



3. FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Nas três últimas décadas, o MEC vem ganhando muito destaque tanto em trabalhos de pesquisa pura quanto em simulações de engenharia. O MEC possui uma grande vantagem com relação aos demais métodos numéricos em análises de modelos com domínio infinito ou semi-infinito (usuais em geotecnia), pela simplicidade de discretização do modelo. Além disto, o MEC apresenta resultados com ótima precisão em análise de problemas com altos gradientes, com concentração de tensões e em problemas de Mecânica da Fratura, por exemplo.

O MEC basicamente efetua a análise de problemas através da discretização do contorno Γ do modelo (Figura 3.1a), através de nós e elementos (Figura 3.1b). Na primeira fase da análise, os valores de forças de superfície e deslocamentos são obtidos apenas para os nós da discretização do contorno. A partir destes valores, obtêm-se os resultados em qualquer ponto do contorno através da interpolação em cada um dos elementos.

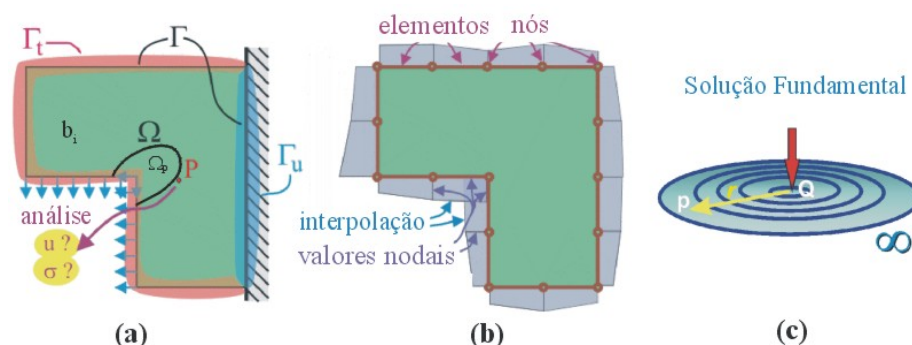


Figura 3.1 – (a) Modelo da estrutura; (b) Discretização do modelo; (c) Solução Fundamental.



As propriedades básicas do MEC devem-se principalmente à utilização de uma solução especial da equação governante do problema denominada solução fundamental. No caso de análise de tensões, para a obtenção desta solução considera-se que uma carga concentrada esteja aplicada em um ponto P de um meio elástico infinito (Figura 3.1c).

A formulação elastostática do MEC pode ser obtida por meio da utilização da técnica dos resíduos ponderados empregada sobre a equação de equilíbrio, onde a função ponderadora é justamente a solução fundamental em deslocamento.

Assim, com o auxílio de manipulações algébricas e aplicando-se alguns teoremas, como, por exemplo, o teorema de *Betti*, chega-se na equação básica do MEC. Esta equação também é conhecida como Identidade de *Somigliana* e permite obter os valores dos deslocamentos u_i em qualquer ponto P do domínio Ω do problema, considerando-se que os valores de deslocamentos u_i e forças de superfície p_i no contorno da geometria e as forças de volume b_i são conhecidos. No caso mais geral de problemas não-lineares, a equação em questão é dada por:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega_p} \varepsilon_{kmi}^* \sigma_{mi}^p d\Omega. \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1 todos os termos que apresentam um asterisco sobrescrito referem-se à solução fundamental da teoria da elasticidade determinada por *Kelvin*, podendo ser encontrada em Gaul et al. 2003 entre outros. A quarta integral do lado direito da Equação 3.1 é responsável pela não-linearidade do material.

A partir da Equação 3.1 é possível obter a identidade de *Somigliana* para deformação e para tensão, fazendo o uso das equações de compatibilidade e relações constitutivas, respectivamente, como indicado em Gaul et al. (2003).

O algoritmo do MEC consiste na aplicação da identidade de *Somigliana* nos nós do modelo discretizado. Este procedimento resulta em um sistema de equações dado por:



$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{b} + \mathbf{F}_\sigma, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{p} são, respectivamente, os vetores de deslocamento e de forças de superfície nos nós da discretização, \mathbf{b} é o vetor de deslocamentos devido à força de volume b_i e \mathbf{F}_σ o termo responsável pela não-linearidade do material. As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são cheias e não-simétricas.

O próximo passo do algoritmo consiste na introdução das condições de contorno na Equação 3.2, a fim de se obter o seguinte sistema de equações

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\sigma, \quad (3.3)$$

onde a matriz \mathbf{A} é constituída por elementos da matriz \mathbf{H} e \mathbf{G} , \mathbf{v} o vetor incógnita em deslocamentos e forças de superfícies, \mathbf{F} é o vetor com os deslocamentos e forças de superfícies conhecidos e \mathbf{F}_σ é a mesma parcela mencionada anteriormente que considera a influência dos incrementos de tensões que causam a plastificação.

A resolução desse sistema de equações (no caso não-linear é um processo iterativo) permite a obtenção dos valores das forças de superfícies e deslocamentos no contorno do modelo por meio de interpolação dos valores nodais de u_i e p_i . A partir dessas informações, pode-se obter os valores de deslocamentos e tensões em qualquer ponto P do domínio Ω através da identidade de *Somigliana* (Equação 3.1). Desta equação mais geral, pode-se obter a formulação que é mais utilizada no MEC convencional, tratando-se da equação

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma, \quad (3.4)$$

sendo que u_i é o deslocamento em qualquer ponto do domínio mas, para conhecer este deslocamento, se faz necessário o prévio conhecimento de deslocamentos (u_k - conhecido em uma determinada parte do contorno Γ_u) e tensões (p_k - conhecido em outra parte do contorno Γ_σ) ao longo de todo o contorno, conforme se pode ver na figura abaixo.

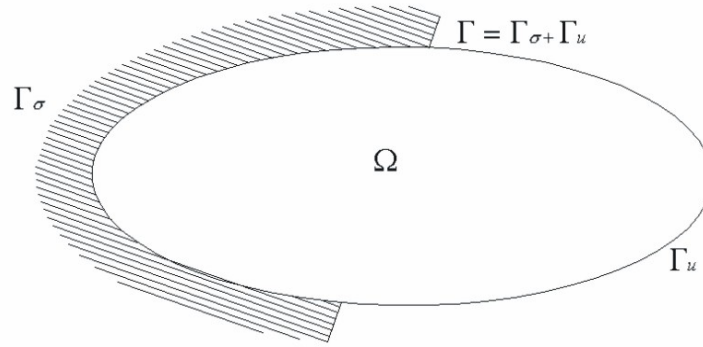


Figura 3.2: Domínio e contorno de um problema genérico resolvido pelo MEC

Os valores de deslocamentos (u_k) e tensões (p_k) são funções que serão interpoladas numericamente através de funções de forma que dependem de cada elemento a ser utilizado (item 4.1). Através dessas funções e da Equação 3.1, encontra-se a clássica equação básica do MEC convencional

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p}, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{p} são, respectivamente, vetores de deslocamento nodal (u_j) e tensão nodal (p_j) e as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são cheias e não-simétricas o que dificulta o processamento computacional devido da ordem das matrizes. Para encontrar os termos destas matrizes são aplicadas integrais ao longo do contorno, tais como:

$$\mathbf{H} \equiv H_{ij} = \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_{kj} d\Gamma \quad e, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G} \equiv G_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_{kj} d\Gamma. \quad (3.7)$$

Com a resolução do sistema (Equação 3.5) são encontrados deslocamentos e tensões sobre o contorno, já que os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são formados por valores conhecidos e desconhecidos de deslocamentos e tensões no contorno. Através destes valores de deslocamentos e tensões, agora conhecidos, é possível, a partir da identidade de Somigliana (Equação 3.4), encontrar os valores de deslocamentos em pontos internos, ou seja, em pontos pertencentes ao domínio. De igual forma, é possível determinar os valores de tensões em pontos internos derivando a identidade de Somigliana, levando em consideração que os termos em asterisco nesta mesma equação são as soluções fundamentais de deslocamento



(u_{ik}^*) e de tensões (p_{ik}^*) em qualquer ponto do contorno que, para o caso de elasticidade bidimensional, são dadas por:

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] e \quad (3.8)$$

$$p_{ij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] r_{,\eta} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_j - r_{,j}\eta_i) \right\}; \quad (3.9)$$

sendo que para o caso de elasticidade tridimensional, são dadas por:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] e \quad (3.10)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] r_{,\eta} + (1-2\nu)(r_{,i}\eta_j - r_{,j}\eta_i) \right\}, \quad (3.11)$$

onde r é a distância entre o ponto aplicado e o observado, G é o módulo de elasticidade transversal, ν é o coeficiente de Poisson e η é o vetor normal cujas componentes em cada direção são dadas por η_j .

Uma vez resolvida a equação 3.5 é possível determinar deslocamentos e tensões em pontos ao longo do domínio (Ω), ou seja, em pontos internos do problema. Para determinar as tensões em pontos internos, basta aplicar derivadas na identidade de Somigliana (Equação 3.4), chegando à expressão:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma \text{ em } \Omega, \quad (3.12)$$

surgindo os tensores D_{kij} e S_{kij} . Para os problemas de elasticidade bidimensional estes tensores são dados pelas expressões

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] e \quad (3.13)$$



$$S_{kij} = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \{A + B + C\} \therefore$$

$$A = 2 \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] r_{,\eta}; \quad (3.14)$$

$$B = 2\nu (r_{,i} r_{,k} \eta_{,j} + r_{,j} r_{,k} \eta_{,i})$$

$$C = (1-2\nu) (2 r_{,i} r_{,j} \eta_{,k} + \delta_{jk} \eta_{,i} + \delta_{ik} \eta_{,j}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \eta_{,k}.$$

Já para o caso de elasticidade tridimensional, tem-se as expressões

$$D_{kij} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 3 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] e \quad (3.15)$$

$$S_{kij} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \{A + B + C\} \therefore$$

$$A = 3 \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 5 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] r_{,\eta}; \quad (3.16)$$

$$B = 3\nu (r_{,i} r_{,k} \eta_{,j} + r_{,j} r_{,k} \eta_{,i})$$

$$C = (1-2\nu) (3 r_{,i} r_{,j} \eta_{,k} + \delta_{jk} \eta_{,i} + \delta_{ik} \eta_{,j}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \eta_{,k}.$$

3.2 CÁLCULO DE INTEGRAIS NO MEC

A integração numérica é um ponto de destaque no algoritmo do MEC, do qual depende fortemente da precisão dos resultados. Este assunto tem sido pesquisado constantemente nos últimos 30 anos.

Em geral, as integrais dos MECs envolvem integrandos nos quais podem ser identificados uma parcela singular (ou quase-singular) e uma parcela regular.



Os efeitos da singularidade estão diretamente relacionados com a expressão da solução fundamental que apresenta termos explícitos de singularidade ($\frac{1}{r}$ e $\ln(r)$ para o caso 2D, e $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$ para o caso 3D). Por outro lado, os efeitos de quase-singularidade ocorrem devidos tanto a esses termos explícitos quanto aos termos de gradiente $r_{,x}$ e $r_{,y}$ (Figura 3.2).

$$\begin{array}{l}
 \text{2D} \\
 u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \\
 p_{ij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] r_{,n} - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \\
 \\
 \text{3D} \\
 u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \\
 p_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu) \delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] r_{,n} + (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\}
 \end{array}$$

termo explícito de singularidade ou quase-singularidade termos onde ocorre quase-singularidade

Figura 3.3: Fontes de singularidade e quase-singularidade.

Em estudos já concluídos sobre técnicas de integração para o caso bidimensional em Noronha (1998), foi visto que enquanto o efeito de singularidade sempre ocorre em modelos de elementos de contorno convencionais, o efeito de quase-singularidade ocorre apenas em duas situações específicas. A primeira delas (Figura 3.3a) está relacionada a modelos onde a relação “perímetro/área” é alta ou quando há pontos do contorno discretizados muito próximos de algum elemento (modelos com furos, concavidades e arestas grandes vizinhas a arestas pequenas). Já a segunda situação diz respeito à obtenção de resultados em pontos internos muito próximos do contorno (Figura 3.3b).

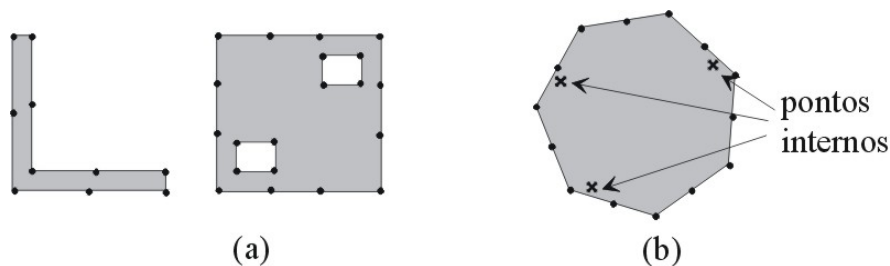


Figura 3.4: Modelos onde ocorrem efeitos de quase-singularidade em análise bidimensional.



3.3 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Nas duas últimas décadas, um grande número de pesquisadores tem sugerido esquemas de integração, sejam numéricas ou analíticas, procurando um esquema ideal com as seguintes características:

- Alta precisão numérica;
- Baixo esforço computacional;
- Grande aplicabilidade e
- Facilidade de implementação.

De um modo simplificado, as técnicas de integração numérica existentes podem ser classificadas de acordo com um dos seguintes tipos:

- Avaliação indireta através de propriedades espectrais;
- Subdivisão do intervalo de integração;
- Transformações de regularização do integrando e
- Quadraturas numéricas específicas.

A Tabela 3.1 apresenta uma visão geral dos principais trabalhos sobre o assunto, indicando os principais pesquisadores envolvidos nesta linha de pesquisa.

Conforme se verifica nessa tabela, uma técnica efetiva para um efetivo tratamento da singularidade é algo crítico e que tem requerido a atenção de muitos pesquisadores com o intuito de que se possa alcançar eficiência e precisão em avaliação numérica para um determinado tipo de problema.



Tabela 3.1 – Visão geral da revisão bibliográfica.

TÉCNICA	PESQUISADOR
Integ. Analítica	Symm (1963), Rizzo (1967), Cruse (1969), Jeng e Wexler (1977), Katz (1985), Gray, Martha e Ingrassia (1990), Salvadori(2001), Fenner (2005)
Propr. Espectrais	Cruse (1974), Rizzo (1977), Crotty Sisson (1990)
Subdivisão	Lachat & Watson (1976), Yang & Atkinson (1993), Schwab (1993)
Regularização	Telles (1987), Guigianni (1987), Hayami (1988), Cerrolaza (1989), Zhang & Xu (1989), Aliabadi (1989), Li & Obata (1992), Cruse (1993), Cruse & Aithal (1993), Tanaka (1994) Dumont (1997), Karami (1998)
Quadr. Específicas	Kutt (1975), Fairweather (1979), Pina & Fernandes (1981), Lean & Wexler (1985), Dumont & De Souza (1992), Dumont (1994), Noronha (1995), Noronha (1998), Dumont & Noronha (1998), Dumont & Noronha (1999), Lolm (2000), Dumont & Noronha (2000), Theotokoglou & Tsamasphyros (2006)

3.3.1 Tipos de integrais singulares em MEC

Nesses anos, desde a criação do MEC, muitos trabalhos foram publicados e com estes muitas técnicas foram sugeridas para o tratamento das singularidades. Entre estas, várias foram discutidas e usadas com grau variado de sucesso.

Ao longo desse período em que houve uma dedicação ao estudo das singularidades no MEC, variados tipos de singularidades nas integrais vêm sendo discutidos, tais como: Singularidade fraca (Weakly singular), Singularidade forte (Strongly singular), hipersingulares (Hypersingular) e integrais supersingulares (Supersingular), conforme se encontra em Gao (2005). Nesta obra é possível encontrar um esquema de classificação de cada tipo de integral existente no MEC onde a função que é responsável diretamente pela

singularidade foi considerada como sendo igual a $\frac{1}{r^\beta}$ e os níveis de singularidades constam



na tabela 3.2. Para esta tabela, D corresponde à dimensão (1 para 2D e 2 para 3D) do tipo de análise do problema e r corresponde à distância entre o ponto de origem e um ponto qualquer no elemento de contorno.

Tabela 3.2 – Níveis de singularidades

NÍVEIS DE SINGULARIDADES	POTÊNCIA
Regular	$\beta = 0$
Singularidade fraca	$0 < \beta < D$
Singularidade forte	$\beta = D$
Hipersingular	$\beta = D + 1$
Supersingular	$\beta = D + 2$

Uma forma matemática de se entender quando ocorre um ou outro tipo de singularidade é analisar basicamente dois fatores (CRUSE, 1993), são eles: A existência (ou não) do limite da integral e a forma da região excluída em torno do ponto de singularidade. Normalmente, nesses casos em que há singularidades em um determinado ponto, o procedimento que se adota é excluir uma pequena região, incluindo a vizinhança ao ponto em que ocorre a singularidade, do domínio de integração e, posteriormente, avalia-se o limite quando o volume desta pequena região tenda a zero.

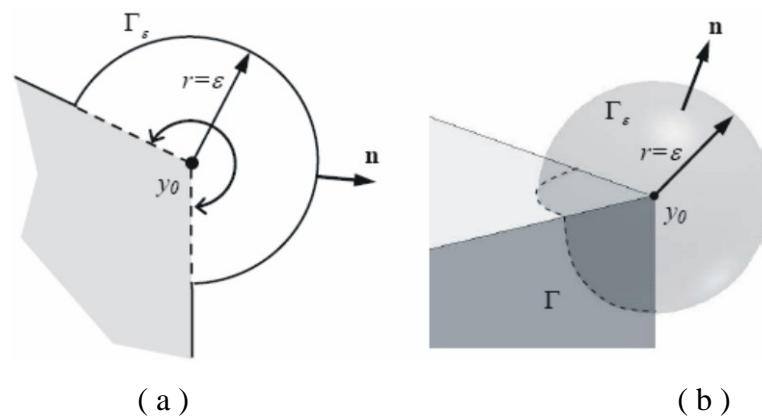


Figura 3.5: (a) região a ser excluída no caso 2D; (b) região a ser excluída no caso 3D.

É importante ressaltar algumas características de avaliação das integrais com o uso das mais tradicionais técnicas disponíveis.



A primeira é que a grande maioria destas técnicas tentam tratar o efeito de singularidade, em uma integral existente no MEC, utilizando coordenadas polares, para o caso 2D, e coordenadas esféricas, para o caso 3D.

A segunda, é que normalmente se trabalha com variável real, ou seja, consideram apenas pontos cujas coordenadas sejam reais e anulam o raio (r) o que faz com que o integrando tenda a infinito.

A terceira é que estas técnicas consideram (ou tratam) apenas a função $\frac{1}{r^\beta}$ como sendo efetivamente a causadora de singularidade, esquecendo que as suas derivadas também podem ser fontes de singularidade ou quase-singularidade.

As avaliações destas integrais com os respectivos níveis de singularidade podem ser encontradas de forma clara e concisa em Gao (2005).

3.4.1 Histórico das técnicas de integração singulares

Um breve histórico de pesquisas sobre tratamentos numéricos das integrais singulares será exposto. Porém, não há o intuito, neste trabalho, de desenvolver um estado da arte a este respeito. Para os que buscam tal desenvolvimento se sugere a leitura de Cruse (1993).

Em 1969, a integração analítica sobre elementos de contorno lineares triangulares de três nós foi proposto inicialmente por Cruse (1969) e foi usada em problemas de elasticidade 3D. Com o uso de coordenadas polares, foi possível reduzir a singularidade de integrais com singularidades fraca e forte, convertendo-as em integrais regulares. Para o caso de integrais com hiper-singularidades, (GRAY et. al., 1990) usou métodos de integração direta para resolver este problema que aparece constantemente quando se trabalha com mecânica da fratura, mostrando que a integração analítica dos núcleos da identidade de tensão de Somigliana, antes de analisar os pontos do contorno, remove todos os termos hiper-singulares.



Em 1975, Kutt (1975) propôs uma técnica aproximada que se baseia em uma maneira de se avaliar a Parte Finita da integral singular através de uma quadratura de Gauss de uma integral singular desconsiderando a parte divergente da integral

$$PF \int_0^1 \frac{f(\xi)}{\xi^k} d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (3.17)$$

que é mais geral que a aproximação de integração direta, pois a integral final continua sendo tratada numericamente. Este tipo de quadratura faz uso de um grande esforço computacional, pois tanto as abscissas quanto os pesos devem ser calculados para cada diferente tipo de função de peso, sendo que o cálculo destas abscissas é um procedimento computacionalmente caro, tendo em vista a necessidade de algoritmos para encontrar raízes de um polinômio cujo grau coincide com o número de abscissas.

Em 1981, Pina (1981) propõe um novo tipo de tratamento numérico para as integrais singulares com o uso de quadratura gaussiana especial para o cálculo de integrais com singularidade fraca na formulação do MEC através de cálculo de pesos especiais, mas mantendo os pontos de Gauss.

Em 1986, para avaliar integrais com singularidades fracas, (LACHAT, 1986) fez uso de uma transformada de coordenadas degeneradas o que ficou conhecido como Mapeamento degenerado. Já para as integrais com singularidade fortes, foi utilizado o método de movimento de corpo rígido, proposto por Cruse (1974). Este último método se trata de um método indireto, pois avalia todas as integrais regulares e quase-singulares de um modelo de contorno, mantendo as integrais singulares como incógnitas que serão determinadas a partir de propriedades das matrizes existentes no MEC. A exemplificação desta técnica pode ser vista em Noronha (1998).

Em 1987, métodos semi-analíticos têm sido motivos de grande atenção para inúmeros pesquisadores. Guiggiani et al. (1987) através de expansões assintóticas de núcleos de funções em coordenadas locais sugeriu que a parte divergente da integral singular poderia ser separada pela adição e subtração dos termos singulares onde os termos singulares poderiam ser tratados de forma analítica e os regulares, numericamente (Figura 3.9). Posteriormente, Cruse et al. (1993a) propõe um novo algoritmo de integração, obtendo uma grande precisão quando se analisam integrais singulares e quase-singulares, onde estas



integrais poderiam ser convertidas em uma soma de integral regular e outra singular, sendo que esta poderia ser integrada analiticamente com o uso de um sistema de coordenadas polares.

3.5 PÓLOS DE SINGULARIDADE PARA O CASO 2D E 3D

Como se tem notado até aqui, o procedimento básico de análise com o MEC está em resolver integrais e, para isso, é importante saber reconhecer ou distinguir que tipo de integral está sendo analisada, isto é, se a integral é singular ou quase-singular.

Um fator importante que contribui para o melhor discernimento do tipo de integral que se está analisando se encontra em caracterizar o comportamento do integrando, ou seja, é importante saber qual ponto faz o integrando tender a infinito. Este ponto é denominado de Pólo de Singularidade e a sua influência no integrando pode ser percebida através de uma análise geométrica quando se analisa a distância deste pólo ao intervalo de integração. Em uma percepção matemática, a forma de se caracterizar este efeito na integral unidimensional

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \quad (3.18)$$

está em analisar o integrando $f(\xi)$ da seguinte forma:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f(\xi) \rightarrow \infty, \quad a < \xi_0 < b \quad (3.19)$$

onde ξ é uma variável de um sistema de coordenada natural com uma variável. Ao ser constatado esse efeito em que o integrando tende ao infinito a primeira consequência seria que a função $f(\xi)$ não poderia ser expressa através de uma série de Taylor, já que essa função não é analítica para ξ_0 . Isto implicaria imediatamente na forma como essa integral poderia ser resolvida, pois, a função $f(\xi)$ sendo analítica poderia ser transformada em uma série de Taylor, isto é, em uma série de potências (polinômio) definida por:



$$f(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k (\xi - \xi_0)^k, \forall n \in I \therefore a_k = \frac{f^{(k)}(\xi_0)}{k!}, \quad (3.20)$$

o que facilitaria a forma de se resolver esta integral, pois estaríamos integrando um polinômio com uma variável cuja integração é fácil e direta.

Para o caso de uma análise tridimensional se tem a integral bidimensional

$$\int_a^b \int_c^d f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.21)$$

e a forma de se caracterizar o efeito de singularidade está em analisar o integrando $f(\xi, \eta)$ da seguinte forma:

$$\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (\xi_0, \eta_0)} f(\xi, \eta) \rightarrow \infty, \quad a < \xi_0 < b, c < \eta_0 < d \quad (3.22)$$

onde ξ e η são variáveis de um sistema de coordenadas natural com duas variáveis. Ao ser constatado esse efeito vale todas as conseqüências discutidas para o caso anterior, sendo que a série de Taylor para funções com duas variáveis é definida por:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i a_i (\xi - \xi_0)^{i-j} (\eta - \eta_0)^j, \forall n \in I \therefore a_i = \binom{i}{j} \frac{\partial^{(i)} f(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi^{(i-j)} \partial \eta^{(j)}}. \quad (3.23)$$

Nota-se que a resolução de uma integral onde o integrando é uma função com duas variáveis é também simples e direta.

Em (NORONHA, 1998) se encontra o estudo original sobre a identificação dos pólos de singularidade para o caso de análise bidimensional, onde as integrais são unidimensionais. Aqui será mostrado, além desse estudo (3.5.1), uma proposta de uma extensão para o caso de análise tridimensional (3.5.2), onde as integrais são bidimensionais.

3.5.1 Identificação dos pólos de singularidade para o caso 2D

Um esquema para a classificação das integrais e de seus pólos está desenvolvido em (NORONHA, 1998). Este considera que o intervalo de integração está normalizado e é



representado através da coordenada ξ que varia de 0 a 1 (Figura 3.8). Este esquema baseia-se na posição relativa entre o pólo e o elemento (intervalo de integração) sob consideração, sendo que três casos podem ocorrer.

O primeiro ocorre quando o pólo situa-se sobre o intervalo de integração em uma posição ξ_0 (ponto A da Figura 3.8), sendo o pólo classificado como pólo de singularidade, já que a integral resultante é singular (ou imprópria, dependendo da função de singularidade).

O segundo caso ocorre quando o pólo situa-se sobre a extensão natural do intervalo de integração em uma posição arbitrária (real) ξ_0 . Tem-se agora que o pólo é classificado como sendo de quase-singularidade real (ponto B da Figura 3.8) e, por fim, o terceiro caso ocorre quando o pólo situa-se fora da extensão natural do intervalo de integração e próximo a este, tem-se que o mesmo é denominado de pólo de quase-singularidade complexo (ponto C da Figura 3.8), sendo o mesmo expresso por $\xi_0 = a \pm bi$.

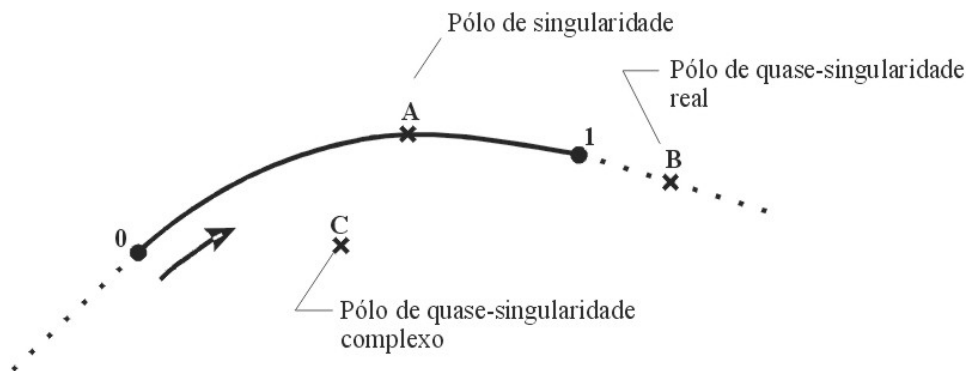


Figura 3.6: Classificação dos pólos de singularidade para o caso 2D.

Pesquisas feitas até aqui por Dumont (1994) e Noronha (1998) mostram que o efeito de quase-singularidade só tende a ser relevante quando a distância relativa entre o pólo e o elemento, medida no sistema de coordenadas ξ , é menor que a unidade (Figura 4.2).

3.5.2 Identificação dos pólos de singularidade para o caso 3D

Neste item será proposto uma extensão do esquema mostrado anteriormente, onde serão mantidas as principais características da forma de classificar os pólos de singularidades, sendo alterado unicamente a forma do elemento de integração que neste caso, especificamente, é bidimensional. Assim, se tratando de um elemento bidimensional existirão as coordenadas ξ e η sendo que cada uma varia de 0 a 1 (Figura 3.9).

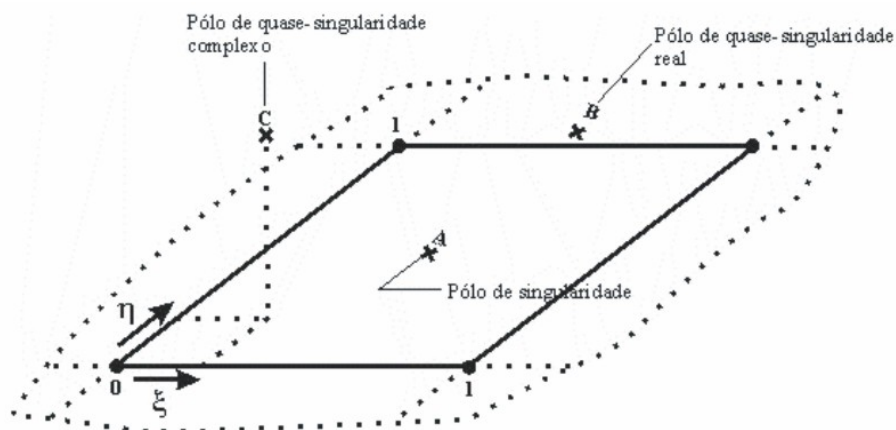


Figura 3.7: Classificação dos pólos de singularidade para o caso 3D.

O esquema de classificação para o caso 3D baseia-se, também, na posição relativa entre o pólo e o elemento (intervalo de integração) sob consideração, sendo que três casos podem ocorrer.

O primeiro caso ocorre quando o pólo situa-se sobre o intervalo de integração em uma posição (ξ_0, η_0) (ponto A da Figura 3.9), sendo que este pólo é classificado como pólo de singularidade, já que a integral resultante é singular (ou imprópria, dependendo da função de singularidade).

Já o segundo caso ocorre quando o pólo situa-se sobre a extensão das coordenadas naturais do intervalo de integração em uma posição arbitrária (real) (ξ_0, η_0) . Tem-se agora que o pólo é classificado como sendo de quase-singularidade real (ponto B da Figura 3.9). E por fim, no terceiro caso o pólo situa-se fora da extensão natural do intervalo de integração,



tem-se que o mesmo é denominado de pólo de quase-singularidade complexo (ponto C da Figura 3.9) e as coordenadas (ξ_0, η_0, ζ_0) podem ser encontradas da seguinte forma:

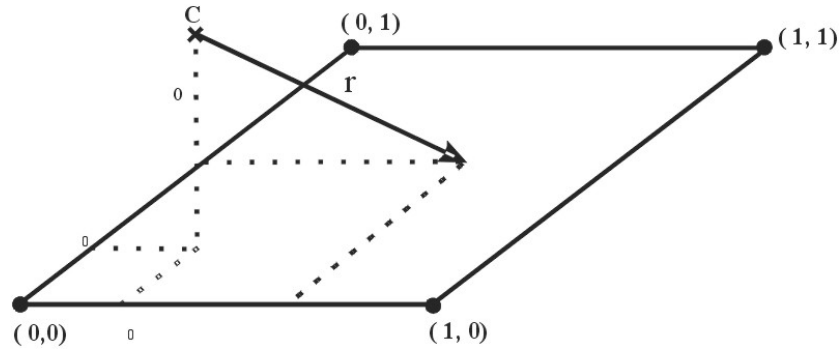


Figura 3.8: Determinação das coordenadas do pólo de quase-singularidade.

O raio r e o pólo de singularidade podem ser determinados através das equações

$$r(\xi, \eta) = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2} \quad e \quad (3.24)$$

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta_0^2 = 0, \quad (3.25)$$

onde podemos identificar que a equação (3.25) possui duas variáveis e que assim não é possível tratar de raízes como encontrado no caso 2D, pois, para este caso, o que se tem é um conjunto de pontos, ou seja, uma curva que será a solução do atual problema. Isto é bastante fácil de ver através de exemplos simples no corpo dos reais e dos complexos de funções semelhantes à (Equação 3.25), sendo que p primeiro exemplo se trata da função

$$\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0, \quad \zeta_0 = i, \quad (3.26)$$

onde a solução desta equação é uma circunferência no plano $r(\xi, \eta) = 0$, como se vê na figura 3.11.

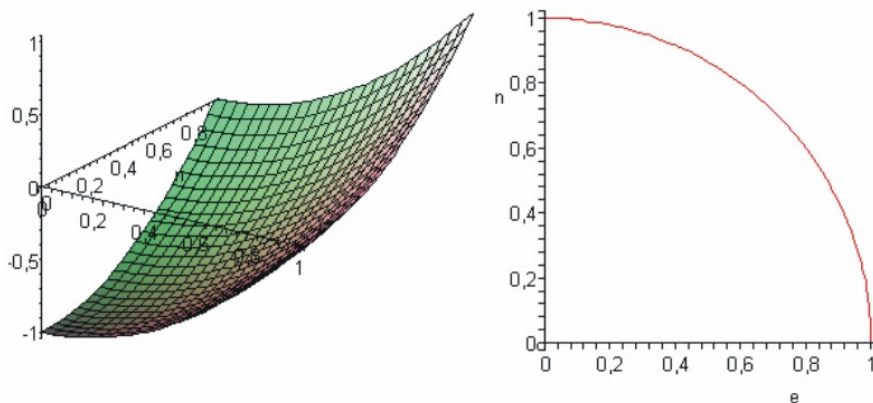


Figura 3.9: (a) ¼ da curva da $r(\xi, \eta)$; (b) ¼ da curva da $r(\xi, \eta) = 0$ (Equação 3.25).



A figura 3.9 demonstra que para o corpo dos reais a solução do problema é na verdade uma curva, ou seja, um conjunto de pontos.

No entanto, para a função

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0, \zeta_0 = 1. \quad (3.27)$$

É possível dizer, por uma extensão da equação 3.26, que a solução também é um conjunto de pontos, ou seja, uma curva, conforme se pode ver na figura 3.10

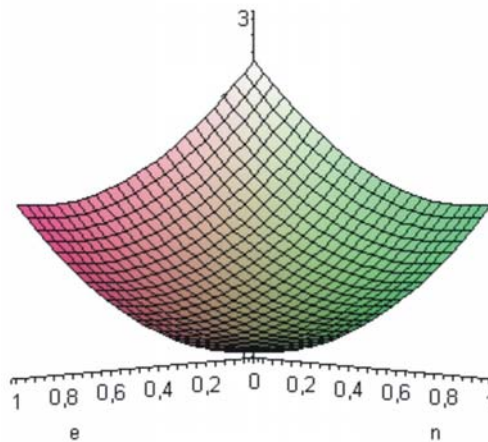


Figura 3.10: (a) $\frac{1}{4}$ da curva da $r(\xi, \eta)$ (Equação 3.24).

O que ficou claro, até o momento para o caso 3D, é que não é tão simples determinar o pólo como no caso 2D, tendo em vista não ser possível obter um pólo, mas um conjunto de pólos. Porém, isso será visto com mais detalhes posteriormente.

3.6 TRATAMENTO DO EFEITO DE QUASE-SINGULARIDADE COMPLEXA PARA O CASO 2D

Como foi visto anteriormente (Figura 3.6), a quase-singularidade se divide em duas: real e complexa. A quase-singularidade real aparece quando o pólo de singularidade está posicionado sobre a extensão do elemento de integração. Já a quase-singularidade complexa



Alguns anos após esta técnica ter sido utilizada para integrais singulares, Hayami et al. (1988) e Cruse et al. (1993) a utilizaram para avaliar integrais quase-singulares, mas eles a utilizaram apenas para o caso do ponto localizado no intervalo de integração, ou seja, o desenvolvimento da parte regular do integrando em série de Taylor é feito em um ponto, localizado no intervalo de integração, que fica o mais próximo possível do ponto de singularidade, ou seja, do pólo. Isto implica que este caso é correto apenas para o caso de pólo singular ou quase-singular real. Assim, ainda era necessário desenvolver uma sistemática para analisar uma integral que possuísse quase-singularidade complexa.

A técnica AST foi utilizada para o caso de quase-singularidade complexa primeiramente por Dumont (1997), considerando que a forma correta de realizar a regularização em um integral deveria ser através do desenvolvimento da parte regular do integrando em torno do pólo (par conjugado) de quase-singularidade complexo, que é o ponto onde o integrando é singular. Tal procedimento, que corresponde a uma divisão sintética de polinômios, é a maneira mais adequada para a avaliação de integrais possuindo singularidade algébrica.

Como exemplo simples, que serve para demonstrar muito bem a importância da utilização desta técnica de DSP com relação à AST, tem-se a integral

$$\int_0^1 \frac{\xi^3}{\xi^2 - \xi + 0.26} d\xi, \quad (3.28)$$

no qual a parte regular do integrando corresponde a $g(\xi) = \xi^3$ e a parte responsável pela singularidade corresponde a $w(\xi) = \xi^2 - \xi + 0.26$, a qual possui pólo de quase-singularidade complexa $\xi_0 = 0.5 \pm i0.1$.

Segundo a técnica AST, proposta por Hayami et al. (1988) e Cruse et al. (1993), basta encontrar, primeiramente, um ponto real do intervalo de integração mais próximo desse pólo de quase-singularidade, sendo que, para este exemplo, este ponto é $\xi'_0 = 0.5$. Posteriormente, expande-se em série de Taylor o polinômio $g(\xi)$ em torno de ξ'_0 , chegando à série



$$g(\xi'_{0}) = 0.125 + 0.75(\xi - 0.5) + 1.5(\xi - 0.5)^2 + (\xi - 0.5)^3 + (\dots). \quad (3.29)$$

Com esta aproximação polinomial, adquire-se os termos que serão subtraídos da parte regular do integrando, tal como mostra a equação 2.6, afim de regularizá-lo, chegando aos seguintes resultados:

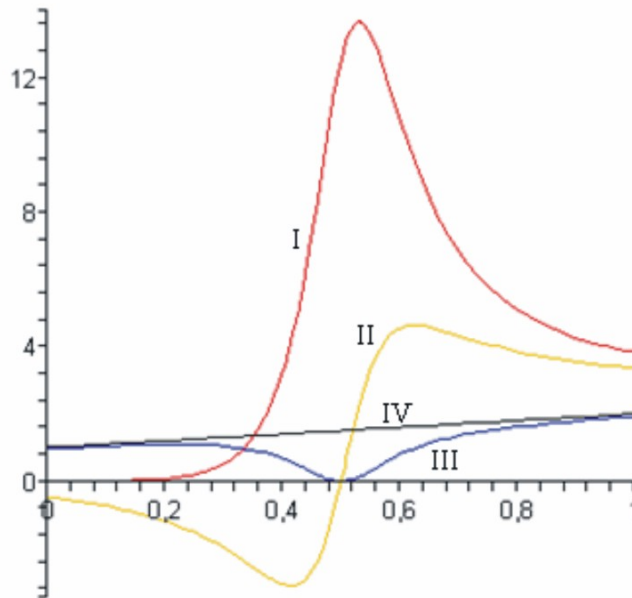


Figura 3.12: (I) Comportamento do integrando (Equação 3.28); (II) Regularização do integrando com o 1º termo da série (Equação 3.29); (III) Regularização do integrando com 1º e 2º termos da série; (IV) Regularização proposta em [DUM94].

Note que na medida em que se evoluem as curvas I – III e, aumentando mais o número de termos a serem subtraídos na parte regular, a curva poderia convergir para a curva IV.

O que fica claro, através da curva IV, é que o procedimento correto para a regularização seria através do desenvolvimento da parte regular do integrando em torno do pólo de quase-singularidade complexo.

O desenvolvimento através da série de Taylor não leva em consideração o par conjugado, pois ela avalia apenas um valor de cada vez e este valor tem que ser real. Assim, a melhor alternativa seria a utilização da técnica de DSP, tratando-se da maneira mais adequada e eficiente para avaliação de integrais que possuem singularidade algébrica com pólos de quase-singularidade complexo.



Esta técnica proposta por Dumont (1994) abrange também o caso de pólos de singularidade e de quase-singularidade real sendo uma forma mais geral de avaliação, mostrando, agora de forma definitiva, a eficiência desta técnica para o caso de análise bidimensional. A utilização desta técnica de DSP será vista com mais detalhes no próximo capítulo.