



SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO.....	II
ABSTRACT	III
LISTA DE FIGURAS.....	IV
LISTA DE TABELAS.....	VI
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS.....	2
1.2 JUSTIFICATIVA.....	3
2. NOÇÕES MATEMÁTICAS	6
2.1 DIVISÃO SINTÉTICA DE POLINÔMIOS COM UMA VARIÁVEL.....	6
2.2 DIVISÃO SINTÉTICA DE POLINÔMIOS COM DUAS VARIÁVEIS	9
2.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	12
2.3.1 Integração de Newton-Cotes unidimensional.....	13
2.3.2 Integração de Gauss-Legendre unidimensional.....	14
2.3.3 Integração numérica bidimensional.....	16
2.4 ESTUDO SOBRE QUÁDRICAS	17
2.4.1 Formas Bilineares	17
2.4.2 Formas Simétricas.....	18
2.4.3 Formas Quadráticas	19
2.4.4 Quádricas.....	19
3. FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	22
3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	22
3.2 CÁLCULO DE INTEGRAIS NO MEC	27
3.3 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO	29
3.3.1 Tipos de integrais singulares em MEC	30
3.4.1 Histórico das técnicas de integração singulares	32
3.5 PÓLOS DE SINGULARIDADE PARA O CASO 2D E 3D.....	34
3.5.1 Identificação dos pólos de singularidade para o caso 2D	35
3.5.2 Identificação dos pólos de singularidade para o caso 3D	37
3.6 TRATAMENTO DO EFEITO DE QUASE-SINGULARIDADE COMPLEXA PARA O CASO 2D.....	39



4. TÉCNICA APLICADA A ANÁLISE BIDIMENSIONAL COM MEC	44
4.1 FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS COM MEC	44
4.2 DETERMINAÇÃO DA PARCELA EFETIVA DE SINGULARIDADE .	46
4.3 TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO APLICADA A ANÁLISE BIDIMENSIONAL COM MEC.....	48
4.4 PARCELAS DE INTEGRAIS QUE OCORREM EM MEC PARA ANÁLISE BIDIMENSIONAL	51
4.5 RESULTADOS DE INTEGRAIS UNIDIMENSIONAIS	53
5. TÉCNICA PROPOSTA PARA ANÁLISE 3D	58
5.1 FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS COM MEC	59
5.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA BUSCA DE PÓLOS EM ANÁLISE TRIDIMENSIONAL COM O MEC	60
5.3 DETERMINAÇÃO DA PARCELA EFETIVA DE SINGULARIDADE .	64
5.4 PROCEDIMENTO PARA A DETERMINAÇÃO DA PARCELA EFETIVA DE SINGULARIDADE DE ELEMENTOS DE CONTORNO.....	69
5.5 INTEGRAÇÃO BIDIMENSIONAL NO SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES	72
5.5.1 Integração numérica específica.....	72
5.5.2 Elementos de contorno não-distorcidos e sem escalas	75
5.5.3 Elementos de contorno distorcidos e/ou com escalas.....	77
5.6 TIPOS DE KERNEL QUE OCORREM EM ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL EM MEC	81
6. RESULTADOS	84
6.1 REGULARIZAÇÃO DA INTEGRAL BIDIMENSIONAL	84
6.1.1 Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós não-distorcido e sem escala	85
6.1.2 Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós distorcido na direção “ξ” e escala em “η”	87
6.1.3 Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós razoavelmente distorcido nas duas direções.	89
6.1.4 Elemento “bolha” com distorção e escala nas duas direções	92



6.2 TESTES DE CONVERGÊNCIA.....	95
6.2.1 Kernel $O\left(\frac{1}{w}\right)$	97
6.2.2 Kernel $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$	99
6.2.3 Kernel $O\left(\frac{1}{r^5}\right)$	100
6.2.4 Kernel $O\left(\frac{1}{r^7}\right)$	102
6.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA	103
6.3.1 Cubo engastado e livre.....	104
6.3.2 Viga engastada e livre submetida a esforço axial de tração.....	106
6.3.3 Viga engastada e livre submetida a esforço transversal.....	108
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	110
7.1 CONCLUSÕES	110
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	114
APÊNDICE A – DIVISÃO SINTÉTICA DE POLINÔMIOS APLICADA AO PÓLO COMPLEXO.....	116
APÊNDICE B – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA BUSCA DE PÓLOS DE SINGULARIDADE E QUASE-SINGULARIDADE PARA ANÁLISE BIDIMENSIONAL COM O MEC.....	120
APÊNDICE C – GENERALIZAÇÃO DAS FORMULAS ANALÍTICAS PARA O CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE ELEMENTOS NÃO-DISTORCIDOS.....	122
C.1 TERMOS AUXILIARES MANTIDOS	123
C.2 TERMOS AUXILIARES GENERALIZADOS	124
C.2.1 Ga_j^i	124
C.2.2 Ge_q^p	125
C.2.3 GQ_i	126
C.2.4 Fórmula generalizada para o cálculo da integral J_{pq}	127
C.2.4.1 T_A^m	128
C.2.4.2 T_B^m	129



C.2.4.3 T_C^m	130
C.2.4.4 T_D^m	130
APÊNDICE D – DETERMINAÇÃO DOS KERNELS A PARTIR DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS EM DESLOCAMENTO, FORÇA E NOS TENSORES D_{kij} E S_{kij} EM ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL COM MEC	133
D.1 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL EM DESLOCAMENTO (u_{ij}^*).....	133
D.2 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL EM TENSÃO (p_{ij}^*).....	135
D.3 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NO TENSOR D_{kij}	136
D.4 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NO TENSOR S_{kij}	137
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141