensão e deformação internos podem ser induzidos, por exemplo, pela retração inicial do material ainda em processo de cura, retração por secagem do material já endurecido, por variações térmicas (positivas e negativas) ou por fenômenos de fluência [4]. A compreensão da capacidade resistente e da evolução do dano interno nas argamassas e no concreto permitem que seja possível avaliar e dimensionar as estruturas e sistemas que recebem materiais cimentícios de modo a se minimizar os efeitos negativos que a fissuração e a degradação da rigidez do material podem ocasionar. Dentro deste cenário, o estudo desses processos e a evolução do dano de materiais cimentícios em geral (não apenas associados às estruturas de concreto) é de grande interesse para a Engenharia Civil. Por exemplo, a norma brasileira NBR 6118:2014 [5] prevê a verificação para o Estado Limite de Serviço de peças estruturais de concreto armado aos limites de aceitabilidade (relacionados pela norma à formação e abertura máxima de fissuras), de forma que essas estruturas possam apresentar fissuras sem gerar problemas de segurança, desconforto do usuário ou favorecer o surgimento de patologias. Muitos estudos podem ser citados no contexto da evolução de tensões e avaliação da capacidade resistente de materiais cimentícios, seja por meio de soluções experimentais, analíticas ou numéricas [6]–[11]. Apesar da divisão aqui feita, muitos desses estudos buscam correlacionar essas diferentes soluções, inclusive, como forma de validação dos modelos propostos. A Figura 3 apresenta alguns desses exemplos extraídos da literatura e demonstra a grande extensão desse assunto, desde a observação

do crescimento de fissuras em sistemas de revestimentos aderidos com adesivos à base de materiais cimentícios até observações dos fenômenos de fraturamento e lascamento do concreto na degradação total do sistema estrutural.

Figura 3 - Exemplos de degradação de materiais cimentícios e estruturas de concreto sob efeito de dano material, resultando em propagação de fissuras em sistema adesivo (a), falha estrutural e fraturamento (b) e instabilidade com grandes deslocamentos (c).



Fonte: Herwegh et al. [6], Elwood [12] e SDOT Photos [13], respectivamente.

Dentre os meios possíveis de se estudar o efeito da degradação dos materiais cimentícios, a aplicação de métodos numéricos por meio da mecânica computacional demonstrou ser uma opção robusta na resolução de problemas de meios contínuos e complexos, multidimensionais e associados a muitos graus de liberdade. A chamada Mecânica do Dano em Meios Contínuos (*Continuum Damage Mechanics*), um dos objetos de estudo deste trabalho, também demonstra sua virtude ao tratar satisfatoriamente muitos problemas de degradação de materiais dúcteis e frágeis (especialmente cimentícios, como será tratado neste texto) muitas vezes através de modelos simples e versáteis, porém, como citado por Zhang e Cai [14], sem perder a consistência esperada através de uma formulação baseada na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis. Além disso, oferece versatilidade aos pesquisadores para a adoção e calibração de diferentes relações constitutivas que devem reger o comportamento dos materiais modelados. Essa área de pesquisa ainda alimenta a Mecânica do Dano e é fonte de estudos até os dias atuais, contemplando a análise cada vez mais complexa do comportamento dos materiais.

Dentre as ações externas que podem implicar na transformação elástica em materiais cimentícios (podendo permitir, conseqüentemente, o surgimento e evolução do dano), este texto enfocará nas deformações causadas pelas variações de temperatura às quais

materiais e sistemas formados por materiais cimentícios podem estar submetidos, seja pelas variações térmicas usuais ou extremas ao longo do dia, em situações de incêndio ou em ambientes agressivos (como em indústrias, usinas e frigoríficos), por exemplo. Os efeitos de dano observados na Figura 3 (a) e Figura 3 (c), por exemplo, podem ter induzidos por deformações causadas por variações de temperatura. Neste contexto, cabe comentar que a proposta deste trabalho teve sua origem a partir de um projeto de pesquisa, sob suporte da Anfacer (Associação Nacional dos Fabricantes de Cerâmica para Revestimentos, Louças Sanitárias e Congêneres). O escopo deste projeto se embasa na análise do efeito das variações de temperatura, deformações de retração e expansão por umidade na durabilidade de sistemas aderidos de revestimentos cerâmicos de fachada, com artigo referente ao tema publicado na revista *Construction and Building Materials* [15]. A proposta de análise apresentada neste projeto de pesquisa motivou o desenvolvimento desta dissertação, preservada a distinção nos objetivos de ambos os trabalhos.

1.1 Objetivo

Como objetivo geral deste trabalho, o autor se propõe a apresentar, implementar e aplicar o Modelo clássico de Mazars da Mecânica do Dano em Meios Contínuos para a modelagem computacional de materiais cimentícios sob carregamentos mecânicos e térmicos.

Este modelo é adotado a partir das abordagens local e não local do campo de deformações equivalentes. Esta aplicação é dada por meio do desenvolvimento de um código computacional próprio, com rotinas desenvolvidas no programa *MATLAB*[®] e executadas a partir de pré-processamentos desenvolvidos pelo autor dentro do programa auxiliar *GiD*[®]. O pós-processamento dos resultados é avaliado nesses mesmos programas. O modelo de dano é introduzido no problema estrutural a partir de uma formulação geometricamente não linear que também contempla os efeitos térmicos e de eventuais deformações prescritas aplicadas ao domínio do problema. Restringe-se a problemas bidimensionais sob estado plano de deformação. Foge do escopo desse trabalho a resolução do problema de fluxo de calor, sendo que o campo de temperaturas do problema termoelástico é desacoplado do problema elástico e é considerado um dado de entrada do problema, conhecido ao longo de todo o desenvolvimento dos casos. A parcela elástica do comportamento do material é representada por meio dos modelos constitutivos hiperelásticos de Kirchhoff-Saint-Venant e neo-Hookiano de Ciarlet-Simo.

Esta formulação é tratada pela aplicação do Método dos Elementos Finitos com a discretização de modelos de domínio bidimensional. A solução do problema é realizada através da aplicação incremental em processos iterativos por meio do método de Newton-Raphson tradicional (considerando tanto o controle de carregamento quanto o de deslocamento) e do método da corda. Exemplos são desenvolvidos para ilustrar as diferentes aplicabilidades de que o código desenvolvido dispõe, bem como as vantagens, desvantagens e limitações das estratégias adotadas.

De forma menos específica, este trabalho também tem por objetivo complementar a apresentação e discussão de técnicas, abordagens e considerações que foram adotadas ao longo da construção do programa computacional em que se embasaram os estudos deste, apresentando as verificações e validações necessárias, bem como os problemas, as dificuldades e as limitações identificadas ao longo de seu desenvolvimento. Espera-se que possam servir para leitores e desenvolvedores de códigos interessados no assunto.

1.2 Estrutura do Texto

Considerando o exposto, este trabalho busca apresentar a formulação de um modelo clássico de Dano aplicado a problemas estruturais geometricamente não lineares e termoelásticos, restritos ao caso plano (estado plano de deformação). O capítulo 2 trata de uma fundamentação teórica acerca do tema deste trabalho, incluindo breve revisão bibliográfica, ao passo que também introduz os principais conceitos da Mecânica do Dano em Meios Contínuos, a partir de sua evolução desde o fim da década de 1950 até os dias atuais. O desenvolvimento da metodologia e da formulação do problema mecânico e termoelástico, a introdução das relações constitutivas consideradas, do modelo de dano (em suas abordagens local e não local) e a aplicação dos métodos numéricos são descritos no capítulo 3. O capítulo 4 apresenta exemplos resolvidos através do programa desenvolvido e o capítulo 5 apresenta as considerações finais do autor quanto às observações e conclusões obtidas no curso deste trabalho, bem como a avaliação de trabalhos futuros.

1.3 Notação e Convenções Adotadas

Nos próximos capítulos, a notação a ser utilizada (salvo quando indicado) faz uso de símbolos latinos e gregos em itálico (a , b , A , B , α , β , ...) para grandezas escalares; de letras minúsculas em negrito-itálico (\mathbf{a} , \mathbf{b} , ...) para vetores; e de letras maiúsculas em negrito-itálico (\mathbf{A} , \mathbf{B} , ...) para tensores de segunda ordem pertencentes ao espaço

Euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 (sendo este definido pela base ortonormal da geometria clássica formada pelos versores \mathbf{e}_i , com $i = 1, 2, 3$). O produto interno de dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} do espaço vetorial \mathbb{E}^3 , com $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T = u_i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T = v_i \mathbf{e}_i$ (utilizando a notação indicial de Einstein para a somatória), é denotado por $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = u_i v_i$. A norma associada ao produto interno de um vetor \mathbf{u} é $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. O produto interno entre versores da base pode ser generalizado por $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} denominado delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$ caso contrário). O produto vetorial entre dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} do espaço vetorial \mathbb{E}^3 é denotado por $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = u_i v_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$, sendo ϵ_{ijk} o símbolo de permutação cíclica de Levi-Civita em que

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se em } \{i, j, k\} \text{ for feito um número par de permutações;} \\ -1 & \text{se em } \{i, j, k\} \text{ for feito um número ímpar de permutações;} \\ 0 & \text{se } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \end{cases} \end{aligned}$$

(deste modo, tem-se que $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = 1$).

Por fim, o produto diádico entre dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} do espaço vetorial \mathbb{E}^3 equivale a $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Demais definições e hipóteses adotadas serão indicadas e retomadas quando necessário, ao longo do texto.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação apresentada neste texto tem como enfoque introduzir a evolução da mecânica do dano a respeito das suas diversas abordagens, formulações e demais entendimentos. A partir desse contexto, este capítulo é aproveitado para também enunciar e tratar dos principais conceitos em que se pautam a Mecânica do Dano em Meios Contínuos, sobretudo avaliada através de métodos computacionais. São comentadas também outras questões inerentes às demais abordagens consideradas no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Considerações quanto à Mecânica do Dano

Parcela expressiva das referências em Mecânica do Dano atribuem as primeiras considerações feitas nessa área aos trabalhos desenvolvidos por L. M. Kachanov e Y. N. Rabotnov. Soviéticos contemporâneos, ambos pesquisadores se dedicaram a partir da década de 1950 ao estudo de deformações em metais por fluência sob alta temperatura. Kachanov (em artigo com versão traduzida em [16]) e Rabotnov [17] apresentaram conceitos semelhantes para caracterizar a evolução de um parâmetro contínuo de dano material (nomeados por parâmetro de continuidade, ψ , e de fragilização, ω , respectivamente), ambos relativos à formação progressiva de microfissuras e amolecimento do metal, antes de sua ruptura, e voltada à caracterização do fenômeno observado em ensaios unidimensionais. Os parâmetros de continuidade, fragilização e de dano escalar (que será empregado nesse texto), D , se relacionam de forma que

$$(\psi)_{Kachanov} \approx (1 - \omega)_{Rabotnov} = (1 - D), \quad (2.1)$$

sendo válido que os possíveis valores de ω e D pertencem ao intervalo de 0 a 1, em que o material íntegro terá $D = 0$, enquanto o danificado apresentará $D \rightarrow 1$ na região de falha total. Anteriormente a esses estudos, é notória também a contribuição de Griffith [18], ainda na década de 1920, quanto à análise do surgimento e evolução de fraturas discretas em peças metálicas, relacionando parâmetros geométricos da fratura à energia dissipada pela formação da mesma. Seu artigo é considerado a fundação da Mecânica da Fratura, outra abordagem, tal qual a Mecânica do Dano, relacionada à avaliação do comportamento de materiais sob falha.

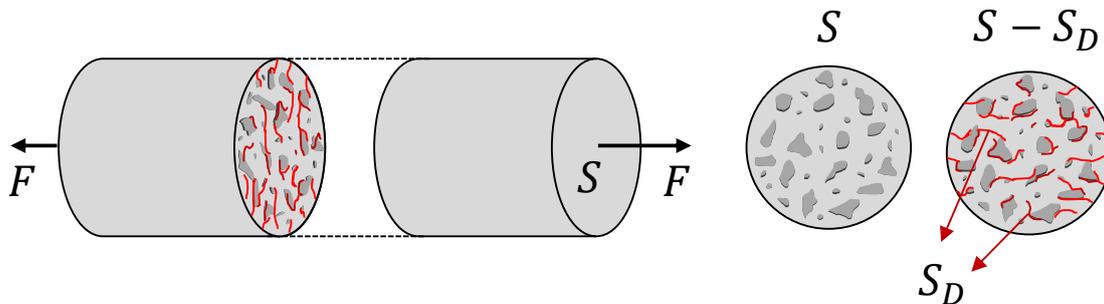
Considerando inicialmente o fenômeno de danificação observado em corpos submetidos a ensaios unidimensionais (como apresentado na Figura 2), a Figura 4 introduz a

representação de um corpo de prova solicitado uniaxialmente à tração por uma força F e que, danificado, apresenta uma seção íntegra (aquela que efetivamente resiste à força externa aplicada) equivalente a $\tilde{S} = S - S_D$ (sendo S a área inicial total da seção e S_D a área equivalente aos espaços internos formados pelas microfissuras e vazios, em uma certa seção transversal da mesma, sendo que $0 \leq S_D \leq S$); então, a variável interna de dano pode ser relacionada neste contexto à razão entre a área danificada e a área íntegra inicial, de modo que $D = S_D/S$. A partir da descrição da fragilização do material, os trabalhos de Kachanov e Rabotnov introduziram com essa relação o conceito de tensão efetiva, dado por $\tilde{\sigma}$, que relaciona o parâmetro de dano à perda de área íntegra capaz de resistir ao fluxo de tensões aparentes σ aplicado (por F , por exemplo, tal que $\sigma = F/S$), de forma que

$$\tilde{\sigma} = F/(S - S_D) = \sigma/(1 - D). \quad (2.2)$$

Em outras palavras, supondo que essas tensões apresentadas se deem de forma constante ao longo da seção transversal do corpo, a tensão efetiva é aquela que de fato internamente solicita as áreas íntegras do corpo de prova analisado, dentro da análise uniaxial considerada, sendo que necessariamente $\tilde{\sigma} \geq \sigma$.

Figura 4 – Representação da mudança de área resistente pela degradação progressiva em barra sob ensaio uniaxial de tração.



Fonte: Autoria própria, baseado na figura 1.10 de Lemaitre [19].

Dada a dificuldade de se avaliar a formação da área danificada S_D , da geometria dos vazios e de sua distribuição (visto que esta é formada por inúmeros defeitos, descolamentos e escorregamentos entre grãos ou planos da estrutura cristalina na escala microscópica), Lemaitre e Chaboche introduziram em 1971 (apud [19], [20]) o Princípio da Equivalência de Deformações, em que se enuncia (conforme [19]) que

“Any strain constitutive equation for a damaged material may be derived in the same way as for a virgin material except that the usual stress is replaced by the effective stress.”

Assim, este princípio parte da hipótese de que as deformações elásticas sob efeito de dano do material são sempre relativas às tensões efetivas, e não às tensões ditas reais aplicadas na macroescala do problema (tensões aparentes), que são equivalentes apenas como material íntegro. A hipótese se estabelece na consideração de que um volume danificado por microfissuras (na escala microscópica) não afeta as relações constitutivas dos volumes a ele contíguos, sendo válida na extensão macroscópica a aplicação das mesmas relações constitutivas a ambos os volumes (danificado e íntegro), se descritas a partir das tensões efetivas, que devem resultar na utilização de uma única relação para a avaliação do estado de tensão de todo o sólido. Por exemplo, partindo da relação constitutiva \mathfrak{F} que descreva o material íntegro, $\varepsilon = \mathfrak{F}(\sigma, \dots)$, esta mesma relação pode ser aplicada de modo que $\varepsilon = \mathfrak{F}(\tilde{\sigma}(D), \dots)$. Também é possível estabelecer alternativamente a relação elástica entre deformação ε e tensões efetivas pela avaliação do dano atuando sobre os parâmetros constitutivos do material, como o módulo de elasticidade E .

$$\varepsilon = \mathfrak{F}(\tilde{\sigma}(D), \dots) = \frac{\sigma}{E(1-D)} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}}, \quad (2.3)$$

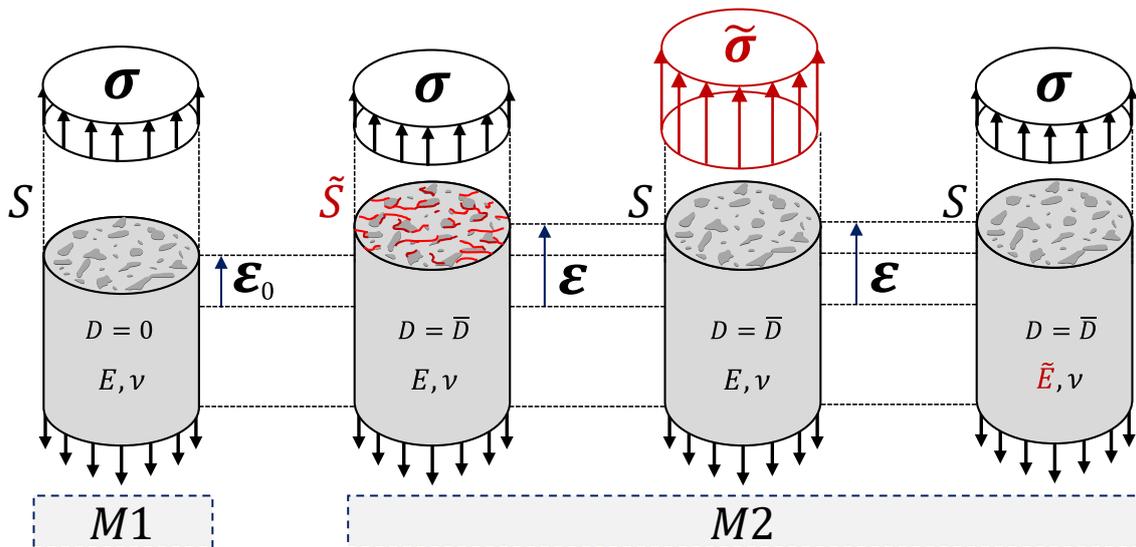
onde $\tilde{E} = E(1 - D)$.

Outras abordagens deste problema consideram, por exemplo, ao invés da adoção do Princípio da Equivalência de Deformações associado ao conceito de tensões efetivas, modelos de dano baseados em formulações sob o Princípio da Equivalência de Energia, baseado em noções de deformações e tensões efetivas (introduzido por Cordebois e Sidoroff [21]). Grammenoudis et al. [22] apresenta e relaciona essas abordagens. Também foi introduzido por Simo e Ju [23], [24] o Princípio da Equivalência de Tensões associado ao conceito de deformações efetivas. Este texto dará especial enfoque às relações inerentes ao primeiro princípio apresentado.

A Figura 5 busca ilustrar a hipótese da equivalência de deformações e a relação apresentada na equação (2.3) com base em um corpo de prova sob efeito de tensões uniaxiais e a resposta de deformações esperada. Considerando um material hipotético

“M1” não suscetível ao dano, e outro material “M2” que apresenta um certo dano positivo $D = \bar{D}$ satisfazendo $0 < \bar{D} < 1$ (com redução de área resistente e que deve ter deformações maiores para a mesma força externa aplicada em “M1”), é possível relacionar esse comportamento do material “M2” àquele do material íntegro, desde que a tensão efetiva aplicada seja igual a $\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - \bar{D})$ (ou seja, maior que a aplicada em M1) ou, alternativamente, o módulo de elasticidade efetivo do material “M2” seja equivalente a $\tilde{E} = E(1 - \bar{D})$. Observa-se que, em acordo com o princípio da equivalência de deformações, a mesma relação constitutiva deve poder descrever todas as quatro representações da Figura 5, considerando a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ aplicada no lugar da tensão aparente σ e as diferentes abordagens discutidas para “M2”.

Figura 5 - Aplicação dos conceitos de tensão efetiva e do princípio de equivalência das deformações para exemplo simplificado uniaxial.



Fonte: Autoria própria, baseado em Lee et al [25]

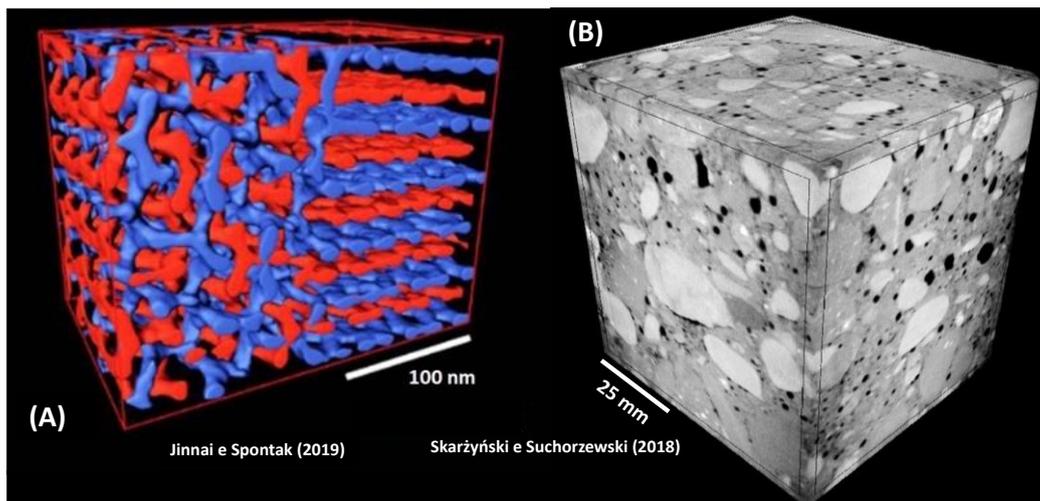
Nota-se que, tratando da extensão e aplicação das hipóteses até agora apresentadas para casos uniaxiais a sistemas multiaxiais que representem constitutivamente materiais cimentícios, implicações relacionadas à continuidade deste meio não são desprezíveis e devem ser abordadas com cautela. A associação de um parâmetro válido para representar o dano em um meio contínuo deve ser capaz de associar consistentemente uma região heterogênea na escala microscópica (caracterizada por exemplo pelas diferentes propriedades dos materiais que compõem o sistema do concreto/argamassa, seus vazios e microfissuras já existentes) a uma descrição macroscópica do problema, na qual esses defeitos possam ser convenientemente tratados como regulares e

homogêneos, sem que se perca o rigor na representação do meio. Para tanto, uma representação válida deve estar relacionada a um volume que seja suficientemente grande para que a homogeneização do meio seja uma hipótese razoável, e suficientemente pequena para que os parâmetros homogeneizados avaliados internamente a esse volume (como deformações, tensões e o próprio parâmetro de dano) sejam representativos quanto aos respectivos fenômenos considerados, evitando perda de informações em regiões que apresentem grandes gradientes, por exemplo. Na literatura, este volume é denotado Volume Elementar Representativo efetivo (VER ou REV – *Representative Elementary Volume*). Em metais, polímeros ou outros materiais com propriedades cristalinas ou distribuição espacial mais bem definidas e regulares, a definição de um VER geralmente resulta em volumes pequenos (da ordem de décimos de milímetros a milímetros para metais, alguns compósitos e polímeros [19]). É usual a avaliação do VER de um novo material, sistema ou compósito através da aplicação de métodos não destrutivos como a microtomografia em raio-x ou ultrassonografia, entre outras, conforme apresentado no trabalho de Chung et al. [26]. O emprego dessas técnicas é importante para a correta definição do VER em materiais complexos como o concreto (porosos e caracterizados pelas irregularidades causadas por inclusões aleatórias de agregados e vazios na matriz do sistema), rochas e outros compósitos naturais ou artificiais. A Figura 6 apresenta o resultado de microtomografias computadorizadas para dois materiais distintos: um polímero e um concreto convencional. As escalas permitem facilmente observar a diferença entre as extensões necessárias para que a representação desses meios possa ser considerada “regular”. No caso do polímero apresentado na Figura 6 (A), observa-se que a escala apresentada (em nm) é bem menor que a do concreto (em mm), sendo visível em (B) os agregados graúdos, a matriz do concreto e a presença de diversos vazios internos. Para que possa ser representado como um meio contínuo, o polímero precisa estar em uma escala maior que a apresentada em (A) (conforme mencionado em [19] e acima, da ordem de milímetros), porém ainda assim esta escala deverá ser bem menor que aquela que é considerada apropriada para a representação do concreto.

De forma geral, a dimensão do volume a ser considerado para o VER deve depender da escala dos componentes do material ou compósito. Segundo Lemaitre [19], por exemplo, o volume representativo do concreto tem ordem de grandeza 10^6 mm^3 (cubo de lado 100 mm), enquanto a argamassa, por sua maior homogeneidade e ausência de

agregado graúdo, pode ser representada por volumes da ordem de 1 mm^3 ou mais (o que deve depender também da quantidade, padrão e distribuição de vazios internos). Assim, essa dimensão é uma das referências para se considerar estatisticamente válida a simplificação de representação na escala macroscópica do problema, para a hipótese de continuidade do campo de dano e homogeneização do meio.

Figura 6 – Diferentes resultados de microtomografias computadorizadas para (A) – polímero e (B) – concreto, com escalas para referência.



Fonte: Adaptado de Jinnai e Spontak [27] e Skarżyński e Suchorzewski [28].

Diversos trabalhos relevantes foram desenvolvidos a partir das décadas de 1960 e 1970 para explorar a mecânica relacionada à evolução do dano e seus modelos constitutivos, representar o dano associado a materiais dúcteis na plastificação, fadiga e fluência e, posteriormente, modelos também foram desenvolvidos para representar o dano em materiais frágeis e quase-frágeis, sobretudo a partir dos anos 1980. Deste período se destacam os trabalhos desenvolvidos na França, com Chaboche [29] e Lemaitre [30], [31], entre outros. O segundo período já traz, por exemplo, as contribuições de Løland [32], com um dos primeiros trabalhos de avaliação da evolução da relação tensão-deformação em ensaios uniaxiais de concreto a partir de um modelo semi-empírico de dano, além dos estudos liderados por Krajcinovic [33]–[37], Mazars [38]–[42], Ju [9], [23], [24], [43], [44], entre muitos outros.

As formulações baseadas no comportamento macroscópico do concreto e demais materiais cimentícios, representando-os como materiais contínuos e homogêneos (a partir da definição de seu volume representativo elementar, conforme tratado por Hill [45]), partiram inicialmente de análises empíricas e analíticas, em geral limitadas a

problemas unidimensionais e derivadas das relações de tensão e deformação dos materiais, confrontadas e validadas por meio de ensaios físicos. Conforme indicam Ju [44] e Krajcinovic [37], a Mecânica do Dano evoluiu a partir da aproximação das propriedades materiais constitutivas por meio de modelos micromecânicos ou fenomenológicos. Enquanto os modelos micromecânicos introduziam o problema macroscópico como uma extensão natural do problema microscópico, avaliando os fenômenos físicos na menor escala e homogeneizando-os na escala macroscópica, os modelos fenomenológicos permitiram introduzir o parâmetro de dano como variável interna, partindo indiretamente do conhecimento da micromecânica do material. Assim, visando a representar de forma coerente a nucleação e a cinemática de propagação das microfissuras (discretas em nível microscópico) para a representação dos defeitos em meio contínuo a descrição macroscópica do problema baseada em modelos fenomenológicos torna-se, em geral, menos dispendiosa do que a análise microscópica dos fenômenos a partir de modelos micromecânicos, sobretudo do ponto de vista da aplicação computacional (ver Lee [25]). Nesse sentido, é importante também contextualizar a distinção de microfissura e fratura, que se dão em escalas distintas. Enquanto a microfissura pode usualmente ser descrita de forma homogeneizada e contínua da mesoescala, a fatura é discreta nesta escala e diferentes abordagens (através da aplicação da Mecânica da Fratura, por exemplo) são necessárias. Com relação às escalas que permeiam essas análises, Lemaitre [19] sugere que a:

- Microescala é a escala dos mecanismos físicos que permitem considerar deformações e dano, discretamente;
- Mesoescala é a escala na qual são formuladas as relações constitutivas e é a escala na qual se observa a iniciação do fraturamento do material;
- Macroescala é a escala das estruturas de engenharia.

Para melhor embasar os modelos fenomenológicos, Lemaitre também indicou que, sobretudo a partir da década de 1980, a teoria que envolve a mecânica do dano passou a considerar mais rigorosamente os conceitos termodinâmicos, por meio de formulações e modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis [20]. Essa abordagem permitiu a extensão do problema isótropo uniaxial para uma análise consistente de casos multiaxiais.

O conceito do VER permite também embasar a conceituação e aplicação das abordagens não locais das variáveis dos modelos para tratar de problemas de localização do dano [46], que é usual após o início do trecho descendente da relação tensão-deformação (ou, numericamente falando, a partir da matriz de rigidez tangente deixar de ser positivo-definida). Dentre os trabalhos que abordam este tema, têm destaque as contribuições de Pijaudier-Cabot e Bazant [47], [48], Jirásek [49], [50], autores que abordam diferentes técnicas para mapeamento da região não local, como Barros [51], Pouplana e Oñate [52] e Rastiello et al. [53], além de outras referências consultadas [54]–[57].

2.2 Considerações quanto à termodinâmica dos processos irreversíveis

Observada a necessidade de fundamentação do modelo de evolução do dano para garantir consistência quanto à termodinâmica de processos irreversíveis, são então apresentadas as hipóteses que permeiam esta abordagem. Partindo inicialmente de um material isótropo e elástico linear sob linearidade geométrica, válida em problemas caracterizados por pequenas deformações e deslocamentos, e se valendo do conceito de tensão efetiva apresentado em (2.2), o parâmetro de dano isótropo descrito pelo escalar D no meio contínuo pode ser avaliado como uma variável de estado termodinâmica expressa a partir da parcela elástica do potencial de energia livre termodinâmico $\psi_e = \hat{\psi}_e(\mathbf{E}_e, D, \theta)$, onde \mathbf{E}_e é o tensor das deformações usual (sob linearidade geométrica), sendo o índice subscrito \mathbf{e} relativo à parcela elástica das deformações, e θ a temperatura. Admitindo a relação de dependência linear entre ψ_e e D (clássica da Mecânica do Dano, partindo do Princípio de Equivalência das Deformações), tem-se que

$$\rho\psi_e = \frac{(1-D)}{2} \mathbf{C} \mathbf{E}_e : \mathbf{E}_e \quad (2.4)$$

sendo ρ a massa específica do volume e \mathbf{C} o tensor constitutivo elástico de quarta ordem. Cabe ressaltar que existem outras relações de dependência entre ψ_e e D , a depender das hipóteses tratadas. Por exemplo, através da consideração do Princípio da Equivalência de Energia, ter-se-ia que $\tilde{E} = E(1-D)^2$ (ver Hansen e Schreyer [58] e Li [59]), resultando em uma relação quadrática visto que tanto as deformações quanto as tensões assumem valores efetivos.

A deformação total \mathbf{E} é a variável observável do problema e é dada, na hipótese de linearidade geométrica, por $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_e + \alpha\Delta\theta\mathbf{I})$, sendo α o coeficiente de dilatação térmica do material, $\Delta\theta = \theta - \theta^r$ a variação de temperatura a partir da temperatura de referência θ^r , e \mathbf{I} a matriz identidade. Desse potencial se obtém a relação constitutiva do problema linear sob dano através da derivação

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} = (1 - D)\mathbf{C}\mathbf{E}_e = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{E}_e \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \left(\frac{1}{1 - D} \right) \mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{E}_e \quad (2.5)$$

sendo \mathbf{T} o tensor das tensões de Cauchy. Observa-se que a relação acima faz a correspondência com relação a $\tilde{\mathbf{E}}$ explicitada em (2.3) para o exemplo uniaxial, sendo \mathbf{C} equivalente a E (e $\tilde{\mathbf{C}}$ a \tilde{E}) neste caso.

Parte-se então para a descrição destes parâmetros no tempo, com a avaliação das transformações regidas através dos princípios determinísticos (onde o resultado observável em um certo instante é diretamente associado ao histórico do movimento ao longo dos instantes anteriores). A variável termodinâmica energeticamente conjugada à evolução do dano no potencial ao longo deste histórico é definida pela derivação da energia de deformação do material com relação ao dano. Assim, essa variável, dita taxa de dissipação de energia interna pela formação de dano, $-Y$, se define por

$$-Y = -\frac{\partial \rho \psi_e}{\partial D} = \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{E}_e : \mathbf{E}_e \quad (2.6)$$

em que se observa que o termo $-Y$ (usualmente associado ao sinal de negativo por ser referente à variação de energia perdida para o crescimento do dano) deve assumir sempre valor positivo pois $\mathbf{C}\mathbf{E}_e : \mathbf{E}_e$ é uma função quadrática positiva devido às propriedades de \mathbf{C} e \mathbf{E}_e .

A variação temporal da dissipação de energia interna deve ser positiva de modo a se respeitar a 2ª Lei da Termodinâmica, que assume que a energia dissipada pela formação de dano (dentro do contexto de processos irreversíveis) não deve ser recuperada (se S_T é a entropia por unidade de volume do sistema, então $\dot{S}_T \geq 0$ para um problema sem fluxo térmico [60]). Assim, escrevendo essa lei através da desigualdade de Clausius-Duhem, e já desconsiderando as parcelas devidas ao fluxo térmico e à dissipação plástica, tem-se que a dissipação de energia interna \mathfrak{D}_{int} equivale a

$$\mathfrak{D}_{int} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}_e - \rho \dot{\psi}_e \geq 0. \quad (2.7)$$

Considerando que

$$\rho \dot{\psi}_e = \frac{\partial \rho \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \rho \psi_e}{\partial D} \dot{D} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}_e + Y \dot{D}, \quad (2.8)$$

então tem-se que, aplicando (2.8) em (2.7),

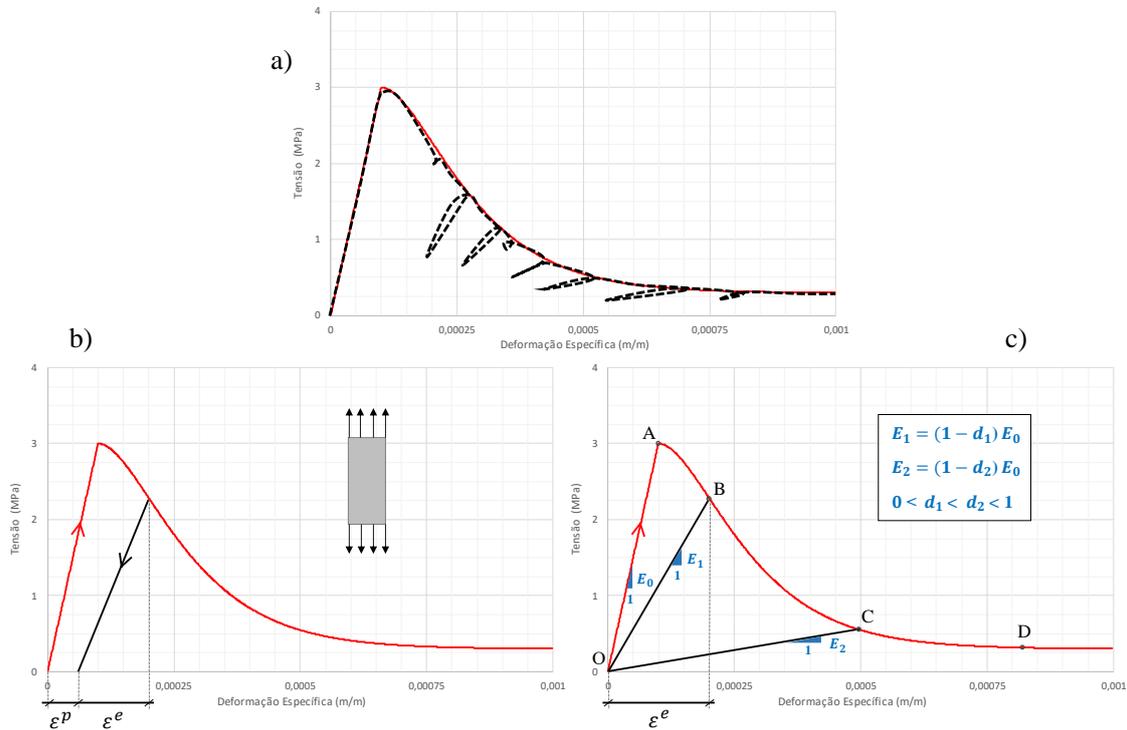
$$-Y \dot{D} \geq 0. \quad (2.9)$$

Como vale que $-Y \geq 0$, então a taxa de dano deve obrigatoriamente variar positivamente, isto é, $\dot{D} \geq 0$, de modo a respeitar o balanço entre energia interna e dissipada do sistema ao longo do processo de degradação. Esse critério pode ser bem ilustrado pela curva de evolução da tensão de tração pela deformação observada nas representações do fenômeno indicado na Figura 7, que apresenta as curvas do resultado experimental (a) e dos modelos idealizados, considerando dano associado à elastoplasticidade (b), caracterizada por deformações residuais no descarregamento, e dano associado à elasticidade (c), caracterizado pelo retorno ao estado inicial no descarregamento. Nesta simplificação, existe no retorno ao estado inicial o fechamento completo dos vazios e microfissuras associadas ao crescimento do dano. Além disso, nos recarregamentos (considerando, por exemplo, os caminhos OABO, OBCO e OCD da Figura 7 (c), o dano à tração avaliado sempre será maior ou igual ao máximo dano do histórico de evolução).

Dentro do contexto da Mecânica da Fratura, a variável interna $-Y$ pode ser correlacionada à taxa de liberação de energia elástica G (como apresentado por Faria et al. [61]), pela qual a energia interna do sistema é perdida pela formação e crescimento da fratura.

Ao longo do desenvolvimento da formulação a ser considerada nesta dissertação, serão apresentadas as hipóteses que são extensão das apresentadas nesse item, quando consideradas as relações de não linearidade geométrica, preservadas as características de pequenas deformações do problema proposto.

Figura 7 - Comportamento do concreto em ensaio de tração simples. a) Resultado experimental. b) Modelo idealizado. c) Modelo idealizado simplificado.



Fonte: Autoria própria.

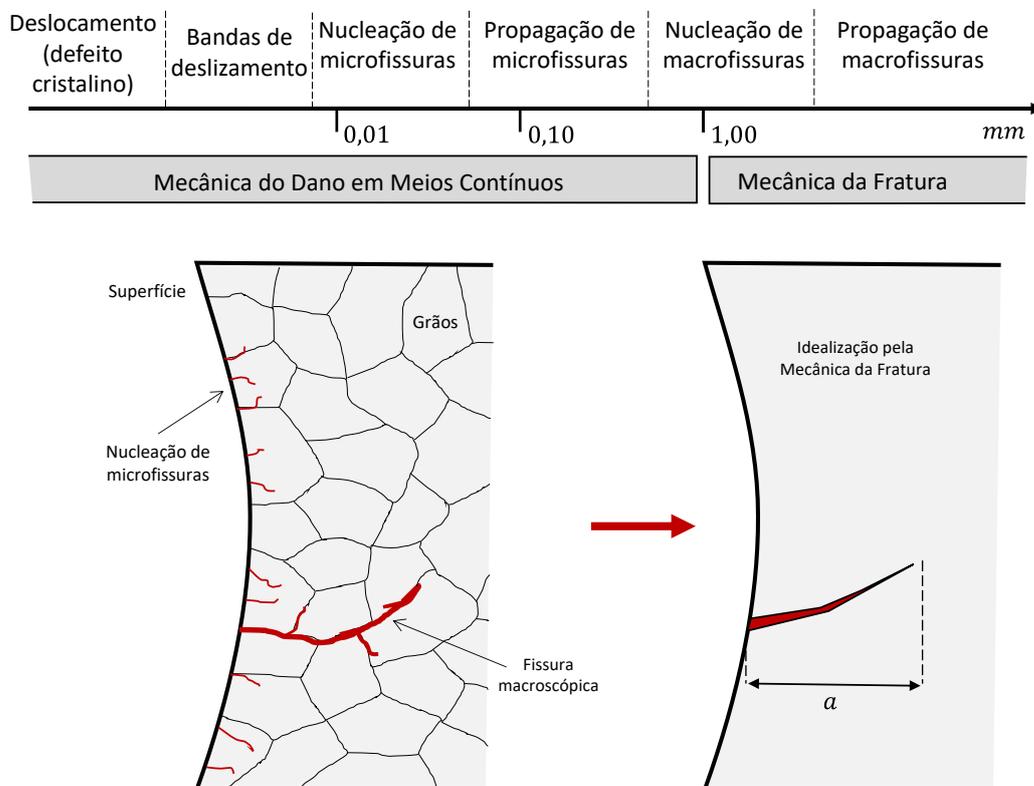
2.3 Validade da teoria e novas fronteiras

O limite de validade da Mecânica do Dano aqui discutida pela formulação elástica apresentada, considerando um parâmetro de dano escalar e isótropo, relaciona-se à dependência da hipótese de distribuição aleatória de microdefeitos, não apenas em intensidade (com relação à homogeneidade da densidade de defeitos em um certo volume) mas também em relação à direção dos planos de clivagem (não havendo planos preferenciais de formação de fissuras). A abordagem adotada da representação constitutiva do concreto através da elasticidade linear (sem consideração de plastificação ou fluência, por exemplo) pode ser considerada uma forte simplificação, conforme apresentado na diferença de respostas esperadas entre as curvas na Figura 7 (b) e (c). Hipóteses e abordagens mais robustas podem ser consideradas, que contemplem anisotropia dos parâmetros do material ou do dano, como os apresentados em [25], [43], [44], [62], [63] (sendo a anisotropia do dano representada através da variável de dano \mathbf{D} como um tensor de segunda ou quarta ordem), e a fratura no contexto da Mecânica da Fratura. A Figura 8, adaptada de representações do trabalho de Chaboche [29], apresenta a evolução das fissurações até o surgimento de fraturas

discretas, caracterizando o limite do domínio da Mecânica do Dano para o da Fratura, limiar a partir do qual a Mecânica do Dano em Meios Contínuos deixa de ser adequadamente representativa, dada a formação de falhas discretas bem definidas na escala macroscópica.

Os modelos de dano empregados em materiais cimentícios podem também contemplar o efeito termoelástico [64], [65], o efeito elastoplástico do concreto dentro do contexto das aplicações em Mecânica do Dano [9], [66]–[68], buscando reproduzir melhor a reologia do concreto simplificadamente mostrada pela Figura 7 (b). Vale também indicar, dentro da avaliação da Mecânica do Dano voltada a materiais cimentícios, diferentes abordagens já feitas, com relação ao modelo termodinâmico simplificado apresentado por Mazars, adaptado para melhor representar o efeito de carregamentos cíclicos e efeitos unilaterais, anisótropos ou não locais [40], [41], [69]–[71], vistos por diversos trabalhos e linhas de pesquisa com diferentes abordagens e representações desses mesmos fenômenos [36], [61], [66], [72]–[75], entre outros.

Figura 8 - Representação do limiar entre a faixa de degradação bem representada pela Mecânica do Dano (nucleação e propagação de microfissuras) e a faixa representada pela Mecânica da Fratura (surgimento e propagação de fraturas macroscópicas discretas, ou macrofissuras).



Fonte: Adaptado de Chaboche [20]

3 O PROBLEMA MECÂNICO

Os itens e subitens a seguir apresentam o conjunto de ferramentas e conceitos da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, introduzindo a cinemática do problema de forma exata (sem aproximações geométricas), o problema termoelástico associado, a consideração do dano descrito em meio contínuo segundo o modelo de Mazars, a abordagem não local do campo das deformações associada à estratégia de não localização dos danos e a discretização do problema no espaço em elementos finitos. Como já mencionado, serão abordados apenas problemas planos neste trabalho (estado plano de deformações), e as simplificações que essa consideração permite serão tratadas ao longo da formulação. Esta será aplicada considerando o modelo constitutivo baseado no material neo-Hookiano de Ciarlet-Simo (CS) e no material de Kirchhoff-Saint-Venant (KSV), sendo que ambos apresentam comportamento não linear. A formulação e o desenvolvimento do problema estático apresentados seguem essencialmente os trabalhos apresentados por Pimenta [76] em seu livro-texto e a tese de Gomes [77], enquanto a resolução do problema numérico associado é embasada nos textos de Pimenta [76], Crisfield [78] e Parente et al. [79].

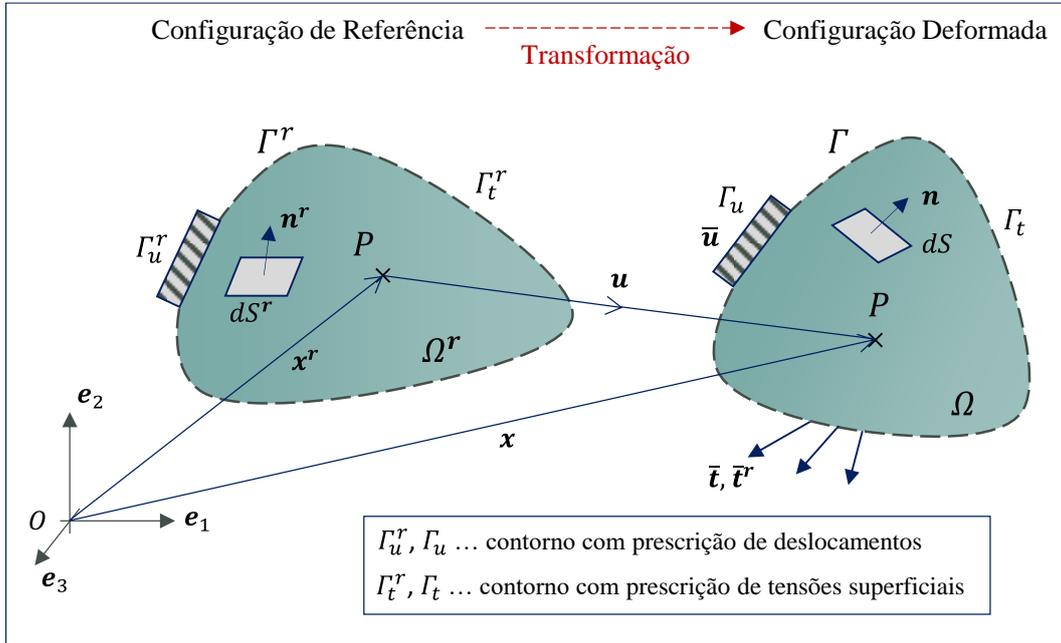
3.1 Cinemática e equações de equilíbrio do problema plano

Seja um sólido tridimensional definido por um conjunto de pontos que ocupam uma região finita Ω do espaço Euclidiano \mathbb{E}^3 em um instante qualquer. A posição dos pontos que formam o sólido no instante de tempo $t = 0$ determina a sua configuração de referência na região Ω^r (neste trabalho, o índice sobrescrito r é utilizado para denotar grandezas e parâmetros na configuração de referência). O contorno do sólido no instante qualquer é definido pela superfície Γ (sendo Γ^r na configuração de referência). Um ponto P qualquer pode ser inicialmente descrito pelo seu vetor posição (na configuração de referência), aqui chamado de \mathbf{x}^r , que avalia a posição de P em relação à origem do sistema de coordenadas considerado (ponto O), a partir de uma descrição Lagrangiana total. A configuração deformada do sólido pode ser descrita pelo campo de deslocamentos relativo às configurações inicial e final. O vetor deslocamento do ponto P entre a configuração de referência e a atual é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^r, \quad (3.10)$$

sendo \mathbf{x} o vetor posição de P na configuração deformada, conforme apresentado na Figura 9.

Figura 9 - Configurações de referência e deformada de um sólido.



Fonte: Autoria Própria

O gradiente dos deslocamentos \mathbf{L} é definido pela derivada espacial do vetor de deslocamentos \mathbf{u} com relação à posição do ponto na configuração de referência, como segue:

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^r} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^r} - \mathbf{I} = \mathbf{F} - \mathbf{I}, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{I} é matriz identidade e \mathbf{F} é o gradiente das deformações. O tensor \mathbf{F} relaciona a deformação total de uma fibra entre as configurações de referência e atual. Os tensores \mathbf{L} e \mathbf{F} podem ser escritos em função de seus vetores-coluna, de modo a simplificar a notação, valendo então para a base ortonormal \mathbf{e}_i do sistema de referência que

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\gamma}_i \otimes \mathbf{e}_i = [\boldsymbol{\gamma}_1 \boldsymbol{\gamma}_2 \boldsymbol{\gamma}_3] \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i = [\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3]. \quad (3.12)$$

Além dos tensores \mathbf{L} e \mathbf{F} , ainda pode ser introduzido o tensor das deformações de Green-Lagrange, denotado por

$$\mathbf{E} = 1/2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (3.13)$$

Escrito em vetores colunas ξ_i , o tensor \mathbf{E} pode ser avaliado através de

$$\mathbf{E} = \xi_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \xi_i = 1/2 [(\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j) \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i]. \quad (3.14)$$

A Figura 9 também apresenta a divisão do contorno Γ^r entre a parte na qual são prescritos os deslocamentos (em que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$), denotada por Γ_u^r , e a parte na qual as tensões superficiais $\bar{\mathbf{t}}$ são conhecidas, denotada por Γ_t^r . Como se observa, a prescrição de deslocamentos ou forças de superfície no contorno do problema é indicada pela barra sobrescrita $\bar{\quad}$. As partes Γ_u^r e Γ_t^r do contorno referem-se, respectivamente, às condições de contorno de *Dirichlet* (essencial) e de *Neumann* (natural) no contexto do problema estrutural proposto.

Para os problemas de estado plano de deformação, tais quais aqueles que serão desenvolvidos nos exemplos explorados nesse texto, vale a imposição de que

$$\boldsymbol{\gamma}_3 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (3.15)$$

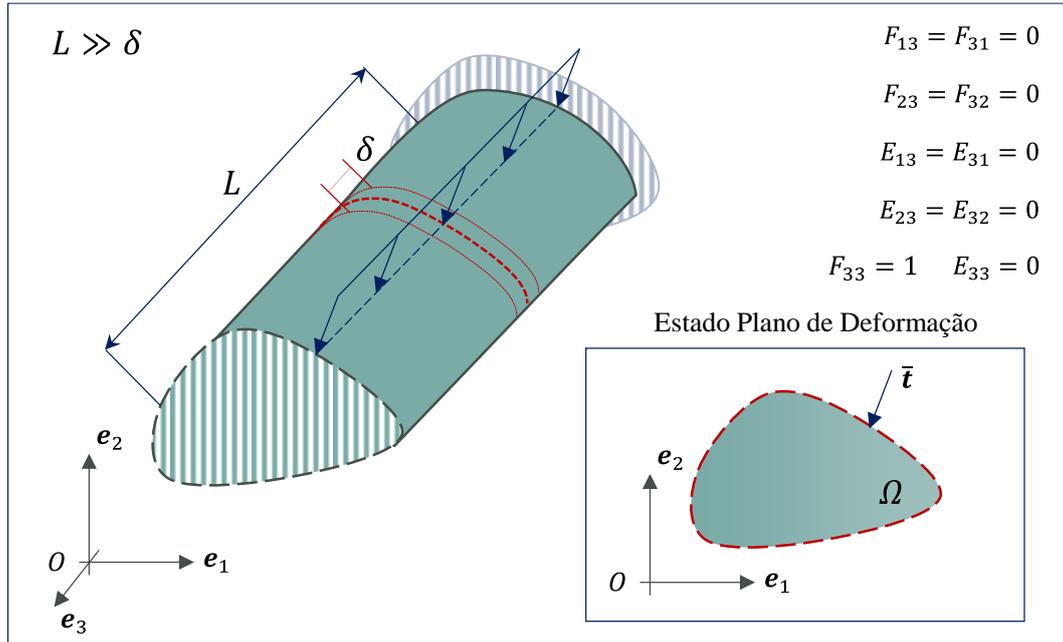
dado que o versor \mathbf{e}_3 será sempre considerado, na formulação adiante, como o vetor normal ao estado plano. A

Figura 10 ilustra a consideração do estado plano de deformação, com a representação de um corpo alongado de seção constante, de comprimento L , e uma seção intermediária, de espessura δ , usualmente unitária, sendo $L \gg \delta$. Nesta hipótese, o corpo não deve estar submetido a nenhum esforço aplicado ao longo do eixo de \mathbf{e}_3 , estando as forças distribuídas ao longo do plano formado por \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 .

Considere também um volume infinitesimal dV (dV^r na configuração de referência) e uma área infinitesimal dS (dS^r na configuração de referência) caracterizada por seu vetor normal unitário \mathbf{n} (\mathbf{n}^r na configuração de referência), pertencentes ao sólido. A transformação do sólido implica também, de forma geral, em alterações volumétricas e superficiais. Assim, a relação volumétrica entre as configurações de referência e atual pode ser definida pelo Jacobiano da transformação, J , tal que $J = dV/dV^r = \det(\mathbf{F})$. Além disso, a relação entre áreas nas duas configurações pode ser relacionada pela fórmula de Nanson, tal que

$$\mathbf{n} dS = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}^r dS^r. \quad (3.16)$$

Figura 10 - Representação do estado plano de deformação e sua simplificação quanto às deformações esperadas no sólido analisado.



Fonte: Autoria Própria

A fórmula de Nanson permite relacionar um elemento infinitesimal de superfície na configuração deformada com o respectivo elemento na configuração indeformada ou de referência. Desse modo, a aplicação desta relação permite que o problema estático possa ser formulado com relação à configuração de referência, que é conhecida. Considerando \mathbf{T} o tensor das tensões de Cauchy, referido à configuração deformada, e \mathbf{P} o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, relativo a unidades de área da configuração de referência (e, portanto, o tensor das tensões nominais), a relação entre \mathbf{T} e \mathbf{P} se dá, considerando também a Equação (3.16), de forma que

$$\mathbf{T} \mathbf{n} dS = \mathbf{P} \mathbf{n}^r dS^r = \mathbf{t}^r dS^r \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.17)$$

Além disso, o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , é um tensor simétrico dado pela relação com \mathbf{P} e \mathbf{F} tal que

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}. \quad (3.18)$$

Assim, o problema estático da teoria não linear da elasticidade pode ser enunciado na configuração de referência através de um Problema de Valor de Contorno, em que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{b}^r = \mathbf{0} & \text{em } \Omega^r, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_u^r \text{ e} \\ \mathbf{P} \mathbf{n}^r = \bar{\mathbf{t}}^r & \text{em } \Gamma_t^r, \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo \mathbf{b}^r o vetor de forças de volume por unidade volumétrica da configuração de referência e $\bar{\mathbf{t}}^r$ é o vetor de tensões superficiais por unidade de área da configuração de referência aplicadas no contorno do problema, valendo que $\mathbf{P} \mathbf{n}^r = \bar{\mathbf{t}}^r$ (conforme apresentado na Equação (3.17)) e, analogamente ao apresentado na Equação (3.12), vale a descrição de \mathbf{P} e \mathbf{S} com relação a seus vetores coluna de modo que

$$\mathbf{P} = \tau_i \otimes \mathbf{e}_i = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3] \text{ e } \mathbf{S} = \sigma_i \otimes \mathbf{e}_i = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]. \quad (3.20)$$

A apresentação de ambos os tensores \mathbf{P} e \mathbf{S} neste texto se dá em razão dos modelos constitutivos de Ciarlet-Simo e de Kirchhoff-Saint Venant serem usualmente descritos em função dos pares energeticamente conjugados $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$ e $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}\}$, respectivamente.

3.2 Transformação termoelástica

A transformação proporcionada pelas deformações de origem térmica é dependente da intensidade da variação de temperatura e de parâmetros internos do material. De modo geral, o gradiente da deformação relativo a um sólido que esteja sujeito apenas a essas variações de temperatura pode ser denotado por \mathbf{F}_θ , e aqui é escrito como

$$\mathbf{F}_\theta = v_\theta \mathbf{I}. \quad (3.21)$$

De forma mais geral, a função $v_\theta = \hat{v}_\theta(\Delta\theta)$ é dependente da variação de temperatura $\Delta\theta = \theta - \theta^r$, sendo θ^r a temperatura na referência e θ a temperatura na configuração deformada. A temperatura do sólido na configuração de referência θ^r está em geral relacionada a um estado inicial sem tensões internas do sólido. A função v_θ equivale a (conforme Lu e Pister [80])

$$v_\theta = \exp \left(\int_{\theta^r}^{\theta} \alpha(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \right) \quad (3.22)$$

(com $\hat{\theta}$ utilizado para distinguir a variável do integrando de seu limite superior), onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material e pode ser dependente (função) da temperatura. Se o coeficiente α for independente da variação de temperatura, a expressão de (3.22) passa a ser $\hat{v}_\theta(\Delta\theta) = \exp(\alpha\Delta\theta)$. Considerando um efeito de dilatação térmica isotrópica e em problemas nos quais o produto $\alpha\Delta\theta$ é muito pequeno, é usual assumir que v_θ equivale à função linear $v_\theta = \hat{v}_\theta(\Delta\theta) = (1 + \alpha\Delta\theta)$. Por exemplo,

considerando que materiais cimentícios apresentam coeficientes de dilatação térmica com ordem de grandeza de 10^{-5} e considerando uma variação de temperatura de 1000 °C, o erro percentual entre a função exponencial e a linear é ínfimo (0,005%).

Adicionalmente, se o problema a ser resolvido envolver o controle de temperaturas durante o método de solução, este mesmo pode estar associado a um parâmetro de controle de temperaturas, λ_θ , tal que,

$$\Delta\theta = \theta^n - \theta^r = \lambda_\theta(\theta^f - \theta^r) = \lambda_\theta\Delta\theta^f, \quad (3.23)$$

em que $\Delta\theta^f$ é uma variação de temperatura pré-determinada, na qual valerá $\Delta\theta = \Delta\theta^f$ para λ_θ unitário.

Um sólido sujeito a deformações térmicas (geradas pela variação de temperatura) e elásticas (geradas tanto pelas prescrições de tensões e deslocamentos no contorno ou pelo equilíbrio das forças de volume) deverá apresentar parte de sua deformação total na configuração deformada relativa a cada uma dessas parcelas, térmica e elástica. Por exemplo, uma deformação térmica uniforme sem a imposição de restrições aos deslocamentos em um sólido homogêneo e isótropo não deve gerar acréscimo de tensões internas e o volume total apenas se expande ou contrai livremente. Quando existem restrições ao livre movimento interno do sólido, seja gerado por restrições externas de deslocamento ou compatibilizações internas (como padrões não uniformes de temperatura no sólido ou regiões contíguas que exibam diferentes propriedades termoelásticas nas interfaces, por exemplo), surgem tensões internas para garantir o equilíbrio devido a estas restrições e compatibilizações. Logo, as tensões avaliadas na configuração deformada são originadas apenas da parte elástica da transformação. Assim, se é do interesse obter o campo de tensões que satisfaz o equilíbrio do problema descrito pelo sistema da Eq. (3.19), deve ser efetuada a decomposição de \mathbf{F} em um gradiente devido à transformação elástica, \mathbf{F}_e , e outro devido à transformação térmica, \mathbf{F}_θ . Ao admitir que os deslocamentos, rotações e deformações podem ser de qualquer magnitude, a abordagem adotada para resolver essa decomposição exige a consideração de um estado ou configuração intermediário fictício do sólido, referente a uma região Ω^θ , que corresponda a uma transformação com deformações térmicas sem tensões internas. Assim, essa estratégia é aplicada através da decomposição multiplicativa de \mathbf{F} , de modo que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_\theta \quad \text{e} \quad J = J_e J_\theta, \quad (3.24)$$

sendo $J_e = \det(\mathbf{F}_e)$ e $J_\theta = \det(\mathbf{F}_\theta) = v_\theta^3$. O estado intermediário Ω^θ é dito fictício pois, como comentado por Vujošević e Lubarda [81], essa decomposição não é necessariamente única, visto que é possível ser aplicado um movimento de corpo rígido qualquer ao domínio do problema em sua configuração intermediária e ser preservado o seu estado livre de tensões. Não obstante a isso, o gradiente \mathbf{F}_θ pode ser particularizado e a decomposição apresentada em (3.24) é única (conforme discutido em [81]).

A abordagem da decomposição multiplicativa foi utilizada por Lu e Pister [80], Micunovic [82] e Vujošević e Lubarda [81] para problemas termoelásticos de deformações finitas. A mesma abordagem é também comumente utilizada na avaliação diferentes problemas que envolvam em sua transformação deformações finitas com a ocorrência de dois ou mais fenômenos de natureza distinta, em que é conveniente avaliar cada um deles separadamente por meio de configurações intermediárias à configuração final. É o caso observado, por exemplo, na elastoplasticidade, em que há uma parte da deformação que é volumétrica e outra que é isocórica, conforme apresentado por Chaves [83], Campello et al. [84], Campello et al. [85] e Lubarda [86], e também no dano, conforme avaliam Souchet [87] e Schütte e Bruhns [88], entre outros. No caso deste último, esta abordagem decompõe a transformação em uma configuração puramente elástica e a configuração final, danificada, introduzindo um gradiente das deformações devidas ao dano, \mathbf{F}_D (ver [88]).

A Figura 11 ilustra os estados ou configurações da transformação proposta, indicando também as particularidades de cada configuração. Por razão de \mathbf{F}_θ representar uma transformação volumétrica e, portanto, ser um tensor diagonal (conforme apresentado em (3.21)), a simplicidade desta matriz permite facilmente a sua inversão, de forma que $\mathbf{F}_\theta^{-1} = \mathbf{F}_\theta^{-T} = v_\theta^{-1} \mathbf{I}$. Assim, observa-se que a obtenção do gradiente das deformações elásticas \mathbf{F}_e torna-se explícita em função de \mathbf{F} , sendo então que

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F} \mathbf{F}_\theta^{-1} = v_\theta^{-1} \mathbf{F} \quad \text{e} \quad J_e = v_\theta^{-3} J. \quad (3.25)$$

Analogamente à definição do tensor de Green-Lagrange, \mathbf{E} , calculam-se que as partes elástica e térmica são iguais a

$$\mathbf{E}_e = 1/2 (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{I}) \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_\theta = 1/2 (\mathbf{F}_\theta^T \mathbf{F}_\theta - \mathbf{I}) = 1/2 (v_\theta^2 - 1) \mathbf{I}, \quad (3.26)$$

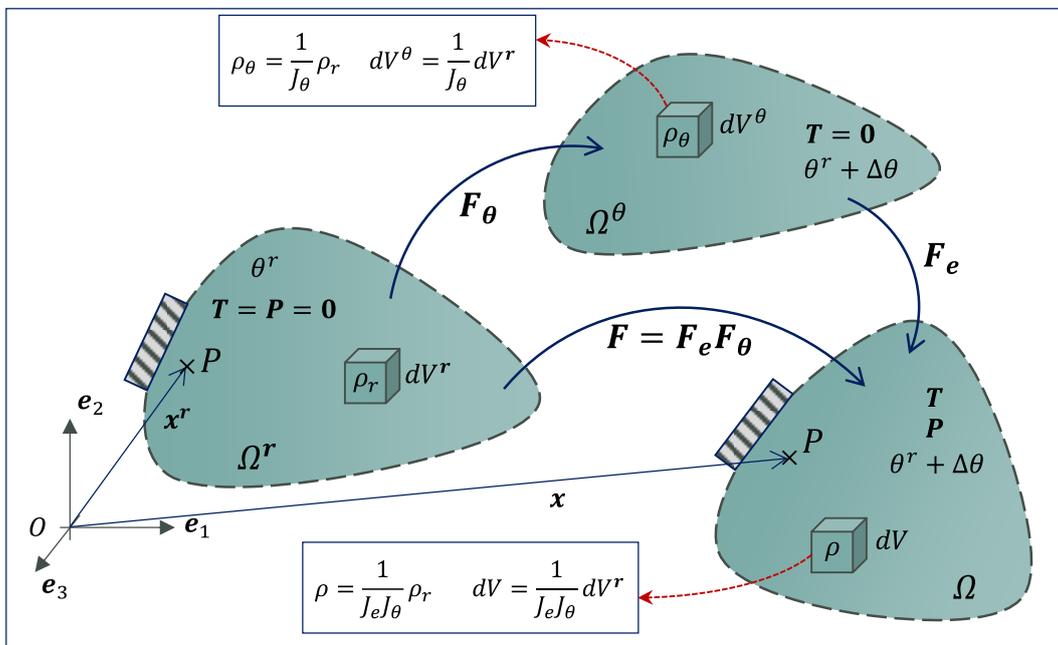
respectivamente. Além disso, vale que $\mathbf{F}_e = \mathbf{f}_{ei} \otimes \mathbf{e}_i = [\mathbf{f}_{e1} \mathbf{f}_{e2} \mathbf{f}_{e3}]$. O tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} pode ser reescrito substituindo na expressão (3.13) os termos de (3.26), obtendo

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_\theta^T \mathbf{E}_e \mathbf{F}_\theta + \mathbf{E}_\theta = (1 + \alpha \Delta \theta)^2 \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_\theta, \quad (3.27)$$

tal que $\mathbf{E}_e = v_\theta^{-2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_\theta)$.

Nota-se que, considerando transformações termoelásticas finitas, a relação entre os tensores de Green-Lagrange elástico e térmico para a avaliação de \mathbf{E} depende também da deformação térmica \mathbf{F}_θ inicialmente avaliada na transformação térmica, visto que a parcela elástica da deformação de Green-Lagrange envolve a transformação de um domínio já alterado pela variação volumétrica que a deformação térmica proporciona. Observa-se que, em casos nos quais o produto $\alpha \Delta \theta$ é muito pequeno ($\alpha \Delta \theta \ll 1$), a relação de (3.27) tende à expressão aditiva $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_\theta$, sendo esta abordagem muito utilizada principalmente em formulações sob deformações térmicas infinitesimais.

Figura 11 – Transformação representada pelas configurações de referência, deformada e intermediária fictícia, representando a transformação proporcionada pelas deformações térmicas (caracterizadas por \mathbf{F}_θ).



Fonte: Autoria própria

Como se observa na Figura 11, a transformação térmica altera o volume do sólido avaliado na configuração de referência proporcionalmente ao Jacobiano dessa

transformação, $J_\theta = v_\theta^3$. Portanto, dada a imposição de conservação de massa do sólido, a relação entre as massas específicas em Ω^r e Ω^θ é tal que $\rho_r = v_\theta^3 \rho_\theta$. Essa consideração tem importância visto que a transformação elástica se dá a partir de uma configuração que já não é mais a inicial, e logo essa relação deve ser apreciada pois o interesse está em preservar a configuração de referência na formulação do problema estático. Por fim, considerando o tensor \mathbf{P} em (3.17) e tomando as expressões para \mathbf{F} e J de (3.24), o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff pode ser reavaliado em função da sua parte associada à transformação elástica, $\mathbf{P}_e = \boldsymbol{\tau}_{ei} \otimes \mathbf{e}_i$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} = J_\theta J_e \mathbf{T}\mathbf{F}_e^{-T} \mathbf{F}_\theta^{-T} = v_\theta^2 \mathbf{P}_e \\ &\text{e } \boldsymbol{\tau}_i = v_\theta^2 \boldsymbol{\tau}_{ei}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

com $\mathbf{P}_e = J_e \mathbf{T}\mathbf{F}_e^{-T}$. A relação acima é bastante significativa para deformações térmicas elevadas. Observa-se que, enquanto \mathbf{P} é o tensor das tensões nominais descrito na configuração de referência, \mathbf{P}_e é o tensor das tensões nominais descrito na configuração intermediária do sistema, associada ao espaço de configuração Ω^θ e massa específica ρ_θ . Para a avaliação de \mathbf{S} , vale que $\mathbf{S} = v_\theta \mathbf{S}_e$, pois

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = v_\theta^2 \mathbf{F}_\theta^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{P}_e = v_\theta \mathbf{S}_e. \quad (3.29)$$

Também partindo de (3.24), a parte associada à transformação elástica do segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S}_e pode ser apresentada em vetores-coluna $\boldsymbol{\sigma}_{ei}$, sendo que assim $\mathbf{S}_e = \boldsymbol{\sigma}_{ei} \otimes \mathbf{e}_i$.

Para a avaliação da relação constitutiva a ser empregada na determinação das tensões efetivas e posteriormente na avaliação do problema elástico, serão a seguir apresentados dois modelos utilizados para comparação e validação conjunta ao longo do desenvolvimento desta dissertação: o Modelo Constitutivo de Ciarlet-Simo e o Modelo Constitutivo de Kirchhoff-Saint Venant.

3.1 Modelo Constitutivo de Ciarlet-Simo (CS)

Este modelo constitutivo se embasa em um material do tipo neo-Hookiano. Com base em Wriggers [89], esse material segue a forma da função de energia de deformação elástica específica $\psi_e^{CS} = \rho_\theta \bar{\psi}_e^{CS}$ (sendo $\bar{\psi}_e^{CS}$ a energia de deformação elástica e ρ_θ a densidade do material na configuração intermediária, a partir da qual é analisada a transformação elástica), tal que

$$\psi_e^{cs} = \hat{\psi}(\mathbf{F}_e) = \hat{\psi}(J_e, I_e) = g(J_e) + \frac{\mu}{2}(I_e - 3) \quad (3.30)$$

em que $\mu = E/2(1 + \nu)$ é o módulo de cisalhamento do material, em função do módulo de elasticidade do material, E , e do coeficiente de Poisson, ν ; J_e e I_e são invariantes da transformação elástica, onde $J_e = \det(\mathbf{F}_e)$ é o jacobiano da transformação elástica e $I_e = \mathbf{f}_{ei} \cdot \mathbf{f}_{ei}$ é o traço do tensor direito de deformação elástica de Cauchy-Green \mathbf{C}_e , sendo que $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e$. A função $g(J_e)$ deve ser convexa para satisfazer um dos critérios do teorema da policonvexidade, o qual garante a existência de solução para o problema de valor de contorno da teoria da elasticidade sob deformações finitas associado, conforme comentado por Campello et al. [84], Wriggers [89] e Lahuerta [90]. A função $g(J_e)$ é

$$g(J_e) = c(J_e^2 - 1) - d \ln(J_e) - \mu \ln(J_e), \text{ com } c > 0 \text{ e } d > 0. \quad (3.31)$$

Em especial, considerando a calibração dos parâmetros $c = \Lambda/4$ e $d = \Lambda/2$ (com o primeiro parâmetro de Lamé, $\Lambda = E\nu/[(1 - 2\nu)(1 + \nu)]$), é obtida a função aqui denominada como aquela do material *neo-Hookiano de Ciarlet-Simo*. Contrário ao material de Kirchhoff-Saint Venant, este material satisfaz a condição de policonvexidade, visto que sua energia de deformação dada por uma soma de funções convexas e apresentando segunda derivada positiva (como apresentado por [76], [89], [90]).

Sendo assim, esse material é formulado através da função de energia de deformação específica $\psi_e^{cs} = \hat{\psi}(\mathbf{F}_e)$ (independente da temperatura deste sólido) de forma que o par energeticamente conjugado a \mathbf{F}_e , o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, seja

$$\mathbf{P}_e = \rho_\theta \frac{\partial \bar{\psi}_e^{cs}(\mathbf{F}_e)}{\partial \mathbf{F}_e} = \frac{\partial \psi_e^{cs}(\mathbf{F}_e)}{\partial \mathbf{F}_e}. \quad (3.32)$$

Com base em (3.30) e (3.31), ψ_e^{cs} pode então ser expresso em função dos invariantes de \mathbf{F}_e tal que

$$\psi_e^{cs} = \hat{\psi}(J_e, I_e) = \frac{\Lambda}{2} \left[\frac{1}{2} (J_e^2 - 1) - \ln(J_e) \right] + \frac{\mu}{2} [I_e - 3 - 2 \ln(J_e)]. \quad (3.33)$$

Como será justificado ao longo do desenvolvimento da forma fraca do problema estrutural, interessa a obtenção dos vetores-coluna $\boldsymbol{\tau}_i$ do 1º tensor de Piola-Kirchhoff e

dos tensores dos módulos elásticos de rigidez tangente \mathbf{C}_{ij} em função do gradiente de deformações total, \mathbf{F} . Para a avaliação dos termos de $\boldsymbol{\tau}_i$, é necessário primeiro determinar os vetores-coluna da parte elástica, $\boldsymbol{\tau}_{ei}$, aplicando em seguida a relação de (3.28). Partindo da expressão (3.32) descrita em função dos vetores-coluna componentes dos tensores associados, deve ser obtido que

$$\boldsymbol{\tau}_{ei} = \frac{\partial \psi_e^{cs}}{\partial \mathbf{f}_{ei}}. \quad (3.34)$$

Usando a regra da cadeia para $\boldsymbol{\tau}_{ei}$, sendo J_e e I_e descritos em função de \mathbf{f}_{ei} ,

$$\boldsymbol{\tau}_{ei} = \frac{\partial \psi_e^{cs}}{\partial J_e} \frac{\partial J_e}{\partial \mathbf{f}_{ei}} + \frac{\partial \psi_e^{cs}}{\partial I_e} \frac{\partial I_e}{\partial \mathbf{f}_{ei}}, \quad (3.35)$$

com

$$\frac{\partial \psi_e^{cs}}{\partial J_e} = \left[\frac{\Lambda}{2} (J_e^2 - 1) - \mu \right] J_e^{-1}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \psi_e^{cs}}{\partial I_e} = \frac{\mu}{2}, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial \mathbf{f}_{ei}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathbf{f}_{ej} \times \mathbf{f}_{ek} = \mathbf{g}_{ei} \quad \text{e} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial I_e}{\partial \mathbf{f}_{ei}} = 2\mathbf{f}_{ei} \quad (3.39)$$

sendo \mathbf{g}_{ei} os vetores-coluna do tensor dos cofatores associados à inversão de $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e$. Os vetores $\boldsymbol{\tau}_{ei}$ devem ser escritos substituindo as expressões das derivadas parciais em (3.35), e assim

$$\boldsymbol{\tau}_{ei} = \left[\frac{\Lambda}{2} (J_e^2 - 1) - \mu \right] J_e^{-1} \mathbf{g}_{ei} + \mu \mathbf{f}_{ei}. \quad (3.40)$$

A resolução do problema termoelástico dependerá, ao longo de sua implementação, da resolução numérica do problema tangente que por sua vez é dependente da definição dos termos do tensor de quarta ordem \mathbf{C}_{ij} em função de \mathbf{F} e definidos por

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{f}_j}. \quad (3.41)$$

Para isso interessa obter os vetores-coluna $\boldsymbol{\tau}_i$, que são, retomando a relação de (3.28),

$$\boldsymbol{\tau}_i = v_\theta^2 \boldsymbol{\tau}_{ei} = v_\theta^2 \left[\frac{\Lambda}{2} (J_e^2 - 1) - \mu \right] J_e^{-1} \mathbf{g}_{ei} + v_\theta^2 \mu \mathbf{f}_{ei}. \quad (3.42)$$

Considerando que $J_e = v_\theta^{-3} J$, $\mathbf{g}_{ei} = v_\theta^{-2} \mathbf{g}_i$ e $\mathbf{f}_{ei} = v_\theta^{-1} \mathbf{f}_i$, a expressão de (3.42) apenas em função do gradiente das deformações totais fica

$$\boldsymbol{\tau}_i = \left[\frac{\Lambda}{2} (v_\theta^{-6} J^2 - 1) - \mu \right] J^{-1} \mathbf{g}_i + v_\theta^{-4} \mu \mathbf{f}_i. \quad (3.43)$$

Aplicando a regra da cadeia na derivada parcial de (3.41), é obtida a expressão

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}_j} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{g}_i} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{f}_j} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{f}_i} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{f}_j} \quad (3.44)$$

em que seus termos podem ser desenvolvidos de modo que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial J} = \left[\frac{\Lambda}{2} (v_\theta^{-6} + J^{-2}) + \mu J^{-2} \right] \mathbf{g}_i, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{g}_i} = \left[\frac{\Lambda}{2} (v_\theta^{-6} J^2 - 1) - \mu \right] J^{-1}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{f}_i} = v_\theta^{-4} \mu, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}_j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathbf{f}_i \times \mathbf{f}_k = \mathbf{g}_j, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{f}_j} = -\varepsilon_{ijk} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k, \quad \text{sendo } \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k = \text{skew}(\mathbf{f}_k) \text{ e} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{f}_j} = \delta_{ij} \mathbf{I}. \quad (3.50)$$

Por fim, substituindo as expressões acima desenvolvidas em (3.44), podem-se obter os tensores dos módulos elásticos de rigidez tangente para o par $[\mathbf{P}, \mathbf{F}]$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ij} = & \left[\frac{\Lambda}{2} (v_\theta^{-6} + J^{-2}) + \mu J^{-2} \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \\ & + \left[\frac{\Lambda}{2} (1 - v_\theta^{-6} J^2) + \mu \right] J^{-1} \varepsilon_{ijk} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_k + v_\theta^{-4} \mu \delta_{ij} \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

descrito apenas em função das componentes totais do gradiente das deformações.

3.2 Modelo Constitutivo de Kirchhoff - Saint Venant (KSV)

O modelo constitutivo de Kirchhoff-Saint Venant é um dos modelos mais comumente utilizados para a caracterização material elástica em problemas sob grandes deslocamentos e deformações. Comparado ao modelo de Ciarlet-Simo, existe uma

maior quantidade de referências que tratam de sua formulação (como em [76]), sobretudo devido a sua simplicidade e rápida implementação em algoritmos de análise mecânica sob deformações finitas. Este modelo constitutivo não é policonvexo e apresenta problemas com energia deformações compressivas que se tornam nulas quando são atingidos estiramentos próximos a zero. Sob tração, este material apresenta comportamento de enrijecimento para o aumento dos estiramentos. O modelo de Kirchhoff-Saint Venant será considerado nos exemplos para validação dos resultados e comparação com o modelo de Ciarlet-Simo. Assim, este material segue a forma da função de energia de deformação específica $\psi_e^{KSV} = \rho_\theta \bar{\psi}_e^{KSV}$ (sendo $\bar{\psi}_e^{KSV}$ a energia de deformação e ρ_θ a densidade do material na configuração intermediária, a partir da qual é analisada a transformação elástica), de modo que

$$\psi_e^{KSV} = \hat{\psi}(\mathbf{E}_e) = \hat{\psi}(I_1, I_2) = \frac{\Lambda}{2}(I_1^2) + 2\mu(I_2), \quad (3.52)$$

onde I_1 e I_2 são invariantes de \mathbf{E}_e , sendo I_1 o traço de \mathbf{E}_e ($I_1 = \xi_{ek} \cdot \mathbf{e}_k$) e I_2 é a metade do traço de \mathbf{E}_e^2 , enquanto em Λ e μ valem os mesmos parâmetros materiais previamente apresentados.

Do mesmo modo que apresentado para o material de Ciarlet-Simo, o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff referente à parte elástica da transformação (\mathbf{S}_e) é o tensor energeticamente conjugado a \mathbf{E}_e (cujos vetores-coluna da parte elástica são ξ_{ei}) e pode ser obtido como

$$\mathbf{S}_e = \frac{\partial \psi_e(\mathbf{E}_e)}{\partial \mathbf{E}_e} \quad \text{e} \quad \sigma_{ei} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \xi_{ei}}. \quad (3.53)$$

O desenvolvimento dessas expressões permite a obtenção de \mathbf{S}_e e σ_{ei} , tal que

$$\mathbf{S}_e = \Lambda I_1 \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{E}_e) \quad \text{e} \quad \sigma_{ei} = \Lambda(\xi_{ek} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i + 2\mu \xi_{ei}. \quad (3.54)$$

Por fim, a resolução do problema termo elástico também dependerá da definição dos termos do tensor de quarta ordem \mathbf{C}_{ij} em função de \mathbf{E} e definidos por

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \xi_j}, \quad (3.55)$$

partindo da relação entre $\boldsymbol{\sigma}_i$ e $\boldsymbol{\sigma}_{ei}$ tal que $\boldsymbol{\sigma}_i = \nu_\theta \boldsymbol{\sigma}_{ei}$, advinda de (3.29) e análoga à indicada em (3.42). Avaliando \mathcal{C}_{ij} a partir das expressões apresentadas, podem ser obtidos tensores dos módulos elásticos de rigidez tangente para o par $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}\}$ tal que

$$\mathcal{C}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial \xi_j} = \nu_\theta \Lambda \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + 2\nu_\theta \mu \delta_{ij} \mathbf{I}. \quad (3.56)$$

3.3 Forma Fraca do problema estrutural

Considere $\mathcal{L}_2(\Omega)$ o espaço linear das funções contínuas e quase sempre contínuas quadrado-integráveis e considere também os subespaços de Hilbert \mathcal{S} e \mathcal{V} das funções de aproximação e das funções peso, respectivamente, pertencentes a $\mathcal{H}_1(\Omega)$ (espaço vetorial normado das funções contínuas com primeira derivada quase sempre contínua pertencente a $\mathcal{L}_2(\Omega)$), sendo $\mathcal{H}_1(\Omega) \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$. As funções de aproximação devem satisfazer as condições de contorno essenciais de (3.19) e as funções peso devem ser nulas no contorno Γ_u , tal que, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_u \} \text{ e} \\ \mathcal{V} &= \{ \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u \}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Retomando a equação de equilíbrio diferencial de (3.19), sua forma integral pode ser escrita como

$$\int_{\Omega^r} \text{div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^r + \int_{\Omega^r} \mathbf{b}^r \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^r = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{L}_2(\Omega), \quad (3.58)$$

em que $\delta \mathbf{u}$ é o campo de deslocamentos virtuais que deve ser integrável no domínio Ω^r . A aplicação do teorema do divergente na primeira integral de (3.58) resulta em

$$\int_{\Omega^r} \text{div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^r = \int_{\Gamma^r} \mathbf{P} \mathbf{n}^r \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma^r - \int_{\Omega^r} \mathbf{P} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega^r. \quad (3.59)$$

Aplicando a expressão nova de (3.59) em (3.58), observe que a exigência do campo de deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ aumentou e este deve apresentar primeira derivada pertencente a $\mathcal{L}_2(\Omega)$ para satisfazer a existência do gradiente dos deslocamentos virtuais $\nabla \delta \mathbf{u}$, de modo que $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}_1$. De forma contrária, o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(x)$ que satisfaz o equilíbrio reduziu a sua exigência de \mathcal{H}_2 para \mathcal{H}_1 , de modo que $\mathbf{u}(x) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_1$. Relembrando que $\bar{\mathbf{t}}^r = \mathbf{P} \mathbf{n}^r$ no contorno, é possível enunciar a forma fraca da teoria da elasticidade não linear como

$$\int_{\Omega^r} \mathbf{P} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega^r = \int_{\Omega^r} \mathbf{b}^r \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega^r + \int_{\Gamma^r} \bar{\boldsymbol{\tau}}^r \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma^r, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad (3.60)$$

na qual se objetiva encontrar o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(x) \in \mathcal{S}$ que satisfaça o equilíbrio de (3.60) para qualquer $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Considerando que $\nabla \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{F}$ é o gradiente dos deslocamentos virtuais, observa-se que o produto interno de tensores equivale a $\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}_i \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}_i$, para simplificar a notação no contexto deste trabalho (em que $\delta \boldsymbol{\gamma}_i$ são os vetores-coluna do gradiente dos deslocamentos virtuais, analogamente a $\boldsymbol{\gamma}_i$ na equação (3.12)). O termo à esquerda da forma fraca em (3.60) é comumente denominado trabalho virtual dos esforços internos, δW_{int} , e o termo à direita denominado trabalho virtual dos esforços externos, δW_{ext} .

3.4 Consideração do Dano aplicado a materiais cimentícios

Será utilizado o modelo de dano escalar proposto por J. Mazars em sua tese de 1984 (e estudado nas referências posteriores, como em [39] e [70]) como base do presente estudo. Dada a necessidade de garantir a consistência termodinâmica do modelo a ser tratado, serão retomados nesse item o embasamento termodinâmico e as hipóteses consideradas, a formulação relativa ao modelo de Mazars e a avaliação paramétrica dos coeficientes a este relacionados.

Hipóteses do embasamento termodinâmico

Assumindo a hipótese de que apenas as deformações mecânicas (parte elástica) do problema termoelástico induzem a formação e propagação do dano, e retomando a relação apresentada em (2.5), pode-se assumir que os tensores \mathbf{S}_e e \mathbf{P}_e da parte elástica da transformação e o tensor tensão de Cauchy \mathbf{T} da configuração deformada apresentam, quando submetidos à evolução do dano, tensores das tensões efetivas a estes associados, analogamente ao apresentado na relação de (2.2) sob pequenos deslocamentos e deformações, de forma que valham

$$\tilde{\mathbf{S}}_e = \frac{1}{1-D} \mathbf{S}_e \quad , \quad \tilde{\mathbf{P}}_e = \frac{1}{1-D} \mathbf{P}_e. \quad (3.61)$$

Equivalentemente, em termos dos vetores-coluna, tem-se que $\boldsymbol{\sigma}_{ei} = (1-D)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}$ e $\boldsymbol{\tau}_{ei} = (1-D)\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{ei}$, respectivamente. Do mesmo modo, valem também as relações descritas na configuração de referência,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (1 - D)\tilde{\mathbf{P}} \quad , \quad \boldsymbol{\tau}_i = (1 - D)\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i \quad , \\ \mathbf{S} &= (1 - D)\tilde{\mathbf{S}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_i = (1 - D)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad . \end{aligned} \quad (3.62)$$

Considerando a energia livre de Helmholtz para descrever o potencial de deformação do modelo hiperelástico adotado, é possível assumir que, aplicada a relação linear do efeito do dano nas expressões de (2.4) e (2.5), temos a relação (para uma função de energia livre genérica sob efeito do dano, ψ_e^D) em que

$$\psi_e^D(I_A, I_B, D) = (1 - D)\psi_e(I_A, I_B) \quad , \quad (3.63)$$

sendo ψ_e representativo das funções de energia livre abordadas nas relações constitutivas anteriormente apresentadas (ψ_e^{CS} e ψ_e^{KSV}), escritos em função dos invariantes I_A, I_B, \dots, I_N associadas a cada modelagem. Para a formulação proposta neste texto, vale-se da simplificação de que a variação de temperatura interna do sistema gera um fluxo que pode ser desprezado com relação ao seu efeito na variação da energia interna do sistema. Assim, resta apenas a dissipação de energia por evolução do dano e a própria energia mecânica pela resposta elástica devido às tensões aplicadas e à temperatura a ser equilibrada elasticamente, através de processos quase estáticos. O processo a ser analisado é dito, nesse sentido, isotérmico. Além disso, dadas as características reológicas dos materiais cimentícios a serem representados, e considerando o limite de capacidade de deformação que estes mesmos apresentam antes da degradação completa, pode ser considerado que, mesmo que o problema sem dano parta de uma formulação geometricamente não linear com grandes deslocamentos, as deformações observadas nos domínios susceptíveis ao dano mostrar-se-ão infinitesimais ao longo do regime elástico e de danificação. Logo, esta hipótese permite que sejam adotadas nas considerações do equilíbrio termodinâmico do problema as relações consistentes ao regime de pequenas deformações. Adotam-se então as mesmas considerações assumidas nas expressões (2.4) a (2.9), com a avaliação da variação de entropia do sistema em termos do par energeticamente conjugado $\{\mathbf{P}_e, \mathbf{F}_e\}$ e da energia livre. Assim, considerando o processo isotérmico e a dissipação de energia interna \mathfrak{D}_{int} avaliada por

$$\mathfrak{D}_{int} = \mathbf{P}_e : \dot{\mathbf{F}}_e - \dot{\psi}_e^D(\mathbf{F}_e, D) \geq 0 \quad , \quad (3.64)$$

e sendo

$$\dot{\psi}_e^D = \frac{\partial \psi_e^D}{\partial \mathbf{F}_e} \dot{\mathbf{F}}_e + \frac{\partial \psi_e^D}{\partial D} \dot{D} = \mathbf{P}_e : \dot{\mathbf{F}}_e + Y \dot{D}, \quad (3.65)$$

tem-se que, à semelhança da expressão (2.9),

$$-Y \dot{D} \geq 0, \quad (3.66)$$

sendo $-Y$ função positiva da taxa de dissipação de energia interna pela formação de dano, conforme enunciado no capítulo 2, tal que se tenha $-Y = \psi_{e,D}^D(\mathbf{F}_e)$.

Além disso, esta avaliação permite demonstrar que a relação constitutiva é preservada entre a tensão efetiva e a tensão real, mantendo a consistência termodinâmica. Ou seja,

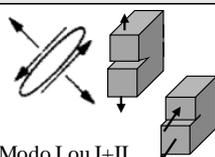
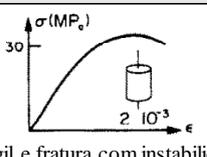
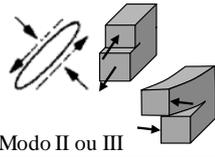
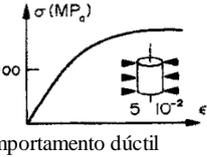
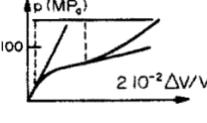
$$\mathbf{P}_e = \frac{\partial \psi_e^D(\mathbf{F}_e, D)}{\partial \mathbf{F}_e} = (1 - D) \mathbb{G}_e \mathbf{F}_e = (1 - D) \tilde{\mathbf{P}}_e \quad (3.67)$$

sendo que \mathbb{G}_e é a representação como tensor de quarta ordem da relação constitutiva, $\tilde{\mathbf{P}}_e = \mathbb{G}_e \mathbf{F}_e$, montado a partir dos termos de \mathbf{C}_{ij} apresentados nos itens 3.1 e 3.2.

O modelo de dano de Mazars

O modelo de dano apresentado por Mazars é dependente do parâmetro escalar de dano, D , e das deformações elásticas como variáveis internas do problema termodinâmico. Como será apresentado, o dano deste modelo acopla dois efeitos distintos, referentes aos danos à tração, D_T , e à compressão, D_C , que são avaliados em todo o domínio do sólido e utilizados na construção de D . Esse modelo se aplica bem a materiais cimentícios susceptíveis a deformações positivas (alongamento) e não confinados. Como descreve Krajcinovic [37], uma amostra de concreto não confinada se comporta como material frágil, apresentando falha final com mecanismo de fratura através de abertura (modo I), cisalhamento no plano (modo II) ou combinados; a mesma amostra sob confinamento lateral apresentará comportamento próximo ao dúctil e terá falha após o desenvolvimento de bandas de cisalhamento (modo III). A Figura 12, adaptada de Mazars [39], exemplifica esses fenômenos. Pelo exposto na figura pode ser concluído que o modelo de Mazars busca representar o comportamento do “tipo A”.

Figura 12 - Modos de dano e curvas relativas ao comportamento do concreto comprimido representando cada modo associado.

Tipo	Particularidade	Modo de dano	Comportamento esperado
A	Alongamentos podem ocorrer ($\varepsilon_i > 0$)	 Modo I ou I+II	 Frágil e fratura com instabilidade
B	Sem alongamentos	 Modo II ou III	 Comportamento dúctil
C	Pressão hidrostática	 Consolidação	

Fonte: adaptado de Mazars [39].

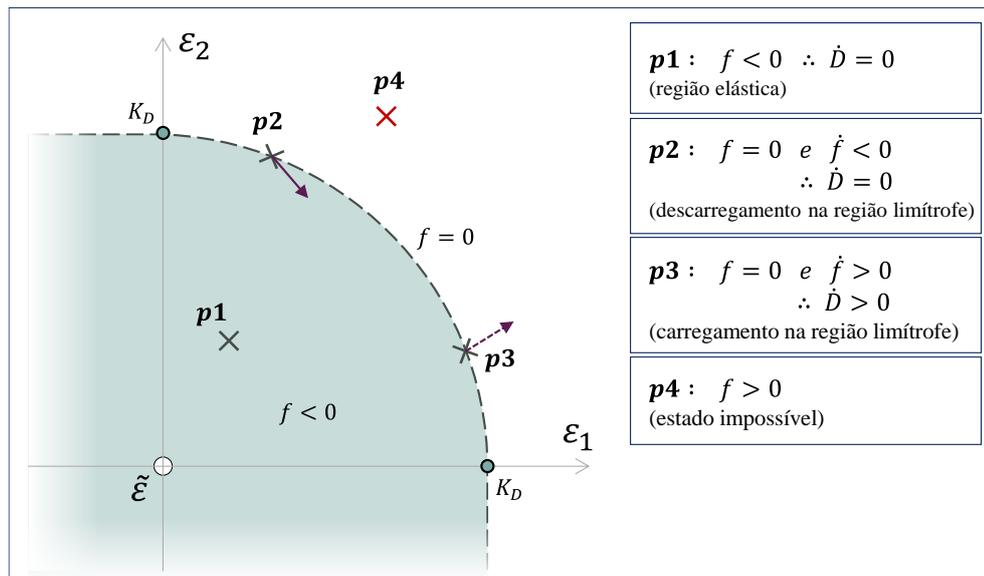
O modelo de Mazars admite que o início do crescimento das microfissuras no material é governado por uma função $f(\tilde{\varepsilon}, K_D)$ dependente do estado de deformações das fibras do sistema (sendo este estado caracterizado na função pela deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ e pela função K_D , parâmetros que serão definidos mais à frente no texto). Esta função delimita uma região que apresenta comportamento puramente elástico do modelo teórico, onde $f(\tilde{\varepsilon}, K_D) < 0$, da superfície limite para a formação e propagação do dano, onde $f(\tilde{\varepsilon}, K_D) = 0$. A evolução do dano ($\dot{D} > 0$) deve ser dada quando satisfeitas, simultaneamente,

$$f(\tilde{\varepsilon}, K_D) = 0 \text{ e } \dot{f}(\tilde{\varepsilon}, K_D) = 0. \quad (3.68)$$

A Figura 13 busca ilustrar qualitativamente o espaço possível para a função f e a evolução de dano esperada em cada caso. Nesta, está projetado no espaço do gráfico a função f , dependente da deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$, que por sua vez depende das deformações principais (ε_i , como apresentado nos eixos da Figura 13), conforme será melhor detalhado no decorrer do texto. Observa-se que em qualquer condição deve ser satisfeita a condição $f\dot{D} = 0$. Os pontos apresentam as situações:

- Ponto p1: carregamento ou descarregamento com $f < 0$ (qualquer que seja \dot{f}) e, portanto, sem acréscimo de dano ($\dot{D} = 0$), pois o elemento deformado está no regime elástico (ponto interno do espaço da função f);
- Ponto p2: descarregamento com $f = 0$ e $\dot{f} < 0$ e, portanto, sem acréscimo de dano ($\dot{D} = 0$), pois o elemento deformado está na superfície limite do regime elástico, mas tende a sair dela (retornando à região elástica);
- Ponto p3: carregamento com $f = 0$ e $\dot{f} > 0$ e, portanto, com acréscimo de dano ($\dot{D} > 0$), pois o elemento deformado está na superfície limite do regime elástico e é obrigado a permanecer na região limítrofe, sob aumento do parâmetro de dano;
- Ponto p4: não tem significado em relação à esta formulação por apresentar $f > 0$; é, logo, um estado impossível.

Figura 13 – Representação qualitativa do espaço de deformações com possibilidades para a função f e a evolução de dano.



Fonte: autoria própria.

A função $f(\tilde{\epsilon}, K_D)$ pode ser definida como

$$f(\tilde{\epsilon}, K_D) = \tilde{\epsilon} - K_D \leq 0, \quad (3.69)$$

em que K_D é o maior valor da série histórica assumido pela deformação equivalente $\tilde{\epsilon}$, comparada a um valor limite (inicial) a partir do qual o processo de evolução do dano se inicia. O maior valor da série histórica de $\tilde{\epsilon}$ equivale a $\max_{t=[0,tf]}(\tilde{\epsilon})$ e é obtido

partindo da evolução da medida de tempo t desde o início do problema ($t = 0$) até o tempo t_f relativo ao instante em que K_D deve ser determinado. Então, K_D é definido como

$$K_D = \widehat{K}_D(D) = \max \{K_0, \max_{t \in [0, t_f]}(\tilde{\varepsilon})\}, \quad (3.70)$$

sendo que o parâmetro adimensional K_0 pode ser definido a partir da resistência do material à tração, f_{ct} , e seu módulo de elasticidade inicial E , tal que

$$K_0 = \frac{f_{ct}}{E}. \quad (3.71)$$

A deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ é avaliada a partir da composição dos autovalores positivos do tensor das deformações de Green-Lagrange. Assim, considerando os autovalores

$$\varepsilon_i = \text{eig}(\mathbf{E}_e)_i, \quad (3.72)$$

a deformação equivalente é igual a

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2}, \quad \text{sendo} \quad \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)}{2}. \quad (3.73)$$

Outra forma de interpretar a montagem de $\tilde{\varepsilon}$ parte da consideração de um vetor formado pelos autovalores positivos de \mathbf{E}_e , tal que este vetor seja $[\langle \varepsilon_1 \rangle_+ \langle \varepsilon_2 \rangle_+ \langle \varepsilon_3 \rangle_+]$. Neste caso, a avaliação de $\tilde{\varepsilon}$ seria equivalente ao cálculo da norma deste vetor. Ou seja, busca-se avaliar o estado de dano do material cimentício a partir da composição das deformações que representem alongamento do material (deformações positivas) acima de um valor mínimo.

Satisfeitas as condições impostas por (3.68), o parâmetro de dano D deve ser obtido, dentro do modelo de Mazars, através da combinação linear de duas funções relativas ao dano à tração e ao dano à compressão, D_T e D_C . O uso dessas funções é justificado pelo diferente comportamento que os materiais cimentícios em geral apresentam quando solicitados à tração ou à compressão. Essas funções dependem essencialmente da deformação equivalente (avaliada e comparada a K_0 em K_D) e de parâmetros de ajuste de curva, A_T , B_T , A_C e B_C e K_0 , tal que

$$\begin{cases} D_T = \widehat{D}_T(K_D) = 1 - \left[\frac{(1 - A_T)K_0}{K_D} \right] - \left[\frac{A_T}{e^{B_T(K_D - K_0)}} \right], \\ D_C = \widehat{D}_C(K_D) = 1 - \left[\frac{(1 - A_C)K_0}{K_D} \right] - \left[\frac{A_C}{e^{B_C(K_D - K_0)}} \right]. \end{cases} \quad (3.74)$$

A associação de D_T e D_C para se obter o valor total de dano D é feita por meio de combinação linear utilizando dois parâmetros, α_T e α_C , tal que

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad \text{e} \quad \alpha_T + \alpha_C = 1. \quad (3.75)$$

Esses parâmetros dão peso à influência do dano relativo à tração ou à compressão, em cada região solicitada. Para um ensaio uniaxial de compressão, por exemplo, tem-se que $\alpha_C = 1$ e $D = D_C$. A definição dos valores de α_T e α_C se origina do estado de tensões e deformações avaliados a partir da partição do tensor das tensões elásticas de Cauchy (\mathbf{T}_e) em seus valores principais positivos e negativos, $\langle T_i \rangle_+$ e $\langle T_i \rangle_-$, em que $T_i = \text{eig}(\mathbf{T}_e)_i$, valendo que (ver Lemaitre [19])

$$\begin{aligned} T_i &= \text{eig}(\mathbf{T}_e)_i = \langle T_i \rangle_+ + \langle T_i \rangle_-, \\ \text{com } \langle T_i \rangle_+ &= (T_i + |T_i|)/2 \quad \text{e} \quad \langle T_i \rangle_- = (T_i - \langle T_i \rangle_+). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Da expressão acima, pode se entender que \mathbf{T}_e pode também ser separado na soma das suas componentes principais positivas $\langle \mathbf{T}_e \rangle_+$ e negativas $\langle \mathbf{T}_e \rangle_-$, definindo então esses tensores diagonais como $\langle \mathbf{T}_e \rangle_+ = \langle T_i \rangle_+ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ e $\langle \mathbf{T}_e \rangle_- = \langle T_i \rangle_- \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$. Com essa construção se deseja avaliar as deformações principais pelos tensores \mathbf{E}_T e \mathbf{E}_C , respectivamente relacionados às partes das tensões positivas (de tração) e negativas (de compressão) dos autovalores de \mathbf{T}_e , e que podem ser obtidos pelas relações linearizadas com

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= \frac{1 + \nu}{E} \langle \mathbf{T}_e \rangle_+ - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \langle \mathbf{T}_e \rangle_+) \quad \text{e} \\ \mathbf{E}_C &= \frac{1 + \nu}{E} \langle \mathbf{T}_e \rangle_- - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \langle \mathbf{T}_e \rangle_-) \quad . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por fim, a avaliação de α_T e α_C pode ser feita com auxílio do procedimento apresentado por Perego (1989, apud Álvares [91]) avaliando as expressões

$$\begin{aligned} \alpha_T &= \frac{\varepsilon_{Ti}^+}{\varepsilon_V^+} \quad \text{e} \quad \alpha_C = \frac{\varepsilon_{Ci}^+}{\varepsilon_V^+} \quad , \text{ em que } \quad \varepsilon_{Ti}^+ = \frac{(\varepsilon_{Ti} + |\varepsilon_{Ti}|)}{2} \\ \text{e} \quad \varepsilon_{Ci}^+ &= \frac{(\varepsilon_{Ci} + |\varepsilon_{Ci}|)}{2} \quad , \text{ sendo } \quad \varepsilon_V^+ = \varepsilon_{Ti}^+ + \varepsilon_{Ci}^+ . \end{aligned} \quad (3.78)$$

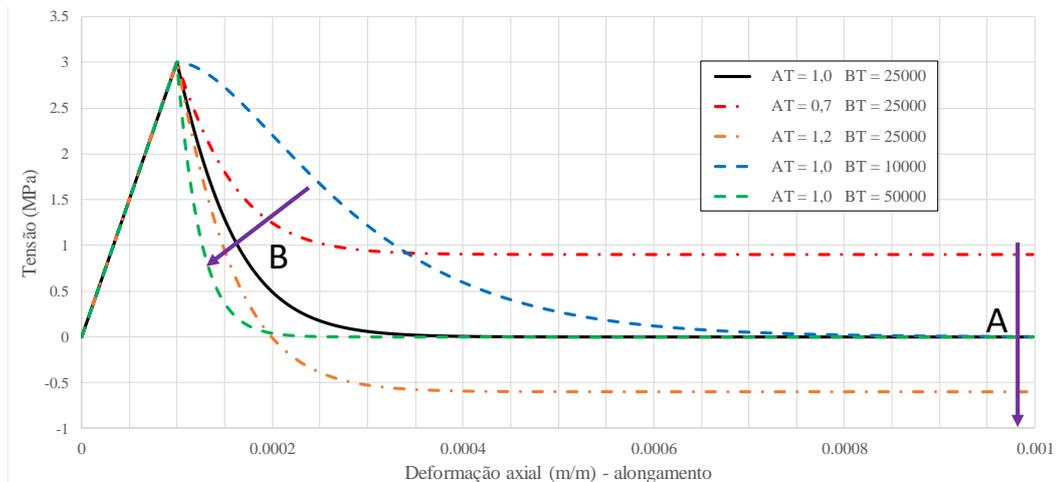
De (3.78) se entende que, após a determinação dos tensores linearizados das deformações \mathbf{E}_T e \mathbf{E}_C , devem ser avaliadas as composições dos autovalores destes (ε_{Ti} e ε_{Ci} , respectivamente), com o objetivo de agrupar em α_T as contribuições positivas (alongamentos nos eixos principais) e em α_C as contribuições negativas (encurtamentos nos eixos principais), sendo por fim esses valores agrupados ponderados pela somatória de todos os alongamentos e encurtamentos principais, ε_V^+ , de modo a normalizar o resultado de $\alpha_T + \alpha_C = 1$. Essa forma de se avaliar as componentes α_T e α_C conforme apresentada em (3.78) é alternativa ao desenvolvimento apresentado por Mazars [39] em sua modelagem original, na qual o autor admite uma expressão diferente à considerada em (3.78), avaliando α_T e α_C através do cálculo de uma somatória de deformações principais ε_{Ti} e ε_{Ci} positivas e negativas, incluindo no algoritmo uma ponderação pela contribuição da deformação equivalente (ver em Mazars [39]).

Os parâmetros de ajuste de curva assumem intervalo como recomendado por Mazars e apresentado, por exemplo, por Pijaudier-Cabot e Mazars [42], sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \leq A_T \leq 1,2 \\ 1,0 \leq A_C \leq 1,5 \\ 10^4 \leq B_T \leq 5 \cdot 10^4 \\ 10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 \\ 10^{-5} \leq K_0 \leq 10^{-4} \end{array} \right. \quad (3.79)$$

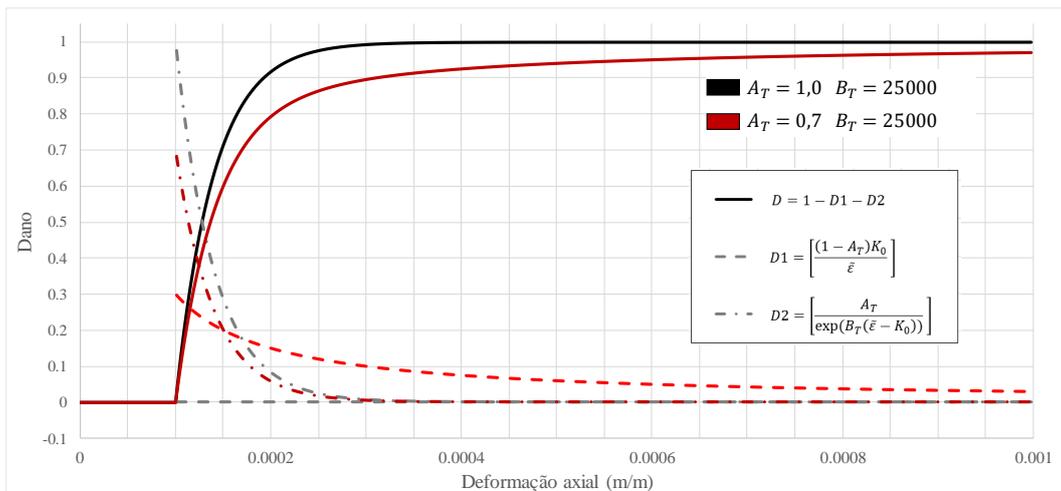
Observam-se entre o Gráfico 1 e o Gráfico 4 as curvas de tensão-deformação para a representação de um material cimentício com módulo $E = 30 \text{ GPa}$ e $K_0 = 10^{-4}$ sob deformação axial. A variação dos parâmetros permite a avaliação da influência de cada um no ajuste no perfil das curvas. Para as curvas de dano apresentadas no Gráfico 2 e no Gráfico 4, foi considerado de (3.74) que $D = 1 - D1 - D2$, sendo $D1$ a parcela racional (em função de K_D) e $D2$ a parcela exponencial do cálculo do dano D segundo este modelo. Para ensaios uniaxiais (ver Álvares [91]), adotando ε_1 como a deformação principal no eixo do ensaio, a deformação equivalente assume $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$ na tração direta, $\tilde{\varepsilon} = -\nu\varepsilon_1\sqrt{2}$ na compressão (em estado plano de tensão) e $\tilde{\varepsilon} = -(\nu/1 - \nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ na compressão biaxial ou no estado plano de deformação (onde ε_3 é nulo para problemas sem deformação térmica). No Gráfico 1 e no Gráfico 3, as setas associadas aos parâmetros A e B indicam o efeito observado na curva devido à variação positiva desses valores no ajuste da modelo de Mazars.

Gráfico 1 - Curvas de evolução da tensão de tração em função da deformação axial com a variação dos parâmetros A_T e B_T .



Fonte: autoria própria.

Gráfico 2 – Evolução das parcelas do dano em função da deformação axial com a variação do parâmetro A_T (tração simples).

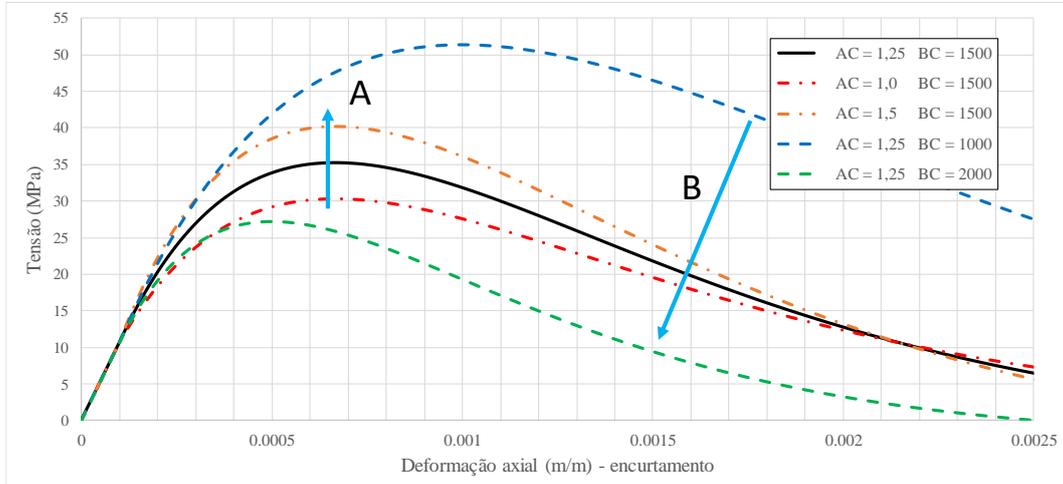


Fonte: autoria própria.

Observa-se no Gráfico 1 que o parâmetro A_T influi principalmente no valor residual de tensão, tendendo a ser nulo para $A_T = 1$ visto que $D1 = 0$. Para valores de A_T inferiores a 1, a tensão residual é positiva (tendendo a ser $D = 1 - K_0/\tilde{\epsilon}$ considerando $A_T = 0$). Vê-se também que para valores de A_T superiores a 1 a resposta de tensão perde sentido para o modelo se $|D1| > D2$. O parâmetro B_T influi na intensidade do efeito de amolecimento logo após o pico de tensão, sendo observado que quanto maior o valor de B_T mais intensa é a redução de tensão resistente para $\tilde{\epsilon} > K_0$, acentuando o caimento da curva pós-pico. Vê-se também que, para o intervalo de $10^4 \leq B_T \leq 5 \cdot 10^4$ proposto por Mazars (região entre as curvas tracejadas azul e verde), o expoente da exponencial

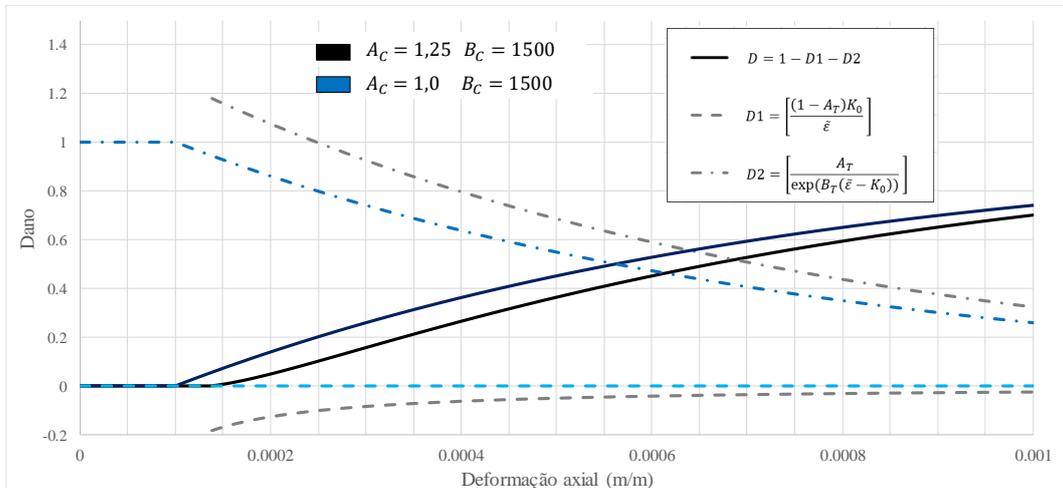
de D_2 será sempre superior a 1, o que implica na observação de que a tensão de tração é máxima para $\tilde{\epsilon} = K_0$.

Gráfico 3 - Curvas de evolução da tensão de compressão em função da deformação axial com a variação dos parâmetros A_C e B_C (compressão simples).



Fonte: autoria própria.

Gráfico 4 – Evolução das parcelas do dano em função da deformação axial com a variação dos parâmetros A_C (compressão simples).

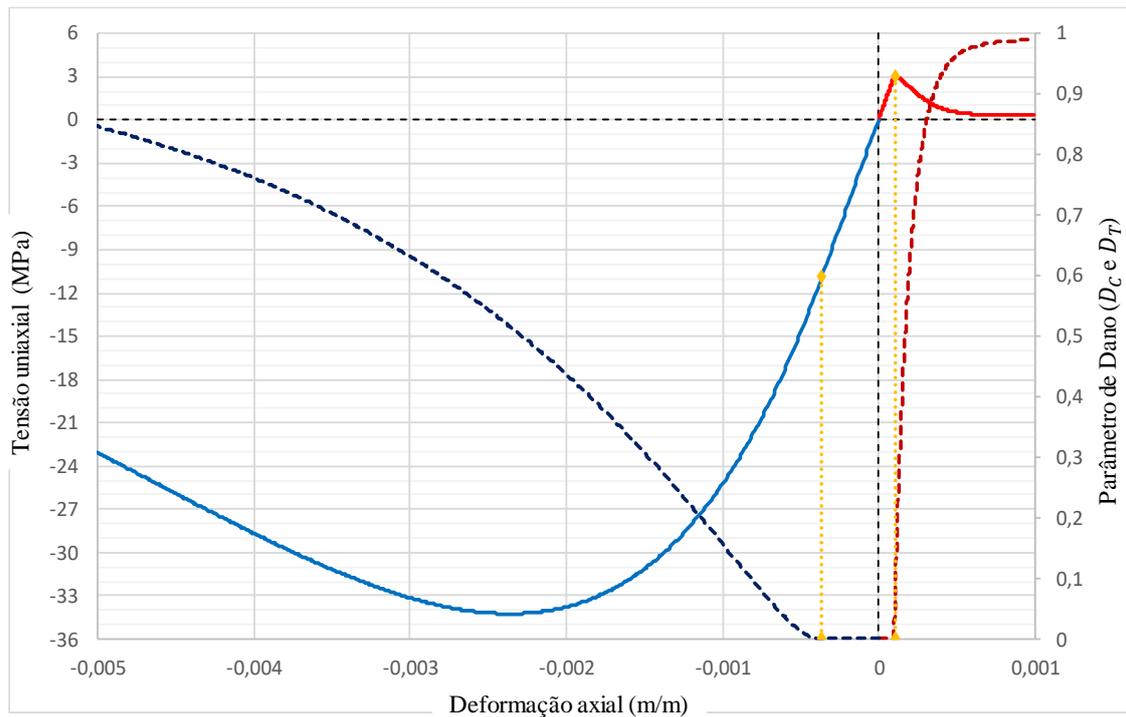


Fonte: autoria própria.

Para caso do ensaio à compressão direta, observa-se que o parâmetro B_C influi tanto no valor da tensão de compressão máxima observada quanto na deformação à qual se observa esse pico (sendo ambas maiores se menor for o valor de B_C). Já o parâmetro A_C altera o valor do pico de tensão observado sem alterar a deformação na qual esse ocorre. No caso de A_C , o pico de tensão é tão maior quanto maior for esse parâmetro. Contrariamente ao observado na curva ajustada à tração, o pico de tensão na compressão não ocorre simultaneamente ao surgimento do dano. Essa característica fica

visível também na Gráfico 5, que apresenta como exemplo o comportamento completo do concreto a solicitações monotônicas de tração (em vermelho) e compressão (em azul), apresentando também o dano acumulado (linha tracejada) ao longo dos passos. Neste gráfico, os resultados são apresentados considerando um material com módulo $E = 30\text{GPa}$, $A_T = 0,8$, $B_T = 10^4$, $A_C = 1,5$, $B_C = 5 \cdot 10^3$ e $K_0 = 10^{-4}$.

Gráfico 5 - Resposta global do modelo de Mazars aos ensaios monotônicos de tração (curvas em vermelho) e compressão (curvas em azul), com evolução das tensões (linha cheia) e danos (linha tracejada).



Fonte: autoria própria.

3.5 Abordagem não local na Mecânica do Dano

A estratégia de se aplicar métodos computacionais na avaliação da evolução do dano em sólidos deformáveis usualmente apresenta, a depender do fenômeno sob análise e das características da representação adotada para este sólido (como seus parâmetros e malha adotada), algumas patologias numéricas, como dependência de malha e localização das deformações. Segundo Jirásek [92], a região danificada comumente tende a apresentar problemas numéricos devido, entre outras razões, à perda de elipticidade das equações diferenciais que regem o problema, resultando em um Problema de Valor de Contorno mal posto e em perda de objetividade do problema numérico. Ao se evidenciar este problema numérico sob abordagem local, a avaliação da região danificada tende

incorretamente a apresentar dissipação nula de energia na falha, problema que tende a se intensificar à medida que a malha é refinada na localidade da falha, indicando a sensibilidade dos resultados ao tamanho e distribuição dos elementos da malha (ver Jirásek [92] e Bažant [93]). É importante então apresentar uma solução que permita superar o efeito da localização e que, de forma vantajosa, garanta o resultado desejado reduzindo ao máximo a influência ou dependência da malha de elementos finitos.

Ainda conforme Bažant e Pijaudier-Cabot [93], a abordagem não local da mecânica do dano em meios contínuos deve se limitar às variáveis relacionadas ao problema de localização; no caso, ao campo de deformações equivalentes utilizado na avaliação do dano local. Bažant [48] justifica que originalmente os modelos utilizados para abordagem não local aplicavam as estratégias de avaliação das variáveis ponderadas no espaço do domínio também aos campos de deformações elásticas e totais. Essa estratégia geralmente exibia diversos problemas numéricos, seja na apropriação dos resultados, na existência de modos espúrios de instabilidade com dissipação nula de energia e mesmo na grande dificuldade de programação que essa abordagem aplicada às relações constitutivas implicava. Neste caso, portanto, apenas o campo de deformações equivalentes deve ser regularizado nessa abordagem, preservando a característica local do dano dela resultante e das relações constitutivas associadas ao problema mecânico.

Procura-se, então, por meio da abordagem não local adotada neste texto, regularizar a deformação equivalente em uma região em torno de um ponto qualquer analisado, e utilizá-la para caracterizar o dano local, de modo que valha a substituição da deformação equivalente local ($\tilde{\epsilon}$) pela não local, $\bar{\epsilon}$. Ou seja, aplicar-se-á na formulação do modelo de dano apresentado, a substituição de $\tilde{\epsilon}$ por $\bar{\epsilon}$ em (3.69), de modo que

$$f(\bar{\epsilon}, K_D) = \bar{\epsilon} - K_D \leq 0, \quad (3.80)$$

caracterizando a aplicação da abordagem não local da Mecânica do Dano.

Seja então um ponto A qualquer do domínio (que, na solução pelo método dos elementos finitos, corresponde a um ponto de integração) caracterizado por seu vetor posição na configuração de referência, \mathbf{x}_A^r . Partindo do conhecimento da deformação equivalente local neste e em outros pontos do domínio Ω^r do problema, a deformação equivalente não local deste ponto pode ser avaliada por meio da seguinte expressão geral

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}_A^r) = \frac{1}{V(\mathbf{x}_A^r)} \int_{\Omega^r} \Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r) \varepsilon(\mathbf{x}_B^r) d\Omega^r, \quad (3.81)$$

que é função das deformações equivalentes dos outros N pontos ($B_1, B_2, B_3, \dots, B_N$) que pertencem ao seu domínio (e caracterizados pelos vetores posição \mathbf{x}_B^r , na configuração de referência). A Figura 14 ilustra esse conceito. Observa-se que a função descrita em (3.81) integra o campo de deformações locais no domínio, ponderado por uma função peso Φ dependente, usualmente, da norma do vetor distância ($\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r$). Para que a média ponderada seja avaliada, a função volume $V(\mathbf{x}_A^r)$ deve ser a integral da função peso Φ , tal que

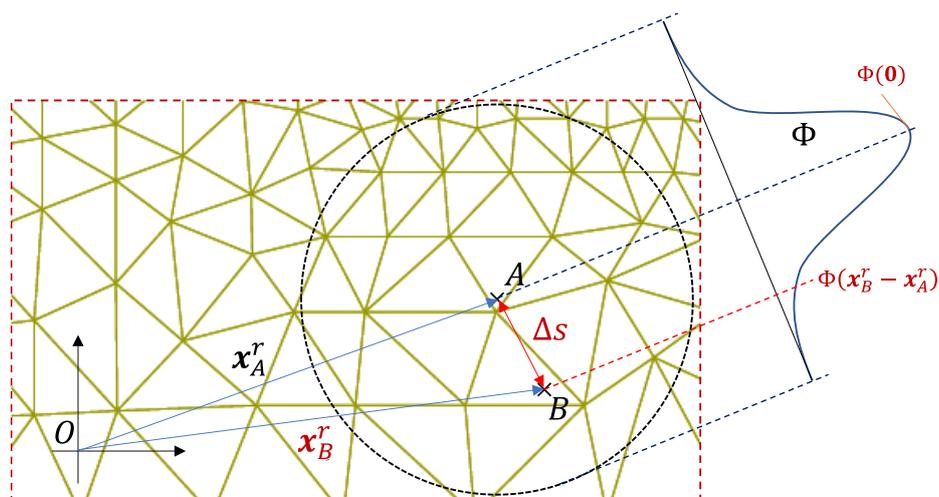
$$V(\mathbf{x}_A^r) = \int_{\Omega^r} \Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r) d\Omega^r. \quad (3.82)$$

Para as análises dessa dissertação foi utilizada como Φ a seguinte função exponencial (ver [70]),

$$\Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r) = \exp(-(k|\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r|)^2 l_c^{-2}) = \exp(-(k\Delta s_{AB})^2 l_c^{-2}), \quad (3.83)$$

em que $k = 2$ para problemas em domínios bidimensionais e l_c é chamado de comprimento característico do meio contínuo não local, e está associado às heterogeneidades do material, à medida que também age como um limitador do efeito de localização (ver Ferran e Huerta [94]). Segundo Bazant [95], o parâmetro l_c pode ser interpretado como o valor do raio de um círculo sobre o qual a aplicação de uma função constante $\Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r) = 1$ apresenta o mesmo volume que a distribuição normal se estendendo infinitamente no plano. Para a análise de materiais cimentícios, como o concreto, é usual considerar o l_c como sendo de duas a três vezes o comprimento do maior agregado (brita ou grão), como apresentado por Mazars et al. [41]. A Figura 14 apresenta qualitativamente a função Φ para avaliação das contribuições dos pontos próximos ao ponto analisado.

Figura 14 - Ilustração da região mapeada para abordagem não local das deformações, com a relação entre os pontos A e B e a função Φ .



Fonte: autoria própria.

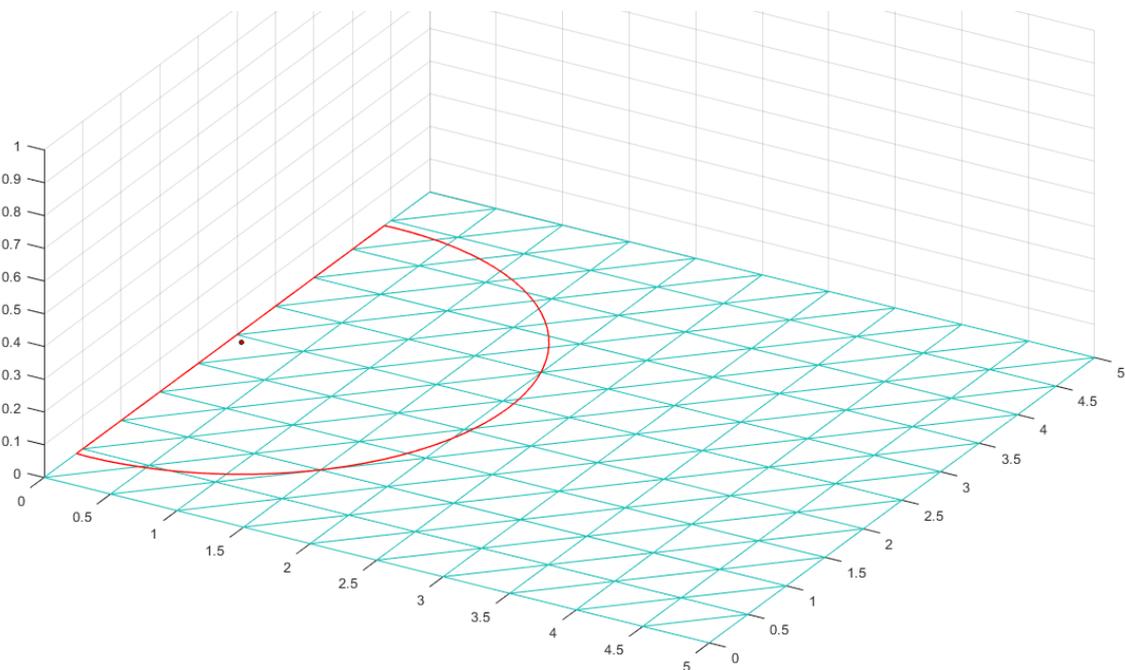
Da forma como foi apresentada logo acima, essa formulação exige, para a análise da deformação não local em um certo ponto do domínio, a avaliação e ponderação (em função da distância) das deformações locais em todos os demais pontos do domínio. Na prática, se nenhuma consideração ou simplificação for feita, o custo computacional desta abordagem pode inviabilizar sua aplicação para qualquer problema com um número razoável de pontos a serem analisados. Dado o padrão da função exponencial $\Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r)$ apresentada, apenas a análise de pontos dentro de uma certa vizinhança (para cada ponto) é demandada. Como apresentado por Barros [51], é usual admitir a distância limite $d_{lim} = l_c/2$, a partir da qual a função $\Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r)$ passa a ser nula ($\Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r) = 0$ se $\Delta s > d_{lim}$), sendo que assim se descarta a contribuição dos pontos que estão fora da vizinhança do ponto de vetor posição \mathbf{x}_A^r que está sob análise, partindo deste critério.

Como será feita a discretização do domínio por elementos finitos (a ser discutido nas próximas seções), o critério de análise limitado a d_{lim} exige que se determine, por proximidade, quais são os elementos que deverão ser considerados na avaliação dos parâmetros não locais. É necessário então, para cada ponto analisado (que, como dito, no contexto da análise em elementos finitos, serão apresentados como os pontos de integração dos elementos), definir essa região. Neste trabalho, a avaliação da deformação equivalente não local foi implementada através de um algoritmo que faz a varredura dos elementos imediatamente contíguos ao elemento que contém o ponto analisado, e os armazena em uma lista. A partir disso, são adicionados à lista os

elementos contíguos aos elementos da lista que têm algum nó dentro da vizinhança do ponto analisado. Essa análise é feita por “camadas”, até que não exista nenhum elemento dentro da circunferência de raio d_{lim} e centrada no ponto analisado, sem ser avaliado. Elemento a elemento, a função $\Phi(\mathbf{x}_B^r - \mathbf{x}_A^r)$ é calculada em seus nós, são integrados os volumes de Φ (integral da (3.82)) e a ponderação de Φ pela deformação equivalente (integral da (3.81)) e por fim é calculada a deformação não local do ponto analisado (equação (3.80)).

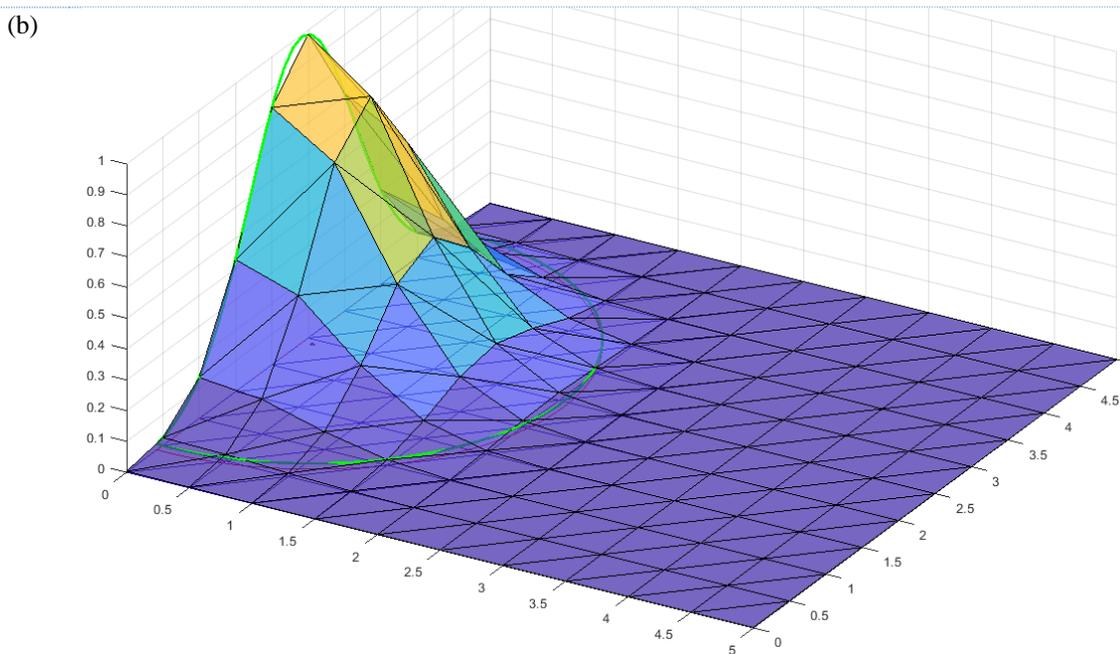
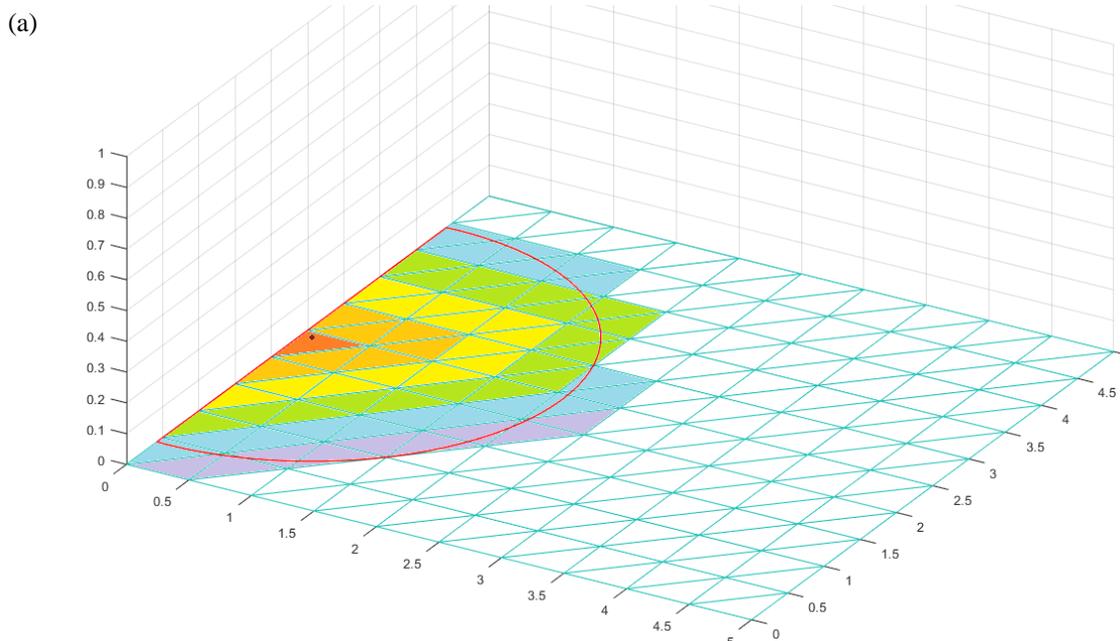
Uma ilustração visual deste algoritmo é apresentada esquematicamente na Figura 15 e na Figura 16, considerando um domínio bidimensional quadrado de lado 5 cm, discretizado por elementos triangulares, para um ponto de integração pertencente a um elemento na borda desse domínio. A Figura 16 (a) apresenta, em cores, a lógica da sequência de varredura em camadas feita para a identificação dos elementos dentro da distância limite d_{lim} (representada pelo contorno vermelho de raio 2 cm). A Figura 16 (b) apresenta o campo da função Φ gerado neste domínio.

Figura 15 – Vizinhança para um ponto de integração (n) de um elemento (E) na borda do domínio.



Fonte: autoria própria

Figura 16 – (a) Sequência de varredura dos elementos contíguos, segundo critério do algoritmo. (b) Função exponencial Φ avaliada nos elementos do domínio

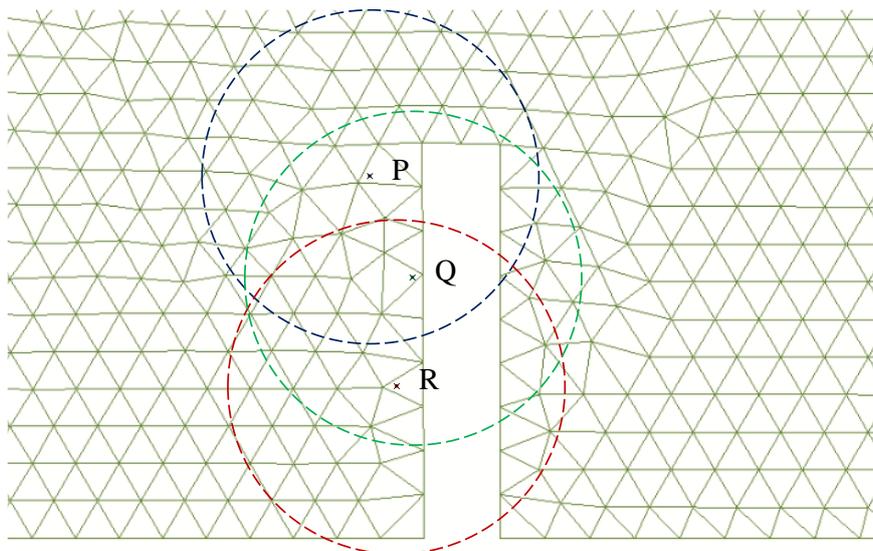


Fonte: autoria própria

Para a aplicação no código do autor, o algoritmo implementado para o cálculo da deformação não local é geral e prático, porém apresenta algumas limitações. Em especial, algumas regiões com pequenas reentrâncias alongadas e com largura inferior a d_{lim} podem apresentar um mapeamento de Φ nas proximidades das bordas da reentrância que pode não ser condizente com a expectativa, caso a borda oposta desta

reentrância esteja dentro da vizinhança analisada. A Figura 17 apresenta essa situação, na qual a varredura dos elementos da região próxima aos pontos P e Q captura elementos do lado oposto da reentrância, que pode eventualmente apresentar um comportamento distinto ao do lado destes pontos analisados. Para esses casos, deve existir uma preocupação adicional em se verificar se a geometria do problema não compromete a avaliação das deformações não locais partindo do algoritmo proposto. Este mesmo problema pode ser identificado em outros algoritmos apresentados na literatura, como por exemplo o apresentado por Pouplana e Oñate [52], que fatia o domínio em regiões pré-estabelecidas (necessariamente maiores que a área limitada ao raio d_{lim} para um ponto do domínio) e faz a integração com base na seleção da região que contém o ponto a ser analisado, tornando sua aplicação mais rápida que a aqui utilizada, porém mais genérica e mais dependente da geometria do problema analisado e susceptível a avaliações desnecessárias. Outros algoritmos permitem superar essa dificuldade, como o apresentado por Rastiello et al. [53]. Além disso, conforme apontado por Barros [51], especial cuidado deve ser tomado nas regiões em que alguma simplificação de simetria for adotada. Nessas, algum procedimento de “rebatimento” dos elementos próximos ao eixo de simetria deverá ser utilizado para definir corretamente os volumes das funções empregadas nessas regiões.

Figura 17 – Representação de uma malha de elementos com uma reentrância alongada. Pontos P, Q e R apresentados com suas respectivas áreas de varredura para verificação da deformação não local.



Fonte: autoria própria

3.6 Resolução pelo Método dos Elementos Finitos

Considerando a discretização do domínio Ω^r bidimensional do sólido em elementos finitos, o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ que satisfaz (3.60) deve ser aproximado por funções de forma avaliadas no domínio de cada elemento (funções de suporte compacto), de modo que a projeção da solução esteja contida no subespaço finito das funções de aproximação \mathcal{S}^h . Para a construção desta aproximação, pode ser considerada a união das funções de forma de cada elemento, tal que

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N} \mathbf{u}_e, \quad (3.84)$$

sendo o índice h superscrito em $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ relativo ao pertencimento deste vetor ao subespaço das funções de aproximação. Além disso, Nel é o número de elementos do domínio discretizado e $\mathbf{N} = \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$ são as funções de forma avaliadas nos nós de cada elemento, isto é,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \mathbf{I} \ \mathbf{N}_2 \mathbf{I} \ \dots \ \mathbf{N}_n \mathbf{I}]_{2 \times 2n}, \quad (3.85)$$

onde n é o número de nós do elemento e \mathbf{I} é a matriz identidade de posto 2. A componente \mathbf{u}_e de (3.84) é um vetor coluna que armazena alternadamente os deslocamentos nodais, considerando o espaço bidimensional com componentes u e v das direções ortonormais que compõem o sistema de referência, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_n \ v_n]_{2n \times 1}^T, \\ \mathbf{u}_{e1} &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]_{n \times 1}^T \text{ e} \\ \mathbf{u}_{e2} &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]_{n \times 1}^T, \end{aligned} \quad (3.86)$$

onde \mathbf{u}_{e1} e \mathbf{u}_{e2} armazenam apenas as componentes u ou v , respectivamente.

Da mesma forma que em (3.84) e devido às funções de peso estarem contidas no espaço \mathcal{H}_1 de Hilbert, tal qual as funções de aproximação, a mesma projeção desta última pode ser aproveitada (caracterizando assim a aplicação do Método de Galerkin), de modo que o campo aproximado dos deslocamentos virtuais assuma sua forma com

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_e = [\delta u \ \delta v]^T. \quad (3.87)$$

Considerando a derivada espacial da matriz das funções de forma obtida pela aplicação do operador diferencial $[\partial_\varepsilon]$, dado por

$$[\partial_\varepsilon] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\cdot) \mathbf{I} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (\cdot) \mathbf{I} \right]^T, \quad (3.88)$$

e seguindo a notação

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\cdot) = (\cdot)_{,i} \quad (3.89)$$

tem-se a matriz de deformação \mathbf{B} das funções de forma como

$$[\partial_\varepsilon]\mathbf{N} = \mathbf{B}_{4 \times 2n} = \begin{bmatrix} N_{1,1}\mathbf{I} & N_{2,1}\mathbf{I} \dots & N_{n,1}\mathbf{I} \\ N_{1,2}\mathbf{I} & N_{2,2}\mathbf{I} \dots & N_{n,2}\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

Sejam também

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{,1} &= [N_{1,1}\mathbf{I} \ N_{2,1}\mathbf{I} \dots \ N_{n,1}\mathbf{I}] \text{ e} \\ \mathbf{N}_{,2} &= [N_{1,2}\mathbf{I} \ N_{2,2}\mathbf{I} \dots \ N_{n,2}\mathbf{I}] \end{aligned} \quad (3.91)$$

matrizes relacionadas aos componentes de \mathbf{B} que serão consideradas na formulação do problema tangente. O gradiente dos deslocamentos virtuais pode ser escrito com

$$\nabla \delta \mathbf{u}_e = [\partial_\varepsilon]\mathbf{N} \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e = \left[(\mathbf{N}_{,1} \delta \mathbf{u}_e)^T \ (\mathbf{N}_{,2} \delta \mathbf{u}_e)^T \right]^T. \quad (3.92)$$

Além disso, apropriando-se da notação em vetores-coluna e recordando as expressões (3.11) e (3.12), em que $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}_i \otimes \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$, pode-se construir, com o auxílio da partição de \mathbf{B} em $\mathbf{N}_{,i} = [N_{1,i}\mathbf{I} \ N_{2,i}\mathbf{I} \dots \ N_{n,i}\mathbf{I}]$,

$$\delta \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{N}_{,i} \delta \mathbf{u}_e \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{x}_e, \quad (3.93)$$

a partir da posição deformada dos nós do elemento,

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e^r + \mathbf{u}_e, \quad (3.94)$$

sendo \mathbf{x}_e^r o vetor que agrega os vetores-posição dos nós do elemento na configuração de referência.

Elemento triangular T6 em coordenadas naturais

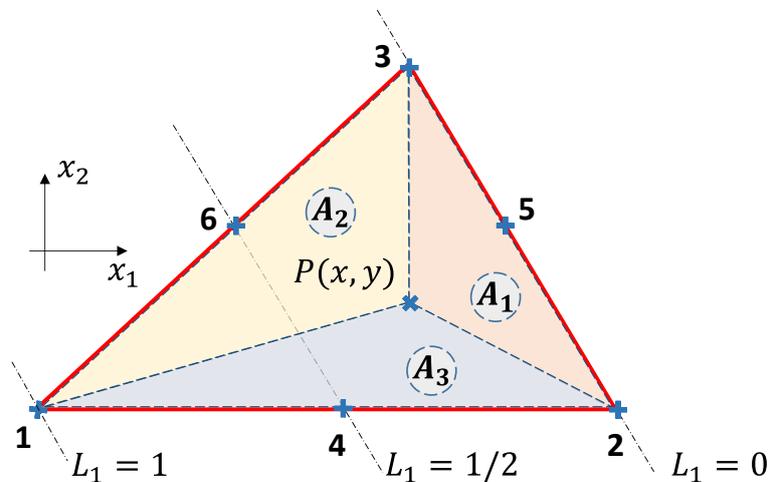
Para as aplicações propostas nesse trabalho serão consideradas as discretizações em elementos finitos a partir do uso de elementos triangulares quadráticos, denominados T6, cujas funções de forma podem ser avaliadas a partir de suas coordenadas naturais triangulares (válido se os nós de uma mesma aresta forem colineares). Considerando o triângulo apresentado na Figura 18 e um ponto qualquer P contido no triângulo ou em seus lados têm coordenadas (x, y) relativas ao sistema de referência, definem-se as coordenadas naturais L_k ($k = 1, 2, 3$) avaliadas em P como sendo a relação de áreas

$$L_k = A_{ek} / A_e = \hat{L}_k(x, y) \quad (3.95)$$

em que A_e é a área total do elemento triangular e A_{ek} é a área auxiliar oposta ao nó k, limitada pelos vértices do triângulo (a menos de k) e pelo ponto P. Nota-se que um ponto P' pertencente a uma aresta oposta ao nó k apresenta área A_{ek} nula (e, portanto $L_k = 0$ na aresta). Além disso, nos nós 4, 5 e 6 do elemento, $L_k = 1/2$ se k não for oposto e, no nó i, $L_i = 1$. Assim, podem ser montadas as funções de forma de suporte compacto $N_i = \hat{N}_i(x_1, x_2)$, unitárias nos nós i e nulas nos demais, de modo que, respeitando a convenção de posição dos nós 4, 5 e 6 adotada na Figura 18,

$$\begin{aligned} N_1 &= 2L_1^2 - L_1, N_2 = 2L_2^2 - L_2, N_3 = 2L_3^2 - L_3, \\ N_4 &= 4L_1L_2, N_5 = 4L_2L_3 \text{ e } N_6 = 4L_1L_3. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Figura 18 – Representação de elemento bidimensional triangular de 6 nós, com indicação das áreas auxiliares associadas a um ponto P do domínio do elemento e exemplificação da coordenada natural L relativa ao nó 1 e avaliada nos demais nós.



Fonte: autoria própria

A integração de funções dentro do domínio do elemento pode ser avaliada por meio da utilização da quadratura de Gauss para aproximar a integral de uma somatória ponderada de valores avaliados nos ditos pontos de integração, pg_n , com coordenadas específicas. Para o elemento T6, a integração das funções quadráticas exige a consideração de 3 pontos (pg_1, pg_2 e pg_3) para que a sua integração seja exata, considerando o problema numérico sem danos. Com dano, essa hipótese não é necessariamente satisfeita. A Tabela 1 apresenta as coordenadas naturais e as funções de forma avaliadas nesses pontos, conforme as expressões de (3.96), para que esta integração numérica seja exata.

Tabela 1 - Valores das Coordenadas Naturais e Funções de Forma avaliadas nos pontos de integração (pontos de Gauss)

Ponto de Gauss	Coordenadas Naturais			Função de Forma					
	L1	L2	L3	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅	N ₆
pg_1	2/3	1/6	1/6	2/9	-1/9	-1/9	4/9	1/9	4/9
pg_2	1/6	2/3	1/6	-1/9	2/9	-1/9	4/9	4/9	1/9
pg_3	1/6	1/6	2/3	2/9	-1/9	2/9	4/9	1/9	4/9

Equilíbrio

Retomando a equação de equilíbrio apresentada na equação (3.60) (e considerando que $\mathbf{P}:\nabla\delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}_i \cdot \delta\boldsymbol{\gamma}_i$), a relação entre tensões aparentes e efetivas apresentada em (3.62) e a descrição dos vetores-coluna do gradiente de deslocamentos virtuais com (3.93), pode-se avaliar o trabalho virtual dos esforços internos limitados ao domínio de um elemento finito e como

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^e &= \int_{\Omega_e^r} (1-D)\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i \cdot \delta\boldsymbol{\gamma}_i d\Omega_e^r = \int_{\Omega_e^r} (1-D)\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i \cdot \mathbf{N}_{,i} \delta\mathbf{u}_e d\Omega_e^r = \\ &= \delta\mathbf{u}_e^T \int_{\Omega_e^r} (1-D)\mathbf{N}_{,i}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i d\Omega_e^r = \delta\mathbf{u}_e^T \mathbf{R}_{int}^e \end{aligned} \quad (3.97)$$

(em que \mathbf{R}_{int}^e é o vetor de esforços internos do elemento e) e o trabalho virtual dos esforços externos avaliado no elemento fica sendo

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext}^e &= \int_{\Omega_e^r} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Omega_e^r + \int_{\Gamma_e^r} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Gamma_e^r = \\
&= \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega_e^r + \int_{\Gamma_e^r} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_e^r \right) = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{R}_{ext}^e,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

em que \mathbf{R}_{ext}^e é o vetor de esforços externos do elemento e , que agrega as forças de volume e superficiais representadas nos nós dos elementos. Nota-se que os vetores \mathbf{R}_{int}^e e \mathbf{R}_{ext}^e são nomeados em letra maiúscula à exceção da notação usual deste texto.

Conforme indicado na apresentação do elemento T6, a integração dos trabalhos internos no domínio do elemento pode ser conduzida através da integração numérica, somando a contribuição em cada elemento da função avaliada nos pontos de integração e ponderada pelos pesos (w_{pg}) relativos à posição do ponto de integração no elemento.

Para o caso do trabalho virtual dos esforços internos, tem-se que

$$\delta W_{int}^e = \delta \mathbf{u}_e^T \int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}_{,i}^T \boldsymbol{\tau}_i d\Omega_e^r = \delta \mathbf{u}_e^T \sum_{n=1}^{pg} (1 - D_n) (\mathbf{N}_{,i}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i)_n w_n A_e \delta, \tag{3.99}$$

sendo δ a espessura do modelo, unitária no estado plano. Para o elemento T6 todos os 3 pontos de integração têm o mesmo peso, $w_{pg} = 1/3$. Observa-se que nessa expressão já se levou em consideração a contribuição do parâmetro escalar de dano, também avaliado em cada ponto de integração do domínio. Assim, o vetor de esforços internos avaliado em cada elemento é composto por

$$\mathbf{R}_{int}^e = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 (1 - D_n) (\mathbf{N}_{,i}^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i)_n A_e \delta. \tag{3.100}$$

Como apresentado em (3.97) e (3.98), os termos integrados no domínio (tensões internas e forças de volume) e no contorno (tensões prescritas) no elemento fornecem vetores com dimensão de força associados aos graus de liberdade locais dos nós do mesmo. O espalhamento dos vetores de esforços internos e externos elementares a partir da relação de conectividade entre os graus de liberdade na numeração local dos elementos e seus respectivos graus de liberdade na numeração global do sólido permite o acúmulo dos esforços nos vetores de esforços internos e externos globais, \mathbf{R}_{int} e \mathbf{R}_{ext} , associados ao vetor de deslocamentos virtuais globais $\delta \mathbf{r}$ na definição dos trabalhos virtuais do sólido, tal que $\delta W_{int} = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{R}_{int}$ e $\delta W_{ext} = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{R}_{ext}$, em que

$$\mathbf{R}_{int} = \bigwedge_{e=1}^{Nel} \mathbf{R}_{int}^e \quad , \quad \mathbf{R}_{ext} = \bigwedge_{e=1}^{Nel} \mathbf{R}_{ext}^e \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{r} = \bigwedge_{e=1}^{Nel} \delta \mathbf{u}_e \quad , \quad (3.101)$$

onde $\bigwedge(\cdot)$ é o operador de espalhamento dos graus de liberdade locais de cada elemento para os respectivos graus de liberdade globais. Define-se então o vetor de forças desbalanceadas \mathbf{R} , de forma que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ext} - \mathbf{R}_{int}$. Por fim, dada a arbitrariedade de $\delta \mathbf{r}$, observa-se que, pelo equilíbrio,

$$\delta W_{int}^e - \delta W_{ext}^e = \delta \mathbf{r}^T (\mathbf{R}_{ext} - \mathbf{R}_{int}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{0} . \quad (3.102)$$

Observa-se que (3.102) compõe um sistema de equações algébricas não lineares. A solução exige, em geral, a adoção de métodos numéricos. Neste trabalho, serão apresentados os métodos de resolução do problema numérico embasadas no método de Newton, seja através do controle de carregamentos (análise incremental variando o parâmetro λ), controle de deslocamentos ou associado ao método da corda, conforme exposto na seção 3.7. Além disso, analisando as expressões acima, observa-se que, no caso de problemas que envolvam esforços externos aplicados aos nós do domínio, o vetor \mathbf{R}_{ext} é não nulo e depende apenas da intensidade dos esforços, que em uma solução incremental pode ser controlada por um parâmetro λ_R , real, tal que, para uma certa iteração k do incremento n de carregamento, $\mathbf{R}_{ext_k}^n = \lambda_R^n \mathbf{R}_{ext,Ref}$, sendo $\mathbf{R}_{ext,Ref}$ o vetor de esforços externos de referência, equivalente a $\mathbf{R}_{ext_k}^n$ quando λ_R é unitário. Por se tratar de carregamentos externos conservativos neste trabalho, o vetor \mathbf{R}_{ext} independe do campo de deslocamentos \mathbf{u} para os problemas aqui abordados, como seria em casos de carga seguidora, por exemplo. Está associado, logo, apenas ao parâmetro λ_R . A consideração supracitada também vale para casos em que existam esforços externos em coexistência com deformações térmicas. No caso de o problema a ser resolvido apenas apresentar variação de temperatura para o equilíbrio elástico, tem-se que \mathbf{R}_{ext} é nulo e $\mathbf{R} = -\mathbf{R}_{int}$. Além disso, o parâmetro de controle deve estar associado ao campo de temperaturas, e aqui é apresentado como λ_θ , tal que, conforme exposto em (3.23),

$$\Delta \theta = \lambda_\theta (\theta^f - \theta^r) = \lambda_\theta \Delta \theta^f . \quad (3.103)$$

Considerando isso, observa-se que o vetor de esforços internos deve depender tanto do campo de deslocamentos globais \mathbf{r} quanto do parâmetro de controle do campo de temperaturas, sendo então que

$$\mathbf{R}_{ext} = \widehat{\mathbf{R}}_{ext}(\lambda_R) \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_{int} = \widehat{\mathbf{R}}_{int}(\lambda_\theta, \mathbf{r}), \text{ logo} \quad (3.104)$$

$$\mathbf{R} = \lambda_R \mathbf{R}_{ext,Ref} - \mathbf{R}_{int}(\lambda_\theta, \mathbf{r}) = \lambda \mathbf{R}_{ext,Ref} - \mathbf{R}_{int}(\lambda, \mathbf{r}) \quad (3.105)$$

De modo geral, pode-se considerar $\lambda_R = \lambda_\theta = \lambda$ (conforme acima apresentado), sobretudo quando, nos métodos de resolução do problema numérico (a serem apresentados na próxima seção), ambos os carregamentos (esforços externos e variação térmica) ocorrerem concomitantemente nos passos de resolução. A distinção entre λ_R e λ_θ serve, nesse sentido, para explicitar a que estão associados os parâmetros utilizados dentro da formulação e resolução do problema numérico. No desenvolvimento da resolução do problema numérico deste trabalho, bem como na resolução dos exemplos apresentados, foi considerada a igualdade entre λ_R e λ_θ em todos os casos. Para a resolução numérica baseada em controle de deslocamentos ou método da corda, e aplicada a problemas que envolvam temperaturas variáveis, será necessário introduzir um vetor adicional que represente a influência (variação) do parâmetro de controle das temperaturas com relação às forças internas do sistema no equilíbrio. Com base no artigo de Parente et al. [79], este vetor pode ser representado, elemento a elemento, como

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}_{,i}^T \boldsymbol{\tau}_{i,\lambda_\theta} d\Omega_e^r = - \int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{f}_j \alpha \Delta\theta^f d\Omega_e^r = \mathbf{R}_{int,\lambda_\theta}^e, \quad (3.106)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_{i,\lambda_\theta}$ equivale à derivação dos vetores coluna de \mathbf{P} com relação ao parâmetro de controle λ_θ , e para \mathbf{f}_{int} vale a mesma operação de agrupamento apresentada na expressão (3.101) com

$$\mathbf{f}_{int} = \bigwedge_{e=1}^{Nel} \mathbf{f}_{int}^e. \quad (3.107)$$

Este vetor coluna \mathbf{f}_{int} tem a mesma dimensão de \mathbf{R} e pode ser entendido como um vetor equivalente ao de esforços internos relativos ao efeito da temperatura, conforme indicado por Parente et al. [79] e também utilizado por outros autores. Por extensão da relação apresentada em (3.106) nos elementos, vale que $\mathbf{f}_{int} = \mathbf{R}_{int,\lambda_\theta}$.

Avaliação da Matriz de Rigidez Tangente

Para a correta avaliação da rigidez do sistema visando a estimar as correções nas iterações do método de Newton até a convergência na resolução do problema numérico, deve ser calculada a matriz de rigidez tangente consistente. Esta matriz, \mathbf{K}_T , pode ser avaliada e montada elemento a elemento com as mesmas operações apresentadas em (3.101) pelo espalhamento das rigidezes relativas aos graus de liberdade locais nos seus respectivos globais. Assim, considerando inicialmente a avaliação de um problema elástico sem a presença de dano, e partindo de $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \lambda_\theta, \lambda_R) = \mathbf{R}_{ext}(\lambda_R) - \mathbf{R}_{int}(\mathbf{r}, \lambda_\theta)$, tem-se que a matriz de rigidez tangente sem dano $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{T0}$ pode ser avaliada como

$$\mathbf{K}_{T0} = -\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{int0}}{\partial \mathbf{r}}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{ext}}{\partial \mathbf{r}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{int0}}{\partial \mathbf{r}}\right), \quad (3.108)$$

sendo \mathbf{R}_{int0} o vetor dos esforços externos para a condição sem dano e o termo de \mathbf{R}_{ext} nulo dado que os carregamentos externos aplicados são admitidos conservativos. Para um elemento qualquer, vale também que

$$\mathbf{K}_{T0} = \bigwedge_{e=1}^{Nel} \mathbf{k}_{T0}^e, \quad \text{onde} \quad \mathbf{k}_{T0}^e = \frac{\partial \mathbf{R}_{int0}^e}{\partial \mathbf{u}_e} = \int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}_{,i}^T \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \boldsymbol{\gamma}_j} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_j}{\partial \mathbf{u}_e} d\Omega_e^r. \quad (3.109)$$

Como $\boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{N}_{,j} \mathbf{u}_e$, é obtido que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_j}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{N}_{,j}. \quad (3.110)$$

Por fim, como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \boldsymbol{\gamma}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \mathbf{f}_j} = \mathbf{C}_{ij}, \quad \text{então} \quad \mathbf{k}_{T0}^e = \int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{N}_{,j} d\Omega_e^r. \quad (3.111)$$

Nota-se que, no caso das expressões (3.109) e (3.111), apresentam-se os vetores-coluna das tensões $\boldsymbol{\tau}_i$ pois, na inexistência de dano, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i = \boldsymbol{\tau}_i$. Considerando a presença de dano, retomando a expressão de \mathbf{R}_{int} escrita a partir da substituição de (3.100) em (3.101) a avaliação de \mathbf{K}_T passa a ter a seguinte expressão, aplicando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= -\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{int}}{\partial \mathbf{r}}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{ext}}{\partial \mathbf{r}}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{int0}}{\partial \mathbf{r}}\right) - D \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{int0}}{\partial \mathbf{r}}\right) - \mathbf{R}_{int0} \left(\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}}\right), \end{aligned} \quad (3.112)$$

em que o último termo (derivada do dano em relação aos deslocamentos) se dá devido à variável de dano também estar atrelada ao campo de deslocamentos globais do problema, por ser função das deformações equivalentes. Faz-se, assim, necessária a avaliação desta derivada, que pode ser expandida para

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial D}{\partial K_D} \frac{\partial K_D}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \mathbf{r}} = f' \eta \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.113)$$

Aqui, uma importante simplificação é considerada. Como a composição do parâmetro de dano é feita a partir da relação $D = \alpha_T D_T + (1 - \alpha_T) D_C$, dever-se-ia considerar também a contribuição da variação de α_T com os deslocamentos, de modo que

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \alpha_T}{\partial \mathbf{r}} D_T + \alpha_T \frac{\partial D_T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \alpha_T}{\partial \mathbf{r}} D_C + (1 - \alpha_T) \frac{\partial D_C}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.114)$$

Neste trabalho, contudo, foram adotadas simplificações para que a avaliação deste termo não seja necessária. Nesse sentido, o parâmetro α_T deverá ser avaliado apenas na primeira iteração de cada passo, e tornado constante nas iterações seguintes. Das referências consultadas neste trabalho acerca deste tópico, muitas tratam desta questão de maneira implícita dentro da formulação ou sequer citam a necessidade de atenção a este termo, como em [52], enquanto outras apresentam hipóteses semelhantes à aqui adotada. Por exemplo, Mazars et al. [71] adota constância do termo r (conceitualmente semelhante a α_T , porém relacionado diretamente à partição do estado de tensão e aplicado à variável K_D em suas partes à tração e compressão) desde que o carregamento assuma uma trajetória proporcional, caracterizada pelo chamado “*radial loading path*”. Jason et al. [96] assume hipótese semelhante, aplicando ao mesmo parâmetro α_T , ao passo que apresenta que esta hipótese é adotada desde as primeiras contribuições de J. Mazars à formulação da mecânica do dano aplicada a materiais cimentícios. Deste modo, apesar de não ser reavaliado em todas as iterações, esta hipótese garante que a taxa de convergência possa não ser significativamente afetada pela derivação aqui proposta, apesar da eventual perda de consistência a depender da complexidade do carregamento aplicado. É uma hipótese razoável desde que os passos de carregamentos, de deslocamento ou tamanho da corda não sejam muito grandes, a ponto de mudar demasiadamente o comportamento da estrutura entre dois passos consecutivos. Deste modo, a expressão (3.113) será aqui reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} &= \alpha_T \frac{\partial D_T}{\partial \mathbf{r}} + (1 - \alpha_T) \frac{\partial D_C}{\partial \mathbf{r}} = \\ &= \alpha_T \frac{\partial D_T}{\partial K_D} \frac{\partial K_D}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \mathbf{r}} + (1 - \alpha_T) \frac{\partial D_C}{\partial K_D} \frac{\partial K_D}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \mathbf{r}},\end{aligned}\quad (3.115)$$

em que cada termo da expressão (3.113) (e da (3.115), conseqüentemente), suas hipóteses e simplificações serão avaliados nos subitens a seguir.

Primeiro Termo (f')

O primeiro termo é um escalar que avalia a derivação da variável de dano pela variável de estado de deformação K_D . Retomando as expressões (3.74) e (3.75) com $D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C$ esse termo pode ser avaliado através de

$$\frac{\partial D}{\partial K_D} = \alpha_T \frac{\partial D_T}{\partial K_D} + \alpha_C \frac{\partial D_C}{\partial K_D} \quad (3.116)$$

em que os termos de derivadas de D_T e D_C em relação a K_D são

$$\frac{\partial D_k}{\partial K_D} = \frac{(1 - A_k)K_0}{K_D^2} + \frac{A_k B_k}{e^{B_k(K_D - K_0)}}, \quad k = \{T, C\}, \quad (3.117)$$

considerando as componentes de dano à tração e compressão.

Segundo Termo (η)

O segundo termo da derivação em (3.113) considera a variação da variável de estado de deformação K_D em relação à deformação equivalente não local $\bar{\epsilon}$. Logo, esta derivada (η) pode assumir os valores 0 ou 1, sendo

$$\frac{\partial K_D}{\partial \bar{\epsilon}} = \eta = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{\epsilon} < K_D, \text{ ou} \\ 1, & \text{se } \bar{\epsilon} = K_D \text{ e } \dot{\bar{\epsilon}} > 0. \end{cases} \quad (3.118)$$

Nota-se que, quando há descarregamento ou, por alguma outra razão, η assume valor nulo em um ponto de integração, a contribuição deste ponto na avaliação da rigidez tangente na iteração deverá assumir simplesmente $\mathbf{k}_T^e = (1 - D_n)\mathbf{k}_{T0}^e$ (equivalente ao apresentado na expressão (3.112) na condição da derivada do dano em relação ao vetor de deslocamentos ser nula), sendo esse valor tangente equivalente à reta secante usualmente observada nos exemplos uniaxiais de ciclo de carregamento e descarregamento.

Terceiro Termo (derivada da deformação equivalente não local)

Este termo relaciona a deformação equivalente não local avaliada em (3.81) aos deslocamentos nodais do sólido discretizado. Esta diferenciação deve ser feita considerando a contribuição, ponto a ponto, de todos os elementos da vizinhança do ponto analisado, considerando o parâmetro de distância d_{lim} apresentado na seção 3.5. Partindo da avaliação da deformação não local de um ponto de integração, conforme o desenvolvimento da formulação exposto por Pouplana e Oñate [52], a aplicação da discretização do MEF na avaliação de $\bar{\varepsilon}$ de um ponto A relativo à varredura dos pontos de integração B_1, B_2, \dots, B_N da região permite reescrever a expressão (3.81) como

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}_A^r) = \sum_{n=1}^N w_n \Phi_{AB_n} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}_{B_n}^r) = \frac{1}{V_A} \sum_{n=1}^N w_n A_{Be} \Phi(\Delta S_{AB_n}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}_{B_n}^r), \quad (3.119)$$

onde A_{Be} é a área do elemento que contém o ponto B , $w_n = 1/3$ é o peso relativo a um ponto de integração do elemento triangular T6 e Φ_{AB_n} sintetiza a relação de pesos ponderados pela influência de B em A , tal que

$$\Phi_{AB_n} = \frac{\Phi(\Delta S_{AB_n})}{V_A}, \text{ em que } V_A = \sum_N w_N A_{Be} \Phi(\Delta S_{AB_n}). \quad (3.120)$$

Deste modo, o termo da derivada da deformação equivalente não local pode ser expandido por uma somatória da diferenciação das deformações equivalentes avaliadas localmente em cada um desses N pontos., Analisando a equação (3.119), nota-se que apenas a deformação local $\tilde{\varepsilon}$ do ponto B deve ser dependente do campo de deslocamentos, visto que os demais parâmetros estão unicamente relacionados a parâmetros independentes (como w_N) e funções descritas na configuração de referência (como $\Phi(\Delta S_{AB_n})$ e V_A). Assim, desenvolvendo esta derivação em (3.119) e já substituindo a relação de (3.120) nesta, tem-se que

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{n=1}^N w_n A_{Be} \Phi_{AB_n} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.121)$$

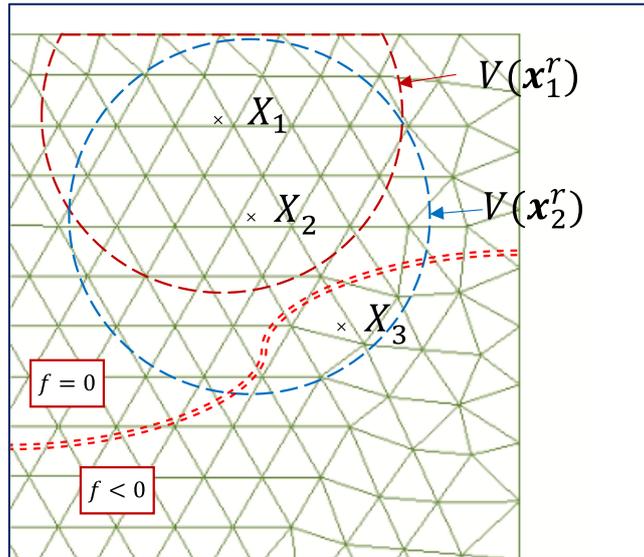
Assim, observa-se que, caso se deseje avaliar para um certo ponto A a derivação da deformação equivalente não local pelos deslocamentos nodais do domínio, devem ser acumuladas neste ponto as contribuições (em forma de pesos da função Φ e das

derivadas das deformações equivalentes locais) de todos os pontos que pertencem à vizinhança deste ponto A , segundo os critérios da abordagem não local já apresentados na seção 3.5. Assim, é possível desprender dessa expressão o efeito que a abordagem não local implica na montagem da matriz de rigidez tangente. Dada a necessidade da captura de pontos que influenciam no cômputo da deformação não local, o espalhamento dos graus de liberdade dos elementos que nesta formulação apresentam interferência entre si devido à contribuição desta abordagem deve aumentar consideravelmente a largura da banda na matriz de rigidez. Além disso, a influência da não localidade das deformações na matriz de rigidez é torná-la não simétrica, visto que o efeito observado de um ponto em outro não é, necessariamente, sentido de forma igual ao ser invertida a análise. A Figura 19, adaptada de Pijaudier-Cabot e Jason [70], ilustra bem essa consideração apresentando situações em que se é possível identificar a origem dessa assimetria:

- Com base na Figura 19, na região dos pontos X_1 (próximo ao contorno do domínio) e X_2 , descritos respectivamente pelos vetores-posição \mathbf{x}_1^r e \mathbf{x}_2^r , a distribuição das funções peso aplicadas se mostra desigual. Considerando os volumes da função peso Φ aplicada a esses pontos, $V(\mathbf{x}_1^r)$ e $V(\mathbf{x}_2^r)$, e representados em seus limites pelas linhas tracejadas em torno de X_1 e X_2 , nota-se que $V(\mathbf{x}_1^r) < V(\mathbf{x}_2^r)$, e logo a contribuição de X_2 na deformação não local avaliada em X_1 será maior do que a contribuição de X_1 em X_2 , visto que a influência das deformações de um ponto em outro são sempre normalizadas pelo volume da função peso distribuída na região analisada;
- Como esses mesmos pontos estão em regiões diferentes do domínio, caracterizados por deformações e danos distintos, é esperado que a influência de um ponto em outro não seja recíproca também devido a essas diferenças;
- Como a não localização só é tratada na avaliação da matriz de rigidez tangente quando há a tendência de crescimento de dano, satisfazendo pelo segundo termo da expressão (3.113) que $\eta = 1$, na região limítrofe a essa tendência (representada na Figura 19 pela linha dupla pontilhada), existirá a avaliação da deformação não local em X_2 , sendo este valor influenciado pela deformação local em X_3 , mas o mesmo não ocorrerá em X_3 , visto que $\eta = 0$ na região sem crescimento de dano e, neste ponto, a análise deverá se limitar à sua avaliação local. Assim, analisando a contribuição destes pontos à matriz de rigidez global

do sistema, os pares de graus de liberdade globais dos elementos que contêm os pontos X_2 e X_3 serão nulos na região triangular superior (dada a influência de X_3 em X_2) e não nulos na inferior (devido à não-influência de X_2 em X_3). A Figura 20 ilustra essa observação na montagem da matriz de rigidez relativa aos graus de liberdade de dois elementos nessa região limítrofe.

Figura 19 - Ilustração da influência da localização dos pontos para a não simetria da matriz de rigidez tangente do problema de dano sob análise não local



Fonte: adaptado de Pijaudier-Cabot e Jason [70]

Figura 20 – Efeito da assimetria devido à deformação não local na matriz de rigidez, considerando a contribuição dos graus de liberdade dos elementos T e U que contém respectivamente os pontos X_2 e X_3 no exemplo da Figura 19. T_1 a T_{12} são os graus de liberdade do elemento T , e U_1 a U_{12} do elemento U , equivalentemente.

	T_1	T_2	T_3	...	T_{12}	U_1	U_2	U_3	...	U_{12}
T_1	●	●	●		●	●	●	●		●
T_2	●	●	●		●	●	●	●		●
T_3	●	●	●		●	●	●	●		●
...										
T_{12}	●	●	●		●	●	●	●		●
U_1	0	0	0		0	●	●	●		●
U_2	0	0	0		0	●	●	●		●
U_3	0	0	0		0	●	●	●		●
...										
U_{12}	0	0	0		0	●	●	●		●

Fonte: autoria própria.

Resta então avaliar a derivação da deformação equivalente local com relação ao campo de deslocamentos, dada a expansão apresentada em (3.121), e

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_E} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_E}{\partial \mathbf{u}_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3.122)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}_E = [E_{e11} \quad E_{e22} \quad E_{e12}]$ é um vetor que agrupa as componentes do tensor das deformações elásticas de Green-Lagrange, \mathbf{E}_e , avaliado no ponto do elemento analisado. O Anexo A apresenta o desenvolvimento do primeiro termo da derivada acima. O segundo termo apresenta a derivação das componentes de $\boldsymbol{\epsilon}_E$ com relação às componentes do campo de deslocamentos nodais do elemento cuja deformação equivalente local está sendo analisada. Dessa forma, este termo irá resultar em componentes relacionadas aos graus de liberdade locais do elemento do ponto B analisado (conforme critério abordado na expressão (3.119)), que deverão ser devidamente espalhados nos graus de liberdade globais do sistema. O último termo, por sua vez, é tratado como o espalhamento dos graus de liberdade locais nos globais, para cada elemento tratado.

No caso da formulação apresentada nesse texto, a segunda derivada de (3.122) é avaliada como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_E}{\partial \mathbf{u}_e} = \left[\frac{\partial E_{e11}}{\partial \mathbf{u}_e} \quad \frac{\partial E_{e22}}{\partial \mathbf{u}_e} \quad \frac{\partial E_{e12}}{\partial \mathbf{u}_e} \right], \quad (3.123)$$

em que, limitando o vetor de deslocamentos aos graus de liberdade de um elemento e avaliando a posição deformada do elemento por $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e^r + \mathbf{u}_e$, tem-se que

$$\frac{\partial E_{e11}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{N}_{,1}^T (\mathbf{N}_{,1} \mathbf{x}_e), \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial E_{e22}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{N}_{,2}^T (\mathbf{N}_{,2} \mathbf{x}_e), \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial E_{e12}}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{,1}^T (\mathbf{N}_{,2} \mathbf{x}_e) + \mathbf{N}_{,2}^T (\mathbf{N}_{,1} \mathbf{x}_e)), \quad (3.126)$$

resgatando as derivadas espaciais das funções de forma apresentadas em (3.91). Por fim, o último termo da expressão de (3.122) é avaliado através do procedimento de espalhamento dos graus de liberdade locais dos elementos nos respectivos graus de liberdade globais, através do operador de agrupamento que relaciona diretamente os

deslocamentos dos graus de liberdade dos elementos, \mathbf{u}_e , ao vetor global de deslocamentos \mathbf{r} , com

$$\mathbf{r} = \bigwedge_{e=1}^{Nel} \mathbf{u}_e . \quad (3.127)$$

Ou seja, avaliadas as contribuições dos primeiros dois termos de (3.121), seus valores devem ser alocados nas posições da matriz de rigidez referentes aos graus de liberdade globais que se relacionam aos graus de liberdade locais do elemento analisado.

3.7 Resolução do problema numérico

Dada a não linearidade das equações de equilíbrio $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, um método numérico iterativo deve ser usado para aproximar a solução que minimiza o resíduo do vetor de forças desbalanceadas. Existem diferentes formas de se avaliar em um passo do problema as correções necessárias ao longo das iterações para que a convergência seja garantida, e algumas dessas são abordadas nesta seção, como o controle de carregamento, o controle de deslocamentos e o Método da Corda. Desses três, os dois últimos serão apresentados com base na formulação aplicada em Crisfield [78] e Parente et al. [79].

3.7.1 Método de Newton-Raphson com controle de carregamento

O método de Newton-Raphson com controle de carregamento foi o primeiro a ser implementado neste trabalho e se baseia em uma análise incremental (carregamento aplicado em incrementos) com aproximações sucessivas da solução por meio da correção da rigidez tangente a cada nova iteração. Sendo o vetor \mathbf{R} dependente do campo global de deslocamentos nodais \mathbf{r} , a aproximação pode ser avaliada no incremento n e na iteração k através da relação de linearização de \mathbf{R} , tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}_k} \right) \Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{r}_k , \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k + \Delta \mathbf{r}_k , \end{aligned} \quad (3.128)$$

sendo \mathbf{K}_T a matriz global de rigidez tangente do sistema não linear avaliada em cada iteração e $\Delta \mathbf{r}_k$ o vetor de deslocamentos incrementais da iteração. Deste modo, a

avaliação de \mathbf{r}_{k+1} depende da obtenção de $\Delta\mathbf{r}_k$ através da resolução da primeira igualdade de (3.128).

Dessa forma, a solução do problema não linear se dá a partir de passos preditores (onde se fornece uma estimativa inicial para a solução numérica do respectivo incremento de carregamento, a partir de uma solução $\{\mathbf{r}_0, \lambda_0\}$ conhecida) e corretores (que iterativamente buscam a solução numérica que satisfaz um critério de erro admissível, ϵ_{adm} , a partir da estimativa inicial dada), tal como apresentado simplifiadamente no quadro da Figura 21. O erro que se busca minimizar é a norma euclidiana do vetor de forças desbalanceadas adimensionalizado, avaliada através de

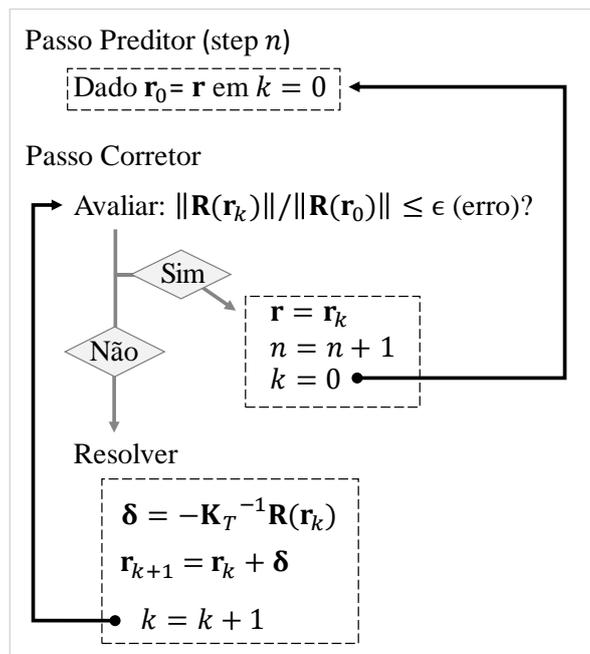
$$\epsilon_R = \frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{r}_k)\|}{\|\mathbf{R}(\mathbf{r}_0)\|} \leq \epsilon_{adm}. \quad (3.129)$$

Alternativamente, pode ser avaliado o erro considerando o incremento de deslocamentos entre iterações sucessivas, satisfazendo

$$\epsilon_r = \frac{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \leq \epsilon_{adm}, \quad (3.130)$$

também adimensional, tomando como ϵ o maior valor entre ϵ_R e ϵ_r . Esta avaliação deve ser feita antes do próximo passo corretor.

Figura 21 – Fluxograma do método iterativo de Newton-Raphson com controle de carregamento para resolução do problema não linear.



Fonte: autoria própria.

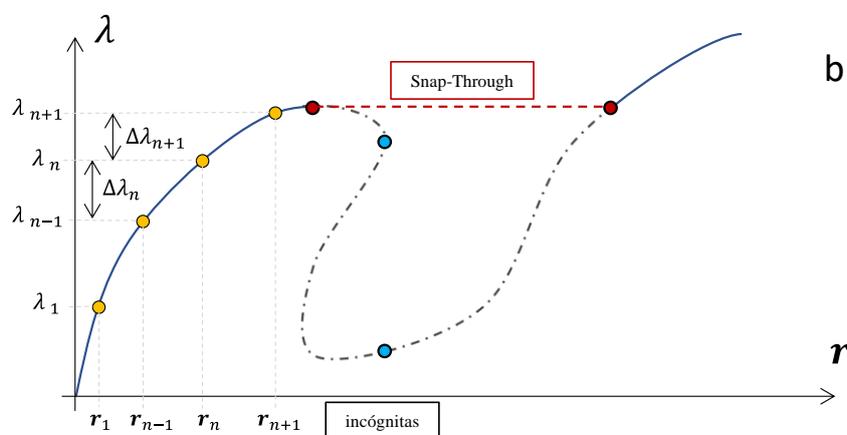
Considerando a aplicação do esforço externo do problema não linear em incrementos, e utilizando o recurso apresentado nas expressões (3.104) e (3.105), adota-se o parâmetro $\lambda = \lambda_R = \lambda_\theta$ de modo que, em cada passo n de carregamento e em qualquer iteração deste passo, o equilíbrio buscado seja

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} = \lambda^n \mathbf{R}_{ext,Ref} - \mathbf{R}_{int}(\mathbf{r}, \lambda^n). \quad (3.131)$$

Assim, o equilíbrio deve ser dado em etapas e, a cada novo passo de carregamento, o fator λ^n deste deve ser incrementado por uma variação positiva $\Delta\lambda^n$, com $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \Delta\lambda^n$. No método de Newton-Raphson com controle de carregamento, esses incrementos podem ser diferentes entre os passos do problema (isto é, $\Delta\lambda^n$ pode variar entre passos), visando a “acelerar” o fim do processo caso a convergência dos passo esteja sendo obtida com poucas iterações, ou a melhorar a convergência dos passos caso o número de iterações para convergir esteja alto. No entanto, em um mesmo passo, o valor do fator λ_n adotado em seu início deve ser fixo. A Figura 22 apresenta esse conceito de forma esquematizada para um problema genérico.

Observa-se também na Figura 22 uma das limitações deste método. Avaliando o caminho da solução do problema (linhas cheias e pontilhadas), vê-se que, a partir do ponto limite da curva (no qual a tangente é nula), o método de Newton-Raphson com controle de carregamento falha em obter uma solução próxima, visto que para isso o incremento de força externa $\Delta\lambda$ deveria ser negativo (ou seja, com $\lambda^n < \lambda^{n-1}$). Em problemas caracterizados por um trecho de amolecimento (*softening*) seguido por reenrigecimento (*hardening*) do sólido, observa-se o fenômeno de *snap-through*, no qual a trajetória de equilíbrio “salta” para o trecho em que existe solução para $\Delta\lambda$ positivo acima do ponto limite. Em outros casos, como os usualmente observados em problemas de amolecimento devido ao efeito do dano, esse fenômeno dificilmente ocorrerá e o método simplesmente não encontrará a solução, divergindo.

Figura 22 - Representação de gráfico com a curva força-deslocamento descrita através do resultado capturado com passos controlados de carregamento, baseados no método de Newton-Raphson.



Fonte: Aatoria própria.

Deste modo, vê-se então a necessidade da adoção de um método de resolução do problema numérico mais geral ou robusto, caso seja objetivo a análise completa pós-limite. Essa necessidade é comum em diversos problemas que exijam redução do parâmetro λ^n , como no caso do mapeamento completo da solução com *snap-through* ([78], [97], [98]) ou amolecimento, típico de problemas que envolvem a evolução do dano com descarregamento. Um algoritmo que permita o controle de deslocamentos é suficiente na resolução de boa parte desses problemas. Com uma abordagem ainda mais geral, pode ser considerada a utilização de métodos de seguimento da trajetória (*path-following*), como é o caso do Método da Corda. Este método permite a obtenção de toda a trajetória de equilíbrio, seja estável ou não, contemplando ambos os fenômenos de *snap-through* e *snap-back*, os quais serão mais bem abordados nas próximas sessões.

3.7.2 Método de Newton-Raphson com controle de deslocamentos

Para a apresentação desta abordagem, é importante ressaltar que o método com controle de deslocamentos a ser apresentado deve ser capaz de resolver tanto problemas que envolvam danificação material, como problemas que envolvam efeitos de temperatura, conjuntamente ou não. As abordagens tradicionais de controle de deslocamento são capazes de superar o ponto limite e representar melhor o trecho de danificação do problema. No entanto, não é comum que essas abordagens apreciem também o controle de temperaturas. No caso do controle de carregamentos, por exemplo, pelo fato de o

parâmetro λ^n ser fixo e pré-determinado para um mesmo passo de carregamento, o vetor de esforços internos \mathbf{R}_{int} não varia em função do parâmetro de carregamento ao longo das iterações de um mesmo passo de carregamento e, em detrimento disso, não há necessidade na avaliação de $\mathbf{R}_{int,\lambda} = \mathbf{f}_{int}$, que é nulo se não há variação de λ^n entre as iterações consecutivas. Por outro lado, tanto no caso da abordagem por controle de deslocamentos quanto na aplicação do Método da Corda, por ser λ^n também uma incógnita, o uso de uma abordagem que também contemple a influência da variação de temperatura para a resolução do problema numérico será necessário. A abordagem a ser apresentada considera isso, com base no exposto por Parente et al. [79].

Diferentemente do controle de carregamentos, que normalmente está associado à prescrição de um parâmetro único (λ), o controle de deslocamentos precisa ser definido em associação ao deslocamento de um ou mais graus liberdade do sistema. Isso é feito através da consideração de uma função de restrição f_d (conforme apresentado por Parente et al. [79] e Batoz e Dhett [99]), do tipo

$$f_d = u_k - u_p, \quad (3.132)$$

em que u_p é um valor prescrito e fixo a cada novo passo de resolução do problema e u_k é um valor escalar que pode representar o deslocamento de um grau de liberdade específico ($u_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r$) sendo \mathbf{e}_r um vetor unitário que aponta para o grau de liberdade que se deseja controlar (dito “ponto de controle dos deslocamentos”).

A aplicação da função f_d em adição ao sistema de equações lineares indicado em (3.128) pode ser descrita por

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{r} + \Delta \lambda \mathbf{R}_{,\lambda} = -\mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{r} - \Delta \lambda \bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{R} \\ f_{d,r}^T \Delta \mathbf{r} + \Delta \lambda f_{d,\lambda} = -f_d & \rightarrow \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r + u_p \end{cases} \quad (3.133)$$

em que $f_{d,r} = \mathbf{e}_k$ se $u_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$, $f_{d,\lambda} = 0$ e $\mathbf{R}_{,\lambda}$ pode ser avaliado pela derivação

$$\mathbf{R}_{,\lambda} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \mathbf{f}_{int} - \mathbf{R}_{ext,Ref} = -\bar{\mathbf{f}}, \quad (3.134)$$

já considerando \mathbf{f}_{int} como a contribuição da variação de λ em \mathbf{R}_{int} devido ao controle de deformações térmicas por λ_θ .

Interessa então avaliar, para cada iteração (passo corretor) do procedimento de resolução numérica, qual é o incremento (positivo ou negativo) no parâmetro de carregamento, $\Delta\lambda$, que passa a ser também incógnita do problema. Considerando inicialmente a definição de dois vetores de deslocamento $\Delta\bar{\mathbf{r}}_k$ e $\Delta\hat{\mathbf{r}}_k$, que, partindo da relação

$$\mathbf{K}_T\Delta\mathbf{r} + \Delta\lambda\bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{r} = \Delta\lambda\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{R}, \quad (3.135)$$

podem ser obtidos resolvendo parcialmente o sistema linear de (3.135), em que

$$\mathbf{K}_T\Delta\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{f}}_k \text{ e } \mathbf{K}_T\Delta\hat{\mathbf{r}}_k = -\mathbf{R}. \quad (3.136)$$

Então, reescreve-se a expressão (3.135) de forma que $\Delta\mathbf{r}_k = \Delta\lambda\Delta\bar{\mathbf{r}}_k + \Delta\hat{\mathbf{r}}_k$. Aplicando então na segunda expressão de (3.133), $\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r + u_p$, o incremento de λ em uma iteração pode ser avaliado através de

$$\Delta\lambda = -\frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}_k \cdot \mathbf{e}_r + u_k - u_p}{\Delta\bar{\mathbf{r}}_k \cdot \mathbf{e}_r} = -\frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}_k + u_k - u_p}{\Delta\bar{\mathbf{r}}_k} \quad (3.137)$$

$$\text{e } \lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda. \quad (3.138)$$

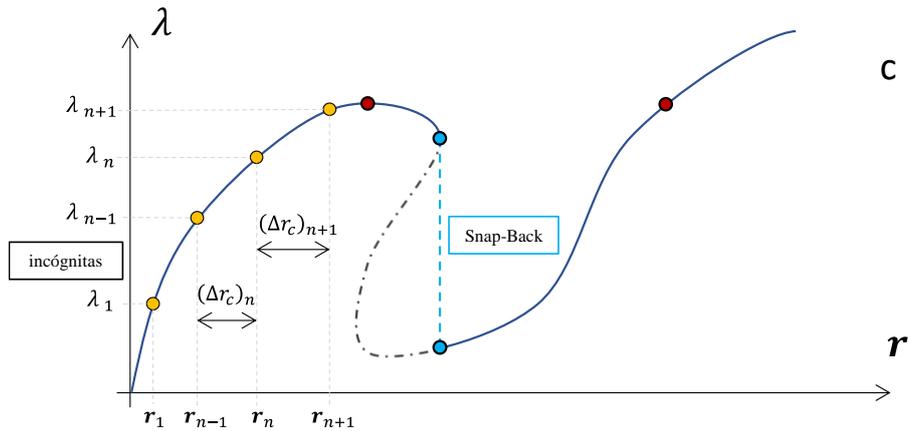
Na prática, partindo de um par de soluções $\{\mathbf{r}_0, \lambda_0\}$ (correspondente à solução final do passo anterior), o passo preditor deverá ter $\Delta\hat{\mathbf{r}}_k$ inicialmente como vetor nulo ($\mathbf{K}_T\Delta\hat{\mathbf{r}}_k = -\mathbf{R} = \mathbf{0}$, dada a convergência do passo anterior) e, nas iterações corretoras, terá $(u_k - u_p)$ nulo. Então, o procedimento pode ser simplificado a

$$\Delta\lambda = \begin{cases} -\frac{(u_k - u_p)}{\Delta\bar{\mathbf{r}}_k} & \text{se } k = 1, \\ -\frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}_k}{\Delta\bar{\mathbf{r}}_k} & \text{se } k > 1. \end{cases} \quad (3.139)$$

A Figura 23 apresenta visualmente a contribuição do método de controle de deslocamentos para a avaliação dos trechos após um ponto limite. Mostra-se também a limitação desse método, visto que o incremento entre os passos deve resultar sempre em deslocamentos crescentes. Desse modo, em casos nos quais exista o fenômeno de *snap-back* (que podem ser relativamente comuns e relevantes em estruturas de concreto, por exemplo – conforme discutido por Crisfield em [100]) ou, mais genericamente, decréscimo de deslocamentos para o ponto de controle, esse método ainda pode

apresentar deficiências. Além disso, há a dependência da escolha do grau de liberdade que será monitorado para a prescrição de deslocamentos. Essa escolha depende do problema e pode trazer dificuldades de convergência e evolução dos passos, caso não seja feita de acordo com o tipo de problema a ser avaliado. Nesses sentidos, o Método da Corda mostra-se mais robusto e geral, como será apresentado a seguir.

Figura 23 - Representação de gráfico com a curva força-deslocamento descrita através do resultado capturado com passos controlados por deslocamento, baseados no método de Newton-Raphson.



Fonte: Autoria Própria

3.7.3 Método da corda

O método da corda, conforme proposto por Riks [101] e também desenvolvido por Ramm [102] e Crisfield [78], dentre outros, utiliza como função de restrição, conforme apresentado por Riks, a expressão

$$f_d = \Delta \mathbf{r}_k^T \Delta \mathbf{r}_k + \psi_{arco}^2 \Delta \lambda_k^2 (\mathbf{R}_{ext,Ref})^T (\mathbf{R}_{ext,Ref}) - \Delta L^2, \quad (3.140)$$

em que $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0$, $\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_0$, e ψ_{arco} é um parâmetro do intervalo [0,1] que determina a forma do elipsoide no espaço de soluções, sendo $\psi_{arco} = 0$ para a forma dita “cilíndrica” e $\psi_{arco} = 1$ para a “esférica” do método. Além disso, ΔL é o parâmetro prescrito de tamanho da corda, considerado constante ao longo de um mesmo passo de solução e tratado ao longo dos passos a depender da dificuldade de convergência na resolução do problema. A obtenção do par de incógnitas $\{\mathbf{r}_k, \lambda_k\}$ que permite o andamento das iterações num passo até a convergência deste se dá pela resolução de

uma equação quadrática, com o parâmetro de carregamento incremental $\Delta\lambda$ como incógnita, conforme apresentado por Crisfield, da seguinte forma

$$a_1\Delta\lambda^2 + a_2\Delta\lambda + a_3 = 0, \quad (3.141)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= \Delta\bar{\mathbf{r}}_k^T \Delta\bar{\mathbf{r}}_k + \psi_{arco}^2, \\ a_2 &= 2\Delta\bar{\mathbf{r}}_k^T (\Delta\mathbf{r}_k + \delta\hat{\mathbf{r}}_k) + 2\psi_{arco}^2 \Delta\lambda_k, \\ a_3 &= (\Delta\mathbf{r}_k + \delta\hat{\mathbf{r}}_k)^T (\Delta\mathbf{r}_k + \delta\hat{\mathbf{r}}_k) + \psi_{arco}^2 \Delta\lambda_k^2 - \Delta L^2, \end{aligned} \quad (3.142)$$

sendo $\Delta\bar{\mathbf{r}}_k$ e $\Delta\hat{\mathbf{r}}_k$ os vetores já apresentados no método com controle de deslocamentos. A solução da equação quadrática deve fornecer um par de soluções $\{\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2\}$, em que a raiz a ser considerada na iteração deve ser a que satisfaz, segundo Crisfield, o incremento de deslocamentos que preserva o ângulo entre $\Delta\mathbf{r}_k$ e $\Delta\mathbf{r}_{k+1}$, para evitar que a solução retorne à curva já avaliada em passos anteriores. Assim, avalia-se o maior valor dentre

$$\Delta\mathbf{r}_k^T (\Delta\mathbf{r}_k + \Delta\lambda_1 \Delta\bar{\mathbf{r}}_k + \Delta\hat{\mathbf{r}}_k) \text{ e } \Delta\mathbf{r}_k^T (\Delta\mathbf{r}_k + \Delta\lambda_2 \Delta\bar{\mathbf{r}}_k + \Delta\hat{\mathbf{r}}_k), \quad (3.143)$$

e toma-se o incremento $\delta\lambda$ associado a esse valor.

3.7.4 Outras abordagens

Existem outros métodos (e variações dos métodos apresentados neste texto) de resolução do problema numérico que não foram explorados e detalhados neste texto, mas que podem contribuir na resolução dos problemas que envolvam fenômenos de dano e de localização das deformações, por exemplo. São abordagens baseadas no método da corda com uso de funções específicas para avaliar a evolução do problema com dano através de sua dissipação de energia, ou métodos que assumam parâmetros da função para tratar especificamente de regiões danificadas (ou regiões com amolecimento das deformações, de forma mais geral), que melhor governem a evolução do problema a ser resolvido.

Diferentes referências da primeira abordagem indicada podem ser observadas em nos trabalhos de May e de Borst [103], Gutierrez [104] e Verhoosel et al. [105], por exemplo. Nestes exemplos, a dissipação de energia pela evolução do dano (ou outras variáveis correlatas ou em função desta energia dissipada) passa a ser considerada como valor prescrito na função de restrição do método da corda utilizado. Isso vem do fato de que a dissipação de energia pela formação do dano cresce monotonicamente ao longo da evolução do problema mecânico a ser resolvido, conforme citado na contextualização termodinâmica deste.

Quanto à segunda abordagem, seu objetivo é limitar a avaliação de normas globais de deslocamentos (totais ou incrementais) conforme é apresentado em (3.140) e (3.142), por exemplo, para aqueles graus de liberdade que estão em região afetada (e com crescimento) de dano. Esse método de resolução é uma variação do método da corda e parte de propostas como a de Chen e Schreyer [106], por exemplo. A motivação que justifica considerar esse método como opção de resolução do problema numérico vem da dificuldade em se avaliar a evolução do dano a partir de parâmetros normalizados globais (como a norma dos deslocamentos) para todo o domínio. Assim, o uso das normas dos resíduos e dos deslocamentos como critério de convergência e de correção da iteração se mostra insuficiente ou incerto em problemas caracterizados por regiões altamente localizadas de amolecimento com que evoluem a regiões de falha [106]. Outra abordagem semelhante é apresentada por May e Duan [107], que sugerem a adoção de um método da corda cuja função de restrição do arco esteja associada aos deslocamentos relativos dos nós dos elementos também das regiões de crescimento do dano ou falha.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Considerando a metodologia apresentada no capítulo 3, os exemplos a seguir consideram a aplicação dos conceitos tratados através da implementação de um código computacional em elementos finitos em *MatLab* e com o pré- e pós-processamento das malhas com o uso do software *GiD* [108]. Os exemplos apresentarão gradativamente cada aspecto da formulação implementada, a partir de modelos que contemplam:

1. Problema geometricamente não linear com equações constitutivas de CS e KSV, sem dano;
2. Problema elástico considerando CS e flambagem elástica sob controle de carregamentos, sem dano;
3. Problema elástico considerando CS e KSV, com aplicação do método da corda (Pórtico de Lee);
4. Problema termoelástico considerando CS: equilíbrio de seção metálica sob efeito térmico;
5. Flambagem termoelástica sob controle de carregamentos, deslocamentos e método da corda, sem dano;
6. Exemplo de ensaio à flexão a 4 pontos, com dano;
7. Exemplo de ensaio com controle de deslocamentos e dano; e
8. Flambagem termoelástica sob controle de carregamentos e dano, sob abordagens local e não local.

Vale lembrar que todos esses exemplos serão apresentados e tratados sob as hipóteses do estado plano de deformação na representação dos sólidos. Cada exemplo será enunciado pelas propriedades geométricas e materiais adotados, sua malha em elementos finitos e a vinculação aplicada ao modelo estático. Também vale comentar que os exemplos sem dano abordados neste capítulo fazem uso dos parâmetros termoelásticos (E , ν , α) típicos de materiais como concreto, aço e borracha. Na ausência de um critério de resistência associado, esses exemplos podem apresentar (e de fato apresentam) deslocamentos e deformações exageradas considerando o material que deveriam representar, pois satisfazem unicamente os critérios hiperelásticos das relações constitutivas. Nos exemplos aqui tratados, essa condição se dá por força de ilustração, para estressar o modelo ao máximo e, também, apresentar os resultados de forma didática, como forma de também mostrar a robustez da formulação explorada em diferentes aspectos.

4.1 Avaliação dos materiais neo-Hookiano de Ciarlet-Simo e de Kirchhoff- Saint

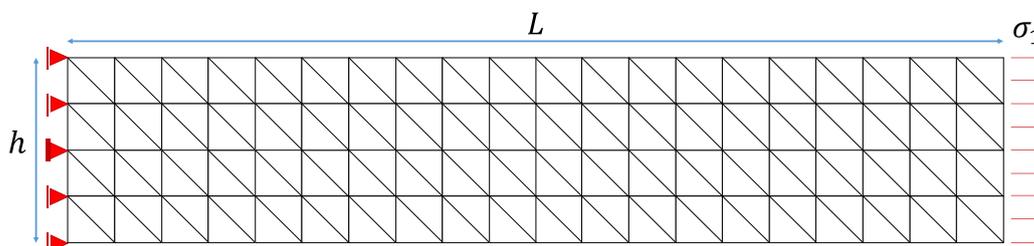
Venant

O primeiro exemplo tem como objetivo verificar a aderência da resposta dos modelos constitutivos apresentados, através da comparação entre a resposta analítica destes modelos (quando associados a um problema uniaxial de solução explícita) ao resultado do código programado. Para isso será considerada a representação de um sólido sob tração e compressão pura, e os estiramentos λ_1 (relativo à direção do eixo 1, longitudinal ao sólido e paralelo à aplicação do carregamento externo) dos materiais deformados serão comparados com os valores esperados, conforme apresentado por Wriggers [89] para os materiais adotados. Serão comparados os pares $\{\lambda_1, T_1/\gamma_e\}$, sendo T_1 a tensão de Cauchy na direção principal e $\gamma_e = (\Lambda/2 + \mu)$, em função dos Parâmetros de Lamé, de modo a tornar o eixo das ordenadas adimensional. Assumindo a malha da Figura 24, em que σ_1 é a tensão externa aplicada, os resultados estão apresentados no Gráfico 6 e no Gráfico 7. Foram considerados materiais de módulo de elasticidade de 100 MPa e dois casos de Poisson, sendo $\nu = 0,0$ e $\nu = 0,4$.

Tabela 2 - Propriedades geométricas e mecânicas para o exemplo 4.1

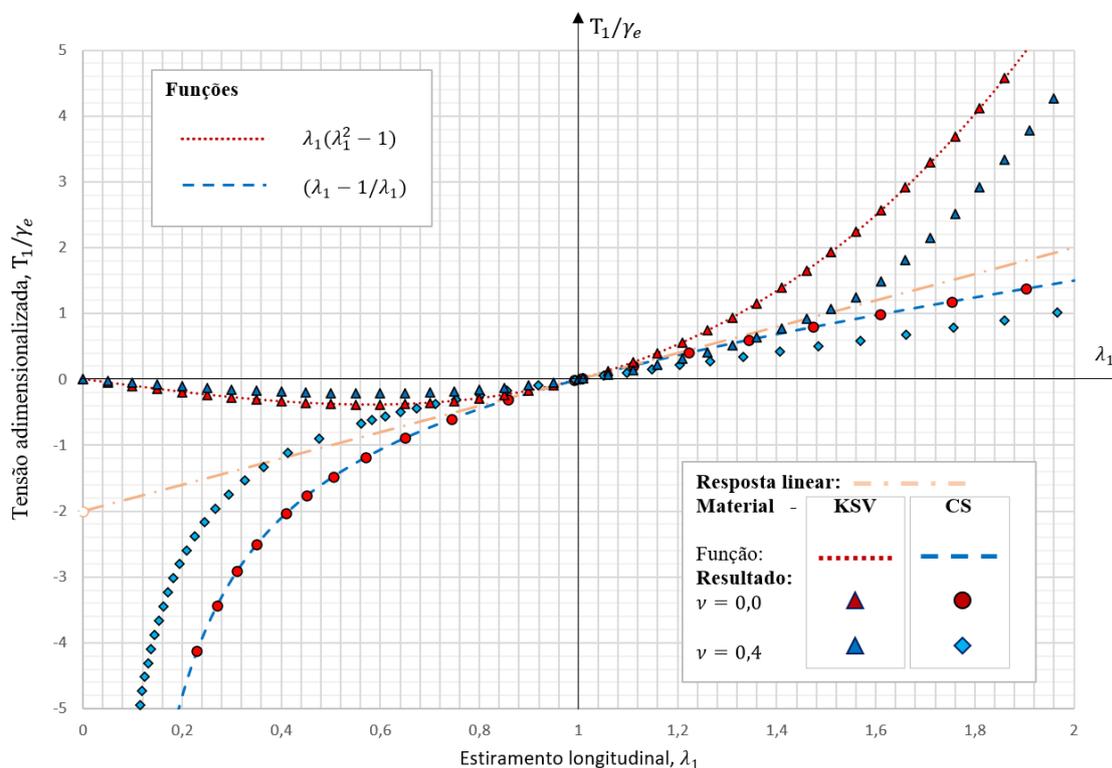
Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)
	1,00	0,20	0,10
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν	
	100	0,0 / 0,4	

Figura 24 – Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.1



Fonte: Autoria própria.

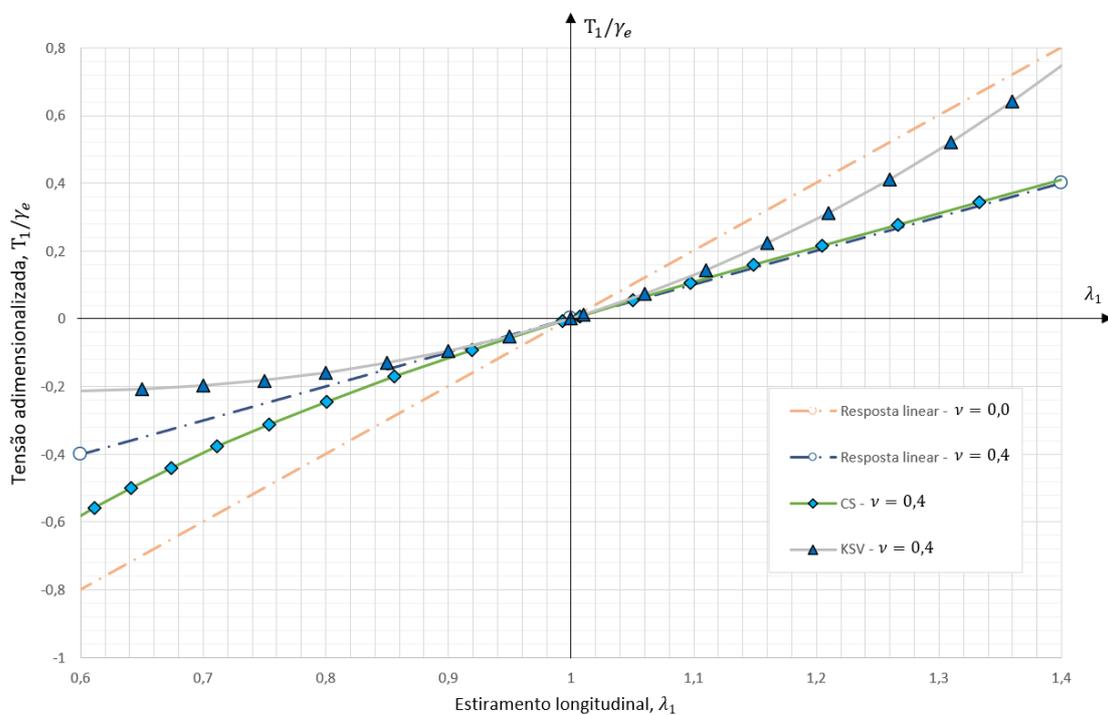
Gráfico 6 - Exemplo 4.1: Comportamento esperado dos modelos constitutivos de Ciarlet-Simo, Kirchhoff-St. Venant e Linear, comparado aos resultados de carregamento uniaxial com $\nu = 0$ e $\nu = 0,4$. A resposta linear considera $\nu = 0$.



Observa-se a aderência dos resultados obtidos com as curvas pontilhadas do gráfico apresentado por [89], relacionado aos materiais para o caso de tração/compressão direta considerando Poisson nulo (pontos em vermelho). A solução com $\nu = 0,4$ também está apresentada com intuito de observar a sensibilidade da resposta quanto à variação desse parâmetro. Observa-se nesse resultado as respostas esperadas do material de comportamento linear e do material hiperelástico de Kirchhoff-Saint Venant. Este último apresenta problemas de consistência na situação de encurtamento (compressão), ao apresentar, após certo nível de encurtamento, tensões decrescentes (em módulo) para encurtamentos crescentes; não é recomendado seu uso, portanto, para problemas de deformações finitas com grandes encurtamentos, de modo geral. Dada a natureza de materiais cimentícios convencionais e a escala do problema objeto dessa dissertação, tal consideração não se torna um problema, visto que no regime de deformações infinitesimais este comportamento da curva não é observado. Vale notar também que todas as curvas apresentadas têm mesma tangente avaliada em $\lambda_1 = 1$, se comparadas as curvas referentes ao mesmo valor de Poisson. Esta tangente tem valor de γ_e , conforme apresenta Wriggers, sendo consistente neste ponto com o comportamento de materiais

Hookianos na Teoria da Elasticidade Linear. O Gráfico 7 se trata de um “zoom” do resultado do Gráfico 6 na região de encurtamento unitário, e dá destaque ao resultado considerando $\nu = 0,4$ para ambos os materiais, incluindo também a resposta linear para este caso de Poisson não nulo. Observa-se nesse resultado a igualdade das tangentes de todas as curvas com $\nu = 0,4$ na região de $\lambda_1 = 1$. Também pode ser notado que as curvas entre $\lambda_1 = 0,9$ e $\lambda_1 = 1,1$ apresentam comportamentos razoavelmente semelhantes, importante na avaliação da consistência da resposta considerando estiramentos pequenos.

Gráfico 7 – Exemplo 4.1: Comparação das curvas de estiramento pela tensão dos materiais de Ciarlet-Simo e Kirchhoff-St. Venant com $\nu=0,4$.



4.2 Flambagem elástica de estrutura biapoiada

Este exemplo representa uma parede biapoiada constituída pelo material hiperelástico de Ciarlet-Simo. Os parâmetros mecânicos adotados equivalem ao de um concreto (apesar do campo de deslocamentos avaliados nesse exemplo não ser condizente com o esperado por um material cimentício usual). A Figura 25 apresenta as propriedades adotadas no modelo, sendo a força P aplicada no apoio à direita e crescente ao longo do ensaio do modelo, em função do parâmetro de carregamento λ_R . Procura-se obter nesse ensaio o valor da força crítica de flambagem (P_{cr}), bem como o comportamento elástico

do modelo no regime pós-crítico. Uma pequena excentricidade foi adicionada ao carregamento de forma a se obter a força P_{cr} e avaliar o trecho estável do regime pós-crítico, com uma excentricidade adotada de 2,5 cm a partir do eixo da parede. Partindo das propriedades geométricas e mecânicas do modelo, a força crítica pode ser avaliada como sendo

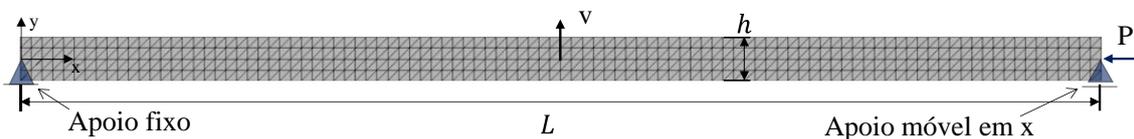
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(1 - \nu^2) L_{ef}^2}, \quad (4.144)$$

em que L_{ef} é o comprimento efetivo da barra para efeitos de flambagem, $I = h^3 \delta / 12$ e o fator $(1 - \nu^2)$ compõe a rigidez à flexão efetiva para casos de estado plano.

Tabela 3 - Propriedades geométricas e mecânicas para o exemplo 4.2

Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)	L_{ef} (m)
	5,00	0,20	1,00	5,00
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν		
	3,0e+5	0,2		

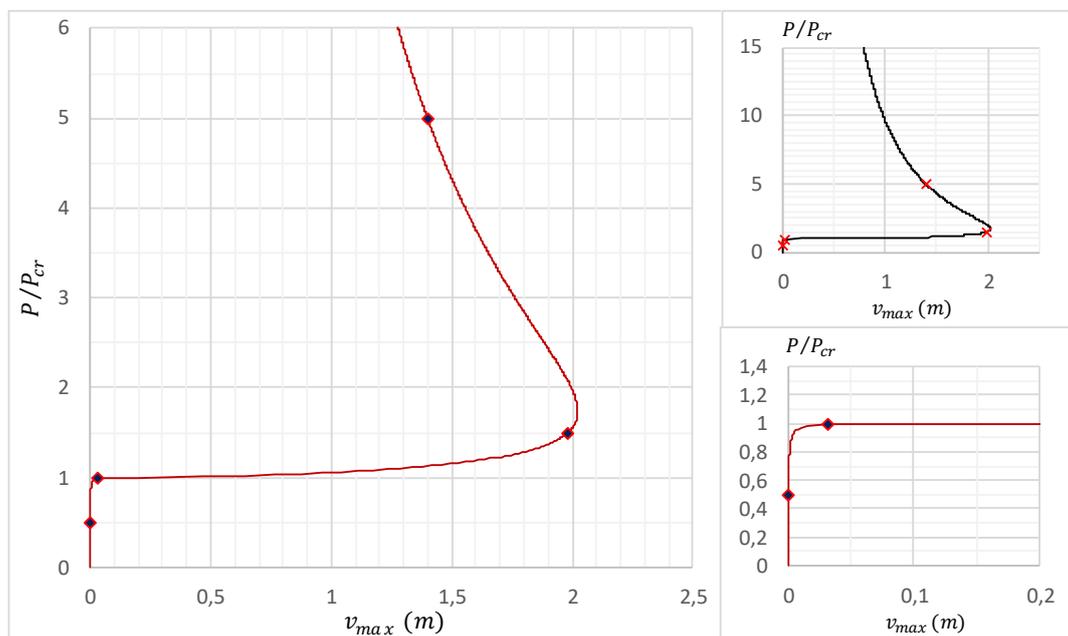
Figura 25 – Malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.2.



Fonte: Autoria própria.

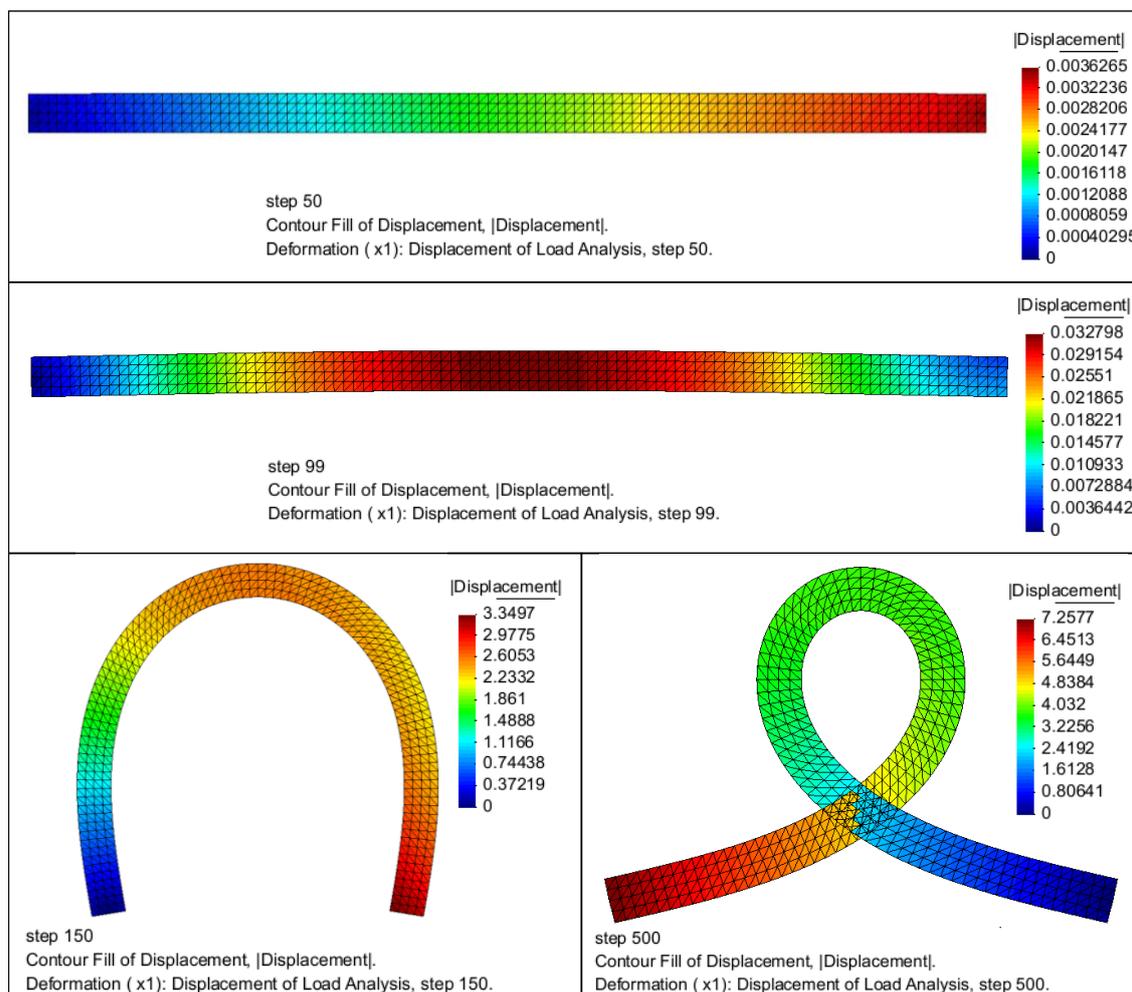
O Gráfico 8 apresenta o deslocamento transversal v_{max} avaliado no meio da malha ao longo da evolução do carregamento P até a relação de forças $P/P_{cr} = 15$. Os pontos destacados nos gráficos representam a condição da estrutura considerando 50%, 99%, 150% e 500% da força crítica como referência para a Figura 26. Observa-se que a força crítica de fato se apresenta sobre a reta $P/P_{cr} = 1$. A curva obtida indica um trecho inicial pós-crítico em que a estrutura perde sua rigidez com grandes deslocamentos laterais para pequenos incrementos de carregamento, e esse efeito se inverte pouco antes do apoio móvel ultrapassar horizontalmente o apoio fixo.

Gráfico 8 - Exemplo 4.2: Relação entre carregamento aplicado (normalizada pela força crítica) e o deslocamento transversal do ponto central da malha, apresentados em três escalas diferentes.



Observa-se pelo resultado apresentado que a imperfeição inicial imposta (alterando a curvatura inicial da barra) pouco interferiu no comportamento global da estrutura, com relação ao comportamento esperado, além de direcionar o movimento da estrutura para um caminho estável após a bifurcação. Ainda assim, observa-se tanto pelo gráfico quanto pelo mapa de cores do deslocamento total que o comportamento da barra para a força de 99% de P_{cr} já apresenta boa influência da imperfeição adicionada, com deslocamento vertical da ordem de 3,3 cm ($\sim 1/150$ do vão efetivo) antes de atingir a força crítica de Euler. Considerando que não há amplificação dos deslocamentos apresentados nas deformadas da Figura 26, nota-se facilmente que as deformações e deslocamentos apresentados nesse exemplo são muito grandes, resultado esse que ilustra a robustez da formulação implementada nesse aspecto. Naturalmente, não seriam esperados esses resultados se consideradas equações constitutivas relacionadas à linearidade geométrica.

Figura 26 – Exemplo 4.2: Campo de deslocamentos do prisma para 50%, 99%, 150% e 500% da força crítica. Mapa de cores com deslocamento total (m) e deformada em escala real.



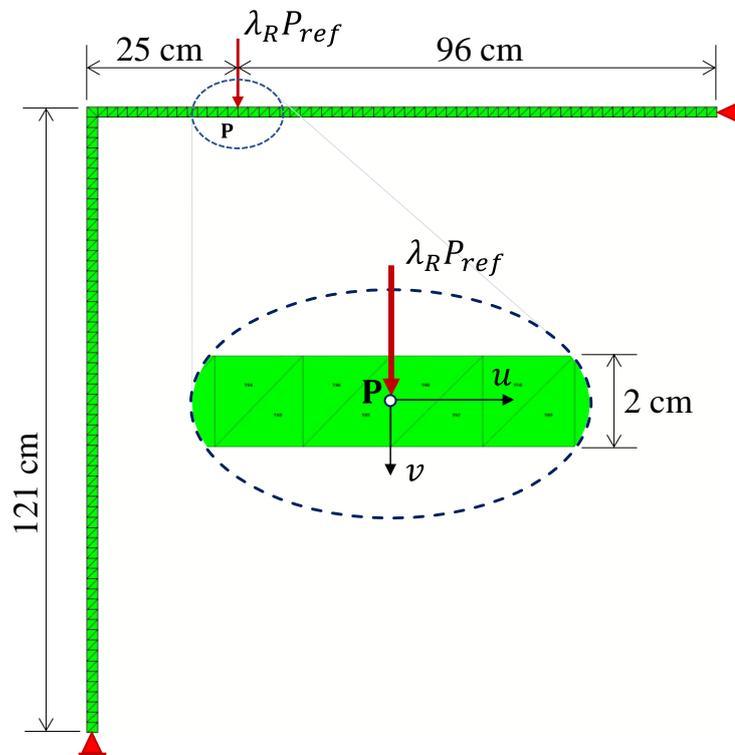
Fonte: Autoria própria.

4.3 Validação do método da corda com teste do pórtico de Lee (Lee's Frame benchmark test)

Para os dois primeiros exemplos apresentados, o autor utilizou apenas o método de controle de carregamento para a avaliação dos resultados. Este exemplo (que trará a avaliação da resolução do problema numérico pelo método da corda para a sua utilização nos demais exemplos) traz a comparação de um modelo bidimensional de duas colunas submetidas à flexão. Será comparada a resposta esperada e comumente utilizada como *benchmark* para problemas hiperelásticos com a utilização do método da corda, visto que sua resolução este problema apresenta ambos os fenômenos de *snap-through* e *snap-back*. A comparação será feita com os materiais CS e KSV, utilizando a

mesma malha para ambos (conforme apresentada na Figura 27. Foram considerados materiais com módulo $E = 7,2 \text{ e}+4 \text{ MPa}$ e Poisson nulo, de modo que os resultados esperados entre os modelos de estado plano de deformação (abordados nesta dissertação) e de tensão sejam equivalentes, considerando ainda espessura de 3 cm ($\delta = 0,03 \text{ m}$). Os resultados serão comparados com os obtidos por Smoleński [109], conforme apresentado por Aluas e Meraim [98], sendo que esta referência adota um modelo de barras (com graus de liberdade apenas no plano em que está contida). Além disso, o carregamento vertical de referência aplicado no ponto P equivale a $P_{ref} = 100 \text{ N}$. Também são consideradas restrições de deslocamento nos nós centrais dos elementos extremos, caracterizando apoios fixos.

Figura 27 - Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.3

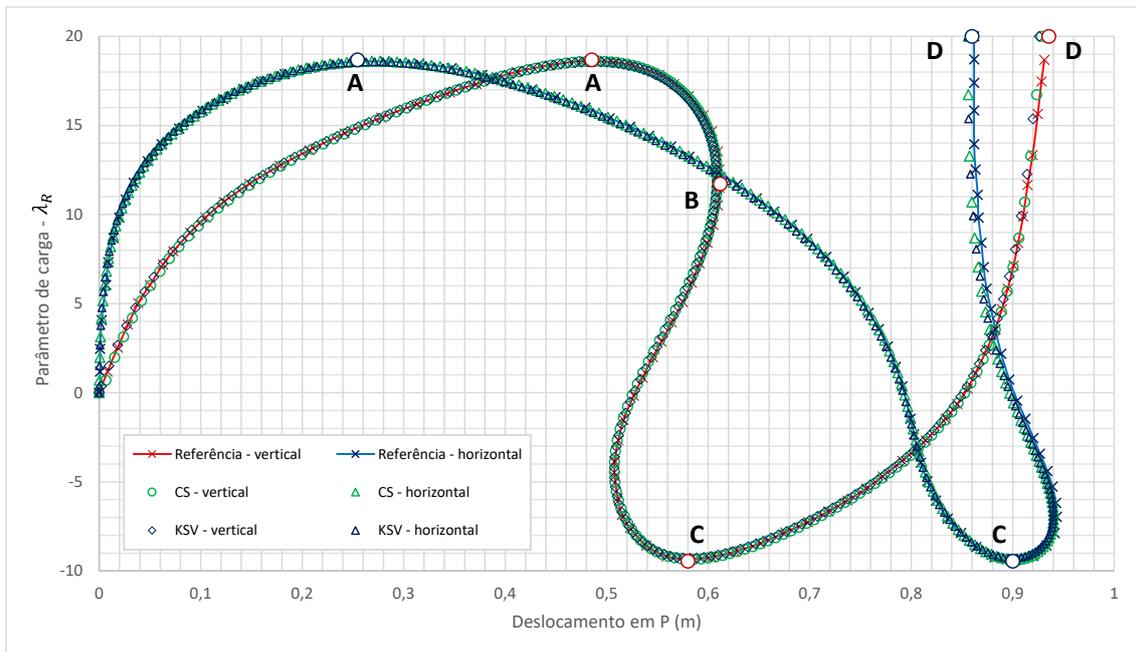


Fonte: Autoria própria.

O Gráfico 9 apresenta os deslocamentos verticais e horizontais monitorados no ponto P, que é o ponto de aplicação da força concentrada na estrutura. Tanto o resultado do gráfico quanto das deformadas explicita a alta não linearidade que esse exemplo exhibe, apresentando instabilidades tanto nas curvas de deslocamento vertical quanto de deslocamento horizontal do ponto P, com *snap-through* em “A” e *snap-backs* em “B” e

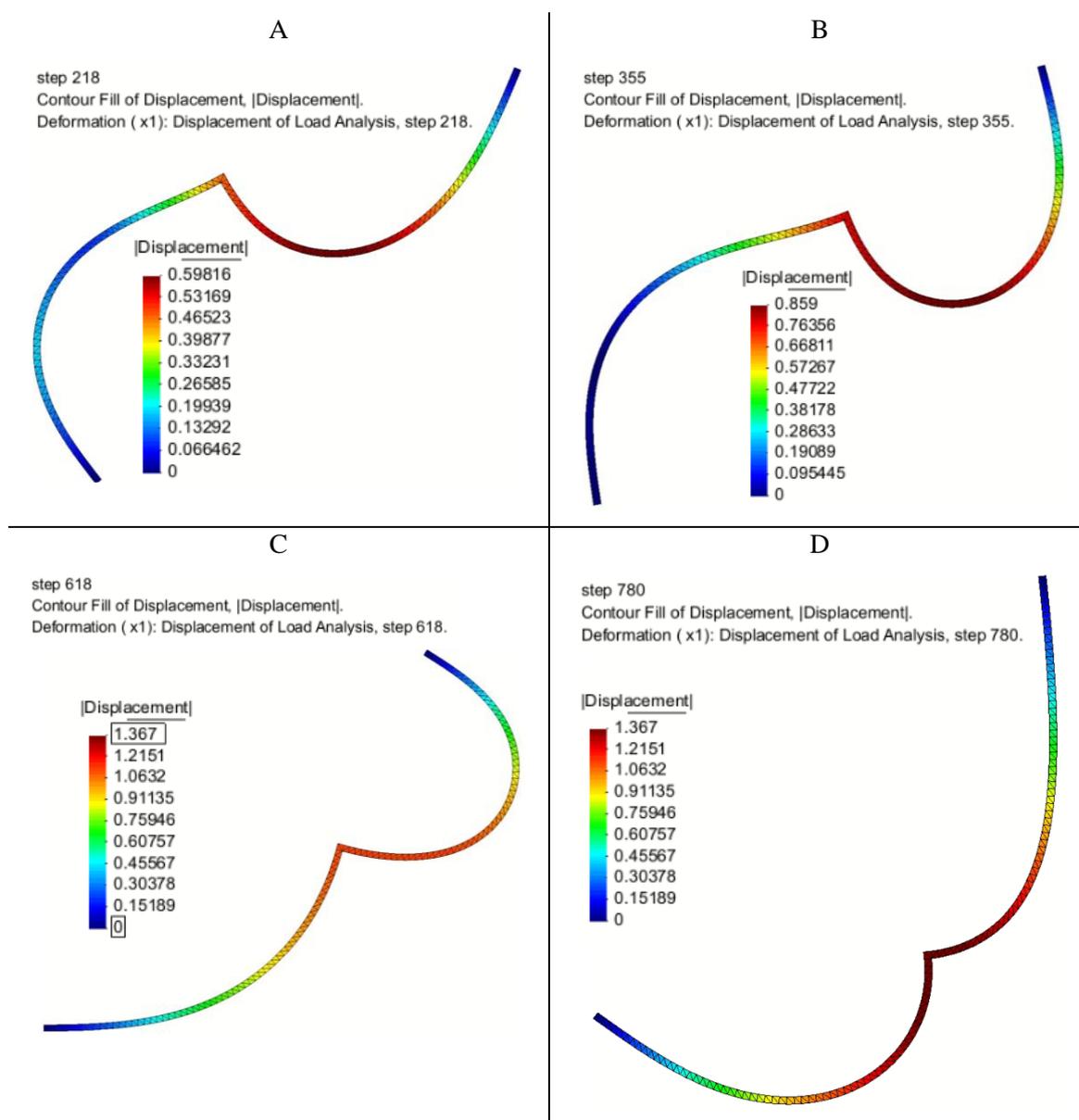
após “C”. Tais fenômenos não seriam eficientemente capturados se o método da corda para a resolução do problema numérico não fosse adotado, ainda mais a depender da escolha do grau de liberdade para controle de deslocamentos, visto que ambos os graus de liberdade de deslocamento vertical e horizontal do ponto P, por exemplo, apresentam tais instabilidades, evidenciando o efeito de *snap-back* em passos distintos para cada uma destas curvas, como observado no resultado do Gráfico 9.

Gráfico 9 - Exemplo 4.3: Resposta dos deslocamentos vertical e horizontal do ponto P para modelos com materiais de CS e KSV, em comparação com resultados de referência bibliográfica



Observa-se no Gráfico 9 a ótima aderência entre o resultado de deslocamentos horizontal (u) e vertical (v) obtido tanto comparando entre os materiais de CS e KSV, como também com a referência, apesar da diferença entre os modelos comparados (de barras da referência e a malha bidimensional do modelo). Os pontos notáveis A (máximo carregamento antes do amolecimento da estrutura – *snap-through* sob controle de carregamentos), B (*snap-back* sob controle de deslocamentos), C (mínimo carregamento da estrutura antes do enrijecimento da estrutura na nova configuração deformada) e D (ponto final da análise) do gráfico em questão têm suas deformadas apresentadas na Figura 28. Os resultados da figura contemplam a análise com material de KSV, e neste exemplo também não foram consideradas amplificações de escala na representação das deformadas.

Figura 28 - Exemplo 4.3: Deformadas da estrutura nos pontos A, B, C e D.



Fonte: Autoria própria.

4.4 Equilíbrio de placa metálica sob efeito térmico

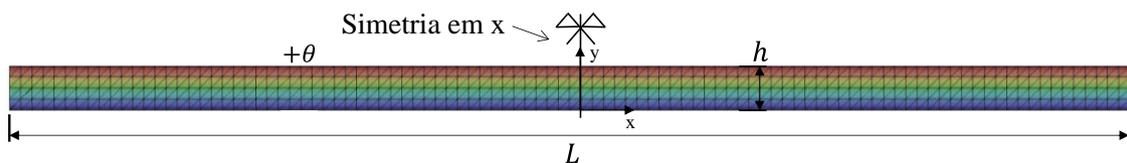
Esse exemplo deve apresentar o comportamento de uma estrutura sob efeito de um gradiente térmico ao longo de sua altura, h . Como a única condição de contorno aplicada a esse problema é a simetria, como pode ser observado na Figura 29, não serão incluídas ao problema as tensões elásticas devido à compatibilização de deslocamentos pela restrição gerada nas vinculações. Esse caso se observaria, por exemplo, para uma barra biengastada, apresentando tensões internas relevantes devido ao confinamento,

tanto na direção da barra quanto transversalmente por efeito volumétrico de Poisson. Ainda assim, dada a necessidade de compatibilização interna das distorções devido ao gradiente imposto, além da consideração de Poisson não nulo, tensões internas surgem e são observáveis no modelo. Dessa forma, considerando o caso proposto não confinado, espera-se que o gradiente de temperatura ao longo da altura da seção resulte na deformação da estrutura, que deve passar a apresentar uma deformada com raio de curvatura constante (considerando pontos do eixo longitudinal da placa, e todos os eixos paralelos a este) e decrescente com o aumento do gradiente térmico ao longo do ciclo de aquecimento. A Tabela 4 apresenta as propriedades consideradas e a Figura 29 apresenta a malha, as vinculações, com destaque para a simetria perpendicular ao eixo x , caracterizada por um ponto fixo na base da malha ($x = 0$ e $y = 0$) e apoios móveis em y nos demais ($x = 0$).

Tabela 4 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.4

Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)
	0,50	0,02	1,00
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
	$2,0\text{e}+11$	0,3	$1,0\text{e}-5$

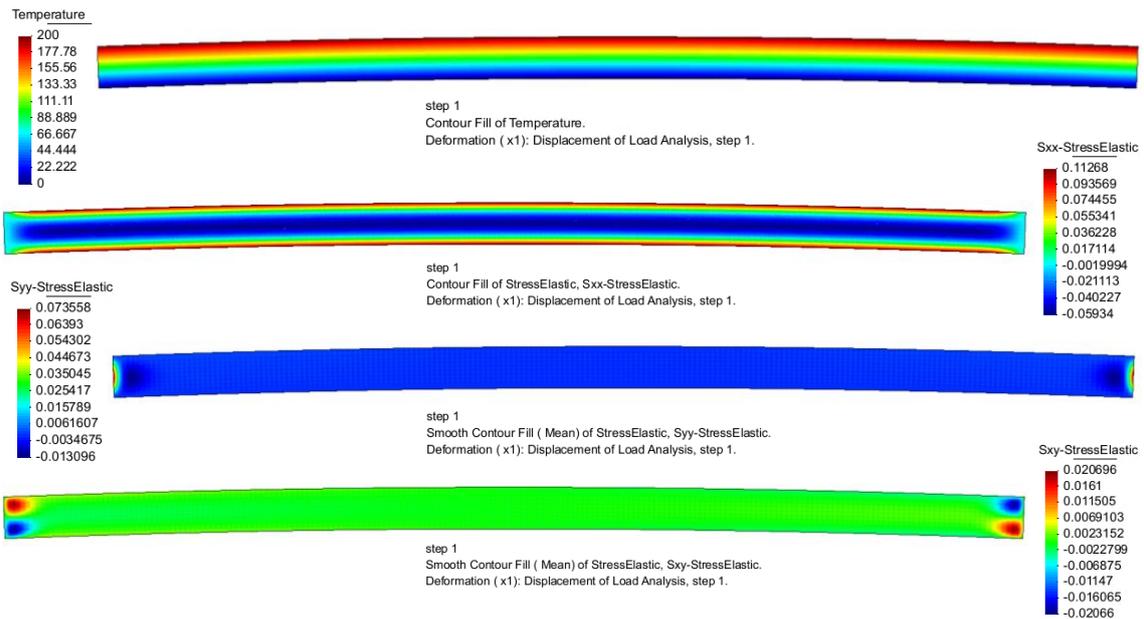
Figura 29 - Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.4



Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, são apresentadas na Figura 30 a deformada, o campo de temperaturas e as tensões de Cauchy T_{xx} , T_{yy} e T_{xy} observadas pelo equilíbrio termoelástico, considerando inicialmente uma temperatura de 200°C na fibra superior e 0°C na inferior.

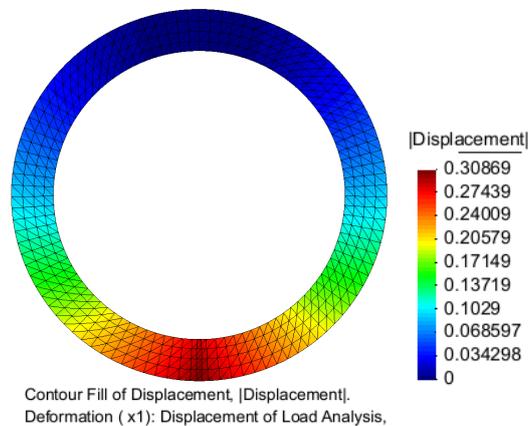
Figura 30 - Exemplo 4.4: Deformada e campos de temperatura (em °C) e tensões (em MPa).



Fonte: Autoria própria.

A curvatura constante comentada fica facilmente observável ao amplificar no modelo a variação de temperatura a valores mais elevados que, apesar de irreais, comprovam a validade da formulação adotada (baseada na decomposição multiplicativa do gradiente das deformações totais nas partes elástica e térmica), bem como sua implementação computacional nos algoritmos utilizados. A deformada da Figura 31, juntamente com o campo de deslocamentos totais obtidos, busca ilustrar qualitativamente essa propriedade comentada: vê-se que o problema termoelástico proposto garante a curvatura constante da chapa ao longo de todo aquecimento.

Figura 31 - Exemplo 4.4: Deformada e deslocamentos totais (em m) para barra com aquecimento exagerado.



Fonte: Autoria própria.

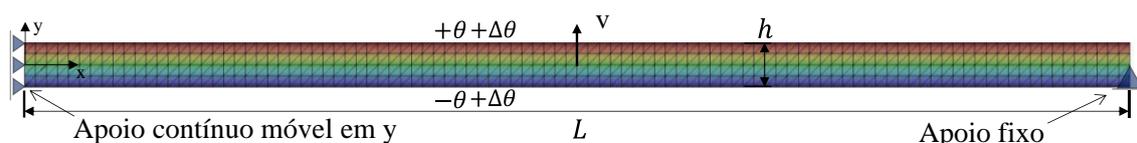
4.5 Flambagem termoelástica de parede biapoiada

Este exemplo introduz a mesma geometria de malha e material do exemplo 4.2, incluindo o coeficiente de dilatação térmico do concreto de $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, e difere deste exemplo quanto as restrições de deslocamentos consideradas (que deverão afetar, conseqüentemente, o comportamento da estrutura) e no carregamento aqui utilizado, que será apenas relativo a uma variação uniforme de temperatura, desconsiderando a força concentrada aplicada em 4.2. Como a estrutura com um apoio fixo e outro móvel (pontuais, nos nós extremos pertencentes ao eixo médio da altura h , conforme exemplo da Figura 25) se deformaria indefinidamente no seu eixo longitudinal sem apresentar tensões internas em seu eixo longitudinal, estes apoios foram substituídos por apoio fixo à direita e um anel (conjunto de apoios móveis em y ao longo da altura do apoio da esquerda), conforme apresentado na Figura 32. Esta alteração possibilita que surja um confinamento da barra sob aumento uniforme das temperaturas, gerando tensões internas de compressão axial e assim permitindo a observação de flambagem elástica sob uma certa variação de temperatura crítica $\Delta\theta_{cr}$. A Figura 32 apresenta também o carregamento térmico adotado no modelo, sendo que a imperfeição responsável pela flambagem foi gerada a partir de um pequeno gradiente de temperatura inicial (variando de $+\theta$ na fibra superior até $-\theta$ na inferior) ao longo da altura da barra e fixo ao longo dos passos, gerando uma pequena curvatura inicial na mesma (ou seja, da Figura 32 varia-se apenas $\Delta\theta$ ao longo do desenvolvimento do problema).

Tabela 5 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.5

Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)	L_{ef}
	5,00	0,20	1,00	10,00
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν	α ($^\circ\text{C}^{-1}$)	
	3,0e+5	0,2	1,0e-5	

Figura 32 – Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.5



Fonte: Autoria própria.

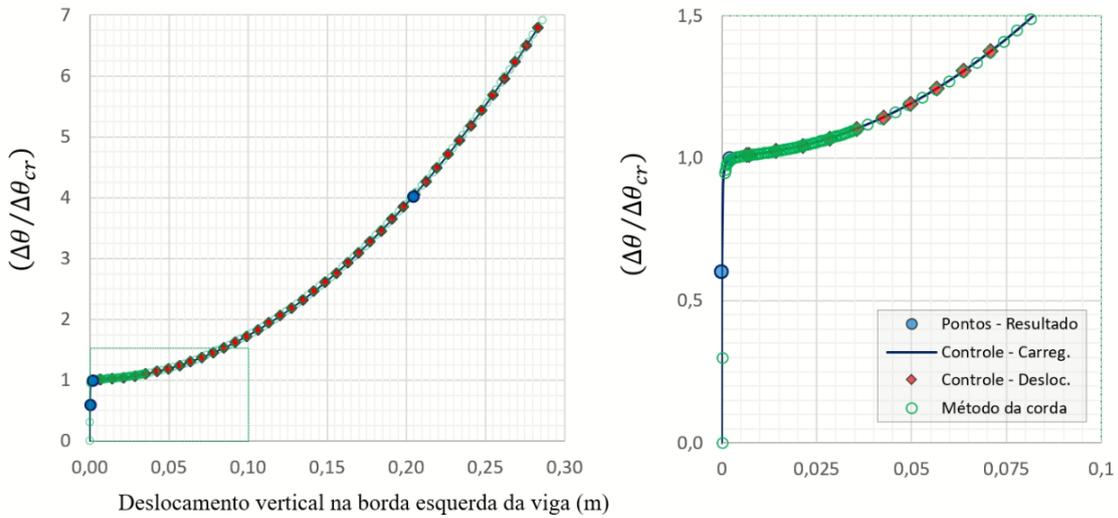
Assim, procura-se identificar nesse teste o valor da variação de temperatura crítica de flambagem ($\Delta\theta_{cr}$), bem como o comportamento elástico do modelo no pós-crítico, equivalentemente ao objetivo do exemplo 4.2. Considerando a expressão (4.144), a variação de temperatura crítica $\Delta\theta_{cr}$ pode ser aproximada analogamente considerando que uma barra confinada nas extremidades apresenta tensões internas equivalentes à aplicação de uma força de compressão crítica P_{cr} tal que

$$P_{cr} = \frac{EA\alpha\Delta\theta_{cr}}{(1 - 2\nu)}, \quad (4.145)$$

sendo o termo $(1 - 2\nu)$ incluído no denominador devido ao efeito de deformação térmica nos eixos transversais ao eixo longitudinal da parede, conforme Young e Budynas [110]. Com o intuito de se comparar a resposta do deslocamento vertical do ponto central da viga para diferentes abordagens de resolução dos passos do problema numérico deste exemplo, o Gráfico 10 apresenta os resultados das curvas considerando a resolução através do método de controle de carregamentos, de deslocamentos e do método da corda.

Para o caso desenvolvido neste exemplo, a variação de temperatura crítica observada foi de aproximadamente $\Delta\theta_{cr} = 42,8$ °C, partindo da temperatura inicial nula ($\Delta\theta = 0$, apenas com o gradiente inicial imposto). Para fugir da bifurcação (e da solução instável) na resolução deste exemplo, foi aplicada uma diferença de temperatura constante de 2,0°C entre a face inferior e a face superior da viga, conforme mostrado pelos padrões de temperatura apresentados nos passos da Figura 33, que apresenta também os campos de deslocamentos verticais observados nos pontos indicados no Gráfico 10 para a curva de solução por controle de carregamentos, sob 60%, 100% e 400% da variação de temperatura crítica considerada.

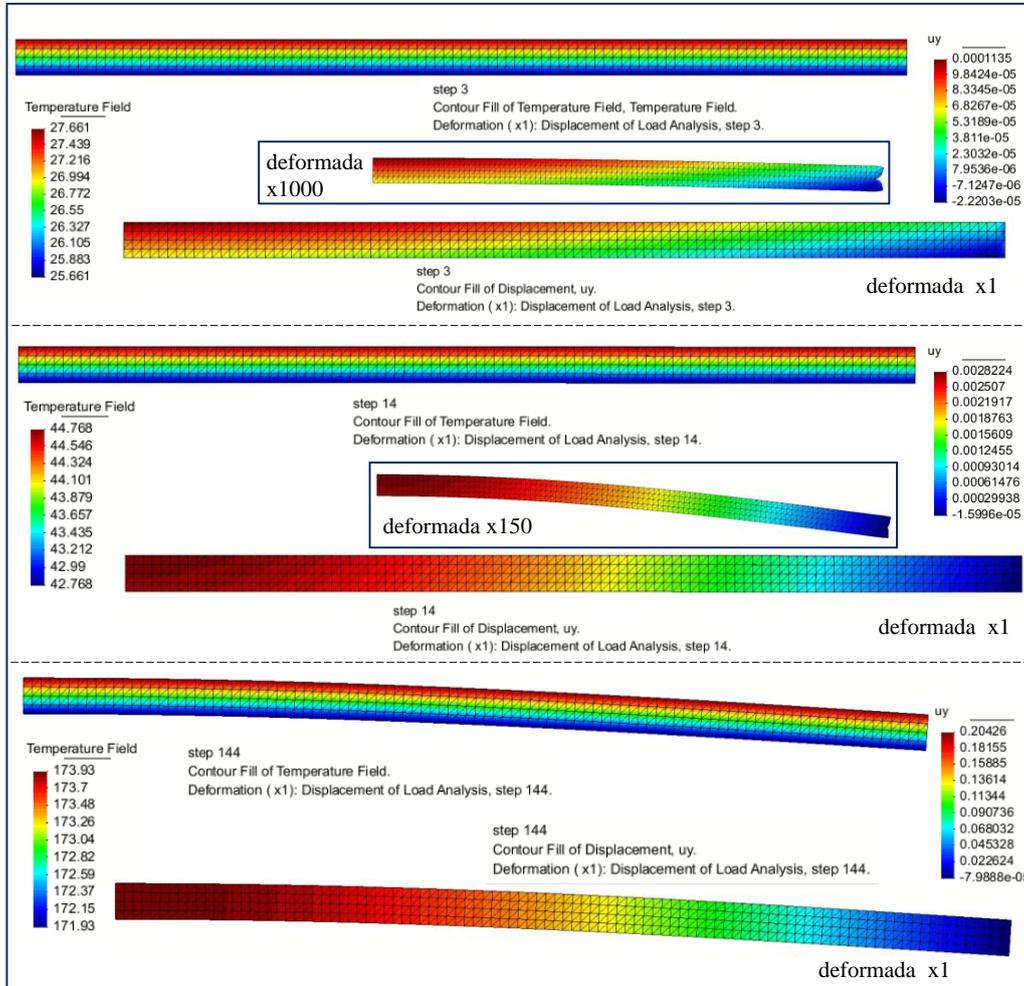
Gráfico 10 - Exemplo 4.5: Relação entre variação de temperaturas na viga (normalizada pela variação de temperatura crítica) e o deslocamento vertical do ponto central da borda esquerda da viga. Resultados para controle de carregamentos, com detalhes em diferentes escalas e comparação entre soluções por diferentes métodos de resolução numérica.



Comparando a curva do Gráfico 10 com a do Gráfico 8, nota-se que o resultado do problema sob efeito de deformações térmicas apresenta uma resposta mais “rígida” após a bifurcação que o caso do exemplo 4.2 (comparando a inclinação das respostas após a flambagem), visto que a vinculação do exemplo 4.5 restringe as deformações axiais totais para garantir o efeito de confinamento esperado. Com relação aos diferentes métodos de resolução, as curvas e pontos do Gráfico 10 de cada abordagem são completamente coincidentes entre si, conforme esperado, visto todas as demais variáveis do exemplo (padrão de temperaturas, geometria, vinculações e parâmetros materiais) foram mantidas entre estas soluções. Observa-se também que, no caso da resolução sob controle de carregamentos e sob o método da corda, a curva de deslocamento vertical foi corretamente obtida em toda extensão. No caso da curva sob controle de deslocamentos, problemas de convergência foram observados antes da mudança de comportamento da parede (trecho inicial da curva com $\Delta\theta < \Delta\theta_{cr}$), dada a grande inclinação da curva em seu trecho antes da bifurcação. Para a avaliação da resolução sob controle de deslocamentos, partiu-se então da solução sob controle de carregamentos após esse ponto. No caso do método da corda, apenas o primeiro passo foi avaliado sob controle de carregamentos, com o objetivo de fornecer um par $\{\mathbf{r}_0, \lambda_0\}$ não nulo para a continuidade do método. Além disso, no caso da resolução sob o método da corda, no trecho inicial (pós bifurcação, até $\Delta\theta/\Delta\theta_{cr} \sim 1,2$) foi considerado um comprimento de arco menor, conforme evidenciado pela maior densidade de pontos

nessa região do Gráfico 10. Após esse trecho, o comprimento de arco do método foi ajustado para “acelerar” a resolução do exemplo.

Figura 33 - Exemplo 4.5: Evolução das temperaturas (°C) e dos deslocamentos (m) para 60%, 100% e 400% da temperatura crítica. Deformadas em escala real e escala ampliada nas soluções iniciais.



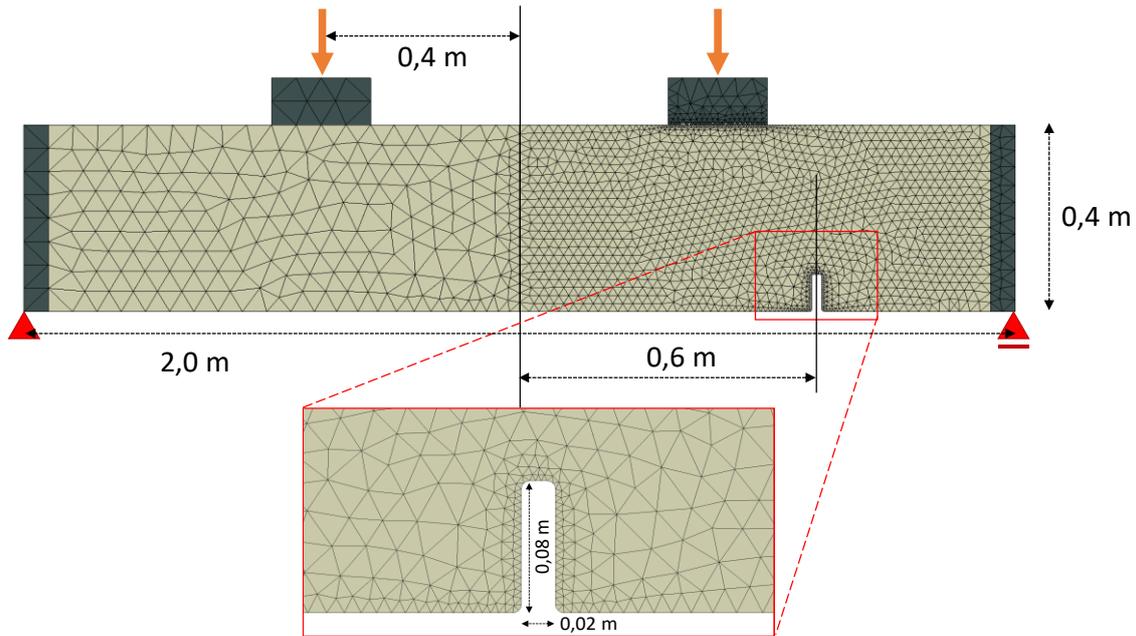
Fonte: Autoria própria.

4.6 Ensaio de viga à flexão a 4 pontos com dano

O problema em estado plano de deformação neste exemplo é apresentado pela Figura 34 onde se representa uma viga submetida a um ensaio à flexão a 4 pontos, em que se prevê a aplicação de forças verticais crescentes, P , sobre suportes que distribuem a tensão aplicada à malha da viga. O material representado tem as propriedades mecânicas de um concreto com módulo $E = 40 \text{ GPa}$ e $f_{ct} = 4 \text{ MPa}$, assim o início do dano deverá ser dado a partir de deformações equivalentes $\tilde{\epsilon}$ superiores ao limite $K_0 = 10^{-4}$. Tanto nas extremidades próximas aos apoios como nos pontos de introdução de

forças (em escuro) foram considerados materiais não susceptíveis ao dano devido à concentração de tensões já esperada (e indesejada para esta análise) nessas regiões. A Figura 34 também indica um defeito na geometria da viga, entre o ponto de introdução do carregamento e o apoio, o qual deverá induzir o início do dano tanto pela assimetria quanto pelo efeito de amplificação local das tensões e deformações.

Figura 34 - Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.6. Detalhe para o defeito incluído na face inferior da viga.



Fonte: Autoria própria.

Para esse ensaio, serão apresentadas nas figuras seguintes o campo de deslocamentos horizontais e a deformada (magnificada); os campos de tensão principal de tração antes do início do dano e no último passo, a região danificada e o campo do parâmetros α_T .

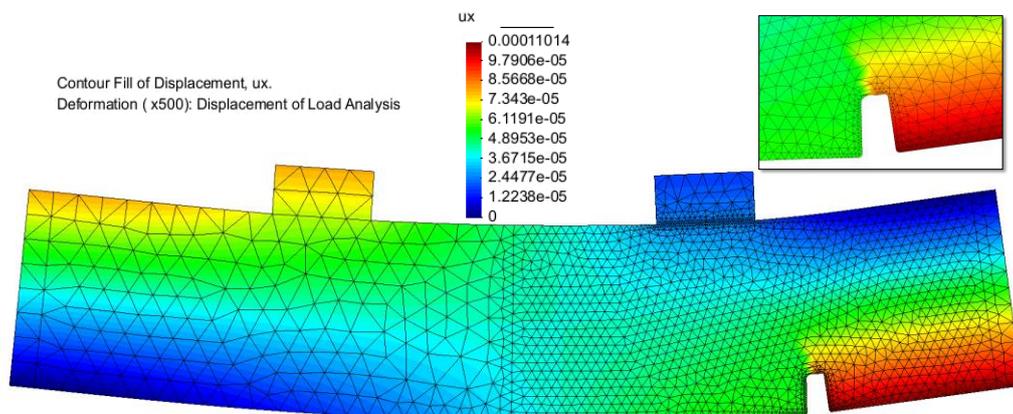
Tabela 6 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.6

Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)	
	1,00	0,40	0,10	
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	f_{ct} (MPa)
	4,0e+5	0,2	1,0e-5	4,0
Parâmetros da função de dano	A_T	B_T	A_C	B_C
	0,9	10000	1,2	1500

Os resultados apresentados pelas Figuras 30 a 33 ilustram o comportamento da estrutura, sobretudo em dois instantes diferentes do processo de carregamento (logo

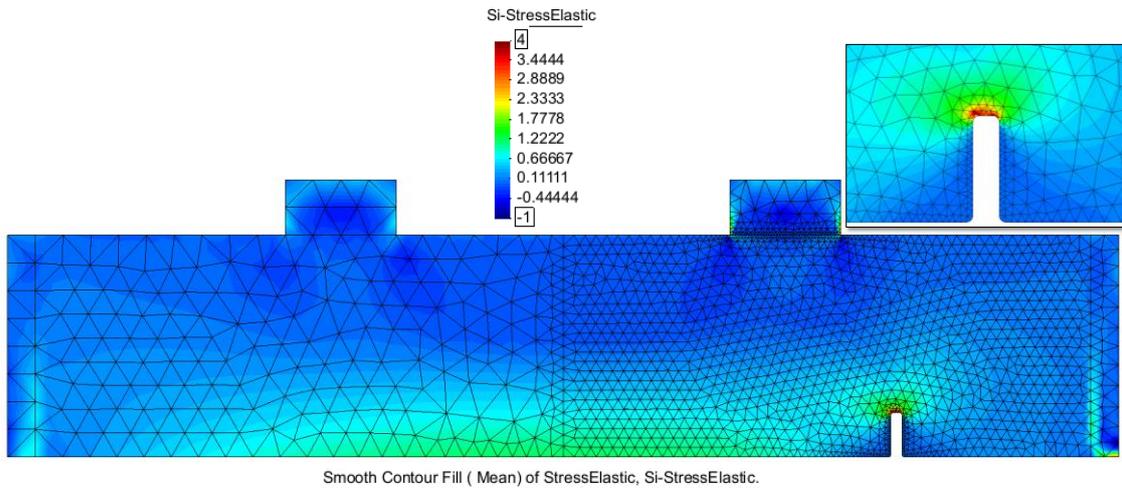
antes do surgimento de dano e antes da não-convergência do método de Newton-Raphson sob controle de carregamentos). Antes do início da formação de dano, a Figura 36 apresenta que a tensão principal de tração na região interna da reentrância está no limiar para superar em valor o limite f_t de resistência à tração. A formação de dano então evolui e avança no sentido do ponto de aplicação do carregamento, até o passo observado na Figura 38, a partir do qual a solução de equilíbrio nas iterações não mais satisfaz o critério de erro considerado nesse processo. A Figura 37 apresenta o estado de tensões principais de tração nesse último passo, onde se observa que o dano atenuou as tensões na região da reentrância (já danificada) e, por ter já avançado verticalmente, acumulou as tensões máximas na ponta do avanço do dano. Conforme também observado na Figura 37, a tensão nessa ponta se encontra superior aos 4,0 MPa na visualização do pós-processamento (observável pela “mancha” branca que se evidencia na região do pico de tensão) sobretudo devido ao intenso gradiente de tensões que se formou na região do pico.

Figura 35 – Exemplo 4.6: Deformada (x500) e deslocamentos horizontais (m) no último passo antes da não-convergência do método iterativo.



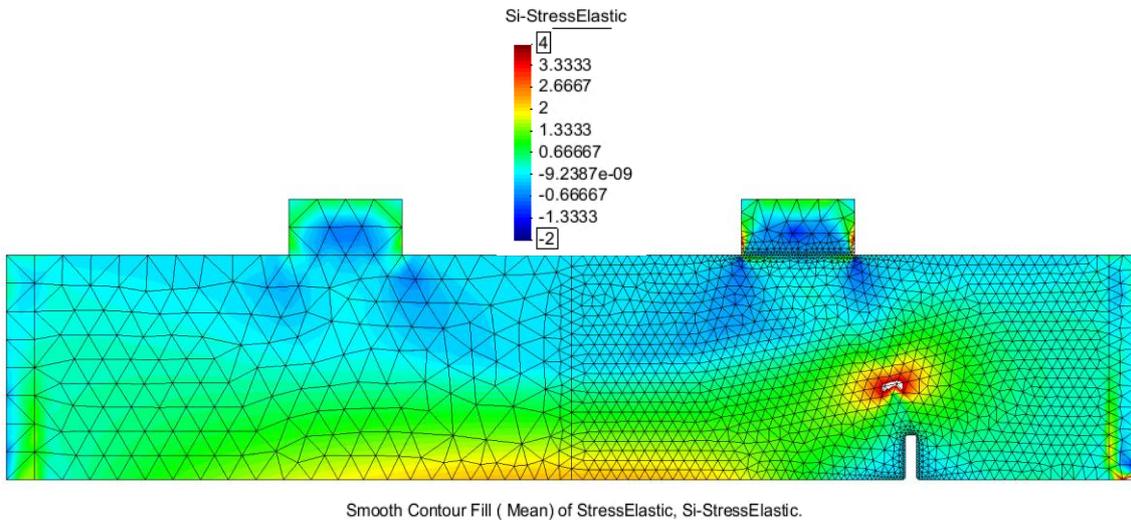
Fonte: Autoria própria.

Figura 36 – Exemplo 4.6: Tensão principal de tração T_1 (MPa) no passo de carregamento antes do surgimento e crescimento de dano.



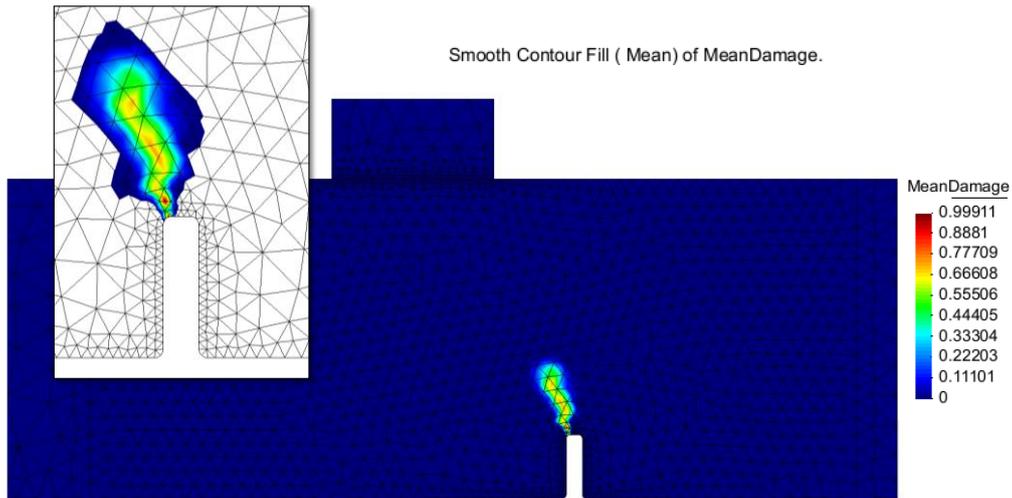
Fonte: Autoria própria.

Figura 37 – Exemplo 4.6: Tensão principal de tração T_1 (MPa) no último passo antes da não-convergência do método iterativo por controle de carregamentos.



Fonte: Autoria própria.

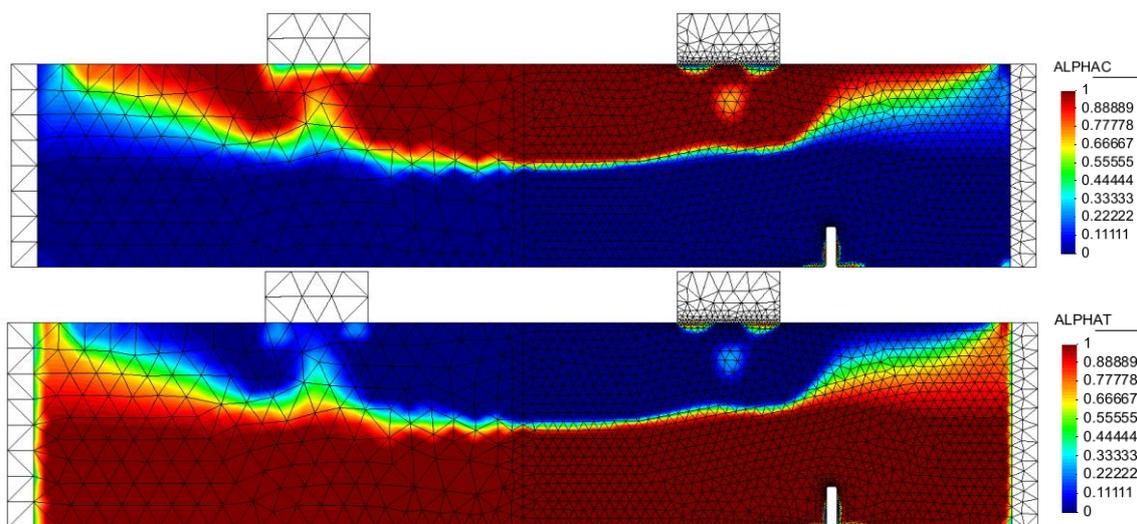
Figura 38 – Exemplo 4.6: Campo de dano D na região do defeito no último passo antes da não-convergência do método iterativo.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 39 apresenta, ilustrativamente, os campos dos parâmetros α_T e α_C conforme apresentados em (3.78). Observa-se que, conforme esperado, a transição entre esses parâmetros se dá na região da linha neutra, no meio da seção, considerando a flexão pura entre os pontos de aplicação do carregamento, sendo predominantemente de compressão acima e de tração, abaixo. A assimetria horizontal está mais relacionada à malha mais grosseira adotada do lado esquerdo do modelo.

Figura 39 - Exemplo 4.6: Campo de cores dos parâmetros α_C e α_T para um passo de carregamento antes do surgimento e crescimento de dano.



Fonte: Autoria própria.

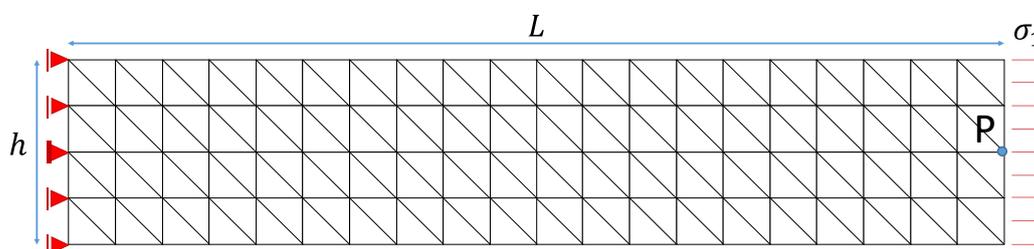
4.7 Ensaio de estrutura sob carregamentos externos e Dano

Este exemplo traz a mesma geometria, vinculações e esforços do exemplo 4.1 (conforme Figura 24, reapresentada na Figura 40). No entanto, o material considerado neste exemplo é cimentício e susceptível à danificação. A Tabela 7 apresenta as características do material considerado. O objetivo deste exemplo é avaliar a resposta da estrutura submetida ao carregamento externo (sem temperaturas) considerando a resolução do equilíbrio nos passos sob controle de deslocamentos. Através deste método, busca-se avaliar os trechos de amolecimento, tanto à tração quanto à compressão, através da consideração da variação de deslocamentos em sequências que gerem o carregamento, descarregamento e recarregamento da estrutura, primeiramente a tracionando e depois a comprimindo. A Tabela 8 apresenta os dados de controle de deslocamentos, considerando que o limite de deformação axial longitudinal de alongamento para o início do dano equivale a um deslocamento total de $u_0^P = 0,001$ m, sendo P o ponto de controle de deslocamentos considerado na Figura 40.

Tabela 7 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.7

Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)	
	1,00	0,20	0,10	
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	f_{ct} (MPa)
	3,0e+5	0,2	1,0e-5	3,0
Parâmetros da função de dano	A_T	B_T	A_C	B_C
	0,9	10000	1,2	1500

Figura 40 – Propriedades, malha e vinculações adotadas para o exemplo 4.7



Fonte: Autoria própria.

Tabela 8 – Exemplo 4.7: Sequência de carregamentos e descarregamentos do exemplo, apresentados através dos passos e a variação de deslocamentos impostas em cada sequência.

Sequência	Trecho entre pontos	Passo inicial/final	Controle de deslocamento por passo	Dano observado no passo final
1	OA	0/20	$+u_0^p/20$	0,02
2	AB	20/28	$+u_0^p/20$	0,43
3	BO	28/42	$-u_0^p/10$	0,11
4	OCD	42/218	$-u_0^p/10$	0,32
5	DO	218/395	$+u_0^p/10$	0,99

O Gráfico 11 apresenta a resposta do modelo deste exemplo submetido aos ensaios de carregamento e descarregamento. O Gráfico 12 destaca a região sob tensões e deformações positivas do Gráfico 11. Alguns pontos são destacados nos gráficos (A, B, C, D e O), sendo que o ensaio foi executado de modo que a ordem dos pontos na evolução dos carregamentos e descarregamentos do ensaio foi OA-AB-BOCD-DO (conforme apresentado na Tabela 8).

Gráfico 11 - Exemplo 4.7: Resposta de tensão x deformação da estrutura sob ensaio de carregamento e descarregamento, à tração e à compressão.

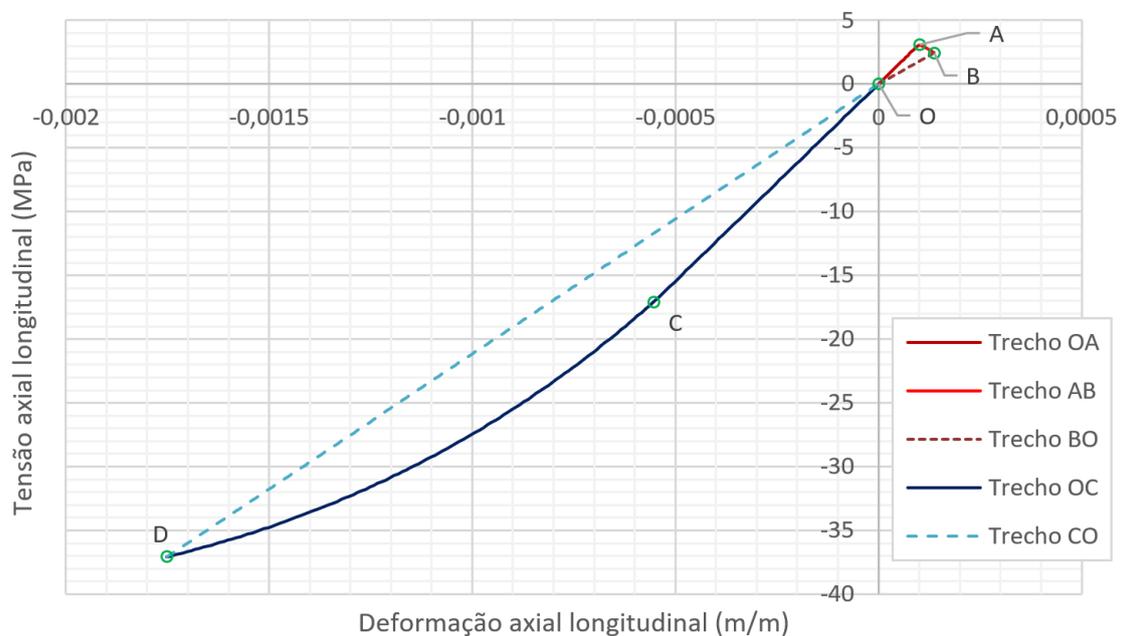
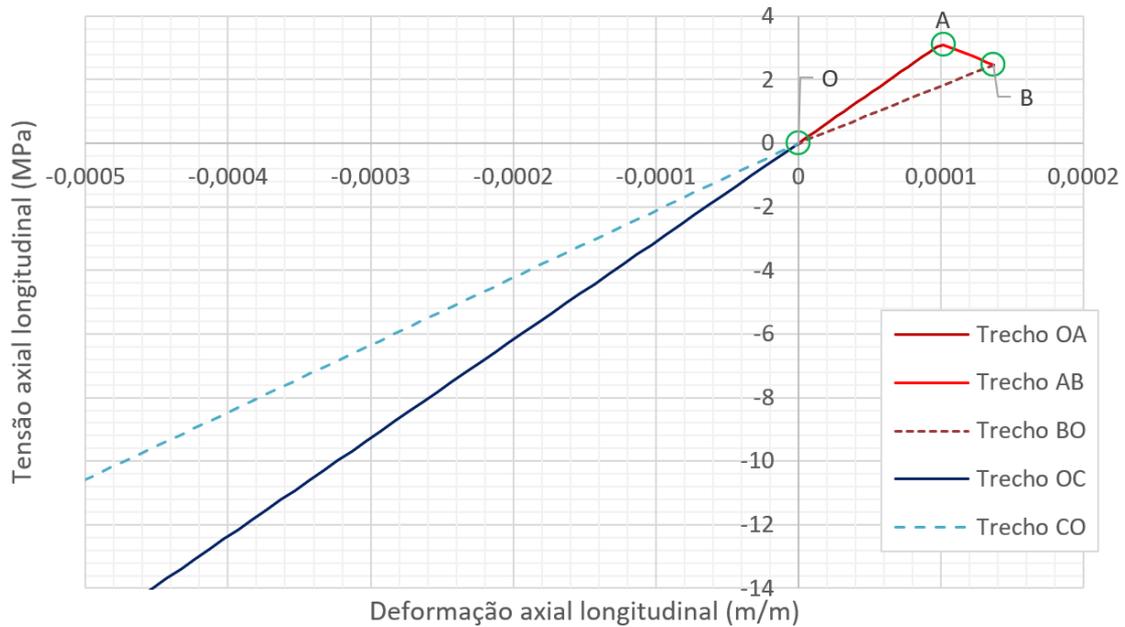
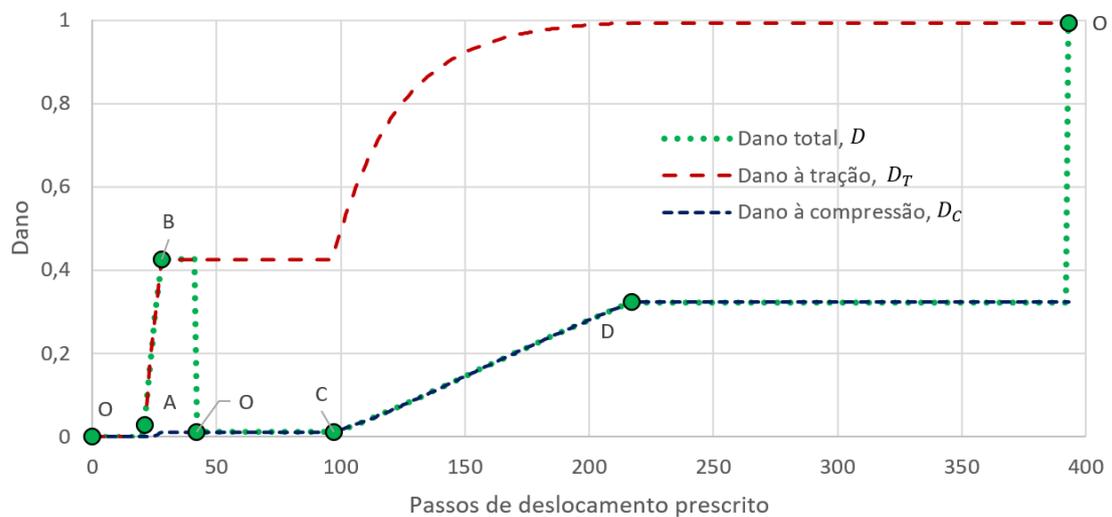


Gráfico 12 - Exemplo 4.7: Resposta idêntica à do Gráfico 11, com destaque à região da resposta à tração.



Além disso, o Gráfico 13 apresenta a evolução do dano ao longo dos passos de controle de deslocamentos do problema, distinguindo a evolução do parâmetro de dano D nas suas partes à tração D_T e à compressão, D_C . Estes resultados mostram o comportamento do modelo de Mazars sobretudo em relação ao efeito que a inversão de carregamentos (em que um sólido inicialmente danificado à tração passa a ser comprimido e danificado à compressão, por exemplo) implica na evolução do dano.

Gráfico 13 - Exemplo 4.7: Evolução do dano e de suas componentes à tração e compressão para os passos de controle de deslocamentos. Os círculos verdes destacam os pontos apresentados no Gráfico 11.



Considerando os resultados desses gráficos e da Tabela 8, nota-se que, após o dano máximo à tração no ponto B e a inversão da carga de tração para o trecho de compressão do teste (trecho OCD), o dano observado reduz de 0,43 para 0,32, apesar dos danos à tração e à compressão serem necessariamente crescentes ao longo de todo o problema (e são constantes no trecho BOC, inclusive). Esta variação no valor do dano é esperada e influi na declividade da curva tensão x deformação no trecho inicial de carregamento à compressão, que é pouco afetado pelo dano ($D = 0,11$). Isso se deve à inversão das contribuições dos parâmetros α_T e α_C entre os passos sob tração e compressão, além das funções de D_T e D_C apresentarem comportamentos distintos em relação ao estado de deformação do sólido, conforme esclarecido no Gráfico 13. Como o modelo de Mazars avalia um único parâmetro escalar de dano que inclui e pondera os efeitos de D_T e D_C , (sendo estes avaliados em função do mesmo parâmetro de deformação K_D), é esperado que essa característica do modelo proposto se evidencie neste tipo de teste. Para alguns problemas que envolvem carregamentos cíclicos, por exemplo, esse comportamento do modelo é indesejado ou não representativo da realidade, e para esses casos novas hipóteses devem ser assumidas (como em Mazars *et al.* [71] e outras abordagens apresentadas na seção 2.3, por exemplo). Ainda assim, estes resultados mostram a capacidade do algoritmo de avaliar a evolução do dano ao longo dos passos de controle de deslocamentos, considerando o modelo de dano adotado.

4.8 Ensaio de parede sob variação de temperatura com Dano

Esse exemplo considera a mesma geometria, vinculações e solicitações térmicas do exemplo 4.5, porém acoplando à análise o modelo de dano implementado. Como foi observado no exemplo 4.5, a evolução dos deslocamentos e deformações após a variação de temperatura crítica demonstra maior rigidez na resposta da estrutura quando comparada aos comportamento da viga sob carregamento externo observado no exemplo 4.2. Esta resposta exhibe, portanto, deslocamentos e deformações menos pronunciados que em 4.2. Ainda assim, os deslocamentos logo após a bifurcação não são pequenos e a avaliação da evolução do dano nesse caso deve acontecer após a flambagem, sobretudo em peças esbeltas.

É do interesse nesse exemplo buscar inicialmente a evolução do deslocamento vertical da extremidade esquerda da viga até um certo ponto limite no qual o problema passa a

ter danos nas fibras mais tracionadas e comprimidas (considerando o aspecto do resultado do exemplo 4.5). Para esta avaliação, foram simulados inicialmente casos que diferem apenas no gradiente inicial de temperatura que induz a imperfeição inicial do modelo. Esses gradientes iniciais foram adotados de modo que a diferença de temperatura entre as duas faces seja constante e iguais a 0,2°C, 2,0°C, 10,0°C e 20,0°C. O incremento do parâmetro de temperatura λ_θ a cada novo passo foi de 0,1% da temperatura crítica. Neste exemplo, inicialmente não foi considerada a abordagem não local das deformações para a determinação da evolução do dano. As demais características deste exemplo estão apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 - Propriedades geométricas e termomecânicas para o exemplo 4.8

Propriedades geométricas	L (m)	h (m)	δ (m)	L_{ef} (m)
	5,00	0,20	1,00	10,00
Propriedades termomecânicas	E (MPa)	ν	α (°C ⁻¹)	f_{ct} (MPa)
	3,0e+5	0,2	1,0e-5	3,0
Parâmetros da função de dano	A_T	B_T	A_C	B_C
	0,9	10000	1,2	1500

O Gráfico 14 apresenta as curvas de evolução do deslocamento vertical no centro da borda à esquerda para os casos de gradiente acima indicados, juntamente com o resultado obtido para o exemplo 4.4 (em que a imperfeição foi simulada por uma diferença de 0,2°C na altura, sem dano). No último passo de incremento de temperatura todas as soluções divergiram sob controle de carregamentos.

O Gráfico 15 e o Gráfico 16 apresentam as curvas de evolução de dano e tensão horizontal na configuração deformada (T_{xx} , em MPa) ao longo da altura da borda esquerda da viga para alguns passos de cada ensaio, alterando apenas a imperfeição inicial conforme indicado (0,2°C e 2,0°C). Os diagramas de tensão evoluem de um estado de compressão centrada (sobretudo observado pela curva horizontal nos ensaios com parâmetro de carregamento térmico de $\lambda_\theta = 0,5$ nos gráficos) até a flexão do passar a ser mais preponderante e, devido às tensões elásticas de equilíbrio, o dano surge e evolui nas fibras extremas (à tração na face superior e à compressão na inferior) que apresentam tensões superiores a 3 MPa no lado tracionado e em torno de 15 MPa no lado comprimido.

Gráfico 14 - Exemplo 4.8: Variação da deflexão vertical da borda esquerda da viga sob aumento uniforme de temperatura para diferentes casos com variação da temperatura entre as faces superior e inferior.

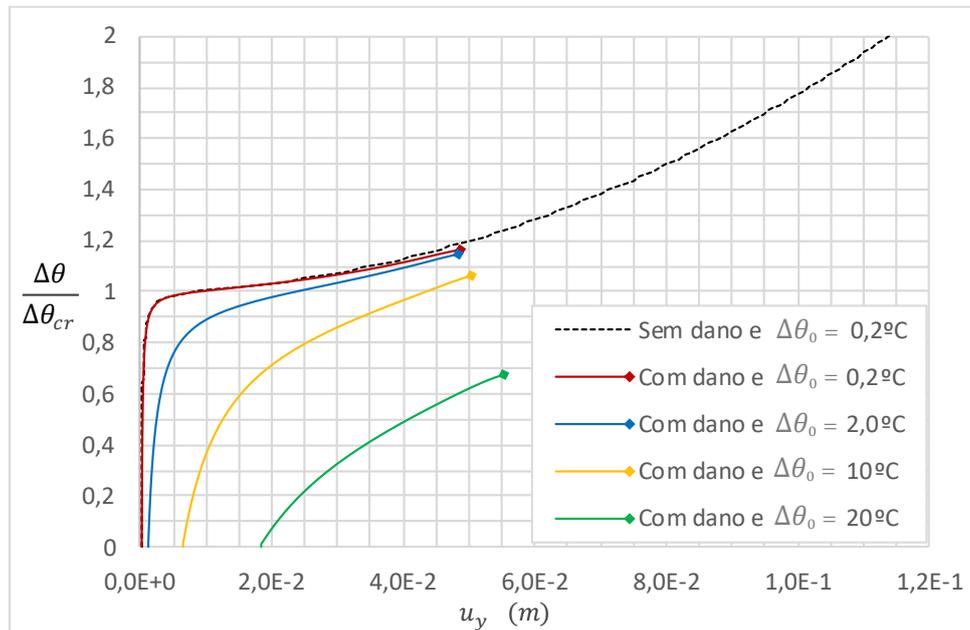


Gráfico 15 - Exemplo 4.8: Evolução do dano e das tensões horizontais ao longo da altura da borda esquerda da viga para 50% (cinza), 100% (verde), 105% (azul) e 112% (vermelho - ponto limite) da temperatura crítica, para o caso com diferença inicial de temperatura de $0,2^\circ\text{C}$.

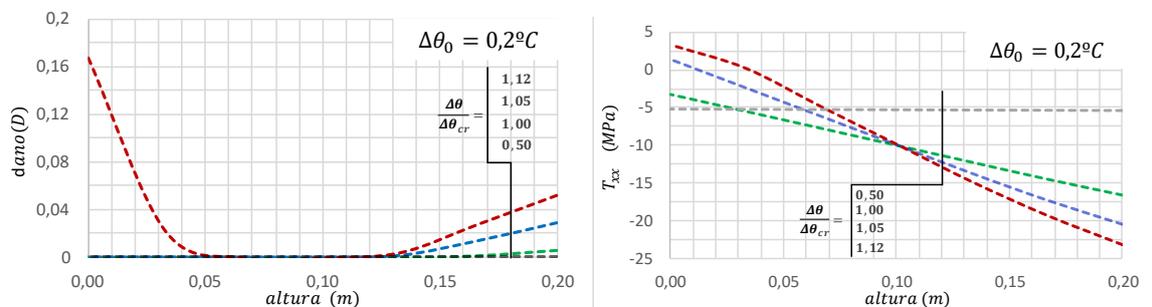
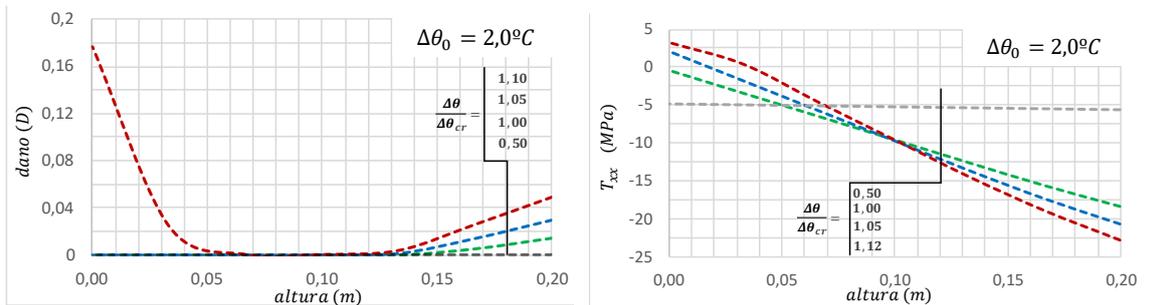


Gráfico 16 - Exemplo 4.8: Evolução do dano e das tensões horizontais ao longo da altura da borda esquerda da viga para 50% (cinza), 100% (verde), 105% (azul) e 110% (vermelho - ponto limite) da temperatura crítica, para o caso com diferença inicial de temperatura de $2,0^{\circ}\text{C}$.



No desenvolvimento e resolução do problema apresentado até aqui, foi desconsiderada a avaliação da deformação não local para a determinação da curva da solução. O ponto limite apresentado nessas análises é, portanto, o ponto a partir do qual o incremento de carregamento não resulta em qualquer solução convergente, seja por não existir solução para o problema com um carregamento superior ao apresentado no ponto limite, ou porque os efeitos de localização da deformação impedem o algoritmo de dar continuidade na solução do problema. Para essa avaliação, foi considerada nesse exemplo a avaliação da contribuição não local, com o objetivo de comparar o efeito que esta abordagem tem tanto no ponto limite quanto no comportamento da curva no pós-limite, considerando ainda um método de resolução por controle de carregamentos. Para a abordagem não local apresentada neste exemplo, foram considerados os parâmetros $d_{lim} = 5,0$ cm e $d_{lim} = 2,0$ cm para comparação do comportamento desse parâmetro no desenvolvimento da solução do problema. A Figura 41 apresenta o campo de dano para os pontos destacados no resultado do Gráfico 17, que por sua vez apresenta o campo de deslocamentos do ponto central da extremidade esquerda da viga. O dano nesta figura foi avaliado com parâmetro de distância limite $d_{lim} = 5,0$ cm. A curva contínua do Gráfico 17 é idêntica à apresentada no Gráfico 14. Nota-se na solução do mesmo problema considerando a avaliação das deformações não locais que foi obtido um caminho estável de solução ainda sob controle de carregamentos, possivelmente associado ao comportamento mais regular do campo de danos em favor da obtenção de uma solução convergente nas etapas seguintes à equivalente aos pontos limite apresentados no Gráfico 14. Além disso, a Figura 42 apresenta para o ponto B (configuração de solução imediatamente após a variação brusca de deslocamento

vertical entre os passos consecutivos A-B) o campo de dano para as deformações não locais avaliadas com $d_{lim} = 2,0$ cm e $d_{lim} = 5,0$ cm.

Gráfico 17 - Exemplo 4.8: Variação da deflexão vertical da borda esquerda da viga sob aumento uniforme de temperatura. Problema resolvido sob abordagem não-local e controle de carregamentos.

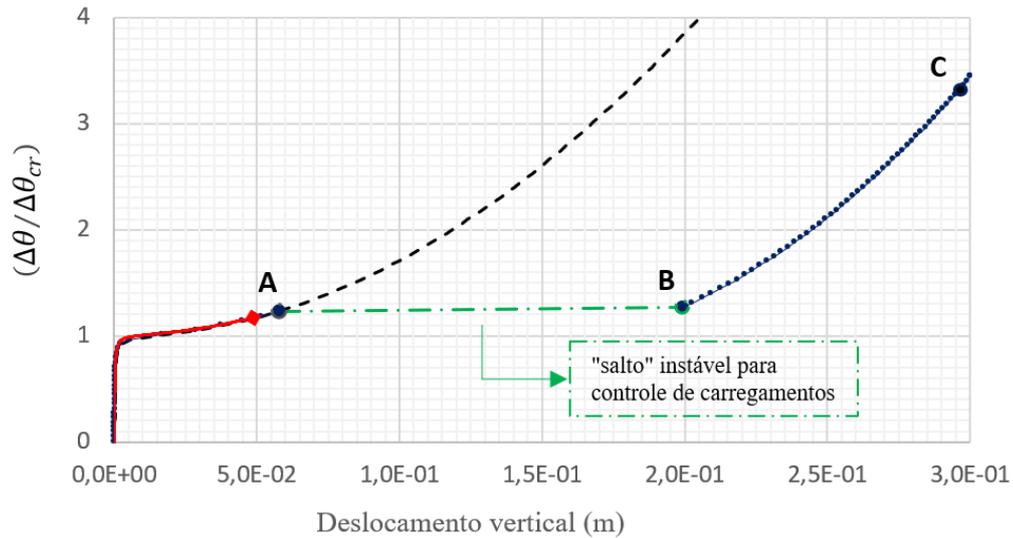
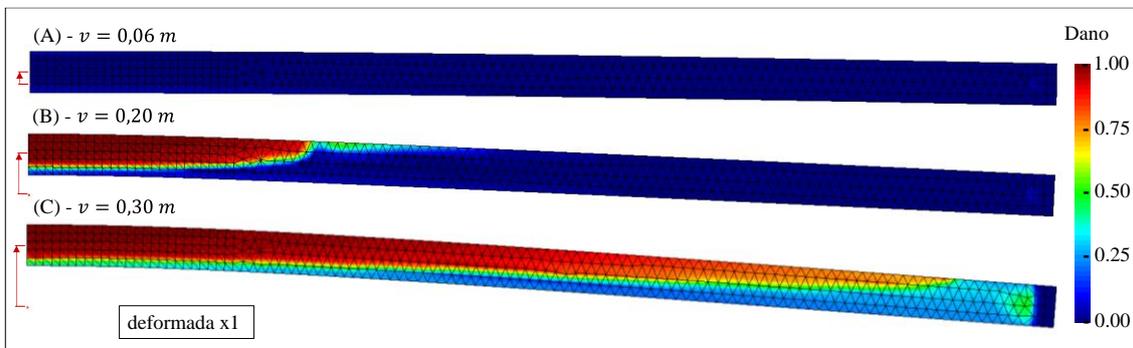
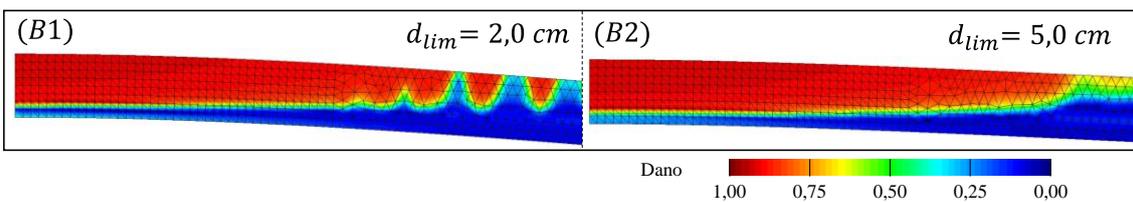


Figura 41- Exemplo 4.8: Deformadas e campos de dano para os pontos A, B e C do Gráfico 17.



Fonte: Autoria própria.

Figura 42- Exemplo 4.8: Deformadas e campos de dano para o ponto B do Gráfico 17, considerando diferentes distâncias limites para abordagem não local.



Fonte: Autoria própria.

O resultado do campo de dano mostrado na Figura 42 ajuda a compreender a influência que a definição do parâmetro de distância d_{lim} pode proporcionar no desenvolvimento do campo de dano nos passos convergidos. Enquanto qualitativamente os comportamentos entre os deslocamentos das soluções apresentadas em B1 e B2 são semelhantes, a solução dos campos de dano se mostraram distintas sobretudo no trecho intermediário da viga do exemplo, em que, no caso de $d_{lim} = 2,0$ cm, há no equilíbrio a formação de trechos localizados de material danificado intercalado a trechos mais íntegros. Desta forma, este caso se mostra intermediário, comparando a solução para $d_{lim} = 5,0$ cm e a solução que seria esperada com uma análise local, na qual poderiam surgir diversas faixas ainda menores (equivalentes a um elemento) espaçadas horizontalmente com dano elevado. Este comportamento pode ser a razão pela qual ocorreu a dificuldade em se obter solução equivalente ao ponto B na análise local, que deixou de convergir nas proximidades da resposta apresentada em A.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo apresentar e implementar o Modelo de Dano de Mazars (relacionados à representação de materiais cimentícios) associado ao desenvolvimento de simulações computacionais de problemas termoelásticos geometricamente não lineares para modelos em estado plano de deformação. Em extensão a isso, outros objetivos secundários mais amplos foram apresentados, como a discussão e descrição das abordagens que pautaram o autor na construção de rotinas computacionais para a avaliação e satisfação destes objetivos principais. Nesse sentido mais amplo, o código computacional que permitiu a avaliação dos exemplos apresentados na seção 4 foi integralmente desenvolvido pelo autor com base nas referências apresentadas ao longo do texto.

Pela variedade dos exemplos apresentados, observa-se que o conjunto de algoritmos que permitiram essas análises não se limitam a (ou foram escritos para o único fim de) avaliar problemas termoelásticos com dano, apesar de ter sido este o objetivo final do código escrito dentro do contexto deste trabalho. Considerando o escopo adotado para a formulação do problema mecânico, uma das vantagens na consideração de uma formulação geometricamente não linear para a avaliação de deformações finitas em problemas planos está relacionada ao ganho na complexidade dos problemas que podem ser analisados. Neste sentido, vale também frisar que os temas, métodos e abordagens apresentadas e tratadas na implementação deste código computacional não se esgotam em si, e tampouco esgotam as possibilidades de melhorias na avaliação dos problemas aqui abordados.

Assim, os exemplos foram desenvolvidos na última seção para também ilustrar as diversas aplicabilidades de que o código desenvolvido dispõe, bem como as vantagens, desvantagens e limitações das estratégias adotadas neste texto. Dentre as dificuldades e limitações, diferentes adversidades relacionadas à convergência do problema numérico foram identificadas na resolução dos exemplos apresentados e de outros analisados ao longo do período de validação dos algoritmos. Como se trata de um problema que envolve não linearidades geométricas e de materiais, além do efeito das deformações térmicas não acopladas ao problema elástico, algumas dificuldades foram percebidas no desenvolvimento da resolução do problema numérico quando combinados dois ou mais desses efeitos no problema analisado. Uma dessas adversidades, relacionada à aplicação do método da corda conforme foi abordado, reside na característica de o dano estar

usualmente associado a uma certa região limitada do domínio do sólido (mesmo considerando a abordagem não-local), e por isso a consideração de uma norma global de deslocamentos para a avaliação dos incrementos das iterações pode apresentar dificuldades ao longo do desenvolvimento do problema. Para tanto, uma possibilidade é a adoção de outras abordagens, como as que foram brevemente apresentadas na seção 3.7.4. É importante enfatizar, nesse sentido, que os exemplos apresentados se mostraram satisfatórios na medida do que se buscava apresentar em cada exemplo, considerando cada peculiaridade, efeito ou limitação abordado nos testes feitos.

Sendo assim, o autor considera ter atingido os objetivos essenciais deste trabalho, apesar de ter sido evidenciada a necessidade de se avançar em alguns tópicos de resolução do problema numérico. Nesse sentido, o autor considera fundamental que, para trabalhos futuros, sejam consideradas as seguintes sugestões:

- Promover uma investigação mais profunda dos aspectos numéricos que justificam as diferentes adversidades na convergência dos problemas mais complexos tratados, que envolvam dois ou mais dos efeitos e abordagens apresentados;
- Avaliar a resolução do problema numérico através dos métodos equivalentes aos apresentados na seção 3.7.4, ou outras técnicas que promovam avanços na capacidade e estabilidade da convergência na resolução dos diferentes problemas propostos.

O autor também considera como sugestões não essenciais (porém recomendadas), os seguintes itens:

- Implementar o conjunto de algoritmos desenvolvidos pelo autor em linguagens de programação compiláveis, além de outras melhorias gerais voltadas ao ganho de desempenho;
- Investigar e aprofundar o conhecimento nas fronteiras dos modelos de dano mais atuais, bem como avaliar o melhoramento dos algoritmos e técnicas abordadas, como métodos de adaptabilidade de malha (conforme apresentado por algumas referências), entre outros; e
- Resolver o problema térmico acoplado com o problema elástico, através da resolução do problema de fluxo associado às características do meio e do campo de deslocamentos do problema.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Carasek, “Argamassas,” in *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*, 1st ed., G. C. Isaia, Ed. São Paulo: IBRACON, 2007, pp. 863–904.
- [2] P. K. Mehta and P. J. M. Monteiro, *Concrete - Microstructure, Properties and Materials*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2006.
- [3] J. B. de Hanai, “Comportamento Resistente, Ductilidade e Confinamento,” in *Concreto. Ensino, Pesquisa e Realizações*, 1st ed., G. C. Isaia, Ed. São Paulo: IBRACON, 2005, pp. 165–200.
- [4] P. Helene and T. Andrade, “Concreto de Cimento Portland,” in *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*, 1st ed., G. C. Isaia, Ed. São Paulo: IBRACON, 2007, pp. 905–944.
- [5] *ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.
- [6] M. Herwegh, R. Zurbriggen, R. Mettier, F. Winnefeld, J. Kaufmann, and A. Wetzler, “Hygrical shrinkage stresses in tiling systems: Numerical modeling combined with field studies,” *Cem. Concr. Compos.*, vol. 55, pp. 1–10, 2015.
- [7] T. Mahaboonpachai, T. Matsumoto, and Y. Inaba, “Investigation of interfacial fracture toughness between concrete and adhesive mortar in an external wall tile structure,” *Int. J. Adhes. Adhes.*, vol. 30, no. 1, pp. 1–9, 2010.
- [8] T. Mahaboonpachai, Y. Kuromiya, and T. Matsumoto, “Experimental investigation of adhesion failure of the interface between concrete and polymer-cement mortar in an external wall tile structure under a thermal load,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 22, no. 9, pp. 2001–2006, Sep. 2008.
- [9] J. W. Ju, P. J. M. Monteiro, and A. Rashed, “Continuum Damage of Cement Paste and Mortar as Affected by Porosity and Sand Concentration,” *J. Eng. Mech. - J ENG MECH-ASCE*, vol. 115, 1989.
- [10] M. K. Darabi, R. K. Abu Al-Rub, and D. N. Little, “A continuum damage mechanics framework for modeling micro-damage healing,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 49, no. 3–4, pp. 492–513, Feb. 2012.
- [11] U. Edlund, P. Schmidt, and E. Roguet, “A model of an adhesively bonded joint with elastic–plastic adherends and a softening adhesive,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 5, pp. 740–752, 2009.
- [12] K. J. Elwood, “Performance of Concrete Buildings in the 22 February 2011 Christchurch Earthquake and Implications for Canadian Codes,” *Can. J. Civ. Eng.*, 2013.
- [13] Seattle Department of Transportation, “Rainier Ave S & Henderson HEAT BUMP 7-11-03,” 2003. [Online]. Available: https://www.flickr.com/photos/sdot_photos/3786348371/in/photostream/. [Accessed: 22-Aug-2021].
- [14] W. Zhang and Y. Cai, “Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications,” 2010.

- [15] H. C. F. Curci, R. P. de Andrade, F. L. Maranhão, H. C. Gomes, and E. M. B. Campello, “Analysis of adhered tiling systems based on experimental evaluation and numerical modeling,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 325, p. 126746, 2022.
- [16] L. M. Kachanov, “Rupture Time Under Creep Conditions,” *Int. J. Fract.*, vol. 97, no. 1, pp. 11–18, 1999.
- [17] Y. N. Rabotnov, “Kinetics of Creep and Creep Rupture,” in *Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids*, 1968, pp. 326–334.
- [18] A. A. Griffith, “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids,” *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Contain. Pap. a Math. or Phys. Character*, vol. 221, pp. 163–198, Aug. 1921.
- [19] J. Lemaitre, *A Course on Damage Mechanics*, 1st ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [20] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche, *Mechanics of solid materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [21] J. P. Cordebois and F. Sidoroff, “Damage Induced Elastic Anisotropy,” in *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids / Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*, 1982, pp. 761–774.
- [22] P. Grammenoudis, D. Reckwerth, and C. H. Tsakmakis, “Continuum Damage Models based on Energy Equivalence: Part I — Isotropic Material Response,” *Int. J. Damage Mech.*, vol. 18, no. 1, pp. 31–63, 2009.
- [23] J. C. Simo and J. W. Ju, “Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 23, no. 7, pp. 821–840, Jan. 1987.
- [24] J. C. Simo and J. W. Ju, “Strain- and stress-based continuum damage models—II. Computational aspects,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 23, no. 7, pp. 841–869, Jan. 1987.
- [25] U. Lee, G. A. Lesieutre, and L. Fang, “Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 34, no. 33–34, pp. 4377–4397, Nov. 1997.
- [26] S.-Y. Chung, J.-S. Kim, D. Stephan, and T.-S. Han, “Overview of the use of micro-computed tomography (micro-CT) to investigate the relation between the material characteristics and properties of cement-based materials,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 229, p. 116843, 2019.
- [27] H. Jinnai and R. J. Spontak, “Transmission electron microtomography in polymer research,” *Polymer (Guildf.)*, vol. 50, no. 5, pp. 1067–1087, 2009.
- [28] Ł. Skarżyński and J. Suchorzewski, “Mechanical and fracture properties of concrete reinforced with recycled and industrial steel fibers using Digital Image Correlation technique and X-ray micro computed tomography,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 183, pp. 283–299, 2018.
- [29] J.-L. Chaboche, “Continuous damage mechanics — A tool to describe phenomena before crack initiation,” *Nucl. Eng. Des.*, vol. 64, no. 2, pp. 233–247, Apr. 1981.

- [30] J. Lemaitre, "How to use damage mechanics," *Nucl. Eng. Des.*, vol. 80, no. 2, pp. 233–245, Jul. 1984.
- [31] J. Lemaitre, "Phenomenological Aspects of Damage," in *A Course on Damage Mechanics*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996, pp. 1–37.
- [32] K. E. Løland, "Continuous damage model for load-response estimation of concrete," *Cem. Concr. Res.*, vol. 10, no. 3, pp. 395–402, May 1980.
- [33] D. Krajcinovic and D. Sumarac, "A Mesomechanical Model for Brittle Deformation Processes: Part I," *J. Appl. Mech.*, vol. 56, no. 1, p. 51, 1989.
- [34] D. Krajcinovic and J. Lemaitre, *Continuum Damage Mechanics - Theory and Application*. Springer-Verlag Wien, 1987.
- [35] D. Krajcinovic and G. U. Fonseka, "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part 1: General Theory," *J. Appl. Mech.*, vol. 48, no. 4, p. 809, 1981.
- [36] V. A. Lubarda, D. Krajcinovic, and S. Mastilovic, "Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 49, no. 5, pp. 681–697, Nov. 1994.
- [37] D. Krajcinovic, "Damage mechanics," *Mech. Mater.*, vol. 8, no. 2–3, pp. 117–197, Dec. 1989.
- [38] J. Mazars, "Mechanical damage and fracture of concrete structures," in *ICF5 - Advances in Fracture Research*, 1981, pp. 1499–1506.
- [39] J. Mazars, "A description of micro- and macroscale damage of concrete structures," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 25, no. 5, pp. 729–737, 1986.
- [40] J. Mazars and G. Pijaudier-Cabot, "Continuum Damage Theory-Application to Concrete," *J. Eng. Mech.*, vol. 115, no. 2, pp. 345–365, 1989.
- [41] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, and C. Saouridis, "Size effect and continuous damage in cementitious materials," *Int. J. Fract.*, vol. 51, no. 2, pp. 159–173, 1991.
- [42] G. Pijaudier-Cabot and J. Mazars, "Damage Models for Concrete," *Handb. Mater. Behav. Model.*, vol. 2, 2001.
- [43] J. W. Ju, "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 25, no. 7, pp. 803–833, Jan. 1989.
- [44] J. W. Ju, "Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage Mechanics," *J. Eng. Mech.*, vol. 116, pp. 2764–2770, 1990.
- [45] R. Hill, "Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, no. 5, pp. 357–372, Sep. 1963.
- [46] R. De Borst, "Non-linear analysis of frictional materials," Delft University of Technology, 1986.
- [47] G. Pijaudier-Cabot and Z. Bazant, "Nonlocal Damage Theory," *J. Eng. Mech. - J ENG MECH-ASCE*, vol. 113, 1987.
- [48] Z. P. Bazant, "Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics

- arguments.,” *J. Eng. Mech.*, vol. 117, no. 5, pp. 1070–1087, 1991.
- [49] M. Jirásek, “Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 35, no. 31, pp. 4133–4145, 1998.
- [50] M. Jirásek, “Nonlocal damage mechanics,” *Rev. Eur. génie Civ.*, vol. 11, 2007.
- [51] F. B. BARROS, “Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas.,” Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- [52] I. De Pouplana and E. Oñate, “An isotropic damage model for geomaterials in the Kratos framework.,” Centre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria (CIMNE), 2015.
- [53] G. Rastello, C. Giry, F. Gatuingt, F. Thierry, and R. Desmorat, “Nonlocal damage formulation with evolving internal length: The Eikonal nonlocal approach,” 2018, pp. 509–516.
- [54] J. H. P. de Vree, W. A. M. Brekelmans, and M. A. J. van Gils, “Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics,” *Comput. Struct.*, vol. 55, no. 4, pp. 581–588, 1995.
- [55] T. Belytschko, Z. P. Bažant, H. Yul-Woong, and C. Ta-Peng, “Strain-softening materials and finite-element solutions,” *Comput. Struct.*, vol. 23, no. 2, pp. 163–180, 1986.
- [56] R. DE BORST, “SIMULATION OF STRAIN LOCALIZATION: A REAPPRAISAL OF THE COSSERAT CONTINUUM,” *Eng. Comput.*, vol. 8, no. 4, pp. 317–332, Jan. 1991.
- [57] G. Pijaudier-Cabot, R. De Borst, and J. Mazars, “Continuous Damage Models for Fracture of Concrete,” in *FraMCoS-4*, 2001.
- [58] N. R. Hansen and H. L. Schreyer, “A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 31, no. 3, pp. 359–389, 1994.
- [59] Q. M. Li, “Energy correlations between a damaged macroscopic continuum and its sub-scale,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 37, no. 33, pp. 4539–4556, 2000.
- [60] J. Lubliner, “On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 7, no. 3, pp. 237–254, Jun. 1972.
- [61] R. Faria, J. Oliver, and M. Cervera, “On Isotropic Scalar Damage Models for the Numerical Analysis of Concrete Structures On Isotropic Scalar Damage Models for the Numerical Analysis of Concrete Structures.” 2000.
- [62] J. J. C. Pituba and G. R. Fernandes, “Anisotropic Damage Model for Concrete,” *J. Eng. Mech.*, vol. 137, pp. 610–624, 2011.
- [63] G. Z. Voyiadjis, Z. N. Taqieddin, and P. I. Kattan, “Anisotropic damage-plasticity model for concrete,” *Int. J. Plast.*, 2008.
- [64] J. Mazars, S. Grange, and M. Briffaut, “Simplified Modeling Strategy for the Thermomechanical Analysis of Massive Reinforced Concrete Structures at an Early Age,” *Appl. Sci.*, vol. 8, p. 448, 2018.

- [65] K. Willam, I. Rhee, and Y. Xi, "Thermal Degradation of Heterogeneous Concrete Materials," *J. Mater. Civ. Eng.*, vol. 17, no. 3, pp. 276–285, 2005.
- [66] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, and E. Oñate, "A plastic-damage model for concrete," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 25, no. 3, pp. 299–326, Jan. 1989.
- [67] L. Jason, A. Huerta, G. Pijaudier-Cabot, and S. Ghavamian, "An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 195, no. 52, pp. 7077–7092, Nov. 2006.
- [68] A. Sarikaya and R. E. Erkmén, "A plastic-damage model for concrete under compression," *Int. J. Mech. Sci.*, 2019.
- [69] G. PIJAUDIER-CABOT and J. MAZARS, "SECTION 6.13 - Damage Models for Concrete," in *Handbook of Materials Behavior Models*, J. LEMAITRE, Ed. Burlington: Academic Press, 2001, pp. 500–512.
- [70] G. Pijaudier-Cabot and L. Jason, "Continuum Damage Modelling and Some Computational Issues," *Rev. Française Génie Civ.*, vol. 6, 2002.
- [71] J. Mazars, F. Hamon, and S. Grange, "A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings," *Mater. Struct.*, vol. 48, pp. 3779–3793, 2015.
- [72] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner, "Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete," 1990, vol. 2.
- [73] J. A. Paredes, S. Oller, and A. H. Barbat, "New Tension-Compression Damage Model for Complex Analysis of Concrete Structures," *J. Eng. Mech.*, vol. 142, p. ASCE 04016072, 2016.
- [74] D. Kondo, H. Welemene, and F. Cormery, "Basic concepts and models in continuum damage mechanics," *Rev. Eur. génie Civ.*, vol. 11, pp. 927–943, 2007.
- [75] D. Fanella and D. Krajcinovic, "Continuum Damage Mechanics of Fiber Reinforced Concrete," *J. Eng. Mech.*, vol. 111, pp. 995–1009, 1985.
- [76] P. de Mattos Pimenta, "Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas." 2016.
- [77] H. C. Gomes, "Método dos Elementos Finitos com Fronteiras imensas aplicado a problemas de dinâmica dos Fluidos e Interação Fluido Estrutura," Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2013.
- [78] M. A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through,'" *Comput. Struct.*, vol. 13, no. 1, pp. 55–62, 1981.
- [79] E. P. Junior, A. S. de Junior, and S. M. B. A. da Silva, "Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading," *Comput. Mech.*, vol. 38, no. 6, pp. 505–520, 2006.
- [80] S. C. H. Lu and K. S. Pister, "Decomposition of deformation and representation of the free energy function for isotropic thermoelastic solids," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 11, no. 7, pp. 927–934, 1975.
- [81] L. Vujošević and V. A. Lubarda, "Finite-strain thermoelasticity based on

- multiplicative decomposition of deformation gradient,” *Theor. Appl. Mech.*, vol. 28, 2002.
- [82] M. Micunovic, “A geometrical treatment of thermoelasticity of simple inhomogeneous bodies. I: Geometrical and kinematical relations,” *Bull. l’Académie Pol. des Sci. Série des Sci. Tech.*, vol. 22, 1974.
- [83] Eduardo W. V. Chaves, *Notes on Continuum Mechanics*, 1st ed. Springer Netherlands, 2013.
- [84] E. M. B. Campello, P. Pimenta, and P. Wriggers, “A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation,” *Comput. Mech.*, vol. 31, pp. 505–518, 2003.
- [85] E. M. B. Campello, P. Pimenta, and P. Wriggers, “Elastic-plastic analysis of metallic shells at finite strains,” *Rem Rev. Esc. Minas*, vol. 60, pp. 381–389, 2007.
- [86] V. A. Lubarda, “Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 57, 2004.
- [87] R. Souchet, “Equivalence principles in continuum damage mechanics,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 43, no. 17–18, pp. 1313–1322, Nov. 2005.
- [88] H. Schütte and O. T. Bruhns, “On a geometrically nonlinear damage model based on a multiplicative decomposition of the deformation gradient and the propagation of microcracks,” *J. Mech. Phys. Solids*, 2002.
- [89] P. Wriggers, *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [90] R. D. Lahuerta, “Projeto de mecanismos flexíveis baseado no efeito de flambagem não linear utilizando o método de otimização topológica,” Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2017.
- [91] M. da Silva Alvares, “Estudo de um modelo de dano para o concreto: Formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos,” Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- [92] M. Jirásek, “Mathematical analysis of strain localization,” *Rev. Eur. Génie Civ.*, vol. 11, 2007.
- [93] Z. P. Bažant and G. Pijaudier-Cabot, “Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence,” *J. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 2, pp. 287–293, Jun. 1988.
- [94] A. Rodríguez-Ferran and A. Huerta, “Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 37, no. 48–50, pp. 7501–7528, Nov. 2000.
- [95] Z. Bazant and G. Pijaudier-Cabot, “Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum,” *J. Eng. Mech. - J ENG MECH-ASCE*, vol. 115, 1989.
- [96] L. Jason, A. Huerta, G. Pijaudier-Cabot, and S. Ghavamian, “An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison

- with an isotropic damage model,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 195, no. 52, pp. 7077–7092, Nov. 2006.
- [97] Z. Li, S. Cen, C.-J. Wu, Y. Shang, and C.-F. Li, “High-performance geometric nonlinear analysis with the unsymmetric 4-node, 8-DOF plane element US-ATFQ4,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 114, 2018.
- [98] I. Leahu-Aluas and F. Abed-Meraim, “A proposed set of popular limit-point buckling benchmark problems,” *Struct. Eng. Mech.*, vol. 38, pp. 767–802, 2011.
- [99] J.-L. Batoz and G. Dhatt, “Incremental displacement algorithms for nonlinear problems,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 14, no. 8, pp. 1262–1267, 1979.
- [100] M. A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1. John Wiley & Sons, 1991.
- [101] E. Riks, “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 15, no. 7, pp. 529–551, 1979.
- [102] E. Ramm, “Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points,” in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, 1981, pp. 63–89.
- [103] S. May, J. Vignollet, and R. Borst, “A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy,” *Eng. Comput.*, vol. 33, pp. 100–115, 2016.
- [104] M. A. Gutiérrez, “Energy release control for numerical simulations of failure in quasi-brittle solids,” *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 20, no. 1, pp. 19–29, 2004.
- [105] C. V Verhoosel, J. J. C. Remmers, and M. A. Gutiérrez, “A dissipation-based arc-length method for robust simulation of brittle and ductile failure,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 77, no. 9, pp. 1290–1321, 2009.
- [106] Z. Chen and H. L. Schreyer, “A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control,” *Comput. Struct.*, vol. 37, no. 6, pp. 1043–1050, 1990.
- [107] I. M. May and Y. Duan, “A local arc-length procedure for strain softening,” *Comput. Struct.*, vol. 64, no. 1, pp. 297–303, 1997.
- [108] R. Ribó, M. A. de R. Pasenau, and E. Escolano, “GiD Reference Manual.” International Center For Numerical Methods In Engineering (CIMNE), Barcelona, p. 278, 2000.
- [109] W. M. Smoleński, “Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 178, no. 1, pp. 89–113, 1999.
- [110] W. C. Young and R. G. Budynas, *Roark’s Formulas for Stress and Strain.*, 7th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2001.

**ANEXO A – CÁLCULO DA DERIVAÇÃO DA DEFORMAÇÃO
EQUIVALENTE PELOS TERMOS DE E_e**

Retomando a relação apresentada na formulação da matriz de rigidez tangente,

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}_k} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E}{\partial \mathbf{r}_k}, \quad (146)$$

e partindo do tensor das deformações elásticas de Green-Lagrange,

$$\mathbf{E}_e = \begin{bmatrix} E_{e11} & E_{e12} & E_{e13} \\ E_{e21} & E_{e22} & E_{e23} \\ E_{e31} & E_{e32} & E_{e33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{e11} & E_{e12} & 0 \\ E_{e12} & E_{e22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{e33} \end{bmatrix}, \quad (147)$$

já adotadas as simplificações do estado plano, a derivação procurada é o vetor linha

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E} = \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e11}} \quad \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e22}} \quad \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e12}} \right]. \quad (148)$$

O parâmetro de deformação local $\tilde{\varepsilon}$ pode ser reescrito para que sejam evidenciados os termos E_{eij} , resolvendo explicitamente o problema de autovalores associado. Sendo assim, partindo dos autovalores de \mathbf{E}_e

$$\varepsilon_i = \text{eig}(\mathbf{E}_e)_i \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \text{eig}(\mathbf{E}_e) \quad (149)$$

e reescrevendo-os em função de dos termos E_{eij} , tem-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(s_E + \kappa_E) \\ \frac{1}{2}(s_E - \kappa_E) \\ E_{e33} \end{bmatrix} \quad (150)$$

em que $s_E = E_{e11} + E_{e22}$, $d_E = E_{e11} - E_{e22}$ e $\kappa_E = \sqrt{(d_E)^2 + (2E_{e12})^2}$. A avaliação da deformação equivalente local $\tilde{\varepsilon}$ fica, então,

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_i \rangle^2} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2} = \sqrt{\zeta_1 \varepsilon_1^2 + \zeta_2 \varepsilon_2^2 + \zeta_3 \varepsilon_3^2}, \quad (151)$$

em que os termos ζ_i são

$$\zeta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } \langle \varepsilon_i \rangle = 0 \text{ ou} \\ 1, & \text{se } \langle \varepsilon_i \rangle = \varepsilon_i. \end{cases} \quad (152)$$

Assim, a derivação deve fornecer, fazendo as devidas operações e reagrupando os termos para facilitar a compreensão, que

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e11}} \\ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e22}} \\ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e12}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \left(\zeta_1 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e11}} + \zeta_2 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_{e11}} \right) \\ \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \left(\zeta_1 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e22}} + \zeta_2 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_{e22}} \right) \\ \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \left(\zeta_1 \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e12}} + \zeta_2 \varepsilon_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_{e12}} \right) \end{bmatrix}^T, \quad (153)$$

em que

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e11}} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right], \quad (154)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e22}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right], \quad (155)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e12}} = - \left(\frac{4}{\kappa_E} \right) E_{e12}, \quad (156)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_{e11}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right] = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e22}}, \quad (157)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_{e12}} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right] = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e11}}, \quad (158)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_{e12}} = \left(\frac{4}{\kappa_E} \right) E_{e12} = - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_{e12}}. \quad (159)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e11}} \\ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e22}} \\ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial E_{e12}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} \left[\zeta_1 \varepsilon_1 \left[1 - \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right] + \zeta_2 \varepsilon_1 \left[1 + \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right] \right] \\ \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} \left[\zeta_1 \varepsilon_1 \left[1 + \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right] + \zeta_2 \varepsilon_1 \left[1 - \left(\frac{d_E}{\kappa_E} \right) \right] \right] \\ \frac{4E_{e12}}{\kappa_E \tilde{\varepsilon}} (\zeta_2 \varepsilon_2 - \zeta_1 \varepsilon_1) \end{bmatrix}^T. \quad (160)$$

Note que o termo $\varepsilon_3 = E_{e33}$ está embutido na avaliação da deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$, (desde que $\varepsilon_3 > 0$), que está presente nos denominadores em todas as colunas da derivada apresentada. Em problemas sem temperaturas, e adotado o estado plano de

deformação e as hipóteses levantadas ao longo do texto, $\varepsilon_3 = E_{e33} = E_{33} = 0$. Já com deformações térmicas devido à variação positiva ou negativa de temperaturas, este termo deverá ser necessariamente não nulo.