

**JULIO FRUCHTENGARTEN**

**SOBRE A ESTABILIDADE DE  
PERFIS DE SEÇÃO ABERTA**

Teze apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em Engenharia.

São Paulo  
1995

**JULIO FRUCHTENGARTEN**

**SOBRE A ESTABILIDADE DE  
PERFIS DE SEÇÃO ABERTA**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia de Estruturas

Orientador:  
Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo  
1995

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar sua gratidão

ao Professor Doutor Paulo de Mattos Pimenta, pela orientação e incentivo recebidos.

ao Professor Doutor Decio Leal de Zagottis, pelo estímulo para o retorno às atividades de pesquisa.

à sua esposa, Sueli Fruchtengarten, pela dedicação e compreensão.

à sua filha, Tânia Fruchtengarten, pelo apoio na elaboração da parte gráfica.

## SUMÁRIO

Lista de Figuras  
Lista de Símbolos  
Resumo  
"Abstract"

### 1. INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVO	1
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	2
1.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS	3
1.4 COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DOS PERFIS DE SEÇÃO ABERTA	6
1.5 PROJETO MODELO	13
1.5.1 Pisos e vedações verticais	13
1.5.2 Estrutura metálica	15
1.5.3 Problemas em aberto	18

### 2. FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS BARRAS DE SEÇÃO DELGADA - A TEORIA DE VLASOV

2.1 INTRODUÇÃO	20
2.2 A TEORIA DA TORÇÃO UNIFORME	21
2.3 A TEORIA DE VLASOV	26
2.3.1 Deslocamentos da superfície média - área setorial	27
2.3.2 Mudança de polo	32
2.3.3 Relações tensões-deformações	33
2.3.4 Equações diferenciais de equilíbrio	35
2.3.5 Esforços solicitantes	43
2.3.6 Barras com apoios elásticos	49
2.3.7 Análise de estabilidade	50
2.3.7.1 Forças transversais adicionais	51
2.3.7.2 Momento de torção adicional	56
2.3.7.3 Equações de equilíbrio	61

2.3.7.4 Energia potencial total do sistema	62
2.3.7.5 Observações	67

### 3. INSTABILIDADE POR DISTORÇÃO - CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA

3.1 INTRODUÇÃO	70
3.2 O MÉTODO ENERGÉTICO	73
3.3 PERFIS TIPO I - MODELOS ANALÍTICOS	79
3.3.1 O modelo de Svensson	79
3.3.2 O modelo de Goltermann, Svensson	87
3.3.3 Comentários	91
3.4 PERFIS TIPO I - "O MODELO AUSTRALIANO"	92
3.4.1 O modelo de Bradford, Trahair	93
3.4.2 Estudos paramétricos	99
3.5 PERFIS TIPO U ENRIJECIDO - O MODELO DE DOUTY	102
3.5.1 Determinação da área efetiva	103
3.5.2 Determinação do coeficiente do apoio elástico	105
3.5.3 Cálculo da carga crítica	107
3.5.4 Recomendações para projeto - norma AISI (1986)	113
3.6 PERFIS TIPO C OU Z - O MODELO DE PEKÖZ, SOROUSHIAN	114
3.7 COMENTÁRIOS	121

### 4. UMA TEORIA GEOMETRICAMENTE EXATA PARA BARRAS NO ESPAÇO

4.1 INTRODUÇÃO	125
4.2 NOTAÇÃO E CONVENÇÕES	126
4.3 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL	127
4.3.1 A função empenamento $\psi$	129
4.4 TEORIA GEOMETRICAMENTE LINEAR	134
4.4.1 Hipótese cinemática	136
4.4.2 Deformações	137
4.4.3 Tensões	140
4.4.4 Potência dos esforços internos	140
4.4.5 Potência dos esforços externos	144
4.4.6 Equações de equilíbrio e condições de contorno	146
4.4.7 Equações constitutivas elásticas lineares	149
4.4.8 Energia potencial total	153

4.5	TEORIA GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR	156
4.5.1	Hipótese cinemática	157
4.5.2	Deformações	160
4.5.3	Tensões	164
4.5.4	Potência dos esforços internos	165
4.5.5	Potência dos esforços externos	168
4.5.6	Equações de equilíbrio e condições de contorno	169
4.5.7	Energia potencial total	172
4.6	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	175
4.7	ANÁLISE DE EULER	178
4.7.1	Linearização da expressão da segunda variação da energia potencial total	179
4.7.2	Comparação com a Teoria de Vlasov	181
4.8	MATRIZ DE RIGIDEZ CONSTITUTIVA NÃO LINEAR	188
4.8.1	Análise de Euler - Termo constitutivo adicional	195
4.9	LINEARIZAÇÃO DA SEGUNDA VARIAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL - EXPRESSÃO COMPLETA	199
4.10	EXEMPLOS NUMÉRICOS	201
4.10.1	Perfil tipo L assimétrico submetido a força normal	201
4.10.2	Viga com seção simétrica tipo I submetida a força concentrada no centro do vão	203
5.	ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE PERFIS DE SEÇÃO ABERTA - INSTABILIDADE POR DISTORÇÃO	
5.1	INTRODUÇÃO	207
5.2	BARRAS EM MEIO ELÁSTICO	207
5.3	BARRAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO I	210
5.3.1	Vigas com momento fletor constante	214
5.3.2	Vigas com momento fletor variável ao longo do vão - Abas superiores com deslocamentos laterais e rotações em torno de z impedidos	219
5.4	BARRAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO U ENRIJECIDO	222
5.4.1	Vigas com momento fletor constante	226
5.4.2	Vigas com momento fletor variável ao longo	

do vão

228

**6. OBSERVAÇÕES FINAIS**

6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA TESE 231

6.2 CONCLUSÕES 234

6.2.1 Teoria exata e teorias aproximadas 234

6.2.2 Instabilidade por distorção 237

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

241

## LISTA DE FIGURAS

Fig.1.4.1 Instabilidade de perfis	7/8
Fig.1.4.2 Instabilidade por distorção	12
Fig.1.5.1 Projeto modelo - Arquitetura	14
Fig.1.5.2 Projeto modelo - Estrutura	16
Fig.2.2.1 Deslocamentos do ponto M	22
Fig.2.2.2 Equilíbrio de um elemento de barra	23
Fig.2.2.3 Equilíbrio de um prisma elementar no contorno	24
Fig.2.3.1 Componentes das tensões de cisalhamento	27
Fig.2.3.2 Sistemas de referência	27
Fig.2.3.3 Deslocamentos do ponto M - Área setorial	28
Fig.2.3.4 Equilíbrio de um elemento na direção z	33
Fig.2.3.5 Equilíbrio de um elemento de barra dz	36
Fig.2.3.6 Origem para áreas setoriais	41
Fig.2.3.7 Equilíbrio de momentos em torno de z	48
Fig.2.3.8 Apoios elásticos	49
Fig.2.3.9 Análise de estabilidade - deslocamentos e tensões	52
Fig.2.3.10 Análise de estabilidade - deslocamentos do ponto de aplicação das forças tangenciais	57
Fig.3.1.1 Tensões de cisalhamento em perfis tipo I e U enrijecido	71
Fig.3.1.2 Curva semi-empírica $M/M_p - \lambda$	72
Fig.3.3.1 O modelo de Svensson	80
Fig.3.3.2 Carga crítica conforme Winter (1960)	84
Fig.3.3.3 Carga crítica conforme Svensson (1985)	86
Fig.3.3.4 O modelo de Goltermann, Svensson	88
Fig.3.3.5 Carga crítica conforme Goltermann, Svensson - exemplos	91
Fig.3.4.1 O modelo de Bradford, Trahair	94
Fig.3.4.2 Vigas I sem restrição aos deslocamentos laterais das abas	101



Fig.3.5.1	O modelo de Douty	104
Fig.3.5.2	Pórtico para determinação do coeficiente do meio elástico	106
Fig.3.5.3	Parâmetros $\beta_{eq}$ , $\alpha_n$ e $C_T$ - exemplo numérico	112
Fig.3.6.1	Composição de estágios de deslocamento	115
Fig.3.6.2	O modelo de Peköz, Soroushian	117
Fig.3.7.1	O modelo de Haussler	122
Fig.3.7.2	O modelo de Lau, Hancock	123
Fig.3.7.3	O modelo de Kwon, Hancock - Carga crítica e carga de colapso	124
Fig.4.2.1	Sistema de coordenadas de uma barra	127
Fig.4.5.1	Deformação da barra no espaço	159
Fig.4.10.1	Perfis tipo L - Carga crítica em função da posição da força normal	202
Fig.4.10.2	Perfis tipo I simétricos - momento crítico para força concentrada no meio do vão	205
Fig.5.2.1	Barra em meio elástico - Configuração pós-crítica	208
Fig.5.2.2	Variação com $\beta^*$ da curvatura do ramo pós-crítico	210
Fig.5.3.1	Barras com seção transversal tipo I - Modelos para análise	212
Fig.5.3.2	Perfis tipo I submetidos a momento fletor constante - $C_d=1$ e rotações $\varphi_2$ livres nas extremidades das abas - Forças normais críticas e diagramas N/u para $u_0/L=1/1000$	215/216
Fig.5.4.1	Barra com seção transversal tipo U enrijecido - Modelos para análise	223
Fig.5.4.2	Perfis tipo U enrijecido submetidos a momento fletor constante - Diagramas força normal/deslocamento no centro do vão	226/227

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	índices gregos variam de 1 a 2
$i, j, k, \dots$	índices latinos variam de 1 a 3
$(x, y, z)$	sistema de eixos de referência-cap. 2
$(x_1, x_2, x_3)$	sistema de eixos de referência-cap. 4
$f, w$	índices relativos às abas e à alma, respectivamente
$s, i$	índices relativos às abas superior e inferior, respectivamente
$(.)^r$	índice relativo à base local da barra indeformada
$(.)^G, (.)^C$	índices correspondentes a propriedades calculadas em relação ao centro de gravidade e ao centro de torção, respectivamente
$(.)_M$	índice relativo a um ponto M genérico
$(.)_L, (.)_N$	índices relativos a termos lineares e não lineares, respectivamente
$(.)_\psi, (.)_\omega$	índices relativos ao empenamento para seção qualquer e seção delgada (teoria de Vlasov), respectivamente
$(.)^{el}$	índice relativo a um elemento
$(.)^*$	grandeza auxiliar ligada ao termo $(.)$
$\bar{(\cdot)}$	módulo do termo $(\cdot)$
$\underline{(\cdot)}$	símbolo de vetor
$\underline{\underline{(\cdot)}}$	símbolo de tensor ou matriz
$\wedge$	símbolo de produto vetorial
$\otimes$	símbolo de produto tensorial
$(.)_\alpha$	$\partial(\cdot)/\partial x_\alpha$
$(.)'$	$\partial(\cdot)/\partial z$
$\cdot$	símbolo de produto escalar

A	área
$A_{ij}$	funções auxiliares
$\underline{A}$	tensor anti-simétrico cujo vetor axial é $\underline{a}$
$\underline{a}, \underline{a}^r$	vetor posição dos pontos da seção transversal relativo à base local da barra deformada e indeformada, respectivamente
$\underline{a}_f$	vetor auxiliar para cálculo dos deslocamentos das abas
$a_i, a_n$	coeficientes
$\underline{B}$	matriz de transformação para cálculo das deformações generalizadas
$B_{ij}$	funções auxiliares
b	largura
$C_1, C_2, C_3$	parâmetros para cálculo do coeficiente do meio elástico
$C_d$	coeficiente para cálculo da parcela de deslocamento devida à distorção
$C_r$	fator de correção da carga crítica
$\underline{C}$	matriz auxiliar para cálculo dos deslocamentos generalizados
$c_c, c_t$	distâncias do centro de gravidade às fibras extremas comprimida e tracionada, respectivamente
$c_e$	distância do centro instantâneo de rotação ao plano da alma
$D_w$	$Et_w^3/12(1-\nu^2)$
$\underline{D}$	matriz de rigidez constitutiva
$\underline{d}$	vetor deslocamento
E	módulo de elasticidade
$\underline{E}$	tensor das deformações
$\underline{E}_3$	tensor anti-simétrico cujo vetor axial é $\underline{e}_3$
e	distância do ponto de aplicação da força externa f ao centro de torção
$\underline{e}_i, \underline{e}_i^r$	versores da base local da barra deformada e

	indeformada, respectivamente
$\underline{F}$	gradiente da transformação
$\underline{F}_i$	tensor anti-simétrico associado ao vetor $\underline{f}_i$
$\underline{f}_i$	vetor das forças resultantes internas numa seção transversal
$\underline{f}_e$	vetor das forças aplicadas por unidade de comprimento de referência
$\underline{f}_e^*$	vetor das forças concentradas aplicadas às extremidades da barra
$f$	força por unidade de comprimento
$f_{xN}, f_{yN}$	forças fictícias por unidade de comprimento nas direções x e y, respectivamente
$f_{x\beta}, f_{y\beta}$	forças provenientes do meio elástico, por unidade de comprimento, nas direções x e y, respectivamente
$f_i(\zeta), f(y)$	funções auxiliares
$G$	módulo de deformação transversal
$\underline{G}$	operador que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos
$g_N(\zeta), g(y)$	funções auxiliares
$\underline{H}, \underline{H}_e$	operadores diferenciais matriciais
$H_{(.)}$	parâmetro de assimetria da seção transversal
$h, h_{ef}$	altura e altura efetiva, respectivamente
$I$	$t^3/12$
$I_{11}$ (ou $I_x$ ), $I_{22}$ (ou $I_y$ )	momentos de inércia em relação aos eixos $x_1$ (ou x) e $x_2$ (ou y), respectivamente
$I_{12}$ (ou $I_{xy}$ )	produto de inércia
$I_{\psi}$ (ou $I_{\omega}$ )	momento de inércia ao empenamento
$I_0$	momento polar de inércia
$I_{\omega x}, I_{\omega y}$	produtos de inércia setoriais em relação aos eixos x e y respectivamente
$I_t$	momento de inércia à torção
$\underline{I}$	matriz identidade

$K_1, K_2$	coeficientes
$\underline{K}$	tensor das rotações específicas
$\underline{K}_T, \underline{k}_T$	matrizes de rigidez tangente da estrutura e do elemento, respectivamente
$\underline{K}_c, \underline{k}_c$	matrizes de rigidez constitutiva da estrutura e do elemento, respectivamente
$\underline{K}_G, \underline{k}_G$	matrizes de rigidez geométrica da estrutura e do elemento, respectivamente
$\underline{K}_L, \underline{k}_L$	matrizes de rigidez do carregamento da estrutura e do elemento, respectivamente
$L, l$	comprimento da barra e do elemento, respectivamente
$L_{ef}$	comprimento efetivo
$\underline{L}$	gradiente dos deslocamentos
$\underline{L}^e$	operador que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos
$M_1$ (ou $M_x$ ), $M_2$ (ou $M_y$ )	momentos fletores em relação aos eixos $x_1$ (ou $x$ ) e $x_2$ (ou $y$ ), respectivamente
$M_3$ (ou $M_z$ )	momento de torção uniforme
$M_\psi$ (ou $M_\omega$ )	bimomento resultante interno
$M_{\psi e}^*$	bimomento aplicado às extremidades da barra
$\underline{M}_e, \underline{M}_i$	tensores anti-simétricos associados aos vetores $\underline{m}_e$ e $\underline{m}_i$ , respectivamente
$\underline{m}_i$	vetor dos momentos resultantes internos numa seção ransversal
$\underline{m}_e$	vetor dos momentos aplicados por unidade de comprimento de referência
$\underline{m}_e^*$	vetor dos momentos aplicados às extremidades da barra
$m_{\psi e}$	bimomento aplicado por unidade de comprimento de referência
$m_z$	momento de torção aplicado por unidade de

	comprimento
$m_{zN}$	momento de torção fictício por unidade de comprimento
$m_{z\beta}$	momento de torção proveniente do meio elástico por unidade de comprimento
$N$	força normal
$N_c$	força normal de compressão
$N_{cr}$	força normal crítica
$N_E$	$-\pi^2 EI/L^2$ , carga crítica de Euler
$N_{nE}$	$-\pi^2 EI/(L/n)^2$
$n$	número de semi-ondas
$\underline{n}$	versor normal ao contorno
$P_i, P_e$	potência dos esforços internos e externos, respectivamente
$\underline{P}$	primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
$\underline{P}_c, \underline{P}_v$	tensores anti-simétricos associados aos aos vetores $\underline{p}_c$ e $\underline{p}_v$ , respectivamente
$p$	intensidade do empenamento
$p^*$	valor prescrito de $p$ nas extremidades da barra
$p_x, p_y, p_z$	forças de superfície nas direções $x, y$ e $z$ , respectivamente
$\underline{p}_c, \underline{p}_v$	vetores das forças superficiais e volúmicas, respectivamente
$\underline{Q}$	tensor das rotações da seção transversal
$\underline{q}$	vetor dos esforços generalizados resultantes externos por unidade de comprimento
$\underline{q}^*$	vetor dos valores prescritos dos esforços generalizados resultantes externos nas extremidades da barra
$\underline{R}$	vetor dos esforços nodais
$r$	raio vetor de um ponto a partir do polo

$r_n, r_s$	componentes de $r$ nas direções normal e tangente à superfície média
$r_x, r_y$	raios de giração em relação aos eixos $x$ e $y$ , respectivamente
$r_o$	$(I_o/A)^{1/2}$
$r_{o(.)}$	parâmetro de assimetria da seção transversal
$S_1$ (ou $S_x$ ), $S_2$ (ou $S_y$ )	momentos estáticos da seção nas direções $x_1$ (ou $x$ ) e $x_2$ (ou $y$ ), respectivamente
$S_\alpha^*$	grandeza auxiliar referente aos momentos estáticos
$S_\omega$	momento estático setorial
$s$	coordenada ao longo do contorno
$\bar{s}$	eixo de referência tangente à superfície média
$T$	momento de torção total
$T_\omega$	momento de flexo-torção
$\underline{T}$	tensor das tensões de Cauchy
$t$	espessura
$\underline{t}_\alpha$	vetor componente do tensor das tensões no plano normal a $\underline{e}_\alpha$
$U$	energia potencial total
$\underline{u}$	vetor deslocamento do eixo $z$
$\underline{u}^*$	valor prescrito de $\underline{u}$ nas extremidades da barra
$u$	deslocamento do centro de torção na direção $x$
$V_1$ (ou $V_x$ ), $V_2$ (ou $V_y$ )	força cortante nas direções $x_1$ (ou $x$ ) e $x_2$ (ou $y$ ), respectivamente
$V_\psi$	bicortante
$v$	deslocamento do centro de torção na direção $y$
$\delta W_i, \delta W_e$	trabalho virtual dos esforços internos e externos, respectivamente
$w$	deslocamento na direção $z$

$w_0$	deslocamento do centro de gravidade, excluindo-se o empenamento, na direção z
$\underline{x}$	$x_\alpha \underline{e}_\alpha + x_3 \underline{e}_3$ , vetor posição de um ponto qualquer da barra
$x_{c\alpha}, x_{c3}$	coordenadas do centro de gravidade e do centro de torção, respectivamente
$\underline{z}'$	tensor anti-simétrico associado ao vetor $\underline{z}'$
$\underline{z}$	vetor posição do eixo da barra
$\alpha_s$	$\sigma_s / \sigma_i$
$\alpha_n$	$\frac{C_1 (L/n)^2}{\pi^2 N_{NE}}$
$\beta_x, \beta_y, \beta_\varphi$	coeficientes do meio elástico para deslocamentos nas direções x e y e para rotações em torno de z, respectivamente
$\beta_{eq}$	coeficiente equivalente do meio elástico
$\underline{\Gamma}$	tensor das transformações das rotações
$\underline{\gamma}$	vetor das deformações generalizadas
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	deformações tangenciais
$\underline{\Delta}$	vetor dos deslocamentos generalizados
$\underline{\Delta}^*$	valor prescrito de $\underline{\Delta}$ nas extremidades da barra
$\Delta$	deslocamento
$\underline{\varepsilon}$	vetor das deformações generalizadas
$\varepsilon$	deformação axial
$\zeta$	$z/l$
$\underline{\eta}$	vetor das deformações generalizadas conjugado com $\underline{f}_i$
$\eta$	$y/l$
$\theta$	ângulo
$\underline{\kappa}$	vetor das rotações específicas conjugado com $\underline{m}_i$
$\lambda$	parâmetro de esbeltez



$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	$N_C/N_E$
$\rho_{cr}$	$N_{cr}/N_E$
$\rho_{cr}^*$	valor reduzido de $\rho_{cr}$
$\underline{g}$	vetor dos esforços resultantes internos
$\sigma$	tensão normal
$\underline{\tau}$	vetor das tensões
$\tau$	tensão de cisalhamento
$\tau_n, \tau_t$	tensões de cisalhamento nas direções normal e tangente à superfície média
$\varphi$	vetor rotação da seção transversal
$\underline{\varphi}$	tensor anti-simétrico associado a $\varphi$
$\varphi$	módulo de $\varphi$
$\varphi_s, \varphi_i$	rotações em torno de z das abas superior e inferior
$\varphi^*$	valor prescrito das rotações nas extremidades da barra
$\underline{\Psi}$	matriz de interpolação
$\psi$	função empenamento
$\underline{\Omega}$	tensor das velocidades angulares
$\underline{\omega}$	vetor axial associado a $\underline{\Omega}$
$\omega$	área setorial

#### PONTOS NOTÁVEIS

A	polo
B	origem das áreas setoriais
C	centro de torção
G	centro de gravidade
M	ponto qualquer da seção transversal
O	origem dos eixos

## RESUMO

O uso do aço estrutural sob a forma de perfis de chapa dobrada ou soldada tem sido muito intenso nos últimos anos. Em vista das características geométricas das barras utilizadas e dos requisitos arquitetônicos cada vez mais arrojados, a instabilidade dos perfis é, frequentemente, um fator condicionante de projeto. Um caso particular de instabilidade é caracterizado pela ocorrência simultânea de deslocamentos laterais e distorção da seção transversal em seu próprio plano.

Os métodos existentes para a análise do problema têm-se limitado ao cálculo de valores aproximados de cargas críticas, apesar de serem poucas as informações disponíveis a respeito do comportamento pós-crítico. [Este trabalho apresenta um procedimento para análise da trajetória de equilíbrio do sistema baseado numa teoria não-linear geometricamente exata de barras prismáticas retas de seção transversal indeformável. Os resultados numéricos obtidos são comparados às cargas críticas deduzidas através de alguns métodos aproximados.

Uma análise comparativa entre a teoria de Vlasov e a teoria não-linear geometricamente exata formulada por Pimenta, Yojo revelou discrepâncias que conduziram o autor a propor a alteração da hipótese constitutiva desta última. Para a análise da instabilidade por distorção, os resultados decorrentes desta modificação foram incorporados ao programa de elementos finitos de Pimenta, Yojo.

A expressão linearizada da segunda variação da energia potencial obtida após esta modificação é comparada à expressão obtida a partir da teoria de Vlasov. São apontadas as diferenças entre os termos geométricos e os termos constitutivos não-lineares de ambas.

## ABSTRACT

Steel welded and cold-formed members have been extensively used in recent years for structures. In view of the usual section configurations and due to challenging architectural requirements, member instability is often a limiting design condition. One particular mode of buckling is characterized by simultaneous lateral deflection and distortion of the cross-section in its own plane.

Existing methods are steadfast restricted to estimate critical loads, despite the little information available about post-buckling behaviour. This work presents a procedure to study the equilibrium path of the structure, using a geometrically non-linear theory of straight rods with indeformable cross section. Numerical examples are presented and compared with critical loads obtained from some existing methods.

A comparison between Vlasov's theory and Pimenta and Yojo's geometrically non-linear theory showed discrepancies that guided the writer to propose a change in the constitutive relations of the last one. For distortional instability analysis purposes, this change was incorporated to Pimenta, Yojo finite element program.

Linearization of the second variation of the total potential energy obtained after this change is compared to that obtained from Vlasov's theory. The differences between both geometric and constitutive non-linear terms in the above mentioned theories are emphasized.

# **1 INTRODUÇÃO**

## 1.1 OBJETIVO

Este trabalho é parte de um projeto de pesquisa mais amplo, em que se pretende dar uma contribuição para o incremento do uso de estruturas de aço no Brasil, em particular aquelas constituídas por perfis conformados a frio a partir de chapas de pequena espessura, comumente designados perfis de chapa dobrada.

Mostra-se nesta pesquisa a viabilidade de aplicação de perfis de chapa dobrada, tanto do ponto de vista técnico quanto do econômico, a edifícios de pequena altura, de uso residencial popular. Apresenta-se ainda um projeto modelo de um edifício de arranjo arquitetônico convencional, para o qual se discute o comportamento estrutural dos diversos elementos.

Um aspecto importante para a análise da estrutura proposta para este edifício diz respeito à instabilidade das vigas por distorção da seção transversal em seu próprio plano, sendo este o fato que motivou a escolha do tema desta tese.

Constituem o escopo deste trabalho:

- Uma análise crítica de uma teoria não-linear geometricamente exata de barras prismáticas retas e de seção indeformável e, à luz desta, das teorias aproximadas comumente utilizadas para o estudo da estabilidade de barras.

- A aplicação destas teorias ao estudo da instabilidade por distorção, em regime elástico, de barras de seção transversal aberta e parede delgada.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O conteúdo deste trabalho está dividido em seis capítulos que abordam, em linhas gerais, os seguintes temas:

O primeiro capítulo apresenta inicialmente o panorama do emprego de estruturas metálicas no Brasil, em particular em edifícios residenciais e comerciais, e uma breve discussão das vantagens e desvantagens da utilização de perfis laminados, soldados e de chapas dobradas nestas construções. São abordados alguns conceitos básicos ligados à instabilidade de barras de seção aberta e, a partir destes, define-se em linhas gerais o escopo do trabalho. O projeto modelo e a aplicação do tema desta tese ao mesmo são também abordados neste capítulo.

O capítulo 2 apresenta os fundamentos da teoria da torção uniforme de Saint-Venant e da teoria da torção não uniforme de Vlasov, com destaque para as hipóteses básicas e para a dedução das equações de equilíbrio e da expressão da energia potencial total. Embora amplamente tratadas na literatura técnica, estas teorias são aqui expostas em pormenor visando tanto uma utilização futura para fins didáticos quanto uma primeira discussão das imprecisões das teorias aproximadas e uma comparação com a teoria exata. As expressões aqui deduzidas são utilizadas nos modelos de cálculo de carga crítica apresentados no capítulo 3.

Uma revisão bibliográfica dos modelos atualmente empregados para a análise da instabilidade por distorção de perfis de seção aberta é apresentada no capítulo 3. Esta revisão é precedida de uma discussão do método energético de solução do problema, em particular no que diz respeito às aproximações adotadas para o cálculo da carga crítica.

No capítulo 4, são descritos os conceitos básicos de uma

teoria não-linear geometricamente exata para barras no espaço formulada por Pimenta, Yojo (1993). Uma análise crítica da mesma, com base numa comparação com a teoria apresentada no capítulo 2, permite estabelecer as limitações das teorias aproximadas. Permite também identificar uma inadequação ao estudo da estabilidade da hipótese constitutiva da teoria não-linear acima citada e propor sua alteração.

No capítulo 5, desenvolve-se o estudo da instabilidade por distorção de perfis de seção aberta e de parede delgada através do Método dos Elementos Finitos, com a discretização dos mesmos em elementos de barra constituindo um pórtico espacial. O programa utilizado baseia-se na teoria descrita no capítulo anterior, tendo sido adaptado por Pimenta de modo a incorporar as modificações indicadas nesta tese. Constitui o objetivo básico deste capítulo a determinação da trajetória de equilíbrio da barra, em especial no que diz respeito ao valor da carga crítica, à estabilidade da configuração pós-crítica e ao efeito das imperfeições geométricas iniciais. As cargas críticas para perfis com seção tipo I e tipo U enrijecido resultantes desta análise são comparadas às obtidas através de alguns modelos existentes descritos no capítulo 3.

### 1.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O emprego de estruturas de aço no Brasil, embora ainda pouco intenso, vem sendo incrementado continuamente, em particular nos edifícios comerciais e nos de uso industrial, nas estruturas de apoio de equipamentos e nas residências de arquitetura mais arrojada. No entanto, nas edificações residenciais ou comerciais de pequena altura, com até quatro pavimentos, os sistemas construtivos têm sido basicamente artesanais, envolvendo o uso de concreto moldado "in loco"

ou alvenaria estrutural. Este procedimento se contrapõe ao das nações mais desenvolvidas, onde a industrialização tem sido buscada incessantemente para todos os tipos de construção, tanto na estrutura quanto nos materiais de acabamento, pisos, vedações verticais e instalações.

Os processos construtivos que envolvem o uso de estruturas metálicas deverão ter larga utilização no Brasil num futuro próximo, pois trazem diversas vantagens, tais como:

- Maior precisão de fabricação e montagem, o que resulta em bom padrão construtivo.
- Qualidade uniforme, aliada à alta resistência mecânica.
- Facilidade, rapidez e economia na fabricação, no manuseio e na montagem, com a conseqüente redução nos custos financeiros e nas despesas gerais de canteiro e de administração.
- Economia nas fundações, pela redução do peso próprio da estrutura.
- Peças de pequenas dimensões, que podem ser montadas sem o auxílio de equipamentos de grande porte e que, ainda, ocupam pouco espaço no arranjo interno do edifício.
- Não exigem mão de obra especializada para a montagem, desde que as ligações de obra sejam através de parafusos.
- Permitem reaproveitamento dos materiais utilizados na estrutura.

Nos edifícios de grande porte, a estrutura principal é constituída principalmente de perfis laminados e perfis fabricados a partir de chapas soldadas entre si, em geral com seção transversal em forma de I. Os perfis leves, ou



perfis conformados por dobramento a frio de chapas delgadas, são utilizados apenas como elementos secundários, tais como terças de cobertura, longarinas de fechamento, quadros para caixilhos e para apoio de forros.

Os perfis laminados atualmente disponíveis, com seção transversal em forma de I ou C tipo "standard americano", já estão obsoletos, pois possuem pequena relação resistência/massa, sendo portanto anti-econômicos. Além disso, a oferta destes perfis pelas usinas siderúrgicas tem sido bastante irregular, sendo disponíveis com maior frequência apenas os perfis de 152mm, 203mm, 254mm e 305mm, o que dificulta a adequação dos mesmos às necessidades de projeto.

Os perfis soldados, por sua vez, podem ser fabricados com as dimensões que forem necessárias para as condições de projeto, variando-se as dimensões das chapas componentes (largura e espessura). No entanto, a soldagem de chapas de pequena espessura não é economicamente vantajosa, tanto por exigir cuidados especiais para minimização das tensões residuais e das distorções do perfil quanto pelo próprio custo de corte das chapas, soldagem e desempenamento. Estes perfis são então utilizados, de forma vantajosa, apenas para estruturas de grande porte.

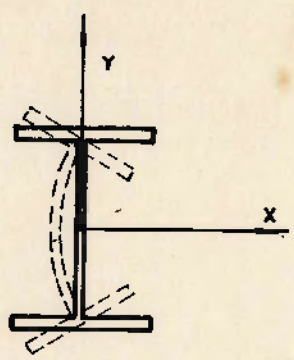
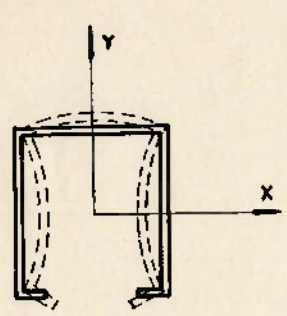
Nos edifícios de pequena altura, que possuem em geral pequenos vãos e cargas de pequena intensidade, os perfis de chapa dobrada são certamente mais adequados que os perfis laminados ou soldados para compor a estrutura principal. Pode-se fabricar, com o emprego de equipamentos simples tais como dobradeiras e perfiladeiras, uma grande variedade de perfis, adequando-se a forma da seção transversal e as características geométricas da mesma às necessidades de projeto. Estas seções podem ainda ser combinadas entre si, geralmente por soldagem, de modo a serem obtidas soluções eficientes e econômicas para os mais diversos usos.

O emprego de perfis de chapa dobrada exige, por parte do engenheiro, um estudo mais acurado do comportamento dos elementos estruturais que o empregado normalmente nos perfis laminados e soldados. A inexistência de uma norma nacional atualizada, a pouca divulgação das atividades de pesquisa nesta área e a não abordagem do assunto nos cursos de graduação dificultam ainda mais este estudo, e portanto contribuem para a pequena utilização destes perfis, mesmo nas estruturas em que são bastante vantajosos. Este trabalho, embora aplicável a qualquer tipo de perfil de seção aberta, teve como motivação os perfis conformados a frio.

#### 1.4 COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DOS PERFIS DE SEÇÃO ABERTA

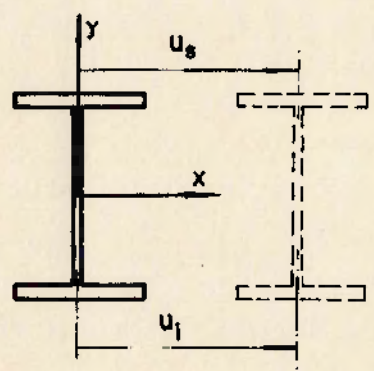
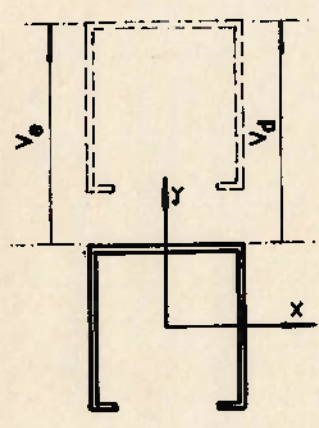
Os perfis conformados a frio a partir de chapas delgadas ou simplesmente perfis de chapa dobrada possuem, em vista da pequena espessura das chapas utilizadas, uma série de características que os diferenciam dos perfis laminados e soldados. O estudo do comportamento estrutural, em particular, é bastante complexo, visto que a instabilidade dos mesmos frequentemente ocorre para carregamentos bastante inferiores aos que correspondem à plastificação total da seção transversal.

A instabilidade das barras é usualmente classificada como sendo do tipo local ou global, embora ambas possam ocorrer também simultaneamente. O tipo de instabilidade é função principalmente das características geométricas dos perfis, em particular a relação largura-espessura das partes componentes, das condições de vínculo e do carregamento. Alguns exemplos estão indicados na fig. 1.4.1, tomando-se como referência um perfil com seção transversal tipo U enrijecido e um perfil de seção transversal tipo I.



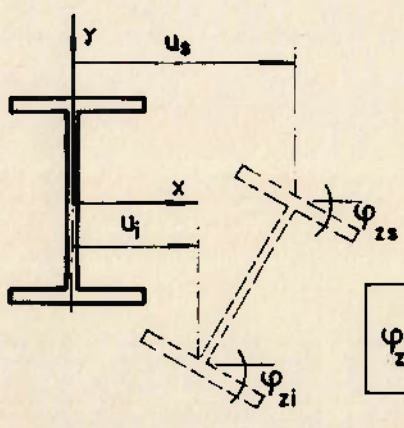
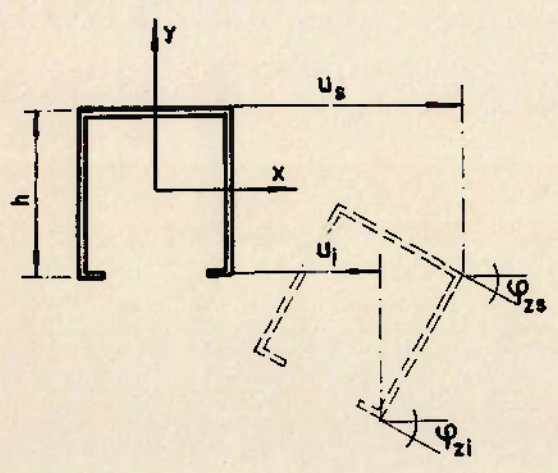
$$u_s = u_i = 0$$

(a)



$$\varphi_{zi} = \varphi_{zs} = 0$$

(b)



$$\varphi_{zs} = \varphi_{zi} = -\frac{u_s - u_i}{h}$$

(c)

FIG. 1.4.1 Instabilidade de perfis

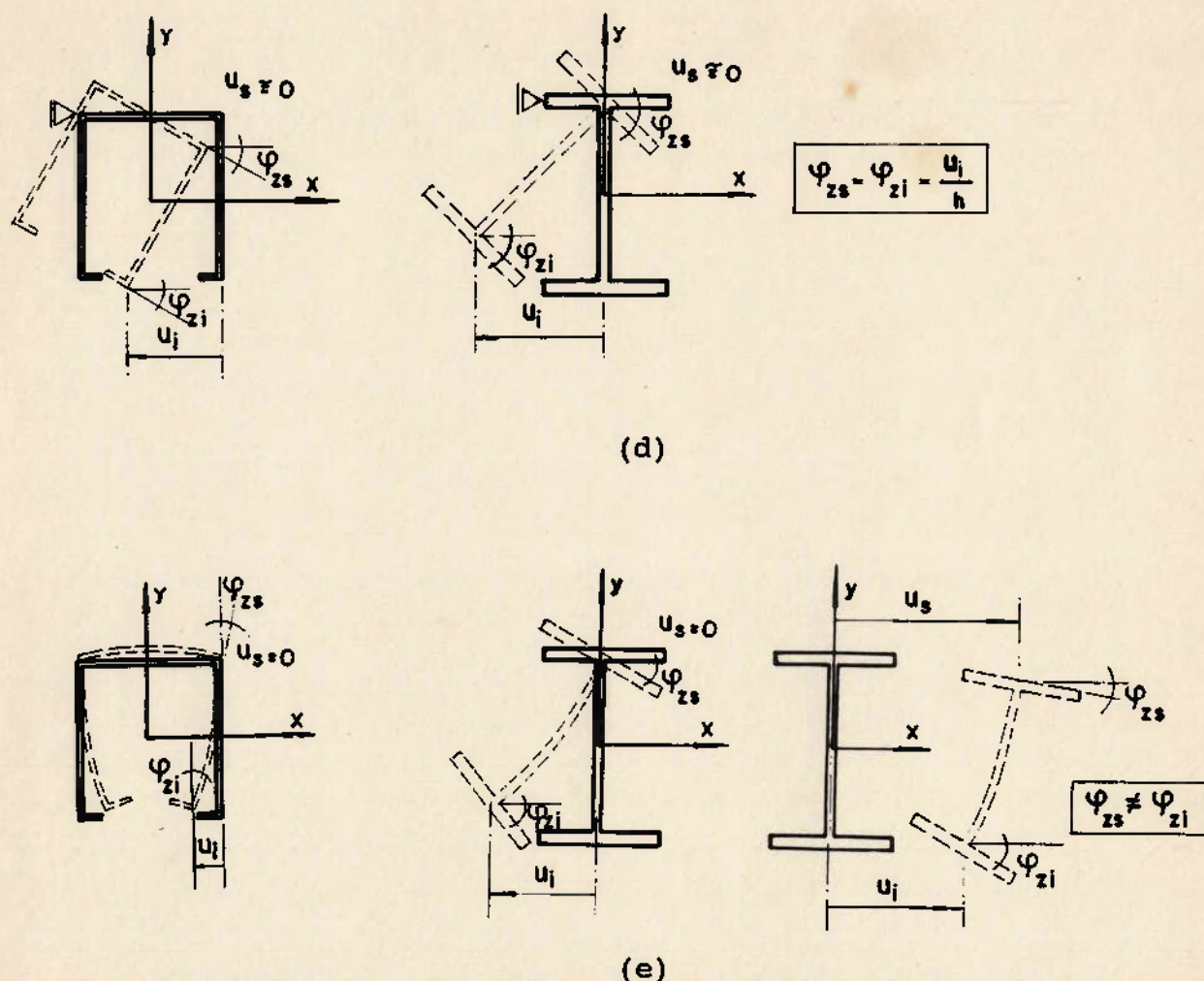


FIG. 1.4.1 Instabilidade de perfis (cont.)

Na instabilidade local, ilustrada na fig. 1.4.1.a, ocorre distorção da seção transversal em seu próprio plano devida à flambagem dos elementos de chapa componentes do perfil, sem deslocamentos transversais das fibras nos encontros abaxial.

O fenômeno da instabilidade local dos elementos da seção tem grande importância no estudo dos perfis de chapa dobrada. A aplicação da teoria clássica da flambagem de chapas permite prever o carregamento para o qual uma chapa, constituída de material elástico linear, isenta de imperfeições iniciais e submetida a forças aplicadas no contorno, sofre deslocamentos na direção normal a seu plano. A partir das

relações entre este carregamento, denominado crítico, e as características geométricas dos perfis, é possível estabelecer valores limites para a relação largura-espessura das chapas, para vários tipos de solicitações e condições de vínculo, para os quais o escoamento da fibra mais solicitada ocorre para carregamentos inferiores ao crítico, ou seja, a chapa atinge o escoamento sem a ocorrência de flambagem de seus elementos.

É importante frisar que a ocorrência de flambagem local não leva, em geral, ao esgotamento da capacidade portante da peça. Quando a carga crítica de uma chapa é excedida, surgem gradualmente deslocamentos normais ao seu plano médio, acompanhados de uma redistribuição dos esforços atuantes no mesmo, redistribuição esta que produz um efeito estabilizante na chapa. A capacidade portante pode exceder bastante o carregamento crítico, não possuindo em geral correlação com o mesmo.

A análise do comportamento pós-crítico de chapas retangulares tem sido feita tanto através de estudos teóricos do fenômeno, partindo das equações da teoria das placas com grandes deslocamentos, fazendo uso em geral do método dos elementos finitos, quanto através de modelos semi-empíricos. Para as chapas com relação largura-espessura superior aos valores limites citados, é usual apresentar expressões de largura efetiva da chapa em função da intensidade do carregamento (Fruchtengarten, 1979). Esta largura efetiva é inferior à largura real da chapa, o que leva a uma redução da relação resistência/massa do perfil, especialmente importante nos perfis de chapa dobrada que utilizam aço de alta resistência mecânica, dada a elevada relação largura-espessura e o maior nível de tensões nos mesmos. As diversas normas de estruturas metálicas apresentam estas expressões, que têm sido ajustados ao longo dos anos de modo a considerar o comportamento não elástico do material, as imperfeições iniciais, etc.

O estudo da instabilidade local não faz parte do escopo deste trabalho. Assim, no projeto modelo aqui apresentado, são utilizadas diretamente as expressões de norma para larguras efetivas.

A instabilidade global de uma barra pode ocorrer por flexão, sem rotação da seção transversal (fig. 1.4.1.b), ou por uma combinação de flexão, torção e empenamento, que envolve deslocamentos laterais, rotação e distorção da barra (fig. 1.4.1.c) ou simplesmente rotação em torno de um determinado eixo (fig. 1.4.1.d), se neste eixo houver restrição aos deslocamentos laterais.

A instabilidade por flexão ocorre geralmente nas barras comprimidas com seção transversal duplamente simétrica ou nas com seção mono-simétrica em que o momento de inércia em torno do eixo de simetria é superior ao do eixo normal a ele. Para as demais barras comprimidas e para as barras submetidas à flexão ou à flexo-compressão, geralmente ocorre instabilidade por flexo-torção, também denominada, para o caso particular de vigas, flambagem lateral.

A flambagem lateral de vigas tem sido muito pesquisada atualmente, em especial no que se refere à influência do tipo de vinculação, da forma do diagrama de momentos fletores, da posição do carregamento e da forma de seção transversal. Nas vigas com seção transversal tipo I, as normas apresentam expressões aproximadas e coeficientes de correção para os fatores citados acima (Silva, 1992). Nos perfis conformados a frio, em que geralmente a seção transversal é assimétrica e o centro de gravidade não coincide com o centro de torção, o problema é bastante complexo e ainda não existe um tratamento simplificado adequado.

Ao contrário do que ocorre na flambagem local, a reserva de resistência pós-crítica geralmente é baixa ou, quando é

elevada, corresponde a deslocamentos incompatíveis com a utilização normal da estrutura, não sendo por isso considerada em projeto.

Para as barras constituídas por chapas de elevada relação largura-espessura, a instabilidade pode ocorrer de um modo que combine deslocamentos laterais, rotações, empenamento e a flambagem local dos elementos de chapa. A interação entre flambagem local e flambagem lateral tem sido tratada em projeto, de maneira geral, como um problema de instabilidade por flexo-torção de uma barra cuja seção transversal é modificada pelo método da largura efetiva.

Um caso especial de instabilidade em que ocorre distorção da seção transversal em seu próprio plano está indicado na fig. 1.4.1.e, envolvendo deslocamentos laterais e rotações de partes do perfil (nos exemplos indicados, as abas inferiores do perfil com seção em U enrijecido e as abas do perfil com seção em I), acompanhados por flexão dos demais elementos componentes na direção normal ao plano dos mesmos. Este tipo de instabilidade pode ocorrer nas barras em que as partes comprimidas da seção não têm contenção lateral, mesmo que as demais tenham, e em que as almas possuem grande relação altura-espessura. São exemplos típicos do problema :

- as vigas de piso contínuas com seção transversal tipo U enrijecido ou tipo I, que embora contidas lateralmente por pisos de concreto ao nível da aba superior, possuem abas inferiores não contidas lateralmente e submetidas à compressão nas regiões próximas aos apoios (fig. 1.4.2.a),
- as terças de cobertura ligadas a telhas de grande rigidez em seu próprio plano, quando submetidas a forças de sucção devidas ao vento (fig. 1.4.2.b),
- as placas enrijecidas submetidas à flexão (fig. 1.4.2.c).

O comportamento das barras em que este fenômeno ocorre ainda é pouco pesquisado, em particular quando se trata de seções que, ao contrário dos perfis tipo I, não possuem um eixo de simetria passando pela alma. Uma contribuição ao estudo deste comportamento constitui um dos objetivos básicos deste trabalho.

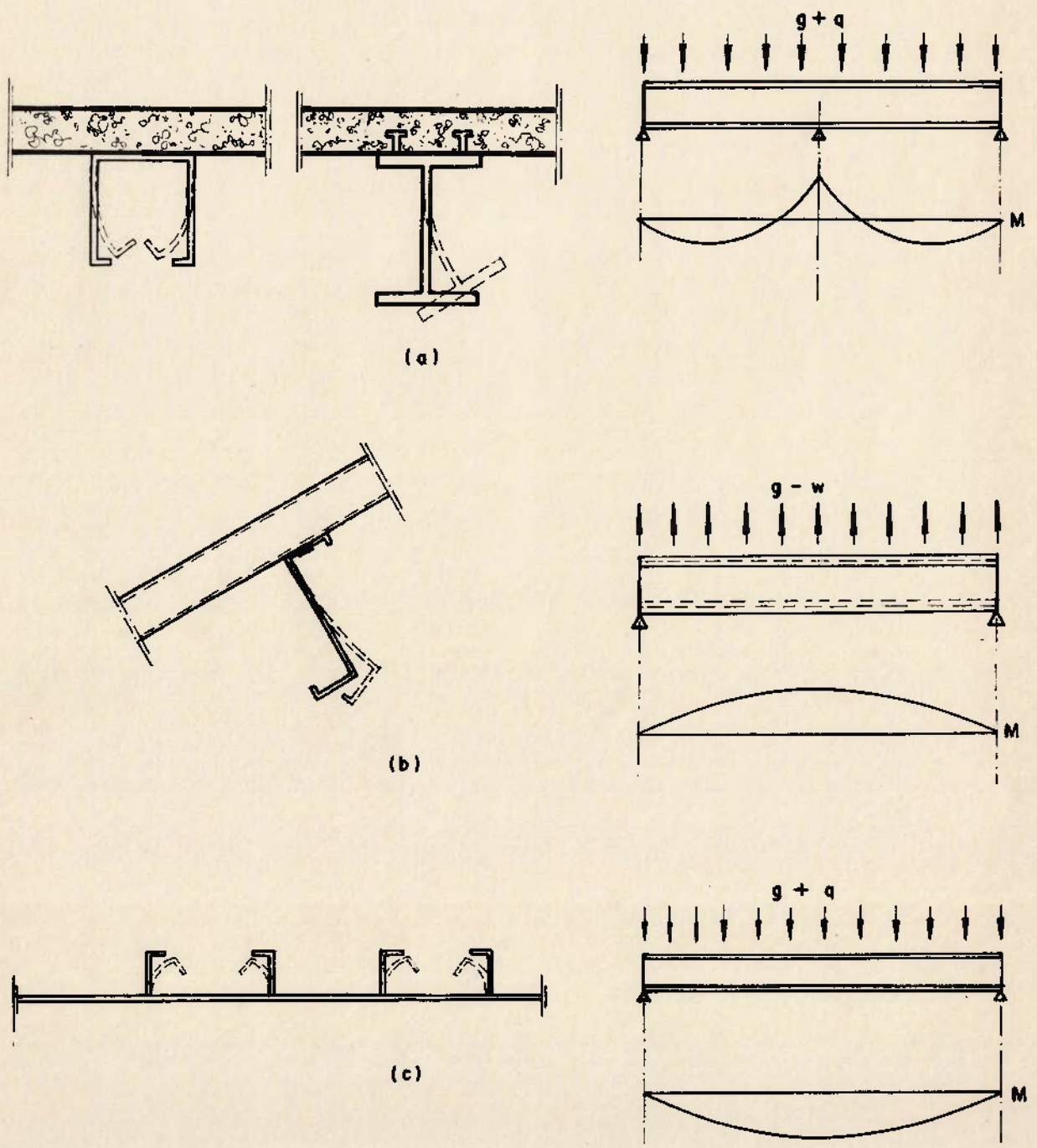


FIG. 1.4.2 Instabilidade por distorção



## 1.5 PROJETO MODELO

A fig. 1.5.1 mostra um estudo arquitetônico de uma edificação de uso residencial popular, de pequena altura, bastante comum no Brasil. Propõe-se para esta edificação o emprego de uma estrutura metálica autoportante de arranjo estrutural convencional, em que o uso de perfis conformados a frio de seção transversal adequada para as vigas e pilares, a concepção simples das ligações e a utilização de aço de alta resistência mecânica tornam a estrutura economicamente vantajosa em relação às que utilizam perfis laminados e soldados e competitiva com as soluções tradicionais.

### 1.5.1 Pisos e vedações verticais

Os pisos dos andares tipo e a cobertura são propostos em lajes de concreto, podendo ser utilizados painéis pré-moldados, nervuras pré-moldadas com enchimento em lajotas cerâmicas e capa de concreto ou ainda lajes mistas aço-concreto com forma metálica trapezoidal e laje de concreto moldada "in loco". As lajes são ligadas ao vigeamento de modo a servir de diafragma para o edifício, impedir deslocamentos da aba superior das vigas no plano horizontal e, eventualmente, impedir rotações da mesma em torno do eixo longitudinal. Esta ligação pode ser feita por barras soldadas às vigas e imersas na laje de concreto ou, nas lajes mistas, por solda intermitente da forma metálica às vigas. A solução em laje mista apresenta, como desvantagem, a necessidade de execução de forro falso sob a laje, em vista do aspecto pouco estético da forma metálica trapezoidal, embora conduza à ligação laje-viga mais eficiente.

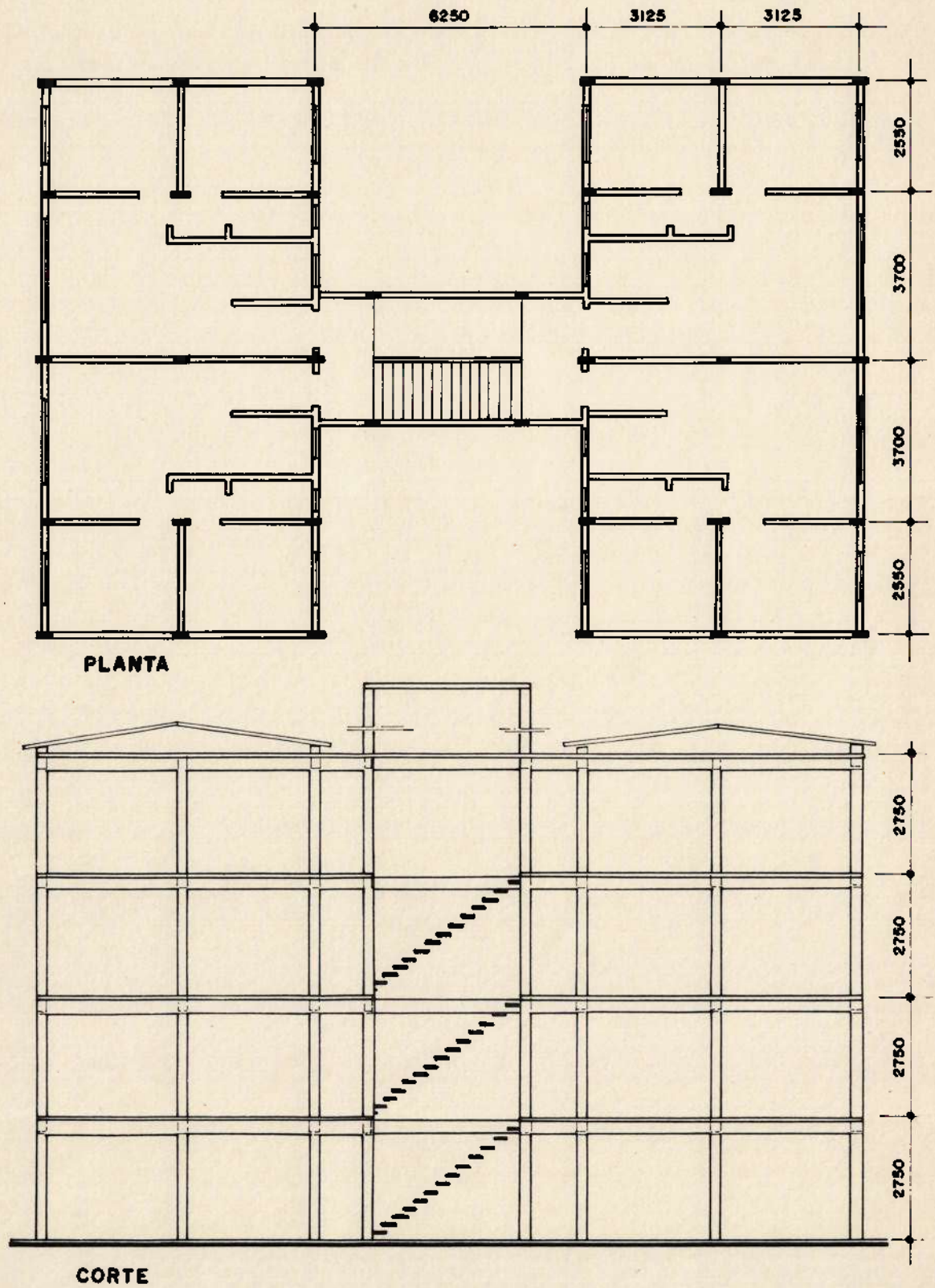


FIG. 1.5.1 Projeto modelo - Arquitetura

As vedações verticais são em blocos ou painéis de concreto celular autoclavado para as divisórias internas e em blocos convencionais de concreto para as paredes externas, não sendo consideradas como elementos estruturais para contenção horizontal dos pórticos metálicos.

### 1.5.2 Estrutura metálica

A estrutura metálica proposta para este projeto está indicada na fig. 1.5.2. O esquema estrutural pode ser entendido como formado por dois conjuntos de pórticos verticais, ortogonais entre si, interligados ao nível dos pisos pelas lajes de concreto. As escadas e a caixa d'água se apoiam sobre uma estrutura independente, não sendo por isso a mesma considerada como contenção horizontal da estrutura principal do edifício. A ausência de travamentos verticais em forma de treliça, tão comuns nas estruturas de aço, tem por objetivo permitir maior liberdade de arranjo arquitetônico nas fachadas e evitar interferências das paredes com este travamento. Esta solução conduz, em contrapartida, a estruturas com maior peso próprio.

A durabilidade da estrutura é um fator que, até recentemente, vinha limitando a utilização de estruturas de aço e, em particular, as constituídas por perfis de chapas finas, onde eventuais perdas de espessura devidas à corrosão podem ser bastante danosas. Este problema é facilmente contornável, quer através do uso de pinturas especiais ou de galvanização, quer com o emprego de aços de alta resistência à corrosão atmosférica, já disponíveis no Brasil. Esta última solução é proposta neste caso, prevendo-se o uso de aços que aliam à elevada resistência à corrosão uma alta resistência mecânica. É uma alternativa altamente vantajosa nas estruturas constituídas por perfis de chapa dobrada, já que o ganho em resistência é muito mais significativo do que

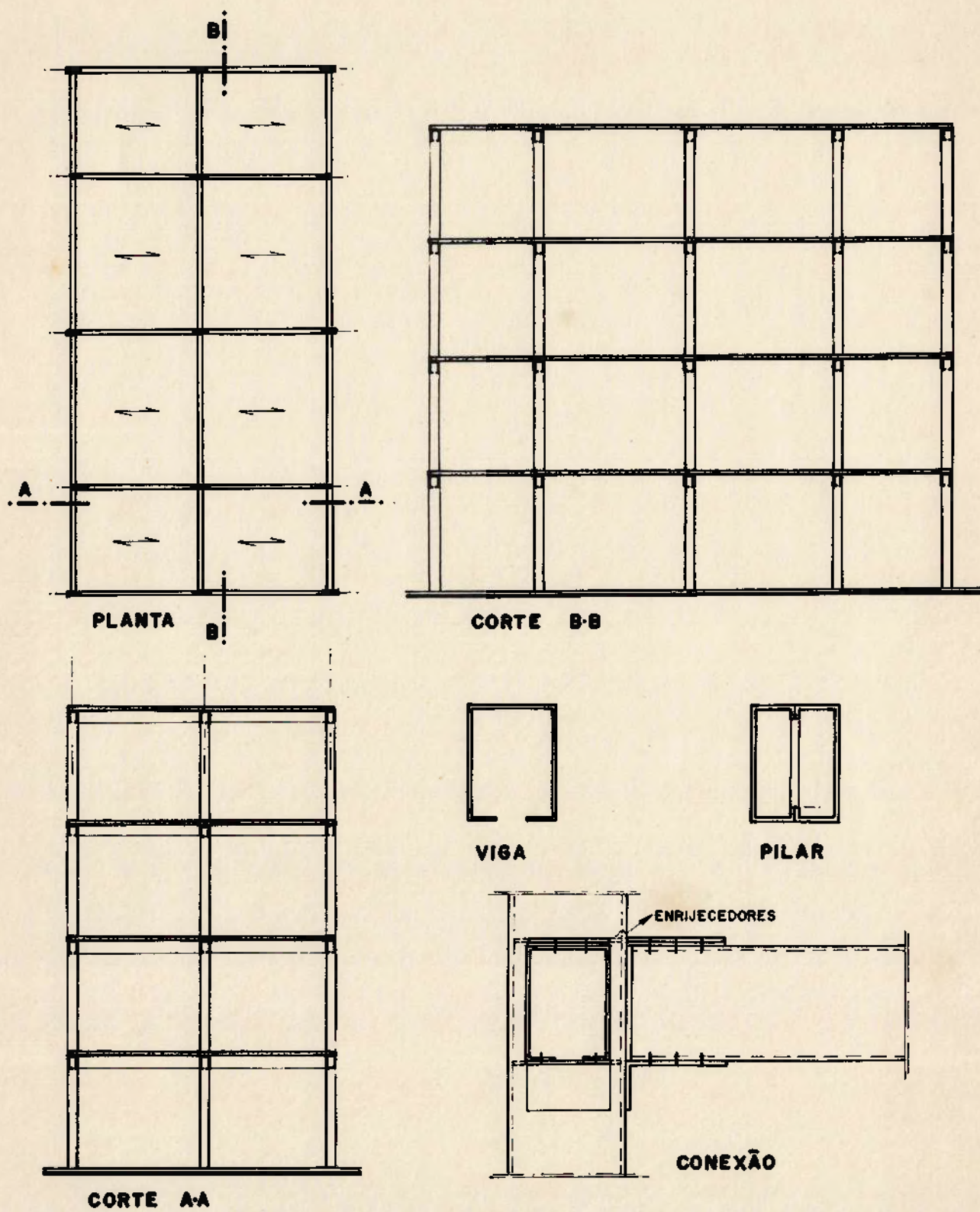


FIG. 1.5.2 Projeto modelo - Estrutura

o acréscimo de preço do aço. Nos perfis soldados de pequenas dimensões, esta solução não é adequada, devido ao custo adicional de soldagem com eletrodos especiais. Quanto aos perfis laminados, simplesmente não são fabricados no Brasil com aços de alta resistência.

As vigas de piso são propostas em perfis tipo U enrijecido. Esta forma da seção transversal garante boa estabilidade lateral durante a fase de montagem, na qual as lajes e as vigas ainda não estão solidarizadas. A largura a ser adotada, igual ou superior a 100mm, é suficiente para servir de apoio aos elementos de piso, o que não acontece com os perfis laminados disponíveis de mesma resistência, dada a pequena largura de aba dos mesmos. Além disso, durante a montagem, as duas placas de piso contíguas em uma mesma viga transmitem, cada qual, a carga vertical para uma das almas do perfil U invertido, minimizando as distorções decorrentes do apoio sobre as abas.

As vantagens acima apontadas podem ser obtidas também com a utilização de perfis tubulares de seção retangular. No entanto, a adoção de seções abertas permite a execução de conexões parafusadas, o que em geral não ocorre com as seções fechadas.

Perfis com seções semelhantes a esta são largamente utilizados como vigas de apoio de forro, bi-apoiadas, nas quais as abas inferiores estão sempre submetidas a tração. No entanto, neste projeto, estas vigas fazem parte dos pórticos verticais, e portanto as abas inferiores estão submetidas à compressão junto aos apoios em razão dos momentos negativos de extremidade das vigas. Pode ocorrer, então, o fenômeno de instabilidade por distorção da seção transversal em seu próprio plano, já discutido no item 1.4.

Propõe-se que os pilares sejam constituídos por soldagem de dois perfis tipo U enrijecido, de modo a formar uma seção

fechada. A solda de ligação entre os perfis pode ser intermitente, com espaçamento suficiente para que os dois perfis trabalhem solidários, o que resulta em grande economia de fabricação.

A vantagem de se constituírem os perfis desta forma é que as nervuras necessárias para resistir aos esforços localizados nas regiões de conexão das vigas podem ser soldadas aos pilares antes da composição dos perfis, o que não ocorre nos perfis tubulares convencionais. Além disso, os enrijecedores de borda dos perfis U são também enrijecedores longitudinais das chapas de alma dos pilares, evitando assim a flambagem local das mesmas.

As ligações entre as vigas e os pilares são previstas através de chapas soldadas aos pilares na fábrica e furadas de modo a permitir ligação parafusada na obra. Este procedimento permite bom controle de qualidade da solda na fábrica, assim como facilidade e rapidez de execução da obra, com pequeno controle de qualidade das conexões em canteiro. As ligações em perfis de chapas finas exigem cuidados especiais, em particular no que se refere à concentração de tensões na região da solda, ao efeito da flexibilidade das mesas do pilar na distribuição das tensões e ao comportamento dos enrijecedores dos pilares. Estes últimos itens são fundamentais para a definição da relação momento-rotação da conexão.

### 1.5.3 Problemas em aberto

O presente trabalho trata apenas da instabilidade por distorção, em regime elástico, das vigas da estrutura do projeto modelo. Permanecem ainda em aberto vários aspectos extremamente importantes para o projeto aqui proposto, que deverão ser objeto de trabalhos futuros. Destacam-se os

seguintes:

- Análise dos pilares, em especial no que se refere à definição das tensões residuais decorrentes da composição da seção e de seu efeito na instabilidade dos mesmos.
- Comportamento das ligações viga-pilar.
- Instabilidade por distorção em regime não elástico.
- Análise conjunta de instabilidade local e por distorção.

**2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS  
BARRAS DE SEÇÃO DELGADA**

**A TEORIA DE VLASOV**



## 2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo trata do comportamento de barras prismáticas retas, com seção transversal aberta e de parede delgada, constituídas de material homogêneo em regime elástico linear e submetidas, ao longo do comprimento, a forças conservativas que não se alteram com os deslocamentos. Admite-se que a forma da seção transversal não se altera, ou seja, não são consideradas distorções da seção em seu próprio plano ( $\tau_{xy} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ ).

A principal característica de uma barra de seção delgada é que uma das dimensões da seção transversal, a espessura  $t$ , é muito menor que a largura, a altura ou o comprimento  $s$  do contorno. Estas dimensões, por sua vez, também são muito menores do que o comprimento  $L$  da barra, de modo que ainda seja possível utilizar modelos de barra para a análise.

Apresentam-se inicialmente, para uma barra prismática reta qualquer, as hipóteses básicas da teoria da torção uniforme de Saint-Venant, assim como a simplificação adotada para barras de seção transversal aberta e de parede delgada. Descrevem-se a seguir, de forma mais ampla, os princípios básicos da teoria de Vlasov (1961), aplicada às barras de seção transversal aberta e de parede delgada. Adota-se para este capítulo a notação técnica, de modo a facilitar o entendimento e a aplicação ao capítulo 3.

Dadas as características geométricas peculiares da seção transversal, certas propriedades, não consideradas usualmente em barras de parede espessa, passam a ter importância nas barras de parede delgada submetidas a um sistema qualquer de esforços ou deslocamentos impostos. Estas propriedades, descritas à luz da teoria de Vlasov, são comparadas, no capítulo 4, às deduzidas através da teoria geometricamente exata de Pimenta, Yojo (1993).

Apresentam-se também as equações de equilíbrio deduzidas por Vlasov e a expressão da energia potencial total delas decorrente, levando-se em conta o efeito de segunda ordem. Estas expressões são comumente utilizadas para uma análise linearizada de estabilidade (análise de Euler), embora contenham imprecisões cuja natureza é discutida no capítulo 4.

## 2.2 A TEORIA DA TORÇÃO UNIFORME

Seja uma barra prismática reta, isenta de qualquer impedimento ao livre empenamento na direção longitudinal e submetida a dois momentos de torção de sentidos opostos aplicados às extremidades. As hipóteses formuladas por Saint-Venant para a solução do problema são as seguintes:

-A rotação  $\varphi_z$  da barra em torno do eixo longitudinal varia linearmente ao longo do comprimento da barra, ou seja,  $\varphi'_z$  é constante.

-O empenamento é semelhante em todas as seções transversais e sua intensidade é proporcional ao ângulo de torção por unidade de comprimento  $\varphi'_z$ .

Tomando-se a origem O de um sistema de eixos coordenados dextrógiro numa das extremidades da barra e o eixo de rotação coincidente com o eixo z, pode-se expressar a rotação em torno de z e os deslocamentos de um ponto M qualquer da barra de coordenadas x,y,z como (fig. 2.2.1)

$$\varphi_z = \varphi'_z z \quad (2.2.1)$$

$$u_M = -y \varphi_z = -y z \varphi'_z \quad (2.2.2.a)$$

$$v_M = x \varphi'_z = x z \varphi'_z \quad (2.2.2.b)$$

$$w_M = \varphi'_z \psi(x, y) \quad (2.2.3)$$

$\psi(x, y)$  é denominada função empenamento de Saint-Venant.

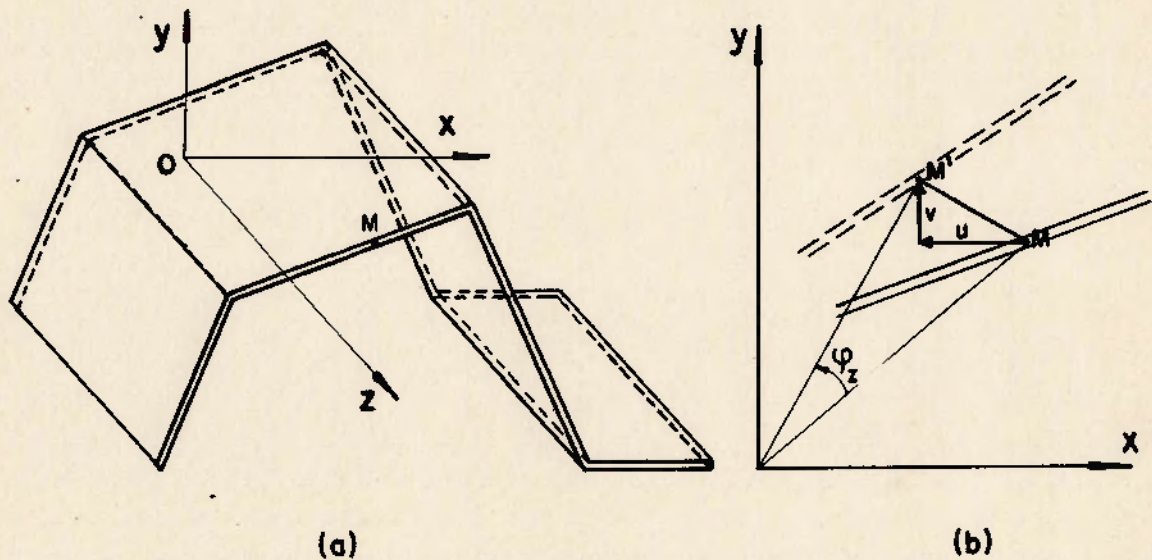


FIG. 2.2.1 Deslocamentos do ponto M

As tensões normais  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são nulas, já que  $u_{,x}$ ,  $v_{,y}$  e  $w_{,z}$  são nulos. As tensões de cisalhamento são dadas por

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u_M}{\partial y} + \frac{\partial v_M}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.2.4.a)$$

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \right) = G \varphi'_z \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) = G \varphi'_z (\psi_{,x} - y) \quad (2.2.4.b)$$

$$\tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial y} \right) = G \varphi'_z \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = G \varphi'_z (\psi_{,y} + x) \quad (2.2.4.c)$$

(1) As duas notações para derivadas parciais apresentadas na expressão 2.2.4 são utilizadas ao longo do texto, conforme conveniente caso a caso.

O estado de tensões em qualquer ponto M é portanto de cisalhamento puro, caracterizado pelos componentes  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , e não ocorre distorção da seção transversal em seu próprio plano, já que  $\tau_{xy} = 0$  e assim  $\gamma_{xy} = 0$ .

A função empenamento  $\psi(x,y)$  deve satisfazer as condições de contorno e as equações de equilíbrio para que seja a solução do problema.

As equações de equilíbrio nas direções x e y são automaticamente satisfeitas. Tomando-se a condição de equilíbrio de um elemento de barra na direção z (fig. 2.2.2), tem-se

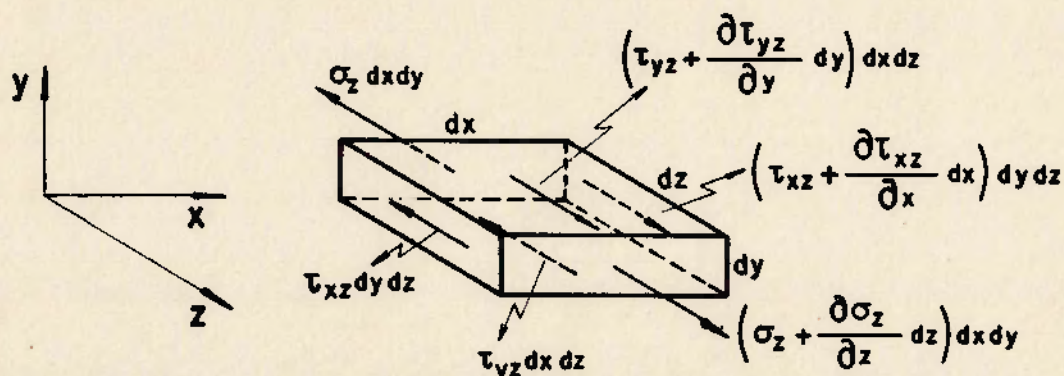


FIG. 2.2.2 Equilíbrio de um elemento de barra

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = G \varphi'_z [\psi_{,xx} + \psi_{,yy}] = G \varphi'_z \nabla^2 \psi = 0$$

e portanto

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ em A} \quad (2.2.5)$$

As condições de contorno na superfície lateral da barra são obtidas a partir do equilíbrio de um prisma elementar

construído sobre a mesma, sendo uma das faces pertencente à superfície lateral (fig. 2.2.3). Levando-se em conta que as tensões no plano da superfície são nulas, em vista da ausência de carregamento externo, pode-se escrever, para o equilíbrio na direção  $z$ :

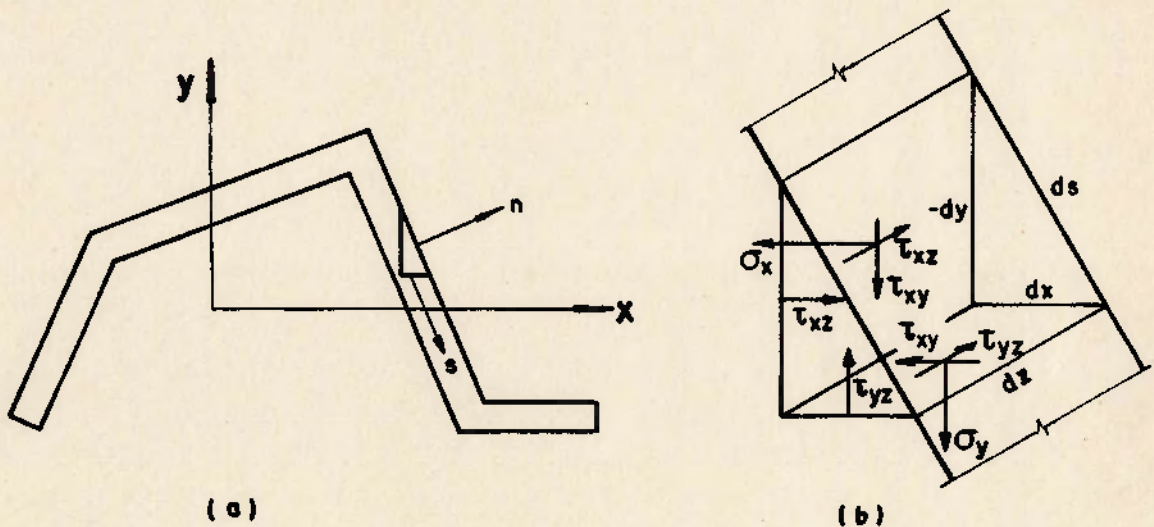


FIG. 2.2.3 Equilíbrio de um prisma elementar no contorno

$$-\tau_{xz} dy dz + \tau_{yz} dx dz = 0 \quad (2.2.6)$$

Designando-se por  $\tau_n$  as tensões de cisalhamento normais à tangente ao contorno e por  $n_x$  e  $n_y$  as componentes do vetor normal à superfície nas direções  $x$  e  $y$ , de onde  $n_x = -dy/ds$  e  $n_y = dx/ds$ , vem que

$$\tau_n = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = G\phi'_z(\psi, x - y) n_x + G\phi'_z(\psi, y + x) n_y = 0 \quad (2.2.7)$$

A função  $\psi$  é a solução do Problema de Valor no Contorno definido pelas expressões 2.2.5 e 2.2.7.

O momento de torção numa seção qualquer é resultante das tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , sendo dado por

(fig. 2.2.3)

$$M_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = G I_t \varphi'_z \quad (2.2.8.a)$$

onde

$$I_t = \int_A (x^2 + y^2 + x \psi_{,y} - y \psi_{,x}) dA \quad (2.2.8.b)$$

é designado constante de torção de Saint-Venant ou momento de inércia à torção.

A posição do eixo de rotação não é definida na teoria de Saint-Venant. No entanto, pode-se observar que uma mudança na posição dos eixos de referência implica em alteração da função empenamento e do momento de inércia à torção. Esta lacuna na teoria de Saint-Venant é discutida no capítulo 4, mostrando-se ali que o eixo de rotação deve passar por um ponto denominado centro de torção da seção transversal.

Para as barras de seção transversal aberta, com paredes delgadas de espessura  $t$  constante e largura  $b_i$ , pode-se considerar  $\psi$  constante ao longo da espessura. Obtém-se neste caso, com o uso da função das tensões de Prandtl (Timoshenko, Goodier, 1970),

$$\tau_t = -2 \frac{M_z}{I_t} n \quad (2.2.9)$$

$$M_z = G \varphi'_z I_t = \frac{G \varphi'_z}{3} \sum b_i t^3 \quad (2.2.10)$$

As tensões de cisalhamento têm portanto distribuição linear ao longo da espessura com valor máximo para  $n = \pm t/2$ , dado

por

$$\tau_t \text{ max} = \pm \frac{M_z}{I_t} t \quad (2.2.11)$$

### 2.3 A TEORIA DE VLASOV

A Teoria de Vlasov, aplicada às barras de seção transversal aberta e parede delgada submetidas a um carregamento qualquer, baseia-se nas seguintes hipóteses:

- O empenamento da seção transversal é constante ao longo da espessura.
- As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas.
- As tensões de cisalhamento paralelas à superfície média são dadas pela soma de dois termos (fig. 2.3.1). O primeiro termo, com distribuição linear ao longo da espessura e anti-simetricamente distribuído em relação à linha média, é o obtido através da teoria da torção uniforme, como já visto. O esforço solicitante resultante destas tensões de cisalhamento ( $\tau_t$ ) é o momento de torção uniforme  $M_z = GI_t \phi'_z$ . O segundo termo ( $\tau_w$ ) pode ser admitido constante ao longo da espessura, e o esforço solicitante de torção resultante é denominado momento de flexo-torção.

Deve-se notar que esta distribuição de tensões está em contradição com a hipótese de deformações por cisalhamento nulas na superfície média, já que a existência das tensões  $\tau_w$  implica em distorções na superfície média da barra. Assim, as tensões de cisalhamento não podem ser associadas às distorções através da equação constitutiva  $\tau = G\gamma$ .

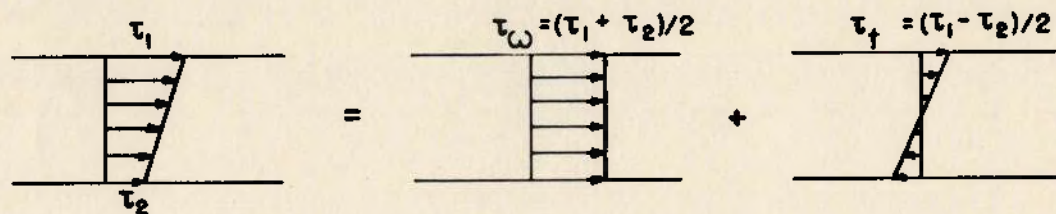


FIG. 2.3.1 Componentes das tensões de cisalhamento

### 2.3.1 Deslocamentos da superfície média - área setorial

Para as deduções que se seguem, qualquer ponto  $M$  da superfície média da seção transversal tem suas coordenadas definidas de uma das seguintes maneiras (fig. 2.3.2):

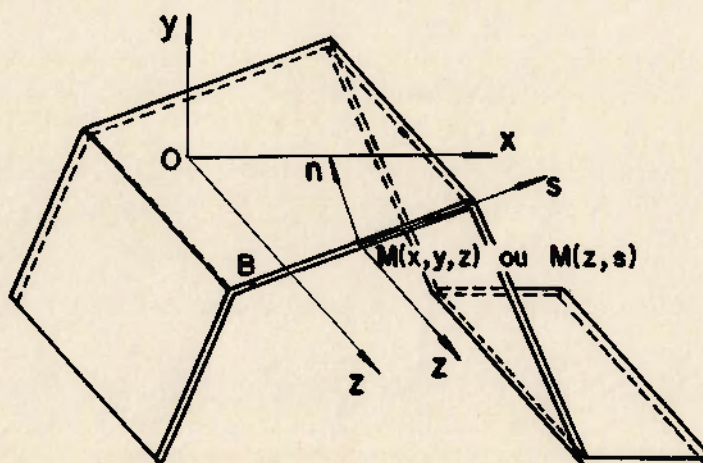


FIG. 2.3.2 Sistemas de referência

- Pelas coordenadas  $x, y, z$  do ponto  $M$
- Pelas coordenadas  $z$ , na direção do eixo da barra, e  $s$ , ao longo da linha de contorno da superfície média a partir de



uma origem B a ser escolhida.

Como o contorno da seção não se altera, os deslocamentos do ponto M no plano da seção transversal podem ser escritos em função dos deslocamentos de um outro ponto qualquer A denominado polo, contido ou não na superfície média, e da rotação da seção em torno deste ponto (fig. 2.3.3).

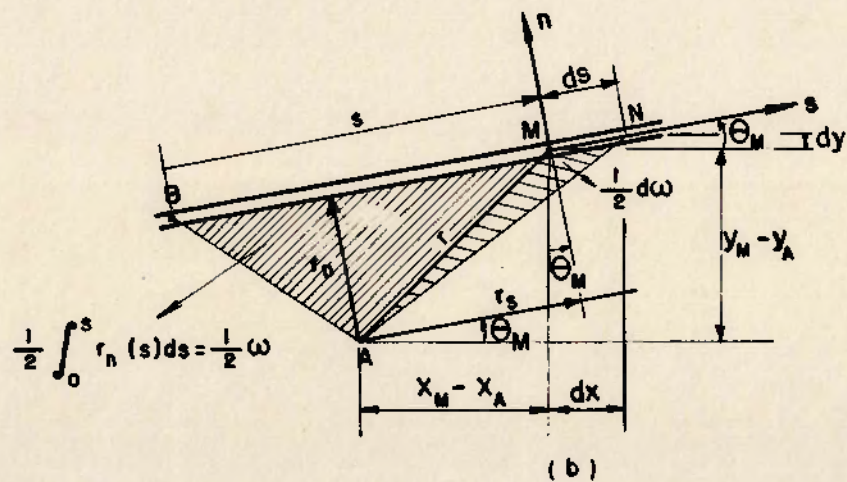
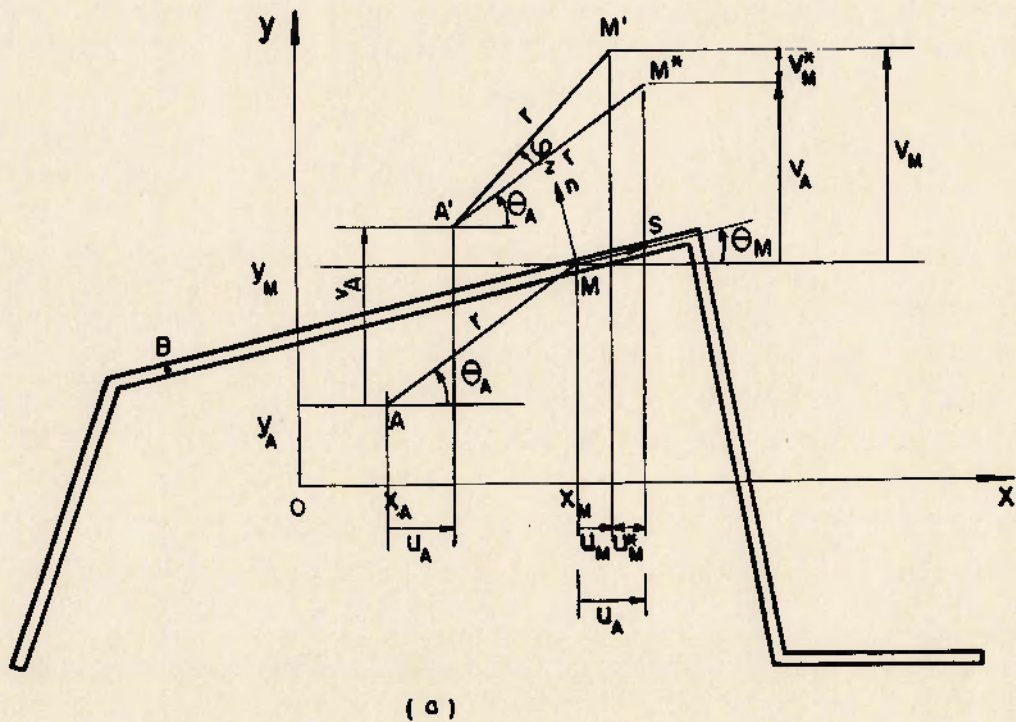


FIG. 2.3.3 Deslocamentos do ponto M - Área setorial

Sendo  $(x_A, y_A)$  e  $(x_M, y_M)$  as coordenadas de A e M respectivamente,  $(u_A, v_A)$  e  $(u_M, v_M)$  os deslocamentos destes pontos nas direções x e y e  $\varphi_Z$  a rotação da seção no plano xy, pode-se expressar os deslocamentos de A em função dos de M como

$$\begin{aligned} u_A &= u_M + u_M^* = u_M + r \cos\theta_A - r \cos(\theta_A + \varphi_Z) = \\ &= u_M + r \cos\theta_A (1 - \cos\varphi_Z) + r \operatorname{sen}\theta_A \operatorname{sen}\varphi_Z = \\ &= u_M + (x_M - x_A)(1 - \cos\varphi_Z) + (y_M - y_A) \operatorname{sen}\varphi_Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_A &= v_M - v_M^* = v_M - r \operatorname{sen}(\theta_A + \varphi_Z) + r \operatorname{sen}\theta_A = \\ &= v_M + (y_M - y_A)(1 - \cos\varphi_Z) - (x_M - x_A) \operatorname{sen}\varphi_Z \end{aligned}$$

Admitindo-se  $\varphi_Z$  pequeno, pode-se tomar  $(1 - \cos\varphi_Z) \cong \varphi_Z^2/2 \cong 0$  e  $\operatorname{sen}\varphi_Z \cong \varphi_Z$ , de onde

$$u_M = u_A - (y_M - y_A)\varphi_Z \quad (2.3.1.a)$$

$$v_M = v_A + (x_M - x_A)\varphi_Z \quad (2.3.1.b)$$

Tomem-se agora os deslocamentos  $(t_M, n_M)$  de M nas direções tangente e normal à superfície média, sendo  $\underline{s}$  positivo no sentido de s crescente e  $\underline{n}$  positivo quando  $\underline{s}, \underline{n}, \underline{z}$  formam um sistema de coordenadas dextrógiro. Sendo  $\theta_M$  o ângulo entre tangente no ponto M e o eixo x e projetando-se  $u_M$  e  $v_M$  nas direções de  $\underline{s}$  e  $\underline{n}$ , tem-se

$$\begin{aligned} t_M &= t_M(z, s) = u_M \cos\theta_M + v_M \operatorname{sen}\theta_M = u_A \cos\theta_M + v_A \operatorname{sen}\theta_M - \\ &\quad - \left[ -(x_M - x_A) \operatorname{sen}\theta_M + (y_M - y_A) \cos\theta_M \right] \varphi_Z \quad (2.3.2.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_M &= n_M(z, s) = -u_M \operatorname{sen}\theta_M + v_M \cos\theta_M = -u_A \operatorname{sen}\theta_M + v_A \cos\theta_M + \\ &\quad + \left[ (x_M - x_A) \cos\theta_M + (y_M - y_A) \operatorname{sen}\theta_M \right] \varphi_Z \quad (2.3.2.b) \end{aligned}$$

Pode-se observar, na fig. 2.3.3.b, que os termos entre colchetes das expressões 2.3.2 são os componentes do raio vetor AM nas direções  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$  respectivamente, de onde:

$$t_M = u_A \cos\theta_M + v_A \operatorname{sen}\theta_M - r_n \varphi_z \quad (2.3.3.a)$$

$$n_M = -u_A \operatorname{sen}\theta_M + v_A \cos\theta_M + r_s \varphi_z \quad (2.3.3.b)$$

Os deslocamentos de M na direção  $z$  podem ser deduzidos a partir da consideração de que as deformações por cisalhamento na superfície média são nulas. Sendo  $\underline{s}$  e  $z$  dois vetores desta superfície inicialmente normais entre si, tem-se

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w_M}{\partial s} + \frac{\partial t_M}{\partial z} = 0 \quad (2.3.4)$$

Substituindo-se  $t_M$  da expressão 2.3.3.a e omitindo-se por simplicidade o índice A em  $u_A$  e  $v_A$ , vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_M}{\partial z} ds &= u' \cos\theta_M ds + v' \operatorname{sen}\theta_M ds - \varphi'_z r_n ds = \\ &= u' dx + v' dy - \varphi'_z d\omega \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

onde  $d\omega$  é o dobro da área do setor com base  $ds$  e altura  $r_n$ . Esta área pode ser calculada com o auxílio da fig. 2.3.3, sendo dada por

$$\frac{d\omega}{2} = \frac{r_n ds}{2} = A_{AMN} = \frac{(y_M - y_A)dx - (x_M - x_A)dy}{2} \quad (2.3.6)$$

Substituindo-se 2.3.5 em 2.3.4, notando-se que  $u$ ,  $v$  e  $\varphi_z$  são funções apenas de  $z$  e que  $\operatorname{sen}\theta_M$ ,  $\cos\theta_M$ ,  $r_n$  e  $r_s$  são funções apenas de  $s$  e integrando-se entre a origem B e o ponto M, tem-se

$$\begin{aligned}
 w_H = w(z, s) &= - \int_0^s \frac{\partial t_H}{\partial z} ds + w_B = w_B(z) - u'(z) [x(s) - x_B] - \\
 &\quad - v'(z) [y(s) - y_B] + \varphi'_z(z) \omega(s) = \\
 &= w_0(z) - u'(z) x(s) - v'(z) y(s) + \varphi'_z(z) \omega(s)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.7.a}$$

onde

$$w_0(z) = w_B(z) + x_B u'(z) + y_B v'(z) \tag{2.3.7.b}$$

$w_0$  independe do ponto da seção transversal pois é função apenas de  $z$ , ou seja, corresponde a um deslocamento longitudinal uniforme para toda a seção transversal.

$\omega$  é o dobro da área do setor compreendido entre os pontos M e B e os raios vetores AB e AM. Vlasov denomina  $\omega(s)$  de área setorial em relação ao polo A com origem B. Consideram-se aqui áreas setoriais positivas quando, para  $r_n$  positivo,  $s$  cresce no sentido positivo do eixo, ou seja, o raio vetor AM percorre o setor em sentido dextrorso quando visto de  $z$  positivo. É usual representar  $\omega(s)$  por um diagrama traçado sobre a linha média da seção transversal, com o valor de  $\omega$  indicado na direção normal ao contorno.

Pode-se observar que os três primeiros termos da expressão 2.3.7.a correspondem à teoria usual de barras da Resistência dos Materiais, em que se admite válida a hipótese de Bernoulli-Euler, de que as seções planas permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação. O primeiro termo representa um deslocamento axial uniforme na seção. Os dois seguintes correspondem aos deslocamentos devidos às rotações  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$ , associadas por esta hipótese às derivadas em relação a  $z$  dos deslocamentos do eixo passando pelo polo ( $\varphi_x = -v'$  e  $\varphi_y = u'$ ). O quarto termo representa o empenamento da seção transversal e é similar ao termo obtido

por Saint-Venant para torção uniforme (expressão 2.2.3), embora aqui  $\varphi'_z$  não seja constante em  $z$ . Note-se que a forma do empenamento é a mesma para todas as seções, embora sua intensidade difira de uma seção para outra, sendo proporcional a  $\varphi'_z$ . A área setorial, nas seções abertas de paredes delgadas, corresponde à função empenamento  $\psi(x,y)$  da teoria da torção uniforme.

A deformação longitudinal de qualquer ponto da seção transversal, tomando-se apenas o termo linear com os deslocamentos, é dada por

$$\epsilon_z = \frac{\partial w(z,s)}{\partial z} = w'_0(z) - u''(z) x(s) - v''(z) y(s) + \varphi''_z(z) \omega(s) \quad (2.3.8)$$

A teoria de Saint-Venant ou da torção pura trata do caso particular  $\epsilon_z=0$  para qualquer valor de  $s$ , ou seja,  $w'_0(z)=0$ ,  $u''(z)=0$  e  $v''(z)=0$  (deslocamentos de corpo rígido) e ainda  $\varphi''_z(z)=0$ , de onde  $\varphi'_z(z)=\text{constante}$ .

### 2.3.2 Mudança de polo

Conhecida a área setorial em relação a um polo A qualquer, pode-se facilmente determinar a área setorial em relação a um outro polo C. Calculando-se  $d\omega^A$  e  $d\omega^C$ , para os polos A e C, através da expressão 2.3.6, tem-se:

$$d\omega^A = (y_M - y_A) dx - (x_M - x_A) dy \quad (2.3.9.a)$$

$$d\omega^C = (y_M - y_C) dx - (x_M - x_C) dy \quad (2.3.9.b)$$

logo

$$d(\omega^C - \omega^A) = (y_A - y_C) dx - (x_A - x_C) dy \quad (2.3.10)$$

Integrando-se entre a origem B e o ponto M, vem que

$$\omega^C = \omega^A + (y_A - y_C)(x_M - x_B) - (x_A - x_C)(y_M - y_B) \quad (2.3.11)$$

### 2.3.3 Relações tensões-deformações

Na teoria de Vlasov, apenas as tensões normais na direção longitudinal e as tensões de cisalhamento na direção da tangente à superfície média são consideradas.

As tensões normais no ponto M são admitidas constantes ao longo da espessura e podem ser obtidas da expressão 2.3.8:

$$\sigma = E\varepsilon_z = E \left[ w_0'(z) - u''(z) x - v''(z) y + \varphi_z''(z) \omega \right] \quad (2.3.12)$$

As tensões de cisalhamento devem ser determinadas a partir das condições de equilíbrio de um elemento da barra na direção longitudinal já que, por hipótese, as distorções no plano tangente à superfície média são nulas (fig. 2.3.4). Assim,

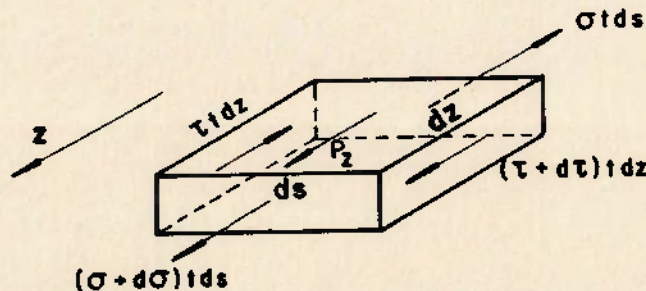


FIG. 2.3.4 Equilíbrio de um elemento na direção z

$$d\tau t dz = -p_z ds dz - d\sigma t ds \quad (2.3.13)$$

onde  $p_z$  é a projeção das forças externas na direção  $z$ .

Dividindo-se a expressão 2.3.13 por  $t ds dz$  e integrando-se  $\frac{\partial \tau}{\partial s}$  entre a origem  $M_0$  e o ponto  $M$ , respectivamente de coordenadas  $s_0$  e  $s$ , tem-se

$$\begin{aligned} \tau_M - \tau_{M_0} &= \tau(z, s) - \tau(z, s_0) = - \int_{s_0}^s \left( \frac{p_z}{t} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) ds = \\ &= \frac{E}{t} \left[ - \frac{1}{E} \int_{s_0}^s p_z ds - w_0''(z) \int_{s_0}^s t ds + u'''(z) \int_{s_0}^s x t ds + \right. \\ &\quad \left. + v'''(z) \int_{s_0}^s y t ds - \varphi_z'''(z) \int_{s_0}^s \omega t ds \right] \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \tau(z, s) - \tau(z, s_0) &= \frac{E}{t} \left[ - \frac{1}{E} \int_{s_0}^s p_z ds - w_0''(z) A(s) - u'''(z) S_y(s) + \right. \\ &\quad \left. + v'''(z) S_x(s) - \varphi_z'''(z) S_\omega(s) \right] \quad (2.3.14.a) \end{aligned}$$

$$A(s) = \int_{s_0}^s t ds, \quad S_x(s) = \int_{s_0}^s y t ds \quad e \quad S_y(s) = - \int_{s_0}^s x t ds$$

são respectivamente a área e os momentos estáticos em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .  $S_\omega(s) = \int_{s_0}^s \omega t ds$ , por analogia, é denominado momento estático setorial do trecho da seção entre a origem  $s_0$  e o ponto  $M$ .

Se a origem  $M_0$  é tomada numa extremidade do contorno, tem-se

$\tau(z, s_0) = 0$  e  $A(s)$ ,  $S_x(s)$  e  $S_y(s)$  são calculados para a parte da seção entre a extremidade e o ponto M. Adicionalmente, se as forças externas na direção  $z$  ao longo da superfície são nulas ( $p_z = 0$ ), os deslocamentos  $w_0(z)$  são lineares em  $z$  e, assim,  $w_0''(z) = 0$ . Neste caso,

$$\tau(z, s) = \frac{E}{t} \left[ -u'''(z) S_y(s) + v'''(z) S_x(s) - \varphi_z'''(z) S_\omega(s) \right] \quad (2.3.14.b)$$

Os termos em  $u'''$  e  $v'''$  correspondem às tensões de cisalhamento resultantes da flexão em dois planos ortogonais. O termo em  $\varphi_z'''$  corresponde às tensões de cisalhamento, uniformes ao longo da espessura, devidas ao empenamento da seção. As tensões de cisalhamento totais na seção são obtidas adicionando-se as tensões de cisalhamento correspondentes à torção uniforme (expressão 2.2.9) às indicadas acima.

#### 2.3.4 Equações diferenciais de equilíbrio

As funções  $w_0(z)$ ,  $u(z)$ ,  $v(z)$  e  $\varphi_z(z)$  são determinadas a partir das condições de equilíbrio de um elemento de barra de comprimento  $dz$ , onde a ação do restante da barra é substituída pelas tensões ( $\sigma, \tau$ ) e pelo momento de torção  $M_z$ , estaticamente equivalente à resultante das tensões de cisalhamento  $\tau_t$  correspondentes à torção pura. O carregamento externo, estaticamente equivalente às forças  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$ , é substituído por um sistema de forças de mesma intensidade passando pelo polo A e pelo momento de torção  $m_z$  resultante destas forças (fig. 2.3.5).



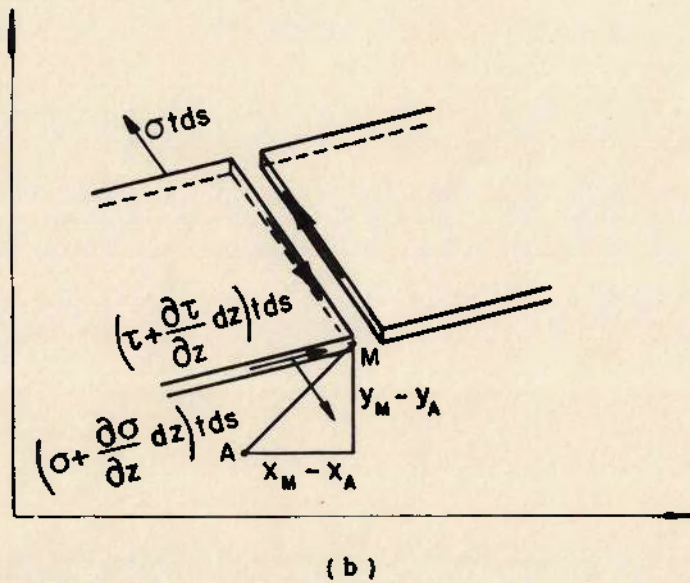
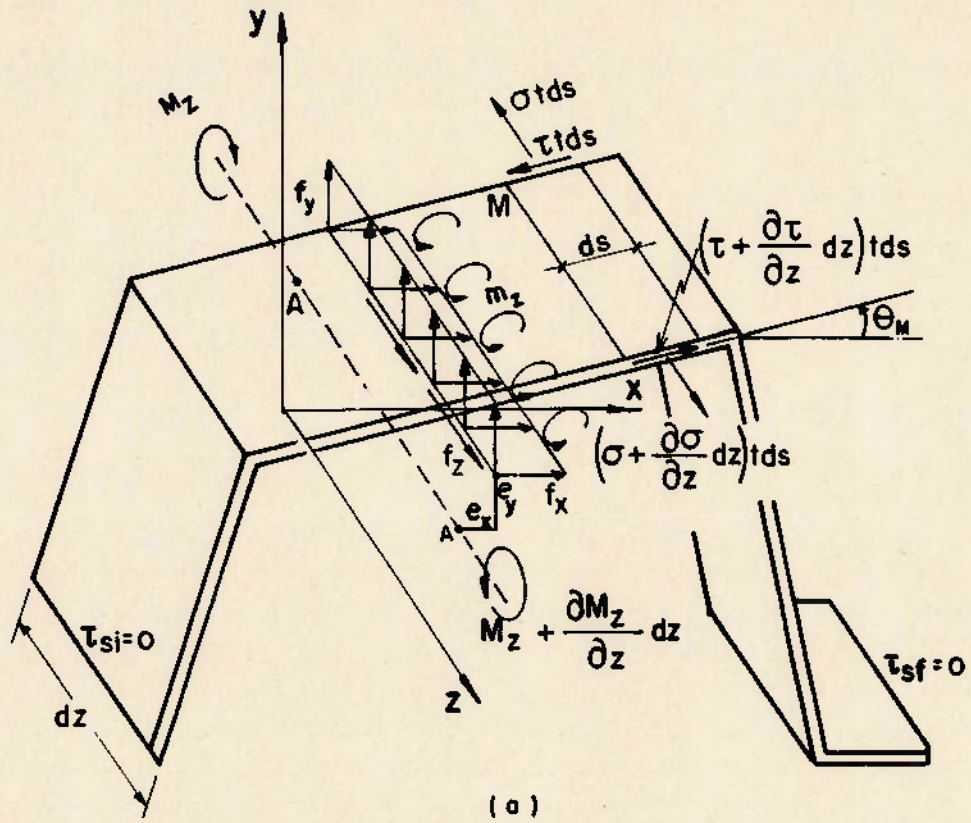


FIG. 2.3.5 Equilíbrio de um elemento de barra  $dz$

Equilíbrio de forças na direção z:

$$\int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz t ds + f_z dz = 0 \quad \therefore \quad \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial z} dA + f_z = 0$$

(2.3.15.a)

Equilíbrio de forças na direção x:

$$\int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \cos \theta_M t ds + f_x dz = 0 \quad \therefore \quad t \int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \tau}{\partial z} dx + f_x = 0$$

(2.3.15.b)

Equilíbrio de forças na direção y:

$$\int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \sin \theta_M t ds + f_y dz = 0 \quad \therefore \quad t \int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \tau}{\partial z} dy + f_y = 0$$

(2.3.15.c)

Equilíbrio de momentos em torno do polo A:

$$\int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \left[ (x_M - x_A) \sin \theta_M - (y_M - y_A) \cos \theta_M \right] t ds +$$

$$+ \frac{\partial M_z}{\partial z} dz + m_z dz = 0$$

(2.3.15.d)

Utilizando-se a expressão 2.3.6 na equação de equilíbrio de momentos, vem que

$$- \int_{s_i}^{s_f} \frac{\partial \tau}{\partial z} t d\omega + M'_z + m_z = 0$$

(2.3.16)

Com o uso da expressão 2.3.12 obtém-se, de 2.3.15.a,

$$A w_0'' + S_y u''' - S_x v''' + S_\omega \varphi_z''' = - f_z/E \quad (2.3.17)$$

onde  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_\omega$  são calculados para toda a seção transversal.

Das expressões 2.3.12 e 2.3.13, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[ t \frac{\partial \tau}{\partial s} \right] ds = & - \frac{\partial p_z}{\partial z} ds - w_0'''(z) E dA + u^{IV}(z) E x dA + \\ & + v^{IV}(z) E y dA - \varphi_z^{IV}(z) E \omega dA \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Integrando-se por partes, ao longo da superfície média, as equações de equilíbrio de momentos e das forças em x e y, notando-se que as tensões de cisalhamento nas bordas são nulas e substituindo-se a expressão 2.3.18 nas equações assim obtidas, tem-se

$$-S_y w_0''' - I_y u^{IV} + I_{xy} v^{IV} + I_{\omega x} \varphi_z^{IV} = - \frac{1}{E} \left[ f_x + \int_{s_i}^{s_f} x \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right] \quad (2.3.19.a)$$

$$S_x w_0''' + I_{xy} u^{IV} - I_x v^{IV} + I_{\omega y} \varphi_z^{IV} = - \frac{1}{E} \left[ f_y + \int_{s_i}^{s_f} y \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right] \quad (2.3.19.b)$$

$$\begin{aligned} -S_\omega w_0''' + I_{\omega x} u^{IV} + I_{\omega y} v^{IV} - I_\omega \varphi_z^{IV} + \frac{GI_t}{E} \varphi_z'' = \\ = \frac{1}{E} \left[ -m_z + \int_{s_i}^{s_f} \omega \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right] \end{aligned} \quad (2.3.19.c)$$

As expressões 2.3.17 e 2.3.19.a-c representam as quatro equações diferenciais de equilíbrio para as quatro incógnitas  $w_0(z)$ ,  $u(z)$ ,  $v(z)$  e  $\varphi_z(z)$ .

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad e \quad I_{xy} = - \int_A x y dA$$

são respectivamente os momentos de inércia em relação aos eixos x e y e o produto de inércia da seção transversal. Por analogia,

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad , \quad I_{\omega x} = \int_A \omega x dA \quad e \quad I_{\omega y} = \int_A \omega y dA$$

são denominados respectivamente momento de inércia setorial ou momento de inércia ao empenamento da seção transversal e produtos de inércia setoriais em relação aos eixos x e y.

O sistema de equações diferenciais de equilíbrio da barra pode ser bastante simplificado alterando-se a posição dos eixos de referência, do polo A e da origem B.

#### a) Mudança dos eixos de referência

Os momentos estáticos  $S_x$  e  $S_y$  se anulam se os eixos de referência passam pelo centro de gravidade G da seção. Adicionalmente, se os eixos de referência são eixos principais, o produto de inércia  $I_{xy}$  também se anula.

#### b) Mudança do polo A

Conforme já visto no item 2.3.1, a área setorial depende apenas do polo e da origem, sendo portanto independente dos eixos de referência adotados. Por simplicidade, adota-se aqui o sistema de eixos principal.

O polo C que torna os produtos de inércia setoriais nulos

pode ser obtido, com o uso da expressão 2.3.11, de

$$I_{\omega x}^c = \int_A \omega^c x \, dA = \int_A \omega^A x \, dA - \int_A (y_c - y_A) x^2 \, dA + \int_A (x_c - x_A) xy \, dA - \\ - \int_A (x_c - x_A) y_B x \, dA + \int_A (y_c - y_A) x_B x \, dA = 0$$

$$I_{\omega y}^c = \int_A \omega^c y \, dA = \int_A \omega^A y \, dA - \int_A (y_c - y_A) xy \, dA + \int_A (x_c - x_A) y^2 \, dA - \\ - \int_A (x_c - x_A) y_B y \, dA + \int_A (y_c - y_A) x_B y \, dA = 0$$

Como os eixos adotados são os principais, tem-se  $I_{xy} = 0$ ,  $S_x = 0$  e  $S_y = 0$ , logo

$$\int_A \omega^A x \, dA - (y_c - y_A) I_y = 0 \quad \text{ou} \quad y_c - y_A = \frac{I_{\omega x}^A}{I_y} \quad (2.3.20.a)$$

$$\int_A \omega^A y \, dA + (x_c - x_A) I_x = 0 \quad \text{ou} \quad x_c - x_A = - \frac{I_{\omega y}^A}{I_x} \quad (2.3.20.b)$$

O polo C assim determinado é o polo principal. Pode-se mostrar que, para seções com um eixo de simetria, o polo está sobre este eixo.

### c) Mudança da origem B

As coordenadas do polo principal C não são afetadas por uma mudança da origem B. Este fato pode ser constatado tomando-se duas origens diferentes B e D com o mesmo polo A. As áreas setoriais diferem apenas por uma constante dada pelo dobro da área do setor compreendido entre os raios vetores AB e AD (fig. 2.3.6.a), ou seja:

$$\omega^A(s_B, s) = \omega^A(s_D, s) + \omega^A(s_B, s_D)$$

onde o primeiro termo entre parênteses indica a origem e o segundo o ponto em questão.

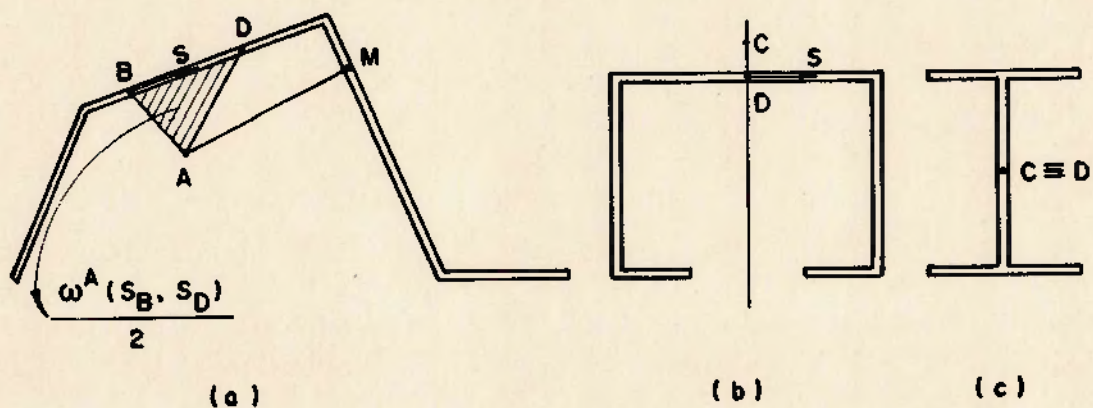


FIG. 2.3.6 Origem para áreas setoriais

Substituindo-se esta expressão em 2.3.20, pode-se mostrar que  $x_c$  e  $y_c$  podem ser calculados indistintamente a partir das áreas setoriais em relação às origens B ou D, pois:

$$\begin{aligned} (y_c - y_A) I_y &= \int_A \omega^A(s_B, s) x \, dA = \int_A \omega^A(s_D, s) x \, dA + \\ &+ \omega^A(s_B, s_D) \int_A x \, dA = \int_A \omega^A(s_D, s) x \, dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_c - x_A) I_x &= - \int_A \omega^A(s_B, s) y \, dA = - \int_A \omega^A(s_D, s) y \, dA - \\ &- \omega^A(s_B, s_D) \int_A y \, dA = - \int_A \omega^A(s_D, s) y \, dA \end{aligned}$$

Por outro lado, com a escolha de uma origem adequada, pode-se obter  $S_\omega = 0$ . A área setorial correspondente a esta

origem D e ao polo C é denominada área setorial principal, e pode ser calculada através de

$$S_{\omega}^D = \int_A \omega^C(s_D, s) \, dA = \int_A \omega^C(s_B, s) \, dA - \omega^C(s_B, s_D) A = 0$$

ou

$$\omega^C(s_B, s_D) = \frac{1}{A} \int_A \omega^C(s_B, s) \, dA \quad (2.3.21)$$

Assim,  $\omega^C(s_B, s_D)$  representa o valor médio de  $\omega^C$ , calculado para uma origem B qualquer, ao longo da área A. Para seções com um eixo de simetria, o ponto D que torna este valor médio nulo está no encontro do eixo de simetria com a seção transversal (fig. 2.3.6.b), visto que o eixo de simetria divide a seção em duas partes com áreas setoriais iguais em módulo e de sinais contrários. Para seções como o perfil tipo I simétrico da fig. 2.3.6.c, pode existir um número infinito de pontos com as características da origem desejada. Todos os pontos da alma da seção têm área setorial nula, e assim qualquer ponto da alma pode ser tomado como origem. Convenciona-se definir a origem como o ponto mais próximo do polo principal da seção. Esta origem é denominada origem setorial principal.

Tomando-se agora os eixos x e y passando pelo centro de gravidade e as propriedades setoriais da seção calculadas em relação ao polo e à origem principais e considerando-se ainda que as forças externas são compostas apenas pelas forças resultantes  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  e pelo momento  $m_z$ , as equações de equilíbrio passam a ser escritas como:

$$EAw'' = -f_z \quad (2.3.22.a)$$

$$EI_y^G u^{IV} - EI_{xy}^G v^{IV} = f_x \quad (2.3.22.b)$$

$$-EI_{xy}^G u^{IV} + EI_x^G v^{IV} = f_y \quad (2.3.22.c)$$

$$EI_{\omega}^C \phi_z^{IV} - GI_t \phi_z'' = m_z \quad (2.3.22.d)$$

Note-se que, se os eixos  $x$  e  $y$  são os principais, tem-se  $I_{xy} = 0$  e as equações ficam desacopladas.

### 2.3.5 Esforços solicitantes

Os esforços solicitantes na seção transversal podem ser calculados a partir das tensões normais e de cisalhamento dadas pelas expressões 2.3.12 e 2.3.14.

Os esforços solicitantes correspondentes às tensões normais são a força normal  $N$ , os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  em torno dos eixos  $x$  e  $y$  e o bimomento  $M_{\omega}$ , dados por:

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad (2.3.23.a)$$

$$M_x = \int_A \sigma \, y \, dA \quad (2.3.23.b)$$

$$M_y = - \int_A \sigma \, x \, dA \quad (2.3.23.c)$$

$$M_{\omega} = \int_A \sigma \, \omega \, dA \quad (2.3.23.d)$$



Substituindo-se a expressão 2.3.12 em 2.3.23, obtém-se

$$N = \int_A \sigma \, dA = E \left[ A w'_0(z) + S_Y u''(z) - S_X v''(z) + S_\omega \varphi''_Z(z) \right] \quad (2.3.24.a)$$

$$M_X = \int_A \sigma \, y \, dA = E \left[ S_X w'_0(z) + I_{XY} u''(z) - I_X v''(z) + I_{\omega Y} \varphi''_Z(z) \right] \quad (2.3.24.b)$$

$$M_Y = - \int_A \sigma \, x \, dA = E \left[ S_Y w'_0(z) + I_Y u''(z) - I_{XY} v''(z) - I_{\omega X} \varphi''_Z(z) \right] \quad (2.3.24.c)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma \, \omega \, dA = E \left[ S_\omega w'_0(z) - I_{\omega X} u''(z) - I_{\omega Y} v''(z) + I_\omega \varphi''_Z(z) \right] \quad (2.3.24.d)$$

Em particular se os eixos  $x$  e  $y$  passam pelo centro de gravidade e a área setorial é calculada em relação ao polo e à origem setorial principais, tem-se  $S_X^c$ ,  $S_Y^c$ ,  $S_\omega^c$ ,  $I_{\omega X}^c$  e  $I_{\omega Y}^c$  nulos, e assim, omitindo-se os índices  $c$  e  $c$ ,

$$w'_0(z) = \frac{N}{EA} \quad (2.3.25.a)$$

$$E u''(z) = \frac{-M_X I_{XY} + M_Y I_X}{I_X I_Y - I_{XY}^2} \quad (2.3.25.b)$$

$$E v''(z) = \frac{-M_X I_Y + M_Y I_{XY}}{I_X I_Y - I_{XY}^2} \quad (2.3.25.c)$$

$$E \varphi''_Z(z) = \frac{M_\omega}{I_\omega} \quad (2.3.25.d)$$

Substituindo-se estes valores na expressão 2.3.12, obtém-se

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{I_x M_y - I_{xy} M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} x + \frac{I_y M_x - I_{xy} M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} y + \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega \quad (2.3.26)$$

Pode-se observar que a expressão 2.3.26 contém um termo adicional, em relação aos da teoria da Resistência dos Materiais, correspondente ao empenamento da seção transversal.

Um procedimento similar pode ser adotado para as tensões de cisalhamento, definindo-se como esforços solicitantes as forças resultantes na seção nas direções x e y,  $V_x$  e  $V_y$ , e o momento de flexo-torção  $T_\omega$  em relação ao polo principal, decorrente das forças  $\tau t$  atuantes ao longo da tangente ao contorno e uniformes ao longo da espessura.

$$V_x = \int_A \tau t ds \cos\theta_M = \int_A \tau t dx \quad (2.3.27.a)$$

$$V_y = \int_A \tau t ds \sin\theta_M = \int_A \tau t dy \quad (2.3.27.b)$$

$$T_\omega = - \int_A r \tau dA = - \int_{s_i}^{s_f} r \tau t ds = - \int_A \tau t d\omega \quad (2.3.27.c)$$

Tomando-se novamente  $p_z=0$ , e substituindo-se a expressão 2.3.14.b em 2.3.27, tem-se

$$V_x = E \left[ -u'''(z) \int_A S_y(s) dx + v'''(z) \int_A S_x(s) dx - \varphi_z'''(z) \int_A S_\omega(s) dx \right] \quad (2.3.28.a)$$

$$V_y = E \left[ -u'''(z) \int_A S_y(s) dy + v'''(z) \int_A S_x(s) dy - \varphi_z'''(z) \int_A S_\omega(s) dy \right] \quad (2.3.28.b)$$

$$T_\omega = E \left[ u'''(z) \int_A S_y(s) d\omega - v'''(z) \int_A S_x(s) d\omega + \varphi_z'''(z) \int_A S_\omega(s) d\omega \right] \quad (2.3.28.c)$$

Em particular se os eixos x e y passam pelo centro de gravidade e a área setorial é calculada em relação ao polo e à origem setorial principais tem-se, por integração por partes, que

$$\int_A S_x^c dx = I_{xy}^c, \quad \int_A S_y^c dx = I_y^c, \quad \int_A S_\omega^c dx = 0$$

$$\int_A S_\omega^c d\omega = -I_\omega^c, \quad \int_A S_y^c d\omega = 0, \quad \int_A S_y^c dy = -I_{xy}^c$$

$$\int_A S_x^c dy = -I_x^c, \quad \int_A S_\omega^c dy = 0, \quad \int_A S_x^c d\omega = 0$$

Substituindo-se estes valores nas expressões 2.3.28 e omitindo-se os índices c e c, tem-se

$$E u''' = - \frac{V_y I_{xy} + V_x I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (2.3.29.a)$$

$$E v''' = - \frac{V_x I_{xy} + V_y I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (2.3.29.b)$$

$$E \varphi_z''' = - \frac{T_\omega}{I_\omega} \quad (2.3.29.c)$$

Substituindo-se 2.3.29 em 2.3.14.b, vem que

$$\tau = \frac{1}{t} \left[ \frac{V_y I_{xy} + V_x I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} S_y(s) - \frac{V_x I_{xy} + V_y I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} S_x(s) + \frac{T_\omega}{I_\omega} S_\omega(s) \right] \quad (2.3.30)$$

Esta expressão também apresenta um termo adicional, em relação aos da teoria da Resistência dos Materiais, correspondente ao empenamento da seção.

As tensões de cisalhamento totais na seção são obtidas adicionando-se ao valor de 2.3.30, uniforme ao longo da espessura, o correspondente à torção uniforme, dado por 2.2.9.

Derivando-se as expressões 2.3.25 em relação a  $z$  e comparando-se às expressões 2.3.29, conclui-se que:

$$V_x = -M'_y \quad (2.3.31.a)$$

$$V_y = M'_x \quad (2.3.31.b)$$

$$T_\omega = -M'_\omega \quad (2.3.31.c)$$

O momento de torção total na seção é dado pela soma de  $T_\omega$  e  $M_z$ , logo

$$T = T_\omega + M_z = -E I_\omega \varphi_z'' + G I_t \varphi_z' \quad (2.3.32)$$

Comparando-se as expressões 2.3.32 e 2.3.22.d, pode-se escrever que (ver fig. 2.3.7)

$$\frac{dT}{dz} = -E I_\omega \varphi_z^{iv} + G I_t \varphi_z'' = -M_\omega'' + \frac{G I_t}{E I_\omega} M_\omega = -m_z$$

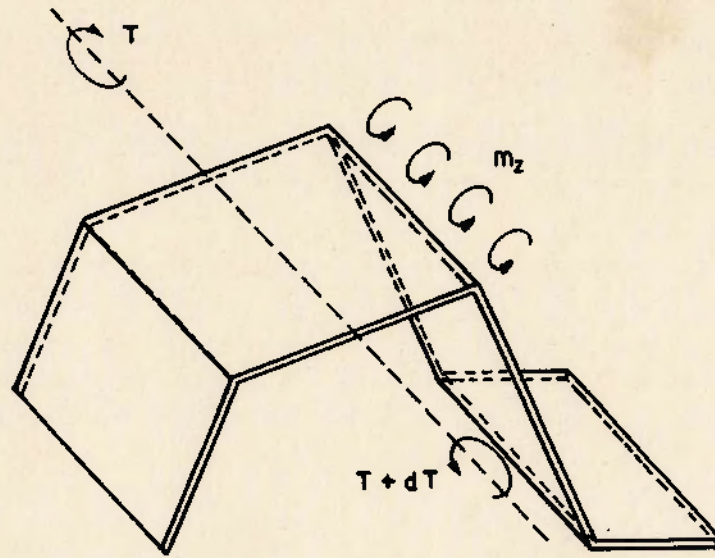


FIG. 2.3.7 Equilíbrio de momentos em torno de z

As equações de equilíbrio 2.3.22 podem então ser re-escritas em função dos esforços solicitantes e das forças externas, obtendo-se

$$N' + f_z = 0 \quad (2.3.33.a)$$

$$V'_x + f_x = 0 \quad (2.3.33.b)$$

$$V'_y + f_y = 0 \quad (2.3.33.c)$$

$$M''_{\omega} - M'_z - m_z = M''_{\omega} - T' - T'_{\omega} - m_z = 0 \quad (2.3.33.d)$$

Pode-se observar ainda que, se  $T_{\omega} = 0$ , ou seja, se as tensões de cisalhamento são tais que o momento das forças delas resultante em torno do polo principal é nulo, a solução do problema é a da teoria da Resistência dos Materiais, onde se despreza o empenamento. Neste caso, se a peça não está submetida à torção pura, tem-se  $\varphi_z(z) = 0$ . Isto ocorre se as forças transversais passam pelo polo

principal. Este polo é denominado por Vlasov centro de cisalhamento, embora receba também a denominação de centro de torção.

### 2.3.6 Barras com apoios elásticos

Considere-se a barra com seção de parede delgada da fig. 2.3.8, continuamente apoiada em meio elástico ao longo de um eixo paralelo ao eixo  $z$  e passando pelo ponto  $H$  de coordenadas  $(x_H, y_H)$ . As forças reativas do meio elástico nas direções  $x$  e  $y$  são proporcionais aos deslocamentos  $u_H$  e  $v_H$ , enquanto que o momento de torção reativo depende destas forças e possui uma parcela proporcional à rotação  $\varphi_{ZH}$ , ou seja

$$f_{x\beta} = -\beta_x u_H$$

$$f_{y\beta} = -\beta_y v_H$$

$$m_{z\beta} = -\beta_\varphi \varphi_{ZH} + (x_H - x_c) f_{y\beta} - (y_H - y_c) f_{x\beta}$$

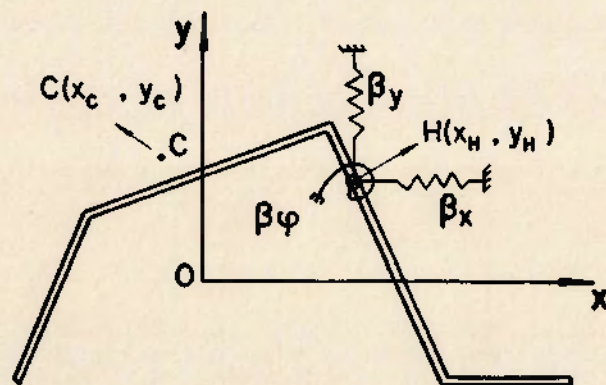


FIG. 2.3.8 Apoios elásticos

$f_{x\beta}$ ,  $f_{y\beta}$  e  $m_{z\beta}$  são as reações do meio elástico por unidade de comprimento da barra.  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  e  $\beta_\varphi$  expressam a rigidez do apoio elástico por unidade de comprimento da barra, ou seja, forças nas direções  $x$  e  $y$  e momento de torção correspondentes a deslocamentos e rotações unitários.

Os deslocamentos e rotações do ponto H podem ser escritos em função dos deslocamentos e rotações do centro de torção como

$$u_H = u - (y_H - y_c) \varphi_z$$

$$v_H = v + (x_H - x_c) \varphi_z$$

$$\varphi_{zH} = \varphi_z$$

Assim, as forças e momentos de torção adicionais a serem considerados nas equações de equilíbrio para barras com apoios elásticos são:

$$f_{x\beta} = -\beta_x \left[ u - (y_H - y_c) \varphi_z \right] \quad (2.3.34.a)$$

$$f_{y\beta} = -\beta_y \left[ v + (x_H - x_c) \varphi_z \right] \quad (2.3.34.b)$$

$$m_{z\beta} = -\beta_\varphi \varphi_z + \beta_x (y_H - y_c) u - \beta_y (x_H - x_c) v - \left[ \beta_x (y_H - y_c)^2 + \beta_y (x_H - x_c)^2 \right] \varphi_z \quad (2.3.34.c)$$

### 2.3.7 Análise de estabilidade

Nas deduções apresentadas até este ponto, admite-se que os esforços solicitantes na seção transversal independem dos deslocamentos. São desprezados portanto os esforços solicitantes adicionais decorrentes dos deslocamentos da

barra produzidos pelas tensões normais e de cisalhamento na seção transversal, bem como pelo carregamento externo. Estes efeitos são agora considerados de forma aproximada, nas equações de equilíbrio da barra, para a análise de estabilidade da mesma.

Admite-se para o que segue que, ao atingir a carga crítica, a barra passa da configuração de equilíbrio básica para uma outra próxima a esta, de modo que os incrementos dos deslocamentos e das tensões sejam pequenos. Permanecem válidas, para a configuração final, as equações de equilíbrio sob a forma das expressões 2.3.22, deduzidas para a configuração básica sem o efeito de segunda ordem.

Para a configuração básica, o estado de tensões correspondente está em equilíbrio com o carregamento externo. Assim, para os deslocamentos adicionais resultantes da flambagem da barra, admite-se que o estado de tensões correspondente está em equilíbrio com um carregamento externo fictício, a ser determinado, dado pelas forças transversais  $f_{xN}$  e  $f_{yN}$  e pelo momento de torção  $m_{zN}$ . Os deslocamentos correspondentes à configuração básica são desprezados nesta análise.

### 2.3.7.1 Forças transversais adicionais

Considere-se um elemento ABCD, de comprimento  $dz$  e largura  $ds$ , conforme indicado na fig. 2.3.9. Os deslocamentos do ponto  $M(z,s)$  nas direções  $x$  e  $y$  são dados pelas expressões 2.3.1. Adotando-se como polo o centro de torção, tem-se

$$u_M = u - (y - y_c) \varphi_z$$

$$v_M = v + (x - x_c) \varphi_z$$



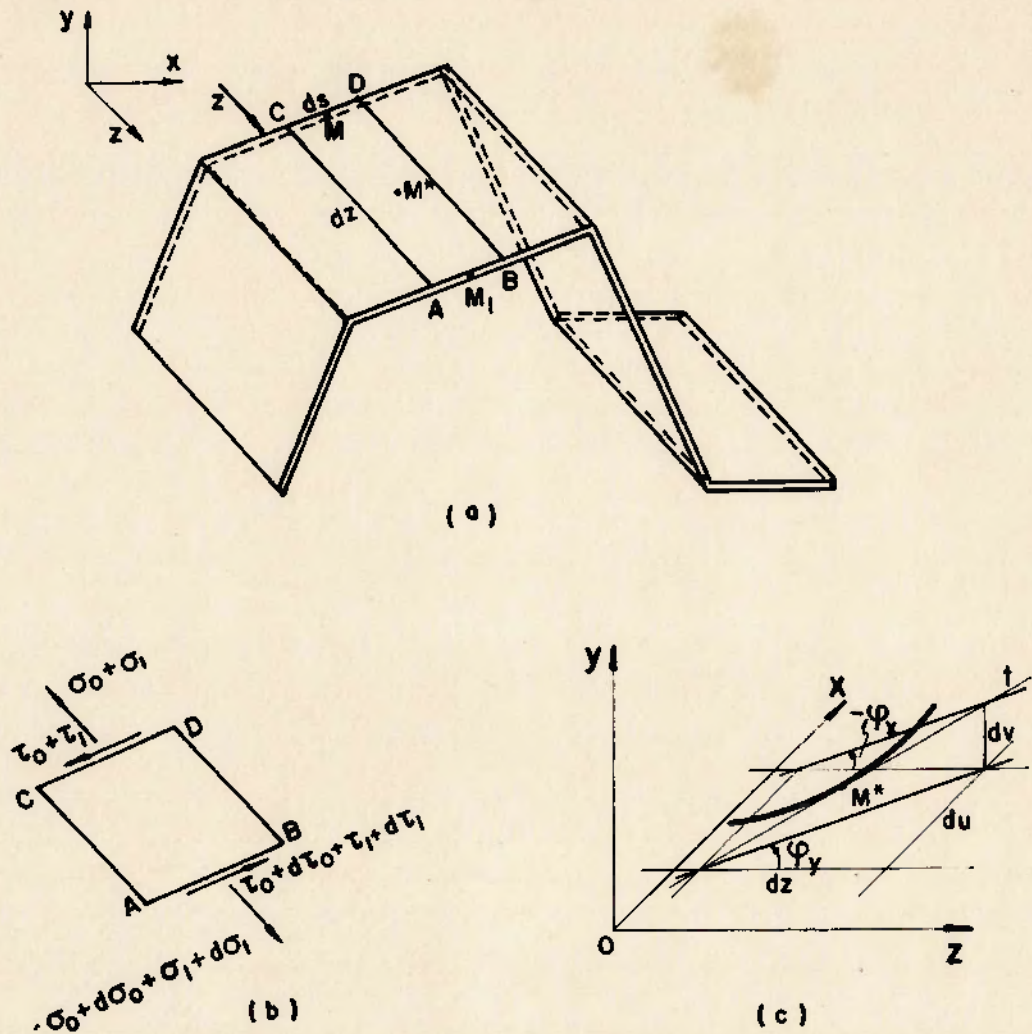


FIG. 2.3.9 Análise de estabilidade - deslocamentos e tensões

Após a deformação, a geratriz da superfície média passando por  $M$ , inicialmente reta e paralela a  $z$ , transforma-se numa curva espacial. Os ângulos que as projeções da tangente a esta curva nos planos  $Oxz$  e  $Oyz$  formam com o eixo  $z$ , são dados, aproximadamente, por

$$\varphi_y = u'_M = u' - (y - y_c) \varphi'_z = u' + y_c \varphi'_z - y \varphi'_z \quad (2.3.35.a)$$

$$-\varphi_x = v'_M = v' + (x - x_c) \varphi'_z = v' - x_c \varphi'_z + x \varphi'_z \quad (2.3.35.b)$$

Para o ponto  $M_1$ , situado na seção  $z+dz$ , estes ângulos são  $\varphi_y + d\varphi_y$  e  $-(\varphi_x + d\varphi_x)$ .

Sejam  $(\sigma_0, \tau_0)$  as tensões normais e de cisalhamento calculadas sem considerar o efeito de segunda ordem (expressões 2.3.26 e 2.3.30) e  $(\sigma_1, \tau_1)$  as tensões adicionais decorrentes deste efeito.

As forças resultantes das tensões normais nas seções AB e CD estão inclinadas em relação ao eixo z. Considerando-se por simplicidade que os deslocamentos e as rotações são pequenos o bastante para que os senos de  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  sejam confundidos com os ângulos  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$ , as projeções destas forças nos eixos x e y são dadas, respectivamente, por:

- face CD, projeção em x

$$-(\sigma_0 + \sigma_1) t ds \varphi_y$$

- face CD, projeção em y

$$-(\sigma_0 + \sigma_1) t ds (-\varphi_x)$$

- face AB, projeção em x

$$\begin{aligned} &(\sigma_0 + d\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_1) t ds (\varphi_y + d\varphi_y) \cong \\ &\cong \left[ (\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_0) \varphi_y + \sigma_0 d\varphi_y \right] t ds \end{aligned}$$

- face AB, projeção em y

$$\begin{aligned} &(\sigma_0 + d\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_1) t ds (-\varphi_x - d\varphi_x) \cong \\ &\cong \left[ -(\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_0) \varphi_x - \sigma_0 d\varphi_x \right] t ds \end{aligned}$$

Para a face AB, são considerados desprezáveis os produtos de  $d\sigma_1$  pelos ângulos  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  e os produtos de  $d\varphi_x$  e  $d\varphi_y$  pelos incrementos  $d\sigma_0$  e  $d\sigma_1$  e pelas tensões adicionais  $\sigma_1$ . Estas aproximações são aceitáveis para o cálculo da carga crítica

por uma análise de estabilidade de Euler, na qual os deslocamentos anteriores à flambagem são desprezados e se consideram apenas pequenas perturbações em torno da configuração de equilíbrio trivial. Não são adequadas, no entanto, para um estudo mais preciso das barras sob não linearidade geométrica.

A resultante destas forças, dada pela soma dos valores das faces AB e CD, é estaticamente equivalente a uma força transversal distribuída na superfície média, cujas componentes nas direções x e y são dadas respectivamente por

$$p_{x1} dz ds = (\varphi_y d\sigma_0 + \sigma_0 d\varphi_y) t ds$$

$$p_{y1} dz ds = (-\varphi_x d\sigma_0 - \sigma_0 d\varphi_x) t ds$$

ou

$$p_{x1} = \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_0 \varphi_y) t \quad (2.3.36.a)$$

$$p_{y1} = - \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_0 \varphi_x) t \quad (2.3.36.b)$$

Procedendo-se de maneira análoga com as tensões de cisalhamento nas faces AB e CD, pode-se determinar a componente das forças delas resultantes na direção normal à superfície média inicial, visto que a seção gira de um ângulo  $\varphi_z$ . Tem-se então:

- face AB :

$$\begin{aligned} & (\tau_0 + d\tau_0 + \tau_1 + d\tau_1) t ds (\varphi_z + d\varphi_z) \cong \\ & \cong \left[ (\tau_0 + \tau_1 + d\tau_0) \varphi_z + \tau_0 d\varphi_z \right] t ds \end{aligned}$$

- face CD:

$$-(\tau_0 + \tau_1) t \, ds \, \varphi_z$$

A força transversal distribuída equivalente vale, portanto,

$$p_2 = \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 \varphi_z) t$$

e as componentes nas direções x e y são dadas por

$$p_{x2} = - p_2 \sin \theta_H = - \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 \varphi_z) t \sin \theta_H \quad (2.3.37.a)$$

$$p_{y2} = p_2 \cos \theta_H = \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 \varphi_z) t \cos \theta_H \quad (2.3.37.b)$$

As forças transversais totais por unidade de superfície  $p_{xN}$  e  $p_{yN}$  podem ser obtidas somando-se as duas parcelas. Integrando-se estas forças ao longo do contorno da seção, obtém-se as forças transversais fictícias totais num elemento de barra  $dz$ , dadas por

$$f_{xN} = \int_{s_i}^{s_f} p_{xN} \, ds = \int_A \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_0 \varphi_y - \tau_0 \varphi_z \sin \theta_H \right] dA \quad (2.3.38.a)$$

$$f_{yN} = \int_{s_i}^{s_f} p_{yN} \, ds = \int_A \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\sigma_0 \varphi_x + \tau_0 \varphi_z \cos \theta_H \right] dA \quad (2.3.38.b)$$

Note-se que as forças fictícias dependem apenas das tensões  $\sigma_0$  e  $\tau_0$ . Assim, a aproximação adotada equivale a se admitir que os esforços solicitantes da barra correspondentes ao carregamento crítico, determinados através da teoria linear, não se alteram com os deslocamentos pós-críticos.

Substituindo-se nas expressões 2.3.38 os valores de  $\sigma_0$  e  $\tau_0$  de 2.3.26 e 2.3.30 e os de  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  de 2.3.35 e utilizando-se as relações deduzidas no item 2.3.5, pode-se obter:

$$f_{xN} = \left[ N(u' + y_c \varphi_z') \right]' - \left[ M_x \varphi_z \right]'' \quad (2.3.39.a)$$

$$f_{yN} = \left[ N(v' - x_c \varphi_z') \right]' - \left[ M_y \varphi_z \right]'' \quad (2.3.39.b)$$

### 2.3.7.2 Momento de torção adicional

As forças transversais fictícias  $p_{xN}$  e  $p_{yN}$  atuantes no elemento  $ds dz$  produzem um momento de torção em torno do eixo passando pelo centro de torção. Desprezando-se os deslocamentos dos pontos de aplicação de  $p_{xN}$  e  $p_{yN}$ , este momento de torção é dado por

$$\begin{aligned} dm_{z1} dz &= \left[ p_{yN}(x - x_c) - p_{xN}(y - y_c) \right] ds dz = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\sigma_0 u' (y - y_c) + \sigma_0 v' (x - x_c) \right] t ds dz + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varphi_z' \left[ \sigma_0 (x - x_c)^2 + \sigma_0 (y - y_c)^2 \right] \right\} t ds dz + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varphi_z \left[ \tau_0 \cos \theta_M (x - x_c) + \tau_0 \sin \theta_M (y - y_c) \right] \right\} t ds dz \end{aligned}$$

Deve-se notar ainda que, com o deslocamento do elemento da seção transversal  $tds$  para a configuração deformada, o ponto de aplicação das forças tangenciais se desloca, resultando numa variação do momento de torção (fig. 2.3.10). Tomando-se os momentos de torção nas faces AB e CD, o incremento  $dm_{z2}$  vale

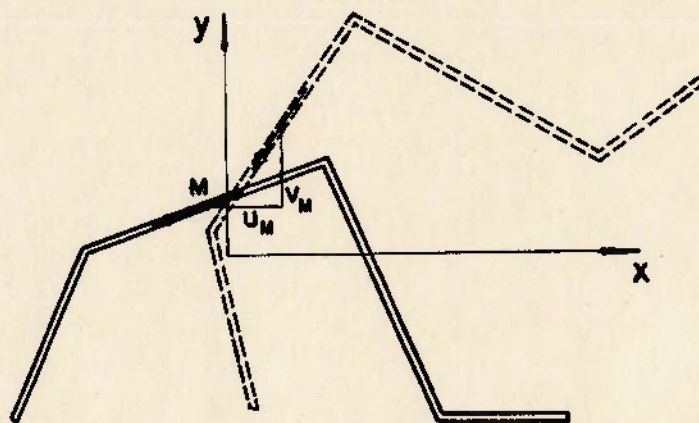


FIG. 2.3.10 Análise de estabilidade - deslocamentos do ponto de aplicação das forças tangenciais

$$\begin{aligned}
 dm_{z_2} dz &= \left[ u_M + \frac{\partial u_M}{\partial z} dz \right] \left[ \tau_0 + \tau_1 + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 + \tau_1) dz \right] \text{sen } \theta_M t ds - \\
 &\quad - u_M [\tau_0 + \tau_1] \text{sen } \theta_M t ds + v_M [\tau_0 + \tau_1] \text{cos } \theta_M t ds \\
 &\quad - \left[ v_M + \frac{\partial v_M}{\partial z} dz \right] \left[ \tau_0 + \tau_1 + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 + \tau_1) dz \right] \text{cos } \theta_M t ds \cong \\
 &\quad \cong \left[ \frac{\partial (\tau_0 \text{sen } \theta_M u_M)}{\partial z} - \frac{\partial (\tau_0 \text{cos } \theta_M v_M)}{\partial z} \right] t ds dz
 \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores de  $u_M$  e  $v_M$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 dm_{z_2} dz &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ u \tau_0 \text{sen } \theta_M - v \tau_0 \text{cos } \theta_M \right] t ds dz - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varphi_z \tau_0 \text{sen } \theta_M (y - y_c) + \varphi_z \tau_0 \text{cos } \theta_M (x - x_c) \right] t ds dz
 \end{aligned}$$

As forças de superfície externas  $p_x$  e  $p_y$  também têm seus pontos de aplicação deslocados, resultando assim em um

momento de torção adicional

$$\begin{aligned} dm_{z_3} dz &= [p_Y u_M - p_X v_M] ds dz = \\ &= \left[ p_Y u - p_X v - \varphi_z p_Y (y - y_c) - \varphi_z p_X (x - x_c) \right] ds dz \end{aligned}$$

O momento de torção adicional por unidade de comprimento pode ser obtido somando-se e integrando-se estas três parcelas na seção transversal, obtendo-se então

$$\begin{aligned} m_{zN} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -u' \int_A \sigma_0 (y - y_c) dA + v' \int_A \sigma_0 (x - x_c) dA + \right. \\ &+ \varphi_z' \int_A \left[ \sigma_0 (x - x_c)^2 + \sigma_0 (y - y_c)^2 \right] dA \left. \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ u \int_A \tau_0 \operatorname{sen} \theta_M dA - v \int_A \tau_0 \operatorname{cos} \theta_M dA \right] + u \int_{s_i}^{s_f} p_Y ds - \\ &- v \int_{s_i}^{s_f} p_X ds - \varphi_z \left[ \int_{s_i}^{s_f} p_X (x - x_c) ds + \int_{s_i}^{s_f} p_Y (y - y_c) ds \right] \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Substituindo-se  $\sigma_0$  de 2.3.26, as três primeiras integrais indicadas na expressão 2.3.40, que representam a contribuição das tensões normais para o momento de torção adicional, podem ser escritas como

$$\int_A \sigma_0 (y - y_c) dA = -y_c N + M_X \quad (2.3.41.a)$$

$$\int_A \sigma_0 (x - x_c) dA = -x_c N - M_Y \quad (2.3.41.b)$$

$$\begin{aligned}
\int_A \left[ \sigma_0 (x - x_c)^2 + \sigma_0 (y - y_c)^2 \right] dA &= \frac{I_0}{A} N + \\
+ \left[ \frac{I_y H_x - I_{xy} H_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} - 2y_c \right] M_x - \left[ \frac{I_{xy} H_x - I_x H_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} - 2x_c \right] M_y + \frac{H_\omega}{I_\omega} M_\omega &= \\
= r_o^2 N + 2r_{oy} M_x - 2r_{ox} M_y + r_{o\omega} M_\omega & \quad (2.3.41.c)
\end{aligned}$$

Nestas expressões, os eixos  $x$  e  $y$  são tomados passando pelo centro de gravidade e as propriedades setoriais calculadas em relação ao centro de torção. O momento polar de inércia da seção em torno do centro de torção vale

$$I_0 = I_x + I_y + A(x_c^2 + y_c^2)$$

$H_x$ ,  $H_y$  e  $H_\omega$  são parâmetros de assimetria da seção dados por

$$H_x = \int_A y(x^2 + y^2) dA \quad H_y = -\int_A x(x^2 + y^2) dA \quad H_\omega = \int_A \omega(x^2 + y^2) dA$$

A contribuição da força normal para o momento de torção adicional foi estudada inicialmente por H. Wagner (ref. Chen, Atsuta, 1977). O termo da expressão 2.3.41.c, embora contenha também outros esforços solicitantes, é aqui denominado termo de Wagner.

As duas integrais correspondentes à contribuição das tensões de cisalhamento são dadas, em vista de 2.3.27 e 2.3.31, por

$$\int_A \tau_0 \operatorname{sen} \theta_n dA = \int_A \tau_0 t dy = V_y = M'_x \quad (2.3.42.a)$$



$$\int_A \tau_0 \cos \theta_n dA = \int_A \tau_0 t dx = V_x = -M'_y \quad (2.3.42.b)$$

Quanto à contribuição das forças externas de superfície, tem-se

$$\int_{s_i}^{s_f} p_y ds = f_y \quad (2.3.43.a)$$

$$\int_{s_i}^{s_f} p_x ds = f_x \quad (2.3.43.b)$$

$$\int_{s_i}^{s_f} p_x (x - x_c) ds + \int_{s_i}^{s_f} p_y (y - y_c) ds = f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c) \quad (2.3.43.c)$$

onde  $e_x$  e  $e_y$  são as coordenadas do ponto de aplicação das cargas transversais  $f_x$  e  $f_y$ . Este termo se anula se as forças transversais são aplicadas no polo, admitido nesta dedução coincidente com o centro de torção.

Substituindo-se estas expressões em 2.3.40 e levando-se em conta que

$$f_x = -V'_x = M''_y \quad f_y = -V'_y = -M''_x \quad , \quad \text{tem-se}$$

$$\begin{aligned} m_{ZN} = & y_c [N u']' - x_c [N v']' - u'' M_x - v'' M_y + \\ & + \left[ (r_o^2 N + 2 r_{oy} M_x - 2 r_{ox} M_y + r_{o\omega} M_\omega) \varphi'_z \right]' - \\ & - \varphi_z [f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c)] \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Nas aplicações desta expressão ao cálculo da carga crítica

de uma barra, é usual que a força normal seja o único esforço solicitante e que as forças transversais passem pelo centro de torção. Neste caso, tem-se

$$m_{zN} = y_c [N u']' - x_c [N v']' + [r_0^2 N \varphi_z']' \quad (2.3.45)$$

### 2.3.7.3 Equações de equilíbrio

As equações diferenciais de equilíbrio a serem utilizadas para a análise de estabilidade da barra podem ser obtidas das expressões 2.3.22, substituindo-se as forças transversais e o momento de torção pelos valores dados por 2.3.39 e 2.3.44 e adicionando-se o efeito dos apoios elásticos dado por 2.3.34. Resultam então as seguintes expressões:

$$EAw_0'' = 0 \quad (2.3.46.a)$$

$$\begin{aligned} EI_y u^{IV} - EI_{xy} v^{IV} - [N (u' + y_c \varphi_z')] + [M_x \varphi_z]'' + \\ + \beta_x [u - (y_H - y_c) \varphi_z] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.46.b)$$

$$\begin{aligned} -EI_{xy} u^{IV} + EI_x v^{IV} - [N (v' - x_c \varphi_z')] + [M_y \varphi_z]'' + \\ + \beta_y [v + (x_H - x_c) \varphi_z] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.46.c)$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \varphi_z^{IV} - GI_t \varphi_z'' - y_c [N u']' + x_c [N v']' + u'' M_x + v'' M_y - \\ - [ (r_0^2 N + 2r_{oy} M_x - 2r_{ox} M_y + r_{o\omega} M_\omega) \varphi_z' ] + \beta_\varphi \varphi_z - \beta_x (y_H - y_c) u + \\ + \beta_y (x_H - x_c) v + [ \beta_x (y_H - y_c)^2 + \beta_y (x_H - x_c)^2 ] \varphi_z + \\ [ f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c) ] \varphi_z = 0 \end{aligned} \quad (2.3.46.d)$$

Recorde-se que os deslocamentos  $u$  e  $v$ , assim como as propriedades setoriais da seção transversal e o parâmetro  $r_0$ , são calculados em relação ao centro de torção. Os momentos e o produto de inércia, os momentos fletores e os parâmetros de assimetria  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_\omega$ , dos quais resultam  $r_{0x}$ ,  $r_{0y}$  e  $r_{0\omega}$ , são calculados para os eixos passando pelo centro de gravidade da seção transversal.

#### 2.3.7.4 Energia potencial total do sistema

A expressão da diferença entre a energia potencial total do sistema para a configuração imediatamente anterior à flambagem e para a configuração deformada pode ser obtida a partir das equações diferenciais de equilíbrio, utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais. Esta expressão não foi deduzida por Vlasov (1961) e, quando apresentada na literatura, não vem acompanhada de uma discussão das condições de contorno correspondentes.

Multiplicando-se o primeiro membro das expressões 2.3.46.a a 2.3.46.d respectivamente pelos deslocamentos virtuais  $\delta w_0$ ,  $\delta u$ ,  $\delta v$  e  $\delta \varphi_2$  e integrando-se por partes ao longo do comprimento da barra, obtém-se os termos componentes da expressão da primeira variação da energia potencial total. Indicando-se em separado os termos correspondentes às condições de contorno tem-se,

de 2.3.46.a,

$$-EA \int_0^L \delta \left( \frac{1}{2} w_0'^2 \right) dz \quad (2.3.47.a)$$

$$EA w_0' \delta w_0 \Big|_0^L = \bar{N} \delta w_0 \Big|_0^L \quad (2.3.47.b)$$

de 2.3.46.b,

$$\begin{aligned}
 & EI_Y \int_0^L \delta \left( \frac{1}{2} u''^2 \right) dz - EI_{XY} \int_0^L v'' \delta u'' dz + \int_0^L N \delta \left( \frac{1}{2} u'^2 \right) dz + \\
 & + \int_0^L N y_c \phi'_z \delta u' dz - \int_0^L M'_x \phi_z \delta u' dz - \int_0^L M_x \phi'_z \delta u' dz + \\
 & + \int_0^L \beta_x \delta \left( \frac{1}{2} u^2 \right) dz - \int_0^L \beta_x (y_H - y_c) \phi_z \delta u dz \quad (2.3.47.c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (EI_Y u'''' - EI_{XY} v''') \delta u \Big|_0^L + \left[ (M_x \phi_z)' - N(u' + y_c \phi'_z) \right] \delta u \Big|_0^L - \\
 & - (EI_Y u'' - EI_{XY} v'') \delta u' \Big|_0^L = (V_{xN} - \bar{V}_x) \delta u \Big|_0^L - \bar{M}_y \delta u' \Big|_0^L \quad (2.3.47.d)
 \end{aligned}$$

de 2.3.46.c,

$$\begin{aligned}
 & EI_X \int_0^L \delta \left( \frac{1}{2} v''^2 \right) dz - EI_{XY} \int_0^L u'' \delta v'' dz + \int_0^L N \delta \left( \frac{1}{2} v'^2 \right) dz - \\
 & - \int_0^L N x_c \phi'_z \delta v' dz - \int_0^L M'_y \phi_z \delta v' dz - \int_0^L M_y \phi'_z \delta v' dz + \\
 & + \int_0^L \beta_y \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right) dz + \int_0^L \beta_y (x_H - x_c) \phi_z \delta v dz \quad (2.3.47.e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (EI_X v'''' - EI_{XY} u''') \delta v \Big|_0^L + \left[ (M_y \phi_z)' - N(v' - x_c \phi'_z) \right] \delta v \Big|_0^L - \\
 & - (EI_X v'' - EI_{XY} u'') \delta v' \Big|_0^L = (V_{yN} - \bar{V}_y) \delta v \Big|_0^L + \bar{M}_x \delta v' \Big|_0^L \quad (2.3.47.f)
 \end{aligned}$$

de 2.3.46.d,

$$\begin{aligned}
& EI_{\omega} \int_0^L \delta \left( \frac{1}{2} \varphi_z''^2 \right) dz + GI_t \int_0^L \delta \left( \frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + y_c \int_0^L Nu' \delta \varphi_z' dz - \\
& - x_c \int_0^L Nv' \delta \varphi_z' dz - \int_0^L M_x u' \delta \varphi_z' dz - \int_0^L M_x' u' \delta \varphi_z dz - \int_0^L M_y v' \delta \varphi_z' dz - \\
& - \int_0^L M_y' v' \delta \varphi_z dz + \int_0^L \left[ r_0^2 N + 2r_{0y} M_x - 2r_{0x} M_y + r_{0\omega} M_{\omega} \right] \delta \left( \frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + \\
& + \int_0^L \beta_{\varphi} \delta \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) dz - \int_0^L \beta_x (y_H - y_c) u \delta \varphi_z dz + \int_0^L \beta_y (x_H - x_c) v \delta \varphi_z dz + \\
& + \int_0^L \left[ \beta_x (y_H - y_c)^2 + \beta_y (x_H - x_c)^2 \right] \delta \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) dz + \\
& + \int_0^L \left[ f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c) \right] \delta \left( \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right) dz \quad (2.3.47.g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (EI_{\omega} \varphi_z'' - GI_t \varphi_z') \delta \varphi_z \Big|_0^L - \left[ -u' (-y_c N + M_x) + v' (-x_c N - M_y) + \right. \\
& \left. + (r_0^2 N + 2r_{0y} M_x - 2r_{0x} M_y + r_{0\omega} M_{\omega}) \varphi_z' \right] \delta \varphi_z \Big|_0^L - EI_{\omega} \varphi_z'' \delta \varphi_z' \Big|_0^L = \\
& = (T_N^* - \bar{T}) \delta \varphi_z \Big|_0^L - \bar{M}_{\omega} \delta \varphi_z' \Big|_0^L \quad (2.3.47.h)
\end{aligned}$$

onde  $\bar{N}$ ,  $\bar{V}_x$ ,  $\bar{V}_y$ ,  $\bar{M}_x$ ,  $\bar{M}_y$ ,  $\bar{T}$  e  $\bar{M}_{\omega}$  são os esforços solicitantes devidos à mudança de configuração da barra a partir da configuração básica,  $V_{xN}$  e  $V_{yN}$  são as forças cortantes decorrentes das forças transversais fictícias, ou seja,  $V'_{xN} = -f_{xN}$  e  $V'_{yN} = f_{yN}$ , e  $T_N^*$  é a parcela do momento de torção total devido às forças fictícias correspondente às tensões normais, já que o termo entre colchetes de 2.3.47.h é idêntico ao primeiro termo entre chaves da expressão 2.3.40. Deste modo, obtém-se  $T_N^* = m_{zN}^*$ , onde  $m_{zN}^*$  é o momento de torção fictício por unidade de comprimento proveniente apenas das tensões normais.

As expressões 2.3.47.b, 2.3.47.d, 2.3.47.f e 2.3.47.h

correspondem às condições de contorno do problema. Se anulam se os deslocamentos virtuais  $\delta w_0$ ,  $\delta u$ ,  $\delta u'$ ,  $\delta v$ ,  $\delta v'$ ,  $\delta \varphi_z$  ou  $\delta \varphi'_z$  nas extremidades são nulos (condições de contorno essenciais) ou se os termos correspondentes aos esforços solicitantes são nulos nas extremidades (condições de contorno naturais), ou seja,

$$\bar{M}_X = 0 \quad , \quad \bar{M}_Y = 0 \quad , \quad \bar{M}_\omega = 0 \quad \bar{N} = 0$$

$$\bar{V}_X = V_{XN} \quad , \quad \bar{V}_Y = V_{YN} \quad , \quad \bar{T} = T_N^* \quad (z = 0, L)$$

Somando-se as equações 2.3.47.a, 2.3.47.c, 2.3.47.e e 2.3.47.g, combinando-se os termos comuns e utilizando-se as relações 2.3.42, tem-se

$$\begin{aligned} & EA \int_0^L \delta \left[ \frac{1}{2} w_0'^2 \right] dz + EI_Y \int_0^L \delta \left[ \frac{1}{2} u''^2 \right] dz + EI_X \int_0^L \delta \left[ \frac{1}{2} v''^2 \right] dz - \\ & - EI_{XY} \int_0^L \delta (u''v'') dz + EI_\omega \int_0^L \delta \left[ \frac{1}{2} \varphi_z''^2 \right] dz + GI_t \int_0^L \delta \left[ \frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right] dz + \\ & + \int_0^L N \delta \left[ \frac{1}{2} u'^2 \right] dz + \int_0^L N \delta \left[ \frac{1}{2} v'^2 \right] dz + \int_0^L N y_c \delta (u' \varphi_z') dz - \\ & - \int_0^L N x_c \delta (v' \varphi_z') dz - \int_0^L M_X \delta (u' \varphi_z') dz - \int_0^L M_Y \delta (v' \varphi_z') dz - \\ & - \int_0^L V_Y \delta (u' \varphi_z) dz + \int_0^L V_X \delta (v' \varphi_z) dz + \\ & + \int_0^L \left[ r_0^2 N + 2 r_{0y} M_X - 2 r_{0x} M_Y + r_{0\omega} M_\omega \right] \delta \left[ \frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right] dz + \\ & + \int_0^L \beta_X \delta \left[ \frac{1}{2} u^2 \right] dz + \int_0^L \beta_Y \delta \left[ \frac{1}{2} v^2 \right] dz + \int_0^L \beta_\varphi \delta \left[ \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right] dz - \\ & - \int_0^L \beta_X (y_H - y_c) \delta (u \varphi_z) dz + \int_0^L \beta_Y (x_H - x_c) \delta (v \varphi_z) dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^L \left[ \beta_x (y_H - y_c)^2 + \beta_y (x_H - x_c)^2 \right] \delta \left[ \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right] dz + \\
& + \int_0^L \left[ f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c) \right] \delta \left[ \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right] dz
\end{aligned}$$

Tendo em vista que as forças externas  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  e  $m_z$  e os esforços solicitantes  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_\omega$  não se alteram com os deslocamentos virtuais aplicados à barra, a expressão acima pode ser considerada a primeira variação do seguinte funcional:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA w_0'^2 + EI_y u''^2 + EI_x v''^2 - 2EI_{xy} u''v'' + EI_\omega \varphi_z''^2 + GI_t \varphi_z'^2 \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L N \left[ u'^2 + v'^2 + 2y_c u' \varphi_z' - 2x_c v' \varphi_z' \right] dz - \int_0^L \varphi_z' (M_x u' + M_y v') dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_z'^2 \left[ r_0^2 N + 2r_{oy} M_x - 2r_{ox} M_y + r_{o\omega} M_\omega \right] dz + \int_0^L \varphi_z (V_x v' - V_y u') dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \beta_x \left[ u - (y_H - y_c) \varphi_z \right]^2 + \beta_y \left[ v + (x_H - x_c) \varphi_z \right]^2 + \beta_\varphi \varphi_z^2 \right\} dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c) \right] \varphi_z^2 dz \tag{2.3.48}
\end{aligned}$$

Embora corresponda à diferença da energia potencial entre a configuração deformada e a configuração reta imediatamente anterior à flambagem, este funcional é referido na literatura como sendo o da própria energia potencial total do sistema. A condição  $\delta U = 0$  é assim condição suficiente para o equilíbrio da configuração considerada. A utilização desta expressão é comentada no capítulo 3.

### 2.3.7.5 Observações

As expressões do funcional da energia potencial total e das condições de contorno provenientes da aplicação do método descrito no item anterior dependem da forma de integração por partes adotada.

Tomem-se como exemplo os termos em  $M_x$  das expressões 2.3.46.b e 2.3.46.d. No item 2.3.7.4, optou-se pela forma

$$\int_0^L (M_x \varphi_z)'' \delta u \, dz + \int_0^L u'' M_x \delta \varphi_z \, dz = (M_x \varphi_z)' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L M_x' \varphi_z \delta u' \, dz - \int_0^L M_x \varphi_z' \delta u' \, dz + u' M_x \delta \varphi_z \Big|_0^L - \int_0^L u' M_x \delta \varphi_z' \, dz - \int_0^L u' M_x' \delta \varphi_z \, dz$$

de onde resultam a parcela do funcional da energia potencial total dada por

$$-\int_0^L M_x \varphi_z' u' \, dz - \int_0^L V_y \varphi_z u' \, dz \quad (2.3.49)$$

e os termos em  $M_x$  das condições de contorno 2.3.47.d e 2.3.47.h.

Por outro lado, adotando-se a integração por partes sob a forma

$$\int_0^L (M_x \varphi_z)'' \delta u \, dz + \int_0^L u'' M_x \delta \varphi_z \, dz = -M_x \varphi_z \delta u' \Big|_0^L + (M_x \varphi_z)' \delta u \Big|_0^L + \int_0^L M_x \varphi_z \delta u'' \, dz + \int_0^L u'' M_x \delta \varphi_z \, dz$$

resulta uma parcela do funcional da energia potencial total



sob a forma

$$+ \int_0^L M_x \varphi_z u'' dz \quad (2.3.50)$$

ou seja, não comparece a força cortante. Um termo sob esta forma é encontrado em Timoshenko, Gere (1961) para análise de flambagem lateral de vigas.

Deve-se notar que as condições de contorno 2.3.47.d e 2.3.47.h são de fácil interpretação física, embora sejam função das forças fictícias. Já o procedimento aqui indicado resulta nas condições de contorno

$$\begin{aligned} (V_{xN} - \bar{V}_x) \delta u \Big|_0^L &= 0 & (\bar{M}_y + M_x \varphi_z) \delta u' \Big|_0^L &= 0 \\ (T_N - \bar{T}) \delta \varphi_z \Big|_0^L &= 0 & \bar{M}_\omega \delta \varphi_z' \Big|_0^L &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$T'_N = m_{zN} + u'' M_x + v'' M_y + \varphi_z [f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c)] = m_{zN}^* + [u' M_x + v' M_y]'$$

As expressões em  $\delta u'$  e  $\delta \varphi_z$  passam a conter termos com os deslocamentos e com os esforços solicitantes resultantes das forças aplicadas e das forças fictícias, sendo portanto de difícil interpretação física.

Como consequência do acima exposto, encontram-se na literatura diferentes expressões para o funcional da energia potencial total, onde em particular os termos que contêm as forças cortantes e os momentos fletores diferem bastante. Considera-se fundamental, portanto, estabelecer a expressão da energia potencial total a partir de uma teoria não linear geometricamente exata, e então adotar-se as simplificações que permitam, através de uma análise linearizada de

estabilidade, determinar um valor aproximado do carregamento crítico.

A expressão 2.3.48 é utilizada, no capítulo 3, para a descrição dos modelos de cálculo do carregamento crítico de barras com seção transversal tipo I, U, C e Z. A expressão resultante da linearização de uma teoria geometricamente exata é apresentada no capítulo 4.

**3 INSTABILIDADE POR DISTORÇÃO**  
**CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA**

### 3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre a determinação do momento fletor crítico associado à instabilidade por distorção da seção transversal em seu próprio plano, em regime elástico, de alguns tipos de perfis.

Os modelos aqui descritos fazem uso dos métodos diretos do cálculo das variações para obtenção dos valores extremos do funcional da energia potencial total do sistema, aos quais correspondem os carregamentos críticos. Em vista disso, apresentam-se inicialmente alguns comentários a respeito do método energético para análise de estabilidade.

A instabilidade por distorção de perfis tipo I simétricos em relação ao plano da alma vem sendo muito pesquisada atualmente em razão do uso intensivo, em pontes, de vigas mistas aço-concreto com vigas de aço contínuas, nas quais, por razões estéticas ou econômicas, tem sido necessário reduzir ou mesmo eliminar os enrijecedores e travamentos da aba inferior nas regiões próximas aos apoios internos. Nestes perfis, o centro de gravidade e o centro de torção do perfil como um todo e das abas individualmente estão contidos no plano da alma. Adicionalmente, nas vigas submetidas a carregamento transversal no plano da alma, as tensões de cisalhamento nas abas são idênticas em ambos os lados da alma. Assim, nos perfis isentos de imperfeições geométricas iniciais, a força resultante das tensões de cisalhamento nas abas não provoca deflexão das mesmas no plano horizontal (fig. 3.1.1.a). A barra permanece em sua configuração básica inicial até que o carregamento atinja seu valor crítico, para o qual este estado se torna instável.



FIG. 3.1.1 Tensões de cisalhamento em perfis tipo I e U enrijecido

Os perfis constituídos por chapas dobradas possuem pequena espessura e, frequentemente, pequena largura de aba. Em vista disso, o comportamento da barra pode ser bastante afetado pela distorção da seção transversal. Deve-se ter em conta ainda que os perfis de chapa dobrada são geralmente assimétricos em relação ao plano da alma, e portanto os modelos de cálculo do momento crítico de vigas simétricas tipo I não se aplicam diretamente aos mesmos. A distorção do perfil devida às tensões de cisalhamento nas abas ocorre desde o início do carregamento e não pode, portanto, ser desprezada, a menos que se trate de barras submetidas a momento fletor constante ao longo do vão, nas quais a força cortante é nula (fig. 3.1.1.b).

Embora a carga crítica em regime elástico linear não corresponda, em geral, à carga de colapso das estruturas, este parâmetro tem sido empregado até hoje como um valor de referência, em relação ao qual a carga de colapso é estimada. Para esta estimativa, são muito utilizadas expressões semi-empíricas associadas a parâmetros de esbeltez da barra e à carga crítica em regime elástico (fig. 3.1.2). Estas expressões, apresentadas de diversas formas nas normas de dimensionamento de estruturas de aço,

dependem das imperfeições geométricas iniciais admitidas, da geometria da seção, das tensões residuais resultantes do processo de fabricação do aço e da barra e do comportamento físico do material. Apenas recentemente tem-se procurado considerar no cálculo da carga crítica, de forma teoricamente mais exata, o comportamento não elástico da barra. No entanto, o comportamento pós-crítico permanece praticamente não explorado.

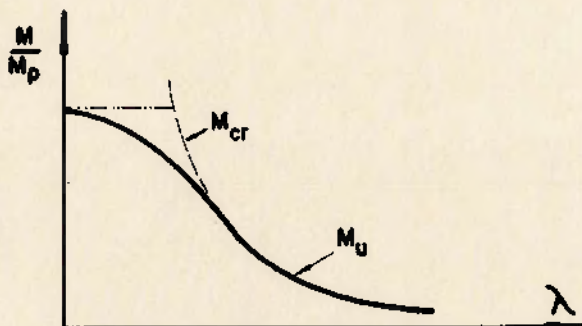


FIG. 3.1.2 Curva semi-empírica  $M/M_p - \lambda$

Para os perfis tipo I, são tratados de forma mais completa apenas três modelos de cálculo da carga crítica: o de Svensson (1985) e o de Goltermann, Svensson (1988), considerados representativos dos modelos analíticos, e o de Bradford, Trahair (1981), representativo dos modelos que utilizam o método dos elementos finitos através de uma discretização em elementos de barra. Esta limitação se deve ao fato de o escopo deste trabalho ser a análise do comportamento de perfis de seção delgada através de teorias de barra. Dá-se ênfase aos modelos analíticos, em vista da facilidade de comparação com a metodologia proposta nesta tese.

Para os perfis de chapa dobrada, são apresentados em pormenor apenas os modelos de Douty (1962) e de Peköz, Soroushian (1982), com ênfase para o primeiro, considerados

representativos dos modelos simplificados desenvolvidos para análise da instabilidade por distorção destes perfis.

Os resultados obtidos por alguns outros autores e os modelos derivados dos aqui descritos são citados quando de interesse. Outros trabalhos consultados encontram-se nas referências bibliográficas.

### 3.2 O MÉTODO ENERGÉTICO

A condição necessária para o equilíbrio de um sistema estrutural elástico sob carregamento conservativo numa determinada configuração cinematicamente admissível é que a energia potencial total passe por um extremo, isto é, que a primeira variação da energia potencial total seja nula. Designando-se por  $\underline{\Delta}$  os deslocamentos generalizados de uma seção transversal, a condição para se atingir uma configuração de equilíbrio é dada por

$$\delta U = \delta U(\underline{\Delta}, \delta \underline{\Delta}) = 0 \quad \forall \delta \underline{\Delta} \quad (3.2.1)$$

Por outro lado, o Teorema de Lagrange-Dirichlet estabelece que uma condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio de um sistema estrutural elástico sob carregamento conservativo em uma determinada configuração é que a energia potencial total seja mínima nesta configuração, isto é, que a segunda variação da energia potencial total seja positiva definida, e portanto

$$\delta^2 U = \delta^2 U(\underline{\Delta}, \delta \underline{\Delta}) > 0 \quad \forall \delta \underline{\Delta} \neq 0 \quad (3.2.2)$$

A transição de estabilidade para instabilidade se dá para uma configuração denominada crítica. Esta configuração pode ser determinada, numa análise não linear de estabilidade, a partir do conhecimento da expressão exata da energia

potencial total, de onde se obtêm as expressões exatas da primeira e da segunda variação da energia potencial total. Para uma sequência de configurações de equilíbrio com carregamento proporcional crescente  $g = \rho g_0$ , o carregamento crítico, dado por  $\rho_{cr}$ , é aquele para o qual existe um  $\delta\Delta \neq 0$  tal que a condição 3.2.2 não é mais satisfeita, ou seja,

$$\exists \delta\Delta \neq 0 \quad / \quad \delta^2 U = \delta^2 U(\Delta, \delta\Delta) = 0 \quad (3.2.3)$$

A análise da instabilidade por distorção de perfis apresentada no capítulo 5 baseia-se neste procedimento.

Pode-se mostrar que a expressão da segunda variação da energia potencial total  $\delta^2 U$  pode ser decomposta em dois termos,  $\delta^2 U_c$  e  $\delta^2 U_g$ , que caracterizam respectivamente os efeitos constitutivos e os efeitos geométricos dos esforços internos  $\sigma$  e dos esforços externos  $g$ . Esta divisão não é única, como será visto no capítulo 4.

Um valor aproximado do carregamento crítico pode ser determinado através de uma análise linearizada de estabilidade, denominada análise de Euler, na qual a expressão exata da segunda variação da energia potencial total é simplificada com a adoção das seguintes hipóteses adicionais:

a) O gradiente dos deslocamentos na configuração crítica é tão pequeno que se possa confundir a configuração imediatamente anterior à flambagem com a configuração de equilíbrio inicial, ou seja,

$$\Delta_{cr} \cong 0 \quad (3.2.4.a)$$

b) As tensões, e portanto os esforços internos generalizados  $g$  calculados para o carregamento  $g = \rho g_0$ , são dados pela teoria linear, logo



$$\underline{\sigma} = \rho \underline{\sigma}_0 \quad (3.2.4.b)$$

onde  $\underline{\sigma}_0$  é a solução da teoria linear para o carregamento  $g_0$ .

Este procedimento permite identificar uma mudança da configuração de equilíbrio e assim determinar um valor aproximado da carga crítica, mas não dá nenhuma indicação quanto à estabilidade da configuração pós-crítica. Esta análise de estabilidade constitui um dos objetivos básicos do trabalho, sendo tratada nos capítulos 4 e 5.

Nos modelos descritos neste capítulo, o valor aproximado da carga crítica é determinado a partir de uma análise linearizada de estabilidade mas, como é prática corrente, com o emprego de uma expressão aproximada da energia potencial total que não é obtida a partir da expressão exata. Este procedimento apresenta imprecisões que são discutidas em pormenor no capítulo 4.

Os valores extremos do funcional da energia potencial total podem ser determinados, em qualquer dos casos, através dos métodos diretos do cálculo das variações, entre os quais os métodos de Ritz e de Galerkin são os mais utilizados.

O campo de deslocamentos é representado, nestes métodos, por funções do tipo

$$\Delta_j^* = \Delta_j^*(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \Delta_{ji} g_{ji}(x, y, z) \quad j = 1 \dots m \quad (3.2.5)$$

onde  $\Delta_j^*$  correspondem aos  $m$  deslocamentos generalizados,  $\Delta_{ji}$  são coeficientes constantes e  $g_{ji}(x, y, z)$  formam uma sucessão de funções cinematicamente admissíveis para o problema, denominadas funções coordenadas.

No método de Ritz, os deslocamentos são substituídos pelas funções 3.2.5 na expressão da energia potencial total,

transformando-se assim o funcional numa função  $U(\Delta_{ji})$ . Estes coeficientes devem ser escolhidos de modo que a função  $U$  tenha um mínimo local para esta configuração.

No método de Galerkin, os deslocamentos 3.2.5 são substituídos diretamente nas equações de equilíbrio do problema, que já representam a condição  $\delta U=0$ . Estas, por sua vez, podem ser obtidas da expressão da energia potencial total impondo-se que as equações de Euler-Lagrange sejam satisfeitas. Os coeficientes  $\Delta_{ji}$  são escolhidos de modo que, sendo  $\underline{\Delta}(x,y,z)$  os deslocamentos exatos e  $L_k[\underline{\Delta}(x,y,z)]=0$  as  $m$  equações de equilíbrio do sistema, tenha-se

$$L_k[\Delta_j^*] - L_k[\underline{\Delta}(x,y,z)]$$

ortogonal, no intervalo considerado, a cada uma das funções coordenadas  $g_{ki}$ , ou seja,

$$\int_0^L \left\{ L_k[\Delta_j^*] - L_k[\underline{\Delta}(x,y,z)] \right\} g_{ki}(x,y,z) dz = 0$$

$$\int_0^L L_k[\Delta_j^*] g_{ki}(x,y,z) dz = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j, k = 1, \dots, m \end{array} \quad (3.2.6)$$

O carregamento crítico é dado pelo menor valor de  $\rho$  que seja a solução do sistema de equações assim obtido.

Outra forma de determinar o carregamento crítico é através do método dos elementos finitos, no qual a estrutura é discretizada em elementos e o campo de deslocamentos em cada elemento é função dos deslocamentos nodais generalizados destes elementos, ou seja,

$$\underline{\Delta} = \underline{\Delta}(\Delta_i^{e1}). \quad (3.2.7)$$

Neste caso, o funcional da energia potencial total também se

transforma numa função  $U(\Delta_i^{e1})$ .

A condição de equilíbrio passa a ser expressa então por um sistema de equações dado por

$$\delta U = U_{,i}(\Delta_k^{e1}) \delta \Delta_i^{e1} = 0 \quad \forall \delta \Delta_i^{e1}, \text{ logo}$$

$$U_{,i}(\Delta_k^{e1}) = 0 \quad (3.2.8)$$

O carregamento crítico é determinado a partir da condição de que existam valores de  $\delta \Delta_i^{e1}$  e  $\delta \Delta_j^{e1}$  não nulos tais que

$$\delta^2 U = U_{,ij}(\Delta_k^{e1}) \delta \Delta_i^{e1} \delta \Delta_j^{e1} = 0 \quad (3.2.9)$$

Na aplicação do método dos elementos finitos, pode-se expressar os termos  $U_{,ij}(\Delta_k^{e1})$  sob forma matricial, tendo-se para cada elemento

$$\underline{k}_T = [U_{,ij}(\Delta_k^{e1})] = \underline{k}_c(\Delta_k^{e1}) + \underline{k}_g(q, \underline{\sigma}, \Delta_k^{e1}) \quad (3.2.10)$$

Esta divisão é análoga à apresentada para a expressão da segunda variação da energia potencial total.  $\underline{k}_T$  é denominada matriz de rigidez tangente do elemento e pode ser decomposta em duas outras, tais que  $\underline{k}_c$  caracterize os efeitos constitutivos e  $\underline{k}_g$  os efeitos geométricos dos esforços internos  $\underline{\sigma}$  e dos esforços externos aplicados  $q$ . Os efeitos de  $\underline{\sigma}$  e de  $q$  são, por vezes, apresentados sob a forma de duas matrizes distintas.

A partir das matrizes  $\underline{k}_T$  de cada elemento, pode-se montar a matriz de rigidez tangente  $\underline{K}_T$  da estrutura. A condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio do sistema é que  $\underline{K}_T$  seja positiva definida. Para a análise de Euler pode-se escrever, em vista de 3.2.4,

$$\underline{K}_T = \underline{K}_c(\underline{0}) + \rho \underline{K}_c(\underline{g}_0, \underline{0}) \quad (3.2.11)$$

onde  $\underline{K}_c$  e  $\underline{K}_G$  são as contrapartes globais de  $K_c$  e  $K_G$ . A solução do problema é obtida através de uma análise de autovalores.

Na análise de Euler, é prática tradicional não calcular a carga crítica diretamente a partir da segunda variação da energia potencial total, mas sim a partir da primeira variação da energia potencial total ou então da diferença entre a energia potencial total para a configuração considerada e para a configuração crítica.

Desenvolvendo-se  $U(\underline{\Delta})$  em séries de Taylor em torno da configuração crítica  $\underline{\Delta}_{cr}$ , tem-se

$$U(\underline{\Delta}_k) = U(\underline{\Delta}_{kcr} + \delta \underline{\Delta}_k) = U(\underline{\Delta}_{kcr}) + U_{,i}(\underline{\Delta}_{kcr}) \delta \Delta_i + \\ + \frac{1}{2} U_{,ij}(\underline{\Delta}_{kcr}) \delta \Delta_i \delta \Delta_j + \dots$$

Sendo  $\underline{\Delta}_{cr}$  uma configuração de equilíbrio, vem que  $U_{,i}(\underline{\Delta}_{kcr}) = 0$ , e assim

$$\Delta U = U(\underline{\Delta}_k) - U(\underline{\Delta}_{kcr}) = \frac{1}{2} U_{,ij}(\underline{\Delta}_{kcr}) \delta \Delta_i \delta \Delta_j + \dots \approx \frac{1}{2} \delta^2 U(\underline{\Delta}_{kcr}) \quad (3.2.12)$$

Com esta simplificação, a carga crítica pode ser calculada diretamente a partir da expressão da energia potencial total, impondo-se  $\Delta U = 0$  a partir da configuração crítica, ao invés de  $\delta^2 U(\underline{\Delta}_k) = 0$ .

Desenvolvendo-se agora  $U_{,i}(\underline{\Delta})$  em séries de Taylor em torno da configuração crítica, tem-se

$$U_{,i}(\underline{\Delta}_k) = U_{,i}(\underline{\Delta}_{kcr}) + U_{,ij}(\underline{\Delta}_{kcr}) \delta \Delta_j + \dots$$

Sendo  $\underline{\Delta}_{cr}$  uma configuração de equilíbrio, tem-se

$$U_{,i}(\underline{\Delta}_{kcr}) = 0.$$

Admitindo-se que  $\underline{\Delta}$  seja uma configuração de equilíbrio, tem-se

$$U_{,i}(\underline{\Delta}_k) \approx U_{,ij}(\underline{\Delta}_{kcr}) \delta\Delta_j = 0 \quad (3.2.13)$$

A carga crítica pode ser calculada, então, a partir da condição de equilíbrio  $\delta U = 0$ .

Nos modelos descritos adiante, ambos os procedimentos podem ser utilizados para o cálculo da carga crítica, em substituição à determinação da segunda variação da energia potencial total.

### 3.3 PERFIS TIPO I - MODELOS ANALÍTICOS

#### 3.3.1 O modelo de Svensson

O modelo de Svensson (1985) trata do cálculo do momento fletor crítico de vigas tipo I contidas lateralmente apenas ao nível de uma das abas (por exemplo a superior, no caso de vigas mistas aço-concreto) e submetidas a um carregamento no plano da alma que resulte em tensões de compressão em toda ou em parte da aba não contida lateralmente. Esta aba é analisada como uma barra inicialmente reta, simplesmente apoiada nas extremidades e submetida apenas a uma força de compressão  $N(z)$  variável ao longo do comprimento. Esta barra se apoia num meio elástico provido pela alma, suposta uma chapa em balanço engastada na mesa superior.

A aba superior tem seus deslocamentos no plano xz e rotações

em torno de  $z$  impedidos. A reação do meio elástico é proporcional à deflexão da aba (fig. 3.3.1), de modo que:

$$\beta_x = - \frac{f_{x\beta}}{u} = \frac{Et_w^3}{4(1-\nu^2)h^3} \quad (3.3.1)$$

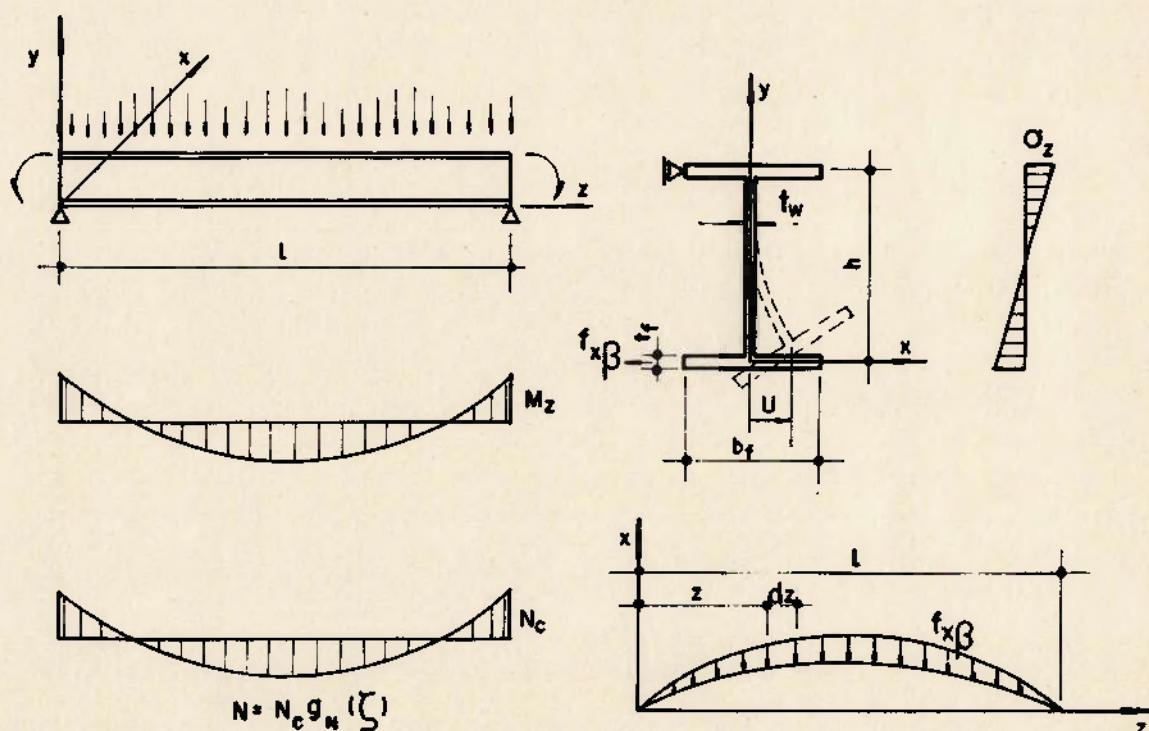


FIG. 3.3.1 Modelo de Svensson

Svensson trata apenas da flambagem por flexão da aba na direção  $x$ , desprezando assim os deslocamentos  $v$  e as rotações  $\varphi_z$ . Sendo o centro de torção da aba coincidente com o encontro aba-alma, e portanto  $y_H = y_C = 0$ , a expressão 2.3.48 se reduz a

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_Y u''^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \beta_x u^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L Nu'^2 dz \quad (3.3.2)$$

O funcional  $U$  pode ser escrito como  $U = \int_0^L F(z, u, u', u'') dz$ , e passa por um extremo se a seguinte equação diferencial de Euler-Lagrange é satisfeita:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0$$

de onde

$$EI_Y u^{IV}(z) - [N u'(z)]' + \beta_X u(z) = 0$$

Esta é a equação diferencial de equilíbrio do problema, conforme já visto na expressão 2.3.46.b.

Substituindo-se  $\zeta = z/L$  e  $N = N_C g_N(\zeta)$  nesta expressão, obtém-se

$$u^{IV}(\zeta) + \pi^2 \rho [g_N(\zeta) u'(\zeta)]' + \frac{\beta_X L^4}{EI_Y} u(\zeta) = 0 \quad (3.3.3.a)$$

onde

$$\rho = \frac{N_C}{N_E} \quad (3.3.3.b)$$

é um parâmetro associado à intensidade do carregamento e

$$N_E = - \frac{\pi^2 EI_Y}{L^2} \quad (3.3.3.c)$$

é a carga crítica de Euler para  $\beta_X = 0$ , sendo indicado como  $\bar{N}_E$  seu valor em módulo.

As deflexões  $u(z)$  são representadas sob a forma

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \operatorname{sen} \frac{i\pi z}{L} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \operatorname{sen} i\pi\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(\zeta) \quad (3.3.4)$$

As funções coordenadas  $f_i(\zeta)$  satisfazem as condições de contorno geométricas do problema  $u(\zeta) = 0$  e  $u''(\zeta) = 0$  para  $\zeta = z/L = 0$  e  $1$ .

Alguns casos particulares são descritos em pormenor, visando sua utilização adiante.

**a) Força normal constante (  $N = N_c$  )**

Este caso particular é apresentado no modelo de Svensson, embora sua solução seja encontrada em trabalhos anteriores a este (ex. Timoshenko, 1961). A expressão aproximada sugerida por Winter (1960) também é indicada, visando sua utilização no modelo descrito no item 3.5.

Tomando-se neste caso  $g_N(\zeta) = 1$  e substituindo-se 3.3.4 em 3.3.3.a, obtém-se

$$\rho = \frac{N}{N_E} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i^4 a_i^2 + \beta_X^* \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 a_i^2} \quad (3.3.5)$$

onde

$$\beta_X^* = \frac{\beta_X L^4}{\pi^4 EI_Y} = \frac{\beta_X L^2}{\pi^2 \bar{N}_E} \quad (3.3.6)$$

Escrevendo-se uma série de frações correspondentes a cada valor de  $i$ , pode-se observar que a expressão 3.3.5 tem como numerador e denominador, respectivamente, a soma dos numeradores e denominadores das frações da série. Como esta soma tem um valor intermediário entre o maior e o menor



termo da série basta, para minimizar  $\rho$  e assim obter seu valor crítico, tomar um termo genérico de ordem  $n$  e torná-lo mínimo. Assim,

$$\rho_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_E} = \left[ n^2 + \frac{\beta_x^*}{n^2} \right] = n^2 \left[ 1 + \frac{\beta_x^* L^2}{n^4 \pi^2 N_E} \right] \quad (3.3.7)$$

Em particular para  $\beta_x^* = 0$  e  $n=1$ , tem-se  $\rho_{cr} = 1$  e  $N_{cr} = N_E$ .

A transição entre a flambagem para  $n$  e  $n+1$  semi-ondas ocorre para um valor de  $\rho_{cr}$  tal que

$$n^2 + \frac{\beta_x^*}{n^2} = (n+1)^2 + \frac{\beta_x^*}{(n+1)^2}$$

de onde

$$\beta_x^* = n^2(n+1)^2 \quad (3.3.8)$$

Para valores muito baixos de  $\beta_x^*$ ,  $\rho$  torna-se mínimo para  $n = 1$  e vale  $\rho_{cr} = 1 + \beta_x^*$ .

Para valores muito altos de  $\beta_x^*$ , pode-se desprezar a unidade na expressão 3.3.8. O número de semi-ondas  $n$  e o comprimento de cada semi-onda tendem para

$$n = \sqrt[4]{\beta_x^*} \quad \text{e} \quad L_{ef}^* = \frac{L}{n} = \pi \sqrt[4]{\frac{EI_y}{\beta_x^*}} \quad (3.3.9.a)$$

Substituindo-se neste caso  $\beta_x^* = n^4$  em 3.3.7, obtém-se

$$\rho_{cr} = 2n^2 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\beta_X L^2}{\bar{N}_E}} = \frac{\sqrt{4\beta_X EI_Y}}{\bar{N}_E} \quad \text{logo,} \quad N_{cr} = - \frac{2\pi^2 EI_Y}{L_{ef}^2} \quad (3.3.9.b)$$

Para  $\beta_X^*$  elevado, a carga crítica é portanto o dobro da de um pilar com mesmo comprimento efetivo mas sem apoio elástico.

Uma aproximação bastante satisfatória para o valor da carga crítica é dada por Winter (1960):

$$\rho_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_E} = 1 + \beta_X^* = 1 + \frac{\beta_X L^2}{\pi^2 \bar{N}_E} \quad 0 \leq \frac{\beta_X L^2}{\bar{N}_E} \leq 30 \quad (3.3.10.a)$$

$$\rho_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_E} = 0.6 + 2 \sqrt{\beta_X^*} = 0.6 + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\beta_X L^2}{\bar{N}_E}} \quad \frac{\beta_X L^2}{\bar{N}_E} > 30 \quad (3.3.10.b)$$

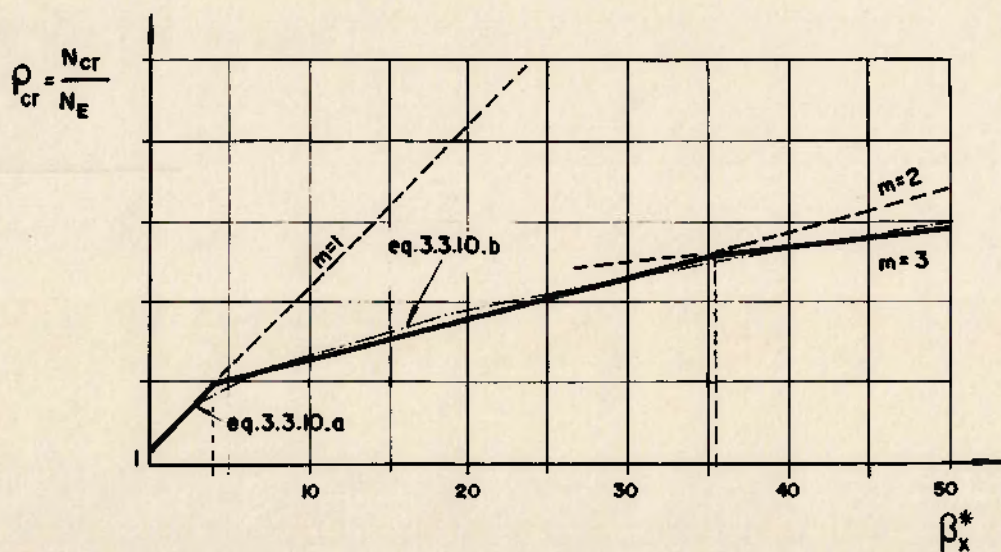


FIG. 3.3.2 Carga crítica conforme Winter (1960)

Estas expressões estão representadas na fig. 3.3.2, juntamente com as retas obtidas através da expressão 3.3.7 para cada valor de  $n$ .

b) Força normal dada pela expressão 3.3.11

$$N(\zeta) = N_c g_N(\zeta) = N_c (a + b\zeta + c\zeta^2) \quad (3.3.11)$$

Substituindo-se 3.3.4 em 3.3.3.a, multiplicando-se a equação assim obtida por cada uma das funções coordenadas  $\text{sen } j\pi\zeta$  e integrando-se ao longo do comprimento da peça tem-se, de acordo com o método de Galerkin,

$$\int_0^1 \text{sen } j\pi\zeta \sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{sen } i\pi\zeta \left[ i^4 \pi^4 + \frac{\beta_x L^4}{EI_y} \right] d\zeta + \pi^3 \rho \int_0^1 \text{sen } j\pi\zeta \sum_{i=1}^{\infty} a_i i [g_N(\zeta) \cos i\pi\zeta]' d\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} (A_{ji} - \rho B_{ji}) a_i = 0$$

$$(j=1, 2, \dots)$$

Utilizando-se as condições de contorno e de ortogonalidade das funções  $f_i(\zeta)$  e integrando-se por partes o termo em  $\rho$ , obtém-se

$$A_{ji} = 0 \quad i \neq j \quad (3.3.12.a)$$

$$A_{ji} = \frac{1}{2} \left[ i^4 \pi^4 + \frac{\beta_x L^4}{EI_y} \right] \quad i=j \quad (3.3.12.b)$$

$$B_{ji} = \pi^4 i j \int_0^1 g_N(\zeta) \cos i\pi\zeta \cos j\pi\zeta d\zeta$$

Para  $g_N(\zeta)$  dado por 3.3.11, obtém-se

$$B_{ji} = \frac{\pi^4}{4} i^2 \left[ 2a + b + \left( \frac{1}{i^2 \pi^2} + \frac{2}{3} \right) c \right] \quad i=j \quad (3.3.13.a)$$

$$B_{ji} = \pi^2 ij \frac{i^2 + j^2}{(j^2 - i^2)^2} \left\{ \left[ (-1)^{i+j} - 1 \right] b + 2(-1)^{i+j} c \right\} \quad i \neq j \quad (3.3.13.b)$$

Soluções aproximadas para cada caso de carregamento podem ser determinadas adotando-se um número  $n$  finito de termos na série 3.3.4, e impondo-se

$$\det (\underline{A}_{ij} - \rho \underline{B}_{ij}) = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.3.14)$$

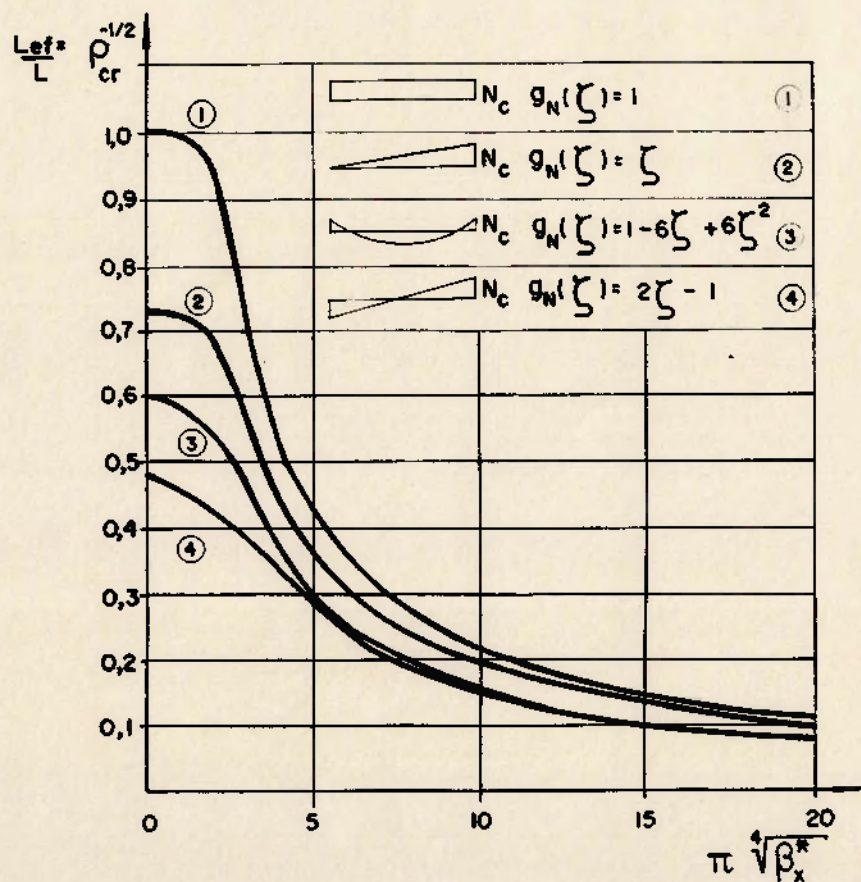


FIG. 3.3.3 Carga crítica conforme Svensson (1985)

Apresenta-se na fig. 3.3.3, para alguns tipos de carregamento, um gráfico com a variação de  $\rho_{cr}^{-1/2} = L_{ef}/L$  com o parâmetro  $\pi \sqrt{\beta_x^*}$ , onde  $L_{ef}$  é o comprimento efetivo convencional de flambagem.

### 3.3.2 O modelo de Goltermann, Svensson

O modelo de Svensson (1985) desconsidera a resistência à torção das abas, assim como o fato de que uma parcela da alma da viga também está submetida à compressão.

Williams, Jemah (1987) sugerem, com base em resultados numéricos obtidos através do método dos elementos finitos utilizando elementos de casca, que se adote uma carga crítica reduzida de acordo com a seguinte expressão:

$$\rho_{cr}^* = \rho_{cr} \frac{b_f t_f}{b_f t_f + 0.15 h_w t_w} \quad (3.3.15)$$

Esta redução equivale a se considerar que 15% da área da alma deve ser adicionada à área da aba inferior, para cálculo da tensão crítica convencional, como seção transversal resistente a  $N_{cr}$ .

Goltermann, Svensson (1988), por sua vez, modificam o modelo original de Svensson (1985) levando em conta a resistência à torção das abas e, ainda, a existência de uma restrição elástica para rotações da aba contida lateralmente.

Os deslocamentos  $u(z)$  da aba são representados sob forma trigonométrica, de acordo com a expressão 3.3.4. Os deslocamentos transversais  $u_w(y, z)$  de qualquer ponto da alma do perfil são proporcionais a  $u(z)$  mas compõem-se ainda de dois termos: o primeiro, sob a forma de um polinômio de

terceiro grau em  $y$ , corresponde à distorção da alma, enquanto que o segundo, linear em  $y$ , corresponde à rotação da seção transversal em torno de um eixo longitudinal passando pelo encontro da aba superior com a alma. De acordo com a fig. 3.3.4, tem-se:

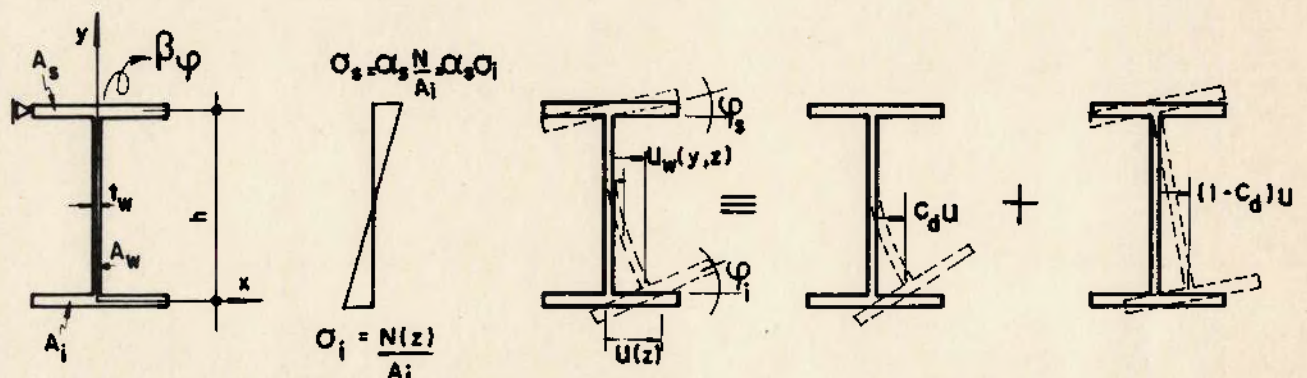


FIG. 3.3.4 O modelo de Goltermann, Svensson

$$u_w = u_w(y, z) = u(z) f(y) = u(z) \left\{ c_d \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{h} \right)^3 \right] + (1 - c_d) \left[ 1 - \frac{y}{h} \right] \right\} \quad (3.3.16)$$

$$\varphi_s(z) = -u_{w,y} \Big|_{y=h} = -u(z) f'(h) = u(z) \frac{1 - c_d}{h} \quad (3.3.17.a)$$

$$\varphi_i(z) = -u_{w,y} \Big|_{y=0} = -u(z) f'(0) = u(z) \frac{1 + 0.5c_d}{h} \quad (3.3.17.b)$$

$$\sigma(y, z) = \frac{N(z)}{A_i} \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha_s)y}{h} \right] = \frac{N(z)}{A_i} g(y) \quad (3.3.18)$$

Na parcela correspondente às abas da expressão da energia potencial total aparecem, agora, os deslocamentos  $u$  da aba inferior e as rotações em torno de  $z$   $\varphi_s$  e  $\varphi_i$  das abas

superior e inferior, ou seja,

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L (EI_{yi} u''^2 + GI_{ti} \varphi_i'^2 + GI_{ts} \varphi_s'^2) dz + \frac{1}{2} \int_0^L \beta_\varphi \varphi_s^2 dz + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L N(z) u'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ N(z) r_{oi}^2 \varphi_i'^2 + \alpha_s \frac{A_s}{A_i} N(z) r_{os}^2 \varphi_s'^2 \right] dz$$

A esta parcela, deve-se adicionar a energia potencial correspondente à alma, dada por (Timoshenko, Gere, 1961)

$$U_2 = \frac{D_w}{2} \int_0^L \int_0^h \left[ u_{w,zz}^2 + u_{w,yy}^2 + 2\nu u_{w,yy} u_{w,zz} + 2(1-\nu) u_{w,yz}^2 \right] dy dz + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^h \sigma t_w u_{w,z}^2 dy dz$$

$$\text{onde } D_w = \frac{E t_w^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.3.19)$$

Substituindo-se as expressões 3.3.16 a 3.3.18 em  $U=U_1+U_2$  e aplicando-se, de modo análogo ao do modelo original de Svensson, a equação de Euler-Lagrange, obtém-se, para  $\zeta=z/L$  e  $N=N_c g_N(\zeta)$ , a seguinte equação diferencial de equilíbrio:

$$u^{IV}(\zeta) + \pi^2 K_1 \rho \left[ \left[ g_N(\zeta) + \frac{K_2}{K_1 \rho} \right] u'(\zeta) \right]' + \frac{\beta_{eq} L^4}{EI_{eq}} u(\zeta) = 0 \quad (3.3.20)$$

Esta equação é similar à expressão 3.3.3 do modelo original de Svensson. Tomando-se então  $u(z)$  sob a forma de uma série trigonométrica, a solução é análoga à do modelo original. Os coeficientes  $K_1$ ,  $K_2$  e  $\beta_{eq}$  da equação 3.3.20 são dados por

$$K_1 = 1 + \left( \frac{r_{yi}}{h} \right)^2 \left[ (0.5C_d + 1)^2 + \alpha_s \frac{I_{ys}}{I_{yi}} (1-C_d)^2 \right] +$$

$$+ \frac{A_w}{A_i} \left[ \frac{2}{105} C_d^2 - \frac{7}{60} C_d + \frac{1}{3} - (1-\alpha_s) \left( \frac{1}{96} C_d^2 - \frac{1}{20} C_d + \frac{1}{12} \right) \right]$$

$$K_2 = \frac{GI_{teq}}{EI_{eq}} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{L}{h} \right)^2$$

$$\beta_{eq} = \frac{1}{h^2} \left[ \beta_\varphi (1 - C_d)^2 + \beta_x h^2 C_d^2 \right]$$

onde  $I_{eq}$  e  $I_{teq}$  são parâmetros que dependem de  $C_d$  mas assumem respectivamente, para os casos usuais, valores próximos de  $I_{yi}$  e  $I_t$ .  $I_t$  é o momento de inércia à torção correspondente a toda a seção transversal.

Note-se que  $C_d$  deve ser determinado, caso a caso, de modo a minimizar a carga crítica. No entanto, por simplicidade, os autores sugerem adotar

$$C_d = \frac{\beta_\varphi}{\beta_\varphi + \beta_x h^2} \quad (3.3.21)$$

A fig. 3.3.5 apresenta os resultados obtidos com este modelo e com o de Svensson para o caso particular de dois perfis tipo VS submetidos a momento fletor constante ao longo do vão ( $\alpha_s = -1$ ). Representam-se, para o modelo de Goltermann, Svensson, os gráficos correspondentes a  $\beta_\varphi = 0$  (e portanto  $C_d = 0$ ), ou seja, aba superior travada apenas para deslocamentos, e a  $\beta_\varphi = \infty$  (e portanto  $C_d = 1$ ), para aba superior travada para deslocamentos e rotações. O modelo de Svensson corresponde ao caso  $C_d = 1$ .



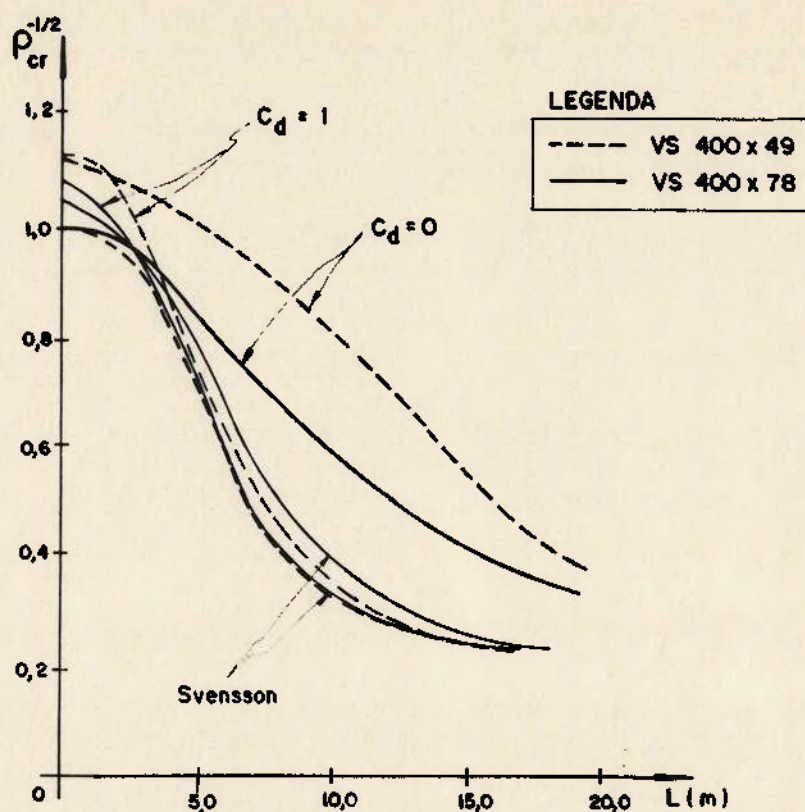


FIG. 3.3.5 Carga crítica conforme Goltermann, Svensson - exemplos

### 3.3.3 Comentários

As expressões de Winter (3.3.10) são utilizadas, na prática, para vigas com momento fletor variável, tomando-se para  $N_{cr}$  o valor correspondente ao máximo momento fletor. Este procedimento só conduz a resultados aceitáveis se o valor de  $\beta_x^*$  é elevado, ou seja, se o número de semi-ondas  $m$  também é elevado, pois neste caso pode-se admitir pequena variação da força normal ao longo de uma semi-onda. Para valores baixos de  $\beta_x^*$ , a fig.3.3.3 mostra que a consideração de momento fletor constante pode estar muito a favor de segurança, sendo por isso aconselhável considerar o carregamento real.

Os resultados obtidos por Goltermann, Svensson mostram que a carga crítica é fortemente afetada pelo tipo de vínculo da aba superior e pela resistência à torção do perfil. Vigas

com pequena rigidez à torção quando comparada à rigidez à flexão da aba inferior possuem geralmente carga crítica inferior à obtida com o modelo de Svensson, enquanto que o inverso ocorre para vigas com grande rigidez à torção. A expressão de Williams, Jemah não corrige portanto, de forma adequada, o valor de  $\rho_{cr}$ .

Nas vigas de pequeno comprimento, a carga crítica pode até ser inferior à carga de Euler enquanto que, nas de grande comprimento, é muito superior. Note-se ainda que, nas vigas em que a aba superior é travada apenas para deslocamentos ( $C_d=0$ ), a carga crítica é consideravelmente inferior à obtida pelo modelo de Svensson.

### 3.4 PERFIS TIPO I - O "MODELO AUSTRALIANO"

O efeito da distorção da seção transversal na instabilidade de perfis tipo I tem sido estudado intensamente por um grupo de pesquisadores ligados à Universidade de New South Wales, Austrália. Estes pesquisadores têm se dedicado principalmente à elaboração de programas para a determinação do carregamento crítico através do método dos elementos finitos e a uma análise paramétrica, visando o estabelecimento de expressões para projeto.

Os primeiros trabalhos publicados tratam de perfis tipo I submetidos a momento fletor constante, cujas abas são simplesmente apoiadas nas extremidades. Embora a formulação apresentada seja matricial, não é feita nestes trabalhos a discretização da estrutura na direção longitudinal. O comportamento da viga é caracterizado por apenas quatro parâmetros, dois referentes aos deslocamentos horizontais das abas superior e inferior e dois referentes às rotações das mesmas em torno do eixo z. Assim, o problema se reduz à determinação de autovalores de uma matriz de ordem quatro.

Embora muito útil para um estudo qualitativo do problema, este tratamento não permite considerar, de forma adequada, a variação dos esforços solicitantes ao longo do vão, bem como o efeito da alteração das condições de vínculo. Em vista disso, os demais trabalhos apresentam uma discretização na direção longitudinal da barra, que permite a solução do problema através do método dos elementos finitos.

Apresenta-se aqui, de forma resumida, o modelo de Bradford, Trahair (1981), bem como alguns resultados dos estudos paramétricos já publicados.

#### 3.4.1 O modelo de Bradford, Trahair

Este modelo apresenta uma análise de perfis I através do método dos elementos finitos, na qual a viga é discretizada na direção longitudinal em elementos que possuem seis graus de liberdade em cada extremidade, três para cada aba: deslocamentos horizontais  $u_s$  e  $u_i$ , rotações  $\varphi_s$  e  $\varphi_i$  em torno do eixo  $z$  e rotações  $u'_s$  e  $u'_i$  em torno do eixo  $y$ . Os termos  $u'_s$  e  $u'_i$  permitem a simulação de restrição à rotação das abas (fig. 3.4.1).

Para o que segue, é adotada a convenção de eixos do trabalho original, modificando-se a notação onde necessário.

##### a) Deslocamentos

Os deslocamentos horizontais das abas no elemento são caracterizados por polinômios cúbicos em  $\zeta=z/l$ , dados por

$$u_s = l(a_1 + a_2\zeta + a_3\zeta^2 + a_4\zeta^3) \quad (3.4.1.a)$$

$$u_i = l(a_5 + a_6\zeta + a_7\zeta^2 + a_8\zeta^3) \quad (3.4.1.b)$$

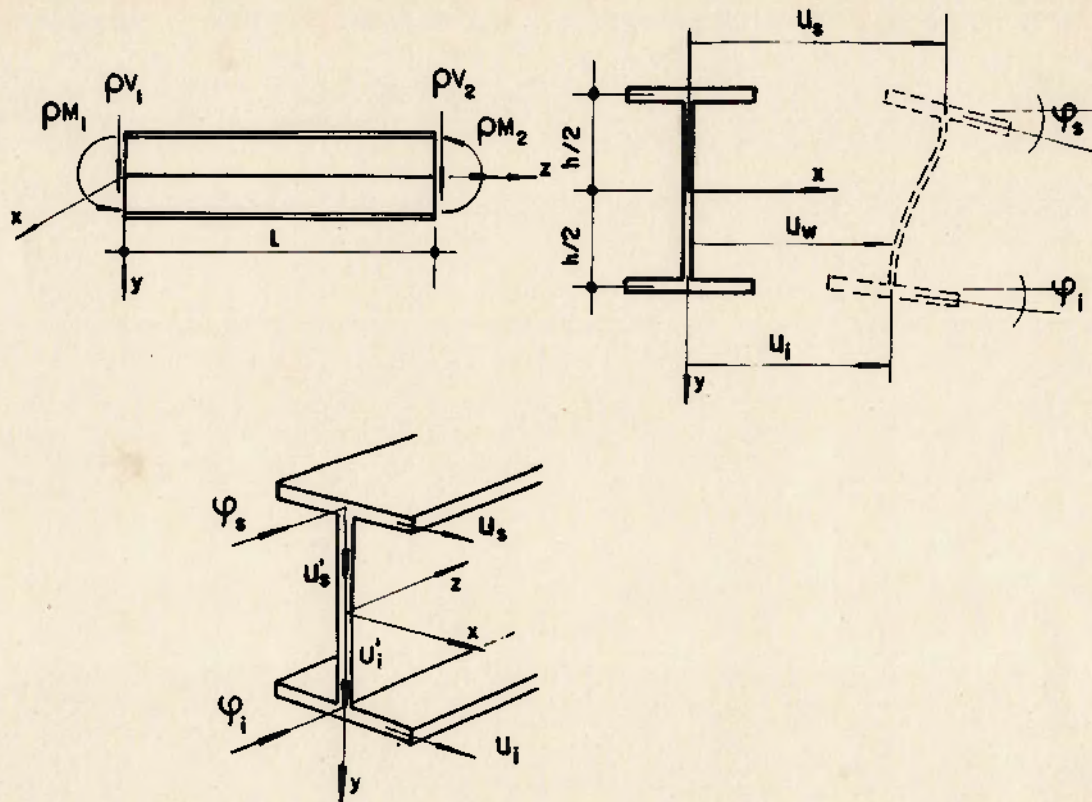


FIG. 3.4.1 O modelo de Bradford, Trahair

As rotações das abas em torno do eixo  $z$  são dadas pelo seu valor médio  $(u_s - u_i)/h$  adicionado de um termo linear em  $\zeta$ . Deste modo, sua variação também é cúbica com  $\zeta$ . Tem-se então

$$\varphi_s = \frac{u_s - u_i}{h} + a_9 + a_{10}\zeta \quad (3.4.2.a)$$

$$\varphi_i = \frac{u_s - u_i}{h} + a_{11} + a_{12}\zeta \quad (3.4.2.b)$$

Derivando-se as expressões 3.4.1 em relação a  $z$ , obtém-se as rotações das abas em torno do eixo  $y$ , dadas por

$$u'_s = a_2 + 2a_3\zeta + 3a_4\zeta^2 \quad (3.4.3.a)$$

$$u'_i = a_6 + 2a_7\zeta + 3a_8\zeta^2 \quad (3.4.3.b)$$

O vetor dos deslocamentos generalizados nodais do elemento é obtido destas expressões substituindo-se, conforme se trate do nó inicial  $\alpha$  ou do nó final  $\beta$ ,  $\zeta = 0$  ou 1. Sendo  $\underline{a}_f$  o vetor dos coeficientes  $a_i$  e  $\underline{C}_f$  uma matriz de transformação, tem-se

$$\underline{\Delta}^{e1} = \{u_{s\alpha}, u_{s\beta}, u'_{s\alpha}, u'_{s\beta}, u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u'_{i\alpha}, u'_{i\beta}, \varphi_{s\alpha}, \varphi_{s\beta}, \varphi_{i\alpha}, \varphi_{i\beta}\}^T = \underline{C}_f \underline{a}_f \quad (3.4.4)$$

Os deslocamentos  $u_w$  da alma são representados por polinômios cúbicos em  $\eta=2y/h$  e em  $\zeta$ , sob a forma

$$u_w = (a_{13} + a_{14}\eta + a_{15}\eta^2 + a_{16}\eta^3) f(\zeta) = \underline{C}_w \underline{C}_f^{-1} \underline{\Delta}^{e1} \quad (3.4.5)$$

A matriz  $\underline{C}_w$  é obtida impondo-se que os deslocamentos da aba e da alma são iguais no ponto em que se encontram e que o ângulo entre ambas permanece reto, ou seja,

$$\begin{aligned} u_s &= u_w \Big|_{\eta=-1} & u_i &= u_w \Big|_{\eta=+1} \\ \varphi_s &= -u_{w,y} \Big|_{\eta=-1} & \varphi_i &= -u_{w,y} \Big|_{\eta=+1} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Os deslocamentos axiais  $w_s$  e  $w_i$  e os deslocamentos verticais  $v_s$  e  $v_i$  de um ponto qualquer da aba são dados por

$$\begin{aligned} w_s &= -xu'_s & w_i &= -xu'_i \\ v_s &= x\varphi_s & v_i &= x\varphi_i \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

#### b) Matrizes de rigidez do elemento

As matrizes de rigidez do elemento são obtidas a partir da

expressão da diferença entre a energia potencial total na configuração reta imediatamente anterior à flambagem e na configuração deformada, adicionando-se à expressão 2.3.48, correspondente às abas, a energia potencial da alma.

$$U^{e1} = U_f + U_w = U_{fL} + U_{fN} + U_{wL} + U_{wN} \quad (3.4.8)$$

Os termos independentes dos esforços solicitantes,  $U_{fL}$  e  $U_{wL}$ , compõem a matriz de rigidez constitutiva  $\underline{k}_c$ , enquanto que os termos dependentes  $U_{fN}$  e  $U_{wN}$  compõem a matriz de rigidez geométrica  $\underline{k}_g$  do elemento.

Deste modo tem-se, para as abas

$$\begin{aligned} U_{fL} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( EI_{ys} u_s''^2 + EI_{yi} u_i''^2 \right) dz + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( GI_{ts} \varphi_s'^2 + GI_{ti} \varphi_i'^2 \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \underline{\varepsilon}_f \cdot \underline{D}_f \underline{\varepsilon}_f dz \end{aligned} \quad (3.4.9.a)$$

onde

$$\underline{\varepsilon}_f = \{u_s'', u_i'', \varphi_s', \varphi_i'\}^T = \underline{B}_f \underline{a}_f = \underline{B}_f \underline{C}_f^{-1} \underline{\Delta}^{e1} \quad (3.4.9.b)$$

$$\underline{D}_f = [EI_{ys}, EI_{yi}, GI_{ts}, GI_{ti}] \quad (3.4.9.c)$$

logo

$$U_{fL} = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \left[ \int_0^1 \underline{C}_f^{-T} \underline{B}_f^T \underline{D}_f \underline{B}_f \underline{C}_f^{-1} dz \right] \underline{\Delta}^{e1} = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \underline{k}_{fc} \underline{\Delta}^{e1} \quad (3.4.10)$$

Analogamente para a alma (Timoshenko, 1961),

$$\begin{aligned}
 U_{wL} &= \frac{1}{2} \int_0^{1+h/2} \int_{-h/2}^{h/2} D_w \left[ u_{w,yy}^2 + u_{w,zz}^2 + 2\nu u_{w,yy} u_{w,zz} + 2(1-\nu) u_{w,yz}^2 \right] dydz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{1+h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\varepsilon}_w \cdot \underline{D}_w \underline{\varepsilon}_w dydz \quad (3.4.11.a)
 \end{aligned}$$

onde

$$\underline{\varepsilon}_w = \{u_{w,yy}, u_{w,zz}, -2u_{w,yz}\} = \underline{B}_w \underline{a}_f = \underline{B}_w \underline{C}_f^{-1} \underline{\Delta}^{e1} \quad (3.4.11.b)$$

$$\underline{D}_w = D_w \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4.11.c)$$

logo

$$\begin{aligned}
 U_{wL} &= \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \left( \int_0^{1+h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{C}_f^{-T} \underline{B}_w^T \underline{D}_w \underline{B}_w \underline{C}_f^{-1} dydz \right) \underline{\Delta}^{e1} = \\
 &= \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \underline{k}_{wc} \underline{\Delta}^{e1} \quad (3.4.12)
 \end{aligned}$$

Tomando-se como referência os valores  $M_1$  e  $V_1$  dos esforços solicitantes para  $\zeta = 0$  tem-se, para carregamento proporcional,

$$\begin{aligned}
 \sigma_w = \sigma_w(y, \zeta) &= -\rho \frac{M_1 + V_1 \zeta l}{I_x} y & \tau_w &= -\rho \frac{V_1}{h_w t_w} \\
 \sigma_s = \sigma_w(-h/2, \zeta) & & \sigma_i &= \sigma_w(h/2, \zeta)
 \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Note-se que eventuais forças distribuídas ao longo de  $l$  são concentradas nos nós, de modo que a variação de momentos fletores possa ser considerada linear.

Substituindo-se 3.4.3, 3.4.7 e  $N = \int_A \sigma \, dA$  na segunda integral de 2.3.48 obtém-se, analogamente,

$$\begin{aligned}
 U_{fN} = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-b_{fs}/2}^{+b_{fs}/2} \sigma_s \left( u_s'^2 + v_s'^2 \right) t_{fs} \, dx dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-b_{fi}/2}^{+b_{fi}/2} \sigma_i \left( u_i'^2 + v_i'^2 \right) t_{fi} \, dx dz = - \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \rho \underline{k}_{fg} \underline{\Delta}^{e1}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.14.a}$$

Para a alma (Timoshenko, 1961), tem-se

$$\begin{aligned}
 U_{wN} = & \frac{t_w}{2} \int_0^1 \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \sigma_w u_{w,z}^2 + 2\tau_w u_{w,y} u_{w,z} \right) \, dy dz = \\
 = & - \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \rho \underline{k}_{wg} \underline{\Delta}^{e1}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.14.b}$$

A variação da energia potencial total do elemento é dada, então, por

$$U^{e1} = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot (\underline{k}_c + \rho \underline{k}_g) \underline{\Delta}^{e1} = \frac{1}{2} \underline{\Delta}^{e1} \cdot \underline{k}_T \underline{\Delta}^{e1}
 \tag{3.4.15.a}$$

onde

$$\underline{k}_c = \underline{k}_{fc} + \underline{k}_{wc}
 \tag{3.4.15.b}$$

$$\underline{k}_g = \underline{k}_{fg} + \underline{k}_{wg}
 \tag{3.4.15.c}$$

### c) Matrizes de rigidez da barra

As matrizes de rigidez da barra  $\underline{K}_C$  e  $\underline{K}_G$  podem ser obtidas facilmente de  $\underline{k}_c$  e  $\underline{k}_g$  dos elementos com o uso de matrizes de



transformação adequadas, já que os elementos estão alinhados.

Sendo  $\underline{\Delta}$  os deslocamentos generalizados da barra, vem que:

$$U = \frac{1}{2} \underline{\Delta} \cdot (\underline{K}_C + \rho \underline{K}_G) \underline{\Delta} \quad (3.4.16.a)$$

Para que a variação da energia potencial seja nula para valores não nulos de  $\underline{\Delta}$  (ver item 3.2), deve-se ter

$$\det(\underline{K}_C + \rho \underline{K}_G) = 0 \quad (3.4.16.b)$$

Desta expressão, obtém-se os autovalores  $\rho$ , ao menor dos quais se associa o carregamento crítico.

### 3.4.2 Estudos paramétricos

O modelo australiano tem sido usado para diversos estudos paramétricos sobre o efeito da distorção da seção transversal na instabilidade de perfis tipo I. Alguns destes estudos são descritos brevemente a seguir.

#### a) Vigas sem contenção lateral

Hancock et al (1980) apresentaram, anteriormente ao trabalho de Bradford, Trahair (1981), um estudo simplificado voltado para vigas submetidas a momento fletor constante, cujas abas são simplesmente apoiadas nas extremidades. Neste estudo, os deslocamentos generalizados das abas e da alma têm variação senoidal ao longo da barra, sob a forma

$$\underline{\Delta}_f = \{u_{0s}, u_{0i}, \varphi_{0s}, \varphi_{0i}\}^T \text{sen } n\pi\zeta$$

$$u_w = (a_1 + a_2 \eta + a_3 \eta^2 + a_4 \eta^3) h \operatorname{sen} \pi \zeta$$

Deste modo, seguindo um procedimento análogo ao já visto no item 3.4.1 mas sem efetuar a discretização da barra na direção longitudinal, os autores reduzem o problema à determinação de autovalores de matrizes de ordem quatro.

Com base neste trabalho, Hancock et al (1980), Bradford, Waters (1988), Bradford (1990a) e Wang et al (1991) apresentam análises paramétricas do termo  $M_{cr}/M_{ocr}$ , onde  $M_{cr}$  é o momento fletor crítico obtido por este método e  $M_{ocr}$  é o da teoria da flambagem lateral de vigas sem distorção da alma, dado por

$$M_{ocr} = \frac{\pi^2 EI_y r_{oy}^*}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{GI_t L^2}{\pi^2 EI_y} + \frac{I_w}{I_y} \right) \frac{1}{r_{oy}^{*2}}} \right] \quad (3.4.17)$$

$r_{oy}^*$  é um parâmetro de assimetria, dado pelo valor de  $r_{oy}$  para  $I_{xy} = 0$  (ver expressão 2.3.41.c).

Constata-se, nesta análise, que  $M_{cr}/M_{ocr}$  se reduz, e portanto o efeito da distorção se acentua, para peças curtas, com pequena área de alma e elevada relação  $h_w/t_w$ . Nos perfis monossimétricos, este efeito é maior para os perfis que possuem abas de menor largura comprimidas.

Bradford, Trahair (1981) apresentam uma análise, para momento fletor constante, do efeito das condições de vínculo das abas na instabilidade da viga. Mostram que a redução do momento fletor crítico em relação a  $M_{ocr}$  se acentua muito quando os deslocamentos laterais de extremidade de uma das abas são liberados, em especial quando esta aba é a comprimida (fig. 3.4.2). Este caso, em particular, é

analisado por Bradford, Trahair (1983), Bradford (1990b) e Bradford (1989a) para vários casos de carga. Neste último, sugere-se a determinação de  $M_{cr}$  com base na expressão do momento crítico para flambagem lateral sem distorção, mas para um comprimento efetivo dado, para vigas simétricas, por

$$L_{ef} = L + n_1 \left( \frac{h_w}{6} \right) \left( \frac{t_f}{t_w} \right)^{n_2} \left( \frac{1+b_f/h_w}{2} \right) \quad (3.4.18)$$

$n_1$  e  $n_2$  dependem do tipo de carregamento da viga e valem respectivamente 1 e 3 para vigas submetidas a momento uniforme. A expressão 3.4.18 se aplica a vigas com  $h_w/t_w \leq 50$  e  $b_f/h_w \leq 1,0$ .

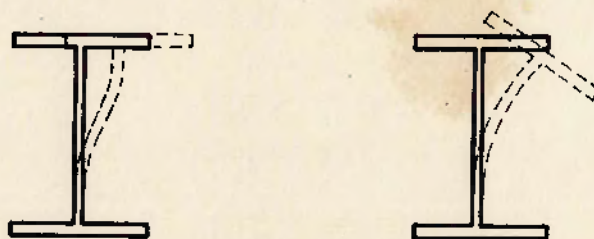


FIG. 3.4.2 Vigas I sem restrição aos deslocamentos laterais das abas

#### b) Vigas com contenção lateral

Johnson, Bradford (1983) apresentam um estudo paramétrico de vigas mistas aço-concreto compostas com perfis I simétricos bi-engastados e submetidos, em regime elástico, a uma carga uniformemente distribuída. Na aplicação do modelo de Bradford, Trahair (1981), os deslocamentos nodais generalizados  $u_s$ ,  $\varphi_s$  e  $u'_s$  são impostos iguais a zero ao longo de toda a viga, ao passo que  $u_i$  e  $\varphi_i$  são nulos apenas nos apoios. O termo  $u'_i$  não é tomado igual a zero no apoio,

de modo a permitir simular o caso de vigas contínuas com flambagem anti-simétrica em relação ao apoio.

Bradford, Zhi Gao (1992), por sua vez, tratam do sistema misto aço-concreto, ou seja, incorporam a laje como elemento resistente à flexão em torno do eixo x nas regiões em que a mesma é comprimida. Apresentam um conjunto de curvas de  $M_{cr}/M_{ocr}$ , onde  $M_{ocr}$  corresponde ao perfil sem contenção lateral, em função de  $L/h$ ,  $h/t_w$ ,  $b_f/h$ ,  $t_f/t_w$  e da relação entre a área de aço e a de concreto.

### 3.5 PERFIS TIPO U ENRIGECIDO - O MODELO DE DOUTY

Douty (1962) apresenta um modelo de cálculo do momento crítico de vigas tipo U enrijecido submetidas a momento fletor constante ao longo do vão. Em decorrência da consideração de momento fletor constante a seção efetiva, composta pela aba comprimida e por uma fração da altura da alma, está submetida a uma força de compressão uniforme, aplicada no centro de gravidade da mesma, cujo valor crítico é calculado neste modelo. Esta hipótese não é exata, dada a variação das tensões normais ao longo da altura da seção efetiva.

A parte colaborante da alma é deduzida analiticamente, embora o resultado final não difira muito, em geral, do adotado por Williams, Jemah (1987), que é 15% da altura da alma.

A barra efetiva se apoia em meio elástico cujo módulo é deduzido por um modelo de pórtico de largura unitária, sendo admitido constante ao longo da barra e independente da intensidade do carregamento.

Desprezam-se os deslocamentos da viga no plano da alma, assim como a distorção da seção transversal da barra efetiva, embora a distorção da seção como um todo seja considerada.

Admite-se ainda que os apoios de extremidade oferecem restrição à rotação da barra em torno do seu próprio eixo e aos deslocamentos no plano da seção transversal e que não impedem rotação no plano da aba, ou seja, a barra efetiva é simplesmente apoiada nas extremidades.

### 3.5.1 Determinação da área efetiva

Considere-se inicialmente que a aba comprimida da viga da fig. 3.5.1, submetida a uma força normal de valor  $\sigma_c A_f$ , está desvinculada do restante do perfil. A equação diferencial de equilíbrio desta aba é a seguinte:

$$EI_{yf} u_f^{IV} - \sigma_c A_f u_f'' = 0 \quad (3.5.1)$$

O termo  $\sigma_c A_f$  pode ser entendido como uma força distribuída fictícia por unidade de comprimento da barra  $f_f$ . De maneira análoga, cada tira de alma de altura unitária, quando submetida à força normal  $\sigma(y) t$ , está sujeita a uma força distribuída fictícia de valor  $f_w = \sigma(y) t u_w''$ .

Admite-se, por simplicidade, que os deslocamentos  $u_w$  sejam lineares com a altura. Esta hipótese está a favor da segurança, já que os deslocamentos reais são inferiores aos correspondentes à variação linear. Tomando-se os eixos de referência passando pelo centro de gravidade da seção, tem-se

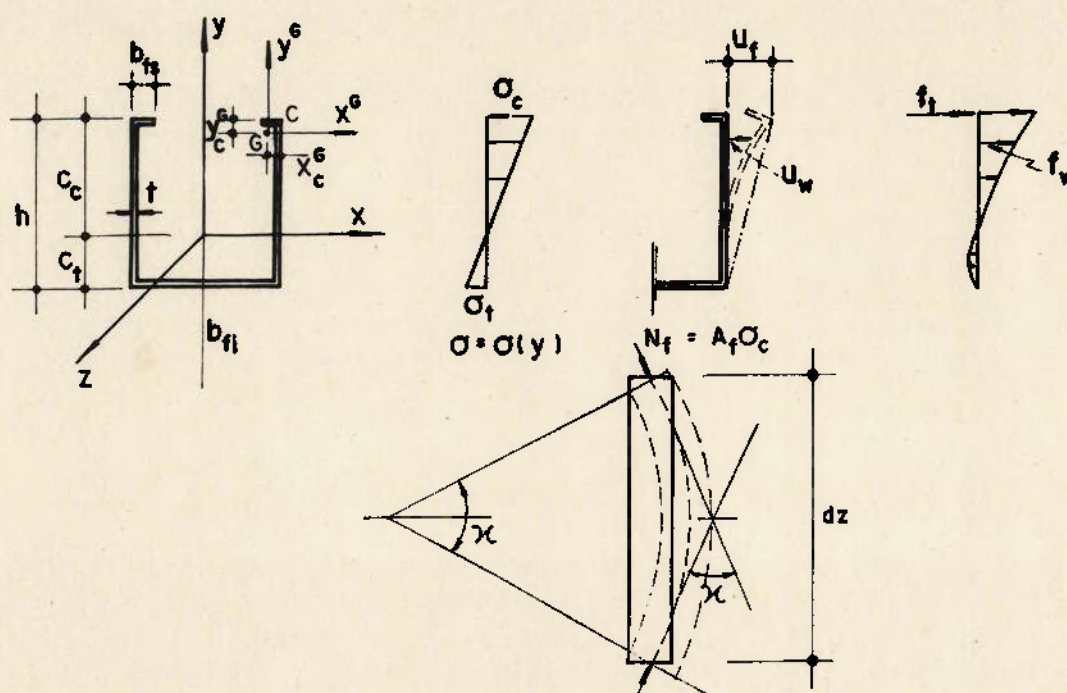


FIG. 3.5.1 O modelo de Douthett (1962)

$$u_w = u_f \frac{y + c_t}{c_c + c_t}$$

e portanto

$$f_w = \sigma_c \frac{y}{c_c} t \frac{y + c_t}{c_c + c_t} u_f''$$

Como a alma possui rigidez muito inferior às abas na direção  $x$ , considera-se que as forças transversais  $f_w$  são transferidas para as abas. Tomando-se os momentos destas forças em relação ao ponto de encontro alma-aba tracionada, pode-se calcular a reação de apoio  $f_{fw}$  da alma na aba comprimida por

$$(c_c + c_t) f_{fw} = \int_{-c_t}^{c_c} (y + c_t) f_w dy = \frac{\sigma_c A_w (c_c + c_t)}{\frac{12c_c}{3c_c - c_t}} u_f''$$

A equação de equilíbrio da aba comprimida submetida às forças distribuídas fictícias  $f_f$  e  $f_{fw}$ , passa a ser

$$EI_{yf} u_f^{IV} - \sigma_c \left[ A_f + \frac{A_w}{\frac{12c_c}{3c_c - c_t}} \right] u_f'' = 0 \quad (3.5.2)$$

O termo entre colchetes corresponde à área efetiva da barra comprimida. A altura colaborante da alma é igual a:

$$h_{ef} = h \frac{3c_c - c_t}{12c_c} = h \left( \frac{1}{3} - \frac{h}{12c_c} \right) \quad (3.5.3)$$

Este valor geralmente é próximo do proposto por Williams, Jemah (1987) para perfis I ( $h_{ef} = 0.15h$ ) e também do de Haussler (1964) para perfis U enrijecidos ( $h_{ef} = c_c/3$ ).

### 3.5.2 Determinação do coeficiente do apoio elástico

A aba comprimida do perfil tipo U enrijecido é tratada como uma barra apoiada elasticamente num pórtico formado pela alma e pela aba tracionada. Este pórtico confere à barra apoios elásticos à torção e à flexão na direção  $x$ , cujos coeficientes são, respectivamente,  $\beta_\varphi$  e  $\beta_x$ .

A seção transversal efetiva aqui analisada tem a forma de um L, e portanto o centro de torção se localiza no encontro

aba-alma. Admite-se neste modelo que a reação do apoio elástico é aplicada no centro de torção da seção.

As forças  $f_x$  e os momentos fletores  $m_z$ , tomados com valores unitários por unidade de comprimento da barra produzem, junto à aba comprimida, os seguintes deslocamentos do pórtico (fig. 3.5.2):

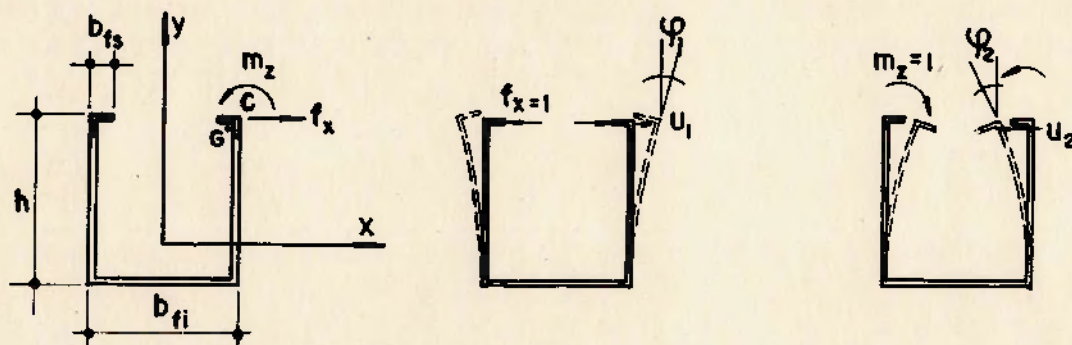


FIG. 3.5.2 Pórtico para determinação do coeficiente do meio elástico

$$u_1 = \frac{h^3}{3EI} + \frac{h^2 b_{fi}}{2EI} \quad (3.5.4.a)$$

$$u_2 = -\frac{h^2}{2EI} - \frac{h b_{fi}}{2EI} = \varphi_1 \quad (3.5.4.b)$$

$$\varphi_2 = \frac{h}{EI} + \frac{b_{fi}}{2EI} \quad (3.5.4.c)$$

Douty adota  $I = t^3/12$ , embora Haussler (1964) proponha que se tome  $I = t^3/12(1-\nu^2)$ , de modo a se considerar o fato de tratar-se de uma tira proveniente de uma chapa de comprimento não desprezável. Compondo-se os efeitos de  $f_x$  e  $m_z$ , tem-se



$$u = f_x u_1 + m_z u_2 \quad (3.5.5.a)$$

$$\varphi_z = f_x \varphi_1 + m_z \varphi_2 \quad (3.5.5.b)$$

$$f_x = \frac{u \varphi_2 - \varphi_z u_2}{u_1 \varphi_2 - u_2^2} \quad e \quad m_z = \frac{\varphi_z u_1 - u u_2}{u_1 \varphi_2 - u_2^2}$$

logo,

$$\beta_x = \frac{f_x}{u} = C_1 - C_2 \frac{\varphi_z}{u} \quad (3.5.6.a)$$

$$\beta_\varphi = \frac{m_z}{\varphi_z} = C_3 - C_2 \frac{u}{\varphi_z} \quad (3.5.6.b)$$

onde

$$C_1 = \frac{\varphi_2}{u_1 \varphi_2 - u_2^2} \quad (3.5.7.a)$$

$$C_2 = \frac{u_2}{u_1 \varphi_2 - u_2^2} \quad (3.5.7.b)$$

$$C_3 = \frac{u_1}{u_1 \varphi_2 - u_2^2} \quad (3.5.7.c)$$

### 3.5.3 Cálculo da carga crítica

As equações diferenciais de equilíbrio são deduzidas a partir da expressão da energia potencial total, com o auxílio das equações de Euler-Lagrange. Ao contrário do modelo de Svensson (1985), que trata apenas da flexão na

direção  $x$ , são considerados simultaneamente os deslocamentos  $u$  e as rotações  $\varphi_z$ , ou seja, leva-se em conta o efeito da torção na instabilidade da barra.

Tomando-se o sistema de referência passando pelo centro de gravidade  $G$  da seção efetiva, considerando-se na expressão 2.3.48 da energia potencial total que  $v=0$ ,  $x_H=x_C^G$ ,  $y_H=y_C^G$  e que a força normal  $N$  é o único esforço solicitante, obtém-se as equações diferenciais de equilíbrio já deduzidas no item 2.3.7, a saber,

$$EI_y u^{IV} - N(u'' + y_c^G \varphi_z'') + \beta_x u = 0 \quad (3.5.8.a)$$

$$EI_\omega \varphi_z^{IV} - GI_t \varphi_z'' - N(r_0^2 \varphi_z'' + y_c^G u'') + \beta_\varphi \varphi_z = 0 \quad (3.5.8.b)$$

A força normal crítica da barra efetiva é calculada diretamente a partir das condições de equilíbrio 3.5.8. Este procedimento é justificado no item 3.2. Douty representa os deslocamentos e as rotações sob a forma:

$$u(z) = a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \quad (3.5.9.a)$$

$$\varphi_z(z) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \quad (3.5.9.b)$$

onde o número de semi-ondas  $n$  deve ser determinado de modo a minimizar a carga crítica. Substituindo-se as expressões 3.5.6 e 3.5.9 em 3.5.8 e designando-se

$$N_{NE} = - \frac{\pi^2 EI_y}{(L/n)^2} \quad (3.5.10)$$

$$\alpha_n = \frac{C_1 (L/n)^4}{\pi^4 EI_y} = - \frac{C_1 (L/n)^2}{\pi^2 N_{NE}} \quad (3.5.11)$$

resulta um sistema linear de equações em  $a_n$  e  $b_n$ , que tem solução não trivial se o determinante dos coeficientes de  $a_n$  e  $b_n$  é zero. Obtém-se assim a seguinte equação de segundo grau:

$$\begin{aligned} (r_0^2 - y_c^2) \left( \frac{N}{N_{NE}} \right)^2 - \left[ \frac{C_3}{C_1} \alpha_n + r_0^2 (1 + \alpha_n) + 2y_c^2 \frac{C_2}{C_1} \alpha_n + \frac{I_\omega}{I_y} - \frac{GI_t}{N_{NE}} \right] \left( \frac{N}{N_{NE}} \right) + \\ + \left[ \frac{C_3}{C_1} (1 + \alpha_n) \alpha_n - \left( \frac{C_2}{C_1} \alpha_n \right)^2 + \frac{I_\omega}{I_y} (1 + \alpha_n) - \frac{GI_t}{N_{NE}} (1 + \alpha_n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Para os perfis usuais, o termo em  $(N/N_{NE})^2$  da expressão 3.5.12 pode ser desprezado quando comparado aos demais, em especial se  $\alpha_n$  é alto, ou seja, nas peças longas com pequeno número de semi-ondas. Neste caso, a solução pode ser dada sob a forma

$$\rho_{cr}^* = \frac{N_{cr}}{N_{NE}} = C_T \left[ 1 + \frac{(L/n)^2}{\pi^2 \bar{N}_{NE}} \beta_{eq} \right] \quad (3.5.13)$$

onde  $\bar{N}_{NE}$  é o valor absoluto de  $N_{NE}$  e  $C_T$  e  $\beta_{eq}$  são definidos por Douty, respectivamente, como um fator de correção da carga crítica e um coeficiente elástico equivalente, dados por

$$C_T = \frac{1}{r_0^2 (1 + \alpha_n) + 2y_c^2 \frac{C_2}{C_1} \alpha_n + \frac{C_3}{C_1} \alpha_n + \frac{I_\omega}{I_y} + \frac{GI_t}{\bar{N}_{NE}}} \quad (3.5.14)$$

$$\beta_{eq} = C_1 \frac{\frac{C_3}{C_1} \alpha_n - \left[ \frac{C_2}{C_1} \right]^2 \alpha_n + \frac{I_\omega}{I_Y} + \frac{GI_t}{\bar{N}_{NE}}}{\frac{C_3}{C_1} \alpha_n + \frac{I_\omega}{I_Y} + \frac{GI_t}{\bar{N}_{NE}}} \quad (3.5.15)$$

Para  $n = 1$ , o termo entre colchetes de 3.5.13 é análogo à expressão 3.3.10.a, deduzida por Winter para flambagem por flexão com uma semi-onda. Douly sugere então que, para n genérico, sejam adotadas ambas as expressões de Winter, ou seja,

$$\rho_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_E} = C_T \left[ 1 + \frac{\beta_{eq} L^2}{\pi^2 \bar{N}_E} \right] \quad 0 \leq \frac{\beta_{eq} L^2}{\bar{N}_E} \leq 30 \quad (3.5.16.a)$$

$$\rho_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_E} = C_T \left[ 0.6 + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\beta_{eq} L^2}{\bar{N}_E}} \right] \quad \frac{\beta_{eq} L^2}{\bar{N}_E} > 30 \quad (3.5.16.b)$$

Note-se que  $\beta_{eq}$  depende do número de semi-ondas  $n$ . Substituindo-se 3.5.10 e 3.5.11 em 3.5.15 e desprezando-se  $I_\omega$  (para seções tipo L, tem-se efetivamente  $I_\omega = 0$ ), pode-se simplificar esta última expressão para

$$\beta_{eq} = \frac{\left[ C_1 C_3 - C_2^2 \right] \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 + GI_t C_1}{C_3 \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 + GI_t} \quad (3.5.17)$$

Para  $L/n$  tendendo a zero,  $\beta_{eq}$  assume o valor  $C_1$ , ou seja, a contribuição do meio elástico predominante é a de resistência à torção da seção. Por outro lado, para  $L/n$

crecente,  $\beta_{eq}$  tende assintoticamente para

$$\beta_{eq} = \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3} = \frac{1}{u_1} \quad (3.5.18)$$

Neste caso, a contribuição do meio elástico predominante é a de resistência à flexão em torno de  $y^G$ .

Douty sugere a adoção do coeficiente elástico equivalente dado por 3.5.18, visto ser o menor valor possível de  $\beta_{eq}$ . Deve-se salientar que, nas vigas em que o comprimento de flambagem é pequeno, o valor aproximado está muito a favor da segurança, como pode ser visto na fig. 3.5.3.a para o perfil proposto no projeto modelo descrito no capítulo 1.

Para peças longas, nas quais  $\beta_{eq} L^2 / \bar{N}_E$  é alto, o comprimento de cada semi-onda tende assintoticamente para

$$L_{ef}^* = \pi \sqrt[4]{\frac{EI_Y}{\beta_{eq}}}$$

conforme já visto na expressão 3.3.9.a, e assim

$$\alpha_n^* = \frac{c_1 L_{ef}^*}{\pi^4 EI_Y} = \frac{c_1}{\beta_{eq}} = \frac{c_1 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2}$$

Substituindo-se este valor de  $\alpha_n$  em 3.5.14 e levando-se em conta que  $I_\omega = 0$  e que o termo em  $GI_t$  pode ser desconsiderado perante o termo em  $\alpha_n$ , tem-se

$$c_T^* = \frac{1}{1 + r_0^2 \frac{2c_1 c_3 - c_2^2}{c_3^2} + \frac{2c_2}{c_3} y_c^G} \quad (3.5.19)$$

Apresenta-se nas figs. 3.5.3.b/c a variação de  $\alpha_n$  e de  $C_T$ , com  $L/n$ , para o perfil U enrijecido proposto no projeto modelo. Pode-se notar que  $C_T$  é fortemente dependente do

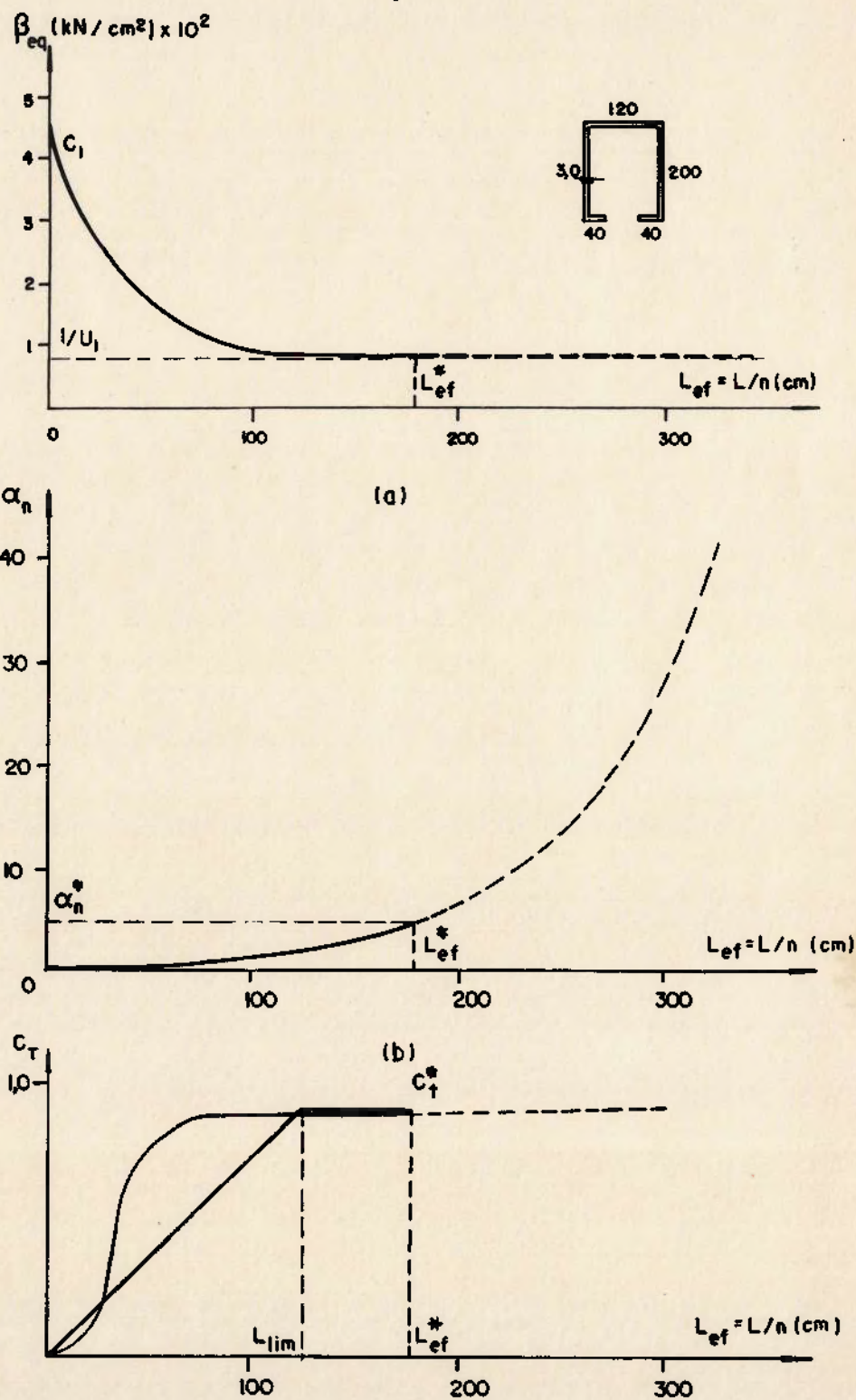


FIG. 3.5.3 Parâmetros  $\beta_{eq}$ ,  $\alpha_n$  e  $C_T$  - exemplo numérico

comprimento para peças curtas. Por simplicidade, Douty sugere a aplicação do fator de redução  $C_T^*$  para  $L \geq L_{lim}$  e uma interpolação linear entre  $C_T = 0$  e  $C_T^*$  para  $0 \leq L < L_{lim}$ , onde  $L_{lim}$  é o valor de  $L_{ef}^*$  para  $\beta_{eq} = C_1$ , ou seja,

$$L_{lim} = \pi \sqrt[4]{\frac{EI_y}{C_1}} \quad (3.5.20)$$

Substituindo-se 3.5.4 e 3.5.7 em 3.5.19 e após uma série de simplificações baseadas em simulações numéricas para os perfis usuais, obtém-se as seguintes expressões aproximadas, onde a segunda vem sendo utilizada atualmente pela norma AISI (1986):

$$C_T \cong \frac{1}{1 + 2,16 \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 + 2,4 \left(\frac{y_c^c}{h}\right)} \cong \frac{1}{1 + 3,4 \frac{y_c^c}{h}} \quad (3.5.21)$$

#### 3.5.4 Recomendações para projeto - norma AISI (1986)

O modelo de Douty vem sendo utilizado, praticamente da forma proposta inicialmente, para a análise da instabilidade por distorção de perfis U enrijecidos ou de outros perfis com comportamento semelhante. Obtida a carga crítica em regime elástico, determina-se o índice de esbeltez de uma barra comprimida de mesma área cuja carga crítica de Euler seja igual à computada. Este índice de esbeltez é reduzido por um fator 1,1, que visa adequar os resultados teóricos aos experimentais, já que estes últimos indicam resistências maiores que as previstas, em especial nas peças de maior comprimento. Este fato é interpretado por Douty como decorrente da existência de uma certa reserva pós-crítica, não computada em seu modelo. Tem-se então

$$\lambda_{ef} = \frac{1}{1,1} \sqrt{\frac{\pi^2 EA_{ef}}{N_{cr}}} \quad (3.5.22)$$

Com esta analogia é possível utilizar, para regime não elástico, as expressões semi-empíricas de norma associando a força normal de colapso da barra efetiva  $N_u$  a parâmetros de esbelteza da barra.

O momento fletor último pode ser obtido por extrapolação, considerando-se um diagrama de tensões normais linear ao longo da altura do perfil, de onde

$$M_u = \frac{c_c}{c_c - y_c^g} \frac{N_u}{A_{ef}} W_c \leq W_c f_{ys} \quad (3.5.23)$$

$W_c$  é o módulo resistente à flexão para a aba comprimida.

Douty argumenta ainda que o efeito desfavorável das imperfeições iniciais e das tensões de cisalhamento nas abas para um carregamento genérico é contrabalançado pelo efeito favorável da não consideração da variação dos momentos fletores ao longo da viga, de modo que seus resultados possam ser aplicados a qualquer tipo de carregamento. Embora não haja comprovação teórica ou experimental deste fato, o modelo de Douty vem sendo utilizado pela norma AISI, desde então, para o cálculo destes perfis.

### 3.6 PERFIS TIPO C OU Z - O MODELO DE PEKÖZ, SOROUSHIAN

Peköz, Soroushian (1982) apresentam um modelo de cálculo de terças de cobertura fabricadas com seção tipo C ou Z, enrijecidas nas bordas ou não, contidas lateralmente de forma contínua nos painéis de cobertura e submetidas a um



carregamento transversal qualquer paralelo ao plano inicial da alma. Admite-se que os apoios de extremidade impedem apenas as rotações em torno do eixo longitudinal do perfil e deslocamentos no plano da seção transversal. Procura-se determinar, neste modelo, a tensão normal máxima na barra, levando-se em conta as imperfeições iniciais e as distorções devidas às tensões de cisalhamento nas abas, ao invés da carga crítica.

A configuração deformada é entendida como decorrente da composição de dois estágios, um de rotação e outro de deflexão na direção vertical, como indicado na fig. 3.6.1. O centro de rotação coincide, nos perfis Z, com o encontro aba-alma, embora nos perfis C possa não estar no plano da alma. Em particular nas seções tipo C enrijecido, considera-se que o centro de rotação está no encontro da aba superior com o enrijecedor de borda.

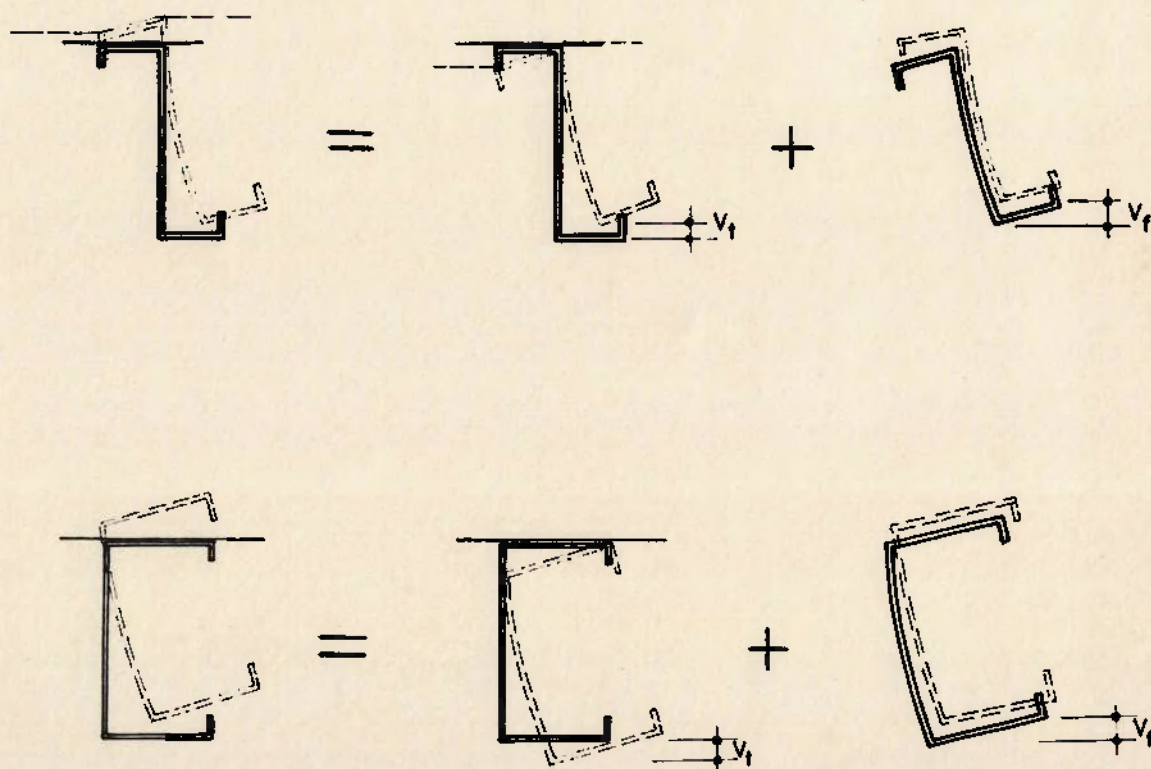


FIG. 3.6.1 Composição de estágios de deslocamento

O estágio de rotação envolve deslocamentos laterais e rotações da seção efetiva composta pela aba comprimida e por uma fração da altura da alma. A barra efetiva está submetida a uma força normal variável, já que o momento fletor varia ao longo do comprimento, e a uma força transversal variável, resultante das tensões de cisalhamento ao longo da aba. O coeficiente do meio elástico é uma combinação do coeficiente da alma (expressão 3.3.1) e do resultante do conjunto formado pelo painel de cobertura e pelos parafusos de fixação às terças. Este último é obtido experimentalmente.

O estágio de deflexão vertical é analisado com base na teoria da flexão simples da Resistência dos Materiais, embora o momento de inércia seja calculado para a configuração deformada.

Considere-se, para o que segue, o perfil Z da fig.3.6.2.a, submetido a uma força transversal  $f_y(z)$  distribuída ao longo do seu comprimento. A força  $H_x(z)$  resultante das tensões de cisalhamento na aba é dada por

$$H_x(z) = \frac{\tau_h(z) b_f t}{2} = \frac{V_y(z) S_{xi} b_f t}{t I_x} = V_y(z) \frac{S_{xi} b_f}{2I_x}$$

$V_y(z)$  é a força cortante numa seção qualquer da barra,  $I_x$  é o momento de inércia em torno de x da seção total e  $S_{xi}$  o momento estático da aba inferior em relação ao eixo x.

Para os perfis que possuem abas com bordas enrijecidas, os autores utilizam a mesma expressão para cálculo de  $H_x$ , sendo assim desprezadas as tensões de cisalhamento nas dobras, embora as mesmas sejam consideradas em  $S_{xi}$ .

A variação desta força  $H_x$  por unidade de comprimento pode ser entendida como uma força distribuída  $f_x(z)$  ao longo da barra efetiva, ou seja,

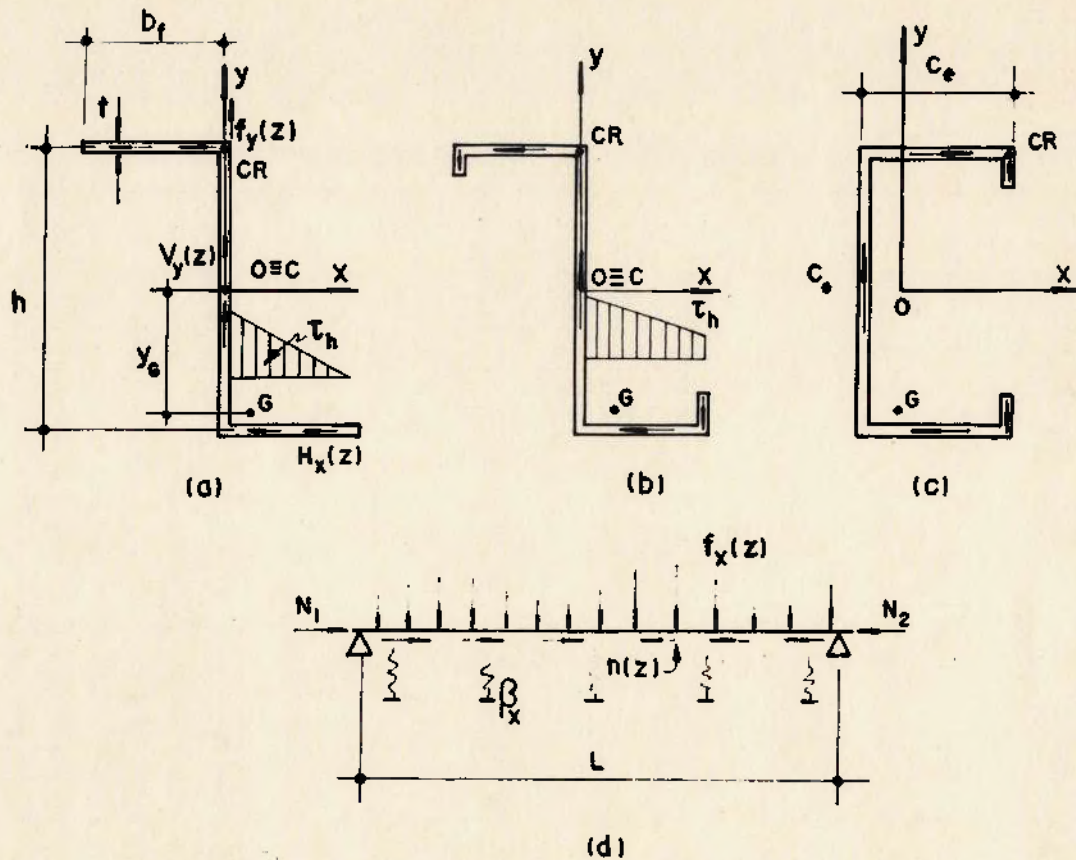


FIG. 3.6.2 O modelo de Peköz, Soroshian

$$f_x(z) = - \frac{dH_x(z)}{dz} = - \frac{dV_y(z)}{dz} \frac{S_{xi} b_f}{2I_x} = f_y(z) \frac{S_{xi} b_f}{2I_x} \quad (3.6.1)$$

Para os perfis em que o centro de rotação pertence ao plano da alma, o momento da força cortante  $V_y(z)$  em relação ao centro de rotação é nulo. Para os perfis nos quais isto não ocorre, este momento é entendido, por simplicidade, como proveniente de uma força transversal horizontal estaticamente equivalente de valor  $(c_e/h_w) f_y(z)$ , onde  $c_e$  é a distância do centro de rotação à alma.

A força normal numa seção qualquer da barra efetiva vale

$$N(z) = \frac{M_x(z)}{I_x} Y_G A_C = M_x(z) \frac{S_{xc}}{I_x} \quad (3.6.2)$$

onde  $S_{xc}$  é o momento estático de seção efetiva em relação ao eixo  $x$ .

Esta força pode ser entendida como resultado da aplicação de forças normais distribuídas  $f_z(z)$ , de valor

$$f_z(z) = \frac{dN(z)}{dz} = \frac{dM_x(z)}{dz} \frac{S_{xc}}{I_x} = V_y(z) \frac{S_{xc}}{I_x} \quad (3.6.3)$$

A imperfeição inicial  $u_0(z)$  e a configuração final da aba inferior  $u(z)$  são dadas pelas séries trigonométricas abaixo, que satisfazem as condições de extremidade para apoio simples

$$u(z) = \sum_n a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \quad (3.6.4.a)$$

$$u_0(z) = \sum_n a_{0n} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \quad (3.6.4.b)$$

Os deslocamentos  $[u(z) - u_0(z)]$  do estágio de rotação são calculados a partir da expressão 2.3.48, desprezando-se as parcelas correspondentes ao deslocamento  $v$  e à rotação  $\varphi(z)$  e adicionando-se um termo correspondente à força  $f_x(z)$ , ou seja,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{yc}^G (u'' - u_0'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \beta_x (u - u_0)^2 dz - \int_0^L f_x(z) (u - u_0) dz + \frac{1}{2} \int_0^L N(z) (u'^2 - u_0'^2) dz \quad (3.6.5)$$

Nesta expressão,  $I_{yc}^G$  é o momento de inércia da seção efetiva em relação a um eixo paralelo à alma passando por  $G$  e  $\beta_x$  o coeficiente do apoio elástico.

O termo da expressão 3.6.5, correspondente à força normal é apresentado pelos autores em função de  $f_z(z)$ , ou seja, tratando a força normal como resultado da aplicação de forças externas  $f_z(z)$ . Este termo passa a ser dado então por

$$\int_0^L f_z(z) w(z) dz = \int_0^L \left[ f_z(z) \frac{1}{2} \int_z^L (u'^2 - u_0'^2) dz \right] dz \quad (3.6.6)$$

Substituindo-se  $u$  e  $u_0$  em 3.6.5 e aplicando-se o método de Ritz, obtém-se um sistema de equações lineares, de onde são deduzidos os parâmetros  $a_n$  e portanto os deslocamentos na direção  $x$ .

A título de ilustração, indica-se uma solução aproximada para o caso particular de seção tipo Z submetida a uma força vertical  $f_y$  uniformemente distribuída. Neste caso, tomando-se apenas o primeiro termo das séries indicadas em 3.6.4, ou seja,  $n = 1$ , tem-se

$$a = \frac{-c_a \left( \frac{S_{xi} b_f}{2I_x} \right) + a_0}{1 + 0,45 c_a \frac{S_{xc}}{I_x}} \quad \text{onde} \quad c_a = \frac{1,27 f_y}{\frac{\pi^4 EI_{yc}^G}{L^4} + \beta_x} \quad (3.6.7)$$

Pode-se reescrever a expressão 3.6.7 sob forma simplificada considerando-se para seção efetiva apenas a aba inferior, de seção retangular  $A_c = b_f t$ , para a qual  $S_{xi} = S_{xc}$ . Tem-se então, após algumas manipulações algébricas, que

$$c_a = - \frac{M_{\text{máx}}}{N_{\text{cr}}} \quad \text{e} \quad c_a \frac{S_{xi}}{I_x} = c_a \frac{S_{xc}}{I_x} = - \frac{N_{\text{máx}}}{N_{\text{cr}}}$$

$$\text{onde } N_{\text{máx}} = A_c \frac{M_{\text{máx}}}{I_x} \frac{h}{2} \quad \text{e} \quad N_{\text{cr}} = N_E \left[ 1 + \frac{\beta_x L^2}{\pi^2 N_E} \right]$$

logo

$$a = \frac{\frac{N_{\text{máx}}}{N_{\text{cr}}} \frac{b_f}{2} + a_0}{1 - 0,45 \frac{N_{\text{máx}}}{N_{\text{cr}}}} \quad (3.6.8)$$

$N_{\text{máx}}$  é a força normal máxima na seção efetiva e  $N_{\text{cr}}$  é a carga crítica da barra efetiva apoiada em meio elástico e submetida a compressão uniforme, conforme já visto no item 3.3 (expressão 3.3.10.a).

Esta apresentação permite comparar o resultado obtido através do modelo de Peköz, Soroushian para carga uniformemente distribuída ao longo da viga com o que se obtém da teoria da estabilidade elástica para barras sob força normal e momento fletor constantes ao longo do comprimento:

$$a_{M=\text{cte}} = \frac{a_0}{1 - \frac{N}{N_{\text{cr}}}} \quad (3.6.9)$$

Nota-se, na expressão 3.6.8, um termo adicional no numerador decorrente das tensões de cisalhamento nas abas e um fator constante 0,45 no denominador devido ao fato de a força normal ser variável ao longo do comprimento. O primeiro resulta num aumento das deflexões horizontais, ao passo que o segundo gera uma redução das mesmas. Não é possível no entanto afirmar que os efeitos se contrabalançam, ao contrário do que sugere Douty (1962).

O momento fletor  $M_{yc}$  na seção efetiva é dado por

$$M_{yc} = EI_{yc}^G (u'' - u_0'') \quad (3.6.10)$$

A verificação de segurança é feita, neste modelo, calculando-se a tensão normal máxima por simples adição das tensões devidas a  $M_{yc}$  e  $M_x$  e então comparando-a à tensão de escoamento do material ou qualquer outro limite inferior a este decorrente da flambagem local das chapas. Para o caso particular de carga uniformemente distribuída, tem-se

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_x h}{I_x} \frac{1}{2} + \frac{M_{yc}}{W_{yc}} = \frac{M_x h}{I_x} \frac{1}{2} + \frac{Eb_f \pi^2}{2L^2} (a - a_0) \quad (3.6.11)$$

### 3.7 COMENTÁRIOS

As simplificações adotadas por Douty para o cálculo da carga crítica têm sido questionadas quanto à aplicação a perfis com geometria ou carregamento diferentes do estudado, sendo sugeridos modelos alternativos.

Haussler (1964) propõe uma generalização do modelo de Douty aplicável a perfis em que as abas comprimidas são enrijecidas por dobras, e portanto o centro de torção da seção efetiva não pertence ao plano da alma (fig. 3.7.1). Os deslocamentos do ponto H na direção y são impedidos pela alma do perfil, de onde

$$v_H = v + (x_H^G - x_C^G) \phi_z = 0$$

Haussler substitui v desta expressão nas equações de equilíbrio 2.3.46, tomando ainda  $M_x = M_y = 0$  e considerando que o momento externo  $m_z$  vale  $m_z = f_y (x_H^G - x_C^G)$ , visto que a

força  $f_y$  não está aplicada no centro de torção mas sim no plano da alma. Substituindo  $u$  e  $\varphi_z$  sob forma senoidal nestas equações e procedendo de forma análoga à do modelo de Douty, Haussler obtém uma equação de segundo grau em  $N$ , cuja solução fornece o valor de  $N_{cr}$ .

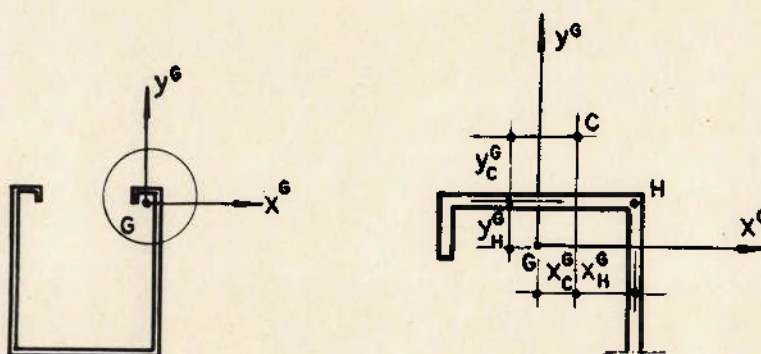


FIG. 3.7.1 O modelo de Haussler

Lau, Hancock (1987) deduzem a carga crítica para flambagem por distorção de peças comprimidas com seção transversal tipo C enrijecido, utilizando também as equações de equilíbrio 2.3.46. Admite-se neste modelo que a instabilidade por distorção envolve rotação da aba em torno do ponto de encontro aba-alma, sem distorção da mesma, e deslocamentos laterais paralelos ao plano de simetria (fig. 3.7.2). A solução das equações diferenciais de equilíbrio é similar à do modelo de Haussler, resultando numa equação de segundo grau em  $N$ . Um valor aproximado de  $L/n$  que torna  $N$  mínimo é obtido adotando-se  $\beta_x = \infty$ , ou seja,  $u_H = 0$ , de onde

$$u = (x_H^G - x_C^G) \varphi_z$$



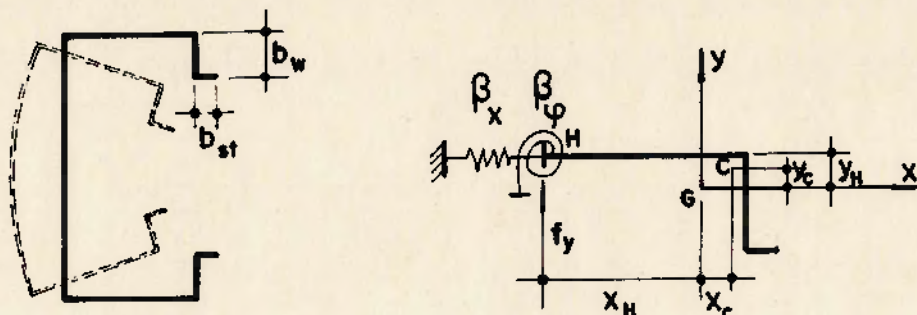


FIG. 3.7.2 O modelo de Lau, Hancock

Obtém-se assim uma equação linear em  $N$ , e de  $\partial N / \partial (L/n) = 0$ , tem-se  $(L/n)_{cr}$ . Lau, Hancock comprovam, através de uma investigação numérica, que  $N_{cr}$  varia pouco nas vizinhanças de  $(L/n)_{cr}$ , de modo que este comprimento de semi-onda pode ser utilizado para determinação de um valor mais preciso de  $N_{cr}$  a partir da equação de segundo grau. O valor de  $\beta_\phi$  é obtido da teoria das placas, supondo-se que a alma é simplesmente apoiada nas abas, submetida a compressão longitudinal uniforme e momento fletor distribuído nas bordas longitudinais. Já o valor de  $\beta_x$  é tomado igual a zero, a favor da segurança.

Kwon, Hancock (1992) indicam os resultados de uma série de ensaios à compressão de perfis U enrijecidos, com aços de alta resistência mecânica e com uma geometria tal que a carga crítica para distorção possa ser atingida para tensões muito inferiores à tensão de escoamento, de modo a ser possível avaliar a reserva de resistência pós-crítica em regime elástico.

A força normal última obtida nestes ensaios é muito superior à crítica e, dentro dos limites ensaiados, é pouco afetada pela dimensão da dobra da extremidade da seção  $b_{st}$ , ao

contrário do que sucede com a carga crítica. Por outro lado, a carga crítica de ensaio é próxima da obtida por Lau, Hancock (1986) através de uma análise por tiras finitas, que leva em conta, portanto, a interação entre flambagem local e por distorção.

As curvas correspondentes à carga crítica teórica e à carga de colapso experimental estão representadas na fig. 3.7.3, evidenciando a grande reserva pós-crítica em regime elástico.

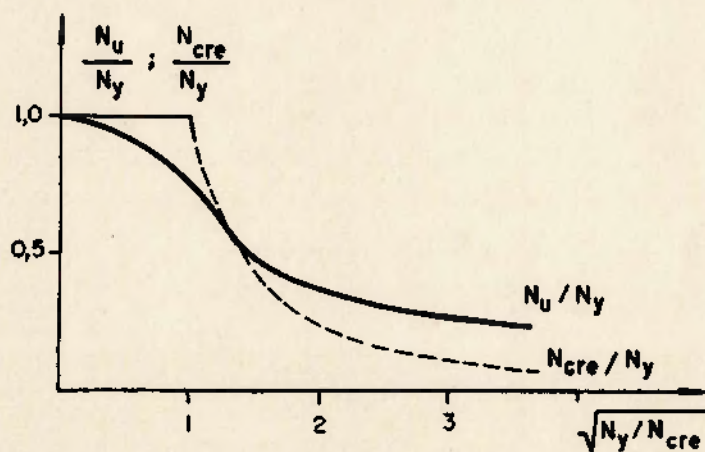


FIG. 3.7.3 O modelo de Kwon, Hancock - Carga crítica e carga de colapso

**4    UMA TEORIA GEOMETRICAMENTE  
EXATA PARA BARRAS NO ESPAÇO**

#### 4.1 INTRODUÇÃO

A Teoria de Vlasov, aplicada às barras com seção transversal aberta e de parede delgada, é a base de um grande número de trabalhos que visam determinar a carga crítica correspondente à instabilidade por distorção de perfis tipo I, U, C e Z, conforme já visto no capítulo 3. No entanto, a formulação apresentada não permite proceder a uma análise da estabilidade das barras em que os deslocamentos afetam significativamente os esforços solicitantes nem avaliar o comportamento pós-crítico.

O problema vem sendo resolvido atualmente através de uma análise não-linear dos perfis, através do método dos elementos finitos, discretizando-os em elementos de casca. Este procedimento leva à utilização de programas cujas hipóteses frequentemente não são do conhecimento do usuário. Os resultados obtidos, por outro lado, são de análise mais complexa do que os decorrentes da teoria das barras, já que envolvem simultaneamente fenômenos locais.

Estas dificuldades são contornadas, neste trabalho, com a utilização de um programa baseado numa teoria não-linear geometricamente exata, formulada por Pimenta, Yojo (1993) para estudo de barras retas de seção transversal indeformável. Esta teoria é desenvolvida a partir dos Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, já visando o seu emprego na análise de pórticos espaciais através do Método dos Elementos Finitos. Os perfis são discretizados, portanto, em elementos de barra constituindo um pórtico espacial.

Com o objetivo de familiarizar o leitor com a notação adotada e permitir uma fácil comparação com as teorias aproximadas, são apresentados inicialmente os fundamentos da teoria geometricamente linear. As expressões da teoria de

Vlasov são obtidas como um caso particular desta, ressaltando-se as diferenças entre ambas e as restrições a serem impostas à teoria linear para que os resultados coincidam com os da teoria de Vlasov.

São apresentados em seguida os fundamentos da teoria não-linear geometricamente exata. Esta teoria é então linearizada visando-se uma análise de estabilidade de Euler e uma comparação com as expressões deduzidas no item 2.3.7. Esta comparação permite concluir que a teoria inicialmente formulada por Pimenta, Yojo não conduz à obtenção, por linearização, do termo de Wagner. Propõe-se portanto uma modificação na matriz de rigidez constitutiva, tal que este efeito possa ser considerado.

#### 4.2 NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

A apresentação das equações das teorias aqui desenvolvidas pode ser bastante simplificada com a adoção da notação vetorial, onde os vetores são representados por letras minúsculas ( $\underline{x}$ ,  $\underline{d}$ , ...) e os tensores por letras maiúsculas ( $\underline{T}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{L}$ , ...).

O sistema de coordenadas é dado pelos versores  $\underline{e}_1$ ,  $\underline{e}_2$ ,  $\underline{e}_3$ , com  $\underline{e}_3$  ao longo do eixo da barra, e as coordenadas de um ponto M qualquer pelo vetor  $\underline{x}$  (ver fig. 4.2.1), onde

$$\underline{x} = x_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} + x_3 \underline{e}_3 = \underline{a} + z \underline{e}_3 \quad (4.2.1)$$

Os índices indicam somatória dos termos correspondentes, onde as letras gregas assumem os valores 1 e 2 e as letras latinas, os valores 1, 2 e 3. Nos termos em  $x_3$ , substitui-se  $x_3$  por  $z$  para explicitar a independência das coordenadas no plano da seção transversal.

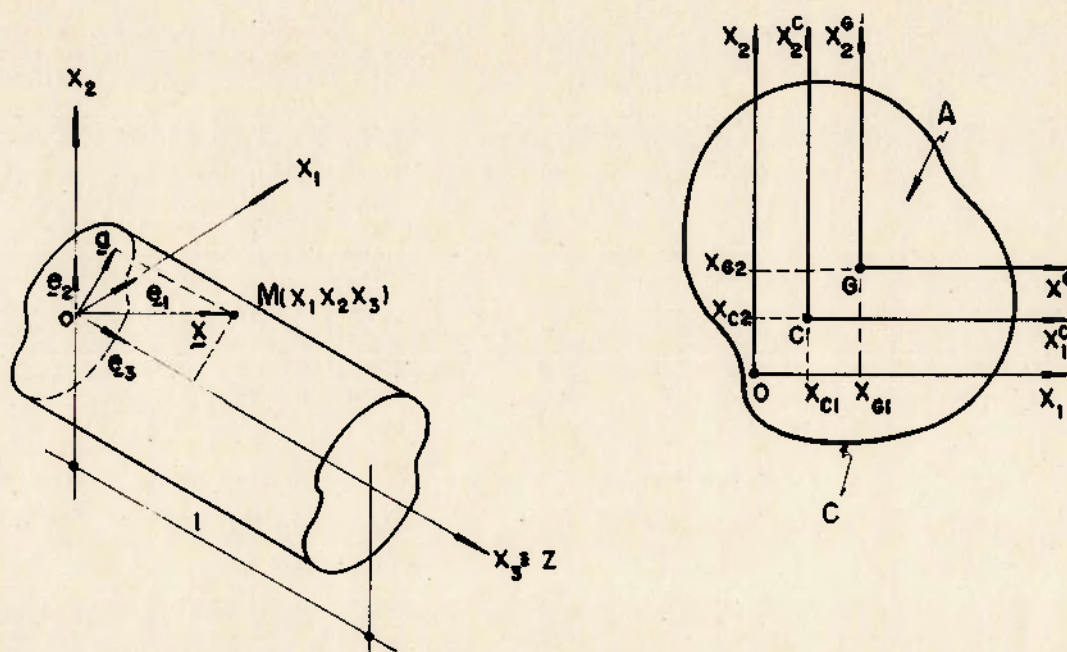


FIG. 4.2.1 Sistema de coordenadas de uma barra

Utiliza-se também o símbolo de permutação  $e_{\alpha\beta}$ , que assume os valores  $e_{11} = e_{22} = 0$ ,  $e_{12} = 1$ ,  $e_{21} = -1$ .

As grandezas relativas aos eixos  $x_{\alpha}^G$  passando pelo centro de gravidade e  $x_{\alpha}^C$  passando pelo centro de torção são designadas pelos índices G e C. Grandezas auxiliares são indicadas pelo símbolo ( )\*.

#### 4.3 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

As propriedades geométricas da seção transversal (ver item 2.3.4) são escritas a seguir para um sistema de coordenadas qualquer, utilizando-se a convenção apresentada no item 4.2.

Os momentos estáticos são definidos pela expressão

$$S_{\alpha} = e_{\alpha\beta} \int_A x_{\beta} dA \quad (4.3.1)$$

logo, tem-se  $S_1 = \int_A x_2 dA$  e  $S_2 = -\int_A x_1 dA$ .

Os momentos de inércia são definidos por

$$I_{\alpha\beta} = e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} \int_A x_{\gamma} x_{\delta} dA \quad (4.3.2)$$

que desenvolvido resulta em

$$I_{11} = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{22} = \int_A x_1^2 dA \quad \text{e} \quad I_{12} = I_{21} = -\int_A x_1 x_2 dA.$$

O momento polar de inércia da seção transversal é dado por

$$I_0 = \int_A x_{\alpha}^2 dA = I_{\alpha\alpha} = I_{11} + I_{22} \quad (4.3.3)$$

Sendo  $\underline{x}_{\alpha}^c$  os eixos paralelos a  $\underline{x}_{\alpha}$  que passam pelo centro de gravidade da seção transversal tem-se, por definição,

$$\int_A x_{\alpha}^c dA = \int_A (x_{\alpha} - x_{c\alpha}) dA = 0$$

de onde, utilizando-se a expressão 4.3.1, pode-se obter as coordenadas do centro de gravidade

$$x_{c\alpha} = \frac{1}{A} \int_A x_{\alpha} dA = -\frac{1}{A} e_{\alpha\beta} S_{\beta} \quad (4.3.4)$$

$$\text{ou } S_{\alpha} = A e_{\alpha\beta} x_{G\beta} \quad (4.3.5)$$

$$\text{e portanto } x_{G1} = -\frac{1}{A} S_2 \quad \text{e} \quad x_{G2} = \frac{1}{A} S_1$$

Se os eixos passam pelo centro de gravidade da seção, as propriedades acima passam a ser dadas por

$$S_{\alpha}^G = e_{\alpha\beta} \int_A x_{G\beta}^G dA = e_{\alpha\beta} \int_A x_{\beta} dA - e_{\alpha\beta} A x_{G\beta} = 0 \quad (4.3.6)$$

$$\text{logo, tem-se } S_1^G = S_2^G = 0,$$

$$I_{\alpha\beta}^G = e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} \int_A x_{\gamma}^G x_{\delta}^G dA = I_{\alpha\beta} - e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} A x_{G\gamma} x_{G\delta} \quad (4.3.7)$$

e portanto

$$I_{11}^G = I_{11} - A x_{G2}^2, \quad I_{22}^G = I_{22} - A x_{G1}^2 \quad \text{e}$$

$$I_{12}^G = I_{21}^G = I_{12} + A x_{G1} x_{G2}, \quad \text{e ainda}$$

$$I_0^G = \int_A x_{\alpha}^G x_{\alpha}^G dA = I_0 - A x_{G\alpha}^2 = I_0 - A(x_{G1}^2 + x_{G2}^2) \quad (4.3.8)$$

#### 4.3.1 A função empenamento $\psi$

A função empenamento de Saint-Venant  $\psi$  é obtida, na teoria da torção uniforme apresentada no capítulo 2, a partir da solução do Problema de Valor no Contorno dado pelas equações 2.2.5 e 2.2.7. Admite-se aqui que a função empenamento tenha a mesma forma da obtida por Saint-Venant, embora estas



equações não sejam obrigatoriamente aplicáveis ao estudo de uma barra submetida a um carregamento qualquer.

A função empenamento referente ao centro de torção pode ser obtida reescrevendo-se estas expressões com a notação aqui adotada e tomando-se as coordenadas em relação ao centro de torção. Assim, tem-se

$$\nabla^2 \psi^c = \psi^c_{,\alpha\alpha} = 0 \quad \text{em } A \quad (4.3.9)$$

$$\nabla \psi^c \cdot \underline{n} = \psi^c_{,\alpha} n_\alpha = -e_{\alpha\beta} (x_\alpha - x_{c\alpha}) n_\beta \quad \text{no contorno } C \quad (4.3.10)$$

onde  $x_{c\alpha}$  são as coordenadas do centro de torção e  $\underline{n}$  é o versor normal ao contorno  $C$ .

O problema tem solução única a menos de uma constante  $b$ , que pode ser determinada impondo-se a condição

$$\int_A \psi^c dA = 0 \quad (4.3.11)$$

As coordenadas do centro de torção podem ser obtidas de

$$\int_A x_\alpha \psi^c dA = 0 \quad (4.3.12)$$

Estas condições são análogas às obtidas na teoria de Vlasov quando se impõe, respectivamente, uma origem e um polo adequados, de modo que o momento estático setorial e os produtos de inércia setoriais sejam nulos.

Uma forma de se resolver o problema é encontrar uma função  $\psi(x_\alpha)$  que seja solução do seguinte Problema de Valor no Contorno:

$$\nabla^2 \psi = \psi_{,\alpha\alpha} = 0 \quad \text{em } A \quad (4.3.13.a)$$

$$\nabla \psi \cdot \underline{n} = \psi_{,\alpha} n_\alpha = -e_{\alpha\beta} x_\alpha n_\beta \quad \text{no contorno } C \quad (4.3.13.b)$$

Obtida  $\psi(x_\alpha)$ , pode-se determinar  $\psi^c(x_\alpha)$  através de

$$\psi^c = \psi - e_{\alpha\beta} x_{c\beta} x_\alpha + b \quad (4.3.14)$$

pois, derivando-se 4.3.14, vem que

$$\psi^c_{,\alpha} = \psi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta} x_{c\beta} \quad \text{e} \quad \psi^c_{,\alpha\alpha} = \psi_{,\alpha\alpha}$$

logo,  $\nabla^2 \psi^c$  e  $\nabla \psi^c \cdot \underline{n}$  podem ser escritos como

$$\nabla^2 \psi^c = \nabla^2 \psi = 0 \quad \text{em } A \quad (4.3.15.a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \psi^c \cdot \underline{n} &= \psi^c_{,\alpha} n_\alpha = -e_{\alpha\beta} x_\alpha n_\beta - e_{\alpha\beta} x_{c\beta} n_\alpha \\ &= -e_{\alpha\beta} (x_\alpha - x_{c\alpha}) n_\beta \quad \text{no contorno } C \end{aligned} \quad (4.3.15.b)$$

Satisfazendo portanto as condições 4.3.9 e 4.3.10.

Impondo-se a condição 4.3.11 e substituindo-se  $\psi^c$  por 4.3.14, obtém-se

$$b = e_{\alpha\beta} x_{c\alpha} x_{c\beta} - \frac{1}{A} \int_A \psi \, dA \quad (4.3.16)$$

Impondo-se agora a condição 4.3.12, tem-se

$$\begin{aligned} \int_A x_\gamma \psi^c \, dA &= \int_A x_\gamma \psi \, dA - e_{\alpha\beta} x_{c\beta} \int_A x_\gamma x_\alpha \, dA + e_{\alpha\beta} x_{c\beta} x_{c\alpha} x_{c\gamma} - \\ &\quad - \frac{1}{A} \int_A \psi \, dA \int_A x_\gamma \, dA = 0 \end{aligned}$$

Com o uso das expressões 4.3.2 e 4.3.4, pode-se escrever

$$(x_{c\gamma} S_{\beta} + e_{\gamma\alpha} I_{\alpha\beta}) x_{c\beta} = \int_A x_{\gamma} \psi \, dA - \int_A x_{c\gamma} \psi \, dA$$

Permutando-se os índices  $\alpha$  e  $\gamma$  nesta expressão, as coordenadas  $x_{c\beta}$  do centro de torção podem ser obtidas de

$$x_{c\beta} (x_{c\alpha} S_{\beta} + e_{\alpha\gamma} I_{\gamma\beta}) = \int_A x_{\alpha} \psi \, dA - \int_A x_{c\alpha} \psi \, dA \quad (4.3.17)$$

Em particular se os eixos são os principais, tem-se  $x_{c\alpha} = 0$  e  $I_{12} = 0$ . Neste caso, a expressão 4.3.17 corresponde às expressões 2.3.20 da teoria de Vlasov, onde o polo A é tomado na origem.

A função empenamento apresenta algumas propriedades, que são descritas a seguir.

A primeira propriedade está ligada aos momentos estáticos da seção. Com base no Teorema do Divergente, e notando-se que  $x_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  e  $\psi_{,\beta\beta}^c = 0$ , pode-se escrever

$$\int_A \psi_{,\alpha}^c \, dA = \int_A x_{\alpha,\beta} \psi_{,\beta}^c \, dA = \int_A (x_{\alpha} \psi_{,\beta}^c)_{,\beta} \, dA = \int_C x_{\alpha} \psi_{,\beta}^c n_{\beta} \, dC$$

Substituindo-se a expressão 4.3.10 na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_A \psi_{,\alpha}^c \, dA &= - \int_C x_{\alpha} e_{\beta\gamma} (x_{\beta} - x_{c\beta}) n_{\beta} \, dC = - e_{\beta\gamma} \int_A [x_{\alpha} (x_{\beta} - x_{c\beta})]_{,\gamma} \, dA = \\ &= A e_{\alpha\beta} (x_{c\beta} - x_{c\beta}) = S_{\alpha} - A e_{\alpha\beta} x_{c\beta} = S_{\alpha}^c = S_{\alpha} - S_{\alpha}^* \quad (4.3.18) \end{aligned}$$

$S_{\alpha}^c$  são os momentos estáticos da seção em relação aos eixos  $x_{\alpha}^c$ . Assim, se o eixo z passa pelo centro de torção, ou seja, se  $x_{c\beta} = 0$ , tem-se  $S_{\alpha}^c = S_{\alpha}$  e  $S_{\alpha}^* = 0$ .

Outras duas propriedades estão ligadas ao momento de inércia à torção e ao momento polar de inércia da seção transversal. Sendo  $\psi$  a função empenamento calculada para um sistema de eixos qualquer, o momento de inércia à torção em relação a estes eixos vale, de acordo com 2.2.8.b,

$$I_t = \int_A (x_{\alpha}^2 + e_{\alpha\beta} x_{\alpha} \psi_{,\beta}) dA \quad (4.3.19)$$

Com base em 4.3.3 e 4.3.19 e para os eixos passando pelo centro de torção, pode-se escrever

$$I_0^c = \int_A (x_{\alpha} - x_{c\alpha})^2 dA = I_0 + Ax_{c\alpha}^2 - 2Ax_{c\alpha} x_{c\alpha} \quad (4.3.20)$$

$$I_t^c = \int_A \left[ (x_{\alpha} - x_{c\alpha})^2 + e_{\alpha\beta} (x_{\alpha} - x_{c\alpha}) \psi_{,\beta}^c \right] dA \quad (4.3.21)$$

Desenvolvendo-se a expressão 4.3.21 e utilizando-se 4.3.20, vem que

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} \int_A x_{\alpha} \psi_{,\beta}^c dA &= I_t^c - I_0^c + e_{\alpha\beta} x_{c\alpha} \int_A \psi_{,\beta}^c dA = I_t^c - I_0^c + e_{\alpha\beta} x_{c\alpha} S_{\beta}^c = \\ &= I_t^c - I_0^c + Ax_{c\alpha}^2 - Ax_{c\alpha} x_{c\alpha} = I_t^c - I_0^c + Ax_{c\alpha} x_{c\alpha} = I_t^* - I_0^c - Ax_{c\alpha} x_{c\alpha} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

onde

$$I_t^* = I_t^c + Ax_{c\alpha}^2 \quad (4.3.23)$$

Se o eixo z passa pelo centro de torção, tem-se  $x_{c\alpha} = 0$  e portanto  $I_t^* = I_t^c$ . Neste caso, pode-se escrever

$$e_{\alpha\beta} \int_A x_\alpha \psi_{,\beta} dA = I_t^c - I_0^c \quad (4.3.24)$$

O momento de inércia à torção depende, portanto, dos eixos de referência, sendo prática usual defini-lo em relação ao centro de torção. Omite-se portanto por simplicidade, quando não for essencial, o índice c do termo  $I_t^c$ , assim como da função empenamento  $\psi^c$ .

Pode-se escrever ainda, com o auxílio de 4.3.15.b,

$$\begin{aligned} \int_A \psi_{,\alpha}^c dA &= \int_A (\psi^c \psi_{,\alpha}^c)_{,\alpha} dA = \int_C \psi^c \psi_{,\alpha}^c n_\alpha dC = - \int_C \psi^c e_{\alpha\beta} (x_\alpha - x_{c\alpha}) n_\beta dC = \\ &= - \int_A [\psi^c e_{\alpha\beta} (x_\alpha - x_{c\alpha})]_{,\beta} dA = - e_{\alpha\beta} \int_A (x_\alpha - x_{c\alpha}) \psi_{,\beta}^c dA = I_0^c - I_t^c \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Uma importante característica geométrica da seção transversal associada à função empenamento é o momento de inércia ao empenamento  $I_\psi$ , dado por

$$I_\psi = \int_A \psi^2 dA \quad (4.3.26)$$

#### 4.4 TEORIA GEOMETRICAMENTE LINEAR

Na aplicação do método dos elementos finitos às barras, para as quais são empregados usualmente elementos com dois nós,

adota-se em geral uma variação linear dos deslocamentos generalizados no interior do elemento. Assim, se a rotação  $\varphi_3$  é linear, tem-se  $\varphi_3'$  constante e portanto  $\varphi_3''=0$  no elemento. Deste modo, quando se aplica a teoria de Vlasov para o estudo das barras, não é possível modelar a torção não uniforme com variação linear dos deslocamentos, já que o bi-momento  $M_\omega$  é função de  $\varphi_3''$  (expressão 2.3.24.d). Assim, opta-se aqui por desvincular os deslocamentos generalizados correspondentes ao empenamento das rotações da seção transversal.

A teoria apresentada aplica-se a uma barra de seção qualquer, delgada ou não. Em vista disso, o empenamento é representado pela função empenamento  $\psi(x,y)$  e não pela área setorial  $\omega(s)$ . O termo  $\omega(s)$  pode ser obtido de  $\psi(x,y)$ , para barras de seção delgada, admitindo-se  $\psi$  constante ao longo da espessura.

Na teoria clássica das barras da Resistência dos Materiais, supõe-se que as seções transversais permaneçam planas e ortogonais a um determinado eixo da barra, não sendo portanto considerados o empenamento e a distorção por força cortante. Os deslocamentos e as rotações são, neste caso, dependentes entre si, e o vínculo correspondente a esta hipótese cinemática é denominado vínculo de Bernoulli-Euler.

A distorção da seção por força cortante é considerada na teoria das barras de Timoshenko, onde se admite que as seções inicialmente planas permanecem planas mas não necessariamente ortogonais ao eixo da barra e que as rotações são independentes dos deslocamentos.

Nas teorias que adotam o vínculo de Vlasov, admite-se que a intensidade do empenamento é igual à rotação específica em torno de  $z$ .

Na teoria apresentada no Capítulo 2, admitem-se válidos

tanto o vínculo de Vlasov quanto o de Bernoulli-Euler. A dedução desta teoria como um caso particular da teoria geral e as consequências da adoção deste vínculo, aqui denominado de Bernoulli-Vlasov, são abordadas neste ítem em pormenor. As expressões correspondentes a este vínculo não são apresentadas por Yojo (1993).

#### 4.4.1 Hipótese cinemática

O vetor deslocamento  $\underline{d}$  de um ponto M qualquer da barra é dado por

$$\underline{d} = \underline{u} + \varrho \wedge \underline{a} + \psi p \underline{e}_3 \quad (4.4.1)$$

onde o símbolo  $\wedge$  indica produto vetorial,

$\underline{u} = \underline{u}(z) = u_\alpha \underline{e}_\alpha + u_3 \underline{e}_3$  é o vetor deslocamento dos pontos do eixo z excluindo-se o empenamento,

$\varrho = \varrho(z) = \varphi_\alpha \underline{e}_\alpha + \varphi_3 \underline{e}_3$  é o vetor rotação da seção,

$\underline{a} = \underline{a}(x_1, x_2) = x_\alpha \underline{e}_\alpha$  é o vetor posição, com origem O, no plano da seção transversal e

$\psi = \psi(x_1, x_2)$  e  $p = p(z)$  são respectivamente a função empenamento de Saint-Venant calculada para o centro de torção e a intensidade do empenamento.

Efetuando-se o produto vetorial  $\varrho \wedge \underline{a}$ , o vetor  $\underline{d}$  pode ser escrito indicialmente como

$$\underline{d} = \underline{d}(x_1, x_2, z) = d_\alpha \underline{e}_\alpha + d_3 \underline{e}_3, \text{ onde}$$

$$d_{\alpha} = u_{\alpha} - e_{\alpha\beta} x_{\beta} \varphi_3 \quad (4.4.2.a)$$

$$d_3 = u_3 + e_{\alpha\beta} x_{\beta} \varphi_{\alpha} + \psi p \quad (4.4.2.b)$$

Pode-se observar que a hipótese cinemática adotada permite tratar o empenamento como um parâmetro independente das rotações da seção transversal. Com o vínculo de Vlasov, a intensidade do empenamento é associada à rotação específica correspondente, ou seja,

$$p = \varphi_3' \quad (4.4.3)$$

As expressões 4.4.2.a-b dos deslocamentos  $d_{\alpha}$  e  $d_3$  correspondem respectivamente às expressões 2.3.1 e 2.3.7 dos deslocamentos  $(u_M, v_M)$  e  $w_M$  da teoria apresentada no Capítulo 2. Se o polo A da teoria de Vlasov pertence ao eixo  $z$  ( $x_A = y_A = 0$ ), as expressões de  $(u_M, v_M)$  e  $d_{\alpha}$  coincidem. No entanto, os deslocamentos  $w_M$  e  $d_3$  só coincidem se, adicionalmente, impõem-se os vínculos de Vlasov (expressão 4.4.3) e de Bernoulli-Euler, que associa os deslocamentos e as rotações entre si através de

$$\varphi_{\alpha} = -e_{\alpha\beta} u_{\beta}' \quad (4.4.4.a)$$

ou

$$u_{\alpha}' = e_{\alpha\beta} \varphi_{\beta} \quad (4.4.4.b)$$

#### 4.4.2 Deformações

O gradiente dos deslocamentos é dado por um tensor  $\underline{L}$  tal que



$$\underline{L} = \frac{\partial \underline{d}}{\partial \underline{x}} = \underline{d}_{,\alpha} \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{d}' \otimes \underline{e}_3 \quad (4.4.5)$$

onde o símbolo  $\otimes$  indica produto tensorial e

$$\underline{d}_{,\alpha} = \varphi \wedge \underline{e}_\alpha + \psi_{,\alpha} p \underline{e}_3$$

$$\underline{d}' = \underline{u}' + \varphi' \wedge \underline{a} + \psi p' \underline{e}_3$$

Os elementos da matriz  $\underline{L}$  são dados então por

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & u'_1 - \varphi'_3 x_2 \\ \varphi_3 & 0 & u'_2 + \varphi'_3 x_1 \\ -\varphi_2 + \psi_{,1} p & \varphi_1 + \psi_{,2} p & u'_3 + \varphi'_1 x_2 - \varphi'_2 x_1 + \psi p' \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

O tensor das deformações  $\underline{E}$  sob linearidade geométrica é um tensor simétrico dado por

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \quad (4.4.7)$$

Definindo-se o vetor das deformações  $\underline{\gamma}$  através dos elementos da terceira coluna de  $\underline{E}$  (note-se que  $E_{11} = E_{22} = E_{12} = E_{21} = 0$ ), vem que

$$\underline{\gamma} = \gamma_\alpha \underline{e}_\alpha + \varepsilon \underline{e}_3 \quad (4.4.8.a)$$

$$\gamma_\alpha = 2E_{\alpha 3} = u'_\alpha - e_{\alpha\beta} \varphi_\beta - e_{\alpha\beta} x_\beta \varphi'_3 + \psi_{,\alpha} p \quad (4.4.8.b)$$

$$\varepsilon = E_{33} = u'_3 + e_{\alpha\beta} \varphi'_\alpha x_\beta + \psi p' \quad (4.4.8.c)$$

onde  $\gamma_\alpha$  são as distorções e  $\varepsilon$  os alongamentos dos pontos da seção transversal.

Pode-se ainda escrever  $\underline{\gamma}$  sob a forma

$$\gamma = \eta + \kappa \wedge \underline{a} + \psi_{,\alpha} p \underline{e}_\alpha + \psi p' \underline{e}_3 \quad (4.4.9)$$

onde  $\kappa = \varphi'$  são as rotações específicas do eixo da barra e

$$\eta = \underline{u}' - \varphi \wedge \underline{e}_3 \quad (4.4.10.a)$$

$$\eta_\alpha = u'_\alpha - e_{\alpha\beta} \varphi_\beta \quad (4.4.10.b)$$

$$\eta_3 = u'_3 \quad (4.4.10.c)$$

Os termos  $\eta_\alpha$  correspondem à diferença entre as rotações  $\varphi_\beta$  e as declividades  $u'_\alpha$  do eixo deformado da barra, ou seja, correspondem à distorção ao longo do eixo da barra, enquanto que o termo  $\eta_3$  representa o alongamento do eixo da barra. Os dois últimos termos da expressão 4.4.9 refletem o efeito do empenamento da seção transversal.

Impondo-se o vínculo de Vlasov ( $p=\varphi'_3=\kappa_3$ ), os dois últimos termos de  $\gamma_\alpha$  na expressão 4.4.8.b podem ser agrupados em um só, de modo que

$$\gamma_\alpha = \eta_\alpha + (\psi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta} x_\beta) \kappa_3 \quad (4.4.11)$$

Impondo-se o vínculo de Bernoulli-Euler (expressão 4.4.4), os termos  $\eta_\alpha$  se anulam e o vetor  $\eta$  se resume ao termo  $\eta_3=u'_3$ . Assim, o modelo com vínculo de Bernoulli-Vlasov conduz às seguintes expressões:

$$\gamma_\alpha = (\psi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta} x_\beta) \kappa_3 \quad (4.4.12.a)$$

$$\varepsilon = \eta_3 - x_\alpha u''_\alpha + \psi \kappa'_3 \quad (4.4.12.b)$$

#### 4.4.3 Tensões

O tensor das tensões  $\underline{T}$  é um tensor simétrico definido por

$$\underline{T} = \underline{t}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{\tau} \otimes \underline{e}_3 \quad (4.4.13)$$

onde  $\underline{t}_\alpha$  são as tensões atuantes nos planos normais aos vetores  $\underline{e}_\alpha$  e  $\underline{\tau}$  é a tensão atuante no plano normal ao vetor  $\underline{e}_3$ , cujos componentes são dados por

$$\underline{\tau} = T_{\alpha 3} \underline{e}_\alpha + T_{33} \underline{e}_3 = \tau_\alpha \underline{e}_\alpha + \sigma \underline{e}_3 \quad (4.4.14)$$

Pode-se observar adiante que apenas o vetor  $\underline{\tau}$  tem interesse para a solução do problema, já que apenas os elementos da terceira linha e da terceira coluna das deformações são diferentes de zero.

#### 4.4.4 Potência dos esforços internos

O produto escalar do tensor das tensões pela primeira derivada em relação ao tempo do tensor das deformações é dado por

$$\underline{T} : \dot{\underline{E}} = T_{1j} \dot{E}_{1j} = 2T_{13} \dot{E}_{13} + 2T_{23} \dot{E}_{23} + T_{33} \dot{E}_{33} = \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\gamma}} = \tau_\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \sigma \dot{\epsilon}$$

A potência dos esforços internos é definida por

$$P_i = \int_1 \int_A \underline{T} : \dot{\underline{E}} \, dA \, dz$$

Integrando-se o termo  $\underline{T} : \dot{\underline{E}}$  numa seção transversal, vem que

$$\begin{aligned} \int_A \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\gamma}} dA &= \int_A \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\eta}} dA + \int_A \underline{a} \wedge \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\kappa}} dA + \int_A \tau_{\alpha} \psi_{,\alpha} \dot{p} dA + \int_A \sigma \psi \dot{p}' dA = \\ &= \underline{f}_i \cdot \dot{\underline{\eta}} + \underline{m}_i \cdot \dot{\underline{\kappa}} + V_{\psi} \dot{p} + M_{\psi} \dot{p}' \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

onde  $\underline{f}_i$ ,  $\underline{m}_i$ ,  $V_{\psi}$  e  $M_{\psi}$  são respectivamente forças, momentos, bicortante e bimomento resultantes internos na seção transversal, dados por

$$\underline{f}_i = \int_A \underline{\tau} dA = V_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} + N \underline{e}_3 \quad (4.4.16.a)$$

$$\underline{m}_i = \int_A \underline{a} \wedge \underline{\tau} dA = M_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} + T \underline{e}_3 \quad (4.4.16.b)$$

$$V_{\psi} = \int_A \tau_{\alpha} \psi_{,\alpha} dA \quad (4.4.16.c)$$

$$M_{\psi} = \int_A \sigma \psi dA \quad (4.4.16.d)$$

Os componentes  $V_{\alpha}$ ,  $N$ ,  $M_{\alpha}$  e  $T$  são respectivamente as forças cortantes, a força normal, os momentos fletores e o momento de torção, dados por

$$V_{\alpha} = \int_A \tau_{\alpha} dA \quad N = \int_A \sigma dA \quad M_{\alpha} = \int_A e_{\alpha\beta} x_{\beta} \sigma dA \quad T = \int_A e_{\alpha\beta} x_{\alpha} \tau_{\beta} dA$$

Definindo-se o vetor  $\underline{\sigma}$  dos esforços sollicitantes (tensões generalizadas) e o vetor  $\underline{\xi}$  das deformações generalizadas de uma seção como

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \underline{f}_i \\ \underline{m}_i \\ V \\ \psi \\ M \\ \psi \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (\text{a}) \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \eta \\ \kappa \\ p \\ p' \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (\text{b}) \quad (4.4.17)$$

tem-se

$$\int_A \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \, dA = \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (4.4.18)$$

ou seja, as tensões e as deformações generalizadas assim definidas são energeticamente conjugadas.

O vetor  $\underline{\varepsilon}$  das deformações generalizadas pode ser escrito em função do vetor dos deslocamentos generalizados  $\underline{\Delta}$ , onde  $\underline{\Delta}$  são os graus de liberdade do problema, como

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{H} \underline{\Delta} \quad (4.4.19)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 & \underline{E}_3 & \underline{0}_3 & 0 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{0}_3 & \underline{I}_3 & 0 & 0 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 & 0 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 11}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 \partial / \partial z & \underline{0}_3 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{I}_3 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{I}_3 \partial / \partial z & 0 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \partial / \partial z \end{bmatrix}_{11 \times 7}$$

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \varphi \\ p \end{bmatrix}_{7 \times 1} \quad \underline{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{B}$  é uma matriz de transformação,  $\underline{H}$  um operador diferencial matricial e  $\underline{E}_3$  é o tensor anti-simétrico cujo vetor axial é  $\underline{e}_3$ .

Assim, a potência dos esforços internos de uma barra de comprimento  $l$  é dada por

$$P_i = \int_1 \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} \, dz = \int_1 (\underline{f}_i \cdot \dot{\underline{\eta}} + \underline{m}_i \cdot \dot{\underline{\kappa}} + V_\psi \dot{p} + M_\psi \dot{p}') \, dz = \int_1 \underline{\sigma} \cdot \underline{B} \cdot \underline{H} \cdot \underline{\dot{A}} \, dz \quad (4.4.20)$$

É interessante observar que, nesta teoria, a bicortante  $V_\psi$  e o momento de torção total  $T$  são esforços solicitantes independentes entre si. Já com o vínculo de Vlasov, substituindo-se  $p = \varphi'_3 = \kappa_3$  em 4.4.15, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_A \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \, dA &= \int_A \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\eta}} \, dA + \int_A \underline{\tau} \cdot (\dot{\underline{\kappa}} \wedge \underline{a} + \underline{e}_\alpha \psi_{,\alpha} \dot{\kappa}_3) \, dA + \int_A \underline{\tau} \cdot \underline{e}_3 \psi \dot{\kappa}'_3 \, dA = \\ &= \underline{f}_i \cdot \dot{\underline{\eta}} + \underline{m}_i \cdot \dot{\underline{\kappa}} + M_\psi \dot{\kappa}'_3 \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

onde  $\underline{f}_i$  e  $M_\psi$  ainda são dados por 4.4.16.a e 4.4.16.d mas  $\underline{m}_i$  passa a ser dado por

$$\underline{m}_i = \int_A (\underline{a} \wedge \underline{\tau} + \psi_{,\alpha} \tau_\alpha \underline{e}_3) \, dA = M_{\alpha\alpha} \underline{e}_\alpha + M_3 \underline{e}_3 \quad (4.4.22)$$

Nesta expressão, o momento de torção

$$M_3 = \int_A e_{\alpha\beta} x_\alpha \tau_\beta \, dA + \int_A \psi_{,\alpha} \tau_\alpha \, dA = T + V_\psi \quad (4.4.23)$$

é a parcela de  $T$  correspondente à torção uniforme, dada pela soma do momento de torção total  $T$  com a bicortante  $V_\psi$ , aqui definida com o sinal contrário ao do momento de flexo-torção  $T_\omega$  do Capítulo 2 (expressão 2.3.32).

Considerando-se válida adicionalmente a hipótese de

Bernoulli-Euler, pode-se desconsiderar em 4.4.21 as forças cortantes e as correspondentes distorções. Tomando-se para  $\varphi'_\alpha$  a expressão 4.4.4, vem que

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ \underline{m}_i \\ M_\psi \end{bmatrix}_{5 \times 1} \quad (a) \quad \underline{E} = \underline{I}_5 \quad (b) \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u'_3 \\ -u''_2 \\ u''_1 \\ \varphi'_3 \\ \varphi''_3 \end{bmatrix}_{5 \times 1} \quad (c)$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{e}_3^T \partial/\partial z & 0 \\ \underline{A}_3 \partial^2/\partial z^2 & \underline{e}_3 \partial/\partial z \\ \underline{0}^T & \partial^2/\partial z^2 \end{bmatrix}_{5 \times 4} \quad (d) \quad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} u \\ \varphi_3 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (e)$$

(4.4.24)

#### 4.4.5 Potência dos esforços externos

Sejam  $\underline{p}_C$  e  $\underline{p}_V$  respectivamente os vetores das forças superficiais laterais por unidade de área (no contorno C) e das forças volúmicas por unidade de volume atuantes na barra. A potência dos esforços externos aplicados à barra é dada por

$$P_e = \int_1 \left[ \int_C \underline{p}_C \cdot \dot{\underline{d}} \, dC + \int_A \underline{p}_V \cdot \dot{\underline{d}} \, dA \right] dz \quad (4.4.25)$$

Substituindo-se 4.4.1 na expressão de  $P_e$ , pode-se escrever

$$P_e = \int_1 (\underline{f}_e \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{m}_e \cdot \dot{\underline{\psi}} + m_{\psi e} \dot{p}) dz = \int_1 \underline{q} \cdot \dot{\underline{\Delta}} dz \quad (4.4.26)$$

onde  $\underline{f}_e$ ,  $\underline{m}_e$  e  $m_{\psi e}$  são respectivamente as forças, os momentos e o bimomento externos por unidade de comprimento, dados por

$$\underline{f}_e = \int_C \underline{p}_C dC + \int_A \underline{p}_V dA = f_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} + f_z \underline{e}_3$$

$$\underline{m}_e = \int_C (\underline{a} \wedge \underline{p}_C) dC + \int_A (\underline{a} \wedge \underline{p}_V) dA = m_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} + m_z \underline{e}_3$$

$$m_{\psi e} = \int_C \psi \underline{p}_C \cdot \underline{e}_3 dC + \int_A \psi \underline{p}_V \cdot \underline{e}_3 dA$$

Os esforços generalizados externos são representados pelo vetor

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{f}_e \\ \underline{m}_e \\ m_{\psi e} \end{bmatrix}_{7 \times 1} \quad (4.4.27)$$

tal que os deslocamentos generalizados e o carregamento externo sejam energeticamente conjugados. Embora não esteja expressamente indicado, o mesmo procedimento pode ser adotado para as forças ou momentos concentrados entre  $z = 0$  e  $z = 1$ , tomando-se no caso os deslocamentos generalizados nos pontos de aplicação dos mesmos.

No modelo de Bernoulli-Vlasov,  $\underline{\Delta}$  passa a ser um vetor de ordem quatro (expressão 4.4.24.e), enquanto  $\underline{q}$  é um vetor de ordem sete. Assim,  $P_e$  deve ser reescrita como



$$P_e = \int_1 \underline{q} \cdot \underline{H}_e \dot{\underline{\Delta}} dz$$

onde  $\underline{H}_e$  é o operador diferencial matricial

$$\underline{H}_e = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 & \underline{0} \\ \underline{E}_3 \partial/\partial z & \underline{e}_3 \\ \underline{0}^T & \partial/\partial z \end{bmatrix}_{7 \times 4}$$

#### 4.4.6 Equações de equilíbrio e condições de contorno

As equações de equilíbrio e as condições de contorno da barra são obtidas variacionalmente através do princípio dos trabalhos virtuais. As expressões dos trabalhos virtuais dos esforços internos e externos são, respectivamente,

$$\delta W_i = \int_1 \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{\varepsilon} dz = \int_1 \left[ \underline{f}_i \cdot (\delta \underline{u}' + \underline{e}_3 \wedge \delta \varphi) + \underline{m}_i \cdot \delta \varphi' + V_\psi \delta p + M_\psi \delta p' \right] dz \quad (4.4.28.a)$$

$$\delta W_e = \int_1 \underline{q} \cdot \delta \underline{\Delta} dz = \int_1 (\underline{f}_e \cdot \delta \underline{u} + \underline{m}_e \cdot \delta \varphi + m_{\psi e} \delta p) dz + \underline{q}^* \cdot \delta \underline{\Delta} \Big|_0^1 \quad (4.4.28.b)$$

onde

$$\underline{q}^* = \begin{bmatrix} \underline{f}_e^* \\ \underline{m}_e^* \\ M_{\psi e}^* \end{bmatrix}$$

é o vetor que contém os valores prescritos de  $\underline{q}$  nas extremidades da barra. Os componentes dos vetores  $\underline{f}_e^*$  e  $\underline{m}_e^*$

são as forças e momentos concentrados aplicados às extremidades.

Impondo-se  $\delta W_i = \delta W_e$  para qualquer  $\delta \Delta \neq 0$  tem-se, integrando-se por partes os termos em  $\delta u'$ ,  $\delta \varphi'$  e  $\delta p'$ .

$$\int_1 \left[ (\underline{f}'_i + \underline{f}'_e) \cdot \delta \underline{u} + (\underline{m}'_i + \underline{e}_3 \wedge \underline{f}'_i + \underline{m}'_e) \cdot \delta \varphi + (M'_\psi - V_\psi + m_{\psi e}) \delta p \right] dz -$$

$$- (\underline{f}'_i - \underline{f}'_e) \cdot \delta \underline{u} \Big|_0^1 - (\underline{m}'_i - \underline{m}'_e) \cdot \delta \varphi \Big|_0^1 - (M'_\psi - M''_\psi) \delta p \Big|_0^1 = 0 \quad (4.4.29)$$

Logo, sendo os deslocamentos virtuais generalizados arbitrários, as equações de equilíbrio podem ser escritas como

$$\underline{f}'_i + \underline{f}'_e = 0 \quad (4.4.30.a)$$

$$\underline{m}'_i + \underline{e}_3 \wedge \underline{f}'_i + \underline{m}'_e = 0 \quad (4.4.30.b)$$

$$M'_\psi - V_\psi + m_{\psi e} = 0 \quad (4.4.30.c)$$

ou, em notação indicial,

$$V'_\alpha + f'_\alpha = 0 \quad (4.4.31.a)$$

$$N' + f'_z = 0 \quad (4.4.31.b)$$

$$M'_\alpha - e_{\alpha\beta} V'_\beta + m'_\alpha = 0 \quad (4.4.31.c)$$

$$T' + m'_z = 0 \quad (4.4.31.d)$$

$$M'_\psi - V_\psi + m_{\psi e} = 0 \quad (4.4.31.e)$$

As condições de contorno do problema são dadas por

$$(\underline{f}_i - \underline{f}_e^*) \cdot \delta \underline{u} \Big|_0^1 = 0 \quad (\underline{m}_i - \underline{m}_e^*) \cdot \delta \underline{\psi} \Big|_0^1 = 0 \quad (M_\psi - M_\psi^*) \delta p \Big|_0^1 = 0$$

(4.4.32)

Estes termos se anulam quando os deslocamentos virtuais  $\delta \underline{\Delta} = \underline{\Delta} - \underline{\Delta}^*$  se anulam (condições essenciais) ou quando os termos correspondentes aos esforços solicitantes em 4.4.32 se anulam (condições naturais).  $\underline{\Delta}^*$  são os valores prescritos de  $\underline{\Delta}$  nas extremidades da barra.

Procedendo-se de maneira análoga para os vetores  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\xi}$  do modelo de Bernoulli-Vlasov (expressões 4.4.24) tem-se para as equações de equilíbrio, em notação indicial,

$$N' + f_z = 0 \quad (4.4.33.a)$$

$$M''_\alpha + e_{\alpha\beta} f_\beta + m'_\alpha = 0 \quad (4.4.33.b)$$

$$M'_3 + m_z - M''_\psi - m'_\psi e = 0 \quad (4.4.33.c)$$

As duas primeiras expressões correspondem às equações de equilíbrio 4.4.31.b e 4.4.31.c da teoria geral. A terceira expressão equivale à equação 2.3.33.d, exceto pelo bimomento externo, não considerado por Vlasov.

Para as condições de contorno, obtém-se

$$(N - N^*) \delta u_3 \Big|_0^1 = 0 \quad (4.4.34.a)$$

$$(M_\alpha - M_\alpha^*) \delta u'_\beta \Big|_0^1 = 0 \quad (4.4.34.b)$$

$$(M'_\alpha + m_\alpha - V_\beta^*) \delta u_\beta \Big|_0^1 = 0 \quad \text{ou} \quad (V_\beta - V_\beta^*) \delta u_\beta \Big|_0^1 = 0 \quad (4.4.34.c)$$

$$(M_3 - M'_\psi - m_{\psi e} - M_3^*) \delta\varphi_3 \Big|_0^1 = 0 \quad (4.4.34.d)$$

$$(M_\psi - M_{\psi e}^*) \delta\varphi_3' \Big|_0^1 = 0 \quad (4.4.34.e)$$

É interessante observar que, ao contrário do que ocorre na teoria geometricamente linear, o vínculo de Vlasov leva a uma condição de contorno em  $\varphi_3$  de difícil interpretação física.

#### 4.4.7 Equações constitutivas elásticas lineares

Consideram-se neste trabalho apenas materiais com comportamento elástico linear. Neste caso, as tensões normais e de cisalhamento podem ser escritas como

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.4.35.a)$$

$$\tau_\alpha = G \gamma_\alpha \quad (4.4.35.b)$$

Assim, utilizando-se as propriedades de  $\psi$  deduzidas no item 4.3.1 e as expressões 4.4.8 para as deformações  $\gamma_\alpha$  e  $\varepsilon$ , tem-se

$$N = \int_A \sigma dA = EA\eta_3 + ES_\alpha \kappa_\alpha \quad (4.4.36.a)$$

$$V_\alpha = \int_A \tau_\alpha dA = GA\eta_\alpha - GS_\alpha \kappa_3 + GS_\alpha^c p \quad (4.4.36.b)$$

$$M_\alpha = e_{\alpha\gamma} \int_A x_\gamma \sigma dA = ES_\alpha \eta_3 + EI_{\alpha\beta} \kappa_\beta \quad (4.4.36.c)$$

$$T = \int_A e_{\alpha\beta} x_\alpha \tau_\beta dA = -GS_\alpha \eta_\alpha + GI_0 \kappa_3 + G(I_t^c - I_0 + AX_{c\alpha} X_{c\alpha}) p \quad (4.4.36.d)$$

$$V_\psi = \int_A \psi_{,\alpha} \tau_\alpha dA = GS_\alpha^c \eta_\alpha + G(I_t^c - I_0 + AX_{c\alpha} X_{c\alpha}) \kappa_3 + G(I_0^c - I_t^c) p \quad (4.4.36.e)$$

$$M_\psi = \int_A \psi \sigma dA = E \int_A \psi^2 p' dA = EI_\psi p' \quad (4.4.36.f)$$

Sendo  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\varepsilon}$  dados por 4.4.17 pode-se definir, em forma vetorial, a seguinte equação constitutiva:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (4.4.37)$$

onde  $\underline{D}$  é a matriz de rigidez constitutiva no sistema local da barra, dada por

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} GA & 0 & 0 & 0 & 0 & -GS_1 & GS_1^c & 0 \\ & GA & 0 & 0 & 0 & -GS_2 & GS_2^c & 0 \\ & & EA & ES_1 & ES_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & EI_{11} & EI_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & EI_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & GI_0 & G(I_t^c - I_0 + AX_{c\alpha} X_{c\alpha}) & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & & G(I_0^c - I_t^c) & 0 \\ & & & & & & & EI_\psi \end{bmatrix}$$

$$(4.4.38)$$

Note-se que a força cortante é função não só de GA mas também de  $GS_\alpha$  e de  $GS_\alpha^c$ . Para que a força cortante seja

função apenas de GA, é preciso que os eixos passem pelo centro de gravidade da seção transversal e que o empenamento possa ser desprezado. Caso estas condições sejam válidas, tem-se também que o momento de torção T passa a ser função somente do momento polar de inércia  $I_0$ . Em particular para perfis de seção aberta e parede delgada, esta consideração resulta numa rigidez à torção superestimada.

Deve-se observar também que:

- Para as barras de seção circular cheia ou vazada, tem-se  $x_{c\alpha} = x_{c\alpha} = 0$  e  $I_t^c = I_0^c$ , e portanto  $D_{67} = D_{77} = 0$ .

- Se os eixos passam pelo centro de gravidade, pode-se adotar  $S_\alpha = S_\alpha^G = 0$ ,  $S_\alpha^c = -Ae_{\alpha\beta} x_{c\beta}$ ,  $x_{c\alpha} = 0$ ,  $I_0 = I_0^G$  e  $I_0^c = I_0 + Ax_{c\alpha}^2$ .

- Se os eixos passam pelo centro de torção, pode-se simplificar a matriz  $\underline{D}$  adotando-se  $S_\alpha^c = S_\alpha$ ,  $x_{c\alpha} = 0$  e  $I_0 = I_0^c$  e portanto  $D_{67} = -D_{77} = G(I_t^c - I_0^c)$ .

Impondo-se o vínculo de Vlasov ( $p = \varphi_3'$ ) em 4.4.36, os esforços internos sollicitantes N e  $M_\alpha$  não se alteram, mas  $V_\alpha$ , T,  $V_\psi$  e  $M_\psi$  passam a ser dados por

$$V_\alpha = GA\eta_\alpha + G(S_\alpha^c - S_\alpha)\varphi_3' = GA\eta_\alpha - GS_\alpha^*\varphi_3' \quad (4.4.39.a)$$

$$T = -GS_\alpha\eta_\alpha + G(I_t^c + Ax_{c\alpha}x_{c\alpha})\varphi_3' \quad (4.4.39.b)$$

$$V_\psi = GS_\alpha^c\eta_\alpha + G(I_0^c - I_0 + Ax_{c\alpha}x_{c\alpha})\varphi_3' \quad (4.4.39.c)$$

$$M_\psi = EI_\psi\varphi_3' \quad (4.4.39.d)$$

logo, tem-se

$$\begin{aligned}
 M_3 = T + V_\psi &= G(S_\alpha^c - S_\alpha) \eta_\alpha + G(I_t^c + I_0^c - I_0 + 2AX_{c\alpha} X_{c\alpha}) \varphi_3' = \\
 &= -GS_\alpha^* \eta_\alpha + G(I_t^c + AX_{c\alpha}^2) \varphi_3' = -GS_\alpha^* \eta_\alpha + GI_t^* \varphi_3' \quad (4.4.39.e)
 \end{aligned}$$

Note-se que o esforço solicitante a ser obtido, neste caso, é o momento de torção uniforme  $M_3 = T + V_\psi$ , e não o momento de torção total T.

A matriz de rigidez constitutiva  $\underline{D}$  passa a ser de ordem 7x7, sendo dada por

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} GA & 0 & 0 & 0 & 0 & -GS_1^* & 0 \\ & GA & 0 & 0 & 0 & -GS_2^* & 0 \\ & & EA & ES_1 & ES_2 & 0 & 0 \\ & & \cdot & EI_{11} & EI_{12} & 0 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & EI_{22} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & GI_t^* & 0 \\ & & & & & & EI_\psi \end{bmatrix} \quad (4.4.40)$$

É interessante observar que, com o vínculo de Vlasov, a força cortante  $V_\alpha$  passa a ser função de  $S_\alpha^*$ , ou seja, da diferença entre o momento estático  $S_\alpha$  e o momento estático em relação ao centro de torção  $S_\alpha^c$ . Este termo só se anula se o eixo z passa pelo centro de torção. Da mesma forma, o momento de torção  $M_3$ , correspondente à torção uniforme, é função de  $S_\alpha^*$  e  $I_t^*$ , obtendo-se a expressão 2.2.8 da teoria de Saint-Venant ( $M_3 = GI_t^* \varphi_3'$ ) apenas se o eixo z passa pelo centro de torção.

Para as aplicações em que as tensões normais decorrentes da torção não uniforme, e portanto o bimomento  $M_\psi$ , possam ser desprezadas (por exemplo para os perfis tipo cantoneira, para os quais  $I_\psi = 0$ ), a matriz  $\underline{D}$  passa a ser de ordem 6x6, eliminando-se de 4.4.46 a sétima linha e a sétima coluna.

Para o modelo de Bernoulli-Vlasov obtém-se, de forma análoga,

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} EA & ES_1 & ES_2 & 0 & 0 \\ \cdot & EI_{11} & EI_{12} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & EI_{22} & 0 & 0 \\ & & & GI_t^* & 0 \\ & & & & GI_\psi \end{bmatrix} \quad (4.4.41)$$

Neste caso, o momento de torção  $M_3$  só é função de  $I_t$  se os eixos passam pelo centro de torção.

#### 4.4.8 Energia potencial total

A energia potencial total de uma barra elástica linear é dada por

$$U = U_i + U_e$$

onde  $U_i$  é a energia de deformação da barra ou energia potencial dos esforços internos e  $U_e$  a energia potencial dos esforços externos.

A energia potencial dos esforços externos que não dependem dos deslocamentos é dada por

$$U_e = - \int_0^1 \underline{q} \cdot \underline{\Delta} \, dz - \underline{q}^* \cdot \underline{\Delta} \Big|_0^1$$

enquanto que a energia de deformação da barra vale



$$U_i = \int_1 \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\sigma} \, dz = \int_1 \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{D} \underline{\varepsilon} \, dz$$

A configuração de equilíbrio da barra é obtida impondo-se que a energia potencial total passa por um extremo para esta configuração, como já visto no item 3.2. Assim,

$$\delta U = \delta U_i + \delta U_e = 0$$

Pode-se demonstrar que os trabalhos virtuais dos esforços internos e externos são dados respectivamente por  $\delta U_i = \delta W_i$  e  $\delta U_e = -\delta W_e$ .

É interessante notar que o termo  $\frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{D} \underline{\varepsilon}$  pode ser escrito como a soma de duas parcelas, uma delas contendo termos em G e a outra contendo termos em E, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{D} \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \kappa_3 \\ p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} GA & 0 & -GS_1 & GS_1^C \\ 0 & GA & -GS_2 & GS_2^C \\ \cdot & \cdot & GI_0 & G(I_t^C - I_0 + Ax_{c\alpha}x_{c\alpha}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & G(I_0^C - I_t^C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \kappa_3 \\ p \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ p' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} EA & ES_1 & ES_2 & 0 \\ \cdot & EI_{11} & EI_{12} & 0 \\ \cdot & \cdot & EI_{22} & 0 \\ EI_\psi & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_3 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ p' \end{bmatrix} \quad (4.4.42) \end{aligned}$$

A primeira parcela pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} GA [\eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} \kappa_3 - e_{\alpha\gamma} (x_{c\gamma} - x_{c\gamma}) p] [\eta_\alpha - e_{\alpha\delta} x_{c\delta} \kappa_3 - e_{\alpha\delta} (x_{c\delta} - x_{c\delta}) p] + \\ + \frac{1}{2} GI_t^C \kappa_3^2 + \frac{1}{2} G [I_0 - Ax_{c\alpha}^2 - I_t^C] (\kappa_3 - p)^2 \quad (4.4.43) \end{aligned}$$

Algumas observações interessantes podem ser feitas a partir desta expressão.

Se o termo  $G[I_0 - Ax_{c\alpha}^2 - I_t^c] = G[I_0^G - I_t^c]$  tende para infinito, só é possível minimizar a energia potencial se  $(\kappa_3 - p)$  tende a zero. O vínculo de Vlasov decorre então naturalmente da teoria geral aqui apresentada caso  $G(I_0^G - I_t^c)$  tenha valor elevado, o que acontece em particular nos perfis de aço ( $G$  elevado) de seção aberta e parede delgada, onde geralmente  $I_0^G$  é muito superior a  $I_t^c$ .

Nas barras de seção circular, tem-se  $I_t^c = I_0^c = I_0^G$  e  $x_{c\alpha} = x_{G\alpha}$ , e a seção não sofre empenamento ( $p=0$ ). Nas demais barras de seção fechada ou de parede espessa, os valores de  $I_0^G$  e  $I_t^c$  não diferem muito, e portanto o vínculo de Vlasov se aplica a materiais com módulo de deformação transversal elevado.

Impondo-se a condição  $\kappa_3 = p = \varphi_3'$ , a expressão 4.4.43 se reduz a

$$\frac{1}{2} GA (\eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} \varphi_3') (\eta_\alpha - e_{\alpha\delta} x_{c\delta} \varphi_3') + \frac{1}{2} GI_t \varphi_3'^2 \quad (4.4.44)$$

Se adicionalmente as deformações devidas à força cortante podem ser desprezadas, ou seja, se o termo  $GA$  tende para infinito, só é possível minimizar a energia potencial total se o termo  $(\eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} \varphi_3')$  tende a zero, ou seja, se  $x_{c\gamma}$  e  $\eta_\alpha$  se anulam. Estas condições equivalem a se impor o vínculo de Bernoulli-Euler para o eixo  $z$  passando pelo centro de torção. O modelo de Bernoulli-Vlasov se aplica, portanto, às barras com  $GA$  e  $G(I_0^G - I_t^c)$  elevados, desde que o eixo passe pelo centro de torção. Caso o empenamento possa ser desprezado, basta impor o vínculo de Bernoulli-Euler, independente da posição do eixo.

Por outro lado, se apenas o termo  $GA$  tende para infinito mas

não se impõe o vínculo de Vlasov, é necessário, para a minimização da energia potencial, que o termo correspondente a GA na expressão 4.4.43 tenda a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} (\varphi'_3 - p) - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} p &= \\ = \eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} \varphi'_3 - e_{\alpha\gamma} (x_{c\gamma} - x_{c\gamma}) (\varphi'_3 - p) &\Rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.4.45)$$

Neste caso, deve-se ter  $x_{c\gamma} = x_{c\gamma}$ , e ainda  $\eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} \varphi'_3 = 0$ . Estas condições correspondem a se impor o vínculo de Bernoulli-Euler para o centro de torção, e ainda que o mesmo coincida com o centro de gravidade.

Conclui-se portanto que o vínculo de Bernoulli-Euler aplica-se às barras em que GA tende para infinito, mas deve ser enunciado como: "As seções planas permanecem planas e normais ao eixo passando pelo centro de torção".

Mesmo neste caso, se  $G(I_0^G - I_t^C)$  não tende para infinito, o vínculo de Bernoulli-Euler só conduz a bons resultados se o centro de gravidade coincide com o centro de torção.

Nas barras em que GA não tende a infinito, a deformação por cisalhamento é importante, logo a hipótese de Bernoulli-Euler não é adequada.

#### 4.5 TEORIA GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR

São apresentados neste item os fundamentos da teoria não linear geometricamente exata formulada por Pimenta, Yojo (1993). Esta teoria é válida para estruturas com grandes deslocamentos e grandes rotações sem nenhuma limitação, dispensando portanto quaisquer aproximações nas relações deslocamentos-deformações, bem como simplificações como as das teorias de primeira e de segunda ordem.

Os deslocamentos generalizados correspondentes ao empenamento são tratados, de modo análogo ao da teoria linear, como grandezas independentes das rotações.

A configuração deformada da barra num instante  $t$  qualquer é descrita de forma Lagrangeana, ou seja, é função da configuração de referência inicial da barra. As coordenadas dos pontos de uma barra reta de comprimento  $l$  são então definidas em relação ao sistema local  $\underline{e}_1^r \ \underline{e}_2^r \ \underline{e}_3^r$ , com  $\underline{e}_3^r$  ao longo do eixo da barra em sua configuração inicial e portanto  $\underline{e}_1^r$  e  $\underline{e}_2^r$  no plano inicial da seção transversal.

A posição dos pontos da barra na configuração inicial é dada pelo vetor

$$\underline{x}^r = x_\alpha \underline{e}_\alpha^r + z^r \underline{e}_3^r = \underline{a}^r + \underline{z}^r \quad (4.5.1)$$

Na configuração deformada, a posição dos pontos  $\underline{x}$  passa a ser descrita pela função vetorial  $\underline{x} = \hat{\underline{x}}(\underline{x}^r, t)$ , onde  $t$  é o tempo. Esta função vetorial decorre da hipótese cinemática adotada.

#### 4.5.1 Hipótese cinemática

A hipótese cinemática adotada nesta teoria é que os deslocamentos dos pontos das seções transversais da barra inicialmente ortogonais ao eixo compõem-se de duas parcelas: uma correspondente ao movimento da barra mantendo as seções planas e indeformáveis, embora não ortogonais ao eixo, e outra correspondente ao empenamento da seção transversal, ortogonal à mesma na configuração deformada. Assim, o vetor posição  $\underline{x}$  pode ser decomposto como

$$\underline{x} = \underline{a} + \underline{z} + \psi p \underline{e}_3 \quad (4.5.2)$$

onde

$\underline{z} = \hat{z}(\underline{z}^r, t)$  descreve o movimento do eixo da barra em relação ao sistema de referência.

$\psi = \psi(\underline{x}^r, t)$  e  $p = p(\underline{z}^r, t)$  são respectivamente a função empenamento calculada para o centro de torção e a intensidade do empenamento na direção do eixo local móvel  $\underline{e}_3$  e

$\underline{a} = \hat{a}(\underline{x}^r, t)$  descreve o movimento relativo dos demais pontos da seção transversal excluindo-se o empenamento. O vetor  $\underline{a}$  pode ser expresso em função da posição do ponto na configuração inicial como

$$\underline{a} = x_\alpha \underline{e}_\alpha = \underline{Q} \underline{a}^r \quad (4.5.3)$$

Nesta expressão,  $\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{z}^r, t) = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i^r$  é o tensor das rotações das seções transversais. Os vetores  $\underline{e}_i = \underline{Q} \underline{e}_i^r$  formam uma base vetorial ortonormal móvel, com  $\underline{e}_3$  normal às seções transversais na configuração deformada e  $\underline{e}_\alpha$  e  $\underline{a}$  contidos no plano da seção transversal (fig. 4.5.1). Note-se que os componentes de  $\underline{a}$  na base local móvel são invariantes, já que  $a_\alpha = x_\alpha$ .

O tensor das rotações  $\underline{Q}$  é ortogonal, podendo portanto ser descrito através da fórmula de Euler-Rodrigues

$$\underline{Q} = \underline{I} + \frac{\text{sen} \varphi}{\varphi} \underline{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2} \underline{\varphi}^2 \quad (4.5.4)$$

onde  $\underline{I}$  é o tensor identidade e  $\underline{\varphi}$  é um tensor anti-simétrico

cujo vetor axial, denominado vetor das rotações, é  $\varphi = \varphi_1 e_1$ , sendo  $\varphi_1$  os elementos da matriz de  $\varphi$  na mesma base. A magnitude da rotação em torno do vetor  $\varphi$  é dada pelo módulo  $\varphi$  deste vetor e os graus de liberdade à rotação da seção correspondem aos componentes de  $\varphi$ .

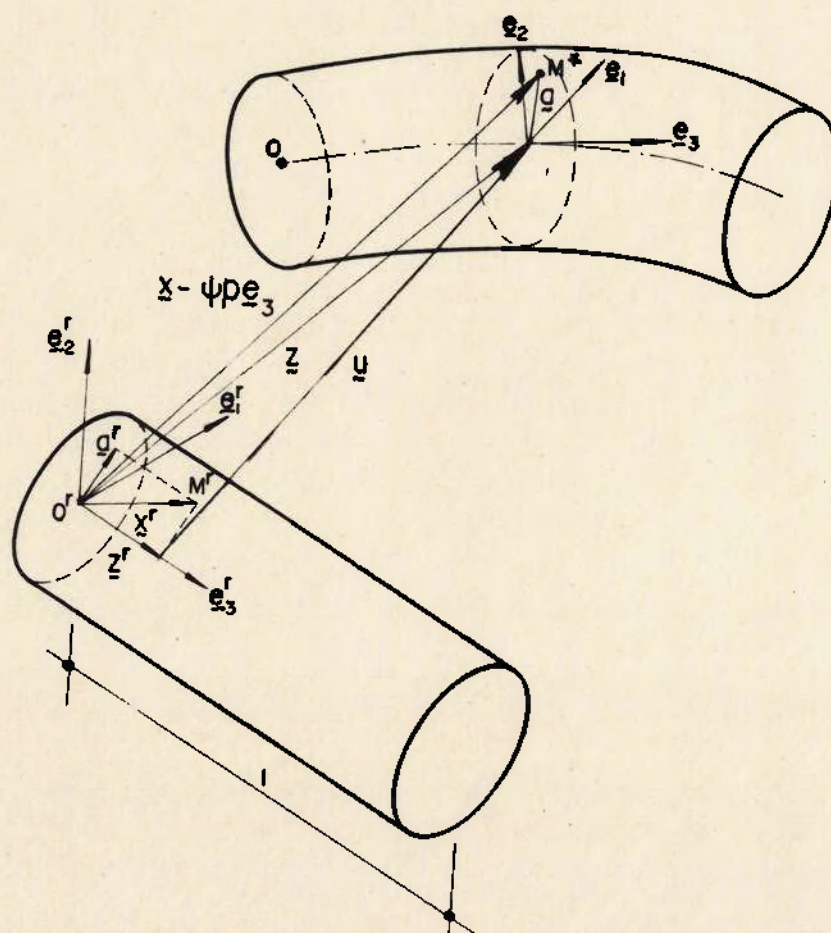


FIG. 4.5.1 - Deformação da barra no espaço

Define-se um vetor dos deslocamentos  $\underline{u}$  do eixo da barra, excluindo-se a parcela do empenamento, por

$$\underline{u} = \underline{z} - \underline{z}^r \quad (4.5.5)$$

Os componentes de  $\underline{u}$  caracterizam os graus de liberdade à translação da seção transversal. Note-se que o empenamento

não é considerado na expressão 4.5.5, visto ser o mesmo tratado como um grau de liberdade independente das rotações e translações da seção transversal.

O vetor deslocamento de um ponto qualquer da barra é dado por

$$\underline{d} = \underline{x} - \underline{x}^r = \underline{u} + \underline{a} - \underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3 \quad (4.5.6)$$

#### 4.5.2 Deformações

O gradiente da transformação é definido por um tensor  $\underline{F} = \hat{F}(\underline{x}^r, t)$ , tal que

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}^r} = \underline{x}_{,\alpha} \otimes \underline{e}_\alpha^r + \underline{x}' \otimes \underline{e}_3^r \quad (4.5.7)$$

Por diferenciação de 4.5.2 em relação à configuração inicial, obtém-se

$$\underline{x}_{,\alpha} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}_\alpha^r} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial \underline{x}_\alpha^r} + \psi_{,\alpha} p \underline{e}_3 = \underline{e}_\alpha + \psi_{,\alpha} p \underline{e}_3 \quad (4.5.8.a)$$

$$\underline{x}' = \underline{z}' + \underline{Q}' \underline{Q}'^T \underline{a} + \psi p' \underline{e}_3 + \psi p \underline{Q}' \underline{Q}'^T \underline{e}_3 = \underline{z}' + \underline{\kappa} \wedge \underline{a} + \psi p' \underline{e}_3 + \psi p \underline{\kappa} \wedge \underline{e}_3 \quad (4.5.8.b)$$

O tensor anti-simétrico  $\underline{K} = \underline{Q}' \underline{Q}'^T$  é denominado tensor das rotações específicas, e  $\underline{\kappa}$  é seu vetor axial.

Por diferenciação de 4.5.5, tem-se  $\underline{z}' = \underline{u}' + \underline{e}_3^r$ . Excluindo-se a contribuição do empenamento, as deformações ao longo do eixo da barra são definidas como

$$\underline{\eta} = \underline{z}' - \underline{e}_3 = \underline{u}' + \underline{e}_3^r - \underline{e}_3 \quad (4.5.9)$$

Substituindo-se 4.5.9 em 4.5.8.b e esta em 4.5.7 e definindo-se os vetores  $\underline{\eta}^r$  e  $\underline{\kappa}^r$  em relação ao sistema inicial, tais que

$$\underline{\eta} = \underline{Q} \underline{\eta}^r \text{ e portanto } \underline{\eta}^r = \underline{Q}^T \underline{\eta} = \underline{Q}^T \underline{z}' - \underline{e}_3^r \quad (4.5.10.a)$$

$$\underline{\kappa} = \underline{Q} \underline{\kappa}^r \text{ e portanto } \underline{\kappa}^r = \underline{Q}^T \underline{\kappa} \quad (4.5.10.b)$$

obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{Q} \left\{ \underline{I} + \psi_{,\alpha p} \underline{e}_3^r \otimes \underline{e}_\alpha^r + \left[ \underline{\eta}^r + \underline{\kappa}^r \wedge (\underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3^r) + \psi p' \underline{e}_3^r \right] \otimes \underline{e}_3^r \right\} = \\ &= \underline{Q} \left\{ \underline{I} + \psi_{,\alpha p} \underline{e}_3^r \otimes \underline{e}_\alpha^r + \underline{\chi}^r \otimes \underline{e}_3^r \right\} \quad (4.5.11) \end{aligned}$$

Note-se que todos os parâmetros envolvidos na determinação do gradiente da transformação referem-se ao sistema inicial de referência. As deformações generalizadas  $\underline{\eta}^r$  e  $\underline{\kappa}^r$  são aqui definidas de modo que sejam energeticamente conjugadas com as tensões generalizadas, como mostrado adiante.

A velocidade de um ponto qualquer da barra é dada por

$$\underline{\dot{d}} = \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{a}} + \psi p \dot{\underline{e}}_3 + \psi p \dot{\underline{e}}_3 = \underline{\dot{u}} + \underline{\Omega} (\underline{a} + \psi p \underline{e}_3) + \psi p \dot{\underline{e}}_3 \quad (4.5.12)$$

O tensor anti-simétrico  $\underline{\Omega} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T$  é denominado tensor das velocidades angulares e  $\underline{\omega}$  é seu vetor axial. Diferenciando-se 4.5.4 no tempo e multiplicando-se por  $\underline{Q}^T$  obtém-se

$$\underline{\omega} = \underline{\Gamma} \dot{\underline{\varphi}} \quad (4.5.13.a)$$



onde

$$\underline{\Gamma} = \underline{\mathbb{I}} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2} \underline{\varphi} + \left(1 - \frac{\text{sen}\varphi}{\varphi}\right) \frac{1}{\varphi^2} \underline{\varphi}^2 \quad (4.5.13.b)$$

Substituindo-se 4.5.13 em 4.5.12, pode-se escrever

$$\dot{\underline{d}} = \dot{\underline{u}} + (\underline{\Gamma} \dot{\underline{\varphi}}) \wedge (\underline{a} + \psi p \underline{e}_3) + \dot{\psi} p \underline{e}_3 \quad (4.5.14)$$

De forma análoga para o tensor  $\underline{Q}'\underline{Q}^T$ , levando-se em conta que  $\underline{Q}^T \underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}^T$ , tem-se

$$\underline{\kappa} = \underline{\Gamma} \underline{\varphi}' \quad \text{e portanto} \quad \underline{\kappa}^r = \underline{\Gamma}^T \underline{\varphi}' \quad (4.5.15)$$

Pela diferenciação no tempo de  $\underline{F}$ , obtém-se o gradiente de velocidades

$$\dot{\underline{F}} = \frac{\partial \dot{\underline{d}}}{\partial \underline{x}^r} = \underline{\Omega} \underline{F} + \underline{Q} \left\{ \dot{p} \psi_{,\alpha} \underline{e}_3^r \otimes \underline{e}_\alpha^r + \left[ \dot{\eta}^r + \dot{\underline{\kappa}}^r \wedge (\underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3^r) + \dot{\psi} p' \underline{e}_3^r + \dot{\psi} p \dot{\underline{\kappa}}^r \wedge \underline{e}_3^r \right] \otimes \underline{e}_3^r \right\} \quad (4.5.16)$$

Pode-se demonstrar facilmente que  $\underline{\Omega}' = \dot{\underline{\kappa}} + \underline{\kappa} \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \underline{\kappa}$ . Com base nas propriedades dos tensores anti-simétricos, tem-se então

$$\underline{\omega}' = \dot{\underline{\kappa}} - \underline{\omega} \wedge \underline{\kappa} \quad (4.5.17.a)$$

Assim pode-se adotar, em 4.5.16,

$$\dot{\underline{\eta}}^r = \underline{Q}^T (\dot{\underline{u}}' - \underline{\omega} \wedge \underline{z}') = \underline{Q}^T \left[ \dot{\underline{u}}' + \underline{z}' \wedge (\underline{\Gamma} \dot{\underline{\varphi}}) \right] \quad (4.5.17.b)$$

$$\dot{\underline{\kappa}}^r = \underline{Q}^T (\dot{\underline{\kappa}} - \underline{\omega} \wedge \underline{\kappa}) = \underline{Q}^T \underline{\omega}' = \underline{Q}^T (\underline{\Gamma}' \dot{\underline{\varphi}} + \underline{\Gamma} \dot{\underline{\varphi}}') \quad (4.5.17.c)$$

O tensor  $\underline{\Gamma}'$  é obtido, por diferenciação de 4.5.13.b, como

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}' = & \frac{1}{\varphi^2} \left[ \frac{\text{sen}\varphi}{\varphi} - \frac{\text{sen}^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2} \right] (\underline{\varrho} \cdot \underline{\varrho}') \underline{\varrho} + \\ & + \frac{1}{\varphi^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2} - 3 \left( 1 - \frac{\text{sen}\varphi}{\varphi} \right) \frac{1}{\varphi^2} \right] (\underline{\varrho} \cdot \underline{\varrho}')^2 \underline{\varrho} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2} \underline{\varphi}' + \left( 1 - \frac{\text{sen}\varphi}{\varphi} \right) \frac{1}{\varphi^2} (\underline{\varphi} \underline{\varphi}' + \underline{\varphi}' \underline{\varphi}) \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

O vetor  $\underline{\varepsilon}^r$  das deformações generalizadas e o vetor  $\underline{\Delta}$  dos deslocamentos generalizados da seção transversal, definidos em relação ao sistema inicial, são dados por

$$\underline{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \eta^r \\ \kappa^r \\ p \\ p' \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (a) \quad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} u \\ \varrho \\ p \end{bmatrix}_{7 \times 1} \quad (b) \quad (4.5.19)$$

Estes vetores podem ser relacionados entre si através da expressão

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{B} \underline{H} \dot{\underline{\Delta}} \quad (4.5.20.a)$$

onde

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 \partial / \partial z^r & \underline{0}_3 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{I}_3 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{I}_3 \partial / \partial z^r & 0 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \partial / \partial z^r \end{bmatrix}_{11 \times 7} \quad (4.5.20.b)$$

é um operador diferencial matricial e

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{Q}^T & \underline{0}_3 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0}_3 & \underline{Q}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 & 0 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} \underline{I}_3 & \underline{Z}'\underline{\Gamma} & \underline{0}_3 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0}_3 & \underline{\Gamma}' & \underline{\Gamma} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & 1 & 0 \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 11} \quad (4.5.20.c)$$

é uma matriz auxiliar, em que  $\underline{Z}'$  é o tensor anti-simétrico cujo vetor axial é  $\underline{z}'$ .

Note-se que, na teoria não linear, as relações são estabelecidas entre  $\dot{\underline{\epsilon}}^r$  e  $\dot{\underline{\Delta}}$ , e não mais entre as deformações e os deslocamentos generalizados, como ocorre na teoria linear.

#### 4.5.3 Tensões

O tensor das tensões aqui utilizado é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, que é energeticamente conjugado com o gradiente das velocidades  $\dot{\underline{f}}$ . Este tensor não é simétrico e pode ser representado por

$$\underline{P} = \underline{t}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha^r + \underline{\tau} \otimes \underline{e}_3^r \quad (4.5.21)$$

onde

$$\underline{t}_\alpha = \underline{P} \underline{e}_\alpha^r = t_{\beta\alpha} \underline{e}_\beta + t_{3\alpha} \underline{e}_3 \quad (4.5.22.a)$$

$$\underline{\tau} = \underline{P} \underline{e}_3^r = \tau_\alpha \underline{e}_\alpha + \sigma \underline{e}_3 \quad (4.5.22.b)$$

$\underline{t}_\alpha$  e  $\underline{\tau}$  são as forças atuantes por unidade de área nos planos ortogonais aos versores  $\underline{e}_\alpha^r$  e  $\underline{e}_3^r$ .  $\sigma$  e  $\tau_\alpha$  são respectivamente a tensão normal e as tensões de cisalhamento na seção transversal da barra na configuração deformada, ou seja, referidas à base móvel.

#### 4.5.4 Potência dos esforços internos

O produto escalar do tensor das tensões  $\underline{P}$  pelo gradiente das velocidades  $\dot{\underline{F}}$  é dado por

$$\underline{P}:\dot{\underline{F}} = \underline{P}:\underline{\Omega}\underline{F} + \underline{P}:\underline{Q} \left\{ \dot{\psi}_{,\alpha} \underline{e}_3^r \otimes \underline{e}_\alpha^r + \left[ \dot{\eta}^r + \dot{\kappa}^r \wedge \left( \underline{a}^r + \psi \underline{p} \underline{e}_3^r \right) + \dot{\psi} \dot{p}' \underline{e}_3^r + \dot{\psi} \dot{\kappa}^r \wedge \underline{e}_3^r \right] \otimes \underline{e}_3^r \right\} \quad (4.5.23)$$

Mas  $\underline{P}:\underline{\Omega}\underline{F} = \underline{P}\underline{F}^T:\underline{\Omega}$ , onde  $\underline{P}\underline{F}^T$  é um tensor simétrico e  $\underline{\Omega}$  um tensor anti-simétrico. Com base nas propriedades do produto escalar de dois tensores, tem-se então  $\underline{P}\underline{F}^T:\underline{\Omega} = 0$ . Substituindo-se 4.5.21 na expressão 4.5.23, vem que

$$\underline{P}:\dot{\underline{F}} = \left( \underline{Q}^T \underline{t}_\alpha \right) \cdot \dot{\psi}_{,\alpha} \underline{e}_3^r + \left( \underline{Q}^T \underline{\tau} \right) \cdot \left[ \dot{\eta}^r + \dot{\kappa}^r \wedge \left( \underline{a}^r + \psi \underline{p} \underline{e}_3^r \right) + \dot{\psi} \dot{p}' \underline{e}_3^r + \dot{\psi} \dot{\kappa}^r \wedge \underline{e}_3^r \right]$$

Definindo-se os vetores

$$\underline{t}_\alpha^r = \underline{Q}^T \underline{t}_\alpha = t_{\beta\alpha} \underline{e}_\beta^r + t_{3\alpha} \underline{e}_3^r \quad (4.5.24.a)$$

$$\underline{\tau}^r = \underline{Q}^T \underline{\tau} = \tau_\alpha \underline{e}_\alpha^r + \sigma \underline{e}_3^r \quad (4.5.24.b)$$

tem-se

$$\underline{P}:\underline{\dot{F}} = \psi_{,\alpha} t_{3\alpha} \dot{p} + \underline{\tau}^r \cdot \left[ \dot{\eta}^r + \underline{\kappa}^r \wedge (\underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3^r) + \psi \dot{p}' \underline{e}_3^r + \psi \dot{p} \underline{\kappa}^r \wedge \underline{e}_3^r \right] \quad (4.5.25)$$

Integrando-se o termo  $\underline{P}:\underline{\dot{F}}$  numa seção transversal, vem que

$$\begin{aligned} \int_A \underline{P}:\underline{\dot{F}} dA &= \int_A \underline{\tau} \cdot \dot{\eta}^r dA + \int_A \underline{\tau}^r \cdot \left[ \underline{\kappa}^r \wedge (\underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3^r) \right] dA + \\ &+ \int_A \left[ t_{3\alpha} \psi_{,\alpha} + \underline{\tau}^r \cdot (\underline{\kappa}^r \wedge \underline{e}_3^r) \psi \right] \dot{p} dA + \int_A (\underline{\tau}^r \cdot \underline{e}_3^r \psi) \dot{p}' dA = \\ &= \underline{f}_i^r \cdot \dot{\eta}^r + \underline{m}_i^r \cdot \dot{\kappa}^r + V_\psi \dot{p} + M_\psi \dot{p}' \end{aligned} \quad (4.5.26.a)$$

onde  $\underline{f}_i^r$ ,  $\underline{m}_i^r$ ,  $V_\psi$  e  $M_\psi$  são respectivamente forças, momentos, bicortante e bimomento resultantes internos na seção transversal referidos à base fixa, não afetados portanto por movimentos de corpo rígido. Estes esforços solicitantes são dados por

$$\underline{f}_i^r = \int_A \underline{\tau}^r dA = V_\alpha \underline{e}_\alpha^r + N \underline{e}_3^r \quad (4.5.26.b)$$

$$\underline{m}_i^r = \int_A (\underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3^r) \wedge \underline{\tau}^r dA = M_\alpha \underline{e}_\alpha^r + T \underline{e}_3^r \quad (4.5.26.c)$$

$$V_\psi = \int_A \left[ t_{3\alpha} \psi_{,\alpha} + \underline{\tau}^r \cdot (\underline{\kappa}^r \wedge \underline{e}_3^r) \psi \right] dA \quad (4.5.26.d)$$

$$M_\psi = \int_A \underline{\tau}^r \cdot \underline{e}_3^r \psi dA = \int_A \sigma \psi dA \quad (4.5.26.e)$$

Os componentes  $V_\alpha$ ,  $N$ ,  $M_\alpha$  e  $T$  são respectivamente as forças cortantes, a força normal, os momentos fletores e o momento

de torção. Note-se que o empenamento afeta o valor dos momentos  $M_\alpha$ , ao contrário do que acontece na teoria linear, já que as tensões de cisalhamento  $\tau_\alpha$  provocam uma variação no momento fletor devida ao empenamento. Este fato é desprezado na teoria linear. A bicortante, por sua vez, é afetada agora pelo termo  $t_{3\alpha}$  do tensor  $\underline{P}$ .

Deve-se observar que as forças e os momentos solicitantes reais na seção transversal devem ser referidos à base móvel, ou seja, à configuração deformada. No entanto, tem-se

$$\underline{f}_i = \int_A \underline{\tau} \, dA = \underline{Q} \underline{f}_i^r = V_\alpha \underline{e}_\alpha + N \underline{e}_3 \quad (4.5.27.a)$$

$$\underline{m}_i = \int_A (\underline{a} + \psi p \underline{e}_3) \wedge \underline{\tau} \, dA = \underline{Q} \underline{m}_i^r = M_\alpha \underline{e}_\alpha + T \underline{e}_3 \quad (4.5.27.b)$$

Assim, embora os vetores  $\underline{f}_i$  e  $\underline{m}_i$  sejam afetados por movimentos de corpo rígido, os componentes dos vetores nas bases fixa e móvel são iguais.

Definindo-se o vetor  $\underline{\sigma}^r$  dos esforços solicitantes de uma seção como

$$\underline{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \underline{f}_i^r \\ \underline{m}_i^r \\ V_\psi \\ M_\psi \end{bmatrix} \quad (4.5.28)$$

e valendo-se da definição de  $\underline{\varepsilon}^r$  dada pela expressão 4.5.19.a, a potência dos esforços internos pode ser expressa como

$$P_i = \int_1 \int_A \underline{P} : \underline{\dot{E}} \, dA \, dz^r = \int_1 \underline{\sigma}^r \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^r \, dz^r = \int_1 \underline{\sigma}^r \cdot \underline{B} \, \underline{H} \, \underline{\dot{A}} \, dz^r \quad (4.5.29)$$

Justifica-se assim a definição adotada para as deformações generalizadas, visto serem as mesmas energeticamente conjugadas com as tensões generalizadas  $\underline{\sigma}^r$ .

#### 4.5.5 Potência dos esforços externos.

Sejam  $p_c$  e  $p_v$  respectivamente as forças superficiais externas por unidade de área e as forças volúmicas externas por unidade de volume atuantes na barra. Estas forças são tomadas na configuração deformada mas para uma unidade de área ou de volume da configuração de referência. A potência dos esforços externos aplicados à barra é dada por

$$P_e = \int_1 \left[ \int_C p_c \cdot \underline{\dot{d}} \, dC + \int_A p_v \cdot \underline{\dot{d}} \, dA \right] dz^r \quad (4.5.30)$$

Substituindo-se 4.5.14 nesta expressão, obtém-se

$$P_e = \int_1 (\underline{f}_e \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{m}_e \cdot \underline{\dot{\omega}} + m_{\psi e} \dot{p}) \, dz^r \quad (4.5.31.a)$$

onde

$$\underline{f}_e = \int_C p_c \, dC + \int_A p_v \, dA \quad (4.5.31.b)$$

$$\underline{m}_e = \int_C (\underline{a} + \psi p \underline{e}_3) \wedge p_c \, dC + \int_A (\underline{a} + \psi p \underline{e}_3) \wedge p_v \, dA \quad (4.5.31.c)$$

$$m_{\psi e} = \int_C \psi p_C \cdot e_3 \, dC + \int_A \psi p_V \cdot e_3 \, dA \quad (4.5.31.d)$$

são as forças, os momentos e o bimomento aplicados ao longo da barra por unidade de comprimento de referência.

#### 4.5.6 Equações de equilíbrio e condições de contorno

As equações de equilíbrio e as condições de contorno da barra são obtidas variacionalmente através do princípio dos trabalhos virtuais. As deformações virtuais são obtidas por linearização consistente das deformações  $\underline{\varepsilon}^r$ .

Por analogia com 4.5.17.b-c e 4.5.20.a, pode-se escrever

$$\delta \underline{\eta}^r = \underline{Q}^r \left[ \delta \underline{u}' + \underline{z}' \wedge (\underline{\Gamma} \delta \varphi) \right] \quad (4.5.32.a)$$

$$\delta \underline{\kappa}^r = \underline{Q}^r \left[ \underline{\Gamma}' \delta \varphi + \underline{\Gamma} \delta \varphi' \right] \quad (4.5.32.b)$$

$$\delta \underline{\varepsilon}^r = \underline{B} \underline{H} \delta \underline{\Delta} \quad (4.5.32.c)$$

As expressões dos trabalhos virtuais dos esforços internos e externos são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_1 \underline{\sigma}^r \cdot \delta \underline{\varepsilon}^r \, dz^r = \int_1 \underline{\sigma}^r \cdot \underline{B} \underline{H} \delta \underline{\Delta} \, dz^r = \\ &= \int_1 (\underline{f}_i^r \cdot \delta \underline{\eta}^r + \underline{m}_i^r \cdot \delta \underline{\kappa}^r + V_\psi \delta p + M_\psi \delta p') \, dz^r \end{aligned} \quad (4.5.33.a)$$



$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_1 \left( \underline{f}_e \cdot \delta \underline{u} + \underline{m}_e \cdot \delta \underline{\omega} + m_{\psi e} \delta p \right) dz^r + g^* \cdot \delta \underline{\Delta} \Big|_0^1 = \\ &= \int_1 g \cdot \delta \underline{\Delta} dz^r + g^* \cdot \delta \underline{\Delta} \Big|_0^1 \end{aligned} \quad (4.5.33.b)$$

onde os vetores dos esforços generalizados externos  $g$  e dos valores prescritos de  $g$  nas extremidades da barra são definidos por

$$g = \begin{bmatrix} \underline{f}_e \\ \underline{\Gamma}^T \underline{m}_e \\ m_{\psi e} \end{bmatrix} \quad g^* = \begin{bmatrix} \underline{f}_e^* \\ \underline{\Gamma}^T \underline{m}_e^* \\ M_{\psi e}^* \end{bmatrix} \quad (4.5.33.c)$$

Os componentes dos vetores  $\underline{f}_e^*$  e  $\underline{m}_e^*$  são as forças e momentos concentrados aplicados às extremidades da barra. Embora não esteja expressamente indicado, pode-se adotar um procedimento análogo para as forças e os momentos concentrados aplicados entre  $z = 0$  e  $z = 1$ , tomando-se os deslocamentos virtuais dos pontos de aplicação dos mesmos.

Substituindo-se 4.5.32 em 4.5.33.a e impondo-se que  $\delta W_i = \delta W_e$  para qualquer  $\delta \underline{\Delta} = \delta \underline{\Delta}(z^r) \neq 0$ , resulta

$$\begin{aligned} &\int_1 \left[ \underline{f}_i \cdot \delta \underline{u}' - (z' \wedge \underline{f}_i) \cdot (\underline{\Gamma} \delta \varphi) + \underline{m}_i \cdot (\underline{\Gamma} \delta \varphi)' + V_{\psi} \delta p + M_{\psi} \delta p' - \right. \\ &\left. - \underline{f}_e \cdot \delta \underline{u} - \underline{m}_e \cdot (\underline{\Gamma} \delta \varphi) - m_{\psi e} \delta p \right] dz^r - g^* \cdot \delta \underline{\Delta} \Big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

Efetuando-se a integração por partes nos termos em  $\delta u'$ ,  $(\underline{\Gamma} \delta \varphi)'$  e  $\delta p'$ , tem-se

$$\int_1 \left[ (\underline{f}'_i + \underline{f}'_e) \cdot \delta \underline{u} + (\underline{m}'_i + \underline{z}' \wedge \underline{f}'_i + \underline{m}'_e) \cdot (\underline{\Gamma} \delta \varphi) + (M'_\psi - V_\psi + m_{\psi e}) \delta p \right] dz -$$

$$-(\underline{f}'_i - \underline{f}'_e^*) \cdot \delta \underline{u} \Big|_0^1 - \underline{\Gamma}^T (\underline{m}'_i - \underline{m}'_e^*) \cdot \delta \varphi \Big|_0^1 - (M'_\psi - M_{\psi e}^*) \delta p \Big|_0^1 = 0 \quad (4.5.34)$$

Logo, sendo os deslocamentos virtuais generalizados arbitrários, obtém-se para as equações de equilíbrio:

$$\underline{f}'_i + \underline{f}'_e = 0 \quad (4.5.35.a)$$

$$\underline{m}'_i + \underline{z}' \wedge \underline{f}'_i + \underline{m}'_e = 0 \quad (4.5.35.b)$$

$$M'_\psi - V_\psi + m_{\psi e} = 0 \quad (4.5.35.c)$$

ou, em notação indicial,

$$V'_\alpha + f'_\alpha = 0 \quad (4.5.36.a)$$

$$N' + f'_z = 0 \quad (4.5.36.b)$$

$$M'_\alpha - e_{\alpha\beta} z'_3 V'_\beta + e_{\alpha\beta} z'_\beta N' + m'_\alpha = 0 \quad (4.5.36.c)$$

$$T' + e_{\alpha\beta} z'_\alpha V'_\beta + m'_z = 0 \quad (4.5.36.d)$$

$$M'_\psi - V_\psi + m_{\psi e} = 0 \quad (4.5.36.e)$$

e para as condições de contorno,

$$(\underline{f}'_i - \underline{f}'_e^*) \cdot \delta \underline{u} \Big|_0^1 = 0 \quad \underline{\Gamma}^T (\underline{m}'_i - \underline{m}'_e^*) \cdot \delta \varphi \Big|_0^1 = 0 \quad (M'_\psi - M_{\psi e}^*) \delta p \Big|_0^1 = 0$$

$$(4.5.37)$$

As condições de contorno naturais e essenciais passam a ser, respectivamente,

$$\underline{f}_i = \underline{f}_e^* \quad \underline{m}_i = \underline{m}_e^* \quad M_\psi = M_\psi^* \quad z^r = 0; 1 \quad (4.5.38)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^* \quad \varphi = \varphi^* \quad p = p^* \quad z^r = 0; 1 \quad (4.5.39)$$

onde  $\underline{\Delta}^* = \{\underline{u}^*, \varphi^*, p^*\}^T$  são os valores prescritos dos deslocamentos generalizados nas extremidades da barra.

#### 4.5.7 Energia potencial total

A análise de estabilidade de uma configuração de equilíbrio é feita com base no teorema de Lagrange-Dirichlet (ver item 3.2). Portanto, é necessário determinar a segunda variação da energia potencial total.

A primeira variação da energia potencial é dada por

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_i + \delta U_e = \delta W_i - \delta W_e = \int_1 \underline{\sigma}^r \cdot \delta \underline{\varepsilon}^r dz^r - \int_1 \underline{q} \cdot \delta \underline{\Delta} dz^r = \\ &= \int_1 \underline{\sigma}^r \cdot \underline{B} \underline{H} \delta \underline{\Delta} dz^r - \int_1 \underline{q} \cdot \delta \underline{\Delta} dz^r - \underline{q}^* \cdot \delta \underline{\Delta} \Big|_0^1 \end{aligned} \quad (4.5.40)$$

Para material elástico linear, o gradiente das tensões generalizadas  $\dot{\underline{\sigma}}^r$  se relaciona com o gradiente das deformações generalizadas  $\dot{\underline{\varepsilon}}^r$  através de um operador simétrico  $\underline{D}$ , denominado matriz de rigidez constitutiva da seção transversal, tal que  $\dot{\underline{\sigma}}^r = \underline{D} \dot{\underline{\varepsilon}}^r$ . Pimenta, Yojo admitem que esta relação seja linear e portanto  $\underline{\sigma}^r = \underline{D} \underline{\varepsilon}^r$ , onde a matriz  $\underline{D}$  é dada por 4.4.38. Esta hipótese é contestada no item 4.7, propondo-se em consequência no item 4.8 uma alteração da matriz de rigidez constitutiva.

Se  $\underline{p}_c$  e  $\underline{p}_v$  representam forças conservativas e que não dependem dos deslocamentos, o gradiente de  $g$  define um operador simétrico  $\underline{L}^e$  tal que

$$\underline{L}^e = \frac{\partial g}{\partial \underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} \underline{0}_3 & \underline{0}_3 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{L}_{\varphi\varphi} & \underline{L}_{\varphi p} \\ \underline{0}^T & \underline{L}_{\varphi p}^T & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 7} \quad (4.5.41)$$

onde

$$\underline{L}_{\varphi p} = \underline{\Gamma}^T \underline{E}_3 \int_C \psi \underline{p}_c \, dC + \underline{\Gamma}^T \underline{E}_3 \int_A \psi \underline{p}_v \, dA \quad (4.5.42.a)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}_{\varphi\varphi} = & \frac{1}{2} \underline{\Gamma}^T \left\{ \int_C \left[ \underline{P}_c (\underline{A} + \psi \, p \, \underline{E}_3) + (\underline{A} + \psi \, p \, \underline{E}_3) \underline{P}_c \right] dC \right\} \underline{\Gamma} + \\ & + \frac{1}{2} \underline{\Gamma}^T \left\{ \int_A \left[ \underline{P}_v (\underline{A} + \psi \, p \, \underline{E}_3) + (\underline{A} + \psi \, p \, \underline{E}_3) \underline{P}_v \right] dA \right\} \underline{\Gamma} - \\ & - \frac{1}{2} c(\varphi) (\underline{M}_e \, \varphi + \varphi \, \underline{M}_e) - \frac{1}{2} d(\varphi) (\varphi \, \underline{m}_e \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi \, \underline{m}_e) + \\ & + \frac{1}{2} e(\varphi) (\varphi^2 \, \underline{m}_e \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi^2 \, \underline{m}_e) \end{aligned} \quad (4.5.42.b)$$

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= \frac{\text{sen} \varphi}{\varphi} & b(\varphi) &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2 \varphi / 2}{(\varphi/2)^2} & c(\varphi) &= \frac{1-a(\varphi)}{\varphi^2} \\ d(\varphi) &= \frac{a(\varphi) - 2b(\varphi)}{\varphi^2} & e(\varphi) &= \frac{b(\varphi) - 3c(\varphi)}{\varphi^2} \end{aligned} \quad (4.5.42.c)$$

$\underline{A}$ ,  $\underline{E}_3$ ,  $\underline{P}_c$ ,  $\underline{P}_v$  e  $\underline{M}_e$  são os tensores anti-simétricos cujos vetores axiais são respectivamente  $\underline{a}$ ,  $\underline{e}_3$ ,  $\underline{p}_c$ ,  $\underline{p}_v$  e  $\underline{m}_e$ .

Retomando-se agora a expressão 4.5.40, pode-se deduzir a segunda variação da energia potencial que, após algumas transformações algébricas, pode ser posta sob a forma

$$\delta^2 U = \delta^2 W_i - \delta^2 W_e = \int_L \left[ (\underline{DBH}\delta\Delta) \cdot (\underline{BH}\delta\Delta) + (\underline{GH}\delta\Delta) \cdot (\underline{H}\delta\Delta) - (\underline{L}^e \delta\Delta) \cdot \delta\Delta \right] dz^r = \quad (4.5.43)$$

$\underline{G}$  é um operador simétrico que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos, enquanto que  $\underline{L}^e$  caracteriza os efeitos geométricos do carregamento externo. Note-se que, novamente, não são explicitados os momentos e as forças concentradas entre  $z = 0$  e  $z = 1$ , assim como os de extremidade da barra. A introdução dos mesmos gera termos adicionais que podem ser deduzidos facilmente de 4.5.42. A matriz  $\underline{G}$  é dada por

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \underline{0}_3 & \underline{G}_{u'\varphi} & \underline{0}_3 & 0 & 0 \\ \underline{G}_{u'\varphi}^T & \underline{G}_{\varphi\varphi} & \underline{G}_{\varphi\varphi'} & 0 & 0 \\ \underline{0}_3 & \underline{G}_{\varphi\varphi'}^T & \underline{0}_3 & 0 & 0 \\ 0^T & 0^T & 0^T & 0 & 0 \\ 0^T & 0^T & 0^T & 0 & 0 \end{bmatrix}_{11 \times 11} \quad (4.5.44.a)$$

onde

$$\underline{G}_{u'\varphi} = -\underline{F}_i \underline{\Gamma} \quad (4.5.44.b)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}_{\varphi\varphi'} &= \frac{1}{2} \underline{\Gamma}^T \underline{M}_i \underline{\Gamma} - \frac{1}{2} c(\varphi) (\underline{M}_i \varphi + \varphi \underline{M}_i) - \frac{1}{2} d(\varphi) (\varphi \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi \underline{m}_i) - \\ &- \frac{1}{2} e(\varphi) (\varphi^2 \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi^2 \underline{m}_i) \end{aligned} \quad (4.5.44.c)$$

$$\begin{aligned}
\underline{G}_{\varphi\varphi} = & \frac{1}{2} \underline{\Gamma}^T (\underline{Z}' \underline{F}_i + \underline{F}_i \underline{Z}') \underline{\Gamma} + \frac{1}{2} (\underline{\Gamma}^T \underline{M}_i \underline{\Gamma}' - \underline{\Gamma}'^T \underline{M}_i \underline{\Gamma}) - \\
& - \frac{1}{2} c(\varphi) \left[ (\underline{F}_i \underline{Z}' - \underline{Z}' \underline{F}_i) \varphi + \varphi (\underline{F}_i \underline{Z}' - \underline{Z}' \underline{F}_i) + \underline{M}_i \varphi' + \varphi' \underline{M}_i \right] - \\
& - \frac{1}{2} d(\varphi) \left[ \varphi (\underline{f}_i \wedge \underline{z}') \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi (\underline{f}_i \wedge \underline{z}') + \varphi' \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi' \underline{m}_i + \varphi \underline{m}_i \otimes \varphi' + \varphi' \otimes \varphi \underline{m}_i \right] + \\
& + \frac{1}{2} e(\varphi) \left[ \varphi \varphi' \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi \varphi' \underline{m}_i + \varphi' \varphi \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi' \varphi \underline{m}_i + \varphi^2 \underline{m}_i \otimes \varphi' + \varphi' \otimes \varphi^2 \underline{m}_i \right] - \\
& - \frac{1}{2} e(\varphi) (\varphi \cdot \varphi') (\varphi \underline{M}_i + \underline{M}_i \varphi) - \frac{1}{2} f(\varphi) (\varphi \cdot \varphi') (\varphi \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi \underline{m}_i) + \\
& + \frac{1}{2} g(\varphi) (\varphi \cdot \varphi') (\varphi^2 \underline{m}_i \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi^2 \underline{m}_i) \tag{4.5.44.d}
\end{aligned}$$

$$f(\varphi) = \frac{c(\varphi) - b(\varphi) - 4d(\varphi)}{\varphi^2} \quad g(\varphi) = \frac{d(\varphi) - 5e(\varphi)}{\varphi^2} \tag{4.5.44.e}$$

$\underline{F}_i$  e  $\underline{M}_i$  são os tensores anti-simétricos cujos vetores axiais são respectivamente  $\underline{f}_i$  e  $\underline{m}_i$ . Note-se que os esforços solicitantes correspondentes ao empenamento da seção transversal não produzem efeito geométrico, já que as duas últimas linhas e colunas de  $\underline{G}$  são nulas.

#### 4.6 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Pimenta, Yojo (1993) apresentam um programa de análise não-linear de pórticos espaciais através do método dos elementos finitos. O campo dos deslocamentos generalizados  $\underline{\Delta}$  no interior de cada elemento é interpolado em função do vetor dos deslocamentos nodais  $\underline{\Delta}^{e1}$  por meio de

$$\underline{\Delta} = \underline{\Psi} \underline{\Delta}^{e1} \tag{4.6.1}$$

O vetor  $\underline{\Delta}^{e1}$  compõe-se, para elementos de dois nós, de dois vetores  $\underline{\Delta}_\alpha^{e1}$ , correspondentes aos deslocamentos generalizados dos nós inicial e final. Cada um destes vetores representa

os sete graus de liberdade no nó, associados a três deslocamentos, três rotações e um parâmetro de empenamento da seção transversal.

$\underline{\Psi}$  é a matriz de interpolação que contém, para elementos isoparamétricos de dois nós, polinômios lineares em  $z^r$ .

O deslocamento virtual  $\delta \underline{\Delta}$  pode ser substituído, nas expressões dos trabalhos virtuais, pelos valores interpolados através da expressão 4.6.1, de onde

$$\delta \underline{\Delta} = \underline{\Psi} \delta \underline{\Delta}^{e1} \quad (4.6.2)$$

Com o auxílio das expressões 4.5.33 e 4.6.2 obtém-se, para cada elemento,

$$\int_1 \left[ \underline{\sigma}^r \cdot (\underline{B} \underline{H} \underline{\Psi} \delta \underline{\Delta}^{e1}) - \underline{q} \cdot (\underline{\Psi} \delta \underline{\Delta}^{e1}) \right] dz^r = \underline{q}^{*e1} \delta \underline{\Delta}^{e1} \quad (4.6.3)$$

onde  $\underline{q}^{*e1}$  é, por definição, o vetor dos esforços nodais do elemento, sendo obtido de 4.6.3 como

$$\underline{q}^{*e1} = \int_1 \left[ (\underline{H} \underline{\Psi})^T \underline{B}^T \underline{\sigma}^r - \underline{\Psi}^T \underline{q} \right] dz^r \quad (4.6.4)$$

Substituindo-se agora 4.6.2 na expressão 4.5.43 da segunda variação da energia potencial total e definindo-se a matriz de rigidez tangente do elemento através de  $\delta^2 U^{e1} = (\underline{k}_T \delta \underline{\Delta}) \cdot \delta \underline{\Delta}$ , tem-se

$$\underline{k}_T = \int_1 \left[ (\underline{H} \underline{\Psi})^T (\underline{B}^T \underline{D} \underline{B} + \underline{G}) (\underline{H} \underline{\Psi}) - \underline{\Psi}^T \underline{L} \underline{\Psi} \right] dz^r \quad (4.6.5)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento pode ser decomposta

em três parcelas, tais que

$$\underline{k}_T = \underline{k}_C + \underline{k}_G - \underline{k}_L \quad (4.6.6.a)$$

onde

$$\underline{k}_C = \int_1 (\underline{H} \ \underline{\Psi})^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{H} \ \underline{\Psi} \, dz^r \quad (4.6.6.b)$$

caracteriza os efeitos constitutivos,

$$\underline{k}_G = \int_1 (\underline{H} \ \underline{\Psi})^T \underline{G} \underline{H} \ \underline{\Psi} \, dz^r \quad (4.6.6.c)$$

os efeitos geométricos dos esforços internos e

$$\underline{k}_L = \int_1 \underline{\psi}^T \underline{L} \ \underline{\psi} \, dz^r \quad (4.6.6.d)$$

os efeitos geométricos dos esforços externos aplicados no elemento.

Uma vantagem desta formulação é que todas as operações são realizadas no sistema global de referência, o que simplifica a aplicação do método dos elementos finitos.

De posse das expressões de  $g^{*el}$  e  $\underline{k}_T$  de um elemento, pode-se montar, de forma corriqueira, o vetor dos esforços nodais  $\underline{R}$  e a matriz de rigidez tangente  $\underline{K}_T$  da estrutura. A análise não-linear da estrutura é realizada, no programa proposto por Pimenta, Yojo (1993), pelo método incremental, com a solução do problema em cada incremento através do método de Newton. A aplicação deste programa à análise da instabilidade por distorção de perfis de seção aberta é



vista no Capítulo 5.

#### 4.7 ANÁLISE DE EULER

São deduzidas neste item as expressões que permitem a determinação, de forma consistente, de um valor aproximado do carregamento crítico de uma barra prismática reta através de uma análise linearizada de estabilidade, denominada análise de Euler. Para tanto, parte-se da expressão 4.5.43 da segunda variação da energia potencial total, deduzida através de uma teoria não-linear geometricamente exata, e impõem-se as aproximações já discutidas no item 3.2, a saber:

a) O gradiente dos deslocamentos na configuração crítica é tão pequeno que se pode admitir  $F_{ij} = \delta_{ij}$ , e portanto

$$\underline{Q} = \underline{I} \quad \underline{\Gamma} = \underline{I} \quad \underline{\Gamma}' = \underline{0} \quad \underline{z}' = \underline{e}_3 \quad (4.7.1)$$

Tomando-se a configuração de equilíbrio inicial como a imediatamente anterior à flambagem, vem que

$$\underline{u} = \underline{0} \quad \varphi = \underline{0} \quad \varphi' = \underline{0} \quad p = 0 \quad p' = 0 \quad (4.7.2)$$

Substituindo-se 4.7.1 na expressão de  $\underline{B}$  e tomando-se para  $\underline{\Delta}$  o vetor dado por 4.5.19.b obtém-se, com o uso das expressões 4.5.20,

$$\underline{H} \delta \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta u' \\ \delta \varphi \\ \delta \varphi' \\ \delta p \\ \delta p' \end{bmatrix} \quad (a) \quad \underline{B} \underline{H} \delta \underline{\Delta} = \delta \underline{\varepsilon} = \delta \underline{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \delta \eta \\ \delta \kappa \\ \delta p \\ \delta p' \end{bmatrix} \quad (b)$$

(4.7.3)

b) A barra está submetida a um carregamento proporcional, ou seja, o carregamento externo pode ser expresso por

$$P_C = \rho P_{C0} \quad P_V = \rho P_{V0} \quad (4.7.4)$$

onde  $\rho$  é o fator de carregamento.

c) Ao carregamento externo ( $P_{C0}, P_{V0}$ ) corresponde uma solução  $g_0^r$ , para os esforços solicitantes na seção transversal, dada pela teoria linear.

Na expressão de  $\delta^2 U$  assim deduzida, impõem-se os vínculos de Bernoulli-Euler e de Vlasov, comparando-se a expressão obtida com a apresentada no capítulo 2 (expressão 2.3.48).

#### 4.7.1 Linearização da expressão da segunda variação da energia potencial total

A expressão 4.5.43 pode ser bastante simplificada com as aproximações dadas por 4.7.1 a 4.7.4.

Tome-se inicialmente o termo constitutivo desta expressão. Em vista de 4.7.3.b e 4.7.2, este termo equivale ao já visto na teoria linear, desde que se considere que  $\delta \underline{\Delta} = \underline{\Delta}$ . Admitindo-se que o eixo da barra passe pelo centro de torção tem-se, na matriz de rigidez constitutiva  $\underline{D}$  (expressão 4.4.38),

$$S_\alpha^c = S_\alpha \quad x_{c\alpha} = 0 \quad I_0 = I_0^c \quad D_{67} = -D_{77} = G(I_t - I_0^c) \quad (4.7.5)$$

Substituindo-se 4.7.5 na expressão 4.4.42, vem que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\underline{DBH\delta\Delta}) \cdot (\underline{BH\delta\Delta}) = \frac{1}{2} GA [\eta_\alpha - e_{\alpha\gamma} x_{c\gamma} (\kappa_3 - p)] [\eta_\alpha - e_{\alpha\delta} x_{c\delta} (\kappa_3 - p)] + \\
& + \frac{1}{2} GI_t^c \kappa_3^2 + \frac{1}{2} G [I_0^c - Ax_{c\alpha}^2 - I_t^c] (\kappa_3 - p)^2 + \frac{1}{2} EI_\psi p'^2 + \\
& + \frac{1}{2} (EA\eta_3^2 + EI_{11}^c \kappa_1^2 + EI_{22}^c \kappa_2^2) + (ES_1^c \kappa_1 \eta_3 + ES_2^c \kappa_2 \eta_3 + EI_{12}^c \kappa_1 \kappa_2)
\end{aligned}
\tag{4.7.6}$$

O operador  $\underline{G}$  que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos passa a ter seus elementos dados apenas por

$$\underline{G}_{u'\varphi} = -\underline{F}_i \qquad \underline{G}_{\varphi\varphi'} = \frac{1}{2} \underline{M}_i \qquad \underline{G}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} (\underline{E}_3 \underline{F}_i + \underline{F}_i \underline{E}_3)$$

e assim

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\underline{GH\delta\Delta}) \cdot (\underline{H\delta\Delta}) = \varphi \cdot \underline{F}_i u' + \frac{1}{2} \varphi \cdot \underline{M}_i \varphi' + \frac{1}{4} \varphi \cdot (\underline{E}_3 \underline{F}_i + \underline{F}_i \underline{E}_3) \varphi = \\
& = \frac{1}{2} N (2u'_1 \varphi_2 - 2u'_2 \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) + V_1 (u'_2 \varphi_3 - u'_3 \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi_1 \varphi_3) + \\
& + V_2 (u'_3 \varphi_1 - u'_1 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi_2 \varphi_3) + \frac{1}{2} M_1 (\varphi_3 \varphi'_2 - \varphi_2 \varphi'_3) + \\
& + \frac{1}{2} M_2 (\varphi_1 \varphi'_3 - \varphi_3 \varphi'_1) + \frac{1}{2} T (-\varphi_1 \varphi'_2 + \varphi_2 \varphi'_1)
\end{aligned}
\tag{4.7.7}$$

O operador  $\underline{L}^e$  que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos passa a ter seus elementos dados por

$$\underline{L}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \int_C (\underline{P}_C \underline{A} + \underline{A} \underline{P}_C) dC + \frac{1}{2} \int_A (\underline{P}_V \underline{A} + \underline{A} \underline{P}_V) dA$$

$$\underline{L}_{\varphi p} = \underline{E}_3 \int_C \psi p_C dC + \underline{E}_3 \int_A \psi p_V dA$$

e assim

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \underline{L}^e \delta \underline{\Delta} \cdot \delta \underline{\Delta} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \underline{L}_{\varphi\varphi} \underline{\varphi} \right) \cdot \underline{\varphi} + p \underline{L}_{\varphi p} \cdot \underline{\varphi} + p \underline{L}_{\varphi p}^T \cdot \underline{\varphi} \right] = \\
 &= \frac{\varphi_1 \varphi_2}{2} \left[ \int_C (x_1 p_{C2} + x_2 p_{C1}) dC + \int_A (x_1 p_{V2} + x_2 p_{V1}) dA \right] + \\
 &+ \frac{\varphi_1 \varphi_3}{2} \left[ \int_C x_1 p_{C3} dC + \int_A x_1 p_{V3} dA \right] + \frac{\varphi_2 \varphi_3}{2} \left[ \int_C x_2 p_{C3} dC + \int_A x_2 p_{V3} dA \right] - \\
 &- \frac{\varphi_1^2}{2} \left[ \int_C x_2 p_{C2} dC + \int_A x_2 p_{V2} dA \right] - \frac{\varphi_2^2}{2} \left[ \int_C x_1 p_{C1} dC + \int_A x_1 p_{V1} dA \right] - \\
 &- \frac{\varphi_3^2}{2} \left[ \int_C (x_1 p_{C1} + x_2 p_{C2}) dC + \int_A (x_1 p_{V1} + x_2 p_{V2}) dA \right] - \\
 &- p \varphi_1 \left[ \int_C \psi p_{C2} dC + \int_A \psi p_{V2} dA \right] + p \varphi_2 \left[ \int_C \psi p_{C1} dC + \int_A \psi p_{V1} dA \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.7.8}$$

É interessante observar que as expressões 4.7.7 e 4.7.8 podem ser aplicadas a qualquer sistema de eixos, desde que as coordenadas, os deslocamentos e as deformações generalizadas e os momentos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $T$  sejam calculados, coerentemente, em relação aos eixos escolhidos.

#### 4.7.2 Comparação com a Teoria de Vlasov

Na análise de Euler, a equação da energia potencial total (a rigor, trata-se da diferença entre a configuração deformada

e a configuração inicial imediatamente anterior à flambagem) é, de forma aproximada, numericamente igual à metade da segunda variação da energia potencial total, como já visto na expressão 3.2.12. Deste modo, as expressões apresentadas no item anterior permitem uma comparação entre a equação da energia potencial total obtida a partir das equações diferenciais de equilíbrio da teoria de Vlasov e a equação da segunda variação da energia potencial total obtida através de uma linearização da teoria geometricamente exata. Para tanto, admitem-se válidos nesta última o vínculo de Vlasov ( $p=\varphi'_3=\kappa_3$ ) e o vínculo de Bernoulli-Euler no centro de torção ( $\eta_\alpha^c=0$ , ou seja,  $u'_1=\varphi_2$  e  $u'_2=-\varphi_1$ ), notando-se ainda que  $\eta_3=u'_3$ .

Nas deduções apresentadas no capítulo 2, os eixos de referência adotados passam pelo centro de gravidade. São calculados em relação aos mesmos os esforços solicitantes  $M_x$  e  $M_y$ , assim como os momentos estáticos  $S_x$  e  $S_y$  e os momentos e o produto de inércia  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_{xy}$ . Por outro lado, as funções setoriais e os esforços solicitantes correspondentes são calculados em relação ao centro de torção, assim como o momento de torção e o momento de inércia à torção  $I_t$ . A força normal e as forças cortantes não são afetadas pela mudança dos eixos de referência.

É importante observar ainda que os deslocamentos  $u$  e  $v$  da teoria de Vlasov são os do centro de torção. No entanto, o deslocamento  $w_0$  definido em 2.3.7.b é o deslocamento  $u'_{G_3}$  do centro de gravidade da seção excluindo-se o componente de empenamento. Esta afirmação pode ser comprovada escrevendo-se a expressão 4.4.2.b para os deslocamentos da origem B e do centro de gravidade G e impondo-se o vínculo de Bernoulli-Euler no centro de torção.

Notando-se que a função empenamento é nula na origem

setorial principal ( $\psi_B=0$ ) e que  $x_\alpha^C = x_\alpha^G - x_{C\alpha}^G$ , tem-se

$$d_{G3} - \psi_G p = d_{B3} + x_1^G u_1' + x_2^G u_2' = w_0$$

Esta inconsistência na escolha dos eixos de referência, embora dificulte a tarefa de programação, pode ser contornada analiticamente com o auxílio das expressões que relacionam os deslocamentos e os esforços solicitantes referidos ao centro de gravidade com aqueles referidos ao centro de torção.

Para os momentos, pode-se escrever

$$M_1^C = M_1^G - N x_{C2}^G \quad M_2^C = M_2^G + N x_{C1}^G \quad (4.7.9.a)$$

$$T^C = \int_A e_{\alpha\beta} x_\alpha^C \tau_\beta dA = \int_A e_{\alpha\beta} (x_\alpha^G - x_{C\alpha}^G) \tau_\beta dA = T^G - x_{C1}^G V_2 + x_{C2}^G V_1 \quad (4.7.9.b)$$

Para os deslocamentos tem-se, a partir das expressões 4.4.2 e 4.4.4,

$$u_{G1}' = u_1' + x_{C2}^G \varphi_3' \quad u_{G2}' = u_2' - x_{C1}^G \varphi_3' \quad (4.7.10.a)$$

$$u_{G3}' = u_3' - x_{C2}^G \varphi_1' + x_{C1}^G \varphi_2' = u_3' + x_{C2}^G u_2'' + x_{C1}^G u_1'' \quad (4.7.10.b)$$

#### a) Termo constitutivo

Aplicando-se à expressão 4.7.6 o vínculo de Vlasov e o vínculo de Bernoulli-Euler no centro de torção, substituindo-se  $\eta_3$  pelo valor de  $u_3'$  obtido de 4.7.10.b e utilizando-se as propriedades geométricas da seção transversal indicadas no item 4.3, tem-se

$$\frac{1}{2} (\underline{DBH}\delta\Delta) \cdot (\underline{BH}\delta\Delta) = \frac{1}{2} GI_c^c \varphi_3'^2 + \frac{1}{2} EI_\psi \varphi_3''^2 + \frac{1}{2} EAu_{G3}'^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ EI_{11}^G u_2''^2 - 2EI_{12}^G u_1''u_2'' + EI_{22}^G u_1''^2 \right]$$

(4.7.11)

Este é exatamente o termo constitutivo indicado entre colchetes na primeira integral de 2.3.48.

Pode-se observar ainda que, tomando-se a expressão 4.4.42 para os eixos no centro de gravidade, obtém-se para o termo constitutivo a mesma expressão.

#### b) Termo geométrico dos esforços internos

Aplicando-se a expressão 4.7.7 aos eixos passando pelo centro de torção e substituindo-se os esforços solicitantes  $M_1^C$  e  $M_2^C$  e os deslocamentos  $u_3'$  pelos valores dados em 4.7.9.a e 4.7.10.b, obtém-se

$$\frac{1}{2} \underline{GH}\delta\Delta \cdot \underline{H}\delta\Delta = \frac{N}{2} \left[ u_1'^2 + u_2'^2 + x_{c2}^G (\varphi_3' u_1' - \varphi_3 u_1'') - x_{c1}^G (\varphi_3' u_2' - \varphi_3 u_2'') \right] +$$

$$+ \left[ \frac{\varphi_3}{2} (V_1 u_2' - V_2 u_1') + (V_1 u_1' + V_2 u_2') (-u_{G3}' + x_{c1}^G u_1'' + x_{c2}^G u_2'') \right] +$$

$$+ \left[ \frac{M_1^G}{2} (\varphi_3 u_1'' - \varphi_3' u_1') + \frac{M_2^G}{2} (\varphi_3 u_2'' - \varphi_3' u_2') \right] + \frac{T^C}{2} [u_2' u_1'' - u_1' u_2'']$$

(4.7.12.a)

Por outro lado, aplicando-se a expressão 4.7.7 aos eixos passando pelo centro de gravidade e substituindo-se os deslocamentos  $u_{G1}'$  e  $u_{G2}'$  e o momento de torção  $T^G$  pelos valores dados em 4.7.9.b e 4.7.10.a, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \underline{GH} \delta \underline{\Delta} \cdot \underline{H} \delta \underline{\Delta} &= \frac{N}{2} \left[ u_1'^2 + u_2'^2 + 2x_{c2}^G \varphi_3' u_1' - 2x_{c1}^G \varphi_3' u_2' \right] + \\
&+ \left[ \frac{\varphi_3}{2} (V_1 u_2' - V_2 u_1') - u_{G3}' (V_1 u_1' + V_2 u_2') - \varphi_3 \varphi_3' (V_1 x_{c1}^G + V_2 x_{c2}^G) - \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} (V_1 x_{c2}^G - V_2 x_{c1}^G) (u_2' u_1'' - u_1' u_2'') \right] + \\
&\left[ \frac{M_1^G}{2} (\varphi_3 u_1'' - \varphi_3' u_1') + \frac{M_2^G}{2} (\varphi_3 u_2'' - \varphi_3' u_2') \right] + \frac{T^C}{2} [u_2' u_1'' - u_1' u_2'']
\end{aligned}
\tag{4.7.12.b}$$

As duas expressões correspondem à imposição das condições de contorno em pontos diversos, e portanto são iguais apenas se o centro de gravidade coincide com o centro de torção.

O termo da força normal da expressão 4.7.12.b, obtida para os eixos no centro de gravidade, coincide com a segunda integral da expressão 2.3.48. No entanto, a expressão da energia potencial total é deduzida neste capítulo a partir das expressões escritas para os eixos passando pelo centro de torção.

O termo da força cortante é diferente do obtido no capítulo 2 qualquer que seja a posição dos eixos de referência, sendo portanto necessário avaliar numericamente sua importância. Mostra-se no item 4.10 que o procedimento usual, em grande parte das aplicações, de desconsiderar-se o efeito da força cortante, pode não ser adequado. Deve-se ressaltar ainda que estes termos são deduzidos com a hipótese aproximada de distribuição uniforme das tensões de cisalhamento da flexão na seção transversal.

É interessante observar que o momento de torção produz um efeito geométrico, que não é detectado na análise efetuada



no Capítulo 2.

O termo correspondente aos momentos fletores merece um destaque especial. Um grande número de pesquisadores deduziu expressões para a análise da flambagem lateral de vigas contendo termos sob a forma  $+M_{\alpha} u_{\alpha}'' \varphi_3$  [Timoshenko, Gere(1961), Bleich(1952), e Pi, Y et al(1992)]. No capítulo 2, a dedução apresentada a partir das equações de equilíbrio de Vlasov com o uso do princípio dos trabalhos virtuais conduz a um termo sob a forma  $-M_{\alpha} u_{\alpha}' \varphi_3'$ , valor este que está de acordo com trabalhos mais recentes, tais como os de Pandey, Sherbourne(1990), De Jong(1990) e Chin, C.K.et al(1992). Indica-se ainda neste capítulo que é possível obter a expressão de Timoshenko com o mesmo procedimento, embora com condições de contorno diversas das que resultam no termo  $-M_{\alpha} u_{\alpha}' \varphi_3'$ . A linearização da teoria geometricamente exata mostra que ambos os termos compõem a expressão da segunda variação da energia potencial total, combinados sob a forma  $(M_{\alpha} u_{\alpha}'' \varphi_3 - M_{\alpha} u_{\alpha}' \varphi_3')/2$ . Este termo pode ter grande importância na análise da flambagem lateral de vigas sob momento não uniforme ao longo do vão.

### c) Termo geométrico dos esforços externos

Aplicando-se à expressão 4.7.8 os vínculos de Vlasov e de Bernoulli-Euler para os eixos passando pelo centro de torção, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \underline{L}^e \delta \underline{\Delta} \cdot \delta \underline{\Delta} = & - \frac{u'_1 u'_2}{2} \left[ \int_C (x_1^c p_{c2} + x_2^c p_{c1}) dC + \int_A (x_1^c p_{v2} + x_2^c p_{v1}) dA \right] - \\
& - \frac{u'_2 \varphi_3}{2} \left[ \int_C x_1^c p_{c3} dC + \int_A x_1^c p_{v3} dA \right] + \frac{u'_1 \varphi_3}{2} \left[ \int_C x_2^c p_{c3} dC + \int_A x_2^c p_{v3} dA \right] - \\
& - \frac{u'_2{}^2}{2} \left[ \int_C x_2^c p_{c2} dC + \int_A x_2^c p_{v2} dA \right] - \frac{u'_1{}^2}{2} \left[ \int_C x_1^c p_{c1} dC + \int_A x_1^c p_{v1} dA \right] - \\
& - \frac{\varphi_3^2}{2} \left[ \int_C (x_1^c p_{c1} + x_2^c p_{c2}) dC + \int_A (x_1^c p_{v1} + x_2^c p_{v2}) dA \right] + \\
& + \varphi_3' u'_2 \left[ \int_C \psi p_{c2} dC + \int_A \psi p_{v2} dA \right] + \varphi_3' u'_1 \left[ \int_C \psi p_{c1} dC + \int_A \psi p_{v1} dA \right]
\end{aligned}
\tag{4.7.13}$$

A expressão obtida para os eixos no centro de gravidade é análoga a esta, exceto pelo fato de que as coordenadas  $x_\alpha^c$  devem ser substituídas por  $x_\alpha^G = x_\alpha^c + x_{c\alpha}^G$ .

O termo geométrico dos esforços externos da teoria de Vlasov se resume à última integral da expressão 2.3.48. Corresponde ao termo em  $\varphi_3^2$  da expressão 4.7.13 quando o carregamento externo é aplicado num ponto da seção transversal de coordenadas  $x_\alpha$  em relação ao centro de torção. A expressão agora apresentada mostra um grande número de termos não obtidos a partir da teoria de Vlasov, e permite o cálculo do efeito geométrico para qualquer tipo de carregamento.

Deve-se observar ainda que o termo geométrico se anula se o carregamento externo é aplicado no eixo e se a função empenamento se anula no mesmo.

#### d) Termo de Wagner

O termo de Wagner, dado pela quarta integral da expressão 2.3.48, não é obtido através de linearização da teoria geometricamente exata formulada no item 4.5.

Tomando-se por exemplo a barra de seção cruciforme bi-simétrica submetida apenas à força normal  $N$ , pode-se observar que esta teoria não permite analisar a instabilidade por torção, já que não há, na expressão da segunda variação da energia potencial total, um termo que associe a força normal  $N$  a  $\varphi'_3$ .

Esta omissão é muito importante e levou a uma reavaliação das hipóteses adotadas inicialmente para a dedução da expressão 4.5.43. É interessante para isto observar que o termo de Wagner contém não apenas os esforços solicitantes, como ocorre com os demais termos geométricos dos esforços internos, mas também características geométricas da seção transversal, que comparecem apenas no termo constitutivo. Este fato conduz à necessidade de uma análise em pormenor do efeito da adoção de uma matriz de rigidez constitutiva, para a teoria não-linear, igual à da teoria linear. Uma modificação da equação constitutiva que permite obter o efeito analisado por Wagner é apresentada no item 4.8.

#### 4.8 MATRIZ DE RIGIDEZ CONSTITUTIVA NÃO LINEAR

A associação das deformações generalizadas com as tensões generalizadas através da matriz de rigidez constitutiva da teoria linear, obtida a partir do primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, não permite a obtenção dos termos constitutivos não lineares com as deformações. Assim, opta-se aqui por associar linearmente o tensor das tensões

de Kirchhoff  $\underline{S}$  com o tensor das deformações de Green  $\underline{E}$ .

O tensor de Green é dado por

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \left\{ \underline{F}^T \underline{F} - \underline{I} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \underline{Q}^T \underline{F} \right)^T \left( \underline{Q}^T \underline{F} \right) - \underline{I} \right\} \quad (4.8.1)$$

onde, de acordo com 4.5.11,

$$\underline{F} = \underline{Q} \left\{ \underline{I} + \psi_{,\alpha} p \underline{e}_3^r \otimes \underline{e}_\alpha^r + \gamma^r \otimes \underline{e}_3^r \right\} \quad (4.8.2)$$

logo

$$\underline{Q}^T \underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_1^r \\ 0 & 1 & \gamma_2^r \\ \psi_{,1} p & \psi_{,2} p & 1 + \gamma_3^r \end{bmatrix} \quad (4.8.3)$$

Substituindo-se estes termos na expressão 4.8.1 obtém-se, para o tensor das deformações de Green,

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \psi_{,1}^2 p^2 & \frac{1}{2} \psi_{,1} \psi_{,2} p^2 & \frac{1}{2} [\gamma_1^r + \psi_{,1} p (1 + \gamma_3^r)] \\ \cdot & \frac{1}{2} \psi_{,2}^2 p^2 & \frac{1}{2} [\gamma_2^r + \psi_{,2} p (1 + \gamma_3^r)] \\ \cdot & \cdot & \gamma_3^r + \frac{1}{2} (\gamma_1^{r2} + \gamma_2^{r2} + \gamma_3^{r2}) \end{bmatrix} \quad (4.8.4)$$

O vetor  $\gamma^r$  é dado por

$$\gamma^r = \eta^r + \kappa^r \wedge \left[ \underline{a}^r + \psi p \underline{e}_3^r \right] + \psi p' \underline{e}_3^r \quad (4.8.5)$$

Separando-se  $\gamma^r$  em um termo linear e outro não-linear com as

deformações generalizadas, vem que

$$\tilde{\gamma}^r = \tilde{\gamma}^L + \tilde{\gamma}^N = \begin{bmatrix} \eta_1^r - x_2 \kappa_3^r \\ \eta_2^r + x_1 \kappa_3^r \\ \eta_3^r + x_2 \kappa_1^r - x_1 \kappa_2^r + \psi p' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi p \kappa_2^r \\ -\psi p \kappa_1^r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8.6)$$

O tensor das tensões de Kirchhoff pode ser expresso em função do tensor de Piola-Kirchhoff através de  $\underline{S} = \underline{F}^{-1} \underline{P}$ . Tomando-se os componentes de  $\underline{P}$  em relação à configuração de referência, tem-se, de acordo com 4.5.21 e 4.5.24,

$$\underline{Q}^T \underline{P} = \underline{t}_\alpha^r \otimes \underline{e}_\alpha^r + \underline{t}_3^r \otimes \underline{e}_3^r = \underline{Q}^T \underline{F} \underline{S} \quad (4.8.7)$$

Substituindo-se (4.8.3) nesta expressão e designando-se por  $S_{ij}$  os elementos do tensor das tensões de Kirchhoff, os termos  $\underline{t}_3^r$  e  $t_{3\alpha}$  que comparecem nas expressões 4.5.26 dos esforços solicitantes passam a ser dados por

$$\underline{t}_3 = \begin{bmatrix} S_{13} + \gamma_1^r S_{33} \\ S_{23} + \gamma_2^r S_{33} \\ (1 + \gamma_3^r) S_{33} + \psi_{,1} p S_{13} + \psi_{,2} p S_{23} \end{bmatrix} \quad (4.8.8)$$

$$t_{31} = \underline{t}_1^r \cdot \underline{e}_3^r = (1 + \gamma_3^r) S_{13} + \psi_{,1} p S_{11} + \psi_{,2} p S_{12}$$

$$t_{32} = \underline{t}_2^r \cdot \underline{e}_3^r = (1 + \gamma_3^r) S_{23} + \psi_{,1} p S_{12} + \psi_{,2} p S_{22}$$

Estabelecendo-se relações lineares entre os componentes do tensor de Kirchhoff e os do tensor de Green, vem que

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{2} E \psi_{,1}^2 p^2 \\
S_{22} &= \frac{1}{2} E \psi_{,2}^2 p^2 \\
S_{33} &= E \left[ \gamma_3^r + \frac{1}{2} (\gamma_1^{r2} + \gamma_2^{r2} + \gamma_3^{r2}) \right] \\
S_{12} &= G \psi_{,1} \psi_{,2} p^2 \\
S_{13} &= G [\gamma_1^r + \psi_{,1} p (1 + \gamma_3^r)] \\
S_{23} &= G [\gamma_2^r + \psi_{,2} p (1 + \gamma_3^r)]
\end{aligned} \tag{4.8.9}$$

Substituindo-se 4.8.9 em 4.8.8 e tomando-se como primeira aproximação apenas os elementos que geram termos até segunda ordem nas deformações generalizadas  $\eta^r$ ,  $\xi^r$ ,  $p$  e  $p'$ , obtém-se

$$\underline{\tau}^r = \underline{\tau}^L + \underline{\tau}^N \tag{4.8.10.a}$$

onde

$$\underline{\tau}^L = \begin{bmatrix} G (\gamma_1^L + \psi_{,1} p) \\ G (\gamma_2^L + \psi_{,2} p) \\ E \gamma_3^L \end{bmatrix} \tag{4.8.10.b}$$

$$\underline{\tau}^N = \begin{bmatrix} G (\gamma_1^N + \psi_{,1} p \gamma_3^L) + E \gamma_1^L \gamma_3^L \\ G (\gamma_2^N + \psi_{,2} p \gamma_3^L) + E \gamma_2^L \gamma_3^L \\ E \left[ \frac{1}{2} (\gamma_1^{L2} + \gamma_2^{L2}) + \frac{3}{2} \gamma_3^{L2} \right] + G \psi_{,1} p (\gamma_1^L + \psi_{,1} p) + G \psi_{,2} p (\gamma_2^L + \psi_{,2} p) \end{bmatrix} \tag{4.8.10.c}$$

e também

$$t_{3\alpha} = t_{3\alpha}^L + t_{3\alpha}^N \tag{4.8.11.a}$$

onde

$$t_{31}^L = G(\gamma_1^L + \psi_{,1}p) \quad (4.8.11.b)$$

$$t_{32}^L = G(\gamma_2^L + \psi_{,2}p) \quad (4.8.11.c)$$

$$t_{31}^N = G(\gamma_1^N + \gamma_1^L \gamma_3^L + 2\psi_{,1}p\gamma_3^L) \quad (4.8.11.d)$$

$$t_{32}^N = G(\gamma_2^N + \gamma_2^L \gamma_3^L + 2\psi_{,2}p\gamma_3^L) \quad (4.8.11.e)$$

As expressões a serem deduzidas para os esforços solicitantes podem ser bastante simplificadas desprezando-se, nas expressões 4.8.10 e 4.8.11, os termos em  $\gamma_3^{L^2}$  e os termos em G de segunda ordem nas deformações generalizadas. Deste modo, com o emprego de 4.8.6, chega-se a

$$\underline{t}^L = \begin{bmatrix} G(\eta_1^r - x_2 \kappa_3^r + \psi_{,1}p) \\ G(\eta_2^r + x_1 \kappa_3^r + \psi_{,2}p) \\ E(\eta_3^r + x_2 \kappa_1^r - x_1 \kappa_2^r + \psi p') \end{bmatrix} \quad (4.8.12.a)$$

$$t_{31}^L = G(\eta_1^r - x_2 \kappa_3^r + \psi_{,1}p) \quad (4.8.12.b)$$

$$t_{32}^L = G(\eta_2^r + x_1 \kappa_3^r + \psi_{,2}p) \quad (4.8.12.c)$$

$$\underline{t}^N = \begin{bmatrix} E\gamma_1^L \gamma_3^L \\ E\gamma_2^L \gamma_3^L \\ \frac{1}{2}E(\gamma_1^{L^2} + \gamma_2^{L^2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\eta_1 - x_2 \kappa_3)(\eta_3 + x_2 \kappa_1 - x_1 \kappa_2 + \psi p') \\ E(\eta_2 + x_1 \kappa_3)(\eta_3 + x_2 \kappa_1 - x_1 \kappa_2 + \psi p') \\ \frac{1}{2}E[(\eta_1 - x_2 \kappa_3)^2 + (\eta_2 + x_1 \kappa_3)^2] \end{bmatrix} \quad (4.8.12.d)$$

$$t_{3\alpha}^N = 0 \quad (4.8.12.e)$$

Quanto aos esforços solicitantes definidos pelas expressões 4.5.26, tem-se

$$\underline{f}_i^r = \underline{f}_i^L + \underline{f}_i^N = \int_A \underline{\tau}^L dA + \int_A \underline{\tau}^N dA \quad (4.8.13.a)$$

$$\underline{m}_i^r = \underline{m}_i^L + \underline{m}_i^N = \int_A \underline{a}^r \wedge \underline{\tau}^L dA + \int_A \underline{a}^r \wedge \underline{\tau}^N dA \quad (4.8.13.b)$$

$$V_\psi = V_\psi^L = \int_A t_{3\alpha}^L \psi_{,\alpha} dA \quad (4.8.13.c)$$

$$M_\psi = M_\psi^L + M_\psi^N = \int_A (\underline{\tau}^L \cdot \underline{e}_3^r) \psi dA + \int_A (\underline{\tau}^N \cdot \underline{e}_3^r) \psi dA \quad (4.8.13.d)$$

Note-se que a parcela  $\int_A \psi p(\underline{e}_3^r \wedge \underline{\tau}^r) dA$  do termo não-linear de  $\underline{m}_i$  foi desconsiderada, pois gera termos de terceira ordem (para  $\underline{\tau}^N$ ) ou de segunda ordem em  $G$  (para  $\underline{\tau}^L$ ). O mesmo se aplica ao termo não linear de  $V_\psi$ .

Substituindo-se 4.8.12 nestas expressões, tomando-se  $\underline{\varepsilon}^r$  e  $\underline{\sigma}^r$  definidos por 4.5.19 e 4.5.28 e utilizando-se as propriedades geométricas da seção transversal expostas no item 4.3, pode-se escrever

$$\underline{\sigma}^r = \left[ \underline{D}^L + \frac{1}{2} \underline{D}^N \right] \underline{\varepsilon}^r \quad (4.8.14)$$

onde  $\underline{D}^L$  é matriz de rigidez constitutiva de teoria linear, dada pela expressão 4.4.38, e  $\underline{D}^N$  é uma matriz simétrica que tem seus elementos expressos por:



$$\begin{aligned}
D_{11}^N &= E(A\eta_3^r + S_1\kappa_1^r + S_2\kappa_2^r) \\
D_{12}^N &= D_{17}^N = D_{18}^N = D_{27}^N = D_{28}^N = D_{33}^N = D_{34}^N = D_{35}^N = D_{37}^N = D_{38}^N = D_{44}^N = D_{45}^N = D_{47}^N = D_{48}^N = \\
&= D_{55}^N = D_{57}^N = D_{58}^N = D_{67}^N = D_{77}^N = D_{78}^N = D_{88}^N = 0 \\
D_{13}^N &= E(A\eta_1^r - S_1\kappa_3^r) \\
D_{14}^N &= E(S_1\eta_1^r - I_{11}\kappa_3^r) \\
D_{15}^N &= E(S_2\eta_1^r - I_{12}\kappa_3^r) \\
D_{16}^N &= E(-S_1\eta_3^r - I_{11}\kappa_1^r - I_{12}\kappa_2^r) \\
D_{22}^N &= E(A\eta_3^r + S_1\kappa_1^r + S_2\kappa_2^r) \\
D_{23}^N &= E(A\eta_2^r - S_2\kappa_3^r) \\
D_{24}^N &= E(S_1\eta_2^r - I_{12}\kappa_3^r) \\
D_{25}^N &= E(S_2\eta_2^r - I_{22}\kappa_3^r) \\
D_{26}^N &= E(-S_2\eta_3^r - I_{12}\kappa_1^r - I_{22}\kappa_2^r) \\
D_{36}^N &= E(I_0\kappa_3^r - S_1\eta_1^r - S_2\eta_2^r) \\
D_{46}^N &= E(-I_{11}\eta_1^r - I_{12}\eta_2^r + H_1\kappa_3^r) \\
D_{56}^N &= E(-I_{12}\eta_1^r - I_{22}\eta_2^r + H_2\kappa_3^r) \\
D_{66}^N &= E(I_0\eta_3^r + H_1\kappa_1^r + H_2\kappa_2^r + H_\psi p') \\
D_{68}^N &= EH_\psi\kappa_3^r
\end{aligned}$$

Nestas expressões,  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_\psi$  são parâmetros de assimetria já definidos no capítulo 2, dados por

$$\begin{aligned}
H_1 &= \int_A x_2 (x_1^2 + x_2^2) dA & H_2 &= - \int_A x_1 (x_1^2 + x_2^2) dA & H_\psi &= \int_A (x_1^2 + x_2^2) \psi dA \\
& & & & & & & (4.8.15)
\end{aligned}$$

É interessante observar que esta solução resulta nas propriedades geométricas do termo de Wagner embora não seja exata, pois é deduzida desprezando-se em  $\underline{\tau}^L$  e  $\underline{\tau}^N$  os elementos de segunda ordem em  $G$  e os elementos em  $\gamma_3^{L^2}$ . Caso esta simplificação não fosse adotada, seriam gerados termos

adicionais, proporcionais a outras propriedades geométricas da seção transversal.

Por diferenciação no tempo de 4.8.14, pode-se notar que

$$\dot{\underline{\sigma}}^r = [\underline{D}^L + \underline{D}^N] \dot{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{D} \dot{\underline{\varepsilon}}^r \quad (4.8.16)$$

O termo  $\underline{D}^N$  da matriz constitutiva assim obtida resulta em um termo adicional na expressão da segunda variação da energia potencial total, não considerado na teoria originalmente proposta por Pimenta, Yojo (1993).

#### 4.8.1 Análise de Euler - Termo constitutivo adicional

Para uma análise linearizada de estabilidade, são válidas as aproximações adotadas para a dedução da expressão 4.7.3. Adicionalmente, de forma análoga à do item 4.7, impõem-se os vínculos de Vlasov e Bernoulli-Euler no centro de torção.

O termo constitutivo adicional resultante de  $\underline{D}^N$  pode ser expresso com o auxílio de 4.7.3, por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\underline{D}^N \underline{B} \underline{H} \delta \underline{\Delta}) \cdot (\underline{B} \underline{H} \delta \underline{\Delta}) = E \left\{ \frac{\delta \eta_1^2}{2} (A \eta_3 + S_1 \kappa_1 + S_2 \kappa_2) + \frac{\delta \eta_2^2}{2} (A \eta_3 + S_1 \kappa_1 + S_2 \kappa_2) + \right. \\ + \delta \eta_1 \delta \eta_3 (A \eta_1 - S_1 \kappa_3) + \delta \eta_2 \delta \eta_3 (A \eta_2 - S_2 \kappa_3) + \delta \eta_1 \delta \kappa_1 (S_1 \eta_1 - I_{11} \kappa_3) + \\ + \delta \eta_1 \delta \kappa_2 (S_2 \eta_1 - I_{12} \kappa_3) + \delta \eta_1 \delta \kappa_3 (-S_1 \eta_3 - I_{11} \kappa_1 - I_{12} \kappa_2) + \\ + \delta \eta_2 \delta \kappa_1 (S_1 \eta_2 - I_{12} \kappa_3) + \delta \eta_2 \delta \kappa_2 (S_2 \eta_2 - I_{22} \kappa_3) + \\ + \delta \eta_2 \delta \kappa_3 (-S_2 \eta_3 - I_{12} \kappa_1 - I_{22} \kappa_2) + \delta \eta_3 \delta \kappa_3 (I_0 \kappa_3 - S_1 \eta_1 - S_2 \eta_2) + \\ + \delta \kappa_1 \delta \kappa_3 (-I_{11} \eta_1 - I_{12} \eta_2 + H_1 \kappa_3) + \delta \kappa_2 \delta \kappa_3 (-I_{12} \eta_1 - I_{22} \eta_2 + H_2 \kappa_3) + \\ \left. + \frac{\delta \kappa_3^2}{2} (I_0 \eta_3 + H_1 \kappa_1 + H_2 \kappa_2 + H_3 p') + \delta p' \delta \kappa_3 H_3 \kappa_3 \right\} \end{aligned}$$

(4.8.17)

Impondo-se o vínculo de Bernoulli-Euler ( $\eta_\alpha = \delta\eta_\alpha = 0$ ) no centro de torção, este termo se reduz a

$$\frac{1}{2} (\underline{D}^N \underline{BH} \delta \underline{\Delta}) \cdot (\underline{BH} \delta \underline{\Delta}) = E \left[ \frac{\delta \kappa_3^2}{2} (I_0^C \eta_3 + H_1^C \kappa_1 + H_2^C \kappa_2 + H_\psi^C p') + \right. \\ \left. + \kappa_3 \delta \kappa_3 (I_0^C \delta \eta_3 + H_1^C \delta \kappa_1 + H_2^C \delta \kappa_2 + H_\psi^C \delta p') \right] \quad (4.8.18)$$

As deformações generalizadas  $\underline{\varepsilon}^r$  podem ser obtidas como funções das tensões generalizadas  $\underline{\sigma}^r$  invertendo-se a matriz  $\underline{D}$ , ou seja,

$$\underline{\varepsilon}^r = \left[ \underline{D}^L + \frac{1}{2} \underline{D}^N(\underline{\varepsilon}^r) \right]^{-1} \underline{\sigma}^r \quad (4.8.19)$$

Para a análise de Euler, pode-se tomar um valor aproximado de  $\underline{\varepsilon}^r$  dado por

$$\underline{\varepsilon}^r \cong \underline{D}^{L^{-1}} \underline{\sigma}^r \quad (4.8.20)$$

Invertendo-se a matriz de rigidez constitutiva da teoria linear obtém-se então, para o vínculo de Bernoulli-Euler imposto no centro de torção,

$$\eta_3 = \frac{1}{EA} \left[ (I_{11}^C I_{22}^C - I_{12}^{C2}) N + (S_2^C I_{12}^C - S_1^C I_{22}^C) M_1^C + (S_1^C I_{12}^C - S_2^C I_{11}^C) M_2^C \right] \quad (4.8.21.a)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{EA} \left[ (S_2^C I_{12}^C - S_1^C I_{22}^C) N + (AI_{22}^C - S_2^{C2}) M_1^C + (S_1^C S_2^C - AI_{12}^C) M_2^C \right] \quad (4.8.21.b)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{EA} \left[ (S_1^C I_{12}^C - S_2^C I_{11}^C) N + (S_1^C S_2^C - A I_{12}^C) M_1^C + (A I_{11}^C - S_1^{C2}) M_2^C \right] \quad (4.8.21.c)$$

$$\kappa_3 = \frac{1}{GI_t^C} [T^C + V_\psi] \quad (4.8.21.d)$$

$$p' = \frac{1}{EI_\psi} M_\psi \quad (4.8.21.e)$$

$$\Lambda = A(I_{11}^C I_{22}^C - I_{12}^{C2}) - S_1^{C2} I_{22}^C - S_2^{C2} I_{11}^C + 2S_1^C S_2^C I_{12}^C \quad (4.8.21.f)$$

As deformações generalizadas  $\eta_3$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  podem ser re-escritas em função dos momentos fletores, momentos de inércia e produto de inércia referidos ao centro de gravidade da seção. Expressando-se, com o auxílio de 4.7.9.a, os momentos fletores  $M_1^C$  e  $M_2^C$  em função de  $M_1^G$  e  $M_2^G$  e utilizando-se as propriedades geométricas da seção transversal apresentadas em 4.3, tem-se

$$\eta_3 = \frac{N}{EA} + \frac{1}{E(I_{11}^G I_{22}^G - I_{12}^{G2})} \left[ M_1^G (x_{c1} I_{12}^G + x_{c2} I_{22}^G) - M_2^G (x_{c1} I_{11}^G + x_{c2} I_{12}^G) \right] \quad (4.8.22.a)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{E(I_{11}^G I_{22}^G - I_{12}^{G2})} \left[ M_1^G I_{22}^G - M_2^G I_{12}^G \right] \quad (4.8.22.b)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{E(I_{11}^G I_{22}^G - I_{12}^{G2})} \left[ -M_1^G I_{12}^G + M_2^G I_{11}^G \right] \quad (4.8.22.c)$$

Substituindo-se  $x_\alpha^C = x_\alpha^G - x_{c\alpha}^G$  em 4.8.15, obtem-se a relação entre os parâmetros de assimetria para o centro de torção e para o centro de gravidade:

$$\begin{aligned}
 H_1^C &= H_1^G - 2x_{c2}^G I_{11}^G + 2x_{c1}^G I_{12}^G - x_{c2}^G I_0^C \\
 H_2^C &= H_2^G + 2x_{c1}^G I_{22}^G - 2x_{c2}^G I_{12}^G + x_{c1}^G I_0^C \\
 H_\psi^C &= H_\psi^G
 \end{aligned} \tag{4.8.23}$$

Substituindo-se 4.8.21.d-e, 4.8.22 e 4.8.23 em 4.8.18, impondo-se para os deslocamentos virtuais os vínculos de Vlasov e de Bernoulli-Euler no centro de torção, ou seja,

$$\delta\kappa_3 = \varphi_3', \quad \delta p' = \varphi_3'' \quad \text{e} \quad \delta\kappa_1 = -u_2'', \quad \delta\kappa_2 = u_1''$$

e notando-se ainda que

$$\delta\eta_3 = u'_{c3} = u'_{G3} - x_{c1}^G u_1'' - x_{c2}^G u_2'' \quad \text{e} \quad T^C + V_\psi = M_3$$

resulta finalmente, para o termo constitutivo não-linear,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (D^N \underline{BH} \delta \underline{\Delta}) \cdot (\underline{BH} \delta \underline{\Delta}) &= \frac{1}{2} \varphi_3'^2 \left[ r_0^2 N + 2r_{02}^G M_1^G - 2r_{01}^G M_2^G + r_{0\psi}^G M_\psi \right] + \\
 + \frac{E M_3}{G I_t} \varphi_3' &\left[ u_1'' (H_2^G + 2x_{c1}^G I_{22}^G - 2x_{c2}^G I_{12}^G) - u_2'' (H_1^G + x_{c1}^G I_{12}^G - x_{c2}^G I_{11}^G) + \right. \\
 + \varphi_3'' H_\psi &+ \left. u'_{G3} I_0^C \right]
 \end{aligned} \tag{4.8.24}$$

Nesta expressão, tem-se

$$\begin{aligned}
 2r_{01}^G &= \frac{I_{12}^G H_1^G - I_{11}^G H_2^G}{I_{11}^G I_{22}^G - I_{12}^G{}^2} - 2x_{c1}^G & 2r_{02}^G &= \frac{I_{22}^G H_1^G - I_{12}^G H_2^G}{I_{11}^G I_{22}^G - I_{12}^G{}^2} - 2x_{c2}^G \\
 r_{0\psi} &= \frac{H_\psi}{I_\psi}
 \end{aligned} \tag{4.8.25}$$

O termo em  $\varphi_3'^2$  de 4.8.24 corresponde exatamente à quarta integral da expressão 2.3.48. O segundo termo corresponde ao efeito constitutivo não-linear do momento de torção

uniforme, não considerado no capítulo 2.

#### 4.9 LINEARIZAÇÃO DA SEGUNDA VARIÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL - EXPRESSÃO COMPLETA

Em vista do que foi exposto nos itens 4.7 e 4.8, o funcional da segunda variação da energia potencial total a ser utilizado para a análise de Euler deve ser escrito, de forma completa, como

$$\begin{aligned}
 \delta^2 U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ GI_t \varphi_3'^2 + EI_\psi \varphi_3''^2 + EAu_3'^2 + EI_{11} u_2''^2 - 2EI_{12} u_1'' u_2'' + EI_{22} u_1''^2 \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L N \left[ u_1'^2 + u_2'^2 + x_{c2} (\varphi_3' u_1' - \varphi_3 u_1'') - x_{c1} (\varphi_3' u_2' - \varphi_3 u_2'') \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \varphi_3 (V_1 u_2' - V_2 u_1') + 2(V_1 u_1' + V_2 u_2') (-u_3' + x_{c1} u_1'' + x_{c2} u_2'') \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ M_1 (\varphi_3 u_1'' - \varphi_3' u_1') + M_2 (\varphi_3 u_2'' - \varphi_3' u_2') + T (u_2' u_1'' - u_1' u_2'') \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_3'^2 \left[ r_0^2 N + 2r_{02} M_1 - 2r_{01} M_2 + r_{0\psi} M_\psi \right] dz + \\
 & + \int_0^L \frac{E M_3}{G I_t} \varphi_3' \left[ u_1'' (H_2 + 2x_{c1} I_{22} - 2x_{c2} I_{12}) - \right. \\
 & \left. - u_2'' (H_1 + x_{c1} I_{12} - x_{c2} I_{11}) + \varphi_3'' H_\psi + u_3' I_0 \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L u_1' u_2' \left[ \int_C [x_1 p_{c2} + x_2 p_{c1}] dC + \int_A [x_1 p_{v2} + x_2 p_{v1}] dA \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L u_2' \varphi_3 \left[ \int_C x_1 p_{c3} dC + \int_A x_1 p_{v3} dA \right] dz +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^L u_2'^2 \left[ \int_C x_2 p_{c_2} dC + \int_A x_2 p_{v_2} dA \right] dz - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L u_1' \varphi_3 \left[ \int_C x_2 p_{c_3} dC + \int_A x_2 p_{v_3} dA \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L u_1'^2 \left[ \int_C x_1 p_{c_1} dC + \int_A x_1 p_{v_1} dA \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_3^2 \left[ \int_C [x_1 p_{c_1} + x_2 p_{c_2}] dC + \int_A [x_1 p_{v_1} + x_2 p_{v_2}] dA \right] dz - \\
& - \int_0^L \varphi_3' u_2' \left[ \int_C \psi p_{c_2} dC + \int_A \psi p_{v_2} dA \right] dz - \\
& - \int_0^L \varphi_3' u_1' \left[ \int_C \psi p_{c_1} dC + \int_A \psi p_{v_1} dA \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \beta_1 \left[ u_1 - (x_{H_2} - x_{c_2}) \varphi_3 \right]^2 + \beta_2 \left[ u_2 + (x_{H_1} - x_{c_1}) \varphi_3 \right]^2 + \beta_3 \varphi_3^2 \right\} dz
\end{aligned}$$

(4.9.1)

Os índices  $c$  e  $v$  são omitidos por simplicidade nesta expressão. Os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$ , as propriedades geométricas  $I_t$ ,  $I_\psi$ ,  $I_0$ ,  $H_\psi$ ,  $r_0$  e  $r_{0\psi}$ , a posição do carregamento externo  $x_1$  e  $x_2$  e os momentos de torção  $T$  e  $M_3$  são tomados em relação ao centro de torção. Os deslocamentos  $u_3$ , as propriedades geométricas  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{12}$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $r_{01}$  e  $r_{02}$ , as coordenadas do centro de torção  $x_{c_1}$  e  $x_{c_2}$  e os momentos fletores  $M_1$  e  $M_2$  são tomados em relação ao centro de gravidade.

#### 4.10 EXEMPLOS NUMÉRICOS

São apresentados a seguir dois exemplos numéricos. O primeiro ilustra a utilização do programa de análise não-linear de pórticos baseado na teoria apresentada neste capítulo; o segundo mostra a aplicação do funcional dado pela expressão 4.9.1 para uma análise linearizada de estabilidade. Os resultados obtidos nestes exemplos são comparados com os extraídos da literatura.

##### 4.10.1 Perfil tipo L assimétrico submetido a força normal

Este exemplo é analisado por Vlasov (1961) para um perfil de aço tipo L assimétrico submetido a uma força normal aplicada no centro de gravidade (fig. 4.10.1). São consideradas barras de 100cm e 500cm de comprimento, constituídas por material com módulos de elasticidade  $E$  e de deformação transversal  $G$  de respectivamente  $21000 \text{ kN/cm}^2$  e  $8400 \text{ kN/cm}^2$ .

A carga crítica e a configuração pós-crítica são obtidas com o emprego do programa desenvolvido por Pimenta, Yojo (1993), modificado pela inclusão do termo constitutivo não-linear apresentado neste trabalho.

Para compressão centrada, os resultados praticamente coincidem com os deduzidos por Vlasov, a saber:  $N_{cr} = -700\text{kN}$  para  $l = 100\text{cm}$  e  $N_{cr} = -340\text{kN}$  para  $l = 500\text{cm}$ . Para força normal aplicada em um ponto qualquer das abas, os resultados estão indicados na fig.4.10.1 e não são calculados por Vlasov.

O perfil cantoneira apresenta carga crítica para compressão excêntrica, exceto para forças aplicadas próximas ao centro de torção. O valor da mesma decresce quando a força normal



se aproxima da extremidade das abas e cresce quando se aproxima do centro de torção, podendo inclusive ser muito superior ao obtido para compressão centrada.

Uma análise do comportamento da barra com pequena imperfeição geométrica inicial mostra que, para deslocamentos crescentes, a força normal cresce até um valor máximo inferior à carga crítica e em seguida decresce. Este valor máximo corresponde portanto a um ponto limite e o valor crítico calculado a uma bifurcação instável do equilíbrio. Nota-se também que o valor máximo da força normal é muito sensível às imperfeições geométricas iniciais.

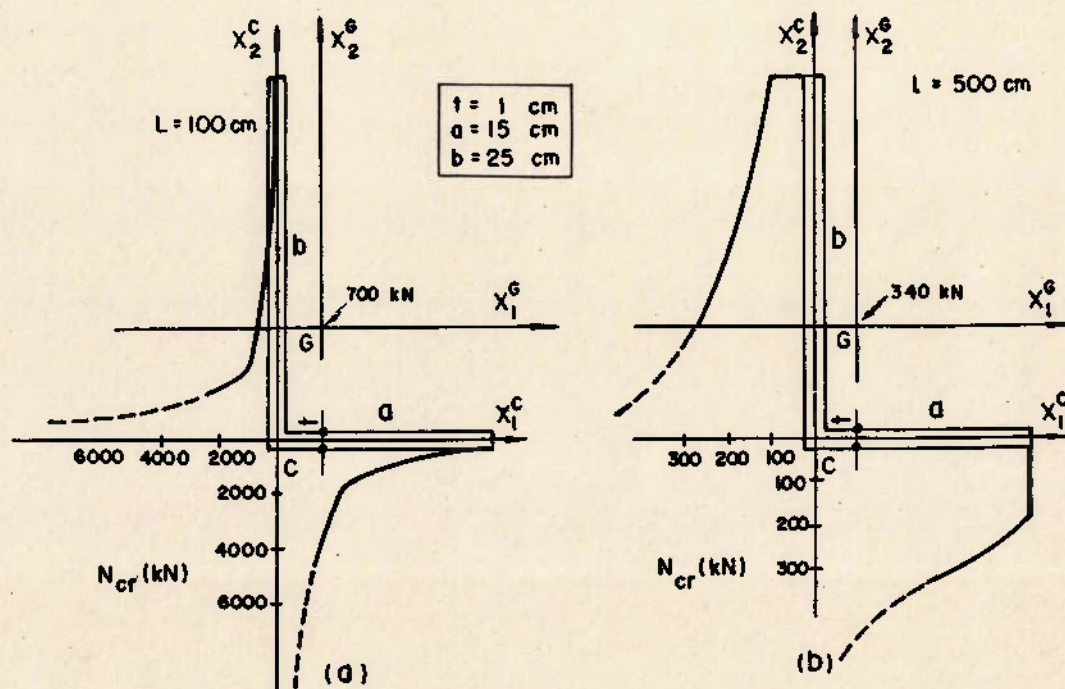


FIG. 4.10.1 Perfis tipo L - Carga crítica em função da posição da força normal

Para cargas próximas ao centro de torção, os deslocamentos são sempre crescentes com o carregamento, e a barra não apresenta carga crítica. Para forças elevadas, a configuração da barra se afasta tanto da configuração reta inicial que os resultados perdem qualquer sentido prático.

A mudança da posição dos eixos de referência do centro de torção para o centro de gravidade, e portanto do ponto da seção transversal em que as condições de contorno são impostas, pouco afeta o valor da carga crítica nos casos aqui considerados.

#### 4.10.2 Viga com seção simétrica tipo I submetida a força concentrada no centro do vão

Este exemplo é analisado por diversos autores, em especial no que diz respeito ao efeito da posição da força  $F$  em relação ao centro de torção e ao termo geométrico dos esforços internos.

O funcional da segunda variação energia potencial total dado pela expressão 4.9.1 se resume neste caso, tomando-se  $u_3$ ,  $u_2$ ,  $x_{c1}$  e  $x_{c2}$  nulos, a

$$\begin{aligned} \delta^2 U = & \frac{1}{2} \int_0^L (GI_t \varphi_3'^2 + EI_{22} u_1''^2 + EI_{\psi} \varphi_3''^2) dz + \frac{1}{2} \int_0^L M_1 (\varphi_3 u_1'' - \varphi_3' u_1') dz - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L V_2 \varphi_3 u_1' dz + \frac{1}{2} F x_{2F} \varphi_{3F}^2 \end{aligned} \quad (4.10.1)$$

Os esforços solicitantes  $M_1$  e  $V_2$  são dados por

$$\begin{array}{lll} M_1 = F z/2 & ; & V_2 = F/2 & 0 \leq z \leq L/2 \\ M_1 = F(L-z)/2 & ; & V_2 = -F/2 & L/2 < z \leq L \end{array}$$

Considerando-se, numa análise aproximada, deslocamentos generalizados sob a forma  $u_1 = u \text{ sen } \pi z/L$  e  $\varphi_3 = \psi \text{ sen } \pi z/L$  e aplicando-se o método de Ritz, vem que

$$\frac{F^2 L^3 (C_M + C_V)^2}{128 \pi^4 EI_{22}} - F x_{2F} - \frac{\pi^2}{2L} \left[ GI_t + \frac{\pi^2 EI_\psi}{L^2} \right] = 0 \quad (4.10.2)$$

$C_M$  e  $C_V$  correspondem aos termos geométricos dos momentos fletores  $M_1$  e das forças cortantes  $V_2$ , e valem respectivamente  $\pi^2$  e 4 para o funcional dado pela expressão 4.10.1.

Tomando-se para estes termos a parcela do funcional deduzido no capítulo 2 dada pela expressão 2.3.49, obtém-se  $C_M = \pi^2 - 4$  e  $C_V = 8$ . Por outro lado, tomando-se a parcela indicada por Timoshenko, Gere (1961) e dada pela expressão 2.3.50, obtém-se  $C_M = \pi^2 + 4$  e não comparece o termo  $C_V$  da força cortante.

Os resultados obtidos da expressão 4.10.2 são indicados na fig. 4.10.2 para força aplicada no centro de torção ( $x_{2F} = 0$ ), na aba tracionada ( $x_{2F} = +h/2$ ) e na aba comprimida ( $x_{2F} = -h/2$ ), em função dos parâmetros

$$F_{cr}^* = \frac{FL^2}{4 \sqrt{EI_{22} GI_t}} \quad \text{e} \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_\psi}{GI_t L^2}}$$

Apresentam-se, para cada caso, três curvas, correspondendo respectivamente a:

Curva A:  $C_M = \pi^2 - 4$ ,  $C_V = 0$

Curva B:  $C_M = \pi^2$ ,  $C_V = 0$

Curva C:  $C_M = \pi^2$ ,  $C_V = 4$  ou  $C_M = \pi^2 - 4$ ,  $C_V = 8$  ou  $C_M = \pi^2 + 4$ ,  $C_V = 0$

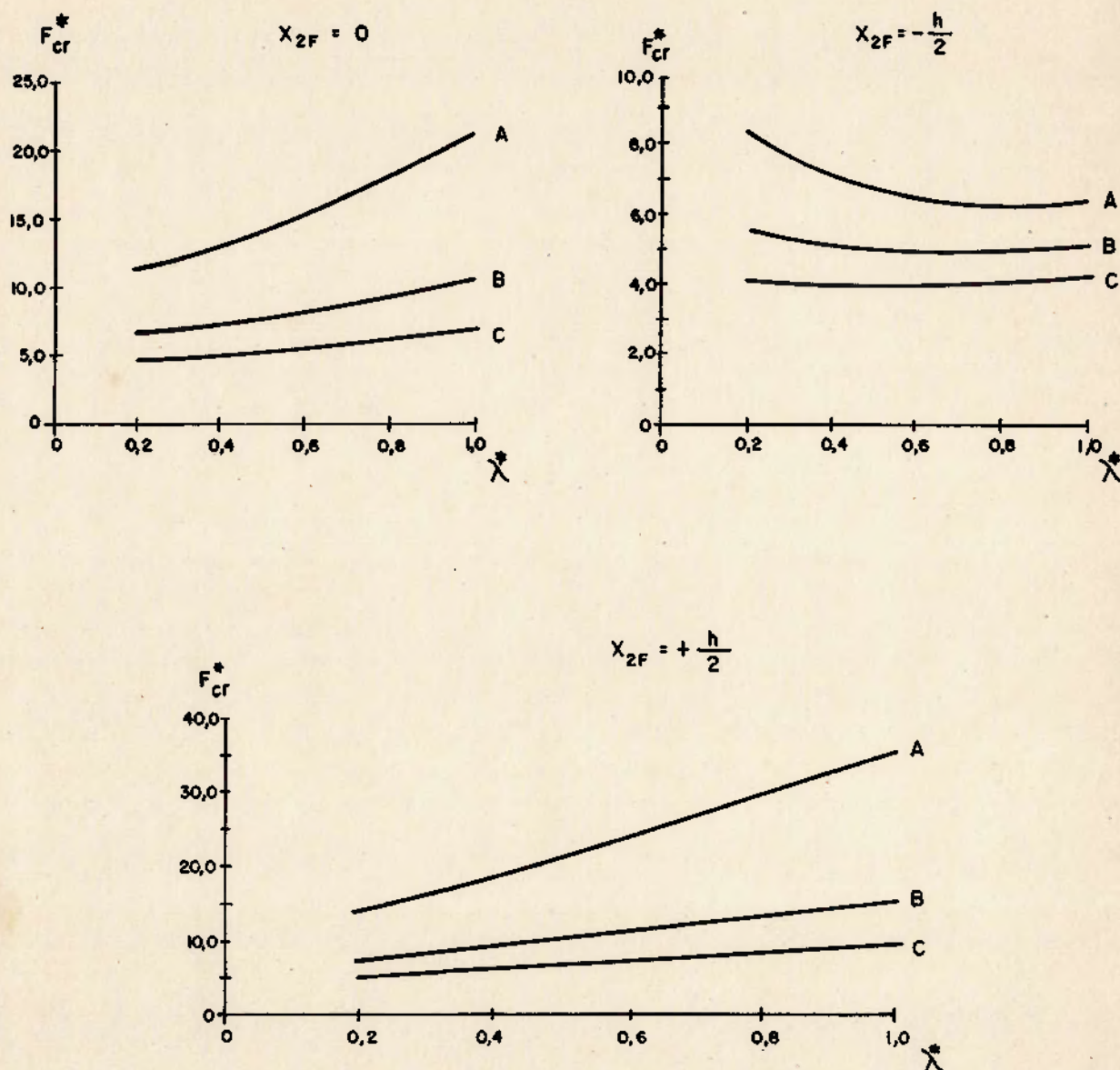


FIG. 4.10.2 Perfis tipo I simétricos - momento crítico para força concentrada no meio do vão

Pode-se observar que os resultados obtidos pela linearização da teoria geometricamente exata, dados pela curva C ( $C_M = \pi^2$ ,  $C_V = 4$ ), coincidem, para esta aproximação, com os de Timoshenko, Gere e com os obtidos através da expressão deduzida no capítulo 2. Ressalte-se ainda que é contra a segurança o procedimento de desconsiderar-se o efeito da força cortante quando da aplicação das expressões 2.3.48 ou

#### 4.10.1 ao cálculo da carga crítica.

Em vigas submetidas a carregamento assimétrico, as diferentes expressões acima citadas conduzem a resultados diversos, devendo portanto o assunto ser objeto de pesquisas futuras.

**5 ANÁLISE GEOMETRICAMENTE  
NÃO-LINEAR DE PERFIS DE  
SEÇÃO ABERTA**

**INSTABILIDADE POR DISTORÇÃO**

## 5.1 INTRODUÇÃO

São descritos no capítulo 3 alguns modelos simplificados, baseados em teorias aproximadas, para o cálculo da carga crítica para instabilidade por distorção de barras inicialmente retas com seção transversal tipo I, U, C e Z. Estes modelos apresentam várias limitações no que diz respeito ao estudo do efeito das condições de vínculo e do tipo e forma de introdução do carregamento. Adicionalmente, não permitem determinar a trajetória de equilíbrio das barras com imperfeições geométricas iniciais, bem como das barras inicialmente retas nas quais os deslocamentos afetam o estado das tensões.

Não é possível portanto afirmar que este enfoque, baseado na determinação de cargas críticas, seja seguro. Propõe-se por isso neste capítulo uma análise aproximada da instabilidade por distorção de perfis de seção aberta e parede delgada através do programa de análise não-linear apresentado no capítulo 4, com a discretização do perfil em elementos de barra constituindo um pórtico espacial. As limitações resultantes da adoção deste modelo são comentadas no capítulo 6.

Não se pretende aqui apresentar um estudo paramétrico do problema, mas apenas indicar um caminho para a pesquisa nesta área, assim como alguns resultados numéricos obtidos para perfis tipo I e tipo U enrijecido. Estes resultados são comparados aos obtidos através de alguns modelos apresentados no capítulo 3.

## 5.2 BARRAS EM MEIO ELÁSTICO

No modelo de Svensson (1985) (ver item 3.3.1), a aba

inferior de vigas tipo I, contidas lateralmente por uma laje de concreto ao nível da aba superior, é analisada como uma barra reta apoiada em um meio elástico provido pela alma. A barra é submetida a uma força normal, sendo o objetivo do modelo determinar o valor crítico da mesma.

É interessante analisar, para este problema, a estabilidade do equilíbrio da configuração pós-crítica. Considere-se uma barra inextensível simplesmente apoiada e submetida a uma força normal  $N$  nas extremidades (fig. 5.2.1). Tomando-se as derivadas dos deslocamentos  $u$  em relação à configuração deformada, pode-se expressar a rotação específica  $\kappa$  e o encurtamento da barra  $\Delta$ , para o estágio inicial do ramo pós-crítico, como

$$\kappa = u'' (1 - u'^2)^{-1/2}$$

$$\Delta = L - \int_0^L (1 - u'^2)^{1/2} dz$$

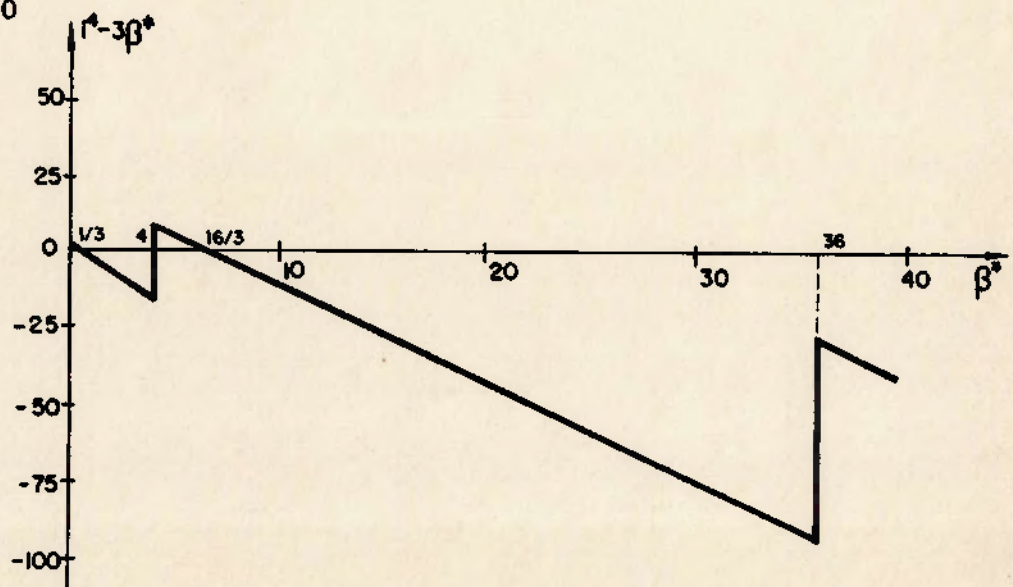


FIG. 5.2.1 Barra em meio elástico - Configuração pós-crítica

A variação da energia potencial total do sistema entre a configuração reta imediatamente anterior à flambagem e a configuração deformada é dada por



$$U = \frac{1}{2} \beta \int_0^L u^2 dz + \frac{1}{2} EI \int_0^L \kappa^2 dz + N \left[ L - \int_0^L (1 - u'^2)^{1/2} dz \right]$$

Expandindo-se em séries de Taylor os termos das duas últimas integrais, vem que

$$U = \frac{1}{2} \beta \int_0^L u^2 dz + \frac{1}{2} EI \int_0^L u''^2 (1 + u'^2 + \dots) dz + \\ + N \int_0^L \left( \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{8} u'^4 + \dots \right) dz$$

Tomando-se os deslocamentos  $u$  sob a forma  $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \text{sen} \frac{i\pi z}{L}$ , o funcional pode ser transformado numa função dos coeficientes  $u_i$ . A condição  $\delta^2 U / \delta u_i^2 = 0$  fornece o valor da carga crítica já deduzido no item 3.3. Pode-se mostrar que o sinal de  $\delta^4 U / \delta u_i^4$  é proporcional a  $(i^4 - 3\beta^*)$ , onde  $i$  é o número de semi-ondas correspondente a  $N_{cr}$  (ver fig. 3.3.2) e  $\beta^*$  é dado por 3.3.6. A configuração pós-crítica só é estável, portanto, se  $\delta^4 U / \delta u_i^4$  é positiva definida, ou seja, se  $\beta^* < i^4/3$ . A fig. 5.2.2 fornece a variação do termo  $(i^4 - 3\beta^*)$  com o parâmetro  $\beta^*$  (Thompson, Hunt, 1973).

Pode-se observar que, para a barra em meio elástico, a configuração pós-crítica só é estável para valores de  $\beta^*$  muito baixos, pouco frequentes nos perfis usuais. Para configuração pós-crítica instável, a carga crítica pode não ser um parâmetro adequado para projeto, pois a força normal máxima atingida pela estrutura com imperfeições iniciais (ponto limite) é inferior à mesma. Este fato é particularmente importante nas estruturas muito sensíveis a imperfeições.

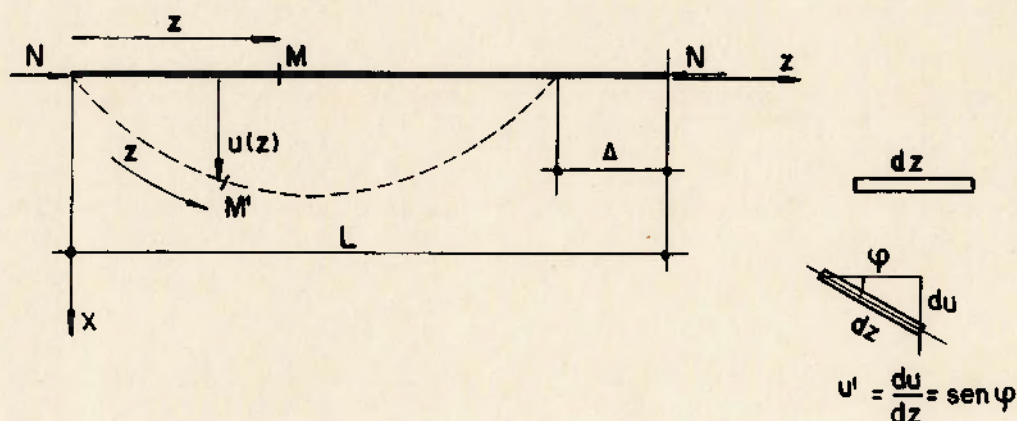


FIG. 5.2.2 Variação com  $\beta^*$  da curvatura do ramo pós-crítico

Os resultados acima apresentados levam à necessidade de uma investigação em pormenor do comportamento da estrutura, em particular no que diz respeito à existência de uma bifurcação da configuração de equilíbrio inicial, à estabilidade da configuração pós-crítica do perfil (e portanto à determinação de uma eventual reserva de resistência pós-crítica) e à sensibilidade a imperfeições geométricas iniciais. Este é o objetivo deste capítulo.

### 5.3 BARRAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO I

Este item apresenta alguns exemplos de aplicação do programa de análise não-linear de pórticos espaciais ao estudo da instabilidade por distorção de perfis tipo I. São tratados apenas alguns casos de carregamento e de condição de vínculo, devendo o tema ser objeto de estudos posteriores.

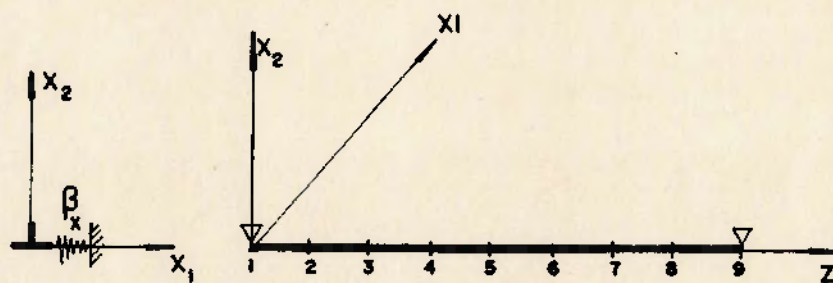
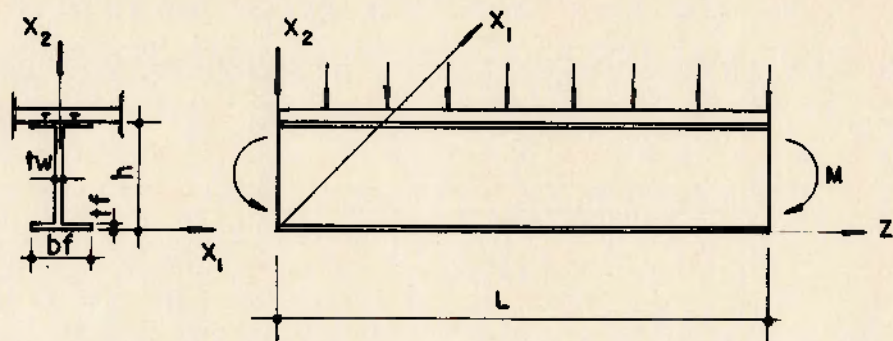
As vigas são discretizadas em elementos de barra com oito elementos em cada aba, tendo sido considerados os três modelamentos distintos indicados na fig. 5.3.1.

No modelo A, procura-se reproduzir as condições de vínculo do modelo de Svensson, no qual se analisa a instabilidade por flexão da aba, apoiada num meio elástico provido pela alma no plano normal a  $x_2$ . Neste modelo, desconsidera-se a resistência à torção da aba e a reação  $\beta_\varphi$  do meio elástico. As rotações  $\varphi_3$  e os deslocamentos  $u_2$  são impedidos em todos os nós.

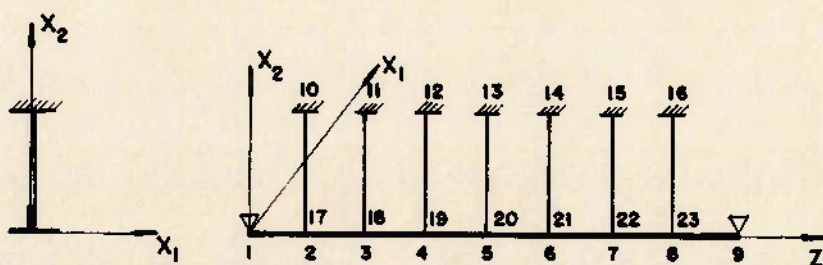
No modelo B, a alma é discretizada em elementos de barra engastados ao nível da aba superior e vinculados à aba inferior apenas para deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  e rotações  $\varphi_3$ , exceto nas extremidades da aba, onde estes deslocamentos generalizados são impedidos. A resistência da alma às rotações e aos deslocamentos horizontais da aba é portanto considerada neste modelo.

O carregamento é aplicado, nos modelos A e B, através de deslocamentos longitudinais de extremidade ou de forças normais equivalentes nas abas.

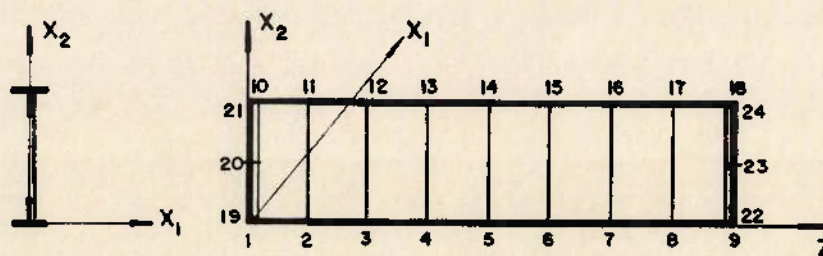
No modelo C, a barra é tratada como uma viga Vierendeel, na qual as condições de vínculo nas extremidades das abas e no topo da aba superior variam conforme o caso a ser analisado. Os momentos de extremidade são aplicados como um binário de forças nos nós 1/10 e 9/18 ou, alternativamente, como momentos ou rotações impostas nos nós 20 e 23 de duas barras de grande rigidez conectadas para deslocamentos às extremidades das abas. Este modelo apresenta como vantagem permitir o estudo da barra como um todo e portanto introduzir as forças externas nos pontos em que efetivamente são aplicadas.



MODELO A



MODELO B



MODELO C

FIG. 5.3.1 Barras com seção transversal tipo I - Modelos para análise.

Nos três casos, são consideradas abas com seção transversal retangular e com seção tipo T, na qual se toma arbitrariamente uma fração colaborante de alma com altura 0,15h, como sugerido por Williams, Jemah (1987).

Os valores das forças normais críticas na aba inferior ou dos momentos fletores críticos na viga são obtidos para a barra isenta de imperfeições geométricas iniciais. Para esta situação, não é possível determinar a configuração pós-crítica.

A análise da trajetória de equilíbrio da barra é feita impondo-se uma imperfeição geométrica inicial sob a forma de uma ou mais semi-ondas no plano normal a  $x_2$ , com amplitude igual à tolerância de norma (L/1000). Nas vigas em que a configuração pós-crítica é estável, o algoritmo utilizado no programa permite traçar o ramo ascendente da trajetória, tanto para o carregamento dado por forças ou momentos aplicados quanto para deslocamentos ou rotações impostas. Já para configuração pós-crítica instável, o ramo descendente só pode ser determinado para deslocamentos ou rotações impostas.

Os resultados obtidos através destes modelos são ilustrados a seguir para quatro vigas, cujas características geométricas são dadas na tab. 5.3.1 juntamente com os valores de  $\beta^*$  calculados através das expressões 3.3.1 e 3.3.6. Pode-se observar que as características geométricas das vigas são escolhidas de modo que o valor de  $\beta^*$  corresponda, para a análise aproximada indicada no item 5.2, à flambagem com uma semi-onda (V1 e V2) ou duas semi-ondas (V3 e V4), com configuração pós-crítica estável (V1 e V3) ou instável (V2 e V4). Não se procura, nesta escolha, limitar a carga crítica de modo a não se atingir a tensão de escoamento do material.

	h (mm)	b <sub>f</sub> (mm)	t <sub>f</sub> (mm)	t <sub>w</sub> (mm)	L (mm)	β*
V1	1000	400	25,4	6,4	10000	0,055
V2	1000	400	25,4	12,7	10000	0,427
V3	1000	400	31,8	9,5	24000	4,732
V4	1000	400	31,8	12,7	24000	11,336

TAB. 5.3.1 Características geométricas das vigas -  
Perfis tipo I

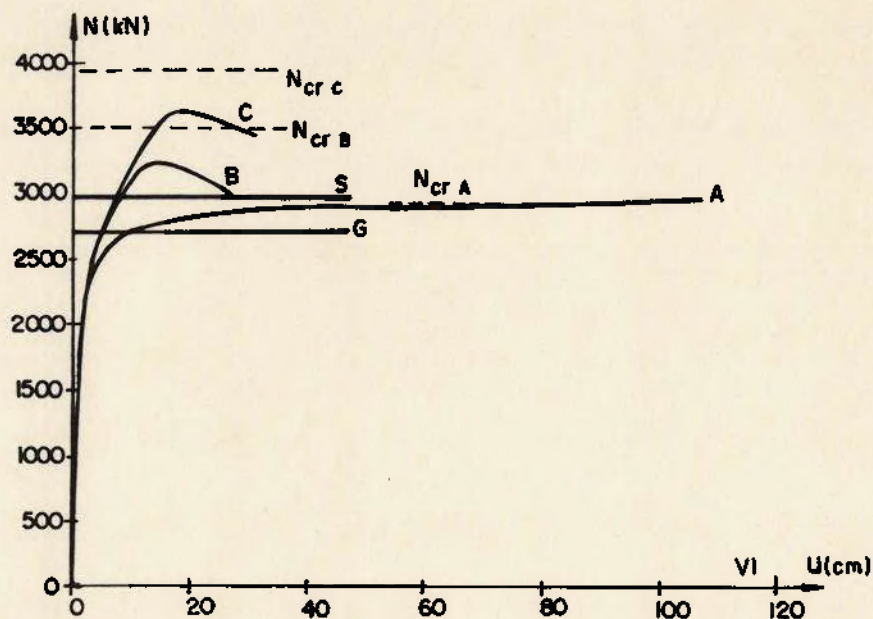
### 5.3.1 Vigas com momento fletor constante

#### a) Abas tracionadas com deslocamentos laterais e rotações em torno de z impedidos

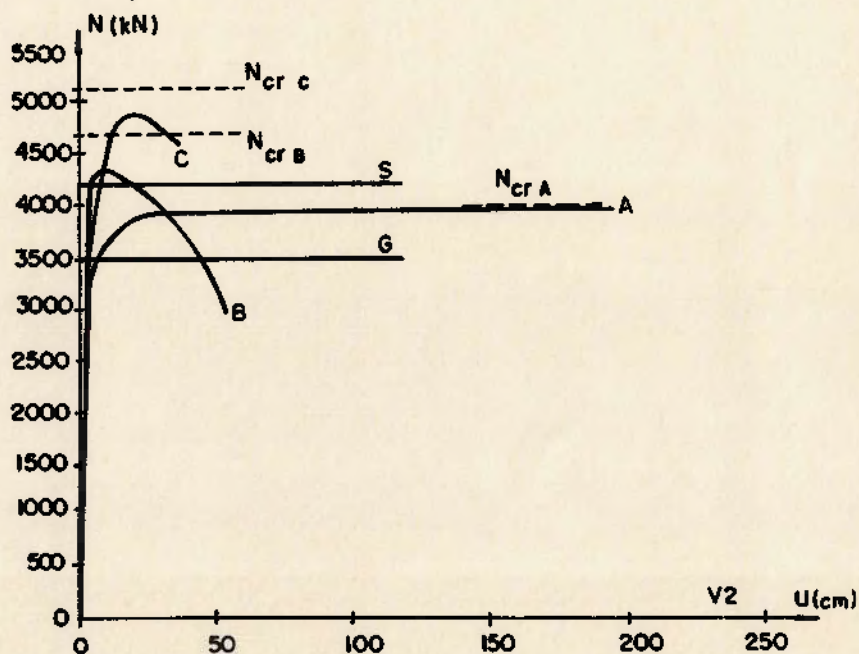
Apresentam-se nas figs. 5.3.2.a-d as trajetórias de equilíbrio das vigas V1 a V4, obtidas com o emprego dos três modelos, para abas com rotações  $\varphi_2$  livres nas extremidades e com imperfeição sob a forma de uma semi-onda. Indicam-se por simplicidade apenas os gráficos de força normal na aba inferior em função do deslocamento  $u_1$ , já que nos modelos B e C as rotações  $\varphi_3$  e os deslocamentos variam na mesma proporção. Apresentam-se também, juntamente com as forças normais críticas determinadas através da análise não-linear, as calculadas através dos modelos de Svensson e de Goltermann, Svensson, indicados respectivamente pelas letras S e G, onde para este último se adota  $C_d = 1$ .

Os resultados numéricos correspondem a abas com seção em forma de T. As trajetórias para seção transversal retangular são similares mas apresentam valores de força normal ligeiramente inferiores aos aqui indicados.

O modelo A apresenta forças normais críticas próximas das do modelo de Svensson, sendo superiores para vigas de maior comprimento (V3 e V4) e inferiores para as de menor comprimento (V1 e V2). A viga V1 mostra uma configuração

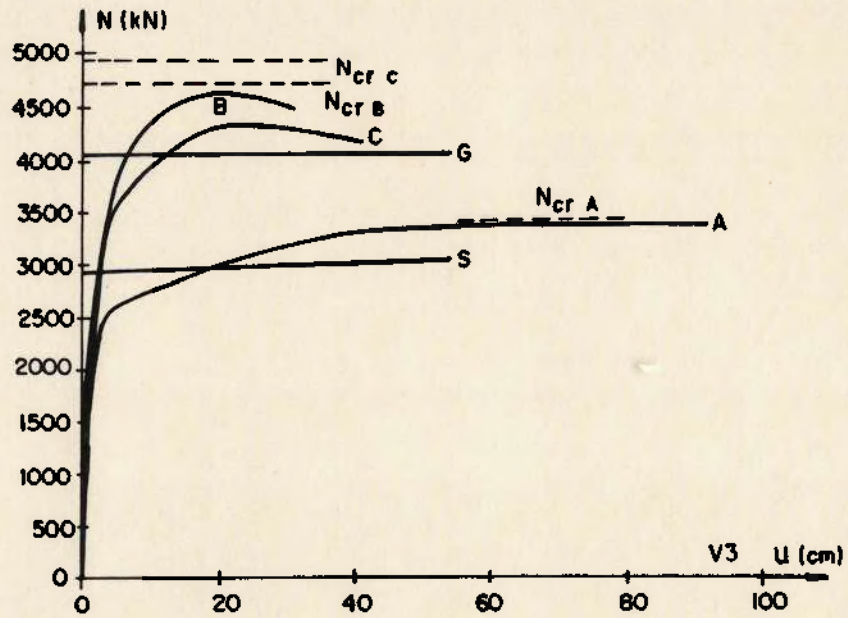


(a)

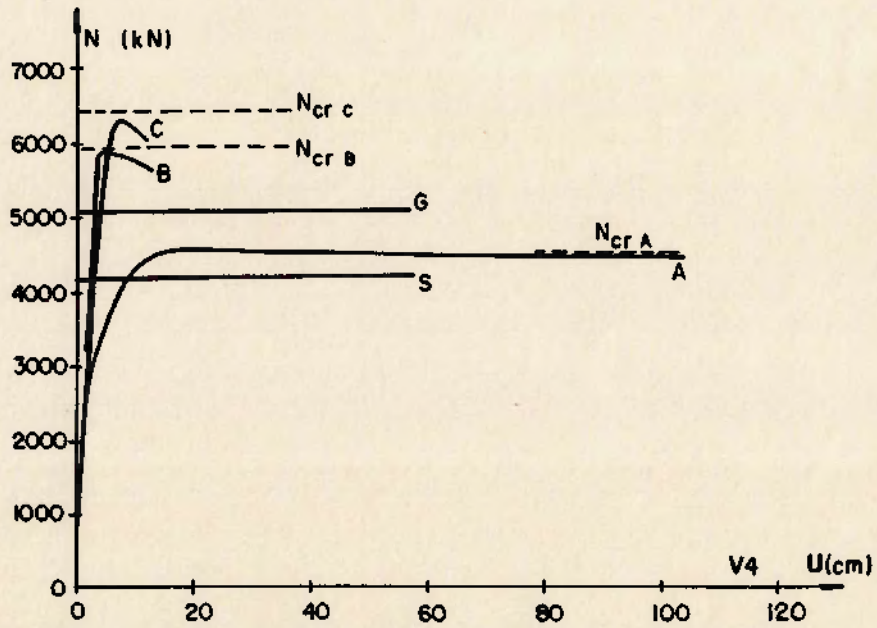


(b)

FIG. 5.3.2 Perfis tipo I submetidos a momento fletor constante -  $C_d = 1$  e rotações  $\psi_2$  livres nas extremidades das abas - Forças normais críticas e diagramas  $N/u$  para  $u_0/L = 1/1000$



(c)



(d)

FIG. 5.3.2 (cont.)



pós-crítica estável, embora o acréscimo de força normal seja desprezável. As demais vigas têm configuração pós-crítica instável, mas a força normal decresce pouco com os deslocamentos e seu valor máximo é pouco afetado pela imperfeição inicial. Não foi detectada uma configuração pós-crítica estável para a viga V3, assim como para outras vigas também testadas com  $4 \leq \beta_x \leq 16/3$ , ao contrário do indicado na análise da barra em meio elástico (fig. 5.2.2).

O modelo B apresenta, como esperado, forças normais críticas superiores às do modelo A, já que permite, ao contrário deste, considerar a resistência da alma às rotações da aba. As quatro vigas mostram comportamento pós-crítico instável. As forças normais decrescem muito com os deslocamentos, em particular para as almas mais espessas. Seus valores máximos são pouco inferiores aos críticos para as imperfeições geométricas consideradas e são sempre superiores às forças normais críticas dos modelos de Svensson e de Goltermann, Svensson. O primeiro se aproxima mais do modelo B para vigas de menor comprimento (V1 e V2) e o segundo para vigas de maior comprimento (V3 e V4).

As forças normais críticas obtidas com o modelo C são sempre superiores às do modelo B e praticamente independem da forma de introdução dos momentos de extremidade. As trajetórias de equilíbrio também são análogas às do modelo B.

Nos modelos B e C com abas de seção transversal retangular, o momento fletor nas mesmas é desprezável, o que não ocorre para abas com seção transversal em forma de T. No entanto, estes momentos pouco afetam o comportamento da viga.

As forças normais críticas para o caso de abas com rotações  $\varphi_2$  impedidas nas extremidades são indicadas na tab. 5.3.2. Pode-se observar que, de maneira geral, os valores obtidos para os modelos B e C são próximos entre si e superiores aos correspondentes a abas sem restrição à rotação nas

extremidades em torno de  $x_2$ , em particular para as vigas V1 e V2, de menor comprimento. A viga V1 com seção de aba em forma de T é uma exceção, pois apresenta resultado muito discrepante para o modelo B. Este fato deverá ser objeto de investigação posterior. Os modelos de Svensson e de Goltermann, Svensson não tratam do problema, não sendo possível então estabelecer uma comparação com os modelos aqui apresentados.

$N_{cr}$ (kN)		seção transversal da aba	
		—	⊥
V1	B	12300	—
	C	12700	12500
V2	B	13200	14100
	C	13700	13500
V3	B	6300	6600
	C	6000	6000
V4	B	8900	9400
	C	8600	8600

**TAB. 5.3.2** Perfis tipo I submetidos a momento fletor constante -  $N_{cr}$  para  $C_d = 1$  e rotações  $\varphi_2$  impedidas nas extremidades das abas

b) Abas tracionadas com deslocamentos laterais impedidos e rotações em torno de z livres.

São apresentadas na tab. 5.3.3 as forças normais críticas nas abas obtidas com o modelo C para rotações  $\varphi_3$  livres nos nós 11 a 17 e também com o modelo de Goltermann, Svensson para  $C_d = 0$ . Os valores determinados com o modelo C são superiores aos de Goltermann, Svensson para vigas de pequeno vão e inferiores para vigas mais longas. As cargas críticas dos pares de vigas V1/V2 e V3/V4 são próximas, embora correspondam a perfis de espessura de alma diferentes. Conclui-se assim que a distorção da seção transversal não é condicionante nestes casos. Pode-se observar ainda que a força normal crítica é muito inferior à obtida no item

anterior para o caso de abas com rotações em torno de  $z$  impedidas.

$N_{cr}$ (kN)	G ( $C_d=0$ )	Modelo C
V1	2800	3260
V2	2600	3270
V3	1750	1330
V4	1780	1340

**TAB. 5.3.3** Perfis tipo I submetidos a momento fletor constante -  $N_{cr}$  para  $C_d = 0$  e rotações  $\varphi_2$  livres nas extremidades das abas

### 5.3.2 Vigas com momento fletor variável ao longo do vão - Abas superiores com deslocamentos laterais e rotações em torno de $z$ impedidos

A título de ilustração apresentam-se a seguir, para dois casos de carregamento com momento variável ao longo do vão, as forças normais críticas nas extremidades das abas obtidas através dos modelos B e C.

#### a) Momentos de extremidade iguais em módulo - Curvatura reversa

As forças normais críticas para este caso de carregamento estão indicadas na tab. 5.3.4. Para o modelo B, são aplicadas forças normais concentradas  $F_2$  nos nós extremos e forças normais uniformemente distribuídas  $f_2$  ao longo das abas, de modo a simular o estado de tensões calculado pela análise linear. Para o modelo C, os momentos de extremidade são aplicados nas três formas já citadas, obtendo-se resultados próximos entre si. Nos casos de utilização de barras rígidas de extremidade, os valores obtidos são, dentro de certos limites, pouco sensíveis a variações das

características geométricas das mesmas.

À exceção da viga V1 com seção transversal das abas em forma de T, que também apresenta valor muito discrepante para o modelo B, os resultados são próximos entre si para ambos os modelos. São superiores aos correspondentes a momento fletor constante, indicados no item 5.3.1, e também aos obtidos através dos modelos de Svensson e de Goltermann, Svensson. Para o primeiro em particular tem-se, respectivamente para as vigas V1 a V4,  $N_{cr}$  igual a 11900KN, 13900KN, 5600KN e 7800KN.

$N_{cr}$ (kN)		seção transversal da aba	
		—	⊥
V1	B	14000	-
	C	14700	14900
V2	B	16100	17000
	C	17000	17400
V3	B	8700	9000
	C	9000	9200
V4	B	11500	12000
	C	12000	12200

**TAB. 5.3.4 Perfis tipo I -  $N_{cr}$  para momentos de extremidade iguais em módulo e curvatura reversa**

**b) Carga vertical uniformemente distribuída - vigas com extremidades engastadas.**

Para o modelo B, o procedimento para aplicação do carregamento é semelhante ao do item anterior, exceto pelo fato de que as forças normais  $f_z$  têm intensidade variável de elemento para elemento. Para o modelo C, os resultados obtidos com o uso das barras rígidas de apoio são muito dependentes das características geométricas das mesmas, tendo-se optado então por eliminá-las. Os momentos de

extremidade são aplicados como binários de forças normais concentradas  $F_2$  nos nós 1/10 e 9/18 ou, alternativamente, simula-se o engaste impondo-se deslocamentos iguais nos nós 1/10 e 9/18 (os resultados são próximos para ambos os casos). Os valores de carga crítica assim determinados, tanto para carga distribuída aplicada na aba superior quanto na inferior, estão indicados na tab. 5.3.5.

Novamente à exceção da viga V1 analisada de acordo com o modelo B para abas com seção transversal em forma de T, as forças normais críticas das abas nas extremidades da viga são muito superiores às correspondentes a momento fletor constante. Para cargas aplicadas à aba superior, os resultados obtidos através do modelo C são até 30% superiores aos do modelo B. No entanto, o efeito estabilizante das cargas aplicadas à aba inferior eleva substancialmente o valor da carga crítica.

$N_{cr}$ (kN)		seção transversal da aba	
		-	⊥
V1	B	9900	-
	Csup	12800	13100
	Cinf	31900	33000
V2	B	12800	13100
	Csup	15600	16500
	Cinf	36400	39100
V3	B	10400	8400
	Csup	13000	13200
	Cinf	28800	29400
V4	B	16000	15500
	Csup	17500	17900
	Cinf	32800	33800

TAB. 5.3.5 Perfis tipo I -  $N_{cr}$  para vigas engastadas nas extremidades e submetidas a forças verticais uniformemente distribuídas

Deve-se notar ainda que os valores aqui determinados são muito superiores aos obtidos através dos modelos de Svensson e de Goltermann, Svensson, em particular para as vigas V3 e V4, de maior comprimento. Para o primeiro deles tem-se respectivamente, para as vigas V1 a V4,  $N_{cr}$  igual a 8300 kN, 11000 kN, 7000 kN e 10000 kN.

#### 5.4 BARRAS COM SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO U ENRIJECIDO

Este item apresenta alguns exemplos de aplicação do programa de análise não-linear de pórticos espaciais ao estudo da instabilidade por distorção de perfis tipo U enrijecido. Assim como no item anterior, são tratados apenas alguns casos de carregamento, devendo o tema ser objeto de estudos posteriores.

As vigas são discretizadas em elementos de barra com oito elementos em cada aba, tendo sido considerados os dois modelamentos indicados na fig. 5.4.1.

No modelo A, procura-se reproduzir as condições de vínculo do modelo de Douty, no qual se analisa a instabilidade por flexo-torção da aba apoiada num meio elástico provido pela alma.

A seção efetiva da aba inferior, em forma de L, é obtida através da expressão 3.5.3 do modelo de Douty. Os momentos fletores críticos resultantes mostram-se próximos entre si para alturas efetivas variando entre zero e um quarto da altura da alma, embora a força normal crítica na aba seja função da altura efetiva da alma.

A influência da flexibilidade da aba superior é considerada de forma aproximada, tomando-se como altura de alma  $h^*$  um valor que resulte no mesmo deslocamento horizontal  $u_1$ , para

força  $f_1$  unitária, que o obtido com o quadro formado pelas almas e pela aba superior (ver fig. 3.5.2).

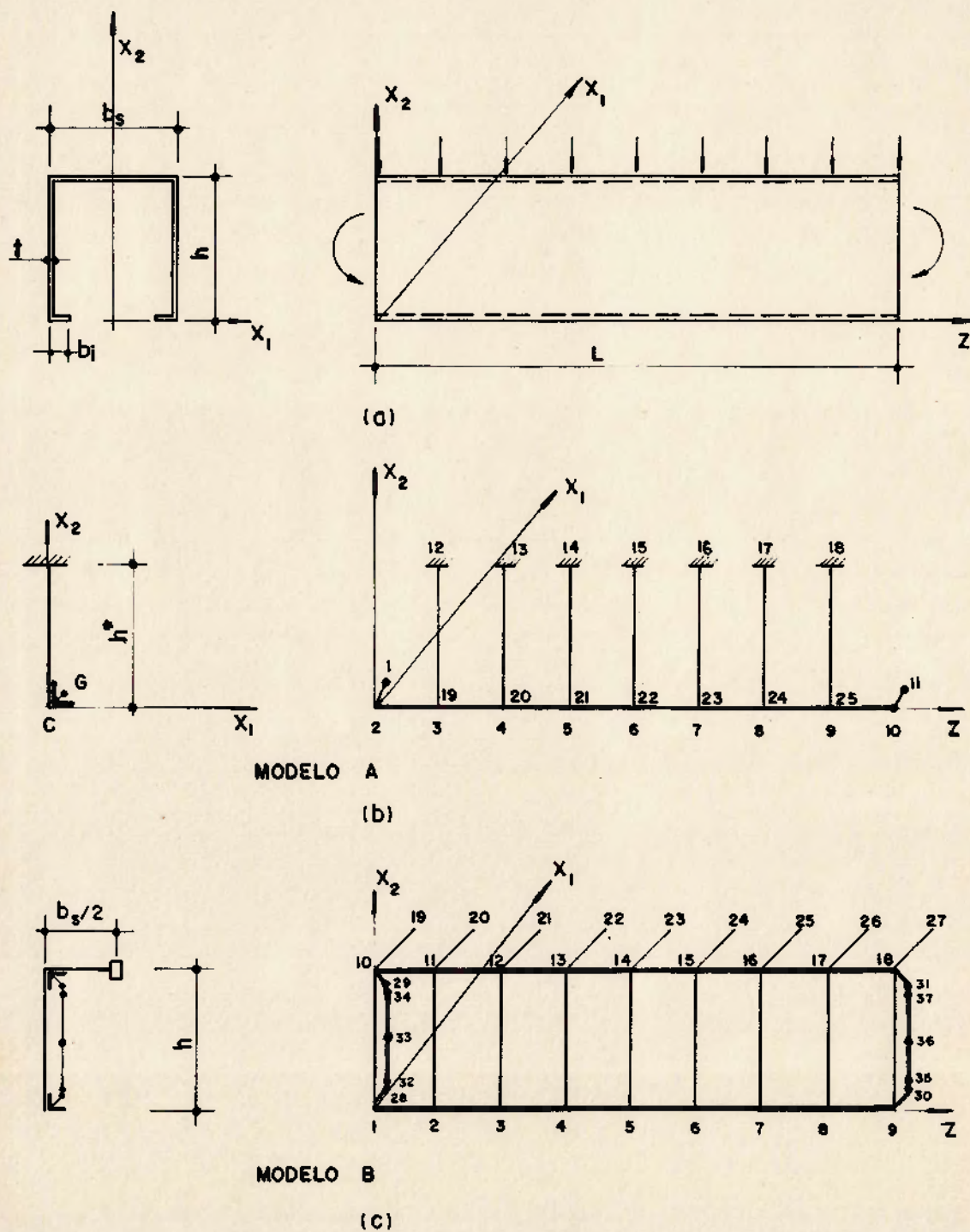


FIG. 5.4.1 Barra com seção transversal tipo U enrijecido - Modelos para análise

Os elementos correspondentes à alma são engastados nos nós 12 a 18 e vinculados à aba inferior apenas para deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  e rotações  $\varphi_3$ , exceto nas extremidades da aba, onde estes deslocamentos generalizados são impedidos. Os elementos 1-2 e 10-11 são barras de grande rigidez ligando o centro de torção ao centro de gravidade da seção efetiva da aba. Este artifício permite que as forças normais sejam aplicadas e que os deslocamentos sejam impostos no centro de gravidade da seção efetiva.

No modelo B, as faces verticais da viga são modeladas como vigas Vierendeel. Por simetria, analisa-se apenas a metade da peça indicada na fig. 5.4.1.c, impondo-se que as rotações  $\varphi_3$  e os deslocamentos  $u_1$  ao longo do eixo de simetria (nós 19 a 27) são nulos.

As extremidades da aba inferior têm as rotações  $\varphi_3$  e os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  impedidos. Os elementos 1-28, 10-29, 9-30 e 18-31, assim como no modelo A, são barras rígidas ligando o centro de torção ao centro de gravidade da seção efetiva da aba. A seção efetiva da aba inferior é obtida através da expressão 3.5.3 do modelo de Douty. A aba horizontal da barra superior tem dimensão  $b_s/2$ , enquanto que a aba vertical tem sua dimensão escolhida de modo que o centro de gravidade da seção efetiva da viga coincida com o da viga real.

Os momentos de extremidade são aplicados como um binário de forças nos centros de gravidade das seções efetivas das abas superior e inferior ou, alternativamente, como momentos ou rotações impostas nos nós 33 e 36 de duas barras de grande rigidez, conectadas para deslocamentos aos centros de gravidade das seções efetivas.

As forças normais críticas na aba inferior ou os momentos fletores críticos são obtidos para a barra isenta de imperfeições geométricas iniciais. No entanto, ao contrário



do que acontece no perfil I simétrico, os deslocamentos  $u_1$  e as rotações  $\varphi_3$  da aba inferior crescem desde o início do carregamento, e este crescimento é muito mais acentuado no modelo B que no modelo A.

Para a barra com uma imperfeição geométrica inicial sob a forma de uma ou mais semi-ondas no plano normal a  $x_2$ , a força normal máxima atingida é praticamente igual a crítica. Para algumas formas de imperfeição, obtém-se uma força normal ligeiramente superior à crítica, enquanto que para outras é ligeiramente inferior.

O algoritmo utilizado no programa mostra-se incapaz de acompanhar a trajetória de equilíbrio do sistema, com ou sem imperfeições iniciais, além do ponto crítico. A forma dos diagramas sugere que se trate, na barra isenta de imperfeições iniciais, de uma bifurcação do equilíbrio instável e, na barra com imperfeições, de um ponto limite. É preciso no entanto pesquisar algoritmos mais eficientes que permitam determinar também as configurações instáveis.

Para os casos em que a força normal máxima é superior à crítica, supõe-se que isto decorra de um efeito favorável da forma de imperfeição adotada, e não de uma configuração pós-crítica estável.

Os resultados obtidos através destes modelos são ilustrados a seguir para três vigas, cujas características geométricas são dadas na tab. 5.4.1, juntamente com os valores de  $\beta_{eq}^*$  calculados através das expressões 3.3.6 e 3.5.18.

	h (mm)	$b_s$ (mm)	$b_i$ (mm)	t (mm)	L (mm)	$\beta_{eq}^*$
V1	200	120	40	2,65	3000	7,4
V2	250	120	40	2,65	3000	3,9
V3	250	120	40	2,65	4800	25,6

TAB. 5.4.1 Características geométricas das vigas - perfis tipo U enrijecido

### 5.4.1 Vigas com momento fletor constante

Apresentam-se nas figs. 5.4.2.a-c as trajetórias de equilíbrio das vigas V1 a V3, para momento fletor constante ao longo do vão, obtidas através dos modelos A e B. São indicados os diagramas para a barra sem imperfeição inicial (em tracejado) e com imperfeição em forma de uma semi-onda, assim como as forças normais críticas calculadas de acordo com o modelo de Douty. Para o modelo B são traçadas duas curvas, B1 e B2, correspondentes a um binário de forças nas extremidades (B1) e a rotações impostas nos nós 33 e 36 (B2).

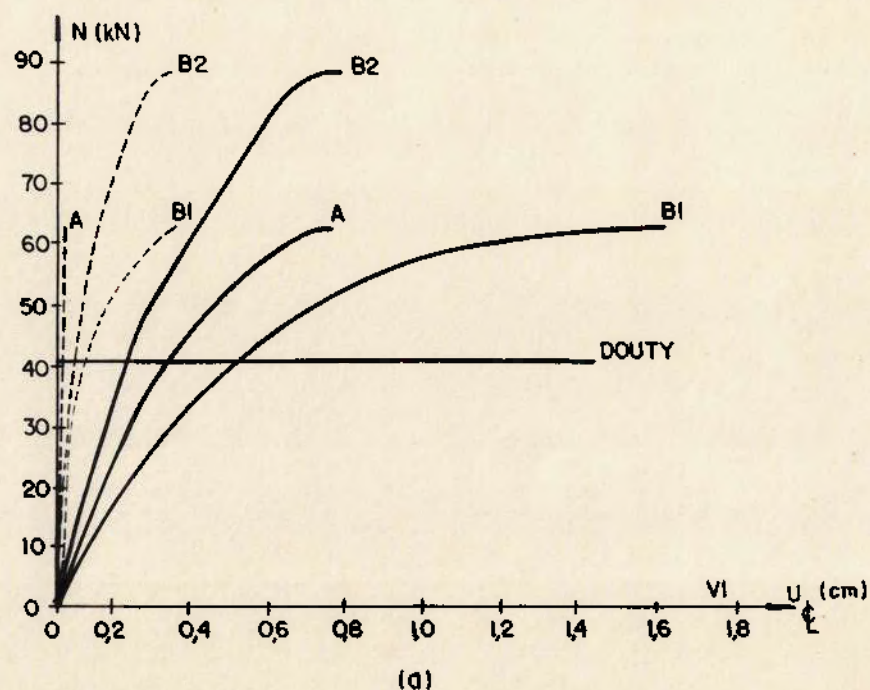


FIG. 5.4.2 Perfis tipo U enrijecido submetidos a momento fletor constante - Diagramas força normal / deslocamento no centro do vão

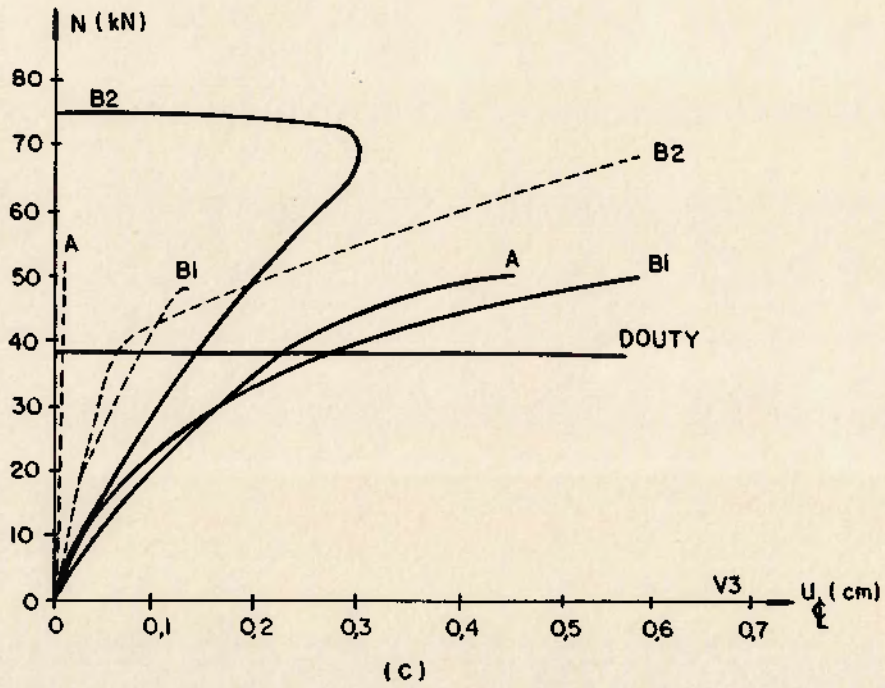
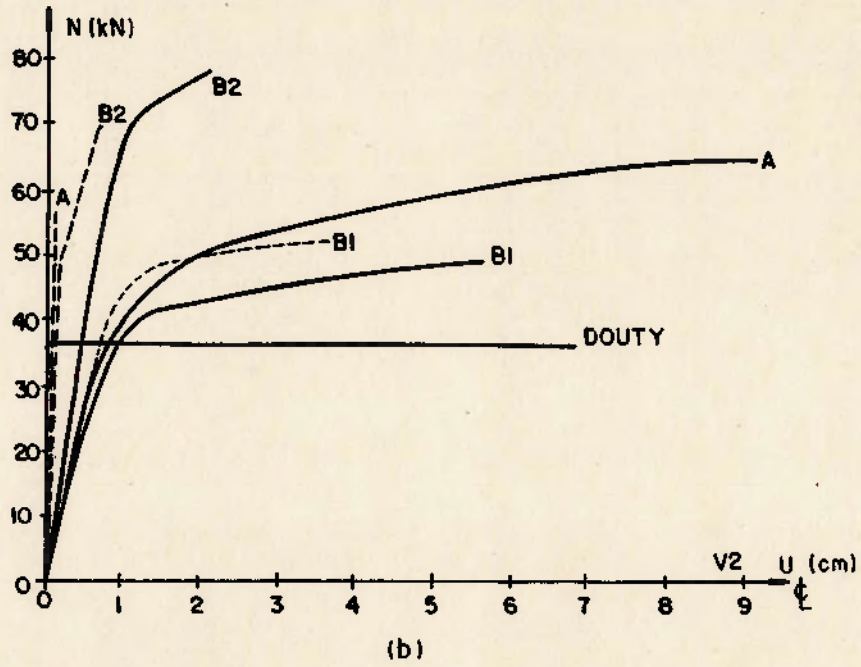


FIG. 5.4.2 (cont.)

Pode-se observar que as forças normais críticas obtidas através dos modelos A e B1 são próximas entre si e inferiores às do modelo B2, e que as três são superiores às do modelo de Douty. A forma de introdução dos momentos de extremidade afeta portanto significativamente o carregamento crítico. As imperfeições geométricas em forma de uma semi-onda resultam, em geral, em um aumento dos deslocamentos  $u_1$  no centro do vão. Para a viga V3 em particular, quando os momentos de extremidade são aplicados através de rotações impostas, os deslocamentos se alteram de uma para três semi-ondas nas proximidades da carga crítica.

#### 5.4.2 Vigas com momento fletor variável ao longo do vão

A título de ilustração apresentam-se a seguir, para dois casos de carregamento com momento fletor variável ao longo do vão, as forças normais críticas nas extremidades das abas obtidas através dos modelos A e B.

##### a) Momentos de extremidade iguais em módulo - curvatura reversa

As forças normais críticas são obtidas, no modelo A, aplicando-se forças normais concentradas  $F_2$  nos nós extremos 1 e 11 e forças normais  $f_z$  e momentos  $m_1 = -f_z x_{G2}$  e  $m_2 = f_z x_{G1}$  uniformemente distribuídos ao longo do eixo z, de modo a simular o estado de tensões na aba inferior calculado pela análise linear. Para o modelo B, os momentos de extremidade são aplicados nas três formas já citadas, obtendo-se diferenças de até 20% nos valores de carga crítica.

Os resultados obtidos através dos modelos A e B para o caso de momentos impostos nos nós 33 e 36 estão indicados na tab. 5.4.2. Pode-se observar que as forças normais críticas são muito superiores às correspondentes a momento fletor

constante, indicadas no item 5.4.1.

$N_{cr}$ (kN)	A	B
V1	128	155
V2	108	132
V3	97	100

**TAB. 5.4.2 Perfis tipo U enrijecido -  $N_{cr}$  para momentos de extremidade iguais em módulo e curvatura reversa**

**b) Carga vertical uniformemente distribuída - vigas com extremidades engastadas**

No modelo A, o procedimento para aplicação do carregamento é semelhante ao do item anterior, exceto pelo fato de que as forças normais  $f_z$  têm intensidade variável de elemento para elemento. No modelo B, as cargas uniformemente distribuídas são aplicadas no plano das almas, tanto à aba superior quanto à inferior, enquanto que os momentos de extremidade são dados por binários de forças concentradas  $F_z$  nos nós 28/29 e 30/31, dispensando-se o uso das barras rígidas.

As forças normais críticas nas extremidades das vigas estão indicadas na tab. 5.4.3. Pode-se observar que os valores obtidos são superiores aos correspondentes a momento fletor constante e que, para cargas aplicadas à aba inferior, o efeito estabilizante das mesmas eleva substancialmente a carga crítica. Note-se ainda que o modelo A conduz a forças normais críticas muito superiores às do modelo B para carga na aba superior, o que sugere que o mesmo não permite considerar, de forma adequada, o efeito geométrico do carregamento externo.

$N_{cr}$ (kN)	A	B <sub>sup</sub>	B <sub>inf</sub>
V1	165	96	336
V2	120	73	353
V3	156	96	209

**TAB. 5.4.3 Perfis tipo U enrijecido -  $N_{cr}$  para vigas engastadas nas extremidades e submetidas a forças verticais uniformemente distribuídas**

**6 OBSERVAÇÕES FINAIS**

## 6.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA TESE

O estudo do projeto modelo apresentado sucintamente no capítulo 1 apontou para a necessidade de uma análise acurada, para perfis de seção aberta e parede delgada, do fenômeno da instabilidade por distorção da seção transversal em seu próprio plano. Este tipo de instabilidade pode ocorrer nas barras que não possuem restrições aos deslocamentos transversais de uma ou mais abas submetidas à compressão em todo o comprimento ou em parte dele.

Os procedimentos de projeto recomendados para esta análise baseiam-se no cálculo de cargas críticas em regime elástico obtidas através de modelos que, frequentemente, assimilam as abas dos perfis a barras, enquanto que as almas são tratadas como cascas ou como molas equivalentes. No capítulo 3, apresenta-se uma revisão bibliográfica destes modelos, sendo descritos com mais detalhes apenas cinco deles, considerados representativos dos trabalhos que utilizam a teoria das barras. Alguns pesquisadores dedicaram-se à obtenção de cargas críticas através do método dos elementos finitos ou das faixas finitas, discretizando o perfil em elementos de casca. Esta análise é mais complexa que a que utiliza a teoria das barras, já que considera dois fenômenos, flambagem local das chapas componentes do perfil e flambagem por distorção, que podem ocorrer isolados ou simultaneamente, dependendo das características geométricas da barra. Este tipo de enfoque não faz parte do escopo desta tese.

Os principais trabalhos consultados encontram-se citados nas referências bibliográficas. Deve-se notar que todos eles dedicam-se à determinação de cargas críticas, e não a uma análise teórica do comportamento pós-crítico para instabilidade por distorção.



A instabilidade local das partes componentes do perfil é um fenômeno já largamente analisado, tendo-se constatado que a configuração pós-crítica é estável, e que portanto existe uma reserva de resistência pós-crítica e que o sistema é pouco sensível a imperfeições geométricas iniciais. No entanto, poucas são as informações disponíveis a respeito do comportamento pós-crítico para instabilidade por distorção.

Douty (1962) obteve experimentalmente cargas de colapso de vigas com perfil tipo U enrijecido superiores às cargas críticas preconizadas em seu modelo, descrito no item 3.5. Kwon, Hancock (1992) obtiveram, em ensaios de perfis tipo U enrijecido submetidos à compressão, cargas críticas próximas e cargas de colapso superiores às cargas críticas preconizadas pelo modelo de Lau, Hancock (1986), sendo que este último leva em conta a interação entre flambagem local e flambagem por distorção. Ambos os trabalhos interpretaram o fato como uma indicação de uma reserva pós-crítica para instabilidade por distorção.

Por outro lado, Thompson, Hunt (1973) mostraram, numa análise de barras em meio elástico, que a configuração pós-crítica das mesmas só é estável se o coeficiente de mola é muito baixo, o que é pouco frequente nos perfis usuais. Deste modo, supondo-se que os modelos que substituem as almas por molas equivalentes efetivamente representem o comportamento dos perfis, os valores de carga crítica resultantes podem não ser parâmetros adequados para o projeto, em particular se o comportamento for muito sensível a imperfeições geométricas iniciais. Neste caso, a carga máxima atingida pela estrutura (ponto limite) pode ser bastante inferior à carga crítica. Esta conclusão está em desacordo com a interpretação dos resultados experimentais apresentada por Douty e Kwon, Hancock.

Esta discordância pode ter origem em uma eventual inadequação dos modelos aproximados para o cálculo das

cargas críticas, em condições de vínculo de ensaio diferentes das condições ideais de cálculo, ou mesmo na escolha de características geométricas das barras ensaiadas que levaram a um efeito predominante de fenômenos locais. Ressalte-se ainda que a comparação entre cargas críticas teóricas e experimentais apresentada por Kwon, Hancock pode não ter significado, já que estas últimas, obtidas por extrapolação do gráfico carga-deslocamento da barra com imperfeições iniciais, podem indicar apenas uma mudança da configuração de equilíbrio do sistema, sem nenhuma correlação com a carga crítica do perfil isento de imperfeições geométricas.

Mostrou-se então necessário, em vista do acima exposto, proceder a uma investigação da trajetória de equilíbrio do perfil, em especial no que concerne ao valor da carga crítica, à estabilidade da configuração pós-crítica e ao efeito das imperfeições geométricas iniciais.

Este trabalho tratou deste tema no que diz respeito apenas à instabilidade por distorção, sem interação com fenômenos locais. Para tanto, o perfil foi discretizado em elementos de barra constituindo um pórtico espacial e analisado através de um programa baseado numa teoria não-linear geometricamente exata formulada por Pimenta, Yojo (1993). Foram tratados no capítulo 5 apenas alguns casos particulares mais frequentes de carregamento e de vinculação, visando expor o procedimento adotado e suas limitações.

O capítulo 4 apresentou uma descrição sucinta da teoria não-linear geometricamente exata proposta por Pimenta, Yojo. Deduziu-se também a expressão linearizada da segunda variação da energia potencial total desta teoria, com o objetivo de compará-la à expressão da energia potencial total obtida no capítulo 2 a partir da teoria de Vlasov. Esta comparação revelou divergências que conduziram o autor

a uma proposta de modificação da hipótese constitutiva adotada inicialmente por Pimenta, Yojo. Esta modificação foi incorporada ao programa original para o estudo da instabilidade por distorção aqui apresentado.

Indicam-se a seguir, de forma resumida, as principais conclusões obtidas neste trabalho.

## 6.2 CONCLUSÕES

### 6.2.1 Teoria exata e teorias aproximadas

Foram deduzidas neste trabalho, tanto a partir da teoria de Vlasov quanto a partir da teoria não-linear geometricamente exata formulada por Pimenta, Yojo, as expressões que permitem a determinação de um valor aproximado do carregamento crítico de barras prismáticas retas de seção transversal aberta e de parede delgada.

No emprego da teoria de Vlasov, obteve-se a expressão da variação da energia potencial total  $U$  entre a configuração de equilíbrio imediatamente anterior à flambagem e a imediatamente posterior a partir das equações diferenciais de equilíbrio, utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais. As equações de equilíbrio, no entanto, foram deduzidas por Vlasov a partir de considerações geométricas, substituindo-se o efeito geométrico dos esforços internos e dos esforços externos pelo de carregamentos fictícios.

As expressões da teoria exata foram deduzidas por Pimenta, Yojo para um eixo de referência qualquer, exigindo-se apenas que as coordenadas, as propriedades geométricas, os deslocamentos, as deformações generalizadas e os esforços solicitantes sejam referidos, coerentemente, aos eixos

escolhidos. Os valores correspondentes a outros eixos podem ser calculados através de expressões adequadas. As condições de contorno, no entanto, referem-se sempre ao eixo escolhido.

A adoção destas expressões apresenta grande vantagem, pois elimina a inconsistência das deduções de Vlasov decorrente da escolha de dois sistemas de referência diferentes. O primeiro, ligado ao centro de torção, é utilizado para a determinação das propriedades setoriais e dos esforços solicitantes a elas correspondentes, do momento de torção e do momento de inércia à torção. O segundo, ligado ao centro de gravidade, destina-se à determinação dos momentos fletores, dos momentos estáticos, dos momentos de inércia e do produto de inércia. Adicionalmente, os deslocamentos no plano da seção transversal, na teoria de Vlasov, são os do centro de torção, enquanto que os deslocamentos longitudinais são os do centro de gravidade excluindo-se o componente de empenamento.

Para uma análise de estabilidade de Euler, a variação da energia potencial total entre a configuração imediatamente anterior à flambagem e a imediatamente posterior é numericamente igual à metade da segunda variação da energia potencial total, como mostrado no item 3.2. Deste modo, a linearização da segunda variação da energia potencial total  $\delta^2 U$ , deduzida na teoria geometricamente exata, e a adoção do vínculo de Vlasov e do vínculo de Bernoulli-Euler no centro de torção permitiram uma comparação entre as duas teorias. Esta comparação levou às seguintes conclusões:

a) Os termos constitutivos de ambas as teorias são iguais.

b) O termo geométrico dos esforços externos decorrente da teoria exata apresenta um grande número de elementos não obtidos a partir da teoria de Vlasov. Estes elementos permitem o cálculo do efeito geométrico para qualquer tipo

de carregamento.

c) Os termos geométricos correspondentes à força normal são iguais apenas se o eixo  $z$  passa pelo centro de gravidade. Para a expressão final da segunda variação da energia potencial total (expressão 4.9.1), no entanto, adotou-se o eixo no centro de torção.

d) O momento de torção produz um efeito geométrico não obtido no capítulo 2.

e) Os termos geométricos correspondentes aos momentos fletores e às forças cortantes são muito diferentes nas duas expressões. Os termos decorrentes da teoria de Vlasov dependem da forma de integração por partes adotada, podendo-se obter, para condições de contorno diversas, dois resultados diferentes, cada um deles coerente com um determinado grupo de pesquisadores. Numa das formas de integração, coerente com as expressões de Timoshenko, Gere, (1961), nem sequer comparece a força cortante. Na outra, os termos das forças cortantes coincidem com os deduzidos da teoria exata apenas se, nesta, os deslocamentos longitudinais do centro de gravidade são desprezados e o centro de gravidade e o centro de torção coincidem. Em ambas as formas de integração, os termos dos momentos fletores diferem nas duas expressões.

Deve-se ressaltar ainda que, em alguns exemplos analisados de vigas com seção simétrica tipo I submetidas a carregamento simétrico em torno do centro do vão, os valores dos momentos críticos resultantes de todas estas expressões coincidiram e a não consideração do efeito da força cortante mostrou-se contra a segurança. O comportamento de vigas com seção assimétrica ou submetidas a carregamento assimétrico deverá ser objeto de pesquisas futuras.

f) O termo de Wagner não comparece na expressão resultante

da linearização da teoria exata. Esta omissão é muito importante, já que impede a análise da instabilidade por torção, e deu origem à necessidade de uma reavaliação das hipóteses adotadas na formulação da teoria de Pimenta, Yojo.

O termo de Wagner contém características geométricas da seção transversal, como ocorre com o termo constitutivo, mas associadas aos esforços solicitantes, sendo portanto correspondentes a um termo constitutivo não-linear. A modificação da matriz de rigidez constitutiva proposta neste trabalho, decorrente da associação do tensor das tensões de Kirchhoff com o tensor das deformações de Green, resultou não só na obtenção do termo de Wagner como também de um termo constitutivo não-linear associado ao momento de torção uniforme, não considerado por Vlasov.

#### 6.2.2 Instabilidade por distorção

Foram discutidos no capítulo 5 os modelos de pórtico espacial utilizados na investigação, pelo método dos elementos finitos, da instabilidade por distorção de perfis com seção tipo I e tipo U enrijecido. Foram apresentados também os resultados numéricos obtidos com a utilização do programa de análise não-linear de pórticos espaciais desenvolvido por Pimenta, Yojo e modificado de acordo com o que foi proposto no capítulo 4.

Embora não tenha sido feito um estudo paramétrico do problema, os casos analisados permitiram concluir que:

a) A adoção de modelos de discretização das vigas como pórticos espaciais resulta em cargas críticas mais elevadas que as obtidas com modelos simplificados de barra em meio elástico, muito comuns na literatura. Deste modo, resultados

experimentais superiores aos deduzidos por estes modelos podem indicar uma imprecisão nos valores de carga crítica, e não a existência de uma reserva pós-crítica.

b) As cargas críticas obtidas para perfis tipo I com o modelo não-linear de barra em meio elástico situam-se entre os valores calculados através dos modelos de Svensson e de Goltermann, Svenson. Grande parte dos perfis usuais apresenta configuração pós-crítica instável, sendo estável apenas para almas muito esbeltas ( $\beta^*$  baixo). Mesmo nestes casos, a reserva pós-crítica é desprezável. O sistema mostra-se pouco sensível a imperfeições geométricas iniciais, ou seja, às configurações instáveis correspondem pontos limites em que as cargas são pouco inferiores à carga crítica, enquanto que os deslocamentos crescem muito com pequenos decréscimos do carregamento.

A análise de perfis tipo I através de modelos de pórtico espacial indica, em todos os casos considerados, que a configuração pós-crítica é instável. As barras com imperfeições geométricas iniciais apresentam pontos limites em que as cargas são pouco inferiores à carga crítica para as imperfeições consideradas, mas a redução do carregamento no ramo descendente do diagrama é mais acentuada que nos modelos de barra em meio elástico.

Nos perfis tipo U enrijecido, os deslocamentos e as rotações da aba crescem desde o início do carregamento, mesmo para a barra isenta de imperfeições geométricas iniciais. O algoritmo utilizado no programa mostrou-se incapaz de acompanhar a resposta do sistema, com ou sem imperfeições iniciais, além do ponto crítico. Este fato é um indício de que se trata de uma bifurcação do equilíbrio instável. As barras com imperfeições apresentam pontos limites com cargas próximas da carga crítica, mas não é possível determinar a forma do ramo descendente do diagrama.

c) As cargas críticas para instabilidade por distorção são parâmetros importantes para projeto, já que a carga máxima para a barra com imperfeições iniciais é pouco inferior à crítica. A introdução da segurança, no entanto, deverá ser cuidadosamente avaliada na elaboração das normas que tratam deste assunto, pois os modelos de pórtico espacial indicam cargas críticas superiores às dos modelos simplificados mas, em contrapartida, uma redução do carregamento mais acentuada após atingido o ponto limite.

d) As tensões normais devidas à flexão da aba em seu próprio plano deverão ser futuramente investigadas, em particular para perfis tipo U enrijecido.

e) As relações entre os valores de carga crítica obtidos através dos modelos simplificados e através dos que utilizam o programa de análise não-linear variam com as características geométricas da barra, os carregamentos e os vínculos adotados. Este trabalho deverá ser portanto complementado com um estudo paramétrico do fenômeno, que levará em conta diversos tipos de vinculação e de distribuição de carregamentos e suas formas de aplicação. A existência de engastes nas extremidades das abas e de carregamentos que resultam em momento fletor variável ao longo do vão eleva significativamente o valor da carga crítica. Por outro lado, deficiências na vinculação à rotação da aba superior em torno do próprio eixo reduzem o valor da carga crítica. Deste modo, este estudo deverá ser acompanhado de uma análise experimental das reais condições de vínculo existentes nas estruturas.

f) Alguns critérios adotados, tais como o de aplicação dos esforços normais externos no centro de gravidade de uma seção efetiva arbitrariamente escolhida, deverão ser confirmados à luz de uma análise mais rigorosa, pois a forma de aplicação do carregamento influi significativamente, em vários casos, no valor da carga crítica.



g)O estudo aqui apresentado encontra-se no limite das possibilidades de uso de teorias de barras para análise da estabilidade já que, com frequência, o problema real envolve simultaneamente fenômenos locais, que só podem ser tratados através de teorias de cascas. É preciso portanto determinar as condições em que a instabilidade local a e instabilidade por distorção ocorrem de maneira isolada, podendo então ser analisadas através dos modelos aproximados, e aquelas em que há interação entre os dois fenômenos. Este caso se reveste de particular interesse no que diz respeito à trajetória de equilíbrio da barra, já que a instabilidade por distorção apresenta comportamento pós-crítico instável e a instabilidade local comportamento estável.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- AISI. Cold Formed Steel Design Manual. American Iron and Steel Institute, Washington, D C. 1986.
- APPARAO, T.V.S.R.; ERRERA, S.J.; FISHER, G.P. Columns Braced by Girts and a Diaphragm. Journal of the Structural Division, ASCE, v.95/ST5, p.965-990, New York. 1969.
- BLEICH, F. Buckling Strength of Metal Structures. Mc. Graw Hill, New York. 1952.
- BRADFORD, M.A. Inelastic Distortional Buckling of I-Beams. Computers and Structures, v.24/6, p.923-933, Great Britain. 1986.
- BRADFORD, M.A. Buckling Strength of Deformable Monosymmetric I-beams. Engineering Structures, v.10/7, p.167-173, Great Britain. 1988.
- BRADFORD, M.A. Buckling of Beams Supported on Seats. Structural Engineer, v.67, n.23/5, p.411-414, London. 1989a.
- BRADFORD, M.A. Buckling Strength of Partially Restrained I-Beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.115/5, p.1272-1278, New York. 1989b.
- BRADFORD, M.A. Stability of Monosymmetric Beam-Columns with Thin Webs. Journal of Constructional Steel Research, v.15/4, p.323-339, Great Britain. 1990a.
- BRADFORD, M.A. Design of Beams with Partial End Restraint. Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, v.89/6, p.163-181, London. 1990b.
- BRADFORD, M.A. Lateral Buckling of Steel I-Section Members. Journal of Constructional Steel Research, v.23/1-3, p.97-116, Great Britain. 1992.
- BRADFORD, M.A.; JOHNSON, R.P. Inelastic Buckling of Composite Bridge Girders Near Internal Supports. Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, v.86, p.143-159, London. 1987.
- BRADFORD, M.A.; TRAHAIR, N.S. Distortional Buckling of I-Beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.107/ST2, p.355-370, New York. 1981.
- BRADFORD, M.A.; TRAHAIR, N.S. Lateral Stability of Beams on Seats. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.109/9,

- p.2212-2215, New York. 1983.
- BRADFORD, M.A.; WATERS, S.W. Distortional Instability of Fabricated Monosymmetric I-Beams. Computers and Structures, v.29/4, p.715-724, Great Britain. 1988.
- BRADFORD, M.A.; ZHI GAO. Distortional Buckling Solutions for Continuous Composite Beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.118/1, p.73-89, New York. 1992.
- CHEN, W.F.; ATSUTA, T. Theory of Beam-Columns. Mc Graw-Hill, v.2, Space Behavior and Design. 1977.
- CHIN, C.K.; AL-BERMANI, F.G.A.; KITIPORNCHAI, S. Stability of Thin-Walled Members Having Arbitrary Flange Shape and Flexible Web. Engineering Structures, v.14/2, p.121-132, Great Britain. 1992.
- DESMOND, T.P.; PEKOZ, T.; WINTER, G. Edge Stiffeners for Thin Walled Members. Journal of the Structural Division, ASCE, v.107/ST2, p.329-353, New York. 1981.
- DOUTY, R.T. A Design Approach to the Strength of Laterally Unbraced Compression Flanges. Cornell University, Engineering Experiment Station, Bulletin 37, Ithaca, New York. 1962.
- ERRERA, S.J.; PINCUS, G.; FISHER, G.P. Columns and Beams Braced by Diaphragms. Journal of the Structural Division, ASCE, v.93/ST1, p.295-318, New York. 1967.
- FRUCHTENGARTEN, J. Sobre o Comportamento Pós-Crítico de Chapas Metálicas. Dissertação (Mestrado), 175p., Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1979.
- GOLTERMANN, P.; SVENSSON, S.E. Lateral Distortional Buckling, Predicting Elastic Critical Stress. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.114/7, p.1606-1625, New York. 1988.
- HANCOCK, G.J. Local, Distortional and Lateral Buckling of I beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.104/ST11, p.1787-1798, New York. 1978.
- HANCOCK, G.J. Distortional Buckling of Steel Storage Rack Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.111/12, p.2770-2783, New York. 1985.
- HANCOCK, G.J.; BRADFORD, M.A.; TRAHAIR, N.S. Web

**Distortion and Flexural-Torsional Buckling.** Journal of the Structural Division, ASCE, v.106/ST7, p.1557-1571, New York. 1980.

**HAUSSLER, R.W.** Strength of Elastically Stabilized Beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.90/ST3, p.219-264, New York. 1964.

**JEFFERS, E.** U-Frame Restraint Against Instability of Steel Beams in Bridges. The Structural Engineer, v.68, n.5/5, London. 1990.

**JOHNSON, R.P.; BRADFORD, M.A.** Distortional Lateral Buckling of Unstiffened Composite Bridge Girders. Proc. Conf. Instability and Plastic Collapse of Steel Structures, Granada, p.569-580. 1983.

**JOHNSON, R.P.; FAN, C.K.R.** Distortional Lateral Buckling of Continuous Composite Beams. Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, v.90/3, p.131-161, London. 1991.

**KWON, Y.B.; HANCOCK, G.J.** Tests of Cold-Formed Channels with Local and Distortional Buckling. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.118/7, p.1786-1803, New York. 1992.

**LA BOUBE, R.A.** Uplift Capacity of Z-Purlins. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.117/4, p.1159-1166, New York. 1991.

**LAU, S.C.W.; HANCOCK, G.J.** Distortional Buckling Formulas for Channel Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.113/5, p.1063-1078, New York. 1987.

**LIN PI, Y.; TRAHAIR, N.S.; RAJASEKARAN, S.** Energy Equation for Beam Lateral Buckling. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.118/6, p.1462-1479, New York. 1992.

**PEKÖZ, T.; SOROUSHIAN, P.** Behavior of C and Z Purlins under Wind Uplift. Sixth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, p.409-429, St.Louis, Missouri, USA. 1982.

**PIMENTA, P.M.** Análise Não-Linear de Estruturas I. Notas de Aula, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. 1991.

**PIMENTA, P.M.** Fundamentos da Teoria das Estruturas. Notas

de aula, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. 1993.

PIMENTA, P.M.; YOJO, T. Geometrically Exact Analysis of Spatial Frames, With Consideration of Torsion Warping. XIV CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Anais, São Paulo. 1993.

PIMENTA, P.M.; FRUCHTENGARTEN, J. Carga Crítica de Barras com Consideração de Empenamento por Torção - Uma Formulação Consistente. XV CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Anais, p.1486-1495, Belo Horizonte. 1994.

POLYZOIS, D.; CHARNVARNICHBORIKARN, P. Web-Flange Interaction in Cold-Formed Steel Z-Section Columns. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.119/9, p.2607-2628, New York. 1993.

SEAH, L.K.; KHONG, P.W. Lateral Torsional Buckling of Channel Beams. Journal of Constructional Steel Research, v.17, p.265-282, Great Britain. 1990.

SILVA, V.P. Flambagem Lateral de Vigas de Aço em Regime Elástico Linear. Dissertação (Mestrado), 155p., Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1992.

SVENSSON, S.E. Lateral Buckling of Beams Analysed as Elastically Supported Columns Subject to a Varying Axial Force. Journal of Constructional Steel Research, v.5, p.179-193, Great Britain. 1985.

THOMPSON, J.M.T.; HUNT, G.W. A General Theory of Elastic Stability. John Wiley & Sons, Great Britain. 1973.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. Theory of Elastic Stability. 2ed., Mc. Graw-Hill, Tokyo. 1961.

TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. Theory of Elasticity. 3ed., Mc. Graw Hill, Tokyo. 1971.

VAN LANGENDONK, T.H.M. Resistência dos Materiais - Deformações II. Curso de Mecânica das Estruturas, Editora Edgard Blucher Ltda.

VLASOV, V.Z. Thin Walled Elastic Beams. 2ed., National Science Foundation, Washington D C and the Department of

Commerce, USA, by the Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem. 1961.

WANG, C.M.; CHIN, C.K.; KITIPORNCHAI, S. Parametric Study on Distortional Buckling of Monosymmetric Beam-Columns. Journal of Constructional Steel Research, v.18, p.89-110, Great Britain. 1991.

WESTON, G.; NETHERCOT, D.A.; CRISFIELD, M.A. Lateral Buckling in Continuous Composite Bridge Girders. The Structural Engineer, v.69, n.5/5, London. 1991.

WILLIAMS, F.W.; JEMAH, A.K. Buckling Curves for Elastically Supported Columns with Varying Axial Force, to Predict Lateral Buckling of Beams. Journal of Constructional Steel Research, v.7, p.133-147, Great Britain. 1987.

WILLIAMS, F.W.; JEMAH, A.K.; LAM, D.H. Distortional Buckling Curves for Composite Beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.119/7, p.2134-2149, New York. 1993.

WINTER, G. Lateral Bracing of Columns and Beams. Transactions, Journal of the Structural Division, ASCE, v.125, pg.807-821, New York. 1960.

YOJO, T. Análise não-linear geometricamente exata de pórticos espaciais (com aplicação a torres de transmissão de alta tensão). Tese (Doutorado), 129p, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1993.