7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

Acredita-se que o trabalho realizado resulta em uma técnica de integração original, eficiente e robusta, permitindo a obtenção de resultados em tensão em pontos internos de alta precisão em análises de modelos tridimensionais com o MEC. Resultados em deslocamentos e forças, embora não analisados aqui, acompanham de tal forma o alto nível de precisão adquirido com esta técnica.

No decorrer do desenvolvimento deste trabalho, boa parte foi voltada a descobrir uma técnica referente à divisão sintética de polinômios com duas variáveis de tal forma que pudesse transformar uma integral bidimensional como soma de uma integral regular, a qual poderia ser resolvida numericamente, e uma integral singular, à qual poderia ser resolvida analiticamente de forma simples. Porém, o que foi visto (Item 2.2) é que a aplicação deste conceito em polinômios com duas variáveis gerou integrais tão difíceis de serem solucionadas analiticamente quanto a integral que as gerou.

Sem poder aplicar este conceito de divisão sintética, a primeira conseqüência encontrada foi que não seria possível, pelo menos através de conceitos matemáticos, chegar à expressão 5.19, ou seja, devido à grande eficiência e precisão que a técnica de integração proposta por Dumont (1994) e Noronha (1998) causou para análise bidimensional com MEC, acredita-se que a linha de conceitos matemáticos a seguir em pesquisas a fim de solucionar o problema de análise tridimensional deve ser análoga à técnica proposta para análise bidimensional. Porém, isto deve ser feito de forma cuidadosa para não ficar preso à analogia com a técnica de integração para análise bidimensional.

Além desse problema, havia um outro que era encontrar o pólo da função $r \equiv r(\xi,\eta)$ através do MNR, tal como os exemplos mostrados no capítulo anterior. Sem poder encontrar o pólo da função r não haveria possibilidade de se determinar a função $w \equiv w(\xi,\eta)$ dada pela expressão 5.21, sendo que esta função seria a responsável por representar a parcela efetiva de singularidade para uma análise tridimensional.

Para resolver esse problema foi adotada uma alternativa de aproximação polinomial em relação à função r de tal forma que a função aproximada w_p, quando elevada ao quadrado, seria representada pelo polinômio dado pela equação 5.24, sendo desprezados todos os outros termos com ordem superior a 2, tendo em vista que eles representariam uma parcela muito pequena com relação aos demais termos. No entanto, para encontrar esta função w_p, ainda se fez uso do MNR, porém este foi usado para encontrar as coordenadas onde a função r seria mínima, ou seja, o MNR agora foi utilizado para encontrar coordenadas reais ao invés de complexas.

Com a determinação de w_p a etapa seguinte foi a validação deste polinômio de tal forma que pudesse ser classificado como a parcela efetiva de singularidade da função r. Esta validação foi desenvolvida por meio de vários exemplos, tal como citado no item 6.1. Com estes exemplos, verificou-se que a função w_p realmente poderia representar de forma efetiva o comportamento singular da função r.

Posterior ao encontro da parcela w_p foi necessário desenvolver um estudo sobre a regularização do termo $\frac{w_p}{r}$, pois seria esta parcela a ser integrada e um comportamento suave desta parcela validaria a idéia de poder transformar a função r como um produto entre parcelas singular e regular, embora não fosse possível obter a parcela regular por meio de conceitos matemáticos mais rigorosos e analíticos.

Com a determinação da parcela efetiva de singularidade, resta obter os pesos específicos para cada parcela singular encontrada. O fato de manter as abscissas de Gauss faz com que este método seja considerado como semi-analítico, tendo em vista que os pesos específicos são encontrados de forma analítica para cada função singular.

Determinadas a parcela efetiva de singularidade, a parcela regular e com a implementação da solução analítica para a obtenção dos pesos específicos era possível desenvolver vários estudos de convergência da técnica de integração numérica. Porém, antes disto foi necessário determinar os kernels singulares que estavam envolvidos nas soluções fundamentais em deslocamento, força e em tensão. A determinação destes kernels se encontra de forma extremamente detalhada no apêndice D.

A partir da determinação destes kernels foi possível desenvolver várias análises e testes de convergência, tal como pode ser visto no item 6.2. Estas análises foram de extrema importância pelo fato de poder proporcionar um autêntico contato numérico posterior a grande teoria matemática envolvida na maior parte deste trabalho.

Nos vários testes de convergência desenvolvidos, percebeu-se alguns fatos bem interessantes, tais como: o aumento de precisão quando o ponto está mais próximo ao contorno; o fato de que as abscissas ímpares oferecem melhores resultados do que as suas vizinhas pares, sendo que o contrário ocorre na quadratura clássica de Gauss-Legendre, etc.

Estes estudos de convergência mostraram que a técnica de integração proposta possui uma alta precisão numérica quando os pontos estão bem próximos ao contorno e que a medida que o ponto se distancia do contorno esta técnica tem a característica de convergir para a técnica de Gauss-Legendre. Com isso, desenvolveu-se um estudo se era importante utilizar apenas a técnica de integração proposta ou poder utilizá-la em conjunto com a quadratura clássica.

Esse estudo revelou que a técnica de integração proposta é mais precisa do que a quadratura clássica quando se considera o mesmo número de abscissas de Gauss, porém se utilizar apenas a técnica proposta haverá um razoável aumento no tempo de processamento do modelo em virtude de serem feitos cálculos para a determinação dos pesos específicos. Porém, quando se utiliza de forma conjunta as duas técnicas os resultados, tanto em precisão numérica quanto em tempo de processamento, são bastante satisfatórios.

Para determinação do limite que ativaria uma ou outra técnica foi desenvolvido um estudo de convergência da quadratura clássica, notando-se que tal quadratura deixa de oferecer bons resultados quando a distância relativa do ponto fonte ao elemento é inferior a 1. Assim, quando a função distância foi menor ou igual a 1 a técnica de integração proposta é ativada e quando tal função for maior é utilizada, de forma segura, a quadratura clássica.

Depois de solidificada toda a parte matemática envolvida, por meio de teste e exemplos, foi possível implementar computacionalmente esta técnica com o intuito de se desenvolver modelos numéricos em engenharia. Toda a programação foi desenvolvida na plataforma computacional desenvolvida pelo GoBEM. Esta plataforma é desenvolvida na linguagem Java, sendo utilizados fortes recursos de programação orientada a objetos.

Com a implementação desta técnica, foi possível desenvolver um estudo com vários exemplos de engenharia estrutural, com a finalidade de validar e até mesmo balizar a técnica de integração, ou seja, foi desenvolvido um minuncioso estudo de depuração para que esta técnica de integração pudesse oferecer os melhores resultados possíveis e que fosse uma base de diversos estudos e aplicações a partir desta técnica.

Com esta técnica implementada, exemplos em engenharia estrutural foram modelados, a fim de se determinar, primeiramente, se os deslocamentos e forças estavam coerentes e ao perceber este fato o cálculo de tensões em pontos internos passou a ser o alvo de estudo.

Por meio de vários exemplos, percebeu-se que o uso da técnica de integração proposta para o cálculo de tensões em pontos internos foi bastante satisfatório em todos os exemplos e que para determinadas distâncias muito próximas ao contorno, aqui chamadas de *gap*, os resultados convergiram para o analítico. Porém, para várias situações foram encontradas distâncias relativas diferentes, mas sempre na ordem de 10^{-3}. Nestes casos, percebeu-se que surgiu algum problema numérico, pois para a matriz de tensão uma ou outra componente não estavam coerentes, enquanto as outras estavam com valores próximos aos reais.

Ao identificar este problema numérico houve uma profunda investigação da(s) causa(s) deste erro e foi identificado que o kernel $O\left(\frac{1}{r^7}\right)$ precisa ser reavaliado, pois em alguns momentos o cálculo dos pesos específicos se torna incoerente. Este fato faz com que o tensor **S** possua um mau condicionamento. Porém, além de ocorrer esporadicamente, isto implica na necessidade de se analisar a complexidade do problema a ser modelado antes de se determinar o *gap*.

Em todos os casos os *gaps* foram sempre menores que 0.01. Esta distância é normalmente o limite dado para a grande maioria das técnicas de integração, enquanto que a técnica proposta obteve bons resultados com distâncias relativas 10 vezes menores que aquele. No entanto, acredita-se que esta distância pode ser diminuída ainda mais.

No que diz respeito à aplicação em problemas práticos de engenharia, os ganhos de precisão numérica, obtidos com a nova técnica proposta, permitiram uma análise mais refinada de modelos tridimensionais. Espera-se assim poder avançar na utilização do MEC, trazendo benefícios na modelagem e simulação de problemas de geotecnia. Uma outra área a ser beneficiada será a linha de pesquisa sobre novos algoritmos específicos para o MEC, como algoritmos para análises de problemas não-lineares e algoritmos para visualização tridimensional sem o uso de células internas.

Por fim, tem-se que o ganho de conhecimentos científicos e tecnológicos e a geração de novos recursos humanos capacitados nos assuntos envolvidos neste trabalho serão de grande valor para o desenvolvimento da linha de pesquisa sobre MECs no Brasil. Um resultado importante deste desenvolvimento é a criação de uma plataforma computacional de alta qualidade, voltada para incrementar as simulações em engenharia, principalmente aquelas envolvendo modelos com domínio infinito, tais como túneis e outras obras subterrâneas.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Desenvolvimento da solução analítica para determinar pesos específicos da parcela efetiva de singularidade quando se considera elementos distorcidos e/ou com escala. Ao solucionar este problema, a determinação dos pesos específicos será geral, ou seja, poderá ser utilizada para qualquer tipo de elemento de contorno bidimensional com ou sem distorção e com ou sem escala.

Desenvolver uma análise minuciosa sobre o número de abscissas necessário para avaliar integrais tridimensionais em MEC por meio da técnica proposta.

Averiguar a possibilidade de determinar um *gap* menor que 0.001, aumentando a precisão numérica em pontos no interior do domínio e bem próximos ao contorno.

Estudar de forma efetiva alguns conceitos vinculados às integrais singulares, tais como: Valor Principal de Cauchy, normalização da Parte Finita e Parte Singular. O estudo destes conceitos é importante devido ao fato de ser possível determinar os termos livres da matriz **H** (termos **C**) sem o uso de movimento de corpo rígido.

Aplicar a técnica proposta para novas aplicações em problemas tridimensionais em MEC, tais como: Visualização de isosuperfícies em análise linear e não-linear, Mecânica da fratura, problemas de contato, escavação em rochas, etc.

Comparar o tratamento unificado da técnica proposta com as técnicas clássicas para avaliar integrais regular, fracamente singular, fortemente singular, hipersingular e supersingular.

Aplicação do Método Fast Multipole como uma alternativa de acelerar ainda mais o tempo de processamento computacional envolvido na modelagem numérica.

Desmistificar o significado geométrico e físico dos números quaterniônicos em sua aplicabilidade na determinação da parcela efetiva de singularidade. A idéia é poder estender o pólo complexo, encontrado em 2D, para um pólo hipercomplexo em 3D.

É necessário também desenvolver um estudo sobre problemas de condicionamento nas matrizes **H** e **G**, pois isto pode ser uma fonte de imprecisões numéricas.

Otimizar o código desenvolvido na plataforma computacional do GoBEM, tendo em vista que se torne mais eficiente e com um tempo menor de processamento e uso de memória física (RAM).