



4. TÉCNICA APLICADA A ANÁLISE BIDIMENSIONAL COM MEC

Este capítulo servirá como base de comparação para entender os reais objetivos deste trabalho e, a partir disto, perceber que alguns conceitos aplicados pela técnica desenvolvida por Dumont e Noronha, para análise bidimensional, não são fáceis ou são, até mesmo, impossíveis de serem estendidos ou aplicados para análise tridimensional, mas estas dificuldades ou impossibilidades serão vistas com mais detalhes no próximo capítulo.

A técnica desenvolvida por tais pesquisadores será tratada de uma forma bastante sistemática a fim de apenas mostrar os conceitos básicos que a envolve. Para isso, a técnica será focada em problemas de elasticidade bidimensional, mas uma análise para problemas de potencial é algo bastante simples e imediato de serem desenvolvidos a partir dos conceitos aqui mostrados até mesmo porque tais problemas possuem os mesmos tipos de singularidades.

4.1 FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS COM MEC

Como neste capítulo está se trabalhando com análise em um domínio bidimensional, as integrais a serem analisadas são unidimensionais, já que apenas o contorno é discretizado.

O procedimento básico desta formulação é expressar as coordenadas dos nós dos elementos em uma forma de interpolação usando sistema de coordenadas naturais do



elemento. Como se trata de um domínio bidimensional, as interpolações serão desenvolvidas a partir das equações

$$x = \sum_{i=1}^n \Phi_i x_i, y = \sum_{i=1}^n \Phi_i y_i, \quad (4.1)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas dos nós dos elementos e x e y são as coordenadas de qualquer ponto do elemento que serão tratadas como coordenadas locais, ou seja, $x \equiv x(\xi)$ e $y \equiv y(\xi)$. Já as funções Φ_i são chamadas de funções de forma variando para cada tipo de elemento considerado.

A propriedade fundamental das funções de formas é que seu valor, em um sistema de coordenadas natural, é igual a 1 em um nó i e 0 para os demais nós, ou seja, as funções de forma correspondem a um nó específico do elemento a ser interpolado. Através desta informação é bastante simples montar este sistema de funções de forma para um elemento quadrático de 3 nós

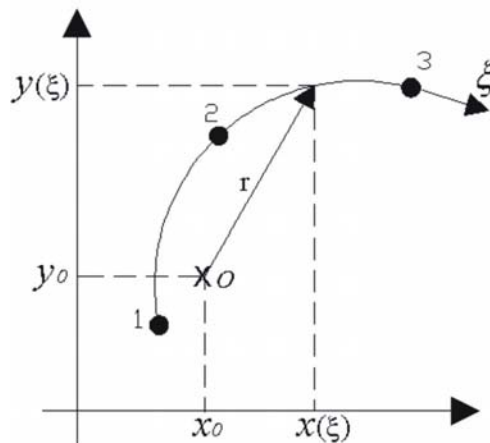


Figura 4.1: Representação de um elemento quadrático para problemas bidimensionais em MEC.

Neste caso, a variável responsável pela parametrização do elemento acima é ξ e é igual a 0 (nó 1), 0.5 (nó 2) e a 1 (nó 3), sendo que as funções de forma são fáceis de serem determinadas para este intervalo.



Percebe-se claramente a facilidade que estas funções de interpolação oferece, já que se tratam de polinômios e ao serem multiplicadas pelas coordenadas globais dos nós resultam nas funções de posição de um ponto qualquer ao longo do elemento (equação 4.1).

Nota-se que as funções de posição ainda continuam sendo representadas por polinômios e a distância r é representada pela equação da distância entre dois pontos (Figura 4.1), conforme se ver abaixo:

$$r(\xi) = \sqrt{(x(\xi) - x_0)^2 + (y(\xi) - y_0)^2}, \quad (4.2)$$

sendo que a partir desta equação é possível explicitar a parcela efetiva de singularidade, já que, devido o uso das soluções de Kelvin, a função de distância r é a responsável pela singularidade de integrais no MEC. A busca desta parcela efetiva de singularidade será vista com mais detalhes logo a seguir.

4.2 DETERMINAÇÃO DA PARCELA EFETIVA DE SINGULARIDADE

Para que seja possível a determinação da parcela efetiva de singularidade se faz necessário, primeiramente, a determinação do pólo de singularidade ou quase-singularidade. Como se trata de uma análise bidimensional, a forma de se encontrar este pólo é algo bastante simples e pode ser feito pelo método de Newton-Raphson (MNR), devido a não-linearidade do problema. Este problema foi resolvido de duas formas diferentes pelos pesquisadores Dumont (DUMONT, 1994) e Noronha (NORONHA, 1998). Estas formas encontram-se no apêndice B.

Encontrado o pólo complexo, é possível determinar a parcela efetiva de singularidade de forma muito simples. Neste trabalho, esta parcela será encontrada de forma menos laboriosa, mas serão mantidas as noções principais para uma boa compreensão da técnica, bem como, apresentar as raízes do problema ao estender esta técnica para análise tridimensional.



Sabe-se que o pólo anula a função (4.2), mas quando se trabalha no corpo dos números reais é sabido que para r ser nulo se faz necessário que

$$\begin{aligned}x(\xi) - x_0 &= 0 \text{ e} \\y(\xi) - y_0 &= 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Porém, no corpo dos complexos a distância r pode ser nula quando

$$\begin{aligned}x(\xi) - x_0 &\neq 0 \text{ e} \\y(\xi) - y_0 &\neq 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Ao fazer uso de recursos matemáticos, sabendo que as funções (4.3) são polinômios e sabendo, também, que ξ_0 é responsável por zerar estas funções o que pode ser feito é aplicar um processo de fatoração a tais funções, chegando às expressões

$$\begin{aligned}x(\xi) - x_0 &= (\xi - \xi_0)\bar{x}_r \text{ e} \\y(\xi) - y_0 &= (\xi - \xi_0)\bar{y}_r.\end{aligned}\tag{4.5}$$

A partir destas expressões e da Equação 4.2 pode-se chegar a

$$r(\xi)^2 = (\xi - \xi_0)^2 \bar{r}^2,\tag{4.6}$$

sendo possível agora determinar a parcela efetiva de singularidade para o caso do pólo de singularidade real, tratando-se da expressão

$$w(\xi) = (\xi - \xi_0).\tag{4.7}$$

De uma forma geral, pode-se obter a partir de (4.6) a equação

$$r(\xi) = |\xi - \xi_0| \bar{r},\tag{4.8}$$

que na realidade é a equação geral da distância fatorada pela função responsável pela singularidade explícita (parcela singular) e uma parcela regular (\bar{r}).

Quando ξ_0 é um número complexo, a relação $(\xi - \xi_0)$ também será um número complexo. Assim, $|\xi - \xi_0|$ pode ser representado por:



$$|\xi - \xi_0| = \sqrt{\xi^2 - 2\xi a + a^2 + b^2}, \quad (4.9)$$

o que implica que a parcela responsável pela singularidade efetiva para o pólo complexo é a equação

$$w(\xi) = \xi^2 - 2\xi a + a^2 + b^2. \quad (4.10)$$

A função \bar{r} pode ser determinada através da aplicação da divisão sintética entre os polinômios r^2 e $(\xi^2 - 2\xi a + a^2 + b^2)$.

Com a determinação da parcela efetiva de singularidade para o caso de pólo real e complexo, é possível, a partir de agora, aplicar a técnica desenvolvida por Dumont (1994) e Noronha (1998) para o caso das integrais bidimensionais com o MEC.

4.3 TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO APLICADA A ANÁLISE BIDIMENSIONAL COM MEC

Nos trabalhos de pesquisa realizados pelos pesquisadores Dumont e Noronha, uma nova sistemática de avaliação para integrais singulares e quase-singulares foi desenvolvida. Além disto, na época da identificação das raízes do problema foram descobertos novos efeitos que ainda eram desconhecidos pelos pesquisadores da área, como a ocorrência de pólos complexos e pólos múltiplos (NORONHA, 1998), mas estes últimos não serão tratados neste trabalho.

Embora as técnicas para manipulação das integrais singulares sejam bem conhecidas, a avaliação das integrais quase-singulares através de esquemas clássicos para integrais regulares normalmente apresenta resultados com baixa precisão. Logo abaixo, é dado um exemplo gerado com relação à integração em análise bidimensional, onde o gráfico da Figura 4.2(c) ilustra a perda de precisão da aplicação de uma quadratura de Gauss-Legendre (Item 2.3.2).



$$\int_0^1 \frac{1}{r} dr. \quad (4.11)$$

Nos casos em que a origem do raio r situa-se a distâncias de 0.1, 0.5, 1 e 5 em relação ao centro do intervalo de integração de tamanho unitário (Figura 4.2a). O efeito de quase-singularidade do integrando pode ser visualizado na Figura 4.2(b).

Como pode ser observado no gráfico da Figura 4.2(c), quando o pólo está muito próximo do intervalo de integração (0.1 e 0.5), a perda de precisão – aqui mensurada como o grau de convergência da avaliação – é considerável se comparada com os resultados obtidos quando o pólo se situa distante do intervalo de integração (1 e 5). Por outro lado, pode-se verificar que quando a distância é superior a 1, a precisão e a convergência da quadratura de Gauss-Legendre são bastante satisfatórias, indicando que o efeito de quase-singularidade pode ser desprezado neste caso.

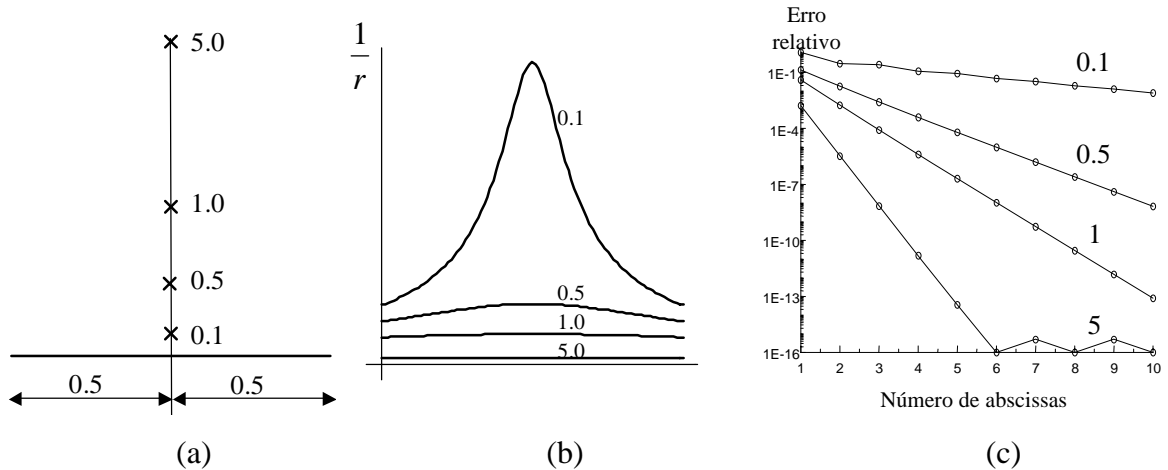


Figura 4.2: (a) Pólos a distâncias 0.1, 0.5, 1.0 e 5.0 do intervalo de integração; (b) Efeitos de singularidade de cada um dos pólos; (c) Erros de integração através de quadraturas de Gauss Legendre.

A técnica de integração baseia-se em uma função $w \equiv w(\xi)$, que representa a distância entre o pólo e o intervalo de integração no sistema de coordenadas ξ . A distância entre o pólo e o intervalo de integração no sistema (x, y) pode ser expressa como

$$r(\xi) \equiv \sqrt{(x(\xi) - x_0)^2 + (y(\xi) - y_0)^2} = w(\xi) \bar{r}(\xi), \quad (4.12)$$

na qual $w(\xi)$ representa a parcela de singularidade efetiva presente em $r(\xi)$. Conseqüentemente, $w(\xi) \rightarrow 0$ quando $r(\xi) \rightarrow 0$. Por sua vez, $\bar{r}(\xi) \neq 0$ para todos os



valores reais e complexos na vizinhança do intervalo de integração. Para discretizações onde não ocorrem elementos com forma muito distorcida, há apenas uma solução $\xi_0 = a \pm bi$ para a equação $r(\xi_0) = 0$ na vizinhança do intervalo de integração, tal que para pólos complexos, tem-se: $w(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 2a\xi + a^2 + b^2}$; sendo que $\bar{r}(\xi)$ é obtido através da divisão $\bar{r}(\xi) = r(\xi)/w(\xi)$ e para pólos reais (casos A e B na Fig. 3.8): $w(\xi) = (\xi - \xi_0)$.

Considere uma integral onde $g(\xi)$ representa a parte regular do integrando e $\omega(\xi)$ a sua parte singular. No caso em que o pólo é real (casos A e B), a técnica de integração apresentada possui a seguinte forma:

$$\int_0^1 \omega(\xi) g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n g(\xi_i) h'_i + \sum_{j=0}^m g^{(j)}_{(\xi_0)} H_j, \quad (4.13)$$

na qual ξ_i são abscissas de Legendre; $g^{(j)}_{(\xi_0)}$ é a derivada de ordem j , avaliada no pólo ξ_0 , da função $g(\xi)$; h'_i e H_j são pesos específicos de integração; n e m são valores inteiros que definem o grau de precisão da técnica e $\omega(\xi) = \frac{1}{w(\xi)}$. Para uma função de singularidade genérica ($\ln(r)$, por exemplo), a técnica proposta aproxima a parcela regular $g(\xi)$ por um polinômio de grau $n-1+m$. Por outro lado, no caso de singularidade algébrica ($1/r^m$) a parcela regular $g(\xi)$ é aproximada por um polinômio de grau $2n-1+m$.

No caso em que o pólo é complexo, a técnica de integração possui a seguinte forma:

$$\int_0^1 \omega(\xi) g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n g(\xi_i) h'_i + \sum_{j=1}^{2m} R_j C_j, \quad (4.14)$$

na qual C_j são pesos específicos de integração e R_j depende da função $g(\xi)$ e de suas derivadas de ordem $m-1$ avaliadas em $\xi_0 = a \pm bi$. Agora, quando $\omega(\xi)$ é dada por uma função de singularidade genérica, a técnica aproxima a parcela regular $g(\xi)$ por um polinômio de grau $n-1+2m$. Já no caso em que $\omega(\xi)$ é do tipo algébrico a parcela regular $g(\xi)$ é aproximada por um polinômio de grau $2n-1+2m$.



O segundo somatório no lado direito das Equações (4.13) e (4.14) pode ser interpretado como um termo complementar, com o intuito de corrigir ou simplesmente melhorar o resultado final da integração. Por sua vez, o parâmetro m que surge nestas equações pode ser relacionado com o grau de singularidade da parcela $\omega(\xi)$. Assim, pode ser observado que esta técnica apresenta a excelente característica de oferecer ganho de precisão para funções de singularidade cada vez mais fortes. A grande maioria das técnicas existentes tem comportamento inverso, ou seja, apresenta perda de precisão nesta situação.

Maiores detalhes desta técnica, desenvolvida para avaliar integrais unidimensionais em MEC, se pode encontrar na extensa bibliografia desenvolvida pelos pesquisadores Dumont e Noronha sobre o assunto, os quais são os mentores desta técnica para análise bidimensional em MEC.

4.4 PARCELAS DE INTEGRAIS QUE OCORREM EM MEC PARA ANÁLISE BIDIMENSIONAL

Através deste estudo, é importante determinar quais parcelas das equações 3.8 a 3.16 contribuem com efeitos de singularidade ou quase-singularidade. Para isso, foi montada uma tabela (Tabela 4.2) em que constam todas as parcelas com as características mencionadas acima para o caso de uma análise bidimensional com o MEC.

É importante notar que a ordem de singularidade para o caso de pólo complexo na matriz \mathbf{H} e para as tensões nos pontos internos (σ_{ij}) é maior que no caso real, justamente pelo fato de se considerar o efeito de quase-singularidade que é introduzido pelos termos de gradiente, pois

$$r_{,x} = \frac{x(\xi) - x_0}{r(\xi)} \quad (4.15)$$

e como $(x(\xi_0) - x_0) \neq 0$ (para o caso de pólo complexo) e ainda $r(\xi_0) = 0$ é possível notar que o apenas o numerador é diferente de zero enquanto o denominador se anula no pólo de quase-singularidade. No caso em que se trata de pólo de singularidade ou quase-singularidade



real, os termos de gradiente (Equação 4.15) são funções regulares, tendo em vista que tanto o numerador, como o denominador, se anula e esta função pode ser determinada através da regra de L'Hospital. Logo, para este último caso, a (Equação 4.15) seria um termo regular.

Tabela 4.2 – Parcelas de singularidade efetiva em integrais unidimensionais com MEC

Integral	Termo	Parcela efetiva de Singularidade	
		Pólo real	Pólo complexo
H	$\frac{1}{r}r_{,i}$	$\frac{1}{\xi - \xi_0}$	$\frac{1}{w(\xi)}$
	$\frac{1}{r}(r_{,i})^2r_{,\eta}$	-----	$\frac{1}{w(\xi)^2}$
G	$\ln(r)$	$\ln(\xi - \xi_0)$	$\ln(w(\xi))$
	$(r_{,i})^2$	-----	$\frac{1}{w(\xi)}$
σ_{ij}	$\frac{1}{r}r_{,i}$	$\frac{1}{\xi - \xi_0}$	$\frac{1}{w(\xi)}$
	$\frac{1}{r}(r_{,i})^3$	$\frac{1}{\xi - \xi_0}$	$\frac{1}{w(\xi)^2}$
	$\frac{1}{r^2}r_{,i}r_{,\eta}$	$\frac{1}{(\xi - \xi_0)^2}$	$\frac{1}{w(\xi)^2}$
	$\frac{1}{r^2}(r_{,i})^3r_{,\eta}$	$\frac{1}{(\xi - \xi_0)^2}$	$\frac{1}{w(\xi)^3}$

$r_{,i}$ é geral podendo representar a diferencial em outra direção.

É importante apresentar também o número de abscissas necessárias para se ter bons resultados com a técnica proposta para análise bidimensional. Na tabela 4.3 foram considerados três tipos de elementos, são eles: Elemento Linear, Elementos quadráticos reto e curvo.

As singularidades analisadas foram retiradas dos elementos das matrizes **H** e **G** e foram analisadas tanto singularidades do tipo algébricas quanto de outros tipos.

Ao observar a tabela 4.3, percebe-se que ao utilizar esta técnica para análise bidimensional o número de abscissas necessários é pequeno, chegando no máximo a 5 para



elemento quadrático curvo, enquanto para elemento quadrático reto o número de abscissas máximo chega a 3, já para o elemento linear chega a 2 o número de abscissas.

Tabela 4.3 – Número de abscissas necessárias com a aplicação da técnica bidimensional em

		MEC		
Integral	Singularidade	Elemento linear	Elemento quadrático	
			Reto	Curvo
H ; σ_{ij}	$1/(\xi - \xi_0)$	1	1	3 ou 4
σ_{ij}	$1/(\xi - \xi_0)^2$	1	1	3 ou 4
H ; G ; σ_{ij}	$1/w(\xi)$	1	1	3 ou 4
H ; σ_{ij}	$1/w(\xi)^2$	1	1	3 ou 4
σ_{ij}	$1/w(\xi)^3$	1	1	3 ou 4
G	$\ln(\xi - \xi_0)$	2	3	4 ou 5
G	$\ln(w(\xi))$	2	3	4 ou 5
G*	$(\xi - \xi_0) \ln(\xi - \xi_0)$	1	2	3 ou 4
G*	$w(\xi) \ln(w(\xi))$	1	1	3 ou 4

* Ganho de precisão ao utilizar a técnica de DSP comparado com as outras singularidades na matriz **G**

4.5 RESULTADOS DE INTEGRAIS UNIDIMENSIONAIS

Neste item serão apresentadas apenas duas avaliações de integrais, sendo que a primeira quando o pólo é real e a segunda quando o pólo é complexo. Os resultados a seguir comparam diferentes técnicas clássicas com a técnica proposta para análise bidimensional. Tais problemas foram propostos por Noronha (1998).



A primeira integral a ser avaliada é

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\xi^2 - 3\xi + 2.5}}{(1.002 - \xi)^2} d\xi, \quad (4.16)$$

sendo que esta possui singularidade algébrica de ordem 2 e um pólo real $\xi_0 = 1.002$. Note que este é um pólo de quase-singularidade real, tendo em vista que ele pertence à extensão do domínio do elemento de integração unidimensional, cujo intervalo varia de 0 a 1. Além disto, este efeito de quase-singularidade é muito forte, já que a distância relativa é muito menor que 1.

É importante sempre discernir qual o termo que faz parte da parcela regular e qual termo faz parte da parcela singular. Porém, é bastante simples determinar isto na integral acima, sendo que a parcela regular é definida pela expressão

$$g(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 3\xi + 2.5} \text{ e} \quad (4.17)$$

a parcela singular é definida pela expressão

$$\omega(\xi) = \frac{1}{(1.002 - \xi)^2}. \quad (4.18)$$

Através da técnica proposta por Dumont (1994) e Noronha (1998) é possível notar que o erro relativo da integral acima é bastante inferior aos gerados por outras técnicas, tais como: Gauss-Legendre e as transformações de variáveis proposta por Telles (1987) de segunda (TRC2) e de terceira ordem (TRC3).

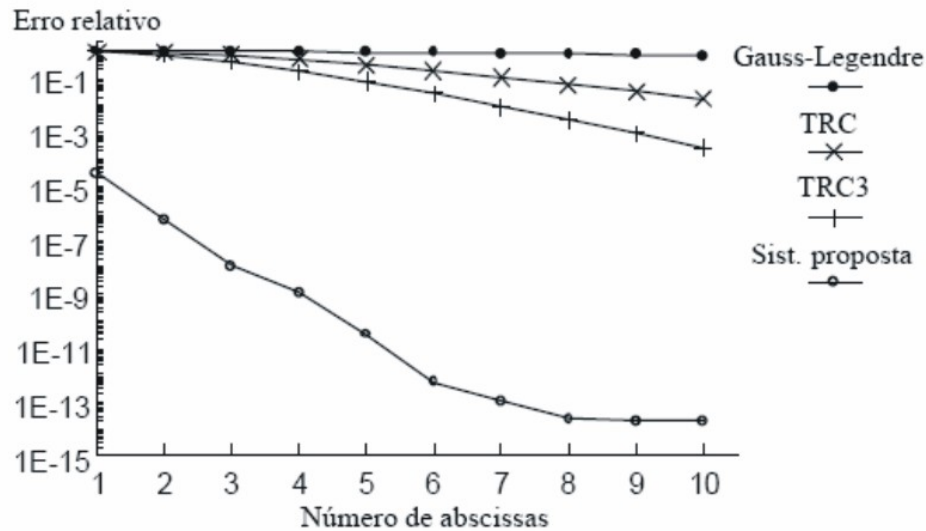


Figura 4.3: Comparação da precisão obtida entre sistêmica proposta por [NOR98] e técnicas clássicas de integração numérica.

A técnica para resolução de integrais com singularidade algébrica permite, para o caso de pólo de quase-singularidade real, a utilização da expansão da série de Taylor para o caso da parcela regular do integrando e além disso, para os resultados acima, foram utilizados apenas dois termos desta expansão, sendo necessária a derivada da função $g(\xi)$ em ξ_0 .

É importante fazer alguns comentários sobre os resultados acima, onde foram considerados um número máximo de 10 abscissas. Note que com apenas 1 abscissa de integração o resultado foi melhor do que os resultados gerados pelas outras técnicas com 10 abscissas de integração.

Como segundo exemplo de avaliação de integral, será considerada a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\xi^2 - 3\xi + 2.5}}{\xi^2 - \xi + 0.2501} d\xi. \quad (4.19)$$

Percebe-se, neste caso, que o pólo é expresso por $\xi_0 = 0.5 + 0.01i$, tratando-se então de um pólo de quase-singularidade complexo.

Como visto anteriormente (Item 3.6), este caso não pode ser tratado através de uma expansão em série de Taylor, tendo em vista que este conceito não pode ser aplicado para



expandir uma função em torno do par conjugado. Para isso, deve ser utilizada a técnica de DSP, tal como consta no apêndice A.

Como a parcela singular da integral acima é definida pela expressão

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\xi^2 - \xi + 0.2501} \quad (4.20)$$

é possível perceber que o polinômio do denominador é de ordem 2, o que implica que o polinômio resto terá ordem máxima de 1. Processo semelhante a este está resolvido no apêndice A.

Na figura 4.4 será considerada apenas a técnica proposta para avaliação de integrais com pólos de quase-singularidade complexos e a técnica de Gauss-Legendre.

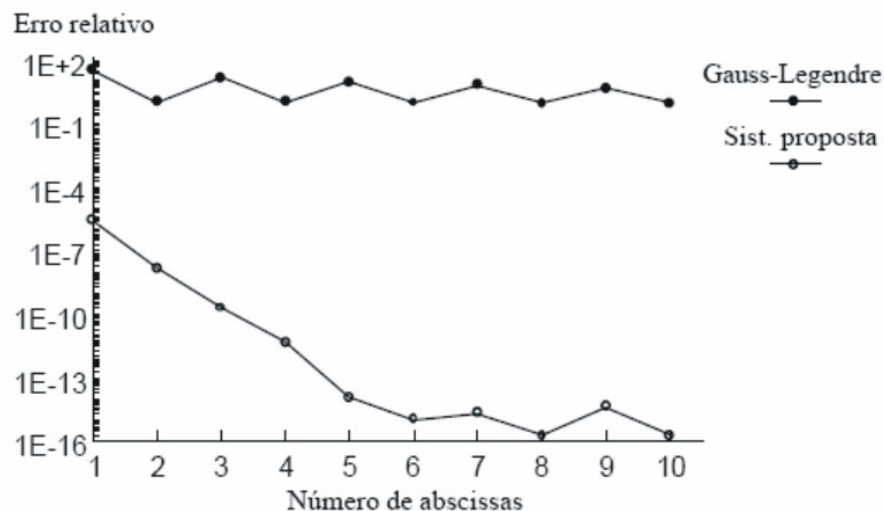


Figura 4.4: Comparação da precisão obtida entre sistemática proposta por [NOR98] e a técnica de Gauss-Legendre.

Vale a pena ressaltar que além destes resultados terem uma ótima precisão quando comparados com a técnica clássica de Gauss-Legendre, percebe-se que os resultados foram melhores que os adquiridos no caso anterior em que se avaliou o pólo de quase-singularidade real.

O intuito de apresentar estas avaliações foi para dar uma idéia do grau de precisão que este trabalho deseja conseguir quando se avalia integrais bidimensionais com a utilização



da técnica proposta neste trabalho, mesmo que não seja válido se tratar do conceito de divisão sintética de polinômios com duas variáveis.