

JOSÉ ANTONIO LEROSA DE SIQUEIRA

ENGENHEIRO CIVIL
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO (1973)

**ELEMENTOS FINITOS DE PLACA:
ESFORÇOS SOLICITANTES**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À ESCOLA POLITÉCNICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO
DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA

ORIENTADOR: PROF. VICTOR M. DE SOUZA LIMA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
E FUNDAÇÕES EPUSP

SÃO PAULO, 1982

FD-468

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todos os que, de uma forma ou de outra, colaboraram na elaboração deste trabalho, e em particular

ao Professor Victor de Souza Lima, pelo estímulo e orientação,

ã Srta. Angela Schneider Loyola, pelos trabalhos de revisão e datilografia,

ao futuro colega Tong Chi Seng, pela elaboração da parte grāfica,

ao seu pai e ã memōria de sua mãe.

RESUMO

A teoria clássica das placas finas é apresentada com formulação matricial. Descreve-se o método dos elementos finitos e formula-se o caso das placas. Alguns campos de deslocamentos para elementos retangulares e triangulares são apresentados. Busca-se uma expressão exata para placas triangulares e sujeitas a carga distribuída uniforme. Através de estudos comparativos, mostra-se a possibilidade prática de se calcularem os esforços solicitantes em um ponto qualquer no interior de um elemento finito de placa, baseando-se nos deslocamentos nodais fornecidos por um processamento pelo método dos elementos finitos.

ABSTRACT

This paper presents the classical thin-plate theory with a matrix formulation. The finite element method is described and applied to the study of plates. Some displacement functions for rectangular and triangular elements are described. An exact formulation for triangular plates under certain conditions is analysed. By comparative studies, it is shown the feasibility of calculating the bending moments, the twisting moment and the shearing forces at any point in a plate once the nodal displacements in the vertices are known.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO — A PESQUISA DOS ESFORÇOS SOLICITANTES NO ESTUDO DAS ESTRUTURAS	1.1
2. A TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS	2.1
2.1. Hipóteses Fundamentais	2.1
2.2. Esforços Solicitantes Generalizados	2.3
2.3. Equação Diferencial do Campo w	2.3
3. ELEMENTO FINITO DE PLACA — FORMULAÇÃO GERAL	3.1
3.1. Expressões Matriciais do Método dos Deslocamentos	3.1
3.2. Pesquisa das Funções de Forma N	3.5
3.3. Escolha da Função $F(x, y)$	3.8
3.4. Condições de Convergência	3.8
3.4.1. 1a. Condição de Convergência	3.9
3.4.2. 2a. Condição de Convergência	3.9
3.4.3. 3a. Condição de Convergência	3.10
4. OS ELEMENTOS RETANGULARES	4.1
4.1. O Elemento Retangular de Melosh	4.1
4.2. Os Elementos Retangulares de Bogner	4.24
5. OS ELEMENTOS TRIANGULARES	5.1
5.1. O Elemento Triangular com Função Polinomial	5.1
5.2. O Elemento Triangular em Coordenadas Triangulares	5.3
5.3. O Elemento Triangular Conforme em Coordenadas Triangulares com Singularidades Nodais	5.14
6. CONCLUSÕES	6.1
APÊNDICE A - Expressões Exatas para o Campo de Deslocamentos em Placas Triangulares	A.1
APÊNDICE B - Programas Pós-Processadores	B.1
1) Elemento Retangular de Melosh	B.2
2) Elemento Triangular com Função Polinomial Explícita	B.5
3) Elemento Triangular com Função Polinomial Gerada	B.8
4) Elemento Triangular com Formulação em Coordenadas Triangulares	B.11
5) Elementos Triangulares com Formulação em Coordenadas Triangulares e Derivadas Normais nos Pontos Médios dos Lados	B.14

ÍNDICE DAS FIGURAS

Fig.		Página
2-1a	Definição de Eixos numa Placa Qualquer	2.2
2-1b	Deslocamentos de um Ponto P da Placa	2.2
2-1c	Convenção de Sinais para os Deslocamentos	2.2
2-2	Convenção de Sinais dos Esforços Solicitantes numa Placa	2.3
2-3	Esforços num Elemento de Placa de Dimensões dx dy	2.4
3-1	Deslocamentos w , θ_x e θ_y de um Ponto P	3.1
3-2a	Placa Dividida em Elementos Triangulares	3.5
3-2b	Placa Dividida em Elementos Retangulares	3.5
3-3	Tensões Generalizadas em um Elemento Retangular ijlk	3.6
3-4	Elementos Vizinhos com Nós Comuns i e j	3.7
3-5	Zona Interelemental e Função $F(x, y)$	3.11
4-1	Placa Retangular de Lados 2a e 2b	4.1
4-2	Deslocamentos Nodais no Elemento Retangular	4.1
4-3	Forças Nodais no Elemento Retangular	4.2
4-4	Exigência de Continuidade ao Longo da Aresta 1-2	4.3
4-5	Placa Não-Homogênea	4.5
4-6	Disposição Especial dos Eixos para as Equações (4.1)	4.7
4-7	Deformação Cilíndrica em Torno do Eixo y	4.9
4-8	Deformação Cilíndrica em Torno do Eixo x	4.10
4-9	Deformação Mista em uma Placa	4.11
4-10	Triângulo Equilátero Simplesmente Apoiado nas Bordas Sujeito a Carga Uniforme q	4.18
4-11	Placa Triangular Equilátera Apoiada nas Bordas	4.19
4-12	Placa de Dimensões 6 x 9 Subdividida em 48 Elementos Retangulares em Cada Quadrante	4.20
4-13	Diagrama do Momento Fletor M_x para a Placa da Fig. 4-12	4.21
4-14	Placa Retangular com Carregamento Provocando o Campo de Deslocamentos $W = \alpha xy$	4.22
4-15	Esquema de Definição de Elementos Finitos para a Placa da Fig. 4-14	4.23
4-16	Polinômios Hermitianos de Grau 0	4.25
4-17	Polinômios Hermitianos de Grau 1	4.26
4-18	Representação de um Elemento Finito Retangular	4.27
4-19a	Representação de $F = H_{oi}^1(x) \cdot H_{oi}^1(y)$	4.28

Fig.		Página
4-19b	Representação de $F = H_{1i}^1(x) \cdot H_{1i}^1(y)$	4.28
4-20	Designação dos Nós para a Formulação de Bogner	4.30
5-1	Elemento Triangular de Placa com um Ponto P no seu Interior	5.3
5-2	Representação da Coordenada Triangular L	5.4
5-3	Deformação Mista num Elemento Triangular	5.9
5-4	Deformação Cilíndrica num Elemento Triangular	5.10
5-5	Diagrama de M_x com Dois Tipos de Formulações	5.12
5-6	Diagrama dos Esforços M_x , M_y e V_x na Placa Triangular Equilátera Apoiada nas Bordas e Sujeita a Carga q Constante	5.13
5-7	Definição da Inclinação no Ponto Médio de uma Aresta	5.15
A-1	Representação do Triângulo Equilátero Apoiado nas Bordas e Sujeito a Carga q Constante	A.1

NOTAÇÃO

a, b	semilados do retângulo
\underline{B}	matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos
D	módulo de rigidez de uma placa
\underline{D}	matriz de elasticidade
E	módulo de elasticidade à tração ou compressão
\underline{F}^e	matriz das forças nodais da placa
\underline{F}_p^e	matriz das forças nodais provocadas pelo carregamento externo p
$H_{mi}^n(x)$	polinômio hermitiano
i, j, ℓ, k, \dots	nós do elemento de placa
\underline{k}^e	matriz de rigidez da placa
L_1, L_2, L_3	coordenadas triangulares para um ponto de um elemento triangular
M_x, M_y	momentos fletores por unidade de comprimento em um ponto da placa
M_{xy}	momento misto por unidade de comprimento em um ponto da placa
\underline{N}	matriz das funções de forma
\underline{p}	matriz das cargas distribuídas
\underline{P}	matriz que relaciona \underline{N} a \underline{C}^{-1}
\underline{Q}	matriz que relaciona \underline{B} a \underline{C}^{-1}
t	espessura da placa
V_x, V_y	forças cortantes por unidade de comprimento em um ponto da placa
w	deslocamento linear de um ponto de coordenadas x e y da placa
x, y	eixos ortogonais que definem o plano médio da placa
z	eixo dos deslocamentos lineares da placa
$\underline{\delta}^e$	vetor dos deslocamentos em pontos específicos da placa
$\underline{\epsilon}$	matriz das deformações generalizadas
$\underline{\epsilon}_0$	matriz das deformações generalizadas iniciais
ν	coeficiente de Poisson
ξ	infinitésimo de translação na vizinhança de um ponto P
π	funcional variacional
$\underline{\sigma}$	matriz das tensões generalizadas
$\underline{\sigma}_0$	matriz das tensões generalizadas iniciais
θ_x, θ_y	deslocamentos angulares de um ponto de coordenadas x e y da placa, em torno de eixos paralelos a x e a y , respectivamente.

1. INTRODUÇÃO — A PESQUISA DOS ESFORÇOS SOLICITANTES NO ESTUDO DAS ESTRUTURAS

O engenheiro estrutural de hoje apóia cada vez mais a sua atividade no uso de computadores. O processamento de dados já demonstrou ser uma maneira útil e econômica para a abordagem de certos problemas estruturais. A calculadora científica faz parte do instrumental fixo do calculista, que pode desenvolver rotinas específicas para solucionar problemas simples, ou utilizar os grandes centros de processamento numérico para analisar os mais complexos.

Aparentemente, a entrada em disponibilidade do computador e de suas aplicações foi rápida demais, e não foi acompanhada por avanço similar na metodologia de apreciação dos diversos problemas da teoria das estruturas. Ao se analisarem as características principais do conjunto de ciências da Engenharia Estrutural, desenvolvidas durante quatro séculos e antes do desenvolvimento da computação, percebe-se que os únicos instrumentos empregados eram a régua e o compasso. Como consequência, criaram-se processos gráficos para auxiliar na resolução de problemas numéricos. Outros instrumentos, como a régua de cálculo, a tábua de logaritmos e a máquina de somar, não modificaram o quadro geral. Basicamente, era possível resolver, com razoável precisão, sistemas de equações com poucas incógnitas, talvez quatro ou cinco no máximo. O método de resolução imitava uma peculiaridade do intelecto humano: a linearidade. A busca de soluções seguia ao longo de uma seqüência unidimensional, numa abordagem escalar.

O estudo das estruturas dividiu-se em duas partes: de um lado, desenvolviam-se as teorias mais abrangentes do comportamento dos materiais, como as teorias da elasticidade e da plasticidade; de outro, criavam-se procedimentos práticos que, simplificando, por meio de hipóteses razoáveis, as teorias mais exatas, permitiam que as estruturas fossem calculadas e dimensionadas. Além disso, criaram-se figuras intermediárias necessárias para a resolução. Veja-se, por exemplo, na teoria das estruturas reticuladas, a presença dos esforços solicitantes. Do carregamento externo e das características físicas e geométricas da estrutura, chega-se

aos esforços solicitantes, para depois calcularem-se os esforços internos e o campo de deformações. Algumas vezes, o arraigamento proveniente do uso intensivo do processo é tão forte que já não é mais necessário ir além das próprias figuras intermediárias para que se possa tomar as decisões apropriadas. No cálculo do concreto armado, os procedimentos práticos camuflaram de tal forma os verdadeiros esforços resistentes que estes raramente são calculados, já que é possível efetuar o cálculo dos reforços baseando-se exclusivamente nos esforços solicitantes. Assim, o calculista não determina a tensão máxima que ocorre numa viga de concreto, porque, conhecendo a envoltória de esforços solicitantes, pode, geralmente, tirar conclusões seguras a respeito da integridade da peça e da necessidade de ser reforçada por elementos complementares.

Ocorre que algumas peças não-reticuladas podem ser encaradas como casos extremos de barras de dimensões distorcidas, para fazer aparecer a figura familiar dos esforços solicitantes. Contudo, na falta de predominância de uma dimensão sobre as outras duas na peça, não é certo calcular uma resultante para o conjunto de esforços internos atuando numa seção, de acordo com as hipóteses válidas exclusivamente para barras. Nestes casos, outras figuras intermediárias prováveis são válidas e fornecem modelos mais próximos da realidade. É o caso do bloco de apoio, onde é razoável a passagem dos esforços externos para os resistentes através da definição de bielas internas de tração e de compressão, supondo-se que a tensão seja constante na seção da biela e impondo-se hipóteses simplificadoras para a determinação de sua seção.

Com a possibilidade de uso do computador, sistemas de equações com muitas incógnitas puderam ser encarados com precisão e rapidez. As funções de comportamento, de distribuição de tensões e de deformações puderam ser introduzidas com maior sofisticação. Numa aplicação poderosa, a que utiliza o método dos elementos finitos, o computador permite a passagem direta dos esforços externos para os resistentes, fornecendo, em pontos pré-determinados da estrutura, os deslocamentos e as tensões. Nas regiões das peças onde o comportamento é, para fins práticos, elástico, e as tensões não superam os valores admissíveis, o conhecimento delas é o bastante para a verificação da segurança à ruptura. Por exemplo, uma das

etapas do projeto de uma barragem protendida consiste na verificação do estado de tensões nos centróides dos elementos finitos sólidos constitutivos e nos cabos de protensão, cujos efeitos são levados em conta como carregamentos externos.

No estudo das placas finas, a metodologia de aplicação da teoria dos elementos finitos manteve a presença dos esforços solicitantes, com as adaptações apropriadas. Isto ocorreu devido a duas causas principais. Primeiro, porque hipóteses bastante simples permitem calcular os esforços resistentes a partir dos solicitantes com razoável precisão. A segunda razão é que, historicamente, os estudos das placas e das grelhas estiveram sempre muito interligados. Os métodos primitivos de resolução de grelhas buscavam simular casos clássicos resolvidos de placas equivalentes. Modernamente, durante certa fase de desenvolvimento dos métodos matriciais de cálculo, o encaminhamento no sentido oposto foi largamente usado, com placas sendo transformadas em grelhas para serem resolvidas pelo processo dos deslocamentos em estruturas reticuladas, nos primeiros programas disponíveis na década de 60.

2. A TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS

2.1. Hipóteses Fundamentais

Certas limitações são introduzidas para simplificar o estudo do comportamento das placas:

- a. supõe-se que haja variação linear de deformações em retas normais ao plano da placa;
- b. como consequência do item a, para maior fidelidade dos resultados, limitam-se os estudos às placas finas e com carregamento provocando pequenas deformações;
- c. desprezam-se os deslocamentos no plano da placa, bem como a rotação em torno de um eixo perpendicular a ela;
- d. desprezam-se as deformações provocadas pela ação da força cortante.

O problema reduz-se a encontrar, para cada ponto, as deformações provocadas pela flexão simples da placa, em regime elástico.

Definindo-se um plano médio à placa, colocam-se os eixos x e y neste plano e o eixo z , perpendicular a ele (Fig. 2-1a).

O estado de deformação pode ser inteiramente descrito por uma quantidade que é o deslocamento lateral w do plano médio. A Fig. 2-1b mostra os deslocamentos linear e angulares de um ponto qualquer da placa. De fato, no ponto P ,

$$\theta_x = - \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} .$$

A Fig. 2-1c mostra as orientações positivas desses deslocamentos.

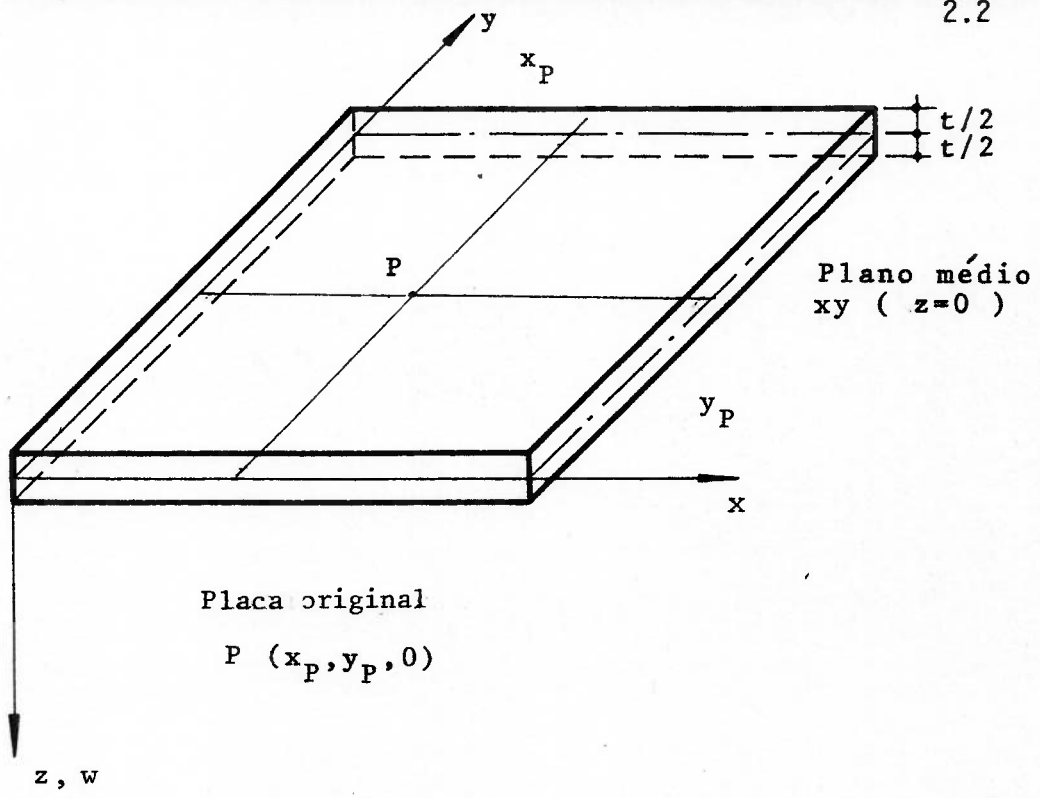


Fig. 2-1a - Definição de Eixos numa Placa Qualquer

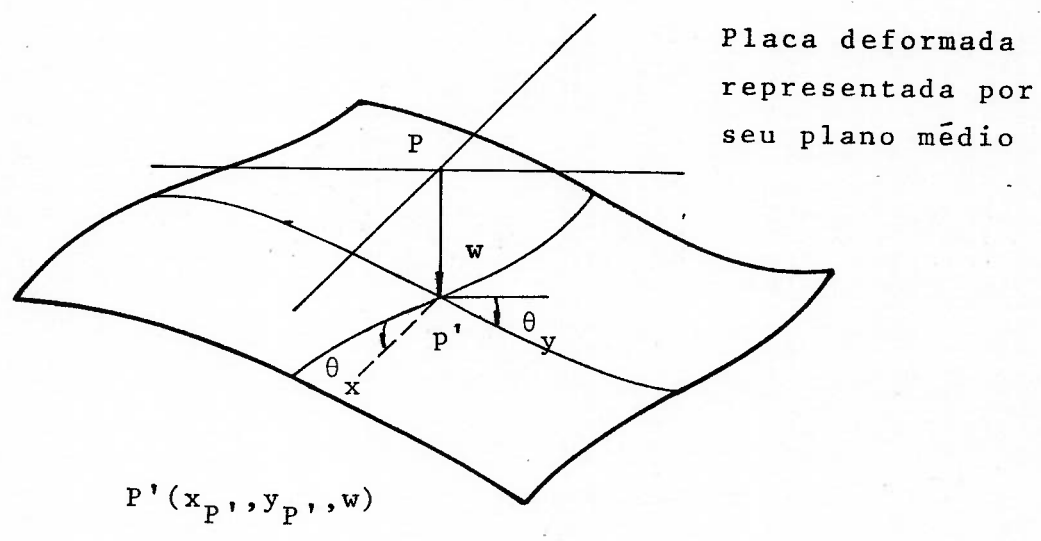


Fig. 2-1b - Deslocamentos de um Ponto P da Placa

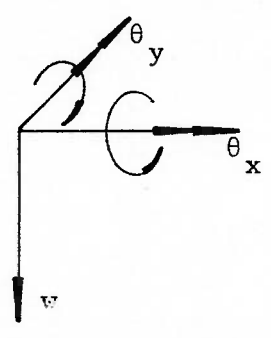


Fig. 2-1c - Convenção de Sinais para os Deslocamentos

2.2. Esforços Solicitantes Generalizados

Na Fig. 2-2, tem-se a convenção de sinais dos esforços solicitantes por unidade de comprimento ao longo da borda de uma placa retangular de espessura t constante, sujeita à pressão q .

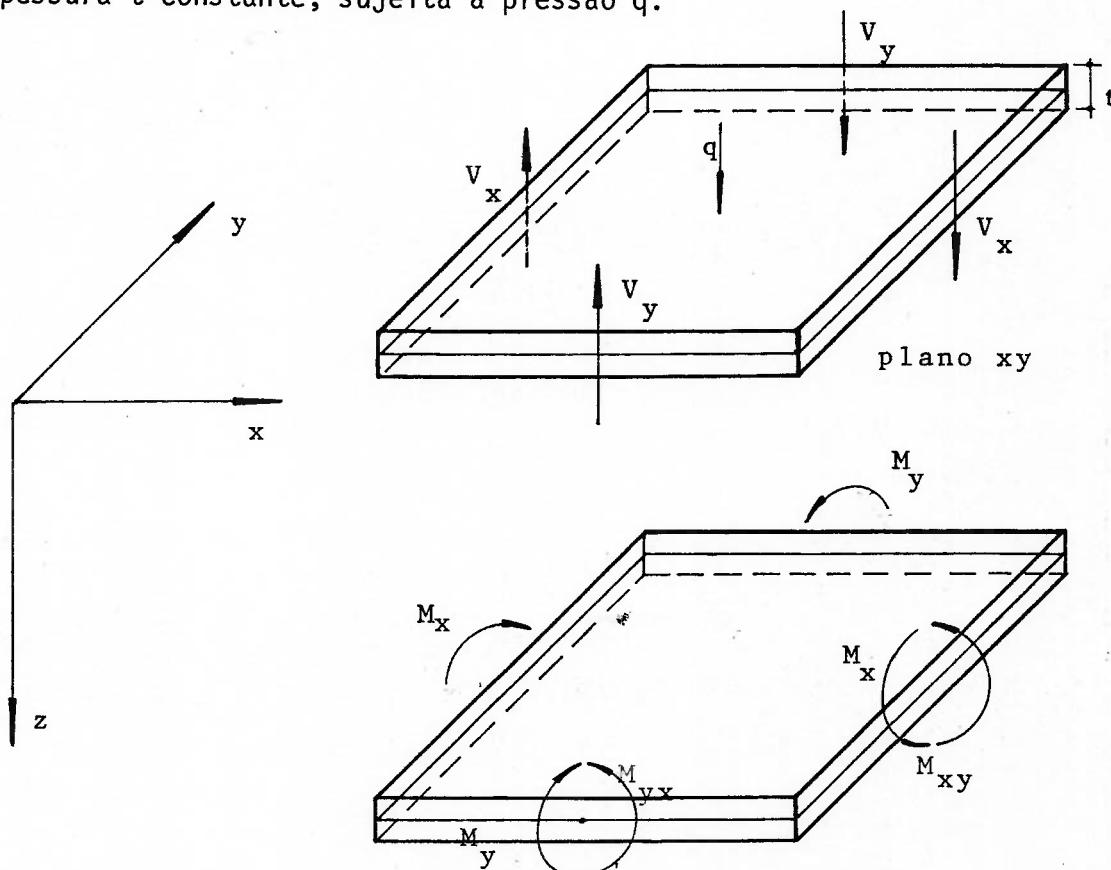


Fig. 2-2 - Convenção de Sinais dos Esforços Solicitantes numa Placa
Esta pressão \bar{e} considerada positiva quando age no sentido positivo de z .
Os momentos M_x e M_y são positivos quando tracionam as fibras inferiores.

O momento misto \bar{e} positivo quando o sentido de seu vetor for para fora da face lateral em que está aplicado. As forças cortantes V_x e V_y são positivas nos sentidos indicados.

2.3. Equação Diferencial do Campo w

Se for isolado um elemento de dimensões dx e dy (Fig. 2-3), têm-se os seguintes esforços:

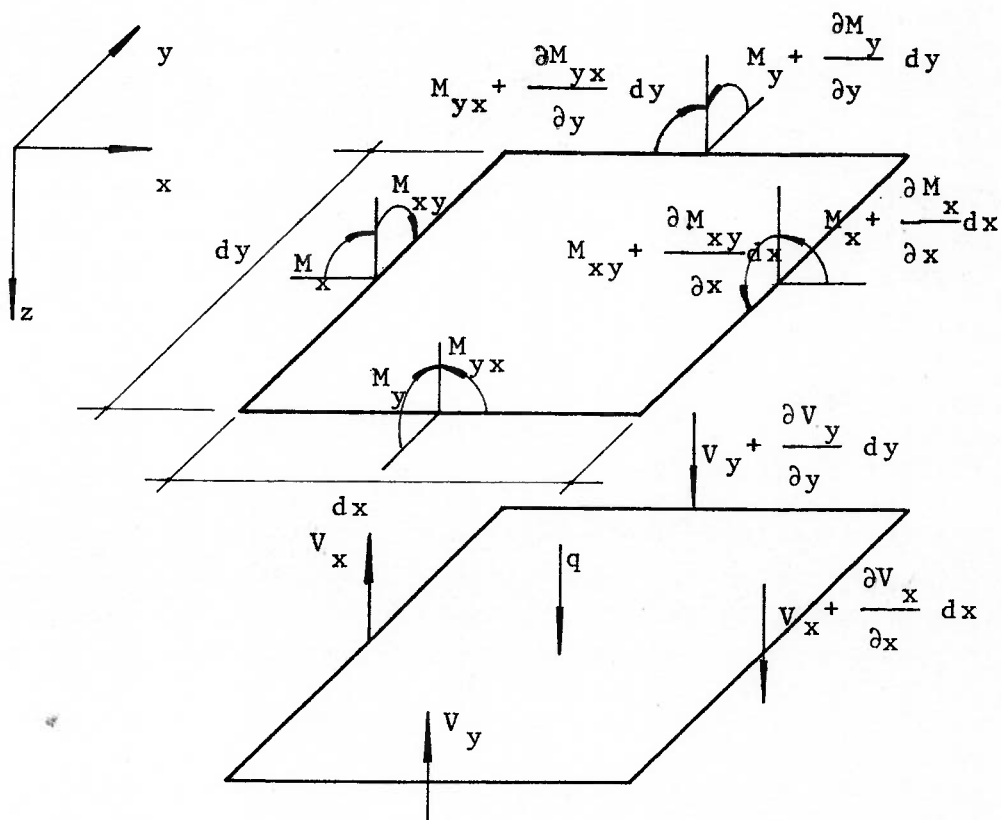


Fig. 2-3 - Esforços num Elemento de Placa de Dimensões dx dy

Projetando-se todas as forças no eixo z :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0$$

ou

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 . \quad (2.1)$$

Tomando-se os momentos de todas as forças em relação ao eixo x:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - V_y dx dy = 0$$

ou

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - V_y = 0. \quad (2.2)$$

Tomando-se os momentos de todas as forças em relação ao eixo y:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx dy - \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + V_x dx dy = 0$$

ou

$$-\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - V_x = 0. \quad (2.3)$$

Substituindo-se V_x e V_y em (2.1) pelas expressões derivadas de (2.2) e (2.3), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + q = 0 \\ -\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0. \end{aligned}$$

Observando-se que $M_{yx} = -M_{xy}$ (pois $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (2.4)$$

Desprezando-se a deformação provocada pela força cortante e a tensão de compressão σ_z produzida pela carga q , simplifica-se o problema do caso de carga lateralmente aplicada para o caso de flexão pura. Valem as expressões que ligam as deformações com os momentos:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

com:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} .$$

Substituindo-se em (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) - \\ - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{D}$$

ou

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} . \quad (2.5)$$

Esta equação pode ser escrita na forma:

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (2.6)$$

onde,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} .$$

Esta equação diferencial de 4a. ordem é resolvida por processos numéricos. Em alguns casos especiais, o deslocamento w tem expressão teórica exata (como será observado no Apêndice I).

Nas regiões descarregadas da placa, onde $q = 0$, vale:

$$\Delta \Delta w = 0 .$$

3. ELEMENTO FINITO DE PLACA — FORMULAÇÃO GERAL

3.1. Expressões Matriciais do Método dos Deslocamentos

Na Fig. 3-1, estão definidos os deslocamentos de um ponto P qualquer no interior de uma placa.

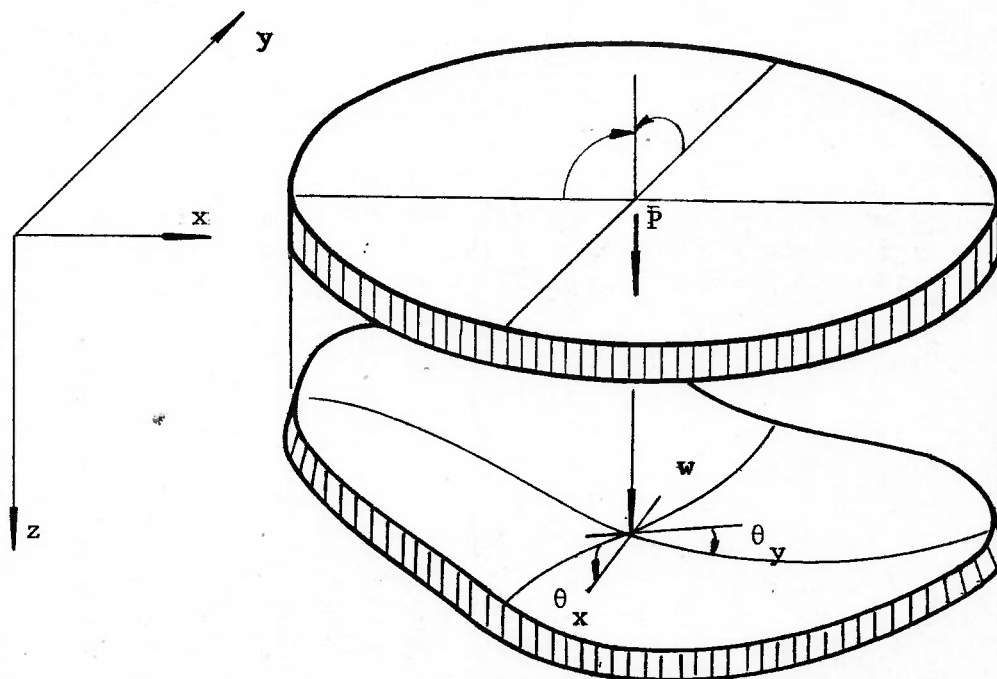


Fig. 3-1 - Deslocamentos w , θ_x e θ_y de um Ponto P

Percebe-se que:

$$\theta_x = - \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

Portanto o estado de deformação de uma placa fica totalmente especificado quando a função $w = w(x, y)$ é conhecida em todos os seus pontos.

Aplicando-se o método dos deslocamentos, escreve-se:

$$w = \underline{N} \underline{\delta}^e \quad (3.2)$$

onde \underline{N} é a matriz das funções de forma, que depende das coordenadas cartesianas, e $\underline{\delta}^e$ é o vetor dos deslocamentos em pontos específicos da placa, denominados nós:

$$\underline{\delta}^e = \left\langle \begin{array}{c} \delta_i \\ \delta_j \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\rangle, \text{ com } \underline{\delta}_i = \left\langle \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{array} \right\rangle$$

sendo $i, j \dots$ os pontos específicos do plano médio da placa considerada.

As deformações generalizadas e as tensões generalizadas devem ser especificadas de tal forma que o seu produto forneça o trabalho das forças internas. No caso das placas, as deformações generalizadas são as curvaturas:

$$\underline{\epsilon} = \left\langle \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\rangle \quad (3.3)$$

A matriz de tensões generalizadas é formada por momentos fletores por unidade de comprimento:

$$\underline{\sigma} = \left\langle \begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\rangle \quad (3.4)$$

As matrizes $\underline{\epsilon}$ e $\underline{\sigma}$ guardam entre si a relação:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (3.5)$$

onde \underline{D} é a matriz de elasticidade. No caso de o material ser isótropo,

e a placa ter espessura constante t , tem-se:

$$\underline{D} = D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

com:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} .$$

No caso mais geral, havendo tensões generalizadas iniciais e deformações generalizadas iniciais que não provoquem acréscimos de tensões, a equação (3.5) assume a forma mais completa:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_0) + \underline{\sigma}_0 \quad (3.7)$$

onde $\underline{\epsilon}_0$ são as deformações generalizadas iniciais que não provocam acréscimos de tensões, e $\underline{\sigma}_0$ são as tensões generalizadas iniciais.

Conhecendo-se os deslocamentos em todos os pontos da placa, podem-se calcular as deformações num ponto qualquer no seu interior e no seu contorno. Escrevendo-se esta relação em notação matricial:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{\delta}^e . \quad (3.8)$$

Os pontos de definição de parâmetros nodais dividem a placa em sub-regiões, os chamados elementos finitos de placa.

As forças nodais \underline{F}^e são as estaticamente equivalentes às tensões de borda e às cargas distribuídas perpendiculares às faces do elemento:

$$\underline{F}^e = \left\langle \begin{matrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ \vdots \end{matrix} \right\rangle \quad (3.9)$$

Cada uma das forças \underline{F}_i deve conter o mesmo número de componentes que os deslocamentos nodais correspondentes $\underline{\delta}_i$ e devem ser ordenados nas direções apropriadas. No caso das placas:

$$\underline{F}_i = \left\langle \begin{array}{c} F_{w_i} \\ F_{\theta_{x_i}} \\ F_{\theta_{y_i}} \end{array} \right\rangle \quad (3.10)$$

As cargas distribuídas \underline{p} são definidas como as que agem por unidade de volume dentro do elemento, com direções correspondendo às dos deslocamentos $\underline{\delta}_p$ naquele ponto.

Ao se equacionar a equivalência estática entre as forças nodais e as tensões ao longo das arestas e as forças do carregamento externo, chega-se à equação:

$$\begin{aligned} \underline{F}^e &= \left(\int \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d(\text{vol}) \right) \underline{\sigma}^e - \\ &- \int \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 \, d(\text{vol}) + \int \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 \, d(\text{vol}) - \\ &- \int \underline{N}^T \underline{p} \, d(\text{vol}) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Esta é a equação fundamental do método dos elementos finitos. A matriz de rigidez é:

$$\underline{k}^e = \int \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d(\text{vol}) . \quad (3.12)$$

As forças nodais devidas ao carregamento são:

$$\underline{F}_p^e = \int \underline{N}^T \underline{p} \, d(\text{vol}) . \quad (3.13)$$

As forças nodais devidas às deformações iniciais são:

$$\underline{F}_{\underline{\epsilon}_0}^e = \int \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 d(\text{vol}) \quad (3.14)$$

As forças nodais devidas às tensões iniciais presentes no início do processo de carregamento são:

$$\underline{F}_{\underline{\sigma}_0}^e = \int \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 d(\text{vol}) \quad (3.15)$$

Chega-se à expressão:

$$\underline{F}^e = \underline{k}^e \underline{\delta}^e + \underline{F}_{\underline{\epsilon}_0}^e + \underline{F}_{\underline{\sigma}_0}^e + \underline{F}_p^e \quad (3.16)$$

3.2. Pesquisa das Funções de Forma N

Na equação (3.2), o formato das sub-regiões define a função de w a ser utilizada na determinação dos parâmetros nodais. Na Fig. 3-2a, uma placa está dividida em 8 partes triangulares. Na Fig. 3-2b, a mesma placa é dividida em 12 elementos retangulares.

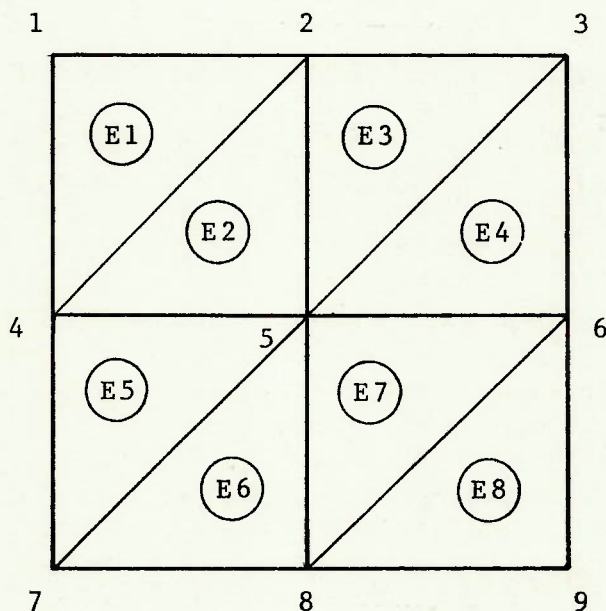


Fig. 3-2a - Elementos Triangulares

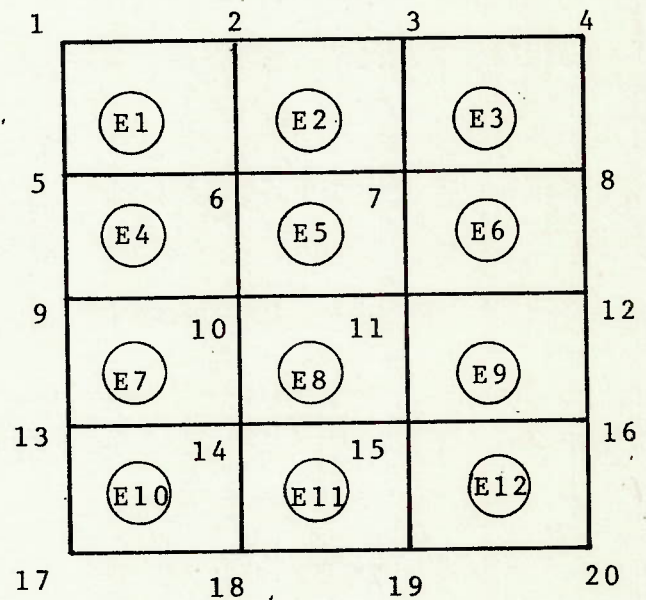


Fig. 3-2b - Elementos Retangulares

As tensões generalizadas ao longo do contorno de um elemento retangular aparecem na Fig. 3-3.

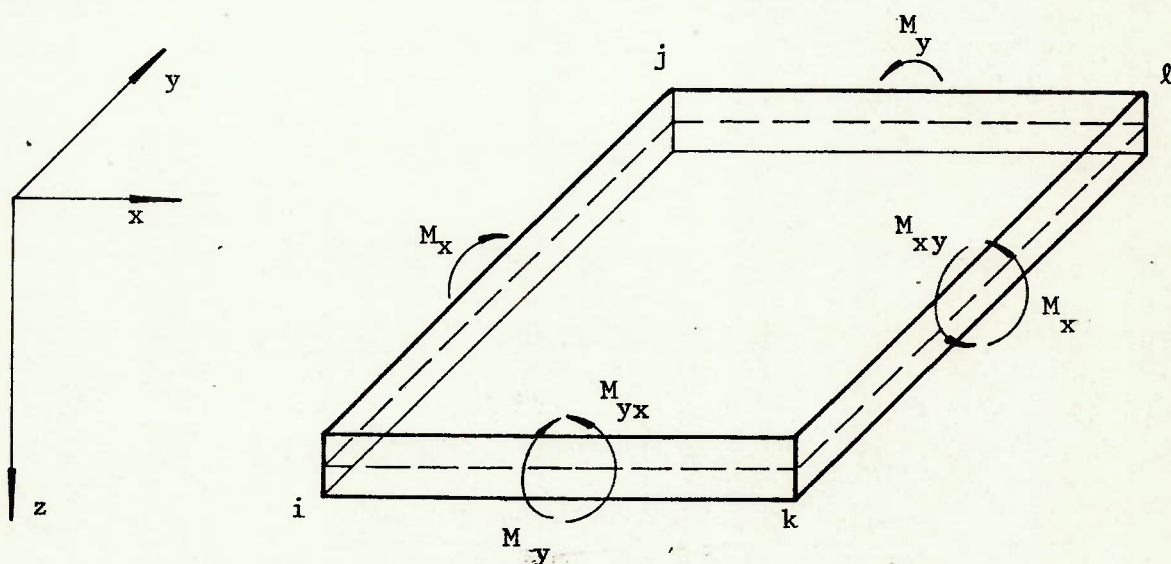


Fig. 3-3 - Tensões Generalizadas em um Elemento Retangular $ijklk$

Dentro de cada elemento, define-se uma função de forma \underline{N} . Sendo w o deslocamento real que ocorre em um ponto de coordenadas (x, y) da placa, e $F(x, y)$, o valor do campo de deslocamentos assumido no mesmo ponto, tem-se:

$$w \approx F(x, y) = \underline{N} \cdot \underline{\delta}^e. \quad (3.17)$$

Os parâmetros nodais $\underline{\delta}^e$ são calculados através da equação (3.17), e as funções de forma \underline{N} são escolhidas criteriosamente para que as seguintes condições sejam respeitadas:

- a função $F(x, y)$ deve representar o deslocamento w dentro do contorno (e sobre ele) que delimita o chamado elemento finito;
- os deslocamentos nodais devem ter o mesmo valor em duas funções $F(x, y)$ e $F'(x, y)$ para i e j , nós do contorno

comum entre dois elementos vizinhos (Fig. 3-4). Os valores nesses pontos são, respectivamente:

$$F(x_i, y_i) = F'(x_i, y_i)$$

e

$$F(x_j, y_j) = F'(x_j, y_j) .$$

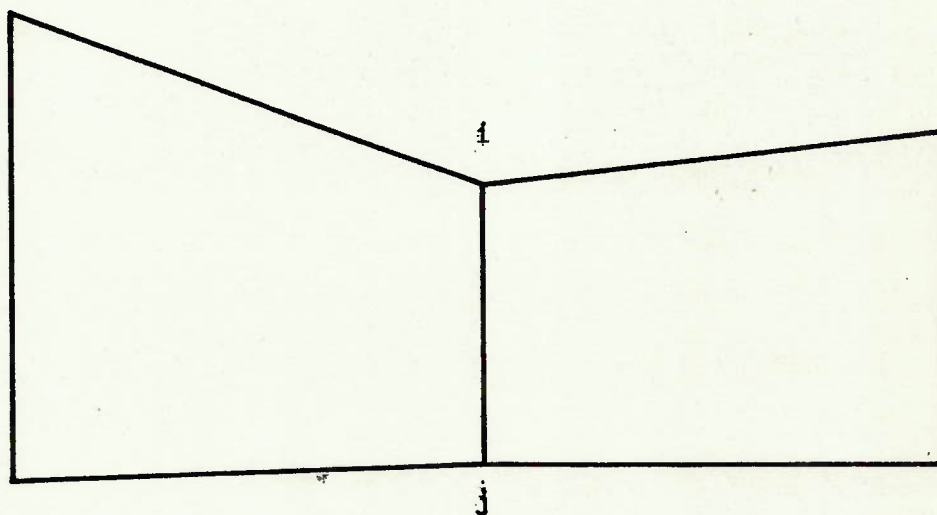


Fig. 3-4 - Elementos Vizinhos com Nós Comuns i e j

- c. a função \underline{N} deve respeitar a continuidade ao longo da aresta i j. Essa continuidade refere-se não só ao deslocamento w , mas também à derivada normal à aresta $\partial w / \partial n$. Esta exigência física não é fácil de ser cumprida, como será verificado mais adiante. Os elementos que obedecem a ela são chamados *elementos conformes*;
- d. a função de forma \underline{N} pode ser separada na expressão

$$\underline{N} = (N_i, N_j, N_\ell, \dots)$$

onde i, j, ℓ , ... são os nós do elemento.

É evidente que:

$$\begin{array}{l}
 N_i(x_i, y_i) = 1 \quad e \quad N_i(x_j, y_j) = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad N_i(x_\ell, y_\ell) = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \cdot \cdot \\
 e \quad \quad \quad N_j(x_j, y_j) = 1 \quad e \quad N_j(x_i, y_i) = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad N_j(x_\ell, y_\ell) = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \cdot \cdot \\
 \text{etc.}
 \end{array} \tag{3.18}$$

3.3. Escolha da Função $F(x, y)$

A seleção da função mais adequada de $F(x, y)$ para um dado formato de elemento finito opta entre dois processos:

- 1º Escolhe-se adequadamente $F(x, y)$ e, através de manipulações algébricas, expressa-se o seu valor em função das coordenadas dos nós, através de \underline{N} , e dos deslocamentos nodais, através de $\underline{\delta}$:

$$F(x, y) = \underline{N} \underline{\delta}^e .$$

- 2º Escolhem-se adequadamente \underline{N}_i , \underline{N}_j , \underline{N}_ℓ , ..., etc. Este caminho tem a vantagem de se adaptar facilmente a um crescimento no número de deslocamentos nodais, garantindo que o elemento seja conforme, já que \underline{N} acabará dependente dos deslocamentos nodais, respeitando automaticamente a condição \underline{c} (pág. 3.7).

3.4. Condições de Convergência

A equação geral do método dos elementos finitos pode ser deduzida através de uma formulação de energia de deformação mínima. Matematicamente, isto representa a minimização de um funcional π . Ao se passar de uma situação de infinitos graus de liberdade da estrutura para uma quantidade finita de graus, associados aos pontos que formam a malha de elementos finitos, o mínimo verdadeiro não será mais atingido, independentemente do refinamento de

subdivisão. Contudo é necessário pelo menos que se garanta a convergência dos valores encontrados para o valor exato. Para isso, impõem-se certas *condições de convergência*.

3.4.1. 1a. Condição de Convergência

A função $F(x, y)$ de deslocamentos deve ser tal que, se um elemento for sujeito a um deslocamento de corpo rígido, não surgirão tensões.

Expressa de uma forma mais geral, esta condição exige que as equações relacionando força e deslocamento, derivadas com base na função $F(x, y)$, apresentem energia de deformação nula quando o elemento é sujeito a um movimento de corpo rígido.

Esta condição é, às vezes, conscientemente violada, quando a representação de movimento de corpo rígido exige expressões e procedimentos extremamente complicados na formulação das equações força-deslocamento do elemento. Isto ocorre, por exemplo, nas formulações em coordenadas curvilíneas, onde esta condição é abandonada para permitir o uso de uma expressão simplificada. Há evidência numérica de que a convergência não é impedida, mas apenas atrasada.

3.4.2. 2a. Condição de Convergência

A função $F(x, y)$ deve ser tal que, se os deslocamentos nodais forem compatíveis com uma situação de deformação constante, será possível obter essa constância.

À medida que a malha for sendo refinada, o estado de deformação dentro de um elemento particularizado deverá aproximar-se de um valor constante. A exclusão desta condição resulta em convergência para uma solução incorreta e, em certos casos, o erro é significativo.

No passado, já ocorreu como desejável construir um campo de deslocamentos que exclua um estado específico de deformação constante; em outros casos, certos estados foram excluídos acidentalmente. Um exemplo de formulação errada é dado no Capítulo 5.

O enunciado da 1a. condição pode ser considerado como uma particularização do segundo, com todas as deformações com valor constante nulo.

3.4.3. 3a. Condição de Convergência

A função $F(x, y)$ escolhida deve possuir continuidade, do tipo exigido pela formulação do variacional π , dentro do elemento e através do contorno dos elementos.

Essa função $F(x, y)$ deve ser diferenciável até a mais alta ordem de derivada que apareça no funcional variacional π , ou então a contribuição de tal derivada para a avaliação do funcional desaparece ou fica comprometida.

Derivadas de ordem n exigem termos de ordem no mínimo n presentes na representação por séries de polinômio. Certamente não é difícil escolher uma função que satisfaça este aspecto da condição no interior do elemento. Através do contorno, a satisfação desta condição é chamada de conformidade ou situação de continuidade interelemental.

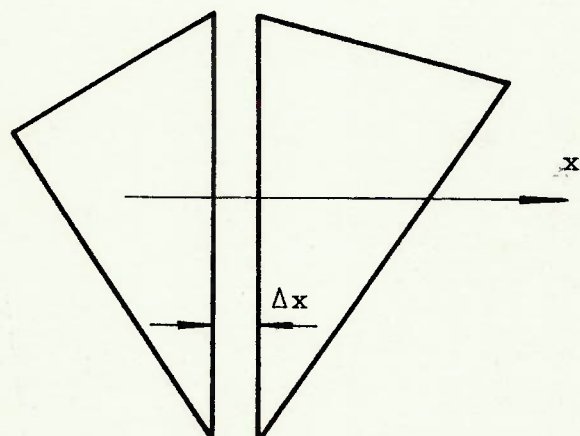
Um elemento que possua formulação de campo de deslocamentos obedecendo a esta condição é denominado elemento conforme.

Em particular, a continuidade de todas as derivadas até uma ordem a menos que a ordem máxima aparecendo no funcional é obrigatória. Isto pode ser explicado facilmente imaginando-se que dois elementos contíguos sejam separados por uma camada extremamente fina, que deve ser incluída nas integrais definindo o funcional π e na qual ocorre uma transição suave da função incôgnita entre valores encontrados nesses elementos adjacentes. Se, no limite, a sua contribuição tender a zero à medida que a sua largura tender a zero, então a condição será satisfeita.

Na Fig. 3-5, mostra-se uma zona imaginária de transição entre dois elementos. Assumindo-se que a função escalar $F(x, y)$ é definida de forma a se obterem valores idênticos em pontos comuns aos dois elementos, a Fig. 3-5a mostra um desenvolvimento possível da transição, na qual as inclinações em cada lado do contorno são diferentes e no interior da zona

de transição assumem valores indeterminados, porém finitos.

O gráfico da segunda derivada mostra que ela assume valores muito grandes na transição e que tende para infinito à medida que a largura diminui. Assim, se na formulação de um funcional π esta função $F(x, y)$ ocorre na 2ª. derivada, surge uma indeterminação (um produto de uma quantidade infinita por uma área nula) e esta condição de convergência não está satisfeita. Percebe-se, inclusive, que mesmo que não ocorra a continuidade interelemental até a ordem n das derivadas envolvidas no funcional, mas que os valores de transição sejam finitos, a contribuição da faixa imaginária desaparece à medida que a área tende para zero e a convergência fica garantida da mesma maneira.



Uma zona interelemental mostrando como a função contínua $F(x, y)$ pode tender a infinito na 2ª derivada quando $\Delta x \rightarrow 0$.

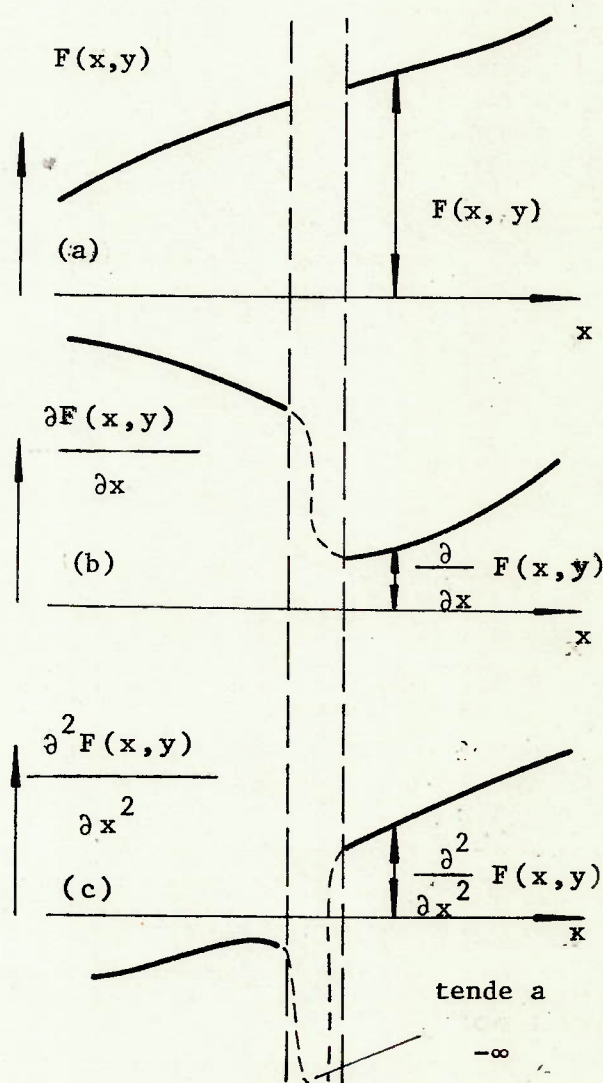


Fig. 3-5 - Zona Interelemental e Função $F(x, y)$

A satisfação da terceira condição tem motivado algumas das maiores dificuldades na construção das funções de comportamento na análise por elementos finitos. Existem procedimentos organizados para a realização deste objetivo com elementos simples.

4. OS ELEMENTOS RETANGULARES

O elemento de placa mais simples é o de formato retangular. Este capítulo trata da formulação por série polinomial, desenvolvida por Melosh, e da formulação por funções de forma, desenvolvida por Bogner.

4.1. O Elemento Retangular de Melosh

Seja uma placa retangular de lados $2a$ e $2b$, com um sistema cartesiano local x, y , de acordo com a Fig. 4-1. Os deslocamentos nodais são mostrados na Fig. 4-2 e as forças nodais, na Fig. 4-3.

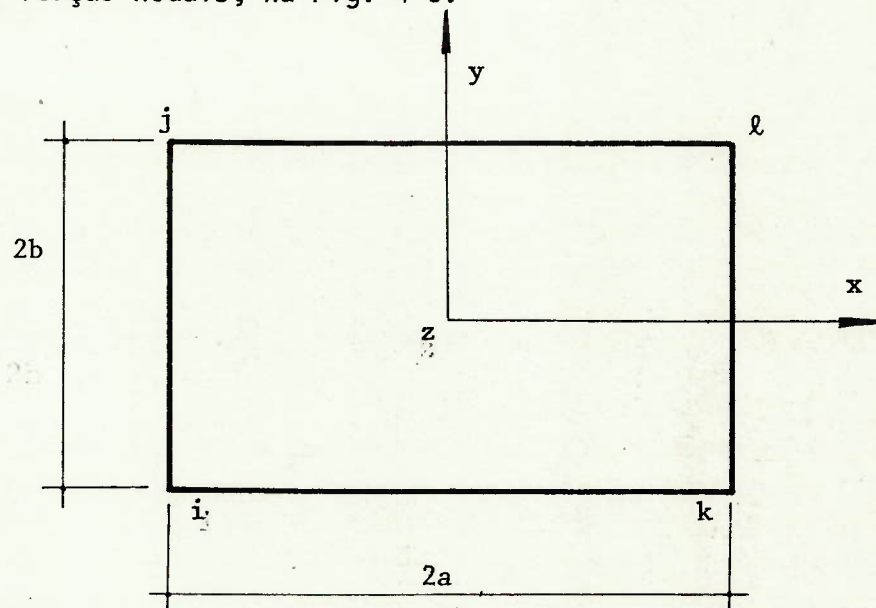


Fig. 4-1 - Placa Retangular de Lados $2a$ e $2b$

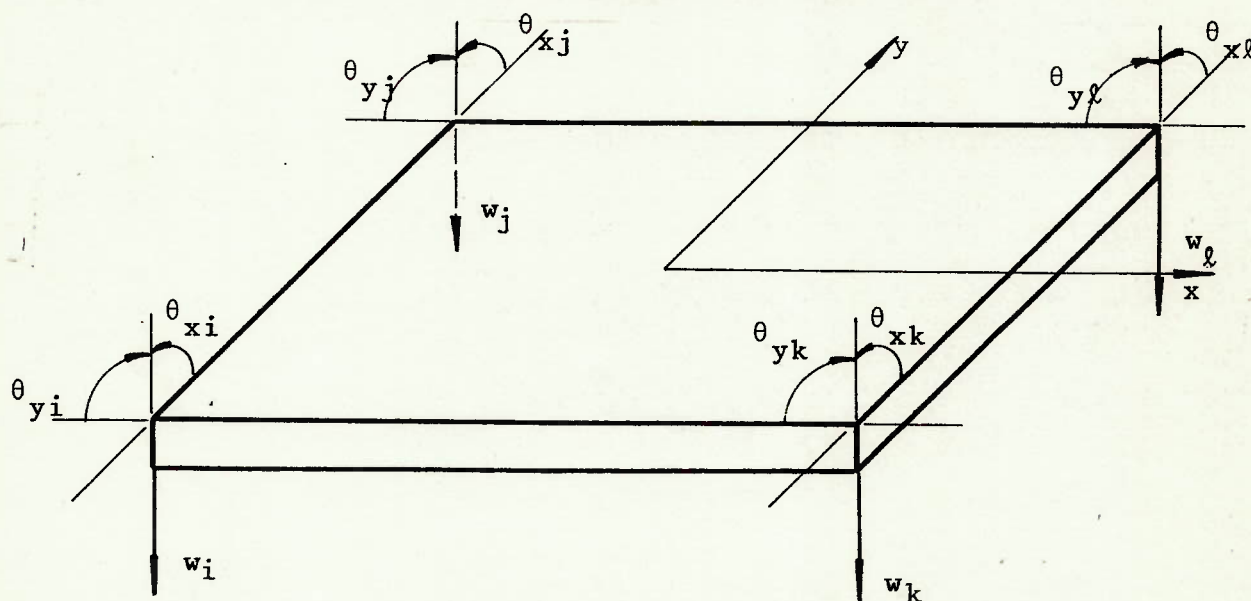


Fig. 4-2 - Deslocamentos Nodais no Elemento Retangular

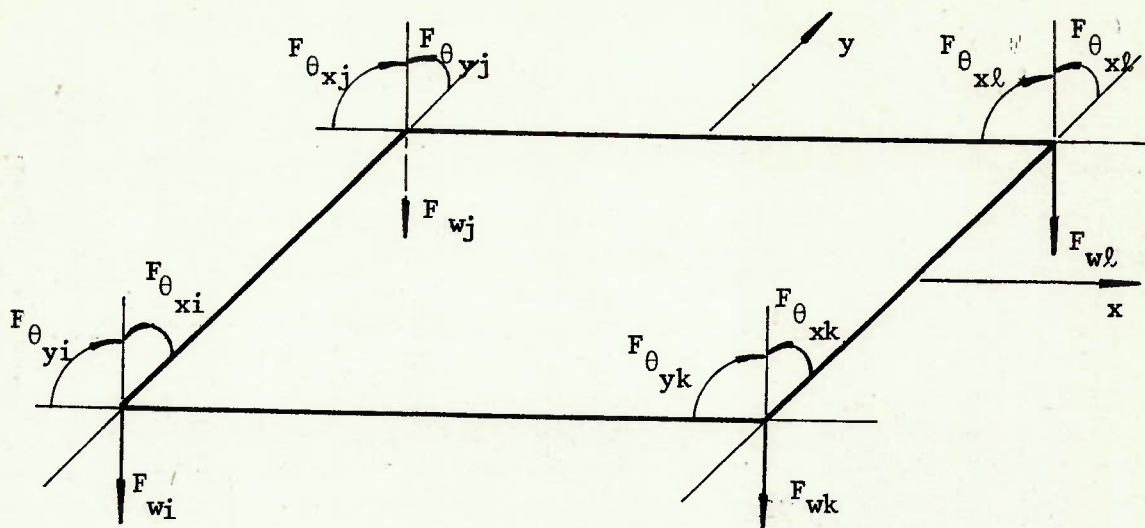


Fig. 4-3 - Forças Nodais no Elemento Retangular

A matriz de deslocamentos nodais $\bar{\delta}$ é:

$$\bar{\delta}^e = \left\langle \begin{matrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_l \\ \delta_k \end{matrix} \right\rangle \quad \text{com} \quad \bar{\delta}_i = \left\langle \begin{matrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{matrix} \right\rangle, \text{ etc.}$$

As forças nodais correspondentes são:

$$\bar{F} = \left\langle \begin{matrix} F_i \\ F_j \\ F_l \\ F_k \end{matrix} \right\rangle \quad \text{com} \quad \bar{F}_i = \left\langle \begin{matrix} F_{w_i} \\ F_{\theta_{xi}} \\ F_{\theta_{yi}} \end{matrix} \right\rangle, \text{ etc.}$$

Para garantir a continuidade interelemental de w e de suas duas derivadas $\partial w / \partial x$ e $\partial w / \partial y$, é necessário que essas grandezas sejam unicamente definidas ao longo da aresta comum.

Considere-se, na Fig. 4-4, o lado 1-2 de um elemento retangular.

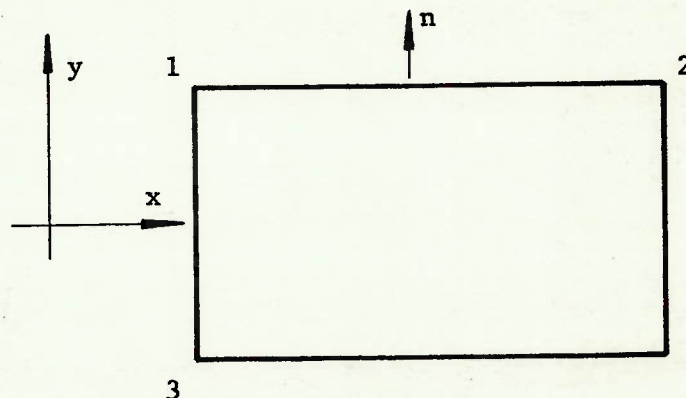


Fig. 4-4 - Exigência de Continuidade ao Longo da Aresta 1-2

Deseja-se que os valores de w , $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial x$ sejam unicamente definidos ao longo de 1-2, determinados exclusivamente pelos seus valores nos pontos 1 e 2. Como y é constante ao longo desta aresta, w varia apenas com x e pode ser definido pelos valores w_1 , $(\partial w/\partial x)_1$, w_2 e $(\partial w/\partial x)_2$, que são os valores de w e de $\partial w/\partial x$ nos pontos 1 e 2, respectivamente. Pode-se, portanto, assumir uma variação cúbica de w ao longo de x . De maneira similar, $\partial w/\partial y$ tem uma variação linear, a ser definida pelos dois valores $(\partial w/\partial y)_1$ e $(\partial w/\partial y)_2$. Analogamente, o mesmo raciocínio pode ser seguido em relação à aresta 1-3.

Assim, tem-se:

$\frac{\partial w}{\partial y}$ depende somente de parâmetros ao longo de 1-2,
 e $\frac{\partial w}{\partial x}$ depende somente de parâmetros ao longo de 1-3.

Diferenciando-se a primeira em relação a x , tem-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \text{ que depende somente de parâmetros ao longo de 1-2.}$$

Similarmente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \text{ que depende somente de parâmetros ao longo de 1-3.}$$

No ponto 1, surge uma inconsistência, já que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \text{ para valores nodais arbitrários em 2 e 3.}$$

Conclui-se que a conformidade em elementos retangulares de placa não pode ser atingida utilizando-se como parâmetros nodais exclusivamente w e suas primeiras derivadas, para a determinação de campos polinomiais simples.

Evidentemente, pode-se contornar esta dificuldade definindo-se a derivada mista como parâmetro nodal. No caso de placas retangulares, esta tática funciona, como será visto no estudo do elemento de Bogner. Já em situações em que várias arestas chegam ao nó em diversos ângulos, a especificação de $\partial w / \partial x \partial y$ implica na especificação também de $\partial^2 w / \partial x^2$ e $\partial^2 w / \partial y^2$. Isto, contudo, no caso de placas não-homogêneas, implica na geração de discontinuidades de momentos normais à aresta, já que, no caso,

$$M_n = - D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right)_1 = - D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right)_2$$

de acordo com a Fig. 4-5.

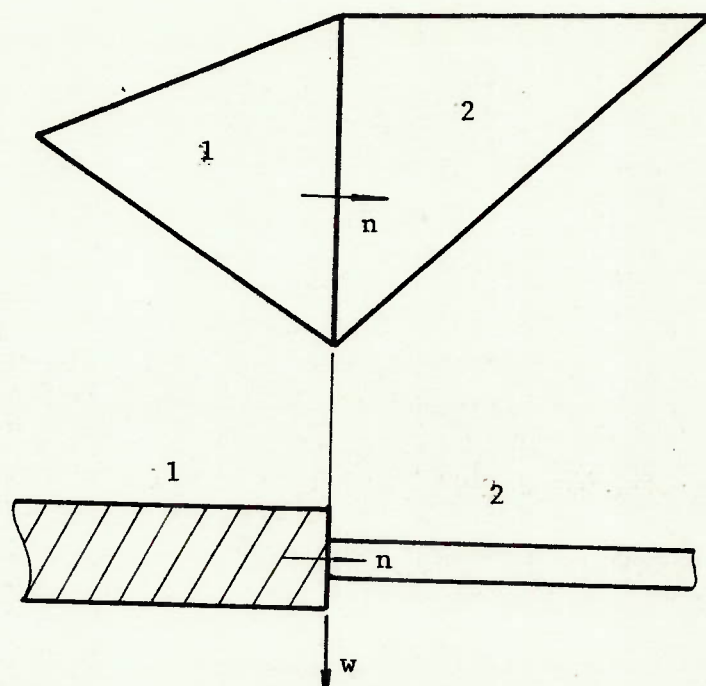


Fig. 4-5 - Placa Não-Homogênea

Essas dificuldades levaram a diversas tentativas de ignorar a exigência de continuidade completa da inclinação, mantendo-a nos nós e supondo que, no limite, com o aumento de número de nós, a convergência do valor do funcional ainda ocorra. Assim, o elemento é não-conforme, mas a sua simplicidade e uso prático justificam o seu estudo.

Tem-se, no total, 12 graus de liberdade. A formulação de Melosh usa, para campo de deslocamento, uma função polinomial com 12 parâmetros, completa até o 3º grau, e com dois termos do 4º grau, a serem escolhidos convenientemente.

Está é a função completa do 4º grau:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \\
 & + \alpha_2 X \qquad + \alpha_3 Y \\
 & + \alpha_4 X^2 \qquad + \alpha_5 XY \qquad + \alpha_6 Y^2 \\
 & + \alpha_7 X^3 \qquad + \alpha_8 X^2 Y \qquad + \alpha_9 XY^2 \qquad + \alpha_{10} Y^3 \\
 & + \alpha_{11} X^4 \qquad + \alpha_{12} X^3 Y \qquad + \alpha_{13} X^2 Y^2 \qquad + \alpha_{14} XY^3 \qquad + \alpha_{15} Y^4
 \end{aligned}$$

Entre os termos do 4º grau, dois devem ser escolhidos. O termo $\alpha_{13} X^2 Y^2$ obviamente não pode ser usado, por não estar logicamente emparelhado com nenhum outro. Isto provocaria uma assimetria interna na função, o que é inaceitável, pois o comportamento do campo seria anisotrópico. Restam dois pares: os termos $\alpha_{11} X^4$ e $\alpha_{15} Y^4$ ou os termos $\alpha_{12} X^3 Y$ e $\alpha_{14} XY^3$.

Usando-se os termos $\alpha_{11} X^4$ e $\alpha_{15} Y^4$, tem-se, ao longo da aresta 1-2 (Fig. 4-6):

$$\begin{aligned}
 w &= \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_4 X^2 + \alpha_7 X^3 + \alpha_{11} X^4 \\
 \frac{\partial w}{\partial X} &= \alpha_2 + 2\alpha_4 X + 3\alpha_7 X^2 + 4\alpha_{11} X^3 \\
 \frac{\partial w}{\partial Y} &= \alpha_3 + \alpha_5 X + \alpha_8 X^2 + \alpha_{12} X^3 \quad . \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

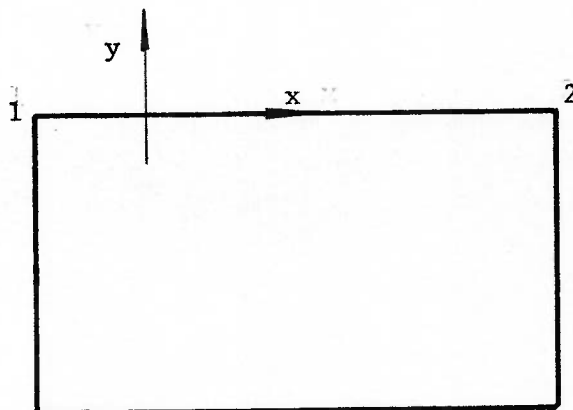


Fig. 4-6 - Disposição Especial dos Eixos para as Equações (4.1)

Nas extremidades de 1-2 têm-se seis graus de liberdade: w_1 , θ_{x1} , θ_{y1} , w_2 , θ_{x2} e θ_{y2} . De acordo com o exposto, deve-se ter continuidade interelemental de w e $\partial w/\partial y$ ao longo de 1-2, e de $\partial w/\partial x$ nos pontos 1 e 2. Existem cinco parâmetros a serem determinados para w e $\partial w/\partial x$ (α_1 , α_2 , α_4 , α_7 e α_{11}), e apenas quatro equações (as que surgem nos pontos 1 e 2, com a substituição de w por w_1 e w_2 e de $\partial w/\partial x$ por θ_{y1} e θ_{y2}). O problema é indeterminado. Algo semelhante ocorre com os quatro parâmetros α_3 , α_5 , α_8 e α_{12} de $\partial w/\partial y$, a serem determinados a partir dos dois valores - θ_{x1} e - θ_{x2} . Como as três funções não conseguem satisfazer a condição de continuidade entre elementos vizinhos, os resultados obtidos não convergem e esta solução não é útil.

Usando-se os termos $\alpha_{12}x^3y$ e $\alpha_{14}xy^3$, seguindo o mesmo raciocínio da Fig.4-6, vem:

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_4 X^2 + \alpha_7 X^3$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \alpha_2 + 2\alpha_4 X + 3\alpha_7 X^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 X + \alpha_8 X^2 + \alpha_{12} X^3.$$

As funções W e $\partial W/\partial X$ ficam unicamente determinadas por w_1 , w_2 , θ_{y1} e θ_{y2} , e a condição de continuidade interelemental é satisfeita. A função $\partial W/\partial y$, com quatro parâmetros e dois graus de liberdade disponíveis para a sua determinação (a saber, θ_{x1} e θ_{x2}), não fica determinada, mas é possível, de qualquer forma, garantir a continuidade nos nós. Esta opção é melhor que a anterior, e existem provas de que a convergência é assegurada com o refinamento da malha.

Renumerando-se os coeficientes, chega-se à função polinomial:

$$\begin{aligned} W = & \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 X^3 + \\ & + \alpha_8 X^2 Y + \alpha_9 XY^2 + \alpha_{10} Y^3 + \alpha_{11} X^3 Y + \alpha_{12} XY^3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

É importante verificar a satisfação das condições de convergência.

Fazendo-se $\alpha_4 = \alpha_5 = \dots = \alpha_{12} = 0$, resta:

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y.$$

Esta é a equação de um movimento de corpo rígido. As deformações resultantes são:

$$\underline{\epsilon} = \left\langle \begin{array}{c} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 W}{\partial X \partial y} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\rangle$$

As tensões resultantes são, portanto, nulas, e este movimento não gera energia de deformação. A 1a. condição está satisfeita para a função polinomial considerada.

Deve-se verificar a possibilidade de representação de estados de deformação constante, para atender à 2a. condição de convergência. De fato, com $\alpha_i = 0$ para $i \neq 4$, tem-se:

$$W = \alpha_4 x^2.$$

Neste caso,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 2\alpha_4 \quad ; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Isto representa uma deformação constante, cilíndrica, em torno do eixo y (Fig. 4-7).

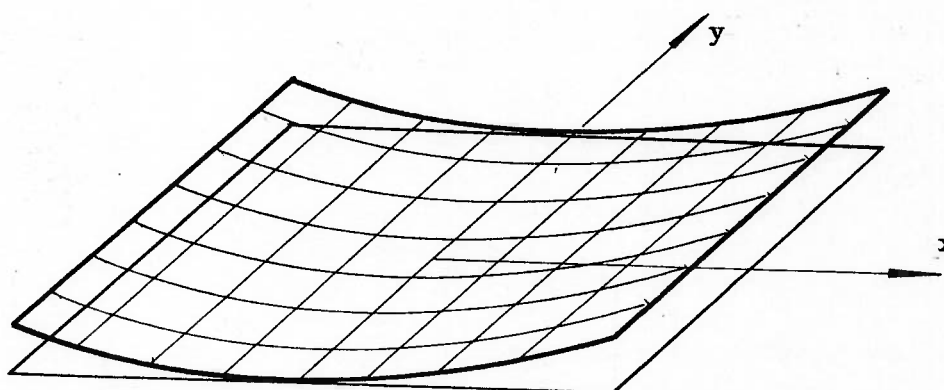


Fig. 4-7 - Deformação Cilíndrica em Torno do Eixo y

Analogamente, com $\alpha_i = 0$ para $i \neq 6$, tem-se:

$$w = \alpha_6 y^2 ,$$

Neste caso,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\alpha_6 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Isto constitui a equação de um estado de deformação constante em torno do eixo x (Fig. 4-8).

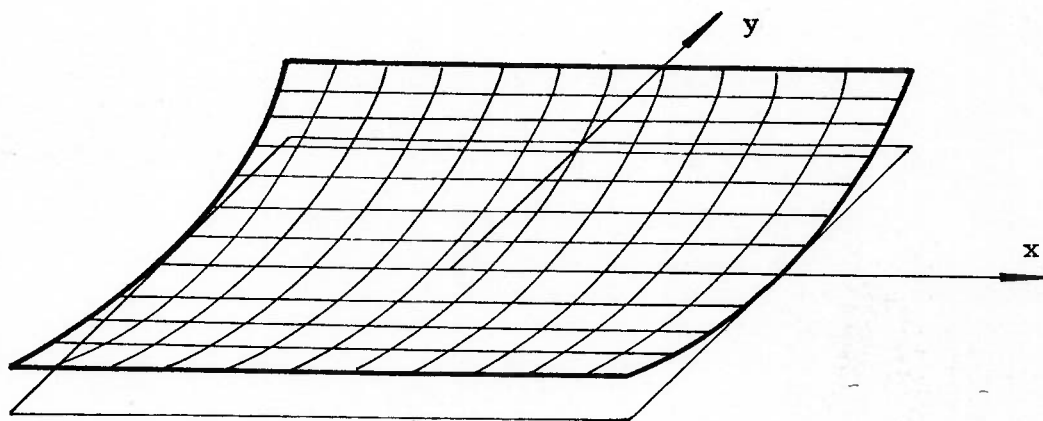


Fig. 4-8 - Deformação Cilíndrica em Torno do Eixo x

Ainda, com $\alpha_i = 0$ para $i \neq 5$, tem-se:

$$w = \alpha_5 xy ,$$

Neste caso,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_5 .$$

A equação restante representa uma deformação mista constante (Fig. 4-9).

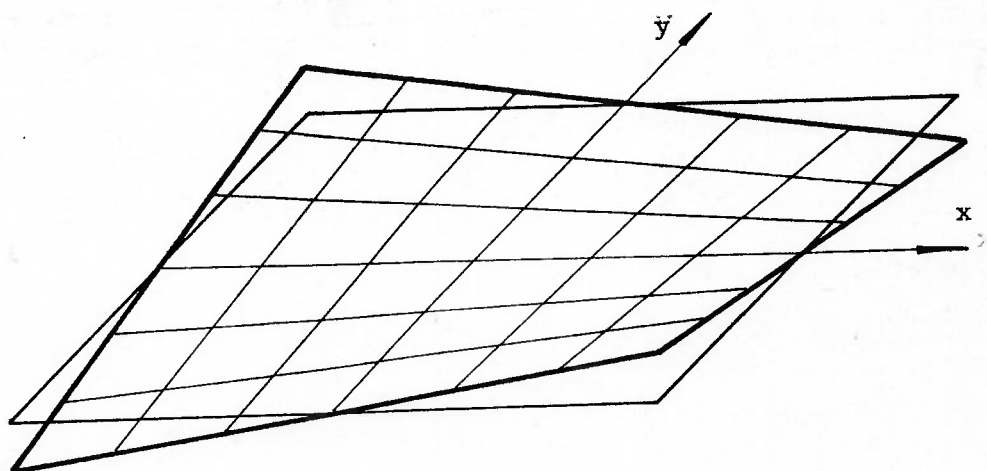


Fig. 4-9 - Deformação Mista em uma Placa

Portanto, já que os estados de deformação constante podem ser representados, a 2a. condição de convergência também é satisfeita.

A 3a. condição de convergência exige, no caso particular do elemento de placa, que a função w seja contínua entre dois elementos vizinhos. Além disso, as primeiras derivadas $\partial w / \partial t$ e $\partial w / \partial n$ também devem ser contínuas. Como na expressão do funcional surgem derivadas de ordem 2, elas também devem ser finitas na aresta comum. Como já se viu, esta condição não é integralmente satisfeita, já que existe descontinuidade na derivada normal, exceto nos pontos nodais, onde a continuidade é assegurada. Logo, surgem indeterminações na segunda derivada normal na faixa de transição de um elemento para outro (Fig. 3-5). Entretanto testes numéricos demonstram que, mesmo não satisfazendo esta condição de convergência, o elemento de placa retangular de formulação polinomial para o campo de deslocamentos aparenta atingir convergência para todos os fins práticos.

É interessante notar que esta formulação apresenta outra propriedade: ela satisfaz a equação diferencial de 4a. ordem (2.5) nas regiões descarregadas da placa, já que:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 .$$

Os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$ são determinados montando-se as 12 equações lineares simultâneas ligando os valores de w e suas primeiras derivadas nos pontos i, j, k e ℓ aos valores de suas coordenadas. Tem-se:

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \dots$$

$$- \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i = \theta_{xi} = -\alpha_3 - \alpha_5 x_i - 2\alpha_6 y_i + \dots$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = \theta_{yi} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x_i + \dots$$

etc.

Colocando-se em forma matricial:

$$\underline{\delta^e} = \underline{C} \underline{\alpha} \quad (4.3)$$

onde \underline{C} é uma matriz 12×12 que depende das coordenadas nodais, e $\{\alpha\}$ é um vetor de 12 constantes a serem determinadas. Utilizando-se um sistema local (x, y, z) numa placa de dimensões $2a$ e $2b$ (Fig. 4-1), vem:

$$\begin{array}{ll} x_i = -a & y_i = -b \\ x_j = -a & y_j = b \\ x_\ell = a & y_\ell = b \\ x_k = a & y_k = -b \end{array}$$

$$\underline{\alpha} = \underline{C}^{-1} \underline{\delta^e} \quad (4.4)$$

A matriz \underline{C} resultante está descrita na Tabela 4-1. Ela nunca é singular e sua inversa sempre existe. Essa inversão pode ser executada algebricamente ou então numericamente, substituindo-se os valores reais de a e b , resolvendo-se o sistema de 12 equações simultâneas e chegando-se diretamente ao vetor $\underline{\alpha}$. A matriz \underline{C}^{-1} , para o elemento de placa da Fig. 4-1, está descrita na Tabela 4-2.

1	-a	-b	a ²	ab	b ²	-a ³	-a ² b	-ab ²	-b ³	a ³ b	ab ³
0	0	-1	0	a	2b	0	-a ²	-2ab	-3b ²	a ³	3ab ²
0	1	0	-2a	-b	0	3a ²	2ab	b ²	0	-3a ² b	-b ³
1	-a	b	a ²	-ab	b ²	-a ³	a ² b	-ab ²	b ³	-a ³ b	-ab ³
0	0	-1	0	a	-2b	0	-a ²	2ab	-3b ²	a ³	3ab ²
0	1	0	-2a	b	0	3a ²	-2ab	b ²	0	3a ² b	b ³
1	a	b	a ²	ab	b ²	a ³	a ² b	ab ²	b ³	a ³ b	ab ³
0	0	-1	0	-a	-2b	0	-a ²	-2ab	-3b ²	-a ³	3ab ²
0	1	0	2a	b	0	3a ²	2ab	b ²	0	3a ² b	b ³
1	a	-b	a ²	-ab	b ²	a ³	-a ² b	ab ²	-b ³	-a ³ b	-ab ³
0	0	-1	0	-a	2b	0	-a ²	2ab	-3b ²	-a ³	-3ab ²
0	1	0	2a	-b	0	3a ²	-2ab	b ²	0	-3a ² b	-b ³

Tabela 4-1 - Matriz C 12 x 12

$\frac{1}{4}$	$\frac{-b}{8}$	$\frac{a}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{a}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-a}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-b}{8}$	$\frac{-a}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-a}{8}$	$\frac{-b}{8}$	$\frac{-a}{8}$
$\frac{-3}{8a}$	$\frac{b}{8a}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{8a}$	$-\frac{b}{8a}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8a}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8a}$	$-\frac{b}{8a}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8a}$	$-\frac{b}{8a}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$\frac{-3}{8b}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{a}{8b}$	$\frac{3}{8b}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{a}{8b}$	$\frac{3}{8b}$	$-\frac{a}{8b}$	$\frac{3}{8b}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{a}{8b}$	$\frac{-3}{8b}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{a}{8b}$	$\frac{a}{8b}$
0	0	$-\frac{1}{8a}$	0	0	$-\frac{1}{8a}$	0	$\frac{1}{8a}$	0	0	$\frac{1}{8a}$	0	0	0	$\frac{1}{8a}$
$\frac{1}{2ab}$	$-\frac{1}{8a}$	$\frac{1}{8b}$	$-\frac{1}{2ab}$	$-\frac{1}{8a}$	$-\frac{1}{8b}$	$\frac{1}{2ab}$	$-\frac{1}{8b}$	$\frac{1}{2ab}$	$-\frac{1}{8a}$	$-\frac{1}{8b}$	$-\frac{1}{2ab}$	$\frac{1}{8a}$	$\frac{1}{8a}$	$\frac{1}{8b}$
0	$\frac{1}{8b}$	0	0	$-\frac{1}{8b}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{8b}$	0	0	$\frac{1}{8b}$	$\frac{1}{8b}$	0
$\frac{1}{8a^3}$	0	$\frac{1}{8a^2}$	$\frac{1}{8a^3}$	0	$\frac{1}{8a^2}$	$-\frac{1}{8a^3}$	$\frac{1}{8a^2}$	$-\frac{1}{8a^3}$	0	$\frac{1}{8a^2}$	$-\frac{1}{8a^3}$	$\frac{1}{8a^2}$	0	$\frac{1}{8a^2}$
0	0	$\frac{1}{8ab}$	0	0	$-\frac{1}{8ab}$	0	$\frac{1}{8ab}$	0	0	$\frac{1}{8ab}$	0	$-\frac{1}{8ab}$	0	$-\frac{1}{8ab}$
0	$-\frac{1}{8ab}$	0	0	$\frac{1}{8ab}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{8ab}$	0	0	$\frac{1}{8ab}$	0	0
$\frac{1}{8b^3}$	$-\frac{1}{8b^2}$	0	$-\frac{1}{8b^3}$	$-\frac{1}{8b^2}$	0	$-\frac{1}{8b^3}$	0	$-\frac{1}{8b^3}$	$-\frac{1}{8b^2}$	0	$\frac{1}{8b^3}$	$-\frac{1}{8b^2}$	$-\frac{1}{8b^2}$	0
$-\frac{1}{8a^3b}$	0	$-\frac{1}{8a^2b}$	$-\frac{1}{8a^3b}$	0	$-\frac{1}{8a^2b}$	$-\frac{1}{8a^3b}$	$\frac{1}{8a^2b}$	$-\frac{1}{8a^3b}$	0	$\frac{1}{8a^2b}$	$\frac{1}{8a^3b}$	$\frac{1}{8a^2b}$	0	$-\frac{1}{8a^2b}$
$-\frac{1}{8ab^3}$	$\frac{1}{8ab^2}$	0	$\frac{1}{8ab^3}$	$\frac{1}{8ab^2}$	0	$-\frac{1}{8ab^3}$	0	$-\frac{1}{8ab^3}$	$\frac{1}{8ab^2}$	0	$\frac{1}{8ab^3}$	$-\frac{1}{8ab^2}$	$-\frac{1}{8ab^2}$	0

Tabela 4-2 - Matriz C^{-1} 12 x 12

Conhecendo-se os deslocamentos nodais δ^e , tem-se:

$$\alpha_1 = \frac{w_i}{4} - \frac{b}{8} \theta_{xi} + \frac{a}{8} \theta_{yi} + \frac{w_j}{4} \theta_{xj} + \frac{a}{8} \theta_{yj} + \frac{w_l}{4} + \frac{b}{8} \theta_{xl} -$$

$$- \frac{a}{8} \theta_{yl} + \frac{w_k}{4} - \frac{b}{8} \theta_{xk} - \frac{a}{8} \theta_{yk} \quad (4.5)$$

etc.

Como

$$\underline{w} = \underline{N} \underline{\delta^e} = \underline{P} \underline{C}^{-1} \underline{\delta^e}$$

com

$$\underline{P} = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3) \quad (4.6)$$

tem-se:

$$\underline{N} = \underline{P} \underline{C}^{-1} = (N_i, N_j, N_l, N_k)$$

$$\underline{N}_i = (N_{w_i}, N_{\theta_{xi}}, N_{\theta_{yi}})$$

$$N_{w_i} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8a} x - \frac{3}{8b} y + \frac{1}{2ab} xy + \frac{1}{8a^3} x^3 + \frac{1}{8b^3} y^3 - \frac{1}{8a^3b} x^3y -$$

$$- \frac{1}{8ab^3} xy^3 \quad (4.7)$$

$$N_{\theta_{xi}} = -\frac{b}{8} + \frac{b}{8a} x + \frac{1}{8} y - \frac{1}{8a} xy + \frac{1}{8b} y^2 - \frac{1}{8ab} xy^2 -$$

$$- \frac{1}{8b^2} y^3 + \frac{1}{8ab^2} xy^3 \quad (4.8)$$

$$N_{\theta_{yi}} = \frac{a}{8} - \frac{1}{8} x - \frac{a}{8b} y - \frac{1}{8a} x^2 + \frac{1}{8b} xy + \frac{1}{8a^2} x^3 +$$

$$+ \frac{1}{8ab} x^2y - \frac{1}{8a^2b} x^3y \quad (4.9)$$

A matriz \underline{B} é obtida diretamente da equação (4.1). Tem-se:

$$\underline{\varepsilon} = \left\langle \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} -2\alpha_4 - 6\alpha_7x - 2\alpha_8y - 6\alpha_{11}xy \\ -2\alpha_6 - 2\alpha_9x - 6\alpha_{10}y - 6\alpha_{12}xy \\ 2\alpha_5 + 4\alpha_8x + 4\alpha_9y + 6\alpha_{11}x^2 + 6\alpha_{12}y^2 \end{array} \right\rangle \quad (4.10)$$

Como

$$\underline{\varepsilon} = \underline{Q} \cdot \underline{\alpha} = \underline{Q} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{\delta^e} = \underline{B} \cdot \underline{\delta^e}$$

então

$$\underline{B} = \underline{Q} \cdot \underline{C}^{-1}$$

com

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Conhecendo-se a matriz $\underline{\alpha}$ para um elemento retangular, pode-se calcular, em qualquer ponto (x, y) no seu interior ou contorno:

a. o deslocamento w e as suas inclinações:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (4.12)$$

$$-\theta_x = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \quad (4.13)$$

$$\theta_y = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (4.14)$$

b. os esforços solicitantes por unidade de comprimento:

$$M_x = -2D (\alpha_4 + \nu\alpha_6 + (3\alpha_7 + \nu\alpha_9)x + (\alpha_8 + 3\nu\alpha_{10})y + 3(\alpha_{11} + \nu\alpha_{12})xy) \quad (4.15)$$

$$M_y = -2D (\alpha_6 + \nu\alpha_4 + (\alpha_9 + 3\nu\alpha_7)x + (3\alpha_{10} + \nu\alpha_8)y + 3(\alpha_{12} + \nu\alpha_{11})xy) \quad (4.16)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) (\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y + 3\alpha_{11}x^2 + 3\alpha_{12}y^2) \quad (4.17)$$

$$V_x = - D ((6\alpha_7 + 2\alpha_9) + 6(\alpha_{11} + \alpha_{12})y) \quad (4.18)$$

$$V_y = - D ((6\alpha_{10} + 2\alpha_8) + 6(\alpha_{12} + \alpha_{11})x) . \quad (4.19)$$

As fórmulas (4.12) e (4.19) são práticas para, através de um programa simples de computador, partindo-se dos deslocamentos nodais fornecidos por um processamento em qualquer sistema disponível, avaliar os esforços solicitantes no interior do elemento finito de placa.

A matriz de rigidez \underline{k}^e , relacionando as forças nodais (uma força lateral e dois momentos em cada nó) e os deslocamentos nodais, \bar{e} :

$$\underline{k}^e = \iint \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dx dy \quad (4.20)$$

estendida a toda a área da placa. Mas:

$$\underline{B} = \underline{Q} \underline{C}^{-1} \text{ e } \underline{B}^T = \{ \underline{C}^{-1} \} \underline{Q}^T .$$

Logo:

$$\begin{aligned} \underline{k}^e &= \iint \{ \underline{C}^{-1} \}^T \underline{Q}^T \underline{D} \underline{Q} \underline{C}^{-1} \, dx dy \\ \underline{k}^e &= \{ \underline{C}^{-1} \}^T \left(\iint \underline{Q}^T \underline{D} \underline{Q} \, dx dy \right) \underline{C}^{-1} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

A matriz \underline{k}^e geralmente é calculada numericamente, sendo trabalhosa a obtenção de uma expressão explícita.

Para a verificação da utilidade das fórmulas (4.15) a (4.19), é interessante comparar resultados teóricos com os encontrados alimentando-se essas fórmulas com coeficientes α_i calculados através da equação (4.4), a partir de valores teóricos para $\underline{\delta}^e$.

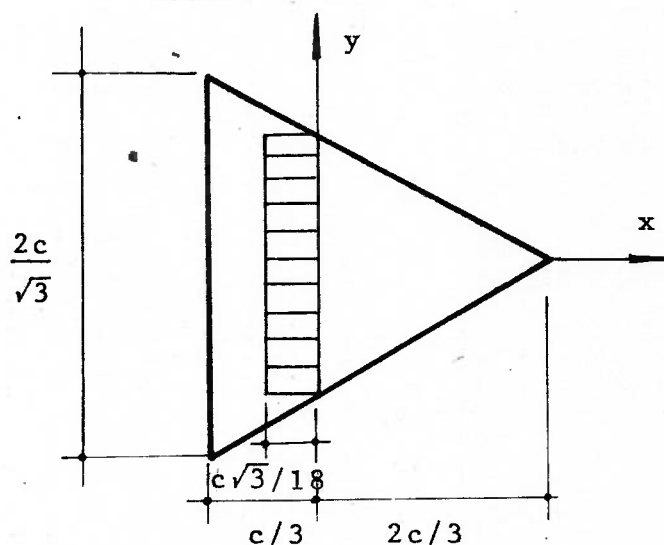


Fig. 4-10 - Triângulo Equilátero Simplesmente Apoiado nas Bordas Sujeito a Carga Uniforme q

Um campo de deslocamentos com formulação relativamente simples é o de um triângulo equilátero com bordas livremente apoiadas e carga distribuída q constante (Fig. 4-10). No Apêndice A, encontra-se um estudo sobre este caso particular. A expressão teórica exata de w é:

$$w = \frac{q}{64cD} \left(x^3 - 3y^2x - c(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} c^3 \right) \left(\frac{4}{9} c^2 - x^2 - y^2 \right) .$$

As expressões teóricas para M_x , M_y , V_x e V_y foram deduzidas, e os valores nos centróides dos elementos retangulares indicados foram comparados com os fornecidos pelas expressões polinomiais. Os valores coincidem com os exatos, a menos de 0,5%. O gráfico comparativo está na Fig. 4-11. De fato, a correspondência dos valores é tal que, para fins comparativos, os valores considerados exatos serão os calculados através do elemento retangular nos exemplos que se seguem.

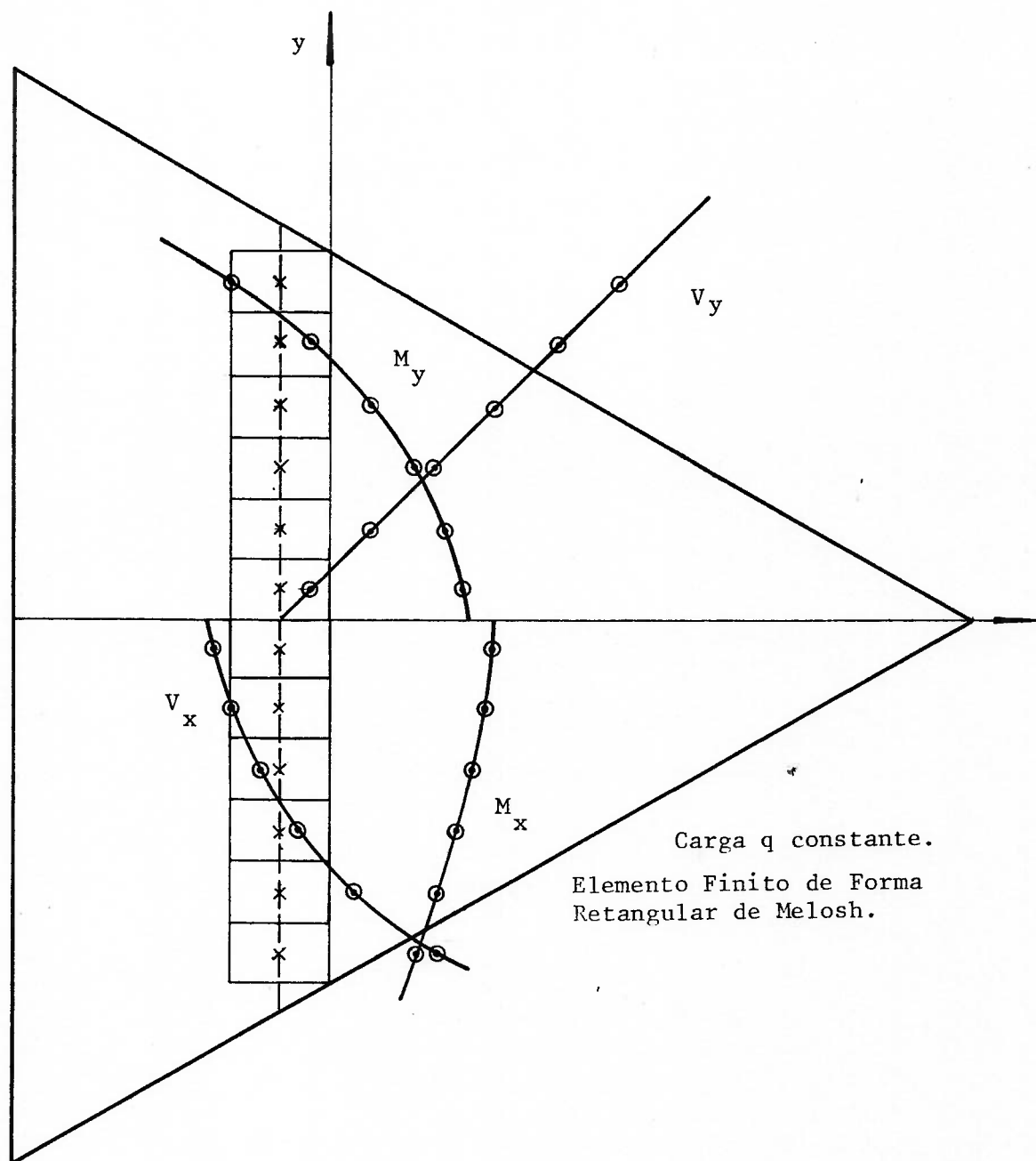
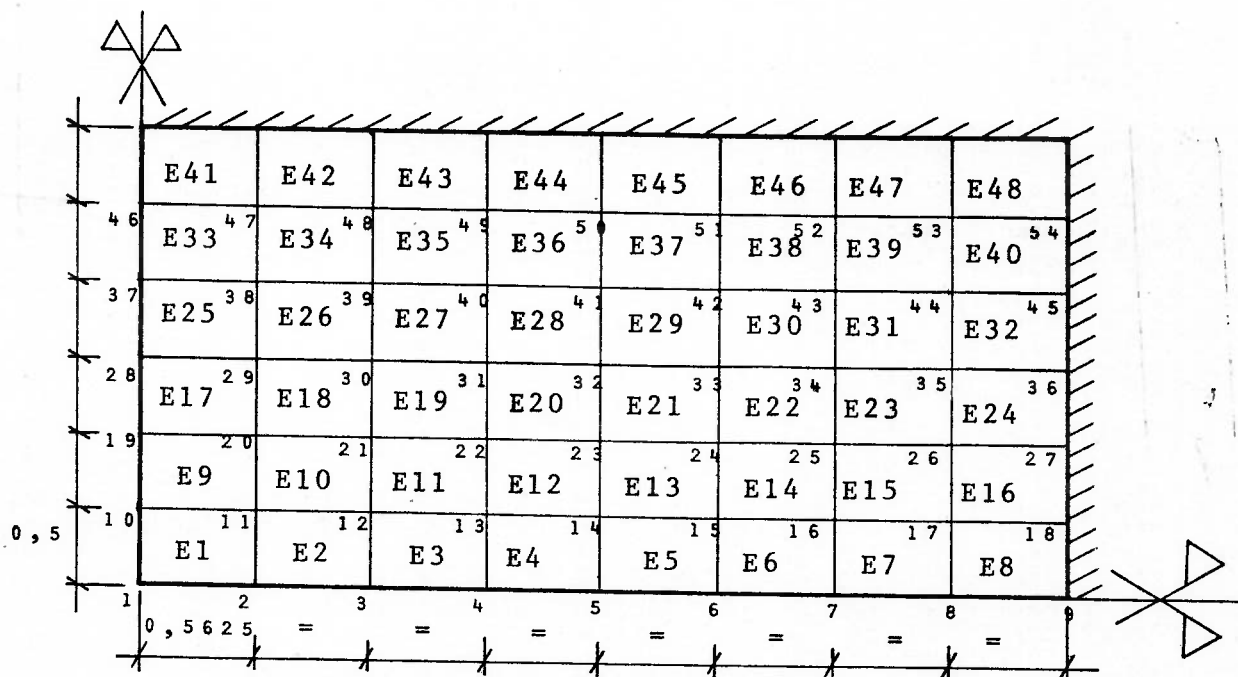


Fig. 4-11 - Placa Triangular Equilátera Apoiada nas Bordas

A placa engastada nas bordas e sujeita a carga q uniforme da Fig. 4-1 foi calculada pelo programa STARDYNE, subdividida de acordo com a Fig. 4-12. Considerou-se um coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 2,1 \cdot 10^6$ tf/m². Aplicou-se uma carga uniforme $q = 1$ tf/m² e engastaram-se as bordas.

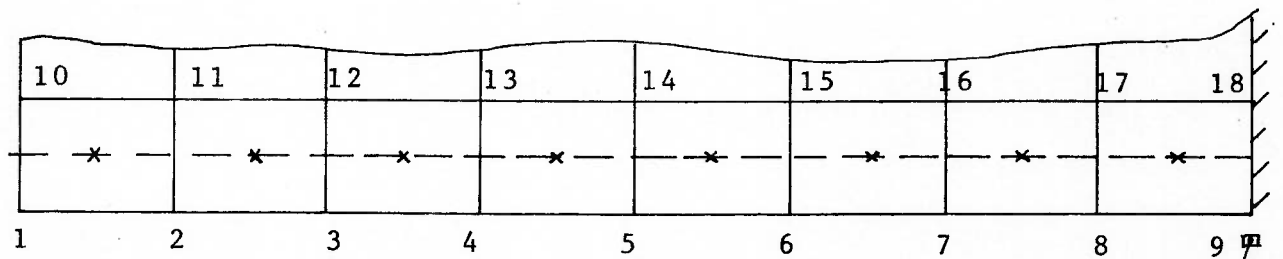


$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ tf/m}^2 \quad \nu = 0,3 \quad q = 1,0 \text{ tf/m}^2 \quad t = 0,08 \text{ m}$$

Fig. 4-12 - Placa de Dimensões 6 x 9 Subdividida em 48 Elementos Retangulares em Cada Quadrante

Os deslocamentos nodais obtidos foram fornecidos ao programa P1 (ver Apêndice II) que calcula os coeficientes $\{\alpha\}$ através da equação (4.3), e os deslocamentos e esforços solicitantes em um ponto qualquer, de acordo com as equações (4.12) a (4.19). O momento fletor M_x nos centróides foi comparado com os momentos fletores fornecidos pelo processamento STARDYNE, para os elementos de números 1 a 8. Os resultados coincidiram até a última casa impressa pelo processamento STARDYNE. Unindo-se os centróides dos elementos considerados com uma reta e calculando-se através do programa P1 o valor M_x para os pontos comuns a dois elementos nessa reta, e comparando-se com os valores obtidos por interpolação, encontra-se um erro não-desprezível, provavelmente motivado pela concentração de trabalho, provocada pela descontinuidade da derivada normal da função polinomial (Fig. 4-13). É interessante notar que a média aritmética dos valores para

cada ponto comum oferece um valor bem mais próximo do obtido por interpolação.



□ -elemento retangular

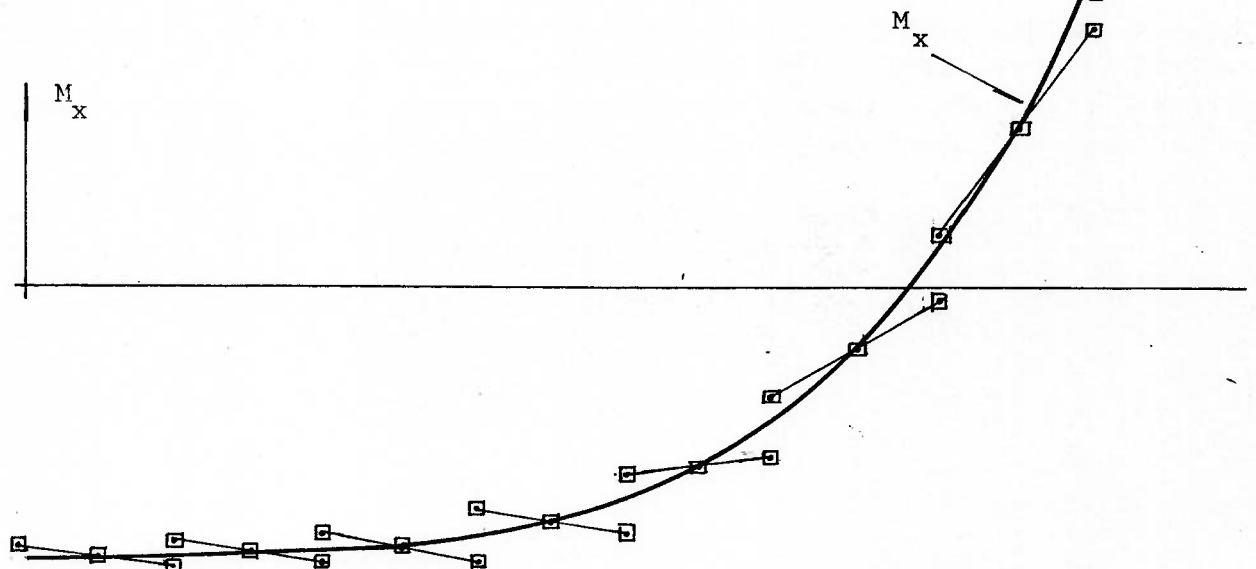


Fig. 4-13 - Diagrama do Momento Fletor M_x para a Placa da Fig. 4-12
 Outro exemplo ilustrativo é o da placa em deformação mista constante, tomando a forma de um parabolóide hiperbólico (Fig. 4-9). Aplicando-se cargas concentradas alternadas nos vértices (Fig. 4-14), o campo de deslocamentos assume a expressão:

$$W = \alpha_5 XY$$

Neste caso:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_5$$

e $M_x = M_y = 0$ e $M_{xy} = D(1 - \nu)\alpha_5$ em toda a placa.

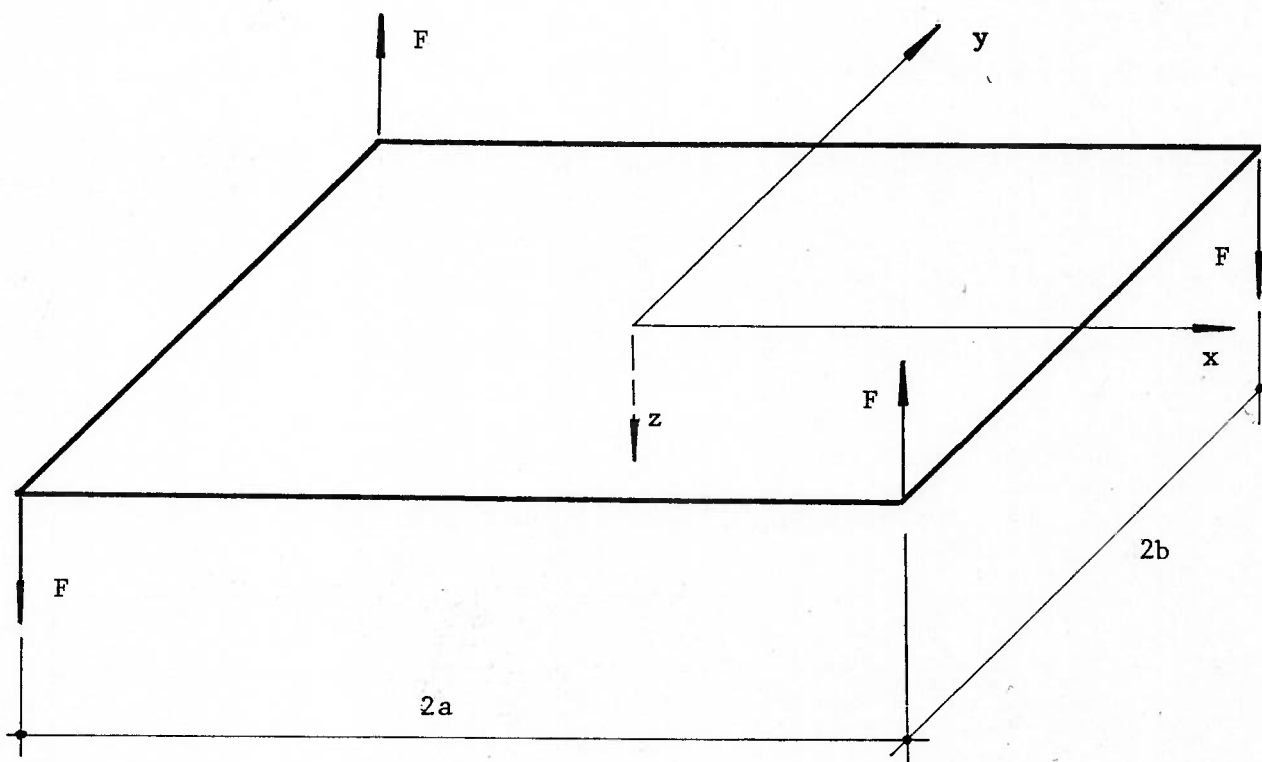
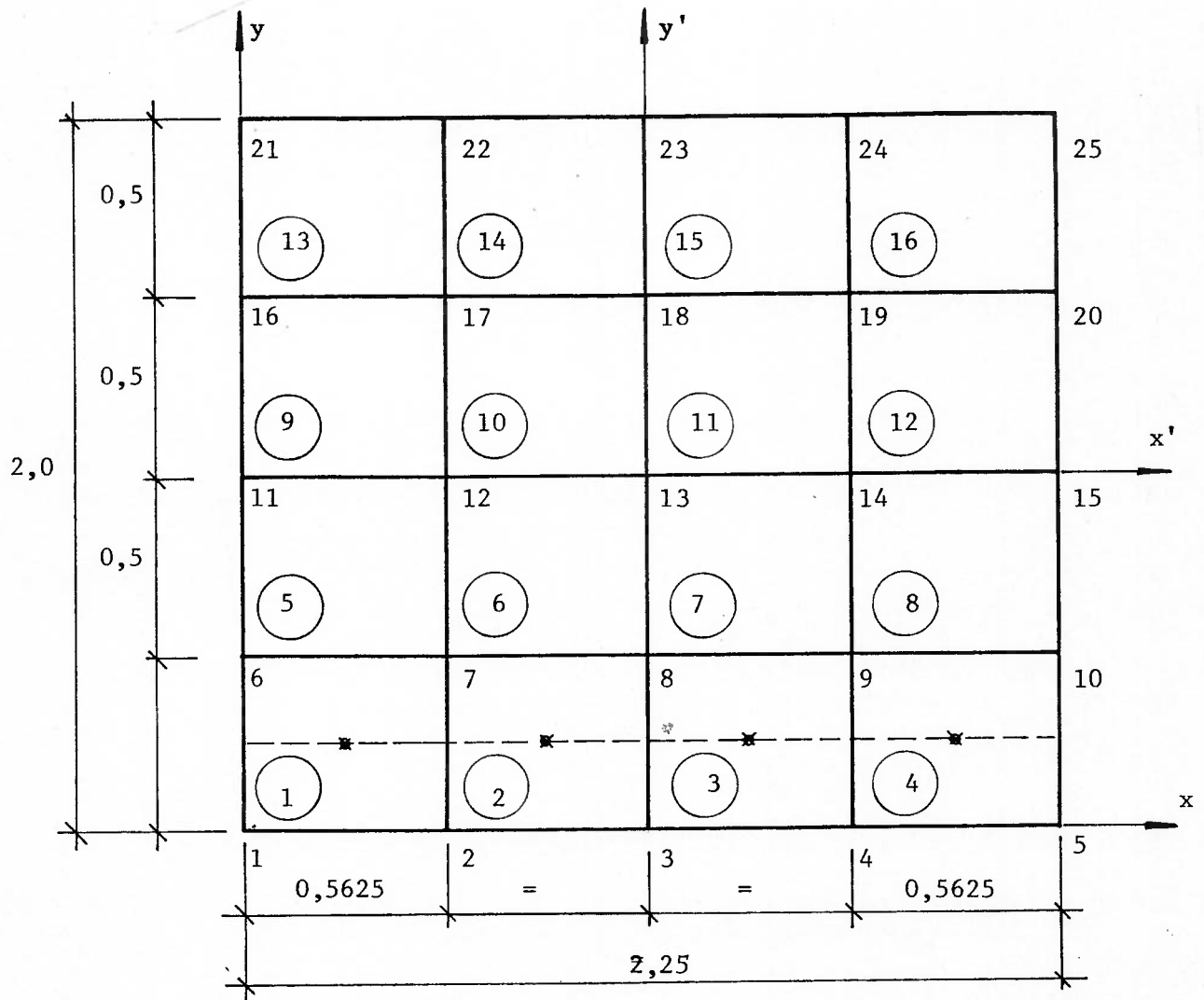


Fig 4-14 - Placa Retangular com Carregamento Provocando o Campo de Deslocamentos $w = \alpha xy$

O quadrante xy positivo foi subdividido em elementos finitos retangulares de acordo com a Fig. 4-15. Os deslocamentos foram calculados em um processamento STARDYNE e introduzidos no programa P1 (ver Apêndice II). Os valores de M_{xy} fornecidos pelo STARDYNE, pelo programa e calculados teoricamente para os centróides dos elementos 1 a 4, coincidiram até o 8º algarismo significativo.

Dentro de certas limitações, o elemento finito retangular de Melosh fornece resultados mais que satisfatórios, como foi mostrado nos casos ilustrados. Entretanto a sua aplicação é limitada, já que não pode ser generalizado para elementos de cascas, nem representar contornos mais complexos.



$$E = 2.100.000 \text{ tf/m}^2 \quad \nu = 0,3 \quad t = 0,08 \text{ m} \quad w = 7,254464x'y'$$

Fig. 4-15 - Esquema de Definição de Elementos Finitos para a Placa da Fig. 4-14

4.2. Os Elementos Retangulares de Bogner

Deseja-se agora, no processo de seleção do campo de deslocamentos w , ter como ponto de partida certas funções, de forma que obedecem às condições de contorno. No caso particular do elemento retangular, recorre-se ao conceito dos polinômios hermitianos.

Um polinômio hermitiano \bar{e} um polinômio de ordem $2n + 1$, denotado como:

$$H_{mi}^n(x)$$

que fornece, quando $x = x_i$,

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 1, \quad \text{com } k = m \text{ para } m = 0 \text{ até } n,$$

e

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 0, \quad \text{com } k \neq m \text{ ou } x = x_j.$$

Um polinômio hermitiano de ordem 0 \bar{e} aquele que, ao longo de uma reta ij , fornece os seguintes valores:

$$\begin{aligned} e \quad H_{0i}^0 &= 1 & \text{para } x &= x_i \\ H_{0i}^0 &= 0 & \text{para } x &= x_j \end{aligned}$$

Existe, necessariamente, H_{0j}^0 , tal que:

$$\begin{aligned} e \quad H_{0j}^0 &= 0 & \text{para } x &= x_i \\ H_{0j}^0 &= 1 & \text{para } x &= x_j \end{aligned}$$

Um par de polinômios, H_{01}^0 e H_{02}^0 , com essas propriedades, \bar{e} :

$$H_{01}^0(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{-(x - a)}{a}$$

$$H_{02}^0(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{a}, \quad \text{com } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = a.$$

Essas duas funções são da família de funções de interpolação de Lagrange (Fig. 4-16).

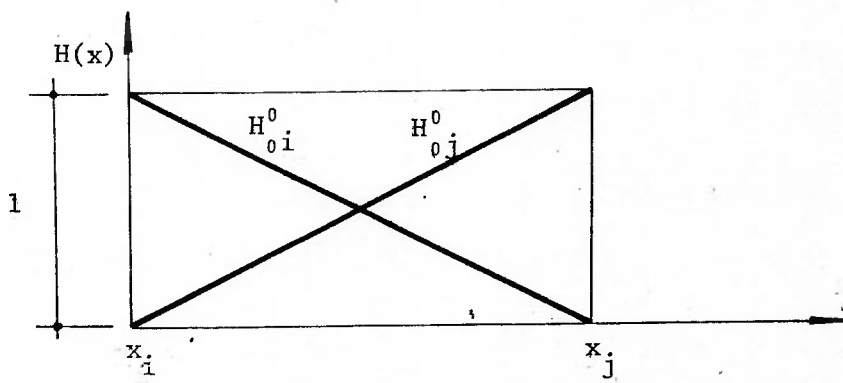


Fig. 4-16 - Polinômios Hermitianos de Grau 0

Se o conjunto de polinômios hermitianos for de grau 1, então as funções (que serão de 3º grau) fornecerão, para um elemento linear ij , os seguintes valores, nas extremidades:

$$H_{0i}^1(x_i) = 1$$

$$H_{0i}^1(x_j) = 0$$

$$H_{0j}^1(x_i) = 0$$

$$H_{0j}^1(x_j) = 1$$

$$H_{1i}^1(x_i) = H_{1i}^1(x_j) = 0$$

$$\frac{d}{dx} H_{1i}^1(x_i) = 1$$

$$\frac{d}{dx} H_{1i}^1(x_j) = 0$$

$$H_{1j}^1(x_i) = H_{1j}^1(x_j) = 0$$

$$\frac{d}{dx} H_{1j}^1(x_i) = 0$$

$$\frac{d}{dx} H_{1j}^1(x_j) = 1.$$

Um conjunto de polinômios que satisfazem essas condições é (Fig. 4-17):

$$H_{0i}^1(x) = \left[1 - 2 \left(\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \right) \right] \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 = \frac{1}{a^3} (2x^3 - 3ax^2 + a^3)$$

$$H_{0j}^1(x) = \left[1 - 2 \left(\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} \right) \right] \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 = \frac{-1}{a^3} (2x^3 - 3ax^2)$$

$$H_{1i}^1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 = \frac{1}{a^2} (x^3 - 2ax^2 + a^2x)$$

$$H_{1j}^1(x) = (x - x_2) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 = \frac{1}{a^2} (x^3 - ax^2).$$

Estes são os chamados *polinômios osculatórios*.

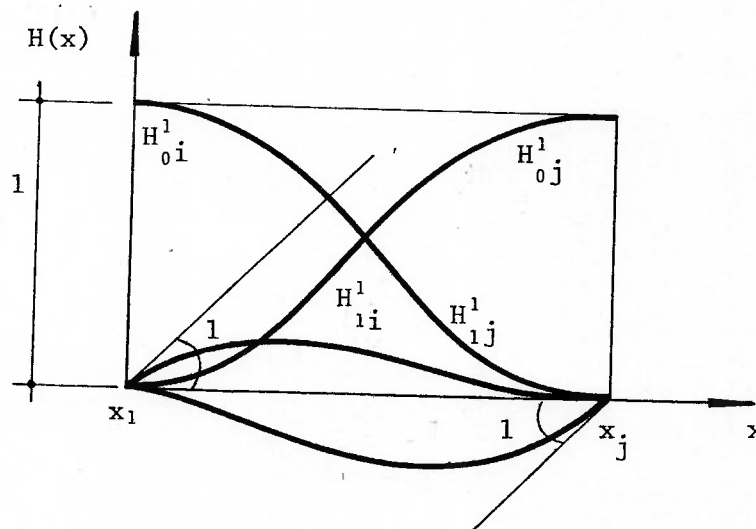


Fig. 4-17 - Polinômios Hermitianos de Grau 1

No elemento da Fig. 4-18, o significado de uma função

$$F = H_{0i}^1(x) \cdot H_{0i}^1(y)$$

é evidente.

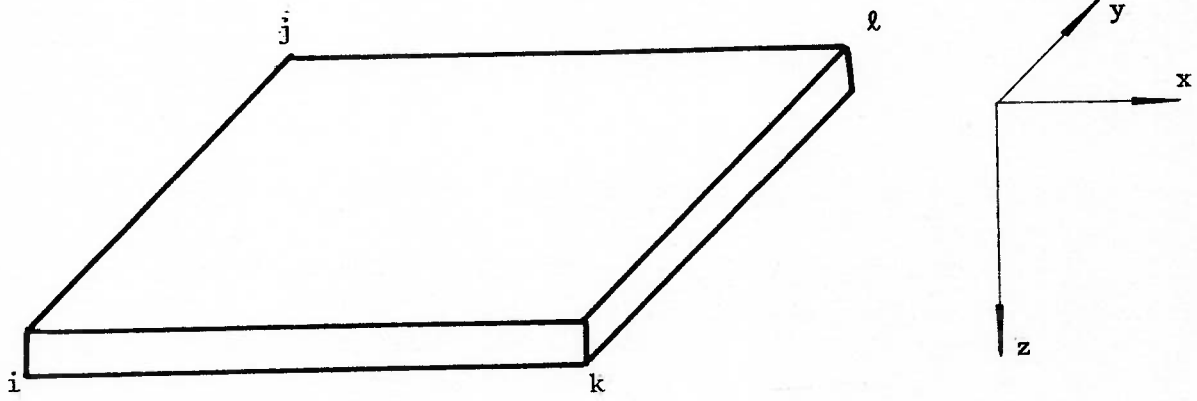


Fig. 4-18 - Representação de um Elemento Finito Retangular

Para

$$x = x_i \quad \text{e} \quad y = y_i, \quad F = 1$$

e

$$x = x_k \quad \text{ou} \quad y = y_j, \quad F = 0.$$

Em qualquer ponto interno da placa, $F < 1$.

A função F , então, distribui suavemente o efeito do deslocamento imposto, respeitando condições de contorno específicas. Este processo de distribuição é denominado *espalhamento* (Fig. 4-19a).

Analogamente:

$$F = H_{1i}^1(x) \cdot H_{0i}^1(y)$$

é tal que para

$$\text{ou} \quad \left. \begin{array}{l} x = x_i \quad \text{ou} \quad x = x_k \\ y = y_i \quad \text{ou} \quad y = y_j \end{array} \right\} F = 0$$

para $x = x_i$ e $x = y_i$, $\frac{dF}{dx} = 1$
 para $x = x_k$ e $y = y_j$, $\frac{dF}{dx} = 0$.

F constitui a função de forma para o espalhamento de $\theta_{xi} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ (Fig. 4-19b).

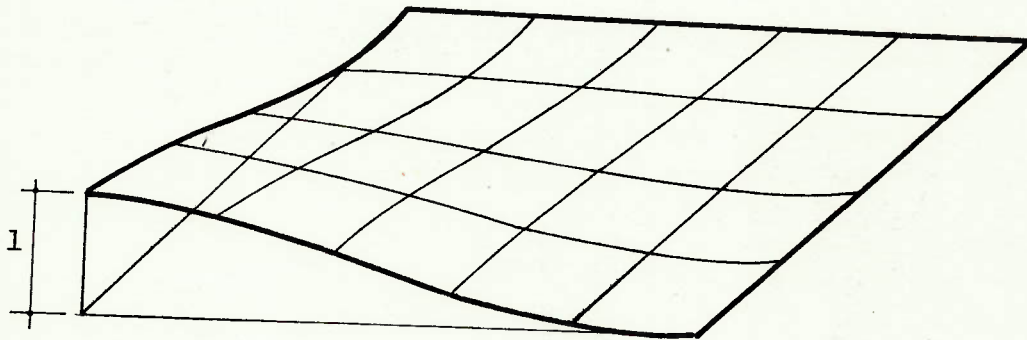


Fig. 4-19a - Representação de $F = H_{0i}^1(x) H_{0i}^1(y)$

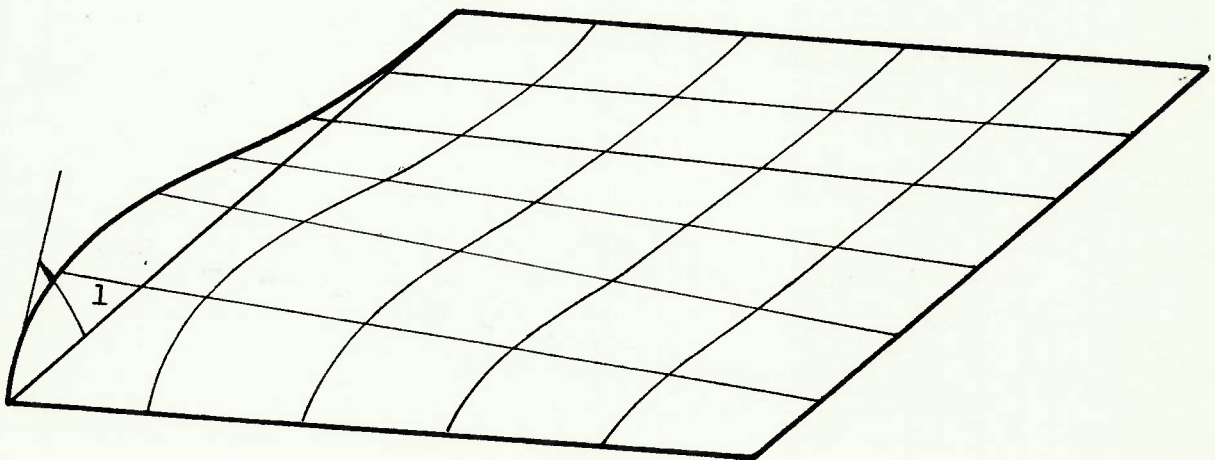


Fig. 4-19b - Representação de $F = H_{1i}^1(x) H_{1i}^1(y)$

Agindo de forma correspondente para $\partial w/\partial x$, chega-se à função de forma:

$$\underline{N}_i = \left[H_{0i}^1(x) \cdot H_{0i}^1(y), H_{1i}^1(x) \cdot H_{0i}^1(y), H_{0i}^1(x) \cdot H_{1i}^1(y) \right] \quad (4.22)$$

referente aos deslocamentos nodais w , $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$.

A grande vantagem deste processo é a facilidade com que se adapta a função de forma a um aumento de deslocamentos nodais. Para um elemento retangular em que a derivada mista $\partial^2 w/\partial x \partial y$ é também considerada como deslocamento nodal, a função de forma fica:

$$\underline{N}_i = \left[H_{0i}^1(x) \cdot H_{0i}^1(y), H_{1i}^1(x) \cdot H_{0i}^1(y), H_{0i}^1(x) \cdot H_{1i}^1(y), H_{1i}^1(x) \cdot H_{1i}^1(y) \right] \quad (4.23)$$

referente aos deslocamentos nodais w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial^2 w/\partial x \partial y$.

Para a formulação de Bogner com 12 graus de liberdade (w , θ_x e θ_y em cada nó, equação (4.2)), a verificação de convergência revela falhas fatais.

O campo de deslocamentos é dado por (Fig. 4-20):

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[H_{0i}^1(x) \cdot H_{0j}^1(y) w_{ij}^1 + H_{1i}^1(x) \cdot H_{0j}^1(y) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij} + H_{0i}^1(x) \cdot H_{1j}^1(y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij} \right] \quad (4.24)$$

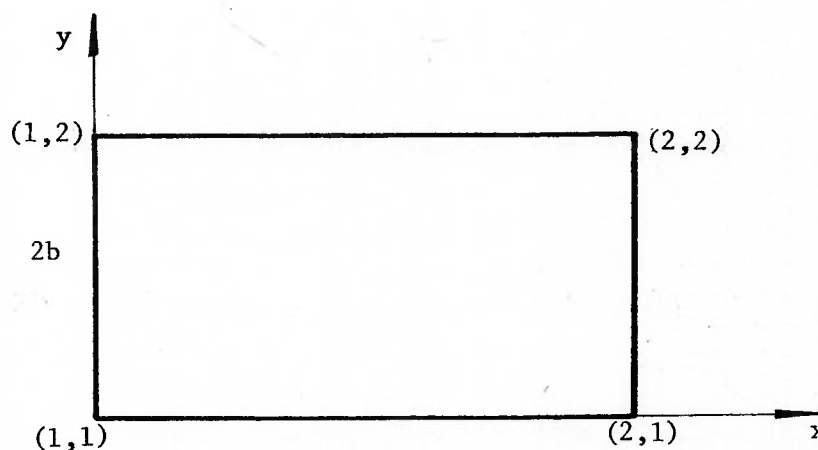


Fig. 4-20 - Designação dos Nós para a Formulação de Bogner

Substituindo-se os valores dos polinômios osculatórios e procedendo-se às multiplicações indicadas, o campo final de deslocamentos é representado por um polinômio incompleto em x e y até o grau x^3y^3 , o que cria uma rigidez indesejável e um excesso de exigências de continuidade. Além disso, uma movimentação de corpo rígido sem criação de tensões internas é limitada a uma translação de planos ($w = \text{cte}$). O problema mais sério, entretanto, é a impossibilidade de se representarem alguns estados simples de deslocamentos, tais como $w = \alpha xy$.

Esta falha impede a convergência dos resultados à medida que o reticulado é aprimorado.

Já a formulação da equação (4.23) pode representar qualquer termo do polinômio $\alpha x^n y^m$ com n e m valendo de 0 a 6. Ainda existe, contudo, um excesso de exigências de continuidade que torna o elemento muito rígido.

O desenvolvimento de pós-processadores para as duas formulações de elementos finitos de Bogner tem validade discutível. Do ponto de vista prático, é importante que os resultados sejam relativamente confiáveis. Isto não ocorre para a formulação com deslocamentos nodais w , $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ (equação (4.22)), cujas falhas já foram apontadas. Quanto à formulação da equação (4.23), onde se introduz, como deslocamento nodal, a derivada mista $\partial^2 w/\partial x \partial y$, os processadores comercialmente disponíveis não fornecem essa grandeza como resultado da análise.

5. OS ELEMENTOS TRIANGULARES

5.1. O Elemento Triangular com Função Polinomial

O estudo dos elementos finitos de placa de forma triangular, ao tentar seguir o mesmo raciocínio usado para os de forma retangular, encontra algumas dificuldades. Os graus de liberdade reduzem-se para nove, sendo três para cada vértice, limitados aos deslocamentos de interpretação física imediata. Um polinômio completo do 3º grau possui dez elementos, e surge imediatamente a idéia de abandonar um dos termos. Tem-se:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \quad (5.1)$$

Percebe-se que a simples eliminação de qualquer um dos termos provoca uma ausência de simetria entre x e y .

Outra possibilidade é o agrupamento de dois termos, isto é, a imposição de uma relação adicional entre dois termos do polinômio. Uma idéia que surge imediatamente é a de fazer $\alpha_8 = \alpha_9$, ficando a função:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_{10} y^3. \quad (5.2)$$

De fato, esta solução funciona razoavelmente. Contudo, para certas relações entre os parâmetros nodais, isto é, para determinadas posições do triângulo no plano xy , a matriz dos parâmetros nodais não é inversível, pois fornece determinante nulo. Isto ocorre, por exemplo, em triângulos retângulos isósceles com os catetos dispostos paralelamente aos eixos cartesianos.

É interessante introduzir, para maior facilidade na expressão dos resultados, um método numérico para o cálculo generalizado da matriz de coeficientes nodais \underline{C} . Sendo $w(x, y)$ o polinômio a ser utilizado, e ξ um infinitésimo, tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w(x + \xi/2, y) - w(x - \xi/2, y)}{\xi} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w(x, y + \xi/2) - w(x, y - \xi/2)}{\xi} \quad (5.4)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{e} \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

com

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{w(x + \xi, y) - 2w(x, y) + w(x - \xi, y)}{\xi^2} \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{w(x, y + \xi) - 2w(x, y) + w(x, y - \xi)}{\xi^2} \quad (5.6)$$

com

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{w(x + \xi/2, y + \xi/2) - w(x + \xi/2, y - \xi/2) - w(x - \xi/2, y + \xi/2) + w(x - \xi/2, y - \xi/2)}{\xi^2}$$

$$V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

com

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{w(x + 1,5\xi, y) - 3w(x + \xi/2, y) + 3w(x - \xi/2, y) - w(x - 1,5\xi, y)}{\xi^3}$$

(5.7)

etc.

Substituindo-se x e y pelas coordenadas dos v\u00e9rtices, gera-se a matriz \underline{C} , que \u00e9 invertida numericamente, chegando-se aos coeficientes α_i .

As condi\u00e7\u00f5es de converg\u00eancia devem ser examinadas atentamente. Percebe-se que as mesmas limita\u00e7\u00f5es verificadas para a formula\u00e7\u00e3o polinomial da placa retangular ocorrem aqui. Os movimentos de corpo r\u00edgido podem ser expressos sem introdu\u00e7\u00e3o de esfor\u00e7os e os estados simples de deforma\u00e7\u00e3o podem ser descritos. Contudo a n\u00e3o-conformidade fica patente no exame das condi\u00e7\u00f5es de determina\u00e7\u00e3o das inclina\u00e7\u00f5es ao longo das arestas. Portanto a converg\u00eancia fica comprometida quando a malha \u00e9 gradativamente refinada.

Os testes efetuados com o exemplo da placa retangular engastada nas bordas (Fig. 4-1) e com a placa equil\u00e1tera sujeita a carregamento q uniforme

(Fig. 4-10), demonstram que os resultados, embora inferiores em precisão aos encontrados por meio de elementos de placas retangulares, ainda são aceitáveis.

5.2. O Elemento Triangular com Coordenadas Triangulares

Da mesma forma que a placa retangular adapta-se perfeitamente à formulação em coordenadas cartesianas, existe uma formulação de coordenadas que é ideal para placas triangulares. Na Fig. 5-1, fixa-se o ponto P no interior de um triângulo qualquer, através da relação entre as áreas dos triângulos P12, P23 e P13 e o triângulo total 123. Assim:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{\bar{\text{área P23}}}{\bar{\text{área 123}}} \\ L_2 &= \frac{\bar{\text{área P13}}}{\bar{\text{área 123}}} \\ L_3 &= \frac{\bar{\text{área P12}}}{\bar{\text{área 123}}} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Evidentemente, $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

L_1, L_2, L_3 são chamadas *coordenadas triangulares*.

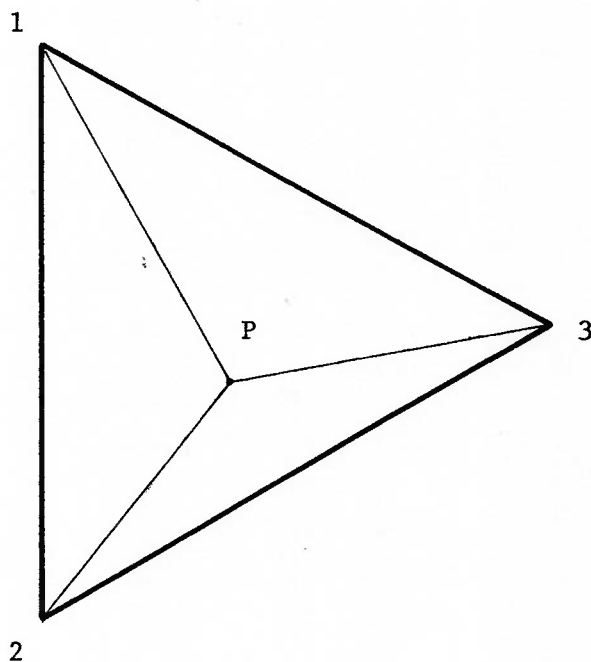


Fig. 5-1 - Elemento Triangular de Placa com um Ponto P no seu Interior

Existe uma relação linear entre as coordenadas triangulares e as coordenadas x, y do sistema cartesiano (Fig. 5-2).

$$\left. \begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Resolvendo-se o sistema (5.9) para L_1, L_2, L_3 em função de x e y , vem:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \\ L_2 &= \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta} \\ L_3 &= \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \bar{\text{área}} \ 123$$

e

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

etc.

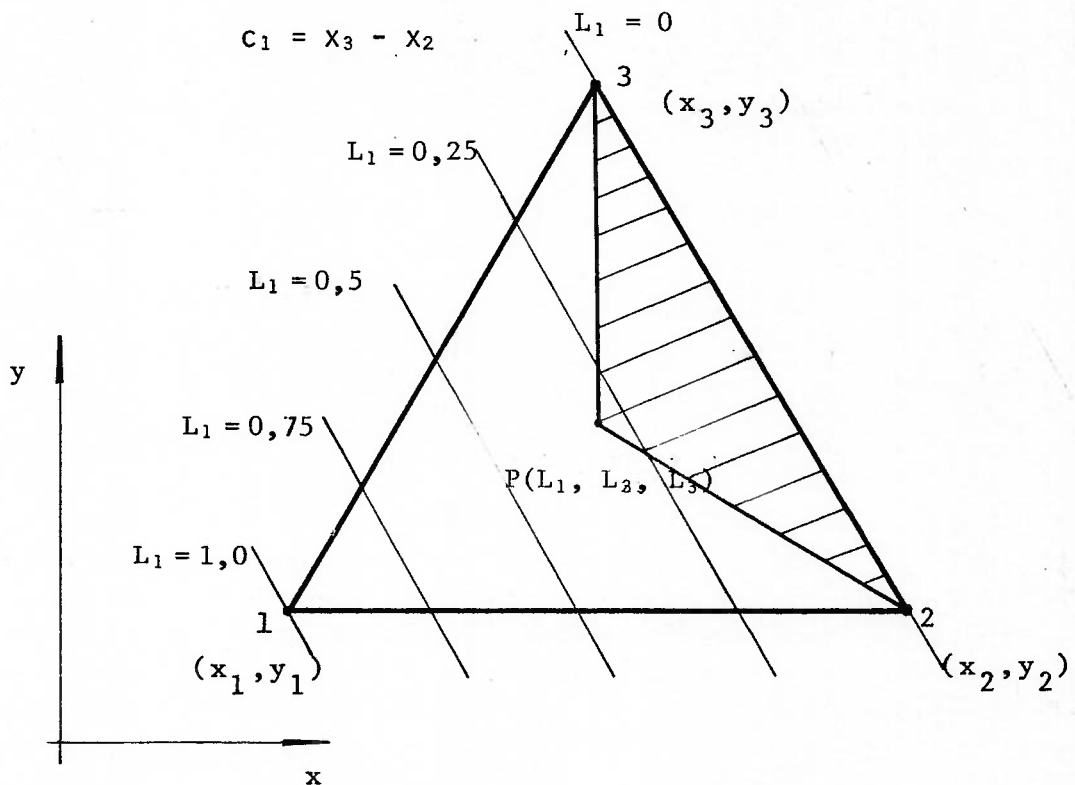


Fig. 5-2 - Representação da Coordenada Triangular L

Uma característica importante merece ser mencionada. A completeza de uma função com coordenadas triangulares até um certo grau é conseguida pela existência de unicamente termos daquele grau. Assim, a função:

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3$$

é um polinômio completo do 1º grau, pois, colocado em função apenas de L_1 e L_2 , assume a forma:

$$1 + (\alpha_1 - 1) L_1 + (\alpha_2 - 1) L_2 .$$

Da mesma forma, a função:

$$\alpha_1 L_1 L_2 + \alpha_2 L_2 L_3 + \alpha_3 L_1 L_3 + \alpha_4 L_1^2 + \alpha_5 L_2^2 + \alpha_6 L_3^2$$

é um polinômio quadrático completo de seis termos.

O polinômio completo do 3º grau possui os termos:

$$L_1^3, L_2^3, L_3^3, L_1^2 L_2, L_2^2 L_3, L_3^2 L_1, L_1 L_2^2, L_2 L_3^2, L_3 L_1^2, L_1 L_2 L_3$$

Como se têm dez termos e nove graus de liberdade, a primeira idéia que surge é a de abandonar o termo $L_1 L_2 L_3$. Assim, um elemento triangular com nove graus de liberdade ficaria com seu campo de deslocamentos descrito por:

$$F(L_1 L_2 L_3) = \alpha_1 L_1^3 + \alpha_2 L_2^3 + \alpha_3 L_3^3 + \alpha_4 L_1^2 L_2 + \alpha_5 L_2^2 L_3 + \\ + \alpha_6 L_3^2 L_1 + \alpha_7 L_1 L_2^2 + \alpha_8 L_2 L_3^2 + \alpha_9 L_3 L_1^2 .$$

Entretanto um exame superficial mostra que esta função não é capaz de representar movimento de corpo rígido. Por exemplo, $w = \text{constante}$ não seria possível.

Percebe-se que a completeza da função fica comprometida com a retirada do termo $L_1 L_2 L_3$. Ele deve, portanto, ser adicionado aos outros termos numa proporção qualquer. Além disso, os termos L_1 , L_2 e L_3 devem aparecer explicitamente para que se tornem possíveis os movimentos de corpo rígido.

Utilizando-se a função:

$$F(L_1L_2L_3) = \beta_1L_1 + \beta_2L_2 + \beta_3L_3 + \beta_4(L_2^2L_1 + cL_1L_2L_3) + \\ + \beta_5(L_3^2L_2 + cL_1L_2L_3) + \dots + \beta_9(L_1^2L_3 + cL_1L_2L_3) ,$$

separa-se o movimento em suas expressões de translação e de curvatura. Os seis últimos termos devem poder representar qualquer tipo de curvatura, isto é, com:

$$w = \beta_4(L_2^2L_1 + cL_1L_2L_3) + \dots + \beta_9(L_1^2L_3 + cL_1L_2L_3) ,$$

pode-se representar qualquer curvatura do tipo:

$$w = \alpha_1L_1L_2 + \alpha_2L_2L_3 + \dots + \alpha_6L_3^2 .$$

Isto só ocorre quando a constante c assume o valor 0,5. A demonstração algébrica deve provar que, dada a função:

$$w = \beta_4(L_2^2L_1 + cL_1L_2L_3) + \beta_5(L_3^2L_2 + cL_1L_2L_3) + \beta_6(L_1^2L_3 + cL_1L_2L_3) + \\ + \beta_7(L_2L_1^2 + cL_1L_2L_3) + \beta_8(L_3L_2^2 + cL_1L_2L_3) + \beta_9(L_1L_3^2 + cL_1L_2L_3)$$

e a função:

$$w' = \alpha_4L_1^2 + \alpha_5L_2^2 + \alpha_6L_3^2 + \alpha_7L_1L_2 + \alpha_8L_2L_3 + \alpha_9L_3L_1 ,$$

então somente para $c = 0,5$ ocorre que, para cada conjunto possível de valores α_i , existe um conjunto de valores β_i tal que $w = w'$.

Para esta demonstração, devem-se colocar as duas funções w e w' em função de apenas duas coordenadas triangulares, fazendo, por exemplo:

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2 .$$

Assim, tem-se:

$$w = L_1\beta_9 + L_2\beta_5 + L_1L_2(c\beta_4 + (c - 2)\beta_5 + c\beta_6 + c\beta_7 + c\beta_8 + \\ + (c - 2)\beta_9) + L_1^2(\beta_6 - 2\beta_9) + L_2^2(-2\beta_5 + \beta_8) + L_1^3(-\beta_6 + \beta_9) + \\ + L_1^2L_2(-c\beta_4 + (1 - c)\beta_5 + (-1 - c)\beta_6 + (1 - c)\beta_7 - c\beta_8 + \\ + (2 - c)\beta_9) + L_1L_2^2((1 - c)\beta_4 + (2 - c)\beta_5 - c\beta_6 - c\beta_7 + \\ + (-1 - c)\beta_8 + (1 - c)\beta_9) + L_2^3(\beta_5 - \beta_6) .$$

$$w' = 1\alpha_6 + L_1(-2\alpha_6 + \alpha_9) + L_2(-2\alpha_6 + \alpha_8) + L_1L_2(2\alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9) + L_1^2(\alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_9) + L_2^2(\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_8).$$

Iguando-se os coeficientes correspondentes, vem:

$$\alpha_6 = 0, \text{ necessariamente}$$

$$\beta_9 = -2\alpha_6 + \alpha_9$$

$$\beta_5 = -2\alpha_6 + \alpha_8$$

$$c\beta_4 + (c-2)\beta_5 + c\beta_6 + c\beta_7 + c\beta_8 + (c-2)\beta_9 = 2\alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9$$

$$\beta_6 - 2\beta_9 = \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_9$$

$$-2\beta_5 + \beta_8 = \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_8$$

$$-\beta_6 + \beta_9 = 0$$

$$-c\beta_4 + (1-c)\beta_5 + (-1-c)\beta_6 + (1-c)\beta_7 - c\beta_8 + (2-c)\beta_9 = 0$$

$$(1-c)\beta_4 + (2-c)\beta_5 - c\beta_6 - c\beta_7 + (-1-c)\beta_8 + (1-c)\beta_9 = 0$$

$$\beta_5 - \beta_8 = 0.$$

Conhecendo-se α_i , encontram-se:

$$\beta_4 = \alpha_7$$

$$\beta_5 = \alpha_8$$

$$\beta_6 = \alpha_9$$

$$\beta_7 = \alpha_7$$

$$\beta_8 = \alpha_8$$

$$\beta_9 = \alpha_9$$

$c = 0,5$, com $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, necessariamente.

A função, em coordenadas triangulares, fica:

$$\begin{aligned}
 w = & \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 (L_2^2 L_1 + 0,5 L_1 L_2 L_3) + \alpha_5 (L_3^2 L_2 + \\
 & + 0,5 L_1 L_2 L_3) + \alpha_6 (L_1^2 L_3 + 0,5 L_1 L_2 L_3) + \alpha_7 (L_1^2 L_2 + 0,5 L_1 L_2 L_3) + \\
 & + \alpha_8 (L_2^2 L_3 + 0,5 L_1 L_2 L_3) + \alpha_9 (L_3^2 L_1 + 0,5 L_1 L_2 L_3) \quad . \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

É necessário verificar se esta função atende as condições de convergência.

1a. Movimento de Corpo Rígido :

Fazendo-se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$ e $\alpha_4 = \alpha_5 = \dots = \alpha_9 = 0$, tem-se:

$$w = \alpha_1 (L_1 + L_2 + L_3) = \alpha_1 \quad .$$

Usando-se a expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3} \quad ,$$

podem-se calcular as deformações resultantes:

$$\underline{\varepsilon} = \left\langle \begin{array}{c} \partial^2 w / \partial x^2 \\ - \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\rangle$$

Portanto as tensões resultantes são nulas e este movimento não gera energia de deformação; a primeira condição de convergência está satisfeita.

2a. Estados de Deformação Constante:

Fazendo-se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = \alpha_7 \neq 0$ e $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$, tem-se:

$$w = \alpha_4 (L_2^2 L_1 + L_1^2 L_2 + L_1 L_2 L_3)$$

$$w = \alpha_4 L_1 L_2 (L_1 + L_2 + L_3) = \alpha_4 L_1 L_2 \quad .$$

Isto representa um estado de deformação constante mista (Fig. 5-3).

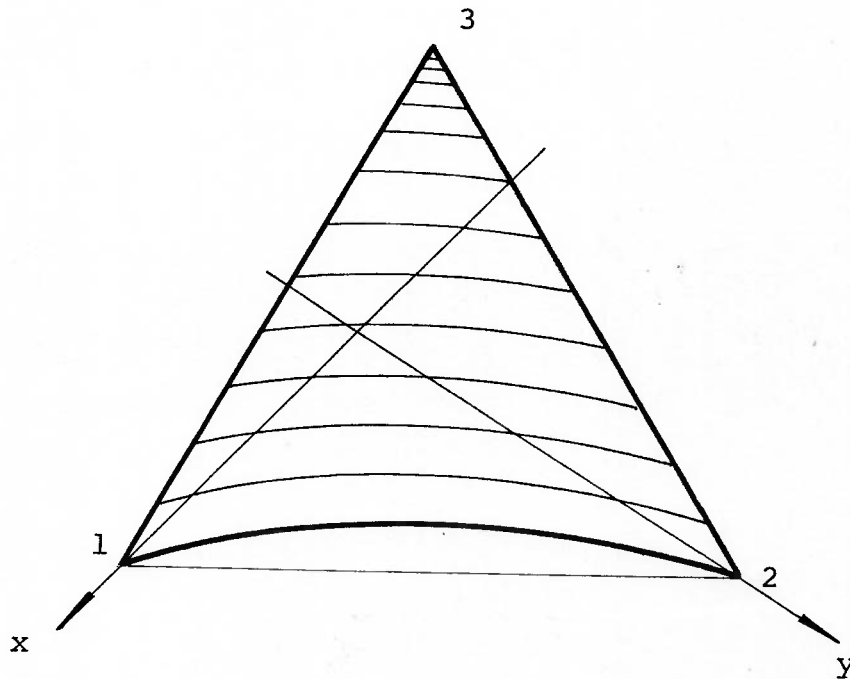


Fig. 5-3-- Deformação Mista num Elemento Triangular

Fazendo $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_9 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ e $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 = -\alpha_2$, vem:

$$w = \alpha_2 L_2 - \alpha_2 (L_2^2 L_1 + 0,5 L_1 L_2 L_3 + L_3^2 L_2 + 0,5 L_1 L_2 L_3 + L_1^2 L_2 + 0,5 L_1 L_2 L_3 + L_2^2 L_3 + 0,5 L_1 L_2 L_3)$$

$$\begin{aligned} w &= -\alpha_2 (-L_2 + L_2^2 L_1 + L_2^2 L_3 + L_1^2 L_2 + L_3^2 L_2 + 2L_1 L_2 L_3) = \\ &= -\alpha_2 (L_2^2 (L_1 + L_3) + L_2 (-1 + L_1^2 + L_3^2 + 2L_1 L_3)) = \\ &= -\alpha_2 \{ L_2^2 (1 - L_2) + L_2 (-1 + (L_1 + L_3)^2) \} = \\ &= -\alpha_2 (L_2^2 - L_2^3 - L_2 + L_2 (1 - L_2)^2) = \\ &= -\alpha_2 (L_2^2 - L_2^3 - L_2 + L_2 - 2L_2^2 + L_2^3) = \alpha_2 L_2^2 . \end{aligned}$$

que representa o estado de deformação cilíndrica constante (Fig. 5-4).

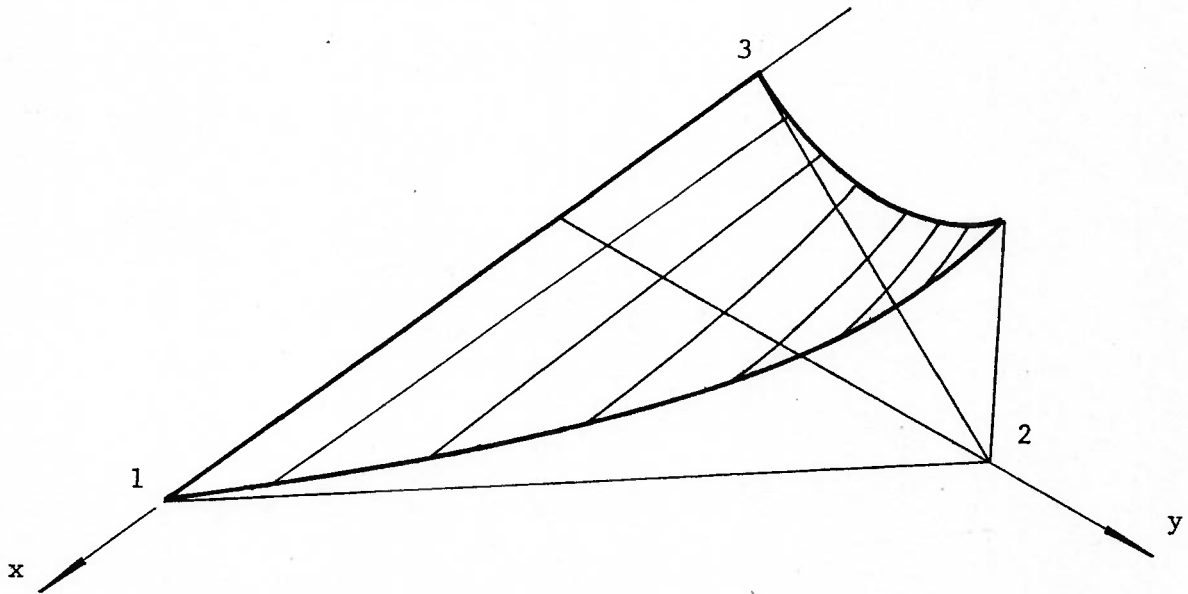


Fig. 5.4 - Deformação Cilíndrica num Elemento Triangular

A correspondência desses estados com aqueles definidos para a expressão polinomial (isto é, $w = \alpha xy$ e $w = \alpha x^2$) ficará mais clara se os eixos x e y forem orientados de maneira especial em relação ao triângulo. Assim, na Fig. 5-3:

$$L_1 = kx$$

$$L_2 = k'y$$

$$\therefore w = \alpha_4 L_1 L_2 = \alpha_4 kx k'y = Kxy$$

e, na Fig. 5-4:

$$L_2 = k'y$$

$$\therefore w = \alpha_2 k'^2 y^2 = Ky^2$$

É importante perceber que é possível representar um estado qualquer de deformação constante, independentemente da orientação dos eixos. Portanto a segunda condição de convergência também está satisfeita.

3a. Conformidade

No contorno dos elementos, a mesma demonstração adotada para a função polinomial pode ser aqui utilizada para a formulação em coordenadas triangulares. Atesta-se que o elemento é não-conforme. Basicamente, a derivada normal ao contorno fica unicamente definida nos pontos nodais e com duplo valor entre eles.

Portanto o elemento em coordenadas triangulares apenas aproxima o valor mínimo da energia potencial total. Para todos os fins práticos, os resultados são válidos, notadamente para os deslocamentos, que variam de acordo com uma função cúbica. Já no caso das tensões generalizadas, que, para os elementos de placa, são momentos, os resultados são pobres, variando linearmente. Assim, costuma-se calcular os momentos apenas no centróide do elemento. No contorno, a média dos resultados obtidos para elementos contíguos e referentes ao mesmo ponto geralmente é aceitável.

É interessante notar que, para os elementos triangulares até aqui apresentados, o refinamento da malha não conduz necessariamente a uma convergência para a solução exata. As deformações calculadas apresentam um erro cuja magnitude permanecerá com a subdivisão subsequente.

Comparando-se os resultados obtidos para o elemento triangular com formulação polinomial e o elemento com formulação em coordenadas triangulares, não se nota nenhum destaque em desempenho em qualquer um deles. Contudo o elemento em coordenadas triangulares tem uso livre, o que já não ocorre com o elemento em coordenadas cartesianas, pelas razões já observadas. A Fig. 5-5 compara os resultados da formulação em coordenadas triangulares com os do elemento finito de Melosh, para o exemplo de elemento de placa retangular engastada nas bordas (Fig. 4-12). A Fig. 5-6 mostra o gráfico comparativo dos resultados encontrados com divisão em elementos triangulares com coordenadas triangulares, em elementos de Melosh, e os resultados teóricos para o elemento de placa triangular equilátero apoiado nas bordas e sujeito a carga q constante.

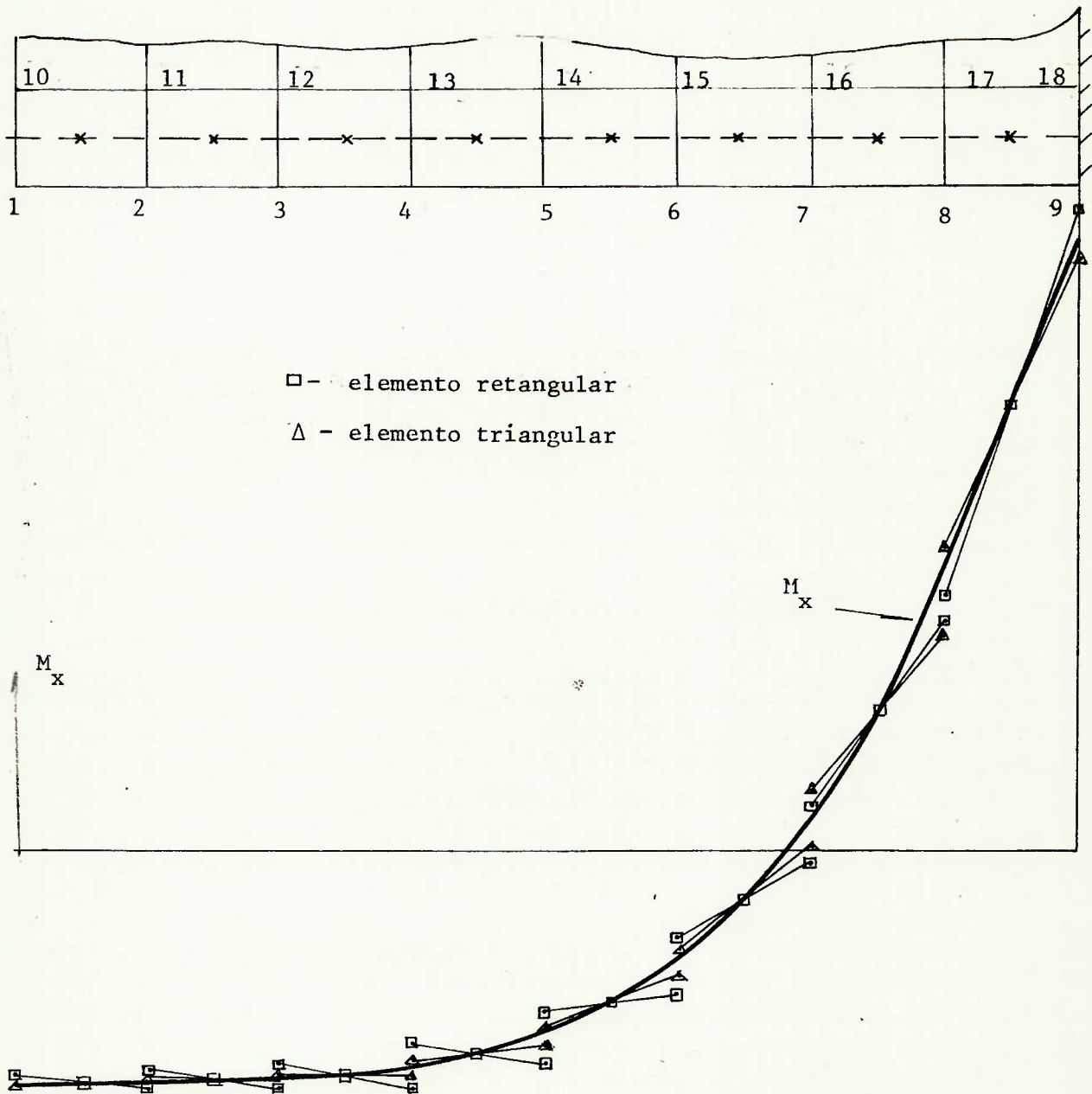
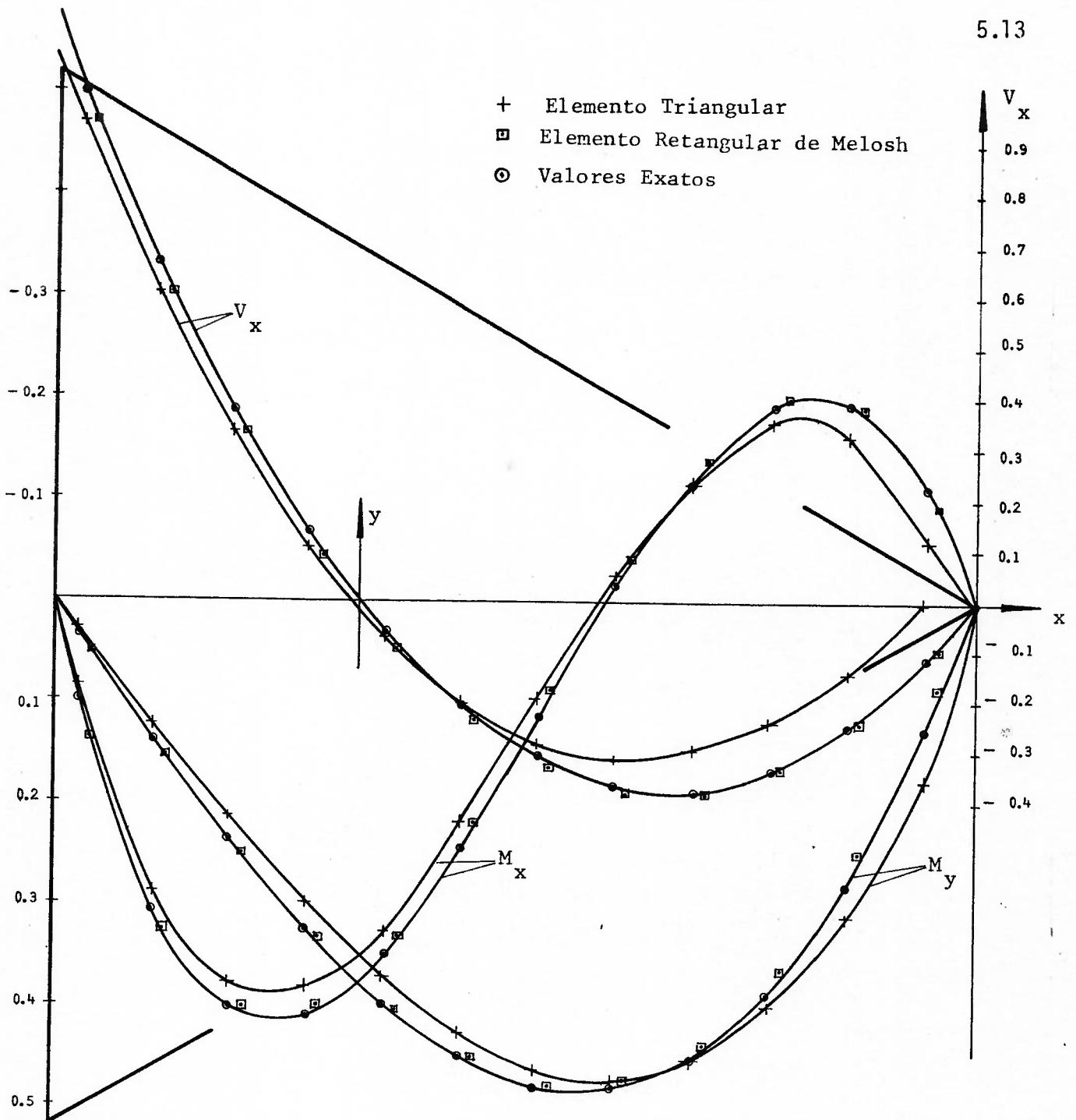


Fig. 5-5 - Diagrama de M_x com Dois Tipos de Formulações



Placa Triangular Equilátera Apoiada nas Bordas. Carga q Constante.
 Elemento $L_1L_2L_3$ Triangular em Coordenadas Triangulares.

Fig. 5-6 - Diagramas dos Esforços M_x , M_y e V_x na Placa Triangular Equilátera Apoiada nas Bordas e Sujeita a Carga q Constante

5.3. O Elemento Triangular Conforme em Coordenadas Triangulares com Singularidades Nodais

A continuidade de inclinação ao longo de uma borda não pode ser assegurada com apenas três graus de liberdade em cada extremidade da aresta. Isto ocorre porque o valor das derivadas de segunda ordem é definido em cada nó. Entretanto, se esses valores forem diferentes dependendo da placa considerada, porém sempre finitos, assegurar-se-á a convergência pela inexistência de valores infinitos. Consegue-se esta duplicidade utilizando-se, na função de forma, termos adicionais cujas segundas derivadas apresentem valores não-únicos.

Considere-se uma função do tipo:

$$\epsilon_{23} = \frac{L_1^2 L_2^2 L_3^2}{(L_1 + L_2)(L_1 + L_3)}$$

Derivando-se em relação a L_1 :

$$\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial L_1} = \frac{L_2^2 L_3^2 (L_1 + L_2)(L_1 + L_3) - L_1^2 L_2^2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)^2 (L_1 + L_3)^2} ;$$

em $L_1 = 0$, $L_2 \neq 0$ e $L_3 \neq 0$:

$$\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial L_1} = \frac{L_2^2 L_3^2 L_2 L_3}{L_2^2 L_3^2} = L_2 L_3 .$$

Portanto existe uma inclinação da aresta 2-3 quando o ponto considerado não é um dos vértices. Ao longo de todo o contorno, esta função é nula, o mesmo acontecendo para as inclinações das arestas 1-2 e 1-3.

Logo, esta função pode ser relacionada com um grau de liberdade adicional, a inclinação num ponto intermediário da aresta 2-3. Definidos os valores nodais e a inclinação no ponto médio, a aresta terá sua inclinação unicamente definida parabolicamente e o elemento tornar-se-á conforme. Resulta disto um elemento com nove graus nodais de liberdade mais três graus adicionais, correspondentes às inclinações normais dos pontos médios das arestas.

Para evitar a dificuldade gerada pela necessidade de montar uma matriz de rigidez onde o número de termos por nó possa ser tanto um quanto três, assume-se uma restrição para a inclinação do ponto médio, considerando-se que ela seja a média aritmética das inclinações nos pontos extremos da respectiva aresta (Fig. 5-7).

A inclinação normal é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \cos\phi \frac{\partial w}{\partial x} + \sin\phi \frac{\partial w}{\partial y} \quad ,$$

onde ϕ é o ângulo formado entre a normal à aresta e o eixo x.

O estudo comparativo dos resultados fornecidos por este elemento e o de coordenadas triangulares simples mostra que nem sempre a conformidade forçada é um aprimoramento. Aparentemente, as restrições impostas afastam os resultados obtidos dos valores teóricos.

Assim, é interessante notar que, embora no caso do elemento conforme a convergência esteja assegurada, os resultados são menos exatos que os do elemento não-conforme para a subdivisão adotada. Conclui-se que a facilidade de computação deste último, aliada à razoável precisão dos resultados, torna o seu uso vantajoso.

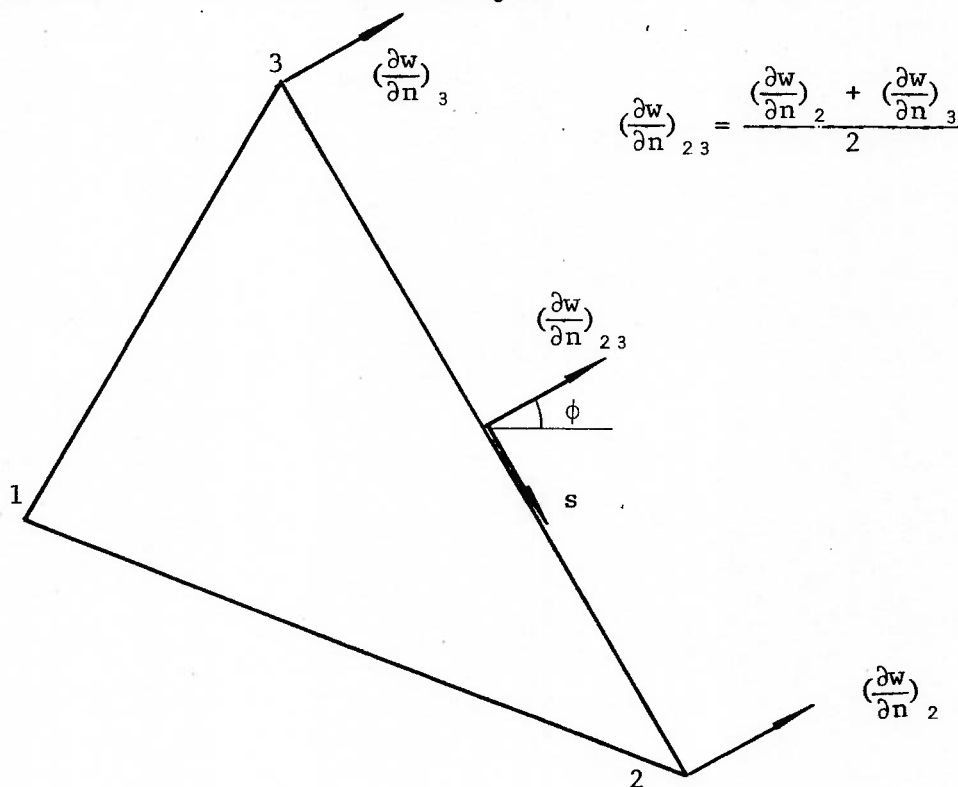


Fig. 5-7 - Definição da Inclinação no Ponto Médio de sua Aresta

6. CONCLUSÕES

No estágio atual de desenvolvimento do método dos elementos finitos para o estudo de placas, os resultados obtidos são confiáveis e corretos nos centróides dos elementos, para modelos com campos de deslocamentos assumidos (formulação por energia potencial). As exigências derivadas da conformidade entre os elementos levam, entretanto, a extensas operações algébricas na formação dos coeficientes da matriz de rigidez básica. Surge, em consequência, um crescente interesse na formulação de modelos razoáveis com campos de deslocamentos não-conformes entre os elementos, ou com o uso de outros princípios variacionais com exigências menos rígidas para as funções assumidas.

Desejando-se estudar outros pontos do elemento diferentes do seu centróide, nota-se uma confiabilidade decrescente à medida que o ponto em questão se aproxima do contorno. Nos elementos não-conformes, essa deterioração na validade dos resultados é motivada pela descontinuidade da derivada da função $F(x, y)$ da ordem mais alta presente no funcional variacional. É importante lembrar que a continuidade existe até o grau anterior a este, constituindo a terceira condição de convergência. No limite, essa deterioração desaparece à medida que o reticulado vai sendo subdividido. Nos elementos conformes, a existência de termos de ordem mais alta na função do campo de deslocamentos cria uma rigidez excessiva, afetando os valores encontrados para as incógnitas nos nós do contorno do elemento. Esses excessos tendem a desaparecer e a ser mutuamente compensados no cálculo dos esforços internos no seu interior, mas com menor intensidade junto ao contorno.

Uma questão que ainda não está claramente estabelecida para as placas é o ponto de equilíbrio entre a quantidade de recursos empregados na formulação do elemento e o esforço global de resolução da estrutura. O grau de sofisticação na definição do elemento influencia na somatória de recursos a serem gastos. Várias características do comportamento em geral podem ser mais ou menos desenvolvidas. Entre elas, destacam-se: a geometria permitida, a complexidade permitida na representação dos contornos, a quantidade de dados necessários para definir o elemento, o número total de

graus de liberdade, a definição de graus internos de liberdade excluídos da matriz de rigidez, o aprimoramento na representação dos carregamentos externos, o respeito a critérios de convergência. Geralmente o número total de incógnitas da estrutura pode ser reduzido à medida que o elemento vai sendo aprimorado. Inversamente, a necessidade de uma subdivisão mais sutil devido a particularidades estruturais aumenta a matriz de rigidez total e o tempo de resolução, aproximadamente proporcional ao quadrado do número de incógnitas. É importante lembrar que uma comparação válida entre duas alternativas deve incluir não só os custos operacionais mas também a amortização dos custos de desenvolvimento do "software" associado. Num quadro mais particular, quando se deseja, através do uso de pós-processadores como os descritos no Apêndice B, determinar os esforços solicitantes no interior do elemento, algumas considerações de ordem prática são válidas. Os métodos numéricos para a resolução das equações diferenciais, com as hipóteses assumidas para o campo de deslocamentos, fornecem resultados com precisão decrescente para os deslocamentos lineares, os deslocamentos angulares, os momentos internos e as forças cortantes, nesta ordem. Assim, comparando-se os dois processos, o mesmo nível de precisão nos resultados é atingido antes para os deslocamentos nodais do que para os esforços internos. Finalmente, resta destacar que os processos desenvolvidos para os elementos de placa são igualmente úteis em qualquer outra situação onde o funcional variacional envolva derivadas de segunda ordem, tais como problemas de fluxo em meio viscoso.

APÊNDICE AExpressões Exatas para o Campo de Deslocamentos em Placas Triangulares

Existe uma expressão polinomial que descreve exatamente o campo de deslocamentos no caso de uma placa triangular equilátera simplesmente apoiada, com carga distribuída constante q (Fig. A-1).

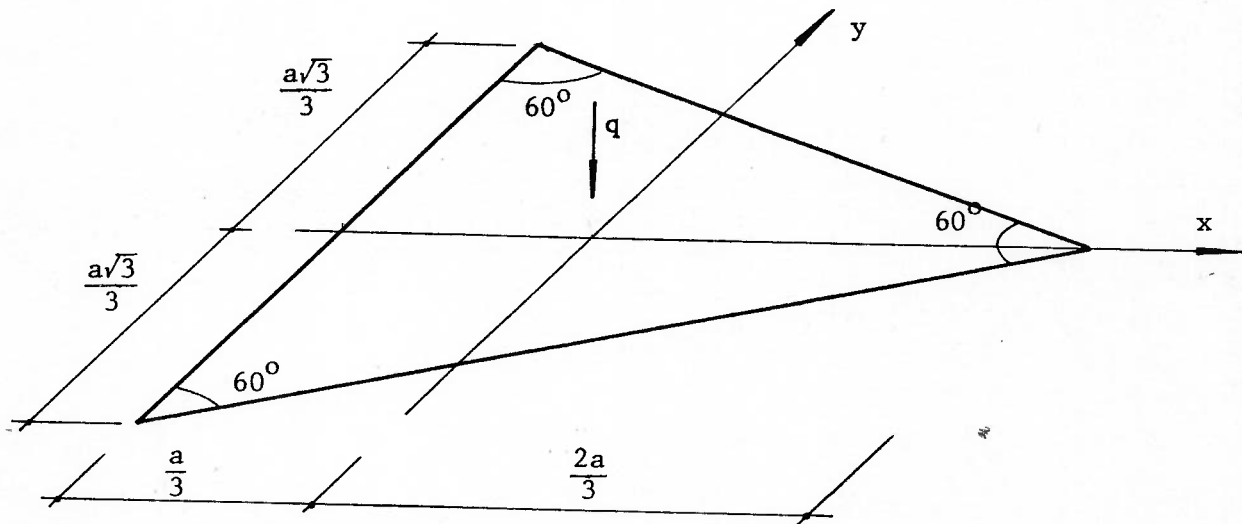


Fig. A-1 - Representação do Triângulo Equilátero Apoiado nas Bordas e Sujeito a Carga q Constante.

Uma função deste tipo deve obedecer aos seguintes requisitos:

1. fornecer deslocamentos nulos no contorno;
2. obedecer à expressão:

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} .$$

A expressão é:

$$w = \frac{q}{64aD} \left(x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right) \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right)$$

De fato,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{q}{64aD} (3x^2 - 3y^2 - 2ax) \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right) + \frac{q}{64aD} \left(x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right) (-2x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{q}{64aD} (-6yx - 2ay) \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right) + \frac{q}{64aD} \left(x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right) (-2y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-2q}{64aD} (-3x + a) \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right) - \frac{2q}{64aD} (3x^2 - 3y^2 - 2ax) \cdot (2x) + \frac{q}{64aD} \left(x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right) (-2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-2q}{64aD} (3x + a) \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right) - \frac{2q}{64aD} (-6xy - 2ay) (2y) + \frac{q}{64aD} \left(x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right) (-2)$$

$$\Delta w = \frac{-16q}{64aD} \left(\frac{4}{27} a^3 - a(x^2 + y^2) - 3y^2x + x^3 \right)$$

$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta w = \frac{-16q}{64aD} (-2ax - 3y^2 + 3x^2)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} = \frac{-16q}{64aD} (-2a + 6x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta w = \frac{-16q}{64aD} (-2ay - 6xy)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w = \frac{-16q}{64aD} (-2a - 6x)$$

$$\Delta \Delta w = \frac{-16q}{64aD} (-4a) = \frac{q}{D} .$$

A mesma função pode ser expressa através de coordenadas triangulares:

$$w = \frac{qa}{24D} (L_1 L_2 L_3) (1 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2) .$$

De fato,

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} .$$

Surge a idéia de expressar-se o campo de deslocamentos de um triângulo qualquer através da expressão:

$$w = N (L_1 L_2 L_3) (1 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2) .$$

Esta sugestão ocorre ao notar-se a facilidade com que se impõem, através das coordenadas triangulares, valores nulos no contorno. Bastaria encontrar a constante N em função dos dados geométricos do triângulo.

Pode-se provar que isto é impossível. A exigência de independência de N do ponto considerado dentro do triângulo provoca o retorno ao caso do triângulo equilátero.

APÊNDICE BProgramas Pós-Processadores

Os programas a seguir foram desenvolvidos em um computador Hewlett-Packard modelo 9830A em linguagem BASIC. Recebem como entrada as informações de geometria da placa, suas características físicas e os deslocamentos nos vértices. Estes últimos necessitam ser previamente calculados por intermédio de programas comerciais disponíveis, tais como STRUDL-II, STARDYNE e SAP-IV.

Definindo-se o ponto em estudo dentro da placa ou no seu contorno, o programa calcula os deslocamentos naquele ponto (duas rotações e uma translação vertical) e os esforços solicitantes por unidade de comprimento, especificamente os momentos fletores, o momento misto e as forças cortantes.

Os programas pós-processadores a seguir listados são:

- P1. Elemento Retangular de Melosh
- P2. Elemento Triangular com Função Polinomial com Matriz (C) Explícita
- P3. Elemento Triangular com Função Polinomial com Matriz (C) Gerada
- P4. Elemento Triangular com Formulação em Coordenadas Triangulares
- P5. Elemento Triangular com Formulação em Coordenadas Triangulares e Derivadas Normais nos Pontos Médios dos Lados

PI. ELEMENTO RETANGULAR DE MELOSH

Baseando-se no elemento retangular de placa da Fig. 4-1, o programa calcula os deslocamentos w , θ_x e θ_y em um ponto qualquer do interior da placa, definido pelas coordenadas x e y . Fornece também os valores para os momentos fletores M_x e M_y , o momento misto M_{xy} e as forças cortantes V_x e V_y . Os valores de x e y são em fração dos semilados a e b do retângulo. O sistema de eixos tem origem no centro de gravidade do elemento e eixos paralelos aos lados.

Entrada

Linha 60: semilados a e b do retângulo
 Linha 500: deslocamentos w , θ_x e θ_y no vértice i
 Linha 520: deslocamentos w , θ_x e θ_y no vértice j
 Linha 540: deslocamentos w , θ_x e θ_y no vértice l
 Linha 560: deslocamentos w , θ_x e θ_y no vértice k
 Linha 630: ν (coeficiente de Poisson)
 Linha 660: E (módulo de elasticidade)
 Linha 680: espessura da placa t
 Linha 740: coordenadas x/a e y/b do ponto P .

Saída

Linha 840: M_x , M_y , M_{xy} , V_x , V_y
 Linha 900: w_p , θ_{x_p} e θ_{y_p} .

A matriz C é definida literalmente e a sua inversa é calculada algebricamente.

```

10 DIM C(12,12),A(12),D(12)
20 MAT C=ZER
30 C(1,1)=C(3,2)=C(4,1)=C(6,2)=C(7,1)=C(9,2)=C(10,1)=C(12,2)=1
40 C(2,3)=C(5,3)=C(8,3)=C(11,3)=-1
50 DISP "DIMENSÖES DA PLACA DIR X, DIR Y";
60 INPUT A,B
70 A=A/2
80 B=B/2
90 A2=A*A

100 A3=A*A*A
110 B2=B*B
120 B3=B*B*B
130 C(1,2)=C(4,2)=C(8,5)=C(11,5)=-A
140 C(3,5)=C(1,3)=C(10,3)=C(12,5)=-B
150 C(1,4)=C(4,4)=C(7,4)=C(10,4)=A2
160 C(1,5)=C(7,5)=A*B
170 C(3,9)=C(1,6)=C(4,6)=C(6,9)=C(7,6)=C(9,9)=C(10,6)=C(12,9)=B2
180 C(1,7)=C(4,7)=C(8,11)=C(11,11)=-A3
190 C(1,8)=C(10,8)=-A2*B
200 C(1,9)=C(4,9)=-A*B2
210 C(3,12)=C(1,10)=C(10,10)=C(12,12)=-B3

220 C(1,11)=C(7,11)=A3*B
230 C(1,12)=C(7,12)=A*B3
240 C(2,5)=C(5,5)=C(7,2)=C(10,2)=A
250 C(2,6)=C(11,6)=2*B
260 C(2,8)=C(15,8)=C(8,8)=C(11,8)=-A2
270 C(2,9)=C(6,9)=C(10,9)=C(12,8)=-2*A*B
280 C(2,10)=C(5,10)=C(8,10)=C(11,10)=-3*B2
290 C(2,11)=C(7,7)=C(10,7)=C(5,11)=A3
300 C(2,12)=C(5,12)=3*A*B2
310 C(3,4)=C(6,4)=-2*A
320 C(3,7)=C(6,7)=C(9,7)=C(12,7)=3*A2
330 C(3,8)=C(5,9)=C(9,8)=C(11,9)=2*A*B
340 C(3,11)=C(12,11)=-3*A2*B
350 C(4,3)=C(6,5)=C(7,3)=C(9,5)=B
360 C(4,5)=C(10,5)=-A*B
370 C(4,8)=C(7,8)=A2*B
380 C(4,10)=C(6,12)=C(7,10)=C(9,12)=B3
390 C(4,11)=C(10,11)=-A3*B

400 C(4,12)=C(10,12)=-A*B3
410 C(5,6)=C(8,6)=-2*B
420 C(6,11)=C(9,11)=3*A2*B
430 C(7,9)=C(10,9)=A*B2
440 C(8,12)=C(11,12)=-3*A*B2
450 C(9,4)=C(12,4)=2*A
470 MAT C=INV(C)
490 DISP "NO' I: W, TX, TY";
500 INPUT D(1),D(2),D(3)
510 DISP "NO' J: W, TX, TY";
520 INPUT D(4),D(5),D(6)
530 DISP "NO' L: W, TX, TY";
540 INPUT D(7),D(8),D(9)
550 DISP "NO' K: W, TX, TY";

560 INPUT D(10),D(11),D(12)
570 WRITE (15,580)

580 FORMAT "NO'",7X,"W",14X,"TX",14X,"TY"
590 FOR I=1 TO 10 STEP 3
600 WRITE (15,610)(I+2)/3,D(I),D(I+1),D(I+2)
610 FORMAT F2.0,F11.5,2F16.5

620 NEXT I
630 DISP "COEF. DE POISSON";
640 INPUT N
650 DISP "MODULO DE ELASTICIDADE";
660 INPUT E
670 DISP "ESPESSURA DA PLACA";
680 INPUT T
690 WRITE (15,700)N,E," ESPESSURA DA PLACA",T
700 FORMAT "COEF. DE POISSON",F7.3," E",F12.0,F7.4
710 D=E*T^3/(12*(1-N^2))
720 MAT A=C*D
730 DISP "X,Y (COORD. NORMALIZADAS)";
740 INPUT X,Y

```

```

750 X=X+A
760 Y=Y*B
770 M1=A[4]+N*A[6]+(3*A[7]+N*A[9])*X+(A[6]+3*N*A[10])*Y
780 M1=-2*D*(M1+3*(A[11]+N*A[12])*X*Y)
790 M2=A[6]+N*A[4]+(A[9]+3*N*A[7])*X+(3*A[10]+N*A[8])*Y
800 M2=-2*D*(M2+3*(A[12]+N*A[11])*X*Y)
810 M3=D*(1-N)*(A[5]+2*(A[8]*X+A[9]*Y))+3*(A[11]*X^2+A[12]*Y^2)
820 Q1=-D*(6*A[7]+2*A[9]+6*(A[11]+A[12])*Y)
830 Q2=-D*(6*A[10]+2*A[8]+6*(A[12]+D[11])*X)
840 WRITE (15,850)"COORD. X=",X," Y=",Y,M1," MY=",M2,M3,Q1,Q2
850 FORMAT 2F8.2,/, "MX=",2F10.4," MXY=",F10.4,/, "QX=",F10.4,
" QY=",F10.4
860 W=A[1]+A[2]*X+A[3]*Y+A[4]*X^2+A[5]*X*Y+A[6]*Y^2+A[7]*X^3
870 W=W+A[8]*X^2*Y+A[9]*X*Y^2+A[10]*Y^3+A[11]*X^3*Y+A[12]*X*Y^3
880 T=A[2]+2*A[4]*X+A[5]*Y+3*A[7]*X^2+2*A[8]*X*Y+A[9]*Y^2+3*
A[11]*X^2*Y+A[12]*Y^3
890 U=-A[3]-A[5]*X-2*A[6]*Y-A[8]*X^2-2*A[9]*X*Y-3*Y^2*(A[10]+
A[12]*X)-A[11]*X^3
900 WRITE (15,910)W,U,T
910 FORMAT "W =",F10.4," TX =",F10.4," TY =",F10.4,2/
920 GOTO 730

```

P2. ELEMENTO TRIANGULAR COM FUNÇÃO POLINOMIAL COM MATRIZ \underline{C} EXPLÍCITA

O programa calcula os coeficientes do campo de deslocamentos em um elemento de placa com o formato de um triângulo retângulo. O sistema de eixos tem origem no vértice do ângulo de 90° . A matriz \underline{C} é definida algebricamente.

Entrada

- Linha 60: dimensões dos catetos a e b
- Linha 260: deslocamentos nodais w , θ_x e θ_y nos vértices i, j e l
- Linha 350: ν (coeficiente de Poisson)
- Linha 370: E (módulo de elasticidade)
- Linha 390: espessura da placa t
- Linha 450: coordenadas x e y do ponto estudado.

Saída

- Linha 930: M_x , M_y , M_{xy} , V_x , V_y
- Linha 950: w_p , θ_{xp} , θ_{yp}

Os valores de $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$, etc, são calculados por diferenças finitas.

```

10 DIM C(9,9),A(9),D(9),H(25)
20 MAT C=ZER
25 PRINT "PLACA TRIANGULAR FUNCAO POLINOMIAL C EXPLICITADO"
30 C(1,1)=C(3,2)=C(4,1)=C(6,2)=C(7,1)=C(9,2)=1
40 C(2,3)=C(5,3)=C(8,3)=-1
50 DISP "DIM. TRIANG. RET. DIR X, DIR Y";
60 INPUT A,B
70 A2=A*A
80 B2=B*B
90 A3=A2*A
100 B3=B2*B
110 C(4,2)=A
120 C(4,4)=A2
130 C(4,7)=A3
140 C(5,5)=-A
150 C(5,8)=-A2
160 C(6,4)=2*A
170 C(6,7)=3*A2
180 C(7,3)=C(9,5)=B
190 C(7,6)=C(9,8)=B2
200 C(7,9)=B3

210 C(8,6)=-2*B
220 C(8,9)=-3*B2
230 MAT C=INV(C)
240 FOR I=1 TO 3
250 DISP "NO";I;" W, TX, TY"
260 INPUT D(3*I-2),D(3*I-1),D(3*I)
270 NEXT I
280 WRITE (15,290)
290 FORMAT "NO",9X,"W",14X,"TX",14X,"TY"
300 FOR I=1 TO 7 STEP 3
310 WRITE (15,320)(I+2)/3,D(I),D(I+1),D(I+2)
320 FORMAT F2.0,F13.8,2F16.9
330 NEXT I
340 DISP "COEF. DE POISSON";
350 INPUT N
360 DISP "MODULO DE ELASTICIDADE";
370 INPUT E
380 DISP "ESPESSURA DA PLACA";
390 INPUT T
400 WRITE (15,410)N,E," ESPESSURA DA PLACA",T
410 FORMAT "COEF. DE POISSON",F7.3," E",F12.0,F7.4
420 D=E*T^3/(12*(1-N^2))
430 MAT A=C*D
435 MAT PRINT A;
440 DISP "X, Y";
450 INPUT X0,Y0
460 Y=Y0
470 H(13)=FNAX0
480 Q=A/1E-03
490 H(1)=FNA(X0+Q/2)
500 H(2)=FNA(X0-Q/2)
510 H(5)=FNA(X0+Q)
520 H(6)=FNA(X0-Q)
530 H(14)=FNA(X0+1.5*Q)
540 H(15)=FNA(X0-1.5*Q)
550 Y=Y0+Q/2
560 H(3)=FNA(X0)
570 H(9)=FNA(X0+Q/2)
580 H(11)=FNA(X0-Q/2)
590 H(22)=FNA(X0+Q)
600 H(23)=FNA(X0-Q)
610 Y=Y0-Q/2
620 H(4)=FNA(X0)
630 H(10)=FNA(X0+Q/2)
640 H(12)=FNA(X0-Q/2)
650 H(24)=FNA(X0+Q)
660 H(25)=FNA(X0-Q)
670 Y=Y0+Q
680 H(7)=FNAX0
690 H(16)=FNA(X0+Q/2)
700 H(18)=FNA(X0-Q/2)
710 Y=Y0-Q
720 H(8)=FNA(X0)
730 H(17)=FNA(X0+Q/2)

```

```

740 H[19]=FNA(X0-Q/2)
750 Y=Y0+1.5*Q
760 H[20]=FNAX0
770 Y=Y0-1.5*Q
780 H[21]=FNAX0
790 F1=(H[1]-H[2])/Q
800 F2=(H[3]-H[4])/Q
810 F3=(H[5]-2*H[13]+H[6])/Q/Q
820 F4=(H[7]-2*H[13]+H[8])/Q/Q
830 F5=(H[9]-H[10]-H[11]+H[12])/Q/Q
840 F6=(H[14]-3*H[1]+3*H[2]-H[15])/(Q^3)
850 F7=(H[16]-2*H[1]+H[17]-H[18]+2*H[2]-H[19])/(Q^3)
860 F8=(H[20]-3*H[3]+3*H[4]-H[21])/(Q^3)
870 F9=(H[22]-2*H[3]+H[23]-H[24]+2*H[4]-H[25])/(Q^3)
880 M1=-D*(F3+N*F4)
890 M2=-D*(F4+N*F3)
900 M3=-D*(1-N)*F5
910 Q1=-D*(F6+F7)
920 Q2=-D*(F8+F9)
930 WRITE (15,940)"COORD. X=",X0," Y=",Y0,M1," MY=",M2,M3,Q1,Q2
940 FORMAT 2F8.2,/, "MX=",2F10.4," MXY=",F10.4,/, "VX=",F10.4,
" VY",F10.4
950 WRITE (15,960)H[13],-F2,F1
960 FORMAT "W =",F10.4," TX =",F10.4," TY =",F10.4,2/
970 GOTO 440
980 DEF FNA(X)
990 W=A[1]+A[2]*X+A[3]*Y+A[4]*X^2+A[5]*X*Y+A[6]*Y^2
1000 RETURN W+A[7]*X^3+A[8]*(X^2*Y+X*Y^2)+A[9]*Y^3
1010 END

```

P3. ELEMENTO TRIANGULAR COM FUNÇÃO POLINOMIAL COM MATRIZ \underline{C} GERADA

O programa calcula os coeficientes do campo de deslocamentos em um elemento triangular de placa. Os termos da matriz \underline{C} são calculados por diferenças finitas. Os diferenciais de w também são calculados por diferenças finitas. O campo de deslocamentos é dado por uma função polinomial (equação (5.2)).

Entrada

- Linha 70: coordenadas dos vértices i, j e l
 Linha 420: deslocamentos nodais w, θ_x e θ_y nos vértices i, j e l
 Linha 510: ν (coeficiente de Poisson)
 Linha 530: E (módulo de elasticidade)
 Linha 550: espessura da placa t
 Linha 610: coordenadas x e y do ponto estudado.

Saída

- Linha 1080: $M_x, M_y, M_{xy}, V_x, V_y$
 Linha 1100: $w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}$.

```

10 DIM C(9,9),A(9),D(9),H(25),X(3),Y(3)
20 Q=1E-03
25 PRINT "PLACA TRIANGULAR FUNCAO POLINOMIAL C GERADO"
30 WRITE (15,40)
40 FORMAT "COORDENADAS DOS NOS",/, "NO" X Y"
50 FOR I=1 TO 3
60 DISP "COORD. NO";I;
70 INPUT X(I),Y(I)
80 WRITE (15,90)I,X(I),Y(I)

90 FORMAT F3.0,2F10.2
100 C(3*I-2,1)=FNBX(I)
110 C(3*I-2,2)=FN CX(I)
120 C(3*I-2,3)=FNDX(I)
130 C(3*I-2,4)=FNEX(I)
140 C(3*I-2,5)=FNFX(I)
150 C(3*I-2,6)=FNGX(I)
160 C(3*I-2,7)=FNHX(I)
170 C(3*I-2,8)=FNIX(I)
180 C(3*I-2,9)=FNJX(I)
190 C(3*I-1,1)=(FNK(Y(I))-FNK(Y(I)+Q))/Q
200 C(3*I-1,2)=(FNL(Y(I))-FNL(Y(I)+Q))/Q
210 C(3*I-1,3)=(FNM(Y(I))-FNM(Y(I)+Q))/Q
220 C(3*I-1,4)=(FNN(Y(I))-FNN(Y(I)+Q))/Q
230 C(3*I-1,5)=(FNO(Y(I))-FNO(Y(I)+Q))/Q
240 C(3*I-1,6)=(FNP(Y(I))-FNP(Y(I)+Q))/Q
250 C(3*I-1,7)=(FNQ(Y(I))-FNQ(Y(I)+Q))/Q
260 C(3*I-1,8)=(FNR(Y(I))-FNR(Y(I)+Q))/Q
270 C(3*I-1,9)=(FNS(Y(I))-FNS(Y(I)+Q))/Q
280 C(3*I,1)=(FNB(X(I)+Q)-FNB(X(I)))/Q
290 C(3*I,2)=(FNC(X(I)+Q)-FNC(X(I)))/Q
300 C(3*I,3)=(FND(X(I)+Q)-FND(X(I)))/Q
310 C(3*I,4)=(FNE(X(I)+Q)-FNE(X(I)))/Q
320 C(3*I,5)=(FNF(X(I)+Q)-FNF(X(I)))/Q
330 C(3*I,6)=(FNG(X(I)+Q)-FNG(X(I)))/Q
340 C(3*I,7)=(FNH(X(I)+Q)-FNH(X(I)))/Q
350 C(3*I,8)=(FNI(X(I)+Q)-FNI(X(I)))/Q
360 C(3*I,9)=(FNJ(X(I)+Q)-FNJ(X(I)))/Q
370 NEXT I
390 MAT C=INV(C)
400 FOR I=1 TO 3
410 DISP "NO";I;" W, TX, TY";
420 INPUT D(3*I-2),D(3*I-1),D(3*I)
430 NEXT I
440 WRITE (15,450)
450 FORMAT "NO",9X,"W",14X,"TX",14X,"TY"
460 FOR I=1 TO 7 STEP 3
470 WRITE (15,480)(I+2)/3,D(I),D(I+1),D(I+2)
480 FORMAT F2.0,F13.8,2F16.9
490 NEXT I
500 DISP "COEF. DE POISSON";
510 INPUT N
520 DISP "MODULO DE ELASTICIDADE";
530 INPUT E
540 DISP "ESPESSURA DA PLACA";
550 INPUT T
560 WRITE (15,570)N,E," ESPESSURA DA PLACA",T
570 FORMAT "COEF. DE POISSON",F7.3," E",F12.0,F7.4
580 D=E*T^3/(12*(1-N^2))
590 MAT A=C*D

595 MAT PRINT A;
600 DISP "X, Y";
610 INPUT X0,Y0
620 Y=Y0
630 H(13)=FNA(X0)
640 H(1)=FNA(X0+Q/2)
650 H(2)=FNA(X0-Q/2)
660 H(5)=FNA(X0+Q)
670 H(6)=FNA(X0-Q)
680 H(14)=FNA(X0+1.5*Q)
690 H(15)=FNA(X0-1.5*Q)
700 Y=Y0+Q/2
710 H(3)=FNA(X0)
720 H(9)=FNA(X0+Q/2)
730 H(11)=FNA(X0-Q/2)

```



```

740 H[22]=FNA(X0+Q)
750 H[23]=FNA(X0-Q)
760 Y=Y0-Q/2
770 H[4]=FNA(X0)
780 H[10]=FNA(X0+Q/2)
790 H[12]=FNA(X0-Q/2)
800 H[24]=FNA(X0+Q)
810 H[25]=FNA(X0-Q)
820 Y=Y0+Q
830 H[7]=FNAX0
840 H[16]=FNA(X0+Q/2)
850 H[18]=FNA(X0-Q/2)
860 Y=Y0-Q
870 H[8]=FNA(X0)
880 H[17]=FNA(X0+Q/2)
890 H[19]=FNA(X0-Q/2)
900 Y=Y0+1.5*Q
910 H[20]=FNAX0
920 Y=Y0-1.5*Q
930 H[21]=FNAX0
940 F1=(H[1]-H[2])/Q
950 F2=(H[3]-H[4])/Q
960 F3=(H[5]-2*H[13]+H[6])/Q/Q
970 F4=(H[7]-2*H[13]+H[8])/Q/Q
980 F5=(H[9]-H[10]-H[11]+H[12])/Q/Q
990 F6=(H[14]-3*H[1]+3*H[2]-H[15])/Q^3
1000 F7=(H[16]-2*H[1]+H[17]-H[18]+2*H[2]-H[19])/Q^3
1010 F8=(H[20]-3*H[3]+3*H[4]-H[21])/Q^3
1020 F9=(H[22]-2*H[3]+H[23]-H[24]+2*H[4]-H[25])/Q^3
1030 M1=-D*(F3+N*F4)
1040 M2=-D*(F4+N*F3)
1050 M3=-D*(1-N)*F5
1060 Q1=-D*(F6+F7)
1070 Q2=-D*(F8+F9)
1080 WRITE (15,1090)"COORD. X=",X0," Y=",Y0,M1," MY=",M2,M3,
      Q1,Q2
1090 FORMAT 2F8 2.,"MX=",2F10.4," MXY=",F10.4,/, "YX=",F10.4,
      " Y Y",F10.4
1100 WRITE (15,(110)H[13],-F2,F1
1110 FORMAT "W =",F10.4," TX =",F10.4," TY =",F10.4,2/
1120 GOTO 600
1130 DEF FNA(X)
1140 W=A[1]+A[2]*X+A[3]*Y+A[4]*X^2+A[5]*X*Y+A[6]*Y^2
1150 RETURN W+A[7]*X^3+A[8]*(X^2*Y+X*Y^2)+A[9]*Y^3
1160 DEF FNB(X)=1
1170 DEF FNC(X)=X
1180 DEF FND(X)=Y[I]
1190 DEF FNE(X)=X^2
1200 DEF FNF(X)=X*Y[I]
1210 DEF FNG(X)=Y[I]^2
1220 DEF FNH(X)=X^3
1230 DEF FNI(X)=X^2*Y[I]+X*Y[I]^2
1240 DEF FNJ(X)=Y[I]^3
1250 DEF FNK(Y)=1
1260 DEF FNL(Y)=X[I]
1270 DEF FNM(Y)=Y
1280 DEF FNN(Y)=X[I]^2
1290 DEF FNO(Y)=X[I]*Y
1300 DEF FNP(Y)=Y^2
1310 DEF FNQ(Y)=X[I]^3
1320 DEF FNR(Y)=X[I]^2*Y+X[I]*Y^2
1330 DEF FNS(Y)=Y^3
1340 END

```

P4. ELEMENTO TRIANGULAR COM FORMULAÇÃO EM COORDENADAS TRIANGULARES

O programa calcula os coeficientes do campo de deslocamentos dado por uma função em coordenadas triangulares (equação (5.11)) para um elemento triangular de placa. Os termos da matriz \underline{C} são calculados por diferenças finitas. Os diferenciais de w também são calculados por diferenças finitas.

Entrada

Linha 70: coordenadas dos vértices i, j e l
 Linha 540: deslocamentos nodais w, θ_x e θ_y nos vértices i, j e l
 Linha 630: ν (coeficiente de Poisson)
 Linha 650: E (módulo de elasticidade)
 Linha 670: espessura da placa t
 Linha 730: coordenadas x e y do ponto estudado.

Saída

Linha 1200: $M_x, M_y, M_{xy}, V_x, V_y$
 Linha 1220: $w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}$

```

10 DIM C[9,9],A[9],D[9],H[25],X[3],Y[3]
20 Q=1E-03
30 WRITE (15,40)
40 FORMAT "COORDENADAS DOS NOS",/, "NO'",7X,"X",9X,"Y"
50 FOR I=1 TO 3
60 DISP "COORD. NO'";I
70 INPUT X[I],Y[I]
80 WRITE (15,90)I,X[I],Y[I]
90 FORMAT F3.0,2F10.2
100 NEXT I
110 A1=X[2]*Y[3]-X[3]*Y[2]
120 B1=Y[2]-Y[3]
130 C1=X[3]-X[2]
140 A2=X[3]*Y[1]-X[1]*Y[3]
150 B2=Y[3]-Y[1]
160 C2=X[1]-X[3]
170 A3=X[1]*Y[2]-X[2]*Y[1]
180 B3=Y[1]-Y[2]
190 C3=X[2]-X[1]
200 A9=X[2]*Y[3]+X[1]*Y[2]+X[3]*Y[1]-X[2]*Y[1]-X[3]*Y[2]-
X[1]*Y[3]
210 FOR I=1 TO 3
220 C[3*I-2,1]=FNBX[I]
230 C[3*I-2,2]=FNCX[I]
240 C[3*I-2,3]=FNDX[I]
250 C[3*I-2,4]=FNEX[I]
260 C[3*I-2,5]=FNFx[I]
270 C[3*I-2,6]=FNGX[I]
280 C[3*I-2,7]=FNHX[I]
290 C[3*I-2,8]=FNIX[I]
300 C[3*I-2,9]=FNJX[I]
310 C[3*I-1,1]=(FNK(Y[I])-FNK(Y[I]+Q))/Q
320 C[3*I-1,2]=(FNL(Y[I])-FNL(Y[I]+Q))/Q
330 C[3*I-1,3]=(FNM(Y[I])-FNM(Y[I]+Q))/Q
340 C[3*I-1,4]=(FNN(Y[I])-FNN(Y[I]+Q))/Q
350 C[3*I-1,5]=(FNO(Y[I])-FNO(Y[I]+Q))/Q
360 C[3*I-1,6]=(FNP(Y[I])-FNP(Y[I]+Q))/Q
370 C[3*I-1,7]=(FNG(Y[I])-FNG(Y[I]+Q))/Q
380 C[3*I-1,8]=(FNR(Y[I])-FNR(Y[I]+Q))/Q
390 C[3*I-1,9]=(FNS(Y[I])-FNS(Y[I]+Q))/Q
400 C[3*I,1]=(FNB(X[I]+Q)-FNB(X[I]))/Q
410 C[3*I,2]=(FNC(X[I]+Q)-FNC(X[I]))/Q
420 C[3*I,3]=(FND(X[I]+Q)-FND(X[I]))/Q
430 C[3*I,4]=(FNE(X[I]+Q)-FNE(X[I]))/Q
440 C[3*I,5]=(FNF(X[I]+Q)-FNF(X[I]))/Q
450 C[3*I,6]=(FNG(X[I]+Q)-FNG(X[I]))/Q
460 C[3*I,7]=(FNH(X[I]+Q)-FNH(X[I]))/Q
470 C[3*I,8]=(FNI(X[I]+Q)-FNI(X[I]))/Q
480 C[3*I,9]=(FNJ(X[I]+Q)-FNJ(X[I]))/Q
490 NEXT I
510 MAT C=INV(C)
520 FOR I=1 TO 3
530 DISP "NO'";I;" W, TX, TY";
540 INPUT D[3*I-2],D[3*I-1],D[3*I]
550 NEXT I
560 WRITE (15,570)
570 FORMAT "NO'",9X,"W",14X,"TX",14X,"TY"
580 FOR I=1 TO 7 STEP 3
590 WRITE (15,600)(I+2)/3,D[I],D[I+1],D[I+2]
600 FORMAT F2.0,F13.8,2F16.9
610 NEXT I
620 DISP "COEF. DE POISSON";
630 INPUT N
640 DISP "MODULO DE ELASTICIDADE";
650 INPUT E
660 DISP "ESPESSURA DA PLACA";
670 INPUT T
680 WRITE (15,690)N,E," ESPESSURA DA PLACA",T
690 FORMAT "COEF. DE POISSON",F7.3," E",F12.0,F7.4
700 D=E*T^3/(12*(1-N^2))
710 MAT A=C*D
715 MAT PRINT A;
720 DISP "X, Y";
730 INPUT X0,Y0

```

```

740 Y=Y0
750 HC 13J=FNA(X0)

760 HC 1J=FNA(X0+Q/2)
770 HC 2J=FNA(X0-Q/2)
780 HC 5J=FNA(X0+Q)
790 HC 6J=FNA(X0-Q)
800 HC 14J=FNA(X0+1.5*Q)
810 HC 15J=FNA(X0-1.5*Q)
820 Y=Y0+Q/2
830 HC 3J=FNA(X0)
840 HC 9J=FNA(X0+Q/2)
850 HC 11J=FNA(X0-Q/2)
860 HC 22J=FNA(X0+Q)
870 HC 23J=FNA(X0-Q)
880 Y=Y0-Q/2
890 HC 4J=FNA(X0)
900 HC 10J=FNA(X0+Q/2)
910 HC 12J=FNA(X0-Q/2)
920 HC 24J=FNA(X0+Q)
930 HC 25J=FNA(X0-Q)
940 Y=Y0+Q
950 HC 7J=FNA(X0)
960 HC 16J=FNA(X0+Q/2)
970 HC 18J=FNA(X0-Q/2)
980 Y=Y0-Q
990 HC 8J=FNA(X0)
1000 HC 17J=FNA(X0+Q/2)
1010 HC 19J=FNA(X0-Q/2)
1020 Y=Y0+1.5*Q
1030 HC 20J=FNA(X0)
1040 Y=Y0-1.5*Q
1050 HC 21J=FNA(X0)
1060 F1=(HC 1J-HC 2J)/Q
1070 F2=(HC 3J-HC 4J)/Q
1080 F3=(HC 5J-2*HC 13J+HC 6J)/Q/Q
1090 F4=(HC 7J-2*HC 13J+HC 8J)/Q/Q
1100 F5=(HC 9J-HC 10J-HC 11J+HC 12J)/Q/Q
1110 F6=(HC 14J-3*HC 1J+3*HC 2J-HC 15J)/(Q^3)
1120 F7=(HC 16J-2*HC 1J+HC 17J-HC 18J+2*HC 2J-HC 19J)/(Q^3)
1130 F8=(HC 20J-3*HC 3J+3*HC 4J-HC 21J)/(Q^3)
1140 F9=(HC 22J-2*HC 3J+HC 23J-HC 24J+2*HC 4J-HC 25J)/(Q^3)
1150 M1=-D*(F3+N*F4)
1160 M2=-D*(F4+N*F3)
1170 M3=-D*(1-N)*F5
1180 Q1=-D*(F6+F7)
1190 Q2=-D*(F8+F9)
1200 WRITE (15,1210)"COORD. X=",X0," Y=",Y0,M1," MY=",M2,M3,
Q1,Q2
1210 FORMAT 2F8.2,/, "NX=",2F10.4," MXY=",F10.4,/, "VX=",F10.4,
" VY=",F10.4
1220 WRITE (15,1230)HC 13J,-F2,F1
1230 FORMAT "W =",F10.4," TX =",F10.4," TY =",F10.4;2/
1240 GOTO 720
1250 DEF FNB(X)=(A1+B1*X+C1*Y[I J])/A9
1260 DEF FNC(X)=(A2+B2*X+C2*Y[I J])/A9
1270 DEF FND(X)=(A3+B3*X+C3*Y[I J])/A9
1280 DEF FNE(X)=FNC(X)^2*FNB(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1290 DEF FNF(X)=FND(X)^2*FNC(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1300 DEF FNG(X)=FNB(X)^2*FND(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1310 DEF FNH(X)=FNE(X)^2*FNC(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1320 DEF FNI(X)=FNC(X)^2*FND(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1330 DEF FNJ(X)=FND(X)^2*FNB(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1340 DEF FNK(Y)=(A1+B1*Y[I J]+C1*Y)/A9
1350 DEF FNL(Y)=(A2+B2*Y[I J]+C2*Y)/A9
1360 DEF FNM(Y)=(A3+B3*Y[I J]+C3*Y)/A9
1370 DEF FNN(Y)=FNL(Y)^2*FNK(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1380 DEF FNO(Y)=FNM(Y)^2*FNL(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1390 DEF FNP(Y)=FNK(Y)^2*FNM(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1400 DEF FNQ(Y)=FNK(Y)^2*FNL(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1410 DEF FNR(Y)=FNL(Y)^2*FNM(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1420 DEF FNS(Y)=FNM(Y)^2*FNK(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1430 DEF FNA(X)
1440 L1=(A1+B1*X+C1*Y)/A9
1450 L2=(A2+B2*X+C2*Y)/A9
1460 L3=1-L1-L2
1470 L4=0.5*L1*L2*L3
1480 W=A[1]*L1+A[2]*L2+A[3]*L3+A[4]*(L2^2*L1+L4)+A[5]*(L3^2*L2+L4)
1490 W=W+A[6]*(L1^2*L3+L4)+A[7]*(L1^2*L2+L4)+A[8]*(L2^2*L3+L4)
1500 RETURN W+A[9]*(L3^2*L1+L4)
1510 END

```

P5. ELEMENTO TRIANGULAR COM FORMULAÇÃO EM COORDENADAS TRIANGULARES E DERIVADAS NORMAIS NOS PONTOS MÉDIOS DOS LADOS

O programa calcula os coeficientes do campo de deslocamentos dado por uma função em coordenadas triangulares com singularidades nodais, para um elemento triangular de placa (item 5.3). Os termos da matriz \underline{C} são calculados por diferenças finitas. Os diferenciais de w também são calculados por diferenças finitas.

Entrada (1a. parte)

Linha 60: coordenadas dos vértices i, j e l

Entrada (2a. parte)

Linha 540: deslocamentos nodais w, θ_x e θ_y nos vértices i, j e l

Linha 630: ν (coeficiente de Poisson)

Linha 650: E (módulo de elasticidade) *

Linha 670: espessura da placa t

Linha 730: coordenadas x, y do ponto estudado.

Saída (2a. parte)

Linha 1200: $M_x, M_y, M_{xy}, V_x, V_y$

Linha 1220: $w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}$

```

10 DIM C[12,12],A[12],D[12],H[25],X[6],Y[6],E[3],F[3],
    GS[3],IS[3]
20 Q=1E-03
22 DEG
30 WRITE (15,40)
40 FORMAT "COORDENADAS DOS NOS",/, "NO'",9X,"X",11X,"Y"
50 FOR I=1 TO 3
60 DISP "COORD. NO'";I;
70 INPUT X[I],Y[I]
80 WRITE (15,90)I,X[I],Y[I]
90 FORMAT F3.0,2F10.4
100 NEXT I
110 FOR I=1 TO 3
120 I2=I+1-3*(I>2)
130 I3=I+2-3*(I>1)
140 E[I]=X[I2]*Y[I3]-X[I3]*Y[I2]
150 F[I]=Y[I2]-Y[I3]
160 G[I]=X[I3]-X[I2]
170 NEXT I
200 A9=X[2]*Y[3]+X[1]*Y[2]+X[3]*Y[1]-X[2]*Y[1]-X[3]*Y[2]-X[1]*Y[3]
210 FOR I=1 TO 3
220 C[3*I-2,1]=FNBX[I]
230 C[3*I-2,2]=FNCTX[I]
240 C[3*I-2,3]=FNDX[I]
250 C[3*I-2,4]=FNEX[I]
260 C[3*I-2,5]=FNFX[I]
270 C[3*I-2,6]=FNGX[I]
280 C[3*I-2,7]=FNHX[I]
290 C[3*I-2,8]=FNIX[I]
300 C[3*I-2,9]=FNJX[I]
302 C[3*I-2,10]=0
304 C[3*I-2,11]=0
306 C[3*I-2,12]=0
310 C[3*I-1,1]=(FNKY[I]-FNK(Y[I]+Q))/Q
320 C[3*I-1,2]=(FNLY[I]-FNL(Y[I]+Q))/Q
330 C[3*I-1,3]=(FNMY[I]-FNM(Y[I]+Q))/Q
340 C[3*I-1,4]=(FNXY[I]-FNN(Y[I]+Q))/Q
350 C[3*I-1,5]=(FNOY[I]-FNO(Y[I]+Q))/Q
360 C[3*I-1,6]=(FNPY[I]-FNP(Y[I]+Q))/Q
370 C[3*I-1,7]=(FNQY[I]-FNQ(Y[I]+Q))/Q
380 C[3*I-1,8]=(FNRY[I]-FNR(Y[I]+Q))/Q
390 C[3*I-1,9]=(FNSY[I]-FNS(Y[I]+Q))/Q
392 C[3*I-1,10]=-FNX(Y[I]+Q)/Q
394 C[3*I-1,11]=-FNY(Y[I]+Q)/Q
396 C[3*I-1,12]=-FNZ(Y[I]+Q)/Q
400 C[3*I,1]=(FNB(X[I]+Q)-FNBX[I])/Q
410 C[3*I,2]=(FNC(X[I]+Q)-FNCTX[I])/Q
420 C[3*I,3]=(FND(X[I]+Q)-FNDX[I])/Q
430 C[3*I,4]=(FNE(X[I]+Q)-FNEX[I])/Q
440 C[3*I,5]=(FNF(X[I]+Q)-FNFX[I])/Q
450 C[3*I,6]=(FNG(X[I]+Q)-FNGX[I])/Q
460 C[3*I,7]=(FNH(X[I]+Q)-FNHX[I])/Q
470 C[3*I,8]=(FNI(X[I]+Q)-FNIX[I])/Q
480 C[3*I,9]=(FNJ(X[I]+Q)-FNJX[I])/Q
482 C[3*I,10]=FNT(X[I]+Q)/Q
484 C[3*I,11]=FNU(X[I]+Q)/Q
486 C[3*I,12]=FNV(X[I]+Q)/Q
490 NEXT I
495 GOTO 1520
1250 DEF FNB(X)=(E[1]+F[1]*X+G[1]*Y[I])/A9
1260 DEF FNC(X)=(E[2]+F[2]*X+G[2]*Y[I])/A9
1270 DEF FND(X)=(E[3]+F[3]*X+G[3]*Y[I])/A9
1280 DEF FNE(X)=FNC(X)^2*FNB(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1290 DEF FNF(X)=FND(X)^2*FNC(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1300 DEF FNG(X)=FNB(X)^2*FND(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1310 DEF FNH(X)=FNB(X)^2*FNC(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1320 DEF FNI(X)=FNC(X)^2*FND(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1330 DEF FNJ(X)=FND(X)^2*FNB(X)+0.5*FNB(X)*FNC(X)*FND(X)
1331 DEF FNT(X)
1332 R=(FNB(X)+FNC(X))*(FNB(X)+FND(X))
1333 IF R=0 THEN 1343
1334 RETURN FNB(X)*(FNC(X)*FND(X))^2/R
1335 DEF FNU(X)
1336 R=(FNB(X)+FNC(X))*(FNC(X)+FND(X))
1337 IF R=0 THEN 1343
1338 RETURN FNC(X)*(FNB(X)*FND(X))^2/R
1339 DEF FNV(X)

```

```

1340 R=(FNB(X)+FND(X))*(FNC(X)+FND(X))
1341 IF R=0 THEN 1343
1342 RETURN FND(X)*(FNB(X)*FNC(X))^2/R
1343 RETURN 0
1345 DEF FNK(Y)=(E[1]+F[1]*X[I]+G[1]*Y)/A9
1350 DEF FNL(Y)=(E[2]+F[2]*X[I]+G[2]*Y)/A9
1360 DEF FNM(Y)=(E[3]+F[3]*X[I]+G[3]*Y)/A9
1370 DEF FNN(Y)=FNL(Y)^2*FNK(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1380 DEF FNO(Y)=FNM(Y)^2*FNL(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1390 DEF FNP(Y)=FHK(Y)^2*FNM(Y)+0.5*FHK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1400 DEF FNQ(Y)=FNK(Y)^2*FNL(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1410 DEF FNR(Y)=FHL(Y)^2*FNM(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1420 DEF FNS(Y)=FNM(Y)^2*FNK(Y)+0.5*FNK(Y)*FNL(Y)*FNM(Y)
1422 DEF FNX(Y)
1424 R=(FNK(Y)+FNL(Y))*(FNK(Y)+FNM(Y))
1426 IF R=0 THEN 1343
1428 RETURN FNK(Y)*(FNL(Y)*FNM(Y))^2/R
1430 DEF FNY(Y)
1432 R=(FNK(Y)+FNL(Y))*(FNL(Y)+FNM(Y))
1434 IF R=0 THEN 1343
1436 RETURN FNL(Y)*(FNK(Y)*FNM(Y))^2/R
1438 DEF FNZ(Y)
1440 R=(FNK(Y)+FNM(Y))*(FNL(Y)+FNM(Y))
1442 IF R=0 THEN 1343
1444 RETURN FNM(Y)*(FNK(Y)*FNL(Y))^2/R
1520 FOR I=4 TO 6
1530 I2=I-2-3*(I>5)
1540 I3=I-1-3*(I>4)
1550 XI[I]=(XI[I2]+XI[I3])/2
1560 Y[I]=(Y[I2]+Y[I3])/2
1570 IF F[I-3]=0 THEN 1600
1580 I[I-3]=ATN(G[I-3]/F[I-3])
1590 GOTO 1605
1600 I[I-3]=90
1605 C=COSI[I-3]
1610 S=SINI[I-3]
1620 C[6+I,1]=(FNK(Y[I]+Q)-FNKY[I])/Q*S
1630 C[6+I,2]=(FNL(Y[I]+Q)-FNLY[I])/Q*S
1640 C[6+I,3]=(FNM(Y[I]+Q)-FNMY[I])/Q*S
1650 C[6+I,4]=(FNN(Y[I]+Q)-FNNY[I])/Q*S
1660 C[6+I,5]=(FNO(Y[I]+Q)-FNOY[I])/Q*S
1670 C[6+I,6]=(FNP(Y[I]+Q)-FNPY[I])/Q*S
1680 C[6+I,7]=(FNQ(Y[I]+Q)-FNQY[I])/Q*S
1690 C[6+I,8]=(FNR(Y[I]+Q)-FNRY[I])/Q*S
1700 C[6+I,9]=(FNS(Y[I]+Q)-FNSY[I])/Q*S
1710 C[6+I,10]=(FNX(Y[I]+Q)-FNXY[I])/Q*S
1720 C[6+I,11]=(FNY(Y[I]+Q)-FNYY[I])/Q*S
1730 C[6+I,12]=(FNZ(Y[I]+Q)-FNZY[I])/Q*S
1740 C[6+I,1]=(C[6+I,1]+(FNB(X[I]+Q)-FNBX[I])/Q)*C
1750 C[6+I,2]=(C[6+I,2]+(FNC(X[I]+Q)-FNXC[I])/Q)*C
1760 C[6+I,3]=(C[6+I,3]+(FND(X[I]+Q)-FNDX[I])/Q)*C
1770 C[6+I,4]=(C[6+I,4]+(FNE(X[I]+Q)-FNEX[I])/Q)*C
1780 C[6+I,5]=(C[6+I,5]+(FNF(X[I]+Q)-FNFX[I])/Q)*C
1790 C[6+I,6]=(C[6+I,6]+(FNG(X[I]+Q)-FNGX[I])/Q)*C
1800 C[6+I,7]=(C[6+I,7]+(FNH(X[I]+Q)-FNHX[I])/Q)*C
1810 C[6+I,8]=(C[6+I,8]+(FNI(X[I]+Q)-FNIX[I])/Q)*C
1820 C[6+I,9]=(C[6+I,9]+(FNJ(X[I]+Q)-FNJX[I])/Q)*C
1830 C[6+I,10]=(C[6+I,10]+(FNT(X[I]+Q)-FNTX[I])/Q)*C
1840 C[6+I,11]=(C[6+I,11]+(FNU(X[I]+Q)-FNUX[I])/Q)*C
1850 C[6+I,12]=(C[6+I,12]+(FNV(X[I]+Q)-FNVX[I])/Q)*C
1860 NEXT I
1870 LINK 1

```

```

510 MAT C=INV(C)
520 FOR I=1 TO 3
530 DISP "NO'";I;" W, TX, TY";
540 INPUT D[3*I-2],D[3*I-1],D[3*I]
550 NEXT I
551 FOR I=1 TO 3
556 I2=(I+1-3*(I>2))*3
557 I3=(I+2-3*(I>1))*3
558 D[9+I]=COSI[I]*(D[I2]+D[I3])/2-SINI[I]*(D[I2-1]+D[I3-1])/2
559 NEXT I
560 WRITE (15,570)
570 FORMAT "NO'",9X,"W",14X,"TX",14X,"TY"
580 FOR I=1 TO 10 STEP 3
590 WRITE (15,600)(I+2)/3,D[I],D[I+1],D[I+2]
600 FORMAT F2.0,F13.8,2F16.9
610 NEXT I
620 DISP "COEF. DE POISSON";
630 INPUT N
640 DISP "MODULO DE ELASTICIDADE";
650 INPUT E
660 DISP "ESPESSURA DA PLACA";
670 INPUT T
680 WRITE (15,690)N,E," ESPESSURA DA PLACA",T
690 FORMAT "COEF. DE POISSON",F7.3," E",F12.0,F7.4
700 D=E*T^3/(12*(1-N^2))
710 MAT A=C*D
720 DISP "X, Y";
730 INPUT X0,Y0
740 Y=Y0
750 H[13]=FNAX0
760 H[1]=FNA(X0+Q/2)
770 H[2]=FNA(X0-Q/2)
780 H[5]=FNA(X0+Q)
790 H[6]=FNA(X0-Q)
800 H[14]=FNA(X0+1.5*Q)
810 H[15]=FNA(X0-1.5*Q)
820 Y=Y0+Q/2
830 H[3]=FNA(X0)
840 H[9]=FNA(X0+Q/2)
850 H[11]=FNA(X0-Q/2)
860 H[22]=FNA(X0+Q)
870 H[23]=FNA(X0-Q)
880 Y=Y0-Q/2
890 H[4]=FNA(X0)
900 H[10]=FNA(X0+Q/2)
910 H[12]=FNA(X0-Q/2)
920 H[24]=FNA(X0+Q)
930 H[25]=FNA(X0-Q)
940 Y=Y0+Q
950 H[7]=FNAX0
960 H[16]=FNA(X0+Q/2)
970 H[18]=FNA(X0-Q/2)
980 Y=Y0-Q
990 H[8]=FNA(X0)
1000 H[17]=FNA(X0+Q/2)
1010 H[19]=FNA(X0-Q/2)
1020 Y=Y0+1.5*Q
1030 H[20]=FNAX0
1040 Y=Y0-1.5*Q
1050 H[21]=FNAX0
1060 F1=(H[1]-H[2])/Q
1070 F2=(H[3]-H[4])/Q
1080 F3=(H[5]-2*H[13]+H[6])/Q/Q
1090 F4=(H[7]-2*H[13]+H[8])/Q/Q
1100 F5=(H[9]-H[10]-H[11]+H[12])/Q/Q
1110 F6=(H[14]-3*H[1]+3*H[2]-H[15])/Q^3
1120 F7=(H[16]-2*H[1]+H[17]-H[18]+2*H[2]-H[19])/Q^3
1130 F8=(H[20]-3*H[3]+3*H[4]-H[21])/Q^3
1140 F9=(H[22]-2*H[3]+H[23]-H[24]+2*H[4]-H[25])/Q^3
1150 M1=-D*(F3+N*F4)
1160 M2=-D*(F4+N*F3)
1170 M3=-D*(1-N)*F5
1180 Q1=-D*(F6+F7)
1190 Q2=-D*(F8+F9)

```



```

1200 WRITE (15,1210)"COORD. X=",X0," Y=",Y0,M1," MY=",M2,M3,
      Q1,Q2
1210 FORMAT (2F8.4,/, "MX=",2F10.4," MXY=",F10.4,/, "VX=",F10.4,
      " VY=",F10.4
1220 WRITE (15,1230)H1131,-F2,F1
1230 FORMAT ("N =",F10.4," TX =",F10.4," TY =",F10.4,2/ ;
1240 GOTO 720
1430 DEF FNA(X)
1440 L1=(E[1]+F[1]*X+G[1]*Y)/A9
1450 L2=(E[2]+F[2]*X+G[2]*Y)/A9
1460 L3=1-L1-L2
1470 L4=0.5*L1*L2*L3
1480 W=A[1]*L1+A[2]*L2+A[3]*L3+A[4]*(L2^2*L1+L4)+A[5]*(L3^2*L2+L4)
1490 W=W+A[6]*(L1^2*L3+L4)+A[7]*(L1^2*L2+L4)+A[8]*(L2^2*L3+L4)
1500 W=W+A[9]*(L3^2*L1+L4)
1510 R=(L1+L2)*(L1+L3)
1520 IF R=0 THEN 1540
1530 W=W+A[10]*L1*(L2*L3)^2/R
1540 R=(L1+L2)*(L2+L3)
1550 IF R=0 THEN 1570
1560 W=W+A[11]*L2*(L1*L3)^2/R
1570 R=(L1+L3)*(L2+L3)
1580 IF R=0 THEN 1600
1590 W=W+A[12]*L3*(L1*L2)^2/R
1600 RETURN W

```

BIBLIOGRAFIA

1. Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M. e Zienkiewicz, O. C. - "Triangular Elements in Bending — Conforming and Non-Conforming Solutions", Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Institute of Technology, Ohio, 1965.
2. Bogner, F. K., Fox, R. L., e Schmit, L. A. - "The Generation of Interelement-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae", Proc. of the Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Tech., Ohio, 1965.
3. Brebbia, C. A., e Ferrante, A. J. - "The Finite Element Technique", Editora da Universidade do Rio Grande do Sul, 1975.
4. Clough, R. W., e Tocher, J. L. - "Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plates in Bending", Proc. of the Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Tech., Ohio, 1965.
5. Gallagher, R. H. - "Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1975.
6. Ghali, A. e Neville, A. M. - "Structural Analysis — a Unified Classical and Matrix Approach", Chapman and Hall, 2a. ed., 1978.
7. Heins, C. P. - "Applied Plate Theory for the Engineer", Lexington Books, 1976.
8. Pian, T. H. H. - "Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses", Proc. of the Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Tech., Ohio, 1965.
9. Przemieniecki, J. S. - "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, 1968.

10. Timoshenko, S., e Goodier, J. N. - "Theory of Elasticity, 3a. ed., McGraw-Hill, 1970.
11. Timoshenko, S. e Woinowski-Krieger, S. - "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 2a. ed., 1958.
12. Venancio Filho, F., "Análise Matricial de Estruturas", Ed. Almeida Neves, Rio de Janeiro, 1975.
13. Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", 3a. ed., McGraw-Hill, 1977.