

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

ISADORA TOLEDO DE ALMEIDA

**Análise mecânica de compósitos laminados para turbinas
eólicas *offshore***

São Paulo

2024

ISADORA TOLEDO DE ALMEIDA

**Análise mecânica de compósitos laminados para turbinas
eólicas *offshore***

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Gay Neto
Coorientador: Prof. Dr. Sérgio Frascino Muller de Almeida

São Paulo

2024

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Almeida, Isadora Toledo de
Análise mecânica de compósitos laminados para turbinas eólicas offshore /
I. T. Almeida -- versão corr. -- São Paulo, 2024.
130 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Cascas (engenharia) 2.Materiais compósitos 3.Método dos elementos finitos 4.Pás de turbinas eólicas 5.Estabilidade estrutural I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Nome: Almeida, Isadora Toledo de

Título: Análise mecânica de compósitos laminados para turbinas eólicas *offshore*

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof(a). Dr(a). _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof(a). Dr(a). _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof(a). Dr(a). _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

*Dedico este trabalho à Helena,
minha família e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, compartilharam comigo o desenvolvimento deste trabalho e possibilitaram sua realização.

Ao Prof. Dr. Alfredo Gay Neto, pela orientação e parceria. Sua escuta ativa e crítica atenta foram essenciais ao meu crescimento nessa jornada.

Ao Prof. Dr. Sérgio Frascino Müller de Almeida, por traduzir seu vasto conhecimento e experiência em ideias simples e aplicáveis, ampliando os horizontes deste trabalho.

Aos meus colegas do LMC (Laboratório de Mecânica Computacional), pelas discussões e colaboração ao longo deste ciclo: Gabriel Lapa, Celso Faccio e Guilherme Martins.

À Petrobras, por meio da FUSP (Fundação de Apoio a Universidade de São Paulo), pelo apoio financeiro durante o trabalho (projeto 5900.0112605.19.9).

RESUMO

ALMEIDA, I. T. **Análise mecânica de compósitos laminados para turbinas eólicas *offshore***. 2024. 130p. - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Este trabalho se trata de uma revisão da adoção de modelos de elementos finitos de casca na análise e projeto estrutural de pás de turbinas eólicas, a partir do estudo de caso da pá da turbina eólica de referência de 10 MW, disponibilizada publicamente pelo Departamento de Energia Eólica da Universidade Técnica da Dinamarca (DTU), com dimensões compatíveis com turbinas *offshore*. Para se compreender o estado da arte em modelagem por elementos finitos de cascas laminadas, de que se constituem as pás, estende-se o modelo de casca não-linear geometricamente exato previamente implementado no código de elementos finitos Giraffe para aplicação em materiais isotrópicos a materiais compósitos, a partir da Teoria Clássica da Laminação (CLT). Busca-se, também, uma aproximação entre a teoria da estabilidade de cascas e sua aplicação em elementos finitos, a partir de uma breve discussão teórica e da análise não-linear da estabilidade ao longo do equilíbrio de uma viga-caixão típica. Conclui-se com uma análise comparativa do comportamento estrutural da pá da turbina de referência DTU 10-MW, modelada a partir de elementos finitos não-lineares de viga e casca, seguida da análise não-linear de estabilidade de um caso de carregamento em que se observa a flambagem do bordo de fuga.

Palavras-chave: Pá de turbina eólica. Casca. Compósito laminado. Estabilidade de cascas. Flambagem local. Método das vibrações. Sensibilidade à imperfeição.

ABSTRACT

ALMEIDA, I. T. **Mechanical analysis of laminated composites for offshore wind turbines**. 2024. 130p. - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

This work examines the adoption of shell finite element models in the analysis and structural design of wind turbine blades, based on the case study of the 10 MW reference wind turbine blade openly provided by the Department of Wind Energy from the Technical University of Denmark (DTU), with dimensions compatible with offshore turbines. The geometrically exact non-linear shell model previously implemented in the Giraffe finite element code for isotropic materials is extended to composites based on the Classical Lamination Theory (CLT), aiming for the comprehension of the state-of-the-art finite element modeling of shells. Also, the work aims to approximate the theory of shell stability and its application in finite elements from a brief theoretical discussion and the non-linear stability analysis along the equilibrium of a typical box beam. The work is concluded with a comparative analysis of the structural behavior of the blade of the reference turbine DTU 10-MW, modeled using non-linear beam and shell finite elements, followed by the non-linear shell stability analysis of a load case in which the trailing edge buckles.

Keywords: Wind turbine blade. Shell. Composite laminate. Shell stability. Local buckling. Vibration method. Imperfection sensitivity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Oferta de energia elétrica em 2020 no Brasil	23
Figura 2 – Fundações de turbinas eólicas <i>offshore</i> conforme profundidade	24
Figura 3 – Pás da turbina offshore Haliade-X 12MW, com 107m de extensão	25
Figura 4 – Escalas de observação de estruturas de materiais compósitos	29
Figura 5 – Empenamento de painel SiC/SiC $[0/90]_8$	30
Figura 6 – Modo típico de falha por delaminação	31
Figura 7 – Fluxograma de cálculo de código aero-hidro-servo-elástico para uma FWT	32
Figura 8 – Falhas no bordo de fuga em espécime após ensaio; (a) delaminação do bordo de fuga, (b) falha vista por cima e (c) falha vista pelo lado de sucção	33
Figura 9 – notações: (a) matricial, (b) Voigt/CLT, (c) própria	40
Figura 10 – cisalhamento puro no plano de isotropia	41
Figura 11 – (a) fotomicrografia de seção transversal de carbono/epóxi (AS4/3501-6), (b) geometria idealizada do empacotamento hexagonal	42
Figura 12 – Caracterização de esforços na lâmina conforme direções principais	42
Figura 13 – Tensões nos sistemas de referência da lâmina e laminado	44
Figura 14 – Deslocamentos de pontos materiais da placa	47
Figura 15 – (a) laminado, (b) campo de deformações, (c) campo de tensões	49
Figura 16 – (a) coordenadas da k-ésima lâmina no sistema de referência do laminado, direções positivas das (b.1) forças e (b.2) momentos resultantes	50
Figura 17 – tipos de acoplamento: (a) flexão-extensão, (b) torção-extensão	51
Figura 18 – Instantes e configurações	53
Figura 19 – Direções positivas das forças e momentos: (a) CLT e (b) modelo estrutural de casca geometricamente exato	64
Figura 20 – T6-3i: elemento triangular de seis nós	68
Figura 21 – Placa retangular com carregamento transversal	70
Figura 22 – Laminado UD: deslocamentos verticais do ponto central (mm) obtidos no ANSYS® e Giraffe para diferentes níveis de refinamento de malha	71
Figura 23 – $[0/90]_n$: placa quadrada sob compressão	72
Figura 24 – <i>Cross-ply</i> : deslocamentos verticais do ponto central (u_z) obtidos no ANSYS® e Giraffe para $\alpha_t = \{1, 10^3\}$	73
Figura 25 – <i>Cross-ply</i> : deslocamentos verticais do ponto central (u_z) obtidos no ANSYS® e Giraffe para $\alpha_t = \{10^3, 10^6\}$	73

Figura 26 – <i>Cross-ply</i> [0/90]: doze primeiras frequências naturais obtidas no ANSYS® e Giraffe para dois níveis de refinamento	74
Figura 27 – <i>Cross-ply</i> [0/90]: primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos obtidos no Giraffe (acima) e ANSYS® (abaixo)	75
Figura 28 – (a) Vista isométrica da viga-caixão, (b) detalhe das excentricidades impostas (dimensões em <i>mm</i>)	84
Figura 29 – Vistas (a) lateral e (b) superior da malha elementos finitos da viga-caixão	85
Figura 30 – Primeiro modo (global): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio	86
Figura 31 – Segundo modo (local): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio	86
Figura 32 – Terceiro modo (local): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio	87
Figura 33 – Frequências naturais em função do carregamento	88
Figura 34 – Regiões com <i>layups</i> similares.	92
Figura 35 – Malha de elementos finitos	93
Figura 36 – Definição (a) do eixo correspondente e dos vínculos cinemáticos, (b) do sistema de coordenadas local (c) e dos vetores seccionais $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{AD} \times \mathbf{CB}}{\ \mathbf{AD} \times \mathbf{CB}\ }$ e $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{EF}}{\ \mathbf{EF}\ }$, referentes à torção e flexão da seção, respectivamente.	94
Figura 37 – Coordenadas do vetor diretor ao longo dos eixos dos modelos de viga e casca.	95
Figura 38 – Primeiros dois modos <i>flapwise</i> . $f_{(a)} = 0,611Hz$, $f_{(b)} = 1,752Hz$	96
Figura 39 – Primeiros dois modos <i>edgewise</i> . $f_{(a)} = 0,964Hz$, $f_{(b)} = 2,883Hz$	96
Figura 40 – Modos simétricos de torção. $f_{(a)} = 5,707Hz$, $f_{(b)} = 5,747Hz$	96
Figura 41 – Envoltória polar de cargas de projeto e extremas. A coordenada angular representa o ângulo entre a direção da força aplicada e o eixo global \mathbf{x} e a coordenada radial, a magnitude da força distribuída, em <i>kN/m</i>	98
Figura 42 – Evolução dos deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$).	99
Figura 43 – Evolução das rotações na seção de controle ($z = 80,5m$).	99
Figura 44 – Deformação local da seção posicionada em $z = 19,21m$ em dois níveis de carregamento: (a) carga de projeto e (b) carga extrema.	100
Figura 45 – Evolução dos deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$).	101
Figura 46 – Evolução das rotações na seção de controle ($z = 80,5m$).	102
Figura 47 – Deformação local da seção posicionada em $z = 60,67m$ em dois níveis de carregamento: (a) carga de projeto e (b) carga extrema.	102
Figura 48 – Flambagem local do bordo de fuga.	103
Figura 49 – Primeiro (a) e segundo (b) modos lineares de flambagem, com cargas críticas de $q_{crit}^{(a)} = 12,92kN/m$ e $q_{crit}^{(b)} = 12,93kN/m$	104
Figura 50 – Evolução dos autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$) ao longo do carregamento. Os modos 1 e 2 representam os dois primeiros modos <i>edgewise</i> e o modo 3, o modo local do bordo de fuga. A queda do autovalor ($\beta_3 = 0$) destaca o atingimento da carga crítica ($q_x = 12,94kN/m$).	105

Figura 51 – Deformação do bordo de fuga na carga crítica ($q_x = 12,94kN/m$).	106
Figura 52 – Deslocamento fora do plano adimensional ($\delta^2 = u_{y,local}^2/\max u_{y,local}^2$) vs. carregamento em um nó do bordo de fuga de uma seção flambada ($z = 58,94m$)	106
Figura 53 – Curva força-deslocamento na seção de controle ($z = 80,5m$). A extra-polação do trecho linear na figura destaca a bifurcação do equilíbrio.	107
Figura 54 – Rigidez tangente ($K_T = \Delta q_x/\Delta u_x$) na seção de controle ($z = 80,5m$).	107
Figura 55 – Interação entre o modo local e o segundo modo <i>edgewise</i> em diferentes níveis de carregamento.	108
Figura 56 – Autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$) vs. carregamento. As linhas tracejadas referem-se aos modos da estrutura imperfeita.	109
Figura 57 – Deformação característica da flambagem local do bordo de fuga da estrutura imperfeita para $P_{crit}^\xi = 9,41kN/m$	110
Figura 58 – Deslocamento fora do plano adimensional ($\delta^2 = u_{y,local}^2/\max u_{y,local}^2$) vs. carregamento em um nó do bordo de fuga de uma seção flambada ($z = 58,94m$). As linhas tracejadas referem-se à estrutura imperfeita.	111
Figura 59 – Curvas força-deslocamento do modelo perfeito e imperfeito (tracejada) na seção de controle ($z = 80,5m$).	112
Figura 60 – Rigidez tangente ($K_T = \Delta q_x/\Delta u_x$) na seção de controle ($z = 80,5m$). A linha tracejada representa o modelo com imperfeições.	112
Figura 61 – Autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$) vs. carregamento. As linhas tracejadas, assinaladas com o sobrescrito ξ referem-se aos modos da estrutura imperfeita.	113
Figura 62 – direções positivas das forças e momentos: (a) CLT e (b) modelo estrutural de casca geometricamente exato	127
Figura 63 – Deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$).	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades da lâmina UD carbono/epóxi AS4D/9310	70
Tabela 2 – Laminado UD: deslocamentos verticais do ponto central (mm) obtidos no ANSYS® e Giraffe para diferentes níveis de refinamento de malha.	71
Tabela 3 – <i>Cross-ply</i> : deslocamentos verticais do ponto central (u_z) obtidos no ANSYS® e Giraffe para $\alpha_t = \{1, 10^3, 10^6\}$	72
Tabela 4 – <i>Cross-ply</i> [0/90]: doze primeiras frequências naturais obtidas no ANSYS® e Giraffe para dois níveis de refinamento	74
Tabela 5 – Cargas-limite por condição de excentricidade (79)	84
Tabela 6 – Propriedades dos materiais (79)	84
Tabela 7 – Massa discreta considerada em cada junta (79)	85
Tabela 8 – Frequências naturais dos três primeiros modos (f_1, f_2, f_3): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio	87
Tabela 9 – Propriedades mecânicas aparentes das lâminas multidirecionais (17)	91
Tabela 10 – Propriedades mecânicas da madeira balsa (17),	92
Tabela 11 – Primeiras frequências naturais para os modelos de viga e casca	95
Tabela 12 – Cenários de carregamento por simulação,	97
Tabela 13 – Deslocamentos e rotações na seção de controle ($z = 80,5m$),	98
Tabela 14 – Deslocamentos e rotações na seção de controle ($z = 80,5m$),	101
Tabela 15 – Deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$)	129

LISTA DE SÍMBOLOS

\cdot	Produto interno entre dois vetores
$:$	Produto interno entre dois tensores
\times	Produto vetorial
\otimes	Produto tensorial
<i>skew</i>	Operador que retorna o tensor antissimétrico associado a um vetor
<i>axial</i>	Operador que retorna o vetor associado a um tensor antissimétrico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Objetivos	26
1.2	Organização do texto	27
1.3	Notação	27
2	ESTADO DA ARTE	29
2.1	Materiais compósitos	29
2.2	Análise estrutural de pás de turbinas eólicas	31
2.3	Cascas	34
2.4	Estabilidade de cascas	36
3	FORMULAÇÃO	39
3.1	Teoria Clássica da Laminação	39
3.1.1	Material geralmente anisotrópico	39
3.1.2	Material especialmente ortotrópico	40
3.1.3	Material transversalmente isotrópico	40
3.1.4	Estado de tensão da lâmina fina no plano	41
3.1.5	Transformação de coordenadas	43
3.1.6	Relações constitutivas da lâmina no laminado	44
3.1.7	Cinemática do laminado	46
3.1.8	Laminado: esforços internos generalizados	48
3.1.9	Distribuição de massa	51
3.1.10	Não-linearidade geométrica	51
3.2	Modelo estrutural: casca não-linear geometricamente exata	52
3.2.1	Cinemática	52
3.2.2	Deformações	55
3.2.3	Potência dos esforços internos e externos	59
3.2.4	Estática	61
3.2.5	Equação constitutiva para materiais compósitos	63
3.2.6	Contribuição inercial	63
3.2.7	Modelagem em elementos finitos: T6-3i	67
3.3	Resultados	69
3.3.1	Definição do material	70
3.3.2	Laminado unidirecional: placa retangular simplesmente apoiada sob carregamento transversal	70

3.3.3	Laminado assimétrico <i>cross-ply</i> $[0/90]_n$: placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento axial	71
3.3.4	Laminado assimétrico <i>cross-ply</i> $[0/90]$: análise modal com pré-tensão	73
3.3.5	Conclusões	75
4	ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTABILIDADE	77
4.1	Conceitos de estabilidade	77
4.1.1	Descrição de um sistema dinâmico	78
4.1.2	1º Método de Lyapunov	79
4.1.3	Método das vibrações	80
4.1.4	Método das vibrações generalizado	81
4.2	Análise de viga-caixão no regime de pós-flambagem	83
4.2.1	Descrição do problema	83
4.2.2	Modelo de elementos finitos	85
5	ANÁLISE ESTRUTURAL DA TURBINA DE REFERÊNCIA	91
5.1	Simulações comparadas: viga e casca	91
5.1.1	Análise modal	95
5.1.2	Análise estática	97
5.1.2.1	<i>Pressure side Towards Suction side</i>	98
5.1.2.2	<i>Leading edge Towards Trailing edge</i>	100
5.2	Análise de estabilidade	103
5.2.1	Estabilidade da estrutura perfeita	104
5.2.2	Estabilidade da estrutura imperfeita	109
6	CONCLUSÃO	115
	REFERÊNCIAS	117
	APÊNDICES	125
	APÊNDICE A – CONTRIBUIÇÃO CONSTITUTIVA NO OPERADOR TANGENTE	127
	APÊNDICE B – RESULTADOS COMPARADOS DAS 12 SIMULAÇÕES	129

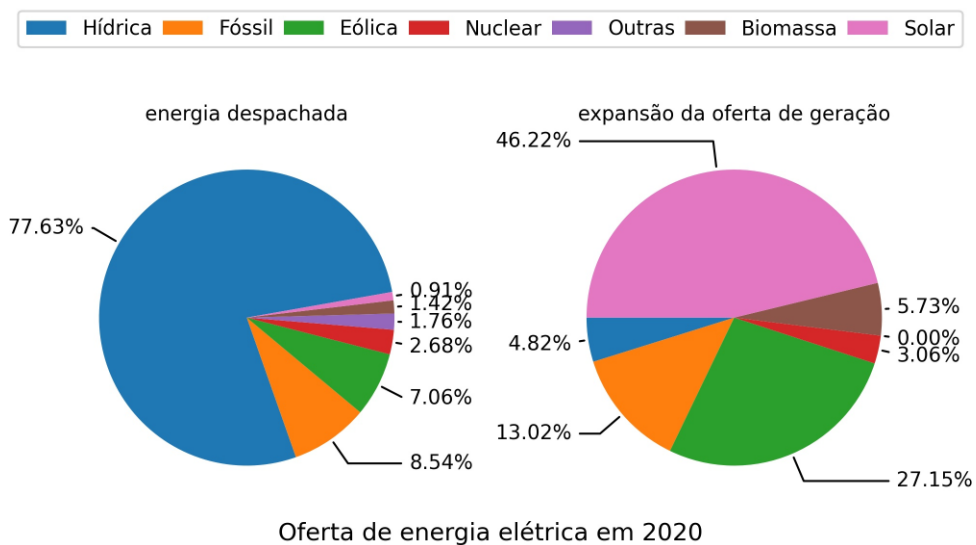
1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da indústria, de novos padrões de vida e consumo, bem como a expansão urbana e o crescimento populacional geraram um aumento vertiginoso na demanda energética mundial, conferindo caráter estratégico ao conhecimento técnico-científico da extração de recursos energéticos, que se desenvolve intensamente desde meados do século XVIII.

Historicamente, combustíveis fósseis se tornaram a mais importante fonte de energia primária, seguidos da energia nuclear e hidroelétrica (1). Entretanto, o consumo elevado desses combustíveis tem trazido impactos ambientais e sociais alarmantes. Em sua queima, liberam gases do efeito estufa (GEE), ameaçando a estabilidade climática do planeta e gerando danos humanos e ambientais irreversíveis (2). Segundo dados da Organização Mundial da Saúde, anualmente, 7 milhões de mortes prematuras estão relacionadas à poluição do ar (3).

A necessidade de transformação da matriz energética mundial é reconhecida internacionalmente, de modo que 195 países, dentre eles o Brasil, assinaram o Acordo de Paris, em 2016, com o objetivo de reduzir emissões de GEE. O Brasil, especificamente, se comprometeu a alcançar 45% de energia renovável na composição de sua matriz energética até 2030 (4). A Figura 1 mostra a tendência de expansão de novas fontes renováveis, como a eólica e solar, na matriz elétrica brasileira.

Figura 1 – Oferta de energia elétrica em 2020 no Brasil

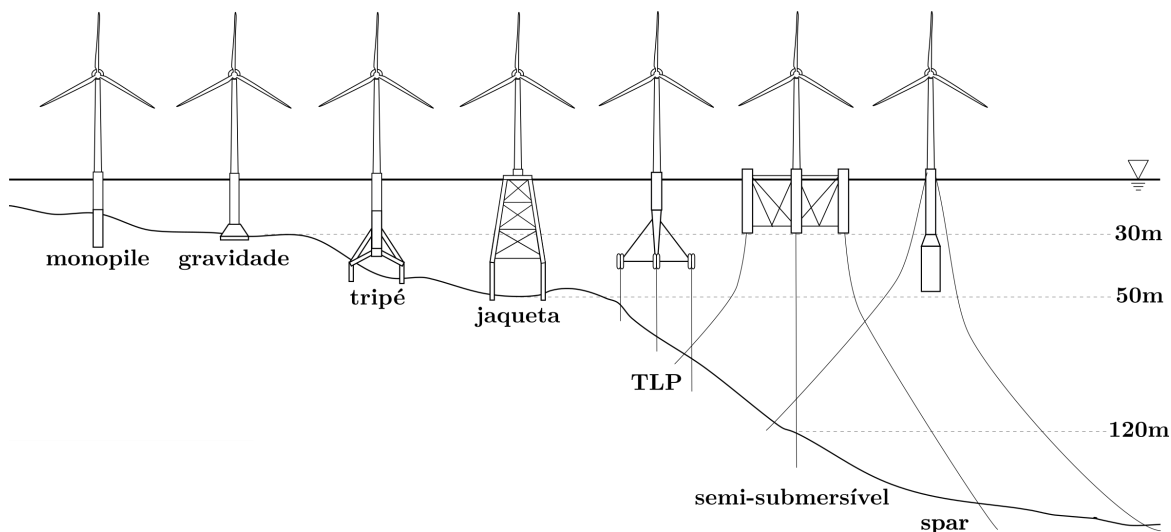


Fonte: elaboração própria a partir de dados da ANEEL (5)

Nas últimas décadas, o desenvolvimento tecnológico em energia eólica tem reduzido custos e ampliado o desempenho e confiabilidade de suas soluções, reduzindo progressivamente os entraves ao seu aproveitamento comercial (6), de modo que, em 2023, a energia eólica é uma alternativa viável à ampliação da matriz energética brasileira.

Além da exploração dos ventos continentais, materializada nos parques eólicos *onshore*, hoje, busca-se expandir a fronteira de exploração da geração eólica em alto mar, denominada *offshore*. Comparados aos ventos continentais, os ventos oceânicos têm velocidades tipicamente maiores e são menos turbulentos, estimando-se rendimentos de energia 30% maiores nas turbinas eólicas *offshore* (7). A maior parte destes parques eólicos situa-se em regiões de águas rasas, apoiando-se em estruturas fixas, que se estendem até o fundo do mar. Entretanto, essas regiões são geograficamente limitadas, além de apresentarem menor potencial eólico em relação ao alto mar, o que abre espaço para o desenvolvimento de turbinas eólicas flutuantes (FWT) (8). A Figura 2 mostra as principais fundações para turbinas eólicas *offshore*. Sistemas fixos são recomendados em lâminas d'água de até 50 metros e flutuantes, em águas mais profundas (9).

Figura 2 – Fundações de turbinas eólicas *offshore* conforme profundidade



Fonte: adaptado de (9) e (10)

Segundo (11), podem-se descrever os sistemas fixos:

- **Monopile:** estrutura de um único e largo tubo de aço cravado no solo marinho
- **Gravidade:** estrutura de concreto estabilizada por seu peso próprio
- **Tripé:** estrutura tubular com um tripé cujos pés são cravados no solo marinho
- **Jaqueta:** estrutura treliçada com 4 a 8 pés fixados ao solo por perfuração

E os sistemas flutuantes:

- **TLP - *Tension Leg Platform***: estrutura ancorada por cabos tensionados por estacas presas ao solo marinho
- **Semi-submersível**: estrutura formada por um casco flutuante fixada por âncoras e linhas de ancoragem
- **Spar**: tubo metálico lastreado com água, ancorado de forma semelhante ao sistema semi-submersível

A tecnologia de vários desses sistemas foi importada do setor de óleo e gás (O&G), tradicionalmente o primeiro a explorar o subsolo oceânico na extração de petróleo. Em 2018, a Agência Internacional de Energia (IEA) sinalizou o potencial de sinergia entre o setor O&G e a produção de energia eólica *offshore*, entre eles: o potencial de eletrificar operações de O&G *offshore* e melhorar seu desempenho ambiental e a possibilidade de encontrar novos usos para a infraestrutura existente de petróleo e gás *offshore* (12).

Entretanto, o alto custo da energia eólica *offshore* ainda é um obstáculo para seu aproveitamento, de modo que se devem desenvolver turbinas maiores, capazes de gerar mais energia (7), o que requer contínuo avanço tecnológico. A pá da turbina Haliade-X 12 MW ilustra essa diretriz na Figura 3.

Figura 3 – Pás da turbina offshore Haliade-X 12MW, com 107m de extensão



Fonte: (13)

As pás de um aerogerador constituem os elementos mais importantes do rotor, responsável por capturar parte da energia cinética do vento para transformá-la em energia elétrica, de modo que sua área de varredura relaciona-se diretamente ao desempenho

energético a ser obtido pelo conjunto (14). A eficiência energética torna-se um parâmetro ainda mais importante no contexto *offshore*, na medida em que apresenta custos de implantação e manutenção superiores ao *onshore*. Assim, na fabricação das pás, deve-se optar por materiais duráveis e leves, para que comecem a girar mesmo a baixas velocidades de vento (15), o que justifica a ampla utilização de laminados de materiais compósitos reforçados com fibras: leves, altamente duráveis, resistentes à fadiga, tolerantes ao dano e, também, rígidos (16).

Entretanto, a imprevisibilidade do comportamento estrutural no que concerne à propagação de falha, fadiga, delaminação, entre outros mecanismos de ruptura microestruturais, leva a coeficientes de segurança muito altos no dimensionamento estrutural de aerogeradores (16). A colaboração entre academia e indústria é fundamental para preencher lacunas na representação do comportamento estrutural das pás, este, por sua vez, fundamental para o desenvolvimento de projetos estruturais mais econômicos e aerodinâmicos. Nesse sentido, turbinas de referência têm grande importância, pautando estudos que explorem novas tecnologias e metodologias. Em 2013, o Departamento de Energia Eólica da Universidade Técnica da Dinamarca (DTU) definiu a *DTU 10-Megawatt Reference Wind Turbine* (17), uma turbina de 10MW cujas dimensões são compatíveis com o setor *offshore*, sobre a qual este trabalho se debruçará*.

1.1 Objetivos

Este trabalho investiga quando se requer a adoção de modelos de casca no projeto estrutural de pás de turbinas eólicas e qual ganho na representação do comportamento estrutural da pá esses modelos fornecem em relação aos modelos de viga usualmente adotados em fase de projeto. Especificamente, trata de uma revisão do estado da arte da análise estrutural de cascas laminadas por elementos finitos, sob as perspectivas da análise estática e da estabilidade, seguida da aplicação desses conceitos em um estudo de caso da turbina de referência DTU 10-MW (17). Nele, comparam-se os resultados de análises estáticas obtidos a partir de modelos estruturais geometricamente não-lineares de viga e casca, bem como metodologias lineares e não-lineares de análise de estabilidade do equilíbrio.

* A mais recente turbina de referência *IEA Wind 15-Megawatt Offshore Reference Wind Turbine* foi projetada como uma turbina *offshore* em 2020 pela Agência Internacional de Energia (IEA). Este trabalho se debruçou, inicialmente, sobre a análise estrutural do modelo de casca disponibilizado no repositório dessa turbina (18), tanto no *software* comercial de elementos finitos ANSYS (19), quanto no Giraffe (20). O modelo de elementos finitos não obteve convergência em simulações estáticas com baixo nível de carregamento, comparado aos de projeto da turbina e foi posteriormente retirado do repositório pelos próprios autores.

1.2 Organização do texto

Além desta introdução, este trabalho é dividido em mais quatro partes. O capítulo seguinte, dividido em quatro seções, apresenta conceitos de materiais compósitos laminados, modelagem estrutural de pás de turbinas eólicas, modelos estruturais de casca e de metodologias de análise de estabilidade de cascas. O Capítulo 3 descreve as formulações matemáticas – a Teoria Clássica da Laminação (CLT) e a formulação geometricamente exata da casca – implementadas no ambiente de elementos finitos Giraffe (20), bem como verificação dos resultados. O método das vibrações é apresentado no Capítulo 4, acompanhada de um exemplo da metodologia aplicada à análise de estabilidade de uma viga-caixão. No Capítulo 5 apresentam-se os resultados das análises estáticas comparativas entre os modelos de viga e casca e de estabilidade local ao longo do equilíbrio para a turbina de referência (DTU10MW) (17), seguidos das conclusões do trabalho.

1.3 Notação

Este trabalho utiliza a seguinte notação:

- **grandezas escalares:** letras minúsculas latinas ou gregas em itálico ($a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$)
- **vetores:** letras minúsculas latinas ou gregas em negrito itálico ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$)
- **tensores de segunda ordem:** letras maiúsculas latinas ou gregas em negrito itálico ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$)
- **convenção de soma:** somam-se índices repetidos (índices gregos variam de 1 a 2 e latinos, de 1 a 3)
- **derivadas espaciais:** $(\)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\)$
- **derivadas temporais:** $(\dot{\ }) = \frac{\partial}{\partial t}(\)$

Na seção 3.1:

- **sistemas de referência:** $(\)_{1,2}$ e $(\)_{x,y}$ indicam os sistemas de referência da lâmina e do laminado, respectivamente
- **planos de referência:** $(\)_0$ indicam grandezas calculadas no plano médio da casca, $(\)^p$ grandezas de membrana e $(\)^t$, transversais
- **lâmina:** $(\)^k$ indicam grandezas da k-ésima lâmina

Na seção 3.2:

- **funções no tempo:** grandezas calculadas no instante t_i são expressas como $()^i$ e, analogamente, $()^{i+1}$ referem-se ao instante t_{i+1}

Na seção 4.1:

- **matrizes hermitianas:** o sobrescrito $()^*$ indica matrizes complexas anti-hermitianas
- **operadores:** o operador $vec()$ empilha as colunas de uma matriz, como mostra o exemplo:

$$vec \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$$

2 ESTADO DA ARTE

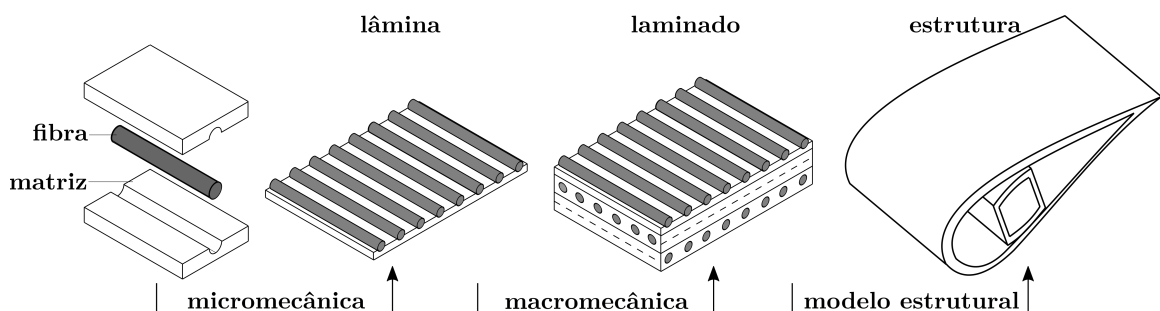
2.1 Materiais compósitos

Compósitos são materiais multifásicos em que há uma combinação de duas ou mais fases a fim de agregar suas potências e compensar suas fragilidades, ou, como define Smith, “um material formado por uma mistura ou combinação de dois ou mais micro ou macroconstituintes que diferem na forma e na composição química e que, na sua essência, são insolúveis uns nos outros” (21).

Em geral, essas fases apresentam atributos substancialmente diferentes e, sobretudo, complementares, o que confere à sua microestrutura uma natureza altamente heterogênea e anisotrópica. Uma formulação usual é a de materiais compósitos reforçados com fibras, amplamente utilizados na fabricação das pás de turbinas eólicas, que consiste de uma matriz homogênea reforçada por meio da adição de outro constituinte, disperso e fibroso, mais rígido e resistente.

As propriedades dos laminados podem ser cuidadosamente confeccionadas, seja a nível microestrutural, a partir da escolha dos constituintes e sua dosagem na composição da lâmina, ou macroestrutural, na escolha da orientação de cada lâmina na sequência de empilhamento do laminado (LSS). Pode-se aumentar a rigidez de uma lâmina, por exemplo, elevando-se, até certo limite, a proporção de fibras em relação ao volume total (16). A Figura 4 mostra diferentes escalas de observação e análise de uma estrutura de material compósito.

Figura 4 – Escalas de observação de estruturas de materiais compósitos



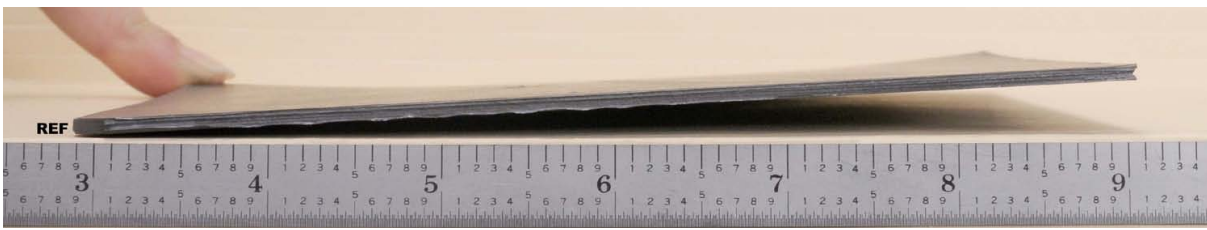
Fonte: adaptado de (22)

A maior parte das aplicações de laminados compósitos em engenharia envolve placas ou cascas finas sob esforços axiais e flexão, mesmo em estruturas usualmente modeladas globalmente como vigas em que seções fechadas de paredes finas são comuns (23), como em pás de turbinas eólicas. A Teoria Clássica da Laminação (CLT) é uma aborda-

gem macromecânica amplamente utilizada na modelagem de laminados, constituindo-se em uma extensão da teoria estrutural de placas homogêneas sob a hipótese de lâminas ortotrópicas finas. A CLT possibilita a determinação do estado de tensão do laminado pela criação de uma seção transversal homogeneizada. Ao se assumir continuidade no campo de deslocamentos ao longo da espessura da placa, obtém-se um campo de tensões descontínuo na interface das lâminas, gerando efeitos de acoplamento entre esforços e deformações de naturezas distintas, a saber, esforços axiais e curvaturas, e momentos e alongamentos.

A caracterização desses acoplamentos é fundamental na determinação da LSS, uma vez que, em laminados assimétricos, causam empenamento por resfriamento após a cura, ou por variações de condições higrotérmicas (22), como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Empenamento de painel SiC/SiC $[0/90]_8$



Fonte: (24)

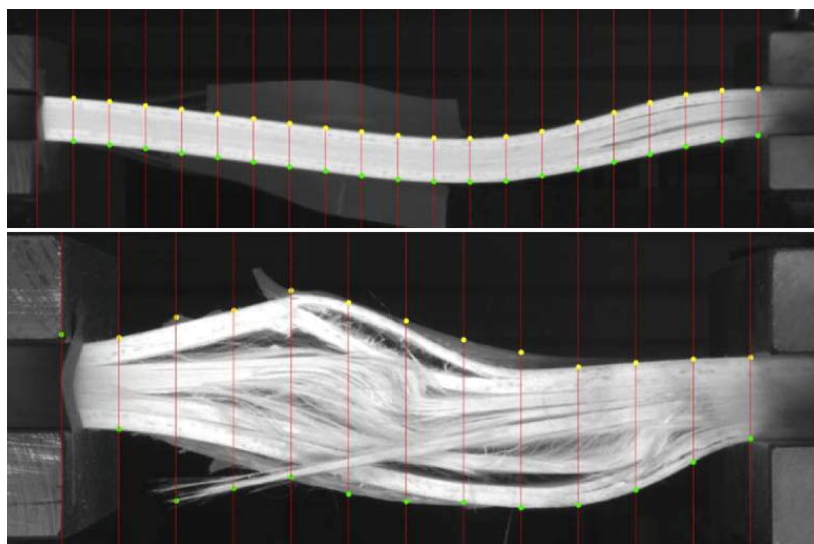
Pode-se, também, dispor dos acoplamentos em favor de um melhor desempenho dos elementos estruturais, como nos chamados *smart composites*, cascas laminadas sujeitas a carregamento aerodinâmico (22). A principal estratégia de otimização estrutural baseada nesses acoplamentos é denominada *bend-twist coupling*, em que se alivia o arraste a partir do acoplamento entre flexão e torção, reduzindo o ângulo de ataque do aerofólio. Dado o impacto da dimensão das pás nos esforços aerodinâmicos e inerciais atuantes nessas estruturas e, conseqüentemente, no custo da energia, o emprego de técnicas de alívio de cargas é desejável (25).

É importante reforçar que a CLT é um modelo macromecânico, que desconsidera a microestrutura da lâmina, computando apenas suas propriedades médias. Embora represente bem o comportamento elástico dos materiais compósitos laminados, não é capaz de incorporar os efeitos de não-linearidade de dano e falha (26).

O dano nesse tipo de material é um mecanismo estrutural complexo que envolve uma série de fenômenos tanto no nível microscópico – falha na matriz pela propagação de fissuras, falha nos elementos de reforço, que leva à fratura de uma ou mais fibras e descolamento das fibras e matriz – quanto mesoscópico – modos de delaminação, ou descolamento de camadas (27), como mostra a Figura 6. Este último bastante associado

ao fenômeno da flambagem local, seja provocado por impacto, defeitos de fabricação – que aumentam as tensões nas bordas – ou por excesso de tensões em cada lâmina, individualmente (28).

Figura 6 – Modo típico de falha por delaminação



Fonte: (29)

Embora ainda pouco compreendidos, não se pode prescindir de incluir os efeitos não-lineares do dano progressivo em uma modelagem ao longo da vida útil de pás de turbinas eólicas. Usualmente, na modelagem de laminados, emprega-se a CLT na descrição do comportamento elástico junto a considerações *ad hoc*, a fim de incluir os efeitos da microarquitetura desses materiais, como a adoção de critérios de falha.

2.2 Análise estrutural de pás de turbinas eólicas

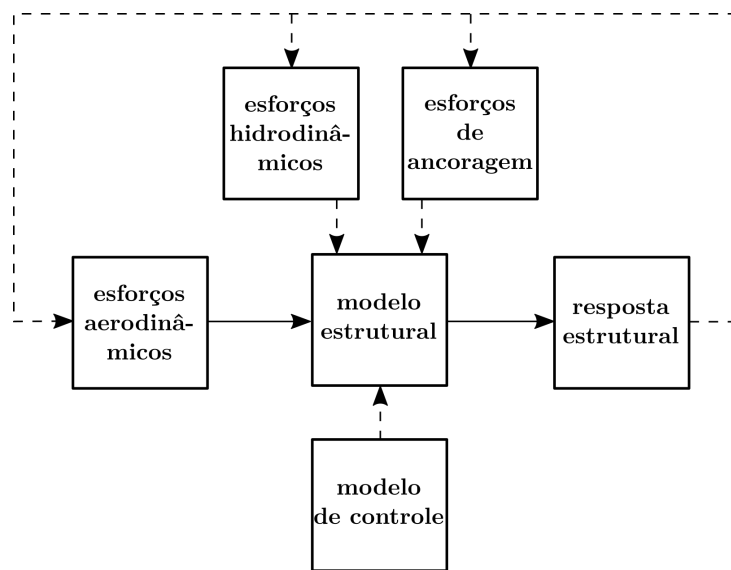
Embora o diâmetro dos rotores de turbinas eólicas tenha aumentado progressivamente desde os anos 1970, houve, nesse ínterim, uma mudança significativa nos parâmetros de otimização de projeto. A diretriz de maximização da eficiência energética sob determinadas condições de vento, que não necessariamente significava desempenho ótimo em outras condições, deu lugar à minimização do custo estimado da energia produzida, o que requer maximizar a eficiência aerodinâmica ao longo do tempo (30).

Além do já mencionado aumento dimensional, a busca pela eficiência aerodinâmica das pás também implica o progressivo aumento da esbeltez estrutural, bem como a adoção de materiais mais leves, levando ao abandono de hipóteses simplificadoras que justificavam a análise estática da estrutura, em regime estacionário de vento (31). Em seu lugar, modelos aeroelásticos foram desenvolvidos, endereçando aspectos físicos e de engenharia:

as cargas aerodinâmicas, gravitacionais, inerciais – centrífugas e giroscópicas – bem como as propriedades elásticas da estrutura (32).

Os modelos aeroelásticos foram inicialmente concebidos com dois núcleos, aerodinâmico e estrutural – para determinar os esforços do vento e descrever o comportamento dinâmico da turbina, respectivamente – a partir de séries temporais de vento (31). Mais recentemente, alguns modelos, denominados aero-hidro-servo-elásticos, também incorporaram módulos para cálculo de esforços hidrodinâmicos, de ancoragem e de controle, permitindo a simulação de FWT, como ilustra o fluxograma da Figura 7.

Figura 7 – Fluxograma de cálculo de código aero-hidro-servo-elástico para uma FWT



Fonte: adaptado de (33)

Exemplos de códigos aero-hidro-servo-elástico são o FAST (34), desenvolvido pelo Laboratório Nacional de Energia Renovável (NREL), nos Estados Unidos, e o HAWC2 (35), pelo Departamento de Energia Eólica da Universidade Técnica da Dinamarca (DTU).

Em geral, o núcleo aerodinâmico é implementado a partir do método *Blade Element Momentum* (BEM) (36). Embora não capture efeitos de turbulência ou interações entre turbinas em parques eólicos, como os modelos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) (31), o BEM é computacionalmente leve e acurado o suficiente para modelar a interação entre os diversos subsistemas da turbina. Já o núcleo estrutural deriva de modelos estruturais de viga em um dos seguintes escopos: o Método dos Elementos Finitos (FEM), a formulação de dinâmica multicorpos (MBD) e o Método da Análise Modal (MAM) (31).

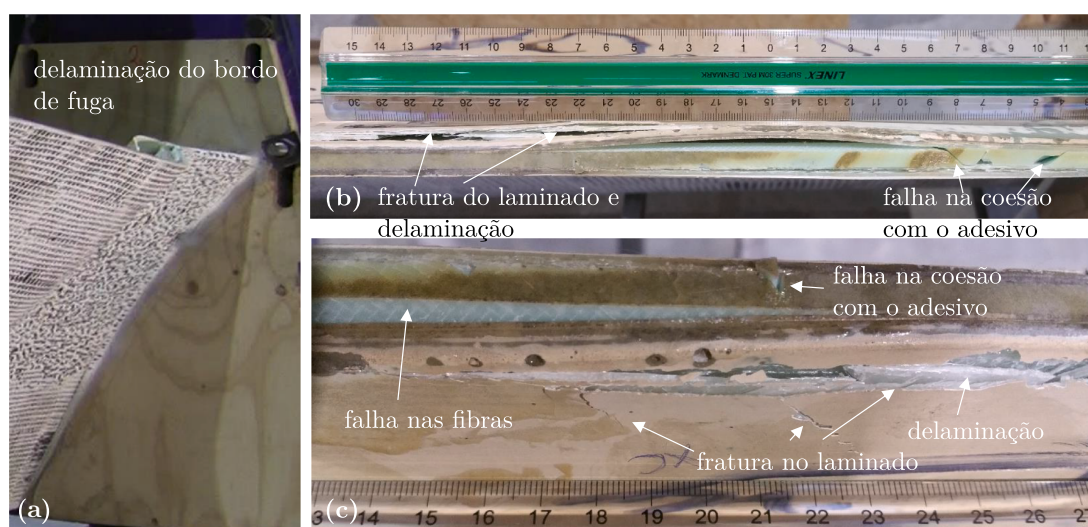
Esses códigos dispõem de modelos de viga anisotrópicos (37), que incorporam as propriedades mecânicas do laminado a uma seção transversal homogeneizada, obtida a

partir de pré-processadores, como o BECAS (38). Em geral, essas ferramentas respaldam-se na formulação de Giavotto [*et al.*], que propõe uma função de empenamento, gerando indeterminações internas a serem resolvidas a partir de restrições adicionais oriundas do modelo do material (39).

Por outro lado, em face dos já elevados – e continuamente crescentes – comprimento e esbeltez dos projetos de pás atuais, a maioria dos códigos aeroelásticos possibilita o tratamento da não linearidade geométrica, no núcleo estrutural. Esses modelos caracterizam bem o comportamento global da pá, na ausência de fenômenos locais, como flambagens, dano ou delaminações (40). Esse tipo de modelo estrutural não só é bastante robusto, capturando grandes deslocamentos e o acoplamento aeroelástico a um baixo custo computacional (38), como sua adoção é bastante conveniente em rotinas de otimização aeroelástica e na simulação de FWT considerando seus diversos subsistemas.

Em 2004, Sørensen [*et al.*] já alertavam, a partir de análises numéricas e experimentais, que a flambagem local era um dos modos de falha mais presentes em situações de colapso de pás de turbinas eólicas, atribuindo-as ao dano progressivo causado pela delaminação entre as camadas do laminado ou descolamento entre elementos estruturais e consequente perda de rigidez (41). No mesmo trabalho, destacaram as limitações na metodologia de projeto impostas pelas lacunas na compreensão dos diversos tipos de falha presentes em estruturas de compósitos laminados, exigindo a realização de ensaios físicos em escala real, por sua vez insuficientes na previsão de falhas durante a vida útil da estrutura, dado que falhas inesperadas eram frequentemente reportadas. Entre elas, a maioria ocorre no bordo de fuga (42), como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Falhas no bordo de fuga em espécime após ensaio; (a) delaminação do bordo de fuga, (b) falha vista por cima e (c) falha vista pelo lado de sucção



Fonte: adaptado de (42)

Centros de pesquisa voltados ao desenvolvimento da energia eólica têm buscado validar modelos numéricos a partir de ensaios experimentais, a fim de se consolidar metodologias de previsão de falha em pás (41–43). Esses estudos, em sua maioria, baseiam-se em modelos de elementos finitos de casca aliados a um critério de falha do material para prever a distribuição de tensões e deformações, bem como instabilidades locais e o dano progressivo (42).

2.3 Cascas

Cascas são estruturas tridimensionais contínuas em que uma das dimensões, a espessura, é pequena comparada às demais. Estruturas de cascas são abundantes na natureza e em aplicações de engenharia, possuindo alta eficiência estrutural e resistência específica. A dimensionalidade da casca, maior em relação a outros elementos estruturais como cabos e vigas, confere uma grande flexibilidade à concepção de sua forma, fundindo os conceitos de forma e estrutura, como define Rebello:

Não se pode imaginar uma forma que não necessite de uma estrutura, ou uma estrutura que não tenha uma forma. Toda forma tem uma estrutura e toda estrutura tem uma forma. Dessa maneira, não se pode conceber uma forma sem se conceber automaticamente uma estrutura e vice-versa. (44)

Datam dos séculos XVIII e XIX os primeiros registros de análises de vibrações de placas – cascas planas em sua configuração indeformada – atribuídos a Euler (45), Bernoulli (46) e Germain (47). Uma série de métodos analíticos foi desenvolvida desde então, com uma extensa lista de autores, que não serão citados diretamente neste texto. Cabe destacar, porém, as teorias de Kirchhoff (48) e Reissner-Mindlin (49),(50) desenvolvidas inicialmente no contexto de flexão de placas sob linearidade geométrica, cujas generalizações são amplamente utilizadas até hoje.

Kirchhoff desenvolveu um modelo estrutural para placas sob hipóteses cinemáticas análogas às do modelo de viga de Euler-Bernoulli, em que as seções transversais permanecem planas e ortogonais aos respectivos eixos deformados. Esse modelo serve bem a placas finas, em que o cisalhamento transversal não é relevante.

Reissner, em 1945, e Mindlin, em 1951, desenvolveram paralelamente modelos estruturais para placas moderadamente espessas, a partir de imposições estáticas e cinemáticas, respectivamente. Em ambos os trabalhos, considera-se o cisalhamento transversal ao permitir a distorção das seções transversais que, embora planas, não permanecem ortogonais a seus eixos deformados, como no modelo de viga de Timoshenko. Esta hipótese, a que também se denomina Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT), implica, no modelo de Mindlin, cisalhamento uniforme ao longo da espessura da placa, exigindo

a adoção de um fator de correção de cisalhamento para adequar o campo das tensões às condições de contorno naturais.

Às teorias de placas sucederam os modelos estruturais de cascas. Especificamente, Love estendeu a teoria de Kirchhoff para placas finas, originando a teoria de cascas de Kirchhoff-Love (51). Esta teoria foi modificada e refinada por Koiter e Sanders e é também conhecida por teoria de cascas de Koiter-Sanders. A teoria de placas de Reissner-Mindlin, por sua vez, foi generalizada para aplicação em cascas por Naghdi (54).

Soluções analíticas para problemas estruturais de cascas, entretanto, restringem-se a algumas geometrias, carregamentos, condições de contorno e hipóteses simplificadoras, sendo insuficientes na descrição da maioria dos problemas da engenharia de estruturas. Assim, com os avanços na capacidade de processamento e armazenamento de dados, o uso de métodos numéricos se tornou essencial à análise de estruturas de cascas complexas, sobretudo em cenários de alta não-linearidade, física ou geométrica.

Na análise computacional de cascas, elementos finitos baseados no conceito de sólido degenerado, introduzido por Ahmad, Irons e Zienkiewicz (55), predominaram até meados da década de 1990. Nesta abordagem, impõem-se hipóteses estáticas e cinemáticas a um elemento sólido tridimensional, obtendo-se uma formulação pura em deslocamentos (55–57). Contudo, Bucalem e Bathe alertam para problemas de travamento (*membrane e shear locking*) apresentados por esses elementos, fazendo uma ressalva ao que denominam proliferação de elementos finitos de cascas não confiáveis, uma vez que há na literatura uma série de exemplos de elementos que funcionam bem em algumas situações, mas falham severamente em outras (57).

Algumas alternativas foram propostas ao enfrentamento dos problemas de travamento, entre as quais se destacam métodos de integração reduzida e a interpolação mista. Bucalem e Bathe comparam os métodos de integração reduzida uniforme (URI) e seletiva (SRI), que podem apresentar modos espúrios de energia nula, levando a uma matriz de rigidez singular, ou a taxas de convergência muito pequenas. Por sua vez, a interpolação mista de campos de deformações e deslocamentos, proposta inicialmente em (58), mostra-se uma estratégia promissora ao enfrentamento do travamento em problemas regidos pela flexão. Porém, sua convergência e estabilidade só foi demonstrada matematicamente para placas sob linearidade geométrica (59), de modo que a busca por uma estratégia suficientemente geral para lidar com cascas sob condições de contorno genéricas, não-linearidade geométrica e deformações finitas ainda persiste (56).

Os trabalhos pioneiros de Simo caracterizaram um desvio da abordagem do sólido degenerado, fundando a escola geometricamente exata a partir do retorno às origens da teoria estrutural clássica não-linear, para vigas (60) e posteriormente, cascas (61). Essencialmente, a diferença entre as duas escolas reside na redução ao sistema algébrico resultante, obtido de forma numérica na primeira e analítica, na última (61). Um dos

maiores entraves ao desenvolvimento dessa abordagem foi uma descrição consistente das rotações que admitisse rotações finitas, contornado pela adoção de tensores de rotação como o de Euler-Rodrigues (56).

Adota-se inicialmente neste trabalho o modelo de casca triangular T6-3i, proposto por Pimenta e desenvolvido posteriormente em diversos trabalhos deste grupo de pesquisa como (56, 63–65). Embora o T6-3i tenha se mostrado robusto o suficiente para analisar estruturas laminadas complexas como pás de turbinas eólicas sob condições de alta não-linearidade geométrica sem apresentar travamento (40, 66), adotou-se o elemento de casca de oito nós e integração reduzida (S8R) disponível no *software* comercial ABAQUS (67), na análise estrutural da pá da turbina de referência DTU10MW apresentada neste trabalho*. O S8R é desenvolvido sobre a teoria de cascas de Reissner-Mindlin (68), sendo recomendado na análise de estruturas espessas com expressivo cisalhamento transversal, como estruturas laminadas e do tipo sanduíche.

2.4 Estabilidade de cascas

Embora amplamente utilizados na análise de estabilidade estrutural de cascas, métodos lineares como a análise de autovalores podem sobre-estimar a resistência à flambagem, levando a concepções estruturais inseguras (69). A notória sensibilidade à imperfeição em estruturas de cascas se deve à combinação entre não-linearidade geométrica e imperfeições iniciais, podendo reduzir drasticamente as cargas críticas obtidas por métodos lineares (69).

A interação entre modos de flambagem com cargas críticas similares é uma das causas do comportamento altamente não-linear das cascas, em que caminhos pós-críticos deixam de ser independentes e se combinam em uma trajetória alternativa, com carga crítica reduzida (69, 70). Thompson e Hunt chamam a atenção para esse fenômeno no dimensionamento estrutural, uma vez que o próprio processo de otimização estrutural pode ser uma fonte do acoplamento não-linear indesejado, corroendo os benefícios de um projeto nominalmente ótimo. Portanto, metodologias confiáveis de otimização de projeto de cascas não devem se pautar exclusivamente na obtenção de cargas críticas, mas avaliar a estabilidade de todos os caminhos pós-críticos possíveis, além de incluir as inevitáveis imperfeições iniciais (71).

Como mencionado na seção 2.3, soluções analíticas para problemas estruturais de cascas são limitadas, sobretudo em cenários de alta não-linearidade, o que exige a adoção de métodos numéricos na análise de estruturas complexas, comuns em aplicações

* A geometria da pá disponibilizada no repositório da turbina de referência DTU10MW (17) é pré-definida a partir de uma malha de elementos retangulares, não sendo possível reconstruir a malha em elementos triangulares que se adequassem à formulação do T6-3i. Além disso, o modelo apresenta um elemento coesivo no bordo de fuga, o que exigiria a implementação de um elemento sólido no Giraffe (20).

de engenharia. Por outro lado, os avanços na capacidade computacional tornam simulações numéricas menos custosas, viabilizando a adoção de modelos não-lineares na análise da estabilidade de estruturas reais.

Um dos principais entraves à análise não-linear de estabilidade de cascas deve-se à ocorrência de fenômenos como a interação entre modos e a transição súbita entre modos de flambagem (*mode jumping*) (72). O salto dinâmico ocorre quando a energia interna acumulada na estrutura é suficiente para levá-la a outra configuração de equilíbrio. A análise de vibrações livres na vizinhança de pontos da trajetória de equilíbrio, denominada por Ziegler de "método das vibrações", é capaz de capturar fenômenos dinâmicos, detectando a ocorrência desses saltos (*mode jumping*) (74). Assim, uma vez determinada a trajetória de equilíbrio do problema estático, pode-se avaliar a estabilidade do equilíbrio a partir das variações nas frequências naturais do problema linearizado em pontos de equilíbrio ao longo do carregamento.

O método das vibrações pode ser justificado, conceitualmente, pela definição de estabilidade cinética, proposta por Lyapunov. De forma geral, pode-se inferir a estabilidade do equilíbrio de uma solução não perturbada, segundo Mazzilli, "se a distância entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas" (75). Mais especificamente, a estabilidade cinética propõe avaliar a evolução temporal da perturbação introduzida, implicando estabilidade se a perturbação é limitada (76).

Boutyour, Azrar e Potier-Ferry analisaram a estabilidade do equilíbrio em placas de material isotrópico a partir do problema de vibrações livres de pequena amplitude ao redor de pontos da trajetória de equilíbrio, identificando pontos de instabilidade ao se observar a queda abrupta das frequências naturais a zero (77). Lyman, Virgin e Davis, por sua vez, dispuseram de metodologia análoga na análise da pós-flambagem de placas isotrópicas, obtendo os parâmetros modais a partir da matriz de rigidez tangente, cujos resultados mostraram boa aderência com resultados experimentais (74). Franzoni [*et al.*] utilizaram a metodologia em estudo numéricos e experimental da flambagem de cascas cilíndricas (78) e da pós-flambagem de uma viga-caixão típica, cujos resultados não só confirmam a robustez dessa metodologia (79), mas também indicam um caminho à sua introdução em rotinas de projeto estrutural.

Por fim, a ocorrência da flambagem do bordo de fuga em níveis de carga inferiores ao esperado tanto em ensaios estáticos em escala real de pás de turbinas eólicas, quanto em dados operacionais, expõe lacunas na modelagem estrutural desse tipo de fenômeno (41, 80, 81). O emprego do método das vibrações pode ser, portanto, uma alternativa à previsão de mecanismos de falha iniciados por fenômenos locais no bordo de fuga de pás de turbinas eólicas, como sugerido na seção 2.2, e será adotado neste trabalho.

3 FORMULAÇÃO

3.1 Teoria Clássica da Laminação

A CLT é, até o momento, a mais consolidada formulação para a modelagem estrutural de materiais compósitos laminados. O leitor pode encontrar diversas referências sobre o assunto, como os livros-texto escritos por Daniel (22), Jones (82) e Barbero (23). Esta seção é baseada na formulação descrita em (22) até a subseção 3.1.6, a partir da qual baseia-se em (23) até a subseção 3.1.8.

3.1.1 Material geralmente anisotrópico

O estado de tensão de um ponto material em um meio contínuo no espaço tridimensional pode ser representado pelo tensor das tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, que, na elasticidade linear, relaciona-se com o tensor de deformações de Green-Lagrange $\boldsymbol{\epsilon}$ infinitesimal pela lei de Hooke generalizada, descrita na equação 3.1,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (3.1)$$

em que C_{ijkl} representa o tensor de elasticidade de quarta ordem, com 81 constantes elásticas independentes.

O equilíbrio na vizinhança do ponto e a simetria do tensor $\boldsymbol{\sigma}$ reduzem o número de constantes elásticas independentes a 36, de modo que é possível reescrever a relação, dispondo-se da notação de Voigt na equação 3.2,

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j, \quad (3.2)$$

em que $i, j = \{1, 2, \dots, 6\}$, adotando-se deformações de engenharia.

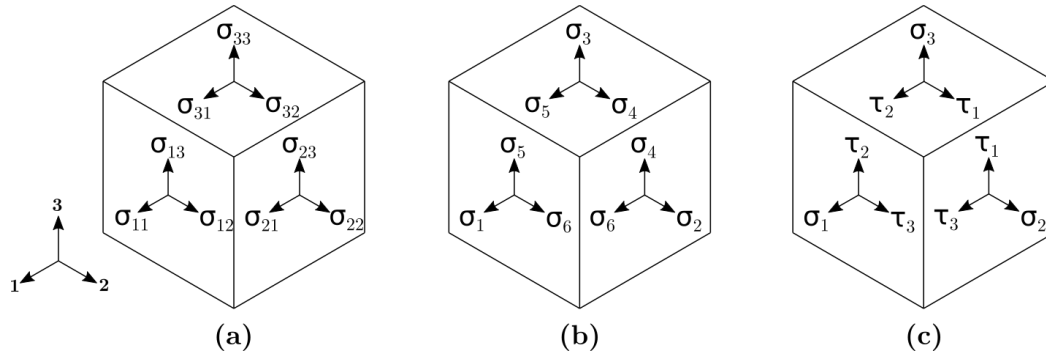
A aplicação do teorema de Clairaut-Schwarz sobre as derivadas parciais da energia de deformação por unidade de volume do material, somada à hipótese de um material hiperelástico, leva à simetria da matriz C_{ij} , que pode ser expresso em função de 21 constantes elásticas independentes.

Alternativamente, podem-se reescrever os vetores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

retomando-se a notação convencionada neste trabalho, em que $i, j = \{1, 2, 3\}$. As notações utilizadas nesta seção estão resumidas na Figura 9.

Figura 9 – notações: (a) matricial, (b) Voigt/CLT, (c) própria



Fonte: autoria própria

3.1.2 Material especialmente ortotrópico

Define-se como ortotrópico um material com três planos de simetria mutuamente ortogonais, definidos pelos eixos principais da lâmina, a saber, as direções paralela e ortogonal à orientação das fibras no plano da lâmina e a direção normal ao plano. As simetrias da lâmina reduzem a nove o número de constantes elásticas independentes do tensor C_{ij} . Cabe observar que, embora o estado de tensão em um ponto não dependa da base em que se calculam as componentes do tensor das tensões, a relação fica mais clara ao se adotar uma base paralela aos eixos principais do material, como mostra a equação 3.4, que caracteriza um material especialmente ortotrópico.

$$\begin{bmatrix} \sigma_i \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ij} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_j \\ \gamma_j \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

em que \bar{C}_{ij} é diagonal.

Deve-se notar que não existe acoplamento entre as tensões normais σ_i e as distorções γ_j e, reciprocamente, entre as tensões cisalhantes τ_i e os alongamentos ϵ_j . Além disso, no material especialmente ortotrópico, as tensões e deformações de cisalhamento são totalmente desacopladas entre si.

3.1.3 Material transversalmente isotrópico

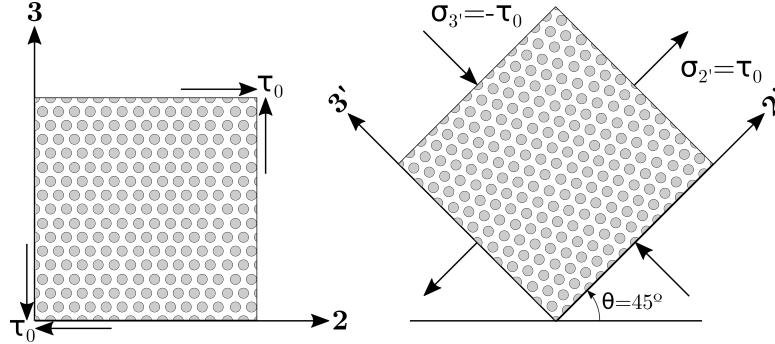
Um material transversalmente isotrópico, por sua vez, apresenta um plano de isotropia ortogonal a um de seus eixos principais, implicando que, neste plano, as propriedades mecânicas do material sejam constantes em todas as direções.

Assim, no plano de isotropia não se distinguem as constantes elásticas:

$$\begin{aligned} C_{\alpha 2} &= C_{\alpha 3}, \\ \bar{C}_{22} &= \bar{C}_{33}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

convencionando-se o plano 2-3 como o plano de isotropia, de modo que, na equação 3.4, os índices 2 e 3 são permutáveis.

Figura 10 – cisalhamento puro no plano de isotropia



Fonte: adaptado de (22)

A equivalência entre o estado de tensão de cisalhamento puro e o de compressão e tração de mesmo módulo e em planos ortogonais impõe a dependência entre os módulos de elasticidade e cisalhamento no plano de isotropia, como mostra a equação 3.6.

$$\bar{C}_{11} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}, \quad (3.6)$$

reduzindo a cinco o número de constantes elásticas independentes de um material transversalmente isotrópico.

Este caso é especialmente importante, na medida em que compósitos com alto volume de fibras tendem a apresentar empacotamento hexagonal. Neste caso, as fibras distribuem-se de forma radial, sendo razoável classificar o material como transversalmente isotrópico, como mostra a Figura 11.

3.1.4 Estado de tensão da lâmina fina no plano

Uma lâmina individual é uma chapa, podendo-se desprezar a contribuição dos esforços na direção normal ao plano na obtenção do equilíbrio. A Figura 12 explicita os eixos principais da lâmina, bem como os esforços de membrana, paralelos à superfície média, e transversais.

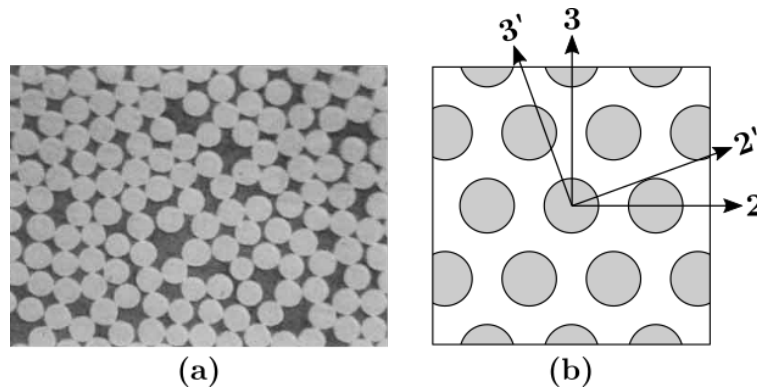
De $\sigma_3 = 0$, calcula-se a deformação axial transversal ϵ_3 em função das deformações de membrana

$$\epsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}} C_{\alpha 3} \epsilon_\alpha. \quad (3.7)$$

Reescreve-se a equação 3.4 para lâminas finas:

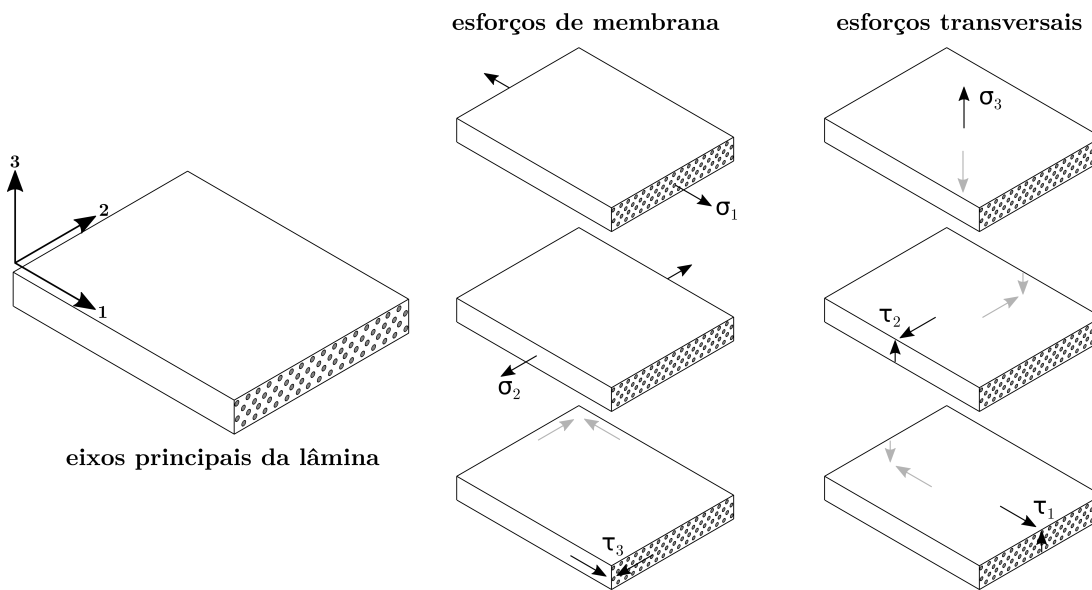
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

Figura 11 – (a) fotomicrografia de seção transversal de carbono/epóxi (AS4/3501-6),
(b) geometria idealizada do empacotamento hexagonal



Fonte: adaptado de (22)

Figura 12 – Caracterização de esforços na lâmina conforme direções principais



Fonte: autoria própria

em que:

$$Q_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} - \frac{1}{C_{33}} C_{\alpha 3} C_{\beta 3}, \quad (3.9)$$

$$Q_{33} = \bar{C}_{33}.$$

A equação 3.8 pode ser reescrita em função das constantes elásticas de flexibilidade, diretamente relacionadas às constantes de engenharia da lâmina:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

em que:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2}, \\ S_{12} = S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ S_{33} &= \frac{1}{G_{12}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} = Q_{21} &= \nu_{21} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \nu_{12} \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{33} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

de modo que as relações constitutivas de uma lâmina unidirecional no plano podem ser totalmente caracterizadas a partir de quatro constantes elásticas independentes.

3.1.5 Transformação de coordenadas

Laminados constituem-se de uma sequência de lâminas empilhadas com múltiplas orientações (82), de modo que usualmente distinguem-se os eixos principais da lâmina (**1, 2, 3**) e os eixos de referência do laminado ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$). Embora mais espessos que a lâmina, os laminados também podem ser descritos como cascas, arbitrando-se que os eixos perpendiculares à superfície média coincidam em ambos os sistemas de referência, de forma a resumir a transformação de coordenadas a uma rotação de eixos no plano da lâmina.

A equação 3.3 descreve o vetor de tensões no sistema de coordenadas da lâmina, que se relaciona ao vetor de tensões no sistema de referência do laminado como segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{1,2} = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}_{x,y}, \quad (3.13)$$

em que os índices $()_{1,2}$ indicam grandezas expressas no sistema de referência da lâmina e $()_{x,y}$, do laminado.

Calcula-se a matriz de transformação \mathbf{T} a partir dos parâmetros (m, n) do ângulo de laminação θ :

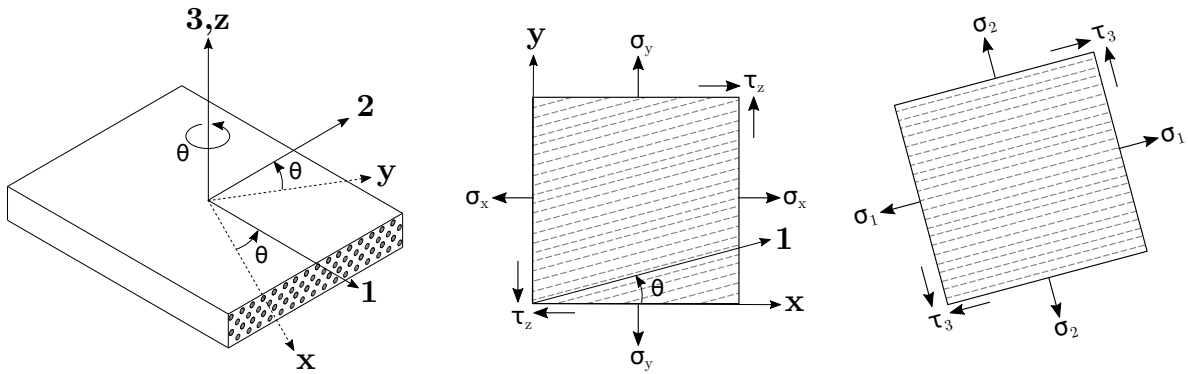
$$\begin{aligned} m &= \cos(\theta), \\ n &= \sin(\theta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

tal que:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

descreve a rotação no plano como indica a Figura 13.

Figura 13 – Tensões nos sistemas de referência da lâmina e laminado



Fonte: autoria própria

A transformação de coordenadas, entretanto, não pode ser realizada a partir do vetor de deformações de engenharia $\epsilon_{1,2}$, devendo-se dispor da notação tensorial. Introduzindo-se o operador \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

em que

$$\epsilon_{1,2} = \mathbf{RTR}^{-1}\epsilon_{x,y}, \quad (3.17)$$

verifica-se que $\mathbf{RTR}^{-1} = \mathbf{T}^{-T}$.

3.1.6 Relações constitutivas da lâmina no laminado

Pode-se reescrever a equação constitutiva da lâmina no sistema de referência do laminado, dispondo-se da matriz de elasticidade $\mathbf{C}_{x,y}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{x,y} = \mathbf{C}_{x,y} \boldsymbol{\epsilon}_{x,y}. \quad (3.18)$$

de modo que se pode determinar o vetor de tensões $\boldsymbol{\sigma}_{x,y}$ em função da vetor de tensões na lâmina, $\boldsymbol{\sigma}_{1,2}$, a partir das matrizes de transformação.

A partir da relação 3.13, tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma}_{x,y} = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{1,2}, \quad (3.19)$$

e de 3.2:

$$\boldsymbol{\sigma}_{x,y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}_{1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}. \quad (3.20)$$

que, por sua vez, de 3.17 e 3.18, resulta que:

$$\mathbf{C}_{x,y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}_{1,2} \mathbf{T}^{-T}. \quad (3.21)$$

A partir do estado de tensão da lâmina fina, a matriz $\mathbf{C}_{1,2}$, descrita segundo os eixos principais da lâmina, desacopla totalmente os esforços de membrana e transversais. Assim, é conveniente tratá-los separadamente, a que se atribuem os sobrescritos $()^p$ e $()^t$, referentes a grandezas de membrana e transversais, respectivamente. Em suma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{1,2}^p &= \mathbf{Q}_{1,2}^p \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^p, \\ \boldsymbol{\tau}_{1,2}^t &= \mathbf{Q}_{1,2}^t \boldsymbol{\gamma}_{1,2}^t, \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que $\mathbf{Q}_{1,2}^p$ é definida pela equação 3.8 e $\mathbf{Q}_{1,2}^t$ pelos termos $\bar{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}$ da submatriz $\bar{\mathbf{C}}$ descrita na equação 3.4.

Em relação ao sistema de referência do laminado, particionam-se a matriz de transformação \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}^p = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^t = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

e o operador \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

de modo a se descreverem as relações tensão-deformação para uma lâmina fina geralmente ortotrópica:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{x,y}^p &= \mathbf{Q}_{x,y}^p \boldsymbol{\epsilon}_{x,y}^p, \\ \boldsymbol{\tau}_{x,y}^t &= \mathbf{Q}_{x,y}^t \boldsymbol{\gamma}_{x,y}^t, \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{x,y}^p &= (\mathbf{T}^p)^{-1} \mathbf{Q}_{1,2}^p (\mathbf{T}^p)^{-T}, \\ \mathbf{Q}_{x,y}^t &= (\mathbf{T}^t)^{-1} \mathbf{Q}_{1,2}^t (\mathbf{T}^t)^{-T}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Na notação usual da CLT:

$$\mathbf{Q}_{x,y}^p = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{x,y}^t = \begin{bmatrix} Q_{xzxz} & Q_{xzyz} \\ Q_{xzyz} & Q_{yzyz} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

e, termo a termo:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + n^2 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{33}, \\ Q_{yy} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{33}, \\ Q_{xy} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{33}, \\ Q_{xz} &= m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} - m n (m^2 - n^2) Q_{12} - 2m n (m^2 - n^2) Q_{33}, \\ Q_{yz} &= m n^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + m n (m^2 - n^2) Q_{12} + 2m n (m^2 - n^2) Q_{33}, \\ Q_{zz} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{33}, \\ Q_{xzxz} &= m^2 \bar{C}_{22} + n^2 \bar{C}_{11}, \\ Q_{yzyz} &= n^2 \bar{C}_{22} + m^2 \bar{C}_{11}, \\ Q_{xzyz} &= m n (\bar{C}_{22} - \bar{C}_{11}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

As equações 3.25-3.28 resumem, como já mencionado, o comportamento elástico de uma lâmina geralmente ortotrópica fina, servindo, portanto, à descrição da lâmina unidirecional no sistema de coordenadas do laminado.

3.1.7 Cinemática do laminado

O comportamento elástico do laminado depende intrinsecamente das propriedades de cada lâmina, bem como de sua orientação, como já exposto extensivamente. Na medida em que condensa essas propriedades em uma seção transversal homogeneizada, a CLT constitui uma importante ferramenta na modelagem estrutural de compósitos laminados.

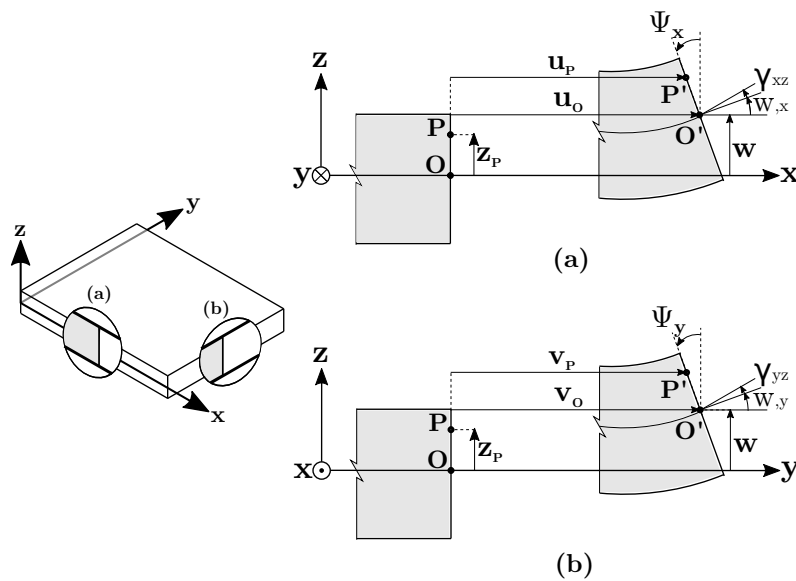
Embora a CLT tenha se originado sob a teoria de placas finas de Kirchhoff (48), mais recentemente foi estendida à de Reissner-Mindlin (49),(50), possibilitando a modelagem estrutural de laminados mais espessos ao considerar o cisalhamento transversal. Deve-se mencionar que a espessura é um parâmetro sensível em compósitos laminados, uma vez que o cisalhamento transversal é relevante mesmo em elementos estruturais pouco espessos, devido aos baixos módulos de cisalhamento transversal em relação ao módulo de elasticidade longitudinal (na direção da fibra).

Neste texto, denomina-se CLT a reunião da formulação descrita nas subseções anteriores às hipóteses seguintes, compatíveis com a teoria de placas de Reissner-Mindlin:

1. Lâminas quase-homogêneas* e ortotrópicas
2. Material elástico-linear
3. Continuidade do campo de deslocamentos em todo o laminado (não há delaminação)
4. Fibras paralelas à direção da espessura se mantêm paralelas a esta direção após a deformação (hipótese de Reissner-Mindlin)
5. Inextensibilidade transversal
6. Linearidade geométrica

O campo de deslocamentos de qualquer ponto material da placa pode ser descrito em função dos deslocamentos do plano médio, como explicitam a Figura 14 e o conjunto de equações 3.29.

Figura 14 – Deslocamentos de pontos materiais da placa



Fonte: adaptado de (83)

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\Psi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\Psi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

em que o subscrito $()_0$ representa grandezas no plano médio (ou de referência).

* Embora as lâminas sejam compostas de materiais altamente heterogêneos, a uniformidade de sua dispersão nos planos paralelo e ortogonais às fibras permite que sejam consideradas quase-homogêneas.

A partir do campo de deslocamentos, calculam-se as deformações de membrana:

$$\begin{aligned}\epsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi_x(x, y)}{\partial x}, \\ \epsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \Psi_y(x, y)}{\partial y}, \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \Psi_y(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_x(x, y)}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (3.30)$$

bem como as deformações de cisalhamento transversal:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}(x, y) &= -\Psi_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \\ \gamma_{yz}(x, y) &= -\Psi_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y},\end{aligned}\quad (3.31)$$

observando-se que o vetor de deformações transversais $\boldsymbol{\gamma}_{x,y}^t$ é constante na espessura.

Retomando-se o vetor de deformações no plano $\boldsymbol{\epsilon}_{x,y}^p$:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{x,y}^p = (\boldsymbol{\epsilon}_{x,y}^0)^p + z \boldsymbol{\kappa}_{x,y}, \quad (3.32)$$

em que $(\boldsymbol{\epsilon}_{x,y}^0)^p$ são as deformações no plano médio e $\boldsymbol{\kappa}_{x,y}$, o vetor de rotações específicas da placa, definidos como segue:

$$\begin{aligned}\epsilon_x^0(x, y) &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ \epsilon_y^0(x, y) &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \\ \gamma_{xy}^0(x, y) &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x},\end{aligned}\quad (3.33)$$

em que $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$ representam os alongamentos e γ_{xy}^0 a distorção no plano médio e

$$\begin{aligned}\kappa_x(x, y) &= -\frac{\partial \Psi_x}{\partial x}, \\ \kappa_y(x, y) &= -\frac{\partial \Psi_y}{\partial y}, \\ \kappa_{xy}(x, y) &= -\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (3.34)$$

κ_x, κ_y representam as rotações específicas de flexão e κ_{xy} , de torção.

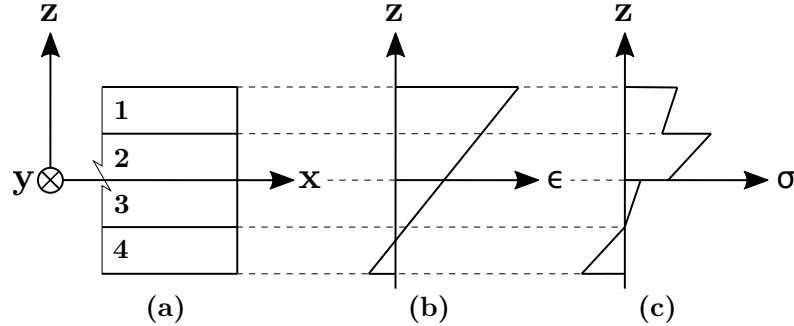
Uma vez descritas as grandezas cinemáticas e o campo de deformações que delas decorre, é possível obter as tensões atuantes no laminado, a partir das equações constitutivas descritas nas subseções anteriores, a que se propõe a subseção 3.1.8.

3.1.8 Laminado: esforços internos generalizados

A cinemática do laminado impõe a linearidade do campo de deformações na espessura, como ilustra a Figura 15. Partindo-se da formulação obtida para a lâmina na

subseção 3.1.6, deriva-se, para o laminado, um campo de tensões multilinear, descontínuo na interface entre as lâminas.

Figura 15 – (a) laminado, (b) campo de deformações, (c) campo de tensões



Fonte: adaptado de (83)

O equilíbrio do laminado é calculado a partir de uma seção transversal homogeneizada, obtida pela integração das tensões de cada lâmina através da espessura do laminado. Da definição de esforços solicitantes por unidade de comprimento:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{z^-}^{z^+} \boldsymbol{\sigma}_{x,y}^p dz, \\ \mathbf{V} &= \int_{z^-}^{z^+} \boldsymbol{\sigma}_{x,y}^t dz, \\ \mathbf{M} &= \int_{z^-}^{z^+} \boldsymbol{\sigma}_{x,y}^p z dz. \end{aligned} \quad (3.35)$$

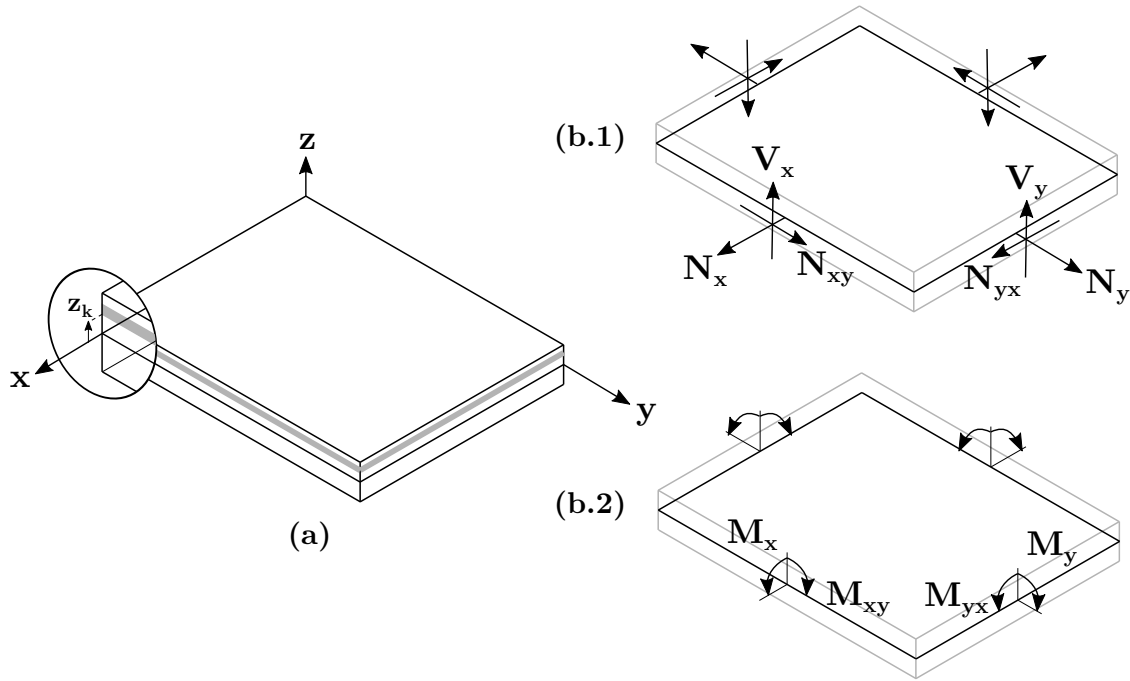
Não só o campo de tensões é linear por partes, como as relações tensão-deformação no domínio de cada lâmina são conhecidas, de modo que se podem reescrever as relações 3.35 como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\boldsymbol{\sigma}_{x,y}^p)^k dz, \\ \mathbf{V} &= \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\boldsymbol{\sigma}_{x,y}^t)^k dz, \\ \mathbf{M} &= \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\boldsymbol{\sigma}_{x,y}^p)^k z dz, \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que os índices k correspondem à k -ésima lâmina.

A Figura 16 ilustra as coordenadas da k -ésima lâmina em relação ao plano de referência do laminado, bem como a direção positiva dos esforços resultantes convencionalizada na CLT.

Figura 16 – (a) coordenadas da k-ésima lâmina no sistema de referência do laminado, direções positivas das (b.1) forças e (b.2) momentos resultantes



Fonte: adaptado de (83),(23)

Substituindo-se o vetor tensão da k-ésima lâmina $(\sigma_{x,y})^k$, expresso na equação 3.25, na equação 3.36, obtêm-se as submatrizes de rigidez do laminado, a saber, **ABD** e **H**. Daqui em diante, uma vez que se tratam de grandezas homogeneizadas, dispensa-se indicar o sistema de referência do laminado $(\)_{x,y}$.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0^p \\ \kappa \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$V = H\gamma^t, \quad (3.38)$$

em que

$$\begin{aligned} A &= \sum_k (Q^p)^k (z_k - z_{k-1}), \\ B &= \frac{1}{2} \sum_k (Q^p)^k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D &= \frac{1}{3} \sum_k (Q^p)^k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \\ H &= \alpha_s \sum_k (Q^t)^k (z_k - z_{k-1}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

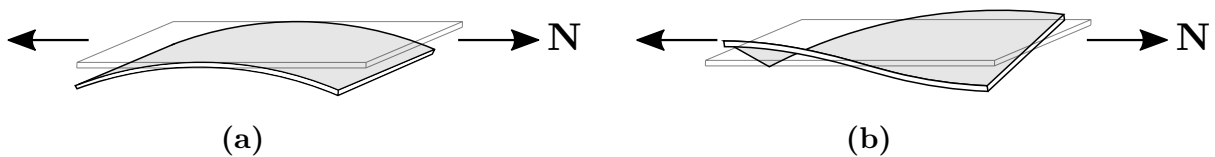
adotando-se $\alpha_s = \frac{5}{6}$ como fator de correção de cisalhamento (84).

Denomina-se cada submatriz \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{H} a partir de seu papel na análise estrutural do laminado, a saber:

- \mathbf{A} – matriz de rigidez no plano – relaciona as deformações de membrana ϵ_0^p aos esforços no plano \mathbf{N} .
- \mathbf{D} – matriz de rigidez à flexão e torção – relaciona rotações específicas κ a momentos \mathbf{M} .
- \mathbf{B} – matriz de acoplamento flexão-extensão – relaciona esforços no plano \mathbf{N} a rotações específicas κ e momentos \mathbf{M} a deformações de membrana ϵ_0^p .
- \mathbf{H} – matriz de rigidez ao cisalhamento transversal – relaciona esforços transversais \mathbf{V} às distorções transversais γ^t .

Se o laminado é simétrico em relação ao plano médio, a submatriz \mathbf{B} é nula, desacoplando as rotações específicas e esforços no plano e, reciprocamente, os momentos e deformações de membrana. A Figura 17 ilustra, para um laminado assimétrico $[0/90]$, deformações resultantes do acoplamento de esforços axiais.

Figura 17 – tipos de acoplamento: (a) flexão-extensão, (b) torção-extensão



Fonte: adaptado de (23)

3.1.9 Distribuição de massa

É fundamental conhecer a distribuição de massa de um laminado para proceder a análises modais ou no domínio do tempo. Naturalmente, a massa ao longo da espessura será distribuída conforme a massa específica de cada lâmina:

$$\mathbf{M} = \sum_k \int_A \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho_k dz dA, \quad (3.40)$$

em que \mathbf{M} é a massa da placa.

3.1.10 Não-linearidade geométrica

A aplicação da CLT, como apresentada até então, restringe-se a contextos em que se assumem pequenos deslocamentos e deformações. Como já mencionado, a não-linearidade geométrica é frequentemente encontrada em estruturas laminadas, devendo-se estender a CLT a fim de possibilitar a análise estrutural nesses cenários.

Usualmente, como na linearidade geométrica, considera-se o material linear-elástico, derivando-se um potencial quadrático, sob a hipótese de pequenas deformações,

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.41)$$

de modo que a matriz de rigidez tangente constitutiva generalizada, $\bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}$, seja composta pelas submatrizes **ABDH** da CLT.

Incluir a não-linearidade geométrica na formulação de casca adotada requer um grau de liberdade rotacional na direção ortogonal ao plano (*drilling*), devendo-se definir, como proposto por Chróscielewski [*et al.*] a submatriz **G** (85):

$$\mathbf{G} = \frac{\alpha_t}{3} \sum_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) (\mathbf{Q}^t)^k \quad (3.42)$$

em que α_t é um parâmetro numérico que será discutido posteriormente neste trabalho.

A matriz $\bar{\mathbf{D}}$, que resume a extensão da CLT a cascas laminadas sob não-linearidade geométrica está completamente descrita no Apêndice A. Apresenta-se o modelo estrutural da casca na seção 3.2 seguinte.

3.2 Modelo estrutural: casca não-linear geometricamente exata

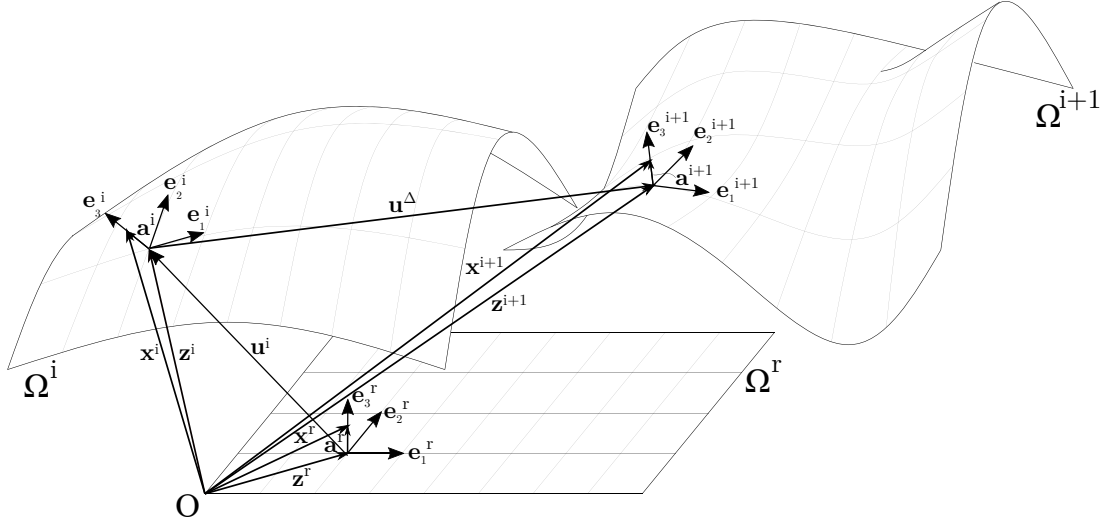
Esta seção descreve uma formulação Lagrangiana atualizada para a análise estática de cascas sob não-linearidade geométrica e baseia-se nos trabalhos de Moreira e Ota, (64) e (65). O modelo, inicialmente proposto a partir de uma formulação Lagrangiana total, foi apresentado por Pimenta em (62) e desenvolvido por Campello em (63),(56). Embora a formulação Lagrangiana total seja capaz de descrever rotações finitas, singularidades em grandes rotações limitam sua aplicabilidade, dando espaço a modelos atualizados, como o adotado neste trabalho.

3.2.1 Cinemática

Na descrição Lagrangiana do movimento, denomina-se configuração de um sólido à região do espaço Euclidiano tridimensional ocupada por seus pontos materiais em um determinado instante. O modelo atualizado parte da configuração no instante “*i*”, conhecida, para a obtenção da configuração no instante seguinte, “*i* + 1”, percorrendo de forma iterativa as configurações de equilíbrio desde o instante inicial.

Assim, como mostra a Figura 18, definem-se três configurações em instantes distintos, descritas por sistemas ortonormais locais: a configuração inicial de referência, Ω^r , assumida plana e descrita por $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$, a configuração no instante “*i*”, Ω^i , por $\{\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i\}$ e a configuração no instante “*i* + 1”, Ω^{i+1} , por $\{\mathbf{e}_1^{i+1}, \mathbf{e}_2^{i+1}, \mathbf{e}_3^{i+1}\}$.

Figura 18 – Instantes e configurações



Fonte: adaptado de (65),(64)

A posição de um ponto material na configuração de referência \mathbf{x}^r pode ser determinada pela posição da superfície média \mathbf{z}^r e, na direção ortogonal ao plano da casca, diretor $\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r$, em que $\zeta \in H = [-h^-, h^+]$, sendo $h = h^- + h^+$ a espessura da casca,

$$\mathbf{x}^r = \mathbf{z}^r + \mathbf{a}^r, \quad (3.43)$$

Analogamente, calculam-se \mathbf{x}^i e \mathbf{x}^{i+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^i &= \mathbf{z}^i + \mathbf{a}^i, \\ \mathbf{x}^{i+1} &= \mathbf{z}^{i+1} + \mathbf{a}^{i+1}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

As transformações entre os sistemas ortonormais de referência resumem-se a rotações no espaço, descritas neste texto pelo tensor de rotação de Rodrigues,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{4}{4 + \alpha^2} \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \right), \quad (3.45)$$

com $\alpha = |\boldsymbol{\alpha}|$ e $\mathbf{A} = \text{skew}(\boldsymbol{\alpha})$, calculados em função do vetor de rotação de Rodrigues,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\tan(\theta/2)}{\theta/2} \boldsymbol{\theta}, \quad (3.46)$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de rotação de Euler e $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$.

O tensor de rotação \mathbf{Q}^i resume a transformação do campo vetorial \mathbf{a}^i acumulada até o instante “ i ”,

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{Q}^i \mathbf{a}^r, \quad (3.47)$$

atualizado, por sua vez, pelo tensor \mathbf{Q}^Δ , que representa a rotação incremental entre os instantes “ i ” e “ $i + 1$ ”,

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{a}^i, \quad (3.48)$$

sendo $\boldsymbol{\alpha}^i$ e $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$ os vetores de rotação de Rodrigues para os tensores de rotação \mathbf{Q}^i e \mathbf{Q}^Δ , respectivamente. De 3.47 em 3.48, introduz-se o tensor de rotação \mathbf{Q}^{i+1}

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{i+1} &= \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{Q}^i \mathbf{a}^r \\ &= \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{a}^r, \end{aligned} \quad (3.49)$$

cujos vetor de rotação é dado por:

$$\boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \frac{4}{4 - \boldsymbol{\alpha}^\Delta \cdot \boldsymbol{\alpha}^i} \left(\boldsymbol{\alpha}^\Delta + \boldsymbol{\alpha}^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^\Delta \times \boldsymbol{\alpha}^i \right). \quad (3.50)$$

Pode-se retrorrotacionar as grandezas ao domínio da configuração de referência Ω^r , invertendo-se a equação 3.49. A retrorrotação garante a objetividade evitando que as relações constitutivas sejam afetadas por movimentos de corpo rígido superpostos ao movimento do sólido (64). A importância da objetividade na definição das medidas de deformação neste contexto será explicitada na subseção 3.2.2.

Ainda, a equação 3.49 revela não só a inextensibilidade do diretor, mas também a hipótese cinemática de Reissner-Mindlin, na medida em que fibras inicialmente dispostas ao longo da espessura se mantêm nessa direção, movimentando-se como um corpo rígido entre as configurações de equilíbrio, pois $\mathbf{a}^{i+1} = \zeta \mathbf{e}_3^{i+1}$ (56).

Define-se o campo de deslocamentos da superfície média no instante “ i ”, como mostra a Figura 18, como

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{z}^i - \mathbf{z}^r, \quad (3.51)$$

a que se atualiza, no instante “ $i + 1$ ”,

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \mathbf{u}^\Delta, \quad (3.52)$$

em que \mathbf{u}^i é o deslocamento acumulado até o instante “ i ” e \mathbf{u}^Δ o deslocamento entre os instantes “ i ” e “ $i + 1$ ”.

Genericamente, para pontos quaisquer na espessura da casca, define-se o campo de deslocamentos $\boldsymbol{\delta}^{i+1}$,

$$\boldsymbol{\delta}^{i+1} = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^r. \quad (3.53)$$

A velocidade de um ponto material da casca no instante “ $i + 1$ ”, por sua vez, é

dada pela diferenciação de seu deslocamento no tempo,

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\delta}}^{i+1} &= \dot{\boldsymbol{x}}^{i+1} \\
&= \dot{\boldsymbol{z}}^{i+1} + \dot{\boldsymbol{a}}^{i+1} \\
&= \dot{\boldsymbol{u}}^{i+1} + \dot{\boldsymbol{Q}}^{i+1} \boldsymbol{Q}^{i+1T} \boldsymbol{a}^{i+1} \\
&= \dot{\boldsymbol{u}}^\Delta + \boldsymbol{\Omega}^\Delta \boldsymbol{a}^{i+1}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

em que se confundem as grandezas instantâneas calculadas em “ $i + 1$ ” e no intervalo “ Δ ” e se define $\boldsymbol{\Omega}^\Delta = \dot{\boldsymbol{Q}}^{i+1} \boldsymbol{Q}^{i+1T} = \dot{\boldsymbol{Q}}^\Delta \boldsymbol{Q}^{\Delta T}$.

Pode-se reescrever o vetor de velocidades,

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{i+1} = \dot{\boldsymbol{u}}^\Delta + \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \boldsymbol{a}^{i+1}, \tag{3.55}$$

tal que $\boldsymbol{\omega}^\Delta = axial(\boldsymbol{\Omega}^\Delta)$ corresponde ao vetor das velocidades angulares, que se relaciona à derivada temporal do vetor de rotação de Rodrigues $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta$,

$$\boldsymbol{\omega}^\Delta = \boldsymbol{\Xi}^\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta, \tag{3.56}$$

definindo-se o operador $\boldsymbol{\Xi}^\Delta$:

$$\boldsymbol{\Xi}^\Delta = h(\boldsymbol{\alpha}^\Delta) \left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{A}^\Delta \right), \tag{3.57}$$

com $h(\boldsymbol{\alpha}^\Delta) = \frac{4}{4 + \boldsymbol{\alpha}^\Delta \cdot \boldsymbol{\alpha}^\Delta}$ e $\boldsymbol{A}^\Delta = skew(\boldsymbol{\alpha}^\Delta)$.

3.2.2 Deformações

Obtém-se o gradiente da deformação no instante “ $i + 1$ ”, \boldsymbol{F}^{i+1} em relação a \boldsymbol{x}^r ,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{i+1} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}^{i+1}}{\partial \boldsymbol{x}^r} \\
&= \boldsymbol{x}_{,\alpha}^{i+1} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{x}_{,3}^{i+1} \otimes \boldsymbol{e}_3^r,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

de 3.44.2 e 3.49, calcula-se $\boldsymbol{x}_{,\alpha}^{i+1}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{,\alpha}^{i+1} &= \boldsymbol{z}_{,\alpha}^{i+1} + \boldsymbol{a}_{,\alpha}^{i+1} \\
&= \boldsymbol{z}_{,\alpha}^{i+1} + \boldsymbol{Q}_{,\alpha}^{i+1} \boldsymbol{a}^r \\
&= \boldsymbol{z}_{,\alpha}^{i+1} + \boldsymbol{Q}_{,\alpha}^{i+1} \boldsymbol{Q}^{i+1T} \boldsymbol{a}^{i+1} \\
&= \boldsymbol{z}_{,\alpha}^{i+1} + \boldsymbol{K}_\alpha^{i+1} \boldsymbol{a}^{i+1},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde $\mathbf{K}_\alpha^{i+1} = \mathbf{Q}_{,\alpha}^{i+1} \mathbf{Q}^{i+1T}$ é o tensor das rotações específicas do diretor, cujo vetor axial é:

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} = \text{axial}(\mathbf{K}_\alpha^{i+1}). \quad (3.60)$$

Já a derivada do vetor posição \mathbf{x}^{i+1} em relação à coordenada na espessura, ζ , é:

$$\mathbf{x}_{,3}^{i+1} = \mathbf{a}_{,3}^{i+1} = \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{e}_3^r, \quad (3.61)$$

resumindo-se à rotação do vetor diretor, uma vez que não há deformação na espessura. Reescreve-se, portanto, o gradiente da deformação \mathbf{F}^{i+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{i+1} &= (\mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} \times \mathbf{a}^{i+1}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r \\ &= (\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1} + \mathbf{e}_\alpha^{i+1} + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} \times \mathbf{a}^{i+1}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r, \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que o vetor $\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1} = \mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^{i+1}$ representa as deformações translacionais generalizadas da seção transversal no instante “ $i + 1$ ”.

Podem-se expressar os vetores de deformações translacionais, $\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1}$, e rotações específicas do diretor, $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1}$, em Ω^r por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1r} &= \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^r \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1r} &= \mathbf{Q}^{i+1T} \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

ao se multiplicarem por \mathbf{Q}^{i+1T} .

Calculando-se \mathbf{F}^{i+1} em função de $\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1r}$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1r\dagger}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{i+1} &= \mathbf{Q}^{i+1} \{ [\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1r} + \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{Q}^{i+1T} (\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1r} \times \mathbf{a}^{i+1})] \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r \} \\ &= \mathbf{Q}^{i+1} [\mathbf{e}_j^r \otimes \mathbf{e}_j^r + (\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1r} + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1r} \times \mathbf{a}^r) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r] \\ &= \mathbf{Q}^{i+1} [\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r] \end{aligned} \quad (3.64)$$

pode-se definir o gradiente da deformação retrorrotacionado \mathbf{F}^{i+1r} , em que $\boldsymbol{\gamma}_\alpha^{i+1r} = \boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1r} + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1r} \times \mathbf{a}^r$:

$$\mathbf{F}^{i+1} = \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{F}^{i+1r} \quad (3.65)$$

em que $\mathbf{F}^{i+1r} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r$.

Diferenciando-se \mathbf{F}^{i+1} no tempo, obtém-se o gradiente de velocidades $\dot{\mathbf{F}}^{i+1}$ no instante “ $i + 1$ ”:

$$\dot{\mathbf{F}}^{i+1} = \dot{\mathbf{Q}}^{i+1} \mathbf{F}^{i+1r} + \mathbf{Q}^{i+1} \dot{\mathbf{F}}^{i+1r} \quad (3.66)$$

e de 3.49 tem-se que $\dot{\mathbf{Q}}^{i+1} = \dot{\mathbf{Q}}^\Delta \mathbf{Q}^i$, uma vez que \mathbf{Q}^i é constante no incremento de tempo entre “ i ” e “ $i + 1$ ”.

[†] Aqui, dispõe-se do fato de que dada uma matriz ortogonal positiva \mathbf{Q} aplicada a um vetor ($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), vale a igualdade $\mathbf{Q}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q}\mathbf{a} \times \mathbf{Q}\mathbf{b})$

Portanto, reescreve-se $\dot{\mathbf{F}}^{i+1}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}}^{i+1} &= \dot{\mathbf{Q}}^\Delta \mathbf{Q}^{\Delta T} \mathbf{F}^{i+1} + \mathbf{Q}^{i+1} \dot{\mathbf{F}}^{i+1r} \\ &= \boldsymbol{\Omega}^\Delta \mathbf{F}^{i+1} + \mathbf{Q}^{i+1} (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r),\end{aligned}\quad (3.67)$$

a partir da derivada temporal do vetor de deformações generalizadas:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^{i+1r} = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^{i+1r} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r} \times \mathbf{a}^r \quad (3.68)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^{i+1r}$:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^{i+1r} &= \dot{\mathbf{Q}}^{i+1T} \boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1} + \mathbf{Q}^{i+1T} \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^{i+1} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}^{i+1T} (\mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^{i+1}) + \mathbf{Q}^{i+1T} (\dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}^{i+1} - \dot{\mathbf{Q}}^{i+1} \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{e}_\alpha^{i+1}) \\ &= -\mathbf{Q}^{i+1T} \boldsymbol{\Omega}^\Delta (\mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^{i+1}) + \mathbf{Q}^{i+1T} (\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}^\Delta - \boldsymbol{\Omega}^\Delta \mathbf{e}_\alpha^{i+1}) \\ &= \mathbf{Q}^{i+1T} (\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}^\Delta + \mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} \times \boldsymbol{\omega}^\Delta),\end{aligned}\quad (3.69)$$

e $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r}$:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r} &= \dot{\mathbf{Q}}^{i+1T} \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} + \mathbf{Q}^{i+1T} \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1} \\ &= \mathbf{Q}^{i+1T} (-\boldsymbol{\Omega}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1}) \\ &= \mathbf{Q}^{i+1T} (-\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1}).\end{aligned}\quad (3.70)$$

Deriva-se $\mathbf{Q}_{,\alpha}^{i+1}$, de $\mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{Q}^i$,

$$\mathbf{Q}_{,\alpha}^{i+1} = \mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^i + \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{Q}_{,\alpha}^i, \quad (3.71)$$

tal que o vetor $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1}$ seja dado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} &= \text{axial} \left((\mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^i + \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{Q}_{,\alpha}^i) (\mathbf{Q}^{iT} \mathbf{Q}^{\Delta T}) \right) \\ &= \text{axial} (\mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^{\Delta T}) + \mathbf{Q}^\Delta \text{axial} (\mathbf{Q}_{,\alpha}^i \mathbf{Q}^{iT}) \\ &= \text{axial} (\mathbf{K}_\alpha^\Delta) + \mathbf{Q}^\Delta \text{axial} (\mathbf{K}_\alpha^i),\end{aligned}\quad (3.72)$$

em que $\mathbf{K}_\alpha^\Delta = \mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^{\Delta T}$ e $\mathbf{K}_\alpha^i = \mathbf{Q}_{,\alpha}^i \mathbf{Q}^{iT}$, ou ainda,

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} = \boldsymbol{\kappa}_\alpha^\Delta + \mathbf{Q}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i, \quad (3.73)$$

em que $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^\Delta = \text{axial} (\mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^{\Delta T}) = \boldsymbol{\Xi}^\Delta \boldsymbol{\alpha}_{,\alpha}^\Delta$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^i = \text{axial} (\mathbf{Q}_{,\alpha}^i \mathbf{Q}^{iT})$.

Diferenciando-se $\dot{\mathbf{Q}}^\Delta = \boldsymbol{\Omega}^\Delta \mathbf{Q}^\Delta$ em relação à coordenada convectiva ξ_α , obtém-se $\dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha}^\Delta$,

$$\dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha}^\Delta = \boldsymbol{\Omega}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^\Delta + \boldsymbol{\Omega}^\Delta \mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta, \quad (3.74)$$

calculado também a partir de $\mathbf{K}_\alpha^\Delta = \mathbf{Q}_{,\alpha}^\Delta \mathbf{Q}^{\Delta T}$,

$$\dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha}^\Delta = \dot{\mathbf{K}}_\alpha^\Delta \mathbf{Q}^\Delta + \mathbf{K}_\alpha^\Delta \dot{\mathbf{Q}}^\Delta \quad (3.75)$$

Igualando-se as expressões 3.71 e 3.72, resulta que $\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha}^\Delta = \dot{\mathbf{K}}_\alpha^\Delta + \mathbf{K}_\alpha^\Delta \boldsymbol{\Omega}^\Delta - \boldsymbol{\Omega}^\Delta \mathbf{K}_\alpha^\Delta$ e, da antissimetria de $\boldsymbol{\Omega}^\Delta$ e \mathbf{K}_α^Δ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{,\alpha}^\Delta &= axial(\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha}^\Delta) \\ &= axial(\dot{\mathbf{K}}_\alpha^\Delta) + axial(\mathbf{K}_\alpha^\Delta \boldsymbol{\Omega}^\Delta - \boldsymbol{\Omega}^\Delta \mathbf{K}_\alpha^\Delta) \\ &= \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^\Delta - \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \boldsymbol{\kappa}_\alpha^\Delta, \end{aligned} \quad (3.76)$$

de onde se reescreve a expressão 3.65,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r} &= \mathbf{Q}^{i+1T} [-\boldsymbol{\omega}^\Delta \times (\boldsymbol{\kappa}_\alpha^\Delta + \mathbf{Q}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i) + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^\Delta + \dot{\mathbf{Q}}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i] \\ &= \mathbf{Q}^{i+1T} (\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^\Delta - \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \boldsymbol{\kappa}_\alpha^\Delta - \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{Q}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i + \dot{\mathbf{Q}}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i) \\ &= \mathbf{Q}^{i+1T} \boldsymbol{\omega}_{,\alpha}^\Delta. \end{aligned} \quad (3.77)$$

assumindo-se, do equilíbrio no instante anterior, nula a derivada temporal $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^i$, e adotando-se a identidade $\dot{\mathbf{Q}}^\Delta \mathbf{Q}^{\Delta T} \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i = \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i$.

Diferenciando-se $\boldsymbol{\omega}^\Delta$ no tempo, tem-se da equação 3.56 que:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r} = \mathbf{Q}^{i+1T} (\boldsymbol{\Xi}_{,\alpha}^\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta + \boldsymbol{\Xi}^\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,\alpha}^\Delta) \quad (3.78)$$

em que:

$$\boldsymbol{\Xi}_{,\alpha}^\Delta = \frac{2}{4 + (\boldsymbol{\alpha}^\Delta)^2} [\mathbf{A}_{,\alpha}^\Delta - (\boldsymbol{\alpha}^\Delta \cdot \boldsymbol{\alpha}_{,\alpha}^\Delta) \boldsymbol{\Xi}^\Delta] \quad (3.79)$$

Assim, define-se o vetor das deformações generalizadas retrorrotacionado para a configuração de referência:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1^{i+1r} \\ \boldsymbol{\epsilon}_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{i+1r} = [\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1r} \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1r}]^T$.

E sua derivada temporal $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1r}$:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1^{i+1r} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

que pode ser resumida a:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1r} = \boldsymbol{\Lambda}^{i+1T} \boldsymbol{\Phi}^{i+1} \boldsymbol{\Upsilon}^\Delta \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}^\Delta, \quad (3.82)$$

em que se definem os operadores $\boldsymbol{\Lambda}^{i+1}$, $\boldsymbol{\Phi}^{i+1}$, $\boldsymbol{\Upsilon}^\Delta$, $\boldsymbol{\Delta}$, $\dot{\boldsymbol{d}}^\Delta$ a seguir:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{i+1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}^{i+1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^{i+1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^{i+1} \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

$$\Phi^{i+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & O_{6 \times 9} \\ O_{6 \times 9} & \Phi_2 \end{bmatrix}, \text{ em que } \Phi_\alpha = \begin{bmatrix} I & O & Z_{,\alpha}^{i+1} \\ O & I & O \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

e $Z^{i+1} = skew(\mathbf{z}^{i+1})$

$$\mathbf{r}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\Delta & O_{9 \times 9} \\ O_{9 \times 9} & \mathbf{r}_2^\Delta \end{bmatrix}, \text{ em que } \mathbf{r}_\alpha^\Delta = \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & \Xi^\Delta & \Xi_{,\alpha}^\Delta \\ O & O & \Xi^\Delta \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, \text{ em que } \Delta_\alpha = \begin{bmatrix} I \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} & O \\ O & I \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \\ O & I \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

e

$$\mathbf{d}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}^\Delta \end{bmatrix}, \text{ com } \dot{\mathbf{d}}^\Delta = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^\Delta \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

3.2.3 Potência dos esforços internos e externos

O primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no instante “ $i + 1$ ”, \mathbf{P}^{i+1} , energeticamente conjugado ao gradiente da deformação, \mathbf{F}^{i+1} , é dado por:

$$\mathbf{P}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}_j^{i+1} \otimes \mathbf{e}_j^r, \quad (3.88)$$

em que os vetores $\boldsymbol{\tau}_j^{i+1}$ representam, no instante “ $i + 1$ ”, esforços – atuantes em planos cujas normais são \mathbf{e}_j^r – por unidade de área na configuração de referência.

Assim, calcula-se a potência nominal dos esforços internos:

$$P_{int}^{i+1} = \int_{V^r} \mathbf{P}^{i+1} : \dot{\mathbf{F}}^{i+1} dV^r. \quad (3.89)$$

De 3.67, calcula-se o integrando $\mathbf{P}^{i+1} : \dot{\mathbf{F}}^{i+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{i+1} : \dot{\mathbf{F}}^{i+1} &= \mathbf{P}^{i+1} : [\Omega^\Delta \mathbf{F}^{i+1} + \mathbf{Q}^{i+1} (\dot{\gamma}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r)] \\ &= \mathbf{P}^{i+1} : \Omega^\Delta \mathbf{F}^{i+1} + \mathbf{P}^{i+1} : \mathbf{Q}^{i+1} (\dot{\gamma}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r) \\ &= \mathbf{Q}^{i+1} (\boldsymbol{\tau}_j^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_j^r) : \mathbf{Q}^{i+1} (\dot{\gamma}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r) \\ &= \boldsymbol{\tau}_j^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_j^r : \dot{\gamma}_\alpha^{i+1r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r \\ &= \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1r} \cdot \dot{\gamma}_\alpha^{i+1r} \end{aligned} \quad (3.90)$$

em que $\mathbf{P}^{i+1} : \Omega^\Delta \mathbf{F}^{i+1} = \mathbf{P}^{i+1} \mathbf{F}^{i+1T} : \Omega^\Delta = 0$, devido ao balanço local da quantidade de movimento angular e à antissimetria de Ω^Δ . A tensão $\boldsymbol{\tau}_3^{i+1r}$, por sua vez, não realiza trabalho, uma vez que o diretor é inextensível.

Substituindo-se a equação 3.68 em 3.90,

$$\mathbf{P}^{i+1} : \dot{\mathbf{F}}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1r} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^{i+1r} + (\mathbf{a}^r \times \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1r}) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r}, \quad (3.91)$$

e integra-se na espessura a potência dos esforços internos,

$$\int_H \mathbf{P}^{i+1} : \dot{\mathbf{F}}^{i+1} d\zeta = \mathbf{n}_\alpha^{i+1r} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^{i+1r} + \mathbf{m}_\alpha^{i+1r} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^{i+1r}, \quad (3.92)$$

em que se definem as forças e momentos generalizados retrorrotacionados da seção transversal,

$$\mathbf{n}_\alpha^{i+1r} = \int_H \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1r} d\zeta, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{m}_\alpha^{i+1r} = \int_H \mathbf{a}^r \times \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1r} d\zeta, \quad (3.94)$$

medidos por unidade de comprimento da configuração de referência no instante “ $i + 1$ ”.

Define-se o vetor dos esforços internos generalizados retrorrotacionados da seção transversal,

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^{i+1r} \\ \boldsymbol{\sigma}_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{i+1r} = [\mathbf{n}_\alpha^{i+1r} \quad \mathbf{m}_\alpha^{i+1r}]^T$.

Por fim, pode-se reescrever a potência nominal dos esforços internos na seção transversal,

$$\begin{aligned} P_{int}^{i+1} &= \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1r} d\Omega^r \\ &= \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{i+1T} \boldsymbol{\Phi}^{i+1} \boldsymbol{\Upsilon}^\Delta \boldsymbol{\Delta} \dot{\mathbf{d}}^\Delta d\Omega^r, \end{aligned} \quad (3.96)$$

dispondo-se $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1r}$ da equação 3.82.

A potência nominal dos esforços externos, por sua vez, pode ser definida por

$$P_{ext}^{i+1} = \int_{\Omega^r} \left(\bar{\mathbf{t}}_t^r \cdot \dot{\mathbf{x}}_t^{i+1} + \bar{\mathbf{t}}_b^r \cdot \dot{\mathbf{x}}_b^{i+1} + \int_H \bar{\mathbf{b}}^r \cdot \dot{\mathbf{x}}^{i+1} d\zeta \right) d\Omega^r, \quad (3.97)$$

assumindo-se um carregamento quase-estático, em que $\bar{\mathbf{t}}_t^r$ e $\bar{\mathbf{t}}_b^r$ são vetores das forças externas atuantes nas superfícies de topo e fundo da casca por unidade de área na configuração de referência, respectivamente, e o vetor $\bar{\mathbf{b}}^r$, as forças externas distribuídas no volume de referência.

De 3.54, determinam-se $\dot{\mathbf{x}}_t^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}^\Delta + \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{a}_t^{i+1}$ e $\dot{\mathbf{x}}_b^{i+1} = \dot{\mathbf{u}}^\Delta + \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{a}_b^{i+1}$. De 3.56 em 3.96, reescreve-se P_{ext}^{i+1} ,

$$P_{ext}^{i+1} = \int_{\Omega^r} \bar{\mathbf{n}}^r \cdot \dot{\mathbf{u}}^\Delta + \boldsymbol{\Xi}^{\Delta T} \bar{\mathbf{m}}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta d\Omega^r \quad (3.98)$$

em que se definem as resultantes externas de força e momento por unidade de área da configuração de referência

$$\bar{\mathbf{n}}^r = \bar{\mathbf{t}}_t^r + \bar{\mathbf{t}}_b^r + \int_H \bar{\mathbf{b}}^r d\zeta \quad (3.99)$$

$$\bar{\mathbf{m}}^r = \mathbf{a}_t^{i+1} \times \bar{\mathbf{t}}_t^r + \mathbf{a}_b^{i+1} \times \bar{\mathbf{t}}_b^r + \int_H \bar{\mathbf{b}}^r d\zeta. \quad (3.100)$$

Em suma:

$$P_{ext}^{i+1} = \int_{\Omega^r} \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \quad (3.101)$$

em que $\bar{\mathbf{q}}^r = [\bar{\mathbf{n}}^r \quad \Xi^{\Delta T} \bar{\mathbf{m}}^r]^T$.

3.2.4 Estática

Sejam $\delta \mathbf{u}^\Delta$ e $\delta \boldsymbol{\alpha}^\Delta$ campos vetoriais virtuais que satisfaçam às condições de contorno essenciais na fronteira da superfície média da casca, de modo que se define $\delta \mathbf{d}^\Delta$,

$$\delta \mathbf{d}^\Delta = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^\Delta \\ \delta \boldsymbol{\alpha}^\Delta \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

de modo análogo a \mathbf{d}^Δ .

Define-se o trabalho virtual dos esforços internos no instante “ $i + 1$ ”,

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r} d\Omega^r \\ &= \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \mathbf{A}^{i+1T} \boldsymbol{\Phi}^{i+1} \boldsymbol{\Upsilon}^\Delta \boldsymbol{\Delta} \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \\ &= \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r, \end{aligned} \quad (3.103)$$

em que $\delta \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r} = \mathbf{A}^{i+1T} \boldsymbol{\Phi}^{i+1} \boldsymbol{\Upsilon}^\Delta \boldsymbol{\Delta} \delta \mathbf{d}^\Delta = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \delta \mathbf{d}^\Delta$.

Já o trabalho virtual dos esforços externos é dado por:

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega^r} \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r. \quad (3.104)$$

Da igualdade entre os trabalhos virtuais das forças externas e internas, enunciada pelo Teorema dos Trabalhos Virtuais, estabelece-se o equilíbrio estático da casca por meio da forma fraca,

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0, \quad (3.105)$$

para quaisquer $\delta \mathbf{d}$ que obedeam às condições de contorno essenciais na fronteira de Ω^r . Atenta-se, aqui, ao fato de que δW é um funcional de \mathbf{d}^Δ e $\delta \mathbf{d}^\Delta$, linear em relação ao último.

O operador tangente $\Delta(\delta W)$ é dado pela linearização consistente da equação 3.105, em relação a \mathbf{d}^Δ ,

$$\Delta(\delta W) = \Delta(\delta W_{int}) - \Delta(\delta W_{ext}) \quad (3.106)$$

obtendo-se $\Delta(\delta W_{int})$ de:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta W_{int}) &= \Delta \left(\int_{\Omega^r} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \right) \\
&= \Delta \left(\int_{\Omega^r} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \Delta \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \right) \\
&= \int_{\Omega^r} \left[\Delta(\boldsymbol{\Psi}^T) \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} + \boldsymbol{\Psi}^T \Delta(\boldsymbol{\sigma}^{i+1r}) \right] \cdot \Delta \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \\
&= \int_{\Omega^r} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \mathbf{d}^\Delta} \Delta \mathbf{d}^\Delta \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} + \boldsymbol{\Psi}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r} \right) \cdot \Delta \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r
\end{aligned} \tag{3.107}$$

e $\Delta(\delta W_{ext})$ de:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta W_{ext}) &= \Delta \left(\int_{\Omega^r} \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \right) \\
&= \int_{\Omega^r} \Delta(\bar{\mathbf{q}}^r) \cdot \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r \\
&= \int_{\Omega^r} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}^r}{\partial \mathbf{d}^\Delta} \Delta \mathbf{d}^\Delta \cdot \delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Reescreve-se a equação 3.106 a partir das equações 3.107 e 3.108,

$$\Delta(\delta W) = \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \mathbf{d}^\Delta \cdot \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\Psi} \Delta \Delta \mathbf{d}^\Delta + \Delta \delta \mathbf{d}^\Delta \cdot \bar{\mathbf{G}} \Delta \Delta \mathbf{d}^\Delta - \delta \mathbf{d} \cdot \bar{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{d}^\Delta d\Omega^r, \tag{3.109}$$

em que:

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_2^{i+1r}} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_2^{i+1r}} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_2^{i+1r}} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_1^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^{i+1r}} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^{i+1r}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_2^{i+1r}} \end{bmatrix}, \tag{3.110}$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_1^{u'\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_1^{\alpha'\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_2^{u'\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_2^{\alpha'\alpha} \\ \mathbf{G}_1^{\alpha\alpha'} & \mathbf{G}_1^{\alpha\alpha'} & \mathbf{G}_2^{\alpha\alpha'} & \mathbf{G}_2^{\alpha\alpha'} & \mathbf{G}_1^{\alpha\alpha} + \mathbf{G}_2^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \tag{3.111}$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}^r}{\partial \mathbf{d}^\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial \mathbf{u}^\Delta} & \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}^r}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^r}{\partial \mathbf{u}^\Delta} & \frac{\partial \bar{\mathbf{m}}^r}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} \end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Os operadores $\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{G}}$ e $\bar{\mathbf{L}}$ representam no operador tangente, respectivamente, as contribuições constitutiva, geométrica dos esforços internos e geométrica dos esforços externos. As submatrizes do operador $\bar{\mathbf{G}}$ podem ser encontradas em (56), que resulta em um operador simétrico para quaisquer campos \mathbf{u} e $\boldsymbol{\alpha}$.

3.2.5 Equação constitutiva para materiais compósitos

Retoma-se a seção 3.1 na obtenção das relações constitutivas de laminados compósitos para o modelo estrutural geometricamente exato. Do potencial das deformações generalizadas, descrito na equação 3.41, descreve-se o vetor de esforços internos generalizados no instante “ $i + 1$ ”:

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r}(\boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}}(\boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}), \quad (3.113)$$

de modo que se pode calcular a matriz constitutiva $\bar{\mathbf{D}}$ do operador tangente, descrita em 3.110.

Particiona-se, como na CLT, os esforços e deformações de membrana e transversais de modo que, a partir da matriz \mathbf{ABD} ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}^p \\ \mathbf{m}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^p \\ \boldsymbol{\kappa}^p \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

em que $\mathbf{n}^p = [(\mathbf{n}_1^{i+1r})^p \ (\mathbf{n}_2^{i+1r})^p]^T$ e $\boldsymbol{\eta}^p = [(\boldsymbol{\eta}_1^{i+1r})^p \ (\boldsymbol{\eta}_2^{i+1r})^p]^T$ descrevem os esforços e deformações de membrana e $\mathbf{m}^p = [(\mathbf{m}_1^{i+1r})^p \ (\mathbf{m}_2^{i+1r})^p]^T$ e $\boldsymbol{\kappa}^p = [(\boldsymbol{\kappa}_1^{i+1r})^p \ (\boldsymbol{\kappa}_2^{i+1r})^p]^T$, os momentos e rotações específicas no plano.

As forças cortantes relacionam-se ao cisalhamento transversal pela matriz \mathbf{H} , também definida na seção 3.1,

$$\mathbf{n}^t = \mathbf{H}\boldsymbol{\eta}^t, \quad (3.115)$$

cabendo à matriz \mathbf{G} relacionar os esforços e rotações específicas fora do plano médio da casca,

$$\mathbf{m}^t = \mathbf{G}\boldsymbol{\kappa}^t. \quad (3.116)$$

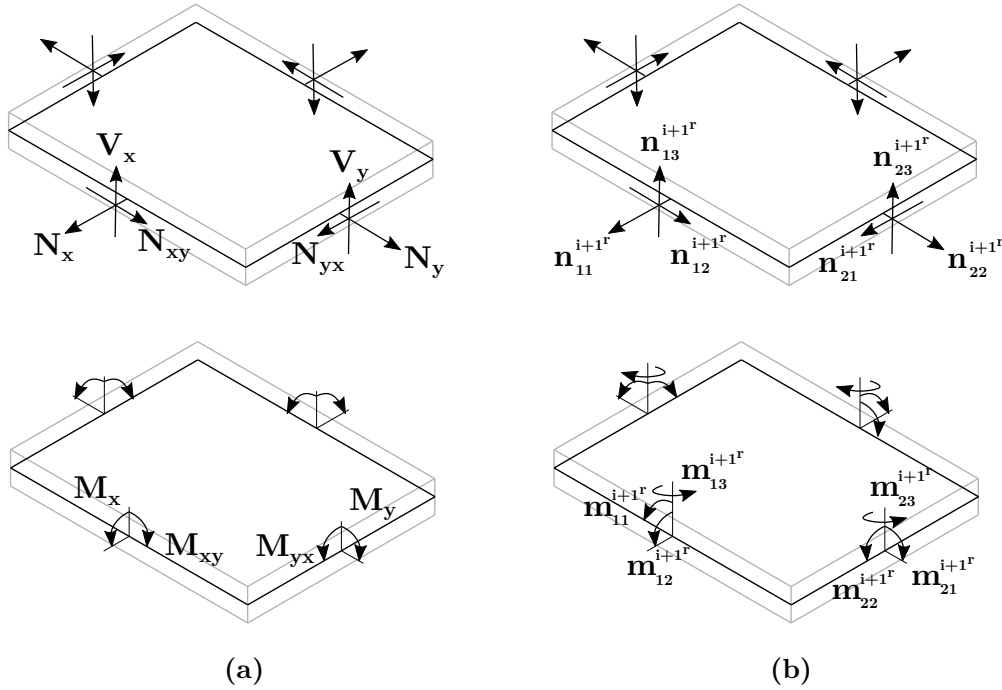
Cabe mencionar que as direções positivas definidas na CLT e no modelo geometricamente exato apresentam diferenças em alguns termos relativos aos momentos, como mostra a Figura 19, de modo que se deve atentar aos sinais no cálculo da matriz $\bar{\mathbf{D}}$, completamente detalhado no Anexo A.

3.2.6 Contribuição inercial

Seja T a energia cinética no instante “ $i + 1$ ”,

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} \rho_k \dot{\mathbf{x}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{i+1} dV, \quad (3.117)$$

Figura 19 – Direções positivas das forças e momentos: (a) CLT e (b) modelo estrutural de casca geometricamente exato



Fonte: adaptado de (23, 83)

considerando-se a distribuição de massa descrita na subseção 3.1.9, em que ρ_k é a massa específica da k -ésima camada do laminado e V_k é seu volume.

De 3.55 em 3.117, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} \rho_k (\dot{\mathbf{u}}^\Delta + \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \zeta \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\dot{\mathbf{u}}^\Delta + \boldsymbol{\omega}^\Delta \times \zeta \mathbf{e}_3^{i+1}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} \rho_k \dot{\mathbf{u}}^\Delta \cdot \dot{\mathbf{u}}^\Delta dV + \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} 2\rho_k \zeta \dot{\mathbf{u}}^\Delta \cdot (\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{e}_3^{i+1}) dV + \\
 &\quad \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} \rho_k \zeta^2 (\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{e}_3^{i+1}) dV \\
 &= T_1 + T_2 + T_3
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

de modo que se pode dividir a equação em três contribuições que, integradas na espessura, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \lambda_1 \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^\Delta \cdot \dot{\mathbf{u}}^\Delta d\Omega \\
 T_2 &= \lambda_2 \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^\Delta \cdot (\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{e}_3^{i+1}) d\Omega \\
 T_3 &= \lambda_3 \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega}^\Delta \times \mathbf{e}_3^{i+1}) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \sum_k \rho_k (z_{k+1} - z_k) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \sum_k \rho_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{6} \sum_k \rho_k (z_{k+1}^3 - z_k^3)\end{aligned}\quad (3.120)$$

Derivando-se as contribuições da energia cinética no tempo,

$$\dot{T}_1 = \lambda_1 \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{\Delta} d\Omega \quad (3.121)$$

de 3.56 e $\mathbf{E}_3^{i+1} = skew(\mathbf{e}_3^{i+1})$,

$$\begin{aligned}\dot{T}_2 &= \lambda_2 \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot (\boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) + \dot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \dot{\mathbf{e}}_3^{i+1}) d\Omega \\ &= -\lambda_2 \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\Xi}^{\Delta} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} + \dot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot (\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}^{\Delta}) d\Omega \\ &= -\lambda_2 \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} \cdot \boldsymbol{\Xi}^{\Delta T} \mathbf{E}_3^{i+1 T} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} + \dot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot (\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}^{\Delta}) d\Omega\end{aligned}\quad (3.122)$$

$$\begin{aligned}\dot{T}_3 &= \lambda_3 \int_{\Omega} 2(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \dot{\mathbf{e}}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) d\Omega \\ &= 2\lambda_3 \int_{\Omega} [\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times (\boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1})] \cdot (\boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) d\Omega \\ &= 2\lambda_3 \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} \cdot \boldsymbol{\Xi}^{\Delta T} \mathbf{E}_3^{i+1 T} (\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}^{\Delta}) d\Omega\end{aligned}\quad (3.123)$$

em que o termo em $\ddot{\mathbf{u}}^{\Delta}$ descreve os efeitos inerciais translacionais na derivada temporal da energia cinética, \dot{T} . Já os termos em $\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta}$ e $\boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}^{\Delta}$, resumem, respectivamente, as contribuições da aceleração angular e do efeito giroscópico.

Pode-se estender o Teorema dos Trabalhos Virtuais ao equilíbrio dinâmico a partir do Princípio de Hamilton (75). Definindo-se δT como a variação virtual da energia cinética, reescreve-se a equação 3.105, incluindo-se a contribuição inercial:

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} + \delta T = 0. \quad (3.124)$$

em que $\delta T = \delta T_1 + \delta T_2 + \delta T_3$, definidas como nas equações 3.121-3.123,

$$\delta T_1 = \lambda_1 \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot \delta \mathbf{u}^{\Delta} d\Omega \quad (3.125)$$

$$\delta T_2 = -\lambda_2 \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\alpha}^{\Delta} \cdot \boldsymbol{\Xi}^{\Delta T} \mathbf{E}_3^{i+1 T} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} + \delta \mathbf{u}^{\Delta} \cdot (\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}^{\Delta}) d\Omega \quad (3.126)$$

$$\delta T_3 = 2\lambda_3 \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\alpha}^{\Delta} \cdot \boldsymbol{\Xi}^{\Delta T} \mathbf{E}_3^{i+1 T} (\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\Delta} + \boldsymbol{\omega}^{\Delta} \times \mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}^{\Delta}) d\Omega. \quad (3.127)$$

Procede-se à linearização consistente de 3.124 na obtenção do operador tangente,

$$\Delta(\delta W) = \Delta(\delta W_{int}) - \Delta(\delta W_{ext}) + \Delta(\delta T), \quad (3.128)$$

referindo-se às equações 3.107 e 3.108 no cálculo de $\Delta(\delta W_{int})$ e $\Delta(\delta W_{ext})$. A linearização da contribuição inercial no operador tangente é dada por (86, 87):

$$\Delta(\delta T) = (\underline{\mathbf{M}}\Delta\ddot{\mathbf{d}} + \underline{\mathbf{G}}\Delta\dot{\mathbf{d}} + \underline{\mathbf{K}}^c\Delta\mathbf{d}) \cdot \delta\mathbf{d} \quad (3.129)$$

em que $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{G}}$ e $\underline{\mathbf{K}}^c$ representam, respectivamente, as contribuições inerciais de massa, giroscópica e rigidez centrífuga, definidas como:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} &= \int_{\Omega} \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\ddot{\mathbf{d}}} d\Omega \\ \underline{\mathbf{G}} &= \int_{\Omega} \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\dot{\mathbf{d}}} d\Omega, \\ \underline{\mathbf{K}}^c &= \int_{\Omega} \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{d}} d\Omega \end{aligned} \quad (3.130)$$

em que $\int_{\Omega} \delta\mathbf{f} d\Omega = \frac{\partial\delta T}{\partial\delta\mathbf{d}}$.

Os integrandos das contribuições inerciais podem ser calculados a partir da regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\ddot{\mathbf{d}}} &= \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{a}} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\ddot{\mathbf{d}}} + \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\ddot{\mathbf{d}}} \\ \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\dot{\mathbf{d}}} &= \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{a}} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\dot{\mathbf{d}}} + \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{\mathbf{d}}} \\ \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{d}} &= \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{a}} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{d}} + \frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (3.131)$$

em que \mathbf{d} , \mathbf{v} e \mathbf{a} representam os campos vectoriais de deslocamentos, velocidades e acelerações, obtidos da equação 3.57:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\Delta} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\Delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\Delta} \\ \boldsymbol{\Xi}^{\Delta}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \\ \dot{\boldsymbol{\Xi}}^{\Delta}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} + \boldsymbol{\Xi}^{\Delta}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\Xi}}^{\Delta} = -\frac{1}{2}h(\boldsymbol{\alpha}^{\Delta})[skew(\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta}) - (\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\Delta} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\Delta})\boldsymbol{\Xi}^{\Delta}]$.

Escrevem-se os gradientes de $\delta\mathbf{f}$ em relação aos campos vectoriais de acelerações,

$$\frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & -\lambda_2\mathbf{E}_3^{i+1} \\ -\lambda_2\boldsymbol{\Xi}^{\Delta T}\mathbf{E}_3^{i+1 T} & 2\lambda_3\boldsymbol{\Xi}^{\Delta T}\mathbf{E}_3^{i+1 T}\mathbf{E}_3^{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

e de velocidades,

$$\frac{\partial\delta\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \lambda_2(\mathbf{E}_3^{i+1}\boldsymbol{\Omega}^{\Delta} - 2\boldsymbol{\Omega}^{\Delta}\mathbf{E}_3^{i+1}) \\ \mathbf{0} & -2\lambda_3\boldsymbol{\Xi}^{\Delta T}\mathbf{E}_3^{i+1 T}(\mathbf{E}_3^{i+1}\boldsymbol{\Omega}^{\Delta} - 2\boldsymbol{\Omega}^{\Delta}\mathbf{E}_3^{i+1}) \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

e os gradientes destas grandezas cinemáticas em relação ao vetor de graus de liberdade \mathbf{d} e suas derivadas temporais $\dot{\mathbf{d}}$ e $\ddot{\mathbf{d}}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{d}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}^\Delta \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{d}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^\Delta}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \dot{\mathbf{d}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\boldsymbol{\Xi}}^\Delta \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{d}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}^\Delta}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.135)$$

obtidos, por sua vez, a partir das expressões para os gradientes das velocidades e acelerações angulares em relação ao vetor de rotação $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^\Delta}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} &= -\frac{1}{2}h(\boldsymbol{\alpha}^\Delta) \left[\dot{\mathbf{A}}^\Delta + \boldsymbol{\Xi}^\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta \otimes \boldsymbol{\alpha}^\Delta \right] \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}^\Delta}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} &= -\frac{1}{2}h(\boldsymbol{\alpha}^\Delta) \left\{ \boldsymbol{\Xi}^\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta \otimes \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2}h(\boldsymbol{\alpha}^\Delta) \boldsymbol{\alpha}^\Delta \otimes \boldsymbol{\alpha}^\Delta \right] \dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta + \right. \\ &\quad \left. (\dot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta \cdot \boldsymbol{\alpha}^\Delta) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^\Delta}{\partial \boldsymbol{\alpha}^\Delta} + skew(\ddot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta) + \boldsymbol{\Xi}^\Delta \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^\Delta \otimes \boldsymbol{\alpha}^\Delta \right\} \end{aligned} \quad (3.136)$$

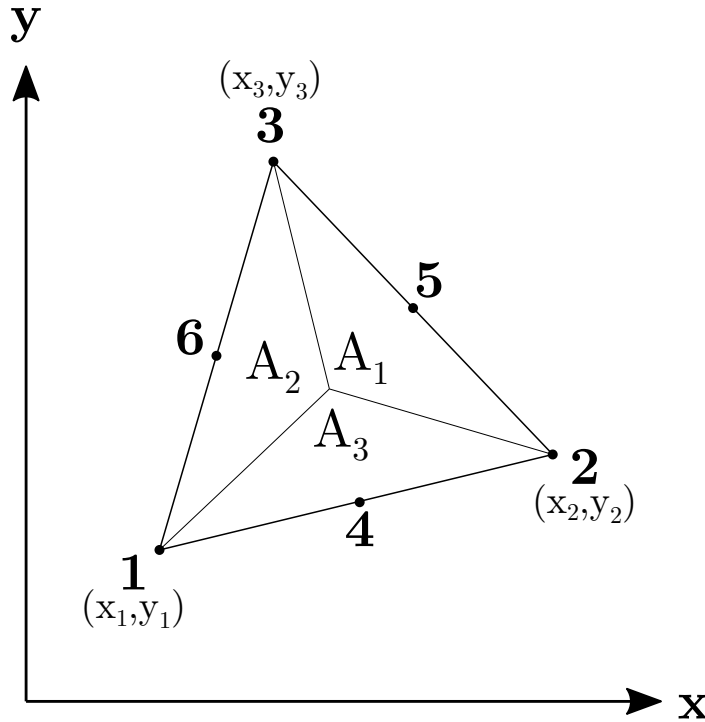
3.2.7 Modelagem em elementos finitos: T6-3i

O T6-3i (56) é um elemento finito plano e triangular do tipo Reissner-Mindlin, similar aos apresentados por (88). Com seis nós, o elemento apresenta interpolação quadrática compatível para os deslocamentos e linear não conforme para as rotações. A não-conformidade de seu campo de rotações deriva da inexistência de graus de liberdade de rotação nos vértices do triângulo, como mostra a Figura 20. Esta disposição dos graus de liberdade gera um elemento puro de deslocamentos, garantindo sua convergência, estabilidade e a inobservância de travamento (56).

Seja \mathbf{p}_i o vetor dos graus de liberdade do nó i ,

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i, \quad \text{se } i = 1, 2, 3, \quad \text{ou} \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \quad \text{se } i = 4, 5, 6 \quad (3.137)$$

Figura 20 – T6-3i: elemento triangular de seis nós



Fonte: adaptado de (56)

Sejam A_i as partições da área total do elemento $A = A_1 + A_2 + A_3$, como mostra a Figura 20. Definem-se as funções de interpolação de \mathbf{u} , quadráticas,

$$\begin{aligned} N_1^u &= (2L_1 - 1)L_1, & N_4^u &= 4L_1L_2, \\ N_2^u &= (2L_2 - 1)L_2, & N_5^u &= 4L_2L_3 \\ N_3^u &= (2L_3 - 1)L_3, & N_6^u &= 4L_3L_1, \end{aligned} \quad (3.138)$$

para $L_i = \frac{A_i}{A}$, ou, em coordenadas cartesianas $L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$, em que:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (3.139)$$

As funções de interpolação de $\boldsymbol{\theta}$, lineares, são definidas como segue:

$$\begin{aligned} N_4^\theta &= 1 - 2L_3, \\ N_5^\theta &= 1 - 2L_1, \\ N_6^\theta &= 1 - 2L_2. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Obtêm-se os campos de deslocamentos e rotações em um ponto qualquer do domínio do elemento,

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{p}, \quad (3.141)$$

em que $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3 \ \mathbf{p}_4 \ \mathbf{p}_5 \ \mathbf{p}_6]^T$ é o vetor dos graus de liberdade e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & 0 & N_5^u & 0 & N_6^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^\theta & 0 & N_5^\theta & 0 & N_6^\theta \end{bmatrix}, \quad (3.142)$$

a matriz de interpolação.

Retomando-se o operador Ψ , definido na equação 3.107, calcula-se o vetor dos esforços nodais desbalanceados:

$$\mathbf{P}_e = \int_{\Omega_e} [(\Psi \Delta \mathbf{N})^T \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} - \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}}^r] d\Omega, \quad (3.143)$$

em que Ω_e representa o domínio do elemento na configuração de referência.

Ao se discretizar o operador tangente, descrito em 3.109, em elementos finitos a partir da equação 3.141, obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento[‡]:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} [(\Psi \Delta \mathbf{N})^T \bar{\mathbf{D}} (\Psi \Delta \mathbf{N}) + (\Delta \mathbf{N})^T \bar{\mathbf{G}} (\Delta \mathbf{N}) - \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{L}} \mathbf{N}] d\Omega_e. \quad (3.144)$$

Obtêm-se, da linearização consistente da contribuição inercial no operador tangente 3.129 as matrizes de massa \mathbf{M}_e , giroscópica \mathbf{G}_e e de rigidez centrífuga \mathbf{K}_{ce} :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \delta \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{d}}} \mathbf{N} d\Omega_e, \\ \underline{\mathbf{G}}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \delta \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{d}}} \mathbf{N} d\Omega_e, \\ \underline{\mathbf{K}}_{ce} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{N} d\Omega_e, \end{aligned} \quad (3.145)$$

podendo-se incluir um modelo de amortecimento estrutural, como o amortecimento proporcional (Rayleigh), e somá-lo *a posteriori* à matriz giroscópica do elemento.

3.3 Resultados

Neste trabalho, a implementação da CLT disponível no código Giraffe (*Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements*) (20) foi verificada e estendida conforme a formulação descrita neste capítulo. Os exemplos numéricos a seguir buscam verificá-la, a partir de comparações com o código de elementos finitos comercial ANSYS®. Os problemas propostos foram adaptados de Barbero (89) para considerar não-linearidade geométrica e compreendem uma variedade de laminados: unidirecionais, simétricos e assimétricos.

[‡] É frequente, em modelos de casca, a inexistência de rigidez associada ao grau de liberdade de rotação do diretor em relação ao próprio eixo (*drilling*). Entretanto, aqui adota-se um valor numérico coerente com a CLT, como proposto por Chróscielewski [*et al.*] em (85) e disposto na subseção 3.1.10.

3.3.1 Definição do material

As placas de todos os exemplos foram laminadas com carbono/epóxi AS4D/9310, cujas propriedades estão descritas na Tabela 1.

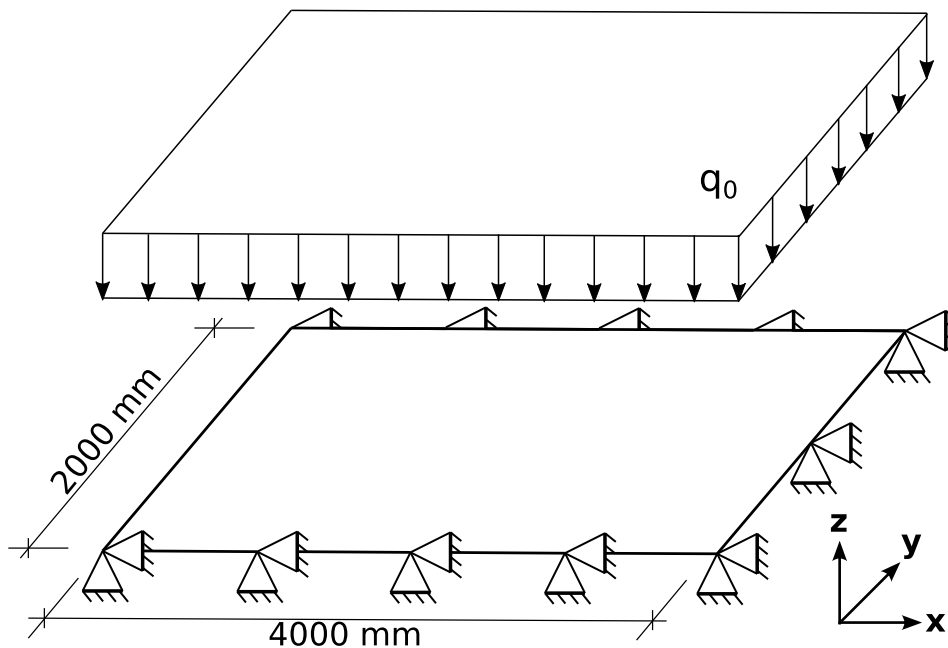
Tabela 1 – Propriedades da lâmina UD carbono/epóxi AS4D/9310

Propriedade	Valor
E_1	133,86 GPa
$E_2 = E_3$	7,706 GPa
$G_{12} = G_{13}$	4,306 GPa
G_{23}	2,76 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,301
ν_{12}	0,396
ρ	1,52 g/cm ³

3.3.2 Laminado unidirecional: placa retangular simplesmente apoiada sob carregamento transversal

A uma placa retangular simplesmente apoiada – $a_x = 4000\text{mm}$, $a_y = 2000\text{mm}$ e espessura $t = 10\text{mm}$ – é aplicada uma pressão $q_0 = 0.12 \times 10^{-3}\text{MPa}$, como na Figura 21.

Figura 21 – Placa retangular com carregamento transversal



Fonte: autoria própria

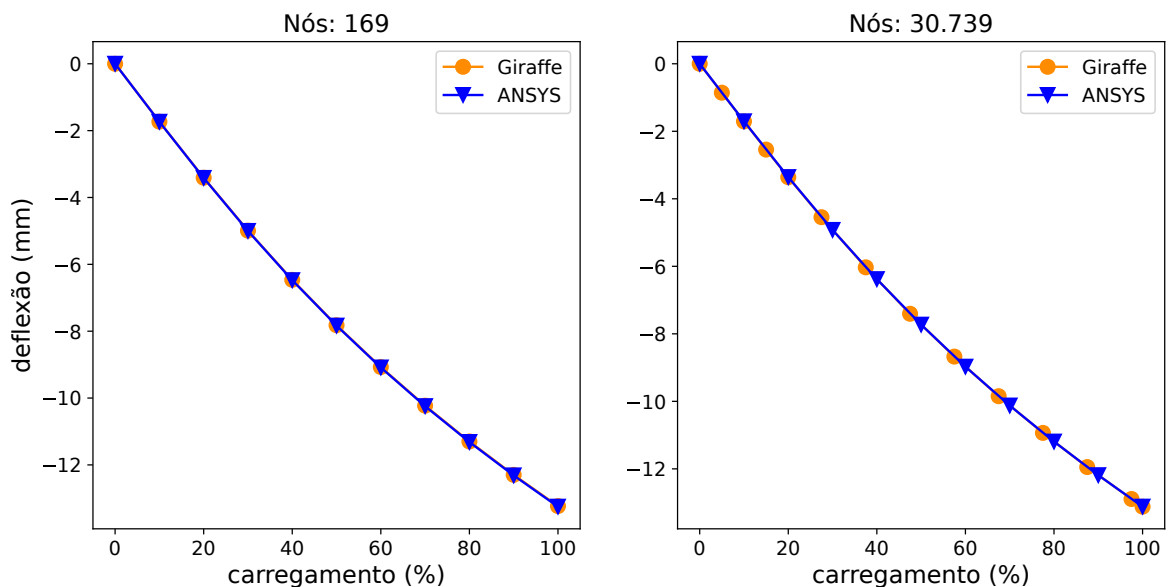
As fibras do laminado, unidirecional, estão dispostas na direção do eixo x . Comparam-se os resultados para o deslocamento vertical do ponto central da placa. As Tabela 2 e

Figura 22 mostram a concordância entre os resultados obtidos nas duas implementações[§].

Tabela 2 – Laminado UD: deslocamentos verticais do ponto central (mm) obtidos no ANSYS[®] e Giraffe para diferentes níveis de refinamento de malha.

Nós	$u_z(mm)$		Desvio
	ANSYS [®]	Giraffe	
169	-13,1194	-13,1261	-0,93%
485	-13,2372	-13,2253	-0,18%
7.425	-13,2486	-13,2361	-0,10%
30.739	-13,2492	-13,2362	-0,10%

Figura 22 – Laminado UD: deslocamentos verticais do ponto central (mm) obtidos no ANSYS[®] e Giraffe para diferentes níveis de refinamento de malha

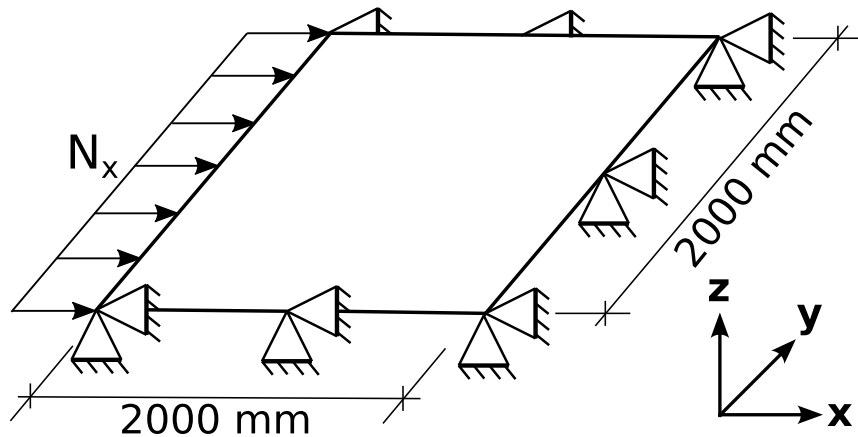


Fonte: autoria própria

3.3.3 Laminado assimétrico *cross-ply* $[0/90]_n$: placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento axial

A Figura 23 apresenta uma placa quadrada, simplesmente apoiada – $a_x = a_y = 2000mm$ e espessura $t = 10mm$ – comprimida por uma força axial uniformemente distribuída $N_x = -1N/mm$ ao longo de sua borda. O laminado é do tipo *cross-ply* $[0/90]_n$ e observa-se o resultado do deslocamento vertical do ponto central, que se deve ao acoplamento extensão-flexão.

[§] Não houve diferença significativa entre os resultados obtidos neste exemplo com a variação do parâmetro numérico relativo ao grau de liberdade de *drilling* no intervalo de calibração adotado $\alpha_t \in]0, 10^6]$. Deste modo, apresentam-se os resultados para $\alpha_t = 1$.

Figura 23 – $[0/90]_n$: placa quadrada sob compressão

Fonte: autoria própria

Neste exemplo buscou-se analisar o efeito do parâmetro numérico α_t , variando-o no intervalo $]0, 10^6]$. Houve aderência entre os resultados obtidos no código Giraffe em relação ao ANSYS®, como mostram a Tabela 3 e as Figura 24 e Figura 25 para $\alpha_t = \{1, 10^3, 10^6\}$.

Tabela 3 – *Cross-ply*: deslocamentos verticais do ponto central (u_z) obtidos no ANSYS® e Giraffe para $\alpha_t = \{1, 10^3, 10^6\}$

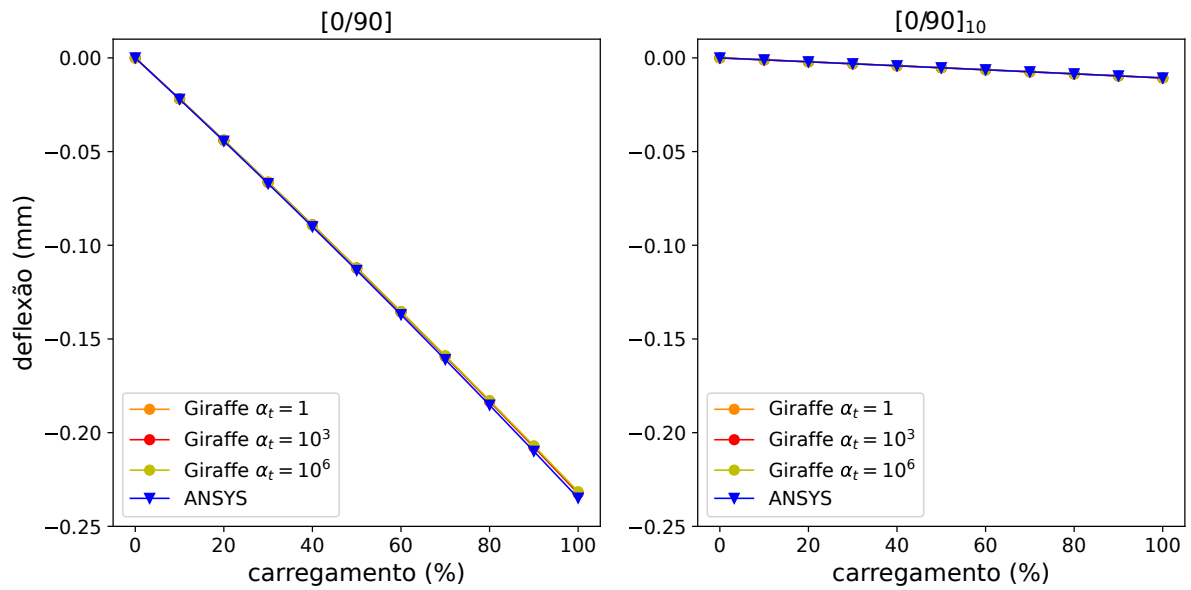
Código	α_t	$[0/90]$		$[0/90]_{10}$		$[0/90]_{20}$	
		$u_z(mm)$	Desvio	$u_z(mm)$	Desvio	$u_z(mm)$	Desvio
Anslys	-	-0,2349	0%	-0,01070	0%	-0,005327	0%
Giraffe	1	-0,2324	-1,09%	-0,01071	0,15%	-0,005270	-1,06%
	10^3	-0,2324	-1,09%	-0,01071	0,15%	-0,005271	-1,06%
	10^6	-0,2315	-1,46%	-0,01071	0,15%	-0,005270	-1,06%

Vale observar, também, que a magnitude da deflexão é reduzida drasticamente conforme se aumenta o número de lâminas do *cross-ply*, o que se justifica pelo aumento de sua homogeneidade e consequente diminuição dos efeitos de acoplamento[¶].

A redução da magnitude do deslocamento vertical do ponto central da placa evidencia-se ainda mais claramente nas Figura 24 e Figura 25, em que se comparam aos pares os laminados.

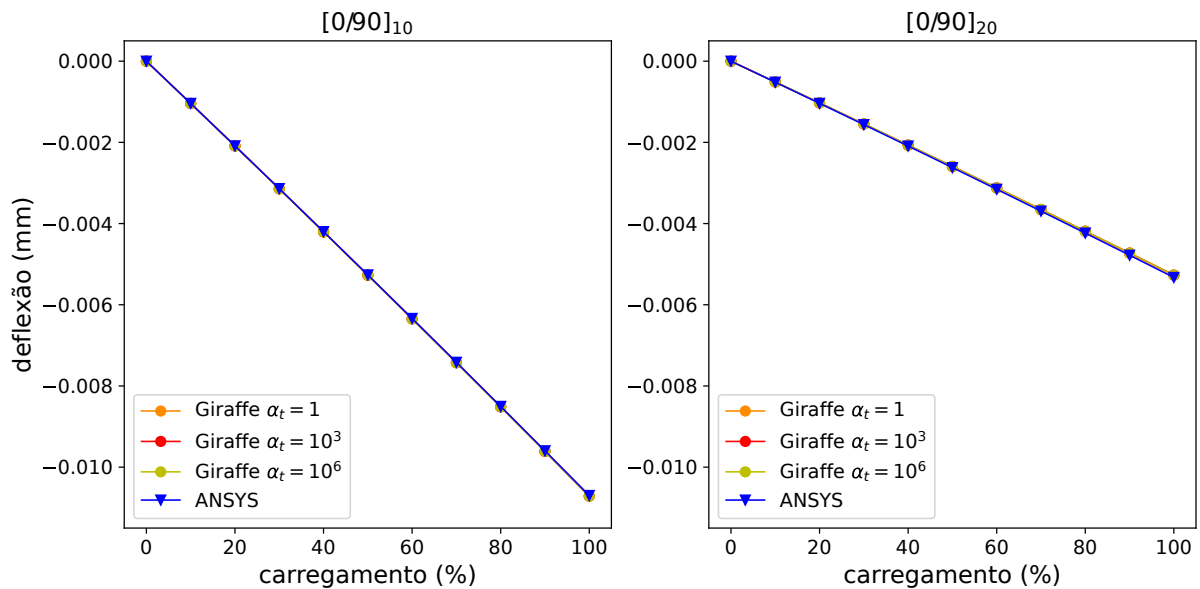
[¶] Na medida em que não se observaram diferenças significativas entre os resultados obtidos na variação do parâmetro numérico α_t , como mostra Tabela 3, nos exemplos seguintes fixa-se $\alpha_t = 1$.

Figura 24 – *Cross-ply*: deslocamentos verticais do ponto central (u_z) obtidos no ANSYS® e Giraffe para $\alpha_t = \{1, 10^3\}$



Fonte: autoria própria

Figura 25 – *Cross-ply*: deslocamentos verticais do ponto central (u_z) obtidos no ANSYS® e Giraffe para $\alpha_t = \{10^3, 10^6\}$



Fonte: autoria própria

3.3.4 Laminado assimétrico *cross-ply* [0/90]: análise modal com pré-tensão

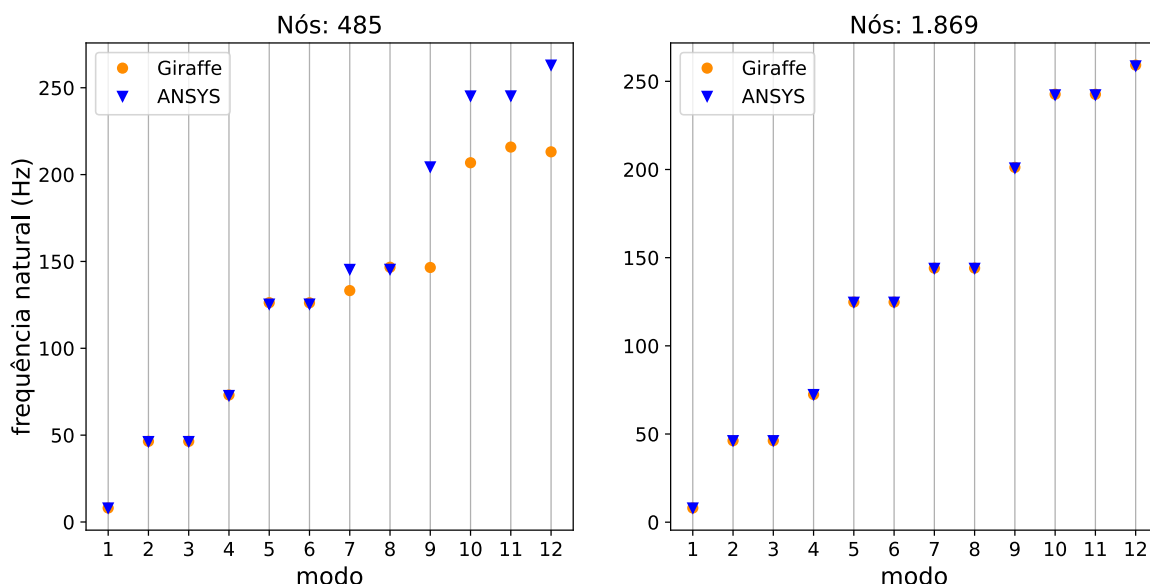
Este último exemplo busca verificar a robustez da implementação em uma análise modal com pré-tensão, partindo-se do exemplo anterior para o laminado [0/90]. A Tabela 4

e Figura 26 ilustram a comparação entre as frequências naturais dos doze primeiros modos obtidos nos dois códigos, para dois níveis de discretização. Nota-se que as discordâncias entre os resultados para as frequências naturais mais altas desaparecem com o aumento do refinamento da malha.

Tabela 4 – *Cross-ply* [0/90]: doze primeiras frequências naturais obtidas no ANSYS® e Giraffe para dois níveis de refinamento

Modo	Nós 485			Nós 1.869		
	Frequência (Hz)		Desvio	Frequência (Hz)		Desvio
	ANSYS	Giraffe		ANSYS	Giraffe	
1	8,06	8,05	-0,04%	8,05	8,04	-0,09%
2	46,31	46,44	0,27%	46,21	46,21	0,00%
3	46,32	46,42	0,22%	46,22	46,22	0,00%
4	72,82	73,12	0,41%	72,38	72,38	0,00%
5	125,44	126,27	0,66%	124,73	124,83	0,08 %
6	125,47	126,20	0,58%	124,75	124,81	0,05%
7	145,42	133,22	-8,39%	143,95	144,07	0,08%
8	145,46	146,67	0,83%	143,96	144,09	0,09%
9	204,43	146,53	-28,32%	200,85	201,18	0,17%
10	245,27	206,83	-15,67%	242,32	242,68	0,15%
11	245,30	215,85	-12,00%	242,35	242,65	0,12%
12	263,04	213,11	-18,98%	258,76	259,20	0,17%

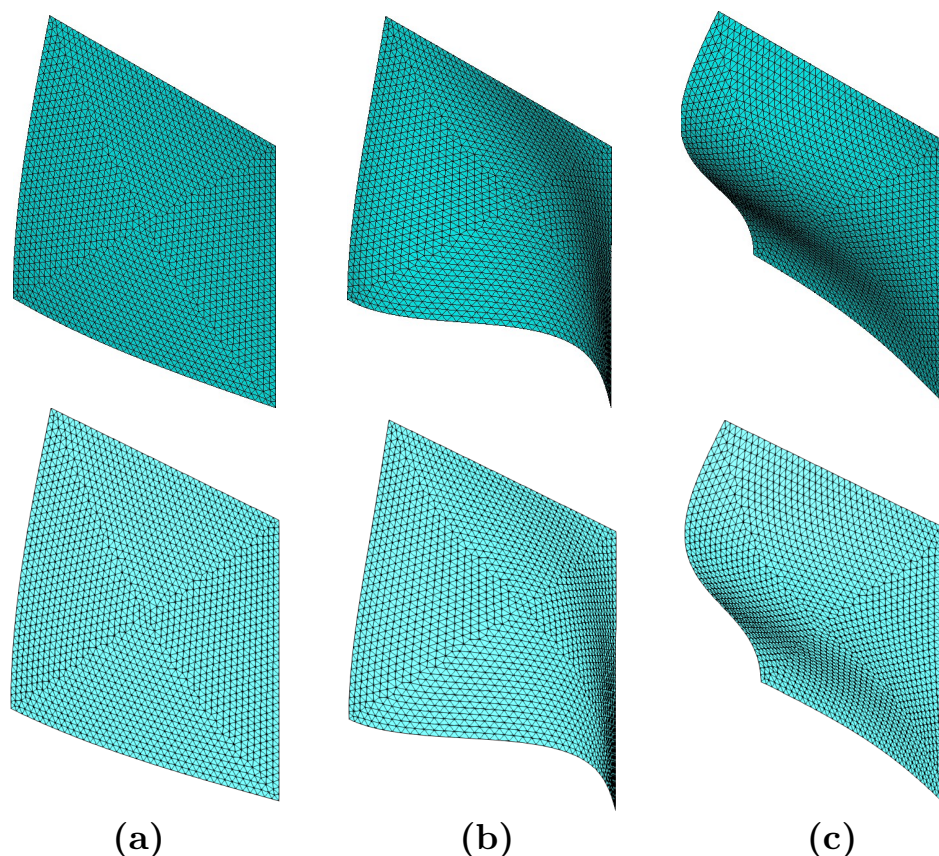
Figura 26 – *Cross-ply* [0/90]: doze primeiras frequências naturais obtidas no ANSYS® e Giraffe para dois níveis de refinamento



Fonte: autoria própria

A Figura 27, por sua vez, mostra a concordância entre os modos de vibração obtidos no Giraffe e no ANSYS®^{||}.

Figura 27 – *Cross-ply* [0/90]: primeiro (a), segundo (b) e terceiro (c) modos obtidos no Giraffe (acima) e ANSYS® (abaixo)



Fonte: autoria própria

3.3.5 Conclusões

Os resultados numéricos dos exemplos apresentados na seção 3.3 apresentam boa concordância com os obtidos no *software* ANSYS®, verificando a implementação do modelo de casca geometricamente exato baseada na CLT no código de elementos finitos Giraffe.

^{||} Todas as simulações apresentadas na seção 3.3 foram realizadas em um modelo de $\frac{1}{4}$ de placa, considerando a simetria nos planos xz e yz , inclusive as análises modais. Embora esta consideração não impeça a comparação entre as duas implementações deve-se evitar este tipo de modelagem em análises modais de estruturas reais, uma vez que não são capazes de capturar modos antissimétricos.

4 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTABILIDADE

Este capítulo apresenta uma metodologia de análise do comportamento dinâmico de estruturas em painéis reforçados no regime de pós-flambagem, em que se enquadram pás de turbinas eólicas. A primeira seção resume conceitos e métodos da Teoria da Estabilidade que justificam a abordagem introduzida na seção seguinte, referindo-se ao livro-texto de Ziegler (73) para uma descrição mais completa. A segunda seção, por sua vez, busca comparar a metodologia proposta a partir da análise estrutural de uma viga-caixão de alumínio típica com os resultados numéricos e experimentais disponíveis em (79).

4.1 Conceitos de estabilidade

Segundo Ziegler, aborda-se o problema da estabilidade estrutural a partir de quatro paradigmas: o Método da Imperfeição, o Método do Equilíbrio, o Método da Energia e o Método Cinético. Deles, os três primeiros partem de conceitos da Estática, enquanto o último, da Dinâmica. Embora equivalentes em problemas conservativos de estabilidade estática, monitoram-se parâmetros distintos, a saber, os deslocamentos do sistema imperfeito, as configurações não-triviais de equilíbrio do sistema perfeito, a energia potencial e o movimento após a perturbação do equilíbrio. O conceito de estabilidade capaz de unificar essas abordagens é resumido por Mazzilli:

Uma solução não perturbada é estável se a distância entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas.
(75)

Nessa definição, devem-se distinguir as abordagens estática e dinâmica. Na instabilidade estática, entende-se por solução não perturbada a configuração inicial de equilíbrio e por perturbação, uma mudança nas condições iniciais do modelo, seja de esforços ou deslocamentos, que leve a uma nova configuração não-trivial de equilíbrio. Já na instabilidade dinâmica, a solução não perturbada é certa trajetória no espaço de fase, cuja perturbação das condições iniciais pode levar a uma trajetória secundária.

A busca por instabilidades a partir da abordagem estática, entretanto, requer a determinação de parâmetros finitos, obtidos da solução de um nova configuração de equilíbrio estático, e exclui cenários em que a estrutura diverge de qualquer outra configuração de equilíbrio estático (76) ou em que apresenta saltos dinâmicos entre trajetórias de equilíbrio (*snapping*). Este último fenômeno é bastante importante no contexto de instabilidade de cascas, uma vez que o salto dinâmico entre modos de flambagem, a que se denomina *mode jumping*, é frequente em análises mais extensas no domínio da pós-flambagem.

Por sua vez, o conceito de estabilidade cinética, em que se infere a estabilidade a partir da limitação da evolução temporal da perturbação introduzida, é robusto o suficiente para capturar esse fenômeno, na medida em que não parte da hipótese do equilíbrio estático (76). Alguns conceitos de sistemas dinâmicos devem ser introduzidos para permitir o equacionamento do problema da estabilidade cinética, para que se dispõe do 1º Método de Lyapunov.

4.1.1 Descrição de um sistema dinâmico

Seja um sistema dinâmico autônomo discreto com n graus de liberdade. O movimento pode ser completamente descrito, sob uma abordagem Lagrangiana, a partir do vetor de coordenadas generalizadas \mathbf{q} e de velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$, de modo que se pode obter uma relação entre as derivadas temporais dos graus de liberdade a partir das equações de movimento:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (4.1)$$

Denomina-se espaço de fase a um espaço euclidiano de dimensão $2n$ e estado do sistema a um vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

cujas coordenadas cartesianas correspondem às coordenadas e velocidades generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, denominadas variáveis de estado do sistema.

De 4.1 e 4.2, reescrevem-se as equações diferenciais do movimento, de modo que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

O equilíbrio se resume à condição em que o estado do sistema se mantém constante no tempo, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, o que implica velocidades e acelerações generalizadas nulas.

Ziegler enuncia a estabilidade do equilíbrio ao estender o critério de Lyapunov a partir de uma analogia geométrica em que η é uma constante e representa o raio de uma hipersfera cujo centro é a origem do espaço de fase,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n q_k^2 + \dot{q}_k^2 = \eta^2, \quad (4.4)$$

de modo que o equilíbrio é estável se e somente se um estado descrito por \mathbf{x} , inicialmente interno à hipersfera de raio η , arbitrariamente pequeno, permanecer em seu interior após uma perturbação $\delta\mathbf{x}$.

Essa extensão do critério de Lyapunov, segundo Gay Gay Neto, deve-se à substituição da verificação individual de cada variável de estado pela norma do vetor \mathbf{x} no espaço de fase (76).

4.1.2 1º Método de Lyapunov

Seja \mathbf{x}_i um estado básico de interesse em cuja vizinhança se busca avaliar a estabilidade do equilíbrio e $\delta\mathbf{x}$ uma pequena perturbação

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

que na equação 4.3 resulta em

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i + \delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}) \\ \delta\dot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{h}}(\delta\mathbf{x}) \end{aligned}, \quad (4.6)$$

reescrita para um dado estado básico \mathbf{x}_i conhecido.

Da linearização da equação 4.6, obtém-se o problema associado

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}, \quad (4.7)$$

em que $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\delta\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ é a matriz jacobiana do sistema.

A solução geral da equação diferencial 4.7 é conhecida e tem forma exponencial

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}_i e^{\lambda_j t}, \quad (4.8)$$

de modo que se devem determinar os coeficientes λ_j , $j = \{1, 2, \dots, 2n\}$, caracterizando um problema clássico de autovalores da matriz jacobiana \mathbf{A} . A solução da equação característica resulta em $2n$ raízes complexas, cujas partes reais são analisadas segundo os teoremas de Lyapunov, enunciados conforme Mazzilli a seguir:

Teorema 1 Se a parte real de todos os autovalores for negativa ($Re(\lambda_j) < 0, \forall j$) o equilíbrio do estado básico \mathbf{x}_i é estável, segundo Lyapunov.

Teorema 2 Se a parte real de pelo menos um autovalor for positiva ($Re(\lambda_j) > 0, \exists j$) o equilíbrio do estado básico \mathbf{x}_i é instável, segundo Lyapunov.

Um sistema possui comportamento crítico se não é instável segundo o Teorema 2 ($Re(\lambda_j) \leq 0, \forall j$) e não constitui ponto de equilíbrio hiperbólico ($Re(\lambda_j) \neq 0 \mid \forall j$). Neste caso, é necessário dispor de outros teoremas da teoria da estabilidade para verificar a estabilidade do equilíbrio. Embora não abranjam o caso crítico de Lyapunov, os teoremas de Lyapunov enunciados acima não só varrem uma vasta gama de problemas de estabilidade, mas são suficientemente gerais para inferir a estabilidade do problema não linear associado, segundo o teorema de Hartman-Grobman, enunciado por Mazzilli:

Teorema 3 Se a singularidade for hiperbólica, então o sistema linearizado é topologicamente equivalente ao sistema não linear nas suas vizinhanças, isto é, entre os fluxos no espaço de fase dos dois sistemas há um difeomorfismo (transformação contínua, com derivada contínua).

4.1.3 Método das vibrações

Nesta subseção, busca-se um ponto de encontro entre o 1º Método de Lyapunov e a metodologia de análise não linear de cascas apresentada no Capítulo 3. É clara a convergência procedimental entre as duas metodologias, na medida em que partem da linearização em torno de pontos de equilíbrio, respectivamente no espaço euclidiano, gerado pelas coordenadas generalizadas, e no espaço de fase, gerado pelas variáveis de estado do sistema.

Podem-se unificar as abordagens ao se adotarem os graus de liberdade do método dos elementos finitos como coordenadas generalizadas do sistema dinâmico. O comportamento dinâmico de um sistema autônomo dissipativo na vizinhança de cada ponto de equilíbrio é descrito pela linearização da forma fraca 3.128:

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

em que \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do operador tangente do sistema.

Na ausência de esforços não conservativos (que resultam em uma matriz de rigidez tangente assimétrica) pode-se aplicar o Teorema de Kelvin-Tait-Chetaev (KTC), conforme enuncia Kirillov (90):

Teorema 4 A estabilidade das soluções da equação 4.9 em que \mathbf{M} e \mathbf{D} são positivas-definidas e \mathbf{K} não é singular é idêntica à estabilidade das soluções do sistema não-amortecido correspondente.

Assim, pode-se analisar a estabilidade a partir da equação do movimento para o sistema potencial não-amortecido, calculada, no espaço de configuração,

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

ou, no espaço de fase,

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}\delta\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

equivalente à solução do problema de vibrações livres, no espaço de configuração, (76,91)

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

Podem-se obter os autovalores λ_j da matriz \mathbf{A} a partir das frequências naturais obtidas para o problema de vibrações livres no ponto de equilíbrio linearizado ω_j ,

$$\lambda_j = \pm i\omega_j, \quad (4.13)$$

de modo que se pode dispor dos critérios de Lyapunov na avaliação da estabilidade do equilíbrio.

Analisar a estabilidade a partir das frequências naturais é uma abordagem cinética amplamente utilizada, a que se denomina frequentemente Método das Vibrações (72–74, 77, 91). Gay Neto resume os critérios de classificação da estabilidade do equilíbrio, segundo Lyapunov (76):

- Se todas as frequências naturais forem positivas ($\omega_j > 0, \forall j$) o sistema será estável, pois λ_j será imaginário puro, de modo que a solução da equação 4.8 se configura numa oscilação de amplitude constante (ou centro).
- Se alguma frequência natural do sistema cai progressivamente a zero ($\exists j \mid \omega_j = 0$) λ_j torna-se real, instabilizando a solução de 4.8, que se compõe de duas exponenciais, crescente e decrescente, a que se denominam instabilidades estáticas (ou por divergência).
- Se duas frequências naturais se avizinham em um valor real não nulo, pode ocorrer uma instabilidade dinâmica em que a soma de exponenciais oscilatórias pode levar ao surgimento de uma parte real no autovalor λ_j sem que haja a transição de ω_j pela origem do plano complexo.

Nota. Embora suficientemente geral para abranger uma série de problemas de estabilidade, o KTC não é válido para problemas com forças não conservativas (circulatórias), em que se enquadram os esforços aerodinâmicos da pá de uma turbina eólica, altamente dependentes dos deslocamentos da estrutura. A avaliação desse tipo de estrutura deve se realizar a partir da generalização do Método das Vibrações, descrito na próxima subseção.

4.1.4 Método das vibrações generalizado

Em um sistema autônomo, dissipativo, giroscópico e circulatório, podem-se reescrever as matrizes de amortecimento e rigidez \mathbf{D} e \mathbf{K} a partir de suas partes hermitianas e anti-hermitianas, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^*) , \\ &= \mathbf{C} + \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que \mathbf{C} e \mathbf{G} são as contribuições dissipativa e giroscópica do amortecimento e

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{K}^*) \\ &= \mathbf{S} + \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde \mathbf{S} resume as contribuições geométrica, constitutiva e centrífuga da matriz de rigidez tangente e \mathbf{L} , a contribuição dos esforços externos, anti-hermitiana, na presença de esforços circulatórios.

Nota. No espaço de configuração, descrito pelas coordenadas generalizadas \mathbf{q} , matrizes simétricas são hermitianas, e antissimétricas, anti-hermitianas, dado que são matrizes reais.

Assim, pode-se inferir a estabilidade do equilíbrio a partir da equação do movimento linearizada, 4.9, reescrita em função das partes hermitianas e anti-hermitianas, como segue:

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{S} + \mathbf{L})\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

em que

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{G}^* = -\mathbf{G}, \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{S} \quad \text{e} \quad \mathbf{L}^* = -\mathbf{L}. \quad (4.17)$$

Tasso propõe reescrever a equação 4.16 a partir da transformação congruente $\delta\mathbf{q} = \mathbf{P}\delta\mathbf{y}$ (92),

$$\delta\ddot{\mathbf{y}} + (\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{G}})\delta\dot{\mathbf{y}} + (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{L}})\delta\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

cujas matrizes transformadas são dadas por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}^*\mathbf{M}\mathbf{P}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^*\mathbf{C}\mathbf{P}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \mathbf{P}^*\mathbf{G}\mathbf{P}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{P}^*\mathbf{S}\mathbf{P}, \quad \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{P}^*\mathbf{L}\mathbf{P}. \quad (4.19)$$

Entretanto, como já mencionado, a presença de forças circulatorias ($\bar{\mathbf{L}} \neq \mathbf{0}$) impede a aplicação direta do KTC, de modo que se propõe uma transformação unitária no domínio do tempo $\mathbf{T}(t) = e^{t\Omega}$ para eliminar a assimetria na matriz de rigidez, garantindo as condições para a aplicação do teorema (92).

Busca-se uma transformação unitária limitada no domínio do tempo:

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{T}\delta\mathbf{z} \quad | \quad \mathbf{T}\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*\mathbf{T} = \mathbf{I}, \quad \forall t \quad (4.20)$$

tal que a equação 4.18 seja dada por

$$\delta\ddot{\mathbf{z}} + (\bar{\bar{\mathbf{C}}} + \bar{\bar{\mathbf{G}}})\delta\dot{\mathbf{z}} + \bar{\bar{\mathbf{S}}}\delta\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

em que

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\mathbf{C}}^*, \quad \bar{\bar{\mathbf{G}}} = -\bar{\mathbf{G}}^*, \quad \bar{\bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{S}}^*. \quad (4.22)$$

Garante-se as condições da equação 4.21, ao se adotar uma transformação unitária \mathbf{T} cujo operador anti-hermitiano $\Omega = \dot{\mathbf{T}}\mathbf{T}^*$ satisfaça a equação de Lyapunov:

$$(\bar{\bar{\mathbf{C}}} + \bar{\bar{\mathbf{G}}})\Omega + \Omega(\bar{\bar{\mathbf{C}}} + \bar{\bar{\mathbf{G}}})^* + 2\bar{\bar{\mathbf{L}}} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

de modo a garantir que os termos anti-hermitianos em $\delta\mathbf{z}$ se anulem.

A solução da equação de Lyapunov é conhecida e é dada explicitamente por (93)*:

$$\text{vec}(\Omega) = (\mathbf{I} \otimes (\bar{\bar{\mathbf{C}}} + \bar{\bar{\mathbf{G}}}) + (\bar{\bar{\mathbf{C}}} + \bar{\bar{\mathbf{G}}}) \otimes \mathbf{I})^{-1} \text{vec}(-2\bar{\bar{\mathbf{L}}}). \quad (4.24)$$

* Em que o operador $\text{vec}()$ converte a matriz anti-hermitiana em um vetor-coluna.

A transformação proposta permite a adoção do KTC nas coordenadas generalizadas transformadas $\delta\mathbf{z}$, de modo que pode-se avaliar a estabilidade do equilíbrio a partir da equação do sistema transformado não-amortecido:

$$\delta\ddot{\mathbf{z}} + \bar{\bar{\mathbf{S}}}\delta\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

em que

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega} + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\bar{\mathbf{C}}) + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{G}}\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}\bar{\mathbf{G}}), \quad (4.26)$$

reduzindo-o ao problema clássico de autovalores em torno do estado básico transformado:

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}\delta\mathbf{z} = \omega^2\delta\mathbf{z}, \quad (4.27)$$

o que equivale ao método das vibrações no espaço de fase transformado, a que se generalizam as conclusões sobre o equilíbrio dispostas na subsecção anterior.

4.2 Análise de viga-caixão no regime de pós-flambagem

Esta seção busca validar a metodologia de análise de estabilidade de estruturas esbeltas a partir de uma viga-caixão de alumínio típica no regime de pós-flambagem e de sua comparação com os resultados numéricos disponíveis em (79). O trabalho a que se refere valida a metodologia proposta a partir de resultados experimentais, obtendo boa concordância entre o modelo de elementos finitos da viga-caixão e o modelo físico.

4.2.1 Descrição do problema

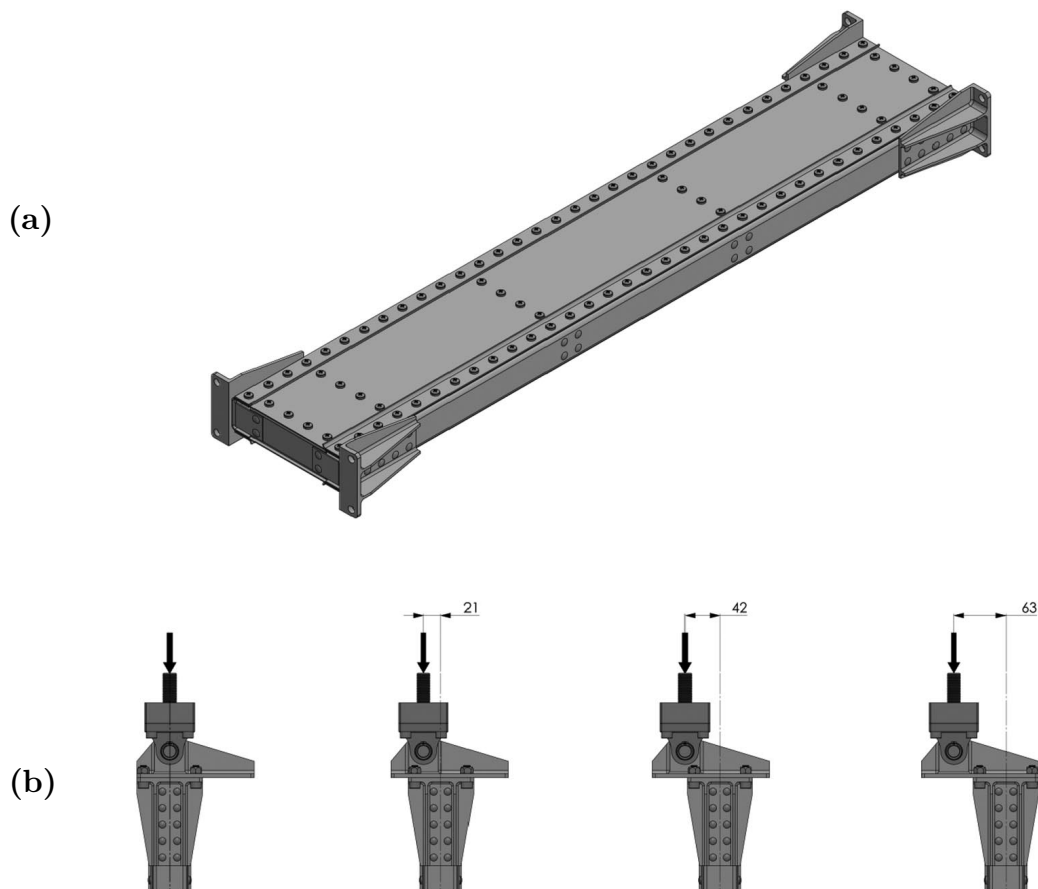
A estrutura proposta consiste de uma estrutura aeronáutica típica, denominada viga-caixão, composta de painéis esbeltos reforçados e dimensionada para trabalhar à tração e à compressão em faces respectivamente opostas. No modelo numérico e experimental de referência, induzem-se os esforços de tração e compressão a partir da introdução de uma excentricidade na aplicação da carga compressiva na estrutura biapoiada, como mostra a Figura 28. A Tabela 5 enumera as condições de carregamento por excentricidade avaliadas na pós-flambagem[†].

A viga-caixão tem 900mm de comprimento, $158,6\text{mm}$ de largura e 40mm de altura e é composta de revestimento, nervuras e longarinas. O revestimento tem espessura de 1mm , sendo, em uma estrutura aeronáutica, responsável por distribuir os esforços aerodinâmicos para as estruturas principais, com espessura de $1,3\text{mm}$.

[†] Pode-se fazer uma analogia com a estrutura da pá de uma turbina eólica, que também apresenta revestimento e estruturas primárias como *spars*, almas (*shear webs*) e reforçadores. Além de elementos estruturais análogos, também há zonas opostas de compressão e tração em ambas as estruturas.

Tabela 5 – Cargas-limite por condição de excentricidade (79)

Excentricidade	Carga limite
0 mm	18,0 kN
21 mm	8,5 kN
42 mm	5,5 kN
63 mm	4,0 kN

Figura 28 – (a) Vista isométrica da viga-caixão, (b) detalhe das excentricidades impostas (dimensões em *mm*)

Fonte: extraído de (94)

A Tabela 6 descreve as propriedades mecânicas das ligas de alumínio utilizadas.

Tabela 6 – Propriedades dos materiais (79)

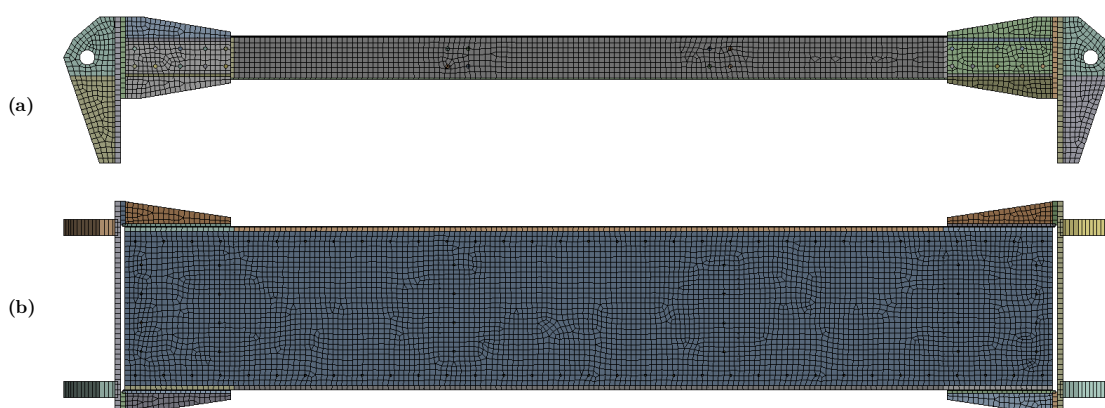
Propriedade	Unidade	2024-T3	7075-T651
E	<i>MPa</i>	72,395	71,016
ν	-	0,33	0,33
ρ	<i>kg/m³</i>	2768	2796

4.2.2 Modelo de elementos finitos

Neste trabalho, um modelo estático geometricamente não-linear foi desenvolvido no *software* de elementos finitos ANSYS®, a fim de se avaliar a estabilidade do caminho de equilíbrio pelo Método das Vibrações, como proposto em (79). A metodologia parte da resolução completa do problema estático, guardando-se os resultados dos incrementos de carga ao longo da trajetória de equilíbrio para proceder à análise modal e avaliação a estabilidade do equilíbrio.

Um estudo de convergência foi realizado, levando à definição de um modelo de elementos finitos com 29.552 nós e 27.522 elementos. Entretanto, diferentemente do modelo descrito em (79), optou-se por descrever os rebites e conectores a partir de elementos estruturais de viga Assim, dos 27.522 elementos, 268 são vigas do tipo BEAM188 e 27.254 cascas SHELL181 (19). A malha adotada é apresentada na Figura 29.

Figura 29 – Vistas (a) lateral e (b) superior da malha elementos finitos da viga-caixão



Fonte: autoria própria

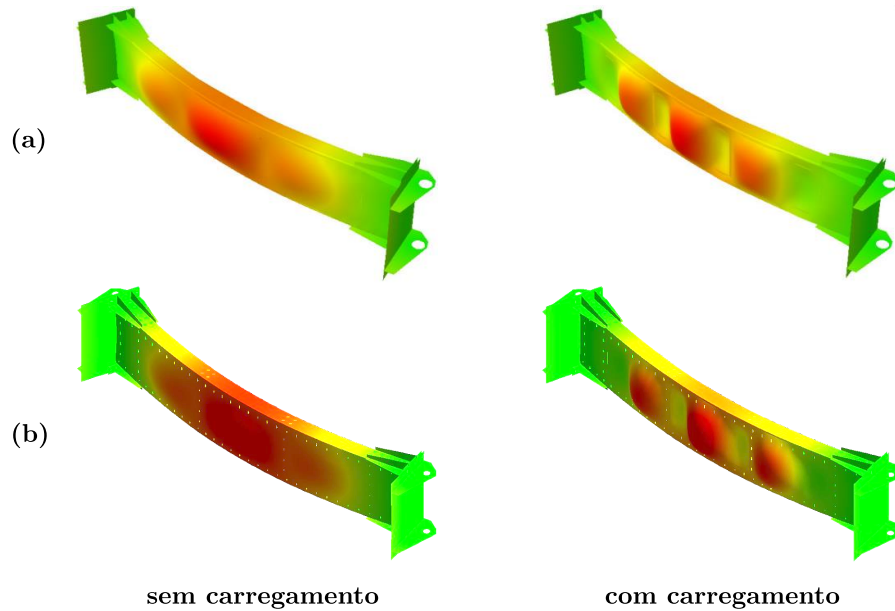
Uma vez que se trata de uma estrutura extremamente leve, a massa discreta dos conjuntos de prendedores, descrita na Tabela 7, foi distribuída na extensão dos respectivos elementos de viga.

Tabela 7 – Massa discreta considerada em cada junta (79)

Descrição da junta	Massa
Revestimento/longarina	6,79 g
Nervura	1,15 g
Longarina/nervura	1,15 g
Bota/longarina/nervura	1,00 g
Base excêntrica/bota	21,05 g

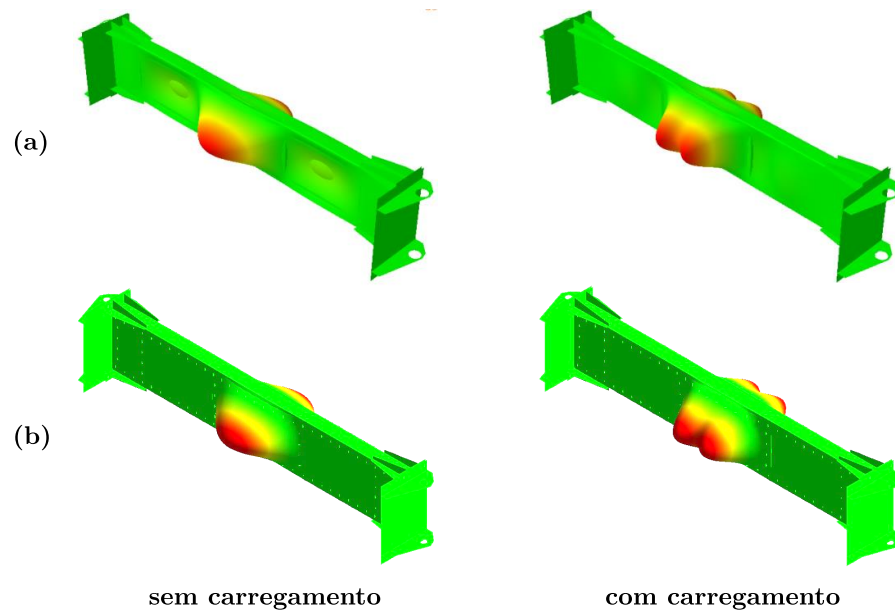
As Figuras 30-32 e Tabela 8 comparam os modos e frequências naturais da estrutura descarregada e com carregamento os modos e frequências descritos em (79)[‡].

Figura 30 – Primeiro modo (global): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio



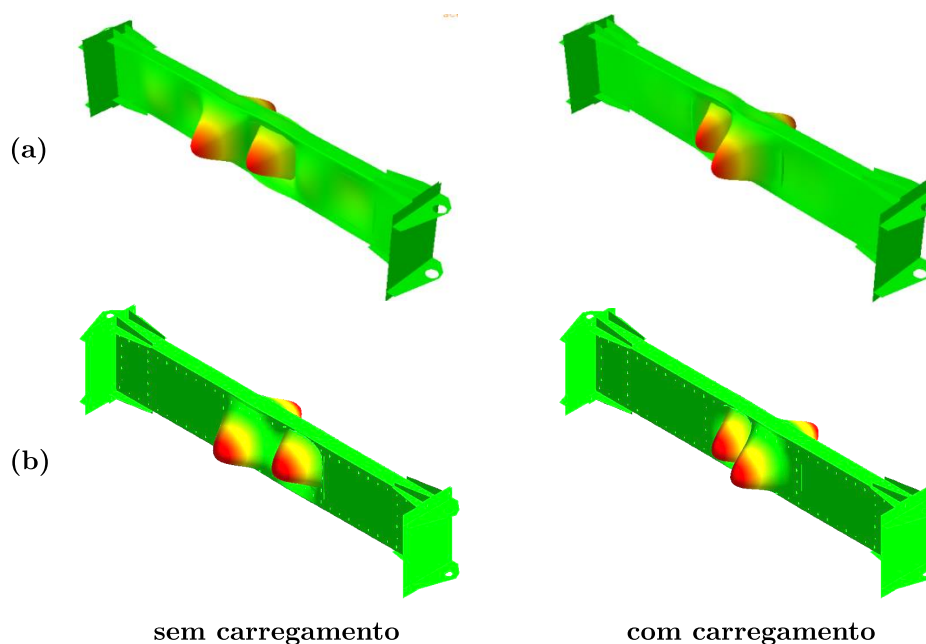
Fonte: adaptado de (94)

Figura 31 – Segundo modo (local): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio



[‡] As figuras apresentam apenas os três primeiros modos da estrutura na condição sem excentricidade. Os modos não variam significativamente com o aumento da excentricidade, de modo que são suficientemente ilustrados a partir dessa condição.

Figura 32 – Terceiro modo (local): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio



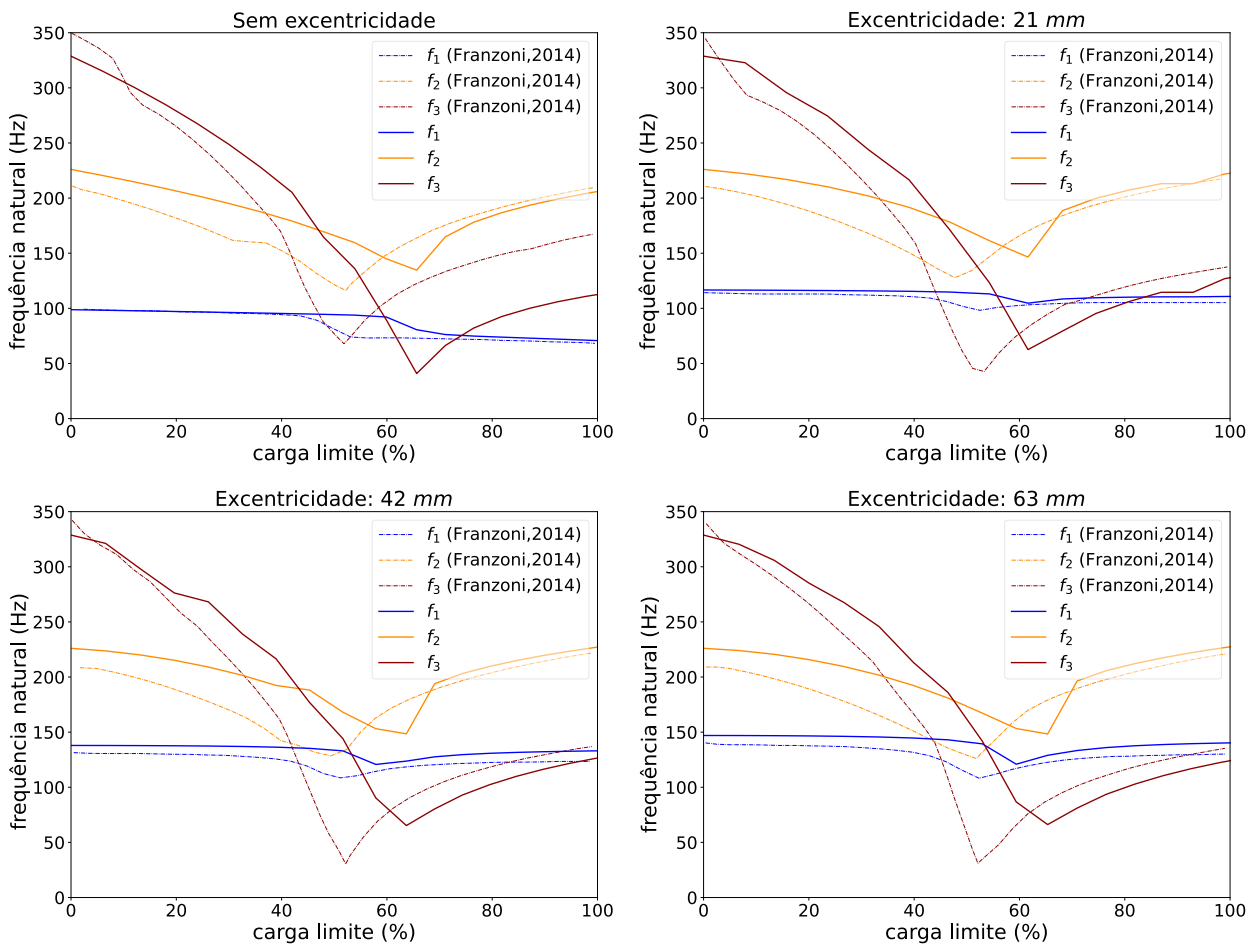
Fonte: adaptado de (94)

Tabela 8 – Frequências naturais dos três primeiros modos (f_1 , f_2 , f_3): (a) Franzoni (2014) e (b) modelo próprio

Frequência	Excentricidade	Sem carregamento			Com carregamento		
		(a) (Hz)	(b) (Hz)	Desvio	(a) (Hz)	(b) (Hz)	Desvio
f_1	0 mm	99,42	98,79	-0,63%	68,78	70,232	2,11%
	21 mm	113,93	116,66	2,40%	105,17	110,86	5,41%
	42 mm	132,12	137,92	4,39%	123,88	133,04	7,39%
	63 mm	140,11	146,96	4,89%	130,22	140,51	7,90%
f_2	0 mm	210,55	226,05	7,36%	209,72	208,44	-0,61%
	21 mm	210,55	226,05	7,36%	218,34	225,31	3,19%
	42 mm	210,55	226,05	7,36%	222,46	226,93	2,01%
	63 mm	210,55	226,05	7,36%	222,07	229,45	3,32%
f_3	0 mm	350,02	328,75	-6,08%	168,21	114,83	-31,73%
	21 mm	347,40	328,75	-5,37%	138,85	131,61	-5,21%
	42 mm	342,66	328,75	-4,06%	138,00	126,28	-8,49%
	63 mm	340,04	328,75	-3,32%	136,11	126,85	-6,80%

A Figura 33 apresenta as variações das três primeiras frequências naturais da viga-caixão.

Figura 33 – Frequências naturais em função do carregamento



Fonte: adaptado de (94)

Os resultados obtidos no modelo de elementos finitos desenvolvido no ANSYS® apresentam comportamento bastante similar aos dispostos em (79), embora percam rigidez de forma um pouco mais lenta. Cabe lembrar que os modelos de elementos finitos não são idênticos, principalmente no que se refere à modelagem estrutural das juntas e da distribuição da massa discreta adicional, o que pode afetar de forma significativa as frequências naturais dos modos locais dos painéis.

Retomando-se a seção anterior, a análise de estabilidade do equilíbrio a partir dos resultados apresentados na Figura 33 pelo Método das Vibrações permite identificar:

- Instabilidades estáticas nos pontos em que a frequência natural do sistema cai progressivamente a zero (divergência), ocorrendo de forma quase simultânea nos três modos. A frequência associada ao segundo modo local tende a zero, indicando a primeira instabilidade local da estrutura.

- A frequência natural associada ao primeiro modo de flexão global da viga caixão é pouco afetada pela flambagem local dos painéis.

Por fim, em (79), introduzem-se imperfeições iniciais a fim de aproximar o modelo numérico ao modelo físico. Fenômenos como o *mode shifting* desaparecem com o aumento da magnitude das imperfeições iniciais e há uma estabilização das frequências naturais na região crítica de flambagem, em que f_3 tende a zero. Embora deva-se considerar imperfeições iniciais na análise de estabilidade de estruturas reais, de modo a não introduzir instabilidades numéricas artificiais, os resultados do modelo sem imperfeições da viga-caixão são apresentados aqui a título de exemplo do uso do Método das Vibrações para análise da estabilidade.

5 ANÁLISE ESTRUTURAL DA TURBINA DE REFERÊNCIA

A conclusão deste trabalho se resume a uma análise crítica da aplicação convencional de modelos de elementos finitos no projeto estrutural de pás de turbinas eólicas, a partir do estudo de caso da pá da turbina eólica de referência DTU 10-MW (17).

Busca-se, primeiro, entender os limites da aplicabilidade dos modelos geometricamente não-lineares de viga anisotrópica (20, 38, 39) na representação do comportamento estrutural da pá, comparados a cascas laminadas. Para verificar a equivalência entre os modelos quanto à distribuição de rigidez e massa, realiza-se uma análise modal. Em seguida, procede-se à análise estática de 12 cenários de flexão, distribuídos radialmente ao redor da base engastada, como sugere a norma de certificação de pás de turbinas eólicas (95). Dois cenários são discutidos detalhadamente e os resultados de todas as simulações são apresentados no Apêndice B.

Por fim, aplica-se o método das vibrações no estudo da estabilidade ao longo do equilíbrio da flexão *Leading edge Towards Trailing edge* (LLT), em que se observa a flambagem do bordo de fuga. Discutem-se brevemente os limites da adoção de métodos lineares e o papel da sensibilidade à imperfeição no cálculo da resistência à flambagem.

5.1 Simulações comparadas: viga e casca

A pá da turbina de referência DTU 10-MW é feita de laminados compósitos sanduíche de resina epóxi e fibra de vidro com núcleo de madeira balsa. O *layup* conta com lâminas multidirecionais cujas propriedades aparentes, calculadas a partir de equações de micromecânica e da CLT, estão listadas na Tabela 9. A Tabela 10 resume as propriedades mecânicas do núcleo de madeira balsa.

A estrutura foi concebida como uma viga caixão, com duas almas (*shear webs*) principais e uma terceira alma do primeiro quarto do comprimento da pá até sua ponta, como ilustra a Figura 34. A turbina varre um raio de $r = 89,166m$, dimensão compatível com as turbinas *offshore*.

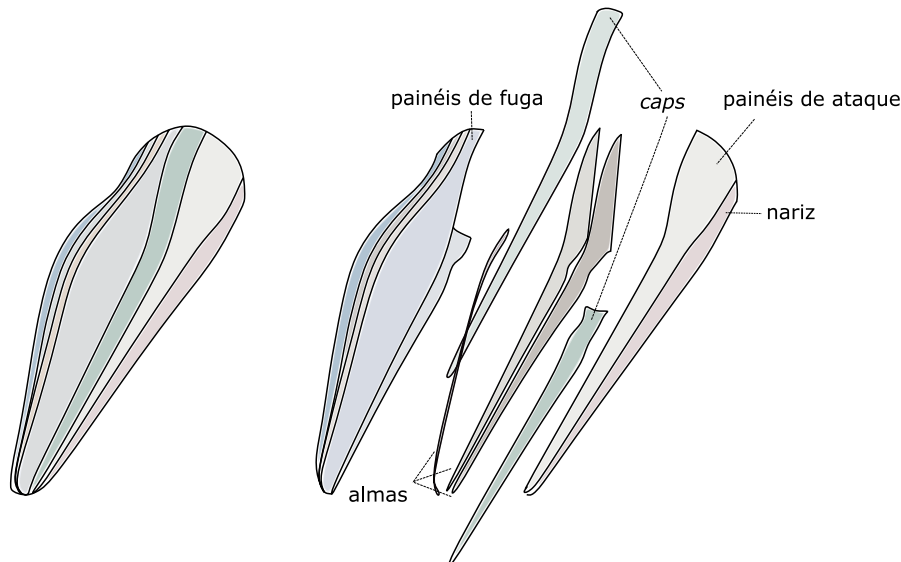
Tabela 9 – Propriedades mecânicas aparentes das lâminas multidirecionais (17)

Lâmina multidirecional	Uniaxial	Biaxial	Triaxial	
E_1	41,63	13,92	21,79	GPa
E_2	14,93	13,92	14,67	GPa
G_{12}	5,047	11,50	9,413	GPa
ν_{12}	0,241	0,533	0,478	–
$G_{13} = G_{23}$	5,047	4,539	4,539	GPa
ρ	1915,5	1845,0	1845,0	kg/m^3

Tabela 10 – Propriedades mecânicas da madeira balsa (17),

Propriedade	Orientação	Valor	Unidade
E_1	radial	0,0050	GPa
E_2	tangencial	0,0050	GPa
E_3	axial	2,730	GPa
G_{12}	radial-tangencial	0,01667	GPa
G_{13}	radial-axial	0,150	GPa
G_{23}	tangencial-axial	0,150	GPa
ν_{12}	radial-tangencial	0,5	–
ν_{13}	radial-axial	0,013	–
ν_{23}	tangencial-axial	0,013	–
ρ		110	kg/m^3

O repositório *online* da turbina (17) disponibiliza um modelo de elementos finitos de casca desenvolvido no *software* comercial ABAQUS (67) e as propriedades estruturais das seções transversais de um modelo de viga análogo, geradas automaticamente no pré-processador BECAS (38) a partir do modelo de casca. Essas propriedades estruturais foram utilizadas na elaboração de um modelo de viga não-linear geometricamente exato no *software* não-linear de elementos finitos Giraffe (20), discretizado em 50 elementos e 101 nós.

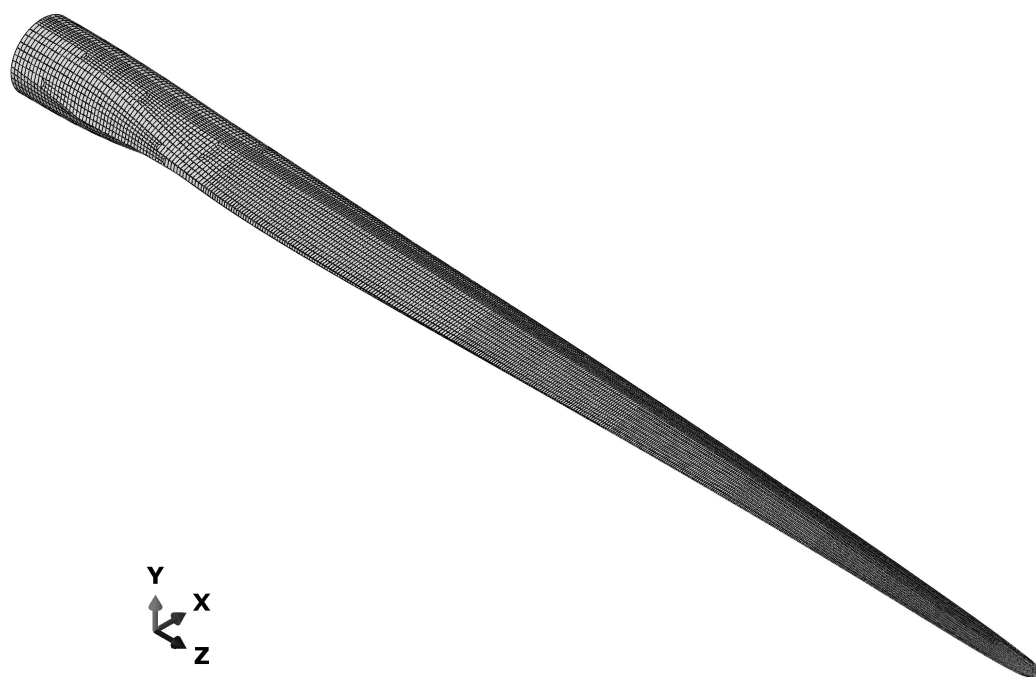
Figura 34 – Regiões com *layups* similares.

Fonte: adaptado de (17)

O modelo do ABAQUS é composto, principalmente, por elementos de cascas retangulares de 8 nós (S8R), adicionados de uma linha de elementos sólidos de 20 nós (C3D20) (67), representando o adesivo que une as seções de pressão e sucção no bordo de fuga. A Figura 35 apresenta o sistema de coordenadas global e a malha de elementos finitos

adotada, que consiste de aproximadamente 104.000 nós e 35.000 elementos, dos quais somente 500 são sólidos. As propriedades do laminado (*layup*) são descritas em 100 seções transversais, subdivididas internamente entre almas, painéis, *caps* e bordos de fuga e ataque, como mostra a Figura 34 e podem ser consultadas mais detalhadamente no relatório de definição da turbina (17).

Figura 35 – Malha de elementos finitos



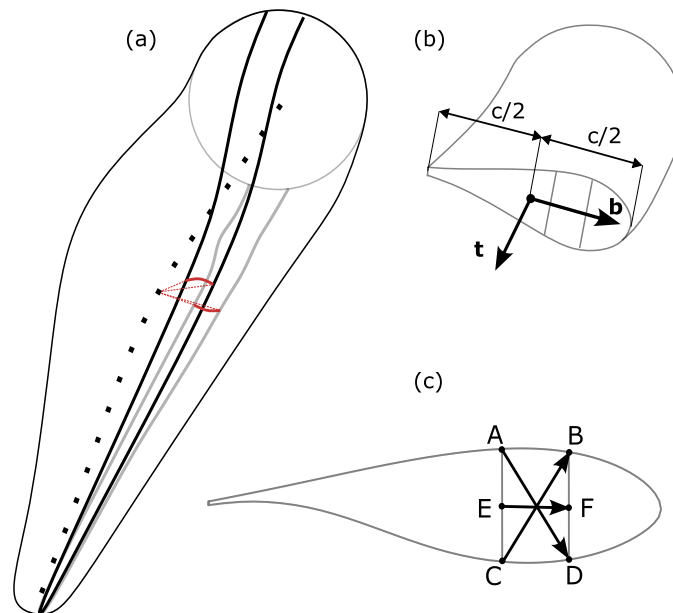
Fonte: autoria própria

O mesmo relatório sugere um *prebend* baseado na deflexão estacionária das pás para a velocidade de operação $v = 5m/s$, embora os modelos de elementos finitos não incluam nenhum *prebend*. Esse *prebend* foi adicionado posteriormente em ambos os modelos. A inclusão do *prebend* no modelo de viga foi feita a partir de uma simples atualização das coordenadas dos nós do eixo da viga na direção global \mathbf{y} , caracterizando um cisalhamento puro da geometria da pá (*sheared blade shape*), como proposto na definição da turbina (17). Já no modelo da casca, foi necessária a atualização das coordenadas de todos os nós da malha a partir da deformada de uma simulação estática com não-linearidade geométrica, anterior, em que se impôs um deslocamento da magnitude do *prebend* na direção \mathbf{y} , restringindo-se as translações nas demais direções.

Ainda que compartilhem a mesma geometria, os modelos de viga e casca partem de definições de graus de liberdade completamente distintas. Enquanto os graus de liberdade do modelo de viga se resumem a translações e rotações de seções ao redor de um eixo, o

modelo de casca calcula translações e rotações em toda a superfície da pá, que não contém o eixo da viga. Uma alternativa para se obter resultados comparáveis entre os modelos é criar um eixo fictício no modelo de casca, concebendo as seções correspondentes ao conectar os nós do eixo à superfície a partir de vínculos cinemáticos. É importante que essas conexões sejam aplicadas em regiões relativamente rígidas da casca, para evitar que a concentração de tensões criem efeitos locais, comprometendo a equivalência entre os modelos. A Figura 36 ilustra a definição do eixo correspondente no modelo de casca e sua vinculação aos *caps*, além da definição das seções transversais equivalentes.

Figura 36 – Definição (a) do eixo correspondente e dos vínculos cinemáticos, (b) do sistema de coordenadas local (c) e dos vetores seccionais $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{AD} \times \mathbf{CB}}{\|\mathbf{AD} \times \mathbf{CB}\|}$ e $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{EF}}{\|\mathbf{EF}\|}$, referentes à torção e flexão da seção, respectivamente.

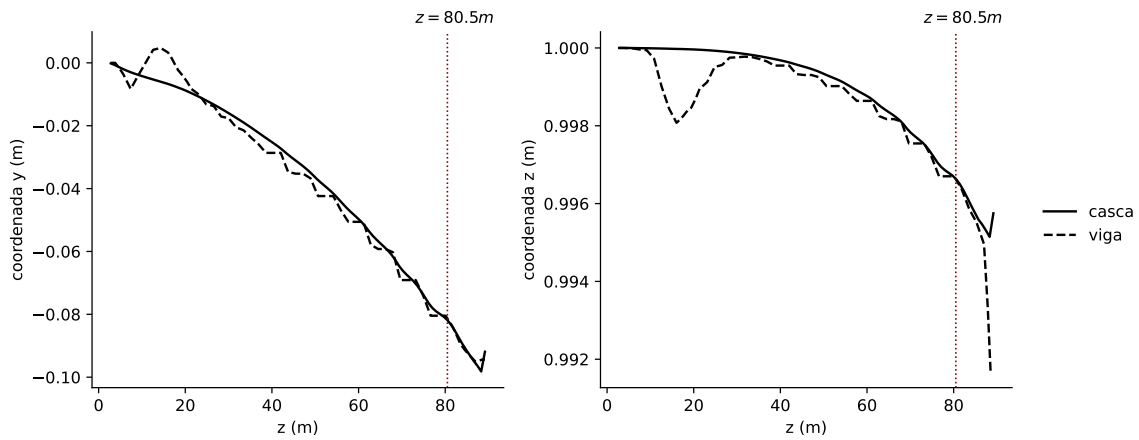


Fonte: (a) adaptado de (17); (b) e (c) autoria própria

Cabe mencionar que embora o princípio de Saint-Venant garanta a equivalência entre os modelos, resumindo a comparação das grandezas translacionais aos resultados nodais dos eixos correspondentes, é necessário cuidado ao se descrever as grandezas rotacionais, dado que não só os nós dos eixos devem ser comparáveis, mas também os vetores que definem as seções transversais. Entretanto, uma vez que a malha previamente definida no modelo de casca é regularmente seccionada ao longo do eixo z como ilustra a Figura 35 – diferentemente do modelo de viga, cujas seções transversais são inicialmente ortogonais ao eixo – é impossível definir seções transversais paralelas às da viga ao longo de todo o eixo. A Figura 37 destaca as diferenças entre as coordenadas do vetor diretor, ortogonal à seção transversal, ao longo dos eixos dos modelos. Para se capturar o comportamento global dos dois modelos em uma seção comparável, portanto, definiu-se a seção de controle

em $z = 80,5m$.

Figura 37 – Coordenadas do vetor diretor ao longo dos eixos dos modelos de viga e casca.



Fonte: autoria própria

5.1.1 Análise modal

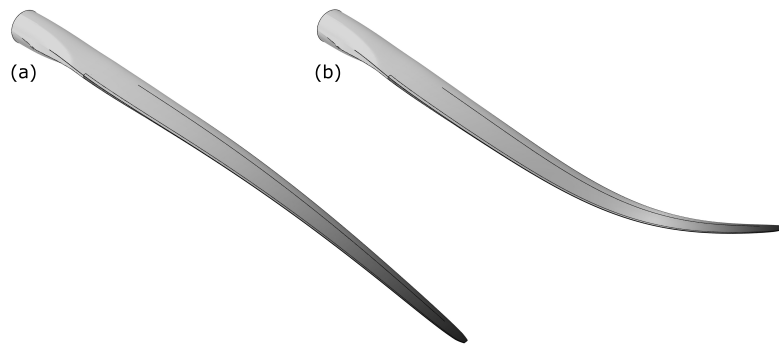
A comparação das frequências naturais dos primeiros modos dos modelos de viga e casca, apresentadas na Tabela 11, revela uma distribuição de rigidez e massa equivalente entre os modelos, embora a casca aparente ser ligeiramente mais rígida na direção *edgewise*, com frequências naturais maiores nesses modos. Os dois primeiros modos *flapwise* e *edgewise* da casca são apresentados nas figuras 38 e 39. Essa diferença provavelmente se deve à ausência da modelagem do adesivo no modelo de viga, dado que a documentação do pré-processador BECAS (38) não menciona a modelagem de vínculos coesivos, além de a teoria estrutural de viga anisotrópica não mencionar outro tipo de acoplamento exceto aquele devido à própria anisotropia do laminado (39).

Vale mencionar que o modelo de casca apresenta modos simétricos com frequências naturais muito próximas, como é o caso do 1º modo de torção, ilustrado na Figura 40, o que não acontece no modelo de viga.

Tabela 11 – Primeiras frequências naturais para os modelos de viga e casca

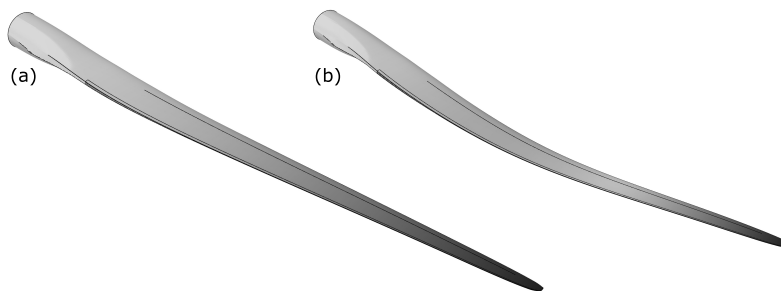
Viga f (Hz)	Casca f (Hz)	Desvio (%)	Modo
0,615	0,611	-0,77%	1º modo <i>flapwise</i>
0,938	0,964	2,71%	1º modo <i>edgewise</i>
1,753	1,752	-0,05%	2º modo <i>flapwise</i>
2,776	2,883	3,71%	2º modo <i>edgewise</i>
3,583	3,577	-0,18%	3º modo <i>flapwise</i>
5,671	5,707	0,62%	1º modo de torção
-	5,747	-	1º modo de torção

Figura 38 – Primeiros dois modos *flapwise*. $f_{(a)} = 0,611Hz$, $f_{(b)} = 1,752Hz$.



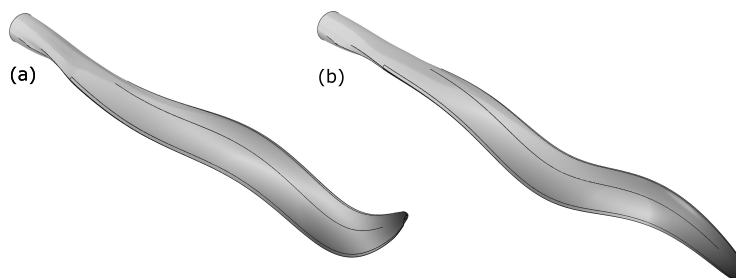
Fonte: autoria própria

Figura 39 – Primeiros dois modos *edgewise*. $f_{(a)} = 0,964Hz$, $f_{(b)} = 2,883Hz$.



Fonte: autoria própria

Figura 40 – Modos simétricos de torção. $f_{(a)} = 5,707Hz$, $f_{(b)} = 5,747Hz$.



Fonte: autoria própria

5.1.2 Análise estática

A norma que padroniza os ensaios estáticos de certificação de pás de turbinas eólicas considera suficiente a discretização da envoltória de cargas máximas de projeto em 12 direções de flexão, circunferencialmente distribuídas (96). Neste trabalho foram simulados 12 casos simplificados de flexão, derivados da envoltória de projeto da turbina de referência, disponibilizada em (17). O efeito do *prebend* foi desconsiderado na obtenção das cargas de projeto.

Assume-se como aproximadamente parabólica a distribuição dos momentos fletores da envoltória de projeto, ao longo do eixo da pá, de modo que se optou por modelar os esforços como forças uniformemente distribuídas em 12 direções, como mostra a Figura 41. Buscou-se comparar os modelos para um nível de carregamento bastante superior ao de projeto, a fim de se entender os limites da aplicabilidade do modelo de viga. Para isso, realizaram-se simulações da casca, levando-as, de forma quasi-estática, ao limite da convergência do método de Newton no ABAQUS, a que se seguiu a simulação até o mesmo nível de carregamento no modelo de viga. Um coeficiente de amortecimento volumétrico de $1 \cdot 10^{-4}$ foi adicionado ao modelo da casca para estabilizar a solução numérica em casos de instabilidade local (68).

As cargas máximas de cada simulação, referidas em diante neste trabalho como “extrema”, estão resumidas junto às cargas de projeto na Tabela 12 e Figura 41. O direção do carregamento é medida em relação ao eixo global x , no sentido anti-horário.

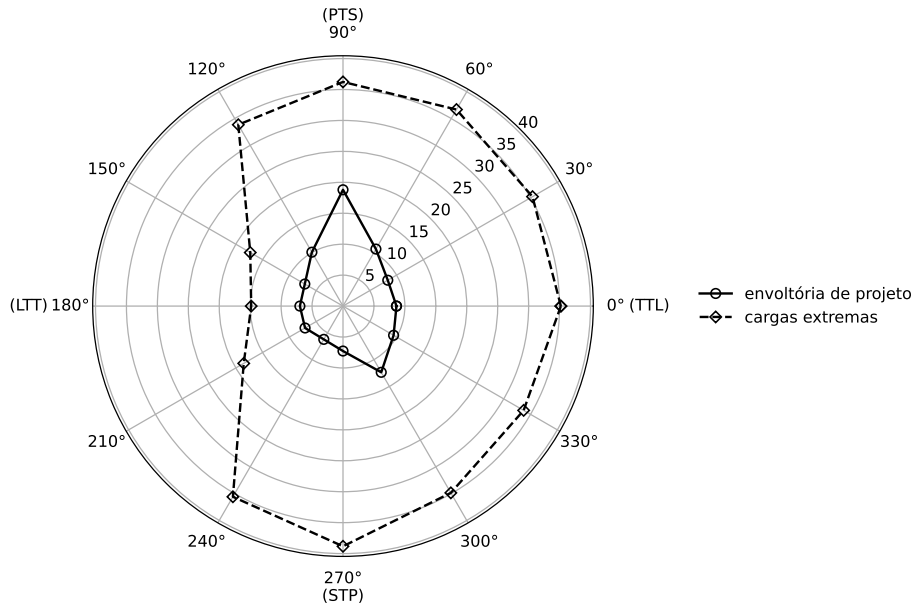
Tabela 12 – Cenários de carregamento por simulação,

Simulação	Orientação	Carregamento		Razão
		Projeto	Extrema	
#	<i>graus</i>	<i>kN/m</i>	<i>kN/m</i>	%
1	0	8,6	35,8	416
2	30	8,4	36,6	436
3	60	10,6	38,5	363
4	90	18,8	38,1	203
5	120	10,1	33,8	337
6	150	7,1	17,5	247
7	180	7,0	15,0	215
8	210	7,1	18,9	266
9	240	6,2	37,8	610
10	270	7,3	41,7	571
11	300	12,4	36,8	297
12	330	9,4	34,9	371

As simulações com menor razão entre a carga extrema e de projeto – a saber os casos de certificação PTS (*Pressure side Towards Suction side*) e LTT (*Leading edge*

Towards Trailing edge) – serão discutidas detalhadamente a seguir. Os resultados de todas as simulações encontram-se ao final deste trabalho, no Apêndice B.

Figura 41 – Envoltória polar de cargas de projeto e extremas. A coordenada angular representa o ângulo entre a direção da força aplicada e o eixo global x e a coordenada radial, a magnitude da força distribuída, em kN/m .



Fonte: autoria própria

5.1.2.1 *Pressure side Towards Suction side*

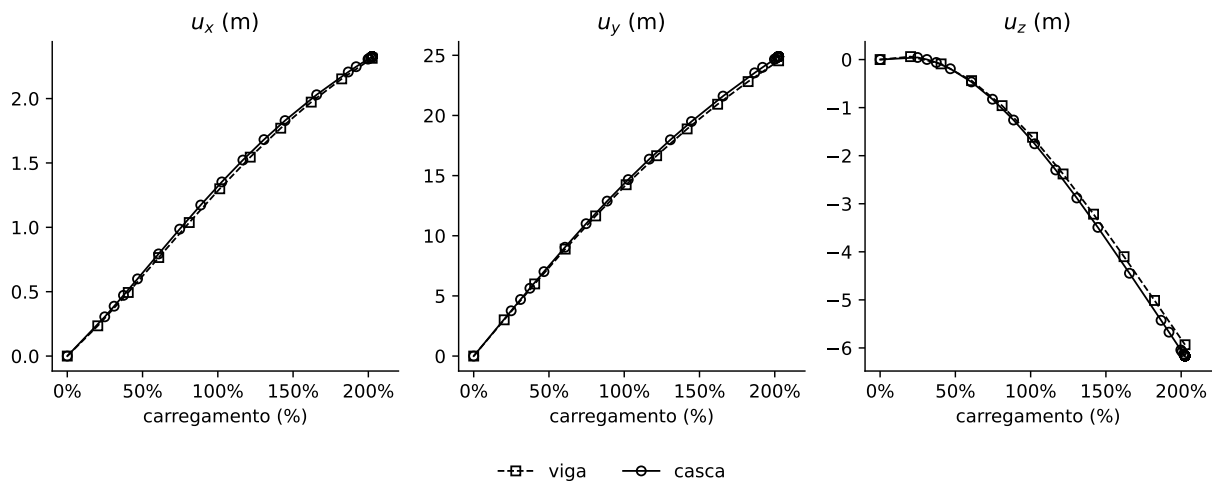
A simulação *Pressure side Towards Suction side* resume um caso de flexão *flapwise*, em que a seção de sucção é comprimida e a de pressão, tracionada. É o caso *flapwise* em que a carga extrema mais se aproxima da carga de projeto, como mostra a Tabela 12. A Tabela 13 sumariza os resultados dos deslocamentos e rotações de ambos os modelos na seção de controle. Os deslocamentos são apresentados no sistema de coordenadas global e as rotações, no sistema local da seção, para permitir a decomposição dos efeitos de flexão e torção.

Tabela 13 – Deslocamentos e rotações na seção de controle ($z = 80, 5m$),

		unid,	u_x	u_y	u_z	flexão	torção
Projeto	Viga	m	1,28	14,08	-1,57	-30,35	-6,85
	Casca	m	1,32	14,34	-1,65	-31,27	-5,76
	Desvio	%	-2,72	-1,77	-4,99	-2,95	19,00
Extrema	Viga	m	2,31	24,54	-5,93	-52,16	-8,96
	Casca	m	2,33	24,89	-6,17	-53,44	-7,84
	Desvio	%	-0,56	-1,40	-3,82	-2,40	14,19

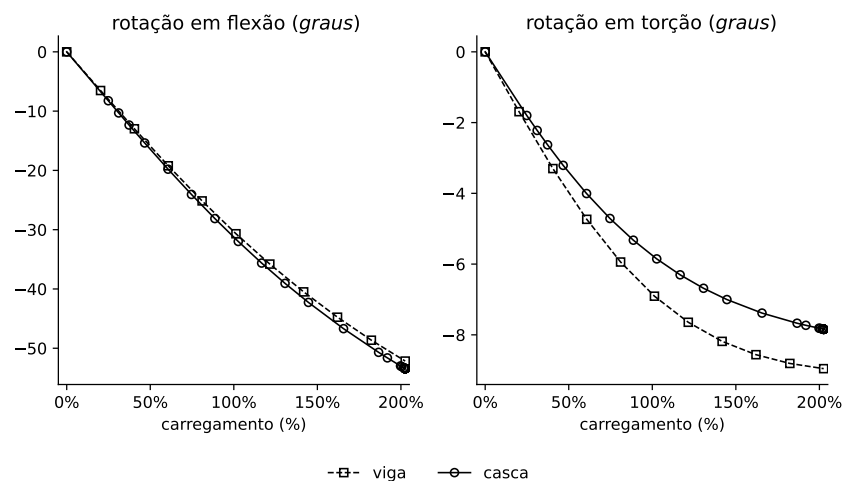
A Tabela 13 e as figuras 42 e 43 mostram que, embora ligeiramente mais rígido, o modelo de viga representa muito bem o comportamento global da estrutura, com desvios absolutos menores que 5% em todos os graus de liberdade, exceto a torção.

Figura 42 – Evolução dos deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$).



Fonte: autoria própria

Figura 43 – Evolução das rotações na seção de controle ($z = 80,5m$).

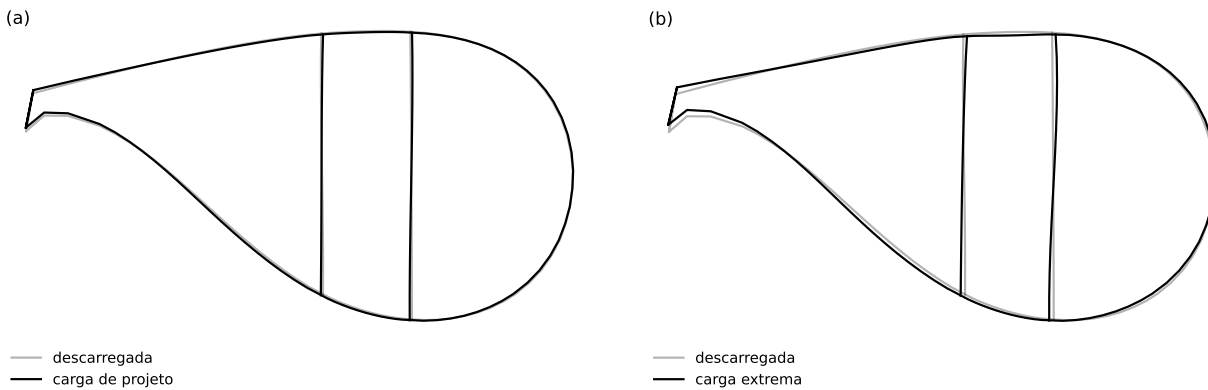


Fonte: autoria própria

Ainda que a torção na viga seja significativamente maior, como mostra a Figura 42 e a Tabela 13, essa diferença não é suficiente para afetar o comportamento global da estrutura, uma vez que resulta da aplicação da carga nas semi-cordas ($c/2$) em vez dos

centros de cisalhamento das seções, gerando uma rotação acoplada entre flexão e torção (*bend-twist coupling*) com magnitude muito inferior aos ângulos de flexão.

Figura 44 – Deformação local da seção posicionada em $z = 19,21m$ em dois níveis de carregamento: (a) carga de projeto e (b) carga extrema.



Fonte: autoria própria

É interessante observar que as diferenças entre os resultados dos modelos diminuem conforme se carrega a estrutura, como mostra a Tabela 13, contrariando a esperada perda de rigidez da casca devido às deformações locais das seções. De fato, o abaulamento dos *caps* causado pelo efeito Brazier – ovalização da seção vazada de parede fina sob flexão (97–99) – e a distorção por cisalhamento da seção são nítidos na Figura 44, que mostra as deformações locais da seção $z = 19,21m$ retrorrotacionada à sua orientação indeformada. O efeito pode, contudo, ser explicado pelo movimento de corpo rígido das seções, uma vez que a torção da estrutura causa, simultaneamente, o enrijecimento das seções e a redução do acoplamento flexão-torção (*bend-twist coupling*). Esses efeitos seccionais decorrem, por sua vez, do aumento dos momentos de inércia à flexão e da diminuição dos produtos de inércia, devida à aproximação da projeção do ponto de aplicação da carga ao centro de cisalhamento em cada seção.

5.1.2.2 *Leading edge Towards Trailing edge*

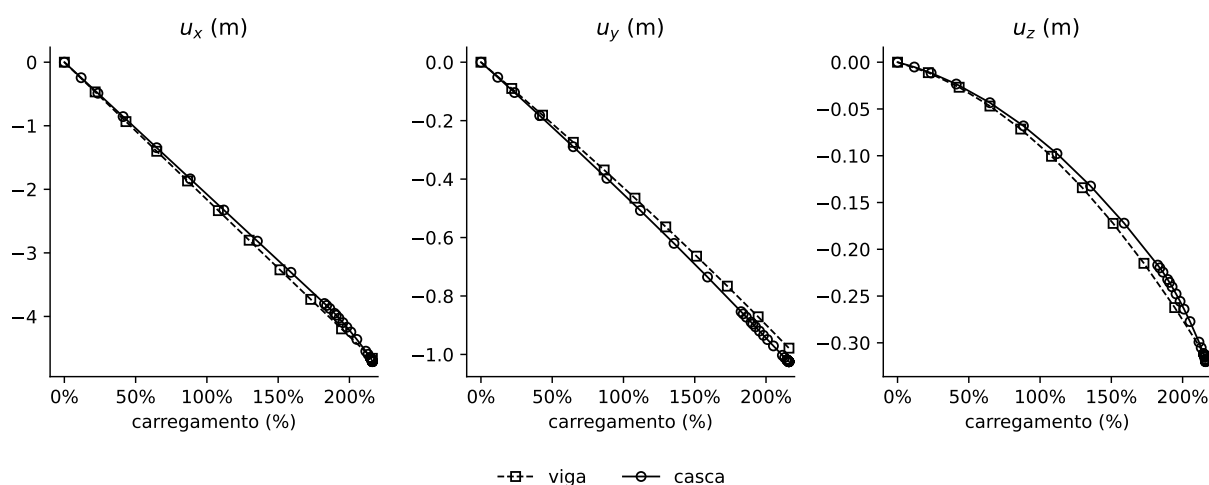
A segunda simulação discutida em detalhe corresponde ao caso de certificação *Leading edge Towards Trailing edge*, uma flexão *edgewise*, com compressão do bordo de fuga. A Tabela 14 compara os deslocamentos e rotações na seção de controle nos dois níveis de carregamento propostos.

Tabela 14 – Deslocamentos e rotações na seção de controle ($z = 80,5m$),

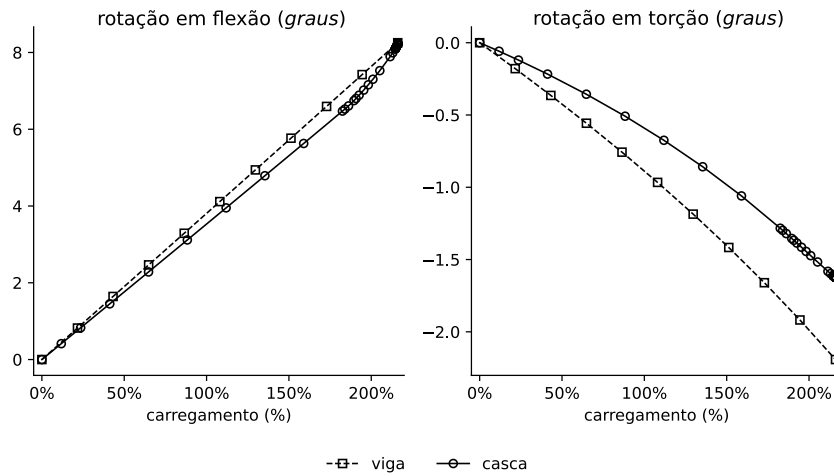
		unid,	u_x	u_y	u_z	flexão	torção
Projeto	Viga	m	-2,16	-0,43	-0,09	3,81	-0,89
	Casca	m	-2,08	-0,45	-0,08	3,53	-0,59
	Desvio	%	4,00	-5,01	8,53	7,87	50,63
Extrema	Viga	m	-4,66	-0,98	-0,31	8,25	-2,19
	Casca	m	-4,71	-1,02	-0,32	8,23	-1,62
	Desvio	%	-1,11	-4,47	-1,86	0,23	35,31

Os modelos apresentam resultados bem próximos, como no caso anterior, embora a casca seja ligeiramente mais rígida na direção *edgewise*, conforme observado na análise modal. Destaca-se, nas figuras 45 e 46, a linearidade na evolução dos deslocamentos (u_x e u_y) e do próprio ângulo de flexão até aproximadamente 1.8 vezes a carga de projeto, a partir de que a casca apresenta um comportamento não-linear. As diferenças na torção da seção de controle se mantêm, como na simulação PTS, mas a magnitude do efeito é ainda menor, pois a distância da projeção do centro de cisalhamento e o ponto de aplicação da carga é menor na direção *edgewise*.

A linearidade deve-se à elevada rigidez da estrutura em *edgewise*, que se observa não só pela pequena magnitude dos deslocamentos e rotações, comparados à simulação PTS, mas também pelo baixíssimo nível de deformação local da seção no trecho linear, como mostra a Figura 47. A não-linearidade, por sua vez, decorre da perda de rigidez devida ao início da flambagem do bordo de fuga, ilustrada nas figuras 47 e 48.

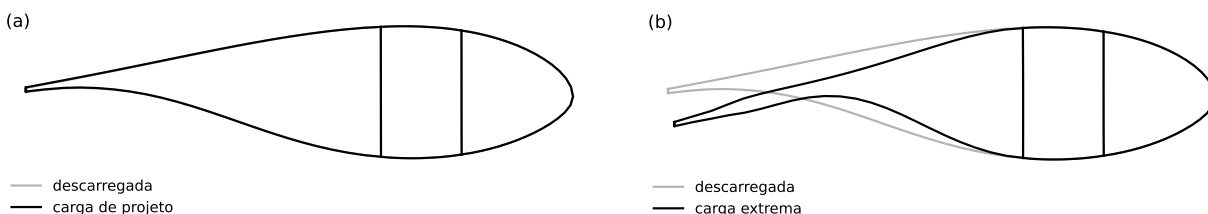
Figura 45 – Evolução dos deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$).

Fonte: autoria própria

Figura 46 – Evolução das rotações na seção de controle ($z = 80,5m$).

Fonte: autoria própria

A flambagem do bordo de fuga é um fenômeno indesejável, uma vez que dela decorrem mecanismos de dano progressivo, como a falha por cisalhamento do núcleo do sanduíche, delaminações e o descolamento do adesivo (80, 81, 97). Estudos numérico-experimentais da flambagem do bordo de fuga de pás (80, 81) apontam que o modelo de elementos finitos não-linear de casca representa muito bem o comportamento experimental até o início da flambagem do bordo de fuga, a partir de que se iniciam mecanismos de dano. Ao incluir a degradação do material no modelo de elementos finitos, visando a compreensão da evolução da falha, Haselbach e Branner obtiveram uma boa aderência entre os resultados numéricos e experimentais, o que aponta para a flambagem do bordo de fuga como um mecanismo primário de falha (41, 80, 81) a ser evitado.

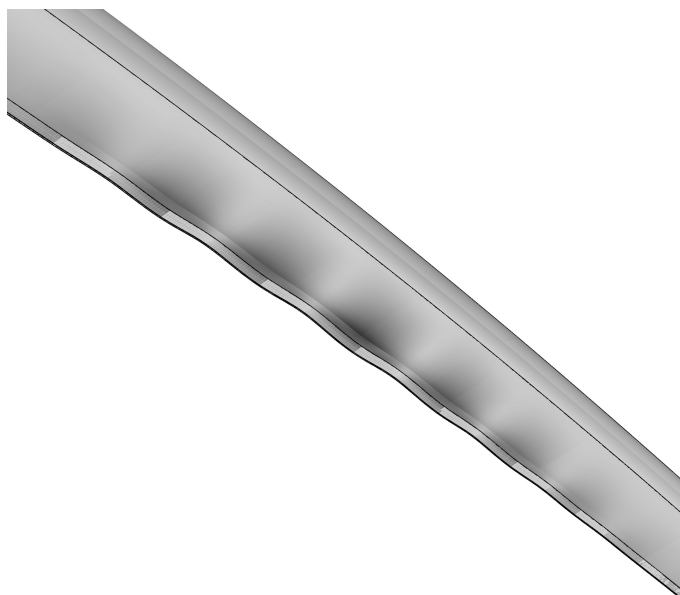
Figura 47 – Deformação local da seção posicionada em $z = 60,67m$ em dois níveis de carregamento: (a) carga de projeto e (b) carga extrema.

Fonte: autoria própria

Ao se aumentarem os comprimentos das pás, aumentam-se também os esforços inerciais na direção *edgewise*, evidenciando sobretudo a importância da correta caracte-

rização da flambagem local do bordo de fuga em rotinas atuais de projeto de turbinas eólicas (97).

Figura 48 – Flambagem local do bordo de fuga.



Fonte: autoria própria

5.2 Análise de estabilidade

Nesta seção do trabalho, comparam-se o método linear de autovalores e o método das vibrações na aferição da resistência à flambagem da pá da turbina de referência sem imperfeições sob o carregamento *Leading edge Towards Trailing edge*. Em seguida, discute-se o papel da sensibilidade à imperfeição na obtenção dessa resistência, adicionando-se uma pequena imperfeição à superfície indeformada da pá.

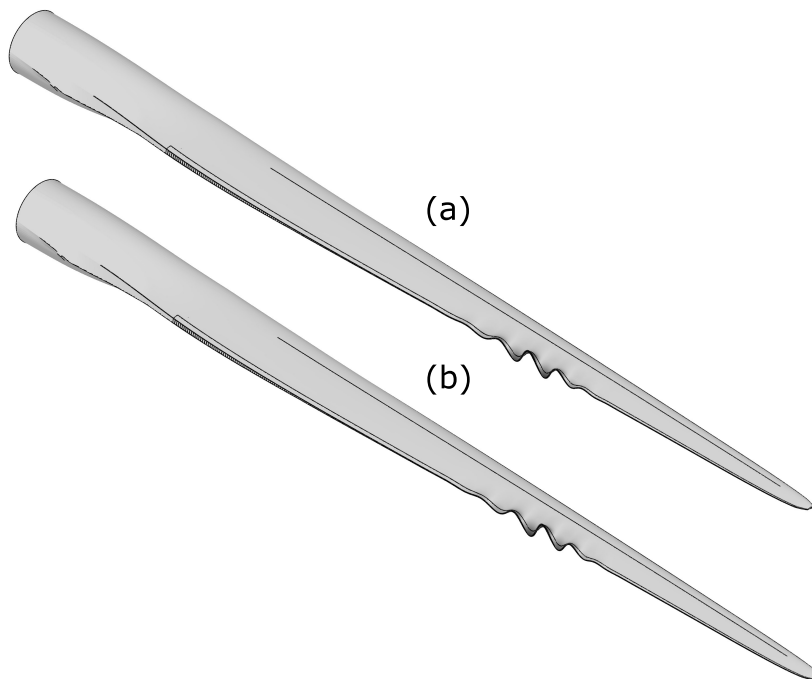
O relatório de definição da turbina DTU 10-MW (17) apresenta uma estimativa da resistência à flambagem da pá a partir da análise linear de autovalores de 27 seções da estrutura, com comprimento de aproximadamente 1,2 vezes a dimensão local da corda, pré-tensionadas em suas extremidades de forma a reproduzir os esforços solicitantes de metade da carga de projeto de diversos casos de carregamento. O relatório justifica o seccionamento do modelo como uma estratégia para se incluírem os efeitos locais em vários cenários de operação. A análise reporta um fator de segurança parcial* de $\gamma_{MD} = 2,042$.

* A norma de certificação (100) classifica este fator como parcial porque dele se excluem os fatores de segurança correspondentes aos carregamentos, isolando nele os efeitos da resistência do material como a dispersão das propriedades elásticas, efeitos de temperatura e a redução esperada na carga crítica devida à adoção de métodos lineares.

5.2.1 Estabilidade da estrutura perfeita

Para comparação, optou-se por realizar uma análise linear de autovalores da estrutura completa, pré-tensionada com metade da carga de projeto. A Figura 49 mostra os dois primeiros modos de flambagem obtidos por esse método.

Figura 49 – Primeiro (a) e segundo (b) modos lineares de flambagem, com cargas críticas de $q_{crit}^{(a)} = 12,92kN/m$ e $q_{crit}^{(b)} = 12,93kN/m$.



Fonte: autoria própria

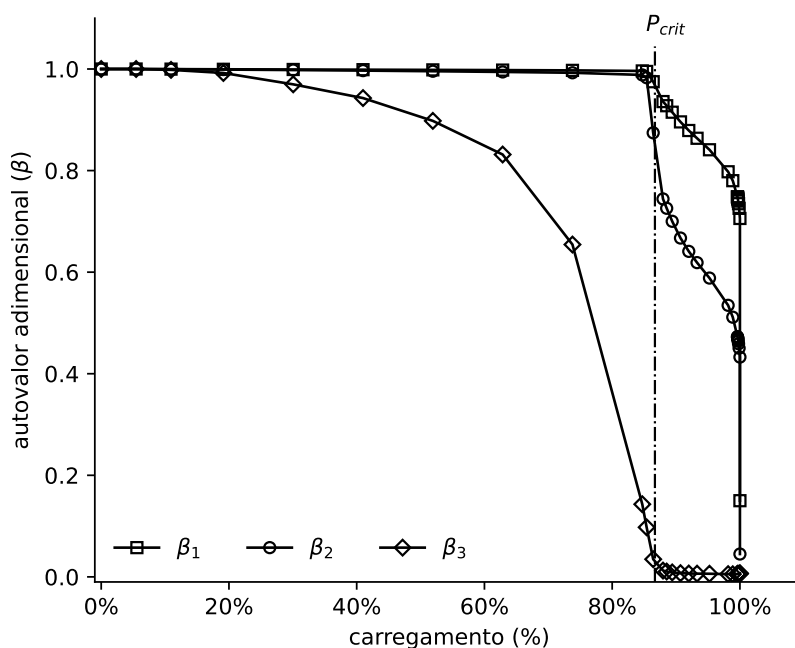
Como esperado, o primeiro modo de flambagem é um modo local do bordo de fuga. Entretanto, a propensão à interação entre modos oriunda da semelhança entre os dois primeiros modos e suas respectivas cargas críticas sugere uma estrutura sensível à imperfeição, uma vez que as trajetórias de equilíbrio pós-críticas desses modos podem se combinar em um novo caminho de equilíbrio, com alta não-linearidade geométrica e carga crítica reduzida.

Alternativamente, pode-se analisar a estabilidade da estrutura ao longo do caminho não-linear do equilíbrio, dispondo-se do método das vibrações, discutido no Capítulo 4. A Figura 50 mostra a evolução dos autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$)[†] da estrutura

[†] O autovalor extraído da análise modal é ω^2 , que se relaciona com a frequência natural pela equação $\omega = 2\pi f$. Diferentemente do disposto no Capítulo 4, optou-se por usar a razão entre os autovalores de cada modo na estrutura carregada (ω^2) e descarregada (ω_0^2), como é comum na literatura, simplificando a comparação entre autovalores de modos distintos.

perfeita até a carga extrema, apresentada na Tabela 12. A carga crítica pode ser identificada pela queda em direção a zero do autovalor correspondente ao modo local do bordo de fuga, a aproximadamente 86% da carga extrema ($q_x = 12,94kN/m$).

Figura 50 – Evolução dos autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$) ao longo do carregamento. Os modos 1 e 2 representam os dois primeiros modos *edgewise* e o modo 3, o modo local do bordo de fuga. A queda do autovalor ($\beta_3 = 0$) destaca o atingimento da carga crítica ($q_x = 12,94kN/m$).



Fonte: autoria própria

Três outros fenômenos não-lineares acompanham o atingimento da carga crítica: o início da deformação para fora do plano que caracteriza a forma do modo de flambagem, a bifurcação das trajetórias de equilíbrio e a interação entre modos de vibração.

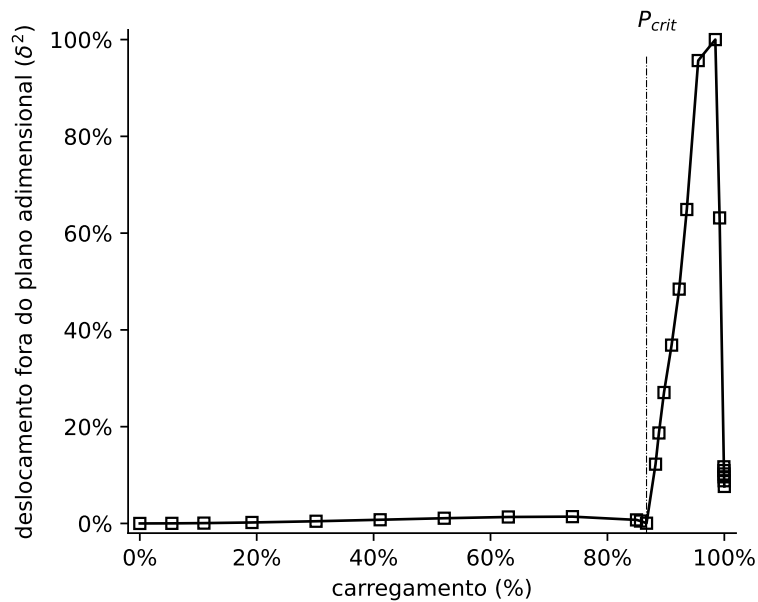
A deformação para fora do plano da casca, ilustrada na Figura 51, pode ser medida em um ponto de controle pelo quadrado da norma do deslocamento para fora do plano normalizado por seu valor máximo ao longo do carregamento ($\delta^2 = u_{y,local}^2 / \max u_{y,local}^2$), uma vez que interessam mudanças súbitas em sua magnitude. Optou-se por monitorar os deslocamentos em um nó no bordo de fuga de uma seção em que se observa a flambagem local ($z = 58,94m$). A Figura 52 mostra o aumento súbito na magnitude dos deslocamentos para fora do plano que caracterizam o início da onda de flambagem na carga crítica ($q_x = 12,94kN/m$).

Figura 51 – Deformação do bordo de fuga na carga crítica ($q_x = 12,94kN/m$).



Fonte: autoria própria

Figura 52 – Deslocamento fora do plano adimensional ($\delta^2 = u_{y,local}^2 / \max u_{y,local}^2$) vs. carregamento em um nó do bordo de fuga de uma seção flambada ($z = 58,94m$)



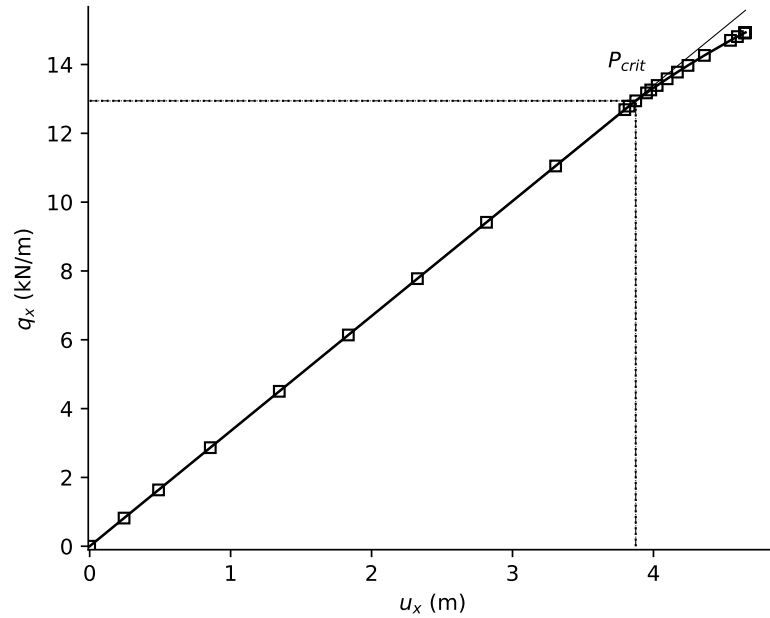
Fonte: autoria própria

A redução em δ^2 observada em 98% da carga extrema, ilustrada na Figura 52 se deve a um deslocamento da onda de flambagem em direção à ponta da pá.

A bifurcação do equilíbrio, por sua vez, pode ser observada na seção de controle

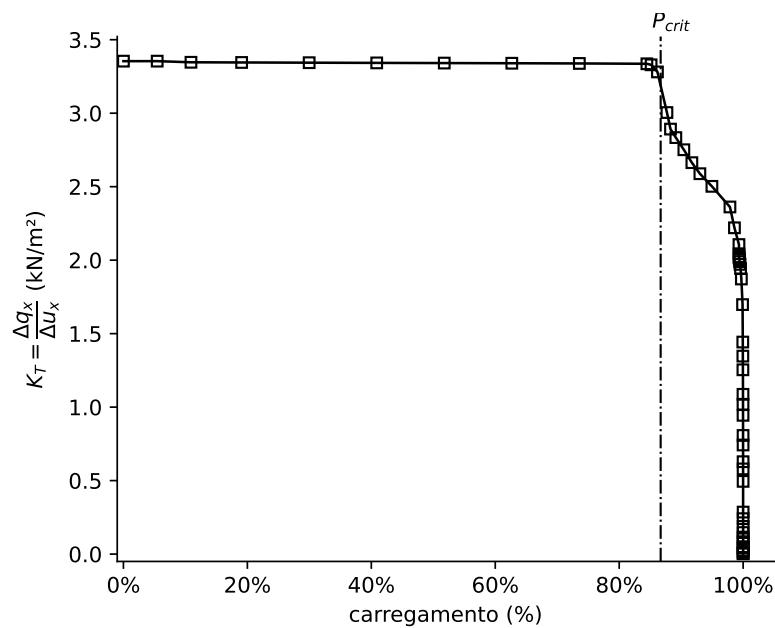
($z = 80,5m$) pelo início da não-linearidade na curva força-deslocamento e pela perda de rigidez, apresentadas respectivamente nas figuras 53 e 54.

Figura 53 – Curva força-deslocamento na seção de controle ($z = 80,5m$). A extrapolação do trecho linear na figura destaca a bifurcação do equilíbrio.



Fonte: autoria própria

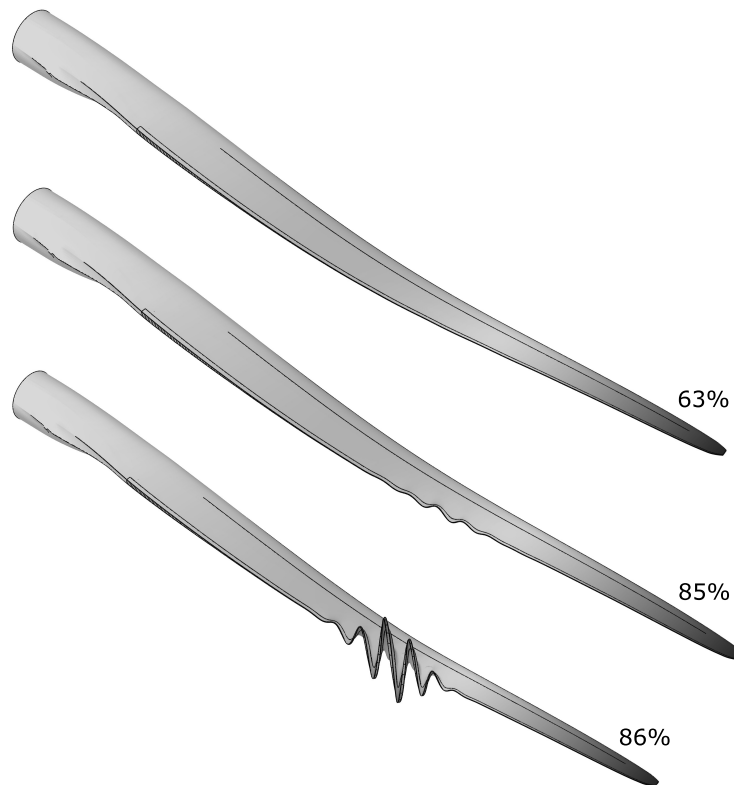
Figura 54 – Rigidez tangente ($K_T = \Delta q_x / \Delta u_x$) na seção de controle ($z = 80,5m$).



Fonte: autoria própria

A interação entre modos caracteriza-se pelo acoplamento do modo de flambagem a outros modos de menor frequência natural da estrutura descarregada. Na estrutura da pá, o fenômeno pode ser percebido pelo surgimento, nos primeiros modos globais *edgewise*, de padrões de vibração local no bordo de fuga, como mostra a Figura 55, bem como pela queda em seus autovalores, ilustrada na Figura 50.

Figura 55 – Interação entre o modo local e o segundo modo *edgewise* em diferentes níveis de carregamento.



Fonte: autoria própria

Nota-se que a carga crítica obtida pelo método das vibrações $q_{crit} = 12,94kN/m$ é muito próxima daquela obtida pelo método linear $q_{crit}^{lin} = 12,92kN/m$. A semelhança, entretanto, não contraria o esperado, uma vez que, como disposto na subseção 5.1.2.2, a estrutura é bastante rígida na direção *edgewise*, apresentando comportamento linear até o início da flambagem local. Contudo, a presença de fenômenos como a interação entre modos na estrutura perfeita pode indicar um papel relevante da não-linearidade geométrica, derivada da combinação dos caminhos pós-críticos de equilíbrio, reforçando a necessidade de se estimar a carga crítica da estrutura real, imperfeita.

Vale mencionar, entretanto, que embora a carga crítica obtida em ambos os métodos seja superior à carga máxima da envoltória de projeto $q_{proj} = 7,0kN/m$, o fator

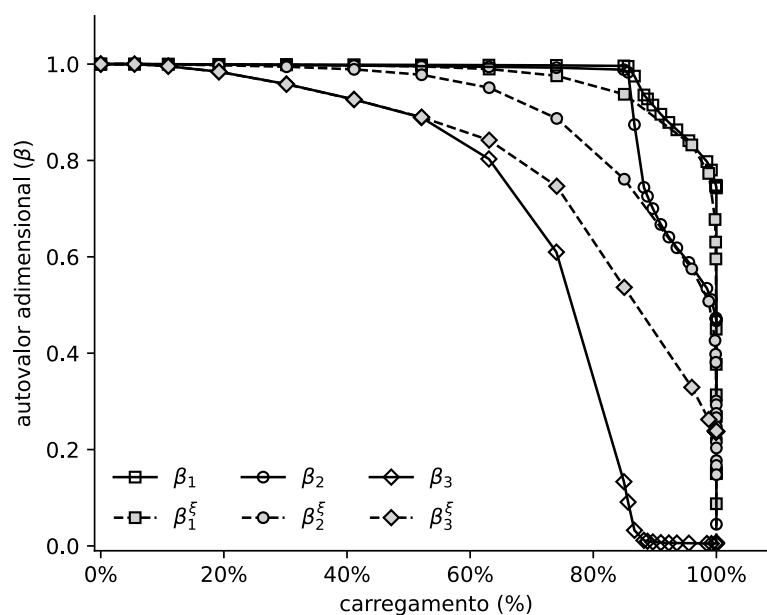
de segurança à flambagem é inferior ao reportado, $\gamma_{MD} = 2,042$, o que mostra que o comprimento de flambagem ou a posição da seção pode afetar a aferição da carga crítica.

5.2.2 Estabilidade da estrutura imperfeita

Adicionou-se à superfície da pá uma imperfeição geométrica para ilustrar o papel da sensibilidade à imperfeição na estimativa da resistência à flambagem. A imperfeição adicionada tem a forma do primeiro modo de flambagem linear e amplitude de aproximadamente $1/400$ do comprimento de onda máximo do modo de flambagem ($\xi = 8,75mm$), conforme recomendado em (100).

A imperfeição suaviza os efeitos não-lineares no espectro dos autovalores, como mostra a Figura 56, de modo que não mais se observa a queda exclusiva do autovalor correspondente ao modo local de flambagem a zero, que caracteriza a bifurcação do equilíbrio na estrutura perfeita (101,102). A queda concomitante dos autovalores a zero em ambos os modelos, por sua vez, configura o atingimento de um ponto limite da estrutura na carga extrema, com deterioração mais ampla da rigidez da estrutura.

Figura 56 – Autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$) vs. carregamento. As linhas tracejadas referem-se aos modos da estrutura imperfeita.



Fonte: autoria própria

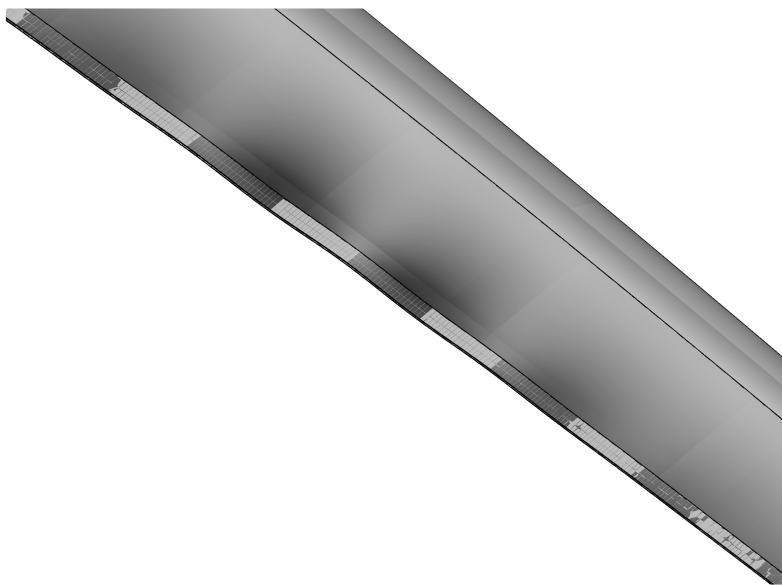
Esse ofuscamento da definição da carga crítica, contudo, não elimina a necessidade de se monitorar as deformações características da flambagem local, fundamental do ponto de vista do projeto estrutural de pás de turbinas eólicas, uma vez que a flambagem do bordo de fuga é um modo primário de falha, engatilhando uma série de mecanismos progressivos de dano (80,97). Portanto, pode-se, de forma *ad hoc*, definir como crítico o

nível de carregamento a partir do qual se distinguem as deformações para fora do plano da casca que caracterizam a onda de flambagem.

Aqui cabe lembrar que a imperfeição adicionada tem a forma do primeiro modo de flambagem, tal que o modelo apresenta uma ondulação no bordo de fuga já em sua configuração indeformada, não se observando uma formação súbita dessa forma característica, como no modelo perfeito, mas um aumento gradual em sua magnitude. Assim, essa definição de carga crítica depende do estabelecimento do nível de deformação para fora do plano tolerado no bordo de fuga, a que se recomenda vincular a critérios de falha do compósito. A inclusão desses critérios, entretanto, não é trivial, uma vez que a fratura do compósito é um fenômeno tridimensional e exige a adoção de formulações que capturem planos de fratura transversais ao plano da casca (103). Neste trabalho, portanto, optou-se por simplesmente observar o ponto de intensificação da magnitude desse deslocamento, como mostra a Figura 58, estabelecendo como crítico o nível de carregamento a partir do qual o deslocamento para fora do plano adimensional supera os níveis pré-críticos da estrutura perfeita.

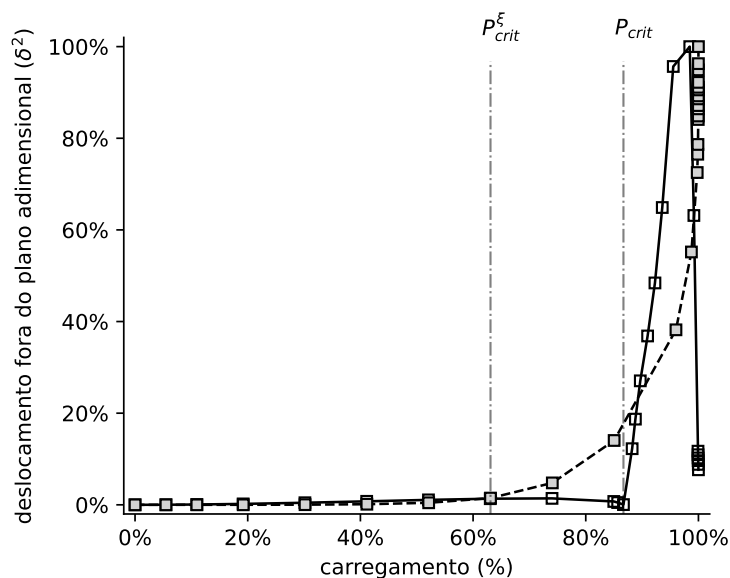
A Figura 57 mostra a deformação característica da estrutura imperfeita ao atingir a carga crítica. Como na estrutura perfeita, monitoram-se os deslocamentos para fora do plano (δ^2) em um ponto de controle no bordo de fuga de uma seção flambada ($z = 58,94m$). A evolução da onda de flambagem no ponto de controle, ilustrada na Figura 58, permite identificar a carga crítica a aproximadamente 63% da carga extrema, em $P_{crit}^{\xi} = 9,41kN/m$.

Figura 57 – Deformação característica da flambagem local do bordo de fuga da estrutura imperfeita para $P_{crit}^{\xi} = 9,41kN/m$.



Fonte: autoria própria

Figura 58 – Deslocamento fora do plano adimensional ($\delta^2 = u_{y,local}^2 / \max u_{y,local}^2$) vs. carregamento em um nó do bordo de fuga de uma seção flambada ($z = 58,94m$). As linhas tracejadas referem-se à estrutura imperfeita.



Fonte: autoria própria

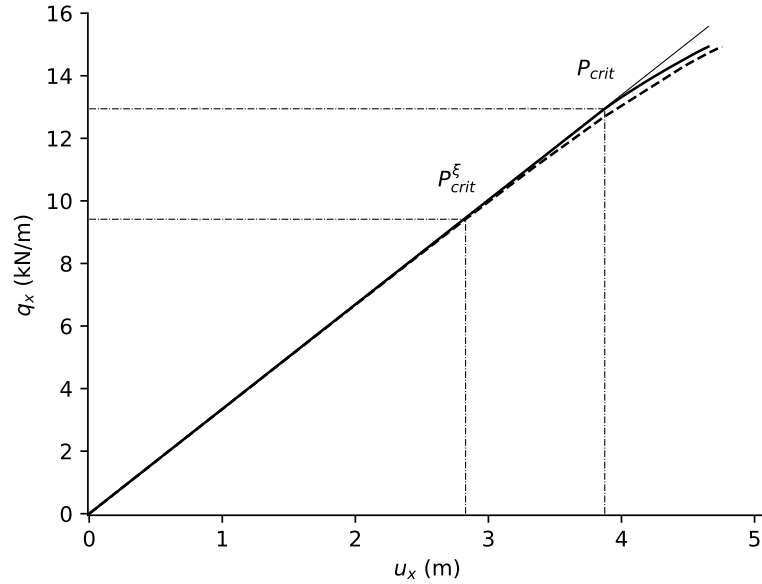
Como na estrutura perfeita, o início da onda de flambagem acompanha a bifurcação das trajetórias de equilíbrio e a interação entre modos de vibração. As figuras 59 e 60 ilustram o início da não-linearidade na curva força-deslocamento e a perda de rigidez na seção de controle ($z = 80,5m$) causadas pela flambagem local do bordo de fuga.

A interação entre modos pode ser identificada a partir do surgimento dos padrões locais de vibração do modo de flambagem em modos de globais, de menor frequência. Essa interação leva à queda de rigidez da estrutura na direção desses modos, que se expressa, no modelo imperfeito, a partir da queda dos autovalores dos primeiros modos *edgewise*, mais pronunciada a partir do atingimento da carga crítica, como mostra a Figura 61.

Ainda que a definição da carga crítica não seja tão categórica, comparada ao modelo sem imperfeições, a onda de flambagem pode ser percebida na estrutura imperfeita em níveis de carregamento muito inferiores àqueles da estrutura perfeita, caracterizando uma estrutura bastante sensível à imperfeição. Partindo-se da carga crítica como medida da resistência à flambagem, o modelo com imperfeições apresentou carga crítica $P_{crit}^{\xi} = 9,41kN/m$, 27% inferior àquela obtida pela análise linear de autovalores $P_{crit}^{lin} = 12,92kN/m$, superando inclusive a redução prevista pelo fator parcial de $C_{3c} = 1,25$ para o cálculo de resistência à flambagem por métodos lineares (100).

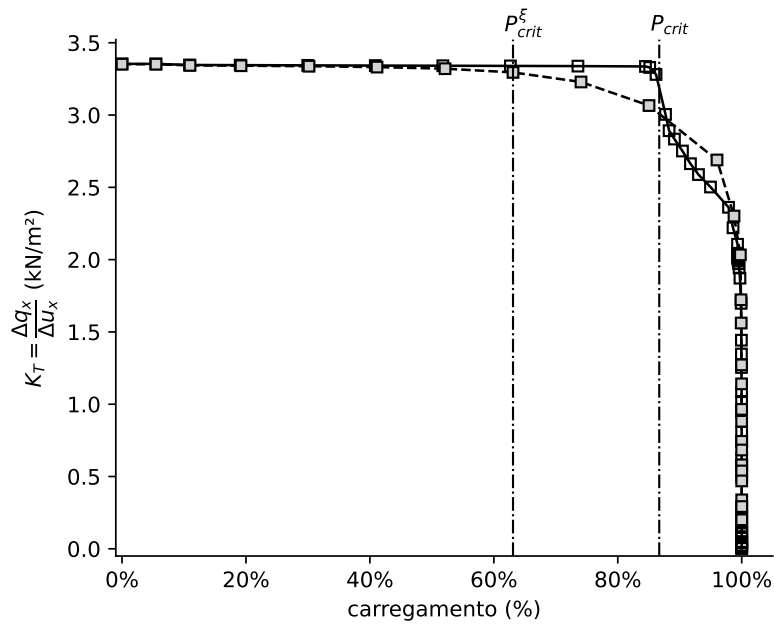
Embora ilustrativa, a análise do modelo imperfeito mostra como a sensibilidade à imperfeição é relevante na avaliação da resistência à flambagem de pás de turbinas eólicas,

Figura 59 – Curvas força-deslocamento do modelo perfeito e imperfeito (tracejada) na seção de controle ($z = 80,5m$).



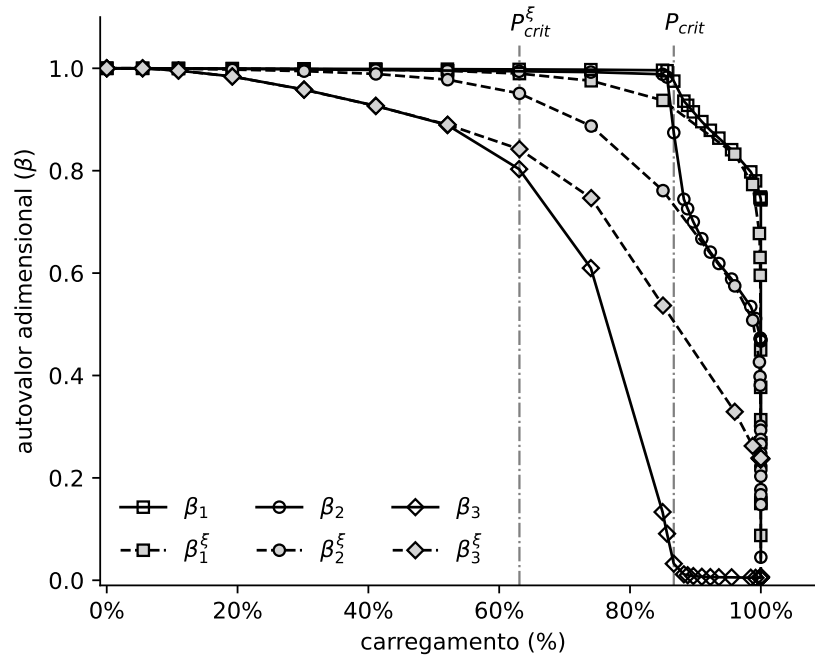
Fonte: autoria própria

Figura 60 – Rigidez tangente ($K_T = \Delta q_x / \Delta u_x$) na seção de controle ($z = 80,5m$). A linha tracejada representa o modelo com imperfeições.



Fonte: autoria própria

Figura 61 – Autovalores adimensionais ($\beta = \omega^2/\omega_0^2$) vs. carregamento. As linhas tracejadas, assinaladas com o sobrescrito ξ referem-se aos modos da estrutura imperfeita.



Fonte: autoria própria

o que requer a adoção de metodologias não-lineares como o método das vibrações.

A aferição da resistência à flambagem da turbina de referência exige, contudo, um estudo mais extenso, que inclua a caracterização do conjunto de imperfeições esperadas em uma estrutura típica, bem como uma análise de sensibilidade à imperfeição completa, considerando toda a envoltória de projeto, não apenas um cenário de flexão em *egdewise*. Também se recomenda o ajuste da definição da carga crítica segundo a tolerância à magnitude da deformação típica do modo de flambagem.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou se aprofundar no estado da arte de metodologias de análise e projeto estrutural de pás de turbinas eólicas, com foco em modelos de elementos finitos não-lineares de cascas laminadas. Primeiro, buscou-se compreender as teorias estruturais de cascas laminadas e sua implementação em elementos finitos, procedendo-se à atualização do modelo constitutivo da Teoria Clássica da Laminação (CLT), previamente implementado no *software* acadêmico de elementos finitos Giraffe (20,40).

Examinaram-se, em seguida, metodologias de análise não-linear de estabilidade que fossem compatíveis com a adoção do método dos elementos finitos, padrão na indústria. A necessidade de se olhar para esse tipo de fenômeno decorreu diretamente da crescente propensão à ocorrência de flambagens locais que acompanha o aumento dimensional das pás. Na verdade, a captura de fenômenos locais é a principal motivação para que sejam adotados modelos estruturais de casca, em detrimento dos modelos não-lineares de viga.

O Capítulo 5 buscou trazer tanto uma abordagem prática da aplicação de elementos finitos em estruturais reais de engenharia, quanto uma análise crítica de sua aplicação na indústria, a partir do estudo de caso da turbina de referência DTU 10-MW (17). Nesse estudo de caso, observou-se que o modelo de elementos finitos não-linear de viga anisotrópica, que caracteriza o núcleo estrutural de uma série de códigos de otimização aeroelástica, captura muito bem o comportamento estrutural da pá, na ausência de fenômenos locais, sendo uma ferramenta importantíssima em rotinas de projeto e otimização de pás de turbinas eólicas.

Contudo, a adoção de modelos estruturais de viga não é suficiente em todas as etapas de projeto, uma vez que fenômenos locais devem ser previamente identificados e evitados, por constituírem mecanismos primários de falha, engatilhando mecanismos de dano progressivo no laminado. Para isso, é necessária não só a adoção de modelos estruturais de casca, mas de procedimentos confiáveis para a aferição de sua resistência à flambagem. Mostrou-se na seção 5.2 que a análise linear de autovalores, comumente adotada na indústria, frequentemente sobre-estima a resistência à flambagem, criando estruturas potencialmente inseguras, que podem flambar em operação. Essa redução na carga crítica obtida por métodos lineares se deve à típica sensibilidade à imperfeição observada em estruturas de cascas, de modo que se devem adotar metodologias não-lineares de análise de estabilidade, além de um estudo de sensibilidade à imperfeição, na aferição da resistência à flambagem em projetos reais de pás de turbinas eólicas.

A trabalhos futuros, sugerem-se:

- o refinamento do modelo de elementos finitos de casca, permitindo a comparação entre os resultados translacionais e rotacionais para todas as seções do eixo da viga, e não apenas uma seção de controle
- a aplicação de carregamentos mais realistas, baseados diretamente na simulação aeroelástica dos casos de carregamento de projeto previstos pela norma (104)
- a inclusão de um estudo completo de sensibilidade à imperfeição, com diferentes combinações de imperfeições iniciais e cenários de carregamento
- a adoção de um critério de falha tridimensional para determinar o nível de deformação tolerado na onda de flambagem
- a modelagem do dano progressivo até o colapso da estrutura, a partir da inclusão do critério tridimensional de falha e de um modelo de degradação das propriedades elásticas do laminado
- a realização de experimentos como *benchmarking*, como ensaios em meso-escala do bordo de fuga

REFERÊNCIAS

- 1 ARAÚJO, A. P. P. *Demanda energética residencial e qualidade de vida: um estudo do cenário brasileiro entre 1970 a 2005*. Dissertação (Mestrado), Itajubá, 2007.
- 2 IPCC. *Climate Change and Land: An IPCC Special Report on climate change, desertification, land degradation, sustainable land management, food security, and greenhouse gas fluxes in terrestrial ecosystems*. 2019. 41 p.
- 3 JASAREVIC, T.; THOMAS, G.; OSSEIRAN, N. *7 million premature deaths annually linked to air pollution*. 2014.
- 4 MMA. *Paris Agreement: Brazil First National Determined Contribution (NDC)*. 2020.
- 5 ANEEL. *Relatório de Acompanhamento da Expansão da Oferta de Geração de Energia Elétrica - RALIE*. 2021.
- 6 ANEEL. *Atlas de Energia Elétrica*. 2016.
- 7 MUSIAL, W.; RAM, B. *Large-scale offshore wind power in the United States: Assessment of opportunities and barriers*. 2011.
- 8 CHIH-GANG, H. *Substructure Models for Dynamic Analysis of Floating Wind Turbines and the Effect of Hull Flexibility*. Dissertação (Mestrado) — Delft University of Technology, 2019.
- 9 DNVGL. *Integrated Analysis of Floating Wind Turbines*. 2018.
- 10 DORNHELM, E.; SEYR, H.; MUSKULUS, M. Vindby - a serious offshorewind farm design game. *Energies*, v. 12, 2019. ISSN 19961073. Disponível em: doi:10.3390/en12081499.
- 11 FERREIRA, T. V. B. *Roadmap Eólica Offshore Brasil*. 2020.
- 12 FARO, D. *Principais Ações da Petrobras em Eólica Offshore no Brasil*. 2019.
- 13 KELLNER, T. *Extreme Measures: At 107 Meters, The World's Largest Wind Turbine Blade Is Longer Than A Football Field. Here's What It Looks Like*. 2019.
- 14 PIRES, J. C.; OLIVEIRA, B. F. Modelagem e simulação virtual de pá para rotor eólico de pequeno porte. *Design e Tecnologia*, v. 1, 12 2010. Disponível em: doi:10.23972/det2010iss02pp69-76.
- 15 CHEN, C.; KAM, T. Failure analysis of small composite sandwich turbine blade subjected to extreme wind load. *Procedia Engineering*, v. 14, 2011. Disponível em: doi:10.1016/j.proeng.2011.07.248.
- 16 MISHNAEVSKY, L.; BRANNER, K.; PETERSEN, H. N.; BEAUSON, J.; MCGUGAN, M.; SØRENSEN, B. F. *Materials for wind turbine blades: An overview*. MDPI AG, 2017. Disponível em: doi:10.3390/ma10111285.

- 17 BAK, C.; ZAHLE, F.; BITSCHKE, R.; YDE, A.; HENRIKSEN, L. C.; NATA, A.; HANSEN, M. H. Design and performance of a 10 mw wind turbine. *J. Wind Energy*, 2013. ISSN 1098-6596.
- 18 GAERTNER, E.; RINKER, J.; SETHURAMAN, L.; ZAHLE, F.; ANDERSON, B.; BARTER, G.; ABBAS, N.; MENG, F.; BORTOLOTTI, P.; SKRZYPINSKI, W. *Definition of the IEA 15-Megawatt Offshore Reference Wind Turbine*. 2020.
- 19 INC., A. Element reference for ansys mechanical apdl. *ANSYS Manual*, v. 15317, 2012.
- 20 GAY NETO, A. *Giraffe*. 2021. Disponível em: <http://sites.poli.usp.br/p/alfredo.gay/giraffe.html>.
- 21 SMITH, W. F. *Structure and Properties of Engineering Alloys*. [S.l.: s.n.], 1993.
- 22 DANIEL, O. I. 2nd I. M. *Engineering mechanics of composite materials*. [S.l.: s.n.], 2006. v. 17. ISSN 978-0-19-515097-1.
- 23 BARBERO, E. J. *Introduction to Composite Materials Design*. [S.l.: s.n.], 2010. Disponível em: doi:10.1201/9781439894132.
- 24 SULLIVAN, B. *Images of Warped Panels from Unsymmetric Layups*. [S.l.: s.n.]: College of Engineering, Villanova University, 2014.
- 25 SCOTT, S.; CAPUZZI, M.; LANGSTON, D.; BOSSANYI, E.; MCCANN, G.; WEAVER, P. M.; PIRRERA, A. Effects of aeroelastic tailoring on performance characteristics of wind turbine systems. *Renewable Energy*, v. 114, 2017. ISSN 18790682. Disponível em: doi:10.1016/j.renene.2017.06.048.
- 26 PINEDA, E. J.; BEDNARCYK, B. A.; WAAS, A. M.; ARNOLD, S. M. On multiscale modeling using the generalized method of cells: Preserving energy dissipation across disparate length scales. *Computers, Materials and Continua*, v. 35, 2013. ISSN 15462218. Disponível em: doi:10.3970/cmc.2013.035.119.
- 27 FRAGOUDAKIS, R. *Strengths and Limitations of Traditional Theoretical Approaches to FRP Laminate Design against Failure*. 2020. Disponível em: doi:10.5772/intechopen.89729.
- 28 OLSSON, R.; DONADON, M. V.; FALZON, B. G. Delamination threshold load for dynamic impact on plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, 2006. ISSN 00207683. Disponível em: doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.05.005.
- 29 BAI, Y.; VALLÉ, T.; KELLER, T. Delamination of pultruded glass fiber-reinforced polymer composites subjected to axial compression. *Composite Structures*, v. 91, 11 2009. ISSN 02638223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2009.04.030.
- 30 MANWELL, J. F.; MCGOWAN, J. G.; ROGERS, A. L. *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*. [S.l.: s.n.], 2010. Disponível em: doi:10.1002/9781119994367.
- 31 HANSEN, M. O.; SØRENSEN, J. N.; VOUTSINAS, S.; SØRENSEN, N.; MADSEN, H. A. *State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity*. 2006. Disponível em: doi:10.1016/j.paerosci.2006.10.002.

- 32 QUARTON, D. C. The evolution of wind turbine design analysis—a twenty year progress review. *Wind Energy*, v. 1, 1998. ISSN 10954244. Disponível em: doi:10.1002/(sici)1099-1824(199804)1:1+<5::aid-we1>3.3.co;2-9.
- 33 JIANG, Z.; KARIMIRAD, M.; MOAN, T. Dynamic response analysis of wind turbines under blade pitch system fault, grid loss, and shutdown events. *Wind Energy*, v. 17, 2014. ISSN 10991824. Disponível em: doi:10.1002/we.1639.
- 34 M.JONKMAN, M. L. J. J. *FAST User's Guide - Updated August 2005*. 2005.
- 35 LARSEN, T.; HANSEN, A. How 2 hawc2, the user's manual. *target*, v. 2, 2015.
- 36 GLAUERT, H. Aeroplane propellers, miscellaneous airscrew problems. *Aerodynamic Theory*, IV, 1935.
- 37 KIM, T.; HANSEN, A. M.; BRANNER, K. Development of an anisotropic beam finite element for composite wind turbine blades in multibody system. *Renewable Energy*, v. 59, 2013. ISSN 09601481. Disponível em: doi:10.1016/j.renene.2013.03.033.
- 38 BLASQUES, J. P.; STOLPE, M. Multi-material topology optimization of laminated composite beam cross sections. *Composite Structures*, v. 94, 2012. ISSN 02638223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2012.05.002.
- 39 GIAVOTTO, V.; BORRI, M.; MANTEGAZZA, P.; GHIRINGHELLI, G.; CARMASCHI, V.; MAFFIOLI, G. C.; MUSSI, F. Anisotropic beam theory and applications. *Computers and Structures*, v. 16, 1983. ISSN 00457949. Disponível em: doi:10.1016/0045-7949(83)90179-7.
- 40 FACCIO JUNIOR, C. J. *Modeling wind turbine blades by geometrically-exact beam and shell elements: a comparative approach*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.
- 41 SØRENSEN, B. F.; JØRGENSEN, E.; DEBEL, C. P.; JENSEN, F. M.; JENSEN, H. M.; JACOBSEN, T. K.; HALLING, K. *Improved design of large wind turbine blade of fibre composites based on studies of scale effects (Phase 1). Summary report*. [S.l.: s.n.]: Risø National Laboratory, 2004. ISBN 87-550-3176-5.
- 42 CHEN, X.; BERRING, P.; MADSEN, S. H.; BRANNER, K.; SEMENOV, S. Understanding progressive failure mechanisms of a wind turbine blade trailing edge section through subcomponent tests and nonlinear fe analysis. *Composite Structures*, v. 214, 2019. ISSN 02638223. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruct.2019.02.024.
- 43 CHEN, X.; QIN, Z.; YANG, K.; ZHAO, X.; XU, J. Numerical analysis and experimental investigation of wind turbine blades with innovative features: Structural response and characteristics. *Science China Technological Sciences*, v. 58, 1 2015. ISSN 1674-7321. Disponível em: doi:10.1007/s11431-014-5741-8.
- 44 REBELLO, Y. A concepção estrutural e a arquitetura. *Editora Ziguarte*, 2000.
- 45 EULER, L. De motu vibratorio tympanorum. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, v. 10, p. 243–260, 1766.

- 46 BERNOULLI, J. I. Essai théorique sur les vibrations des plaques élastiques, rectangulaires et li. *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, v. 5, p. 197–219, 1789.
- 47 GERMAIN, S. *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*. [S.l.: s.n.], 1821. Disponível em: doi:10.1017/cbo9781139237307.
- 48 KIRCHHOFF, G. 4. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 1850, 1850. ISSN 14355345. Disponível em: doi:10.1515/crll.1850.40.51.
- 49 REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 12, 1945. ISSN 0021-8936. Disponível em: doi:10.1115/1.4009435.
- 50 MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, 1951. ISSN 0021-8936. Disponível em: doi:10.1115/1.4010217.
- 51 LOVE, A. On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, v. 179, 1888.
- 52 KOITER, W. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. In: . [S.l.: s.n.], 1960.
- 53 SANDERS, J. L. An improved first-approximation theory for thin shells. *NASA Technical Report R-24*, 1959. ISSN 0029-5981.
- 54 NAGHDI, P. M. *The Theory of Shells and Plates*. 1973. Disponível em: doi:10.1007/978-3-662-39776-35.
- 55 AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, 1970. ISSN 10970207. Disponível em: doi:10.1002/nme.1620020310.
- 56 CAMPELLO, E. M. B. *Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- 57 BUCALEM, M. L.; BATHE, K. J. Finite element analysis of shell structures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 4, 1997. ISSN 11343060. Disponível em: doi:10.1007/BF02818930.
- 58 BATHE, K. J. J.; DVORKIN, E. N. A four-node plate bending element based on mindlin/reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, 1985. ISSN 10970207. Disponível em: doi:10.1002/nme.1620210213.
- 59 CHAPELLE, D.; BATHE, K. J. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers and Structures*, v. 66, 1998. ISSN 00457949. Disponível em: doi:10.1016/S0045-7949(97)00078-3.

- 60 SIMO, J. C. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 49, 1985. ISSN 00457825. Disponível em: doi:10.1016/0045-7825(85)90050-7.
- 61 SIMO, J.; FOX, D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 72, 3 1989. ISSN 00457825. Disponível em: doi:10.1016/0045-7825(89)90002-9.
- 62 PIMENTA, P. de M. On a geometrically-exact finite-strain shell model. *In: . [S.l.: s.n.]: III PACAM, 1993.*
- 63 CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. *Computational Mechanics*, v. 31, 8 2003. ISSN 0178-7675. Disponível em: doi:10.1007/s00466-003-0458-8.
- 64 MOREIRA, M. de L. T. *Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- 65 OTA, N. S. N. *O elemento T6-3i na análise de placas e dinâmica de cascas*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.
- 66 ALMEIDA, I. T. d.; FACCIO JUNIOR, C. J.; GAY NETO, A.; ALMEIDA, S. F. M. d. Composite shell formulations: comparison of two geometrically nonlinear implementations. *In: . [S.l.: s.n.]: ABMEC-IACM, 2021.*
- 67 SIMULIA. *Abaqus Analysis User's Guide (6.14)*. 2013.
- 68 SIMULIA. *Abaqus 6.11 Theory Manual*. 2017.
- 69 BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. [S.l.: s.n.], 2010. Disponível em: doi:10.1142/7828.
- 70 THOMPSON, J. M. Basic principles in the general theory of elastic stability. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 11, 1963. ISSN 00225096. Disponível em: doi:10.1016/0022-5096(63)90003-6.
- 71 THOMPSON, J. M. T.; HUNT, G. W. *A General Theory of Elastic Stability*. [S.l.: s.n.]: John Wiley and Sons, 1973.
- 72 SHIAU, L. C.; WU, T. Y. Free vibration of buckled laminated plates by finite element method. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, v. 119, 1997. ISSN 15288927. Disponível em: doi:10.1115/1.2889774.
- 73 ZIEGLER, H. *Principles of Structural Stability*. [S.l.: s.n.], 1977. Disponível em: doi:10.1007/978-3-0348-5912-7.
- 74 LYMAN, T. C.; VIRGIN, L. N.; DAVIS, R. B. Application of continuation methods to uniaxially loaded postbuckled plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, v. 81, 2014. ISSN 00218936. Disponível em: doi:10.1115/1.4024672.
- 75 MAZZILLI, C. E. N. *Conceito e definições de estabilidade*. 2020. Material apresentado para a disciplina de Dinâmica e Estabilidade das Estruturas.

- 76 GAY NETO, A. *Estabilidade estrutural da configuração estática de risers em catenária*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- 77 BOUTYOUR, E. H.; AZRAR, L.; POTIER-FERRY, M. Vibration of buckled elastic structures with large rotations by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, v. 84, 2006. ISSN 00457949. Disponível em: doi:10.1016/j.compstruc.2005.09.016.
- 78 FRANZONI, F.; ODERMANN, F.; WILCKENS, D.; SKUŃIS, E.; KALNIŃŠ, K.; ARBELO, M. A.; DEGENHARDT, R. Assessing the axial buckling load of a pressurized orthotropic cylindrical shell through vibration correlation technique. *Thin-Walled Structures*, v. 137, p. 353–366, 4 2019. ISSN 02638231. Disponível em: doi:10.1016/j.tws.2019.01.009.
- 79 FRANZONI, F. *Comportamento dinâmico de uma viga-caixão típica no regime de pós-flambagem*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 2014.
- 80 HASELBACH, P. U.; EDER, M. A.; BELLONI, F. A comprehensive investigation of trailing edge damage in a wind turbine rotor blade. *Wind Energy*, v. 19, 2016. ISSN 10991824. Disponível em: doi:10.1002/we.1956.
- 81 HASELBACH, P. U.; BRANNER, K. Initiation of trailing edge failure in full-scale wind turbine blade test. *Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon, v. 162, p. 136–154, 8 2016. ISSN 0013-7944. Disponível em: doi:10.1016/J.ENGFRACMECH.2016.04.041.
- 82 JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. [S.l.: s.n.], 1999. ISSN 01915665.
- 83 ALMEIDA, S. F. M. de. *Notas de aulas*. 2018. Material apresentado para a disciplina de Mecânica de Estruturas de Materiais Compósitos.
- 84 LIM, T. C. Improved shear correction factors for deflection of simply supported very thick rectangular auxetic plates. *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*, v. 11, 12 2016. ISSN 1823-0334. Disponível em: doi:10.1186/s40712-016-0065-z.
- 85 CHRÓSCIELEWSKI, J.; KREJA, I.; SABIK, A.; WITKOWSKI, W. Modeling of composite shells in 6-parameter nonlinear theory with drilling degree of freedom. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 18, 9 2011. ISSN 1537-6494. Disponível em: doi:10.1080/15376494.2010.524972.
- 86 BAUCHAU, O. A. Flexible multibody dynamics. *Solid Mechanics and its Applications*, v. 176, 2011. ISSN 09250042. Disponível em: doi:10.1007/978-3-642-35158-74.
- 87 JOHNSON, N. A. *A verification and validation of the geometrically exact beam theory with Legendre spectral finite elements for wind turbine blade analysis*. Dissertação (Mestrado) — Colorado School of Mines, 2021.
- 88 NATE, E. O.; ZARATE, F.; FLORES, F. A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, 1994. ISSN 10970207. Disponível em: doi:10.1002/nme.1620371505.

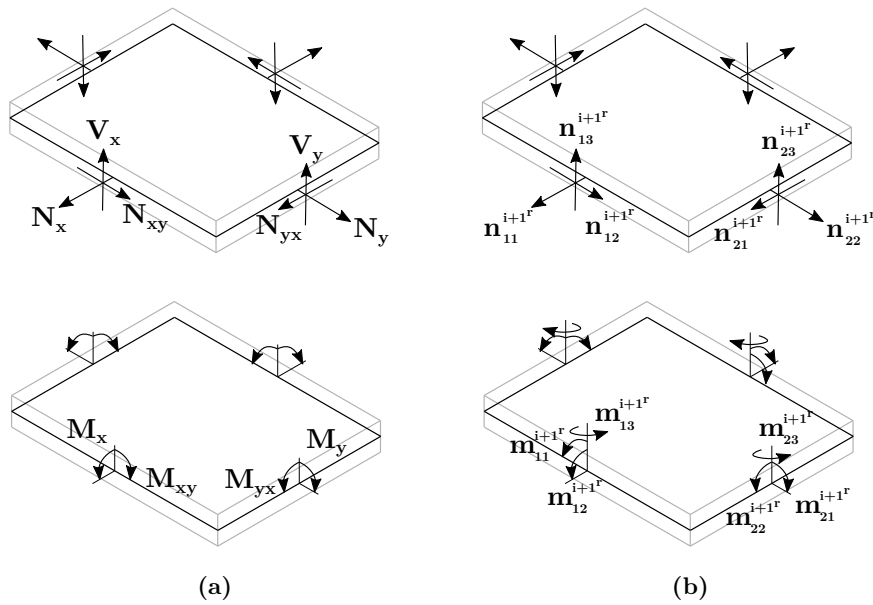
- 89 BARBERO, E. J. *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Ansys®*. 2. ed. [S.l.: s.n.]: CRC Press, 2014.
- 90 KIRILLOV, O. N. *Nonconservative Stability Problems of Modern Physics*. [S.l.: s.n.], 2021. Disponível em: doi:10.1515/9783110655407.
- 91 SCHWILIZERHOF, K.; RAMM, E. Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analyses. *Computers and Structures*, v. 18, 1984. ISSN 00457949. Disponível em: doi:10.1016/0045-7949(84)90154-8.
- 92 TASSO, H. On the stability of dissipative systems with circulatory forces. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, v. 31, 1980. ISSN 00442275. Disponível em: doi:10.1007/BF01590865.
- 93 SIMONCINI, V. Computational methods for linear matrix equations. *SIAM Review*, v. 58, 1 2016. ISSN 0036-1445. Disponível em: doi:10.1137/130912839.
- 94 FRANZONI, F.; ALMEIDA, S. F. M. de; FERREIRA, C. A. E. Numerical and experimental dynamic analyses of a postbuckled box beam. *AIAA Journal*, v. 54, 6 2016. ISSN 0001-1452. Disponível em: doi:10.2514/1.J054576.
- 95 STANDARDS, B. Wind turbines - part 23: Full-scale structural testing of rotor blades. *IEC 61400-23:2014*, 2014.
- 96 DNVGL. *Rotor blades for wind turbines DNVGL-ST-0376*. 2015.
- 97 JENSEN, M. F.; BRANNER, K. Introduction to wind turbine blade design. In: _____. [S.l.: s.n.], 2013. Disponível em: doi:10.1533/9780857097286.1.3.
- 98 BRAZIER, L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 116, 1927. ISSN 0950-1207. Disponível em: doi:10.1098/rspa.1927.0125.
- 99 JENSEN, F.; WEAVER, P.; CECCHINI, L.; STANG, H.; NIELSEN, R. The brazier effect in wind turbine blades and its influence on design. *Wind Energy*, v. 15, p. 319–333, 3 2012. ISSN 10954244. Disponível em: doi:10.1002/we.473.
- 100 LLOYD, G. *Guideline for the Certification of Wind Turbines*. 2010.
- 101 MURPHY, K. D.; VIRGIN, L. N.; RIZZI, S. A. *Free Vibration of Thermally Loaded Panels Including Initial Imperfections and Post-Buckling Effects*. 1994.
- 102 FRANZONI, F.; ALMEIDA, S. F. M. de; FERREIRA, C. A. E. Numerical and experimental dynamic analyses of a postbuckled box beam. *AIAA Journal*, v. 54, p. 1987–2003, 6 2016. ISSN 0001-1452. Disponível em: doi:10.2514/1.J054576.
- 103 KNOOPS, M. *Analysis of failure in fiber polymer laminates: The theory of Alfred Puck*. [S.l.: s.n.], 2008. Disponível em: doi:10.1007/978-3-540-75765-8.
- 104 COMMISSION, I. E. Iec 61400-1 wind turbines - part 1: Design requirements. *Wind turbines – Part 1: Design requirements*, v. 2005, 2005. ISSN 1434-0704.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CONTRIBUIÇÃO CONSTITUTIVA NO OPERADOR TANGENTE

A Figura 62 ilustra as diferenças entre as direções positivas convencionadas na CLT e no modelo estrutural geometricamente exato.

Figura 62 – direções positivas das forças e momentos: (a) CLT e (b) modelo estrutural de casca geometricamente exato



Fonte: adaptado de (23, 83)

A equação A.1 – disponível na página seguinte – representa, termo a termo, a matriz constitutiva \bar{D} a partir desta convenção.

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xz} & 0 & -B_{xz} & B_{xx} & 0 & A_{xz} & A_{xy} & 0 & -B_{xy} & B_{xz} & 0 \\ A_{xz} & A_{zz} & 0 & -B_{zz} & B_{xz} & 0 & A_{zz} & A_{yz} & 0 & -B_{yz} & B_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & H_{xz \ xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{xz \ yz} & 0 & 0 & 0 \\ -B_{xz} & -B_{zz} & 0 & D_{zz} & -D_{xz} & 0 & -B_{zz} & -B_{yz} & 0 & D_{yz} & -D_{zz} & 0 \\ B_{xx} & B_{xz} & 0 & -D_{xz} & D_{xx} & 0 & B_{xz} & B_{xy} & 0 & -D_{xy} & D_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz \ xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz \ yz} \\ A_{xz} & A_{zz} & 0 & -B_{zz} & B_{xz} & 0 & A_{zz} & A_{zy} & 0 & -B_{zy} & B_{zz} & 0 \\ A_{xy} & A_{yz} & 0 & -B_{yz} & B_{yx} & 0 & A_{yz} & A_{yy} & 0 & -B_{yy} & B_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & H_{xz \ yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{yz \ yz} & 0 & 0 & 0 \\ -B_{xy} & -B_{yz} & 0 & D_{yz} & -D_{xy} & 0 & -B_{yz} & -B_{yy} & 0 & D_{yy} & -D_{yz} & 0 \\ B_{xz} & B_{zz} & 0 & -D_{zz} & D_{xz} & 0 & B_{zz} & B_{yz} & 0 & -D_{yz} & D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz \ xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz \ yz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

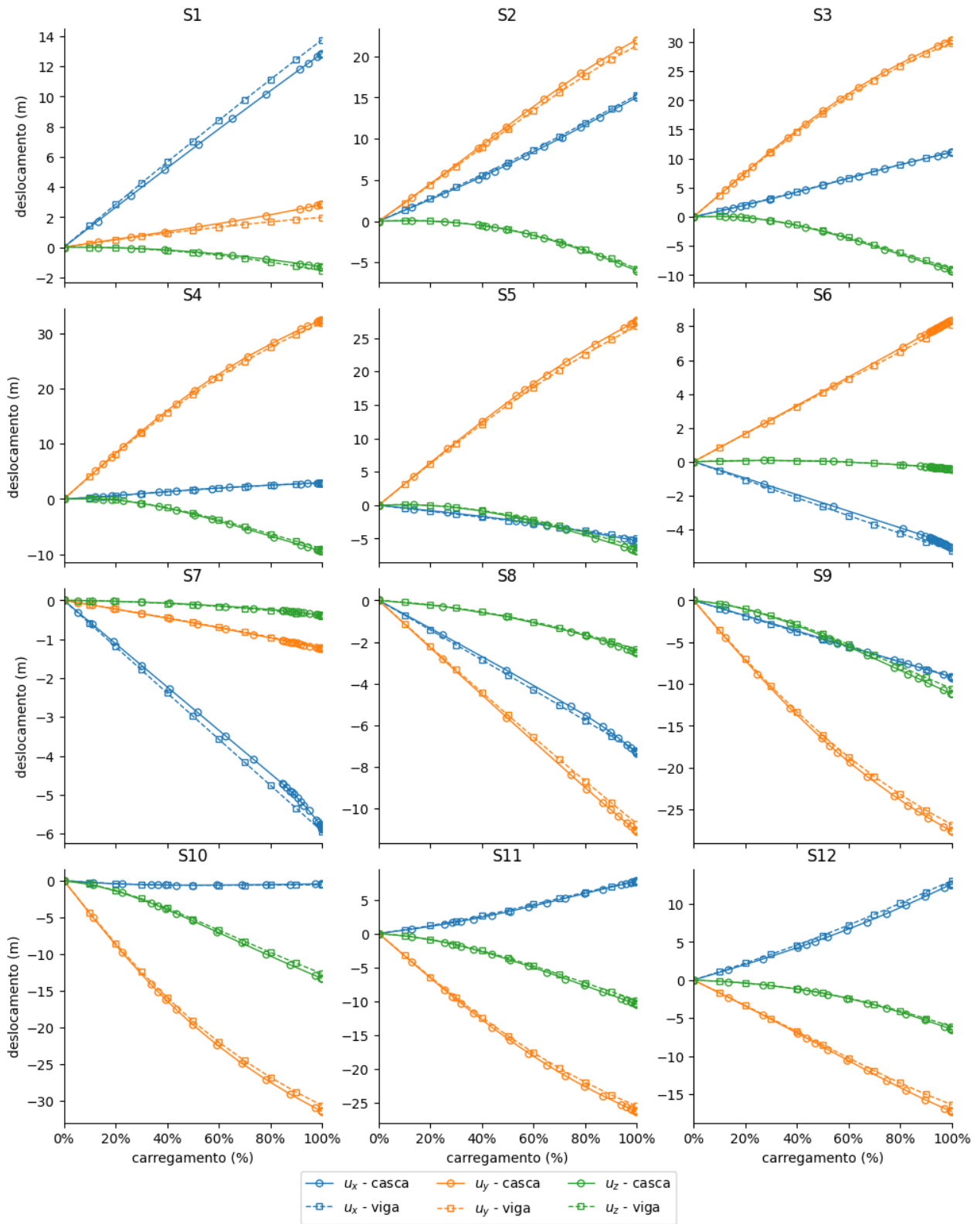
APÊNDICE B – RESULTADOS COMPARADOS DAS 12 SIMULAÇÕES

As Tabela 15 e Figura 63 mostram a evolução dos deslocamentos da seção de controle ($z = 80,5m$) dos modelos de viga e casca nas 12 simulações propostas.

Tabela 15 – Deslocamentos na seção de controle ($z = 80,5m$)

Simulação	Modelo	Unidade	Projeto			Extrema		
			u_x	u_y	u_z	u_x	u_y	u_z
S1 <i>TTL</i>	Viga	<i>m</i>	3,47	0,59	-0,07	13,77	1,98	-1,56
	Casca	<i>m</i>	3,23	0,64	-0,05	12,85	2,85	-1,31
	Desvio	%	7,43	-7,16	26,73	7,15	-30,68	19,62
S2	Viga	<i>m</i>	3,28	5,22	-0,03	15,31	21,31	-5,74
	Casca	<i>m</i>	3,11	5,38	-0,03	15,03	22,01	-6,01
	Desvio	%	5,30	-2,99	1,97	1,83	-3,20	-4,47
S3	Viga	<i>m</i>	3,03	10,69	-0,56	11,09	29,91	-8,91
	Casca	<i>m</i>	2,96	10,95	-0,60	11,05	30,39	-9,26
	Desvio	%	2,44	-2,42	-7,29	0,32	-1,60	-3,86
S4 <i>PTS</i>	Viga	<i>m</i>	1,55	18,03	-2,24	2,93	31,90	-8,98
	Casca	<i>m</i>	1,59	18,49	-2,41	2,91	32,42	-9,40
	Desvio	%	-2,78	-2,49	-7,08	0,60	-1,58	-4,50
S5	Viga	<i>m</i>	-1,35	9,12	-0,29	-4,98	26,77	-6,24
	Casca	<i>m</i>	-1,22	9,38	-0,33	-5,70	27,68	-6,84
	Desvio	%	10,77	-2,73	-10,23	-12,65	-3,30	-8,86
S6	Viga	<i>m</i>	-2,11	3,21	0,06	-5,28	8,10	-0,42
	Casca	<i>m</i>	-1,92	3,27	0,07	-5,11	8,37	-0,45
	Desvio	%	9,82	-1,64	-13,37	3,39	-3,19	-5,71
S7 <i>LTT</i>	Viga	<i>m</i>	-2,76	-0,52	-0,10	-5,94	-1,22	-0,40
	Casca	<i>m</i>	-2,57	-0,54	-0,09	-5,88	-1,24	-0,40
	Desvio	%	7,04	-2,44	12,00	0,94	-1,69	0,01
S8	Viga	<i>m</i>	-2,61	-4,04	-0,49	-7,26	-10,73	-2,37
	Casca	<i>m</i>	-2,46	-4,15	-0,50	-7,34	-11,09	-2,51
	Desvio	%	6,24	-2,62	-1,65	-1,11	-3,25	-5,73
S9	Viga	<i>m</i>	-1,66	-6,15	-0,81	-9,01	-26,82	-10,56
	Casca	<i>m</i>	-1,59	-6,31	-0,85	-9,32	-27,59	-11,16
	Desvio	%	4,39	-2,57	-3,87	-3,34	-2,81	-5,44
S10 <i>STP</i>	Viga	<i>m</i>	-0,40	-8,02	-1,20	-0,57	-30,65	-12,69
	Casca	<i>m</i>	-0,42	-8,22	-1,25	-0,46	-31,48	-13,35
	Desvio	%	-4,96	-2,48	-4,41	26,03	-2,63	-4,98
11	Viga	<i>m</i>	2,26	-11,11	-2,11	7,83	-25,55	-9,87
	Casca	<i>m</i>	2,07	-11,42	-2,21	7,77	-26,34	-10,46
	Desvio	%	9,17	-2,71	-4,62	0,73	-3,02	-5,66
12	Viga	<i>m</i>	3,14	-4,69	-0,64	13,06	-16,37	-6,09
	Casca	<i>m</i>	2,89	-4,81	-0,65	12,61	-17,26	-6,47
	Desvio	%	8,88	-2,47	-1,84	3,60	-5,17	-5,87

Figura 63 – Deslocamentos na seção de controle ($z = 80.5m$).



Fonte: autoria própria