APÊNDICE A – DIVISÃO SINTÉTICA DE POLINÔMIOS APLICADA AO PÓLO COMPLEXO

Neste momento será visto como encontrar o polinômio resto ($gser(\xi)$) que será subtraído da parte regular ($g(\xi)$) do integrando singular através da técnica de DSP para o caso de pólo complexo. Será seguida a metodologia adotada em Noronha (1998), mas com uma resolução um mais pouco acessível com a finalidade de um melhor entendimento aos leitores.

Para o caso de singularidade algébrica (Equação 2.1) e através deste conceito de DSP, tem-se que a subtração de $gser(\xi)$ na função $g(\xi)$ fornece a relação

$$g - gser = \rho^m q_m , \tag{A.1}$$

e que para determinar a função $gser(\xi)$ deverá ser considerada a divisão sintética dos polinômios $g(\xi)$, aproximação polinomial da parte regular, por $\rho(\xi)$, fornecendo o quociente $q_1(\xi)$ e um polinômio resto $R_1\xi + R_2$ que é de primeiro grau devido a função $\rho(\xi)$ ser do segundo grau, como se pode ver abaixo:

$$w(\xi) = \rho(\xi) = \xi^2 - 2a\xi + a^2 + b^2 . \tag{A.2}$$

Através de A.1 e A.2 é possível escrever a relação

$$q_1\rho = g - R_1\xi - R_2 , \tag{A.3}$$

mas a função ρ^m possui singularidade algébrica de ordem m, sendo necessárias m divisões para chegar na relação final

$$q_m\rho^m = g - \sum_{k=1}^{m} \rho^{k-1}\left(R_{2k-1}\xi + R_{2k}\right). \tag{A.4}$$

Assim, ao comparar as relações A.1 e A.4 se percebe que a parcela $gser(\xi)$ é definida como:

$$gser(\xi)=\sum_{k=1}^{m}\rho^{k-1}\left(R_{2k-1}\xi+R_{2k}\right) \tag{A.5}$$

e para encontrar os coeficientes (R_i) da função $gser(\xi)$ basta modificar (A.4), chegando à relação

$$q_m\rho=\frac{g-\sum_{k=1}^{m}\rho^{k-1}\left(R_{2k-1}\xi+R_{2k}\right)}{\rho^{m-1}}. \tag{A.6}$$

Ao avaliar a expressão (A.6) no pólo complexo ($\xi_0=a\pm ib$) se compara as partes reais e imaginárias de todos os termos, obtendo os coeficientes do polinômio $gser(\xi)$ através das relações

$$R_{2m-1}=\frac{b_{m-1}}{b}\ e \tag{A.7}$$

$$R_{2m}=a_{m-1}-aR_{2m-1}, \tag{A.8}$$

onde a_{m-1} e b_{m-1} são, respectivamente, as partes reais e imaginárias da função (A.6) avaliada em ξ_0.

Para encontrar todos os termos é necessário variar m de 1 até a ordem da singularidade algébrica, mas quando $m\geq 2$ a avaliação de (A.6) requer o uso da regra de L´Hospital, que será aplicada $m-1$ vezes, pois o numerador e o denominador se anulam quando são avaliados em ξ_0.

Como foi tratado no capítulo 3, o uso da técnica de DSP é eficiente e tem uma ótima precisão para os casos de pólos de singularidade real e quase-singularidades real e complexa e demonstra ser uma excelente técnica para regularização de integrais com o MEC em análise bidimensional, onde o intervalo de integração é unidimensional Neste mesmo capítulo, foram feitos alguns traçados de curvas do integrando da

$$\int_0^1\frac{\xi^3}{\xi^2-\xi+0.26}d\xi\ , \tag{A.9}$$

onde foram feitos alguns desenvolvimentos em série de Taylor e com DSP de forma bastante implícita não dando muito espaço a uma real compreensão de como estas técnicas de AST e DSP trabalham.

Como foi visto no capítulo 3, a técnica de AST procura expandir, através da série de Taylor, a função, aproximada polinomialmente, $g(\xi)$ em torno de um ponto no intervalo de integração que fica o mais próximo possível do pólo de quase-singularidade complexo. Para o pólo complexo $\xi_0 = 0.5 \pm i0.1$, a técnica AST utiliza como ponto do intervalo o valor $\xi'_0 = 0.5$ e, em torno deste ponto, se expande a função $g(\xi)$ em série de Taylor, chegando à expressão

$$g(\xi'_0) = 0.125 + 0.75(\xi - 0.5) + 1.5(\xi - 0.5)^2 + (\xi - 0.5)^3 + (...). \tag{A.10}$$

Como se pode ver, a expansão em série de Taylor não permite que a função $g(\xi)$ seja expandida em torno do pólo de quase-singularidade complexo (par conjugado).

Para o traçado da curva II foi utilizado apenas o primeiro termo (0.125) da equação A.10 como termo de subtração da parte regular ($g(\xi)$) do integrando da equação A.9. Já para o caso da curva III foram utilizados os dois primeiros termos $(0.125 + 0.75(\xi - 0.5))$. Para a curva IV utilizou-se apenas o primeiro termo de $gser(\xi)$, mas para chegar a este termo houve a necessidade de se avaliar a parte regular ($g(\xi) = \xi^3$) em torno do pólo complexo, resultando no número

$$g(0.5 + i0.1) = 0.110 \pm i0.074\,. \tag{A.11}$$

para, posteriormente, encontrar os coeficientes ($R_{2m-1} = \dfrac{b_{m-1}}{b}$ e $R_{2m} = a_{m-1} - aR_{2m-1}$), quando $m = 1$. Para isto, definiu-se

$$b_0 = \mathrm{Im}(0.110 \pm i0.074)\, e \tag{A.12}$$

$$a_0 = \mathrm{Re}(0.110 \pm i0.074) \tag{A.13}$$

e

$$b = \mathrm{Im}(0.5 \pm i0.1)\, e \tag{A.14}$$

$$a = \mathrm{Re}\left(0.5 \pm i0.1\right). \tag{A.15}$$

Com isso, o polinômio resto $gser(\xi)$ pode ser expresso como um polinômio da forma

$$gser(\xi) = 0.74\xi - 0.26 \tag{A.16}$$

e posteriormente é utilizado como termo a ser subtraído da parte regular, resultando no integrando

$$\frac{\xi^3 - (0.74\xi - 0.26)}{\xi^2 - \xi + 0.26}, \tag{A.17}$$

onde está função fornecerá a curva IV, agora realmente regularizada.

APÊNDICE B – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA BUSCA DE PÓLOS DE SINGULARIDADE E QUASE-SINGULARIDADE PARA ANÁLISE BIDIMENSIONAL COM O MEC

Como visto anteriormente, o pólo de singularidade é aquele ponto que faz com que a função r se anule

$$r(\xi_0)^2 = (x(\xi_0) - x_0)^2 + (y(\xi_0) - y_0)^2 = 0, \tag{B.1}$$

ou seja, bastaria aplicar o MNR, como feito em Dumont (1994), na equação acima para encontrar o valor de ξ_0.

No entanto, Noronha (1998), através de propriedades de números complexos, manipulou a equação acima, transformando-a em um produto de funções mais simples, tal como:

$$[(x(\xi_0) - x_0) + i(y(\xi_0) - y_0)][(x(\xi_0) - x_0) - i(y(\xi_0) - y_0)] = 0. \tag{B.2}$$

Assim,

$$r(\xi)^2 = q(\xi)\overline{q}(\xi), \tag{B.3}$$

sendo que agora existe a possibilidade de não mais aplicar o MNR na equação (B.2), que tinha termos ao quadrado, agora existe a possibilidade de se trabalhar com apenas uma das funções complexas conjugadas ($q(\xi)$ ou $\overline{q}(\xi)$) para a obtenção de ξ_0. Logo, para obter ξ_0 bastaria trabalhar com a equação

$$q(\xi_0) = (x(\xi_0) - x_0) + i(y(\xi_0) - y_0) = 0 \tag{B.4}$$

e aplicar o MNR com a seguinte iteração para encontrar ξ_0

$$\xi_{0,k+1} = \xi_{0,k} + \frac{x(\xi_{0,k}) - x_0 + i[y(\xi_{0,k}) - y_0]}{\left.\frac{dx}{d\xi}\right|_{\xi_{0,k}} + i\left.\frac{dy}{d\xi}\right|_{\xi_{0,k}}} \tag{B.5a}$$

$$\xi_{0,k+1} - \xi_{0,k} \leq \varepsilon \tag{B.5b}$$

onde a Equação 4.5b corresponde ao critério de parada e ε é o erro admissível.

Assim, é possível encontrar ξ_0 através de uma forma especial em que não se trabalhe com elementos ao quadrado, fazendo com que exista menos iterações até a convergência chegando ao resultado correto do pólo de singularidade ou quase-singularidade da Equação B.2.

APÊNDICE C – GENERALIZAÇÃO DAS FORMULAS ANALÍTICAS PARA O CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE ELEMENTOS NÃO-DISTORCIDOS

Neste apêndice é apresentada uma generalização das fórmulas analíticas para integrais bidimensionais propostas em Noronha (1998).

Noronha (1998) apresentou um conjunto de quatro formulações analíticas necessárias para obtenção dos pesos nas funções de singularidade do tipo: $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ e $\frac{1}{r^7}$, onde r é dada pela Eq. (3.24) representando a distância do pólo ao elemento de integração em um sistema de coordenadas retangulares (ξ,η).

No item 5.5 consta o procedimento de como se determinar os pesos específicos (h_{ij}, Eq. (5.29)), sendo necessários fazer avaliações analíticas de integrais, tal como a apresentada na Eq. (5.30) e expressa logo abaixo.

$$\hat{I}_{pq} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\xi^p \eta^q}{r^m} d\xi d\eta \tag{C.1}$$

No caso de análise tridimensional, em problemas de elasticidade utilizando MEC, esse expoente m pode assumir os valores 1, 3, 5 e 7. Estes graus de singularidades podem ser vistos na Tab. (5.2).

A generalização aqui apresentada se propõe a desenvolver uma formulação para uma integral genérica onde a função r terá expoente geral m. Além disso, as expressões serão desenvolvidas para uma integral indefinida com a finalidade de tornar esta formulação mais genérica possível. Logo, a formulação analítica genérica será desenvolvida para a integral dupla e indefinida

$$I_{pq} \equiv I_{pq}(\xi,\eta) = \int\int \frac{\xi^p \eta^q}{r^m} d\xi d\eta \,. \tag{C.2}$$

Ao considerar um elemento delimitado pelo intervalo $(0,1)\times(0,1)$ a integral da Eq. (C.2) pode ser avaliada da seguinte forma:

$$\hat{I}_{pq}=\int_0^1\int_0^1\frac{\xi^p\eta^q}{r^m}d\xi d\eta=\left[I_{pq}(1,1)-I_{pq}(1,0)\right]-\left[I_{pq}(0,1)-I_{pq}(0,0)\right]. \tag{C.3}$$

Como é proposto a generalização do conjunto de formulações apresentado em [NOR98] e, além disso, se pretende desenvolver uma formulação analítica para avaliar integrais do tipo ao dado pela Eq. (5.29), tem-se que o modelo de integral a ser avaliado de forma analítica é:

$$J_{pq}=\int\int\frac{(\xi-\xi_0)^p(\eta-\eta_0)^q}{r^m}d\xi d\eta. \tag{C.4}$$

De posse desta última equação e expandindo em série a integral C.2, tem-se:

$$I_{pq}=J_{pq}-\sum_{m=0}^{p}\frac{p!}{(p-m)!m!}(-\xi_0)^{p-m}\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{(q-n)!n!}(-q_0)^{q-m}I_{mn}. \tag{C.5}$$

Obviamente, não se pode considerar o caso em que $m=p$ e $n=q$, tendo em vista o surgimento de indeterminação numérica. Este caso tem que ser tratado de forma particular.

A partir de agora serão apresentados os termos generalizados propostos neste trabalho. Os termos que possuem a letra “G” são os que foram generalizados, mas à medida que forem sendo apresentados serão feitas referências aos termos anteriormente desenvolvidos. Para a determinação de todos os termos a seguir consideração o procedimento de recursão.

C.1 TERMOS AUXILIARES MANTIDOS

Foram mantidos dois termos auxiliares. O primeiro se refere ao termo $ipar$ que aparece nas formulações apresentadas posteriormente. O caso deste termo é especial devido ao fato de ser necessário considerar duas hipóteses. O fato do i sem par ou ímpar. Assim, o seguinte condicional deve ser levado em consideração:

$$i = \begin{cases} par, ipar = 1 \\ ímpar, ipar = 0 \end{cases}. \tag{C.6}$$

O segundo termo s_k^j se refere à combinação fatorial de dois índices, tal como:

$$s_k^j = \binom{j}{k} = \frac{j!}{(j-k)!k!}. \tag{C.7}$$

C.2 TERMOS AUXILIARES GENERALIZADOS

C.2.1 Ga_j^i

Esse termo generalizado substitui os termos $a_j^i, b_j^i, c_j^i\ e\ d_j^i$ em Noronha (1998) que se referem às funções de singularidades $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ e $\frac{1}{r^7}$. Assim, o termo Ga_j^i é utilizado no lugar daqueles quatros termos, anteriormente desenvolvidos, para avaliar a função de singularidade $\frac{1}{r^m}$, ao invés daqueles quatro tipos de funções de singularidades.

$$\begin{gathered} Ga_j^i = -\left(1 + \frac{m}{i - 2j - (m-1)}\right) Ga_{j-1}^i \therefore m = 1,3,5\ e\ 7 \\ P/i = \begin{cases} ímpar, j = 1,2 \ldots \frac{i-1}{2} \\ par, j = 1,2 \ldots \frac{i}{2} - 1 \end{cases} \end{gathered}. \tag{C.8}$$

Nota-se que devido à forma recursiva alguns termos particulares devem ser encontrados devido a indeterminações quando são aplicados certos valores para i e j na Eq. (C.8). Estes termos são expressos logo abaixo:

$$p/j = 0 \rightarrow Ga_0^i = \left(\frac{1}{i-(m-1)}\right) \therefore m = 1,3,5\ e\ 7. \tag{C.9}$$

$$p\,/\,j=0\;e\;i=2\rightarrow Ga_0^2=\left(\frac{1}{2-m}\right)\therefore m>1\,. \tag{C.10}$$

$$p\,/\,j=0\;e\;i=4\rightarrow Ga_0^4=\left(\frac{m-9}{m-2}\right)\therefore m>3\,. \tag{C.11}$$

$$p\,/\,j=0\;e\;i=6\rightarrow Ga_0^6=-\frac{23}{12}\therefore m>5\,. \tag{C.12}$$

Para finalizar o desenvolvimento do termo Ga_j^i serão apresentadas relações adicionais generalizadas e recursivas que ocorrem quando o i é par.

$$Ga_{\frac{i}{2}-1}=\frac{6}{3m-7}Ga_{\frac{i}{2}-2}\therefore m\geq 3\,. \tag{C.13}$$

$$Ga_{\frac{i}{2}-2}=\frac{2695-355m}{138}Ga_{\frac{i}{2}-3}\therefore m\geq 5\,. \tag{C.14}$$

$$Ga_{\frac{i}{2}-3}=\frac{161}{15}Ga_{\frac{i}{2}-4}\therefore m\geq 7\,. \tag{C.15}$$

C.2.2 Ge_q^p

Esse termo generalizado substitui os termos $e_q^p,\ f_q^p,\ g_q^p\ e\ h_q^p$ em Noronha (1998) que se referem às funções de singularidades $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ e $\frac{1}{r^7}$. Assim, o termo Ge_q^p é utilizado no lugar daqueles quatros termos anteriormente desenvolvidos para avaliar a função de singularidade genérica $\frac{1}{r^m}$. A particularidade destes termos é o fato de que eles envolvem combinações de fatoriais de dois índices arbitrários (p e q), mas ao invés de apresentar o termo genérico em fatorial, será apresentado o termo já simplificado.

$$Ge_q^p=\frac{\left(\prod_{k=m-1}^{k+1}\left[\left|m-2\right|+2k\right]\right)<\min\left(p,q\right)}{\max\left(p,q\right)<\ldots5.7.9\ldots<p+q+\left(2-m\right)}\therefore m=1,3,5\;e\;7\,. \tag{C.16}$$

Os termos $\min\left(p,q\right)$ e $\max\left(p,q\right)$ representam o valor mínimo e máximo entre p e q, respectivamente.

C.2.3 GQ_i

Note que os termos auxiliares apresentados anteriormente não dependiam das variáveis ξ e η, bem como, das coordenadas $\left(\xi_0, \eta_0 \; e \; \zeta_0\right)$. Porém, será apresentado um termo auxiliar que, além de depender das variáveis e das coordenadas, dependerá também do termo citado no item C.2.2.

Esse novo termo auxiliar generalizado substitui os termos Q_i, U_i e V_i desenvolvidos em Noronha (1998). Além disso, uma particularidade surge nestes termos e que foge um pouco da compreensão ou da lógica que foi seguida até aqui, mas que posteriormente será melhor explicado. O fato é que a ordem m é diferente para os termos GQ_i e Ga_j^i, mas isso é fácil de ser resolvido acrescentando o índice m nestes dois termos que só será utilizado quando se avalia os termos GQ_i. Assim, estes termos serão renomeados para $GQ_{i,m}$ e $Ga_{j,(m-2)}^i$ para a avaliação de GQ_i, que será da seguinte forma:

$$GQ_{i,m} = \sum_{j=0}^{\frac{i-ipar-1}{2}} Ga_{j,(m-2)}^i \left[\left(\xi-\xi_0\right)^2\right]^{\frac{i-1}{2}-j} \left[\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2\right]^j \frac{1}{r^{m-4}} \therefore m = 1,3,5 \; e \; 7 . \tag{C.17}$$

Serão apresentados neste momento alguns termos particulares que surgem devido a algumas indeterminações quando se aplica, diretamente em C.17, o valor 0 e 2 para i o que ocorre em C.18 a C.20 e em C.21, respectivamente.

$$GQ_0 = 0 \therefore m = 1,3 . \tag{C.18}$$

$$GQ_0 = \frac{\xi-\xi_0}{\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2} \frac{1}{r} \therefore m = 5 . \tag{C.19}$$

$$GQ_0 = \frac{\xi-\xi_0}{3} \frac{\left\{2\left(\xi-\xi_0\right)^2+3\left[\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2\right]\right\}}{\left[\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2\right]^2} \frac{1}{r^3} \therefore m = 7 . \tag{C.20}$$

$$GQ_2 = \frac{1}{3} \frac{\left(\xi-\xi_0\right)^3}{\left[\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2\right]} \frac{1}{r^3} \therefore m = 7 . \tag{C.21}$$

Agora serão apresentados mais alguns termos que complementam as particularidades nas expressões anteriores. Tais termos surgem quando a expressão $\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2$, como segue abaixo:

$$GQ_0=-\frac{1}{\left(m-3\right)\left(\xi-\xi_0\right)^{m-3}}\therefore m=5,7\,. \tag{C.22}$$

$$GQ_2=-\frac{1}{2\left(\xi-\xi_0\right)^2}\therefore m=7\,. \tag{C.23}$$

C.2.4 Fórmula generalizada para o cálculo da integral J_{pq}

Em C.4 e C.5 aparece a integral J_{pq}. Em Noronha (1998) esta integral foi desenvolvida para os quatros kernels mencionados anteriormente e neste trabalho esta integral é apresentada para o kernel genérico $\frac{1}{r^m}$. Porém, será necessário fazer uma exceção para o caso do kernel $\frac{1}{r}$, tendo em vista que em uma pequena parte da equação não foi possível generalizar como para os demais kernels. Assim, a equação de J_{pq} para o kernel $\frac{1}{r}$ é expressa por:

$$\begin{aligned} J^I{}_{pq}= & \sum_{j=0}^{\frac{q-qpar-1}{2}} Ga_j^q\left[\left(\eta-\eta_0\right)^2\right]^{\frac{q-1}{2}-j}\sum_{k=0}^{j}s_k^j\left(\zeta_0{}^2\right)^{j-k}\left\{Q_{p+2k+2}+\left[\left(\eta-\eta_0\right)^2+\zeta_0{}^2\right]Q_{p+2k}\right\} \\ & qpar\times ppar\times T_A^I+qpar\times T_B^I+ppar\times T_C^I+qpar\times T_D^I \end{aligned} \tag{C.24}$$

.

Para os demais kernels a equação da integral de J_{pq} pode ser dada de forma genérica, tal como:

$$\begin{aligned} J^m{}_{pq}= & \sum_{j=0}^{\frac{q-qpar-1}{2}} Ga_j^q\left[\left(\eta-\eta_0\right)^2\right]^{\frac{q-1}{2}-j}\sum_{k=0}^{j}s_k^j\left(\zeta_0{}^2\right)^{j-k}Q_{p+2k} \\ & qpar\times ppar\times T_A^m+qpar\times T_B^m+ppar\times T_C^m+qpar\times T_D^m \end{aligned}\,. \tag{C.25}$$

Embora a expressão final de J_{pq} ainda não possa ser generalizada para todos os kernel os novos termos T_A^m, T_B^m, T_C^m e T_D^m podem e serão generalizados e apresentados logo a seguir em quatro etapas, são elas:

C.2.4.1 T_A^m

A equação genérica T_A^m é expressa por:

$$T_A{}^m = Ge_q^p\left(\zeta_0\right)^{p+q+(2-m)}\arctan\left[\frac{\zeta_0 r}{\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)}\right]. \tag{C.26}$$

Tal como ocorreu em algumas expressões anteriores alguns casos particulares deve ser considerados como uma forma de se evitar indeterminações numéricas. Assim, o primeiro caso ocorre quando $\zeta_0 = 0$, $p = 0$ e $q = 0$. Este caso é apresentado logo a seguir pela equação C.27

$$\begin{aligned} T_A{}^m &= \frac{r}{\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)} \therefore m = 3 \\ T_A{}^m &= 0 \therefore m = 5 \end{aligned}. \tag{C.27}$$

No caso em que $\zeta_0 = 0$ e $p + q = 2$ a particularidade da equação T_A^m é dada por:

$$T_A{}^m = -\frac{1}{3}\frac{r}{\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)} \therefore m = 5, \tag{C.28}$$

mas pode surgir também o caso em que $\zeta_0 = 0$, $p + q = 2$ ou $p + q = 0$ expresso por:

$$T_A{}^m = 0 \therefore m = 7. \tag{C.29}$$

Por fim, tem-se o caso quando $\zeta_0 = 0$ e $p + q = 4$, dado pela expressão:

$$T_A{}^m = \frac{r}{\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)} \therefore m = 7. \tag{C.30}$$

C.2.4.2 T_B^m

De forma idêntica ao item anterior serão apresentadas a equação genérica T_B^m, bem como os casos particulares pertinentes a esta equação. A equação de T_B^m é dada pela equação

$$T_B{}^m = -Ga^p_{\frac{q}{2}-1} \sum_{k=0}^{\frac{q+1-m}{2}} \left(s_k\right)^{\frac{q+1-m}{2}} \left(\zeta_0{}^2\right)^{\frac{q+1-m}{2}-k} \left[\frac{\left(\xi-\xi_0\right)^{2k+p+1} - \left(1-ppar\right)\left(-\zeta_0{}^2\right)^{\frac{2k+p+1}{2}}}{2k+p+1} \right] \times \ln\left[\left(\eta-\eta_0\right)+r\right]. \tag{C.31}$$

Casos particulares para esta expressão devem ser considerados. O primeiro caso ocorre quando $q=0$, sendo expresso pela seguinte equação:

$$T_B{}^m = -\left(1-ppar\right) P_m \left(-\zeta_0{}^2\right)^{\frac{p-(m-2)}{2}} \ln\left[\left(\eta-\eta_0\right)+r\right]$$

$$P_3 = 1$$

$$P_5 = \frac{p-1}{3} \tag{C.32}$$

$$P_7 = \frac{p-1}{3}\frac{p-3}{5}.$$

No caso em que $q=2$ a particularidade da equação T_B^m é dada por:

$$T_B{}^m = -\left(1-ppar\right) P_m \left(-\zeta_0{}^2\right)^{\frac{p-(m-4)}{2}} \ln\left[\left(\eta-\eta_0\right)+r\right]$$

$$P_5 = \frac{1}{3} \tag{C.33}$$

$$P_7 = \frac{p-1}{15}.$$

Além disso, quando $q=4$ surge a seguinte particularidade:

$$T_B{}^m = -\left(1-p_{par}\right)\frac{1}{5}\left(-\zeta_0{}^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \ln\left[\left(\eta-\eta_0\right)+r\right]. \tag{C.34}$$

C.2.4.3 T_C^m

O termo genérico T_C^m é perfeitamente simétrico ao termo T_B^m, apresentado anteriormente, e não serão feitas as extensas considerações tão como no item anterior, sendo necessário apenas dar lugar aos termos simétricos. Esta consideração será feita com o uso do símbolo ($:=$) que aqui significa atribuição, ou seja, quando se tem $X := Y$ significa que X dar lugar a Y. Assim, X existe em T_B^m e dará lugar a Y que existe em T_C^m.

Como uma melhor explanação do que foi mencionado anteriormente, serão apresentadas as componentes em T_B^m que darão lugar às componentes de T_C^m. Logo, tem-se:

$$p := q \tag{C.35}$$

$$ppar := qpar \tag{C.36}$$

$$\left(\xi - \xi_0\right) := \left(\eta - \eta_0\right). \tag{C.37}$$

Nas três expressões anteriormente citadas deve ser considerada a reciprocidade.

C.2.4.4 T_D^m

Finalmente, serão apresentados os últimos termos necessários para o cálculo da integral J_{pq}.

O termo genérico T_D^m é dado pela seguinte expressão:

$$T_D{}^m = -Ga_{q-1}^p \sum_{k=0}^{\frac{q+1-m}{2}} \left(s_k\right)^{\frac{q+1-m}{2}} \left(\zeta_0{}^2\right)^{\frac{q+1-m}{2}-k} \frac{\eta-\eta_0}{2k+p+1} \sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-1}{2}+k} \left(-\zeta_0{}^2\right)^l Q_{p+2k-2l}\,. \tag{C.38}$$

A partir da expressão T_D^m é possível obter alguns termos particulares. O primeiro caso ocorre quando $q=0$, obtendo-se a seguinte expressão:

$$T_D = \eta - \eta_0 \sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-3}{2}} \left(-\zeta_0{}^2\right)^l Q_{p-2-2l} \therefore m = 3\,. \tag{C.39}$$

Mas, quando se tem $q=0$ e $p \neq 0$, obtém-se a expressão:

$$T_D = \frac{\eta-\eta_0}{3}\left\{(p-1)\sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-5}{2}}\left(-\zeta_0{}^2\right)^l Q_{p-4-2l} - \frac{(\xi-\xi_0)^{p-1}}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2\right]}\frac{1}{r}\right\} \therefore m=5\,. \tag{C.40}$$

Por outro lado, quando $q=0$, $p=0$ e $\zeta_0 \neq 0$, tem-se:

$$T_D = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{3\zeta_0{}^2 r}\left[\frac{1}{(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2}+\frac{1}{(\eta-\eta_0)^2+\zeta_0{}^2}\right] \therefore m=5 \text{ e} \tag{C.41}$$

$$\begin{aligned} T_D = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{15\zeta_0{}^4 r}\Bigg[& -\frac{2(\xi-\xi_0)^2-\zeta_0{}^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2\right]^2}-\frac{2(\eta-\eta_0)^2-\zeta_0{}^2}{\left[(\eta-\eta_0)^2+\zeta_0{}^2\right]^2}+\frac{(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0)^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2\right]^2 r^2}+ \\ & \frac{(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0)^2}{\left[(\eta-\eta_0)^2+\zeta_0{}^2\right]^2 r^2}+\frac{4(\xi-\xi_0)^2}{\left[(\eta-\eta_0)^2+\zeta_0{}^2\right]r^2}+\frac{4(\eta-\eta_0)^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2\right]r^2}+\frac{10}{r^2}\Bigg] \therefore m=7 \end{aligned} \tag{C.42}$$

quando $q=0$, $p=0$ e $\zeta_0=0$, obtém-se:

$$T_D = -\frac{2}{9}\left[\frac{r}{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]^3+\frac{1}{3(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)r} \therefore m=5 \text{ e} \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned} T_D = -\frac{1}{75}\frac{1}{\left[(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)\right]^5 r^3}\Big[& 8(\eta-\eta_0)^8+12(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0)^6+ \\ & 3(\xi-\xi_0)^4(\eta-\eta_0)^4+12(\xi-\xi_0)^6(\eta-\eta_0)^2+8(\xi-\xi_0)^8\Big] \therefore m=7 \end{aligned} \tag{C.44}$$

Quando se considera $q=2$, tem-se:

$$T_D = \frac{\eta-\eta_0}{3}\sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-3}{2}}\left(-\zeta_0{}^2\right)^l Q_{p-2-2l} \therefore m=5 \text{ e} \tag{C.45}$$

ao considerar $q=2$ e $p \neq 0$, obtém-se:

$$T_D = \frac{\eta-\eta_0}{15}(p-1)\sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-5}{2}}\left(-\zeta_0{}^2\right)^l Q_{p-4-2l} - \frac{\eta-\eta_0}{15}\frac{(\xi-\xi_0)^{p-1}}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2\right]r} \therefore m=7\,. \tag{C.46}$$

Já para o caso em que $q=2$, $p=0$ e $\zeta_0 \neq 0$, tem-se:

$$T_D = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{15\zeta_0{}^2 r}\left[\frac{1}{(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0{}^2}+\frac{1}{(\eta-\eta_0)^2+\zeta_0{}^2}\right] \therefore m=7 \text{ e} \tag{C.47}$$

quando $q = 2$, $p = 0$ e $\zeta_0 = 0$, obtém-se:

$$T_D = -\frac{2}{45}\left[\frac{r}{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]^3 + \frac{1}{15(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)r} \therefore m = 7\,. \tag{C.48}$$

Ao considerar $q = 0$, $p = 2$ e $\zeta_0 = 0$, o caso particular é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} T_D = -\frac{1}{45}\frac{1}{\left[(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)r\right]^3}\Big[&8(\eta-\eta_0)^6 + 12(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0)^4 + \\ &3(\xi-\xi_0)^4(\eta-\eta_0)^2 + 2(\xi-\xi_0)^6\Big] \therefore m = 7 \end{aligned}\,. \tag{C.49}$$

Porém, quando ocorre o caso $q = 0$, $p = 2$ e $\zeta_0 \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} T_D = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{15\zeta_0^2 r}\Bigg[&\frac{4(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2\right]^2} - \frac{(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0)^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2\right]^2 r^2} - \\ &\frac{2}{(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2} + \frac{(\xi-\xi_0)^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2\right]r^2}\Bigg] \therefore m = 7. \end{aligned} \tag{C.50}$$

Por sua vez, quando $q = 0$, $p \neq 0$ e $p \neq 2$, obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned} T_D = \frac{\eta-\eta_0}{15}(p-1)(p-3)\sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-7}{2}}\left(-\zeta_0^2\right)^l Q_{p-6-2l} - \frac{(\eta-\eta_0)}{15}\frac{(\xi-\xi_0)^{p-3}}{15}\Bigg[&-\frac{(\xi-\xi_0)^2(\eta-\eta_0)^2}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2\right]^2 r^3} \\ +\frac{3(\xi-\xi_0)^2+(p-1)\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2\right]}{\left[(\xi-\xi_0)^2+\zeta_0^2\right]^2 r}&\Bigg] \therefore m = 7. \end{aligned} \tag{C.51}$$

Finalmente, quando $q = 4$, tem-se:

$$T_D = \frac{\eta-\eta_0}{5}\sum_{l=0}^{\frac{p-p_{par}-3}{2}}\left(-\zeta_0^2\right)^l Q_{p-2-2l} \therefore m = 7 \tag{C.52}$$

APÊNDICE D – DETERMINAÇÃO DOS KERNELS A PARTIR DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS EM DESLOCAMENTO, FORÇA E NOS TENSORES D_{kij} E S_{kij} EM ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL COM MEC

Neste apêndice é apresentado de forma detalhada como se determina os kernels nas soluções fundamentais u^*_{ij} e p^*_{ij}, bem como nos tensores D_{kij} e S_{kij} para o cálculo de tensões em pontos internos em elasticidade tridimensional com o MEC. Embora não seja apresentado neste trabalho, a determinação dos kernels que ocorrem em problemas de potencial tridimensional em MEC é tão simples e direta como em problemas de elasticidade aqui apresentados.

D.1 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL EM DESLOCAMENTO (u^*_{ij})

A solução fundamental em deslocamento foi apresentada na equação 3.10 e aqui será reapresentada (equação D.1) a fim de facilitar a compreensão das manipulações algébricas a serem efetuadas a partir desta equação.

$$u^*_{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\right]. \tag{D.1}$$

Todos os termos envolvidos nesta expressão foram definidos anteriormente.

Em MEC, as integrais a serem resolvidas são do tipo dado pela equação 5.27, onde se tem a parcela regular ($g \equiv g(\xi,\eta)$) e a parcela singular ($\omega \equiv \omega(\xi,\eta)$). Assim, se faz necessário configurar a expressão acima de tal forma que estas parcelas estejam claramente definidas.

Como primeiro passo, define-se a constante C_1 da seguinte forma:

$$C_1 = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G}. \tag{D.2}$$

Em segundo, analisa-se cada termo somado na equação D.1, obtendo dois novos termos, são eles:

$$u^{*A}_{ij} = C_1 \left(3 - 4\nu\right) \delta_{ij} \frac{1}{r} . \tag{D.3}$$

$$u^{*B}_{ij} = C_1 \frac{r_{,i} r_{,j}}{r} . \tag{D.4}$$

Como foi tratado neste trabalho o termo de gradiente $r_{,i}$ será utilizado de forma geral para todas as direções e é determinado pela equação 5.33.

Da equação D.3, pode-se classificar as parcelas regular e singular sendo dadas por:

$$g = C_1 \left(3 - 4\nu\right) \delta_{ij} \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r} . \tag{D.5}$$

Da equação D.4, têm-se:

$$g = C_1 num\left(r_{,i}\right) num\left(r_{,j}\right) \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^3} . \tag{D.6}$$

Daqui por diante, a parcela $num\left(r_{,i}\right)$ representará o numerador de $r_{,i}$. O denominador que é dado pela expressão $den\left(r_{,i}\right)$, contribuindo com a parcela singular e aumentando o grau de singularidade da solução fundamental em deslocamento e nas demais aqui analisadas, será omitido, tendo em vista que o $den\left(r_{,i}\right)$ é a própria função distância r. Assim, a expressão final da parcela singular já considera este termo.

Logo, as parcelas singulares das equações D.5 e D.6 são responsáveis pelos kernels de singularidade $O\left(\frac{1}{w}\right)$ e $O\left(\frac{1}{w^3}\right)$ na matriz **G** como se encontra na tabela 5.2.

D.2 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL EM TENSÃO (p^{*}_{ij})

Neste item será desenvolvido o mesmo procedimento do item anterior. Algumas observações já aplicadas anteriormente serão omitidas a partir deste item. A solução fundamental em tensão está apresentada logo abaixo.

$$p^{*}_{ij} = \frac{-1}{8\pi\left(1-\nu\right)r^{2}}\left\{\left[\left(1-2\nu\right)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}\right]r_{,\eta} + \left(1-2\nu\right)\left(r_{,i}\eta_{j} - r_{,j}\eta_{i}\right)\right\}, \tag{D.7}$$

Como feito anteriormente, será necessário adquirir da expressão acima todas as parcelas regulares e singulares envolvidas e como primeiro passo, define-se a constante C_2 da seguinte forma:

$$C_2 = \frac{-1}{8\pi\left(1-\nu\right)}. \tag{D.8}$$

Em segundo, analisa-se cada termo somado na equação D.7, obtendo dois novos termos, são eles:

$$p^{*A}_{ij} = C_2 \frac{1}{r^2}\left\{\left(1-2\nu\right)\delta_{ij}\left[r_{,\eta} + \left(r_{,j}\eta_{i} - r_{,i}\eta_{j}\right)\right]\right\} \tag{D.9}$$

$$p^{*B}_{ij} = 3C_2 \frac{1}{r^2}\left\{r_{,i}r_{,j}r_{,\eta}\right\}, \tag{D.10}$$

sendo que o termo de gradiente com relação à normal ($r_{,\eta}$) é dado pela expressão:

$$r_{,\eta} = r_{,i}\eta_{i} + r_{,j}\eta_{j}. \tag{D.11}$$

Da equação D.9, pode-se classificar as parcelas regular e singular, as quais são dadas por:

$$g = C_2\left(1-2\nu\right)\delta_{ij}\left\{num\left(r_{,\eta}\right) + \left[num\left(r_{,j}\right)\eta_{i} - num\left(r_{,i}\right)\eta_{j}\right]\right\} \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^3}. \tag{D.12}$$

Da equação D.10, têm-se as parcelas:

$$g = 3C_2\left[num\left(r_{,i}\right)num\left(r_{,j}\right)num\left(r_{,\eta}\right)\right] \text{e} \tag{D.13}$$

$$\omega = \frac{1}{r^5}.$$

Logo, as parcelas singulares das equações D.12 e D.13 são responsáveis pelos kernels de singularidade $O\left(\frac{1}{w^3}\right)$ e $O\left(\frac{1}{w^5}\right)$ na matriz **H** como se encontra na tabela 5.2.

D.3 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NO TENSOR D_{kij}

Neste item será desenvolvido o mesmo procedimento de determinar as parcelas regulares e singulares e, assim, determinar os kernels que se encontram na expressão tensorial abaixo.

$$D_{kij} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)\left(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}\right) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right], \tag{D.14}$$

Da expressão acima serão extraídas as parcelas regulares e singulares e, assim, determinar quais os tipos de kernels estão envolvidos.

Primeiramente, define-se a constante C_3 da seguinte forma:

$$C_3 = \frac{1}{8\pi\left(1-\nu\right)}. \tag{D.15}$$

Em segundo, analisa-se cada termo somado na equação D.14, obtendo dois novos termos, são eles:

$$D^A{}_{kij} = C_3\frac{1}{r^2}\left[\left(1-2\nu\right)\left(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}\right)\right] \tag{D.16}$$

$$D^B{}_{kij} = 3C_3\frac{1}{r^2}\left(r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right). \tag{D.17}$$

Da equação D.16 se pode classificar as parcelas regular e singular sendo dadas por:

$$g = C_3\left\{(1-2\nu)\left[\delta_{ki}num\left(r_{,j}\right)+\delta_{kj}num\left(r_{,i}\right)-\delta_{ij}num\left(r_{,k}\right)\right]\right\} \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^3}. \tag{D.18}$$

Da equação D.17, obtêm-se as parcelas:

$$g = 3C_3\left[num\left(r_{,i}\right)num\left(r_{,j}\right)num\left(r_{,k}\right)\right] \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^5}. \tag{D.19}$$

Logo, as parcelas singulares das equações D.18 e D.19 são responsáveis pelos kernels de singularidade $O\left(\frac{1}{w^3}\right)$ e $O\left(\frac{1}{w^5}\right)$ no tensor D_{kij} para o cálculo de tensão em pontos internos σ_{ij} como se encontra na tabela 5.2.

D.4 DETERMINAÇÃO DOS KERNELS NO TENSOR S_{kij}

Neste item será desenvolvido o mesmo procedimento do item anterior para se determinar as parcelas regulares e singulares do tensor S_{kij} e, assim, determinar os kernels que se encontram na expressão abaixo.

$$S_{kij} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3}\left\{A+B+C\right\}\therefore$$

$$A = 3\left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k}+\nu\left(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i}\right)-5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]r_{,\eta}; \tag{D.20}$$
$$B = 3\nu\left(r_{,i}r_{,k}\eta_j+r_{,j}r_{,k}\eta_i\right)$$
$$C = (1-2\nu)\left(3r_{,i}r_{,j}\eta_k+\delta_{jk}\eta_i+\delta_{ik}\eta_j\right)-(1-4\nu)\delta_{ij}\eta_k.$$

Da expressão acima serão determinados quais os tipos de kernels estão envolvidos ao classificar as parcelas regulares e singulares.

Define-se, primeiramente, a constante C_4 da seguinte forma:

$$C_4 = \frac{G}{4\pi\left(1-\nu\right)}. \tag{D.21}$$

Em segundo, analisa-se cada termo somado na equação D.20, obtendo dois novos termos, são eles:

$$S^{A}{}_{kij} = C_4 \frac{1}{r^3}\left\{3\left[\left(1-2\nu\right)\delta_{ij}r_{,k} + \nu\left(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}\right) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]r_{,\eta}\right\} \tag{D.22}$$

$$S^{B}{}_{kij} = 3C_4\nu \frac{1}{r^3}\left[\left(r_{,i}r_{,k}\eta_{,j} + r_{,j}r_{,k}\eta_{,i}\right)\right] \tag{D.23}$$

$$S^{C}{}_{kij} = C_4 \frac{1}{r^3}\left[\left(1-2\nu\right)\left(3r_{,i}r_{,j}\eta_{,k} + \delta_{jk}\eta_{,i} + \delta_{ik}\eta_{,j}\right) - \left(1-4\nu\right)\delta_{ij}\eta_{,k}\right]. \tag{D.24}$$

Na equação D.22 existe dois kernels. Para facilitar a visualização, bem como a determinação das parcelas regulares e singulares, faz-se necessário transformar esta equação como a soma de duas novas equações, são elas:

$$S^{A}{}_{kij} = C_4 \frac{1}{r^3}\left\{3\left[\left(1-2\nu\right)\delta_{ij}r_{,k} + \nu\left(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}\right) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]r_{,\eta}\right\}. \tag{D.25}$$

Desta equação, têm-se:

$$S^{AA}{}_{kij} = 3C_4 \frac{1}{r^3}\left\{\left[\left(1-2\nu\right)\delta_{ij}r_{,k} + \nu\left(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}\right)\right]r_{,\eta}\right\} \tag{D.26}$$

$$S^{AB}{}_{kij} = -15C_4 \frac{1}{r^3}\left\{\left[r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]r_{,\eta}\right\}. \tag{D.27}$$

Da equação D.26, pode-se classificar as parcelas regular e singular sendo dadas por:

$$g = 3C_4\left\{\left[\left(1-2\nu\right)\delta_{ij}num\left(r_{,k}\right) + \nu\left(\delta_{ik}num\left(r_{,j}\right) + \delta_{jk}num\left(r_{,i}\right)\right)\right]num\left(r_{,\eta}\right)\right\}$$

$$\text{e } \omega = \frac{1}{r^5}. \tag{D.28}$$

Da equação D.27, têm-se:

$$g = -15C_4\left\{\left[num\left(r_{,i}\right)num\left(r_{,j}\right)num\left(r_{,k}\right)\right]num\left(r_{,\eta}\right)\right\} \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^7}. \tag{D.29}$$

Logo, as parcelas singulares das equações D.28 e D.29 contribuem com os kernels de singularidade $O\left(\frac{1}{w^5}\right)$ e $O\left(\frac{1}{w^7}\right)$ no tensor S_{kij} para o cálculo de tensão em pontos internos σ_{ij} como se encontra na tabela 5.2. Note que, além destes, ainda existem termos a serem analisados. A continuação desta análise será dada logo a seguir por meio do termo ${S^B}_{kij}$.

Com o tensor ${S^B}_{kij}$, determinam-se as parcelas:

$$g = 3C_4\nu\left[\left(num\left(r_{,i}\right)num\left(r_{,k}\right)\eta_{,j} + num\left(r_{,j}\right)num\left(r_{,k}\right)\eta_{,i}\right)\right] \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^5}. \tag{D.30}$$

Na equação D.24 existem dois kernels e para se determinar as parcelas regulares e singulares será necessário considerar esta equação como a soma de duas outras, são elas:

$${S^C}_{kij} = C_4\frac{1}{r^3}\left[\left(1-2\nu\right)\left(3r_{,i}r_{,j}\eta_{,k} + \delta_{jk}\eta_{,i} + \delta_{ik}\eta_{,j}\right) - \left(1-4\nu\right)\delta_{ij}\eta_{,k}\right] \text{ e} \tag{D.31}$$

desta equação, têm-se:

$${S^{CA}}_{kij} = C_4\frac{1}{r^3}\left[\left(1-2\nu\right)\left(\delta_{jk}\eta_{,i} + \delta_{ik}\eta_{,j}\right) - \left(1-4\nu\right)\delta_{ij}\eta_{,k}\right] \tag{D.32}$$

$${S^{CB}}_{kij} = 3C_4\left(1-2\nu\right)\frac{1}{r^3}\left[\left(r_{,i}r_{,j}\eta_{,k}\right)\right]. \tag{D.33}$$

Da equação D.32, pode-se classificar as parcelas regular e singular sendo dadas por:

$$g = C_4\left[\left(1-2\nu\right)\left(\delta_{jk}\eta_{,i} + \delta_{ik}\eta_{,j}\right) - \left(1-4\nu\right)\delta_{ij}\eta_{,k}\right] \tag{D.34}$$

e $\omega = \dfrac{1}{r^3}$.

Da equação D.33, têm-se:

$$g = 3C_4\left(1-2\nu\right)\left[\left(num\left(r_{,i}\right)num\left(r_{,j}\right)\eta_{,k}\right)\right] \text{ e}$$

$$\omega = \frac{1}{r^5}. \qquad \text{(D.35)}$$

Logo, as parcelas singulares das equações D.34 e D.35 contribuem com os kernels de singularidade $O\left(\frac{1}{w^3}\right)$ e $O\left(\frac{1}{w^5}\right)$. Logo, estas parcelas, ao serem somadas às encontradas nas equações D.28, D.29 e D.30, formam, finalmente, os kernels $O\left(\frac{1}{w^3}\right)$, $O\left(\frac{1}{w^5}\right)$ e $O\left(\frac{1}{w^7}\right)$ no tensor S_{kij} para o cálculo de tensão em pontos internos encontrados na tabela 5.2.