

Edgard Sant'Anna de Almeida Neto

**INTRODUÇÃO À ANÁLISE DINÂMICA DE
FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia

São Paulo

1989

2002 Versão L^AT_EX

EDGARD SANT'ANNA DE ALMEIDA NETO
Engenheiro Civil, Escola Politécnica da USP, 1981

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DINÂMICA DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

ORIENTADOR:
PROF. DR. JOÃO CYRO ANDRÉ

Departamento de Engenharia de
Estruturas e Fundações

SÃO PAULO

1989

2002 Versão L^AT_EX

FICHA CATALOGRÁFICA

Almeida, Edgard Sant'Anna de, Neto

Introdução à Análise Dinâmica de Fundações de Máquinas. São Paulo, 1989.

xvi 120p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

1. Fundações de máquinas 2. Dinâmica linear 3. Fundações de martelos 4. Fundações aporticadas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. t

A meus pais
e irmãos.

Apresento meus agradecimentos

ao Prof. Dr. João Cyro André, pelo constante apoio, incentivo e orientação recebidos na elaboração deste trabalho;

ao Prof. Dr. Henrique Lindenberg Neto, pela constante atenção e orientação que muito contribuíram para o desempenho de minhas atividades didáticas;

ao Prof. Dr. Carlos Alberto Soares que, com sua experiência profissional, contribuiu com valiosas sugestões;

aos Profs. Mário Eduardo Senatore Soares e Luiz B. M. Laterza, pelo auxílio prestado na elaboração dos gráficos em função do tempo e das figuras dos modos de vibração do Capítulo 9;

ao Prof. Dr. Harold Hirth Jr., pela cessão de uma cópia do programa SAP90 (IBM-PC) ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP;

ao Prof. Hideki Ishitani, pela presteza no esclarecimento das dúvidas quanto à utilização de diversos programas de computador.

Resumo

Este trabalho apresenta conceitos e procedimentos que devem ser considerados na análise dinâmica de fundações de máquinas. São discutidas as abordagens e os métodos de cálculo à disposição dos engenheiros, assim como os fatores que influenciam a escolha e o desenvolvimento de modelos matemáticos adequados. Três tipos diferentes de fundação (fundações em bloco rígido, fundações de martelos e fundações aporticadas) são examinados, e são utilizados exemplos para demonstrar a eficácia de técnicas simples de modelagem.

Abstract

This paper presents concepts and procedures necessary to the dynamic analysis of machine foundations. Analytical approaches available to the designer, and factors which influence the choice and development of a suitable analytical model are discussed. Three different foundations (block foundations, hammer foundations and framed foundations) are examined and examples are given to demonstrate the effectiveness of simple modeling techniques.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos de Dinâmica Linear de Estruturas	4
2.1	Sistema com Um Grau de Liberdade	4
2.1.1	Vibrações Livres	4
2.1.2	Resposta a uma Excitação Harmônica	7
2.1.3	Método da Aceleração Linear	11
2.2	Sistemas com Vários Graus de Liberdade	13
2.2.1	Vibrações Livres Não-Amortecidas	15
2.2.2	Método da Superposição Modal	17
3	Interação Solo-Estrutura	20
3.1	Vibração de uma Fundação sobre um Meio Contínuo	20
3.1.1	Função de Rigidez Dinâmica (<i>Impedance Function</i>)	22
3.1.2	Teoria do Semi-Espaço	23
3.2	Modelos com Parâmetros Discretos	26
3.3	Parâmetros do Solo	26
3.3.1	Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico	28
3.3.2	Coefficiente de Poisson	31
3.3.3	Densidade do solo	31
3.3.4	Amortecimento interno	31
4	Considerações Quanto ao Amortecimento	33
4.1	Tipos de Amortecimento	33
4.2	O Amortecimento nas Fundações de Máquinas	34
4.3	Taxa de Amortecimento Modal Equivalente	36
5	Classificação das Fundações de Máquinas	38
5.1	Classificação das Fundações	38
5.1.1	Blocos ou Fundações Simples	38
5.1.2	Fundações Complexas	39
5.2	Classificação das Máquinas	40

6	Crêterios e Medidas Corretivas	41
6.1	Dados Necessários para o Projeto	41
6.1.1	Características da Máquina	42
6.1.2	Características da Instala�o Industrial	43
6.1.3	Parâmetros do Solo	43
6.1.4	Condi�oes Ambientais	43
6.2	Crêterios de Desempenho	43
6.2.1	Efeitos em Pessoas	44
6.2.2	Máquinas Vibrando em Regime Permanente	45
6.2.3	Efeitos em Estruturas Prediais	47
6.3	Principais Itens a Serem Verificados	47
6.4	Dimensões Iniciais da Funda�o	48
6.5	Medidas Corretivas	50
6.5.1	Altera�oes nos Esforços das Máquinas	51
6.5.2	Altera�oes na Funda�o	51
6.5.3	Altera�oes nas Propriedades do Solo	52
7	Funda�o em Bloco Rígido	53
7.1	Resposta em Regime Permanente	54
7.2	Exemplo Numérico	56
7.2.1	Dados do Exemplo	57
7.2.2	Geometria e Características da Funda�o	57
7.2.3	Modelo com Parâmetros Discretos	59
7.2.4	C�culo da Resposta Usando Fun�oes de Rigidez Dinâmica	61
7.3	Observa�oes Finais	63
8	Máquinas Submetidas a Esforços de Impacto	65
8.1	Crêterios de Desempenho	67
8.1.1	Amplitudes de Deslocamento	67
8.1.2	Recalques	67
8.1.3	Tensões	67
8.2	Dimensões Preliminares	68
8.3	Análise Dinâmica	69
8.3.1	Representa�o das A�oes	69
8.3.2	Rigidez e Amortecimento do Sistema Dinâmico	71
8.3.3	Modelo Matemático	73
8.3.4	Resposta de um Sistema com Dois Graus de Liberdade	74
8.4	Exemplo	76
8.4.1	Dados da Funda�o	77
8.4.2	Análise Dinâmica com Dois Graus de Liberdade	77
8.4.3	Procedimento Proposto por Barkan	80
8.4.4	Análise da Funda�o de Martelo com Salto da Bigorna	81

8.5	Conclusões	86
9	Fundações de Turboogeradores	87
9.1	Características da Máquina e de sua Fundação	88
9.2	Ações	91
9.3	Análise Dinâmica	93
9.3.1	Métodos de Cálculo — Resumo Histórico	93
9.3.2	Ítems da Análise Dinâmica	94
9.3.3	Método da Superposição Modal	95
9.4	Exemplo Numérico	95
9.4.1	Dados do Exemplo	96
9.4.2	Geometria e Características da Fundação	96
9.4.3	Modelos Matemáticos	99
9.4.4	Resultados	106
9.5	Observações e Conclusões	113
10	Observações Finais	115
A	O Programa SANT	120

Lista de Tabelas

2.1	Movimento forçado.	12
3.1	Parâmetros discretos equivalentes para a análise de uma fundação circular sobre um semi-espaço elástico.	27
3.2	Coefficientes de Poisson.	31
6.1	Fatores de serviço (Blake, 1964, em [25, pág. 312]).	46
6.2	Condições de vibração para máquinas rotativas (Baxter & Bernhard, 1967, em [25, pág. 314]).	46
6.3	Vibrações em turboalternadores (Parvis & Appendino, 1966, em [25, pág. 314]).	46
6.4	Sintomas e possíveis causas.	52
7.1	Coefficientes de rigidez e taxas de amortecimento.	60
7.2	Amplitudes de deslocamento e esforços transmitidos.	61
7.3	Coefficientes α e β	62
7.4	Deslocamentos e rotações do centro de gravidade do conjunto máquina-fundação.	62
8.1	Amplitudes admissíveis da bigorna [5, p.206].	67
8.2	Espessuras mínimas do bloco segundo Major.	68
8.3	Espessuras mínimas do bloco segundo Barkan.	68
8.4	Parâmetros independentes da frequência.	72
8.5	Valores máximos de deslocamentos e forças e instantes em que ocorrem.	83
9.1	Excentricidades para máquinas de alta rotação.	92
9.2	Distribuição das massas do equipamento.	97
9.3	Coefficientes de rigidez e amortecimento do sistema laje e solo de fundação.	100
9.4	Taxas de amortecimento modal equivalente para o modelo 2.	103
9.5	Coefficientes de rigidez relativos às rotações.	106
9.6	Comparação entre os primeiros modos de vibração.	107
9.7	Amplitudes de deslocamento (mm) na frequência de operação [velocidade (mm/s) entre colchetes].	111
9.8	Momento máximo M_{xx} (kNm) atuando no pórtico transversal intermediário dos modelos 1 e 2.	112

Lista de Figuras

2.1	Sistema com um grau de liberdade.	4
2.2	Variação de D e θ com a relação de frequência β para alguns valores de ξ . . .	10
2.3	Variação da transmissibilidade com β	10
2.4	Variação de $\frac{m\rho}{m_{ee}}$ com β	11
3.1	Semi-espaço elástico.	24
3.2	Funções de rigidez dinâmica para uma sapata rígida circular na superfície de um semi-espaço elástico [12].	25
3.3	Ciclo de histerese.	28
3.4	Ensaio sísmico de superfície.	29
3.5	Variação das velocidades de propagação de onda com o coeficiente de Poisson.	30
3.6	Ensaio sísmico de profundidade.	30
5.1	Fundação simples.	39
5.2	Fundações complexas.	39
6.1	Limites de amplitude de deslocamento [25, pág. 311].	44
6.2	Critérios para a vibração de máquinas rotativas (Blake, 1964, citado em [25, pág. 313]).	45
6.3	Possíveis danos em construções (Steffens, 1974, citado em [17, pág. 7]).	47
7.1	Bloco rígido - graus de liberdade.	53
7.2	Movimento no plano xz	54
7.3	Geometria do bloco e posições dos centros de gravidade (medidas em metros).	59
7.4	Curvas de deslocamento e velocidade para o ponto A.	64
8.1	Principais elementos de martelos de forja e condições normais de apoio dos pórticos.	66
8.2	Arranjos de fundação direta.	66
8.3	Substituição do pulso original pelo pulso retangular.	69
8.4	Resposta de um sistema submetido a um pulso retangular de duração variável.	70
8.5	Fundação enterrada - parâmetros do solo.	72
8.6	Modelos da fundação.	73
8.7	Modos de vibração.	75

8.8	Dimensões do bloco de fundação.	78
8.9	Deslocamentos do modelo amortecido empregando o método da superposição modal.	79
8.10	Resposta dinâmica - modelo proposto por Barkan.	82
8.11	Curvas de deslocamento ao longo do tempo obtidas pelo método da aceleração linear.	84
8.12	Curvas de força ao longo do tempo obtidas pelo método da aceleração linear.	85
9.1	Fundação de um conjunto turbogerador [1].	88
9.2	Interação entre as Engenharias Mecânica e Civil.	89
9.3	Vistas e planta da fundação (medidas em cm).	98
9.4	Modelos da fundação.	101
9.5	Modos de vibração do modelo 1.	103
9.6	Modos de vibração do modelo 2.	104
9.7	Modos de vibração do modelo 3.	105
9.8	Diagramas de resposta permanente em função da frequência - amplitudes de deslocamento na direção y	109
9.9	Diagramas de resposta permanente em função da frequência - amplitudes de deslocamento na direção z	110

Notação

a_0	freqüência adimensional
A	área
A	amplitude
\mathbf{A}	vetor de amplitudes
B	dimensão característica da base da fundação
B_i	fator de massa do modo i
c	coeficiente de amortecimento
\mathbf{c}	matriz de amortecimento
c_c	coeficiente de amortecimento crítico
c_v	coeficiente de amortecimento viscoso
c_h	coeficiente de amortecimento por histerese
c_{ij}	termo da matriz de amortecimento
\mathbf{C}	matriz de amortecimento generalizada
C_i	coeficiente de amortecimento generalizado do modo i
CG	centro de gravidade
CG _b	centróide da área da base da fundação
D	fator de amplificação dinâmico da resposta permanente
e	base dos logaritmos naturais
e_1	excentricidade do eixo de gravidade do rotor em relação ao eixo geométrico de rotação
E	módulo de elasticidade
f	freqüência
f_0	freqüência de operação
f_i	freqüência natural do modo i
f_n	freqüência natural
\mathbf{F}_A	vetor das forças nodais de amortecimento
\mathbf{F}_I	vetor das forças nodais de inércia
\mathbf{F}_R	vetor das forças nodais resistentes
F_t	força transmitida
g	aceleração da gravidade
G, G_1, G_2	constantes

G	módulo de elasticidade transversal
$G_{\text{máx}}$	módulo de elasticidade transversal máximo
H	espessura da camada de solo
Hz	Hertz (medida da frequência em ciclos por segundo)
i	número imaginário $\sqrt{-1}$
I	momento de inércia de massa
I	momento de inércia de uma figura plana
I_0	momento de inércia de massa em relação ao eixo central de inércia da área da base da fundação
I_T	momento de inércia de massa em relação ao eixo principal vertical da fundação
k	coeficiente de rigidez
\mathbf{k}	matriz de rigidez
k_{ij}	termo da matriz de rigidez
k_r	coeficiente de restituição
\mathbf{K}	matriz de rigidez generalizada
K_i	coeficiente de rigidez generalizado do modo i
$\mathbf{K}(\omega)$	função de rigidez dinâmica (“impedance function”). $\mathbf{K}_X(\omega)$, $\mathbf{K}_Y(\omega)$, $\mathbf{K}_Z(\omega)$, $\mathbf{K}_{XX}(\omega)$, $\mathbf{K}_{YY}(\omega)$, $\mathbf{K}_{ZZ}(\omega)$, $\mathbf{K}_{XY}(\omega)$, $\mathbf{K}_{YZ}(\omega)$ são as funções de rigidez dinâmica associadas aos movimentos de um bloco rígido.
L	profundidade enterrada
L_P	comprimento da onda de compressão (onda longitudinal)
L_R	comprimento da onda de Rayleigh
L_S	comprimento da onda de distorção (onda transversal)
m	massa
\mathbf{m}	matriz de massa
m_b	massa da bigorna
m_e	massa excêntrica do rotor
m_{ij}	elemento da matriz de massa
\mathbf{M}	matriz de massa generalizada
M_i	massa generalizada do modo i
M_{YY}, M_{ZZ}	momentos em torno dos eixos Y e Z , respectivamente
p	força
p_0	amplitude de uma força harmônica
\mathbf{p}_0	vetor de amplitude das forças nodais que excitam a estrutura
P_i	força generalizada do modo i
P_x, P_z	forças aplicadas nas direções dos eixos X e Z
r	raio
r_0	raio equivalente

R	fator dinâmico
R	reação do solo
\mathbf{R}	esforço dinâmico em regime permanente
\mathbf{R}_0	amplitude do esforço dinâmico em regime permanente
t	tempo
T	período
T_i	período do modo i
TR	transmissibilidade
v	deslocamento
\dot{v}	velocidade
\ddot{v}	aceleração
\mathbf{v}	vetor dos deslocamentos nodais
$\dot{\mathbf{v}}$	vetor das velocidades nodais
$\ddot{\mathbf{v}}$	vetor das acelerações nodais
v_{est}	deslocamento estático
v_X, v_Y, v_Z	deslocamentos nas direções X , Y e Z
v_0	deslocamento inicial
\dot{v}_0	velocidade inicial
V_P	velocidade da onda de compressão (onda longitudinal)
V_R	velocidade da onda de Rayleigh
V_S	velocidade da onda de distorção (onda transversal)
X, Y, Z	coordenadas
Y_i	deslocamento generalizado do modo de vibração i
\mathbf{Y}	vetor de coordenadas generalizadas
\mathbf{W}	matriz das frequências angulares naturais
α	coeficiente do termo real da função de rigidez dinâmica
β	coeficiente do termo imaginário da função de rigidez dinâmica
β	relação entre frequências
β_i	relação entre a frequência de operação e a frequência natural do modo i
γ	distorção
Δ	incremento
θ	ângulo da fase
μ	coeficiente de fadiga
ν	coeficiente de Poisson
ξ	taxa de amortecimento viscoso
ξ_h	taxa de amortecimento por histerese
ρ	amplitude do movimento
ρ	densidade
σ	tensão normal

τ	tensão tangencial
τ	instante de tempo
ϕ_{ij}	deslocamento modal
ϕ_i	modo de vibração i
ϕ_X, ϕ_Y, ϕ_Z	rotações em torno dos eixos X, Y e Z
Φ	matriz dos modos de vibração
ω	freqüência angular
ω_d	freqüência angular amortecida
ω_i	freqüência angular natural do modo de vibração i
ω_n	freqüência angular natural
ω_v	freqüência angular natural da camada de solo
ω_0	freqüência angular de operação
Ω	freqüência angular forçada de uma excitação harmônica

Capítulo 1

Introdução

Um dos objetivos do projeto de uma fundação de máquina consiste em limitar as amplitudes de vibração a valores admissíveis para a máquina e também para pessoas e equipamentos em sua vizinhança. Movimentos excessivos da máquina podem romper ligações, danificar mancais e equipamentos auxiliares, e colocar em risco a operação da máquina. Quando transmitidos para o solo, eles impedem o trabalho de pessoas e podem causar danos às estruturas por vibração ou recalque [16]. Portanto, o projeto de uma fundação de máquina deve considerar, além dos carregamentos estáticos, os esforços dinâmicos gerados pela operação da máquina e transmitidos para a fundação.

Muitas fundações de máquinas são projetadas com base em “regras empíricas,” mas nem sempre fundamentadas, fornecidas por fabricantes. A maioria delas estabelece que a massa da fundação deve ser m vezes a massa das partes móveis ou n vezes a massa da própria máquina, excluindo-se características importantes como os parâmetros do solo [16]. Este procedimento não mais se justifica em virtude dos avanços nas Áreas de Dinâmica Estrutural e Dinâmica dos Solos que possibilitam prever, com relativa precisão, o comportamento de uma fundação de máquina submetida a excitações dinâmicas.

Em termos gerais, a análise dinâmica de uma fundação de máquina envolve:

- a definição dos critérios de desempenho da fundação;
- a determinação dos esforços dinâmicos gerados pela máquina;
- o levantamento do perfil de solo e a avaliação de seus parâmetros;
- o cálculo da resposta dinâmica da fundação e a verificação posterior com base nos critérios de desempenho.

O engenheiro de fundações deve estar ciente que sua responsabilidade não termina após a fundação ter sido construída. A última etapa do projeto consiste no acompanhamento do desempenho da fundação de modo a verificar se os valores medidos confirmam os previstos na análise. As informações coletadas nesta etapa são essenciais para o desenvolvimento de novos projetos. Elas permitem, com o auxílio do projetista da máquina, estabelecer critérios de desempenho para determinados tipos de fundação. Elas também

são necessárias para aferir os novos procedimentos de análise, um aspecto importante em razão das hipóteses simplificadoras encontradas mesmo nas formulações mais elaboradas.

Os maiores avanços na análise de fundações de máquinas têm ocorrido em Áreas ligadas à Engenharia Sísmica. O desenvolvimento dos modelos matemáticos, a determinação do comportamento dinâmico dos solos e de elementos estruturais submetidos a carregamentos cíclicos são exemplos que podem ser citados. De uma forma geral, resultados de pesquisas da Engenharia Sísmica têm sido adaptados para a análise de fundações de máquinas, muitas vezes contrastando com o desenvolvimento de algumas Áreas restritas a esta última.

Mesmo não sendo um problema complexo, a determinação precisa das excitações dinâmicas geradas pelas máquinas não sofreu grandes avanços nas últimas décadas [12]. Assim, o projetista é obrigado a utilizar esforços dinâmicos simplificados, fornecidos por livros clássicos de fundações de máquinas, embora disponha de modelos matemáticos complexos e informações precisas sobre o restante do sistema.

É importante alertar que muitas das simplificações adotadas decorrem do procedimento normal de se considerar os equipamentos mecânicos e a fundação como sistemas dinâmicos independentes. Ou seja, quando a máquina é estudada, as bases que a suportam são admitidas indeslocáveis, enquanto no modelo da fundação, desprezam-se as propriedades de rigidez e amortecimento da máquina, considerando-se apenas sua massa e os esforços transmitidos.

Uma quantidade considerável de pesquisas, tanto teóricas como experimentais, têm sido realizadas na Área de Vibração de Fundações. O número de trabalhos publicados é apreciável e muitos engenheiros têm dificuldade em selecionar as informações mais importantes para a análise de uma fundação de máquina. Frequentemente, as informações apresentam-se numa forma pouco familiar ao engenheiro, exigindo uma revisão completa dos conceitos básicos da dinâmica para que algumas delas possam ser empregadas no projeto.

Diante do exposto, o autor sentiu-se motivado a desenvolver este estudo com o objetivo de apresentar os principais conceitos e procedimentos envolvidos na análise dinâmica de fundações de máquinas e levantar as informações necessárias para o projeto da fundação.

No Capítulo 2, procura-se condensar todos os conceitos básicos da dinâmica linear necessários para a compreensão dos demais capítulos. Foram mantidas a ordem de exposição e a notação do livro “Dynamics of Structures” de Clough e Penzien [8], por ser este um livro clássico de dinâmica estrutural. Inicialmente, são estudados os sistemas com um grau de liberdade, enfatizando a determinação da resposta permanente para vibrações forçadas. O método da aceleração linear é apresentado sucintamente, como um exemplo dos métodos de integração numérica. Finalmente, os conceitos são estendidos para sistemas com vários graus de liberdade e o método da superposição modal é examinado.

No Capítulo 3, discute-se o problema da interação dinâmica solo-estrutura. São citados os principais métodos de resolução, bem como suas hipóteses simplificadoras. Uma atenção especial é dedicada ao conceito de função de rigidez dinâmica (*impedance function*) e aos modelos de parâmetros discretos massa-mola-amortecedor. No final do capítulo,

são examinados os principais parâmetros do solo que influenciam a resposta dinâmica da fundação.

A extensão dos conceitos de amortecimento é feita no Capítulo 4. São apresentados os tipos de amortecimento normalmente adotados na análise dinâmica de fundações de máquinas e é deduzida uma expressão para o cálculo da taxa de amortecimento modal equivalente para sistemas com vários graus de liberdade.

No Capítulo 5, apresenta-se a classificação das fundações de máquinas proposta por Major [15]. No Capítulo 6, são examinados os critérios de projeto para a verificação do desempenho de fundações de máquinas e são reproduzidas as recomendações de Arya *et alii* [3] usadas na escolha das dimensões iniciais das fundações. Devido a sua importância prática, um item é dedicado a medidas que visam melhorar o desempenho de fundações já construídas.

Nos capítulos seguintes, aplicam-se os conceitos da análise dinâmica para alguns tipos representativos de fundação. Procura-se ilustrar, no Capítulo 7, o emprego das funções de rigidez dinâmica no cálculo da resposta de fundações em bloco rígido. A seguir, são examinadas as fundações submetidas a esforços de impacto e, finalmente no Capítulo 9, são analisadas as fundações aporticadas de turbogeradores, que se distinguem em razão das altas frequências das máquinas que suportam.

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Dinâmica Linear de Estruturas

Na maioria dos casos, a análise dinâmica de um sistema estrutural pode ser realizada reduzindo-o a um modelo matemático de parâmetros discretos. O mais simples destes modelos é o sistema com um grau de liberdade (GL) constituído de massa, mola e amortecedor, no qual a posição de qualquer uma de suas partes é descrita por uma única variável em função do tempo. Embora tal modelo possa parecer uma representação grosseira do sistema real, existem muitos exemplos em que ele constitui um modelo satisfatório.

Quando o sistema requer mais de uma variável para definir sua posição, ele possui mais de um grau de liberdade. Assim, o número de graus de liberdade de um sistema é o número de variáveis independentes necessário para definir a posição do sistema em qualquer instante de tempo.

2.1 Sistema com Um Grau de Liberdade

Inicialmente serão analisados os casos de vibração livre e de excitação harmônica de um sistema com um grau de liberdade, importantes para a interpretação da resposta dinâmica de sistemas mais complexos. Neste trabalho, o termo **resposta dinâmica** será empregado para designar as grandezas do sistema que variam com o tempo, tais como: deslocamentos, velocidades, acelerações, esforços solicitantes, tensões etc.

2.1.1 Vibrações Livres

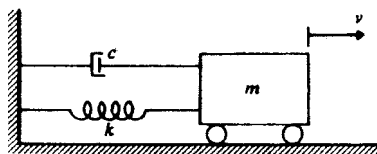


Fig. 2.1 – Sistema com um grau de liberdade.

Seja o sistema indicado na Fig. 2.1 constituído por uma massa m , um amortecedor

do tipo viscoso com coeficiente c e uma mola linear de constante k . Admite-se que o movimento ocorra apenas na direção horizontal, sem rotação. Neste caso, a equação do movimento é dada por

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0, \quad (2.1)$$

cujas soluções podem ser escritas na forma

$$v(t) = Ge^{st}. \quad (2.2)$$

Introduzindo na Eq. (2.1), obtém-se

$$(ms^2 + cs + k)Ge^{st} = 0, \quad (2.3)$$

ou

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (2.4)$$

que permite determinar os valores de s que resolvem o problema.

2.1.1.1 Vibrações Livres Não-Amortecidas

Para c igual a zero, as raízes da Eq. (2.4) são

$$s = \pm i\omega, \quad (2.5)$$

com

$$\omega = \sqrt{k/m}. \quad (2.6)$$

Assim, a solução de Eq. (2.1) assume a forma

$$v(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}. \quad (2.7)$$

Sendo o deslocamento v uma variável real, as constantes G_1 e G_2 devem ser complexas e conjugadas. Utilizando a fórmula de Euler, a Eq. (2.7) pode ser expressa por

$$v(t) = A \sen \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.8)$$

As constantes A e B são obtidas a partir das condições iniciais (deslocamento v_0 e velocidade \dot{v}_0 , no instante $t = 0$), resultando

$$v(t) = \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sen \omega t + v_0 \cos \omega t. \quad (2.9)$$

A Eq. (2.9) é a equação de um movimento harmônico simples com frequência angular ω . Como ω é uma propriedade inerente ao sistema, ela recebe o nome de **frequência angular natural** do sistema (rad/s). A **frequência natural** f (Hz) e o **período** T (s) do sistema são calculados por

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (2.10)$$

$$T = \frac{1}{f}. \quad (2.11)$$

A Eq. (2.9) também pode ser expressa na forma

$$v(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (2.12)$$

com

$$\rho = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2} = \text{amplitude do movimento}, \quad (2.13)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega v_0}\right) = \text{ângulo de fase}. \quad (2.14)$$

2.1.1.2 Vibrações Livres Amortecidas

No caso geral, as raízes da Eq. (2.4) são

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.15)$$

Introduzindo as grandezas:

- amortecimento crítico dado por

$$c_c = 2\sqrt{k m} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega}, \quad (2.16)$$

- taxa de amortecimento dada pela relação

$$\xi = \frac{c}{c_c}, \quad (2.17)$$

a Eq. (2.15) assume a seguinte forma

$$s = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (2.18)$$

Três tipos de movimento podem ocorrer, conforme o valor de ξ na Eq. (2.18) seja menor, maior, ou igual a 1. Quando $\xi > 1$ o movimento é denominado **super-amortecido** e quando $\xi = 1$, **criticamente amortecido**. O desenvolvimento das equações para estes casos pode ser encontrado em [8] e têm pouco interesse nos problemas de fundações de máquinas. Nesses casos, as equações do movimento indicam a não ocorrência de vibrações livres, com o sistema voltando à posição de equilíbrio em um pequeno intervalo de tempo (sendo o amortecimento crítico c_c o menor valor do coeficiente de amortecimento a partir do qual não ocorrem vibrações livres).

Movimento Subamortecido ($\xi < 1$) A Eq. (2.18) pode ser reduzida a

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_d, \quad (2.19)$$

com

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (2.20)$$

resultando

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{-\xi\omega_d t} + G_2 e^{-\xi\omega_d t}). \quad (2.21)$$

O termo entre parênteses representa um movimento harmônico simples, podendo a Eq. (2.21) ser escrita

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \operatorname{sen} \omega_d t + B \operatorname{cos} \omega_d t). \quad (2.22)$$

Como antes, as constantes A e B são determinadas pelas condições iniciais, resultando

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\dot{v}_0 + \xi v_0 \omega}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t + v_0 \operatorname{cos} \omega_d t \right). \quad (2.23)$$

O movimento expresso por esta equação é um movimento harmônico simples com frequência angular ω_d , mas amortecido em virtude do termo $e^{-\xi\omega t}$. Para os valores usuais da taxa de amortecimento que ocorrem na dinâmica estrutural ($\xi < 0,2$), ω_d difere pouco da frequência angular natural ω do sistema.

Analogamente ao movimento não-amortecido, a Eq. (2.23) também pode ser colocada na forma

$$v(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \operatorname{cos}(\omega_d t - \theta), \quad (2.24)$$

com

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_0 + \xi v_0 \omega}{\omega_d} \right)^2 + v_0^2}, \quad (2.25)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\dot{v}_0 + \xi v_0 \omega}{\omega_d v_0} \right). \quad (2.26)$$

O amortecimento é a propriedade do sistema dinâmico mais difícil de ser avaliada. Ele possui diversas origens e nem sempre é de natureza viscosa como foi admitido nas equações. A hipótese de um amortecimento linear com a velocidade foi adotada mais por conveniência matemática que pela representação do fenômeno físico e se justifica, na prática, pelos bons resultados apresentados quando as taxas de amortecimento são pequenas.

Considerações quanto ao amortecimento e sua natureza encontram-se no Capítulo 4. Nele, é introduzido o conceito de taxa de amortecimento modal equivalente e são discutidos alguns aspectos envolvendo o amortecimento de sistemas com um ou vários graus de liberdade.

2.1.2 Resposta a uma Excitação Harmônica

Geralmente, os esforços dinâmicos de operação das máquinas rotativas e alternativas podem ser decompostos em excitações harmônicas na forma $p_0 \operatorname{sen}(\Omega_i t + \phi_i)$, sendo Ω_i a frequência forçada da excitação e ϕ_i o ângulo de fase.

2.1.2.1 Sistema Não-Amortecido

Neste caso, a equação do movimento é

$$m\ddot{v} + kv = p_0 \text{sen } \Omega t. \quad (2.27)$$

A solução desta equação é a soma da solução complementar, Eq. (2.8), com uma solução particular. Considerando uma solução particular na forma $v_p(t) = G \text{sen } \Omega t$ e substituindo na Eq. (2.27), resulta

$$v_p(t) = \frac{p_0}{k(1 - \beta^2)} \text{sen } \Omega t, \quad (2.28)$$

onde $\beta = \Omega/\omega$ é a relação entre as frequências. Assim, a solução final tem a forma

$$v(t) = A \text{sen } \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k(1 - \beta^2)} \text{sen } \Omega t. \quad (2.29)$$

Introduzindo-se as condições iniciais $v_0 = 0$ e $\dot{v}_0 = 0$, obtém-se

$$v(t) = \frac{p_0}{k(1 - \beta^2)} (\text{sen } \Omega t - \beta \text{sen } \omega t). \quad (2.30)$$

O primeiro termo, com a mesma frequência Ω da excitação, corresponde à resposta permanente do sistema, enquanto o segundo corresponde à vibração livre provocada pelas condições iniciais.

A resposta dinâmica pode ser escrita na forma adimensional

$$R(t) = \frac{v(t)}{v_{\text{est}}} = \frac{1}{1 - \beta^2} (\text{sen } \Omega t - \beta \text{sen } \omega t), \quad (2.31)$$

onde $R(t)$ é o fator dinâmico (*response ratio*) e $v_{\text{est}} = p_0/k$ é o deslocamento correspondente à aplicação estática da carga p_0 . O coeficiente

$$D = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad (2.32)$$

recebe o nome de fator de amplificação dinâmico da resposta permanente (*dynamic magnification factor*).

Denomina-se fenômeno de ressonância à condição em que $\omega = \Omega$ ($\beta = 1$), com o valor de D tendendo para infinito. Para sistemas reais amortecidos, o valor de D é limitado, embora possa atingir valores elevados quando o amortecimento é pequeno.

2.1.2.2 Sistema Amortecido

Para o sistema amortecido, a equação do movimento é

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p_0 \text{sen } \Omega t. \quad (2.33)$$

Lembrando que $c = 2\xi\omega m$, a Eq. (2.33) pode ser escrita como

$$\ddot{v} + 2\xi\omega\dot{v} + \omega^2 v = \frac{p_0}{m} \text{sen } \Omega t. \quad (2.34)$$

A solução complementar da Eq. (2.33) é a Eq. (2.22) do movimento subamortecido. A solução particular é da forma

$$v_p(t) = G_1 \text{sen } \Omega t + G_2 \text{cos } \Omega t. \quad (2.35)$$

Determinando as constantes G_1 e G_2 e somando as soluções particular e complementar, resulta

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \text{sen } \omega_d t + B \text{cos } \omega_d t) + \frac{p_0}{k[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} [(1 - \beta^2) \text{sen } \Omega t - 2\xi\beta \text{cos } \Omega t]. \quad (2.36)$$

O primeiro termo desta equação é a resposta transiente que, devido a $e^{-\xi\omega t}$, amortece rapidamente e é desprezível depois de um certo tempo. O segundo termo é a resposta permanente, possuindo a mesma freqüência da excitação mas estando defasada em relação a ela. A resposta permanente é escrita na forma

$$v(t) = \rho \text{sen}(\Omega t - \theta), \quad (2.37)$$

com

$$\rho = \frac{p_0}{k\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}, \quad (2.38)$$

$$\theta = \arctan \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}, \quad (0 \leq \theta \leq 180^\circ). \quad (2.39)$$

O fator de amplificação dinâmico da resposta permanente é obtido a partir da Eq. (2.38)

$$D = \frac{k\rho}{p_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}. \quad (2.40)$$

As variações de D e θ com β estão representadas na Fig. 2.2 para alguns valores de ξ . Na figura, observa-se o fenômeno da ressonância para baixos valores de ξ na forma de um crescimento acentuado de D na vizinhança de β unitária. É importante mencionar que quando a relação β é pequena, a força p_0 é equilibrada predominantemente pela força resistente $F_R = kv$; quando β é aproximadamente 1, pela força de amortecimento $F_A = c\dot{v}$ e, quando β é grande, pela força de inércia $F_I = m\ddot{v}$.

Força Transmitida à Base A força transmitida à base por meio da mola e do amortecedor é dada por

$$F_t(t) = kv + c\dot{v}. \quad (2.41)$$

Introduzindo a expressão da resposta permanente na Eq. (2.41), tem-se

$$F_t(t) = p_0 D \text{sen}(\Omega t - \theta) + 2\xi\beta p_0 D \text{cos}(\Omega t - \theta), \quad (2.42)$$

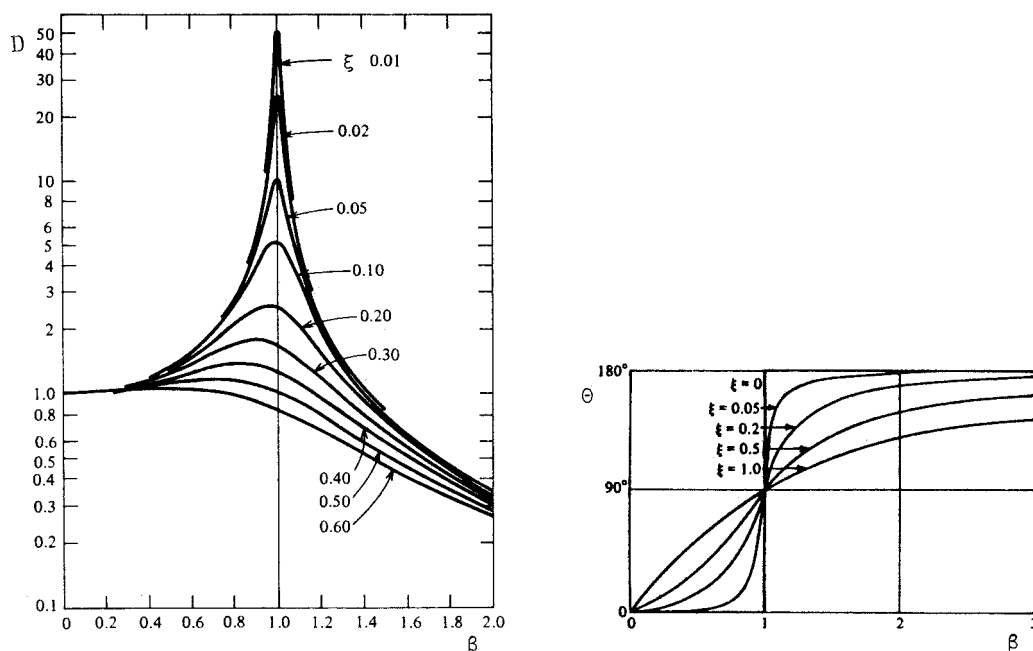


Fig. 2.2 – Variação de D e θ com a relação de frequência β para alguns valores de ξ .

cuja amplitude é

$$F_{t0} = p_0 \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}. \tag{2.43}$$

A relação

$$TR = \frac{F_{t0}}{p_0} = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D \tag{2.44}$$

recebe o nome de transmissibilidade e sua variação com β está representada na Fig. 2.3. Observa-se que a força transmitida é menor que p_0 para $\beta > \sqrt{2}$. Nesta faixa, quanto menor o amortecimento, menor é a força transmitida.

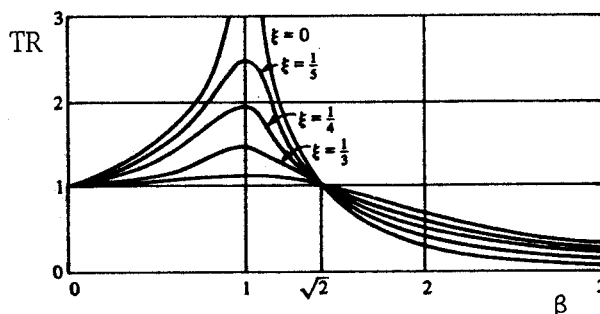


Fig. 2.3 – Variação da transmissibilidade com β .

Carregamento de Máquinas Rotativas A força de excitação, no caso de máquinas rotativas, é proporcional ao quadrado da frequência angular Ω de rotação, sendo calculada por

$$p(t) = m_e e \Omega^2 \sin \Omega t, \quad (2.45)$$

onde m_e é a massa excêntrica do rotor e e , a excentricidade de seu eixo de gravidade em relação ao eixo geométrico de rotação. Neste caso, a equação do movimento assume a forma

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = m_e e \Omega^2 \sin \Omega t, \quad (2.46)$$

onde m é a massa do sistema incluindo a massa excêntrica m_e . A Eq. (2.46) é idêntica à Eq. (2.33) com $p_0 = m_e e \Omega^2$. Portanto, a expressão da amplitude pode ser obtida da Eq. (2.38)

$$\rho = \frac{m_e e \Omega^2}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}. \quad (2.47)$$

A Fig. 2.4 mostra a variação de $\frac{m\rho}{m_e e}$ com β para diferentes taxas de amortecimento.

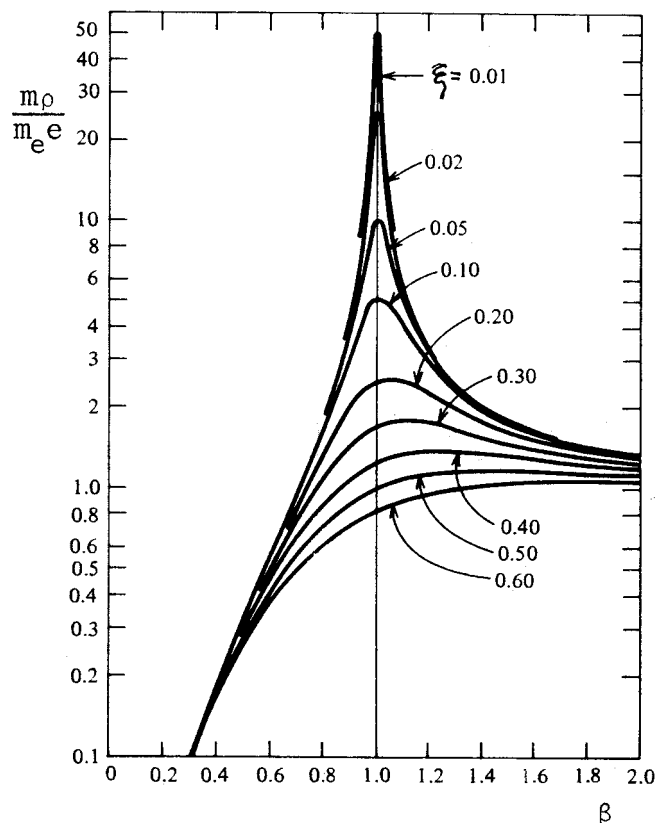


Fig. 2.4 – Variação de $\frac{m\rho}{m_e e}$ com β .

A Tabela 2.1 apresenta as fórmulas do movimento forçado para sistemas com 1 GL.

2.1.3 Método da Aceleração Linear

O método da aceleração linear é um dos métodos de integração numérica por etapas empregados na resolução da equação diferencial do movimento. Nele, o intervalo de tempo

Tabela 2.1 – Movimento forçado.

Propriedade	Carregamento	
	$p_0 = \text{const.}$	$p_0(\Omega) = m_e e \Omega^2$
Fator de amplificação dinâmico	$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$	$D_r = \beta^2 D$
Amplitude (A)	$\frac{Dp_0}{k}$	$\frac{D_r m_e e}{m}$
Amplitude máxima ($A_{\text{máx}}$)	$\frac{p_0}{2\xi k \sqrt{1 - \xi^2}}$	$\frac{m_e e}{2\xi m \sqrt{1 - \xi^2}}$
Frequência correspondente à amplitude máxima (ω)	$\omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$

da análise dinâmica é dividido em intervalos de integração Δt e, a partir das condições iniciais de deslocamento e velocidade, progride-se ao longo do tempo mantendo-se duas hipóteses básicas:

- a equação de equilíbrio é satisfeita nos instantes inicial e final de cada intervalo Δt ;
- a aceleração varia linearmente no intervalo.

Seja o intervalo de tempo Δt delimitado pelos instantes t e $T = t + \Delta t$ e sejam \ddot{v}_t e \ddot{v}_T as acelerações nestes instantes, respectivamente. Admitindo a variação linear da aceleração em Δt , tem-se para o instante τ genérico ($0 < \tau < \Delta t$)

$$\ddot{v}(\tau) = \ddot{v}_t + \frac{\ddot{v}_T - \ddot{v}_t}{\Delta t} \tau. \quad (2.48)$$

Integrando a Eq. (2.48) duas vezes e impondo as condições de deslocamento e velocidade no início do intervalo, obtém-se as equações para a velocidade e deslocamento no final do intervalo

$$\dot{v}_T = (\ddot{v}_T + \ddot{v}_t) \frac{\Delta t}{2} + \dot{v}_t \quad (2.49)$$

$$v_T = \frac{\ddot{v}_T + 2\ddot{v}_t}{6} \Delta t^2 + \dot{v}_t \Delta t + v_t \quad (2.50)$$

A equação de equilíbrio no instante T é dada por

$$m\ddot{v}_T + c\dot{v}_T + kv_T = p(T) \quad (2.51)$$

Expressando \ddot{v}_T e \dot{v}_T em função de v_T a partir das Eqs. (2.49) e (2.50)

$$\ddot{v}_T = -2\ddot{v}_t + \frac{6}{\Delta t^2} (v_T - v_t - \dot{v}_t \Delta t) \quad (2.52)$$

$$\dot{v}_T = -\frac{\ddot{v}_t}{2} \Delta t + \frac{3}{\Delta t} (v_T - v_t) - 2\dot{v}_t \quad (2.53)$$

e substituindo na Eq. (2.51), tem-se

$$k^* v_T = p_T^*, \quad (2.54)$$

onde

$$k^* = \left(\frac{6}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} c + k \right),$$

$$p_T^* = p_T + m \left[2\ddot{v}_t + \frac{6}{\Delta t^2} (v_t + \dot{v}_t \Delta t) \right] + c \left(\frac{\ddot{v}_t \Delta t}{2} + \frac{3}{\Delta t} v_t + 2\dot{v}_t \right),$$

ou colocando em função dos acréscimos de deslocamento $\Delta v = v_T - v_t$ (bastando subtrair a equação de equilíbrio no instante t)

$$k^* \Delta v = p^*, \quad (2.55)$$

com

$$\Delta p^* = (p_T - p_t) + m \left(\frac{6}{\Delta t} \dot{v}_t + 3\ddot{v}_t \right) + c \left(3\dot{v}_t + \ddot{v}_t \frac{\Delta t}{2} \right).$$

Desse modo, conhecidas as condições iniciais v_t , \dot{v}_t e \ddot{v}_t , calcula-se o incremento de deslocamento Δv , Eq. (2.55). Posteriormente, calcula-se a aceleração \ddot{v}_T , Eq. (2.52), e a velocidade \dot{v}_T , Eq. (2.53), que serão usadas na próxima etapa.

Uma das vantagens dos métodos de integração por etapas é a possibilidade dos coeficientes m , c e k variarem ao longo do tempo, podendo depender da própria resposta. Esta vantagem será utilizada no cálculo da resposta não-linear de um martelo de forja (Capítulo 8) no qual a força resistente à tração entre a bigorna e o bloco de fundação é limitada.

A dedução das equações para sistemas com vários graus de liberdade é análoga à realizada e pode ser encontrada em Clough [8, pp.260-270].

2.2 Sistemas com Vários Graus de Liberdade

Os sistemas estruturais reais são sempre sistemas com um número infinito de graus de liberdade. A representação por meio de sistemas com um número finito de graus de liberdade constitui uma aproximação conveniente que é tanto melhor quanto melhor forem as aproximações referentes ao comportamento dos elementos estruturais. Geralmente, os modelos utilizados na dinâmica são semelhantes aos da análise estática em que as propriedades elásticas são sintetizadas pela matriz de rigidez. No entanto, alguns graus de liberdade relevantes na análise estática não o são na análise dinâmica, tendo em vista que a estes graus de liberdade não estão associadas forças de inércia. Assim, torna-se necessário distinguir o grau de liberdade dinâmico como aquele ao qual estão associadas forças de inércia [32].

A qualidade dos resultados fornecidos por um sistema com apenas um grau de liberdade depende, principalmente, da variação no tempo e da distribuição espacial das cargas e propriedades de rigidez e inércia do sistema real. Se estas propriedades restringem o

movimento à forma de deslocamento admitida e o carregamento excita uma resposta nesta forma, a solução com um grau de liberdade provavelmente fornecerá uma boa aproximação. Quando, ao contrário, a resposta da estrutura indica variação no tempo das amplitudes e também da forma de deslocamento, um número maior de graus de liberdade deverá ser considerado na análise dinâmica [25].

Matriz de rigidez A matriz de rigidez de um sistema estrutural é definida como sendo a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as respectivas forças resistentes nodais por meio da equação

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{k} \mathbf{v}, \quad (2.56)$$

em que \mathbf{k} é a matriz de rigidez e \mathbf{F}_R e \mathbf{v} são os vetores de forças e deslocamentos nodais, respectivamente. O termo genérico k_{ij} de \mathbf{k} é a força nodal, associada ao grau de liberdade v_i , decorrente de um deslocamento unitário imposto ao grau de liberdade v_j .

Matriz de massa Analogamente à matriz de rigidez, define-se a matriz de massa como aquela que relaciona as acelerações nodais com as forças de inércia nodais

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (2.57)$$

onde \mathbf{m} é a matriz de massa e \mathbf{F}_I e $\ddot{\mathbf{v}}$ são os vetores de forças de inércia e de acelerações nodais, respectivamente. O termo genérico m_{ij} de \mathbf{m} é a força de inércia nodal, associada ao grau de liberdade v_i , decorrente de uma aceleração nodal unitária imposta ao grau de liberdade v_j .

Denomina-se matriz de massa consistente de um elemento estrutural, a matriz que se obtém interpolando as forças de inércia associadas à massa distribuída do elemento pelas mesmas funções de interpolação utilizadas no desenvolvimento da matriz de rigidez. Quando a matriz de massa é obtida concentrando-se a massa apenas nos pontos nodais, a matriz resultante é diagonal e recebe o nome de matriz de massa discreta.

Matriz de Amortecimento Define-se matriz de amortecimento como aquela que relaciona velocidades nodais com as forças de amortecimento nodais, sendo dada por

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}, \quad (2.58)$$

onde \mathbf{c} é a matriz de amortecimento e \mathbf{F}_A e $\dot{\mathbf{v}}$ são, respectivamente, os vetores de forças de amortecimento e de velocidades nodais. O termo genérico c_{ij} de \mathbf{c} é a força de amortecimento nodal, associada ao grau de liberdade v_i , decorrente de uma velocidade nodal unitária imposta ao grau de liberdade v_j .

De modo análogo à matriz de massa, podem ser definidas as matrizes de amortecimento consistente e discreta. Entretanto, é difícil a avaliação da matriz de amortecimento a partir dos amortecimentos dos elementos estruturais e, na prática, para

sistemas com vários graus de liberdade, o amortecimento é considerado por meio do amortecimento modal ou por uma matriz de amortecimento de Rayleigh.

As equações do movimento para um sistema com vários graus de liberdade podem ser obtidas usando o Princípio de D'Alembert. Este princípio estabelece o equilíbrio dos esforços resistentes \mathbf{F}_R , de inércia \mathbf{F}_I , de amortecimento \mathbf{F}_A e do esforço externo aplicado $\mathbf{p}(t)$ para os graus de liberdade do sistema, gerando a equação vetorial

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_R = \mathbf{p}(t). \quad (2.59)$$

Substituindo as expressões dos vetores \mathbf{F}_R , \mathbf{F}_I e \mathbf{F}_A , Eqs. (2.56) a (2.58), tem-se a equação matricial do movimento

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{p}(t). \quad (2.60)$$

2.2.1 Vibrações Livres Não-Amortecidas

As equações das vibrações livres não-amortecidas são expressas omitindo-se os termos $\mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{p}(t)$ da Eq. (2.60)

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.61)$$

Para a resolução desta equação, adota-se a abordagem encontrada em [32], na qual recorre-se à separação de variáveis considerando uma solução do tipo

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}f(t), \quad (2.62)$$

onde \mathbf{A} é um vetor de amplitudes e $f(t)$ uma função do tempo. Substituindo (2.62) em (2.61) chega-se à

$$\left[\mathbf{m} \ddot{f}(t) + \mathbf{k} f(t) \right] \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (2.63)$$

Pré-multiplicando a equação por \mathbf{m}^{-1} e dividindo por $f(t)$, obtém-se

$$\left[\mathbf{I} \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} + \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \right] \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (2.64)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade e, conseqüentemente, $\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}$ é uma matriz diagonal com elementos iguais — o termo entre colchetes deve ser nulo, já que $\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}$ independe do tempo e a Eq. (2.64) deve ser satisfeita para qualquer \mathbf{A} . Conclui-se, então que

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = -\omega^2, \quad (2.65)$$

ou

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0, \quad (2.66)$$

sendo ω^2 uma constante. Introduzindo a Eq. (2.65) na Eq. (2.64) e pré-multiplicando por \mathbf{m} , obtém-se

$$(-\mathbf{m}\omega^2 + \mathbf{k}) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (2.67)$$

A solução de (2.66) é da forma

$$f(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (2.68)$$

onde ρ e θ são constantes. Introduzindo agora a Eq. (2.68) em (2.62), resulta

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cos(\omega t - \theta), \quad (2.69)$$

onde \mathbf{v}_0 tomou o lugar de $\rho \mathbf{A}$. A Eq. (2.69) indica que a vibração livre não amortecida é um movimento em que todos os pontos nodais descrevem movimentos harmônicos em fase e com frequência ω . O movimento resultante é chamado de modo normal de vibração, com \mathbf{v}_0 indicando a forma do modo e ω sua frequência natural.

A Eq. (2.67) tem uma solução trivial e outra não trivial dada por

$$\det(-\mathbf{m}\omega^2 + \mathbf{k}) = 0. \quad (2.70)$$

Esta equação é chamada de equação de frequências e fornece as N frequências angulares naturais, onde N é o número de graus de liberdade dinâmicos do sistema.

Para cada uma das frequências calculadas volta-se à Eq. (2.67) e obtém-se o vetor \mathbf{A} . Pelo fato de sua magnitude ser indeterminada já que a Eq. (2.70) torna o sistema linearmente dependente, a direção de \mathbf{A} deve ser obtida em relação a um de seus elementos não-nulos.

As frequências naturais ao quadrado são reunidas na matriz diagonal

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \mathbf{0} \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

e o vetor dos modos normais, sob a forma adimensional, na matriz

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N] \quad (2.72)$$

Condições de Ortogonalidade Demonstra-se que os modos normais possuem a propriedade da ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez [8, 32], o que é expresso na forma

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{m} \phi_j &= \begin{cases} M_i & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \\ \phi_i^T \mathbf{k} \phi_j &= \begin{cases} K_i & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Logo, as matrizes de massa generalizada, $\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi$, e de rigidez generalizada, $\mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi$ são matrizes diagonais.

Normalização dos Modos Normais Como os modos normais são calculados a partir de um elemento indeterminado, o vetor de amplitudes ϕ_i resulta arbitrário. Um critério de normalização muito empregado é o que torna os elementos da matriz de massa generalizada iguais a 1, ou seja

$$\hat{\phi}_i^T \mathbf{m} \hat{\phi}_i = 1. \quad (2.74)$$

Para o cálculo de $\hat{\phi}_i$ é necessário, inicialmente, determinar a massa generalizada do modo i

$$M_i = \phi_i^T \mathbf{m} \phi_i, \quad (2.75)$$

e calcular os modos normalizados por meio de

$$\hat{\phi}_i = \frac{\phi_i}{\sqrt{M_i}}. \quad (2.76)$$

2.2.2 Método da Superposição Modal

Na análise dinâmica de sistemas lineares com vários graus de liberdade, é conveniente representar os deslocamentos da estrutura mediante os modos normais. Estes modos constituem N formas independentes de deslocamento (sendo N o número de graus de liberdade dinâmicos) cujas amplitudes podem servir como coordenadas generalizadas para expressar qualquer forma de deslocamento. Assim, o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{v} é escrito na forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \phi_i Y_i = \Phi \mathbf{Y}, \quad (2.77)$$

onde \mathbf{Y} é o vetor de coordenadas generalizadas.

Cálculo da Resposta Seja um sistema com N graus de liberdade e com as equações do movimento expressas nas coordenadas originais, Eq. (2.60),

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{p}(t).$$

Introduzindo a Eq. (2.77) em (2.60) e pré-multiplicando por Φ^T , obtém-se

$$(\Phi^T \mathbf{m} \Phi) \ddot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{c} \Phi) \dot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{k} \Phi) \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{p}(t). \quad (2.78)$$

Lembrando as propriedades de ortogonalidade das matrizes de massa e rigidez, chega-se à

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{c} \Phi) \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{P}(t). \quad (2.79)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e rigidez generalizadas e o vetor \mathbf{P} é o vetor de cargas generalizadas.

Admitindo que os modos normais também sejam ortogonais em relação à matriz de amortecimento e introduzindo a matriz diagonal

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi}, \quad (2.80)$$

tem-se a equação matricial

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{P}(t). \quad (2.81)$$

Como as matrizes são todas diagonais, resulta um sistema de equações independentes escritas nas coordenadas generalizadas. Para o modo i , a equação pode ser escrita na forma

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{P_i}{M_i}, \quad (2.82)$$

onde as seguintes grandezas estão associadas ao modo de vibração i :

ξ_i	taxa de amortecimento;
ω_i	freqüência natural;
$P_i = \phi_i^T \mathbf{P}_t$	força generalizada;
M_i	massa generalizada.

Dessa maneira, a resposta dinâmica é obtida resolvendo cada uma das equações nas coordenadas normais e superpondo os resultados para se calcular a resposta nas coordenadas originais.

O método descrito denomina-se **método da superposição modal** e uma de suas vantagens reside no fato da resposta dinâmica de uma estrutura estar geralmente associada aos modos normais de menor freqüência natural. Isto significa que uma boa aproximação pode ser obtida com as coordenadas normais, mesmo com uma redução significativa do número de coordenadas.

Resposta a uma Excitação Harmônica Neste seção, será apresentado o cálculo da resposta permanente de uma estrutura submetida a uma excitação harmônica, aplicando-se o método da superposição modal. As equações desenvolvidas são as mesmas utilizadas pelo programa SANT na determinação dos valores máximos de deslocamento e esforços, de acordo com o exemplo apresentado no Capítulo 9.

Seja o vetor dos esforços que excitam a estrutura dado por

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \text{sen } \Omega t, \quad (2.83)$$

que introduzida na Eq. (2.81), fornece

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{p}_0 \text{sen } \Omega t. \quad (2.84)$$

Se forem considerados apenas os S primeiros modos normais, resulta um sistema de S

equações diferenciais independentes, na forma

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{P_i}{M_i}, \quad i = 1, \dots, S, \quad (2.85)$$

com $P_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}_0 \sin \Omega t = P_{0i} \sin \Omega t$. A resposta permanente é obtida da Eq. (2.36). Assim,

$$Y_i(t) = \frac{P_{0i}}{K_i} \frac{1}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\xi_i\beta_i)^2} [(1 - \beta_i^2) \sin \Omega t - 2\xi_i\beta_i \cos \Omega t] \quad (2.86)$$

onde $\beta_i = \Omega/\omega_i$ e $K_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2 M_i$. A resposta dinâmica nas coordenadas originais é dada pela Eq. (2.77).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \sum_{i=1}^S \boldsymbol{\phi}_i Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^S (\mathbf{A}_i \sin \Omega t + \mathbf{B}_i \cos \Omega t) \\ &= \mathbf{A} \sin \Omega t + \mathbf{B} \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (2.87)$$

sendo

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^S \boldsymbol{\phi}_i \frac{P_{0i}}{K_i} \frac{1 - \beta_i^2}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\xi_i\beta_i)^2}, \quad (2.88)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^S \boldsymbol{\phi}_i \frac{P_{0i}}{K_i} \frac{(-2\xi_i\beta_i)}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\xi_i\beta_i)^2}, \quad (2.89)$$

A separação da resposta em $\sin \Omega t$ e $\cos \Omega t$ é bastante vantajosa em termos computacionais. Ela permite calcular os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} independentes do tempo e, posteriormente, desenvolver a resposta $\mathbf{v}(t)$. Os vetores de velocidade e aceleração são obtidos diretamente por meio da Eq. (2.87).

Capítulo 3

Interação Solo-Estrutura

Atualmente são empregadas duas abordagens para considerar a deformação do solo no cálculo da resposta dinâmica de uma fundação de máquina. Na primeira, procuram-se soluções analíticas ou numéricas, relativas ao problema de vibração de uma fundação rígida sobre um meio contínuo (semi-espaco elástico, maciço de solo estratificado etc.). Chama-se a atenção para o fato de as equações do movimento resultantes possuírem coeficientes que dependem da frequência da excitação dinâmica.

Na segunda abordagem, o solo sob a fundação é representado por meio de molas e amortecedores lineares (modelo de Winkler-Voigt). Estes elementos são aferidos para determinado intervalo de frequência, com base em resultados experimentais (Barkan [5]) ou a partir de analogias com as soluções analíticas ou numéricas mencionadas na primeira abordagem. Embora aproximada, esta representação permite o emprego da análise dinâmica linear e, conseqüentemente, a extensão imediata para fundações com vários graus de liberdade.

Um aspecto comum às duas abordagens diz respeito ao comportamento dinâmico do solo. “Como a operação satisfatória das fundações de máquinas envolve amplitudes de deslocamento da ordem de centésimos de milímetro, as deformações dinâmicas do solo podem ser admitidas quase-elásticas, sem deformações permanentes e com não-linearidades desprezíveis. Assim, grande parte das soluções admitem um comportamento elástico ou visco-elástico linear do solo, com um amortecimento linear por histerese representando a dissipação de energia interna no solo” [12].

3.1 Vibração de uma Fundação sobre um Meio Contínuo

Existem vários métodos de cálculo que permitem considerar as deformações do solo sob a fundação. A escolha de um determinado método depende, principalmente, da importância da fundação projetada. De um modo geral, ele deve ser capaz de considerar as principais características da fundação, tais como: a forma da base, os parâmetros do solo e, nos métodos mais elaborados, a profundidade da fundação, sua flexibilidade e a estratificação do solo.

Breves históricos sobre o desenvolvimento dos vários métodos são encontrados nas

referências [12, 18, 25]. Em seu trabalho, Gazetas [12] classifica os diversos métodos em dois grupos: o primeiro, englobando soluções analíticas e semi-analíticas e; o segundo, representado pelo método dos elementos finitos.

O ponto de partida dos métodos que admitem o meio contínuo é a solução das equações de onda que governam as deformações impostas em cada camada de solo ou no semi-espaço. Entretanto, diversas condições de contorno são admitidas em cada solução.

Primeiro Grupo

Soluções Analíticas Geralmente, as formulações do problema são aproximadas, admitindo hipóteses simplificadoras quanto às tensões no contato solo-fundação. Isto significa considerar tensões tangenciais nulas no contato para vibrações verticais ou de rotação em torno de um eixo horizontal e tensões normais nulas para vibrações horizontais ou de torção. Tais soluções analíticas são obtidas, em geral, com o auxílio de transformadas integrais.

Soluções Semi-Analíticas As soluções semi-analíticas têm, como ponto de partida, a determinação dos deslocamentos de um ponto qualquer do contato solo-fundação, provocados por uma força harmônica normal ou tangencial, aplicada em outro ponto do contato. Com a discretização adequada da superfície de contato, é possível determinar as equações do problema e obter a solução impondo-se as condições de contorno do movimento de corpo rígido. O método dos elementos de fronteira, muito empregado na determinação da resposta dinâmica de grandes fundações, é classificado como uma solução semi-analítica.

Segundo Grupo

Método dos Elementos Finitos O método dos elementos finitos é usado na análise dinâmica de fundações com geometria complexa, enterradas ou sobre perfis de solo estratificado. É importante observar que os modelos dinâmicos apresentam características diferentes dos estáticos, quando se trata de representar o solo. A discretização do semi-espaço ou das camadas de solo em um modelo de dimensões finitas impede a dissipação de energia por propagação das ondas no solo, distorcendo o comportamento dinâmico do modelo. Este problema exige técnicas especiais para simular o efeito da propagação de ondas para regiões externas ao modelo.

Na discretização, não deve ser esquecido que a propagação de ondas requer dimensões de elementos finitos compatíveis com os comprimentos de onda. Por conseguinte, altas frequências de operação da máquina exigem um número elevado de elementos suficientemente pequenos.

Soluções para diferentes geometrias da base da fundação e parâmetros do solo podem ser encontradas em numerosos artigos empregando os diferentes métodos. As soluções na forma de tabelas, gráficos ou fórmulas fornecem resultados satisfatórios para a análise

dinâmica de grande maioria das fundações de máquinas, onde o custo de uma análise empregando um programa de elementos finitos ou elementos de fronteira ainda é proibitivo.

Atualmente, grande parte das soluções são apresentadas na forma de funções de rigidez dinâmica dos graus de liberdade de uma fundação associada. O termo fundação associada designa uma fundação que, exceto pela inércia admitida nula, possui as mesmas propriedades físicas e geométricas da fundação original. Para que os resultados acima sejam empregados diretamente na análise dinâmica do problema, será introduzido o conceito de função de rigidez dinâmica. No Capítulo 7, será explicado como, uma vez conhecidas estas funções, a resposta dinâmica permanente de uma fundação em bloco rígido pode ser calculada.

3.1.1 Função de Rigidez Dinâmica (*Impedance Function*)

A função de rigidez dinâmica ou simplesmente rigidez complexa $\mathbf{K}(w)$ de uma fundação associada é definida para cada excitação harmônica com frequência angular ω , como a relação entre o esforço dinâmico em regime permanente $\mathbf{R}(t)$ e o deslocamento $\mathbf{v}(t)$ da base da fundação.

$$\mathbf{K}(\omega) = \frac{\mathbf{R}(t)}{\mathbf{v}(t)}, \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{i\omega t}. \quad (3.3)$$

\mathbf{R}_0 e \mathbf{v}_0 são amplitudes complexas pois, em geral, o esforço aplicado e o deslocamento resultante não estão em fase. Assim, a rigidez complexa pode ser escrita na forma

$$\mathbf{K}(\omega) = K_1(\omega) + iK_2(\omega). \quad (3.4)$$

A componente real K_1 está associada à rigidez e à inércia do solo; e sua dependência da frequência deve-se à influência desta na inércia, já que as propriedades do solo são, essencialmente, independentes da frequência. A componente imaginária K_2 relaciona-se com os amortecimentos geométrico e interno do solo. Este corresponde ao amortecimento por histerese e é praticamente independente da frequência ω , enquanto aquele, associado à dissipação de energia devida à propagação de ondas, depende de ω [12].

A Eq. (3.4) também pode ser expressa colocando-se, em evidência, o coeficiente de rigidez estático K na forma

$$\mathbf{K} = K(\alpha + ia_0\beta), \quad (3.5)$$

onde α e β são coeficientes adimensionais e a_0 é a frequência adimensional dada por

$$a_0 = \frac{\omega B}{V_s}, \quad (3.6)$$

sendo

- ω a frequência angular da excitação;
 B a dimensão característica (ou seja, o raio para uma fundação circular e a metade da largura para uma retangular);
 V_s a velocidade da onda de distorção.

A existência do amortecimento por histerese afeta os coeficientes α e β . Numa tentativa para isolar esses efeitos é usual adotar-se a expressão

$$\mathbf{K} = K(\alpha + ia_0\beta)(1 + 2i\xi_h), \quad (3.7)$$

onde ξ_h representa a taxa de amortecimento por histerese. A adoção da Eq.(3.7) equivale a admitir os coeficientes α e β independentes do amortecimento por histerese (“Princípio da correspondência” [12, 22]). Se a hipótese for verdadeira, basta obter soluções para solos puramente elásticos e extrapolar os resultados para solos com amortecimento por histerese. De fato, para depósitos de solo com grande espessura que podem ser modelados por um semi-espaço homogêneo, os resultados são satisfatórios. Entretanto, no caso de uma camada pouco espessa de solo sobre um estrato rígido de rocha, os coeficientes são sensíveis ao amortecimento por histerese e a Eq. (3.7) não é aceitável.

O conceito de rigidez dinâmica de uma fundação associada pode ser melhor compreendido por meio de uma analogia com um sistema com um grau de liberdade. No sistema da Fig. 2.1, seja $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$ a excitação harmônica aplicada ao sistema e $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{i\omega t}$ a resposta permanente. Substituindo estas expressões na equação do movimento, tem-se

$$(k - m\omega^2) + ic\omega = \frac{\mathbf{p}(t)}{\mathbf{v}(t)}. \quad (3.8)$$

Da definição de função de rigidez dinâmica, Eq. (3.5), obtém-se

$$\mathbf{K} = (k - m\omega^2) + ic\omega \quad (3.9)$$

e os coeficientes

$$\alpha = 1 - \frac{m\omega^2}{k}, \quad \beta = \frac{V_s c}{B}, \quad (3.10)$$

com α associado às propriedades de rigidez e inércia do sistema e β ao amortecimento.

3.1.2 Teoria do Semi-Espaço

As funções de rigidez dinâmica, desde que disponíveis, permitem a análise de fundações diretas ou enterradas, apresentando diferentes formas da base e distintos perfis do maciço de solo. Um levantamento bibliográfico das soluções nas quais o maciço de solo é representado por meio de um semi-espaço; uma camada de solo sobre um estrato rígido ou; uma camada sobre um semi-espaço — considerando ou não os efeitos da não-homogeneidade e da anisotropia do solo — pode ser encontrada na referência [12].

Todavia, este trabalho restringir-se-á aos resultados da teoria do semi-espaço elástico, homogêneo e isótropo, cuja importância no estudo das fundações de máquinas deve-se,

principalmente, a dois fatores. Além do semi-espaço elástico ser a representação mais simples do maciço de solo, necessitando de um número mínimo de parâmetros, foram os resultados desta teoria que permitiram, pela primeira vez, a consideração racional das deformações do solo na resposta dinâmica da fundação.

A teoria do semi-espaço elástico estuda as vibrações de um bloco rígido na superfície de um semi-espaço de dimensões infinitas, homogêneo e isotrópico, cujas relações tensão-deformação são definidas por duas constantes: o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson. A teoria admite a hipótese de pequenas deformações, necessária para se considerar a elasticidade linear no caso de solos. Os métodos de cálculo empregados baseiam-se na teoria da propagação de ondas em um meio elástico e admitem diversas hipóteses simplificadoras para facilitar a resolução matemática do problema.

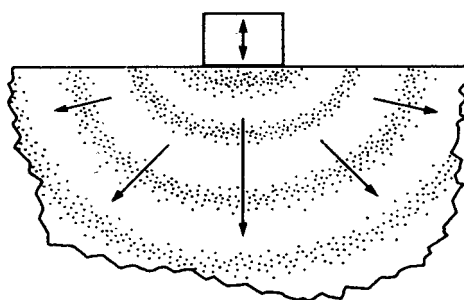


Fig. 3.1 – Semi-espaço elástico.

A primeira solução para o problema de vibrações verticais de uma fundação circular foi apresentada por Reissner, em 1936. A formulação adotada admitia uma distribuição uniforme de tensões no contato solo-fundação e seu grande mérito foi revelar a existência do amortecimento geométrico, associado à dissipação de energia por propagação de ondas no semi-espaço. Contudo, esta hipótese não é realista e novas formulações para o movimento vertical e para os demais movimentos da fundação foram desenvolvidas na década de 50. Estas formulações simulam o movimento de corpo rígido da fundação, admitindo as distribuições de tensões válidas para um carregamento estático e que produzem deslocamentos uniformes ou lineares no plano de contato.

As soluções obtidas também eram aproximadas já que, na realidade, as distribuições de tensões variam com a frequência da excitação. Somente nas décadas de 60 e 70, soluções mais rigorosas, válidas para um intervalo razoável de frequência adimensional, puderam ser obtidas. Os coeficientes α e β da função de rigidez apresentados na Fig. 3.2 são um exemplo dos resultados dessas soluções. Os índices dos coeficientes referem-se aos seguintes modos de vibração:

- v translação vertical;
- h translação horizontal;
- r rotação em torno de um eixo central de inércia da área da base da fundação;
- t rotação em torno do eixo vertical principal da fundação.

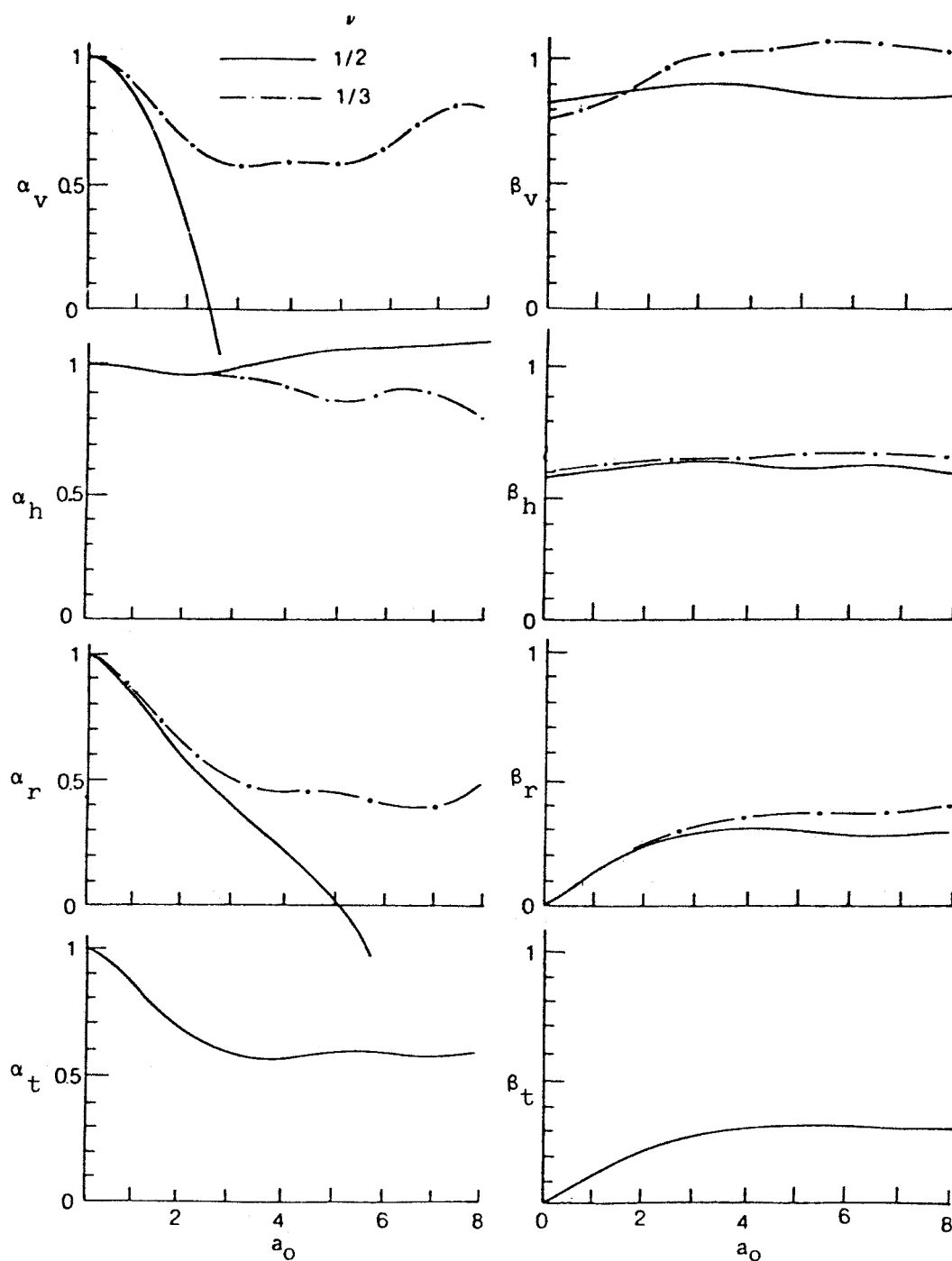


Fig. 3.2 – Funções de rigidez dinâmica para uma sapata rígida circular na superfície de um semi-espaco elástico [12].

Em 1962, Hsieh estudando as expressões fornecidas pela teoria do semi-espaco conseguiu colocá-las na forma da equação do movimento de um sistema discreto massa-mola-amortecedor, cujos coeficientes de amortecimento e rigidez dependiam da frequência de excitação. Embora modesto, esse passo possibilitou a elaboração dos modelos com parâmetros discretos, atualmente bastante difundidos na análise de fundações de máquinas.

3.2 Modelos com Parâmetros Discretos

Após estudar a variação dos coeficientes de amortecimento e rigidez com a frequência para o movimento vertical, Lysmer descobriu que a resposta da fundação num intervalo de baixas frequências ($a_0 < 1,5$) podia ser obtida utilizando coeficientes independentes da frequência. Posteriormente, Richart e Whitman estenderam a aproximação de Lysmer, demonstrando que os movimentos dos demais graus de liberdade podiam ser representados por modelos com parâmetros discretos (massa-mola-amortecedor), independentes da frequência [25, pp. 203-208].

Os coeficientes de rigidez dos modelos correspondiam aos valores adotados na análise estática enquanto os coeficientes de amortecimento foram escolhidos para o intervalo de frequência no qual ocorre a condição de ressonância. Por permitir o emprego da equação do movimento com coeficientes constantes, esta aproximação colaborou para a difusão dos resultados da teoria do semi-espaço entre os engenheiros. Ou seja, demonstrou-se que os resultados podiam ser colocados em uma forma simples, não apresentando maiores dificuldades que os procedimentos empíricos que eram empregados.

A Tabela 3.1 reproduz os coeficientes de rigidez e as taxas de amortecimento propostos por Richart *et alii* [25] para os quatro modos de vibração.

Novas soluções da teoria do semi-espaço, considerando a profundidade da fundação, a forma da base e a estratificação do maciço de solo, permitiram a adaptação posterior dos termos da Tabela 3.1 de modo a levar em conta estes efeitos [3]. Uma conclusão interessante quanto aos efeitos da forma da base na resposta foi que as fundações retangulares ($l/b < 4$) podiam ser aproximadas, no intervalo de $a_0 < 1,5$, por fundações circulares equivalentes, cujos raios estão indicados na tabela para cada modo de vibração.

3.3 Parâmetros do Solo

As deformações do solo, provocadas pelos esforços dinâmicos das fundações de máquinas, são geralmente muito menores que as produzidas pelo carregamento estático. No caso de pequenas deformações, o mecanismo que governa a relação tensão-deformação dos solos envolve principalmente o comportamento de contato entre partículas, não sendo controlado pelo movimento relativo das partículas associado às grandes deformações. Conseqüentemente, o módulo de elasticidade transversal G é maior para pequenos níveis de deformação, sendo portanto inadequado obter o valor de G diretamente de ensaios estáticos, a menos que medidas para pequenos níveis de deformação possam ser realizadas [3].

Mesmo para pequenos níveis de deformação, a relação tensão-deformação é não-linear e pode-se constatar que o descarregamento segue uma curva diferente da do carregamento, Fig. 3.3. A área interna de um ciclo completo, ou ciclo de histerese, representa a energia absorvida pelo solo durante a deformação. Para baixas amplitudes de deformação, o comportamento é essencialmente elástico com pouca ou nenhuma absorção de energia; nesta condição, define-se o módulo de elasticidade transversal máximo $G_{m\acute{a}x}$.

Tendo em vista a hipótese de linearidade física admitida na teoria, torna-se conveniente

adotar um módulo secante equivalente, definido pela reta que passa pelas duas extremidades do ciclo de histerese. O módulo secante depende da amplitude de deformação, variando com o número de ciclos até atingir uma condição estável. Este valor estável, compatível com as deformações no solo, é o módulo G utilizado na análise linear equivalente e, neste trabalho, denominado módulo de elasticidade transversal dinâmico.

Avaliação dos Parâmetros do Solo O cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento por meio das fórmulas fornecidas pela teoria do semi-espaço requer a avaliação dos seguintes parâmetros do solo:

- G módulo de elasticidade transversal dinâmico;
 ξ_h taxa de amortecimento interno;
 ν coeficiente de Poisson;
 ρ densidade.

Uma grande variedade de ensaios de laboratório e de campo podem ser usados na determinação dos parâmetros do solo. Descrições dos ensaios são encontradas nas referências

Tabela 3.1 – Parâmetros discretos equivalentes para a análise de uma fundação circular sobre um semi-espaço elástico.

Modo de vibração	Coefficiente de rigidez	Fator de massa	Taxa de amort. geométrico	Raio equivalente da fundação retangular
vertical	$\frac{4Gr_0}{1-\nu}$	$\frac{m(1-\nu)}{4\rho r_0^3}$	$\frac{0,425}{\sqrt{B_i}}$	$\left(\frac{bl}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$
horizontal	$\frac{32(1-\nu)Gr_0}{7-8\nu}$	$\frac{(7-8\nu)m}{32(1-\nu)\rho r_0^3}$	$\frac{0,29}{\sqrt{B_i}}$	
rotação*	$\frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{3(1-\nu)I_0}{8\rho r_0^5}$	$\frac{0,15}{(1+B_i)\sqrt{B_i}}$	$\left(\frac{lb^3}{3\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$
torção**	$\frac{16Gr_0^3}{3}$	$\frac{I_T}{\rho r_0^5}$	$\frac{0,50}{1+2B_i}$	$\left[\frac{bl(b^2+l^2)}{6\pi}\right]^{\frac{1}{4}}$

* rotação em torno de um eixo horizontal central de inércia da área da base da fundação.

** rotação em torno do eixo vertical principal da fundação.

r_0 raio da fundação circular ou raio equivalente da fundação retangular;

l, b dimensões da fundação retangular, respectivamente na direção do eixo horizontal de rotação e na direção perpendicular a ele;

I_0 momento de inércia de massa em relação ao eixo central de inércia da área da base da fundação;

I_T momento de inércia de massa em relação ao eixo principal vertical da fundação;

m massa da fundação;

ρ densidade do solo;

G módulo de elasticidade transversal dinâmico do solo;

ν coeficiente de Poisson do solo.

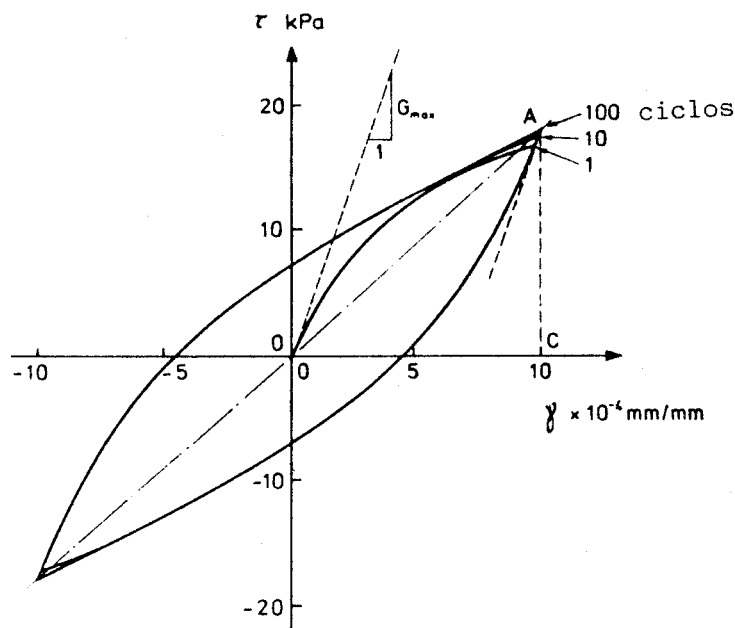


Fig. 3.3 – Ciclo de histerese.

[12, 25] juntamente com suas limitações, em particular as restrições relativas às amplitudes de deformação.

Em geral, os ensaios envolvem incertezas consideráveis e exigem alguma experiência do projetista para a escolha dos valores a serem usados na análise. Nos projetos mais importantes, os resultados de diferentes tipos de ensaio são comparados para se obter uma boa estimativa dos parâmetros. Como nenhum dos ensaios é simples ou barato, o emprego de correlações empíricas para a determinação dos parâmetros do solo, no caso de fundações de menor custo, é usual.

3.3.1 Módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico

O valor de G é obtido a partir de ensaios de campo ou de laboratório. Resultados de ensaios de campo são sempre desejáveis, mas geralmente são caros e de difícil interpretação, não permitindo avaliar os efeitos de escavação da fundação e de alteração no lençol freático. Eles são particularmente recomendados na correção do comportamento dinâmico de fundações existentes.

Os ensaios de laboratório, por outro lado, permitem simular diferentes condições do solo, tornando possíveis estudos paramétricos das principais características que afetam o valor de G . De acordo com Richart *et alii* [25], elas são as seguintes:

- amplitude de deformação associada ao movimento dinâmico;
- tensão média efetiva;
- índice de vazios;
- formato do grão e a estrutura do solo;

- histórico de tensões.

Entretanto, para que os ensaios de laboratório possam reproduzir as condições a que o solo estaria submetido no campo, torna-se necessário considerar os efeitos provenientes da amostragem e da preparação do corpo de prova. Isto é alcançado pela padronização dos ensaios e comparação dos resultados com os obtidos em ensaios de campo.

A seguir, são descritos resumidamente os principais ensaios empregados no estudo de uma fundação de máquina.

Ensaio de Campo

a) Ensaio sísmico de superfície (*steady-state oscillator test*).

Neste ensaio, um oscilador é colocado na superfície do terreno e, pelo posicionamento de acelerômetros, procura-se determinar o comprimento da onda de Rayleigh (Fig. 3.4). Para solos com coeficientes de Poisson maiores que 0,35, as velocidades de propagação das ondas de distorção e de Rayleigh são praticamente iguais (Fig. 3.5) e o valor de $G_{\text{máx}}$ é calculado pela expressão

$$G_{\text{máx}} = \rho V_s^2 \approx \rho f^2 L_R^2, \quad (3.11)$$

com

- ρ densidade do solo;
- f freqüência do oscilador;
- L_R comprimento da onda de Rayleigh;
- V_s velocidade da onda de distorção (onda transversal);
- V_R velocidade da onda de Rayleigh;
- V_P velocidade da onda de compressão (onda longitudinal).

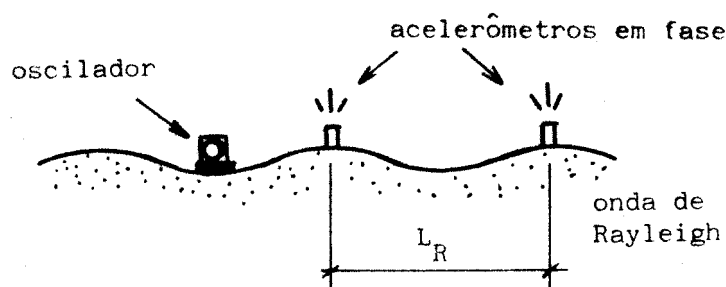


Fig. 3.4 – Ensaio sísmico de superfície.

b) Ensaio sísmico de profundidade (*cross-hole survey*).

Conforme mostra a Fig. 3.6, um impulso é gerado em um furo de sondagem e o tempo necessário para que a onda de distorção atinja outro furo é medido. Com base no espaçamento entre os furos e no tempo decorrido, calcula-se a velocidade V_s . Neste arranjo, o dispositivo que produz os impulsos deve gerar predominantemente ondas

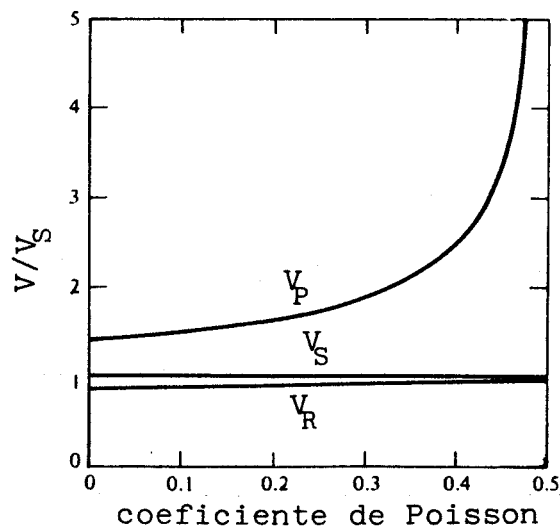


Fig. 3.5 – Variação das velocidades de propagação de onda com o coeficiente de Poisson.

de distorção de modo a facilitar o reconhecimento da onda no receptor. A principal vantagem deste ensaio é permitir uma avaliação precisa da variação de G com a profundidade, além de possibilitar a verificação do material extraído na sondagem.

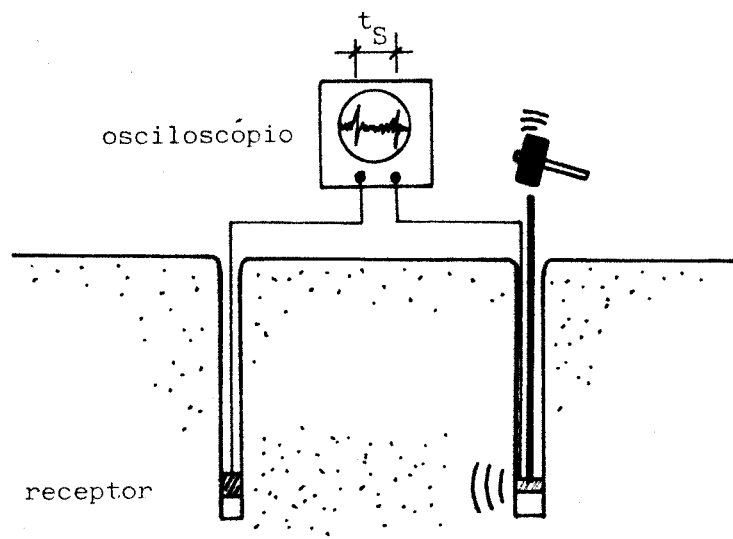


Fig. 3.6 – Ensaio sísmico de profundidade.

Os valores de $G_{m\acute{a}x}$ obtidos nos ensaios de propagação de onda correspondem a amplitudes de deformação abaixo dos valores usuais encontrados nas fundações de máquinas. Assim, os valores de G empregados na análise dinâmica variam entre 0,5 a 1,0 de $G_{m\acute{a}x}$, dependendo do modo de vibração da fundação.

c) Ensaio com blocos de concreto.

Um bloco rígido de dimensões razoáveis (1 a 3 m) é moldado *in loco* e analisa-se o decremento das amplitudes do movimento produzido por esforços de impacto que

excitam os vários modos de vibração. Os blocos são úteis nos casos de solos anisótropos ou muito estratificados.

Ensaio de Laboratório Embora seja possível realizar ensaios cíclicos triaxiais e de cisalhamento simples para amplitudes de distorção muito baixas (10^{-4}), estes ensaios exigem equipamentos complexos de medição e estão restritos a frequências relativamente baixas (em torno de 2 Hz) para serem empregados na análise de fundações de máquinas. Uma alternativa são os ensaios de coluna ressonante, muito utilizados atualmente por possibilitarem a avaliação de G numa faixa extensa de amplitudes de distorção. Em sua configuração básica, uma amostra cilíndrica de solo é excitada, inicialmente, no modo de compressão e, em seguida, no modo de torção, sendo medidas as frequências de ressonância desses modos.

O módulo de elasticidade transversal é calculado a partir das frequências de ressonância empregando a teoria de propagação de ondas em barras prismáticas, enquanto o amortecimento pode ser obtido da curva de decremento das amplitudes assim que o dispositivo de excitação for desligado.

3.3.2 Coeficiente de Poisson

No laboratório, o coeficiente de Poisson é avaliado a partir dos módulos de elasticidade E e elasticidade transversal G obtidos nos ensaios de coluna ressonante. Entretanto, devido à pequena sensibilidade dos problemas de interação solo-estrutura à variação do coeficiente de Poisson, é possível adotar um valor com base no tipo de solo, conforme indica a Tabela 3.2 [3].

Tabela 3.2 – Coeficientes de Poisson.

Argila saturada	0,45	-	0,50
Argila parcialmente saturada	0,35	-	0,40
Areia ou cascalho compacto	0,40	-	0,50
Areia ou cascalho medianamente compacto	0,30	-	0,40
Silte	0,30	-	0,40

3.3.3 Densidade do solo

Enfatiza-se que a densidade considerada é a densidade natural do solo pois, numa visão simplista, refere-se à massa de solo, incluídas as fases sólida e líquida, submetida às vibrações.

3.3.4 Amortecimento interno

O amortecimento interno do material ou amortecimento por histerese representa a energia do sistema dissipada pelo atrito interno entre as partículas de solo.

Os ensaios de coluna ressonante indicam que as taxas de amortecimento variam entre 1 a 10%, dependendo do tipo de solo e da amplitude de deformação, e que o amortecimento é praticamente independente da frequência de excitação.

Na ausência de dados precisos sobre o amortecimento interno, é freqüente adotar-se uma taxa de amortecimento viscoso equivalente entre 3 a 5% , tendo em vista que o amortecimento por histerese é reduzido quando comparado com o amortecimento geométrico do sistema solo-fundação.

Capítulo 4

Considerações Quanto ao Amortecimento

Geralmente os mecanismos de dissipação de energia, responsáveis pelo amortecimento em uma estrutura, não são bem definidos. No entanto, é evidente a influência desses mecanismos na resposta dinâmica da estrutura e, conseqüentemente, alguma forma de amortecimento deve ser considerada na formulação matemática do problema.

No Capítulo 2, as forças de amortecimento foram admitidas proporcionais à velocidade, mas esta hipótese deveu-se mais à simplicidade matemática que propicia, pois conduz a equações diferenciais lineares para o movimento, do que ao significado físico do fenômeno que representa. Como muitos sistemas físicos apresentam tipos de amortecimento diferentes do admitido, a seguir são descritos àqueles comumente empregados na engenharia de estruturas.

4.1 Tipos de Amortecimento

Para um sistema com um grau de liberdade submetido a uma excitação $p(t)$, a equação do movimento pode ser colocada na forma

$$m\ddot{v} + f_A(\dot{v}, v, t) + kv = p(t), \quad (4.1)$$

onde $f_A(\dot{v}, v, t)$ representa a força de amortecimento.

Normalmente f_A é descrita por uma força proporcional a uma potência da velocidade $\dot{v}(t)$ ou do deslocamento $v(t)$, mas de modo a estar sempre em fase com a velocidade.

Amortecimento de Coulomb A força de amortecimento de Coulomb tem intensidade constante e independe do deslocamento, mas troca de sinal instantaneamente de acordo com o sentido da velocidade. O amortecimento de Coulomb resulta do movimento relativo de duas superfícies e depende da força normal de contato e do coeficiente de atrito cinemático. A força de amortecimento é dada na forma

$$f_A = c_c \frac{\dot{v}}{|\dot{v}|}, \quad (4.2)$$

onde c_c é a intensidade da força de atrito de Coulomb e o termo $\dot{v}/|\dot{v}|$ indica que f_A está em fase com a velocidade.

Amortecimento Viscoso O amortecimento viscoso linear é caracterizado por uma força de amortecimento proporcional à velocidade.

$$f_A = c_v \dot{v}. \quad (4.3)$$

Além da simplicidade matemática que oferece, ele desempenha um papel importante na análise de fundações de máquinas, pois o mecanismo de dissipação de energia por propagação de ondas no solo (amortecimento geométrico) pode ser representado por um amortecedor do tipo viscoso.

Amortecimento por Histerese Para um material anelástico, submetido a carregamentos cíclicos, a energia dissipada é representada pela área do ciclo de histerese no diagrama tensão-deformação. Ensaaios com diferentes materiais têm mostrado que a dissipação de energia no interior do material é proporcional à amplitude de deslocamento com uma pequena dependência da frequência.

A resposta permanente de um sistema submetido a uma excitação harmônica de amplitude constante é também harmônica e um número imaginário pode ser empregado para indicar que o deslocamento e a velocidade estão defasados de 90° . Assim, em seus trabalhos Roesset [27] e Novak [22] adotam a seguinte expressão para a força de amortecimento por histerese:

$$f_A = 2i\xi_h k v(t), \quad (4.4)$$

onde ξ_h é a taxa de amortecimento por histerese.

Este tipo de amortecimento é também conhecido por amortecimento linear por histerese e não se aplica diretamente ao cálculo da resposta transiente do sistema, onde deslocamento e velocidade não precisam estar defasados de 90° .

4.2 O Amortecimento nas Fundações de Máquinas

As características dinâmicas da interação solo-fundação são convenientemente descritas mediante as funções de rigidez dinâmica (*impedance functions*), sendo que a parte real da função define as propriedades de rigidez e inércia e, a parte imaginária, descreve o amortecimento.

A função de rigidez dinâmica também pode ser expressa por meio de coeficientes de rigidez e amortecimento viscoso. Logo, a reação do solo assume a forma

$$\mathbf{R} = k\mathbf{v} + c\dot{\mathbf{v}} \quad (4.5)$$

Os coeficientes de rigidez e amortecimento dependem da frequência, mas normalmente é possível escolher valores constantes para um determinado intervalo de frequência.

De modo aproximado, o amortecimento por histerese do material pode ser incorporado aos coeficientes de rigidez e amortecimento que aparecem na Eq. (4.5), utilizando os coeficientes k_T e c_T fornecidos pelas equações

$$k_T = k - 2\xi_h c \omega, \quad (4.6)$$

$$c_T = c + \frac{2\xi_h k}{\omega}, \quad (4.7)$$

onde k e c são calculados ignorando-se o amortecimento interno, e ω é a frequência angular da excitação [22]. As Eqs. (4.6) e (4.7) são deduzidas diretamente das Eqs. (3.7) e (3.8). A Eq. (4.7) indica que a um amortecimento por histerese corresponde um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente dependente da frequência.

O coeficiente de amortecimento c_T diz respeito apenas ao amortecimento proveniente da interação de uma fundação rígida e o solo. Todavia, quando as deformações da estrutura de fundação são importantes para a resposta dinâmica, o amortecimento estrutural deve ser considerado na análise dinâmica. Ele geralmente depende do material e do tipo de estrutura, sendo representado pelo amortecimento por histerese.

A introdução do amortecimento estrutural causa um problema adicional já que ele nem sempre está associado individualmente aos elementos estruturais. Dessa forma, dificilmente a matriz de amortecimento global da fundação pode ser obtida a partir das matrizes dos elementos. Na prática, apenas o amortecimento do solo é expresso mediante coeficientes de amortecimento, sendo o amortecimento estrutural descrito por taxas de amortecimento associadas aos principais modos de vibração.

Um procedimento simples, embora aproximado, para contornar esse problema consiste em empregar o método da superposição modal no qual são usados os modos de vibração e as frequências do sistema não-amortecido. As equações modais são admitidas desacopladas e, para cada modo de vibração, calcula-se uma taxa de amortecimento viscoso equivalente.

De acordo com Clough [9]: “Embora as fórmulas para o cálculo da taxa de amortecimento equivalente sejam bastante arbitrárias, este procedimento tem apresentado resultados aceitáveis, usando somente alguns dos modos de vibração na análise de um sistema estrutura mais fundação excitado por um sismo. Entretanto, os erros introduzidos ao desprezar-se os termos acoplados da matriz de amortecimento não foram determinados de um modo genérico e é provável que eles sejam significativos em alguns casos.” Conclusão semelhante foi obtida por Novak e El Hifnawy [22] que compararam as taxas de amortecimento modal equivalente para diversas estruturas e fundações de máquinas com as taxas de amortecimento calculadas considerando os modos de vibração amortecidos (autovalores e autovetores complexos).

A seguir, apresenta-se a dedução da taxa de amortecimento modal equivalente diretamente a partir das equações do movimento.

4.3 Taxa de Amortecimento Modal Equivalente

Para um sistema com vários graus de liberdade e amortecimento do tipo viscoso, as equações do movimento assumem a forma matricial

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}_v \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{p}(t). \quad (4.8)$$

Considerando apenas a resposta permanente provocada por uma excitação harmônica na forma

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{i\Omega t}, \quad (4.9)$$

resultam as seguintes equações para os deslocamentos e velocidades do sistema

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i\Omega t}, \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = i\Omega \mathbf{v}_0 e^{i\Omega t} = i\Omega \mathbf{v}. \quad (4.11)$$

Para um sistema com amortecimento por histerese, a solução das equações do movimento exige uma análise não-linear no domínio do tempo. No entanto, a resposta permanente do sistema submetido a uma excitação harmônica sugere um tipo de amortecimento independente da frequência, denominado amortecimento linear por histerese, no qual as forças de amortecimento são dadas por

$$\mathbf{f}_A = i \mathbf{c}_h \mathbf{v} = \frac{\mathbf{c}_h}{\Omega} \dot{\mathbf{v}}. \quad (4.12)$$

Quando o mecanismo de amortecimento por histerese é o mesmo para todo o sistema, a matriz \mathbf{c}_h é proporcional à matriz de rigidez, sendo descrita por

$$\mathbf{c}_h = 2 \xi_h \mathbf{k}, \quad (4.13)$$

onde ξ_h é a taxa de amortecimento por histerese do sistema. Introduzindo o amortecimento por histerese nas equações do movimento, tem-se

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}} + \left(\mathbf{c}_v + \frac{\mathbf{c}_h}{\Omega} \right) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{p}_0 e^{i\Omega t}. \quad (4.14)$$

Admitindo que os modos de vibração do sistema não-amortecido sejam ortogonais às matrizes de amortecimento \mathbf{c}_v e \mathbf{c}_h , a equação para o modo i , expressa nas coordenadas generalizadas normais, Eq. (2.82), assume a forma

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = \phi_i^T \mathbf{p}_0 e^{i\Omega t}, \quad (4.15)$$

com

$$C_i = \phi_i^T \left(\mathbf{c}_v + \frac{\mathbf{c}_h}{\Omega} \right) \phi_i, \quad (4.16)$$

onde M_i , C_i e K_i são os termos da diagonal das matrizes de massa, amortecimento e rigidez generalizadas.

Como as equações são desacopladas, é possível definir a taxa de amortecimento equivalente do modo de vibração i analogamente à taxa de amortecimento para um sistema com um grau de liberdade

$$\xi_i = \frac{C_i}{2\omega_i M_i} = \frac{1}{2\omega_i M_i} \left(\phi_i^T \mathbf{c}_v \phi_i + \frac{1}{\Omega} \phi_i^T \mathbf{c}_h \phi_i \right), \quad (4.17)$$

ou empregando a Eq. (4.13)

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{2\omega_i M_i} \left(C_{vi} + \frac{2\xi_h}{\Omega} K_i \right) \\ &= \xi_{vi} + \xi_h \frac{\omega_i}{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Na maioria dos problemas práticos ξ_h é pequeno e a resposta dinâmica depende principalmente dos fatores de amplificação na vizinhança da condição de ressonância. Como é adotado um único valor independente da frequência na análise modal clássica, considera-se razoável definir o amortecimento viscoso equivalente ao amortecimento por histerese para $\Omega = \omega_i$, resultando

$$\xi_i \approx \xi_{vi} + \xi_h. \quad (4.19)$$

Introduzindo a Eq. (4.13) em (4.17), obtém-se uma expressão aproximada para as taxas de amortecimento modal equivalente em função da matriz \mathbf{c}_v e da taxa de amortecimento por histerese.

$$\xi_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{c}_v \phi_i}{2\omega_i M_i} + \frac{\xi_h}{\omega_i \Omega M_i} \phi_i^T \mathbf{k} \phi_i. \quad (4.20)$$

Se a estrutura possuir mecanismos de dissipação de energia com diferentes taxas de amortecimento por histerese, o segundo termo da Eq. (4.20) poderá ser reescrito de uma forma aproximada. Para uma estrutura, com S partes possuindo taxas de amortecimento ξ_{hj} distintas, ter-se-á

$$\xi_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{c}_v \phi_i}{2\omega_i M_i} + \frac{1}{\omega_i \Omega M_i} \sum_{j=1}^S \xi_{hj} \phi_i^T \mathbf{k}_j \phi_i, \quad (4.21)$$

onde \mathbf{k}_j é a matriz de rigidez contendo apenas os termos associados à parte j da estrutura. Neste caso, não mais está garantida a ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz \mathbf{c}_h e, a expressão adotada corresponde ao desprezo dos termos fora da diagonal da matriz generalizada.

Finalmente é importante ressaltar que expressões semelhantes às deduzidas neste capítulo para a taxa de amortecimento modal equivalente podem ser obtidas de modo mais abrangente, considerando outros tipos de amortecimento, a partir da energia dissipada pelo sistema estrutura-fundação [22, 27].

Capítulo 5

Classificação das Fundações de Máquinas

Nos capítulos anteriores foram expostos os elementos da análise dinâmica de fundações de máquinas de uma maneira conceitual, porém bastante genérica. Como regra básica na organização desses capítulos, procurou-se não associar os diversos conceitos a determinados tipos de máquinas e fundações de máquinas.

Por outro lado, uma abordagem diferente costuma ser adotada nos livros clássicos de fundações de máquinas [15, 29], nos quais a primeira preocupação é o projeto da fundação. Nestes livros, os assuntos estão dispostos de acordo com o tipo de fundação ou com o tipo da própria máquina. Embora conveniente para uma consulta rápida, esta disposição acaba levando a um texto repetitivo devido à rerepresentação dos mesmos conceitos e à formulação de modelos matemáticos semelhantes para os diversos tipos de fundação.

Um modo simples de se conciliar as duas abordagens será colocado em prática nos Capítulos 7 a 9. Ele consiste em exemplificar as análises dinâmicas de algumas fundações representativas visando discutir os principais aspectos envolvidos e minorar a estantiquidade das apresentações tradicionais. Para atingir tais objetivos, são listadas a seguir as classificações usuais das máquinas e de suas fundações tendo em vista o projeto dinâmico destas últimas.

5.1 Classificação das Fundações

Uma classificação das fundações de máquinas bastante difundida entre os projetistas é a classificação proposta por Major [15]. Nela, as fundações são divididas em dois grupos, de acordo com as características construtivas.

5.1.1 Blocos ou Fundações Simples

Fazem parte deste grupo as fundações maciças e as fundações contendo aberturas com até 50% de seu volume (Fig. 5.1).

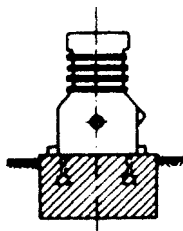


Fig. 5.1 – Fundação simples.

5.1.2 Fundações Complexas

Este grupo costuma ser subdividido segundo o arranjo estrutural em:

- a) fundações tipo parede (*wall-like foundations*), formadas por duas paredes que suportam a máquina (Fig. 5.2-a);
- b) fundações tipo caixão (*caisson type foundations*), nas quais elementos estruturais planos são dispostos de modo que a fundação possa ser considerada rígida (Fig. 5.2-b);
- c) fundações aporticadas (*framed foundations*), caracterizadas por uma estrutura constituída de pórticos transversais travados por vigas longitudinais (Fig. 5.2-c);
- d) fundações caracterizadas por uma laje ou grelha superior sustentada por aparelhos de apoio. As colunas que suportam os aparelhos de apoio são esbeltas e praticamente estão livres de esforços dinâmicos (Fig. 5.2-d)

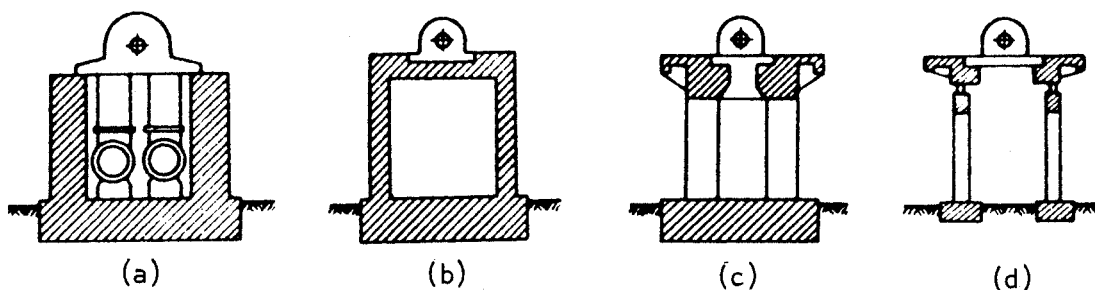


Fig. 5.2 – Fundações complexas.

As fundações podem ser diretas, como mostrado nas figuras, ou profundas, apoiando-se sobre estacas ou tubulões.

É importante observar que esta classificação tem pouco interesse para a análise dinâmica. Por exemplo, as fundações simples e as fundações tipo caixão são geralmente modeladas como blocos rígidos, com a última exigindo apenas mais algumas verificações quanto à frequência natural de seus elementos estruturais. Sendo o objetivo básico deste trabalho a análise dinâmica da fundação, será adotada a seguinte classificação:

- i. fundações para máquinas que produzem esforços periódicos de baixa ou média frequência (Capítulos 6 e 7);
- ii. fundações para máquinas que produzem esforços de impacto (Capítulo 8);

- iii. fundações de turbinas (Capítulos 6 e 9);
- iv. fundações para outros tipos de máquinas e equipamentos, como prensas, moinhos, torres de radar etc.

5.2 Classificação das Máquinas

Com o objetivo de uniformizar a nomenclatura, as máquinas serão classificadas, neste trabalho, de acordo com a frequência de operação e os esforços dinâmicos gerados.

- a) Máquinas que geram esforços de impacto.

Pertencem a este grupo os martelos de forja, os martelos de corte e alguns tipos de prensa. Estas máquinas são geralmente assentadas em blocos de fundação maciços.

- b) Máquinas com frequências de operação muito baixas ($f_0 < 1$ Hz).

As máquinas da indústria de papel e moinhos a vapor fazem parte deste grupo. Geralmente, elas são assentadas em fundações tipo *radier*.

- c) Máquinas com frequências de operação baixas ($f_0 < 10$ Hz).

Engloba os grandes motores alternativos (*reciprocating engines*), que podem ser assentados tanto em blocos como em fundações complexas.

- d) Máquinas com frequências de operação médias ($10 \text{ Hz} \leq f_0 \leq 25 \text{ Hz}$).

Fazem parte deste grupo os motores alternativos de tamanho médio, tais como os motores à combustão movidos a diesel ou gás. Neste caso, geralmente são recomendadas fundações em bloco rígido sobre aparelhos de apoio.

- e) Máquinas com frequências de operação altas ($f_0 > 25$ Hz).

As turbinas e os compressores normalmente pertencem a este grupo, sendo assentados em fundações aporticadas ou em uma laje sustentada por aparelhos de apoio.

Capítulo 6

Critérios e Medidas Corretivas

A construção de uma fundação de máquina é um empreendimento que abrange diversas Áreas da Engenharia e envolve profissionais com diferentes interesses. Além do proprietário, ela abrange os fabricantes da máquina e equipamentos, o projetista da fundação, o empreiteiro e, no caso de grandes máquinas, consultores de geotecnia, de instrumentação de vibrações etc. Como os critérios de avaliação de desempenho e aceitação referem-se a valores limites medidos após a construção e instalação da máquina, torna-se importante estabelecer, desde o início, as responsabilidades das partes envolvidas. Assim, já na concorrência e depois no pedido de compra da máquina, o proprietário deve expressar em contrato a observância de condições satisfatórias de operação, segundo normas aplicáveis a cada caso. É comum a adoção de normas internacionais ISO (International Organization for Standardization) ou alemãs VDI (Verein Deutscher Ingenieure) quando não existirem normas nacionais englobando o tipo de máquina.

A definição clara das responsabilidades e critérios de desempenho somada à exigência da entrega de memoriais completos ao proprietário facilitam a interação das partes envolvidas, quer na discussão das hipóteses de cálculo, quer na troca de informações, e têm a vantagem de orientar os responsáveis pela operação e manutenção da máquina e equipamentos.

Um cuidado especial deve ser dado à qualidade da construção para que as condições admitidas em projeto sejam verificadas. Assentamento da fundação em aterro não compactado, formas mal executadas, concreto pobre, juntas construtivas inadequadas e a colocação errada da armadura podem comprometer totalmente a fundação [16].

6.1 Dados Necessários para o Projeto

Os dados necessários para o projeto de uma fundação solicitada dinamicamente podem ser divididos em quatro grupos:

1. características da máquina;
2. características da instalação industrial;

3. parâmetros do solo;
4. condições ambientais.

Dependendo da importância da máquina e do número de unidades a serem instaladas, torna-se necessária a realização de ensaios experimentais e medidas de vibração em protótipos para a avaliação de alguns dados, tais como parâmetros do solo e esforços dinâmicos desenvolvidos. Muitas vezes, alguns dados básicos não estão disponíveis e o projetista deve adotar valores que permitam um estudo paramétrico, baseado em informações obtidas na bibliografia.

6.1.1 Características da Máquina

As características da máquina devem ser obtidas junto ao fabricante. Para os tipos de máquina usuais, grande parte das informações é obtida em catálogos ou manuais de engenharia. Os seguintes itens são necessários:

- a) Desenho da máquina com as dimensões principais e a localização do centro de gravidade.
A posição dos apoios, áreas livres para acesso e tubulação, localização de equipamentos auxiliares e outros dados geométricos são itens que condicionam as dimensões da estrutura de fundação.
- b) Esquemas de montagem da máquina indicando carregamentos construtivos e de manutenção.
- c) Plantas de carga e memorial dos esforços dinâmicos contendo:
 - peso da máquina e de suas partes móveis;
 - intensidade, direção e ponto de aplicação das forças estáticas e dinâmicas, de operação ou excepcionais;
 - intervalo de variação da frequência de operação;
 - variação da temperatura junto aos elementos estruturais.

Os valores fornecidos devem indicar as incertezas envolvidas e alertar para alterações devido ao desgaste normal dos elementos da máquina, de acordo com um programa de manutenção estabelecido pelo próprio fabricante.

Alguns fabricantes fornecem os esforços dinâmicos na forma de esforços estáticos equivalentes. Se isto ocorrer, deve-se esclarecer quais foram as hipóteses adotadas (base rígida ou flexível, método de cálculo, condições de operação abrangidas etc.) e, principalmente, se já estão embutidos coeficientes de segurança nos valores fornecidos. No caso de esforços elevados, pode ser vantajoso refazer a análise dinâmica efetuada pelo fabricante, agora considerando as condições reais da fundação.

6.1.2 Características da Instalação Industrial

Problemas de interferência com equipamentos e construções existentes (espaço físico, vibrações, transmissão de calor etc.) são levantados no início do projeto da fundação, a partir do arranjo físico da instalação industrial e das características dos equipamentos mecânicos e de suas fundações. Também deve ser determinada a função que a máquina desempenha na instalação. Muitas vezes ela é extremamente importante para o processo industrial e sua parada implica em perdas consideráveis.

6.1.3 Parâmetros do Solo

Uma etapa importante do projeto é a obtenção das propriedades representativas do solo e de dados sobre sua formação e constituição (estratificação, leito rochoso, variação das propriedades com a profundidade etc.).

Quando os esforços dinâmicos não causam alterações significativas na resistência e na estrutura do solo e as amplitudes de deslocamento ficam restritas a alguns centésimos de milímetro, verifica-se experimentalmente que a consideração da fundação como um sistema elástico linear fornece resultados satisfatórios à resposta dinâmica da fundação (Capítulo 3).

6.1.4 Condições Ambientais

Dois aspectos são considerados:

- os efeitos das vibrações da máquina em pessoas e equipamentos;
- a proximidade de fontes importantes de vibração tais como o tráfego de veículos, bate-estacas, e explosões.

6.2 Critérios de Desempenho

Os critérios utilizados para avaliar o desempenho de uma fundação de máquina comumente são expressos em termos de valores limites de amplitudes de velocidade e aceleração, referindo-se aos efeitos provocados em pessoas, estruturas e na própria máquina. Para vibrações permanentes provocadas por esforços dinâmicos harmônicos, os critérios podem ser expressos por meio de amplitudes de deslocamento associadas à frequência do movimento. Os valores limites dependem da instalação industrial e da função da máquina no processo industrial, e envolvem considerações que vão desde o custo inicial até a manutenção e substituição da máquina.

Os critérios apresentados a seguir resumem dados experimentais de diversos pesquisadores e foram reunidos por Richart *et alii* [25] e Moore [17]. Eles abrangem, principalmente, o movimento de fundações em regime permanente, para o qual as condições do solo são admitidas estáveis, não se considerando a compactação ou mudanças de geometria do solo.

6.2.1 Efeitos em Pessoas

Estudos experimentais têm demonstrado que a sensibilidade humana às vibrações depende tanto da amplitude quanto da frequência da vibração [17, 25]. Isto é ilustrado na Figura 6.1 que mostra os valores limites das amplitudes de deslocamento para pessoas em pé, submetidas a vibrações na direção vertical. Cinco curvas delimitam as diferentes zonas de sensibilidade, que variam desde “imperceptível” até “severa para pessoas.”

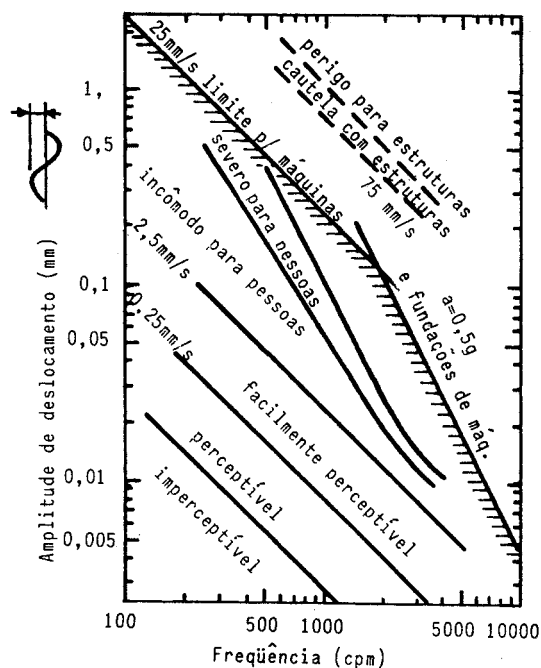


Fig. 6.1 – Limites de amplitude de deslocamento [25, pág. 311].

Para o intervalo de 1 a 80 Hertz a norma internacional ISO 2631 - *Guide to the evaluation of human exposure to whole-body vibration* (1978) [17, pp. 14-19], estabelece três limites de vibração a partir das seguintes condições:

- a) preservação do conforto (limite de conforto);
- b) preservação da eficiência no trabalho (limite de fadiga);
- c) preservação da saúde ou segurança (limite de exposição).

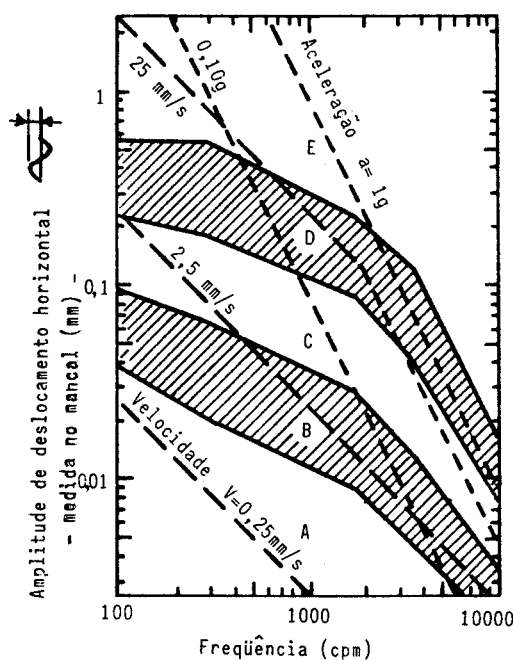
A norma apresenta, na forma de gráficos, os limites de fadiga em função da frequência de vibração e do tempo diário de exposição para vibrações longitudinais e transversais. Os limites de exposição são obtidos dobrando-se os valores admissíveis dos limites de fadiga, enquanto os limites de conforto correspondem a um terço dos mesmos valores. Coeficientes multiplicadores são utilizados para considerar o horário, o tipo e o local da atividade desenvolvida, e a natureza da vibração (periódica, intermitente, rara etc.).

Não devem ser ignorados aspectos psicológicos como, por exemplo, o fato de trabalhadores envolvidos diretamente com a máquina serem menos susceptíveis às vibrações

que outros em sua vizinhança, para os quais os limites fisiológicos fornecidos podem ser excessivos.

6.2.2 Máquinas Vibrando em Regime Permanente

A Fig. 6.2 mostra as curvas que delimitam as zonas de níveis de desempenho para máquinas rotativas na frequência de operação. As amplitudes de deslocamento referem-se ao movimento horizontal medido na caixa do mancal e não no eixo. É importante observar que diversos autores [3, 25] utilizam a mesma figura na verificação das amplitudes de deslocamento na direção vertical.



- E Perigoso. Parar a máquina para evitar acidente.
- D Próximo da ruptura. Corrigir em 2 dias para evitar quebra.
- C Defeituoso. Corrigir em 10 dias para economizar em manutenção.
- B Pequenos defeitos. Correção economiza em manutenção.
- A Equipamento novo.

Fig. 6.2 – Critérios para a vibração de máquinas rotativas (Blake, 1964, citado em [25, pág. 313]).

O conceito de fator de serviço introduzido por Blake ([25, pág. 312]), que consiste em multiplicar as amplitudes calculadas por um coeficiente que depende da instalação industrial e da importância de cada máquina, permite avaliar o desempenho de diversos tipos de máquinas utilizando a Fig. 6.2 e a Tabela 6.1.

A Tabela 6.2 estabelece uma correlação entre faixas de amplitudes de velocidade e condições de operação para máquinas rotativas. Richart *et alii* [25] chamam a atenção para a semelhança entre os valores da tabela e as velocidades limites indicadas na Fig. 6.1, constatando que uma condição adequada para a máquina normalmente satisfaz os critérios para pessoas.

Tabela 6.1 – Fatores de serviço (Blake, 1964, em [25, pág. 312]).

Bomba centrífuga de estágio único, motor elétrico, ventilador	1
Equipamento típico de processamento químico, não-crítico ..	1
Turbina, turbogerador, compressor centrífugo	1,6
Centrífuga, eixo rígido*; bomba centrífuga multi-estágios	2
Equipamentos diversos, características desconhecidas	2
Centrífuga, eixo suspenso, eixo próximo ao cesto	0,5
Centrífuga, vínculo suspenso	0,3

Valores para equipamentos fixados à base.

Vibrações medidas na caixa do mancal, exceto onde indicado.

* deslocamentos horizontais medidos na caixa do cesto.

Tabela 6.2 – Condições de vibração para máquinas rotativas (Baxter & Bernhard, 1967, em [25, pág. 314]).

Amplitude de velocidade horizontal (mm/s)	Condição de operação da máquina
< 0,12	extremamente suave
0,12 – 0,25	muito suave
0,25 – 0,50	suave
0,50 – 1,0	muito boa
1,0 – 2,0	boa
2,0 – 4,0	razoável
4,0 – 8,0	levemente severa
8,0 – 16,0	severa
> 16,0	muito severa

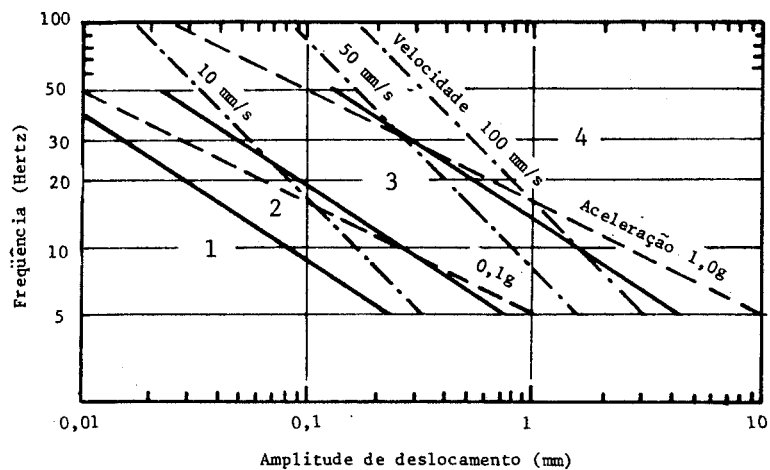
Para tipos especiais de máquinas, as organizações envolvidas em sua fabricação e operação fornecem dados específicos para diferentes condições de operação. A Tabela 6.3 mostra valores de amplitude de deslocamento nos mancais de conjuntos turboalternadores, operando na frequência de 3000 rpm, correspondentes às diversas condições de operação.

Tabela 6.3 – Vibrações em turboalternadores (Parvis & Appendino, 1966, em [25, pág. 314]).

Condição de operação	Amplitude de deslocamento (mm)		
	no mancal	no eixo	na laje da turbina
excelente	0,005	0,025	0,0005
boa	0,01	0,05	0,001
razoável	0,02	0,1	0,002
má	0,04	0,2	0,004
perigosa	0,08	0,4	0,008

6.2.3 Efeitos em Estruturas Prediais

A Figura 6.3 resume as informações referentes aos danos estruturais causados por vibrações em função da amplitude de deslocamento e da frequência de vibração. As retas tracejadas correspondem a amplitudes de velocidade e aceleração e servem apenas de referência.



- | | |
|---|--|
| 1 | sem danos; |
| 2 | possibilidade de ruptura em revestimentos; |
| 3 | danos prováveis em elementos estruturais; |
| 4 | danos em elementos estruturais - destruição. |

Fig. 6.3 – Possíveis danos em construções (Steffens, 1974, citado em [17, pág. 7]).

6.3 Principais Itens a Serem Verificados

A lista a seguir apresenta os principais itens que devem constar da verificação de uma fundação de máquina [25, 3]. Para determinados tipos de máquina, alguns itens podem não ter significado. Para outros, a lista pode estar incompleta, sendo necessário acrescentar itens específicos.

1. Considerações quanto à instalação
 - a) Objetivos do projeto
 - b) Causas prováveis de quebra
 - c) Condições de operação
 - d) Custo inicial, de manutenção e substituição do equipamento
2. Fundação de equipamentos que produzem esforços dinâmicos:
 - a) Capacidade de suporte do solo

As tensões no solo são limitadas a uma porcentagem da tensão admissível:

 - tensão estática, 50% da tensão admissível;
 - tensão dinâmica - o fator de amplificação deve ser inferior a 1,5;
 - a soma das tensões estáticas e dinâmicas não deve exceder a 75% da tensão admissível.

b) Recalques

- o recalque estático deve ser uniforme e sempre inferior ao deslocamento permitido pela tubulação;
- em planta, a distância entre o ponto de aplicação da resultante dos esforços estáticos e dinâmicos e o centro de gravidade da área da base não deve exceder 0,5% da dimensão da fundação na direção considerada.

c) Resposta dinâmica (movimento em regime permanente)

A análise da resposta da fundação inclui a verificação de:

- amplitudes de deslocamento – zonas A e B da Fig. 6.2;
- amplitudes de velocidade – valores limites da Tab. 6.2;
- amplitudes de aceleração – zonas A e B da Fig. 6.2;
- fator de amplificação – deve ser inferior a 1,5 para a frequência de ressonância;
- fator de transmissibilidade para máquinas sobre apoios elásticos – deve ser inferior a 3%.

d) Modos de vibração

As frequências de operação do equipamento devem estar fora do intervalo de 20% em torno das frequências naturais da fundação. Quanto aos elementos da estrutura, deve ser evitada a condição de ressonância com a menor frequência natural ($\pm 50\%$).

e) Rupturas por fadiga

- componentes da máquina – os limites da Fig. 6.1 ou da Tab. 6.2 devem ser observados;
- conexões – idem aos componentes da máquina;
- estrutura – para estruturas de concreto, se há inversão de tensão e as amplitudes são elevadas, com as tensões de pico atingindo 50% da tensão admissível, as armaduras devem ser projetadas para a condição de inversão (*ACI-318/77, Building Code Requirements for Reinforced Concrete – American Concrete Institute*).

f) Exigências ambientais

- efeitos em pessoas (fisiológicos e psicológicos);
- proximidade de equipamentos sensíveis à vibração;
- interferência com outras estruturas.

3. Fundação de equipamentos sensíveis à vibração

a) Amplitudes limites

b) Vibrações ambientais

c) Possíveis alterações das vibrações ambientais provocadas por novos equipamentos e construções

d) Isolamento da fundação (passivo)

e) Isolamento das máquinas que produzem vibrações (ativo)

6.4 Dimensões Iniciais da Fundação

A análise dinâmica de uma fundação de máquina é um processo iterativo que requer sucessivas alterações da geometria e verificações da fundação até que o sistema apresente uma

resposta dinâmica satisfatória. Normalmente, os livros básicos de fundações de máquinas (Barkan [5], Major [15]) sugerem as dimensões iniciais da fundação dependendo do tipo e das características da máquina. Estas dimensões, por basearem-se em regras empíricas, devem ter apenas caráter preliminar.

Arya *et alii* [3] atualizaram e sistematizaram os procedimentos para a escolha das dimensões iniciais encontrados na bibliografia. As recomendações, a seguir, para máquinas rotativas e alternativas foram condensadas deste trabalho com a finalidade de serem posteriormente empregadas nos exemplos.

Fundações em Bloco Rígido

1. Quando possível a base do bloco deve permanecer acima do nível d'água, não sendo assentada em aterro recente ou sobre solo sensível a vibrações.
2. Fundações assentadas diretamente sobre o solo.
 - a) A massa do bloco deve ser de 2 a 3 vezes a massa da máquina para máquinas rotativas, e de 3 a 5 para máquinas alternativas.
 - b) A altura mínima é imposta pelo comprimento de ancoragem dos parafusos. No caso de fundações rígidas, ela deve ser maior que um $1/5$ da largura e $1/10$ do comprimento.
 - c) A largura deve ser no mínimo de 1 a 1,5 vezes a distância vertical entre a base do bloco e o centro de gravidade da máquina.
 - d) Selecionadas a altura e a largura, o comprimento é obtido a partir da massa da fundação, 2.a.

Respeitando a geometria da base da máquina, o comprimento e a largura são ajustados de modo que o centro de gravidade da máquina esteja na mesma vertical do centro de gravidade da fundação e do centro de gravidade da área da base.

3. Fundações sobre estacas
 - a) A massa do bloco deve ser de 1,5 a 2,5 vezes e de 2,5 a 4 vezes a massa da máquina para máquinas rotativas e alternativas, respectivamente.
 - b) As dimensões são escolhidas conforme 2.b, 2.c e 2.d.
 - c) O número e tamanho das estacas são selecionados de modo que nenhuma delas suporte mais da metade de sua carga admissível.
 - d) O centro elástico do grupo de estacas deve estar na mesma vertical do centro de gravidade máquina-fundação.
 - e) São utilizadas estacas inclinadas para suportar esforços horizontais, já que as estacas verticais possuem baixa resistência a esses esforços e apresentam grandes deformações.
 - f) A ancoragem da cabeça das estacas ou tubulões no bloco deve ser compatível com as condições admitidas na análise.
4. O aumento da profundidade enterrada do bloco (50% a 80% da altura total) aumenta a rigidez e o amortecimento para todos os modos de vibração.

Fundações Elevadas

As dimensões preliminares recomendadas por Arya *et alii* [3] referem-se a fundações aporcionadas, com a menor frequência natural inferior a de operação, e apresentando laje superior rigidamente unida aos pilares (sem aparelhos de apoio).

1. Deve ser feito o estudo da geometria do equipamento de modo a assegurar espaço suficiente para parafusos de ancoragem, tubulações, bem como para a instalação, manutenção e operação do equipamento. Todas as restrições devem ser levantadas.
2. Na escolha da cota da base são considerados: nível d'água, cota do pavimento, capacidade de suporte e características do solo.
3. As colunas devem apresentar tensões praticamente iguais para a estrutura submetida à carga vertical estática. As colunas devem ser capazes de suportar 6 vezes a carga vertical. Quando possível, o espaçamento entre colunas deve ser inferior a 3,60 m.
4. A altura da viga deve ser maior que 1/5 do vão livre, e sua largura geralmente é igual à largura das colunas, devendo ser consistente com o espaçamento necessário pelos parafusos de ancoragem e com a distância à borda. As vigas não devem apresentar deslocamentos superiores a 0,005 cm quando submetidas às cargas estáticas.
5. A rigidez à flexão das vigas deve ser no mínimo 2 vezes maior que a das colunas.
6. A massa da estrutura, incluída a base, deve ser no mínimo de 3 vezes a massa da máquina rotativa ou de 5 vezes a massa da máquina alternativa.
7. A massa da parte superior da estrutura não deve ser inferior à massa da máquina.
8. A máxima tensão estática no solo não deve ultrapassar à metade da tensão admissível. Para fundações sobre estacas, a estaca mais carregada não deve suportar cargas superiores à metade da carga admissível.
9. O centro de gravidade da área da base não deve distar mais de 30 cm da resultante de todas as cargas estáticas.
10. O centro de gravidade comum do equipamento e da parte superior da estrutura deve estar na mesma vertical do centro elástico das colunas.
11. Os deslocamentos das colunas nas direções vertical, lateral e longitudinal da fundação devem ser uniformes para a estrutura submetida a três carregamentos estáticos equivalentes. Os carregamentos são formados por 0,5; 0,3; e 0,1 do peso da máquina atuando nas direções vertical, lateral e longitudinal, respectivamente, com a carga permanente vertical atuando em todos os carregamentos. Os deslocamentos horizontais devem ser inferiores a 0,05 cm.
12. As colunas e vigas devem ser verificadas individualmente quanto à ressonância na frequência de operação.

6.5 Medidas Corretivas

Quando são constatadas vibrações excessivas em uma fundação de máquina já construída, o projetista deve realizar uma investigação completa para determinar suas causas. Fazem parte da investigação, a medição das amplitudes e frequências das vibrações, e os estudos da adequação estrutural e da qualidade da construção. Também devem ser levantados os

custos extras de manutenção para uma comparação posterior com o custo de uma solução definitiva para a fundação.

Algumas medidas corretivas possuem um caráter preventivo, pois o projeto de uma fundação de máquina deve conter o estudo dos estados limites (últimos e de utilização) e as medidas corretivas necessárias. Com base nessas informações, o projeto inclui características que minimizam a possibilidade de rupturas e também dispositivos que permitam a correção do desempenho.

De acordo com McNeill [16], as medidas corretivas podem ser agrupadas em três categorias.

6.5.1 Alterações nos Esforços das Máquinas

A redução dos esforços transmitidos pode ser obtida com a introdução de suportes elásticos. Entretanto, os suportes aumentam as amplitudes do movimento da própria máquina podendo agravar o desgaste em mancais e gerar problemas em ligações com tubulações.

Nas máquinas rotativas, um novo balanceamento pode reduzir os esforços dinâmicos produzidos pela máquina. Contudo, esta operação nem sempre é simples e, por vezes, exige que a máquina seja desmontada.

No caso de instalações com um grande número de máquinas, algumas medidas corretivas já devem constar da rotina de operação e manutenção. Debevec e Smeal [10] propõem a manutenção preventiva no lugar do procedimento tradicional de substituir o equipamento e enviá-lo para reparos apenas quando ele quebra. A manutenção preventiva baseia-se no fato da deterioração de uma peça de um equipamento poder ser detectada antes de sua ruptura, sendo portanto necessário conhecer as condições reais de todos os equipamentos.

A condição mecânica pode ser determinada a partir de dados relativos à pressão, temperatura, fluxo, torque, frequência de operação e vibração. A vibração mecânica é fácil de ser medida, e sua alteração para um determinado equipamento pode indicar uma falha iminente. Um exemplo é apresentado por Debevec e Smeal [10] (Tabela 6.4) onde são relacionados os primeiros sinais de desempenho deficiente nos equipamentos de uma estação de tratamento de esgoto com suas prováveis causas.

6.5.2 Alterações na Fundação

São usuais as alterações na massa e rigidez da fundação, que afetam indiretamente o amortecimento. Entre os dispositivos empregados para aumentar a massa do sistema devem ser citados:

- vazios no interior do bloco que possam ser preenchidos posteriormente;
- acréscimo de chapas de aço;
- incorporação de parte do leito de fundação. Neste caso, uma base compactada de pedregulho é solidarizada à fundação superior mediante a injeção de argamassa.

Tabela 6.4 – Sintomas e possíveis causas.

Frequência das vibrações em múltiplos da frequência do eixo (f_0)	Causa provável
< 1	lubrificação
1	não-balanceamento
2	folga nos mancais
1 ou 2	flexão do eixo
1 a 5	correia defeituosa
20 a 50	mancal antifricção
n^o de dentes	engrenagens gastas

As mudanças de rigidez referem-se ao sistema formado pela estrutura de fundação e o solo, e freqüentemente são efetuadas por meio do aumento do raio efetivo da fundação ou da união com outros elementos estruturais.

As dimensões iniciais da fundação podem ser aumentadas quebrando-se a borda até expor a armadura e construindo-se uma nova fundação, envolvendo a anterior. Além de caro, este procedimento nem sempre é efetivo, pois a quantidade de armadura na fundação anterior pode não oferecer a rigidez necessária para as novas solicitações.

De um modo geral, a ligação com estruturas adjacentes deve ser vista com cautela. Ligações com muros, sapatas, laje de piso e massas de concreto não armado são inúteis para grandes máquinas. Somente quando a fundação puder ser unida rigidamente a um elemento de concreto armado, esse tipo de ligação deve ser considerado.

6.5.3 Alterações nas Propriedades do Solo

As fundações de máquinas podem provocar compactação e ruptura localizada do solo de suporte no início da operação. Um projeto adequado deve prever os recalques progressivos da fundação. Para o movimento de rotação, especialmente em solos arenosos, as vibrações compactam o solo sob as extremidades, deixando a fundação vibrar sobre um apoio de solo próximo do eixo neutro. A existência de vazios é detectada a partir do desempenho da fundação: bom no início, mas piorando com o tempo, sem evidências de deterioração do balanceamento da máquina. A solução é simples e consiste na injeção de argamassa.

Capítulo 7

Fundação em Bloco Rígido

Um tipo de fundação de máquina muito encontrado nas instalações industriais é a fundação constituída por um bloco de concreto, maciço ou não, apoiado diretamente sobre o solo. Geralmente, o bloco é tratado como um corpo rígido na análise dinâmica em virtude de suas deformações serem desprezíveis quando comparadas com as deformações do solo. Deste modo, quando submetido a esforços dinâmicos, o bloco pode vibrar em qualquer um dos seis graus de liberdade indicados na Figura 7.1.

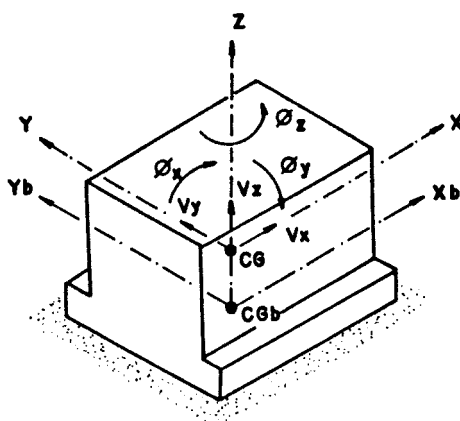
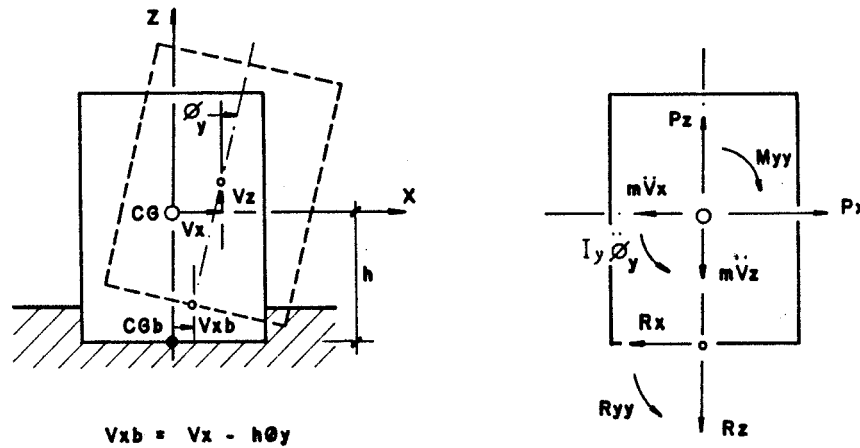


Fig. 7.1 – Bloco rígido - graus de liberdade.

Um caso particular, mas muito freqüente quando se trata de fundações de máquinas, corresponde à situação em que um dos eixos principais de inércia do conjunto máquina-fundação coincide com o eixo vertical que passa pelo centro de gravidade da área da base da fundação e os demais eixos principais de inércia são paralelos aos eixos centrais da área da base.

Neste caso, o movimento vertical v_z e o de rotação em torno do eixo vertical ϕ_z são independentes. Os demais movimentos são acoplados dois a dois: v_x e ϕ_y no plano xz (Fig. 7.2) e v_y e ϕ_x no plano yz . Como as equações do movimento são bastante simples, este caso foi escolhido para ilustrar o emprego das funções de rigidez dinâmica no cálculo da resposta dinâmica de uma fundação de máquina [12]. Aproveita-se a oportunidade para se introduzir a notação complexa na formulação do problema (em **negrito** no texto).

Fig. 7.2 – Movimento no plano xz .

Embora dificultem a interpretação, as equações utilizando variáveis complexas são mais compactas e fáceis de manusear, o que simplifica bastante sua programação.

7.1 Resposta em Regime Permanente

Sejam R_x , R_z , R_{yy} e R_{zz} as reações do solo que atuam no centro de gravidade da área da base, e P_x , P_z , M_{yy} e M_{zz} os esforços dinâmicos aplicados no centro de gravidade do conjunto máquina-fundação, referentes às translações nas direções x e z e às rotações em torno dos eixos y e z , respectivamente (Fig. 7.2). Assim, a torção em torno do eixo z e o movimento no plano xz em relação ao centro de gravidade do conjunto máquina-fundação podem ser descritos por

$$I_z \ddot{\phi}_z(t) + R_{zz}(t) = M_{zz}(t), \quad (7.1)$$

$$m \ddot{v}_z(t) + R_z(t) = P_z(t), \quad (7.2)$$

$$m \ddot{v}_x(t) + R_x(t) = P_x(t), \quad (7.3)$$

$$I_y \ddot{\phi}_y(t) + R_{yy}(t) - R_x(t) h = M_{yy}(t), \quad (7.4)$$

onde

- m massa total do conjunto máquina-fundação;
- I_y, I_z momentos de inércia de massa em relação aos eixos y e z , respectivamente;
- h distância entre o centro de gravidade da fundação e a base.

Se a excitação harmônica for dada por

$$P_s(t) = P_{s0} e^{i\omega t}, \quad P_{s0} = P_{s1} + iP_{s2} \quad \text{com } s = x, z, yy, zz. \quad (7.5)$$

a resposta permanente em termos de deslocamentos e rotações pode ser escrita na forma

$$a(t) = a_0 e^{i\omega t}, \quad a_0 = a_1 + ia_2 \quad \text{com } a_0 = v_{x0}, v_{z0}, \phi_{y0}, \phi_{z0}. \quad (7.6)$$

O ângulo de fase θ_a e a amplitude $|\mathbf{a}_0|$ da resposta são obtidos pelas equações

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right), \quad (7.7)$$

$$|\mathbf{a}_0| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad (7.8)$$

Analogamente às respostas, as reações do solo também são escritas na forma

$$\mathbf{R}_s(t) = \mathbf{R}_{s0} e^{i\omega t}, \quad s = x, y, yy, zz, \quad (7.9)$$

onde as amplitudes complexas \mathbf{R}_{s0} estão relacionadas com as amplitudes de deslocamento e rotação pelas funções de rigidez dinâmica. Lembrando que estas últimas foram definidas para o centróide da área da base (Seção 3.1.1), resulta

$$\mathbf{R}_{zz} = \mathbf{K}_{zz}\phi_z, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{R}_z = \mathbf{K}_z \mathbf{v}_z, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{K}_x(\mathbf{v}_x - h\phi_y) + \mathbf{K}_{xyy}\phi_y, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{K}_{yy}\phi_y + \mathbf{K}_{yyx}(\mathbf{v}_x - h\phi_y), \quad (7.13)$$

onde \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_z , \mathbf{K}_{yy} , \mathbf{K}_{zz} são as funções de rigidez dinâmica para os deslocamentos nas direções x_b e z , e para as rotações em torno dos eixos y_b e z , respectivamente. $\mathbf{K}_{yyx} = \mathbf{K}_{xxy}$ são as funções de rigidez dinâmica correspondentes ao acoplamento do deslocamento segundo o eixo x_b e da rotação em torno do eixo y_b (funções, em geral, desprezíveis no caso de fundações rasas).

Os gráficos dos coeficientes α e β das funções de rigidez dinâmica para uma fundação rígida circular na superfície de um semi-espaco elástico, homogêneo e isótropo encontram-se na Fig. 3.2 do Capítulo 3. Gráficos para diferentes geometrias da fundação e condições do maciço do solo são encontrados na referência [12].

Introduzindo as Eqs. (7.5), (7.6) e (7.10) a (7.13) nas equações do movimento, resultam as seguintes expressões para as amplitudes de deslocamento e rotação:

$$\phi_{z0} = \frac{M_{zz0}}{\mathbf{K}_{zz}(\omega) - I_z\omega^2}, \quad (7.14)$$

$$\mathbf{v}_{z0} = \frac{P_{z0}}{\mathbf{K}_z(\omega) - m\omega^2}, \quad (7.15)$$

$$\mathbf{v}_{x0} = \frac{\mathbf{K}_{yy}^* P_{x0} - \mathbf{K}_{xyy}^* M_{yy0}}{D}, \quad (7.16)$$

$$\phi_{y0} = \frac{\mathbf{K}_x^* M_{yy0} - \mathbf{K}_{xyy}^* P_{x0}}{D}, \quad (7.17)$$

onde

$$\mathbf{K}_x^* = \mathbf{K}_x(\omega) - m\omega^2, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{K}_{xyy}^* = \mathbf{K}_{xyy}(\omega) - \mathbf{K}_x(\omega)h, \quad (7.19)$$

$$\mathbf{K}_{yy}^* = \mathbf{K}_{yy}(\omega) - I_y\omega^2 + \mathbf{K}_x(\omega)h^2 - 2\mathbf{K}_{xyy}(\omega)h, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}_x^* \mathbf{K}_{yy}^* - \mathbf{K}_{xyy}^{*2}. \quad (7.21)$$

Equação do Movimento para o Modelo com Parâmetros Discretos Massa-Mola-Amortecedor No modelo com parâmetros discretos, as funções de rigidez dinâmica são substituídas por coeficientes de rigidez e de amortecimento viscoso. Deste modo, abandonando a notação complexa e desprezando o efeito do acoplamento caracterizado por \mathbf{K}_{yyx} e \mathbf{K}_{xyy} , as reações do solo são dadas por

$$R_{zz} = k_{zz}\phi_z + c_{zz}\dot{\phi}_z, \quad (7.22)$$

$$R_z = k_z v_z + c_z \dot{v}_z, \quad (7.23)$$

$$R_x = k_x(v_x - h\phi_y) + c_x(\dot{v}_x - h\dot{\phi}_y), \quad (7.24)$$

$$R_{yy} = k_{yy}\phi_y + c_{yy}\dot{\phi}_y. \quad (7.25)$$

O desenvolvimento das equações do movimento é semelhante ao anterior, obtendo-se as seguintes equações

$$I_z \ddot{\phi}_z + c_{zz} \dot{\phi}_z + k_{zz} \phi_z = M_{zz}, \quad (7.26)$$

$$m \ddot{v}_z + c_z \dot{v}_z + k_z v_z = P_z, \quad (7.27)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_x \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & -c_x h \\ -c_x h & c_{yy} + c_x h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & -k_x h \\ -k_x h & k_{yy} + k_x h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ M_{yy} \end{Bmatrix}, \quad (7.28)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_y \\ \ddot{\phi}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & c_y h \\ c_y h & c_{xx} + c_y h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\phi}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & k_y h \\ k_y h & k_{xx} + k_y h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_y \\ M_{xx} \end{Bmatrix}. \quad (7.29)$$

Embora as Eqs. (7.26) a (7.29) sejam aproximadas, pois os coeficientes de rigidez e amortecimento são admitidos constantes, elas permitem o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração clássicos do sistema, conforme exposto no Capítulo 2.

7.2 Exemplo Numérico

A fundação analisada é constituída por um bloco maciço de concreto de base retangular apoiado diretamente sobre o solo. Na mesma fundação, estão assentados um compressor

alternativo (possuindo um cilindro vertical) e o motor elétrico que o aciona. Os esforços dinâmicos principais são gerados pelo compressor.

Embora as referências [3, 12, 25] forneçam coeficientes de rigidez e amortecimento para uma sapata rígida retangular, procurou-se trabalhar apenas com o conceito de sapata circular equivalente. Deste modo, as fórmulas e diagramas necessários restringem-se apenas aos apresentados no Capítulo 3.

7.2.1 Dados do Exemplo

Características da Máquina

Os centros de gravidade do compressor e do motor estão indicados na Fig. 7.3, assim como as direções dos eixos x , y e z de referência.

- Massas

compressor $m_c = 12,0 \text{ t}$,

motor $m_m = 4,0 \text{ t}$.

- Esforços dinâmicos

Compressor (aplicados em C_c), $\Omega = 56,55 \text{ rad/s}$ ($f_0 = 540 \text{ rpm}$)

$$P_x = 8,5 \sin \Omega t \quad (\text{kN}),$$

$$P_z = 62,2 \cos \Omega t + 12,5 \cos 2\Omega t \quad (\text{kN}).$$

Os esforços gerados pelo motor foram desprezados.

Características do Solo e da Fundação

- Solo: camada profunda de argila rija sobre-adensada;

densidade natural $\rho = 1,85 \text{ t/m}^3$,

módulo de elasticidade transversal $G = 120 \text{ MPa}$,

coeficiente de Poisson $\nu = 0,4$,

velocidade da onda de cisalhamento $V_s = 255 \text{ m/s}$,

taxa de amortecimento por histerese $\xi_h = 0,04$.

- Concreto:

densidade $\rho = 2,4 \text{ t/m}^3$.

Critério de Desempenho

As amplitudes de deslocamento no bloco de fundação e no centro de gravidade do compressor não devem ultrapassar 0,045 mm para a frequência de operação de 540 rpm. Este valor corresponde ao limite entre as regiões B e C do diagrama da Fig. 6.2.

7.2.2 Geometria e Características da Fundação

A geometria da fundação depende do arranjo e das dimensões da máquina assentada. O nível do piso da instalação industrial, espaços para acesso e manutenção e a interferência com outras fundações são alguns dos itens que devem ser considerados. Satisfeitas as

restrições impostas pela máquina, cabe ao projetista definir a forma e a área do contato solo-fundação.

Para a fundação analisada, a área da base pode ser estimada limitando-se o deslocamento vertical originado pela força P_z aplicada estaticamente ($P_z \approx 62,2 + 12,5 = 74,4$ kN). Assim, admitindo um deslocamento vertical igual a

$$v_z = \frac{(1 - \nu)P}{4Gr_0} = 0,030 \times 10^{-3} \text{ m},$$

obtém-se os valores mínimos do raio equivalente ($r_0 = 3,10$ m) e da área de contato ($30,2 \text{ m}^2$). Esta estimativa só é válida quando as frequências naturais da fundação são maiores que a frequência de operação (fundações sobre-sincronizadas), e portanto, a excitação harmônica $p_0 \sin \Omega t$ é equilibrada predominantemente pelos esforços proporcionais aos deslocamentos ($F_R = kv_z$).

A geometria adotada está representada na Figura 7.3. Deve-se notar a excentricidade da força vertical do compressor em relação ao centro da área da base, o que torna este arranjo pouco recomendável para solos sensíveis a recalques.

a) Esforços dinâmicos ($\Omega = 56,55$ rad/s)

- Forças aplicadas

$$P_x = 8,5 \sin \Omega t \quad (\text{kN})$$

$$P_y = 0$$

$$P_z = 62,2 \cos \Omega t + 12,5 \cos 2\Omega t \quad (\text{kN})$$

- Momentos em relação a eixos passando pelo centro de gravidade do conjunto máquina-fundação

$$M_{xx} = 0$$

$$M_{yy} = 38,9 \cos \Omega t + 7,8 \cos 2\Omega t + 11,3 \sin \omega t \quad (\text{kNm})$$

$$M_{zz} = 0$$

- Momentos em relação aos eixos centrais da área da base

$$M_{xxb} = 0$$

$$M_{yyb} = 38,9 \cos \Omega t + 7,8 \cos \Omega t + 18,7 \sin \Omega t \quad (\text{kNm})$$

b) Massa e momentos de inércia de massa

- Massa total

$$m = 111,0 \text{ t}$$

- Momentos de inércia de massa em relação aos eixos passando pelo centro de gravidade do conjunto máquina-fundação

$$I_x = 195,1 \text{ t m}^2$$

$$I_y = 451,9 \text{ t m}^2$$

$$I_z = 556,5 \text{ t m}^2$$

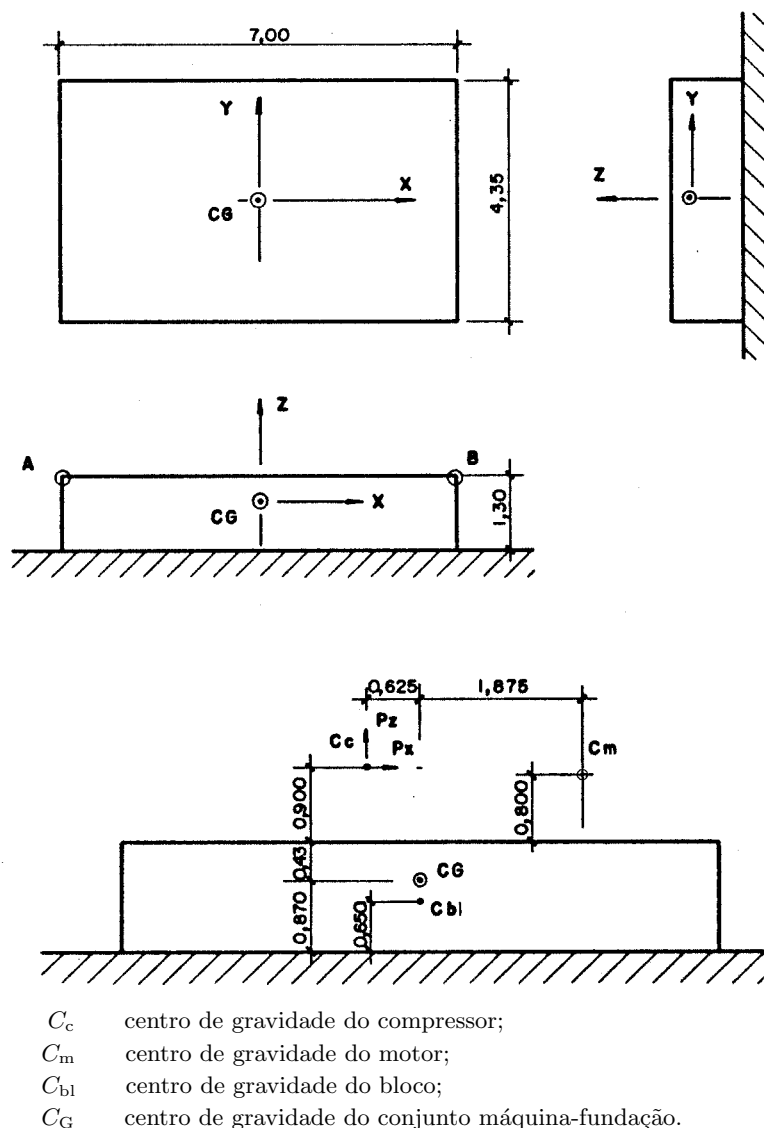


Fig. 7.3 – Geometria do bloco e posições dos centros de gravidade (medidas em metros).

- Momentos de inércia em relação aos eixos centrais de inércia da área da base

$$I_{xb} = 279,0 \text{ t m}^2$$

$$I_{yb} = 535,9 \text{ t m}^2$$

7.2.3 Modelo com Parâmetros Discretos

Numa primeira aproximação, a resposta dinâmica é obtida mediante um modelo com coeficientes de rigidez e amortecimento independentes da frequência. Para tal, é necessário que a camada de argila possa ser representada por um semi-espaco elástico e que a frequência adimensional seja menor que 1,5 ($a_0 = 0,6$).

A Tabela 7.1 apresenta os coeficientes de rigidez e as taxas de amortecimento calculadas de acordo com a Tabela 3.1. As frequências apresentadas correspondem às frequências

naturais não-amortecidas considerando cada grau de liberdade independentemente.

Tabela 7.1 – Coeficientes de rigidez e taxas de amortecimento.

Componente	Coeficiente de rigidez	Taxa de amort. geom.	Frequência (Hz)	
x	$1,89 \times 10^6$	$\frac{\text{kN}}{\text{m}}$	0,46	
y	$1,89 \times 10^6$			20,8
z	$2,49 \times 10^6$			20,8
xx	$1,17 \times 10^7$	$\frac{\text{kN m}}{\text{rad}}$	0,28	
yy	$2,38 \times 10^7$			32,6
zz	$2,17 \times 10^7$			33,5
			0,19	
			31,4	

As componentes especificam os seguintes movimentos da base (rotações em torno de eixos passando pelo centróide da área da base da fundação):

x, y, z translações longitudinal, transversal e vertical;
 xx, yy, zz rotações em torno dos eixos longitudinal, transversal e vertical.

7.2.3.1 Frequências Naturais e Modos de Vibração

Conhecidos os coeficientes das Eqs. (7.26) a (7.29), as frequências naturais da fundação são calculadas a partir da Eq. (2.70), resultando

$$\begin{aligned} f_1 &= 19,3 \text{ Hz}, & f_4 &= 31,4 \text{ Hz}, \\ f_2 &= 19,9 \text{ Hz}, & f_5 &= 38,1 \text{ Hz}, \\ f_3 &= 23,8 \text{ Hz}, & f_6 &= 42,0 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Os modos de vibração são determinados a partir da Eq. (2.67)

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4 \ \phi_5 \ \phi_6].$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -0,0934 & 0 & 0 & -0,0171 & 0 \\ 0,0929 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0197 \\ 0 & 0 & 0,0949 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0149 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0700 \\ 0 & -0,0085 & 0 & 0 & 0,0463 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0424 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{matrix}$$

As frequências naturais indicam que a fundação é sobre-sincronizada para todos os modos de vibração e, portanto, os valores máximos de deslocamento e dos esforços transmitidos para o solo ocorrerão na condição de operação, $\Omega = 56,55 \text{ rad/s}$ (Fig. 2.3).

Como as forças produzidas pelo compressor atuam no plano xz de simetria, o movimento estará restrito a este plano e apenas os modos 2, 3 e 4 serão mobilizados.

7.2.3.2 Deslocamentos Máximos e Esforços Transmitidos

A análise dinâmica da fundação simplifica-se bastante se o acoplamento dos graus de liberdade puder ser desprezado. De acordo com Arya *et alii* [3, pág. 98] os modos de vibração podem ser considerados independentemente se a seguinte inequação verificar-se

$$\frac{\sqrt{f_x^2 + f_{yy}^2}}{f_x f_{yy}} < \frac{2}{3f_0}, \quad (7.30)$$

onde f_x e f_{yy} são as frequências apresentadas na Tabela 7.1 e f_0 é a frequência de operação.

Para o movimento no plano xz resulta $0,057 < 0,074$. De modo que as amplitudes de deslocamento e os esforços transmitidos ao solo serão calculados considerando apenas sistemas com um grau de liberdade conforme mostra a Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Amplitudes de deslocamento e esforços transmitidos.

Desl.	f_n (Hz)	ξ	β	D Eq. (2.40)	TR Eq. (2.44)	p_0 (kN)	Amplitudes	
							Deslocam. (mm)	Força (kN)
v_z	23,8	0,82	0,378	0,95	1,11	62,2	0,0237	69,0
			0,756	0,76	1,21	12,5	0,0038	15,1
v_x	20,8	0,50	0,433	1,09	1,18	8,5	0,0049	10,0
			0,866	1,11	1,47	-	-	-
Rot.	f_n (Hz)	ξ	β	D Eq. (2.40)	TR Eq. (2.44)	M_0 (kN m)	Amplitudes	
							Rotação (rad)	Mom. (kN m)
ϕ_y	33,5	0,43	0,269	1,05	1,07	43,2	$1,91 \times 10^{-6}$	46,2
			0,538	1,18	1,30	7,8	$0,39 \times 10^{-6}$	10,1

O deslocamento vertical máximo ocorre nas extremidades do bloco

$$\begin{aligned} v_z &\approx A_z + 3,50A_{yy} = 2,75 \times 10^{-5} + 3,50 \times 2,30 \times 10^{-6} = 3,56 \times 10^{-5} \text{ m} \\ &\approx 0,036 \text{ mm.} \end{aligned}$$

E a máxima força vertical é dada, aproximadamente, por $F_z \approx 69,0 + 15,1 = 84,1 \text{ kN}$.

7.2.4 Cálculo da Resposta Usando Funções de Rigidez Dinâmica

Nem sempre o modelo com coeficientes de rigidez e amortecimento constantes fornece resultados satisfatórios. Um estrato de rocha pouco profundo, invalidando a hipótese de semi-espaço, ou uma máquina com frequência de operação elevada ($a_0 \gg 1,5$) são situações que obrigam o projetista a empregar métodos de cálculo que representem melhor a interação dinâmica solo-fundação. Embora a fundação analisada não apresente nenhuma

dessas situações, ela será útil para ilustrar o uso das funções de rigidez dinâmica.

A função de rigidez dinâmica é dada pela Eq. (3.7),

$$\mathbf{K}(\omega) = k(\alpha + ia_0\beta)(1 + 2i\xi_h),$$

onde k representa os coeficientes de rigidez do solo de fundação (Tabela 7.1), α e β são os coeficientes dependentes da frequência e $\xi_h = 0,04$ é a taxa de amortecimento por histerese.

A Tabela 7.3 apresenta os coeficientes α e β obtidos a partir da Fig. 3.2, considerando para cada modo de vibração uma sapata circular equivalente de raio r_0 .

Tabela 7.3 – Coeficientes α e β .

Componente	r_0 (m)	a_0	$\alpha(a_0)$	$\beta(a_0)$
z	3,11	0,69	0,93	0,81
		1,38	0,75	0,85
x	3,11	0,69	0,99	0,61
		1,38	0,97	0,62
yy	3,55	0,79	0,88	0,10
		1,58	0,72	0,19

7.2.4.1 Deslocamentos da Fundação

A obtenção dos deslocamentos e rotações é imediata, bastando substituir os esforços dinâmicos e as funções de rigidez nas Eqs. (7.14) a (7.21). Os valores calculados estão indicados na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 – Deslocamentos e rotações do centro de gravidade do conjunto máquina-fundação.

Desl.	Ω (rad/s)	a_1 (m)	a_2 (m)	Amplitude (m)
v_z	56,55	$19,5 \times 10^{-6}$	$-16,6 \times 10^{-6}$	$25,6 \times 10^{-6}$
	113,10	$0,28 \times 10^{-6}$	$-4,05 \times 10^{-6}$	$4,06 \times 10^{-6}$
v_x	56,55	$-1,00 \times 10^{-6}$	$-5,70 \times 10^{-6}$	$5,78 \times 10^{-6}$
	113,10	$0,13 \times 10^{-6}$	$-0,68 \times 10^{-6}$	$0,70 \times 10^{-6}$
Rot.	Ω (rad/s)	a_1 (rad)	a_2 (rad)	Amplitude (rad)
ϕ_y	56,55	$1,74 \times 10^{-6}$	$-1,40 \times 10^{-6}$	$2,22 \times 10^{-6}$
	113,10	$0,42 \times 10^{-6}$	$-0,41 \times 10^{-6}$	$0,58 \times 10^{-6}$

7.2.4.2 Deslocamentos Máximos e Esforços Transmitidos

O desenvolvimento no tempo dos deslocamentos e rotações no centro de gravidade do bloco permite o cálculo dos deslocamentos em qualquer ponto da fundação, em particular no ponto A de abscissa $x = -3,50$ m onde ocorre o maior deslocamento vertical da fundação (Fig.7.4).

Deste modo, podem ser determinados os deslocamentos verticais máximos para as duas extremidades do bloco:

$$\text{Ponto A: } v_z = 0,039 \text{ mm} \quad (x = -3,50 \text{ m; } y = 0,0; \quad z = 0,43 \text{ m})$$

$$\text{Ponto B: } v_z = 0,020 \text{ mm} \quad (x = 3,50 \text{ m; } y = 0,0; \quad z = 0,43 \text{ m})$$

A diferença encontrada deve-se à excentricidade da força vertical do compressor, podendo provocar recalques diferenciais da fundação.

Os esforços transmitidos correspondem às reações do solo fornecidas pelas Eqs. (7.10) a (7.13), resultando para a máxima força vertical:

$$F_z = 83,5 \text{ kN.}$$

Este resultado indica que o fator de amplificação da força vertical é baixo, confirmando a validade do procedimento empregado para a estimativa da área da base.

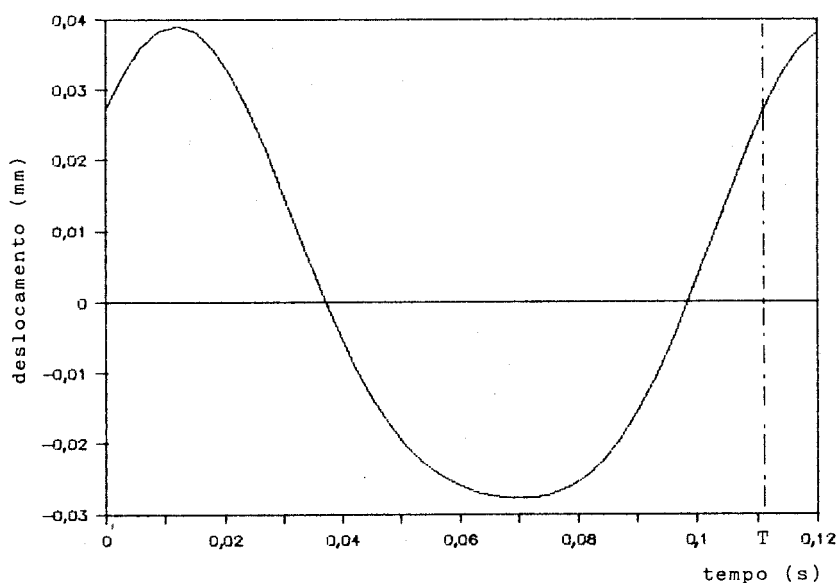
7.3 Observações Finais

Este capítulo teve por finalidade mostrar como a resposta de uma fundação de máquina pode ser obtida considerando as funções de rigidez dinâmica. Um exemplo simples foi usado para mostrar que as equações em variáveis complexas não constituem um obstáculo, já que o cálculo da resposta em termos de deslocamentos e esforços pode ser facilmente programada em um computador.

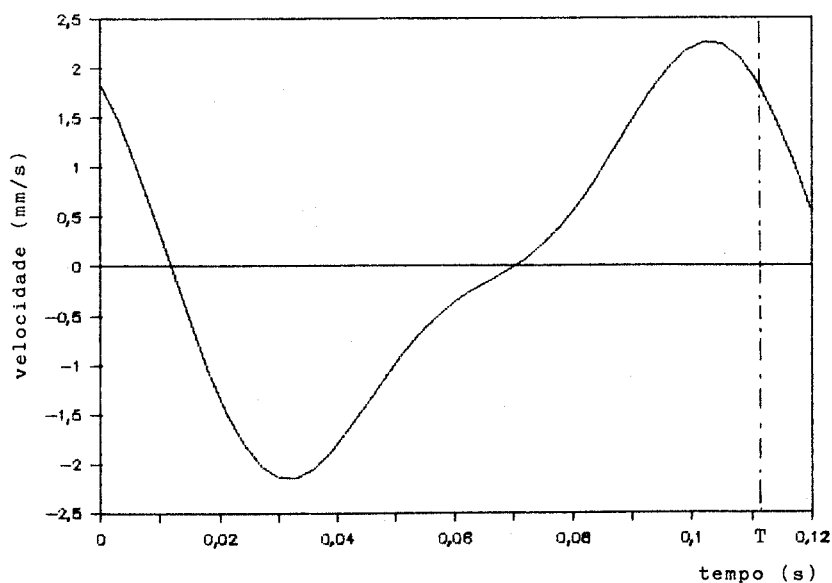
Em seu trabalho *Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art* [12], Gazetas propõe que os modelos com parâmetros discretos massa-mola-amortecedor sejam substituídos por outros que representem melhor o solo de fundação. Os trabalhos recentes sobre o assunto confirmam esta tendência, com os resultados teóricos e experimentais sendo apresentados na forma de funções de rigidez dinâmica (*impedance functions*) ou de suas funções inversas (*compliance functions*).

Richart *et alii* apresentam em [25], curvas do fator de amplificação dinâmico comprovando que, quando as hipóteses da teoria do semi-espaco elástico são verificadas e a frequência natural a_0 é menor que 1,5; a precisão obtida nos modelos com parâmetros discretos torna desnecessário o uso das funções de rigidez dinâmica. No exemplo da Seção 7.2, pode-se constatar que, para valores baixos de a_0 , os resultados são praticamente idênticos para os dois modelos.

Finalmente, deve-se ressaltar que no exemplo a frequência de operação era inferior às frequências naturais da fundação (fundação sobre-sincronizada). Neste caso, as respostas



(a)



(b)

Fig. 7.4 – Curvas de deslocamento e velocidade para o ponto A.

máximas em termos de deslocamentos e esforços transmitidos ocorrem na frequência de operação e a análise dinâmica se reduz à verificação dos valores máximos para esta condição. Quando uma das frequências naturais é inferior à frequência de operação (fundação subsincronizada) a condição de ressonância que ocorre durante a partida e a parada da máquina deve ser verificada, como será discutido no Capítulo 9.

Capítulo 8

Fundações de Máquinas Submetidas a Esforços de Impacto

Algumas máquinas geram esforços dinâmicos de grande intensidade e curta duração que podem ser descritos por pulsos intermitentes. A operação de prensas de corte, martelos de forja e estampagem, por exemplo, produz esforços de impacto de curta duração que são considerados como um único pulso, pois o efeito de um pulso desaparece antes que o próximo ocorra devido ao amortecimento. Como as intensidades dos esforços envolvidos são grandes, eles podem causar vibrações intensas, danos à máquina e sua fundação, e mesmo perturbações sérias em estruturas e máquinas vizinhas.

Os procedimentos usuais para a análise dinâmica de fundações de máquinas submetidas a impactos, embora bem fundamentados por ensaios realizados por Barkan [5], apresentam algumas deficiências quanto à definição das propriedades do solo, particularmente a omissão do amortecimento. Recentemente estes procedimentos foram revisados por Novak e colaboradores [11, 19, 20, 21, 23] que, desenvolvendo soluções empregando a teoria do semi-espaço, conseguiram representar melhor o maciço de solo e considerar o amortecimento geométrico.

Este capítulo restringir-se-á às fundações de martelo, sendo discutidos modelos matemáticos adequados para representar o comportamento dinâmico da fundação.

Fundações de Martelos De acordo com a função, os martelos podem ser classificados em martelos de forja, estampagem, trituração e britagem. Uma descrição dos vários tipos de martelo encontra-se na referência [15]. Os elementos básicos de martelos de forja são o martinete, o pórtico que o sustenta e a bigorna (Fig. 8.1). Devido à intensidade do impacto, os martelos são, em geral, montados sobre blocos de concreto armado separados do piso da instalação e de outras fundações.

Os esforços dinâmicos são gerados pelo impacto do martinete contra a bigorna. O martinete pode cair em queda livre ou ter sua velocidade aumentada com o uso de vapor ou ar comprimido. Somente uma parte da energia de impacto é dissipada mediante a deformação plástica do material e transformada em calor. A energia restante é transmitida para o bloco de fundação e o solo.

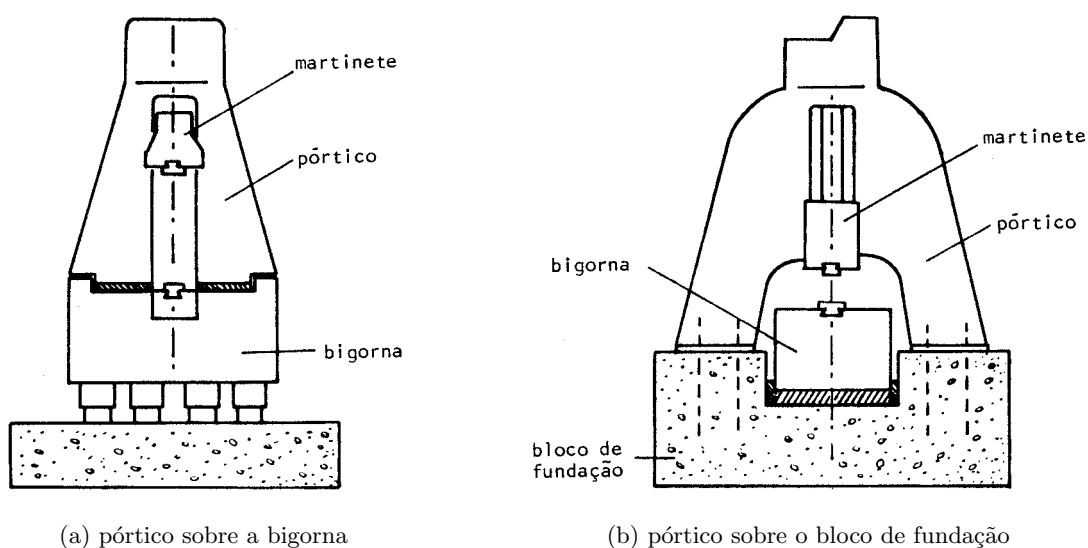


Fig. 8.1 – Principais elementos de martelos de forja e condições normais de apoio dos pórticos.

Para a análise dinâmica, é interessante separar os martelos nos quais o pórtico apóia-se diretamente sobre a bigorna (Fig. 8.1-a) daqueles onde pórtico e bigorna têm apoios distintos no bloco de fundação (Fig. 8.1-b). A primeira configuração proporciona maior precisão ao impacto do martinete e é comum nos martelos de estampagem e corte. A segunda permite intensidades de impacto maiores, pois o pórtico encontra-se isolado da bigorna, sendo a configuração normal dos martelos de forja.

Diversos arranjos de fundação são empregados em função do tamanho e da potência do martelo. Em muitos casos, o bloco de concreto é moldado diretamente no solo (Fig. 8.2-a), mas quando a capacidade de suporte é insuficiente ou são possíveis recalques exagerados, o bloco deve ser construído sobre estacas. Quando o fator limitante do projeto é a transmissão de vibrações para o solo, o bloco é montado sobre aparelhos de apoio de borracha ou molas, associados a amortecedores. Uma vala inferior de concreto é necessária para proteger estes elementos (Fig. 8.2-b).

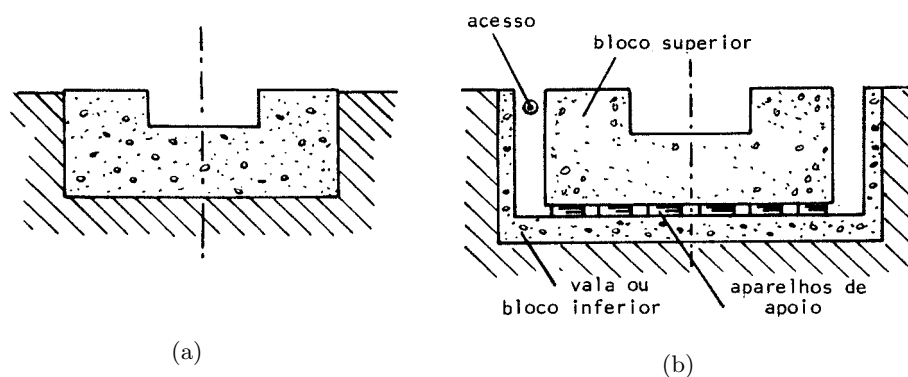


Fig. 8.2 – Arranjos de fundação direta.

A bigorna pode apoiar-se diretamente sobre o bloco ou, com a finalidade de reduzir as tensões no concreto, sobre um coxim constituído de feltro industrial ou de madeira de alta resistência.

8.1 Critérios de Desempenho

A maior parte dos critérios apresentados no Capítulo 6 não se aplicam às fundações de martelo. Conseqüentemente, novos limites admissíveis de amplitudes de deslocamento, recalques e tensões são estabelecidos de acordo com as características do martelo. Como regra geral, estes valores são especificados em normas ou pelo próprio fabricante. Na ausência de especificações, podem ser usados os valores recomendados por Barkan [5] e reproduzidos a seguir.

8.1.1 Amplitudes de Deslocamento

De modo a não prejudicar a operação normal do martelo nem danificar estruturas vizinhas, é recomendada uma amplitude máxima de deslocamento de 1,2 mm para o bloco de fundação. Quanto à bigorna, como grandes amplitudes implicam em menor eficiência do martelo, são estabelecidos valores limites de acordo com a massa do martinete, m_0 .

Tabela 8.1 – Amplitudes admissíveis da bigorna [5, p.206].

Massa do martinete (t)	A (mm)
≤ 1	1
$1 < m_0 \leq 3$	2
≥ 3	3 a 4

8.1.2 Recalques

No caso de solos que estão sujeitos a recalques provocados por vibrações, como areias saturadas por exemplo, limites menores para as amplitudes de deslocamento deverão ser adotados. Na hipótese destes limites não serem observados, a concepção estrutural deverá ser alterada com a introdução de estacas ou aparelhos de apoio. Na primeira solução, as cargas são transmitidas para camadas mais profundas do solo, enquanto na última, o recalque é reduzido diminuindo-se as forças transmitidas.

8.1.3 Tensões

“As tensões dinâmicas podem provocar fadiga do material, efeito que pode ser considerado reduzindo-se as tensões estáticas admissíveis ou multiplicando-se as tensões dinâmicas por um fator de fadiga. Normalmente, um fator de fadiga $\mu = 3,0$ é recomendado para todas as partes do sistema” [20].

8.2 Dimensões Preliminares

A geometria inicial da fundação é escolhida de modo que as amplitudes de deslocamento e as tensões calculadas não ultrapassem os valores admissíveis. Quando possível, o eixo principal vertical da bigorna deve coincidir com o eixo principal comum do bloco de fundação mais o martelo, passando pelos centróides das áreas das bases da bigorna e do bloco de fundação. A falta de alinhamento e choques excêntricos do martinete provocam rotações do bloco e recalques diferenciais.

Os valores iniciais da área da base e da massa do bloco de fundação são estimados considerando um sistema de um grau de liberdade e limitando os valores das tensões no solo e das amplitudes de deslocamento da fundação. Seguindo este procedimento, Barkan [5] obteve expressões para a área da base e para a massa do bloco em função de características do martelo e do solo. Os valores estimados têm apenas caráter preliminar, possibilitando uma convergência mais rápida para a solução.

Analisando fundações de martelo em boas condições de uso, Barkan observou que a relação entre as massas da fundação e do martinete é de aproximadamente 40, variando fortemente com a intensidade do impacto e as características da peça forjada.

A Tabela 8.2 [15] fornece as espessuras mínimas do bloco de fundação na região sob a bigorna recomendadas por Major [15, Vol.II, p.41]. Elas são consistentes com as recomendadas por Barkan [5, p.188] e apresentadas na Tabela 8.3

Tabela 8.2 – Espessuras mínimas do bloco segundo Major.

Massa do martinete (t)	Espessura (m)
$\leq 1,0$	1,00
2,0	1,25
4,0	1,75
$\geq 6,0$	2,25

Tabela 8.3 – Espessuras mínimas do bloco segundo Barkan.

Massa do martinete (t)	Espessura (m)
$\leq 0,75$	0,75
$0,75 < m_0 \leq 2,5$	1,5
$> 2,5$	1,25 a 2,25

Finalmente, a espessura do coxim sob a bigorna é escolhida de modo que não sejam ultrapassadas as tensões admissíveis à compressão no coxim nem as amplitudes de deslocamento admissíveis para a bigorna. Valores iniciais de referência podem ser encontrados em [15, Vol.II, p.37].

8.3 Análise Dinâmica

O fenômeno do impacto do martinete contra a peça forjada sobre a bigorna é bastante complexo. Ele pode ser analisado considerando um sistema dinâmico constituído pelos seguintes elementos: martinete, bigorna, bloco de fundação, coxim, e solo. Neste sistema, o bloco e a bigorna são admitidos como corpos rígidos, pois suas deformações são desprezíveis quando comparadas com as deformações do coxim e do solo. A sua análise dinâmica possibilita a avaliação das amplitudes de deslocamento da bigorna e da fundação, bem como dos esforços dinâmicos no coxim e no contato solo-fundação.

8.3.1 Representação das Ações

Durante o impacto com a bigorna, parte da energia é gasta no processo, outra é restituída no ricochete do martinete e a energia restante é transferida à bigorna na forma de um pulso, definido como uma força transiente, $P(t)$, de curta duração, t_P , quando comparada ao período T da fundação. Conhecida a equação do pulso, que depende da peça forjada, do número de golpes recebidos e da própria fundação do martelo, é possível determinar a resposta dinâmica do sistema. É importante observar que raramente os esforços são especificados pelo fabricante e apenas a energia do impacto é conhecida.

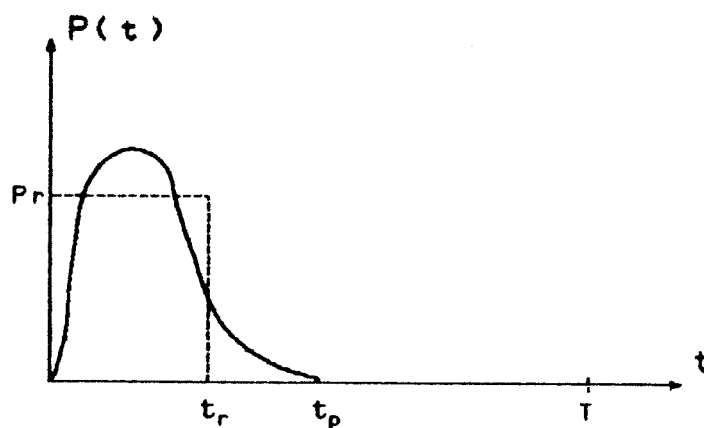


Fig. 8.3 – Substituição do pulso original pelo pulso retangular.

Com a finalidade de avaliar o efeito da duração do impacto, será admitido um pulso retangular de mesmo impulso, de modo que

$$P_r t_r = \int_0^{t_P} P(t) dt, \quad (8.1)$$

onde P_r é a amplitude do pulso retangular e $t_r < t_P$ sua duração. Na Fig. 8.4 são apresentadas as curvas de deslocamento de um sistema não-amortecido, com um grau de liberdade, submetido a pulsos retangulares de mesmo impulso, mas de durações t_r diferentes.

As curvas indicam que o deslocamento máximo aumenta quanto menor for a duração do

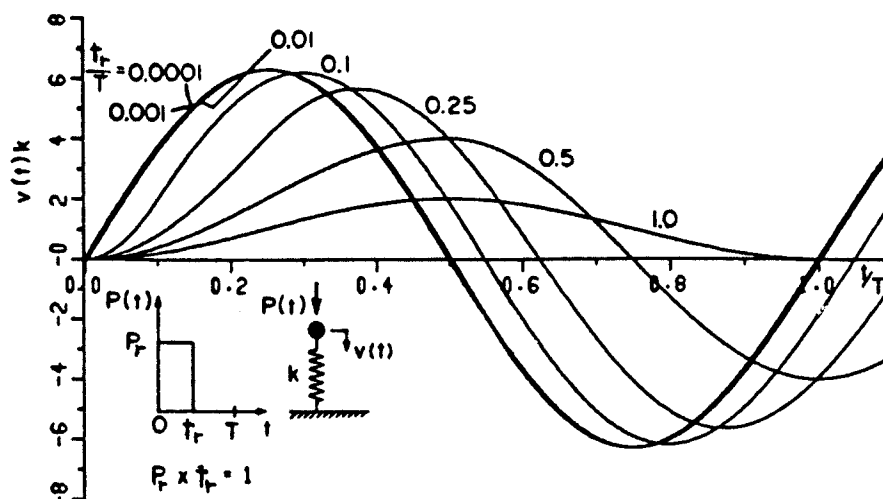


Fig. 8.4 – Resposta de um sistema submetido a um pulso retangular de duração variável.

pulso, sendo quase igual à resposta do pulso infinitamente curto para t_r/T menor que 0,1. Mesmo para t_r/T igual a 0,25, o valor extremo está bem perto do máximo. Assim, para os martelos usuais apresentando pulsos com durações entre 0,01 a 0,02 s, os resultados obtidos para o pulso infinitamente curto são satisfatórios para freqüências naturais da fundação inferiores a 10 Hertz. Para freqüências superiores, os resultados são superestimados e, portanto, a resposta é conservadora.

Por outro lado, a resposta do sistema a um pulso infinitamente curto pode ser aproximada por um movimento de vibração livre provocado pela velocidade inicial da bigorna [8, p.96]. Como o pulso é muito curto, admite-se que durante o impacto não haja tempo para que a fundação e a bigorna desenvolvam deslocamentos comparáveis aos experimentados após o impacto. Dessa forma, as forças resistentes e de amortecimento ainda não foram mobilizadas e a velocidade inicial da bigorna é obtida pela análise cinemática do choque entre martinete e bigorna.

Impondo a conservação da quantidade de movimento durante o impacto, resulta

$$m_0 \dot{v}_{0a} = m_0 \dot{v}_{0d} + m \dot{v}, \quad (8.2)$$

sendo

- m_0 massa do martinete;
- m massa da bigorna;
- $\dot{v}_{0a}, \dot{v}_{0d}$ velocidade do martinete antes e depois do impacto;
- \dot{v} velocidade inicial da bigorna.

As incógnitas \dot{v}_{0d} e \dot{v} são determinadas introduzindo-se a hipótese de Newton de que a velocidade relativa entre dois corpos depois do impacto é proporcional à velocidade antes do impacto. A relação entre elas, denominada de coeficiente de restituição, depende da temperatura da peça forjada, de sua dimensão e forma, e dos materiais do martinete, da

bigorna e da peça,

$$k_r = \frac{\dot{v} - \dot{v}_{0d}}{\dot{v}_{0a}}. \quad (8.3)$$

Das Eqs. (8.2) e (8.3), tem-se

$$\dot{v} = \frac{(1 + k_r)m_0}{m + m_0} \dot{v}_{0a}. \quad (8.4)$$

O coeficiente de restituição pode variar de zero a um, desde choques perfeitamente plásticos até perfeitamente elásticos, e depende do estado da peça forjada. No início do processo, grande parte da energia é gasta na deformação plástica do material e k_r é pequeno. Com a peça já deformada, k_r atinge os valores máximos adotados no projeto. Para os martelos usuais, os menores valores de k_r ocorrem para a forja de materiais não-ferrosos, com valores próximos de zero. Para materiais ferrosos e forja a quente, k_r é aproximadamente 0,25, aumentando com o esfriamento do material. Para a forja a frio de peças de aço, k_r é admitido igual a 0,5.

El Hifnawy e Novak [11], estudando os efeitos da forma do pulso no movimento da fundação, concluíram que ela afeta essencialmente a curva de resposta ao longo do tempo, mas tem um efeito reduzido sobre a resposta máxima. Quanto à duração do pulso, eles concluíram que a abordagem da velocidade inicial é conservadora. Para valores de t_P/T em torno de 0,5 a resposta da bigorna é superestimada em até 100%.

8.3.2 Rigidez e Amortecimento do Sistema Dinâmico

Para o movimento vertical de fundações de martelo, serão adotados os coeficientes de rigidez e amortecimento do solo estabelecidos por Novak [20], que consideram o efeito da forma da fundação, profundidade enterrada e espessura da camada de solo, dados por

$$\begin{aligned} k &= G r_0 \left(C_1 + \frac{G_s}{G} \frac{L}{r_0} S_1 \right), \\ c &= r_0^2 \sqrt{\rho G} \left(C_2 + \frac{L}{r_0} \sqrt{\frac{\rho_s G_s}{\rho G}} S_2 \right) \quad \text{para} \quad \omega_0 \geq \omega_v, \\ c &= 0 \quad \text{para} \quad \omega_0 < \omega_v. \end{aligned} \quad (8.5)$$

onde:

k, c	coeficientes de rigidez e amortecimento do solo de fundação;
r_0	raio equivalente da fundação;
G, ρ	módulo de elasticidade transversal e densidade do solo;
G_s, ρ_s	idem para a camada lateral de solo;
$\frac{L}{m}$	profundidade enterrada;
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	freqüência angular natural da fundação;
ω_v	freqüência angular natural da camada de solo dada por

$$\omega_v = \frac{\pi V_s}{2H} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}; \quad (8.6)$$

- H profundidade da camada;
 V_s velocidade da onda de distorção;
 ν coeficiente de Poisson.

Observa-se que quando ω_0 é menor que ω_v quase nenhuma onda progressiva é gerada e o amortecimento geométrico é desprezível (Eq. 8.5-c).

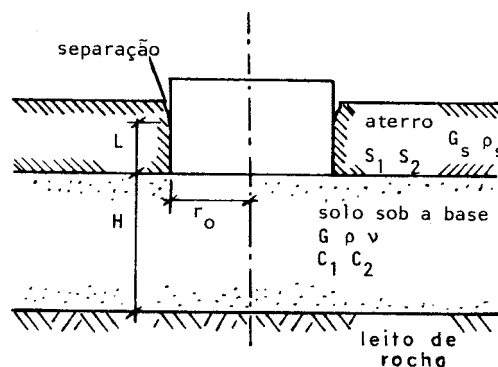


Fig. 8.5 – Fundação enterrada - parâmetros do solo.

Os índices 1 e 2 referem-se aos coeficientes de rigidez e amortecimento, respectivamente. Os parâmetros C_i estão associados ao maciço de solo sob a base e dependem principalmente da profundidade H da camada de solo, do coeficiente de Poisson e da frequência adimensional a_0 . Os parâmetros S_i referem-se à camada acima do leito da base e dependem de a_0 .

As fórmulas apresentadas podem ser simplificadas para o intervalo usual das frequências adimensionais das fundações de martelo ($0,5 \leq a_0 \leq 1,5$) adotando-se os parâmetros C_i , S_i independentes da frequência recomendados por Novak [20] e apresentados na Tabela 8.4.

Tabela 8.4 – Parâmetros independentes da frequência.

	C_1	C_2	S_1	S_2
Solos não-coesivos ($\nu = 0,25$)	5,2	5,0	2,7	6,7
Solos coesivos ($\nu = 0,45$)	7,5	6,8	2,7	6,7

Embora os valores fornecidos concordem com as soluções obtidas pelo método dos elementos finitos, alguns ajustes são necessários. Constata-se experimentalmente que os valores teóricos do amortecimento geométrico são exagerados, o que seria explicado pela reflexão das ondas de volta para a fundação devido à estratificação natural do solo. A favor da segurança, Novak [20] recomenda que os valores de C_2 sejam reduzidos à metade.

Quanto à profundidade enterrada, observa-se a separação do solo da face lateral da fundação para vibrações de grande intensidade. A separação ocorre a partir da superfície, na região onde a pressão de confinamento é insuficiente para manter o contato solo-fundação. O ajuste é feito considerando uma profundidade efetiva inferior à enterrada.

Os coeficientes de rigidez e amortecimento, considerando os amortecimentos geométrico e interno do solo, serão calculados mediante as Eqs. (4.6) e (4.7) apresentadas no Capítulo 4,

$$k_T = k - 2\xi_h c\omega, \quad (8.7)$$

$$c_T = c + \frac{2\xi_h k}{\omega}. \quad (8.8)$$

Os valores usuais do amortecimento interno do solo correspondem a ξ_h no intervalo de 0,02 a 0,10.

8.3.3 Modelo Matemático

As fundações de martelo são geralmente representadas por meio de sistemas discretos massa-mola-amortecedor, cujo número de graus de liberdade depende do tipo de fundação e da excentricidade do impacto em relação ao eixo vertical da fundação. Entende-se por eixo vertical, a reta vertical que passa pelos centros de gravidade da bigorna e do conjunto martelo-bloco de fundação, como também pelos centróides das áreas de suas respectivas bases.

Na maioria das fundações, a bigorna apóia-se sobre um coxim elástico e o impacto é centrado, resultando o modelo de dois graus de liberdade comumente empregado para analisar fundações de martelo (Fig. 8.6-a). Quando o impacto é excêntrico são necessários 6 graus de liberdade para cada massa considerada isoladamente no modelo. Se o movimento ocorrer em um dos planos principais, este número se reduz a 3 graus de liberdade por massa.

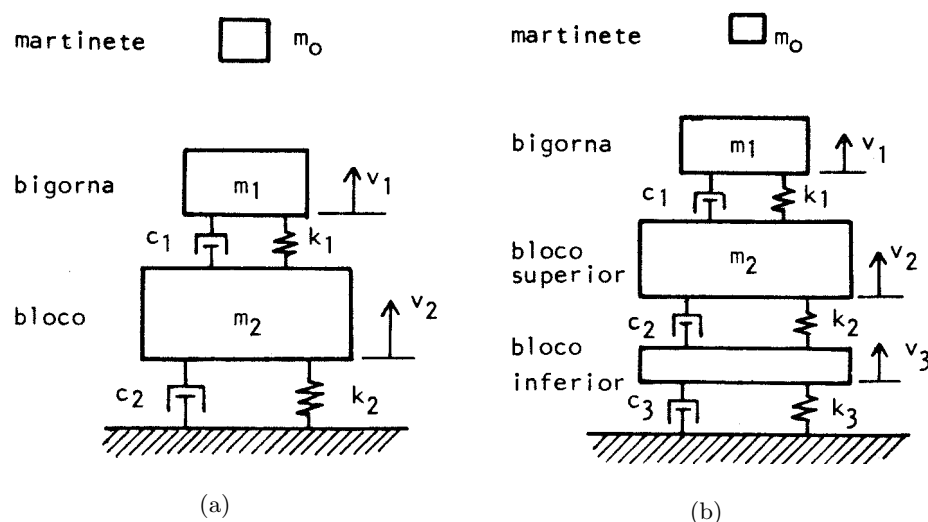


Fig. 8.6 – Modelos da fundação.

Quando o bloco de fundação assenta-se sobre aparelhos de apoio, é necessário acrescentar uma nova massa ao modelo, a fim de representar o bloco inferior de concreto em contato com o solo (Fig. 8.6-b).

8.3.4 Resposta de um Sistema com Dois Graus de Liberdade

A seguir são apresentadas as expressões que fornecem os deslocamentos máximos para um sistema com dois graus de liberdade (Fig. 8.6-a), empregando o método da superposição modal. Sendo:

- m_1 a massa sobre o coxim, com deslocamento $v_1(t)$;
- m_2 a massa do bloco de fundação, com deslocamento $v_2(t)$;
- k_1 o coeficiente de rigidez do coxim entre bigorna e bloco;
- k_2 o coeficiente de rigidez do solo de fundação;
- c_1 o coeficiente de amortecimento do coxim;
- c_2 o coeficiente de amortecimento do solo de fundação;
- \mathbf{v} o vetor de deslocamentos, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}^T$;
- $\dot{\mathbf{v}}$ e $\ddot{\mathbf{v}}$ suas derivadas em relação ao tempo e

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema, respectivamente.

A equação do movimento assume a forma matricial

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (8.10)$$

Movimento Não-Amortecido A solução é expressa como a soma de duas soluções particulares independentes

$$\begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{Bmatrix} \text{sen } \omega_1 t + \begin{Bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{Bmatrix} \text{sen } \omega_2 t. \quad (8.11)$$

Para distinguir as componentes de deslocamento, foi introduzida a notação v_{ij} de dois índices: o primeiro, identificando o grau de liberdade i ; o segundo, a frequência e modo de vibração. As frequências angulares são dadas por

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{12}}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2}}, \quad (8.12)$$

onde k_{ij} representa os elementos da matriz \mathbf{k} . Os modos de vibração são caracterizados pelas relações

$$a_j = \frac{v_{1j}}{v_{2j}} = \frac{-k_{12}}{k_{11} - m_1 \omega_j^2} = \frac{k_{22} - m_2 \omega_j^2}{-k_{21}}, \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (8.13)$$

A Figura 8.7 ilustra os modos de vibração. No modo 1, as massas vibram em fase, enquanto no modo 2, elas vibram em oposição de fase.

As amplitudes v_{ij} do movimento são calculadas a partir das condições iniciais do

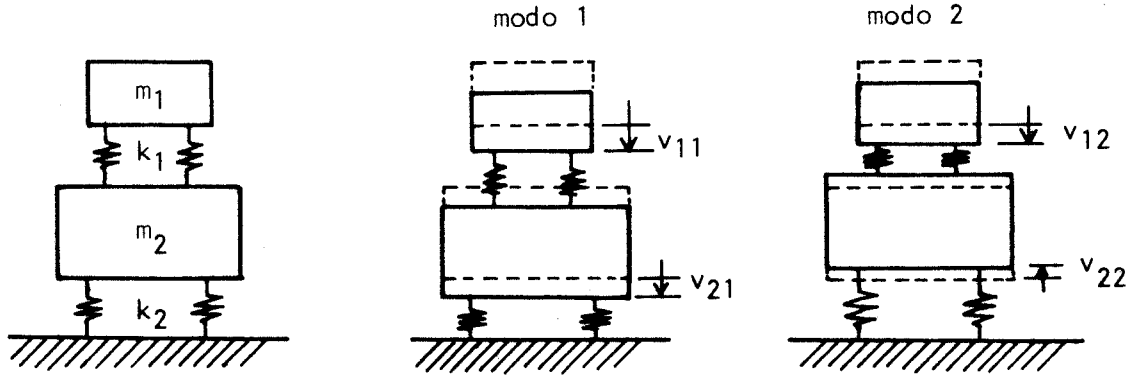


Fig. 8.7 – Modos de vibração.

sistema

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, & v_2(0) &= 0, \\ \dot{v}_1(0) &= \dot{v}, & \dot{v}_2(0) &= 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

com \dot{v} obtida por meio da fórmula básica para o choque centrado entre dois corpos (Eq. 8.4). Do tratamento das equações anteriores, resultam

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{\dot{v}}{\omega_1} \frac{\omega_2^2 - \omega_a^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, & v_{12} &= \frac{\dot{v}}{\omega_2} \frac{\omega_a^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \\ v_{21} &= v_{11} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_a^2} \right), & v_{22} &= -v_{21} \frac{\omega_1}{\omega_a^2}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

onde $\omega_a = \sqrt{k_1/m_1}$. No caso de ω_2 ser muito maior que ω_1 , os deslocamentos máximos da bigorna e da fundação são, aproximadamente,

$$\hat{v}_1 = |v_{11} + v_{12}|, \quad \hat{v}_2 = |v_{21}| + v_{22}. \quad (8.16)$$

Movimento Amortecido No Capítulo 2, foram apresentados dois métodos que permitem obter a resposta de um sistema dinâmico amortecido: a integração numérica das equações diferenciais do movimento e a análise modal e posterior integração das equações diferenciais desacopladas. Neste último, a aplicação do conceito de taxa de amortecimento modal equivalente conduz a expressões simples para o cálculo das amplitudes. De posse destas expressões, não mais se justifica o procedimento sugerido por Barkan [5], que considera indiretamente o efeito do amortecimento nas amplitudes majorando a rigidez do solo de fundação.

Admitindo que o modo de vibração amortecido seja aproximadamente igual ao do sistema não-amortecido, a taxa de amortecimento modal equivalente pode ser avaliada pela Eq. (4.21). Como o amortecimento por histerese do sistema será considerado mediante a Eq. (8.8), apenas o primeiro termo da Eq. (4.21), referente à matriz de amortecimento

viscoso, tem interesse:

$$\xi_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{c}_v \phi_j}{2\omega_j M_j}. \quad (8.17)$$

Desenvolvendo a expressão de ξ_j para o sistema de dois graus de liberdade, tem-se

$$\xi_j = \frac{1}{2\omega_j M_j} [c_1(v_{1j} - v_{2j})^2 + c_2 v_{2j}^2] \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (8.18)$$

Para a situação usual em que ω_2 é muito maior que ω_1 , as expressões das taxas de amortecimento podem ser simplificadas para

$$\xi_1 = \frac{c_2}{2\sqrt{k_2(m_1 + m_2)}}, \quad \xi_2 = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1 m_1}}. \quad (8.19)$$

A equação do movimento é obtida superpondo os modos de vibração

$$\begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{Bmatrix} e^{-\xi_1 \omega_1 t} \text{sen } \omega_{d1} t + \begin{Bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{Bmatrix} e^{-\xi_2 \omega_2 t} \text{sen } \omega_{d2} t, \quad (8.20)$$

sendo $\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$ a frequência angular amortecida. Da análise da Eq. (8.20), resultam as expressões aproximadas para os deslocamentos máximos

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |v_{11}| \\ |v_{21}| \end{Bmatrix} e^{-\xi_1 \omega_1 t_m} \text{sen } \omega_{d1} t_m + \begin{Bmatrix} |v_{12}| \\ |v_{22}| \end{Bmatrix} e^{-\xi_2 \omega_2 t_m}, \quad (8.21)$$

com

$$t_m = \frac{1}{\omega_{d1}} \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{\xi_1}. \quad (8.22)$$

A força máxima transmitida ao solo inclui a força resistente e a de amortecimento, sendo aproximadamente

$$F_2 = \sum_{j=1}^2 |v_{2j}| \sqrt{k_2^2 + (c_2 \omega_{dj})^2}. \quad (8.23)$$

Para o caso de ω_2 ser muito maior que ω_1 , o deslocamento máximo relativo entre a bigorna e o bloco é calculado pela expressão

$$\hat{v}_a = (|v_{12}| + v_{22}) e^{-\frac{\xi_2 \pi}{2}}, \quad (8.24)$$

resultando para a força máxima no coxim

$$F_1 = \hat{v}_a \sqrt{k_1^2 + (c_1 \omega_{d2})^2}. \quad (8.25)$$

8.4 Exemplo

Neste exemplo, os resultados obtidos por meio das Eqs. (8.18) a (8.25) serão comparados com os conseguidos mediante a integração direta das equações do movimento para os seguintes casos:

- movimento não-amortecido;
- movimento amortecido;
- movimento amortecido considerando o salto da bigorna.

Como referência serão apresentados os resultados utilizando o procedimento sugerido por Barkan [5] para o cálculo dos coeficientes de rigidez do sistema.

8.4.1 Dados da Fundação

Características do Martelo e Fundação

- Massas
 - martinete 3,5 t,
 - bigorna 60,0 t,
 - pórtico 30,0 t.
- Velocidade de impacto do martinete 6,0 m/s.
- Coeficiente de restituição máximo $k_r = 0,5$.
- Área da base da bigorna 6,0 m².
- Coxim de madeira
 - altura $d = 0,60$ m,
 - módulo de elasticidade 10^6 kN/m²,
 - tensão admissível 3 MPa,
 - amortecimento interno $\xi_h = 0,05$.
- Bloco de concreto
 - densidade 2,5 t/m³.

Características do Solo

- Camada profunda de areia grossa e cascalho
 - amortecimento interno $\xi_h = 0,05$
 - tensão admissível 0,3 MPa
 - profund. do leito rochoso $h = 35$ m
- $V_{s1} = 160$ m/s
 - $\rho_1 = 1,9$ t/m³
 - $\nu_1 = 0,25$
- Camada de aterro
 - $V_{s2} = 0,5 V_{s1}$
 - $\rho_2 = 0,75 \rho_1$
 - $\nu_2 = 0,25$

As dimensões iniciais da fundação estão ilustradas na Fig. 8.8 e foram escolhidas de acordo com as recomendações de Srinivasulu [29] e Barkan [5].

8.4.2 Análise Dinâmica com Dois Graus de Liberdade

O modelo adotado considera a simetria da fundação em relação a dois planos verticais (Fig. 8.6-a), possuindo as seguintes características obtidas dos dados da fundação:

- Massa do martinete e bigorna $m_1 = 63,5$ t
- Coxim sob a bigorna
 - coeficiente de rigidez $k_1 = E_c A / d = 1 \times 10^7$ kN/m,
 - freqüência angular $\omega_0 = \sqrt{k_1 / m_1} = 397$ rad/s,
 - coeficiente de amort. $c_1 = 2\xi_h k_1 / \omega_0 = 2520$ kNs/m.

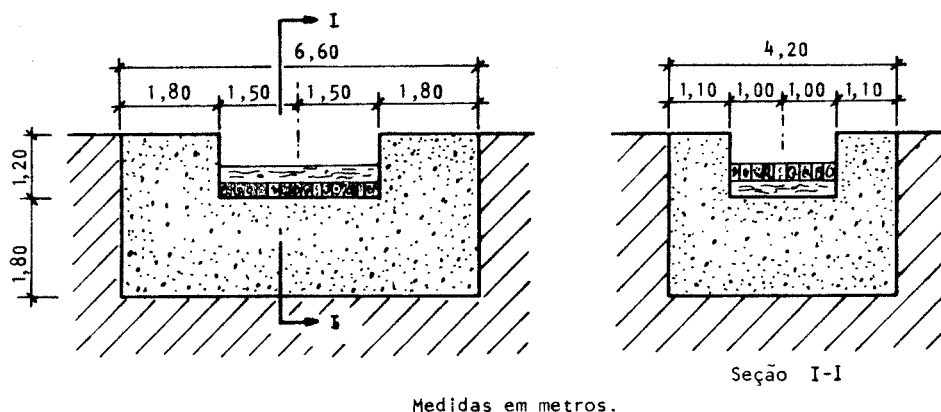


Fig. 8.8 – Dimensões do bloco de fundação.

- Massa do bloco de fundação mais o pórtico do martelo $m_2 = 219,9 \text{ t}$.
- Características do solo sob a fundação
 - Raio equivalente $r_0 = \sqrt{ab/\pi} = 2,97 \text{ m}$.
 - Coeficiente de rigidez, Eq. (8.5-a), $k = 8,89 \times 10^5 \text{ kN/m}$,
($C_1 = 5,2$ e $S_1 = 2,7$ para solos não-coesivos).
 - Coeficiente de amortecimento, Eq. (8.5-b), $c = 1,45 \times 10^4 \text{ kNs/m}$,
($C_2 = 5,0/2 = 2,5$ e $S_2 = 6,7$).

O amortecimento geométrico é efetivo pois a frequência angular natural da fundação ω_0 é maior que a frequência ω_v , Eq. (8.6),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 56,0 \text{ rad/s} \gg \omega_v = 12,4 \text{ rad/s}.$$

- Introdução do amortecimento interno do solo, Eqs. (8.7) e (8.8)

$$k_2 = 8,11 \times 10^5 \text{ kN/m},$$

$$c_2 = 1,62 \times 10^4 \text{ kNs/m}.$$

- Frequências angulares naturais do sistema, Eq. (8.12),

$$w_1 = 53,4 \text{ rad/s},$$

$$w_2 = 451,4 \text{ rad/s}.$$

- Componentes de deslocamento

$$v_{11} = -2,14 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad v_{21} = -2,10 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$v_{12} = -8,45 \times 10^{-4} \text{ m}, \quad v_{22} = 2,49 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

- Velocidade inicial da massa m_1 , Eq. (8.4), $\dot{v} = -0,496 \text{ m/s}$.

8.4.2.1 Deslocamentos Máximos

- Deslocamentos máximos do movimento não-amortecido, Eqs. (8.16-a) e (8.16-b),

$$\text{bigorna} \quad \hat{v}_1 = |v_{11} + v_{12}| = 2,99 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$\text{fundação} \quad \hat{v}_2 = |v_{21}| + v_{22} = 2,35 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

- Deslocamentos máximos do movimento amortecido

– taxas de amortecimento equivalente, Eq. (8.18),

$$\xi_1 = 0,531,$$

$$\xi_2 = 0,076.$$

– frequências e períodos do movimento amortecido

$$\omega_{d1} = 45,3 \text{ rad/s}, \quad T_{d1} = 0,139 \text{ s},$$

$$\omega_{d2} = 450,1 \text{ rad/s}, \quad T_{d2} = 0,014 \text{ s}.$$

Os deslocamentos máximos ocorrem para $t_m = 0,0223 \text{ s}$

$$v_1 = 1,36 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$v_2 = 1,06 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

A Figura 8.9 ilustra a resposta dinâmica obtida pela Eq. (8.20).

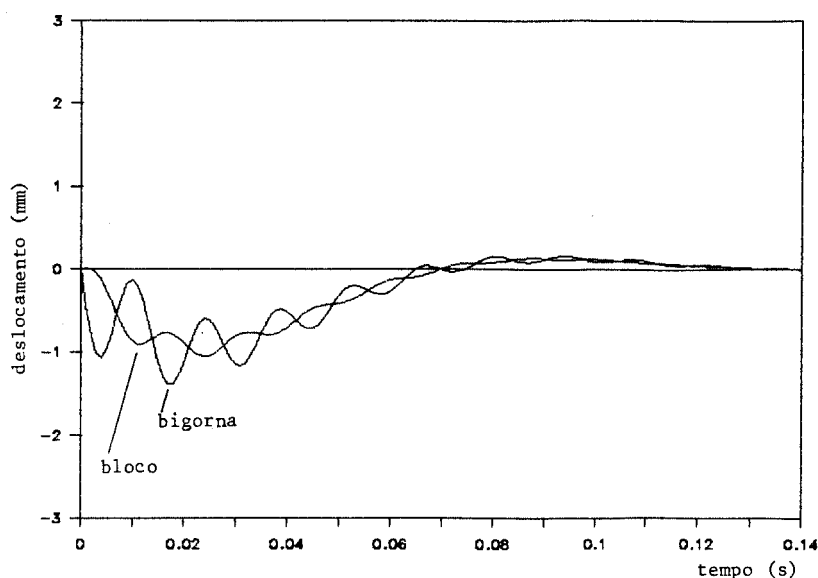


Fig. 8.9 – Deslocamentos do modelo amortecido empregando o método da superposição modal.

8.4.2.2 Esforços dinâmicos

- Sem amortecimento

$$F_1 = k_1[(v_{11} - v_{12}) + (v_{12} - v_{22})] = -11340 \text{ kN},$$

$$F_2 = -k_2(|v_{21}| + v_{22}) = -1906 \text{ kN}.$$

- Com amortecimento e admitindo $\omega_2 \gg \omega_1$, Eqs. (8.23) e (8.25)

$$F_1 = -9770 \text{ kN},$$

$$F_2 = -4120 \text{ kN}.$$

8.4.2.3 Verificação Considerando o Movimento Amortecido

Deslocamento máximo da bigorna	$v_1 = 1,4 \text{ mm} < 3,0 \text{ mm};$
deslocamento máximo da fundação	$v_2 = 1,1 \text{ mm} < 1,2 \text{ mm};$
tensão dinâmica máxima no coxim (compressão)	$\sigma_c = 1,63 \text{ MPa} < 3 \text{ MPa};$
tensão dinâmica máxima no solo (compressão)	$\sigma_s = 0,15 \text{ MPa};$
tensão estática (compressão)	$\sigma_s = 0,10 \text{ MPa}.$

De acordo com os critérios apresentados no Seção 8.1, a fundação pode ser considerada adequada.

8.4.3 Procedimento Proposto por Barkan

A partir de resultados de ensaios com fundações de martelo, Barkan ajustou os coeficientes das equações do movimento não-amortecido de modo a obter as mesmas amplitudes e o mesmo “período” da curva determinada experimentalmente. Como regra prática, Barkan propôs que se reduzisse à metade a constante de mola do coxim e se multiplicasse por três o coeficiente do solo sob a fundação, atribuindo as discrepâncias aos efeitos do amortecimento e enterramento da fundação [5, pp. 208-209].

- Coeficiente de rigidez do coxim $k_1^B = k_1/2 = 5 \times 10^6 \text{ kN/m}.$
- Características do solo sob a fundação
 - Raio equivalente $r_0 = 2,97 \text{ m}.$
 - Coeficiente de rigidez (desprezando os efeitos do amortecimento e profundidade enterrada), Eq. (8.5-a),

$$k_2 = G r_0 C_1 = 7,51 \times 10^5 \text{ kN/m},$$

$$k_2^B = 3k_2 = 2,25 \times 10^6 \text{ kN/m}.$$

- Freqüências e períodos do sistema, Eq. (8.12),

$$w_1 = 88,0 \text{ rad/s}, \quad T_1 = 0,071 \text{ s},$$

$$w_2 = 322,4 \text{ rad/s}, \quad T_2 = 0,019 \text{ s}.$$

- Componentes de deslocamento

$$v_{11} = -1,48 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad v_{21} = -1,33 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$v_{12} = -1,13 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad v_{22} = 3,63 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

- Velocidade inicial da massa m_1 , Eq. (8.4), $\dot{v} = -0,496 \text{ m/s}$.

- Deslocamentos máximos

– Fórmulas aproximadas, Eqs. (8.16-a) e (8.16-b),

$$\hat{v}_1 = 2,61 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$\hat{v}_2 = 1,69 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

– Considerando apenas os deslocamentos antes da inversão de sinal

$$\hat{v}_1 = 2,39 \times 10^{-3} \text{ m},$$

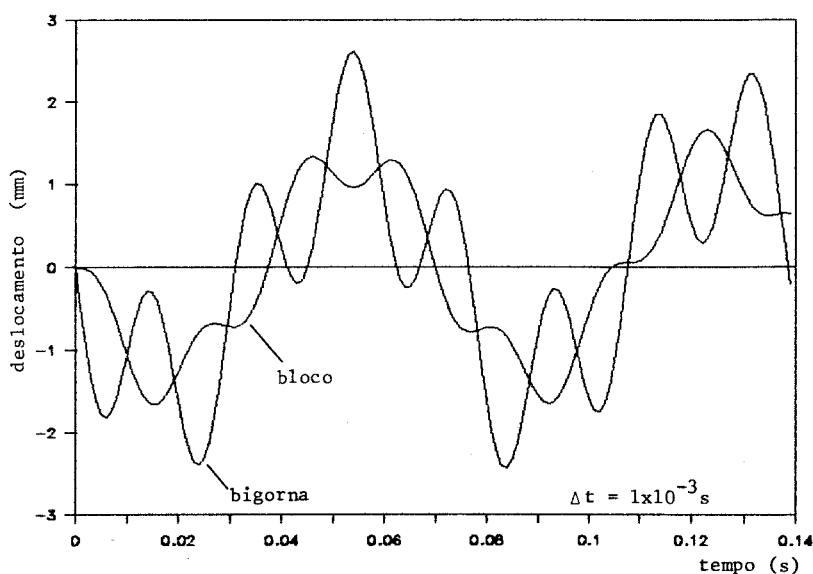
$$\hat{v}_2 = 1,65 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

A Figura 8.10 ilustra a resposta dinâmica considerando o modelo proposto por Barkan. Os valores obtidos são intermediários em relação aos anteriores. Entretanto, deve ser observado que a diferença no período fundamental do sistema ($T_1 = 0,071 \text{ s}$ contra $T_1 = 0,139 \text{ s}$ do sistema amortecido) não pode ser atribuída apenas ao amortecimento e a maior rigidez devido à contensão lateral.

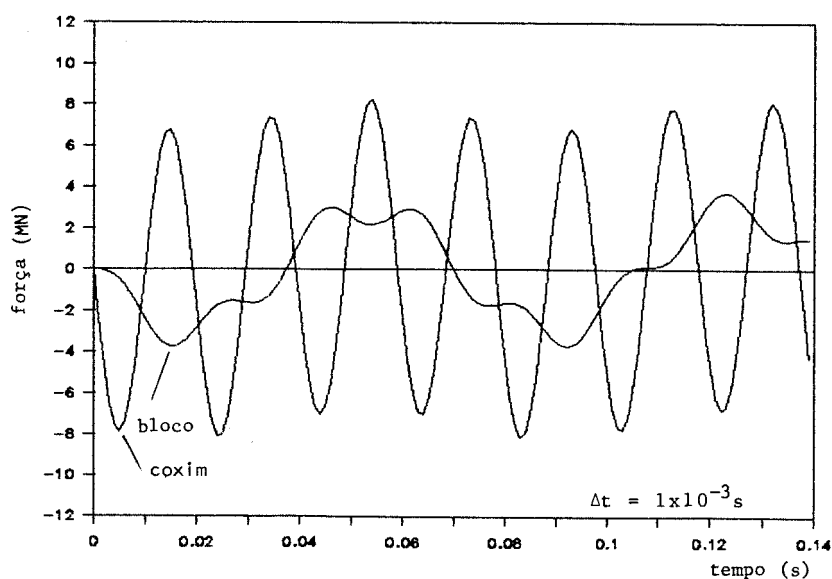
8.4.4 Análise da Fundação de Martelo com Salto da Bigorna

No seção 8.4.2 admitiu-se que o coxim e o solo de fundação resistiam à tração e compressão. Entretanto, na situação real, as tensões estáticas de compressão no coxim são muito menores que os esforços de tração associados ao movimento ascendente, não existindo nenhuma ligação resistente à tração. Deste modo, a bigorna pode desprender-se do coxim, fato que recebe o nome de **salto da bigorna**.

Quando a rigidez do solo é elevada, a amplitude do salto da bigorna pode exceder várias vezes a amplitude de deslocamento prevista na análise linear. Nestes casos, a separação bigorna-coxim pode impedir a operação normal do martelo prejudicando sua precisão. Para a consideração de um provável salto da bigorna, o sistema de equações que rege o movimento deve ser modificado de modo a evitar que ocorram tensões de tração no coxim.



(a) deslocaimentos



(b) forças no coxim e na base do bloco

Fig. 8.10 – Resposta dinâmica - modelo proposto por Barkan.

Isto pode ser feito no método da aceleração linear limitando a força de tração ao valor do peso próprio da bigorna, o que corresponde a uma aceleração de $-g$ durante o salto.

Em outras palavras, o modelo matemático proposto considera o simples descolamento entre a bigorna e o coxim. Assim, efeitos importantes como a modificação das propriedades do coxim, nos instantes de descolamento e impacto, são eliminados, o que torna essencial a aferição experimental do modelo.

As respostas calculadas pelo método da aceleração linear, na forma de curvas de deslocamentos e forças, estão representadas nas Figs. 8.11 e 8.12. As respostas do modelo

considerando o salto da bigorna (c) são mostradas logo abaixo dos gráficos para os modelos não-amortecido (a) e amortecido (b) da fundação de martelo. Os intervalos de tempo adotados na integração numérica estão indicados nos gráficos.

Os valores máximos de deslocamentos e forças obtidos pelo método da aceleração linear foram resumidos na Tabela 8.5, que também apresenta os valores calculados por meio das Eqs. (8.18) a (8.25) e segundo o procedimento proposto por Barkan.

Tabela 8.5 – Valores máximos de deslocamentos e forças e instantes em que ocorrem.

	Análise modal	Proc. Barkan 8.4.3	Método da aceleração linear		
	mov. amortec. 8.4.2.1		não- amortec.	amortec.	amortec. com salto
v_1 (mm)	-1,36 0,022s	-2,39 0,024s	-2,95 0,031s	-1,58 0,018s	-1,19 2,00 0,004 0,031s
v_2 (mm)	-1,06 0,022s	-1,65 0,015s	-2,29 0,025s	-1,22 0,024s	-1,52 0,019s
F_1 (10^6 N)	-9,8	-7,8 0,005s	-10,9 0,004s	-10,3 0,003s	-10,3 0,003s
F_2 (10^6 N)	-4,1	-3,7 0,015s	-1,9 0,025s	-3,9 0,007s	-3,1 0,007s

Observações:

1. Devido ao grande amortecimento da fundação, foram considerados apenas os valores antes da inversão de sinal, exceto para o movimento com salto.
2. Deslocamento positivo para cima.
3. Força negativa para compressão.

Os resultados determinados pelo método da aceleração linear confirmam a importância do amortecimento para a análise dinâmica da fundação. Embora tenha pequena influência nas forças máximas, o amortecimento afeta consideravelmente os deslocamentos máximos da bigorna e do bloco.

A primeira coluna da Tabela 8.5 mostra que as Eqs. (8.18) a (8.25), desenvolvidas a partir do método da superposição modal, fornecem resultados aceitáveis. As diferenças encontradas em relação ao método da aceleração linear devem-se à aproximação no cálculo das taxas de amortecimento modal, o que seria contornado trabalhando-se com os autovalores complexos dos modos de vibração amortecidos (Novak [21]).

É interessante observar que embora possuam valores máximos próximos, as curvas do movimento amortecido e amortecido com salto mostram comportamentos distintos. Para o segundo, não se observa a oscilação de maior frequência, o “período” (intervalo de tempo no qual a oscilação volta a repetir-se, embora com menor intensidade) é apenas uma fração do período do movimento amortecido ($\approx 1/3$) e os deslocamentos positivos da bigorna predominam sobre os negativos. Assim, as diferenças encontradas confirmam a necessidade de aferição experimental dos parâmetros adotados nos dois modelos.

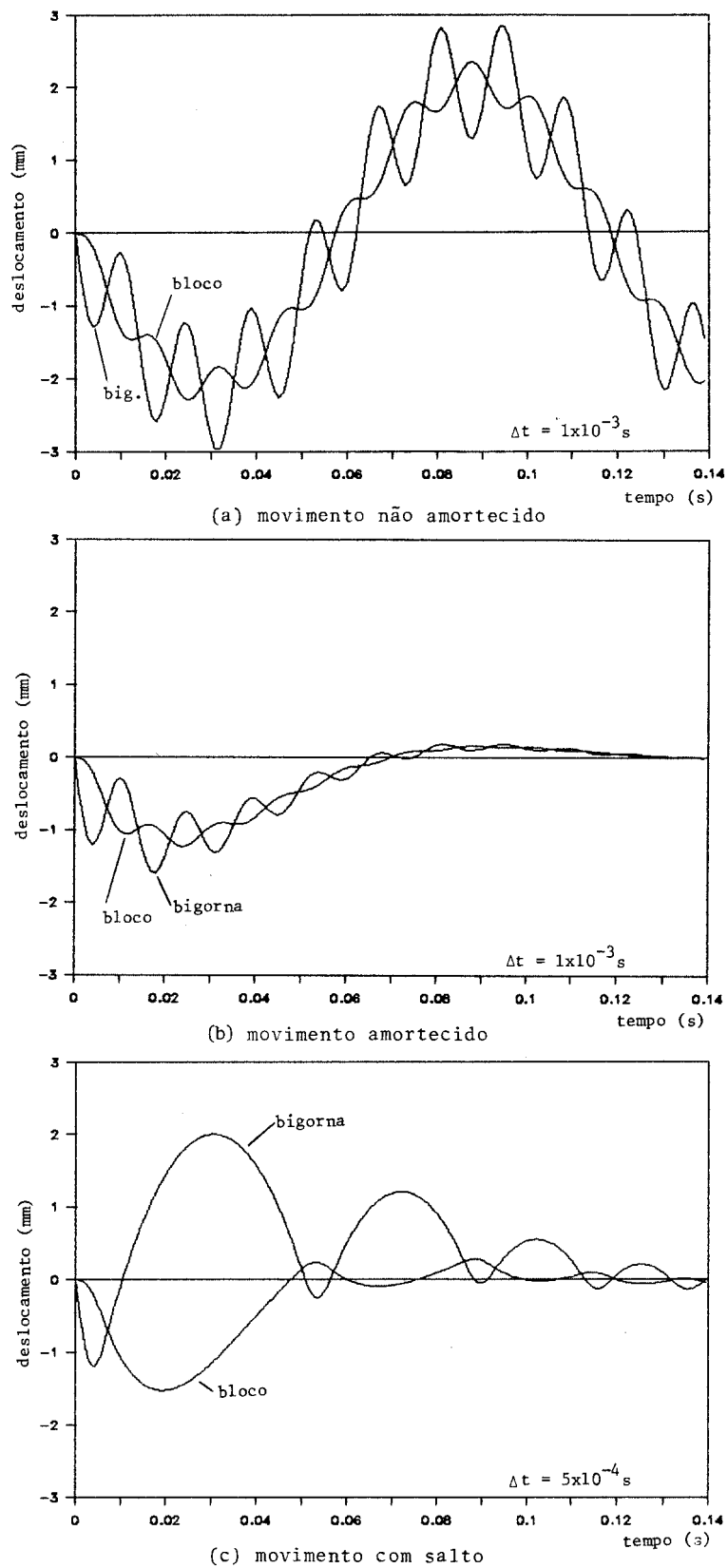


Fig. 8.11 – Curvas de deslocamento ao longo do tempo obtidas pelo método da aceleração linear.

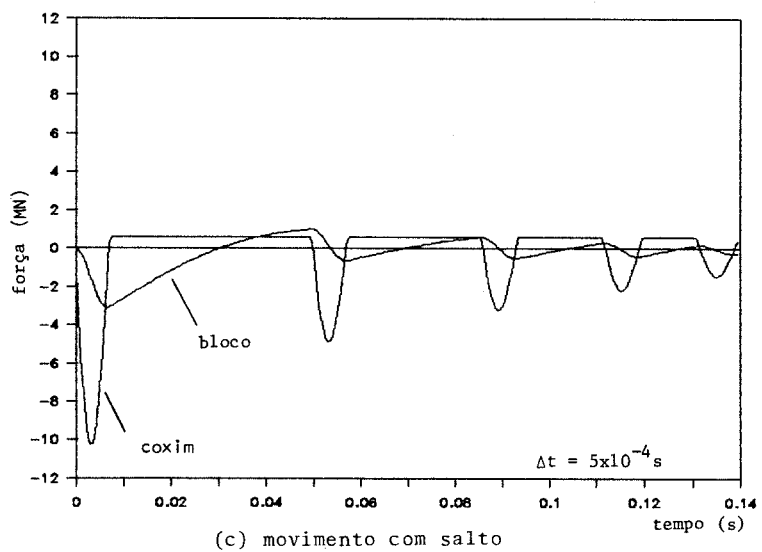
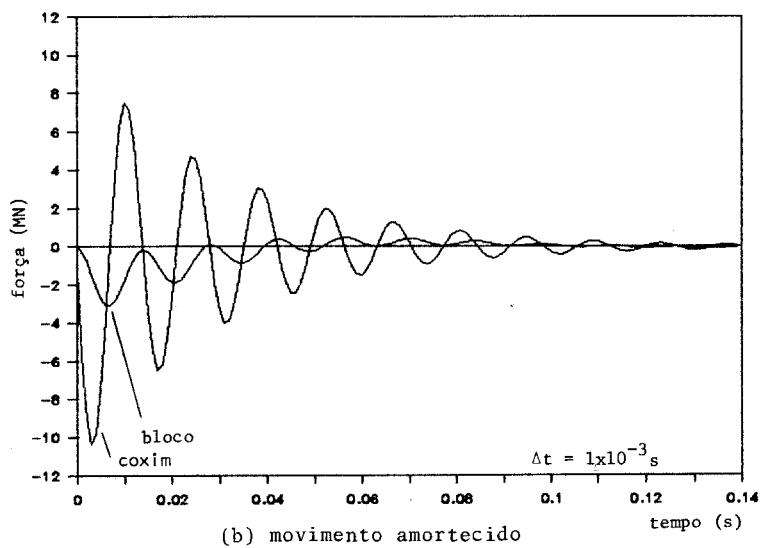
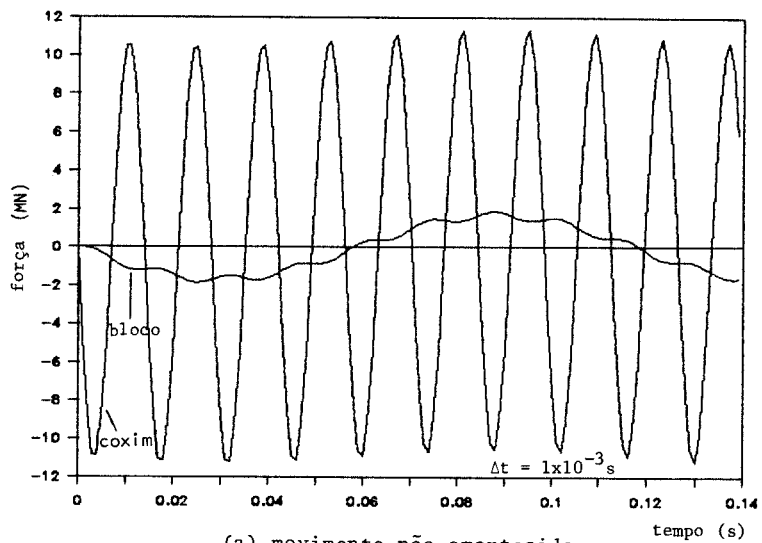


Fig. 8.12 – Curvas de força ao longo do tempo obtidas pelo método da aceleração linear.

8.5 Conclusões

Dois aspectos diferenciam as fundações de martelo das outras fundações de máquinas. Primeiro, os esforços provenientes do impacto têm duração desprezível quando comparada com seu intervalo de repetição. Como consequência, o movimento resultante aproxima-se da oscilação livre amortecida onde o amortecimento do solo tem uma influência considerável. O segundo aspecto é o da ordem de grandeza das deformações, muito maiores nas fundações de martelo e, portanto, os ensaios para avaliação de recalques e parâmetros elásticos devem ser adequados para amplitudes de deslocamento de até 1mm e não apenas até décimos ou centésimos de milímetro.

Principalmente, devido a sua simplicidade, recomenda-se o emprego das Eqs. (8.18) a (8.25) no projeto das fundações usuais de martelo. Um pequeno acréscimo do número de contas em relação às equações do movimento não-amortecido, torna possível a consideração do amortecimento geométrico do solo de fundação. Contudo, quando o projeto da fundação envolver maior responsabilidade e, ao mesmo tempo, informações mais precisas sobre as características do solo estiverem disponíveis, torna-se interessante a análise dinâmica, considerando o salto da bigorna, por sua capacidade de representar melhor o comportamento dinâmico da fundação (Figs. 8.11 e 8.12).

Embora tenha sido examinado apenas o modelo com dois graus de liberdade, a teoria pode ser facilmente estendida para sistemas com vários graus de liberdade na forma de um programa de computador. Desse modo, problemas complexos envolvendo a queda excêntrica do martinete em relação ao eixo vertical principal da fundação poderiam ser analisados.

Capítulo 9

Fundações de Turbogeneradores

As fundações de máquinas examinadas até agora eram relativamente simples, possuindo baixas frequências naturais, o que permitiu representar a estrutura por meio de blocos rígidos e considerar apenas as deformações do solo e de apoios elásticos entre os blocos. Desse modo, foi possível analisar o comportamento dinâmico das fundações mediante modelos matemáticos com poucos graus de liberdade e de fácil interpretação. Nos modelos, os resultados da teoria do semi-espaço elástico homogêneo e isotrópico foram empregados diretamente sem a necessidade de adaptações, tanto dos coeficientes de rigidez quanto dos de amortecimento.

Neste capítulo, são analisadas fundações aporticadas de turbogeneradores, para as quais a consideração das deformações da estrutura passa a ser tão importante quanto à das deformações do solo de fundação. Assim sendo, torna-se mais complexa a representação do comportamento estrutura-fundação, particularmente no que se refere à utilização dos resultados da teoria do semi-espaço.

No início do capítulo, são apresentadas as características do equipamento que interessam ao projeto da fundação, sendo posteriormente discutidos os aspectos mais importantes para a concepção da fundação, tais como: material empregado, rigidez da estrutura etc. No final, os principais itens da análise dinâmica de uma fundação aporticada são ilustrados por um exemplo, onde são discutidos os critérios para a discretização da estrutura e a consideração do solo de fundação. Quanto à discretização, a disponibilidade de programas de computador para a análise dinâmica justificou o abandono dos modelos com 1 e 2 graus de liberdade propostos por Major [15] e Barkan [5], em favor de modelos mais complexos que permitam considerar a interação solo-estrutura.

Sendo a fundação aporticada constituída por diversas partes, torna-se obrigatório especificá-las para evitar mal-entendido. Neste capítulo, o termo estrutura foi usado para designar a parte superior da fundação, constituída por pilares e uma grelha ou laje superior. A parte inferior foi denominada de laje da base ou laje de fundação e o meio que a suporta, recebendo os esforços da fundação, foi designado genericamente solo de fundação. Este, ao contrário do maciço de solo, não tem significado quando isolado da fundação. Assim, seus coeficientes de rigidez e amortecimento dependem não apenas das características dos materiais que constituem o solo mas, também, da geometria da base de

fundação. Logo, os termos freqüências e modos de vibração do solo de fundação designam as freqüências e modos de um bloco rígido com as mesmas propriedades de inércia da fundação analisada.

9.1 Características da Máquina e de sua Fundação

Como características usuais, as turbomáquinas apresentam pesos relativamente elevados e esforços dinâmicos em altas freqüências. Em geral, elas são instaladas acima do nível do chão a fim de acomodar equipamentos auxiliares e tubulações sob suas bases, o que acaba por conduzir ao emprego de estruturas de suporte aporticadas. As turbomáquinas são classificadas de acordo com a função em: (a) turbogeradores; (b) turbocompressores e turboventiladores; e (c) turbobombas.

Na maioria dos conjuntos turbogeradores, a turbina e o gerador possuem um eixo comum e uma freqüência de operação de 25 ou 50 Hz (dependendo do país, 30 ou 60 Hz). Para turbinas de menor potência, operando em freqüências mais elevadas, é comum existir uma caixa de redução entre a turbina e o gerador. As freqüências de compressores acionados eletricamente por um eixo comum é de 25 ou 30 Hz. Para bombas e ventiladores o intervalo de freqüência é maior.

Entre as turbomáquinas, os turbogeradores se destacam devido às grandes dimensões das estruturas de suporte necessárias, que acabam representando uma boa parte das obras civis. Acompanhando o desenvolvimento de unidades cada vez mais potentes, grandes avanços têm sido alcançados no projeto de suas fundações. Isto se deve, em parte, ao estudo experimental das fundações existentes e ao desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de representar o comportamento dinâmico da fundação.

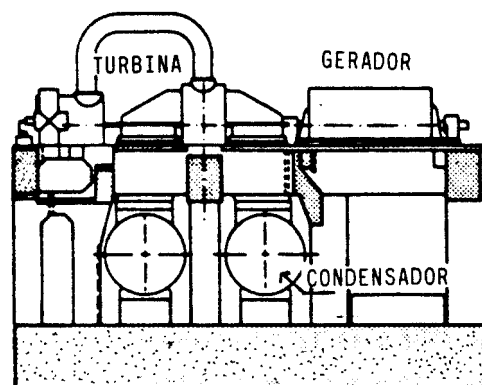


Fig. 9.1 – Fundação de um conjunto turbogerador [1].

Uma característica dos turbogeradores é o número de sistemas mecânicos que integram com a estrutura civil. O estudo de interferência entre estes sistemas deve ser a primeira etapa do projeto da fundação, pois a localização das máquinas, equipamentos auxiliares, tubulação de vapor ou gás e os espaços para manutenção e montagem praticamente determinam o arranjo geométrico da fundação. Outros sistemas também devem ser considerados, como o circuito de ar refrigerado para os geradores elétricos e o que fornece

óleo para o resfriamento dos mancais. O esquema da Fig. 9.2 indica o procedimento adotado por um fabricante de turbinas (SIEMENS, segundo Major [15]) para a cooperação entre as Engenharias Mecânica e Civil.

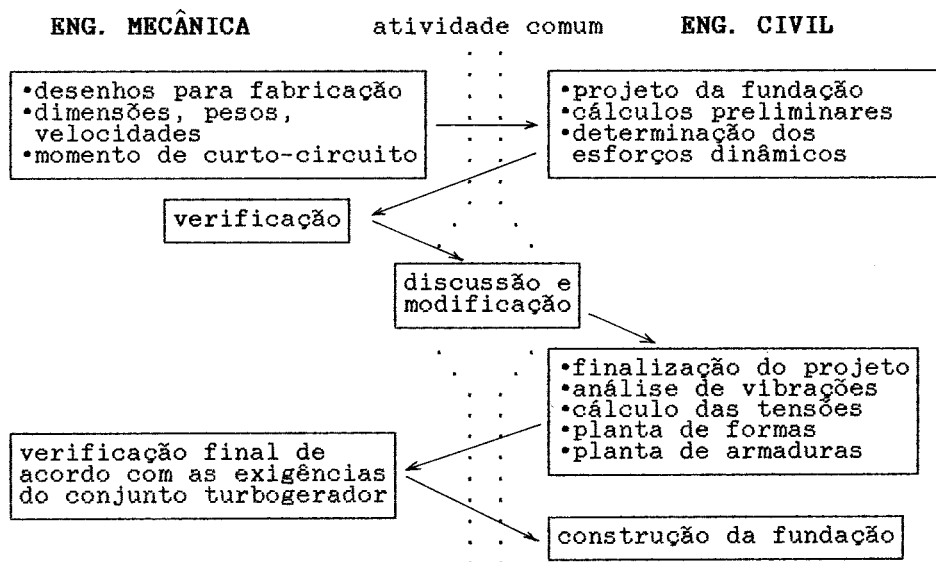


Fig. 9.2 – Interação entre as Engenharias Mecânica e Civil.

Concepções Usuais da Fundação O comportamento dinâmico é o principal critério de desempenho das fundações de turbogeradores. Isto significa que, além de suportar os equipamentos, a fundação deve apresentar propriedades de rigidez e inércia que possibilitem obter amplitudes de vibração nos mancais dentro dos limites recomendados pelo fabricante. As excitações dinâmicas podem ter diversas causas, como o não-balanceamento do rotor, o não-alinhamento do eixo, momentos de curto-circuito e terremotos.

Como já foi mencionado, é comum o emprego de fundações aporticadas, caracterizadas pela presença de pórticos transversais e longitudinais sobre uma laje de fundação. Este arranjo estrutural apresenta como principais vantagens:

- maximização do espaço necessário para equipamentos auxiliares sob a turbina;
- disposição dos elementos estruturais de acordo com as cargas de projeto;
- facilidade de análise e dimensionamento da estrutura;
- e grande economia de material em relação aos outros tipos de fundação.

As fundações aporticadas são classificadas de acordo com as freqüências naturais de sua estrutura, considerada perfeitamente engastada na laje de fundação, em subsincronizadas e sobre-sincronizadas quando a freqüência natural do modo de vibração analisado estiver abaixo ou acima da freqüência de operação, respectivamente.

Embora as primeiras fundações projetadas fossem sobre-sincronizadas, resultando estruturas com grande rigidez para evitar a condição de ressonância, a tendência atual é

o emprego de fundações subsincronizadas possuindo pilares esbeltos de concreto ou aço. Esta última concepção requer modelos matemáticos do sistema estrutura-fundação com comportamento muito próximo do real, de modo que as respostas da fundação possam ser previstas nas condições de operação e também nas de ressonância, durante a partida e a parada da máquina.

Uma solução cada vez mais empregada consiste em apoiar a laje superior sobre grupos de molas helicoidais. Os coeficientes de rigidez das molas são especificados de modo que o sistema formado pela laje superior mais a máquina tenha frequências naturais inferiores à frequência de operação. Dessa forma, consegue-se reduzir os esforços dinâmicos transmitidos aos pilares, possibilitando o dimensionamento destes somente com as cargas estáticas. Embora cara, esta concepção é vantajosa quando predominam determinadas ações, tais como: variações de temperatura, recalques diferenciais e retração do concreto.

Emprego de Estruturas de Concreto Armado e Metálicas A maioria das fundações de máquinas de alta rotação tem sido construída em concreto armado. Estas fundações são geralmente estruturas aporticadas com uma grelha ou laje superior bastante rígida. Devido a este fato, as estruturas são normalmente sobre-sincronizadas na direção vertical, enquanto que, devido à flexibilidade das colunas, elas são subsincronizadas na direção horizontal.

As fundações de concreto armado têm a vantagem da sua massa colaborar para o comportamento dinâmico da estrutura. Elas também apresentam uma taxa de amortecimento maior em relação às estruturas de aço, constituindo uma fonte de ruído menor.

Suas principais desvantagens referem-se à determinação das propriedades do concreto. O módulo de elasticidade dinâmico dos elementos da estrutura, influenciado por efeitos de retração e fissuração do concreto, é difícil de ser obtido. Por outro lado, a avaliação do amortecimento interno só é possível por meio de ensaios em estruturas semelhantes, já que o amortecimento por histerese nas juntas predomina sobre o amortecimento interno do material.

As estruturas metálicas, sendo mais flexíveis e leves que as estruturas de concreto armado, são, em geral, profundamente subsincronizadas, com um número maior de frequências naturais abaixo da frequência de operação. Este fato acentua a importância do cálculo preciso da resposta dinâmica e da determinação dos principais modos de vibração.

Embora requeiram uma análise dinâmica mais detalhada, as estruturas metálicas apresentam diversas vantagens. Elas permitem um apoio flexível para a máquina nas direções vertical e horizontal, assegurando a rotação dos rotores em torno de seu centro de gravidade e, conseqüentemente, uma vida útil maior para os mancais. As frequências naturais podem ser calculadas com maior precisão já que o módulo de elasticidade é constante para toda a estrutura e as condições de fixação são conhecidas. E, finalmente, as estruturas metálicas possibilitam a eliminação de vibrações não previstas no projeto mediante seu enrijecimento posterior.

É importante ressaltar a interação entre a fundação e a máquina pois, por simplificação, as análises dinâmicas são feitas separadamente. Em uma fundação rígida (sobre-

sincronizada) o rotor é obrigado a girar em torno de seu eixo geométrico e, embora as vibrações não sejam consideráveis, as forças nos mancais poderão ser elevadas. No caso de uma fundação flexível (subsincronizada), o rotor tende a girar em torno de seu centro de gravidade e, em conseqüência, os mancais são preservados mas as amplitudes de deslocamento aumentarão.

9.2 Ações

As ações que atuam sobre uma fundação de um conjunto turbogerador podem ser classificadas em permanentes e variáveis [15]. As primeiras são constituídas basicamente por cargas de peso próprio, sendo obtidas a partir dos desenhos da máquina e da fundação:

- peso próprio da fundação;
- peso próprio da máquina, inclusive partes rotativas;
- peso próprio de equipamentos auxiliares.

Quanto às ações variáveis, é possível distinguir aquelas cuja aplicação pode ser admitida como estática:

- cargas de construção;
- depressão provocada pelo condensador;
- variações de temperatura e retração;

daquelas onde as forças de inércia são consideráveis, por exemplo:

- momentos de curto circuito;
- esforços dinâmicos verticais e horizontais devidos ao balanceamento imperfeito do rotor;
- esforços dinâmicos horizontais na direção longitudinal;
- excitações sísmicas.

Neste trabalho, apenas os esforços devidos ao balanceamento imperfeito do rotor serão analisados, embora a ação provocada pelo curto-circuito do gerador deva ser ressaltada.

Momentos de Curto-Circuito do Gerador Devido ao efeito magnético existente entre estator e rotor, um impulso na forma de um binário pode originar-se, tendendo a separar o estator de sua base em conseqüência de um curto-circuito. O momento correspondente a esse binário recebe o nome de momento de curto-circuito. Os esforços originados podem exceder em várias vezes os esforços normais de operação e, por sua natureza impulsiva, uma análise dinâmica em regime transiente deve ser realizada com os valores dos esforços fornecidos pelo fabricante.

Os esforços de curto-circuito não são fáceis de serem obtidos. Geralmente, os livros de fundações de máquinas fornecem apenas fórmulas empíricas para o cálculo de esforços estaticamente equivalentes, o que representa uma simplificação muito grande para uma ação que depende não apenas da máquina mas, também, do tipo de fundação.

Esforços devidos ao Balanceamento Imperfeito do Rotor O balanceamento de uma máquina nunca é perfeito, o que significa dizer que sempre existe uma excentricidade entre o centro de gravidade do rotor e o eixo geométrico de rotação. Como as frequências são altas e a massa do rotor elevada, mesmo uma pequena excentricidade provoca forças centrífugas consideráveis.

A excentricidade do rotor aumenta ao longo do tempo até atingir um valor máximo associado à condição limite de operação da máquina, quando um novo balanceamento do rotor será realizado. O aumento das amplitudes de deslocamento indica a ocorrência de alterações internas à máquina e que o balanceamento original foi modificado. No caso de um balanceamento inadequado, este pode ser destruído rapidamente em consequência da folga nos mancais, desgaste das partes móveis e mesmo da quebra de pás da turbina.

A força dinâmica resultante do balanceamento imperfeito do rotor é calculada pela expressão

$$F = m_e e_1 \Omega^2 \sin \Omega t, \quad (9.1)$$

em que m_e é a massa do rotor, e_1 e Ω sua excentricidade e frequência angular. A força F é distribuída entre os mancais proporcionalmente às reações de apoio referentes ao peso do rotor.

Com base nas medições efetuadas em turbogeradores de diferentes potências, Major [15] sugere os valores de excentricidade da Tabela 9.1 na ausência de dados fornecidos pelo fabricante.

Tabela 9.1 – Excentricidades para máquinas de alta rotação.

Frequência de operação (Hz)	Excentricidade e_1 (mm)	
	Condição normal de operação	Condição limite de operação
50	0,020	0,10
25	0,064	0,32
12,5	0,160	0,80

Na Tabela 9.1 são considerados dois conjuntos de excentricidades. Um para a condição normal de operação, na qual as amplitudes de resposta são confrontadas com os valores admissíveis (ver Capítulo 6). E outro para a condição limite de operação, na qual são determinados os esforços máximos nos elementos estruturais. Deve-se observar a relação constante entre as excentricidades; os valores para a condição limite sendo cinco vezes maiores que os para a condição normal.

Defeitos no sistema de lubrificação e o aquecimento das partes rotativas podem provocar vibrações que não seguem as leis do movimento harmônico simples, mas esse fato em geral é desprezado e todas as forças dinâmicas são calculadas como forças centrífugas.

“A investigação das vibrações de fundações aporticadas tem revelado que quando a frequência natural da fundação é inferior à frequência de operação da máquina, as amplitudes e esforços máximos ocorrem durante os curtos períodos de aceleração e desaceleração, que correspondem à partida e à parada do conjunto. Esses esforços podem ser significativos para o projeto dos elementos estruturais” [15].

A partida de turbinas é feita gradualmente, com o objetivo de assegurar o tempo necessário para o aquecimento da máquina. Esse processo geralmente leva de 20 a 40 minutos; o processo de parada pode demorar ainda mais, variando de 40 a 60 minutos. Durante esse processo, a frequência do rotor passará por todas as frequências intermediárias, permanecendo 1 a 2 minutos em cada intervalo de 5% da frequência de operação. Para fundações subsincronizadas ocorrerá a condição de ressonância e os esforços dinâmicos correspondentes não poderão ser desprezados pois causarão sérios danos apesar de seu caráter transiente.

9.3 Análise Dinâmica

O fato da estrutura aporticada de uma turbomáquina apresentar algumas frequências naturais abaixo da frequência de operação altera significativamente os procedimentos empregados na verificação de seu comportamento dinâmico. Muitos destes procedimentos são considerados rotineiros atualmente, em função da disponibilidade de programas de computador para realizar a parte mais trabalhosa da análise dinâmica — o cálculo das frequências naturais e da resposta da estrutura (amplitudes de vibração e esforços solicitantes).

Entretanto, os livros clássicos de fundações de máquinas [5, 15] são anteriores a essa época e despendem grande esforço na descrição de métodos simplificados para representar o comportamento da fundação. Embora os diferentes métodos possam inicialmente confundir o projetista, eles têm sua importância na medida que constituem a base teórica das normas de fundações de máquinas e chamam a atenção para aspectos importantes da concepção da fundação.

9.3.1 Métodos de Cálculo — Resumo Histórico

Dois métodos de análise de fundações de turbogeradores foram adotados durante as décadas de 40 e 50. O método da ressonância, de acordo com procedimentos alemães, e o método das amplitudes, de acordo com soviéticos.

“O método da ressonância enfatiza a determinação das frequências naturais da fundação. Entretanto, a simples constatação de que as frequências naturais são consideravelmente diferentes da frequência de operação não significa um projeto adequado no caso de uma fundação subsincronizada. Existem fundações de turbinas nas quais a frequência de operação está próxima de uma frequência natural e nenhum problema foi observado. Em-

bora a ressonância possa ocorrer em alguns casos, as amplitudes correspondentes podem ser muito pequenas para causar danos” [15].

O método das amplitudes baseia-se em trabalhos publicados por Barkan entre 1935 e 1948 e em estudos experimentais com fundações de turbinas realizados em 1945 e 1946. Em relação ao método da ressonância, ele apresenta a vantagem das amplitudes calculadas refletirem melhor as condições de operação. Contudo, ele não considera a possibilidade de as amplitudes aumentarem durante a aceleração (partida) e desaceleração (parada) da máquina no caso de fundações subsincronizadas.

A constatação das deficiências dos métodos anteriores conduziu ao *método estendido de ressonância*, no qual são verificadas tanto as amplitudes quanto a possibilidade de ressonância. No caso de fundações subsincronizadas são consideradas as amplitudes máximas nas condições de ressonância durante a partida e a parada da máquina e não apenas as amplitudes na condição de operação. Embora seja um método útil na fase de pré-dimensionamento, ele apresenta a desvantagem de estar restrito a sistemas com poucos graus de liberdade. A força estática equivalente por exemplo, obtida a partir do fator de amplificação dinâmica para um sistema com um grau de liberdade, é de pouca utilidade num sistema onde vários modos de vibração contribuem para o deslocamento analisado.

9.3.2 Ítens da Análise Dinâmica

Com base nas observações anteriores são estabelecidos os principais itens da análise dinâmica referente à operação da máquina.

a) Análise em regime permanente para a condição normal de operação.

Nesta análise, são calculadas as amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração em pontos representativos da máquina e fundação. Os valores calculados caracterizam o desempenho da fundação na condição de operação e não devem ultrapassar os valores estabelecidos em normas ou pelo fabricante. Além dos valores absolutos de amplitude, a evolução da resposta no tempo tem importância para a verificação dos deslocamentos relativos entre os mancais.

b) Análise em regime permanente para a condição limite de operação.

Tem a finalidade de determinar os esforços dinâmicos máximos que atuam nos elementos estruturais.

c) Análises para as condições de partida e parada da máquina.

As operações de aceleração e desaceleração da máquina correspondem a excitações em regime transiente. Entretanto, como a duração dessas operações é muito longa quando comparada com o período de rotação, admite-se que as excitações possam ser decompostas numa série de esforços harmônicos permanentes descrevendo todo o intervalo de frequência percorrido. Desse modo é possível traçar um diagrama de amplitude de resposta permanente em função da frequência e, por meio dele, determinar as respostas máximas da fundação e as frequências associadas.

Os esforços solicitantes na estrutura são calculados para as excitações harmônicas associadas às respostas máximas determinadas. Os valores máximos dos esforços, juntamente com os determinados no item b) são usados na verificação e dimensionamento dos elementos estruturais.

9.3.3 Método da Superposição Modal

A familiaridade dos engenheiros com o método da superposição modal clássico e a facilidade de interpretação do comportamento da estrutura a partir dos modos de vibração têm favorecido a escolha desse método para a análise de fundações aporticadas. Nesta escolha, a existência de um número elevado de excitações dinâmicas tem sido um fator decisivo, pois acaba por diluir o custo do cálculo dos autovalores e autovetores. Apesar de suas vantagens, este método apresenta algumas restrições que não são totalmente satisfeitas no caso de fundações de turbogeradores. Ele exige por exemplo:

- coeficientes de rigidez e amortecimento independentes da frequência;
- amortecimento de natureza viscosa;
- matriz de amortecimento proporcional.

No Capítulo 3, mostrou-se que os coeficientes de rigidez e amortecimento do solo de fundação, obtidos mediante a teoria do semi-espaço, podiam ser admitidos constantes no intervalo de $0 < a_0 < 1,5$. Embora a frequência adimensional a_0 possa atingir valores superiores a 4 no caso de fundações de turbogeradores, foram adotados coeficientes constantes de modo que o método da superposição modal fosse empregado. Este procedimento justifica-se no exemplo analisado pelo fato de a interação solo-estrutura ser mais acentuada nas proximidades das frequências naturais do solo de fundação, correspondendo a valores de a_0 no intervalo especificado. Por outro lado, no caso de fundações sobre estacas, com frequências adimensionais mais elevadas, pode ser necessária a análise no domínio das frequências, de modo a considerar a variação dos coeficientes.

Quanto ao amortecimento, a consideração de sua natureza acaba tendo uma importância secundária devido às baixas taxas de amortecimento na estrutura e à incerteza existente nos valores adotados (Roesset [27]).

A hipótese de matriz de amortecimento proporcional é difícil de ser verificada nos problemas de interação solo-estrutura onde as taxas de amortecimento são muito diferentes para a estrutura e o solo de fundação. A sua adoção, como foi visto no Capítulo 4, corresponde a se desprezar os termos fora da diagonal da matriz de amortecimento generalizada.

9.4 Exemplo Numérico

A aplicação dos procedimentos discutidos anteriormente será ilustrada por meio de uma fundação aporticada para um turbogerador de pequena potência (6 MW). Excetuando

a frequência de operação da turbina, procurou-se adotar, de maneira concisa, valores representativos para as características da máquina e do solo.

No exemplo admitiu-se uma frequência única de 25 Hz para o conjunto turbogerador, situação encontrada apenas em conjuntos de maior potência. Para turbinas de baixa potência, o usual é que funcionem sem condensador e em rotações muito elevadas (100 a 210 Hz), com a presença de uma caixa de redução entre a turbina e o gerador. A adoção de uma frequência única teve como finalidade facilitar a interpretação dos resultados, a qual seria prejudicada com a presença da caixa de redução e a existência de duas frequências de operação.

9.4.1 Dados do Exemplo

Características do Turbogenerador

- Turbina

massa total	$M_T = 14,28 \text{ t,}$
massa do rotor	$M_{TR} = 2,86 \text{ t,}$
frequência de operação	$f_0 = 25,0 \text{ Hz.}$

- Gerador

massa total	$M_G = 26,52 \text{ t,}$
massa do rotor	$M_{GR} = 12,24 \text{ t,}$
frequência de operação	$f_0 = 25,0 \text{ Hz,}$
frequência crítica	$f_c = 40,0 \text{ Hz.}$

Características do Solo e da Fundação

- Solo: estrato profundo de areia siltosa medianamente compacta;

densidade natural	$\rho = 1,9 \text{ t/m}^3,$
módulo de elasticidade transversal	$G = 50 \text{ MPa,}$
coeficiente de Poisson	$\nu = 0,3,$
taxa de amort. interno do material	$\xi_h = 0,03,$
tensão admissível do solo	$\sigma_{adm} = 0,2 \text{ MPa,}$
coeficiente de reação do solo	$k_r = 3 \times 10^4 \text{ kN/m}^3.$

- Concreto:

densidade	$\rho = 2,5 \text{ t/m}^3,$
módulo de elasticidade	$E = 3 \times 10^4 \text{ MPa,}$
coeficiente de Poisson	$\nu = 0,2,$
taxa de amort. interno da estrutura	$\xi_h = 0,03.$

9.4.2 Geometria e Características da Fundação

O dimensionamento preliminar e o arranjo geométrico dos elementos estruturais constituem a fase inicial e, certamente, a mais tediosa do projeto da fundação. Embora esta

fase dependa da experiência do projetista, regras empíricas e roteiros de cálculo podem ser úteis na obtenção de um projeto final satisfatório.

Tendo em vista as dimensões e a frequência da máquina, optou-se por uma estrutura de concreto armado, com grelha superior rigidamente unida aos pilares, sobre-sincronizada na direção vertical e subsincronizada na horizontal.

A geometria inicial da fundação aporticada foi obtida seguindo o roteiro fornecido por Arya *et alii* [3] e reproduzido no Capítulo 6. Considerações adicionais quanto a

- rigidez da laje de fundação;
- frequências naturais dos pórticos transversais;
- índice de esbeltez dos pilares,

auxiliaram na convergência para a configuração final da fundação.

As dimensões da fundação e os pontos de localização das massas do equipamento estão indicados na Fig. 9.3, enquanto as massas do equipamento são apresentadas na Tab. 9.2.

Tabela 9.2 – Distribuição das massas do equipamento.

Equipamento	Ponto ou área de aplicação	Massa por ponto (t)
Turbina	P1, P2	7,14 (concentrada)
Gerador	P2, P3	6,12 (concentrada)
Gerador	P4, P5	7,14 (distribuída)

A área P₅ é simétrica à P₄ na Fig. 9.3.

Características da Fundação

a) Centróide dos pilares (centro de gravidade da área dos pilares):

$$\bar{x} = 4,046 \text{ m,}$$

$$\bar{y} = 2,000 \text{ m.}$$

b) Centros de gravidade C.G. = $(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ (coordenadas em metros).

máquina e equipamentos auxiliares:	(4,110; 2,000)
grelha superior:	(3,900; 2,000)
máquina, equipamento, grelha superior e pilares:	(4,008; 2,000)
conjunto máquina-fundação:	(4,004; 2,000; 2,696)

c) Massa e momentos de inércia de massa (máquina e fundação).

$$M = 186,63 \text{ t.}$$

$$I_{zz} = 1370 \text{ t m}^2.$$

d) Verificação de alguns tópicos essenciais do roteiro fornecido no Capítulo 6.

- O centro de gravidade da parte superior praticamente coincide em planta com o centróide dos pilares. O mesmo ocorrendo com o centro de gravidade do conjunto máquina-fundação e o centróide da área da base da fundação.
- A massa total da fundação não deve ser inferior a um terço da massa da máquina rotativa. Neste exemplo,

$$\frac{M_{\text{fund.}}}{M_{\text{máq.}}} = 3,57.$$

- A massa da metade superior da estrutura não deve ser inferior à da máquina suportada.

$$\frac{M_{\text{p.sup.}}}{M_{\text{máq.}}} = 1,18.$$

e) Critério de verificação da rigidez da laje de fundação.

Foi usado o critério fornecido por Arya *et alli* [3] para verificar a rigidez vertical da laje (*radier*). Segundo este critério, uma fundação carregada em uma pequena área é considerada flexível quando suas dimensões excedem $3\ell_S$, sendo ℓ_S o comprimento dado pela expressão

$$\ell_S = \left[\frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)k_r} \right]^{0,25}, \quad (9.2)$$

com

- E módulo de elasticidade do concreto;
- t espessura da laje;
- ν coeficiente de Poisson do concreto;
- k_r coeficiente de reação do solo (“subgrade reaction”).

No exemplo admitiu-se a laje como rígida em função do valor de $3\ell_S = 8,49 \text{ m}$ e do fato de a carga estar aplicada por meio de 6 pilares distribuídos sobre a laje ($8,20 \times 5,00 \text{ m}$).

f) Coeficientes de rigidez e amortecimento do sistema laje e solo de fundação.

Os valores dos coeficientes foram calculados usando a teoria do semi-espaço elástico e isotrópico (Tab. 3.1) e são apresentados juntamente com as taxas de amortecimento. As taxas de amortecimento total, incluindo o amortecimento por histerese, aparecem na última coluna.

9.4.3 Modelos Matemáticos

Os seguintes modelos foram analisados:

Modelo MR modelo admitindo a estrutura como um bloco rígido (Fig. 9.4-a);

Tabela 9.3 – Coeficientes de rigidez e amortecimento do sistema laje e solo de fundação.

Componente	Coef. de rigidez		Coef. de amort. geométrico		Taxa de amort.	
					Geom.	Total
x	$8,20 \times 10^5$	kN/m	$1,13 \times 10^4$	kNs/m	0,44	0,47
y	$8,80 \times 10^5$		$1,13 \times 10^4$		0,44	0,47
z	$1,03 \times 10^6$		$1,95 \times 10^4$		0,70	0,73
xx	$6,42 \times 10^6$	kN m/rad	$1,86 \times 10^4$	kN ms/rad	0,07	0,10
yy	$1,35 \times 10^7$		$7,42 \times 10^4$		0,17	0,20
zz	$1,42 \times 10^7$		$4,80 \times 10^4$		0,17	0,20

As componentes especificam os seguintes movimentos da base:

x, y, z translações longitudinal, transversal e vertical;
 xx, yy, zz rotações em torno dos eixos longitudinal, transversal e vertical passando pelo centróide da área da base da fundação.

Modelo 1 pórtico com pilares perfeitamente engastados na base (Fig. 9.4-b);

Modelo 2 pórtico com pilares engastados em laje rígida apoiada sobre um semi-espaço elástico (Fig. 9.4-c);

Modelo 3 pórtico com pilares engastados em laje flexível sobre apoio elástico (Fig. 9.4-d).

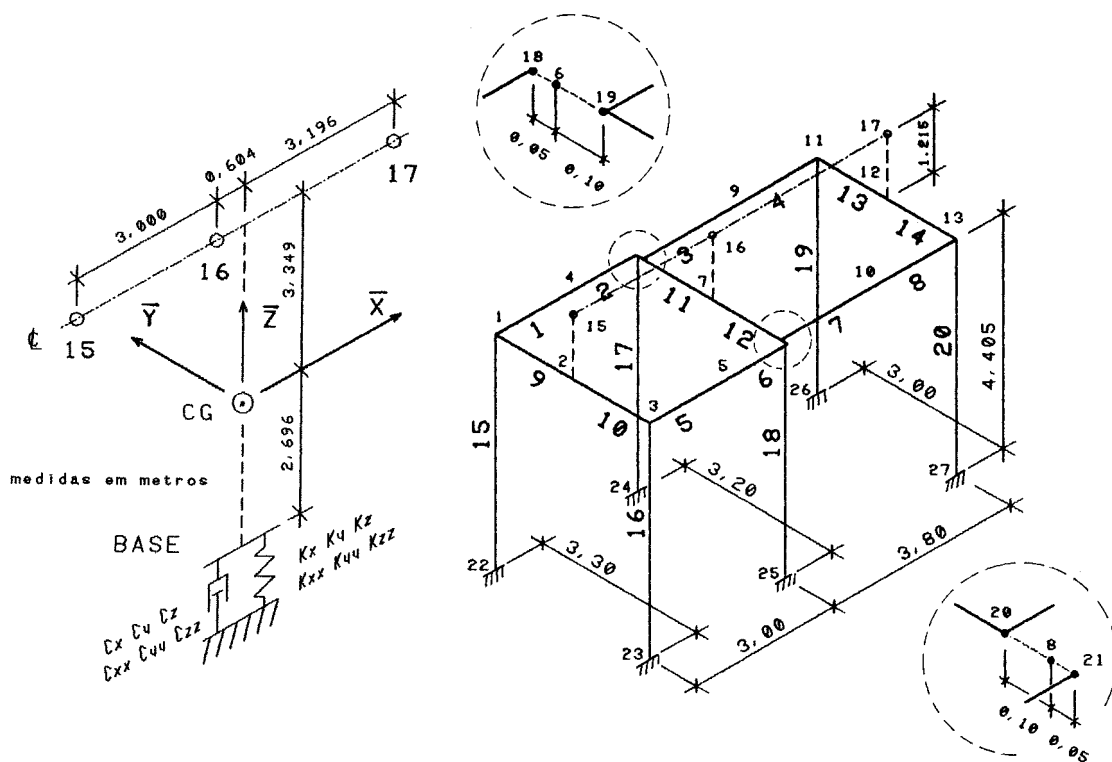
Os três últimos modelos, embora considerem de maneiras diversas a laje da base e o solo de fundação, apresentam a mesma discretização para o restante da estrutura. Fato que torna possível a comparação das diferentes hipóteses de interação solo-estrutura.

Discretização da parte superior dos modelos 1, 2 e 3 A estrutura foi representada por meio de um pórtico tridimensional. As dimensões principais, os números de nós e das barras que descrevem o pórtico estão indicados nas Figs. 9.3 e 9.4. Os “nós finitos”, uniões de barras cujos eixos não se encontram no mesmo ponto, foram discretizados mediante três nós ligados rigidamente e aparecem nos detalhes da Fig. 9.4-b. É o caso dos nós 18, 6 e 19 unindo as barras 2, 3, 11 e 17; e dos nós 20, 8 e 21 unindo as barras 6, 7, 12 e 18.

As áreas e os momentos de inércia das seções transversais referem-se às seções geométricas de concreto sem considerar o efeito das armaduras. Para os elementos estruturais submetidos principalmente à compressão (pilares), o momento de inércia à torção foi calculado pela fórmula da Teoria da Elasticidade para seções retangulares. Para os demais elementos (vigas), o valor fornecido pela fórmula foi dividido por dois para considerar, aproximadamente, o efeito da fissuração do concreto.

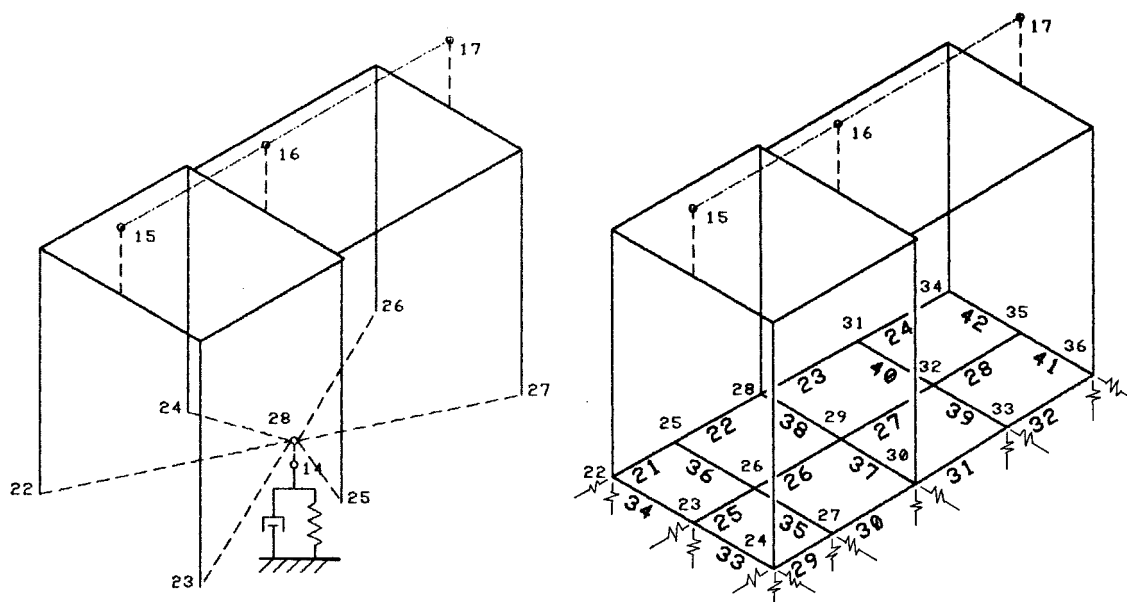
Em todos os modelos foi considerada a deformação por força cortante.

A matriz de massa consistente foi empregada na análise por causa das equações de restrição usadas na representação dos “nós finitos” e da laje rígida de fundação no modelo 2 [24]. As massas distribuídas do gerador foram admitidas coincidentes com os eixos das vigas em que se apóiam. As massas da máquina sobre os pórticos transversais foram



(a) Modelo MR.

(b) Modelo 1.



(c) Modelo 2.

(d) Modelo 3.

Fig. 9.4 – Modelos da fundação.

admitidas concentradas na altura dos mancais. Como a estrutura da máquina impede parcialmente a rotação por torção das vigas transversais, as componentes dessas massas na direção x foram consideradas nas extremidades das vigas transversais (com os respectivos momentos de inércia de massa) e não diretamente nos nós 15, 16 e 17.

Características Particulares dos Modelos

Modelo MR O primeiro modelo tem por objetivo mostrar a importância da flexibilidade da estrutura na resposta da fundação. A fundação foi admitida como um corpo perfeitamente rígido sobre um semi-espaço elástico. Devido à simetria e à distribuição de massas da fundação, os seis graus de liberdade do modelo foram agrupados em quatro movimentos independentes.

Este modelo apresenta como principais vantagens o emprego direto dos coeficientes de rigidez e amortecimento fornecidos pela teoria do semi-espaço elástico e a consideração do amortecimento por histerese pelo “princípio da correspondência” (Eq.3.7).

Modelo 1 Com base em resultados experimentais e na análise de sistemas com 2 graus de liberdade, Major [15] sugere um modelo com os pilares perfeitamente engastados na base para o caso da frequência de operação ser muito superior às frequências dos modos de vibração do modelo anterior.

Uma taxa de amortecimento única é proposta para todos os modos de vibração, o valor adotado ($\xi = 0,064$) inclui não apenas o amortecimento por histerese mas também o efeito do amortecimento geométrico da fundação nesses modos.

Modelo 2 Em termos teóricos representa o modelo mais coerente da fundação. Coerente por satisfazer a hipótese de laje rígida sobre semi-espaço elástico e considerar a interação solo-estrutura por meio de coeficientes de rigidez do sistema laje-solo para os graus de liberdade de translação e rotação.

Neste modelo, as taxas de amortecimento modal equivalente, apresentadas na Tabela 9.4, foram calculadas por meio da Eq. 4.21. Embora represente uma etapa adicional na análise, este cálculo permite considerar, de um modo sistemático, a influência do amortecimento geométrico na resposta da estrutura. Como era esperado, os valores da tabela indicam uma influência maior do amortecimento do solo de fundação nos modos associados à base (Fig. 9.6). Nos modos com frequência natural elevada, onde predominam os deslocamentos da estrutura, esta influência é pequena com os valores se aproximando da taxa de amortecimento interno da estrutura. Constata-se também a dificuldade de se adotar uma única taxa de amortecimento devido à grande variação dos valores.

Modelo 3 Este modelo corresponde ao proposto por Arya *et alii* [3] para fundações aporricadas. A sua principal diferença em relação aos anteriores é a discretização da laje de fundação em uma “grelha equivalente”. A discretização segue o procedimento

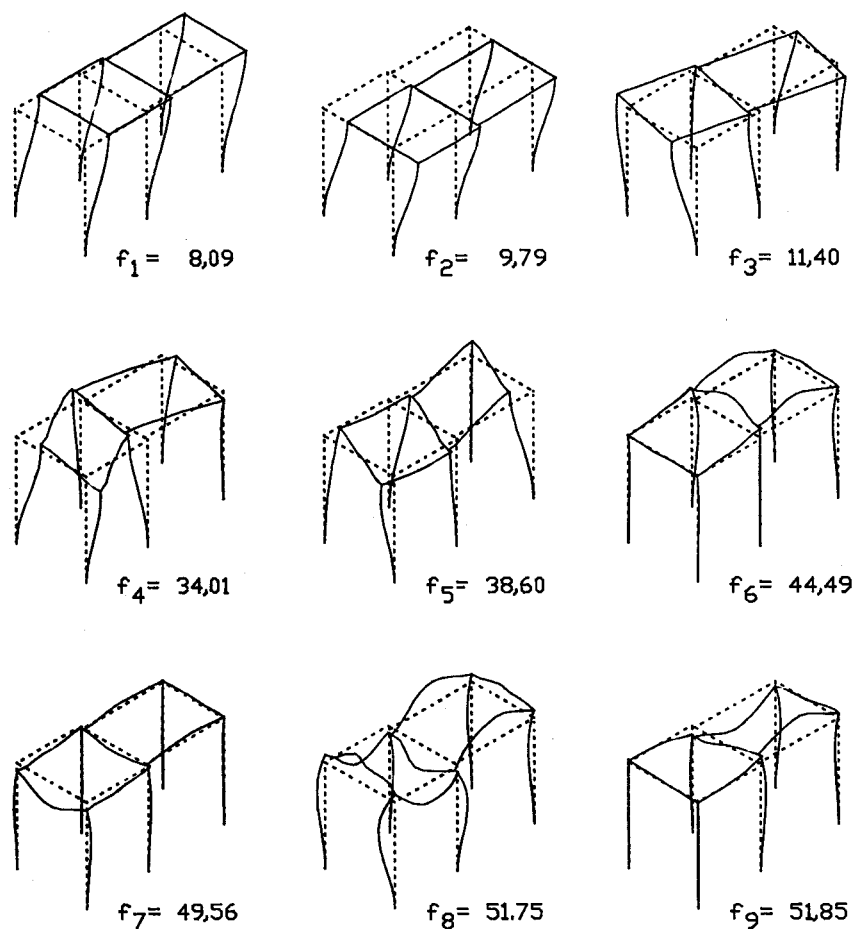


Fig. 9.5 – Modos de vibração do modelo 1.

Tabela 9.4 – Taxas de amortecimento modal equivalente para o modelo 2.

Modo de vibração	Taxa de amortecimento
1	0,097
2	0,110
3	0,060
4	0,696
5	0,582
6	0,604
7	0,242
8	0,219
9	0,119
10	0,031
11	0,031
12	0,050
13	0,035
14	0,039

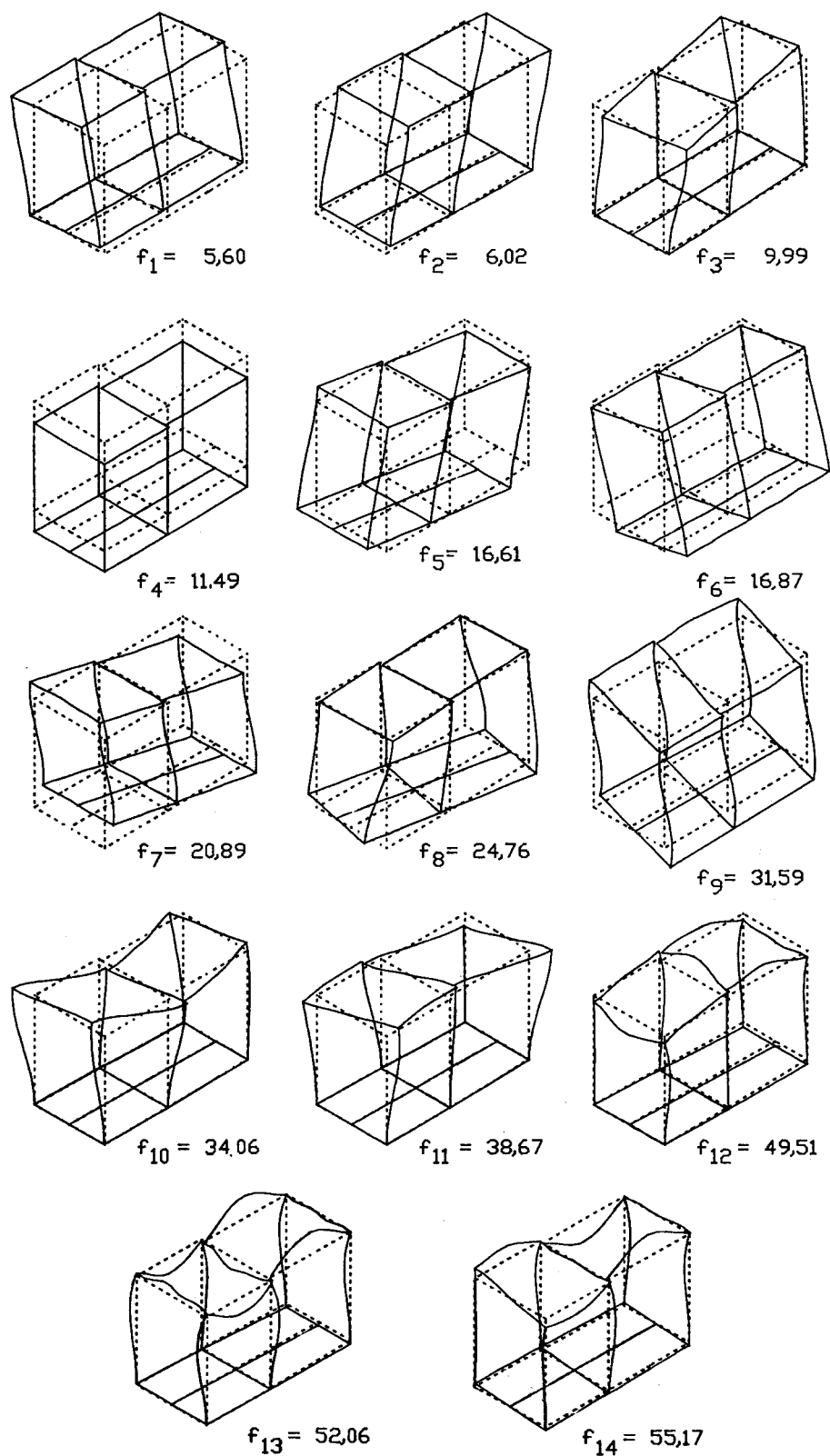


Fig. 9.6 – Modos de vibração do modelo 2.

sugerido por Bowles [6, 7] no qual a laje é dividida em faixas representadas por barras longitudinais e transversais. As propriedades geométricas das barras são calculadas do modo usual, exceto o momento de inércia à torção que é multiplicado pelo coeficiente de correção α ,

$$\alpha = 0,75 \frac{L}{B} \leq 1,1 \quad (9.3)$$

sendo L o comprimento da barra e B sua largura.

Quando a laje da fundação puder ser admitida rígida (ver seção 9.4.2.e), Arya *et alii* recomendam o uso dos coeficientes de rigidez da teoria do semi-espço elástico (Tab. 3.1) considerando toda a laje. Os coeficientes de rigidez de translação nas direções x , y e z sendo distribuídos entre os nós da grelha, proporcionalmente às respectivas áreas de influência.

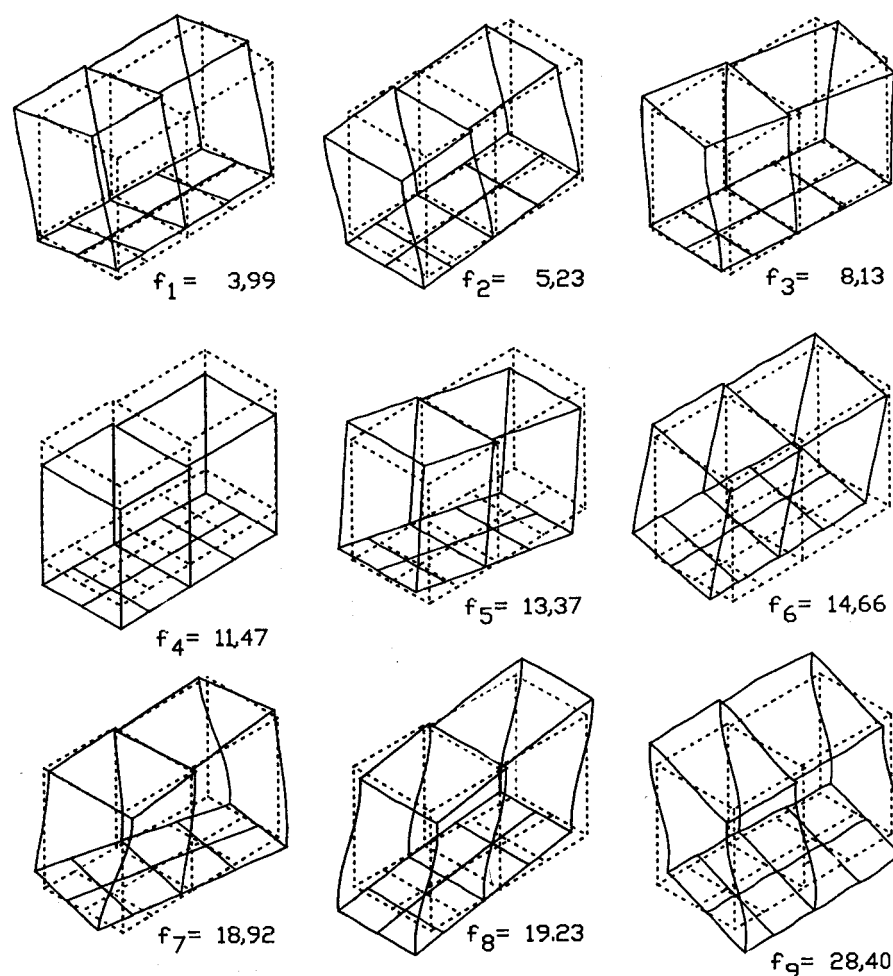


Fig. 9.7 – Modos de vibração do modelo 3.

Os coeficientes de rigidez relativos às rotações são calculados a partir da distribuição dos coeficientes de translação. Na Tabela 9.5, são apresentados os coeficientes decorrentes desse procedimento, juntamente com os valores fornecidos pela teoria do

semi-espaco elástico. As diferenças encontradas evidenciam a principal falha do modelo. Apesar de considerar a flexibilidade da laje, ele representa de modo precário os coeficientes de rigidez relativos às rotações, prejudicando sensivelmente os modos de vibração onde predominam as rotações da base.

Tabela 9.5 – Coeficientes de rigidez relativos às rotações.

Coeficientes de rigidez (kNm/rad)	Modelo 3	Semi-espaco
K_{xx}	$1,92 \times 10^6$	$6,42 \times 10^6$
K_{yy}	$5,51 \times 10^6$	$1,35 \times 10^7$
K_{zz}	$6,34 \times 10^6$	$1,42 \times 10^7$

Quanto ao amortecimento, Arya *et alii* sugerem uma taxa única de amortecimento, igual a $\xi = 0,10$, para todos os modos de vibração.

9.4.4 Resultados

Os resultados do modelo MR foram obtidos pelas Eqs. (7.14) a (7.17), que calculam a resposta permanente de uma fundação em bloco rígido de acordo com o procedimento sugerido por Gazetas [12] (ver Capítulos 3 e 7). Os coeficientes da função de rigidez dinâmica foram calculados a partir dos coeficientes de rigidez e amortecimento da Tab. 9.3.

Para os modelos 1, 2 e 3 foi empregado o programa SANT, elaborado pelo autor. As respostas em regime permanente foram determinadas pelo método da superposição modal, considerando os 20 primeiros modos de vibração de cada modelo. As amplitudes de deslocamento para a condição normal de operação foram verificadas mediante o programa SAP90, embora de forma aproximada, já que este programa trabalha apenas com a matriz de massa discreta.

9.4.4.1 Modos de Vibração e Freqüências Naturais

Os principais aspectos do comportamento dinâmico dos modelos 1, 2 e 3 podem ser levantados por meio da comparação de seus primeiros modos de vibração. A representação gráfica dos modos simplifica bastante a comparação, permitindo, inclusive, visualizar algumas limitações dos modelos.

A observação conjunta das Figs. 9.5, 9.6 e 9.7 permite estabelecer uma correspondência entre os modos de vibração dos três modelos, conforme mostrado na Tab. 9.6. Apresentam-se, também, os desvios percentuais das freqüências naturais em relação às obtidas para o modelo 2 ($D_2\%$).

O exame dos resultados obtidos para os modelos 1 e 2 permite avaliar o efeito da interação solo-estrutura nos modos de vibração. Embora exista correspondência entre os três primeiros modos, o engastamento perfeito dos pilares eleva significativamente as duas primeiras freqüências. Os modos onde predominam os deslocamentos e rotações da

Tabela 9.6 – Comparação entre os primeiros modos de vibração.

Modelo 1			Modelo 2		Modelo 3		
Modo	(freq.[Hz])	$D_2\%$	Modo	(freq.[Hz])	Modo	(freq.[Hz])	$D_2\%$
2	(9,8)	75	1	(5,6)	1	(4,0)	-29
1	(8,1)	35	2	(6,0)	2	(5,2)	-13
3	(11,4)	-14	3	(10,0)	3	(8,1)	-19
-	-	-	4	(11,5)	4	(11,5)	0
-	-	-	5	(16,6)	5	(13,4)	-19
-	-	-	6	(16,9)	6	(14,7)	-13
-	-	-	7	(20,9)	8	(19,2)	- 8
-	-	-	8	(24,8)	7	(18,9)	-24
-	-	-	9	(31,6)	9	(28,4)	-10
4	(34,0)	-0,3	10	(34,1)	+	+	+
5	(38,6)	-0,3	11	(38,7)	+	+	+
6/7	(44,5/49,6)	-	12	(49,5)	+	+	+
8	(51,8)	-0,6	13	(52,1)	+	+	+
9	(51,9)	-6,0	14	(55,2)	+	+	+

- não existente; + não analisado.

base (frequências entre 11,5 e 31,6 Hz) são ignorados no modelo 1, o que seria suficiente para desqualificá-lo no caso de uma frequência de operação de 25 Hz. Por outro lado, a correspondência entre os modos de vibração onde predominam os deslocamentos da estrutura é excelente, o que confirma as previsões de Major de ser o modelo representativo para frequências de operação bem acima das frequências naturais do sistema laje-solo de fundação.

Nos modelos 2 e 3, a comparação limitou-se aos modos onde predominam os deslocamentos e as rotações da base. Os desenhos das Figs. 9.6 e 9.7 indicam que o efeito da flexibilidade da laje não é significativo nestes primeiros modos e portanto, que as diferenças encontradas nas frequências decorrem do critério de distribuição dos coeficientes de rigidez.

9.4.4.2 Amplitudes de Resposta para a Condição Normal

A verificação das amplitudes de resposta (deslocamento e velocidade) constitui a parte principal da avaliação do desempenho de uma fundação de máquina. Para a condição normal de balanceamento, têm interesse as amplitudes correspondentes às excitações na frequência de operação e durante a partida e a parada da máquina.

Os nós 15, 16 e 17, correspondendo às posições dos mancais sobre os pórticos transversais, foram escolhidos para a comparação dos deslocamentos nos modelos adotados. O fato de os critérios de aceitação das amplitudes de vibração referirem-se às caixas dos mancais justifica esta escolha.

a) Diagramas de resposta permanente

As excitações durante a partida e a parada da máquina foram aproximadas por excitações harmônicas permanentes cobrindo todo o intervalo de frequência até a frequência de operação. Com os deslocamentos máximos obtidos, foram traçados os diagramas de resposta permanente em função da frequência para os três mancais (Figs. 9.8 e 9.9). Embora os diagramas tenham exigido um trabalho de processamento considerável, eles permitem visualizar as diferenças nas respostas dos três modelos e verificar os modos de vibração mais significativos para a resposta da estrutura.

Lembrando a existência de uma relação constante entre as excentricidades para as condições limite e normal de operação, é possível obter os diagramas para a condição limite, apenas multiplicando por 5 os valores das amplitudes nos diagramas obtidos.

Amplitudes de deslocamento na direção y

A existência de um pico principal nos diagramas de amplitude de deslocamento na direção y (Fig. 9.8) indica o predomínio do modo de vibração com deslocamentos transversais da grelha superior na resposta da estrutura (modelo 1, $f_2 = 9,9$ Hz; modelo 2, $f_1 = 5,6$ Hz; modelo 3, $f_1 = 4,0$ Hz). Para os pontos 15 e 17, mais afastados do centro da fundação, nota-se um segundo pico correspondendo ao primeiro modo de torção da fundação.

O modelo 1 fornece a frequência de ressonância mais elevada e as maiores amplitudes de vibração. Este resultado decorre da variação dos esforços com o quadrado da frequência e também da baixa taxa de amortecimento adotada no modelo. Quanto aos modelos 2 e 3, eles apresentam valores próximos para as amplitudes máximas, apesar de existir uma diferença de 1,6 Hz entre as frequências.

As respostas dos modelos são muito semelhantes no intervalo de 15 a 25 Hz, indicando a menor mobilização dos modos com frequências naturais neste intervalo. Isto fica evidenciado pelos efeitos desprezíveis que a ausência dos modos de vibração da laje de fundação no modelo 1 e as diferentes taxas de amortecimento exercem nas amplitudes na direção y .

Amplitudes de deslocamento na direção z

Para as amplitudes de deslocamento na direção z , os modelos apresentam diagramas com formas diversas. As curvas crescentes do modelo 1 confirmam que o pórtico engastado é sobre-sincronizado na direção vertical. Por outro lado, o modelo 3 mostra um pico de ressonância acentuado para o modo de vibração vertical, enquanto no modelo 2, a condição de ressonância praticamente não existe. Esta diferença é atribuída às taxas de amortecimento adotadas para o modo vertical nos dois modelos.

b) Amplitudes de resposta na frequência de operação

Na Tab. 9.7 são apresentadas as amplitudes de deslocamento e velocidade para a condição normal de operação. O modelo 2a corresponde ao modelo 2 com as taxas de

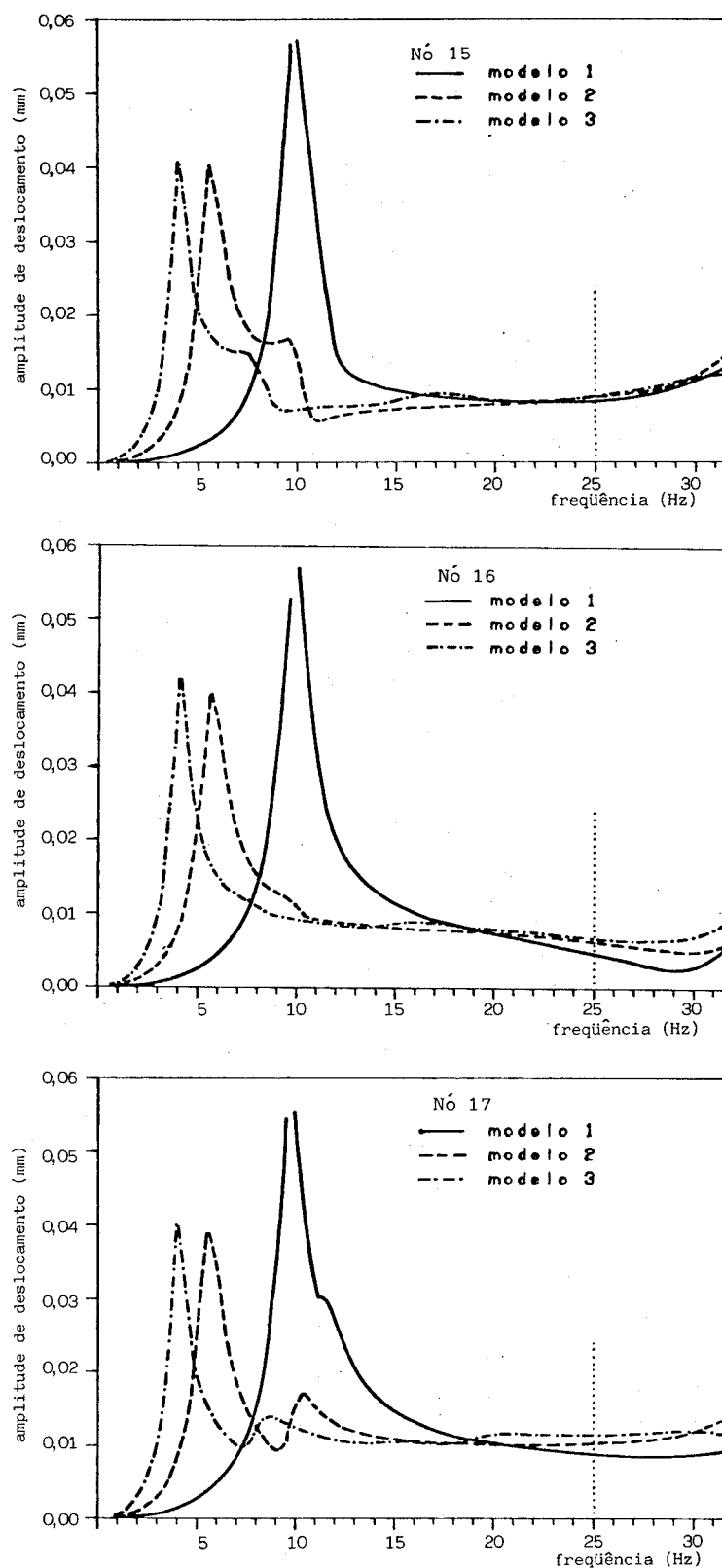


Fig. 9.8 – Diagramas de resposta permanente em função da frequência - amplitudes de deslocamento na direção y .

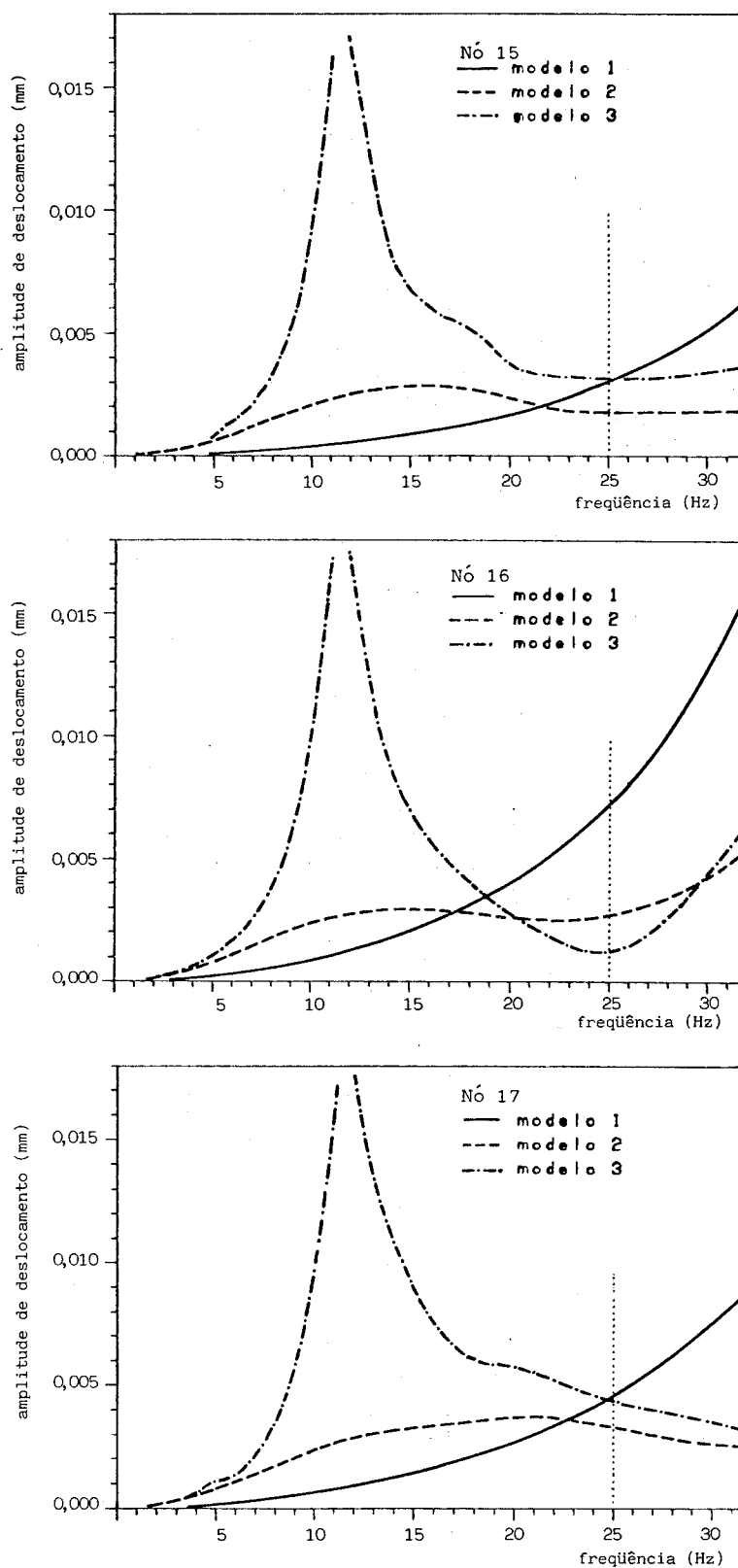


Fig. 9.9 – Diagramas de resposta permanente em função da frequência - amplitudes de deslocamento na direção z .

amortecimento modal equivalente limitadas a 20%, o que constitui um procedimento usual na análise sísmica de edifícios.

As amplitudes de deslocamento na direção x são de uma ordem de grandeza inferior às amplitudes nas direções y e z , podendo a análise resumir-se a estas últimas.

A comparação das amplitudes na direção y evidencia a importância da flexibilidade do pórtico na resposta. A sua não consideração no modelo MR conduziu a valores muito inferiores aos das amplitudes dos demais modelos. Por outro lado, observa-se que o modelo 1 fornece valores razoáveis para as amplitudes na frequência de operação.

A flexibilidade do pórtico tem uma importância menor na direção vertical z . Como a estrutura é sobre-sincronizada nesta direção, o modelo MR fornece valores aceitáveis quando comparados com as amplitudes dos modelos 2 e 3.

Tabela 9.7 – Amplitudes de deslocamento (mm) na frequência de operação [velocidade (mm/s) entre colchetes].

Nó	Modelo	Direção					
		x		y		z	
15	MR	$3,90 \times 10^{-4}$	[0,06]	$3,19 \times 10^{-3}$	[0,50]	$2,84 \times 10^{-3}$	[0,45]
	1	$3,39 \times 10^{-4}$	[0,05]	$8,39 \times 10^{-3}$	[1,3]	$2,99 \times 10^{-3}$	[0,47]
	2	$0,46 \times 10^{-4}$	[0,01]	$8,71 \times 10^{-3}$	[1,4]	$1,82 \times 10^{-3}$	[0,29]
	2a	$0,99 \times 10^{-4}$	[0,02]	$9,25 \times 10^{-3}$	[1,5]	$2,53 \times 10^{-3}$	[0,40]
	3	$2,92 \times 10^{-4}$	[0,05]	$8,85 \times 10^{-3}$	[1,4]	$3,15 \times 10^{-3}$	[0,49]
16	MR	$3,90 \times 10^{-4}$	[0,06]	$2,54 \times 10^{-3}$	[0,40]	$3,16 \times 10^{-3}$	[0,50]
	1	$0,80 \times 10^{-4}$	[0,01]	$4,79 \times 10^{-3}$	[0,75]	$7,21 \times 10^{-3}$	[1,1]
	2	$7,20 \times 10^{-4}$	[0,11]	$6,38 \times 10^{-3}$	[1,0]	$2,69 \times 10^{-3}$	[0,42]
	2a	$8,24 \times 10^{-4}$	[0,13]	$6,99 \times 10^{-3}$	[1,1]	$1,19 \times 10^{-3}$	[0,19]
	3	$8,28 \times 10^{-4}$	[0,13]	$6,85 \times 10^{-3}$	[1,1]	$1,19 \times 10^{-3}$	[0,19]
17	MR	$3,90 \times 10^{-4}$	[0,06]	$1,78 \times 10^{-3}$	[0,28]	$3,57 \times 10^{-3}$	[0,56]
	1	$1,93 \times 10^{-4}$	[0,03]	$8,90 \times 10^{-3}$	[1,4]	$4,58 \times 10^{-3}$	[0,72]
	2	$5,88 \times 10^{-4}$	[0,09]	$10,4 \times 10^{-3}$	[1,6]	$3,34 \times 10^{-3}$	[0,53]
	2a	$5,69 \times 10^{-4}$	[0,09]	$11,0 \times 10^{-3}$	[1,7]	$3,44 \times 10^{-3}$	[0,54]
	3	$5,13 \times 10^{-4}$	[0,08]	$11,4 \times 10^{-3}$	[1,8]	$4,43 \times 10^{-3}$	[0,70]

Na frequência de operação, as curvas dos diagramas de resposta na direção z para os modelos 2 e 3 apresentam tendências semelhantes e, portanto, as diferenças nos valores das amplitudes decorrem principalmente das taxas de amortecimento adotadas. Já o diagrama do modelo 1 indica um comportamento distinto e, embora os valores nos pontos 15 e 17 sejam próximos, pode-se concluir que o modelo é pouco preciso para representar o movimento vertical da fundação nas proximidades da frequência de operação.

Quanto à limitação da taxa de amortecimento (modelo 2a) ela não produziu alterações significativas nas amplitudes, servindo apenas para verificar a sensibilidade da resposta em relação ao amortecimento.

Finalmente, o desempenho da fundação é avaliado mediante o critério de Blake (ver Seção 6.2.2). Adotando o fator de serviço para turbogeradores igual a 1,6, conclui-se que as velocidades e os deslocamentos máximos obtidos ainda se encontram na faixa B do diagrama, sendo portanto aceitáveis.

9.4.4.3 Esforços nos Elementos Estruturais

A Tab. 9.8 apresenta as parcelas elásticas dos momentos fletores M_{xx} nas barras do pórtico transversal intermediário dos modelos 1 e 2 (Fig. 9.4-b). Por parcelas elásticas entendem-se os momentos obtidos multiplicando-se as matrizes de rigidez dos elementos pelos respectivos vetores de deslocamentos nodais. Como a massa e a taxa de amortecimento são pequenas nas barras, esta parcela pode ser confundida na prática com o momento fletor total na seção. Os momentos obtidos referem-se à condição limite de operação (Tab. 9.1).

Tabela 9.8 – Momento máximo M_{xx} (kNm) atuando no pórtico transversal intermediário dos modelos 1 e 2.

			Excitação harmônica				
Mod.	Elemento estrutural	Seção transversal	8,09 Hz [1º modo]	8,79 Hz [2º modo]	11,42 Hz [3º modo]		25 Hz [oper.]
1	Viga [barras 11 e 12]	central [nó 7]	4,8	12,4	6,0		34,3
		extrema [nós 19 e 20]	10,2	39,6	17,6		10,1
	Pilares [barras 17 e 18]	superior [nós 6 e 8]	11,8	45,8	20,2		13,7
		inferior [nós 24 e 25]	14,0	54,3	23,8		10,1
Mod.	Elemento estrutural	Seção transversal	5,65 Hz [1º modo]	6,10 Hz [2º modo]	10,03 Hz [3º modo]	22,22 Hz [4º modo]	25 Hz [oper.]
2	Viga [barras 11 e 12]	central [nó 7]	3,1	2,7	3,1	16,5	22,4
		extrema [nós 19 e 20]	8,5	7,0	2,6	5,7	8,1
	Pilares [barras 17 e 18]	superior [nós 6 e 8]	9,9	8,2	3,0	7,5	10,6
		inferior [nós 24 e 25]	11,7	9,6	3,3	6,0	8,2

A análise dos modos de vibração, considerando suas frequências naturais f_n e taxas de amortecimento ξ_n , permite avaliar as frequências em que ocorrem os momentos fletores máximos na estrutura. Admitindo a predominância de um dos modos, a frequência relativa

à amplitude máxima é calculada por

$$f = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\xi_n^2}}, \quad (9.4)$$

no caso em que a excitação varia com o quadrado da frequência de rotação.

O exame dos momentos fletores na Tab. 9.8, confirma a importância da interação solo-estrutura no comportamento dinâmico da fundação. No modelo 1, com os pilares perfeitamente engastados, os momentos máximos ocorrem durante a partida e a parada da máquina, exceto para a seção central da viga. No Modelo 2, as condições de ressonância não são tão acentuadas e a excitação na frequência de operação ou fornece os valores máximos ou próximos dos máximos obtidos.

9.5 Observações e Conclusões

Os modelos adotados para representar a fundação de turbina permitiram levantar a importância de diversos aspectos na resposta da estrutura e, ao mesmo tempo, criar subsídios para a escolha adequada do modelo matemático da fundação.

Na elaboração do exemplo, o autor constatou que o procedimento sugerido por Major [15] de separar a estrutura da fundação e obter as respostas a partir dos resultados de dois modelos (o pórtico perfeitamente engastado e a fundação como um bloco rígido), tem grande utilidade na fase de pré-dimensionamento. Este procedimento permite prever comportamentos inadequados da estrutura ou de seus elementos, como por exemplo quando as frequências naturais dos pórticos transversais forem muito diferentes. Também neste sentido, foram fundamentais as recomendações e o roteiro fornecidos por Arya *et alii* [3] e reproduzidos no Capítulo 6.

Do exemplo analisado, conclui-se que a interação solo-estrutura afeta intensamente a resposta da estrutura no intervalo contendo as menores frequências naturais. Portanto, ela deverá ser considerada quando as amplitudes associadas às menores frequências de ressonância tiverem interesse. Entretanto, se as amplitudes desejadas estiverem associadas a frequências de operação elevadas, esta interação poderá ser desprezada.

Com relação aos modelos 2 e 3, já se manifestou preferência pelo modelo 2. Tal preferência deve-se ao fato de a consideração da flexibilidade da laje, segundo o procedimento proposto por Arya *et alii*, acabar deturpando os resultados da teoria do semi-espaço. No entanto, a questão deverá ser melhor estudada quando a laje não puder mais ser admitida rígida.

Apesar do progresso alcançado com o emprego de modelos com vários graus de liberdade, prevalece a tendência de tratar os principais componentes do sistema, ou seja, o rotor, a carcaça da máquina e a fundação, como partes independentes. A necessidade de uma abordagem geral que englobe todo o sistema tem sido reconhecida por muitos especialistas. Um exemplo expressivo é apresentado por Aboul-Ella e Novak [1, 2], onde a flexibilidade do rotor, a presença de um filme de óleo no mancal e a interação solo-estrutura são considerados no modelo matemático. Embora bastante complexo, pois considera a variação

dos coeficientes de rigidez e amortecimento do solo e da estrutura com a frequência, suas conclusões foram importantes para a elaboração deste capítulo, sobretudo quanto ao intervalo de frequência no qual ainda é possível trabalhar com coeficientes constantes.

Como foi visto, uma das principais dificuldades apresentadas pelas fundações aperticadas refere-se ao amortecimento. A sua consideração por meio de taxas de amortecimento modal equivalente supõe que os modos de vibração sejam ortogonais em relação à matriz de amortecimento. Esta hipótese é perfeitamente aceitável quando o sistema é pouco amortecido, o que nem sempre ocorre nas fundações de máquinas. Embora o procedimento adotado para o cálculo das taxas de amortecimento esteja sujeito a críticas, ele representa um modo aproximado de se considerar a influência do amortecimento geométrico do solo na resposta da fundação. As taxas de amortecimento sugeridas por Major ou Arya *et alii*, ao contrário, são valores empíricos e não consideram aspectos importantes como o tipo de solo, geometria da fundação, proximidade do maciço rochoso etc.

Finalmente, deve ser mencionada a necessidade de um trabalho complementar no sentido de se aferir experimentalmente os modelos matemáticos discutidos. O autor espera que os resultados apresentados sejam úteis no levantamento e na especificação dos ensaios necessários para a realização de um estudo das fundações de turbogeradores já construídas.

Capítulo 10

Observações Finais

O exame dos conhecimentos necessários para a análise de uma fundação de máquina mostra que eles são relativamente simples e que sua única dificuldade reside no volume de informações. Diante disso, exige-se do engenheiro que conheça os fundamentos da Teoria das Vibrações, da Dinâmica dos Solos e da elaboração de modelos matemáticos, além de informações específicas da própria máquina, para que a análise seja conduzida de modo satisfatório.

Por outro lado, quando se comparam esses conhecimentos com os da Engenharia Sísmica, constata-se que eles não têm avançado tão rapidamente, apesar de sua menor complexidade. É óbvio que isto reflete o montante gasto em pesquisas e a grande importância dada ao problema de terremotos. Contudo, uma parte do atraso é atribuída por Srinivasulu *et alii* [29] ao fato de a responsabilidade pelo desempenho da fundação estar dividida entre o projetista da máquina, normalmente um engenheiro mecânico, e o projetista da fundação. Portanto, para compensar este fato, é indispensável o trabalho coordenado dos engenheiros mecânico e civil desde o início do projeto da fundação até a instalação da máquina. A necessidade de interação entre os profissionais é ainda mais acentuada no projeto de grandes turbomáquinas, no qual o procedimento usual de considerar o sistema mecânico separado da fundação pode conduzir a resultados pouco confiáveis quando se trata do comportamento dinâmico do sistema global.

A análise dinâmica de fundações de máquinas apresenta uma característica que, muitas vezes, confunde o engenheiro. Em relação à análise estática, ela requer maior número de conceitos e experiência profissional para que o engenheiro adquira certa sensibilidade para o problema. Em outras palavras, ele não deve desanimar se, no começo, não conseguir visualizar todo o problema sem despender várias horas para compreendê-lo. Regra geral, o entendimento não depende apenas do projetista da fundação, pois são necessárias informações adicionais a respeito da máquina e do solo.

Ao longo de todo o trabalho, foi enfatizada a necessidade da aferição dos procedimentos de análise por meio de medições e ensaios com fundações reais. O acompanhamento sistemático do desempenho da fundação, após sua construção, representa a maneira mais simples de tratar este requisito. Além disso, a confiança nos métodos mais avançados de análise só é adquirida quando eles são capazes de prever o comportamento das fundações.

Finalmente, alguns itens importantes não foram abordados por causa de sua extensão e deverão ser objeto de trabalhos futuros. O problema do isolamento ativo e passivo de fundações de máquinas e equipamentos, juntamente com a caracterização e a classificação dos principais tipos de aparelhos de apoio, teria grande interesse para engenheiros mecânicos e civis. Outro item que merece ser citado é o estudo do comportamento do concreto armado quando submetido a solicitações cíclicas, assim como a aplicação deste ao detalhamento das fundações de concreto.

Bibliografia

- [1] Aboul-Ella, F. e Novak, M. Dynamic response of pile-supported frame foundations. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **106**: 1215-1232, 1980.
- [2] Aboul-Ella, F. e Novak, M. Dynamic analysis of turbine-generator foundations. Em *Foundations for Equipment and Machinery*, Vol. SP-78, ACI, pp. 79-89, 1982.
- [3] Arya, S. C., O'Neill, M. W. e Pinkus, G. *Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines*. Gulf Publishing Co., 1979.
- [4] Arya, S. C. e Pinkus, G. Analysis and design of elevated foundation for reciprocating machines. Em *Foundations for Equipment and Machinery*, Vol. SP-78, ACI, pp. 1-32, 1982.
- [5] Barkan, D. D. *Dynamics of Bases and Foundations*. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [6] Bowles, J. E. Mat Foundations. Em *Foundation Analysis and Design*, pp. 349-377, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1982.
- [7] Bowles, J. E. Mat Desing. *ACI Journal Proceedings*, **83**: 1010-1017, 1986.
- [8] Clough, R. M. *Dynamics of Structures*. International Student ed., McGraw-Hill, Auckland, 1975.
- [9] Clough, R. W. e Mojtahedi, S. Earthquake response analysis considering non-proportional damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **4**: 489-496, 1976.
- [10] Debevec, L., Jr. e Smeal, T. *Predicting equipment failure*. Vol. 57, june 1987.
- [11] El Hifnawy, L. e Novak, M. Response of hammer foundations to pulse loading. *Int. J. Soil Dynamics and Earthquake Eng.*, **3**: 124-132, 1984.
- [12] Gazetas, G. Analysis of machine foundation vibration: state of the art. *Int. J. Soil Dynamics and Earthquake Eng.*, **2**: 2-42, 1983.
- [13] Hoadley, P. J. Measurement of dynamic soil properties. Em P. J. Moore, editor, *Analysis and Design of Foundations for Vibrations*, pp. 349-419, Chapter 9, A.A. Balkema, Rotterdam, 1985.

- [14] Klein, A. M. e Crockett, J. H. A. Design and construction of a fully vibration-controlled forging hammer foundation. *Journal of the American Concrete Institute*, **24**: 421-444, 1953.
- [15] Major, A. *Dynamics in Civil Engineering: Analysis and Design* (Revised and enlarged edition of Vibration Analysis and Design of Foundations for Machines and Turbines, 1962 ed.), Akadémiai Kiadó, Budapest and Collets Holdings Ltd. London, 1980.
- [16] McNeill, R. L., Machine foundations, *International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Soil Dynamics Special Session*, Mexico City, Mexico. 1969.
- [17] Moore, P. J. Vibration criteria. Em P. J. Moore, editor, *Analysis and Design of Foundations for Vibrations*, pp. 1-20, Chapter 1, A.A. Balkema, Rotterdam, 1985.
- [18] Moore, P. J. Theoretical solutions for foundation vibration problems. Em P. J. Moore, editor, *Analysis and Design of Foundations for Vibrations*, pp. 195-266, Chapter 6, A.A. Balkema, Rotterdam, 1985.
- [19] Novak, M., Response of hammer foundations., *Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Southampton, U.K. A.A. Kalkema, Rotterdam, **2**: 783-797, 1982.
- [20] Novak, M. Foundation for shock-producing machines. *Canad. Geotechn. Journal*, **20**: 141-158, 1983.
- [21] Novak, M. e El Hifnawy, L. Vibration of hammer foundations. *Int. J. Soil Dynamics and Earthquake Eng.*, **2**: 43-53, 1983.
- [22] Novak, M. e El Hifnawy, L. Effect of soil-structure interaction on damping of structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11**: 595-621, 1983.
- [23] Novak, M., Analysis of hammer foundations, *2nd International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 4.61-4.70, 1985.
- [24] Przemieniecki, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [25] Richart, F. E., Jr., Hall, J. R., Jr. e Woods, R. D. *Vibrations of Soils and Foundations*. Prentice Hall, New Jersey, 1970.
- [26] Richart, F. E., Jr. Foundation vibrations. Em H. F. Winterkorn e H. Y. Fang, editors *Foundation Engineering Handbook*, pp. 673-699, Van Nostrand Reinhold, 1975.
- [27] Roesset, J. M., Whitman, R. V. e Dobry, R. Modal analysis for structures with foundation interaction. *Journal of the Structural Division, ASCE*, **99**: 399-416, 1973.
- [28] Schmidt, L. C. Vibration theory. Em P. J. Moore, editor, *Analysis and Design of Foundations for Vibrations*, pp. 21-63, Chapter 2, A.A. Balkema, Rotterdam, 1985.

- [29] Srinivasulu, P. e Vaidyanathan, C. V. *Handbook of Machine Foundations*. Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, 1976.
- [30] Venancio Filho, F. e Claret Gouveia, A. M., Amortecimento não-proporcional em sistemas estruturais, *VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, São Carlos, Brasil. **1**: 231-241, 1986.
- [31] Venancio Filho, F. e Claret Gouveia, A. M., Resposta dinâmica no domínio do tempo de sistemas dotados de amortecimento não-proporcional, *Colloquia 87*, Porto Alegre, Brasil. **5**: 1-16, 1987.
- [32] Venancio Filho, F. *Dinâmica* (Notas de aula), 1988.

Apêndice A

O Programa SANT

Durante a elaboração deste trabalho, foi desenvolvido o programa SANT (FORTRAN-IV) para a análise estrutural de fundações de máquinas, procurando automatizar os procedimentos expostos no Capítulo 2.

O programa calcula a resposta de uma estrutura tridimensional, elástica e linear submetida a excitações dinâmicas em regime permanente. Com relação à descrição da geometria, ele segue as convenções usuais dos programas de elementos finitos (SAP4, ADINA etc.) de modo a facilitar a entrada de dados e a análise dos resultados aos usuários familiarizados com estes programas.

Atualmente estão implantados os elementos de barra tridimensional e de mola, estes com o objetivo de introduzir coeficientes de rigidez e amortecimento associados a qualquer par de nós do modelo.

Para o cálculo da resposta dinâmica é empregada a Análise Modal Clássica (com frequências e modos de vibração não amortecidos) sendo o amortecimento considerado através de taxas de amortecimento modal. Os valores das taxas podem ser fornecidos pelo usuário ou calculados a partir de coeficientes de amortecimento localizados (taxa de amortecimento modal equivalente).

Para maiores detalhes, a listagem do programa e seu manual encontram-se no Laboratório de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP.