

ALEX ALVES BANDEIRA

**UMA INTRODUÇÃO À
ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONTATO.**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia



São Paulo
1997

ALEX ALVES BANDEIRA

**UMA INTRODUÇÃO À
ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONTATO.**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas e Fundações

Orientador:
Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo
1997

Aos meus familiares que têm sido o grande estímulo ao meu aprimoramento profissional. Relevo meus protestos de elevada estima e distinta consideração ao meu irmão Anselmo Alves Bandeira, companheiro nesta caminhada. Em especial, expresso minha inesgotável gratidão à minha mãe Yêda Oliveira Alves pelo incentivo laborioso e apoio moral incomensurável, fundamentais na conquista deste objetivo.

AGRADECIMENTOS

Manifesto os meus profundos agradecimentos ao Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta pela sua valiosa e paciente orientação ao longo de todo o desenvolvimento desta pesquisa.

Apresento meus sinceros agradecimentos à Prof^a. Dr^a. Priscila Goldenberg pelo carinho, pela atenção e pelas sugestões expostas na elaboração deste trabalho.

Aos Profs. Dr. Ruy Pauletti e Dr. Reyolando M. L. R. da Fonseca Brasil pela cuidadosa revisão do trabalho no exame de qualificação.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos que, de alguma forma, colaboraram na composição desta monografia.

SUMÁRIO

<i>Lista de figuras</i>	
<i>Lista de tabelas</i>	
<i>Lista de quadros</i>	
Resumo	
Abstract	
1. Introdução	1
2. Elementos de Programação Matemática	3
2.1. <i>Introdução</i>	3
2.1.1. <i>Notação</i>	3
2.1.2. <i>Sistemas de Equações Lineares</i>	8
2.1.3. <i>Sistemas de Equações Não Lineares</i>	12
2.2. <i>Classificação dos Problemas de Programação Matemática</i>	15
2.2.1. <i>Programação Matemática</i>	16
2.2.2. <i>Otimização Sem Restrições</i>	17
2.2.3. <i>Otimização Com Restrições de Igualdade</i>	19
2.2.4. <i>Otimização Com Restrições de Desigualdade</i>	24
2.2.5. <i>Problema Geral</i>	30
3. Algoritmos de Programação Matemática	35
3.1. <i>Algoritmos de Programação Matemática Sem Restrições</i>	35
3.1.1. <i>Método de Newton com Busca Unidimensional</i>	35
3.1.2. <i>Métodos Quase-Newton</i>	39
3.2. <i>Algoritmos de Programação Matemática Com Restrições</i>	47
3.2.1. <i>Problemas Com Restrições de Igualdade</i>	47
3.2.1.1. <i>Método do Lagrangiano</i>	47
3.2.1.2. <i>Método da Penalidade</i>	53
3.2.1.3. <i>Método do Lagrangiano Aumentado</i>	55

3.2.2. Problemas Com Restrições de Desigualdade	57
3.2.2.1. Método do Lagrangiano - Conjunto Ativo	57
3.2.2.2. Método da Penalidade	60
3.2.2.3. Método do Lagrangiano Aumentado	61
3.2.3. Problemas Com Restrições Mistas	62
4. Prelúdio: Um Modelo Simples com Molas	67
4.1. Sem Restrições	67
4.2. Com Restrições de Igualdade	73
4.3. Com Restrições de Desigualdade	85
5. Análise Não Linear de Treliças Espaciais	94
5.1. Formulação	94
5.2. Problemas Com Restrições de Igualdade	111
5.3. Problemas Com Restrições de Desigualdade - Contato Sem Atrito	114
6. Exemplos de Treliças	120
7. Conclusão	143
Referências Bibliográficas	145

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura</i>	<i>Discriminação</i>	<i>Página</i>
2.1	Método de Newton para uma variável (HERSKOVITS, 1995)	15
3.1	Intervalo aceitável de s	38
4.1	Sistema de molas sem restrições	67
4.2	Sistema de molas sob restrição de igualdade	73
4.3	Interpretação física para o método da Penalidade	78
4.4	Equilíbrio do nó 2 pelo método da Penalidade	79
4.5	Equilíbrio do nó 2 pelo método do Lagrangiano Aumentado	82
4.6	Sistema de molas sob restrição de desigualdade	85
4.7	Resposta não linear para o método da Penalidade	89
4.8	Resposta não linear para o método do Lagrangiano Aumentado	92
5.1	Configurações de uma barra de treliça espacial	94
5.2	Configuração atual de uma barra de treliça espacial	98
5.3	Forças internas de uma barra de treliça espacial	101
5.4	Interpretação gráfica de um nó de treliça sujeito ao contato em uma restrição g_j	115
6.1	Viga simétrica bi-apoiada	120
6.2	Viga simétrica bi-apoiada: Configuração de equilíbrio	121
6.3	Viga simétrica bi-apoiada - Problema de contato	121
6.4	Viga simétrica bi-apoiada - Problema de contato: Configuração de equilíbrio	122
6.5	Viga em balanço	128
6.6	Viga em balanço: Configuração de equilíbrio	129
6.7	Viga em balanço - Problema de contato	129
6.8	Viga em balanço - Problema de contato: Configuração de equilíbrio	129
6.9	Treliça espacial em balanço	135
6.10	Treliça espacial em balanço: Configuração de equilíbrio	136
6.11	Treliça espacial em balanço - Problema de contato	136
6.12	Treliça espacial em balanço - Problema de contato: Configuração de equilíbrio	137

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela</i>	<i>Discriminação</i>	<i>Página</i>
4.1	Problema sem restrições	71
4.2	Problema incremental sem restrições	72
4.3	Problema sob restrição de igualdade (eliminação de variável)	75
4.4	Problema sob restrição de igualdade (Lagrangiano)	77
4.5	Problema sob restrição de igualdade (Penalidade)	80
4.6	Problema sob restrição de igualdade (Lagrangiano Aumentado)	84
4.7	Problema Incremental sob restrição de igualdade (Lagrangiano Aumentado)	84
4.8	Problema sob restrição de desigualdade (Lagrangiano)	87
4.9	Problema sob restrição de desigualdade (Penalidade)	90
4.10	Problema sob restrição de desigualdade (Lagrangiano Aumentado)	93
4.11	Problema incremental sob restrição de desigualdade (Lagrangiano Aumentado)	93
6.1	Exemplo 1: Otimização sem restrição	123
6.2	Exemplo 1: Otimização com restrição de igualdade	124
6.3	Exemplo 1: Solução do problema ilustrado na figura 6.2	125
6.4	Exemplo 1: Otimização com restrição de desigualdade - Contato	126
6.5	Exemplo 1: Solução do problema ilustrado na figura 6.4	127
6.6	Exemplo 2: Otimização sem restrição	130
6.7	Exemplo 2: Otimização com restrição de igualdade	131
6.8	Exemplo 2: Solução do problema ilustrado na figura 6.6	132
6.9	Exemplo 2: Otimização com restrição de desigualdade - Contato	133
6.10	Exemplo 2: Solução do problema ilustrado na figura 6.8	134
6.11	Exemplo 3: Otimização sem restrição	138
6.12	Exemplo 3: Otimização com restrição de igualdade	139
6.13	Exemplo 3: Solução do problema ilustrado na figura 6.10	140
6.14	Exemplo 3: Otimização com restrição de desigualdade - Contato	141
6.15	Exemplo 3: Solução do problema ilustrado na figura 6.12	142

LISTA DE QUADROS

<i>Quadro</i>	<i>Discriminação</i>	<i>Página</i>
1	Método de Choleski	11
2	Método de Newton	14
3	Método de Newton com busca unidimensional	36
4	Método da busca unidimensional	38
5	Algoritmo para a solução do sistema $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$	43
6	Método do BFGS	44
7	Método de Newton / Quase-Newton	45
8	Cálculo da direção $\mathbf{d}^{(i)}$ pelo método do BFGS	46
9	Cálculo da direção $\mathbf{d}^{(i)}$ pelo método de Newton	46
10	Algoritmo para a resolução do sistema (3.55)	52
11	Método do Lagrangiano para restrições de igualdade	53
12	Método da Penalidade para restrições de igualdade	54
13	Método do Lagrangiano Aumentado para restrições de igualdade	57
14	Método da Penalidade para restrições de desigualdade	61
15	Método do Lagrangiano Aumentado para restrições de desigualdade	62
16	Método do Lagrangiano Aumentado	64
17	Minimização pelo método de Newton	65
18	Minimização pelo método do BFGS	66
19	Método de Newton / Quase-Newton para treliças	109
20	Método do BFGS para treliças	110
21	Método de Newton para treliças	110
22	Método do Lagrangiano Aumentado para treliças	117
23	Minimização pelo método de Newton para treliças	118
24	Minimização pelo método do BFGS para treliças	119

RESUMO

O presente trabalho constitui-se numa introdução à análise de estruturas de treliças espaciais submetidas ao contato sem atrito, na qual são intensamente utilizados os recursos da programação matemática ou otimização.

Para a resolução dos problemas de contato utiliza-se o método do Lagrangiano Aumentado, que já se consagrou como uma técnica bastante eficiente para a resolução destes problemas.

Ao final desta dissertação, são apresentados exemplos de treliças espaciais envolvendo o problema de contato sem atrito. Acredita-se, porém, que o conteúdo teórico possa ser facilmente adaptado para outras formulações em elementos finitos.

ABSTRACT

This thesis addresses the analysis of spatial trusses under contact conditions with no friction. The analysis is based strongly on mathematical programming and optimization methods.

The Augmented Lagrangian Method, which is an efficient technique to solve contact problems, is applied here.

Examples of spatial trusses under contact condition without friction are presented at the end of this thesis. It is believed that the theoretical content of this thesis can be readily adapted to the other finite element formulations.

Introdução

O presente trabalho constitui-se numa introdução à análise de estruturas de treliças espaciais submetidas ao contato sem atrito, na qual são intensamente utilizados os recursos da programação matemática ou otimização.

Pode-se definir como programação matemática, a técnica de se determinar a “melhor” solução de um determinado problema matematicamente definido. Neste trabalho, a programação matemática tem como objetivo calcular o ponto de mínimo ou ponto ótimo, envolvendo os estudos das condições de otimalidade, das condições necessárias e suficientes de primeira e segunda ordem, da determinação do algoritmo mais adequado a ser utilizado, etc...

Quando uma estrutura é carregada e se deforma atingindo outra estrutura ou tocando em qualquer outro sólido, se diz que a estrutura sofre contato. Este problema é formulado através da programação matemática, como por exemplo, adicionando restrições aos deslocamentos.

A análise dos problemas de contato é um estudo recente. Para solucioná-los utiliza-se o método do Lagrangiano Aumentado, que já se consagrou como uma técnica bastante eficiente.

Inicia-se a abordagem no capítulo 2, onde são apresentados os conceitos matemáticos básicos, as notações que serão utilizadas no decorrer deste trabalho e os métodos para a resolução de sistemas de equações lineares e não lineares. Em seguida, são apresentados os conceitos de programação matemática, bem como a sua classificação em problemas de otimização sem restrições, otimização com restrições de igualdade, otimização com restrições de desigualdade e problema geral. Para cada tipo de problema de otimização citado acima, são estabelecidas as condições necessárias e suficientes de primeira e segunda ordem, que devem ser satisfeitas por um ponto para que ele seja um mínimo local do problema em questão.

No capítulo 3 são descritos detalhadamente os algoritmos utilizados para solucionar o problema de contato. Para a resolução de problemas de otimização sem restrições, são utilizados o método de Newton, o método de Newton com busca unidimensional e os métodos Quase-Newton, dando ênfase ao BFGS, em virtude deste possuir a forma produto. Para a resolução de problemas de otimização com restrições, são utilizados os métodos do Lagrangiano, da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. Ambos são estudados separadamente para as restrições de igualdade, para as restrições de desigualdade e em seguida, é formulado o problema geral, ou seja, com restrições mistas.

No capítulo 4 é analisado um modelo simples com molas, objetivando a aplicação e a interpretação física dos conceitos estudados nos capítulos 2 e 3.

No capítulo 5, para evitar as formulações em elementos finitos, foram adotadas as treliças espaciais como modelos estruturais a serem analisados, implementando a sua formulação nos algoritmos de contato utilizados por T. A. LAURSEN e por B. N. MAKER [8].

No capítulo 6 são apresentados exemplos numéricos de aplicação dos algoritmos em treliças espaciais sob restrições de contato, que é o principal enfoque deste estudo. O objetivo é estudar o comportamento das treliças quando submetidas ao contato. Para isso foi desenvolvido um programa em linguagem C++.

No capítulo 7 é apresentada a conclusão do trabalho.

Elementos de Programação Matemática

2.1 - Introdução

Nesta seção, serão introduzidas algumas notações e apresentados alguns conceitos matemáticos básicos. No item 2.1.1 apresentaremos as notações que serão utilizadas neste trabalho, no item 2.1.2, os conceitos básicos de resolução de sistemas de equações lineares e no item 2.1.3, os conceitos básicos de resolução de sistemas de equações não lineares.

2.1.1 - Notação

Nesta seção introduziremos os conceitos matemáticos básicos para vetores, matrizes, funções reais de várias variáveis, funções vetoriais, convexidade, mínimo local e mínimo global.

Vetor

Um vetor em \mathfrak{R}^n será indicado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix},$$

onde $x_i \in \mathfrak{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$ são as i -ésimas componentes do vetor.

O produto escalar de \mathbf{x} e \mathbf{y} em \mathfrak{R}^n que será adotado neste trabalho é definido por:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

A norma Euclidiana de um vetor \mathbf{x} de \mathfrak{R}^n é definida por:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} .$$

Diz-se que os vetores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$, onde $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^n$ para $i = 1, 2, \dots, n$, são linearmente independentes se:

$$a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 .$$

Caso contrário, diz-se que são linearmente dependentes.

Seja o vetor $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$. Diz-se que $\mathbf{x} \geq 0$ se todas as suas componentes x_i satisfazem $x_i \geq 0$.

A distância de dois pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$ é definida por:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| .$$

Matriz

Uma matriz em $\mathfrak{R}^{m \times n}$ será indicada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] ,$$

onde m é o número de linhas e n é o número de colunas.

Indicaremos por:

\mathbf{A}^T : A matriz transposta de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, onde $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$.

\mathbf{I} : A matriz identidade, onde:

$$a_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad i = j,$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

\mathbf{A}^{-1} : A matriz inversa.

Uma matriz quadrada \mathbf{A} é simétrica se

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{para todo } i, j.$$

Uma matriz \mathbf{A} é semi-definida positiva se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad , \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n.$$

Uma matriz \mathbf{A} é definida positiva se e somente se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad , \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Função Real de várias variáveis

As funções que serão tratadas neste trabalho são definidas num conjunto $\Gamma \subset \mathfrak{R}^n$ e assumem valores em \mathfrak{R} , isto é

$$f: \Gamma \rightarrow \mathfrak{R}.$$

Neste trabalho, as funções são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

O vetor das derivadas parciais de $f(\mathbf{x})$ em um ponto \mathbf{x} , denomina-se vetor gradiente e indicaremos por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

A matriz das derivadas parciais de segunda ordem de $f(\mathbf{x})$ em um ponto \mathbf{x} , denomina-se matriz Hessiana e indicaremos por:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Função Vetorial

O conjunto de várias funções a valores reais f_1, f_2, \dots, f_m em \mathfrak{R}^n , pode ser visto como uma função vetorial $f(\mathbf{x})$. Essa função determina o vetor $f(\mathbf{x})$ definido por:

$$f(\mathbf{x})^T = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_m(\mathbf{x})] \quad \text{em } \mathfrak{R}^n \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n.$$

Mais especificadamente:

$$f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m.$$

Suporemos que a função $f(\mathbf{x})$ seja contínua com derivadas parciais contínuas. A matriz $\mathbf{J}_{m \times n}$ das derivadas parciais de f_i em relação às variáveis x_j , denomina-se matriz Jacobiana e indicaremos por:

$$\mathbf{J} = \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Convexidade

Diz-se que um conjunto não vazio X em \mathfrak{R}^n é convexo se para dois pontos quaisquer $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$

$$\lambda \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^2 \in X \quad , \text{ para todo } 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

Uma função real $f(\mathbf{x})$ definida em um conjunto convexo X de \mathfrak{R}^n , diz-se convexa se para dois pontos quaisquer $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ e qualquer λ real, $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$f(\lambda \cdot \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}^2) \leq \lambda \cdot f(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda) \cdot f(\mathbf{x}^2) .$$

Mínimo Local e Mínimo Global

Seja Γ o domínio da função $f(\mathbf{x})$. O ponto $\mathbf{x}^* \in \Gamma$ é ponto de mínimo local ou mínimo relativo de $f(\mathbf{x})$ em Γ , se numa vizinhança aberta de centro \mathbf{x}^* e raio r , $B_a(\mathbf{x}^*, r) = \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < r \}$, $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}^*, r)$. Então $f(\mathbf{x}^*)$ é denominado de valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ em Γ .

Se $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Gamma$, então \mathbf{x}^* é dito ponto de mínimo global ou absoluto de $f(\mathbf{x})$.

Se $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}^*, r)$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, diz-se que \mathbf{x}^* é ponto de mínimo local estrito de $f(\mathbf{x})$.

Se $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Gamma$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, diz-se que \mathbf{x}^* é ponto de mínimo global estrito de $f(\mathbf{x})$.

2.1.2 - Sistemas de Equações Lineares

Nesta seção, falaremos sobre alguns métodos para a resolução de sistemas de equações lineares. Apresentaremos os métodos de Crout e Choleski.

Consideremos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $a_{ij} \in \mathfrak{R}$ é o coeficiente da variável x_j e $b_i \in \mathfrak{R}$ é um escalar.

O sistema de equações (2.1) pode ser formulado matricialmente como:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes a_{ij} , \mathbf{x} é o vetor das variáveis x_j e \mathbf{b} é o vetor dos coeficientes b_i .

Existem vários métodos para a resolução do sistema de equações lineares (2.2). Alguns autores decompõem a matriz \mathbf{A} utilizando a fatoração de Crout, expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}, \quad (2.3)$$

onde L é uma matriz triangular inferior de diagonal unitária, D é uma matriz diagonal e U é uma matriz triangular superior de diagonal unitária.

A equação (2.3) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= A_{11} & , i=j=1, \\
 D_{ij} &= A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot D_{kk} \cdot U_{kj} & , i=j>1, \\
 U_{1j} &= A_{1j} / D_{11} & , i=1, i<j, \\
 U_{ij} &= [A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot D_{kk} \cdot U_{kj}] / D_{ii} & , i>1, i<j, \\
 L_{i1} &= A_{i1} / D_{11} & , j=1, i>j, \\
 L_{ij} &= [A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \cdot D_{kk} \cdot U_{kj}] / D_{jj} & , j>1, i>j.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se a matriz A for simétrica, a fórmula (2.3) pode ser escrita como:

$$A = U^T D U, \tag{2.5}$$

onde U é uma matriz triangular superior de diagonal unitária e D é uma matriz diagonal.

A equação (2.5) é conhecida como fatoração de Crout para matrizes simétricas e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= A_{11} & , i=j=1, \\
 D_{ij} &= A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} \cdot D_{kk} \cdot U_{kj} & , i=j>1, \\
 U_{1j} &= A_{1j} / D_{11} & , i=1, i<j, \\
 U_{ij} &= [A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} \cdot D_{kk} \cdot U_{kj}] / D_{ii} & , i>1, i<j.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

O método Choleski consiste em decompor a matriz A como:

$$A = \hat{U}^T \hat{U}, \tag{2.7}$$

com:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal, \mathbf{U} é uma matriz triangular superior de diagonal unitária e $\hat{\mathbf{U}}$ é uma matriz triangular superior.

As equações (2.7) e (2.8) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{11} &= \sqrt{A_{11}} & , i=j=1, \\ \hat{U}_{1j} &= A_{1j} / \hat{U}_{11} & , i=1 \text{ e } j>1, \\ \hat{U}_{ij} &= \sqrt{A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} (\hat{U}_{ki})^2} & , i=j>1, \\ \hat{U}_{ij} &= [A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{U}_{ki} \cdot \hat{U}_{kj}] / \hat{U}_{ii} & , i>1, j>1, i<j, \\ D_{ij} &= (\hat{U}_{ij})^2 & , i=j, \\ U_{ij} &= 1 & , i=j, \\ U_{ij} &= \hat{U}_{ij} / \sqrt{D_{ii}} & , i<j. \end{aligned} \quad (2.9)$$

O método Choleski só pode ser utilizado para resolver um sistema de equações lineares, quando a matriz \mathbf{A} for simétrica e definida positiva. No entanto, não nos deteremos nesta demonstração.

Para a resolução do sistema de equações lineares $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ pelo método de Choleski, devemos decompor a matriz \mathbf{A} em $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}}$. Então, temos:

$$\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (2.10)$$

Definindo o vetor \mathbf{y} por:

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{U}} \mathbf{x}, \quad (2.11)$$

obtemos:

$$\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}. \quad (2.12)$$

A equação (2.11) é chamada de redução retroativa e a equação (2.12) é chamada de redução progressiva.

Então, o método Choleski pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método de Choleski para solução do sistema linear

$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ de ordem n .

Passo 1: Fatoração de Choleski: $A = \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}}$.

Faça i variando de 1 até n .

Faça j variando de 1 até n .

Calcule \hat{U}_{ij} pelas equações em (2.9).

Passo 2: Redução progressiva.

Faça i variando de 1 até n e calcule:

$$y_i = \frac{b_i}{\hat{U}_{ii}}, \quad i = 1.$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \hat{U}_{ij} \cdot y_j}{\hat{U}_{ii}}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Passo 3: Redução retroativa.

Faça i variando de n até 1 e calcule:

$$x_i = \frac{y_i}{\hat{U}_{ii}}, \quad i = n.$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n \hat{U}_{ij} \cdot x_j}{\hat{U}_{ii}}, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Em problemas estruturais envolvendo os métodos dos elementos finitos, a matriz A tem uma estrutura simétrica e esparsa, conhecida como perfil ("skyline"). Uma das vantagens de utilizarmos os métodos de Crout e Choleski, é que ambos mantêm o perfil ou envelope da matriz A possibilitando na fatoração, que as matrizes \hat{U} ou D , U possam ser armazenadas no mesmo local que A , economizando memória. Uma das desvantagens destes métodos, é que quando existirem muitos zeros internos ao perfil, torna-se difícil tirar proveito desta esparsidade.

O método de Crout é utilizado em qualquer matriz não singular, enquanto que no método de Choleski, a matriz além de ser não singular tem que ser simétrica e definida positiva.

2.1.3 - Sistemas de Equações Não Lineares

Para a resolução de um sistema de equações não lineares, utilizaremos o método de Newton.

O método de Newton original pode ser formulado como:

Solucionar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$,	(2.13)
--	--------

onde a função vetorial $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é contínua com derivadas parciais contínuas até primeira ordem.

Expandindo a função $f(\mathbf{x})$ em série de Taylor em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$ e truncando-a no termo de primeira ordem, obtemos a seguinte expressão aproximada:

$$f(\mathbf{x}) \cong f(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) . \quad (2.14)$$

De (2.13) temos que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Logo:

$$\mathbf{x} \cong \mathbf{x}^{(k)} - [\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)}) . \quad (2.15)$$

Então, adotaremos como seqüência de aproximantes:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)}) . \quad (2.16)$$

O método de Newton é iterativo, ou seja, no decorrer do problema é gerado uma seqüência de pontos a partir de um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$. Na k -ésima iteração, o ponto $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é gerado a partir do ponto imediatamente anterior $\mathbf{x}^{(k)}$ pela função (2.16).

Definição: Contração.

Uma aplicação $\varphi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ chama-se contração quando existem $\mu \in \mathfrak{R}$, tal que $0 \leq \mu < 1$ e normas em \mathfrak{R}^n , relativamente às quais se tem:

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leq \mu \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \text{ para quaisquer } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n.$$

Teorema: Ponto Fixo.

Um ponto fixo de uma aplicação $\varphi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^n$ tal que $\varphi(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Sejam $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}^n$ um subconjunto fechado e $\varphi: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}$ uma contração. Dado qualquer ponto $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathfrak{T}$, a seqüência $\mathbf{x}^{(1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(0)})$, $\mathbf{x}^{(2)} = \varphi(\mathbf{x}^{(1)})$, ..., $\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$, ..., converge para um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{T}$, que é o único ponto fixo de φ .

Definição: Ordem de Convergência.

A ordem de convergência de uma seqüência $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}^*$, é o maior número n dos números não negativos p que satisfazem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^p} = \beta < \infty .$$

Quando $p = 1$ a convergência é linear com razão de convergência $\beta < 1$. Se $\beta = 0$ a convergência é dita superlinear. A convergência é quadrática quando $p = 2$.

Quando $k \rightarrow \infty$, p e β são as medidas da velocidade assintótica da convergência.

Teorema: Condição de Convergência.

Seja \mathbf{x}^* uma solução do problema (2.13) para o qual a matriz Jacobiana $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é definida. Então, existe $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}^n$ onde a função:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - [\nabla f(\mathbf{x})]^{-1} f(\mathbf{x})$$

é uma contração e \mathbf{x}^* é o único ponto fixo de $\varphi(\mathbf{x})$. Se $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathfrak{S}$ o método de Newton converge necessariamente para \mathbf{x}^* com velocidade assintótica quadrática.

Consideremos $\mathbf{d}^{(k)}$ a direção do incremento em cada iteração, dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{d}^{(k)} = [\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (2.17)$$

Então o método de Newton pode ser esquematizado no quadro n.º 2.

Método de Newton:

Passo 1: Faça $k = 0$. Estime um valor inicial para $\mathbf{x}^{(0)}$.

Passo 2: Calcule $f(\mathbf{x}^{(k)})$ para o ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)}$.

Passo 3: Se $\|f(\mathbf{x}^{(k)})\| < \text{TOL}$, onde $\text{TOL} = \varepsilon \cdot \|f(\mathbf{x}^{(0)})\|$, pare. $\mathbf{x}^{(k)}$ é a solução do problema.

Caso contrário, vá ao passo 4.

Passo 4: Calcule a Jacobiana $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Passo 5: Resolva: $[\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})]^T \mathbf{d}^{(k)} = f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Passo 6: Faça: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k)}$.

Passo 7: Faça $k = k + 1$ e vá ao passo 2.

Quadro n.º 2 - Método de Newton

No passo 5 do algoritmo esquematizado no quadro n.º 2, devemos resolver um sistema de equações lineares. Como neste trabalho as matrizes serão sempre simétricas e definidas positivas, utilizaremos o método Choleski.

O processo iterativo do método de Newton para uma dimensão é ilustrado na figura 2.1. A solução x^* é calculada pelo método das tangentes. O novo ponto $x^{(k+1)}$ é estimado pelo ponto no qual a tangente corta o eixo das abscissas x .

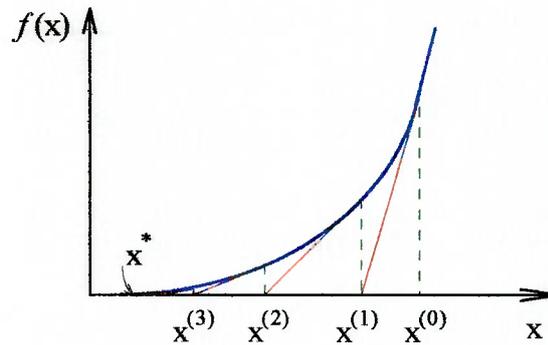


Figura 2.1 - Método de Newton para uma variável (HERSKOVITS, 1995)

2.2 - Classificação dos Problemas de Programação Matemática

Nesta seção falaremos sobre a classificação dos problemas de programação matemática. No item 2.2.1 serão apresentados os conceitos de programação matemática, no item 2.2.2 noções sobre problemas de otimização sem restrições, no item 2.2.3 noções sobre problemas de otimização com restrições de igualdade, no item 2.2.4 noções sobre problemas de otimização com restrições de desigualdade e no item 2.2.5 apresentaremos o problema geral.

2.2.1 - Programação Matemática

A programação matemática tem como objetivo a análise e resolução de problemas do tipo:

minimizar	$f(\mathbf{x})$		
sujeito a	$g_i(\mathbf{x}) = 0,$	$i \in I,$	
	$g_j(\mathbf{x}) \leq 0,$	$j \in D,$	(2.18)
	$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$		

onde a função $f(\mathbf{x})$ é denominada de função objetivo e as funções $g_i(\mathbf{x})$, para $i = 1, \dots, m$, e $g_j(\mathbf{x})$, para $j = 1, \dots, q$, são denominadas restrições. O conjunto finito dos índices das restrições de igualdade é denominado por $I = \{1, \dots, m\}$ e o conjunto finito dos índices das restrições de desigualdade por $D = \{1, \dots, q\}$.

Quando um ponto \mathbf{x} satisfaz a todas as restrições, dizemos que ele é viável. O conjunto de todos os pontos viáveis é chamado de região viável Γ . Quando um ponto \mathbf{x} não satisfaz a alguma restrição, dizemos que ele é inviável. Um ponto viável que minimiza $f(\mathbf{x})$ será indicado por \mathbf{x}^* e será denominado de ponto ótimo.

Os problemas de otimização podem ser divididos em problemas sem restrições e com restrições. Quando os conjuntos finitos I e D forem vazios, ou seja, $I = \emptyset$ e $D = \emptyset$, não existem restrições $g_i(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ e dizemos que se trata de um problema de otimização sem restrições. Quando o problema é da forma explicitada em (2.18), dizemos que se trata de um problema de otimização com restrições.

O processo de otimização da programação matemática, tem como objetivo minimizar ou maximizar uma função $f(\mathbf{x})$. Se ao invés de minimizar a função $f(\mathbf{x})$, quisermos maximizá-la, basta lembrarmos que:

$$\text{maximizar } f(\mathbf{x}) = - \text{minimizar } \{ - f(\mathbf{x}) \} . \quad (2.19)$$

A maioria dos métodos de resolução de problemas de otimização da forma (2.18) são iterativos, ou seja, geram uma seqüência de pontos $\{ \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)} \}$, onde o ponto $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é determinado a partir do ponto anterior. Mais especificadamente $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é determinado por:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \delta^{(k)}, \quad (2.20)$$

onde $\delta^{(k)} = s^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)}$ é o acréscimo dado a cada iteração, $\mathbf{d}^{(k)}$ é a direção do incremento e $s^{(k)}$ é um escalar positivo que regula o tamanho do incremento em cada iteração. A direção $\mathbf{d}^{(k)}$ geralmente decresce a função objetivo para o problema (2.18) e neste caso, a denominamos de direção de decréscimo.

Em geral, os métodos de resolução procuram soluções que são mínimos locais do problema. Em determinados casos onde as hipóteses de convexidade são introduzidas, podemos obter o mínimo global, conforme veremos mais adiante.

2.2.2 - Otimização Sem Restrições

O problema de otimização sem restrições pode ser formulado como:

minimizar $f(\mathbf{x})$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$,	(2.21)
--	--------

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

Neste capítulo, serão estabelecidas condições simples que devem ser satisfeitas por um ponto, para que este seja um mínimo local do problema (2.21).

As condições necessárias e suficientes para que um ponto \mathbf{x}^* seja um mínimo local do problema (2.21) serão estabelecidas mediante os teoremas a seguir (LUENBERGER [9]).

Teorema: Condição Necessária de Otimalidade de Primeira Ordem.

Uma condição necessária para que \mathbf{x}^* seja um mínimo local do problema (2.21) é que o gradiente da função objetivo em \mathbf{x}^* seja nulo, ou seja, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Teorema: Condição Necessária de Segunda Ordem.

Para que \mathbf{x}^* seja um mínimo local do problema (2.21) é necessário que a matriz Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ seja semi-definida positiva, isto é,

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \geq 0, \forall \mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n.$$

Teorema: Condição Suficiente de Otimalidade de Segunda Ordem.

Para que \mathbf{x}^* seja um mínimo local do problema (2.21) é suficiente que o gradiente da função objetivo em \mathbf{x}^* seja nulo, ou seja, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ e que a matriz Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ seja definida positiva, isto é,

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} > 0 \quad \forall \mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}.$$

Definição: Ponto Estacionário.

Um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^n$ é um ponto estacionário do problema de minimização (2.21), se o gradiente da função objetivo $f(\mathbf{x})$ nesse ponto é nulo, ou seja, se

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

O ponto estacionário satisfaz apenas a condição necessária de primeira ordem. Convém observarmos que na realidade os métodos de minimização são baseados na tentativa de localizar um ponto estacionário, que pode não ser um ponto de mínimo local.

2.2.3 - Otimização Com Restrições de Igualdade

Tomaremos inicialmente o estudo para problemas de otimização com restrições de igualdade. Então o problema pode ser formulado como:

minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in I,$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$	(2.22)
--	--------

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrições $g_i(\mathbf{x})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. O conjunto dos índices das restrições de igualdade é definido por $I = \{ 1, \dots, m \}$.

A região viável é definida por:

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i \in I \}. \quad (2.23)$$

Definição: Ponto Regular.

Um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^n$ tal que $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$, é um ponto regular se os vetores gradientes $\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \nabla g_2(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)$, forem linearmente independentes.

Teorema: Condição Necessária de Primeira Ordem (HERSKOVITS [6]).

Seja \mathbf{x}^* um ponto regular das restrições $g_i(\mathbf{x}) = 0$ e seja \mathbf{x}^* um mínimo local do problema (2.22). Então, existe um único vetor $\lambda^* = [\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*] \in \mathfrak{R}^m$ tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Os números reais λ_i^* , $i = 1, 2, \dots, m$, são denominados de multiplicadores de Lagrange.

A condição necessária de primeira ordem para que um ponto viável seja um mínimo local é mostrada no teorema acima, ou seja, o gradiente da função objetivo deve ser uma combinação linear dos gradientes das restrições.

A função Lagrangiana do problema (2.22) é definida por:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}), \quad (2.24)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$.

Então, a condição para que o ponto $[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$ seja um ponto estacionário da função Lagrangiana, é:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

onde:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_\lambda \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Passemos a seguir ao estudo das condições necessárias de segunda ordem. De modo análogo ao que foi feito para as condições de primeira ordem, consideremos o problema (2.22).

Teorema: Condição Necessária de Segunda Ordem (HERSKOVITS [6]).

Seja $[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$ um ponto estacionário da função Lagrangiana e consideremos:

$$\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*). \quad (2.27)$$

A condição necessária de segunda ordem para que o ponto $[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$ seja um mínimo local, é que a matriz $\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ seja semi-definida positiva, isto é,

$$\mathbf{d}^T \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{d} \geq 0, \forall \mathbf{d} \in \{ \mathbf{d} \mid \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T \cdot \mathbf{d} = 0, i = 1, \dots, m \}. \quad (2.28)$$

Na definição (2.28) \mathbf{d} é dito viável. Pode-se concluir que direção viável é uma direção tangente às restrições na solução \mathbf{x}^* , ou seja, é qualquer direção \mathbf{d} que satisfaça $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T \cdot \mathbf{d} = 0$, $i = 1, \dots, m$.

A demonstração do teorema da condição necessária de segunda ordem pode ser efetuada de diversas maneiras, como por exemplo, utilizando o enfoque de eliminação (BERTSEKAS [1,2], FLETCHER [3]), ou via enfoque de penalidade (BERTSEKAS [1,2]). Não nos deteremos na demonstração deste teorema, mas faremos algumas observações relativas à abordagem do enfoque de penalidade, uma vez que essas idéias serão utilizadas nesse trabalho.

A linha de análise tem como princípio a aproximação do problema original (2.22) por uma seqüência de problemas sem restrições, que envolve uma penalização por violação de restrições, e a seguir, aplicar as condições de otimalidade para os problemas sem restrições.

Consideremos a seguinte função:

$$P^{(\xi)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \|g_i(\mathbf{x})\|^2, \quad (2.29)$$

onde $P^{(\xi)}(\mathbf{x})$ é chamada de função penalidade e o parâmetro ξ é um escalar positivo. Em particular, ξ pode assumir valores como 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 , ...

O termo $\frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \|g_i(\mathbf{x})\|^2$ impõe uma penalidade por violar as restrições $g_i(\mathbf{x}) = 0$.

Indiquemos por $S = \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ uma vizinhança do ponto ótimo no qual $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

Demonstra-se em BERTSEKAS [1,2], que se $\mathbf{x}^{(\xi)}$ é solução do problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & P^{(\xi)}(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \mathbf{x} \in S, \end{array} \quad (2.30)$$

então:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(\xi)} &= \mathbf{x}^* . \\
\text{b) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\xi)})\| &= \mathbf{0} , \text{ onde} \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\xi)})^T &= [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}^{(\xi)}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}^{(\xi)}) \quad \dots \quad \mathbf{g}_m(\mathbf{x}^{(\xi)})] . \\
\text{c) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \{ \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(\xi)}) \} &= \boldsymbol{\lambda}^* , \text{ onde} \\
\boldsymbol{\lambda}^* &= - [\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \quad \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)]^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T \nabla f(\mathbf{x}^*) \\
\text{e} \\
\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^T &= [\nabla \mathbf{g}_1(\mathbf{x}^*) \quad \nabla \mathbf{g}_2(\mathbf{x}^*) \quad \dots \quad \nabla \mathbf{g}_m(\mathbf{x}^*)] .
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Além disto, demonstra-se em BERTSEKAS [1,2] que $[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$ satisfazem as condições (2.30) e (2.31).

Passaremos a seguir ao estudo das condições suficientes para o problema com restrições de igualdade.

As condições suficientes de otimalidade que veremos a seguir, também podem ser demonstradas por eliminação (FLETCHER [3]), ou utilizando o enfoque do Lagrangiano Aumentado (BERTSEKAS [1,2]).

Teorema: Condições Suficientes de Segunda Ordem (BERTSEKAS [1,2]).

Sejam $f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. Sejam $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^n$ e $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathfrak{R}^m$, satisfazendo:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} ,$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0} ,$$

$$\mathbf{d}^T \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{d} > \mathbf{0} , \forall \mathbf{d} \in \{ \mathbf{d} \mid \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*)^T \cdot \mathbf{d} = 0 , i = 1, \dots, m \} ,$$

onde $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ é viável.

Então \mathbf{x}^* é um mínimo local estrito de $f(\mathbf{x})$ sujeito a $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Não nos deteremos na demonstração do teorema acima, mas faremos algumas observações relativas à demonstração utilizando o enfoque do Lagrangiano Aumentado.

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \|\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

que possui o mesmo mínimo local que o problema original (2.22).

A função Lagrangiana do problema (2.32) é dada por:

$$L_c(\mathbf{x}, \xi, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \|\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\|^2, \quad (2.33)$$

onde ξ é um escalar positivo. A função $L_c(\mathbf{x}, \xi, \lambda)$ é chamada de Lagrangiano Aumentado.

O gradiente em relação a \mathbf{x} da função (2.33) é dado por:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L_c(\mathbf{x}, \xi, \lambda) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \xi \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}). \quad (2.34)$$

Derivando em relação a \mathbf{x} a função (2.34), temos uma matriz definida por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L_c(\mathbf{x}, \xi, \lambda) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m [\lambda_i + \xi \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{x})] \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \\ + \sum_{i=1}^m \xi \cdot \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Em particular, se \mathbf{x}^* e λ^* satisfizerem as condições suficientes de segunda ordem, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L_c(\mathbf{x}^*, \xi, \lambda^*) &= \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \xi \cdot \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

E de (2.35) temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\mathbf{x}\mathbf{x}} L_c(\mathbf{x}^*, \xi, \lambda^*) &= \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \xi \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T \\ &= \nabla^2_{\mathbf{x}\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) + \sum_{i=1}^m \xi \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Pelo teorema das condições suficientes de segunda ordem, $\mathbf{d}^T \nabla^2_{\mathbf{x}\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \mathbf{d} > 0$, para todo $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, assim como $\mathbf{d}^T \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} = 0$.

BERTSEKAS [1,2] demonstra um teorema que com base nas conclusões acima, implica numa existência de um escalar β tal que a matriz $\nabla^2_{\mathbf{x}\mathbf{x}} L_c(\mathbf{x}^*, \xi, \lambda^*)$ é definida positiva $\forall \xi > \beta$. Então, \mathbf{x}^* é um ponto de mínimo local estrito do problema (2.22).

As observações acima nos mostram que podemos minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, calculando o mínimo sem restrições do Lagrangiano Aumentado $L(\mathbf{x}, \xi, \lambda)$ em relação a \mathbf{x} . A dificuldade encontrada, é que o multiplicador de Lagrange λ^* não é conhecido. Mas resulta que, utilizando em vez de λ^* aproximações deste multiplicador, obtemos um algoritmo muito útil, conhecido como algoritmo do Lagrangiano Aumentado, que veremos nas seções 3.2.1.3 e 3.2.2.3, que é o algoritmo utilizado neste trabalho para solucionar os problemas de contato.

2.2.4 - Otimização Com Restrições de Desigualdade

Tomaremos agora o estudo apenas para os problemas de otimização com restrições de desigualdade. Então o problema pode ser formulado como:

minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j \in D,$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$	(2.38)
---	--------

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrições $g_j(\mathbf{x})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. O conjunto dos índices das restrições de desigualdade é definido por $D = \{ 1, \dots, q \}$.

A região viável é definida por:

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in D \}. \quad (2.39)$$

Dado o problema (2.38), indiquemos por:

$$A(\mathbf{x}) = \{ j \mid g_j(\mathbf{x}) = 0 \} \quad (2.40)$$

o conjunto das restrições de desigualdades ativas em \mathbf{x} . As restrições de desigualdades $j \in A(\mathbf{x})$, são denominadas restrições ativas em \mathbf{x} . Se $j \notin A(\mathbf{x})$, dizemos que as restrições $g_j(\mathbf{x})$ são inativas em \mathbf{x} .

Definição: Ponto Regular.

Um ponto $\mathbf{x}^* \in \Gamma$ é um ponto regular das restrições, se os vetores $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$, para $j \in A(\mathbf{x}^*)$, forem linearmente independentes.

Teorema: Condições Necessárias de Primeira e Segunda Ordem.

Se $\mathbf{x}^* \in \Gamma$ é um mínimo local de $f(\mathbf{x})$ em Γ , então para qualquer direção viável $\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n$, temos:

- i) $\mathbf{d}^T \cdot \nabla f(\mathbf{x}^*) \geq 0$.
- ii) Se $\mathbf{d}^T \cdot \nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$, então $\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \geq 0$.

Seja \mathbf{x}^* um ponto regular e um mínimo local do problema (2.38). Então, é óbvio que \mathbf{x}^* também é ponto de mínimo local para o problema:

minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in A(\mathbf{x}^*),$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n.$	(2.41)
--	--------

Analisando o problema (2.41), notamos que ele é equivalente ao problema (2.38), exceto que suas restrições inativas em \mathbf{x}^* foram descartadas. De fato, as restrições inativas em \mathbf{x}^* não influenciam na solução \mathbf{x}^* . Com isso, elas podem ser ignoradas nas afirmativas referentes às condições de otimalidade.

No ponto de mínimo local do problema (2.41), as restrições ativas podem ser tratadas como restrições de igualdade. Em particular, se \mathbf{x}^* é um mínimo local do problema (2.38), então \mathbf{x}^* também é mínimo local do problema somente com restrições de igualdade (2.41).

Então, pelo teorema das condições necessárias de primeira e segunda ordem, existe um único vetor $\boldsymbol{\lambda}^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_q^*] \in \mathfrak{R}^q$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ \lambda_j^* &= 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*). \end{aligned} \quad (2.42)$$

A condição $\lambda_j^* = 0$, para $j \notin A(\mathbf{x}^*)$, é chamada de condição de complementaridade e podemos representá-la da seguinte maneira:

$$\lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad , \text{ para } j = 1, \dots, q. \quad (2.43)$$

Então, definindo a função Lagrangiana como:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}), \quad (2.44)$$

as condições acima podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= \mathbf{0}, \\ \lambda_j^* &= 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Através da primeira consequência do teorema das condições necessárias de primeira e segunda ordem, obtemos uma condição necessária para a equação (2.43), definida por:

$$\lambda_j^* \geq 0. \quad (2.46)$$

Para verificarmos essa afirmativa, vamos introduzir as funções:

$$\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle = \max \{ 0, g_j(\mathbf{x}) \}, \quad j = 1, \dots, q. \quad (2.47)$$

Consideremos o seguinte problema:

$$\text{minimizar } P^{(\xi)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot [\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle]^2, \quad (2.48)$$

onde $P^{(\xi)}(\mathbf{x})$ é chamada de função penalidade e o parâmetro ξ é um escalar positivo. Em particular, ξ pode assumir valores como 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 , ...

Indiquemos por $S = \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ uma vizinhança do ponto ótimo no qual $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

As funções $[\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle]^2$ são continuamente diferenciáveis com gradiente igual a $2 \cdot \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle \cdot \nabla [\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle]$.

Se $\mathbf{x}^{(\xi)}$ minimiza $P^{(\xi)}(\mathbf{x})$ em S , demonstra-se em BERTSEKAS [1,2] os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(\xi)} &= \mathbf{x}^*, \\ \text{b) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \{ \xi \cdot \langle g_j(\mathbf{x}^{(\xi)}) \rangle \} &= \lambda_j^*, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como $\langle g_j(\mathbf{x}) \rangle \geq 0$, obtemos $\lambda_j^* \geq 0$ para todo $j \in D$.

A seguir, demonstraremos que se $\mathbf{d}^T \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}) < 0$ para $j \in A(\mathbf{x}^*)$, então \mathbf{d} é uma direção viável (HERSKOVITS [6]). A demonstração pode ser feita como segue:

Assumiremos como contra-exemplo, que a condição (2.46) não seja verdadeira. Então, para algum $l \in A(\mathbf{x}^*)$, teremos $\lambda_l^* < 0$. Como \mathbf{x}^* é um ponto regular, dado $\delta_j < 0, j \in A(\mathbf{x}^*)$, podemos achar uma direção viável \mathbf{d} que verifique $\mathbf{d}^T \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \delta_j$. De (2.42) temos:

$$\mathbf{d}^T \cdot \nabla f(\mathbf{x}^*) = - \sum_{j \in A(\mathbf{x}^*), j \neq l} \delta_j \cdot \lambda_j^* - \delta_l \cdot \lambda_l^*. \quad (2.50)$$

Fazendo agora δ_j para $j \in A(\mathbf{x}^*)$ e $j \neq l$, pequeno o suficiente, podemos obter uma direção viável \mathbf{d} tal que $\mathbf{d}^T \cdot \nabla f(\mathbf{x}^*) < 0$. Então \mathbf{d} é a direção de decréscimo de $f(\mathbf{x})$, embora a conclusão seja contraditória ao teorema das condições necessárias de primeira e segunda ordem. Esses resultados constituem as condições de otimalidade de Kunh-Tucker.

Teorema: Condição Necessária de Primeira Ordem - Kunh-Tucker.

Seja \mathbf{x}^* um ponto regular das restrições $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ e um mínimo local do problema

(2.38). Então existe um único vetor $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_q^*] \in \mathfrak{R}^q$ tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$\lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad , \text{ para } j = 1, \dots, q,$$

$$\lambda_j^* = 0 \quad , \text{ para } j \notin A(\mathbf{x}^*),$$

$$\lambda_j^* \geq 0 \quad , \text{ para } j \in D,$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad , \text{ para } j \in D.$$

Teorema: Condição Necessária de Segunda Ordem.

Seja \mathbf{x}^* um ponto regular das restrições $g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$ e um ponto de mínimo local do problema de programação matemática (2.38). Então, existe um único vetor $\lambda^* \in \mathfrak{R}^q$ que satisfaz as condições de Kuhn-Tucker, para o qual a matriz

$$\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla^2 g_j(\mathbf{x}^*)$$

é semi-definida positiva, ou seja,

$$\mathbf{y}^T \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in T, \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

onde

$$T \cong \{ \mathbf{y} \mid \nabla g_j^T(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ para } j \in A(\mathbf{x}^*) \}.$$

Teorema: Condição Suficiente de Segunda Ordem (Kuhn - Tucker).

Seja \mathbf{x}^* um ponto que satisfaça as restrições $g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$. Suponha que exista um vetor $\lambda^* \in \mathfrak{R}^q$ tal que:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad j \in D,$$

$$\lambda_j^* = 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*),$$

e que a matriz $\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ seja definida positiva em T, ou seja:

$$\mathbf{y}^T \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \mathbf{y} > 0, \quad \forall \mathbf{y} \in T.$$

Então \mathbf{x}^* é um ponto de mínimo local estrito do problema (2.38).

2.2.5 - Problema Geral

O problema geral de otimização com restrições pode ser formulado como:

minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in I,$ $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j \in D,$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$	(2.51)
--	--------

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrições $g_i(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. O conjunto dos índices das restrições de igualdade é definido por $I = \{ 1, \dots, m \}$ e o conjunto dos índices das restrições de desigualdade é definido por $D = \{ 1, \dots, q \}$.

A região viável é definida por:

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i \in I \quad \text{e} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in D \}. \quad (2.52)$$

Definição: Ponto Regular.

Um ponto $\mathbf{x}^* \in \Gamma$ é um ponto regular das restrições, se os vetores $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$ para $i \in I$ e $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$ para $j \in A(\mathbf{x}^*)$, forem linearmente independentes.

Neste capítulo, também serão estabelecidas condições simples que devem ser satisfeitas por um ponto, para que este seja um mínimo local do problema (2.51). Também serão descritas as propriedades de convexidade da função objetivo, que asseguram que o ponto encontrado na solução do problema (2.51) seja um ponto de mínimo global.

Observemos que se \mathbf{x}^* é um mínimo local do problema (2.51), então \mathbf{x}^* também é um mínimo local do problema:

minimizar	$f(\mathbf{x})$		
sujeito a	$g_i(\mathbf{x}) = 0,$	$i \in I,$	
	$g_j(\mathbf{x}) = 0,$	$j \in A(\mathbf{x}^*),$	(2.53)
	$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n .$		

Se \mathbf{x}^* é um ponto regular do problema (2.53), então existem multiplicadores de Lagrange $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ e $\lambda_j^* \in A(\mathbf{x}^*)$, tais que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in A(\mathbf{x}^*)} \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} . \quad (2.54)$$

Atribuindo valor nulo para os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições não ativas, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} , \\ \lambda_j^* &= 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*) . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ou seja, definindo a função Lagrangiana como:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}) , \quad (2.56)$$

as condições acima podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= \mathbf{0} , \\ \lambda_j^* &= 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*) . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Existe um fato importante relativo aos multiplicadores λ_j^* . Eles são não negativos, ou seja, $\lambda_j^* \geq 0, j \in D$. Para verificarmos essa afirmativa, consideremos o seguinte problema:

$$\text{minimizar } P^{(\xi)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \|g_i(\mathbf{x})\|^2 + \sum_{j=1}^q \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot [< g_j(\mathbf{x}) >]^2, \quad (2.58)$$

onde $P^{(\xi)}(\mathbf{x})$ é chamada de função penalidade e o parâmetro ξ é um escalar positivo.

Indiquemos por $S = \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ uma vizinhança do ponto ótimo no qual $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in S$.

Se $\mathbf{x}^{(\xi)}$ minimiza $P^{(\xi)}(\mathbf{x})$ em S , demonstra-se em BERTSEKAS [1,2] os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(\xi)} &= \mathbf{x}^* . \\ \text{b) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \{ \xi \cdot g_i(\mathbf{x}^{(\xi)}) \} &= \lambda_i^* \quad , \quad i = 1, \dots, m . \\ \text{c) } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \{ \xi \cdot < g_j(\mathbf{x}^{(\xi)}) > \} &= \lambda_j^* \quad , \quad j = 1, \dots, q . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Como $< g_j(\mathbf{x}) > \geq 0$, obtemos $\lambda_j^* \geq 0$ para todo j .

Consideremos então o problema geral de programação matemática (2.51). Os fatos estudados acima, nos conduzem ao seguinte teorema conhecido como teorema de Kuhn-Tucker, que é uma condição necessária de otimalidade, demonstrado em FLETCHER [3].

Teorema: Condição Necessária de Primeira Ordem (Kuhn-Tucker).

Seja \mathbf{x}^* uma solução do problema de programação matemática (2.51). Se \mathbf{x}^* é um ponto regular, então existe um único vetor $\boldsymbol{\lambda}^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \lambda_{m+1}^*, \dots, \lambda_{m+q}^*]$, tal que:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad i \in I, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad j \in D, \\ \lambda_j^* &\geq 0, \quad j \in D, \\ \lambda_j^* &= 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*), \\ \lambda_i^* \cdot g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad \forall i, \\ \lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad \forall j. \end{aligned} \tag{2.60}$$

As condições em (2.60) são conhecidas como condições de Kuhn-Tucker e as condições $\lambda_i^* \cdot g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \forall i$, e $\lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) = 0, \forall j$, são chamadas de condições de complementaridade.

Teorema: Condição Necessária de Segunda Ordem.

Seja \mathbf{x}^* um ponto regular das restrições $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ e $g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$, e um ponto de mínimo local do problema de programação matemática (2.51). Então, existe um único vetor $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathfrak{R}^{m+q}$ que satisfaz as condições de Kuhn-Tucker, para o qual a matriz

$$\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla^2 g_j(\mathbf{x}^*)$$

é semi-definida positiva, ou seja,

$$\mathbf{y}^T \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in T, \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

onde

$$T \cong \{ \mathbf{y} \mid \nabla g_j^T(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ para } j \in A(\mathbf{x}^*) \text{ e } \nabla g_i^T(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ para } i \in I \}.$$

Teorema: Condição Suficiente de Segunda Ordem (Kuhn - Tucker).

Seja \mathbf{x}^* um ponto que satisfaça as restrições $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ e $g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$. Suponha que exista um vetor $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathfrak{R}^{m+q}$ tal que:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad j \in D,$$

$$\lambda_j^* = 0, \quad j \notin A(\mathbf{x}^*),$$

e que a matriz $\nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ seja definida positiva em T, ou seja:

$$\mathbf{y}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{y} > 0, \quad \forall \mathbf{y} \in T.$$

Então \mathbf{x}^* é um ponto de mínimo local estrito do problema (2.51).

Até aqui foram estabelecidas condições para que a solução do problema de programação matemática com restrições (2.51) seja um ponto de mínimo local. Para que se estenda esta definição para um ponto de mínimo global, é necessário que o problema possua propriedades de convexidade, para que a solução encontrada seja não apenas um ponto de mínimo local, mas também um ponto de mínimo global.

Suponhamos que as funções $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i \in I$, e $g_j(\mathbf{x})$, $j \in D$, sejam convexas em \mathfrak{R}^n . Neste caso o problema (2.51) denomina-se um problema de programação convexa. Os seguintes teoremas são aplicados à programação convexa:

Teorema: Convergência Global para Funções Convexas.

Toda solução \mathbf{x}^* de um problema de programação convexa é uma solução global.

Teorema: Convergência Global para Funções Estritamente Convexas.

Se num problema de programação convexa a função objetivo $f(\mathbf{x})$ for estritamente convexa na região viável Γ , então toda solução global é única.

Algoritmos de Programação Matemática

3.1 - Algoritmos de Programação Matemática Sem Restrições

Nesta seção falaremos sobre algoritmos de programação matemática sem restrições. No item 3.1.1 apresentaremos o método de Newton com busca unidimensional e no item 3.1.2 abordaremos os métodos Quase-Newton, dando ênfase ao BFGS pelo fato de possuir a forma produto.

3.1.1 - Método de Newton com Busca Unidimensional

Consideremos o seguinte problema de otimização sem restrições:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \end{array} \quad (3.1)$$

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

Pelas condições suficientes de segunda ordem, para que um ponto \mathbf{x}^* seja um mínimo local do problema (3.1), a matriz Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ deve ser definida positiva. Então, em um ponto próximo a \mathbf{x}^* ela também o será e espera-se um bom comportamento do método perto da solução (LUENBERGER [9]).

Para valores longe da solução, o método de Newton perde a sua eficiência. E para contornarmos este problema, são feitas modificações no método, o que será discutido nesta seção.

Uma modificação usual é a introdução da busca unidimensional. Neste caso, um parâmetro s é introduzido na equação (2.16), resultando na seguinte equação:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - s^{(k)} [\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (3.2)$$

onde o parâmetro $s^{(k)}$ é um escalar positivo que minimizar $f(\mathbf{x})$ na direção $\mathbf{d}^{(k)}$, dada por:

$$\mathbf{d}^{(k)} = [\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.3)$$

Perto da solução o parâmetro $s^{(k)} \cong 1$.

O que se faz na realidade, é uma vez fixados $\mathbf{d}^{(k)}$ e $\mathbf{x}^{(k)}$, transformar a função $f(\mathbf{x})$ em uma função de uma única variável, que no caso é s definida por $\varphi(s) = f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)})$. A seguir minimizamos φ em relação a s , para $s \geq 0$, e definimos $s^{(k)}$ a solução deste problema. O parâmetro $s^{(k)}$ regula o tamanho do incremento dado na direção $\mathbf{d}^{(k)}$. A esse processo dá-se o nome de busca unidimensional.

O método de Newton com busca unidimensional pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método de Newton com Busca Unidimensional:

Passo 1: Faça $k = 0$. Estime um valor inicial para $\mathbf{x}^{(0)}$.

Passo 2: Calcule o gradiente $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ para o ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)}$.

Passo 3: Se $\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\| < \text{TOL}$, onde $\text{TOL} = \varepsilon \cdot \|\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})\|$, pare.
 $\mathbf{x}^{(k)}$ é a solução do problema.

Caso contrário, vá ao passo 4.

Passo 4: Calcule a Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Passo 5: Resolva: $[\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{d}^{(k)}$.

Passo 6: Busca unidimensional: Calcule o escalar $s^{(k)}$,
 minimizando a função $\varphi(s) = f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)})$
 em relação à variável s , $s \geq 0$.

Seja $s^{(k)}$ a solução do problema.

Passo 7: Faça: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - s^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)}$.

Passo 8: Faça $k = k + 1$ e vá ao passo 2.

Quadro n.º 3 - Método de Newton com busca unidimensional

Existem diversos métodos de busca unidimensional (passo 6 do algoritmo esquematizado no quadro n.º 3) para a determinação do parâmetro $s^{(k)}$. Neste trabalho utilizaremos a busca unidimensional sugerida por LAURSEN [8,17]. Para melhor compreensão do passo 6, consideremos a função auxiliar:

$$\varphi(s) = f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)}) \quad (3.4)$$

e analisemos seu valor para $s = 0$ e $s = 1$.

Para $s = 0$, temos:

$$\varphi(0) = f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.5)$$

Para $s = 1$ (que é o método de Newton), temos:

$$\varphi(1) = f(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k)}). \quad (3.6)$$

Na figura 3.1 é ilustrado um intervalo ao qual pode pertencer o escalar s para garantir o decréscimo suficiente.

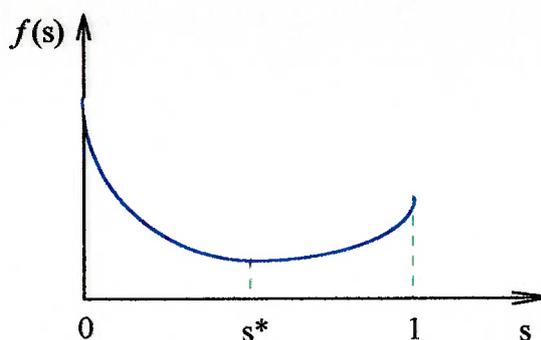


Figura 3.1 - Intervalo aceitável de s

Conforme já mencionamos, a busca unidimensional tem objetivo de minimizar a função $\varphi(s)$. A condição necessária de mínimo de $\varphi(s)$ é dada por $\frac{d\varphi}{ds}(s) = 0$. Então:

$$-\frac{d\varphi}{ds}(s) = G(s) = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)}) \cdot \mathbf{d}^{(k)} = 0. \quad (3.7)$$

Computacionalmente não convém obter exatamente a condição (3.7), havendo a necessidade de um critério de parada. O critério de parada sugerido por LAURSEN [8,17] encontra-se no passo 3 do algoritmo descrito no quadro n.º 4. Além disto, por questões numéricas só estamos interessados em procurar valores para $s \in (0,1]$. Se $s^{(k)}$ estiver fora desse intervalo, adotamos o valor 1 para $s^{(k)}$. O algoritmo da busca unidimensional é apresentado da seguinte maneira:

Método da Busca Unidimensional:

Passo 1: Inicialize $s = 1$.

Passo 2: Calcule: $G_c = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \mathbf{d}^{(k)}$
e $G(s) = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)}) \cdot \mathbf{d}^{(k)}$.

Passo 3: Estime um valor para o parâmetro de convergência STOL.
Se $[(|G(s)| > \text{STOL} * |G_c|) \text{ ou } (G(s) * G_c < 0,0)]$,
então, itere para $s \in (0,1]$ até $|G(s)| \leq \text{STOL} * |G_c|$.

3.1.2 - Métodos Quase-Newton

Os métodos Quase-Newton surgiram a partir de modificações feitas no método de Newton, que tem boas propriedades de convergência para “valores próximos” da solução (LUENBERGER [9]). Além disto, o método de Newton possui a desvantagem de precisarmos calcular a cada iteração a matriz das derivadas segundas $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ e em seguida, resolvermos um sistema de equações.

Para evitar essas inconveniências, além da busca unidimensional mencionada na seção anterior, os métodos Quase-Newton procuram aproximar a matriz Hessiana ou sua inversa, ao invés de calculá-la de maneira exata.

Os métodos Quase-Newton estão enquadrados em um grupo de métodos de decréscimo, que geram seqüência de pontos a partir de um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$. A solução \mathbf{x}^* é calculada pelo método das secantes. Na k -ésima iteração, o ponto $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é gerado a partir do ponto anterior $\mathbf{x}^{(k)}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - s^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)}, \quad (3.8)$$

onde $s^{(k)}$ é um escalar que minimiza a função $f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)})$ e $\mathbf{d}^{(k)}$ é uma direção de decréscimo, ou seja,

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.9)$$

A condição (3.9) é denominada de condição de decréscimo. Consideremos:

$$\delta^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \quad (3.10)$$

e

$$\gamma^{(k)} = \nabla f^{(k+1)} - \nabla f^{(k)}. \quad (3.11)$$

A condição Quase-Newton, ou condição secante, que garante que a matriz $\mathbf{B}^{(k)} \equiv [\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}$ é definida por:

$$\mathbf{B}^{(k)} \cdot \gamma^{(k)} = \delta^{(k)}. \quad (3.12)$$

Nos métodos Quase-Newton a seqüência de pontos gerados é definida por:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - s^{(k)} \cdot \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (3.13)$$

onde $s^{(k)}$ é um escalar positivo e $\mathbf{B}^{(k)}$ é uma matriz $n \times n$. A matriz $\mathbf{B}^{(k)}$ é a aproximação da inversa da Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})$. A direção de decréscimo é definida por:

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.14)$$

Pela expressão (3.13), notamos que as alterações no método de Newton conforme FLETCHER [3] e GILL [4,5] são:

i) Acréscimo do coeficiente $s^{(k)}$ (busca unidimensional):

O coeficiente $s^{(k)}$ é escolhido de modo a minimizar a função $f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)})$, ou seja, $s^{(k)}$ é um escalar não negativo que satisfaz:

$$f(\mathbf{x}^{(k)} - s^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)}) = \min \{ f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)}), s \geq 0 \} \\ 0 \leq s < 1. \quad (3.15)$$

ii) Aproximação da matriz inversa da Hessiana.

Como mencionamos anteriormente, nos métodos Quase-Newton a matriz inversa da Hessiana é atualizada a cada iteração, ao invés de calculá-la de maneira exata. A construção da matriz atualizada é feita a partir das informações do comportamento da função $f(\mathbf{x})$, bem como do seu gradiente (GILL [4,5]).

A atualização da inversa da Hessiana se dá a partir da geração de uma seqüência de matrizes $\mathbf{B}^{(0)}$, $\mathbf{B}^{(1)}$, ..., $\mathbf{B}^{(k)}$, onde a cada iteração a matriz $\mathbf{B}^{(k+1)}$ é calculada a partir da matriz imediatamente anterior $\mathbf{B}^{(k)}$. Se não for possível obtermos as informações iniciais da matriz Hessiana, adotamos como aproximação inicial de $\mathbf{B}^{(0)}$, a matriz identidade.

Depois de determinar o ponto $\mathbf{x}^{(k+1)}$, uma nova aproximação $\mathbf{B}^{(k+1)}$ é obtida atualizando $\mathbf{B}^{(k)}$. Essa atualização é definida da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \mathbf{U}^{(k)}, \quad (3.16)$$

onde $\mathbf{U}^{(k)}$ é uma matriz de atualização.

Muitas formas de atualização da matriz $\mathbf{B}^{(k)}$ foram desenvolvidas, entretanto, apenas as fórmulas sugeridas por Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) e Shanno (1970) serão descritas nesta seção. A fórmula sugerida para atualizar a matriz $\mathbf{B}^{(k+1)}$ é calculada a partir de $\mathbf{B}^{(k)}$ e é definida por:

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \left(1 + \frac{\gamma^{(k)T} \cdot \mathbf{B}^{(k)} \cdot \gamma^{(k)}}{\delta^{(k)T} \cdot \gamma^{(k)}} \right) \cdot \frac{\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)T}}{\delta^{(k)T} \cdot \gamma^{(k)}} - \left(\frac{\delta^{(k)} \cdot \gamma^{(k)T} \cdot \mathbf{B}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)} \cdot \gamma^{(k)} \cdot \delta^{(k)T}}{\delta^{(k)T} \cdot \gamma^{(k)}} \right)$$

$$\text{onde } \delta^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \quad \text{e} \quad \gamma^{(k)} = \nabla f^{(k+1)} - \nabla f^{(k)}. \quad (3.17)$$

A fórmula (3.17) é conhecida como fórmula BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno), cujo bom desempenho na prática foi comprovado nas experiências computacionais, por exemplo, mencionado por FLETCHER [3].

Além disto, esta fórmula mantém as propriedades da matriz Hessiana, ou seja, ela continua simétrica e definida positiva.

A fórmula (3.17) está escrita na forma matricial. Ela também pode ser escrita na forma produto, como:

$$\mathbf{B}^{(k)} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(k)} * \mathbf{w}^{(k)T} \right) * \mathbf{B}^{(k-1)} * \left(\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(k)} * \mathbf{v}^{(k)T} \right), \quad (3.18)$$

onde:

$$\mathbf{v}^{(k)} = \frac{\delta^{(k)}}{\delta^{(k)} * \gamma^{(k)}}$$

$$\alpha^{(k)} = \sqrt{\frac{-s^{(k)} * \gamma^{(k)} * \delta^{(k)}}{\nabla f^{(k-1)} * \delta^{(k)}}} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{w}^{(k)} = -\gamma^{(k)} + \alpha^{(k)} * \nabla f^{(k-1)}$$

$$\text{e } \delta^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \quad \text{e} \quad \gamma^{(k)} = \nabla f^{(k)} - \nabla f^{(k-1)}.$$

A fórmula produto (3.18) e (3.19) é eficiente computacionalmente, porque fazemos o tempo todo operações vetoriais. A equação $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{d}^{(k)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)T}) \mathbf{B}^{(k-1)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (3.20)$$

onde k é o contador das iterações do BFGS. A equação (3.20) para $k = 1$ é dada por:

$$\mathbf{d}^{(1)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{w}^{(1)T}) \mathbf{B}^{(0)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(1)}). \quad (3.21)$$

Para $k = 2$, a equação (3.14) é definida por:

$$\mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \nabla f(\mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.22)$$

Substituindo $\mathbf{B}^{(2)}$ em função de $\mathbf{B}^{(1)}$, temos:

$$\mathbf{d}^{(2)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{w}^{(2)T}) \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(2)} \mathbf{v}^{(2)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.23)$$

O que é equivalente a escrever:

$$\mathbf{d}^{(2)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{w}^{(2)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{w}^{(1)T}) \mathbf{B}^{(0)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(2)} \mathbf{v}^{(2)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.24)$$

Para $k = 3$, a equação (3.14) é definida por:

$$\mathbf{d}^{(3)} = \mathbf{B}^{(3)} \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}). \quad (3.25)$$

Substituindo $\mathbf{B}^{(3)}$ em função de $\mathbf{B}^{(2)}$, obtemos:

$$\mathbf{d}^{(3)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(3)} \mathbf{w}^{(3)T}) \mathbf{B}^{(2)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(3)} \mathbf{v}^{(3)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}). \quad (3.26)$$

Substituindo $\mathbf{B}^{(2)}$ em função de $\mathbf{B}^{(1)}$, obtemos:

$$\mathbf{d}^{(3)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(3)} \mathbf{w}^{(3)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{w}^{(2)T}) \mathbf{B}^{(1)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(2)} \mathbf{v}^{(2)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(3)} \mathbf{v}^{(3)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}). \quad (3.27)$$

O que é equivalente a escrever:

$$\mathbf{d}^{(3)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(3)} \mathbf{w}^{(3)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{w}^{(2)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{w}^{(1)T}) \mathbf{B}^{(0)} (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(2)} \mathbf{v}^{(2)T}) (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(3)} \mathbf{v}^{(3)T}) \nabla f(\mathbf{x}^{(3)}). \quad (3.28)$$

E assim sucessivamente. Então, a solução do sistema $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ mostrado acima, pode ser representada pelo seguinte algoritmo:

Algoritmo para solução do sistema: $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Passo 1: Seja k o contador das iterações do BFGS.

Considere o vetor \mathbf{p} definido por:

$$\mathbf{p} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Passo 2: Itere em i , de $i = k$ até $i = 1$, de -1 em -1 , para o vetor \mathbf{p} definido como:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(i)} \mathbf{v}^{(i)T}) \mathbf{p}.$$

Passo 3: Calcule o vetor \mathbf{q} definido por: $\mathbf{q} = \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{p}$.

Passo 4: Itere em i , de $i = 1$ até $i = k$, de 1 em 1 , para o vetor \mathbf{q} dado por:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i)} \mathbf{w}^{(i)T}) \mathbf{q}.$$

Então, a direção $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{q}$.

Quadro n.º 5 - Algoritmo para a solução do sistema $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$

O método BFGS com busca unidimensional pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método BFGS:

- Passo 1: Faça $k = 0$. Estime um valor inicial para $\mathbf{x}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$.
- Passo 2: Calcule o gradiente $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ para o ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)}$.
- Passo 3: Se $\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\| < \text{TOL}$, onde $\text{TOL} = \varepsilon \cdot \|\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})\|$, pare. $\mathbf{x}^{(k)}$ é a solução do problema.
Caso contrário, vá ao passo 4.
- Passo 4: Calcule a direção $\mathbf{d}^{(k)}$:
 $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$, pelo algoritmo do quadro n.º 5.
- Passo 5: Busca unidimensional (algoritmo descrito no quadro n.º 4).
Minimize a função $\varphi(s) = f(\mathbf{x}^{(k)} - s \cdot \mathbf{d}^{(k)})$
em relação à variável s , $s \geq 0$.
Seja $s^{(k)}$ a solução do problema.
- Passo 6: Atualize \mathbf{x} .
Faça: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - s^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)}$.
- Passo 7: Faça $k = k + 1$ e vá ao passo 2.

Quadro n.º 6 - Método do BFGS

Existem na literatura diversas outras variantes do método Quase-Newton. Neste trabalho utilizaremos uma combinação entre o método de Newton original com o BFGS. O algoritmo Newton / Quase-Newton é descrito como segue:

Método de Newton / Quase-Newton:

I) Processo de inicialização das iterações.

- a) Estime um valor inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.
- b) Calcule o valor da função $\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$ e da Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(0)})$.
- c) Calcule a direção inicial $\mathbf{d}^{(0)}$ resolvendo o sistema de equação linear:
- $$[\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(0)})]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = -\mathbf{d}^{(0)}.$$
- d) Inicialize $G_c = \mathbf{d}^{(0)} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$ e faça $GI = G_c$.
- e) Inicialize o contador j das iterações do BFGS e o contador i do método de Newton: $i = 0, j = 0$.

II) Itere em i até atingir a solução.

- a) Busca unidimensional.
- i) Inicialize: $s^{(i)} = 1,0$.
- ii) Calcule: $G(s^{(i)}) = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^{(i)} - s^{(i)} \cdot \mathbf{d}^{(i)})$.
- iii) Performance requerida na busca unidimensional:
- Se $(|G(s^{(i)})| > \text{STOL} * |G_c|)$ ou $(G(s^{(i)}) * G_c < 0,0)$,
então itere para $s^{(i)} \in (0,1]$ até $|G(s^{(i)})| \leq \text{STOL} * |G_c|$.
- iv) Incremente: $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - s^{(i)} \cdot \mathbf{d}^{(i)}$.
- b) Teste a divergência: Se $(\|\nabla f(\mathbf{x}^{(i+1)})\| > \|\nabla f(\mathbf{x}^{(i)})\|)$,
então vá para o quadro n.º 9.
- c) Teste a solução do problema: Se $(G_c \leq \text{ETOL} * GI)$,
então pare, solução satisfeita.
- d) Analise o passo da busca: Se $(s^{(i)} < 0,001)$,
então vá para o quadro n.º 9.
- e) Analise o limite de iterações do BFGS: Se $(j = \text{max_bfgs})$,
então vá para o quadro n.º 9.
- f) Vá para o quadro n.º 8.

Método do BFGS:

a) Incremente as iterações: $i = i + 1$, $j = j + 1$.

b) Fórmula Produto do BFGS.

Calcule os vetores $\mathbf{v}^{(j)}$ e $\mathbf{w}^{(j)}$, onde:

$$\mathbf{v}^{(j)} = \frac{\mathbf{d}^{(i-1)}}{\mathbf{d}^{(i-1)} * (\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)}))}$$

$$\alpha^{(j)} = \sqrt{\frac{-s^{(i-1)} * (\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)})) * \mathbf{d}^{(i-1)}}{\nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)}) * \mathbf{d}^{(i-1)}}$$

$$\mathbf{w}^{(j)} = -(\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)})) + \alpha^{(j)} * \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)})$$

$$\mathbf{B}^{(j)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(j)} * \mathbf{w}^{(j)T}) * \mathbf{B}^{(j-1)} * (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(j)} * \mathbf{v}^{(j)T})$$

c) Calcule $\mathbf{d}^{(i)}$ resolvendo o sistema $\mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{B}^{(j)} \nabla f(\mathbf{x}^{(i)})$ pelo algoritmo descrito no quadro n.º 5.

d) Atualize: $\mathbf{Gc} = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^{(i)})$.

e) Vá para o passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 7.

Quadro n.º 8 - Cálculo da direção $\mathbf{d}^{(i)}$ pelo método do BFGS

Método de Newton:

a) Incremente o contador da iteração: $i = i + 1$.

b) Calcule o valor da função $\nabla f(\mathbf{x}^{(i)})$ e da Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(i)})$.

c) Calcule a direção inicial $\mathbf{d}^{(i)}$ resolvendo o sistema de equação linear:

$$[\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(i)})]^T \mathbf{d}^{(i)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(i)}).$$

d) Atualize $\mathbf{Gc} = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^{(i)})$.

e) Faça $j = 0$ e vá ao passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 7.

Quadro n.º 9 - Cálculo da direção $\mathbf{d}^{(i)}$ pelo método de Newton

3.2 - Algoritmos de Programação Matemática Com Restrições

Nesta seção falaremos sobre algoritmos de programação matemática com restrições. No item 3.2.1 abordaremos os algoritmos para problemas de otimização com restrições de igualdade, no item 3.2.2 os algoritmos para problemas de otimização com restrições de desigualdade e no item 3.2.3 os algoritmos para problemas com restrições mistas. Os métodos que estudaremos nesses itens são: Penalidade, Lagrangiano e Lagrangiano Aumentado.

3.2.1 - Problemas Com Restrições de Igualdade

3.2.1.1 - Método do Lagrangiano

Tomaremos inicialmente o estudo para problemas de otimização com restrições de igualdade. Consideremos o seguinte problema de otimização:

minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in I,$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$	(3.29)
--	--------

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrições $g_i(\mathbf{x})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

Como já mencionamos no item 2.2.3, a condição necessária de primeira ordem para que o ponto $[\mathbf{x}^*, \lambda^*]$ seja ponto estacionário da função Lagrangiana (2.24), é:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

Reescrevendo a equação (3.30), obtemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$f_1(\mathbf{x}^*) : \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$f_2(\mathbf{x}^*) : \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} g_1(x^*) \\ \vdots \\ g_m(x^*) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

O sistema acima pode ser representado por:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) \\ g_1(x^*) \\ \vdots \\ g_m(x^*) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Pelo método de Newton, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^{(k)} - [\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})]^{-1} \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}). \quad (3.33)$$

Reescrevendo (3.33) temos:

$$\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^{(k+1)} - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^{(k)} \right) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}). \quad (3.34)$$

O que é equivalente a:

$$\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}). \quad (3.35)$$

Onde:

$$\mathbf{d}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix}^{(k+1)} - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (3.36)$$

A matriz Jacobiana é definida por:

$$\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Ou seja,

$$\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \begin{bmatrix} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^{(k)}) & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Logo, o sistema de equações (3.35) pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^{(k)}) & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Para resolvermos o sistema (3.39), devemos inverter a matriz $\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)})$.

Consideremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^{(k)}), \\ \mathbf{B} &= \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Inverter a matriz Jacobiana $\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$, é equivalente a resolver o sistema $\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) [\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})]^{-1} = \mathbf{I}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

O sistema acima pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} f_1: \quad & \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{D}^T = \mathbf{I}, \\ f_2: \quad & \mathbf{A} \mathbf{D} + \mathbf{B} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ f_3: \quad & \mathbf{B}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}, \\ f_4: \quad & \mathbf{B}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

De f_2 temos:

$$\mathbf{D} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E}. \quad (3.43)$$

De f_4 temos:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{D} = -\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E} = \mathbf{I}. \quad (3.44)$$

Calculando a matriz \mathbf{E} pela equação acima, obtemos:

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \quad (3.45)$$

Substituindo (3.45) em (3.43), obtemos:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \quad (3.46)$$

De f_1 temos:

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{D}^T. \quad (3.47)$$

Calculando a matriz \mathbf{C} pela equação acima, obtemos:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^T. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.46) em (3.48) e lembrando que as matrizes \mathbf{A} e $(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$ são simétricas, temos:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1}. \quad (3.49)$$

Logo, as componentes da inversa da Jacobiana $\nabla \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{E} &= - (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Então, o sistema de equações (3.39) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

O que é equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^{(k)} &= - \mathbf{C} \mathbf{f}_1 - \mathbf{D} \mathbf{f}_2, \\ \mathbf{d}_2^{(k)} &= - \mathbf{D}^T \mathbf{f}_1 - \mathbf{E} \mathbf{f}_2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Substituindo (3.50) na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^{(k)} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{f}_2, \\ \mathbf{d}_2^{(k)} &= -(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 + (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{f}_2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

De (3.53) temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^{(k)} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} [-\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2], \\ \mathbf{d}_2^{(k)} &= (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} [-\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^{(k)} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{d}_2^{(k)}, \\ \mathbf{d}_2^{(k)} &= (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} [-\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pelo sistema de equações não lineares (3.55), podemos ver claramente que devemos inverter as matrizes \mathbf{A} e $(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$.

Algoritmo para a resolução do sistema (3.55):

Passo 1: Calcule a matriz \mathbf{A}^{-1} e em seguida o vetor $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_1$.

Passo 2: Calcule o vetor $\mathbf{w} = -\mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{f}_2$.

Passo 3: Resolva o seguinte sistema de equações lineares para o vetor incógnita $\mathbf{d}_2^{(k)}$:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{d}_2^{(k)} = \mathbf{w}.$$

Passo 4: Calcule o vetor incógnita $\mathbf{d}_1^{(k)}$ definido por:

$$\mathbf{d}_1^{(k)} = -\mathbf{v} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{d}_2^{(k)}.$$

Quadro n.º 10 - Algoritmo para a resolução do sistema (3.55)

Para obtermos um ponto estacionário $[\mathbf{x}^*, \lambda^*]$ da função Lagrangiana, basta resolvermos o sistema de equações (3.31) utilizando técnicas de resolução de sistemas não lineares, como por exemplo, utilizando o método de Newton.

Teoricamente o método é bastante simples, no entanto, pode apresentar problemas como por exemplo, obter explicitamente a matriz \mathbf{A}^{-1} .

O método do Lagrangiano pode ser esquematizado como segue:

Método do Lagrangiano:

Passo 1: Resolva o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\nabla L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

$$\text{onde } L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}),$$

utilizando o método de Newton.

Quadro n.º 11 - Método do Lagrangiano para restrições de igualdade

3.2.1.2 - Método da Penalidade

O método da Penalidade tem a idéia de transformar o problema de otimização com restrições de igualdade (3.29) em um problema sem restrições. Para isso, é necessário construir uma função penalidade na qual se combina a função objetivo $f(\mathbf{x})$ com as restrições $g_i(\mathbf{x})$, que possibilite a minimização de $f(\mathbf{x})$ ao mesmo tempo que satisfaça as restrições $g_i(\mathbf{x})$ penalizando-as.

O método da Penalidade tem característica de permanecer dentro ou próximo da região viável de modo a atingir a convergência.

A função penalidade do problema (3.29) é definida por:

$$P(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sum_{i=1}^m g_i^2(\mathbf{x}), \quad (3.56)$$

onde ξ é o parâmetro de penalidade.

O processo consiste em adotar uma seqüência de escalares tendendo ao infinito, como por exemplo $\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots\}$, e resolver o problema (3.56) atribuindo cada valor a $\xi^{(m)}$, gerando assim, uma seqüência de soluções $\mathbf{x}^{(m)}$.

Demonstra-se em FLETCHER [3], que sendo $\mathbf{x}^{(m)}$ a seqüência de soluções obtidas pela seqüência de minimização sem restrições, então $\mathbf{x}^{(m)} \rightarrow \mathbf{x}^*$ quando $\xi^{(m)} \rightarrow \infty$, onde \mathbf{x}^* é um mínimo local do problema (3.29). Além disto, a convergência é global, ou seja, a convergência de um mínimo local independe do valor inicial.

O método da Penalidade é muito sensível ao parâmetro de penalidade ξ , que deve ser escolhido muito grande para levar à solução. Entretanto, quando ξ cresce muito podemos obter computacionalmente um problema de mau condicionamento.

O método da Penalidade pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método da Penalidade:

Passo 1: Escolha uma seqüência $\{\xi^{(k)}\} \rightarrow \infty$, por exemplo:
 $\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots\}$.

Passo 2: Resolva o seguinte problema de minimização:

$$\text{minimizar } P(\mathbf{x}, \xi^{(k)}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi^{(k)} \cdot \sum_{i=1}^m g_i^2(\mathbf{x}),$$

Seja $\mathbf{x}^{(k)}$ a solução.

Passo 3: Seja TOL um parâmetro de convergência.

Se $\mathbf{x}^{(k)}$ satisfizer $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \text{TOL}$ pare.

Caso contrário, faça $\xi^{(k+1)}$ igual ao próximo valor da seqüência, e vá ao passo 2.

Quadro n.º 12 - Método da Penalidade para restrições de igualdade

No passo 2 do algoritmo descrito no quadro n.º 12, temos que minimizar o funcional $P(\mathbf{x}, \xi^{(k)})$, onde sua matriz Hessiana é definida por:

$$\nabla P(\mathbf{x}, \xi^{(k)}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \xi^{(k)} \cdot \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}). \quad (3.57)$$

3.2.1.3 - Método do Lagrangiano Aumentado

O método do Lagrangiano Aumentado tem sido bastante discutido na literatura por FLETCHER [3] e LUENBERGER [9].

O método do Lagrangiano Aumentado consiste em resolver uma série de problemas de minimização sem restrições. Ele utiliza o Lagrangiano descrito na seção 3.2.1.1 acrescentando um termo que penaliza as restrições, que é o método da Penalidade já discutido na seção 3.2.1.2.

O Lagrangiano Aumentado do problema (3.29) é definido por:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot g_i^2(\mathbf{x}), \quad (3.58)$$

onde ξ é o parâmetro de penalidade e $\boldsymbol{\lambda}$ é o multiplicador de Lagrange.

O método do Lagrangiano Aumentado consiste em minimizar a equação (3.58) sujeita a $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i \in I$. Os valores de ξ e $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ são escolhidos e fixados no começo de cada minimização sem restrições e posteriormente o funcional $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \xi)$ é minimizado em relação a \mathbf{x} . No final de cada minimização, os valores de $\boldsymbol{\lambda}$ são atualizados e o processo continua até atingir a convergência.

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita por:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (3.59)$$

Para ocorrer a convergência no método do Lagrangiano Aumentado, o valor da penalidade ξ basta ser finito, enquanto no método da Penalidade o valor de ξ tende ao infinito.

Diversos problemas computacionais devem ser analisados em cada uma das questões mencionadas.

Para justificarmos a equação (3.59), de (2.36) temos:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} L_c^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) &= \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^m [\lambda_i^{(k)} + \xi \cdot g_i(\mathbf{x}^{(k)})] \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k+1)} \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)}).\end{aligned}\quad (3.60)$$

Multiplicando a equação (3.60) por:

$$[\nabla g(\mathbf{x}^{(k)})^T \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})^T, \quad (3.61)$$

obtemos:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = [\nabla g(\mathbf{x}^{(k)})^T \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})^T [\nabla_{\mathbf{x}} L_c^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})]. \quad (3.62)$$

Por hipótese, $\nabla_{\mathbf{x}} L_c^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \rightarrow \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} \rightarrow \boldsymbol{\lambda}^*$. Então, a equação (3.62) resulta em:

$$\boldsymbol{\lambda}^* = -[\nabla g(\mathbf{x}^*)^T \nabla g(\mathbf{x}^*)]^{-1} \nabla g(\mathbf{x}^*)^T \nabla f(\mathbf{x}^*). \quad (3.63)$$

Utilizando novamente o fato de $\nabla_{\mathbf{x}} L_c^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \rightarrow \mathbf{0}$, a equação (3.60) resulta em:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (3.64)$$

Então podemos concluir as condições expressas em (2.31).

O método da Lagrangiano Aumentado pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método do Lagrangiano Aumentado:

Passo 1: Estime os valores para $\lambda^{(0)}$ e ξ e faça $k = 0$.

Passo 2: Resolva o seguinte problema de minimização:

$$\text{minimizar } L(\mathbf{x}, \lambda^{(k)}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda^{(k)}_i \cdot g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot g_i^2(\mathbf{x}).$$

Seja $\mathbf{x}^{(k)}$ a solução.

Passo 3: Seja TOL um parâmetro de convergência.

Se $[\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}]$ satisfizer $\|\nabla L(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}, \xi)\| \leq \text{TOL}$, pare.

Caso contrário, vá ao passo 4.

Passo 4: Atualize $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$.

Passo 5: Faça $k = k + 1$ e vá ao passo 2.

Quadro n.º 13 - Método do Lagrangiano Aumentado para restrições de igualdade

3.2.2 - Problemas Com Restrições de Desigualdade

3.2.2.1 - Método do Lagrangiano - Conjunto Ativo

A idéia básica do método dos conjuntos ativos é dividir as restrições de desigualdade em dois grupos: o primeiro das restrições ativas e o segundo das restrições inativas. As restrições tratadas como inativas são simplesmente ignoradas.

Consideremos o seguinte problema de otimização com restrições:

minimizar	$f(\mathbf{x})$		
sujeito a	$g_j(\mathbf{x}) \leq 0,$	$j \in D,$	(3.65)
	$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,$		

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrições $g_j(\mathbf{x})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

As condições necessárias para o problema (3.65) são dadas por:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \\ \lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \\ \lambda_j^* &\geq 0, j \in D. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Consideremos $A(\mathbf{x}^*)$ o conjunto das restrições de desigualdades ativas na solução \mathbf{x}^* , ou seja, $A(\mathbf{x}^*)$ é o conjunto dos índices j tal que $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$. Então, as condições necessárias (3.66) podem ser escritas por:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in A} \lambda_j \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0}, \\ g_j(\mathbf{x}^*) &= 0, j \in A(\mathbf{x}^*), \\ g_j(\mathbf{x}^*) &< 0, j \notin A(\mathbf{x}^*), \\ \lambda_j^* &\geq 0, j \in D, \\ \lambda_j^* &= 0, j \notin A(\mathbf{x}^*). \end{aligned} \tag{3.67}$$

As duas primeiras linhas em (3.67) equivalem às condições necessárias do problema de otimização com restrições de igualdade, que é a condição para que as restrições sejam ativas.

O método dos conjuntos ativos tem como objetivo definir em cada iteração um conjunto de restrições chamado de conjunto de trabalho, que se tratará de uma estimativa do conjunto ativo $A(\mathbf{x}^*)$. Ele consiste em determinar um conjunto de trabalho atual, que é um subconjunto das restrições, e efetuar uma minimização sob restrições de igualdade para este conjunto. Se este ponto não satisfizer às condições do problema (3.65), é feita uma atualização do conjunto de trabalho e em seguida, calcula-se o novo

ponto. Quando atingir a solução, o conjunto de trabalho passa a ser o conjunto ativo correto $A(\mathbf{x}^*)$.

Seja W um conjunto de trabalho dado, que resolve o seguinte problema com restrições de igualdade:

minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito a $g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in W,$ $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$	(3.68)
--	--------

produzindo um ponto \mathbf{x}_w que satisfaça $g_j(\mathbf{x}) < 0, j \notin W$.

Este ponto satisfaz a seguinte condição necessária:

$$\nabla f(\mathbf{x}_w) + \sum_{j \in W} \lambda_j \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}_w) = \mathbf{0}. \quad (3.69)$$

Se $\lambda_j \geq 0$, para todo $j \in W$, o ponto \mathbf{x}_w é uma solução local do problema original. Mas, se existe $j \in W$ tal que $\lambda_j < 0$, então a função pode ser minimizada flexibilizando a restrição j . Isto se deduz diretamente na interpretação da sensibilidade dos multiplicadores de Lagrange, pois uma pequena diminuição no valor da restrição de 0 a $-c$, produziria uma mudança na função objetivo de $\lambda_j c$, que é negativo. Assim, eliminando a restrição j do conjunto de trabalho, pode-se obter uma solução melhorada.

O multiplicador de Lagrange serve como indicação das restrições que deverão ser eliminadas do conjunto de trabalho, ou seja, se o multiplicador de Lagrange λ_j for negativo, implica que a respectiva restrição g_j deve ser eliminada do conjunto de trabalho.

Durante o processo de minimização de $f(\mathbf{x})$ na superfície de trabalho, é necessário controlar os valores das outras restrições para ter a segurança de que não vão violar as restrições do problema. Ao mover-se na superfície de trabalho, encontra-se uma nova fronteira de restrições de dimensão menor que anterior.

Teorema: Conjunto Ativo (LUENBERGER [9]).

Suponha-se que para todo subconjunto W dos índices das restrições, o problema com restrições (3.68) esteja bem definido com uma solução única não degenerada, isto é, $\forall j \in W, \lambda_j \neq 0$. Então, a sucessão de pontos gerada pela estratégia do conjunto ativo básico, converge à solução do problema de desigualdade.

O custo para resolver o problema (3.65) utilizando o método dos conjuntos ativos, é a possibilidade de resolvê-lo passando por vários conjuntos ativos incorretos até atingir o conjunto ativo correto $A(\mathbf{x}^*)$. Quando se tem uma boa estimativa da solução ou do conjunto ativo, o método torna-se eficiente. Na prática, antes de aplicar o método dos conjuntos ativos, eliminam-se as restrições mediante vários critérios antes de achar um mínimo exato na superfície de trabalho. No entanto, não nos deteremos a este assunto, embora esteja amplamente descrito em LUENBERGER [9].

3.2.2.2 - Método da Penalidade

Para realizarmos uma extensão do método da Penalidade para a resolução de problemas de programação matemática com restrições de desigualdade, temos algumas dificuldades a serem superadas.

No caso de problemas com restrições de igualdade, para obtermos um ponto que satisfaça às condições necessárias de otimalidade, basta resolvermos um sistema não linear de equações. Entretanto, em problemas que incluem restrições de desigualdade, além da resolução do sistema não linear de equações, torna-se necessário que a solução deste sistema satisfaça às restrições de desigualdade. Neste caso, constrói-se uma nova função de penalidade.

A função penalidade do problema (3.65) é definida por:

$$P(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sum_{j=1}^q \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^2, \quad (3.70)$$

onde ξ é o parâmetro de penalidade.

O método da Penalidade pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método da Penalidade:

Passo 1: Escolha uma seqüência $\{ \xi^{(k)} \} \rightarrow \infty$, por exemplo:
 $\{ 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots \}$.

Passo 2: Resolva o seguinte problema de minimização:

$$\text{minimizar } P(\mathbf{x}, \xi^{(k)}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi^{(k)} \cdot \sum_{j=1}^q \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^2.$$

Seja $\mathbf{x}^{(k)}$ a solução.

Passo 3: Seja TOL um parâmetro de convergência.

Se $\mathbf{x}^{(k)}$ satisfizer $\| \mathbf{g}(\mathbf{x}) \| \leq \text{TOL}$, pare.

Caso contrário, faça $\xi^{(k+1)}$ igual ao próximo valor da seqüência e vá ao passo 2.

Quadro n.º 14 - Método da Penalidade para restrições de desigualdade

3.2.2.3 - Método do Lagrangiano Aumentado

Demonstra-se em BERTSEKAS [1,2] que a função do Lagrangiano Aumentado do problema (3.65) pode ser vista como:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \{ \lambda_j \cdot \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^2 \}, \quad (3.71)$$

onde ξ é um parâmetro de penalidade e $\boldsymbol{\lambda}$ é o multiplicador de Lagrange.

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por (BERTSEKAS [1,2]):

$$\lambda^{(k+1)} = \langle \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \rangle . \quad (3.72)$$

O método do Lagrangiano Aumentado pode ser esquematizado nos seguintes passos:

Método do Lagrangiano Aumentado:

Passo 1: Estime os valores para $\lambda^{(0)}$ e ξ e faça $k = 0$.

Passo 2: Resolva o seguinte problema de minimização:

$$\text{minimizar } L(\mathbf{x}, \lambda^{(k)}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \{ \lambda_j \cdot \langle \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \langle \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \rangle^2 \}.$$

Seja $\mathbf{x}^{(k)}$ a solução.

Passo 3: Seja TOL um parâmetro de convergência.

Se $[\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}]$ satisfizer $\| \nabla L(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)}, \xi) \| \leq \text{TOL}$, pare.

Caso contrário, vá ao passo 4.

Passo 4: Atualize $\lambda^{(k+1)} = \langle \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \rangle$.

Passo 5: Faça $k = k + 1$ e vá ao passo 2.

Quadro n.º 15 - Método do Lagrangiano Aumentado para restrições de desigualdade

3.2.3 - Problemas Com Restrições Mistas

Consideremos o seguinte problema geral de otimização:

minimizar	$f(\mathbf{x})$		
sujeito a	$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = 0,$	$i \in I,$	
	$\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0,$	$j \in D,$	(3.73)
	$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n,$		

onde a função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrições $g_i(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

A função penalidade do problema (3.73) é definida por:

$$P(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sum_{i=1}^m g_i^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sum_{j=1}^q \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^2, \quad (3.74)$$

onde ξ é um parâmetro de penalidade.

Demonstra-se em BERTSEKAS [1,2] que a função do Lagrangiano Aumentado do problema (3.73) pode ser vista como:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \xi) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \left\{ \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot g_i^2(\mathbf{x}) \right\} \\ + \sum_{j=1}^q \left\{ \lambda_j \cdot \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle^2 \right\}, \quad (3.75)$$

onde ξ é um parâmetro de penalidade e λ é o multiplicador de Lagrange.

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por (BERTSEKAS [1,2]):

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad , \text{ para as restrições de igualdade.} \\ \lambda^{(k+1)} = \langle \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \rangle \quad , \text{ para as restrições de desigualdade.} \quad (3.76)$$

O algoritmo utilizado nesse trabalho para a solução do problema de contato, é o Lagrangiano Aumentado. Para a minimização sem restrições, utilizaremos o algoritmo Newton / Quase-Newton, como será descrito a seguir:

Método do Lagrangiano Aumentado:

I) Processo de inicialização das iterações.

- a) Estime um valor inicial para $\mathbf{x}^{(0)}$, ξ e $\lambda^{(0)}$.
- b) Calcule o valor da função $\nabla L(\mathbf{x}^{(0)}, \lambda^{(0)})$ e da Hessiana $\nabla^2 L(\mathbf{x}^{(0)}, \lambda^{(0)})$.
- c) Calcule a direção inicial $\mathbf{d}^{(0)}$ resolvendo o sistema de equação linear:
- $$[\nabla^2 L(\mathbf{x}^{(0)}, \lambda^{(0)})]^\top \mathbf{d}^{(0)} = \nabla L(\mathbf{x}^{(0)}, \lambda^{(0)}).$$
- d) Inicialize $G_c = \mathbf{d}^{(0)} \cdot \nabla L(\mathbf{x}^{(0)}, \lambda^{(0)})$ e faça $GI = G_c$.
- e) Inicialize o contador j das iterações do BFGS, o contador i do método de Newton e o contador k do Lagrangiano: $i = 0, j = 0$ e $k = 0$.

II) Itere em i até atingir a solução.

- a) Busca unidimensional.
- i) Inicialize: $s^{(i)} = 1,0$.
- ii) Calcule: $G(s^{(i)}) = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla L(\mathbf{x}^{(i)} - s^{(i)} \cdot \mathbf{d}^{(i)}, \lambda^{(k)})$.
- iii) Performance requerida na busca unidimensional:
- Se $[(|G(s^{(i)})| > \text{STOL} * |G_c|) \text{ ou } (G(s^{(i)}) * G_c < 0,0)]$,
então itere para $s^{(i)} \in (0,1]$ até $|G(s^{(i)})| \leq \text{STOL} * |G_c|$.
- iv) Incremente: $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - s^{(i)} \cdot \mathbf{d}^{(i)}$.
- b) Teste a divergência: Se $(\| \nabla L(\mathbf{x}^{(i+1)}, \lambda^{(k)}) \| > \| \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)}) \|)$,
então vá para o quadro n.º 17.
- c) Teste a solução do problema: Se $(G_c \leq \text{ETOL} * GI)$,
então vá ao passo III, solução satisfeita.
- d) Analise o passo da busca: Se $(s^{(i)} < 0,001)$,
então vá para o quadro n.º 17.
- e) Teste o limite de iterações do BFGS: Se $(j = \text{max_bfgs})$,
então vá para o quadro n.º 17.
- f) Vá para o quadro n.º 18.

III) Atualização dos multiplicadores de Lagrange.

a) Calcule os novos multiplicadores λ_{tr} : Para todas as Restrições.

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}), \text{ para as restrições de igualdade.}$$

$$\lambda^{(k+1)} = \langle \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \rangle, \text{ para as restrições de desigualdade.}$$

b) Teste a Convergência dos Multiplicadores:

$$\text{Se } (\| \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \| / \| \lambda^{(k)} \| \leq \text{KTOL}) , \text{ então pare.}$$

c) Atualize os Multiplicadores de Lagrange: $\lambda^{(k+1)} = \lambda_{tr}, k = k + 1$.

d) Reinicialize com os novos Multiplicadores:

i) Calcule o novo Resíduo: $\nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$.

ii) Calcule a direção inicial $\mathbf{d}^{(i)}$ resolvendo o sistema de equação linear:

$$[\nabla^2 L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})]^T \mathbf{d}^{(i)} = \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)}).$$

iii) Atualize: $\mathbf{Gc} = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$.

e) Repetir até atingir a solução: vá ao passo IIa.

Quadro n.º 16 - Método do Lagrangiano Aumentado

Método de Newton:

a) Incremente o contador da iteração: $i = i + 1$.

b) Calcule o valor da função $\nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$ e da Hessiana $\nabla^2 L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$.

c) Calcule a direção inicial $\mathbf{d}^{(i)}$ resolvendo o sistema de equação linear:

$$[\nabla^2 L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})]^T \mathbf{d}^{(i)} = \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)}).$$

d) Atualize $\mathbf{Gc} = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$.

e) Faça $j = 0$ e vá ao passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 16.

Quadro n.º 17 - Minimização pelo método de Newton

Método do BFGS:

a) Incremente as iterações: $i = i + 1, j = j + 1$.

b) Fórmula Produto do BFGS.

Calcule os vetores $\mathbf{v}^{(i)}$ e $\mathbf{w}^{(i)}$, onde:

$$\mathbf{v}^{(i)} = \frac{\mathbf{d}^{(i-1)}}{\mathbf{d}^{(i-1)T} * (\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)}))}$$

$$\alpha^{(i)} = \sqrt{\frac{-\mathbf{d}^{(i-1)T} * (\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)})) * \mathbf{d}^{(i-1)}}{\nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)}) * \mathbf{d}^{(i-1)T}}}$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = -(\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)})) + \alpha^{(i)} * \nabla f(\mathbf{x}^{(i-1)})$$

$$\mathbf{B}^{(j)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i)} * \mathbf{w}^{(i)T}) * \mathbf{B}^{(j-1)} * (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(i)} * \mathbf{v}^{(i)T})$$

c) Calcule $\mathbf{d}^{(i)}$ resolvendo o sistema $\mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{B}^{(j)} \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$ pelo algoritmo descrito no quadro n.º 5.

d) Atualize: $\mathbf{G}_c = \mathbf{d}^{(i)} \cdot \nabla L(\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(k)})$.

e) Vá para o passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 16.

Quadro n.º 18 - Minimização pelo método do BFGS

Prelúdio: Um Modelo Simples com Molas

Neste capítulo, faremos uma aplicação dos conceitos de programação matemática, estudados nos capítulos 2 e 3, em um modelo simples com molas elásticas não lineares. Apresentaremos a formulação do problema juntamente com a sua interpretação física. O estudo será dividido em subitens, nos quais serão analisados os problemas de otimização sem restrições, com restrições de igualdade e com restrições de desigualdade.

4.1 - Sem Restrições

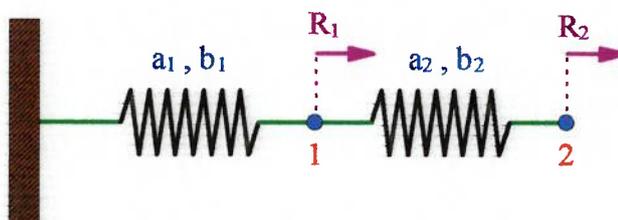


Figura 4.1 - Sistema de molas sem restrições

Consideremos um simples modelo elástico não linear com dois graus de liberdade, conforme ilustra a figura 4.1. A restrição representada pela barreira à esquerda é ignorada, ou seja, ela tem como função apenas impedir que o sistema se torne hipostático.

Sejam: $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2]$ o vetor dos deslocamentos nodais do sistema, $\mathbf{R} = [R_1 \ R_2]$ o vetor das forças externas aplicadas nos nós do sistema, $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = [S_1 \ S_2]$ o vetor resultante das forças internas e $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [F_1 \ F_2]$ o vetor do resíduo do sistema ou equação de equilíbrio.

Na figura 4.1, o sistema de molas se deforma até atingir o equilíbrio. Representaremos os graus de liberdade pelos nós 1 e 2 e as constantes das molas por a_1, a_2, b_1 e b_2 , onde a_i é a parcela linear e b_i é a parcela não linear.

Consideremos que as duas molas sejam elásticas não lineares e que suas forças internas sejam dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} f_{m1} &= a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 \\ f_{m2} &= a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde f_{m1} é a força interna da mola 1 e f_{m2} é a força interna da mola 2.

O vetor resultante das forças internas é definido por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{m1} - f_{m2} \\ f_{m2} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

O vetor do equilíbrio é dado por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{m1} - f_{m2} - R_1 \\ f_{m2} - R_2 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

A matriz Jacobiana do modelo de molas da figura 4.1, denomina-se matriz de rigidez tangente e indicaremos por \mathbf{K} , que é definida por:

$$\mathbf{K} = \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{\partial S_i}{\partial r_j}, \quad (4.4)$$

ou seja,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_1 + 3 \cdot b_1 \cdot r_1^2 + a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 \\ -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Claramente, a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} é simétrica. Também podemos demonstrar que a matriz \mathbf{K} é definida positiva, no entanto, não nos deteremos a este assunto. Essas propriedades justificam o uso do método Choleski para a resolução de sistemas lineares.

No problema em estudo, a energia potencial é definida pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}) &= U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) - \mathbf{R}^T \mathbf{r} \\
 U_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot r_1^2 + \frac{1}{4} \cdot b_1 \cdot r_1^4 \\
 U_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 + \frac{1}{4} \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^4,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $U(\mathbf{r})$ é a energia potencial total do sistema, $U_1(\mathbf{r})$ é a energia potencial da mola 1 e $U_2(\mathbf{r})$ é a energia potencial da mola 2.

Para resolvermos o sistema com molas ilustrado na figura 4.1, utilizamos os conceitos de programação matemática sem restrições. Então, esse problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$ \begin{aligned} &\text{minimizar} && U(\mathbf{r}) \\ &&& \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^n, \end{aligned} $	(4.7)
---	-------

onde a função objetivo ou energia potencial $U(\mathbf{r})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

A condição necessária de otimalidade é dada por:

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{4.8}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 &= 0 \\
 a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde (4.9) é a equação de equilíbrio ou resíduo do sistema.

A equação (4.9) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

onde o vetor de equilíbrio $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é definido pela equação (4.3).

Para a resolução do sistema de equações não lineares (4.10), utilizamos os algoritmos apresentados no capítulo 3, ou seja, os métodos de Newton, BFGS e Newton / Quase-Newton.

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.1. Sejam as molas 1 e 2 lineares, ou seja, $b_1 = b_2 = 0$. Neste exemplo, a equação de equilíbrio (4.9) é escrita como:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r_1 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - R_1 &= 0, \\ a_2 \cdot (r_2 - r_1) - R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como esse problema é linear, a equação (4.11) pode ser reescrita por:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Logo, temos uma resolução de um sistema linear. Neste caso, a solução é direta, ou seja, o problema não é iterativo, basta aplicar o método Choleski. A solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 1/a_1 \\ 1/a_1 & 1/a_1 + 1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Consideremos ainda que os parâmetros do problema acima sejam dados por:

$$a_1 = a_2 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_1 = b_2 = 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf}.$$

Então a solução desse problema linear é dada por:

$$r = [50,00 \quad 50,00].$$

Avaliaremos agora um problema não linear. Consideremos a mola 1 não linear e a mola 2 linear. Adotemos os seguintes dados:

$$a_1 = a_2 = b_1 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_2 = 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$\text{ETOL} = 10^{-10},$$

$$\text{max_bfgs} = 10.$$

Aplicando os algoritmos de otimização sem restrições apresentados no capítulo 3, ou seja, o método de Newton e o método de Newton / Quase-Newton, obtemos a tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS
0	3,5936	1000		2 N, 10 BFGS,
0	3,5936	0	12 N.	1 N e 2 BFGS.

Tabela 4.1 - Problema sem restrições

Quando se divide a carga em n partes e resolve o sistema para cada carga acumulada, tendo como estimativa inicial a solução da carga anterior, resolvemos o problema de uma forma incremental.

Aplicando os algoritmos neste exemplo para 5 incrementos de cargas, obtemos a tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS
0	2	200		
0	2	0	9 N.	2 N e 10 BFGS.
2	2,5917	400		
2	2,5917	0	4 N.	1 N e 5 BFGS.
2,5917	3	600		
2,5917	3	0	4 N.	1 N e 4 BFGS.
3	3,3225	800		
3	3,3225	0	4 N.	1 N e 4 BFGS.
3,3225	3,5936	1000		
3,3225	3,5936	0	4 N.	1 N e 4 BFGS.

Tabela 4.2 - Problema incremental sem restrições

Através do estudo comparativo feito entre o método de Newton e o método de Newton / Quase-Newton, mostrado nas tabelas 4.1 e 4.2, observamos que o número total de iterações aumentaram quando combinamos o método de Newton com o BFGS.

Notemos ainda que no método de Newton, em cada iteração devemos calcular a Hessiana e resolver um sistema de equações. Na combinação dos métodos, fazemos na maioria das iterações uma atualização da inversa da Hessiana, só calculando-a quando for necessário utilizar o método de Newton. Percebemos então, que cada problema deve ser avaliado, para que se tome uma decisão de qual o método a ser utilizado. Quando um problema tem uma grande dimensão, a combinação dos métodos pode tornar computacionalmente mais eficiente a solução do problema.

Os algoritmos em estudo têm boa eficiência para estimativa inicial próxima da solução. Quando esta estimativa inicial estiver longe da solução, uma sugestão para contornarmos esse problema é resolvê-lo de uma forma incremental, ou seja, aplicar a carga gradualmente resolvendo o sistema para cada incremento, forçando assim, que o

valor inicial adotado fique próximo da solução. Podemos observar também, que na resolução de um problema incremental, as iterações diminuem em cada passo.

4.2 - Com Restrições de Igualdade

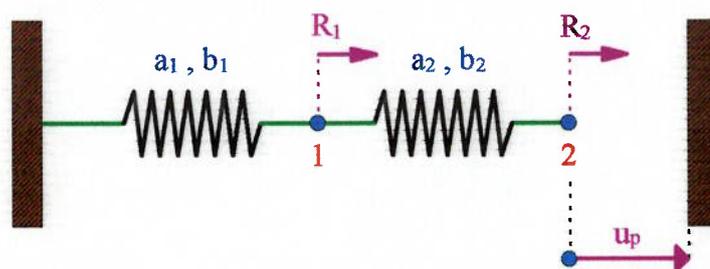


Figura 4.2 - Sistema de molas sob restrição de igualdade

Para ilustrarmos o problema de otimização com restrições de igualdade, consideremos um simples modelo elástico não linear com dois graus de liberdade, conforme mostra a figura 4.2. Utilizaremos a mesma notação da seção anterior.

Na figura 4.2, o sistema de molas se deforma até satisfazer duas condições: A primeira, o nó 2 tem obrigatoriamente que se movimentar até atingir o deslocamento prescrito u_p e na segunda, o sistema tem que atingir o equilíbrio.

A restrição do problema é linear, definida por $g(\mathbf{r}) = r_2 - u_p = 0$.

Então, o problema de otimização com restrições de igualdade para esse exemplo, pode ser formulado da seguinte maneira:

minimizar $U(\mathbf{r})$ sujeito a $g(\mathbf{r}) = r_2 - u_p = 0,$ $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^n,$	(4.15)
---	--------

onde a função objetivo ou energia potencial $U(\mathbf{r})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

Existem duas maneiras para se resolver o problema (4.15). A primeira, consiste na eliminação de variáveis. Isto é, uma vez conhecido o deslocamento imposto de uma

variável, reduzimos o grau de liberdade do sistema eliminando-a, ou seja, resolvemos o sistema apenas para os graus de liberdade livres ou sem restrições. Com isso, entramos em um problema de otimização sem restrições e para resolvê-lo, basta aplicarmos os conceitos e os algoritmos discutidos no item 4.1.

Para a solução do problema (4.15) pelo método da eliminação de variável, teremos inicialmente que considerar uma força que o nó aplica no sistema, definida por \mathbf{F}_c , resultando na seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

onde:

$$\mathbf{F}_c = [0 \quad q]. \quad (4.17)$$

A equação de equilíbrio (4.16) pode ser representada pelo seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} f_1(r_1) &: a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 = 0, \\ f_2(r_1, q) &: a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + q - R_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Na equação (4.18) o deslocamento r_2 é conhecido ($r_2 = u_p$) e r_1 e q são as incógnitas do problema.

Então o problema (4.15) pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} f_1(r_1) &: a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (u_p - r_1) - b_2 \cdot (u_p - r_1)^3 - R_1 = 0, \\ f_2(r_1, q) &: a_2 \cdot (u_p - r_1) + b_2 \cdot (u_p - r_1)^3 + q - R_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.2. Sejam a mola 1 não linear e a mola 2 linear. Os parâmetros do problema (4.19) são dados por:

$$a_1 = a_2 = b_1 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_2 = 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$u_p = 3 \text{ cm}.$$

Podemos simplificá-lo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_1(r_1) &: 20 \cdot r_1^3 + 40 \cdot r_1 - 1060 = 0, \\ f_2(r_1, q) &: q = 20 \cdot r_1 - 60. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para a solução do sistema de equações (4.20), resolvemos primeiramente f_1 obtendo r_1 e em seguida, introduzimos r_1 em f_2 obtendo a reação q .

A solução do problema (4.20) é representada na tabela abaixo:

r^*	R	F_c
3,5789	1000	0
3	0	11,5789

Tabela 4.3 - Problema sob restrição de igualdade (eliminação de variável)

A segunda maneira para se resolver o problema (4.15), é considerar os graus de liberdade livres e os graus de liberdade sob restrições.

Uma técnica para a solução do problema (4.15), é o método do Lagrangiano, cuja função Lagrangiana é definida por:

$$L(\mathbf{r}, \lambda) = U(\mathbf{r}) + \lambda \cdot (r_2 - u_p), \quad (4.21)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Como o problema é de otimização sob restrições de igualdade, λ é irrestrito de sinal, ou seja, $\lambda \in \mathfrak{R}$.

Como mencionamos no capítulo 2, uma condição necessária para um mínimo local do problema (4.15), é que $[\mathbf{r}^*, \lambda^*]$ seja ponto estacionário da função Lagrangiana. Desta forma, é imediato que:

$$\nabla L(\mathbf{r}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Reescrevendo a equação (4.22) temos:

$$\begin{aligned} \nabla_r [U(\mathbf{r}^*) + \lambda \cdot (r_2 - u_p)] &= \mathbf{0}, \\ r_2 - u_p &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A condição (4.23) resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda) &= \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \lambda \cdot \nabla_r \mathbf{g}(\mathbf{r}) - \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= r_2 - u_p = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde:

$$\nabla_r \mathbf{g}(\mathbf{r}) = [0 \quad 1] \quad (4.25)$$

e:

$$\lambda \cdot \nabla_r \mathbf{g}(\mathbf{r}) = [0 \quad \lambda]. \quad (4.26)$$

Reescrevendo o sistema (4.24), obtemos:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 = 0, \\ f_2(r_1, r_2, \lambda) &: a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + \lambda - R_2 = 0, \\ f_3(r_2) &: r_2 - u_p = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

A matriz Jacobiana do sistema de equações (4.27) é dada por $\mathbf{J} = \delta f_i / \delta r, \lambda$.

Logo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_1 + 3 \cdot b_1 \cdot r_1^2 + a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & 0 \\ -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Comparando f_2 de (4.18) com f_2 de (4.27), observamos que o multiplicador de Lagrange λ é igual à variável q do método de eliminação de variável ($\lambda = q$). Então, podemos concluir que o multiplicador de Lagrange é interpretado fisicamente como uma força de reação que o nó aplica no sistema, positiva na compressão e negativa na tração.

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.2. Sejam a mola 1 não linear e a mola 2 linear. Adotemos os parâmetros do problema (4.19). Então, o problema (4.27) pode ser simplificado por:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: 20 \cdot r_1^3 + 40 \cdot r_1 - 20 \cdot r_2 - 1000 = 0, \\ f_2(r_1, r_2, \lambda) &: -20 \cdot r_1 + 20 \cdot r_2 + \lambda = 0, \\ f_3(r_2) &: r_2 - 3 = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

A solução do problema (4.29) é representada na tabela abaixo:

r^*	\mathbf{R}	λ
3,5789	1000	
3	0	11,5789

Tabela 4.4 - Problema sob restrição de igualdade (Lagrangiano)

O método Lagrangiano é bastante simples, porém pode apresentar diversos problemas computacionais. Não se tem, por exemplo, garantia de que a matriz Jacobiana do sistema seja definida positiva.

Outra técnica para a solução do problema (4.15) é o método da Penalidade, cuja função penalidade é definida por:

$$P(\mathbf{r}, \xi) = U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (r_2 - u_p)^2, \quad (4.30)$$

onde ξ é a penalidade.

O método da Penalidade consiste em transformar o problema (4.15), em um problema sem restrições, bastando minimizar a função penalidade (4.30). A equação de equilíbrio é definida por:

$$\nabla_r P(\mathbf{r}, \xi) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

onde $\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi)$ é dado por:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) = [0 \quad \xi \cdot (r_2 - u_p)]. \quad (4.32)$$

Reescrevendo o sistema (4.31), obtemos:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 = 0, \\ f_2(r_1, r_2, \xi) &: a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + \xi \cdot (r_2 - u_p) - R_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

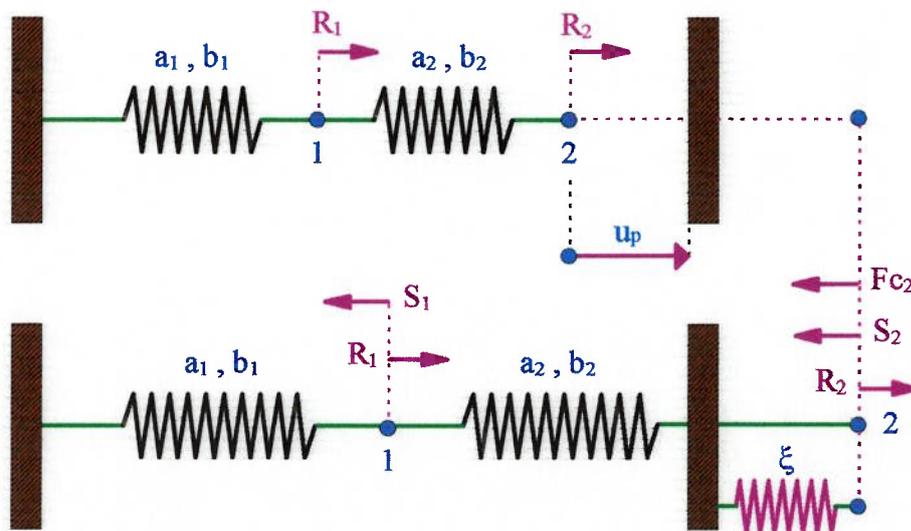


Figura 4.3 - Interpretação física para o método da Penalidade

O problema (4.33) é ilustrado na figura 4.3. Podemos ver que o nó 2 do sistema com molas, a depender da magnitude dos esforços externos, pode violar a barreira que dista u_p do nó 2 na configuração de referência. Fazendo o equilíbrio para o nó 2, de (4.33) temos:

$$S_2 + F_{c2} - R_2 = 0. \quad (4.34)$$

O que é equivalente a:

$$R_2 - S_2 = \xi \cdot (r_2 - u_p). \quad (4.35)$$

A interpretação gráfica do algoritmo para a resolução do sistema não linear (4.35) pelo método da Penalidade, é ilustrado na figura 4.4. O sistema (4.35) é dividido em duas funções dadas por $f_1 : R_2 - S_2$ e $F_{c2}(\xi) : \xi \cdot (r_2 - u_p)$, onde a função f_1 representa o problema de otimização sem restrições. A função $F_{c2}(\xi)$ é desenhada para cada valor de ξ . A solução do sistema (4.35) está na interseção das funções f_1 e $F_{c2}(\xi)$.

Sabemos que, o método da Penalidade consiste em adotar uma seqüência de valores para ξ e resolver o sistema (4.35) para cada valor de ξ . Na figura 4.4, podemos observar que $r_2^{(k)} \rightarrow u_p$ quando $\xi \rightarrow \infty$.

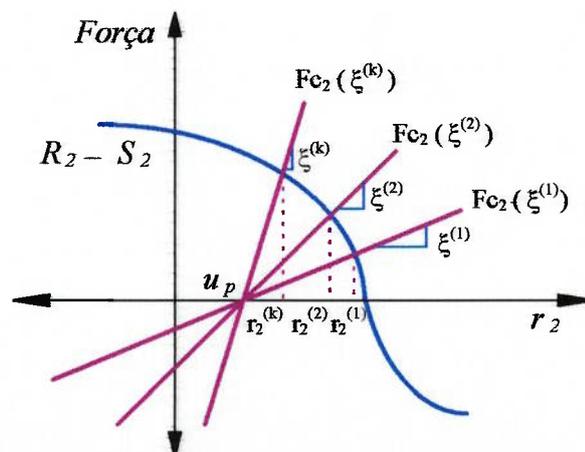


Figura 4.4 - Equilíbrio do nó 2 pelo método da Penalidade

Logo, podemos concluir que o parâmetro de penalidade ξ , é interpretado fisicamente como uma mola muito rígida aplicada para penalizar a restrição do nó 2.

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.3. Sejam a mola 1 não linear e a mola 2 linear. Os parâmetros do problema (4.33) são dados por:

$$a_1 = a_2 = b_1 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_2 = 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$u_p = 3 \text{ cm},$$

$$\text{ETOL} = 10^{-10},$$

$$\text{max_bfgs} = 10.$$

Então o problema (4.33) pode ser simplificado por:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: 20 \cdot r_1^3 + 40 \cdot r_1 - 20 \cdot r_2 - 1000 = 0, \\ f_2(r_1, r_2) &: -20 \cdot r_1 + (20 + \xi) \cdot r_2 - 3 \cdot \xi = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Adotando uma seqüência dada por $\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \dots\}$ e resolvendo o problema (4.36) em relação a r_1 e r_2 atribuindo cada valor dessa seqüência a ξ , a solução do problema é atingida quando o valor de ξ for igual à 10^5 .

A solução do problema (4.36) é representada na tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	F_c	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS	ξ
0	3,5789	1000	0		2 N, 10 BFGS	
0	3	0	0	10 N.	e 1 N.	10^5

Tabela 4.5 - Problema sob restrição de igualdade (Penalidade)

O método da Penalidade é muito sensível ao parâmetro de penalidade ξ , que deve ser escolhido muito grande para levar à solução. Entretanto, quando o parâmetro ξ cresce muito, podemos ter um problema de mau condicionamento.

Outra técnica é o método do Lagrangiano Aumentado, que utiliza o Lagrangiano (4.21) acrescentando um termo que penaliza as restrições. Podemos escrever o Lagrangiano Aumentado da seguinte forma:

$$L(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = U(\mathbf{r}) + \lambda \cdot (r_2 - u_p) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (r_2 - u_p)^2, \quad (4.37)$$

onde ξ é a penalidade e λ é o multiplicador de Lagrange.

Temos que:

$$\nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.39)$$

onde:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \cdot (r_2 - u_p) \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por:

$$\lambda^{(k+1)} = [0 \quad \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u_p)]. \quad (4.41)$$

A equação (4.39) é a equação de equilíbrio e pode ser escrita pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 &= 0, \\ a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + \lambda + \xi \cdot (r_2 - u_p) - R_2 &= 0, \\ r_1, r_2, \lambda, \xi &\in \mathfrak{R}^n. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Fazendo o equilíbrio para o nó 2, de (4.42) temos:

$$S_2 + F_{c2} - R_2 = 0. \quad (4.43)$$

O que é equivalente a:

$$R_2 - S_2 = \lambda + \xi \cdot (r_2 - u_p). \quad (4.44)$$

A interpretação gráfica do algoritmo para a resolução do sistema não linear (4.44) pelo método do Lagrangiano Aumentado, é ilustrado na figura 4.5. O valor de ξ é constante e o multiplicador de Lagrange $\lambda^{(k)}$ é escolhido e fixado no começo de cada minimização sem restrições. A seguir, o funcional $L(r, \lambda, \xi)$ é minimizado em relação a r . No final de cada minimização os valores de $\lambda^{(k)}$ são atualizados por $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u_p)$ e o processo continua até que $\lambda^{(k)}$ atinja a convergência, ou seja, $r_2^{(k)} \rightarrow u_p$ quando $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda^{(*)}$, ou até que $(r_2 - u_p) \leq \text{TOL}$, onde TOL é uma precisão pré-fixada.

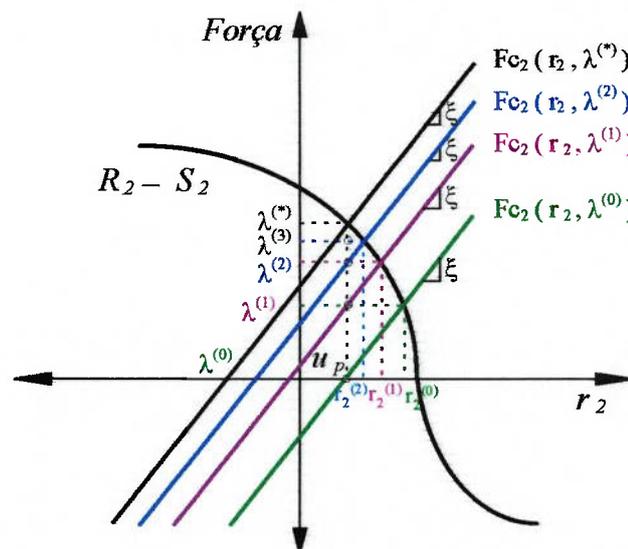


Figura 4.5 - Equilíbrio do nó 2 pelo método do Lagrangiano Aumentado.

O processo iterativo do Lagrangiano Aumentado é ilustrado na figura 4.5. Adotamos inicialmente $\lambda^{(0)} = 0$. Em seguida, desenhamos a função $F_{C_2}(r_2, \lambda^{(0)}) = \lambda^{(0)} + \xi \cdot (r_2 - u_p)$. Minimizando o funcional (4.37) obtemos o valor de $r_2^{(0)}$, ou seja, a solução $r_2^{(0)}$ do sistema (4.44) está na interseção das funções $f_1: R_2 - S_2$ e $F_{C_2}(r_2, \lambda^{(0)})$. Atualizamos então, o valor de $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \xi \cdot (r_2^{(0)} - u_p)$ e desenhamos a função $F_{C_2}(r_2, \lambda^{(1)}) = \lambda^{(1)} + \xi \cdot (r_2 - u_p)$. E assim sucessivamente, até que $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda^{(*)}$ e conseqüentemente $r_2^{(k)} \rightarrow u_p$.

A matriz de rigidez do sistema (4.42) é definida por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_1 + 3 \cdot b_1 \cdot r_1^2 + a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 \\ -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 + \xi \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.2, onde a mola 1 é não linear e a mola 2 é linear. Os parâmetros do problema (4.42) são dados por:

$$a_1 = a_2 = b_1 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_2 = 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$u_p = 3 \text{ cm},$$

$$\text{ETOL} = 10^{-10},$$

$$\text{KTOL} = 10^{-11},$$

$$\text{max_bfgs} = 10.$$

O sistema de equações (4.42) pode ser simplificado por:

$$20 \cdot r_1^3 + 20 \cdot r_1 - 20 \cdot (r_2 - r_1) - 1000 = 0,$$

$$20 \cdot (r_2 - r_1) + \lambda + \xi \cdot (r_2 - 3) = 0, \quad (4.46)$$

$$r_1, r_2, \lambda, \xi \in \mathfrak{R}^n.$$

Aplicando o algoritmo do Lagrangiano Aumentado estudado no capítulo 3 no sistema (4.46) e adotando o parâmetro de penalidade $\xi = 100$, obtemos a tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	λ	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS
0	3,5789	1000	0	10 N, L, N, L, N,	2 N, 10 B, N, L, B, L, B,
0	3	0	11,5789	L, N, L, N.	L, B, L, B.

Tabela 4.6 - Problema sob restrição de igualdade (Lagrangiano Aumentado)

Na tabela 4.6, podemos ver claramente que $\lambda = 11,5789$. Observemos que no método do Lagrangiano Aumentado, o parâmetro de penalidade ξ é finito ($\xi = 100$), ou seja, qualquer valor de ξ garante a convergência.

Aplicando o algoritmo do Lagrangiano Aumentado no exemplo (4.46) para 5 incrementos de carga, obtemos a tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	λ	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS
0	2,0693	200	0	8 N, L, 2 N, L, N, L,	2 N, 8 B, L, B, N, B, L,
0	3	0	-18,6131	N, L, N, L, N.	B, L, B, L, B, L, B.
2,0693	2,6100	400	0	5 N, L, N, L, N, L,	N, 5 B, L, B, L, B, L, B,
3	3	0	-7,7996	N, L, N, L, N.	L, B, L, B.
2,6100	3	600	0	4 N, L, N, L, N, L,	N, 4 B, L, B, L, B, L, B,
3	3	0	0	N, L, N, L, N.	L, B, L, B.
3	3,3133	800	0	4 N, L, N, L, N, L,	N, 4 B, L, B, L, B, L, B,
3	3	0	6,2661	N, L, N, L, N.	L, B, L, B.
3,3133	3,5789	1000	0	4 N, L, N, L, N, L,	N, 4 B, L, B, L, B, L, B,
3	3	0	11,5789	N, L, N, L, N.	L, B, L, B.

Tabela 4.7 - Problema incremental sob restrição de igualdade (Lagrangiano Aumentado)

Observamos na tabela 4.7, que quando a força externa aplicada no nó 1 for inferior a 600 Kgf, ou seja, $R_1 < 600$ Kgf, o multiplicador de Lagrange é negativo (tração). Quando $R_1 = 600$ Kgf, o sistema se auto-equilibra e o multiplicador de Lagrange é nulo. Quando $R_1 > 600$ Kgf, o multiplicador de Lagrange é positivo (compressão).

4.3 - Com Restrições de Desigualdade

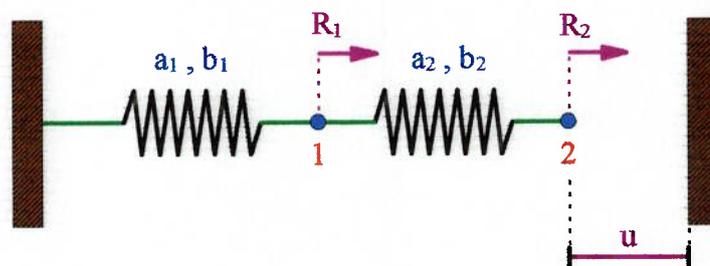


Figura 4.6 - Sistema de molas sob restrição de desigualdade

Para ilustrarmos o problema de otimização com restrições de desigualdade ou o problema de contato sem atrito, consideremos um simples modelo elástico não linear com dois graus de liberdade, conforme mostra a figura 4.6.

O sistema de molas se deforma quando submetido a esforços externos. Contudo, sofre uma restrição na barreira que na configuração de referência dista u de r_2 , ou seja, $r_2 \leq u$. Além disto, o sistema deve atingir o equilíbrio.

O problema representado pela figura 4.6, pode ser formulado como segue:

minimizar $U(\mathbf{r})$		
sujeito a $g(\mathbf{r}) = r_2 - u \leq 0$,		(4.47)
	$\mathbf{r} \in \mathcal{R}^n$,	

onde a função objetivo ou energia potencial $U(\mathbf{r})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

Uma técnica para a solução do problema (4.47), é o método do Lagrangiano, cuja função Lagrangiana pode ser vista como (BERTSEKAS [1,2]):

$$L(\mathbf{r}, \lambda) = U(\mathbf{r}) + \lambda \cdot \langle r_2 - u \rangle . \quad (4.48)$$

Uma condição necessária para que \mathbf{x}^* seja solução do problema (4.47) é dada por $\nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$, o que resulta no seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda) &= \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde $\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda)$ é dado por (BERTSEKAS [1,2]):

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda) = [0 \quad \langle \lambda \rangle], \quad (4.50)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda) &= [0 \quad 0], & \text{se } \lambda \leq 0, \\ \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda) &= [0 \quad \lambda], & \text{se } \lambda > 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Reescrevendo o sistema (4.49), obtemos:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 = 0, \\ f_2(r_1, r_2, \lambda) &: a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + \langle \lambda \rangle - R_2 = 0, \\ f_3(r_2) &: r_2 - u \leq 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.6. Sejam a mola 1 não linear e a mola 2 linear. Os parâmetros do problema (4.52) são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = b_1 &= 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1}, \\ b_2 &= 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1}, \end{aligned}$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$u = 3 \text{ cm}.$$

Então o problema (4.52) pode ser simplificado como:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: 40 \cdot r_1 + 20 \cdot r_1^3 - 20 \cdot r_2 - 1000 = 0, \\ f_2(r_1, r_2, \lambda) &: 20 \cdot r_2 - 20 \cdot r_1 + \langle \lambda \rangle = 0, \\ f_3(r_2) &: r_2 - 3 \leq 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

O problema (4.53) é resolvido pelo método dos conjuntos ativos. No exemplo acima, como se trata de uma única restrição, ou ela é ativa ou ela é inativa. Consideremos inicialmente que a restrição seja inativa. Resolvendo o problema (4.53), obtemos $\lambda = 0$, $r_1 = 3,5936$ e $r_2 = 3,5936$, violando a restrição $r_2 \leq 3$. Então, podemos concluir que a restrição é ativa. Em seguida, resolvendo o problema (4.53), obtemos $\lambda = 11,5789$, $r_1 = 3,5789$ e $r_2 = 3$, satisfazendo às condições do problema.

A solução do problema (4.53) é representada na tabela abaixo:

r^*	R	λ
3,5789	1000	
3	0	11,5789

Tabela 4.8 - Problema sob restrição de desigualdade (Lagrangiano)

O multiplicador de Lagrange λ pode ser interpretado fisicamente como uma força de reação que o nó 2 aplica no sistema, positiva na compressão e nula na tração.

Outra técnica para a solução do problema (4.47), é o método da Penalidade, cuja função penalidade é definida por:

$$P(\mathbf{r}, \xi) = U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \langle (r_2 - u) \rangle^2. \tag{4.54}$$

A equação de equilíbrio é definida por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.55)$$

onde $\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi)$ é dado por:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) = [0 \quad < \xi \cdot (r_2 - u) >], \quad (4.56)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) &= [0 \quad 0] && , \text{ se } \xi \cdot (r_2 - u) \leq 0, \\ \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) &= [0 \quad \xi \cdot (r_2 - u)] && , \text{ se } \xi \cdot (r_2 - u) > 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Reescrevendo o sistema (4.55), obtemos:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2) &: a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 = 0, \\ f_2(r_1, r_2, \xi) &: a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + < \xi \cdot (r_2 - u) > - R_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Fazendo o equilíbrio para o nó 2, de (4.58) obtemos:

$$S_2 + F_{c2} - R_2 = 0. \quad (4.59)$$

O que é equivalente a:

$$R_2 - S_2 = < \xi \cdot (r_2 - u) >. \quad (4.60)$$

A interpretação gráfica do algoritmo para a resolução do sistema não linear (4.60) pelo método da Penalidade, é ilustrado na figura 4.7. Por questões didáticas, consideremos que o sistema com molas quando carregado e resolvido ignorando as restrições, tende a se equilibrar com o nó 2 violando a restrição, ou seja, $r_2^{(*)} > u$, como mostra a função $R_2 - S_2$. Por hipótese temos $r_2^{(k)} - u \leq 0$. Desenhando a função

$F_{c_2}(\xi) : \langle \xi \cdot (r_2 - u) \rangle$ para cada valor de ξ , podemos concluir que quando $\xi \rightarrow \infty$, $r_2^{(k)} \rightarrow u$.

O parâmetro de penalidade ξ é interpretado como uma mola muito rígida aplicada no nó 2, que funciona apenas quando estiver submetida à compressão.

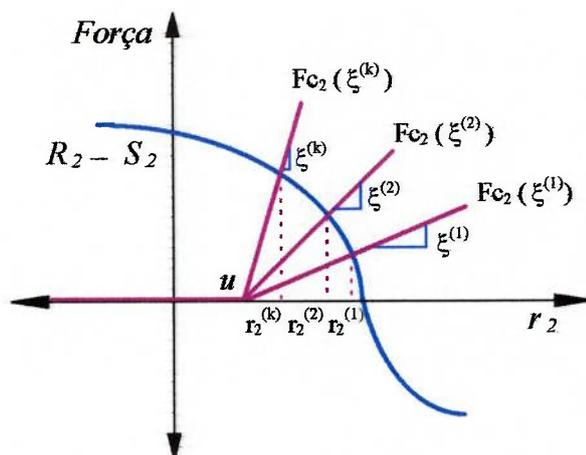


Figura 4.7 - Resposta não linear para o método da Penalidade

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.6. Sejam a mola 1 não linear e a mola 2 linear. Os parâmetros do problema (4.58) são dados por:

$$a_1 = a_2 = b_1 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_2 = 0 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$u = 3 \text{ cm},$$

$$\text{ETOL} = 10^{-10},$$

$$\text{max_bfgs} = 10.$$

Então o problema pode ser simplificado por:

$$f_1(r_1, r_2) : 40 \cdot r_1 + 20 \cdot r_1^3 - 20 \cdot r_2 - 1000 = 0,$$

$$f_2(r_1, r_2) : -20 \cdot r_1 + 20 \cdot r_2 + \langle \xi \cdot (r_2 - 3) \rangle = 0. \quad (4.61)$$

Adotando uma seqüência dada por $\{ 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \dots \}$ e resolvendo o problema (4.61) em relação a r_1 e r_2 , a solução do problema é atingida quando o valor de ξ for igual à 10^5 , como mostra a tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	F_c	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS	ξ
0	3,5789	1000	0		2 N, 10 BFGS,	
0	3	0	0	12 N.	2 N e 1 BFGS.	10^5

Tabela 4.9 - Problema sob restrição de desigualdade (Penalidade)

Outra técnica é o método do Lagrangiano Aumentado, cuja função pode ser vista como (BERTSEKAS [1,2]):

$$L(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = U(\mathbf{r}) + \lambda \cdot \langle (r_2 - u) \rangle + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \langle (r_2 - u) \rangle^2, \quad (4.62)$$

onde ξ é a penalidade e λ é o multiplicador de Lagrange.

Temos que a condição de otimalidade para (4.62) é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \lambda, \xi) &= \mathbf{0}, \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.63)$$

ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (4.64)$$

onde BERTSEKAS [1,2] demonstra que:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \langle \lambda + \xi \cdot (r_2 - u) \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por:

$$\lambda^{(k+1)} = [0 \quad < \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u) >], \quad (4.66)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} &= [0 \quad 0], & \text{se } \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u) \leq 0, \\ \lambda^{(k+1)} &= [0 \quad \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u)], & \text{se } \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u) > 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

A equação (4.64) é a equação de equilíbrio e pode ser escrita pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 - R_1 &= 0, \\ a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 + < \lambda + \xi \cdot (r_2 - u) > - R_2 &= 0, \\ \lambda &\geq 0, \\ r_1, r_2, \lambda, \xi &\in \mathfrak{R}^n. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Fazendo o equilíbrio para o nó 2, de (4.68) temos:

$$S_2 + Fc_2 - R_2 = 0. \quad (4.69)$$

O que é equivalente a:

$$R_2 - S_2 = < \lambda + \xi \cdot (r_2 - u) >. \quad (4.70)$$

A interpretação gráfica do algoritmo para a resolução do sistema não linear (4.70) pelo método do Lagrangiano Aumentado, é ilustrado na figura 4.8. Consideremos que o sistema quando carregado e resolvido ignorando a restrição se equilibre com o nó 2 violando a restrição, como mostra a função $R_2 - S_2$.

Adotamos inicialmente $\lambda^{(0)} = 0$. Em seguida, desenhamos a função $Fc_2(r_2, \lambda^{(0)}) = < \lambda^{(0)} + \xi \cdot (r_2 - u) >$. Minimizando o funcional (4.62) obtemos o valor de $r_2^{(0)}$, ou seja, a solução $r_2^{(0)}$ do sistema (4.70) está na interseção das funções $f_1: R_2 - S_2$ e $Fc_2(r_2, \lambda^{(0)})$. Atualizamos então, o valor de $\lambda^{(1)} = < \lambda^{(0)} + \xi \cdot (r_2^{(0)} - u) >$ e

desenhamos a função $F_{c2}(r_2, \lambda^{(1)}) = \langle \lambda^{(1)} + \xi \cdot (r_2 - u) \rangle$. E assim sucessivamente, até que $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda^{(*)}$ e conseqüentemente $r_2^{(k)} \rightarrow u$.

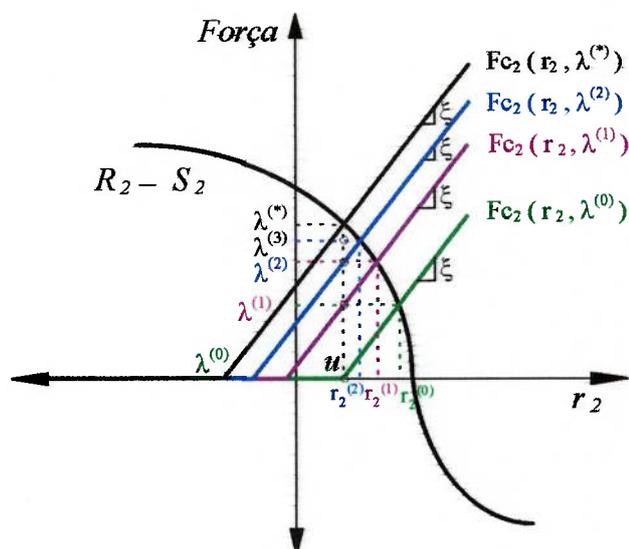


Figura 4.8 - Resposta não linear para o método do Lagrangiano Aumentado

Consideremos o sistema de molas ilustrado na figura 4.6, onde a mola 1 é não linear e a mola 2 é linear. Os parâmetros do problema (4.68) são dados por:

$$a_1 = a_2 = b_1 = 20 \text{ Kgf} \cdot \text{cm}^{-1},$$

$$b_2 = 0,$$

$$R_1 = 1.000,0 \text{ Kgf},$$

$$R_2 = 0 \text{ Kgf},$$

$$\text{ETOL} = 10^{-10},$$

$$\text{KTOL} = 10^{-11},$$

$$\xi = 100,$$

$$u = 3 \text{ cm},$$

$$\text{max_bfgs} = 10.$$

Então, o problema pode ser simplificado por:

$$20 \cdot r_1 + 20 \cdot r_1^3 - 20 \cdot (r_2 - r_1) - 1000 = 0,$$

$$20 \cdot (r_2 - r_1) + \langle \lambda + \xi \cdot (r_2 - 3) \rangle = 0,$$

$$\lambda \geq 0,$$

$$r_1, r_2, \lambda, \xi \in \mathfrak{R}^n.$$

(4.71)

Aplicando o algoritmo do Lagrangiano Aumentado, obtemos a tabela abaixo:

$r^{(0)}$	r^*	R	λ	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS
0	3,5789	1000	0	12 N, L, N, L, N,	2 N, 10 B, N, 2 B, L, B,
0	3	0	11,5789	L, N, L, N.	L, B, L, B, L, B.

Tabela 4.10 - Problema com restrição de desigualdade (Lagrangiano Aumentado)

Resolvendo o exemplo acima para 5 incrementos de carga, temos:

$r^{(0)}$	r^*	R	λ	Iterações Newton	Iterações Newton / BFGS
0	2	200	0		
0	2	0	0	9 N.	2 N, 7 B, N, B.
2	2,5917	400	0		
2	2,5917	0	0	5 N.	N, 5 B.
2,5917	3	600	0		
2,5917	3	0	0	4 N.	N, 10 B.
3	3,3133	800	0	4 N, L, N, L, N, L,	N, 4 B, L, B, L, B, L, B, L,
3	3	0	6,2661	N, L, N, L, N.	B, L, B.
3,3133	3,5789	1000	0	4 N, L, N, L, N, L,	N, 4 B, L, B, L, B, L, B, L,
3	3	0	11,5789	N, L, N, L, N.	B, L, B.

Tabela 4.11 - Problema incremental sob restrição de desigualdade (Lagrangiano Aumentado)

Analisando a tabela 4.11, podemos concluir que quando a força externa $R_1 \leq 600$ Kgf não há contato, ou seja, o multiplicador de Lagrange é nulo. Então o problema coincide com o problema sem restrições. Quando $R_1 > 600$ Kgf existe contato e o problema coincide com o de restrições de igualdade.

Análise Não Linear de Treliças Espaciais

5.1 - Formulação¹

A formulação que será apresentada neste capítulo corresponde à teoria geral exata para a análise não linear de treliças espaciais em regime elástico, sem limites nos deslocamentos e nas deformações.

A formulação que será abordada é vetorial, então, podemos considerar um sistema de coordenadas, denominado de sistema global de coordenadas, que vale para toda a estrutura.

Por simplicidade, consideremos que as barras das treliças espaciais sejam prismáticas, ou seja, que a seção transversal seja constante ao longo do eixo.

A configuração de referência pode ser adotada como a configuração inicial ou indeformada, ou qualquer outra configuração conhecida. Na configuração atual, atua sobre a barra uma força normal N , conforme ilustra a figura 5.1.

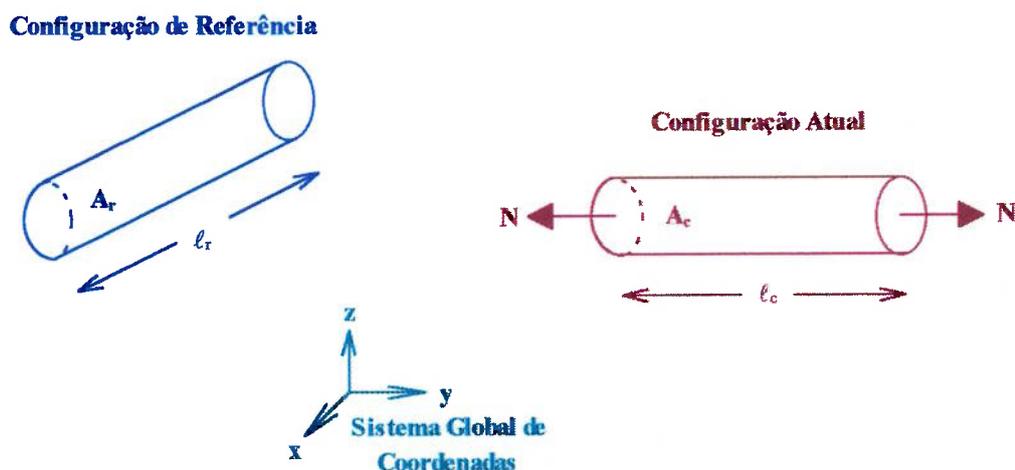


Figura 5.1 - Configurações de uma barra de treliça espacial

¹Esta seção está abalizada em PIMENTA [11, 12].

Sejam V_r , A_r , l_r o volume, a área da seção transversal e o comprimento da barra, respectivamente, na configuração de referência e V_c , A_c , l_c o volume, a área da seção transversal e o comprimento da barra, respectivamente, na configuração atual ou corrente. Suas relações são dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} V_r &= A_r \cdot l_r, \\ V_c &= A_c \cdot l_c. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Uma medida básica de deformação é o estiramento, que é definido por:

$$\Lambda = l_c / l_r. \quad (5.2)$$

O alongamento linear de uma barra de treliça é definido por:

$$\varepsilon = \Lambda - 1 = (l_c - l_r) / l_r. \quad (5.3)$$

Convencionando a derivada em relação ao tempo por um ponto superposto, as taxas de deformações são calculadas derivando (5.3). Então:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\delta}{\delta t} [\Lambda - 1] = \dot{\Lambda} = l_r^{-1} \cdot \dot{l}_c. \quad (5.4)$$

As deformações virtuais são definidas de forma semelhante à derivada no tempo e podem ser expressas como:

$$\delta \varepsilon = l_r^{-1} \cdot \delta l_c, \quad (5.5)$$

onde $\delta \varepsilon$ é uma deformação virtual e δl_c é um acréscimo virtual do comprimento da barra.

A tensão nominal atuante na barra na configuração deformada é definida por:

$$\sigma = N / A_r . \quad (5.6)$$

A tensão de Cauchy atuante na barra na configuração deformada é definida por:

$$\sigma_c = N / A_c . \quad (5.7)$$

Uma barra de treliça está em regime elástico, se existir uma relação em que a cada deformação associe uma só tensão. A equação constitutiva elástica é expressa da seguinte maneira:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) . \quad (5.8)$$

Definindo ϕ a energia de deformação por unidade de volume da configuração de referência, expressa por

$$\phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\eta) . d\eta , \quad (5.9)$$

a energia de deformação da barra de treliça pode ser dada como:

$$U = A_r . l_r . \phi = V_r . \phi . \quad (5.10)$$

Da definição (5.9) é imediato que:

$$\sigma = \frac{d\phi}{d\varepsilon} . \quad (5.11)$$

Como podemos ver em (5.11), a função ϕ serve de potencial para as tensões. Definindo ainda D como sendo o módulo de rigidez tangente elástica, temos:

$$D = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} . \quad (5.12)$$

Substituindo (5.11) em (5.12), temos:

$$D = \frac{d^2 \phi}{d\varepsilon^2}. \quad (5.13)$$

Da equação (5.13) podemos ver que em geral D é função de ε , ou seja,

$$D = D(\varepsilon). \quad (5.14)$$

Um exemplo clássico de (5.8) é o caso particular da equação linear dada pela lei de Hooke, expressa por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \sigma_0, \quad (5.15)$$

onde E é o módulo de Elasticidade da barra e σ_0 é a tensão inicial.

A função ϕ é obtida integrando (5.15) em relação a ε , como mostra (5.9). Logo:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 + \sigma_0 \cdot \varepsilon. \quad (5.16)$$

Aplicando (5.16) em (5.13), temos que para a lei de Hooke (5.15), o módulo tangente de rigidez elástica é dado por:

$$D = E. \quad (5.17)$$

Derivando (5.8) temos:

$$\dot{\sigma} = D \cdot \dot{\varepsilon}. \quad (5.18)$$

Sejam \mathbf{x}^f o vetor posição de um ponto no espaço em relação à origem na configuração de referência, \mathbf{x} o vetor posição de um ponto no espaço em relação à

origem na configuração atual e \mathbf{r} o vetor deslocamento do ponto no espaço. Sejam a e b as extremidades inicial e final, respectivamente, de uma barra de treliça.

Seja um elemento de treliça no espaço em sua configuração atual orientado do ponto a para o ponto b , conforme ilustra a figura 5.2.

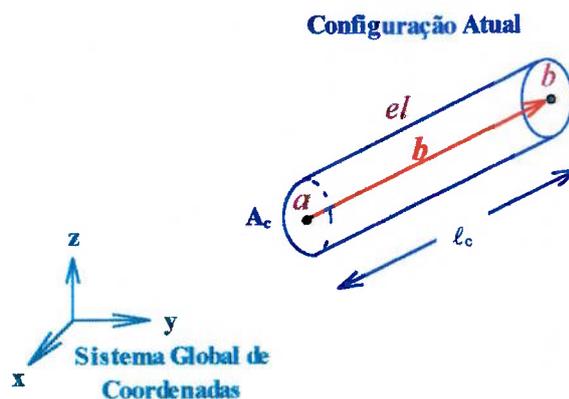


Figura 5.2 - Configuração atual de uma barra de treliça espacial

O vetor das coordenadas nodais do elemento el na configuração atual, é definido por:

$$\mathbf{x}_{el} = [x_a \quad y_a \quad z_a \quad x_b \quad y_b \quad z_b] = [\mathbf{x}_a \quad \mathbf{x}_b] . \quad (5.19)$$

O vetor associado ao elemento que liga a extremidade a com a extremidade b na configuração atual, com origem na extremidade a , é definido por \mathbf{b} e é dado por:

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{x}_{el} , \quad (5.20)$$

onde:

$$\boldsymbol{\psi} = [-\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (5.21)$$

De (5.20) e (5.21), temos que o vetor \mathbf{b} é dado por:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

O módulo do vetor \mathbf{b} é:

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}. \quad (5.23)$$

Em (5.23), podemos ver claramente que o módulo do vetor \mathbf{b} é ℓ_c e portanto, temos:

$$\ell_c^2 = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{x}_{el}^T \Psi^T \cdot \Psi \mathbf{x}_{el}. \quad (5.24)$$

Colocando a equação (5.2) em função do vetor \mathbf{b} , obtemos:

$$\Lambda = \sqrt{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b}} / \ell_r. \quad (5.25)$$

Com as equações (5.3) e (5.25) obtemos qualquer medida de deformação simplesmente conhecendo as coordenadas dos nós a e b da barra na configuração atual.

Substituindo (5.2) em (5.25) obtemos:

$$\ell_c = (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b})^{1/2}. \quad (5.26)$$

Derivando (5.26) em relação ao tempo temos:

$$\dot{\ell}_c = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b})^{-1/2} \cdot (\dot{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \cdot \dot{\mathbf{b}}),$$

$$\dot{\ell}_c = (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b})^{-1/2} (\mathbf{b}^T \cdot \dot{\mathbf{b}}),$$

$$\dot{\ell}_c = (\ell_c^2)^{-1/2} \cdot \mathbf{x}_{el}^T \Psi^T \cdot \Psi \dot{\mathbf{x}}_{el},$$

resultando em:

$$\dot{l}_c = l_c^{-1} \cdot \mathbf{x}_{el}^T \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} = l_c^{-1} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} . \quad (5.27)$$

O aumento virtual do comprimento da barra é definido de forma semelhante à (5.27) como:

$$\delta l_c = l_c^{-1} \cdot \mathbf{x}_{el}^T \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \delta \mathbf{x}_{el} = l_c^{-1} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \delta \mathbf{x}_{el} . \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) em (5.5) temos a deformação virtual dada por:

$$\delta \varepsilon = \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \delta \mathbf{x}_{el} . \quad (5.29)$$

O trabalho virtual das forças internas de uma barra de treliça é definido como:

$$\delta W_{int}^{el} = V_r \cdot \sigma \cdot \delta \varepsilon = V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \delta \mathbf{x}_{el} . \quad (5.30)$$

De (5.30) podemos escrever:

$$\delta W_{int}^{el} = \mathbf{P}_{el}^T \cdot \delta \mathbf{x}_{el} , \quad (5.31)$$

onde \mathbf{P}_{el} é o vetor das forças internas da barra de treliça, definido por:

$$\mathbf{P}_{el} = V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{b} = V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{x}_{el} . \quad (5.32)$$

O vetor das forças internas \mathbf{P}_{el} pode também ser escrito como:

$$\mathbf{P}_{el} = [P_{ax} \quad P_{ay} \quad P_{az} \quad P_{bx} \quad P_{by} \quad P_{bz}] = [\mathbf{P}_a \quad \mathbf{P}_b] , \quad (5.33)$$

como ilustra a figura 5.3.

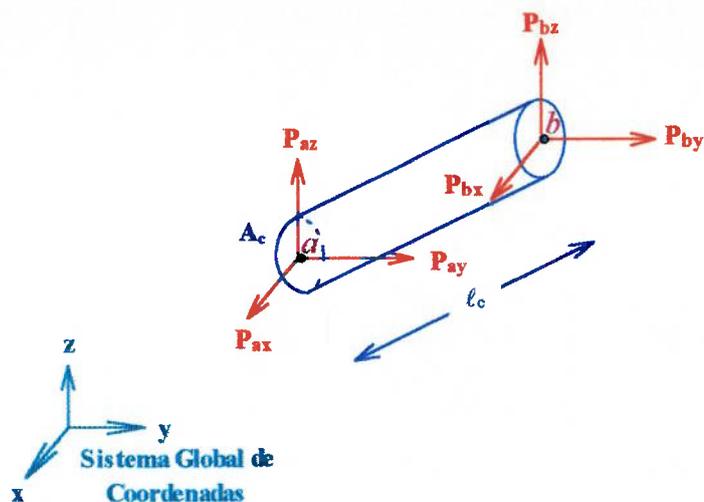


Figura 5.3 - Forças internas de uma barra de treliça espacial

Reescrevendo (5.32) obtemos:

$$\mathbf{P}_{el} = V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \begin{bmatrix} -(x_b - x_a) \\ -(y_b - y_a) \\ -(z_b - z_a) \\ x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Definindo \mathbf{x} como o vetor das coordenadas nodais da estrutura, podemos escrever a relação entre \mathbf{x} e \mathbf{x}_{el} como:

$$\mathbf{x}_{el} = \mathbf{A}_{el} \mathbf{x}, \quad (5.35)$$

onde \mathbf{A}_{el} é uma matriz booleana, ou seja, preenchida de zeros e uns, que relaciona os graus de liberdade de um elemento com os graus de liberdade da estrutura. A matriz \mathbf{A}_{el} pode ser representada como uma tabela de incidência na qual relaciona um elemento com suas extremidades inicial e final.

De (5.35) temos que:

$$\delta \mathbf{x}_{el} = \mathbf{A}_{el} \delta \mathbf{x} . \quad (5.36)$$

O trabalho virtual total das forças internas da estrutura é definido por:

$$\delta W_{int}^{estrutura} = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{P}_{el}^T \cdot \delta \mathbf{x}_{el} = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{P}_{el}^T \mathbf{A}_{el} \cdot \delta \mathbf{x} , \quad (5.37)$$

onde EL é o número total de elementos da estrutura.

Definindo \mathbf{S} como o vetor das forças internas aplicadas nos nós da estrutura, pela equação (5.37) temos:

$$\mathbf{S} = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{A}_{el}^T \mathbf{P}_{el} . \quad (5.38)$$

Para o cálculo do vetor \mathbf{S} é necessário o conhecimento das coordenadas dos nós da estrutura e das tensões existentes nas barras, ambas na configuração atual.

Reescrevendo (5.37) obtemos:

$$\delta W_{int}^{estrutura} = \mathbf{S}^T \cdot \delta \mathbf{x} . \quad (5.39)$$

O trabalho virtual das forças externas aplicadas na estrutura é definido por:

$$\delta W_{ext}^{estrutura} = \mathbf{R}^T \cdot \delta \mathbf{x} , \quad (5.40)$$

onde \mathbf{R} é o vetor das forças externas aplicadas nos nós da estrutura.

Pelo teorema dos trabalhos virtuais temos:

$$\delta W_{int}^{estrutura} - \delta W_{ext}^{estrutura} = 0 . \quad (5.41)$$

Logo:

$$\mathbf{S}^T \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{R}^T \cdot \delta \mathbf{x} = 0 ,$$

$$(\mathbf{S}^T - \mathbf{R}^T) \cdot \delta \mathbf{x} = 0.$$

O que resulta em:

$$\mathbf{S} - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.42)$$

A equação (5.42) é chamada de equação de equilíbrio da estrutura.

Derivando (5.42) em função do tempo, obtemos:

$$\dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}. \quad (5.43)$$

A equação (5.43) é chamada de equação do equilíbrio incremental da estrutura.

Derivando em função do tempo (5.38) temos:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{A}_{el}^T \dot{\mathbf{P}}_{el}. \quad (5.44)$$

Derivando em relação ao tempo (5.2) temos:

$$\dot{\Lambda} = \dot{\ell}_c / \ell_r = \ell_r^{-1} \cdot \ell_c^{-1} \cdot \mathbf{b}^T \cdot \psi \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el}. \quad (5.45)$$

Derivando em relação ao tempo (5.20) temos:

$$\dot{\mathbf{b}} = \psi \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el}. \quad (5.46)$$

Para a obtenção de $\dot{\mathbf{P}}_{el}$ basta derivar (5.32) em função do tempo, utilizando as equações (5.45) e (5.46). Logo:

$$\dot{\mathbf{P}}_{el} = \frac{\delta}{\delta t} [V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot \ell_c^{-2} \cdot \psi^T \mathbf{b}],$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{el} = & V_r \cdot \dot{\sigma} \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + V_r \cdot \sigma \cdot \dot{\Lambda} \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \\ & + V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot (-2) \cdot l_c^{-3} \cdot \dot{l}_c \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \dot{\mathbf{b}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{el} = & V_r \cdot \Lambda \cdot [\dot{\sigma} \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \sigma \cdot \Lambda^{-1} \cdot \dot{\Lambda} \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \\ & + \sigma \cdot (-2) \cdot l_c^{-3} \cdot \dot{l}_c \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \sigma \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \dot{\mathbf{b}}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{el} = & V_r \cdot \Lambda \cdot [\dot{\sigma} \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \sigma \cdot l_c^{-4} \cdot \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \\ & - 2 \cdot \sigma \cdot l_c^{-4} \cdot \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \sigma \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el}] . \end{aligned}$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{el} = & V_r \cdot \Lambda \cdot [- l_c^{-4} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} + \\ & + l_c^{-2} \cdot \dot{\sigma} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \sigma \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el}] . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Com o auxílio de (5.4), (5.18) e (5.27), podemos reescrever (5.47) como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{el} = & V_r \cdot \Lambda \cdot [- l_c^{-4} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} + \\ & + l_c^{-2} \cdot (\mathbf{D} \cdot \Lambda \cdot l_c^{-2} \cdot \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el}) \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} + \sigma \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el}] . \end{aligned}$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{el} = & V_r \cdot \Lambda \cdot [- l_c^{-4} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} + \\ & + \Lambda \cdot l_c^{-4} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} + \sigma \cdot l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}] \cdot \dot{\mathbf{x}}_{el} . \end{aligned} \quad (5.48)$$

Definindo \mathbf{k}_G como a matriz de rigidez geométrica do elemento por:

$$\mathbf{k}_G = V_r \cdot \sigma \cdot \Lambda \cdot [- l_c^{-4} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} + l_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}] , \quad (5.49)$$

e definindo \mathbf{k}_M como a matriz de rigidez constitutiva do elemento por:

$$\mathbf{k}_M = V_r \cdot \mathbf{D} \cdot \Lambda^2 \cdot \ell_c^{-4} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi}, \quad (5.50)$$

temos:

$$\dot{\mathbf{P}}_{el} = (\mathbf{k}_G + \mathbf{k}_M) \dot{\mathbf{x}}_{el}. \quad (5.51)$$

A matriz $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}$ é explicitada como:

$$\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

A matriz $\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi}$ é explicitada por:

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \theta & -\theta \\ -\theta & \theta \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

onde θ é definido por:

$$\theta = \begin{bmatrix} (x_b - x_a)^2 & (x_b - x_a)(y_b - y_a) & (x_b - x_a)(z_b - z_a) \\ (x_b - x_a)(y_b - y_a) & (y_b - y_a)^2 & (y_b - y_a)(z_b - z_a) \\ (x_b - x_a)(z_b - z_a) & (y_b - y_a)(z_b - z_a) & (z_b - z_a)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

É importante ressaltar que a matriz \mathbf{k}_G depende apenas das coordenadas nodais e das tensões das barras, ambas na configuração atual, e que \mathbf{k}_M depende apenas das coordenadas nodais e do módulo de rigidez da estrutura, ambas na configuração atual.

A matriz de rigidez do elemento é definida por:

$$\mathbf{k}_{el} = \mathbf{k}_G + \mathbf{k}_M. \quad (5.55)$$

O problema (5.43) pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \quad (5.56)$$

onde \mathbf{K} é conhecida como a matriz de rigidez tangente da estrutura definida como:

$$\mathbf{K} = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{A}_{el}^T (\mathbf{k}_G + \mathbf{k}_M) \mathbf{A}_{el}. \quad (5.57)$$

Definindo o vetor dos deslocamentos dos nós da estrutura por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^r, \quad (5.58)$$

é óbvio que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^r + \mathbf{r}. \quad (5.59)$$

Podemos concluir que:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r}). \quad (5.60)$$

Então, considerando \mathbf{r} o vetor incógnita, o problema de otimização sem restrições para treliças espaciais pode ser formulado como:

$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & U(\mathbf{r}) = \sum_{el=1}^{EL} U_{el}(\mathbf{r}) - \mathbf{R}^T \mathbf{r} \\ & \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^n, \end{aligned}$	(5.61)
--	--------

onde a energia potencial de cada elemento de treliça U_{el} , é definida por:

$$U_{el}(\mathbf{r}) = V_r \cdot \phi = V_r \cdot \int_0^e \sigma(\eta) \cdot d\eta. \quad (5.62)$$

A função objetivo ou energia potencial total $U(\mathbf{r})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. A condição necessária de otimalidade é dada por $\nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Logo:

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \sum_{el=1}^{EL} \frac{\partial U_{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{x}_{el}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{el}}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.63)$$

De (5.63) temos:

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{V}_{el} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \ell_c^{-2} \cdot \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} \mathbf{A}_{el} - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.64)$$

E conseqüentemente:

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \sum_{el=1}^{EL} \mathbf{P}_{el}^T \mathbf{A}_{el} - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.65)$$

Resultando na seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.66)$$

Seja um intervalo de tempo com início em t_a e fim em t_b . O carregamento em t_b é conhecido e dado por \mathbf{R}_b . A análise numérica do problema estático consiste em resolver o sistema de equações não lineares (5.66) no instante t_b .

Utilizando o método de Newton para a resolução do sistema (5.66) no instante t_b , obtemos a seguinte regra de recorrência:

$$\mathbf{r}^{(j+1)} = \mathbf{r}^{(j)} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}^{(j)}) \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(j)}). \quad (5.67)$$

Como \mathbf{R}_b é constante, a matriz gradiente de (5.67) é definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}^{(i)}) = \mathbf{K} . \quad (5.68)$$

Então:

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) . \quad (5.69)$$

Seja $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ a direção do incremento em cada iteração, definida por:

$$\Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) . \quad (5.70)$$

Calculamos $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ resolvendo o seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) . \quad (5.71)$$

Utilizando o método BFGS, a regra de recorrência é dada por:

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \Delta \mathbf{r}^{(i)} , \quad (5.72)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) . \quad (5.73)$$

A matriz \mathbf{B} é uma aproximação da inversa de \mathbf{K} . O seu processo de atualização está descrito no capítulo 3.

O algoritmo de programação matemática sem restrições que utilizaremos para a análise das treliças neste trabalho, é o método de Newton / Quase-Newton.

Seja G_c a derivada direcional da energia potencial $U(\mathbf{r})$ na direção $\Delta \mathbf{r}$, G_I o valor inicial de G_c , $ETOL$ um parâmetro de precisão para detectar o equilíbrio e max_bfgs o número máximo de iterações do BFGS. Então, o algoritmo do método de Newton / Quase-Newton é dado por:

Método do BFGS:

a) Incremente as Iterações: $i = i + 1$, $j = j + 1$.

b) Fórmula Produto do BFGS.

Calcule os vetores $\mathbf{v}^{(i)}$ e $\mathbf{w}^{(i)}$, onde:

$$\mathbf{v}^{(i)} = \frac{\Delta \mathbf{r}^{(i-1)}}{\Delta \mathbf{r}^{(i-1)} * (\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)}))}$$

$$\alpha^{(i)} = \sqrt{\frac{-s^{(i)} * (\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)})) * \Delta \mathbf{r}^{(i-1)}}{\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)}) * \Delta \mathbf{r}^{(i-1)}}$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = - (\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)})) + \alpha^{(i)} * \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)})$$

$$\mathbf{K}^{(i)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i)} * \mathbf{w}^{(i)T}) * \mathbf{K}^{(i-1)} * (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(i)} * \mathbf{v}^{(i)T})$$

c) Calcule a direção $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ resolvendo o sistema: $\mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)})$ pelo algoritmo descrito no quadro n.º 5.

d) Atualize a Energia: $G_c = \Delta \mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)})$.

e) Vá para o passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 19.

Quadro n.º 20 - Método do BFGS para treliças

Método de Newton:

a) Incremente o contador da iteração: $i = i + 1$.

b) Calcule a Linearização exata: $\mathbf{K}(\mathbf{r}^{(i)}) = \mathbf{D}_r \mathbf{S}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(i)}}$.

c) Calcule a direção $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ resolvendo o sistema: $\mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)})$.

d) Atualize a Energia: $G_c = \Delta \mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)})$.

e) Faça $j = 0$ e vá ao passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 19.

Quadro n.º 21 - Método de Newton para treliças

No algoritmo descrito no quadro n.º 19, temos que resolver sistemas de equações lineares. Como nossas matrizes serão sempre simétricas e definidas positivas, utilizaremos o método Choleski. No passo IIa, teremos que fazer a busca unidimensional. Neste trabalho fizemos um estudo sobre a busca e concluímos que ela não é vantajosa. Em virtude disto não a usaremos, embora ela esteja mencionada no algoritmo acima.

5.2 - Problemas Com Restrições de Igualdade

Nas treliças, as restrições de igualdade podem ser representadas em geral, pelos vínculos da estrutura. Eles são submetidos à deslocamentos prescritos, os quais denominamos recalques. Quando um vínculo não sofre recalque, dizemos que o seu deslocamento prescrito é nulo. Nesta seção, nos deteremos apenas ao estudo dos vínculos.

Consideremos o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura definido por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{r}_P \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

onde \mathbf{r}_L é o vetor dos deslocamentos dos nós livres e \mathbf{r}_P é o vetor dos deslocamentos dos nós onde se prescreve os deslocamentos \mathbf{u}_P .

Então, o problema pode ser formulado como:

minimizar $U(\mathbf{r}) = \sum_{el=1}^{EL} U_{el}(\mathbf{r}) - \mathbf{R}^T \mathbf{r}$	(5.75)
sujeito a $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_P - \mathbf{u}_P = \mathbf{0},$	
$\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^n,$	

onde a energia potencial total $U(\mathbf{r})$ é contínua com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

O problema (5.75) pode ser resolvido de duas formas. A primeira consiste em resolvê-lo por eliminação de variável, ou seja, reduzindo o grau de liberdade da estrutura eliminando os graus prescritos, conforme vimos no capítulo 4.

A segunda consiste em considerar os graus de liberdade prescritos. Uma técnica é o método do Lagrangiano, cuja função Lagrangiana é definida por:

$$L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = U(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{u}_p). \quad (5.76)$$

Na equação (5.76), $\boldsymbol{\lambda}$ é o multiplicador de Lagrange referente aos graus de liberdade restringidos. Ele é irrestrito de sinal e suas componentes são positivas na compressão e negativas na tração.

A condição necessária para um mínimo local do problema (5.75), é que $[\mathbf{r}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]$ seja ponto estacionário da função Lagrangiana (5.76), ou seja, $\nabla L(\mathbf{r}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}$. O que resulta no seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_p - \mathbf{u}_p &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Onde:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_P \end{bmatrix}, \quad (5.78)$$

e

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (5.79)$$

A matriz Jacobiana do sistema (5.77) é definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_p^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

onde \mathbf{I}_p é uma matriz diagonal, nula nas componentes referentes aos graus livres e de valor unitário nas componentes referentes aos graus restringidos.

Outra técnica para a solução do problema (5.75), é o método da Penalidade, cuja função penalidade é definida por:

$$P(\mathbf{r}, \xi) = U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{u}_p)^2, \quad (5.81)$$

onde ξ é o parâmetro de penalidade. Minimizando a função penalidade, temos a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.82)$$

Onde:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \xi \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{u}_p) \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

A matriz Hessiana para o problema (5.81) é definida por:

$$\nabla^2 P(\mathbf{r}, \xi) = \mathbf{K} + \xi \cdot \mathbf{I}_p. \quad (5.84)$$

Outra técnica é o método do Lagrangiano Aumentado. A função do Lagrangiano Aumentado é dada por:

$$L(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = U(\mathbf{r}) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{u}_P) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{u}_P)^2. \quad (5.85)$$

Minimizando (5.85) obtemos a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.86)$$

Onde:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \lambda, \xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda + \xi \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{u}_P) \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot (\mathbf{r}_P^{(k)} - \mathbf{u}_P). \quad (5.88)$$

5.3 - Problemas Com Restrições de Desigualdade - Contato Sem Atrito

Nesta seção, vamos considerar as restrições de desigualdade para as treliças espaciais, formadas por planos que delimitam uma superfície de contato, que tendem a restringir os deslocamentos. Os nós da estrutura que serão candidatos ao contato, não poderão furar as barreiras delimitadas por esses planos. O estudo pode ser generalizado para qualquer restrição de desigualdade, ou seja, curvas não lineares que possam delimitar uma superfície de contato. Para essas restrições não lineares, é comum representá-las por aproximações de vários planos. Entretanto, não nos deteremos a esse assunto.

Então, o problema sob restrição de desigualdade pode ser formulado como:

minimizar $U(\mathbf{r}) = \sum_{el=1}^{EL} U_{el}(\mathbf{r}) - \mathbf{R}^T \mathbf{r}$ sujeito a $g_j(\mathbf{r}) \leq 0, j \in D,$ $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^n,$	(5.89)
---	--------

onde a energia potencial total $U(\mathbf{r})$ e as funções de restrições $g_j(\mathbf{r})$ são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem.

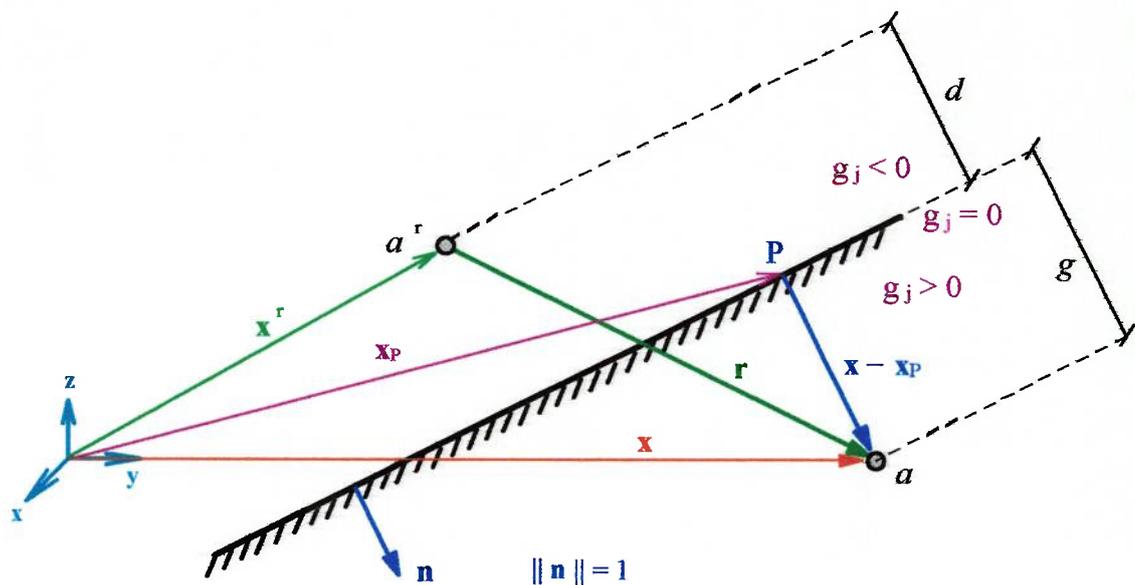


Figura 5.4 - Interpretação gráfica de um nó de treliça sujeito ao contato em uma restrição g_j

Analisemos um nó candidato ao contato em uma restrição de desigualdade g_j , como ilustra a figura 5.4. Na configuração de referência o nó é representado pelo ponto a^r e na configuração atual pelo ponto a . O vetor \mathbf{r} liga o ponto a^r ao ponto a e o vetor \mathbf{n} é o vetor normal à restrição g_j .

O ponto P se encontra na interseção da reta normal gerada pelo vetor \mathbf{n} que passa pelo ponto a , com a superfície g_j . A distância do ponto a^r à superfície g_j , é definida por d , dada por:

$$d = (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}^r) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.90)$$

A distância do ponto a à superfície g_j , é definida por g , dada por:

$$g = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - d. \quad (5.91)$$

Reescrevendo (5.91) temos:

$$g = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}^r) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.92)$$

O que resulta em:

$$g = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.93)$$

De g podemos concluir:

$$\begin{aligned} g \leq 0 & \quad , \text{ o nó } a \text{ pertence a região viável,} \\ g > 0 & \quad , \text{ o nó } a \text{ não pertence a região viável.} \end{aligned} \quad (5.94)$$

Neste trabalho, para solucionar o problema de contato, utilizaremos o método do Lagrangiano Aumentado.

A função do Lagrangiano Aumentado pode ser vista como (BERTSEKAS [1,2]):

$$L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \xi) = U(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^q \left\{ \lambda_j \cdot \langle g_j(\mathbf{r}) \rangle + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \langle g_j(\mathbf{r}) \rangle^2 \right\}. \quad (5.95)$$

Minimizando (5.95) obtemos a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \xi) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \xi) - \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (5.96)$$

Onde (BERTSEKAS [1,2]):

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \xi) = [\mathbf{0} \quad \langle \lambda_j + \xi \cdot g_j(\mathbf{r}) \rangle]. \quad (5.97)$$

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é dada por:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \langle \lambda_j^{(k)} + \xi \cdot g_j(\mathbf{r}^{(k)}) \rangle. \quad (5.98)$$

Para a análise das treliças espaciais, utilizaremos o método do Lagrangiano Aumentado, combinando com o método de Newton / Quase-Newton para a resolução dos problemas de minimização sem restrições. Definindo KTOL como um parâmetro de convergência para os multiplicadores de Lagrange, o algoritmo é dado por:

Método do Lagrangiano Aumentado:

I) Processo de inicialização das iterações.

- a) Estime um valor para ξ , um deslocamento inicial $\mathbf{r}^{(0)}$ e os multiplicadores $\lambda^{(0)}$.
- b) Calcule a Linearização exata: $\mathbf{K}(\mathbf{r}^{(0)}; \lambda^{(0)}) = \mathbf{D}_r(\mathbf{S} + \mathbf{F}_c)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(0)}, \lambda=\lambda^{(0)}}$.
- c) Calcule a direção inicial $\Delta\mathbf{r}^{(0)}$ resolvendo o sistema: $\mathbf{K}^{(0)} \Delta\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(0)}; \lambda^{(0)})$.
- d) Inicialize a Energia: $G_c = \Delta\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(0)}; \lambda^{(0)})$ e faça $GI = G_c$.
- e) Inicialize: $i = 0, j = 0, k = 0$.

II) Itere em i até atingir o equilíbrio.

a) Busca unidimensional.

- i) Inicialize: $s^{(i)} = 1,0$.
- ii) Calcule: $G(s^{(i)}) = \Delta\mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)} - s^{(i)} \cdot \Delta\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$.
- iii) Performance requerida na busca unidimensional:

Se $[(|G(s^{(i)})| > \text{STOL} * |G_c|) \text{ ou } (G(s^{(i)}) * G_c < 0.0)]$,
então itere para $s^{(i)} \in (0,1]$ até $|G(s^{(i)})| \leq \text{STOL} * |G_c|$.

- iv) Incremente: $\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} - s^{(i)} \cdot \Delta\mathbf{r}^{(i)}$.

b) Teste a Divergência:

Se $(\| \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i+1)}; \lambda^{(k)}) \| > \| \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)}) \|)$,
então vá para o quadro n.º 23.

c) Teste o Equilíbrio:

Se $(G_c \leq \text{ETOL} * GI)$,
então vá para o passo III.

- d) Analise o passo da busca: Se $(s^{(i)} < 0,001)$,
então vá para o quadro n.º 23.
- e) Cheque o limite de iterações do BFGS: Se $(j = \text{max_bfgs})$,
então vá para o quadro n.º 23.
- f) Vá para o quadro n.º 24.

III) Atualização dos multiplicadores de Lagrange.

- a) Calcule os novos multiplicadores λ_{tr} : Para todas as Restrições.

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}^{(k)}), \text{ para as restrições de igualdade.}$$

$$\lambda^{(k+1)} = \langle \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}^{(k)}) \rangle, \text{ para as restrições de desigualdade.}$$

- b) Checar a Convergência dos Multiplicadores:

$$\text{Se } (\| \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \| / \| \lambda^{(k)} \| \leq \text{KTOL}), \text{ então pare.}$$

- c) Atualize os Multiplicadores de Lagrange: $\lambda^{(k+1)} = \lambda_{tr}, k = k + 1$.

- d) Reinicialize com os novos Multiplicadores:

i) Calcule o novo Resíduo: $\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$.

ii) Calcule a direção $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ resolvendo o sistema: $\mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$.

iii) Atualize a Energia: $G_c = \Delta \mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(i)})$.

- e) Repetir até atingir o Equilíbrio: vá ao passo IIa.

Quadro n.º 22 - Método do Lagrangiano Aumentado para treliças

Método de Newton:

- a) Incremente o contador da iteração: $i = i + 1$.
- b) Calcule a Linearização exata: $\mathbf{K}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)}) = \mathbf{D}_r(\mathbf{S} + \mathbf{F}_c)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(i)}, \lambda=\lambda^{(k)}}$.
- c) Calcule a direção $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ resolvendo o sistema: $\mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$.
- d) Atualize a Energia: $G_c = \Delta \mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$.
- e) Faça $j = 0$ e vá ao passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 22.

Quadro n.º 23 - Minimização pelo método de Newton para treliças

MÉTODO DO BFGS.

a) Incremente as Iterações: $i = i + 1$, $j = j + 1$.

b) Fórmula Produto do BFGS.

Calcule os vetores $\mathbf{v}^{(j)}$ e $\mathbf{w}^{(j)}$, onde:

$$\mathbf{v}^{(j)} = \frac{\Delta \mathbf{r}^{(i-1)}}{\Delta \mathbf{r}^{(i-1)} * (\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)}))}$$

$$\alpha^{(j)} = \sqrt{\frac{-s^{(j)} * (\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)})) * \Delta \mathbf{r}^{(i-1)}}{\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)}) * \Delta \mathbf{r}^{(i-1)}}$$

$$\mathbf{w}^{(j)} = - (\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)})) + \alpha^{(j)} * \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i-1)})$$

$$\mathbf{K}^{(j)} = (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(j)} * \mathbf{w}^{(j)T}) * \mathbf{K}^{(j-1)} * (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(j)} * \mathbf{v}^{(j)T})$$

c) Calcule a direção $\Delta \mathbf{r}^{(i)}$ resolvendo o sistema: $\mathbf{K}^{(j)} \Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$ pelo algoritmo descrito no quadro n.º 5.

d) Atualize a Energia: $G_c = \Delta \mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}^{(i)}; \lambda^{(k)})$.

e) Vá para o passo IIa do algoritmo descrito no quadro n.º 22.

Exemplos de Treliças

Apesar de na literatura os métodos de busca unidimensional serem bastante difundidos, neste trabalho foram testados os métodos descritos nos itens 3.1.1 e 3.1.2 para o caso particular das treliças espaciais e para um modelo simples com molas, não resultando em melhorias. Desta forma, a busca unidimensional foi eliminada e portanto, não daremos atenção a este assunto.

Exemplo 1:

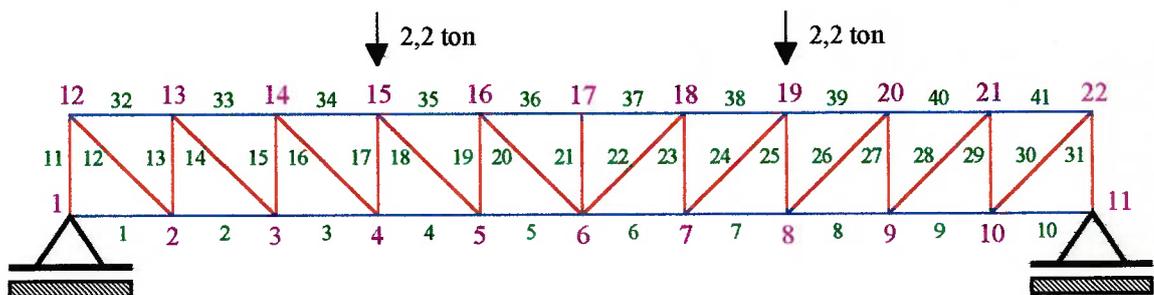


Figura 6.1 - Viga simétrica bi-apoiada

Consideremos uma viga plana simétrica em treliça, como ilustra a figura 6.1. Os parâmetros do problema são dados por:

Equações constitutivas:

$$\sigma = 0,01 \cdot \epsilon - 19603,91986 \quad ; \quad \epsilon < -0,014 .$$

$$\sigma = E \cdot (0,1 \cdot \epsilon - 170 \cdot \epsilon^3) \quad ; \quad -0,014 \leq \epsilon \leq 0,014 .$$

$$\sigma = 0,01 \cdot \epsilon + 19603,91986 \quad ; \quad \epsilon > 0,014 .$$

Aço A36 : $\sigma_{escoamento} = 35000 \text{ Ton} / \text{m}^2$ e $\sigma_{adm} = 21000 \text{ Ton} / \text{m}^2$.

$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Ton} / \text{m}^2$, $\xi = 10^9$ (igualdade) e $\xi = 10^7$ (desigualdade).

$ETOL = 10^{-9}$, $KTOL = 10^{-6}$ e $\text{max_bfgs} = 10$.

Nós 1 e 11 restringidos em y e nó 17 restringido em x.

Elementos 11-31 : $\phi 1$, $d_{ext} = 3,37 \text{ cm}$, $\text{esp} = 4,05 \text{ mm}$ e $A = 3,77 \text{ cm}^2$.

Elementos 1-10 e 32-41 : $\phi 1 \frac{1}{4}$, $d_{ext} = 4,24 \text{ cm}$, $\text{esp} = 4,05 \text{ mm}$ e $A = 4,88 \text{ cm}^2$.

Uma maneira para solucionar o problema ilustrado na figura 6.1, é o método da eliminação de variáveis estudado no capítulo 4. Então, podemos formular o problema de otimização sem restrições exposto na seção 5.1 e para resolvê-lo, basta aplicar o algoritmo esquematizado no quadro n.º 19. A solução desse problema encontra-se descrito na tabela 6.1.

A configuração de equilíbrio da treliça é ilustrada pela figura 6.2.

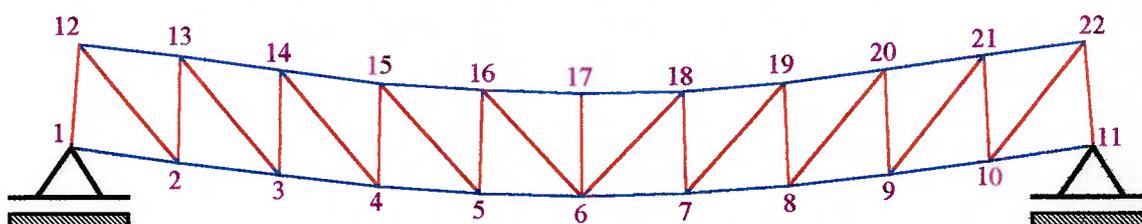


Figura 6.2 - Viga simétrica bi-apoiada: Configuração de equilíbrio

Outra maneira para solucionar o problema ilustrado na figura 6.1, é considerar os graus de liberdade sob restrições de igualdade, exposto na seção 5.2. A equação de equilíbrio é definida por $\mathbf{F} = \mathbf{S} - \mathbf{R} + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}$. Utilizando o método do Lagrangiano Aumentado esquematizado no quadro n.º 22, obtemos a tabela 6.2.

Os esforços, as tensões e as deformações encontram-se descritos na tabela 6.3.

Consideremos ainda uma restrição definida por um plano que dista 30 cm da base da treliça, como ilustra a figura 6.3.

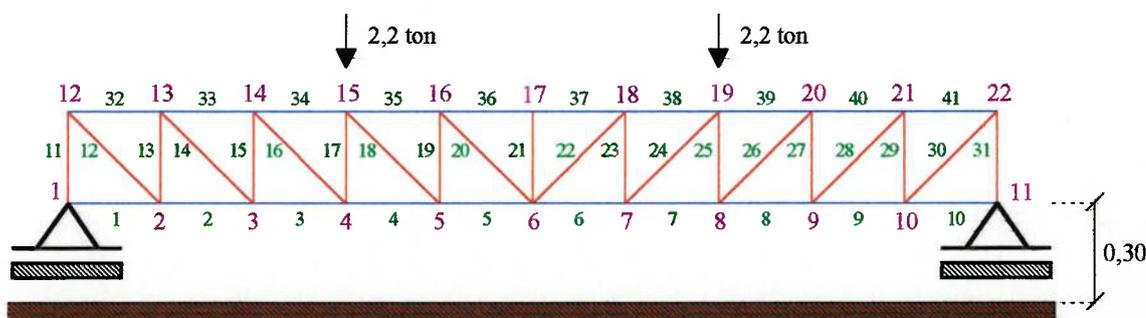


Figura 6.3 - Viga simétrica bi-apoiada - Problema de contato

Então, podemos formular o problema de contato exposto na seção 5.3. Pelas tabelas 6.1 e 6.2, concluímos que os nós 4, 5, 6, 7 e 8 são candidatos ao contato. A restrição de desigualdade do problema é dada por $g = -y - 0,30 \leq 0$. A equação de equilíbrio para os nós sujeitos ao contato é definida por $\mathbf{F} = \mathbf{S} - \mathbf{R} + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}$.

Aplicando o método do Lagrangiano Aumentado, obtemos a tabela 6.4.

A configuração de equilíbrio da treliça quando submetida à restrição de contato, é ilustrada pela figura 6.4.

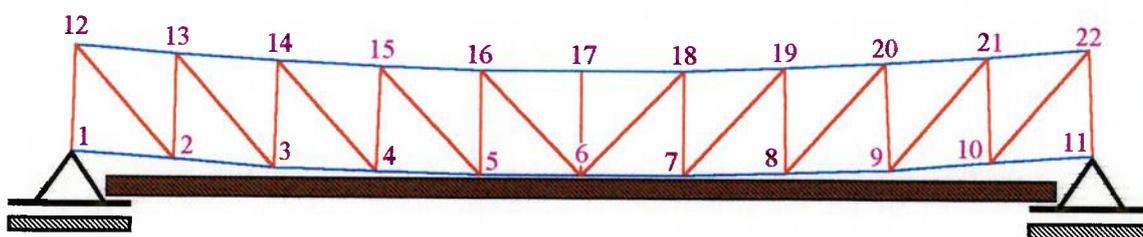


Figura 6.4 - Viga simétrica bi-apoiada - Problema de Contato: Configuração de equilíbrio

Os esforços, as tensões e as deformações do problema ilustrado pela figura 6.4, encontram-se descritos na tabela 6.5.

Analisando a figura 6.4, podemos concluir que os nós 5, 6 e 7 encostam na barreira ocorrendo o contato. Inicialmente esses nós eram livres e no momento em que tocam a barreira, sofrem uma força de reação com objetivo de impedir a penetração.

Nó	X ^r	r	X	R	S	F
1	0	-0,0311	-0,0311	0	0	0
	0	0,0000	0,0000	0	2,2	2,2
2	2	-0,0427	1,9573	0	0	0
	0	-0,2185	-0,2185	0	0	0
3	4	-0,0468	3,9532	0	0	0
	0	-0,4217	-0,4217	0	0	0
4	6	-0,0414	5,9586	0	0	0
	0	-0,5924	-0,5924	0	0	0
5	8	-0,0216	7,9784	0	0	0
	0	-0,6855	-0,6855	0	0	0
6	10	0,0000	10,0000	0	0	0
	0	-0,7156	-0,7156	0	0	0
7	12	0,0216	12,0216	0	0	0
	0	-0,6855	-0,6855	0	0	0
8	14	0,0414	14,0414	0	0	0
	0	-0,5924	-0,5924	0	0	0
9	16	0,0468	16,0468	0	0	0
	0	-0,4217	-0,4217	0	0	0
10	18	0,0427	18,0427	0	0	0
	0	-0,2185	-0,2185	0	0	0
11	20	0,0311	20,0311	0	0	0
	0	0,0000	0,0000	0	2,2	2,2
12	0	0,1145	0,1145	0	0	0
	1,5	-0,0113	1,4887	0	0	0
13	2	0,0968	2,0968	0	0	0
	1,5	-0,2293	1,2707	0	0	0
14	4	0,0743	4,0743	0	0	0
	1,5	-0,4310	1,0690	0	0	0
15	6	0,0457	6,0457	0	0	0
	1,5	-0,5998	0,9002	-2,2	-2,2	0
16	8	0,0220	8,0220	0	0	0
	1,5	-0,6866	0,8134	0	0	0
17	10	0,0000	10,0000	0	0	0
	1,5	-0,7161	0,7839	0	0	0
18	12	-0,0220	11,9780	0	0	0
	1,5	-0,6866	0,8134	0	0	0
19	14	-0,0457	13,9543	0	0	0
	1,5	-0,5998	0,9002	-2,2	-2,2	0
20	16	-0,0743	15,9257	0	0	0
	1,5	-0,4310	1,0690	0	0	0
21	18	-0,0968	17,9032	0	0	0
	1,5	-0,2293	1,2707	0	0	0
22	20	-0,1145	19,8855	0	0	0
	1,5	-0,0113	1,4887	0	0	0

Tabela 6.1 - Exemplo 1: Otimização sem restrição

Nó	X^r	r	X	R	S	F	λ
1	0	-0,0311	-0,0311	0	0	0	0
	0	0,0000	0,0000	0	2,2	0	-2,2
2	2	-0,0427	1,9573	0	0	0	0
	0	-0,2185	-0,2185	0	0	0	0
3	4	-0,0468	3,9532	0	0	0	0
	0	-0,4217	-0,4217	0	0	0	0
4	6	-0,0414	5,9586	0	0	0	0
	0	-0,5924	-0,5924	0	0	0	0
5	8	-0,0216	7,9784	0	0	0	0
	0	-0,6855	-0,6855	0	0	0	0
6	10	0,0000	10,0000	0	0	0	0
	0	-0,7156	-0,7156	0	0	0	0
7	12	0,0216	12,0216	0	0	0	0
	0	-0,6855	-0,6855	0	0	0	0
8	14	0,0414	14,0414	0	0	0	0
	0	-0,5924	-0,5924	0	0	0	0
9	16	0,0468	16,0468	0	0	0	0
	0	-0,4217	-0,4217	0	0	0	0
10	18	0,0427	18,0427	0	0	0	0
	0	-0,2185	-0,2185	0	0	0	0
11	20	0,0311	20,0311	0	0	0	0
	0	0,0000	0,0000	0	2,2	0	-2,2
12	0	0,1145	0,1145	0	0	0	0
	1,5	-0,0113	1,4887	0	0	0	0
13	2	0,0968	2,0968	0	0	0	0
	1,5	-0,2293	1,2707	0	0	0	0
14	4	0,0743	4,0743	0	0	0	0
	1,5	-0,4310	1,0690	0	0	0	0
15	6	0,0457	6,0457	0	0	0	0
	1,5	-0,5998	0,9002	-2,2	-2,2	0	0
16	8	0,0220	8,0220	0	0	0	0
	1,5	-0,6866	0,8134	0	0	0	0
17	10	0,0000	10,0000	0	0	0	0
	1,5	-0,7161	0,7839	0	0	0	0
18	12	-0,0220	11,9780	0	0	0	0
	1,5	-0,6866	0,8134	0	0	0	0
19	14	-0,0457	13,9543	0	0	0	0
	1,5	-0,5998	0,9002	-2,2	-2,2	0	0
20	16	-0,0743	15,9257	0	0	0	0
	1,5	-0,4310	1,0690	0	0	0	0
21	18	-0,0968	17,9032	0	0	0	0
	1,5	-0,2293	1,2707	0	0	0	0
22	20	-0,1145	19,8855	0	0	0	0
	1,5	-0,0113	1,4887	0	0	0	0

Tabela 6.2 - Exemplo 1: Otimização com restrição de igualdade

Elem	ℓ_r	A_r	σ	$\varepsilon \cdot 10^3$	N	P_{ax}	P_{ay}	P_{bx}	P_{by}
1 (1 - 2)	2	0,000488	439	0,209	0,214	-0,213	0,023	0,213	-0,023
2 (2 - 3)	2	0,000488	6414	3,105	3,120	-3,114	0,317	3,114	-0,317
3 (3 - 4)	2	0,000488	12375	6,323	6,001	-6,017	0,512	6,017	-0,512
4 (4 - 5)	2	0,000488	18325	10,971	8,846	-8,933	0,412	8,933	-0,412
5 (5 - 6)	2	0,000488	18272	10,906	8,820	-8,916	0,133	8,916	-0,133
6 (6 - 7)	2	0,000488	18272	10,906	8,820	-8,916	-0,133	8,916	0,133
7 (7 - 8)	2	0,000488	18325	10,971	8,846	-8,933	-0,412	8,933	0,412
8 (8 - 9)	2	0,000488	12375	6,323	6,001	-6,017	-0,512	6,017	0,512
9 (9 - 10)	2	0,000488	6414	3,105	3,120	-3,114	-0,317	3,114	0,317
10 (10 - 11)	2	0,000488	439	0,209	0,214	-0,213	-0,023	0,213	0,023
11 (1 - 12)	1,5	0,000377	-5801	-2,800	-2,193	0,213	2,177	-0,213	-2,177
12 (2 - 12)	2,5	0,000377	9743	4,831	3,656	2,695	-2,496	-2,695	2,496
13 (2 - 13)	1,5	0,000377	-5868	-2,833	-2,219	0,206	2,203	-0,206	-2,203
14 (3 - 13)	2,5	0,000377	9756	4,838	3,660	2,718	-2,478	-2,718	2,478
15 (3 - 14)	1,5	0,000377	-6075	-2,936	-2,297	0,185	2,283	-0,185	-2,283
16 (4 - 14)	2,5	0,000377	9787	4,855	3,672	2,768	-2,440	-2,768	2,440
17 (4 - 15)	1,5	0,000377	-6750	-3,274	-2,553	0,148	2,541	-0,148	-2,541
18 (5 - 15)	2,5	0,000377	-86	-0,041	-0,033	-0,025	0,021	0,025	-0,021
19 (5 - 16)	1,5	0,000377	-686	-0,327	-0,259	0,008	0,259	-0,008	-0,259
20 (6 - 16)	2,5	0,000377	1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
21 (6 - 17)	1,5	0,000377	-704	-0,335	-0,265	0,000	0,265	0,000	-0,265
22 (6 - 18)	2,5	0,000377	1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
23 (7 - 18)	1,5	0,000377	-686	-0,327	-0,259	-0,008	0,259	0,008	-0,259
24 (7 - 19)	2,5	0,000377	-86	-0,041	-0,033	0,025	0,021	-0,025	-0,021
25 (8 - 19)	1,5	0,000377	-6750	-3,274	-2,553	-0,148	2,541	0,148	-2,541
26 (8 - 20)	2,5	0,000377	9787	4,855	3,672	-2,768	-2,440	2,768	2,440
27 (9 - 20)	1,5	0,000377	-6075	-2,936	-2,297	-0,185	2,283	0,185	-2,283
28 (9 - 21)	2,5	0,000377	9756	4,838	3,660	-2,718	-2,478	2,718	2,478
29 (10 - 21)	1,5	0,000377	-5868	-2,833	-2,219	-0,206	2,203	0,206	-2,203
30 (10 - 22)	2,5	0,000377	9743	4,831	3,656	-2,695	-2,496	2,695	2,496
31 (11 - 22)	1,5	0,000377	-5801	-2,800	-2,193	-0,213	2,177	0,213	-2,177
32 (12 - 13)	2	0,000488	-5994	-2,896	-2,934	2,908	-0,320	-2,908	0,320
33 (13 - 14)	2	0,000488	-12013	-6,108	-5,898	5,832	-0,595	-5,832	0,595
34 (14 - 15)	2	0,000488	-18068	-10,667	-8,912	8,785	-0,752	-8,785	0,752
35 (15 - 16)	2	0,000488	-18272	-10,906	-9,015	8,908	-0,391	-8,908	0,391
36 (16 - 17)	2	0,000488	-18272	-10,906	-9,015	8,916	-0,133	-8,916	0,133
37 (17 - 18)	2	0,000488	-18272	-10,906	-9,015	8,916	0,133	-8,916	-0,133
38 (18 - 19)	2	0,000488	-18272	-10,906	-9,015	8,908	0,391	-8,908	-0,391
39 (19 - 20)	2	0,000488	-18068	-10,667	-8,912	8,785	0,752	-8,785	-0,752
40 (20 - 21)	2	0,000488	-12013	-6,108	-5,898	5,832	0,595	-5,832	-0,595
41 (21 - 22)	2	0,000488	-5994	-2,896	-2,934	2,908	0,320	-2,908	-0,320

Tabela 6.3 - Exemplo 1: Solução do problema ilustrado na figura 6.2

Nó	X^r	r	X	R	S	F	λ
1	0	-0,0240	-0,0240	0	0	0	0
	0	0,0000	0,0000	0	1,3358	0	-1,3358
2	2	-0,0266	1,9734	0	0	0	0
	0	-0,1037	-0,1037	0	0	0	0
3	4	-0,0252	3,9748	0	0	0	0
	0	-0,1982	-0,1982	0	0	0	0
4	6	-0,0194	5,9806	0	0	0	0
	0	-0,2736	-0,2736	0	0	0	0
5	8	-0,0085	7,9915	0	0	0	0
	0	-0,3000	-0,3000	0	0,0639	0	-0,0639
6	10	0,0000	10,0000	0	0	0	0
	0	-0,3000	-0,3000	0	1,6006	0	-1,6006
7	12	0,0085	12,0085	0	0	0	0
	0	-0,3000	-0,3000	0	0,0639	0	-0,0639
8	14	0,0194	14,0194	0	0	0	0
	0	-0,2736	-0,2736	0	0	0	0
9	16	0,0252	16,0252	0	0	0	0
	0	-0,1982	-0,1982	0	0	0	0
10	18	0,0266	18,0266	0	0	0	0
	0	-0,1037	-0,1037	0	0	0	0
11	20	0,0240	20,0240	0	0	0	0
	0	0,0000	0,0000	0	1,3358	0	-1,3358
12	0	0,0429	0,0429	0	0	0	0
	1,5	-0,0040	1,4960	0	0	0	0
13	2	0,0367	2,0367	0	0	0	0
	1,5	-0,1076	1,3924	0	0	0	0
14	4	0,0274	4,0274	0	0	0	0
	1,5	-0,2017	1,2983	0	0	0	0
15	6	0,0149	6,0149	0	0	0	0
	1,5	-0,2768	1,2232	-2,2	-2,2	0	0
16	8	0,0063	8,0063	0	0	0	0
	1,5	-0,2986	1,2014	0	0	0	0
17	10	0,0000	10,0000	0	0	0	0
	1,5	-0,3000	1,2000	0	0	0	0
18	12	-0,0063	11,9937	0	0	0	0
	1,5	-0,2986	1,2014	0	0	0	0
19	14	-0,0149	13,9851	0	0	0	0
	1,5	-0,2768	1,2232	-2,2	-2,2	0	0
20	16	-0,0274	15,9726	0	0	0	0
	1,5	-0,2017	1,2983	0	0	0	0
21	18	-0,0367	17,9633	0	0	0	0
	1,5	-0,1076	1,3924	0	0	0	0
22	20	-0,0429	19,9571	0	0	0	0
	1,5	-0,0040	1,4960	0	0	0	0

Tabela 6.4 - Exemplo 1: Otimização com restrição de desigualdade - Contato

Elem	ℓ_r	A_r	σ	$\epsilon \cdot 10^3$	N	P_{ax}	P_{ay}	P_{bx}	P_{by}
1 (1 - 2)	2	0,000488	122	0,058	0,060	-0,060	0,003	0,060	-0,003
2 (2 - 3)	2	0,000488	3767	1,804	1,835	-1,836	0,087	1,836	-0,087
3 (3 - 4)	2	0,000488	7406	3,606	3,601	-3,612	0,136	3,612	-0,136
4 (4 - 5)	2	0,000488	11041	5,548	5,358	-5,388	0,071	5,388	-0,071
5 (5 - 6)	2	0,000488	8662	4,256	4,209	-4,227	0,000	4,227	0,000
6 (6 - 7)	2	0,000488	8662	4,256	4,209	-4,227	0,000	4,227	0,000
7 (7 - 8)	2	0,000488	11041	5,548	5,358	-5,388	-0,071	5,388	0,071
8 (8 - 9)	2	0,000488	7406	3,606	3,601	-3,612	-0,136	3,612	0,136
9 (9 - 10)	2	0,000488	3767	1,804	1,835	-1,836	-0,087	1,836	0,087
10 (10 - 11)	2	0,000488	122	0,058	0,060	-0,060	-0,003	0,060	0,003
11 (1 - 12)	1,5	0,000377	-3538	-1,693	-1,336	0,060	1,333	-0,060	-1,333
12 (2 - 12)	2,5	0,000377	5925	2,861	2,227	1,720	-1,425	-1,720	1,425
13 (2 - 13)	1,5	0,000377	-3562	-1,704	-1,345	0,057	1,342	-0,057	-1,342
14 (3 - 13)	2,5	0,000377	5927	2,862	2,228	1,727	-1,418	-1,727	1,418
15 (3 - 14)	1,5	0,000377	-3632	-1,738	-1,372	0,048	1,368	-0,048	-1,368
16 (4 - 14)	2,5	0,000377	5932	2,865	2,230	1,742	-1,402	-1,742	1,402
17 (4 - 15)	1,5	0,000377	-3893	-1,865	-1,471	0,034	1,467	-0,034	-1,467
18 (5 - 15)	2,5	0,000377	-3861	-1,849	-1,458	-1,153	0,889	1,153	-0,889
19 (5 - 16)	1,5	0,000377	2000	0,954	0,753	-0,007	-0,754	0,007	0,754
20 (6 - 16)	2,5	0,000377	-3520	-1,684	-1,329	-1,060	0,798	1,060	-0,798
21 (6 - 17)	1,5	0,000377	-12	-0,005	-0,004	0,000	0,004	0,000	-0,004
22 (6 - 18)	2,5	0,000377	-3520	-1,684	-1,329	1,060	0,798	-1,060	-0,798
23 (7 - 18)	1,5	0,000377	2000	0,954	0,753	0,007	-0,754	-0,007	0,754
24 (7 - 19)	2,5	0,000377	-3861	-1,849	-1,458	1,153	0,889	-1,153	-0,889
25 (8 - 19)	1,5	0,000377	-3893	-1,865	-1,471	-0,034	1,467	0,034	-1,467
26 (8 - 20)	2,5	0,000377	5932	2,865	2,230	-1,742	-1,402	1,742	1,402
27 (9 - 20)	1,5	0,000377	-3632	-1,738	-1,372	-0,048	1,368	0,048	-1,368
28 (9 - 21)	2,5	0,000377	5927	2,862	2,228	-1,727	-1,418	1,727	1,418
29 (10 - 21)	1,5	0,000377	-3562	-1,704	-1,345	-0,057	1,342	0,057	-1,342
30 (10 - 22)	2,5	0,000377	5925	2,861	2,227	-1,720	-1,425	1,720	1,425
31 (11 - 22)	1,5	0,000377	-3538	-1,693	-1,336	-0,060	1,333	0,060	-1,333
32 (12 - 13)	2	0,000488	-3651	-1,748	-1,785	1,779	-0,092	-1,779	0,092
33 (13 - 14)	2	0,000488	-7310	-3,558	-3,580	3,563	-0,168	-3,563	0,168
34 (14 - 15)	2	0,000488	-10979	-5,513	-5,387	5,354	-0,202	-5,354	0,202
35 (15 - 16)	2	0,000488	-8678	-4,264	-4,253	4,235	-0,046	-4,235	0,046
36 (16 - 17)	2	0,000488	-6490	-3,143	-3,177	3,167	-0,002	-3,167	0,002
37 (17 - 18)	2	0,000488	-6490	-3,143	-3,177	3,167	0,002	-3,167	-0,002
38 (18 - 19)	2	0,000488	-8678	-4,264	-4,253	4,235	0,046	-4,235	-0,046
39 (19 - 20)	2	0,000488	-10979	-5,513	-5,387	5,354	0,202	-5,354	-0,202
40 (20 - 21)	2	0,000488	-7310	-3,558	-3,580	3,563	0,168	-3,563	-0,168
41 (21 - 22)	2	0,000488	-3651	-1,748	-1,785	1,779	0,092	-1,779	-0,092

Tabela 6.5 - Exemplo 1: Solução do problema ilustrado na figura 6.4

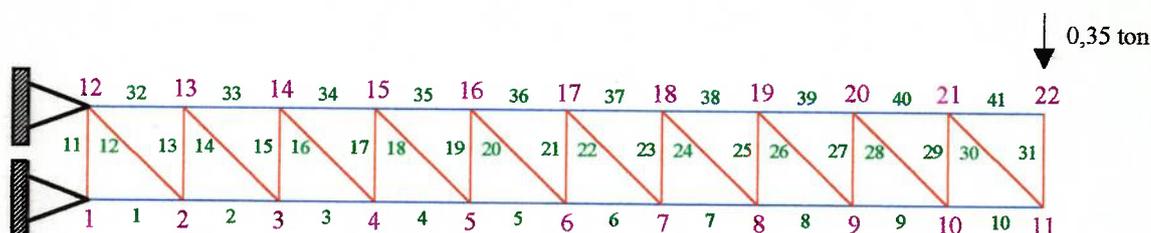
Exemplo 2:

Figura 6.5 - Viga em balanço

Consideremos uma treliça plana em balanço, como ilustra a figura 6.5. Os parâmetros do problema são dados por:

Equações constitutivas:

$$\sigma = 0,01 \cdot \varepsilon - 19603,91986 \quad ; \quad \varepsilon < -0,014 .$$

$$\sigma = E \cdot (0,1 \cdot \varepsilon - 170 \cdot \varepsilon^3) \quad ; \quad -0,014 \leq \varepsilon \leq 0,014 .$$

$$\sigma = 0,01 \cdot \varepsilon + 19603,91986 \quad ; \quad \varepsilon > 0,014 .$$

$$\text{Aço A36 : } \sigma_{\text{escoamento}} = 35000 \text{ Ton / m}^2 \text{ e } \sigma_{\text{adm}} = 21000 \text{ Ton / m}^2 .$$

$$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Ton / m}^2 .$$

$$\xi = 10^9 \text{ (igualdade) e } \xi = 10^1 \text{ (desigualdade)} .$$

$$\text{ETOL} = 10^{-8} \text{ e } \text{KTOL} = 10^{-7} .$$

$$\text{max_bfgs} = 10 .$$

Nós 1 e 12 restringidos em x e em y.

$$\text{Elementos 11-31} \quad : \quad \phi 1, d_{\text{ext}} = 3,37 \text{ cm, esp} = 4,05 \text{ mm e } A = 3,77 \text{ cm}^2 .$$

$$\text{Elementos 1-10 e 32-41} \quad : \quad \phi 1 \frac{1}{4}, d_{\text{ext}} = 4,24 \text{ cm, esp} = 4,05 \text{ mm e } A = 4,88 \text{ cm}^2 .$$

A solução do problema ilustrado pela figura 6.5, utilizando o método da eliminação de variáveis, encontra-se descrita na tabela 6.6.

A configuração de equilíbrio é ilustrada pela figura 6.6.

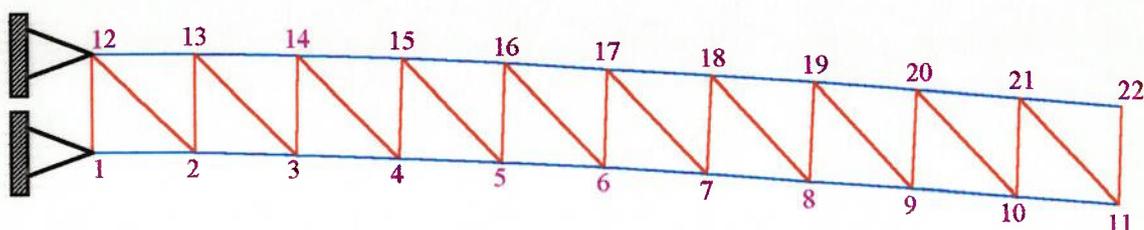


Figura 6.6 - Viga em balanço: Configuração de equilíbrio

Utilizando o método do Lagrangiano Aumentado para restrições de igualdade, obtemos a tabela 6.7. Os esforços, as tensões e as deformações encontram-se descritos na tabela 6.8.

Consideremos ainda uma restrição definida por $g = -y + 0,30 * x - 6,50 \leq 0$, como ilustra a figura 6.7.

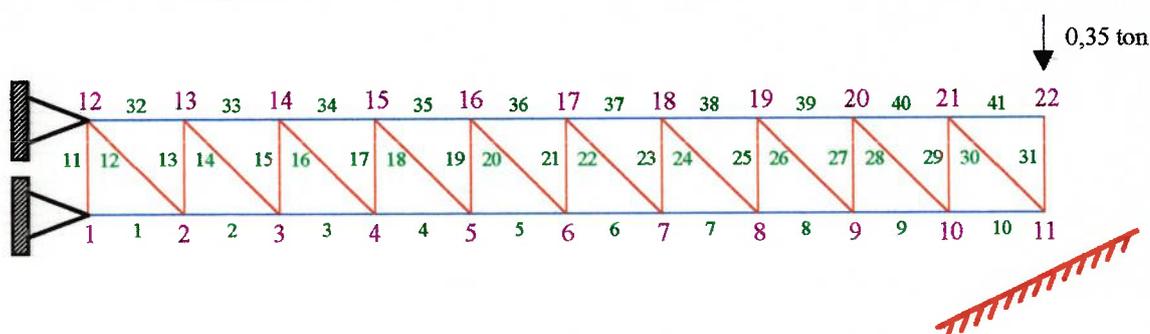


Figura 6.7 - Viga em balanço - Problema de contato

Observando as tabelas 6.6 e 6.7, podemos concluir que o nó 11 está sujeito ao contato. Aplicando o método do Lagrangiano Aumentado, obtemos a tabela 6.9.

A configuração de equilíbrio é ilustrada pela figura 6.8. Analisando-a, podemos concluir que o nó 11 encosta na restrição, ocorrendo o contato. Então, o multiplicador de Lagrange é ativado com objetivo de impedir a penetração.

Os esforços, as tensões e as deformações do problema ilustrado pela figura 6.8, encontram-se descritos na tabela 6.10.

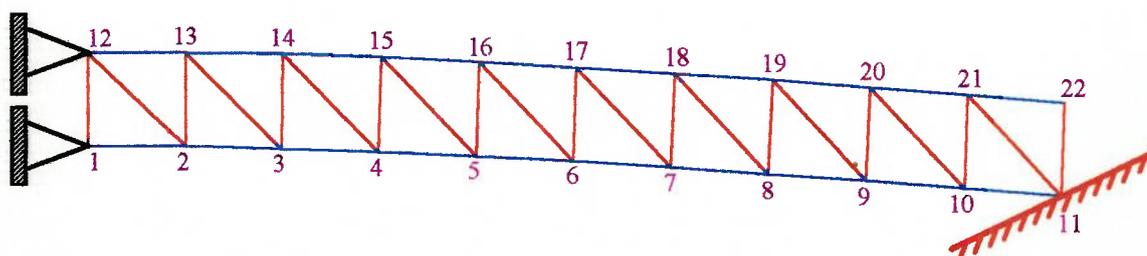


Figura 6.8 - Viga em balanço - Problema de contato: Configuração de equilíbrio

Nó	X ^r	r	X	R	S	F
1	0	0,0000	0,0000	0	4,6723	4,6723
	0	0,0000	0,0000	0	-0,0368	-0,0368
2	2	-0,0095	1,9905	0	0	0
	0	-0,0157	-0,0157	0	0	0
3	4	-0,0184	3,9816	0	0	0
	0	-0,0546	-0,0546	0	0	0
4	6	-0,0267	5,9733	0	0	0
	0	-0,1134	-0,1134	0	0	0
5	8	-0,0347	7,9653	0	0	0
	0	-0,1895	-0,1895	0	0	0
6	10	-0,0423	9,9577	0	0	0
	0	-0,2804	-0,2804	0	0	0
7	12	-0,0486	11,9514	0	0	0
	0	-0,3836	-0,3836	0	0	0
8	14	-0,0546	13,9454	0	0	0
	0	-0,4966	-0,4966	0	0	0
9	16	-0,0600	15,9400	0	0	0
	0	-0,6170	-0,6170	0	0	0
10	18	-0,0649	17,9352	0	0	0
	0	-0,7424	-0,7424	0	0	0
11	20	-0,0689	19,9311	0	0	0
	0	-0,8696	-0,8696	0	0	0
12	0	0,0000	0,0000	0	-4,6723	-4,6723
	1,5	0,0000	1,5000	0	0,3868	0,3868
13	2	0,0084	2,0084	0	0	0
	1,5	-0,0165	1,4835	0	0	0
14	4	0,0155	4,0155	0	0	0
	1,5	-0,0557	1,4443	0	0	0
15	6	0,0212	6,0212	0	0	0
	1,5	-0,1149	1,3851	0	0	0
16	8	0,0253	8,0253	0	0	0
	1,5	-0,1914	1,3086	0	0	0
17	10	0,0278	10,0278	0	0	0
	1,5	-0,2821	1,2179	0	0	0
18	12	0,0298	12,0298	0	0	0
	1,5	-0,3850	1,1150	0	0	0
19	14	0,0303	14,0303	0	0	0
	1,5	-0,4984	1,0016	0	0	0
20	16	0,0294	16,0294	0	0	0
	1,5	-0,6191	0,8809	0	0	0
21	18	0,0274	18,0274	0	0	0
	1,5	-0,7446	0,7554	0	0	0
22	20	0,0242	20,0242	0	0	0
	1,5	-0,8725	0,6275	-0,35	-0,35	0

Tabela 6.6 - Exemplo 2: Otimização sem restrição

Nó	X ^r	r	X	R	S	F	λ
1	0	0,0000	0,0000	0	4,6723	0	-4,6723
	0	0,0000	0,0000	0	-0,0368	0	0,0368
2	2	-0,0095	1,9905	0	0	0	0
	0	-0,0157	-0,0157	0	0	0	0
3	4	-0,0184	3,9816	0	0	0	0
	0	-0,0546	-0,0546	0	0	0	0
4	6	-0,0267	5,9733	0	0	0	0
	0	-0,1134	-0,1134	0	0	0	0
5	8	-0,0347	7,9653	0	0	0	0
	0	-0,1895	-0,1895	0	0	0	0
6	10	-0,0423	9,9577	0	0	0	0
	0	-0,2804	-0,2804	0	0	0	0
7	12	-0,0486	11,9514	0	0	0	0
	0	-0,3836	-0,3836	0	0	0	0
8	14	-0,0546	13,9454	0	0	0	0
	0	-0,4966	-0,4966	0	0	0	0
9	16	-0,0600	15,9400	0	0	0	0
	0	-0,6170	-0,6170	0	0	0	0
10	18	-0,0649	17,9352	0	0	0	0
	0	-0,7424	-0,7424	0	0	0	0
11	20	-0,0689	19,9311	0	0	0	0
	0	-0,8696	-0,8696	0	0	0	0
12	0	0,0000	0,0000	0	-4,6723	0	4,6723
	1,5	0,0000	1,5000	0	0,3868	0	-0,3868
13	2	0,0084	2,0084	0	0	0	0
	1,5	-0,0165	1,4835	0	0	0	0
14	4	0,0155	4,0155	0	0	0	0
	1,5	-0,0557	1,4443	0	0	0	0
15	6	0,0212	6,0212	0	0	0	0
	1,5	-0,1149	1,3851	0	0	0	0
16	8	0,0253	8,0253	0	0	0	0
	1,5	-0,1914	1,3086	0	0	0	0
17	10	0,0278	10,0278	0	0	0	0
	1,5	-0,2821	1,2179	0	0	0	0
18	12	0,0298	12,0298	0	0	0	0
	1,5	-0,3850	1,1150	0	0	0	0
19	14	0,0303	14,0303	0	0	0	0
	1,5	-0,4984	1,0016	0	0	0	0
20	16	0,0294	16,0294	0	0	0	0
	1,5	-0,6191	0,8809	0	0	0	0
21	18	0,0274	18,0274	0	0	0	0
	1,5	-0,7446	0,7554	0	0	0	0
22	20	0,0242	20,0242	0	0	0	0
	1,5	-0,8725	0,6275	-0,35	-0,35	0	0

Tabela 6.7 - Exemplo 2: Otimização com restrição de igualdade

Elem	ℓ_r	A_r	σ	$\varepsilon \cdot 10^3$	N	P_{ax}	P_{ay}	P_{bx}	P_{by}
1 (1 - 2)	2	0,000488	-9575	-4,740	-4,695	4,672	-0,037	-4,672	0,037
2 (2 - 3)	2	0,000488	-8619	-4,233	-4,224	4,205	-0,082	-4,205	0,082
3 (3 - 4)	2	0,000488	-7658	-3,735	-3,751	3,736	-0,110	-3,736	0,110
4 (4 - 5)	2	0,000488	-6699	-3,248	-3,280	3,267	-0,125	-3,267	0,125
5 (5 - 6)	2	0,000488	-5740	-2,769	-2,809	2,798	-0,128	-2,798	0,128
6 (6 - 7)	2	0,000488	-3821	-1,830	-1,868	1,862	-0,096	-1,862	0,096
7 (7 - 8)	2	0,000488	-2865	-1,368	-1,400	1,396	-0,079	-1,396	0,079
8 (8 - 9)	2	0,000488	-1909	-0,910	-0,933	0,930	-0,056	-0,930	0,056
9 (9 - 10)	2	0,000488	-954	-0,455	-0,466	0,465	-0,029	-0,465	0,029
10 (10 - 11)	2	0,000488	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11 (1 - 12)	1,5	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12 (2 - 12)	2,5	0,000377	1542	0,735	0,581	0,462	-0,352	-0,462	0,352
13 (2 - 13)	1,5	0,000377	-1055	-0,502	-0,398	0,005	0,398	-0,005	-0,398
14 (3 - 13)	2,5	0,000377	1549	0,739	0,584	0,461	-0,359	-0,461	0,359
15 (3 - 14)	1,5	0,000377	-1027	-0,489	-0,387	0,009	0,387	-0,009	-0,387
16 (4 - 14)	2,5	0,000377	1549	0,738	0,584	0,457	-0,364	-0,457	0,364
17 (4 - 15)	1,5	0,000377	-1003	-0,478	-0,378	0,012	0,378	-0,012	-0,378
18 (5 - 15)	2,5	0,000377	1548	0,738	0,583	0,454	-0,367	-0,454	0,367
19 (5 - 16)	1,5	0,000377	-983	-0,468	-0,371	0,015	0,370	-0,015	-0,370
20 (6 - 16)	2,5	0,000377	1551	0,739	0,584	0,452	-0,371	-0,452	0,371
21 (6 - 17)	1,5	0,000377	-38	-0,018	-0,014	0,001	0,014	-0,001	-0,014
22 (6 - 18)	2,5	0,000377	-1547	-0,737	-0,584	0,484	0,326	-0,484	-0,326
23 (7 - 18)	1,5	0,000377	903	0,430	0,340	-0,018	-0,340	0,018	0,340
24 (7 - 19)	2,5	0,000377	-1543	-0,735	-0,582	0,484	0,323	-0,484	-0,323
25 (8 - 19)	1,5	0,000377	913	0,435	0,344	-0,019	-0,344	0,019	0,344
26 (8 - 20)	2,5	0,000377	-1543	-0,735	-0,582	0,485	0,321	-0,485	-0,321
27 (9 - 20)	1,5	0,000377	921	0,438	0,347	-0,021	-0,346	0,021	0,346
28 (9 - 21)	2,5	0,000377	-1542	-0,735	-0,582	0,486	0,319	-0,486	-0,319
29 (10 - 21)	1,5	0,000377	925	0,441	0,349	-0,021	-0,348	0,021	0,348
30 (10 - 22)	2,5	0,000377	-1542	-0,735	-0,582	0,486	0,319	-0,486	-0,319
31 (11 - 22)	1,5	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
32 (12 - 13)	2	0,000488	8627	4,237	4,192	-4,210	0,035	4,210	-0,035
33 (13 - 14)	2	0,000488	7674	3,744	3,731	-3,744	0,073	3,744	-0,073
34 (14 - 15)	2	0,000488	6722	3,260	3,269	-3,279	0,097	3,279	-0,097
35 (15 - 16)	2	0,000488	5769	2,784	2,807	-2,813	0,107	2,813	-0,107
36 (16 - 17)	2	0,000488	4813	2,313	2,343	-2,346	0,106	2,346	-0,106
37 (17 - 18)	2	0,000488	4813	2,313	2,344	-2,346	0,121	2,346	-0,121
38 (18 - 19)	2	0,000488	3858	1,848	1,879	-1,880	0,107	1,880	-0,107
39 (19 - 20)	2	0,000488	2905	1,388	1,416	-1,415	0,085	1,415	-0,085
40 (20 - 21)	2	0,000488	1952	0,931	0,952	-0,951	0,060	0,951	-0,060
41 (21 - 22)	2	0,000488	998	0,476	0,487	-0,486	0,031	0,486	-0,031

Tabela 6.8 - Exemplo 2: Solução do problema ilustrado na figura 6.6

Nó	X^r	r	X	R	S	F	λ
1	0	0,0000	0,0000	0	2,7930	0	-2,7930
	0	0,0000	0,0000	0	-0,0128	0	0,0128
2	2	-0,0055	1,9945	0	0	0	0
	0	-0,0091	-0,0091	0	0	0	0
3	4	-0,0106	3,9894	0	0	0	0
	0	-0,0318	-0,0318	0	0	0	0
4	6	-0,0154	5,9846	0	0	0	0
	0	-0,0662	-0,0662	0	0	0	0
5	8	-0,0197	7,9803	0	0	0	0
	0	-0,1107	-0,1107	0	0	0	0
6	10	-0,0238	9,9762	0	0	0	0
	0	-0,1640	-0,1640	0	0	0	0
7	12	-0,0269	11,9731	0	0	0	0
	0	-0,2246	-0,2246	0	0	0	0
8	14	-0,0297	13,9703	0	0	0	0
	0	-0,2910	-0,2910	0	0	0	0
9	16	-0,0322	15,9678	0	0	0	0
	0	-0,3619	-0,3619	0	0	0	0
10	18	-0,0342	17,9658	0	0	0	0
	0	-0,4358	-0,4358	0	0	0	0
11	20	-0,0357	19,9643	0	-0,0437	0	0,0437
	0	-0,5107	-0,5107	0	0,1455	0	-0,1455
12	0	0,0000	0,0000	0	-2,7493	0	2,7493
	1,5	0,0000	1,5000	0	0,2173	0	-0,2173
13	2	0,0049	2,0049	0	0	0	0
	1,5	-0,0096	1,4904	0	0	0	0
14	4	0,0091	4,0091	0	0	0	0
	1,5	-0,0324	1,4676	0	0	0	0
15	6	0,0126	6,0126	0	0	0	0
	1,5	-0,0668	1,4332	0	0	0	0
16	8	0,0153	8,0153	0	0	0	0
	1,5	-0,1115	1,3885	0	0	0	0
17	10	0,0173	10,0173	0	0	0	0
	1,5	-0,1646	1,3354	0	0	0	0
18	12	0,0191	12,0191	0	0	0	0
	1,5	-0,2249	1,2751	0	0	0	0
19	14	0,0202	14,0202	0	0	0	0
	1,5	-0,2914	1,2086	0	0	0	0
20	16	0,0206	16,0206	0	0	0	0
	1,5	-0,3624	1,1376	0	0	0	0
21	18	0,0203	18,0203	0	0	0	0
	1,5	-0,4364	1,0636	0	0	0	0
22	20	0,0194	20,0194	0	0	0	0
	1,5	-0,5120	0,9880	-0,35	-0,35	0	0

Tabela 6.9 - Exemplo 2: Otimização com restrição de desigualdade - Contato

Elem	l_r	A_r	σ	$\varepsilon \cdot 10^3$	N	P_{ax}	P_{ay}	P_{bx}	P_{by}
1 (1 - 2)	2	0,000488	-5723	-2,761	-2,801	2,793	-0,013	-2,793	0,013
2 (2 - 3)	2	0,000488	-5164	-2,485	-2,526	2,520	-0,029	-2,520	0,029
3 (3 - 4)	2	0,000488	-4603	-2,210	-2,251	2,246	-0,039	-2,246	0,039
4 (4 - 5)	2	0,000488	-4041	-1,937	-1,976	1,971	-0,044	-1,971	0,044
5 (5 - 6)	2	0,000488	-3479	-1,664	-1,700	1,697	-0,045	-1,697	0,045
6 (6 - 7)	2	0,000488	-2352	-1,122	-1,149	1,147	-0,035	-1,147	0,035
7 (7 - 8)	2	0,000488	-1789	-0,853	-0,874	0,873	-0,029	-0,873	0,029
8 (8 - 9)	2	0,000488	-1226	-0,584	-0,599	0,598	-0,021	-0,598	0,021
9 (9 - 10)	2	0,000488	-663	-0,316	-0,324	0,323	-0,012	-0,323	0,012
10 (10 - 11)	2	0,000488	-100	-0,048	-0,049	0,049	-0,002	-0,049	0,002
11 (1 - 12)	1,5	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12 (2 - 12)	2,5	0,000377	903	0,430	0,340	0,271	-0,205	-0,271	0,205
13 (2 - 13)	1,5	0,000377	-587	-0,280	-0,221	0,002	0,221	-0,002	-0,221
14 (3 - 13)	2,5	0,000377	907	0,432	0,342	0,271	-0,208	-0,271	0,208
15 (3 - 14)	1,5	0,000377	-579	-0,276	-0,218	0,003	0,218	-0,003	-0,218
16 (4 - 14)	2,5	0,000377	908	0,432	0,342	0,270	-0,210	-0,270	0,210
17 (4 - 15)	1,5	0,000377	-571	-0,272	-0,215	0,004	0,215	-0,004	-0,215
18 (5 - 15)	2,5	0,000377	909	0,433	0,342	0,270	-0,211	-0,270	0,211
19 (5 - 16)	1,5	0,000377	-565	-0,269	-0,213	0,005	0,213	-0,005	-0,213
20 (6 - 16)	2,5	0,000377	911	0,434	0,343	0,269	-0,213	-0,269	0,213
21 (6 - 17)	1,5	0,000377	-13	-0,006	-0,005	0,000	0,005	0,000	-0,005
22 (6 - 18)	2,5	0,000377	-910	-0,433	-0,343	0,280	0,198	-0,280	-0,198
23 (7 - 18)	1,5	0,000377	537	0,256	0,202	-0,006	-0,202	0,006	0,202
24 (7 - 19)	2,5	0,000377	-909	-0,433	-0,343	0,281	0,197	-0,281	-0,197
25 (8 - 19)	1,5	0,000377	541	0,258	0,204	-0,007	-0,204	0,007	0,204
26 (8 - 20)	2,5	0,000377	-910	-0,433	-0,343	0,281	0,196	-0,281	-0,196
27 (9 - 20)	1,5	0,000377	544	0,259	0,205	-0,007	-0,205	0,007	0,205
28 (9 - 21)	2,5	0,000377	-910	-0,433	-0,343	0,282	0,196	-0,282	-0,196
29 (10 - 21)	1,5	0,000377	546	0,260	0,206	-0,007	-0,206	0,007	0,206
30 (10 - 22)	2,5	0,000377	-910	-0,433	-0,343	0,282	0,195	-0,282	-0,195
31 (11 - 22)	1,5	0,000377	-381	-0,182	-0,144	0,005	0,144	-0,005	-0,144
32 (12 - 13)	2	0,000488	5078	2,443	2,472	-2,478	0,012	2,478	-0,012
33 (13 - 14)	2	0,000488	4519	2,169	2,200	-2,205	0,025	2,205	-0,025
34 (14 - 15)	2	0,000488	3959	1,897	1,928	-1,932	0,033	1,932	-0,033
35 (15 - 16)	2	0,000488	3399	1,626	1,656	-1,658	0,037	1,658	-0,037
36 (16 - 17)	2	0,000488	2837	1,355	1,383	-1,384	0,037	1,384	-0,037
37 (17 - 18)	2	0,000488	2837	1,355	1,383	-1,384	0,042	1,384	-0,042
38 (18 - 19)	2	0,000488	2275	1,086	1,109	-1,110	0,037	1,110	-0,037
39 (19 - 20)	2	0,000488	1713	0,817	0,835	-0,836	0,030	0,836	-0,030
40 (20 - 21)	2	0,000488	1151	0,549	0,562	-0,561	0,021	0,561	-0,021
41 (21 - 22)	2	0,000488	589	0,280	0,287	-0,287	0,011	0,287	-0,011

Tabela 6.10 - Exemplo 2: Solução do problema ilustrado na figura 6.8

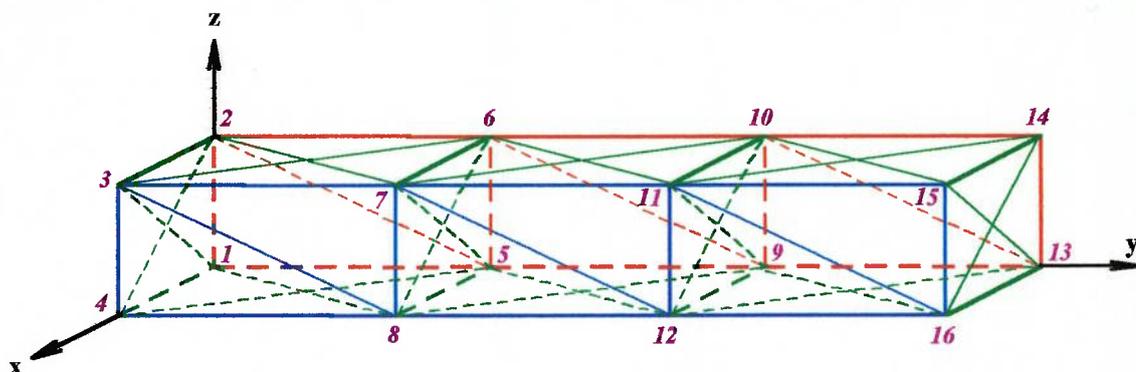
Exemplo 3:

Figura 6.9 - Treliça espacial em balanço

Consideremos uma treliça espacial em balanço, como ilustra a figura 6.9. Os parâmetros do problema são dados por:

Equações constitutivas:

$$\sigma = 0,01 \cdot \varepsilon - 19603,91986 \quad ; \quad \varepsilon < -0,014 .$$

$$\sigma = E \cdot (0,1 \cdot \varepsilon - 170 \cdot \varepsilon^3) \quad ; \quad -0,014 \leq \varepsilon \leq 0,014 .$$

$$\sigma = 0,01 \cdot \varepsilon + 19603,91986 \quad ; \quad \varepsilon > 0,014 .$$

$$\text{Aço A36 : } \sigma_{\text{escoamento}} = 35000 \text{ Ton / m}^2 \text{ e } \sigma_{\text{adm}} = 21000 \text{ Ton / m}^2 .$$

$$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ Ton / m}^2 .$$

$$\xi = 10^{13} \text{ (igualdade) e } \xi = 10^1 \text{ (desigualdade)} .$$

$$\text{ETOL} = 10^{-5} \text{ e } \text{KTOL} = 10^{-4} .$$

$$\text{max_bfgs} = 10 .$$

Nós 1, 2, 3 e 4 restringidos em x, em y e em z.

Carga de componente [0 0 -2,1] aplicada nos nós 14 e 15.

Seções dos elementos : $\phi 1$, $d_{\text{ext}} = 3,37 \text{ cm}$, $\text{esp} = 4,05 \text{ mm}$ e $A = 3,77 \text{ cm}^2$.

: $\phi 1 \frac{1}{4}$, $d_{\text{ext}} = 4,24 \text{ cm}$, $\text{esp} = 4,05 \text{ mm}$ e $A = 4,88 \text{ cm}^2$.

A solução do problema ilustrado pela figura 6.9, utilizando o método da eliminação de variáveis, encontra-se descrita na tabela 6.11.

A configuração de equilíbrio está ilustrada na figura 6.10.

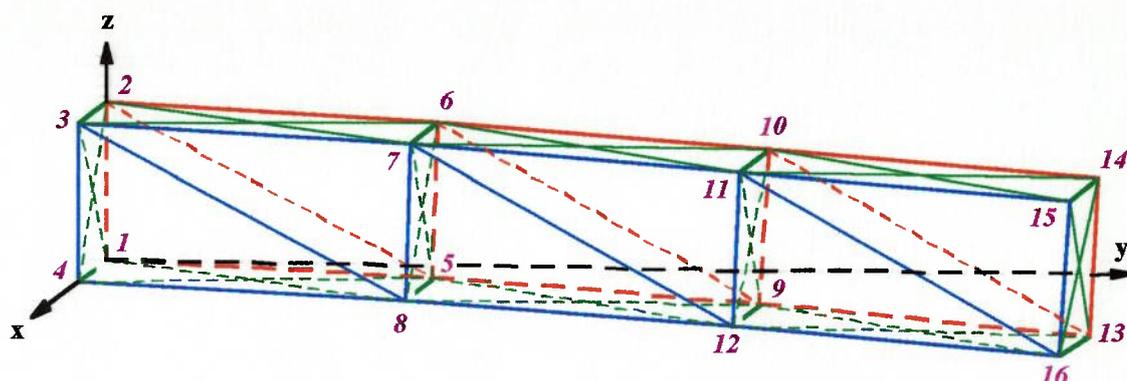


Figura 6.10 - Treliça espacial em balanço: Configuração de equilíbrio

Utilizando o método do Lagrangiano Aumentado para restrições de igualdade, obtemos a tabela 6.12. Os esforços, as tensões e as deformações encontram-se descritos na tabela 6.13.

Consideremos ainda uma restrição definida por $g = -x + y - z - 6,10 \leq 0$, como ilustra a figura 6.11.

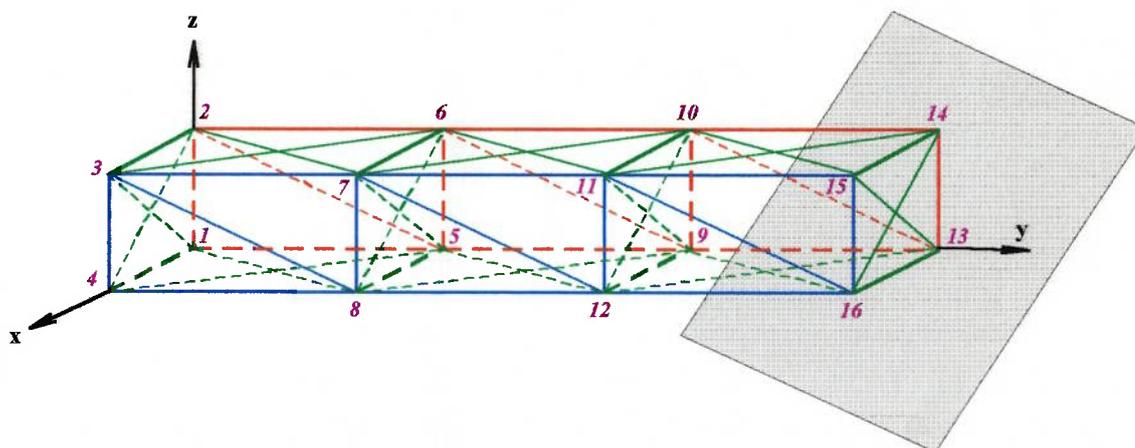


Figura 6.11 - Treliça espacial em balanço - Problema de contato

Observando as tabelas 6.11 e 6.12, podemos concluir que os nós 13 e 16 estão sujeitos ao contato. Aplicando o método do Lagrangiano Aumentado, obtemos a tabela 6.14.

A configuração de equilíbrio é ilustrada pela figura 6.12.

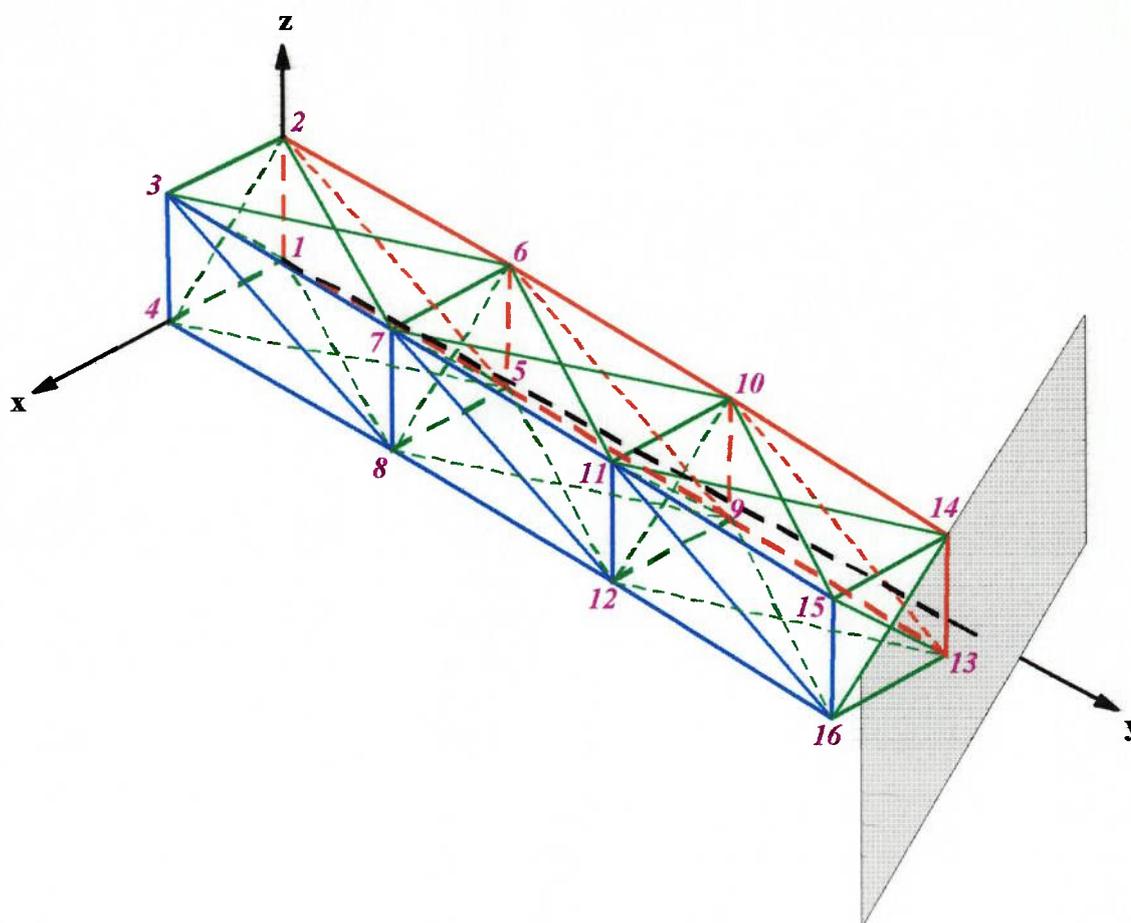


Figura 6.12 - Treliça espacial em balanço - Problema de contato: Configuração de equilíbrio

Analisando a figura 6.12, podemos concluir que somente o nó 13 encosta na restrição, ocorrendo o contato. Então, o multiplicador de Lagrange é ativado com objetivo de impedir a penetração.

Os esforços, as tensões e as deformações do problema ilustrado pela figura 6.12, encontram-se descritos na tabela 6.15.

Nó	X ^r	r	X	R	S	F
1	0	0,0000	0,0000	0	2,2791	2,2791
	0	0,0000	0,0000	0	12,6157	12,6157
	0	0,0000	0,0000	0	-0,4388	-0,4388
2	0	0,0000	0,0000	0	-1,4829	-1,4829
	0	0,0000	0,0000	0	-12,6157	-12,6157
	1	0,0000	1,0000	0	2,5388	2,5388
3	1	0,0000	1,0000	0	1,4829	1,4829
	0	0,0000	0,0000	0	-12,6157	-12,6157
	1	0,0000	1,0000	0	2,5388	2,5388
4	1	0,0000	1,0000	0	-2,2791	-2,2791
	0	0,0000	0,0000	0	12,6157	12,6157
	0	0,0000	0,0000	0	-0,4388	-0,4388
5	0	-0,0020	-0,0020	0	0	0
	2	-0,0197	1,9803	0	0	0
	0	-0,0689	-0,0689	0	0	0
6	0	0,0009	0,0009	0	0	0
	2	0,0100	2,0100	0	0	0
	1	-0,0718	0,9282	0	0	0
7	1	-0,0009	0,9991	0	0	0
	2	0,0100	2,0100	0	0	0
	1	-0,0718	0,9282	0	0	0
8	1	0,0020	1,0020	0	0	0
	2	-0,0197	1,9803	0	0	0
	0	-0,0689	-0,0689	0	0	0
9	0	-0,0012	-0,0012	0	0	0
	4	-0,0349	3,9651	0	0	0
	0	-0,1863	-0,1863	0	0	0
10	0	0,0002	0,0002	0	0	0
	4	0,0122	4,0122	0	0	0
	1	-0,1897	0,8103	0	0	0
11	1	-0,0002	0,9998	0	0	0
	4	0,0122	4,0122	0	0	0
	1	-0,1897	0,8103	0	0	0
12	1	0,0012	1,0012	0	0	0
	4	-0,0349	3,9651	0	0	0
	0	-0,1863	-0,1863	0	0	0
13	0	-0,0005	-0,0005	0	0	0
	6	-0,0454	5,9546	0	0	0
	0	-0,3263	-0,3263	0	0	0
14	0	-0,0002	-0,0002	0	0	0
	6	0,0075	6,0075	0	0	0
	1	-0,3298	0,6702	-2,1	-2,1	0
15	1	0,0002	1,0002	0	0	0
	6	0,0075	6,0075	0	0	0
	1	-0,3298	0,6702	-2,1	-2,1	0
16	1	0,0005	1,0005	0	0	0
	6	-0,0454	5,9546	0	0	0
	0	-0,3263	-0,3263	0	0	0

Tabela 6.11 - Exemplo 3: Otimização sem restrição

Nó	X ^r	r	X	R	S	F	λ
1	0	0,0000	0,0000	0	2,2791	0	-2,2791
	0	0,0000	0,0000	0	12,6157	0	-12,6157
	0	0,0000	0,0000	0	-0,4388	0	0,4388
2	0	0,0000	0,0000	0	-1,4829	0	1,4829
	0	0,0000	0,0000	0	-12,6157	0	12,6157
	1	0,0000	1,0000	0	2,5388	0	-2,5388
3	1	0,0000	1,0000	0	1,4829	0	-1,4829
	0	0,0000	0,0000	0	-12,6157	0	12,6157
	1	0,0000	1,0000	0	2,5388	0	-2,5388
4	1	0,0000	1,0000	0	-2,2791	0	2,2791
	0	0,0000	0,0000	0	12,6157	0	-12,6157
	0	0,0000	0,0000	0	-0,4388	0	0,4388
5	0	-0,0020	-0,0020	0	0	0	0
	2	-0,0197	1,9803	0	0	0	0
	0	-0,0689	-0,0689	0	0	0	0
6	0	0,0009	0,0009	0	0	0	0
	2	0,0100	2,0100	0	0	0	0
	1	-0,0718	0,9282	0	0	0	0
7	1	-0,0009	0,9991	0	0	0	0
	2	0,0100	2,0100	0	0	0	0
	1	-0,0718	0,9282	0	0	0	0
8	1	0,0020	1,0020	0	0	0	0
	2	-0,0197	1,9803	0	0	0	0
	0	-0,0689	-0,0689	0	0	0	0
9	0	-0,0012	-0,0012	0	0	0	0
	4	-0,0349	3,9651	0	0	0	0
	0	-0,1863	-0,1863	0	0	0	0
10	0	0,0002	0,0002	0	0	0	0
	4	0,0122	4,0122	0	0	0	0
	1	-0,1897	0,8103	0	0	0	0
11	1	-0,0002	0,9998	0	0	0	0
	4	0,0122	4,0122	0	0	0	0
	1	-0,1897	0,8103	0	0	0	0
12	1	0,0012	1,0012	0	0	0	0
	4	-0,0349	3,9651	0	0	0	0
	0	-0,1863	-0,1863	0	0	0	0
13	0	-0,0005	-0,0005	0	0	0	0
	6	-0,0454	5,9546	0	0	0	0
	0	-0,3263	-0,3263	0	0	0	0
14	0	-0,0002	-0,0002	0	0	0	0
	6	0,0075	6,0075	0	0	0	0
	1	-0,3298	0,6702	-2,1	-2,1	0	0
15	1	0,0002	1,0002	0	0	0	0
	6	0,0075	6,0075	0	0	0	0
	1	-0,3298	0,6702	-2,1	-2,1	0	0
16	1	0,0005	1,0005	0	0	0	0
	6	-0,0454	5,9546	0	0	0	0
	0	-0,3263	-0,3263	0	0	0	0

Tabela 6.12 - Exemplo 3: Otimização com restrição de igualdade

Elem	l_r	A_r	σ	$\varepsilon \cdot 10^3$	N	P_{ax}	P_{ay}	P_{az}	P_{bx}	P_{by}	P_{bz}
1 (1 - 5)	2	0,000488	-16598	-9,249	-8,176	-0,008	8,095	-0,282	0,008	-8,095	0,282
2 (1 - 2)	1	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3 (2 - 5)	2,236	0,000377	12488	6,390	4,678	0,004	-4,143	2,236	-0,004	4,143	-2,236
4 (5 - 6)	1	0,000377	-5114	-2,460	-1,933	0,006	0,057	1,927	-0,006	-0,057	-1,927
5 (2 - 6)	2	0,000488	11248	5,665	5,458	-0,002	-5,486	0,196	0,002	5,486	-0,196
6 (4 - 8)	2	0,000488	-16598	-9,249	-8,176	0,008	8,095	-0,282	-0,008	-8,095	0,282
7 (3 - 4)	1	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8 (3 - 8)	2,236	0,000377	12488	6,390	4,678	-0,004	-4,143	2,236	0,004	4,143	-2,236
9 (7 - 8)	1	0,000377	-5114	-2,460	-1,933	0,006	-0,057	-1,927	-0,006	0,057	1,927
10 (3 - 7)	2	0,000488	11248	5,665	5,458	0,002	-5,486	0,196	-0,002	5,486	-0,196
11 (2 - 3)	1	0,000488	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12 (6 - 7)	1	0,000488	-3751	-1,796	-1,834	1,831	0,000	0,000	-1,831	0,000	0,000
13 (3 - 6)	2,236	0,000377	8853	4,356	3,323	1,485	-2,987	0,107	-1,485	2,987	-0,107
14 (2 - 7)	2,236	0,000377	8853	4,356	3,323	-1,485	-2,987	0,107	1,485	2,987	-0,107
15 (1 - 4)	1	0,000488	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
16 (5 - 8)	1	0,000488	8332	4,084	4,050	-4,066	0,000	0,000	4,066	0,000	0,000
17 (4 - 5)	2,236	0,000377	-13445	-6,981	-5,105	-2,287	4,521	-0,157	2,287	-4,521	0,157
18 (1 - 8)	2,236	0,000377	-13445	-6,981	-5,105	2,287	4,521	-0,157	-2,287	-4,521	0,157
19 (1 - 3)	1,414	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
20 (2 - 4)	1,414	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
21 (5 - 7)	1,414	0,000377	-1383	-0,659	-0,522	0,369	0,011	0,368	-0,369	-0,011	-0,368
22 (6 - 8)	1,414	0,000377	-1383	-0,659	-0,522	0,369	-0,011	-0,368	-0,369	0,011	0,368
23 (5 - 9)	2	0,000488	-11577	-5,854	-5,683	0,002	5,640	-0,334	-0,002	-5,640	0,334
24 (6 - 9)	2,236	0,000377	12557	6,432	4,704	0,004	-4,113	2,345	-0,004	4,113	-2,345
25 (9 - 10)	1	0,000377	-4747	-2,281	-1,794	0,002	0,085	1,788	-0,002	-0,085	-1,788
26 (6 - 10)	2	0,000488	5858	2,828	2,851	0,001	-2,854	0,168	-0,001	2,854	-0,168
27 (8 - 12)	2	0,000488	-11577	-5,854	-5,683	-0,002	5,640	-0,334	0,002	-5,640	0,334
28 (7 - 12)	2,236	0,000377	12557	6,432	4,704	-0,004	-4,113	2,345	0,004	4,113	-2,345
29 (11 - 12)	1	0,000377	-4747	-2,281	-1,794	0,002	-0,085	-1,788	-0,002	0,085	1,788
30 (7 - 11)	2	0,000488	5858	2,828	2,851	-0,001	-2,854	0,168	0,001	2,854	-0,168
31 (10 - 11)	1	0,000488	-785	-0,374	-0,383	0,383	0,000	0,000	-0,383	0,000	0,000
32 (7 - 10)	2,236	0,000377	4267	2,047	1,606	0,717	-1,438	0,085	-0,717	1,438	-0,085
33 (6 - 11)	2,236	0,000377	4267	2,047	1,606	-0,717	-1,438	0,085	0,717	1,438	-0,085
34 (9 - 12)	1	0,000488	4971	2,390	2,420	-2,426	0,000	0,000	2,426	0,000	0,000
35 (8 - 9)	2,236	0,000377	-8228	-4,029	-3,114	-1,397	2,764	-0,164	1,397	-2,764	0,164
36 (5 - 12)	2,236	0,000377	-8228	-4,029	-3,114	1,397	2,764	-0,164	-1,397	-2,764	0,164
37 (9 - 11)	1,414	0,000377	-1333	-0,635	-0,503	0,356	0,017	0,354	-0,356	-0,017	-0,354
38 (10 - 12)	1,414	0,000377	-1333	-0,635	-0,503	0,356	-0,017	-0,354	-0,356	0,017	0,354
39 (9 - 13)	2	0,000488	-5851	-2,824	-2,863	0,001	2,848	-0,200	-0,001	-2,848	0,200
40 (10 - 13)	2,236	0,000377	12537	6,420	4,696	0,001	-4,079	2,387	-0,001	4,079	-2,387
41 (13 - 14)	1	0,000377	-4491	-2,155	-1,697	0,001	0,090	1,691	-0,001	-0,090	-1,691
42 (10 - 14)	2	0,000488	147	0,070	0,072	0,000	-0,072	0,005	0,000	0,072	-0,005
43 (12 - 16)	2	0,000488	-5851	-2,824	-2,863	-0,001	2,848	-0,200	0,001	-2,848	0,200
44 (11 - 16)	2,236	0,000377	12537	6,420	4,696	-0,001	-4,079	2,387	0,001	4,079	-2,387
45 (15 - 16)	1	0,000377	-4491	-2,155	-1,697	0,001	-0,090	-1,691	-0,001	0,090	1,691
46 (11 - 15)	2	0,000488	147	0,070	0,072	0,000	-0,072	0,005	0,000	0,072	-0,005
47 (14 - 15)	1	0,000488	785	0,374	0,383	-0,383	0,000	0,000	0,383	0,000	0,000
48 (11 - 14)	2,236	0,000377	118	0,056	0,044	0,020	-0,040	0,003	-0,020	0,040	-0,003
49 (10 - 15)	2,236	0,000377	118	0,056	0,044	-0,020	-0,040	0,003	0,020	0,040	-0,003
50 (13 - 16)	1	0,000488	2207	1,053	1,076	-1,077	0,000	0,000	1,077	0,000	0,000
51 (12 - 13)	2,236	0,000377	-3994	-1,914	-1,508	-0,676	1,342	-0,094	0,676	-1,342	0,094
52 (9 - 16)	2,236	0,000377	-3994	-1,914	-1,508	0,676	1,342	-0,094	-0,676	-1,342	0,094
53 (13 - 15)	1,414	0,000377	-1511	-0,720	-0,570	0,403	0,021	0,402	-0,403	-0,021	-0,402
54 (14 - 16)	1,414	0,000377	-1511	-0,720	-0,570	0,403	-0,021	-0,402	-0,403	0,021	0,402

Tabela 6.13 - Exemplo 3: Solução do problema ilustrado na figura 6.10

Nó	X ^r	r	X	R	S	F	λ
1	0	0,0000	0,0000	0	1,5977	0	-1,5977
	0	0,0000	0,0000	0	6,7938	0	-6,7938
	0	0,0000	0,0000	0	-0,1586	0	0,1586
2	0	0,0000	0,0000	0	-1,7423	0	1,7423
	0	0,0000	0,0000	0	-13,9447	0	13,9447
	1	0,0000	1,0000	0	2,0780	0	-2,0780
3	1	0,0000	1,0000	0	0,4569	0	-0,4569
	0	0,0000	0,0000	0	-3,1605	0	3,1605
	1	0,0000	1,0000	0	1,1621	0	-1,1621
4	1	0,0000	1,0000	0	-1,7215	0	1,7215
	0	0,0000	0,0000	0	11,7206	0	-11,7206
	0	0,0000	0,0000	0	-0,2907	0	0,2907
5	0	0,0117	0,0117	0	0	0	0
	2	-0,0079	1,9921	0	0	0	0
	0	-0,0412	-0,0412	0	0	0	0
6	0	0,0249	0,0249	0	0	0	0
	2	0,0152	2,0152	0	0	0	0
	1	-0,0434	0,9566	0	0	0	0
7	1	0,0234	1,0234	0	0	0	0
	2	-0,0008	1,9992	0	0	0	0
	1	-0,0543	0,9457	0	0	0	0
8	1	0,0145	1,0145	0	0	0	0
	2	-0,0194	1,9806	0	0	0	0
	0	-0,0527	-0,0527	0	0	0	0
9	0	0,0477	0,0477	0	0	0	0
	4	-0,0142	3,9858	0	0	0	0
	0	-0,1197	-0,1197	0	0	0	0
10	0	0,0680	0,0680	0	0	0	0
	4	0,0204	4,0204	0	0	0	0
	1	-0,1219	0,8781	0	0	0	0
11	1	0,0673	1,0673	0	0	0	0
	4	-0,0026	3,9974	0	0	0	0
	1	-0,1408	0,8592	0	0	0	0
12	1	0,0492	1,0492	0	0	0	0
	4	-0,0348	3,9652	0	0	0	0
	0	-0,1384	-0,1384	0	0	0	0
13	0	0,0959	0,0959	0	1,4092	0	-1,4092
	6	-0,0209	5,9791	0	-1,4092	0	1,4092
	0	-0,2168	-0,2168	0	1,4092	0	-1,4092
14	0	0,1186	0,1186	0	0	0	0
	6	0,0186	6,0186	0	0	0	0
	1	-0,2202	0,7798	-2,1	-2,1	0	0
15	1	0,1184	1,1184	0	0	0	0
	6	-0,0070	5,9930	0	0	0	0
	1	-0,2426	0,7574	-2,1	-2,1	0	0
16	1	0,0957	1,0957	0	0	0	0
	6	-0,0436	5,9564	0	0	0	0
	0	-0,2400	-0,2400	0	0	0	0

Tabela 6.14 - Exemplo 3: Otimização com restrição de desigualdade - Contato

Elem	l_r	A_r	σ	$\epsilon \cdot 10^3$	N	P_{ax}	P_{ay}	P_{az}	P_{bx}	P_{by}	P_{bz}
1 (1 - 5)	2	0,000488	-7617	-3,714	-3,731	0,022	3,716	-0,077	-0,022	-3,716	0,077
2 (1 - 2)	1	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3 (2 - 5)	2,236	0,000377	10511	5,251	3,942	-0,021	-3,512	1,835	0,021	3,512	-1,835
4 (5 - 6)	1	0,000377	-3888	-1,863	-1,469	0,019	0,034	1,465	-0,019	-0,034	-1,465
5 (2 - 6)	2	0,000488	14850	7,914	7,190	-0,090	-7,245	0,156	0,090	7,245	-0,156
6 (4 - 8)	2	0,000488	-16668	-9,309	-8,211	0,059	8,131	-0,216	-0,059	-8,131	0,216
7 (3 - 4)	1	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8 (3 - 8)	2,236	0,000377	6442	3,119	2,421	-0,016	-2,145	1,140	0,016	2,145	-1,140
9 (7 - 8)	1	0,000377	-2989	-1,428	-1,128	-0,010	-0,021	-1,126	0,010	0,021	1,126
10 (3 - 7)	2	0,000488	76	0,036	0,037	0,000	-0,037	0,001	0,000	0,037	-0,001
11 (2 - 3)	1	0,000488	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12 (6 - 7)	1	0,000488	-2692	-1,285	-1,315	1,313	-0,021	-0,014	-1,313	0,021	0,014
13 (3 - 6)	2,236	0,000377	2880	1,376	1,084	0,473	-0,977	0,021	-0,473	0,977	-0,021
14 (2 - 7)	2,236	0,000377	9504	4,703	3,566	-1,632	-3,189	0,087	1,632	3,189	-0,087
15 (1 - 4)	1	0,000488	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
16 (5 - 8)	1	0,000488	6068	2,932	2,953	-2,961	0,034	0,034	2,961	-0,034	-0,034
17 (4 - 5)	2,236	0,000377	-10630	-5,318	-4,029	-1,781	3,589	-0,074	1,781	-3,589	0,074
18 (1 - 8)	2,236	0,000377	-9171	-4,525	-3,473	1,576	3,077	-0,082	-1,576	-3,077	0,082
19 (1 - 3)	1,414	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
20 (2 - 4)	1,414	0,000377	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
21 (5 - 7)	1,414	0,000377	-1315	-0,626	-0,496	0,355	0,002	0,346	-0,355	-0,002	-0,346
22 (6 - 8)	1,414	0,000377	-423	-0,201	-0,160	0,112	-0,004	-0,114	-0,112	0,004	0,114
23 (5 - 9)	2	0,000488	-4650	-2,233	-2,274	0,041	2,267	-0,089	-0,041	-2,267	0,089
24 (6 - 9)	2,236	0,000377	8546	4,195	3,209	-0,033	-2,828	1,544	0,033	2,828	-1,544
25 (9 - 10)	1	0,000377	-3034	-1,450	-1,145	0,023	0,040	1,143	-0,023	-0,040	-1,143
26 (6 - 10)	2	0,000488	7387	3,597	3,592	-0,077	-3,601	0,141	0,077	3,601	-0,141
27 (8 - 12)	2	0,000488	-12869	-6,622	-6,322	0,110	6,273	-0,271	-0,110	-6,273	0,271
28 (7 - 12)	2,236	0,000377	8394	4,116	3,152	-0,036	-2,771	1,528	0,036	2,771	-1,528
29 (11 - 12)	1	0,000377	-3468	-1,659	-1,310	-0,024	-0,042	-1,306	0,024	0,042	1,306
30 (7 - 11)	2	0,000488	547	0,260	0,267	-0,006	-0,267	0,012	0,006	0,267	-0,012
31 (10 - 11)	1	0,000488	-589	-0,280	-0,287	0,287	-0,007	-0,005	-0,287	0,007	0,005
32 (7 - 10)	2,236	0,000377	545	0,260	0,205	0,088	-0,186	0,006	-0,088	0,186	-0,006
33 (6 - 11)	2,236	0,000377	5202	2,504	1,956	-0,912	-1,734	0,085	0,912	1,734	-0,085
34 (9 - 12)	1	0,000488	3818	1,828	1,860	-1,862	0,038	0,035	1,862	-0,038	-0,035
35 (8 - 9)	2,236	0,000377	-8245	-4,038	-3,121	-1,349	2,799	-0,093	1,349	-2,799	0,093
36 (5 - 12)	2,236	0,000377	-4370	-2,097	-1,651	0,766	1,457	-0,072	-0,766	-1,457	0,072
37 (9 - 11)	1,414	0,000377	-1120	-0,534	-0,423	0,305	0,003	0,292	-0,305	-0,003	-0,292
38 (10 - 12)	1,414	0,000377	-520	-0,248	-0,196	0,136	-0,008	-0,141	-0,136	0,008	0,141
39 (9 - 13)	2	0,000488	-3855	-1,846	-1,885	0,045	1,878	-0,092	-0,045	-1,878	0,092
40 (10 - 13)	2,236	0,000377	7422	3,615	2,788	-0,035	-2,442	1,365	0,035	2,442	-1,365
41 (13 - 14)	1	0,000377	-5003	-2,406	-1,891	0,043	0,075	1,884	-0,043	-0,075	-1,884
42 (10 - 14)	2	0,000488	1345	0,641	0,656	-0,017	-0,655	0,032	0,017	0,655	-0,032
43 (12 - 16)	2	0,000488	-5914	-2,856	-2,894	0,067	2,882	-0,147	-0,067	-2,882	0,147
44 (11 - 16)	2,236	0,000377	9443	4,670	3,543	-0,045	-3,104	1,742	0,045	3,104	-1,742
45 (15 - 16)	1	0,000377	-3636	-1,740	-1,373	-0,031	-0,050	-1,369	0,031	0,050	1,369
46 (11 - 15)	2	0,000488	-1156	-0,551	-0,564	0,014	0,563	-0,029	-0,014	-0,563	0,029
47 (14 - 15)	1	0,000488	929	0,442	0,453	-0,453	0,012	0,010	0,453	-0,012	-0,010
48 (11 - 14)	2,236	0,000377	-1698	-0,810	-0,641	-0,272	0,579	-0,023	0,272	-0,579	0,023
49 (10 - 15)	2,236	0,000377	1912	0,912	0,720	-0,338	-0,635	0,039	0,338	0,635	-0,039
50 (13 - 16)	1	0,000488	710	0,338	0,347	-0,347	0,008	0,008	0,347	-0,008	-0,008
51 (12 - 13)	2,236	0,000377	-6067	-2,932	-2,294	-0,978	2,066	-0,080	0,978	-2,066	0,080
52 (9 - 16)	2,236	0,000377	-837	-0,399	-0,316	0,148	0,278	-0,017	-0,148	-0,278	0,017
53 (13 - 15)	1,414	0,000377	-2732	-1,305	-1,031	0,746	0,010	0,710	-0,746	-0,010	-0,710
54 (14 - 16)	1,414	0,000377	-796	-0,379	-0,300	0,207	-0,013	-0,216	-0,207	0,013	0,216

Tabela 6.15 - Exemplo 3: Solução do problema ilustrado na figura 6.12

Conclusão

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma introdução à análise de estruturas submetidas ao contato sem atrito.

Para que fosse possível o desenvolvimento deste estudo, foi necessária a aplicação da programação matemática. Em virtude disto, o capítulo 2 foi dedicado à apresentação dos conceitos básicos de programação matemática, assim como sua classificação em problemas de otimização sem restrições, otimização com restrições de igualdade, otimização com restrições de desigualdade e problema geral. Para cada tipo de problema de otimização citado anteriormente, foram apresentadas as condições de otimalidade e as condições necessárias e suficientes de primeira e segunda ordem, que devem ser satisfeitas por um ponto para que este seja um mínimo local. Para que esta definição fosse estendida para um ponto de mínimo global, foi necessária a introdução de propriedades de convexidade transformando o problema em programação convexa, o que foi feito no final do aludido capítulo.

O capítulo 3 teve como finalidade o estudo dos algoritmos de programação matemática. Para a resolução dos problemas de otimização sem restrições, foram utilizados o método de Newton, o método de Newton com busca unidimensional, o método do BFGS em sua forma produto e o método de Newton / Quase-Newton. Para a resolução dos problemas de otimização com restrições, foram utilizados os métodos do Lagrangiano, da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. Este estudo por sua vez, teve o intuito de estudar separadamente cada um destes métodos para cada tipo de classificação de problemas de programação matemática.

Embora os métodos de busca unidimensional possuam maior notoriedade na literatura, neste trabalho foi testado o método utilizado por T. A. LAURSEN e B. N. MAKER [8] descrito na seção 3.1.1, em um modelo simples com molas e para o caso particular das treliças espaciais, e concluiu-se que ela não foi vantajosa.

O capítulo 4 teve grande importância no contexto do trabalho, não só pelo cuidado em apresentar um exemplo prático dos conceitos estudados nos capítulos 2 e 3, mas também em induzir uma interpretação física da teoria e ilustrar com uma interpretação gráfica os algoritmos.

Para evitar as formulações em elementos finitos, foram adotadas as treliças espaciais como modelos estruturais a serem analisados. Então no capítulo 5, foi desenvolvida a formulação para os problemas de otimização sem restrições, otimização com restrições de igualdade e otimização com restrições de desigualdade para as treliças espaciais.

Um criterioso programa em linguagem C++ foi desenvolvido para o estudo do problema de contato utilizando o método do Lagrangiano Aumentado. No decorrer do programa, muitas dificuldades foram encontradas. Uma delas circunscreveu-se em penalizar um nó que violasse uma restrição de desigualdade. A solução encontrada foi gerar um sistema de coordenada local no nó e penalizá-lo na direção normal à superfície de contato, calculando a força de reação F_c nesta direção. Em seguida, decompor a força F_c nas direções do sistema de coordenadas globais, dando prosseguimento normal ao algoritmo.

Um aspecto importante a ser realçado, é que a estrutura deverá estar devidamente equilibrada. A equação de equilíbrio é definida por $F = S - R + F_c = 0$.

No capítulo 6 encontram-se alguns exemplos de treliças espaciais rodadas pelo programa. Consignou-se a necessidade do fornecimento de tabelas de resultados, para que facilitassem a interpretação dos problemas e o entendimento do comportamento da estrutura quando submetida ao contato.

A análise de problemas de contato constitui-se num universo bastante amplo, podendo ser apresentada através de diversas outras aplicações. Pode-se citar, por exemplo, a utilização dos elementos finitos para o estudo dos problemas de contato em pórticos, envolvendo elementos de barras, chapas, placas, sólidos, etc ...

Outra aplicação importante, seria explorar novos algoritmos e compará-los com os métodos já estudados: Lagrangiano, Penalidade e Lagrangiano Aumentado.

Ficam essas sugestões para futuros trabalhos a serem realizados envolvendo a análise de problemas de contato. Acredita-se, porém, que o conteúdo teórico possa ser facilmente adaptado às outras formulações em elementos finitos.

Referências Bibliográficas

- [1] BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. Belmont, Athena Scientific, 1995.
- [2] _____. **Constrained optimization and Lagrange multiplier methods**. N. Y., Academic Press, 1984.
- [3] FLETCHER, R. **Practical methods of optimization**. Chichester, John Wiley & Sons, 1980. 2v.
- [4] GILL, P. E.; MURRAY, W. **Numerical methods for constrained optimization**. 3. ed. London, Academic Press, 1974.
- [5] _____. **Practical optimization**. 3. ed. London, Academic Press, 1981.
- [6] HERSKOVITS, J. **Advances in structural optimization**. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995. v25. Solid Mechanics and its Applications.
- [7] KIKUCHI, N.; ODEN, J. T. Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. Philadelphia, **SIAM Journal Control**, 1988.
- [8] LAURSEN, T. A.; MAKER, B. N. An augmented Lagrangian quasi-Newton solver for constrained nonlinear finite element applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, p. 3571-90, 1995.
- [9] LUENBERGER, D. G. **Linear and nonlinear programming**. 2. ed. Reading, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [10] MEDRANO, Maria Silvina. **Aplicações de programação matemática em análise estrutural**. São Paulo, 1994. 132p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

- [11] PIMENTA, P. M. **Análise não linear de treliças espaciais**. São Paulo, EPUSP, 1986. (B. T./PEF-8604)
- [12] _____. **Análise não-linear de treliças espaciais: teoria exata vs. teoria de segunda ordem**. EPUSP, São Paulo, 1996. (B. T./PEF-9613)
- [13] _____. **Fundamentos da mecânica das estruturas II**. São Paulo, EPUSP, 1995. (Apostila)
- [14] PIMENTA, P. M.; GOLDENBERG, P. **Programação matemática aplicada à engenharia das estruturas**. São Paulo, EPUSP, 1996 (Apostila)
- [15] PRESS, W. H. **Numerical recipes in C: the art of scientific computing**. 2 ed. Cambridge, University Press, 1995.
- [16] ROCKAFELLER, R. T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming. **SIAM Journal Control**, v.12, p. 268-85, 1974.
- [17] SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. **Computers and Structures**, v. 42, p. 97-116, 1992.
- [18] WRIGGERS, P. Finite element algorithms for contact problems. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v.2, n.º 4, p. 1-49, 1995.