FERNANDO YUDI SAKAMOTO

# MODELAGEM DINÂMICA DA ZONA DE CONTATO ENTRE *RISER* E FUNDO DO MAR SOB AÇÃO DE DESLOCAMENTO E TRAÇÃO IMPOSTOS

São Paulo

**2013**

FERNANDO YUDI SAKAMOTO

# MODELAGEM DINÂMICA DA ZONA DE CONTATO ENTRE *RISER* E FUNDO DO MAR SOB AÇÃO DE DESLOCAMENTO E TRAÇÃO IMPOSTOS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr.
Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

São Paulo
**2013**

**Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

**São Paulo, de junho de 2012.**

**Assinatura do autor** _____

**Assinatura do orientador** _____

## FICHA CATALOGRÁFICA


**Sakamoto, Fernando Yudi**
**Modelagem dinâmica da zona de contato entre riser e fundo do mar sob ação de deslocamento e tração impostos / F.Y. Sakamoto. -- versão corr. -- São Paulo, 2013.**
**140 p.**

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.**

**1.Dinâmica das estruturas 2.Riser 3.Ressonância paramétrica 4.Modelo de ordem reduzida I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.**

*Aos meus pais,*

*Choji e Eloiza*

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, pelo seu precioso tempo despendido em uma enriquecedora orientação. Também o agradeço pelas ideias brilhantes, motivação, inspiração e cuidadosa revisão deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Choji e Eloiza, pela compreensão e apoio, não somente nestes últimos desafiadores anos, mas por toda uma vida.

Agradeço ao Prof. Celso Pesce e ao Prof. Mario Senatore pelos valiosos comentários e melhorias propostas no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao amigo André Mansur, pelas “trocas de ideias” e material fornecido para a execução desta dissertação.

Agradeço aos colegas Fabio Selleio Prado e Guilherme Monticelli, pelo esforço conjunto despendido na tentativa de comparar e compreender os diferentes modelos elaborados.

Agradeço à Fernanda Takafuji e ao Eduardo Malta pelo suporte nos processamentos e obtenção de resultados do Orcaflex.

Agradeço à Promon Engenharia e aos colegas de trabalho, pelo incentivo à conclusão deste mestrado e pelas horas cedidas para o seu desenvolvimento.

*“O que é estético (simétrico) é estático,*
*podendo ser dinamicamente trágico”.*

# Resumo

*Risers* são tubos que transportam fluidos do fundo do mar até as plataformas flutuantes e vice-versa. Diversas configurações e materiais são utilizados, porém apenas os *steel catenary risers* (*SCR*) são estudados neste trabalho. Os *risers* são estruturas extremamente esbeltas e, por isso, grande parte de seu trecho suspenso tem comportamento de cabo. Apenas em duas regiões a rigidez flexional é relevante: no *hang-off* (topo) e na *touch-down zone* (*TDZ*), sendo esta última a região mais complexa para análise devido ao contato unilateral com o solo. Em função dos diversos carregamentos dinâmicos a que o *riser* é submetido, grandes variações na curvatura ocorrem na *TDZ*, além de impacto e atrito com o solo, que podem reduzir a vida útil da estrutura ou até mesmo por em risco a sua integridade.

Por estas razões, este trabalho visa à elaboração de uma metodologia analítica para a construção de um modelo de ordem reduzida (MOR) capaz de analisar o comportamento dinâmico não linear da *TDZ* de um *SCR*. Como na *TDZ* a rigidez flexional predomina sobre a rigidez geométrica, o *riser* é modelado como uma viga semi-infinita, tendo uma parte suspensa e outra apoiada sobre solo hipoteticamente elástico com contato unilateral. Na extremidade suspensa são impostos deslocamentos verticais e trações dinâmicas que fazem com que a posição do *touch-down point* (*TDP*) também varie com o tempo. Trata-se, portanto, de um problema com condições de contorno móveis. A metodologia adotada para a resolução deste problema foi transformá-lo em um problema de condições de contorno fixas por meio de uma transformação de variáveis. Contudo, “paga-se um preço” por tal transformação, e fortes não linearidades surgem na equação diferencial de movimento, tornando-a extremamente complexa para uma resolução analítica direta. Para o problema de flexão simples, consegue-se obter os modos de vibração não lineares através do método das múltiplas escalas. De posse destes modos, utiliza-se o método de Galerkin não linear para projetar a equação completa em um modo escolhido, transformando o modelo contínuo em um modelo de ordem reduzida com apenas um grau de liberdade, cuja coordenada generalizada modal é o deslocamento horizontal do *TDP*.

Obtida a equação do MOR, nota-se que existem coeficientes que variam com o tempo, como na clássica equação de Mathieu, indicando a possibilidade de ocorrer ressonância paramétrica. Neste tipo de ressonância, entre outras possibilidades, pode ocorrer que a frequência de excitação seja o dobro da frequência natural – trata-se da ressonância paramétrica principal. A equação do MOR é integrada numericamente e suas respostas são comparadas com as respostas obtidas por modelos de elementos finitos elaborados em *softwares* comerciais, como o Abaqus e o Orcaflex.

Por fim, discutem-se as potencialidades e limitações do MOR, sendo uma grande vantagem a possibilidade de processar diversos casos facilmente, variando os parâmetros que influem nas respostas. Com este mapeamento das respostas, é possível estimar as amplitudes dos estados estacionários pós-críticos.

# Abstract

Risers are pipes that convey fluids from the seabed up to the floating platforms and vice-versa. Many configurations and materials are used, but only steel catenary risers (SCR) are studied in this work. Risers are extremely slender structures, and for this reason, most of the suspended part has cable behavior. Only in two regions the bending stiffness is important: at the hang-off and at the touch-down zone (TDZ), which is the most complex region for analysis because of the unilateral contact with the seabed. Due to several dynamic loads that the riser is subjected to, great curvature variations occur at the TDZ, apart from impacts and friction with the soil, which can reduce the life time of the structure or even jeopardize its integrity.

For these reasons, this work aims at the development of an analytical methodology for the construction of a reduced-order model (ROM) able to analyze the nonlinear dynamic behavior of the TDZ of a SCR. As at the TDZ the bending stiffness prevails over the geometric stiffness, the riser is modeled as a semi-infinite beam, having a suspended part and another one resting on the elastic soil with unilateral contact. At the end of the suspended part, vertical displacements and dynamic tensions are imposed, that cause the TDP's position to vary with time. It is, therefore, a problem with moving boundary conditions. The methodology adopted for solving this problem was to tranform it into a problem with fixed boundary conditions via a variable transformation. However, a "price is paid" for such a transformation, and strong nonlinearities appear in the differential equation of motion, making it extremely complex to solve analytically. For the simple bending problem, nonlinear vibration modes are obtained via the method of multiple scales. In possession of these modes, the nonlinear Galerkin method is used to project the complete equation into a chosen mode, transforming the continuum model into a reduced-order model (ROM) with only one degree of freedom whose modal generalized coordinate is the horizontal displacement of the TDP.

After obtaining the ROM, it is noticed that there are coefficients that vary with time, as in the classic Mathieu equation, indicating the possibility of parametric resonance. In this kind of resonance, among other possibilities, the excitation

frequency may be twice the natural frequency – it is the so-called principal parametric resonance. The ROM's equation is integrated numerically and the responses are compared to those given by finite-element models studied with the help of commercial softwares, like Abaqus and Orcaflex.

Finally, the potentialities and limitations of the ROM are discussed. One of the advantages is the possibility of processing several cases easily, changing the parameters that affect the responses. With this response mapping, it is possible to estimate the post-critical steady-state amplitudes that take place.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| $A_i$ | coeficientes para definição de $R_i$ e $S_i$ |
| $a$ | taxa de decaimento da tração |
| $a_i$ | coeficientes do modelo de ordem reduzida |
| $\hat{a}_i$ | coeficientes do modelo de ordem reduzida, divididos por $a_0$ (massa modal equivalente) |
| $B_i$ | coeficientes para definição de $R_i$ e $S_i$ |
| $b_i$ | coeficientes do modelo de ordem reduzida |
| $\hat{b}_i$ | coeficientes do modelo de ordem reduzida, divididos por $a_0$ (massa modal equivalente) |
| $c(\tau)$ | abscissa axial adimensional que define a posição do ponto de contato ou *touch down point* (*TDP*) |
| $c_0$ | posição adimensional do ponto de contato ou *touch down point* (*TDP*) da solução de equilíbrio estático |
| $c_1$ | percurso adimensional do ponto de contato ou *touch down point* (*TDP*) em torno da solução de equilíbrio estático |
| $C_i$ | coeficientes para definição da função modal |
| ${D_k}^p$ | operador para p-ésima derivada k-ésima temporal |
| $E$ | módulo de Young do material |
| $H$ | função de Heaviside |
| $I$ | momento de inércia da seção transversal |
| $K_{ij}$ | coeficientes para correlação entre $R_3$ e $p_1$ (analogamente para $S_3$ e $q_1$) |
| $L$ | comprimento do *riser* em contato com o solo |
| $L_k$ | comprimento em que a tração no cabo, no trecho apoiado, decai a valores suficientemente baixos |
| $L_z$ | comprimento adimensional do *riser* em contato com o solo |
| $p$ | peso da viga ou peso submerso do *riser* |
| $p_1$ | condição inicial do problema |
| $q_1$ | condição inicial do problema |
| $r_1$ | condição inicial do problema |
| $R_i$ | coeficientes utilizados na solução $r_1$ |
| $s_1$ | condição inicial do problema |

| | |
|---|---|
| $S_i$ | coeficientes utilizados na solução $s_1$ |
| $t$ | tempo |
| $T_0$ | tração estática na extremidade suspensa |
| $T_1$ | tração dinâmica na extremidade suspensa |
| $T_{TDP}$ | tração estática no *TDP* |
| $u$ | deslocamento vertical adimensional de um ponto após transformação de coordenadas |
| $\hat{u}$ | deslocamento vertical adimensional para solução estática ou quase-estática |
| $\hat{u}_0$ | deslocamento vertical adimensional estático na extremidade |
| $\hat{u}_1$ | deslocamento vertical adimensional dinâmico na extremidade |
| $U$ | deslocamento horizontal adimensional do ponto de contato |
| $w$ | deslocamento vertical de um ponto do *riser* |
| $w_0$ | deslocamento vertical estático na extremidade |
| $w_1$ | deslocamento vertical dinâmico na extremidade |
| $w^{IV}$ | quarta derivada espacial do deslocamento vertical do *riser* |
| $\ddot{w}$ | segunda derivada temporal do deslocamento vertical do *riser* |
| $x$ | abscissa axial dimensional, deslocamento em relação à extremidade suspensa |
| $x_C$ | abscissa axial que define a posição do ponto de contato ou *touch down point* (*TDP*) |
| $y$ | abscissa axial adimensional em relação à extremidade suspensa |
| $z$ | abscissa axial adimensional em relação à extremidade suspensa, para condição de contorno fixas |
| $\alpha$ | constante de adimensionalização da abscissa axial |
| $\alpha_d$ | coeficiente associado ao modo de vibração do trecho apoiado sobre o solo |
| $\alpha_e$ | coeficiente associado ao modo de vibração do trecho suspenso |
| $\beta$ | constante adimensionalização do tempo |
| $\beta^*$ | coeficiente para função modal |
| $\gamma$ | tração adimensional |
| $\gamma_0$ | tração adimensional estática |

| | |
|---|---|
| $\Gamma_0$ | tração adimensional estática na extremidade |
| $\Gamma_1$ | tração adimensional dinâmica na extremidade |
| $\delta$ | deslocamento vertical adimensional referente à solução dinâmica da tração |
| ${\Delta_k}^p$ | operador para p-ésima derivada k-ésima espacial |
| $\varepsilon$ | parâmetro adimensional usado no método das múltiplas escalas |
| $\zeta$ | função de $z_0$ que caracteriza o modo de vibração |
| $\eta$ | relação entre $\alpha_d$ e $\alpha_e$, utilizado para determinação das freqüências naturais |
| $\theta$ | taxa adimensional de decaimento da tração |
| $\lambda$ | comprimento flexional do tubo |
| $\mu$ | coeficiente de rigidez elástica do solo por unidade de comprimento |
| $\nu$ | deslocamento vertical adimensional de um ponto do elemento |
| $\nu^{IV}$ | quarta derivada espacial do deslocamento vertical adimensional de um ponto |
| $\ddot{\nu}$ | segunda derivada temporal do deslocamento vertical adimensional de um ponto |
| $\xi$ | taxa de amortecimento viscoso linear equivalente |
| $\rho$ | massa linear do elemento |
| $\tau$ | tempo adimensional |
| $\varphi$ | ângulo de fase entre tração dinâmica e deslocamento dinâmico na extremidade suspensa |
| $\Phi$ | coeficiente de rigidez elástica do solo por unidade de área |
| $\omega$ | freqüência de vibração do modo, na formulação adimensional com flexão simples |
| $\omega_0$ | freqüência de vibração do modo, na formulação adimensional com efeito da tração |
| $\Omega$ | freqüência de oscilação adimensional da tração e deslocamento vertical dinâmicos |
| $\Omega_\mathrm{d}$ | freqüência de oscilação da tração e deslocamento vertical dinâmicos |

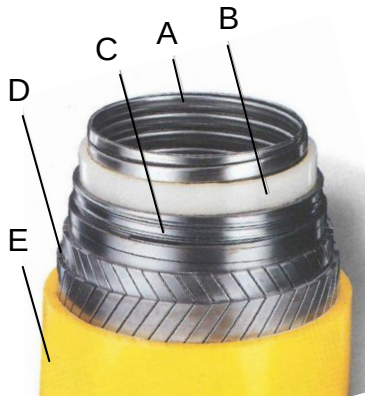
# Sumário

# 1. Introdução

## 1.1. Aspectos Gerais

*Risers* são tubos que transportam fluidos do fundo do mar até a plataforma e vice versa. É denominada *riser* a parte suspensa e a parte nas proximidades da zona onde o tubo toca o fundo do mar ou *touch-down zone* (*TDZ*). O trecho em que o tubo fica deitado sobre o leito do oceano é denominado *flowline*. O *riser* pode ser rígido ou flexível. No primeiro caso, ele é um tubo de aço de alta resistência, com tensão de escoamento maior ou igual a 448MPa, conforme especificado pela norma API 5L[1]. Revestimentos podem ser instalados para proteção térmica, mecânica e contra corrosão. No segundo caso, ele é formado por diversas camadas com diferentes funções e materiais componentes, conforme exemplificado na Figura 1. A vantagem do *riser* flexível é sua maior tolerância aos movimentos da plataforma e maior simplicidade de instalação. Em contrapartida, ele tem maior custo de fabricação e maior complexidade no comportamento mecânico interno das diversas camadas, que dificultam o uso de grandes diâmetros.


*Riser* rígido




*Riser* flexível

| Camadas do *riser* flexível | Função |
|---|---|
| A – Carcaça intertravada | Resistir à pressão externa e cargas locais internas e externas |
| B – Camada plástica | Estanqueidade |
| C – Camada de pressão (zeta) | Resistir a esforços radiais devido à pressão interna e externa e cargas locais externas |
| D – Armaduras de tração | Rigidez a torção e a carregamentos axiais |
| E – Camada plástica externa | Protege a linha e assegura estanqueidade |

**Figura 1: *Riser* rígido e *riser* flexível. (Fonte: extraído e adaptado de Labeco – Coppe – UFRJ)**

Quando a plataforma é de perfuração, o *riser* é denominado *riser* de perfuração, tendo uma configuração vertical até chegar ao *BOP* (*Blowout preventer*)[1]. Ele leva em seu interior o tubo de perfuração que transporta o fluido até a broca. Este fluido facilita a perfuração e retorna à plataforma juntamente com os detritos da perfuração através do vão entre as paredes do *riser* e do tubo de perfuração. Quando a plataforma é de produção, o *riser* faz parte de um sistema submarino de produção, e é denominado *riser* de produção quando recebe o petróleo e gás dos poços, e denominado *riser* de injeção quando leva água ou gás aos poços. A água é injetada por um poço diferente do poço de produção e sua função é ocupar o lugar do petróleo no poço, evitando a diminuição de pressão no poço e, consequentemente, impedindo o desprendimento de gases dissolvidos no petróleo. Já o gás é injetado pelo mesmo poço de produção e sua função é gerar bolhas no petróleo, diminuindo sua densidade para facilitar a subida até a plataforma, numa operação conhecida como *gaslift*.

As plataformas de produção podem ser de diferentes tipos. A escolha do tipo depende da profundidade da lâmina d'água, como ilustra a Figura 2.

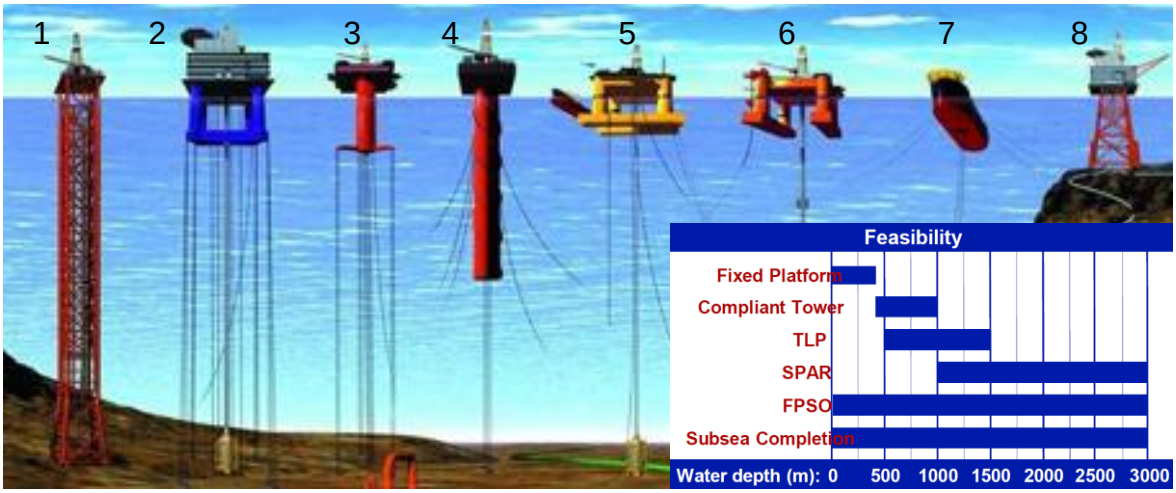



**Figura 2: Tipos de plataformas de produção: Torre (1), *TLP's* (2,3), *SPAR* (4), Semi-submersíveis (5,6), *FPSO* (7) e Fixa (8). (Fonte: www.oceanexplorer.noaa.gov)**

Para profundidades de até 400m é possível utilizar plataformas fixas. As torres complacentes ou *compliant towers* também são fixas, mas devido a sua maior

[1] Blowout preventer é um equipamento mecânico situado na cabeça do poço e composto por diversas válvulas que controlam as pressões nos poços e se fecham para prevenir acidentes.

esbeltez permite maiores movimentos no topo, com maiores períodos, evitando ressonâncias causadas pelas ondas. Para águas profundas e ultra-profundas[2], são viáveis as plataformas de tendões verticais atirantados ou *tension leg platforms* (*TLP's*), as plataformas flutuantes na forma cilíndrica e vertical ou *SPAR's*, as plataformas semi-submersíveis e as unidades flutuantes de produção baseadas em navios-tanque ou *floating production storage offloading* (*FPSO*). No Brasil, as mais utilizadas são as semi-submersíveis e as *FPSO's*.

Os demais elementos que compõem o sistema submarino de produção são: as "árvores de natal", os *manifolds* e os cabos umbilicais e de ancoragem, representados na Figura 3. A "árvore de natal" é instalada no local de perfuração do poço e é composta por válvulas que controlam o fluxo de óleo e gás no poço. O *manifold* também é instalado no fundo do mar e faz a ligação dos cabos e tubos entre a plataforma e os diversos poços perfurados. Sua função é diminuir a quantidade de *risers* que chegam à plataforma, que pode chegar próximo a uma centena, bem como diminuir o custo através da redução do comprimento total de tubulação do projeto.

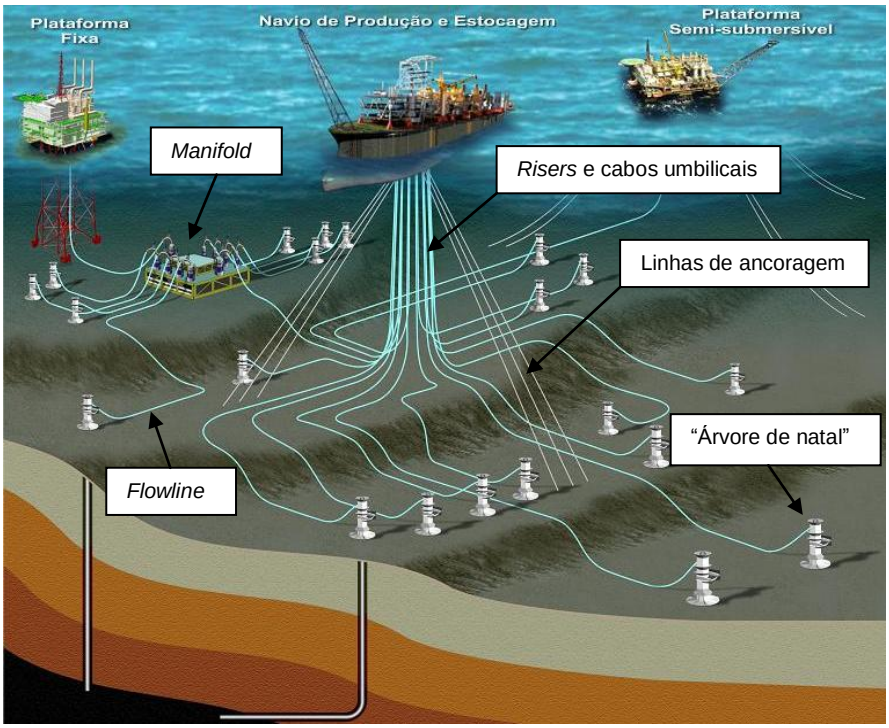



**Figura 3: Elementos do sistema submarino de produção de petróleo e gás. (Fonte: Petrobrás)**

[2] O conceito de águas profundas e ultra-profundas na engenharia de petróleo *offshore* varia de tempos em tempos. Atualmente, considera-se água profunda uma lâmina d'água superior a 1.000m e água ultra-profunda uma lâmina d'água superior a 2.000m.

O cabo umbilical tem camadas externas semelhantes ao do *riser* flexível, porém o seu interior é formado por mangueiras de controle hidráulico e injeção de produtos químicos, cabos de potência e controle elétricos, e fibras óticas. Já as linhas de ancoragem fixam as unidades flutuantes no fundo do mar, porém permitem que elas se desloquem horizontalmente em até 10% da profundidade da lâmina d'água. Para diminuir custos, o *riser* deve ser o mais curto possível, desde que permita grandes excursões das plataformas, definidas pelas posições *near,* quando a plataforma está mais próxima da âncora e *far*, quando está mais afastada.

**Figura 4: Cabos umbilicais. (Fonte: Prysmian)**

Além de suas diferentes composições e funções, os *risers* também podem ser classificados quanto à sua configuração de instalação, sendo a mais comum a catenária livre, devido ao menor custo e maior facilidade de projeto, fabricação, instalação e manutenção. Para *risers* rígidos em catenária ou *steel catenary risers* (*SCR*), o ângulo de lançamento é de aproximadamente 70° com a horizontal, podendo ter uma variação de ±5° nas posições *near* e *far*. Para *risers* flexíveis, o ângulo de lançamento pode chegar próximo a 90°. Em ultra-profundidades, os *risers* em catenária podem ser inviabilizados devido à tração excessiva no topo ou *hang-off*, flambagem por compressão dinâmica na *TDZ* e vida útil curta em função da fadiga no topo e na *TDZ*. Para abordar estes problemas, adotam-se as configurações em *lazy-wave* com flutuadores intermediários e em *lazy-S* com boia presa ao fundo do mar. Variações destas configurações são o *steep-wave* e o *steep-S*, em que o *riser* toca o solo quase na vertical, e são utilizados quando há restrição de espaço. Outras configurações utilizadas quando há restrição de espaço são: o *top-tension riser*, que desce vertical e é tracionado no topo para evitar flambagem

por compressão, e o *pliant-wave*, na qual um tendão fixa o tubo próximo ao solo e evita choques entre tubos e cabos, já que o tendão limita o movimento lateral. Existe ainda o *riser* híbrido, onde a parte superior é flexível, até chegar a uma boia instalada no topo de um *riser* rígido vertical (*riser tower*).

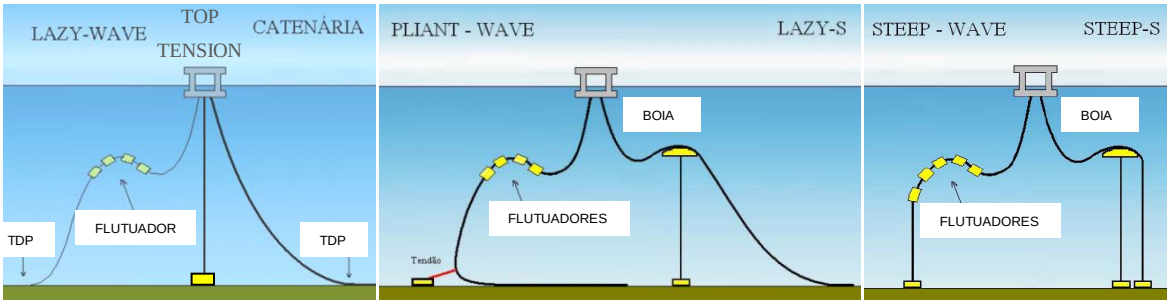



**Figura 5: Configurações de *risers***

Devido à sua elevada esbeltez, os *risers* têm comportamento de cabo em grande parte do trecho suspenso, mesmo os *risers* ditos rígidos. A elevada esbeltez é dada pelo fato de os *risers* típicos terem diâmetros da ordem de 4” a 16”, sendo que as lâminas d’água podem ultrapassar 2.000m. Porém, a rigidez flexional não pode ser desprezada em três regiões do *riser*: no topo, na *TDZ* e nos trechos intermediários com flutuadores e boias, se existirem. A rigidez flexional também tem sua importância na dinâmica, quando os modos de vibração de pequeno comprimento de onda são excitados.

Diversas não linearidades geométricas estão presentes no comportamento estrutural do *riser*, tornando o problema extremamente difícil de ser resolvido. O próprio comportamento de cabo é não linear, já que esta tração depende da configuração de equilíbrio e a configuração de equilíbrio depende da tração. Outras não linearidades presentes no problema são: atrito e contato unilateral da estrutura com o solo, força de sucção do solo, formação de trincheiras, e interação hidrodinâmica entre estrutura e água do mar, expressa nas forças de sustentação e de amortecimento fluido-dinâmicos.

Além das não linearidades, outro fator que contribui para a complexidade do problema são os carregamentos que atuam no *riser*. O peso submerso e as

correntezas são determinantes para a configuração de equilíbrio estático, sendo que as correntezas podem atuar em diferentes direções, níveis e intensidades. Um conceito importante é o de tração efetiva, já que é ela que determinará a configuração de equilíbrio. A tração efetiva considera, além das forças gravitacionais, aquelas resultantes da ação do campo hidrostático de pressão. Pela lei de Arquimedes, é possível determinar apenas a resultante global atuando no corpo imerso. Para determinar os esforços internos, utiliza-se o princípio da superposição, conforme ilustra a Figura 6. A figura (a) representa um trecho do *riser* onde estão consideradas as pressões externas da água, seu peso no ar W, e as trações de equilíbrio. A figura (b) representa a água a ser deslocada, com seu peso $W_a$ e pressões externas. Subtraindo as forças, chega-se à figura (c), onde atuam o peso submerso $W_s$ e as trações efetivas.

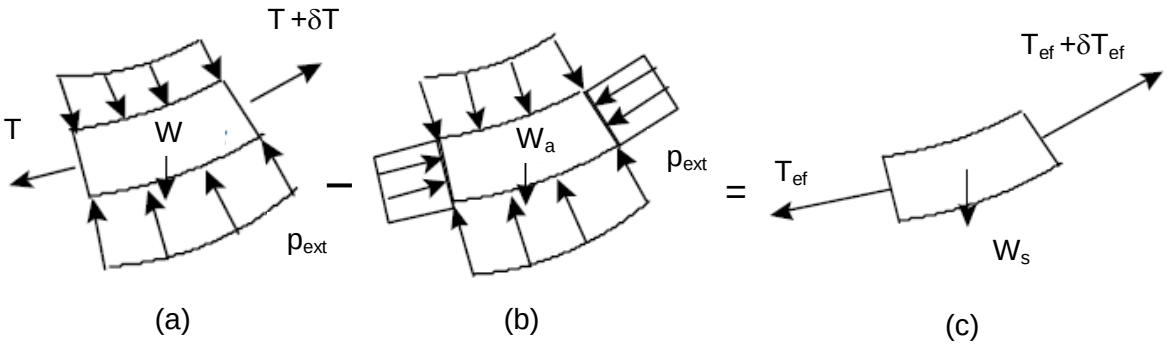



**Figura 6: Diagramas de sistemas equivalentes de força (Fonte: extraído e adaptado de Pesce [2])**

Dentre as ações dinâmicas, citam-se os movimentos da unidade flutuante, conforme Figura 7, as ondas, o escoamento interno de fluidos e as vibrações induzidas por vórtice ou *VIV's*. Estas últimas ocorrem sob ação da correnteza, quando há desprendimento de vórtices alternados de cada lado do tubo, gerando forças transversais ao escoamento. Quando a frequência de desprendimento de vórtices entra em ressonância com a frequência de algum modo de vibração do tubo, os deslocamentos transversais são amplificados, podendo chegar a amplitudes de até duas vezes o diâmetro do tubo.

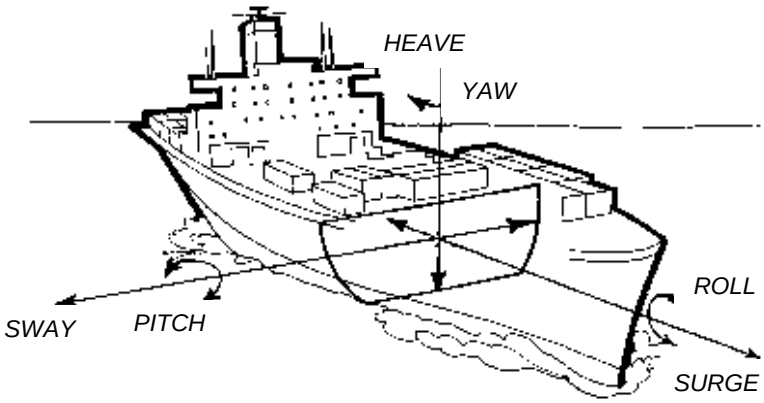



**Figura 7: Os 6 graus de liberdade de uma unidade flutuante (Fonte: *Association of Marine Underwriters of San Francisco*, www.amusf.com)**

Cada carregamento dinâmico atua em faixas específicas de períodos. Movimentos de *heave*, *surge*, *sway*, *pitch* e *roll*, na faixa de excitação que caracteriza as ondas do mar, ditos de primeira ordem, têm períodos de alguns segundos, sendo de aproximadamente 2 segundos para *TLP's*, 10 segundos para *FPSO's* e 20 segundos para plataformas semi-submersíveis. Já os movimentos lentos de *surge*, *sway* e *yaw*, ditos de segunda ordem, têm períodos de 2 a 3 minutos. As ondas de grande amplitude e comprimento de onda apresentam períodos da ordem de 10 a 15 segundos enquanto que as ondas de pequena amplitude e comprimento de onda apresentam períodos de 3 a 10 segundos. As vibrações induzidas por vórtices têm períodos típicos abaixo de 20 segundos. Para cilindros circulares infinitos, a frequência de emissão de vórtices $fs$ pode ser estimada por meio da relação abaixo, onde $U$ é a velocidade da correnteza, $D$ é o diâmetro externo do *riser* e $St$ é o número de Strouhal e tem valor aproximado de 0,2.

$$fs = St\frac{U}{D} \tag{1}$$

Com o intuito de melhorar o desempenho estrutural do *riser*, diversos dispositivos podem ser instalados em pontos críticos. O enrijecedor de flexão é instalado no topo ou no fundo do *riser*, onde os momentos podem ser altos. Ele faz com que a estrutura ganhe rigidez gradualmente até a conexão engastada. Outra

forma de lidar com este problema é através de uma junta flexível, rotulando a ligação. Já o compensador de *heave* faz com que o topo do *riser* fique deslocável em relação à unidade flutuante, diminuindo as variações de tração. Ao longo do *riser*, podem ser instalados dispositivos anti-vórtices helicoidais (*strakes*), bem como enrijecedores locais para evitar propagação de flambagem.

Neste cenário complexo de não linearidades e carregamentos, um interessante e perigoso fenômeno dinâmico pode ocorrer: a ressonância paramétrica. Diferentemente da ressonância clássica, que ocorre quando o termo forçante, dado por uma não homogeneidade na equação de movimento, tem frequência igual ou próxima a uma frequência natural, a ressonância paramétrica ocorre quando o termo forçante figura na forma de coeficientes da equação de movimento que variam com o tempo, como por exemplo, a rigidez. Neste caso, diversas relações racionais de frequências podem dar origem à ressonância paramétrica, como 2:1, em que a frequência de excitação é o dobro da frequência natural. Em sistemas submetidos à excitação paramétrica, as ressonâncias podem ocorrer mesmo para equações diferenciais lineares e homogêneas. A excitação paramétrica pode ser melhor entendida por meio da clássica equação de Mathieu:

$$\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)\, x = 0 \tag{2}$$

Trata-se de uma equação diferencial linear, homogênea e não amortecida, onde $\epsilon$ decorre da amplitude de excitação e $\delta$ depende da relação entre a frequência natural $\omega$ e a frequência de excitação $\Omega$, definida conforme a equação (3). A equação de Mathieu pode ser analisada analiticamente por meio da Teoria de Floquet ou pelo Método das Múltiplas Escalas (MME). Ambas as soluções são apresentadas em Soares [3]. Nelas, verifica-se que, para determinados pares $(\delta, \epsilon)$, a solução cresce de forma ilimitada com o tempo, e para outros, a solução é limitada. O diagrama de Strutt apresentado na Figura 8, indica as regiões de soluções ilimitadas (áreas hachuradas) conhecidas como regiões de ressonância paramétrica. Nota-se que existem infinitas regiões de ressonância paramétrica emergindo de $\delta = \mathrm{n}^2$, onde $\mathrm{n}$ é um número inteiro, e que essas regiões vão se alargando com o aumento de $\epsilon$.

$$\delta = \left(\frac{2\omega}{\Omega}\right)^2 \tag{3}$$

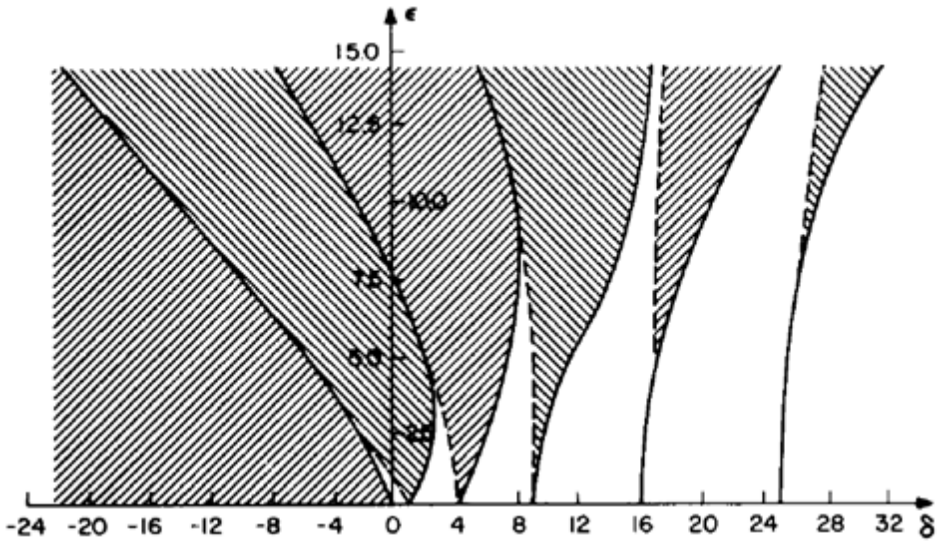



**Figura 8: Diagrama de Strutt (Fonte: Nayfeh e Mook [4]).**

No problema de *risers*, a variação da rigidez com o tempo é dada pela variação da tração, que está ligada à rigidez geométrica do sistema.

## 1.2. Objetivos

Tradicionalmente, o problema dinâmico da *touch-down zone* (*TDZ*) é abordado por modelos computacionais através do método dos elementos finitos ou pelo método da camada limite, onde o *riser* é modelado como cabo e em seguida faz-se a correção da curvatura no trecho em que a rigidez flexional é significante. Como nas proximidades da *TDZ* o *riser* tem comportamento típico de viga devido à predominância da rigidez flexional sobre a rigidez geométrica, o presente trabalho busca desenvolver uma metodologia analítica de um modelo dinâmico não linear da *TDZ* de um *steel catenary riser (SCR)*, tratando-o estruturalmente como viga semi-infinita. No modelo são considerados o contato unilateral da viga com o solo de reologia supostamente elástica, impondo-se deslocamento vertical e variação da tração na extremidade suspensa.

A análise dinâmica é feita através de um modelo de ordem reduzida (MOR) de um grau de liberdade, cuja variável modal é o deslocamento horizontal do *touch-down point* (*TDP)*. A equação do MOR é integrada numericamente para a obtenção das respostas no domínio do tempo, que são comparadas com as respostas obtidas por softwares de elementos finitos, como o Abaqus e o Orcaflex. O presente trabalho segue uma metodologia similar à desenvolvida por Mansur [5], podendo ser considerado uma evolução daquele trabalho, com implementação de melhorias no modelo, como a inclusão do deslocamento imposto na extremidade suspensa.

Embora o modelo matemático se preste para análises genéricas, neste trabalho serão estudados particularmente os complexos casos de ressonância paramétrica para diversas relações de frequências, mas principalmente para aquela em que a frequência de excitação é o dobro da frequência natural da estrutura, pois ela define a região principal de ressonância paramétrica do diagrama de Strutt. Na Figura 8, nota-se que esta primeira região é a mais perigosa, pois é a que tem maior área de instabilidade para baixas amplitudes $\epsilon$.

Análises paramétricas são realizadas com o intuito de analisar a sensibilidade do modelo aos diversos parâmetros que governam suas respostas, como rigidez, amortecimento, amplitude das trações, frequência de excitação e condições iniciais.

Pretende-se ainda, recuperar o comportamento geral do modelo contínuo, como as variações de tensões, esforços solicitantes e deslocamentos em torno da configuração estática. E por fim, discutem-se as limitações e potencialidades do MOR.

## 1.3. Justificativa

Apesar da crescente oferta de energias alternativas, como hídrica, biomassa, eólica e solar, o petróleo ainda será por algum tempo a principal fonte de energia mundial. Estima-se que haja reservas para suprir a população mundial por mais 50 anos. Segundo a ANP (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis) [6], até 2011, as reservas mundiais provadas chegavam a 1,65 trilhão de barris e o consumo mundial era de 32 bilhões de barris/ano. Obviamente, o prazo real irá depender de novas descobertas de reservas e do aumento do consumo. Porém, é interessante constatar que, nos últimos anos, o aumento das reservas tem superado o aumento do consumo. No Brasil, as reservas provadas estão estimadas em 15 bilhões de barris, mas o país vem ganhando importância no cenário mundial devido às recentes descobertas de petróleo e gás nas camadas pré-sal nas Bacias de Campos e Santos.

Dada à importância do petróleo no cenário energético nacional e mundial, e sabendo que não se trata de uma fonte renovável de energia, existe a necessidade de desenvolver e melhorar tecnologias que possibilitem descobertas de novas reservas, bem como a extração segura dos poços, evitando acidentes ambientais de grande magnitude, como aqueles ocorridos em 2010 no Golfo do México e em 2011 na Bacia de Campos. No Brasil, as recentes descobertas de poços encontram-se em águas profundas e ultra-profundas, onde todo o sistema de extração *offshore* está exposto a condições ambientais extremas, como fortes correntezas, ondas e ventos, altas pressões e baixas temperaturas.

Devido a sua elevada esbeltez, o *riser* é um dos elementos mais suscetíveis a estas condições ambientais extremas, tendo a *TDZ* como sua região mais crítica, em função dos esforços dinâmicos que podem reduzir a vida útil da estrutura por fadiga e por atrito com o solo, gerar compressão dinâmica e provocar impactos contra o solo. O estudo de um *SCR* é importante também, pois sempre existe uma busca pela redução de custos, e o *SCR* é uma excelente opção neste sentido, pela sua maior simplicidade de projeto, fabricação e manutenção.

Já a abordagem analítica ou híbrida adotada no estudo do *riser* pode ser justificada pela complexidade de seu sistema estrutural, dadas as não linearidades já explanadas anteriormente. Em dinâmica não linear, as soluções podem ser múltiplas e resultados inesperados ou até mesmo contra intuitivos podem ocorrer. Em determinados modelos, pequenas alterações nas condições iniciais ou nos parâmetros de controle podem levar a soluções completamente distintas. Em modelos numéricos, há ainda a possibilidade de diferentes respostas serem encontradas em função da sensibilidade numérica. Por estas razões, um modelo de baixa hierarquia torna-se importante. Ele fornecerá dados qualitativos e até mesmo quantitativos dos fenômenos não lineares que servirão de base numa comparação com as respostas do modelo de alta hierarquia. Sem o suporte dos modelos de ordem reduzida, as simulações dos modelos de alta hierarquia podem facilmente perder de vista os cenários mais críticos, diante da impossibilidade de se fazer uma completa varredura das condições iniciais e análises paramétricas com milhares de graus de liberdade. Sob este ponto de vista, os modelos de ordem reduzida e os modelos de alta hierarquia devem ser tratados como complementares, embora muitas vezes sejam colocados equivocadamente como modelos concorrentes. Menciona-se ainda, o fascínio e a beleza de se obter uma solução analítica ou semi-analítica.

## 1.4. Revisão Bibliográfica

Como já mencionado anteriormente, este estudo teve como base os trabalhos de Mansur [5] e Mazzilli e Mansur [7], que desenvolveram uma metodologia analítica para análise dinâmica não linear da *TDZ* de um *SCR* com contato unilateral em apoio elástico e sob variação da tração na extremidade suspensa. Em Monticelli [8] também foi utilizada metodologia similar, com a consideração do contato unilateral inelástico composto por elementos viscoelásticos de Kelvin-Voight, além de introduzir no modelo de ordem reduzida o termo de amortecimento de Morison decorrente da interação fluido-estrutura.

Para possibilitar a elaboração dos trabalhos citados acima, uma série de técnicas e estudos científicos prévios realizados nas áreas de dinâmica não linear de estruturas e mecânica de *risers* foram fundamentais.

No campo da dinâmica não linear, destacam-se os trabalhos de Soares [9] e Mazzilli e Soares [10] que desenvolveram procedimentos para a obtenção de modos não lineares em sistemas discretizados pelo método dos elementos finitos por meio do método das variedades invariantes. O trabalho baseou-se na precisa conceituação de modo não linear proposta por Shaw e Pierre [11] [12] [13], que a partir da observação de que uma solução modal linear está contida em uma superfície bidimensional plana no espaço de fase, sugeriram que, em sistemas não lineares, a trajetória de uma solução modal deva estar contida em uma superfície bidimensional (variedade) não necessariamente plana no espaço de fase. Como a solução não escapa da superfície modal, diz-se que essa superfície é uma variedade invariante do sistema dinâmico. Desta forma, não só os deslocamentos, mas também as velocidades são importantes na determinação dos modos de vibração.

Outro procedimento para obtenção dos modos não lineares são os métodos das múltiplas escalas (MME) apresentados em Nayfeh e Mook [4]. Eles permitem a resolução analítica de equações diferenciais não lineares por meio de respostas em expansão assintótica e múltiplas escalas de tempo, lidadas como variáveis independentes. Com a introdução de um parâmetro de perturbação $0<\varepsilon<<1$, que

opera como se fosse um fator de escala, consegue-se “empurrar” o efeito das não linearidades para uma escala de tempo posterior (mais lenta), resolvendo-se assim, uma equação linear. A resposta desta equação é substituída nos termos não lineares da equação da escala de tempo subsequente, tornando-se termos forçantes de uma equação também linear. Diversos trabalhos [14] [15] [16] utilizaram esta metodologia para encontrar os modos normais não lineares para diferentes sistemas estruturais. No procedimento, primeiramente obtém-se a resposta temporal pelo MME e em seguida encontra-se em que variedade está a resposta.

Nos casos em que há ressonância interna (acoplamento modal), o método das variedades invariantes original não se aplica. Para solucionar esta questão, Boivin, Pierre e Shaw [17] [18] estabeleceram o conceito de multi-modos, que são movimentos decorrentes de vibração livre que se desenvolvem em variedades invariantes de dimensão 2M, onde M é o número de modos lineares acoplados não linearmente, contendo uma solução estacionária e tangente aos M auto-planos que caracterizam os modos lineares que se acoplam. Em [19] [20] [21] são apresentados casos em que se aplicou o MME para a obtenção dos multi-modos para diferentes sistemas estruturais.

Os modos não lineares normais e multi-modos são importantes para a obtenção dos modelos de ordem reduzida, pois são utilizados como função de projeção nos métodos de redução de graus de liberdade. Steindl e Troger [22] compararam os métodos de projeção de Galerkin linear e não linear para redução de graus de liberdade. A técnica de Galerkin não linear foi utilizada em diversos estudos, projetando sobre campos não lineares de deslocamentos [23], sobre modos não lineares normais [24] e sobre modos não lineares normais e multi-modos [25] [26].

Excitações paramétricas em sistemas com um grau de liberdade foram estudadas em Soares [3]. Um embasamento teórico sobre o assunto também pode ser conferido em Cartmell [27]. Chatjigeorgiou e Mavrakos [28] estudaram as ressonâncias internas originadas pela excitação paramétrica cuja frequência era o dobro da frequência natural do primeiro modo de vibração de um *riser* vertical. Uma

solução fechada foi obtida através do MME, onde apenas os dois primeiros modos não lineares foram considerados.

No campo da dinâmica não linear com aplicação em *TDZ's* de *risers* destaca-se o trabalho de Demeio e Lenci [29] em que foram estudadas oscilações forçadas não lineares de cabos e vigas com contato unilateral sobre apoio elástico. Trata-se de um problema com condições de contorno móveis devido ao contato unilateral. Por meio de uma mudança de variáveis, o problema é transformado em um caso de condições de contorno fixas, gerando equações fortemente não lineares que foram solucionadas por métodos de expansão perturbativa. Dois regimes foram identificados, um abaixo e um acima de uma certa frequência crítica de excitação. No supercrítico, a energia é perdida por radiação no infinito, enquanto que no subcrítico este fenômeno não ocorre e várias ressonâncias são observadas.

Em Mazzilli e Lenci [30] foram obtidos os modos de vibração normais de uma viga esbelta sobre apoio elástico com contato unilateral. Uma transformação de variáveis semelhante à de Demeio e Lenci [29] foi utilizada, convertendo o problema em um de condições de contorno fixas. A equação foi resolvida pelo método das múltiplas escalas, que foi utilizado de forma inovadora também com escalas do espaço. As frequências dos modos de vibração apresentaram excelente concordância com as frequências ressonantes do trabalho [29].

Em Mazzilli e Lenci [31], o modelo de viga em apoio elástico unilateral foi analisado pelo MME, verificando-se a inexistência de modos de vibração para $\omega > 1$ (regime supercrítico), onde $\omega$ é a frequência natural adimensional, comprovando a inexistência de ressonâncias no regime supercrítico do modelo forçado discutido em [29]. Em Demeio e Lenci [32], estudaram-se soluções analíticas de segunda ordem da dinâmica de um cabo em apoio elástico unilateral. Os resultados também comprovaram a existência dos regimes subcrítico e supercrítico.

No trabalho numérico desenvolvido por Lancioni e Lenci [33], a viga em apoio elástico unilateral foi modelada com a possibilidade de apresentar múltiplos *TDP's*. Esta abordagem é impraticável no âmbito analítico. Concluiu-se que, para pequenos deslocamentos impostos na extremidade, o modelo com um único *TDP* apresenta boa concordância com o modelo de múltiplos *TDP's*.

Em Mazzilli *et al*. [34] foi encontrada uma solução analítica pelo MME para o modelo de ordem reduzida de uma viga em apoio elástico unilateral e com tração variável na extremidade suspensa. As amplitudes de vibração apresentaram boa concordância com os valores obtidos por integração numérica.

Uma outra abordagem analítica para a *TDZ* é apresentada em Pesce, Aranha e Martins [35] em que se usa a técnica da camada limite para corrigir a curvatura devido à rigidez flexional na *TDZ*. Em Pesce e Martins [36] utilizou-se a mesma técnica, agora com a inclusão do apoio elástico. O tratamento é, porém, quase-estático.

Na área da dinâmica global de *risers* menciona-se o trabalho de Pesce *et al*. [37] em que se obteve uma solução analítica dos modos de vibração de *risers* em catenária através do método WKB e das funções de Bessel. A mesma técnica foi utilizada em Chatjigeorgiou [38], com a inclusão da rigidez flexional. A dinâmica tridimensional de *risers* foi estudada em Takafuji [39] e em Chatjigeorgiou [40]. Em Pesce [2] tem-se um estudo abrangente de *risers* em catenária e em Prado [41] compararam-se modelos elaborados no Abaqus, um *software* de análise estrutural generalista, com modelos elaborados no Orcaflex, um *software* especialista de sistemas *offshore*. Para mecânica de *risers* em geral, pode-se consultar Sparks [42], e para uma abordagem mais prática e num contexto mais amplo, Bai [43].

## 2. Formulação do Problema e Hipóteses

A Figura 9 ilustra os aspectos globais de um *SCR*, indicando três regiões distintas quanto ao comportamento estrutural: a parte suspensa superior, do *hang-off* até um certo ponto "O", tem regime dominante de cabo; do ponto "O" até o *TDP*, predomina-se o regime de viga; e do *TDP* até a âncora, tem-se uma viga sobre apoio elástico com contato unilateral.

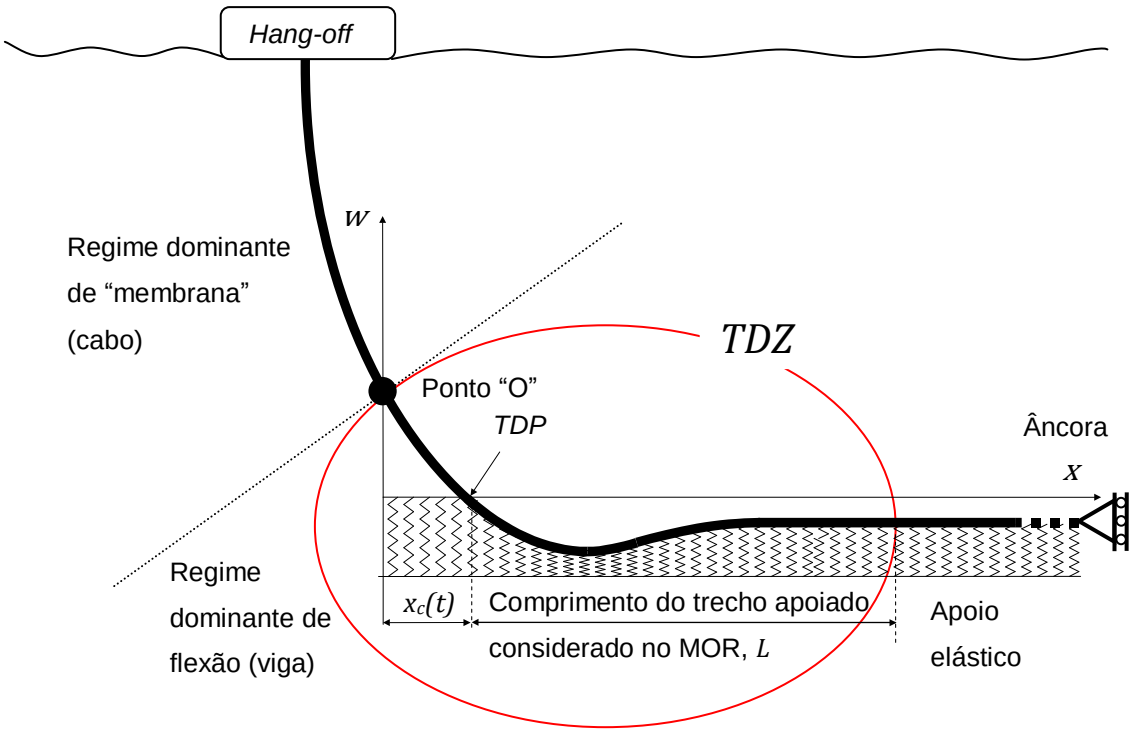



**Figura 9: Representação esquemática dos aspectos globais do problema**

A localização do ponto "O" a partir do *TDP* é definida em função do parâmetro $\lambda$, conhecido como comprimento flexional, que relaciona o produto de rigidez $EI$ do tubo e a tração efetiva estática no *TDP*, conforme equação (4). Sabe-se que a rigidez flexional tem relevância no trecho suspenso até uma distância de $4\lambda$ a partir do *TDP*. Não existe dedução analítica para a comprovação deste fato. A conclusão foi baseada em observações de respostas de análises numéricas. Um estudo sobre a influência da rigidez flexional na *TDZ* pode ser encontrado em Pesce [2]. Portanto, adota-se para o modelo local da *TDZ*, um trecho suspenso de forma que sua projeção horizontal tenha comprimento de $4\lambda$ na configuração estática.

$$\lambda = \sqrt{\frac{EI}{T_{TDP}}} \tag{4}$$

A Figura 10 ilustra o problema da *TDZ* de um *SCR.* O *riser* é modelado como uma viga esbelta semi-infinita apoiada parcialmente sobre meio elástico com contato unilateral e plano, sob flexão composta com tração variável e deslocamento imposto na extremidade suspensa (ponto “O”), que provocam a variação da posição do *TDP,* $x_c(t)$, ao longo do tempo. Trata-se, portanto, de um problema de condições de contorno móveis. A Figura 9 indica um limite da *TDZ* também para o trecho apoiado, aparentando divergência com a adoção da viga semi-infinita. A explicação é que a teoria de propagação de ondas é de uma viga semi-infinita, porém, em determinado momento da resolução do problema, faz-se o uso de integrações numéricas, havendo a necessidade de determinar um domínio de integração. Em momento oportuno, os critérios para a determinação deste comprimento serão explanados.

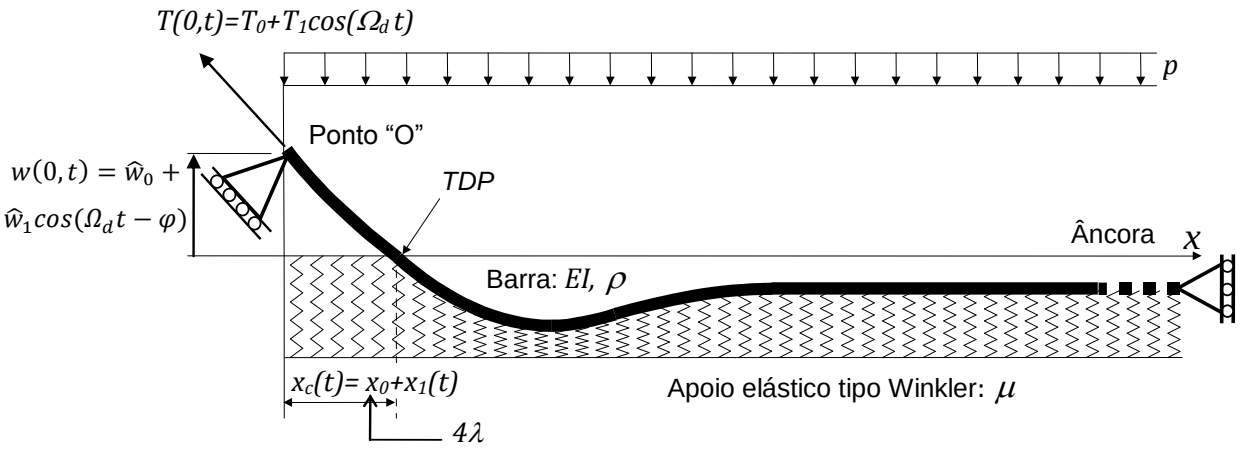



**Figura 10: Viga esbelta semi-infinita com contato unilateral em apoio elástico sob flexão composta com tração e deslocamento impostos**

As demais hipóteses são:

- Modelo bidimensional; portanto, poderão ser considerados como carregamentos os movimentos da plataforma que não tiram o *riser* do plano, além de *VIV's* causados por correnteza incidindo perpendicularmente ao plano do modelo. Neste caso, admite-se que o deslocamento normal causado pela correnteza possa ser analisado de forma desacoplada do deslocamento transversal causado pelo *VIV*;
- Meio elástico linear tipo Winkler, com coeficiente de rigidez $\mu$, e trabalhando apenas à compressão; portanto, a relação elástica linear é válida para $w < 0$ no trecho apoiado. Quando $w > 0$, a viga se destaca do apoio, sendo esta uma fonte de não linearidade;
- Peso submerso do *riser,* $p$, considerado uniformemente distribuído;
- Linearidade física;
- Massa por unidade de comprimento, $\rho$, incluindo massa adicional[3] e massa do fluido interno;
- Considerada apenas a dinâmica do movimento vertical, ainda que o movimento horizontal ao longo do *riser* possa ser determinado uma vez que o deslocamento do *TDP* é conhecido;
- Análise global do problema estudada à parte, através de *softwares* comerciais de elementos finitos, como o Abaqus e o Orcaflex[4], que fornecem a tração estática no *TDP*, bem como condições de "carregamento" $T(0,t) = T_0 + T_1 cos\,(\Omega_\mathrm{d} t)$ e deslocamento vertical $w(0,t) = \widehat{w}_0 + \widehat{w}_1\, cos(\Omega_\mathrm{d} t - \varphi)$ impostos no ponto "O", onde $\Omega_\mathrm{d}$ corresponde à frequência de oscilação da tração e do deslocamento, e $\varphi$ é o ângulo de fase entre os dois.

---

[3] Massa adicional é uma massa virtual adicionada ao sistema para simular o efeito inercial da água deslocada pelo corpo submerso em aceleração e desaceleração. A massa adicional foi suposta constante e independente da proximidade do solo.

[4] O Abaqus é um *software* generalista de análise estrutural e o Orcaflex é um *software* especialista para análises de sistemas *offshore*.

Para a determinação da equação diferencial de movimento foi utilizada a teoria de viga de Bernoulli-Euler, considerando ainda a variação da tração ao longo da viga. Para a consideração do contato unilateral, faz-se uso da função de *Heaviside* $H(x(t))$:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right)+H\mu w+p=0 \tag{5}$$

$$H(x(t))=0,\quad 0<x<x_c(t),\qquad H(x(t))=1,\quad x>x_c(t)$$

Pode-se, em (5), explicitar o termo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right)=T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{6}$$

As condições de contorno para o problema são:

- Tração dinâmica “imposta” no ponto “O”: $T(0,t)=T_0+T_1 cos(\Omega_\mathrm{d} t)$
- Deslocamento vertical “imposto” no ponto “O”: $w(0,t)=\widehat{w}_0+\widehat{w}_1 cos(\Omega_\mathrm{d} t-\varphi)$
- Curvatura nula (momento nulo) no ponto “O”: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=0$
- Deslocamento vertical nulo no *TDP* (à esquerda/à direita): $w_e(x_c(t),t)=w_d(x_c(t),t)=0$
- Compatibilidade de rotação à esquerda e à direita do *TDP*: $\frac{\partial w_e}{\partial x}(x_c(t),t)=\frac{\partial w_d}{\partial x}(x_c(t),t)$
- Compatibilidade de curvatura (momento) à esquerda e à direita do *TDP*: $\frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2}(x_c(t),t)=\frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2}(x_c(t),t)$
- Compatibilidade de cortante à esquerda e à direita do *TDP*: $\frac{\partial^3 w_e}{\partial x^3}(x_c(t),t)=\frac{\partial^3 w_d}{\partial x^3}(x_c(t),t)$

# 3. Metodologia

O problema de condições de contorno móveis obtido no item 2 mostra-se de difícil resolução. A solução encontrada foi transformá-lo em um problema de condições de contorno fixas mediante uma simples, porém, engenhosa mudança de variáveis proposta por Demeio e Lenci [29]. Porém, “paga-se um preço” por tal transformação, e a Equação (5), que é relativamente simples, transforma-se em uma com fortes não linearidades de até 5ª ordem advindas das transformações dos operadores diferenciais temporais e espaciais. As transformações são encontradas no item 4.1 e no anexo 8.1.

Novamente, o problema mostra-se de difícil resolução analítica direta, inclusive para a condição estática. Conseguiu-se obter, analiticamente, apenas a solução estática para o problema de flexão simples (item 4.3) e os modos de vibração não lineares em primeira ordem através do MME, também para o problema de flexão simples (item 4.5 e anexo 8.2). Para a solução estática, é possível aplicar fatores de correção nas funções (configuração de equilíbrio, rotação e curvatura) aproximando-as das curvas obtidas por modelos de elementos finitos, que consideram a rigidez geométrica, dada pela variação da tração, apropriadamente. Como a variação da tração não foi considerada implicitamente na solução, pois isto exigiria que a equação de equilíbrio dinâmico longitudinal tivesse sido incluída no modelo matemático, adotam-se funções de decaimento exponencial para a tração (item 4.4), que são incluídas de forma “*ad hoc*” na equação de movimento.

De posse da solução estática e dos modos de vibração, assumiu-se a resposta dinâmica na forma de uma perturbação assintótica em torno da configuração estática. A perturbação dinâmica é tratada pelo método de Galerkin não linear, onde a equação completa, com todos os seus termos, é projetada em um modo de vibração escolhido, transformando o modelo contínuo em um modelo de ordem reduzida (MOR) com apenas um grau de liberdade cuja coordenada generalizada modal é o deslocamento horizontal do *TDP* (item 4.6).

Estabelecida a metodologia de resolução através da projeção de Galerkin, o procedimento subsequente mostrou-se mais uma vez de difícil enfrentamento, uma vez que tanto a variação da tração quanto o deslocamento imposto contribuem para o deslocamento do *TDP* de forma acoplada. A alternativa adotada foi desacoplá-los, considerando uma solução onde a perturbação dinâmica dada pela variação da tração se desenvolva em torno de uma configuração "quase-estática" gerada pelo deslocamento imposto. O termo configuração "quase-estática" está sendo usado aqui no sentido da solução estática, porém com a ordenada do ponto "O" variando temporalmente, isto é $w(0) = w(0,t)$ e, consequentemente, a abscissa do *TDP* será dada por $x_0 = x_0(t)$.

Sabendo que a coordenada generalizada modal do MOR é o deslocamento horizontal do *TDP*, é conveniente correlacionar o deslocamento imposto no ponto "O" e o do *TDP*, pois em um determinado momento da resolução, utiliza-se o recurso da integração numérica, e fazer a transformação a cada passo de integração, tornaria o processamento lento, já que a relação é fortemente não linear. Detalhes desta "transferência" do deslocamento imposto para o *TDP* são apresentados no item 4.3.

No procedimento a ser seguido, a dependência das funções com a abscissa é eliminada integrando numericamente tais funções que dependem da coordenada espacial $z$, em seu domínio. Estas funções são: a configuração de equilíbrio "quase-estática" e suas derivadas (rotação e curvatura), a função modal e suas derivadas, e as funções de decaimento da tração. O domínio de integração inicia-se no ponto "O" e termina em um ponto no trecho apoiado onde as funções assumem valores quase nulos. Os critérios para a determinação do comprimento do trecho apoiado são apresentados no item 4.3. Considerando que agora a posição do *TDP* é variável na configuração "quase-estática", as respostas para o trecho apoiado acabam acoplando tempo e espaço dentro de funções seno, cosseno e exponencial, como pode ser visto no item 4.3. A solução encontrada foi expandi-los em série de potências. Para conseguir uma boa aproximação, os termos foram expandidos até altas ordens, gerando grande quantidade de termos super-harmônicos $cos^n(\Omega_\mathrm{d} t - \varphi)$ e de integrais a serem resolvidas, tornando a formulação "pesada" e o processamento lento. Uma análise de ordem de grandeza dos termos super-

harmônicos mostrou que eles pouco afetam as respostas e, portanto, apenas os termos de primeira ordem foram mantidos.

Um importante passo no processo de redução de grau de liberdade é impor igualdade do trabalho virtual de forças do modelo contínuo e do MOR. Assim, toda a energia do sistema será concentrada no modo de vibração escolhido. Como neste trabalho buscar-se-ão casos de ressonância paramétrica, principalmente aquela em que a frequência de excitação é o dobro da frequência natural, o modo em que será projetada a equação completa é justamente aquele que estará nas condições de ressonância paramétrica e a hipótese de concentração da energia mecânica neste modo será fisicamente plausível.

Na equação de movimento original (5), o amortecimento viscoso equivalente não foi considerado. Ele será incluído de forma "*ad hoc*" no MOR.

Obtido o MOR, na forma de um oscilador não linear forçado que depende apenas da variável temporal, nota-se que existem coeficientes que variam com o tempo, assim como na equação de Mathieu, e portanto, ressonâncias paramétricas são esperadas. Para a obtenção dos históricos de deslocamento, velocidade e consequentemente o mapa de fase, integra-se a equação numericamente no domínio do tempo. Mediante as transformações de variáveis, é possível fazer o caminho inverso e recuperar os esforços ao longo da estrutura na escala original.

Para o desenvolvimento da rotina analítica e integrações numéricas utilizou-se o *software* Mathematica[5]. Os dados de entrada para o modelo são:

- Propriedades do *riser*: diâmetro externo, espessura da parede, módulo de elasticidade, peso próprio submerso por unidade de comprimento, e massa por unidade de comprimento (incluindo massa adicional e massa do fluido interno);
- Rigidez do solo por unidade de área, e coeficiente de atrito entre solo e *riser*;
- Fatores de correção das funções “quase-estáticas”;
- Taxa de amortecimento equivalente (estrutural + fluido + solo);
- Tração estática no ponto “O” e no *TDP*;
- Amplitude e frequência da tração dinâmica no ponto “O”;
- Amplitude, frequência e diferença de fase em relação à tração, do deslocamento vertical do ponto “O”;
- Frequência natural adimensional do modo utilizado como função de projeção;
- Condições iniciais: deslocamento e velocidade no *TDP*;
- Número de passos e tempo inicial e final para integração numérica da equação do MOR;

[5] Mathematica é um programa de computação desenvolvido pela Wolfram que trabalha com manipulação simbólica e numérica e diversas funções pré-programadas.

# 4. Desenvolvimento Analítico

## 4.1. Transformação de variáveis para condições de contorno fixas

Primeiramente, escreve-se a equação de movimento (5) na forma adimensional, introduzindo as seguintes definições:

$$y = \alpha x, \quad \nu = \frac{\mu}{p} w, \quad \tau = \beta t, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\mu}{4EI}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad e \quad \gamma = \frac{T}{2\sqrt{\mu EI}} \tag{7}$$

A equação adimensional que descreve o problema fica:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^4 \nu}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial \nu}{\partial y} + H\nu + 1 = 0 \tag{8}$$

$$H(y(\tau)) = 0, \quad 0 < y < c(\tau)$$
$$H\big(y(\tau)\big) = 1, \quad y > c(\tau)$$
$$c(\tau) = \alpha x_c(t)$$

Neste contexto, a posição do *TDP* fica definida como sendo aquela em que $\nu[c(\tau), \tau] = 0$.

Para transformar o problema acima, de condições de contorno móveis, em um de condições de contorno fixas, faz-se uso da seguinte transformação de variáveis:

$$z = \frac{y}{c(\tau)} - 1 \;\Rightarrow y = (z+1)c(\tau) \tag{9}$$

Para $y = 0 \;\Rightarrow z = -1$ e para $y = c(\tau) \;\Rightarrow z = 0$, e portanto, agora as condições de contorno se referem a pontos fixos em $z$.

Define-se também uma nova função para o deslocamento vertical:

$$u(z,\tau) = v(y,\tau) \tag{10}$$

A Figura 11 traz a representação esquemática da *TDZ* com as novas variáveis:

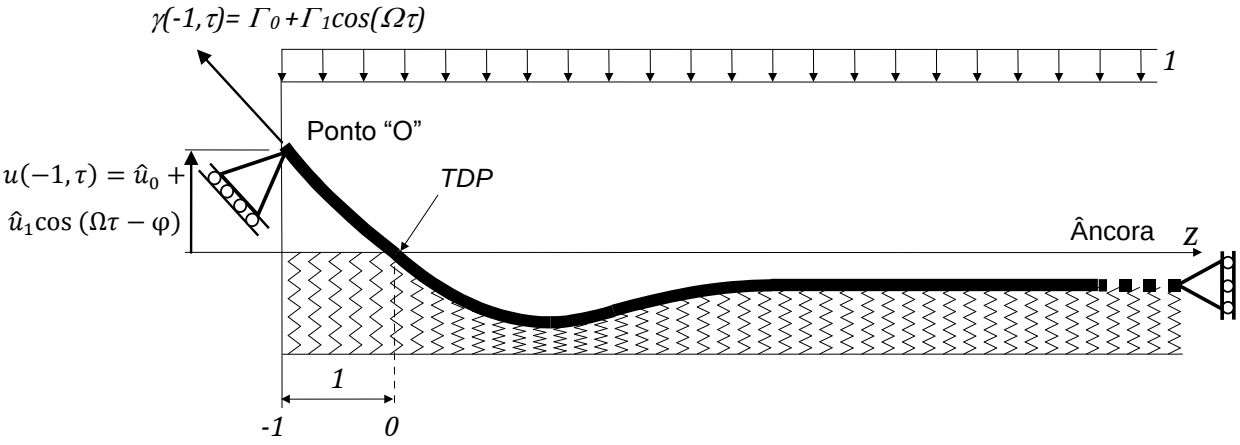



**Figura 11: Viga esbelta semi-infinita com contato unilateral em apoio elástico sob flexão composta com tração e deslocamento impostos (condições de contorno fixas)**

Será adotada no prosseguimento deste trabalho a notação (‘), “linha”, para representar as derivadas espaciais em relação a $z$, e a notação (·), “ponto”, para representar as derivadas temporais em relação a $\tau$.

Utilizando as relações (9) e (10), a equação (8) torna-se fortemente não linear devido às transformações dos operadores diferenciais do tempo e do espaço (deduções constam no anexo 8.1):

$$\frac{1}{4}\,u^{IV} + c^4\ddot{u} - 2\dot{c}c^3(z+1)\dot{u}' + c^2[\dot{c}^2(1+z)^2 - \gamma]u'' + c^2[(2\dot{c}^2 - \ddot{c}c)(z+1) - \gamma']u' + Hc^4u + c^4 = 0 \tag{11}$$

$$H(z) = 0, \quad -1 < z < 0$$
$$H(z) = 1, \quad z > 0$$

E as condições de contorno, agora fixas, são definidas como:

- Tração dinâmica imposta no ponto “O”: $\gamma(-1,\tau) = \Gamma_0 + \Gamma_1 cos(\Omega\tau)$
- Deslocamento vertical imposto no ponto “O”: $u(-1,\tau) = \hat{u}_0 + \hat{u}_1 cos(\Omega\tau - \varphi)$
- Curvatura (momento) nula (momento nulo) no ponto “O”: $u''(-1,\tau) = 0$
- Deslocamento vertical nulo no *TDP*: $u_e(0,t) = u_d(0,t) = 0$
- Compatibilidade de rotação à esquerda e à direita do *TDP*: $u_e'(0,\tau) = u_d'(0,\tau)$
- Compatibilidade de curvatura (momento) à esquerda e à direita do *TDP*: $u_e''(0,\tau) = u_d''(0,\tau)$
- Compatibilidade de cortante à esquerda e à direita do *TDP*: $u_e'''(0,\tau) = u_d'''(0,\tau)$

## 4.2. Solução Geral

A equação (11) mostra-se de difícil resolução através do método das múltiplas escalas em função de suas não linearidades de até 5ª ordem. O que se propõe como solução geral é considerar uma perturbação $\delta(\mathrm{z},\tau)$, gerada pela variação da tração imposta no ponto "O", em torno de uma configuração de equilíbrio "quase-estática" $\hat{u}(\mathrm{z},\tau)$, dada pelo deslocamento vertical imposto no ponto "O":

$$u(z,\tau) = \hat{u}(z,\tau) + \delta(z,\tau) \tag{12}$$

A solução "quase-estática" $\hat{u}(z,\tau)$ é obtida no item 4.3. Para a consideração da perturbação, será utilizado o método de Galerkin não linear utilizando funções modais não lineares $\zeta(z)$ descritas no item 4.5.

A tração adimensional $\gamma(z,\tau)$ e sua taxa de variação ao longo do *riser* $\gamma'(z,\tau)$ são determinadas no item 4.4 e incluídas de forma "*ad hoc*" na equação (11).

A posição adimensional do *TDP* é desconhecida e tem um termo referente à solução "quase-estática" $c_0(\tau)$ e um termo referente à perturbação dinâmica $c_2(\tau)$.

$$c(\tau) = c_0(\tau) + c_2(\tau) \tag{13}$$

onde $c_0(\tau)$ possui um termo estático $c_0(0) = \alpha.4\lambda$ e um "quase-estático" $c_1(\tau)$:

$$c_0(\tau) = c_0(0) + c_1(\tau) \tag{14}$$

Na metodologia adotada, as funções citadas (configuração "quase-estática", modal e variação da tração) são separadas em termos que dependem apenas do tempo e termos que dependem apenas do espaço. Assim é possível integrar numericamente aquelas que dependem do espaço, bem como a variável explícita $z$, obtendo uma equação de um oscilador modal que depende apenas da variável $\tau$.

## 4.3. Solução “Quase-estática”

Na equação (11), assumindo derivadas nulas no tempo para $u(z,\tau)$ e $c(\tau)$, e mantendo apenas os termos “quase-estáticos”, chega-se à equação da configuração “quase-estática”:

$$\frac{1}{4}\hat{u}(z,\tau)^{IV} - \gamma_0(z)\, c_0(\tau)^2\, \hat{u}(z,\tau)'' - \gamma_0(z)'\, c_0(\tau)^2\, \hat{u}(z,\tau)' + Hc_0(\tau)^4\, \hat{u}(z,\tau) + c_0(\tau)^4 = 0 \tag{15}$$

onde $\gamma_0$ refere-se à tração estática.

Adota-se uma simplificação, ao considerar que a solução para a configuração “quase-estática” no modelo de viga com flexão simples possa ser usada no modelo de viga sob flexão composta. Portanto, para a equação da configuração “quase-estática” do modelo de flexão simples, escreve-se simplesmente:

$$\frac{1}{4}\hat{u}(z,\tau)^{IV} + Hc_0(\tau)^4\hat{u}(z,\tau) + c_0(\tau)^4 = 0 \tag{16}$$

Para chegar à equação da configuração estática, basta considerar $\tau = 0$ na equação (16). Através de um simples fator de correção $0 < \psi_1 < 1$, é possível ajustar a configuração estática obtida para o modelo de flexão simples à configuração estática obtida por modelos de elementos finitos, que consideram apropriadamente a variação da tração. Assim, as soluções para o trecho suspenso e para o trecho apoiado são escritas da seguinte forma:

$$\hat{u}_e(z,\tau) = \psi_1\left[-\frac{c_0(\tau)^4}{6}z^4 + \frac{c_0(\tau)^3}{3}(1 - c_0(\tau))z^3 + c_0(\tau)^3 z^2 - c_0(\tau)(1 + c_0(\tau))z\right] \tag{17}$$

para $-1 < z < 0$ , e

$$\hat{u}_d(z,\tau) = \psi_1\{[cos(c_0(\tau)z) - c_0(\tau)\, sin(c_0(\tau)z)]e^{-c_0(\tau)z} - 1\} \tag{18}$$

para $z > 0$.

Fazendo $z = -1$ e $\tau = 0$ na equação (17), a altura estática do ponto "O" $\hat{u}_0$ é encontrada, como mostra a Figura 12. O fator de correção $\psi_1$ é ajustado manualmente de forma que a curva dada pela equação (17) se encaixe com a curva dada por um modelo de elementos finitos. Para possibilitar a comparação, deve-se dimensionalizar as equações (17) e (18), retornando às variáveis originais através das relações (7).

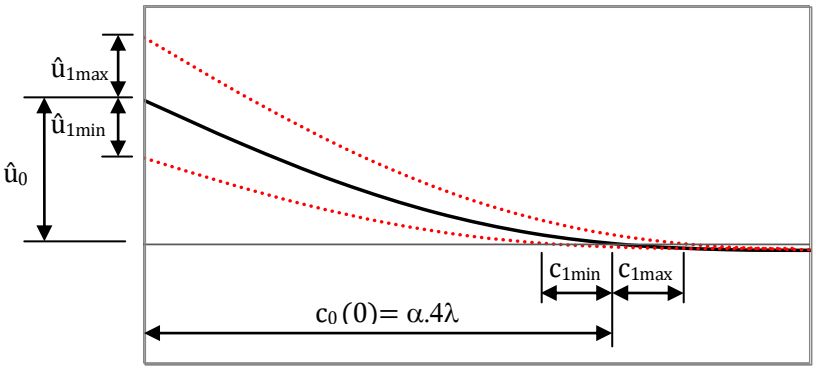



**Figura 12: Representação da configuração "quase-estática" do deslocamento imposto no ponto "O".**

Sabendo que a coordenada generalizada modal do MOR é o deslocamento horizontal do *TDP*, é interessante transferir o deslocamento imposto no ponto "O" para o *TDP*. Substituindo $\hat{u}_0 + \hat{u}_{1,max}$ no lugar de $\hat{u}_e(-1, \tau_{max})$ da equação (17), a nova posição do *TDP* $c_0(0) + c_{1,max}$ é encontrada. $\tau_{max}$ é o tempo em que a máxima altura é alcançada. O mesmo procedimento é feito para $\hat{u}_0 - \hat{u}_{1,min}$. As amplitudes $c_{1,max}$ e $c_{1,min}$ tem valores diferentes pois a equação (17) não é linear. Mas, com o intuito de simplificar o problema, e sabendo que estas amplitudes são pequenas comparadas com a posição estática $c_0(0)$, é razoável considerar a média dos dois valores como amplitude imposta no *TDP*:

$$c_1 = \frac{c_{1,max} + c_{1,min}}{2} \tag{19}$$

Portanto, o deslocamento equivalente imposto no *TDP* fica definido como:

$$c_0(\tau) = c_0(0) + c_1 cos(\Omega\tau - \varphi) \tag{20}$$

As funções rotação $\hat{u}'(z,\tau)$ e curvatura $\hat{u}''(z,\tau)$, também serão utilizadas mais adiante na resolução do problema. E nelas também são aplicados fatores de correção $\psi_2$ e $\psi_3$, de forma a aproximá-las das curvas dadas pelo modelo de elementos finitos:

$$\hat{u}_e{}'(z,\tau) = \psi_2\left[-\frac{2}{3}c_0(\tau)^4 z^3 + c_0(\tau)^3(1 - c_0(\tau))z^2 + 2c_0(\tau)^3 z - c_0(\tau)(1 + c_0(\tau))\right] \tag{21}$$

$$\hat{u}_d{}'(z,\tau) = \psi_2 c_0(\tau)[(c_0(\tau) - 1)\, sin(c_0(\tau)z) - (c_0(\tau) + 1)\, cos(c_0(\tau)z)]e^{-c_0(\tau)z}$$

$$\hat{u}''(z,\tau) = \psi_3[-2c_0(\tau)^4 z^2 + 2c_0(\tau)^3(1 - c_0(\tau))z + 2c_0(\tau)^3] \tag{22}$$

$$\hat{u}_d{}''(z,\tau) = 2\psi_3 c_0(\tau)^2[sin(c_0(\tau)z) + c_0(\tau)\, cos(c_0(\tau)z)]e^{-c_0(\tau)z}$$

Como mencionado anteriormente, a dependência do espaço é eliminada integrando numericamente as funções que dependem do espaço ao longo do comprimento do *riser*. No caso da configuração “quase-estática”, nota-se que na equação (18) não é possível separar o tempo do espaço, uma vez que termos dependentes do tempo estão dentro das funções seno, cosseno e exponencial. A solução encontrada foi expandi-las em séries de potências:

$$sin(c_0(\tau)z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(c_0(\tau)z)^{2n+1} \tag{23}$$

$$cos(c_0(\tau)z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(c_0(\tau)z)^{2n} \tag{24}$$

$$e^{-c_0(\tau)z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c_0(\tau)z)^n}{n!} \tag{25}$$

Para determinar quantos termos são necessários para obter uma boa aproximação, primeiramente, determina-se até que ponto do trecho apoiado, a função (18) é considerada.

Como o deslocamento dinâmico é pequeno, analisou-se a equação da configuração estática (18), com $\tau = 0$. Verificou-se que para um valor de $c_0(0)z = 6$, a função deslocamento vertical do trecho apoiado $\hat{u}_d(c_0(0).z, 0)$ fica praticamente constante igual a $-\psi_1$, mesmo para diferentes valores de $c_0(0)$. O mesmo ocorre para a rotação $\hat{u}_d{}'(c_0(0).z, 0)$ e curvatura $\hat{u}_d{}''(c_0(0).z, 0)$, porém, ficando constantes e iguais a zero. A Figura 13 ilustra a constatação deste fato, utilizando $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 1$.

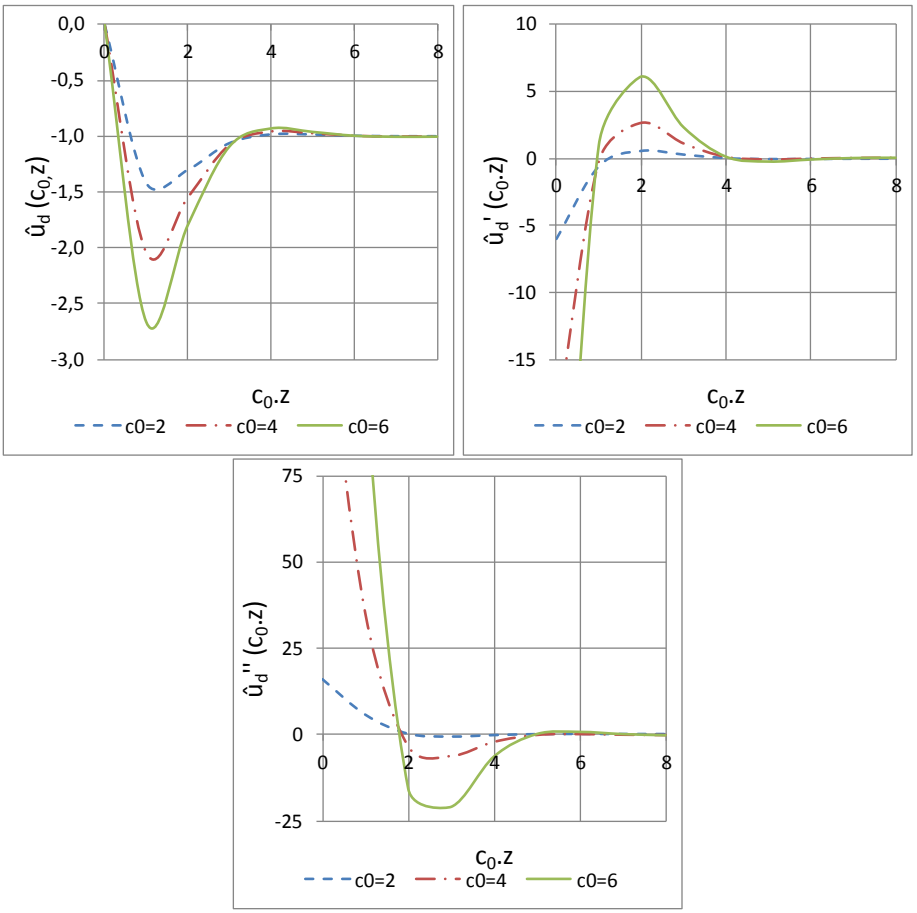



**Figura 13: Deslocamento vertical $\hat{u}_d$, rotação $u_d$' e curvatura $u_d$'' do trecho apoiado em função de $c_0(0)$.z**

Têm-se agora três funções para o deslocamento vertical "quase-estático": $\hat{u}_e(z,\tau)$ para $-1 < z < 0$; $\hat{u}_d(z,\tau)$ para $0 < z < 6/c_0(0)$; e $\hat{u}_{d+}(z,\tau) = -\psi_1$ para $z > 6/c_0(0)$. O mesmo acontece para a rotação e curvatura, porém, com $\hat{u}'_{d+}(z,\tau) = \hat{u}''_{d+}(z,\tau) = 0$ para $z > 6/c_0(0)$.

Para obter uma boa aproximação até $z = 6/c_0(0)$, foi necessário expandir as funções seno e cosseno até o oitavo termo e a função exponencial até o décimo oitavo termo.

A sequência do processo consiste em substituir o deslocamento equivalente imposto no *TDP* (20), nas equações de configuração de equilíbrio, rotação e curvatura "quase-estáticos". Para as funções do trecho suspenso, este procedimento pode ser feito de forma direta, mas para as funções do trecho apoiado, primeiramente o deslocamento imposto deve ser substituído nas séries de potências. Fazem-se as expansões até os termos definidos acima e em seguida as séries de potências são substituídas nas equações do trecho apoiado. Este processo foi feito simbolicamente no Mathematica, onde super-harmônicos até ordem 37 foram gerados, que por sua vez geraram centenas de integrais para serem resolvidas, tornando a rotina numérica um pouco lenta.

Por sorte, analisando a ordem de grandeza dos super-harmônicos, percebeu-se que são termos pequenos, pelo fato de estarem associados à $c_1$, que tem ordem de grandeza $\varepsilon c_0(0)$, onde $0 < \varepsilon \ll 1$. Sendo assim, eles pouco afetarão a resposta final, visto que o primeiro super-harmônico $cos^2(\Omega\tau - \varphi)$ já terá ordem $\varepsilon^2$. A comprovação desta análise pode ser conferida no item 5.4, onde as respostas do modelo com super-harmônicos até ordem 4 foram comparadas com o as do modelo com o harmônico de ordem 1, que trabalha com apenas 18 integrais.

Considerando apenas os termos de primeira ordem, as equações (15), (17) e (18) ficam com a forma:

$$\frac{1}{4}\hat{u}^{IV} = c_0(0)^2\gamma_0\hat{u}'' + c_0(0)^2\gamma_0{}'\hat{u}' - c_0(0)^4(1 + H\hat{u}) + [2c_0(0)\gamma_0\hat{u}'' + 2c_0(0)\gamma_0{}'\hat{u}' - 4c_0(0)^3(1 + H\hat{u})\,]c_1 cos(\Omega\tau - \varphi) \tag{26}$$

$$\hat{u}_e(z,\tau) = \psi_1[\hat{u}_{e0} + \hat{u}_{e1}\, c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)] \tag{27}$$

para $-1 < z < 0$

$$\hat{u}_d(z,\tau) = \psi_1[\hat{u}_{d0} + \hat{u}_{d1}\, c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)] \tag{28}$$

para $0 < z < 6/c_0(0)$

Os termos $\hat{u}_{e0}$, $\hat{u}_{e1}$, $\hat{u}_{d0}$ e $\hat{u}_{d1}$ são encontrados no anexo 8.3.

Para rotação e curvatura, também foram eliminados os super-harmônicos, podendo ser escritos da seguinte forma:

$$\hat{u}_e{}'(z,\tau) = \psi_2[\hat{u}_{e0}{}' + \hat{u}_{e1}{}'\, c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)] \tag{29}$$

$$\hat{u}_e{}''(z,\tau) = \psi_3[\hat{u}_{e0}{}'' + \hat{u}_{e1}{}''\, c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)] \tag{30}$$

para $-1 < z < 0$

$$\hat{u}_d{}'(z,\tau) = \psi_2[\hat{u}_{d0}{}' + \hat{u}_{d1}{}'\, c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)] \tag{31}$$

$$\hat{u}_d{}''(z,\tau) = \psi_3[\hat{u}_{d0}{}'' + \hat{u}_{d1}{}''\, c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)] \tag{32}$$

para $0 < z < 6/c_0(0)$

Para obter $\hat{u}'_{e0}$ ,$\hat{u}'_{e1}$ ,$\hat{u}'_{d0}$ e $\hat{u}'_{d1}$, primeiro derivam-se as equações (17) e (18), substitui-se (20) nas derivadas e depois eliminam-se os super-harmônicos. Note no anexo 8.3 que para $\hat{u}'_{e0}$ e $\hat{u}'_{e1}$, este procedimento gera os mesmos termos que uma derivação direta de $\hat{u}_{e0}$ e $\hat{u}_{e1}$. Mas o mesmo não ocorre para $\hat{u}'_{d0}$ e $\hat{u}'_{d1}$ devido à expansão em série de potências da equação do trecho apoiado. Este mesmo procedimento foi utilizado para as segundas derivadas no espaço.

Também vale ressaltar que o procedimento de trabalhar apenas com os harmônicos de ordem 1, após a expansão em série de potências, não é o mesmo que expandir as funções seno, cosseno e exponencial até ordem 1. Note no anexo 8.3 que os coeficientes dos harmônicos de ordem 0 e 1, $\hat{u}_{d0}, \hat{u}'_{d0}, \hat{u}''_{d0}, \hat{u}_{d1}, \hat{u}'_{d1}$ e $\hat{u}''_{d1}$, têm termos até ordem 35.

## 4.4. Função de Decaimento da Tração

Como o equilíbrio estático/dinâmico na direção longitudinal da viga não foi considerado, é necessário definir funções de decaimento da tração ao longo da viga, que serão substituídas na equação de movimento de forma "*ad hoc*". Adotar-se-á a hipótese de variação da tração ao longo da linha de forma exponencial. A função exponencial foi convenientemente escolhida, visto que, no trecho suspenso, a tração decai mais depressa quanto maior for a inclinação do *riser* e, no trecho apoiado, a tração decai mais no início do contato com o solo, onde as forças de atrito são maiores. Em Mansur [5] foi adotada uma regra única de decaimento exponencial da tração, tanto para o trecho suspenso quanto para o trecho apoiado. Visando a uma melhor aproximação ao comportamento real do *riser*, aqui serão adotadas duas regras, uma para o trecho suspenso e outra para o trecho apoiado.

A tração adimensional fica definida como:

$$\gamma(z,\tau) = \Gamma(\tau)e^{-\theta_e(1+z)} \quad \text{para } -1 < z < 0 \tag{33}$$

$$\gamma(z,\tau) = \Gamma(\tau)e^{-\theta_e}e^{-\theta_d z} \quad \text{para } z > 0$$

sendo $\Gamma(\tau)$ a tração dinâmica imposta no ponto "O":

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \, cos(\Omega\tau) \tag{34}$$

com $\Gamma_0 = \frac{T_0}{2\sqrt{\mu EI}}$, $\Gamma_1 = \frac{T_1}{2\sqrt{\mu EI}}$ e $\Omega = \frac{\Omega_d}{\beta}$.

No trecho suspenso, a taxa de decaimento $\theta_e$ será calibrada de modo a serem obtidos os mesmos valores de tração estática no ponto "O" e no *TDP* fornecidos pela análise dinâmica global do *riser*. No trecho apoiado será utilizada a mesma regra adotada em [5], em que o valor de $\theta_d$ é determinado considerando o decaimento da tração, a partir do *TDP*, até um valor em que esta represente 1% da

força no *TDP*, a uma distância $L_k$ dele, sendo $L_k$ determinado para uma tração nula sob ação de atrito Coulomb, como mostra a Figura 14.

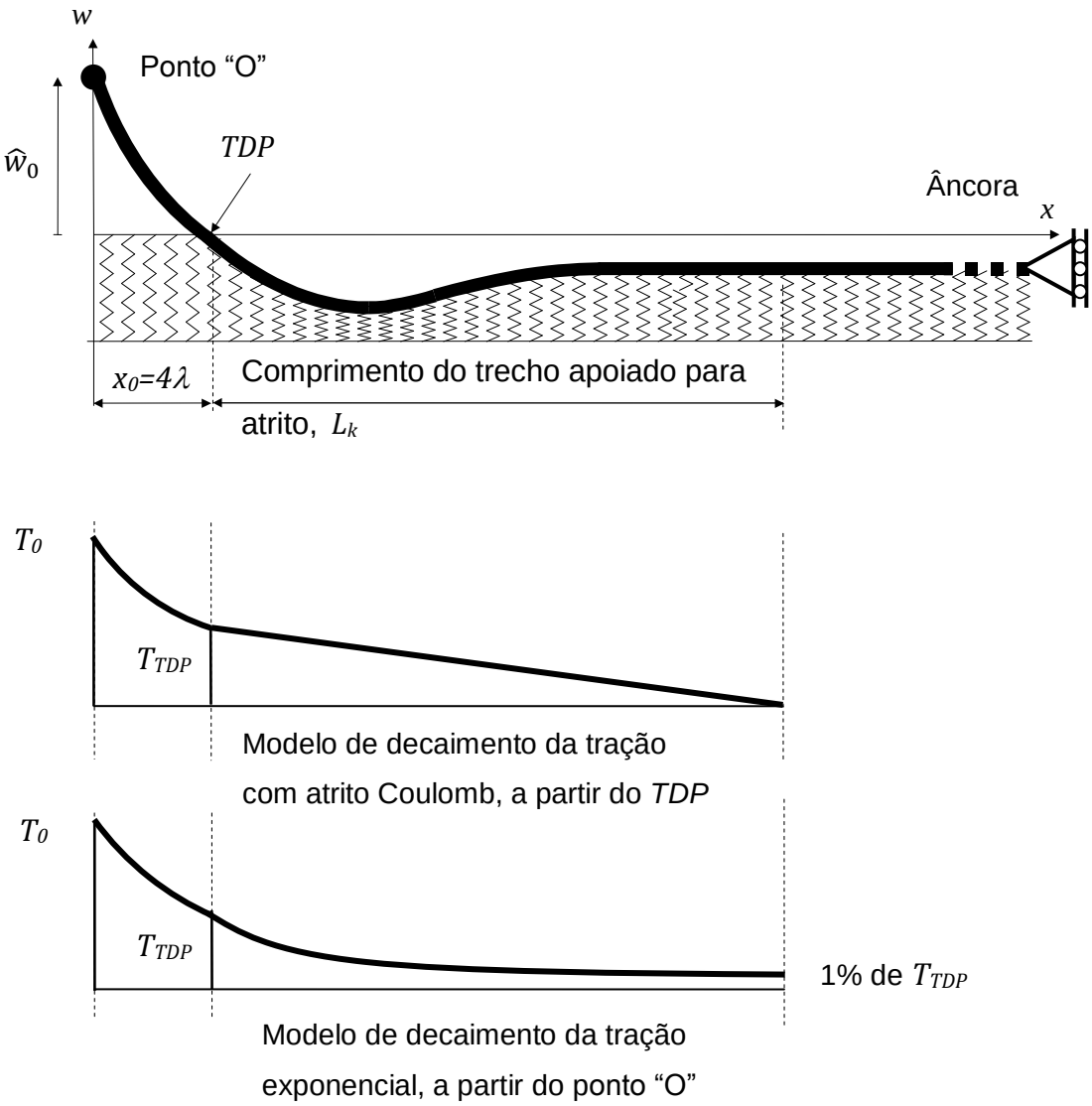



**Figura 14: Modelo de decaimento da tração ao longo da linha.**

Para o trecho suspenso:

$$T(x) = T_0\, e^{-a_e\, x} \tag{35}$$

onde $a_e$ é a taxa de decaimento:

$$T(4\lambda) = T_{TDP} = T_0\, e^{-a_e\, 4\lambda} \rightarrow a_e = -\frac{1}{4\lambda}\, \ln\left(\frac{T_{TDP}}{T_0}\right) \tag{36}$$

Para o trecho apoiado, partindo da premissa de decaimento linear por atrito Coulomb, estima-se a distância $L_k$, a partir do *TDP*, que leva à tração nula:

$$L_k = \frac{T_{TDP}}{p \cdot k} \tag{37}$$

sendo $p$ o peso submerso do tubo e $k$ o coeficiente de atrito entre *riser* e solo. Faz-se, agora, a seguinte associação para o decaimento exponencial:

$$T(x) = T_{TDP}\, e^{-a_d\,(x - x_0)} \tag{38}$$

tal que:

$$T(x_0 + L_k) = 0{,}01 T_{TDP} = T_{TDP}\, e^{-a_d\, L_k} \rightarrow a_d = -\frac{ln\,(0{,}01)}{L_k} \tag{39}$$

A taxa de decaimento na forma adimensional é:

$$\theta = a\frac{c_0(0)}{\alpha} \tag{40}$$

Uma observação a ser feita é que, neste modelo matemático, o atrito entre a viga e o solo faz apenas decair a tração ao longo do *riser*, não amortecendo o sistema.

## 4.5. Funções Modais

Assim como a configuração “quase-estática”, as funções modais foram obtidas para o modelo de flexão simples. A solução foi obtida por Mazzilli e Lenci [30], através do método das múltiplas escalas:

$$\zeta_e(z_0) = -\Big[C_1 sen\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_2 cos\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_3 e^{\alpha_e\sqrt{2}z_0} + C_4 e^{-\alpha_e\sqrt{2}z_0} - (1 + c_0(0)) + (2c_0(0)^2 - c_0(0) - 1)z_0 + c_0(0)^2(3 - c_0(0)){z_0}^2 - c_0(0)^2\left(\frac{5}{3}c_0(0) - 1\right){z_0}^3 - \frac{2}{3}c_0(0)^3{z_0}^4\Big] \quad (41)$$

para $-1 < z_0 < 0$, e

$$\zeta_d(z_0) = -\{e^{-\alpha_d z_0}[\beta^* sen(\alpha_d z_0) + (1 + c_0(0))cos(\alpha_d z_0)] + e^{-c_0(0)z_0}[-(1 + c_0(0))\, cos(c_0(0)z_0) - (1 - c_0(0))sen(c_0(0)z_0) - (1 + c_0(0))z_0\, cos(c_0(0)z_0) - (1 - c_0(0))z_0\, sen(c_0(0)z_0)]\} \quad (42)$$

para $z_0 > 0$

Os termos $\mathrm{C}_1$ a $\mathrm{C}_4$, $\beta^*$, $\alpha_e$ e $\alpha_d$, bem como toda a dedução para a obtenção das funções modais são apresentados no anexo 8.2. Na dedução, verifica-se que as funções modais estão associadas a uma coordenada generalizada modal $U$, que é o deslocamento horizontal do *TDP*.

Na Figura 15 são mostrados os modos de vibração não lineares para alguns valores de $c_0$, considerando um deslocamento horizontal do *TDP* positivo e unitário, ou seja, $U = 1$. Primeiramente, nota-se que os ventres do trecho suspenso ($-1 < z < 0$) estão voltados para baixo. Na projeção de Galerkin, um deslocamento positivo do *TDP*, deve provocar um deslocamento para cima do *riser*, e por isso, as funções modais (41) e (42) foram multiplicadas por -1.

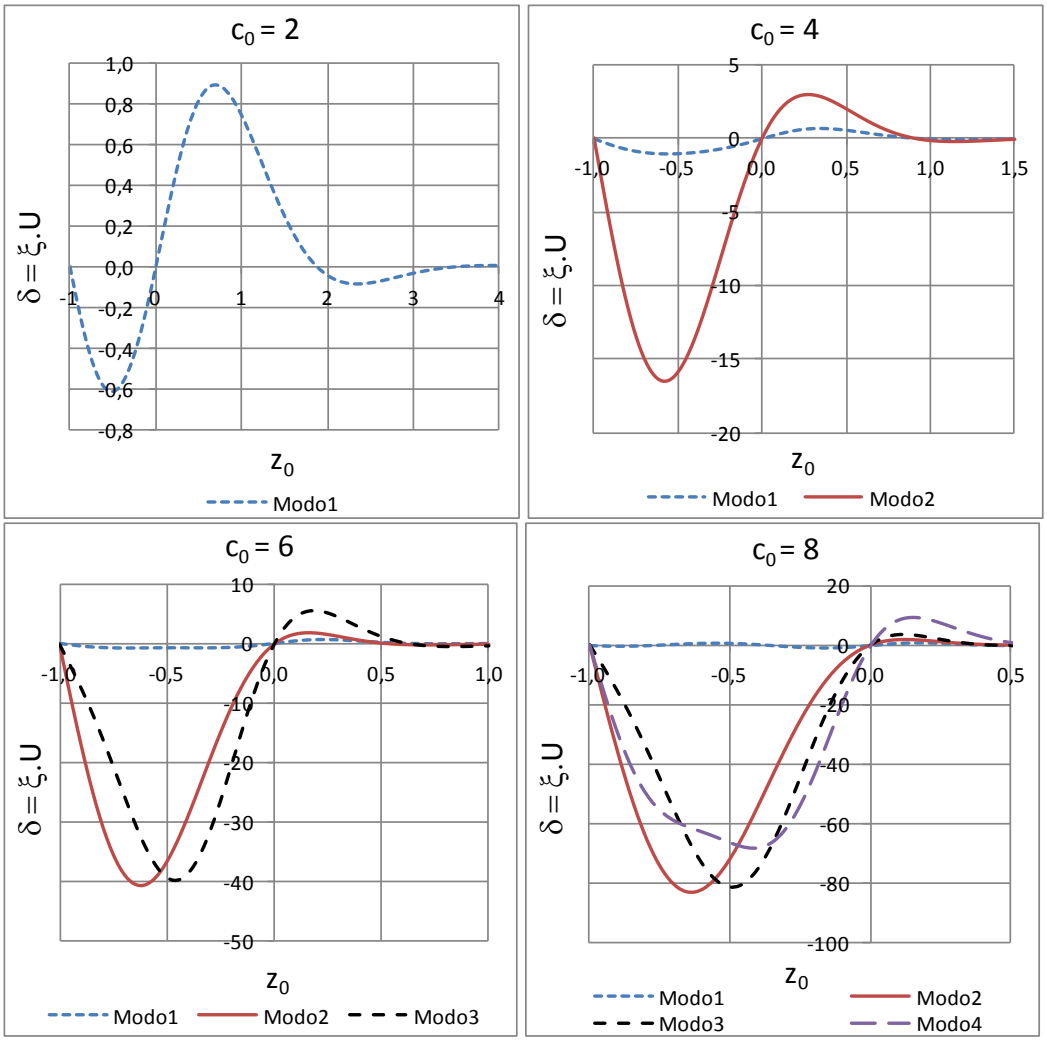



**Figura 15: Modos de vibração não lineares do modelo de flexão simples, para diferentes valores de $c_0$'s e U=1**

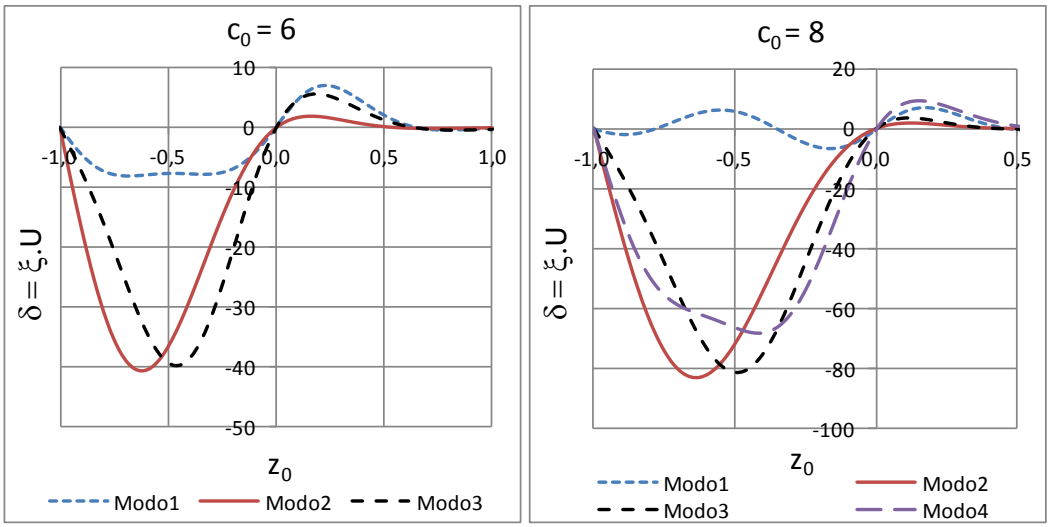



**Figura 16: Modos de vibração não lineares do modelo de flexão simples, para diferentes valores de $c_0$'s e U=10 para o 1°modo e U=1 para os demais modos**

Percebe-se também que os modos de vibração não apresentam um comportamento típico de viga, onde quanto mais rígido o modo é, mais ventres a onda estacionária apresenta. Vale ressaltar que as ondas estacionárias obtidas no problema de condições de contorno fixas, representam ondas propagantes nas variáveis originais. O primeiro modo, apesar de ser menos rígido, apresenta um maior número de ventres e amplitudes dos ventres menores do que os demais modos. Em função deste comportamento, massa ou rigidez negativa podem aparecer quando se usa o método de Galerkin. Por isso, em geral, será dada preferência para projetar o modelo contínuo no segundo modo para efeito de obtenção do MOR.

Os modos subsequentes são muito parecidos entre si, tanto nas formas de vibrar quanto nas amplitudes. Isto significa que projetar no segundo, terceiro ou oitavo modo, não deve afetar muito o MOR. Outro fato interessante é que foram encontrados finitos modos estacionários para o modelo contínuo, em contraste com os infinitos modos de vibração normalmente esperados em análises lineares de meios contínuos. Isto ocorre porque, segundo Demeio e Lenci [29], dois regimes são identificados no sistema, um abaixo (subcrítico) e um acima (supercrítico) de uma certa frequência normalizada. No regime subcrítico, o número de modos aumenta gradualmente com o aumento do comprimento da parte suspensa. Já no supercrítico, a energia é perdida para o infinito, comportando-se como um sistema superamortecido. O comportamento destes modos ainda não está completamente entendido.

## 4.6. Modelo de Ordem Reduzida

Nesta etapa, o modelo contínuo será transformado em um MOR com apenas um grau de liberdade.

Inicialmente, incorporam-se na equação de movimento (11), a solução geral (12) e a equação da configuração “quase-estática” (26), e considerando a função de decaimento da tração (33), chega-se a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\delta^{IV} + c^4\ddot{\delta} - 2\dot{c}c^3(\mathrm{z}+1)\dot{\delta}' + c^2[\dot{c}^2(z+1)^2 - \gamma]\delta'' \\ + c^2[(2\dot{c}^2 - \ddot{c}c)(z+1) + \theta\gamma]\delta' + Hc^4\delta + c^2[\dot{c}^2(z+1)^2 - \gamma]\hat{u}'' \\ + c^2[(2\dot{c}^2 - \ddot{c}c)(z+1) + \theta\gamma]\hat{u}' + c^4(H\hat{u}+1) + c_0(0)^2\gamma_0\hat{u}'' \\ - c_0(0)^2\theta\gamma_0\hat{u}' - c_0(0)^4(H\hat{u}+1) \\ + [2c_0(0)\gamma_0\hat{u}'' - 2c_0(0)\theta\gamma_0\hat{u}' \\ - 4c_0(0)^3(H\hat{u}+1)\,]c_1\,cos(\Omega\tau - \varphi) = 0\end{aligned} \tag{43}$$

Finalmente, projeta-se (43) segundo um modo de vibração em flexão simples, de forma a obter a expressão do MOR não linear, de um grau de liberdade, cuja coordenada generalizada modal é o deslocamento horizontal do *TDP*, $U$. Faz-se uso, portanto, do método de Galerkin não linear, em que a solução em um espaço normalizado é aproximada pela combinação de elementos deste mesmo espaço. No caso de um único elemento (modo de vibração), escreve-se simplesmente:

$$\delta(z,\tau) = \zeta(z).U(\tau) \tag{44}$$

$$c(\tau) = c_0(0) + U(\tau) \tag{45}$$

O deslocamento horizontal do *TDP*, $U$, refere-se ao deslocamento dinâmico total ($c_1(\tau) + c_2(\tau)$), onde $c_1(\tau)$ é dado pelo deslocamento vertical imposto no ponto “O”, e $c_2(\tau)$ dado pela variação da tração no ponto “O”, como mostram as equações (13) e (14), apesar de $c_1(\tau)$ não entrar diretamente nesta projeção. Como visto previamente, este deslocamento é considerado na “configuração quase-estática” e já está incorporado na equação (43).

Como todos os $c_0(\tau)'s$ da “configuração quase-estática” já foram substituídos na equação geral de movimento (43), na forma de $c_0(0) + c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)$, e com o intuito de utilizar uma notação mais “leve” para as fórmulas, $c_0(0)$ será substituído por simplesmente $c_0$. Introduzindo (44) e (45) em (43), obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\zeta^{IV}U + (c_0+U)^4\zeta\ddot{U} - 2(c_0+U)^3(\mathrm{z}+1)\zeta'\dot{U}^2 \\
&+(c_0+U)^2\left[(z+1)^2\dot{U}^2 - \gamma\right]\zeta''U \\
&+(c_0+U)^2\left\{\left[2\dot{U}^2 - (c_0+U)\ddot{U}\right](z+1) + \theta\gamma\right\}\zeta'U + H(c_0+U)^4\zeta U \\
&+(c_0+U)^2\left[(1+z)^2\dot{U}^2 - \gamma\right]\hat{u}'' + (c_0+U)^2\left\{\left[2\dot{U}^2 - (c_0+U)\ddot{U}\right](z+1) + \theta\gamma\right\}\hat{u}' \\
&+(c_0+U)^4(H\hat{u}+1) + {c_0}^2\gamma_0\hat{u}'' - {c_0}^2\theta\gamma_0\hat{u}' - {c_0}^4(H\hat{u}+1) \\
&+[2c_0\gamma_0\hat{u}'' - 2c_0\theta\gamma_0\hat{u}' - 4{c_0}^3(H\hat{u}+1)\,]c_1 cos(\Omega\tau - \varphi) = 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Para completar a redução de graus de liberdade, é necessário impor uma equivalência energética entre o modelo contínuo e o MOR, ou seja, os trabalhos virtuais dos dois modelos devem ser iguais. Para isto, considera-se cada termo da equação (46) como uma força modal $F(U, \dot{U}, \ddot{U}, \tau)$. Calculam-se, agora, os trabalhos virtuais de cada uma destas forças, no MOR de um grau de liberdade. Para tanto, realiza-se o produto $\delta W = F.\delta u = F.(\zeta\delta U)$, de sorte que tudo se passa como se todos os termos de (46) fossem multiplicados por $\zeta$. Sendo o deslocamento virtual $\delta U$ arbitrário, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
&\ddot{U}[c_0^4\zeta - c_0^3(1+z)\hat{u}']\zeta \\
&+U\left[\frac{1}{4}\zeta^{IV} + 4H\hat{u}c_0^3 + H\zeta c_0^4 + 4c_0^3 - \gamma c_0^2\zeta'' + \gamma\theta c_0^2\zeta' - 2\gamma c_0\hat{u}'' + 2\gamma\theta c_0\hat{u}'\right]\zeta \\
&-\zeta(\gamma-\gamma_0)c_0^2\hat{u}'' + \zeta\theta c_0^2(\gamma-\gamma_0)\hat{u}' \\
&\qquad + \zeta[2c_0\gamma_0\hat{u}'' - 2c_0\theta\gamma_0\hat{u}' - 4{c_0}^3(H\hat{u}+1)\,]c_1 cos(\Omega\tau - \varphi) \\
&+U^2[6c_0^2 + 6H\hat{u}c_0^2 + 4H\zeta c_0^3 - 2\gamma c_0\zeta'' + 2\gamma\theta c_0\zeta' - \gamma\hat{u}'' + \gamma\theta\hat{u}']\zeta \\
&+\dot{U}^2[(1+z)^2c_0^2\hat{u}'' - 2(1+z)c_0^3\zeta' + 2(1+z)c_0^2\hat{u}']\zeta \\
&+U\ddot{U}[4\zeta c_0^3 - (1+z)c_0^3\zeta' - 3(1+z)c_0^2\hat{u}']\zeta \\
&+U^3[4c_0 + 4H\hat{u}c_0 + 6H\zeta c_0^2 - \gamma\zeta'' + \gamma\theta\zeta']\zeta \\
&+U\dot{U}^2[(1+z)^2c_0^2\zeta'' - 4(1+z)c_0^2\zeta' + 2(1+z)^2c_0\hat{u}'' + 4(1+z)c_0\hat{u}']\zeta \\
&+U^2\ddot{U}[6\zeta c_0^2 - 3(1+z)c_0^2\zeta' - 3(1+z)c_0\hat{u}')]\zeta
\end{aligned} \tag{47}$$

$$+U^4[1+H\hat{u}+4H\zeta c_0]\zeta$$
$$+U^2\dot{U}^2[2(1+z)^2c_0\zeta''-2(1+z)c_0\zeta'+(1+z)^2\hat{u}''+2(1+z)\hat{u}']\zeta$$
$$+U^3\ddot{U}[4\zeta c_0-3(1+z)c_0\zeta'-(1+z)\hat{u}']\zeta$$
$$+U^5(H\zeta)\zeta$$
$$+U^3\dot{U}^2[(1+z)^2\zeta'']\zeta$$
$$+U^4\ddot{U}[\zeta-(1+z)\zeta']\zeta=0$$

A equação (47), que pode ser entendida como a equação forçada do oscilador modal, apresenta coeficientes variáveis com $z$ e $\tau$. Com o intuito de eliminar a dependência destes coeficientes com $z$, são estabelecidas constantes auxiliares $I_i$, definidas como integrais calculadas ao longo do trecho suspenso e do trecho apoiado de comprimento dimensional $L$, além do qual a função $\zeta(z)$ que caracteriza o modo, a função $\hat{u}(z)$, que caracteriza a "configuração quase-estática" e a função $\gamma(z,\tau)$, que caracteriza a tração, apresentam valores desprezíveis.

Para a função $\hat{u}(z)$, já se verificou que ela atinge um valor desprezível para $z=6/c_0$. Já a tração $\gamma(z,\tau)$ decai até um valor próximo de zero quando $z=(\alpha L_k/c_0)-1$. Para a função modal, analisaram-se casos para diversos $c_0's$ conforme Figura 15, de onde se pôde constatar a seguinte regra na qual a função modal aproxima-se de zero: $z=14{c_0}^{-1,25}$. Esta regra, apresentada na Figura 17, vale para $c_0\geq 1$, o que é razoável, visto que dificilmente tem-se $c_0<1$, o que significaria um comprimento muito pequeno para o trecho suspenso com comportamento de viga.

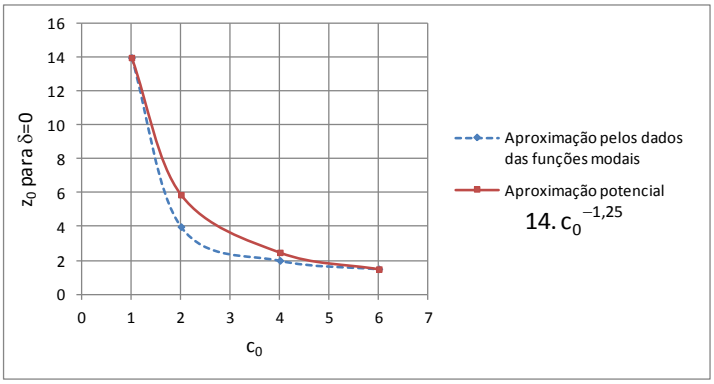



**Figura 17: Regra aproximada para o comprimento adimensional em que as amplitudes dos modos de vibração atingem valores próximos de zero**

Portanto, as integrais $I_i$ serão calculadas até um comprimento adimensional $L_z$, onde:

$$L_z = \max\left[\frac{6}{c_0};\ \left(\frac{\alpha L_k}{c_0}\right) - 1;\ 14{c_0}^{-1,25}\right] \tag{48}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot \zeta_e\, dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot \zeta_d\, dz \tag{49}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\zeta_e}^{IV}\, dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\zeta_d}^{IV}\, dz$$

$$I_3 = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\zeta_e}'(1+z)\, dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\zeta_d}'(1+z)\, dz$$

$$I_4 = \int_{-1}^{0} \zeta_e dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d dz$$

$$I_5 = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\zeta_e}''(1+z)^2\, dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\zeta_d}''(1+z)^2\, dz$$

$$I_{6,0} = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\hat{u}_{e0}}'(1+z)\, dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\hat{u}_{d0}}'(1+z)\, dz$$

$$I_{7,0} = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\hat{u}_{e0}}''\, (1+z)^2 dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\hat{u}_{d0}}''\, (1+z)^2 dz$$

$$I_8 = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\zeta_e}''\, e^{-\theta_e(1+z)} dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\zeta_d}''\, e^{-\theta_e}\, e^{-\theta_d z} dz$$

$$I_{9,0} = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\hat{u}_{e0}}''\, e^{-\theta_e(1+z)} dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\hat{u}_{d0}}''\, e^{-\theta_e}\, e^{-\theta_d z} dz$$

$$I_{10} = \int_{-1}^{0} \theta_e\, \zeta_e \cdot {\zeta_e}' e^{-\theta_e(1+z)} dz + \int_{0}^{L_z} \theta_d\, \zeta_d \cdot {\zeta_d}' e^{-\theta_e}\, e^{-\theta_d z} dz$$

$$I_{11,0} = \int_{-1}^{0} \theta_e\, \zeta_e \cdot {\hat{u}_{e0}}'\, e^{-\theta_e(1+z)} dz + \int_{0}^{L_z} \theta_d\, \zeta_d \cdot {\hat{u}_{d0}}'\, e^{-\theta_e}\, e^{-\theta_d z} dz$$

$$I_{12} = \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot\ \zeta_d\, dz$$

$$I_{13,0} = \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot\ \hat{u}_{d0}\, dz$$

$$I_{6,1} = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\hat{u}_{e1}}'(1+z)\, dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\hat{u}_{d1}}'(1+z)\, dz$$

$$I_{7,1} = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot {\hat{u}_{e1}}''\, (1+z)^2 dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot {\hat{u}_{d1}}''\, (1+z)^2 dz$$

$$I_{9,1} = \int_{-1}^{0} \zeta_e \cdot \hat{u}_{e1}'' \, e^{-\theta_e(1+z)} dz + \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot \hat{u}_{d1}'' \, e^{-\theta_e} \, e^{-\theta_d z} dz$$

$$I_{11,1} = \int_{-1}^{0} \theta_e \, \zeta_e \cdot \hat{u}_{e1}' \, e^{-\theta_e(1+z)} dz + \int_{0}^{L_z} \theta_d \, \zeta_d \cdot \hat{u}_{d1}' \, e^{-\theta_e} \, e^{-\theta_d z} dz$$

$$I_{13,1} = \int_{0}^{L_z} \zeta_d \cdot \, \hat{u}_{d1} \, dz$$

Assim, a equação (**47**) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
&\ddot{U}\left[c_0^4 I_1 - c_0^3 I_{6,0} - c_0^3 I_{6,1} c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right] \qquad (50)\\
&+U\left[\frac{1}{4} I_2 + 4c_0^3 I_{13,0} + c_0^4 I_{12} - \Gamma c_0^2 I_8 + c_0^2 \Gamma I_{10} - 2c_0 \Gamma I_{9,0} + 2c_0 \Gamma I_{11,0} + 4c_0^3 I_4\right.\\
&\qquad\left. + \left(-2c_0 \Gamma I_{9,1} + 2c_0 \Gamma I_{11,1} + 4c_0^3 I_{13,1}\right) c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&-(\Gamma - \Gamma_0) c_0^2 I_{9,0} + c_0^2 (\Gamma - \Gamma_0) I_{11,0}\\
&\qquad + \left(-(\Gamma - \Gamma_0) c_0^2 I_{9,1} + c_0^2 (\Gamma - \Gamma_0) I_{11,1} + 2c_0 \Gamma_0 I_{9,0} - 2c_0 \Gamma_0 I_{11,0} - 4{c_0}^3 I_4\right.\\
&\qquad \left. - 4{c_0}^3 I_{13,0}\right) c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\\
&\qquad + \left(2c_0 \Gamma_0 I_{9,1} - 2c_0 \Gamma_0 I_{11,1} - 4{c_0}^3 I_{13,1}\right) {c_1}^2 cos^2(\Omega\tau - \varphi)\\
&+U^2\left[6c_0^2 I_4 + 6c_0^2 I_{13,0} + 4c_0^3 I_{12} - 2c_0 \Gamma I_8 + 2c_0 \Gamma I_{10} - \Gamma I_{9,0} + \Gamma I_{11,0}\right.\\
&\qquad \left. + \left(-\Gamma I_{9,1} + \Gamma I_{11,1} + 6c_0^2 I_{13,1}\right) c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+\dot{U}^2\left[c_0^2 I_{7,0} - 2c_0^3 I_3 + 2c_0^2 I_{6,0} + \left(2c_0^2 I_{6,1} + c_0^2 I_{7,1}\right) c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U\ddot{U}\left[4c_0^3 I_1 - c_0^3 I_3 - 3c_0^2 I_{6,0} - 3c_0^2 I_{6,1} c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U^3\left[4c_0 I_4 + 4c_0 I_{13,0} + 6c_0^2 I_{12} - \Gamma I_8 + \Gamma I_{10} + 4c_0 I_{13,1} c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U\dot{U}^2\left[c_0^2 I_5 - 4c_0^2 I_3 + 2c_0 I_{7,0} + 4c_0 I_{6,0} + \left(4c_0 I_{6,1} + 2c_0 I_{7,1}\right) c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U^2\ddot{U}\left[6c_0^2 I_1 - 3c_0^2 I_3 - 3c_0 I_{6,0} - 3c_0 I_{6,1} c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U^4\left[I_4 + I_{13,0} + 4c_0 I_{12} + I_{13,1} c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U^2\dot{U}^2\left[2c_0 I_5 - 2c_0 I_3 + I_{7,0} + 2I_{6,0} + \left(2I_{6,1} + I_{7,1}\right) c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U^3\ddot{U}\left[4c_0 I_1 - 3c_0 I_3 - I_{6,0} - I_{6,1} c_1 cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\\
&+U^5\left[I_{12}\right]\\
&+U^3\dot{U}^2\left[I_5\right]\\
&+U^4\ddot{U}\left[I_1 - I_3\right] = 0
\end{aligned}$$

O termo super-harmônico de ordem 2, $cos^2(\Omega\tau - \varphi)$, que surgiu na equação (50) será desprezado por ter ordem de grandeza $(\varepsilon c_0)^2$. Sendo assim, definem-se os coeficientes $a_{i,}\ i = 0\ a\ 2$, dos termos lineares, sendo $a_{i,0}$ a contribuição da configuração estática, $a_{i,1}$ a contribuição da variação dinâmica da tração, $a_{i,2}$ a contribuição do deslocamento imposto e $a_{i,3}$ a contribuição da tração dinâmica e deslocamento imposto acoplados:

$$a_i = a_{i,0} + a_{i,1}cos(\Omega\tau) + a_{i,2}cos(\Omega\tau - \varphi) + a_{i,3}cos(\Omega\tau)cos(\Omega\tau - \varphi) \tag{51}$$

Os coeficientes da massa modal são definidos como:

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= c_0^4 I_1 - c_0^3 I_{6,0} \\ a_{0,1} &= a_{0,3} = 0 \\ a_{0,2} &= -c_0^3 c_1 I_{6,1} \end{aligned} \tag{52}$$

O coeficiente de amortecimento viscoso linear equivalente é introduzido de forma *"ad hoc"*, uma vez que não decorre da formulação inicial do problema:

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= 2\xi\omega_0 a_{0,0} \\ a_{1,1} &= a_{1,2} = a_{1,3} = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

onde $\omega_0$ é a frequência adimensional do modo de vibração, considerando o efeito da tração e, definida por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_{2,0}}{a_{0,0}}} \tag{54}$$

A rigidez modal do problema com flexo-tração é representada pelos coeficientes:

$$a_{2,0} = \frac{1}{4}I_2 + 4c_0^3 I_{13,0} + 4c_0^3 I_4 + c_0^4 I_{12} - \Gamma_0\left[c_0^2 I_8 - c_0^2 I_{10} + 2c_0 I_{9,0} - 2c_0 I_{11,0}\right] \tag{55}$$

$$a_{2,1} = -\Gamma_1\left[c_0^2 I_8 - c_0^2 I_{10} + 2c_0 I_{9,0} - 2c_0 I_{11,0}\right]$$

$$a_{2,2} = 4c_0^3 c_1 I_{13,1} + \Gamma_0 c_1\left(-2c_0 I_{9,1} + 2c_0 I_{11,1}\right)$$

$$a_{2,3} = \Gamma_1 c_1\left(-2c_0 I_{9,1} + 2c_0 I_{11,1}\right)$$

Definem-se, ainda, os coeficientes $b_{i,}\ i = 0\ a\ 12$, em sua forma geral, como sendo característicos do carregamento forçado do modelo de ordem reduzida, também separando a contribuição da configuração estática daquelas oriundas das perturbações dinâmicas em função do tempo:

$$b_i = b_{i,0} + b_{i,1}cos(\Omega\tau) + b_{i,2}cos(\Omega\tau - \varphi) + b_{i,3}cos(\Omega\tau)cos(\Omega\tau - \varphi) \tag{56}$$

com

$$b_{0,0} = 0 \tag{57}$$

$$b_{0,1} = \Gamma_1(c_0^2 I_{9,0} - c_0^2 I_{11,0})$$

$$b_{0,2} = c_1\left(4c_0^3 I_4 + 4c_0^3 I_{13,0} - 2\Gamma_0 c_0 I_{9,0} + 2\Gamma_0 c_0 I_{11,0}\right)$$

$$b_{0,3} = \Gamma_1 c_1\left(c_0^2 I_{9,1} - c_0^2 I_{11,1}\right)$$

$$b_{1,0} = -6c_0^2 I_4 - 6c_0^2 I_{13,0} - 4c_0^3 I_{12} + \Gamma_0\left[2c_0 I_8 - 2c_0 I_{10} + I_{9,0} - I_{11,0}\right]$$

$$b_{1,1} = \Gamma_1\left[2c_0 I_8 - 2c_0 I_{10} + I_{9,0} - I_{11,0}\right]$$

$$b_{1,2} = -6c_0^2 c_1 I_{13,1} + \Gamma_0 c_1\left(I_{9,1} - I_{11,1}\right)$$

$$b_{1,3} = \Gamma_1 c_1\left(I_{9,1} - I_{11,1}\right)$$

$$b_{2,0} = -c_0^2 I_{7,0} + 2c_0^3 I_3 - 2c_0^2 I_{6,0}$$

$$b_{2,1} = b_{2,3} = 0$$

$$b_{2,2} = -c_1\left(2c_0^2 I_{6,1} + c_0^2 I_{7,1}\right)$$

$$b_{3,0} = -4c_0^3 I_1 + c_0^3 I_3 + 3c_0^2 I_{6,0}$$

$$b_{3,1} = b_{3,3} = 0$$

$$b_{3,2} = 3c_0^2 c_1 I_{6,1}$$

$$b_{4,0} = -4c_0 I_4 - 4c_0 I_{13,0} - 6c_0^2 I_{12} + \Gamma_0[I_8 - I_{10}]$$

$b_{4,1} = \Gamma_1[I_8 - I_{10}]$

$b_{4,2} = -4c_0c_1I_{13,1}$

$b_{4,3} = 0$

$b_{5,0} = -c_0^2I_5 + 4c_0^2I_3 - 2c_0I_{7,0} - 4c_0I_{6,0}$

$b_{5,1} = b_{5,3} = 0$

$b_{5,2} = -c_1\left(4c_0I_{6,1} + 2c_0I_{7,1}\right)$

$b_{6,0} = -6c_0^2I_1 + 3c_0^2I_3 + 3c_0I_{6,0}$

$b_{6,1} = b_{6,3} = 0$

$b_{6,2} = 3c_0c_1I_{6,1}$

$b_{7,0} = -I_4 - I_{13,0} - 4c_0I_{12}$

$b_{7,1} = b_{7,3} = 0$

$b_{7,2} = -c_1I_{13,1}$

$b_{8,0} = -2c_0I_5 + 2c_0I_3 - I_{7,0} - 2I_{6,0}$

$b_{8,1} = b_{8,3} = 0$

$b_{8,2} = -c_1\left(2I_{6,1} + I_{7,1}\right)$

$b_{9,0} = -4c_0I_1 + 3c_0I_3 + I_{6,0}$

$b_{9,1} = b_{9,3} = 0$

$b_{9,2} = c_1I_{6,1}$

$b_{10,0} = -I_{12}$

$b_{10,1} = b_{10,2} = b_{10,3} = 0$

$b_{11,0} = -I_5$

$b_{11,1} = b_{11,2} = b_{11,3} = 0$

$b_{12,0} = -I_1 + I_3$

$b_{12,1} = b_{12,2} = b_{12,3} = 0$

A equação (50) pode ser reescrita na forma de um oscilador não-linear forçado:

$$a_0\ddot{U} + a_1\dot{U} + a_2U = b_0 + b_1U^2 + b_2\dot{U}^2 + b_3U\ddot{U} + b_4U^3 + b_5U\dot{U}^2 + b_6U^2\ddot{U} + b_7U^4 + b_8U^2\dot{U}^2 + b_9U^3\ddot{U} + b_{10}U^5 + b_{11}U^3\dot{U}^2 + b_{12}U^4\ddot{U} \quad (58)$$

ou ainda

$$\ddot{U} + \hat{a}_{1,0}\dot{U} + \left[\hat{a}_{2,0} + \hat{a}_{2,1}cos(\Omega\tau) + \hat{a}_{2,2}cos\,(\Omega\tau - \varphi) + \hat{a}_{2,3}cos\,(\Omega\tau)cos\,(\Omega\tau - \varphi)\right]U \tag{59}$$

$$= \hat{b}_{0,1}\,cos(\Omega\tau) + \hat{b}_{0,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi) + \hat{b}_{0,3}\,cos(\Omega\tau)\,cos(\Omega\tau - \varphi)$$

$$+\left[\hat{b}_{1,0} + \hat{b}_{1,1}\,cos(\Omega\tau) + \hat{b}_{1,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi) + \hat{b}_{1,3}\,cos(\Omega\tau)\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U^2$$

$$+\left[\hat{b}_{2,0} + \hat{b}_{2,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]\dot{U}^2 + \left[\hat{b}_{3,0} + \hat{b}_{3,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U\ddot{U}$$

$$+\left[\hat{b}_{4,0} + \hat{b}_{4,1}\,cos(\Omega\tau) + \hat{b}_{4,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U^3 + \left[\hat{b}_{5,0} + \hat{b}_{5,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U\dot{U}^2$$

$$+\left[\hat{b}_{6,0} + \hat{b}_{6,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U^2\ddot{U} + \left[\hat{b}_{7,0} + \hat{b}_{7,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U^4$$

$$+\left[\hat{b}_{8,0} + \hat{b}_{8,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U^2\dot{U}^2 + \left[\hat{b}_{9,0} + \hat{b}_{9,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi)\right]U^3\ddot{U}$$

$$+\hat{b}_{10,0}U^5 + \hat{b}_{11,0}U^3\dot{U}^2 + \hat{b}_{12,0}U^4\ddot{U}$$

sendo:

$$\hat{a}_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_0}, \qquad \hat{b}_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{a_0}$$

Observa-se que a equação (59) apresenta coeficientes que variam harmonicamente com o tempo, assim como a equação de Mathieu (2). Portanto, ressonâncias paramétricas são esperadas para determinados cenários. As respostas no tempo (deslocamento, velocidade e mapa de fase do *TDP*) são obtidas integrando numericamente a equação (59).

# 5. Estudos de Caso e Resultados

Nos estudos de caso a seguir, as respostas do MOR de um *SCR* são comparadas com as respostas de modelos construídos no Abaqus e no Orcaflex.

Os estudos abordam períodos típicos de ondas (3s a 10s), onde são buscados casos de ressonância paramétrica. Desta forma, o período natural deve ser aproximadamente o dobro do período de excitação, sendo, portanto, períodos bem lentos para uma viga sobre apoio elástico. Para atingir tais condições, o comprimento suspenso da viga deve ser grande e o solo pouco rígido. Como o comprimento da viga é dado em função do parâmetro $\lambda$ (4), para obter um comprimento grande, a tração estática no *TDP* deve ser baixa, e para isto ocorrer, a lâmina d'água deve ser pequena e o ângulo de lançamento deve ser o mais próximo de 90° com a horizontal. Adotou-se um ângulo de 77,5°, imaginado que o *riser* esteja em uma posição *near*, além de uma lâmina d'água de 158m.

O modelo do Abaqus apresenta as seguintes características:

- Modelo 2D;
- Sem correnteza;
- Solo modelado como apoio elástico com contato unilateral utilizando o método das penalidades;
- Ausência de atrito entre solo e *riser*;
- Apoio fixo na âncora;
- Apenas *heave* atuando como carregamento dinâmico;
- Comprimento total do *riser* = 300m, discretizado com 61 elementos de barra com função de forma linear;
- Amortecimento de Rayleigh proporcional à massa e ausência do amortecimento de Morison;
- Método explícito de integração.

Para maiores informações dos modelos numéricos, ver Prado [41].

## 5.1. Propriedades geométricas e mecânicas do *riser*

**Tabela 1: Propriedades geométricas e mecânicas do *riser***

| | |
|---|---|
| Módulo de elasticidade | $E = 2\ x\ 10^{11} N/m^2$ |
| Diâmetro externo | $D_{ext} = 0{,}2032m$ |
| Diâmetro interno | $D_{int} = 0{,}1651m$ |
| Rigidez axial | $EA = 2.204.178\ kN$ |
| Momento de inércia | $I = 4{,}72164\ x\ 10^{-5} m^4$ |
| Rigidez flexional | $EI = 9.443{,}3\ kN.m^2$ |
| Peso próprio submerso do *riser* por unidade de comprimento | $p = 727N/m$ |
| Massa por unidade de comprimento (com massa adicional) | $\rho = 141{,}24kg/m$ |
| Altura da lâmina d'água | $h = 158m$ |
| Ângulo de lançamento no *hang-off* | $\varphi_{Hang-off} = 77{,}5°$ |
| Comprimento total do *riser* (para Abaqus e Orcaflex) | $l = 300m$ |
| Coeficiente de rigidez elástica do solo por unidade de área | $\Phi = 10^4 N/m/m^2$ |
| Coeficiente de atrito entre *riser* e solo (apenas para MOR) | $k = 0{,}4$ |

## 5.2. Análise estática

A tração estática no *TDP* dado pelo modelo do Abaqus é de 28,47kN. De posse deste resultado, o comprimento flexional pode ser calculado através da equação (4): $\lambda = 18{,}2m$, definindo a projeção horizontal do comprimento suspenso do modelo analítico: $x_0 = 4\lambda = 72{,}8m$, e consequentemente, a posição do ponto "O", cuja tração estática é de 77,3kN e a altura é de 66,74m. Estes valores podem ser conferidos nos gráficos da Figura 18. Nos gráficos da configuração estática de equilíbrio, da rotação e da curvatura, são mostrados os valores obtidos pelo Abaqus e pelo Orcaflex, além dos resultados do modelo analítico com e sem os fatores de correção $\psi_1, \psi_2$ e $\psi_3$ das equações (17), (18), (21) e (22). Para ajustar as curvas do modelo analítico às curvas do Abaqus/Orcaflex, foram utilizados fatores $\psi_1 = 0{,}39$ para a configuração estática, $\psi_2 = 0{,}29$ para a rotação e $\psi_3 = 0{,}23$ para a curvatura. As retas verticais "Ponto "O"" e "*TDP*" indicam as coordenadas x em que se encontram estes pontos. No gráfico da curvatura, nota-se que a curvatura no ponto

“O” é zero, diferentemente dos valores do Abaqus/Orcaflex, visto que uma das condições de contorno adotadas é que o ponto “O” é articulado. O gráfico da tração também mostra os valores obtidos pelo Abaqus, pelo Orcaflex e pelo modelo analítico, onde foram adotadas duas regras exponenciais de decaimento da tração. Nos modelos do Abaqus e Orcaflex, não foram considerados o atrito entre o *riser* e o solo, e por isso, a tração permanece constante no trecho apoiado.

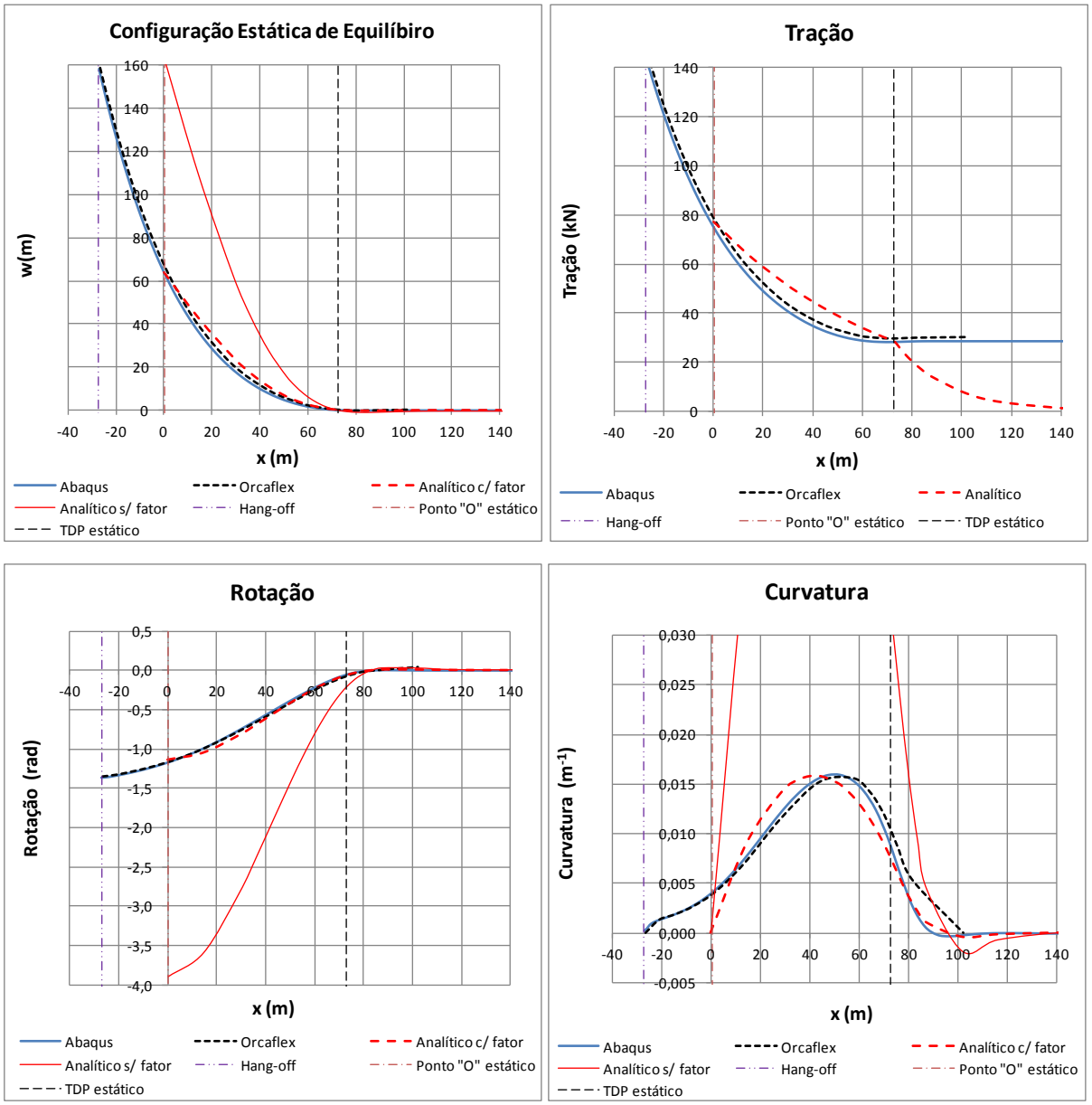



**Figura 18: Equilíbrio estático, tração, rotação e curvatura ao longo do *riser***

## 5.3. Análise dinâmica

Foram estudados três casos de excitação de *heave*. O primeiro com período de excitação $T=2{,}9s$ e amplitude de onda $w=0{,}5m$, o segundo com $T=5{,}2s$ e $w=1{,}0m$ e o terceiro com $T=10s$ e $w=1{,}0m$. A taxa de amortecimento adotada nos três casos é $\xi$=10%. Estes casos foram rodados no Abaqus, de onde foram obtidos os modos de vibração, conforme Figura 19, e os dados dinâmicos no ponto "O":

**Tabela 2: Dados no ponto "O" fornecidos pelo Abaqus**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Período de excitação T(s) | 2,9 | 5,2 | 10,0 |
| Tração dinâmica $T_1$ (kN) | 38,58 | 23,17 | 5,96 |
| Relação de trações $T_1/T_0$ | 0,50 | 0,30 | 0,08 |
| Deslocamento vertical $w_1$ (m) | 0,53 | 0,92 | 1,00 |
| Ângulo de fase entre tração e deslocamento $\varphi$ (rad) | 2,82 | 2,90 | 2,32 |

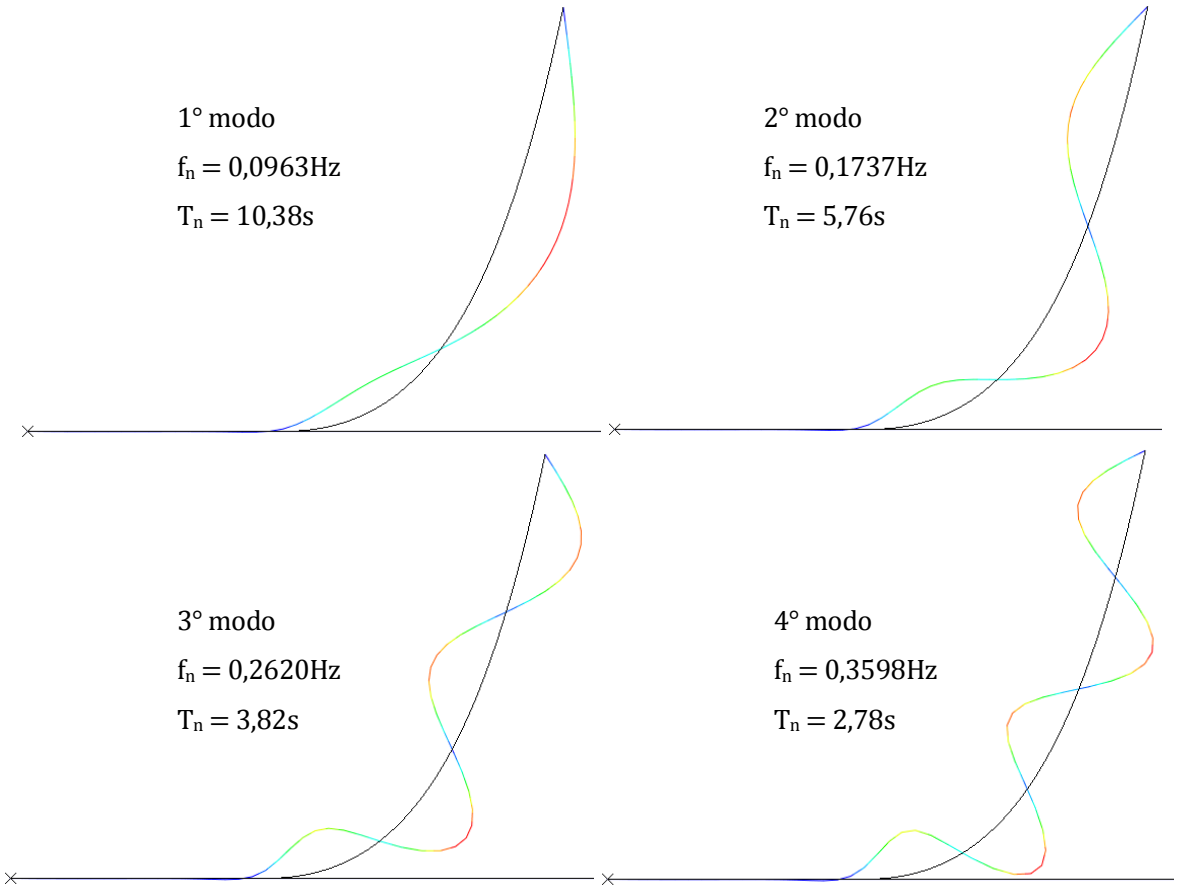
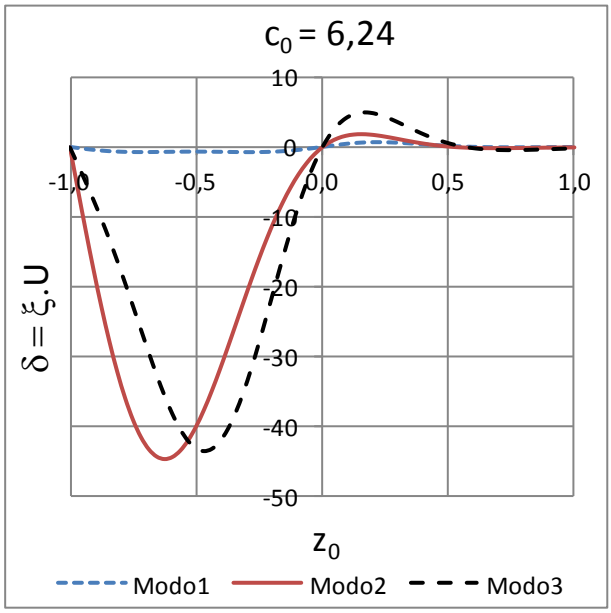



**Figura 19: Os primeiros quatro modos de vibração do *riser* obtidos pelo Abaqus**

Para o modelo analítico, a posição adimensional do *TDP* é $c_0$=6,24, obtendo-se três modos de vibração não lineares para o problema de flexão simples, conforme Figura 20, sendo que o segundo modo foi utilizado na projeção de Galerkin para a obtenção do MOR. A frequência natural que divide os regimes subcrítico e supercrítico é $\omega$=1,0→$f_n$=0,604Hz→$T_n$=1,66s.




$\omega_1$=0,145→$f_n$=0,088Hz→$T_n$=11,42s

$\omega_2$=0,455→$f_n$=0,274Hz→ $T_n$ =3,64s

$\omega_3$=0,873→$f_n$=0,527Hz→ $T_n$ =1,90s

**Figura 20: Modos de vibração do modelo analítico para $c_0$=6,24 e U=1**

A frequência natural adimensional do MOR, calculada conforme equação (54), que considera o efeito da tração, é $\omega_0$=0,2935 → $f_n$=0,1772Hz, que corresponde a um período natural de $T_n$=5,64s, bastante próximo do período do segundo modo de vibração da análise global dado pelo Abaqus. É surpreendente que o período natural do modelo de flexão simples seja menor do que o período natural do modelo de flexão composta, quando se esperaria justamente o contrário, já que o modelo de flexão composta deveria ser mais rígido, em função da rigidez geométrica dada pela tração. A explicação pode estar nos “estranhos” modos de vibração não lineares encontrados para o problema de flexão simples e utilizados na projeção.

Para os três casos de excitação foram considerados deslocamento e velocidade iniciais igual a zero.

Para o caso T=2,9s, o deslocamento vertical do ponto “O” de $w_1$=±0,53m provoca um deslocamento horizontal do *TDP* de $x_1$= ±0,18m no MOR. A relação entre frequência de excitação e frequência natural para o MOR é $\Omega/\omega_n$=1,94. Para o Abaqus, a relação de frequências é $\Omega/\omega_n$=1,99 em relação ao segundo modo e $\Omega/\omega_n$=0,96 em relação ao quarto modo. A Figura 21 apresenta as respostas para o caso T=2,9s, onde ressonâncias paramétricas são observadas para os três modelos, uma vez que o período da resposta dobra para T=5,8s, como pode ser conferido no mapa de Poincaré do MOR. Os deslocamentos do *TDP* nos três modelos apresentaram boa concordância. As velocidades, porém, mostraram certa discrepância, uma vez que o Abaqus e o Orcaflex obtiveram valores maiores do que o MOR. Isto ocorre porque os deslocamentos do Abaqus/Orcaflex contêm harmônicos mais altos, enquanto que o MOR foi obtido de uma projeção em um único modo. Para o Abaqus/Orcaflex, ocorre inicialmente a ressonância clássica 1:1 com o quarto modo e a amplitude atinge aproximadamente 5m. Após certo tempo, a ressonância paramétrica começa a prevalecer sobre a ressonância clássica, e os deslocamentos aumentam atingindo o estado estacionário mostrado na Figura 21. Porém, notam-se ainda pequenos picos intermediários nos deslocamentos, mostrando que a ressonância clássica ainda tem relevância na resposta final. A ressonância clássica 1:1 também explica o “loop” que aparece no diagrama de fase do Abaqus/Orcaflex. No MOR isto não ocorre, pois o conteúdo da frequência forçante $\Omega$ é pequeno e desaparece rapidamente após poucos segundos, já que não existe ressonância clássica 1:1, uma vez que apenas um modo foi utilizado na projeção, e é justamente aquele que está sob ressonância paramétrica. Sendo assim, toda a energia do sistema é direcionada para este modo e a resposta é dominada totalmente pela instabilidade paramétrica (frequência $\Omega/2$).

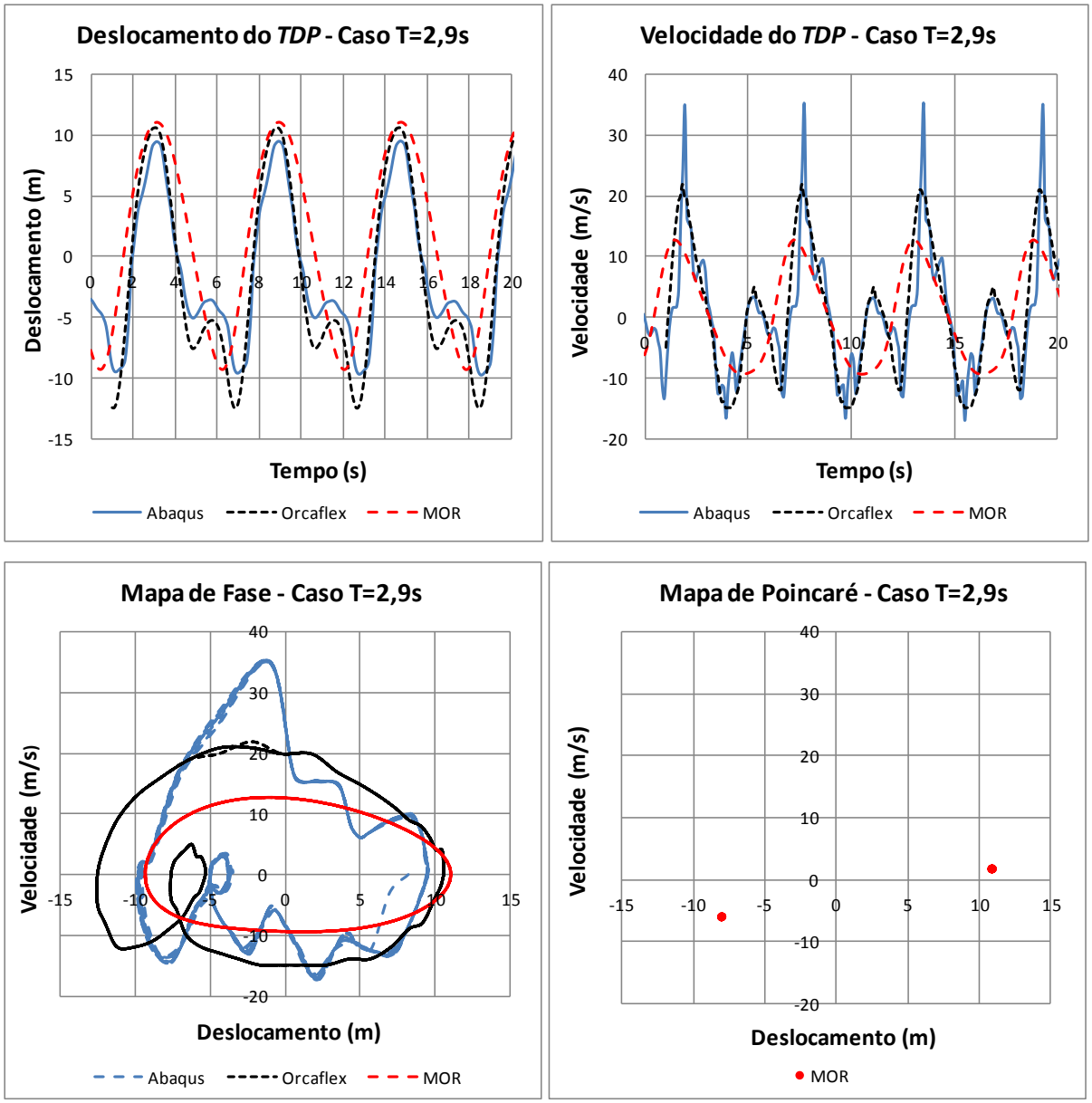



**Figura 21: Deslocamento, velocidade, mapa de fase e mapa de Poincaré do *TDP* para o caso T=2,9s**

Para o caso T=5,2s, o deslocamento vertical do ponto "O" de $w_1$=±0,92m provoca um deslocamento horizontal do *TDP* de $x_1$= ±0,31m no MOR. A relação entre frequência de excitação e frequência natural para o MOR é $\Omega/\omega_n$=1,08. Para o Abaqus, a relação de frequências é $\Omega/\omega_n$=2,00 em relação ao primeiro modo e $\Omega/\omega_n$=1,11 em relação ao segundo modo. Na Figura 22 são apresentadas as respostas para o caso T=5,2s. A ressonância clássica 1:1 ocorreu nos três modelos, visto que as respostas aumentaram e os períodos permaneceram o mesmo da excitação, como pode ser visto no mapa de Poincaré do MOR. Os deslocamentos e

as velocidades do *TDP* apresentaram boa concordância nos três modelos. No modelo do Abaqus/Orcaflex, a ressonância paramétrica 2:1 poderia ter ocorrido, pelo menos em princípio, em relação ao primeiro modo. Mas isto não ocorreu, provavelmente porque a magnitude da força não foi suficiente para disparar a ressonância paramétrica.

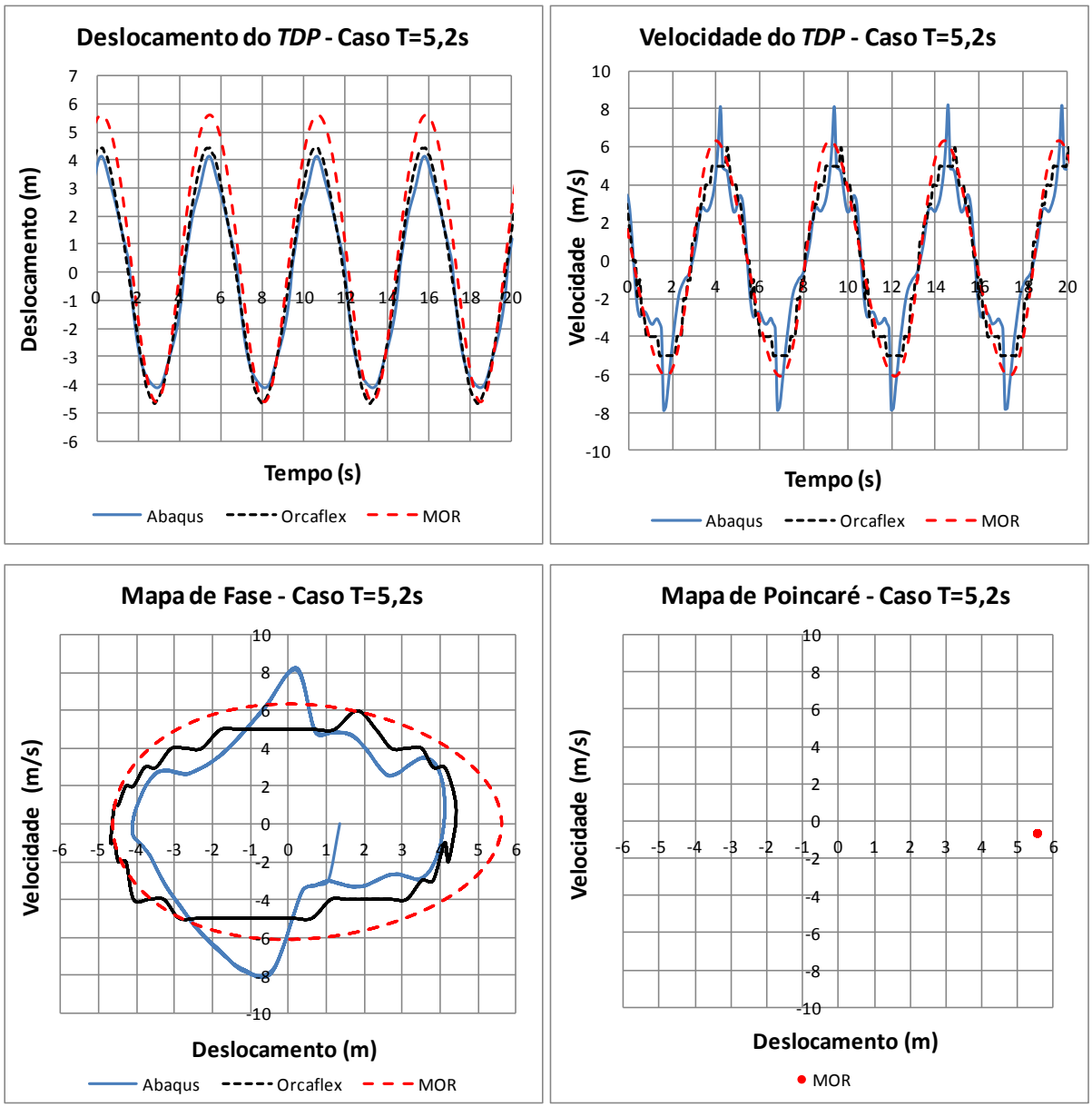



**Figura 22: Deslocamento, velocidade, mapa de fase e mapa de Poincaré do *TDP* para o caso T=5,2s**

Para o caso T=10s, o deslocamento vertical do ponto "O" de $w_1$=±1,00m provoca um deslocamento horizontal do *TDP* de $x_1$= ±0,33m no MOR. A relação entre frequência de excitação e frequência natural para o MOR é $\Omega/\omega_n$=0,56. Para o

Abaqus, a relação de frequências é $\Omega/\omega_n$=1,04 em relação ao primeiro modo. Na Figura 23 são apresentadas as respostas para o caso T=10s. A ressonância clássica 1:1 ocorre para os modelos do Abaqus/Orcaflex. Para o MOR, não ocorre ressonância e a resposta tem período um, conforme mapa de Poincaré, e é bem menor do que as respostas apresentadas pelo Abaqus/Orcaflex pois a projeção foi feita no segundo modo e o modo importante seria o primeiro. Neste caso, o MOR é totalmente inadequado para analisar a dinâmica do *riser*, por razões óbvias. Novamente o Abaqus e o Orcaflex apresentaram boa concordância entre si.

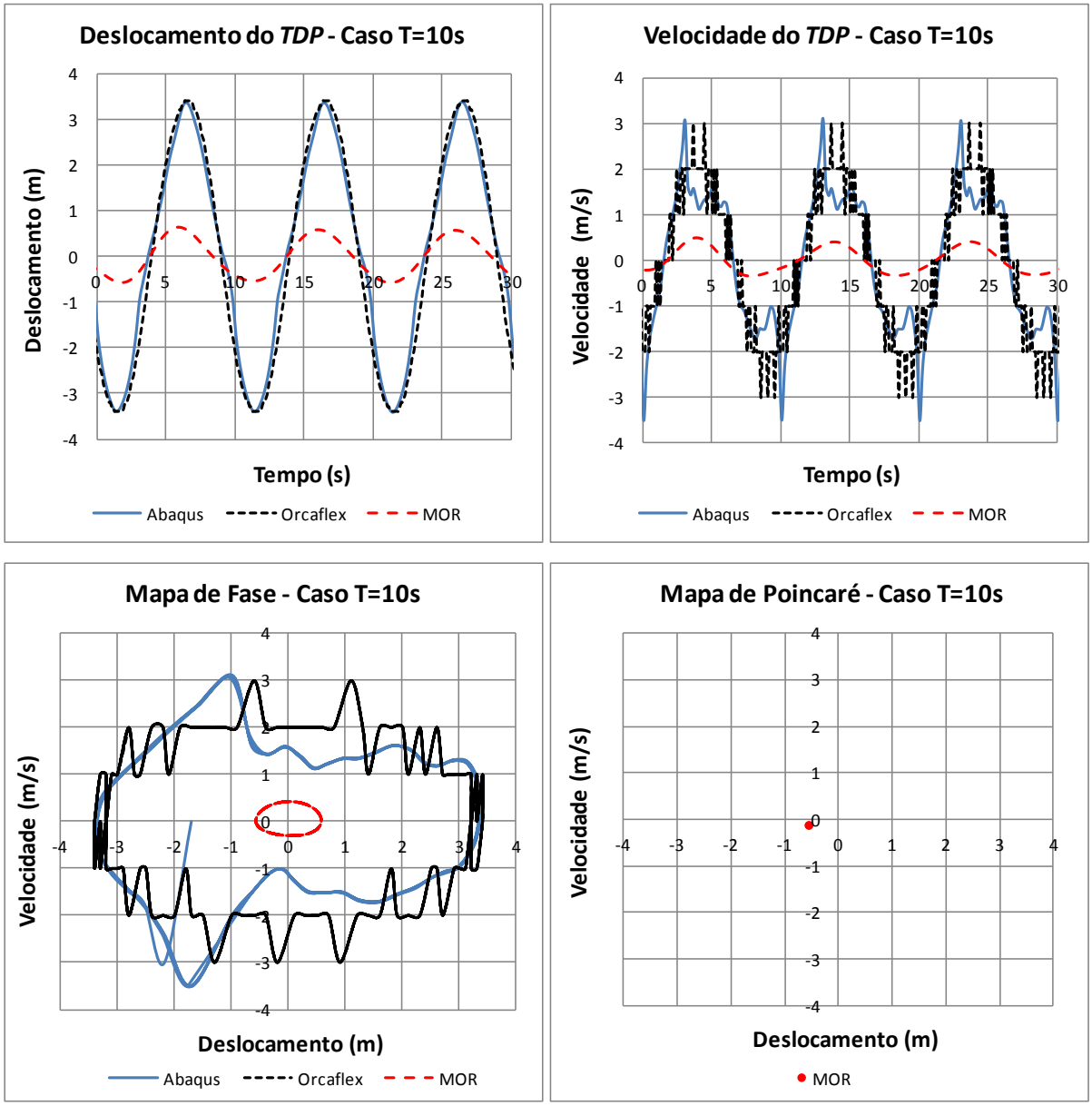



**Figura 23: Deslocamento, velocidade, mapa de fase e mapa de Poincaré do *TDP* para o caso T=10s**

Para o MOR, é possível fazer a varredura de alguns parâmetros e analisar em quais condições são disparadas as ressonâncias paramétricas. Na Figura 24, Figura 25 e Figura 26, foram construídos mapas cromáticos onde os valores mostrados nos quadrados são os deslocamentos de pico a pico do *TDP* para cada par de relações de frequências $\Omega/\omega_n$ e relações de trações $T_1/T_0$. O eixo da tração tem um valor máximo igual à unidade, pois o MOR não avalia a compressão dinâmica ($T_1>T_0$) apropriadamente. O ponto preto mostra onde o caso T=2,9s se localiza no mapa. O ponto vermelho é o caso T=5,2s e o ponto azul é o caso T=10s.

O mapa da Figura 24 é para taxa de amortecimento $\xi$=10%, que é a taxa adotada nos três casos estudados. No mapa é possível ver que pares de frequência e tração disparam a ressonância paramétrica 2:1. Ressonâncias para outras relações de frequências também são observadas, como 1:1 e 1:0,5. Teoricamente, existem infinitas regiões de instabilidade paramétrica, como mostra o diagrama de Strutt da Figura 8. As ressonâncias ocorrem para $\delta=n^2$, onde n é um número inteiro positivo e $\delta$ é definido conforme equação (3). Transformando o parâmetro $\delta$ no parâmetro $\Omega/\omega_n$, as ressonâncias são observadas para valores de $\Omega/\omega_n=2/n$, *i.e.*, $\Omega/\omega_n=2$, $\Omega/\omega_n=1$, $\Omega/\omega_n=0{,}667$, $\Omega/\omega_n=0{,}5$, e assim por diante. Para os casos estudados, um diagrama de Strutt análogo pode ser construído, linearizando a equação (59) e admitindo taxa de amortecimento igual a zero:

$$\ddot{U} + \hat{a}_{1,0}\dot{U} + \left[\hat{a}_{2,0} + \hat{a}_{2,1}cos(\Omega\tau) + \hat{a}_{2,2}cos\,(\Omega\tau - \varphi) + \hat{a}_{2,3}cos\,(\Omega\tau)cos\,(\Omega\tau - \varphi)\right]U = \hat{b}_{0,1}\,cos(\Omega\tau) + \hat{b}_{0,2}\,cos(\Omega\tau - \varphi) + \hat{b}_{0,3}\,cos(\Omega\tau)\,cos(\Omega\tau - \varphi) \quad (60)$$

A Figura 27 mostra dois diagramas de Strutt equivalentes para o caso não amortecido, um na base do parâmetro $\Omega/\omega_n$ e outro na base do parâmetro $\delta$. Nota-se que as ressonâncias paramétricas ocorrem para as mesmas relações de frequências apresentadas no diagrama de Strutt da Figura 8. Adicionalmente, a equação não linear completa é representada no mesmo diagrama pela curva que mostra os limites em que as respostas não puderam ser encontradas pelo MOR em função de problemas de convergência. É possível ver alguma correlação com as fronteiras de instabilidade da equação linearizada.

O mapa da Figura 25 é para taxa de amortecimento ξ=5%. Ele mostra como as regiões de instabilidade paramétrica crescem com a diminuição do amortecimento. O mapa da Figura 26 é para ξ=0%. A zona vermelha indica os casos em que o MOR não pôde encontrar soluções. Esta mesma zona é mostrada no primeiro gráfico da Figura 27.

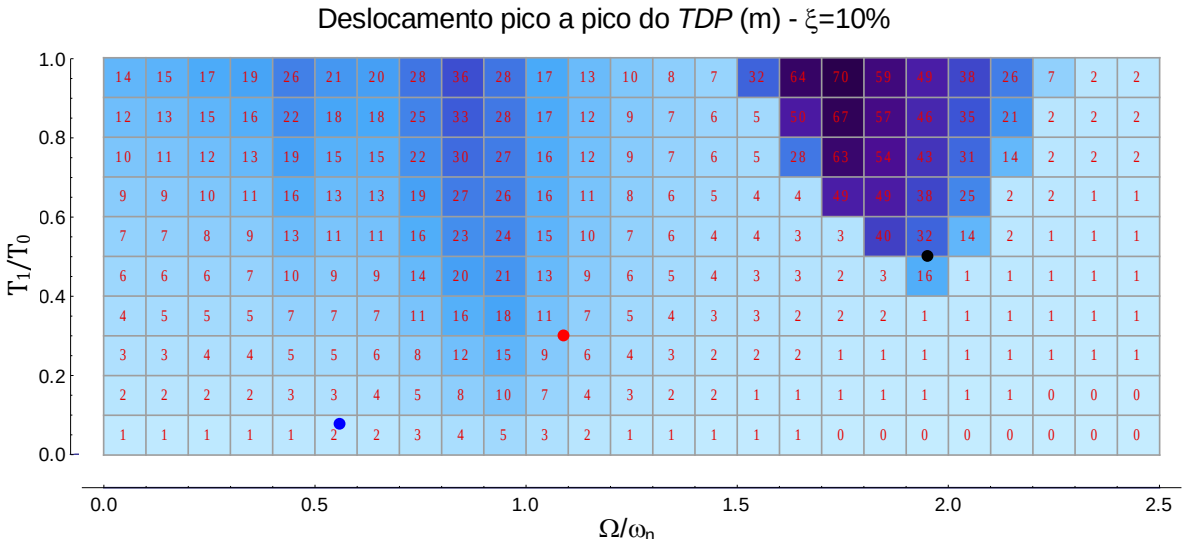



**Figura 24: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para taxa de amortecimento ξ=10%**

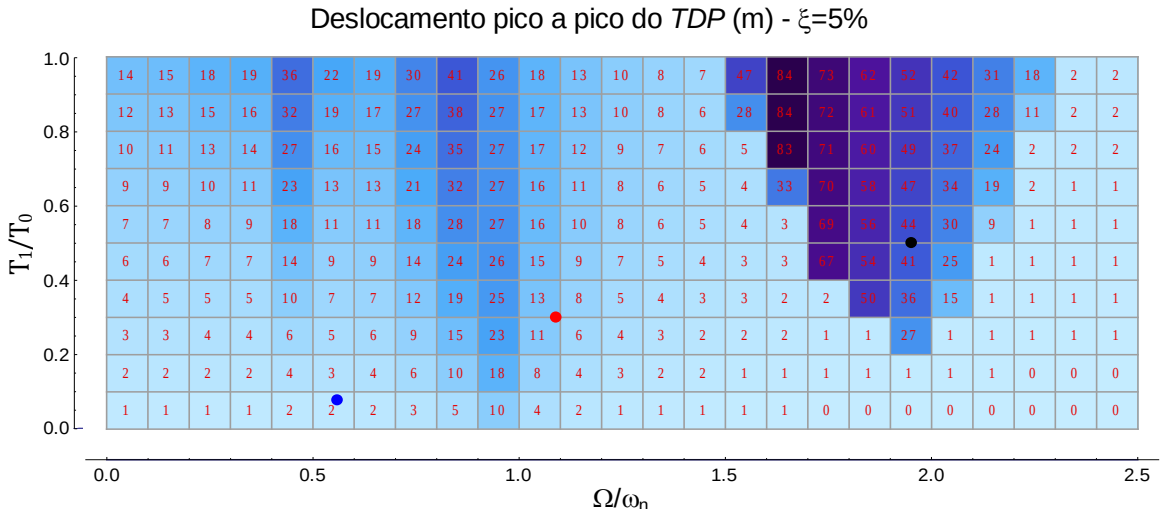



**Figura 25: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para taxa de amortecimento ξ=5%**

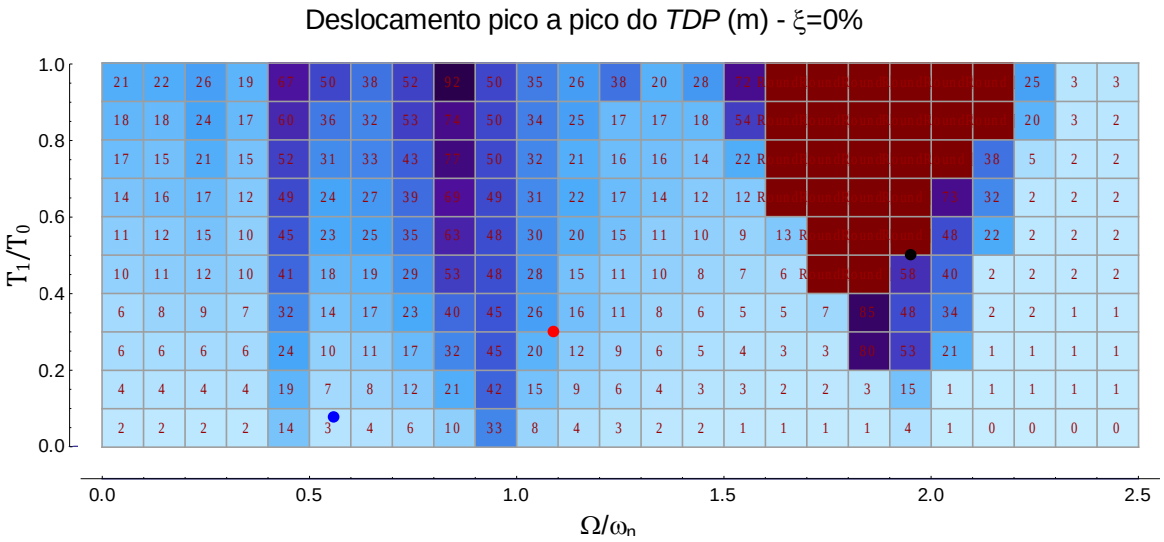



**Figura 26: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para taxa de amortecimento ξ=0%**

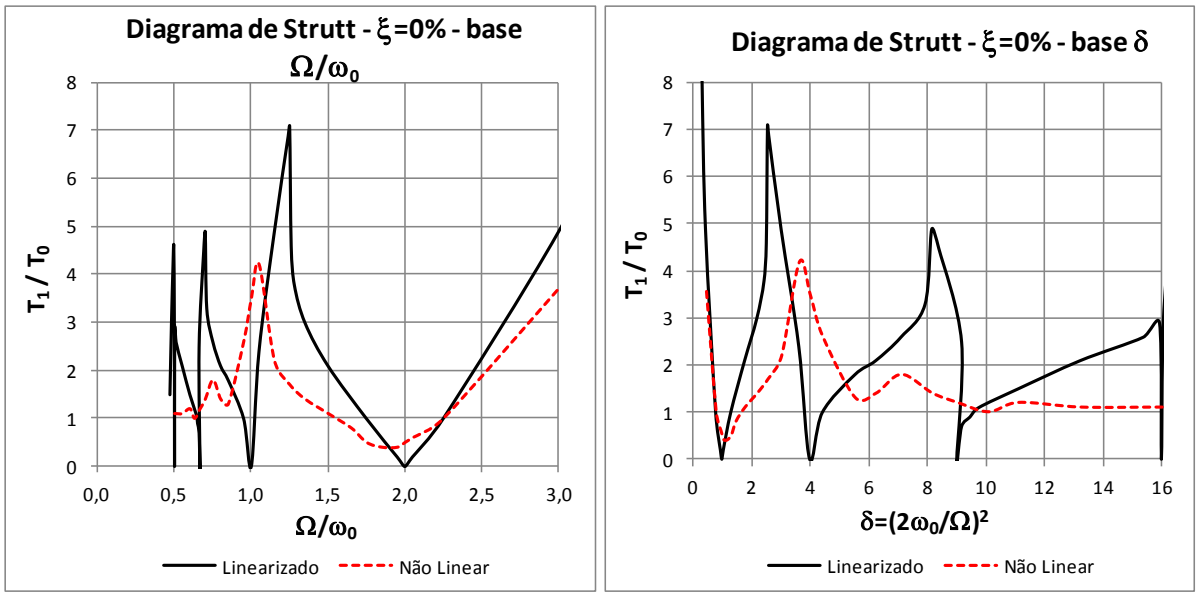



**Figura 27: Diagramas de Strutt para o caso não amortecido**

## 5.4. Comparação entre MOR sem super-harmônicos e MOR com super-harmônicos até quarta ordem

No desenvolvimento analítico do MOR, surgiram diversos super-harmônicos $cos^n(\Omega_\mathrm{d}t - \varphi)$ correspondentes à solução "quase-estática". Estes super-harmônicos foram eliminados da formulação, pois estão associados a termos pequenos ${c_1}^n$, comparados a $c_0$. Para validar este procedimento, as respostas dinâmicas do MOR adotado no item 5.3, ou seja, sem os super-harmônicos, serão comparadas com as respostas obtidas por um MOR com super-harmônicos de até quarta ordem.

No MOR de até quarta ordem, as equações (51) e (56) ficariam, respectivamente:

$$a_i = a_{i,0} + a_{i,1}cos(\Omega\tau) + a_{i,2}cos(\Omega\tau - \varphi) + a_{i,3}cos(\Omega\tau)cos(\Omega\tau - \varphi) \tag{61}$$
$$+a_{i,4}cos^2(\Omega\tau - \varphi) + a_{i,5}cos(\Omega\tau)cos^2(\Omega\tau - \varphi)$$
$$+a_{i,6}cos^3(\Omega\tau - \varphi) + a_{i,7}cos(\Omega\tau)cos^3(\Omega\tau - \varphi)$$
$$+a_{i,8}cos^4(\Omega\tau - \varphi) + a_{i,9}cos(\Omega\tau)cos^4(\Omega\tau - \varphi)$$

$$b_i = b_{i,0} + b_{i,1}cos(\Omega\tau) + b_{i,2}cos(\Omega\tau - \varphi) + b_{i,3}cos(\Omega\tau)cos(\Omega\tau - \varphi) \tag{62}$$
$$+b_{i,4}cos^2(\Omega\tau - \varphi) + b_{i,5}cos(\Omega\tau)cos^2(\Omega\tau - \varphi)$$
$$+b_{i,6}cos^3(\Omega\tau - \varphi) + b_{i,7}cos(\Omega\tau)cos^3(\Omega\tau - \varphi)$$
$$+b_{i,8}cos^4(\Omega\tau - \varphi) + b_{i,9}cos(\Omega\tau)cos^4(\Omega\tau - \varphi)$$

A Figura 28 mostra os deslocamentos e as velocidades do *TDP* ao longo do tempo para o MOR sem super-harmônicos e para o MOR com super-harmônicos até quarta ordem para o caso T=2,9s. Nota-se que as respostas são idênticas, comprovando que os termos super-harmônicos são pequenos e não afetam a resposta final. Mesmo aumentando o deslocamento vertical em 10 vezes, ou seja, de 0,53m para 5,3m, as respostas são as mesmas, como mostra a Figura 29. A mesma constatação é observada para o caso T=5,2s na Figura 30 e para o caso T=10s na Figura 31.

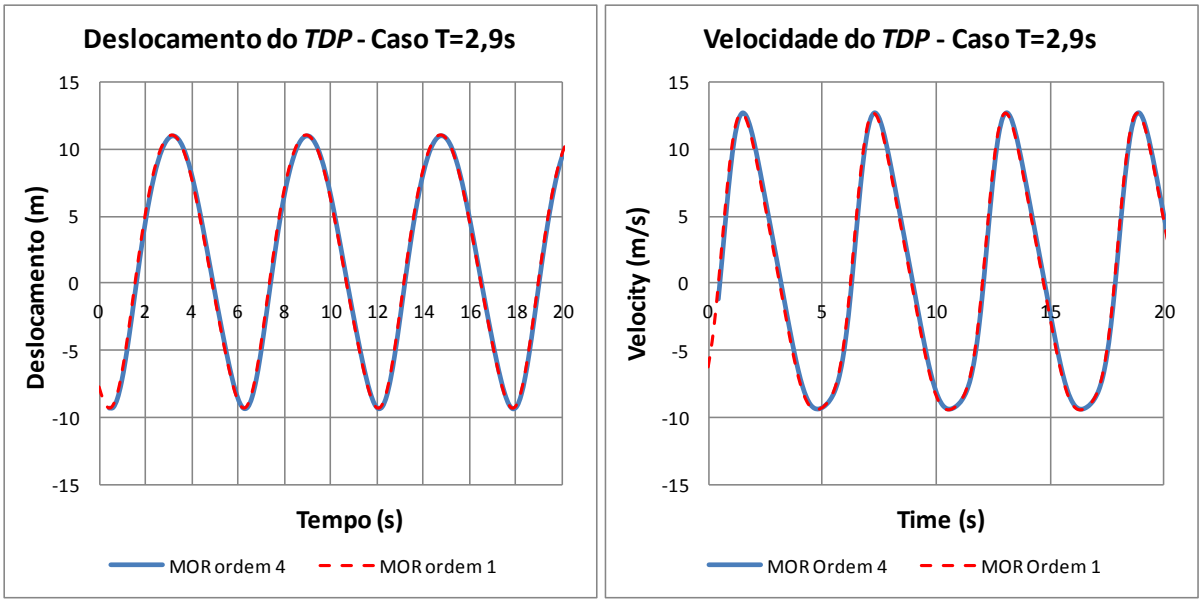



**Figura 28: Comparação das respostas entre MOR's com e sem super-harmônicos para o caso T=2,9s**

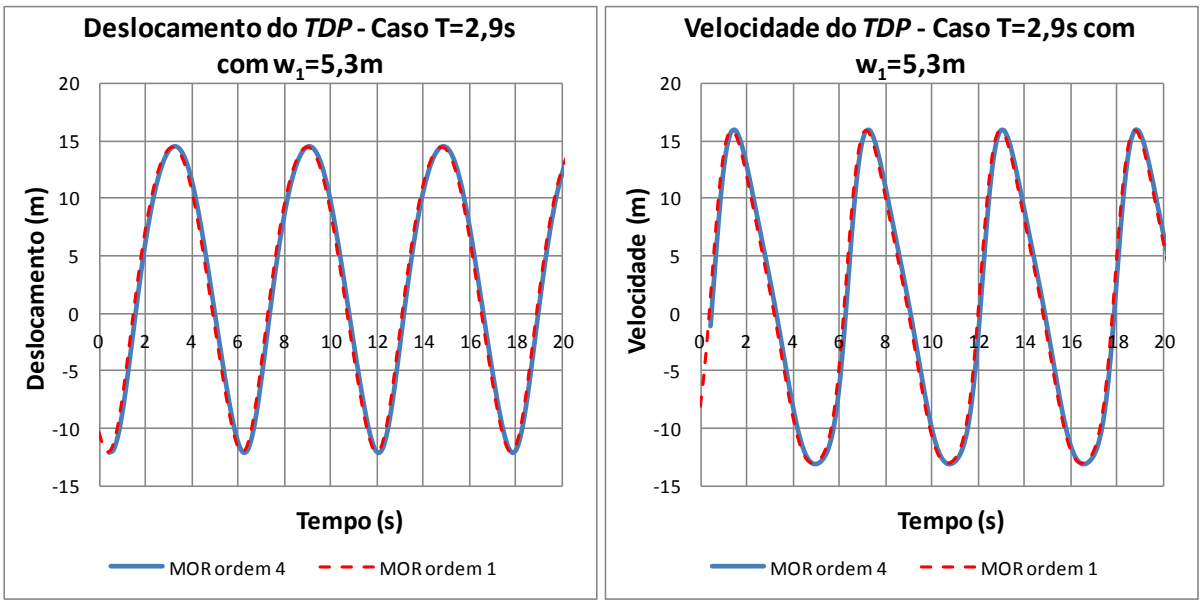



**Figura 29: Comparação das respostas entre MOR's com e sem super-harmônicos para o caso T=2,9s com $w_1$=5,3m**

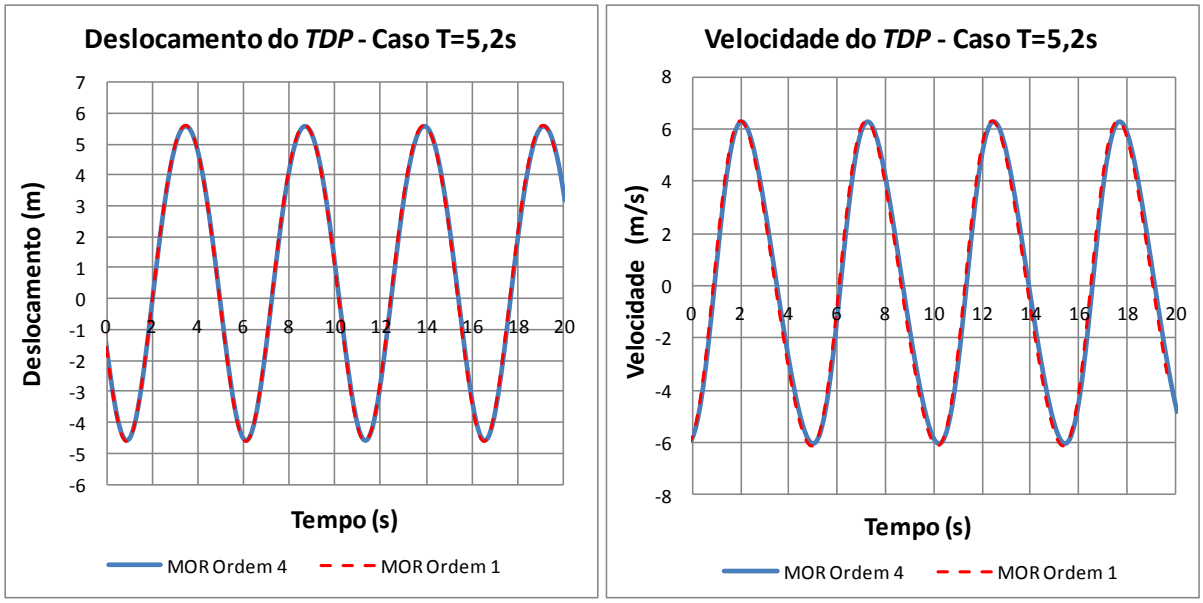



**Figura 30: Comparação das respostas entre MOR's com e sem super-harmônicos para o caso T=5,2s**

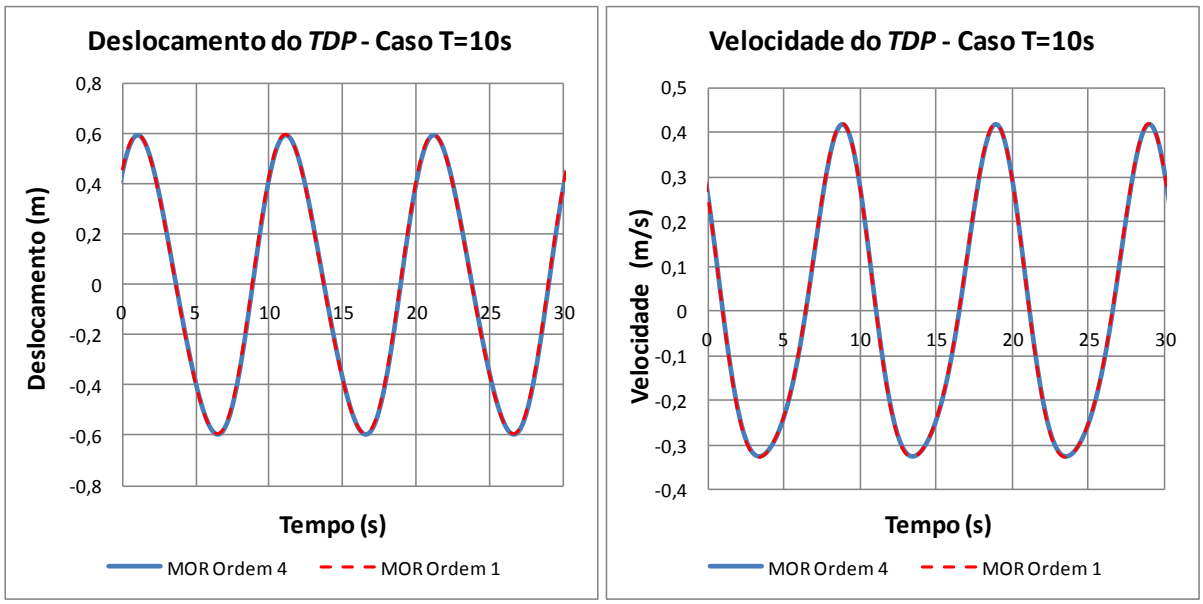



**Figura 31: Comparação das respostas entre MOR's com e sem super-harmônicos para o caso T=10s**

## 5.5. Influência do deslocamento imposto no ponto “O”

A principal alteração deste trabalho em relação ao trabalho de Mansur [5] foi a inclusão do deslocamento vertical no ponto “O”. Neste item será discutida a relevância deste deslocamento. Na Figura 32 estão representadas as respostas do MOR para três deslocamentos verticais impostos no ponto “O” para o caso T=2,9s, sendo um para deslocamento nulo, outro para o deslocamento dado pelo Abaqus (w1=0,53m) e o último para um deslocamento dez vezes maior do que o valor dado pelo Abaqus (w1=5,3m). O modelo de Mansur não foi incluído no gráfico, pois outras alterações foram feitas além da inclusão do deslocamento vertical no ponto “O”, como a alteração na lei de decaimento da tração e a inclusão de fatores de correções das funções estáticas, que alteram significativamente o comprimento da *TDZ* considerada no modelo matemático e, consequentemente, as frequências naturais.

É claro que o deslocamento vertical no ponto “O” está acoplado à variação da tração neste mesmo ponto, pois os dois são efeitos causados por um deslocamento imposto no *hang-off* no modelo global do *riser*. Esta análise visa apenas a entender melhor a influência deste deslocamento imposto, não representando mais um caso típico de *riser*, pois a tração dinâmica é mantida a mesma enquanto que o deslocamento varia.

Na Figura 33, a comparação é feita para o caso T=5,2s e na Figura 34, a comparação é feita para o caso T=10s.

Nos três casos analisados, as respostas do MOR com deslocamento vertical dado pelo Abaqus deram muito parecidas com as respostas do MOR sem deslocamento. Portanto, a inclusão do deslocamento não afetou significativamente as respostas no *TDP* para os casos estudados. As amplitudes de *heave* adotadas foram determinadas para que não ocorresse compressão dinâmica no *riser*, e por isso foram limitadas em 0,5m para o caso T=2,9s e 1,0m para os casos T=5,2s e T=10s. Mesmo aumentando os deslocamentos em dez vezes, as respostas não foram amplificadas nos casos T=5,2s e T=10s. Apenas no caso T=2,9s, que está sob ressonância paramétrica, as respostas foram amplificadas.

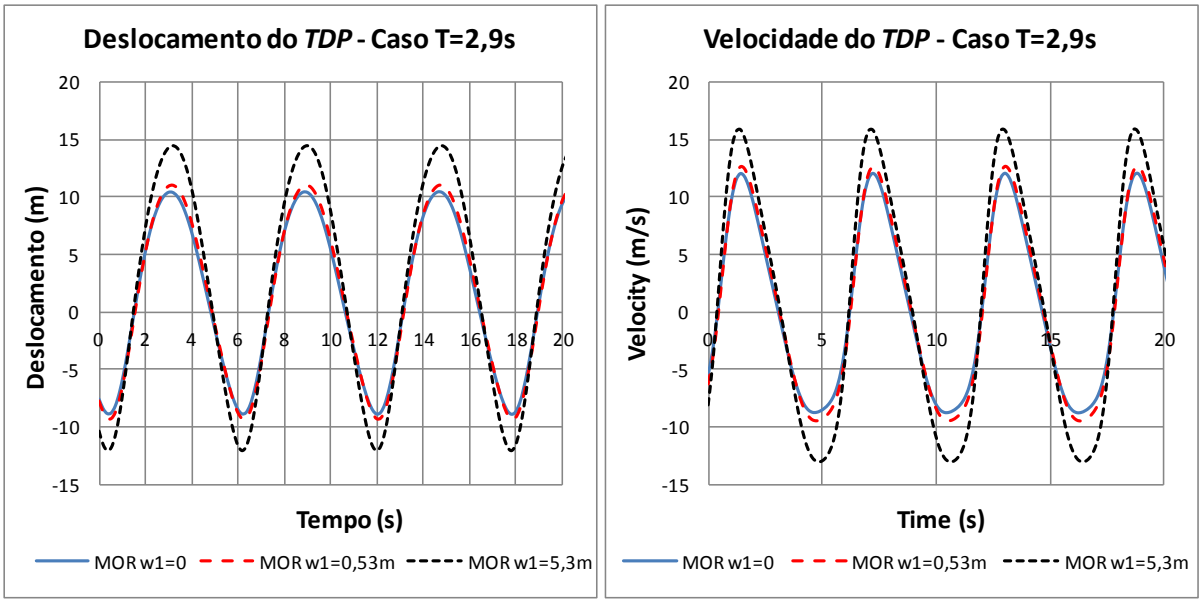



**Figura 32: Comparação das respostas entre MOR's com e sem deslocamento imposto no ponto "O" para o caso T=2,9s**

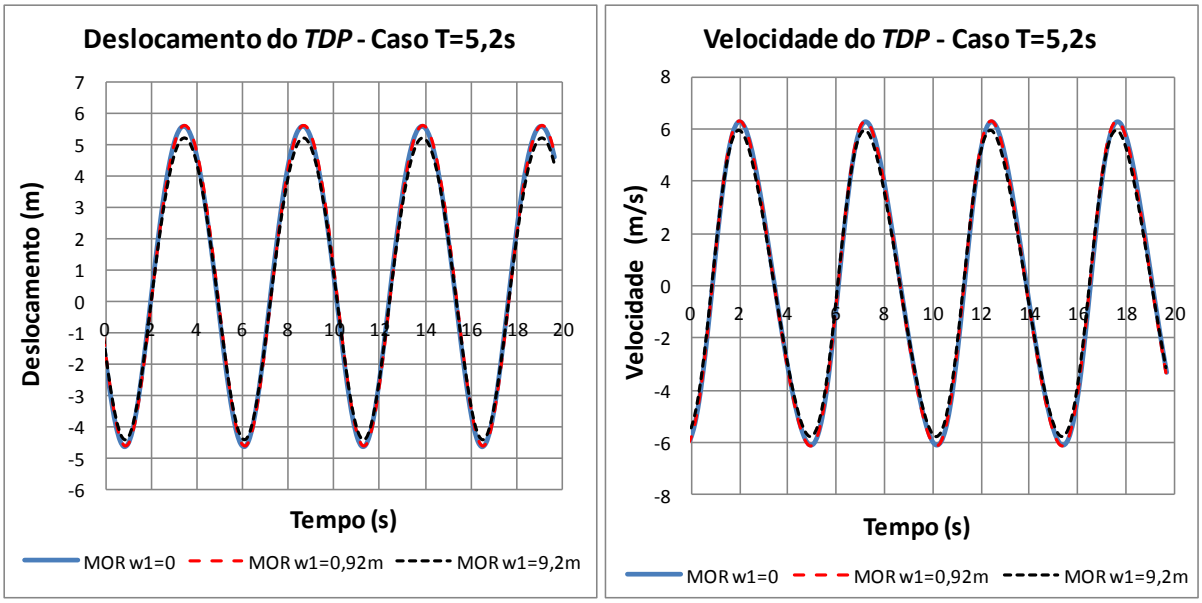



**Figura 33: Comparação das respostas entre MOR's com e sem deslocamento imposto no ponto "O" para o caso T=5,2s**

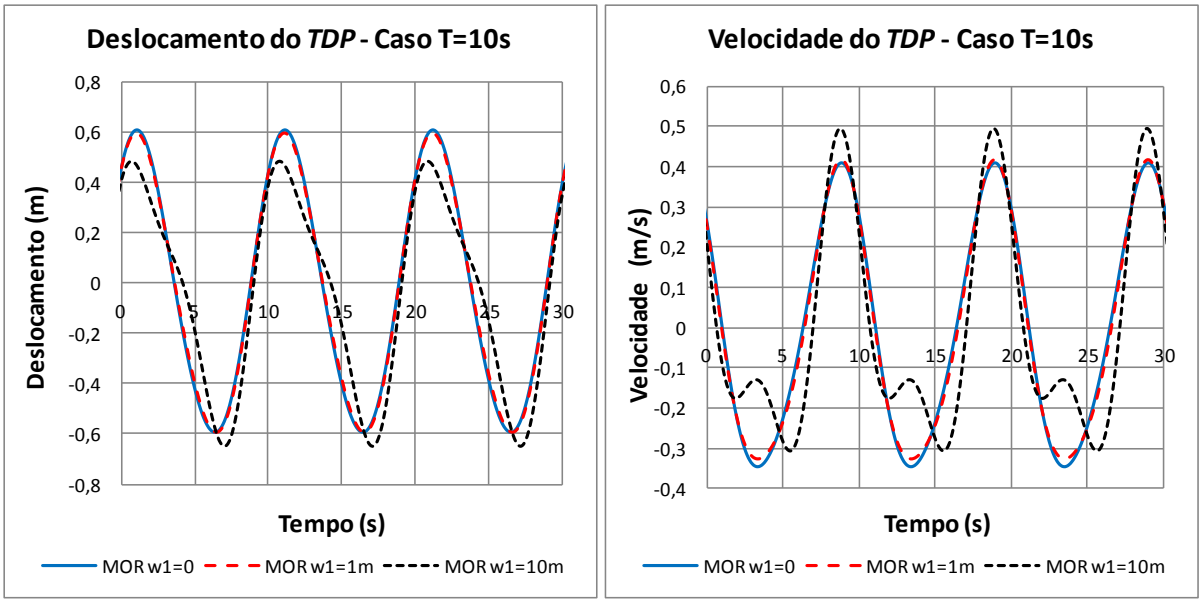



**Figura 34: Comparação das respostas entre MOR's com e sem deslocamento imposto no ponto "O" para o caso T=10s**

## 5.6. Influência das condições iniciais

Neste item, diferentes condições iniciais (deslocamento e velocidade no *TDP*) são impostas ao MOR, na tentativa de buscar diferentes atratores. Quando pequenas alterações nas condições iniciais levarem a diferentes atratores, mais complexo será o sistema dinâmico. Com a variação dos parâmetros de controle da equação de movimento, as bacias de atração podem sofrer alterações e apresentar perda da integridade de suas fronteiras. Este estudo de sensibilidade é denominado "integridade das bacias de atração". Aqui, os atratores são identificados pela amplitude pico a pico de deslocamento do *TDP*. Esta é uma forma simplista de mapear as bacias de atração, já que um atrator não é definido apenas pela amplitude de deslocamento, mas também pela forma de vibrar e pela frequência de vibração.

Apenas o caso T=2,9s é estudado, pois foi o único que entrou em ressonância paramétrica e, portanto, apresenta grandes deslocamentos, podendo também ter diferentes atratores para diferentes condições iniciais. O parâmetro de controle variado é a taxa de amortecimento. Na Figura 35 é apresentado o mapa de

“amplitude pico a pico de deslocamentos” do *TDP* para taxa de amortecimento ξ=10%, que foi o caso analisado na comparação com os resultados do Abaqus/Orcaflex. O mapa identifica apenas um atrator (Figura 21). Pelo critério da amplitude de deslocamento não é possível afirmar com toda certeza de que há apenas um atrator. Porém, foram “processados” diversos casos de condições iniciais manualmente e todos levaram ao mesmo atrator. Portanto, é provável que neste caso, o critério de amplitude de deslocamento seja suficiente para identificar os atratores. Existe ainda a possibilidade de encontrar mais atratores adotando uma melhor discretização do mapa.

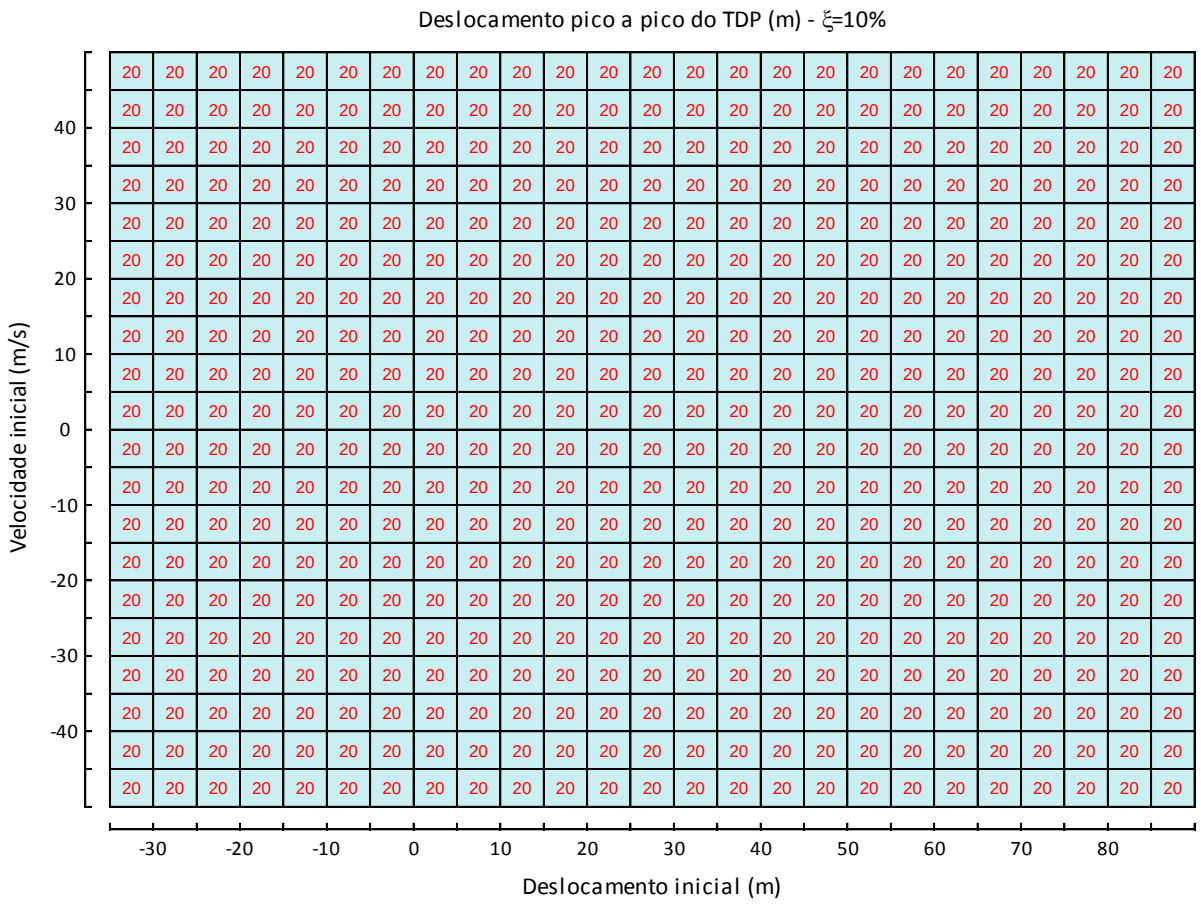



**Figura 35: Mapa de “amplitude pico a pico de deslocamento” do *TDP* para diferentes condições iniciais - caso T=2,9s com ξ=10%**

A Figura 36 apresenta o mapa para ξ=5%, onde ainda se identifica apenas um atrator. Os quadrados vermelhos são casos em que não houve convergência numérica do MOR. O atrator está representado na Figura 37, onde se nota o período dobrado no mapa de Poincaré.

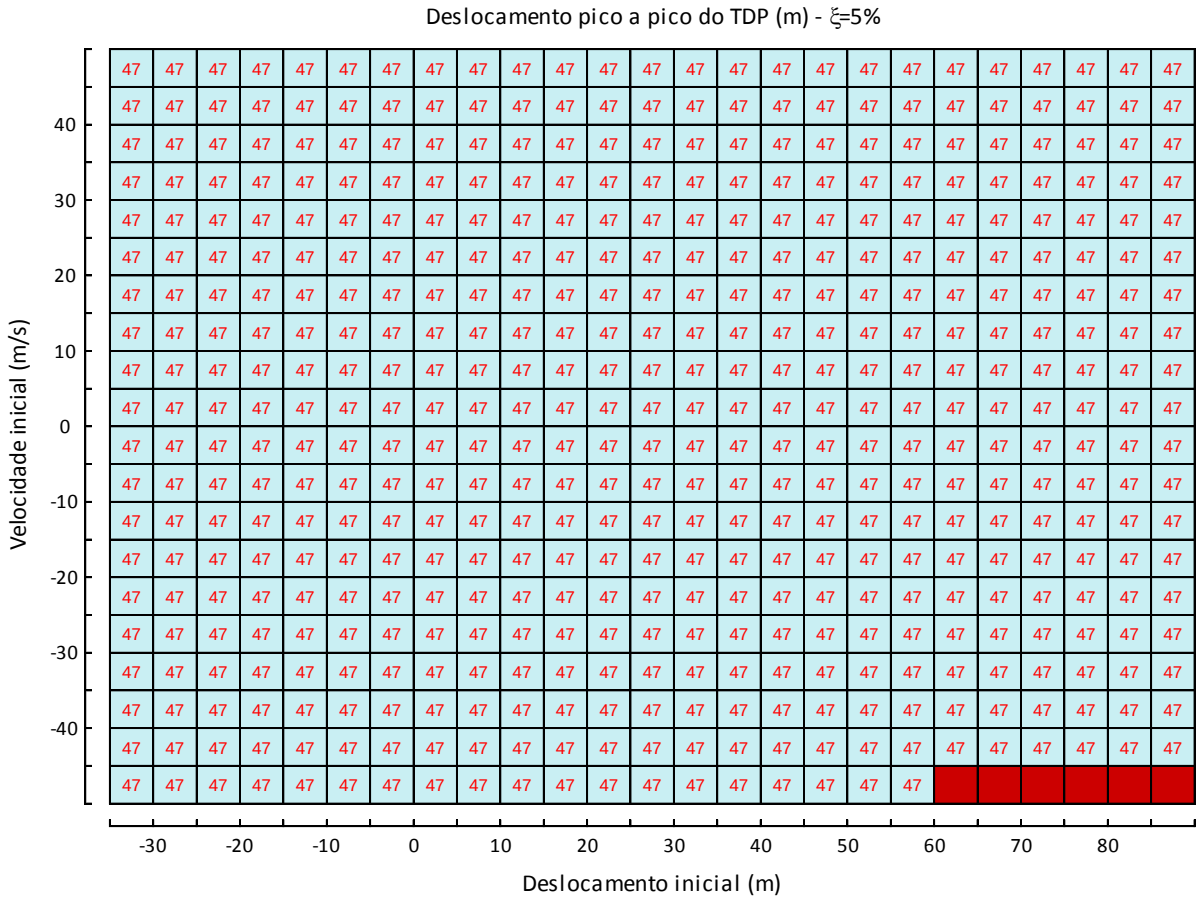



**Figura 36: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para diferentes condições iniciais - caso T=2,9s com ξ=5%**

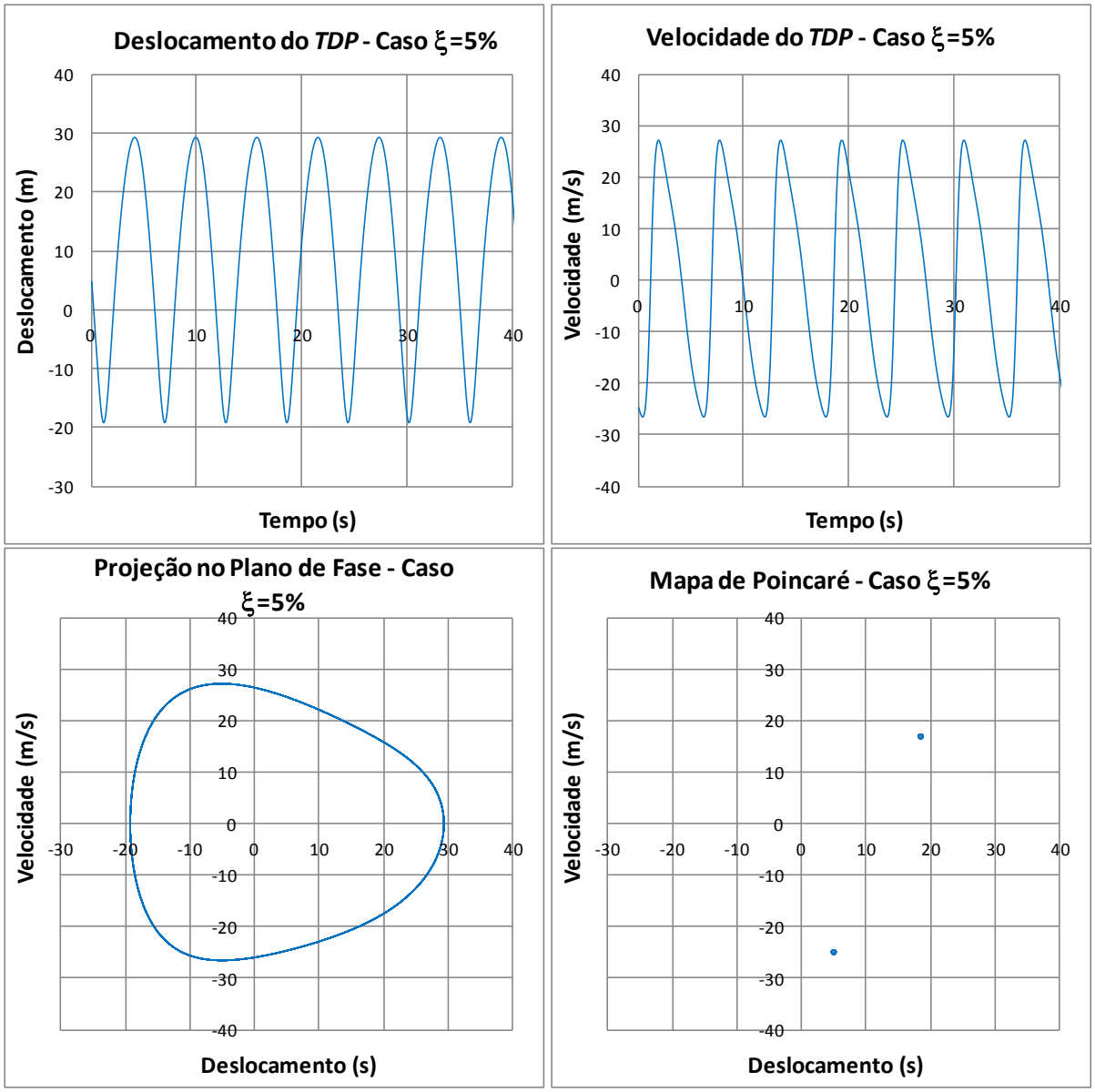



**Figura 37: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=5%**

A Figura 38 apresenta o mapa para ξ=1%, onde são identificados três atratores, que estão representados nas Figuras 39 a 41. O atrator 1 tem período dois bem definido no mapa de Poincaré e amplitude pico a pico de 52 metros. O atrator 2 tem período cinco e amplitude pico a pico de 120 metros. Na projeção no plano de fase nota-se uma brusca mudança na velocidade, o que pode representar impactos contra o solo. O atrator 3 tem período três, amplitude de 153m e também apresenta uma brusca mudança na velocidade do *TDP*.

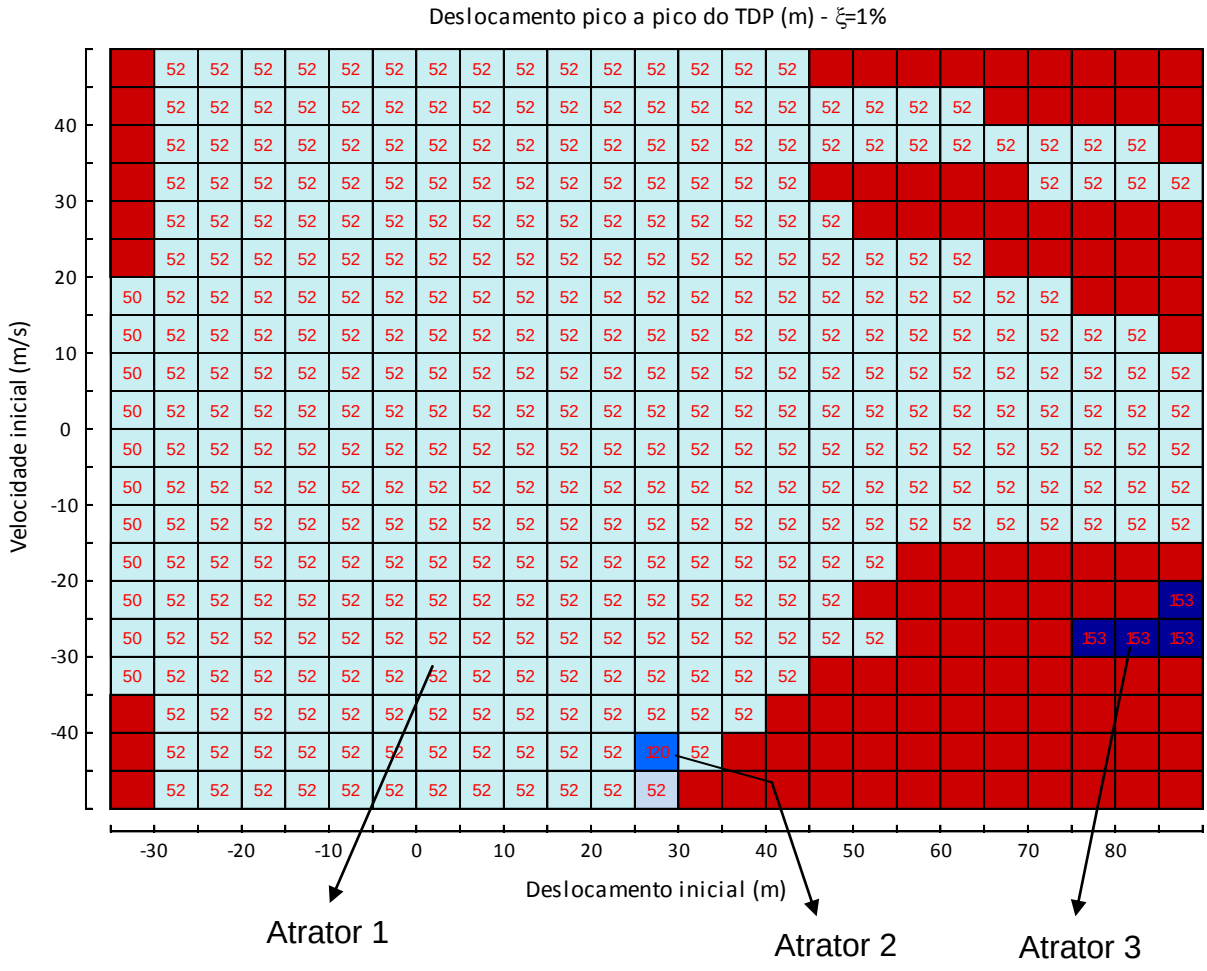



**Figura 38: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para diferentes condições iniciais - caso T=2,9s com ξ=1%**

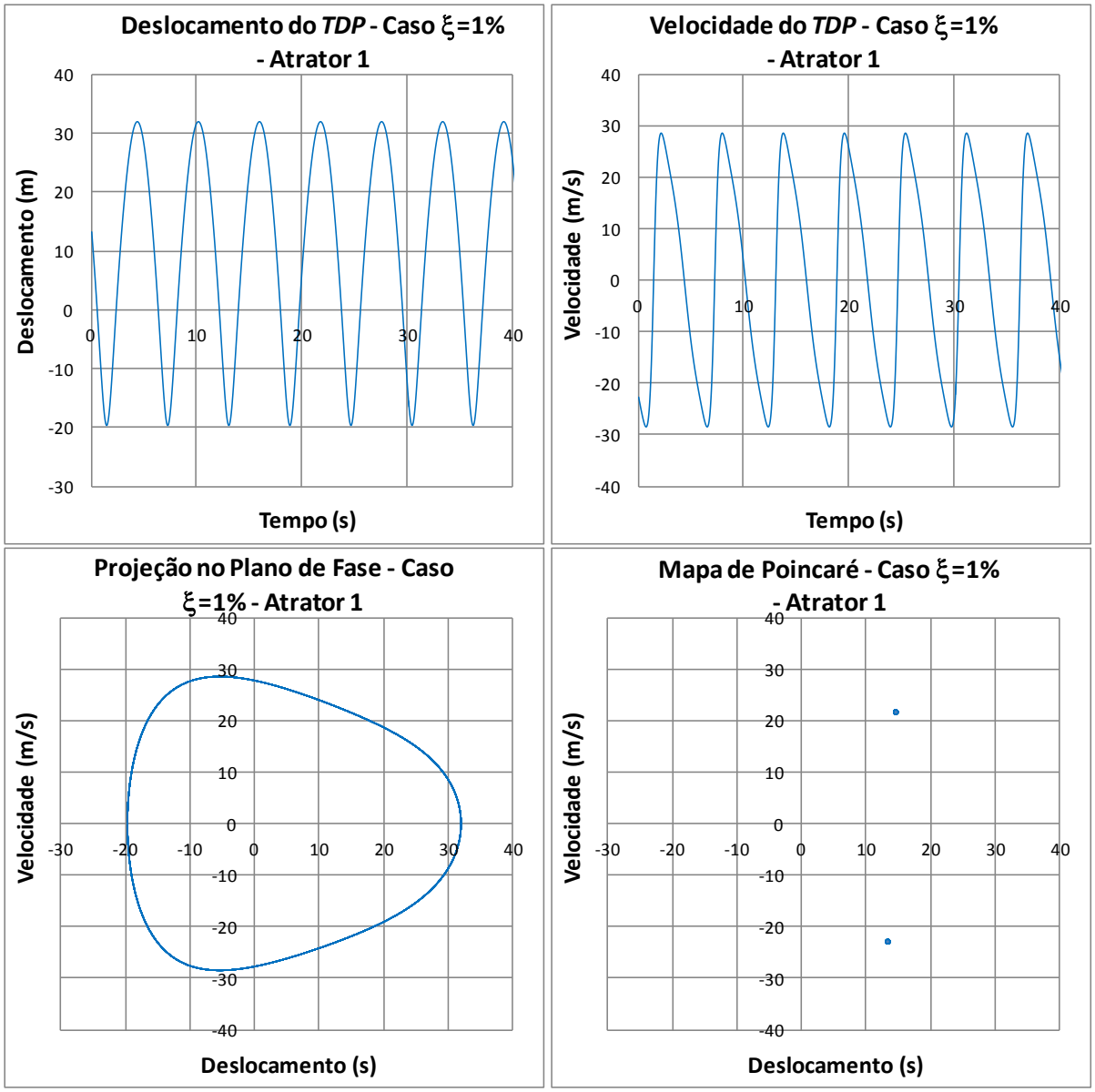



**Figura 39: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=1% - Atrator 1**

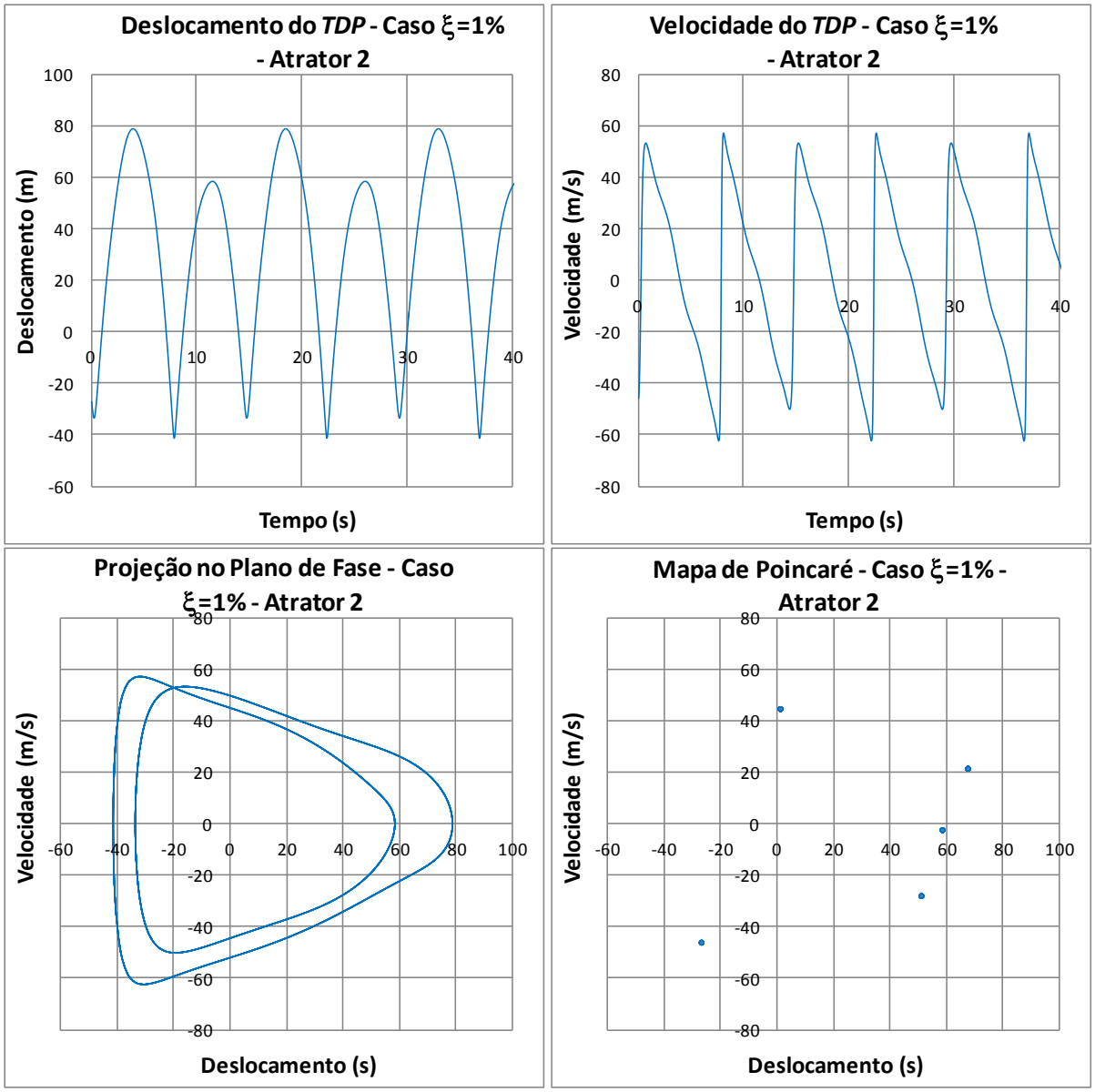



**Figura 40: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=1% - Atrator 2**

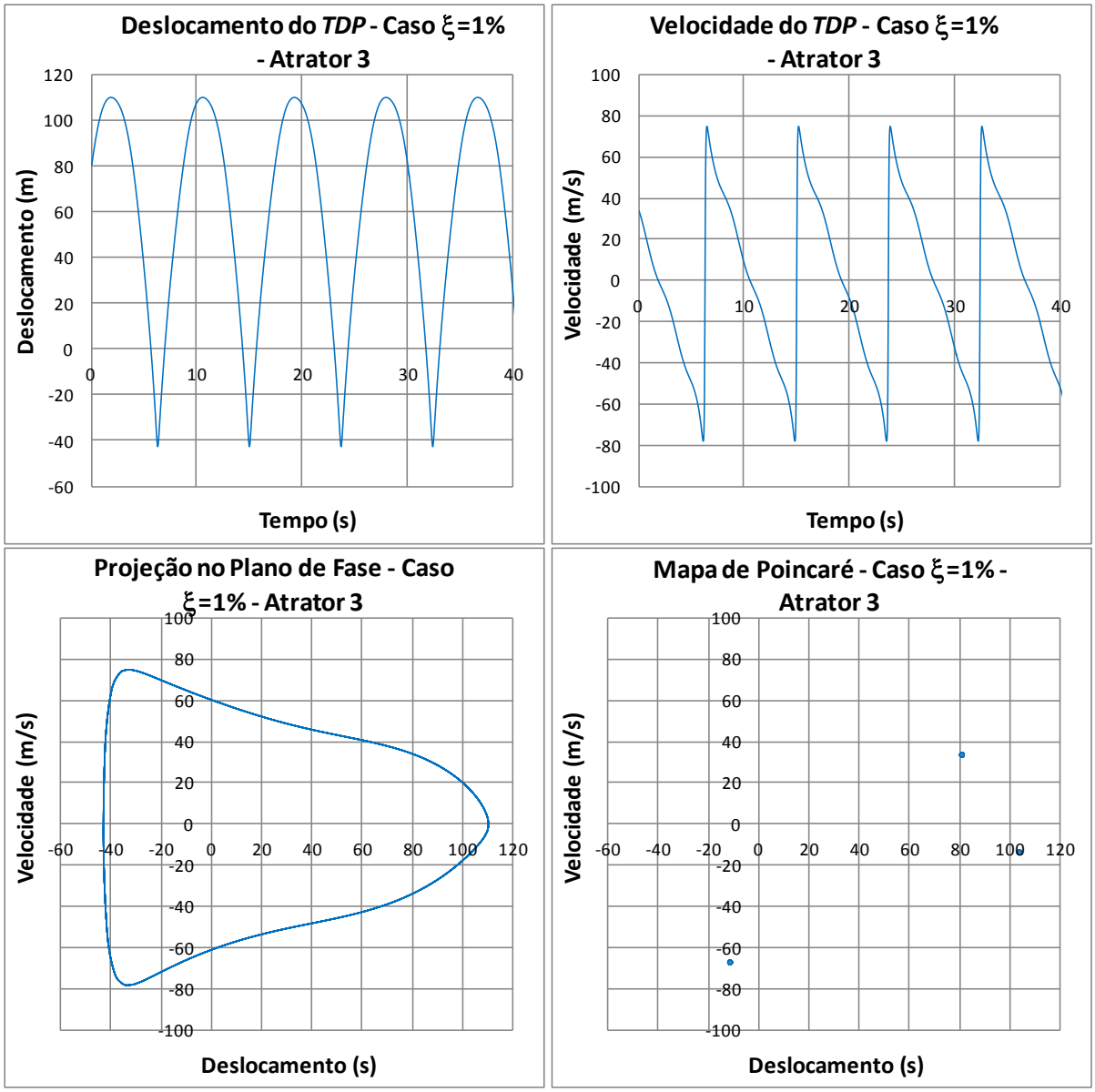



**Figura 41: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=1% - Atrator 3**

A Figura 42 apresenta o mapa para ξ=0%, onde são identificados diversos atratores. Neste caso, o critério de amplitude de deslocamento não é bom para mapear os atratores, pois existem atratores com amplitudes bem próximas e bem sensíveis às condições iniciais. Nas Figuras 43 a 46 são apresentados quatro atratores para ξ=0%. O atrator 1 apresenta "batimentos" com picos acentuados para determinado intervalo de tempo. O atrator 2 tem período dois com pequenas variações nas amplitudes a cada período. O atrator 3 apresenta uma resposta mais complexa, podendo estar na proximidade do caos. O atrator 4 tem grandes amplitudes de deslocamento e consequentemente uma brusca mudança de velocidade, como pode ser visto na projeção no plano de fase.

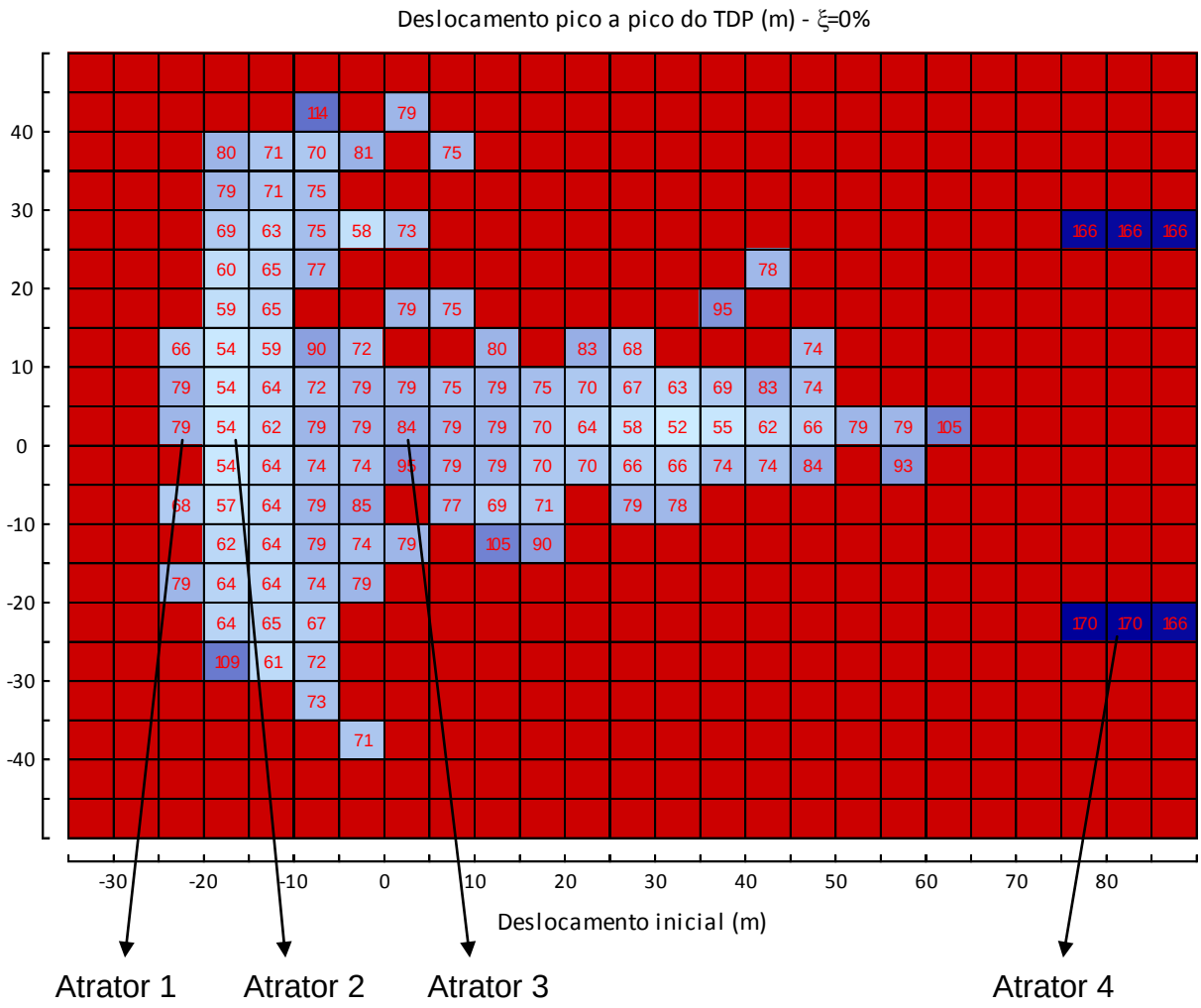



**Figura 42: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para diferentes condições iniciais - caso T=2,9s com ξ=0%**

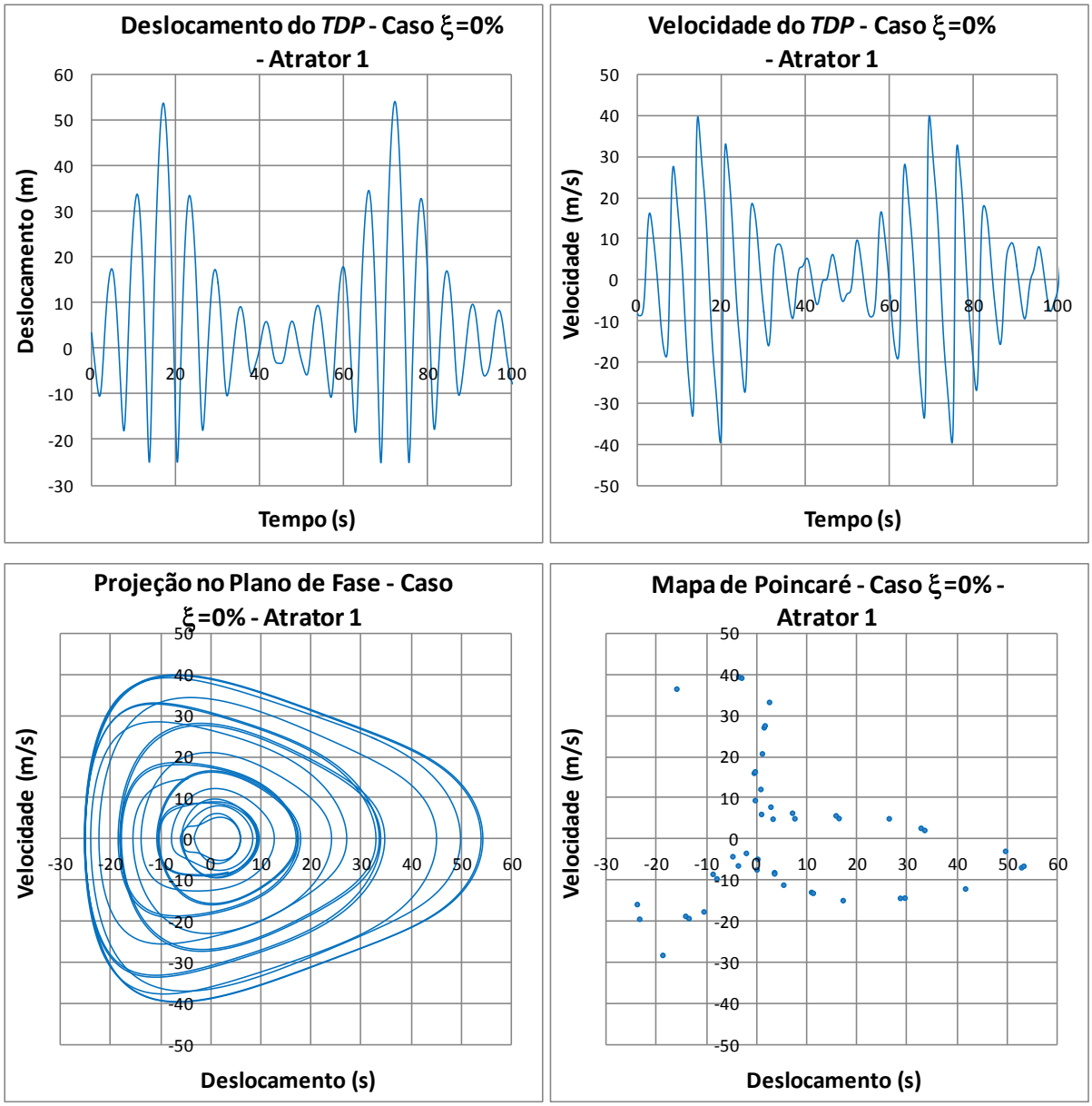



**Figura 43: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=0% - Atrator 1**

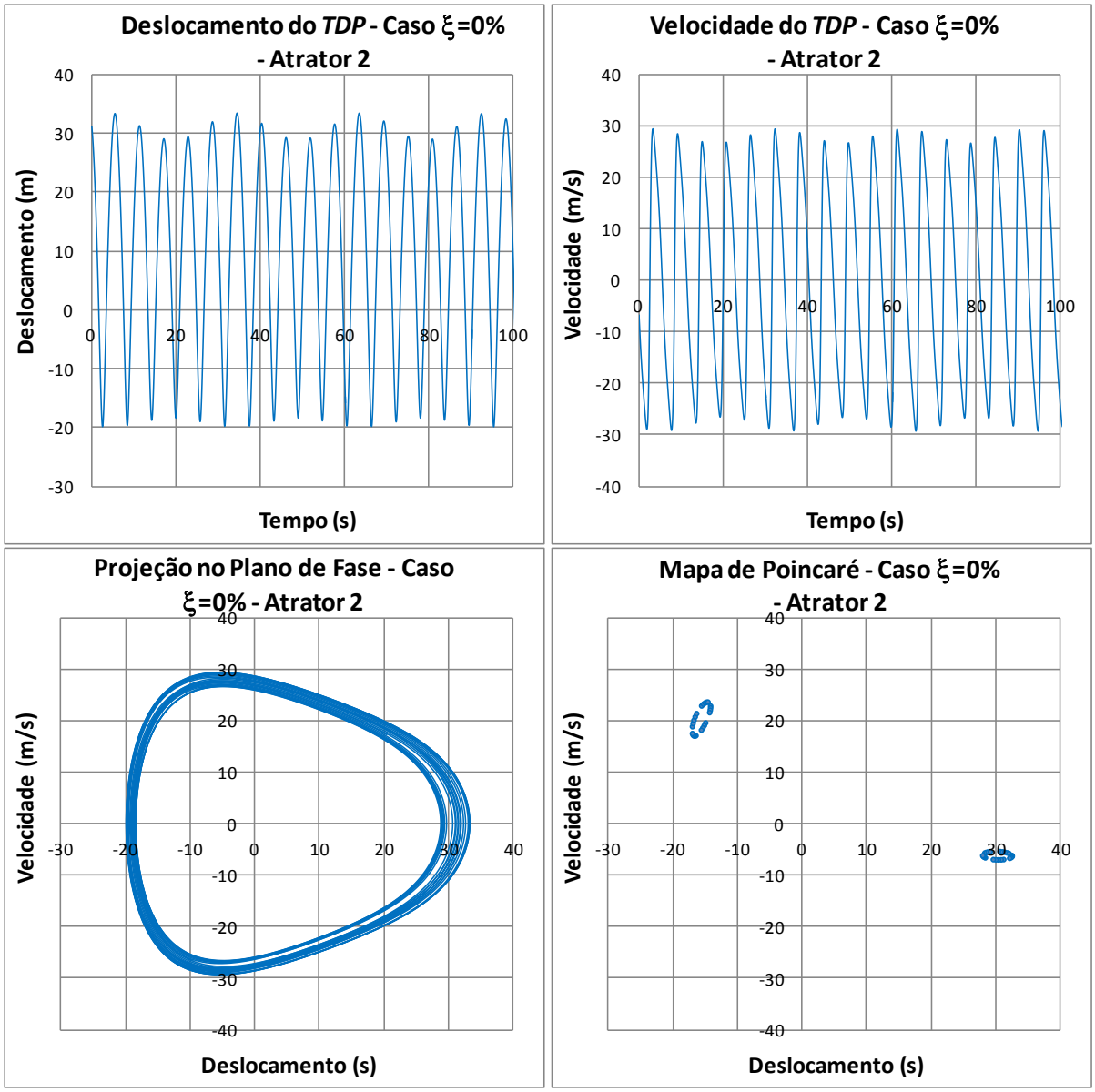



**Figura 44: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=0% - Atrator 2**

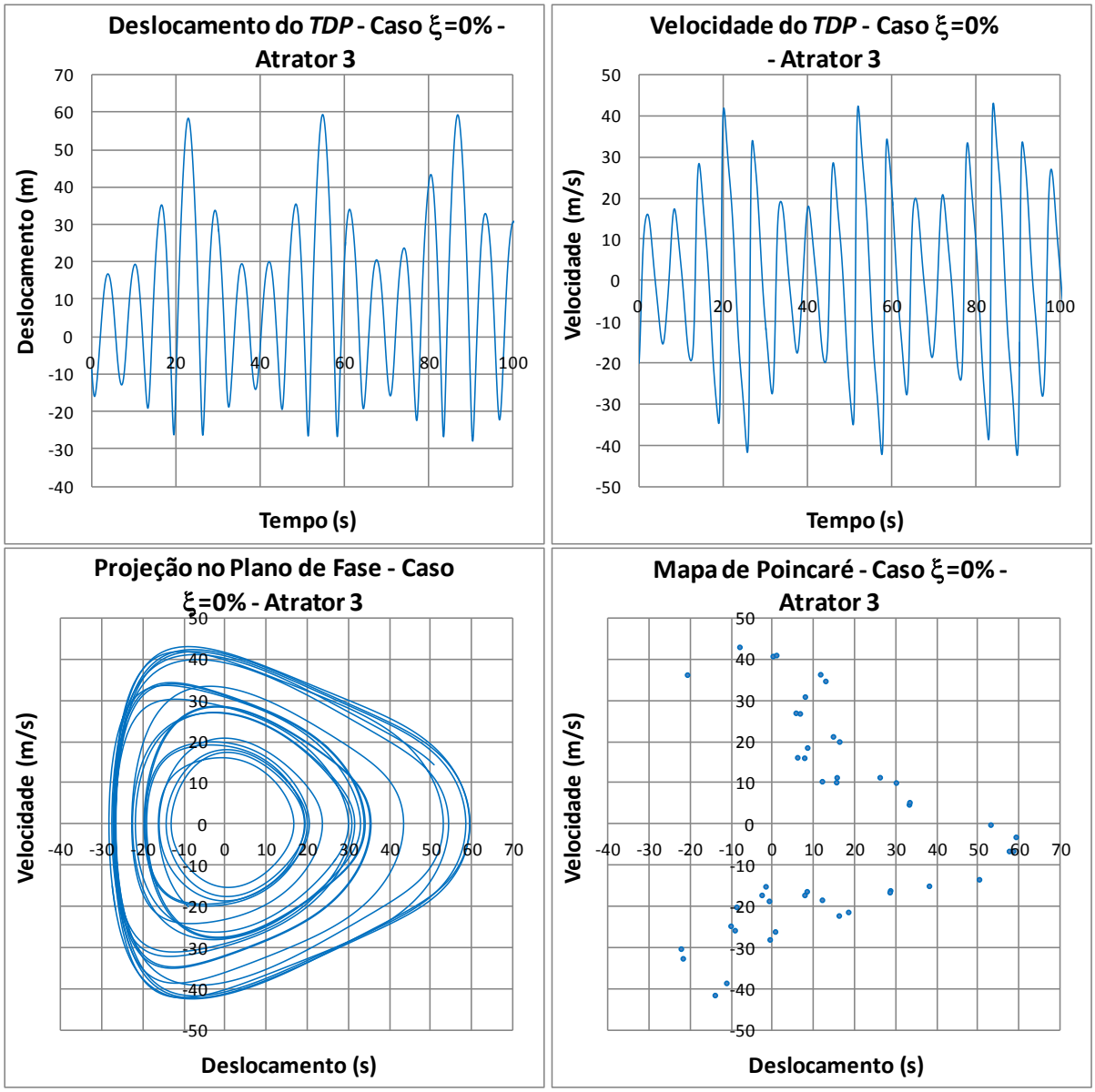



**Figura 45: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=0% - Atrator 3**

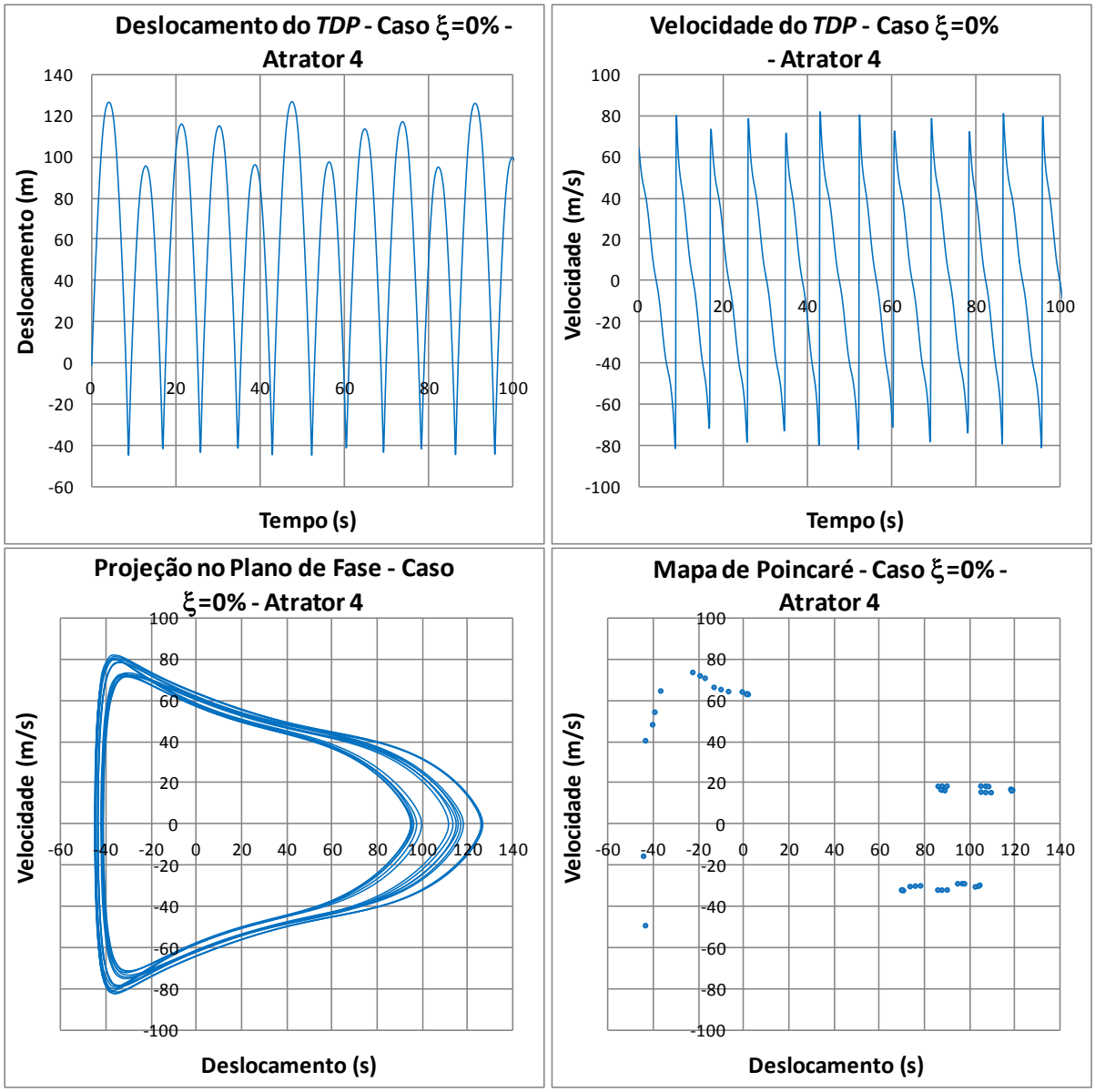



**Figura 46: Respostas do MOR para o caso T=2,9s e ξ=0% - Atrator 4**

## 5.7. Recuperação dos esforços solicitantes

A partir das respostas dinâmicas do MOR de um grau de liberdade, é possível fazer o caminho inverso da obtenção do MOR, da fixação das condições de contorno e da adimensionalização da equação de movimento, e recuperar a solução completa no domínio contínuo e na escala original dimensional. Como nos casos estudados o deslocamento vertical imposto no ponto “O” não alterou significativamente as respostas no *TDP*, o retorno à escala original é feito com a formulação estática e não a “quase-estática”. Isto não significa que o efeito da contribuição do deslocamento imposto no ponto “O” seja totalmente anulado no retorno à escala original, pois ele já está computado na resposta do MOR.

Sendo assim, considera-se como solução completa os deslocamentos verticais dinâmicos em torno da configuração estática no domínio contínuo: $u(z,\tau) = \hat{u}(z) + \delta(z,\tau)$, sendo $\delta(z,\tau) = \zeta(z).U(\tau)$, onde $\zeta(z)$ é a função modal descrita em (41) e (42), e $U(\tau)$ é a coordenada generalizada modal. A posição vertical do *riser* na escala original é dada pela relação $w(x,t) = \left(\frac{p}{\mu}\right)u(z,\tau)$, sendo $p$ o peso submerso do *riser* e $\mu$ o coeficiente de rigidez do solo por unidade de área, e pela transformação de coordenadas $x = (z+1)\frac{c(\tau)}{\alpha}$, sendo $c(\tau) = c_0 + U(\tau)$ a posição do *TDP* e $t = \frac{\tau}{\beta}$.

Portanto, a configuração estática, dada por (17) e (18), e a função modal, dada por (41) e (42), na coordenada original ficam:

$$\hat{u}_e(x,t) = \psi_1 \left[ -\frac{{c_0}^4}{6}\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)^4 + \frac{{c_0}^3}{3}(1 - c_0)\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)^3 \right. \\ \left. + {c_0}^3\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)^2 - c_0(1 + c_0)\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)\right] \tag{63}$$

para $0 < x < \dfrac{c_0 + U(t)}{\alpha}$

$$\hat{u}_d(x,t) = \psi_1 \left\{ \left[ cos\left(c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)\right) \right. \right. \\ \left. \left. - c_0\, sin\left(c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)\right)\right] e^{-c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)} - 1 \right\} \tag{64}$$

para $x > \dfrac{c_0 + U(t)}{\alpha}$

$$\zeta_e(x,t) = -\left[ C_1 sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)\right) + C_2 cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)\right) \right. \\ + C_3 e^{\alpha_e\sqrt{2}\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)} + C_4 e^{-\alpha_e\sqrt{2}\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)} - (1 + c_0) \\ + (2{c_0}^2 - c_0 - 1)\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right) + {c_0}^2(3 - c_0)\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)^2 \\ \left. - {c_0}^2\left(\frac{5}{3}c_0 - 1\right)\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)^3 - \frac{2}{3}{c_0}^3\left(\frac{\alpha x}{c_0 + U(t)} - 1\right)^4 \right] \tag{65}$$

para $0 < x < \dfrac{c_0 + U(t)}{\alpha}$

$$\zeta_d(x,t) = -\left\{ e^{-\alpha_d\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)} \left[ \beta^* sen\left(\alpha_d\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)\right) + (1+c_0)cos\left(\alpha_d\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)\right)\right] + e^{-c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)} \left[ -(1+c_0)\,cos\left(c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)\right) - (1-c_0)sen\left(c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)\right) - (1+c_0)\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)cos\left(c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)\right) - (1-c_0)\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)sen\left(c_0\left(\frac{\alpha x}{c_0+U(t)}-1\right)\right)\right]\right\} \tag{66}$$

para $x > \dfrac{c_0+U(t)}{\alpha}$

De maneira similar, por meio das relações a seguir, determinam-se os esforços de momento fletor, força cortante, força normal, tensão normal máxima e tensão de cisalhamento máxima, para cada abscissa em um determinado instante:

$$M(x,t) = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \tag{67}$$

$$V(x,t) = -EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x,t) \tag{68}$$

$$T(x,t) = \left(T_0 + T_1 cos(\Omega_\mathrm{d} t)\right)e^{-a_e x} \tag{69}$$

para $0 < x < \dfrac{c_0+U(t)}{\alpha}$

$$T(x,t) = \left(T_0 + T_1 cos(\Omega_\mathrm{d} t)\right) e^{-a_e \frac{c_0+U(t)}{\alpha}} e^{-a_d\left(x-\frac{c_0+U(t)}{\alpha}\right)} \tag{70}$$

para $\quad x > \dfrac{c_0 + U(t)}{\alpha}$

$$\sigma(x,t) = \frac{EI}{W}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + \frac{T(x,t)}{A} \tag{71}$$

$$\tau(x,t) = -\frac{4}{3\pi}\frac{(R^3 - r^3)}{(R^4 - r^4)}\frac{EI}{e}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x,t) + \frac{1}{2e}\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \tag{72}$$

sendo $T(x,t)$ definido em (33) e (34), considerando (7), $W$ o módulo de resistência do *riser* , $A$ a área da seção transversal, $R$ o raio externo da seção transversal, $r$ o raio interno da seção transversal, $e$ a espessura da parede do tubo e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = \left(\frac{p}{\mu}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{73}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x,t) = \left(\frac{p}{\mu}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) \tag{74}$$

Para compatibilizar a força cortante do modelo de flexão simples com a do modelo de flexão composta, deve-se aplicar um fator de correção $\psi_4$, assim como foi feito para a configuração estática, rotação e curvatura. A Figura 47 mostra a força cortante estática com fator $\psi_4 = 0{,}25$ ao longo do *riser*, onde a força cortante no *TDP* foi compatibilizada com aquela dada pelo modelo do Orcaflex. Nota-se que no ponto “O” os valores são diferentes, pois no modelo analítico considera-se um apoio móvel neste ponto, obtendo a cortante máxima dada pela reação no apoio, o que não ocorre no modelo global do Orcaflex.

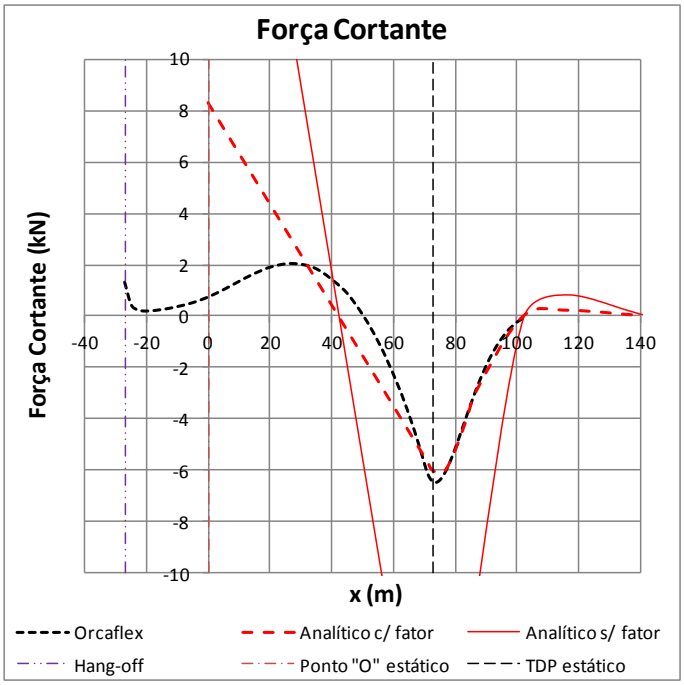



**Figura 47: Força cortante estática ao longo do *riser* para caso 1**

Nas figuras a seguir são mostrados os deslocamentos, os esforços solicitantes e as tensões máximas para o caso T=2,9s.

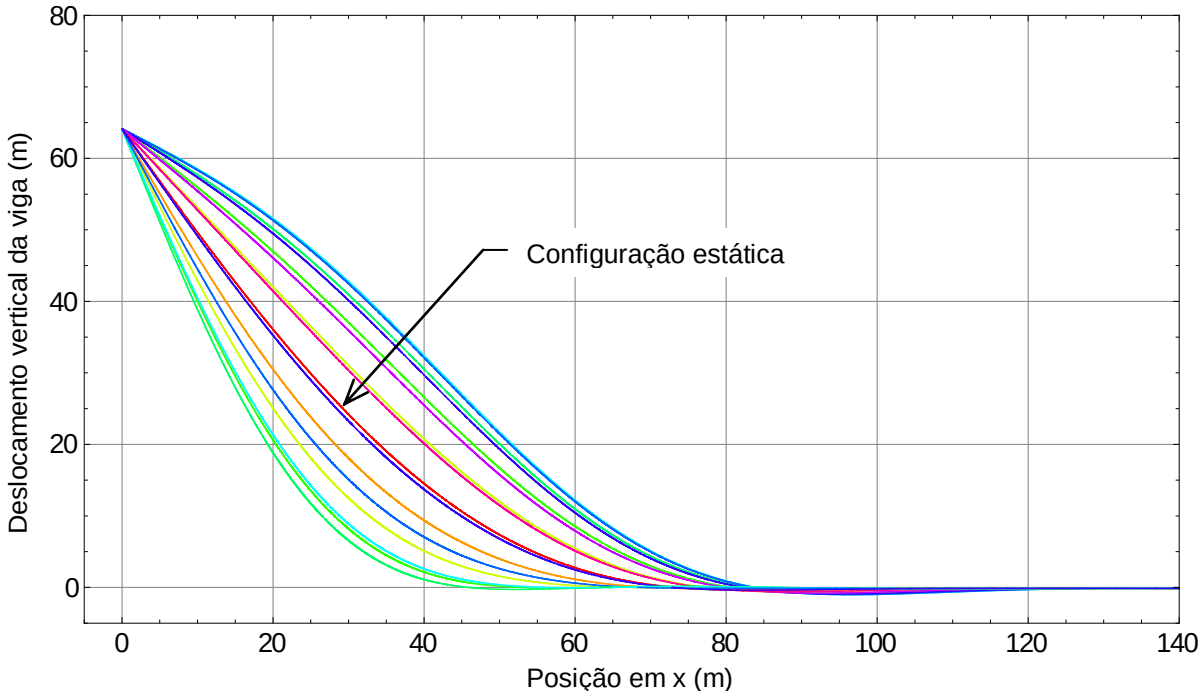



**Figura 48: Posição da viga em diferentes instantes - MOR**

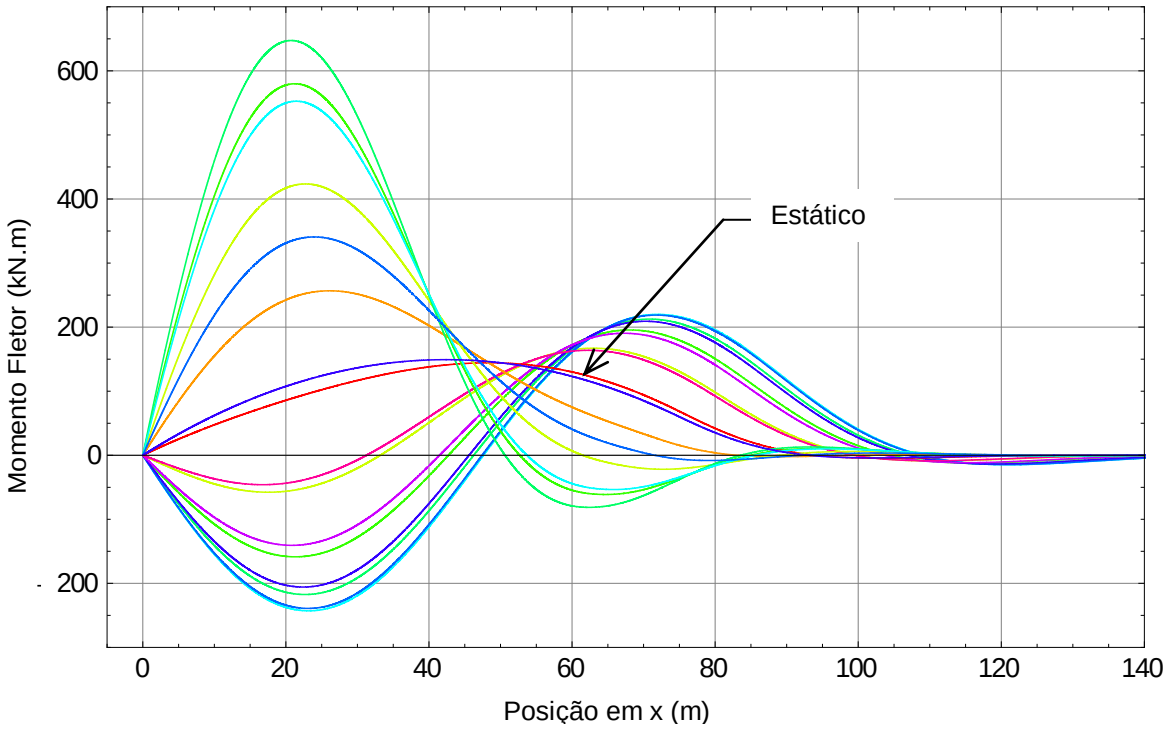



**Figura 49: Momento fletor em diferentes instantes - MOR**

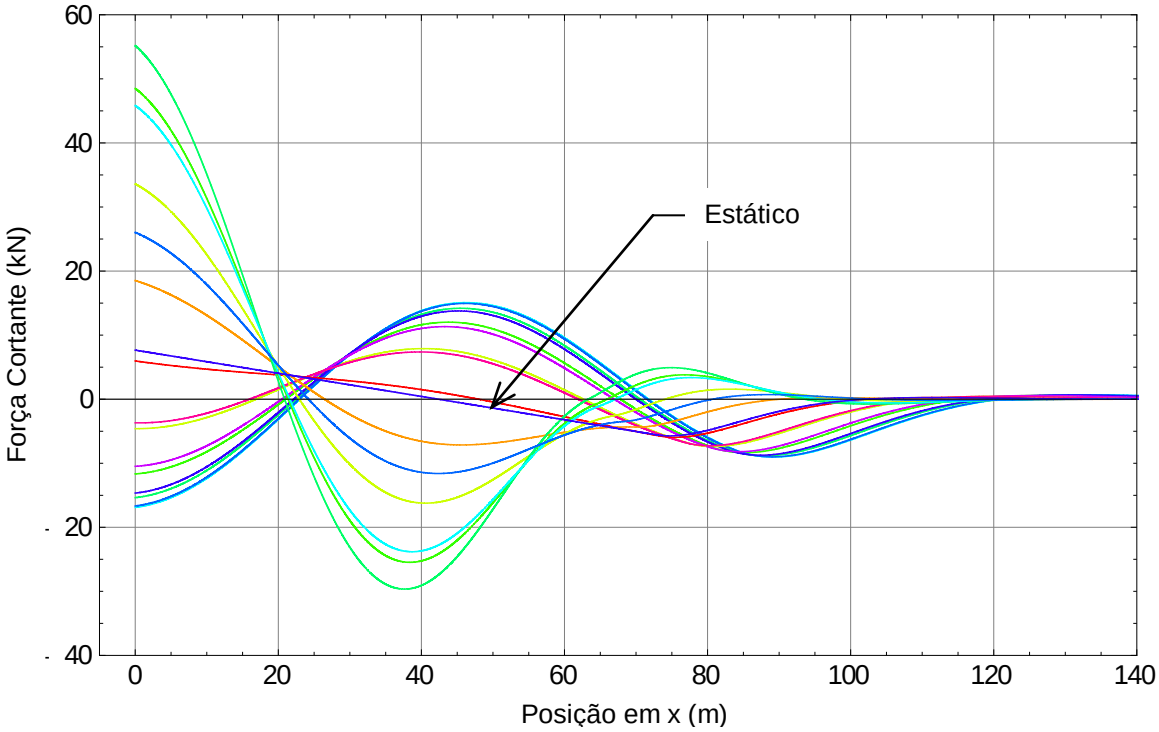



**Figura 50: Força cortante em diferentes instantes - MOR**

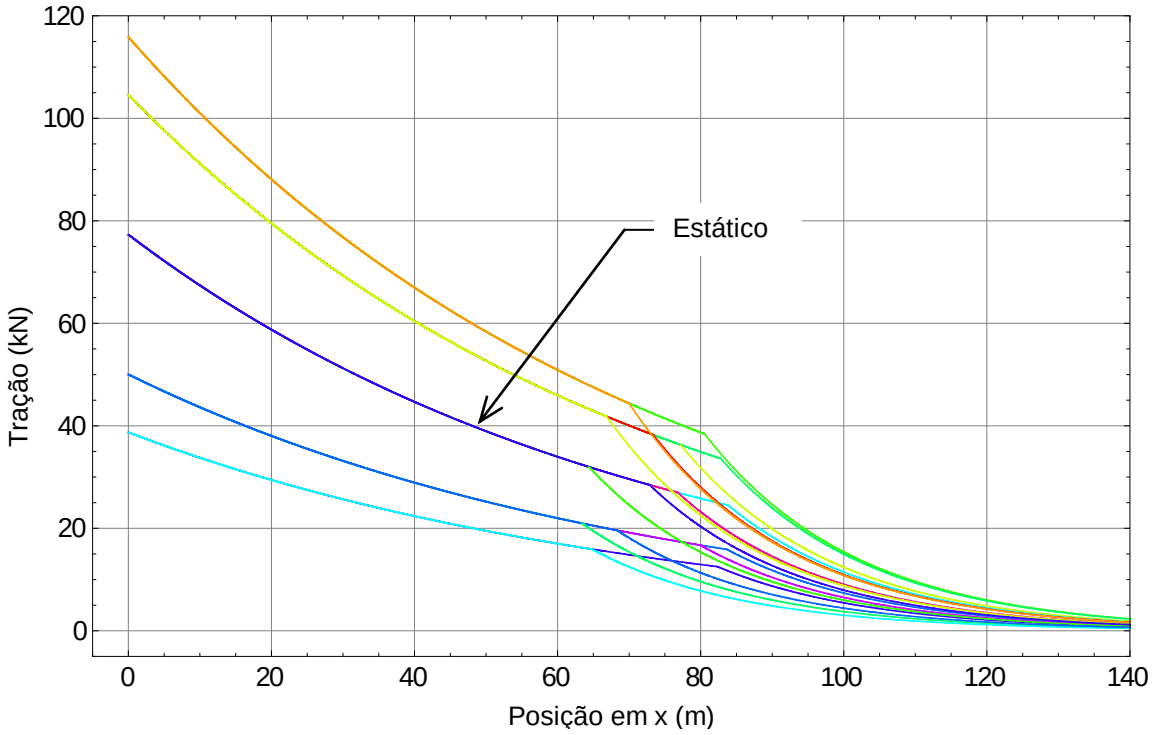



**Figura 51: Força normal em diferentes instantes - MOR**

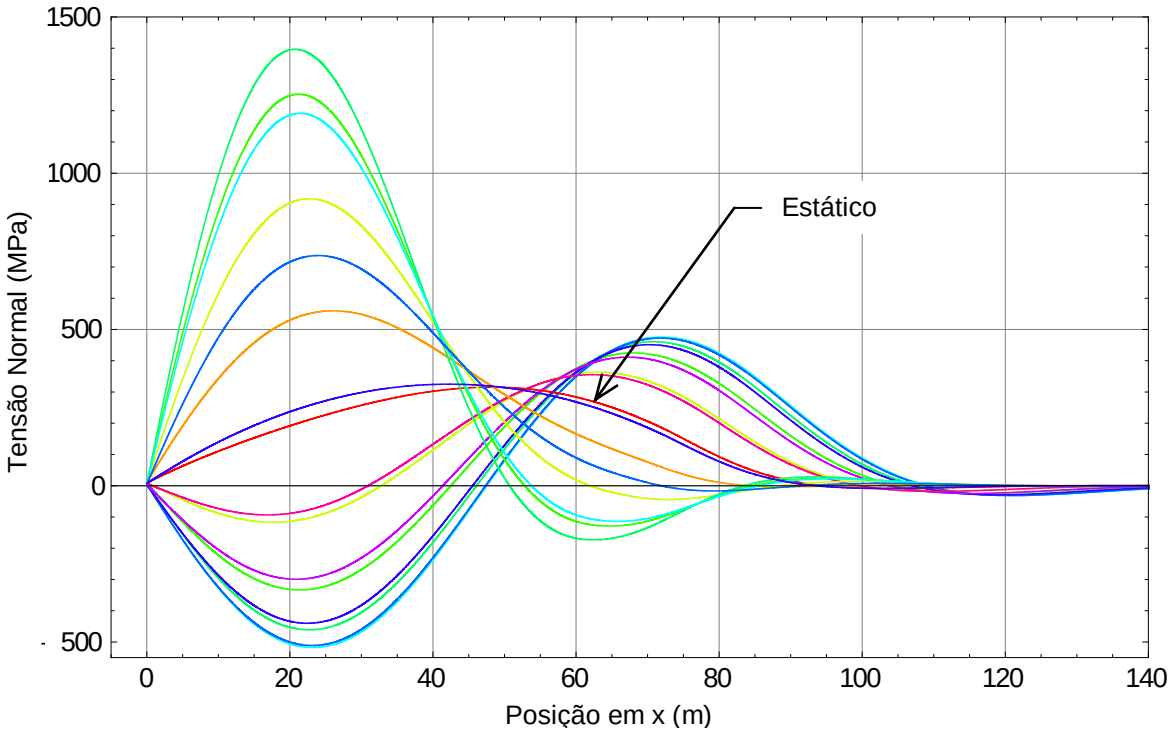



**Figura 52: Tensão normal máxima em diferentes instantes - MOR**

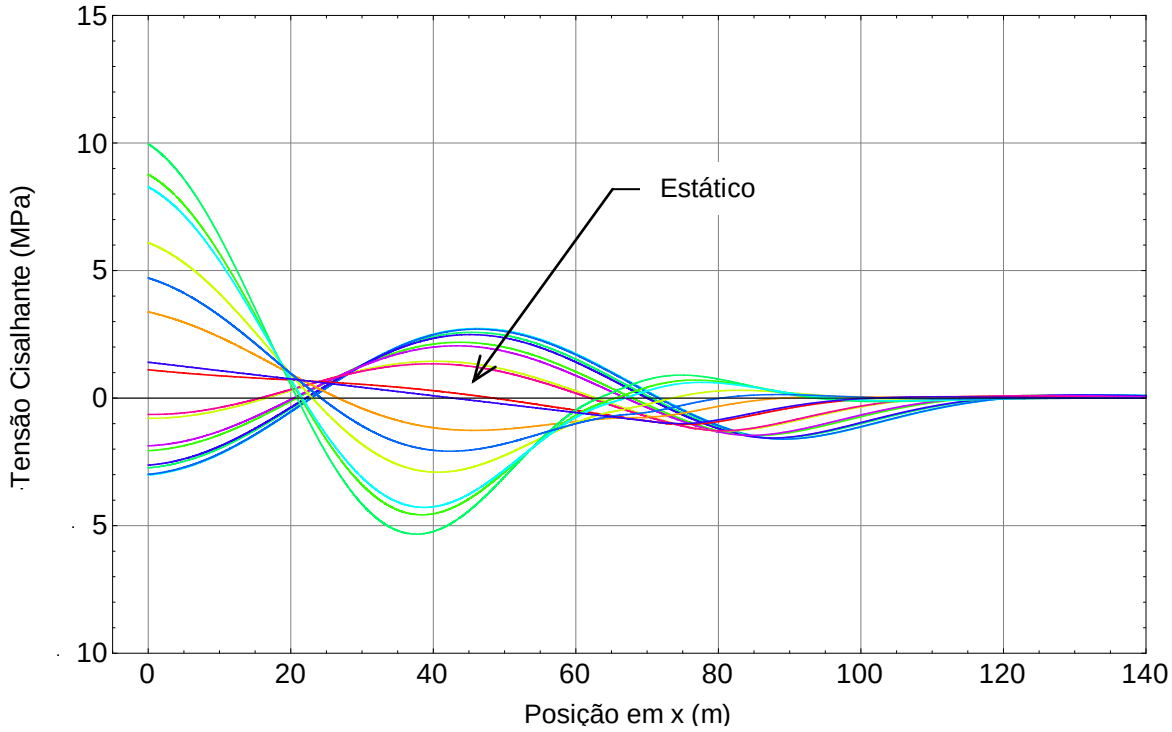



**Figura 53: Tensão cisalhante máxima em diferentes instantes - MOR**

Na Figura 48 nota-se que não há deslocamento no ponto “O”, decorrente da adoção da formulação estática em vez da “quase-estática” no retorno às coordenadas originais.

Nos gráficos, é possível observar a grande majoração dos esforços solicitantes na resposta dinâmica. O momento aumentou aproximadamente quatro vezes e a força cortante sete vezes, porém, esta última não representa adequadamente a distribuição da cortante ao longo do *riser* pois foi considerado um apoio móvel no ponto “O”. Também se nota que as tensões cisalhantes tem relevância bem menor do que as tensões normais.

A recuperação dos esforços e tensões se mostra uma importante ferramenta na avaliação da ruptura e da fadiga, contribuindo para a determinação da vida útil de um *riser*. Para um aço de alta resistência X80, cuja tensão resistente última é de 620 MPa, o *riser* teria rompido facilmente diante da tensão atuante de 1.400MPa.

Nas figuras a seguir são apresentados os deslocamentos e os esforços solicitantes extraídos do modelo global do Orcaflex. Os resultados apresentaram diferenças em relação aos resultados do MOR, pois a forma de vibrar é diferente. Enquanto que o MOR apresenta um ventre na parte suspensa, o Orcaflex apresenta dois ventres. Novamente a explicação recai no modo de vibração utilizado como função de projeção. A diferença também pode ser em função da consideração de momento nulo no ponto “O” no modelo analítico.

Nota-se que os deslocamentos em relação à configuração estática do Orcaflex são menores do que os deslocamentos apresentados pelo MOR. Com isso, os esforços solicitantes que dependem do deslocamento vertical também são menores, sendo o momento 2,4 vezes menor e a cortante 3,7 vezes menor do que os valores obtidos pelo MOR.

Já as trações apresentam valores idênticos no ponto “O”, uma vez que elas são dados de entrada do MOR. As trações apresentam valores distintos a partir do *TDP* pois no modelo do Orcaflex não foi considerado o decaimento da tração por atrito com o solo.

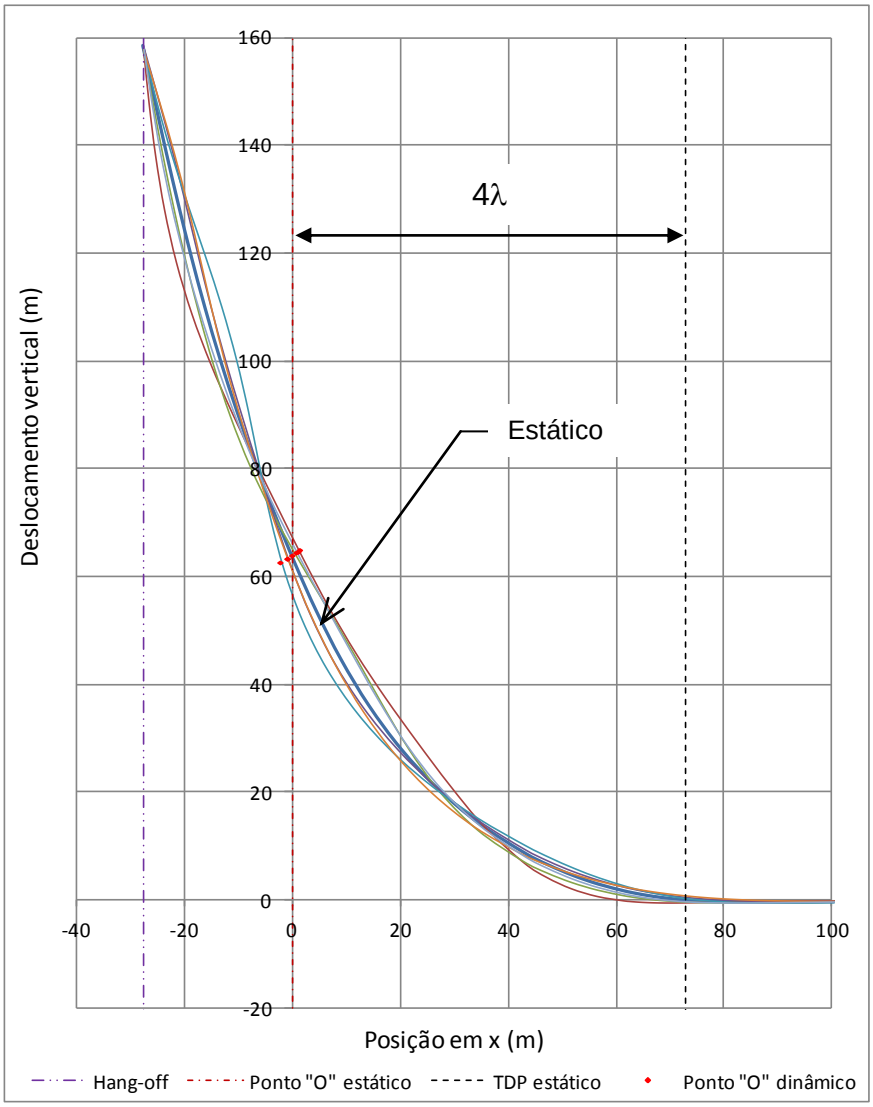



**Figura 54: Posição do *riser* em diferentes instantes – Orcaflex**

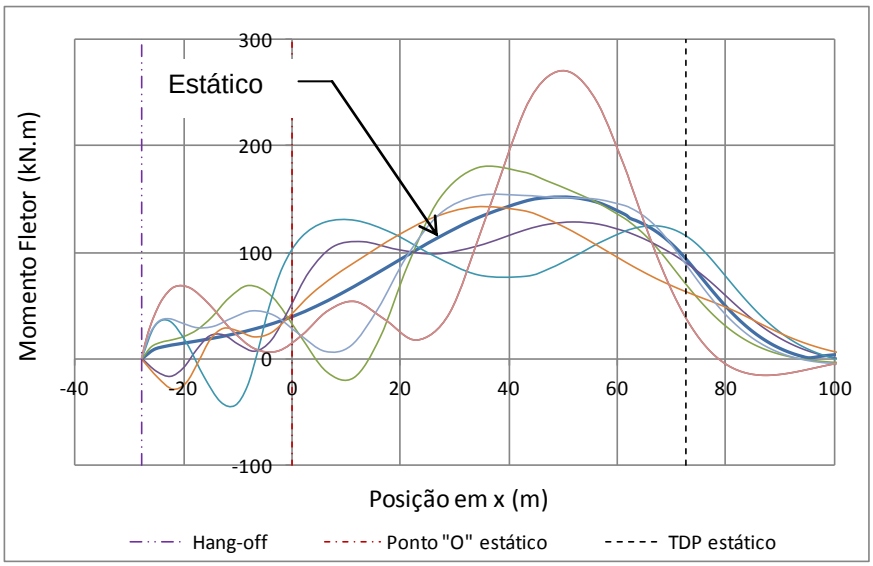



**Figura 55: Momento fletor em diferentes instantes - Orcaflex**

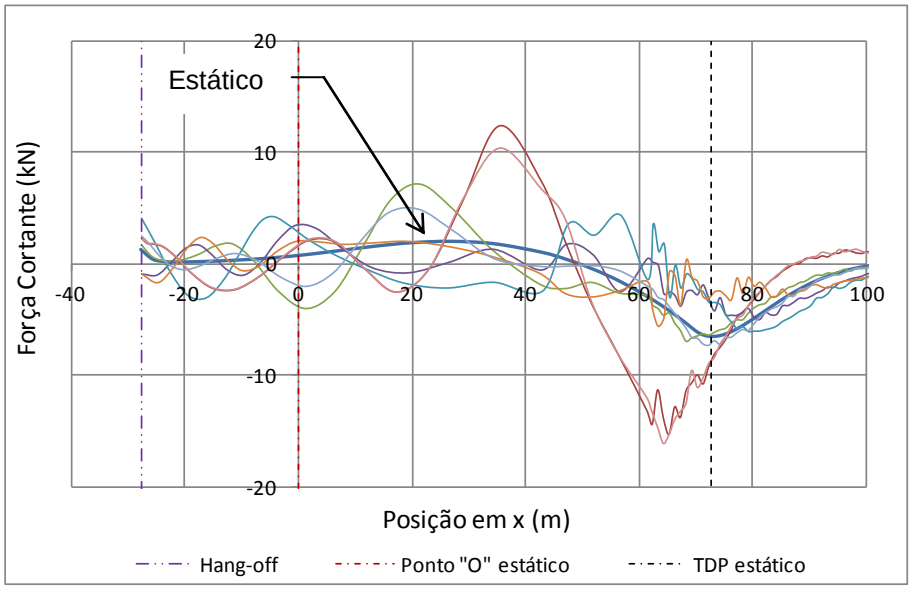



**Figura 56: Força cortante em diferentes instantes - Orcaflex**

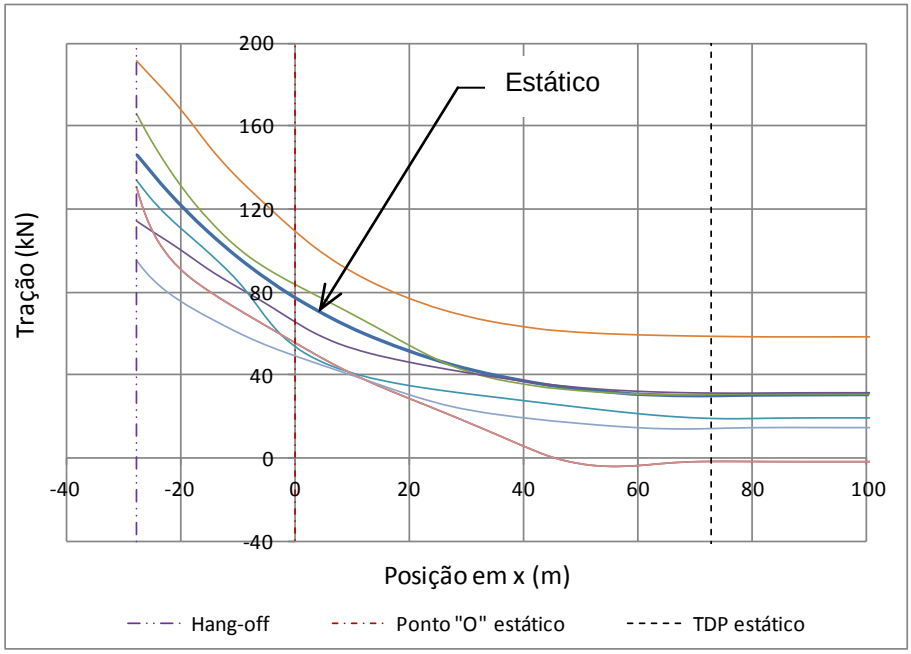



**Figura 57: Força normal em diferentes instantes - Orcaflex**

## 5.8. Influência da Rigidez do Solo

Neste item a influência da rigidez do solo é avaliada por meio dos mapas de "amplitude pico a pico de deslocamento". Como a rigidez do solo altera a projeção horizontal do comprimento adimensional do trecho suspenso, $c_0(0)$, os modos e as frequências naturais de vibração são diferentes para cada caso. Como critério de seleção dos modos a serem utilizados como função de projeção, é adotado sempre o segundo modo. Todos os demais parâmetros são mantidos iguais.

São analisados os casos de rigidez do solo $\Phi = 10^5 N/m/m^2$ e $\Phi = 10^6 N/m/m^2$ para comparação com as respostas do caso $\Phi = 10^4 N/m/m^2$ mostradas na Figura 24.

Para $\Phi = 10^5 N/m/m^2$: $c_0(0) = 11{,}09$ e $\omega = 0{,}169$.
Para $\Phi = 10^6 N/m/m^2$: $c_0(0) = 19{,}73$ e $\omega = 0{,}058$.

Pelos mapas das figuras a seguir e da Figura 24 é possível notar que quanto menor é a rigidez do solo, mais facilmente a ressonância paramétrica é disparada, ou seja, ela ocorre para menores valores de tração dinâmica.

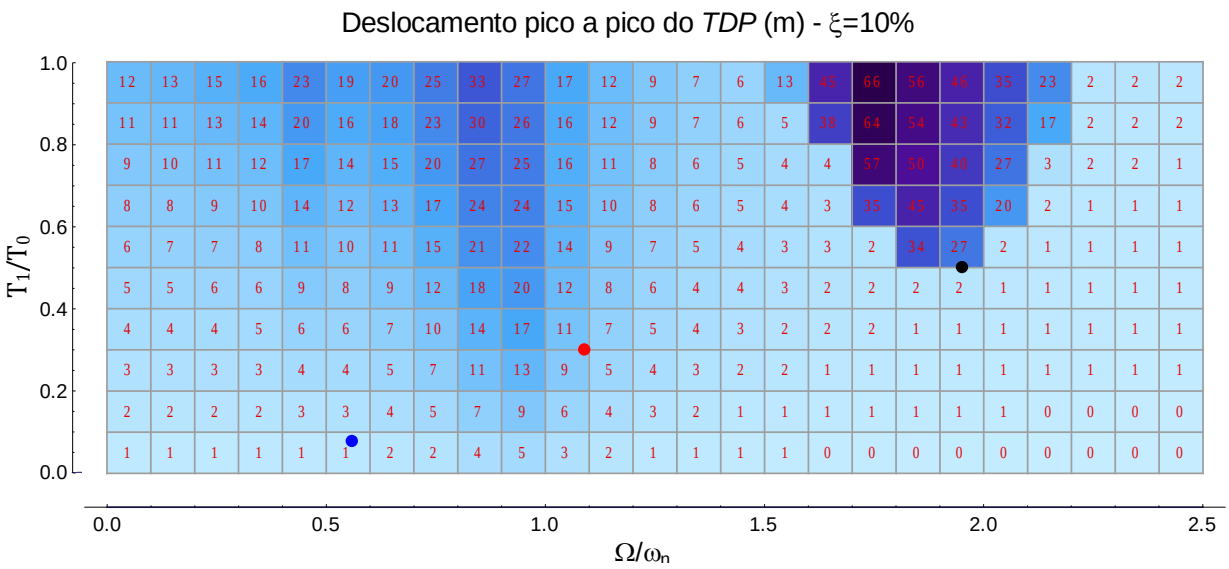



**Figura 58: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para rigidez do solo $\Phi=10^5$ N/m/m²**

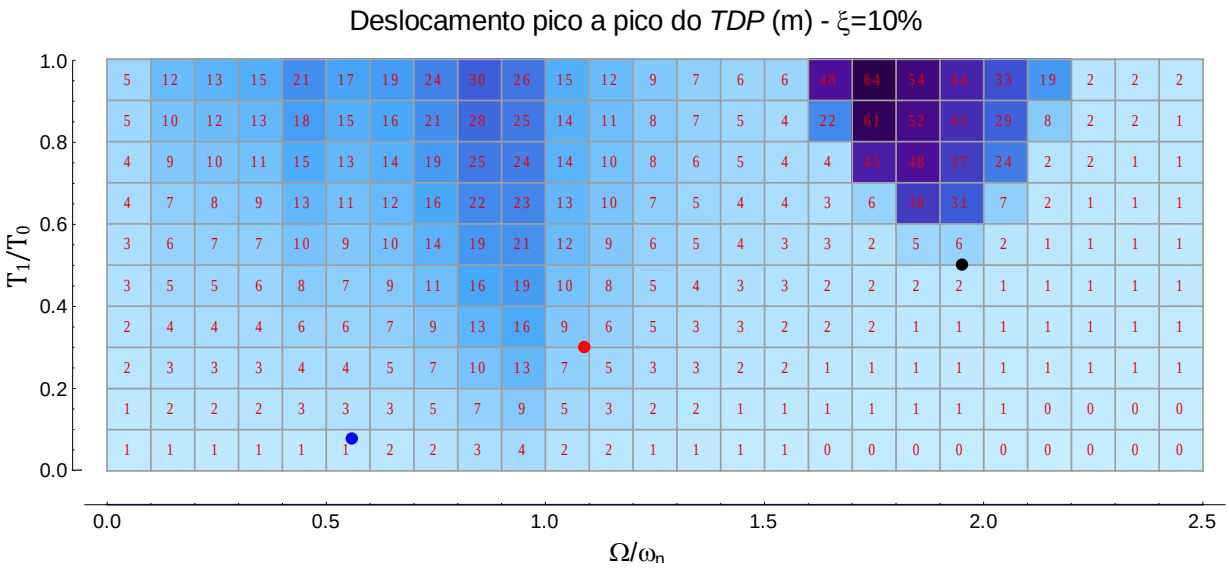



**Figura 59: Mapa de "amplitude pico a pico de deslocamento" do *TDP* para rigidez do solo $\Phi=10^6$ N/m/m²**

# 6. Conclusões e Considerações Finais

Um estudo analítico de um *SCR* sobre apoio elástico com contato unilateral mostra-se de extrema complexidade, pois envolve a dinâmica dos movimentos vertical e horizontal acoplados. Uma forma de simplificar a análise é considerar apenas a dinâmica do movimento vertical, porém, o modelo fica restrito ao problema local da *TDZ* do *riser*, como abordado neste trabalho, sendo necessária uma análise global feita à parte para fornecer dados de entrada na extremidade suspensa da viga, chamado de ponto "O". Para a determinação do comprimento deste trecho suspenso utiliza-se a "regra dos $4\lambda$", que define a região ao longo do *riser* onde a rigidez flexional é relevante diante da rigidez geométrica.

Em função do contato unilateral, tem-se um problema de condições de contorno móveis, uma vez que a posição do *TDP* varia com o tempo. A metodologia adotada foi transformá-lo em um problema de condições de contorno fixas por meio de uma mudança de variáveis. Com isso, diversas não linearidades surgem na equação de movimento, tornando-a de difícil resolução, inclusive para o problema estático. Neste caso, conseguiu-se encontrar a solução apenas para o problema de flexão simples. Porém, notou-se que aplicando simples fatores de correção nas funções da configuração estática, da rotação e da curvatura, consegue-se ajustá-las aos valores obtidos por modelos de elementos finitos, que consideram apropriadamente o efeito da tração na rigidez do sistema. A aplicação destes fatores pode ser considerada como uma melhoria em relação ao trabalho de Mansur [5].

Outra melhoria foi a adoção de duas funções de decaimento da tração, que são incluídas de forma "*ad hoc*" na equação de movimento. Em Mansur, foi adotada uma única lei de decaimento exponencial ao longo do *riser*, o que tornava difícil compatibilizar as trações no ponto "O" e no *TDP*, fornecidas por um modelo de análise global, além da tração num ponto do trecho apoiado, localizado a uma certa distância do *TDP* determinada através de uma relação com atrito Coulomb. Com duas leis de decaimento exponencial, uma para o trecho suspenso e outra para o trecho apoiado, é possível compatibilizar os valores da tração nestes três pontos.

A terceira melhoria foi a inclusão do deslocamento vertical imposto no ponto “O”. O modelo de Mansur considera o ponto “O” como um apoio móvel, podendo haver apenas deslocamento axial provocado pela tração imposta. Neste trabalho o apoio móvel também pode sofrer recalque vertical variável no tempo. Esta implementação trouxe diversas dificuldades na resolução do problema, e a alternativa encontrada foi considerar uma solução “quase-estática” para o deslocamento vertical. Assim, os efeitos dinâmicos provocados pela variação da tração e pelo deslocamento imposto puderam ser analisados de forma desacoplada. Ainda assim, para o trecho apoiado, encontrou-se dificuldade, agora em desacoplar a variável temporal da espacial, uma vez que a equação do MOR deve depender apenas do tempo. Neste caso, a solução encontrada foi expandir determinadas funções em série de potências (ver item 4.3), gerando diversos termos super-harmônicos. Ocorre que, estes termos são pequenos se comparados ao harmônico de primeira ordem, não afetando as respostas finais, como comprovado no item 5.4, e portanto, foram eliminados da formulação. Um resultado importante a que se chegou foi que o deslocamento imposto não afetou praticamente a resposta final para casos típicos de *riser*, como pode ser conferido no item 5.5. O deslocamento imposto apenas apresentou contribuição relevante na resposta quando foi aumentado em 10 vezes do valor original, porém mantendo a mesma tração imposta, não sendo uma condição real de *riser*. Esta conclusão valida os modelos de Mansur e de Monticelli [8], que não consideram o deslocamento vertical imposto no ponto “O”. O trabalho de Monticelli também foi baseado no de Mansur, com a implementação de solo viscoelástico e amortecimento de Morison decorrente da interação fluido-estrutura.

Um resultado curioso deparado no desenvolvimento do trabalho é em relação às funções modais utilizadas na projeção de Galerkin para obtenção do MOR. Foram encontrados finitos modos de vibração estacionários para o problema de flexão simples. Segundo Demeio e Lenci [29], existem dois regimes no sistema, um abaixo (subcrítico) e um acima (supercrítico) de uma certa frequência normalizada. No regime subcrítico, o número de modos cresce gradualmente com o aumento do comprimento adimensional do trecho suspenso $c_0(0)$. No supercrítico, a energia é perdida para o infinito, comportando-se como um sistema superamortecido. Estes modos não estão completamente compreendidos e outros resultados contra

intuitivos também podem ter origem nestes modos, como por exemplo, o fato de da frequência natural do problema de flexão composta ser menor do que a frequência natural do problema de flexão simples, quando se esperaria o contrário, já que na flexão composta ganha-se rigidez geométrica dada pela tração. No presente trabalho, focou-se mais na metodologia geral para a obtenção do MOR, considerando conhecidas as funções modais. Recomenda-se, como trabalho futuro, uma investigação mais detalhada destes modos de vibração não lineares. As funções modais obtidas pelo MME são de primeira ordem. Alguma explicação pode ser obtida na análise dos termos de segunda ordem ou na consideração de viga finita, onde as ondas no trecho apoiado não serão mais perdidas no infinito, mas sim refletidas na âncora. Ainda existe a possibilidade de encontrar modos com ondas propagantes mesmo no sistema com condições de contorno fixas, lembrando que os modos estacionários encontrados representam modos com ondas propagantes na escala original, já que a posição do *TDP* varia com o tempo.

Nos estudos de caso, o período natural do MOR é bem próximo do período natural do segundo modo dos modelos de elementos finitos (MEF). Os resultados mostram que os três modelos (MOR, Abaqus e Orcaflex) foram capazes de detectar o fenômeno da ressonância paramétrica para o caso de excitação T=2,9s, apresentando períodos dobrados em relação ao período de excitação e próximos ao período natural comentado acima. Para o MEF ocorre também ressonância clássica 1:1 com o quarto modo de vibração, mas a ressonância paramétrica prevalece sobre a clássica. As respostas do MOR são bem próximas às do MEF, para o caso de ressonância paramétrica (T=2,9s) e ressonância clássica (T=5,2s), validando o modelo para estas condições. Para o caso T=5,2s, haveria a expectativa de que o MEF apresentasse também ressonância paramétrica com o primeiro modo de vibração, mas ela não foi detectada, pois a tração dinâmica foi insuficiente para disparar o fenômeno. Para o MOR seria impossível detectar a ressonância paramétrica no caso T=5,2s, pois ele tem apenas um modo de vibração, que não está nas condições de ressonância paramétrica para esta excitação. Para o caso T=10s o MOR foi incapaz de prever adequadamente a resposta, pois não há modo em ressonância com o período de excitação, o que ocorre para o MEF com o primeiro modo de vibração. Portanto, deve-se conhecer as limitações do MOR para a sua adequada utilização.

Outra limitação do modelo é o fato de ele não tratar apropriadamente a instabilidade por compressão dinâmica. Por isso, nos estudos de casos de *risers* típicos, a relação entre esforço normal dinâmico e estático $T_1/T_0$ é menor ou igual a unidade. Uma possibilidade para trabalhos futuros é justamente implementar uma formulação capaz de lidar com os casos de compressão dinâmica.

A principal vantagem do MOR é a possibilidade de realizar facilmente uma varredura dos parâmetros que governam o sistema, gerando saídas auxiliares como o mapa cromático de "amplitude pico a pico de deslocamentos" apresentado no item 5.3. Nele se visualizam facilmente os deslocamentos de pico a pico para diversos valores de tração dinâmica e frequência de excitação. Pela intensidade de cores é possível verificar em quais condições a ressonância paramétrica é disparada, uma vez que existe um salto abrupto nos deslocamentos quando o sistema entra neste tipo de ressonância. Isto demonstra o quanto este fenômeno é perigoso, tanto na sensibilidade aos parâmetros de controle, quanto na amplitude das respostas. Além da ressonância 2:1, o mapa identifica outras regiões de ressonância paramétrica, como 1:1 e 0,5:1. Aparentemente, os deslocamentos aumentam de forma mais gradual com as variações dos parâmetros, mas uma melhor discretização do mapa é necessária, pois nestas regiões os limites são mais estreitos comparados com a primeira região de ressonância paramétrica. A construção de diversos mapas com diferentes taxas de amortecimento demonstra o importante papel que o amortecimento tem na análise da instabilidade paramétrica.

Os mapas de "amplitude pico a pico de deslocamentos" também foram utilizados na tentativa de analisar a integridade das bacias de atração. Neste caso, os parâmetros do mapa são as condições iniciais (deslocamento e velocidade no *TDP*). Obviamente, identificar um atrator através da amplitude de deslocamento é um critério simplista, mas em certos casos este critério pode ser suficiente, como nos exemplos do item 5.6, com exceção do caso com taxa de amortecimento $\xi$=0%, onde diferentes atratores têm amplitudes parecidas e bem sensíveis às condições iniciais. Com a diminuição da taxa de amortecimento foi possível verificar a erosão das bacias de atração. Para $\xi$=10% e $\xi$=5%, apenas um atrator foi identificado. Para $\xi$=1%, foram identificados três atratores e para $\xi$=0%, surgiram diversos atratores.

Para este último caso, os atratores apresentaram as respostas mais interessantes do ponto de vista da dinâmica não linear. Foram encontrados casos com “batimentos”, diversos períodos de resposta no mapa de Poincaré, mudanças bruscas na velocidade, podendo indicar a ocorrência de impactos contra o solo, e casos que podem estar na proximidade do caos. Mais uma possibilidade de trabalhos futuros seria implementar de forma apropriada a identificação dos atratores, bem como os critérios para medição da integridade das bacias de atração.

Outro parâmetro analisado por meio dos mapas de “amplitude pico a pico de deslocamentos” foi a rigidez do solo. Observou-se que quanto menor for a rigidez do solo, mais facilmente o sistema entra em ressonância paramétrica.

Por fim, a variação no tempo dos deslocamentos, esforços solicitantes e tensões ao longo do *riser* foi recuperada na escala original. Os diagramas de tensões máximas na seção transversal mostram que o principal esforço solicitante é o de momento fletor, frente aos esforços normal e de cisalhamento. Comparando os resultados do MOR com o do Orcaflex, percebe-se nítida diferença. Os deslocamentos e esforços do MOR deram bem maiores do que o do Orcaflex. Isto ocorre pois a forma de vibrar é diferente. Enquanto que o MOR apresenta apenas um ventre no trecho suspenso, o Orcaflex apresenta dois. Novamente a questão recai no comportamento não convencional dos modos de vibração não lineares utilizados como função de projeção.

Para demais trabalhos futuros, um estudo mais imediato seria juntar as melhorias obtidas neste trabalho com as desenvolvidas por Monticelli [8], obtendo um MOR mais completo. Pode-se ainda adotar o modelo de apoio elástico de Pasternak em substituição ao modelo de Winkler. O modelo de Parternak acrescenta o efeito do cisalhamento no estudo do apoio elástico. Assim, uma mola “puxa” suas adjacentes e o sistema fica mais rígido. No modelo de Winkler, as molas atuam individualmente. Um grande desafio seria resolver analiticamente a equação do oscilador modal do MOR pelo método das múltiplas escalas, obtendo uma formulação 100% analítica. Neste trabalho a equação do oscilador modal foi integrada numericamente.

# 7. Referências Bibliográficas


1. API - AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **API 5L - Specification for line pipe**, 2004.
2. PESCE, C. P. **Mecânica de cabos e tubos submersos lançado em catenária:** uma abordagem analítica e experimental. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997. Tese de Livre Docência.
3. SOARES, M. E. S. **Excitação paramétrica em sistemas com um grau de liberdade**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1992. Dissertação de Mestrado.
4. NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear oscillations**. New York: John Wiley & Sons, 1979.
5. MANSUR, A. L. **Análise dinâmica não linear de viga esbelta semi-infinita sob flexão composta com contato unilateral em apoio elástico:** uma aplicação ao estudo de vibrações de risers em catenária. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011. Dissertação de Mestrado.
6. ANP - AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO, GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. **Anuário estatístico brasileiro do petróleo, gás natural e biocombustíveis 2012**. Disponivel em: <www.anp.gov.br>. Acesso em: 22 nov. 2012.
7. MAZZILLI, C. E. N.; MANSUR, A. L. **Parametric resonance of slender beams on unilateral elastic support subject to bending and time-vaying normal force**. 7th European Nonlinear Dynamics Conference. Rome: [s.n.]. 2011. p. 24-29.
8. MONTICELLI, G. C. **Análise dinâmica não linear bidimensional local de risers em configuração de catenária com contato unilateral viscoeléstico**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011. Dissertação de Mestrado.
9. SOARES, M. E. S. **Modos não lineares em sistemas discretizados pelo método dos elementos finitos**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1998. Tese de Doutorado.
10. MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S. Nonlinear normal modes of planar frames discretised by the finite element method. **Computers & Structures**, v. 77, p. 485-

493, 2000.

11. SHAW, S. W.; PIERRE, C. Nonlinear normal modes and invariant manifolds. **Journal of Sound and Vibration**, v. 150, p. 170-173, 1991.
12. SHAW, S.; PIERRE, C. Normal modes for nonlinear vibratory systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 164, p. 85-124, 1993.
13. SHAW, S.; PIERRE, C. Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 169, p. 319-347, 1994.
14. MAZZILLI, C. E. N.; BARACHO NETO, O. G. D. P. Evaluation of non-linear normal modes. **Computers & Structures**, v. 80, p. 957–965, 2002.
15. MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S.; BARACHO NETO, O. G. D. P. Non-linear normal modes of a simply-supported beam: continuous system and finite-element models. **Computers & Structures**, v. 82, p. 2683-2691, 2004.
16. MAZZILLI, C. E. N. **Effect of linearly varying normal force upon the nonlinear modal analysis of slender beams**. 6th Euromech Nonlinear Dynamics Conference. Saint Petersburg: [s.n.]. 2008.
17. BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. **Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds**. Dynamics Specialists Conference. Hilton Head, South Carolina: [s.n.]. 1994.
18. BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. **Journal of Sound and Vibration**, v. 182, p. 336-341, 1995.
19. NETO, O. G. D. P. B. **Modos normais e multimodos na dinâmica de estruturas de comportamento não linear**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003. Tese de Doutorado.
20. NETO, O. G. P. B.; MAZZILLI, C. E. N. Evaluation of multi-modes for finite-element models: systems tuned into 1:2 internal resonance. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 5795–5820, 2005.
21. MAZZILLI, C. E. N. et al. Non-linear modal analysis for beams subjected to axial loads: Analytical and finite-element solutions. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 43, p. 551 - 561, 2008.
22. STEINDL, A.; TROGER, H. Methods for dimension reduction and their application

in nonlinear dynamics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 2131-2147, 2001.

23. NETO, O. G. D. P. B. **Redução de graus de liberdade:** uma proposta para a análise dinâmica de estruturas aporticadas planas de compoartamento geometricamente não linear. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1998. Dissertação de Mestrado.
24. MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S.; BARACHO NETO, O. G. P. Reduction of finite-element models of planar frames using nonlinear normal modes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 1993-2008, 2001.
25. MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S. **A generalised procedure for reduced-order modelling in nonlinear dynamics using nonlinear modes**. IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Advanced Technologies and Engineering Design. Aberdeen: [s.n.]. 2010.
26. MAZZILLI, C. E. N.; MONTICELLI, G. C.; NETO, N. A. G. Reduced-order modelling in nonlinear dynamics: an approach based on nonlinear modes. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 225, p. 2354-2368, 2011.
27. CARTMELL, M. **Introduction to linear, parametric and nonlinear vibrations**. London: Chapman and Hall, 1990.
28. CHATJIGEORGIOU, I. K.; MAVRAKOS, S. A. Nonlinear resonances of parametrically excited risers. **Computers & Structures**, v. 83, p. 560-573, 2005.
29. DEMEIO, L.; LENCI, S. Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate. **Nonlinear Dyn**, n. 49, p. 203-215, 2007.
30. MAZZILLI, C. E. N.; LENCI, S. **Normal vibration modes of a slender beam on elastic foundation with unilateral contact**. 22nd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Adelaide: [s.n.]. 2008. p. 25-29.
31. MAZZILLI, C. E. N.; LENCI, S. **Vibrazioni libere non-lineari nei dintorni della configurazione di equilibrio statico di una trave con contatto elastico unilaterale**. Comunicação pessoal dos autores: [s.n.].
32. DEMEIO, L.; LENCI, S. Second-order solutions for the dynamics of a semi-infinite cable on a unilateral substrate. **Journal of Sound and Vibration**, 5 March 2008. 414-432.

33. LANCIONI, G.; LENCI, S. Dynamics of a semi-infinite beam on unilateral springs: Touch-down points motion and detached bubbles propagation. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 30 November 2009.

34. MAZZILLI, C. E. N. et al. **Parametric instability of slender beams with unilateral winkler support:** an application to riser dynamics. 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Beijing: [s.n.]. 2012.

35. PESCE, C. P.; ARANHA, J. A. P.; MARTINS, C. A. Dynamic curvature in catenary risers at the touch down point region: an experimental study and the analytical boundary-layer solution. **International Journal of Offshore and Polar Engineering**, v. 8, n. 4, p. 303-310, 1998.

36. PESCE, C. P.; MARTINS, C. A. Riser soil interaction: local diynamics at TDP and a discussion on eigenvalue problem. **Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering**, v. 128, p. 39-55, 2006.

37. PESCE, C. P. et al. **Analytical and closed form solutions for deep warter riser-like eigenvalue problem**. 9th ISOPE - Offshore and Polar Engineering Conference. Brest: [s.n.]. 1999.

38. CHATJIGEORGIOU, I. K. Application of the WKB method to catenary-shaped slender structures. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 48, p. 249-257, 2008.

39. TAKAFUJI, F. C. D. M. **Dinâmica tridimensional de risers**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2010. Tese de Doutorado.

40. CHATJIGEORGIOU, I. K. Three dimensional nonlinear dynamics of submerged, extensible catenary pipes conveying fluid and subjected to end-imposed excitations. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 45, p. 667-680, 2010.

41. PRADO, F. S. **Modelagem do comportamento dinâmico não linear de risers pelo método dos elementos finitos**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2013. Dissertação de Mestrado.

42. SPARKS, C. P. **Fundamentals of marine riser mechanics:** basic principles and simplified analyses. Tulsa: Penn Well, 2007.

43. BAI, Y.; BAI, Q. **Subsea pipelines and risers**. London: Elsevier, 2005.

# 8. Anexos

## 8.1. Mudança de variáveis para obtenção do problema com condições de contorno fixas

A partir da equação original normalizada:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}-\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+Hv+1=0 \qquad \text{(a 1)}$$

e fazendo uso da mudança de variáveis:

$$z=\frac{y}{c(\tau)}-1 \;\Rightarrow y=(z+1)c(\tau) \qquad \text{(a 2)}$$

$$v(y,\tau)=u(z,\tau) \qquad \text{(a 3)}$$

obtêm-se os novos operadores diferenciais espaciais e temporais:

$$\frac{dz}{d\tau}=-\frac{\dot{c}}{c^2}y=-\frac{\dot{c}}{c^2}(z+1)c=-\frac{\dot{c}}{c}(z+1) \qquad \text{(a 4)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{1}{c}=\frac{u'}{c} \qquad \text{(a 5)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{c^2}=\frac{u''}{c^2} \qquad \text{(a 6)}$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}=\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^4=\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\cdot\frac{1}{c^4}=\frac{u^{IV}}{c^4} \qquad \text{(a 7)}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}=\frac{\partial \gamma}{\partial z}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{\partial \gamma}{\partial z}\cdot\frac{1}{c}=\frac{\gamma'}{c} \qquad \text{(a 8)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} = \dot{u} - \frac{\dot{c}}{c}(z+1)u' \qquad \text{(a 9)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\dot{u} - \frac{\dot{c}}{c}(z+1)u'\right] \qquad \text{(a 10)}$$

$$= \ddot{u} - 2\frac{\dot{c}}{c}(z+1)\dot{u}' + \frac{\dot{c}^2}{c^2}(1+z)^2 u'' + \frac{2\dot{c}^2 - \ddot{c}c}{c^2}(z+1)u'$$

Substituindo os valores encontrados, chega-se a:

$$\frac{1}{4c^4}\, u^{IV} + \ddot{u} - 2\frac{\dot{c}}{c}(z+1)\dot{u}' + \frac{\dot{c}^2}{c^2}(1+z)^2 u'' + \frac{2\dot{c}^2 - \ddot{c}c}{c^2}(z+1)u' - \gamma\frac{u''}{c^2} \qquad \text{(a 11)}$$

$$-\frac{\gamma' u'}{c^2} + Hu + 1 = 0$$

e multiplicando a equação acima por $c^4$, chega-se à expressão final utilizada na seção 4.1:

$$\frac{1}{4}\, u^{IV} + c^4\ddot{u} - 2\dot{c}c^3(z+1)\dot{u}' + c^2[\dot{c}^2(1+z)^2 - \gamma]u'' \qquad \text{(a 12)}$$

$$+ c^2[(2\dot{c}^2 - \ddot{c}c)(z+1) - \gamma']u' + Hc^4 u + c^4 = 0$$

## 8.2. Modos de vibração não lineares do problema de flexão simples obtidos pelo método das múltiplas escalas

Esta dedução é uma reprodução daquela apresentada em [5]. Para a equação do modelo de flexão simples basta tomar a equação (a 12) sem considerar os termos da tração:

$$\frac{1}{4}\,u^{IV} + c^4\ddot{u} - 2\dot{c}(z+1)c^3\dot{u}' + \dot{c}^2(1+z)^2c^2u'' + (2\dot{c}^2 - \ddot{c}c)(z+1)c^2u' + Hc^4u + c^4 = 0 \qquad \text{(b 1)}$$

Fixando o ponto “O”, as condições de contorno para o problema ficam definidas através das equações:

- Deslocamento vertical imposto no ponto “O”: $u(-1,\tau) = \hat{u}_0$ (b 2)
- Curvatura nula (momento nulo) no ponto “O”: $u''(-1,\tau) = 0$
- Deslocamento vertical nulo no *TDP*: $u_e(0,t) = u_d(0,t) = 0$
- Compatibilidade de rotação à esquerda e à direita do *TDP*: $u'_e(0,\tau) = u'_d(0,\tau)$
- Compatibilidade de curvatura (momento) à esquerda e à direita do *TDP*: $u''_e(0,\tau) = u''_d(0,\tau)$
- Compatibilidade de cortante à esquerda e à direita do *TDP*: $u'''_e(0,\tau) = u'''_d(0,\tau)$

Aplicando uma perturbação assintótica $\delta(z,\tau)$ em torno da configuração estática $\hat{u}(z,0)$, que deve satisfazer (16), vem:

$$u(z,\tau) = \hat{u}(z) + \delta(z,\tau) = \hat{u}(z_0) + \varepsilon\delta_1(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) + \varepsilon^2\delta_2(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) + \cdots \qquad \text{(b 3)}$$

Fazendo o mesmo para o deslocamento do *TDP*:

$$c = c_0 + \varepsilon c_1(\tau_0, \tau_1, \dots) + \varepsilon^2 c_2(\tau_0, \tau_1, \dots) + \cdots \qquad \text{(b 4)}$$

sendo $z_k = \varepsilon^k z$ as escalas espaciais e $\tau_k = \varepsilon^k \tau$ as escalas temporais para $k = 1,2,3, \dots,$. Os operadores diferenciais em relação às variáveis independentes $z_k$ e $\tau_k$ são introduzidos a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \Delta_0 + \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon^2\Delta_2 + \cdots \qquad \text{(b 5)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = {\Delta_0}^2 + 2\varepsilon\Delta_0\Delta_1 + \varepsilon^2\left({\Delta_1}^2 + 2\Delta_0\Delta_2\right) + \cdots$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} = {\Delta_0}^3 + 3\varepsilon{\Delta_0}^2\Delta_1 + \varepsilon^2\left(3\Delta_0{\Delta_1}^2 + 3{\Delta_0}^2\Delta_2\right) + \cdots$$

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} = {\Delta_0}^4 + 4\varepsilon{\Delta_0}^3\Delta_1 + \varepsilon^2\left(6{\Delta_0}^2{\Delta_1}^2 + 4{\Delta_0}^3\Delta_2\right) + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = {D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2\left({D_1}^2 + 2D_0 D_2\right) + \cdots$$

sendo ${\Delta_k}^p = \frac{\partial^p}{\partial {z_k}^p}$ e ${D_k}^p = \frac{\partial^p}{\partial {\tau_k}^p}$ .

Substituindo (b 3), (b 4) e (b 5) na equação de movimento (b 1), vem:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\left({\Delta_0}^4 + 4\varepsilon{\Delta_0}^3\Delta_1 + \cdots\right)(\hat{u} + \varepsilon\delta_1 + \cdots)\right] \qquad \text{(b 6)}\\
&+(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^4\left[\left({D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \cdots\right)(\hat{u} + \varepsilon\delta_1 + \cdots)\right]\\
&-2(1 + z_0)(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^3[(D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)][(D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(\Delta_0 + \varepsilon\Delta_1\\
&\qquad + \cdots)(\hat{u} + \varepsilon\delta_1 + \cdots)]\\
&+(1 + z_0)^2(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^2[(D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)]^2\left[\left({\Delta_0}^2 + 2\varepsilon\Delta_0\Delta_1 + \cdots\right)(\hat{u}\right.\\
&\qquad \left. + \varepsilon\delta_1 + \cdots)\right]\\
&+(1 + z_0)\{2(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^2[(D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)]^2\\
&\qquad - (c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^3\left[\left({D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \cdots\right)(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)\right]\}[(\Delta_0 + \varepsilon\Delta_1\\
&\qquad + \cdots)(\hat{u} + \varepsilon\delta_1 + \cdots)]\\
&+H(c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^4(\hat{u} + \varepsilon\delta_1 + \cdots) + (c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots)^4 = 0
\end{aligned}$$

Considerando apenas os termos de ordem $\varepsilon$:

$$\frac{1}{4}\left({\Delta_0}^4\delta_1\right) + {c_0}^4\left({D_0}^2\delta_1\right) + H{c_0}^4\delta_1 - {c_0}^3(1+z_0)\left({D_0}^2c_1\right)(\Delta_0\hat{u}) + 4{c_0}^3c_1(1+H\hat{u}) = 0 \qquad \text{(b 7)}$$

tal que a solução possa ser escrita na forma:

$$\delta_1 = r_1(z_0, z_1, \dots)\, cos(\Omega\tau_0) + s_1(z_0, z_1, \dots)\, sin(\Omega\tau_0) \qquad \text{(b 8)}$$

$$c_1 = p_1\, cos(\Omega\tau_0) + q_1\, sin(\Omega\tau_0) \qquad \text{(b 9)}$$

Substituindo (b 8) e (b 9) na equação (b 7) e igualando os coeficientes dos termos em seno e cosseno a zero separadamente:

$$\frac{1}{4}\left({\Delta_0}^4 r_1\right) + {c_0}^4(H-\omega^2)r_1 = -{c_0}^3p_1[\omega^2(1+z_0)(\Delta_0\hat{u}) + 4(1+H\hat{u})] \qquad \text{(b 10)}$$

$$\frac{1}{4}\left({\Delta_0}^4 s_1\right) + {c_0}^4(H-\omega^2)s_1 = -{c_0}^3q_1[\omega^2(1+z_0)(\Delta_0\hat{u}) + 4(1+H\hat{u})] \qquad \text{(b 11)}$$

Pode-se mostrar em [31], que não há soluções para $\omega > 1$ (regime supercrítico), de sorte que doravante se considerará apenas o caso de $\omega < 1$ (regime subcrítico).

A solução de (b 10) e (b 11), considerando (17), para $-1 < z_0 < 0$, é:

$$r_{1e}(z_0) = R_{e1}\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}z_0\right) + R_{e2}\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}z_0\right) + R_{e3}e^{\alpha_e\sqrt{2}z_0} + R_{e4}e^{-\alpha_e\sqrt{2}z_0} + p_1\left[-(1+c_0) + (2{c_0}^2 - c_0 - 1)z_0 + {c_0}^2(3-c_0){z_0}^2 - {c_0}^2\left(\frac{5c_0}{3} - 1\right){z_0}^3 - \frac{2}{3}{c_0}^3{z_0}^4\right] \qquad \text{(b 12)}$$

$$s_{1e}(z_0) = S_{e1}\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}z_0\right) + S_{e2}\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}z_0\right) + S_{e3}e^{\alpha_e\sqrt{2}z_0} + S_{e4}e^{-\alpha_e\sqrt{2}z_0} \qquad \text{(b 13)}$$
$$+ q_1\left[-(1+c_0) + (2{c_0}^2 - c_0 - 1)z_0 + {c_0}^2(3-c_0){z_0}^2\right.$$
$$\left. - {c_0}^2\left(\frac{5c_0}{3} - 1\right){z_0}^3 - \frac{2}{3}{c_0}^3{z_0}^4\right]$$

com $\alpha_e = c_0\sqrt{\omega}$ e oito coeficientes ($R_{ei}\ e\ S_{ei}, i = 1\ a\ 4$) a determinar. Lembra-se que, neste trecho, há reflexão e refração de onda no *TDP*, por conta das condições de contato unilateral.

Já a solução de (b 10) e (b 11), considerando (18) para $z_0 > 0$ é:

$$r_{1d}(z_0) = e^{\alpha_d z_0}[R_{d1}\, sen(\alpha_d z_0) + R_{d2}\, cos(\alpha_d z_0)] \qquad \text{(b 14)}$$
$$+ e^{-\alpha_d z_0}[R_{d3}\, sen(\alpha_d z_0) + R_{d4}\, cos(\alpha_d z_0)]$$
$$+ p_1 e^{-c_0 z_0}[-(1+c_0)\, cos(c_0 z_0) - (1-c_0)\, sen(c_0 z_0)$$
$$- (1+c_0)z_0\, cos(c_0 z_0) - (1-c_0)z_0\, sen(c_0 z_0)]$$

$$s_{1d}(z_0) = e^{\alpha_d z_0}[S_{d1}\, sen(\alpha_d z_0) + S_{d2}\, cos(\alpha_d z_0)] \qquad \text{(b 15)}$$
$$+ e^{-\alpha_d z_0}[S_{d3}\, sen(\alpha_d z_0) + S_{d4}\, cos(\alpha_d z_0)]$$
$$+ q_1 e^{-c_0 z_0}[-(1+c_0)\, cos(c_0 z_0) - (1-c_0)\, sen(c_0 z_0)$$
$$- (1+c_0)z_0\, cos(c_0 z_0) - (1-c_0)z_0\, sen(c_0 z_0)]$$

com $\alpha_d = c_0\sqrt[4]{1-\omega^2}$ e quatro coeficientes ($R_{di}\ e\ S_{di}, i = 3\ e\ 4$) a determinar, uma vez que, neste trecho, despreza-se a onda refletida e impõe-se solução limitada quando $z_0 \to \infty$, que implica $R_{d1} = R_{d2} = S_{d1} = S_{d2} = 0$.

Aplicando as condições de contorno (b 2), chega-se a 14 coeficientes a determinar ($R_{ei}, S_{ei} R_{di}, S_{di}$, $p_1$ e $q_1$) e 14 equações:

$$-R_{e1}\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + R_{e2}\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + R_{e3}e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + R_{e4}e^{\alpha_e\sqrt{2}} = 0 \qquad \text{(b 16)}$$

$$-S_{e1}\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + S_{e2}\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + S_{e3}e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + S_{e4}e^{\alpha_e\sqrt{2}} = 0 \qquad \text{(b 17)}$$

$$R_{e1}\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) - R_{e2}\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + R_{e3}e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + R_{e4}e^{\alpha_e\sqrt{2}} = 0 \qquad \text{(b 18)}$$

$$S_{e1}\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) - S_{e2}\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + S_{e3}e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + S_{e4}e^{\alpha_e\sqrt{2}} = 0 \qquad \text{(b 19)}$$

$$R_{e2} + R_{e3} + R_{e4} = (1 + c_0)p_1 \qquad \text{(b 20)}$$

$$S_{e2} + S_{e3} + S_{e4} = (1 + c_0)q_1 \qquad \text{(b 21)}$$

$$R_{d4} = (1 + c_0)p_1 \qquad \text{(b 22)}$$

$$S_{d4} = (1 + c_0)q_1 \qquad \text{(b 23)}$$

$$R_{e1} + R_{e3} - R_{e4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta[R_{d3} - (1 + c_0)p_1] \qquad \text{(b 24)}$$

$$S_{e1} + S_{e3} - S_{e4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta[S_{d3} - (1 + c_0)q_1] \qquad \text{(b 25)}$$

$$R_{e2} - R_{e3} - R_{e4} = \eta^2 R_{d3} \qquad \text{(b 26)}$$

$$S_{e2} - S_{e3} - S_{e4} = \eta^2 S_{d3} \qquad \text{(b 27)}$$

$$-R_{e1} + R_{e3} - R_{e4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta^3[R_{d3} + (1 + c_0)p_1] \qquad \text{(b 28)}$$

$$-S_{e1} + S_{e3} - S_{e4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta^3[S_{d3} + (1 + c_0)q_1] \qquad \text{(b 29)}$$

onde:

$$\eta = \frac{\alpha_d}{\alpha_e} = \sqrt[4]{\frac{1 - \omega^2}{\omega^2}} \qquad \text{(b 30)}$$

Todos os coeficientes $R_{ei}, i = 1\ a\ 4$ podem ser expressos em termos de $R_{d3}$ e $p_1$ (analogamente $S_{d3}$ e $q_1$, para $S_{ei}, i = 1\ a\ 4$). Em especial, resulta que:

$R_{ei} = A_i R_{d3} + B_i p_1$ , tal que $i = 1\ a\ 4$ (b 31)

$S_{ei} = A_i S_{d3} + B_i q_1$ , tal que $i = 1\ a\ 4$ (b 32)

com os coeficientes $A_i$ e $B_i$ sendo:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\eta(1-\eta^2) \qquad \text{(b 33)}$$

$$B_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\eta(1+\eta^2)(1+c_0)$$

$$A_2 = \frac{\eta^2}{2}$$

$$B_2 = \frac{(1+c_0)}{2}$$

$$A_3 = \frac{\eta}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta^2-\eta\right)$$

$$B_3 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta^3\right)(1+c_0)$$

$$A_4 = -\frac{\eta}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta^2+\eta\right)$$

$$B_4 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta^3\right)(1+c_0)$$

Considerando (b 31) em (b 16) e (b 18), ou (b 32) em (b 17) e (b 18), chega-se a um sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_{3d} \\ p_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} S_{3d} \\ q_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(b 34)}$$

onde:

$$K_{11} = -A_1\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + A_2\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + A_3 e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + A_4 e^{\alpha_e\sqrt{2}} \qquad \text{(b 35)}$$

$$K_{12} = -B_1\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + B_2\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + B_3 e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + B_4 e^{\alpha_e\sqrt{2}}$$

$$K_{21} = A_1\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) - A_2\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + A_3 e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + A_4 e^{\alpha_e\sqrt{2}}$$

$$K_{22} = B_1\, sen\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) - B_2\, cos\left(\alpha_e\sqrt{2}\right) + B_3 e^{-\alpha_e\sqrt{2}} + B_4 e^{\alpha_e\sqrt{2}}$$

A solução não trivial só é possível quando $|K| = 0$, que é a equação característica da análise modal do problema com contato unilateral. Tal equação

pode ser escrita em termos da variável $\eta$, isto é, $f(\eta, c_0) = 0$, sendo que, para cada valor de $\eta$ encontrado associa-se a frequência natural normalizada correspondente:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^4}} \tag{b 36}$$

Adotando $\eta^* = \frac{\sqrt{2}c_0}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}$, e resolvendo $|K| = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{16}\eta(1+c_0)\{sin(\eta^*)\big[\big(1-2\eta^2+2\sqrt{2}\eta^3-\eta^4\big)e^{-\eta^*} \\ +\big(1-2\eta^2-2\sqrt{2}\eta^3-\eta^4\big)e^{\eta^*}\big] \\ +cos(\eta^*)\big[\big(1-2\sqrt{2}\eta+2\eta^2-\eta^4\big)e^{-\eta^*} \\ -\big(1+2\sqrt{2}\eta+2\eta^2-\eta^4\big)e^{\eta^*}\big]\}=0\end{aligned} \tag{b 37}$$

Os resultados apresentados na Figura 60 mostram que para maiores valores de $c_0$, a equação característica $f(\eta, c_0) = 0$ cruza a abscissa um maior número de vezes, ou seja, quanto maior o trecho suspenso, maior o número de modos de vibração.

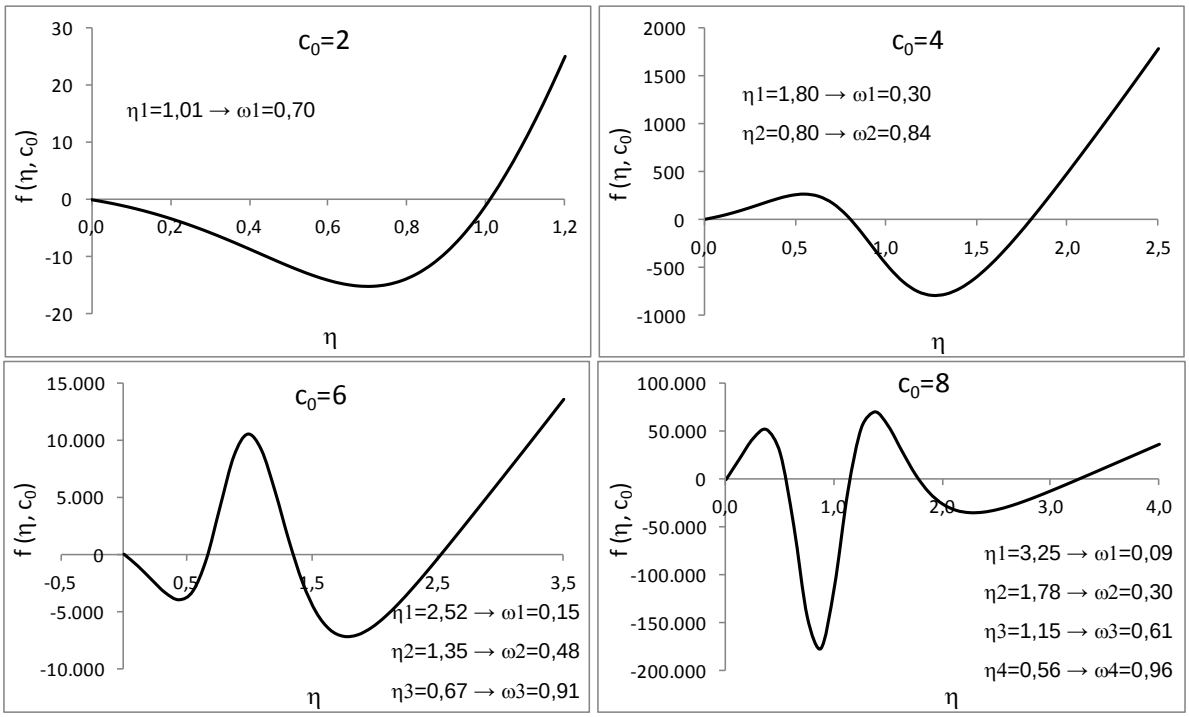



**Figura 60: Soluções da equação característica da análise modal para diferentes valores de $c_0$'s**

Para a determinação das relações modais, isto é, as relações entre os deslocamentos dinâmicos $\delta(z,\tau)$ e a variável modal a ser escolhida $U$, recuperando, parcialmente, as informações topológicas, utiliza-se o método das variedades invariantes (MVI).

A partir do sistema descrito em (b 34):

$$K_{11}R_{3d} + K_{12}p_1 = 0 \implies R_{d3} = \beta^* p_1 \tag{b 38}$$

onde:

$$\beta^* = -\frac{K_{12}}{K_{11}} \tag{b 39}$$

Portanto, de (b 31) e (b 32) decorrem:

$$R_{ie} = A_i R_{3d} + B_i p_1 = (A_i\beta^* + B_i)p_1 = C_i p_1 \tag{b 40}$$

$$S_{ie} = A_i R_{3d} + B_i q_1 = (A_i\beta^* + B_i)q_1 = C_i q_1 \tag{b 41}$$

de onde, a partir de (b 3):

$$\begin{aligned}\delta_e = \varepsilon\Big[&C_1 sen\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_2 cos\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_3 e^{\alpha_e\sqrt{2}z_0} + C_4 e^{-\alpha_e\sqrt{2}z_0} \\ &- (1+c_0) + (2{c_0}^2 - c_0 - 1)z_0 + {c_0}^2(3-c_0){z_0}^2 \\ &- {c_0}^2\left(\frac{5}{3}c_0 - 1\right){z_0}^3 - \frac{2}{3}{c_0}^3{z_0}^4\Big][p_1 sen(\omega\tau_0) + q_1 cos(\omega\tau_0)]\end{aligned} \tag{b 42}$$

para $-1 < z_0 < 0$

$$\begin{aligned}\delta_d = \varepsilon\{&e^{-\alpha_d z_0}[\beta^* sen(\alpha_d z_0) + (1+c_0)cos(\alpha_d z_0)] \\ &+ e^{-c_0 z_0}[-(1+c_0)\cos(c_0 z_0) - (1-c_0)sen(c_0 z_0) \\ &- (1+c_0)z_0\cos(c_0 z_0) - (1-c_0)z_0\, sen(c_0 z_0)]\}[p_1 sen(\omega\tau_0) \\ &+ q_1 cos(\omega\tau_0)]\end{aligned} \tag{b 43}$$

para $z_0 > 0$

Escolhe-se como coordenada generalizada modal $U$, o deslocamento horizontal adimensional do *TDP*:

$$U = \varepsilon[p_1 sen(\omega\tau_0) + q_1 cos(\omega\tau_0)] \tag{b 44}$$

decorrendo $p_1$ e $q_1$ das condições iniciais do problema. Por derivação em relação a $\tau_0$, obtém-se a expressão da velocidade horizontal adimensional do *TDP*:

$$V = \dot{U} = \varepsilon\omega[p_1 cos(\omega\tau_0) - q_1 sen(\omega\tau_0)] \tag{b 45}$$

Assim, reescrevem-se as equações (b 44) e (b 45) de maneira a obter o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ -q_1 & p_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} sen(\omega\tau_0) \\ cos(\omega\tau_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{U}{\varepsilon} \\ \frac{V}{\varepsilon\omega} \end{Bmatrix} \tag{b 46}$$

Obtendo as expressões:

$$sen(\omega\tau_0) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{U}{\varepsilon} & q_1 \\ \frac{V}{\varepsilon\omega} & p_1 \end{vmatrix}}{{p_1}^2 + {q_1}^2} = \frac{\frac{U}{\varepsilon}p_1 - \frac{V}{\varepsilon\omega}q_1}{{p_1}^2 + {q_1}^2} = \frac{Up_1 - \frac{V}{\omega}q_1}{\varepsilon({p_1}^2 + {q_1}^2)} \tag{b 47}$$

$$cos(\omega\tau_0) = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & \frac{U}{\varepsilon} \\ -q_1 & \frac{V}{\varepsilon\omega} \end{vmatrix}}{{p_1}^2 + {q_1}^2} = \frac{\frac{U}{\varepsilon}q_1 + \frac{V}{\varepsilon\omega}p_1}{{p_1}^2 + {q_1}^2} = \frac{Uq_1 + \frac{V}{\omega}p_1}{\varepsilon({p_1}^2 + {q_1}^2)} \tag{b 48}$$

Substituindo (b 47) e (b 48) em (b 42) e (b 43), obtém-se as expressões para as soluções dinâmicas em função da variável modal $U$, à esquerda e à direita do *TDP*:

$$\delta_e = \Big[C_1 sen\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_2 cos\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_3 e^{\alpha_e\sqrt{2}z_0} + C_4 e^{-\alpha_e\sqrt{2}z_0} - (1+c_0) + (2{c_0}^2 - c_0 - 1)z_0 + {c_0}^2(3-c_0){z_0}^2 - {c_0}^2\left(\frac{5}{3}c_0 - 1\right){z_0}^3 - \frac{2}{3}{c_0}^3{z_0}^4\Big]U \quad \text{(b 49)}$$

$$\delta_d = \{e^{-\alpha_d z_0}[\beta^* sen(\alpha_d z_0) + (1+c_0)cos(\alpha_d z_0)] + e^{-c_0 z_0}[-(1+c_0)\,cos(c_0 z_0) - (1-c_0)sen(c_0 z_0) - (1+c_0)z_0\,cos(c_0 z_0) - (1-c_0)z_0\,sen(c_0 z_0)]\}U \quad \text{(b 50)}$$

Definem-se, finalmente, as funções modais que são utilizadas como funções de projeção no método de Galerkin:

$$\zeta_e(z_0) = \Big[C_1 sen\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_2 cos\big(\alpha_e\sqrt{2}z_0\big) + C_3 e^{\alpha_e\sqrt{2}z_0} + C_4 e^{-\alpha_e\sqrt{2}z_0} - (1+c_0) + (2{c_0}^2 - c_0 - 1)z_0 + {c_0}^2(3-c_0){z_0}^2 - {c_0}^2\left(\frac{5}{3}c_0 - 1\right){z_0}^3 - \frac{2}{3}{c_0}^3{z_0}^4\Big] \quad \text{(b 51)}$$

$$\zeta_d(z_0) = e^{-\alpha_d z_0}[\beta^* sen(\alpha_d z_0) + (1+c_0)cos(\alpha_d z_0)] + e^{-c_0 z_0}[-(1+c_0)\,cos(c_0 z_0) - (1-c_0)sen(c_0 z_0) - (1+c_0)z_0\,cos(c_0 z_0) - (1-c_0)z_0\,sen(c_0 z_0)] \quad \text{(b 52)}$$

reescrevendo as relações (b 49) e (b 50) da seguinte forma:

$$\delta_e = \zeta_e(z_0)U \quad \text{(b 53)}$$

$$\delta_d = \zeta_d(z_0)U \quad \text{(b 54)}$$

A partir de (b 40) e (b 41), determinam-se os coeficientes para $R_{ei}, i = 1\ a\ 4$, e analogamente para $S_{ei}, i = 1\ a\ 4$, concluindo a recuperação das relações modais e caracterizando topologicamente a variedade em que o movimento do oscilador modal transcorre.

## 8.3. Coeficientes estáticos e dinâmicos da configuração “quase-estática”

Com o intuito de utilizar uma notação mais “leve” para as fórmulas, $c_0(0)$ foi substituído por $c_0$.

$$\hat{u}_{e0} = -c_0 z - {c_0}^2 z + {c_0}^3 z^2 + \frac{{c_0}^3 z^3}{3} - \frac{{c_0}^4 z^3}{3} - \frac{{c_0}^4 z^4}{6} \quad \text{(c 1)}$$

$$\hat{u}_{e1} = -z - 2c_0 z + 3{c_0}^2 z^2 + {c_0}^2 z^3 - \frac{4{c_0}^3 z^3}{3} - \frac{2{c_0}^3 z^4}{3} \quad \text{(c 2)}$$

$$\hat{u}_{e0}{}' = -c_0 - c_0^2 + 2zc_0^3 + z^2 c_0^3 - z^2 c_0^4 - \frac{2}{3} z^3 c_0^4 \quad \text{(c 3)}$$

$$\hat{u}_{e1}{}' = -1 - 2c_0 + 6zc_0^2 + 3z^2 c_0^2 - 4z^2 c_0^3 - \frac{8}{3} z^3 c_0^3 \quad \text{(c 4)}$$

$$\hat{u}_{e0}{}'' = 2c_0^3 + 2zc_0^3 - 2zc_0^4 - 2z^2 c_0^4 \quad \text{(c 5)}$$

$$\hat{u}_{e1}{}'' = 6c_0^2 + 6zc_0^2 - 8zc_0^3 - 8z^2 c_0^3 \quad \text{(c 6)}$$

$$\hat{u}_{d0} = -zc_0 - zc_0^2 + z^2c_0^3 + \frac{1}{3}z^3c_0^3 - \frac{1}{3}z^3c_0^4 - \frac{1}{6}z^4c_0^4 + \frac{1}{30}z^5c_0^5 + \frac{1}{30}z^5c_0^6 \tag{c 7}$$

$$-\frac{1}{90}z^6c_0^7 - \frac{1}{630}z^7c_0^7 + \frac{1}{630}z^7c_0^8 + \frac{z^8c_0^8}{2520} - \frac{z^9c_0^9}{22680} - \frac{z^9c_0^{10}}{22680} + \frac{z^{10}c_0^{11}}{113400} + \frac{z^{11}c_0^{11}}{1247400}$$

$$-\frac{z^{11}c_0^{12}}{1247400} - \frac{z^{12}c_0^{12}}{7484400} + \frac{z^{13}c_0^{13}}{97297200} + \frac{z^{13}c_0^{14}}{97297200} - \frac{z^{14}c_0^{15}}{681080400} - \frac{z^{15}c_0^{15}}{10216206000}$$

$$+\frac{z^{15}c_0^{16}}{10216206000} + \frac{z^{16}c_0^{16}}{81729648000} - \frac{z^{17}c_0^{17}}{1389404016000} - \frac{z^{17}c_0^{18}}{1389404016000}$$

$$+\frac{z^{18}c_0^{18}}{6402373705728000} + \frac{z^{18}c_0^{19}}{12504636144000} + \frac{z^{19}c_0^{19}}{246245142528000}$$

$$+\frac{z^{22}c_0^{23}}{1137652558479360000} - \frac{29z^{23}c_0^{23}}{29578966520463360000} - \frac{19z^{23}c_0^{24}}{59157933040926720000}$$

$$+\frac{z^{24}c_0^{24}}{5258482936971264000} - \frac{137z^{25}c_0^{25}}{354947598245560320000}$$

$$-\frac{z^{25}c_0^{26}}{131462073424281600000} + \frac{z^{26}c_0^{26}}{2581437078149529600000}$$

$$+\frac{137z^{26}c_0^{27}}{46143187771922841600000} - \frac{z^{27}c_0^{27}}{565018625778647040000}$$

$$-\frac{421z^{27}c_0^{28}}{16611547597892222976000000} + \frac{29z^{28}c_0^{28}}{1162808331852455608320000}$$

$$-\frac{37z^{29}c_0^{29}}{7752055545683037388800000} - \frac{z^{29}c_0^{30}}{1162808331852455608320000}$$

$$+\frac{z^{30}c_0^{30}}{3066747248841641164800000} + \frac{37z^{30}c_0^{31}}{116280833185245560832000000}$$

$$-\frac{z^{31}c_0^{31}}{23256166637049112166400000} - \frac{29z^{31}c_0^{32}}{1395369998222946729984000000}$$

$$+\frac{z^{32}c_0^{32}}{2029629088324286152704000000} - \frac{z^{33}c_0^{33}}{74419733238557158932480000000}$$

$$-\frac{z^{33}c_0^{34}}{6697775991470144303923200000} + \frac{z^{34}c_0^{34}}{133955519829402886078464000000}$$

$$+\frac{z^{34}c_0^{35}}{1265135465055471701852160000000} - \frac{z^{35}c_0^{36}}{22772438370998490633338880000000}$$

$$\hat{u}_{d1} = -z - 2zc_0 + 3z^2c_0^2 + z^3c_0^2 - \frac{4}{3}z^3c_0^3 - \frac{2}{3}z^4c_0^3 + \frac{1}{6}z^5c_0^4 + \frac{1}{5}z^5c_0^5 \qquad \text{(c 8)}$$

$$-\frac{7}{90}z^6c_0^6 - \frac{1}{90}z^7c_0^6 + \frac{4}{315}z^7c_0^7 + \frac{1}{315}z^8c_0^7 - \frac{z^9c_0^8}{2520} - \frac{z^9c_0^9}{2268} + \frac{11z^{10}c_0^{10}}{113400} + \frac{z^{11}c_0^{10}}{113400}$$

$$-\frac{z^{11}c_0^{11}}{103950} - \frac{z^{12}c_0^{11}}{623700} + \frac{z^{13}c_0^{12}}{7484400} + \frac{z^{13}c_0^{13}}{6949800} - \frac{z^{14}c_0^{14}}{45405360} - \frac{z^{15}c_0^{14}}{681080400}$$

$$+\frac{z^{15}c_0^{15}}{638512875} + \frac{z^{16}c_0^{15}}{5108103000} - \frac{z^{17}c_0^{16}}{81729648000} - \frac{z^{17}c_0^{17}}{77189112000}$$

$$+\frac{z^{18}c_0^{17}}{355687428096000} + \frac{19z^{18}c_0^{18}}{12504636144000} + \frac{19z^{19}c_0^{18}}{246245142528000} - \frac{z^{19}c_0^{19}}{11856247603200}$$

$$-\frac{z^{20}c_0^{19}}{145508493312000} - \frac{z^{21}c_0^{20}}{4924902850560000} + \frac{11z^{21}c_0^{21}}{30556783595520000}$$

$$+\frac{z^{22}c_0^{21}}{6984407678976000} + \frac{23z^{22}c_0^{22}}{1137652558479360000} - \frac{667z^{23}c_0^{22}}{29578966520463360000}$$

$$-\frac{19z^{23}c_0^{23}}{2464913876705280000} + \frac{z^{24}c_0^{23}}{219103455707136000} - \frac{137z^{25}c_0^{24}}{141979039298224128000}$$

$$-\frac{z^{25}c_0^{25}}{5056233593241600000} + \frac{z^{26}c_0^{25}}{992860414672896000 0} + \frac{137z^{26}c_0^{26}}{1709006954515660800000}$$

$$-\frac{z^{27}c_0^{26}}{209266157695795200000} - \frac{421z^{27}c_0^{27}}{5932695570675793920 0000}$$

$$+\frac{29z^{28}c_0^{27}}{4152886899473055744 0000} - \frac{1073z^{29}c_0^{28}}{7752055545683037388800000}$$

$$-\frac{z^{29}c_0^{29}}{3876027772841518694 4000} + \frac{z^{30}c_0^{29}}{1022249082947213721 60000}$$

$$+\frac{1147z^{30}c_0^{30}}{116280833185245560832000000} - \frac{31z^{31}c_0^{30}}{2325616663704911216640000 00}$$

$$-\frac{29z^{31}c_0^{31}}{436053124444670853120 00000} + \frac{z^{32}c_0^{31}}{6342590901013394227200 00000}$$

$$-\frac{z^{33}c_0^{32}}{225514343147142905856000000} - \frac{z^{33}c_0^{33}}{1969934115138277736448000000}$$

$$+\frac{z^{34}c_0^{33}}{3939868230276555472896000000} + \frac{z^{34}c_0^{34}}{36146727573013477195776 00000}$$

$$-\frac{z^{35}c_0^{35}}{6325677325277358509260800000 0}$$

$$\hat{u}_{d0}{}' = -c_0 - c_0^2 + 2zc_0^3 + z^2c_0^3 - z^2c_0^4 - \frac{2}{3}z^3c_0^4 + \frac{1}{6}z^4c_0^5 + \frac{1}{6}z^4c_0^6 - \frac{1}{15}z^5c_0^7 \qquad \text{(c 9)}$$

$$-\frac{1}{90}z^6c_0^7 + \frac{1}{90}z^6c_0^8 + \frac{1}{315}z^7c_0^8 - \frac{z^8c_0^9}{2520} - \frac{z^8c_0^{10}}{2520} + \frac{z^9c_0^{11}}{11340} + \frac{z^{10}c_0^{11}}{113400} - \frac{z^{10}c_0^{12}}{113400}$$

$$-\frac{z^{11}c_0^{12}}{623700} + \frac{z^{12}c_0^{13}}{7484400} + \frac{z^{12}c_0^{14}}{7484400} - \frac{z^{13}c_0^{15}}{48648600} - \frac{z^{14}c_0^{15}}{681080400} + \frac{z^{14}c_0^{16}}{681080400}$$

$$+\frac{z^{15}c_0^{16}}{5108103000} - \frac{z^{16}c_0^{17}}{81729648000} - \frac{z^{16}c_0^{18}}{81729648000} + \frac{z^{17}c_0^{19}}{694702008000}$$

$$+\frac{73z^{18}c_0^{19}}{914624815104000} - \frac{19z^{18}c_0^{20}}{237124952064000} - \frac{53z^{19}c_0^{20}}{6402373705728000}$$

$$+\frac{z^{19}c_0^{21}}{6402373705728000} + \frac{z^{20}c_0^{21}}{2910169866240000} + \frac{z^{20}c_0^{22}}{2910169866240000}$$

$$+\frac{z^{21}c_0^{22}}{38414242234368000} - \frac{z^{21}c_0^{23}}{149388719800320000} - \frac{37z^{22}c_0^{23}}{6573103671214080000}$$

$$-\frac{437z^{22}c_0^{24}}{59157933040926720000} + \frac{z^{23}c_0^{24}}{1516870077972480000} + \frac{z^{23}c_0^{25}}{768284844687360000}$$

$$-\frac{z^{24}c_0^{25}}{5258482936971264000} - \frac{z^{24}c_0^{26}}{5258482936971264000} + \frac{z^{25}c_0^{26}}{32267963476869120000}$$

$$+\frac{41z^{25}c_0^{27}}{887368995613900800000} - \frac{167z^{26}c_0^{27}}{1845727510876913664000000}$$

$$-\frac{421z^{26}c_0^{28}}{6152425036256378880000000} - \frac{127z^{27}c_0^{28}}{16611547597892222976000000}$$

$$+\frac{z^{27}c_0^{29}}{2323293370334576640000} - \frac{29z^{28}c_0^{29}}{1162808331852455608320000}$$

$$-\frac{29z^{28}c_0^{30}}{1162808331852455608320000} + \frac{z^{29}c_0^{30}}{2555622707368034304000000}$$

$$+\frac{131z^{29}c_0^{31}}{23256166637049112166400000} - \frac{z^{30}c_0^{31}}{1268518180202678845440000000}$$

$$-\frac{899z^{30}c_0^{32}}{13953699982229467299840000000} - \frac{23z^{31}c_0^{32}}{13953699982229467299840000000}$$

$$+\frac{z^{31}c_0^{33}}{3986771423494133514240000000} - \frac{z^{32}c_0^{33}}{20296290883242861527040000000}$$

$$-\frac{z^{32}c_0^{34}}{20296290883242861527040000000} + \frac{z^{33}c_0^{34}}{83722199893376803799040000000}$$

$$+\frac{z^{33}c_0^{35}}{669777599147014430392320000000} + \frac{z^{34}c_0^{35}}{2277243837099849063333888000000000}$$

$$-\frac{z^{34}c_0^{36}}{6506410963142425895239680000000} - \frac{z^{35}c_0^{36}}{2277243837099849063333888000000000}$$

$$+\frac{z^{35}c_0^{37}}{227724383709984906333388800000}$$

$$\hat{u}_{d1}{}' = -1 - 2c_0 + 6zc_0^2 + 3z^2c_0^2 - 4z^2c_0^3 - \frac{8}{3}z^3c_0^3 + \frac{5}{6}z^4c_0^4 + z^4c_0^5 \qquad \text{(c 10)}$$

$$-\frac{7}{15}z^5c_0^6 - \frac{7}{90}z^6c_0^6 + \frac{4}{45}z^6c_0^7 + \frac{8}{315}z^7c_0^7 - \frac{1}{280}z^8c_0^8 - \frac{1}{252}z^8c_0^9 + \frac{11z^9c_0^{10}}{11340}$$

$$+\frac{11z^{10}c_0^{10}}{113400} - \frac{z^{10}c_0^{11}}{9450} - \frac{z^{11}c_0^{11}}{51975} + \frac{13z^{12}c_0^{12}}{7484400} + \frac{z^{12}c_0^{13}}{534600} - \frac{z^{13}c_0^{14}}{3243240} - \frac{z^{14}c_0^{14}}{45405360}$$

$$+\frac{z^{14}c_0^{15}}{42567525} + \frac{2z^{15}c_0^{15}}{638512875} - \frac{17z^{16}c_0^{16}}{81729648000} - \frac{z^{16}c_0^{17}}{4540536000} + \frac{19z^{17}c_0^{18}}{694702008000}$$

$$+\frac{1387z^{18}c_0^{18}}{914624815104000} - \frac{19z^{18}c_0^{19}}{11856247603200} - \frac{53z^{19}c_0^{19}}{320118685286400}$$

$$+\frac{z^{19}c_0^{20}}{304874938368000} + \frac{z^{20}c_0^{20}}{138579517440000} + \frac{11z^{20}c_0^{21}}{1455084933120000}$$

$$+\frac{z^{21}c_0^{21}}{1746101919744000} - \frac{23z^{21}c_0^{22}}{149388719800320000} - \frac{851z^{22}c_0^{22}}{6573103671214080000}$$

$$-\frac{437z^{22}c_0^{23}}{2464913876705280000} + \frac{z^{23}c_0^{23}}{63202919915520000} + \frac{z^{23}c_0^{24}}{30731393787494400}$$

$$-\frac{z^{24}c_0^{24}}{210339317478850560} - \frac{z^{24}c_0^{25}}{202249343729664000} + \frac{z^{25}c_0^{25}}{1241075518341120000}$$

$$+\frac{41z^{25}c_0^{26}}{32865518356070400000} - \frac{167z^{26}c_0^{26}}{683602781806264320000}$$

$$-\frac{421z^{26}c_0^{27}}{2197294655805849600000} - \frac{127z^{27}c_0^{27}}{5932695570675793920000}$$

$$+\frac{29z^{27}c_0^{28}}{2323293370334576640000} - \frac{841z^{28}c_0^{28}}{11628083318524556083200000}$$

$$-\frac{29z^{28}c_0^{29}}{3876027772841518694400}0 + \frac{z^{29}c_0^{29}}{8518742357893447680000}$$

$$+\frac{4061z^{29}c_0^{30}}{23256166637049112166400000} - \frac{31z^{30}c_0^{30}}{1268518180202678845440000}0$$

$$-\frac{899z^{30}c_0^{31}}{436053124444670853120000}0 - \frac{23z^{31}c_0^{31}}{436053124444670853120000}0$$

$$+\frac{z^{31}c_0^{32}}{120811255257397985280000}0 - \frac{z^{32}c_0^{32}}{615039117674026106880000}0$$

$$-\frac{z^{32}c_0^{33}}{5969497318600841625600000}0 + \frac{z^{33}c_0^{33}}{24624176439228471705600000}0$$

$$+\frac{z^{33}c_0^{34}}{19136502832771840868352000}0 + \frac{z^{34}c_0^{34}}{65064109631424258952396800000}0$$

$$-\frac{z^{34}c_0^{35}}{18073363786506738597888000000}-\frac{z^{35}c_0^{35}}{6325677325277358509260800000000}$$
$$+\frac{37z^{35}c_0^{36}}{227724383709984906333388800000000}$$

$$\hat{u}_{d0}'' = 2(c_0^3+zc_0^3-zc_0^4-z^2c_0^4+\frac{1}{3}z^3c_0^5+\frac{1}{3}z^3c_0^6-\frac{1}{6}z^4c_0^7-\frac{1}{30}z^5c_0^7 \qquad \text{(c 11)}$$
$$+\frac{1}{30}z^5c_0^8+\frac{1}{90}z^6c_0^8-\frac{1}{630}z^7c_0^9-\frac{1}{630}z^7c_0^{10}+\frac{z^8c_0^{11}}{2520}+\frac{z^9c_0^{11}}{22680}-\frac{z^9c_0^{12}}{22680}-\frac{z^{10}c_0^{12}}{113400}$$
$$+\frac{z^{11}c_0^{13}}{1247400}+\frac{z^{11}c_0^{14}}{1247400}-\frac{z^{12}c_0^{15}}{7484400}-\frac{z^{13}c_0^{15}}{97297200}+\frac{z^{13}c_0^{16}}{97297200}+\frac{z^{14}c_0^{16}}{681080400}$$
$$-\frac{z^{15}c_0^{17}}{10216206000}-\frac{z^{15}c_0^{18}}{10216206000}+\frac{z^{16}c_0^{19}}{81729648000}+\frac{z^{17}c_0^{19}}{1389404016000}$$
$$-\frac{z^{17}c_0^{20}}{1389404016000}-\frac{z^{18}c_0^{20}}{12504636144000}+\frac{z^{18}c_0^{21}}{6402373705728000}+\frac{z^{19}c_0^{21}}{237124952064000}$$
$$+\frac{z^{19}c_0^{22}}{246245142528000}-\frac{z^{20}c_0^{23}}{2910169866240000}-\frac{z^{21}c_0^{23}}{61113567191040000}$$
$$-\frac{z^{21}c_0^{24}}{103422959861760000}-\frac{z^{22}c_0^{24}}{1137652558479360000}+\frac{z^{22}c_0^{25}}{153656968937472000}$$
$$+\frac{19z^{23}c_0^{25}}{5915793304092672000}-\frac{29z^{23}c_0^{26}}{29578966520463360000}+\frac{z^{24}c_0^{27}}{5258482936971264000}$$
$$+\frac{z^{25}c_0^{27}}{131462073424281600000}-\frac{137z^{25}c_0^{28}}{3549475982455603200000}$$
$$-\frac{137z^{26}c_0^{28}}{46143187771922841600000}+\frac{z^{26}c_0^{29}}{2581437078149529600000}$$
$$+\frac{421z^{27}c_0^{29}}{16611547597892222976000000}-\frac{z^{27}c_0^{30}}{5650186257786470400000}$$
$$+\frac{29z^{28}c_0^{31}}{1162808331852455608320000}+\frac{z^{29}c_0^{31}}{1162808331852455608320000}$$
$$-\frac{37z^{29}c_0^{32}}{7752055545683037388800000}-\frac{37z^{30}c_0^{32}}{1162808331852455608320000000}$$
$$+\frac{z^{30}c_0^{33}}{3066747248841641164800000}+\frac{29z^{31}c_0^{33}}{13953699982229467299840000000}$$
$$-\frac{z^{31}c_0^{34}}{23256166637049112166400000000}+\frac{z^{32}c_0^{35}}{20296290883242861527040000000}$$
$$+\frac{z^{33}c_0^{35}}{6697775991470144303923200000000}-\frac{z^{33}c_0^{36}}{7441973323855715893248000000000}$$
$$-\frac{z^{34}c_0^{36}}{1265135465055471701852160000000}+\frac{z^{34}c_0^{37}}{13395551982940288607846400000000}$$

$$+\frac{z^{35}c_0^{37}}{227724383709984906333388800000000})$$

$$\hat{u}_{d1}'' = 2(3c_0^2 + 3zc_0^2 - 4zc_0^3 - 4z^2c_0^3 + \frac{5}{3}z^3c_0^4 + 2z^3c_0^5 - \frac{7}{6}z^4c_0^6 - \frac{7}{30}z^5c_0^6 \qquad \text{(c 12)}$$

$$+\frac{4}{15}z^5c_0^7 + \frac{4}{45}z^6c_0^7 - \frac{1}{70}z^7c_0^8 - \frac{1}{63}z^7c_0^9 + \frac{11z^8c_0^{10}}{2520} + \frac{11z^9c_0^{10}}{22680} - \frac{z^9c_0^{11}}{1890} - \frac{z^{10}c_0^{11}}{9450}$$

$$+\frac{13z^{11}c_0^{12}}{1247400} + \frac{z^{11}c_0^{13}}{89100} - \frac{z^{12}c_0^{14}}{498960} - \frac{z^{13}c_0^{14}}{6486480} + \frac{z^{13}c_0^{15}}{6081075} + \frac{z^{14}c_0^{15}}{42567525} - \frac{17z^{15}c_0^{16}}{10216206000}$$

$$-\frac{z^{15}c_0^{17}}{567567000} + \frac{19z^{16}c_0^{18}}{81729648000} + \frac{19z^{17}c_0^{18}}{1389404016000} - \frac{z^{17}c_0^{19}}{69470200800}$$

$$-\frac{z^{18}c_0^{19}}{625231807200} + \frac{z^{18}c_0^{20}}{304874938368000} + \frac{z^{19}c_0^{20}}{11291664384000} + \frac{z^{19}c_0^{21}}{11192961024000}$$

$$-\frac{23z^{20}c_0^{22}}{2910169866240000} - \frac{23z^{21}c_0^{22}}{61113567191040000} - \frac{z^{21}c_0^{23}}{4309289994240000}$$

$$-\frac{z^{22}c_0^{23}}{47402189936640000} + \frac{z^{22}c_0^{24}}{6146278757498880} + \frac{19z^{23}c_0^{24}}{2366317321637068800}$$

$$-\frac{29z^{23}c_0^{25}}{1137652558479360000} + \frac{z^{24}c_0^{26}}{194758627295232000} + \frac{z^{25}c_0^{26}}{4868965682380800000}$$

$$-\frac{137z^{25}c_0^{27}}{12676699937341440000} - \frac{137z^{26}c_0^{27}}{164797099185438720000}$$

$$+\frac{29z^{26}c_0^{28}}{2581437078149529600000} + \frac{12209z^{27}c_0^{28}}{16611547597892222976000000}$$

$$-\frac{z^{27}c_0^{29}}{188339541926215680000} + \frac{899z^{28}c_0^{30}}{1162808331852455608320000}$$

$$+\frac{31z^{29}c_0^{30}}{1162808331852455608320000} - \frac{37z^{29}c_0^{31}}{24225173580259491840000}$$

$$-\frac{37z^{30}c_0^{31}}{36337760370389237760000000} + \frac{z^{30}c_0^{32}}{929317348133830656000000}$$

$$+\frac{29z^{31}c_0^{32}}{42283939340089294848000000} - \frac{z^{31}c_0^{33}}{684004901089679769600000000}$$

$$+\frac{z^{32}c_0^{34}}{5798940252355103293440000000} + \frac{z^{33}c_0^{34}}{191365028327718408683520000000}$$

$$-\frac{z^{33}c_0^{35}}{2067214812182143303680000000} - \frac{z^{34}c_0^{35}}{35142651807096436162560000000}$$

$$+\frac{37z^{34}c_0^{36}}{1339555198294028860784640000000} + \frac{37z^{35}c_0^{36}}{227724383709984906333388800000000})$$