2. NOÇÕES MATEMÁTICAS

Este capítulo retoma algumas noções matemáticas necessárias para uma boa compreensão de alguns aspectos que serão mencionados e detalhados no presente trabalho. Alguns destes aspectos podem abstrair do senso técnico em engenharia envolvido em um trabalho que retome conceitos matemáticos não muito comuns como os que serão apresentados no decorrer desta obra. Para suprir alguma deficiência na explanação destas noções matemáticas é aconselhado o uso da bibliografia clássica citada no decorrer deste trabalho.

2.1 DIVISÃO SINTÉTICA DE POLINÔMIOS COM UMA VARIÁVEL

A importância em se tratar de divisão sintética de polinômios (DSP) com uma variável se encontra na sistemática adotada por Dumont (1994) e Noronha (1998) para avaliar numericamente integrais com singularidades do tipo algébrica

$$\int_{\xi} \frac{1}{w(\xi)^m} g(\xi) d\xi \tag{2.1}$$

que se encontra facilmente em integrais do MEC e para o caso em que a integral possui singularidade qualquer a DSP pode ser utilizada para melhorar a precisão numérica do resultado.

Com o intuito de uma melhor apresentação desta técnica, considera-se um polinômio $p(\xi)$ de grau l que será dividido por outro polinômio $w(\xi)$ de grau m. Através da técnica de DSP, pode-se perceber que o grau do polinômio quociente $q(\xi)$ será $l-m$ e que o polinômio resto $r(\xi)$ será de grau $m-1$. Assim, é possível equacionar esta técnica da forma

$$p(\xi)=q(\xi)w(\xi)+r(\xi). \tag{2.2}$$

Através da Equação 2.2 e com auxílio de algumas propriedades algébricas se chega a

$$q(\xi)=\frac{p(\xi)-r(\xi)}{w(\xi)} \tag{2.3}$$

e prosseguindo, chega-se a

$$\frac{p(\xi)}{w(\xi)}=q(\xi)+\frac{r(\xi)}{w(\xi)}. \tag{2.4}$$

De posse da Equação 2.4 e aplicando a integral nos dois membros, tem-se

$$\int_0^1 \frac{p(\xi)}{w(\xi)}d\xi=\int_0^1 q(\xi)d\xi+\int_0^1 \frac{r(\xi)}{w(\xi)}d\xi\ . \tag{2.5}$$

Ou, aplicando-se a equação 2.3, tem-se:

$$\int_0^1 \frac{p(\xi)}{w(\xi)}d\xi=\int_0^1 \frac{p(\xi)-r(\xi)}{w(\xi)}d\xi+\int_0^1 \frac{r(\xi)}{w(\xi)}d\xi\ . \tag{2.6}$$

Como a primeira integral do lado direto corresponde ao polinômio $q(\xi)$ nota-se que se trata de uma integral regular o que implica que esta integral pode ser avaliada por uma simples quadratura de Gauss-Legendre. A segunda integral, no entanto, pode ser avaliada analiticamente, sendo que as expressões necessárias para esta avaliação se encontram nas mais diversas tabelas de integração (GRADSHTEYN, 1965).

Como uma vantagem inicial da utilização da DSP se percebe que apenas o polinômio $r(\xi)$ é necessário para que seja possível transformar um integrando singular ou quase-singular em uma soma de uma integral regular, que poderá ser resolvida através da quadratura de Gauss-Legendre, com uma outra integral que poderá ser resolvida analiticamente através do uso de tabelas de integração clássicas.

Para encontrar os coeficientes do polinômio de $r(\xi)$, se utiliza a Equação 2.2 aplicada à raiz ξ_0 de $w(\xi)$ que será tratado ao longo do decorrer deste trabalho como pólo de singularidade ou quase-singularidade, como será visto com mais detalhes de conceitos a partir do próximo capítulo. Aplicado ξ_0 na equação 2.2, tem-se a relação

$$p(\xi_0) = r(\xi_0). \tag{2.7}$$

No entanto, existe a necessidade de observar que podem existir situações que ainda não foram tratadas especificamente no decorrer do desenvolvimento desta técnica neste trabalho. Uma delas está na possibilidade de que o polinômio $w(\xi)$ tenha singularidade algébrica como na Equação 2.1 e, além disso, este polinômio pode ter uma raiz real (ξ_0) ou uma raiz complexa ($\xi_0 = a \pm ib$) que é dado por um par conjugado. Além disso, ao invés de um polinômio $p(\xi)$, é possível que se tenha uma função qualquer $g(\xi)$. Neste caso, uma aproximação polinomial $p(\xi)$ de $g(\xi)$ é necessária, sendo que $r(\xi)$ será obtido pela aplicação da técnica DSP à divisão entre polinômios $p(\xi)$ e $w(\xi)$.

Quando o polinômio $w(\xi)$ possui raiz real e de multiplicidade m como

$$w(\xi) = (\xi - \xi_0)^m \tag{2.8}$$

é necessário, primeiramente, que se obtenha as derivadas de ordem inferior ou igual à $m-1$ de $p(\xi)$ para que seja possível encontrar todos os coeficientes de $r(\xi)$. Para este caso de raiz real, a técnica de DSP corresponde aos primeiros m termos da expansão em série de Taylor da parcela regular $g(\xi)$ em torno de ξ_0. Para mais detalhes sobre a técnica de DSP consultar apêndice A.

Quando o polinômio $w(\xi)$ possui raiz complexa ($\xi_0 = a \pm ib$) o polinômio $r(\xi)$ não corresponde à expansão da série de Taylor da parcela regular $g(\xi)$, pois existe a necessidade de avaliação simultânea da função $g(\xi)$ em torno do par conjugado o que é obtido apenas com a aplicação da técnica de DSP.

No item (3.6) será tomado o conhecimento da técnica conhecida como Adição e Subtração de Termos (AST). Esta técnica é utilizada como uma tentativa de regularização da integral do lado esquerdo da Equação 2.5 e, de forma simples, será possível perceber que as duas técnicas (DSP e AST) têm uma semelhança em comum na forma de tratar o integrando singular ou quase-singular, já que é possível se chegar à técnica de DSP com o mesmo procedimento de adição e subtração de termos.

Pode-se afirmar que o uso da técnica de DSP é mais ampla que a AST, pois envolve, além do caso quando a raiz é real, o caso quando a raiz é complexa e formada por um par conjugado, mostrando que esta técnica de DSP pode ser utilizada como uma forma mais precisa e geral de se avaliar numericamente integrais singulares. No item 3.6 será mostrado um exemplo em que mostra o impacto desta técnica de DSP com relação à regularização de uma integral.

2.2 DIVISÃO SINTÉTICA DE POLINÔMIOS COM DUAS VARIÁVEIS

Após um longo investimento em estudos na tentativa de descobrir na literatura algo relacionado com DSP para polinômios com mais de uma variável foi possível perceber que não existem trabalhos disponíveis que tratam de solucionar este caso. Isto gera um grande problema na extensão da técnica que foi proposta por Dumont e Noronha, tendo em vista que a resolução de integrais com singularidade algébrica foi baseada neste conceito de DSP, sendo que para o caso de análise bidimensional o problema a ser tratado é unidimensional.

Para o caso de uma análise tridimensional, onde as integrais são bidimensionais a solução através da DSP não poderia ser utilizada, tendo em vista a não existência, em literatura matemática, da extensão da mesma para polinômios com duas variáveis.

A importância em se tratar de divisão sintética de polinômios (DSP) com duas variáveis se encontra na sistemática adotada por Dumont (1994) e Noronha (1998) para avaliar numericamente integrais com singularidades do tipo algébrica. Da mesma forma que o item anterior, serão feitas considerações desta técnica aplicada para o caso de resolver integrais bidimensionais em MEC

$$\int_{\eta}\int_{\xi} \frac{1}{r(\xi,\eta)^2} g(\xi,\eta) d\xi d\eta \tag{2.9}$$

onde ξ e η correspondem às coordenadas retangulares natural, sendo que cada uma varia de 0 a 1. Este tipo de integral é facilmente encontrado em um conjunto de integrais do MEC para o caso de análise tridimensional.

Noronha (1998) propôs uma extensão desta técnica de DSP para polinômios com duas variáveis através da extensão do conhecimento da técnica existente para o caso de polinômios unidimensionais.

Esse mesmo pesquisador tratou de ilustrar o que seria uma extensão do conceito de DSP aplicado a integrais bidimensionais (Equação 2.9), considerando que r seria dado pela distância entre um ponto (pólo) na superfície de um elemento de integração e um ponto qualquer deste elemento, sendo que r é dado neste caso por:

$$r^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 . \tag{2.10}$$

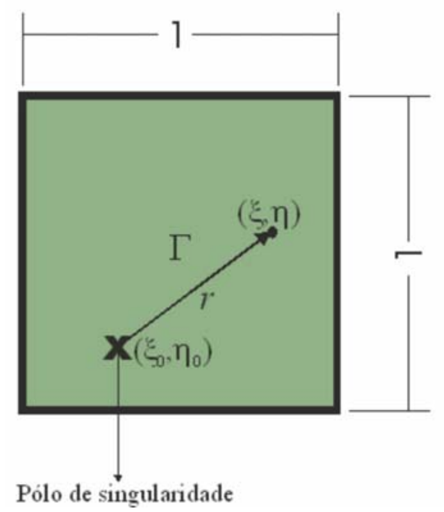

Figura 2.1 – Elemento de integração bidimensional com o MEC

Ao substituir a equação 2.10 na equação 2.9 e considerando que a primeira integral será feita na direção de ξ, tem-se que a integral da equação 2.10 poderá ser escrita como:

$$\int_{\eta}\int_{\xi} \frac{g(\xi,\eta)-R_1(\eta)\xi-R_2(\eta)}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}\,d\xi d\eta+\int_{\eta}\int_{\xi} \frac{R_1(\eta)\xi}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}\,d\xi d\eta+$$
$$\int_{\eta}\int_{\xi} \frac{R_2(\eta)}{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}\,d\xi d\eta. \qquad (2.11)$$

Tal como consta na equação 5.3, quando se considera que a integração será efetuada na direção de ξ, tem-se a expressão

$$\xi_P=\xi_0\pm i(\eta-\eta_0), \qquad (2.12)$$

onde ξ_P é a coordenada do pólo na direção ξ. Logo ξ_P, além de variável, é complexo. Assim, aplicando esta equação complexa na parte regular do integrando se tem a expressão

$$g(\xi_P,\eta)=g(\xi_0\pm i(\eta-\eta_0),\eta)\equiv g(\eta), \qquad (2.13)$$

e podemos admitir que

$$g(\eta)=a_0(\eta)+ib_0(\eta), \qquad (2.14)$$

onde $a_0(\eta)$ e $b_0(\eta)$ representam a parte real e imaginária de $g(\eta)$, respectivamente. Logo, por analogia às equações A.1, A.7 e A.8, tem-se as expressões

$$R_1(\eta)=\frac{b_0(\eta)}{\eta-\eta_0} \text{ e } R_2(\eta)=a_0(\eta)-R_1(\eta)\xi_0\,. \qquad (2.15)$$

onde , $R_1(\eta)$ e $R_2(\eta)$ correspondem aos coeficientes do polinômio resto ($R(\xi_P,\eta)$). Um procedimento similar a este poderia ter sido efetuado na direção η.

No entanto, o que se deseja com a aplicação da técnica de divisão sintética para a integral da equação 2.9 é que haja um termo regular no qual é possível ser utilizado a quadratura de Gauss-Legendre, sendo que isso é possível para a primeira integral da equação 2.11, mas também é desejado que os termos restantes possam ser avaliados analiticamente e o que se percebe, para este caso de singularidade algébrica adotada, é que as integrais restantes são tão difíceis de avaliar quanto a integral da equação 2.9 e, considerando um caso geral em que a parcela regular não fosse polinomial, mas uma função qualquer, a avaliação analítica seria impossível (NORONHA, 1998).

Isso tudo permite concluir que uma avaliação similar à desenvolvida para as integrais unidimensionais, fazendo uso de um sistema de coordenadas retangulares, voltada para avaliar integrais bidimensionais com funções de singularidade algébrica que compõe o integrando não pode ser considerada. Isto se deve ao fato da própria natureza do pólo ser variável (Equação 2.12), fazendo com que a técnica de DSP com duas variáveis não obtenha a mesma eficiência, tal como em polinômios de uma variável.

Logo, uma alternativa para solucionar este caso se faz necessária e será apresentada no capítulo 5.

2.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste item serão apresentadas duas técnicas comumente utilizadas para calcular numericamente integrais nos mais diversos métodos numéricos existentes em engenharia, dentre eles o MEC.

Serão feitas apresentações individuais de cada técnica para avaliações de integrais unidimensionais, embora a extensão destas técnicas para avaliar integrais bidimensionais é algo bastante simples e análogo ao caso de avaliação de integrais unidimensionais, sendo que estas servem como uma base sólida de solução para integrais bidimensionais (solução por duas integrais unidimensionais) e tridimensionais (solução por 3 integrais unidimensionais).

O procedimento de avaliação das integrais unidimensionais e bidimensionais, numericamente, é basicamente o mesmo, tal como se pode ver abaixo:

$$\begin{aligned} &\int_{\xi} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i} C_i\, f(\xi_i), \\ &\int_{\eta}\int_{\xi} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \approx \sum_{j}\sum_{i} C_{ij}\, f(\xi_i,\eta_j),. \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde C_i e C_{ij} são os fatores de peso e as funções $f(\xi_i)$ e $f(\xi_i,\eta_j)$ são funções a serem avaliadas nos pontos específicos ξ_i e η_j.

Nos itens a seguir será apresentada cada técnica separadamente, sendo que em um terceiro item será mostrado um procedimento para avaliação de integrais bidimensionais.

2.3.1 Integração de Newton-Cotes unidimensional

A grande característica desta técnica de integração é avaliar uma integral em pontos igualmente espaçados em seu domínio de integração. Assim, para n pontos se pode integrar exatamente um polinômio de grau $n-1$ e a função pode ser integrada da seguinte forma:

$$I = \int_a^b f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b \lambda_i(\xi)d\xi\right] f(\xi_i), \tag{2.17}$$

onde $\lambda_i \equiv \lambda_i(\xi)$ é dado pela expressão

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}. \tag{2.18}$$

Esta expressão é conhecida como polinômio de Lagrange que fornece valor unitário para a abscissa ξ_i e valor nulo para as outras $n-1$ abscissas.

Ao avaliar a expressão 2.17, chega-se à expressão

$$I = \int_a^b f(\xi)d\xi \cong (b-a)\sum_{i=0}^{n} N_i^n f(\xi_i), \tag{2.19}$$

sendo que N_i^n são as constantes de Newton-Cotes dadas na tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Constantes de Newton-Cotes.

Número de intervalos (n)	N_0^n	N_1^n	N_2^n	N_3^n	N_4^n	N_5^n
1	$1/2$	$1/2$				
2	$1/6$	$4/6$	$1/6$			
3	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$		
4	$7/90$	$32/90$	$12/90$	$32/90$	$7/90$	
5	$19/288$	$75/288$	$50/288$	$50/288$	$75/288$	$19/288$

2.3.2 Integração de Gauss-Legendre unidimensional

Esta técnica é a mais utilizada para se resolver numericamente uma integral. Dois motivos comprovam a afirmação anterior, são eles: primeiro, os pontos são posicionados de tal forma que a melhor precisão seja obtida; segundo, quando se tem n pontos, obtém-se $2n$ incógnitas (ξ_i, $f(\xi_i)$) o que implica que n pontos favorecem a integração exata de um polinômio de grau $2n-1$.

O procedimento para se avaliar uma integral numericamente é semelhante ao da técnica anterior. Porém, tanto as abscissas quanto o valor da função aplicada em cada abscissa são desconhecidos, como foi tratado acima.

$$I = \int_a^b f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=0}^{n} G_i^n f(\xi_i), \qquad (2.20)$$

Tabela 2.2 – Abscissas e pesos de Gauss-Legendre.

Número de Pontos (n)	ξ_i *	G_i^n *
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	± 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	± 0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55555
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
4	± 0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	± 0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
5	± 0.90617 98459 68664	0.23692 68850 56189
	0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
6	± 0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
	± 0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	± 0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691

*Estes valores foram gerados para um intervalo (-1,1)

Note que os valores acima foram gerados para um intervalo que vai de -1 a 1. Estes intervalos são os mais costumeiramente utilizados na literatura sobre métodos numéricos em geral (Método dos elementos finitos, Métodos dos elementos de contorno, etc.).

Ao longo deste trabalho serão utilizados intervalos variando de 0 a 1. Logo, será necessário fazer uma mudança nos valores que constam na tabela 2.2, sendo que para encontrar a nova abscissa $\xi_i^{'}$ é necessário fazer a seguinte transformação:

$$\xi_i^{'} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i \,. \tag{2.21}$$

Para encontrar os novos pesos, para tal intervalo, utilizar-se-á a seguinte expressão:

$$G_i^n{'} = \frac{a+b}{2} G_i^n \,. \tag{2.22}$$

2.3.3 Integração numérica bidimensional

O processo utilizado para avaliar integrais unidimensionais pode ser facilmente estendido para avaliar funções de duas ou mais variáveis, tal como mostra a segunda expressão de 2.16.

Neste item serão dadas apenas noções de como avaliar integrais bidimensionais, cujas resoluções em MEC, fazem parte do objetivo deste trabalho. Será dada ênfase à extensão da técnica de integração do tipo Gauss-Legendre, avaliando integrais do tipo

$$I = \int_c^d \int_a^b f(\xi, \eta) d\xi d\eta \,. \tag{2.23}$$

É importante deixar claro que o modo de se avaliar uma integral numericamente através da técnica de Gauss-Legendre é muito semelhante à técnica de Newton-Cotes, tal como foi visto nos itens 2.3.1 e 2.3.2, ou seja, o procedimento é similar e não será tratado aqui.

Ao continuar com a extensão da avaliação da técnica de Gauss-Legendre para integrais bidimensionais a primeira noção que se precisa ter é saber que uma integral bidimensional é resolvida, primeiramente, a integral interna para que posteriormente, a integral externa seja calcula. Por exemplo, considera-se a resolução da integral interna na direção ξ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I &= \int_c^d I_1 d\eta \therefore \\ I_1 &= \int_a^b f(\xi, \eta) d\xi \cong \sum_{i=0}^{m} G_i^m f(\xi_i, \eta) \equiv g(\eta). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Note que foi utilizado a expressão 2.20 para avaliar a segunda integral (I_1: Equação 2.24) e de posse de $g(\eta)$ é possível avaliar a última integral, pois

$$I \cong \int_c^d g(\eta) d\eta \cong \sum_{j=0}^{n} G_j^n g(\eta_j). \tag{2.25}$$

É interessante notar que as abscissas, bem como os pesos, a serem utilizados nestes procedimentos de se avaliar a integral bidimensional (Equação 2.23) são os mesmos que constam na tabela 2.2. Isto implica em dizer que o procedimento de se resolver uma integral bidimensional com a técnica de Gauss-Legendre é, na realidade, resolver duas integrais unidimensionais, sendo que as abscissas e os pesos são os mesmos da tabela 2.2 para ambas as direções, para o intervalo de -1 a 1. Intervalos diferentes implicam em abscissas e pesos diferentes (Equações 2.21 e 2.22).

Através das expressões 2.24 e 2.25, chega-se à expressão final que efetiva a avaliação da integral bidimensional (Equação 2.23), tal como se pode ver abaixo:

$$I = \int_c^d \int_a^b f(\xi,\eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} G_i^m G_j^n f(\xi_i, \eta_j). \qquad (2.25)$$

2.4 ESTUDO SOBRE QUÁDRICAS

Neste item serão vistos alguns tópicos avançados de Álgebra Linear. No primeiro subitem serão vistos alguns conceitos preliminares que ajudarão a compreender a idéia principal do estudo sobre a teoria de quádricas, sendo que esta teoria foi utilizada para desenvolver um procedimento alternativo neste trabalho que é a técnica de integração numérica com pesos específicos. No capítulo 5 será visto com mais detalhes a necessidade de se utilizar um procedimento matemático alternativo e elegante como o que foi utilizado.

2.4.1 Formas Bilineares

Para uma função $w: V \times V \to \mathbb{K}$ ser classificada como sendo uma forma bilinear w terá que satisfazer as seguintes condições:

i. $w(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda w(u_1, v) + w(u_2, v), \forall \lambda \in K, \forall u_1, u_2, v \in V$ (2.26)

ii. $w(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda w(u, v_1) + w(u, v_2), \forall \lambda \in K, \forall u, v_1, v_2 \in V$.

Seja $w : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear e $\alpha = \{v_1 ... v_n\}$ uma base de V . Sejam X e Y dois vetores de V , tais como:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Assim,

$$w(\xi, \eta) = X^t [w] Y, \tag{2.28}$$

onde $[w]$ é a matriz associada à forma bilinear w dada por:

$$[w] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \therefore a_{ij} = w(v_i, v_j). \tag{2.29}$$

2.4.2 Formas Simétricas

Sabe-se, por meio de conceitos básicos de Álgebra Linear, que a cada base B de V como, por exemplo, a base canônica, está associada uma matriz $[w]_B$. Mais a frente será explicado com mais detalhes o motivo de explicitar este tópico sobre formas simétricas, mas é interessante apenas dizer no momento que é importante, para a formulação proposta neste trabalho, que se possa conseguir uma base tal que $[w]_B$ seja diagonal.

Neste trabalho não serão feitas provas de teoremas, apenas suas citações quando necessário. Sabe-se, quando a função $w(\xi, \eta)$ é bilinear, que é possível encontrar uma base de tal forma que $[w]_B$ seja uma matriz diagonal. Esta base existe para uma classe de funções bem especial de formas bilineares que são as formas simétricas.

Diz-se que $w(\xi,\eta)$ é simétrica quando:

i. $w(u,v) = w(v,u), \forall u,v \in V$. (2.30)

2.4.3 Formas Quadráticas

Da função $w : V \times V \to \mathbb{K}$, função bilinear e simétrica, defini-se a função $f : V \to \mathbb{K}$ sendo agora definida por $f(v) = g(u,v)$ e chamada de forma quadrática. Algumas características especiais podem ser notadas diretamente em uma função com forma quadrática, são elas:

i. $f(u+v) = f(u) + 2w(u,v) + f(v), \forall u,v \in V$

ii. $f(\lambda v) = \lambda^2 f(v), \lambda \in \mathbb{K}, \forall u,v \in V$. (2.31)

2.4.4 Quádricas

Uma função $w(\xi,\eta)$ (Equação 5.24) responsável por representar a singularidade da função $r(\xi,\eta)$ é dada por:

$$W \equiv w^2(\xi,\eta) = a_5\xi^2 + a_4\eta^2 + a_3\xi\eta + a_2\xi + a_1\eta + a_0 . \qquad (2.32)$$

Através de mudança de coordenadas e/ou translações é possível reduzir a expressão 2.32 a uma forma mais simples. Nesta nova forma, pode-se reconhecer o tipo de quádrica que é dado pela função W. Aqui será mostrado os passos necessários para se fazer esta simplificação.

Vale a pena mencionar que se trabalhará com funções no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, tendo em vista que o elemento de contorno alvo de estudo é o bidimensional, e, também, será utilizado o sistema ortogonal de coordenadas inicial o que significa que este sistema é formado por uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, indicada pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e o ponto de origem será fixado no 0. Isso é importante devido à possíveis translações necessárias ao longo do processo descrito logo a seguir.

Uma quádrica em $\mathbb{R}^2$ é uma superfície formada pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas em relação ao sistema verificam uma equação do seguinte tipo:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + 2p\xi\eta + E\xi + F\eta + d = 0, \tag{2.33}$$

onde $a, b, d, p, E, F \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0.$

Considere, da expressão 2.33, apenas os termos do 2º grau, sendo agora considerado uma nova função a ser analisada $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por:

$$Q(\xi,\eta) = a\xi^2 + b\eta^2 + 2p\xi\eta. \tag{2.34}$$

Agora, observe que $Q(\xi,\eta)$ é uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ associada à forma bilinear simétrica f cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[f]_{can} = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

ou seja,

$$Q(\xi,\eta) = f\left((\xi,\eta),(\xi,\eta)\right) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

A partir de agora, faz-se necessário fazer uso de um importante teorema que existe na teoria de álgebra linear, como se pode ver abaixo:

TEOREMA I: *Seja* V *um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$. *Se* $f \in \mathrm{B}_s(V,K)$ *então existe uma base* B *de* V *tal que* $[f]_{\mathrm{B}}$ *é uma matriz diagonal.*

Através deste teorema se pode admitir uma base ortonormal $\mathrm{B} = \{v_1, v_2\}$ tal que $[f]_{\mathrm{B}}$ é uma matriz diagonal. Assim, para cada $v \in V$, $v = \xi' v_1 + \eta' v_2$ e, assim, obtém-se:

$$Q(\xi', \eta') = \begin{pmatrix} \xi' & \eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

ou seja, $Q(\xi', \eta') = \lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2$. Logo, percebe-se que ao aplicar a mudança de base conveniente, elimina-se o termo cruzado de segundo grau das equações 2.32 e 2.33.

Ao aplicar mudança de coordenadas na equação 2.33 da quádrica, sendo que a matriz mudança de base ($[M]$) é dado com relação a cada autovalor encontrado, gerando os autovetores necessários para compor $[M]$, obtém-se a seguinte equação:

$$\lambda_1 \xi'^2 + \lambda_2 \eta'^2 + E' \xi' + F' \eta' + d = 0 \tag{2.38}$$

A fim de tentar reconhecer aquela quádrica é possível fazer uma translação do seguinte tipo:

$$\begin{cases} x'' = x' - \alpha \\ y'' = y' - \beta \\ z'' = z' - \gamma \end{cases}. \tag{2.39}$$

Assim, obtém-se uma nova mudança de coordenadas que corresponde, na verdade, a uma translação. Conseqüentemente, tem-se a equação reduzida da quádrica no sistema $\{0'', v_1, v_2\}$ o que facilita a forma de se identificar a quádrica correspondente, mas este passo de reconhecimento não é necessário para o desenvolvimento da técnica aqui proposta.