



6. RESULTADOS

Para a validação da técnica de integração proposta vários testes e exemplos numéricos foram avaliados. Estes testes e exemplos serão apresentados a seguir em três tópicos, são eles: Regularização da integral bidimensional, testes de convergência e exemplos numéricos em engenharia.

6.1 REGULARIZAÇÃO DA INTEGRAL BIDIMENSIONAL

Neste item serão apresentados alguns exemplos elaborados com a finalidade de analisar a eficiência que a técnica de integração proposta possibilita para uma boa representação da parcela efetiva de singularidade ($w(\xi, \eta)$) com relação à função $r(\xi, \eta)$.

O procedimento aqui adotado para se determinar a parcela $w(\xi, \eta)$ resulta, diretamente, no encontro da parcela regular ($\frac{w(\xi, \eta)}{r(\xi, \eta)}$). Além disso, esta parcela regular deve representar uma função bastante suave, sugerindo uma avaliação ótima para as integrais bidimensionais (Equações 5.31 e 5.32).

Serão discutidos quatro exemplos com o intuito de analisar a eficiência da regularização da integral por meio da técnica de integração proposta, sendo que todos os exemplos deste item, especificamente, foram desenvolvidos a partir de programas de matemática simbólica, tais como: MAPLE9.0, para a geração dos gráficos; e, MATLAB6.5, para o código computacional.



6.1.1 Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós não-distorcido e sem escala

Como primeiro exemplo, será mostrado um elemento quadrado de lado 1. Trata-se do elemento bidimensional mais simples de 4 nós (Figura 6.1).

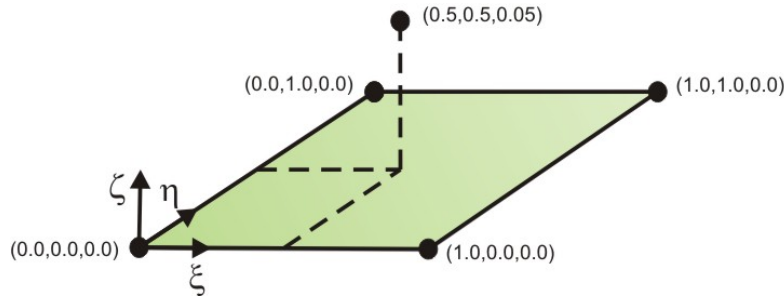


Figura 6.1: Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós.

O pólo está localizado na posição $(0.5, 0.5, 0.05)$, no sistema de coordenadas global, sendo que o raio $r(\xi, \eta)$, distância do pólo ao elemento no sistema de coordenadas local, é dado pela expressão

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \xi - \eta + \frac{201}{400}}. \quad (6.1)$$

Esta função, por ser muito bem comportada, para este elemento que é simétrico nas duas direções e não constando efeitos de escala e distorção, permite convergência na busca do pólo, quando se aplica o MNR através das equações 5.15 a 5.18. As coordenadas do pólo de quase-singularidade geradas por esta formulação, no sistema de coordenadas local, são:

$$\begin{aligned} \xi_0 + i\zeta_0 &= 0.5 \pm i0.05e \\ \eta_0 + i\zeta_0 &= 0.5 \pm i0.05. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Através da equação 5.21, proposta por [NOR98], e das coordenadas a expressão que define a parcela efetiva de singularidade é:

$$w = \sqrt{(\xi - 0.5)^2 + (\eta - 0.5)^2 + 0.05^2}. \quad (6.3)$$



De posse das equações 6.1 e 6.3, pode-se gerar os gráficos das funções $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{w}$ e $\frac{w}{r}$, como se ver abaixo:

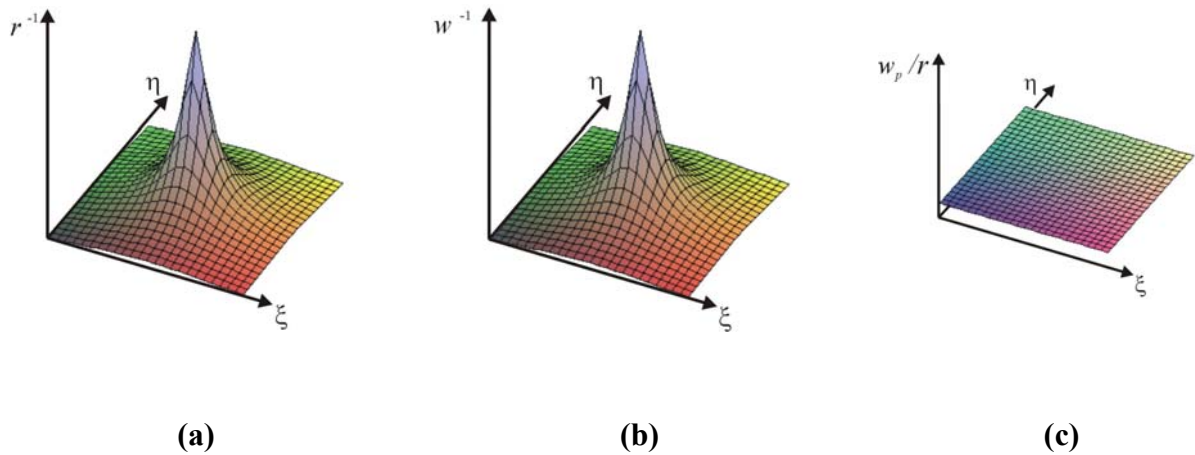


Figura 6.2: (a) Gráfico de $\frac{1}{r}$; (b) Gráfico de $\frac{1}{w}$; (c) Gráfico de $\frac{w}{r}$

Através do gráfico da figura 6.2(b), gerado pelo inverso da equação 6.3, é possível perceber que a função $w(\xi, \eta)$ possui o mesmo comportamento que a função $r \equiv r(\xi, \eta)$ (Equação 6.1), podendo ser considerada, realmente, como parcela efetiva de singularidade da função r .

Além disso, como se pode notar através do gráfico da figura 6.2(c), a função resultante do quociente entre as equações 6.1 e 6.3 é constante o que implica que ela, além de ser uma parcela regular, pode ser aproximada por um polinômio de grau baixo.

Não haveria necessidade neste caso de aplicar a técnica aqui proposta a fim de encontrar a parcela $w(\xi, \eta)$ (agora representada por $w_p = w(\xi, \eta)$) através das expressões 5.24 e 5.25, tendo em vista que foi possível encontrar o pólo através do MNR.

É importante discutir que esta técnica é eficiente para ambos os casos, encontrando ou não o pólo através do MNR, e que a técnica proposta aproxima um polinômio de ordem 2



de forma exata. Como a função r é de ordem 2 a aproximação polinomial (w_p) é a própria função r .

Com w_p valem todas as conclusões mencionadas com relação à figura 6.2, porém, neste caso, a função $\frac{w_p}{r}$ também é uma função constante o que implica que a aproximação polinomial desta parcela regular é simples e imediata.

6.1.2 Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós distorcido na direção “ ξ ” e escala em “ η ”

Neste exemplo (Figura 6.3), será mostrado outro elemento bidimensional, sendo que este já possui características de distorção e escala.

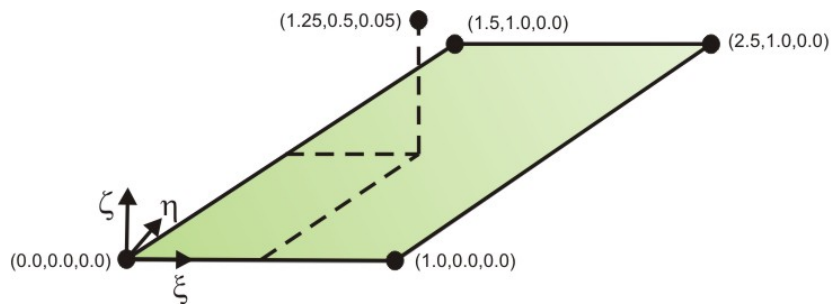


Figura 6.3: Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós com distorção em “ ξ ” e escala em “ η ”.

O pólo está localizado na posição $(1,25,0,5,0,05)$, no sistema de coordenadas global, sendo que o raio $r(\xi, \eta)$, distância do pólo ao elemento no sistema de coordenadas local, é dado pela expressão

$$r = \sqrt{\xi^2 + \frac{13}{4}\eta^2 - 2,5\xi - \frac{19}{4}\eta + 3\xi\eta + \frac{363}{200}} . \quad (6.4)$$



Esta função já não é tão comportada quanto à expressão 6.1 e o MNR não converge para encontrar o pólo, tendo em vista que o elemento já possui certo grau de distorção e, além disso, possui escala.

Como não foi possível encontrar o pólo através do MNR será aplicado a técnica proposta para determinação da função w_p , utilizando o procedimento que consta no item 5.4.

Através da técnica proposta, pode-se chegar à seguinte expressão para w_p :

$$w_p = \sqrt{\xi^2 + \frac{13}{4}\eta^2 - 2,5\xi - \frac{19}{4}\eta + 3\xi\eta + \frac{363}{200}}. \quad (6.5)$$

De posse das equações 6.4 e 6.5, gera-se os gráficos das funções $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{w_p}$ e $\frac{w_p}{r}$,

como se ver abaixo:

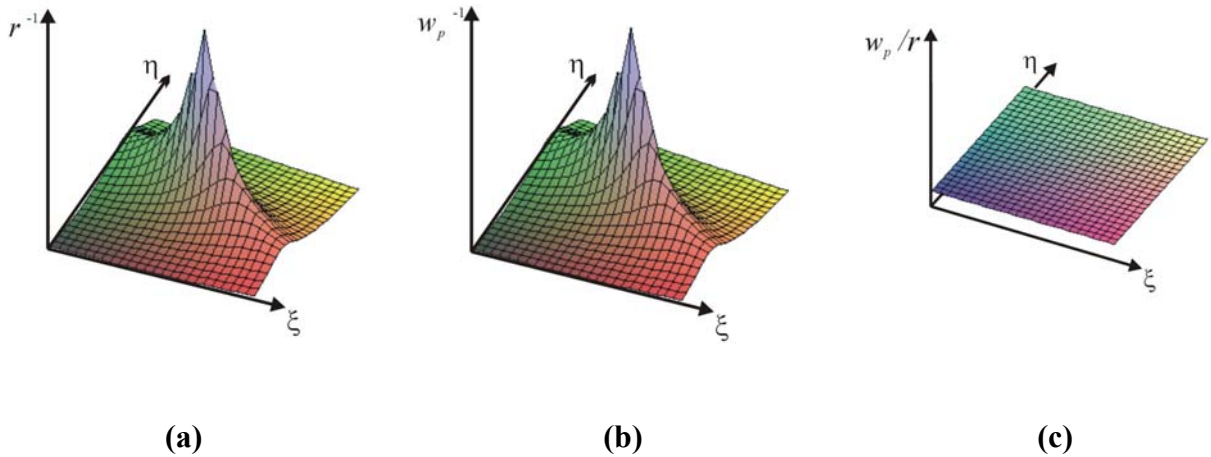


Figura 6.4: (a) Gráfico de $\frac{1}{r}$; (b) Gráfico de $\frac{1}{w_p}$; (c) Gráfico de $\frac{w_p}{r}$

Através do gráfico da figura 6.4(b) gerado pelo inverso da equação 6.5 é possível perceber que a função w_p , adquirida pela técnica proposta neste trabalho, possui o mesmo



comportamento que a função r (Equação 6.4). Logo, w_p pode ser considerada como parcela efetiva de singularidade da função r .

Como se pode notar através do gráfico da figura 6.4(c), a função resultante do quociente entre as equações 6.4 e 6.5 é uma função constante, implicando que $\frac{w_p}{r}$ se trata de uma parcela regular e que pode ser aproximada por um polinômio constante.

Novamente, ressalta-se que todas as informações extraídas no item anterior com relação à w_p continuam sendo válidas neste caso, bem como a característica que ela possui de ser um polinômio aproximado de forma exata a r devido ao fato que esta função, elevada ao quadrado, ser um polinômio de ordem 2.

6.1.3 Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós razoavelmente distorcido nas duas direções.

Neste exemplo (Figura 6.5), será mostrado outro elemento bidimensional de 4 nós, sendo que este possui características acentuadas de distorção e escala.

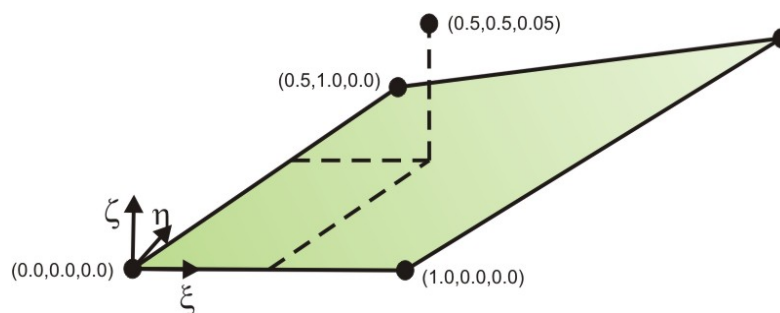


Figura 6.5: Elemento bidimensional linear quadrático de 4 nós com distorção nas direções “ ξ ” e “ η ”.

Este elemento foi abordado em Dumont et al. (2000), chamando a atenção devido ao fato de que o MNR não poderia ser aplicado com a finalidade de se encontrar o pólo. Neste artigo, Dumont e Noronha sugerem uma outra forma de se encontrar um pólo através da



aplicação do MNR, porém esta forma envolve a adição de uma restrição adicional a este problema, como se verá graficamente mais adiante (Figura 6.7).

Na figura 6.5 o pólo está localizado na posição $(0.5, 0.5, 0.05)$, no sistema de coordenadas global, sendo que o raio $r(\xi, \eta)$, distância do pólo ao elemento no sistema de coordenadas local, é dado pela expressão

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}\xi^2\eta^2 + \xi\eta^2 + \xi^2 + 0,5\xi\eta + \frac{5}{4}\eta^2 - \xi - \frac{3}{2}\eta + \frac{201}{400}} . \quad (6.6)$$

Esta função, além de não ser bem comportada, possui termos com expoentes superiores a 2. Os termos são: $\xi^2\eta^2$ e $\xi\eta^2$.

Como foi citado anteriormente, a técnica proposta aproxima a função r^2 por uma outra função (w_p^2) que será sempre de ordem 2, tendo em vista que termos com ordens superiores a esta são desprezados na aproximação devido ao fato de terem magnitudes inferiores a 1 e, além disso, quando são comparados aos demais termos a presença daqueles se torna irrelevantes.

Portanto o polinômio w_p^2 terá termos de até segunda potência em “ ξ ” e “ η ”, e de posse desta equação juntamente com a equação 6.6, tem-se os gráficos das funções $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{w_p}$ e

$\frac{w_p}{r}$, como se ver abaixo:

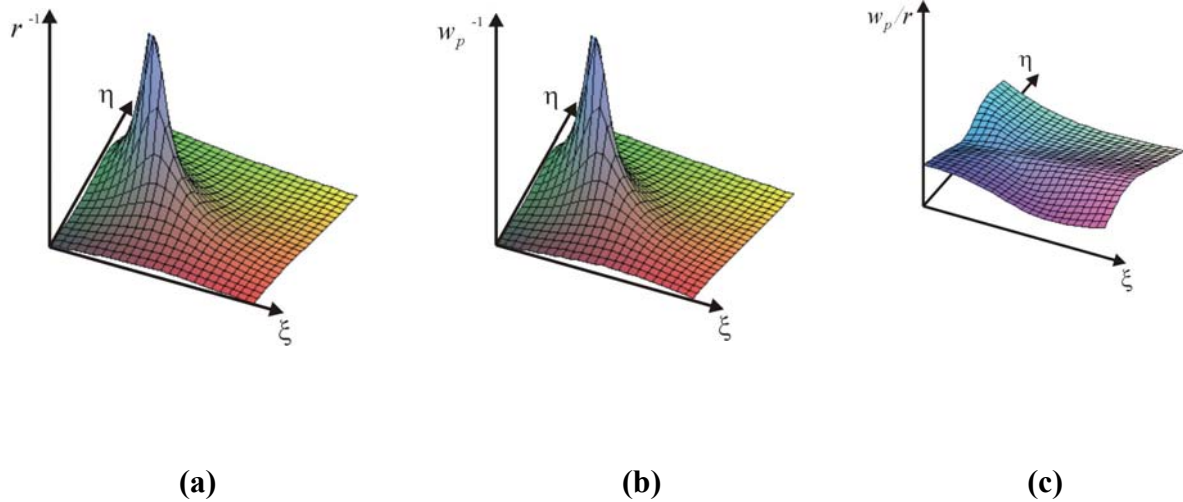


Figura 6.6: (a) Gráfico de $\frac{1}{r}$; (b) Gráfico de $\frac{1}{w_p}$; (c) Gráfico de $\frac{w_p}{r}$

Através do gráfico da figura 6.6(b) gerado pelo inverso da equação 6.6 é possível perceber que a função w_p , adquirida pela técnica proposta neste trabalho, possui comportamento semelhante ao da função r (Equação 6.6). Logo, w_p pode ser considerada como parcela efetiva de singularidade da função r , mesmo que não contenha termos com ordem superior a 2, demonstrando através destes gráficos que a desconsideração destes termos, característica proposta pela técnica, não implica em um mau comportamento da função w_p com relação a r .

Como se pode notar através do gráfico da figura 6.6(c), a função resultante do quociente entre as funções w_p e r é uma função suave, implicando que $\frac{w_p}{r}$ se trata de uma parcela regular e que pode ser aproximada por um polinômio de grau baixo.

O fator chave para que esta função não seja constante é porque, neste exemplo, surgem termos com ordem superior a 2, tais com: $\xi\eta^2$, $\xi^2\eta^2$. O que indica que a



desconsideração desses termos faz com que o quociente $(\frac{w_p}{r})$ não seja uma função constante, mas que, ainda sim, é uma função suave e pode ser aproximada por um polinômio de grau baixo.

Ao levar em consideração o que foi proposto em Dumont (2000), o quociente $(\frac{w_p}{r})$ é representado tal como mostra a figura 6.7.

Note que esta função também pode ser aproximada por um polinômio de grau baixo e é melhor integrar uma função com comportamento semelhante ao da figura 6.6 (c), do que é uma função do tipo ao da figura 6.6 (a). Porém, esta função foi adquirida através de uma adição de uma restrição ao sistema de equação que seria formado apenas pela função r o que fez com que a função quociente não tivesse um comportamento tão suave quanto ao da figura 6.6 (c).

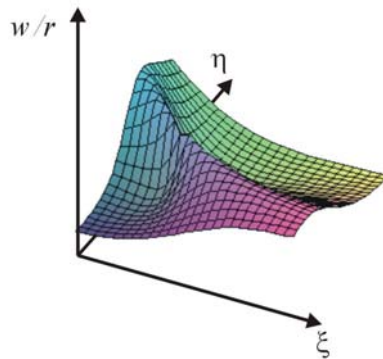


Figura 6.7: Gráfico de $\frac{w}{r}$ por Dumont et al. (2000)

6.1.4 Elemento “bolha” com distorção e escala nas duas direções

O elemento bolha a ser considerado é semelhante àquele da figura 5.3, porém o elemento a ser exposto neste item é considerado com distorção e escala, sendo que sua



projeção no plano $\xi\eta$ é idêntica ao caso do item anterior. O elemento bolha é quadrático e de 9 nós, possuindo as mesmas características do caso da figura 5.3, adicionando efeitos de distorção e escala no plano $\xi\eta$.

Neste exemplo (Figura 6.7), será apresentada graficamente apenas a projeção do elemento “bolha” e, além disso, serão mostradas apenas as coordenadas dos nós dos cantos e do nó central, pois as demais são fáceis de serem obtidas a partir destes dados, tendo em vista que estão posicionados na metade de cada lado do elemento.

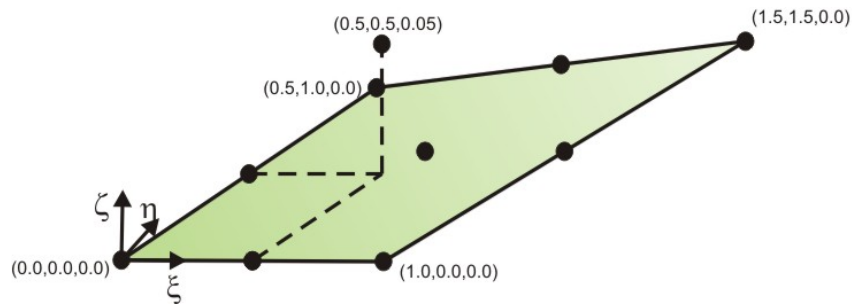


Figura 6.8: Elemento bidimensional quadrático de 9 nós com distorção e escala nas direções “ ξ ” e “ η ”.

O pólo está localizado na posição $(0.5,0.5,0.25)$, no sistema de coordenadas global, sendo que o raio $r(\xi, \eta)$, distância do pólo ao elemento no sistema de coordenadas local, é dado pela expressão

$$r = \sqrt{\frac{11216}{15}\xi^4\eta^4 - \frac{22432}{15}\xi^3\eta^4 + \frac{11216}{15}\xi^2\eta^4 - \frac{22432}{15}\xi^4\eta^3 + \frac{11216}{15}\xi^4\eta^2 + \frac{45464}{15}\xi^3\eta^3 - \frac{23032}{15}\xi^2\eta^3 - \frac{25432}{15}\xi^3\eta^2 + 160\xi^3\eta + \frac{13601}{15}\xi^2\eta^2 + \frac{580}{5}\xi\eta^2 - \frac{520}{5}\xi^2\eta + 60\xi^2 + 75\eta^2 - 26\xi\eta - 60\xi - 75\eta + \frac{135}{4}} \quad (6.7)$$

Esta função, além de não ser bem comportada, possui termos superiores à ordem 2, chegando até a ordem 8, como se pode ver acima através dos termos $\xi^4\eta^4$, $\xi^3\eta^4$, etc.

Por meio da técnica proposta, w_p^2 será uma função aproximada à função r^2 , sendo que aquela função será sempre de ordem 2, tendo em vista que termos com ordens superiores a esta são desprezados na aproximação devido ao fato de terem magnitudes inferiores a 1 e,



além disso, quando são comparados aos demais termos, se tornam irrelevantes, como foi visto anteriormente.

Portanto o polinômio w_p^2 terá termos de até segunda potência em “ ξ ” e “ η ”, e de posse desta equação juntamente com a equação 6.7, teremos os gráficos das funções $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{w_p}$ e $\frac{w_p}{r}$, como se ver abaixo:

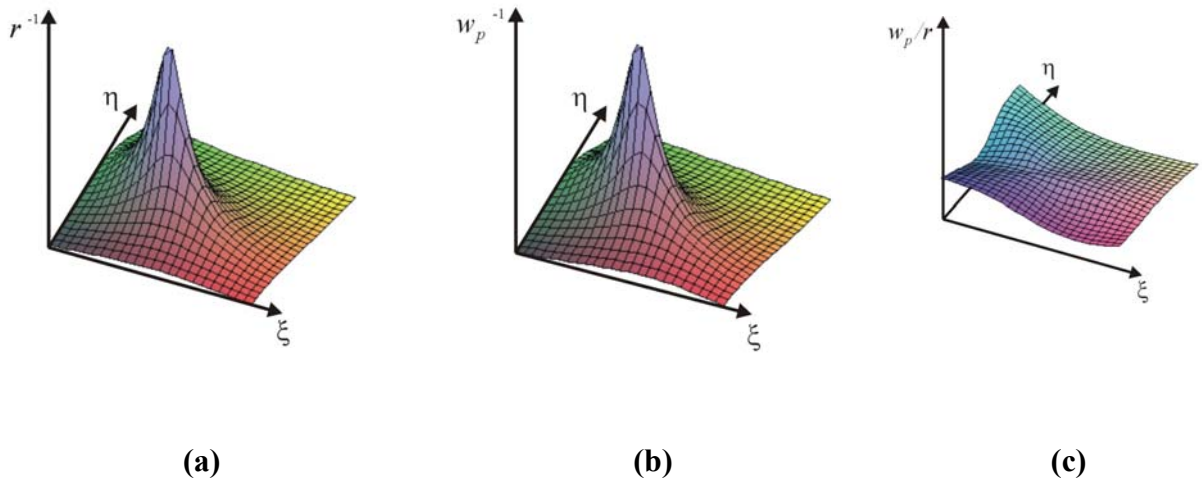


Figura 6.9: (a) Gráfico de $\frac{1}{r}$; (b) Gráfico de $\frac{1}{w_p}$; (c) Gráfico de $\frac{w_p}{r}$

Através do gráfico da figura 6.9(b) gerado pelo inverso da equação 6.7 é possível perceber que a função w_p , adquirida pela técnica proposta, possui o mesmo comportamento que a função r . Logo, w_p pode ser considerada como parcela efetiva de singularidade da função r , mesmo que não contenha termos com ordem superior a 2, demonstrando através destes gráficos que a desconsideração destes termos (foram desconsiderados 12 termos) não implica em um mau comportamento da função w_p com relação a r .



Como se pode notar através do gráfico da figura 6.9(c), a função resultante do quociente entre as funções w_p e r é uma função suave, implicando que $\frac{w_p}{r}$ se trata de uma parcela regular e que pode ser aproximada por um polinômio de grau baixo.

Estes exemplos serviram para validar a proposta de regularização da integral ao encontrar uma função w_p capaz de representar de forma efetiva a parcela de singularidade da função r . Este objetivo foi alcançado com êxito tendo em vista que a parcela w_p realmente representa o comportamento singular da função r , mesmo que tal aproximação desconsidere termos de ordens superiores a 2.

Acrescenta-se a isso o fato de que a parcela regular $(\frac{w_p}{r})$ obtida pode ser aproximada por um polinômio de grau baixo e pode ser melhor avaliada, através de um processo de integração numérica, do que a função r .

6.2 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Para mostrar a eficiência da técnica proposta alguns testes de convergência para o cálculo das integrais se fazem necessários. Estes testes têm o intuito de apresentar definitivamente, que a técnica pode ser utilizada de forma unificada para integrais regulares e integrais com qualquer tipo de singularidade e sem recorrer a métodos indiretos, tal como o método de subdivisão de elementos.

Este item tem a finalidade de apresentar o nível de qualidade de avaliação de integrais bidimensionais quando o ponto fonte está cada vez mais próximo do elemento de integração. Especialmente nestes casos, a quadratura de Gauss não pode ser utilizada devido ao fato de perda de precisão quando se aumenta o nível de singularidade ou quase-singularidade, tal como mostrado na figura 5.2.

Algumas considerações antes da resolução destas integrais se fazem necessárias. A primeira delas é citar que a técnica de integração bidimensional proposta está sendo aplicada apenas para elementos não-distorcidos e sem escala, tal como citado no sub-item 5.5.2. Isto se deve ao fato, aqui é citada a segunda consideração, de se utilizar a solução analítica para o peso específico (Eq. 5.34), tal como proposto por em Noronha (1998).

Os testes de convergência serão aplicados para os tipos de kernels que surgem nas soluções fundamentais em deslocamento, força e em tensão. Estes kernels foram apresentados na tabela 5.2.

Para cada tipo de kernel as integrais foram calculadas para distâncias relativas (razão entre a distância do ponto e a dimensão do elemento) de 0,1 e 0,001 (Fig. 6.10). Estas duas distâncias foram escolhidas devido ao fato de que as técnicas usuais de integração numérica bidimensional conseguirem bons resultados para distância relativa de algo em torno de 0,1 de forma segura. Aqui será apresentada, de forma numérica, a vantagem de se utilizar a técnica proposta, pois com ela foi possível em vários casos conseguir ótimos resultados para distâncias relativas de 0,001.

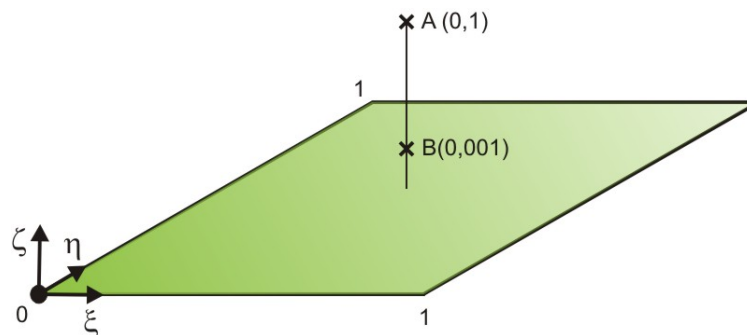


Figura 6.10: Distâncias relativas dos pontos fontes em relação ao elemento de contorno

No MEC as integrais a serem avaliadas são do tipo ao mostrado na equação 5.31 e como serão feitos alguns testes de convergência, analisando o erro relativo que envolve a solução analítica da integral, se faz necessário ter resultados analíticos das integrais a serem estudadas. Para que estes testes de convergência pudessem refletir da melhor forma possível o cálculo das integrais em MEC e que, além disso, possuísse resultados analíticos os cálculos efetuados foram baseados nas integrais do tipo:



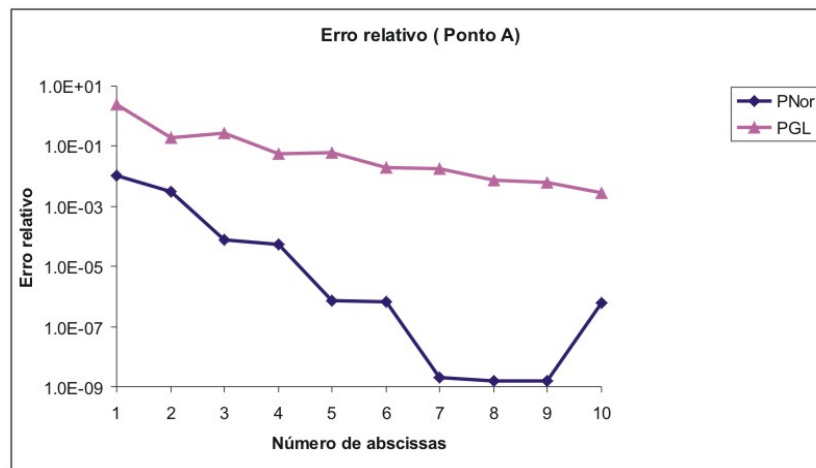
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi^2 - 3\xi + 2.5} \sqrt{\eta^2 - 3\eta + 2.5}}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2} \right)^p} d\xi d\eta, \quad (5.34)$$

onde o numerador está representando o produto entre as funções regular ($g(\xi, \eta)$), funções de forma ($\Phi(\xi, \eta)$) e o jacobiano ($J(\xi, \eta)$). O expoente p representa a ordem do kernel.

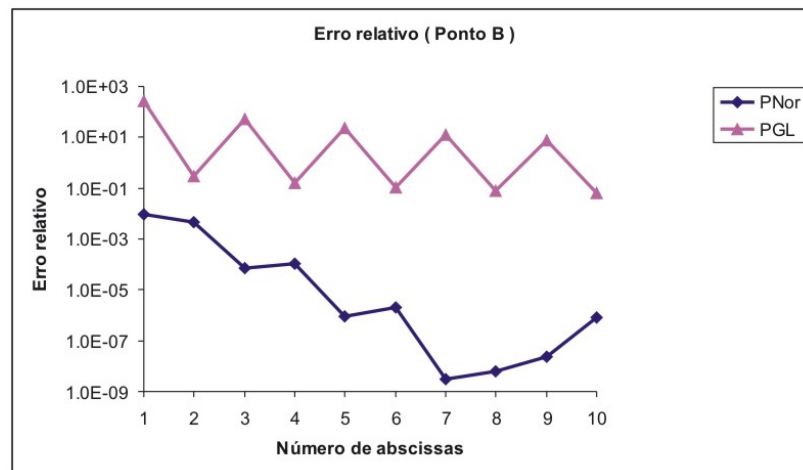
O cálculo desta integral será desenvolvido de duas formas, são eles: o uso da quadratura clássica de Gauss-Legendre, utilizando tanto as abscissas quanto os pesos desta quadratura e o uso do método semi-analítico de integração, onde serão utilizados as abscissas de Gauss e a solução analítica para encontrar os pesos específicos para função w_p . Pra melhor referência gráfica as técnicas citadas anteriormente serão chamadas de PGL e PNor, respectivamente.

6.2.1 Kernel $O\left(\frac{1}{w}\right)$

Este kernel é encontrado na solução fundamental em deslocamento (Eq.3.10), sendo que tal solução fundamental contribui diretamente para o cálculo das componentes da matriz **G**. Para este kernel o teste de convergência será feito para p igual a 1. Logo, os erros relativos para o cálculo da integral da equação 5.34, para este kernel e para as distâncias relativas da figura 6.10, se encontram nas figuras 6.11.



(a)



(b)

Figura 6.11: (a) Convergência para o ponto fonte em A; (b) Convergência para o ponto fonte em B

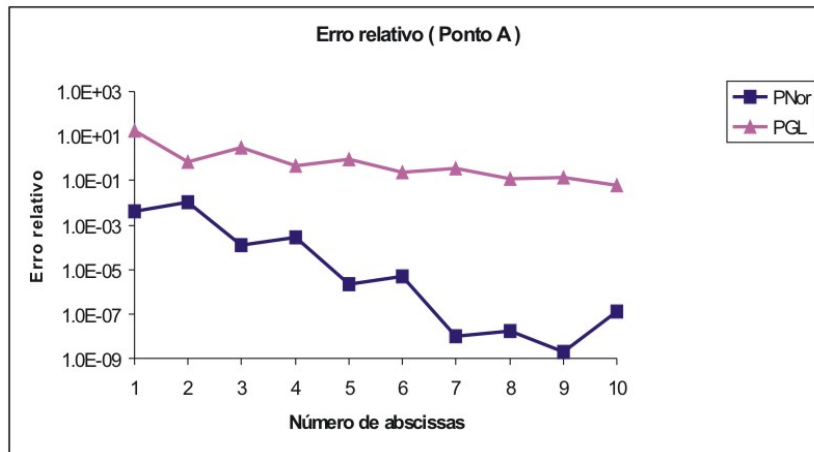
Nestes testes é fácil de perceber que a técnica proposta, além do fato de ser mais precisa que a quadratura de Gauss-Legendre, tem aumento de precisão quando o ponto está mais próximo do elemento de contorno. Um outro fator importante é que quando o número de abscissas é ímpar os resultados são sempre melhores que os pares vizinhos para o ponto fonte em A. Porém, quando o ponto fonte está em B é observado uma perda de precisão quando o número de abscissas é superior a sete, mas isto não oferece imprecisões nos resultados finais devido ao fato do erro relativo, neste caso, ser ainda inferior à $0,00001$.



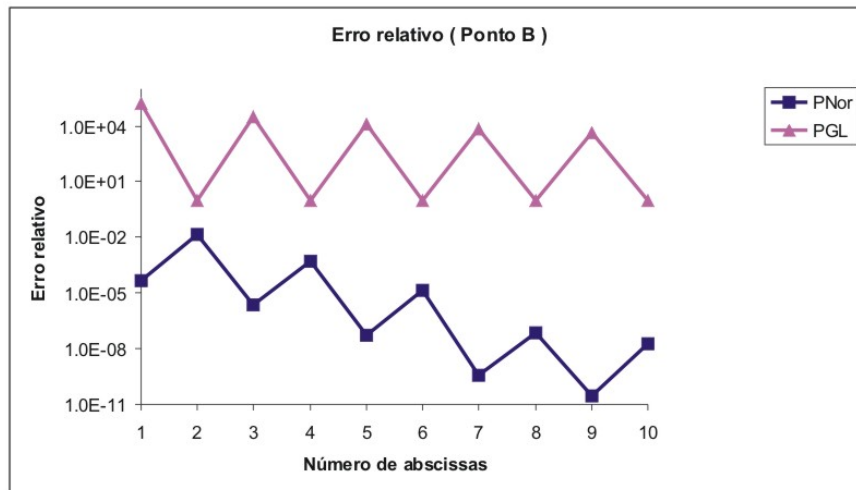
Além destes fatos mencionados é importante ressaltar que quando o ponto fonte está em B e com apenas uma abscissa de Gauss o erro relativo foi menor do que todos os adquiridos utilizando a quadratura de Gauss-Legendre.

6.2.2 Kernel $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$

Este kernel é encontrado nas soluções fundamentais em deslocamento (Eq. 3.10), força (Eq. 3.11) e em tensão (Eq. 3.15 e 3.16), sendo que estas soluções contribuem diretamente para o cálculo das componentes das matrizes **G**, **H**, **D** e **S**. O teste de convergência será feito para p igual a 3. Logo, os erros relativos para o cálculo da integral da equação 5.34, para este kernel e para as distâncias relativas da figura 6.10, se encontram nas figuras abaixo.



(a)



(b)

Figura 6.12: (a) Convergência para o ponto fonte em A; (b) Convergência para o ponto fonte em B

De igual modo aos testes feitos no kernel anterior, os resultados adquiridos neste kernel utilizando os pesos específicos (PNor) são mais precisos que os oferecidos pela quadratura de Gauss-Legendre e que, mesmo com o aumento da singularidade, a técnica possui aumento de precisão quando o ponto fonte está mais próximo do elemento de contorno. Todas as demais conclusões adquiridas pelo teste de convergência no kernel anterior valem de igual forma para este, ou, em alguns pontos, os resultados são ainda melhores em convergência e precisão, mesmo aumentando o nível de singularidade.

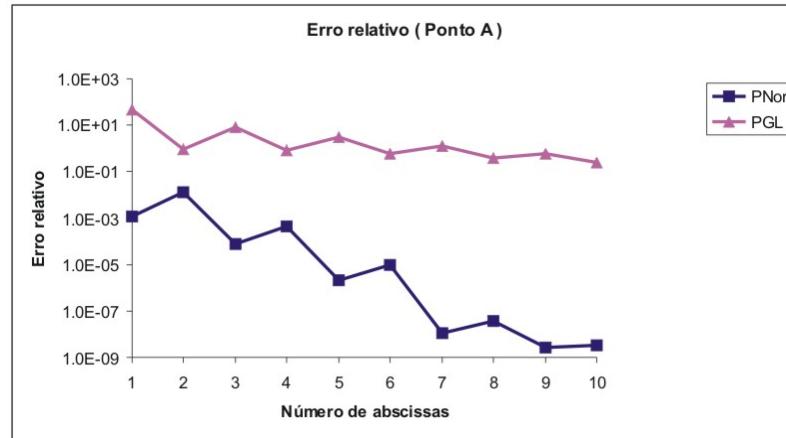
Um aspecto que não pertence somente a este kernel, mas a todos os outros, é que, no caso da técnica utilizando pesos específicos, os erros relativos são menores para as abscissas ímpares, em relação as pares vizinhas, enquanto que utilizando a quadratura de Gauss-Legendre os erros relativos são menores para as abscissas pares, em relação às ímpares vizinhas.

6.2.3 Kernel $O\left(\frac{1}{r^5}\right)$

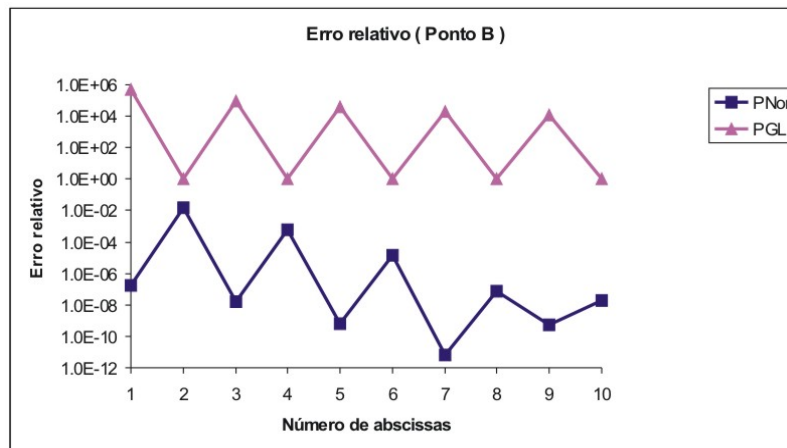
Este kernel é encontrado nas soluções fundamentais em força (Eq. 3.11) e em tensão (Eq. 3.15 e 3.16), sendo que estas soluções contribuem diretamente para o cálculo das



componentes das matrizes **H**, **D** e **S**. O teste de convergência será feito para p igual a 5. Logo, os erros relativos para o cálculo da integral da equação 5.34, para este kernel e para as distâncias relativas da figura 6.10, se encontram nas figuras abaixo.



(a)



(b)

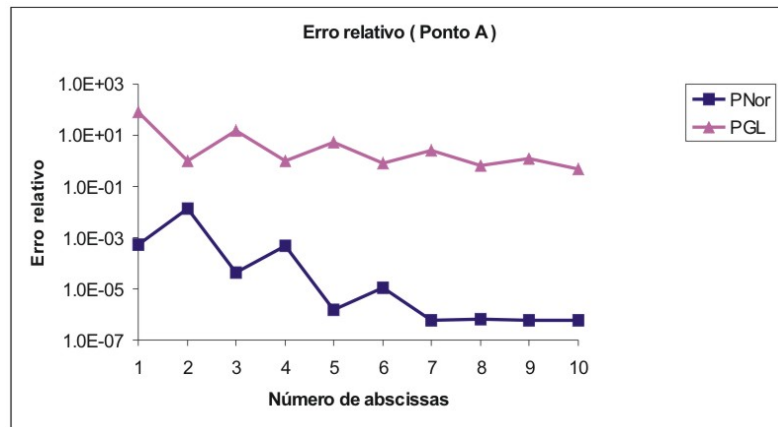
Figura 6.13: (a) Convergência para o ponto fonte em A; (b) Convergência para o ponto fonte em B

Tudo que foi mencionado para os kernels anteriores vale para este. Mas é importante notar que com o aumento da singularidade os erros para a quadratura de Gauss-Legendre se tornaram maiores com relação aos kernels anteriores. Além disto, as amplitudes de variação dos erros ao mudar o número de abscissas entre par e ímpar se tornou maior, mesmo utilizando a técnica de integração com o uso dos PNor, reafirmando que o uso de abscissas ímpares é altamente recomendado.

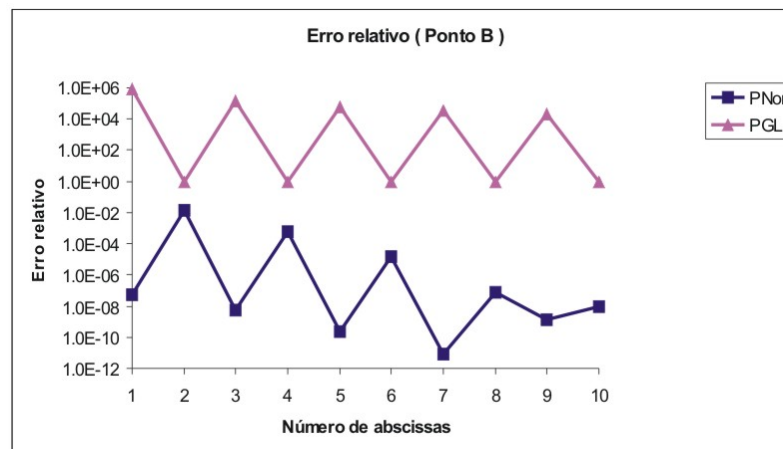


6.2.4 Kernel $O\left(\frac{1}{r^7}\right)$

Este kernel é encontrado na solução fundamental em tensão (Eq. 3.15), sendo que esta solução contribui diretamente para o cálculo das componentes da matriz S . O teste de convergência será feito para p igual a 7. Logo, os erros relativos para o cálculo da integral da equação 5.34, para este kernel e para as distâncias relativas da figura 6.10, se encontram nas figuras abaixo.



(a)



(b)

Figura 6.14: (a) Convergência para o ponto fonte em A; (b) Convergência para o ponto fonte em B



Novamente, tudo que foi mencionado para os kernels anteriores vale em todos os aspectos para este.

É importante que para o cálculo de integrais em MEC um forte e minucioso estudo sobre o número de abscissas necessárias e suficientes para uma ótima precisão nos resultados, tanto em deslocamento, força e tensão deve ser desenvolvido.

O cálculo das tensões, comparado com força e deslocamento, é o mais crítico e devido à forte singularidade envolvida em seus kernels (Eq. 3.15 e 3.16) o cálculo das componentes da matriz da tensão em um ponto do contorno não é possível, tendo em vista que ela tende a infinito. Notou-se este fato no kernel do tensor \mathbf{S} que sempre tendia a infinito ao chegar mais próximo do contorno, ou seja, quando se ultrapassava o *gap* de 0.001 ou distâncias relativas próxima e menores a esta.

No estudo desenvolvido sobre os kernels envolvidos no tensor \mathbf{S} , notou-se que a fonte dos problemas, *a priori*, encontra-se no kernel $O\left(\frac{1}{r^7}\right)$ quando se adquire os pesos específicos.

Assim, além do estudo do número de abscissas necessárias para uma boa avaliação das integrais de contorno, é importante consolidar a distância relativa segura para o cálculo de tensões em pontos internos e, além disso, para a determinação deste *gap* vários exemplos críticos devem ser desenvolvidos.

6.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

Neste item alguns exemplos de engenharia serão apresentados. Embora foram desenvolvidos apenas problemas de engenharia estrutural, esta técnica pode ser utilizada para várias outras áreas em engenharia (geotécnica, etc) e o uso em outras engenharias é encorajado devido à boa precisão numérica em deslocamentos, forças e em tensões em pontos próximos ao contorno.



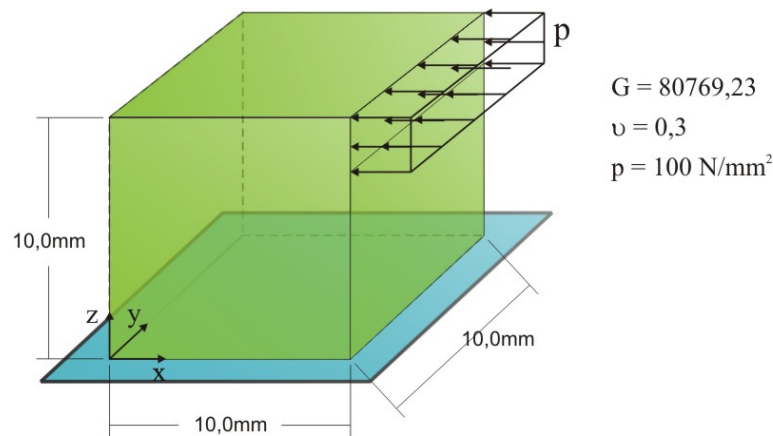
O objetivo destes exemplos é validar a técnica proposta para o cálculo de tensões em pontos internos, tendo em vista que o cálculo de deslocamento e força não oferece tantos problemas numéricos. Porém, vários outros aspectos serão levantados, tal como o *gap* a ser utilizado e o melhor uso da técnica de integração proposta.

6.3.1 Cubo engastado e livre

Este exemplo foi retirado de Gaul et al. (2003) e o interesse em utilizá-lo se encontra em comparar os resultados, aqui adquiridos, com os encontrados pela aplicação da técnica desenvolvida por Cruse et al. (1993a), sendo que esta técnica se encontra melhor detalhada naquela obra.

Neste exemplo serão feitas várias comparações, além da citada acima. A primeira delas, é obter os resultados em deslocamentos e em tensões considerando apenas a técnica aqui proposta; em segundo, será utilizada apenas a técnica de Gauss-Legendre; em terceiro, propor um procedimento de integração com uso simultâneo das duas técnicas, onde a técnica proposta será ativada quando $r \leq 1$ e a quadratura de Gauss-Legendre quando $r > 1$. Estes limites da função distância foram determinados considerando que seja usado no mínimo 4 abscissas de Gauss no elemento de contorno a ser integrado.

O exemplo se trata de um cubo engastado na base e livre no topo (Figura 6.15), submetido a uma carga no plano xy . Para este cubo, será calculado o deslocamento (u_x) no ponto (10, 0, 10) e as tensões (σ_{xx} e σ_{xz}) no ponto (6, 6, 8).



(a)

Figura 6.15: (a) Cubo engastado e livre

Na tabela 6.1 se encontram os resultados com as técnicas mencionadas anteriormente. Foram utilizados dois tipos de elementos de contorno, são eles: elemento linear (4 nós) e quadrático (8 nós). Para o resultado em deslocamento a unidade utilizada é $1\mu\text{m}$ e para tensão a unidade utilizada é $10\text{N}/\text{mm}^2$.

Tabela 6.1 – Resultados em deslocamento e tensões

		$u_x(10,0,10)$		$\sigma_{xx}(6,6,8)$		$\sigma_{xz}(6,6,8)$	
Técnica		Linear	Quadrático	Linear	Quadrático	Linear	Quadrático
Cruse & Watson	100x100	-7.280	-7.489	-3.180	-3.213	-2.302	-2.427
	200x200	-7.297	-7.506	-3.179	-3.212	-2.309	-2.435
	400x400	-7.301	-7.512	-3.179	-3.212	-2.312	-2.437
Proposta (TP)		-7.303	-7.513	-3.179	-3.212	-2.312	-2.437
Gauss-Legendre (GL)		-7.236	-7.863	-3.162	-3.417	-2.295	-2.674
TP e GL		-7.303	-7.513	-3.179	-3.212	-2.312	-2.437

Estes resultados foram obtidos utilizando 5 abscissas de Gauss-Legendre nas duas direções do elemento, sendo que o contorno foi discretizado com 150 elementos de lado 1.0m lineares e quadráticos.



Uma análise em tempo de processamento também foi desenvolvida. Este exemplo foi desenvolvido em um computador Intel Celeron M, 1.5GHz, 512RAM. Com estas configurações e considerando a análise com elementos lineares o tempo de execução para TP foi de 75seg, sendo que para GL o tempo foi de 19seg e considerando o cálculo simultâneo por meio das duas técnicas o tempo decorrido foi de 36seg. Assim, embora o resultado utilizando apenas a técnica de integração aqui proposta seja mais precisa, o uso desta auxiliado pela quadratura de Gauss-Legendre promove um resultado satisfatório com um custo computacional inferior ao utilizar apenas a técnica de integração.

Obviamente, se fossem utilizadas mais abscissas de Gauss os resultados adquiridos com o uso apenas da quadratura clássica de Gauss-Legendre seriam bem melhores e certamente convergiriam para os resultados alcançados pela técnica de integração proposta. Mas, note que mesmo que o ponto esteja bem distante dos elementos de contorno os resultados não foram tão precisos. Isto implica que existe uma grande perda de precisão quando se faz uma análise de tensões em pontos próximos ao contorno por meio da quadratura clássica de Gauss-Legendre.

6.3.2 Viga engastada e livre submetida a esforço axial de tração

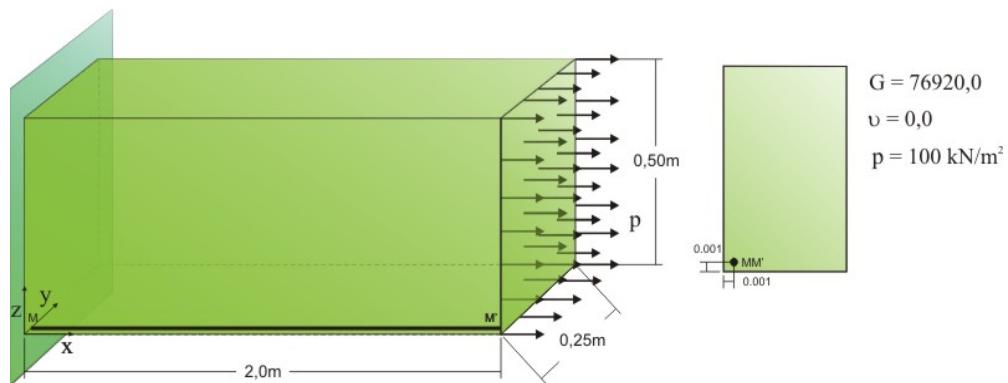
Neste exemplo será desenvolvido um breve estudo sobre a distância entre o contorno real e o auxiliar a ser dado em um problema quando se analisa tensões em pontos internos e quando estes estão muito próximos do contorno da estrutura. Esta distância será denominada de *gap*.

Obviamente, este é um estudo inicial sobre o *gap* e vários outros estudos devem ser desenvolvidos, mas é possível com este exemplo analisar a potencialidade desta técnica proposta para o cálculo de tensões em pontos internos e bem próximos ao contorno.

Este estudo inicial será desenvolvido em uma viga engastada e livre submetida a esforço axial de tração, tal como consta na figura abaixo. Será analisada a variação de tensão



ao longo da linha densa, onde todos os pontos nessa linha varia no eixo “ x ”, variando de 0.001 a 1.999, mantendo as coordenadas no plano yz constante e iguais a (0.001, 0.001). As unidades de comprimento estão em metro.



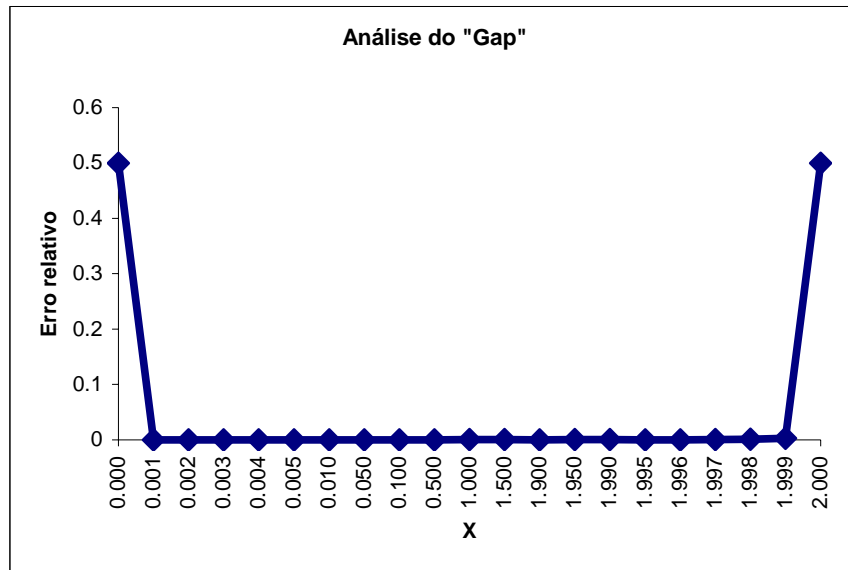
(a)

Figura 6.16: (a) Viga engastada e livre submetida a esforço axial de tração

Na gráfico da figura 6.17, tem-se a variação de tensão ao longo da linha MM' , sendo que estes resultados foram obtidos utilizando 5 abscissas de Gauss-Legendre nas duas direções do elemento, sendo que o contorno foi discretizado com 52 elementos lineares de lado 0.25m.

Logo, percebe-se com esta análise de erro relativo que a tensão σ_{xx} calculada pela técnica proposta coincide com a tensão analítica. Porém, quando se ultrapassou a distância de 0.0005 os resultados não ficaram tão bons, mas o contrário era esperado e ao localizar onde poderia estar o problema numérico foi identificado que o kernel $O\left(\frac{1}{r^7}\right)$ apresentou indícios de erros no cálculo dos pesos específicos o que sugere uma reavaliação do cálculo dos pesos para este kernel.

Os resultados apresentados podem sugerir que um excelente *gap* a ser adotado, quando se utiliza a técnica de integração proposta, deve ser de 0.001 do lado do elemento. Mas, nas análises de tensões feitas em diversos exemplos e situações de carregamento ainda não permitem determinar de forma efetiva tal valor. No exemplo a seguir será desenvolvida uma nova análise de tensões para a mesma viga submetida a uma carga transversal.

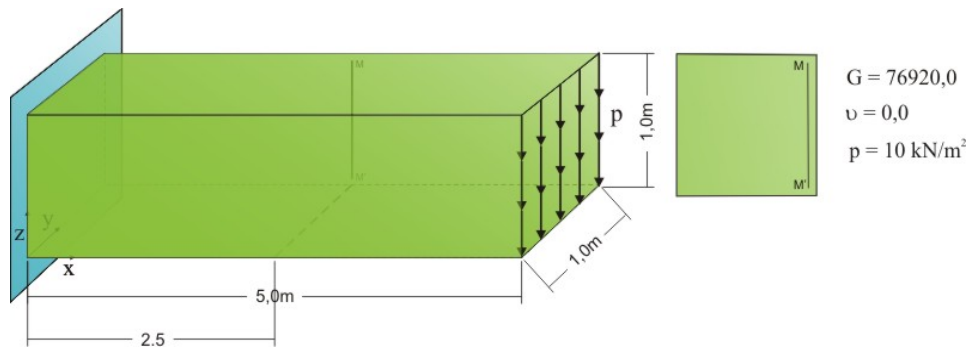


(a)

Figura 6.17: (a) Análise do *gap* por meio do erro relativo para tensões σ_{xx} ao longo de MM'

6.3.3 Viga engastada e livre submetida a esforço transversal

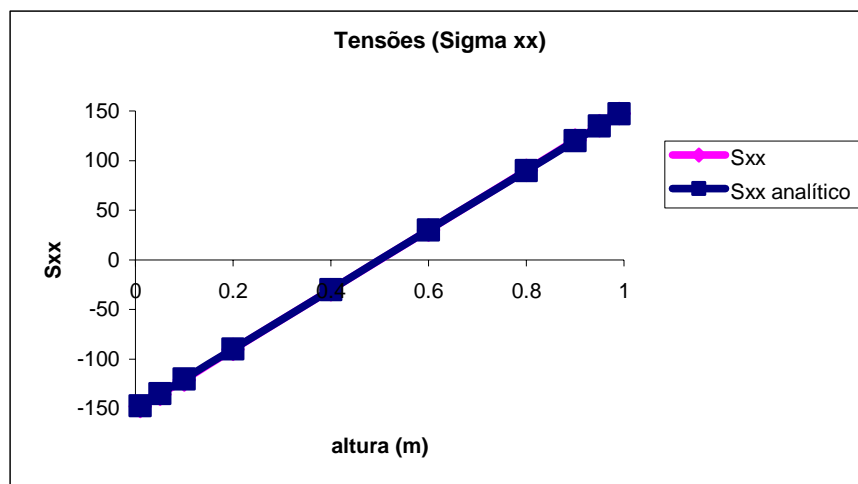
Neste momento será analisada a mesma viga do item anterior, mas agora será considerado um carregamento transversal proporcionando à viga (Figura 6.18) um efeito de flexão e, neste caso, serão analisadas tensões ($\sigma_{xx}(2.5, y, -0.996)$) ao longo de uma linha vertical (linha MM'), onde y varia de 0.01 a 0.99. Note que serão calculadas tensões a uma distância de 0.004 do contorno.



(a)

Figura 6.18: (a) Viga engastada e livre submetida a esforço transversal

Logo, o gráfico abaixo apresenta tensões (σ_{xx}) calculadas pela técnica proposta. Estas tensões são comparadas com as tensões adquiridas analiticamente.



(a)

Figura 6.19: (a) Tensões σ_{xx} ao longo de MM'

Note que as tensões σ_{xx} calculadas pela técnica de integração aqui desenvolvida foi sobreposta, graficamente, pela solução analítica. Assim, o *gap* dado de 0.004, para o cálculo de σ_{xx} foi adequado. Mas, note que esta distância foi diferente do item anterior. Isto implica que um estudo mais detalhado sobre o *gap* deve ser desenvolvido de forma rigorosa.