



5. TÉCNICA PROPOSTA PARA ANÁLISE 3D

Neste capítulo será tratado de forma definitiva o objetivo principal deste trabalho que é desenvolver uma técnica unificada para avaliar integrais bidimensionais, tal como foi feito para o caso de integrais unidimensionais (Capítulo 4).

No entanto, alguns conceitos utilizados para as integrais unidimensionais que contribuíram para um tratamento mais adequado das mesmas, tal como o conceito de divisão sintética de polinômios, não podem ser utilizados no caso de uma análise tridimensional (domínio bidimensional) com o mesmo efeito de uma avaliação de integrais com singularidade algébrica para o caso de pólo complexo. Isto faz com que seja necessário buscar outro(s) recurso(s) a fim de tratar este problema com desempenho similar ao do caso de uma análise bidimensional.

De igual forma ao caso de análise bidimensional, os primeiros conceitos e tratamentos das integrais do caso de análise tridimensional foram desenvolvidos por Dumont (1995).

Noronha (1998) continuou esses estudos, ampliando o que já existia com o intuito de alcançar o objetivo de uma técnica de integração numérica unificada, eficiente e precisa, chegando a ampliar esta técnica para o caso de singularidade genérica, procedimento este tratado através de quadraturas específicas. Porém, com relação à singularidade algébrica, os avanços matemáticos não alcançaram os objetivos em virtude de que nem sempre é possível encontrar o pólo. Isto acontece quando o elemento é pelo menos razoavelmente distorcido. Neste caso o MNR aplicado à análise tridimensional não converge.

Uma solução adequada para esses problemas é proposta neste trabalho para o problema de integração numérica bidimensional com o MEC a fim de que se torne uma



técnica realmente unificada, eficiente, precisa e de fácil implementação tal como desenvolvido para integrais unidimensionais (NORONHA, 1998).

5.1 FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS COM MEC

Como neste capítulo se trabalha com análise em um domínio tridimensional, as integrais a serem analisadas são bidimensionais, já que apenas o contorno é discretizado.

O procedimento básico desta formulação é idêntico ao item 4.1 e como se trata de uma análise tridimensional, as interpolações serão desenvolvidas a partir das equações

$$x = \sum_{i=1}^n \Phi_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \Phi_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^n \Phi_i z_i, \quad (5.1)$$

onde x_i , y_i e z_i são as coordenadas dos nós dos elementos e x , y e z são as coordenadas locais de qualquer ponto do elemento, ou seja, $x \equiv x(\xi, \eta)$, $y \equiv y(\xi, \eta)$ e $z \equiv z(\xi, \eta)$. As funções de forma Φ_i continuam variando para cada tipo de elemento considerado, mantendo-se a propriedade fundamental que seu valor, em um sistema de coordenadas natural, é igual a 1 em um nó (i, j) e 0 para os outros nós. Através desta informação, é bastante simples montar este sistema de funções de forma para um elemento bidimensional quadrático de 9 nós.

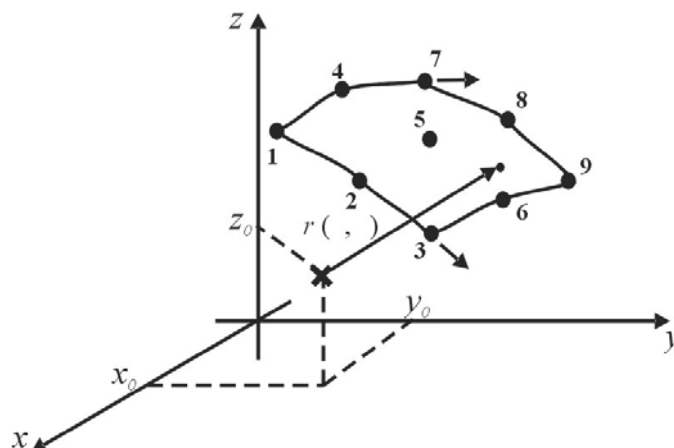


Figura 5.1: Representação de um elemento quadrático para problemas tridimensionais em MEC.



Neste caso, duas variáveis (ξ, η) são responsáveis pela parametrização do elemento, sendo que os nós se encontram nas coordenadas variando de 0, 0.5 e 1 nas duas direções, onde as funções de forma são fáceis de ser desenvolvidas para este intervalo.

Novamente, a característica polinomial é mantida quando estas funções de interpolação multiplicam as coordenadas globais dos nós resultando nas funções de posição de qualquer ponto que se queira ao longo do elemento, sendo que a distância r é representada pela equação polinomial da distância entre dois pontos no espaço (Figura 5.1), conforme se ver abaixo:

$$r(\xi, \eta) = \sqrt{(x(\xi, \eta) - x_0)^2 + (y(\xi, \eta) - y_0)^2 + (z(\xi, \eta) - z_0)^2}. \quad (5.2)$$

Note que foi a partir de uma equação (Equação 4.2) semelhante a esta que foi possível determinar a parcela efetiva de singularidade e a parcela regular para o caso de análise bidimensional (Item 4.2, Equação 4.8).

No entanto, para o caso de análise tridimensional, não é possível explicitar a parcela efetiva de singularidade e a parcela regular de forma direta, mesmo que se saiba que a parcela efetiva de singularidade seja dada pelas raízes do polinômio $r(\xi, \eta)^2$. Isto se deve ao fato de não ser possível aplicar o conceito de divisão sintética de polinômios para o caso de polinômios com duas variáveis.

No item 5.3 será tratada uma forma alternativa de explicitar a parcela efetiva de singularidade, mas antes disso se faz necessário determinar, quando possível, o pólo de singularidade ou quase-singularidade da equação 5.2 no sistema de coordenadas ξ e η o que será feito no próximo item.

5.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA BUSCA DE PÓLOS EM ANÁLISE TRIDIMENSIONAL COM O MEC

No apêndice B consta um procedimento para se encontrar o pólo da equação 4.2. Na realidade, este procedimento, utilizando o Método de Newton-Raphson (MNR) para o caso de



análise bidimensional, é bastante simples e imediato. No entanto, o procedimento para encontrar o pólo no caso de análise tridimensional é um processo um pouco mais laborioso, embora a idéia principal da aplicação do MNR continue mantida.

Através da figura 3.10 pode-se perceber que o pólo pode ser determinado através da equação 3.25, considerando que o sistema de coordenadas do elemento é ξ e η , sendo que o pólo tem como coordenadas (ξ_0, η_0, ζ_0) . A particularidade que existe neste caso é que o pólo pode ser determinado isolando cada variável (ξ e η) deste sistema de coordenadas, ou seja, é possível isolar ξ da seguinte forma:

$$\xi_p = \xi_0 \pm i\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2}, \quad (5.3)$$

onde ξ_p se trata da coordenada do pólo na direção ξ , considerando a direção η variável.

De igual modo, pode-se determinar a coordenada η_p do pólo na direção η , considerando ξ variável. A coordenada η_p é determinada por:

$$\eta_p = \eta_0 \pm i\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \zeta_0^2}. \quad (5.4)$$

De posse das expressões acima (Equações 5.3 e 5.4) é possível estabelecer as relações

$$r(\xi_p, \eta) = r\left(\xi_0 \pm i\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2}, \eta\right) \equiv r(\eta) \text{ e} \quad (5.5)$$

$$r(\xi, \eta_p) = r\left(\xi, \eta_0 \pm i\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \zeta_0^2}\right) \equiv r(\xi). \quad (5.6)$$

Porém, é sabido que ao se adotar as coordenadas do pólo (ξ_0 e η_0), tem-se as equações

$$r(\eta_0) \equiv r(\xi_0 \pm i\zeta_0, \eta_0) = 0 \text{ e} \quad (5.7)$$

$$r(\xi_0) \equiv r(\xi_0, \eta_0 \pm i\zeta_0) = 0. \quad (5.8)$$

No entanto, como as equações 5.7 e 5.8 são avaliadas com valores complexos e para que estas equações sejam iguais a zero, sabe-se que a sua parte real e parte imaginária têm que ser



iguais a zero. Porém, percebe-se que estas equações são não-lineares e para que seja possível determinar o pólo de quase-singularidade do problema basta utilizar o MNR.

Para que seja mais prático e compreensível a utilização do MNR nesta aplicação é necessário trabalhar 4 etapas, são elas: o vetor residual (\tilde{r}), matriz Jacobiano ($\nabla(\tilde{r})$), o vetor direção (\tilde{s}) e as iterações necessárias.

De posse das equações 5.7 e 5.8 e do citado anteriormente, Noronha (1998) definiu o vetor residual da seguinte forma:

$$\tilde{r} \equiv \begin{Bmatrix} \Re[r(\xi_0 \pm i\zeta_0, \eta_0)] \\ \Im[r(\xi_0 \pm i\zeta_0, \eta_0)] \\ \Re[r(\xi_0, \eta_0 \pm i\zeta_0)] \\ \Im[r(\xi_0, \eta_0 \pm i\zeta_0)] \end{Bmatrix} = \tilde{0}, \quad (5.9)$$

onde \Re e \Im correspondem a selecionar apenas a parte real ou imaginária de r , respectivamente. Porém, note que se tem 4 equações e 3 incógnitas o que gera uma indeterminação ao procurar a solução do problema. Existem dois artifícios para resolver este caso, sendo que o primeiro deles é adotar apenas 3 das 4 equações e o segundo é adotar ζ_0^ξ e ζ_0^η , sendo que em Noronha (1998) esses termos foram considerados iguais. Porém, esta consideração é válida apenas para os casos de elementos não-distorcidos e sem escala.

Para montar a matriz Jacobiano ($\nabla(\tilde{r})$) basta considerar a primeira derivada de cada função com relação a cada variável, como são 4 equações e 4 incógnitas a matriz gerada é da ordem de 4x4, sendo que o vetor direção (\tilde{s}) é dado pela expressão

$$\tilde{s} = [\nabla\tilde{r}(\xi_i, \eta_i)]^{-T} \tilde{r}(\xi_i, \eta_i) \text{ e} \quad (5.10)$$

onde ξ_i e η_i são valores dados a cada passo de iteração, onde essas iterações seriam dadas pelas expressões

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \Re[s(1, 1)], \quad (5.11)$$

$$\eta_{i+1} = \eta_i - \Re[s(2, 1)], \quad (5.12)$$



$$\zeta_{i+1}^{\xi} = \zeta_i^{\xi} - \mathfrak{S}[s(3, 1)], \quad (5.13)$$

$$\zeta_{i+1}^{\eta} = \zeta_i^{\eta} - \mathfrak{S}[s(4, 1)]. \quad (5.14)$$

No entanto, a resolução deste problema por programas de matemática simbólica, tais como: MATLAB6.5 e MAPLE9.0 se torna um processo de elevado custo computacional devido as várias avaliações necessárias em cada passo de iteração que existem e que precisam ser feitas para, posteriormente, avaliar o vetor residual, matriz Jacobiano e vetor direção. Acrescenta-se a isto o fato de que a função r e as suas derivadas a serem avaliadas são, para elementos bastante distorcidos, bem extensas.

O autor deste trabalho conseguiu identificar que esse tratamento através do MNR poderia ser um pouco mais otimizado, considerando que o vetor residual poderia ser composto de apenas duas equações complexas, tal como se vê em:

$$\tilde{r} \equiv \begin{Bmatrix} r(\xi_0 \pm i\zeta_0, \eta_0) \\ r(\xi_0, \eta_0 \pm i\zeta_0) \end{Bmatrix} = \tilde{0}, \quad (5.15)$$

notando-se que agora existem 2 equações e 3 incógnitas o que poderia, a primeira vista, ser considerado como indeterminação, mas este problema poderá ser resolvido facilmente na última etapa que são as iterações não precisando modificar o sistema de equações originais.

Para a montagem da matriz Jacobiano, basta considerar o mesmo caso anterior, mas as derivadas, no vetor residual, serão feitas apenas com relação à ξ e η que são, na realidade, as variáveis de domínio do elemento bidimensional quadrático, ou seja, agora a matriz Jacobiano é da ordem 2x2, sendo bem inferior ao do caso proposto em Noronha (1998).

O vetor direcional continua sendo dado pela expressão

$$\tilde{s} = [\nabla \tilde{r}(\xi_i, \eta_i)]^{-T} \tilde{r}(\xi_i, \eta_i), \quad (5.16)$$

sendo que a partir de agora podem ser desenvolvidas as iterações através das expressões

$$\xi_{i+1} + i\zeta_{i+1} = \xi_i + i\zeta_i - s(1, 1), \quad (5.17)$$

$$\eta_{i+1} + i\zeta_{i+1} = \eta_i + i\zeta_i - s(2, 1), \quad (5.18)$$



ou seja, além do fato de ter diminuído a ordem do vetor resíduo, do vetor direção e da matriz Jacobiano a avaliação das equações em cada passo só precisa ser efetuada na etapa de iterações e, além disso, o número de expressões na etapa de iterações diminui para 2.

Esse conjunto de alterações tornou o código do MNR mais simples de ser implementado e o custo computacional inferior ao proposto anteriormente. Isto foi influenciado principalmente pelas reduções feitas nas dimensões dos vetores e da matriz utilizada.

Vale a pena notar que este novo procedimento não exige a determinação (ou separação) dos termos em partes reais e imaginárias, ou seja não se faz necessária tratar o número complexo como formado por duas variáveis reais, pois desde quando se concebeu o vetor resíduo até a etapa de iterações o MNR foi abordado inteiramente para análise em números complexos, percebendo-se mais uma vez a vantagem desta nova abordagem numérica de busca da solução de equações não-lineares do tipo da equação 5.2.

Quando possível o encontro do pólo a parcela efetiva, para a equação 5.2, pode ser determinada. Isto será feito no próximo item.

5.3 DETERMINAÇÃO DA PARCELA EFETIVA DE SINGULARIDADE

A motivação de propor uma nova técnica para avaliar da melhor forma possível o efeito de quase-singularidade está na má precisão numérica destes efeitos e por meio de um uso errôneo das técnicas clássicas de avaliação de integrais regulares que são muitas vezes utilizadas para obter resultados em pontos próximos aos elementos de contorno, tratando-se o efeito de quase-singularidade da mesma forma como se avalia funções regulares.

De igual forma à análise bidimensional as técnicas para manipulação das integrais singulares também são bem conhecidas e o aumento da precisão destas técnicas são alvos de estudos em toda a comunidade científica sobre o assunto. Mas, a avaliação das integrais quase-singulares através de esquemas clássicos para integrais regulares normalmente

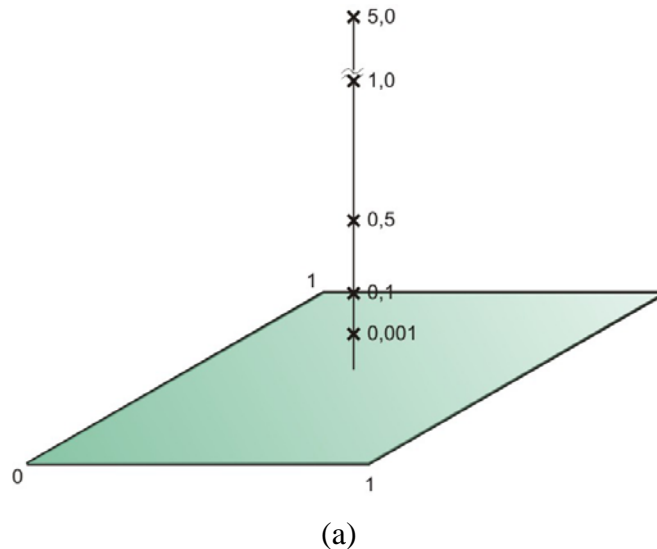


apresenta resultados com baixa precisão. Logo abaixo, é dado um exemplo de integração em uma análise tridimensional, onde o gráfico da Figura 5.2(b) ilustra a perda de precisão da aplicação de uma quadratura de Gauss-Legendre (Item 2.3.2).

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{g(\xi, \eta)}{r(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (5.19)$$

Na figura 5.2 são analisados os casos quando a origem do raio r situa-se a distâncias de 0.001, 0.1, 0.5, 1.0 e 5.0 em relação ao centro do intervalo de integração normalizado (Figura 5.2a). Nestes casos, o efeito de quase-singularidade do integrando aumenta quando diminui a distância relativa ao elemento.

Como pode ser observado no gráfico da Figura 5.2(b), quando o pólo está muito próximo do intervalo de integração (0.001 e 0.1), a perda de precisão é considerável se comparada com os resultados obtidos quando o pólo se situa distante do intervalo de integração (1 e 5). Por outro lado, pode-se verificar que quando a distância é superior a 1, a precisão e a convergência da quadratura de Gauss-Legendre são bastante satisfatórias quando se utiliza mais que 5 abscissas de Gauss, indicando que o efeito de quase-singularidade pode ser desprezado neste caso.



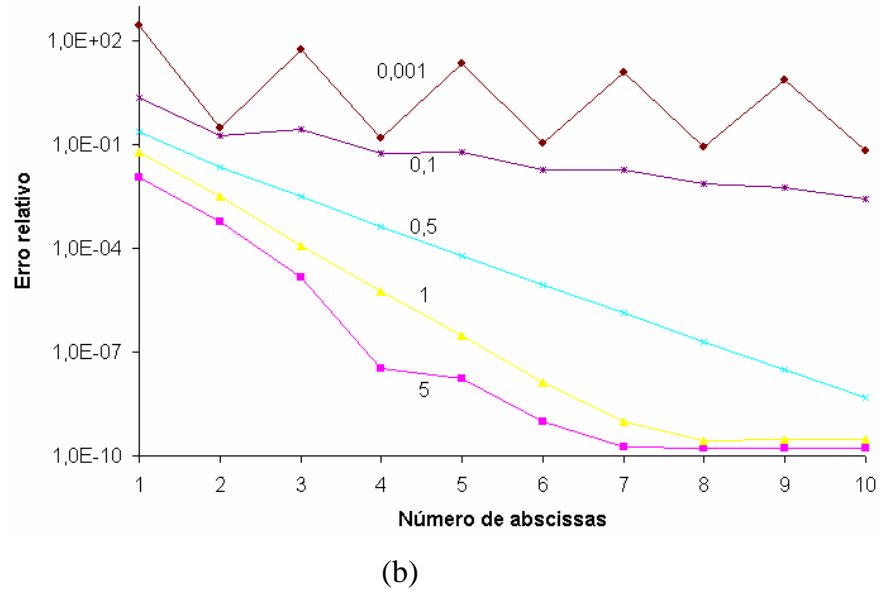


Figura 5.2: (a) Pólos a distâncias 0.001, 0.1, 0.5, 1.0 e 5.0 do intervalo de integração; (b) Erros de integração através de quadraturas de Gauss Legendre.

Por meio deste exemplo fica claro a necessidade de se propor uma técnica de integração numérica que avalie com a mais alta precisão os efeitos de quase-singularidade quando estes são fortes. Assim, prossegue-se a proposta de uma nova técnica de integração numérica para análise tridimensional com o MEC.

Como visto no capítulo 4, a determinação da parcela efetiva de singularidade para análise bidimensional é algo bastante simples de ser desenvolvido ao aplicar o conceito de DSP, porém este mesmo conceito não pode ser aplicado para o caso de análise tridimensional, devido a natureza do pólo ser variável (Item 2.2, Equações 5.3 e 5.4).

No entanto, na impossibilidade de aplicar este conceito de DSP, procurar-se-á partir de uma equação análoga à equação 4.12, mas agora aplicada a um domínio bidimensional, tal como:

$$r(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \bar{r}(\xi, \eta). \quad (5.19)$$

Com a não possibilidade da determinação da parcela efetiva de singularidade, através da aplicação da técnica de DSP, Noronha (1998) encontrou uma alternativa para que esse problema fosse solucionado através de uma simples manipulação algébrica, tal como:



$$r = w \frac{r}{w}, \quad (5.20)$$

onde $w \equiv w(\xi, \eta)$ é definido como a parcela efetiva de singularidade similar ao encontrado na equação 4.7 para o caso de análise bidimensional.

Através da equação 5.19 e sabendo que a função w é a mais simples possível que representa a distância de um ponto ao elemento em um sistema de coordenadas local e, além disso, que esta parcela não pode ser determinada através do conceito de DSP com duas variáveis, é possível admitir a função

$$w = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2}, \quad (5.21)$$

como sendo a parcela efetiva de singularidade. Além disso, é importante que a função $\bar{r} \equiv \frac{r(\xi, \eta)}{w(\xi, \eta)}$ seja uma função regular e, como a equação 5.19 será elevada ao quadrado, é fácil de perceber que a função \bar{r} não será um polinômio, porém se deseja que esta parcela possa ser aproximada por um polinômio bidimensional de grau baixo, implicando na necessidade de ser avaliada de forma analítica no pólo.

Assim, através de manipulação matemática é possível fazer com que a função r seja determinada como um produto de uma parcela efetiva de singularidade e uma parcela regular, conseguindo assim manter certa característica com a técnica aplicada para o caso de análise bidimensional.

Para confirmar que a expressão dada acima (Equação 5.19) seja realmente válida, considera-se um quadrado unitário e um elemento de contorno quadrático curvo de 9 nós com bordos situados nos lados deste quadrado, tal como se pode ver na figura abaixo:

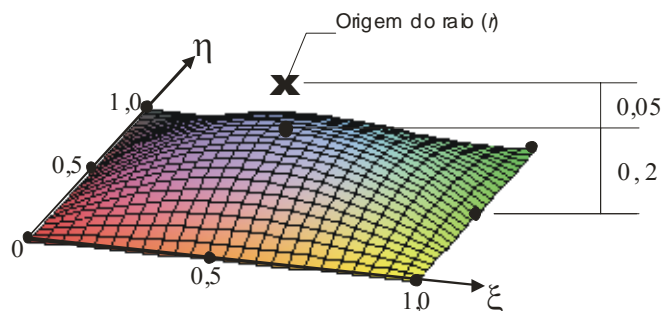


Figura 5.3: Representação de um elemento quadrático curvo para problemas tridimensionais em MEC.



Agora se pode determinar o raio r , já que se tem os nós globais e as funções de forma para este elemento (Tabela 5.1), chegando à seguinte expressão:

$$r^2 = \frac{(2\xi-1)^2}{4} + \frac{(2\eta-1)^2}{4} + \left[\frac{16}{5} \xi\eta(1-\xi)(1-\eta) - 0.25 \right]^2. \quad (5.22)$$

De posse desta fórmula e da aplicação do MNR como exposto no item anterior, é possível encontrar as coordenadas do pólo

$$\xi_0 + i\zeta_0 = 0,5 \pm i0,04814560089181e \quad (5.23)$$

$$\eta_0 + i\zeta_0 = 0,5 \pm i0,04814560089181.$$

Note que a solução da equação 5.21 gera uma solução com valores complexos, logo o pólo é quase-singular complexo, por estar fora do plano do elemento de integração. Através destes valores a parcela efetiva de singularidade, tal como apresentada na equação 5.20, pode ser determinada.

Agora é interessante fazer uma análise do comportamento de cada função que compõe a equação 5.19 através de gráficos (Figura 5.3) gerados pelo programa de matemática simbólica MAPLE9.0.

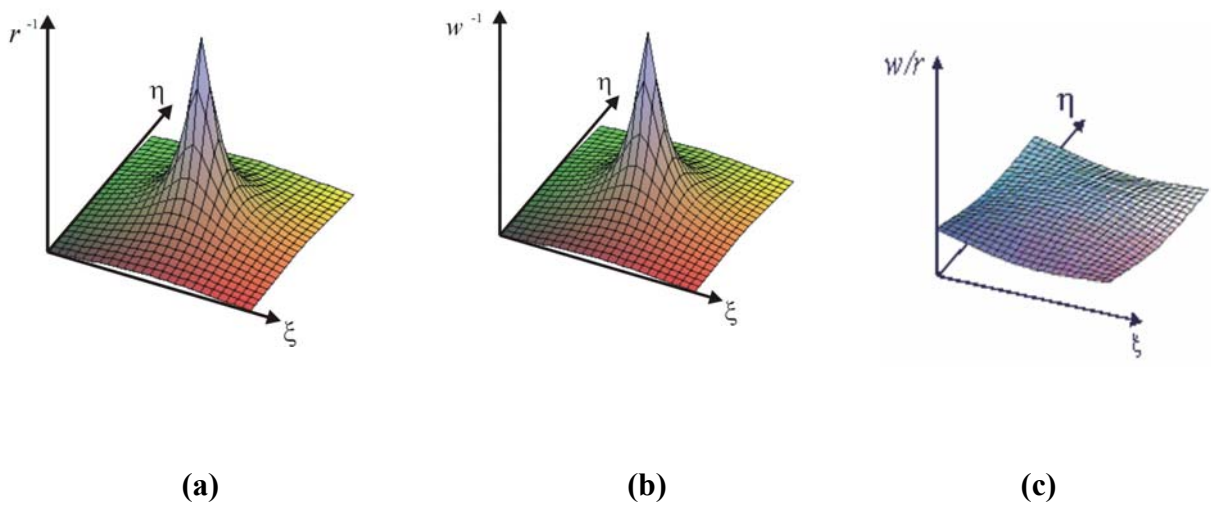


Figura 5.4: (a) Gráfico de $\frac{1}{r}$; (b) Gráfico de $\frac{1}{w}$; (c) Gráfico de $\frac{w}{r}$



Percebe-se que os gráficos (a) e (b) da figura 5.4 possuem o mesmo comportamento o que demonstra que a função que representa a parcela efetiva de singularidade (Equação 5.20 e 5.22) define bem a singularidade da função distância (Equação 5.21). Acrescenta-se mais um ponto positivo a este procedimento o simples fato de que a parcela regular, dada pelo gráfico (c) da figura 5.4, ser praticamente constante o que implica que uma aproximação polinomial de grau baixo da expressão \bar{r} é uma alternativa possível e eficaz para uma melhor representação desta expressão para posteriormente ser avaliada como será visto a seguir.

Embora o MNR tenha sido aplicado para o elemento da figura 5.4, a fim de se determinar as coordenadas do pólo, não é possível afirmar que o MNR possa ser aplicado para todos os tipos de elementos com a finalidade de encontrar as coordenadas do pólo.

Quando se aplica o MNR a elementos razoavelmente distorcidos a convergência só é conseguida com uma quantidade muito grande de iterações e quando se aplica o MNR a elementos muito distorcidos a aplicação do método não oferece convergência para o encontro das coordenadas do pólo. Isto implica que, através da idéia proposta por [NOR98], não seria possível a determinação da parcela efetiva de singularidade tal como a equação 5.20.

No próximo item, será proposto um novo procedimento para determinar essa parcela efetiva de singularidade sem a necessidade de aplicar o MNR para encontrar as coordenadas do pólo. Este procedimento independe do grau de distorção e escala do elemento de contorno.

5.4 PROCEDIMENTO PARA A DETERMINAÇÃO DA PARCELA EFETIVA DE SINGULARIDADE DE ELEMENTOS DE CONTORNO.

A técnica de integração para integrais bidimensionais, proposta neste trabalho, faz uso de procedimentos análogos aos utilizados na técnica de integração unidimensional (Equação 4.12).

Na técnica de integração unidimensional a função $w(\xi)$ representa a distância do pólo ao elemento a ser integrado no sistema de coordenada local. Na proposta anterior para



integrais bidimensionais, foi considerado que a função $w(\xi, \eta)$ também representa a distância do pólo ao elemento no sistema local de coordenadas.

Por analogia às integrais unidimensionais, a função $w(\xi, \eta)$ deve representar a distância do pólo ao elemento, com Jacobiano constante, de forma exata. Assim o que se espera é que a avaliação de integrais bidimensionais sobre elementos bidimensionais, com Jacobiano constante, forneça valores exatos. Através disto, uma ótima aproximação para os casos de elementos distorcidos, com Jacobiano dado por uma função suave, é também esperado.

Com base no que foi exposto acima, a expressão $w(\xi, \eta)$, que agora representa a distância local, deveria representar de forma adequada a função de $r(\xi, \eta)$, expressando as singularidades e/ou quase-singularidades desta função. Assim, como se deseja obter $w(\xi, \eta)$ e não se pode contar com a técnica de DSP e nem com a aplicação do MNR para encontrar as coordenadas do pólo para poder, enfim, encontrar uma função do tipo dada pela equação 5.21, se faz necessário utilizar outro procedimento de tal forma que $w(\xi, \eta)$ possa ter as características aqui desejadas.

O procedimento proposto neste trabalho é encontrar a função $w(\xi, \eta)$, função polinomial, que se assemelhe à função $r(\xi, \eta)$ com relação ao efeito de singularidade e quase-singularidade. Logo, pela técnica proposta, a função $w(\xi, \eta)$ tem a seguinte configuração:

$$W(\xi, \eta) \equiv w(\xi, \eta)^2 = a_5 \xi^2 + a_4 \eta^2 + a_3 \xi \eta + a_2 \xi + a_1 \eta + a_0, \quad (5.24)$$

onde os coeficientes a_i são dados por:

$$a_0 = R - \frac{\partial R}{\partial \xi} \xi_{\min} - \frac{\partial R}{\partial \eta} \eta_{\min} + \frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} \xi_{\min} \eta_{\min} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} \xi_{\min}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} \eta_{\min}^2, \quad (5.25)$$



$$a_1 = -\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} \xi_{\min} - \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} \eta_{\min} + \frac{\partial R}{\partial \eta},$$

$$a_2 = -\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} \eta_{\min} - \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} \xi_{\min} + \frac{\partial R}{\partial \xi},$$

$$a_3 = \frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2},$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2};$$

sendo que ξ_{\min} e η_{\min} são as coordenadas do ponto de mínimo da função $r(\xi, \eta)$. As derivadas parciais $\frac{\partial^i R}{\partial \xi^j \partial \eta^k}$, i, j e k dados de acordo com as expressões em 5.25, e a função $R(\xi, \eta) \equiv r^2(\xi, \eta)$, são avaliadas no ponto de mínimo $(\xi_{\min}, \eta_{\min})$.

Note que a expressão 5.24 é de ordem 2, podendo presumir que a função $R(\xi, \eta)$ pudesse também, em um caso geral, ser dada por um polinômio de grau 2 o que nem sempre é verdade. Quando um elemento bidimensional é linear simétrico, ou possui uma distorção suave, $R(\xi, \eta)$ é um polinômio quadrático, mas quando não possui tais características a expressão $R(\xi, \eta)$ possui termos de ordem superior a 2.

O grande mérito deste trabalho é aproximar $R(\xi, \eta)$ por um polinômio $W(\xi, \eta)$ que possui ordem máxima 2, tendo em vista que termos de ordem superior são desconsiderados quando comparados aos demais, já que é considerado um intervalo normalizado bidimensional ξ e η que varia de 0 a 1. O simples fato destes termos possuírem expoente superior a 2 os fazem ser considerados desprezíveis em relação aos demais em virtude das magnitudes relativas entre eles.



É importante ressaltar que ao se analisar pontos cujas coordenadas estão próximas a 1 em ξ e/ou η a parcela regular dada pela expressão $\bar{r} \equiv \frac{r(\xi, \eta)}{w(\xi, \eta)}$ possui alguns “picos”.

Este fato não é grave tendo em vista que a função resultante \bar{r} é, no geral, suave e não implica em acréscimos de erros ou em indeterminações numéricas. Detalhes sobre o que foi considerado neste tópico poderão ser vistos no próximo capítulo.

5.5 INTEGRAÇÃO BIDIMENSIONAL NO SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES

Ao longo de todo este trabalho se utiliza o sistema de coordenadas retangulares para representar o domínio de integração, sendo que este é o que melhor representa um elemento de integração bidimensional do tipo retangular.

Como visto anteriormente, ao fazer uso de um sistema de coordenadas retangulares através da técnica de integração utilizada neste trabalho, os pólos se caracterizam por serem variáveis, sendo complexas em um grande número de casos. Soma-se a este fato a impossibilidade de considerar as variáveis ξ e η separadamente.

Neste item será exposto um subitem sobre a técnica de integração numérica específica utilizada como base de todo o estudo desenvolvido neste trabalho e, além disso, serão apresentados dois subitens, sendo que em um deles será tratado os elementos de contorno que não possuem o efeito de distorção e escala e, no outro, os elementos mais gerais que estes, ou seja, podendo possuir ou não distorção e escala.

5.5.1 Integração numérica específica

Uma integral no sistema de coordenadas retangulares será considerada e representada pela expressão



$$\iint_{\xi \eta} \omega g d\xi d\eta, \quad (5.26)$$

onde $\omega \equiv \omega(\xi, \eta)$ e $g \equiv g(\xi, \eta)$ representam as parcelas singular e regular da integral em questão, respectivamente, tal como visto no capítulo anterior.

A sistemática proposta para integrais bidimensionais será considerada como um esquema numérico possuindo abscissas ξ_i e η_i que são dadas a partir do polinômio de Legendre para duas variáveis.

Os pesos (h_{ij}) utilizados na quadratura serão específicos para cada função de singularidade $\omega(\xi, \eta)$, sendo que a aplicação deste conceito se encontra na expressão

$$\iint_{\xi \eta} \omega g d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(\xi_i, \eta_j) h_{ij}. \quad (5.27)$$

Para resolver esta integral será feito uso da quadratura do tipo Newton-Cotes em duas direções, sendo que ao se utilizar m abscissas na direção ξ e n na direção η a parcela regular será então aproximada por um polinômio de grau $m-1$ na variável ξ e $n-1$ na variável η . Assim, a parcela regular pode ser aproximada por um polinômio de ordem $(m-1) \times (n-1)$ através da utilização de $m \times n$ abscissas.

O primeiro passo para a obtenção dos pesos (h_{ij}), específicos da quadratura dada pela expressão 5.26, é trabalhar com polinômios de Lagrange para duas variáveis. Ao adotar um esquema com $m \times n$ abscissas, e sabendo que as coordenadas de integração são (ξ_i, η_j) , os pesos h_{ij} poderão ser obtidos através de duas etapas, sendo que a primeira é determinar os coeficientes do polinômio de Lagrange por meio da expressão

$$L_{ij} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{(\xi - \xi_k)}{(\xi_i - \xi_k)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{(\eta - \eta_l)}{(\eta_j - \eta_l)}. \quad (5.28)$$

Esta fornece valor unitário para a abscissa (ξ_i, η_j) e se anula em todas as outras abscissas. Posteriormente, avalia-se analiticamente a expressão



$$h_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \omega L_{ij} d\xi d\eta. \quad (5.29)$$

Como a expressão 5.28 é um polinômio bidimensional de ordem $(m-1) \times (n-1)$, percebe-se ao expandí-lo que a integral dada por esta expressão pode ser decomposta como um somatório das parcelas

$$\int_0^1 \int_0^1 \omega \xi^i \eta^j d\xi d\eta. \quad (5.30)$$

No entanto, a solução da integral acima deve ser feito estritamente de forma analítica. Estas integrais são mais complexas do que as integrais unidimensionais e a sua solução analítica pode até mesmo não existir.

Assim, a proposta inicial deste trabalho está em considerar que a função de singularidade é obtida pela parcela efetiva de singularidade $w(\xi, \eta)$, tendo em vista que a função $r(\xi, \eta)$ pode ser decomposta tal como mostra equação 5.20. Porém, devido às soluções fundamentais de Kelvin, sabe-se que a função distância ($r(\xi, \eta)$) é a responsável direta pela singularidade e/ou quase-singularidade, além dos gradientes desta função. Com esta proposta, além do fato de que a função de singularidade é do tipo $\frac{1}{r^p}$, soma-se a isto a possibilidade da parcela regular ser uma função qualquer ($g(\xi, \eta)$) e, com o uso da idéia exposta na expressão 5.27, tem-se:

$$\int_{\xi} \int_{\eta} \frac{1}{r^p} g d\xi d\eta = \int_{\xi} \int_{\eta} \frac{1}{w^p} \left(\frac{w}{r} \right)^p g d\xi d\eta. \quad (5.31)$$

Como a expressão $\frac{w}{r}$ é a parcela regular de r , tem-se que a parcela regular do integrando pode ser expressa agora como o produto $\left(\frac{w}{r} \right)^p g$, sendo que o integrando da integral acima continua sendo definido por duas parcelas (singular e regular) tal como a



expressão 5.27 e os mesmos conceitos aplicados para esta expressão podem ser aplicados na expressão 5.31. Logo, a integral pode ser resolvida através da seguinte expressão:

$$\iint_{\xi \eta} \frac{1}{r^p} g d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{w(\xi_i, \eta_j)}{r(\xi_i, \eta_j)} \right)^p g(\xi_i, \eta_j) h_{ij}; \quad (5.32)$$

onde h_{ij} é o peso específico de integração para a função de singularidade $(w(\xi, \eta))$ para as abscissas de integração (ξ_i, η_j) .

Em alguns casos a parcela $\frac{w}{r}$ é representada por uma função constante e, em outros, tal parcela poderá ser representada por uma função suave, sendo bem aproximada por um polinômio de grau baixo.

Estas regularizações serão mostradas no próximo capítulo através de gráficos, mostrando que a técnica proposta neste trabalho é consistente e coerente para uma ótima avaliação de integrais bidimensionais em MEC.

5.5.2 Elementos de contorno não-distorcidos e sem escalas

Primeiramente, se faz necessário saber o que caracteriza o elemento possuir distorção ou escala na equação 5.24, tendo em vista que perceber estes efeitos geometricamente é algo trivial.

O simples fato do coeficiente a_3 ser diferente de zero já caracteriza o efeito de distorção no elemento de contorno. Além deste fato, quando os coeficientes a_4 e a_5 são diferentes um do outro os lados do elemento retangular são diferentes, representando a existência de escala diferencial nos lados do elemento. Estas informações também são úteis para o próximo subitem.



Quando se tem um elemento que não possui distorção ou escala diferencial a equação 5.24 possui a seguinte forma:

$$W(\xi, \eta) \equiv w(\xi, \eta)^2 = a_5 \xi^2 + a_5 \eta^2 + a_2 \xi + a_1 \eta + a_0, \quad (5.31)$$

onde os coeficientes que aparecem acima correspondem aos mesmos das expressões 5.25. Com esta equação se obtém um novo formato para a parcela efetiva de singularidade, conforme se vê abaixo:

$$w(\xi, \eta) = \sqrt{(A\xi - \xi_0)^2 + (A\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2}, \quad (5.32)$$

$$A = a_5,$$

$$\xi_0 = -\frac{a_2}{2\sqrt{a_5}},$$

$$\eta_0 = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_5}},$$

$$\zeta_0^2 = a_0 - \frac{a_2^2}{4a_5} - \frac{a_1^2}{4a_5} \geq 0.$$

(5.33)

A importância de tratar desta análise se encontra na existência de uma solução analítica, desenvolvida em [NOR98], para encontrar os pesos específicos (Equação 5.34) para função de singularidade do tipo:

$$h_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\xi^i \eta^j}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2} \right)^p} d\xi d\eta. \quad (5.34)$$

Porém, note que uma particularidade importante precisa ser ressaltada. Os termos ξ_0 , η_0 e ζ_0 aparecem na técnica desenvolvida pelo pesquisador supracitado como as coordenadas do pólo. Este fato não é mais levado em consideração, tendo em vista que a técnica aqui proposta determina a parcela efetiva de singularidade sem a busca das coordenadas do pólo, fazendo com que aqueles termos não tenham mais tal significado geométrico.

O outro fato a ser levado em consideração é que no momento da discretização do modelo podem surgir elementos de contorno, mesmo que não possuam distorção e escala



diferencial, com lados diferentes de 1. Este fato implica no surgimento do coeficiente A o que poderia gerar um problema ao ser utilizado a técnica desenvolvida para integrais do tipo ao da expressão 5.34. Porém, ao usar simples mudanças de variável e levar em consideração o jacobiano na expressão 5.32 este problema é solucionado diretamente.

Vale ressaltar, que Noronha (1998) desenvolveu a solução analítica para integrais do tipo da expressão 5.34 para p , variando de 1, 3, 5 e 7. Neste caso, este pesquisador desenvolveu uma solução para cada p . No apêndice C, deste trabalho, se encontra a solução analítica generalizada para uma ordem m qualquer da expressão 5.34. O impacto deste procedimento se encontra no momento da implementação computacional que, sendo utilizado POO, ao invés de quatro classes seria necessário apenas uma.

5.5.3 Elementos de contorno distorcidos e/ou com escalas

Quando o elemento possui distorção e/ou escala, a parcela efetiva de singularidade é determinada por meio da expressão 5.24, puramente. Para este caso, que na realidade é o mais geral possível, uma solução analítica precisa ser desenvolvida. Para o desenvolvimento desta solução pelos menos dois caminhos serão mencionados neste trabalho.

O primeiro é desenvolver uma solução analítica para se determinar os pesos específicos para função de singularidade do tipo da equação 5.24, tal como:

$$h_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\xi^i \eta^j}{\left(\sqrt{a_5 \xi^2 + a_4 \eta^2 + a_3 \xi \eta + a_2 \xi + a_1 \eta + a_0} \right)^p} d\xi d\eta. \quad (5.35)$$

O segundo caminho faz uso de um procedimento matemático mais elegante devido ao fato de se utilizar conceitos avançados de Álgebra Linear que é a teoria de quádras, tal como visto no item 2.4. O objetivo de aplicar estes conceitos é simplesmente tentar retirar o termo cruzado $(a_3 \xi \eta)$ da equação 5.24. Com isto, seria possível utilizar a solução analítica apresentada na equação 5.34.



A equação 5.24, que define a parcela efetiva de singularidade, possui a mesma característica que a da superfície da equação 2.33, com a exceção de que a superfície é um valor qualquer além do zero, ou seja, é igual ao $W(\xi, \eta)$, onde $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_5^2 + a_4^2 \neq 0$.

Ao aplicar todos os procedimentos mencionados no subitem 2.4.4, tem-se a expressão da parcela efetiva de singularidade transformada:

$$W(\xi', \eta') = \lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 + E' \xi' + F' \eta' + d. \quad (5.36)$$

Para se chegar a esta expressão alguns conceitos foram aplicados e que estão bem explicados no item 2.4. Como algum dos conceitos utilizados é possível citar a consideração de uma nova função $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (Equação 2.34) e que, por meio desta, foi utilizado o TEOREMA I para a determinação de uma base ortonormal $B = \{v_1, v_2\}$ que transforme $[f]_B$, onde $f \in B_s(V, K)$ é uma forma bilinear simétrica (Equação 2.35), em uma matriz diagonal. Para cada $v \in V$, tem-se: $v = \xi' v_1 + \eta' v_2$. Para uma compreensão efetiva do que foi desenvolvido aqui é interessante retornar ao item 2.4.

Como foi discutido no início deste subitem, o objetivo de aplicar esta teoria de quádricas era simplesmente retirar o termo cruzado e obter, com isso, uma nova equação para se aplicar a solução analítica (Equação 5.34) para busca dos pesos específicos. A equação 5.36 que resultou da aplicação desta teoria de quádricas pode possuir uma nova forma, como segue abaixo:

$$w(\xi', \eta') = \sqrt{(A\xi' - \xi_0')^2 + (B\eta' - \eta_0')^2 + (\zeta_0')^2}, \quad (5.37)$$

$$A = \sqrt{\lambda_1},$$

$$B = \sqrt{\lambda_2}, \quad (5.38)$$

$$\xi_0' = -\frac{E'}{2\sqrt{\lambda_1}},$$



$$\eta_0' = -\frac{F'}{2\sqrt{\lambda_2}},$$

$$(\zeta_0')^2 = d - \frac{E'^2}{4\lambda_1} - \frac{F'^2}{4\lambda_2} \geq 0.$$

É importante ressaltar que em todas as transformações aqui desenvolvidas na parcela efetiva de singularidade (Equação 5.24) o alvo da transformação se localizava no domínio de $W(\xi, \eta)$ e não na imagem desta parcela. Isto implica que $W(\xi, \eta) = W(\xi', \eta')$, desde que se respeite a matriz mudança de base $[M]$. Isto implica imediatamente no fato que os pesos específicos encontrados nos dois domínios são iguais. No entanto, não é possível simplesmente usar esta equação, aqui desenvolvida, para o intervalo normalizado (elemento que é regido pela base $B = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$), tendo em vista que um novo domínio foi criado devido à mudança de base aplicada para a retirada do termo cruzado. Posteriormente, considerações serão feitas sobre esta discussão.

No momento da discretização do modelo numérico podem surgir elementos distorcidos (Figura 5.5a), ou seja, que fazem com que a parcela efetiva de singularidade tenha o termo cruzado. Porém, quando se aplica a mudança de base, a fim de eliminar o termo cruzado, um novo elemento deverá ser integrado e será chamado aqui de elemento transformado (Figura 5.5b).

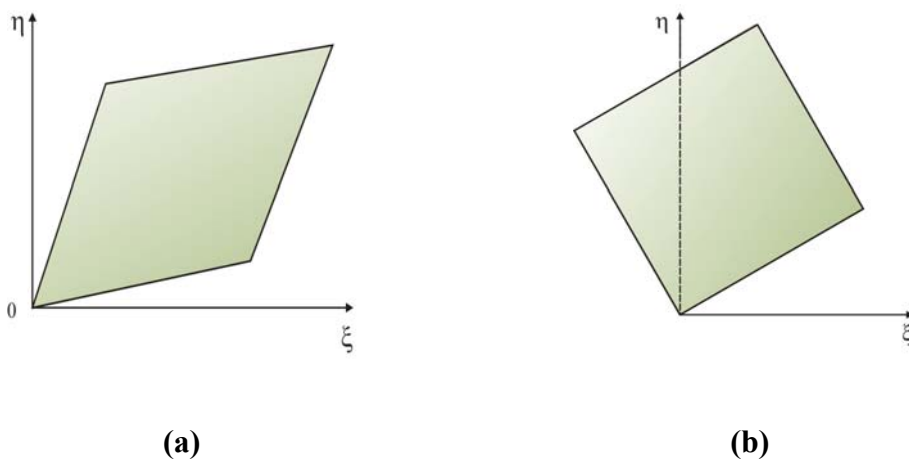


Figura 5.5: (a) Elemento distorcido (sistema global); (b) Elemento transformado (sistema local).



Note que o elemento transformado no sistema local de referência, não possui o domínio delimitado por funções constantes (Figura 3.9), sendo delimitado por funções afins.

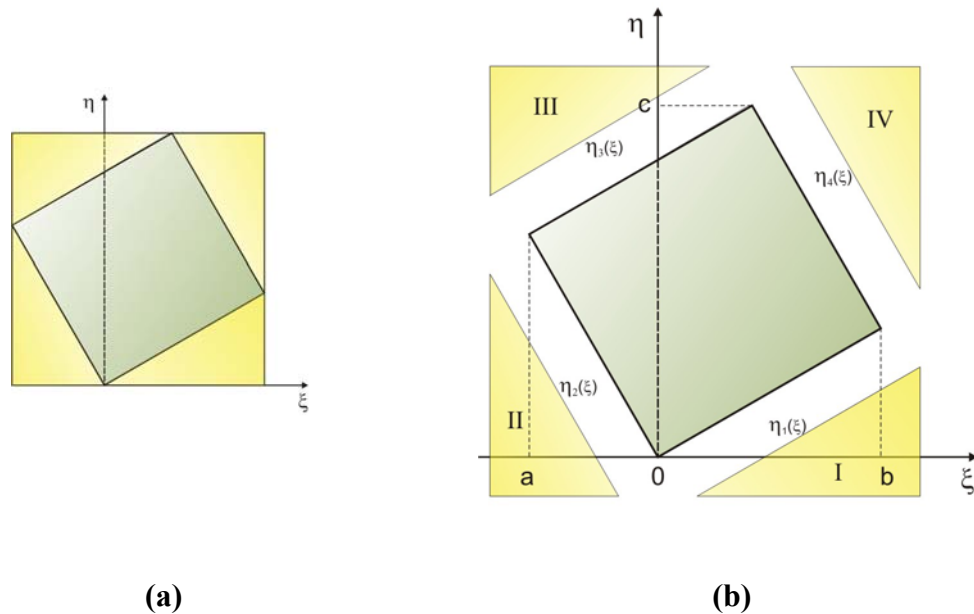


Figura 5.6: (a) Domínios de integração; (b) Partes a serem subtraídas.

Por meio da figura 5.6 é fácil de perceber que se faz necessário aplicar a solução analítica, pela equação 5.34, cinco vezes para que se tenham os pesos específicos relacionados à função de singularidade no novo domínio (Equação 5.37), tendo em vista que os volumes I, II, III e IV precisam ser subtraídos do intervalo $[a,b] \times [0,c]$. Obviamente, a solução analítica por meio da teoria de quádricas, terá um esforço computacional cinco vezes maior do que a solução analítica para se determinar os pesos específicos por meio da equação 5.35.

Quando a aplicação da teoria de quádricas foi proposta, a idéia inicial era fazer uso de uma solução analítica já existente para determinação dos pesos específicos e assim desenvolver uma técnica que fosse geral para qualquer tipo de elemento, ou seja, com ou sem efeitos de distorção e escala. Porém além do aumento do esforço computacional envolvido, conforme foi mostrado anteriormente, percebeu-se que se faria necessário rever a formulação devido ao fato da mudança de base envolver variáveis internas o que não poderia ser solucionado apenas com uma mudança de variáveis.



Neste momento, o melhor caminho a ser seguido, segundo este autor, seria desenvolver a solução analítica para o cálculo dos pesos específicos como é apresentado na equação 5.35. Todas as justificativas apresentadas que fizeram a aplicação da teoria de quádras não ser a mais eficiente são utilizadas para incentivar o primeiro caminho apresentado neste subitem, tendo em vista que não há aumento no esforço computacional, *a priori*, e o domínio do elemento de contorno é delimitado por funções constantes.

Assim, a técnica proposta neste trabalho de determinação da parcela efetiva de singularidade continua sendo válida para todos os casos possíveis de distorção e escala em elementos de contorno. Mas, por enquanto apenas os pesos específicos para os elementos sem distorção e escala estão sendo calculados, validando a proposta neste trabalho, tendo em vista que está sendo utilizada a proposta de determinação da parcela efetiva de singularidade e, resolvendo-a por meio de quadraturas numéricas específicas, que é uma outra proposta deste trabalho.

Os ótimos resultados alcançados neste trabalho servem como um incentivo sólido de que se faz necessário continuar estes estudos, a fim de se obter uma técnica de integração que já está sendo utilizada de forma unificada para o cálculo de integrais singulares, independente do nível de singularidade, e quase-singulares em MEC e que não possua restrição nos tipos de elementos de contorno a serem calculados.

5.6 TIPOS DE KERNEL QUE OCORREM EM ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL EM MEC

Através deste estudo, é importante determinar quais kernels das equações 3.10, 3.11, 3.12, 3.15 e 3.16 contribuem com efeitos de singularidade ou quase-singularidade. Para isso, foi montada uma tabela semelhante à tabela 4.2 em que constam todos os kernels com as características mencionadas acima para o caso de uma análise tridimensional com o MEC.



Tabela 5.2 – Parcelas de singularidade efetiva em integrais bidimensionais com MEC

Integral	Termo	Parcela efetiva de Singularidade
H	$\frac{1}{r^2} r_{,\eta}$	$O\left(\frac{1}{w^3}\right)$
	$\frac{1}{r^2} (r_{,i})^2 r_{,\eta}$	$O\left(\frac{1}{w^5}\right)$
G	$\frac{1}{r}$	$O\left(\frac{1}{w}\right)$
	$\frac{1}{r} (r_{,i})^2$	$O\left(\frac{1}{w^3}\right)$
D_{kij}	$\frac{1}{r^2} r_{,i}$	$O\left(\frac{1}{w^3}\right)$
	$\frac{1}{r^2} (r_{,i})^3$	$O\left(\frac{1}{w^5}\right)$
σ_{ij}	$\frac{1}{r^3}$	$O\left(\frac{1}{w^3}\right)$
S_{kij}	$\frac{1}{r^3} r_{,i} r_{,\eta}$	$O\left(\frac{1}{w^5}\right)$
	$\frac{1}{r^3} (r_{,i})^3 r_{,\eta}$	$O\left(\frac{1}{w^7}\right)$

$r_{,i}$ é utilizado de uma forma geral podendo representar a diferencial em outra direção.

De igual forma ao caso das integrais unidimensionais é importante considerar o efeito de quase-singularidade que é introduzido pelos termos de gradiente, pois

$$r_{,x} = \frac{x(\xi, \eta) - x_0}{r(\xi, \eta)} \quad (5.33)$$

e como $(x(\xi_0, \eta_0) - x_0) \neq 0$ (para o caso de pólo complexo) e ainda $r(\xi_0, \eta_0) = 0$ é possível notar que apenas o numerador é diferente de zero enquanto o denominador se anula no pólo de quase-singularidade.



No caso em que se trata de pólo de singularidade ou quase-singularidade real, os termos de gradiente (Equação 5.33) são funções regulares, tendo em vista que tanto o numerador quanto o denominador se anulam e esta função pode ser determinada através da regra de L'Hospital. Logo, para este último caso, a equação acima seria um termo regular.

No apêndice D consta de forma detalhada como se determina os kernels apresentados na tabela 5.2.

Em uma continuação desta pesquisa se faz necessário desenvolver um estudo detalhado dos efeitos da utilização desta técnica para análise tridimensional em relação ao número de abscissas necessário para uma boa avaliação das integrais.