

LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO

Eng. Civil, Escola Politécnica da USP, 1977

O ESTUDO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA EM
ESTRUTURAS LAMINARES PELO MÉTODO DOS ELE-
MENTOS FINITOS.

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para a obtenção
do grau de Mestre em Engenharia

*
Orientador: Prof. Dr. Decio Leal de Zagottis
Professor Titular do Departamento de
Engenharia de Estruturas e Fundações
da EPUSP

São Paulo, 1982

FD-410

AGRADECIMENTOS

- . Ao Prof. Décio de Zagottis pela orientação
- . Ao Eng^o Hideki Ishitani pelo trabalho de implantação das sub-rotinas deste trabalho no programa CALGER.

ÍNDICE

	<u>pág.</u>
INTRODUÇÃO	III
1. CONCEITOS INICIAIS	1
1.1 O Teorema dos Trabalhos Virtuais	1
1.2 A Função Densidade de Energia	2
1.3 O Teorema da Energia Potencial Total	2
2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	4
3. EXEMPLO 1 — O PROCESSO ITERATIVO	10
4. EXEMPLO 2 — A MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA DE TRELIÇA	14
5. EXEMPLO 3 — A MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA DE TRELIÇA DEDUZIDA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	22
6. EXEMPLO 4 — A MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA DE FLEXÃO	29
7. ELEMENTOS TRIANGULARES	36
8. OBSERVAÇÕES SOBRE A VARIAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ COM OS DESLOCAMENTOS NODAIS	43
9. ELEMENTOS QUADRANGULARES	48
9.1 Observações sobre os critérios de Convergência	52
9.2 Roteiro de Cálculo	53

ÍNDICE

	<u>pág.</u>
10. ELEMENTOS COM 8 NÓS	61
11. A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	63
11.1 O Método de Newton-Cotes	63
11.2 O Método de Gauss	66
11.3 Conclusão	67
12. EXEMPLO 5 — A INTEGRAÇÃO EXATA	68
13. EXEMPLO 6 — COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS FORNECIDOS COM OS DIVERSOS TIPOS DE ELEMENTOS	71
14. OBSERVAÇÕES SOBRE A BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO	87
15. OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	89
15.1 Sobre a ordem de grandeza das deformações	89
15.2 Sobre as Matrizes \underline{A} e $\underline{\theta}$	92
15.3 Sobre a interpretação física das Matrizes que compõem a matriz de rigidez	95
BIBLIOGRAFIA	106
ANEXOS	

INTRODUÇÃO

Este trabalho pretende estudar a não linearidade geométrica de estruturas laminares planas em regime elástico através do desenvolvimento de um programa de computação formulado com base no método dos elementos finitos.

No campo teórico, esse estudo liga-se a um conjunto de outros trabalhos desenvolvidos, ou em desenvolvimento, no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo que visam a esclarecer os aspectos conceituais da não linearidade geométrica.

A formulação da não linearidade geométrica através do método dos elementos finitos parte da energia potencial do sistema estrutural, na qual a parcela corresponde à energia de deformação corresponde a um polinômio de 4º grau nos deslocamentos nodais. Da minimização da energia potencial resulta, então, um sistema de equações de 3º grau.

No processo incremental, transforma-se o problema em uma sequência de análises lineares, isto é, para cada incremento de carga, admite-se comportamento geometricamente linear em que a matriz de rigidez é caracterizada em função dos deslocamentos e tensões correspondentes ao nível de carregamento do estágio anterior, a partir da diferenciação de equações do 3º grau, que fornece um sistema linear nos acréscimos de deslocamentos.

No processo iterativo, adotado neste trabalho, parte-se da solução geometricamente linear correspondente ao carregamento total. Em função dos deslocamentos e tensões instalados na estrutura, altera-se a matriz de rigidez, o que permite a obtenção de novos valores dos deslocamentos. A sequência de operações é executada até que a diferença entre os valores obtidos em duas etapas sucessivas satisfaça a precisão desejada, ficando, assim, satisfeito o sistema de equações do 3º grau.

O efeito das tensões na matriz de rigidez, que nos estudos das estruturas reticuladas decorre basicamente do efeito de 2.^a ordem da força normal, não pode ser caracterizado tão facilmente no caso de estruturas laminares e maciças.

O trabalho procura abordar os aspectos teóricos que fundamentam o processo de resolução adotado, exemplificando-o no caso das barras de treliça e das barras de flexão. Do estudo de elementos usados na análise de estruturas laminares, feito a seguir, resultam sub-rotinas que foram implantadas na programa de computador CALGER, elaborado pelo Eng^o Hideki Ishitani originalmente para o estudo da flambagem de estruturas reticuladas.

À análise numérica do problema deparam-se os custos elevados. A adoção de elementos cujas características de rigidez são de fácil definição exige o emprego de grande número de elementos na discretização da estrutura e conseqüentemente a solução de um sistema de equações de grau elevado. Já a utilização de elementos mais complexos do ponto de vista da definição das características de rigidez do elemento permite apreciável redução do número de incógnitas. Assim, parte considerável dos custos derivam ora da caracterização do elemento, ora da solução do sistema de equações. O trabalho limita-se à comparação dos resultados obtidos pela discretização com elementos de complexidade crescente, mantendo aproximadamente constante o número de incógnitas.

No campo das aplicações, o trabalho permite a análise de estruturas laminares com grandes deslocamentos ou grandes rotações mas com pequenas deformações e, indiretamente, a análise de estruturas com grandes deformações através da introdução da não linearidade física a ser feita posteriormente. Assim, podem-se estudar, por exemplo, barragens de terra (nas quais, mesmo para grandes deslocamentos, o material não se afaste significativamente do comportamento elástico), e os problemas de instabilidade, no plano da estrutura.

Ademais, a formulação desenvolvida possibilita a abordagem das placas submetidas a ações em seu próprio plano além das cargas transversais correntes. A solução, neste caso, é formalmente análoga à desenvolvida no exemplo que estuda as barras em flexão.

INTRODUCTION

The purpose of this work is the study of the geometrical unlinearity of plane sheeted structures under elastic behavior through a computerized program development formulated according to the finite elements method.

Theoretically speaking, such study closely relates to other ones already developed or in development stage at the Structures and Foundations Engineering Department of the Escola Politecnica da Universidade de São Paulo, aiming to clarify the conceptual aspects of the geometrical unlinearity.

The geometrical unlinearity formulation through the finite elements method starts from the structural sistem's potential energy where the corresponding parcel to the deformation energy relates to a 4th. degree polinom in the nodal displacements. From the potencial energy minimization then results a 3rd.degree equation system.

At the incremental process the problem is changed into a series of linear analysis, that is, for each load increment it is admitted a geometrically linear behavior in which the rigidity matrix characterizes itself in function of stresses and displacements correspondents to the preceding stage of loading level, differenciating the 3rd. degree equations that leads to a linear system in the incremental displacements.

In the iterative process adopted for this work, we start from the geometrically linear solution corresponding to total loading. In function of the stresses and displacements out on the structure we change the rigidity matrix, allowing the obtention of new values for the displacements. The operations sequence is worked up until the difference between obtained values at two successive stages satisfy the desired precision, satisfying too the 3rd. degree equations system.

The stresses effect on the rigidity matrix - which, in the reticular structures, basically comes from a 2nd. order effect of the normal force, - cannot be so easilly characterized in the case of sheeted and massive structures.

This work tries to focus the theoretical points that lead the adopted resolution process, exemplifying it in the case of trusses bars and bars under flexion. From the study of used elements in the sheeted structures analisis to follow, some subroutines will result which were introduced into the CALGER computerized program elaborated by Eng. Hideki Ishitani, originally prepared for a reticular structures buckling study.

To the problem's numerical analisis, high costs will be faced. The adoption of elements whose rigidity characteristics are of easy definition demands the application of a great number of elements in the structure discretized and, consequently, the resolution of a high degree equation system. Otherwise, the use of more complex elements from the point of view of the element rigidity characteristics definition, allows appreciable reduction in the number of unknowns. Thus, a meaningfull cost part comes sometimes from the element characterization and othertimes from the equation system resolution. This study limits itself to the comparison of obtained results through the discretization with increasing complexity elements, maintaining the quantity of unknowns roughly constant.

In the field of applications, the study allows the analisis of sheeted structures with large rotations or displacements but small deformations and, indirectly, the analisis of structures with large deformations through the introduction of the fisical unlinearity to be furtherly done. Thus, it may be studied for instance, earth dams (were the displacements may be of a large amount without a meaningfull departure from the material elastic behavior), and the instability problems at the structure plane. Furthermore, the developed formulation allows the focusing of plates submitted to actions over its own plane besides the usual cross loads. The solution in this case is formally similar to the one that was developed in the bars under flexion example.

1. CONCEITOS INICIAIS

1.1 O TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Para um dado sólido, seja \underline{f} o campo de forças de volume e \underline{s} o campo de forças de superfície.

A superfície externa pode ser dividida em duas partes: S_σ onde se conhecem os esforços externos \underline{s} e S_u onde se conhecem os deslocamentos \underline{u}^* .

Seja \underline{u} um campo de deslocamentos tal que $\underline{u} = \underline{u}^*$ em S_u ao qual correspondem os campos $\underline{\epsilon}$ de deformações e $\underline{\sigma}$ de tensões.

Seja agora $d\underline{u}$ um campo tal que $\underline{u} + d\underline{u} = \underline{u}^*$ em S_u , isto é, $d\underline{u} = 0$ em S_u e $d\underline{\epsilon}$ o campo de deslocamentos compatível com $d\underline{u}$.

Nessas condições, definem-se:

TRABALHO VIRTUAL DOS ESFORÇOS INTERNOS $\delta\tau_i$

$$\delta\tau_i = \int_V d\underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad (1.1)$$

TRABALHO VIRTUAL DOS ESFORÇOS EXTERNOS $\delta\tau_e$

$$\delta\tau_e = \int_V d\underline{u}^T \underline{f} dv + \int_{S_\sigma} d\underline{u}^T \underline{s} dS \quad (1.2)$$

Pode-se demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA:

A condição necessária e suficiente para que os campos $\underline{\sigma}$, \underline{f} e \underline{s} estejam em equilíbrio é que

$$\delta \tau_i = \delta \tau_e, \quad \forall \underline{du}$$

1.2 A FUNÇÃO DENSIDADE DE ENERGIA

Para os materiais elásticos, admite-se a existência de uma função $W = W(\underline{\epsilon})$, denominada energia de deformação específica, tal que as tensões sejam dadas pela derivada de W em relação às deformações correspondentes, isto é:

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\epsilon}} \quad (1.3)$$

1.3 O TEOREMA DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Dado um sólido, para cada campo de deslocamentos \underline{u} pode-se calcular a grandeza $\pi(\underline{u})$ dada por:

$$\pi(\underline{u}) = \int_V W(\underline{\epsilon}) \, dV - \int_V \underline{u}^T \underline{f} \, dV - \int_{S_\sigma} \underline{u}^T \underline{s} \, dS \quad (1.4)$$

onde:

$$\pi(\underline{u}) \quad = \text{energia potencial total}$$

$$\int_V W \, dV = \text{energia de deformação}$$

$$- \int_V \underline{u}^T \underline{f} \, dV - \int_{S_\sigma} \underline{u}^T \underline{s} \, dS = \text{energia potencial das cargas externas}$$

TEOREMA:

De todos os campos de deslocamentos possíveis, o que corresponde ao equilíbrio torna estacionária a energia potencial total.

De fato, a uma variação $d\underline{u}$ do campo de deslocamentos corresponde uma variação da energia potencial total dada por:

$$\delta\pi = \int_V d\underline{\varepsilon}^T \frac{\partial W}{\partial \underline{\varepsilon}} \, dV - \int_V d\underline{u}^T \underline{f} \, dV - \int_{S_\sigma} d\underline{u}^T \underline{s} \, dS$$

Considerando as equações (1.3), (1.1) e (1.2), tem-se:

$$\delta\pi = \int_V d\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, dV - \int_V d\underline{u}^T \underline{f} \, dV - \int_{S_\sigma} d\underline{u}^T \underline{s} \, dS = d\tau_i - d\tau_e$$

Para o campo de deslocamentos que define o equilíbrio, $\delta\tau_i = \delta\tau_e$ e portanto

$$\delta\pi = 0$$

isto é, π passa por um valor estacionário.

OBSERVAÇÃO:

Pode-se provar que quando se consideram materiais estáveis ($d\underline{\varepsilon}^T d\underline{\sigma} > 0$) e linearidade geométrica, π é mínima para o campo de deslocamentos que corresponde ao equilíbrio.

2.
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos permite escrever π em função de um número finito de parâmetros que, como se verá adiante, são os deslocamentos em determinados pontos da estrutura. Com isso, o problema inicial que consistia em procurar o valor extremo de um funcional passa a ser o de pesquisar o valor extremo de uma função com número finito de variáveis.

Considere-se, por exemplo, a estrutura da Figura (2.1) caracterizada por um número finito de elementos triangulares.

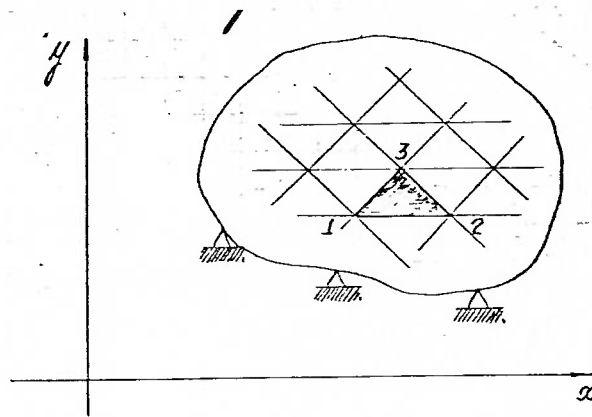


FIGURA (2.1)

Os deslocamentos \underline{u} no interior de cada elemento são dados em função dos deslocamentos nodais \underline{u}^e da seguinte maneira:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x,y) & 0 & \phi_2(x,y) & 0 & \phi_3(x,y) & 0 \\ 0 & \phi_1(x,y) & 0 & \phi_2(x,y) & 0 & \phi_3(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \underline{N}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1^e \\ \underline{u}_2^e \\ \underline{u}_3^e \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{u}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \end{Bmatrix}$$

Finalmente:

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e \quad (2.1)$$

As funções $\phi_i(x,y)$ são chamadas funções de interpolação e gozam da seguinte propriedade:

$$\phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

De fato

$$u(x_j, y_j) = \sum \phi_i(x_j, y_j) u_i^e = u_j^e$$

para tanto, devemos ter:

$$\phi_i(x_j, y_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$\phi_i(x_j, y_j) = 1, \quad i = j$$

Resumindo:

$$\varnothing_i (x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

A variações do campo de deslocamentos caracterizadas por \underline{du}^e correspondem variações do campo de deformações $\underline{d\varepsilon}$ dadas por:

$$\underline{d\varepsilon} = \underline{B}(u) \underline{du}^e \quad (2.2)$$

Com isso pode-se escrever:

$$\delta\pi = \Sigma \int_V \underline{d\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, dV - [\Sigma \int_V \underline{du}^T \underline{f} \, dV + \Sigma \int_{S_\sigma} \underline{du}^T \underline{s} \, dS]$$

onde a somatõria se estende a todos os elementos.

Considerando-se as equações (2.1) e (2.2), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \Sigma \int_V \underline{du}^{eT} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - [\Sigma \int_V \underline{du}^{eT} \underline{N}^T \underline{f} \, dV + \Sigma \int_{S_\sigma} \underline{du}^{eT} \underline{N}^T \underline{s} \, dS] \\ &= \Sigma \underline{du}^{eT} \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - [\Sigma \underline{du}^{eT} \int_V \underline{N}^T \underline{f} \, dV + \Sigma \underline{du}^{eT} \int_{S_\sigma} \underline{N}^T \underline{s} \, dS] \end{aligned}$$

Os deslocamentos nodais \underline{u}^e relacionam-se aos deslocamentos \underline{a} da estrutura da seguinte maneira:

$$\underline{u}^e = \underline{I}e \underline{a} \quad (2.3)$$

Se os deslocamentos \underline{u}^e e \underline{a} forem referidos ao mesmo sistema de eixos, $\underline{I}e$ pode ser interpretada como a matriz que fornece a posiçãõ do elemento na estrutura.

Voltando à expressão de $d\pi$:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \sum \underline{da}^T \underline{Ie}^T \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - \left[\sum \underline{da}^T \underline{Ie}^T \int_V \underline{N}^T \underline{f} \, dV + \right. \\ & \left. + \sum \underline{da}^T \underline{Ie}^T \int_{S_\sigma} \underline{N}^T \underline{s} \, dS \right] = \underline{da}^T \left[\sum \underline{Ie}^T \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - \right. \\ & \left. - \left[\sum \underline{Ie}^T \int_V \underline{N}^T \underline{f} \, dV + \sum \underline{Ie}^T \int_{S_\sigma} \underline{N}^T \underline{s} \, dS \right] \right] \end{aligned}$$

Havendo forças \underline{F} concentradas nos nós, deve-se acrescentar no lado direito da expressão acima o termo $-\underline{da}^T \underline{F}$.

Impondo $d\pi = 0$, obtêm-se:

$$\underline{da}^T \underline{\psi}(\underline{a}) = 0$$

onde:

$$\underline{\psi}(\underline{a}) = \sum \underline{Ie}^T \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dV - \underline{R}$$

e

$$\underline{R} = \sum \underline{Ie}^T \int_V \underline{N}^T \underline{f} \, dV + \sum \underline{Ie}^T \int_{S_\sigma} \underline{N}^T \underline{s} \, dS + \underline{F} \quad (2.4)$$

Dada a arbitrariedade de \underline{da} , resulta:

$$\underline{\psi}(\underline{a}) = 0 \quad (2.5)$$

Tomando-se variações de $\underline{\psi}$, tem-se:

$$d\underline{\psi} = \sum \underline{Ie}^T \int_V \underline{dB}^T \underline{\sigma} \, dV + \sum \underline{Ie}^T \int_V \underline{B}^T \underline{d\sigma} \, dV$$

Colocando-se $\underline{B}(\underline{a})$ na forma

$$\underline{B}(\underline{a}) = \underline{B}_0 + \underline{B}_L(\underline{a}) \quad (2.6)$$

resulta

$$d\underline{B} = d\underline{B}_L$$

Supõe-se que ainda se possa escrever

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\epsilon} \quad (2.7)$$

de modo que:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D} d\underline{\epsilon} = \underline{DB} d\underline{u}^e$$

As relações acima levadas na expressão de $d\underline{\psi}$ fornecem:

$$d\underline{\psi} = \sum \underline{T}e^T \int_V d\underline{B}_L^T \underline{\sigma} dV + \sum \underline{T}e^T \left[\int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \right] d\underline{u}^e$$

Como se verá adiante, pode-se escrever:

$$\int_V d\underline{B}_L^T \underline{\sigma} dV = \underline{k}_\sigma d\underline{u}^e$$

Além disso considerando-se a equação (2.6)

$$\begin{aligned} \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV &= \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 dV + \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L dV + \\ &+ \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 dV + \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L dV = \underline{k}_0 + \underline{k}_L \end{aligned}$$

onde:

$$\underline{k}_0 = \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 dV$$

e

$$\underline{k}_L = \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L dV + \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 dV + \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L dV \quad (2.8)$$

Com as relações anteriores na expressão de $d\underline{\psi}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} d\underline{\psi} &= (\sum \underline{T}_e^T \underline{k}_0 \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_L \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_\sigma \underline{T}_e) d\underline{a} = \\ &= \underline{K}_T d\underline{a} \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde \underline{K}_T é a matriz de rigidez tangente da estrutura, dada por

$$\begin{aligned} \underline{K}_T &= \underline{K}_0 + \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma = \underline{K}_1 + \underline{K}_\sigma \\ \underline{K}_0 &= \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_0 \underline{T}_e \\ \underline{K}_L &= \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_L \underline{T}_e \\ \underline{K}_\sigma &= \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_\sigma \underline{T}_e \end{aligned} \quad (2.10)$$

A solução do problema obtém-se iterativamente. Em cada estágio os deslocamentos nodais \underline{a}^{n+1} são dados em função dos deslocamentos \underline{a}^n da iteração precedente através de:

$$\underline{a}^{n+1} = \underline{a}^n + \Delta \underline{a}^n$$

onde

$$\Delta \underline{a}^n = -(\underline{K}_T^n)^{-1} \underline{\psi}_n$$

3.
EXEMPLO 1 — O PROCESSO ITERATIVO

A fim de ilustrar o processo iterativo descrito acima, considere-se a estrutura da Figura (3.1) em que as barras são supostas rígidas. O sistema possui apenas 1 grau de liberdade, já que os deslocamentos em cada ponto ficam determinados uma vez conhecido o parâmetro θ indicado.

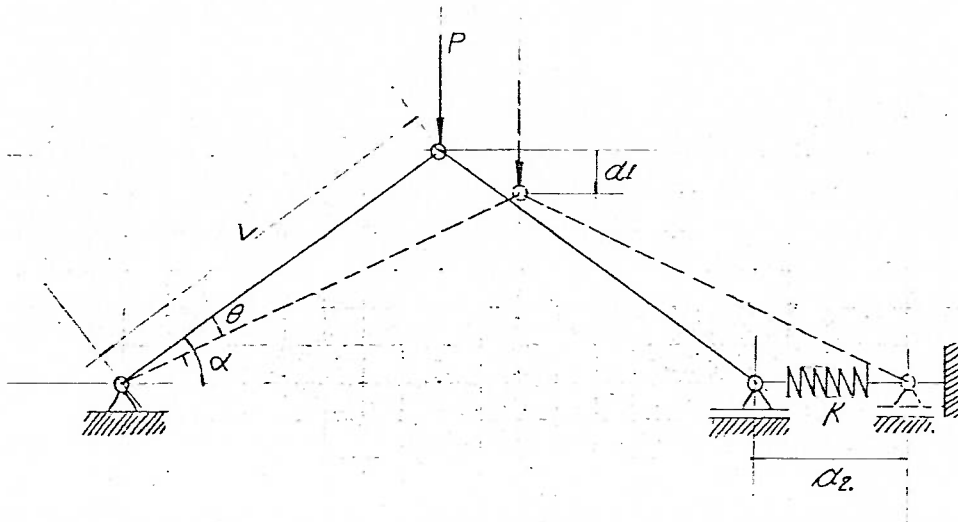


FIGURA (3.1)

Da figura obtem-se:

$$d_1 = L [\text{sen}\alpha - \text{sen}(\alpha - \theta)]$$

$$d_2 = 2L [\text{cos}(\alpha - \theta) - \text{cos}\alpha]$$

A energia potencial total $\bar{\pi}$ é dada por:

$$\pi = 1/2 K d_2^2 - P d_1$$

$$= 2KL^2 [\text{cos}(\alpha - \theta) - \text{cos}\alpha]^2 - PL [\text{sen}\alpha - \text{sen}(\alpha - \theta)] = \pi(\theta)$$

Pelo teorema da energia potencial, devemos ter

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta} = 4KL^2 [\cos(\alpha-\theta) - \cos\alpha] \operatorname{sen}(\alpha-\theta) - PL \cos(\alpha-\theta) = 0$$

ou simplificando (já que $\alpha-\theta \neq \pi/2$):

$$\psi(\theta) = [\cos(\alpha-\theta) - \cos\alpha] \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{\cos(\alpha-\theta)} - p = 0$$

onde

$$p = \frac{P}{4KL}$$

Desenvolvendo a expressão de ψ em série em torno da posição inicial $\theta = 0$, tem-se:

$$\psi(\theta) = \psi(0) + \theta\psi'(0) + \frac{\theta^2}{2!} \psi''(0) + \frac{\theta^3}{3!} \psi'''(0) + \dots$$

$$\psi'(\theta) = \psi'(0) + \theta\psi''(0) + \frac{\theta^2}{2!} \psi'''(0) + \dots$$

Os coeficientes das equações acima obtem-se derivando a expressão exata de ψ . Assim:

$$\psi'(\theta) = \frac{\cos\alpha - \cos^3(\alpha-\theta)}{\cos^2(\alpha-\theta)}$$

$$\psi''(\theta) = -\operatorname{sen}(\alpha-\theta) - 2\cos\alpha \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{\cos^3(\alpha-\theta)}$$

$$\psi'''(\theta) = \cos(\alpha-\theta) + 2\cos\alpha \left[\frac{1 + 2\operatorname{sen}^2(\alpha-\theta)}{\cos^4(\alpha-\theta)} \right]$$

Para $\theta = 0$ tem-se:

$$\psi(0) = -p$$

$$\psi'(0) = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos} \alpha}$$

$$\psi''(0) = - \text{sen} \alpha \left[\frac{\text{cos}^2 \alpha + 2}{\text{cos}^2 \alpha} \right]$$

$$\psi'''(0) = \text{cos} \alpha + \frac{2(1 + 2 \text{sen}^2 \alpha)}{\text{cos}^3 \alpha}$$

Admitindo-se que ψ seja uma função linear, o valor inicial de θ é dado por:

$$\psi(\theta) = \psi(0) + \theta_1 \psi'(0) = 0$$

isto é:

$$\theta_1 = - \frac{\psi(0)}{\psi'(0)}$$

Pode-se, então, obter um valor corrigido θ_2 através de:

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\psi(\theta_1)}{\psi'(\theta_1)}$$

Generalizando:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{\psi(\theta_n)}{\psi'(\theta_n)}$$

até que se obtenha a precisão desejada.

Suponha-se que $p = 0.02$ e $\text{tg} \alpha = 0.75$ ($\text{sen} \alpha = 0.60$ e $\text{cos} \alpha = 0.80$)

$$\psi(0) = -0.02$$

$$\psi'(0) = \frac{0.60^2}{0.80} = 0.450$$

$$\psi''(0) = - 0.60 \left[\frac{0.80^2 + 2}{0.80^2} \right] = - 2.475$$

$$\psi'''(0) = 0.80 + \frac{2(1 + 2 \times 0.60^2)}{0.80^3} = 7.518750$$

$$\psi(\theta) = -0.020 + 0.450\theta - 1.2375\theta^2 + 1.253125\theta^3$$

$$\psi'(\theta) = 0.450 - 2.4750\theta + 3.759375\theta^2$$

$$\theta_1 = \frac{0.020}{0.450} = 0.044.444$$

$$\psi(\theta_1) = -0.002.334$$

$$\psi'(\theta) = 0.347.426$$

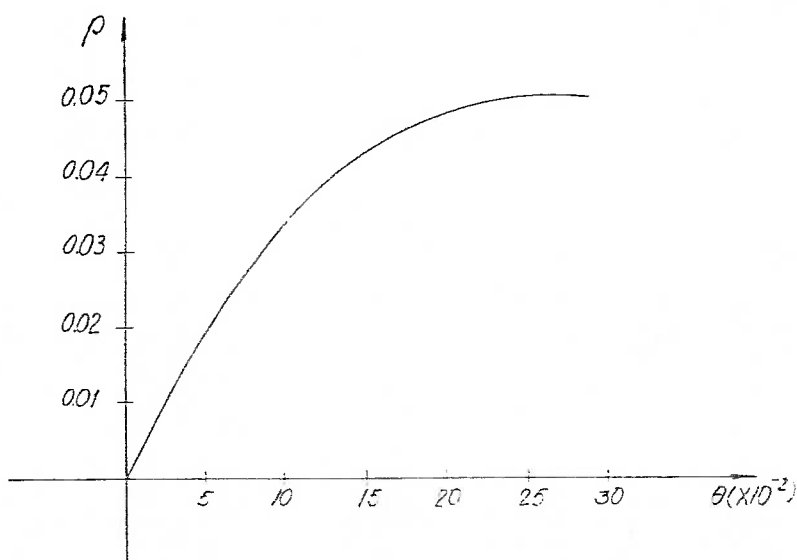
$$\theta_2 = 0.044.444 - \frac{0.002.334}{0.347.426} = 0.051.164$$

$$\psi(\theta_2) = -0.000.048$$

$$\psi'(\theta_2) = 0.333.211$$

$$\theta_3 = 0.051.164 - \frac{-0.000.048}{0.333.211} = 0.051308 \quad \psi(\theta_3) = 0$$

Repetindo-se o processo para diversos valores de p , obtem-se o gráfico abaixo:



p	θ
0.010	0.0237
0.020	0.0513
0.030	0.0850
0.040	0.130
0.045	0.163
0.050	0.235

4.
EXEMPLO 2 — A MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA DE TRELIÇA

Seja a barra prismática indicada na Figura (4.1)

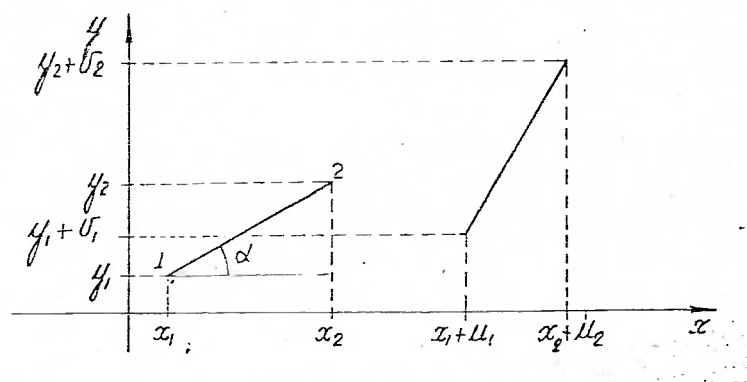


FIGURA (4.1)

São válidas as seguintes relações:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2$$

$$(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2 = (L + \Delta L)^2$$

Desenvolvendo a segunda expressão, obtem-se:

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_1)^2 + (u_2 - u_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)^2 + \\ & + (v_2 - v_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(v_2 - v_1) = L^2 + 2L\Delta L + \Delta L^2 \end{aligned}$$

Levando em conta a primeira expressão, obtêm-se:

$$\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 = \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) \left(\frac{x_2 - x_1}{L} \right) + \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right) \left(\frac{y_2 - y_1}{L} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2}$$

Desprezando-se o termo $\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2$ e notando que

$$\frac{x_2 - x_1}{L} = \cos \alpha \quad \text{e}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{L} = \sin \alpha$$

resulta:

$$\frac{\Delta L}{L} = \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) \cos \alpha + \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right) \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2}$$

No sistema local $\alpha = 0$; portanto:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2}$$

A energia de deformação \bar{e} dada por:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{EAL}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 = \\
 &= \frac{EAL}{2} \left[\frac{u_2^2 - 2u_1 u_2 + u_1^2}{L^2} + \frac{u_2^3 - 3u_1 u_2^2 + 3u_1^2 u_2 - u_1^3}{L^3} + \right. \\
 &\quad + \frac{u_2 v_2^2 - 2u_2 v_1 v_2 + u_2 v_1^2 - u_1 v_2^2 + 2u_1 v_1 v_2 - u_1 v_1^2}{L^3} + \\
 &\quad + \frac{u_2^4 - 4u_1 u_2^3 + 6u_1^2 u_2^2 - 4u_1^3 u_2 + u_1^4}{4L^4} + \\
 &\quad + \frac{u_2^2 v_2^2 - 2u_2^2 v_1 v_2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 u_2 v_2^2 + 4u_1 u_2 v_1 v_2 -}{2L^4} \\
 &\quad \quad \quad \left. \frac{- 2u_1 u_2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 - 2u_1^2 v_1 v_2 + u_1^2 v_1^2}{2L^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{v_2^4 - 4v_1 v_2^3 + 6v_1^2 v_2^2 - 4v_1^3 v_2 + v_1^4}{4L^4} \right]
 \end{aligned}$$

O valor de $d\psi$ pode ser obtido através de:

$$d\psi = d\left(\frac{\partial U}{\partial \underline{a}}\right)$$

$$\begin{array}{c}
 = \left[\begin{array}{cccc}
 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) & \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) & \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) & \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) & \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) & \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) & \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) & \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) & \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) & \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) & \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) & \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) & \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right)
 \end{array} \right] \begin{array}{c}
 du_1 \\
 dv_1 \\
 du_2 \\
 dv_2
 \end{array} =
 \end{array}$$

$$= \underline{k}_T \underline{du}^e$$

É fácil ver que \underline{k}_T é simétrica uma vez que:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)$$

Os elementos da matriz de rigidez são dados em seguida. É conveniente notar que a força normal N vale:

$$\begin{aligned}
 N = EA \frac{\Delta L}{L} = EA \left[\frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2} \right]
 \end{aligned}$$

Esta relação aparece sistematicamente nas expressões seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_1} = & \frac{EAL}{2} \left[\frac{-2u_2 + 2u_1}{L^2} + \frac{-v_2^2 + 2v_1 v_2 - v_1^2}{L^3} \right. \\ & + \frac{-4u_2^3 + 12u_1 u_2^2 - 12u_1^2 u_2 + 4u_1^3}{4L^4} + \\ & + \frac{-2u_2 v_2^2 + 4u_2 v_1 v_2 - 2u_2 v_1^2 + 2u_1 v_2^2 -}{2L^4} \\ & \left. \frac{-4u_1 v_1 v_2 + 2u_1 v_1^2}{2L^4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) = & \frac{EAL}{2} \left[\frac{2}{L^2} + \frac{6u_2 - 6u_1}{L^3} + \frac{12u_2^2 - 24u_1 u_2 + 12u_1^2}{4L^4} + \right. \\ & \left. + \frac{2v_2^2 - 4v_1 v_2 + 2v_1^2}{2L^4} \right] \\ = & \frac{EA}{L} + \frac{2EA}{L^2} (u_2 - u_1) + \frac{EA}{L} \left| \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2} \right] + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)^2 \\ = & \frac{EA}{L} + \frac{N}{L} + \frac{2EA}{L^2} (u_2 - u_1) + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) = & \frac{EAL}{2} \left[\frac{2v_2 - 2v_1}{L^3} + \frac{4u_2 v_2 - 4u_2 v_1 - 4u_1 v_2 + 4u_1 v_1}{2L^4} \right] \\ = & \frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) &= \frac{EAL}{2} \left[\frac{-2}{L^2} + \frac{-5u_2 + 5u_1}{L^3} + \frac{-12u_2^2 + 24u_1u_2 - 12u_1^2}{4L^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{-2v_2^2 + 4v_1v_2 - 2v_1^2}{2L^4} \right] \\
&= -\frac{EA}{L} - \frac{2EA}{L^2} (u_2 - u_1) - \frac{EA}{L} \left[\frac{u_2 - u_1}{L} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2} \right] - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)^2 \\
&= -\frac{EA}{L} - \frac{N}{L} - \frac{2EA}{L^2} (u_2 - u_1) - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_2} \left(-\frac{\partial U}{\partial u_1} \right) &= \frac{EAL}{2} \left[\frac{-2v_2 + 2v_1}{L^3} + \frac{-4u_2v_2 + 4u_2v_1 + \right. \\
&\quad \left. + 4u_1v_2 - 4u_1v_1}{2L^4} \right] \\
&= -\frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)
\end{aligned}$$

De maneira análoga calculam-se os demais elementos. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(-\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) = \frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left(-\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) = \frac{N}{L} + \frac{EA}{L^3} (v_2 - v_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) = -\frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_1} \right) = \frac{-N}{L} - \frac{EA}{L^3} (v_2 - v_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) = -\frac{EA}{L} - \frac{N}{L} - \frac{2EA}{L^2} (u_2 - u_1) - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) = -\frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) = \frac{EA}{L} + \frac{N}{L} + \frac{2EA}{L^2} (u_2 - u_1) + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial u_2} \right) = \frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) = -\frac{EA}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) = -\frac{N}{L} - \frac{EA}{L^3} (v_2 - v_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) = \frac{EA}{L} (v_2 - v_1) + \frac{EA}{L^3} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{\partial U}{\partial v_2} \right) = \frac{N}{L} + \frac{EA}{L^3} (v_2 - v_1)^2$$

Com os dados acima pode-se escrever \underline{k}_T da seguinte maneira:

$$\underline{k}_T = \underline{k}_0 + \underline{k}_C + \underline{k}_L$$

onde:

$$\underline{k}_o = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_\sigma = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_L = \frac{EA}{L^2} = \begin{bmatrix} 2(u_2 - u_1) & (v_2 - v_1) & -2(u_2 - u_1) & -(v_2 - v_1) \\ (v_2 - v_1) & 0 & -(v_2 - v_1) & 0 \\ -2(u_2 - u_1) & -(v_2 - v_1) & 2(u_2 - u_1) & (v_2 - v_1) \\ (-v_2 - v_1) & 0 & (v_2 - v_1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{EA}{L^3} \begin{bmatrix} (u_2 - u_1)^2 & (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) & -(u_2 - u_1)^2 & -(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \\ (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) & (v_2 - v_1)^2 & -(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) & -(v_2 - v_1)^2 \\ -(u_2 - u_1)^2 & -(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) & (u_2 - u_1)^2 & (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \\ -(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) & -(v_2 - v_1)^2 & (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) & (v_2 - v_1)^2 \end{bmatrix}$$

5.

EXEMPLO 3 — A MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA DE TRELIÇA DEDUZIDA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O campo de deslocamentos \underline{u} é dado em função dos deslocamentos nodais \underline{u}^e por:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & 0 & \phi_2(x) & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & 0 & \phi_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{u}^e$$

onde:

$$\phi_1(x) = 1 - x/L \quad e$$

$$\phi_2(x) = x/L$$

O campo de deformações $\underline{\epsilon}$ é dado por:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}_0 + \underline{\epsilon}_L$$

onde:

$$\underline{\epsilon}_0 = \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x} \right\} \quad e \quad \underline{\epsilon}_L = \left\{ 1/2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}$$

O campo $\underline{\epsilon}_0$ é dado em função dos deslocamentos nodais \underline{u}^e por:

$$\underline{\epsilon}_0 = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \quad 0 \right] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L} \underline{u} = \underline{L} \underline{N} \underline{u}^e = \underline{B}_0 \underline{u}^e$$

onde:

$$\underline{B}_0 = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad 0 \right] = 1/L \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O campo $\underline{\epsilon}_L$ é dado por:

$$\underline{\epsilon}_L = 1/2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = 1/2 \underline{A} \underline{e}$$

O vetor \underline{e} pode ser obtido a partir dos deslocamentos nodais \underline{u}^e , através de:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L}^* \underline{u} = \underline{L}^* \underline{N} \underline{u}^e = \underline{G} \underline{u}^e$$

onde:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{bmatrix} = 1/L \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso tem-se:

$$\underline{e} = 1/L \begin{Bmatrix} (u_2 - u_1) \\ (v_2 - v_1) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{A} = 1/L [(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)]$$

Finalmente:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L} \right\}$$

$$\underline{\varepsilon}_L = 1/2 \left\{ \frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2} \right\}$$

e

$$\underline{\varepsilon} = \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L} + 1/2 \left[\frac{(u_2 - u_1)^2}{L^2} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2} \right] \right\}$$

O campo de tensões $\underline{\sigma}$ é dado por:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} = E \underline{\varepsilon}$$

A variação de $\underline{\varepsilon}_L$ é dada por:

$$d\underline{\varepsilon}_L = 1/2 d \underline{A} \underline{\theta} + 1/2 \underline{A} d\underline{\theta}$$

É fácil ver que:

$$d \underline{A} \underline{\theta} = \underline{A} d\underline{\theta}$$

pelo que:

$$d\underline{\varepsilon}_L = \underline{A} d\underline{\theta} = \underline{A} \underline{G} d\underline{u}^e = \underline{B}_L d\underline{u}^e$$

onde:

$$\underline{B}_L = \underline{A} \underline{G} = 1/L^2 \begin{bmatrix} -(u_2 - u_1) & -(v_2 - v_1) & (u_2 - u_1) & (v_2 - v_1) \end{bmatrix}$$

Conhecidas as matrizes \underline{B}_0 e \underline{B}_L , as matrizes \underline{k}_0 e \underline{k}_L obtidas anteriormente resultam das seguintes operações:

$$\underline{k}_0 = \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 dV = EAL \underline{B}_0^T \underline{B}_0 \quad e$$

$$\begin{aligned} \underline{k}_L &= \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L dV + \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 dV + \\ &+ \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L dV = EAL (\underline{B}_0^T \underline{B}_L + \underline{B}_L^T \underline{B}_0 + \underline{B}_L^T \underline{B}_L) \end{aligned}$$

A matriz \underline{k}_σ é obtida a partir da definição:

$$\underline{k}_\sigma \underline{du}^e = \int_V d \underline{B}_L^T \underline{\sigma} dV = \int_V \underline{G}^T d\underline{A}^T \underline{\sigma} dv$$

Mas

$$d\underline{A}^T \underline{\sigma} = d\underline{A}^T \underline{\sigma} = \underline{\sigma} d\underline{\theta} = \underline{\sigma} \underline{G} \underline{du}^e$$

Portanto

$$(\underline{k}_\sigma - \int_V \underline{G}^T \underline{\sigma} \underline{G} dV) \underline{du}^e = 0$$

Dada a arbitrariedade de \underline{du}^e , resulta:

$$\underline{k}_\sigma = \int_V \underline{G}^T \underline{\sigma} \underline{G} dV = \underline{\sigma} AL \underline{G}^T \underline{G} = NL \underline{G}^T \underline{G}$$

Se se aproxima o campo de deformações $\underline{\varepsilon}_L$ por:

$$\underline{\varepsilon}_L = \left\{ 1/2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

que fisicamente corresponde à aproximação da Figura (5.1) resulta:

$$\underline{\varepsilon}_L = 1/2 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = 1/2 \underline{A} \underline{\theta}$$

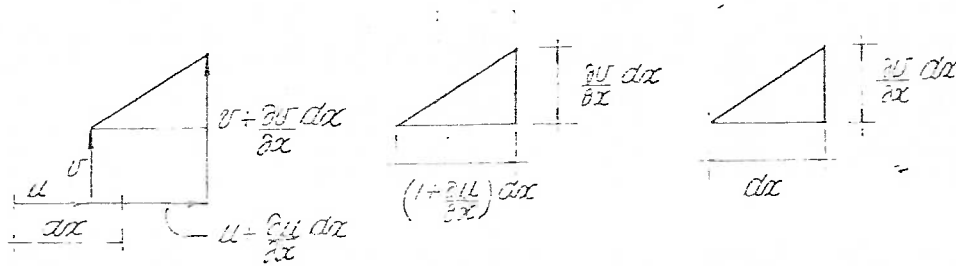


FIGURA (5.1)

onde:

$$\underline{\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad 0 \right] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L}^* \underline{u} = \underline{L}^* \underline{N} \underline{u}^e = \underline{G} \underline{u}^e$$

$$\underline{G} = \left[0 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right] = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{A} = 1/L [(v_2 - v_1)] \quad e$$

$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2}$$

Com isso o campo de deformações $\underline{\varepsilon}$ ficada dado por:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L = \left\{ \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2} \right\}$$

Como anteriormente:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} = E \underline{\varepsilon}$$

Finalmente obtem-se a matriz \underline{B}_L por:

$$\underline{B}_L = \underline{A} \underline{G} = 1/L^2 [0 \quad -(v_2 - v_1) \quad 0 \quad (v_2 - v_1)]$$

As matrizes \underline{k}_σ e \underline{k}_L ficam reduzidas a:

$$\underline{k}_\sigma = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\underline{k}_L = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 0 & (v_2 - v_1) & 0 & -(v_2 - v_1) \\ (v_2 - v_1) & 0 & -(v_2 - v_1) & 0 \\ 0 & -(v_2 - v_1) & 0 & (v_2 - v_1) \\ -(v_2 - v_1) & 0 & (v_2 - v_1) & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{EA}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v_2 - v_1)^2 & 0 & -(v_2 - v_1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(v_2 - v_1)^2 & 0 & (v_2 - v_1)^2 \end{bmatrix}$$

A matriz \underline{k}_σ deste item coincide com a matriz de rigidez geométrica \underline{k}_g normalmente apresentada na literatura (veja-se, por exemplo, [5]). Isto por se ter considerado a expressão

$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

Quando se utiliza a expressão

$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

Chega-se à matriz \underline{k}_σ do exemplo 2 que difere da matriz \underline{k}_g e cuja interpretação física é idêntica à que se fará para o elemento triangular no item 15.3. A primeira expressão de $\underline{\varepsilon}_L$ vale sempre que, além de deformações pequenas $[(\Delta L/L^2) \ll (\Delta L/L)]$ se tenha rotações pequenas (veja-se, para uma discussão maior detalhada, o item 15.1 e [5]).

6.
EXEMPLO 4 — A MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA EM FLEXÃO

Deduz-se aqui a matriz de rigidez da barra em flexão. O aspecto importante que se deve ressaltar é a presença das rotações nodais no vetor deslocamento \underline{u}^e . Com isso pode-se aproximar a linha elástica por um polinômio de 3º grau evitando-se desse modo a descontinuidade de declividades nos pontos nodais. O procedimento desenvolvido é formalmente idêntico ao utilizado na flexo-compressão de chapas cuja análise foge aos limites deste trabalho.

Seja a barra prismática da Figura (6.1)

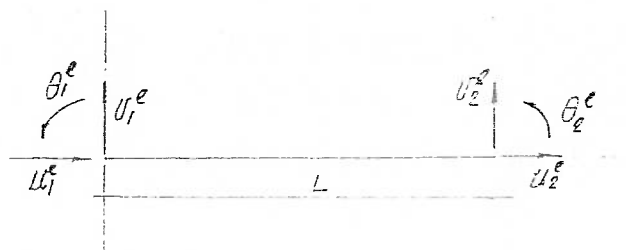


FIGURA (6.1)

O campo de deformações $\underline{\epsilon}$ é dado por:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}_0 + \underline{\epsilon}_L$$

$$\underline{\epsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ 0 \\ \epsilon_0^T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \quad e$$

$$\underline{\epsilon}_L = \begin{Bmatrix} \epsilon_L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ 0 \end{Bmatrix}$$

campo de tensões $\underline{\sigma}$ é dado por:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

onde N é a força normal e M o momento fletor

Deve-se ressaltar que os campos $\underline{\epsilon}$ e $\underline{\sigma}$ são aqui definidos de modo que a energia de deformação dU armazenada no segmento dx seja dada por:

$$\delta U = 1/2 \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dx$$

De fato, considere-se por facilidade de exposição a parte linear do campo de deformações em cada ponto da seção transversal da barra. Essas deformações são dadas em função dos deslocamentos axiais por:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y$$

A energia de deformação armazenada no segmento dx vale:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= 1/2 \int_S \varepsilon \sigma \, dS \, dx \\
 &= 1/2 E \int_S \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y \right]^2 dS \, dx \\
 &= 1/2 E \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \int_S dS + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_S y \, dS + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \int_S y^2 \, dS \right] dx \\
 &= \left[1/2 EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 1/2 EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \\
 &= \left[1/2 N \frac{\partial u}{\partial x} + 1/2 M \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx
 \end{aligned}$$

Chega-se ao mesmo resultado através de:

$$\delta U = 1/2 \underline{\varepsilon}_0^T \underline{\sigma} \, dx = 1/2 \underline{\varepsilon}_0^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 \, dx$$

onde:

$$D = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

O campo dos deslocamentos axiais \underline{u} é dado em função dos deslocamentos nodais \underline{u}^e por:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & 0 & 0 & \phi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1(x) & \xi_1(x) & 0 & \psi_2(x) & \xi_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \xi_2^e \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{u}^e$$

onde:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$\xi_1(x) = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{L}$$

$$\psi_2(x) = \frac{x^2}{L^2} \left(3 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$\xi_2(x) = \frac{x^2}{L^2} \left(x - \frac{1}{L}\right)$$

As funções acima representam a linha elástica da barra quando submetida a um deslocamento unitário na direção correspondente à função sendo nulos os deslocamentos nas demais direções.

A matriz \underline{N} e o vetor \underline{u}^e podem ser subdivididos da seguinte maneira:

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} \underline{N}_i^L & 0 \\ 0 & \underline{N}_i^T \end{bmatrix}$$

com $\underline{N}_i^L = \{\phi_i(x)\}$ e $\underline{N}_i^T = \{\psi_i(x) \xi_i(x)\}$

$$\underline{u}_i^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i^{eL} \\ \underline{u}_i^{eT} \end{bmatrix}$$

com $\underline{u}_i^{eL} = \{ \underline{u}_i^e \}$ e $\underline{u}_i^{eT} = \{ \begin{matrix} v_i^e \\ e_i \end{matrix} \}$

O campo $\underline{\varepsilon}_0$ é dado em função dos deslocamentos nodais \underline{u}^e por:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L} \underline{u} = \underline{L} \underline{N} \underline{u}^e = \underline{B}_0 \underline{u}^e$$

onde:

$$\underline{B}_{0i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{0i}^L & 0 \\ 0 & \underline{B}_{0i}^T \end{bmatrix}$$

O campo $\underline{\varepsilon}_L$ é dado por:

$$\underline{\varepsilon}_L = 1/2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = 1/2 \underline{A} \underline{\theta}$$

O vetor $\underline{\theta}$ é obtido dos deslocamentos nodais \underline{u}^e da seguinte maneira:

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L}^* \underline{u} = \underline{L}^* \underline{N} \underline{u}^e = \underline{G} \underline{u}^e$$

onde:

$$\underline{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_i^L & 0 \\ 0 & \underline{G}_i^T \end{bmatrix}$$

Dando-se variações do campo $\underline{\varepsilon}_L$, obtém-se:

$$d\underline{\varepsilon}_L = 1/2 d\underline{A} \underline{\theta} + 1/2 \underline{A} d\underline{\theta}$$

Como anteriormente:

$$d\underline{A} \underline{\theta} = \underline{A} d\underline{\theta}$$

pelo que:

$$d\underline{\varepsilon}_L = \underline{A} d\underline{\theta} = \underline{A} \underline{G} d\underline{u}^e = \underline{B}_L^L d\underline{u}^e$$

isto é:

$$\underline{B}_L^L = \underline{A} \underline{G}$$

Finalmente:

$$\underline{B}_{Li} = \begin{Bmatrix} \underline{B}_{Li}^L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com as matrizes \underline{B}_0 e \underline{B}_L calculam-se as matrizes \underline{k}_0 e \underline{k}_L através de:

$$\underline{k}_0 = \int_L \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 \, dx \quad e$$

$$\underline{k}_L = \int_L \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L \, dx + \int_L \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 \, dx + \int_L \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L \, dx$$

Portanto da definição, obtem-se a matriz \underline{k}_σ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \underline{k}_\sigma \, d\underline{u}^e &= \int_L d \underline{B}^T \sigma \, dx = \int_L \begin{bmatrix} d\underline{B}_L^{LT} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \, dx = \int_L d\underline{B}_L^{LT} N \, dx \\ &= \int_L \underline{G}^T d\underline{A}^T N \, dx = \int_L \underline{G}^T d\underline{\theta} N \, dx = \int_L \underline{G}^T N \underline{G} \, dx \, d\underline{u}^e \end{aligned}$$

Finalmente:

$$(\underline{k}_\sigma - \int_L \underline{G}^T N \underline{G} \, dx) \, d\underline{u}^e = 0$$

Dada a arbitrariedade de $d\underline{u}^e$, vem:

$$\underline{k}_\sigma = \int_L \underline{G}^T N \underline{G} \, dx$$

7.
ELEMENTOS TRIANGULARES

Em estruturas planas, serão utilizadas inicialmente elementos triangulares. Afim de se obterem as funções $\phi(x,y)$ definidas anteriormente, considere-se o triângulo da Figura (7.1)

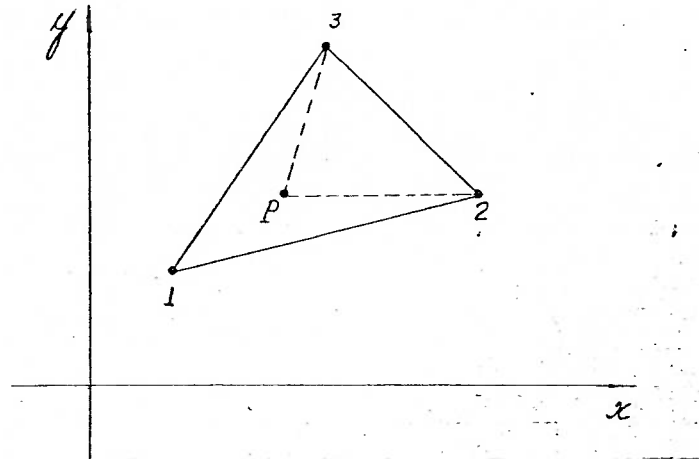


FIGURA (7.1)

Seja:

2Δ a área do triângulo $\Delta 123$ e

e

$2\Delta^*$ a área do triângulo $\Delta P23$

A função $\phi_1(x,y)$ definida por:

$$\phi_1 = \frac{2\Delta^*}{2\Delta}$$

Satisfaz a condição $\phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$

De fato; quando $P \equiv 1, 2\Delta = 2\Delta^*$ e $\phi_1 = 1$ e quando $P \equiv 2$ ou $P \equiv 3, 2\Delta^* = 0$ e $\phi_1 = 0$

Sendo pois:

$$2\Delta^* = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y,$$

resulta:

$$\phi_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2\Delta} + \frac{y_2 - y_3}{2\Delta} x + \frac{x_3 - x_2}{2\Delta} y$$

Generalizando:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{x_j y_m - x_m y_j}{2\Delta} + \frac{y_j - y_m}{2\Delta} x + \frac{x_m - x_j}{2\Delta} y = \\ &= A_i + B_i x + C_i y \end{aligned} \quad (7.1)$$

O campo de deformações $\underline{\varepsilon}$ pode ser escrito:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L$$

onde:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\varepsilon}_L = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

O campo $\underline{\varepsilon}_0$ pode ser obtido a partir dos deslocamentos nodais através de:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L} \underline{u}$$

Levando em conta a equação (2.1), resulta:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \underline{L} \underline{N} \underline{u}^e = \underline{B}_0 \underline{u}^e \quad (7.3)$$

Por definição:

$$\underline{B}_0 = \underline{L} [\underline{N}_1 \quad \underline{N}_2 \quad \underline{N}_3] = [\underline{B}_{01} \quad \underline{B}_{02} \quad \underline{B}_{03}]$$

onde:

$$\underline{B}_{0i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \\ 0 & \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \\ C_i & B_i \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

É fácil ver que $\underline{\varepsilon}_L$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\underline{\epsilon}_L = 1/2 \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = 1/2 \underline{A} \underline{\theta} \quad (7.5)$$

Com a notação

$$\underline{\theta}_x = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \underline{\theta}_y = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

resulta:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_x^T & 0 \\ 0 & \underline{\theta}_y^T \\ \underline{\theta}_y^T & \underline{\theta}_x^T \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

O valor θ pode ser obtido a partir dos deslocamentos nodais de:

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L}^* \underline{u}$$

Levando em conta a equação (2.1), resulta:

$$\underline{\theta} = \underline{L}^* \underline{N} \underline{u}^e = \underline{G} \underline{u}^e \quad (7.7)$$

onde:

$$\underline{G} = \underline{L}^* \underline{N} = \underline{L}^* [\underline{N}_1 \quad \underline{N}_2 \quad \underline{N}_3] = [\underline{G}_1 \quad \underline{G}_2 \quad \underline{G}_3]$$

e

$$\underline{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & B_i \\ C_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

A variação de $\underline{\varepsilon}_L$ é dada por:

$$d \underline{\varepsilon}_L = 1/2 d \underline{A} \underline{\theta} + 1/2 \underline{A} d \underline{\theta}$$

Comprova-se facilmente que:

$$d \underline{A} \underline{\theta} = \underline{A} d \underline{\theta}$$

Assim:

$$d \underline{\varepsilon}_L = \underline{A} d \underline{\theta} = \underline{A} \underline{G} d \underline{u}^e = \underline{B}_L d \underline{u}^e$$

Por definição:

$$\underline{B}_L = \underline{A} \underline{G} \quad (7.9)$$

As matrizes \underline{B}_0 e \underline{B}_L permitem calcular a matriz \underline{k}_1 dada por:

$$\underline{k}_1 = \underline{k}_0 + \underline{k}_L = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dV = \int_V (\underline{B}_0 + \underline{B}_L)^T \underline{D} (\underline{B}_0 + \underline{B}_L) \, dV \quad (7.10)$$

A matriz \underline{k}_σ é obtida a partir da definição da seguinte maneira:

$$\underline{k}_\sigma \, d\underline{u}^e = \int_V d \underline{B}_L^T \underline{\sigma} \, dV = \int_V \underline{G}^T d\underline{A}^T \underline{\sigma} \, dV$$

É fácil verificar que:

$$d \underline{A}^T \underline{\sigma} = \underline{M} \, d\underline{\theta}$$

onde:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \underline{k}_\sigma \, d\underline{u}^e &= \int_V \underline{G}^T \underline{M} \, d\underline{\theta} \, dV = \int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, d\underline{u}^e \, dV = \\ &= \left[\int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, dV \right] d\underline{u}^e \end{aligned}$$

Dada a arbitrariedade de \underline{du}^e , resulta:

$$\underline{k}_\sigma = \int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} dV \quad (7.12)$$

Considerando que:

- 1) \underline{B}_0 é constante no elemento
- 2) \underline{B}_L é constante no elemento, visto que \underline{A} e \underline{G} o são resulta que:
- 3) \underline{B} é constante no elemento e portanto:

$$k_1 = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \Delta t$$

Finalmente considerando que:

- 4) $\underline{\varepsilon}_0$ é constante no elemento desde que \underline{B}_0 o é
- 5) $\underline{\varepsilon}_L$ é constante no elemento já que \underline{A} e $\underline{\theta}$ o são resulta que:
- 6) $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$ e \underline{M} são constantes no elemento e portanto

$$\underline{k}_\sigma = \int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} dV = \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \Delta t$$

e

$$\int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV = \underline{B}^T \underline{\sigma} \Delta t$$

8.
OBSERVAÇÕES SOBRE A VARIAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ COM OS
DESLOCAMENTOS NODAIS

Como foi dito anteriormente, a solução do problema \bar{e} é obtida iterativamente. Para se identificar a variação com os deslocamentos nodais das matrizes envolvidas no processo, considerem-se os seguintes pontos:

- 1) os elementos de \underline{B}_0 não dependem dos deslocamentos nodais
- 2) os elementos de \underline{B}_L são funções lineares dos deslocamentos nodais já que os elementos de \underline{A} são funções lineares desses deslocamentos e os elementos de \underline{G} são dependentes da geometria.
- 3) os elementos de $\underline{\varepsilon}_0$ são funções lineares dos deslocamentos nodais
- 4) os elementos de $\underline{\varepsilon}_L$ são funções quadráticas dos deslocamentos nodais, uma vez que \underline{A} e $\underline{\theta}$ são funções lineares desses parâmetros
- 5) os elementos de $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$ e \underline{M} são funções quadráticas dos deslocamentos, visto que se verificam os itens 3 e 4.

A expressão da energia potencial total π , para materiais elasto-lineares, é dada em função dos deslocamentos nodais por:

$$\begin{aligned} \pi(\underline{a}) = \sum 1/2 \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV - \underline{a}^T \left[\sum \underline{T}_e^T \int_V \underline{N}^T \underline{f} dV + \right. \\ \left. + \sum \underline{T}_e^T \int_{S_\sigma} \underline{N}^T \underline{s} dS + \underline{F} \right] \end{aligned}$$

onde a somatória estende-se a todos os elementos da estrutura.

Sendo

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} = \underline{D} (\underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L)$$

resulta

$$\begin{aligned} \pi(\underline{a}) &= \Sigma 1/2 \int_V (\underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L)^T \underline{D} (\underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L) dV - \underline{a}^T \underline{R} \\ &= \Sigma 1/2 \left[\int_V \underline{\varepsilon}_0^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 dV + \int_V \underline{\varepsilon}_0^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_L dV + \int_V \underline{\varepsilon}_L^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 dV + \right. \\ &\quad \left. + \int_V \underline{\varepsilon}_L^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_L dV \right] - \underline{a}^T \underline{R} \end{aligned}$$

onde (em vista dos itens 1 e 2)

- . os elementos da matriz $\int_V \underline{\varepsilon}_0^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 dV$ são funções quadráticas dos deslocamentos nodais;
- . os elementos das matrizes $\int_V \underline{\varepsilon}_0^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_L dV$ e $\int_V \underline{\varepsilon}_L^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 dV$ são funções cúbicas dos deslocamentos nodais
- . e os elementos da matriz $\int_V \underline{\varepsilon}_L^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_L dV$ são funções de quarta ordem desses deslocamentos

Resumindo, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \pi(\underline{a}_i) &= L_{ij} a_i a_j + L_{ijk} a_i a_j a_k + \\ &\quad + L_{ijkl} a_i a_j a_k a_l + R_i a_i \end{aligned}$$

onde L_{ij} , L_{ijk} e L_{ijkl} são tensores de 2.^a, 3.^a e 4.^a ordem respectivamente.

O vetor $\underline{\psi}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\underline{a}) &= \underline{\epsilon} \int_V (\underline{B}_0 + \underline{B}_L)^T \underline{D} (\underline{\epsilon}_0 + \underline{\epsilon}_L) dV - \underline{R} \\ &= \underline{\epsilon} \int_V (\underline{B}_0 + \underline{B}_L)^T \underline{D} (\underline{\epsilon}_0 + \underline{\epsilon}_L) dV - \underline{R} \\ &= \underline{\epsilon} \int_V \left[\underline{B}_0^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 dV + \int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{\epsilon}_L dV + \right. \\ &\quad \left. + \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 dV + \int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{\epsilon}_L dV \right] - \underline{R} \end{aligned}$$

onde (considerando os itens 1, 2, 3 e 4)

- . os elementos da matriz $\int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 dV$ são funções lineares dos deslocamentos nodais
- . os elementos das matrizes $\int_V \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{\epsilon}_L dV$ e $\int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 dV$ são funções quadráticas dos deslocamentos nodais
- . e os elementos da matriz $\int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{\epsilon}_L dV$ são funções cúbicas desses deslocamentos.

Resumindo, pode-se escrever:

$$\psi_i(\underline{a}_i) = M_i a_i + M_{ij} a_i a_j + M_{ijk} a_i a_j a_k - R_i$$

onde M_i , M_{ij} e M_{ijk} são tensores de 1.^a, 2.^a e 3.^a ordem, respectivamente.

Por último, a matriz de rigidez K_T é dada por:

$$\begin{aligned}
 \underline{K}_T &= \underline{K}_1 + \underline{K}_\sigma \\
 &= \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dV \right] \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, dV \right] \underline{T}_e \\
 &= \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V (\underline{B}_o + \underline{B}_L)^T \underline{D} (\underline{B}_o + \underline{B}_L) \, dV \right] \underline{T}_e + \\
 &\quad + \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, dV \right] \underline{T}_e \\
 &= \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{B}_o^T \underline{D} \underline{B}_o \, dV \right] \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{B}_o^T \underline{D} \underline{B}_L \, dV \right] \underline{T}_e + \\
 &\quad + \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_o \, dV \right] \underline{T}_e + \\
 &\quad + \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L \, dV \right] \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \left[\int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, dV \right] \underline{T}_e
 \end{aligned}$$

onde (observando os itens 1, 2 e 5)

- . os elementos da matriz $\int_V \underline{B}_o^T \underline{D} \underline{B}_o \, dV$ não dependem dos deslocamentos nodais,
- . os elementos das matrizes $\int_V \underline{B}_o^T \underline{D} \underline{B}_L \, dV$ e $\int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_o \, dV$ são funções lineares dos deslocamentos
- . e os elementos das matrizes $\int_V \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L \, dV$ e $\int_V \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, dV$ são funções quadráticas dos mesmos parâmetros

Resumindo, tem-se:

$$K_{Tij} = K_{ij} + K_{ijk} a_k + K_{ijkl} a_k a_l$$

Pode-se agora retornar ao EXEMPLO 1 e notar as identidades seguintes

$$\psi_i (a_i^n) = \psi (\theta_n) \quad \text{e} \quad K_{Tij}^n = \psi' (\theta_n)$$

Na iteração de ordem $n+1$, os deslocamentos são dados por:

$$\underline{a}^{n+1} = \underline{a}^n - (\underline{K}_T^n)^{-1} \underline{\psi}^n$$

tendo-se tomado como primeira aproximação a posição inderformada da estrutura na qual $K_{Tij} = K_{ij}$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &= 1/4 (1 + r)(1 + s) \\
 \vartheta_2 &= 1/4 (1 - r)(1 + s) \\
 \vartheta_3 &= 1/4 (1 - r)(1 - s) \\
 \vartheta_4 &= 1/4 (1 + r)(1 - s)
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$

Um elemento de área dS é dado por:

$$dS = d\vec{r} \times d\vec{s}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
 d\vec{r} &= dr \cos\alpha \vec{e}_x + dr \operatorname{sen}\alpha \vec{e}_y \\
 &= dr \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + dr \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y \\
 &= \left[\frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y \right] dr
 \end{aligned}$$

Analogamente

$$d\vec{s} = \left[\frac{\partial x}{\partial s} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{e}_y \right] ds$$

Portanto:

$$dS = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \quad dr \, ds = \det \underline{J} \, dr \, ds$$

onde

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Assim, vale a seguinte propriedade:

$$\int f(x,y) dx dy = \int f(r,s) \det \underline{J} dr ds = \int F(r,s) dr ds$$

Na prática, a integral à direita é calculada numericamente pelo MÉTODO DE GAUSS que será visto em detalhe mais adiante. Por esse método, a integral da função $F(r)$ entre extremos -1 e $+1$ é dada por:

$$\int_{-1}^1 F(r) dr = \sum_i H_i F(r_i)$$

onde os valores r_i e os correspondentes fatores de ponderação H_i são escolhidos de modo que forneçam a máxima precisão dos resultados.

Analogamente, para funções de duas variáveis $F(r,s)$, obtêm-se:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s) dr ds = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(r,s) dr \right] ds = \int_{-1}^1 [\sum_i H_i F(r_i,s)] ds = \sum_i \sum_j H_i H_j F(r_i,s_j) \quad (9.4)$$

Para os deslocamentos, admite-se as mesmas funções de interpolação usadas na definição da geometria obtendo-se então:

$$\begin{aligned} u &= \sum \varnothing_j (r,s) u_j^e \\ v &= \sum \varnothing_j (r,s) v_j^e \end{aligned} \quad (9.5)$$

A regra da cadeia permite escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned}$$

ou matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{J} (r,s) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} (r,s) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

e da mesma forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} (r, s) \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} (r, s) \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_i}{\partial r} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

A sequência de operações necessárias à obtenção das matrizes \underline{k}_0 , \underline{k}_L e \underline{k}_σ é idêntica à realizada para elementos triangulares. Entretanto o campo de deformações $\underline{\epsilon}$ contrariamente ao caso anterior não é mais constante no elemento. Com isso, as integrais devem ser calculadas numericamente através do método de Gauss.

9.1

OBSERVAÇÃO SOBRE OS CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

É importante averiguar se um determinado tipo de elemento conduz à convergência monotônica do processo de discretização da estrutura, isto é, se resultados mais precisos são obtidos quando se aumenta o número de elementos na discretização.

Para tanto dois critérios devem ser satisfeitos:

- 1) As funções que definem os deslocamentos dos pontos do elemento devem ser tais que permitam a caracterização de estados de deformação constante, em particular as deformações nulas provenientes de deslocamentos de corpo rígido.

2) As funções que definem os deslocamentos dos pontos do elemento devem ser contínuas, inclusive na interface dos elementos. (Nos problemas de flexão de placas, onde as deformações são definidas pelas derivadas de segunda ordem dos deslocamentos, as derivadas de primeira ordem também devem ser contínuas).

Para se verificar se o elemento quadrangular, satisfaz os critérios acima, considerem-se as equações (9.2) e (9.5). O campo de deslocamentos fica definido por:

$$u(r, s) = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs$$
$$v(r, s) = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 rs$$

que são funções contínuas. Na interface dos elementos, r ou s é constante e as funções acima tornam-se lineares passando pelos dois nós comuns a elementos adjacentes. Segue-se que a continuidade é preservada na interface. Os termos lineares r e s permitem a caracterização de eventuais estados de deformação constante. Portanto, ficam satisfeitos os critérios de convergência.

9.2 ROTEIRO DE CÁLCULO

Em cada elemento, são conhecidos a espessura t e os vetores \underline{x}^e e \underline{u}^e dados por:

$$\underline{x}^e = \begin{pmatrix} x_1^e \\ y_1^e \\ x_2^e \\ y_2^e \\ x_3^e \\ y_3^e \\ x_4^e \\ y_4^e \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{u}^e = \begin{pmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{pmatrix}$$

Em cada ponto $P (r_i, s_j)$, calcula-se:

1) MATRIZ $\underline{C1}$

$$\underline{C1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} & \frac{\partial \theta_2}{\partial r} & \frac{\partial \theta_3}{\partial r} & \frac{\partial \theta_4}{\partial r} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial s} & \frac{\partial \theta_2}{\partial s} & \frac{\partial \theta_3}{\partial s} & \frac{\partial \theta_4}{\partial s} \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} (1+s_j) & -(1+s_j) & -(1-s_j) & (1-s_j) \\ (1+r_i) & (1-r_i) & -(1-r_i) & -(1+r_i) \end{bmatrix}$$

2) MATRIZ $\underline{C2}$

$$\underline{C2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \theta_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \theta_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \theta_4}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \theta_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \theta_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \theta_4}{\partial s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C2} = \begin{bmatrix} C1(1,1) & 0 & C1(1,2) & 0 & C1(1,3) & 0 & C1(1,4) & 0 \\ C1(1,1) & 0 & C1(1,2) & 0 & C1(1,3) & 0 & C1(1,4) & 0 \end{bmatrix}$$

3) MATRIZ $\underline{C3}$

$$\underline{C3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \theta_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \theta_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \theta_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \theta_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial \theta_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \theta_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \theta_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \theta_4}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C3} = \begin{bmatrix} 0 & C1(1,1) & 0 & C1(1,2) & 0 & C1(1,3) & 0 & C1(1,4) \\ 0 & C1(2,1) & 0 & C1(2,2) & 0 & C1(2,3) & 0 & C1(2,4) \end{bmatrix}$$

4) MATRIZ DXRS

$$\underline{DXRS} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} = \underline{C2} \underline{x}^e$$

5) MATRIZ DYRS

$$\underline{DYRS} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \underline{C3} \underline{x}^e$$

6) MATRIZ J

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{DXRS}(1,1) & \underline{DYRS}(1,1) \\ \underline{DXRS}(2,1) & \underline{DYRS}(2,1) \end{bmatrix}$$

7) DETERMINANTE DE J

$$\text{DET} = J(1,1) \cdot J(2,2) - J(1,2) \cdot J(2,1)$$

8) MATRIZ J⁻¹

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{\text{DET}} \begin{bmatrix} J(2,2) & -J(1,2) \\ -J(2,1) & J(1,1) \end{bmatrix}$$

9) MATRIZ DUXY

$$\underline{DUXY} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \underline{C2} \underline{u}^e$$

10) MATRIZ DVXY

$$\underline{DVXY} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \underline{C3} \underline{u}^e$$

11) MATRIZ \underline{\gamma}

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \phi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \phi_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_3}{\partial r} & \frac{\partial \phi_4}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \phi_3}{\partial s} & \frac{\partial \phi_4}{\partial s} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \underline{C1}$$

12) MATRIZ B₀

$$\underline{B_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \phi_4}{\partial y} & \frac{\partial \phi_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \gamma(1,1) & 0 & \gamma(1,2) & 0 & \gamma(1,3) & 0 & \gamma(1,4) & 0 \\ 0 & \gamma(2,1) & 0 & \gamma(2,2) & 0 & \gamma(2,3) & 0 & \gamma(2,4) \\ \gamma(2,1) & \gamma(1,1) & \gamma(2,2) & \gamma(1,2) & \gamma(2,3) & \gamma(1,3) & \gamma(2,4) & \gamma(1,4) \end{bmatrix}$$

13) MATRIZ \underline{G}

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \gamma(1,1) & 0 & \gamma(1,2) & 0 & \gamma(1,3) & 0 & \gamma(1,4) & 0 \\ 0 & \gamma(1,1) & 0 & \gamma(1,2) & 0 & \gamma(1,3) & 0 & \gamma(1,4) \\ \gamma(2,1) & 0 & \gamma(2,2) & 0 & \gamma(2,3) & 0 & \gamma(2,4) & 0 \\ 0 & \gamma(2,1) & 0 & \gamma(2,2) & 0 & \gamma(2,3) & 0 & \gamma(2,4) \end{bmatrix}$$

14) VETOR $\underline{\varepsilon}_0$

$$\underline{\varepsilon}_0 = \underline{B}_0 \underline{u}^e$$

15) MATRIZ θ

$$\theta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} DUXY(1,1) \\ DVXY(1,1) \\ DUXY(2,1) \\ DVXY(2,1) \end{Bmatrix}$$

16) MATRIZ \underline{A}

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(1,1) & \theta(1,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta(3,1) & \theta(4,1) \\ \theta(3,1) & \theta(4,1) & \theta(1,1) & \theta(1,2) \end{bmatrix}$$

17) VETOR $\underline{\varepsilon}_L$

$$\underline{\varepsilon}_L = 1/2 \underline{A} \underline{\theta}$$

18) VETOR $\underline{\varepsilon}$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L$$

19) MATRIZ \underline{B}_L

$$\underline{B}_L = \underline{A} \underline{G}$$

20) MATRIZ \underline{B}

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_L$$

21) VETOR $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon}$$

22) VETOR $\underline{\psi}$

$$\underline{\psi} = \underline{B}^T \underline{\sigma} \text{ DET } t H_i H_j - \underline{R}$$

OBS.: na subrotina usa-se apenas o 1º termo ($\underline{B}^T \underline{\sigma} \text{ DET } t H_i H_j$)

23) MATRIZ \underline{M}

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(1,1) & 0 & \sigma(3,1) & 0 \\ 0 & \sigma(1,1) & 0 & \sigma(3,1) \\ \sigma(3,1) & 0 & \sigma(2,1) & 0 \\ 0 & \sigma(3,1) & 0 & \sigma(2,1) \end{bmatrix}$$

24) MATRIZ \underline{k}_1

$$\underline{k}_1 = \underline{k}_0 + \underline{k}_L = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \text{ DET } t H_i H_j$$

25) MATRIZ \underline{k}_σ

$$\underline{k}_\sigma = \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \text{ DET } t \ H_i \ H_j$$

26) MATRIZ \underline{k}_T

$$\underline{k}_T = \underline{k}_1 + \underline{k}_\sigma$$

Segundo o roteiro acima, foram elaboradas as sub-rotinas anexas ao final deste trabalho.

10.
ELEMENTOS COM 8 NÓS

Este tipo de elemento permite descrever mais adequadamente o comportamento de estruturas planas de contorno irregular aproximando-o por polinômios do 2º grau. Mesmo em casos onde a discretização leve a elementos de contorno regular, a análise pode ser feita com menor número de elementos já que os deslocamentos são mais bem caracterizados do que no caso anterior: — as funções de interpolação que eram polinômios de 2º grau, passam a ser polinômios de 3º grau.

Considere-se o elemento da Figura (10.1)

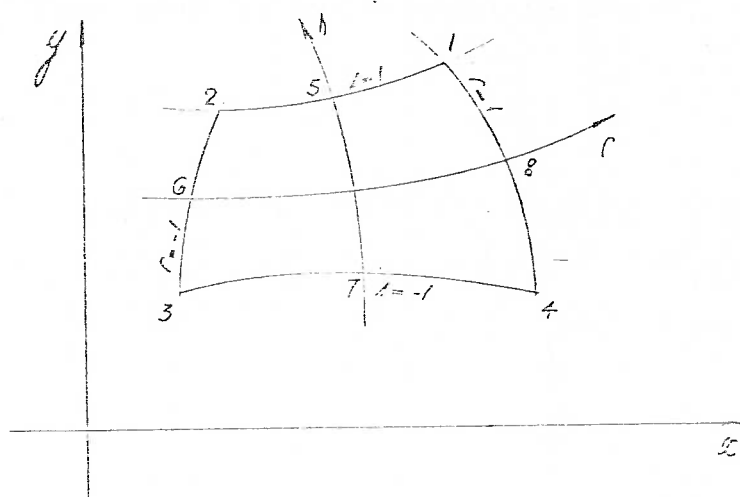


FIGURA (10.1)

As funções de interpolação correspondentes aos nós centrais são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \phi_5 &= 1/2 (1-r^2)(1+s) \\
 \phi_6 &= 1/2 (1-s^2)(1-r) \\
 \phi_7 &= 1/2 (1-r^2)(1-s) \\
 \phi_8 &= 1/2 (1-s^2)(1+r)
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

As funções de interpolação correspondentes aos vértices, determinadas anteriormente, precisam ser corrigidas. De fato, a função \varnothing_1 , por exemplo, é nula nos pontos 2, 3, 4, 6, e 7; resta, porém anulá-la nos pontos 5 e 8. Impõe-se, então, que a combinação linear:

$$\varnothing_{1q} + C_1 \varnothing_5 + C_2 \varnothing_8$$

onde \varnothing_{1q} é a função de interpolação determinada para o elemento quadrangular, seja nula nos pontos 5 e 8. Esta condição fica satisfeita para $C_1 = C_2 = -1/2$, donde resulta:

$$\varnothing_1 = 1/4 (1+r)(1+s) - 1/2 \varnothing_5 - 1/2 \varnothing_8$$

Analogamente, obtém-se:

$$\varnothing_2 = 1/4 (1-r)(1+s) - 1/2 \varnothing_5 - 1/2 \varnothing_6$$

$$\varnothing_3 = 1/4 (1-r)(1-s) - 1/2 \varnothing_6 - 1/2 \varnothing_7 \quad (10.2)$$

$$\varnothing_4 = 1/4 (1+r)(1-s) - 1/2 \varnothing_7 - 1/2 \varnothing_8$$

Observe-se que ao longo do contorno, r ou s são constantes, resultando daí variação parabólica das funções \varnothing .

Uma vez determinadas as funções \varnothing , o procedimento de cálculo da matriz de rigidez e do vetor $\underline{\psi}$ é exatamente igual ao empregado no elemento quadrangular.

11. A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração de matrizes nada mais é do que a integração de seus elementos. Portanto, o cálculo de:

$$\int \underline{F}(r, s) dr ds$$

onde \underline{F} é uma matriz $m \times n$, reduz-se a $m \times n$ cálculos do tipo:

$$\int F(r, s) dr ds$$

onde F é um elemento da matriz \underline{F}

Para facilidade de exposição, considera-se aqui a integração da função de uma variável $F(r)$ no intervalo $[a, b]$, isto é:

$$\int_a^b F(r) dr$$

11.1 O MÉTODO DE NEWTON-COTES

A função $F(r)$ é calculada em $n+1$ pontos r_0, r_1, \dots, r_n determinados a priori, em geral igualmente espaçados. Pelos pontos $F(r_i)$, passa-se um polinômio $\psi(r)$ de grau n e supõe-se que:

$$\int_a^b F(r) dr = \int_a^b \psi(r) dr + R_n \quad (11.1)$$

onde R_n é o resíduo

O polinômio $\psi(r)$ é dado por:

$$\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n \quad (11.2)$$

Em cada ponto r_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, tem-se:

$$\psi(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n = F(r_i) \quad (11.3)$$

Resumindo, pode-se escrever:

$$\underline{V} \underline{a} = \underline{F}$$

onde

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F(r_0) \\ F(r_1) \\ \vdots \\ F(r_n) \end{bmatrix}, \quad \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \dots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \dots & r_n^n \end{bmatrix} \text{ e } \underline{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Já que os pontos, r_i são distintos, a matriz \underline{V} é inversível e portanto

$$\underline{a} = \underline{V}^{-1} \underline{F} \quad (11.5)$$

As funções $1, r, r^2, \dots, r^n$ podem ser consideradas a base de um espaço vetorial de dimensão $n+1$ na qual o vetor $\psi(r)$ é dado por suas componentes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Entretanto, se for tomada uma base constituída por polinômios de Lagrange dados por:

$$L_i(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1) \dots (r-r_{i-1})(r-r_{i+1}) \dots (r-r_n)}{(r_i-r_0)(r_i-r_1) \dots (r_i-r_{i-1})(r_i-r_{i+1}) \dots (r_i-r_n)} \quad (11.6)$$

as componentes do vetor $\psi(r)$ podem ser determinadas mais facilmente,

De fato, na base acima pode-se escrever:

$$\psi(r) = a'_0 \ell_0(r) + a'_1 \ell_1(r) + \dots + a'_n \ell_n(r) \quad (11.7)$$

No ponto r_i

$$\begin{aligned} \psi(r_i) = F(r_i) &= a'_0 \ell_0(r_i) + a'_1 \ell_1(r_i) + \dots + \\ &+ a'_i \ell_i(r_i) + \dots + a'_n \ell_n(r_i) \end{aligned} \quad (11.8)$$

Como é facilmente verificável, os polinômios de Lagrange gozam da seguinte propriedade:

$$\ell_i(r_j) = \delta_{ij}$$

Portanto

$$a'_i = F(r_i) \quad e$$

$$\psi(r) = F(r_0) \ell_0(r) + F(r_1) \ell_1(r) + \dots + F(r_n) \ell_n(r) \quad (11.9)$$

Conhecido o polinômio $\psi(r)$, tem-se:

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b \ell_i(r) dr \right] F(r_i) + R_n \quad (11.10)$$

Quando os pontos r_i forem igualmente espaçados,

$$r_0 = a, \quad r_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad e$$

$$\int_a^b F(r) dr = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n F(r_i) + R_n \quad (11.11)$$

onde C_j^n são as constantes de Newton-Cotes para integração numérica realizada com n pontos equidistantes.

11.2 O MÉTODO DE GAUSS

A função $F(r)$ é calculada em n pontos r_1, r_2, \dots, r_n ; não conhecidos a priori mas que serão determinados visando a otimizar os resultados, e supõe-se que:

$$\int_a^b F(r) dr = H_1 F(r_1) + H_2 F(r_2) + \dots + H_n F(r_n) + R_n \quad (11.12)$$

Como no caso anterior, considere-se o polinômio $\psi(r)$ dado por:

$$\psi(r) = \sum_{j=1}^n F(r_j) \xi_j(r) \quad (11.13)$$

A fim de determinar os valores r_j , considere-se o polinômio $P(r)$ dado por:

$$P(r) = (r-r_1)(r-r_2) \dots (r-r_n) \quad (11.14)$$

Como $P(r_j) = 0, j = 1, 2, \dots, n$, pode-se escrever:

$$F(r) = \psi(r) + P(r) (\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \dots) \quad (11.15)$$

Integrando $F(r)$, tem-se:

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{j=1}^n F(r_j) \left[\int_a^b \ell_j(r) dr \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \left[\int_a^b r^j P(r) dr \right] \quad (11.16)$$

Os valores r_i são determinados impondo-se que

$$\int_a^b r^k P(r) dr = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (11.17)$$

Observando que os polinômios de Lagrange são de grau $n-1$ e que os produtos $P(r) r^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, têm grau variando entre n (para $k = 0$) e $2n-1$ (para $k = n-1$), conclui-se que a integração da função $F(r)$ é substituída pela integração de um polinômio de grau $2n-1$.

Com os valores r_i , ficam conhecidos os polinômios de Lagrange que fornecem os fatores de ponderação H_j dados por:

$$H_j = \int_a^b \ell_j(r) dr, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11.18)$$

Quando $a = -1$ e $b = +1$, os valores de r_i , H_i podem ser obtidos diretamente de tabelas.

11.3 CONCLUSÃO

O método de Newton-Cotes utiliza $(n+1)$ pontos, igualmente espaçados, e integra exatamente polinômios de ordem menor ou igual a n . O método de Gauss usa n pontos e integra exatamente polinômios de ordem menor ou igual a $(2n-1)$.

12.

EXEMPLO 5 — A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EXATA

Como foi visto anteriormente, a integração de um polinômio de grau $2n-1$ pelo método de Gauss exige que se calcule o valor desse polinômio em n pontos. A fim de exemplificar como se determina o número de pontos necessários à integração exata das funções que aparecem na formulação de um determinado tipo de elemento, considere-se o elemento retangular da Figura (12.1) de lados $2a$ e $2b$.

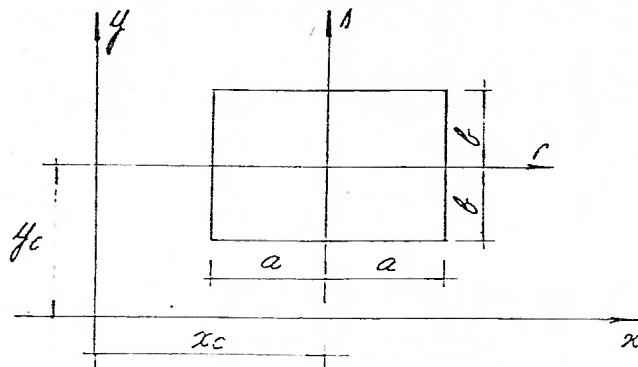


FIGURA (12.1)

São válidas as relações:

$$x = x_c + ar$$

$$y = y_c + bs$$

Assim:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

isto é, os elementos de \underline{J} (e portanto os de \underline{J}^{-1}) são constantes. Além disso $\det \underline{J} = ab = \text{CONST}$

Considerem-se os seguintes polinômios:

$$P_1 = C_1 + C_2 r + C_3 s$$

$$P_2 = C_1 + C_2 r + C_3 s + C_4 r^2 + C_5 rs + C_6 s^2, \text{ obtidos da}$$

multiplicação de dois polinômios P_1

$$P_3 = C_1 + C_2 r + C_3 s + C_4 r^2 + C_5 rs + C_6 s^2 + C_7 r^3 + C_8 r^2 s +$$
$$+ C_9 rs^2 + C_{10} s^3, \text{ obtidos da multiplicação de}$$

polinômios P_1 por polinômios P_2 .

$$P_4 = C_1 + C_2 r + C_3 s + C_4 r^2 + C_5 rs + C_6 s^2 + C_7 r^3 + C_8 r^2 s +$$
$$+ C_9 rs^2 + C_{10} s^3 + C_{11} r^4 + C_{12} r^3 s + C_{13} r^2 s^2 +$$
$$+ C_{14} rs^3 + C_{15} s^4, \text{ obtidos da multiplicação de}$$

dois polinômios P_2 ou da multiplicação

$$P_1 \times P_2 \times P_1.$$

Percorrendo o roteiro de cálculo proposto para o elemento quadrangular, pode-se constatar que:

- 1) os elementos de \underline{B}_0 são polinômios P_1 .
- 2) os elementos de \underline{B}_L são polinômios P_2 , desde que os elementos de \underline{A} e \underline{G} são polinômios P_1 .
- 3) os elementos de \underline{B} são polinômios P_2 , em vista dos itens (1) e (2).
- 4) os elementos de $\underline{\varepsilon}_0$ são polinômios P_1 , em vista do item (1).
- 5) os elementos de $\underline{\varepsilon}_L$ são polinômios P_2 , já que \underline{A} e \underline{G} são polinômios P_1 .
- 6) os elementos de $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$ e \underline{M} são polinômios P_2 , uma vez que se verificam os itens (4) e (5) e os elementos de \underline{D} são constantes.

Disso resulta:

1) $\int_{\underline{B}_0^T} \underline{D} \underline{B}_0 \det Jt \, drds$ é a integração de polinômios P_2

2) $\int_{\underline{B}_0^T} \underline{D} \underline{B}_0 \det Jt \, drds$ ou $\int_{\underline{B}_L^T} \underline{D} \underline{B}_0 \det Jt \, drds$ é a integração de polinômios P_3

3) $\int_{\underline{B}_L^T} \underline{D} \underline{B}_0 \det Jt \, drds$, $\int_{\underline{G}^T} \underline{M} \underline{G} \det Jt \, drds$

ou $\int_{\underline{B}^T} \underline{D} \underline{B}_0 \det Jt \, drds$ é a integração de polinômios P_4

Pelo método de integração de polinômios P_2 ou P_3 é exata quando se usam 2 pontos na direção r e 2 na direção s ; a integração de polinômios P_4 exige 3 pontos na direção r e 3 na direção s . Observe-se que estas conclusões são válidas apenas para elementos retangulares e em forma de paralelogramo, pois a matriz \underline{J} é constante. Nos elementos quadrangulares gerais, os elementos da matriz \underline{J} são polinômios P_1 . Consequentemente, as funções a serem integradas são de grau P_2 e, portanto, mais pontos são necessários para que a integração seja exata.

Finalmente, deve-se notar que a integração não exata da matriz de rigidez tende a produzir o elemento menos rígido, o que compensa o efeito da rigidez excessiva resultante da discretização da estrutura.

13.

EXEMPLO 6 — COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS FORNECIDOS PELOS DIFERENTES TIPOS DE ELEMENTOS

A fim de comparar os resultados obtidos na determinação dos campos de deslocamentos, deformações e tensões de estruturas planas através dos diversos elementos desenvolvidos, considere-se a estrutura básica da Figura (13.1) de 0,10m de espessura. O material é elástico linear com $E = 1000 \text{ tf/m}^2$ e $\nu = 0$.

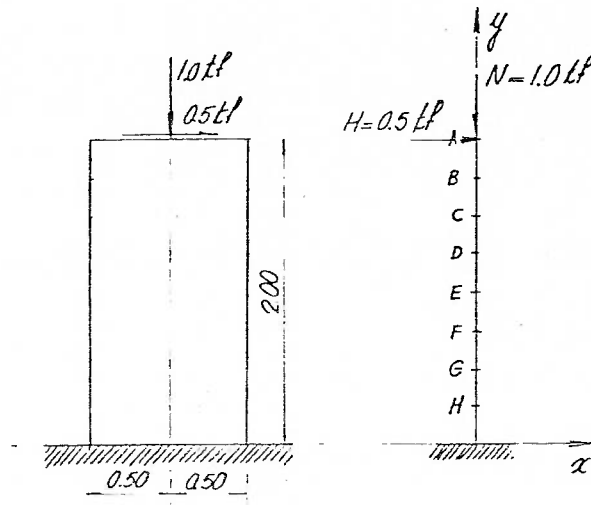


FIGURA (13.1)

Para efeito de comparação dos resultados, determinam-se, em seguida, os deslocamentos nos pontos do eixo. Considere-se, então o esquema da Figura (13.2)

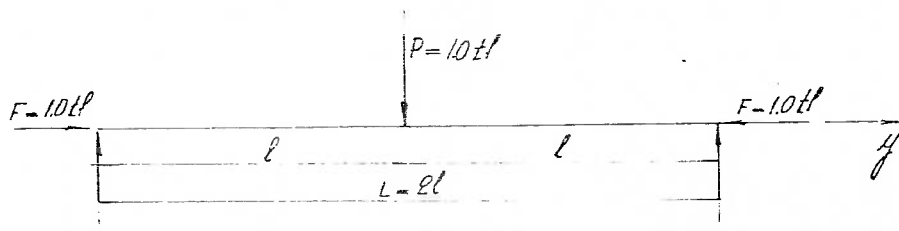


FIGURA (13.2)

Devido ao efeito combinado de carga lateral e compressão axial, a deflexão \bar{u} é dada por:

$$\bar{u} = \frac{p \operatorname{sen} p \ell}{F p \operatorname{sen} 2p\ell} \operatorname{sen} p y - \frac{p}{2F} y, \quad y \leq \ell$$

onde $p^2 = \frac{F}{EI}$

Com os dados do exemplo, obtem-se:

$$\bar{u}(y) = 1.875859 \operatorname{sen} 0.346410 y - 0.50y$$

Para a estrutura real os deslocamentos em cada ponto x são dados por:

$$u_1(y) = \bar{u}(\ell) - \bar{u}(y)$$

Dada a relação entre as dimensões da estrutura, aos deslocamentos acima devemos adicionar os devidos a deformação por força cortante. Estes se calculam através do Teorema de Castigliano, com auxílio da carga fictícia Q aplicada no ponto em que se quer conhecer o deslocamento, como mostra a Figura (13.3)

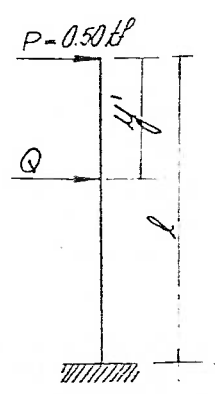


FIGURA (13.3)

A energia de deformação por distorção vale:

$$U = \int k \frac{V^2}{2GA} dy'$$

onde k é um coeficiente adimensional que depende da forma geométrica da seção; para seção retangular $k = 6/5$. Portanto:

$$\begin{aligned} U &= \frac{k}{2GA} \left[P^2 \int_0^{y'} dy' + (P+Q)^2 \int_{y'}^{\ell} dy' \right] \\ &= \frac{k}{2GA} \left[P^2 \ell + 2PQ (\ell - y') + Q^2 (\ell - y') \right] \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Castigliano,

$$u_2(y') = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{k}{GA} P(\ell - y') = 0.0120 (\ell - y') = 0.00120y = u_2(y)$$

Finalmente o deslocamento total é dado por:

$$u(y) = u_1(y) + u_2(y)$$

A tabela seguinte fornece os valores de referência
versos pontos do eixo

PONTO	y	$u_1(y)$	$u_2(y)$
A	2.00	0.198130	0.024
B	1.75	0.160879	0.021
C	1.50	0.124844	0.018
D	1.25	0.091232	0.015
E	1.00	0.061232	0.012
F	0.75	0.036005	0.009
G	0.50	0.016679	0.006
H	0.25	0.004334	0.003

OBSERVAÇÃO: Os dados de entrada são fornecidos de
o MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO CALGER à dispo-
CCE-USP.

ELEMENTOS TRIANGULARES

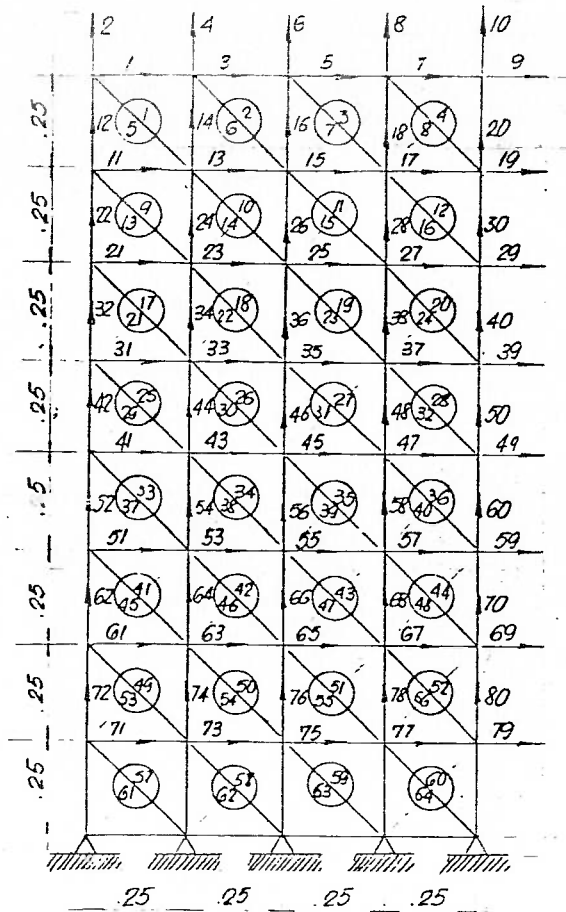


FIGURA (13.4)

DESLOCAMENTOS

INCÓGNITA	y(m)	1ª ITERAÇÃO	2ª ITERAÇÃO	3ª ITERAÇÃO	4ª ITERAÇÃO	VAL.REF.
5	2.00	0.155119	0.182516	0.187495	0.187537	0.222130
15	1.75	0.125335	0.147556	0.151535	0.151568	0.181879
25	1.50	0.098802	0.116129	0.119148	0.119173	0.142844
35	1.25	0.074010	0.086693	0.088833	0.088851	0.106232
45	1.00	0.051502	0.059995	0.061380	0.061391	0.073232
55	0.75	0.032053	0.037017	0.037796	0.037802	0.045005
65	0.50	0.016462	0.018737	0.019079	0.019082	0.022678
75	0.25	0.005533	0.006117	0.006198	0.006198	0.007334

TENSÕES

As tensões, constantes no interior do elemento, são associadas aos valores no centro de gravidade

Na seção transversal que passa pelo centro de gravidade dos elementos 61, 62, 63 e 64, as tensões são dadas nos pontos indicados na Figura 13.5

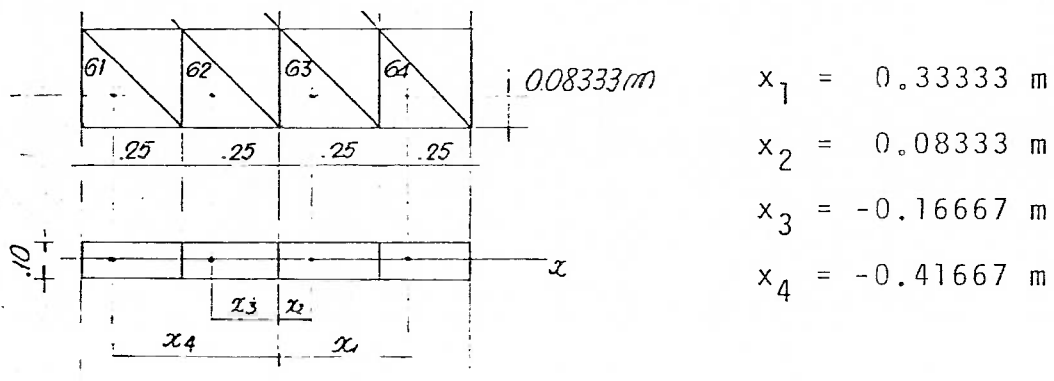


FIGURA (13.5)

Na seção a distância $d = 0.08333$ m do engastamento, tem-se:

$$\begin{aligned}
 M &= H(\ell-d) + N(u_5 - 1/3 u_{75}) \\
 &= 0.50(2.00-0.08333) + 1.0(0.222130 - 1/3 \times 0.007334) = \\
 &= 1.1780 \text{ tfm}
 \end{aligned}$$

As tensões de referência são dadas por:

$$\sigma_R = \frac{-1.00}{0.10 \times 1.00} - \frac{1.1780 \times 12}{0.10 \times 1.00^3} x = -10.00 - 141.362x$$

Procedendo-se de modo análogo, determinam-se as tensões em seções transversais a diferentes distâncias do engastamento comparando-se em seguida com os valores obtidos pela discretização da estrutura como mostra a tabela seguinte:

x(m)	d(m) 0.08333		d(m) 0.33333	
	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)
0.33333	-37.59	-57.12	-34.79	-51.72
0.08333	-11.79	-21.78	-11.16	-20.43
-0.16667	14.60	13.56	12.80	10.86
-0.41667	46.31	48.70	38.89	42.15

x(m)	d(m) 0.58333		d(m) 0.83333	
	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)
0.33333	-31.23	-46.01	-27.37	-40.04
0.08333	-10.84	-19.00	-10.68	-17.51
-0.16667	10.07	8.01	6.94	5.02
-0.41667	31.98	35.02	25.07	27.55

ELEMENTOS QUADRANGULARES

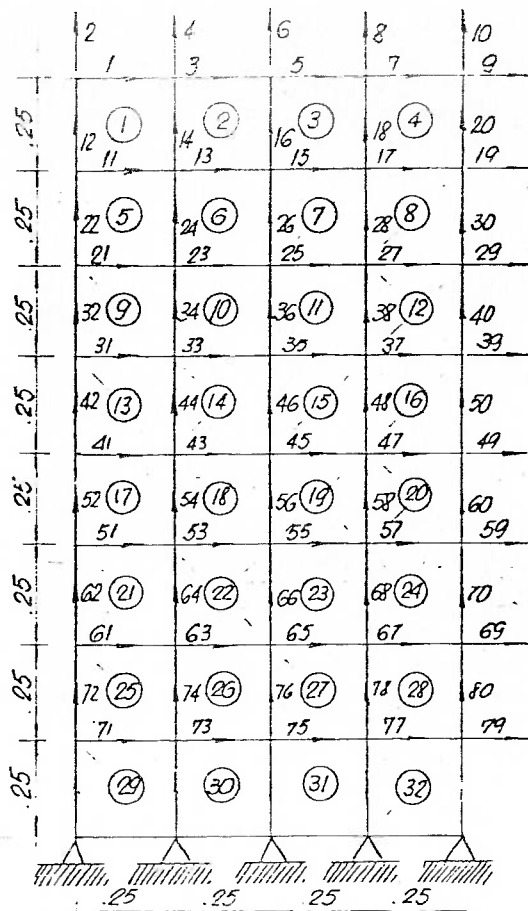


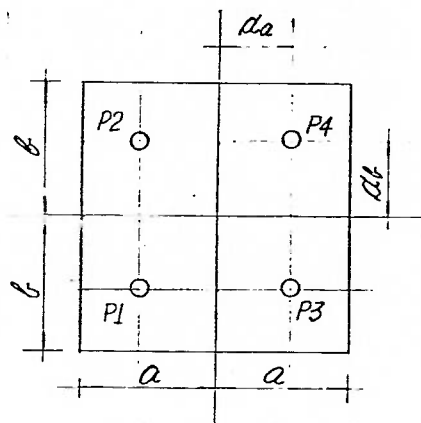
FIGURA (13.6)

DESLOCAMENTOS

INCÓGNITA	y(m)	1ª ITERAÇÃO	2ª ITERAÇÃO	3ª ITERAÇÃO	4ª ITERAÇÃO	VAL.REF.
5	2.00	0.179923	0.215093	0.225577	0.225754	0.222130
15	1.75	0.144883	0.173229	0.181618	0.181761	0.181879
25	1.50	0.114459	0.136837	0.143228	0.143336	0.142844
35	1.25	0.085542	0.102014	0.106562	0.106639	0.106232
45	1.00	0.059311	0.070407	0.073362	0.073412	0.073232
55	0.75	0.036704	0.043237	0.044910	0.044938	0.045005
65	0.50	0.018657	0.021689	0.022430	0.022442	0.022678
75	0.25	0.006172	0.006974	0.007154	0.007157	0.007334

TENSÕES

Em cada elemento, são fornecidas as tensões nos 4 pontos utilizados na integração numérica, conforme mostra a Figura 13.7:

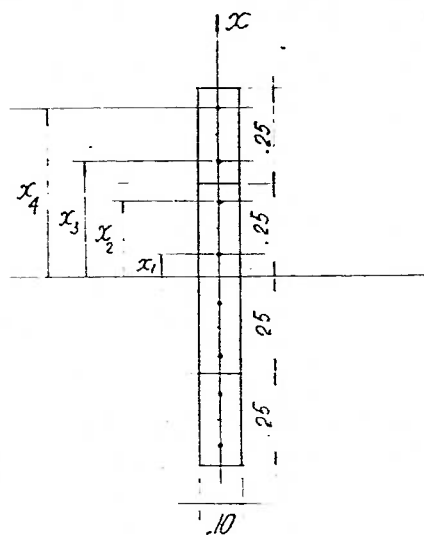


$$a = b = 0.125 \text{ m}$$

$$d_a = d_b = 0.57735 \times 0.125 = 0.07217 \text{ m}$$

FIGURA (13.7)

Assim, numa dada seção transversal, as tensões são dadas nos pontos indicados na Figura 13.8.



$$x_1 = 0.05283 \text{ m}$$

$$x_2 = 0.19717 \text{ m}$$

$$x_3 = 0.30283 \text{ m}$$

$$x_4 = 0.44717 \text{ m}$$

FIGURA (13.8)

Na seção a distância $d = 0.125$ m do engastamento, tem-se:

$$\begin{aligned} M &= H(\ell-d) + N \left[u_5 - \frac{u_{75}}{2} \right] \\ &= 0.50 (2.00-0.125) + 1.00(0.222130 - 0.50 \times 0.007334) = \\ &= 1.1560 \text{ tfm} \end{aligned}$$

As tensões de referência são dadas por:

$$\sigma_R = \frac{-1.00}{0.10 \times 1.00} - \frac{1.1560 \times 12}{0.10 \times 1.00^3} x = -10.00 - 138.712x$$

Na tabela seguinte, comparam-se as tensões em seções transversais a diferentes distâncias do engastamento com os respectivos valores de referência obtidos de modo análogo ao ao exemplo acima.

d(m)	0.125		0.375	
x(m)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)
0.44717	-72.64	-72.03	-64.40	-64.71
0.30283	-51.47	-52.01	-47.02	-47.05
0.19717	-37.09	-37.35	-34.49	-34.12
0.05283	-19.07	-17.33	-17.70	-16.46
-0.05283	- 5.70	- 2.67	- 5.26	- 3.54
-0.19717	12.80	17.35	11.94	14.12
-0.30283	28.16	32.01	24.90	27.05
-0.44717	51.74	52.03	43.12	44.71

d(m)	0.625		0.875	
x(m)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)
0.44717	-56.11	-57.00	-47.76	-48.93
0.30283	-41.57	-41.83	-35.71	-36.36
0.19717	*-30.83	-30.72	-26.90	-27.17
0.05283	-16.26	-15.55	-14.89	-14.60
-0.05283	- 5.47	- 4.45	- 5.99	- 5.40
-0.19717	9.37	10.72	6.33	7.17
-0.30283	20.38	21.83	15.45	16.36
-0.44717	35.64	37.00	28.07	28.93

ELEMENTOS COM 8 NÓS

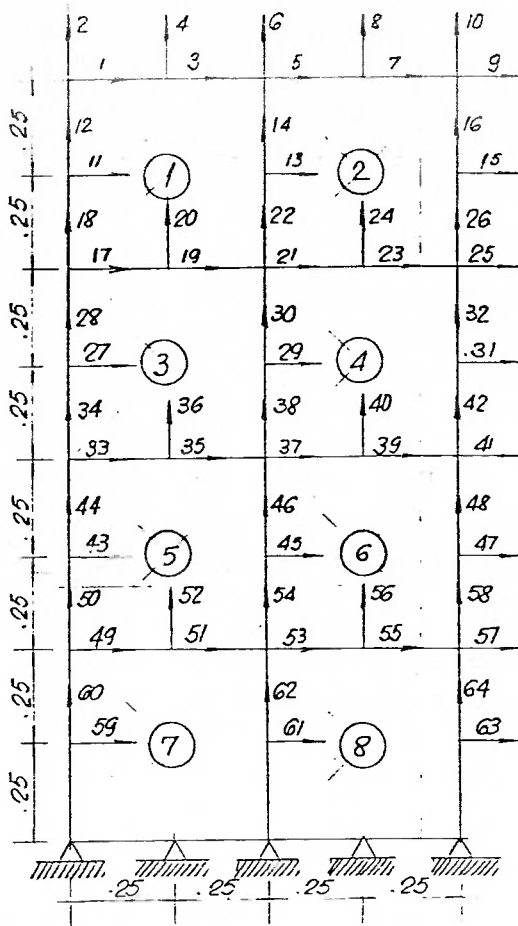


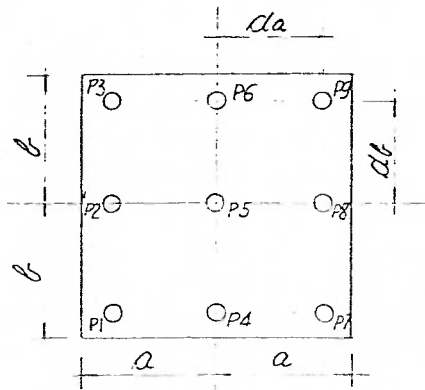
FIGURA (13.9)

DESLOCAMENTOS

INCÓGNITA	y(m)	1. ^a ITERAÇÃO	2. ^a ITERAÇÃO	3. ^a ITERAÇÃO	4. ^a ITERAÇÃO	VAL.REF.
5	2.00	0.186244	0.223445	0.235808	0.236053	0.222130
13	1.75	0.150582	0.180590	0.190501	0.190698	0.181879
21	1.50	0.118548	0.142238	0.149789	0.149938	0.142844
29	1.25	0.088631	0.106085	0.111462	0.111569	0.106232
37	1.00	0.061547	0.073325	0.076819	0.076888	0.073232
45	0.75	0.038065	0.045010	0.046990	0.047029	0.045005
53	0.50	0.019335	0.022558	0.023434	0.023452	0.022678
61	0.25	0.006380	0.007238	0.007452	0.007456	0.007334

TENSÕES

Em cada elemento, as tensões são dadas nos pontos usados na integração numérica, como mostra a Figura 13.12:

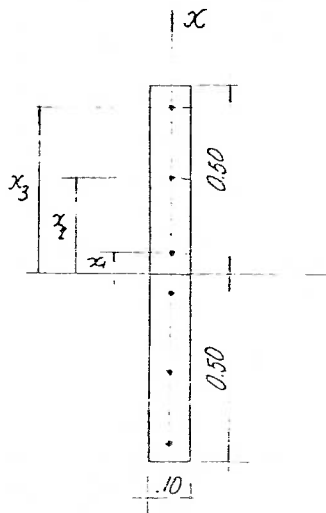


$$a = b = 0.25 \text{ m}$$

$$d_a = d_b = 0.77460 \times 0.25 = 0.19365 \text{ m}$$

FIGURA (13.10)

Numa dada seção transversal, as tensões são fornecidas nos pontos indicados na Figura 13.13



$$x_1 = 0.44365 \text{ m}$$

$$x_2 = 0.25000 \text{ m}$$

$$x_3 = 0.05635 \text{ m}$$

FIGURA (13.11)

Na seção a distância $d = 0.05635$ m do engastamento, tem-se:

$$\begin{aligned} M &= H(\ell - d) + N \left[u_5 - u_6 \right] \times \frac{0.05635}{0.25000} = \\ &= 0.50(2.00 - 0.05635) + 1.00 \left[0.222130 - 0.007334 \times \frac{0.05635}{0.25000} \right] = \\ &= 1.1923 \text{ tfm} \end{aligned}$$

As tensões de referência são dadas por:

$$\sigma_R = \frac{-1.00}{0.10 \times 1.00} - \frac{1.1923 \times 12}{0.10 \times 1.00^3} = -10.00 - 143.076x$$

De maneira análoga, são calculadas as tensões de referência em seções a diferentes distâncias do engastamento e seus valores confrontados com os obtidos através da discretização conforme a tabela seguinte:

d(m)	0.05635		0.44365	
x(m)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)
0.44365	-75.99	-73.48	-65.03	-62.23
0.25000	-47.09	-45.77	-39.88	-39.43
0.05635	-20.26	-18.06	-17.04	-16.63
-0.05635	- 5.30	- 1.94	- 4.89	- 3.37
-0.25000	23.12	25.77	17.83	19.43
-0.44365	55.47	53.48	44.15	42.23

d(m)	0.55635		0.94365	
x(m)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)	σ (tf/m ²)	σ_R (tf/m ²)
0.44365	-59.80	-58.78	-46.67	-46.38
0.25000	-38.63	-37.49	-30.85	-30.50
0.05635	-17.34	-16.20	-15.12	-14.62
-0.05635	- 4.69	- 3.80	- 5.63	- 5.38
-0.25000	17.30	17.49	11.06	10.50
-0.44365	39.02	38.78	27.31	26.38

Os resultados anteriores sugerem as seguintes observações:

1. Para um mesmo número de incógnitas, a utilização de elementos quadrangulares em estruturas de contorno regular parece aconselhável. Isto porque se conseguem resultados mais precisos do que os alcançados com elementos triangulares, enquanto elementos de definição mais complexa, como os de 8 nós, não fornecem aumento apreciável de precisão. Já em estruturas de contorno irregular, é de se esperar que o uso destes elementos mais complexos forneçam resultados mais exatos.
2. É provável que os custos adicionais devidos à maior complexidade na definição do elemento sejam compensados pela redução do número de nós necessários à obtenção de um dado nível de precisão, de forma que a utilização de elementos mais complexos seja, então, sempre aconselhável.

14.
OBSERVAÇÕES SOBRE A BIFURCAÇÃO DO EQUILÍBRIO

Neste tópicO enquadrAm-se as estruturas para as quais, realizada a primeira iteraçãO, obtem-se:

$$\underline{K}_L = 0 \quad (14.1)$$

Tal condiçãO ocorre em pequeno nũmero de situações prãticas como por exemplo em pilares submetidos a cargas axiais e em placas carregadas unicamente em seu prõprio plano.

Da condiçãO acima, resulta:

$$d\underline{\psi} = \underline{K}_T d\underline{a} = (\underline{K}_O + \underline{K}_\sigma) d\underline{a} \quad (14.2)$$

onde a matriz \underline{K}_σ , como se pode comprovar na formulaçãO precedente, depende linearmente do nũvel das tensões. Quando se multiplica o carregamento por um fator λ , obtem-se:

$$d\underline{\psi} = (\underline{K}_O + \lambda \underline{K}_\sigma) d\underline{a} \quad (14.3)$$

A bifurcaçãO do equilĩbrio ocorre quando λ ẽ tal que:

$$d\underline{\psi} = 0$$

isto ẽ:

$$(\underline{K}_O + \lambda \underline{K}_\sigma) d\underline{a} = 0 \quad (14.4)$$

Dada a arbitrariedade de \underline{d}_a , devemos ter

$$\det (\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma) = 0 \quad (14.5)$$

A obtenção de λ reduz-se, então, a um problema de autovalores.

Quando não se verifica a condição (14.1), a expressão (14.3) deve ser substituída por:

$$d\underline{\psi} = (\underline{K}_0 + \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma) \underline{d}_a \quad (14.6)$$

O nível de carregamento que conduz à instabilidade é obtido de modo análogo ao empregado no exemplo 1.

15.
OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

15.1
SOBRE A ORDEM DE GRANDEZA DAS DEFORMAÇÕES

As teorias de segunda ordem exatas exigem, muitas vezes, que se abandone a hipótese de linearidade física expressa pela lei de Hooke. Assim sendo, admitida a validade da lei de Hooke, a ordem de grandeza das deformações fica limitada a valores que permitem a utilização de teorias de segunda ordem simplificadas.

Pela teoria matemática das deformações, o alongamento de um segmento infinitesimal paralelo ao eixo de referência x_i é dado por:

$$E_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} - 1$$

onde

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_r}{\partial x_i}$$

e a variação do ângulo reto entre dois segmentos infinitesimais paralelos a dois eixos de referência x_i, x_j é medida por:

$$\text{sen } \gamma_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}}$$

onde

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_r}{\partial x_j}$$

Desenvolvendo os termos $\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ij}}$ em s\u00e9rie, obt\u00eam-se

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ij}} = 1 + \varepsilon_{ij} + R_i$$

onde R_i \u00e9 formado de pot\u00eancias de ε_{ij} de expoente maior ou igual a 2.

As teorias simplificadas de segunda ordem sup\u00f5em que a ordem de grandeza das deforma\u00e7\u00f5es seja tal que se possa desprezar o res\u00edduo R_i de modo que:

$$E_i \cong \varepsilon_{ij} \quad \text{e} \quad \text{sen} \gamma_{ij} \cong \gamma_{ij} \cong 2\varepsilon_{ij}$$

considerando, na segunda express\u00e3o, que os termos ε_{ij} s\u00e3o desprez\u00edveis quando comparados \u00e0 unidade

As teorias de primeira ordem consideram apenas os termos lineares de ε_{ij} .

As id\u00e9ias acima ficam claras se se considera novamente o caso da barra de treli\u00e7a da Figura (15.1)

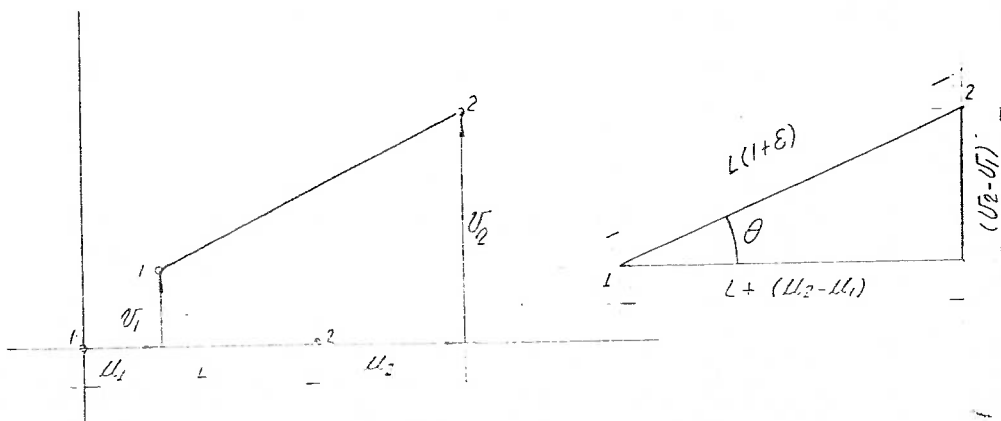


FIGURA (15.1)

A deformação ϵ_0 das teorias de primeira ordem é dada por:

$$\epsilon_0 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

A deformação ϵ das teorias de segunda ordem é dada por:

$$\epsilon = \frac{L(1 + \epsilon) - L}{L} = \frac{L(1 + \epsilon_0) \sec\theta - L}{L}$$

Da expressão acima resulta

$$1 + \epsilon_0 = (1 + \epsilon) \cos\theta$$

ou

$$\epsilon - \epsilon_0 = (1 + \epsilon)(1 - \cos\theta)$$

Desprezando-se o valor de ϵ quando comparado à unidade, tem-se

$$\epsilon = \epsilon_0 + (1 - \cos\theta)$$

Desenvolvendo-se o termo $\cos\theta$ em série, obtém-se:

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \dots$$

e

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{1}{2} \theta^2 + \dots$$

Dependendo da ordem de grandeza da rotação θ , pode-se ter:

1. rotações muito pequenas (da ordem de grandeza das deformações) para as quais o termo θ^2 é desprezível quando comparado a ϵ_0 e portanto $\epsilon \approx \epsilon_0$.

2. rotações pequenas (da ordem de grandeza da raiz quadrada das deformações) para as quais o termo θ^2 é da ordem de grandeza de ϵ_0 e portanto

$$\epsilon \cong \epsilon_0 + \frac{1}{2} \theta^2 \cong \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{L^2}$$

3. rotações grandes para as quais é necessário considerar mais termos da série para que a precisão do termo $\cos\theta$ seja compatível com a ordem de grandeza de ϵ_0 .

15.2 SOBRE AS MATRIZES \underline{A} E $\underline{\theta}$

Considerem - se as matrizes \underline{A} e $\underline{\theta}$ do capítulo 7 dadas por:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \underline{\theta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

e os vetores \underline{x} e \underline{y} , quaisquer, dados por:

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Nessas condições, valem as seguintes propriedades:

$$\begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{matrix} = \underline{X} \, d\underline{\theta}$$

Em particular, quando $\underline{x} = \underline{\theta}$, $\underline{X} = \underline{A}$ e portanto

$$d\underline{A} \, \underline{\theta} = \underline{A} \, d\underline{\theta}$$

$$\begin{bmatrix} d\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) & 0 & d\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ d\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & d\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ 0 & d\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & d\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ 0 & d\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) & d\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & 0 & y_3 & 0 & d\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ 0 & y_1 & 0 & y_3 & d\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ y_3 & 0 & y_2 & 0 & d\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ 0 & y_3 & 0 & y_2 & d\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix} = \underline{Y} \underline{d\theta}$$

Em particular, quando $\underline{y} = \underline{\sigma}$, $\underline{Y} = \underline{M}$ e portanto

$$d\underline{A}^T \underline{\sigma} = \underline{M} d\underline{\theta}$$

As propriedades acima, válidas para as diversas definições de \underline{A} e $\underline{\theta}$ que aparecem no trabalho, parecem encerrar uma interpretação física a qual, entretanto, nos escapa.

15.3 SOBRE A INTERPRETAÇÃO FÍSICA DAS MATRIZES QUE COMPÕEM A MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez \underline{K}_T permite relacionar a variação dos deslocamentos \underline{d}_a à variação dos esforços nodais \underline{dR} através de:

$$\underline{dR} = \underline{K}_T \underline{d}_a$$

Respeitadas as hipóteses referentes à ordem de grandeza das deformações, pode-se decompor a matriz de rigidez \underline{K}_T da seguinte maneira:

$$\underline{K}_T = \underline{K}_0 + \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma$$

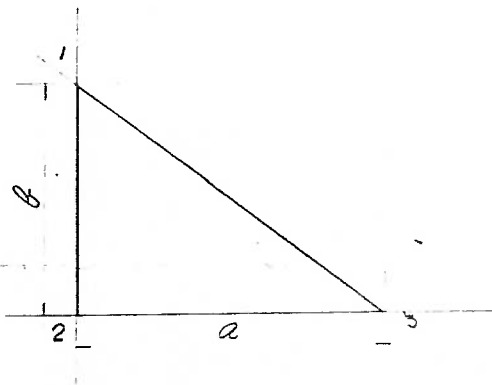
onde

\underline{K}_0 é a matriz de rigidez correspondente à análise linear,

\underline{K}_L é a correção de \underline{K}_0 devida à mudança de geometria e

\underline{K}_σ é a chamada matriz de rigidez geométrica, função linear do nível de solicitação da estrutura

A decomposição acima pode ser exemplificada considerando-se o elemento triangular da Figura (15.2) de espessura unitária, módulo de elasticidade E e $\nu = 0$.



$$B_i = \frac{y_j - y_m}{2\Delta} \quad C_i = \frac{x_m - x_y}{2\Delta}$$

$$\Delta = \frac{-1}{2} ab$$

FIGURA 15.2

As matrizes \underline{B}_0 e \underline{G} são características do elemento e seus termos são função da geometria. Assim, tem-se:

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \\ C_1 & B_1 & C_2 & B_2 & C_3 & B_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & -b & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 & 0 & B_3 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & b \\ a & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atingido um nível de solicitação caracterizado por

$$|u^e = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pode-se calcular

1) MATRIZ \underline{G}

$$\underline{\theta} = \underline{G} \underline{u}^e = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{v_1}{b} \end{array} \right\}$$

2) MATRIZ \underline{A}

$$\begin{bmatrix} \theta(1) & \theta(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta(3) & \theta(4) \\ \theta(3) & \theta(4) & \theta(1) & \theta(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v_1}{b} \\ 0 & \frac{v_1}{b} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) VETOR $\underline{\varepsilon}_0$

$$\underline{\varepsilon}_0 = \underline{B}_0 \underline{u}^e = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{v_1}{b} \\ 0 \end{array} \right\}$$

4) VETOR $\underline{\varepsilon}_L$

$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{\theta} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{b^2} \\ 0 \end{array} \right\}$$

5) VETOR $\underline{\varepsilon}$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{b} + \frac{v_1^2}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6) MATRIZ $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{b} + \frac{v_1^2}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} = E \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{b} + \frac{v_1^2}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7) MATRIZ \underline{B}_L

$$\underline{B}_L = \underline{A}\underline{G} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} v_1 & 0 & -\frac{a}{b} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_1 & 0 & -v_1 \end{bmatrix}$$

8) MATRIZ \underline{M}

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & \tau_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

9) MATRIZ \underline{K}_0 $\underline{K}_0 = \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 \Delta$

$$\underline{K}_0 = \frac{E}{2ab} \begin{bmatrix} 0.5a^2 & 0 & -0.5a^2 & -0.5ab & 0 & 0.5ab \\ 0 & a^2 & 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ -0.5a^2 & 0 & b^2+0.5a^2 & 0.5ab & -b^2 & -0.5ab \\ -0.5ab & -a^2 & 0.5ab & a^2+0.5b^2 & 0 & -0.5b^2 \\ 0 & 0 & -b^2 & 0 & b^2 & 0 \\ 0.5ab & 0 & -0.5ab & -0.5b^2 & 0 & 0.5b^2 \end{bmatrix}$$

10) MATRIZ \underline{K}_L $\underline{K}_L = (\underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L \Delta + \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 \Delta) + (\underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L \Delta)$

$$\underline{K}_L = \frac{E}{2ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.5av_1 & 0 & 0.5av_1 \\ 0 & 2\frac{a^2}{b} v_1 & 0 & -2\frac{a^2}{b} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5av_1 & 0 & -0.5av_1 \\ -0.5av_1 & -2\frac{a^2}{b} v_1 & 0.5av_1 & 2\frac{a^2}{b} v_1 + bv_1 & 0 & -bv_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5av_1 & 0 & -0.5av_1 & -bv_1 & 0 & bv_1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{E}{2ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{b} v_1^2 & 0 & -\frac{a^2}{b^2} v_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{b^2} v_1^2 & 0 & \frac{a^2}{b^2} v_1^2 + 0.5v_1^2 & 0 & -0.5v_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5v_1^2 & 0 & 0.5v_1^2 \end{bmatrix}$$

11) MATRIZ \underline{K}_σ

$$\underline{K}_\sigma = \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \Delta = \frac{1}{2ab} \begin{bmatrix} a^2 \sigma & 0 & -a^2 \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \sigma & 0 & -a^2 \sigma & 0 & 0 \\ -a^2 \sigma & 0 & a^2 \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \sigma & 0 & a^2 \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12) ESFORÇOS NODAIS (correspondentes aos deslocamentos \underline{u}^e)

$$\underline{R} = (\underline{B}_O + \underline{B}_L)^T \underline{\sigma} \Delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{a}{b} (b+v_1) \sigma \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{a}{b} (b+v_1) \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A um acréscimo de solicitação caracterizado por

$$\underline{\Delta u}^e = \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

correspondem os esforços adicionais dados por

$$\begin{aligned} \underline{\Delta R} &= (\underline{K}_O + \underline{K}_L) \underline{\Delta u}^e \\ + \underline{K}_\sigma \underline{\Delta u}^e &= \frac{E}{2ab} \end{aligned} \begin{Bmatrix} 0.5a^2 \\ 0 \\ -0.5a^2 \\ -0.5a(b+v_1) \\ 0 \\ 0.5a(b+v_1) \end{Bmatrix} \Delta u_1 + \frac{1}{2ab} \begin{Bmatrix} a^2 \sigma \\ 0 \\ -a^2 \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta u_1$$

como mostra a Figura (15.3)

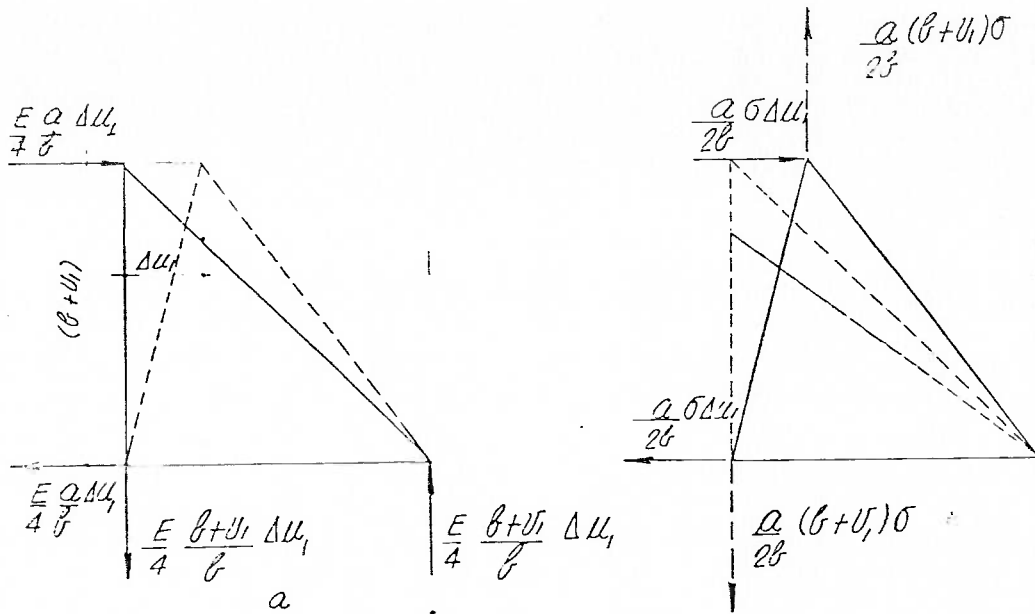


FIGURA (15.3)

CONCLUSÃO

A matriz $(\underline{K}_0 + \underline{K}_L)$ permite determinar a variação dos esforços nodais devida à solicitação adicional $\Delta \underline{u}^e$

A matriz \underline{K}_0 permite caracterizar a variação dos esforços nodais, — devida à interação entre a mudança de geometria ($\Delta \underline{u}^e$) e as tensões anteriormente instaladas (correspondentes a \underline{u}^e) —, a fim de que o equilíbrio seja mantido

De fato, a ação de $\Delta \underline{u}^e$ corresponde:

De fato à ação de $\Delta \underline{u}^e$ corresponde

$$\Delta \underline{\theta} = \underline{G} \Delta \underline{u}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta u_1}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta \underline{A} = \begin{bmatrix} \Delta \theta(1) & \Delta \theta(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \theta(3) & \Delta \theta(4) \\ \Delta \theta(3) & \Delta \theta(4) & \Delta \theta(1) & \Delta \theta(2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta u_1}{b} & 0 \\ \frac{\Delta u_1}{b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \underline{B}_L = \Delta \underline{A} \underline{G} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{b} \Delta u_1 & 0 & -\frac{a}{b} \Delta u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta u_1 & 0 & 0 & \Delta u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

A variação dos esforços nodais correspondentes ao estágio anterior \bar{e} dada por:

$$\underline{\Delta R}^* = \underline{\Delta B}^T \underline{\sigma} \Delta = \underline{\Delta B}_L^T \underline{\sigma} \Delta = \frac{1}{2ab}$$

$$\left. \begin{array}{c} a^2 \sigma \\ 0 \\ -a^2 \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \Delta u_1$$

que coincide com os valores obtidos anteriormente

BIBLIOGRAFIA

1. O.C.ZIENKIEWCZ, The Finite Element Method in Engineering Science, 2a. edition, McGraw Hill, London, 1971
2. R.H.GALLAGHER, Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, in Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proceeding of 1973 Tokyo Seminar of Finite Elements, Y.Yamada and R.H.Gallagher, University of Tokyo Press, 1973.
3. K.J.BATHE e E.L.WILSON, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
4. I.S. SOLKONIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, 2a. edition, Tata Mc Graw Hill Publishing Company Ltd. New Delhi, 1977
5. V.M. SOUZA LIMA e F. VENÂNCIO FILHO, Considerações sobre a não Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas, III Escola de Matemática Aplicada - Laboratório de Computação Científica (CNPq), Rio de Janeiro, 1982

ANEXOS

SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS TRIANGULARES

```

SUBROUTINE LS6(LT,CD,S,ESF,SG,DD,E,G,PR,MOD0,NDFB)
DIMENSION LT(1),CD(1),S(1),ESF(6,1),SG(1),DD(1),
*A(6,1),B0(3,6),GE(4,6),EPS0(3,1),TETA(4,1),AG(3,4),EPSL(3,1),
*EPS(3,1),BL(3,6),B(3,6),SIGMA(3,1),D(3,3),PSI(6,1),EME(4,4),
*XK1(6,6),XKSIG(6,6),XKT(6,6),AUX1(6,3),AUX2(3,6),AUX3(6,4),
*AUX4(4,6)
COMMON /LS6/ IEL
C XE(1,1)=0.
C XE(2,1)=0.
C XE(3,1)=CD(1)
C XE(4,1)=CD(3)
C XE(5,1)=CD(2)
C XE(6,1)=CD(4)
DELTA=(CD(1)*CD(4)-CD(2)*CD(3))/2.
AJ=CD(1)/2./DELTA
AK=CD(2)/2./DELTA
BJ=CD(3)/2./DELTA
BK=CD(4)/2./DELTA
T=CD(5)
C MONTAGEM DE B0
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,6
1 B0(I,J)=0.
B0(1,1)=BJ-BK
B0(1,3)=BK
B0(1,5)=-BJ
B0(2,2)=AK-AJ
B0(2,4)=-AK
B0(2,6)=AJ
B0(3,1)=AK-AJ
B0(3,2)=BJ-BK
B0(3,3)=-AK
B0(3,4)=BK
B0(3,5)=AJ
B0(3,6)=-BJ
C MONTAGEM DE GE
DO 2 I=1,4
DO 2 J=1,6
2 GE(I,J)=0.
GE(1,1)=BJ-BK
GE(1,3)=BK
GE(1,5)=-BJ
GE(2,2)=BJ-BK
GE(2,4)=BK
GE(2,6)=-BJ

```

```

GE(3,1)=AK-AJ
GE(3,3)=-AK
GE(3,5)=AJ
GE(4,2)=AK-AJ
GE(4,4)=-AK
GE(4,6)=AJ
DO 3 I=1,6
A(I,1)=0
IF(LI(I).EQ.0) GOTO 3
A(I,1)=DD(LI(I))
3 CONTINUE
C VETOR EPS0
CALL MTMLT(B0,A,EPS0,3,6,1)
C MONTAGEM DE TETA
CALL MTMLT(GE,A,TETA,4,6,1)
C MONTAGEM DE AG
DO 4 I=1,3
DO 4 J=1,4
4 AG(I,J)=0.
AG(1,1)=TETA(1,1)
AG(1,2)=TETA(2,1)
AG(2,3)=TETA(3,1)
AG(2,4)=TETA(4,1)
AG(3,1)=TETA(3,1)
AG(3,2)=TETA(4,1)
AG(3,3)=TETA(1,1)
AG(3,4)=TETA(2,1)
C VETOR EPSL
CALL MTMLT(AG,TETA,EPSL,3,4,1)
DO 5 I=1,3
5 EPSL(I,1)=EPSL(I,1)/2.
C VETOR EPS
DO 6 I=1,3
6 EPS(I,1)=EPS0(I,1)+EPSL(I,1)
C MATRIZ BL
CALL MTMLT(AG,GE,BL,3,4,6)
C MATRIZ B
DO 7 I=1,3
DO 7 J=1,6
7 B(I,J)=B0(I,J)+BL(I,J)
C VETOR SIGMA
DO 8 I=1,3
DO 8 J=1,3
8 D(I,J)=0.
D(1,1)=1.
D(1,2)=PR
D(2,1)=PR
D(2,2)=1.
D(3,3)=(1-PR)/2.
DO 9 I=1,3
DO 9 J=1,3
9 D(I,J)=D(I,J)*E/(1-PR**2)
CALL MTMLT(D,EPS,SIGMA,3,3,1)
C VETOR PSI
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,6
10 AUX1(J,I)=B(I,J)
CALL MTMLT(AUX1,SIGMA,PSI,6,3,1)
DO 11 I=1,6
11 PSI(I,1)=PSI(I,1)*DELTA*T
C MONTAGEM DE EME
DO 12 I=1,4
DO 12 J=1,4

```

```

12 EME(I,J)=0.
   EME(1,1)=SIGMA(1,1)
   EME(1,3)=SIGMA(3,1)
   EME(2,2)=SIGMA(1,1)
   EME(2,4)=SIGMA(3,1)
   EME(3,1)=SIGMA(3,1)
   EME(3,3)=SIGMA(2,1)
   EME(4,2)=SIGMA(3,1)
   EME(4,4)=SIGMA(2,1)
C   MATRIZ XK1
   CALL MTMLT(D,B,AUX2,3,3,6)
   CALL MTMLT(AUX1,AUX2,XK1,6,3,6)
   DO 13 I=1,6
     DO 13 J=1,6
13   XK1(I,J)=XK1(I,J)*DELTA*T
C   MATRIZ XKSIG
   DO 14 I=1,4
     DO 14 J=1,6
14   AUX3(J,I)=GE(I,J)
   CALL MTMLT(EME,GE,AUX4,4,4,6)
   CALL MTMLT(AUX3,AUX4,XKSIG,6,4,6)
   DO 15 I=1,6
     DO 15 J=1,6
15   XKSIG(I,J)=XKSIG(I,J)*DELTA*T
C   MATRIZ XKT
   DO 16 I=1,6
     DO 16 J=1,6
16   XKT(I,J)=XK1(I,J)+XKSIG(I,J)
     K=0
     DO 17 I=1,6
       DO 17 J=I,6
         K=K+1
17   S(K)=XKT(I,J)
     DO 18 I=1,6
18   ESF(I,1)=PSI(I,1)
     ZC=(SIGMA(1,1)+SIGMA(2,1))/2.
     ZA=SQRT(((SIGMA(2,1)-SIGMA(1,1))/2.)**2+SIGMA(3,1)**2)
     SIG1=ZC+ZA
     SIG2=ZC-ZA
     IF(SIGMA(2,1).EQ.SIG2) GOTO 81
     ANG=57.29578*ATAN(SIGMA(3,1)/(SIGMA(2,1)-SIG2))
     GOTO 80
81   ANG=90.
80   CONTINUE
     PRINT 82,I,EL, SIGMA(1,1),SIGMA(2,1),SIGMA(3,1),SIG1,SIG2,ANG
82   FORMAT("0ELEM=",I3," SX=",F10.3," SY=",F10.3," SXY=",F10.3,
* " * S1=",F10.3," S2=",F10.3," ANG=",F6.2)
     RETURN
     END

```

SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS QUADRANGULARES

```

SUBROUTINE LS6(LT,CD,Z,ESE,SG,DD,E,G,PR,MODE,NDEB)
REAL JOTA
DIMENSION LT(1),CD(1),Z(1),ESE( 8,1),SG(1),DD(1),
*XE( 8,1),A( 8,1),XK1( 8, 8),XKSIG( 8, 8),PSI( 8,1),
*C1(2,4),C2(2, 8),C3(2, 8),DXRS(2,1),DYRS(2,1),JOTA(2,2),
*AI0J(2,2),DUXY(2,1),DVXY(2,1),GAMA(2,4),B0(3, 8),GE(4, 8),
*EPS0(3,1),IETA(4,1),AG(3,4),EPSL(3,1),EPS(3,1),BL(3, 8),
*B(3, 8),D(3,3),SIGMA(3,1),FPSI( 8,1),EME(4,4),FK1( 8, 8),
*FKSIG( 8, 8),XKT( 8, 8),AUX1(2,1),AUX2(2,1),AUX3( 8,3),
*AUX4(3, 8),AUX5( 8,4),AUX6(4, 8)
COMMON /LS6/ IEL
XE(1,1)=0.
XE(2,1)=0.
XE(3,1)=CD(1)
XC(4,1)=CD(4)
XE(5,1)=CD(2)
XE(6,1)=CD(5)
XE(7,1)=CD(3)
XE(8,1)=CD( 6)
T=CD( 7)
DO 1 K=1,8
DO 1 L=1,8
XK1(K,L)=0.
1 XKSIG(K,L)=0.
DO 2 K=1,8
2 PSI(K,1)=0.
DO 3 I=1,8
A(I,1)=0
IF(LT(I).EQ.0) GOTO 3
A(I,1)=DD(LT(I))
3 CONTINUE
DO 4 I=1,2
DO 4 J=1,2
RI=(2*I-3)*.5773502691
SJ=(2*J-3)*.5773502691
C
MONTAGEM DE C1
C1(1,1)=0.25*(1.+SJ)
C1(1,2)=-0.25*(1.+SJ)
C1(1,3)=-0.25*(1.-SJ)
C1(1,4)=0.25*(1.-SJ)
C1(2,1)=0.25*(1.+RI)
C1(2,2)=0.25*(1.-RI)
C1(2,3)=-0.25*(1.-RI)
C1(2,4)=-0.25*(1.+RI)
C
MONTAGEM DE C2 (2X16)

```

```

DO 5 K=1,2
DO 5 L=1,8
5 C2(K,L)=0.
C2(1,1)=C1(1,1)
C2(1,3)=C1(1,2)
C2(1,5)=C1(1,3)
C2(1,7)=C1(1,4)
C2(2,1)=C1(2,1)
C2(2,3)=C1(2,2)
C2(2,5)=C1(2,3)
C2(2,7)=C1(2,4)

```

C MONTAGEM DE C3 (2X16)

```

-DC 6 K=1,2
DO 6 L=1,8
6 C3(K,L)=0.
C3(1,2)=C1(1,1)
C3(1,4)=C1(1,2)
C3(1,6)=C1(1,3)
C3(1,8)=C1(1,4)
C3(2,2)=C1(2,1)
C3(2,4)=C1(2,2)
C3(2,6)=C1(2,3)
C3(2,8)=C1(2,4)

```

C MATRIZ DXRS

```
CALL MTMLT(C2,XE,DXRS,2, 8,1)
```

C MATRIZ DYRS

```
CALL MTMLT(C3,XE,DYRS,2, 8,1)
```

C MONTAGEM DE JOTA

```

JOTA(1,1)=DXRS(1,1)
JOTA(1,2)=DYRS(1,1)
JOTA(2,1)=DXRS(2,1)
JOTA(2,2)=DYRS(2,1)

```

C DETERMINANTE DE JOTA

```
DET=JOTA(1,1)*JOTA(2,2)-JOTA(1,2)*JOTA(2,1)
```

C MONTAGEM DE ATOJ

```

ATOJ(1,1)=JOTA(2,2)/DET
ATOJ(1,2)=-JOTA(1,2)/DET
ATOJ(2,1)=-JOTA(2,1)/DET
ATOJ(2,2)=JOTA(1,1)/DET

```

C MATRIZ DUXY

```

CALL MTMLT(C2,A,AUX1,2, 8,1)
CALL MTMLT(ATOJ,AUX1,DUXY,2,2,1)

```

C MATRIZ DVXY

```

CALL MTMLT(C3,A,AUX2,2, 8,1)
CALL MTMLT(ATOJ,AUX2,DVXY,2,2,1)

```

C MATRIZ GAMA

```
CALL MTMLT(ATOJ,C1,GAMA,2,2,4)
```

C MONTAGEM DE B0

```

DO 7 K=1,3
DO 7 L=1,8
7 B0(K,L)=0.
B0(1,1)=GAMA(1,1)
B0(1,3)=GAMA(1,2)
B0(1,5)=GAMA(1,3)
B0(1,7)=GAMA(1,4)
B0(2,2)=GAMA(2,1)
B0(2,4)=GAMA(2,2)
B0(2,6)=GAMA(2,3)
B0(2,8)=GAMA(2,4)
B0(3,1)=GAMA(2,1)
B0(3,2)=GAMA(1,1)
B0(3,3)=GAMA(2,2)
B0(3,4)=GAMA(1,2)

```



```

B0(3,5)=GAMA(2,3)
B0(3,6)=GAMA(1,3)
B0(3,7)=GAMA(2,4)
B0(3,8)=GAMA(1,4)
C MONTAGEM DE GE
DO 8 K=1,4
DO 8 L=1,8
8 GE(K,L)=0
GE(1,1)=GAMA(1,1)
GE(1,3)=GAMA(1,2)
GE(1,5)=GAMA(1,3)
GE(1,7)=GAMA(1,4)
GE(2,2)=GAMA(1,1)
GE(2,4)=GAMA(1,2)
GE(2,6)=GAMA(1,3)
GE(2,8)=GAMA(1,4)
GE(3,1)=GAMA(2,1)
GE(3,3)=GAMA(2,2)
GE(3,5)=GAMA(2,3)
GE(3,7)=GAMA(2,4)
GE(4,2)=GAMA(2,1)
GE(4,4)=GAMA(2,2)
GE(4,6)=GAMA(2,3)
GE(4,8)=GAMA(2,4)
C VETOR EPS0
CALL MTMLT(B0,A,EPS0,3,8,1)
C MONTAGEM DE TETA
TETA(1,1)=DUXY(1,1)
TETA(2,1)=DVXY(1,1)
TETA(3,1)=DUXY(2,1)
TETA(4,1)=DVXY(2,1)
C MONTAGEM DE AG
DO 9 K=1,3
DO 9 L=1,4
9 AG(K,L)=0.
AG(1,1)=TETA(1,1)
AG(1,2)=TETA(2,1)
AG(2,3)=TETA(3,1)
AG(2,4)=TETA(4,1)
AG(3,1)=TETA(3,1)
AG(3,2)=TETA(4,1)
AG(3,3)=TETA(1,1)
AG(3,4)=TETA(2,1)
C VETOR EPSL
CALL MTMLT(AG,TETA,EPSL,3,4,1)
DO 10 K=1,3
10 EPSL(K,1)=EPSL(K,1)/2.
C VETOR EPS
DO 11 K=1,3
11 EPS(K,1)=EPS0(K,1)+EPSL(K,1)
C MAIRIZ BL
CALL MTMLT(AG,GE,BL,3,4,8)
C MATRIZ B
DO 12 K=1,3
DO 12 L=1,8
12 B(K,L)=B0(K,L)+BL(K,L)
C VETOR SIGMA
DO 13 K=1,3
DO 13 L=1,3
13 D(K,L)=0.
D(1,1)=1.
D(1,2)=PR
D(2,1)=PR

```

```

D(2,2)=1.
D(3,3)=(1.-PR)/2.
DO 14 K=1,3
DO 14 L=1,3
14 D(K,L)=D(K,L)*E/(1.-PR**2)
CALL MTMLT(D, EPS, SIGMA, 3, 3, 1)
C
VETOR PSI
DO 15 K=1,3
DO 15 L=1,8
15 AUX3(L,K)=B(K,L)
CALL MTMLT(AUX3, SIGMA, FPSI, 8, 3, 1)
DO 16 K=1,8
FPSI(K,1)=FPSI(K,1)*DET*T
16 PSI(K,1)=PSI(K,1)+FPSI(K,1)
C
MONTAGEM DE EME
DO 17 K=1,4
DO 17 L=1,4
17 EME(K,L)=0.
EME(1,1)=SIGMA(1,1)
EME(1,3)=SIGMA(3,1)
EME(2,2)=SIGMA(1,1)
EME(2,4)=SIGMA(3,1)
EME(3,1)=SIGMA(3,1)
EME(3,3)=SIGMA(2,1)
EME(4,2)=SIGMA(3,1)
EME(4,4)=SIGMA(2,1)
C
MATRIZ XK1
CALL MTMLT(D, B, AUX4, 3, 3, 8)
CALL MTMLT(AUX3, AUX4, FK1, 8, 3, 8)
DO 18 K=1,8
DO 18 L=1,8
FK1(K,L)=FK1(K,L)*DET*T
18 XK1(K,L)=XK1(K,L)+FK1(K,L)
C
MATRIZ XKSIG
DO 19 K=1,4
DO 19 L=1,8
19 AUX5(L,K)=GE(K,L)
CALL MTMLT(EME, GE, AUX6, 4, 4, 8)
CALL MTMLT(AUX5, AUX6, FKSIG, 8, 4, 8)
DO 20 K=1,8
DO 20 L=1,8
FKSIG(K,L)=FKSIG(K,L)*DET*T
20 XKSIG(K,L)=XKSIG(K,L)+FKSIG(K,L)
ZC=(SIGMA(1,1)+SIGMA(2,1))/2
ZA=SQRT(((SIGMA(2,1)-SIGMA(1,1))/2.)**2+SIGMA(3,1)**2)
SIG1=ZC+ZA
SIG2=ZC-ZA
IF(SIGMA(2,1).EQ.SIG2) GOTO 81
ANG=57.29578*ATAN(SIGMA(3,1)/(SIGMA(2,1)-SIG2))
GOTO 80
81 ANG=90.
80 CONTINUE
PRINT 82, IEL, SIGMA(1,1), SIGMA(2,1), SIGMA(3,1), SIG1, SIG2, ANG
82 FORMAT(/, " ELEM.", I3, " SX =", F8.2, " SY =", F8.2, " T =", F8.2,
* " S1 =", F8.2, " S2 =", F8.2, " ANG =", F8.2)
4 CONTINUE
C
MATRIZ XKT
DO 21 K=1,8
DO 21 L=1,8
21 XKT(K,L)=XK1(K,L)+XKSIG(K,L)
K=0
DO 22 I=1,8
DO 22 J=1,8

```

```
K=K+1  
22 Z(K)=XKT(I,J)  
DO 23 I=1,16  
23 ESF(I,1)=PSI(I,1)  
RETURN  
END
```

SUB-ROTINA PARA CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS COM 8 NÓS

```

SUBROUTINE LS6(LT,CD,Z,ESF,SG,DD,E,G,PR,MOD0,NDFB)
REAL JOTA
DIMENSION LT(1),CD(1),Z(1),ESF(16,1),SG(1),DD(1),
*XE(16,1),A(16,1),XK1(16,16),XKSIG(16,16),PSI(16,1),
*CI(2,8),C2(2,16),C3(2,16),DXRS(2,1),DYRS(2,1),JOTA(2,2),
*ATOJ(2,2),DUXY(2,1),DVXY(2,1),GAMA(2,8),B0(3,16),GE(4,16),
*EPS0(3,1),TETA(4,1),AG(3,4),EPSL(3,1),EPS(3,1),BL(3,16),
*B(3,16),D(3,3),SIGMA(3,1),FPSI(16,1),EME(4,4),FK1(16,16),
*FKSIG(16,16),XKT(16,16),AUX1(2,1),AUX2(2,1),AUX3(16,3),
*AUX4(3,16),AUX5(16,4),AUX6(4,16)
COMMON /LS6/ IEL
XE(1,1)=0.
XE(2,1)=0.
XE(3,1)=CD(1)
XE(4,1)=CD(8)
XE(5,1)=CD(2)
XE(6,1)=CD(9)
XE(7,1)=CD(3)
XE(8,1)=CD(10)
XE(9,1)=CD(4)
XE(10,1)=CD(11)
XE(11,1)=CD(5)
XE(12,1)=CD(12)
XE(13,1)=CD(6)
XE(14,1)=CD(13)
XE(15,1)=CD(7)
XE(16,1)=CD(14)
T=CD(15)
DO 1 K=1,16
DO 1 L=1,16
XK1(K,L)=0.
1 XKSIG(K,L)=0.
DO 2 K=1,16
2 PSI(K,1)=0.
DO 3 I=1,16
A(I,1)=0
IF(LI(I).EQ.0) GOTO 3
A(I,1)=DD(LI(I))
3 CONTINUE
IF(CD(16).EQ.0.) GOTO 90
NPI=3
P=0.7745966692
R=0.5555555556
S=0.8888888889
GOTO 91

```

90 CONTINUE

NPI=4

P=0.8611363116

Q=0.3399810436

R=0.3478548451

S=0.6521451549

91 CONTINUE

DO 4 I=1,NPI

DO 4 J=1,NPI

IF(CD(16).EQ.0.) GOTO 92

RI=(I-2)*P

SJ=(J-2)*P

HI=(R-S)*I**2-4*(R-S)*I+(4*R-3*S)

HJ=(R-S)*J**2-4*(R-S)*J+(4*R-3*S)

GOTO 93

92 CONTINUE

RI=((P-3*Q)/3.)*(I-2.5)**3+((27*Q-P)/12.)*(I-2.5)

SJ=((P-3*Q)/3.)*(J-2.5)**3+((27*Q-P)/12.)*(J-2.5)

HI=((R-S)/2.)*(I-2.5)**2+(9*S-R)/8.

HJ=((R-S)/2.)*(J-2.5)**2+(9*S-R)/8.

93 CONTINUE

C MONTAGEM DE C1

C1(1,1)=0.25*(1.+SJ)*(2.*RI+SJ)

C1(1,2)=0.25*(1.+SJ)*(2.*RI-SJ)

C1(1,3)=0.25*(1.-SJ)*(2.*RI+SJ)

C1(1,4)=0.25*(1.-SJ)*(2.*RI-SJ)

C1(1,5)=-RI*(1.+SJ)

C1(1,6)=-0.50*(1.-SJ**2.)

C1(1,7)=-RI*(1.-SJ)

C1(1,8)=0.50*(1.-SJ**2.)

C1(2,1)=0.25*(1.+RI)*(2.*SJ+RI)

C1(2,2)=0.25*(1.-RI)*(2.*SJ-RI)

C1(2,3)=0.25*(1.-RI)*(2.*SJ+RI)

C1(2,4)=0.25*(1.+RI)*(2.*SJ-RI)

C1(2,5)=0.50*(1.-RI**2.)

C1(2,6)=-SJ*(1.-RI)

C1(2,7)=-0.50*(1.-RI**2.)

C1(2,8)=-SJ*(1.+RI)

C MONTAGEM DE C2 (2X16)

DO 5 K=1,2

DO 5 L=1,16

5 C2(K,L)=0.

C2(1,1)=C1(1,1)

C2(1,3)=C1(1,2)

C2(1,5)=C1(1,3)

C2(1,7)=C1(1,4)

C2(1,9)=C1(1,5)

C2(1,11)=C1(1,6)

C2(1,13)=C1(1,7)

C2(1,15)=C1(1,8)

C2(2,1)=C1(2,1)

C2(2,3)=C1(2,2)

C2(2,5)=C1(2,3)

C2(2,7)=C1(2,4)

C2(2,9)=C1(2,5)

C2(2,11)=C1(2,6)

C2(2,13)=C1(2,7)

C2(2,15)=C1(2,8)

C MONTAGEM DE C3 (2X16)

DO 6 K=1,2

DO 6 L=1,16

6 C3(K,L)=0.

C3(1,2)=C1(1,1)

```

C3(1,4)=C1(1,2)
C3(1,6)=C1(1,3)
C3(1,8)=C1(1,4)
C3(1,10)=C1(1,5)
C3(1,12)=C1(1,6)
C3(1,14)=C1(1,7)
C3(1,16)=C1(1,8)
C3(2,2)=C1(2,1)
C3(2,4)=C1(2,2)
C3(2,6)=C1(2,3)
C3(2,8)=C1(2,4)
C3(2,10)=C1(2,5)
C3(2,12)=C1(2,6)
C3(2,14)=C1(2,7)
C3(2,16)=C1(2,8)
C
MATRIZ DXRS
CALL MTMLT(C2,XE,DXRS,2,16,1)
C
MATRIZ DYRS
CALL MTMLT(C3,XE,DYRS,2,16,1)
C
MONTAGEM DE JOTA
JOTA(1,1)=DXRS(1,1)
JOTA(1,2)=DYRS(1,1)
JOTA(2,1)=DXRS(2,1)
JOTA(2,2)=DYRS(2,1)
C
DETERMINANTE DE JOTA
DET=JOTA(1,1)*JOTA(2,2)-JOTA(1,2)*JOTA(2,1)
C
MONTAGEM DE ATOJ
ATOJ(1,1)=JOTA(2,2)/DET
ATOJ(1,2)=-JOTA(1,2)/DET
ATOJ(2,1)=-JOTA(2,1)/DET
ATOJ(2,2)=JOTA(1,1)/DET
C
MATRIZ DUXY
CALL MTMLT(C2,A,AUX1,2,16,1)
CALL MTMLT(ATOJ,AUX1,DUXY,2,2,1)
C
MATRIZ DVXY
CALL MTMLT(C3,A,AUX2,2,16,1)
CALL MTMLT(ATOJ,AUX2,DVXY,2,2,1)
C
MATRIZ GAMA
CALL MTMLT(ATOJ,C1,GAMA,2,2,8)
C
MONTAGEM DE B0
DO 7 K=1,3
DO 7 L=1,16
7 B0(K,L)=0.
B0(1,1)=GAMA(1,1)
B0(1,3)=GAMA(1,2)
B0(1,5)=GAMA(1,3)
B0(1,7)=GAMA(1,4)
B0(1,9)=GAMA(1,5)
B0(1,11)=GAMA(1,6)
B0(1,13)=GAMA(1,7)
B0(1,15)=GAMA(1,8)
B0(2,2)=GAMA(2,1)
B0(2,4)=GAMA(2,2)
B0(2,6)=GAMA(2,3)
B0(2,8)=GAMA(2,4)
B0(2,10)=GAMA(2,5)
B0(2,12)=GAMA(2,6)
B0(2,14)=GAMA(2,7)
B0(2,16)=GAMA(2,8)
B0(3,1)=GAMA(2,1)
B0(3,2)=GAMA(1,1)
B0(3,3)=GAMA(2,2)
B0(3,4)=GAMA(1,2)

```

B0(3,5)=GAMA(2,3)
B0(3,6)=GAMA(1,3)
B0(3,7)=GAMA(2,4)
B0(3,8)=GAMA(1,4)
B0(3,9)=GAMA(2,5)
B0(3,10)=GAMA(1,5)
B0(3,11)=GAMA(2,6)
B0(3,12)=GAMA(1,6)
B0(3,13)=GAMA(2,7)
B0(3,14)=GAMA(1,7)
B0(3,15)=GAMA(2,8)
B0(3,16)=GAMA(1,8)

C MONTAGEM DE GE

DO 8 K=1,4

DO 8 L=1,16

8 GE(K,L)=0

GE(1,1)=GAMA(1,1)

GE(1,3)=GAMA(1,2)

GE(1,5)=GAMA(1,3)

GE(1,7)=GAMA(1,4)

GE(1,9)=GAMA(1,5)

GE(1,11)=GAMA(1,6)

GE(1,13)=GAMA(1,7)

GE(1,15)=GAMA(1,8)

GE(2,2)=GAMA(1,1)

GE(2,4)=GAMA(1,2)

GE(2,6)=GAMA(1,3)

GE(2,8)=GAMA(1,4)

GE(2,10)=GAMA(1,5)

GE(2,12)=GAMA(1,6)

GE(2,14)=GAMA(1,7)

GE(2,16)=GAMA(1,8)

GE(3,1)=GAMA(2,1)

GE(3,3)=GAMA(2,2)

GE(3,5)=GAMA(2,3)

GE(3,7)=GAMA(2,4)

GE(3,9)=GAMA(2,5)

GE(3,11)=GAMA(2,6)

GE(3,13)=GAMA(2,7)

GE(3,15)=GAMA(2,8)

GE(4,2)=GAMA(2,1)

GE(4,4)=GAMA(2,2)

GE(4,6)=GAMA(2,3)

GE(4,8)=GAMA(2,4)

GE(4,10)=GAMA(2,5)

GE(4,12)=GAMA(2,6)

GE(4,14)=GAMA(2,7)

GE(4,16)=GAMA(2,8)

C VETOR EPS0

CALL MTMLT(B0,A,EPS0,3,16,1)

C MONTAGEM DE TETA

TETA(1,1)=DUXY(1,1)

TETA(2,1)=DVXY(1,1)

TETA(3,1)=DUXY(2,1)

TETA(4,1)=DVXY(2,1)

C MONTAGEM DE AG

DO 9 K=1,3

DO 9 L=1,4

9 AG(K,L)=0.

AG(1,1)=TETA(1,1)

AG(1,2)=TETA(2,1)

AG(2,3)=TETA(3,1)

AG(2,4)=TETA(4,1)

```

AG(3,1)=TETA(3,1)
AG(3,2)=TETA(4,1)
AG(3,3)=TETA(1,1)
AG(3,4)=TETA(2,1)
C
VETOR EPSL
CALL MTMLT(AG,TETA,EPSSL,3,4,1)
DO 10 K=1,3
10 EPSSL(K,1)=EPSSL(K,1)/2.
C
VETOR EPS
DO 11 K=1,3
11 EPS(K,1)=EPS0(K,1)+EPSSL(K,1)
C
MATRIZ BL
CALL MTMLT(AG,GE,BL,3,4,16)
C
MATRIZ B
DO 12 K=1,3
DO 12 L=1,16
12 B(K,L)=B0(K,L)+BL(K,L)
C
VETOR SIGMA
DO 13 K=1,3
DO 13 L=1,3
13 D(K,L)=0.
D(1,1)=1.
D(1,2)=PR
D(2,1)=PR
D(2,2)=1.
D(3,3)=(1.-PR)/2.
DO 14 K=1,3
DO 14 L=1,3
14 D(K,L)=D(K,L)*E/(1.-PR**2)
CALL MTMLT(D,EPS,SIGMA,3,3,1)
C
VETOR PSI
DO 15 K=1,3
DO 15 L=1,16
15 AUX3(L,K)=B(K,L)
CALL MTMLT(AUX3,SIGMA,FPSI,16,3,1)
DO 16 K=1,16
FPSI(K,1)=FPSI(K,1)*HI*HJ*DET*T
16 PSI(K,1)=PSI(K,1)+FPSI(K,1)
C
MONTAGEM DE EME
DO 17 K=1,4
DO 17 L=1,4
17 EME(K,L)=0.
EME(1,1)=SIGMA(1,1)
EME(1,3)=SIGMA(3,1)
EME(2,2)=SIGMA(1,1)
EME(2,4)=SIGMA(3,1)
EME(3,1)=SIGMA(3,1)
EME(3,3)=SIGMA(2,1)
EME(4,2)=SIGMA(3,1)
EME(4,4)=SIGMA(2,1)
C
MATRIZ XK1
CALL MTMLT(D,B,AUX4,3,3,16)
CALL MTMLT(AUX3,AUX4,FK1,16,3,16)
DO 18 K=1,16
DO 18 L=1,16
FK1(K,L)=FK1(K,L)*HI*HJ*DET*T
18 XK1(K,L)=XK1(K,L)+FK1(K,L)
C
MAJTRIZ XKSIG
DO 19 K=1,4
DO 19 L=1,16
19 AUX5(L,K)=GE(K,L)
CALL MTMLT(EME,GE,AUX6,4,4,16)
CALL MTMLT(AUX5,AUX6,FKSIG,16,4,16)

```



```
DO 20 K=1,16
DO 20 L=1,16
FKSIG(K,L)=FKSIG(K,L)*HI*HJ*DET*T
20 XKSIG(K,L)=XKSIG(K,L)+FKSIG(K,L)
ZC=(SIGMA(1,1)+SIGMA(2,1))/2
ZA=SQRT(((SIGMA(2,1)-SIGMA(1,1))/2)**2+SIGMA(3,1)**2)
SIG1=ZC+ZA
SIG2=ZC-ZA
IF(SIGMA(2,1).EQ.SIG2) GOTO 81
ANG=57.29578*ATAN(SIGMA(3,1)/(SIGMA(2,1)-SIG2))
GOTO 80
81 ANG=90.
80 CONTINUE
PRINT 82,IEL, SIGMA(1,1),SIGMA(2,1),SIGMA(3,1),SIG1,SIG2,ANG
82 FORMAT(/," ELEM.",I3," SX =",F8.2," SY =",F8.2," T =",F8.2,
* " S1 =",F8.2," S2 =",F8.2," ANG =",F8.2)
4 CONTINUE
C MATRIZ XKT
DO 21 K=1,16
DO 21 L=1,16
21 XKT(K,L)=XKI(K,L)+XKSIG(K,L)
K=0
DO 22 I=1,16
DO 22 J=1,16
K=K+1
22 Z(K)=XKT(I,J)
DO 23 I=1,16
23 ESF(I,1)=PSI(I,1)
RETURN
END
```