IGOR PIERIN

A INSTABILIDADE DE PERFIS FORMADOS A FRIO EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO

São Paulo
2011

IGOR PIERIN

A INSTABILIDADE DE PERFIS FORMADOS A FRIO EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em engenharia

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Valdir Pignatta e Silva.

São Paulo
2011

Agradecimentos

Expresso a minha gratidão:

Ao professor Valdir Pignatta e Silva pela amizade, paciência, dedicação e o entusiasmo na orientação nesse trabalho. Agradeço a confiança depositada em mim, principalmente nas horas de desespero. Além da sua compreensão na etapa inicial da pesquisa em que não pude ficar em São Paulo.

Ao professor Luís Carlos Prola que sempre me incentivou a pesquisar e teve a paciência de explicar, via MSN, o método das faixas finitas *splines*. Agradeço pelos conhecimentos transmitidos sobre instabilidade de estruturas.

À professora Henriette Lebre La Rovere que auxiliou na elaboração do programa de análise térmica de estruturas. Agradeço pelos conhecimentos transmitidos sobre o método dos elementos finitos e por permitir que eu voltasse à Universidade Federal de Santa Catarina após a minha cirurgia.

Ao professor Eduardo Campello pela ajuda no ANSYS.

Aos amigos do LMC-JAC (Laboratório de Mecânica Computacional) que proporcionaram momentos de descontração. Em especial ao Leonardo Lago, Fernando Gonçalves, Paulo Nigro, Jorge Costa, Marcelo Teixeira, Eduardo Simões, Alexandre Beletti, Ricardo Oliveira e Luís Bitencourt.

Aos meus pais, Paulo e Ester, e aos meus irmãos Denise, Júlio e Letícia que sempre me apoiaram, incentivaram e ajudaram a conquistar as barreiras que apareceram durante o caminho até a conclusão deste Doutorado.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

RESUMO

A utilização de perfis formados a frio na construção civil tem sido motivada pela elevada eficiência estrutural, expressa pela relação entre capacidade resistente e peso, e pela facilidade de fabricação, caracterizada pela possibilidade de produção de elementos com diferentes seções transversais.

Devido à alta esbeltez dos elementos que os constituem, o projeto desses perfis, à temperatura ambiente ou em situação de incêndio, é governado pelos fenômenos de instabilidade local, distorcional e global.

O objetivo dessa Tese é o desenvolvimento de ferramentas computacionais que possibilitem a avaliação do comportamento estrutural de pilares de aço formados a frio em situação de incêndio. Para esse fim são desenvolvidos dois programas de computador.

O primeiro programa, denominado de *ATERM*, tem o objetivo de determinar o campo de temperaturas em regime transiente, de estruturas bidimensionais formadas por qualquer material, submetidas a qualquer curva temperatura-tempo de incêndio, com base no método dos elementos finitos. A esse programa acopla-se o programa ATERM-DIM para o dimensionamento em regime plástico de vigas de aço continuamente travadas, em situação de incêndio. Resultados obtidos do ATERM são comparados aos obtidos do programa sueco de computador Super Tempcalc.

O segundo programa, denominado de *INSTAB*, realiza análises lineares e não lineares de estabilidade de perfis formados a frio, considerando as instabilidades local, global e distorcional, empregando o método das faixas finitas splines, para material elastofrágil, considerando a redução das propriedades mecânicas devido à temperatura. Valores de esforços resistentes obtidos pelo programa *INSTAB* são comparados aos determinados por meio do programa comercial de elementos finitos *ANSYS*, o qual considera o comportamento elastoplástico do material, e a resultados obtidos por meio de um método simplificado de dimensionamento de perfis formados a frio em situação de incêndio, proposto pelo autor para fins de normatização brasileira. Essa comparação permite avaliar o efeito da elastoplasticidade nos perfis axialmente comprimidos.

Pretende-se, com base neste estudo, fornecer subsídios para o desenvolvimento de procedimentos para a verificação estrutural de perfis formados a frio em situação de incêndio.

ABSTRACT

The use of cold-formed steel profile in construction has increased because of its high efficiency, expressed as the ratio between load capacity and weight, and ease of manufacturing, characterized by the possibility of production of elements with different cross sections.

Due the high slenderness ratio of the sections elements, the design of these profiles, either at room temperature or in case of fire, is determined by local, distortional and global buckling phenomena.

The aim of this Thesis is to develop computational tools that allow the assessment of the structural behavior of cold-formed steel columns in fire. For this purpose, two softwares are developed. The first one, called ATERM, allows determining the temperature field under transient analysis of two-dimensional structures formed by any material, subjected to any time-temperature fire curve, and is based on the finite element method. This software interacts with another program, ATERM-DIM, used for plastic design of lateral restrained beams steel in fire. Results of ATERM are compared to those obtained from the Swedish software Super Tempcalc.

The second program, named INSTAB, can perform linear and nonlinear stability studies of cold formed profiles, taking into account the local, distortional and global buckling, by means of the splines finite strip method for elastofragile material, considering the reduction of mechanical properties caused by the increase in temperature. Resistant values obtained by the INSTAB software are compared with results from the commercial finite element program ANSYS, which considers the plastic behavior of the material and also with results obtained by means of a simplified method for design of cold-formed profiles in fire, proposed by the author for the Brazilian fire standard. This comparison allows analyzing the effect of elastoplasticity in columns of cold-formed steel.

Another objective of this study is to provide background for the development of procedures for the structural analysis of cold formed profiles in fire.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A segurança contra incêndio tem sido alvo de inúmeras pesquisas com o objetivo de estabelecer regras e procedimentos para garantir a segurança das edificações em situação de incêndio, visando minimizar o risco à vida e à perda patrimonial.

A inalação de fumaça, no início do incêndio, pelos ocupantes da edificação é a principal causa de morte. O desabamento de elementos construtivos sobre usuários das edificações, sobre aqueles que participam das operações de combate ou que rompem as barreiras de compartimentação do incêndio também deve ser evitado. A perda patrimonial ocorre pela destruição total ou parcial da edificação, além da perda de equipamentos e documentos.

A combinação de sistemas de proteção ativos (detecção de calor e fumaça, chuveiros automáticos, brigadas de incêndio, etc.) e passivos (capacidade resistente dos elementos estruturais, saídas de emergências, compartimentação, entre outros) é o principal objetivo da segurança contra incêndios. Esses sistemas devem ser capazes de (i) permitir a saída dos ocupantes da edificação, (ii) minimizar os danos à própria edificação, além de às edificações vizinhas e à infraestrutura pública e (iii) fornecer segurança à equipe de combate ao incêndio.

Devido ao processo de urbanização dos grandes centros, o risco desse tipo de sinistro tem aumentado. No Brasil, incêndios de grande proporção, tais como os Edifícios Andraus (1972), Joelma (1974) e Grande Avenida (1981), em São Paulo, o Edifício Andorinhas (1986), no Rio de Janeiro, e as Lojas Americanas (1973) e Renner (1976), em Porto Alegre, entre outros, têm contribuído, apesar dos transtornos econômicos e sociais, para a modificação nas legislações, nas corporações de bombeiros e no aumento do número de pesquisas com a finalidade de fornecer especificações que visam a segurança das edificações em situação de incêndio.

A ação térmica nas estruturas de aço, concreto ou madeira provoca uma redução nas propriedades mecânicas dos materiais, tornando necessária à verificação da segurança estrutural em situação de incêndio.

Atualmente, a norma brasileira ABNT NBR 14323:1999, que se refere ao dimensionamento de estruturas de aço e mistas de aço e concreto em situação de incêndio, se encontra em processo de revisão. Porém, a maioria das pesquisas e normas internacionais que subsidiam a elaboração dessa revisão está relacionada aos perfis laminados e soldados.

Devido ao elevado grau de eficiência estrutural, os perfis formados a frio são, geralmente, constituídos de seções abertas e de chapas de aço muito finas, sendo que os fenômenos de instabilidade local e global tornam-se importantes no projeto desses perfis a temperatura ambiente ou a temperaturas elevadas.

O comportamento dos perfis formados a frio apresenta um elevado grau de não linearidade geométrica e do material, sendo que a sua rigorosa determinação exige a utilização de métodos numéricos (tais como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Faixas Finitas) que requerem um grande esforço computacional.

Nesse sentido, pretende-se neste trabalho desenvolver uma ferramenta computacional para fornecer uma contribuição para o conhecimento do comportamento dos perfis formados a frio em situação de incêndio.

Nos itens subsequentes são apresentados os objetivos, a justificativa e a metodologia a ser seguida nessa Tese, além da organização dos capítulos deste texto.

1.1. Objetivo

O objetivo desta Tese é a elaboração de ferramentas computacionais visando ao estudo do comportamento termestrutural de perfis formados a frio de aço, axialmente comprimidos, em situação de incêndio.

Com esse propósito, estuda-se, primeiramente, a ação térmica nas estruturas, a distribuição de temperaturas ao longo da seção transversal dos perfis e a influência da variação da temperatura nas propriedades mecânicas do material. Em seguida, consideram-se os fenômenos das instabilidades locais, distorcional e global e os efeitos das não linearidades geométrica e do material.

Para atingir o objetivo serão elaborados os seguintes programas de computador:

(a) Análise térmica bidimensional de seções transversais por meio do método dos elementos finitos;
(b) Dimensionamento no regime plástico de vigas de aço continuamente travadas em situação de incêndio, a partir do campo de temperaturas e com base em procedimentos normatizados;
(c) Análise linear de estabilidade de perfis constituídos de placas de parede fina, o qual permite a estimativa da força crítica e o respectivo modo de instabilidade, por meio do Método das Faixas Finitas Splines;
(d) Análise não linear geométrica incluindo imperfeição geométrica inicial e material de comportamento linear, com limitação de deformação linear específica (material elastofrágil), por meio do Método das Faixas Finitas Splines.

Avaliar o efeito da elastoplasticidade em incêndio e comparações entre métodos avançados e o método simplificado do Eurocode também fazem parte do objetivo desta Tese.

O item b do objetivo, apesar de não ser diretamente ligado à Tese proposta, será uma aplicação direta do item a, com a finalidade de substituir o programa comercial Super Tempcalc, que tem sido empregado pelo grupo de pesquisa sobre estruturas em situação de incêndio da EPUSP.

1.2. Justificativa

A situação em que os perfis laminados ou soldados com seções esbeltas não atingem a plastificação total da seção, devido à precoce instabilidade local e global, impede que os tradicionais redutores da resistência ao escoamento f_y ($k_{y,\theta}$) recomendados pelo texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) ou pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) sejam utilizados. Algo similar ocorre nos perfis formados a frio.

Diversos pesquisadores (Makelainen e Miller (1983), Gleich (1995), Kaitila (2002), Lee (2004), Zhao *et al* (2005) e Mecozzi e Zhao (2005)) ao ensaiarem perfis formados a frio em situação de incêndio correlacionam a redução de esforço resistente desses perfis com uma redução de resistência do aço associada a uma determinada deformação linear específica menor do que a correspondente ao início do escoamento.

Atualmente, os ensaios utilizados para caracterizar as propriedades mecânicas em incêndio dos perfis formados a frio são caros e se restringem apenas a alguns pesquisadores. Desse modo, ainda não é possível elaborar um método geral e econômico para o projeto de perfis formados a frio em situação de incêndio.

Para contornar essa lacuna de conhecimento, o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) permite, de forma simplificada, que os perfis formados a frio sejam dimensionados em situação de incêndio utilizando o procedimento clássico do método das larguras efetivas com redutor da resistência ao escoamento igual aos recomendados para os perfis laminados ou soldados com seção classe 4 (denominação exclusiva do Eurocode 3 parte 1.2 (2005)), isto é, relativo a 0,2% da deformação específica plástica residual. Porém, o desempenho estrutural dos perfis formados a frio em situação de incêndio é inferior aos perfis laminados ou soldados suscetíveis aos fenômenos de instabilidade local (Pierin e Silva, 2010).

Os perfis formados a frio, geralmente, são constituídos de chapas muito finas. O estado limite último à temperatura ambiente, normalmente, é o da instabilidade global,

local ou distorcional, ou seja, raramente, atinge-se a plastificação total da seção. Supõe-se que em situação de incêndio isso também ocorra.

1.3. Metodologia

Os programas elaborados na Tese serão todos desenvolvidos na linguagem Fortran 90.

A análise térmica bidimensional das seções transversais foi efetuada por meio do Método dos Elementos Finitos, onde são levados em consideração os fenômenos de condução, convecção e radiação. Os resultados do programa de análise térmica são validados com o programa Super Tempcalc desenvolvidos em Lund, Suécia, (Anderberg, 1997), o qual é reconhecido internacionalmente pela comunidade científica na área de análise térmica de estruturas em situação de incêndio. O programa desenvolvido nesta Tese atende a seções transversais de elementos estruturais compostos por quaisquer materiais.

O campo de temperaturas obtido na seção transversal é fornecido como dado de entrada na análise não linear de estabilidade. Para a análise mecânica, será admitido o mesmo campo de temperaturas em todas as seções transversais ao longo da altura do pilar.

Devido ao fato de que os perfis formados a frio são barras prismáticas, ou seja, as seções não são variáveis ao longo do perfil, as análises de estabilidade (lineares e não lineares) serão efetuadas por meio do Método das Faixas Finitas Splines (*MFFS*), o qual será detalhado no capítulo 6 dessa Tese. O programa computacional desenvolvido nessa Tese com base no Método das Faixas Finitas Splines será validado com resultados encontrados na literatura científica e por meio do programa *ANSYS*.

Embora o Método das Faixas Finitas Splines não seja muito utilizado pela comunidade científica, quando comparado ao número de trabalhos que fazem uso do Método dos Elementos Finitos, o *MFFS* foi utilizado nessa Tese pelos seguintes motivos. Primeiro, o método é bastante eficaz no estudo dos fenômenos de instabilidade local e distorcional em estruturas prismáticas, onde se incluem os perfis formados a frio. Segundo, assim como no método dos elementos finitos, o *MFFS* exige discretizações nas direções transversal e longitudinal. Porém, como se verá no capítulo 6, a discretização longitudinal do perfil não requer tanta experiência do usuário na definição da mesma, podendo ser automatizada, uma vez que todas as faixas possuem o mesmo tamanho e são iguais ao comprimento do perfil.

Assim, o método requer do usuário apenas um cuidado na definição das larguras das faixas finitas, uma vez que elas dependem da geometria da seção transversal. Assim, o número de faixas utilizadas para modelar um perfil é bem menor do que o número de elementos de casca utilizados em um modelo similar ao se utilizar o método dos elementos finitos. Consequentemente, o *MFFS* se mostra mais eficiente computacionalmente quando comparado ao método dos elementos finitos.

Não foi encontrado na literatura um programa de computador com as características do desenvolvido nesta Tese, ou seja, que na análise de estabilidade se considere a redução das propriedades mecânicas devido à elevação de temperatura e incluindo técnicas de integração numéricas que permitem maior eficiência computacional. As propriedades mecânicas são determinadas para cada temperatura e em cada faixa finita, de forma a acoplar a análise estrutural à térmica.

Os resultados serão comparados à análise não linear incluindo efeitos da plastificação das seções, empregando o programa ANSYS.

Para avaliar a influência da elastoplasticidade na capacidade resistente dos perfis formados a frio, pretende-se neste trabalho comparar os resultados do programa aqui desenvolvido, qual seja o de análise não linear geométrica, incluindo imperfeição inicial e material de comportamento linear com deformação limitada a resultados empregando-se o programa comercial Ansys, no qual se permitirá a plastificação da seção. Também serão feitas comparações entre resultados obtidos por meio do método simplificado do Eurocode 3 parte 1.2 (2005) e por intermédio de métodos numéricos mais avançados.

1.4. Organização do Trabalho

Além deste capítulo, onde se justificou a proposta da Tese e se apresentaram os objetivos e a metodologia a ser empregada, o trabalho inclui mais sete capítulos que são brevemente descritos nos parágrafos a seguir.

No capítulo 2 são descritos os fenômenos de transferência de calor para os elementos estruturais, os principais modelos matemáticos representativos do incêndio e apresentam-se, também, as propriedades térmicas dos aços submetidos a altas temperaturas.

No capítulo 3 apresenta-se a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise térmica não linear de estruturas bidimensionais. Em seguida, discute-se a implementação computacional e a validação do programa desenvolvido (*ATERM*).

O estado da arte sobre os fenômenos de instabilidade local, distorcional e global presentes nos perfis de aço formados a frio está apresentado no capítulo 4. Também se discutem a presença das tensões residuais e as imperfeições geométricas iniciais, dois aspectos que influenciam na resistência última dos perfis.

No capítulo 5 é apresentada uma revisão bibliográfica sobre o comportamento dos perfis formados a frio em situação de incêndio. É proposta uma metodologia de dimensionamento simplificado desses perfis submetidos à temperatura elevada.

O Método das Faixas Finitas Splines é apresentado no capítulo 6, sendo aplicado a análises lineares e não lineares de estabilidade para materiais de comportamento elastofrágil (*INSTAB*). Aborda-se também a implementação computacional do método. São realizados estudos de convergência dos resultados. Os resultados obtidos são validados com soluções teóricas e com análises do comportamento pós-crítico elástico de perfis formados a frio encontrados na literatura científica e por meio do programa *ANSYS*.

O comportamento de pilares de aço formados a frio em situação de incêndio é estudado no capítulo 7. Comparam-se as capacidades resistentes dos perfis submetidos à temperatura elevada considerando o comportamento elastofrágil, por meio do programa *INSTAB*, e elastoplástico, com o auxilio do programa *ANSYS*.

Finalmente, no capítulo 8 são apresentadas as conclusões obtidas e as sugestões para trabalhos futuros.

2. AÇÕES TÉRMICAS NAS ESTRUTURAS

O projeto de estruturas em situação de incêndio é, em geral, mais complexo quando comparado ao projeto à temperatura ambiente. Os elementos estruturais submetidos a temperaturas elevadas apresentam, além da perda de resistência mecânica, uma série de efeitos que, geralmente, não estão presentes à temperatura ambiente, tais como a acentuação das não linearidades geométrica e do material e a alteração das condições de contorno do sistema.

De um modo simplificado, as referências normativas, nacionais e estrangeiras, tal como a proposta de revisão da NBR 14323 (2011) e o Eurocode 3 parte 1.2 (2005), de projeto de estruturas em situação de incêndio apresentam dimensões mínimas de elementos e detalhes construtivos que atendam aos requisitos mínimos para garantir a segurança das estruturas submetidas às altas temperaturas.

Em diversas situações, as indicações normativas não são aplicáveis sendo necessária a adoção de modelos mais avançados. Esses modelos são fundamentados no desempenho dos elementos construtivos ou estruturas em situação de incêndio. Nesse modelo está envolvida a interação entre (i) o modelo de incêndio (ii) a transferência de calor, e (iii) a resposta estrutural.

A seguir, discutem-se a transferência de calor, a modelagem do incêndio, as características dos aços submetidos a altas temperaturas e as propriedades termomecânicas dos aços.

2.1. Transferência de Calor

Define-se transferência de calor como a propagação de energia térmica de uma região para outra de um meio sólido, líquido ou gasoso, como resultado da diferença de temperaturas entre elas. A energia térmica transferida pelo fluxo de calor não pode ser medida diretamente, mas seu conceito tem significado físico, pois está relacionado com a temperatura, que é uma quantidade mensurável.

A transferência de calor complementa a primeira e a segunda lei da termodinâmica ao proporcionar leis adicionais que são utilizadas para estabelecer a velocidade da transferência de calor. A transferência de calor estuda o mecanismo, a duração e as condições necessárias para que o sistema atinja o equilíbrio térmico.

Quando há uma troca de calor entre regiões de um mesmo corpo ocorre uma alteração no grau de agitação das suas moléculas e duas situações podem ocorrer: (i) variação da temperatura do corpo e/ou (ii) mudança no estado físico do material (sólido,

líquido ou gasoso). O calor trocado pelo corpo quando ocorre uma variação de temperatura denomina-se de calor sensível. Chama-se de calor latente, o calor trocado pelo corpo quando ocorre a alteração do estado físico do material sem variação de temperatura. Como em situação de incêndio os materiais estruturais não alteram o seu estado físico, esta Tese abordará somente o calor sensível.

A transferência de calor ocorre sempre que há diferença de temperaturas entre dois ou mais corpos ou entre duas regiões de um mesmo corpo, a qual se processa da região com maior temperatura para a região de menor temperatura, até atingir o equilíbrio térmico entre eles. Dessa forma, está implícito dizer que a troca de calor é um fenômeno transiente que cessa quando o equilíbrio térmico é atingido.

Em situação de incêndio, a diferença de temperaturas entre o ambiente em chamas e os elementos estruturais gera um fluxo de calor que, por convecção, radiação e condução, transfere-se para a estrutura, aumentando a sua temperatura. À soma dos fluxos de convecção e radiação denomina-se ação térmica (Silva, 2001).

Esses mecanismos de transferência de calor são fundamentalmente diferentes, regidos por leis próprias, mas que na realidade, podem ocorrer simultaneamente, o que torna muito complexa a solução de um problema de transmissão de calor.

A condução e a radiação são mecanismos de transferência de calor que dependem da diferença de temperaturas, enquanto a convecção depende do transporte de massa, além da diferença de temperatura.

O fluxo de calor por convecção é gerado pela diferença de densidade entre os gases do ambiente em chamas. Os gases quentes são menos densos e tendem a ocupar a parte superior do ambiente, enquanto que os gases frios, de densidade maior, tendem a se movimentar para a atmosfera inferior do ambiente. Esse movimento gera o contato entre os gases quentes e as estruturas, ocorrendo a transferência de calor por convecção, conforme mostrado esquematicamente na Figura 2.1a.

A radiação é o processo pelo qual o calor flui, na forma de ondas eletromagnéticas, de um corpo à alta temperatura para a superfície de outra estrutura a uma temperatura mais baixa (ver Figura 2.1b). A transferência de calor por condução é responsável pelo aquecimento no interior do elemento estrutural, ou seja, a superfície do elemento aquecida gera um fluxo de calor na direção do interior do elemento estrutural (ver Figura 2.1c).

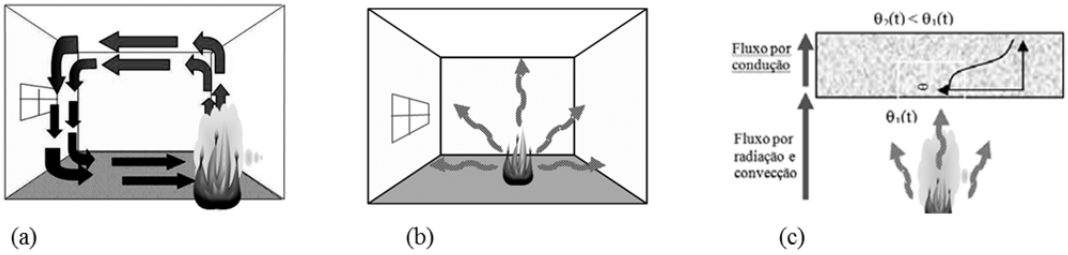

Figura 2.1: Mecanismos de transferência de calor em um incêndio: (a) convecção, (b) radiação e (c) condução. Adaptado de Seito *et al* (2008).

Define-se a ação térmica como sendo a ação na estrutura descrita por meio do fluxo de calor, por convecção e radiação, provocada pela diferença de temperaturas entre os gases quentes do ambiente em chamas e os componentes estruturais.

Nos próximos itens são explicados, sucintamente, os três mecanismos de transferência de calor cujo entendimento torna-se necessário para o projeto de estruturas em situação de incêndio.

2.1.1. Convecção

A convecção é um processo de transferência de energia térmica causado por um deslocamento de um fluído. A convecção pode ser (i) natural, quando o movimento do fluido é devido somente à diferença de densidade do fluido oriunda do gradiente térmico e (ii) forçada, quando o movimento é devido a uma força externa, como por exemplo, uma bomba, um ventilador ou ventos. Para a engenharia de segurança contra incêndio, um regime de convecção importante é a convecção natural.

A diferença de densidade dos gases quentes e frios, ocasionada pela expansão volumétrica devido ao aquecimento, provoca um deslocamento de matéria, comumente chamada de corrente de ar ou corrente de convecção. A energia térmica decorrente da convecção é transferida ao mesmo tempo em que a matéria se desloca.

A quantificação da energia térmica decorrente da convecção é bastante complexa em comparação ao processo de condução térmica, pois depende de vários fatores, tais como as propriedades térmicas e mecânicas do fluido, natureza do fluxo do fluido (laminar ou turbulento), forma e orientação da superfície aquecida.

Por meio de observações do fenômeno da convecção, Isaac Newton (1643-1727) deduziu, em 1701, que o fluxo de calor devido à convecção que atravessa uma área é proporcional à diferença de temperatura entre o fluido e a superfície aquecida. Essa relação, conhecida como lei de arrefecimento de Newton, é expressa pela equação (2.1),

$$\dot{Q}_c = \alpha_c A\left(\theta_g - \theta_a\right), \tag{2.1}$$

sendo $\dot{Q}_c$ o fluxo de calor convectivo na superfície, α_c o coeficiente de transmissão de calor convectivo, A a área da superfície aquecida, θ_g a temperatura do fluido e θ_a a temperatura da superfície do sólido.

O coeficiente de transmissão de calor por convecção é uma função complexa do escoamento do fluido, das propriedades térmicas do fluido e da geometria do sistema, sendo seu valor numérico de difícil determinação exata. Por simplificação, o Eurocode 1 parte 1.2 (2002) adota valores constantes em função do modelo matemático de incêndio adotado (que serão descritos no item 2.6).

As partículas do fluido ao entrarem em contato com a superfície passam a ter velocidade zero na superfície de contato, retardando o movimento das partículas da camada adjacente devido à viscosidade do fluido. Esse efeito se propaga até uma distância δ da superfície, conhecida como altura da camada-limite, conforme mostra a Figura 2.2. Do mesmo modo que se desenvolve uma camada limite de velocidade, uma camada-limite térmica deve se desenvolver se houver um gradiente térmico entre as temperaturas do fluido na corrente livre e na superfície. Em uma região do fluido afastada da superfície, a distribuição de temperaturas é uniforme e igual a θ_∞, ou seja, igual à temperatura dos gases quentes. Ao aproximar da superfície, as partículas atingem o equilíbrio térmico na temperatura da superfície. Esse efeito se propaga até a altura da camada-limite térmica.

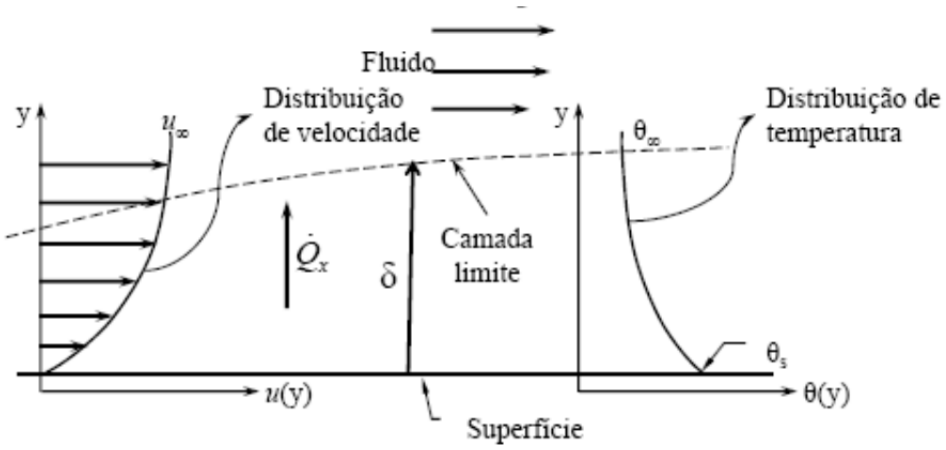

Figura 2.2: Desenvolvimento da camada limite térmica sobre uma superfície.

2.1.2. Radiação

A radiação, irradiação ou radiação infravermelha é o processo de transmissão de calor por meio da absorção ou emissão de ondas eletromagnéticas. A transferência de calor por radiação não necessita de um meio material para ocorrer, como na condução e

na convecção, podendo ocorrer no vácuo. Na radiação, o mecanismo de troca de calor é instantâneo e direto entre as superfícies afastadas e com diferentes temperaturas.

O verdadeiro comportamento do mecanismo da radiação não está completamente compreendido. Diversas teorias foram propostas para explicar a emissão e a propagação da radiação. A mais aceita é a Teoria do Eletromagnetismo de Maxwell que propõe que a radiação se propague como as ondas eletromagnéticas.

Quando a energia térmica radiante incide sobre um objeto, esse corpo pode absorver, refletir ou transmitir parte da energia térmica radiante. A quantidade de energia absorvida, refletida ou transmitida pelo objeto é função da temperatura, do comprimento de onda eletromagnética e das propriedades da superfície incidente.

O fenômeno da radiação é semelhante ao da propagação da luz e pode ser explicado pela teoria das ondas. Quando as ondas de radiação incidem na superfície de um corpo, uma parte é refletida, uma parte é absorvida pelo corpo e o restante é transmitido pelo meio.

A relação entre o fluxo de calor devido à radiação e a temperatura foi encontrada experimentalmente por Joseph Stephan (1835-1893) em 1879 e explicado teoricamente em 1884 por Ludwig Boltzmann (1844-1906). O fluxo máximo de calor que pode ser emitido por uma superfície devido à radiação é dado pela lei de Stephan-Boltzmann, expressa pela equação (2.2).

$$\dot{Q}_r = \sigma \varepsilon_{res} A \left(\theta + 273{,}15 \right)^4 , \tag{2.2}$$

sendo $\dot{Q}_r$ o fluxo de calor radioativo na superfície, σ a constante de Stephan-Boltzmann $[\sigma = 5{,}67.10^{-8} W(m^2.K^4)]$, ε_{res} a emissividade resultante, A a área da superfície aquecida e θ a temperatura da superfície em ºC.

A emissividade resultante é uma grandeza adimensional, cujo valor está compreendido entre 0 e 1 ($\varepsilon_{res} = 0$ para um espelho e $\varepsilon_{res} = 1$ para um irradiador perfeito, conhecido como corpo negro), que mede a capacidade da superfície emitir calor radiativo em relação a um corpo negro. Para o aço, o projeto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) recomenda o valor 0,7 para a emissividade resultante, considerando-se a troca de calor entre os gases quentes da combustão e a superfície de aço. Enquanto que o Eurocode 1 parte 1.2 (2002) recomenda que para os aços carbonos o coeficiente de emissividade seja igual a 0,7 e 0,4 para os aços inoxidáveis.

A quantidade de energia de radiação que deixa a superfície como calor radiante depende da natureza e da temperatura absoluta da superfície. Em casos de engenharia

que envolve temperaturas próximas da temperatura ambiente, o calor radiante pode ser desprezado.

Se uma superfície irradia energia para o meio, o fluxo de calor por radiação é dado pela equação (2.3).

$$\dot{Q}_r = \phi\sigma\varepsilon_{res}A\left[\left(\theta_g + 273{,}15\right)^4 - \left(\theta_a + 273{,}15\right)^4\right], \tag{2.3}$$

onde ϕ é o fator de forma, θ_g é a temperatura dos gases quentes e θ_a é a temperatura da superfície do elemento estrutural, sendo que ambas temperaturas são fornecidas em ºC.

O fator de forma, ou fator de configuração, é a fração de energia térmica liberada por uma superfície *i* e recebida pela superfície *j*. O fator de forma é um valor compreendido no intervalo [0,1] e é função da geometria das superfícies envolvidas na troca de energia, de suas orientações e o espaçamento entre si. O fator de forma entre duas superfícies elementares pode ser obtido por meio da equação(2.4), (Incropera e Dewitt, 2003),

$$\phi_{ij} = \frac{1}{A_i}\int_{A_i}\int_{A_j}\frac{\cos(\theta_i)\cos(\theta_j)}{\pi R^2}dA_i dA_j\ , \tag{2.4}$$

em que *R* é o comprimento de reta que conecta as duas áreas elementares, θ_i e θ_j são, respectivamente, os ângulos formados entre a reta de comprimento *R* com as normais às superfícies.

Fatores de forma para superfícies simples podem ser encontrados na literatura especializada (*e.g.* Incropera e Dewitt (2003) e Eurocode 1 parte 1.2 (2002)). Segundo o Eurocode 1 parte 1.2 (2002), o fator de forma deve ser adotado igual à unidade, exceto nos casos em que se considere o efeito sombra, o qual não será abordado nessa Tese.

Existem muitas aplicações (*e.g.* modelagem da transferência de calor por meio do método dos elementos finitos) nas quais é conveniente expressar a troca de calor líquida por radiação na forma dada pela equação (2.5),

$$\dot{Q}_r = \dot{h}_r A\left(T_g - T_a\right), \tag{2.5}$$

em que $\dot{h}_r$ é determinado pela equação (2.6),

$$\dot{h}_r = \varepsilon_{res}\sigma\left(T_g + T_a\right)\left(T_g^2 + T_a^2\right), \tag{2.6}$$

onde T_g e T_a são temperaturas absolutas em Kelvin.

A diferença de temperaturas entre duas superfícies produz um fluxo de calor por radiação em adição à convecção natural.

2.1.3. Condução

A condução de calor nos sólidos pode ser atribuída à atividade atômica, como o movimento de translação, rotação e vibração da rede molecular. Quando existe um gradiente de temperatura em um corpo, ocorre uma troca de energia entre a região de alta temperatura e a região de baixa temperatura. Esse processo denomina-se condução de calor.

A teoria da condução de calor foi formulada, de forma empírica, por Joseph Fourier (1768-1830) quando, em 1822, publicou seu livro *Théorie Analytique de la Chaleurin*. A Lei de Fourier estabelece que o fluxo de calor devido à condução é proporcional ao gradiente de temperatura e à área que o fluxo atravessa. Para um fluxo unidimensional e em regime permanente, i.e., em que a temperatura não varia com o tempo, a Lei de Fourier pode ser escrita conforme a equação (2.7),

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{d\theta}{dx}, \tag{2.7}$$

onde Q é o calor, $\dot{Q}_x$ é o fluxo de calor condutivo, λ é a condutividade térmica do material, A é a área por onde o calor flui, θ é a temperatura e $d\theta/dx$ é o gradiente de temperatura na direção do fluxo de calor. O sinal (-) é inserido na equação (2.7) para satisfazer a segunda lei da termodinâmica, ou seja, o calor deve fluir no sentido da temperatura decrescente. A equação (2.7) pode ser reescrita em termos do fluxo de calor por unidade de área ($\dot{h}_x$) conforme a equação (2.8),

$$\dot{h}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = -\lambda \frac{d\theta}{dx}. \tag{2.8}$$

A Lei de Fourier indica que o fluxo de calor é uma grandeza direcional sendo que a direção do fluxo de calor será sempre normal à superfície isotérmica, i.e., à superfície de temperatura constante. No caso tridimensional, a equação (2.9) representa de forma mais geral a Lei de Fourier,

$$\dot{h}_x = -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}, \tag{2.9}$$

sendo $\theta(x, y, z)$ o campo de temperaturas.

A condutividade térmica do material indica a capacidade que o material possui de conduzir calor por condução, sendo uma propriedade de transporte que depende da composição e do arranjo químico, do estado físico, da textura e da temperatura do material.

Considerando um fluxo unidimensional atravessando uma camada de espessura *dx* de um corpo em regime transiente, i.e., em que a temperatura varia com o tempo, ou quando existem geradores ou dissipadores de calor no interior do corpo, e aplicando a Lei de Conservação da Energia, primeira lei da termodinâmica, no elemento infinitesimal unidimensional da Figura 2.3, tem-se a equação (2.10),

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_{ger} = \dot{E} + \dot{Q}_{x+dx}, \tag{2.10}$$

onde $\dot{Q}_x$ é o fluxo de calor condutivo na direção *x* que entra no elemento, $\dot{Q}_{ger}$ é o fluxo de calor gerado (ou dissipado) no interior do elemento, $\dot{E}$ é a variação da energia interna em função do tempo e $\dot{Q}_{x+dx}$ é o fluxo de calor condutivo que sai do elemento.

Os termos da equação (2.10) são determinados por meio das equações (2.11) a (2.14),

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{2.11}$$

$$\dot{Q}_{ger} = \dot{q} A dx, \tag{2.12}$$

$$\dot{E} = \rho c A \frac{\partial \theta}{\partial t} dx, \tag{2.13}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x+dx}, \tag{2.14}$$

onde $\dot{q}$ é a energia gerada no interior do elemento por unidade de volume e tempo, A é a área do elemento por onde o fluxo de calor passa, ρ é a densidade do material, *c* é o calor específico do material e θ é a temperatura no interior do elemento, na abscissa *x*, em função do tempo *t*.

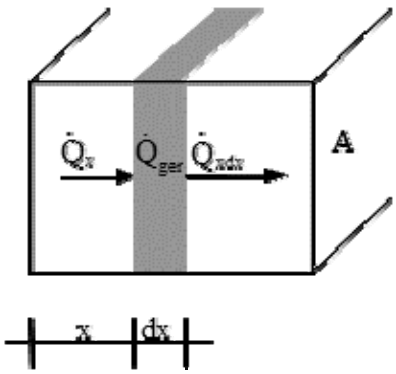

Figura 2.3: Volume elementar para análise de condução de calor unidimensional em regime transiente (Holman, 2009).

O calor específico indica a capacidade do material em perder ou receber calor, definida pela quantidade de calor por unidade de massa capaz de elevar a temperatura do material em 1°C. Quanto maior o calor específico, mais lentamente ocorrerá a troca de calor.

Expandindo o termo $\dot{Q}_{x+dx}$ em série de Taylor e considerando apenas os dois primeiros termos da série, obtém-se equação (2.15),

$$-\lambda A \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_x + \dot{q}Adx = \rho cA\frac{d\theta}{dt}dx - A\left[\lambda \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_x + \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d\theta}{dx}\right)dx\right]. \qquad (2.15)$$

Simplificando, tem-se a equação (2.16) que representa a condução de calor na forma unidimensional,

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d\theta}{dx}\right) + \dot{q} = \rho c\frac{d\theta}{dt}. \qquad (2.16)$$

Considerando-se um elemento infinitesimal tridimensional de dimensões *dx*, *dy* e *dz*, e aplicando a primeira lei da termodinâmica, tem-se a equação (2.17),

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z + \dot{Q}_{ger} = \dot{E} + \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_{z+dz}, \qquad (2.17)$$

sendo $\dot{Q}_x$, $\dot{Q}_y$ e $\dot{Q}_z$ o fluxo de calor condutivo que entra no elemento na direção dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente, $\dot{Q}_{ger}$ é o fluxo de calor gerado (ou dissipado) no interior do elemento, $\dot{E}$ a variação da energia interna em função do tempo e, $\dot{Q}_{x+dx}$, $\dot{Q}_{y+dy}$ e $\dot{Q}_{z+dz}$ o fluxo de calor condutivo que sai do elemento na direção dos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente.

Os termos da equação (2.17) são determinados por meio das equações (2.18) a (2.21),

$$\dot{Q}_x = -\lambda_x \frac{\partial \theta}{\partial x} dydz$$

$$\dot{Q}_y = -\lambda_y \frac{\partial \theta}{\partial y} dxdz \,, \tag{2.18}$$

$$\dot{Q}_z = -\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z} dydx$$

$$\dot{Q}_{ger} = \dot{q} dxdydz \,, \tag{2.19}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial \theta}{\partial x} dydz \Big|_{x+dx}$$

$$\dot{Q}_{y+dy} = -\lambda_y \frac{\partial \theta}{\partial y} dxdz \Big|_{y+dy} \,, \tag{2.20}$$

$$\dot{Q}_{z+dz} = -\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z} dydx \Big|_{z+dz}$$

$$\dot{E} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} dxdydz \,, \tag{2.21}$$

De forma análoga, expandindo os termos $\dot{Q}_{x+dx}$, $\dot{Q}_{y+dy}$ e $\dot{Q}_{z+dz}$ em série de Taylor e substituindo as equações (2.18) a (2.21) em (2.17), tem-se a equação (2.22), que representa o calor condutivo para um sólido tridimensional.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \,, \tag{2.22}$$

onde λ_i é a condutividade térmica do material na direção *i* e $\theta(x, y, z, t)$ é o campo de temperaturas no interior do elemento em função do tempo *t*.

Para sólidos isótropos e homogêneos termicamente, i.e., em que a condutividade térmica é constante em qualquer ponto do material e igual em qualquer direção ($\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$), tem-se a equação diferencial (2.23),

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} \,, \tag{2.23}$$

ou, a equação (2.24), na sua notação compacta,

$$\nabla^2 \theta + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} \,, \tag{2.24}$$

sendo ∇^2 o operador Laplaciano de segunda ordem e $\kappa = \lambda / (\rho c)$ a difusividade térmica do material.

A difusividade térmica do material indica a velocidade de propagação do calor no interior do corpo. Um valor baixo da capacidade térmica (ρc) significa que menor

quantidade de energia em trânsito por meio do material é absorvida e utilizada para elevar a temperatura do material, assim, mais energia encontra-se disponível para ser transferida.

A equação (2.24) possui algumas variantes de acordo com o sistema a ser analisado Para sistemas em que não há geração (ou dissipação) interna de calor ($\dot{q}=0$), a equação (2.24) é conhecida como equação de difusão (2.25). Em regime permanente ($\frac{\partial\theta}{\partial t}=0$), tem-se a equação de Poisson (2.26) e em regime permanente e sem geração de energia interna, tem-se a equação de Lapace (2.27),

$$\nabla^2\theta=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\theta}{\partial t}, \tag{2.25}$$

$$\nabla^2\theta+\frac{\dot{q}}{\lambda}=0, \tag{2.26}$$

$$\nabla^2\theta=0, \tag{2.27}$$

Em geral, os materiais submetidos a temperaturas elevadas passam por transformações físico-químicas alterando suas propriedades térmicas em função da temperatura.

O campo de temperaturas em um sólido, que obtido a partir da solução da equação (2.24) deve satisfazer as condições de contorno do problema, que podem ser (i) temperatura ou fluxo de calor prescrito em uma parte do contorno e (ii) transferência de calor por convecção ou radiação entre o meio ambiente e o sólido. Além disso, se a situação muda com o tempo, a solução também depende das condições existentes no sistema no instante inicial. Sendo a equação de condução de calor de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser especificadas para cada coordenada necessária para descrever o sistema. Como a equação é de primeira ordem em relação ao tempo, somente uma condição inicial precisa ser especificada.

2.2. Incêndio

De acordo com a ABNT NBR 13860:1997, o incêndio é o fogo sem controle. A norma internacional ISO 8421-1 define o incêndio como sendo a combustão rápida disseminando-se de forma descontrolada no tempo e no espaço. Deste modo fica claro que o incêndio não é medido pelo tamanho do fogo. No Brasil, adota-se o termo princípio de incêndio quando o dano causado pelo fogo é pequeno.

A combustão é uma reação exotérmica (i.e. libera calor) entre o oxigênio do ar (comburente) e os materiais combustíveis (substâncias sólidas, líquidas ou gasosas). A fonte de calor necessária para o início do processo de combustão é fornecida por meio do calor proveniente das chamas ou dos elementos superaquecidos. Como a combustão é um processo exotérmico, o calor gerado realimenta a reação tornando o processo contínuo até que o comburente se acabe.

No início dos anos 1700, a combustão era explicada por meio da Teoria do Flogístico desenvolvida pelos alemães Johann Joachim Becher (1635-1682) e Georg Ernst Stahl (1660-1734). Essencialmente a teoria admitia que os materiais combustíveis eram ricos em flogístico[1]. Durante a combustão, uma substância invisível, insípida e inodora, chamada de flogístico, era liberada. Após a combustão, o material não podia mais se queimar, pois o que sobrava não continha mais o flogístico. A fundição dos metais também era condizente com essa teoria, pois a oxidação envolvia a transferência de flogístico.

A compreensão do fenômeno da combustão deve-se à Lavoisier (1743-1794), onde foi demonstrado que nenhum material queimava sem a presença de oxigênio e o ganho de peso quando o metal se oxida, num recipiente fechado, é equivalente à perda de peso do ar preso no recipiente. Assim, abandonou-se a Teoria do Flogístico e concluiu-se que a combustão é apenas uma reação com o oxigênio.

Ainda não há um consenso mundial para a definição do fogo. No Brasil, a ABNT 13860:1997 define o fogo como sendo o processo de combustão caracterizado pela emissão de luz e calor. O órgão nacional de proteção ao fogo dos Estados Unidos (NFPA, 2003) define o fogo como a oxidação rápida auto-sustentada acompanhada de evolução variada da intensidade de luz e calor. Por meio da norma internacional ISO 8421-1, o fogo é o processo de combustão caracterizado pela emissão de calor acompanhado de fumaça, chama ou ambos.

Inicialmente, foi proposta a teoria do Triângulo do Fogo, a qual explica que para que o fogo se mantenha devem coexistir o combustível, o comburente e a fonte de calor.

Com a descoberta dos agentes extintores, foi necessário mudar a teoria, a qual é atualmente conhecida pela designação Tetraedro do Fogo, onde o quarto vértice é a reação em cadeia que se processa da seguinte forma: após o início da combustão, o calor gerado pelas chamas atinge o combustível que é decomposto em partículas menores,

[1] Do grego *phlgiston* que significa queimar

que se combinam com o comburente e se queimam, irradiando mais calor para o combustível. Formam um ciclo constante o qual é denominado por reação em cadeia. O processo só acaba quando um dos integrantes do triângulo do fogo se extingue.

Quanto a outros aspectos do projeto de segurança contra incêndio, é necessário conhecer a toxidade das fumaças produzidas pelos elementos combustíveis, a taxa de liberação de calor e o índice de propagação das chamas.

A fumaça é o principal perigo para as pessoas durante o desenvolvimento do incêndio. Ela se expande de forma rápida devido à sua leveza, dificulta a visibilidade do ambiente e provoca irritação do sistema respiratório. O interesse na toxicidade da combustão originou-se quando estudos revelaram que a causa primária das mortes decorrentes de incêndio é a inalação de gases aquecidos, tóxicos e com deficiência de oxigênio.

A propagação das chamas é uma das propriedades mais regulamentadas e mais testadas no que se refere ao desempenho ao fogo de um material. A propagação da chama é uma propriedade primária por meio da qual os órgãos reguladores tentam eliminar os materiais perigosos e melhorar a segurança à vida humana em prédios.

O comportamento dos materiais diante do fogo depende das propriedades térmicas e mecânicas dos materiais do elemento estrutural submetido a temperaturas altas, sendo, portanto, um tema extremamente amplo e pode ser abordado em diferentes aspectos. O comportamento dos materiais é, geralmente, função da magnitude do aquecimento e do tempo total de exposição ao fogo. Todavia, em muitos casos, o resultado é produto da combinação desses parâmetros e outras variáveis do problema.

Os materiais combustíveis quando submetidos a temperaturas elevadas, se existirem as condições necessárias de oxigênio, serão queimados, total ou parcialmente, produzindo fumaça ou gases tóxicos e calor. Quando os materiais não combustíveis são submetidos a um fluxo externo de calor, a sua temperatura aumenta. Esse aumento gera uma série de mudanças no material. Algumas dessas mudanças são reversíveis quando o material é resfriado, outras possuem uma característica permanente.

A temperaturas elevadas, o aço apresenta uma redução considerável no módulo de elasticidade e na resistência ao escoamento, o que pode levar à perda de estabilidade estrutural local ou global, conforme mostra a Figura 2.4. Se certo valor de temperatura for ultrapassado, podem ocorrer deformações permanentes na estrutura.

Figura 2.4: Instabilidade localizada de um pilar após um incêndio (Lamont, 2001)

2.3. Representação do Incêndio

A intensidade do incêndio é regida pelo equilíbrio energético e de massa ocorrido em uma região da edificação construída de forma a evitar a propagação do incêndio para fora de seus limites. Essa região, denominada de compartimento, pode ser toda a edificação ou apenas uma parte dela, compreendendo um ou mais cômodos, espaços ou pavimentos. A energia liberada depende da quantidade e do tipo do combustível presente, das condições de ventilação do ambiente e dos elementos de vedação. A representação real do incêndio em edifícios é bastante complexa devido à grande variabilidade das variáveis envolvidas. Desse modo, a representação dos cenários do incêndio utilizados na prática é simplificada.

De um modo geral, o incêndio compartimentado pode ser representado por três fases distintas, conforme pode ser visto na Figura 2.5: (i) ignição, (ii) aquecimento e (iii) resfriamento.

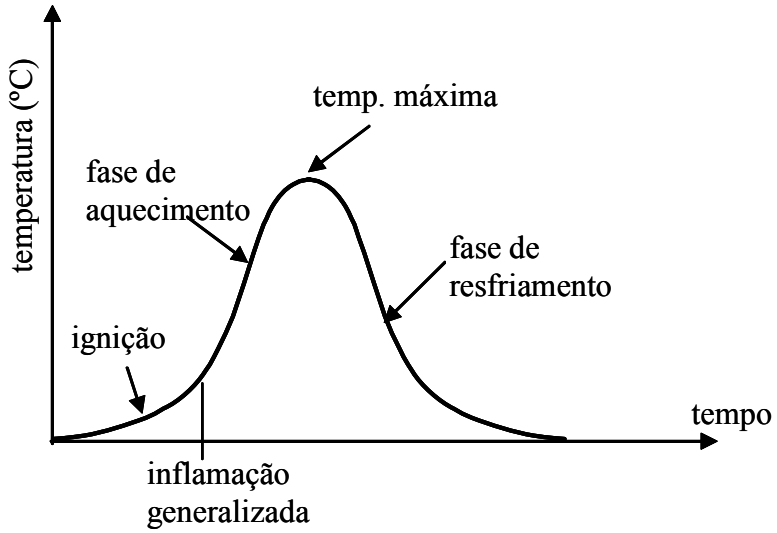

Figura 2.5: Fases de um incêndio natural

A fase inicial ou de ignição (conhecida também como *pré-flashover*) é o período em que as temperaturas permanecem baixas e o incêndio espalha-se lentamente, não tendo nenhuma influência no comportamento estrutural dos edifícios. Porém, é a fase mais crítica do ponto de vista do salvamento dos ocupantes da edificação, pois são liberados os gases tóxicos que provocam a morte por asfixia. É nesta fase que os sistemas de proteção ativa (*e.g.* alarmes e chuveiros automáticos) podem ser eficientes para evitar a inflamação generalizada (*flashover*).

Na fase de aquecimento, o fogo se espalha por convecção, radiação e condução, até que ocorre a inflamação generalizada dos gases e o incêndio se propaga por todo o compartimento. Esse fenômeno, conhecido como *flashover*, ocorre quando a temperatura abaixo do teto situa-se entre 450 e 600ºC (Seito *et al*, 2008). A partir do instante da inflamação generalizada a temperatura no interior do compartimento sobe drasticamente. Em seguida, ocorre a queima de todo o material combustível e a temperatura se mantém praticamente constante. A taxa de liberação de calor é, geralmente, governada pela ventilação disponível no compartimento.

Com a falta de combustível ou de oxigênio, inicia-se a fase de resfriamento com uma diminuição progressiva das temperaturas e a taxa de combustão volta a ser controlada pelo combustível. Essa fase pode ser antecipada por meio da intervenção do corpo de bombeiros ou por outros meios de proteção ativa.

O oxigênio disponível tem uma grande influência durante o desenvolvimento do incêndio, podendo ocorrer duas situações (Real, 2003):

(i) Incêndio controlado pela carga de incêndio: quando há oxigênio suficiente e a taxa de combustão depende somente das características e da quantidade do material combustível;

(ii) Incêndio controlado pela ventilação: quando as aberturas de ventilação do compartimento são pequenas quando comparadas com as dimensões da área do compartimento, sendo a taxa de combustão condicionada à quantidade de oxigênio disponível.

A severidade do incêndio em um edifício é influenciada por vários fatores, tais como, o tipo de combustível, densidade e distribuição do combustível, área e geometria do compartimento, condições de ventilação e as propriedades térmicas das paredes do compartimento.

Segundo o Eurocode 1 parte 1.2 (2002) a relação temperatura dos gases quentes versus tempo pode ser obtida por meio de uma curva padronizada de elevação de temperatura, denominada incêndio-padrão, métodos analíticos simplificados, modelos de zona ou pela modelagem computacional utilizando os princípios da fluidodinâmica computacional (CFD).

Esses modelos são descritos sucintamente nos itens seguintes.

2.3.1. Incêndio-Padrão

Tendo em vista que a curva temperatura-tempo do incêndio possui muita variabilidade dos parâmetros envolvidos, convencionou-se adotar um modelo padronizado para a análise experimental de estruturas, de materiais de revestimento contra fogo, de portas corta fogo, etc., em fornos de institutos de pesquisas. Esse modelo é conhecido como modelo do incêndio-padrão.

A principal característica dos modelos de incêndio-padrão é que as curvas só apresentam o ramo ascendente, ou seja, a temperatura dos gases é sempre crescente com o tempo e independente das características do ambiente e da carga de incêndio. A utilização dessas curvas para a representação dos incêndios reais tem pouco significado físico. No entanto, a norma brasileira ABNT NBR 14432:2000 e a maioria das normas estrangeiras permitem a utilização de tempos padronizados associados à curva de incêndio-padrão com a finalidade de fornecer parâmetros de projeto. As curvas padronizadas mais utilizadas são a ISO-834 (ISO, 2002), ASTM E119 (2005) e a curva H para materiais à base de hidrocarbonetos (Eurocode 1 parte 1.2, 2002).

A *International Organization for Standardization*, por meio da norma ISO-834, recomenda a curva temperatura-tempo fornecida pela equação (2.28). A utilização dessa curva é recomendada pelo Eurocode 1 parte 1.2 (2002) e pela ABNT NBR 14432:2000,

$$\theta_g = 20 + 345\log\left(8t + 1\right), \tag{2.28}$$

onde θ_g é a temperatura dos gases em graus Celsius e t é o tempo em minutos.

A ASTM, por meio da norma E119 (2005), recomenda o uso da curva temperatura-tempo fornecida na Tabela 2.1. Segundo Silva (2001), esta curva foi adotada em 1918 tendo por fundamento os ensaios de pilares realizados pelo *Underwrites Laboratory* de Chicago.

Para ambientes incendiados com materiais combustíveis formados por hidrocarbonetos, o Eurocode 1 parte 1.2 (2002) sugere a equação (2.29),

$$\theta_g = 20 + 1080\left(1 - 0,325e^{-0,167t} - 0,675e^{-2,5t}\right). \tag{2.29}$$

Essas três curvas estão ilustradas na Figura 2.6.

Tabela 2.1: Curva temperatura-tempo conforme ASTM E119 (2005)

Tempo (min)	Temperatura (ºC)	Tempo (min)	Temperatura (ºC)
0	20	55	916
5	538	60	927
10	704	65	937
15	760	70	946
20	795	75	955
25	821	80	963
30	843	85	971
35	862	90	978
40	878	120	1010
45	892	240	1093
50	905	480	1260

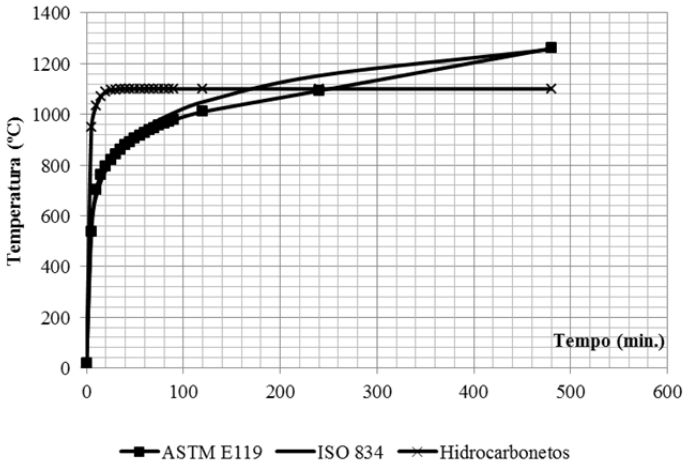

Figura 2.6: Curvas de incêndio-padrão

2.3.2. Incêndio Natural

Outra forma de representar a ação do incêndio é por meio do modelo de incêndio natural compartimentado onde são consideradas as principais variáveis que influenciam no aumento da temperatura dos gases. Diferentemente do modelo do incêndio-padrão, o modelo do incêndio natural permite uma modelagem simplificada dos ramos ascendentes e descendentes das curvas temperatura dos gases quentes versus tempo. Para uso desses modelos é necessário conhecer as características dos materiais que compõem as vedações do compartimento (densidade, calor específico e condutividade térmica), a carga de incêndio no compartimento e as áreas de ventilação do ambiente em chamas.

Os primeiros ensaios do ramo ascendente das curvas temperatura-tempo de um incêndio natural compartimentado foram realizados em 1958, em trabalhos diferentes, pelo japonês Kunio Kawgoe, do *Building Research Institute*, e pelo sueco K. Odeen, do *Royal Institute of Technology*. Nesses trabalhos os autores consideraram o equilíbrio térmico entre o calor gerado durante a combustão e o calor dissipado pelas aberturas e absorvido pela vedação do compartimento em chamas. No final da década de 1960, os suecos Magnusson e Thelandersson apresentaram trabalhos que incluíram o ramo descendente da curva temperatura-tempo.

A norma sueca SBN 1967 foi a primeira norma estrangeira que permitiu a utilização do modelo de incêndio natural na determinação do tempo requerido ao fogo, (Silva, 1999). As curvas temperatura-tempo apresentadas nessa norma eram semelhantes às curvas de incêndio-padrão, porém com a inclusão do grau de ventilação como parâmetro.

O trabalho desenvolvido por Petterson *et al* (1976) foi incorporado na revisão da norma sueca realizada na década de 1970. A norma sueca SBN 1975 apresenta tabelas e diagramas que fornecem uma relação temperatura-tempo em função da carga de incêndio e do grau de ventilação. As principais hipóteses admitidas por Petterson *et al* (1976) são: (i) o incêndio é restrito a uma área compartimentada; (ii) a distribuição de temperaturas dos gases é uniforme em todo o volume do compartimento; (iii) a fase de aquecimento do incêndio é de ventilação controlada; (iv) o material combustível é formado por madeira cujo potencial calorífico é igual a 18,8 MJ/kg e (v) o material de vedação é composto de concreto e tijolo, tal que $\sqrt{\rho c \lambda} = 1160 J / m^2 s^{1/2} {}^{o}C$, onde ρ , c e λ são, respectivamente, a densidade, o calor específico e a condutividade térmica. O produto $\rho c \lambda$ é conhecido como inércia térmica. O método foi aferido a dezenas de resultados obtidos em ensaios de incêndios em pequenos compartimentos.

Com base no trabalho de Kawagoe (1967), Lie (1974) desenvolveu expressões matemáticas para as curvas temperaturas-tempo em função do grau de ventilação. Um pouco mais tarde, Babrauskas e Williamson (1978) desenvolveram curvas temperatura-tempo puramente teóricas sem base experimental.

A partir das hipóteses de Petterson *et al* (1976), Wickstrom (1985) propôs uma expressão única, equação (2.30), para o ramo ascendente da curva em função do grau de ventilação e das características dos materiais de vedação, a qual foi incorporada ao Eurocode 1 parte 1.2 (2002). O modelo do incêndio natural é válido para compartimentos com área de piso superior a 500 m², com pé direito máximo de 4 metros e sem abertura no telhado,

$$\theta_g = 20 + 1325\left(1 - 0,324e^{-0,2t^*} - 0,204e^{-1,7t^*} - 0,472e^{-19t^*}\right), \qquad (2.30)$$

onde t^* é um tempo fictício determinado pela equação (2.31),

$$t^* = t\Gamma, \qquad (2.31)$$

sendo θ_g a temperatura dos gases no tempo *t*;

t o tempo, em horas, decorrido desde a ignição do fogo;

$\Gamma = \dfrac{(v/b)^2}{(0,04/1160)^2}$;

$b = \sqrt{\rho c \lambda}$ sendo $100 \leq b \leq 2200$ e as constantes térmicas do material ρ , c e λ devem ser tomadas à temperatura ambiente;

v é o grau de ventilação dado por $v = A_v\sqrt{h} / A_t$ sendo $0,02 \le v \le 0,20$;

A_v a área total das aberturas verticais em todas as paredes (portas e janelas);

h a altura das aberturas verticais;

A_t a área total de fechamento (paredes, piso e teto, incluindo as aberturas).

Deve-se observar que quando $\Gamma = 1$, a curva de aquecimento do modelo de incêndio natural se aproxima muito com a curva-padrão ISO-834 (ABNT NBR 5428:2001), conforme mostra a Figura 2.7.

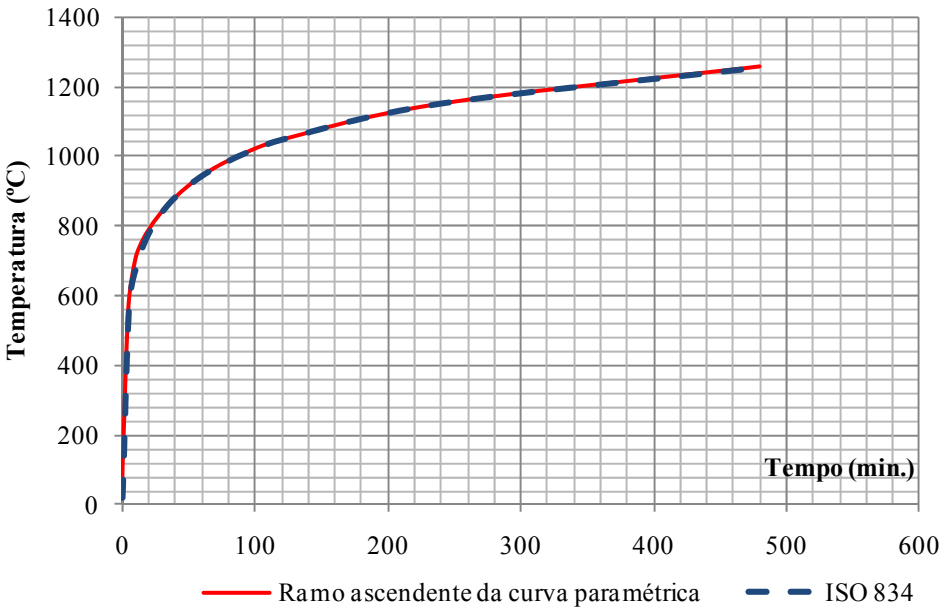

Figura 2.7: Comparação da curva ISO-834 com o ramo ascendente da curva paramétrica quando $\Gamma = 1$.

A temperatura máxima dos gases na fase de aquecimento ocorre para o tempo $t^*_{\max} = t_{\max}\Gamma$, onde $t_{\max}$ é dado pelo maior valor entre as expressões fornecidas pela equação (2.32),

$$t_{max} = \begin{cases} 0,2.10^{-3} q_{t,d} / v \\ t_{\lim} \end{cases}, \qquad (2.32)$$

em que $q_{t,d}$ é o valor de cálculo da carga de incêndio específica relativa à superfície de área A_t de fechamento (paredes, piso e teto) dada pela equação (2.33),

$$q_{t,d} = q_{fi,d} \frac{A_f}{A_t} \quad \text{tal que} \quad 50MJ/m^2 \le q_{t,d} \le 1000MJ/m^2, \qquad (2.33)$$

onde $q_{fi,d}$ é o valor de cálculo da carga de incêndio específica relativa à superfície de área A_f de piso.

O tempo limite $t_{\lim}$ depende da taxa de combustão de acordo com o material combustível e do grau de ventilação do ambiente compartimentado. Os tempos limites para cada tipo de edificação podem ser consultados no Eurocode 1 parte 1.2 (2002).

Observa-se que quando $t_{\max} = t_{\lim}$ o incêndio é controlado pela carga de incêndio, caso contrário o incêndio é controlado pela ventilação.

De acordo com as especificações do Eurocode 1 parte 1.2 (2002), quando $t_{\max} = t_{\lim}$, a equação (2.31) deve ser substituída pela equação (2.34),

$$t^* = t\Gamma_{\lim}, \tag{2.34}$$

com,

$$\Gamma_{\lim} = \frac{\left(v_{\lim}/b\right)^2}{\left(0,04/1160\right)^2}, \tag{2.35}$$

$$v_{\lim} = 0,1.10^{-3} q_{t,d} \big/ t_{\lim}. \tag{2.36}$$

Se *v>0,04*, $q_{t,d} < 75$ e *b<1160*, $\Gamma_{\lim}$ deve ser multiplicado por *k* dado pela equação (2.37),

$$k = 1 + \left(\frac{v - 0,04}{0,04}\right)\left(\frac{q_{t,d} - 75}{75}\right)\left(\frac{1160 - b}{1160}\right). \tag{2.37}$$

As equações (2.38) descrevem a fase de resfriamento das curvas naturais,

$$\begin{aligned} \theta_g &= \theta_{\max} - 625\left(t^* - t^*_{\max}.x\right) && \text{se } t^*_{\max} \le 0,5 \\ \theta_g &= \theta_{\max} - 250\left(3 - t^*_{\max}.x\right)\left(t^* - t^*_{\max}.x\right) && \text{se } 0,5 < t^*_{\max} < 2, \\ \theta_g &= \theta_{\max} - 250\left(t^* - t^*_{\max}.x\right) && \text{se } t^*_{\max} \ge 2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde t^* é dado pela equação (2.31) e $t^*_{\max}$ é dado pelas equações (2.39) e (2.40),

$$t^*_{\max} = \frac{0,2.10^{-3} q_{t,d}}{v}\Gamma, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 && \text{se } t_{\max} > t_{\lim} \\ x &= \frac{t_{\lim}\Gamma}{t^*_{\max}} && \text{se } t_{\max} = t_{\lim} \end{aligned}. \tag{2.40}$$

A título de exemplo, a Figura 2.8 mostra duas curvas de incêndio natural: uma para o incêndio controlado pela ventilação e outra para o incêndio controlado pelo combustível. As curvas foram obtidas para um compartimento retangular de dimensões

de 3,0 m por 6,0 m e 2,5 m de altura. A carga de incêndio utilizada foi igual a 750 MJ/m². Observa-se que quando o incêndio é controlado pelo combustível, a temperatura máxima e a duração do incêndio são menores.

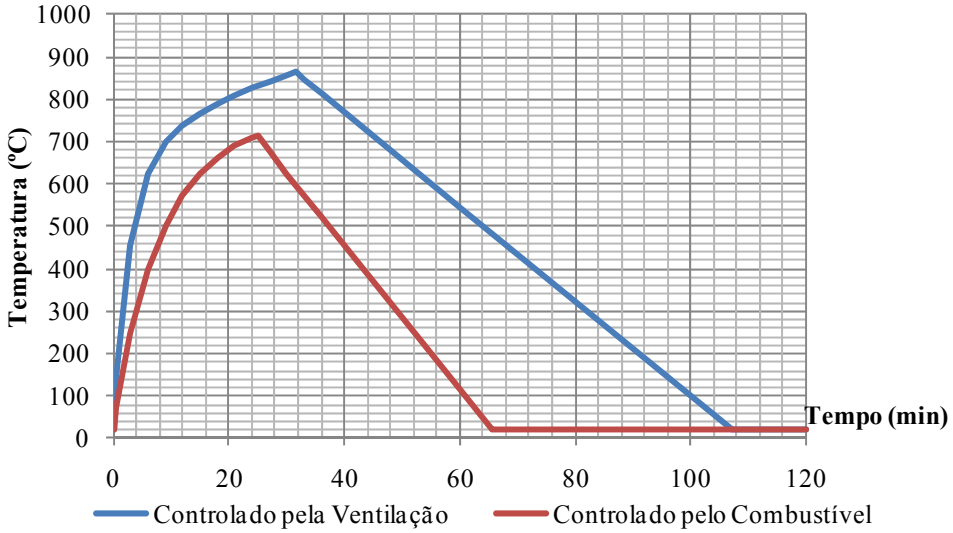

Figura 2.8: Curva temperatura tempo conforme modelo do incêndio natural.

Com base em resultados experimentais e analíticos, Feasey e Buchanan (2002) propuseram uma modificação no cálculo do tempo fictício apresentado no Eurocode 1 parte 1.2 (2002). Segundo eles o multiplicador que fornece o tempo fictício passaria a ser calculado por meio da equação (2.41),

$$\Gamma = \sqrt{\frac{(v/0,04)}{(b/1900)}} \,. \tag{2.41}$$

Outras curvas naturais temperaturas-tempo foram desenvolvidas nos últimos anos, dentre as quais podem ser citadas as contidas nos trabalhos de Ma e Mäkeläinen (2000) e Banett (2002):

(i) Ma e Mäkeläinen (2000) desenvolveram curvas paramétricas para incêndios em compartimentos pequenos e médios, em que a expressão da curva paramétrica é dada pela equação (2.42),

$$\frac{\theta_g - 20}{\theta_{\max} - 20} = \left[\frac{t}{t_m} \exp\left(1 - \frac{t}{t_m} \right) \right]^{\delta} , \tag{2.42}$$

onde t é o tempo em minutos, t_m o tempo correspondente à temperatura máxima do gás ($\theta_{\max}$) e δ é uma constante referente ao tipo da curva. O valor de δ

correspondente à fase de resfriamento é aproximadamente duas vezes o valor correspondente à fase de aquecimento. A máxima temperatura do gás é dada pela equação (2.43),

$$\theta_{\max} = 1240 - \frac{11}{v}. \tag{2.43}$$

(ii) Barnett (2002) desenvolveu uma expressão geral para a modelagem de curvas de incêndio denominadas de curvas BFD. A expressão proposta foi ajustada a partir de 142 ensaios obtidos da literatura, sendo que 87% dos dados se ajustam muito bem. Os combustíveis utilizados nos ensaios foram madeiras, petróleo, querosene, poliuretano, automóveis, cadeiras e mobílias. A massa total de combustível variou de 3 a 5100 kg e as temperaturas máximas de incêndio variaram entre 500 e 1200ºC. As curvas BFD utilizam apenas uma expressão para representar tanto a fase de aquecimento quanto a fase de resfriamento. A expressão das curvas BFD é dada pela equação (2.44),

$$\theta_g = 20 + \theta_m e^{-z}, \tag{2.44}$$

onde θ_m é a temperatura máxima dos gases (ºC) e,

$$z = \frac{\left(\ln t - \ln t_m\right)^2}{s_c}, \tag{2.45}$$

em que s_c é o fator de forma da curva, t é o tempo decorrido desde a ignição do fogo e t_m é o tempo em que θ_m ocorre em minutos.

Anos mais tarde, Barnett (2007) calibrou os coeficientes da sua expressão geral para as curvas de incêndio mais citadas na literatura, conforme mostra a Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Coeficientes da curva BFD (Barnett, 2007)

Curva	θ_m (ºC)	t_m (min)	s_c
ISO-834	1148	10000	62
ASTM E119	1211	3500	58
Hidrocarbonetos	1065	80	60
Elementos Exteriores	660	50	150
Curva Paramétrica	810	20	1,5

Em situações específicas, podem-se usar métodos computacionais avançados (item 2.3.5 deste texto) para a determinação da curva temperatura-tempo, envolvendo mais parâmetros intervenientes no processo.

2.3.3. Incêndios Localizados

O incêndio é classificado de localizado quando não há possibilidade de ocorrer o *flashover*. Segundo Wang (2002), essa situação ocorre em edifícios de grandes dimensões e vazios, tais como estacionamentos, estádios e aeroportos. Nesses edifícios somente alguns elementos são sujeitos a aquecimentos.

O Eurocode 1 parte 1.2 (2002) fornece, de maneira simplificada, o fluxo de calor na superfície dos elementos submetidos a incêndios localizados.

2.3.4. Modelos de Zona

Os modelos de zona consideram o compartimento dividido em zonas, onde para cada zona a temperatura é admitida uniforme. Geralmente, na fase de *pré-flashover* adotam-se duas zonas, as quais são conectadas pela pluma. Os modelos de uma zona são mais simples e são empregados na fase de *pós-flashover*.

Esses modelos são fundamentados nas leis de conservação de massa, momento e energia, as quais são aplicadas em cada zona em um processo dinâmico que calcula o tamanho, a temperatura e a concentração de espécies em cada zona com o progresso do incêndio. Durante o processo, a pluma de fogo e o movimento da fumaça e dos produtos tóxicos são levados em consideração.

Segundo Buchanan (2002), os modelos de zona fornecem a altura da camada, a temperatura e a concentração dos gases quentes, a temperatura das paredes e dos pisos e o fluxo de calor no piso. Não é possível obter a evolução da temperatura em objetos ou superfícies por meio dos modelos de zona.

Os programas computacionais COMPF2 desenvolvido no *NIST – National Institute of Standards and Technology*, EUA, e SFIRE-4 da Universidade de Lund, Suécia, se destacam na modelagem de uma zona. Nos modelos de duas zonas destacam-se os programas computacionais CCFM.VENTS e CFAST desenvolvido pelo *NIST* e o programa OZONE da Universidade de Liége, Bélgica.

Para uma análise mais realista deve-se utilizar a modelagem com base na fluidodinâmica computacional.

2.3.5. Fluidodinâmica Computacional

A fluidodinâmica computacional (CFD) tem sido utilizada na modelagem do movimento de fumaça e, recentemente, na modelagem de incêndio. Essa técnica permite a modelagem de incêndios localizados e da fase *pré-flashover* em compartimentos de geometrias complexas, considerando o movimento de fumaça entre os compartimentos.

Os modelos de CFD envolvem a associação dos fenômenos de escoamento de fluidos e transferência de calor. Essa associação é realizada por meio da resolução das equações fundamentais da mecânica dos fluidos e da termodinâmica.

Apesar de os modelos de CFD necessitarem de elevado esforço computacional, os modelos fornecem temperatura, velocidade e concentração das espécies químicas em cada ponto do compartimento modelado.

Para a modelagem de incêndio por meio de CFD destacam-se os programas computacionais SMARTFIRE desenvolvido na Universidade de Greenwich, FDS do *NIST* e o SOFIE da Universidade de Cranfield. Exemplos de uso do SMARTFIRE podem ser vistos em Silva *et al* (2006) e Azevedo (2009).

2.4. Carga de Incêndio Específica

Na definição do modelo de incêndio natural, uma das variáveis de grande importância é a carga de incêndio específica. Entende-se por carga de incêndio tudo aquilo que pode ser caracterizado como combustível, portanto quanto maior a carga de incêndio específica de um compartimento maior a duração do incêndio.

A carga de incêndio em um compartimento é definida como a energia total a ser liberada durante um incêndio. Uma parte dessa energia é utilizada para aquecer o ambiente e outra parte é liberada por meio das aberturas do compartimento.

A carga de incêndio específica é definida pela razão entre a carga de incêndio e a área do pavimento (A_f) do compartimento incendiado, podendo ser também expressa em relação à área total (A_t) do compartimento, incluindo a vedação (paredes, piso e teto) e as aberturas. Essa última definição é mais adequada, pois o fluxo de calor transfere-se por meio de todos os elementos de vedação e das aberturas do compartimento.

A carga de incêndio específica característica (q_{fi}) pode ser expressa por meio da equação (2.46), Eurocode 1 parte 1.2 (2002),

$$q_{fi} = \frac{\sum_i M_i H_i m_i \psi_i}{A_t}, \tag{2.46}$$

onde M_i é a massa total de cada componente *i* do material combustível cujo valor tenha uma probabilidade inferior a 20% de ser excedido durante a vida útil da edificação; H_i é o potencial calorífico de cada componente do material combustível definido na ABNT NBR 14432:2000; m_i é um coeficiente adimensional que representa a eficiência da combustão de cada componente do material combustível onde *m=1* representa a combustão completa e *m=0* representa a ausência de combustão durante o processo do incêndio; ψ_i é um coeficiente adimensional que representa o grau de proteção ao fogo, $\psi = 0$ para materiais com proteção completa durante o incêndio e $\psi = 1$ para materiais sem proteção. O Eurocode 1 parte 1.2 (2002) recomenda utilizar *m=1*. Schleich e Cajot (1997) propõem utilizar *m=0,7* e $\psi = 1$, salvo em estudos mais precisos.

Tendo em vista a dificuldade na determinação da carga de incêndio específica característica, a ABNT NBR 14432:2000 fornece esse parâmetro em função do tipo de ocupação da edificação.

O valor de cálculo da carga de incêndio específica ($q_{fi,d}$) é dado pela equação (2.47),

$$q_{fi,d} = \gamma_n \gamma_s q_{fi}, \tag{2.47}$$

onde γ_n é um coeficiente adimensional que leva em conta a presença de medidas de proteção ativa, que permite reduzir a severidade do incêndio, e γ_s é o coeficiente de segurança que depende do risco de incêndio, ou seja o perigo de início de incêndio e as consequências do colapso da edificação. Esses coeficientes de ponderação podem ser encontrados no texto de revisão da NBR 14323 (2011).

2.5. Ensaios de Corpos de Prova a Temperaturas Elevadas

As propriedades mecânicas, para fins de projeto em situação de incêndio, são determinadas a partir de ensaios normatizados, visto que seus valores são fortemente influenciados pelo procedimento de ensaio para determiná-los. Segundo Wang (2002), os ensaios podem ser de dois tipos: (i) estacionário e (ii) transiente. No ensaio denominado de transiente a estrutura é submetida a carregamentos à temperatura ambiente. Os carregamentos são mantidos constantes e então a estrutura é exposta ao

fogo. O ensaio termina quando um dos critérios de falha é atingido, sendo esse tipo de ensaio o que simula mais apropriadamente as condições de um incêndio. Segundo

Segundo Buchanan (2002), todos os modos de ensaio apresentam alguma dificuldade na realização, visto que os efeitos da fluência influenciam todos os resultados dos testes. Existe também uma dificuldade em ensaios com corpos-de-prova grandes e em regime transiente de temperatura, pois a taxa de aumento de temperatura pode não ser uniforme sobre a seção transversal.

Para vários materiais, a relação tensão-deformação a temperaturas elevadas pode ser obtida diretamente a partir de ensaios em regime estacionário de temperatura ou ser calculada a partir de resultados desses mesmos ensaios em regime transiente.

2.6. Propriedades Térmicas do Aço

Nesse item são apresentadas as propriedades térmicas do aço de acordo com o texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011). Todas as propriedades térmicas são dadas em função da temperatura do aço. A norma permite a utilização de valores simplificados que fornecem bons resultados, para uma análise térmica, quando comparados com resultados mais precisos.

2.6.1. Massa Específica

A massa específica do aço é pouco influenciada pela temperatura e é considerada igual a 7850 kg/m³. Milke (2002) propõe que a massa específica seja igual a 7868 kg/m³.

2.6.2. Calor Específico

O calor específico (c) é definido como sendo a quantidade de calor requerida para aquecer uma unidade de massa do material em um grau Celsius. O calor específico para uma faixa de temperaturas de 20ºC a 1200ºC é fornecido pelas equações (2.48) a (2.51). A variação do calor específico para os aços em função da temperatura está mostrada na Figura 2.9,

$$c = 425 + 0,773\theta_a - 0,0169\theta_a^2 + 2,22.10^{-6}\theta_a^3 \qquad \text{para } 20^\circ\text{C} \le \theta_a < 600^\circ C, \quad (2.48)$$

$$c = 666 + \frac{13002}{738 - \theta_a} \qquad \text{para } 600^\circ\text{C} \le \theta_a < 735^\circ C, \quad (2.49)$$

$$c = 545 + \frac{17820}{\theta_a - 731} \qquad \text{para } 735^\circ\text{C} \le \theta_a < 900^\circ C, \quad (2.50)$$

$$c = 650 \qquad \text{para } 900^{\circ}\text{C} \leq \theta_a < 1200^{\circ}C\,, \tag{2.51}$$

onde θ_a é a temperatura do aço em ºC.

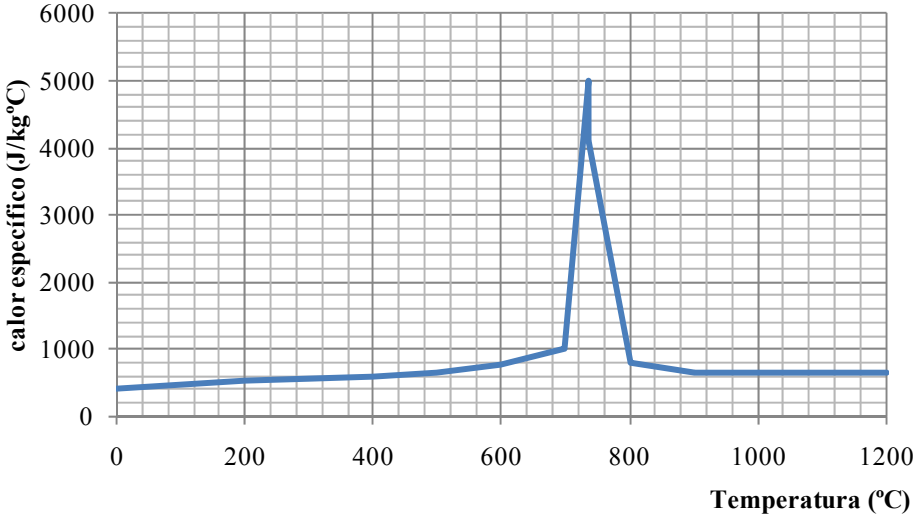

Figura 2.9: Variação do calor especifico em função da temperatura.

Observa-se que o calor específico do aço tem um pico em torno dos *735 ºC*. Isso se deve ao fato da mudança da fase do aço que consome uma grande quantidade de energia.

De uma forma simplificada, o texto de revisão da NBR 14323 (2011) permite considerar o calor específico do aço constante e igual a 600 J/kgºC.

2.6.3. Condutividade Térmica

A condutividade térmica dos aços (λ) representa a taxa de calor transferida pela diferença de temperatura por unidade de comprimento do material. A condutividade térmica dos aços pode ser determinada por meio da equação (2.52). A variação da condutividade térmica para os aços em função da temperatura está ilustrada na Figura 2.10.

$$\begin{aligned} \lambda &= 54 - 0{,}0333\theta_a && \text{para } 20^{\circ}\text{C} \leq \theta_a < 800^{\circ}C \\ \lambda &= 27{,}3 && \text{para } 800^{\circ}\text{C} \leq \theta_a < 1200^{\circ}C \end{aligned} \tag{2.52}$$

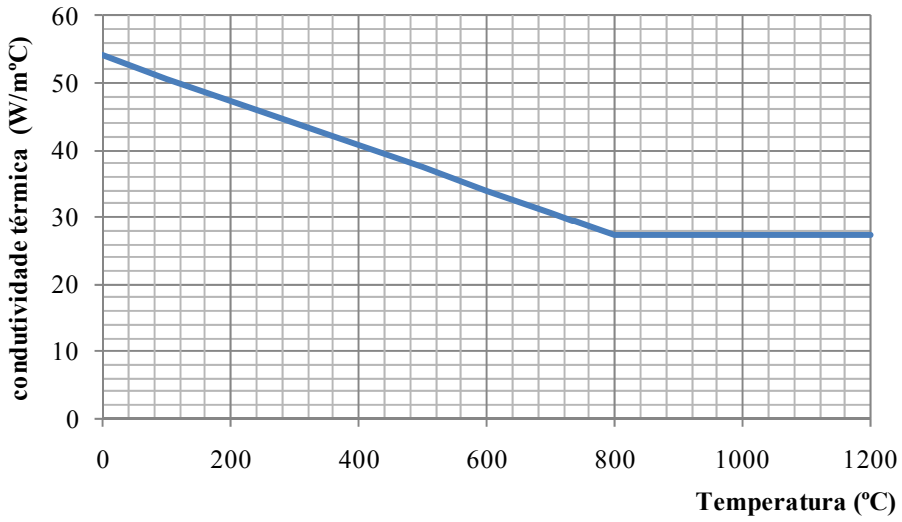

Figura 2.10: Variação da condutividade térmica em função da temperatura.

O texto de revisão da NBR 14323 (2011) ainda permite considerar a condutividade térmica do aço constante e igual a 45 W/mºC.

2.6.4. Alongamento

O texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) permite que os efeitos da restrição à dilatação sejam desprezados quando se emprega o método simplificado com base no incêndio-padrão. Essa simplificação é bastante discutível. Há casos de vigas biapoiadas, não superpostas por lajes, em que a flecha é acentuada ocasionando uma inversão de compressão para tração da reação de apoio horizontal de origem térmica (Silva, 1997). Em casos de vigas de aço superpostas por laje de concreto, mistas ou não, restritas à dilatação axial, se por um lado, a flecha é menor não ocorrendo inversão de sinal da reação de apoio, por outro, o gradiente térmico, que ocorre pela presença da laje, faz com que a reação de apoio de compressão seja aplicada abaixo do centro geométrico da seção transversal da viga gerando um momento fletor contrário ao provocado pelas forças gravitacionais (Underwriters Laboratory, 2011). Nesses casos de viga, a desconsideração da dilatação é favorável à segurança. Considerá-la conduziria a resultados mais econômicos. Em determinados pilares, a desconsideração dos esforços provenientes da restrição à dilatação pode ser prejudicial (Dorr, 2010). Em análises mais rigorosas de estruturas mais complexas, a deformação axial de origem térmica deve ser considerada.

A dilatação térmica dos aços pode ser determinada por meio das equações (2.53) a (2.55). A variação da dilatação térmica para os aços em função da temperatura está apresentada na Figura 2.11,

$$\frac{\Delta l}{l} = 1,2.10^{-5}\theta_a + 0,4.10^{-8}\theta_a^2 - 2,416.10^{-4} \qquad \text{para } 20^{\circ}\text{C} \le \theta_a < 750^{\circ}C \text{ ,} \quad (2.53)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = 1,1.10^{-1} \qquad \text{para } 750^{\circ}\text{C} \le \theta_a < 860^{\circ}C \text{ ,} \quad (2.54)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = 2.10^{-5}\theta_a - 6,2.10^{-3} \qquad \text{para } 860^{\circ}\text{C} \le \theta_a < 1200^{\circ}C \text{ ,} \quad (2.55)$$

onde l é o comprimento da peça de aço a 20ºC, Δl é a expansão térmica provocada pela temperatura e θ_a a temperatura do aço em graus Celsius.

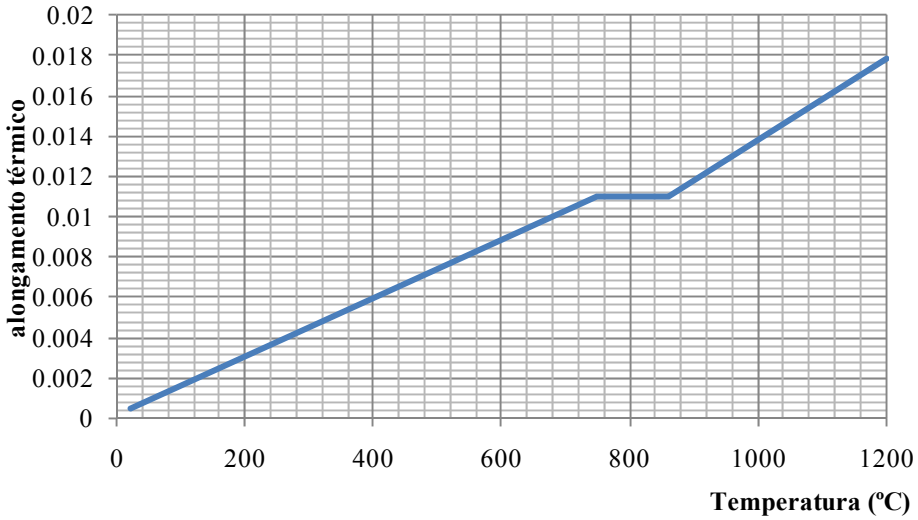

Figura 2.11: Variação da dilatação térmica em função da temperatura.

De uma forma simplificada, o texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) permite a consideração do alongamento térmico por meio da equação (2.56).

$$\frac{\Delta l}{l} = 14.10^{-6}\left(\theta_a - 20\right) \quad (2.56)$$

2.6.5. Convecção

O texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) recomenda que o coeficiente de transferência de calor por convecção entre os gases quentes e as estruturas de aço seja igual a *25W/m²K* independentemente da temperatura. Não há necessidade de um valor mais preciso, pois à medida que o aço aumenta de temperatura, ela se aproxima cada

vez mais da temperatura do gás e, consequentemente, reduz a transferência de calor por convecção.

2.7. Modelagem Numérica

Nos últimos anos, vários pesquisadores têm trabalhado no desenvolvimento de programas de computador para a análise de estruturas em situação de incêndio. Com o aumento exponencial na capacidade dos computadores pessoais e, consequentemente, a popularização do Método dos Elementos Finitos, a aplicação dos métodos avançados de dimensionamento de estruturas em situação de incêndio tem-se tornado uma ferramenta importante na análise dessas estruturas.

O método avançado de análise de estruturas em situação de incêndio é, normalmente, dividido em duas partes: (i) a análise térmica, que considera a transferência de calor entre os elementos estruturais, e, (ii) a análise estrutural, que determina o comportamento mecânico dos elementos aquecidos e suas interações com o restante da estrutura.

A seguir são apresentados alguns programas computacionais comerciais que têm sido utilizados de forma corrente na análise de estruturas em situação de incêndio.

O programa Super TempCalc (STC), desenvolvido pela FSD (*Fire Safety Design*, Suécia), realiza a análise térmica não linear transiente de estruturas bidimensionais por meio do método dos elementos finitos. Por meio do programa Matlab, o STC gera automaticamente a malha de elementos finitos no domínio bidimensional, além de apresentar o campo de temperaturas em função do tempo de exposição ao incêndio. As propriedades térmicas dos elementos podem ser variáveis com a temperatura.

Os resultados das análises térmicas obtidos por meio do STC foram validados contra inúmeros resultados experimentais desde 1985 (Anderberg, 2004). A confiabilidade da análise térmica fornecida pelo STC é mundialmente reconhecida, sendo usado pelo grupo de pesquisadores responsáveis pela elaboração do Eurocode 2 parte 1.2 (2004). Deste modo, o programa STC será utilizado na calibração do programa de análise térmica ATERM, desenvolvido nesta Tese de Doutorado, conforme será visto no capítulo 3.

O programa SAFIR (Franssen *et al*, 2005), desenvolvido na Universidade de Liège, Bélgica, é utilizado para a análise termestrutural via método dos elementos finitos. Deve-se realizar, primeiramente, a análise térmica para cada parte da estrutura e,

com base nos históricos de temperaturas gerados, realizar a análise estrutural. Talamona e Franssen (2005) adicionaram ao programa SAFIR elementos de casca que permitiram a análise de instabilidade local em estruturas em situação de incêndio. Ressalta-se que os módulos de análise térmica e estrutural não estão totalmente integrados.

O programa VULCAN, desenvolvido desde 1985 na Universidade de Sheffield, Reino Unido foi concebido para modelar o comportamento de estruturas de edifícios em situação de incêndio. Segundo Ferreira (2006), a estrutura é modelada com um conjunto de elementos de vigas, pilares, conectores de cisalhamento e lajes. O programa não realiza a análise térmica, sendo que o histórico de temperaturas na estrutura deve ser fornecido ao programa.

No Brasil, alguns programas de análise termestrutural têm sido desenvolvidos nos últimos anos. Landesmann (2003) desenvolveu um programa de pórtico por meio do Método das Rótulas Plásticas, para a análise do comportamento de estruturas planas em situação de incêndio. Caldas (2008) desenvolveu, na Universidade Federal de Minas Gerais, modelos numéricos para análises do comportamento de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio. Os modelos foram desenvolvidos por meio de elementos de vigas tridimensionais e de casca. Para simular as ligações semi-rígidas em situação de incêndio, Caldas (2008) incorporou molas ao elemento de viga. Ribeiro (2009) desenvolveu um programa de computador, com base no Método dos Elementos Finitos, para a análise do comportamento termomecânico de estruturas tridimensionais de aço, concreto e mistas em situação de incêndio.

Recentemente, Rigobello *et al* (2011) aplicaram um elemento finito de pórtico laminado não linear com formulação posicional para análise de pórticos tridimensionais em situação de incêndio. Diferentemente da abordagem convencional do método dos elementos finitos, o qual utiliza o método dos deslocamentos, a formulação posicional tem por base a posição dos nós dos elementos finitos. Além disso, o elemento utiliza a teoria não linear geometricamente exata. Devido às características do elemento, as análises realizadas por Rigobello *et al* (2011) não detectam os fenômenos de instabilidade local e distorcional.

Alguns pesquisadores utilizam programas comerciais para a análise de perfis formados a frio em situação de incêndio. Pode-se destacar o trabalho de Landesmann *et al* (2009), onde, por meio do programa *ANSYS,* verificam a influência das imperfeições geométricas iniciais na resistência última de pilares de aço formado a frio em situação de incêndio. A análise é efetuada por elementos de casca não lineares (geométrica e do

material). Estuda-se o comportamento pós-crítico de pilares de seção *Ue* suscetíveis à instabilidade distorcional. As análises foram efetuadas em regime permanente e transiente onde foram obtidas as forças e temperaturas de colapso. Os resultados obtidos pelas duas estratégias de carregamento foram semelhantes.

Recentemente, Landesmann e Camotim (2011) utilizaram o programa *ANSYS* para a análise do modo distorcional de pilares de aço formado a frio em situação de incêndio. Eles concluíram que a capacidade resistente dos pilares pode ser obtida por meio de uma análise estacionaria, na qual a temperatura é mantida constante e a força é aumentada gradualmente, pois as diferenças em relação à análise transiente são pequenas.

2.8. Determinação da Temperatura Atuante no Elemento Estrutural

Na área de engenharia de estruturas em situação de incêndio sabe-se que a ruína de um elemento estrutural é determinada pelo campo de temperaturas ao qual está submetido.

Conforme visto no item 2.3, o incêndio real ou natural atinge uma temperatura máxima. Se a temperatura for uniformemente distribuída no elemento estrutural, é possível, a partir das expressões de transferência de calor, determinar a temperatura no elemento estrutural. O dimensionamento da estrutura para essa temperatura assegura uma resistência ao fogo durante a vida útil da estrutura.

Na prática utiliza-se a curva de incêndio-padrão no projeto de estruturas em situação de incêndio, a qual não apresenta uma temperatura máxima (ver item 2.3.1), surgindo uma dificuldade operacional na determinação do campo de temperatura atuante no elemento estrutural. Para resolver esse problema utiliza-se o conceito de tempo requerido de resistência ao fogo (TRRF). O TRRF é um tempo fictício e estipulado de acordo com o tipo de ocupação e altura da edificação (ABNT NBR 14432:2000), que associado à curva de incêndio-padrão, que também é fictícia, fornece a temperatura máxima dos gases quentes e permite determinar, por meio das expressões de transferência de calor ou por modelagem numérica (*e.g.* com o auxílio do método dos elementos finitos), o campo de temperaturas da estrutura e, assim, dimensioná-la, conforme mostra a Figura 2.12.

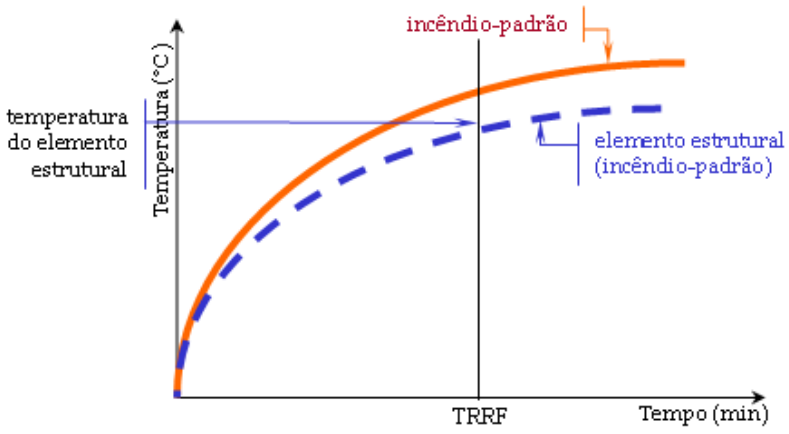

Figura 2.12: Curva temperatura-tempo do incêndio e da estrutura conforme o incêndio-padrão.

2.9. Dimensionamento de Estruturas em Situação de Incêndio

O objetivo principal do projeto de estruturas em situação de incêndio é garantir a capacidade resistente das estruturas, durante um período de tempo preestabelecido, suficiente para que todas as ações de combate ao fogo possam ser tomadas.

O texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) permite que o dimensionamento de estruturas em situação de incêndio seja realizado por (i) ensaios, (ii) métodos analíticos simplificados ou (iii) métodos avançados de análise.

Segundo Real (2003), o primeiro método internacionalmente aceito para o dimensionamento de estruturas em situação de incêndio baseia-se em ensaios normatizados de resistência ao fogo. Nesses ensaios, o elemento é montado em fornos, onde a temperatura varia com o tempo de acordo com a curva de incêndio-padrão (ISO 834).

O dimensionamento consiste em provar que o elemento estrutural tenha uma resistência ao fogo, determinada no ensaio, igual ou superior à resistência requerida pelas normas e instruções técnicas.

Os ensaios normatizados possuem alguns inconvenientes. É difícil reproduzir as condições de aquecimento e de apoio dos elementos, não sendo possível simular com rigor as reais condições de ligação com o resto da estrutura. Consequentemente, pode-se obter uma variação significativa de resistência ao fogo para um mesmo elemento estrutural, quando ensaiados em diferentes laboratórios, com fornos de diferentes características e condições de apoio e ligação também diferentes. Outro inconveniente está relacionado com as dimensões dos fornos, que limitam a dimensão dos elementos a analisar.

O método simplificado de dimensionamento proposto no texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) aplica-se às barras prismáticas de aço constituídas por perfis laminados e soldados não híbridos, às vigas mistas e pilares mistos e às lajes de concreto com forma de aço incorporada. O texto de revisão dessa norma inclui o dimensionamento de perfis formados a frio em situação de incêndio com base em recomendações constantes de Pierin e Silva (2010), o qual será discutido no capítulo 5 dessa Tese.

O método simplificado se aplica a elementos estruturais envolvidos pelos gases quentes, no interior de um compartimento em chamas.

Como a condutividade térmica do aço é alta, o método simplificado adota para a obtenção dos esforços resistentes, dependendo do tipo de solicitação e do estado limite último, consideram-se uma distribuição uniforme de temperatura na seção transversal e ao longo dos elementos estruturais ou uma distribuição não uniforme de temperaturas por meio de procedimentos favoráveis à segurança.

Na determinação das solicitações de cálculo, os efeitos das deformações térmicas resultantes dos gradientes térmicos ao longo da altura da seção transversal precisam ser considerados. Caso se utilize a curva de incêndio-padrão ISO 834, as expansões térmicas podem ser desprezadas.

No caso de vigas sem revestimento contra fogo ou com revestimento tipo contorno, com laje de concreto sobreposta, o gradiente térmico pode ser obtido pela diferença de temperaturas entre a mesa superior e inferior, considerando que essas mesas possuem aquecimentos independentes. Para vigas com revestimento tipo caixa, o perfil pode ser considerado com temperatura uniforme.

Ao se considerar os efeitos das deformações térmicas resultantes dos gradientes térmicos, admite-se, por simplificação, efetuar a análise estrutural tomando o módulo de elasticidade constante e igual ao seu valor à temperatura elevada em todos os elementos afetados pelo incêndio.

Os métodos avançados proporcionam uma análise realística da estrutura e do cenário do incêndio e podem ser usados para elementos estruturais individuais com qualquer tipo de seção transversal, incluindo elementos estruturais mistos, para subconjuntos ou para estruturas completas, internas, externas ou pertencentes à vedação. Eles devem ter por base o comportamento físico fundamental, de modo a levar a uma aproximação confiável do comportamento esperado dos componentes da estrutura em situação de incêndio.

Os métodos avançados podem incluir modelos separados para a determinação do desenvolvimento e da distribuição de temperatura nas peças estruturais (análise térmica) e para a análise do comportamento mecânico da estrutura ou de alguma de suas partes (análise estrutural).

Os métodos avançados podem ser usados em associação com qualquer curva de aquecimento, desde que as propriedades do material sejam conhecidas na faixa de temperatura considerada.

A análise térmica deve ser baseada em princípios reconhecidos e hipóteses da transferência de calor. O modelo adotado deve considerar as ações térmicas relevantes e a variação das propriedades térmicas do material com a temperatura. Os efeitos da exposição térmica não uniforme e da transferência de calor a componentes de edifícios adjacentes devem ser incluídos quando forem relevantes. A favor da segurança, os efeitos de migração de umidade no material de revestimento podem ser desprezados.

A análise estrutural deve ser baseada em princípios reconhecidos e hipóteses da mecânica dos sólidos. Os efeitos das tensões e deformações induzidas termicamente em virtude do aumento de temperatura e das temperaturas diferenciais devem ser considerados. Quando relevantes, devem ser considerados os efeitos combinados de ações mecânicas, imperfeições geométricas e ações térmicas, as variações das propriedades dos materiais em função do aumento da temperatura, os efeitos da não linearidade geométrica, os efeitos da não linearidade do material, incluindo os efeitos do carregamento e descarregamento na rigidez estrutural.

As deformações no estado limite último devem ser limitadas, quando necessário, para assegurar que a compatibilidade seja mantida entre todas as partes da estrutura.

Se necessário, o projeto deve ser fundamentado no estado limite último pelo qual as deformações calculadas da estrutura poderiam causar o colapso devido à perda de apoio adequado de um elemento estrutural.

No próximo capítulo, apresenta-se a formulação do método dos elementos finitos aplicado à análise térmica de estruturas bidimensionais.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À ANÁLISE TÉRMICA

Inicialmente, o método dos elementos finitos foi aplicado a problemas mecânicos da engenharia estrutural. A análise térmica foi a primeira área não estrutural a utilizar o método dos elementos finitos para a modelagem de problemas de engenharia.

A determinação do campo de temperaturas no elemento estrutural é o primeiro passo para a análise de estruturas em situação de incêndio. A distribuição de temperaturas influencia a distribuição de tensões no elemento estrutural.

Neste capítulo apresenta-se a formulação e a implementação computacional de um elemento plano de quatro nós utilizado na análise térmica de estruturas.

O calor propaga-se no aço por condução, cujo fenômeno é regido pela equação de Poisson que, para domínios bidimensionais, é dada pela equação (3.1),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)+\dot{Q}=\rho c\frac{\partial \theta}{\partial t}, \tag{3.1}$$

em que λ_x e λ_y são as condutividades térmica do material nas direções x e y, respectivamente, $\dot{Q}$ é o calor gerado internamente por unidade de volume e de tempo, ρ é a massa específica, c é o calor especifico, θ é a temperatura e t é o tempo.

Para materiais isótropos, tais como o aço e o concreto, a condutividade térmica não varia em função das direções x e y, ou seja:

$$\lambda = \lambda_x = \lambda_y \tag{3.2}$$

Para resolver a equação (3.1) é necessário impor as condições de contorno e as condições iniciais no modelo matemático. As condições gerais de contorno nas quais se encontra uma estrutura, sujeita à equação de Poisson, são as condições de Dirichlet e de Neumann. A condição de Dirichlet, ou temperatura prescrita, supõe conhecida para todo instante a temperatura em uma parte do contorno.

A condição de Neumann supõe que seja conhecido o fluxo de calor, $\dot{q}$, em uma parte do contorno em todo o instante. Matematicamente, essa condição pode ser escrita pela equação (3.3), ou seja, a derivada do campo de temperaturas em relação à normal à superfície no contorno, n,

$$-\lambda\frac{\partial \theta}{\partial n}=\dot{q}. \tag{3.3}$$

Uma superfície com condição adiabática ou isolada termicamente pode ser simulada por meio da imposição de um fluxo nulo ($\dot{q} = 0$).

Os fenômenos de convecção são incluídos no modelo numérico por meio da condição de contorno de Neumann, que pode ser reescrita pela equação (3.4),

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha_c \left(\theta - \theta_\infty \right), \tag{3.4}$$

em que α_c é o coeficiente de convecção e θ_∞ é a temperatura do fluído externo.

Segundo Bathe (1996), a condição de temperatura prescrita em uma parte do contorno pode ser simulada por meio de um coeficiente de convecção bem maior do que o coeficiente de condução do material, dessa maneira a temperatura prescrita no nó será igual à temperatura do fluido adjacente ao nó.

A solução da equação diferencial (3.1) pode ser obtida numericamente por meio do método dos elementos finitos (*MEF*). Para a utilização do *MEF* é necessário escrever a formulação fraca do problema, a qual é obtida por meio da equação (3.5),

$$\int_\Omega w \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \dot{Q} - \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] d\Omega = 0, \tag{3.5}$$

onde w é uma função arbitrária denominada de função peso e Ω é o domínio do problema.

Integrando por partes os dois primeiros termos da equação (3.5), se obtém a equação (3.6),

$$\begin{aligned} &\int_\Omega w \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \int_S \left(w\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} l + w\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} m \right) dS - \\ &-\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned}, \tag{3.6}$$

onde S representa a região de contorno do problema e l e m são os cossenos diretores.

Substituindo a equação (3.6) em (3.5), tem-se a equação (3.7).

$$\begin{aligned} &\int_\Omega w\dot{Q} d\Omega - \int_\Omega w\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega + \int_S \left(w\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} l + w\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} m \right) dS - \\ &-\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \end{aligned}. \tag{3.7}$$

Discretizando o domínio do problema em um número finito de elementos e utilizando-se no Método de Galerkin o conjunto de funções de interpolação N_i como

funções peso. Assim, a temperatura em qualquer ponto no interior do elemento finito pode ser aproximada pela a equação (3.8),

$$\theta(x,y,t)=\sum_{i}^{n} N_i\theta_i \ , \tag{3.8}$$

onde n é o número de nós do elemento, $N_i = N_i(x,y)$ são as funções de interpolação e θ_i são as temperaturas nodais do elemento.

Substituindo a equação (3.8) em (3.7), chega-se no sistema de equações (3.9), que representa o equilíbrio térmico em cada elemento finito.

$$\begin{aligned} &-\int_{A_e}\left[\lambda\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}-N_i\dot{Q}+N_i\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]dA_e \\ &+\int_{S_e} N_i\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}l dS_e+\int_{S_e} N_i\lambda\frac{\partial\theta}{\partial y}m dS_e=0 \end{aligned} \quad \text{para } i = 1 \text{ até } n, \tag{3.9}$$

em que A_e e S_e representam a área e a superfície do domínio do elemento

A derivada do campo de temperaturas em relação à normal à superfície no contorno, n, pode ser escrita em função dos cossenos diretores, l e m, por meio da equação (3.10),

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}=\frac{\partial\theta}{\partial x}l+\frac{\partial\theta}{\partial y}m \ . \tag{3.10}$$

Substituindo as equações (3.4) e (3.10) na equação (3.9), se obtém a expressão (3.11),

$$\int_{A_e} N_i\dot{Q}dA_e-\int_{A_e} N_i\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}dA_e-\int_{A_e}\left[\lambda\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\lambda\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]dA_e-\int_{S_e} N_i\alpha_c(\theta-\theta_\infty)dS_e=0 \ . \tag{3.11}$$

Definindo-se a matriz de funções de interpolação $\underset{\sim}{N}$ e o vetor de temperaturas nodais por meio das expressões (3.12),

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_{n-1} & N_n \end{bmatrix}, \\ \underset{\sim}{\theta} &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{n-1} & \theta_n \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde n é o número de nós do elemento e N_i são as funções de interpolação do elemento finito.

Assim, pode-se reescrever a equação (3.8) sob forma matricial por meio da equação (3.13).

$$\theta(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n} N_i\theta_i = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\theta} \ , \tag{3.13}$$

Define-se também a matriz de condutividade do material, para o caso de material isótropo, por meio da equação (3.14).

$$\underset{\sim}{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

e o vetor gradiente pela expressão (3.15),

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}. \tag{3.15}$$

Inserindo-se as expressões (3.12) a (3.15) na equação (3.11) e rearranjando os termos, obtém-se o sistema de equações (3.16),

$$\begin{aligned} &\int_{A_e} \underset{\sim}{N}^T \rho c \underset{\sim}{N} \frac{\partial \underset{\sim}{\theta}}{\partial t}\, dA_e + \int_{A_e} \left(\underset{\sim}{\nabla} \underset{\sim}{N}\right)^T \underset{\sim}{\lambda} \underset{\sim}{\nabla} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{\theta}\, dA_e + \\ &\int_{S_e} \underset{\sim}{N}^T \alpha_c \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{\theta}\, dS_e = \int_{A_e} \underset{\sim}{N}^T \dot{Q}\, dA_e + \int_{S_e} \underset{\sim}{N}^T \alpha_c \theta_\infty dS_e \end{aligned}, \tag{3.16}$$

O sistema de equações (3.16) pode ser reescrito de forma matricial por meio da equação (3.17),

$$\underset{\sim}{C} \dot{\underset{\sim}{\theta}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{F}, \tag{3.17}$$

onde $\dot{\underset{\sim}{\theta}}$ é a primeira derivada do campo de temperaturas em relação ao tempo $\left(\dot{\underset{\sim}{\theta}} = \partial \underset{\sim}{\theta} / \partial t\right)$.

A matriz de capacitância total ($\underset{\sim}{K}$) do elemento é dada pela equação (3.18),

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}_{cond} + \underset{\sim}{K}_{conv}, \tag{3.18}$$

onde a matriz de condutividade do elemento é dada pela equação (3.19),

$$\underset{\sim}{K}_{cond} = \int_{Ae} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\lambda} \underset{\sim}{B} dAe, \tag{3.19}$$

em que,

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\nabla} \underset{\sim}{N}, \tag{3.20}$$

e a matriz de convecção do elemento é dada pela equação (3.21),

$$\underset{\sim}{K}_{conv} = \int_{Se} \underset{\sim}{N}^T \alpha_c \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{\theta} dSe, \tag{3.21}$$

em que α_c é o coeficiente de convecção.

A matriz de capacidade térmica ($\underset{\sim}{C}$) do elemento é dada pela equação (3.22).

$$\underset{\sim}{C} = \int_{Ae} \underset{\sim}{N}^T \rho c \underset{\sim}{N} dAe, \tag{3.22}$$

onde ρ é a massa específica e c é o calor específico.

O vetor de ações térmicas consistentes ($\underset{\sim}{F}$) é dado pela expressão (3.23),

$$\underset{\sim}{F} = \int_{A_e} \underset{\sim}{N}^T \dot{Q}\, dA_e + \int_{S_e} \underset{\sim}{N}^T \alpha_c \theta_\infty dS_e \,, \tag{3.23}$$

em que θ_∞ é a temperatura do fluido externo ao elemento.

As matrizes $\underset{\sim}{N}$ e $\underset{\sim}{B}$ dependem do tipo de elemento utilizado na discretização da estrutura.

No programa ATERM, desenvolvido nesta Tese, utilizam-se elementos retangulares planos de quatro nós e elementos especiais de barra de dois nós para a consideração dos efeitos de transferência de calor por convecção e radiação (Segerlind, 1984), podendo ser justapostos em qualquer face do elemento retangular de quatro nós. Nos itens a seguir descreve-se a formulação dos elementos utilizados.

3.1. Elemento Retangular de Quatro Nós

Para efetuar a análise térmica de estruturas bidimensionais utiliza-se, nesta Tese, um elemento retangular plano de quatro nós de lados *2a* por *2b*, conforme a Figura 3.1. O campo de temperaturas no interior do elemento pode ser aproximado pela equação (3.24) em função das temperaturas nodais,

$$\theta(x,y) = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

onde θ_i são as temperaturas nodais e N_i são as funções de interpolação definidas pelas equações (3.25) a (3.28) (Cook *et al,* 1989),

$$N_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right), \tag{3.25}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right), \tag{3.26}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right), \tag{3.27}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \tag{3.28}$$

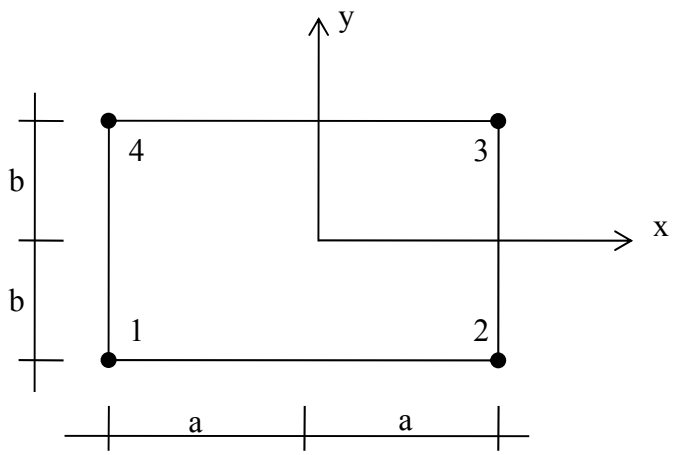

Figura 3.1: Elemento retangular de quatro nós.

Para este elemento, a matriz $\underset{\sim}{B}$ definida na equação (3.20) é expressa pela equação (3.29),

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Assim, a matriz de condutividade do elemento retangular plano de quatro nós definida pela equação (3.19) fica sendo determinada pela expressão (3.30),

$$\underset{\sim}{K}_{cond} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \underset{\sim}{B}^T \lambda \underset{\sim}{B} dxdy\,. \tag{3.30}$$

Substituindo a equação (3.29) em (3.30) e integrando analiticamente, obtém-se então a matriz de condutividade, conforme mostra a expressão (3.31),

$$\underset{\sim}{K}_{cond} = \frac{\lambda a}{6b}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\lambda b}{6a}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

De forma análoga, a matriz de capacidade térmica deste elemento, definida pela equação (3.22), é expressa pela equação (3.32),

$$\underset{\sim}{C} = \rho c \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N} dxdy\,. \tag{3.32}$$

Substituindo as equações (3.25) a (3.28) em (3.32) e integrando analiticamente, obtém-se a expressão (3.33) que representa a matriz de capacidade térmica consistente do elemento retangular de quatro nós,

$$\underset{\sim}{C} = \frac{\rho c A}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

onde A é a área do elemento.

Uma outra forma de aproximar a variação da temperatura em relação ao tempo é por meio da matriz de capacidade térmica concentrada, a qual é definida pela expressão (3.34),

$$\underset{\sim}{C} = \frac{\rho c A}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

O vetor de ações térmicas consistente, $\underset{\sim}{F}$, definido pela equação (3.23), é dividido em duas parcelas, sendo a primeira parcela correspondente à fonte de calor geradora interna do elemento, caso exista, e é definida por meio da equação (3.35),

$$\underset{\sim}{F}_{cond} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \dot{Q}\underset{\sim}{N}^T dxdy, \tag{3.35}$$

onde $\dot{Q}$ é a fonte de calor interna no elemento. Ressalta-se que na Engenharia de Estruturas em situação de incêndio, geralmente, não existe geração interna de calor, ou seja, $\dot{Q} = 0$.

A segunda parcela, devido à transferência de calor por convecção e radiação, será considerada pelo elemento especial de barra de dois nós, descrito no que se segue.

3.2. Elemento Especial de Barra de Dois Nós

As condições de contorno de Neumann podem ser impostas ao modelo de elementos finitos por meio de um elemento linear de dois nós de comprimento L, conforme mostra a Figura 3.2. Ressalta-se que para o modelo ser coerente, o elemento linear de dois nós tem que coincidir com as faces do elemento finito utilizado para discretizar a estrutura.

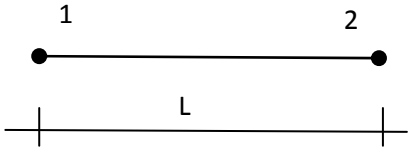

Figura 3.2: Elemento finito de convecção.

O campo de temperaturas ao longo do elemento pode ser obtido por meio da equação (3.36),

$$\theta(x) = \underset{\sim}{N} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

onde θ_i são as temperaturas nodais e $\underset{\sim}{N}$ é a matriz de funções de interpolação definido pela equação (3.37) (Cook *et al,* 1989),

$$\underset{\sim}{N} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Deve-se observar que o elemento linear de convecção é totalmente compatível com o elemento retangular de quatro nós formulado anteriormente, pois esse utiliza funções lineares para interpolar as temperaturas ao longo do lado do elemento.

Para este elemento a contribuição da transferência de calor por convecção, definida pela equação (3.21), fica expressa pela equação (3.38),

$$\underset{\sim}{K}_{conv} = \int_0^L \alpha_c \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N} dx\,. \tag{3.38}$$

Por fim, a segunda parcela do vetor de ações térmicas consistente, que é devida ao fluxo de calor convectivo, é dada pela expressão (3.39),

$$\underset{\sim}{F}_{conv} = \int_0^L \alpha_c \theta_\infty \underset{\sim}{N}^T dx\,, \tag{3.39}$$

Substituindo a equação (3.37) nas expressões (3.38) e (3.39), a matriz de convecção e o vetor de ações térmicas consistentes devido ao fluxo de calor convectivo são fornecidos pelas equações (3.40) e (3.41), respectivamente,

$$\underset{\sim}{K}_{conv} = \frac{\alpha_c L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

$$\underset{\sim}{F}_{conv} = \alpha_c \theta_\infty \begin{bmatrix} L/2 \\ L/2 \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Os efeitos devidos à radiação podem ser considerados no modelo numérico de forma análoga à contribuição da transferência de calor por convecção. A matriz e o vetor de ações térmicas consistente devidos à radiação são dados pelas equações (3.42) e (3.43).

$$\underset{\sim}{K}_{rad} = \frac{\dot{h} L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

$$\underset{\sim}{F}_{rad} = \dot{h}\theta_{\infty}\begin{bmatrix} L/2 \\ L/2 \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

em que $\dot{h}_r$ é determinado pela equação (2.6),

$$\dot{h}_r = \varepsilon_{res}\sigma\left(T_g + T_a\right)\left(T_g^2 + T_a^2\right), \tag{3.44}$$

onde T_g e T_a são temperaturas em Kelvin dos gases quentes e da superfície do material, respectivamente. ε_{res} é a emissividade resultante da superfície e σ é a constante de Stephan-Boltzmann [$\sigma = 5,67.10^{-8} W(m^2.K^4)$].

A emissividade resultante é uma grandeza adimensional, cujo valor está compreendido entre 0 e 1 ($\varepsilon_{res} = 0$ para um espelho e $\varepsilon_{res} = 1$ para um irradiador perfeito, conhecido como corpo negro), que mede a capacidade da superfície emitir calor radiativo em relação a um corpo negro.

Define-se $\underset{\sim}{K}$ e $\underset{\sim}{F}$ como sendo a matriz de capacitância total e o vetor de ações térmicas resultantes do modelo por meio da equação (3.45),

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{K} &= \sum_{n=1}^{nelem} \underset{\sim}{K}_{cond} + \underset{\sim}{K}_{conv} + \underset{\sim}{K}_{rad} \\ \underset{\sim}{F} &= \sum_{n=1}^{nelem} \underset{\sim}{F}_{conv} + \underset{\sim}{F}_{rad} \end{aligned}, \tag{3.45}$$

onde *nelem* é o número total de elementos finitos, devendo-se somar os coeficientes das matrizes ou vetores dos elementos que correspondem aos mesmos nós do modelo.

3.3. Integração Temporal

O sistema de equações (3.17) representa equações diferenciais ordinárias dependentes do tempo. A solução transiente dessa equação pode ser realizada por meio dos Métodos de Integração Direta, tais como os Métodos $\propto$ (Zienkiewicz e Taylor (1991), Lewis *et al* (2004) e Bathe (1996)), cuja principal característica é a discretização da resposta no tempo em intervalos regulares, como mostra a Figura 3.3.

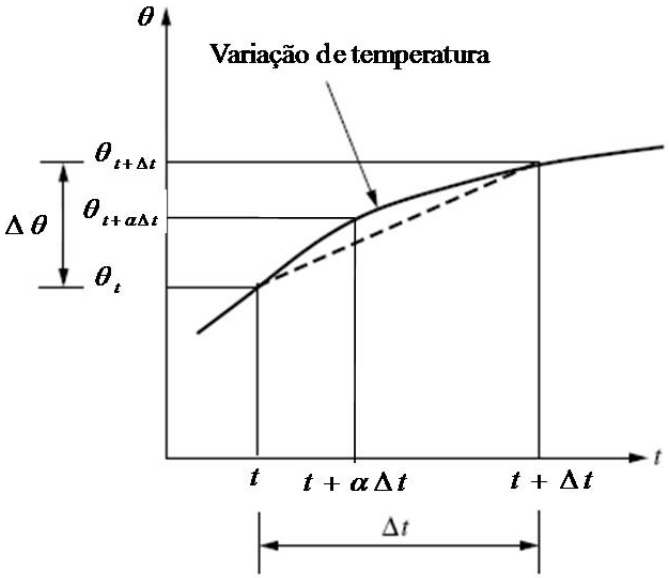

Figura 3.3: Métodos ∝ para a integração direta no tempo

A equação (3.17) deve ser satisfeita a cada instante discreto, sendo usualmente escrita no instante $t+\alpha\Delta t$, conforme mostra a equação (3.46),

$$\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{\dot{\theta}}_{t+\alpha\Delta t}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\theta}_{t+\alpha\Delta t}=\underset{\sim}{F}_{t+\alpha\Delta t}\,. \tag{3.46}$$

Utilizando as séries de Taylor, pode-se escrever a temperatura no tempo por meio da equação (3.47),

$$\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}=\underset{\sim}{\theta}_{t}+\Delta t\frac{\partial\underset{\sim}{\theta}_{t+\alpha\Delta t}}{\partial t}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\frac{\partial^{2}\underset{\sim}{\theta}_{t+\alpha\Delta t}}{\partial t^{2}}+\ldots. \tag{3.47}$$

Negligenciando os termos de ordens superiores, a primeira derivada do campo de temperaturas em relação ao tempo é dada pela equação (3.48),

$$\frac{\partial\underset{\sim}{\theta}_{t+\alpha\Delta t}}{\partial t}\approx\frac{\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}-\underset{\sim}{\theta}_{t}}{\Delta t}+\underset{\sim}{O}\left(\Delta t\right). \tag{3.48}$$

Utilizando os Métodos-∝ (Bathe, 1996), a temperatura no instante $t+\alpha\Delta t$ é obtida pela equação (3.49),

$$\underset{\sim}{\theta}_{t+\alpha\Delta t}=\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{\theta}_{t}+\alpha\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}\,. \tag{3.49}$$

Analogamente, pode-se escrever o vetor de ações térmicas no instante $t+\alpha\Delta t$ por meio da equação (3.50),

$$\underset{\sim}{F}_{t+\alpha\Delta t}=\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{F}_{t}+\alpha\underset{\sim}{F}_{t+\Delta t}\,. \tag{3.50}$$

Substituindo-se as equações (3.48), (3.49) e (3.50) na equação (3.46) e desprezando o termo $\underset{\sim}{O}\left(\Delta t\right)$, obtém-se a equação (3.51),

$$\underset{\sim}{C}\left(\frac{\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}-\underset{\sim}{\theta}_{t}}{\Delta t}\right)+\underset{\sim}{K}\left(\alpha\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}+\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{\theta}_{t}\right)=\alpha\underset{\sim}{F}_{t+\Delta t}+\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{F}_{t}\,. \tag{3.51}$$

Multiplicando a equação (3.51) por Δt e após algumas manipulações algébricas, obtém-se a equação (3.52),

$$\underset{\sim}{K}_{ef}\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}=\underset{\sim}{F}_{ef}\,, \tag{3.52}$$

onde,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{K}_{ef}&=\underset{\sim}{C}+\alpha\Delta t\underset{\sim}{K}\\ \underset{\sim}{F}_{ef}&=\left[\underset{\sim}{C}-\left(1-\alpha\right)\Delta t\underset{\sim}{K}\right]\underset{\sim}{\theta}_{t}+\Delta t\left[\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{F}_{t}+\alpha\underset{\sim}{F}_{t+\Delta t}\right]\end{aligned}\,. \tag{3.53}$$

O Método-∝ recebe uma denominação diferente de acordo com o valor de α, conforme mostra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Esquemas de integração no tempo

α	Método de
0,0	Euler Explícito
1/2	Crank-Nicolson
2/3	Galerkin
1,0	Euler Implícito

Segundo a estabilidade numérica, os métodos de integração direta são classificados em: (i) incondicionalmente estáveis – quando a solução não crescer indefinidamente para quaisquer condições iniciais, isto é, quando for limitada para qualquer intervalo de tempo, ou (ii) condicionalmente estáveis - quando a solução for limitada apenas para intervalos de tempo menor do que um certo valor chamado limite de estabilidade. Nos Métodos-∝, os que apresentam $\alpha \geq 0,5$ são incondicionalmente estáveis.

Para garantir a convergência correta da solução, Huang e Usmani (1994) e Lewis *et al* (2004) recomendam que o intervalo de tempo a ser utilizado seja dado pela inequação (3.54).

$$\Delta t \leq \frac{\rho c}{\lambda} l^2 \tag{3.54}$$

onde ρ, c, λ são, respectivamente, a massa especifica, o calor específico e a condutividade térmica do material e *l*, a menor dimensão do elemento finito.

O texto de revisão da NBR 14323 (2011) recomenda que o intervalo de tempo seja inferior a 5 segundos e não superior a $25000\left(u/A\right)^{-1}$, onde *u* é o perímetro da seção exposta ao fogo e *A* é a área da seção transversal.

O programa SAFIR (Franssen *et al*, 2005), desenvolvido na Universidade de Liège, recomenda o uso de $\alpha = 0,90$, enquanto o programa Super Tempcalc (Anderberg, 1997) utiliza o esquema de Galerkin.

3.4. Não Linearidade do Material

Uma vez que as matrizes $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{K}$ e o vetor de ações térmicas $\underset{\sim}{F}$ são dependentes da temperatura, a equação (3.52) torna-se não linear, devendo-se aplicar um método incremental e iterativo para se obter a solução do problema. Neste trabalho utilizar-se-á o método de Newton-Raphson.

Reescrevendo a equação (3.52) para a iteração *j*, obtém-se a equação (3.55).

$$\underset{\sim}{K}_{ef}^{j-1}\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j} = \underset{\sim}{F}_{ef}^{j-1} \tag{3.55}$$

onde,

$$\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j} = \underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j-1} + \Delta\underset{\sim}{\theta}^{j} \tag{3.56}$$

Substituindo (3.53) e (3.56) em (3.55), obtém-se a expressão (3.57).

$$\left[\underset{\sim}{C} + \alpha\Delta t\underset{\sim}{K}\right]^{j-1}\left[\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j-1} + \Delta\underset{\sim}{\theta}^{j}\right] = \left[\underset{\sim}{C} - \Delta t\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{K}\right]_{t}\underset{\sim}{\theta}_{t} + \Delta t\left[\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{F}_{t} + \alpha\underset{\sim}{F}_{t+\Delta t}^{i-1}\right] \tag{3.57}$$

Efetuando algumas manipulações algébricas, a equação (3.57) pode ser reescrita por meio da equação (3.58).

$$\underset{\sim}{K}_{ef}^{j-1}\Delta\underset{\sim}{\theta}^{j} = \underset{\sim}{\psi}^{j-1} \tag{3.58}$$

onde $\underset{\sim}{\psi}$ é o vetor de temperaturas residuais dado pela equação (3.59).

$$\underset{\sim}{\psi}^{j-1} = \underset{\sim}{F}_{ef}^{j-1} - \underset{\sim}{R}^{j-1} \tag{3.59}$$

em que,

$$\underset{\sim}{K}_{ef}^{j-1} = \underset{\sim}{C}_{t+\Delta t}^{j-1} + \alpha\Delta t\underset{\sim}{K}_{t+\Delta t}^{j-1} \tag{3.60}$$

$$\underset{\sim}{F}_{ef}^{j-1} = \left[\underset{\sim}{C}_{t} - \Delta t\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{K}_{t}\right]\underset{\sim}{\theta}_{t} + \Delta t\left[\left(1-\alpha\right)\underset{\sim}{F}_{t} + \alpha\underset{\sim}{F}_{t+\Delta t}^{j-1}\right] \tag{3.61}$$

$$\underset{\sim}{R}^{j-1} = \underset{\sim}{K}_{ef}^{j-1}\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j-1} \tag{3.62}$$

O processo iterativo atinge convergência quando a inequação (3.63) é satisfeita.

$$\frac{\left\|\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j} - \underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j-1}\right\|}{\left\|\underset{\sim}{\theta}_{t+\Delta t}^{j-1}\right\|} \leq TOL \tag{3.63}$$

onde $\|.\|$ é a norma euclidiana e *TOL* é a tolerância exigida.

3.5. Implementação Computacional

Desenvolveu-se um programa de computador com base no Método dos Elementos Finitos (MEF), denominado ATERM, para efetuar a análise térmica de estruturas em domínios bidimensionais de qualquer geometria e em regime transiente ou permanente.

O programa ATERM, desenvolvido em linguagem Fortran F90 baseou-se no programa ANEST (La Rovere *et al*, 2003), e é subdividido em módulos, ligados por arquivos binários, que possibilitam a comunicação interna entre esses módulos. O programa gera também arquivos de texto que possibilitam ao usuário visualizar todos os resultados fornecidos pelo programa.

A Figura 3.4 mostra o fluxograma utilizado pelo programa. Em seguida, descrevem-se sucintamente as principais funções dos módulos envolvidos no algoritmo de cálculo.

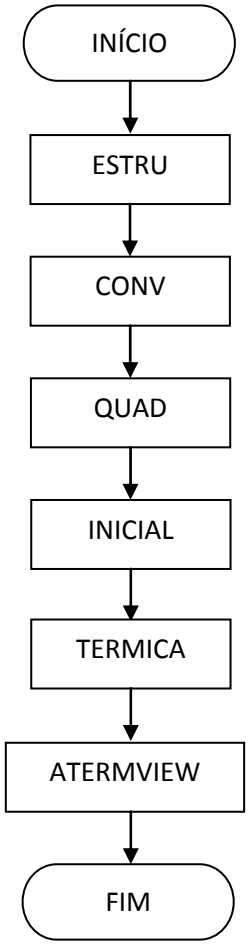

Figura 3.4: Fluxograma do programa de análise térmica

No módulo ESTRU são feitas a leitura das coordenadas nodais, das conectividades dos elementos e das temperaturas nodais prescritas (se houver). Com esses dados, o módulo numera as equações e renumera automaticamente os nós de modo a minimizar a largura de banda da matriz de condutividade, que é armazenada em perfil. É gerado um arquivo de texto com o mesmo nome do arquivo de dados, mas com extensão .EST, onde o usuário pode visualizar os resultados gerados pelo módulo.

O módulo CONV é responsável pela leitura das regiões do modelo a ser analisado onde possuem transferência de calor por convecção ou radiação. Deve-se salientar que nos modelos onde não há temperaturas nodais prescritas e nem geração de calor, é fundamental, para que a matriz de rigidez do modelo não seja singular, a imposição de regiões que possuem transferência de calor por convecção ou radiação. É gerado um arquivo de texto puro com o mesmo nome do arquivo de dados, mas com extensão .CNV, onde o usuário pode visualizar os resultados gerados pelo módulo.

O módulo QUAD é responsável pela leitura das propriedades térmicas dos materiais e pela formação das matrizes de rigidez e dos vetores de ações térmicas equivalentes dos elementos retangulares. Devido ao fato do problema possuir apenas um grau de liberdade, não requerendo grande esforço algébrico, as matrizes e os vetores de ações térmicas foram obtidos por meio de integração analítica. A matriz de capacidade térmica pode ser obtida por meio da formulação consistente ou concentrada. É gerado um arquivo de texto puro com o mesmo nome do arquivo de dados, mas com extensão .QUD, onde o usuário pode visualizar os resultados gerados pelo módulo.

O módulo INICIAL é responsável pela formação da matriz de condutividade e do vetor de ação térmica global do modelo a ser analisado.

O módulo TERMICA foi desenvolvido para utilizar o método da integração direta conforme descrito no item 4.3. Para cada instante de tempo, as matrizes de rigidez são atualizadas de acordo com as propriedades térmicas. O esquema de integração no tempo (Método-α) pode ser modificado pelo usuário por meio do arquivo de entrada de dados. É gerado um arquivo de texto puro com o mesmo nome do arquivo de dados, mas com extensão .TER, onde o usuário pode visualizar os resultados gerados pelo módulo. A Figura 3.5 mostra o fluxograma do módulo TERMICA.

Finalmente, o módulo ATERMVIEW, desenvolvido no ambiente MATLAB, permite a visualização gráfica da distribuição de temperaturas para todos os instantes de

tempo, além da construção de gráficos que mostram a evolução da temperatura nodal com o passar do tempo.

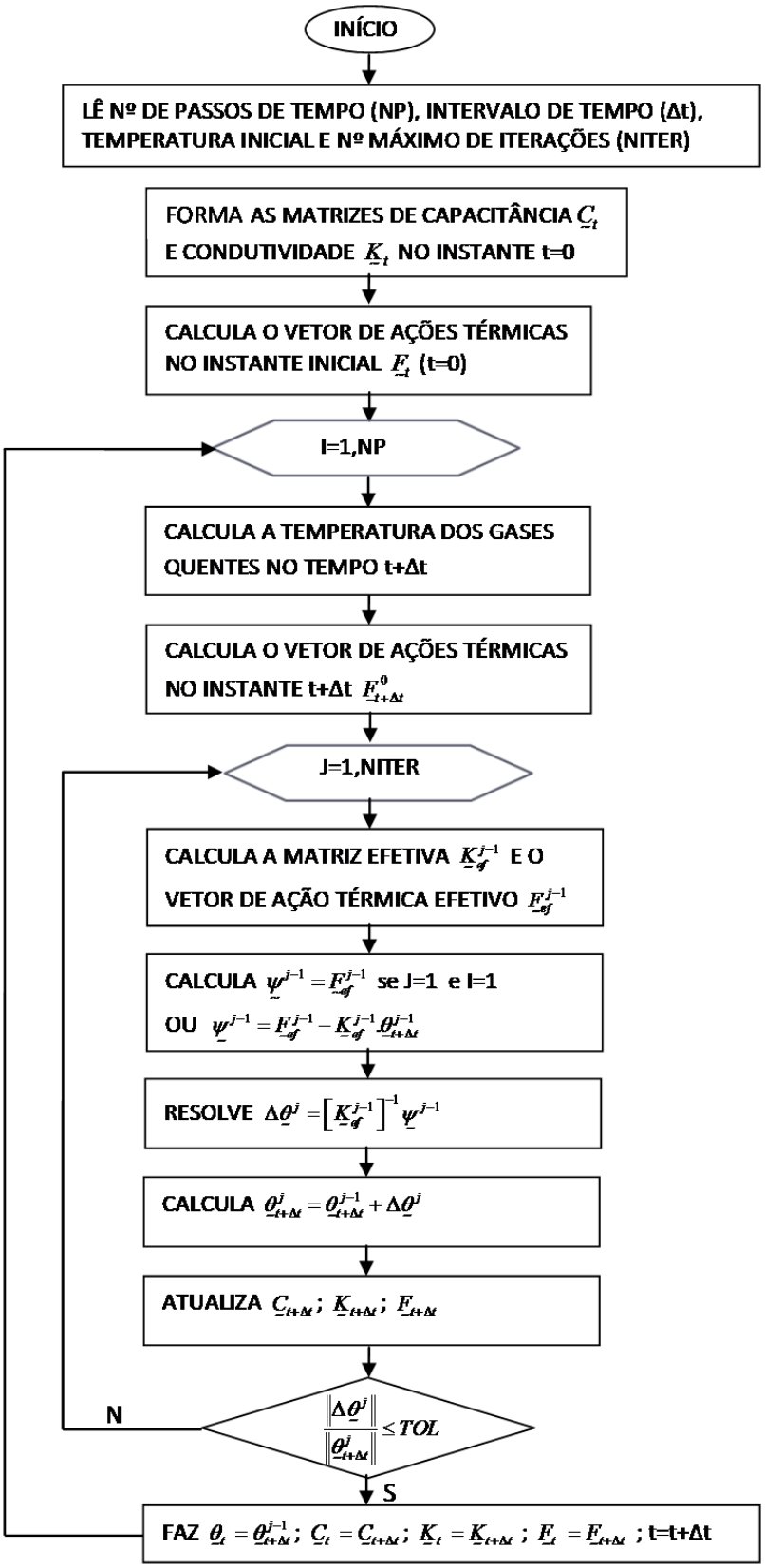

Figura 3.5: Fluxograma do módulo TERMICA

3.6. Validação Numérica

Para validar o programa de análise térmica, ATERM, desenvolvido nessa Tese, foram realizadas três simulações numéricas cujos resultados foram comparados aos obtidos por meio do programa Super Tempcalc (Anderberg, 1997), reconhecido mundialmente na análise térmica de estruturas em situação de incêndio.

O programa Super Tempcalc (STC) foi desenvolvido em ambiente Matlab pelo FSD (*Fire Safety Design*), localizado em Lund, Suécia. O STC utiliza o método dos elementos finitos para a análise térmica de estruturas bidimensionais. O programa utiliza elementos triangulares de três nós e retangulares de quatro nós. As matrizes de condutividade e de capacidade térmica são obtidas por meio de integração analítica. A integração temporal utiliza o método de Galerkin ($\alpha = 2/3$).

Apesar de o programa ATERM permitir que o usuário escolha o esquema de integração temporal, utilizou-se nos exemplos a seguir o método de Galerkin para poder comparar os resultados obtidos por meio dos programas ATERM e STC.

As simulações realizadas foram (i) viga de concreto de 30 x 30 cm com todos os lado expostos ao incêndio, (ii) pilar de aço em contato com alvenaria e (iii) pilar misto de aço e concreto. As propriedades térmicas adotadas para o concreto tiveram por base o Eurocode 2 parte 1.2, enquanto, para o aço, adotaram-se as características físico-térmicas presentes no texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011).

Em todos os exemplos a ação térmica é determinada de acordo com a curva de incêndio-padrão ISO 834 (ABNT NBR 5628:2001) e as estruturas foram expostas a 60 minutos de incêndio.

3.6.1. Viga de Concreto

Como primeiro exemplo, é analisado o aquecimento de uma viga de concreto de seção retangular de dimensões 30x30 cm, conforme mostra a Figura 3.6. Admite-se que o incêndio ocorra nos quatro lados da viga. As propriedades térmicas do concreto estão apresentadas na Tabela 3.2, conforme recomendações do Eurocode 2 parte 1.2 (2004). O fator de emissividade e o coeficiente de convecção foram adotados iguais a 0,7 e 25 W/m².ºC, respectivamente, conforme recomendações do Eurocode 2 parte 1.2 (2004). Adota-se para temperatura inicial da estrutura o valor de 20ºC e o intervalo de tempo igual a 7,2 segundos.

Tabela 3.2: Propriedades térmicas do concreto.

Temperatura (ºC)	Calor Específico (J/kgºC)	Massa Especifica (kg/m³)	Condutividade Térmica (W/mºC)
20	900	2400	1,36
99	900	2400	1,231
100	1470	2400	1,230
115	1470	2400	1,211
200	1000	2352	1,111
300	1050	2316	1,003
400	1100	2280	0,907
500	1100	2259	0,823
600	1100	2238	0,749
700	1100	2217	0,687
800	1100	2196	0,637
900	1100	2175	0,598
1000	1100	2154	0,570
1100	1100	2133	0,554
1200	1100	2112	0,549

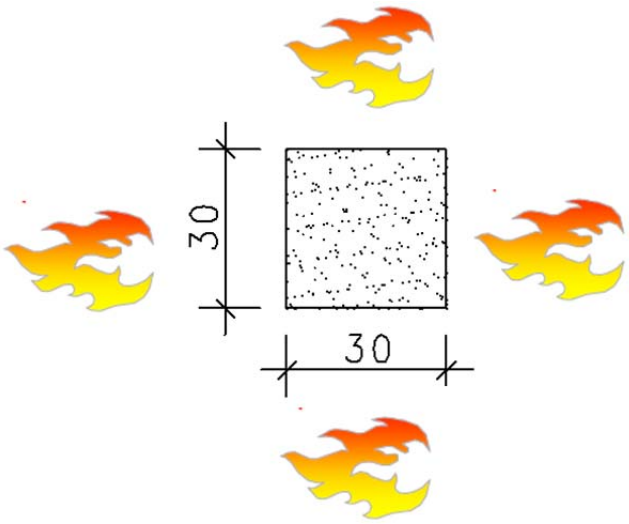

Figura 3.6: Geometria da viga de concreto submetida ao incêndio.

A estrutura foi discretizada em elementos quadrados, sendo que para o programa ATERM foram utilizadas 3 malhas: na Malha 1 utilizaram-se elementos de 2,0 cm de lado, na Malha 2 elementos de 1,0 cm de lado e, na Malha 3, elementos de 0,5 cm de lado. Para o programa STC utilizou-se apenas a Malha 3. A Figura 3.7 apresenta a influência do refinamento da malha na evolução da temperatura em função do tempo de um nó localizado a x=y=2,0 cm do canto inferior esquerdo da viga. Observa-se que com o refinamento da malha as temperaturas se elevam um pouco, até o instante t = 35

minutos (0,60 hora), e após esse instante as temperaturas obtidas para as diferentes malhas são praticamente iguais. Nota-se que a solução tende a convergir com o refinamento da malha, sendo que para a malha 3 os resultados obtidos pelos programas ATERM e STC são iguais, conforme mostra a Figura 3.8.

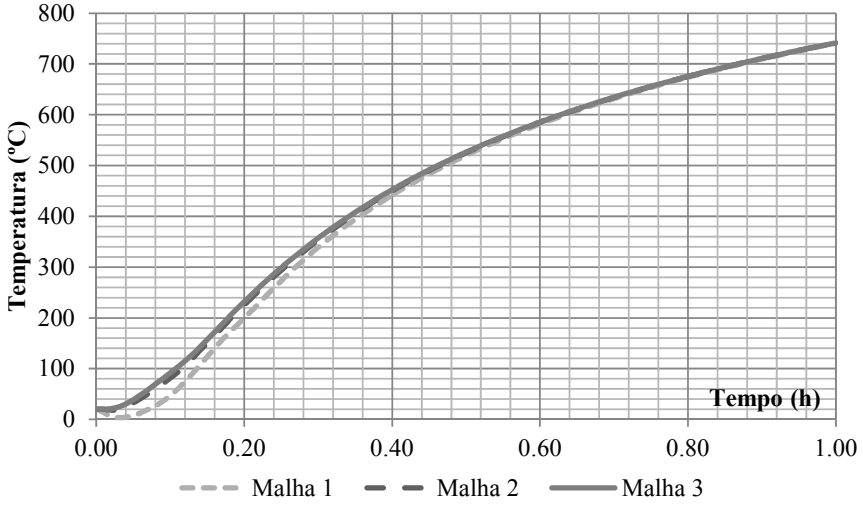

Figura 3.7: Influência da malha na temperatura nodal.

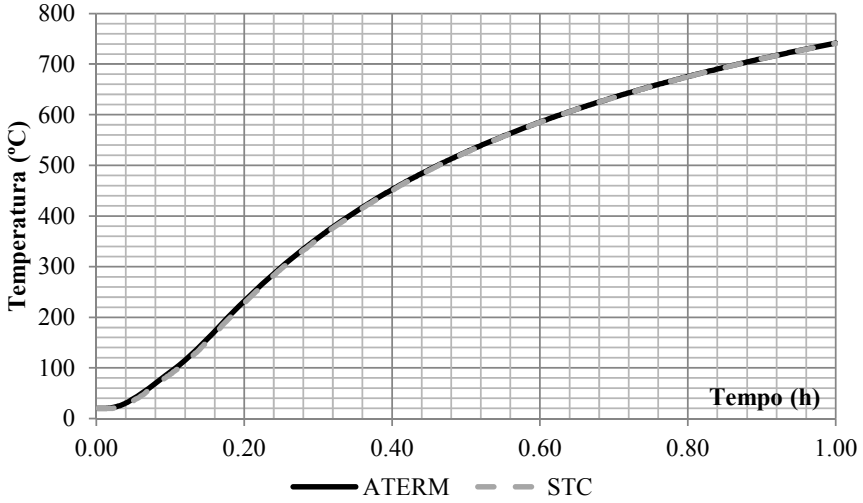

Figura 3.8: Comparação dos resultados obtidos pelos programas ATERM e STC utilizando a malha 3.

Observa-se que nos instantes iniciais, a Malha 1 apresenta temperaturas inferiores à temperatura inicial da viga. Esses resultados devem-se a um problema de instabilidade numérica (Segerlind, 1984), e pode ser corrigido por meio de três alternativas: (i) refinamento da malha espacial, (ii) utilização de um intervalo de tempo maior nos instantes iniciais da análise e (iii) utilização da matriz de capacidade térmica concentrada no modelo numérico. Ressalta-se que o programa STC utiliza somente a matriz de capacidade térmica consistente. A Figura 3.9 mostra os resultados obtidos

para a malha 1 utilizando a matriz de capacidade térmica concentrada e consistente. Observa-se que após 24 minutos de incêndio, a temperatura obtida por meio da matriz consistente é superior à temperatura obtida por meio da matriz concentrada. Aos 60 minutos de incêndio, a diferença de temperaturas obtidas por meio desses dois processos é igual a 5,94ºC. Essa diferença tende a diminuir com o refinamento da malha espacial.

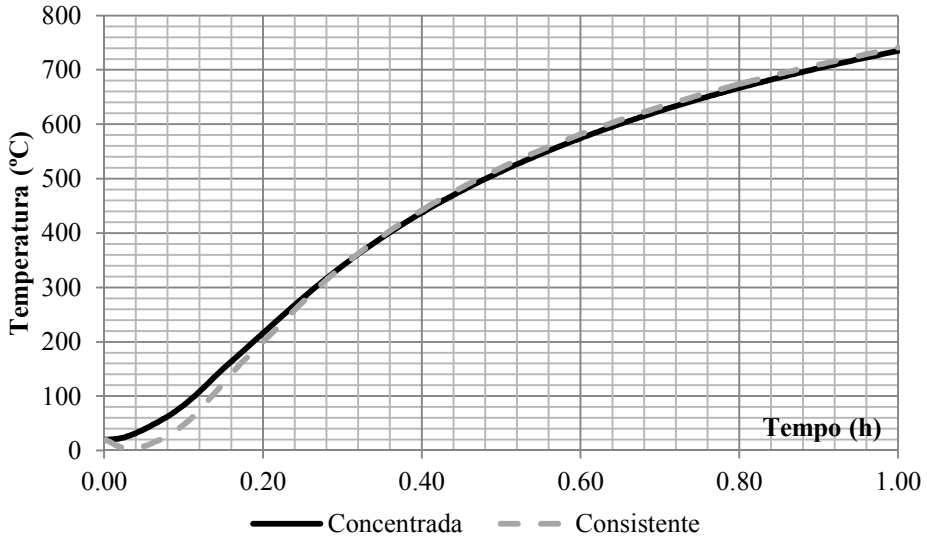

Figura 3.9: Evolução da temperatura para a malha 1 utilizando a matriz de capacidade térmica concentrada e consistente.

3.6.2. Pilar de aço em contato com alvenaria

O programa ATERM também permite a análise térmica de materiais não estruturais, tal como a alvenaria. Para demonstrar a análise térmica de modelos com esses materiais, realiza-se a análise térmica de um pilar de aço com seção transversal em forma de "I" em contato com alvenaria revestida com argamassa de cimento e areia com 15 mm de espessura, sendo submetido ao aquecimento em apenas um lado (Silva *et al,* 2008). Nesse exemplo, considera-se que a superfície oposta ao incêndio seja adiabática. Considera-se nesta análise que as mesas do perfil HEB 200 estejam em contato direto com a alvenaria e que a ação do incêndio esteja atuante em uma extensão igual a 940 mm da parede, conforme mostra a Figura 3.10. O tempo de exposição ao fogo foi igual a 60 minutos.

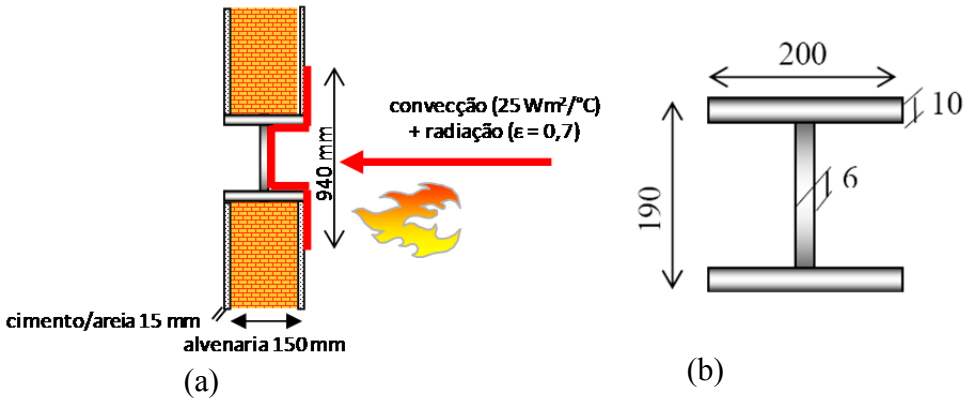

Figura 3.10: Pilar em contato com alvenaria: (a) disposição da alvenaria e (b) dimensões do perfil (em mm).

As características físico-térmicas adotadas para o concreto e o aço estão apresentadas na Tabela 3.3. A massa específica do aço foi considerada constante e igual a 7850 kg/m³. Para a alvenaria, as propriedades térmicas adotadas não variam com a temperatura, sendo adotados os seguintes valores: (i) calor específico igual a 840 J/kgºC, (ii) massa específica igual a 1600 kg/m³ e (iii) condutividade térmica igual a 0,7 W/mºC.

Para ambos os programas o modelo foi discretizado em elementos quadrados de 4 mm de lado, totalizando 10228 nós e 9882 elementos. Para a discretização temporal adotou-se o método de Galerkin e um intervalo de tempo de 7,2 segundos. A Figura 3.11 mostra a variação da temperatura no nó localizado na altura média da alma do perfil metálico na face onde incide o calor. Observa-se que os resultados obtidos pelos programas ATERM e STC são praticamente idênticos.

A distribuição de temperaturas obtidas pelos programas ATERM e STC (Silva *et al*, 2008) para os instantes de 30 e 60 minutos, conforme mostra a Figura 3.12. Observa-se que o campo de temperaturas obtido pelos programas ATERM e STC é praticamente o mesmo.

Tabela 3.3: Características físico-térmicas adotadas.

Temperatura (ºC)	Concreto/argamassa de cimento e areia			Aço	
	Calor específico (umid=1,5%) (J/kgºC)	Massa especifica (kg/m³)	Condutividade térmica (W/mºC)	Calor específico (J/kgºC)	Condutividade térmica (W/mºC)
20	900	2400	1,33	439,80	53,33
100	900	2400	1,23	487,62	50,67
115	1470	2400	1,21	494,92	50,17
200	1000	2352	1,11	529,76	47,34
300	900	2316	1,00	564,74	44,01
400	1100	2280	0,91	605,88	40,68
500	1100	2280	0,82	666,5	37,35
600	1100	2280	0,75	759,92	34,02
700	1100	2280	0,69	1008,16	30,69
735	1100	2280	0,67	5000	29,52
736	1100	2280	0,67	4109	29,49
800	1100	2280	0,64	803,26	27,36
900	1100	2280	0,60	650,44	27,3
1000	1100	2280	0,57	650	27,3
1100	1100	2280	0,55	650	27,3
1200	1100	2280	0,55	650	27,3
1500	1100	2280	0,60	650	27,3

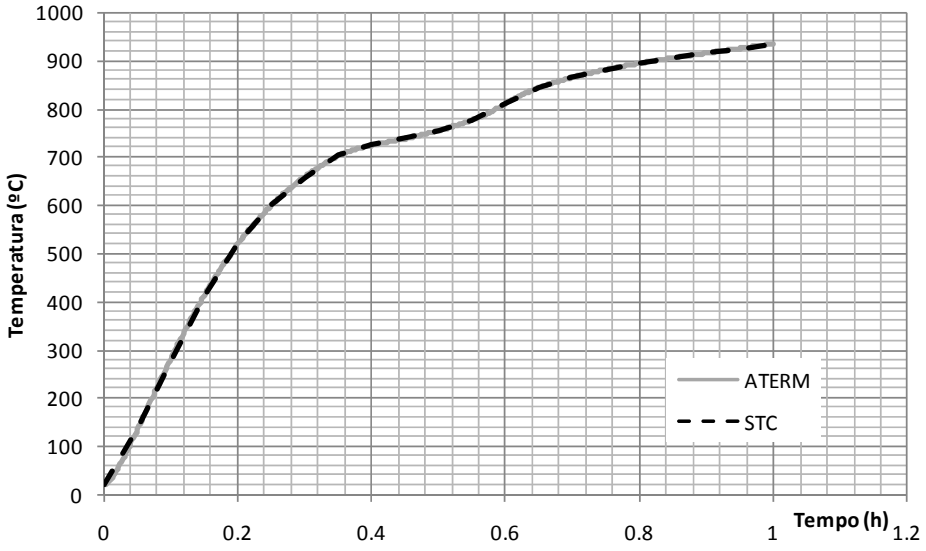

Figura 3.11: Variação da temperatura com o tempo no meio da alma do perfil

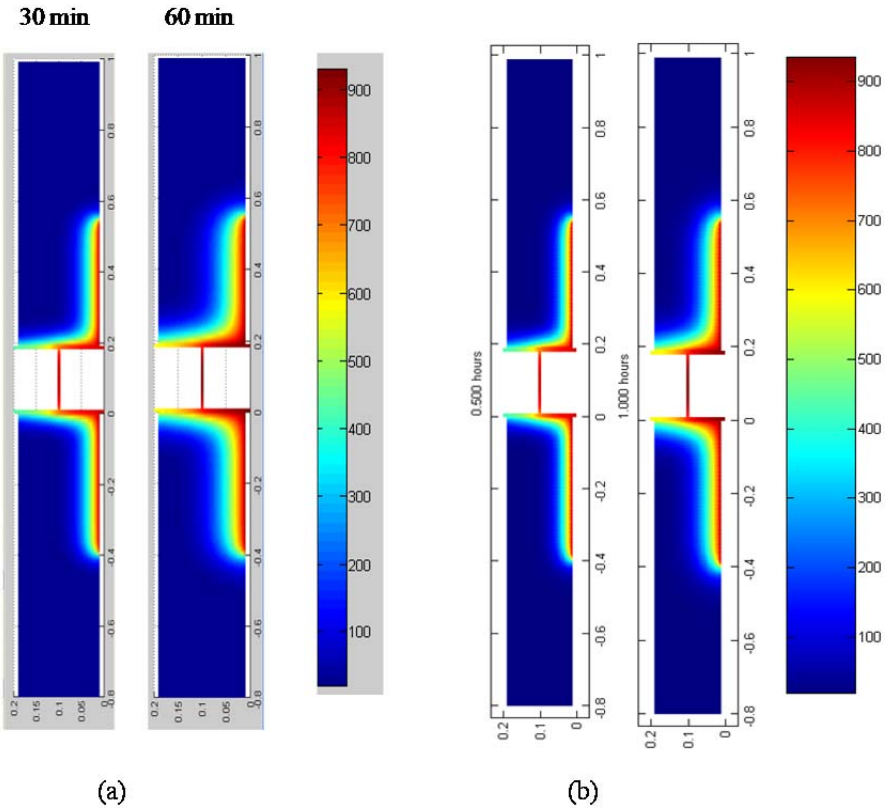

Figura 3.12: Distribuição de temperatura, em ºC, obtida pelos programas (a) ATERM e (b) STC.

3.6.3. Pilar Misto de Aço e Concreto

Como último exemplo, efetua-se a análise térmica bidimensional de um pilar misto, constituído de dois perfis formados a frio de seção Ue 200x100x25x3,0 preenchido com concreto, conforme mostra a Figura 3.13. O fator de emissividade e o coeficiente de convecção foram adotados iguais a 0,7 e 25 W/m².ºC, respectivamente, conforme recomendações do Eurocode 2 parte 1.2 (2004). Adota-se 20ºC para temperatura inicial da estrutura. As propriedades térmicas do concreto estão apresentadas na Tabela 3.2, enquanto as propriedades térmicas do aço estão apresentadas na Tabela 3.3 (ver item 2.6 desta Tese).

A análise foi efetuada nos programas ATERM e STC, sendo que, em ambos os programas, o pilar foi discretizado em elementos quadrados de 3 mm de lado, totalizando 4761 nós e 4624 elementos finitos.

Considerando o pilar exposto ao incêndio nos quatro lados, a evolução da temperatura para o nó localizado no meio da alma do perfil está ilustrada na Figura 3.14 e a Figura 3.15 mostra a variação da temperatura no centro do pilar obtidos por meio dos programas ATERM e STC.

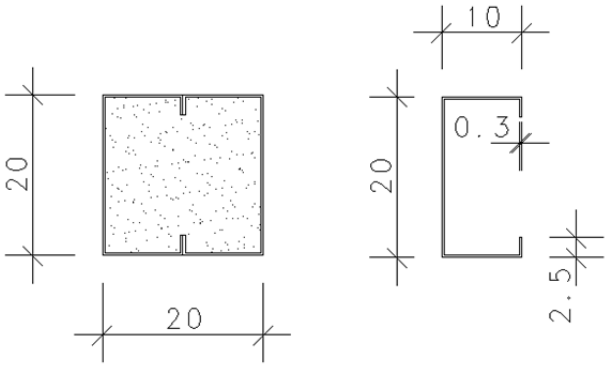

Figura 3.13: Pilar misto preenchido com concreto (dimensões em cm).

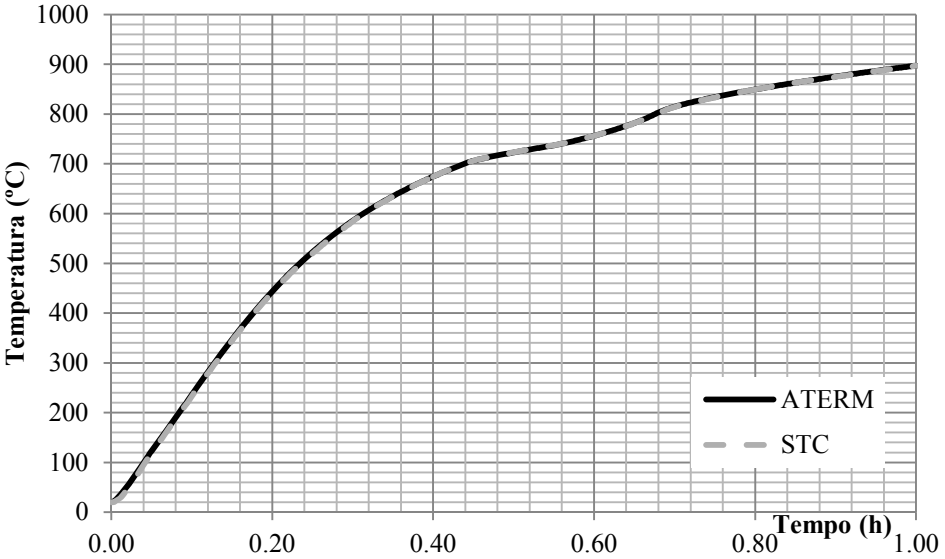

Figura 3.14: Variação da temperatura com o tempo no meio da alma do perfil

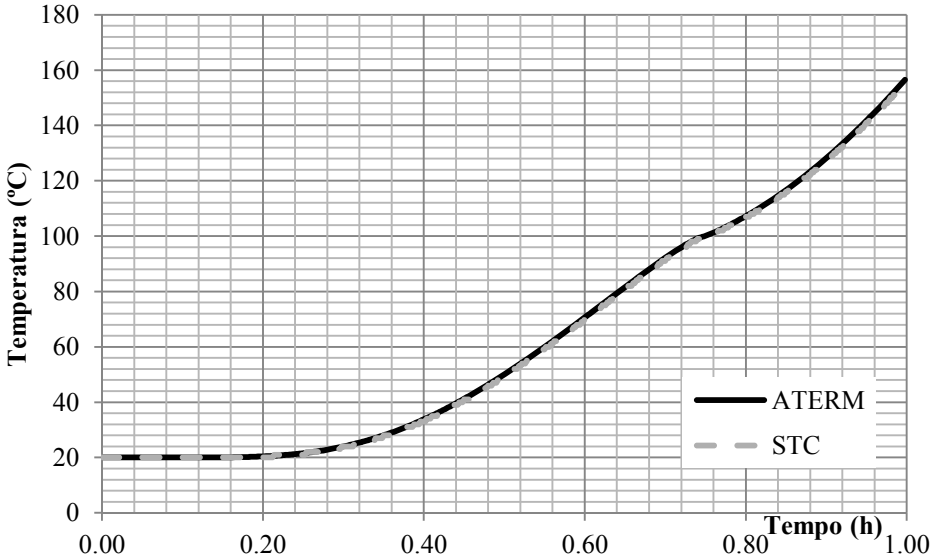

Figura 3.15: Variação da temperatura com o tempo no centro do pilar.

Outra forma de representar a distribuição de temperaturas é por meio de isotermas. As Figuras 5.16 a 5.19 mostram as isotermas calculadas pelo programa ATERM para 30 e 60 minutos de exposição ao incêndio padrão, considerando quatro cenários de exposição ao fogo: (i) somente a face inferior do pilar aquecido, (ii) aquecimento nas faces inferior e superior do pilar, (iii) somente a face esquerda do pilar exposta ao incêndio e (iv) as faces esquerda e direita do pilar expostas ao incêndio.

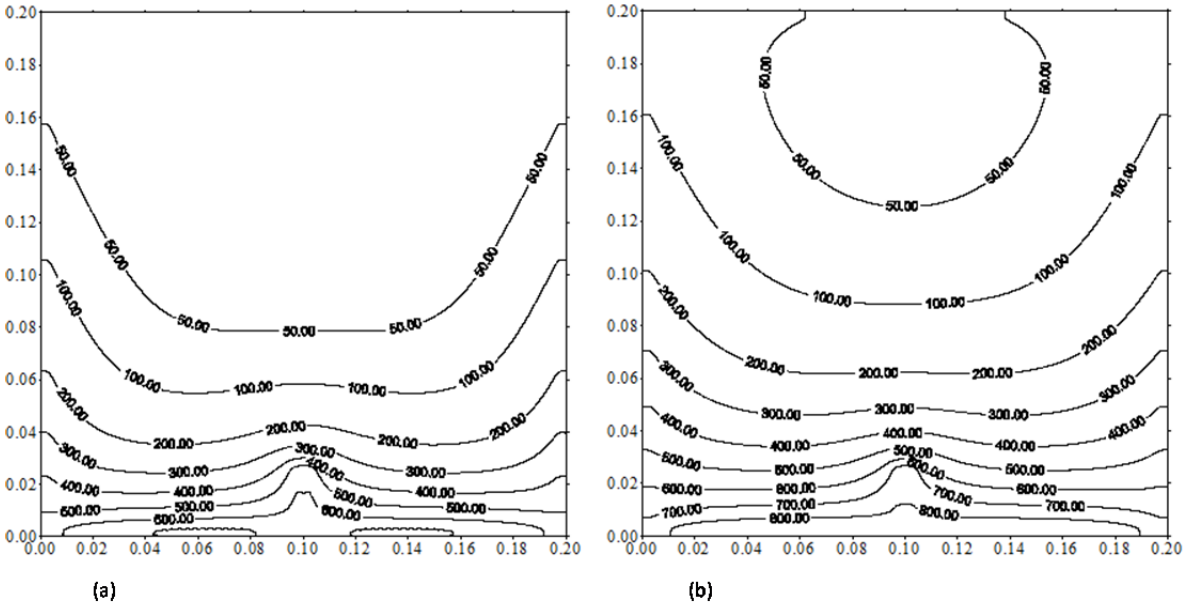

Figura 3.16: Isotermas para o pilar aquecido na face inferior:
(a) 30 minutos e (b) 60 minutos.

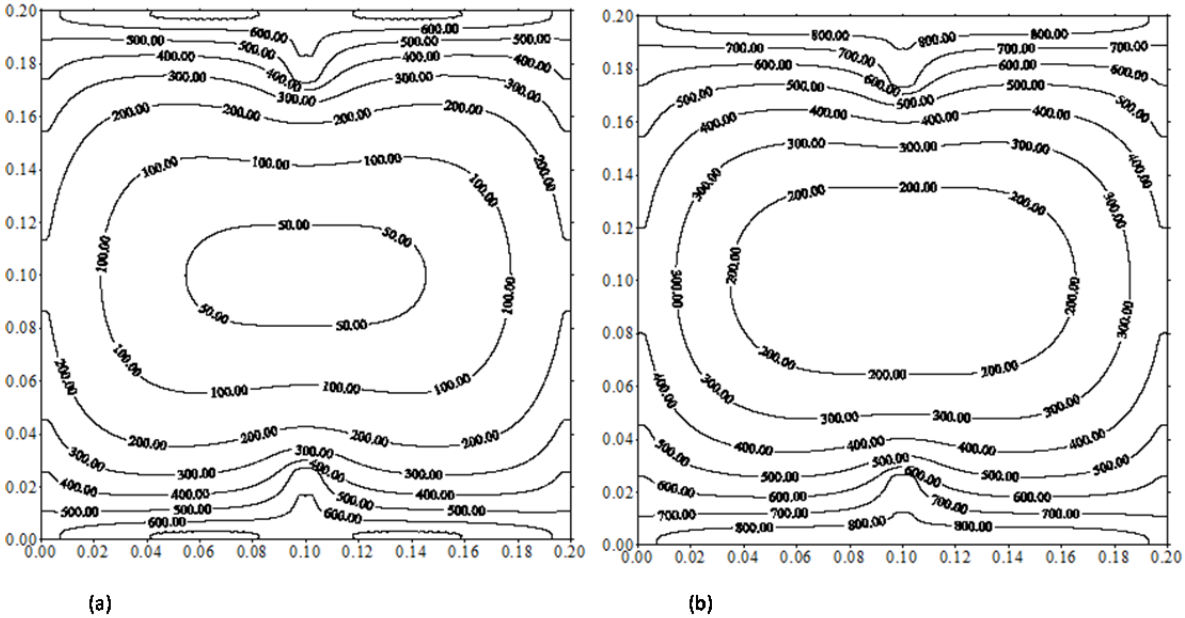

Figura 3.17: Isotermas para o pilar aquecido na face inferior e superior:
(a) 30 minutos e (b) 60 minutos.

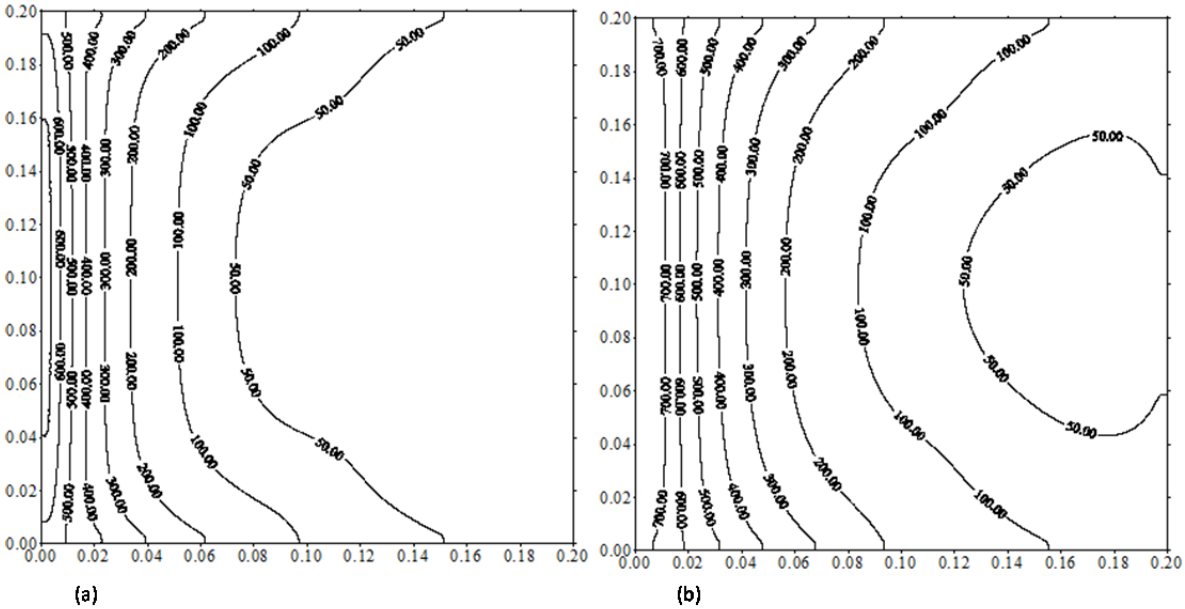

Figura 3.18: Isotermas para o pilar aquecido na face esquerda:
(a) 30 minutos e (b) 60 minutos.

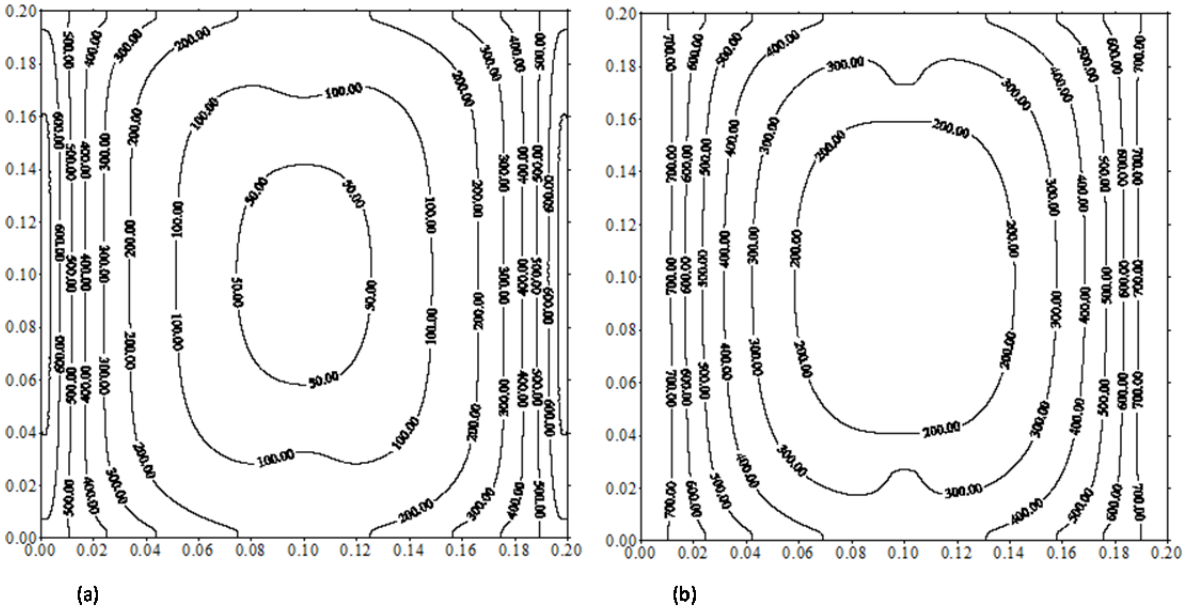

Figura 3.19: Isotermas para o pilar aquecido na face esquerda e direita:
(a) 30 minutos e (b) 60 minutos.

3.7. Dimensionamento de Estruturas em Incêndio

A partir do campo de temperaturas obtido pelo programa ATERM torna-se possível o dimensionamento de estruturas em situação de incêndio com base em procedimentos normatizados. Com este objetivo, foi desenvolvido um módulo adicional

ao programa ATERM, denominado ATERM-DIM, para realizar o dimensionamento de vigas de aço continuamente travadas.

O programa ATERM-DIM calcula, a partir da distribuição de temperaturas obtida da análise térmica, o momento resistente de vigas de aço continuamente travadas em situação de incêndio com base no procedimento recomendado pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

Com a distribuição não uniforme da temperatura na seção transversal da viga provocado pelo gradiente térmico, a linha neutra plástica se afasta da linha neutra da seção transversal. A posição da linha neutra plástica é determinada de maneira iterativa até que ocorra o equilíbrio de forças na seção transversal, ou seja, quando a equação (3.64) é satisfeita,

$$\sum_{i=1}^{nel} A_i k_{y,i} f_y = 0 \,, \tag{3.64}$$

onde *nel* é o número de elementos do modelo, A_i é a área do elemento finito, $k_{y,i}$ é o redutor da resistência ao escoamento do aço em função da temperatura média do elemento e f_y é a resistência ao escoamento do aço, sendo positiva quando o elemento estiver na região tracionada e negativa quando o elemento estiver comprimido. Caso a linha neutra plástica corte o elemento finito, o programa divide o elemento automaticamente em duas partes, uma comprimida e a outra tracionada.

Uma vez determinada a posição da linha neutra plástica, o momento fletor resistente da viga é calculado por meio da equação (3.65),

$$M_{R,fi} = \sum_{i=1}^{nel} A_i y_i k_{y,i} f_y \,, \tag{3.65}$$

onde y_i é a distância entre o centro geométrico do elemento *i* e a linha neutra plástica.

Para exemplificar a aplicação do programa ATERM-DIM será efetuada a análise térmica de uma viga de aço com seção transversal VS 200x19, conforme mostra a Figura 3.20, sendo a face externa da mesa inferior aquecida. Considera-se que a viga seja constituída de aço ASTM A-570 GR 36 cuja resistência ao escoamento à temperatura ambiente é igual a 250 MPa.

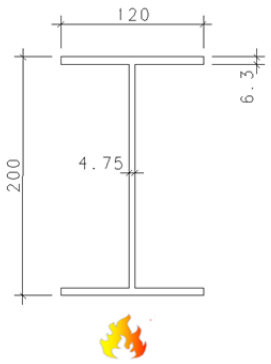

Figura 3.20: Viga VS 200x19 submetida ao incêndio (dimensões em mm).

A viga foi discretizada em 470 elementos quadrados de 3,15 mm de lado. As propriedades térmicas do aço estão apresentadas na Tabela 3.3. Após 60 minutos de incêndio, conforme a curva de incêndio-padrão ISO 834, a Figura 3.21 mostra a distribuição de temperaturas obtidas na viga de aço por meio do programa ATERM.

Conforme pode ser observado, durante o incêndio ocorre um gradiente térmico devido a diferença de temperaturas entre as mesas superior e inferior, o qual provoca diferentes reduções da resistência ao escoamento do aço.

Adotando-se os redutores da resistência ao escoamento do aço segundo as recomendações do Eurocode 3 parte 1.2 (2005), conforme mostra a Tabela 3.4, a Figura 3.21 apresenta a variação do momento fletor resistente característico em incêndio com o tempo de exposição ao incêndio.

Tabela 3.4: Redutores da resistência ao escoamento do aço

Temperatura ºC	20	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
k_y	1,00	1,00	0,78	0,47	0,23	0,11	0,06	0,04	0,02	0,00

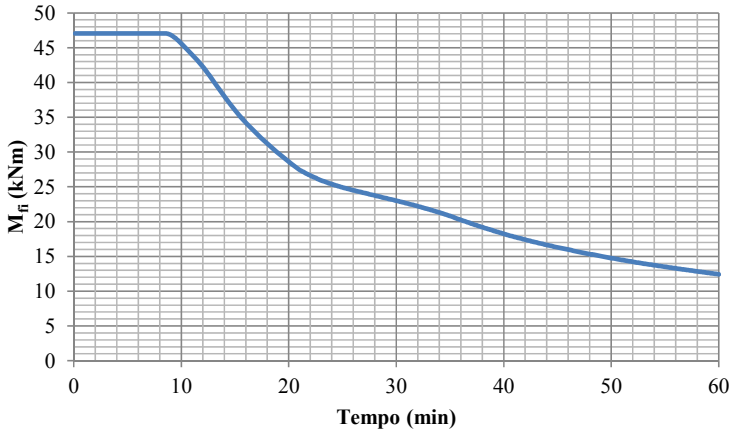

Figura 3.21: Variação do momento fletor resistente característico em função do tempo de exposição ao fogo.

Pode-se observar que após 8,50 minutos de exposição da viga ao incêndio-padrão, o aço começa a perder resistência, ou seja, a temperatura máxima da viga é superior a 400ºC. Aos 29 minutos de exposição ao incêndio, o momento fletor resistente da viga é cerca de 50% do momento fletor resistente à temperatura ambiente.

4. INSTABILIDADE DAS ESTRUTURAS

Os perfis de aço formados a frio são obtidos a partir da conformação a frio de chapas finas de aço e são produzidos em prensas dobradeiras ou em perfiladeiras. Esses processos de fabricação permitem a produção de uma grande variedade de seções transversais, conforme ilustra a Figura 4.1. Como esses perfis são constituídos de chapas esbeltas, o projeto dessas estruturas, à temperatura ambiente ou elevada, é governado pelos fenômenos de instabilidade local que, geralmente, são menos relevantes em importância nos perfis de aço laminados ou soldados.

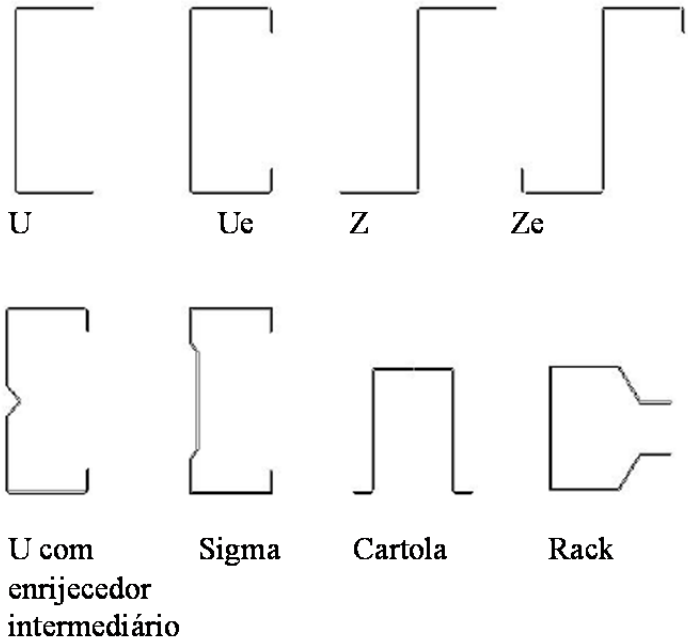

Figura 4.1: Tipos de seções transversais de perfis formados a frio.

No projeto de estruturas a noção de estabilidade está associada ao conceito de equilíbrio. Quando uma estrutura está submetida à ação de forças externas, exibe uma configuração de equilíbrio definida pelos valores dos deslocamentos ocorridos de forma que as forças internas equilibrem as externas em todos os seus pontos. A estabilidade dessa configuração pode ser avaliada por meio do comportamento da estrutura, após sofrer uma perturbação causada por uma pequena ação exterior arbitrária. Ao cessar essa perturbação, se a estrutura regressar à configuração de equilíbrio original, o equilíbrio é estável, caso contrário, quando os deslocamentos continuam a crescer indefinidamente, a configuração de equilíbrio é instável. A configuração de equilíbrio indiferente, quando os deslocamentos aumentam um determinado valor e não regressam à posição anterior à aplicação da perturbação, pode ser considerada como equilíbrio estável, não possuindo interesse em Engenharia de Estruturas.

A mudança da geometria da estrutura, decorrente das ações mecânicas, pode provocar o surgimento de fenômenos de instabilidade. A instabilidade pode surgir de dois modos: (i) instabilidade bifurcacional (Figura 4.2a) ou (ii) instabilidade por ponto limite, conhecido por *snap-through* na literatura anglo-saxônica. (Figura 4.2b).

O diagrama força-deslocamento de uma estrutura susceptível à instabilidade bifurcacional, como, por exemplo, o pilar de Euler, apresenta (ver a Figura 4.2a): (i) uma trajetória de equilíbrio fundamental (linear ou não linear), que se inicia na origem do diagrama força-deslocamento, (ii) uma trajetória de equilíbrio que não passa na origem do diagrama força-deslocamento e (iii) um ponto de bifurcação, que corresponde à interseção das duas trajetórias de equilíbrio e no qual as configurações de equilíbrio da trajetória fundamental passam de estáveis para instáveis.

Os fenômenos de instabilidade de estruturas em forma de arcos abatidos são caracterizados por meio do aparecimento de ponto-limite. Nesse caso, o diagrama força-deslocamento é caracterizado por (ver a Figura 4.2b): (i) uma trajetória de equilíbrio não linear, que se inicia na origem do diagrama, (ii) um ponto limite, que corresponde ao ponto de declividade nula da trajetória de equilíbrio e no qual as configurações de equilíbrio passam de estáveis para instáveis e (iii) caso a força for aumentada quando a estrutura se encontrar no ponto limite, a estrutura passa, dinamicamente, para uma configuração de equilíbrio afastada e, por isso, o fenômeno é denominado ponto limite com reversão. No caso de barras formadas de material com comportamento não linear, com imperfeições geométricas iniciais, não há equilíbrio estável após o ponto-limite que, assim, é chamado de ponto-limite sem reversão. Esse é o caso das barras de concreto ou de aço na região elastoplástica.

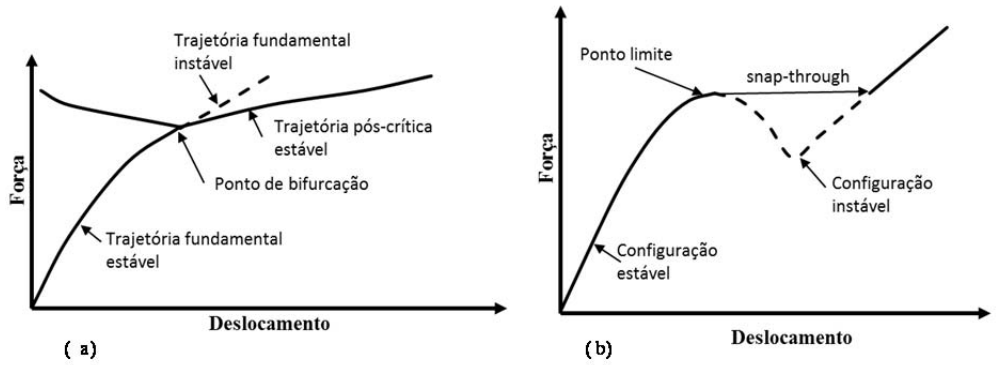

Figura 4.2: Tipos de instabilidade: (a) por bifurcação e (b) por ponto limite.

No caso de pilares de aço reais, ou seja, elementos com imperfeição geométrica inicial, tensões residuais e com material elastoplástico , o fenômeno da instabilidade ocorre por aparecimento de ponto limite conforme mostra a Figura 4.3.

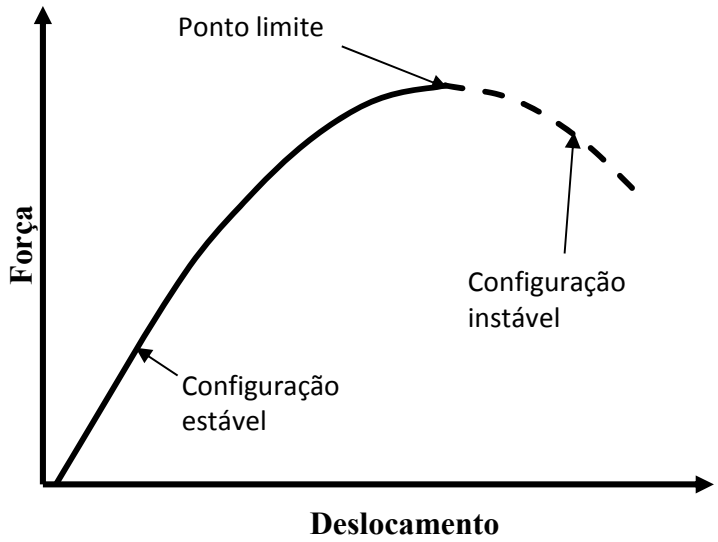

Figura 4.3: Instabilidade de pilares de aço reais por ponto limite.

A instabilidade bifurcacional, também conhecida como flambagem, é caracterizada pela ocorrência de duas ou mais trajetórias de equilíbrio, sendo que esse fenômeno só ocorre em sistemas estruturais ideais, ou seja, estruturas sem imperfeições geométricas iniciais (deslocamentos, excentricidades de força). Em estruturas com imperfeições geométricas iniciais, estruturas reais, observa-se que deixa de ocorrer bifurcação de equilíbrio, ou seja, só existe uma trajetória. O efeito das imperfeições geométricas iniciais de barras, chapas e cilindros provoca uma redução na rigidez do elemento estrutural, conforme mostra a Figura 4.4. As chapas sofrem uma considerável perda de rigidez para as forças superiores à força de bifurcação, mas não entram em colapso. Esse comportamento característico das chapas é denominado de resistência pós-crítica e deve ser considerado na avaliação da capacidade resistente última de chapas e de elementos estruturais constituídos de chapas finas, como é o caso dos perfis formados a frio.

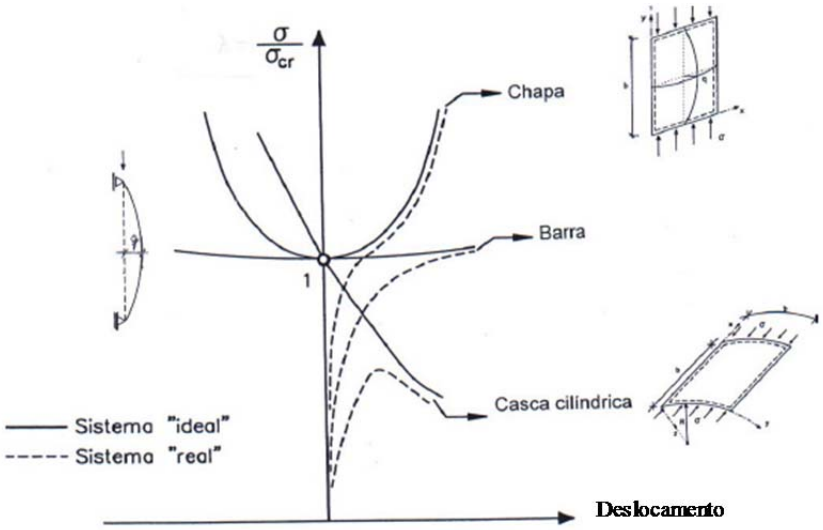

Figura 4.4: Trajetórias de equilíbrio, adaptada de Reis e Camotim (2001).

A análise de estabilidade de qualquer tipo de estrutura envolve (i) o estabelecimento das equações de equilíbrio na configuração deformada, (ii) as equações constitutivas, (iii) a consideração de relações cinemáticas não lineares e (iv) as equações de compatibilidade (Reis e Camotim, 2001).

Em muitos problemas de instabilidade bifurcacional, a trajetória fundamental de equilíbrio é linear e se pretende determinar somente a força crítica, ou seja, o menor valor de bifurcação e o respectivo modo de instabilidade, *i.e.,* o aspecto da configuração deformada.

Na análise linear de estabilidade de um sistema estrutural, as equações de equilíbrio são estabelecidas na configuração deformada e essas equações são linearizadas em relação aos deslocamentos envolvidos, isto é, são os deslocamentos que definem os modos de instabilidade. Desse modo, as equações de equilíbrio são estabelecidas em uma configuração deformada que está ligeiramente afastada da trajetória fundamental. Esse tipo de análise não fornece quaisquer indicações sobre a trajetória de equilíbrio da estrutura, ou seja, as deformações para forças superiores à força crítica de bifurcação do equilíbrio. Matematicamente, resolver um problema de análise linear de estabilidade de sistemas discretos (*i.e.* quando a configuração deformada da estrutura é definida por um número finito de parâmetros) conduz à solução de um problema de autovalores e autovetores, pois a força crítica anula o determinante da equação de equilíbrio tornando o sistema indeterminado. A anulação do determinante conduz a um sistema de equações características cuja solução são as forças de bifurcação do sistema discreto.

Para o conhecimento da trajetória de equilíbrio, considerando a não linearidade geométrica, de um sistema estrutural, é necessário considerar termos não lineares nas equações de equilíbrio, estabelecidas na configuração deformada, ou seja, efetuar uma análise não linear de estabilidade. Nesse tipo de análise, é necessária a utilização de métodos para a solução de sistemas de equações não lineares, tais como, por exemplo, o Método de Newton-Raphson e do Comprimento do Arco. É usual a utilização do modo de instabilidade crítico, obtido por meio da análise linear de estabilidade, como representativo das imperfeições iniciais que fazem parte do problema de instabilidade não linear.

Em relação à estabilidade dos perfis com seção aberta e parede fina (classificação dos perfis formados a frio, objetos de estudo da presente tese), podem ocorrer os modos de instabilidade de natureza global, local e distorcional:

(i) Os modos de instabilidade global por flexão, torção ou flexotorção, característicos de barras comprimidas, são caracterizados pela ocorrência de deformação do eixo da barra, sendo que a seção transversal da barra apresenta unicamente deslocamentos de corpo rígido (translação ou rotação). Na instabilidade global por flexão ocorre flexão da barra conforme mostra a Figura 4.5a. Na instabilidade global por flexotorção verifica-se a ocorrência de uma flexão em torno do eixo de menor inércia combinada com uma torção e empenamento da seção transversal (ver Figura 4.5b). A instabilidade por torção é característica de perfis duplamente simétricos e com baixa rigidez à torção (ver Figura 4.5c).

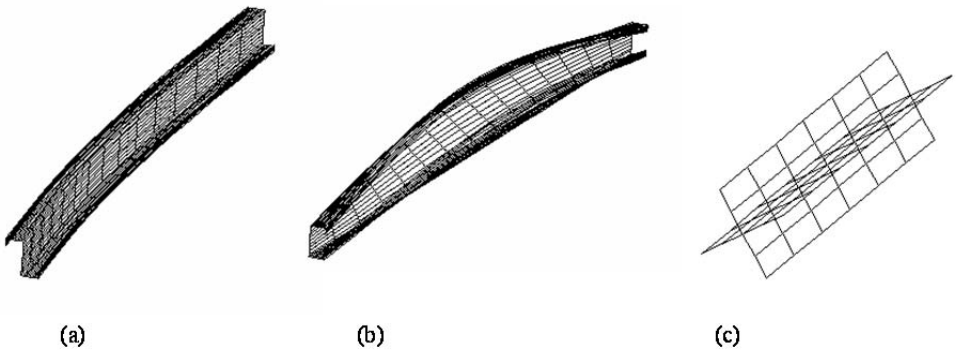

Figura 4.5: Modos de instabilidade globais: (a) de flexão, (b) de flexotorção e (c) de torção

(ii) Os modos de instabilidade locais envolvem as deformações das paredes da barra, permanecendo o seu eixo reto. É ainda conveniente distinguir entre os fenômenos de instabilidade local: (i) Modo Local de Chapa –

ocorre somente deslocamentos de flexão das paredes que constituem o perfil (i.e., os cantos que unem as chapas dos perfis permanecem indeslocados), conforme mostra a Figura 4.6a, e (ii) o Modo Distorcional – ocorrem flexão de uma ou mais chapas juntamente com deslocamentos dos cantos comuns a essas chapas, conforme ilustra a Figura 4.6b.

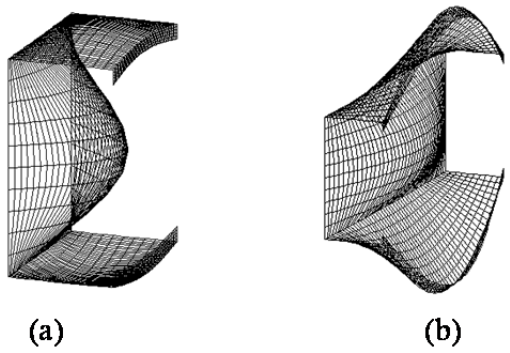

Figura 4.6: Modos de instabilidade locais: (a) local de chapa e (b) distorcional.

Atualmente há uma tendência de denominar os modos globais de flexão e flexotorção de efeitos locais, pois estes modos de instabilidade estão relacionados ao elemento estrutural. Os modos de instabilidade local de chapa e distorcionais são denominados de efeitos localizados, pois esses modos estão relacionados às deformações nas seções transversais do perfil. Nesta linha, os efeitos globais se referem ao comportamento de toda a estrutura.

Dependendo da sua geometria (forma e dimensões da seção transversal e comprimento), o comportamento estrutural de uma barra com seção aberta e parede fina pode ser tanto influenciado por qualquer um desses dois tipos de modos de instabilidade (global ou local), como por ambos simultaneamente.

Levando em consideração esses aspectos, uma barra com as características referidas pode classificar-se, de acordo com a relação que existe entre o comprimento e o comportamento de estabilidade como: (i) "barra curta", se ocorrer apenas o modo de instabilidade local, (ii) "barra longa", se ocorrer um modo de instabilidade global e, (iii) "barra intermediária", se a instabilidade ocorrer numa combinação de um modo local com um modo global.

Os perfis formados a frio são constituídos de seções de parede fina com elevada esbeltez, o que os tornam altamente suscetíveis a fenômenos de instabilidade local, distorcional e global. Assim, para a correta avaliação da eficiência estrutural desses elementos, é necessário o estudo de estabilidade dos perfis formados a frio. Esse estudo

envolve a identificação dos modos de instabilidade relevantes, o cálculo das tensões de bifurcação que os provocam e a determinação da trajetória de equilíbrio.

O valor da tensão crítica de bifurcação e a natureza do modo de instabilidade dependem do comprimento da barra, da forma e das dimensões da seção transversal e das condições de contorno, ou seja, das restrições aos deslocamentos e rotações existentes nas seções transversais localizadas nas extremidades da barra, (Prola, 2001).

Como os modos de instabilidade dependem fundamentalmente do comportamento das chapas que constituem a seção transversal do perfil, apresenta-se a seguir a revisão da análise de estabilidade de chapas.

4.1. Instabilidade de Chapas

As equações que descrevem a estabilidade elástica de chapas são dadas pelo sistema de equações diferenciais (4.1),

$$\begin{aligned} &N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ &N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \\ &D_f \nabla^4 w - \left(N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} \right) = p \end{aligned} \quad , \tag{4.1}$$

onde ∇^4 é o operador diferencial de quarta ordem definido pela equação (4.2),

$$\nabla^4 w \equiv w_{xxxx} + w_{yyyy} + 2w_{xxyy}, \tag{4.2}$$

N_x, N_y e N_{xy} são os esforços de membrana por unidade de comprimento da chapa associados a um modo de instabilidade e p é o carregamento perpendicular ao plano médio da chapa. D_f é a rigidez à flexão da chapa dada pela expressão (4.3),

$$D_f = \frac{Et^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \tag{4.3}$$

em que E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente, e t é a espessura da chapa.

A primeira solução desse problema foi investigada por Bryan, em 1891, para uma chapa retangular simplesmente apoiada submetida a forças de compressão uniforme no seu plano médio, conforme ilustra a Figura 4.7. Posteriormente, Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) estenderam esses estudos considerando outras condições de contorno.

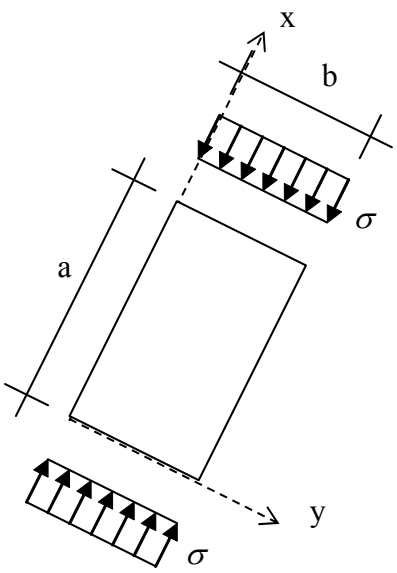

Figura 4.7: Chapa retangular submetida à compressão uniforme.

As condições de contorno da chapa simplesmente apoiada são dadas pelas equações (4.4),

$$\begin{aligned} w = w_{,xx} = 0 \qquad & \text{em} \quad x = 0, a \\ w = w_{,yy} = 0 \qquad & \text{em} \quad \mathrm{y} = 0, b \end{aligned} . \tag{4.4}$$

Na trajetória fundamental, a chapa está submetida a um estado uniaxial de tensão definido pelas expressões (4.5),

$$\begin{aligned} N_x &= -\sigma t \\ N_y &= N_{xy} = 0 \end{aligned} , \tag{4.5}$$

onde t é a espessura da chapa.

Substituindo as expressões (4.5) em (4.1), tem-se a equação (4.6),

$$D_f \nabla^4 w + \sigma t w_{,xx} = 0 . \tag{4.6}$$

As soluções da equação (4.6) que satisfazem as condições de contorno (4.4) podem ser escritas na forma de uma série dupla de Fourier, como mostra a equação (4.7) (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} sen \frac{m\pi x}{a} sen \frac{n\pi y}{b} , \tag{4.7}$$

onde w_{mn} são coeficientes a determinar.

Substituindo a solução (4.7) na equação diferencial (4.6), chega-se à equação (4.8), que permite obter os valores dos coeficientes w_{mn},

$$w_{mn}\left[\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-\frac{\sigma t}{D_f}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right]=0\,. \tag{4.8}$$

A partir da solução não trivial da equação (4.8) é possível concluir que existe um modo de instabilidade com *m* semicomprimentos de onda longitudinais e *n* semicomprimentos de onda transversais, o qual está associado a uma tensão de bifurcação $\sigma_b^{(mn)}$, cujo valor corresponde ao anulamento do termo entre colchetes da equação (4.8), ou seja:

$$\sigma_b^{(mn)}=k_{mn}\frac{\pi^2 E}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{t}{b}\right)^2, \tag{4.9}$$

onde

$$k_{mn}=\left(m\frac{b}{a}+\frac{n^2}{m}\frac{a}{b}\right)^2. \tag{4.10}$$

Para obter o valor da tensão crítica de bifurcação σ_{cr}, o menor dos valores das tensões de bifurcação, é necessário determinar a combinação de valores *m* e *n* que minimiza a equação (4.10). Observa-se que, independentemente do valor de *m*, o menor valor de k_{mn} corresponde sempre a *n=1* (uma única semionda transversal). Portanto, o coeficiente de bifurcação k_b é definido pela equação (4.11),

$$k_b=\left(m\frac{b}{a}+\frac{1}{m}\frac{a}{b}\right)^2. \tag{4.11}$$

O valor da tensão crítica de bifurcação σ_{cr} é obtido a partir do valor de *m* que minimiza a equação (4.11). A variação dos valores dos coeficientes de bifurcação com a relação entre as dimensões (*a* e *b*) da chapa está mostrada nas curvas da Figura 4.8.

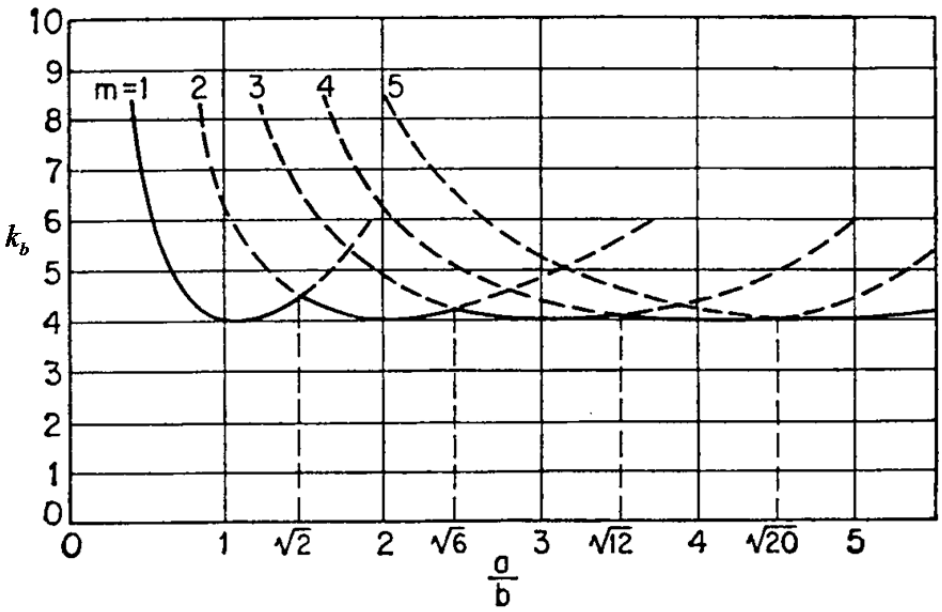

Figura 4.8: Variação dos coeficientes de bifurcação com a relação a/b (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959).

Observa-se que quando o comprimento da chapa for um múltiplo inteiro da sua largura, $k_b = 4$. Entretanto, para as chapas longas (*a>4b*), sempre se tem $k_b = 4$, para qualquer relação entre comprimento e largura da chapa.

A solução analítica do sistema de equações para outros carregamentos e condições de contorno não é trivial. O livro de Timoshenko e Gere (1963) disponibiliza uma série de resultados para vários casos de forças de compressão e de situações de apoio das chapas.

Nos casos em que a tensão de compressão da chapa isótropa ultrapassa o limite de proporcionalidade f_p, a equação (4.6) não é mais válida. Bleich (1952) propôs a equação diferencial (4.12) para a instabilidade de chapas em regime elastoplástico,

$$\begin{aligned} & R\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{R}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma t}{D_f}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ & R = \frac{E_t}{E} \end{aligned} , \qquad (4.12)$$

em que E_t é o módulo de elasticidade tangente.

A solução da equação diferencial (4.12) é dada pela equação (4.13),

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E\sqrt{R}}{12\left(1-\nu^2\right)\left(b/t\right)^2} k , \qquad (4.13)$$

em que *k* é o coeficiente de instabilidade elástica da chapa.

Depois de atingida a tensão crítica, as chapas desenvolvem grandes deformações, sem, no entanto, entrarem em colapso por instabilidade, como ocorre no caso dos elementos de barra. Como consequência, as chapas possuem uma reserva de resistência adicional ao valor da força crítica, cuja desconsideração no modelo de cálculo pode levar a perdas em termos de economia.

Para efetuar a análise linear de estabilidade, ou seja, a determinação da força crítica, a consideração apenas de pequenos deslocamentos é suficiente. No entanto na análise não linear de estabilidade, é necessário considerar pelo menos a Teoria das Deformações Moderadas, ou seja, as deflexões da chapa devem ser da mesma ordem de grandeza da espessura.

Em 1910, Von Kárman desenvolveu as equações diferenciais que traduzem uma primeira aproximação para o equilíbrio de uma chapa sem imperfeições na fase pós-crítica. Posteriormente, em 1939, Marguerre introduziu o efeito das imperfeições geométricas iniciais e chegou ao sistema de equações diferenciais (4.14), que são conhecidas como equação de equilíbrio e de compatibilidade, respectivamente,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial y^4} - \frac{t}{D_f}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0 \\ &\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right] = 0 \end{aligned} \quad , \quad (4.14)$$

onde (i) $w(x,y)$ e $w_0(x,y)$ são os deslocamentos transversais, totais e iniciais, no plano médio da chapa, (ii) h, D_f e E são, respectivamente, a espessura, a rigidez de flexão e o módulo de elasticidade da chapa e (iii) $F(x,y)$ uma função de tensão de Airy.

As forças de membrana N_x, N_y e N_{xy} podem ser relacionadas com a função de tensão de Airy por meio das equações (4.15),

$$\begin{aligned} N_x &= t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_y &= t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N_{xy} &= -t\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad . \quad (4.15)$$

No caso de chapas perfeitas, $w_0 = 0$, o sistema de equações diferenciais (4.14) coincide com as expressões obtidas por Von Kárman.

O fato de o sistema de equações diferenciais (4.14) ser acoplado conduz à conclusão de que a solução analítica seja extremamente difícil. A análise realizada por Timoskenko e Woinowsky-Krieger (1959) utilizou o princípio da energia potencial total mínima, aproximando os deslocamentos *u, v* e *w* por funções simples. Utilizando o Método de Galerkin, Volmir (1967) *apud* Chajes (1975) também obteve uma solução analítica fechada para o sistema de equações diferenciais (4.14).

A tensão normal σ_x da chapa quadrada de lado *a* simplesmente apoiada, obtida por Volmir (1967), é obtida por meio da equação (4.16),

$$\sigma_x = \sigma_{cr} + \frac{E\pi^2 f^2}{8a^2}, \tag{4.16}$$

onde f é a deflexão máxima da chapa e σ_{cr} é a tensão crítica de bifurcação para uma chapa quadrada simplesmente apoiada submetida a compressão uniaxial, sendo dada pela equação (4.17),

$$\sigma_{cr} = \frac{4D_f \pi^2}{ta^2}, \tag{4.17}$$

em que D_f é a rigidez à flexão e *t* é a espessura da chapa.

A representação gráfica da variação da tensão normal σ_x com a máxima deflexão *f* da chapa sem imperfeição geométrica inicial, descrita pela expressão (4.16), está mostrada na Figura 4.9a. Como esperado, a chapa começa a deformar-se mais rapidamente depois de atingir a força crítica (obtida por meio da análise linear de estabilidade). Para além desse ponto, enquanto o deslocamento transversal é pequeno, a rigidez da chapa é praticamente nula, isto é, a inclinação da curva força-deslocamento é quase zero. Entretanto, à medida que o deslocamento transversal aumenta, a rigidez da chapa também aumenta. Por resistir a carregamentos axiais superiores à força crítica de bifurcação, as chapas finas que instabilizam com pequenas tensões, podem resistir a grandes forças sem apresentar colapso. Esta característica das chapas é conhecida como capacidade resistente pós-crítica e pode ser explicada fisicamente pelo efeito de Poisson nos elementos bidimensionais, ou seja, as fibras transversais tracionadas têm um efeito contrário às deformações das fibras longitudinais comprimidas proporcionando um acréscimo de rigidez (Carvalho *et al*, 2004). Quando os efeitos das imperfeições iniciais são tomados em consideração na análise não linear de estabilidade da chapa, o gráfico da relação tensão versus flecha deixa de ter o ponto de bifurcação, como mostra a Figura 4.9b. (Reis e Camotim, 2001).

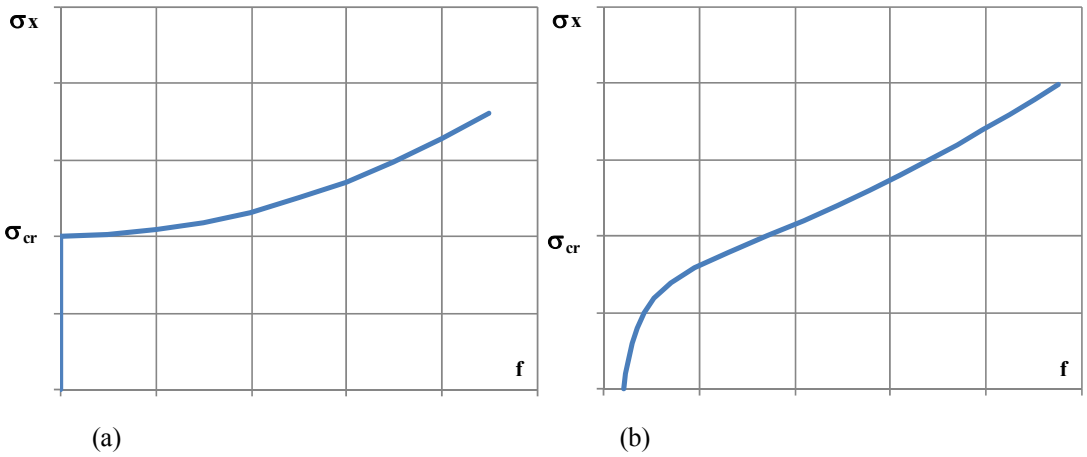

Figura 4.9: Variação da tensão com o deslocamento na região pós-crítica: (a) chapa sem imperfeição e (b) chapa com imperfeição.

Na mesma linha de pesquisa, alguns autores utilizaram métodos energéticos para o estudo do comportamento pós-crítico de chapas, os quais se destacam: (i) Marguerre e Trefftz (1937) consideraram apenas os deslocamentos de flexão, sendo, posteriormente, denominado de métodos semienergéticos (Rhodes e Harvey, 1977), para o estudo do comportamento pós-crítico de chapas, (ii) Yamaki (1960) que utilizou o Método de Galerkin para estudar o comportamento pós-crítico de chapas, ideais e com imperfeições geométricas, com diferentes condições de contorno, (iii) os trabalhos de Rhodes e Harvey (1971 e 1975) que utilizaram o Princípio da Energia Potencial Mínima para estudar o comportamento pós-crítico de chapas com várias condições de apoio e submetidas a diferentes distribuições de tensões e (iv) Sherboune e Bedair (1993) que verificaram a influência das condições de apoio no comportamento pós-crítico de chapas. Um estudo de instabilidade de chapas submetidas a tensões longitudinais variáveis foi realizado por Yu e Schafer (2007) e Szychowski (2008), onde desenvolveram modelos semianalíticos utilizando métodos energéticos.

Alguns autores (Paik e Kim (2002), Paik e Lee (2005), Brubak e Hellesland (2007a e 2007b)) estudaram a instabilidade de chapas com enrijecedores, do tipo mostrado na Figura 4.10. O trabalho de Byklum e Amdhal (2002) sobre o comportamento pós-crítico do modo local (Figura 4.10b), caracterizado por deformações locais na chapa e no enrijecedor, foi complementado por Byklum *et al* (2004), que abordaram o modo de instabilidade global (Figura 4.10a), caracterizado por deformações de flexão do enrijecedor e da chapa. Brubak e Hellesland (2008) propõem um método para a avaliação da capacidade resistente de chapas enrijecidas utilizando o Método de Rayleigh-Ritz e a teoria das grandes deformações. Os resultados analíticos

são comparados com análises não lineares por meio do método dos elementos finitos. Brubak e Hellesland (2008) concluem, como era de se esperar, que em chapas com grandes enrijecedores a força crítica é mais elevada do que chapas com enrijecedores de pequena altura. O modo de instabilidade global torna-se crítico para enrijecedores de pequena altura.

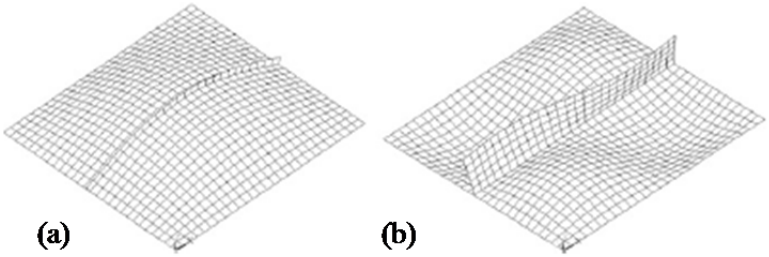

Figura 4.10: Modos de instabilidade de chapa com enrijecedor: (a) global, (b) local (Adaptada de Brubak e Hellesland (2008))

Em relação à estabilidade de chapas com enrijecedores longitudinais cita-se o programa EBPLATE, desenvolvido por Galéa e Martin (2010), o qual permite a obtenção da força crítica de instabilidade.

Recentemente, Maiorana *et al* (2011) analisaram analíticamente a estabilidade linear de chapas com enrijecedores longitudinais de vários tipos e geometrias, submetidas a forças de compressão axial, flexão e cisalhamento. Estudaram também a posição otimizada dos enrijecedores.

A seguir são comentadas, resumidamente, as características de cada um dos modos de instabilidade identificados e as situações em que podem ser críticos.

4.2. Modos de Instabilidade

4.2.1. Modos Globais

A Teoria Linear de Estabilidade teve seu início com os trabalhos de Euler, em 1744, sobre a instabilidade global por flexão de pilares de comportamento elástico, simplesmente apoiados, submetidos à compressão centrada. Durante muitas décadas, esse foi o único fenômeno de instabilidade estudado. Segundo Bleich (1952), no ano de 1899, Michell e Prandtl publicaram os primeiros estudos sobre a instabilidade global torsional de uma viga de seção retangular, utilizando a teoria de torção uniforme de Saint-Venant (1855). Timoshenko (1905) continuou esse estudo considerando o efeito do empenamento em vigas de seção I.

A determinação das forças críticas de bifurcação de pilares, associadas à instabilidade global, foi alvo, ao longo dos anos, da atenção de um considerável número

de projetistas e pesquisadores. Estudaram-se pilares com diferentes condições de contorno e diversos casos de carregamento. Resultados de grande relevância da análise de instabilidade estão disponíveis nas publicações de Timoshenko e Gere (1963), Bleich (1952) e Bazant e Codolin (1991).

Com base em uma importante contribuição de Wagner (1936), Vlasov (1961) desenvolveu uma teoria geral de torção não uniforme aplicada a barras de seção aberta e de parede fina. Inicialmente, a teoria geral foi aplicada a problemas relativamente simples, os quais não demandavam grandes esforços de cálculo. Os livros de Trahair (1993) e Reis e Camotim (2001) são referências importantes no estudo dos fenômenos de estabilidade estrutural.

Nos modos de instabilidade globais em barras comprimidas, as seções transversais praticamente não se deformam, sofrendo unicamente deslocamentos de corpo rígido. A instabilidade global de pilares apresenta-se de três formas: (i) modo global por flexão – ocorre em seções duplamente simétricas e seções com um ponto de simetria (i.e. seções Z), (ii) modo global por torção – ocorre em seções duplamente simétricas com baixa rigidez à torção e (iii) modo global por flexotorção – ocorre em seções com um ou nenhum eixo de simetria.

Os modos globais são críticos em barras suficientemente longas e que não estejam suficientemente contraventadas. A configuração desses modos é dependente das condições de apoio da barra e, geralmente, nos casos de instabilidade por flexão e flexotorção, apresenta um semicomprimento de onda. Ilustram-se na Figura 4.11 os modos de instabilidade por flexão e flexotorção,

Considerando uma barra perfeita, ou seja, sem imperfeições geométricas, submetida à compressão centrada, a força crítica de instabilidade de Euler (P_{cr}) por flexão é dada pela expressão (4.18),

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}, \tag{4.18}$$

onde EI é a rigidez à flexão e KL é o comprimento efetivo do pilar.

A expressão (4.18) é válida para regimes elásticos, onde a tensão da barra é inferior ao limite de proporcionalidade do material f_p. Salienta-se que a tensão de proporcionalidade está diretamente ligada as tensões residuais, como será explicado no item 3.5.

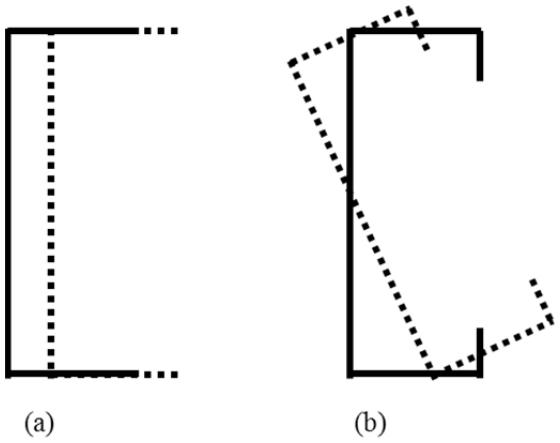

Figura 4.11: Modos globais de uma barra: (i) por flexão, (ii) por flexotorção.

Quando a tensão na barra é superior ao limite de proporcionalidade, o regime é elastoplástico. Nesse regime ocorre uma perda de linearidade do diagrama tensão-deformação entre o limite de proporcionalidade f_p e a resistência ao escoamento do aço f_y, conforme mostra a Figura 4.12.

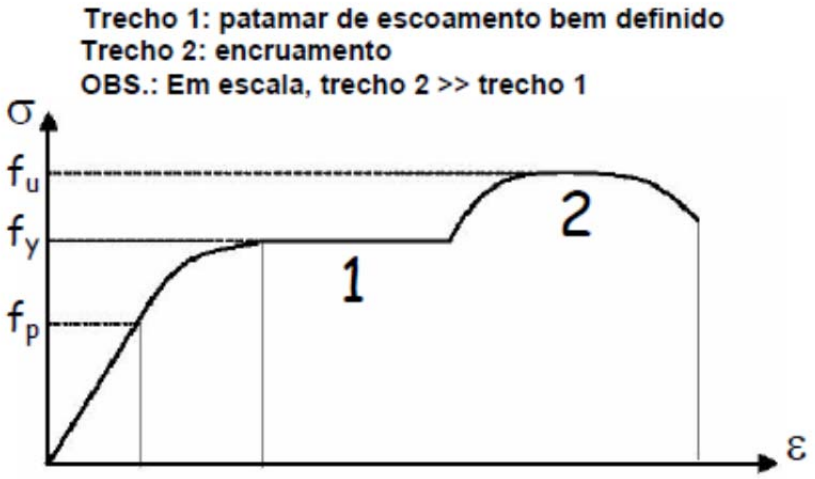

Figura 4.12: Diagrama tensão-deformação para aços com patamar de escoamento (Adaptado de Chodraui, 2006).

Para a análise de instabilidade no regime elastoplástico, uma abordagem possível e usual consiste em utilizar os conceitos de módulo tangente e módulo reduzido, os quais são descritos a seguir. Uma abordagem mais detalhada desses conceitos pode ser encontrada nos livros de Bleich (1952) e de Galambos (1998).

O cálculo da força crítica no regime elastoplástico foi sugerido pela primeira vez em 1889, quando Engesser propôs a utilização da força de Euler (equação (4.18)) substituindo-se o módulo de elasticidade E pelo módulo de elasticidade tangente E_t, cujo valor varia de acordo com a derivada da tensão em relação à deformação, conforme

mostra a Figura 4.13. Nessa proposta, a força crítica no regime elastoplástico é dada pela equação (4.19),

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{(KL)^2}. \tag{4.19}$$

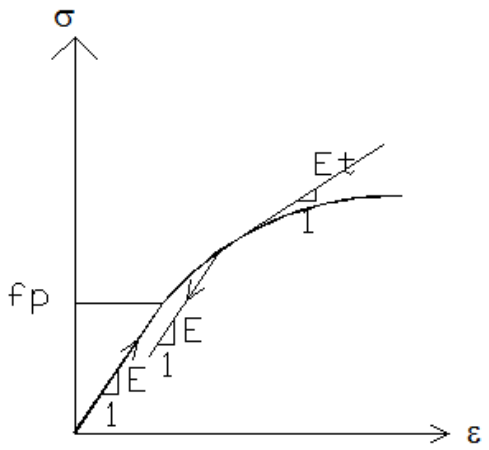

Figura 4.13: Diagrama tensão-deformação do aço.

Segundo Yu (2000), no ano de 1895, Jasinky concluiu que o conceito do módulo tangente estava errado, pois as hipóteses de Engesser não consideravam o descarregamento elástico do material. Anos mais tarde, Engesser corrigiu sua teoria e desenvolveu o conceito do módulo reduzido ou duplo módulo que conduz à força crítica definida pela equação (4.20),

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi^2 E_r I}{(KL)^2} \\ E_r &= E\left(\frac{I_1}{I}\right) + E_t\left(\frac{I_2}{I}\right) \end{aligned}, \tag{4.20}$$

onde I_1 é o momento de inércia relativo à parte tracionada da seção transversal na fase de descarga e I_2 é o momento de inércia relativo à parte comprimida da seção transversal na fase de carregamento.

Durante vários anos, houve uma grande polêmica no uso dessas duas teorias. Pela Teoria da Estabilidade Clássica, o conceito do módulo reduzido era mais correto. Porém, as forças de colapso obtidas em laboratório se aproximavam mais das forças obtidas pelo módulo tangente.

Acreditava-se que as discrepâncias dos resultados entre os modelos teóricos e os ensaios eram devidas às imperfeições geométricas iniciais da barra e à excentricidade da aplicação da força, que não podiam ser totalmente eliminadas durante o ensaio.

Para confirmar essa hipótese, Shanley (1947), utilizando um modelo de duas barras rígidas, mostrou que uma barra poderia fletir com um aumento da força previsto pelo modelo do módulo tangente. Desta forma, dada uma imperfeição infinitesimal para provocar flexão na barra, a força proposta pela teoria do módulo reduzido não poderia ser encontrada.

A partir do modelo de Shanley (1947) pôde-se concluir que: (i) a teoria do módulo tangente fornece a força máxima para a qual o pilar permanece reto, (ii) a força de resistência última excede a força do módulo tangente P_T e é inferior à força obtida pelo módulo reduzido P_R e (iii) para forças superiores a P_T ocorrem deslocamentos laterais (perpendiculares ao eixo da barra).

Mais adiante, Bleich (1952) propôs a equação (4.21) para servir como aproximação para a equação da força crítica obtida pelo módulo tangente,

$$P_{cr} = Af_y\left(1-\frac{f_y}{4\sigma_e}\right), \tag{4.21}$$

em que f_y é a resistência ao escoamento do aço e σ_e é a tensão elástica de Euler.

A equação (4.21) é uma curva conservadora aproximada da força crítica proposta pelo SSRC (*Structural Stability Research Council*) (Yu, 2000) para aços laminados a quente considerando os efeitos das tensões residuais e que o limite de proporcionalidade seja igual à metade da resistência ao escoamento do aço. Essa curva também pode ser adotada no projeto de perfis de aço formados a frio.

As curvas de dimensionamento das tensões em função do índice de esbeltez dadas pelas expressões (4.22), que são utilizadas na análise de instabilidade global, estão apresentadas na Figura 4.14,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}, \tag{4.22}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

sendo r o raio de giração da seção dado pela equação (4.23),

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}. \tag{4.23}$$

onde I e A são o momento de inércia e a área da seção transversal, respectivamente.

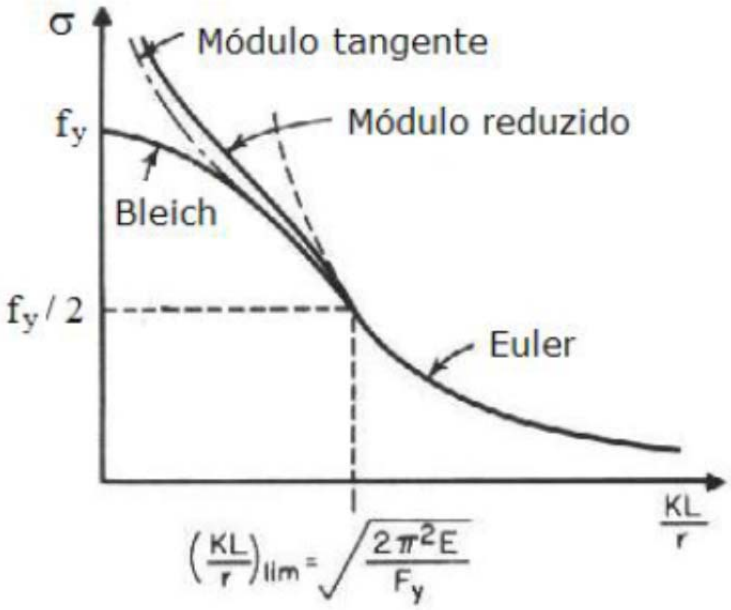

Figura 4.14: Variação da tensão com o índice de esbeltez para instabilidade global (Adaptada de Yu, 2000)

Além da instabilidade de Euler (ou instabilidade por flexão), os elementos lineares comprimidos constituídos de seções abertas e de parede fina podem apresentar fenômenos de instabilidade de torção ou flexotorção. Estes modos de instabilidade são característicos de barras longas e de seções transversais de baixa rigidez à torção. A instabilidade por torção deve-se à rotação das seções transversais em torno do eixo do elemento, o qual permanece reto, e ocorre em perfis duplamente simétricos com rigidez torsional muito pequena, como por exemplo, nas seções em formato de cruz (ver Figura 4.15a). Os perfis com seções com um ou nenhum eixo de simetria, por exemplo, nas seções cantoneiras e em *U*, apresentam instabilidade por flexotorção. Neste caso, o perfil apresenta uma instabilidade por flexão, transladando seu eixo para a posição deformada e, juntamente, com uma instabilidade por torção, ou seja, as seções transversais são rotacionadas em torno do eixo de cisalhamento, conforme mostra a Figura 4.15b.

No caso de barras que se instabilizam por torção ou flexotorção, as seções transversais sofrem rotação em torno do seu próprio eixo e podem empenar, ou seja, após a deformação as seções transversais deixam de estar contidas em um plano.

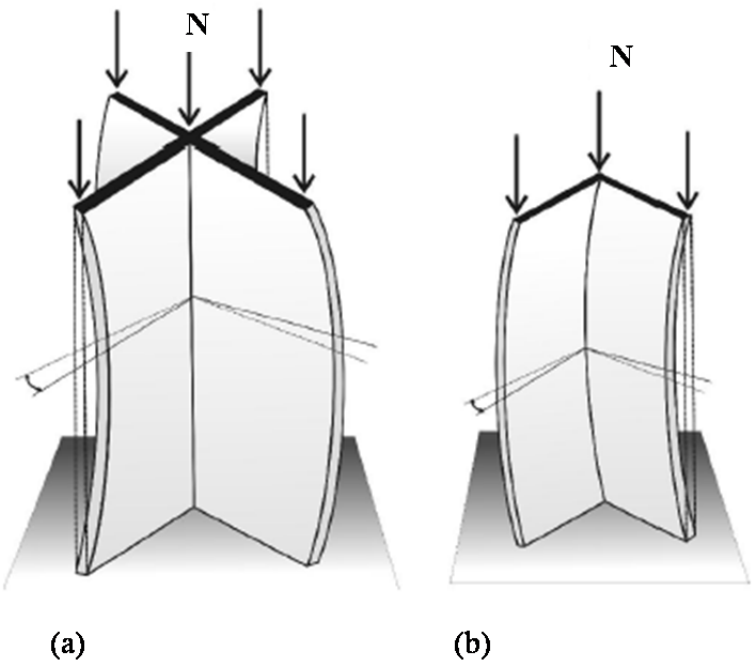

Figura 4.15: Modos de instabilidade global: (a) por torção, (b) por flexotorção (adaptada de Silva e Silva, 2008).

O estudo de instabilidade uma barra simplesmente apoiada de comprimento *l* submetida à compressão uniforme *N*, indeformável axialmente e submetida à torção não uniforme, ou seja, as seções transversais rotacionam em torno do seu próprio eixo e empenam (*i.e.* deixam de estar contidas em um plano), requer a solução do sistema de equações diferenciais (4.24),

$$\begin{aligned} &EI_z v_{,xxxx} + N\left(v_{,xx} - z_0\phi_{,xx}\right) = 0 \\ &EI_y w_{,xxxx} + N\left(w_{,xx} + y_0\phi_{,xx}\right) = 0 \\ &EC_w\phi_{,xxxx} - GI_t\phi_{,xx} + N\left(r_0^2 - y_0 w_{,xx} + z_0 v_{,xx}\right) = 0 \end{aligned} \quad , \qquad (4.24)$$

onde *x* é o eixo da barra, ϕ é o ângulo de torção da barra em torno do eixo que passa pelo centro de cisalhamento da seção transversal, *G* e *E* são os módulos de cisalhamento e de elasticidade do material, I_y e I_z são os momentos de inércia em relação aos eixos principais de inércia *y* e *z*, respectivamente, I_t é o momento de inércia à torção, C_w é a constante ao empenamento, o qual é fornecido pela ABNT NBR 6335:2003 para as seções mais usuais e r_0 é o raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de cisalhamento dado pela equação (4.25),

$$r_0^2 = r_y^2 + r_z^2 + y_0^2 + z_0^2 , \qquad (4.25)$$

onde r_y e r_z são os raios de giração em relação aos eixos principais de inércia *y* e *z*, respectivamente, e y_0 e z_0 são as coordenadas do centro de cisalhamento na direção dos

eixos principais de inércia y e z, respectivamente, em relação ao centro geométrico da seção.

No caso particular de um pilar de comprimento l, simplesmente apoiado nas direções y e z e cujos apoios impedem a rotação de torção, mas permitem o empenamento da seção, as condições de contorno são dadas pelas equações (4.26),

$$\begin{aligned} &v(0) = v(l) = w(0) = w(l) = 0 \\ &v_{,xx}(0) = v_{,xx}(l) = w_{,xx}(0) = w_{,xx}(l) = 0\,. \\ &\phi(0) = \phi(l) = \phi_{,xx}(0) = \phi_{,xx}(l) = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Pode-se mostrar (Trahair, 1993) que a solução do sistema de equações diferenciais (4.24) é dada pelas expressões (4.27),

$$\begin{aligned} v &= C_1 sen\frac{\pi x}{l} \\ w &= C_2 sen\frac{\pi x}{l}, \\ \phi &= C_3 sen\frac{\pi x}{l} \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes a determinar.

Substituindo as equações (4.26) e (4.27) em (4.24), chega-se ao sistema de equações lineares (4.28),

$$\begin{bmatrix} \left(N_{ez} - N\right) & 0 & Nz_0 \\ 0 & \left(N_{ey} - N\right) & -Ny_0 \\ Nz_0 & -Ny_0 & r_0^2\left(N_{ex} - N\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

onde N_{ey} e N_{ez} são as forças de instabilidade elástica de flexão em relação aos eixos principais y e z e são fornecidas pelas equações (4.29) e (4.30), respectivamente. N_{ex} é a força de instabilidade elástica de torção em relação ao eixo longitudinal x e é dado pela equação (4.31),

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}, \tag{4.29}$$

$$N_{ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}, \tag{4.30}$$

$$N_{ex} = \frac{1}{r_0^2}\left(GI_t + \frac{\pi^2 EC_w}{l^2}\right). \tag{4.31}$$

A solução não trivial do sistema de equações lineares (4.28) é fornecida por meio da equação cúbica (4.32),

$$r_0^2\left(N-N_{ey}\right)\left(N-N_{ez}\right)\left(N-N_{ex}\right)-N^2z_0^2\left(N-N_{ey}\right)-N^2y_0^2\left(N-N_{ez}\right)=0\,.(4.32)$$

Assim, a força crítica (N_{cr}) de bifurcação do pilar é igual à menor raiz da equação (4.32).

4.2.2. Modos Locais

As barras curtas podem ser suscetíveis a fenômenos de instabilidade local, que são caracterizados pela instabilidade das chapas que constituem o elemento estrutural. Para as seções em *Ue,* por exemplo, a deformação da seção deve-se à flexão da alma e da mesa, enquanto os enrijecedores possuem uma borda livre e, consequentemente, sofrem predominantemente deslocamentos de corpo rígido. Esse fato ilustra-se na Figura 4.16, onde se observa que o modo local de chapa (*MLC*) da seção em *Ue* representada, submetida à compressão uniforme, é induzido pela instabilidade da alma (chapa mais esbelta). A deformação das mesas e enrijecedores deve-se, unicamente, à compatibilidade que as rotações de flexão têm que satisfazer nas bordas longitudinais alma-mesa.

A estabilidade local da barra é condicionada pelo comportamento da chapa mais susceptível à instabilidade por flexão, cujo fenômeno depende da esbeltez das várias chapas da seção transversal e da distribuição das tensões atuantes. Em termos físicos, na tese de Prola (2001), o *MLC* está descrito da seguinte maneira:

(i) O modo de instabilidade de chapas é caracterizado pela instabilidade, por flexão, da chapa condicionante, sendo que as chapas restantes, por compatibilidade, acompanham as deformações;

(ii) O comportamento da barra pode ser modelado por meio de uma barra comprimida (total ou parcialmente) cujos cantos das chapas estão na condição de engastamento elástico, de modo que as molas de rotação traduzem as influências do comportamento das chapas restantes da barra.

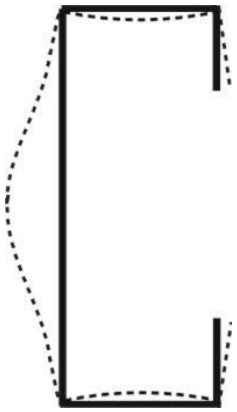

Figura 4.16: Modo local de chapa uma barra em *Ue* influenciado pela alma.

A análise linear de estabilidade de uma seção, modelada como um conjunto de chapas isoladas, é dificultada pela necessidade de compatibilizar as rotações que ocorrem nas bordas longitudinais adjacentes. A rigor, a instabilidade da seção pode ser analisada por meio do comportamento de qualquer uma das suas chapas, desde que se conheça o grau de restrição às rotações existentes nas bordas longitudinais da chapa (*i.e.,* a rigidez das molas elásticas que modelam estas restrições). Uma abordagem conservadora consiste em admitir-se que esta rigidez seja nula, o que vale dizer que todas as bordas longitudinais estão simplesmente apoiadas. Nessa linha de pensamento, nos elementos comprimidos a instabilidade de cada chapa independe das restantes e, portanto, admite-se que a tensão de bifurcação da seção é condicionada pelo comportamento do elemento de menor tensão crítica.

A primeira análise sistemática e consistente de estabilidade de seções deve-se a Lundquist *et al* (1943), que utilizaram o método de distribuição de momentos para resolver o sistema de equações diferenciais de equilíbrio de seções uniformemente comprimidas. Posteriormente, Chilver (1951) validou, experimentalmente, os resultados teóricos de Lundquist *et al* (1943).

Logo a seguir, Bleich (1952) determinou expressões para tensões de bifurcação no *MLC*, a partir da resolução das equações diferenciais de equilíbrio relativas a cada chapa, satisfazendo as condições de contorno, estáticas e cinemáticas, relativas à continuidade de deformações nas bordas longitudinais. Chilver (1953) e Bulson (1967) escreveram as equações de equilíbrio em forma matricial, cujos coeficientes dependem, não linearmente, do parâmetro de força (tensão). O menor valor desse parâmetro que anula o determinante da matriz fornece a tensão crítica de bifurcação da seção.

A estabilidade de seções em *Ue* submetidas à flexão composta foi estudada por Walker (1966) que considerou, separadamente, os comportamentos: (i) da alma,

modelando-a como uma chapa sujeita à compressão uniforme com as rotações elasticamente restringidas nas bordas longitudinais e (ii) das mesas, como sendo chapas submetidas à compressão linearmente variável e com uma borda longitudinal (mesa-alma) engastada elasticamente e com a outra (mesa-enrijecedor) articulada.

Ainda dentro da pesquisa de soluções analíticas, Rhodes e Harvey (1976) analisaram o comportamento de seções em *U,* submetidas à compressão uniforme na alma e variável nas mesas, baseados em métodos energéticos.

O estudo do comportamento pós-crítico de seções abertas e de parede fina, que se instabilizam no *MLC*, requer a consideração da compatibilidade entre os deslocamentos e as rotações, e o equilíbrio das forças e dos momentos ao longo das chapas que constituem a seção. A solução analítica das equações não lineares de equilíbrio combinadas com essas condições adicionais de equilíbrio e compatibilidade, torna-se de difícil obtenção, sendo restringida a um número reduzido de problemas. Nesse contexto, Benthem (1959) obteve, de forma analítica, o comportamento pós-crítico de um pilar de seção em *U*, tendo chegado a resultados precisos.

Durante a década de 1960, o estudo do comportamento pós-crítico de seções abertas e de parede fina era realizado por meio de métodos aproximados, os quais envolviam um grande volume de cálculos. Utilizando o método de Rayleigh-Ritz e a hipótese de que a configuração deformada das paredes deva permanecer inalterada, Graves Smith (1968, 1969) estudou a perda de rigidez de um pilar tubular retangular devido aos fenômenos de instabilidade locais de chapa. Essa hipótese pode ser considerada válida apenas na fase inicial do comportamento pós-crítico.

Contribuindo para o conhecimento da fase pós-crítica associada ao *MLC*, Rhodes e Harvey (1971 e 1975) estudaram, analiticamente, o comportamento de barras curtas de seções em *U* e *Ue* submetidas à compressão uniforme e linearmente variável. Eles utilizaram o método de Rayleigh-Ritz combinado com a formulação energética, sendo que os resultados obtidos apresentaram boa correlação com os ensaios experimentais realizados por Winter (1968).

Nas seções enrijecidas constituídas por chapas finas, tais como, *Ue, Ze, rack* e *cartola,* a instabilidade local pode ser caracterizada pela distorção da seção transversal. Na configuração do modo local de chapa (*MLC*), por definição, está sempre garantida a conservação original das bordas longitudinais (linhas de dobra), as quais permanecem retas ao longo do perfil, assim como os ângulos formados entre as chapas vizinhas. O modo distorcional envolve deslocamentos de flexão e de membrana e inclui

deslocamento nas linhas de dobra provocando distorção na seção transversal. A instabilidade distorcional dos elementos comprimidos envolve a rotação, em sentidos opostos, do conjunto mesa e enrijecedor sobre a junção mesa-alma conforme mostra a Figura 4.17.

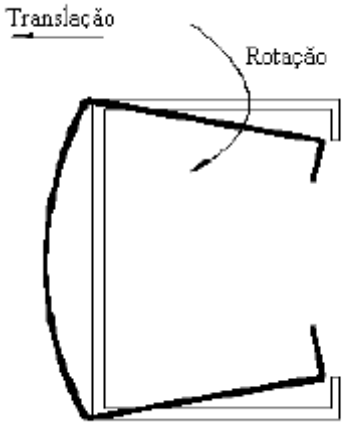

Figura 4.17: Modo Distorcional, (Hancock, 1997).

Uma caracterização detalhada do *MD* foi elaborada por Hancock (1985), que fez estudos analítico e experimental, sobre o comportamento de pilares usados em estruturas de armazenamento, submetidos à compressão uniforme.

Mais tarde, Lau e Hancock (1987) desenvolveram expressões analíticas para calcular as tensões de bifurcação do *MD*.

O mesmo tipo de estudo foi realizado por Hancock (1997) para vigas (seção submetida à flexão pura em torno do eixo de maior inércia) de perfis formados a frio de mesma tipologia (*Ue* e em *rack*) no intuito de encontrar fórmulas simplificadoras de fácil aplicação prática.

Por meio de um modelo analítico semelhante aos trabalhos anteriores, Li e Chin (2008) propuseram fórmulas analíticas para a determinação de tensões críticas para o *MD* dos perfis formados a frio com seção em *Ue*, *Z* e *Sigma* submetidos à compressão uniforme e variável. Depois, Chen *et al* (2010) fizeram um conjunto de testes experimentais em seções (*U* e *Ue*) com enrijecedores longitudinais, uniformemente comprimidas, com comprimentos para os quais o *MD* é o modo crítico. O estudo foi complementado com cálculos analíticos comparativos da resistência última usando as normas australiana AS/NZ 4600 (2005) e a norte-americana AISI (2007). No presente ano, Cheng e Yan (2011) propuseram um método de determinação da largura efetiva para o *MD* de seções *Z* e *Ue* sob flexão, que foi comparado com resultados experimentais disponíveis na literatura.

4.3. Métodos Numéricos

A partir dos avanços dos recursos computacionais, houve uma progressiva substituição dos métodos analíticos pelos métodos numéricos nas soluções dos problemas de estabilidade de perfis constituídos por paredes finas.

Em um trabalho onde faz uma revisão dos métodos numéricos empregados na solução de problemas que envolvem fenômenos de instabilidade, Camotim (2006) relaciona quatro tipos de modelagem numéricas que são empregadas por diversos pesquisadores na abordagem dos modos locais e globais, ou seja, modos que envolvam os efeitos localizados e locais: (i) modelagem em elementos de casca geometricamente não lineares por meio do Método dos Elementos Finitos (*MEF*), (ii) Método das Faixas Finitas Semi-Analítico (*MFF*), (iii) Método das Faixas Finitas Splines (MFFS) e (iv) por meio de elementos de barra com a formulação da Teoria Generalizada de Vigas (TGV).

Nessa Tese, por se tratar de análises de instabilidade de perfis formados a frio, opta-se pelo uso do Método das Faixas Finitas Splines (MFFS), o qual tira partido da natureza prismática da maioria dos elementos estruturais constituídos de parede fina, ocasionando uma elevada redução no número de graus de liberdade quando comparados aos modelos de elementos finitos de casca. Na direção longitudinal, os deslocamentos do perfil são aproximados por funções "B_3-Spline", i.e. combinações de quatro polinômios cúbicos (De Boor, 1978), fazendo com que seja possível manter uma elevada eficiência computacional em comparação com elementos de casca. Assim, o método permite analisar elementos estruturais submetidos a forças aplicadas ao longo do vão ou com diferentes condições de apoio e assegura a compatibilidade entre deslocamentos transversais de membrana e flexão, ao longo das linhas de dobra do perfil. Este último aspecto tem grande relevância quando se analisa, por exemplo, o comportamento pós-crítico de perfis que se instabilizam no modo distorcional.

Entre os citados, o *MEF* é o método mais difundido na área de engenharia de estruturas pela sua versatilidade e pelos inúmeros programas computacionais comerciais disponibilizados, além de sua sólida fundamentação matemática que lhe dá confiabilidade. Para análises de instabilidade de perfis de seção aberta e de parede fina são, normalmente, utilizados elementos de casca geometricamente não lineares. No interior de cada elemento, os deslocamentos são aproximados por funções de forma, geralmente polinômios, cujos coeficientes são os deslocamentos generalizados. No caso de análises de instabilidade de perfis formados a frio, a necessidade de modelar

adequadamente os vários modos de instabilidade faz com que o *MEF* exija a utilização de malhas refinadas de elementos de casca geometricamente não lineares (Pierin e Rovere, 2005).

A partir da década de 1960, deu-se início à generalização do uso do *MEF* para a resolução de problemas geometricamente não lineares, especificamente a análise linear de estabilidade de elementos estruturais, destacando-se, entre outros, os trabalhos de Gallagher e Padlog (1963), Kapur e Hantz (1966), Wittrick (1968) e Przemieniecki (1968 e 1972).

Inserido no grupo de autores que desenvolveram formulações próprias baseadas no *MEF* para permitir o estudo das condições de estabilidade de elementos com seções constituídas de parede fina, destaca-se o trabalho de Chin *et al* (1993), que elaboraram um elemento finito de chapa fina com seis nós e trinta graus de liberdade para efetuar análises lineares dos modos locais (*MLC* e *MD*) e globais de perfis com qualquer condição de carregamento e de contorno.

Quanto à aplicação à análise linear de estabilidade dos modos de instabilidade globais, citam-se os trabalhos de (i) Trahair e Rasmussen (2005a, 2005b), que desenvolveram um programa de computador baseado na formulação em *MEF* para aplicar ao estudo dos modos globais de instabilidade de pilares (*MGF* e *MGFT*, respectivamente) com apoios elásticos inclinados em relação aos eixos principais das barras e de (ii) Erkmen e Mohareb (2008) que desenvolveram um elemento finito de barra de dois nós para análise de instabilidade de seções abertas incluindo na formulação as deformações por cisalhamento.

Em relação à aplicação do *MEF* à análise não linear de estabilidade dos perfis de parede fina, Lee e Harris (1979) foram dos primeiros a usar o *MEF*, aplicando-o ao estudo do comportamento pós-crítico de vigas com seção *Ue* e *cartola*. Já Desmond *et al* (1981) conseguiram observar a presença do *MD*, como um modo crítico, ao analisarem a influência dos enrijecedores na fase pós-crítica de perfis *Ue*. O comportamento pós-crítico das barras tubulares com seção quadrada submetidas à compressão excêntrica foi analisado por Rerkshanandana et al (1981) por meio da aplicação do *MEF*. Shen e Zhang (1992) usaram elementos finitos de cascas para efetuar a análise não linear de estabilidade de pilares com seção em *I*.

Nos finais dos anos 90, Schafer e Pekoz (1999) utilizaram elementos finitos do programa comercial ABAQUS para estudar o comportamento pós-crítico dos modos

locais (*MLC* e *MD*) de um modelo constituído por um conjunto mesa-enrijecedor submetido à compressão uniforme.

A partir desde momento e no decorrer da primeira década do século XXI, observou-se uma tendência em aplicar de forma generalizada e recorrente os programas de cálculo comerciais que utilizam o *MEF* na análise linear e não linear de estabilidade dos perfis de parede fina. Isso se deve à grande evolução dos programas comerciais no que se refere à otimização de tempo, confiabilidade e criação de interfaces amigáveis com outros programas que possibilitaram uma maior interação entre os programas e o usuário.

Sarawit *et al* (2003) elaboraram uma síntese da utilização dos programas baseados no *MEF* na resolução de problemas de estabilidade de perfis constiuídos por paredes finas explicitando a modelação em elementos finitos a usar em problemas lineares e não-lineares de estabilidade. O elemento finito de casca de 4 nós (denominados S4, S4R e S4R5) da biblioteca do programa ABAQUS tem ganho preferência de vários autores como os que são referidos nas citações a seguir.

Os estudos analíticos, já citados, sobre os modos locais e globais de instabilidade de chapas enrijecidas feitos por Byklum *et al* (2004) e Byklum e Amdhal (2002), foram validados por resultados numéricos obtidos no programa ABAQUS. Idêntica metodologia foi empregada por Yu e Schafer (2007) e Szychowski (2008) na validação dos modelos semianalíticos utilizando métodos energéticos, também já citados, do estudo de instabilidade de chapas submetidas a tensões longitudinais variáveis.

Aplicando o programa ABAQUS para os estudos numéricos do comportamento de perfis formados a frio, Gotluru *et al* (2000) contribuíram para o conhecimento do fenômeno de torção presente nos modos locais e globais de instabilidade e Young e Yan (2002) estabeleceram comparações com os resultados obtidos experimentalmente para o pilar de seção em *U* com as extremidades engastadas. De maneira semelhante, dois trabalhos foram realizados na Universidade de Sydney onde as análises numéricas foram comparadas com os resultados das análises experimentais de pilares curtos (Yang e Hancock, 2002a) e longos (Yang e Hancock, 2002b). Utilizando as mesmas ferramentas computacionais, Koji *et al* (2002) apresentaram resultados de análise lineares e não lineares de estabilidade de seções *rack* submetidas à compressão uniforme e linearmente variável. A influência das condições de empenamento (livre ou impedido) foi estudada por Dinis e Camotim (2003), que em outro trabalho (Dinis e Camotim, 2004) estenderam o estudo ao comportamento de pós-crítico elástico e

elastoplástico de seções *Ue* e *rack*. Um vasto conjunto de resultados de esforços resistentes de seções *Ue* simulados no ABAQUS foi usado por Silvestre *et al* (2007) para estabelecer comparações com os resultados fornecidos pelo Método da Resistência Direta (*MRD*).

Outros tipos de perfis, com geometria não usual, foram analisados por Karayanan e Mahendran (2002). Schafer *et al* (2006) analisaram perfis *Ue* e Z com enrijecedores complexos, não usuais, comparando os resultados de esforços resistentes fornecidos pelo *MRD* com os obtidos numericamente pelo ABAQUS. O comportamento crítico e pós-crítico de chapas e perfis formados a frio não enrijecidos foram estudados por Bambach (2006 e 2009), sendo que as análises numéricas obtidas pelo referido programa foram comparados com resultados experimentais e com a norma australiana AS/NZ 4600 (2005) e a norte-americana do AISI (2007). Ainda com a ajuda do mesmo programa, Dinis *et al* (2007) desenvolveram um estudo das respostas lineares e não lineares da interação entre (i) os modos locais *MLC* e *MD* de pilares, que foi estendido à análise de vigas (Dinis e Camotim (2010), e (ii) os modos distorcional e global (Dinis e Camotim (2011). Um trabalho semelhante foi desenvolvido com a ajuda do mesmo programa por Nandini e Kalyanaraman (2010), que estudaram a interação entre os modos locais (*MLC* e *MD*) e globais de vigas, propondo uma metodologia que foi comparada com os regulamentos norte-americano e europeu, além do método da resistência direta. Ye e Rasmussen (2008) também usaram o ABAQUS para estudar a instabilidade de perfis de aço de alta resistência formados a frio.

Para obter as forças críticas usadas nos cálculos da resistência última pelas especificações das normas australiana AS/NZ 4600 (2005) e a norte-americana AISI (2007), Chen *et al* (2010) usaram o programa ABAQUS.

Com objetivos semelhantes (estudo da instabilidade de perfis formados a frio) alguns autores têm usado outros programas comerciais com base no método dos elementos finitos, como por exemplo, Salem *et al* (2004) aplicaram o programa COSMOS/M para avaliar a resistência última de perfis em *I* e Mohan *et al* (2005) utilizaram o programa NASTRAN para analisar a interação entre os modos global e local de instabilidade de cantoneiras. O programa ANSYS foi usado por (i) Paik *et al* (2001) e Paik e Seo (2009) na validação dos resultados analíticos da simulação do comportamento pós-crítico de chapas ortótropas, (ii) Dubina e Ungureanu (2002) na avaliação do efeito das imperfeições iniciais na resistência última dos *PFF*, (iii) Zhang *et al* (2007) na comparação com os resultados experimentais dos ensaios realizados em

pilares *PFF* com enrijecedores inclinados e, mais recentemente, por (iv) Wang e Zhang (2009) na comparação com resultados experimentais de perfis *Ue* com enrijecedores inclinados submetidos à flexão pura e (v) Roure et al (2011) no estudo do *MD* de seções rack uniformemente comprimidas, os quais compararam os resultados numéricos com dados experimentais e cálculos de resistência com base no conceito de largura efetiva presente nas especificações do Eurocode 3 parte 1.3 (2005).

Para superar os inconvenientes presentes no *MEF* para análises de instabilidade, tais como, o elevado esforço computacional ocasionado pelo refinamento da malha exigido para se obter resultados precisos, vários autores têm utilizado o método das faixas finitas (*MFF*) nas análises de instabilidade de perfis formados a frio. O *MFF* foi formulado inicialmente por Cheung no final da década de 1960 e foi publicado no livro de Cheung (1976). Przemieniecki (1973) utilizou o método em análise de seções de parede fina considerando apenas deformações de flexão e Plank e Wittrick (1974) consideraram as deformações de membrana e de flexão nas análises. Esses mesmos autores (Plank e Wittrick, 1974) também utilizaram funções mais complexas, o que permitiu a avaliação do efeito das tensões cisalhantes. Um pouco mais tarde, Hancock (1978) estudou a instabilidade de vigas em seção *I* por meio do *MFF*. Dentre os trabalhos mais relevantes sobre a aplicação do *MFF* em análises de instabilidade de perfis formados a frio, destacam-se Graves-Smith e Sridharam (1978), Key (1988), Hancock *et al* (1990), Key e Hancock (1993) e Papangelis e Hancock (1995).

Na formulação original do *MFF*, os deslocamentos longitudinais do perfil são aproximados por funções trigonométricas (seno), o que implica a condição de simplesmente apoiada nas extremidades do perfil. Devido a esta restrição, o *MFF* permanecia com aplicações limitadas, até que Fan (1982) propôs a utilização de funções B_3-Splines (Método das Faixas Finitas Splines – *MFFS*) como funções de interpolação, ao invés das usuais funções trigonométricas. A utilização das funções B_3-Splines aproxima o Método das Faixas Finitas do Método dos Elementos Finitos, uma vez que é necessária a introdução de nós intermediários na direção longitudinal. Outra forma de superar as restrições das condições de contorno do *MFF* foi encontrada por Bradford e Azhari (1995), que propuseram a utilização de uma combinação de funções trigonométricas.

O *MFFS* foi usado na análise de estabilidade elástica de perfis formados a frio por vários autores, como por exemplo, a análise linear de Lau e Hancock (1986), e as análises não lineares de Kwon e Hancock (1990) e Prola (2001).

Na década de 1990, o modo distorcional de várias seções abertas e de parede fina foi estudado no Instituto Superior Técnico de Lisboa, utilizando o *MFFS*, tais como, os perfis com seções tipo S enrijecido (Prola e Camotim, 1995), perfis *rack* (Prola e Camotim, 1996a), perfis *sigma* (Prola e Camotim, 1996b) e seções tipo Z com enrijecedores inclinados (Prola e Camotim, 1997). Os resultados numéricos dos perfis *rack* e *sigma* foram comparados com ensaios experimentais realizados na Universidade Federal do Rio de Janeiro e publicados em Prola *et al* (1996) e Batista *et al* (1999), respectivamente. Além disso, Camotim *et al.* (2000) utilizaram o *MFF* com funções "B_3-*Spline*" para estudar a influência das condições de contorno (sobretudo as relativas ao empenamento das seções de extremidade) na instabilidade distorcional de perfis com seção em *rack*.

Por meio de análises do comportamento pós-crítico de perfis que se instabilizam no modo distorcional, Prola (2001), utilizando o *MFFS*, detectou que o comportamento pós-crítico é distinto quando a seção transversal se abre ou se fecha, conforme mostra a Figura 4.18, sendo que a maior resistência pós-crítica ocorre quando a seção transversal se fecha. Com a utilização da Teoria Generalizada de Vigas (*TGV*), Silvestre e Camotim (2003) explicaram que esse fenômeno é devido aos efeitos de cisalhamento e a assimetria dos deslocamentos longitudinais provocados pelo empenamento da seção transversal. Por meio dos fundamentos da *TGV,* Adany e Shafer (2006) usaram a formulação do método das faixas finitas para desacoplar os modos locais na análise linear de estabilidade de seções abertas e de parede fina. Esse método foi designado de Método das Faixas Finitas Confinadas (*Constrained Finite Strip Method*). Em um trabalho posterior, Adany e Shafer (2008) ampliam esse estudo para aplicação da análise linear de estabilidade em pilares e vigas.

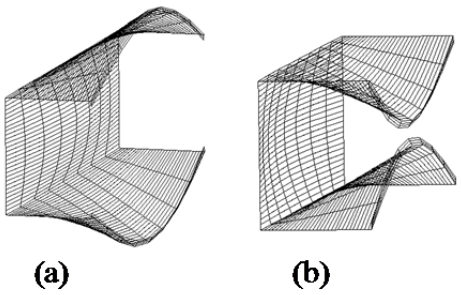

Figura 4.18: Empenamento da seção causada pela instabilidade distorcional:
(a) seção que abre, (b) seção que fecha.

O método semienergético foi usado por Ovesy *et al* (2005 e 2006) na formulação das faixas finitas no estudo do comportamento pós-crítico de chapas e pilares de seção em *U*. Posteriormente, Ghannadpour e Ovesy (2008) estenderam esse estudo para elementos estruturais com seções em *I*. A utilização do método semienergético na formulação dos métodos numéricos só permite o estudo inicial da fase pós-crítica para elementos que se instabilizam no *MLC*, o que limita muito o seu uso, embora possua a vantagem em termos de simplicidade na formulação e economia de tempo de processamento.

A formulação isoparamétrica tem sido utilizada em conjunto com o *MFFS* por alguns autores, tais como, Au e Cheung (1993) e Cheung e Au (1995) que analisaram elementos planos e cascas degeneradas, respectivamente. Nos últimos anos, na Austrália, nos trabalhos de Eccher (2007) e Eccher *et al* (2009) foi utilizada a formulação isoparamétrica do *MFFS*, juntamente com a Teoria de Reisser-Mindlin, para a análise de perfis formados a frio perfurados.

Por meio do *MFFS*, Vrcelj e Bradford (2008) incluem apoios intermediários na largura da faixa finita utilizando funções de aproximação, no sentido transversal da faixa, do tipo bolha (*bubble functions*).

A instabilidade de perfis de aço formados a frio submetidos a tensões de cisalhamento por meio do *MFFS* foi estudada por Pham e Hancock (2009). Foram estudados elementos estruturais em seção *U* e *Ue,* com diferentes condições de contorno e distribuição de tensões de cisalhamento.

As análises de instabilidade de perfis formados a frio também têm sido estudadas com o auxílio da Teoria Generalizada de Vigas (*TGV*). A *TGV* apresenta uma formulação semelhante à teoria de vigas, ou seja, as equações de equilíbrio e as condições de contorno são expressas em grandezas que dependem apenas de uma coordenada axial, e incorpora os conceitos da teoria de chapas dobradas, o que torna possível a consideração dos efeitos locais (deformações das seções transversais dos elementos no seu próprio plano). Existem semelhanças substanciais entre a *TGV* e o *MFFS*, no sentido que ambos os métodos adotam representações do campo de deslocamentos similares e tratam diferentemente as discretizações ao longo da linha média da seção transversal e ao longo do eixo longitudinal do perfil. No entanto, a *TGV* é conceitualmente diferente do *MEF/MFF/MFFS,* pois ela (i) aproxima a configuração da deformada de uma seção transversal da barra por meio de uma combinação linear dos modos de deformação com significados mecânicos estruturais bem definidos e (ii)

proporciona uma metodologia geral para obter soluções rigorosas de diversos problemas não lineares que envolvam perfis de seções abertas e de parede fina (Camotim, 2006).

Dentre os trabalhos que utilizaram a *TGV* nas análises de instabilidade de perfis formados a frio, destaca-se o trabalho liderado pelo Professor Camotim e seus colaboradores no Instituto Superior Técnico (Portugal) na elaboração de vários trabalhos (Silvestre (2005), Silvestre e Camotim (2003), Camotim *et al* (2010)).

O trabalho de Baiz e Aliabali (2009) utiliza o método dos elementos de contorno no cálculo da força crítica de *PFF* que se instabilizam no *MLC*. Cita-se também o trabalho de Pala (2008) que utiliza os algoritmos genéticos para efetuar a análise linear de estabilidade de perfis onde o *MD* é crítico.

Na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo vem sendo desenvolvido o programa computacional PEFSYS, o qual é programado em linguagem Fortran F90 e utiliza o MEF para a análise não linear física e geométrica de estruturas. Yojo (1993) e Pimenta e Yojo (1993) formularam um elemento de barra tridimensional com base na teoria geometricamente não linear para o estudo da instabilidade de vigas e pórticos em balanço. Fruchtengarten (1995) alterou a hipótese constitutiva da teoria não linear geometricamente exata formulada por Pimenta e Yojo (1993). Esta alteração permitiu a análise de instabilidade por distorção cujos resultados foram comparados com a teoria de Vlasov (1961).

Posteriormente, Campello (2000) incluiu o empenamento não uniforme no elemento de barra tridimensional com base na teoria não linear geometricamente exata para efetuar a análise não linear de perfis formados a frio. Fruchtengarten (2005) comparou os resultados das análises de instabilidade lateral de vigas obtidas pela teoria não linear geometricamente exata e pela teoria de Vlasov. Campello (2005) formulou um elemento de casca triangular com base na teoria não linear geometricamente exata para a análise não linear de estruturas com materiais elásticos e elastoplásticos.

No que se refere à revisão bibliográfica, destaca-se o trabalho de síntese de Magnucka-Blandzi e Magnucki (2011), recentemente publicado, onde, além da apresentação analíca da formulação das forças críticas locais e globais para vigas com seções *Ue* com os enrijecedores constituídos por 2 ou 3 chapas em formato aberto ou fechado, os autores apresentam e discutem uma vasta bibliografia sobre o problema de instabilidade e otimização dos perfis formados a frio.

4.4. Tensões Residuais e Imperfeições Geométricas Iniciais

Em uma análise não linear de estabilidade de perfis formados a frio deve-se considerar a presença de tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais, pois influem muito nos resultados do problema da estabilidade de seções de parede fina. Esses dois fatores são decorrentes dos processos de fabricação e de montagem dos perfis formados a frio.

A presença das tensões residuais é a principal causa da não linearidade do diagrama tensão-deformação dos aços estruturais. Para perfis sem tensão residual o comportamento tensão-deformação tenderia para o elastoplástico perfeito, conforme mostra a Figura 4.19.

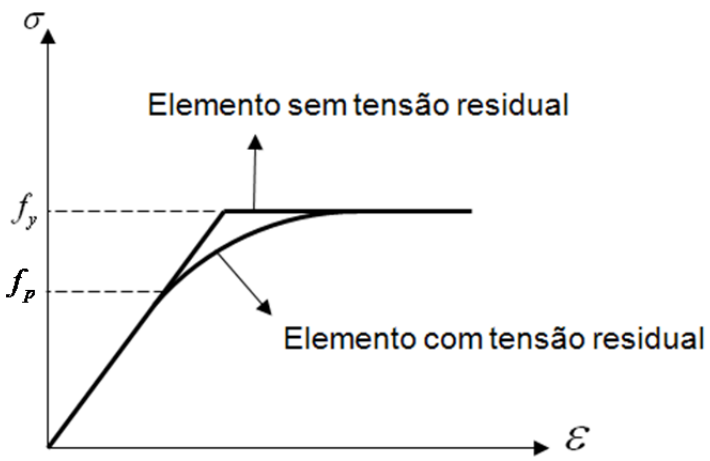

Figura 4.19: Influência da tensão residual no diagrama tensão-deformação.

Se um pilar de aço com tensões residuais (σ_r) for submetido a uma compressão uniforme, o diagrama tensão-deformação apresenta três zonas distintas, conforme mostra a Figura 4.19: (i) um ramo linear, correspondente a um comportamento elástico onde as tensões são menores do que a tensão de proporcionalidade (f_p), (ii) um ramo não linear, correspondente a um comportamento elastoplástico, ou seja, à medida que a tensão aumenta, diminui a zona elástica da seção e, portanto, a declividade diminui e (iii) um ramo horizontal que corresponde a um comportamento plástico onde todas as fibras da seção atingem a resistência ao escoamento (f_y). A relação entre a tensão de proporcionalidade e a resistência ao escoamento é dada pela equação (4.33),

$$f_p = f_y - \sigma_r \,. \tag{4.33}$$

Por meio de um estudo experimental, Weng e Pekoz (1990) concluíram que para os perfis formados a frio com seção em *Ue*, as tensões residuais apresentam as seguintes

particularidades: (i) tensões de compressão na parte interna do perfil e de tração na parte externa; (ii) nos cantos as tensões residuais são mais elevadas em comparação às partes planas da seção; (iii) os valores encontrados das tensões residuais variam entre 25% a 70% da resistência ao escoamento do aço; (iv) a distribuição das tensões residuais segue o mesmo padrão em todos os ensaios realizados e (v) nas partes planas, a distribuição das tensões residuais é uniforme.

Nos cantos do perfil, as tensões residuais são mais elevadas, pois nessas regiões, durante o processo de fabricação, o trabalho a frio é mais acentuado, aumentando a resistência ao escoamento. Dessa forma, o aumento da tensão residual pode ser negligenciado nessas regiões.

Por meio de ensaios em 93 perfis formados a frio submetidos à compressão, Weng (1991) concluiu que a magnitude e a distribuição das tensões residuais são diferentes quando comparados aos perfis laminados.

Schafer e Pekoz (1998) convencionaram que as tensões residuais são constituídas de duas parcelas (i) membrana e (ii) flexão. Essa convenção foi adotada, pois nos ensaios são colocados dois extensômetros, um em cada face do perfil, fornecendo duas leituras. Geralmente essas leituras fornecem um valor de tensão residual de tração na face externa e um valor de compressão na face interna, de magnitudes diferentes. Isso pode ser explicado pela superposição entre uma tensão de compressão constante ao longo da espessura (denominada de membrana) e uma variação simétrica de tensões ao longo da espessura (denominada de flexão), conforme mostra a Figura 4.20.

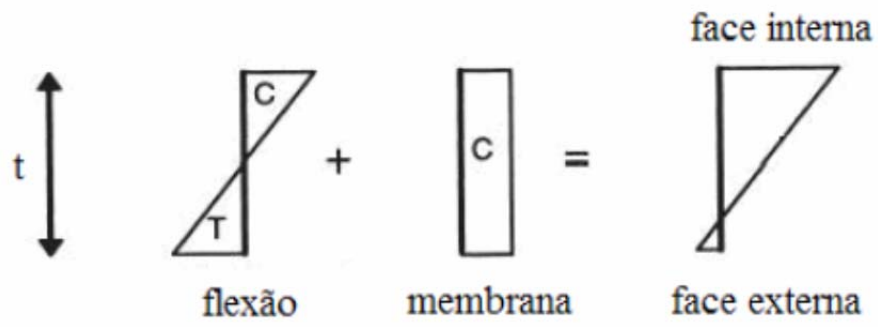

Figura 4.20: Definição das tensões residuais de membrana e flexão.

De acordo com Schafer e Pekoz (1998), as tensões residuais de membrana são mais relevantes nos perfis laminados e soldados, enquanto que nos perfis formados a frio as tensões residuais de flexão são mais elevadas do que as de membrana.

A distribuição de tensões residuais de flexão para perfis formados a frio com seções tipo *Ue* recomendada por Schafer e Pekoz (1998) está ilustrada na Figura 4.21. A tensão residual máxima ocorre na região de dobra das chapas. A distribuição das tensões residuais na seção depende do processo de fabricação dos perfis formados a frio. Quando o perfil é produzido em perfiladeiras a tensão residual máxima ocorre na alma do perfil. Por outro lado, se o perfil for produzido em prensas dobradeiras, a máxima tensão residual ocorre nas regiões de dobra. O modelo proposto por Schafer e Pekoz (1998) não considera tensões residuais nos enrijecedores.

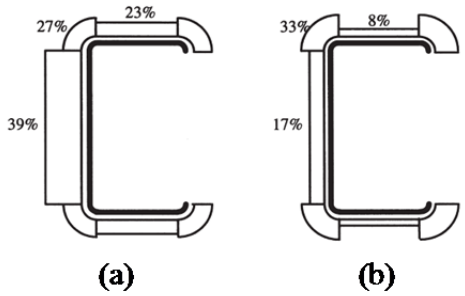

Figura 4.21: Tensões residuais em %f_y: (a) perfiladeiras (b) prensas dobradeiras (Adaptado de Schafer e Pekoz, 1998)

A consideração dos cantos arredondados ou vivos nas análises numéricas provoca diferenças insignificantes na estimativa da resistência última dos perfis. Por esse motivo, Ranawaka e Mahendran (2010) recomendam, para perfis produzidos em prensas dobradeiras, a distribuição de tensões ilustradas na Figura 4.22 para seções tipo *Ue* e *Rack*. Geralmente o aumento da resistência ao escoamento é desprezado nas regiões de dobra do perfil e, por esse motivo, o acúmulo de tensões residuais na região de dobras (0,33f_y) é negligenciado.

As tensões residuais são aliviadas à medida que a temperatura do aço aumenta. A taxa de alívio de tensões depende do teor de carbono presente no aço. Para aços com 0,2% de teor de carbono, as tensões residuais são nulas para temperatura acima de 830ºC (Calliser, 2000 *apud* Lee, 2004). Lee (2004) admite que as tensões residuais são nulas para a temperatura igual a 800ºC e propõe a equação (4.34) para os fatores de redução para as tensões residuais em função da temperatura,

$$\beta = 1,0181 - 0,00128\theta, \tag{4.34}$$

onde θ é a temperatura do aço em graus Celsius ($20 \leq \theta \leq 800^{\circ}C$).

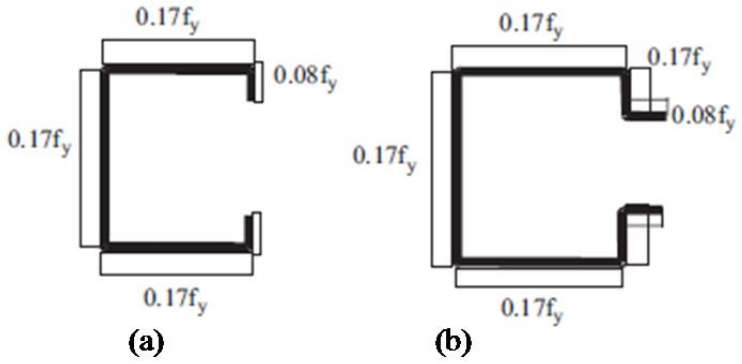

Figura 4.22: Distribuição de tensões residuais: (a) *Ue* (b) *Rack*
(Adaptado de Ranawaka e Mahendran, 2010)

Os processos de fabricação e montagem dos perfis formados a frio originam as imperfeições geométricas iniciais no elemento que devem ser incluídas nos procedimentos de análises estruturais. Assim, as hipóteses de chapas retilíneas e barras perfeitamente retas ao longo do seu eixo não são válidas.

Desse modo, a resistência última da barra pode ser muito influenciada pela presença das imperfeições geométricas iniciais, especialmente se elas forem semelhantes ao modo de instabilidade obtidos por meio de uma análise linear de estabilidade.

As barras submetidas à compressão centrada estão, à rigor, sob flexocompressão desde o início do carregamento devido aos esforços de flexão oriundos das imperfeições iniciais e das possíveis excentricidades de carregamento.

Segundo Bazant e Cedolin (1991), em 1807 Young propôs que a imperfeição geométrica inicial de uma barra fosse aproximada por uma função senoidal. Essa proposta era válida somente para a imperfeição global do eixo da barra.

Dois tipos de imperfeições geométricas iniciais foram observados por Schafer e Pekoz (1998), especificadamente para os efeitos localizados (modo local de chapa e distorcional), conforme mostra a Figura 4.23. Com base em ensaios experimentais, os autores concluíram que a máxima magnitude das imperfeições é fornecida pelas equações (4.35), para duas categorias: (i) Tipo 1 - imperfeição máxima de elementos enrijecidos e (ii) Tipo 2 - imperfeição máxima dos elementos com enrijecedores de borda ou sem enrijecedores. Essas equações são válidas para (i) chapas com espessuras menores do que 3 mm e (ii) com relações largura/espessura (*b/t*) menores do que 200 e 100 para os tipos 1 e 2, respectivamente,

$$\begin{matrix} d_1 \approx 0,006b & \text{ou} & d_1 \approx 6.t.e^{-2t} \\ d_2 \approx t & & \end{matrix} \quad . \tag{4.35}$$

Por meio de um estudo experimental e numérico, Yang e Hancock (2004) concluem que as imperfeições iniciais na forma de um modo de instabilidade, obtida da análise linear de estabilidade, podem conduzir a resultados contra a segurança devido à possibilidade de ocorrência de interação entre os modos de instabilidade.

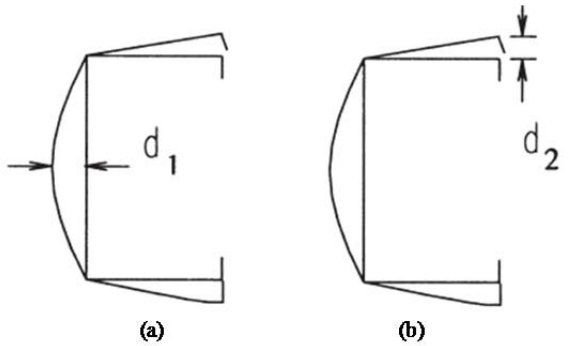

Figura 4.23: Parâmetros de imperfeições geométricas da seção transversal: (a) Tipo 1, (b) Tipo 2

Devido à sensibilidade às imperfeições na resistência última dos perfis formados a frio, no trabalho de Dubina e Ungureanu (2002) avaliou-se a influência das imperfeições na capacidade resistente dos elementos estruturais com a finalidade de estabelecer tolerâncias a serem utilizadas na fabricação dos perfis e definição das imperfeições geométricas iniciais que devem ser incluídas nas análises numéricas.

Nessa linha de pesquisa citam-se, também, os trabalhos de Almeida (2007) e Almeida e Neto (2009), onde os pilares de seções em *U* e *Ue* foram modelados por meio do *MEF* com elementos sólidos e de casca do programa comercial ANSYS. Os autores concluem que os perfis em seção *Ue* são menos suscetíveis às imperfeições geométricas locais do que os perfis em seção *U*. Além disso, a forma e a magnitude das imperfeições geométricas devem ser estabelecidas em função da esbeltez e do tipo de seção do elemento a ser estudado.

4.5. Capacidade Resistente

A determinação da capacidade resistente dos perfis constituídos por placas esbeltas envolve o conhecimento das trajetórias de equilíbrio. As trajetórias de equilíbrio são obtidas por meio de dois tipos de análises:

(i) Análise Linear de Estabilidade: aplica-se a barras ideais (*i.e.,* barras sem imperfeições geométricas iniciais) e pressupõe-se que o comportamento do aço é elástico. Tem o objetivo de determinar a força crítica de instabilidade a qual é resultado da solução de um problema de autovalor.

(ii) Análise Não Linear de Estabilidade: Esse tipo de análise é aplicável a barras com ou sem imperfeições geométricas iniciais e com tensões residuais e possibilita a determinação do comportamento pós-crítico das barras. O comportamento do material pode ser elástico ou elastoplástico.

De maneira ilustrativa, a Figura 4.24 mostra a trajetória de equilíbrio de um pilar formado a frio obtida por diferentes tipos de análises de estabilidade: (i) estabilidade elástica (análise de segunda ordem), (ii) análise do comportamento pós-crítico elástico (inclui somente os efeitos da não linearidade geométrica) e (iii) análise do comportamento pós-critico elastoplástico, onde ambas as não linearidades (geométrica e do material) são consideradas. Na trajetória de equilíbrio elastoplástica, o colapso ocorre em um ponto limite situado sobre a trajetória de equilíbrio. A resistência última da barra corresponde a força um pouco superior à força que provoca o colapso do elemento. No entanto, a análise não linear elástica tem grande utilidade prática na análise de perfis à temperatura ambiente, pois permite caracterizar o comportamento estrutural quase até o colapso. Observa-se ainda que a trajetória de equilíbrio horizontal, obtida pela teoria de segunda ordem, reflete na linearização das equações de equilíbrio utilizadas para efetuar a análise.

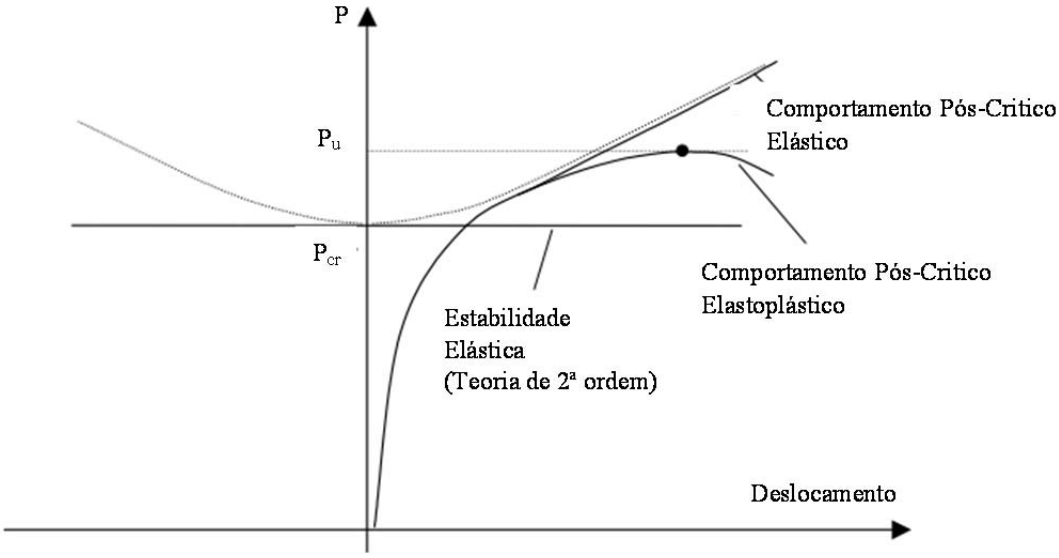

Figura 4.24: Tipos de análises de estabilidade.

A obtenção das trajetórias de equilíbrio envolve a solução de sistemas de equações diferenciais lineares ou não lineares. Esses sistemas possuem soluções analíticas fechadas somente para casos particulares, cuja geometria e condições de carregamento são bastante simples e sem interesse prático. Desse modo, as normas de dimensionamento de perfis formados a frio apresentam métodos simplificados de dimensionamento, tais como o Método das Larguras Efetivas, o Método da Área Efetiva e o Método da Resistência Direta, os quais são descritos a seguir.

A avaliação do esforço resistente de perfis formados a frio à temperatura ambiente é feita, de maneira clássica, por meio do Método das Larguras Efetivas (*MLE*). Segundo Wang (2002), esse método também é aplicável a temperaturas elevadas sendo que as resistências ao escoamento e o módulo de elasticidade são reduzidos de acordo com a temperatura. Para o entendimento do conceito das larguras efetivas considere uma chapa simplesmente apoiada em todas as bordas e submetida à compressão uniforme na menor direção da chapa. Para tensões inferiores à tensão crítica da chapa, a distribuição de tensões é uniforme. Quando se aumenta a tensão de compressão, ultrapassando-se a tensão crítica, ocorre uma redistribuição de tensões onde observa-se uma diminuição do nível de tensões na parte central da chapa com um acréscimo de tensões junto às bordas laterais da chapa, como mostra a ilustração da Figura 4.25.

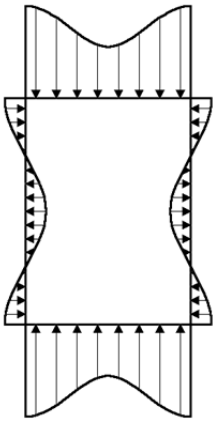

Figura 4.25: Distribuição das tensões na fase pós-crítica na chapa.

Com base nessa redistribuição de tensões, von Karman *et al* (1932) propuseram que a distribuição não-uniforme de tensões fosse substituída por uma distribuição uniforme de tensões equivalentes, conforme mostra a Figura 4.26. Segundo von Karman, a largura efetiva da chapa (b_{ef}) é dada pela equação (4.36),

$$\frac{b_{ef}}{t} = 0,95\sqrt{\frac{k.E}{f_y}}, \tag{4.36}$$

onde k é o coeficiente de instabilidade da chapa, E é o módulo de elasticidade, t é a espessura e f_y é a resistência ao escoamento do aço.

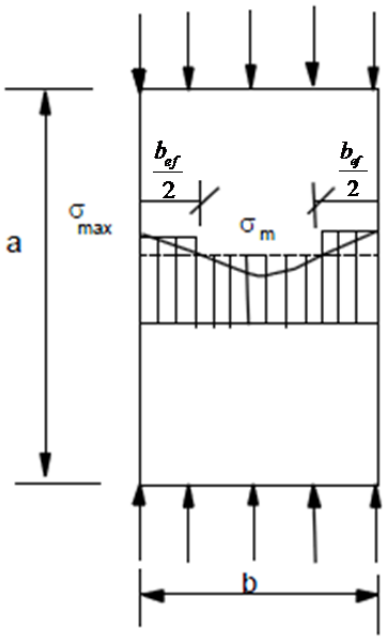

Figura 4.26: Conceito de largura efetiva.

Em 1946, por meio de uma análise de vários resultados experime

ntais, Winter propôs uma correção na fórmula de Von Karman, recomendando que a largura efetiva fosse calculada pela equação (4.37).

$$b_{ef} = \frac{b}{\lambda_p}\left(1 - \frac{0,25}{\lambda_p}\right), \tag{4.37}$$

onde λ_p é a esbeltez reduzida da chapa, sendo dada pela expressão (4.38),

$$\lambda_p = \frac{b/t}{0,95\sqrt{\frac{k.E}{\sigma}}}. \tag{4.38}$$

Posteriormente, a equação (4.37) foi alterada por Johnson (1966) *apud* Yu (2000) para a inclusão dos efeitos de instabilidade elastoplástica, conforme mostra a equação (4.39). Esta equação, embora modificada por Johnson (1966), é conhecida por fórmula de Winter e está incluída em várias normas de perfis formados a frio, tais como o AISI (2007), o Eurocode 3 parte 1.3 (2005) e a ABNT NBR 14762:2010,

$$b_{ef} = \frac{b}{\lambda_p}\left(1 - \frac{0,22}{\lambda_p}\right). \tag{4.39}$$

Com caráter meramente ilustrativo, visto que o procedimento de cálculo será detalhado no capítulo 6, a Figura 4.27 ilustra a evolução das tensões na fase pós-crítica no perfil *Ue* que instabiliza (i) no *MLC* (Figura 4.27a), precipitada pela esbelteza da alma ou da mesa e (ii) no *MD* (Figura 4.27b), ocasionada pela instabilidade do canto mesa-enrijecedor. Da observação dos fenômenos mostrados na Figura 4.27, pode-se concluir que não faz sentido aplicar o conceito de largura efetiva em seções que instabilizam no *MD*, pois as altas tensões de compressão (quando o perfil abre, Figura 4.27b) e de tração (quando o perfil fecha, Figura 4.27c) desenvolvidas nas extremidades do enrijecedor causam o colapso da seção.

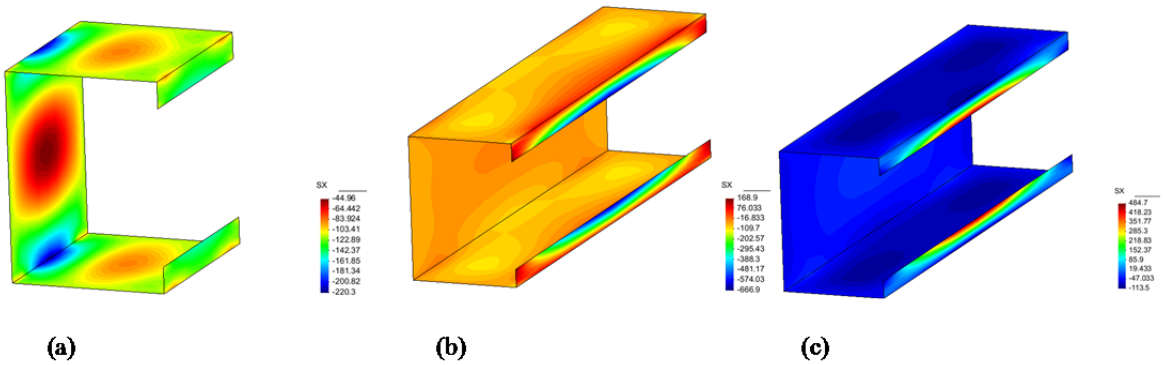

Figura 4.27: Distribuição das tensões pós-críticas na seção *Ue* (a) *MLC*, (b) *MD* que abre e (c) *MD* que fecha. Tensões em MPa.

Desse modo, a aplicação do método da largura efetiva deve ficar restrita aos perfis que se instabilizam no *MLC*. No entanto, para avaliar a capacidade resistente de

perfis que instabilizam no *MD*, Kwon (1992) sugere, com base em testes experimentais, a aplicação de fórmulas empíricas para o cálculo da largura efetiva, porém essas expressões não caracterizam a distribuição real das tensões do comportamento pós-crítico. A terminologia e metodologia de dimensionamento características do conceito de largura efetiva são adotados unicamente com o propósito de uniformizar os procedimentos e a nomenclatura corrente na avaliação da capacidade resistente de perfis que instabilizam em ambos os modos locais (*MLC* e *MD*) para fins normativos.

O Método da Resistência Direta (*MRD*), proposto por Schafer e Pekoz (1998), utiliza os resultados da análise linear de estabilidade para estimar o esforço resistente dos perfis formados a frio. O método consiste em utilizar curvas de dimensionamento ajustadas experimentalmente para, a partir da força de instabilidade elástica, calcular a força de colapso do perfil. Nesse método, o processo de cálculo considera a seção do perfil como um todo e não em elementos isolados, como no *MLE*.

O esforço resistente característico de um perfil submetido à compressão é fornecido pelo menor valor entre a força normal resistente associada à instabilidade local (N_{Rl}) e distorcional (N_{Rdist}), fornecidas pelas equações (4.40) e (4.41), respectivamente,

$$N_{Rl} = \frac{N_{\mathrm{Re}}}{\lambda_l^{0,8}}\left(1-\frac{0,15}{\lambda_l^{0,8}}\right) \leq N_{\mathrm{Re}} \quad , \quad \lambda_l = \left(\frac{N_{\mathrm{Re}}}{N_l}\right)^{0,5} \tag{4.40}$$

$$N_{Rdist} = \frac{Af_y}{\lambda_{dist}^{1,2}}\left(1-\frac{0,25}{\lambda_{dist}^{1,2}}\right) \leq Af_y \quad , \quad \lambda_{dist} = \left(\frac{Af_y}{N_{dist}}\right)^{0,5} \tag{4.41}$$

onde A é a área da seção bruta, f_y é a resistência ao escoamento do aço, N_{Re} é o valor característico da força axial de compressão resistente, associado à instabilidade global, fornecido pela ABNT NBR 14762:2010, N_l e N_{dist} são as forças axiais elásticas devidas à instabilidade local e distorcional, respectivamente, obtidas por meio de análises lineares de estabilidade.

Para perfis submetidos à flexão, o momento fletor resistente característico, por meio do *MRD*, é dado pelo menor valor entre a momento fletor resistente associado à

instabilidade local (M_{Rl}) e distorcional (M_{Rdist}), fornecidos pelas equações (4.42) e (4.43), respectivamente,

$$M_{Rl} = \frac{M_{\mathrm{Re}}}{\lambda_l^{0,8}}\left(1 - \frac{0,15}{\lambda_l^{0,8}}\right) \leq M_{\mathrm{Re}} \quad , \quad \lambda_l = \left(\frac{M_{\mathrm{Re}}}{M_l}\right)^{0,5} \tag{4.42}$$

$$M_{Rdist} = \frac{Wf_y}{\lambda_{dist}}\left(1 - \frac{0,22}{\lambda_{dist}}\right) \leq Wf_y \quad , \quad \lambda_{dist} = \left(\frac{Wf_y}{M_{dist}}\right)^{0,5} \tag{4.43}$$

onde W é o módulo de resistência elástico da seção bruta em relação à fibra extrema que atinge o escoamento, M_{Re} é o valor característico do momento fletor resistente, associado à instabilidade global, fornecido pela ABNT NBR 14762:2010, M_l e M_{dist} são os momentos fletores elásticos devidos à instabilidade local e distorcional, respectivamente, obtidas por meio de análises lineares de estabilidade.

As análises lineares de estabilidade podem ser efetuadas por meio de programas específicos, tais como, *INSTABDKQ* (Pierin, 2005) que utiliza o *MEF, INSTABFAIXA* (Pierin, 2005) e CUFSM (Schafer e Ádány, 2006) que utilizam o *MFF* e o GBTUL (Bebiano *et al,* 2008) que é formulado por meio da *GBT*.

No trabalho de Li e Schafer (2010), os autores mostram como o *MFF* e o *MFF confinado* podem ser utilizados na determinação da capacidade resistente de perfis formados a frio por meio do *MRD*. O *MFF confinado* permite uma melhor identificação dos modos de instabilidade presentes, porém não permite a simulação dos cantos arredondados do perfil.

Um outro método para o cálculo da capacidade resistente dos perfis formados a frio à temperatura ambiente foi proposto por Batista (2010) e denominado por Método da Seção Efetiva (*MSE*). Esse método é uma extensão do Método da Área Efetiva, desenvolvido por Batista (1989), o qual era aplicável somente em perfis formados a frio comprimidos. No *MSE*, a capacidade resistente do perfil é obtida a partir da tensão crítica de bifurcação do elemento estrutural. Assim, considera-se a influência da restrição às rotações de flexão que ocorre entre as paredes adjacentes, como por exemplo, a rotação entre a mesa e a alma do perfil. Além disso, o método permite a aplicação em perfis que se instabilizam no *MD*.

Para perfis formados a frio submetidos à compressão, o *MSE* fornece a área efetiva da seção (A_{ef}) por meio da expressão (4.44),

$$A_{ef} = \frac{A}{\lambda_p^{0,8}}\left(1 - \frac{0,15}{\lambda_p^{0,8}}\right) \leq A, \tag{4.44}$$

onde λ_p é dado pela equação (4.45),

$$\lambda_p = \left(\frac{\chi A f_y}{N_\ell}\right)^{0,5}, \tag{4.45}$$

em que A é a área da seção bruta, f_y é a resistência ao escoamento do aço, χ é o fator de redução da força axial de compressão resistente, associado à instabilidade global, calculado conforme a ABNT NBR 14762:2010 e N_ℓ é a força axial de instabilidade local elástica, calculada por meio de análise de estabilidade elástica.

Em perfis formados a frio submetidos à flexão, o *MSE* fornece o módulo efetivo da seção (W_{ef}) por meio da expressão (4.46),

$$W_{ef} = \frac{W}{\lambda_p}\left(1 - \frac{0,22}{\lambda_p}\right) \leq W, \tag{4.46}$$

onde λ_p é dado pela equação (4.47),

$$\lambda_p = \left(\frac{W f_y}{M_\ell}\right)^{0,5}, \tag{4.47}$$

onde W é o módulo de resistência elástico da seção bruta em relação à fibra extrema que atinge o escoamento e M_ℓ é o momento fletor de instabilidade local elástica, calculado por meio de análise de estabilidade elástica.

No trabalho de Prola e Pierin (2009), os esforços resistentes de pilares de perfis formados a frio de seções *Ue, Ze* e *rack*, obtidos experimentalmente em Batista *et al* (1999), foram comparados aos esforços resistentes obtidos pelo *MLE* e *MRD*, além dos procedimentos estabelecidos pelo Eurocódigo 3 parte 1.3 (2005) e pela norma norte-americana (AISI, 2007). Embora o número de ensaios não seja significativo, Prola e Pierin (2009) concluem, para os casos analisados, que os esforços resistentes obtidos pelo *MLE, MRD* e AISI (2007) superam aos resultados obtidos por Batista *et al* (1999). No entanto, os esforços resistentes obtidos por meio do Eurocódigo 3 parte 1.3 (2005) são sempre a favor da segurança quando se leva em conta a mudança de posição do centro de gravidade da seção efetiva.

Bedair (2009) fez um estudo analítico da influência das dimensões da mesa e do enrijercedor na análise de estabilidade e no comportamento pós-crítico da alma de perfis com seções *Ue*, estabelecendo comparações com especificações das norma norte-americana (AISI, 2007) e canadense (CSA-S136-07). Concluiu que algumas formulações presentes nas referidas normas não contabilizam adequadamente a influência das outras paredes (mesa e enrijecedor) no comportamento da alma do perfil.

Esses métodos de dimensionamento à temperatura ambiente foram incorporados aos códigos normativos, tais como o AISI (2007), que permite o uso do *MRD*, e, recentemente, a ABNT NBR 14762:2010, que incluiu o *MRD* e o *MSE* como alternativa ao *MLE*.

Além dos métodos simplificados supracitados, a capacidade resistente dos perfis formados a frio pode ser obtida por meio de modelos numéricos de análises de estabilidade que contemplem as não linearidades geométricas e do material. Esses modelos desempenham um papel fundamental na validação e calibração de metodologias para o dimensionamento de perfis formados a frio.

O primeiro estudo teórico em regime elastoplástico de chapas submetidas a esforços de membrana foi realizado por Moxham em 1973. Anos mais tarde, o método energético de Rayleigh-Ritz foi usado por Little (1977) e Grädzki e Kowaĺ-Michalska (1987) no estudo do comportamento pós-crítico em regime elastoplástico de chapas de aço.

As análises lineares de estabilidade em regime elastoplástico de chapas, vigas e pilares foram realizadas por Lau e Hancock (1989) por meio do MFFS. O método da quadratura diferencial foi utilizado por Wang e Huang (2008) no estudo de instabilidade de chapas submetidas à compressão biaxial em regime elastoplástico. Em Azhari e Bradford (1993), estuda-se a instabilidade de chapas em regime elastoplástico com ou sem a inclusão de tensões residuais por meio do método das faixas finitas.

O comportamento pós-crítico de perfis formados a frio, considerando a não linearidade do material, foi estudado por Key (1988), Yan-lin e Shaofan (1991) e Key e Hancock (1993). O comportamento elastoplástico, estabelecido por meio do critério de von Mises e da regra de fluxo de Prandtl-Reuss, foi incluído na formulação do método das faixas finitas semianalítico.

Estudos semelhantes foram efetuados por meio do *MFFS* para o estudo do comportamento pós-crítico de pilares de seção caixão e *I* (Yanlin, 1992) e de chapas

enrijecidas (Yanlin e Linder, 1993). Chen *et al* (1994) demonstraram que o uso do *MFFS* em análise pós-crítica em regime elastoplástico é bastante eficiente.

Análises do comportamento pós-crítico em regime elastoplástico por meio do *MEF* requer a utilização de modelos refinados de casca não lineares. Com a utilização do programa ABAQUS, nos trabalhos de Dinis e Camotim (2004) e Dinis *et al* (2007) foram analisados o comportamento pós-crítico de pilares de aço formado a frio em seção *rack* e *Ue*, respectivamente. Nessas análises, as imperfeições geométricas iniciais foram admitidas iguais às formas do modo crítico de instabilidade e com amplitudes relativamente pequenas e as tensões residuais foram desprezadas. Na mesma linha de pesquisa, em Loughlan *et al* (2009) verifica-se, por meio do programa NASTRAN, a influência da não linearidade do material e das imperfeições geométricas iniciais no comportamento pós-crítico de pilares de seção *I* constituídos de chapas finas.

Outros métodos numéricos são utilizados na determinação da capacidade resistente de estruturas constituídas por chapas finas. Em Degee *et al* (2007) estuda-se o comportamento pós-crítico de elementos estruturais com seção caixão. As análises são efetuadas por um modelo numérico, constituído por elementos de viga que consideram as deformações de membrana da seção transversal e as não linearidades geométricas e do material. No trabalho de Paik e Kim (2008) foi utilizado o *ISUM* (*idealized structural unit method*) na análise do comportamento pós-crítico de pilares de seção caixão. Esse método utiliza técnicas computacionais semelhantes ao *MEF*, com a diferença que a matriz constitutiva é função das propriedades geométricas e do material, das imperfeições geométricas iniciais, das tensões residuais, dos fenômenos de instabilidade e dos critérios de colapso. Os resultados obtidos apresentaram uma boa correlação com as análises efetuadas por meio do programa ANSYS.

4.5.1. Problema de Instabilidade Inicial

A matriz geométrica $\underset{\sim}{k}_{\sigma}$ (equação (6.80)) não contém explicitamente os deslocamentos e é proporcional ao nível de tensões. Portanto, quando se adota uma estratégia incremental-iterativa na solução do problema não linear, na primeira etapa de carregamento, no sistema local, a matriz $\underset{\sim}{k}_{NL}$ é nula e a equação (6.85) pode ser reescrita como representada na equação (4.48),

$$d\underset{\sim}{\psi} = \left(\underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_{\sigma}\right) d\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}\,. \tag{4.48}$$

Incrementando-se as tensões por meio de um fator λ, que é um termo multiplicativo que pode ser colocado em evidência na matriz geométrica, haverá um ponto neutro de instabilidade se a igualdade (4.49) for satisfeita,

$$d\underset{\sim}{\psi} = \left(\underset{\sim}{k}_0 + \lambda \underset{\sim}{k}_\sigma\right) d\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}. \tag{4.49}$$

Como o sistema de equações (4.49), que traduz o equilíbrio da faixa finita, está referido ao sistema de coordenadas locais, o estabelecimento das equações de equilíbrio da estrutura requer (i) a realização de uma transformação do sistema de coordenadas locais para o global das matrizes de rigidez e geométrica de cada faixa finita (ver item 6.4) e (ii) formar as matrizes de rigidez e geométrica globais da estrutura com base nas incidências nodais. Após estas operações, chega-se ao sistema de equações (4.50), sendo o parâmetro de tensão λ obtido através da solução do problema de autovalores e autovetores,

$$\left(K_0 + \lambda K_\sigma\right) d\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}. \tag{4.50}$$

O sistema de equação da expressão (4.50) representa o problema clássico de instabilidade inicial, típico de problemas de instabilidade de hastes, placas e cascas onde (i) os autovalores, que significam fisicamente as cargas de bifurcação (λ), são obtidos matematicamete (em quantidade igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural) pela anulação do determinante da matriz ($\underset{\sim}{K}_0 + \lambda \underset{\sim}{K}_\sigma$) e (ii) os autovetores ($d\underset{\sim}{u}$) são determinados pela solução de (4.50) após a substituição de cada um dos autovalores (λ) já calculados.

A introdução dos valores de λ transforma (4.50) em um sistema de equações lineares indeterminado, que somente permite a obtenção das formas das configurações deformadas associadas a cada um dos autovalores encontrados, denominadas de modos de instabilidade. Isto pode ser explicado pelo fato de que a solução do sistema de equações indeterminado pode ser feita adotando-se um valor arbitrário para um elemento qualquer do vetor $d\underset{\sim}{u}$, calculando-se os demais elementos do vetor em função desse elemento arbitrado. O problema de instabilidade inicial somente pode dar respostas fisicamente significativas se a solução elástica fornecer deformações em que a matriz de grandes deslocamentos for nula.

Deve-se ter cuidado para não se utilizar a equação (4.50) além dos limites de aplicabilidade, ou seja, no caso de grandes deslocamentos, quando se deve utilizar a equação (6.87), ou seja, a expressão completa da matriz de rigidez tangente. Antes de

realizar-se a análise não linear geométrica é recomendável efetuar uma análise linear de estabilidade (resolução do sistema de equações (4.50)), o que permite o conhecimento prévio das cargas de bifurcação e dos respectivos modos de instabilidade. Nas análises não lineares de estabilidade é usual (i) fixar-se o incremento de tensões como uma parcela da tensão crítica e (ii) a utilização do modo de instabilidade como representativo das imperfeições iniciais que fazem parte do problema de instabilidade não linear.

5. COMPORTAMENTO DE PERFIS FORMADOS A FRIO EM INCÊNDIO

Os perfis formados a frio, devido ao seu processo de fabricação, são, geralmente, constituídos de seções abertas e de paredes finas muito esbeltas, o que implica, automaticamente, em fenômenos de instabilidade local, i.e., caracterizados por deformações das placas finas que constituem a seção, que não afetam as seções menos esbeltas. Os fenômenos de instabilidade local provocam uma redução na capacidade resistente dos perfis formados a frio.

O aço submetido a altas temperaturas sofre degeneração de suas características físico-químicas, ocasionando uma redução da resistência ao escoamento e do módulo de elasticidade, além do aparecimento de esforços solicitantes adicionais nas estruturas com restrições às deformações térmicas, o que deve ser levado em conta no dimensionamento de estruturas constituídas por esse material.

Como consequência desses dois fenômenos, no projeto de estruturas de perfis formados a frio em situação de incêndio tem-se que analisar conjuntamente os problemas de instabilidade e da degradação do material devido à temperatura. Existem poucos trabalhos que tratam de perfis formados a frio em situação de incêndio, dentre os quais ganham destaques os trabalhos de Kaitila (2002), Feng *et al* (2003), Zhao *et al* (2005), Alves (2006), Chen e Young (2006, 2007 e 2008), Landesmann *et al* (2009), Ranawaka e Mahendran (2009 e 2010), Kankanamge (2010) e Landsmann e Camotim (2011).

A norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 apresenta uma classificação das seções transversais em função de sua esbeltez. As seções são classificadas em (i) compactas – seções capazes de redistribuição de momentos fletores com grande capacidade de rotação plástica antes da ocorrência de instabilidade local, (ii) semicompactas – os elementos comprimidos podem atingir a resistência ao escoamento antes que a instabilidade local, mas não apresentam grandes capacidades de rotação plástica e (iii) esbeltas – seções onde um ou mais elementos comprimidos apresentam instabilidade local em regime elástico antes de atingir a resistência ao escoamento.

Analogamente, o regulamento europeu Eurocode 3 parte 1.1 (2005) classifica as seções de perfis metálicos em quatro classes em função da esbeltez de suas paredes, capacidade resistente, capacidade de rotação plástica e do risco de instabilidade local:

(i) Classe 1: seções que permitem mobilizar a sua capacidade plástica, sem a ocorrência de instabilidade local e com grande capacidade de rotação plástica;

(ii) Classe 2: seções que permitem mobilizar a sua capacidade plástica, sem a ocorrência de instabilidade local e com capacidade de rotação plástica limitada;

(iii) Classe 3: seções que permitem mobilizar a sua capacidade elástica nas fibras extremas, mas não a sua capacidade plástica em virtude do risco de ocorrência de instabilidade local;

(iv) Classe 4: seções que não podem atingir a sua capacidade elástica em virtude da ocorrência de instabilidade local.

Nota-se que apesar de as definições das classes de seções conforme norma europeia e brasileira serem similares, os limites de esbeltez das seções, que limitam as classes, não são os mesmos. Para exemplificar, a Tabela 5.1 apresenta os limites de esbeltez obtidos para um perfil laminado ou soldado, com seções *I* e *H* com dois eixos de simetria e seções *U* não sujeitas a momento de torção, fletidas em relação ao eixo de maior momento de inércia, com $f_y = 250\ MPa$, submetidos a flexão e a compressão, respectivamente. Nessa tabela consideram os dois estados limites referentes a instabilidade local: flambagem local da mesa (FLM) e flambagem local da alma (FLA).

Tabela 5.1: Esbeltez limite para perfil submetido à compressão.

	Estado Limite	
	FLM (Elemento AL)	FLA (Elemento AA)
Seção Esbelta – NBR 8800:2008	>16	>42
Classe 4 – EC3 parte 1.1 (2005)	>14	>41

Observa-se que, para o perfil comprimido, os limites de esbeltez obtidos pelas normas brasileira e europeia são semelhantes para as seções suscetíveis a fenômenos de instabilidade local.

Devido à pequena espessura das chapas presentes nos perfis com seções esbeltas, o fenômeno da instabilidade local torna-se importante no projeto desses perfis à temperatura ambiente ou em temperaturas elevadas.

O fato de os perfis laminados ou soldados com seções esbeltas não atingirem a plastificação total da seção, devido à precoce instabilidade local, impede que os tradicionais redutores da resistência ao escoamento f_y ($k_{y,\theta}$) recomendados pela ABNT NBR 14323:1999 ou Eurocode 3 parte 1.2 (2005) sejam utilizados. Algo similar ocorre nos perfis formados a frio.

Diversos pesquisadores (Makelainen e Miller (1983), Gleich (1995), Kaitila (2002), Lee (2004), Zhao *et al* (2005) e Mecozzi e Zhao (2005)) ao ensaiarem perfis formados a frio correlacionam a redução de esforço resistente desses perfis com uma redução de resistência do aço associada a uma determinada deformação linear específica menor do que a correspondente ao início do escoamento.

Atualmente, os ensaios utilizados para caracterizar as propriedades mecânicas em incêndio dos perfis formados a frio não são suficientes em número e se restringem apenas a alguns pesquisadores. Desse modo, sem um número expressivo de ensaios experimentais, ainda não é possível elaborar com rigor um método geral e econômico para o projeto de perfis formados a frio em situação de incêndio.

Para contornar essa lacuna de conhecimento, o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) permite, de forma simplificada, que os perfis formados a frio sejam dimensionados em situação de incêndio utilizando o procedimento clássico do método das larguras efetivas com redutor da resistência ao escoamento iguais aos recomendados para os perfis laminados ou soldados com seção classe 4, isto é, relativo a 0,2% da deformação específica plástica residual.

A seguir, apresenta-se uma descrição de ensaios e simulações numéricas, realizados por diversos pesquisadores nos últimos anos, com a finalidade de verificar as reduções da resistência ao escoamento dos perfis formados a frio em situação de incêndio. Ao final do Capítulo, propõe-se uma metodologia de dimensionamento de perfis formados a frio submetidos a elevadas temperaturas.

5.1. Perfis de Aço Formado a Frio em Incêndio

No que se refere aos trabalhos experimentais, pilares tubulares de chapa fina foram ensaiados por Ala-Outinen e Mylymäki (1995), que verificaram que a largura efetiva dos elementos, em temperatura elevada, segue a mesma formulação das especificações do Eurocode 3 parte 1.3 para temperatura ambiente. Porém, devem-se utilizar fatores de redução para a resistência ao escoamento e para o módulo de elasticidade do aço em temperaturas elevadas com deformação específica residual de 0,2%, conforme sugere o Eurocode 3 parte 1.2 (2005). Foram encontradas temperaturas críticas por volta de 400ºC.

Um estudo dos fenômenos de instabilidade por flexão e flexotorção em temperatura ambiente e para situação em incêndio foi realizado por Ranby (1999). Nesse estudo não se consideraram os efeitos causados por momentos aplicados na estrutura, porém levou-se em conta o efeito do momento fletor causado pelo deslocamento do centro geométrico da seção transversal indeformada, originado pelo gradiente térmico.

Pela teoria de Nylander (1951), Ranby (1999) estudou o efeito de deslocamentos iniciais à temperaturas elevadas. Os resultados mostraram que o efeito dos

deslocamentos iniciais tem a mesma influência relativa na resistência do aço em temperatura ambiente e em situação de incêndio.

Por meio de uma série de ensaios e modelagens numéricas efetuadas com a ajuda do método dos elementos finitos, Ranby (1999) concluiu que o procedimento recomendado pelo Eurocode 3 parte 1.3 (1996) para instabilidade flexional e flexotorcional em temperatura ambiente poderia ser utilizado em temperatura elevada, desde que considerassem a redução da resistência e do módulo de elasticidade do aço em função da temperatura.

Em outro trabalho numérico-experimental, Lee (2004) estudou o comportamento de pilares de aço formados a frio em situação de incêndio. Os pilares ensaiados eram curtos e não apresentaram modos de instabilidade global critico. Todos os ensaios foram em regime estacionário. Foram determinados os coeficientes de instabilidade de placas em altas temperaturas.

Um método termestrutural analítico para o cálculo da resistência ao fogo de paredes *Studs-Wall* expostas ao incêndio em apenas uma face foi proposto por Alfawakhiri e Sultan (2000). Os autores apresentaram modelos analíticos que permitem simular o histórico das deformações laterais e indicar o tempo de colapso estrutural. Mostram também como diferentes formas de aquecimento de pilares de aço formado a frio podem causar diferentes modos de colapso. O modelo considera que a instabilidade por flexotorção permaneça impedida durante o incêndio.

Por meio do programa comercial ABAQUS, Kaitila (2002) desenvolveu um método numérico para representar o comportamento de perfis formados a frio em situação de incêndio. Estudou o comportamento de vigas e pilares que se instabilizam em modos local e global, para diferentes condições de contorno e carregamento. Foram efetuados dois tipos de análises: (i) análise linear de estabilidade onde se obtém as cargas criticas e os respectivos modos de instabilidade e (ii) a análise do comportamento pós-crítico para se obter a carga última do elemento. As imperfeições geométricas iniciais foram obtidas a partir da configuração do modo de instabilidade, obtido da análise linear de estabilidade. A degradação das propriedades do aço devido ao aquecimento foi incluída no modelo a partir dos fatores de redução fornecidos por Outinen *et al* (2001), que, segundo o autor, fornecem resultados mais confiáveis na modelagem numérica.

5.2. Propriedades Mecânicas dos Perfis Formados a Frio em Temperaturas Elevadas

As propriedades mecânicas dos perfis laminados são bem conhecidas à temperaturas ambiente e elevadas. Pesquisadores têm mostrado, por meio de ensaios, que os fatores de redução da resistência ao escoamento e do módulo de elasticidade a serem empregados para os perfis formados a frio são diferentes dos fatores de redução utilizados nos perfis laminados.

Os primeiros ensaios de perfis formados a frio em situação de incêndio foram realizados por Klippstein (1978). A partir desses ensaios, Gerlich (1995) obteve as expressões (1.1) para o cálculo dos fatores de redução do módulo de elasticidade, $k_{E,\theta}$, e da resistência ao escoamento, $k_{y,\theta}$, para temperaturas inferiores a 650ºC,

$$\begin{aligned} k_{E,\theta} &= 1,0 - 3,0.10^{-4}\theta + 3,7.10^{-7}\theta^2 - 6,1.10^{-9}\theta^3 + 5,4.10^{-12}\theta^4 \\ k_{y,\theta} &= 1,0 - 5,3.10^{-4}\theta + 4,0.10^{-6}\theta^2 - 1,9.10^{-8}\theta^3 + 1,7.10^{-11}\theta^4 \end{aligned}, \qquad (1.1)$$

onde θ é a temperatura do aço.,

Makelainen e Miller (1983) ensaiaram, em regime transiente e estacionário, chapas de aço galvanizado (Z33) formado a frio em situação de incêndio. No primeiro caso, referente ao regime transiente, foram obtidas as expressões (1.2) para os fatores de redução $k_{E,\theta}$ e $k_{y,\theta}$,

$$\begin{aligned} k_{y,\theta} &= 1,088 - 0,1314.\exp\left[0,0047\left(\theta - 148,3\right)\right] && \text{para } 20^{\circ}\text{C} \le \theta < 500^{\circ}\text{C} \\ k_{y,\theta} &= 104.\left(1 - \theta/1135\right)/\left(\theta - 356\right) && \text{para } 500^{\circ}\text{C} \le \theta \le 800^{\circ}\text{C} \\ k_{E,\theta} &= 1,01 - 0,139.\exp\left[0,007\left(\theta - 346\right)\right] && \text{para } 20^{\circ}\text{C} \le \theta < 600^{\circ}\text{C} \end{aligned} \quad .(1.2)$$

Os valores de $k_{y,\theta}$ foram obtidos com base na deformação específica residual igual a 0,2%. A taxa de aquecimento utilizada nos ensaios foi igual a 10ºC/min.

Para os ensaios em regime estacionário, ou seja, com aplicação de carga de tração em perfis submetidos à temperatura constante e uniforme, os autores obtiveram a equação (1.3) para o redutor do módulo de elasticidade, sendo válida para temperatura entre 20ºC e 800ºC,

$$k_{E,\theta} = 0,56 - 0,46\tanh\left(\frac{\theta - 550}{250}\right). \qquad (1.3)$$

Um estudo semelhante foi realizado por Lee (2004), onde foram ensaiados 189 corpos de prova de aço com três diferentes resistências ao escoamento (300, 500 e 550 MPa) e com quatro espessuras distintas (0,4, 0,6, 1,0 e 1,2mm). Os fatores propostos

para a redução do módulo de elasticidade e da resistência ao escoamento estão descritos pelas equações (1.4) e (1.5), respectivamente,

$$k_{E,\theta} = 1,0 \qquad \text{para } \theta \leq 100^{\circ}\text{C}$$

$$k_{E,\theta} = 1,0 - 0,0014(\theta - 100) \qquad \text{para } 100^{\circ}\text{C} < \theta \leq 500^{\circ}\text{C} \quad , \quad (1.4)$$

$$k_{E,\theta} = \frac{1,0 - \theta/1200}{0,3 + 0,00122\theta} - 0,203 \qquad \text{para } 500^{\circ}\text{C} < \theta \leq 800^{\circ}\text{C}$$

$$k_{y,\theta} = 1,0065 - 4.10^{-4}\theta + 2.10^{-6}\theta^2 - 10^{-8}\theta^3 + 7,9.10^{-12}\theta^4 . \qquad (1.5)$$

Observa-se na equação (1.4) que o redutor da resistência ao escoamento apresenta um comportamento não linear somente para temperaturas superiores a 500ºC. Além disso, o redutor do módulo de elasticidade é semelhante à equação (1.1) proposta por Gleich (1995), mas válida para temperaturas entre 20ºC e 800ºC.

A variação do redutor da resistência ao escoamento obtidos por Makelainen e Miller (1983), Gleich (1995), Lee (2004) e o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) referente à seção classe 4 está ilustrada na Figura 5.1.

Pode ser observado que as duas primeiras curvas são muito parecidas, com a ressalva de que a expressão proposta por Gleich (1995) é válida para temperaturas inferiores a 650ºC. Os resultados obtidos por Lee (2004) foram menos conservadores para temperaturas superiores a 150ºC.

Os redutores do módulo de elasticidade obtidos por Makelainen e Miller (1983), Gleich (1995), Lee (2004) e o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) estão mostrados na Figura 5.2. Observa-se uma certa discrepância relativa entre os redutores do módulo de elasticidade obtidos pelos autores. Para temperaturas superiores a 500ºC as curvas convergem com exceção da curva que representa os redutores do módulo de elasticidade obtidos por Makelainen e Miller (1983) no regime estacionário.

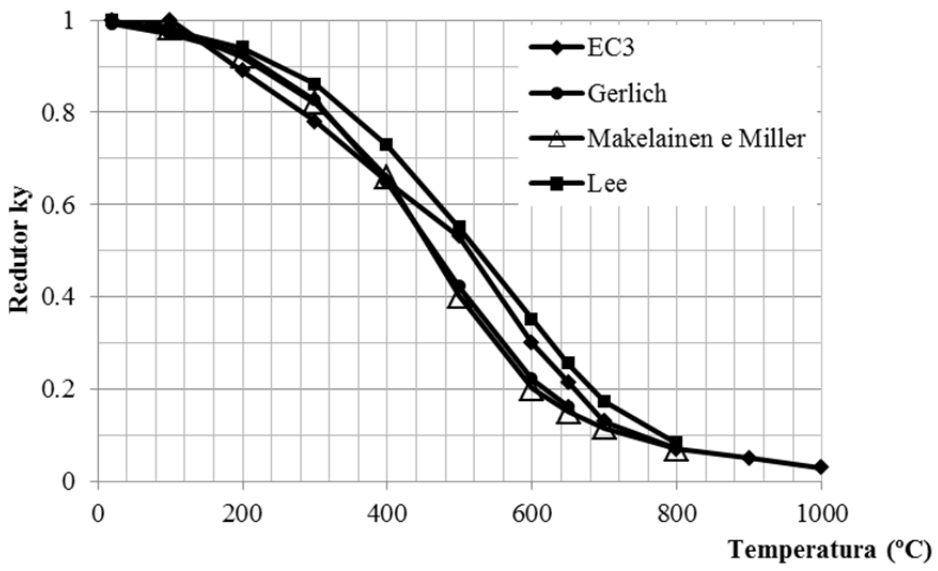

Figura 5.1: Redutor da resistência ao escoamento propostos por Makelainen e Miller (1983), Gleich (1995), Lee (2004) e Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

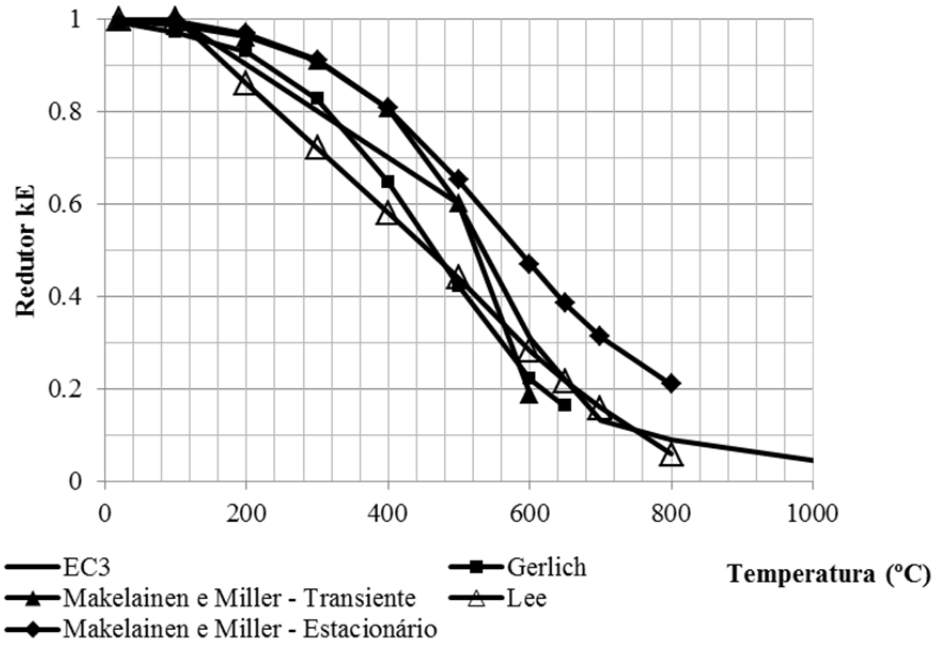

Figura 5.2: Redutor do módulo de elasticidade proposto por Makelainen e Miller (1983), Gleich (1995), Lee (2004) e Eurocode 3 parte 1.2 (2005)

As propriedades mecânicas do aço zincado S350GD+Z em temperatura elevada foram obtidas experimentalmente por Mäkeläinen e Outinen (1998) *apud* Kaitila (2002). Estes ensaios foram executados em regime transiente. As deformações foram obtidas em função da temperatura e o alongamento térmico foi subtraído da deformação total para se obter a curva deformação versus temperatura.

As resistências ao escoamento obtidas experimentalmente foram relativamente coincidentes com as resistências recomendadas em alguns códigos normativos, tais como o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) e as normas francesa e australiana. Os módulos de elasticidade obtidos foram ligeiramente inferiores aos recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

Seguindo a mesma metodologia, Chen e Young (2006, 2007, 2008) analisam os aços australianos G450 e G550 em temperaturas elevadas, utilizando corpos de prova com espessuras de 1,9 mm e 1,0 mm. Os valores do módulo de elasticidade, a resistência ao escoamento relativo a 0,2% da deformação específica plástica residual e da resistência última dos aços G450 e G550 em temperatura ambiente estão apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Propriedades mecânicas dos aços G450 e G550 à temperatura ambiente

Aço	E (GPa)	$f_{y,0.2}$ (MPa)	f_u (MPa)
G450	203,0	524	551
G550	200,3	598	608

Segundo as conclusões desses autores:

(i) Para o aço G450 os fatores de redução da resistência ao escoamento proposto pela norma australiana AS 4100 são conservadores para temperaturas entre 220ºC e 550ºC, enquanto para a temperatura de 660ºC, o redutor da resistência ao escoamento encontrado pelos autores foi inferior ao redutor fornecido pela norma AS 4100.

(ii) Para o aço G550 os fatores de redução da resistência ao escoamento proposto pela norma australiana AS 4100 são conservadores para temperaturas entre 220ºC e 400ºC, enquanto para as temperaturas entre 450ºC e 800ºC, os redutores da resistência ao escoamento encontrado pelos autores foram inferiores aos redutores fornecidos pela norma AS 4100.

Com base nos resultados experimentais efetuados em regime estacionário e transiente, Chen e Young (2007) propõem a equação (1.6) para os fatores de redução do módulo de elasticidade e da resistência ao escoamento dos aços G450 e G550. Os coeficientes *a, b, c* e *n* estão apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5 para os aços G450 e G550, respectivamente. O redutor do módulo de elasticidade foi obtido com base nos ensaios em regime transiente somente para o aço G450,

$$k = a - \frac{(\theta - b)^n}{c}. \tag{1.6}$$

Os redutores da resistência ao escoamento em função da temperatura para os aços G450 e G550 obtidos por Chen e Young (2007) estão apresentados na Figura 5.3. Observa-se que os redutores da resistência ao escoamento do aço G450 são menores do que os redutores do aço G550.

Tabela 5.3: Fatores de redução para o aço G450.

Propriedade	Temperatura	A	B	C	n
Módulo de Elasticidade $k_{E,\theta}$	$22 \le \theta < 450$	1,0	22	$1{,}25.10^3$	1
	$450 \le \theta < 650$	-0,11	860	$-2{,}22.10^5$	2
Resistência ao escoamento $k_{y,\theta}$	$22 \le \theta < 300$	1,0	22	$5{,}56.10^3$	1
	$300 \le \theta < 650$	0,95	300	$1{,}45.10^5$	2
	$650 \le \theta < 1000$	0,105	650	$5{,}0.10^3$	1

Tabela 5.4: Fatores de redução para o aço G550.

Propriedade	Temperatura	A	B	C	n
Resistência ao escoamento $k_{y,\theta}$	$22 \le \theta < 300$	1,0	22	$2{,}78.10^3$	1
	$300 \le \theta < 450$	0,9	300	$4{,}8.10^6$	3
	$450 \le \theta < 1000$	0,2	1000	$9{,}0.10^8$	3

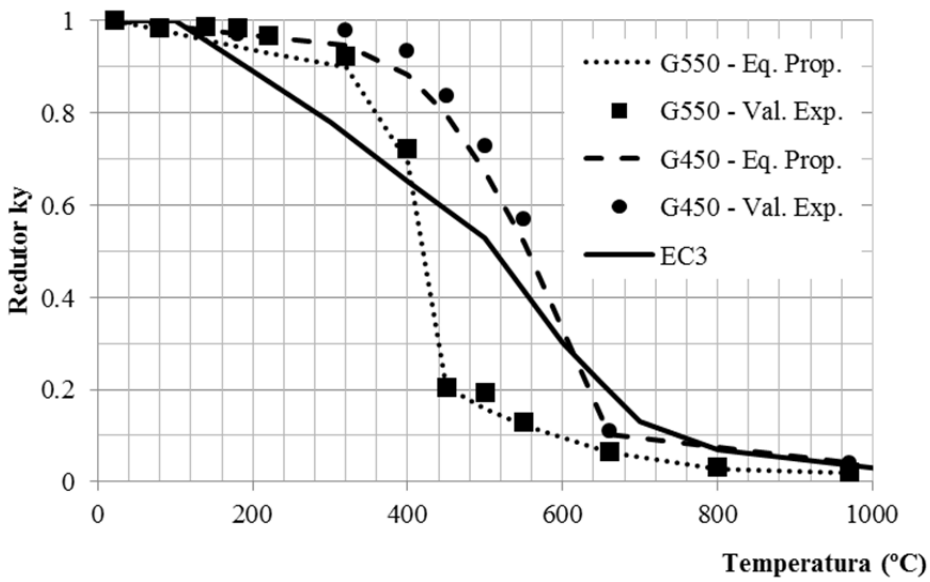

Figura 5.3: Variação do redutor da resistência ao escoamento para os aços G450 e G550.

Mais tarde, um estudo semelhante foi realizado por Ranawaka e Mahendran (2009), que desenvolveram equações empíricas para os fatores de redução do módulo de elasticidade e da resistência ao escoamento dos aços G250 e G550. As equações foram estabelecidas com base na tensão relativa a 0,2% da deformação plástica residual. Os autores propuseram somente uma expressão (equação (1.7)) para o redutor do módulo de elasticidade, pois a diferença entre os dois tipos de aços não foi significativa,

$$\begin{aligned} k_{E,\theta} &= 1,0 && \text{para } 20^{\circ}\text{C} \le \theta \le 100^{\circ}C \\ k_{E,\theta} &= 1,1297 - 0,0013\theta && \text{para } 100^{\circ}\text{C} < \theta \le 800^{\circ}C \end{aligned} \quad . \tag{1.7}$$

Já para os redutores da resistência ao escoamento dos aços G250 e G550, os autores propõem duas expressões distintas, equações (1.8) e (1.9), respectivamente,

$$\begin{aligned} k_{y,\theta} &= 1,014 - 0,0007\theta && \text{para } 20^{\circ}\text{C} < \theta \le 200^{\circ}C \\ k_{y,\theta} &= 3,7 - \frac{(\theta - 74)^{0,15}}{0,736} && \text{para } 200^{\circ}\text{C} < \theta \le 800^{\circ}C \end{aligned} \quad , \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} k_{y,\theta} &= 1,0003 - 0,00016\theta && \text{para } 20^{\circ}\text{C} < \theta \le 200^{\circ}C \\ k_{y,\theta} &= 0,97 - \frac{(\theta - 200)^{1,81}}{58500} && \text{para } 200^{\circ}\text{C} < \theta \le 600^{\circ}C \\ k_{y,\theta} &= 0,3363 - 0,00037\theta && \text{para } 600^{\circ}\text{C} < \theta \le 800^{\circ}C \end{aligned} \quad . \tag{1.9}$$

Em 2005, na Europa, um grupo de pesquisadores do *Centre Technique Industriel de la Construction Métallique,* liderado por Zhao, publicaram um extenso trabalho, em conjunto com diversos centros de pesquisas, com o objetivo de reunir

informações sobre o desempenho de pórticos constituídos de perfis formados a frio e desenvolver métodos analíticos para a previsão da resistência quando esses são submetidos a temperaturas elevadas. Foram efetuados testes de tração em corpos de prova de dois tipos de aços (S280 e S350) e com três tipos de seções *U* identificadas de (i) pequena, (ii) média e (iii) grande, conforme está indicado na Tabela 5.5. De acordo com Zhao *et al* (2005) e Mecozzi e Zhao (2005), os aços S280 não possuem características portantes e apresentam resistência relativa ao fogo menor do que os aços S350.

Por meio de ensaios a tração, obteve-se a resistência ao escoamento relativa a 0,2% da deformação plástica, a resistência ao escoamento e o módulo de elasticidade em temperatura ambiente, cujos resultados estão mostrados na Tabela 5.6.

Tabela 5.5: Seções analisadas (Mecozzi e Zhao, 2005)

Identificação	Aço	Seção U
Pequena	S280	100x50x0,6
Média	S350	150x57x1,2
Grande	S350	250x80x2,5

Tabela 5.6: Propriedades mecânicas a temperatura ambiente (Mecozzi e Zhao, 2005)

Identificação	f_σ (MPa)	f_y (MPa)	E (GPa)
Pequena	312	383	212
Média	419	486	205
Alta	327	461	190,5

Os valores dos fatores de redução obtidos para o aço S350 em temperaturas elevadas em regime estacionário e transiente estão apresentados na Tabela 5.7.

Nas especificações do Eurocode 3 parte 1.2 (2005), estão presentes fatores de redução das resistências ao escoamento à deformação específica de 2%, do limite de proporcionalidade e do módulo de elasticidade para temperaturas elevadas. Para seções suscetíveis a instabilidade local, o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) sugere que os valores de redução da resistência ao escoamento do aço seja relativo a 0,2% de deformação plástica residual. Outinen e Myllymäki (1995) postularam que esses valores de redução

poderiam se aplicados em perfis formados a frio. Na Tabela 5.8 estão indicados os fatores de redução presentes no Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

Tabela 5.7: Fatores de redução para aços S350 (Zhao *et al*, 2005)

Temperatura (ºC)	Redutor da resistência ao escoamento $k_{y,\theta} = f_{y,\theta} / f_y$	Redutor da resistência correspondente ao limite de proporcionalidade $k_{p,\theta} = f_{p,\theta} / f_y$	Redutor da resistência ao escoamento para perfis formados a frio $k_{\sigma,\theta} = f_{y,\theta} / f_y$	Redutor do modulo de elasticidade $k_{E,\theta} = E_\theta / E$
20	1,000	1,000	1,000	1,000
100	1,000	1,000	1,000	1,000
200	1,000	0,807	0,896	0,900
300	1,000	0,613	0,793	0,800
400	0,890	0,374	0,616	0,680
500	0,570	0,263	0,407	0,450
600	0,340	0,130	0,229	0,250
700	0,180	0,059	0,117	0,110
800	0,070	0,032	0,049	0,080
900	0,053	0,024	0,037	0,060
1000	0,035	0,016	0,025	0,040
1100	0,018	0,008	0,013	0,020
1200	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela 5.8: Fatores de redução segundo o Eurocode 3 parte 1.2 (2005)

Temperatura (ºC)	Redutor da resistência ao escoamento $k_{y,\theta} = f_{y,\theta} / f_y$	Redutor da resistência correspondente ao limite de proporcionalidade $k_{p,\theta} = f_{p,\theta} / f_y$	Redutor da resistência ao escoamento para perfis formados a frio $k_{\sigma,\theta} = f_{y,\theta} / f_y$	Redutor do modulo de elasticidade $k_{E,\theta} = E_\theta / E$
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	1,0000	0,8070	0,8900	0,9000
300	1,0000	0,6130	0,7800	0,8000
400	1,0000	0,4200	0,6500	0,7000
500	0,7800	0,3600	0,5300	0,6000
600	0,4700	0,1800	0,3000	0,3100
700	0,2300	0,0750	0,1300	0,1300
800	0,1100	0,0500	0,0700	0,0900
900	0,0600	0,0375	0,0500	0,0675
1000	0,0400	0,0250	0,0300	0,0450
1100	0,0200	0,0125	0,0200	0,0225
1200	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

A variação dos redutores da resistência ao escoamento relativa a 0,2% da deformação específica, do limite de proporcionalidade, da resistência ao escoamento para perfis formados a frio e do módulo de elasticidade em temperaturas elevadas está ilustrada nas curvas da Figura 5.4. Observa-se que os fatores de redução propostos pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) e por Zhao *et al* (2005) são semelhantes para temperaturas baixas (20ºC a 300ºC) e altas (800ºC a 1200ºC). No intervalo de temperaturas entre 300ºC a 1100ºC, os valores obtidos por Zhao *et al* (2005) são inferiores aos fatores recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

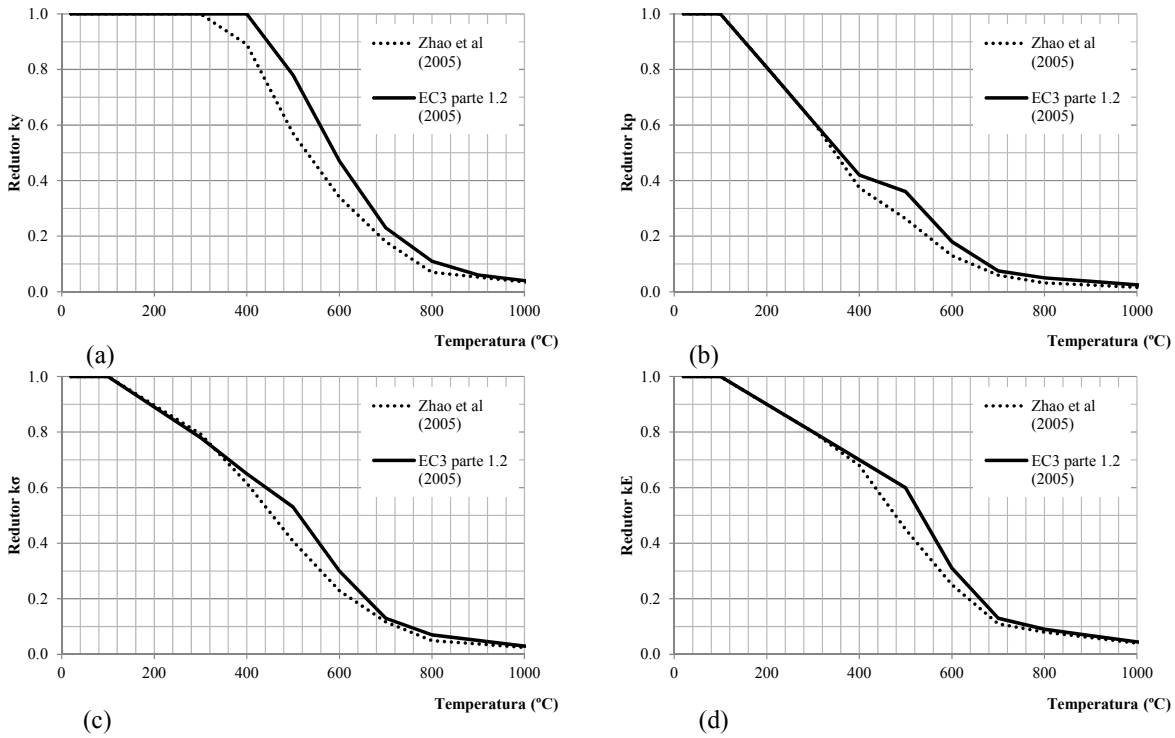

Figura 5.4: Redutores: (a) resistência ao escoamento a 2%, (b) limite de proporcionalidade, (c) resistência ao escoamento a 0,2%, (d) modulo de elasticidade.

Com o aumento da temperatura o diagrama tensão-deformação do aço deixa de ser praticamente bilinear e passa a possuir um encruamento não linear. Para a correta definição do encruamento não linear do aço a altas temperaturas torna-se necessário a determinação da resistência ao escoamento e do limite de proporcionalidade. Nessa linha de pensamento, o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) propõe relações tensão-deformação para temperaturas elevadas, válidas para uma taxa de aquecimento entre 2 e 50K/min, com base nos ensaios feitos pelas siderúrgicas British Steel (Reino Unido) e ARBED (Luxemburgo), que são dadas pelas equações (1.10),

$$\sigma = E_\theta \varepsilon \qquad \text{para } \varepsilon \le \varepsilon_{p,\theta}$$

$$\sigma = f_{p,\theta} - c + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[a^2 - \left(\varepsilon_{y,\theta} - \varepsilon\right)^2\right]^{0,5} \qquad \text{para } \varepsilon_{p,\theta} < \varepsilon \le \varepsilon_{y,\theta}$$

$$\sigma = f_{y,\theta} \qquad \text{para } \varepsilon_{y,\theta} < \varepsilon \le \varepsilon_{t,\theta} \quad , (1.10)$$

$$\sigma = f_{p,\theta}\left[1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{p,\theta}}{\varepsilon_{u,\theta} - \varepsilon_{t,\theta}}\right] \qquad \text{para } \varepsilon_{t,\theta} < \varepsilon \le \varepsilon_{u,\theta}$$

$$\sigma = 0,0 \qquad \text{para } \varepsilon = \varepsilon_{u,\theta}$$

onde os parâmetros são definidos pelas equações (1.11) a (1.14),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p,\theta} &= \frac{f_{p,\theta}}{E_\theta} \\ \varepsilon_{y,\theta} &= 0,02 \,, \\ \varepsilon_{t,\theta} &= 0,15 \\ \varepsilon_{u,\theta} &= 0,20 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$a^2 = \left(\varepsilon_{y,\theta} - \varepsilon_{p,\theta}\right)\left(\varepsilon_{y,\theta} - \varepsilon_{p,\theta} + \frac{c}{E_\theta}\right), \tag{1.12}$$

$$b^2 = c\left(\varepsilon_{y,\theta} - \varepsilon_{p,\theta}\right)E_\theta + c^2 \,, \tag{1.13}$$

$$c = \frac{\left(f_{y,\theta} - f_{p,\theta}\right)^2}{\left(\varepsilon_{y,\theta} - \varepsilon_{p,\theta}\right)E_\theta - 2\left(f_{y,\theta} - f_{p,\theta}\right)} \,, \tag{1.14}$$

em que $\varepsilon_{y,\theta}, \varepsilon_{p,\theta}, \varepsilon_{t,\theta}, \varepsilon_{u,\theta}$ são as deformações específicas no início do escoamento, no limite de proporcionalidade, no final do patamar de escoamento e a última, na temperatura θ_a, respectivamente, $f_{p,\theta}$ é a tensão correspondente ao limite de proporcionalidade, $f_{y,\theta}$ é a resistência ao escoamento e E_θ o módulo de elasticidade na temperatura θ_a. A Figura 5.5 representa graficamente a lei constitutiva do aço a altas temperaturas adotada pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

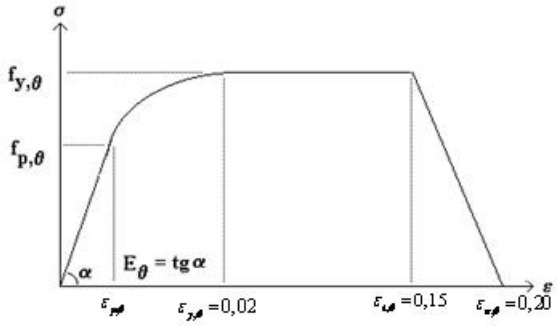

Figura 5.5: Relação tensão-deformação para aços a altas temperaturas.

O diagrama tensão-deformação específico para os aços S350 em função da temperatura de acordo com a metodologia proposta pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) está ilustrado na Figura 5.6. Nas linhas cheias foram adotados os redutores conforme o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) para seções classe 4, enquanto que nas linhas tracejadas foram adotados os redutores propostos por Zhao *et al* (2005). Observa-se que para temperaturas superiores a 400ºC os redutores recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) fornecem relações tensões-deformações menos conservadoras em relação aos parâmetros fornecidos por Zhao *et al* (2005).

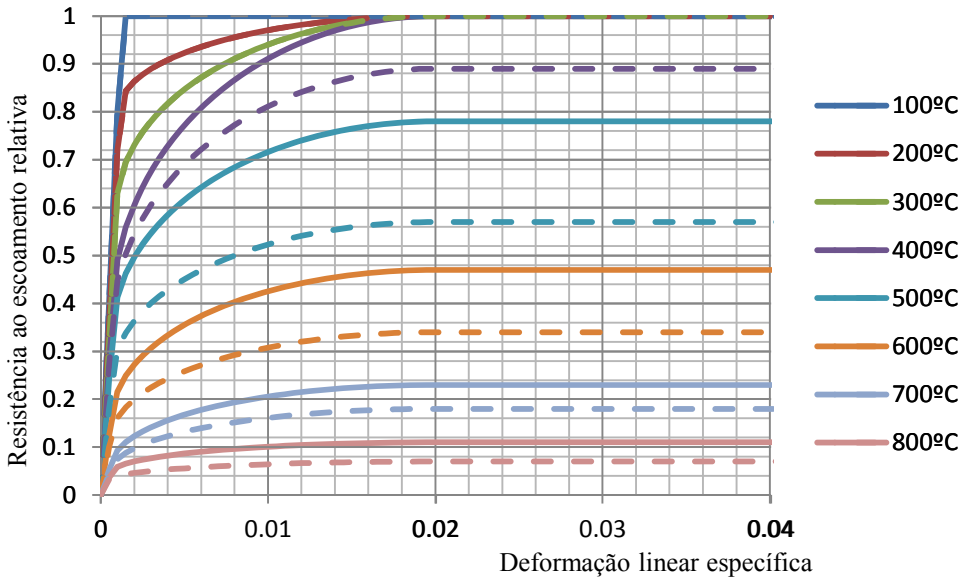

Figura 5.6: Diagrama tensão-deformação em função da temperatura
linhas cheias - Eurocode 3; linhas tracejadas - Zhao *et al* (2005)

5.3. Dimensionamento de Perfis Formados a Frio em Incêndio

Como já foi referenciado anteriormente, o dimensionamento de PFF em situação de incêndio ainda é um assunto pouco estudado, não existindo uma norma específica de dimensionamento desses perfis nessa situação, uma vez que não se encontram disponíveis trabalhos científicos que garantam com razoável grau de confiabilidade procedimentos de dimensionamento seguros e econômicos. Com base nos redutores de resistência ao escoamento já apresentados neste capítulo e no Eurocode 3 parte 1.2 (2005), apresentam-se, a seguir, algumas recomendações relativas ao dimensionamento de perfis formados a frio em situação de incêndio, para a situação em que há redução das características geométricas decorrente da instabilidade local. Essa metodologia proposta aqui está no texto de revisão da ABNT NBR 14323 (2011).

A metodologia estima a força resistente de compressão ($N_{fi,Rd}$) de um perfil formado a frio em situação de incêndio por meio da equação (1.15),

$$N_{fi,Rd} = \chi_{fi} k_{\sigma,\theta} A_{ef} f_y , \tag{1.15}$$

onde $k_{\sigma,\theta}$ é o redutor de resistência ao escoamento para perfis formados a frio, A_{ef} é a área efetiva da seção transversal à temperatura ambiente, determinada pelo método da largura efetiva ou da seção efetiva.

O fator de redução associado à resistência à compressão em situação de incêndio (χ_{fi}) é dado pela equação (1.16),

$$\chi_{fi} = \frac{1}{\varphi_{0,fi} + \sqrt{\varphi_{0,fi}^2 - \lambda_{0,fi}^2}} , \tag{1.16}$$

com,

$$\begin{aligned} \varphi_{0,fi} &= 0,5\left(1 + \alpha\, \lambda_{0,fi} + \lambda_{0,fi}^2\right) \\ \alpha &= 0,022\sqrt{\frac{E}{f_y}} \\ \lambda_{0,fi} &= \lambda_0 \sqrt{\frac{k_{y,\theta}}{k_{E,\theta}}} \end{aligned} , \tag{1.17}$$

onde λ_0 é o índice de esbeltez reduzido de barras comprimidas à temperatura ambiente, determinado de acordo com a ABNT NBR 8800:2008.

De forma simplificada, pode-se adotar: $\sqrt{\frac{k_{E,\theta}}{k_{y,\theta}}} = 0,85$

A variação da força normal resistente de um pilar de comprimento igual a 6,0 m submetido à compressão com seção *Ue 100x50x17x1,20*, em função da temperatura está representada na Figura 5.7. O gráfico foi obtido pela utilização dos fatores de redução das propriedades mecânicas recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) para seções classe 4 e por Zhao *et al* (2005). A relação entre os redutores do módulo de elasticidade e da resistência ao escoamento foi variável de acordo com os redutores utilizados. Observa-se que para temperaturas superiores a 400ºC, a força normal resistente calculada por meio dos redutores fornecidos por Zhao *et al* (2005) é inferior aos valores calculados com os fatores de redução recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005).

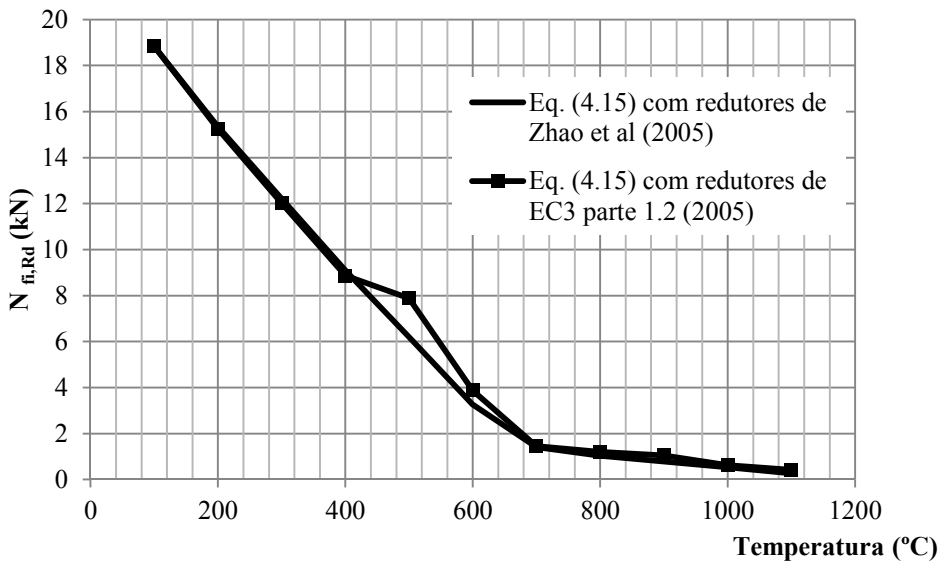

Figura 5.7: Variação da força normal resistente com a temperatura.

Para perfis formados a frio submetidos à flexão, o momento resistente de cálculo em situação de incêndio ($M_{fi,Rd}$) é dado pela equação (1.18),

$$M_{fi,Rd} = \chi_{fi} k_{\sigma,\theta} W_{ef} f_y , \qquad (1.18)$$

em que W_{ef} é o módulo resistente elástico efetivo da seção transversal à temperatura ambiente calculado de acordo com as prescrições da ABNT NBR 14762:2010, pelo método das larguras efetivas ou das seções efetivas

A variação do momento fletor resistente com a temperatura para o perfil *Ue 100x50x17x1,20* está ilustrada na Figura 5.8. Observa-se que para temperaturas superiores a 400ºC, o momento fletor resistente calculada por meio dos redutores fornecidos por Zhao *et al* (2005) é inferior aos valores calculados com os fatores de redução recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) para seções classe 4.

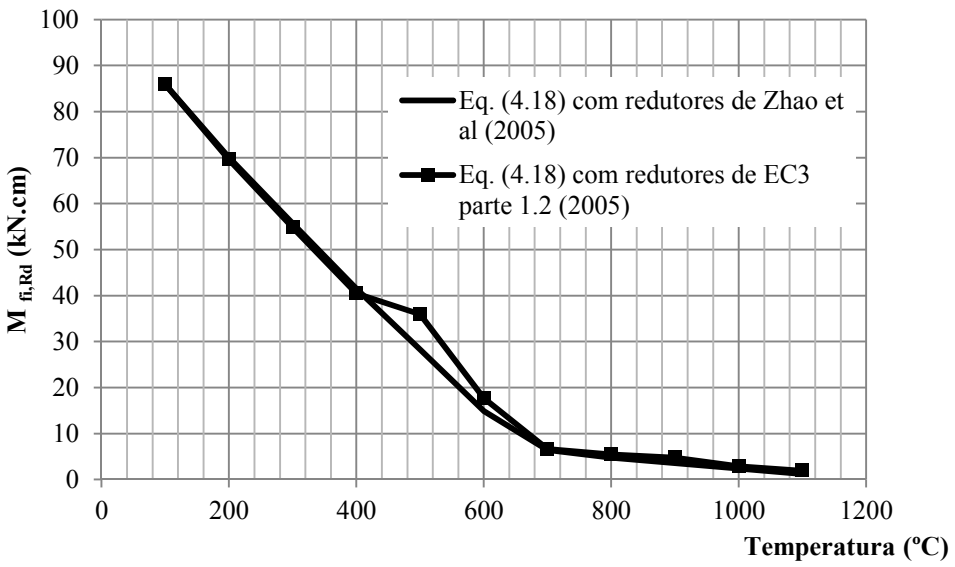

Figura 5.8: Variação do momento fletor resistente com a temperatura.

Como se pode notar nas Figuras 4.9 e 4.10, a proposta do autor desta Tese conduz a resultados pouco abaixo daqueles recomendados por Zhao *et al* (2005) no entanto, se trata de uma proposta que formaliza a recomendação do Eurocode 3 parte 1.2 (2005), ou seja, usar-se para os perfis formados a frio os mesmos redutores dos perfis laminados ou soldados constituídos de elementos classe 4. Em vista de o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) ter sido a base das normas brasileiras de dimensionamento em incêndio e as diferenças serem aceitáveis, julga-se a proposta de uso compatível com regulamentação nacional sobre estruturas de aço.

6. MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS APLICADO À ANÁLISE DE INSTABILIDADE

O Método das Faixas Finitas (*MFF*) foi escolhido nesta Tese para efetuar as análises de estabilidade de elementos estruturais com seção transversal constituídas de paredes finas por apresentar, devido à forma como efetua a discretização da estrutura, uma redução no esforço computacional na modelação e processamento de cálculo, quando comparado ao conhecido e amplamente utilizado método de elementos finitos (*MEF*).

Na análise de barras prismáticas, como é o caso dos perfis formados a frio, a discretização dos elementos estruturais torna-se mais fácil quando comparada a um modelo que faça uso do método dos elementos finitos, pois, como se verá, o método só requer a discretização da seção transversal, permitindo que o usuário, mesmo sem muitos conhecimentos em métodos numéricos, possa efetuar análises de estabilidade por esse método.

Por meio do *MFF*, desenvolvem-se neste capítulo as análises:

(i) lineares de estabilidade, onde se obtêm os valores das tensões de bifurcação e os correspondentes modos de instabilidade de barras comprimidas ideais (sem imperfeições iniciais), ou seja, o valor da força de compressão que provoca a instabilidade da barra e a respectiva forma da configuração deformada. Nesse tipo de análise não se consegue determinar exatamente as deformações.

(ii) não linear geométrica, também conhecida como análises não lineares de estabilidade, onde se torna possível calcular as trajetórias de equilíbrio, considerando a não linearidade geométrica, de barras comprimidas com ou sem imperfeições geométricas iniciais e com ou sem a consideração das tensões residuais.

O capítulo divide-se em três partes. Na parte inicial do capítulo, apresenta-se a formulação do *MFF* aplicado a análises do comportamento elástico geometricamente linear e não linear de elementos constituídos por paredes finas. A seguir mostra-se a implementação das soluções numéricas dos dois tipos de análise por meio da elaboração de um programa computacional, que é validado no final do capítulo pela comparação a resultados de alguns exemplos conhecidos disponíveis na literatura.

6.1. Considerações iniciais

O método das faixas finitas (*MFF*) proposto inicialmente por Cheung (1976), no final da década de 60, combina os métodos dos elementos finitos com a formulação dos métodos de *Rayleigh-Ritz* ou *Galerkin* (Fan, 1982). A discretização dos elementos estruturais é processada da seguinte forma:

(i) Discretização espacial no plano da seção transversal da peça, passando esta a ser constituída por um conjunto de faixas finitas de largura *b* e comprimento *a*, sendo que a conexão de duas faixas adjacentes é feita através das linhas nodais, conforme mostra a Figura 6.1;

(ii) Na direção transversal, o campo de deslocamentos é aproximado, em cada faixa finita, por funções polinomiais cujo grau condiciona a compatibilidade entre as faixas adjacentes;

(iii) Na direção longitudinal, os deslocamentos de cada faixa finita são aproximados por funções contínuas que satisfazem as condições de contorno globais do elemento. Em geral utilizam-se funções periódicas que possuam a capacidade de satisfazer as condições de contorno, como é o caso, por exemplo, das funções trigonométricas. Devido a este fato, é usual designar esta versão por método das faixas finitas semi-analítico (*MFF*).

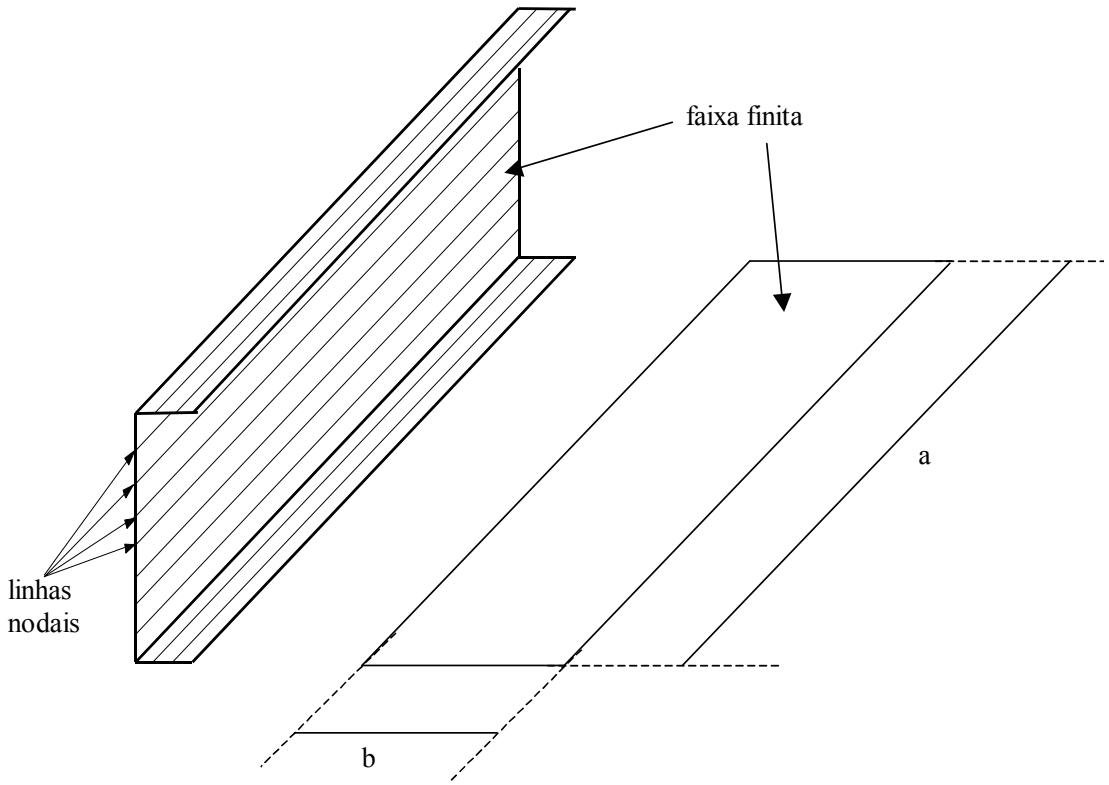

Figura 6.1: Discretização de um perfil em faixas finitas.

O *MFF* é vantajoso para análise linear de estabilidade de estruturas cuja deformação longitudinal é periódica. No entanto, segundo Prola (2001), a utilização do *MFF* apresenta algumas dificuldades na modelagem em alguns aspectos como: (i) em elementos onde a deformação longitudinal não é periódica, devido à presença de apoios intermediários ou diferentes condições de contorno e (ii) compatibilidade de deslocamentos de membrana e flexão entre duas faixas adjacentes não coplanares. Esse último aspecto é relevante no estudo do comportamento pós-crítico associado ao modo distorcional, onde os deslocamentos de membrana assumem grande importância.

Para contornar estas dificuldades, Kwon (1992) sugere a utilização do método das faixas finitas *splines* (*MFFS*), desenvolvido por Fan (1982), o qual é uma modificação na versão original do *MFF*, onde as funções periódicas de aproximação dos deslocamentos longitudinais são substituídas por combinações lineares de funções especiais, designadas por "B_3–*Spline*". O *MFFS* apresenta mais graus de liberdade do que o *MFF*, mas, mesmo assim, o número de graus de liberdade é aproximadamente 40% menor quando comparado ao modelo de elementos finitos utilizando elementos de casca (Van Erp, 1989).

Como se pretende efetuar análises lineares e não lineares que considerem todos os modos locais de instabilidade de seções de parede fina, nessa Tese as análises de instabilidade serão efetuadas por meio do *MFFS*.

6.2. Funções "B_3–*Spline*"

As funções *splines* foram desenvolvidas por Schoenberg (1946). Matematicamente, as funções *splines* são definidas como sendo polinômios segmentados de grau *n* cujos valores e suas primeiras *n-1* derivadas passam pelos pontos comuns a esses segmentos. Esses pontos são denominados de *nós* e os polinômios são escolhidos de forma a minimizar a curvatura quadrática média mínima. O intervalo é dividido em *m* subintervalos onde se define *m+1* nós.

Uma função "B_3–*Spline*" (B_3S) é definida em um domínio constituído por quatro intervalos de igual comprimento (h), sendo definida no domínio genérico $[x_i - 2h, x_i + 2h]$, pelas expressões (6.1),

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_i - 2h \\ s_1(x) & x_i - 2h < x \le x_i - h \\ s_2(x) & x_i - h < x \le x_i \\ s_3(x) & x_i < x \le x_i + h \\ s_4(x) & x_i + h < x \le x_i + 2h \\ 0 & x > x_i + 2h \end{cases}, \tag{6.1}$$

onde os polinômios $s_i(x)$ são definidos pelas equações (6.2),

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \frac{1}{6h^3}(x - x_i + 2h)^3 \\ s_2(x) &= \frac{1}{6h^3}\left[h^3 + 3h^2(x - x_i + h) + 3h(x - x_i + h)^2 - 3(x - x_i + h)^3\right] \\ s_3(x) &= \frac{1}{6h^3}\left[h^3 + 3h^2(x_i + h - x) + 3h(x_i + h - x)^2 - 3(x_i + h - x)^3\right] \\ s_4(x) &= \frac{1}{6h^3}(x_i + 2h - x)^3 \end{aligned} . \tag{6.2}$$

A representação de uma função "B_3–*Spline*" assim definida está mostrada na Figura 6.2, a qual é classificada como de classe C_2, ou seja, a função e as primeiras duas derivadas são contínuas no intervalo $[x_i - 2h, x_i + 2h]$. Os valores da função B_3S e das suas duas primeiras derivadas correspondentes às extremidades de cada subintervalo estão indicados na Tabela 6.1.

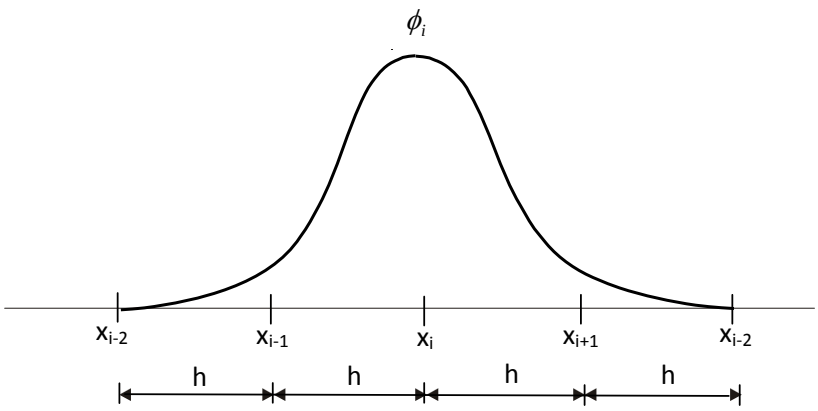

Figura 6.2: Função "B_3–*Spline*".

Tabela 6.1: Valores da função B_3S e das suas duas primeiras derivadas.

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
ϕ_i	0	1/6	2/3	1/6	0
ϕ_i'	0	1/2h	0	–1/2h	0
ϕ_i''	0	$1/h^2$	$-2/h^2$	$1/h^2$	0

Uma combinação linear das funções B_3S definida pela equação (6.3) e ilustrada na Figura 6.3 pode ser usada para aproximar uma função genérica *f(x)* definida no intervalo [a,b],

$$f(x) \approx B_3S(x) = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha_i \phi_i(x), \tag{6.3}$$

onde *m* é o número de sub-intervalos de comprimento *h=(a–b)/m* e definem-se *(m+3)* pontos, denominado de nós, (as extremidades dos *m* sub-intervalos e mais dois pontos exteriores, adjacentes às extremidades do intervalo – *(a–h)* e *(a+h)*).

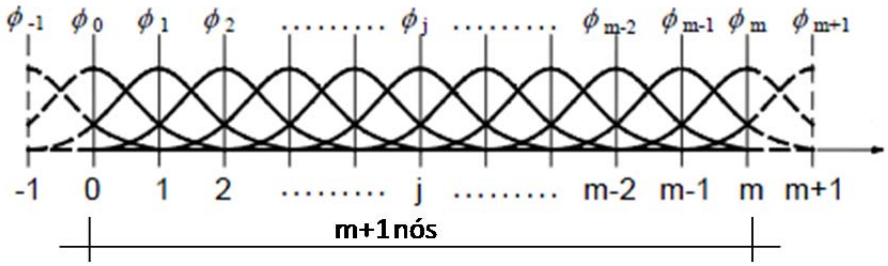

Figura 6.3: Combinação linear de funções "B_3–*Spline*".

Os coeficientes α_i são determinados por meio das condições de contorno dadas pelas expressões (6.4),

$$\begin{aligned} &B_3S'(a) = f'(a) \\ &B_3S(a+jh) = f(a+jh) \qquad j = 0, 1, ..., m. \\ &B_3S'(b) = f'(b) \end{aligned} \tag{6.4}$$

A utilização das funções B_3S conduz a uma representação suave dos deslocamentos longitudinais do elemento estrutural, sendo que o diagrama tensões-deformações é mais bem representado quando comparado ao método das faixas finitas semi-analítico (Prola, 2001).

6.3. Formulação das Faixas Finitas

A utilização do método das faixas finitas *splines* (*MFFS*) requer duas discretizações, uma no sentido transversal e outra no sentido longitudinal do elemento conforme mostram as Figura 6.4a e Figura 6.4b, respectivamente.

O elemento estrutural é dividido transversalmente em *nf* faixas finitas de largura *b* e comprimento *a*, sendo que as faixas adjacentes são conectadas por meio das linhas nodais. A largura *b* pode variar entre as faixas, enquanto o comprimento é único para todas as faixas finitas e igual ao comprimento do perfil. Cada linha nodal é subdividida

em *m* seções utilizando *(m+1)* nós. Para a definição das funções B_3S é necessário dois nós exteriores ao comprimento da faixa, conforme mostra a equação (6.3). Dessa maneira, são necessários *(m+3)* nós por linha nodal.

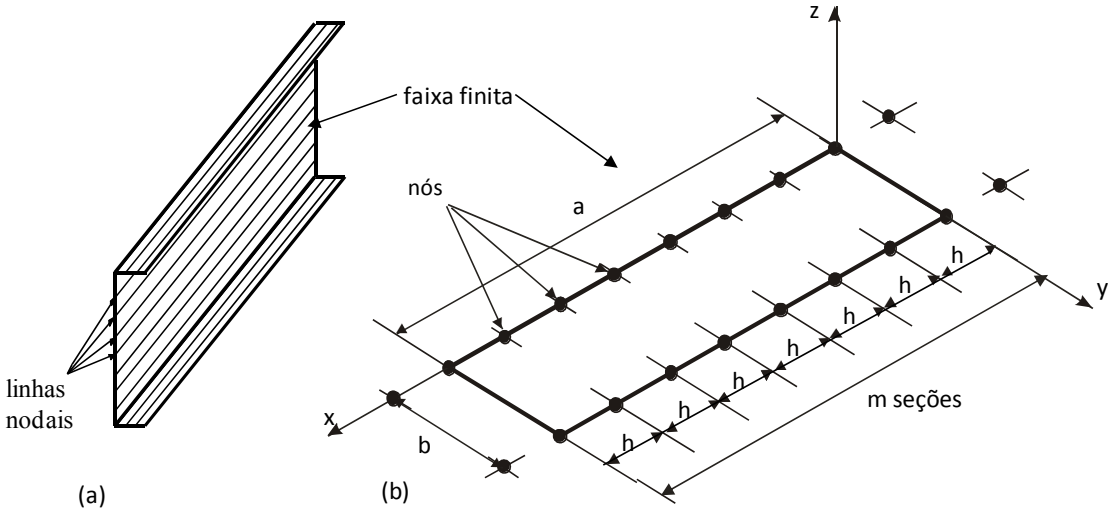

Figura 6.4: Discretização de um perfil em faixas finitas: (a) transversalmente e (b) longitudinalmente.

Os graus de liberdade de uma faixa finita estão representados na Figura 6.5. Observa-se que cada faixa possui *8(m+3)* graus de liberdade, na medida em que cada nó está associado a: (a) dois deslocamentos de membrana (*u* e *v*), (b) um deslocamento de flexão (*w*) e (c) uma rotação de flexão (θ_x). Consequentemente, o número de graus de liberdade da estrutura é *4nl(m+3)*, onde *nl* é o número de linhas nodais da estrutura.

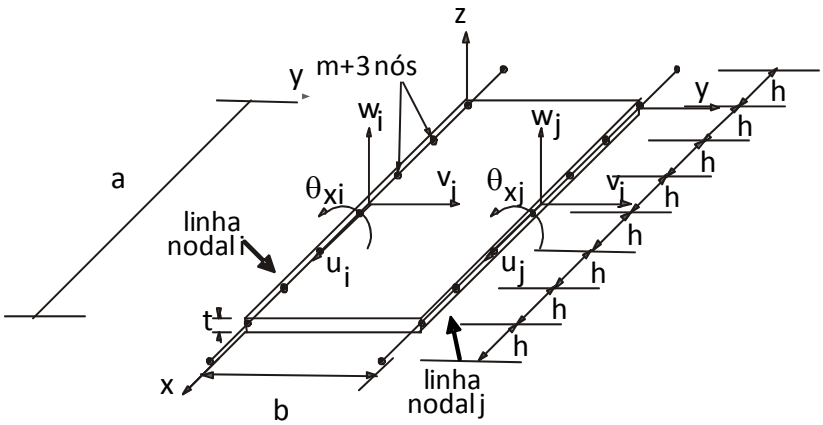

Figura 6.5: Graus de liberdade numa faixa finita.

Os vetores dos deslocamentos generalizados ou dos graus de liberdade, de membrana ($\underset{\sim}{u}^m$) e de flexão ($\underset{\sim}{u}^f$), de uma faixa finita são definidos pela expressão (6.5),

$$\underset{\sim}{u}^m = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}_i \\ \underset{\sim}{v}_i \\ \underset{\sim}{u}_j \\ \underset{\sim}{v}_j \end{Bmatrix} \qquad \underset{\sim}{u}^f = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w}_i \\ \underset{\sim}{\theta}_{xi} \\ \underset{\sim}{w}_j \\ \underset{\sim}{\theta}_{xj} \end{Bmatrix}, \tag{6.5}$$

onde os sub-vetores $\underset{\sim}{u}_{i,j}, \underset{\sim}{v}_{i,j}, \underset{\sim}{w}_{i,j}$ e $\underset{\sim}{\theta}_{xi,j}$ tem dimensão $m+3$ e são dados pelas equações (6.6),

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{u}_{i,j} &= \{u_{-1},\ u_0, u_1,\ \ldots,\ u_{m-1},\ u_m,\ u_{m+1}\}^T \\ \underset{\sim}{v}_{i,j} &= \{v_{-1},\ v_0, v_1,\ \ldots,\ v_{m-1},\ v_m,\ v_{m+1}\}^T \\ \underset{\sim}{w}_{i,j} &= \{w_{-1},\ w_0, w_1,\ \ldots,\ w_{m-1},\ w_m,\ w_{m+1}\}^T \\ \underset{\sim}{\theta}_{xi,j} &= \{\theta_{x,-1},\ \theta_{x,0}, \theta_{x,1},\ \ldots,\ \theta_{x,m-1},\ \theta_{x,m},\ \theta_{x,m+1}\}^T \end{aligned} \quad . \tag{6.6}$$

Os deslocamentos no sentido longitudinal são aproximados por meio de uma combinação linear de $m+3$ funções "B_3–*Spline*", onde m é o número de nós considerado em cada linha nodal, conforme mostra a Figura 6.4b. Os deslocamentos nodais são dados por uma expressão do tipo da equação (6.3), onde os coeficientes α_i são determinados por meio do princípio da energia potencial estacionária ou da aplicação do principio dos trabalhos virtuais.

Na direção transversal da faixa finita (eixo y), os deslocamentos de membrana (u e v) são aproximados por polinômios lineares e os deslocamentos de flexão (w e θ_x) por polinômios cúbicos.

Assim, o campo de deslocamentos em uma faixa finita é definido pela equação (6.7) e as componentes u, v e w, que ocorrem em qualquer ponto da superfície média da faixa, são obtidos pelas equações (6.8) a (6.10),

$$\underset{\sim}{u}^e = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \underset{\sim}{N}_m \underset{\sim}{\varphi}_m \underset{\sim}{u}^m \\ w &= \underset{\sim}{N}_f \underset{\sim}{\varphi}_f \underset{\sim}{u}^f \end{aligned} , \tag{6.8}$$

onde

$$\underset{\sim}{N}_m(y) = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}_u(y) \\ \underset{\sim}{N}_v(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(y) & 0 & N_2(y) & 0 \\ 0 & N_1(y) & 0 & N_2(y) \end{bmatrix}, \tag{6.9}$$

$$\underset{\sim}{N}_f(y) = \begin{bmatrix} N_3(y) & N_4(y) & N_5(y) & N_6(y) \end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

onde $N_i(y)$ são as funções que representam a variação dos deslocamentos de cada faixa finita na direção transversal (eixo y), sendo dadas pelas expressões (6.11)-(6.17),

$$N_1 = 1 - \overline{y} \tag{6.11}$$

$$N_2 = \overline{y} \tag{6.12}$$

$$N_3 = 1 - 3\overline{y}^2 + 2\overline{y}^3 \tag{6.13}$$

$$N_4 = y\left(1 - 2\overline{y} + \overline{y}^2\right) \tag{6.14}$$

$$N_5 = 3\overline{y}^2 - 2\overline{y}^3 \tag{6.15}$$

$$N_6 = y\left(\overline{y}^2 - \overline{y}\right) \tag{6.16}$$

$$\overline{y} = \frac{y}{b}. \tag{6.17}$$

As matrizes $\underset{\sim}{\varphi}_m$ e $\underset{\sim}{\varphi}_f$ representam a variação dos deslocamentos na direção longitudinal (eixo x) de cada faixa finita, sendo definidas pelas equações (6.18) e (6.19),

$$\underset{\sim}{\varphi}_m = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}_{ui} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}_{uj} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}_{vi} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}_{vj} \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_f = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}_{wi} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}_{\theta i} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}_{wj} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}_{\theta j} \end{bmatrix}, \tag{6.19}$$

em que $\underset{\sim}{0}$ é o vetor nulo de dimensão $m+3$. Os vetores $\underset{\sim}{\phi}_{ui}$, $\underset{\sim}{\phi}_{uj}$, $\underset{\sim}{\phi}_{vi}$, $\underset{\sim}{\phi}_{vj}$, $\underset{\sim}{\phi}_{wi}$, $\underset{\sim}{\phi}_{wj}$, $\underset{\sim}{\phi}_{\theta i}$ e $\underset{\sim}{\phi}_{\theta j}$, também de dimensão $m+3$, são iguais às funções B_3S locais, definidos de forma genérica pelo vetor (6.20),

$$\underset{\sim}{\phi} = \left\{ \overline{\phi}_{-1}, \overline{\phi}_0, \overline{\phi}_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m-2}, \overline{\phi}_{m-1}, \overline{\phi}_m, \overline{\phi}_{m+1} \right\}, \tag{6.20}$$

em que $\overline{\phi}$ são as funções B_3S modificadas conforme a natureza do grau de liberdade.

As condições de contorno nas extremidades de cada linha nodal são satisfeitas por meio da aplicação de funções B_3S modificadas, que são obtidas pela alteração dos valores das três funções B_3S que definem o valor de *f(x)* em cada um dos segmentos extremos da faixa finita. Ou seja, para a borda *x=0* as funções ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 devem ser substituídas pelas funções *splines* modificadas $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$ e $\bar{\phi}_3$, enquanto para a borda *x=a* as funções ϕ_{m+1}, ϕ_{m+2} e ϕ_{m+3} devem ser substituídas por $\bar{\phi}_{m+1}, \bar{\phi}_{m+2}$ e $\bar{\phi}_{m+3}$. As funções modificadas correspondentes às condições de contorno livre, apoiado, engaste e engaste deslizante estão apresentadas na Tabela 6.2.

Observa-se que a menos das condições de contorno das bordas longitudinais, todos os deslocamentos são aproximados pela mesma função. Isso assegura a compatibilidade de deslocamentos de membrana e flexão entre duas faixas finitas adjacentes não co-planares.

Tabela 6.2: Definição das funções B_3S modificadas.

		Extremidade *x=0*			**Extremidade *x=a***		
Extremi-dade	**condição de contorno**	$\bar{\phi}_1$	$\bar{\phi}_2$	$\bar{\phi}_3$	$\bar{\phi}_{m+1}$	$\bar{\phi}_{m+2}$	$\bar{\phi}_{m+3}$
Livre	**f(x)≠0 f'(x)≠0**	ϕ_1	$\phi_2 - 4\phi_1$	$\phi_3 - \frac{1}{2}\phi_2 + \phi_1$	$\phi_{m+1} - \frac{1}{2}\phi_{m+2} + \phi_{m+3}$	$\phi_{m+2} - 4\phi_{m+3}$	ϕ_{m+3}
Apoiado	**f(x)=0 f'(x)≠0**	0	$\phi_2 - 4\phi_1$	$\phi_3 - \frac{1}{2}\phi_2 + \phi_1$	$\phi_{m+1} - \frac{1}{2}\phi_{m+2} + \phi_{m+3}$	$\phi_{m+2} - 4\phi_{m+3}$	0
Engaste	**f(x)=0 f'(x)=0**	0	0	$\phi_3 - \frac{1}{2}\phi_2 + \phi_1$	$\phi_{m+1} - \frac{1}{2}\phi_{m+2} + \phi_{m+3}$	0	0
Engaste deslizante	**f(x)≠0 f'(x)=0**	0	ϕ_2	$\phi_3 - \frac{1}{2}\phi_2 + \phi_1$	$\phi_{m+1} - \frac{1}{2}\phi_{m+2} + \phi_{m+3}$	ϕ_{m+2}	0

As relações deformações-deslocamentos utilizadas na análise linear de estabilidade, são válidas para as seções constituídas por placas finas e baseiam-se nas seguintes hipóteses, Cheung (1976):

(i) A espessura de cada placa é muito pequena em relação às dimensões da sua superfície média.

(ii) As rotações das placas são pequenas.

(iii) Os deslocamentos de membrana das placas são pequenos, quando comparados com os respectivos deslocamentos de flexão.

(iv) No plano médio de cada placa as fibras normais, antes da deformação, permanecem normais a esse mesmo plano, após a deformação. Deste modo, as deformações (e, consequentemente, as tensões) em qualquer ponto da placa podem ser expressas em termos das deformações generalizadas do plano médio (deformações de membrana e curvaturas).

Na formulação das faixas finitas, o vetor da deformação de membrana, devido às pequenas deformações, é definido pela equação (6.21),

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \tag{6.21}$$

Considerando a curvatura de flexão (χ_{xy}) com o sinal positivo de maneira a coincidir com o sinal positivo do momento de torção, o vetor de deformação de flexão (curvaturas) é representado pela equação (6.22),

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^f \equiv \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{6.22}$$

Em relação às equações constitutivas, considera-se que cada faixa finita é constituída por um material elástico e isotrópico, para o qual as expressões que relacionam tensões com deformações são lineares. As tensões generalizadas de membrana normais e tangenciais à superfície média da faixa finita $\underset{\sim}{\sigma}_0^m$ e os momentos fletores e torçores $\underset{\sim}{\sigma}_0^f$ são representadas por meio das equações (6.23) e (6.24), respectivamente,

$$\underset{\sim}{\sigma}_0^m = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{6.23}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_0^f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{6.24}$$

Consequentemente, as relações lineares tensões-deformações específicas podem ser dadas pelas equações (6.25) e (6.26),

$$\underset{\sim}{\sigma}_0^m = \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{\varepsilon}_0^m, \tag{6.25}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_0^f = \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{\varepsilon}_0^f, \tag{6.26}$$

sendo que as matrizes constitutivas de constantes elásticas, de membrana e flexão, para material isotrópico são definidas pelas matrizes (6.27) e (6.28),

$$\underset{\sim}{D}_0^m = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix}, \tag{6.27}$$

$$\underset{\sim}{D}_0^f = \frac{t^3}{12} \underset{\sim}{D}_0^m, \tag{6.28}$$

onde E e υ são, respectivamente, o modulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, sendo t a espessura da faixa finita.

Com base na Teoria de Kirchhoff-Love, as tensões normais à superfície média da faixa σ_z são desprezíveis. Além disso, a reta normal à superfície média na configuração indeformada, permanece reta e perpendicular à superfície média após a deformação. Assim, as tensões de membrana em qualquer ponto da faixa podem ser obtidas por meio da equação (6.29),

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{6.29}$$

onde z é a coordenada ao longo da espessura t da faixa e pode ser qualquer valor no intervalo $[-t/2, t/2]$.

A partir das relações lineares de deformação específica deslocamentos (equações (6.21) e (6.22)), obtém-se a relação entre o vetor de deformações específicas

generalizadas e o vetor de deslocamentos nodais da faixa que estão expressas nas equações (6.30) e (6.31),

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^m = \underset{\sim}{B}_0^m \underset{\sim}{u}^m \,, \tag{6.30}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^f = \underset{\sim}{B}_0^f \underset{\sim}{u}^f \,, \tag{6.31}$$

onde $\underset{\sim}{B}_0^m$ e $\underset{\sim}{B}_0^f$ são as matrizes de deformação de membrana e de flexão, respectivamente, representadas por meio das equações (6.32) e (6.33),

$$\underset{\sim}{B}_0^m = \begin{bmatrix} N_1\underset{\sim}{\varphi}_{,x} & \underset{\sim}{0} & N_2\underset{\sim}{\varphi}_{,x} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & N_{1,y}\underset{\sim}{\varphi} & \underset{\sim}{0} & N_{2,y}\underset{\sim}{\varphi} \\ N_{1,y}\underset{\sim}{\varphi} & N_1\underset{\sim}{\varphi}_{,x} & N_{2,y}\underset{\sim}{\varphi} & N_2\underset{\sim}{\varphi}_{,x} \end{bmatrix}, \tag{6.32}$$

$$\underset{\sim}{B}_0^f = \begin{bmatrix} -N_3\underset{\sim}{\varphi}_{,xx} & -N_4\underset{\sim}{\varphi}_{,xx} & -N_5\underset{\sim}{\varphi}_{,xx} & -N_6\underset{\sim}{\varphi}_{,xx} \\ -N_{3,yy}\underset{\sim}{\varphi} & -N_{4,yy}\underset{\sim}{\varphi} & -N_{5,yy}\underset{\sim}{\varphi} & -N_{6,yy}\underset{\sim}{\varphi} \\ 2N_{3,y}\underset{\sim}{\varphi}_{,x} & 2N_{4,y}\underset{\sim}{\varphi}_{,x} & 2N_{5,y}\underset{\sim}{\varphi}_{,x} & 2N_{6,y}\underset{\sim}{\varphi}_{,x} \end{bmatrix}. \tag{6.33}$$

Existem duas formas de se obter as equações de equilíbrio de um sistema estrutural, cujos enfoques são semelhantes:

(i) A primeira alternativa consiste em dividir o corpo em elementos infinitesimais e estabelecer as equações de equilíbrio de forças de um elemento isolado. Introduzindo as equações constitutivas e as relações entre as deformações específicas nas equações de equilíbrio, obtém-se um sistema de equações diferenciais parciais de equilíbrio, cuja solução depende das condições de vinculação da estrutura;

(ii) A segunda alternativa é a formulação variacional do problema, onde se calcula o funcional da energia potencial total do sistema. As equações de equilíbrio são encontradas a partir do Princípio da Energia Potencial Estacionária. Se o valor estacionário da energia potencial corresponder a um valor de mínimo de energia potencial total, a configuração deformada da estrutura, obtida da solução do sistema de equações de equilíbrio, é uma configuração de equilíbrio estável.

O funcional da energia potencial total (π) de um corpo elástico em relação a certa configuração deformada é definido como a soma da energia de deformação interna (U), acumulada pelo corpo desde sua configuração indeformada até a configuração

deformada, com o potencial de realização de trabalho das forças externas atuantes (V). Matematicamente esse funcional pode ser escrito pela equação (6.34),

$$\pi = U + V \,. \tag{6.34}$$

A energia potencial total do sistema é dada pela equação (6.35), sendo fornecida pela soma das energias potenciais de cada faixa finita e (admitindo continuidade de deslocamentos entre as faixas),

$$\pi = \sum_{e=1}^{ne} \pi^e \,. \tag{6.35}$$

O potencial das forças externas é dividido em duas parcelas: (i) uma devido às deformações de membrana (V^m) e (ii) outra devido às deformações de flexão (V^f), sendo expressa pela equação (6.36),

$$V = V^m + V^f = -\underset{\sim}{f}^m \underset{\sim}{u}^m - \underset{\sim}{f}^f \underset{\sim}{u}^f \,, \tag{6.36}$$

onde $\underset{\sim}{f}^m$ e $\underset{\sim}{f}^f$ são os vetores de cargas generalizadas de membrana e de flexão atuantes na faixa finita.

A energia de deformação interna é dividida em duas parcelas: (i) uma devido às deformações de membrana (U^m) e (ii) outra devido às deformações de flexão (U^f), sendo expressa pela equação (6.37),

$$U = U^m + U^f = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\sigma}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{\varepsilon}_0^m dV + \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\sigma}_0^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{\varepsilon}_0^f dV \,. \tag{6.37}$$

Substituindo-se as equações (6.25) e (6.26) em (6.37), a energia de deformação interna pode ser expressa por meio da equação (6.38),

$$U = U^m + U^f = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{\varepsilon}_0^m dV + \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}_0^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{\varepsilon}_0^f dV \,. \tag{6.38}$$

Quando se substitui as equações (6.30) e (6.31) na equação (6.38), encontram-se as energias de deformação de membrana e de flexão expressas em função dos deslocamentos generalizados, representadas nas equações (6.39) e (6.40), respectivamente,

$$U^m = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{u}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_0^m \underset{\sim}{u}^m dV \,, \tag{6.39}$$

$$U^f = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{u}^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{B}_0^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{B}_0^f \underset{\sim}{u}^f dV \,. \tag{6.40}$$

Assim, a energia potencial total da faixa fica sendo dada pela equação (6.41),

$$\pi^e = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{u}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_0^m \underset{\sim}{u}^m dV + \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{u}^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{B}_0^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{B}_0^f \underset{\sim}{u}^f dV - \underset{\sim}{f}^m \underset{\sim}{u}^m - \underset{\sim}{f}^f \underset{\sim}{u}^f \,, \quad (6.41)$$

Para encontrar a equação de equilíbrio da faixa, aplica-se o Principio da Energia Potencial Estacionária. A energia potencial total é mínima, quando a primeira variação da energia potencial total, em relação aos deslocamentos generalizados, for nula, conforme está expresso na equação (6.42),

$$\frac{\partial \pi^e}{\partial \underset{\sim}{u}} = \int_V \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_0^m dV \underset{\sim}{u}^m + \int_V \underset{\sim}{B}_0^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{B}_0^f dV \underset{\sim}{u}^f - \underset{\sim}{f}^m - \underset{\sim}{f}^f = 0 \,. \quad (6.42)$$

Assim, as matrizes de rigidez de membrana ($\underset{\sim}{k}_0^m$) e de flexão ($\underset{\sim}{k}_0^f$) no sistema local da faixa finita são definidas pelos termos que multiplicam os deslocamentos generalizados de membrana e de flexão da equação (6.42), as quais são dadas pelas equações (6.43) e (6.44),

$$\underset{\sim}{k}_0^m = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_0^m t dy dx \,, \quad (6.43)$$

$$\underset{\sim}{k}_0^f = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_0^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{B}_0^f dy dx \,. \quad (6.44)$$

Desse modo, a matriz de rigidez elástica da faixa finita, incluindo os termos de membrana e de flexão, é dada pela equação (6.45),

$$\underset{\sim}{k}_0 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_0^m & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{k}_0^f \end{bmatrix} . \quad (6.45)$$

Finalmente, a partir da equação (6.42) pode-se escrever a equação de equilíbrio da faixa finita por meio da equação (6.46), a qual pode ser reescrita de forma compacta na representação mostrada na expressão (6.47),

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_0^m & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{k}_0^f \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}^m \\ \underset{\sim}{u}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^m \\ \underset{\sim}{f}^f \end{Bmatrix} , \quad (6.46)$$

$$\underset{\sim}{k}_0 \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \,. \quad (6.47)$$

Nessa Tese, as matrizes de rigidez serão integradas numericamente por meio da integração Gaussiana. Verifica-se que o esquema de integração 2x2 conduz a resultados satisfatórios para a integração das matrizes de rigidez lineares. Devido ao fato de ser utilizada uma combinação linear de funções B_3S, será utilizado m esquemas de integração de Gauss. A posição dos pontos de integração ao longo de uma faixa finita está ilustrada na Figura 6.6.

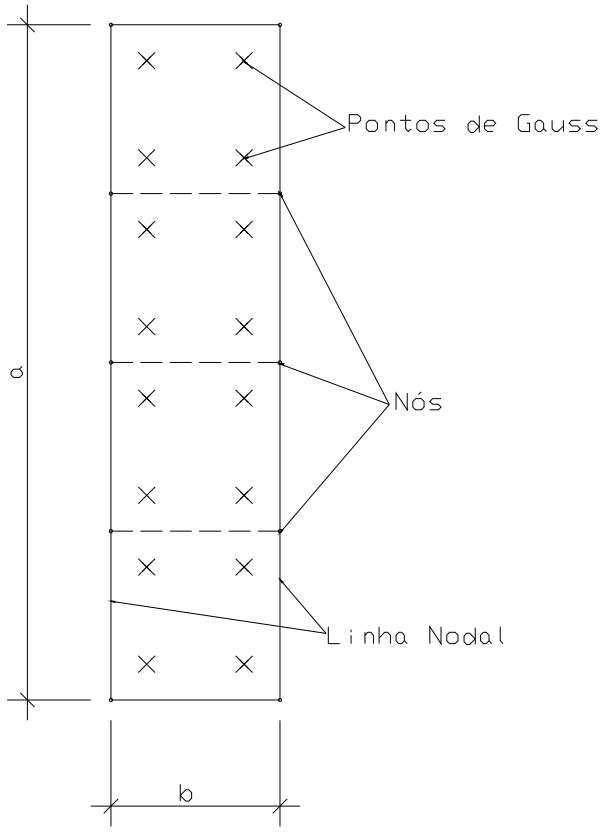

Figura 6.6: Esquema de integração

Por meio dos pontos de Gauss é possível considerar a redução do módulo de elasticidade decorrente do aumento de temperatura. As temperaturas nas linhas nodais são obtidas por meio do programa *ATERM* (ver capítulo 3 desta Tese). As temperaturas no interior da faixa finita são obtidas por interpolação linear.

O cálculo do vetor de forças depende da forma com que os carregamentos estão aplicados na estrutura. No caso de forças ou momentos concentrados aplicados diretamente nos nós da estrutura, basta aplicar o valor equivalente na devida posição dentro do vetor de forças.

Já no caso de forças distribuídas aplicadas, é necessário fazer a integração dentro de cada faixa e posteriormente sobrepor essas cargas ao vetor de forças concentradas nos nós. O vetor de forças $\underset{\sim}{f}$ generalizadas da faixa finita é definido pela equação (6.48),

$$\underset{\sim}{f} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^{m} \\ \underset{\sim}{f}^{f} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}_{q}^{m} \\ \underset{\sim}{f}_{q}^{f} \end{Bmatrix}, \tag{6.48}$$

onde $\underset{\sim}{f}^m$ e $\underset{\sim}{f}^f$ são os vetores de ordem *m+3* de forças generalizadas de membrana e flexão, respectivamente. Os vetores $\underset{\sim}{f}_q^m$ e $\underset{\sim}{f}_q^f$ representam as forças generalizadas de membrana e de flexão devido às forças e momentos aplicados diretamente nos nós da faixa finita.

O vetor das forças generalizadas de membrana é definido pela equação (6.49),

$$\underset{\sim}{f}^m = \int_0^a \underset{\sim}{\varphi}_m^T \underset{\sim}{N}_v^T p_x dx + \int_0^b \underset{\sim}{\varphi}_m^T \underset{\sim}{N}_u^T p_y dy \,, \tag{6.49}$$

onde p_x e p_y são as forças distribuídas por unidade de comprimento ao longo das faces *x* e *y* da faixa finita, respectivamente.

O vetor de forças generalizadas de flexão é definido pela equação (6.50),

$$\underset{\sim}{f}^f = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{\varphi}_f^T \underset{\sim}{N}_w^T p_z dy dx \,, \tag{6.50}$$

onde p_z representa as forças distribuídas por unidade de área aplicada perpendicularmente à faixa.

O vetor de forças generalizadas de membrana para forças cortantes concentradas Q_u e Q_v, nas direções *x* e *y*, respectivamente, atuantes na linha nodal *i* e na coordenada $x = x_i$, é definido pela equação (6.51),

$$\underset{\sim}{f}_q^m = \varphi_m^T\left(x_i\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_u \\ Q_v \end{Bmatrix}. \tag{6.51}$$

Analogamente, o vetor de forças generalizado de flexão para uma carga concentrada *P* na direção vertical e um momento concentrado *M* atuantes na linha nodal *i* e na coordenada $x = x_i$, é definido pela equação (6.52),

$$\underset{\sim}{f}_q^f = \varphi_f^T\left(x_i\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix}. \tag{6.52}$$

6.4. Transformação de Coordenadas

As matrizes de rigidez estabelecidas nos itens anteriores estão referenciadas no sistema de coordenadas locais *x, y* e *z* de cada faixa finita. Para escrever as equações da

estrutura, em um sistema de coordenadas globais designado por *X, Y* e *Z*, deve-se proceder a uma transformação de coordenadas, isto é, escrever as equações relativas a cada elemento finito no sistema global.

Considerando-se uma faixa finita genérica cujo eixo longitudinal local (*x*) coincida com o eixo global (*X*) e cuja seção transversal seja definida no sistema de eixos *y-z*, por meio de uma rotação do valor de β obtém-se o sistema de eixos global *Y-Z*, conforme indica a Figura 6.7.

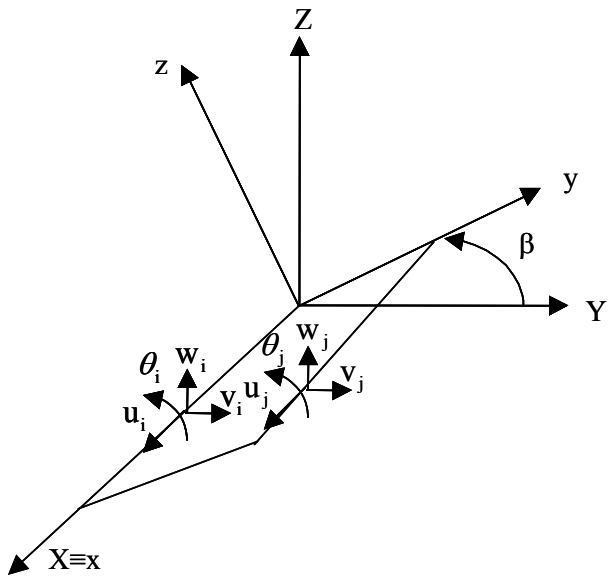

Figura 6.7: Transformação de eixos global para local.

Por meio de relações trigonométricas é possível relacionar os valores dos graus de liberdade locais (*u, v, w* e θ_x) e globais (*U, V, W* e Θ_x) em cada uma das linhas nodais (*i* e *j*), fazendo-se uso da equação (6.53),

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{U} \,, \tag{6.53}$$

onde os vetores dos deslocamentos generalizados referidos, respectivamente, aos eixos locais ($\underset{\sim}{u}$) e globais ($\underset{\sim}{U}$) são definidos pelas expressões (6.54) e matriz de transformação de coordenadas $\underset{\sim}{T}$ depende somente de senos e cossenos (ver equação (6.55)),

$$\underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}_i \\ \underset{\sim}{v}_i \\ \underset{\sim}{w}_i \\ \underset{\sim}{\theta}_{xi} \\ \underset{\sim}{u}_j \\ \underset{\sim}{v}_j \\ \underset{\sim}{w}_j \\ \underset{\sim}{\theta}_{xj} \end{Bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\mathrm{U}} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U}_i \\ \underset{\sim}{V}_i \\ \underset{\sim}{W}_i \\ \underset{\sim}{\Theta}_{xi} \\ \underset{\sim}{U}_j \\ \underset{\sim}{V}_j \\ \underset{\sim}{W}_j \\ \underset{\sim}{\Theta}_{xj} \end{Bmatrix}, \tag{6.54}$$

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \cos\beta.\underset{\sim}{I} & sen\beta.\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & -sen\beta.\underset{\sim}{I} & \cos\beta.\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 0 & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \cos\beta.\underset{\sim}{I} & sen\beta.\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -sen\beta.\underset{\sim}{I} & \cos\beta.\underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}, \tag{6.55}$$

onde $\underset{\sim}{0}$ e $\underset{\sim}{I}$ são as matrizes nula e identidade de ordem $m+3$, respectivamente.

A matriz de rigidez e o vetor de cargas consistentes, de cada faixa finita *e*, no sistema de coordenadas global da estrutura podem ser obtidos por meio das equações (6.56) e (6.57),

$$\underset{\sim}{K}_0^e = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{k}_0 \underset{\sim}{T}\,, \tag{6.56}$$

$$\underset{\sim}{F}^e = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{f}\,. \tag{6.57}$$

6.5. Cálculo dos Deslocamentos e das Tensões

Determinadas as matrizes de rigidez e o vetor de cargas de cada faixa no sistema global, pode-se encontrar a matriz de rigidez e o vetor de cargas consistentes da estrutura, levando-se em conta a contribuição de todas as faixas por meio do somatório dos coeficientes de rigidez e de força correspondentes ao mesmo grau de liberdade. Portanto, a matriz de rigidez e o vetor de cargas da estrutura são expressos pelas equações (6.58) e (6.59), respectivamente,

$$\underset{\sim}{K}_0 = \sum_{e=1}^{nf} \underset{\sim}{K}_0^e\,, \tag{6.58}$$

$$\underset{\sim}{F} = \sum_{e=1}^{nf} \underset{\sim}{F}^e\,, \tag{6.59}$$

onde $\sum_{e=1}^{nf}$ indica a soma dos coeficientes correspondentes aos mesmos graus de liberdade.

Desta maneira, os deslocamentos generalizados podem ser calculados pela solução do sistema de equações lineares (6.60), após inserindo as condições de contorno,

$$\underset{\sim}{K}_0 \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{F} \ . \tag{6.60}$$

Obtidos os deslocamentos generalizados ($\underset{\sim}{U}$) da estrutura, determinam-se os deslocamentos generalizados de membrana ($\underset{\sim}{u}^m$) e de flexão ($\underset{\sim}{u}^f$) de cada faixa no sistema local. As tensões de membrana e de flexão, que serão utilizadas no problema não linear geométrico, são dadas pelas equações (6.61) e (6.62),

$$\underset{\sim}{\sigma}_0^m = \int_V \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_0^m \underset{\sim}{u}^m dV \ , \tag{6.61}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_0^f = \int_V \underset{\sim}{D}_0^f \underset{\sim}{B}_0^f \underset{\sim}{u}^f dV \ . \tag{6.62}$$

O campo de deslocamento da estrutura ($\underset{\sim}{U}^e$) pode ser obtido a partir dos deslocamentos generalizados ($\underset{\sim}{U}$) por meio das equações (6.8).

6.6. Não Linearidade Geométrica

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (*PTV*) chega-se à equação (6.63), que fornece o equilíbrio de forças de uma faixa finita (Zienkiewicz e Taylor, 1991),

$$\underset{\sim}{\psi} = \int_V \underset{\sim}{\bar{B}}^T \underset{\sim}{\sigma} dV - \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0} \, , \tag{6.63}$$

em que (i) $\underset{\sim}{f}$ é o vetor de forças externas, (ii) $\int_V \underset{\sim}{\bar{B}}^T \underset{\sim}{\sigma} dV$ é o vetor de forças internas e (iii) $\underset{\sim}{\psi}$ é o vetor de forças residuais que se deve anular ou ser menor do que uma tolerância, na configuração de equilíbrio da faixa finita.

O vetor de deformações generalizadas para a faixa finita incluindo os efeitos de não linearidade geométrica, quando as rotações são moderadas, é definido pela equação (6.64),

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}^m \\ \underset{\sim}{\varepsilon}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_0^m + \underset{\sim}{\varepsilon}_{NL}^m \\ \underset{\sim}{\varepsilon}_0^f \end{Bmatrix} , \tag{6.64}$$

onde $\underset{\sim}{\varepsilon}_0^m$ e $\underset{\sim}{\varepsilon}_0^f$, dados pelas equações (6.65) e (6.66), são os vetores de deformações especificas que contém os termos lineares devido às tensões de membrana e de flexão, respectivamente,

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^m = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \tag{6.65}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^f = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \tag{6.66}$$

A parcela não linear das deformações especificas devido às tensões de membrana, *i.e.* $\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \underset{\sim}{\varepsilon}_{NL}^m$, é definida pela equação (6.67), onde todos os elementos não lineares das relações deformações-deslocamentos são levados em consideração,

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \end{Bmatrix}. \tag{6.67}$$

Fazendo-se variar as deformações especificas em relação aos deslocamentos generalizados chega-se a equação (6.68),

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\bar{B}} d\underset{\sim}{u}, \tag{6.68}$$

onde $\underset{\sim}{\bar{B}}$ é a matriz que relaciona o incremento de deformações específicas (expressões (6.30) e (6.31)) com o incremento de deslocamentos nodais, considerando relações não lineares entre deformações e deslocamentos, composta de duas parcelas, conforme

mostra a equação (6.69): (i) a parcela $\underset{\sim}{B_0}$ como sendo a mesma matriz utilizada em análises lineares e (ii) a parcela $\underset{\sim}{B_{NL}}$ que depende dos deslocamentos nodais,

$$\underset{\sim}{\bar{B}} = \underset{\sim}{B_0} + \underset{\sim}{B_{NL}}\left(\underset{\sim}{u}\right). \tag{6.69}$$

em que $\underset{\sim}{u}$ é definido pelo vetor (6.70),

$$\underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}^m \\ \underset{\sim}{u}^f \end{Bmatrix}, \tag{6.70}$$

onde $\underset{\sim}{u}^m$ e $\underset{\sim}{u}^f$ são os deslocamentos de membrana e de flexão (ver equação (6.5)).

Separando os termos de membrana e de flexão, as matrizes $\underset{\sim}{B_0}$ e $\underset{\sim}{B_{NL}}$ são representadas pelas equações (6.71) e (6.72),

$$\underset{\sim}{B_0} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B_0^m} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{B_0^f} \end{bmatrix}, \tag{6.71}$$

$$\underset{\sim}{B_{NL}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B_{NL}^m} & \underset{\sim}{B_{NL}^f} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}, \tag{6.72}$$

onde as matrizes de deformação específica lineares de membrana e de flexão ($\underset{\sim}{B_0^m}$ e $\underset{\sim}{B_0^f}$) já foram definidas nas equações (6.32) e (6.33), e as matrizes de deformação específica não lineares de membrana e de flexão ($\underset{\sim}{B_{NL}^m}$ e $\underset{\sim}{B_{NL}^f}$) serão determinadas mais adiante neste capítulo.

Para material elástico linear, as relações constitutivas se escrevem por meio da equação (6.73),

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D_0}\left(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon_0}\right) + \underset{\sim}{\sigma_0}, \tag{6.73}$$

em que (i) $\underset{\sim}{D_0}$ é a matriz constitutiva do material, (ii) $\underset{\sim}{\varepsilon_0}$ é o vetor de deformações específicas iniciais e (iii) $\underset{\sim}{\sigma_0}$ é o vetor de tensões iniciais.

A relação entre $d\underset{\sim}{\psi}$ e $d\underset{\sim}{u}$, pode ser obtida pela aplicação da regra da cadeia. Faz-se a primeira variação de $\underset{\sim}{\psi}$ em relação a $\underset{\sim}{u}$, conforme o desenvolvimento representado na equação (6.74).

$$d\underset{\sim}{\psi} = \frac{\partial \underset{\sim}{\psi}}{\partial \underset{\sim}{\bar{B}}} d\underset{\sim}{\bar{B}} + \frac{\partial \underset{\sim}{\psi}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} d\underset{\sim}{\sigma} = d\underset{\sim}{\bar{B}}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \underset{\sim}{\psi}}{\partial \underset{\sim}{\bar{B}}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \underset{\sim}{\psi}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} d\underset{\sim}{\sigma}. \tag{6.74}$$

Substituindo-se (6.74) em (6.63) obtém-se a equação (6.75),

$$d\underset{\sim}{\psi} = \int_V d\underset{\sim}{\bar{B}}^{\mathrm{T}} \underset{\sim}{\sigma} dV + \int_V \underset{\sim}{\bar{B}}^{\mathrm{T}} d\underset{\sim}{\sigma} dV = \underset{\sim}{k}^t d\underset{\sim}{u} \,, \tag{6.75}$$

onde $\underset{\sim}{k}^t$ é a matriz de rigidez tangente da faixa finita.

Os termos presentes na matriz tangente (6.75) são encontrados atraves do uso das expressões (6.68) e (6.73), obtendo-se a expressão (6.76). A partir da equação (6.69) encontra-se a equação (6.77),

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}_0 d\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{D}_0 \underset{\sim}{\bar{B}} d\underset{\sim}{u} \,, \tag{6.76}$$

$$d\underset{\sim}{\bar{B}} = d\underset{\sim}{B}_{NL} \,. \tag{6.77}$$

A substituição das expressões (6.76) e (6.77) em (6.75) resulta na equação (6.78),

$$d\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{k}_\sigma d\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{\bar{k}} d\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{k}^t d\underset{\sim}{u} \,, \tag{6.78}$$

onde $\underset{\sim}{k}_\sigma$ é conhecida como matriz de tensões iniciais, também conhecida como matriz geométrica, definida pela equação (6.79),

$$\underset{\sim}{k}_\sigma d\underset{\sim}{u} = \int_V d\underset{\sim}{B}_{NL}^T \underset{\sim}{\sigma} dV \,. \tag{6.79}$$

Substituindo as expressões (6.71) e (6.72) em (6.79), a matriz geométrica pode ser representada pela equação (6.80),

$$\underset{\sim}{k}_\sigma d\underset{\sim}{u} = \int_V \begin{bmatrix} d\underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \\ d\underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\sigma}^m \\ \underset{\sim}{\sigma}^f \end{Bmatrix} dV \,. \tag{6.80}$$

Levando em consideração a igualdade mostrada na expressão (6.76), a parcela da matriz tangente devida aos grandes deslocamentos ($\underset{\sim}{\bar{k}}$) é dada pela equação (6.81),

$$\underset{\sim}{\bar{k}} = \int_V \underset{\sim}{\bar{B}}^{\mathrm{T}} d\underset{\sim}{\sigma} dV = \int_V \underset{\sim}{\bar{B}}^{\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0 \underset{\sim}{\bar{B}} dV \,. \tag{6.81}$$

Que após a substituição da matriz $\underset{\sim}{\bar{B}}$ (ver equação (6.69)), transforma-se na expressão (6.82),

$$\underset{\sim}{\bar{k}} = \int_V \left(\underset{\sim}{B}_0^T + \underset{\sim}{B}_{NL}^T \right) \underset{\sim}{D} \left(\underset{\sim}{B}_0 + \underset{\sim}{B}_{NL} \right) dV = \underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_{NL} \,, \tag{6.82}$$

onde $\underset{\sim}{k}_0$ representa a matriz de rigidez de pequenos deslocamentos, dada pela equação (6.83),

$$\underset{\sim}{k}_0 = \int_V \underset{\sim}{B}_0^T D \underset{\sim}{B}_0 dV \,, \tag{6.83}$$

e a matriz $\underset{\sim}{k}_{NL}$, conhecida como matriz de grandes deslocamentos ou matriz de deslocamentos iniciais, é dada pela equação (6.84),

$$\underset{\sim}{k}_{NL} = \int_V \underset{\sim}{B}_0^T D \underset{\sim}{B}_{NL} dV + \int_V \underset{\sim}{B}_{NL}^T D \underset{\sim}{B}_0 dV + \int_V \underset{\sim}{B}_{NL}^T D \underset{\sim}{B}_{NL} dV \,. \tag{6.84}$$

Substituindo-se as matrizes $\underset{\sim}{k}_0$ (6.83) e $\underset{\sim}{k}_{NL}$ (6.84) na equação (6.75), tem-se a equação (6.85),

$$d\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{k}^t d\underset{\sim}{u}\,, \tag{6.85}$$

onde,

$$\underset{\sim}{k}^t = \underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_\sigma + \underset{\sim}{k}_{NL}\,. \tag{6.86}$$

Quando se admite que $\underset{\sim}{B}_{NL} = \underset{\sim}{0}$, a equação (6.86) pode ser usada para estabelecer a condição de equilíbrio para pequenos deslocamentos.

Por outro lado, quando se admite um comportamento geometricamente não linear, a equação de equilíbrio deve conter as parcelas apresentadas na equação (6.87),

$$d\underset{\sim}{\Psi} = \left(\underset{\sim}{K}_0 + \underset{\sim}{K}_\sigma + \underset{\sim}{K}_{NL}\right)\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{0}\,, \tag{6.87}$$

onde o problema não-linear acima pode ser resolvido pelos métodos usuais, como por exemplo o método de Newton-Raphson.

6.6.1. Deformações Iniciais

Para incluir os efeitos das imperfeições geométricas iniciais, as deformações lineares e não lineares da faixa finita (ver equação (6.64)) são escritas da forma das equações (6.88) a (6.90),

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^m = \underset{\sim}{\varepsilon}_0^m\left(u, v, w\right) - \underset{\sim}{\varepsilon}_0^m\left(u_{imp}, v_{imp}, w_{imp}\right), \tag{6.88}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^f = \underset{\sim}{\varepsilon}_0^f\left(w\right) - \underset{\sim}{\varepsilon}_0^f\left(w_{imp}\right), \tag{6.89}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \underset{\sim}{\varepsilon}_{NL}\left(u, v, w\right) - \underset{\sim}{\varepsilon}_{NL}\left(u_{imp}, v_{imp}, w_{imp}\right), \tag{6.90}$$

onde u_{imp}, v_{imp} e w_{imp} são as imperfeições geométricas iniciais da faixa finita.

6.6.2. Deformações Não Lineares

Definindo-se o vetor $\underset{\sim}{\eta}$ por meio da expressão (6.91),

$$\underset{\sim}{\eta} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\eta}_x \\ \underset{\sim}{\eta}_y \end{Bmatrix}, \tag{6.91}$$

onde os vetores $\underset{\sim}{\eta}_x$ e $\underset{\sim}{\eta}_y$ são definidos pelas expressões (6.92) e (6.93),

$$\underset{\sim}{\eta}_x = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T , \tag{6.92}$$

$$\underset{\sim}{\eta}_Y = \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T . \tag{6.93}$$

Pode-se reescrever a equação (6.67) na forma matricial por meio da equação (6.94),

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\eta}_x^T & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\eta}_y^T \\ \underset{\sim}{\eta}_y^T & \underset{\sim}{\eta}_x^T \end{bmatrix} \underset{\sim}{\eta} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\eta} . \tag{6.94}$$

O vetor $\underset{\sim}{\eta}$ que contém as rotações de membrana e de flexão pode se relacionar com o vetor de deslocamentos $\underset{\sim}{u}$ da faixa finita pela equação (6.95) (Zienkiewickz e Taylor, 1991),

$$\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{u} , \tag{6.95}$$

Que, após aplicado o operador diferencial, torna-se a equação (6.100),

$$d\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{u} . \tag{6.96}$$

A matriz $\underset{\sim}{G}$ pode ser encontrada a partir das funções de interpolação, resultando na expressão (6.97),

$$\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} N_1 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & \underset{\sim}{0} & N_2 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & N_1 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & \underset{\sim}{0} & N_2 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & N_3 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & N_4 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & N_5 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} & N_6 \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} \\ N_{1,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & \underset{\sim}{0} & N_{2,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & N_{1,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & \underset{\sim}{0} & N_{2,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & N_{3,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & N_{4,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & N_{5,y} \underset{\sim}{\varphi}_m & N_{6,y} \underset{\sim}{\varphi}_m \end{bmatrix} . \tag{6.97}$$

Das equações (6.94) e (6.96), obtém-se a equação (6.98) (Zienkiewicz e Taylor, 1991),

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} d\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\eta} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{A} d\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{A} d\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{G} d\underset{\sim}{u} \tag{6.98}$$

Assim, a matriz $\underset{\sim}{B}_{NL}$ pode ser expressa pela equação (6.99),

$$\underset{\sim}{B}_{NL} = \underset{\sim}{A} \; \underset{\sim}{G} , \tag{6.99}$$

que assume a forma da equações (6.104) e (6.105), quando aplicado o operador diferencial e efetuadas operações de transposição de matrizes,

$$\underset{\sim}{dB_{NL}} = \underset{\sim}{dA}\ \underset{\sim}{G}\ , \tag{6.100}$$

$$\underset{\sim}{dB_{NL}^{T}} = \underset{\sim}{G^{T}}\ d\ \underset{\sim}{A^{T}}\ . \tag{6.101}$$

Considerando a relação entre tensões e deformações, dada pela equação (6.102).

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\varepsilon}\ , \tag{6.102}$$

e tendo em vista que:

$$d\underset{\sim}{A}^{T}\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{S}d\underset{\sim}{\eta}\ , \tag{6.103}$$

sendo $\underset{\sim}{S}$ a matriz de tensões de membrana atuantes na faixa finita dada pela expressão (6.104),

$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y \end{bmatrix}. \tag{6.104}$$

Substituindo as equações (6.96), (6.101) e (6.103), em (6.79) obtém-se a expressão (6.105),

$$\underset{\sim}{k_{\sigma}}\ d\,\underset{\sim}{u} = \int_V \underset{\sim}{G^{T}}\ d\ \underset{\sim}{A^{T}}\ \underset{\sim}{\sigma}\,dV = \int_V \underset{\sim}{G^{T}}\ \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{G}\,d\,\underset{\sim}{u}\,dV\ . \tag{6.105}$$

A matriz de rigidez de tensões iniciais para a faixa finita, também conhecida como matriz de rigidez geométrica é definida por meio da equação (6.106),

$$\underset{\sim}{k_{\sigma}} = \int_V \underset{\sim}{G^{T}}\ \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{G}\,dV\ . \tag{6.106}$$

Como $\underset{\sim}{\varepsilon_{NL}} = \underset{\sim}{\varepsilon_{NL}^{m}}$, pode-se considerar apenas tensões de membrana na equação (6.102), *i.e.*, $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma^{m}}$, logo $\underset{\sim}{S}$ é função somente das tensões na superfície média da faixa, ou seja, a equação (6.106) pode tomar a forma da equação (6.107),

$$\underset{\sim}{k_{\sigma}} = t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \underset{\sim}{G^{T}}\ \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{G}\,dydx\ , \tag{6.107}$$

onde t é a espessura da faixa.

Na análise não linear geométrica as equações de equilíbrio podem ser estabelecidas recorrendo-se ao Principio dos Trabalhos Virtuais (*PTV*). Na faixa finita submetida a uma combinação arbitrária de tensões de membrana representada na Figura 6.8,i.e., (i) tensões normais longitudinais σ_x (linearmente variáveis – σ_{x1} e σ_{x2} são os valores extremos), (ii) tensões normais laterais σ_y (uniforme) e (iii) tensões tangenciais σ_{xy} (uniforme), o trabalho virtual (W), escrito na expressão (6.108) é dado pela soma do trabalho virtual realizado pelas forças internas (W_i) e externas (W_e),

$$W = W_i + W_e \,. \tag{6.108}$$

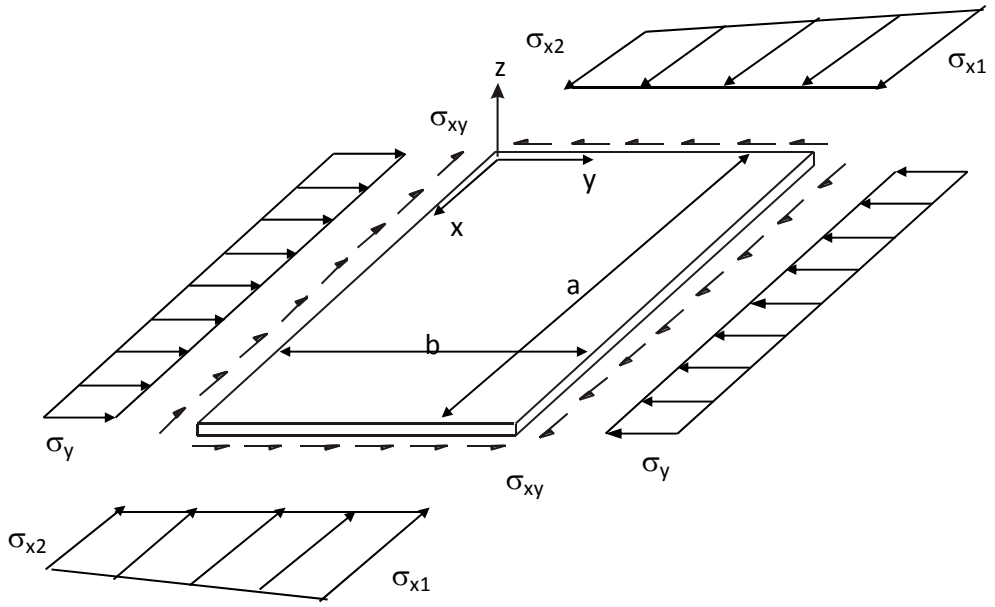

Figura 6.8: Faixa finita submetida a tensões de membrana.

O trabalho virtual realizado pelas forças internas de uma faixa finita, ocasionado pelos deslocamentos infinitesimais $d\underset{\sim}{u}$, medidos a partir da configuração de equilíbrio, é dado pela equação (6.109),

$$W_i = \int_0^a \int_0^b d\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\sigma}\, t dy dx \,, \tag{6.109}$$

onde $d\underset{\sim}{\varepsilon}$ é a variação das deformações provocadas pelos deslocamentos infinitesimais $d\underset{\sim}{u}$.

Os vetores de tensão e deslocamentos, na configuração de equilíbrio considerada, são definidos pelas expressões (6.110) e (6.70), respectivamente,

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\sigma}^m \\ \underset{\sim}{\sigma}^f \end{Bmatrix} . \tag{6.110}$$

O trabalho virtual realizado pelas forças internas pode ser escrito em função dos deslocamentos nodais como indica a equação (6.111),

$$W_i = \int_0^a \int_0^b \left(d\underset{\sim}{\varepsilon}^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{\varepsilon}^m + d\underset{\sim}{\varepsilon}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^f \underset{\sim}{\varepsilon}^f \right) t dy dx \,. \tag{6.111}$$

Utilizando as relações deformações-deslocamentos (equações (6.64)-(6.90)) e as funções de interpolação (equações (6.8)-(6.10)), obtêm-se as deformações de membrana e flexão, escritas nas equações (6.112) e (6.113), respectivamente,

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^m = \underset{\sim}{B}_0^m \underset{\sim}{u}^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^m \underset{\sim}{u}^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^f \underset{\sim}{u}^f - \underset{\sim}{B}_0^m \underset{\sim}{u}_{imp}^m - \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NLimp}^m \underset{\sim}{u}_{imp}^m - \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NLimp}^f \underset{\sim}{u}_{imp}^f \,, \tag{6.112}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^f = \underset{\sim}{B}_0^f \underset{\sim}{u}^f \,, \tag{6.113}$$

onde $\underset{\sim}{u}_{imp}^m$ e $\underset{\sim}{u}_{imp}^f$ são os deslocamentos de membrana e flexão devidos às imperfeições geométricas iniciais, respectivamente. $\underset{\sim}{B}_{NL}^m$ e $\underset{\sim}{B}_{NL}^f$ são as matrizes de deformação especifica não lineares de membrana e de flexão, representadas nas expressões (6.114) e (6.115), calculadas a partir dos correspondentes deslocamentos $\underset{\sim}{u}^m$ e $\underset{\sim}{u}^f$, $\underset{\sim}{B}_{NLimp}^m$ e $\underset{\sim}{B}_{NLimp}^f$ são as matrizes de deformação especifica não lineares de membrana e de flexão calculadas a partir dos respectivos deslocamentos $\underset{\sim}{u}_{imp}^m$ e $\underset{\sim}{u}_{imp}^f$ e $\underset{\sim}{B}_0^m$ e $\underset{\sim}{B}_0^f$ são as matrizes de deformação especifica lineares de membrana e flexão dadas pelas equações (6.32) e (6.33), respectivamente,

$$\underset{\sim}{B}_{NL}^m = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_{m,x}^T \underset{\sim}{N}_u^T \underset{\sim}{N}_u \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} + \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_{m,x}^T \underset{\sim}{N}_v^T \underset{\sim}{N}_v \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} \\ \hline \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_m^T \underset{\sim}{N}_{u,y}^T \underset{\sim}{N}_{u,y} \underset{\sim}{\varphi} + \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_m^T \underset{\sim}{N}_{v,y}^T \underset{\sim}{N}_{v,y} \underset{\sim}{\varphi}_m \\ \hline \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_m^T \underset{\sim}{N}_{u,y}^T \underset{\sim}{N}_u \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} + \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_m^T \underset{\sim}{N}_{v,y}^T \underset{\sim}{N}_v \underset{\sim}{\varphi}_{m,x} + \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_{m,x}^T \underset{\sim}{N}_u^T \underset{\sim}{N}_{u,y} \underset{\sim}{\varphi}_m + \underset{\sim}{u}^m \underset{\sim}{\varphi}_{m,x}^T \underset{\sim}{N}_v^T \underset{\sim}{N}_{v,y} \underset{\sim}{\varphi}_m \end{Bmatrix}, \tag{6.114}$$

$$\underset{\sim}{B}_{NL}^f = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}^f \underset{\sim}{\varphi}_{f,x}^T \underset{\sim}{N}_f^T \underset{\sim}{N}_f \underset{\sim}{\varphi}_{f,x} \\ \hline \underset{\sim}{u}^f \underset{\sim}{\varphi}_f^T \underset{\sim}{N}_{f,y}^T \underset{\sim}{N}_{f,y} \underset{\sim}{\varphi}_f \\ \hline \underset{\sim}{u}^f \underset{\sim}{\varphi}_f^T \underset{\sim}{N}_{f,y}^T \underset{\sim}{N}_f \underset{\sim}{\varphi}_{f,x} + \underset{\sim}{u}^f \underset{\sim}{\varphi}_{f,x}^T \underset{\sim}{N}_f^T \underset{\sim}{N}_{f,y} \underset{\sim}{\varphi}_f \end{Bmatrix}. \tag{6.115}$$

As variações das deformações de membrana e de flexão em relação aos deslocamentos generalizados são dadas pelas equações (6.116) e (6.117),

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^m = \underset{\sim}{B}_0^m d\underset{\sim}{u}^m + \underset{\sim}{B}_{NL}^m d\underset{\sim}{u}^m + \underset{\sim}{B}_{NL}^f d\underset{\sim}{u}^f \,, \tag{6.116}$$

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^f = \underset{\sim}{B}_0^f d\underset{\sim}{u}^f \,. \tag{6.117}$$

Substituindo as equações (6.112), (6.113), (6.116) e (6.117) em (6.111), obtém-se a expressão (6.118) que relaciona o trabalho realizado pelas forças internas com os deslocamentos nodais generalizados,

$$W_i = \left[d\underset{\sim}{u}^{m\,\mathrm{T}} \quad d\underset{\sim}{u}^{f\,\mathrm{T}} \right] \begin{Bmatrix} \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{W}_i^m t dy dx \\ \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{W}_i^f t dy dx \end{Bmatrix}, \tag{6.118}$$

em que $\underset{\sim}{W}_i^m$ e $\underset{\sim}{W}_i^f$ são representados a seguir, nas equações (6.123) e (6.124),

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{W}_i^m = & \left(\underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^m \right) \underset{\sim}{u}^m - \\ & \left(\underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^m + \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^m \right) \underset{\sim}{u}_{imp}^m + \\ & \frac{1}{2} \left(\underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^f + \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^f \right) \underset{\sim}{u}^f - \frac{1}{2} \left(\underset{\sim}{B}_0^{m\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^f + \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^f \right) \underset{\sim}{u}_{imp}^f \end{aligned} \tag{6.119}$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{W}_i^f = & \left(\underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^f \right) \underset{\sim}{u}^m - \left(\underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^m + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^f \right) \underset{\sim}{u}_{imp}^m + \\ & \left(\underset{\sim}{B}_f^T \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_0^f + \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^f \right) \underset{\sim}{u}^f - \frac{1}{2} \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,T} \underset{\sim}{D}^m \underset{\sim}{B}_{NL}^f \underset{\sim}{u}_{imp}^f \end{aligned} . \tag{6.120}$$

Por outro lado, o trabalho virtual realizado pelas forças externas de uma faixa finita, ocasionado pelos deslocamentos infinitesimais $d\underset{\sim}{u}$, medidos a partir da configuração de equilíbrio, é dado pela equação (6.121),

$$W_e = -d\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{f} = -\left[d\underset{\sim}{u}^{m\,\mathrm{T}} \quad d\underset{\sim}{u}^{f\,\mathrm{T}} \right] \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^m \\ \underset{\sim}{f}^f \end{Bmatrix}, \tag{6.121}$$

onde $\underset{\sim}{f}$ é o vetor de forças generalizadas dado pela expressão (6.122), em que $\underset{\sim}{f}^m$ e $\underset{\sim}{f}^f$ são os vetores de forças generalizadas de membrana e de flexão, respectivamente,

$$\underset{\sim}{f} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f}^m \\ \underset{\sim}{f}^f \end{Bmatrix}. \tag{6.122}$$

Para que as forças internas e externas presentes na faixa finita estejam em equilíbrio, o *PTV* postula que o trabalho virtual total realizado na faixa finita deve ser nulo, ou seja, a equação (6.123) deve ser satisfeita,

$$W_i - W_e = 0 . \tag{6.123}$$

Assim, substituindo (6.118)-(6.121) em (6.123), e após algumas transformações de natureza algébrica, chega-se à equação (6.124) que traduz o comportamento geometricamente não linear da faixa finita, ou seja, o equilíbrio na configuração deformada,

$$\underset{\sim}{k}_s \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{k}_{simp} \underset{\sim}{u}_{imp} = \underset{\sim}{f} \,, \tag{6.124}$$

sendo $\underset{\sim}{k}_s$ a matriz de rigidez secante (ou matriz de equilíbrio) e $\underset{\sim}{k}_{simp}$ a matriz que engloba todos os elementos que contabilizam os efeitos das imperfeições geométricas iniciais ($\underset{\sim}{u}_{imp}$), dadas pelas expressões (6.125) e (6.126), respectivamente,

$$\underset{\sim}{k}_s = \underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_{LN}^T + \frac{\underset{\sim}{k}_{LN} + \underset{\sim}{k}_{NN}}{2} \,, \tag{6.125}$$

$$\underset{\sim}{k}_{simp} = \underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_{LN}^T + \frac{\underset{\sim}{k}_{LNimp} + \underset{\sim}{k}_{NNimp}}{2} \,. \tag{6.126}$$

A matriz de rigidez elástica linear $\underset{\sim}{k}_0$ já foi apresentada na equação (6.45). As matrizes $\underset{\sim}{k}_{NL}$ e $\underset{\sim}{k}_{NL0}$ contém os termos quadráticos das equações de equilíbrio e são representados nas equações (6.127) e (6.128),

$$\underset{\sim}{k}_{NL} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_{NL}^m & \underset{\sim}{k}_{NL}^f \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} , \tag{6.127}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NLimp} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_{NLimp}^m & \underset{\sim}{k}_{NLimp}^f \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} , \tag{6.128}$$

onde as sub-matrizes $\underset{\sim}{k}_{NL}^m$, $\underset{\sim}{k}_{NL}^f$, $\underset{\sim}{k}_{NLimp}^m$ e $\underset{\sim}{k}_{NLimp}^f$ são dadas pelas equações (6.129)-(6.132),

$$\underset{\sim}{k}_{NL}^m = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NL}^m t dy dx \,, \tag{6.129}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NL}^f = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NL}^f t dy dx \,, \tag{6.130}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NLimp}^m = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^m t dy dx \,, \tag{6.131}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NLimp}^f = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^f t dy dx \,. \tag{6.132}$$

As matrizes $\underset{\sim}{k}_{NN}$ e $\underset{\sim}{k}_{NNimp}$ contém os termos cúbicos das equações de equilíbrio e são dadas pelas equações (6.133) e (6.134),

$$\underset{\sim}{k}_{NN} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_{NN}^{m} & \underset{\sim}{k}_{NN}^{mf} \\ \underset{\sim}{k}_{NN}^{mf\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{k}_{NN}^{f} \end{bmatrix}, \tag{6.133}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NNimp} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_{NNimp}^{m} & \underset{\sim}{k}_{NNimp}^{mf} \\ \underset{\sim}{k}_{NNimp}^{fm\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{k}_{NNimp}^{f} \end{bmatrix}, \tag{6.134}$$

onde as sub-matrizes $\underset{\sim}{k}_{NN}^{m}$, $\underset{\sim}{k}_{NN}^{mf}$, $\underset{\sim}{k}_{NN}^{f}$, $\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{m}$, $\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{mf}$, $\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{f}$ e $\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{fm}$ são dadas pelas equações (6.135)-(6.141),

$$\underset{\sim}{k}_{NN}^{m} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NL}^{m} t dy dx, \tag{6.135}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NN}^{mf} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NL}^{f} t dy dx, \tag{6.136}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NN}^{f} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NL}^{f} t dy dx, \tag{6.137}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{m} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^{m} t dy dx, \tag{6.138}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{mf} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^{f} t dy dx, \tag{6.139}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{f} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NLimp}^{f} t dy dx, \tag{6.140}$$

$$\underset{\sim}{k}_{NNimp}^{fm} = \int_0^a \int_0^b \underset{\sim}{B}_{NLimp}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{D}_0^m \underset{\sim}{B}_{NL}^{f} t dy dx. \tag{6.141}$$

Na estratégia incremental-iterativa, o sistema de equações que governa o equilíbrio está associado à matriz de rigidez tangente ($\underset{\sim}{k}^{t}$), na vizinhança da configuração atual, a qual corresponde a um ponto genérico na trajetória de equilíbrio.

A matriz de rigidez tangente pode ser determinada a partir do cálculo, na configuração de equilíbrio considerada, do valor da derivada do sistema de equações (6.124) em relação aos deslocamentos generalizados. Também pode ser derivada a partir da aplicação do *PTV*, procedimento que permite a identificação da natureza dos termos envolvidos na matriz.

A equação de equilíbrio (6.63) pode ser reescrita em termos dos deslocamentos generalizados como indicado na equação (6.142),

$$\int_V d\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\sigma} dV + d\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}. \tag{6.142}$$

A substituição das equações (6.64), (6.110) e (6.121) na equação (6.142), conduz à equação (6.143),

$$\int_V \left(d\underset{\sim}{\varepsilon}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{\sigma}^m + d\underset{\sim}{\varepsilon}^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{\sigma}^f \right) dV - \left(d\underset{\sim}{u}^{m\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{f}^m + d\underset{\sim}{u}^{f\,\mathrm{T}} \underset{\sim}{f}^f \right) = \underset{\sim}{0} . \tag{6.143}$$

Utilizando as equações (6.116) e (6.117), e reescrevendo a equação (6.143) na forma matricial, chega-se a equação (6.144),

$$\int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} + \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{B}_{NL}^{f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\sigma}^m \\ \underset{\sim}{\sigma}^f \end{Bmatrix} t dy dx = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} . \tag{6.144}$$

A matriz de rigidez tangente é obtida pela derivação da equação (6.144) em relação aos deslocamentos generalizados, conforme mostra a equação (6.145).

$$\int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} + \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{B}_0^{f\,\mathrm{T}} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} d\underset{\sim}{\sigma}^m \\ d\underset{\sim}{\sigma}^f \end{Bmatrix} t dy dx + \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} d\underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \\ d\underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\sigma}^m \\ \underset{\sim}{\sigma}^f \end{Bmatrix} t dy dx = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} . \tag{6.145}$$

A segunda parcela da expressão (6.145) corresponde à matriz de rigidez geométrica (ver a equação (6.80)).

Finalmente, substituindo-se as equações (6.25), (6.26), (6.116) e (6.117) na segunda parcela da equação (6.145), se obtém a matriz de rigidez tangente devida às grandes deformações, que está dada pela equação (6.146) (ver a equação (6.82)),

$$\underset{\sim}{\bar{k}} = \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_0^{m\,\mathrm{T}} + \underset{\sim}{B}_{NL}^{m\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{B}_{NL}^{f\,\mathrm{T}} & \underset{\sim}{B}_0^{f\,\mathrm{T}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_0^m & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{D}_0^f \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_0^m + \underset{\sim}{B}_{NL}^m & \underset{\sim}{B}_{NL}^f \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{B}_0^f \end{bmatrix} t dy dx . \tag{6.146}$$

A equação (6.146) pode ser rescrita na forma da equação (6.147), sendo para isto necessário o uso das equações (6.45), (6.127) e (6.133).

$$\underset{\sim}{\bar{k}} = \underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_{LN}^T + \underset{\sim}{k}_{LN} + \underset{\sim}{k}_{NN} . \tag{6.147}$$

Em uma notação compacta, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita na forma indicada na equação (6.148),

$$\underset{\sim}{k}^t = \underset{\sim}{\bar{k}} + \underset{\sim}{k}_\sigma . \tag{6.148}$$

6.7. Implementação Computacional

Para as análises lineares e não lineares usando o Método das Faixas Finitas Splines, foram desenvolvidos módulos e rotinas adicionais no programa *INSTAB*, inicialmente desenvolvido pelo autor dessa Tese em sua Dissertação de Mestrado (Pierin, 2005). O programa *INSTAB*, desenvolvido em 2005, realiza análises lineares de instabilidade utilizando (i) o Método dos Elementos Finitos cuja modelagem é realizada por elementos de cascas, que foram desenvolvidos com base nos elementos de placa

ACM (Adini e Clough, 1960) e *DKQ* (Bathoz e Tahar, 1982), e (ii) o Método das Faixas Finitas Semi-Analítico. Deste modo, foi incluído no programa *INSTAB* um módulo adicional para realizar análises lineares e não lineares de instabilidade por meio do Método das Faixas Finitas Splines.

O programa *INSTAB* foi escrito em linguagem Fortran F90 e é subdividido em módulos, ligados por arquivos binários, que possibilitam a comunicação interna entre esses módulos. O programa gera também arquivos de texto puro que possibilitam ao usuário visualizar todos os resultados fornecidos pelo programa. O fluxograma geral do funcionamento do programa está ilustrado na Figura 6.9 e comentado sucintamente a seguir.

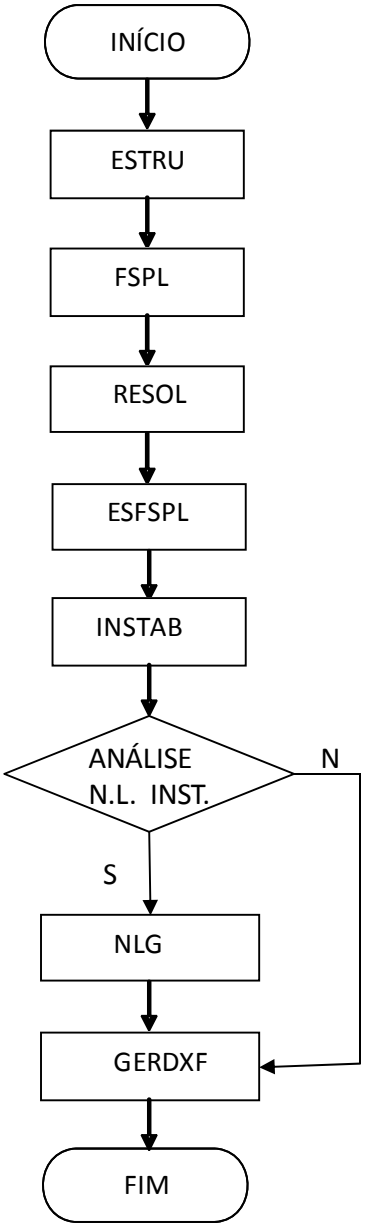

Figura 6.9: Fluxograma do programa de análise de instabilidade

Para realizar análises lineares e não lineares de estabilidade com o programa *INSTAB*, é necessário a elaboração de um arquivo texto, com extensão .DAT, que será lido pelo módulo *ESTRU*. Nesse arquivo devem constar todos os dados necessários para as análises que são: (i) coordenadas das linhas nodais, (ii) conectividades para a formação das faixas, (iii) número de seções que as linhas nodais devem ser divididas (m), (iv) comprimento do perfil, (v) condição de vinculação das bordas longitudinais, (vi) restrições aos deslocamentos u, v, w e θ_x dos nós das linhas nodais, (vii) propriedades dos materiais, (viii) distribuição de tensões nas faixas e as (ix) tensões residuais, se houver. Além disso, para análises não lineares geométrica, devem ser fornecidos: (i) número de etapas de carregamento, (ii) incremento de carga, (iii) algoritmo para a solução do sistema de equações não lineares (Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado ou Comprimento de Arco) e a (iv) tolerância do erro. O módulo *ESTRU* gera um arquivo texto .EST contendo todas as informações da estrutura para conferencia do usuário.

O módulo *FSPL* calcula as matrizes de rigidez elástica e os vetores de cargas consistentes de todas as faixas finitas do modelo e os transforma para o sistema de coordenadas global da estrutura, escrevendo-os em arquivos binários.

No módulo *RESOL* são lidos as matrizes de rigidez e os vetores de cargas consistentes de todas as faixas e, com as conectividades e com as restrições nodais, é gerada a matriz de rigidez global e o vetor de cargas consistente global da estrutura. Finalmente, é efetuada a análise linear elástica da estrutura, cujos deslocamentos são impressos no arquivo texto .RES.

Com os deslocamentos obtidos, o modulo *ESFSPL* calcula as tensões de membrana de cada faixa que serão lidas pelo módulo *INSTAB* para o cálculo da matriz de rigidez geométrica. Com as matrizes de rigidez elástica e geométrica, o modulo *INSTA*B resolve o problema de autovalores e escreve no arquivo texto .INS a carga de bifurcação crítica e o respectivo modo de instabilidade. Além disso, o módulo *INSTAB* gera um arquivo binário .IMP com as imperfeições geométricas iniciais.

No módulo *NLG*, são lidas as imperfeições geométricas iniciais e as tensões residuais. Com essas informações, as equações de equilíbrio não lineares da estrutura são resolvidas pelos algoritmos escolhidos pelo usuário. Esses algoritmos serão detalhados no próximo ítem. Em cada etapa de carregamento, quando ocorre a convergência estipulada, os deslocamentos nodais e as tensões em cada ponto de Gauss são impressos no arquivo texto .NAL.

Para a análise linear de estabilidade, o modulo *GERDXF* gera um arquivo .DXF para a visualização da configuração do modo de instabilidade. Nas análises não lineares geométrica, o modulo *GERDXF* gera um arquivo .DXF com a deformada da estrutura para cada etapa de carregamento. O arquivo DXF pode ser lido em programas *CAD*, como por exemplo, o *AutoCAD*.

6.7.1. Solução do Problema Não Linear

As matrizes secantes presentes no sistema de equações (6.124), que descreve o equilíbrio da faixa finita na configuração deformada, são dependentes dos deslocamentos generalizados, tornando o sistema de equações não linear. Para a solução do problema geometricamente não linearé adequada a aplicação de métodos do tipo incremental-iterativo. No programa *INSTAB* foi implementa uma rotina de solução com base no método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados na solução de sistemas de equações não lineares, onde a solução não linear é aproximada por retas tangentes até a convergência, (Cook *et al*, 1989). O método consiste em aplicar sucessivos incrementos do parâmetro de controle, que, geralmente, é a carga aplicada, e para cada etapa de carregamento calcula-se, por meio de iterações, o incremento de deslocamento, obtendo, assim, a trajetória de equilíbrio não linear.

Em uma etapa *e* do carregamento, onde se conhece o ponto de equilíbrio, aplica-se um incremento de carga, no qual deve-se fazer uma previsão da solução aproximada do sistema de equações (6.124). Essa previsão deve ser corrigida por meio de um processo iterativo, sendo que os deslocamentos da iteração *i* são calculados por meio da solução do sistema linear de equações (6.149),

$$\underset{\sim}{K}_e^{t(i-1)} \Delta \underset{\sim}{U}_e^{(i)} = \underset{\sim}{\psi}_e^{(i-1)} , \tag{6.149}$$

onde $\underset{\sim}{K}_e^{t(i-1)}$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura calculada no início da etapa *e* de carregamento, $\Delta \underset{\sim}{U}_e^{(i)}$ é o incremento de deslocamento e $\underset{\sim}{\psi}_e^{(i-1)}$ é o vetor de forças residuais, que caracteriza a imprecisão da previsão feita pelo uso da matriz tangente.

O vetor de deslocamentos generalizados da iteração *i* ($\underset{\sim}{U}_e^{(i)}$) é dado pela equação (6.150),

$$\underset{\sim}{U}_e^{(i)} = \underset{\sim}{U}_e^{(i-1)} + \Delta \underset{\sim}{U}_e^{(i)} . \tag{6.150}$$

O vetor de forças residuais da iteração *i-1* é calculado pela equação (6.151),

$$\underset{\sim}{\psi}_e^{(i-1)} = \underset{\sim}{F}_e - \underset{\sim}{R}_e^{(i-1)}, \tag{6.151}$$

onde $\underset{\sim}{R}_e^{(i-1)}$ é o vetor de forças generalizadas que assegura a condição de equilíbrio (equação (6.124)) na configuração deformada (referente aos deslocamentos da iteração *i-1*), sendo fornecido pela equação (6.152). $\underset{\sim}{F}_e$ é o vetor de forças generalizadas da etapa de carregamento *e* dada pela equação (6.153),

$$\underset{\sim}{R}_e^{(i-1)} = \underset{\sim}{K}_{s,e}^{(i-1)} \underset{\sim}{U}_e^{(i-1)} - \underset{\sim}{K}_{simp,e}^{(i-1)} \underset{\sim}{U}_{imp}, \tag{6.152}$$

$$\underset{\sim}{F}_e = \underset{\sim}{F}_{e-1} + \Delta \underset{\sim}{F}_e, \tag{6.153}$$

onde $\Delta \underset{\sim}{F}_e$ é o incremento de forças generalizadas da etapa de carregamento *e*.

O processo iterativo converge quando a inequação (6.154) é satisfeita,

$$\frac{\left\| \underset{\sim}{\psi} \right\|}{\left\| \underset{\sim}{F} \right\|} \leq tolerância, \tag{6.154}$$

onde $\| \ \|$ é a norma euclidiana do vetor.

De acordo com a maneira que a matriz tangente é atualizada existem duas variações do método: (i) *Newton Raphson Padrão* – a matriz de rigidez tangente é atualizada a cada iteração e (ii) *Newton Raphson Modificado* – a matriz de rigidez tangente é atualizada a cada etapa de incremento de carregamento e mantida constante em todas as iterações.

O processo iterativo de Newton Raphson, para um grau de liberdade, está esquematizado na Figura 6.10.

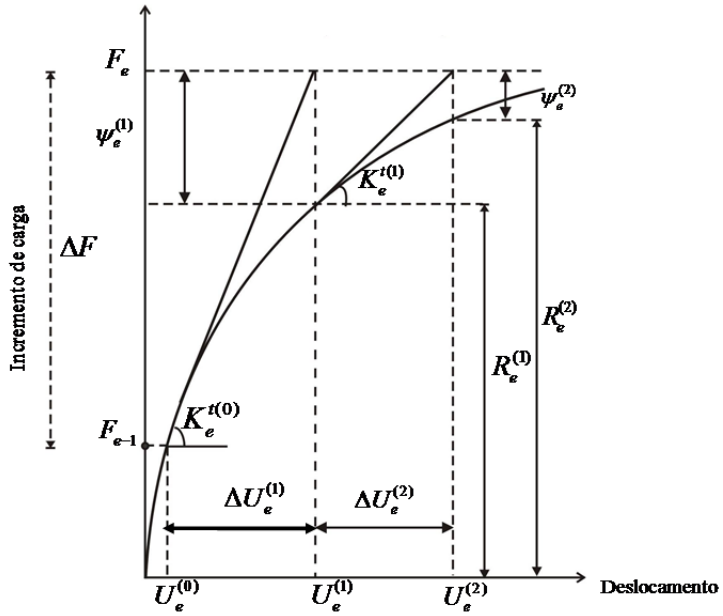

Figura 6.10: Esquema do processo iterativo de Newton Raphson.

O método de Newton Rapshon pode apresentar falhas de convergência nas regiões próximas às cargas de bifurcação. Pode-se utilizar ao invés de cargas prescritas, deslocamento prescrito, onde o parâmetro de controle é o deslocamento aplicado, no qual se define o nível de deslocamento, encontrando-se a carga de equilíbrio. No entanto, essa técnica também apresenta uma desvantagem, pois a convergência no processo iterativo é bem mais lenta e às vezes não é possível atingi-la. No entretanto, para o uso do programa *INSTAB*, no qual se considera o material elastofrágil, o método de Newton Raphson não apresenta problemas de convergência.

6.8. Validação Computacional

Nesse ítem os resultados obtidos pelo programa *INSTAB* são validados com resultados obtidos na literatura. A validação dos resultados obtidos pelo programa é realizada por meio da combinação de estudos de convergência (definição do nível de discretização necessário para se obter resultados precisos) e com comparações de resultados analíticos e numéricos obtidos na literatura.

6.8.1. Análises Lineares de Estabilidade à Temperatura Ambiente

Iniciam-se os estudos de validação pelos resultados obtidos da análise linear de estabilidade, onde se consideram chapas constituídas de materiais isotrópicos cujos resultados numéricos apresentados consistem em valores de coeficientes de instabilidade (k) que podem ser relacionados com a força axial (N) pela equação (6.155) ,

$$k = \frac{12\left(1-\upsilon^2\right)}{\pi^2 E}\left(\frac{b}{t}\right)^2 \frac{N}{A}, \tag{6.155}$$

onde E e υ são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, A, t e b são a área, espessura e a largura da chapa, respectivamente.

No primeiro estudo de validação do programa utilizou-se a chapa retangular representada na Figura 6.11, cujas bordas longitudinais e transversais estão simplesmente apoiadas, sendo submetida à compressão uniforme na direção longitudinal.

Os resultados obtidos do coeficiente de instabilidade para cinco chapas, com os quatro lados simplesmente apoiados e com diferentes relações entre o comprimento e a largura que variam de 1,0 a 5,0, estão apresentados na Tabela 6.3. O número de semicomprimentos de onda n exibidos na configuração deformada (modo de

instabilidade) para cada chapa também é apresentado na Tabela 6.3. Todas as placas foram discretizadas em sete faixas de igual largura, sendo variável o número de nós por linha nodal *nln*. Recorde-se que o número de linhas por linha nodal mínimo é 4, pois *m=nln-3,* onde *m* é o número de sub-intervalos ao longo do comprimento da placa.

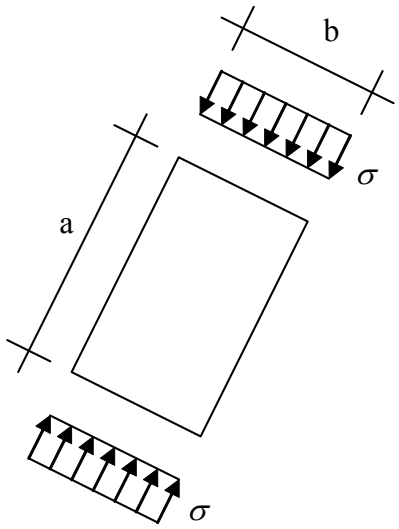

Figura 6.11: Chapa retangular submetida à compressão uniforme.

Verifica-se que todas as chapas apresentam rápida convergência para o valor exato $K_b = 4,00$ e, como esperado, o número de nós por linha nodal (discretização longitudinal) necessário para a convergência aumenta de acordo com o número de semicomprimentos de onda exibidos pelo modo de instabilidade. Em geral, a consideração de 5 nós por cada semicomprimento de onda é suficiente para se obter uma grande precisão nos resultados. Observa-se ainda que discretizações longitudinais inferiores a 6 nós por linha nodal apresentam resultados muito pouco precisos.

Os modos de instabilidade para as chapas comprimidas com as quatro bordas simplesmente apoiadas e com relação entre os lados *a/b* igual a 1 e a 5 estão ilustrados na Figura 6.12. Observa-se que as chapas apresentam 1 e 5 semicomprimentos de onda, respectivamente.

Tabela 6.3: Coeficientes de instabilidade para chapas com bordas longitudinais e transversais simplesmente apoiadas.

nln	a/b=1 n=1	a/b=2 n=2	a/b=3 n=3	a/b=4 n=4	a/b=5 n=5
6	4,0018	4,0247	4,6623	4,4058	4,3922
7	4,0006	4,0097	4,0412	4,3373	4,4234
8	4,0003	4,0041	4,0208	4,0515	4,2026
9	4,0002	4,002	4,0104	4,0322	4,0558
10	4,0001	4,001	4,006	4,0184	4,042
11	4,0001	4,0006	4,003	4,0108	4,027
12		4,0004	4,002	4,0067	4,017
13		4,0003	4,001	4,0043	4,011
14			4,0009	4,0029	4,007
15			4,0006	4,0021	4,005
16			4,000	4,0015	4,004
17				4,0011	4,003
18				4,0009	4,002
19				4,0007	4,0015
20				4,0006	4,001
21				4,0005	4,00097
22					4,0008
23					4,0006
24					4,000

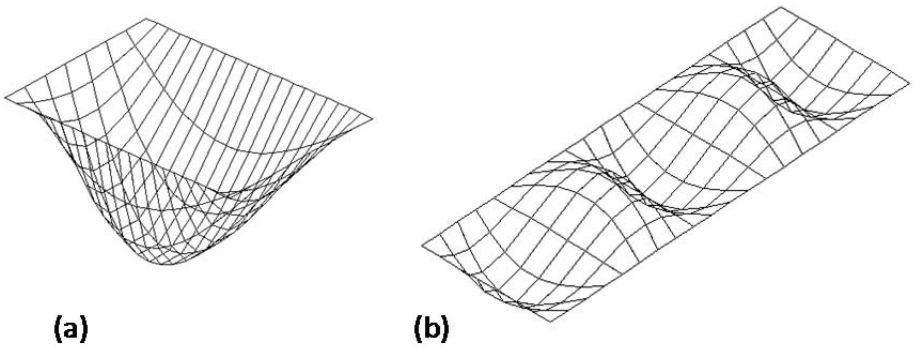

Figura 6.12: Modos de instabilidade para chapas apoiadas: (a) a/b=1 e (b) a/b=5.

Os coeficientes de instabilidade obtidos para a chapa quadrada e com os quatro lados engastados estão apresentados na Tabela 6.4. Verifica-se que a convergência para o valor exato *k=10,08*, fornecido em Bradford e Azhari (1995), com um semicomprimento de onda ($n = 1$) é atingida com 240 graus de liberdade. Essa chapa foi modelada com elementos de casca DKQ por Pierin (2005) onde se encontrou

k=10,071 (erro de 0,09%), utilizando 3721 elementos quadrados de 1,667 cm de lado e com 17885 graus de liberdade.

Tabela 6.4: Coeficientes de instabilidade para chapas com quatro lados engastados,

Número de nós por linha nodal (nln)	**a/b=1 n=1**
6	10,83
7	10,23
8	10,135
9	10,103
10	10,091
11	10,085
12	10,082
13	10,081
14	10,080

O programa *INSTAB* também permite analisar a estabilidade de chapas submetidas a diagramas de tensões aplicadas variáveis. Na Tabela 6.5 apresentam-se os resultados dos coeficientes de instabilidade fornecidos pelo referido programa para uma chapa com todos os lados simplesmente apoiados, relação *a/b=2,0*, sob a ação de um diagrama de tensões aplicadas correspondentes à flexão pura (ver Figura 6.13) e cujo modo de instabilidade exibe três semicomprimentos de onda (*n=3*). A chapa foi discretizada transversalmente em 6 faixas finitas, pois, segundo Pierin (2005), essa discretização é suficiente para obter o valor exato do coeficiente de instabilidade *k=23,9* (Yu, 2000) por meio do Método das Faixas Finitas Semi-Analítico.

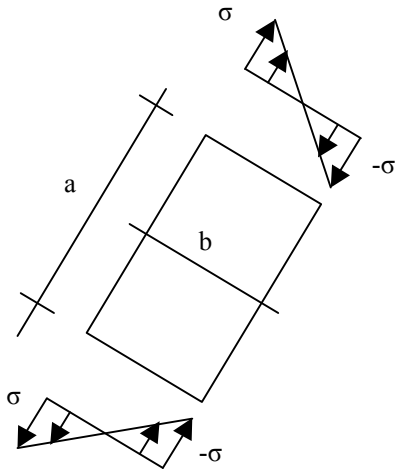

Figura 6.13: Chapa retangular simplesmente apoiada submetida à flexão pura.

Tabela 6.5: Coeficientes de instabilidade para chapa submetida à flexão pura

Número de nós por linha nodal (nln)	**a/b=2 n=3**
6	27,112
7	24,166
8	24,038
9	23,946
10	23,935
11	23,918
12	23,910
13	23,905
14	23,903
15	23,901
16	23,900

Para mostrar a eficiência do método na análise de perfis formados a frio, realiza-se uma análise linear de estabilidade de um pilar bi-apoiado, com seção transversal em *Ue 50x25x5x1,2* e material isotrópico (*E= 210,00 GPa;* $\upsilon = 0,30$), submetido a uma carga de compressão centrada na extremidade livre, conforme mostra a Figura 6.14a. O pilar *Ue* apresenta os modos de instabilidade: (i) *MLC* – modo local de chapa (Figura 6.14b), (ii) *MD* – modo distorcional (Figura 6.14c) e (iii) *MGFT* – modo global por flexo-torção (Figura 6.14d).

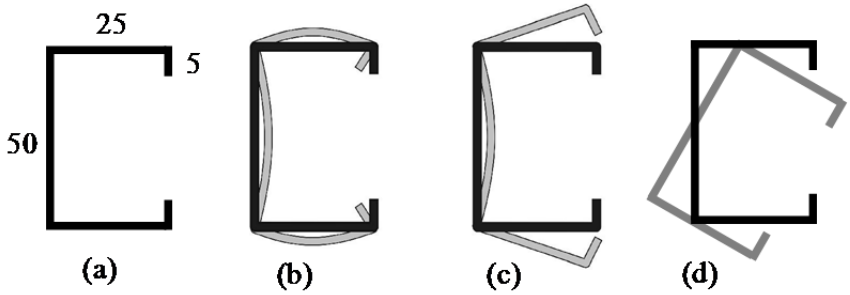

Figura 6.14: Pilar em seção *Ue*: (a) geometria, (b) *MLC*, (c) *MD* e (d) *MGFT*.

A ocorrência dos modos de instabilidade está condicionada à geometria e ao comprimento do perfil. Tendo em vista a análise dos modos de instabilidade, foram escolhidos três comprimentos de perfil: (a) a= 41,5 cm, (b) a=143,0 cm e (c) a=500,0 cm. Todos os perfis foram discretizados em 20 faixas finitas, sendo 2 faixas em cada enrijecedor, 4 em cada mesa e 8 na alma. Os valores dos coeficientes de instabilidade *k* obtidos pelo programa *INSTAB* estão apresentados na Tabela 6.6, onde se verifica que

para os modos de instabilidade local de chapa e distorcional a convergência é obtida com 11 nós por linha nodal. Para o modo global por flexotorção a convergência é obtida com apenas 6 nós por linha nodal.

Tabela 6.6: Coeficientes de instabilidade críticos para pilares *Ue 50x25x5x1,2*

Número de nós por linha nodal (nln)	**MLC**	**MD**	**MGFT**
6	5,3262	4,666	3,8611
7	5,3243	4,658	3,8611
8	5,3238	4,6563	3,8611
9	5,3237	4,656	3,8611
10	5,3236	4,6559	3,8611
11	5,3235	4,6558	3,8611
12	5,3235	4,6558	3,8611

As configurações dos modos de instabilidade para os três comprimentos de perfis estão ilustrados na Figura 6.15, onde se pode observar que todos os modos de instabilidade apresentam um semicomprimento de onda.

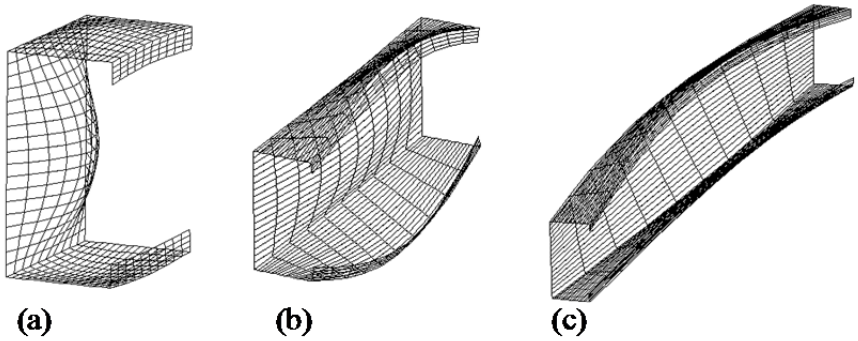

Figura 6.15: Configurações dos modos de instabilidade: (a) MLC, (b) MD e (c) MGFT

Para uma melhor visualização dos resultados da análise linear de instabilidade, a Figura 6.16 mostra a variação do coeficiente de instabilidade *k* em função do parâmetro geométrico a/b_w (relação entre o comprimento do perfil e a largura da alma). Observa-se que (i) para comprimentos pequenos $a/b_w < 1,9$ o modo de instabilidade crítico é o *MLC* com um ou dois semicomprimentos de onda (número entre parênteses), (i) para comprimentos intermediários $1,9 < a/b_w < 9,0$ o modo de instabilidade critico é o *MD* com um, dois ou três semicomprimentos de onda (número entre parênteses), (iii) para perfis longos o *MGFT* é o modo de instabilidade crítico, com um semicomprimento de

onda, e (iv) para perfis extremamente longos ($a/b_w > 40$) há a ocorrência do modo global por flexão *MGF*.

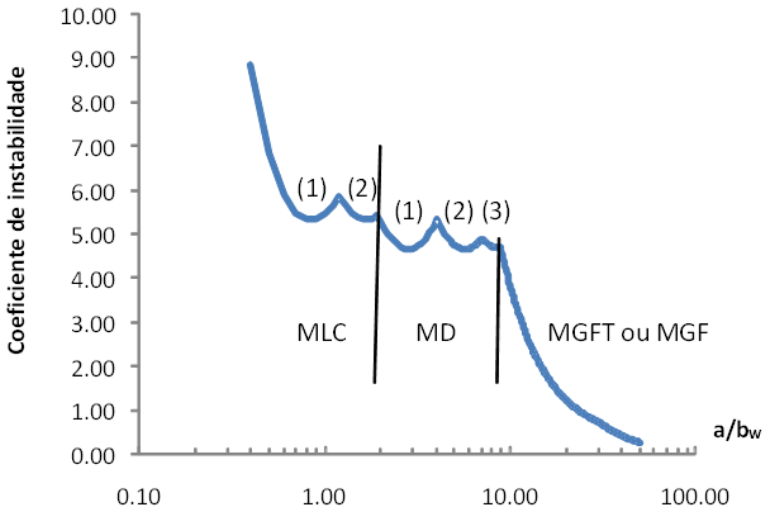

Figura 6.16: Variação do coeficiente de instabilidade em função da relação entre o comprimento do perfil e a largura da alma

Para perfis de comprimentos iguais a 290 e 430 cm o modo de instabilidade distorcional apresenta dois e três semicomprimentos de onda, respectivamente. As configurações desses modos de instabilidade estão ilustradas na Figura 6.17.

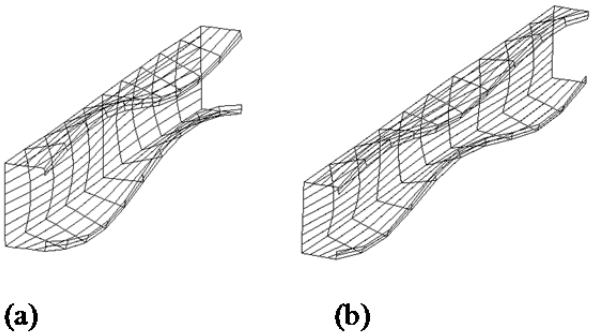

Figura 6.17: Modo de instabilidade distorcional: (a) com dois e (b) com três semicomprimentos de onda.

6.8.2. Análise Não Linear Geométrica

Neste item realizam-se análises não lineares de estabilidade de perfis formados a frio por meio do método das faixas finitas splines e do método dos elementos finitos por meio do programa comercial *ANSYS v.13*.

Ressalta-se que o programa computacional *INSTAB* foi desenvolvido com base na Teoria de Kirchhoff-Love, a qual é válida para cascas finas. No entanto, todos os elementos de casca presentes na biblioteca do programa *ANSYS* utilizam a Teoria de

Reissner-Mindlin, a qual é uma teoria mais geral e é válida para placas finas e semi-espessas. Segundo Soriano (2003), outros fatores devem ser considerados na escolha da teoria a ser utilizada, tais como: comportamento estático ou dinâmico, placa isótropa ou sanduíche. Além disso, a consideração das deformações por esforço cortante torna-se importante em análises de estabilidade de elementos de perfis formados a frio que instabilizam no modo distorcional (Camotim, 2006).

Como o programa *INSTAB* realiza análises de instabilidade de elementos estruturais constituídos de materiais elásticos lineres, utilizou-se o programa *ANSYS* para efetuar as análises de instabilidade considerando a não linearidade do material (material elastoplástico). O programa *ANSYS* também foi utilizado para realizar análises de instabilidade de estruturas constituídas de materiais elásticos lineares com o intuito de validar o programa *INSTAB* desenvolvido nesta Tese.

6.8.2.1 Comentários sobre a Modelagem com o Programa *ANSYS*

Dentre os vários elementos de casca presentes na biblioteca do programa *ANSYS*, as análises serão efetuadas com o elemento *Shell 181*, o qual permite efetuar análises de estabilidade de estruturas constituídas de materiais elásticos e elatoplásticos. Esse elemento possui quatro nós com seis graus de liberdade por nó, três translações e três rotações, sendo adequado para modelar estruturas com comportamento linear e não linear com grandes deformações e grandes rotações. As funções de forma são lineares e utiliza o esquema de integração 2x2 no plano da casca e cinco pontos de integração ao longo da espessura. O elemento ainda permite a utilização da integração reduzida. Além do elemento *Shell 181*, o programa *ANSYS* incluiu a partir da versão 11, o elemento de casca de oito nós, *Shell 281*, o qual utiliza funções de forma quadráticas.

Os elementos *Shell 181* e *281* podme efetuar a análise em multicamadas. Nas análises termoestruturais, esta característica permite que todas as temperaturas obtidas pelo modelo térmico sejam transferidas ao modelo estrutural.

O *ANSYS* tem sido utilizado em diversos trabalhos para a análise de estabilidade de perfis formados a frio em temperatura ambiente e elevada, conforme comentado no capítulo 4 desta Tese. Especificamente, o elemento *Shell 181* foi utilizado por Chodraui (2006) na análise de estabilidade de perfis em seção *U* e *Ue* cujos resultados foram comparados com resultados experimentais e posteriormente Chodraui *et al* (2007) fizeram análises de estabilidade de cantoneiras de aço formado a frio por meio do *MEF* e MFF. Mesquita (2005) modelou vigas de aço por meio de elementos *Shell 181* para

estudar a instabilidade lateral de vigas em situação de incêndio. Almeida *et al* (2010) utilizaram elementos de casca e sólidos para avaliar o comportamento termoestrutural de uma viga de aço formado a frio em contato com uma laje de concreto e alvenaria. Recentemente, Landesmann e Camotim (2011) usaram o elemento *Shell 181* na análise não lineares de estabilidade de pilares de aço formados a frio com seção *Ue* em situação de incêndio.

As condições de contorno adotadas nos modelos deste capítulo simulam a condição de extremidade globalmente rotulada e sem impedimento do empenamento das seções extremas. Na aplicação do *MFFS*, essa simulação é imposta ao modelo por meio das funções *splines* modificadas, conforme apresentado no item 6.3. Em ambos os métodos, o carregamento é aplicado nas duas extremidades do perfil por meio de cargas nodais equivalentes, simulando um carregamento uniformemente distribuído, conforme mostra a Figura 6.18a. Na modelagem via *MEF*, as restrições de apoio são aplicadas diretamente nos nós das extremidades, os quais são impedidos de deslocar nas direções *y* e *z*, conforme mostra a Figura 6.18b. Para impedir o deslocamento de corpo rígido, o nó situado a meia altura da alma da seção do meio do vão é impedido de deslocar-se na direção *x* (ver Figura 6.18c).

Os resultados das análises não lineares de estabilidade dos elementos estruturais são, geralmente, apresentados em forma de gráficos. Na abcissa destes gráficos é apresentada a relação entre os deslocamentos máximos e a espessura do elemento estrutural. No eixo das ordenadas, está representado o fator de força (*FF*) que é dado pela relação entre a força aplicada e a força crítica de bifurcação, fornecida pela análise linear de estabilidade.

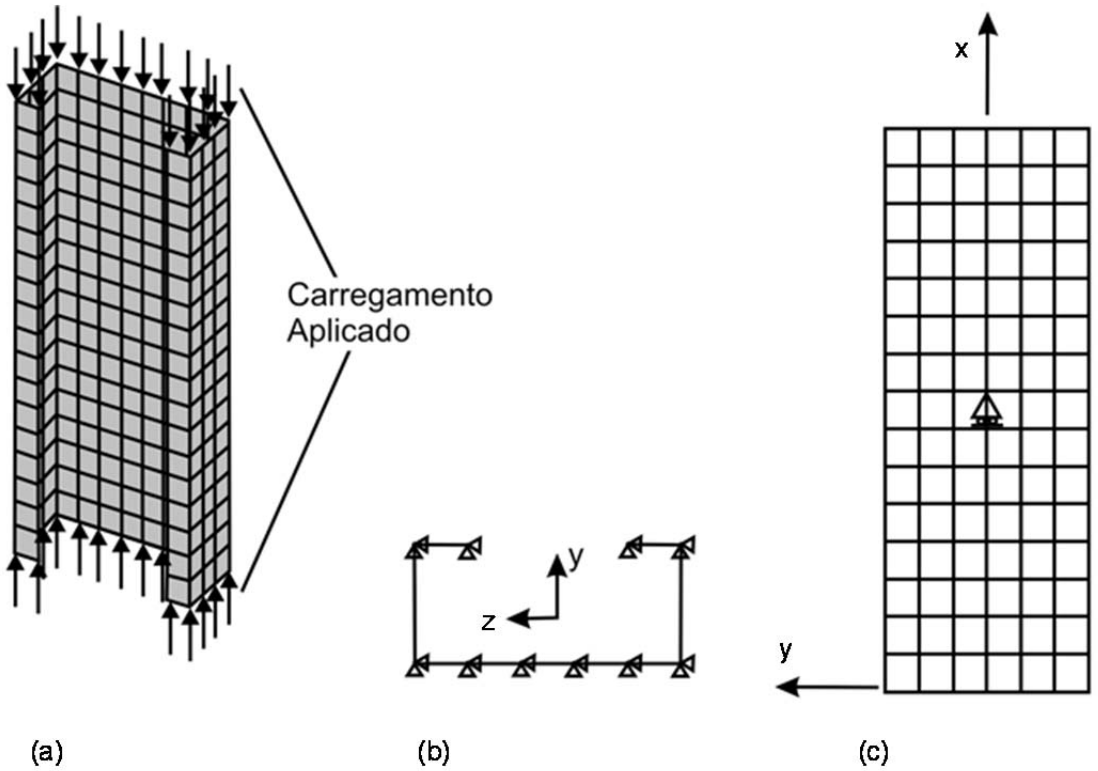

Figura 6.18: Condições de contorno aplicado nas análises: (a) carregamento; (b) deslocamentos impedidos nas seções de extremidade; (c) deslocamento de corpo rígido impedido. Adaptado de Souza *et al* (2006).

6.8.2.2 Chapa apoiada sob Compressão Uniaxial

Analisa-se agora a estabilidade de uma chapa de aço quadrada simplesmente apoiada ($a=b=100\ mm$, $t=1{,}0\ mm$, $E=200\ GPa$, e $\nu=0{,}3$) submetida à compressão uniaxial, conforme mostra a Figura 6.19a. A tensão crítica da chapa é igual a 72,305 MPa (coeficiente de instabilidade igual a 4,0) e o modo de instabilidade está representado na Figura 6.19b.

Para o estudo de convergência da malha, admite-se a presença de uma imperfeição geométrica inicial, na forma do modo de instabilidade da chapa e com amplitude máxima (deslocamento transversal no centro da chapa) igual a 10% da espessura ($z_0/t=0{,}1$), a qual é determinada por meio da analise linear de estabilidade.

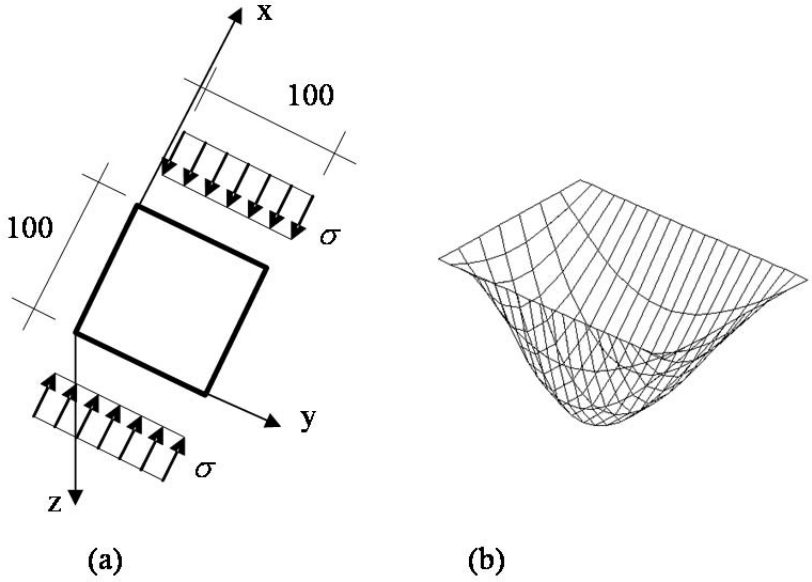

Figura 6.19: Chapa sobre compressão uniaxial: (a) geometria, (b) modo de instabilidade.

Inicialmente a chapa foi discretizada em 4 faixas finitas. Para a tensão media 50% superior ao valor critico (fator de força igual a 1,5), observa-se que a convergência da relação *z/t* (onde *z* é o deslocamento no centro da chapa) é atingida com 11 nós por linha nodal, conforme mostra a Tabela 6.7.

Fixando a discretização longitudinal da chapa em 11 nós por linha nodal e variando o número de faixas finitas (discretização transversal), verifica-se que o resultado converge com 20 faixas finitas, conforme mostra a Tabela 6.8. No entanto, com uma discretização de 12 faixas finitas o erro é inferior a 1,2%.

Tabela 6.7: Relação *z/t* da chapa para *FF=1,5* – discretização longitudinal

NLN.	z/t
9	1,514
11	1,50
13	1,50

Tabela 6.8: Relação *z/t* da chapa para *FF=1,5* – discretização transversal

n_f=4	n_f=8	n_f=12	n_f=16	n_f=20	n_f=24
1,50	1,63	1,68	1,69	1,70	1,70

Apesar de as matrizes de rigidez não lineares possuírem polinômios de 12º grau, o que necessita de um esquema de integração mínimo de 7x7 pontos de Gauss para a

integração exata, verifica-se que os deslocamentos obtidos, utilizando esquemas de integração de 4x4 e 8x8, são exatamente iguais, conforme mostra a Tabela 6.9. A redução do número de pontos de integração acarreta em diminuição do tempo total de processamento de 642 para 169 segundos. O tempo de processamento foi medido em um microcomputador Quad Core Q6600 com 2 Gb de RAM utilizando o Windows 7 64 Bits.

As trajetórias de equilíbrio das chapas simplesmente apoiadas podem ser visualizadas na Figura 6.20. Apresentam-se quatro trajetórias de equilíbrio obtidas pelo programa *INSTAB*, onde para cada curva foram adotadas imperfeições geométricas iniciais, na forma do modo de instabilidade, com diferentes amplitudes z_0/t. As trajetórias de equilíbrio, obtidas pelo programa *INSTAB*, foram comparadas com os resultados obtidos pelo programa *ANLESPL*, desenvolvido por Prola (2001). Para a modelagem utilizando o programa *ANLESPL*, incluiu-se uma imperfeição inicial na forma do modo crítico e com amplitude igual a 20% da espessura da chapa. O programa *ANLESPL* também utiliza o Método das Faixas Finitas Splines e as matrizes de rigidez são integradas analiticamente (Prola, 2001). Em ambos os programas adotou-se a mesma discretização (20 faixas finitas e 11 nós por linha nodal). Verifica-se que ambos os programas apresentaram resultados praticamente iguais (diferença máxima relativa de 0,26%).

A partir dos deslocamentos obtidos pelo programa *INSTAB*, pode-se obter as tensões de membrana σ_x, σ_y e τ_{xy} para qualquer nível de carregamento. A Figura 6.21 mostra a distribuição de tensões σ_x para a tensão média aplicada igual a 50% superior ao valor crítico (fator de força igual a 1,5). Observa-se que os resultados obtidos traduzem o Conceito de Largura Efetiva, ou seja, em fase pós-critica, as tensões normais diminuem no centro da chapa e aumentam nas bordas longitudinais, o que significa que a capacidade resistente de chapa se concentra junto a essas bordas. No comportamento pré-crítico as tensões normais são praticamente uniformes, conforme mostra a Figura 6.22, que representa a distribuição de tensões σ_x para a tensão média aplicada igual a 50% do valor crítico (fator de força igual a 1,5).

Tabela 6.9: Relação *z/t* em função do carregamento da chapa.

FF	Esquema 4x4	Esquema 8x8
0,10	0,11	0,11
0,20	0,13	0,13
0,30	0,15	0,15
0,40	0,17	0,17
0,50	0,21	0,21
0,60	0,26	0,26
0,70	0,34	0,34
0,80	0,47	0,47
0,90	0,65	0,65
1,00	0,85	0,85
1,10	1,04	1,04
1,20	1,22	1,22
1,30	1,39	1,39
1,40	1,55	1,55
1,50	1,70	1,70
1,60	1,85	1,85
1,70	1,99	1,99
1,80	2,12	2,12
1,90	2,25	2,25
2,00	2,38	2,38

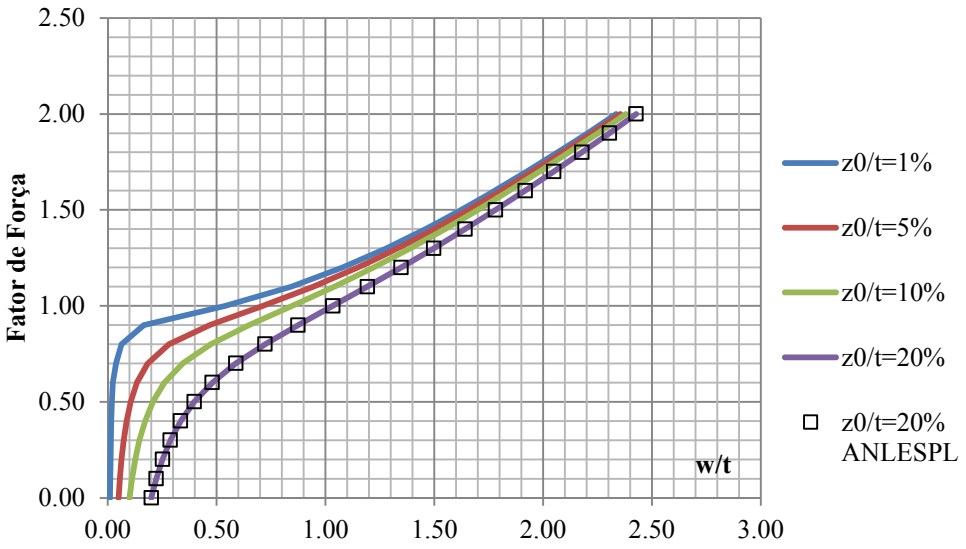

Figura 6.20: Trajetórias de equilíbrio de chapas quadradas com imperfeição geométrica inicial

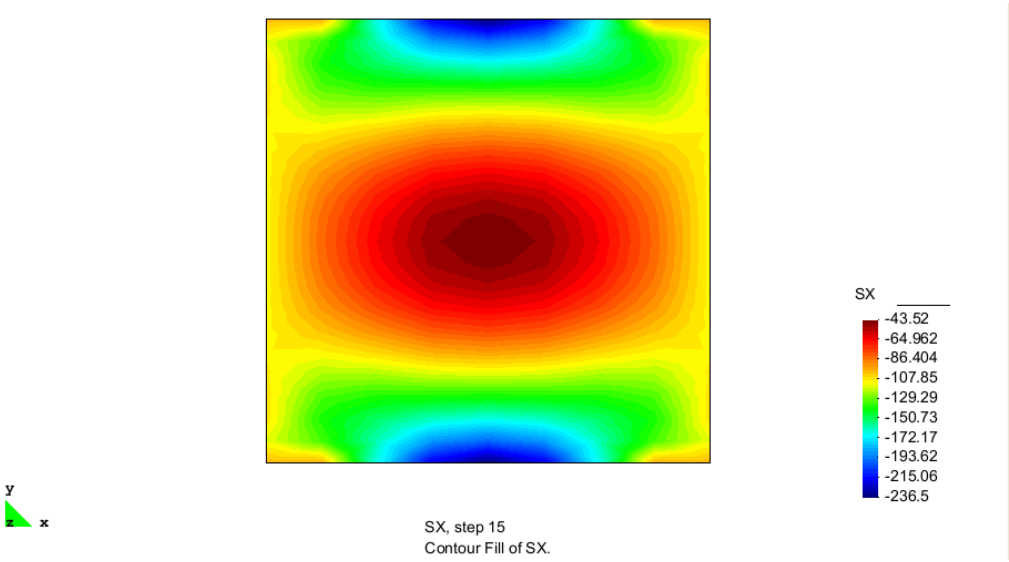

Figura 6.21: Distribuição de tensões de membrana σ_x na fase pós-crítica (MPa) – obtido com o programa *INSTAB*.

A partir das distribuições de tensões de membrana podem-se obter as tensões de Von Mises por meio da expressão (6.156), cuja distribuição está ilustrada na Figura 6.23 para a tensão media aplicada igual a 50% superior ao valor critico (fator de força igual a 1,5),

$$\sigma_{VM} = \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2\right)^{0,5}. \tag{6.156}$$

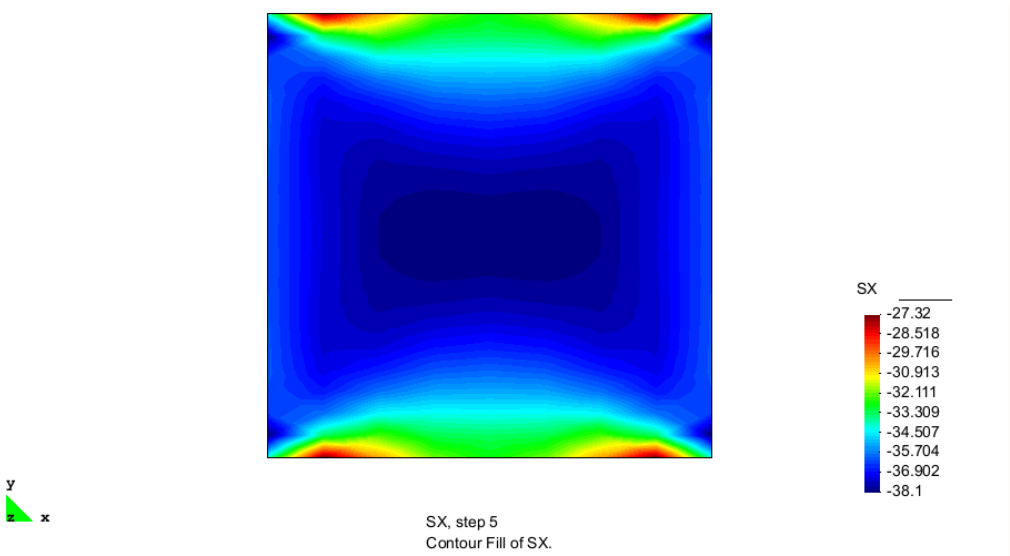

Figura 6.22: Distribuição de tensões de membrana σ_x na fase pré-crítica (MPa) – obtido com o programa *INSTAB*.

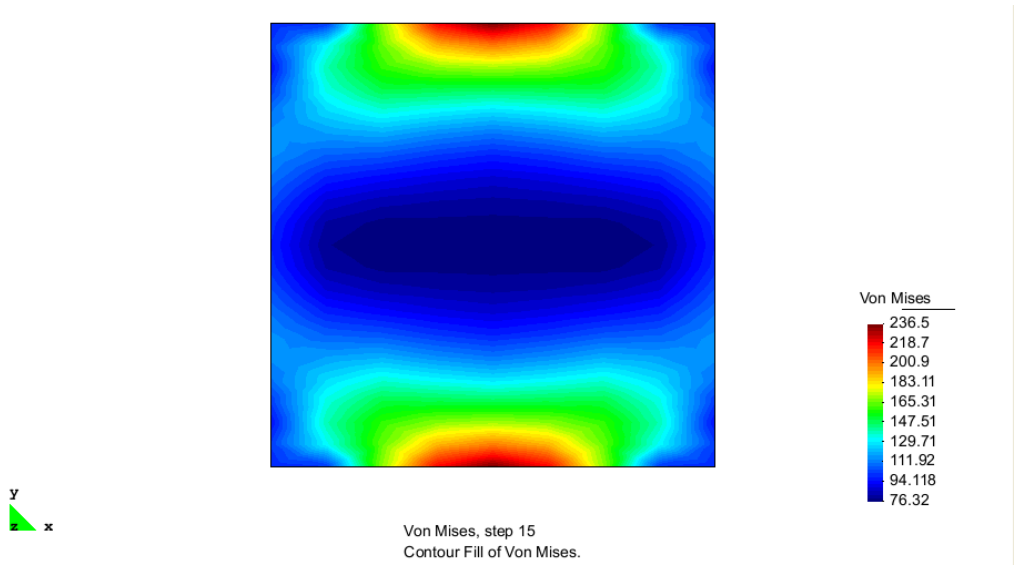

Figura 6.23: Distribuição de tensões de Von Mises para FF=1,5 (MPa) – obtido com o programa *INSTAB*.

A partir da distribuição de Von Mises, observa-se que o inicio da plastificação ocorrerá no meio do vão e nas bordas *y=0* e *y=100.*

Devido ao fato de que o elemento *Shell 181* do programa *ANSYS* ser formulado com base na teoria de Reissener-Mindlin, a qual leva em conta as deformações por cisalhamento, opta-se em uma placa mais fina para realizar a comparação entre os programas *INSTAB* e *ANSYS*. Deste modo, efetua-se a análise não linear de estabilidade de uma chapa de aço quadrada simplesmente apoiada (*a=b=100 mm, t= 0,1 mm, E=200 GPa,* e ν*=0,3*) submetida à compressão uniforme.

Com uso do programa *ANSYS*, observa-se que discretizando a chapa em elementos quadrados de 1,25 mm de lado, obtém-se a tensão crítica igual a 0,72314 MPa. Para uma malha mais refinada, com elementos quadrados de 0,625 mm de lado, o valor da tensão crítica é igual a 0,72300 MPa. Por meio do programa *INSTAB*, discretizando a chapa em 20 faixas finitas de mesma largura e com 11 nós por linha nodal, a tensão crítica obtida é igual a 0,72305 MPa, que corresponde ao valor exato da tensão crítica obtido por Timoshenko e Krieger, 1959.

Para a análise não linear de estabilidade foi adotada uma imperfeição geométrica inicial, na forma do modo de instabilidade, com amplitudes igual a 10% da espessura. A variação do deslocamento vertical do nó central da chapa em função da força aplicada obtida com a ajuda dos programas *INSTAB* e *ANSYS* está ilustrada na Figura 6.24. Observa-se que, os deslocamentos obtidos por meio do *MFFS* são um pouco maior aos obtidos pelo *MEF*. Para níveis de força superior a 10% da força crítica, os deslocamentos obtidos pelo *INSTAB* são ligeiramente menores quando comparados aos

deslocamentos obtidos pelo *ANSYS* considerando-se o material de comportamento elástico.

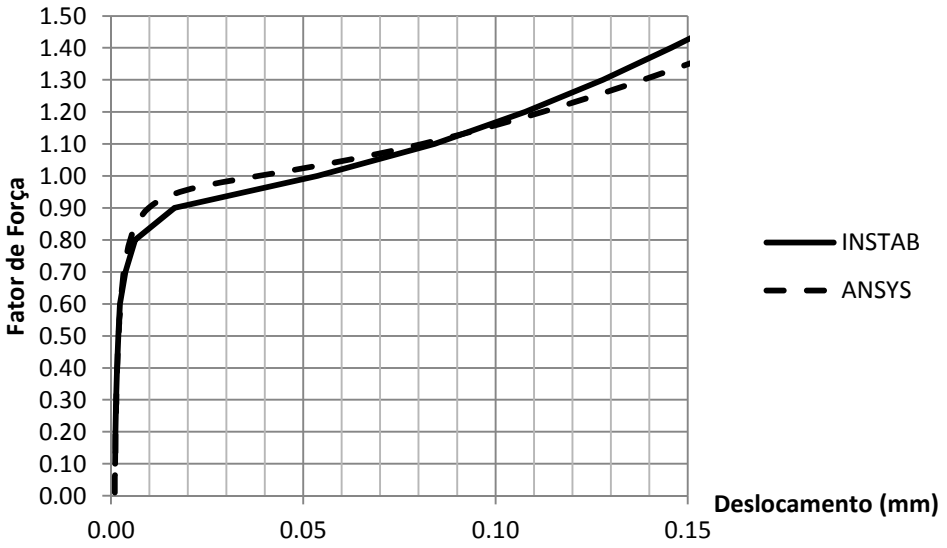

Figura 6.24: Trajetórias de equilíbrio das chapas – comparação entre *MFFS* e *MEF*.

6.8.2.3 Pilar Metálico – Instabilidade Local de Chapa

Efetua-se, agora, a análise não linear de estabilidade de pilares de aço formado a frio com seção *Ue 118,7x88,7x15x1,08* (E=200 GPa, e ν=0,3) submetido à compressão centrada.

Essa seção foi inicialmente estudada por Kwon (1992) e posteriormente por Prola (2001). Inicialmente faz-se um estudo de convergência de malha, ou seja, variação do número de nós por linha nodal e de faixas. Considera-se que o comprimento do perfil seja igual a 109 mm, cujo modo de instabilidade é o Modo Local de Chapa (*MLC*) com um semicomprimento de onda. Admite-se uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo crítico e com amplitude igual a 10% da espessura do perfil. A força crítica de bifurcação obtida pela análise linear de estabilidade é igual a 26,82 kN.

Admite-se inicialmente que a seção transversal seja discretizada em 20 faixas finitas (3 faixas em cada enrijecedor, 4 faixas em cada mesa e 6 faixas na alma). A relação entre o deslocamento de flexão no meio da alma da seção do meio do vão e a espessura (*y/t*) obtidos pelos programas *INSTAB* e *ANLESPL*, correspondente a uma força média aplicada 50% superior à respectiva força de bifurcação crítica, estão apresentados na Tabela 6.10. Mostra-se também a influência da discretização longitudinal do perfil (número de nós por linha nodal).

Tabela 6.10: Relação *y/t* para FF=1,5

Programa	Número de Nós por Linha Nodal		
	9	11	13
INSTAB – Esquema 4x4	1,714	1,715	1,715
INSTAB – Esquema 8x8	1,714	1,715	1,715
ANLESPL	1,714	1,715	1,715

Observa-se que os resultados convergem com 11 nós por linha nodal, sendo que os deslocamentos obtidos pelos programas *INSTAB* e *ANLESPL* são iguais. A influência do número de pontos de Gauss utilizados na integração das matrizes não altera os deslocamentos obtidos, sendo que, nos demais exemplos serão utilizados o esquema de 4x4 pontos, pois o tempo de processamento é cerca de 2,5 vezes menor.

Para avaliar a discretização da seção transversal, a discretização longitudinal será fixada em 11 nós por linha nodal. A relação entre o deslocamento de flexão e a espessura (*y/t*) no meio da alma da seção do meio do vão obtidos pelo programa *INSTAB*, correspondente a uma tensão média aplicada 50% superior à respectiva tensão crítica, estão apresentados na Tabela 6.11. Nessa tabela varia-se somente o número de faixa na alma do perfil, sendo que as mesas e os enrijecedores são discretizados em 4 e 3 faixas, respectivamente. Nota-se que com 20 faixas na alma, a diferença relativa é igual a 0,3%, em relação ao deslocamento obtido com 28 faixas.

Tabela 6.11: Relação *y/t* em função da discretização da alma

Número de faixas na alma	*y/t*
6	1,715
10	1,749
20	1,770
24	1,773
26	1,774
28	1,775
30	1,775

Para avaliar a influência da discretização das mesas, a Tabela 6.12 mostra a variação da relação *w/t* em função do número de faixas das mesas, considerando que a alma e os enrijecedores foram discretizados em 28 e 3 faixas, respectivamente.

Tabela 6.12: Variação da relação *y/t* em função da discretização das mesas

Número de faixas na mesa	*y/t*
4	1,775
10	1,837
20	1,849
25	1,851
30	1,852

Com base nos estudos de convergência anteriores, a Tabela 6.13 mostra a variação da relação *w/t* para duas malhas: (i) Malha 1 com 20 faixas finitas (3 faixas em cada enrijecedor, 4 faixas em cada mesa e 6 faixas na alma) e (ii) Malha 2 com 94 faixas finitas (3 faixas em cada enrijecedor, 30 faixas em cada mesa e 28 faixas na alma). Os resultados foram obtidos pelos programas *INSTAB* e *ANLESPL* são praticamente iguais.

Os programas possuem a mesma estratégia de solução do sistema de equações não lineares, mas uma metodologia diferente para o cálculo das matrizes de rigidez. Enquanto que o *INSTAB* utiliza integração numérica, o programa *ANLESPL*, desenvolvido por Prola (2001), utiliza expressões analíticas para o calculo das matrizes lineares e não lineares. Além disso, no cálculo das matrizes geométricas, Prola (2001) utiliza a integração com base nos deslocamentos nodais, enquanto que, no programa *INSTAB*, a integração é feita a partir das tensões nos pontos de Gauss. A integração numérica proporcionou uma redução no tempo de processamento. Para a malha 2, malha mais refinada com 56 faixas finitas e 11 nós por linha nodal, o tempo de processamento total foi de 4020 segundos utilizando o programa *ANLESPL*, e 610 segundos com o programa *INSTAB*. Os tempos de processamento foram medidos em um microcomputador Quad Core E6600 com 2 Gb de memória RAM com o Windows 7.

Pode ser observado que, para níveis de carregamento baixos (FF<0,7), os deslocamentos obtidos por meio da malha 1 e 2 são praticamente os mesmos. No entanto, na fase pós-crítica, a malha 2 apresenta deslocamentos maiores. A ilustração gráfica dos resultados apresentados na Tabela 6.12 está mostrada na Figura 6.25, que representa a trajetória de equilíbrio do pilar submetido à compressão uniforme cujo modo de instabilidade é o *MLC*, Pode ser notado que o andamento da trajetória de equilíbrio é semelhante ao de uma chapa comprimida simplesmente apoiada (ver Figura 6.20), o que significa que o pilar possui uma resistência pós-crítica significativa.

Tabela 6.13: Relação *y/t* em função do fator de força para o *MLC*.

FF	INSTAB		ANLESPL	
	Malha 1	Malha 2	Malha 1	Malha 2
0,1	0,1114	0,1114	0,1114	0,1114
0,2	0,1258	0,1257	0,1258	0,1257
0,3	0,1447	0,1445	0,1447	0,1445
0,4	0,1703	0,1700	0,1703	0,1700
0,5	0,2066	0,2063	0,2066	0,2063
0,6	0,2610	0,2608	0,2610	0,2608
0,7	0,3464	0,3473	0,3464	0,3473
0,8	0,4789	0,4843	0,4789	0,4843
0,9	0,6573	0,6738	0,6573	0,6738
1,0	0,8540	0,8871	0,8547	0,8871
1,1	1,0491	1,1000	1,0491	1,1000
1,2	1,2324	1,3028	1,2324	1,3028
1,3	1,4046	1,4963	1,4037	1,4954
1,4	1,5639	1,6787	1,5639	1,6787
1,5	1,7139	1,8519	1,7139	1,8519
1,6	1,8556	2,0176	1,8556	2,0176
1,7	1,9889	2,1778	1,9889	2,1778
1,8	2,1167	2,3315	2,1167	2,3315
1,9	2,2380	2,4815	2,2380	2,4815
2,0	2,3546	2,6269	2,3546	2,6269

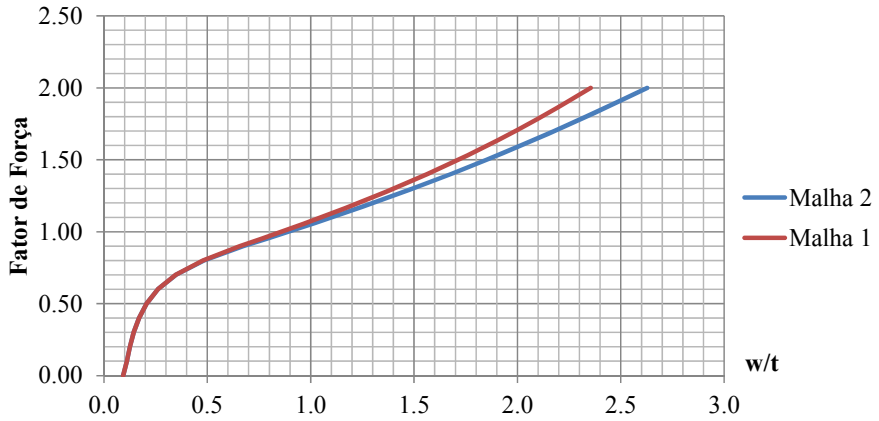

Figura 6.25: Trajetória de equilíbrio do pilar (*MLC*).

Com o objetivo de comparar a trajetória de equilíbrio obtida pelos programas *INSTAB* e *ANSYS*, a Figura 6.26 ilustra a variação do deslocamento no meio da alma da seção no meio do vão em função da força de compressão aplicada. No *ANSYS*, o modelo foi discretizado em elementos quadrados de 1,25 mm de lado.

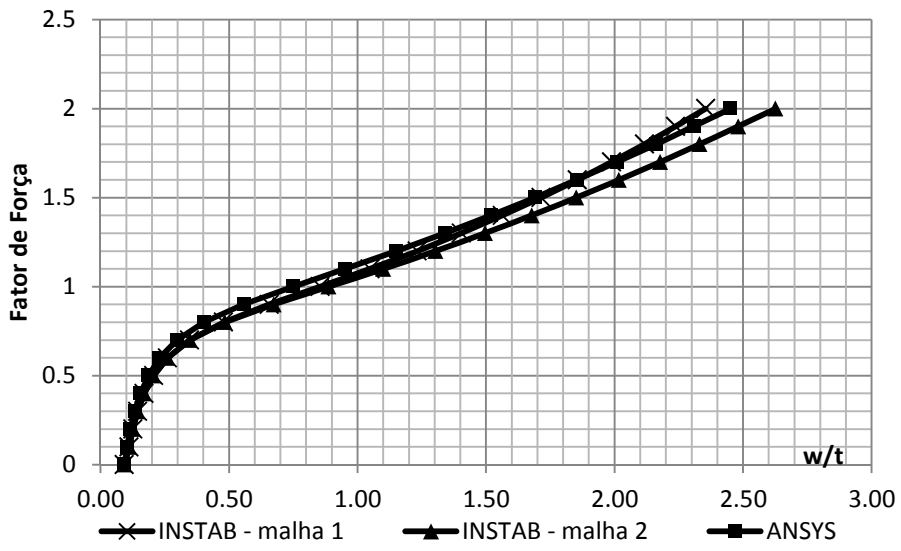

Figura 6.26: Trajetória de equilíbrio obtida por meio do *INSTAB* e do *ANSYS* (*MLC*)

Observa-se que para baixos níveis de carregamento, os deslocamentos máximos do perfil obtidos pelo *MFFS* e *MEF* são praticamente iguais. Para níveis elevados de carregamento, a malha 2 do modelo de faixas finitas splines é um pouco mais flexível quando comparado ao modelo de casca obtido pelo programa *ANSYS* utilizando material elástico.

A distribuição de tensões de von Mises obtida pelo programa *INSTAB*, para a força media aplicada igual a 50% superior ao valor critico (fator de força igual a 1,5), está representada na Figura 6.27. A observação dessa figura mostra que: (i) As maiores e menores tensões normais de compressão ocorrem na junção mesa-alma e no meio da alma, respectivamente, ou seja, os valores extremos ocorrem na chapa mais esbelta e, portanto, aquela que precipita e condiciona o comportamento pós-critico de toda a seção, (ii) as tensões são praticamente constantes nos enrijecedores, sendo ligeiramente maiores na borda livre dos mesmos, (iii) as tensões nas mesas são maiores nos cantos, e (iv) a rigidez de flexão da junção mesa-alma é superior ao do canto mesa-enrijecedor.

Com o objetivo de validar o program *INSTAB*, a Figura 6.28 mostra a distribuição de tensões de von Mises obtida pelo programa *ANSYS* para o mesmo nível de força. O nível de tensões obtido pelo *ANSYS* é um pouco inferior às tensões obtidas pelo *INSTAB*. Isto pode ser explicado pelo fato dos deslocamentos obtidos pelo *ANSYS*, para o nível de força FF=1,5, serem um pouco menores quando comparados aos deslocamentos obtidos pelo programa *INSTAB* (ver Figura 6.26).

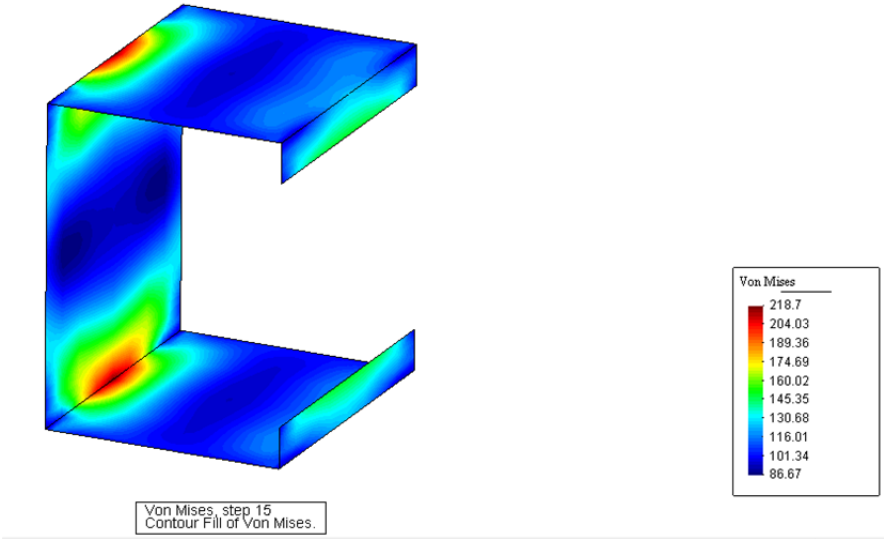

Figura 6.27: Distribuição de tensões de von Mises na fase pós-critica (MPa) obtida pelo programa *INSTAB*

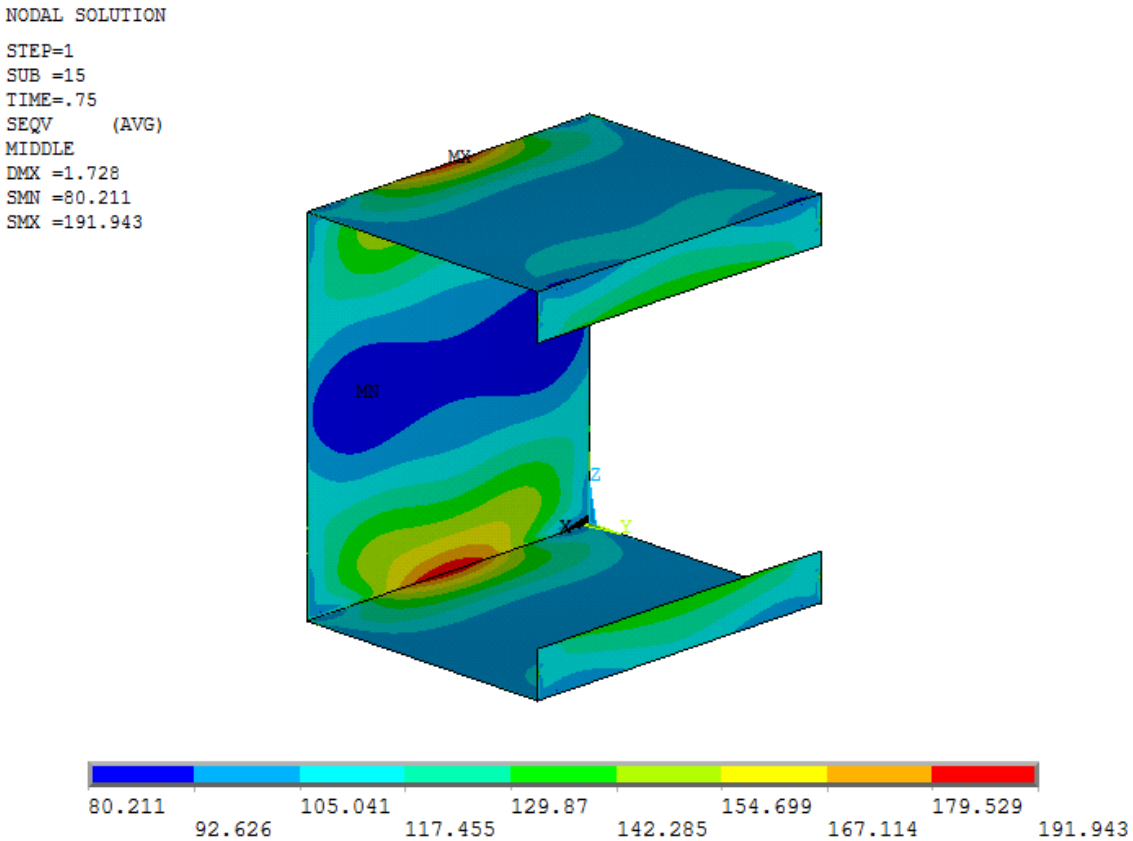

Figura 6.28: Distribuição de tensões de von Mises na fase pós-critica (MPa), obtida pelo programa *ANSYS*

Na fase pré-critica as tensões de von Mises, obtida pelo programa *INSTAB*, são praticamente constante em todo o perfil, sendo um pouco mais elevadas nas regiões de junção mesa-alma e mesa-enrijecedor, conforme mostra a Figura 6.29, onde as tensões

foram obtidas para a força media aplicada igual a 20% do valor critico (FF=0,2). Como o programa *INSTAB* fornece deslocamentos um pouco maiores, as tensões de von Mises obtidas pelo programa *ANSYS* são um pouco inferiores às tensões obtidas pelo programa *INSTAB*, conforme pode ser visto na Figura 6.30.

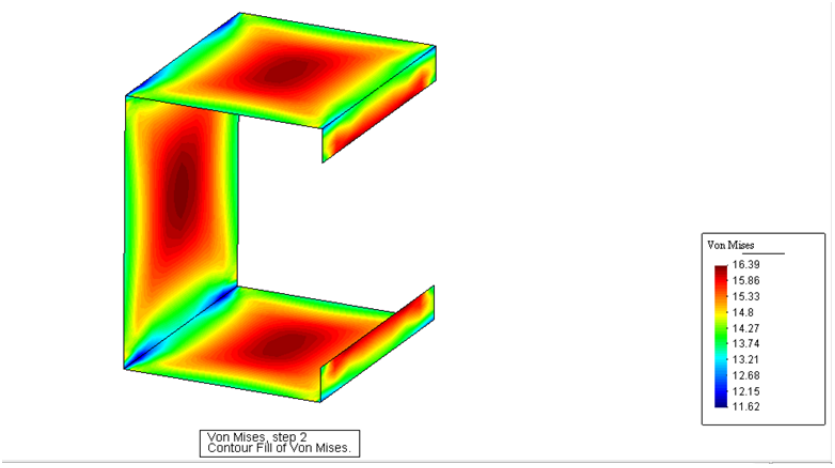

Figura 6.29: Distribuição de tensões de von Mises na fase pré-critica (MPa), obtida pelo programa *INSTAB.*

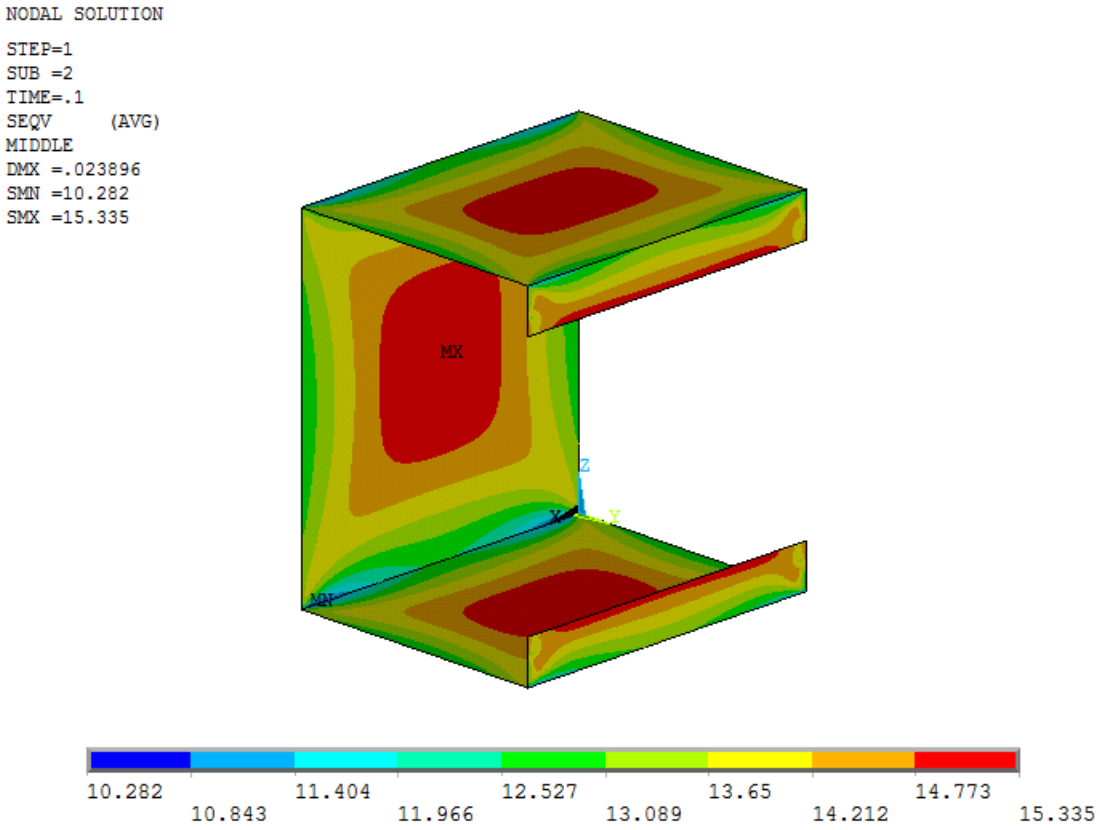

Figura 6.30: Distribuição de tensões de von Mises na fase pré-critica (MPa), obtida pelo programa *ANSYS.*

6.8.2.4 Pilar Metálico – Modo Distorcional

Efetua-se, agora, a análise não linear de estabilidade do pilar com seção *Ue 50x25x10x1,75* (E=200 GPa, e ν=0,3) simplesmente apoiado, com comprimento igual a 150 mm, submetido à compressão centrada, cujo modo de instabilidade é o Modo Distorcional (*MD*).

Conforme discutido no capitulo 3, os perfis que se instabilizam no *MD* apresentam uma assimetria nos deslocamentos longitudinais devido aos efeitos de cisalhamento. Esse fenômeno provoca comportamentos pós-críticos distintos quando a seção transversal se abre ou se fecha, conforme mostra a Figura 4.18.

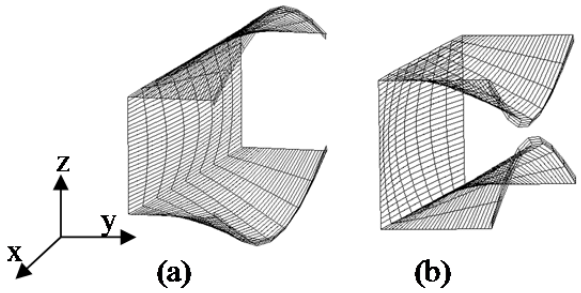

Figura 6.31: Empenamento da seção causada pela instabilidade distorcional: (a) seção que abre, (b) seção que fecha. Ilustrações obtidas pelo *INSTAB*

O pilar foi discretizado transversalmente em 26 faixas finitas (2 faixas em cada enrijecedor, 6 faixas em cada mesa e 10 faixas na alma) e em 11 nós por linha nodal na direção longitudinal. No programa *ANSYS*, o pilar foi discretizado em elementos de casca quadrados de 1,25 mm de lado e modelado com material elástico. Admite-se uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo distorcional e com amplitude igual a L/1000, onde L é o comprimento do perfil.

Para a seção que se abre (ver Figura 4.18a), os deslocamentos *z*, do ponto localizado no canto mesa-enrijecedor da seção do meio do vão em função do fator de força (relação entre a força aplicada e a força crítica fornecida pela análise linear de estabilidade) obtidos pelos programas *INSTAB* e *ANSYS* estão ilustrados na Figura 6.32. Observa-se que os deslocamentos obtidos pelos programas *INSTAB* e *ANSYS* são semelhantes.

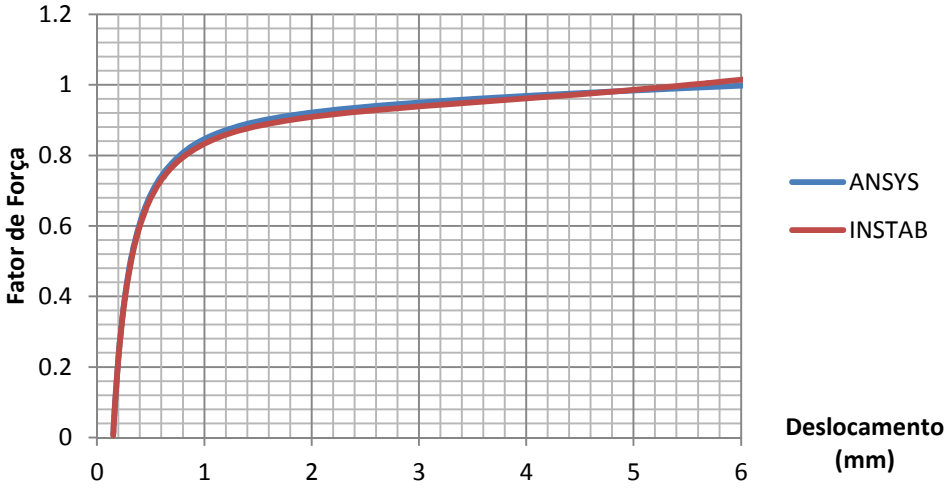

Figura 6.32: Trajetória de equilíbrio para a seção que abre

Alterando o sentido da imperfeição geométrica inicial pode-se avaliar a trajetória de equilíbrio para a seção que se fecha (ver Figura 4.18b). A Figura 6.33 mostra a variação do deslocamento *z* do canto mesa-enrijecedor com o nível de força aplicada. Novamente verifica-se que os deslocamentos obtidos pelos programas *INSTAB* e *ANSYS* são muito próximos.

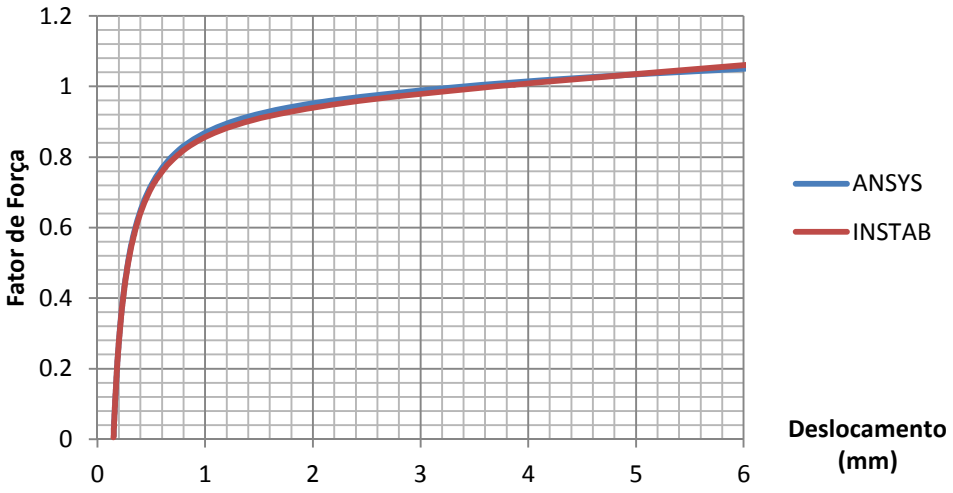

Figura 6.33: Trajetória de equilíbrio para a seção que fecha

Em relação à distribuição de tensões normais para a seção que abre, ilustrada na Figura 6.34 para fator de carga igual a 1,30, nota-se que, no meio do vão, as maiores

tensões de compressão ocorrem nas extremidades livres dos enrijecedores. Observa-se uma leve tração na junção mesa-enrijecedor.

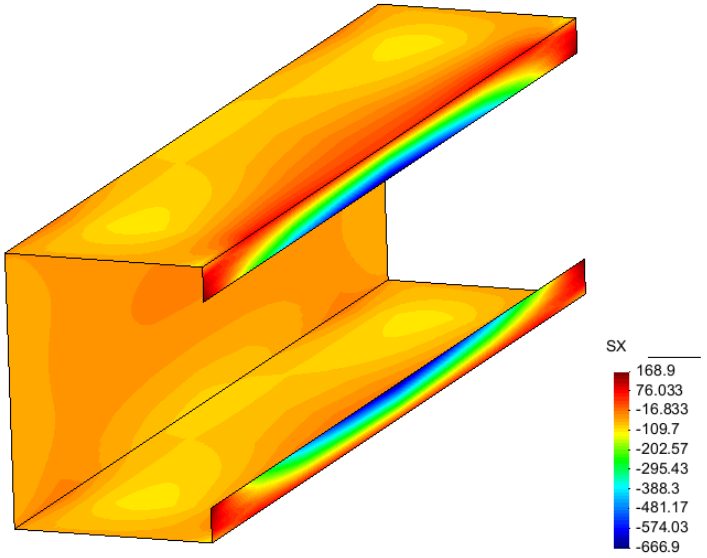

Figura 6.34: Distribuição de tensões normais para a seção que abre (MPa), obtida pelo programa *INSTAB*

Para a seção que se fecha, a Figura 6.35 mostra a distribuição de tensões normais para o fator de carga igual a 1,30. Observa-se que as maiores tensões de compressão ocorrem na junção mesa-enrijecedor. Além disso, as extremidades livres dos enrijecedores apresentam tensões de tração.

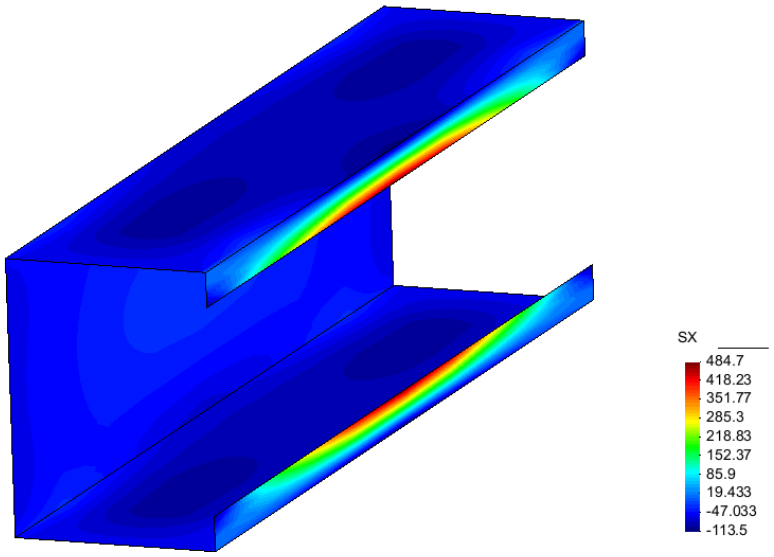

Figura 6.35: Distribuição de tensões normais para a seção que fecha (MPa), obtida pelo programa *INSTAB*

Ressalta-se que as distribuições de tensões normais dos pilares que se instabilizam no *MLC* e no *MD* são diferentes, sendo que o conceito de largura efetiva não é aplicável nos pilares que se instabilizam no *MD*.

6.9. Contribuição à ABNT NBR 14762:2010

A norma brasileira de dimensionamento de estruturas de aço constituídas de perfis formados a frio (ABNT NBR 14762:2010) recomenda que, para as seções transversais sujeitas a instabilidade distorcional, deve ser calculada a força ou momento elástico devido a este fenômeno. Segundo a norma, a força ou o momento de flambagem elástica deve ser calculado a partir da teoria de estabilidade elástica, porém a norma não fornece nenhuma formulação para a determinação destes valores. Torna-se necessário ao engenheiro recorrer a programas computacionais, como por exemplo, o *CUFSM* (Schafer e Ádány, 2006) e *GBTUL* (Bebiano *et al*, 2008) que efetuam este cálculo.

O programa *INSTAB* permite a construção de gráficos que mostram a variação do coeficiente de instabilidade com o comprimento do perfil. Esses gráficos (ver Figura 6.16) identificam o coeficiente de instabilidade associados aos modos locais de chapa ou distocional. O modo de instabilidade local do perfil que governa o projeto é o modo de instabilidade associado ao menor valor entre os coeficientes obtido por meio desses gráficos.

Nas tabelas a seguir são apresentados os comprimentos críticos (comprimento do perfil associado ao menor valor entre os coeficientes de instabilidade), os respectivos coeficientes de instabilidade (k) e a força de flambagem elástica (N) decorrente do modo crítico, seja local ou distorcional, para os perfis constituidos em seções *Ue* padronizadas pela ABNT NBR 6335:2003. As seções foram discretizadas em 30 faixas finitas (8 na alma e nas mesas e 3 nos enrijecedores) e 11 nós por linha nodal. Os perfis foram considerados biapoiados e submetidos à compressão. Nas tabelas 6.14 a 6.21 as dimensões estão em mm.

A força de flambagem elástica correspondente ao modo de instabilidade crítico, devida à instabilidade local ou distorcional, (*N*), é obtida por meio da equação (6.157),

$$N = \frac{k\pi^2 EA}{12\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{b_w}{t}\right)^2}, \tag{6.157}$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, A, t e b_w são a área, espessura e a largura da alma do perfil, respectivamente.

Tabela 6.14: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 300

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
100	25	4,75	238	5,54	MLC	655,9
100	25	4,25	236	5,57	MLC	472,3
100	25	3,75	234	5,59	MLC	325,6
100	25	3,35	232	5,61	MLC	233,0
100	25	3,00	231	5,62	MLC	167,6
100	25	2,65	230	5,63	MLC	115,7
85	25	4,75	240	5,58	MLC	624,6
85	25	4,25	236	5,62	MLC	450,6
85	25	3,75	233	5,65	MLC	311,2
85	25	3,35	231	5,67	MLC	222,6
85	25	3,00	229	5,69	MLC	160,5
85	25	2,65	228	5,70	MLC	110,8
85	25	2,25	226	5,72	MLC	68,0
85	25	2,00	225	5,73	MLC	47,9

Tabela 6.15: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 250

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
100	25	4,75	199	5,47	MLC	847,7
100	25	4,25	198	5,49	MLC	609,4
100	25	3,75	197	5,51	MLC	420,2
100	25	3,35	196	5,52	MLC	300,1
100	25	3,00	195	5,53	MLC	215,9
100	25	2,65	194	5,54	MLC	149,1
85	25	4,75	199	5,53	MLC	805,6
85	25	4,25	197	5,56	MLC	580,2
85	25	3,75	195	5,58	MLC	400,0
85	25	3,35	194	5,60	MLC	286,2
85	25	3,00	193	5,61	MLC	205,9
85	25	2,65	193	5,62	MLC	142,2
85	25	2,25	191	5,63	MLC	87,2
85	25	2,00	190	5,64	MLC	61,3

Tabela 6.16: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 200

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
100	25	4,75	659	5,29	MD	1152,9
100	25	4,25	162	5,38	MLC	839,9
100	25	3,75	161	5,39	MLC	578,0
100	25	3,35	160	5,40	MLC	412,8
100	25	3,00	159	5,41	MLC	297,0
100	25	2,65	159	5,42	MLC	205,1
75	25	4,75	160	5,48	MLC	1061,6
75	25	4,25	159	5,51	MLC	764,6
75	25	3,75	157	5,53	MLC	527,1
75	25	3,35	157	5,55	MLC	377,2
75	25	3,00	156	5,56	MLC	271,4
75	25	2,65	155	5,57	MLC	187,4
75	20	2,25	155	5,57	MLC	111,8
75	20	2,00	155	5,58	MLC	78,7

Tabela 6.17: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 150

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
60	20	4,75	390	5,05	MD	1347,9
60	20	4,25	122	5,42	MLC	1036,2
60	20	3,75	120	5,46	MLC	717,1
60	20	3,35	119	5,48	MLC	513,1
60	20	3,00	119	5,50	MLC	369,8
60	20	2,65	118	5,52	MLC	255,8
60	20	2,25	117	5,53	MLC	156,9
60	20	2,00	117	5,54	MLC	110,4

Tabela 6.18: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 125

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
50	20	3,75	101	5,44	MLC	879,5
50	17	3,35	101	5,44	MLC	612,8
50	17	3,00	100	5,47	MLC	442,5
50	17	2,65	99	5,49	MLC	306,1
50	17	2,25	98	5,52	MLC	188,4
50	17	2,00	98	5,53	MLC	132,6

Tabela 6.19: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 100

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
50	17	3,35	345	4,67	MD	742,6
50	17	3,00	364	5,08	MD	580,2
50	17	2,65	81	5,37	MLC	422,7
50	17	2,25	80	5,39	MLC	259,7
50	17	2,00	80	5,40	MLC	182,7
40	17	3,35	308	5,07	MD	737,3
40	17	3,00	80	5,45	MLC	569,2
40	17	2,65	79	5,48	MLC	394,5
40	17	2,25	79	5,50	MLC	242,3
40	17	2,00	79	5,52	MLC	170,8

Tabela 6.20: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 75

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
40	15	3,00	277	4,08	MD	654,9
40	15	2,65	294	4,50	MD	497,9
40	15	2,25	318	5,13	MD	347,4
40	15	2,00	61	5,35	MLC	254,4

Tabela 6.21: Força de flambagem elástica para perfis com b_w = 50

b_f	D	t	Comp.	k	Modo Crítico	N (kN)
25	10	3,00	149	3,15	MD	737,9
25	10	2,65	157	3,44	MD	555,4
25	10	2,25	169	3,88	MD	383,5
25	10	2,00	178	4,24	MD	294,3

O programa *INSTAB* permite, também, a determinação dos coeficientes de bifurcação de elementos submetidos à flexão. Nas tabelas a seguir são apresentados os comprimentos críticos, os respectivos coeficientes de instabilidade e o momento fletor de flambagem elástica associados à instabilidade local ou distorcional para os perfis constituidos em seções *Ue* padronizadas pela ABNT NBR 6335:2003. Os perfis foram considerados biapoiados e submetidos à flexão pura. Nas tabelas 6.22 a 6.29 as dimensões são em mm.

O momento fletor de flambagem elástica correspondente ao modo de instabilidade crítico, devida à instabilidade local ou distorcional, (M), é obtido por meio da equação (6.158),

$$M = \frac{k\pi^2 E W_x}{12\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{b_w}{t}\right)^2}, \tag{6.158}$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, W_x, é o módulo resistente elástico em relação ao eixo x. t e b_w são a espessura e a largura da alma do perfil, respectivamente.

Tabela 6.22: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 300

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
100	25	4,75	649	14,76	MD	40,8
100	25	4,25	686	16,07	MD	31,8
100	25	3,75	730	17,73	MD	24,1
100	25	3,35	772	19,41	MD	18,8
100	25	3,00	817	21,26	MD	14,8
100	25	2,65	870	23,59	MD	11,3
85	25	4,75	584	17,95	MD	45,2
85	25	4,25	617	19,50	MD	35,2
85	25	3,75	656	21,46	MD	26,6
85	25	3,35	693	23,46	MD	20,7
85	25	3,00	732	25,64	MD	16,3
85	25	2,65	780	28,41	MD	12,4
85	25	2,25	165	30,56	MLC	8,2
85	25	2,00	165	30,60	MLC	5,8

Tabela 6.23: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 250

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
100	25	4,75	628	11,13	MD	34,9
100	25	4,25	664	12,14	MD	27,3
100	25	3,75	708	13,44	MD	20,8
100	25	3,35	749	14,75	MD	16,2
100	25	3,00	792	16,18	MD	12,8
100	25	2,65	842	18,00	MD	9,8
85	25	4,75	563	13,82	MD	39,4
85	25	4,25	596	15,06	MD	30,7
85	25	3,75	634	16,64	MD	23,3
85	25	3,35	672	18,24	MD	18,2
85	25	3,00	709	19,99	MD	14,3
85	25	2,65	755	22,21	MD	11,0
85	25	2,25	822	25,58	MD	7,7
85	25	2,00	870	28,38	MD	6,0

Tabela 6.24: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 200

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
100	25	4,75	605	7,73	MD	28,6
100	25	4,25	640	8,46	MD	22,4
100	25	3,75	681	9,39	MD	17,1
100	25	3,35	720	10,33	MD	13,4
100	25	3,00	762	11,35	MD	10,6
100	25	2,65	811	12,65	MD	8,1
75	25	4,75	498	11,47	MD	35,4
75	25	4,25	526	12,52	MD	27,7
75	25	3,75	561	13,86	MD	21,1
75	25	3,35	594	15,22	MD	16,5
75	25	3,00	627	16,70	MD	13,0
75	25	2,65	668	18,58	MD	10,0
75	20	2,25	627	18,66	MD	6,0
75	20	2,00	666	20,65	MD	4,7

Tabela 6.25: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 150

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
60	20	4,75	351	8,73	MD	28,2
60	20	4,25	372	9,50	MD	22,0
60	20	3,75	396	10,47	MD	16,7
60	20	3,35	419	11,46	MD	13,0
60	20	3,00	443	12,55	MD	10,2
60	20	2,65	472	13,92	MD	7,8
60	20	2,25	513	16,01	MD	5,5
60	20	2,00	544	17,74	MD	4,3

Tabela 6.26: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 125

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
50	20	3,75	338	9,75	MD	15,8
50	17	3,35	323	10,01	MD	11,4
50	17	3,00	341	10,92	MD	8,9
50	17	2,65	363	12,08	MD	6,8
50	17	2,25	395	13,84	MD	4,8
50	17	2,00	419	15,30	MD	3,7

Tabela 6.27: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 100

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
50	17	3,35	310	6,98	MD	9,3
50	17	3,00	328	7,64	MD	7,3
50	17	2,65	349	8,47	MD	5,6
50	17	2,25	380	9,73	MD	3,9
50	17	2,00	403	10,78	MD	3,1
40	17	3,35	265	9,10	MD	10,6
40	17	3,00	281	9,94	MD	8,3
40	17	2,65	299	11,00	MD	6,3
40	17	2,25	325	12,62	MD	4,5
40	17	2,00	345	13,96	MD	3,5

Tabela 6.28: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 75

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
40	15	3,00	246	5,99	MD	6,1
40	15	2,65	262	6,63	MD	4,6
40	15	2,25	285	7,61	MD	3,3
40	15	2,00	303	8,43	MD	2,5

Tabela 6.29: Momentos fletores de flambagem elástica para perfis com b_w = 50

b_f	D	t	Comp.	k	Modo	M (kNm)
25	10	3,00	128	4,74	MD	4,6
25	10	2,65	136	5,20	MD	3,5
25	10	2,25	148	5,90	MD	2,4
25	10	2,00	157	6,48	MD	1,9

Para as barras fletidas, observa-se que a grande maioria dos perfis padronizados pela ABNT NBR 6335:2003 apresentou instabilidade distorcional. Apenas os perfis *Ue 300x85x25x2,25* e *Ue 300x85x25x2,00* apresentaram o MLC como crítico.

7. ESFORÇOS RESISTENTES DE PERFIS FORMADOS A FRIO EM INCÊNDIO

Os esforços resistentes de elementos estruturais em situação de incêndio podem ser obtidos por meio de ensaios executados em fornos submetidos a um carregamento mecânico e com condições de aquecimento, a qual, geralmente, é fornecida pelo incêndio-padrão.

A resistência ao fogo de um elemento é fornecida em função da temperatura a partir da qual o elemento estrutural apresenta deformações excessivas ou perda de capacidade resistente. Considerando que na prática emprega-se a curva de incêndio-padrão para o dimensionamento de estruturas em situação de incêndio, a qual não apresenta um ponto de temperatura máxima, convenciona-se a adoção de um tempo fictício que fornece, por meio da curva de incêndio-padrão, a temperatura máxima resistida pelo elemento estrutural. Esse tempo fictício é conhecido por tempo de resistência ao fogo (TRF).

Devido ao alto custo de realização de ensaios para determinar o TRF, é comum a utilização de simulações numéricas em estudos do comportamento de elementos estruturais em situação de incêndio.

Neste capítulo faz-se um estudo numérico do comportamento estrutural de perfis formados a frio em situação de incêndio com a utilização dos recursos proporcionados por métodos numéricos consagrados. Inicialmente, estuda-se o efeito da plasticidade na capacidade resistente de perfis formados a frio sujeitos a fenômenos de instabilidade local e distorcional. Em seguida, verifica-se o efeito do gradiente de temperaturas devido ao aquecimento não uniforme da seção transversal.

7.1. Efeito da Plasticidade

O efeito da plasticidade na capacidade resistente de perfis formados a frio é estudado com o auxilio dos programas INSTAB e ANSYS. Para este estudo serão realizadas comparações entre a capacidade portante dos perfis de aço formado a frio obtidos por meio de dois modelos: elastofrágil e elastoplástico. No modelo elastofrágil o material é considerado elástico-linear e a capacidade resistente do perfil é determinada pelo critério de von Mises, ou seja, a capacidade resistente é determinada pela força aplicada no perfil que produz uma tensão de von Mises equivalente igual à resistência ao escoamento do aço. No modelo elastoplástico considera-se a não linearidade do material conforme as recomendações do Eurocode 3 parte 1.2 (2005) e a capacidade

resistente do perfil é a força correspondente ao ponto limite obtido por meio da trajetória de equilíbrio do perfil analisado.

Ressalta-se que o modelo elastofrágil pode ser analisado pelos programas INSTAB e ANSYS. Enquanto que o modelo elastoplástico somente é analisado pelo programa ANSYS.

Para as análises efetuadas pelo modelo elstoplástico, os redutores, devido à temperatura, da resistência ao escoamento ($k_{y,\theta}$), da resistência correspondente ao limite de proporcionalidade ($k_{p,\theta}$) e do modulo de elasticidade ($k_{E,\theta}$) adotados nas análises estão apresentados na Tabela 5.8.

Tabela 7.1: Fatores de redução segundo o Eurocode 3 parte 1.2 (2005)

Temperatura (ºC)	Redutor da resistência ao escoamento $k_{y,\theta} = f_{y,\theta} / f_y$	Redutor da resistência correspondente ao limite de proporcionalidade $k_{p,\theta} = f_{p,\theta} / f_y$	Redutor do modulo de elasticidade $k_{E,\theta} = E_\theta / E$
20	1,00	1,0000	1,0000
100	1,00	1,0000	1,0000
200	1,00	0,8070	0,9000
300	1,00	0,6130	0,8000
400	1,00	0,4200	0,7000
500	0,78	0,3600	0,6000
600	0,47	0,1800	0,3100
700	0,23	0,0750	0,1300
800	0,11	0,0500	0,0900
900	0,06	0,0375	0,0675
1000	0,04	0,0250	0,0450
1100	0,02	0,0125	0,0225
1200	0,0000	0,0000	0,0000

Conforme já discutido no Capítulo 5, o Eurocode 3 parte 1.2 (2005) propõe uma relação tensão-deformação para temperaturas elevadas (ver equações (5.10) a (5.14)) conforme mostra a Figura 7.1.

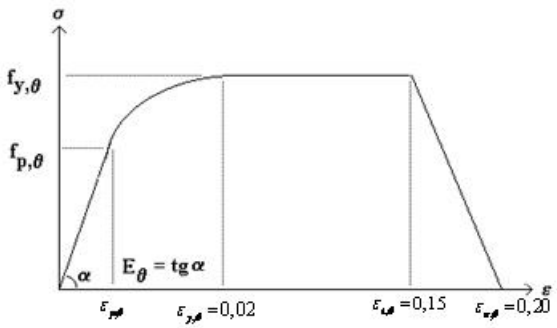

Figura 7.1: Relação tensão-deformação para aços a altas temperaturas.

Devido à consideração de não linearidades geométricas e do material, o programa ANSYS adota o método de solução de Newton Raphson para a solução do sistema de equações não lineares. Para evitar falhas de convergência na solução numérica devido a não linearidade do material considerou-se a deformação específica do aço limitada em $\varepsilon_{t,\theta}$. Esta limitação é justificável, pois, devido aos fenômenos de instabilidade local e de plasticidade, os perfis formados a frio não apresentam deformações lineares específicas muito elevadas. Utilizou-se, também, um pequeno endurecimento do material após o início do escoamento do aço. Assim, a tensão correspondente ao final do patamar de escoamento é dada pela equação (1.1).

$$\sigma\left(\varepsilon_{t,\theta}\right) = f_{y,\theta} + \frac{E_\theta}{1000}\left(\varepsilon_{t,\theta} - \varepsilon_{y,\theta}\right). \tag{1.1}$$

Após um estudo de convergência de malhas, no programa *INSTAB*, os perfis foram discretizados em 26 faixas finitas com 8 nós por linha nodal, sendo 2 nos enrijecedores, 6 nas mesas e 10 na alma. Em relação ao programa *ANSYS*, os perfis foram modelados com elementos quadrados de casca de quatro nós (*Shell 181*) com 1,25 mm de lado.

7.1.1. Modo Local de Chapa

Inicialmente, testa-se a influência da plasticidade na determinação da capacidade resistente de um perfil de seção Ue 100x50x17x1,00, simplesmente apoiado, submetido à compressão uniforme e com comprimento pequeno igual a L=80 mm, a fim de que o modo de instabilidade seja o local de chapa (MLC). Considera-se que o perfil seja constituído de aço ASTM A-570 GR 36 cuja resistência ao escoamento e o módulo de elasticidade à temperatura ambiente sejam iguais a 250 MPa e 200 GPa, respectivamente. Admite-se uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo

critico de instabilidade e com amplitude máxima igual a L/1000, conforme recomendação da ABNT NBR 8800:2008.

A variação do deslocamento máximo do perfil (ponto localizado no meio da alma na seção do meio do vão) com a força aplicada está apresentada na Figura 7.2. Como a espessura do perfil é pequena, considera-se que a seção do perfil esteja submetida a temperaturas uniformes iguais a 20ºC, 200ºC, 400ºC e 600ºC. A Figura 7.2 foi obtida com o programa ANSYS considerando o material elastoplástico (ELP).

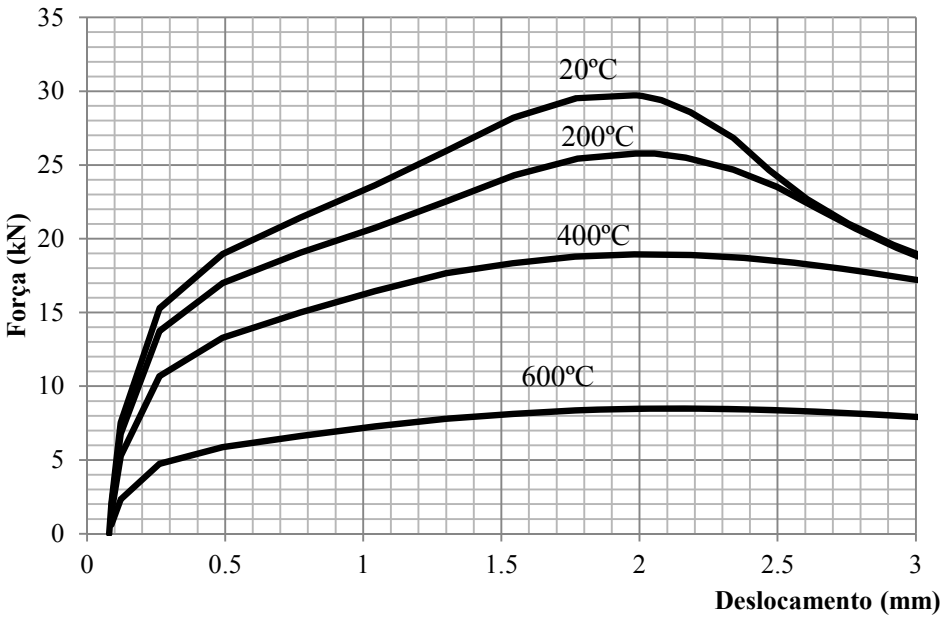

Figura 7.2: Trajetória de equilíbrio para o pilar com seção Ue 100x50x17x1,00.

A influência da plasticidade na determinação da força normal resistente dos perfis de aço formado a frio pode ser avaliada por meio da comparação entre a trajetória de equilíbrio obtida por modelos numéricos que consideram o material elástico-linear e elastoplástico. A Figura 7.3 apresenta três trajetórias de equilíbrio para o pilar com seção *Ue* 100x50x17x1,00 submetida à temperatura ambiente, uma curva obtida por meio do programa INSTAB e as outras duas calculadas pelo programa ANSYS, sendo uma obtida com o material elástico linear e outra com material elastoplástico.

A partir da observação da Figura 7.3 pode-se concluir que: (i) para níveis baixos de carregamento (forças inferiores a 20 kN) as três curvas são praticamente iguais e (ii) as curvas obtidas pelos programas INSTAB e ANSYS com o material elástico-linear são praticamente iguais para qualquer valor de força, sendo que os resultados obtidos pelo ANSYS são ligeiramente mais flexíveis quando comparados ao programa INSTAB. Essa diferença entre os resultados do programa INSTAB e ANSYS com o

modelo elástico-linear deve-se à diferença de teorias de placas utilizadas na formulação dos elementos. Enquanto o INSTAB utiliza a teoria de placas finas (Kirchhoff-Love), o elemento Shell 181, e todos os outros elementos de casca, do programa ANSYS foram formulados com base na teoria de Reissner-Mindlin.

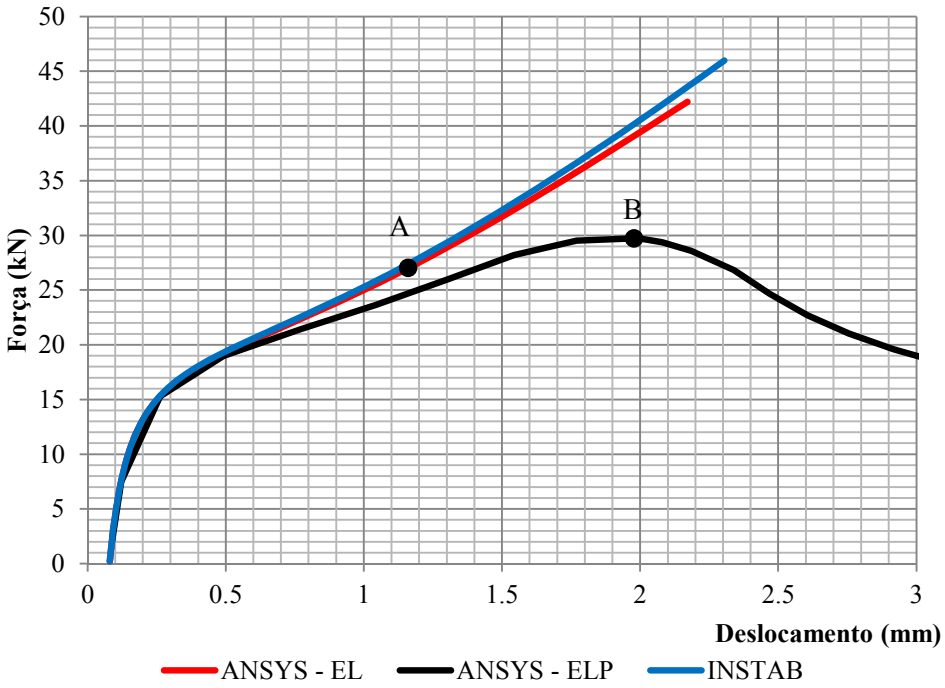

Figura 7.3: Comparação entre trajetórias de equilíbrio para o pilar Ue 100x50x17x1,00 a 20ºC.

Verifica-se que a força correspondente ao aparecimento do ponto limite é igual a 29,72 kN (ponto B), a qual ocasiona uma tensão de von Mises máxima igual à resistência ao escoamento do aço, conforme mostra a Figura 7.4. O modelo elastofrágil fornece uma força resistente de 27,02 kN (ponto A) correspondente a uma tensão de von Mises de 250 MPa. Assim, a estimativa da capacidade resistente por meio do modelo elastofrágil aproxima-se com erro de 9,0% do valor mais rigoroso dado pelo modelo elastoplástico. Verifica-se que para este pilar, essa diferença deve-se à influência da não linearidade geométrica, da plasticidade e das imperfeições geométricas iniciais que propiciam a perda de rigidez do pilar.

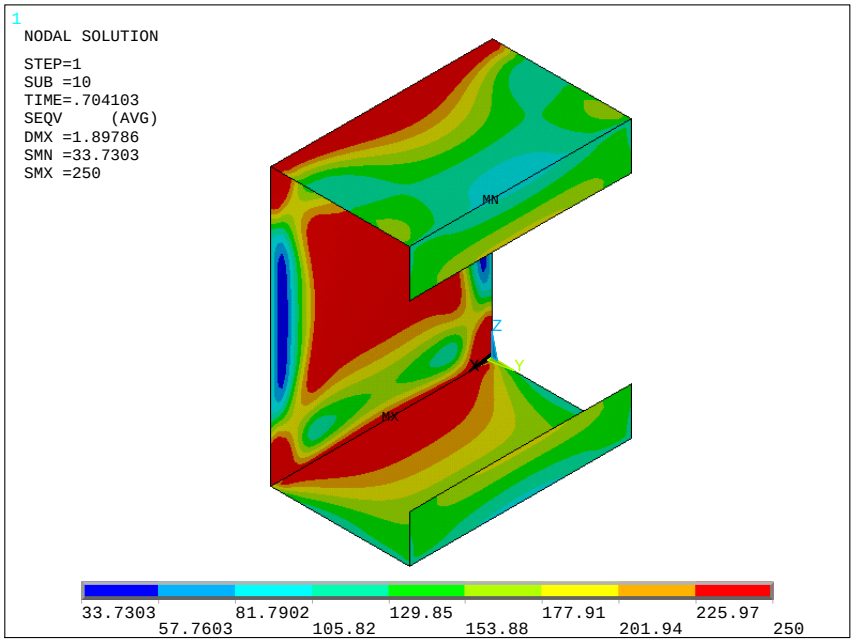

Figura 7.4: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 100x50x17x1,00 a 20ºC

Para temperaturas elevadas, as Figuras 7.5 a 7.7 apresentam a distribuição das tensões de von Mises, obtidas pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar com seção Ue 100x50x17x1,00 submetidos à temperatura uniforme iguais a 200ºC, 400ºC e 600ºC. Observa-se que para o pilar aquecido, neste caso, as tensões de von Mises máximas são inferiores à resistência ao escoamento do aço.

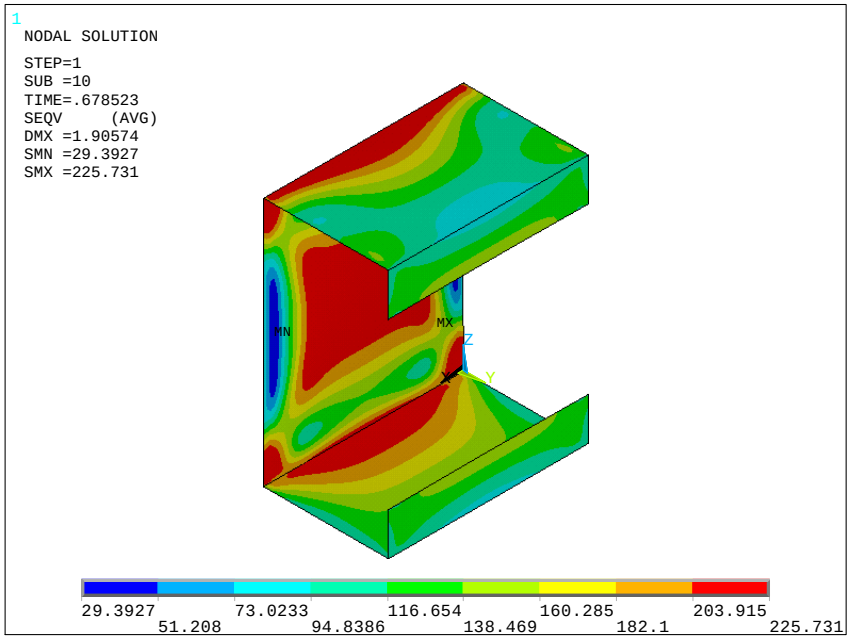

Figura 7.5: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 100x50x17x1,00 a 200ºC

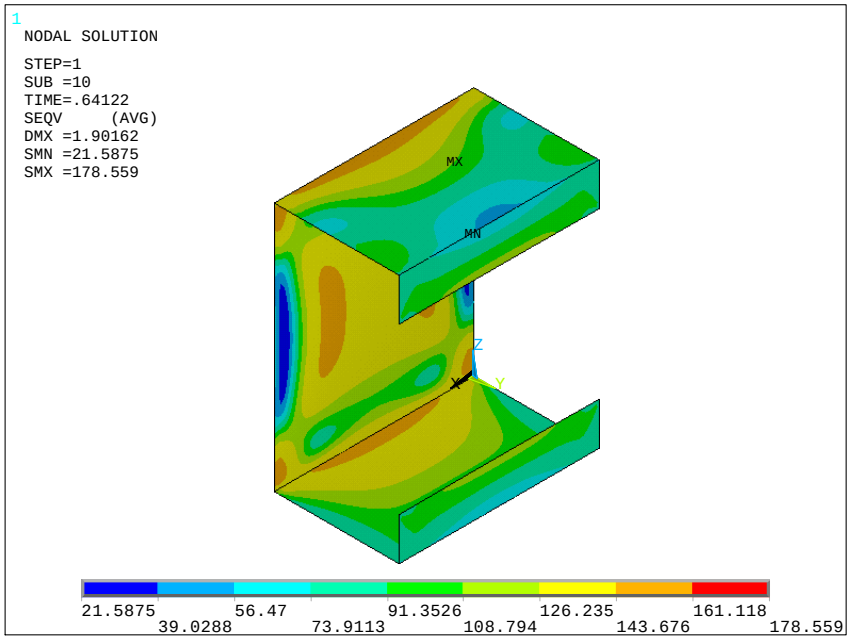

Figura 7.6: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 100x50x17x1,00 a 400ºC

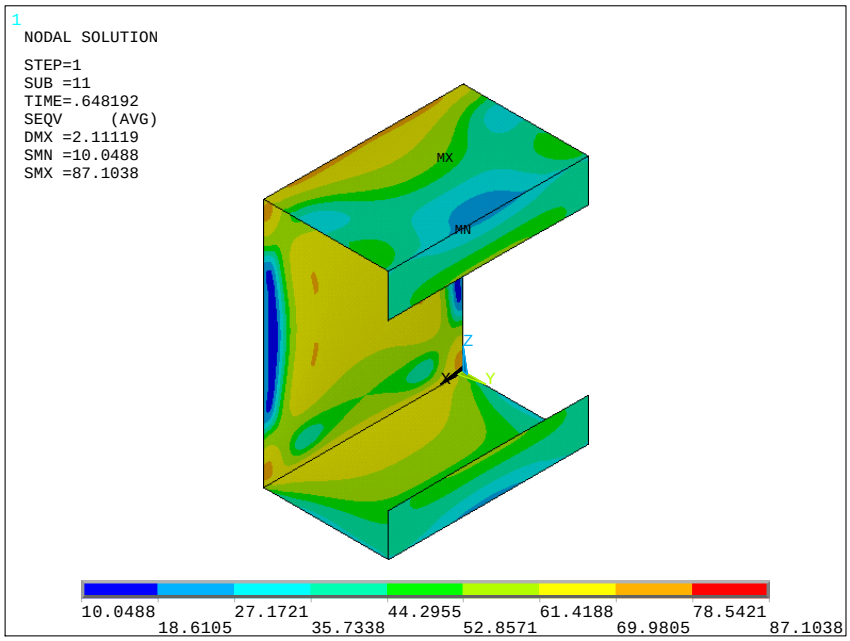

Figura 7.7: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 100x50x17x1,00 a 600ºC

As capacidades resistentes obtidas por meio do modelo elastoplástico (ELP) para as temperaturas de 200, 400 e 600ºC estão apresentadas na Tabela 7.2. Nessa mesma tabela, mostram-se as forças resistentes obtidas utilizando o modelo elastofrágil (ELF).

Tabela 7.2: Capacidade resistente obtidas pelos modelos ELP e ELF para o pilar de seção Ue 100x50x17x1,00.

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN ELF	Diferença
20	29,7	27,0	9,1%
200	25,8	24,3	5,8%
400	19,0	18,9	0,1%
600	8,5	8,4	1,2%

No modelo elastrofrágil, a força normal resistente em temperatura elevada foi calculada a partir da força resistente à temperatura ambiente multiplicada pelo respectivo redutor do módulo de elasticidade. A estimativa da capacidade resistente à temperatura ambiente no modelo elastofrágil foi obtida quando a força aplicada no perfil provoca uma máxima tensão de von Mises próxima à resistência ao escoamento aço à temperatura ambiente.

Para uma melhor avaliação da influência da plasticidade em pilares que apresentem o modo local de chapa como modo crítico de instabilidade, as Tabelas 7.3 e 7.4 apresentam as capacidades resistentes obtidas por meio dos modelos elastoplástico (ELP) e elastofrágil (ELF) para os pilares de comprimento de 80 mm e com seção transversal Ue 100x50x17 com espessuras iguais a 2,25 e 2,65 mm. As temperaturas foram consideradas uniformes na seção transversal e iguais a 20, 200, 400 e 600ºC. Admite-se uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo critico de instabilidade e com amplitude máxima igual a L/1000.

Tabela 7.3: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 100x50x17x2,25

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN ELF	Diferença
20	128,3	115,4	10,1%
200	111,9	103,9	7,2%
400	82,7	80,8	2,3%
600	37,5	35,8	4,5%

Tabela 7.4: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 100x50x17x2,65

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN ELF	Diferença
20	152,7	137,4	10,0%
200	136,6	123,6	9,5%
400	112,5	96,2	14,5%
600	51,6	42,6	17,4%

Observa-se que, para todos os pilares analisados, a estimativa da capacidade resistente obtida pelo modelo elastofrágil é sempre a favor da segurança em relação ao valor mais preciso, o qual leva em consideração o comportamento elastoplástico do aço. Além do efeito da plasticidade, as imperfeições geométricas iniciais influenciam na perda de rigidez dos pilares.

Para o perfil Ue 100x50x17x2,65, às temperaturas de 400 e 600ºC, as tensões de von Mises máximas, obtidas nos pontos limites, foram próximas ao valor das resistências ao escoamento do aço, conforme mostram as Figuras 7.8 e 7.9, por consequência, as forças resistentes calculadas pelo modelo elastofrágil foram mais conservadoras quando comparadas ao resultado obtido pelo ANSYS considerando o modelo elastoplástico.

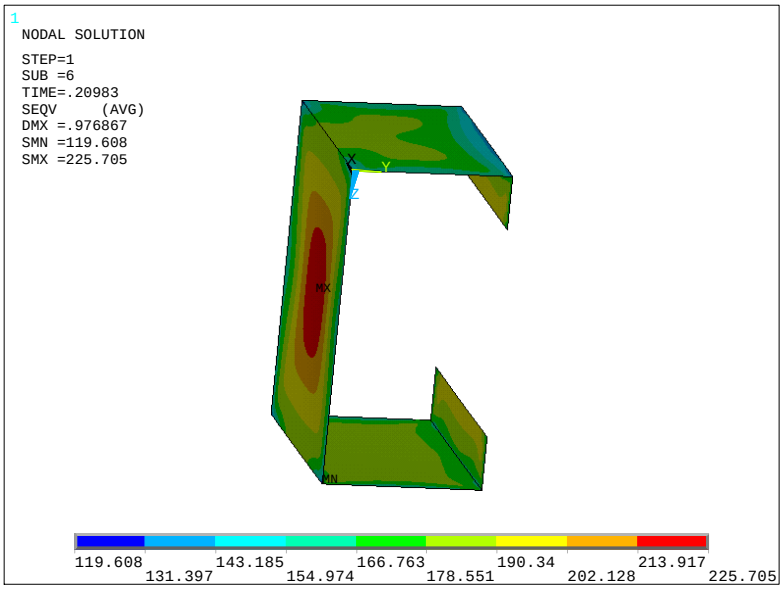

Figura 7.8: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 100x50x17x2,65 a 400ºC

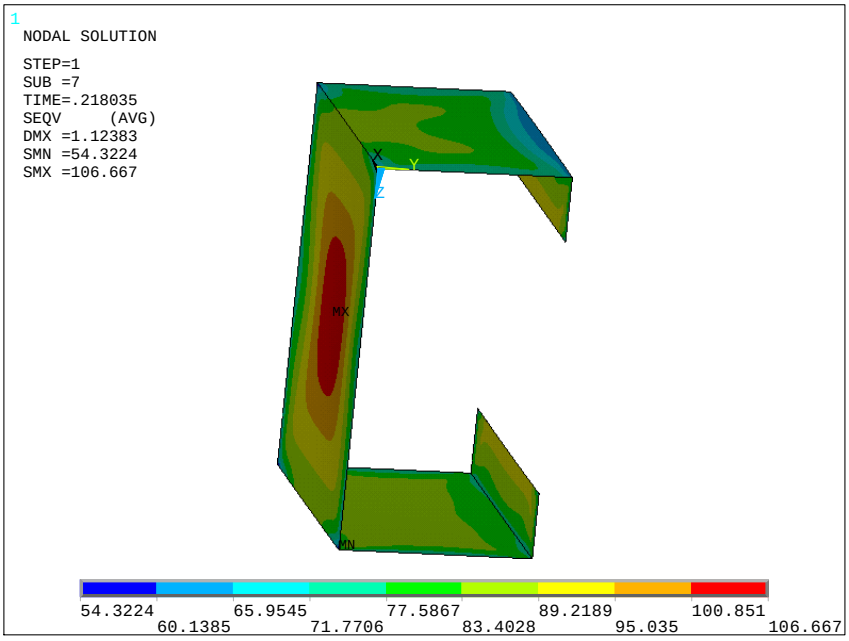

Figura 7.9: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 100x50x17x2,65 a 600ºC

7.1.2. Modo Distorcional

Estuda-se, agora, o efeito da plasticidade de um perfil de seção Ue 50x25x10x1,75, simplesmente apoiado, submetido à compressão uniforme e com comprimento igual a L=150 mm, a fim de que o modo de instabilidade seja o distorcional (MD). Considera-se que o perfil seja constituído de aço ASTM A-570 GR 36. Admite-se uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo de instabilidade distorcional e com amplitude máxima igual a L/1000, conforme recomendação da ABNT NBR 8800:2008.

Por meio do modelo elastoplástico, a Figura 7.10 mostra a variação do deslocamento máximo do pilar (nó localizado no meio do vão e na junção da mesa superior com o enrijecedor) em função da força normal aplicada e da temperatura. A elevação da temperatura na seção transversal de 20ºC para 600ºC provoca uma redução de 73% na capacidade resistente do pilar.

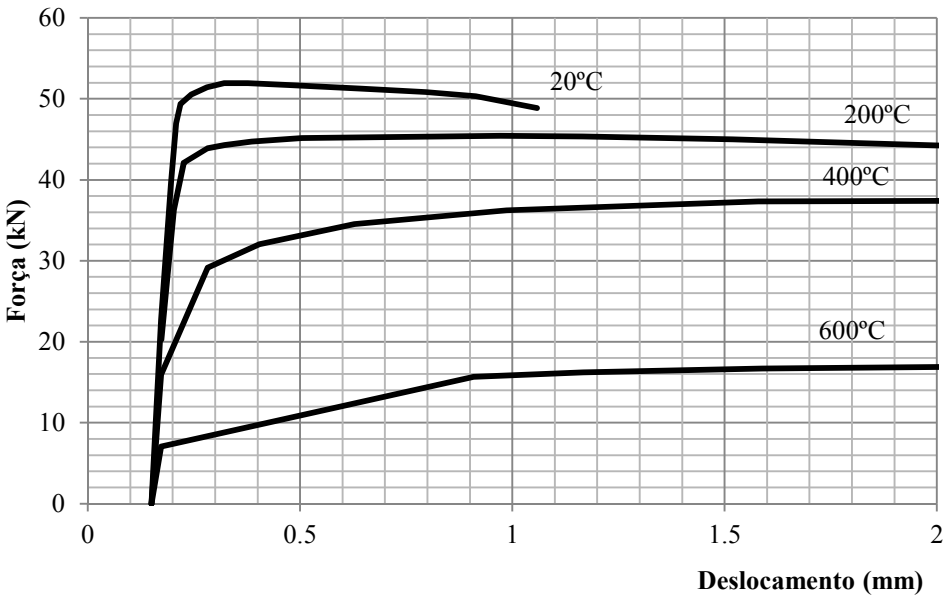

Figura 7.10: Trajetórias de equilíbrio para o pilar com seção Ue 50x25x10x1,75.

As trajetórias de equilíbrio obtidas pelos programas INSTAB e ANSYS, considerando os modelos elastofrágil e elastoplástico, para o pilar de seção Ue 50x25x10x1,75 submetido a uma temperatura uniforme de 200ºC estão ilustradas na Figura 7.11.

Observa-se que para forças abaixo de 30 kN, as quais estão em regime elástico, as três trajetórias são coincidentes. Na fase pós-critica, as curvas obtidas com o modelo elastofrágil são praticamente as mesmas para qualquer valor de força, embora para forças superiores a 200 kN haja uma ligeira diferença entre elas.

Quando a força aplicada no pilar é igual a 45,43 kN, a qual corresponde à capacidade resistente do pilar, praticamente todo o perfil está submetido a uma tensão de von Mises de 228,03 MPa, a qual é próxima à resistência ao escoamento do aço a 200ºC ($f_{y,200}=250\ MPa$), conforme mostra a Figura 7.12. Utilizando o modelo elastofrágil com limite de tensão igual a 250 MPa, obtém-se a força normal resistente à temperatura ambiente igual a 46,73 kN.

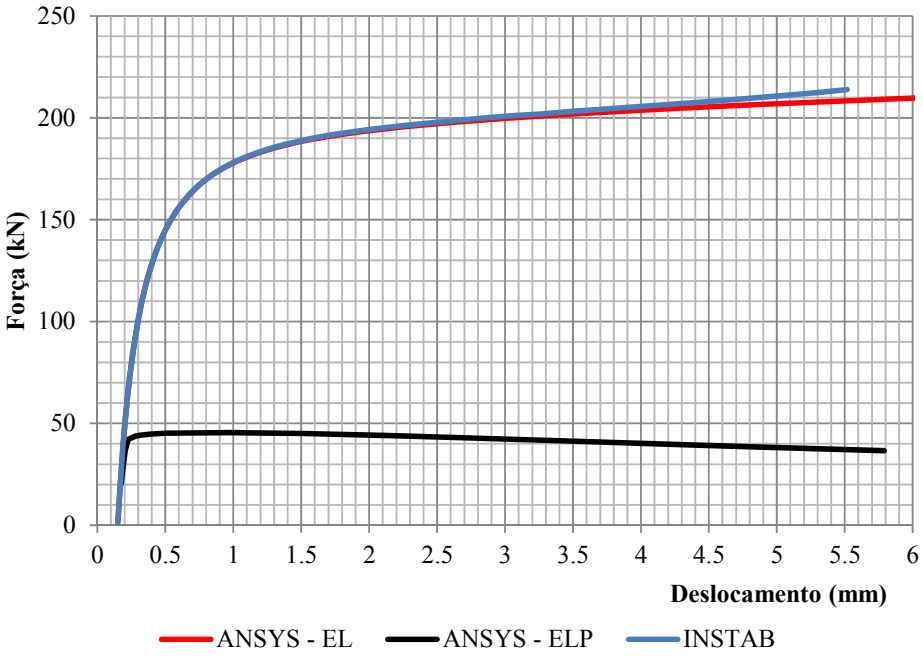

Figura 7.11: Comparação entre trajetórias de equilíbrio para o pilar Ue 50x25x10x1,75 a 200ºC.

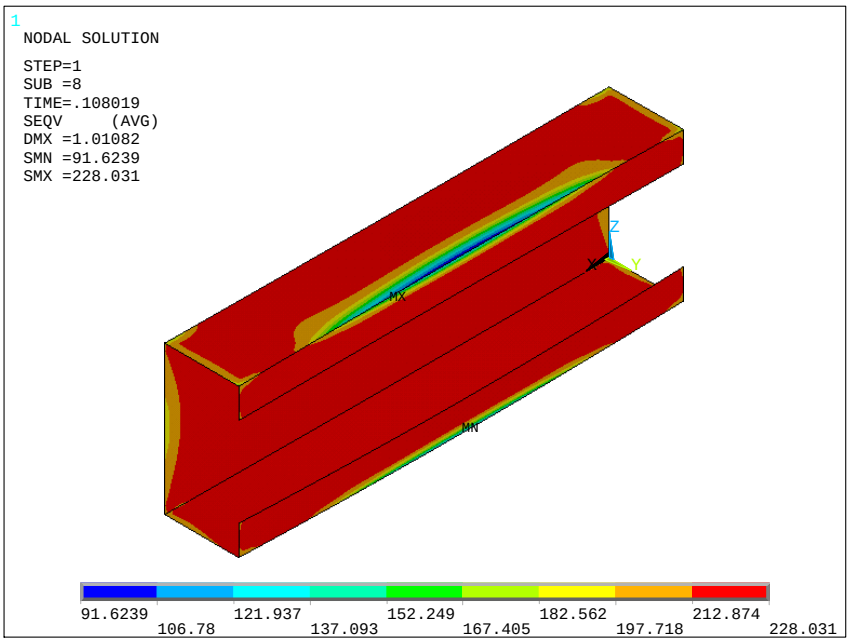

Figura 7.12: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 50x25x10x1,75 a 200ºC

As forças normais resistentes para o pilar com seção transversal Ue 50x25x10x1,75 obtidas por meio dos modelos elastoplástico e elastofrágil para as temperaturas de 20, 200, 400 e 600ºC estão apresentadas na Tabela 7.5.

Tabela 7.5: Capacidade resistente obtidas pelos modelos ELP e ELF para o pilar de seção Ue 50x25x10x1,75.

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN ELF	Diferença
20	52,0	46,7	10,2%
200	45,4	42,1	7,3%
400	37,5	32,7	12,8%
600	17,0	14,5	14,7%

Para ambas temperaturas de 400 e 600ºC o modelo elastofrágil, como esperado, se mostrou conservador quando comparadas ao modelo elastoplástico. Nesses casos, as tensões máximas de von Mises, obtidas pelo modelo elastoplástico, são próximas as resistências de escoamento do aço nas temperaturas de 400ºC ($f_{y,400}=250\ MPa$) e 600ºC ($f_{y,600}=117{,}50\ MPa$) conforme mostram as Figuras 7.13 e 7.14, respectivamente.

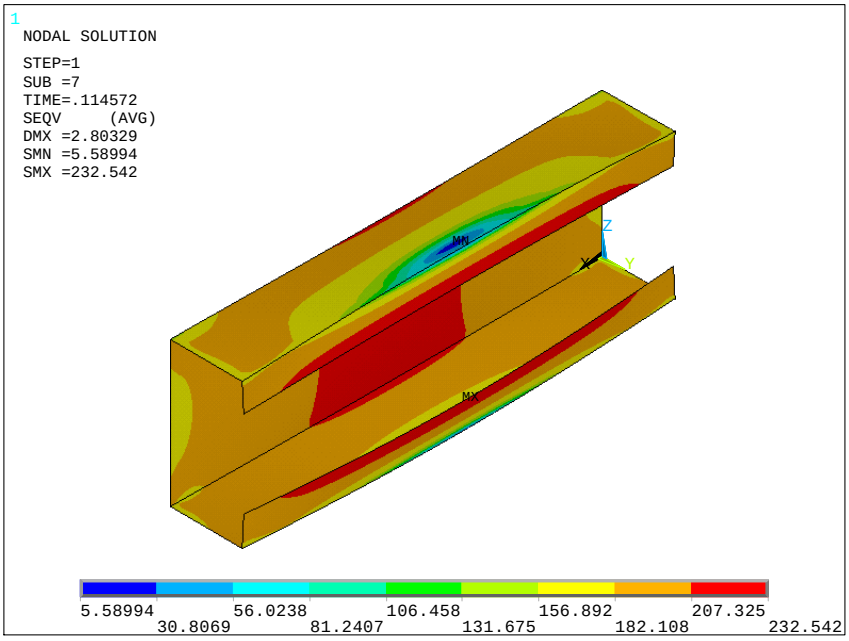

Figura 7.13: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 50x25x10x1,75 a 400ºC

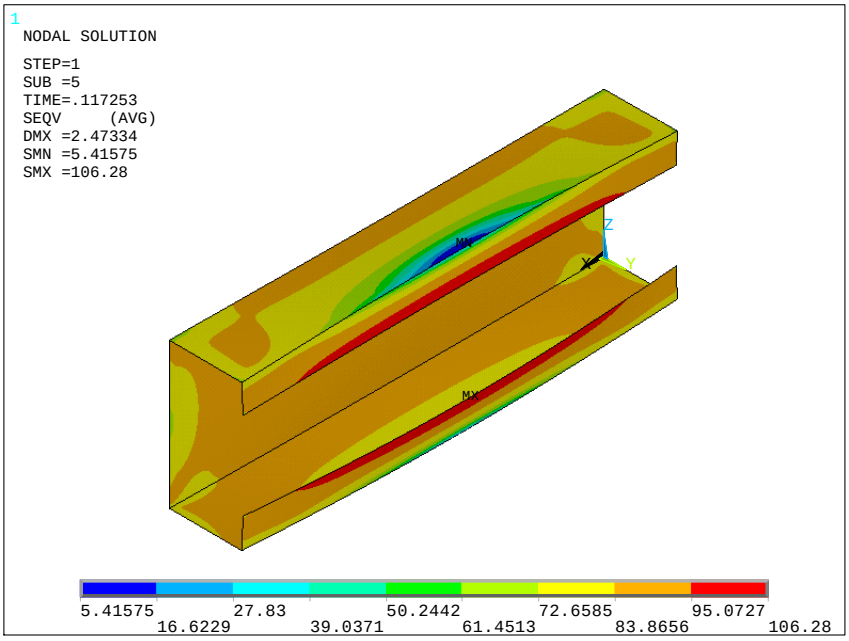

Figura 7.14: Distribuição das tensões de von Mises, obtida pelo ANSYS, correspondente ao ponto limite para o pilar de seção Ue 50x25x10x1,75 a 600ºC

Verifica-se, também, a capacidade resistente de pilares com seções transversais Ue 50x25x10x2,25 e Ue 50x25x10x2,65. A fim de os pilares apresentarem o modo distorcional como crítico, consideram-se esses pilares simplesmente apoiados e de comprimento igual a 150 mm. A imperfeição geométrica inicial adotada foi na forma do modo de instabilidade distorcional e com amplitude máxima igual a *L/1000*, onde *L* é o comprimento do pilar. As Tabelas 7.6 e 7.7 mostram as capacidades resistentes para os pilares analisados em temperatura ambiente e elevados, considerando os modelos elastoplástico e elastofrágil.

Tabela 7.6: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 50x25x10x2,25

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN ELF	Diferença
20	67,0	61,0	9,0%
200	60,0	54,9	8,5%
400	53,6	42,7	20,3%
600	25,0	18,9	24,4%

Tabela 7.7: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 50x25x10x2,65

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN ELF	Diferença
20	79,0	69,8	11,6%
200	71,6	62,8	12,3%
400	66,9	48,9	26,9%
600	31,4	21,6	31,2%

Os resultados obtidos pelo modelo elastofrágil se mostraram conservadores em relação aos valores obtidos por meio do modelo elastoplástico. Como se pode notar, em geral, para espessuras maiores o efeito da plasticidade é maior.

7.2. Comparação com a Proposta da NBR 14323

A proposta de revisão da ABNT NBR 14323 (2011) apresenta algumas recomendações relativas ao dimensionamento de perfis de aço formados a frio em situação de incêndio, com base nas recomendações do Eurocode 3 parte 1.2 (2005) conforme foi discutido no capítulo 5 desta Tese.

Alguns autores, tais como Zhao *et al* (2005) e Knobloch *et al* (2010), afirmam que a utilização dos redutores da resistência ao escoamento relativo a 0,2% da deformação específica plástica residual no dimensionamento de perfis formados a frio, proposta pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005), ocasionam capacidades resistentes contra a segurança.

Diante desse fato, nas Tabelas 7.8 a 7.10 são comparadas as forças resistentes para os pilares que apresentem o modo local de chapa (MLC) como modo de instabilidade crítico, obtidas com o modelo elastoplástico, as quais julgam serem mais precisas, com as capacidades portantes calculadas de acordo com a proposta apresentada no capítulo 5 (item 5.3) desta Tese. Na última coluna dessas tabelas é fornecido um valor de k_σ para que a força resistente calculada por meio da metodologia apresentada no capítulo 5 resulte em um valor igual à capacidade resistente obtida pelo *ANSYS*.

O cálculo da área efetiva à temperatura ambiente foi efeituado com base no método da seção efetiva conforme recomendado pela ABNT NBR 14762:2010.

Tabela 7.8: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 100x50x17x1,75

TEMPERATURA ºC	FORÇA kN ELP	FORÇA kN NBR	k_σ
20	87,53	88,47	1,00
200	75,69	78,74	0,85
400	52,50	57,50	0,59
600	23,50	26,54	0,26

Tabela 7.9: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 100x50x17x2,25

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN NBR	k_σ
20	128,33	126,07	1,00
200	111,91	112,20	0,887
400	82,67	81,94	0,65
600	37,48	37,82	0,297

Tabela 7.10: Capacidade resistente para o pilar com seção Ue 100x50x17x2,65

Temperatura ºC	Força kN ELP	Força kN NBR	k_σ
20	152,72	148,48	1,00
200	136,64	132,15	0,92
400	112,51	96,51	0,757
600	51,58	44,54	0,347

Observa-se que para o perfil formado pela parede mais esbelta, a conclusão obtida por Zhao *et al* (2005) quanto à falta de segurança no uso dos redutores recomendados pelo Eurocode 3 parte 1.2 (2005) é verificada. Para os perfis com parede menos esbelta, entretanto, os redutores são adequados e favoráveis a segurança. Mais estudos devem ser desenvolvidos para encontrar redutores k_σ mais precisos. Ressalta-se que as áreas efetivas das seções dos pilares Ue 100x50x17x2,25 e Ue 100x50x17x2,65 são iguais às áreas das seções brutas.

7.3. Gradiente Térmico

Para efeito de mostrar o uso do ATERM e do INSTAB em sequência, estuda-se, agora, o efeito da distribuição de temperaturas no comportamento pós-crítico do pilar de aço formado a frio com seção Ue 100x50x17x2,00 biapoiado. O comprimento do pilar é igual a 80 mm, a fim de o modo crítico ser o MLC com um semi-comprimento de onda.

Admite-se que apenas a face externa da mesa inferior do perfil esteja exposta ao incêndio, simulando, por exemplo, um pilar em contato com paredes. Considera-se que a temperatura inicial do perfil é igual a 20ºC e o incêndio é modelado por meio da curva-padrão ISO-834 (ABNT NBR 5628:2001). A Figura 7.15 mostra a distribuição de temperaturas obtidas pelo programa *ATERM* para os tempos de 5, 10 e 15 minutos de exposição da mesa inferior ao incêndio. Utilizaram-se elementos quadrados de 1,0 mm de lado.

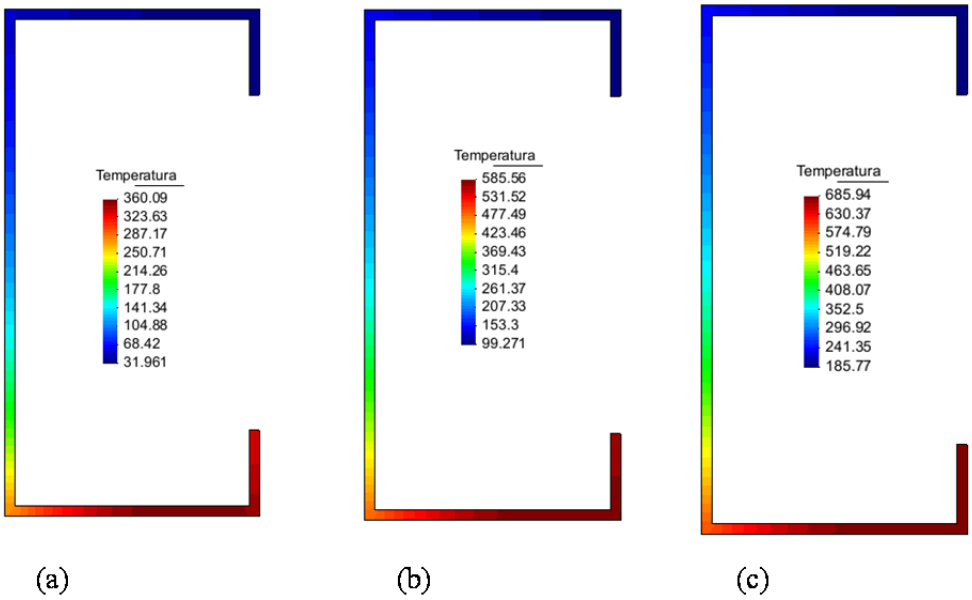

Figura 7.15: Distribuição de temperaturas aos (a) 5 minutos, (b) 10 minutos e (a) 15 minutos.

Por meio da análise linear de estabilidade obtida pelo programa *INSTAB*, verifica-se a variação da tensão crítica de bifurcação em função do parâmetro geométrico a/b_w (relação do comprimento do perfil e a largura da alma) e do tempo de exposição ao incêndio, conforme mostra a Figura 7.16.

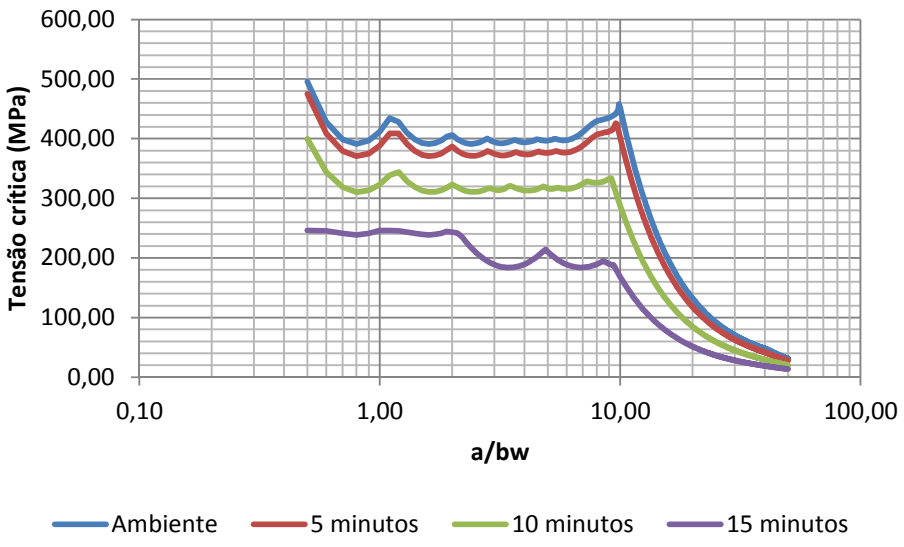

Figura 7.16: Variação da tensão crítica de bifurcação em função do parâmetro geométrico a/b_w e o tempo de exposição ao incêndio

Para tempos de exposições ao incêndio inferiores a 5 minutos, verifica-se que o modo de instabilidade é o MLC. Com o aumento do tempo de exposição ao incêndio, o ocorre uma perda de rigidez na parte inferior do perfil e o modo de instabilidade distorcional passa a ser condicionante. Para o perfil com 320 mm de comprimento, a Figura 7.17 mostra as configurações dos modos de instabilidade para os tempos de 5, 10 e 15 minutos de exposição da mesa inferior ao incêndio.

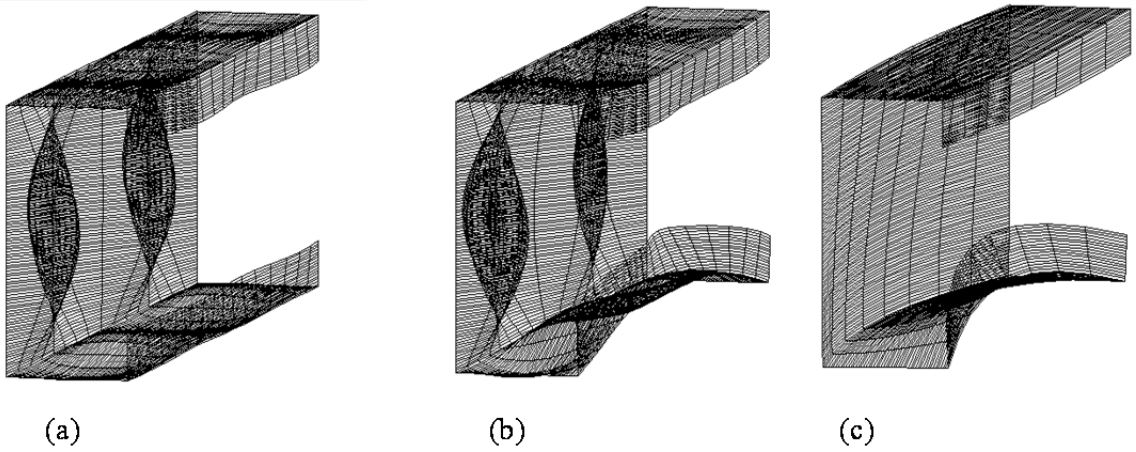

Figura 7.17: Modos de instabilidade críticos para (a) 5 minutos, (b) 10 minutos e (c) 15 minutos. Ilustrações obtidas com o programa *INSTAB*

A trajetória de equilíbrio foi obtida pelo programa *INSTAB* considerando uma imperfeição geométrica inicial na forma do modo local de chapa, sendo que o deslocamento no meio do vão e na metade da altura da alma é igual a 0,08 mm. A redução do módulo de elasticidade decorrente da temperatura foi considerada, de forma

automática, em cada faixa finita de acordo com a temperatura obtida pelo programa *ATERM*. No modo atual, o *INSTAB* ainda não considera os esforços internos decorrentes das deformações térmicas restringidas. De modo a haver compatibilidade entre as malhas utilizadas nas análises térmica e estrutural, a largura das faixas foi considerada igual a 1,0 mm.

O deslocamento do nó localizado no meio do vão e na metade da altura da alma em função da força de compressão aplicada e do tempo de exposição ao incêndio é apresentado na Figura 7.18.

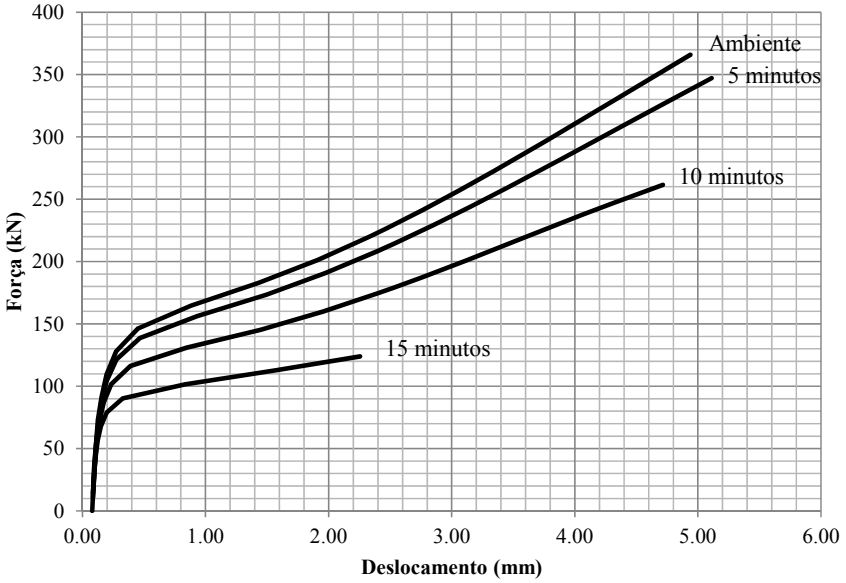

Figura 7.18: Trajetória de equilíbrio em função do tempo de exposição ao incêndio

Na Figura 7.18, o ponto de inflexão das curvas (ponto em que elas invertem a embocadura) corresponde à força crítica de instabilidade; a partir desse ponto se inicia a fase pós-crítica. Em 15 minutos de exposição ao incêndio, por exemplo, a redução da força crítica de instabilidade é da ordem de 38% em relação à temperatura ambiente (de 182,9 kN para 112,7 kN). As trajetórias de equilíbrio conduzem, evidentemente, a forças reduzidas em função do tempo de exposição ao fogo.

Para 5 minutos de exposição ao incêndio verifica-se que o gradiente térmico varia de 31,69ºC a 360,1ºC (ver Figura 7.15a). A Figura 7.19 mostra duas trajetórias de equilíbrio (i) uma adotando a temperatura uniforme e igual a 360,1ºC na seção transversal e outra (ii) adotando o gradiente térmico (curva já apresentada na Figura 7.18).

Como se esperava, a variação da temperatura na seção transversal resulta em força crítica de instabilidade superior ao se comparar com a força para a seção

submetida à temperatura uniforme e igual à temperatura máxima verificada na análise térmica.

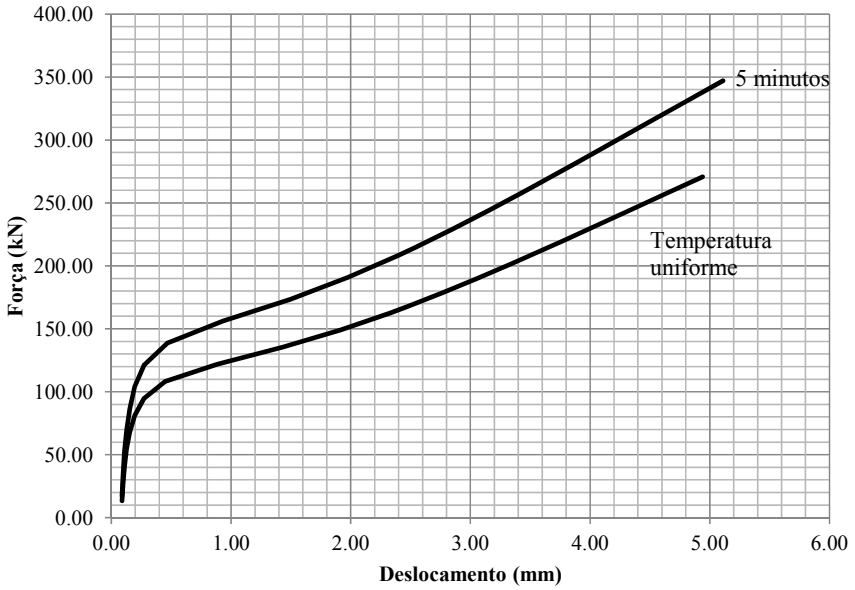

Figura 7.19: Comparação da trajetória de equilíbrio com temperatura uniforme e com gradiente térmico.

8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

8.1. Conclusões

O objetivo desta Tese de Doutorado foi o de criar ferramentas computacionais destinadas à análise termestrutural de pilares de aço formados a frio em situação de incêndio. Essas ferramentas são dois programas computacionais, desenvolvidos em linguagem Fortran 90, denominados ATERM e INSTAB.

Pesquisas internacionais indicam que os redutores de resistência para altas temperaturas desses perfis são inferiores aos redutores dos perfis laminados e soldados recomendados pelo Eurocode. Nas aplicações feitas nesta Tese, isso se confirmou para chapas finas (da ordem de 1,75 mm), no entanto, para chapas acima de 2 mm os resultados determinados pelo procedimento normatizado foram satisfatórios e até favoráveis à segurança. Neste trabalho, para fins de normatização brasileira, foi proposta, com base nas recomendações do Eurocode, uma metodologia simplificada para o dimensionamento de perfis formados a frio em situação de incêndio.

Para realizar a análise térmica bidimensional em regime transiente, foi desenvolvido o programa de computador *ATERM*, validado, por meio de exemplos, com o programa sueco de computador *Super TempCalc*. O ATERM pode ser empregado para qualquer material e para qualquer modelo de incêndio. A fim de acoplar ao ATERM, foi desenvolvido um módulo adicional, denominado de *ATERM-DIM*, que, com base em prescrições normatizadas, determina em regime plástico o momento fletor resistente de vigas de aço continuamente travadas em função da redução das propriedades mecânicas decorrentes da elevação da temperatura.

Para realizar a análise não linear geométrica em situação de incêndio, foi desenvolvido o programa de computador INSTAB com o emprego do método das faixas finitas *splines*. Esse método foi escolhido, em vista da maior facilidade da discretização dos perfis e pela eficiência computacional, em comparação ao método dos elementos finitos. O programa desenvolvido considera, atualmente, material de comportamento elastofrágil (elástico-linear com interrupção em uma determinada resistência). A resistência e o módulo de elasticidade variam com a temperatura. Antes de efetuar a análise não linear geométrica, o programa *INSTAB* realiza a análise linear de estabilidade, onde são determinadas a força crítica e o respectivo modo de instabilidade, o qual é imposto como imperfeição geométrica inicial na análise não linear geométrica. O INSTAB foi validado com resultados obtidos na literatura

científica e pelo programa *ANSYS* empregando material de comportamento elastofrágil. Não foi encontrado, na literatura pesquisada, qualquer outro programa com as características do INSTAB.

Os perfis formados a frio são muito esbeltos e, como consequência, o projeto desses elementos estruturais à temperatura ambiente é, em geral, governado pelo estado limite último de instabilidade sem atingir o patamar de escoamento. Foram realizadas algumas simulações para a situação de incêndio e a força resistente obtida por meio do INSTAB foi comparada à calculada com o ANSYS empregando material elastoplástico, de modo a avaliar o efeito da plasticidade no esforço resistente desses pilares. Apesar da grande diferença entre os dois modelos, confirmou-se que, para todos os pilares analisados, a capacidade resistente obtida pelo INSTAB é sempre a favor da segurança em relação à obtida pelo ANSYS. Ressalta-se, no entanto, que o efeito da elastoplasticidade é considerável (há grande variabilidade em torno de 10%) e visando projetos mais econômicos ela deveria ser aproveitada. O INSTAB, no estágio atual, pode ser empregado para pré-dimensionamentos.

Para os perfis de aço formados a frio submetidos a gradiente térmico, como por exemplo nos perfis onde somente uma mesa é aquecida, observou-se que o modo crítico de instabilidade ser alterado em função do tempo de exposição ao incêndio. Isto pode ser explicado pela diminuição de rigidez das chapas de aço aquecidas.

A ABNT NBR 14762:2010 recomenda a consideração da instabilidade por distorção no dimensionamento de perfis formados a frio à temperatura ambiente, no entanto, não apresenta uma formulação que permita a determinação da força normal associada à instabilidade distorcional desses perfis Como atividade adicional ao objetivo da Tese, empregando-se o INSTAB, obteve-se as forças críticas, à temperatura ambiente, e os respectivos modos de instabilidade de todos os perfis tabelados na ABNT NBR 6335:2003, submetidos à compressão e à flexão, o que permitirá seu dimensionamento.

8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros, recomenda-se a implementação, no programa INSTAB, da elastoplasticidade do aço e da consideração dos efeitos das restrições às deformações térmicas.

Devem ser feitos estudos de outras seções transversais para o melhor entendimento desses perfis em situação de incêndio, a fim de procurar redutores de

resistência adequados para permitir o dimensionamento simplificado de perfis formados a frio em situação de incêndio.

Recomenda-se efetuar análises não lineares de estabilidade, por meio dos programas INSTAB e ANSYS, de perfis formados a frio submetidos à flexão pura e à flexocompressão. Podem ser analisados os efeitos da variação de temperatura ao longo da seção transversal e as restrições às deformações térmicas no comportamento de vigas de aço formadas a frio em situação de incêndio.

Em relação ao programa de análise térmica desenvolvido nesta Tese, ATERM, podem ser incorporados elementos finitos sólidos na formulação desenvolvida para a análise térmica de estruturas tridimensionais.

Estender o programa ATERM-DIM para o dimensionamento de vigas de concreto e pilares mistos de aço-concreto em situação de incêndio com base em procedimentos normatizados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁDÁNY, S. e SCHAFER, B.W, A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method, **Journal of Constructional Steel Research**. v. 64, p. 12-29, 2008.

ÁDÁNY, S. e SCHAFER, B.W, Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: application and examples, **Thin-walled Structures**. v. 44, p. 585-600, 2006.

ADINI, A. e CLOUGH, R.W., Analysis of plate bending by the finite element method, **National Science Foundation (Grant G7337)**, Washington D.C. 1960.

ALMEIDA, S.J. e MUNAIAR NETO, J., Análise numérica de perfis de aço formados a frio comprimidos considerando imperfeições geométricas iniciais, **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 11, p. 17-35, São Carlos: 2009.

ALMEIDA, S.J., **Análise numérica de perfis de aço formados a frio comprimidos considerando imperfeições geométricas iniciais**, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.

ALVES, M.C., **Análise avançada de perfis formados a frio sob ação de incêndio**, Tese (Doutorado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

AMERICAN NATIONAL STANDARD, **ANSI/ASTM E 119**, Standard test method of fire tests of building construction and materials, 2005.

AUSTRALIA/NEW ZELAND STANDARD**.** **AS/NZ 4600**. Cold-formed steel structures. Australia/New Zeland Standard. Sydney: Australia, 2005.

AMERICAM IRON STEEL INSTITUTE (AISI). North American specification for the design of cold-formed steel structural members. Washington DC. 2007.

CANADIAN STANDARD ASSOCIATION. **CA-S136-07**. North American specification for the design of cold-formed steel structural members. Canadian Standard Steel Association. Mississauga, Ontario. 2007.

ANDERBERG, Y., **TCD 5.0 - User's Manual**. Fire Safety Design, Lund, 1997.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5628:** Componentes construtivos estruturais – Determinação da resistência ao fogo. Rio de Janeiro. 2001.

_____. **NBR 14323:** Dimensionamento de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios em situação de incêndio. Rio de Janeiro, 1999.

_____. **NBR 14432**: Exigências de resistência ao fogo de elementos construtivos de edificações. Rio de Janeiro, 2000.

_____. **NBR 13860**: Glossário de termos relacionados com a segurança contra incêndios. Rio de Janeiro. 1997.

_____. **Proposta de Revisão da NBR 14323**: Dimensionamento de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios em situação de incêndio. Rio de Janeiro, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.**NBR 14762:** Dimensionamento de estruturas de aço comstituídas de perfis formados a frio. Rio de Janeiro, 2010.

AU, F.T.K., CHEUNG, Y.K., Isoparametric spline finite strip for plane structure, **Computer & Structures.** v. 48, p. 23-32, 1993.

AZEVEDO, M.S., **Segurança das estruturas de aço externas a edificações em situação de incêndio, sem revestimento contra fogo**, Tese (Doutorado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

AZHARI, M. e BRADFORD, M. A., Inelastic initial local buckling of plates with and without residual stresses, **Eng. Struct.** v. 15, p. 31-39, 1993.

BABRAUSKAS V. e WILLIAMSON R., Post-flashover Compartment Fires: Basis of a Theoretical Model, **Heydon & Son Ltd,** 1978.

BAILEY, C.G., BURGESS, I.W., PLANK, R.J., The lateral-torsional buckling of unrestrained steel beams in fire, **Journal of Constructional Research**. v. 36, p. 101-119, 1996.

BAIZ, P.M. e ALIABADI, M.H. Local buckling of thin-walled structures by the boundary element method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, p. 302-31, 2009.

BARNETT, C. R., BFD curve: a new empirical model for fire compartment temperatures, **Fire Safety Journal**. v. 37, p. 437-463, 2002.

BARNETT, C. R., Replacing international temperature – time curves with BFD curve**, Fire Safety Journal**. v. 42, p. 321-327, 2007.

BATHE, K.J., **Finite element procedures**, New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BATISTA, E.M., CAMOTIM, D., PROLA, L.C. e VAZQUEZ, E., Encurvadura local de colunas de aço enformadas a frio com secção em "rack", In: Construção Metálica e Mista, 2, **Actas**, Coimbra, p. 401-412, 1999.

BATISTA, E.M., Effective section method: A general direct method for the design of steel cold-formed members under local–global buckling interaction, **Thin-Walled Structures**. v. 48, p. 345-356, 2010.

BATISTA, E.M., **Etude de la stabilité des profils à parois minces et section ourverte de types U et C**, Thèse (Doctorat), Faculté de Sciences Apliquées, Université de Liège, Belgique, 1989.

BATOZ, J.L e TAHAR, M. B., Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p. 1655-1677, 1982.

BAZANT, Z.P., CEDOLIN, L., **Stability of structures – Elastic, inelastic, fracture and damage theories**, Oxford University Press, New York, 1991.

BEBIANO, R., SILVESTRE, N. e CAMOTIM, D., Gbtul 1.0. **Civil Engineering**. Universidade Técnica de Lisboa, 2008.

BEDAIR, O., A cost-effective design procedure for cold-formed lipped channels under uniform compression, **Thin Walled Structures**. v. 47, p. 1281-1294, 2009.

BENTHEM, J.P., The Reduction in Stiffness of Combinations of Rectangular Plates in Compression after Exceeding the Buckling Load, National Aeronatical Research Institute **Report NLL-TRS.539**, Amsterdam, 1959.

BLEICH, F., **Buckling strength of metal structures**, McGraw-Hill, New York, 1952.

BRADFORD, M.A., AZHARI, M., Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method, **Computer and Structures**, v. 56, p. 75-83, 1995.

BRUBAK, L. e HELLESLAND, J., Approximate buckling strength analysis of arbitrarily stiffened, stepped plates, **Engineering Structures**. v. 29, p. 2321-2333, 2007.

BRUBAK, L. e HELLESLAND, J., Semi-analytical postbuckling and strength analysis of arbitrarily stiffened plates in local and global bending, **Thin-Walled Structures**. v. 45, p. 620-633, 2007.

BRUBAK, L. e HELLESLAND, J., Strength criteria in semi-analytical, large deflection analysis of stiffened plates in local and global bending, **Thin-Walled Structures**. v. 46, p. 1382-1390, 2008.

BUCHANAN, A.H., **Structural Design for Fire Safety**, Chichester: John Wiley & Sons Ltd. England, 2002.

BULSON, P.S., Local instability and strength of structural sections, **Thin-Walled Structures**, Ed. A.H. Chilver, Chatto & Windus, p. 153-207, 1967.

BYKLUM, E. e AMDAHL, J. A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling, **Thin-Walled Structures**, v. 40, pp. 925-953, 2002.

BYKLUM, E. STEEN, E. e AMDAHL, J., A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened panels, **Thin-Walled Structures**, v. 42, pp. 701-717, 2004.

CALDAS, R.B., **Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio**, Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

CAMOTIM, D. Análise numérica de elementos estruturais de aço enformados a frio: Desenvolvimentos recentes e perspectivas futuras. XXXII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, **Anais**, 2006.

CAMOTIM, D. e PROLA, L.C., On the stability of cold-formed steel structural elements with "rack" sections, Stability Problems in Designing, Construction and Rehabilitation of Metal Structures. In: International Colloquium on Structural Stability, 5, **Proceedings**, p. 21-32, 1996a.

CAMOTIM, D. e PROLA, L.C., On the stability of thin-walled columns with Z, S and SIGMA sections, In: Coupled Instabilities in Metal Structures, **Proceedings**, Imperial College Press, p.149-156, 1996b.

CAMOTIM, D., BASAGLIA, C., SILVESTRE, N., GBT buckling analysis of thin-walled steel frames: A state-of-the-art report. **Thin-Walled Structure**, 2010, doi:10.1016/j.tws.2009.12.003

CAMOTIM, D., BATISTA, E.M., PROLA, L.C. e VAZQUEZ, E., Local post-buckling behaviour of cold-formed steel rack columns, In: Coupled Instabilities in Metal Structures, **Proceedings**, Imperial College Press, p. 213-222, 2000.

CAMPELLO; E.M.B. **Análise não-linear de perfis metálicos conformados a frio**, Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. 2000.

CAMPELLO; E.M.B. **Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos**, Tese (Doutorado). Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. 2005.

CEN (Comité Européen de Normalisation), **EN 1991-1-2**. Eurocode 1: Actions on Structures Part 1-2: General Actions – Actions on Structures exposed to Fire. Brussels, 2002.

CEN (Comité Européen de Normalisation), **EN 1992-1-2**. Eurocode 2: Design of Concrete Structures Part 1-2: General Rules – Structural Fire Design. Brussels, 2004.

CEN (Comité Européen de Normalisation), **EN 1993-1-1**. Eurocode 3: Design of Steel Structures Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings. Brussels, 2005.

CEN (Comité Européen de Normalisation), **EN 1993-1-2**. Eurocode 3: Design of Steel Structures Part 1-2: General Rules – Structural Fire Design. Brussels, 2005.

Centre for Advanced Structural Engineering, Computer program THIN-WALL, **Users Manual (Version 1.2)**, School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, Australia, 1996.

CHAJES, A., **Principles of Structural Stability Theory**, New Jersey: Prentice Hall, 1975

CHEN, J., HE, Y., WEI-LIANG, J., Stub column tests of thin-walled complex section with intermediate stiffeners, **Thin-Walled Structures**. v. 48, p. 423–429, 2010.

CHEN, J., YOUNG, B., Cold-formed steel lipped channel columns at elevated temperatures, **Engineering Structures**. v. 29, p. 2445-2456, 2007.

CHEN, J., YOUNG, B., Design of high strength steel columns at elevated temperatures, **Journal of Constructional Steel Research**. v. 64, p. 689-703, 2008.

CHEN, J., YOUNG, B., Experimental investigation of cold-formed steel materials at elevated temperatures, **Thin-Walled Structures**. v. 45, p. 96-110, 2007.

CHEN, S.L., LI, S.F.. FANG, S.F., Elastoplastic large deflection analysis of cold-formed members using spline finite strip method. In: International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, 20, **Proceedings**. St. Louis, Missouri, USA, p. 251-263, 1994.

CHEUNG, Y.K., AU, F.T.K., Isoparametric spline finite strip for degenerate shells, **Thin-Walled Structures**. v. 21, p. 65-92, 1995.

CHEUNG, Y.K., **Finite strip method in structural analysis**, Pergamon Press, Oxford, 1976.

CHILVER, A.H., A generalized approach to the local instability of certain thin-walled struts, **The Aeronautical Quarterly**, v. 4, p. 245-260, 1953.

CHILVER, A.H., Behaviour of thin-walled structural members in compresssion, **Engineering**, v. 172, p. 281-282, 1951.

CHIN, C.-K., AL-BERMANI, F.G. e KITIPORNCHAI, S., Finite element for buckling analysis of plate structures, **Journal of Structural Engineering** (ASCE), v. 119, Nº 4, p. 1048-1068, 1993.

CHODRAURI, G.M.B**, Análise teórica e experimental de perfis de aço formados a frio submetidos à compressão**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 2006.

COOK, R.D., MALKUS, D.S. e PLESHA, M.F., **Concepts and applications of finite element analysis**, John Wiley & Sons Inc, 3rd edition, 1989.

COSTA, C. N. e SILVA, V. P., O método do tempo equivalente para o projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio. In: Congresso Brasileiro do IBRACON, 47. **Anais**. Recife: Ibracon, 2005.

CRISFIELD, M.A., **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. New York: Wiley, 1991.

DEGEE, H., BOISSONNADE, N. e ROSSI, B., Local and interactive post-buckling of RHS beam finite element with shell FE models, **International Journal of Structural Stability and Dynamics**. v. 7, p. 213-241, 2007.

DINIS P. B., CAMOTIM D., Local/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel beams. **Thin Walled Structures**. v. 48, p. 771-785, 2010.

DINIS P. B., CAMOTIM D., Post-buckling behaviour and strength of cold-formed steel lipped channel columns experiencing distortional/global interaction, **Computers and Structures**. v. 49, p. 422–434, 2011.

DINIS, P. B., CAMOTIM, D., & SILVESTRE, N., FEM-based analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns, **Computers and Structures**. v. 85, p. 1461-1474, 2007.

DINIS, P.B. e CAMOTIM, D., Local-plate and distortional post-buckling behaviour of cold-formed steel columns: elastic and elastic-plastic FEM analysis, In: Structural Stability Research Council (SSRC), **Proceedings**, 475-498, 2004.

DORR, J.B., **Modelos numéricos de pilares de aço em situação de incêndio considerando a influência da restrição axial**, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.

DUBINA, D. e UNGUREANU, V., Effect of imperfections on numerical simulation of instability behaviour of cold-formed steel members, **Thin Walled Structures**, v. 40, p. 239-262, 2002.

ECCHER, G., **Isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures**, Thesis (Doctoral Philosophy), University of Sydney, 2007.

ECCHER, G., RASMUSSEN, K.J.R., ZANDONINI, R., Geometric nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures, **Thin-Walled Structures**. v. 47, p. 219-232, 2009.

FAN, S.C., **Spline Finite Strip Method in Structural Analysis**, Thesis (PhD), University of Hong Kong, 1982.

FEASEY, R. e BUCHANAN, A., Post-flashover fires for structural design, **Fire Safety Journal**. v. 37, p. 83-105, 2002.

FENG, M., WANG, Y.C., An experimental study of loaded full-scale cold-formed thin-walled steel structural panels under fire conditions, **Fire Safety Journal**, v. 40, p. 43-63, 2005.

FENG, M., WANG, Y.C., DAVIES, J.M., Structural behavior of cold-formed thin-walled short steel channel columns at elevated temperatures. Part 1: Experiments, **Thin-Walled Structures**. v. 41, p. 543-570, 2003a.

FENG, M., WANG, Y.C., DAVIES, J.M., Structural behavior of cold-formed thin-walled short steel channel columns at elevated temperatures. Part 2: Design Calculations and numerical analysis, **Thin-Walled Structures**. v. 41, p. 571-594, 2003b.

FERREIRA, F. A., **Contribuição ao estabelecimento de um método simplificado para dimensionamento ao fogo da proteção parcial de colunas de aço**, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, 2006.

FRANSSEN, J. M., KODUR, V. K. R. e MASON, J., **SAFIR 2001 – User´s manual for SAFIR 2001 a computer program for analysis of structures submitted to the fire**, University of Liège, Department Structures du Génie Civil. Service Ponts et Charpentes, 2005.

FRANSSEN, J.M., **Etude du comportement au feu des structures mixtes acier-beton**, These (Doctorat), Universite de Liège, 1987.

FRANSSEN, J.M., The unloading of building materials submitted to fire, **Fire Safety Journal**, v. 16, p. 213-237, 1990.

FRUCHTENGARTEN; J., **Sobre a estabilidade de perfis de seção aberta**, Tese (Doutorado). Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. 1995.

FRUCHTENGARTEN; J., **Sobre o estudo da flambagem lateral de vigas por meio da utilização de uma teoria não linear geometricamente exata**, Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. 2005.

GALAMBOS, T.V. **Guide to stability design criteria for metal structures**. New York: John Wiley & Sons. 4th ed. 1998.

GALÉA, P., MARTIN, P.O., Longitudinally stiffened plates in Eurocode 3: Calculation of the global critical buckling stress, **Journal of Constructional Steel Research**. v. 66, p.1345-1353, 2010.

GALLAGHER, R.H. e PADLOG, J., Discrete element approach to structural instability analysis, **Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics** (AIAA), v. 1, Nº 6, p. 1437-1439, 1963.

GERLICH, J. T., Design of Load Bearing Light Steel Frame Walls for Fire Resistance. In: **Fire Engineering Research Report 95/3**, University of Canterbury, 1995.

GHANNADPOUR, S.A.M e OVESY, H.R., An exact finite strip for the calculation of relative post-buckling stiffness of I-section struts, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 50, p. 1354-1364, 2008.

GRÄDZKI, R. e KOWAĹ-MICHALSKA, K., Stability in the elasto-plastic range of rectangular plates subjected to uniaxial compression, with unloaded edges clamped, **Thin-Walled Structures**. v. 5, p. 93-109, 1987.

GRAVES SMITH, T.R. e SRIDLHRAN, S., A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 20, p. 685-693, 1978.

GRAVES SMITH, T.R., The Postbuckled Behaviour of Thin-Walled Columns, Proceedings of the Eighth Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), **Proceedings**, New York, p. 311-320, 1968.

GRAVES SMITH, T.R., The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length, **Thin-Walled Steel Structures**, Eds. K.C. Rockey e R.V. Hill, Crosby-Lockwood and Son, London, pp. 35-60, 1969.

HANCOCK, G.J. Local, distortional and lateral buckling of I-beams, **Journal of the Structural Division** (ASCE), v. 104, Nº 11, p. 1787-1798, 1978.

HANCOCK, G.J., DAVIDS, A.J., KEY, P.W., RASMUSSEN, K.J., Recent developments in the buckling and nonlinear analysis of thin-walled structural members, **Thin-Walled Structures**. v. 9, p. 309-338, 1990.

HANCOCK, G.J., Design for distortional buckling of flexural members, **Thin-Walled Structures**, v. 27, Nº 1, p. 3-12, 1997.

HANCOCK, G.J., Distortional buckling of steel storage rack columns**, Journal of Structural Engineering** (ASCE), v. 111, Nº 12, p. 2270-2283, 1985.

HOLMAN, J.P., **Heat transfer**, 10th Ed. McGraw-Hill Inc., 2009.

HUANG, H. C. e USMANI, A.S., **Finite element analysis for heat transfer : theory and software**. Springer-Verlag, 1994.

INCROPERA, F.P. e DEWITT, D.P., **Fundamentos de transferência de calor e de massa**, 5ª Edição. São Paulo. LTC, 2003.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION, **ISO 834**, Fire-resistance tests -- Elements of building construction -- Part 1: General requirements. 2002.

KAEFER, E. C. E SILVA, V. P., Determinação da temperatura em elementos de aço revestidos termicamente em situação de incêndio, tendo por base o programa de computador STEMPFIRE, **Boletim Técnico PEF 0301**, Escola Politécnica, São Paulo, p. 01-20, 2003.

KAITILA, O., Finite Element Modelling of Cold-Formed Steel Members at High Temperatures. **TKK-TER-24**, Helsinki University of Technology, 2002.

KAPUR, K.K e HARTZ, B.J., Stability of plates using the finite element method**, Journal of the Engineering Mechanics Division** (ASCE), v. 92, Nº 4, p. 1555-1571, 1966.

KAWAGOE, K., Estimation of Fire Temperature-Time Curve in Rooms, **Third Report**, Building Research Institute, Ministry of Construction, Japanese Government, 1967.

KEY, P.W., HANCOCK, G.J., A finite strip method for the elastic-plastic large displacement analysis of thin-walled and cold-formed sections, **Thin-Walled Structures**. v. 16, p. 3-29, 1993.

KEY, P.W., **The behavior of cold-formed square hollow sections columns**, Thesis (Doctor of Philosophy), School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, 1988.

KLINGSCH, W., Fire resistance of solid steel columns, **Fire Safety Journal**, v. 4, p. 237-242, 1981.

KODUR, V.K.R. e HAMARTHY, T.Z., **Properties of building materials**. In SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. Third Edition. NFPA. Quincy. 2002.

KRUPPA, J., Some results on the fire behavior of external steel columns, **Fire Safety Journal**, v. 4, p. 247-257, 1981.

KWON, B.Y. **Post-Buckling Behaviour of Thin-Walled Channel Sections**, Thesis (Ph.D.), School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, Australia, 1992.

KWON, Y.B., HANCOCK, G.J., A nonlinear elastic spline finite strip method for thin-walled sections, **Thin-Walled Structures**. v. 12, p. 295-319, 1991.

LA ROVERE, H.L., SCHNEIDER, A., PIGNOLO, G.J., GONCHOROVSKI, G. e CHIMELLO, A. A., **ANEST – Programa educacional para análise de estruturas reticuladas – manual do usuário**, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

LAMONT, S., **The Behaviour of Multi-storey Composite Steel Framed Structures in Response to Compartment Fires**. Tese (Doutorado). Universidade de Edinburgh, 2001.

LANDESMANN, A., CAMOTIM, D., BATISTA, E.M., Modelagem de colunas de perfis de aço formados a frio com seção U-enrijecido sob incêndio. In: XXX CILAMCE, **Proceedings**, 2009.

LANDESMANN, A., CAMOTIM, D., On the distortional buckling, post-buckling and strength of cold-formed steel lipped channel columns under fire conditions. **Journal of Structural Fire Engineering**. v. 2, N. 1, p. 1-20, 2011.

LANDESMANN, A., CAMOTIM, D., Simulação de colunas de aço de paredes finas com modo de falha distorcional sob incêndio. In: Asociación Argentina de Mecánica Computacional. **Proceedings**, v. XXIX, p. 6957-6970, 2010.

LANDESMANN, A., **Modelo não-linear inelástico para análise de estruturas metálicas aporticadas em condições de incêndio**. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.

LAU, S.C. e HANCOCK, G.J., Distortional Buckling Formulas for Channel Columns, **Journal of Structural Engineering** (ASCE), v. 113, Nº 5, p. 1063-1078, 1987.

LAU, S.C., HANCOCK, G.J., Buckling of thin flat-walled structures by a spline finite strip method, **Thin-Walled Structures**. v. 4, p. 269-294, 1986.

LAU, S.C., HANCOCK, G.J., Inelastic Buckling Analyses of Beams , Columns and Plates Using the Spline Finite Strip Method, **Thin-Walled Structures**. v. 7, p. 213-238, 1989.

LEE, J.H. **Local Buckling Behavior and Design of Cold-Formed Steel Compression Members at Elevated Temperatures**. Thesis (PhD). School of Civil Engineering. Queensland University of Technology, 2004.

LEE, J.H**., Local buckling behavior and design of cold-formed steel compression members at elevated temperatures**. Thesis (PhD). School of Civil Engineering Queensland University of Technology, 2004.

LEWIS, R.W., NITHIARASU, P. e SEETHARAMU, K.N**., Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow**. Wiley 2004.

LI, Z. e SCHAFER, B.W., Application of the finite strip method in cold-formed steel member design, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, p. 971-980, 2010.

LIE, T.T., Structural Fire Protection, American Society of Civil Engineers, **Manual of Practice No. 78**, 1974.

LITTLE, G.H., Rapid analysis of plate collapse by live energy minimization, **International Journal of Mechanical Science**. v. 19, p. 725-744, 1977.

LOUGHLAN, J., YIDRIS, N. e CUNNINGHAM, P. R., The Influence of Post-Local Buckling Mechanics on the Stress Variations , Axial Stiffness and Ultimate Failure Strength of Uniformly Compressed Thin-Walled I-Section Struts. In: International Conference on Modern Practice in Stress, 7, **Proceedings**, 2009

LUNDQUIST, E.E., STOWEL, E.Z. e SCHUETTE, E.H., Principles of moment distribution applied to stability of structures composed of bars or plates, **NACA Wartime Report L326**, 1943.

MA, Z. e MÄKELÄINEN, P., Parametric Temperature-time Curves of Medium Compartment Fires for Structural Design, **Journal of Fire Safety**. v. 34, p. 361-375, 2000.

MAGNUCKA-BLANDZI, E., MAGNUCKI, K., Buckling and optimal design of cold-formed thin-walled beams: Review of selected problems, **Thin Walled Structures**. v. 49, p. 554-561, 2011.

MAIORANA, E., PELLEGRINO, C., MODENA, C. Influence of longitudinal stiffeners on elastic stability of girder webs, **Journal of Constructional Steel Research**. v. 67, p. 51-64, 2011.

MAKELAINEN, P. e MILLER, K., **Mechanical Properties of Cold-Formed Galvanized Sheet Steel Z32 at Elevated Temperatures**, Helsinki University of Technology, Finland, April 1983.

MARGUERRE, K. e TREFFTZ, E., Über die Trägfahigkeit eines Längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiten der Beullast, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 17, pp. 85-100, 1937.

MECOZZI, E. e ZHAO, B. Development of Stress-Strain Relationships of Lightweight Steel at Elevated Temperatures. In: Proceedings of the Eurosteel Conference. **Proceedings**,volume C, p. 5.1-41-5.1-49, 2005.

MELINEK, S.J., Prediction of the fire resistance of insulated steel, **Fire Safety Journal**, v. 14, p. 127-134, 1989.

MILKE, J.A., **Analytical methods for determining fire resistance of steel members**. In SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. Third Edition. NFPA. Quincy. 2002.

NAGAHAMA, K.J., **Análise de estabilidade local em perfis de seção aberta em aço e em resina reforçada com fibras de vidro**, Tese (Doutorado), UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

NANDINI, P., KALYANARAMAN, V., Strength of cold-formed lipped channel beams under interaction of local, distortional and lateral torsional buckling, **Thin-Walled Structures**. v. 48, p. 872-877, 2010.

NEVES, I.C., The critical temperature of steel columns with restrained thermal elongation, **Fire Safety Journal**, v. 24, p. 211-227, 1995.

OUTINEN, J., KAITILA, O. e MÄKELÄINEN, P., High-temperature testing of structural steel and modeling of structures at fire temperatures. **Research Report**. Helsinki University of Technology Laboratory of Steel Structures Publications 23-TKK-TER-23 Espoo, Finlândia, 2001.

OVESY, H.R., LOUGHLAN, J. e GHANNADPOUR, S.A.M., Geometric non-linear analysis of thin flat plates under end shortening, using different versions of the finite strip method, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 47, p. 1923-1948, 2005.

OVESY, H.R., LOUGHLAN, J. e GHANNADPOUR, S.A.M., Geometric non-linear analysis of channel sections under end shortening, using different versions of the finite strip method, **Computers and Structures**, v. 84, p. 855-872, 2006.

PAIK, J. K. e KIM, B. J., Progressive collapse analysis of thin-walled box columns. **Thin Walled Structures**. v. 46, p. 541-550, 2008.

PAIK, J.K. e KIM, B.J., Ultimate strength formulations for stiffened panels under combined axial load, in-plane bending and lateral pressure: a benchmark study, **Thin Walled Structures**, v. 40, pp. 45-83, 2002.

PAIK, J.K. e LEE, M.S., A semi-analytical method for the elastic–plastic large deflection analysis of stiffened panels under combined biaxial compression/tension, biaxial in-plane bending, edge shear, and lateral pressure loads, **Thin Walled Structures**, v. 43, pp. 375-410, 2005.

PALA, M., Genetic programming-based formulation for distortional buckling stress of cold-formed steel members, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 64, p. 1495-1504, 2008.

PAPANGELIS, J.P. e HANCOCK, G.J., Computer analysis of thin-walled structural members, **Computers and Structures**, v. 56, p. 157-176, 1995.

PETTERSON, O. e WITTEVEEN, J., On the fire resistance of structural steel elements derived from standard fire tests or by calculation, **Fire Safety Journal**, v. 2, p. 73-87, 1980.

PETTERSSON,O. e MAGNUSSEN,S., THOR, J., Fire engineering design of steel structures, **Swedish Institute of Steel Construction**, Estocolmo, 1976.

PHAM, C.H. e HANCOCK, G.J., Shear buckling of thin-walled channel sections, **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, p. 578-585, 2009.

PIERIN, I., **Estudo da estabilidade de perfis pultrudados de materiais PRFV**, Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

PIERIN, I., ROVERE, H.L., Comparação entre o método dos elementos finitos e o método das faixas finitas na análise linear de estabilidade, In: XXVI Iberian Latin-Americam Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, **Proceedings**, 2005.

PIERIN, I., SILVA, V.P., Considerações sobre o comportamento dos perfis formados a frio em situação de incêndio. Contribuição à normatização. In: XXXIV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, **Proceedings**, 2010, San Juan.

PIMENTA, P.M., YOJO, T. Geometrically exact analysis of spatial frames, **Appl. Mech. Reviewa**. v. 46, part 2, 1993.

PIMENTA, R.J. **Proposição de uma curva de flambagem para perfis I soldados formados por chapas cortadas a maçarico**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

PLANK, R.J. e WITTIRICK, W.H., Buckling under combined loading of thin, flat-walled structures by a complex finite strip method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, Nº 2, p. 323-339, 1974.

PROLA, L.C. e CAMOTIM, D., Estabilidade e resistência última de colunas de aço enformadas a frio de secção em z com reforços inclinados, Construção Metálica e Mista, 1, **Acta,** p. 703-712, 1997.

PROLA, L.C. e CAMOTIM, D., Estabilidade local e global de elementos estruturais de aço enformados a frio com secção em S-reforçado, Encontro Nacional de Mecânica Computacional IV ENMC, 4, **Acta**, Lisboa p. 95-108, 1995.

PROLA, L.C. e PIERIN, I., Strength evaluation of cold-formed steel columns using the results of finite strip and finite element linear stability analysis**, Engineering structures and technologies**. Vilnius: Technika. v. 1, p. 30-43, 2009.

PROLA, L.C., CAMOTIM, D., RODRIGUES, F.C. e CAMPOS, F., Stability and ultimate strength of cold-formed steel S-columns, Stability Problems in Designing, Construction and Rehabilitation of Metal Structures. In: International Colloquium on Structural Stability, 5, **Proceedings**, p. 81-93, 1996.

PROLA, L.C., **Estabilidade local e global de elementos estruturais de aço enformados a frio**, Tese (Doutoramento). Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2001.

PRZEMIENIECKI, J.S., Discrete element method for stability analysis of complex structures, **The Aeronautical Journal**, v. 72, p. 1077-1086, 1968.

PRZEMIENIECKI, J.S., Finite element structural analysis of local instability, **Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics** (AIAA), v. 11, Nº 1, p. 33-39, 1973.

PRZEMIENIECKI, J.S., Matrix analysis of local instability in plates, stiffened panels and columns, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 5, p. 209-216, 1972.

RANAWAKA, T., MAHENDRAN, M., Distortional buckling tests of cold-formed steel compression members at elevated temperatures**, Journal of Constructional Steel Research**. v. 65, p. 249-259, 2009.

RANAWAKA, T., MAHENDRAN, M., Numerical modeling of light gauge cold-formed steel compression members subjected to distortional buckling at elevated temperatures. **Thin-Walled Structures**. v. 48, p. 334-344, 2010.

REAL, P.M.V., CAZELI, R., SILVA, L.S., SANTIAGO, A., PILOTO, P., The effect of residual stress in lateral torsional buckling of steel I-beams at elevated temperature, **Journal of Constructional Research**. v. 60, p. 783-793, 2003.

REAL, P.M.V., **Incêndio em estruturas metálicas: cálculo estrutural**, Amadora: Orion, 2003.

REIS, A. e CAMOTIM, D., **Estabilidade estrutural**, Mc-Graw Hill, 2000.

RHODES, J. e HARVEY, J.M., Examination of Plate Post-Buckling Behaviour, **Journal of the Engineering Mechanics Division** (ASCE), v. 103, Nº 3, p. 461-478, 1977.

RHODES, J. e HARVEY, J.M., Plain channel section struts in compression and bending beyond the local buckling load, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 18, p. 511-519, 1976.

RHODES, J. e HARVEY, J.M., The Local and Post-Local Buckling of Thin-Walled Beams, **Aeronautical Quarterly**, v. 22, pp. 363-388, 1971.

RHODES, J. e HARVEY, J.M., The Local Instability of Thin-Walled Sections Under Combined Compression and Bending, In: International Specialty Conference on Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction, 3, **Proceedings**, St. Louis, USA, pp. 51-87, 1975.

RIBEIRO, J. C., **Desenvolvimento e aplicação de sistema computacional para simulação via método dos elementos finitos do comportamento de estruturas de**

aço e mistas em situação de incêndio, Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
RIBEIRO, J. C., **Simulação via método dos elementos finitos da distribuição tridimensional de temperatura em estruturas em situação de incêndio**, Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
RIGOBELLO, R., NETO, J.M. e CODA, H.B., Desenvolvimento e validação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio, In: I CILASCI. **Anais**, Natal, 2011.
Riks, E., The application of Newton's method to the problem of elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 3, p.1060-1065, 1972.
ROURE, F., PASTOR, M.M., CASAFONT, M., SOMALO M.R., Stub column tests for racking design: Experimental testing, FE analysis and EC3, **Thin Walled Structures**. v. 49, p. 167-184, 2010.
RUBERT, A., SCHAUMANN, P., Critical temperatures of steel columns exposed to fire, **Fire Safety Journal**, v. 13, p. 39-44, 1988.
RUBERT, A., SCHAUMANN, P., Structural steel and plane frame under fire action, **Fire Safety Journa**l, v. 10, p. 173-184, 1986.
SAINT-VENANT, B., **Mémoire sur la Torsion des Prismes, Mémoires des Savants Etrangers**, v. XIV, pp. 233-560, 1855.
SCHAFER, B. W. e ÁDÁNI, S., Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. In: International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, 18, **Proceedings**, 2006.
SCHAFER, B.W., PEKOZ, T., Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stress. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 47, p. 193-210, 1998.
SCHLEICH, J.B. e CAJOT, L.G., Global fire safety concept for buildings, **La Revue de Métallurgie-Cahier d'Informations Techniques.** v. 94, p. 129-149, 1997.
SCHOENBERG, I.J., Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytical functions, **Q. Appl. Math**. v. 4, p. 45-99, 1946.
SEITO, I.A., GILL, A.A., PANNONI, F.D., ONO, R., SILVA, S.B., DEL CARLO, U. e SILVA, V.P., **A Segurança contra incêndio no Brasil**, São Paulo: Projeto Editora, 2008.
SEGERLIND, L.J. **Applied finite element analysis**. New York: Wiley, 1984.
SHANLEY, F.R., Inelastic Column Theory, **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 14, pp. 261-267, 1947.
SHERBOURNE, A.N. e BEDAIR, O.K., Plate-Stiffener Assemblies in Uniform Compression – Part II: Postbuckling, **Journal of Engineering Mechanics** (ASCE), v. 119, Nº 10, p. 1956-1972, 1993.
SILVA, V. P., Ação térmica nas estruturas. O modelo do incêndio natural compartimentado, **Boletim Técnico PEF 9911**, Escola Politécnica, São Paulo, p. 01-20, 1999.
SILVA, V. P., **Estruturas de aço em situação de incêndio**. Tese (Doutorado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997.

SILVA, V.P., CORREIA, A.M. e RODRIGUES, J.P.C., Simulação do comportamento ao fogo de pilares de aço em contato com alvenaria. In: Jornadas Sudamericana de Ingenieria Estructural, 33, **Proceedings**, Santiago, 2008.

SILVA, V.P., **Estruturas de aço em situação de incêndio**, São Paulo, Zigurate, 2001.

SILVA, V.P., FAKURY, R.H., RODRIGUES, F. C. e PANNONI, F. D., A real fire in small apartment - a case study. In: Workshop Structures in Fire, 4, Proceedings, 2006, Aveiro. Universidade de Aveiro. v. 2. p. 1023-1034, 2006.

SILVA, E.L., SILVA, V.P., **Dimensionamento de perfis formados a frio conforme NBR 14762 e NBR 6355**, Instituto Brasileiro de Siderurgia, Centro Brasileiro de Construção em Aço. 2008.

SILVESTRE, N., CAMOTIM, D., Nonlinear generalized beam theory for cold-formed steel members. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**. v. 3, p. 461-490, 2003.

SILVESTRE, N., **Teoria generalizada de vigas: formulações, implementação numérica e aplicações**, Tese (Doutoramento), Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2005.

SMITH, C.I., KIRBY, B.R., LAPWOOD, K.J., CUNNINGHAM, A.P., PRESTON, R.R., The reinstatement of fire damaged steel framed structures, **Fire Safety Journal**, v. 4, p. 21-62, 1981.

SZYCHOWSKI, A., The stability of eccentrically compressed thin plates with a longitudinal free edge and with stress variation in the longitudinal direction, **Thin Walled Structures**, v. 46, pp. 494-505, 2008.

TALAMONA, D. e FRANSSEN, J. M., A Quadrangular Shell Finite Element for Concrete and Steel Structures Subject to Fire. **Journal of Fire Protection Engineering**. v. 15, p. 237-264, 2005.

TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M., **Theory of elastic stability**, 1st Edition, McGraw-Hill, New York, 1963.

TIMOSHENKO, S.P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S., **Theory of Plates and Shells**, McGraw-Hill, New York, 1959.

TIMOSHENKO, S.P., Sur la Stabilité des Systèmes Elastiques, **Collected Papers of Stephen P. Timoshenko**, McGraw-Hill, New York, p. 92-224, 1953. artigo original publicado em 1905.

TRAHAIR, N.S., **Flexural-torsional buckling of structures**, E & FN Spon, London, 1993.

UNDERWRITERS LABORATORY, **Fire resistance directory**, USA. 2011.

VAN ERP, G. M., **Advanced Buckling Analyses of Beams with Arbitrary Cross Sections**, Tese (Doutorado). Universidade Técnica de Eindhoven, 1989.

VLASOV, V.Z., **Thin-walled elastic beams. 2ª ed. Jerusalem**, Israel Program for Scientific Translations, 1961.

VON KÁRMAN, T., SECHLER, E.E. e DONNELL, L.H., The Strength of Thin Plates in Compression, **Transactions of the American Society of Mechanical Enginneers** (ASME), v. 54, p. 53-57, 1932.

VRCELJ, Z. e BRADFORD, M.A., A simple method for the inclusion of external and internal supports in the spline finite strip method (SFSM) of buckling analysis **Computers and Structures**, v. 86, p. 529-544, 2008.
WAGNER, R., Torsion and buckling of open sections, National Advisory Committee for Aeronautics, **Thecnical Memorandum Nº 807**, 1936.
WALKER, A.C., Local instability in plates and channel struts, **Journal of the Structural** (Division ASCE), v. 92, Nº 3, p. 39-55, 1966.
WANG, X. e HUAN, J., Elastoplastic buckling analyses of rectangular plates under biaxial loadings by the differential quadrature method, **Thin Walled Structures**. v. 47, p. 14- 20, 2009.
WANG, Y.C., **Steel and composite structures behaviour and design for fire safety**, London Spon Press, 2002.
WEMPNER, G. A., Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, p.1581-1599, 1971.
WENG, C.C., Effect of residual stress on cold-formed steel column strength. **Journal of Structural Engineering**. ASCE. v. 117, p. 1622-1640. 1991.
WENG, C.C., PEKÖZ, T., Residual stresses in cold-formed steel members**. Journal of Structural Engineering**. ASCE. v. 116, p. 1230-1246. 1990.
WICKSTROM, U., Temperature analysis of heavily-insulated steel structures exposed to fire, **Fire of Safety Journal**. v. 9, p. 281-285, 1985.
WITTRICK, G., General sinusoidal stiffness matrices for buckling and vibration of thin-walled structures, **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 10, p. 949-966, 1968.
YAMAKI, N., Post-Buckling Behaviour of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, **Journal of Applied Mechanics**, v. 26, p. 407-414, 1959.
YANG, D. e HANCOCK, G.J**., Numerical Simulations of High Strength Steel Lipped-Channel Columns Numerical Simulations of High Strength Steel Lipped-Channek Columns**, Department of Civil Engineering Sydney NSW 2006 Centre for Advanced Structural Engineering, 2004.
YAN-LIN, G. e LINDER, J., Analysis of elastic-plastic interaction buckling of stiffened panels by spline finite strip method, **Computers and Structures**. v. 46, p. 529-536, 1993.
YAN-LIN, G. e SHAO-FAN, C., Postbuckling Interaction Analysis of Cold-formed Thin-walled Channel Sections by Finite Strip Method, **Thin Walled Structures**. v. 11, 277-289, 1991.
YAN-LIN, G., Local and overall interactive instability of thin-walled box-section columns, **Journal of Constructional Steel Research**. v. 22, p. 1-19, 1992.
YIN, Y.Z., WANG, Y.C., Numerical simulations of the effects of non-uniform temperature distributions on lateral torsional buckling resistance of steel I-beams, **Journal of Constructional Research**. v. 59, p. 1009-1033, 2003.
YU, C. e SCHAFER, B.W., Effect of Longitudinal Stress Gradients on Elastic Buckling of Thin Plates, **Journal of Engineering Mechanics**, v. 133, p. 452-463, 2007.

YU, C., YAN, W., Effective Width Method for determining distortional buckling strength of cold-formed steel flexural C and Z sections, **Thin-Walled Structures**. v. 49, p. 233–238, 2011.
YU, W.-W., Cold-formed steel design, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, 2000.
ZHAO, B., KRUPPA, J., RENAUD, C., O´CONNOR, M., MECOZZI, E., APIAZU, W., DEMARCO, T., KARLSTRÖM, P., JUMPPANEN, U., KAITILA, O., OKSANEN, T., SALMI, P., Calculations rules of lightweight steel sections in fire situations. **Technical Steel Research**. Final Report, 2005.
ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L., **The finite element method**, 4th ed London, v. 2, McGraw-Hill, 1991.