

HENRIQUE DE BRITTO COSTA

Engenheiro Civil , Escola Politécnica da USP , 1975

**SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS E  
O CÁLCULO DE TENSÕES DE ORIGEM TÉRMICA  
NAS ESTRUTURAS DE COMPORTAMENTO LINEAR.  
APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS**



Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da USP para a obtenção  
do Título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Victor M. <sup>omai</sup> de Souza Lima

Professor Titular

São Paulo

1983

Aos meus pais  
Luciano e Sylvania.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Victor M. de Souza Lima, pela sua orientação e apoio decisivos.

Ao Prof. Dr. Alfredo C.B. Gandolfo, pelo seu grande incentivo.

À Profa. Teresinha B.C. Higasi, pela revisão gramatical do texto.

À Regina Helena da Silva pela datilografia.

RESUMO

Este trabalho aborda os conceitos básicos da distribuição de temperaturas e cálculo das tensões térmicas nas estruturas de comportamento linear, utilizando o Método dos Resíduos Ponderados (variante de Galerkin).

De modo a sedimentar os conceitos, foram desenvolvidos exemplos de aplicação.

ABSTRACT

This paper deals with the basic concepts of both temperature distribution and thermal stresses evaluation in structures of linear behavior, by means of the Method of Weighted Residuals (Galerkin's approach).

Examples of application have been developed in order to sediment the concepts.

PREÂMBULO

Este trabalho é o terceiro de uma série que vêm sendo realizados na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, sob a orientação do Prof. Dr. Victor M. de Souza Lima, relacionados com o tema.

O primeiro foi desenvolvido pelo Eng<sup>o</sup> Wagner Pechi, e trata dos problemas térmicos nas estruturas de concreto massa; parte de uma introdução bastante geral dos métodos numéricos aplicados às duas fases distintas do problema, em seguida faz considerações sobre o efeito benéfico do comportamento viscoelástico do concreto sobre as tensões, e termina enfocando as propriedades térmicas do concreto e alguns problemas relacionados com as estruturas de concreto massa.

O segundo, feito pelo Eng<sup>o</sup> José Ismael Nogueira de Sá, entra mais a fundo na formulação teórica do problema, considerando a interação entre os efeitos térmicos e mecânicos, fazendo uma exposição da complexa teoria da Termomecânica. Para finalizar, simplifica o problema e considera a sua solução por meio do Método dos Elementos Finitos.

---

Neste terceiro trabalho retoma-se o problema da distribuição de temperaturas e do cálculo das tensões de origem térmica em estruturas de comportamento linear, fazendo-se uma aplicação sistemática do processo de Galerkin.

## ÍNDICE

	pag.
1. INTRODUÇÃO . . . . .	1.1
2. TENSÕES NUM CORPO SÓLIDO . . . . .	2.1
2.1 - Equações de Navier . . . . .	2.1
2.2 - Método dos Resíduos Ponderados . . . . .	2.11
2.3 - Método dos Elementos Finitos . . . . .	2.22
- Elemento Tetraédrico . . . . .	2.26
- Formulação Matricial . . . . .	2.27
- Critérios de Convergência. . . . .	2.36
3. ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES . . . . .	3.1
3.1 - Equações de Navier . . . . .	3.1
3.2 - Método dos Resíduos Ponderados . . . . .	3.7
3.3 - Método dos Elementos Finitos. . . . .	3.9
- Elemento Triangular . . . . .	3.9
- Formulação Matricial . . . . .	3.11
4. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS . . . . .	4.1
4.1 - Equação de Fourier . . . . .	4.1
4.2 - Método dos Resíduos Ponderados . . . . .	4.5

	pag.
4.3 - Método dos Elementos Finitos . . . . .	4.8
- Formulação Matricial . . . . .	4.9
- Regime Transitório . . . . .	4.11
5. EXEMPLO: DISTRIBUIÇÃO UNIDIMENSIONAL DE TEM- PERATURAS . . . . .	5.1
5.1 - Enunciado do Problema. . . . .	5.1
5.2 - Regime Permanente . . . . .	5.3
- Matriz $\underline{H}$ . . . . .	5.3
- Vetor $\underline{R}$ . . . . .	5.7
- Resolução do Sistema de Equações . . . . .	5.8
5.3 - Regime Transitório . . . . .	5.9
- Matriz $\underline{C}$ . . . . .	5.9
- Integração ao longo do tempo . . . . .	5.10
6. EXEMPLO: DISTRIBUIÇÃO BIDIMENSIONAL DE TEMPE- RATURAS . . . . .	6.1
6.1 - Regime Permanente (Solução Teórica). . . . .	6.1
6.2 - Regime Permanente (Solução Numérica) . . . . .	6.2
- Funções de Forma $\phi_i$ . . . . .	6.5
- Função $\phi_o$ . . . . .	6.10
- Matriz $\underline{H}$ . . . . .	6.12
- Vetor $\underline{R}$ . . . . .	6.14
- Resolução do Sistema de Equações . . . . .	6.15
- Campo de Temperaturas. . . . .	6.17



	Pag.
6.3 - Regime Transitório (Solução Numérica).	6.18
- Matriz $\underline{C}$ . . . . .	6.18
- Integração ao longo do tempo . . . . .	6.21
7. EXEMPLO: TENSÕES DE ORIGEM TÉRMICA . . . . .	7.1
7.1 - Campo de Deslocamentos . . . . .	7.2
- Matriz $\underline{K}$ . . . . .	7.7
- Vetor $\underline{f}$ . . . . .	7.9
- Resolução do Sistema de Equações . . . . .	7.14
- Campo de Deslocamentos . . . . .	7.15
7.2 - Campo de Deformações . . . . .	7.15
7.3 - Campo de Tensões. . . . .	7.16
ANEXO A . . . . .	A.1
ANEXO B . . . . .	B.1
BIBLIOGRAFIA. . . . .	I

## 1. INTRODUÇÃO

Um campo de temperaturas instalado no interior de um corpo sólido provoca, de um modo geral, o aparecimento de um campo de tensões auto-equilibrado no mesmo.

O problema da determinação destas tensões de origem térmica pode ser dividido em duas fases distintas:

- a) pesquisa do campo de temperaturas;
- b) cálculo das tensões.

Esta divisão estanque é possível, pelo fato de ser desprezível o calor gerado pelas deformações do corpo, permitindo que se desacoplem as duas teorias, nas aplicações práticas.

O equacionamento destes dois problemas, fisicamente tão distintos, já é de há muito conhecido. Entretanto, a sua solução analítica para o caso geral é extremamente difícil, senão impossível.

Apenas recentemente conseguiu-se a solução para ambos os problemas, embora de modo aproximado (pois trata-se de uma solução numérica). Isto foi devido a dois fatos: o progresso alcançado na construção dos computadores digitais e o surgimento do Método dos

Elementos Finitos, que nada mais é do que um método de solução numérica de sistemas de equações diferenciais.

O objetivo deste trabalho é o de mostrar, com o máximo possível de precisão e clareza, o aspecto conceitual da aplicação deste método na resolução dos problemas em pauta.

A introdução do Método dos Elementos Finitos pode ser feita de vários modos. Adotar-se-á o Método dos Resíduos Ponderados, conforme a variante de Galerkin, que em nossa opinião, é o mais claro fisicamente, e tem a vantagem de dispensar conhecimentos matemáticos mais avançados.

Na parte teórica apresentar-se-á inicialmente a determinação das tensões, supondo que o campo de temperaturas já é conhecido. Embora esta não seja a ordem natural de resolução do problema, será adotada por ser didaticamente mais interessante. Além disso, a determinação do campo de temperaturas envolve uma complicação adicional, que é o caso do regime transitório. Vale a pena observar que, historicamente, o Método dos Elementos Finitos nasceu da tentativa de resolução do problema da Elasticidade.

Por último, serão apresentados exemplos numéricos destinados a consolidar as idéias. A resolução destes exemplos será feita manualmente, para que se possam absorver melhor os conceitos nela envolvidos.

## 2. TENSÕES NUM CORPO SÓLIDO

### 2.1 - Equações de Navier

Na Teoria da Elasticidade linear, para um material homogêneo e isótropo, as equações constitutivas se escrevem como:

$$\epsilon_x = \alpha T + \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \alpha T + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \alpha T + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

As equações acima expressam a Lei de Hooke para o material considerado. O termo  $\alpha T$  corresponde à deformação inicial devida à tem-

peratura. A variação térmica num elemento infinitesimal de um material homogêneo e isotrópico não produz distorções, apenas alongamentos.

Ao se escreverem as tensões em função das deformações, obtêm-se:

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}$$

Introduzindo nas equações acima as relações deformação-deslocamento (supondo tratar-se de pequenas deformações e pequenos deslocamentos):

## 2.3

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

obtêm-se as tensões em função dos deslocamentos:

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\alpha T E}{1-2\nu}$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\alpha T E}{1-2\nu}$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\alpha T E}{1-2\nu}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Levando as tensões acima nas equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

obtêm-se finalmente as equações de Navier:

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

(2.1.1)

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

(2.1.2)

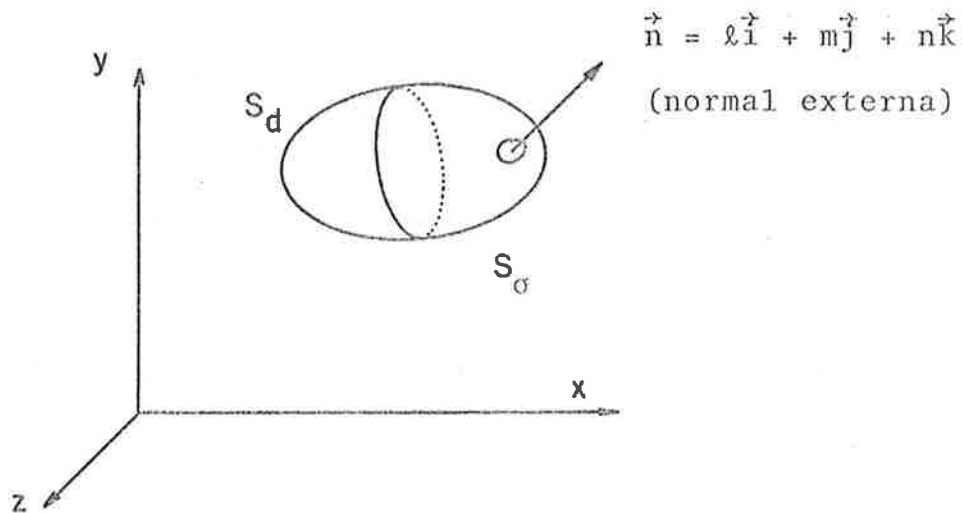
$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

(2.1.3)

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Quanto às condições de contorno das equações de Navier, considere-se a superfície externa do sólido dividida em duas partes:



a) em  $S_d$  os deslocamentos são conhecidos:

$$u = \bar{u}(x, y, z) \quad (2.1.4)$$

$$v = \bar{v}(x, y, z) \quad (2.1.5)$$

$$w = \bar{w}(x, y, z) \quad (2.1.6)$$

Estas são as condições de contorno essenciais.

b) em  $S_\sigma$  as tensões são conhecidas, e correspondem ao carregamento externo aplicado:

$$\vec{p} = T(\vec{n}) = \bar{X}\vec{i} + \bar{Y}\vec{j} + \bar{Z}\vec{k} \quad \text{em } S_\sigma$$



$$\begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \ell & m & n \\ \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \vec{\rho} = T(\vec{n}) &= (\ell\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})\vec{i} + \\ &+ (\ell\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz})\vec{j} + \\ &+ (\ell\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z)\vec{k} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\bar{X} = \ell\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}$$

$$\bar{Y} = \ell\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}$$

$$\bar{Z} = \ell\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z$$

Pondo as tensões em função dos deslocamentos, vêm:

$$\begin{aligned} \bar{X} + \ell \frac{\alpha TE}{1-2\nu} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \ell + \\ &+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) + \\ &+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned}
\bar{Y} + m \frac{\alpha TE}{1-2\nu} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) m + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \ell + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right)
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Z} + n \frac{\alpha TE}{1-2\nu} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) n + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \ell + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \ell + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right)
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Estas são as condições de contorno naturais.

Note-se que o efeito do campo de temperaturas sobre os deslocamentos equivale a forças de volume

$$- \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{na direção } x$$

$$- \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{na direção } y$$

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{na direção } z$$

além de tensões normais de tração, agindo na superfície  $S_0$ , de in tensidade  $\frac{\alpha TE}{1-2\nu}$ .

As tensões serão determinadas em função dos deslocamentos, conforme fórmulas já deduzidas. É interessante que se note, examinando estas fórmulas, que o efeito do campo de temperaturas sobre as tensões pode ser dividido em duas partes:

- a) efeitos já incluídos nos próprios deslocamentos (comentados no parágrafo anterior);
- b) efeito adicional, independente dos deslocamentos, e que corresponde a acrescentar às tensões normais  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , uma compressão hidrostática de valor  $-\frac{\alpha TE}{1-2\nu}$ .

Por último, será demonstrado que, num sólido não vinculado, ou seja, livre para se deformar, se o campo de temperaturas for uma função linear das coordenadas, não aparecerão tensões.

Para isto é necessário que se introduzam as chamadas condições de compatibilidade das deformações. Considerando as relações deformação-deslocamento já vistas, escrevem-se:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{a)}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad \text{b)}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad \text{c)}$$

Por outro lado:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

Portanto:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad d)$$

Analogamente:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad f)$$

As expressões de a) a f) representam as condições de compatibilidade das deformações.

Supondo que são nulas as componentes de tensão, das equações constitutivas decorrem:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha T$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Substituindo as relações acima nas condições de compatibilidade, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0$$

Estas equações serão satisfeitas se:

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

com coeficientes  $\alpha_i$  arbitrários.

Assim, num sólido livre para se deformar, onde:

$$X = Y = Z = 0 \quad \text{em } V$$

e 
$$\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0 \quad \text{em } S_\sigma,$$

sujeito a um campo de temperaturas linear com as coordenadas, haverá compatibilidade das deformações, sem que apareçam tensões.

O caso de distribuição uniforme de temperaturas é um caso particular do anterior, com  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , ou seja:

$$T = \alpha_1$$

## 2.2 - Método dos Resíduos Ponderados

Trata-se de resolver numericamente o sistema de equações diferenciais (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) nas incógnitas  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  e  $w(x,y,z)$ , com as condições de contorno (2.1.4), (2.1.5) e (2.1.6) (essenciais) e (2.1.7), (2.1.8) e (2.1.9) (naturais).

Para isto, será usado o Método dos Resíduos Ponderados, conforme a sugestão de Galerkin, e posteriormente será visto que o Método dos Elementos Finitos nasce daí.

Inicialmente, considere-se apenas a equação (2.1.1) de Navier:

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Trata-se de uma equação diferencial, referida a um elemento infinitesimal. É preciso transformá-la numa equação integral que, além de incorporar a condição de contorno natural (2.1.7), traduza o mesmo fenômeno representado pela equação diferencial, mas referido agora a todo o sólido, e não apenas a um elemento infinitesimal.

Para isto, admita-se uma função arbitrária  $\phi^*(x,y,z)$ , contínua e derivável no domínio do problema, e que satisfaça em  $S_d$ , a condição  $\phi^* = 0$ .

Multipliquem-se ambos os membros de (2.1.1) pela função  $\phi^*$ . Em seguida, por integração no sólido  $V$ , obtém-se:

$$\int_V \phi^* \left[ \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right] dV = 0$$

(2.2.1)

É lícito afirmar que se a equação integral (2.2.1) se cumpre para qualquer  $\phi^*$ , então a equação diferencial (2.1.1) será cumprida em qualquer ponto de  $V$ . Demonstra-se este fato ao se admitir que seja:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0 \end{aligned}$$

em algum ponto de  $V$ . Como a função é contínua, existirá uma porção finita do sólido em torno deste ponto onde a função será diferente de zero. Assim sendo, existirá certamente alguma função  $\phi^*$  que faça

$$\begin{aligned} & \int_V \phi^* \left[ \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right] dV \neq 0 \end{aligned}$$

Logo, deve-se ter:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$



em todos os pontos do sólido V.

Antes de dar prosseguimento, suponha-se que seja introduzida na equação (2.1.1) uma solução aproximada:

$$u = \hat{u}(x, y, z)$$

$$v = \hat{v}(x, y, z)$$

$$w = \hat{w}(x, y, z)$$

Evidentemente, resultará:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \right) + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0 \end{aligned}$$

e representa o erro ou resíduo obtido ao se fazer a substituição da solução aproximada. Portanto, a equação (2.2.1), com  $u = \hat{u}$ ,  $v = \hat{v}$  e  $w = \hat{w}$ , será a integral ponderada de tais resíduos, igualada a zero. Os fatores de ponderação (ou "pesos") são as funções  $\phi^*$ . Esta é a origem do nome "Método dos Resíduos Ponderados".

O próximo passo consiste na introdução da condição de contorno natural (2.1.7) na equação (2.2.1).

Considerando que

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)}$$

reescreve-se (2.2.1) como segue:

$$\begin{aligned} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV + \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV + \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \phi^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV = \\ & = - \int_V \phi^* \left( X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV \end{aligned}$$

Integrando por partes o primeiro membro da equação acima (corresponde a aplicar o Teorema do Divergente: vide Anexo A):

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial u}{\partial x} \ell dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial v}{\partial y} \ell dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial w}{\partial z} \ell dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial v}{\partial x} m dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial w}{\partial x} n dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial u}{\partial y} m dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dV + \int_{S_\sigma} \phi^* \frac{\partial u}{\partial z} n dS$$

A rigor, as integrações acima, de superfície, deveriam ser feitas em todo o contorno do sólido. Mas como  $\phi^* = 0$  em  $S_d$ , elas serão desenvolvidas apenas em  $S_\sigma$ .

Substituindo os resultados acima em (2.2.1), ter-se-á:

$$\frac{-\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV +$$

$$+ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \ell dS +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) dS + \tag{2.2.2} \\
& - \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) dS = \\
& = - \int_V \phi^* \left( X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV
\end{aligned}$$

A expressão (2.2.2) é conhecida como a "forma fraca" de (2.2.1), por ser mais permissiva, isto é, exigir menor ordem de continuidade para as funções  $u$ ,  $v$  e  $w$ , ao preço de uma maior ordem de continuidade para as funções  $\phi^*$ .

Considere-se agora a condição de contorno natural (2.1.7):

$$\begin{aligned}
\bar{X} + \ell \frac{\alpha T E}{1-2\nu} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \ell + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por  $\phi^*(x,y,z)$  e integrando na superfície  $S_\sigma$ , vem:

$$\int_{S_\sigma} \phi^* \left( \bar{X} + \ell \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS =$$

$$= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \ell dS +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) dS +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) dS$$
(2.2.3)

Note-se agora que as integrais de superfície que aparecem no primeiro membro da "forma fraca" (2.2.2) correspondem exatamente ao segundo membro da equação (2.2.3). Assim, substituindo (2.2.3) em (2.2.2), virá:

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV = \\
& = \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \bar{X} + \ell \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS + \int_V \phi^* \left( X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Procedendo de maneira análoga com as equações (2.1.2) e (2.1.3) de Navier, e as condições de contorno naturais (2.1.8) e (2.1.9), respectivamente, as seguintes equações serão deduzidas:

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dV + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV = \\
& = \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \bar{Y} + m \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS + \int_V \phi^* \left( Y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV + \\
& + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = \tag{2.2.6} \\
& = \int_{S_\sigma} \phi^* \left( \bar{Z} + n \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS + \int_V \phi^* \left( Z - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV
\end{aligned}$$

Assim, as equações integrais (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6), às quais foram incorporadas naturalmente as condições de contorno (2.1.7), (2.1.8) e (2.1.9), respectivamente (e que por causa disto se chamam condições de contorno naturais), correspondem às equações diferenciais (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3), respectivamente, de Navier.

Resta apenas que se introduzam as condições de contorno essenciais (2.1.4), (2.1.5) e (2.1.6).

Para tal, admita-se a seguinte solução aproximada:

$$\begin{aligned}
u &= \phi_u + \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \\
v &= \phi_v + \sum_{i=1}^n b_i \phi_i \\
w &= \phi_w + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

onde as funções  $\phi_u$ ,  $\phi_v$  e  $\phi_w$  são funções que satisfazem em  $S_d$  as

condições de contorno essenciais, ou seja:

$$\phi_u = \bar{u}(x, y, z)$$

$$\phi_v = \bar{v}(x, y, z) \quad \text{em } S_d$$

$$\phi_w = \bar{w}(x, y, z)$$

As demais funções  $\phi_i$  são funções que se anulam em  $S_d$ , e são conhecidas como funções coordenadas.

Galerkin propôs que as funções de ponderação  $\phi^*(x, y, z)$  fossem as mesmas que as usadas para as funções coordenadas  $\phi_i(x, y, z)$ .

Sendo assim, introduza-se a solução aproximada (2.2.7) nas equações (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) e faça-se nestas últimas, sucessivamente,  $\phi^*$  igual a cada uma das  $n$  funções  $\phi_i$ ; o resultado será um sistema de  $3n$  equações lineares que possibilitará a determinação das  $3n$  incógnitas do problema, que são os parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ .

Em outras palavras: das infinitas incógnitas do problema original, ou sejam, as três componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  do deslocamento de cada ponto do sólido, passa-se agora para um número finito de incógnitas, quais sejam os parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ .

De fato, conhecidos estes parâmetros, o campo de deslocamentos no interior do sólido ficará determinado, embora aproximadamente (pois trata-se de um método numérico), pelas equações (2.2.7).



### 2.3 - Método dos Elementos Finitos

Na seção precedente foi visto que o Método dos Resíduos Ponderados recai num sistema de equações simultâneas que, uma vez resolvido, fornece os parâmetros da solução aproximada.

Nesta seção mostrar-se-á que o Método dos Elementos Finitos segue exatamente a mesma formulação. A única diferença reside na escolha das funções  $\phi_u$ ,  $\phi_v$ ,  $\phi_w$  e  $\phi_i$ .

Com efeito, a aplicação prática do Método dos Resíduos Ponderados esbarra nas seguintes dificuldades:

- a) As funções coordenadas  $\phi_i$  são definidas em toda a região do sólido. Portanto, no sistema de equações obtido, a matriz dos coeficientes não terá a forma de banda, ou seja, será uma matriz repleta de elementos não nulos. Este fato será melhor compreendido mais adiante, quando for enfocada a formulação matricial do método.
- b) Também pelo fato das funções  $\phi_i$  serem definidas globalmente, a utilização prática do método fica restrita a sólidos com formas geometricamente simples.
- c) Os parâmetros  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  da solução aproximada não têm nenhuma interpretação física. Embora esta não seja uma dificuldade matemática, merece ser levada em conta.

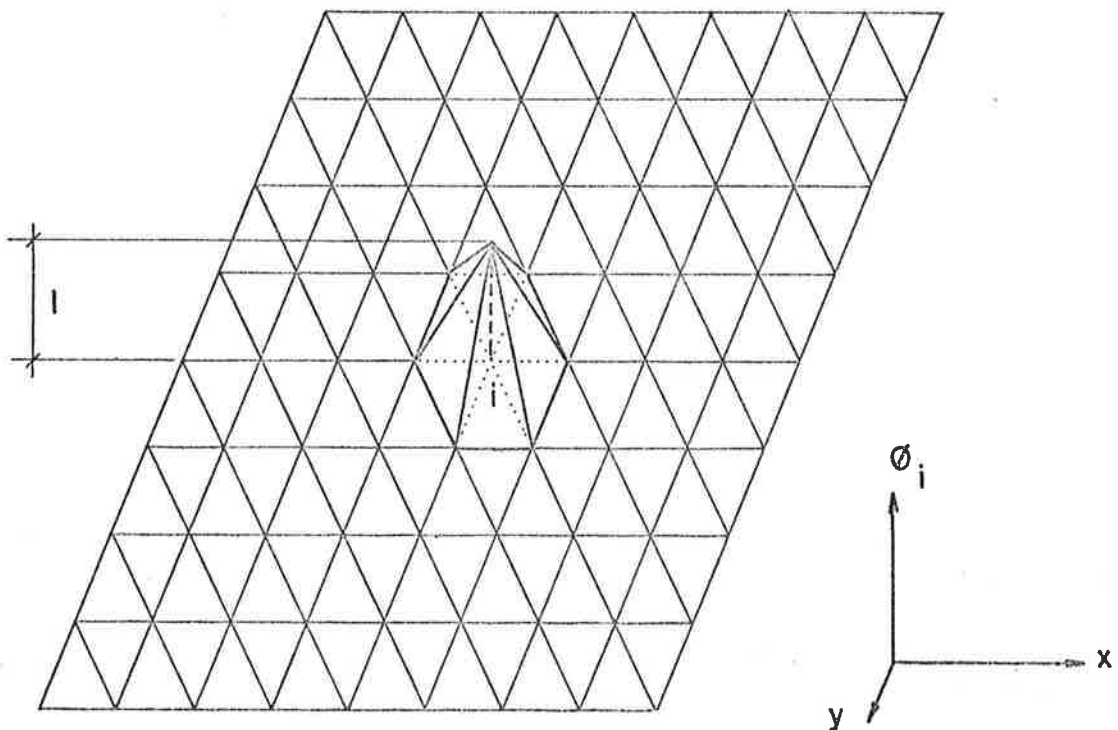
Pois bem, no Método dos Elementos Finitos, as funções  $\phi_i$  serão es

colhidas de modo a sobrepujar as três dificuldades enunciadas acima.

Inicialmente, subdivide-se o sólido em pequenas regiões poliédricas (elementos finitos) separadas entre si pelas suas interfaces. Os vértices dos elementos finitos serão os pontos nodais  $P_i$ , numerados de 1 a  $n$  (os pontos nodais pertencentes a  $S_d$  não são numerados, pois neles os deslocamentos já são conhecidos).

A função  $\phi_i$  será unitária em  $P_i$  e nula nos demais pontos nodais. Além disso,  $\phi_i$  será nula em todo o sólido, exceto nos elementos finitos que têm em comum o ponto nodal  $P_i$ .

Para exemplificar, considere-se o caso particular de Elasticidade Plana. Aqui as regiões poliédricas se transformarão em polígonos, e a função  $\phi_i$  pode ser visualizada, no caso de elementos triangulares, como na figura abaixo:



Esta figura evidencia o caráter essencialmente localizado das funções coordenadas  $\phi_i$  no Método dos Elementos Finitos.

As funções  $\phi_u$ ,  $\phi_v$  e  $\phi_w$  são diferentes de zero apenas nos elementos finitos contíguos à fronteira  $S_d$ . Dentro destes elementos,  $\phi_u$ ,  $\phi_v$  e  $\phi_w$  variam linearmente com as coordenadas (no caso do elemento tetraédrico a ser visto), de modo a satisfazer, nos vértices pertencentes a  $S_d$ , às condições de contorno essenciais (2.1.4), (2.1.5) e (2.1.6). Nestes mesmos elementos, nos vértices internos, não pertencentes a  $S_d$ , cumprir-se-ão forçosamente:  $\phi_u = \phi_v = \phi_w = 0$ .

Observação: quando as condições de contorno essenciais forem homogêneas, isto é:

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \quad \text{em } S_d$$

serão, evidentemente:

$$\phi_u = \phi_v = \phi_w = 0$$

em todos os elementos.

O fato de as funções  $\phi_i$  serem localizadas faz com que a matriz dos coeficientes do sistema de equações seja uma matriz de banda, isto é, com elementos não nulos apenas nas proximidades da diagonal principal, como será visto mais adiante. Isto possibilita a resolução automática do sistema, mesmo com milhares de incógnitas, com sensível redução do tempo de processamento e com grande economia de memória. De fato, na resolução do sistema de equações é usado

o algoritmo de Gauss da triangularização com retro-substituição em seguida, e como a matriz de banda já está parcialmente triangulada, o esforço computacional será muito menor.

A limitação a formas geométricas relativamente simples fica restrita agora ao elemento finito em si, e não mais ao sólido em estudo. Portanto, com elementos finitos muito simples, é possível obterem-se as configurações de sólidos as mais complicadas e realistas, mediante uma montagem adequada.

Por último, sendo  $\phi_i = 1$  em  $P_i$  e  $\phi_i = 0$  nos demais pontos nodais, os parâmetros incógnitos  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  assumem agora uma interpretação física a mais simples e interessante possível: eles passam a ser os próprios deslocamentos dos pontos nodais:

$$a_i = u_i$$

$$b_i = v_i$$

$$c_i = w_i$$

ou seja, a solução aproximada (2.2.7) fica:

$$\begin{aligned} u &= \phi_u + \sum_{i=1}^n u_i \phi_i \\ v &= \phi_v + \sum_{i=1}^n v_i \phi_i \\ w &= \phi_w + \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

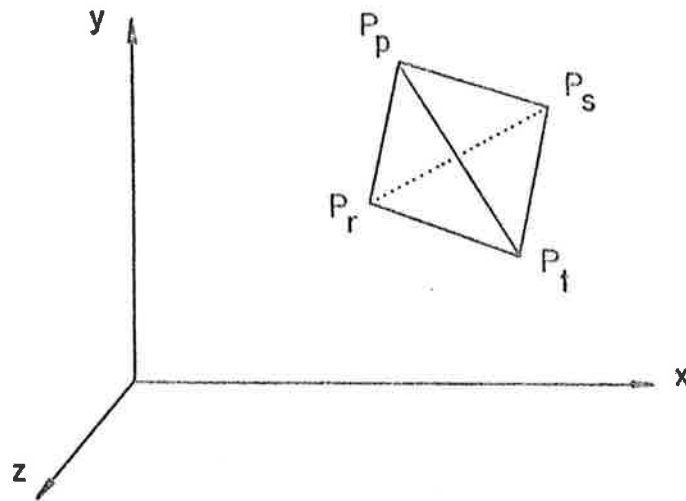
Sem dúvida, se deve à escolha mencionada das funções  $\phi_i$ , a grande

versatilidade e popularidade do Método dos Elementos Finitos.

- Elemento Tetraédrico

No Método dos Elementos Finitos as funções  $\phi_i$  são conhecidas também como funções de forma (na língua inglesa: "shape functions").

Em Elasticidade Tridimensional o elemento finito mais simples que se conhece é o tetraedro:



No seu interior a função de forma varia linearmente com as coordenadas. Por exemplo, para a função  $\phi_p$ :

$$\phi_p = 1 \quad \text{em } P_p$$

$$\phi_p = 0 \quad \text{em } P_r, P_s \text{ e } P_t$$

$$\phi_p = A + Bx + Cy + Dz \quad \text{no interior do tetraedro.}$$

Para a determinação dos coeficientes A, B, C e D, basta que se imponham as condições a que  $\phi_p$  deve obedecer nos vértices do tetraedro.

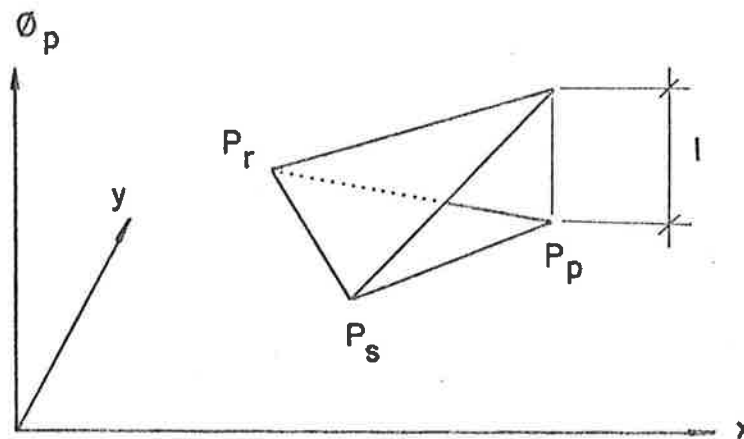
dro:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = A + Bx_p + Cy_p + Dz_p \\ 0 = A + Bx_r + Cy_r + Dz_r \\ 0 = A + Bx_s + Cy_s + Dz_s \\ 0 = A + Bx_t + Cy_t + Dz_t \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema acima, determinam-se A, B, C e D, com os quais se levanta:

$$\phi_p = A + Bx + Cy + Dz$$

Aqui não é possível representar  $\phi_p$  graficamente, como abaixo, no caso de Elasticidade Plana, com elementos triangulares:



#### - Formulação Matricial

Para as aplicações práticas do Método dos Elementos Finitos, tendo

em vista o cálculo automático, é de todo conveniente e mesmo necessário, que se dê ao mesmo uma formulação matricial.

Inicialmente, injeta-se nas equações (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) a solução aproximada (2.3.1):

$$u = \phi_u + \sum_{i=1}^n u_i \phi_i$$

$$v = \phi_v + \sum_{i=1}^n v_i \phi_i$$

$$w = \phi_w + \sum_{i=1}^n w_i \phi_i$$

Em seguida, faz-se  $\phi^* = \phi_1$  nas equações mencionadas, obtendo assim as três primeiras equações do sistema. Com  $\phi^* = \phi_2$ , obtêm-se as três segundas equações do sistema, e assim por diante, até que para  $\phi^* = \phi_n$ , obter-se-ão as três últimas equações, num total de  $3n$  equações cujas incógnitas são as componentes  $u_i$ ,  $v_i$  e  $w_i$  dos deslocamentos dos pontos nodais.

Deixando à parte uma álgebra tediosa, será escrito diretamente o sistema obtido, já na forma matricial:

$$\underline{K} \underline{d} = \underline{f}$$

onde:

$$\underline{K} = \begin{vmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & & & \\ K_{i1} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & & & \\ K_{n1} & \cdots & K_{nj} & \cdots & K_{nn} \end{vmatrix}$$

A submatriz genérica  $\underline{K}_{ij}$  é dada por:

$$\underline{K}_{ij} = \begin{vmatrix} K_{ij}^{xx} & K_{ij}^{xy} & K_{ij}^{xz} \\ K_{ij}^{yx} & K_{ij}^{yy} & K_{ij}^{yz} \\ K_{ij}^{zx} & K_{ij}^{zy} & K_{ij}^{zz} \end{vmatrix}$$

com:

$$K_{ij}^{xx} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dV$$

$$K_{ij}^{xy} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV$$

$$K_{ij}^{xz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV$$



$$K_{ij}^{yx} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV$$

$$K_{ij}^{yy} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dV$$

$$K_{ij}^{yz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV$$

$$K_{ij}^{zx} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV$$

$$K_{ij}^{zy} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV$$

$$K_{ij}^{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dV +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dV$$

Constata-se facilmente que:

$$K_{ij} = K_{ji}^T$$

ou, em outras palavras, a matriz  $K$  é simétrica. Este fato é uma consequência direta da adoção da hipótese de Galerkin, ou seja:  $\phi^* = \phi_j$ , e contribui para diminuir enormemente o esforço computacional.

A matriz de coeficientes  $K$  é conhecida como matriz de rigidez da estrutura.

O vetor

$$\underline{d} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{d}_1 \\ \vdots \\ \underline{d}_j \\ \vdots \\ \underline{d}_n \end{array} \right\}$$

é o vetor dos deslocamentos nodais. O subvetor genérico  $\underline{d}_j$  é dado por:

$$\underline{d}_j = \begin{Bmatrix} d_j^x \\ d_j^y \\ d_j^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}$$

O vetor

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

é o vetor das forças nodais equivalentes. O subvetor genérico  $\underline{f}_i$  é dado por:

$$\underline{f}_i = \begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \\ f_i^z \end{Bmatrix}$$

com:

$$f_i^x = \int_{S_\sigma} \phi_i \left( \bar{X} + \epsilon \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS + \int_V \phi_i \left( X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV +$$

$$\frac{-\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_w}{\partial z} \right) dV +$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_u}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_u}{\partial z} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right) dV$$

$$f_i^Y = \int_{S_\sigma} \phi_i \left( \bar{Y} + m \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS + \int_V \phi_i \left( Y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV +$$

$$\frac{-\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_w}{\partial z} \right) dV +$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_v}{\partial x} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_v}{\partial z} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_w}{\partial y} \right) dV$$

$$f_i^Z = \int_{S_\sigma} \phi_i \left( \bar{Z} + n \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dS + \int_V \phi_i \left( Z - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV +$$

$$\frac{-\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_w}{\partial z} \right) dV +$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_w}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_w}{\partial y} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_w}{\partial z} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial z} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial z} \right) dV$$

Em resumo, há  $n$  equações matriciais, das quais a  $i$ -ésima pode ser escrita como:

$$\underline{K}_{i1}d_1 + \dots + \underline{K}_{ij}d_j + \dots + \underline{K}_{in}d_n = \underline{f}_i$$

Cada uma destas  $n$  equações matriciais se desdobra em três equações comuns.

À esta altura, percebe-se claramente que a matriz de rigidez  $\underline{K}$  é de banda.

Para isto, basta que se observe que a determinação de uma submatriz genérica  $\underline{K}_{ij}$  de  $\underline{K}$  implica no cálculo de integrais do tipo:

$$\int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dV$$

Quando  $i = j$ , a integral acima será diferente de zero apenas nos elementos que têm em comum o ponto nodal  $P_i$ .

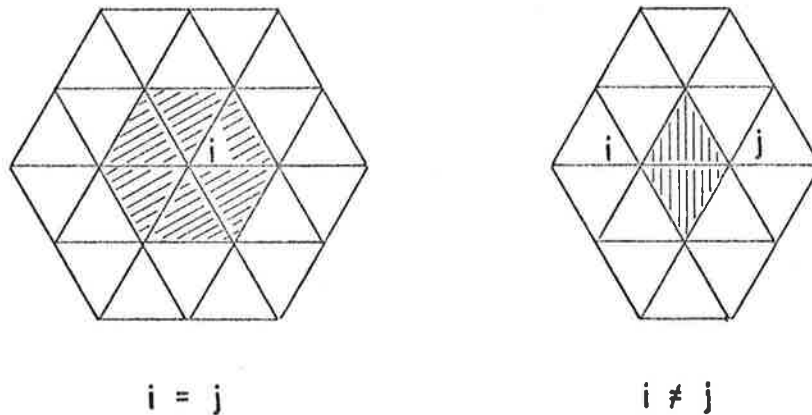
Quando  $i \neq j$ , a integral será não nula apenas nos elementos que contenham simultaneamente os pontos nodais  $P_i$  e  $P_j$ .

Portanto, aparece um grande número de submatrizes  $\underline{K}_{ij}$  nulas fora da diagonal principal de  $\underline{K}$ .

As submatrizes  $\underline{K}_{ij}$  diferentes de zero estarão tanto mais afastadas da diagonal quanto maior for a diferença  $j-i$  entre a numeração de dois nós de um mesmo elemento.

Assim sendo, é importante na numeração dos nós que se restrinja o valor desta diferença. Alguns programas fazem isto automaticamente, através de uma renumeração dos nós.

É interessante também que se registre que os elementos da diagonal principal de  $\underline{K}$  são sempre positivos (basta que se observem as fórmulas apresentadas para  $K_{ij}^{xx}$ ,  $K_{ij}^{yy}$  e  $K_{ij}^{zz}$ , fazendo nelas  $i = j$ ). E mais: eles são os maiores elementos da matriz de rigidez  $\underline{K}$ , pois além do fato de seu cálculo envolver apenas parcelas positivas, o número de elementos finitos, nos quais a integração deve ser feita, é maior quando  $i = j$ , como já foi explicado. Isto pode ser visualizado claramente no caso de Elasticidade Plana com elementos triangulares:



Esta é mais uma característica do Método dos Elementos Finitos que influi na redução do esforço computacional.

De fato, o algoritmo de Gauss da triangularização exige (para diminuir os erros de arredondamento) que se permutem as linhas de  $\underline{K}$  de modo a se colocarem na diagonal principal os maiores valores dos coeficientes de rigidez. Pelo que foi visto, dispensam-se es-

tas operações.

### Critérios de Convergência

Obviamente, a precisão da solução aproximada depende de quão próximo o campo de deslocamentos obtido está do campo verdadeiro.

Há certas condições que se impõem às funções de forma  $\phi_i$  que, uma vez atendidas, asseguram a convergência, ou seja, a tendência à solução exata com a diminuição de tamanho dos elementos finitos.

Em Elasticidade (tridimensional ou plana) os requisitos para a convergência são tão simples, que torna-se difícil conseguir um elemento não convergente.

Em primeiro lugar, as expressões aproximadas dos deslocamentos no interior do elemento devem ser polinômios completos até o primeiro grau, isto é, devem conter pelo menos todos os termos de grau zero e grau um. Por exemplo, para o deslocamento na direção x:

$$u = \phi_u + \sum_{i=1}^n u_i \phi_i = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \dots}_{\text{mínimo de termos necessários}}$$

Esta exigência corresponde ao critério da completude.

Por outro lado, o campo de deslocamentos obtido ao longo do sólido discretizado não deve apresentar descontinuidades no interior dos elementos, e nem nas interfaces de separação entre eles, satis

fazendo assim ao critério da conformidade.

Os critérios mencionados acima serão obedecidos automaticamente se a função de forma  $\phi_i$  escolhida for contínua (tanto no interior dos elementos como nos seus limites), e se a sua expressão (em cada elemento onde ela for diferente de zero) contiver pelo menos todos os termos de grau zero e grau um. Os elementos tetraédrico (elasticidade tridimensional) e triangular (elasticidade plana) já vistos satisfazem evidentemente aos dois critérios, e portanto são convergentes.

A demonstração rigorosa destas afirmações se faz através do Cálculo Variacional, e foge ao escopo deste trabalho.

É possível, no caso da Elasticidade, interpretar-se fisicamente os critérios de convergência.

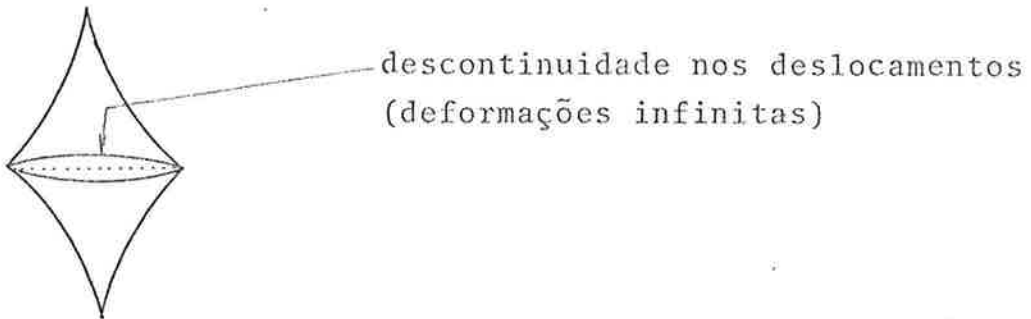
De fato, o critério da completude é conhecido também como critério da deformação constante, cujo enunciado é: "se os deslocamentos nodais são compatíveis com um estado de deformação constante, então tal estado deve de fato ser obtido no interior do elemento". Ora, a única maneira de se conseguirem estados de deformação constante dentro do elemento é preservando os termos de primeiro grau da função de forma.

Quando os deslocamentos nodais são próprios de um movimento de corpo rígido, não devem aparecer deformações no elemento. Este é um caso particular do critério de deformação constante, com deformação nula. Os termos de grau zero asseguram a possibilidade de mo-



vimentos de translação sem que apareçam deformações (o movimento de translação é um caso particular do movimento de corpo rígido).

Por último, o critério da conformidade de certo modo assegura a continuidade física do corpo após a deformação, evitando que apareçam irregularidades do tipo



em Elasticidade plana, por exemplo.

É de se observar também que, se os deslocamentos são descontínuos, aparecem deformações infinitas, violando desta maneira a condição de integrabilidade da "forma fraca" (2.2.2).

3. ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO3.1 - Equações de Navier

Equações constitutivas:

$$\epsilon_x = \alpha T + \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \alpha T + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \alpha T + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

De  $\epsilon_z = 0$  decorre:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) - \alpha T E$$

donde:

$$\epsilon_x = (1+\nu) \alpha T + \frac{1}{E} [(1-\nu^2) \sigma_x - \nu(1+\nu) \sigma_y] \quad (3.1.1)$$

$$\epsilon_y = (1+\nu) \alpha T + \frac{1}{E} [(1-\nu^2) \sigma_y - \nu(1+\nu) \sigma_x] \quad (3.1.2)$$

Por outro lado:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (3.1.3)$$

As equações (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) expressam a Lei de Hooke para um material homogêneo e isotrópico.

Escrevendo agora as tensões em função das deformações, vêm:

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

Introduzindo nas expressões acima as relações deformação-deslocamento:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

as tensões ficarão como funções dos deslocamentos:

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Ao se introduzirem as tensões acima nas equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

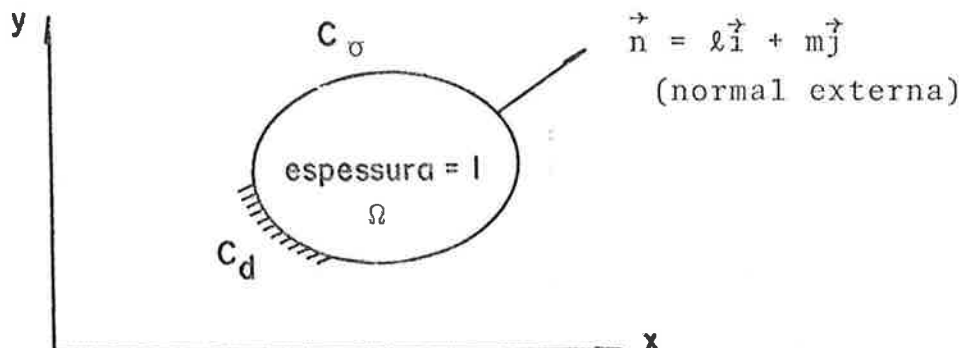
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

obter-se-ão as equações de Navier:

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ + X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\ + Y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Em relação às condições de contorno das equações de Navier:



a) em  $C_d$  os deslocamentos são conhecidos (condições de contorno essenciais):

$$u = \bar{u}(x,y) \quad (3.1.6)$$

$$v = \bar{v}(x,y) \quad (3.1.7)$$

b) em  $C_\sigma$  as tensões são conhecidas, e igualam o carregamento externo aplicado.

$$\vec{\rho} = T(\vec{n}) = \bar{X} \vec{i} + \bar{Y} \vec{j} \quad \text{em } C_\sigma$$

$$\begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \end{array} \left| \begin{array}{cc} \ell & m \\ \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{array} \right|$$

$$\vec{\rho} = T(\vec{n}) = (\ell\sigma_x + m\tau_{xy}) \vec{i} + (\ell\tau_{xy} + m\sigma_y) \vec{j}$$

Logo:

$$\bar{X} = \ell\sigma_x + m\tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = \ell\tau_{xy} + m\sigma_y$$

Se se puserem as tensões em função dos deslocamentos, conforme fórmulas já deduzidas, virão:

$$\bar{X} + \ell \frac{\alpha TE}{1-2\nu} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \ell +$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial x} m \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{\partial u}{\partial y} m \right) \quad (3.1.8)$$

$$\bar{Y} + m \frac{\alpha TE}{1-2\nu} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) m + \quad (3.1.9)$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \ell + \frac{\partial v}{\partial y} m \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \ell + \frac{\partial v}{\partial y} m \right)$$

Como se vê, o efeito do campo de temperaturas  $T = T(x,y)$  sobre os deslocamentos é equivalente a forças de volume

$$- \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{na direção } x$$

$$- \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{na direção } y$$

(basta que se examinem as equações (3.1.4) e (3.1.5)), assim como a tensões normais de tração, agindo na fronteira  $C_\sigma$ , cuja grandeza é:

$$\frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

(basta que se observem as equações (3.1.8) e (3.1.9)).

Ao se calcularem as tensões em função dos deslocamentos, verifica-se que elas são influenciadas de duas maneiras pelo campo de temperaturas:

- a) através dos deslocamentos, conforme discutido no parágrafo anterior;
- b) através de um acréscimo de compressão semi-hidroestática

$$- \frac{\alpha TE}{1-2\nu}$$

às tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ .

Finalmente, será demonstrado que não aparecem tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  quando são obedecidas as seguintes condições:

- a)  $X = Y = 0$  e  $\bar{X} = \bar{Y} = 0$
- b) não há vinculação no plano  $x - y$
- c) o campo de temperaturas  $T = T(x,y)$  é harmônico, ou seja, obedece à equação de Laplace:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Demonstração: no item 2.1 verificou-se que no caso geral há seis condições de compatibilidade das deformações. No plano  $x - y$  elas se reduzem a uma única:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Supondo que  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , decorrem das equações constituti-

vas:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = (1+\nu)\alpha T$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

Substituindo na condição de compatibilidade, resulta finalmente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Observação: no capítulo seguinte, ao se estudar a equação de Fourier da condução do calor, será visto que, em regime permanente, o campo de temperaturas fica determinado pela equação (4.1.2):

$$k \nabla^2 T + Q = 0$$

Se não houver geração interna de calor ( $Q = 0$ ), esta equação se reduz à equação de Laplace:  $\nabla^2 T = 0$ , donde se conclui que, sob as condições consideradas, não aparecem tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , qualquer que seja o campo de temperaturas instalado.

### 3.2 - Método dos Resíduos Ponderados

As operações que seriam descritas neste item são análogas às aquelas já vistas no item 2.2, e por causa disto não serão repetidas.

Das equações de Navier (3.1.4) e (3.1.5), associadas respectivamente às condições de contorno naturais (3.1.8) e (3.1.9), são de



duzidas as duas seguintes equações integrais:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \\
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega + \\
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega = \\
 & = \int_{C_{\sigma}} \phi^* \left( \bar{X} + \ell \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dC + \int_{\Omega} \phi^* \left( X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \\
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \\
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = \\
 & = \int_{C_{\sigma}} \phi^* \left( \bar{Y} + m \frac{\alpha T E}{1-2\nu} \right) dC + \int_{\Omega} \phi^* \left( Y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Ao se introduzir nas equações acima a solução aproximada:

$$u = \phi_u + \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$$

$$v = \phi_v + \sum_{i=1}^n b_i \phi_i$$
(3.2.3)

e ao se fazer, sucessivamente,  $\phi^* = \phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), será produzido um sistema de  $2n$  equações simultâneas que, uma vez resolvido, levantará os parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  da solução aproximada (3.2.3).

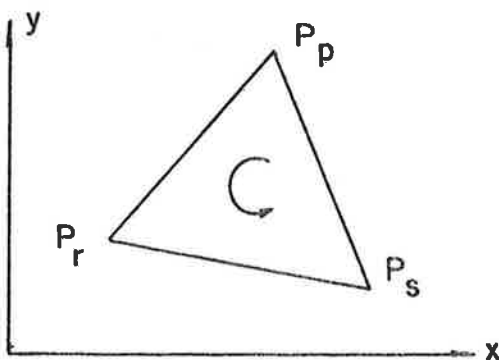
### 3.3 - Método dos Elementos Finitos

Aqui valem as mesmas considerações feitas no item 2.3. Vale a pena observar que, de acordo com a interpretação física dos parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  da solução aproximada, esta agora se escreve:

$$u = \phi_u + \sum_{i=1}^n u_i \phi_i$$

$$v = \phi_v + \sum_{i=1}^n v_i \phi_i$$
(3.3.1)

#### - Elemento Triangular



A numeração dos nós  $P_p$ ,  $P_r$  e  $P_s$  deve ser feita no sentido anti-horário.

Tome-se, por exemplo, a função de forma  $\phi_p(x, y)$ . Para ela, no elemento  $P_p$   $P_r$   $P_s$ :

$$\phi_p = 1 \quad \text{em } P_p$$

$$\phi_p = 0 \quad \text{em } P_r \text{ e } P_s$$

$$\phi_p = A + Bx + Cy \quad \text{no interior do elemento.}$$

Assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = A + B x_p + C y_p \\ 0 = A + B x_r + C y_r \\ 0 = A + B x_s + C y_s \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, vêm:

$$A = \frac{1}{2\Delta} (x_r y_s - x_s y_r)$$

$$B = \frac{1}{2\Delta} (y_r - y_s)$$

(3.3.2)

$$C = \frac{1}{2\Delta} (x_s - x_r)$$

onde:

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_r & y_r \\ 1 & x_s & y_s \end{vmatrix} = 2 \quad (\text{área do triângulo})$$

Para as outras funções de forma  $\phi_r$  e  $\phi_s$ , os coeficientes A, B e

C são obtidos por permutação cíclica:

a) função  $\phi_r = A + Bx + Cy$

$$A = \frac{1}{2\Delta} (x_s y_p - x_p y_s)$$

$$B = \frac{1}{2\Delta} (y_s - y_p) \quad (3.3.3)$$

$$C = \frac{1}{2\Delta} (x_p - x_s)$$

b) função  $\phi_s = A + Bx + Cy$

$$A = \frac{1}{2\Delta} (x_p y_r - x_r y_p)$$

$$B = \frac{1}{2\Delta} (y_p - y_r) \quad (3.3.4)$$

$$C = \frac{1}{2\Delta} (x_r - x_p)$$

#### - Formulação Matricial

Introduza-se a solução aproximada (3.3.1) nas equações (3.2.1) e (3.2.2) e faça-se nestas últimas, sucessivamente,  $\phi^* = \phi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ); será obtido assim um sistema de  $2n$  equações algébricas a  $2n$  incógnitas, que são os deslocamentos  $u_i$  e  $v_i$  dos pontos nodais.

Este sistema é o que se transcreve abaixo, sob a forma matricial:

$$\underline{K} \underline{d} = \underline{f}$$

$\underline{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura:

$$\underline{K} = \begin{vmatrix} \underline{K}_{11} & \cdots & \underline{K}_{1j} & \cdots & \underline{K}_{1n} \\ \vdots & & & & \\ \underline{K}_{i1} & \cdots & \underline{K}_{ij} & \cdots & \underline{K}_{in} \\ \vdots & & & & \\ \underline{K}_{n1} & \cdots & \underline{K}_{nj} & \cdots & \underline{K}_{nn} \end{vmatrix}$$

A submatriz genérica  $\underline{K}_{ij}$  é dada por:

$$\underline{K}_{ij} = \begin{vmatrix} K_{ij}^{xx} & K_{ij}^{xy} \\ K_{ij}^{yx} & K_{ij}^{yy} \end{vmatrix}$$

com:

$$K_{ij}^{xx} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.3.5)$$

$$K_{ij}^{xy} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{yx} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \\
 &+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{yy} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega + \\
 &+ \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{3.3.8}$$

A matriz  $\underline{K}$  é simétrica, já que:

$$\underline{K}_{ij} = \underline{K}_{ji}^T$$

O vetor

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix}$$

é o vetor dos deslocamentos nodais. O subvetor genérico  $\underline{d}_j$  é dado por:

$$\underline{d}_j = \begin{Bmatrix} d_j^x \\ d_j^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

O vetor

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_i \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{Bmatrix}$$

é o vetor das forças nodais equivalentes. O subvetor genérico  $\underline{f}_i$  é dado por:

$$\underline{f}_i = \begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{Bmatrix}$$

com:

$$\begin{aligned} f_i^x = & \int_{C_\sigma} \phi_i (\bar{X} + \ell \frac{\alpha TE}{1-2\nu}) dC + \int_{\Omega} \phi_i (X - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}) d\Omega + \\ & - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} \right) d\Omega + \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_u}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\begin{aligned} f_i^y = & \int_{C_\sigma} \phi_i (\bar{Y} + m \frac{\alpha TE}{1-2\nu}) dC + \int_{\Omega} \phi_i (Y - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}) d\Omega + \\ & - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} \right) d\Omega + \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

$$- \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_u}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} \right) d\Omega$$

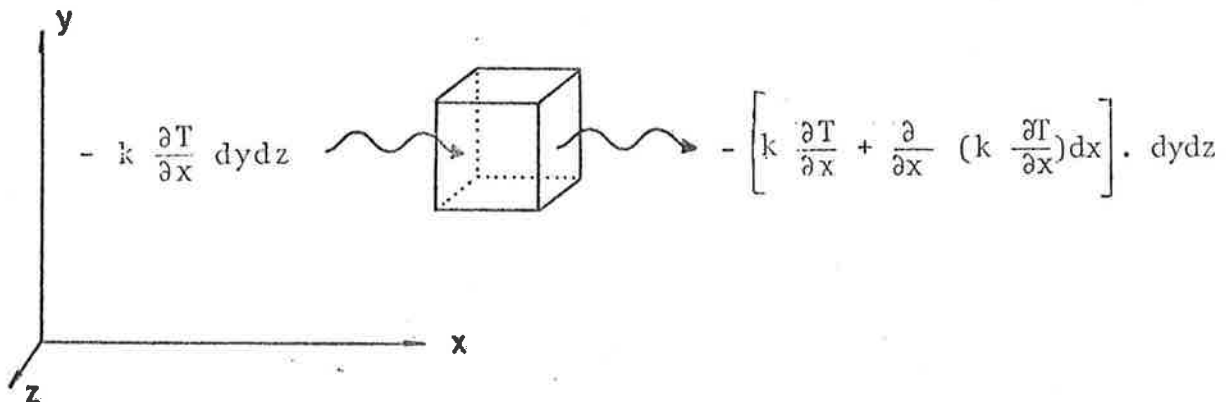
$$\frac{-E}{2(1+\nu)} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_v}{\partial x} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_v}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_u}{\partial y} \right) d\Omega$$

As observações finais deste item são as mesmas que foram comentadas ao se tratar da formulação matricial no caso tridimensional (Capítulo 2), e por causa disto não serão repetidas. Da mesma forma valem também as observações que lá foram feitas sobre os critérios de convergência.



4. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NUM CORPO SÓLIDO4.1 - Equação de Fourier

A propagação do calor em sólidos ocorre predominantemente por condução, e a equação diferencial que governa o fenômeno é devida a Fourier. A seguir será feita a sua dedução para um sólido constituído de material homogêneo e isótropo. Para isto considere-se o elemento de volume  $dx dy dz$ :



Para as faces perpendiculares ao eixo x, a quantidade de calor introduzida no elemento pela variação do fluxo é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz$$

Considerando todas as faces, tem-se a quantidade total de calor

introduzida no elemento por unidade de tempo:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

ou ainda, usando a notação do laplaciano:

$$k \nabla^2 T \, dx dy dz$$

Adicionando à expressão acima a quantidade de calor gerada no próprio elemento  $Q dx dy dz$ , obter-se-á o aumento da energia interna do elemento:  $\rho c \dot{T} \, dx dy dz$ . Isto é o que afirma o princípio da conservação da energia. Portanto:

$$k \nabla^2 T + Q = \rho c \dot{T} \quad (4.1.1)$$

expressa a equação de Fourier em regime transitório. Esta equação deve ser satisfeita em todo e qualquer ponto do sólido  $V$ , e em qualquer instante. Nela:

$T = T(x, y, z, t)$  é a temperatura num ponto genérico do sólido, num instante  $t$  qualquer.

$k$  é o coeficiente de condutibilidade do material de que é feito o corpo.

$Q = Q(x, y, z, t)$  é o calor gerado num ponto genérico do sólido por unidade de volume na unidade de tempo, num instante  $t$  qualquer.

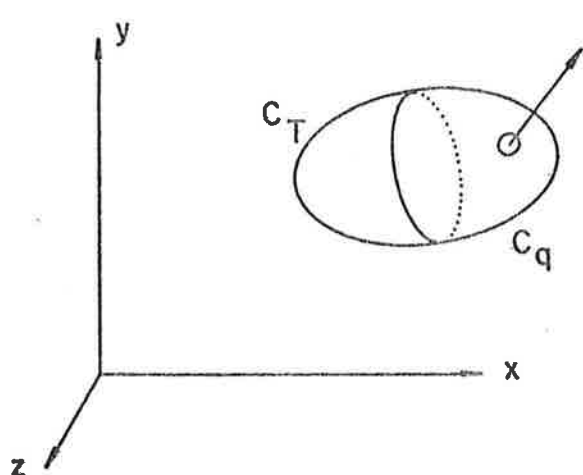
$\rho$  é a massa específica (densidade) do material de que é feito o corpo.

$c$  é o calor específico do material do corpo.

Em regime permanente,  $T$  e  $Q$  cessam de ser função do tempo, e a equação de Fourier fica:

$$k \nabla^2 T + Q = 0 \quad (4.1.2)$$

Quanto às condições de contorno da equação de Fourier, há dois casos:



$$\vec{n} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

(normal externa)

- a) temperaturas impostas na fronteira (condição de contorno essencial)

Em  $C_T$  tem-se:

$$T = \bar{T}(x, y, z, t) \quad (4.1.3)$$

como uma função conhecida.

- b) fluxo na fronteira, proporcional ao ressalto de temperatura (condição de contorno natural).

$C_q$  é a parte do contorno que está em contacto com algum fluido on

de o efeito da convecção não é desprezível. Por causa disso a temperatura nos pontos de  $C_q$  é diferente da temperatura do meio fluido exterior. Em virtude deste ressalto de temperatura, haverá em  $C_q$  um fluxo de calor dado por:

$$k \frac{dT}{dn} = h \cdot \Delta T$$

onde:

$\frac{dT}{dn}$  é a derivada direcional da temperatura segundo  $\vec{n}$ :

$$\frac{dT}{dn} = \text{grad } T \times \vec{n} = \frac{\partial T}{\partial x} \ell + \frac{\partial T}{\partial y} m + \frac{\partial T}{\partial z} n$$

$$\Delta T = T_{f\ell} - T, \text{ sendo:}$$

$T_{f\ell}$  : temperatura do fluido (conhecida)

$T$  : temperatura em  $C_q$  (desconhecida)

$h = h_c + h_r$ , onde  $h_c$  é o coeficiente de convecção e  $h_r$  é o termo corretivo que se acrescenta a  $h_c$  para levar em conta o fenômeno da radiação, de modo aproximado.

$$\therefore k \frac{dT}{dn} = h T_{f\ell} - hT$$

Note-se que  $h T_{f\ell}(x,y,z,t) = g(P,t)$  é uma função conhecida, podendo-se escrever, finalmente:

$$k \frac{dT}{dn} = g(P,t) - hT. \quad (4.1.4)$$

Na verdade existe uma terceira condição de contorno, que acontece quando se conhece na fronteira o valor do fluxo:

$$-k \frac{dT}{dn} = q \quad \text{ou} \quad k \frac{dT}{dn} = -q$$

Mas esta condição pode ser considerada como um caso particular da anterior, sem a parcela  $hT$ , e com  $q = -g(P,t)$ . Deve-se apenas frisar que estas duas condições não ocorrem simultaneamente numa mesma parte de  $C_q$ .

#### 4.2 - Método dos Resíduos Ponderados

Inicialmente, tratar-se-á apenas do regime permanente. Seja, pois, a equação (4.1.2):

$$k \nabla^2 T + Q = 0$$

Admita-se uma função qualquer  $\phi^*(x,y,z)$ , contínua e derivável na região do problema, e que seja nula em  $C_T$ . Multiplicando ambos os membros de (4.1.2) por  $\phi^*$  e integrando no volume, virá:

$$\int_V \phi^* (k \nabla^2 T + Q) dV = 0 \quad (4.2.1)$$

A equação integral acima é equivalente à equação diferencial de Fourier. Sim, pois se (4.2.1) é satisfeita para qualquer  $\phi^*$ , en-

tão (4.1.2) será válida em todo e qualquer ponto de  $V$ . Para que seja provada esta afirmação, suponha-se que:

$$k \nabla^2 T + Q \neq 0$$

em algum ponto de  $V$ . Haverá uma vizinhança em torno deste ponto onde a função será diferente de zero, por ser contínua. Neste caso, pode-se encontrar sempre uma função  $\phi^*$ , tal que:

$$\int_V \phi^* (k \nabla^2 T + Q) dV \neq 0$$

Portanto, deve-se ter

$$k \nabla^2 T + Q = 0$$

em todos os pontos do domínio  $V$ .

Retome-se a equação (4.2.1):

$$k \int_V \phi^* \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dV = - \int_V \phi^* Q dV$$

Integrando por partes o primeiro membro (vide o Teorema do Divergente, Anexo A):

$$\int_V \phi^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dV + \int_{C_q} \phi^* \frac{\partial T}{\partial x} \ell dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dV + \int_{C_q} \phi^* \frac{\partial T}{\partial y} m dS$$

$$\int_V \phi^* \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dV = - \int_V \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} dV + \int_{C_q} \phi^* \frac{\partial T}{\partial z} ndS$$

As integrais de superfície acima são desenvolvidas apenas em  $C_q$ , pois  $\phi^* = 0$  em  $C_T$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} & - k \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV + \\ & + k \int_{C_q} \phi^* \left( \frac{\partial T}{\partial x} \ell + \frac{\partial T}{\partial y} m + \frac{\partial T}{\partial z} n \right) dS = - \int_V \phi^* Q dV \end{aligned}$$

A segunda integral do primeiro membro corresponde à condição de contorno natural (4.1.4):

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \ell + \frac{\partial T}{\partial y} m + \frac{\partial T}{\partial z} n \right) = g(P) - hT$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por  $\phi^*$ , integrando em  $C_q$  e substituindo na equação anterior, resultará:

$$\begin{aligned} & k \int_V \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV + \\ & + h \int_{C_q} \phi^* T dS = \int_V \phi^* Q dV + \int_{C_q} \phi^* g dS \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

A equação acima é a "forma fraca" de (4.2.1).

Assim, conclui-se que a equação integral (4.2.2), à qual foi incorporada naturalmente a condição de contorno (4.1.4), equivale à equação diferencial (4.1.2) de Fourier. Resta apenas introduzir a condição de contorno essencial (4.1.3).

Seja a seguinte solução aproximada:

$$T = \phi_0 + \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \quad (4.2.3)$$

onde  $\phi_0$  é uma função que satisfaz em  $C_T$  a condição de contorno (4.1.3) e as demais  $\phi_i$  são funções que se anulam em  $C_T$ .

Galerkin propôs que as funções  $\phi^*$  fossem iguais às funções  $\phi_i$ .

Portanto, substituindo (4.2.3) em (4.2.2) e fazendo nesta última, sucessivamente,  $\phi^*$  igual a cada uma das funções  $\phi_i$ , resultará um sistema de  $n$  equações algébricas lineares com  $n$  incógnitas, que são os parâmetros  $a_i$  da solução aproximada (4.2.3).

### 4.3 - Método dos Elementos Finitos

O conteúdo deste item é análogo ao do item 2.3, e não será repetido. Como foi visto lá, o Método dos Elementos Finitos nasce do Método dos Resíduos Ponderados, através de uma escolha adequada das funções  $\phi_i$ , que serão chamadas aqui de funções de forma, ou de interpolação. Inicialmente subdivide-se o corpo em pequenas porções



de geometria simples (elementos finitos). Depois se definem dentro destas porções as funções  $\phi_i$ , que serão relativamente simples. Atribuindo valores nodais adequados a  $\phi_i$ , os parâmetros  $a_i$  da solução aproximada serão as próprias temperaturas dos pontos nodais:

$$T = \phi_0 + \sum_{i=1}^n T_i \phi_i \quad (4.3.1)$$

Aqui valem também as considerações relativas ao elemento tetraédrico, assim como todas as observações referentes aos critérios de convergência, exceto é claro, a sua interpretação física.

#### - Formulação Matricial

Substitua-se a solução aproximada (4.3.1) na equação (4.2.2). Em seguida faça-se nesta última, sucessivamente,  $\phi^*$  igual a cada uma das  $n$  funções de interpolação  $\phi_i$ . O resultado final será um sistema de  $n$  equações algébricas simultâneas que, uma vez resolvido, fornecerá as temperaturas nodais  $T_i$ .

Evitando uma álgebra tediosa, escrever-se-á o sistema obtido, já em forma de matrizes:

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} \quad (4.3.2)$$

onde  $\underline{H}$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  (matriz de condutibilidade do corpo considerado), cujo elemento genérico é dado por:

$$\begin{aligned}
 H_{ij} = k \int_V & \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dV + \\
 & + h \int_{C_q} \phi_i \phi_j dS
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

A matriz  $\underline{H}$  é simétrica, já que

$$H_{ij} = H_{ji}$$

$\underline{T}$  é um vetor coluna de ordem  $n$  (vetor das temperaturas nodais), e é escrito como:

$$\underline{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix}$$

$\underline{R}$  é um vetor coluna de ordem  $n$ , cujo elemento genérico é dado por:

$$\begin{aligned}
 R_i = \int_V \phi_i Q dV + \int_{C_q} \phi_i g dS + \\
 - k \int_V \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right) dV
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Note-se que valem aqui as observações feitas no item 2.3, relativas à formulação matricial do problema da Elasticidade.

- Regime Transitório

No caso do regime transitório, como já foi visto, a equação de Fourier é dada por (4.1.1):

$$k \nabla^2 T + Q = \rho c \dot{T}$$

Agora, além do segundo membro ser diferente de zero,  $Q$  é função também do tempo.

Aqui o procedimento é análogo ao anterior, pois as integrações que levaram à equação (4.2.2) foram feitas com relação às coordenadas  $x, y, z$ . Obtém-se uma equação análoga à (4.2.2), com a diferença de que no seu segundo membro aparece a integral adicional

$$- \rho c \int_V \phi^* \dot{T} dV \quad (4.3.5)$$

Conseqüentemente, a nova equação matricial será:

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} - \underline{C} \dot{\underline{T}} \quad (4.3.6)$$

onde a matriz  $\underline{C}$  é quadrada de ordem  $n$ , cujo elemento genérico é dado por:

$$C_{ij} = \rho c \int_V \phi_i \phi_j dV \quad (4.3.7)$$

$\underline{C}$  é conhecida como a matriz de capacitância do corpo considerado, e é simétrica, pois;

$$C_{ij} = C_{ji}$$

O vetor  $\underline{\dot{T}}$  é de ordem n:

$$\underline{\dot{T}} = \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \vdots \\ \dot{T}_n \end{Bmatrix}$$

Note-se que, sendo:  $T = \phi_0 + \sum_{i=1}^n T_i \phi_i$ ,

será:  $\dot{T} = \dot{\phi}_0 + \sum_{i=1}^n \dot{T}_i \phi_i$

pois as funções  $\phi_i$  não dependem do tempo.

A existência de (4.3.5) altera o vetor  $\underline{R}$ , introduzindo em  $R_i$  o termo:

$$- \rho c \int_V \phi_i \dot{\phi}_0 dV$$

cujo valor é igual a zero, no caso comum em que a condição de contorno essencial (4.1.3) é invariável no tempo, pois aí tem-se  $\phi_0 = \text{cte.}$  e  $\dot{\phi}_0 = 0$ .

Em resumo, o que se fez foi aplicar o artifício da semidiscretização. Explicando melhor: discretizou-se apenas a parte geométrica do problema, permanecendo as incógnitas (temperaturas nodais) como uma função do tempo:

$$T(x,y,z,t) = \phi_0(x,y,z,t) + \sum_{i=1}^n T_i(t) \phi_i(x,y,z)$$

Como consequência direta deste fato, o sistema de equações obtido já não é um sistema algébrico, mas sim um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem e primeiro grau na variável tempo:

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} - \underline{C} \dot{\underline{T}}$$

A solução analítica deste sistema geralmente é inabordável em termos práticos, e portanto a sua integração ao longo do tempo será feita numericamente.

Para isto será usado um processo do tipo incremental ("passo a passo"), cuja aplicação exige que seja conhecido o campo de temperaturas no instante inicial do fenômeno.

Considerando pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ , em cada um deles pode-se escrever, aproximadamente:

$$\dot{\underline{T}} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \underline{T}(t) - \underline{T}(t-\Delta t) \right]$$

Substituindo a expressão acima na equação

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} - \underline{C} \dot{\underline{T}}$$

resultará a seguinte relação de recorrência para o cálculo de  $\underline{T}(t)$ :

$$\left[ \underline{H} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \right] \underline{T}(t) = \underline{R} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \underline{T}(t - \Delta t) \quad (4.3.8)$$

Na expressão acima, as matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{C}$  serão calculadas apenas uma vez, pois elas não dependem do tempo.

O processo incremental escolhido tem garantida a sua convergência, desde que se escolham intervalos de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequenos.

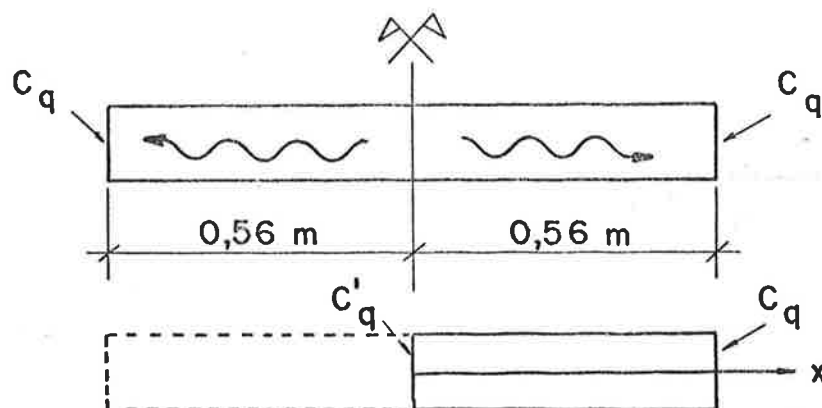
## 5. EXEMPLO: DISTRIBUIÇÃO UNIDIMENSIONAL DE TEMPERATURAS

### 5.1 - Enunciado do Problema

Seja uma barra de comprimento 1,12 m (com seção transversal de área unitária) à temperatura uniforme de 5°C. Suponha-se que a partir de um certo instante comece bruscamente a haver geração de calor, uniforme e constantemente, em seu interior, à razão de  $Q = 500 \text{ kcal/m}^3\text{h}$ .

Quanto às condições de contorno, suponha-se que as extremidades da barra estejam em contato com um fluido no qual o efeito da convecção não seja desprezível. Admita-se que a temperatura deste fluido seja mantida igual a 5°C e que o coeficiente de convecção valha  $h = 10 \text{ kcal/m}^2\text{h } ^\circ\text{C}$ .

Por simetria, ter-se-á:



Note-se que neste problema não existe a condição de contorno essencial (4.1.3), pois a temperatura não está fixada em nenhuma das faces  $C_q$  e  $C'_q$ . Sendo assim, não se define neste caso a função  $\phi_0$ .

Portanto, no contorno só existe a região  $C_q$ , a qual se divide em duas partes:

- a) na extremidade da barra ( $C_q$ ) o fluxo é proporcional ao ressalto de temperatura devido à convecção, ou seja, vale a condição de contorno (4.1.4):

$$k \frac{dT}{dx} = h \cdot T_{fl} - h \cdot T = g - hT$$

com:

$$h = 10 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$$

$$T_{fl} = 5^\circ\text{C} \text{ (uniforme e constante)}$$

$T$  : temperatura em  $C_q$  (a determinar)

- b) na seção média da barra ( $C'_q$ ) o fluxo tem valor conhecido (igual a zero), em virtude da simetria. Trata-se, pois, de um caso particular da condição de contorno (4.1.4):

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

Finalizando, sejam:

$$k = 2,0 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$$

$$\rho = 2.400 \text{ kg/m}^3$$

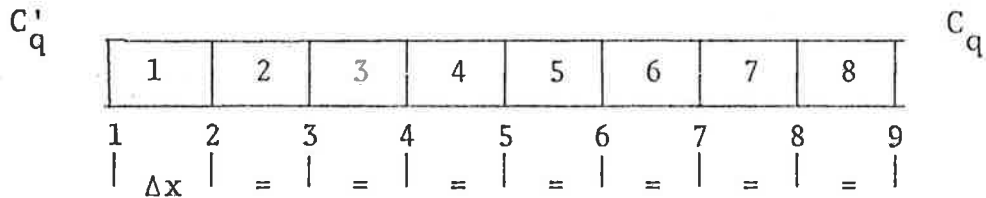


$$c = 0,2 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C}$$

as características do material de que é feita a barra.

### 5.2 - Regime Permanente

A região do problema será dividida em oito elementos finitos:



$$\Delta x = \frac{0,56}{8} = 0,07 \text{ m}$$

A equação matricial que corresponde ao regime permanente é dada por (4.3.2):

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R}$$

- Matriz H

$$H_{ij} = k \int_V \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dV + h \int_{C_q} \phi_i \phi_j dS$$

A segunda integral da equação acima origina-se, como foi visto no Capítulo 4, do termo  $hT$  da condição de contorno natural (4.1.4). Ora, como em  $C'_q$  a condição de contorno não prevê a parcela  $hT$ , a

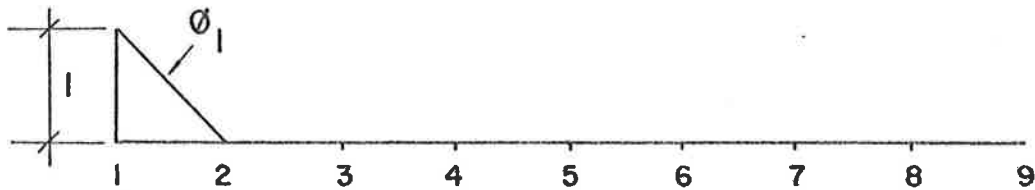
integral em questão será desenvolvida apenas em  $C_q$ .

$$H_{11} = k \int_V \left( \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 dV$$

Sendo  $S = 1 \text{ m}^2$  a área da seção transversal da barra, vem:

$$dV = S \cdot dx = dx$$

e portanto: 
$$H_{11} = k \int_0^{\Delta x} \left( \frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 dx$$

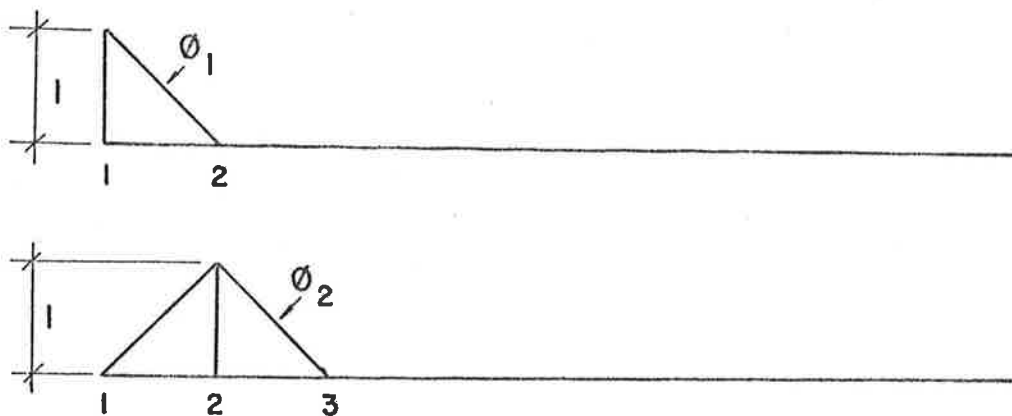


$$\frac{d\phi_1}{dx} = - \frac{1}{\Delta x}$$

A integração será feita apenas no elemento 1, pois  $\phi_1 = 0$  fora de le.

$$H_{11} = k \int_0^{\Delta x} \left( - \frac{1}{\Delta x} \right)^2 dx = \frac{k}{\Delta x} = 28,57 \text{ kcal/h } ^\circ\text{C}$$

$$H_{12} = k \int_0^{\Delta x} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx$$



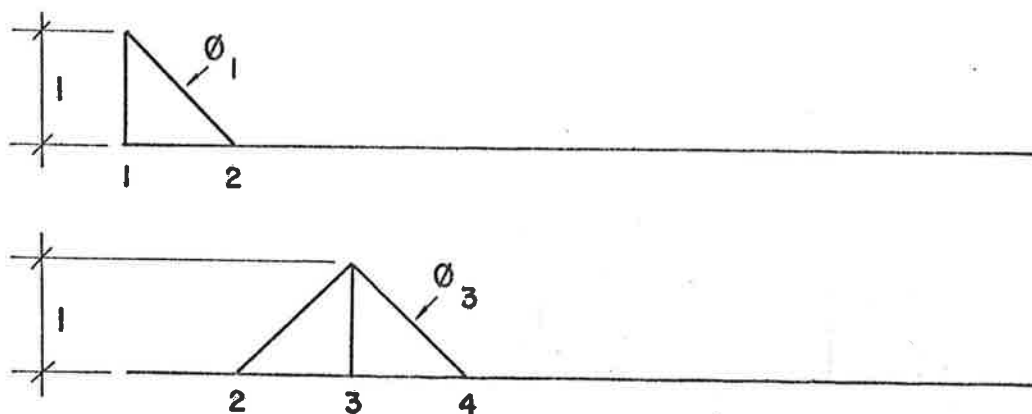
A integração será feita apenas no elemento 1, pois é apenas nele que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são simultaneamente diferentes de zero. Portanto, no elemento 1:

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{1}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi_2}{dx} = \frac{1}{\Delta x}$$

$$H_{12} = k \int_0^{\Delta x} -\frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x} dx = -\frac{k}{\Delta x} = -28,57 \text{ kcal/h } ^\circ\text{C}$$

Os outros elementos da primeira linha de  $\underline{H}$  serão nulos. Por exemplo, considere-se:

$$H_{13} = k \int_V \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dV$$



## 5.6

Como em nenhum elemento se tem simultaneamente  $\phi_1$  e  $\phi_3$  não nulos, vem:

$$H_{13} = 0$$

O elemento  $H_{22}$  é dado por:

$$H_{22} = k \int_V \left( \frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 dV$$

Agora a integração será feita nos elementos 1 e 2:

$$H_{22} = k \int_0^{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta x} \right)^2 dx + k \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \left( \frac{-1}{\Delta x} \right)^2 dx = 57,14 \frac{\text{kcal}}{\text{h } ^\circ\text{C}}$$

e assim por diante. No cálculo do coeficiente  $H_{99}$  deverá ser considerada também a integral em  $C_q$ , pois aí se tem:

$$\phi_9 = 1 \neq 0$$

$$H_{99} = k \int_{7\Delta x}^{8\Delta x} \left( \frac{d\phi_9}{dx} \right)^2 dx + h \int_{C_q} (\phi_9)^2 dS$$

$$H_{99} = \frac{k}{\Delta x} + h = 38,57 \text{ kcal/h } ^\circ\text{C}$$

A matriz  $\underline{H}$  será:

$$\underline{H} = 28,57 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1,35 \end{array} \right|$$

Unid.:  $\frac{\text{hcal}}{\text{h } ^\circ\text{C}}$

- Vetor R

$$R_i = \int_V \phi_i Q dV + \int_{C_q} \phi_i g dS$$

Observações:

- a) Como já foi mencionado,  $\phi_0$  não se define neste caso, e portanto, a fórmula acima, que fornece  $R_i$ , é obtida de (4.3.4), eliminando-se desta última a integral de volume que envolve as derivadas de  $\phi_0$ .
- b) A segunda integral da equação acima será calculada apenas em  $C_q$ , pois como já foi visto,  $g = 0$  em  $C'_q$ .

$$R_1 = Q \int_0^{\Delta x} \phi_1 dx = Q \frac{\Delta x}{2} = 17,50 \text{ kcal/h}$$

$$R_2 = Q \int_0^{2\Delta x} \phi_2 dx = Q \Delta x = 35,00 \text{ kcal/h}$$

e assim por diante. Apenas em  $R_9$  deve-se considerar a integração em  $C_q$ :

$$R_9 = Q \int_{7\Delta x}^{8\Delta x} \phi_g dx + \int_{C_q} \phi_g g dS$$

$$R_9 = 17,50 + g \cdot \phi_g \int_{C_q} dS$$

Como  $\phi_g = 1$  em  $C_q$  e  $g = h T_{fl} = 50 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{h}}$

vem, finalmente:

$$R_9 = 17,50 + 50,00 = 67,50 \text{ kcal/h.}$$

O vetor  $\underline{R}$  será:

$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} 17,50 \\ 35,00 \\ 35,00 \\ \vdots \\ 35,00 \\ 67,50 \end{Bmatrix} \quad \text{Unid.: kcal/h}$$

#### - Resolução do Sistema de Equações

Foi feita manualmente usando o Algoritmo de Gauss da triangulação com retro-substituição em seguida, obtendo-se as temperaturas nodais em regime permanente:

$$T_1 = 72,2^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 71,6^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 69,7^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 66,7^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 62,4^\circ\text{C}$$

$$T_6 = 56,9^\circ\text{C}$$

$$T_7 = 50,2^\circ\text{C}$$

$$T_8 = 42,2^\circ\text{C}$$

$$T_9 = 33,0^\circ\text{C}$$



### 5.3 - Regime Transitório

$$\left[ \underline{H} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \right] \underline{T}(t) = \underline{R} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \underline{T}(t - \Delta t)$$

- Matriz C

$$C_{ij} = \rho c \int_V \phi_i \phi_j dV$$

$$C_{11} = \rho c \int_0^{\Delta x} (\phi_1)^2 dx = \rho c \frac{\Delta x}{3} = 11,20 \text{ kcal}/^\circ\text{C}$$

$$C_{12} = \rho c \int_0^{\Delta x} \phi_1 \phi_2 dx = \rho c \frac{\Delta x}{6} = 5,60 \text{ kcal}/^\circ\text{C}$$





## 5.11

$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ ) $t$ (Horas)	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$
0	5	5	5	5	5	5	5	5	5
15	18,4	18,3	18,1	17,6	16,9	15,9	14,6	12,8	10,3
30	29,6	29,5	28,9	28,00	26,7	24,9	22,7	19,8	16,2
45	38,7	38,4	37,7	36,3	34,4	31,9	28,7	24,7	19,9
60	45,9	45,6	44,6	42,9	40,5	37,3	33,3	28,5	22,8
75	51,5	51,2	50,0	48,0	45,2	41,5	37,0	31,5	25,0
90	56,0	55,6	54,2	52,0	48,9	44,8	39,8	33,8	26,7
105	59,5	59,0	57,6	55,2	51,8	47,4	42,0	35,6	28,1
120	62,2	61,7	60,2	57,6	54,1	49,5	43,8	37,0	29,1
135	64,3	63,8	62,2	59,6	55,8	51,0	45,1	38,1	29,9
150	66,0	65,5	63,8	61,1	57,3	52,3	46,2	39,0	30,6
165	67,4	66,8	65,1	62,3	58,4	53,3	47,0	39,7	31,1
180	68,4	67,8	66,0	63,2	59,1	54,1	47,7	40,2	31,5

Plotando num gráfico (Fig. 5.3.1) verifica-se que o campo de temperaturas tende, com o passar do tempo, para o campo obtido no regime permanente, como era de se esperar.

No ponto onde o cálculo foi interrompido ( $t = 180$  horas) a temperatura  $T_1$  na seção média da barra ( $x = 0$ ) já alcançava o valor de  $68,4^{\circ}\text{C}$ , correspondente a 95% do valor a ser atingido no regime permanente ( $72,2^{\circ}\text{C}$ ).

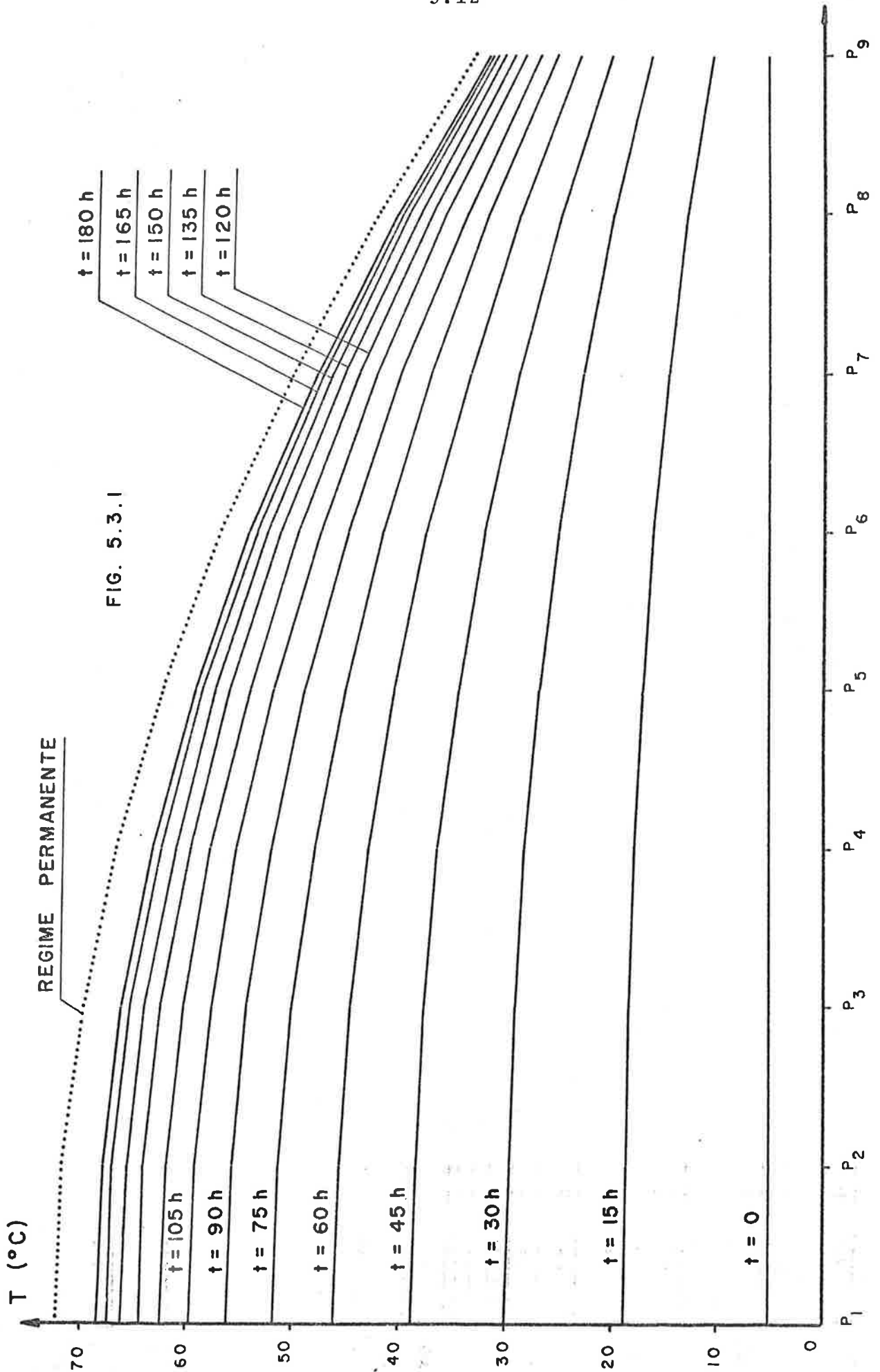


FIG. 5.3.1

## 6. EXEMPLO: DISTRIBUIÇÃO BIDIMENSIONAL DE TEMPERATURAS

### 6.1 - Regime Permanente (Solução Teórica)

Considere-se a região retangular indicada na figura 6.1.1, sujeita nos quatro lados às temperaturas:

$T = 0$  nos lados esquerdo, direito e inferior.

$T = T_m \text{ sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right)$  no lado superior

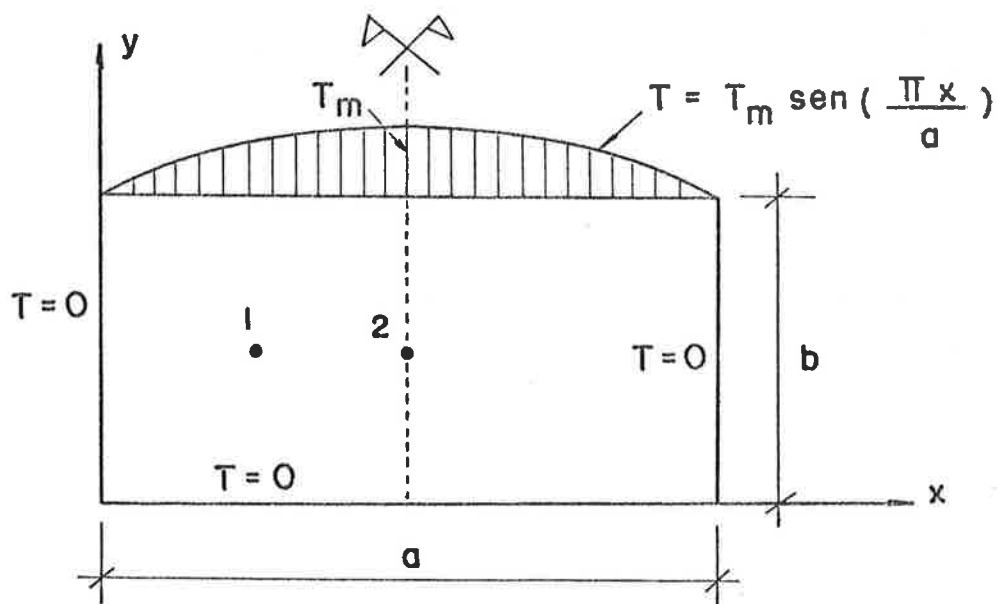


Figura 6.1.1

A equação que governa o fenômeno é a equação (4.1.2):

$$k \nabla^2 T + Q = 0$$

## 6.2

Supondo que não haja geração interna de calor, esta equação se reduz à equação de Laplace:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (6.1.1)$$

Utilizando a técnica de separação de variáveis, a sua solução, para as condições de contorno indicadas, é dada por (Frank Kreith: "Principles of Heat Transfer" - second edition - 1965, International Textbook Company):

$$T(x,y) = T_m \frac{\operatorname{sen} h\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\operatorname{sen} h\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

Considerem-se os seguintes dados numéricos:

$$T_m = 20^\circ\text{C}$$

$$a = 2,00 \text{ m} ; \quad b = 1,00 \text{ m}$$

Nos pontos 1 e 2 indicados na figura 6.1.1, podem-se agora calcular:

$$T_1 = \text{temperatura no ponto 1 } (0,5;0,5) = 5,34^\circ\text{C}$$

$$T_2 = \text{temperatura no ponto 2 } (1,0;0,5) = 7,55^\circ\text{C}$$

### 6.2 - Regime Permanente (Solução Numérica)

Tirando proveito da simetria que existe no problema, utilizar-se-

-ão oito elementos finitos triangulares na discretização, conforme mostrado na figura abaixo:

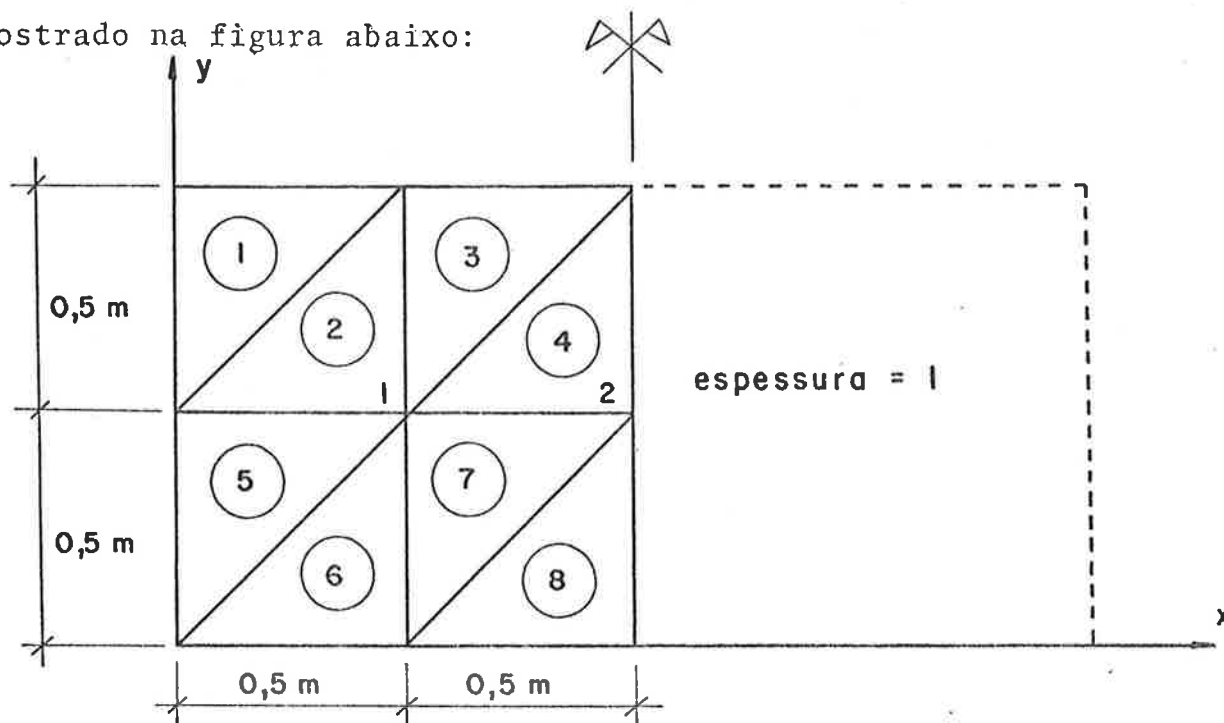


Figura 6.2.1

Hã duas incôgnitas: as temperaturas nodais  $T_1$  e  $T_2$ .

Quanto às condições de contorno, têm-se:

- a) Nos lados superior, inferior e esquerdo, as temperaturas são impostas (condições de contorno essenciais), ou seja, trata-se de regiões do tipo  $C_T$ :

$$T = \bar{T}(x, y) \quad (6.2.1)$$

- b) No lado direito, devido à simetria, o fluxo de calor é igual a zero. Trata-se, portanto, de um caso particular da condição de contorno (4.1.4), sem a parcela  $hT$ , e com  $g = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (6.2.2)$$

Portanto, o lado direito é uma região do tipo  $C_q$ , onde existe uma condição de contorno natural.

Antes de dar prosseguimento, convém que seja feita uma observação: já foi visto que a equação diferencial (6.1.1) independe de  $k$  (coeficiente de condutibilidade térmica). Além disso, a condição de contorno natural também não depende de  $k$ , pois (4.1.4) se transformou em (6.2.2).

Portanto, a solução para o regime permanente, neste caso, vai ser independente de  $k$ . Isto pode ser percebido também através da formulação matricial:

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R}$$

Como  $Q = g = h = 0$ , o coeficiente  $k$  pode ser colocado em evidência nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{R}$ , e portanto pode ser cancelado (basta que se observem as fórmulas (4.3.3) e (4.3.4)).

Entretanto, o coeficiente  $k$  será usado na montagem das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{R}$ , pois no item 6.3, quando for focado o caso do regime transitório, verificar-se-á que a evolução das temperaturas no tempo é afetada por tal coeficiente. Sim, pois na equação matricial:

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} - \underline{C} \dot{\underline{T}},$$

correspondente ao regime transitório,  $k$  não pode ser cancelado, pois ele não entra na formação da matriz  $\underline{C}$ , entrando apenas em  $\underline{H}$  e  $\underline{R}$ .

Assim, adotar-se-ã:

$$k = 2,0 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C}$$

- Funções de Forma  $\phi_i$

Em cada elemento, serão determinadas as funções de forma relativas apenas aos vértices que apresentam interesse, que são:

- os pontos nodais 1 e 2.
- os pontos nodais 3 e 4, mostrados na figura abaixo:

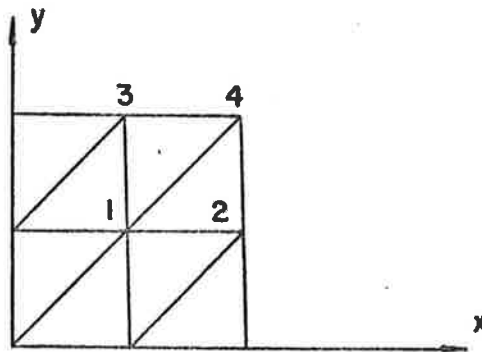


Figura 6.2.2.

As funções de forma relativas aos pontos 1 e 2 serão usadas diretamente na formação de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e as outras, relativas aos pontos 3 e 4, serão utilizadas na construção de  $\phi_0$ .

Considere-se a convenção indicada na figura 6.2.3.:

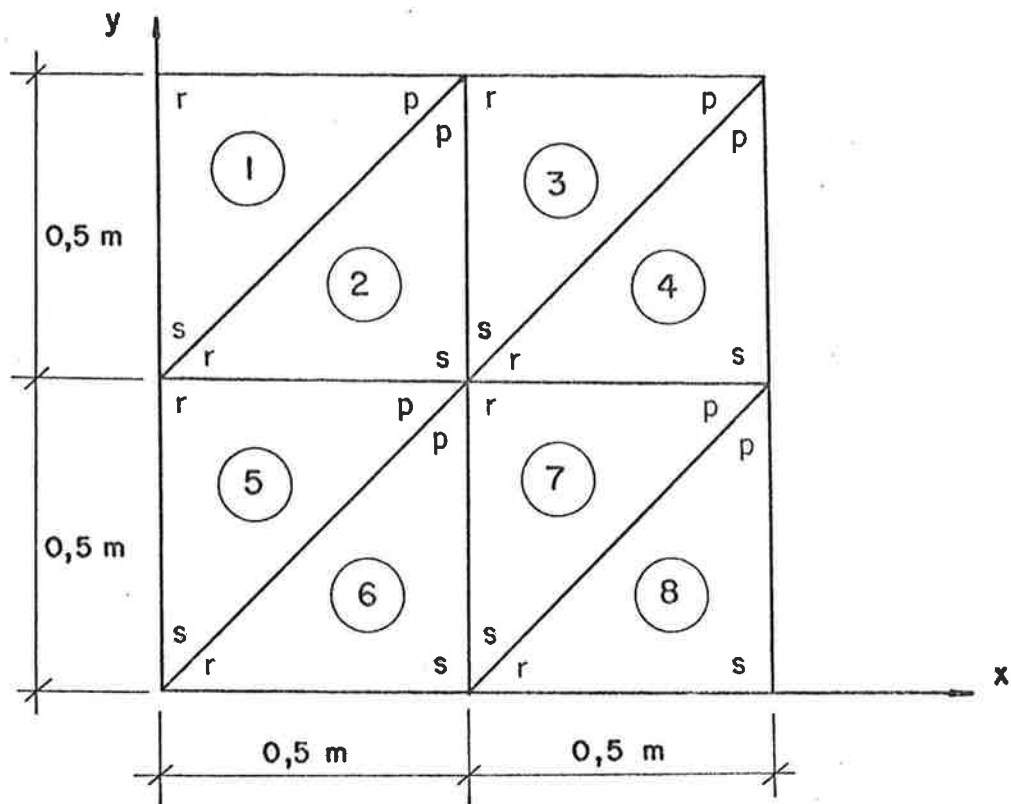


Figura 6.2.3

Seindo assim, têm-se:

No elemento 1 :  $\phi_p = 2x$

No elemento 2 :  $\phi_p = -1 + 2y$

$$\phi_s = 1 + 2x - 2y$$

No elemento 3 :  $\phi_p = -1 + 2x$

$$\phi_r = -2x + 2y$$

$$\phi_s = 2 - 2y$$

No elemento 4 :  $\phi_p = -1 + 2y$



$$\phi_r = 2 - 2x$$

$$\phi_s = 2x - 2y$$

No elemento 5 :  $\phi_p = 2x$

No elemento 6 :  $\phi_p = 2y$

No elemento 7 :  $\phi_p = -1 + 2x$

$$\phi_r = 1 - 2x + 2y$$

No elemento 8 :  $\phi_p = 2y$

A título de exemplo, serão detalhados os cálculos das funções de forma relativas aos vértices p, r e s do elemento 3, utilizando para isto as fórmulas (3.3.2), (3.3.3) e (3.3.4):

a) função de forma  $\phi_p = A + Bx + Cy$

$$A = \frac{1}{0,25} (0,5 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 1,0) = -1$$

$$B = \frac{1}{0,25} (1,0 - 0,5) = 2,0$$

$$C = \frac{1}{0,25} (0,5 - 0,5) = 0$$

$$\therefore \phi_p = -1 + 2x$$

b) função de forma  $\phi_r = A + Bx + Cy$

$$A = \frac{1}{0,25} (0,5 \cdot 1,0 - 1,0 \cdot 0,5) = 0$$

$$B = \frac{1}{0,25} (0,5 - 1,0) = -2,0$$

$$C = \frac{1}{0,25} (1,0 - 0,5) = 2,0$$

$$\therefore \phi_r = -2x + 2y$$

c) função de forma  $\phi_s = A + Bx + Cy$

$$A = \frac{1}{0,25} (1,0 \cdot 1,0 - 0,5 \cdot 1,0) = 2,0$$

$$B = \frac{1}{0,25} (1,0 - 1,0) = 0$$

$$C = \frac{1}{0,25} (0,5 - 1,0) = -2,0$$

$$\therefore \phi_s = 2 - 2y$$

Resumindo:

a) função de forma  $\phi_1$ :

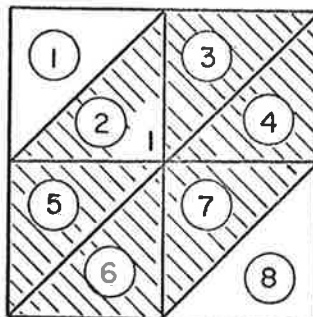


Figura 6.2.4

$\phi_1$  é diferente de zero nos elementos hachurados, valendo a unidade no ponto nodal 1 e zero nos demais pontos nodais:

Elemento	$\phi_1$	$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}$	$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}$
$2(\phi_1 = \phi_s)$	$1 + 2x - 2y$	2	-2
$3(\phi_1 = \phi_s)$	$2 - 2y$	0	-2
$4(\phi_1 = \phi_r)$	$2 - 2x$	-2	0
$5(\phi_1 = \phi_p)$	$2x$	2	0
$6(\phi_1 = \phi_p)$	$2y$	0	2
$7(\phi_1 = \phi_r)$	$1 - 2x + 2y$	-2	2

TABELA 6.2.1

b) função de forma  $\phi_2$ :

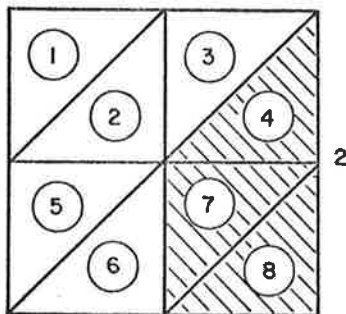


Figura 6.2.5

$\phi_2$  é diferente de zero nos elementos hachurados, valendo a unidade

de no ponto nodal 2 e zero nos demais pontos nodais:

Elemento	$\phi_2$	$\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$	$\frac{\partial \phi_2}{\partial y}$
4( $\phi_2 = \phi_s$ )	$2x - 2y$	2	-2
7( $\phi_2 = \phi_p$ )	$-1 + 2x$	2	0
8( $\phi_2 = \phi_p$ )	$2y$	0	2

TABELA 6.2.2

Função  $\phi_0$ :

A função  $\phi_0$  diz respeito às condições de contorno essenciais. Nos lados inferior e esquerdo, tem-se:  $\phi_0 = 0$ , já que neles as condições de contorno são homogêneas. Portanto,  $\phi_0$  será diferente de zero apenas nos elementos contíguos ao lado superior, ou seja, nos elementos 1, 2, 3 e 4.

No lado superior, a temperatura imposta tem variação senoidal, no problema original. Entretanto, após a discretização, esta variação será linear (respeitando nos vértices os valores dados pela variação senoidal), devido à própria característica linear da função  $\phi_0$  adotada. Nos pontos nodais têm-se (v. fig. 6.2.2):

$$T_4 = T_m = 20^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 20 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi, 0, 5}{2, 0} \right) = 14,14^\circ\text{C}$$

$T = 0$  no ponto nodal de abscissa  $x = 0$ .

Sendo assim, vêm:

No elemento 1:

$$\phi_o = 14,14 \cdot \phi_p = 14,14 \cdot 2x = 28,28x$$

No elemento 2:

$$\phi_o = 14,14 \cdot \phi_p = 14,14 (-1 + 2y) = -14,14 + 28,28y$$

No elemento 3:

$$\begin{aligned} \phi_o &= 14,14 \cdot \phi_r + 20 \cdot \phi_p = 14,14 (-2x + 2y) + 20(-1 + 2x) \\ &= -20 + 11,72x + 28,28y \end{aligned}$$

No elemento 4:

$$\phi_o = 20 \cdot \phi_p = 20(-1 + 2y) = -20 + 40y$$

Resumindo:

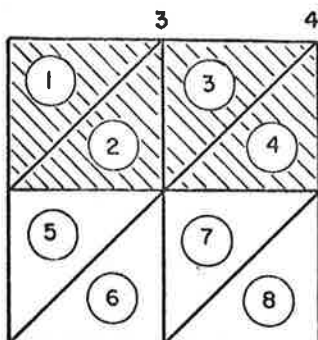


Figura 6.2.6

$\phi_0$  é diferente de zero nos elementos hachurados, valendo 14,14 no ponto 3, 20 no ponto 4 e zero nos demais pontos nodais:

Elemento	$\phi_0$	$\frac{\partial \phi_0}{\partial x}$	$\frac{\partial \phi_0}{\partial y}$
1	28,28x	28,28	0
2	-14,14+28,28y	0	28,28
3	-20+11,72x+28,28y	11,72	28,28
4	-20+40y	0	40

TABELA 6.2.3

- Matriz H

Considerando que  $h = 0$ , a fórmula (4.3.3) se reduz a ( $dV=1.d\Omega$ ):

$$H_{ij} = k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

- Coefficiente  $H_{11}$ :

$$H_{11} = k \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega$$

A integração será feita nos elementos onde  $\phi_1 \neq 0$ , ou seja, nos elementos 2,3,4,5,6 e 7 (v. fig. 6.2.4).

Sendo  $k = 2,0 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C}$ , vem (v. Tabela 6.2.1):

$$\begin{aligned} H_{11} &= 2 \cdot 0,125 [2^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 2^2 + (-2)^2 + 2^2] \\ &= 8 \text{ kcal/h}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

- Coefficiente  $H_{12}$ :

$$H_{12} = k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) d\Omega$$

A integração será feita nos elementos onde  $\phi_1 \neq 0$  e  $\phi_2 \neq 0$ , ou seja, nos elementos 4 e 7 (v. figs. 6.2.4 e 6.2.5).

Pelas Tabelas 6.2.1 e 6.2.2:

$$\begin{aligned} H_{12} &= 2 \cdot 0,125 [(-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 2] \\ &= -2 \text{ kcal/h}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

- Coefficiente  $H_{22}$

$$H_{22} = k \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega$$

A integração será feita nos elementos onde  $\phi_2 \neq 0$ , ou seja, nos elementos 4, 7 e 8 (v. fig. 6.2.5).

Pela Tabela 6.2.2:

$$\begin{aligned} H_{22} &= 2 \cdot 0,125 [2^2 + (-2)^2 + 2^2 + 2^2] \\ &= 4 \text{ kcal/h}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Portanto, a matriz  $\underline{H}$  será:

$$\underline{H} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{Unid.: kcal/h}^\circ\text{C}$$

- Vetor R

Sendo  $Q = 0$  e  $g = 0$ , a fórmula (4.3.4) fica ( $dV = 1 \cdot d\Omega$ ):

$$R_i = -k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_o}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_o}{\partial y} \right) d\Omega$$

- Coefficiente  $R_1$ :

$$R_1 = -k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_o}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_o}{\partial y} \right) d\Omega$$

A integração será feita nos elementos onde  $\phi_1 \neq 0$  e  $\phi_o \neq 0$ , isto é, nos elementos 2, 3 e 4 (v. figs. 6.2.4 e 6.2.6).

Pelas Tabelas 6.2.1 e 6.2.3:

$$\begin{aligned} R_1 &= -2 \cdot 0,125 [(-2) \cdot 28,28 + (-2) \cdot 28,28] \\ &= 28,28 \text{ kcal/h} \end{aligned}$$

- Coefficiente  $R_2$ :

$$R_2 = -k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_o}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial \phi_o}{\partial y} \right) d\Omega$$



A integração será feita no elemento 4, pois apenas nele é que se verificam:  $\phi_2 \neq 0$  e  $\phi_0 \neq 0$ . Pelas Tabelas 6.2.2 e 6.2.3:

$$R_2 = -2 \cdot 0,125 (-2) 40 = 20 \text{ kcal/h}$$

Logo, o vetor  $\underline{R}$  será dado por:

$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} 28,28 \\ 20 \end{Bmatrix} \quad \text{Unid.: kcal/h}$$

- Resolução do sistema de equações

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28,28 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo, vêm:

$$T_1 = 5,47^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 7,73^\circ\text{C}$$

Note-se que, apesar da malha relativamente grossa utilizada, obtiveram-se boas aproximações nas temperaturas nodais  $T_1$  e  $T_2$ , com uma precisão de 2,4%, ao se compararem com os valores teóricos (v. item 6.1).

Na figura 6.2.7 apresenta-se um corte paralelo ao eixo x, passando pelos pontos nodais 1 e 2, mostrando os campos de temperatura teórico e numérico.

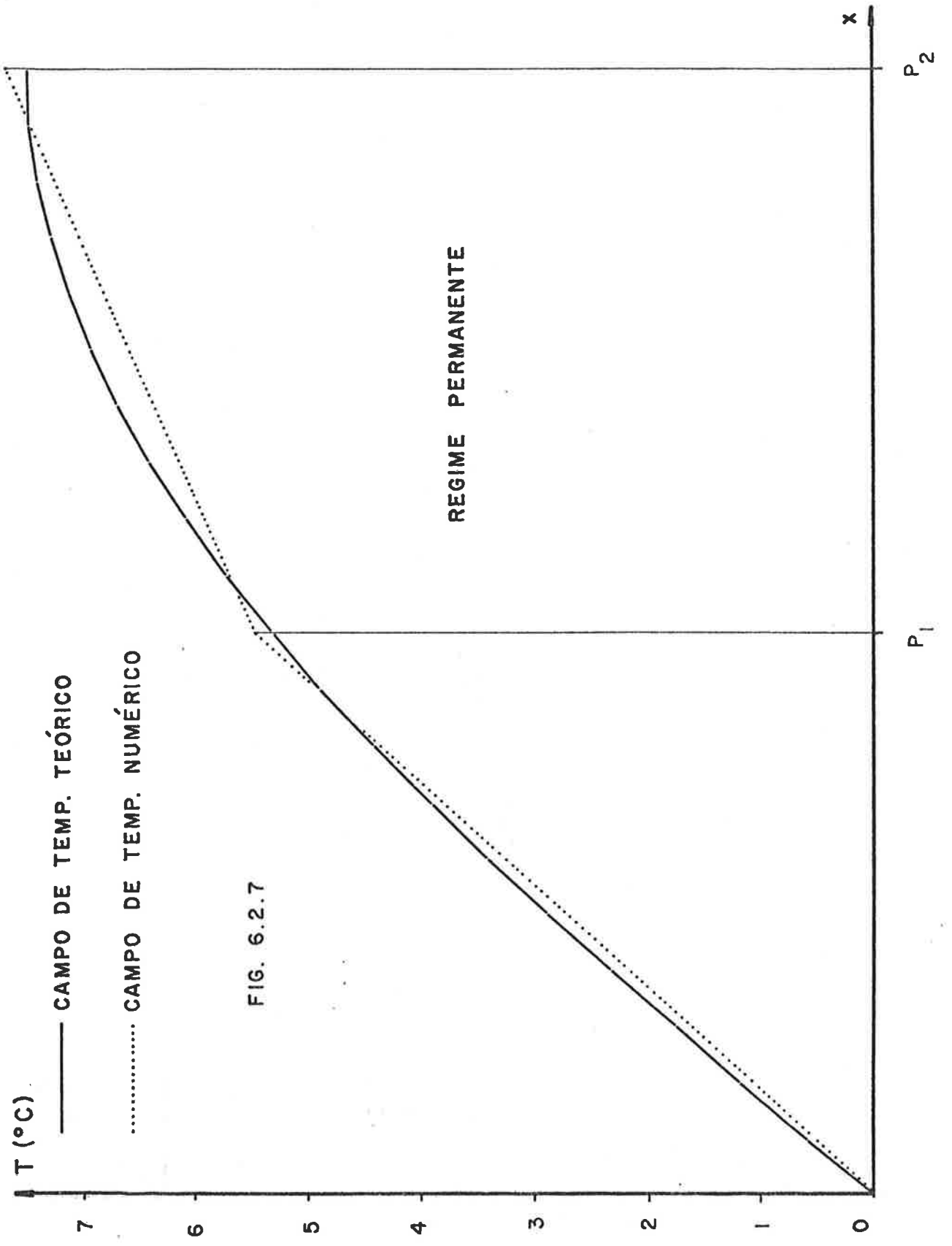


FIG. 6.2.7

- Campo de temperaturas

Obtidas as incógnitas do problema ( $T_1$  e  $T_2$ ), pode-se agora determinar o campo de temperaturas, através de (4.3.1.):

$$T = \phi_0 + T_1 \phi_1 + T_2 \phi_2$$

Considerando a figura 6.2.3, escreve-se:

No elemento 1:

$$T = \phi_0 = 14,14 \cdot \phi_p = 14,14 \cdot 2x = 28,28x$$

No elemento 2:

$$\begin{aligned} T &= \phi_0 + T_1 \cdot \phi_s = 14,14 \cdot \phi_p + 5,47 \cdot \phi_s = \\ &= 14,14 (-1 + 2y) + 5,47 (1 + 2x - 2y) = \\ &= -8,67 + 10,94x + 17,34y \end{aligned}$$

e assim por diante:

Elemento	T	$\frac{\partial T}{\partial x}$	$\frac{\partial T}{\partial y}$
1	28,28x	28,28	0
2	-8,67+10,94x+17,34y	10,94	17,34
3	-9,06+11,72x+17,34y	11,72	17,34
4	-9,06+ 4,52x+24,54y	4,52	24,54
5	10,94x	10,94	0
6	10,94y	0	10,94
7	-2,26+4,52x+10,94y	4,52	10,94
8	15,46y	0	15,46

TABELA 6.2.4

Os dados da tabela acima serão utilizados no Capítulo 7, quando se ráo determinadas as tensões devidas a este campo de temperaturas.

### 6.3 - Regime transitório (solução numérica)

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} - \underline{C} \dot{\underline{T}}$$

#### - Matriz C

A fórmula (4.3.7) fornece ( $dV = 1 \cdot d\Omega$ ):

$$C_{ij} = \rho c \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega$$

Sejam:

$$\rho = 2.400 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 0,2 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$$

#### - Coefficiente C<sub>11</sub>:

$$C_{11} = \rho c \int_{\Omega} (\phi_1)^2 d\Omega$$

A integração será feita nos elementos 2,3,4,5,6 e 7. Basta fazer a integração num qualquer destes elementos e multiplicar o resultado por seis (número de elementos), pois em cada elemento o resultado da integração será o mesmo, ou seja, o volume sob a função  $(\phi_1)^2$ . Isto é válido porque os elementos são iguais entre si.

Para facilitarem-se os cálculos, serão utilizadas coordenadas de

área (v. anexo B). Escolhendo, por exemplo, o elemento 3, as relações que definem a transformação de coordenadas são:

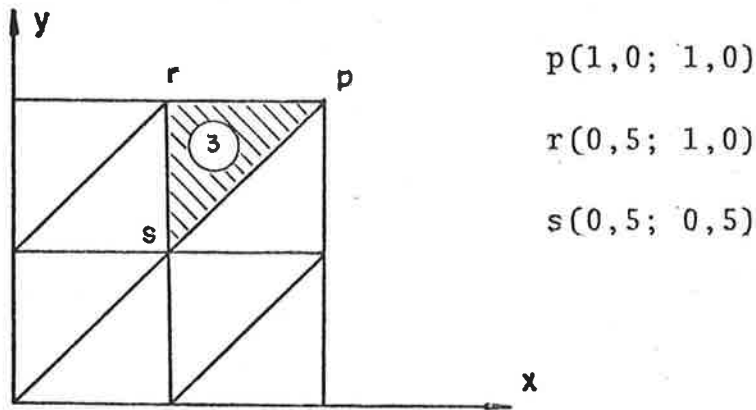


Figura 6.3.1

$$1 = \alpha + \beta + \gamma \quad (1)$$

$$x = \alpha + 0,5\beta + 0,5\gamma \quad (2)$$

$$y = \alpha + \beta + 0,5\gamma \quad (3)$$

De (1) vem:  $\gamma = 1 - \alpha - \beta$  que, substituído em (3), produz:

$$y = 0,5 (\alpha + \beta + 1) \quad (4)$$

No elemento 3:  $\phi_1 = \phi_s = 2 - 2y$

Logo, considerando (4), vem:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\phi_1)^2 d\Omega &= \int_{\Omega} (2 - 2y)^2 d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta) d\Omega = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} d\Omega + \int_{\Omega} \alpha^2 d\Omega + \int_{\Omega} \beta^2 d\Omega + 2 \int_{\Omega} \alpha\beta d\Omega +$$

$$- 2 \int_{\Omega} \alpha d\Omega - 2 \int_{\Omega} \beta d\Omega = 0,0208333$$

Portanto:

$$C_{11} = 2.400 (0,2) 6 (0,0208333) = 60 \text{ kcal/}^{\circ}\text{C}$$

- Coefficiente  $C_{12}$ :

$$C_{12} = \rho c \int_{\Omega} \phi_1 \phi_2 d\Omega$$

A integração será feita nos elementos 4 e 7.

Basta integrar num deles e multiplicar o resultado por dois:

$$C_{12} = 2.400(0,2) 2 (0,0104) = 10 \text{ kcal/}^{\circ}\text{C}$$

- Coefficiente  $C_{22}$ :

$$C_{22} = \rho c \int_{\Omega} (\phi_2)^2 d\Omega$$

A integração será feita nos elementos 4,7 e 8.

Neste caso, podem-se usar os resultados obtidos para o coeficiente  $C_{11}$ , apenas lembrando que agora são três elementos, ao invés de seis:

$$C_{22} = 2.400 (0,2) 3 (0,0208333) = 30 \text{ kcal/}^{\circ}\text{C}$$

Portanto, a matriz  $\underline{C}$  será:

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} 60 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} \quad \text{Unid.: kcal/}^\circ\text{C}$$

- Integração ao longo do tempo

$$\underline{H} \underline{T} = \underline{R} - \underline{C} \dot{\underline{T}}$$

A relação de recorrência para o cálculo de  $\underline{T}(t)$  é dada por (4.3.8):

$$\left[ \underline{H} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \right] \underline{T}(t) = \underline{R} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \underline{T}(t - \Delta t)$$

Adotando  $\Delta t = 5$  horas, vêm:

$$\underline{H} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} = \begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \underline{C} = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28,28 \\ 20 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} T_1(t-\Delta t) \\ T_2(t-\Delta t) \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima, vêm:

$$T_1(t) = 1,414 + 0,6 T_1(t - \Delta t) + 0,1 T_2(t - \Delta t) \quad (6.3.1)$$

$$T_2(t) = 2 + 0,2 T_1(t - \Delta t) + 0,6 T_2(t - \Delta t)$$

No instante inicial ( $t = 0$ ) a temperatura é nula em todos os pontos. Então, aplica-se bruscamente, no lado superior, o campo de temperaturas dado pelas funções  $\phi_0$  da Tabela 6.2.3, fazendo nelas  $y = 1$ .

Sendo assim, as equações (6.3.1) fornecem a evolução no tempo das temperaturas nodais  $T_1$  e  $T_2$ :

INSTANTE (horas)	$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)
0	0	0
5	1,41	2,00
10	2,46	3,48
15	3,23	4,58
20	3,81	5,39
25	4,24	6,00
30	4,56	6,44
35	4,79	6,78
40	4,96	7,02
45	5,09	7,21
50	5,19	7,34
55	5,26	7,44
60	5,31	7,52

A figura 6.3.2 mostra a evolução no tempo do campo de temperaturas, segundo o mesmo corte já utilizado na figura 6.2.7. Vê-se que, com o passar do tempo, o campo de temperaturas tende para a



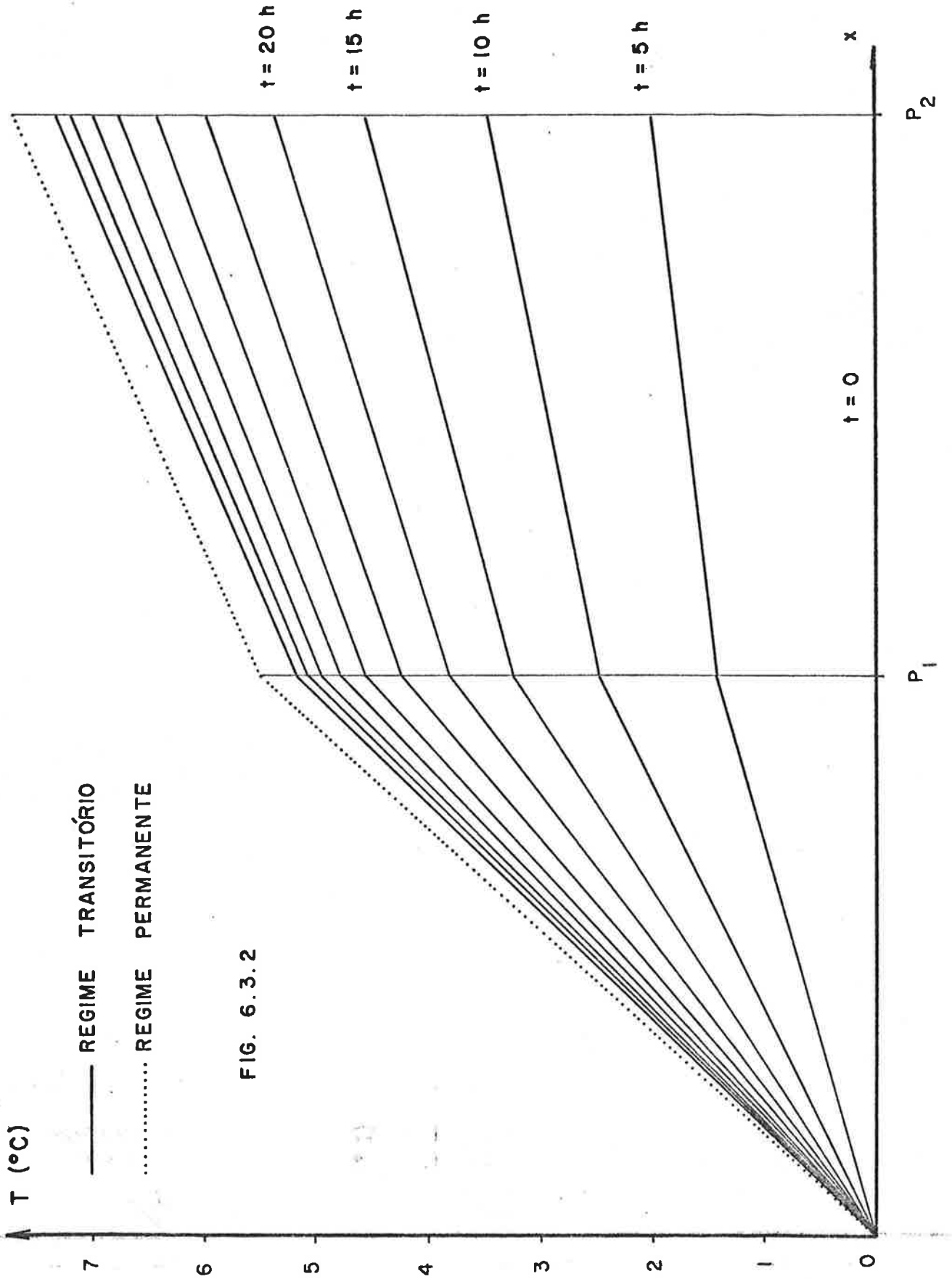
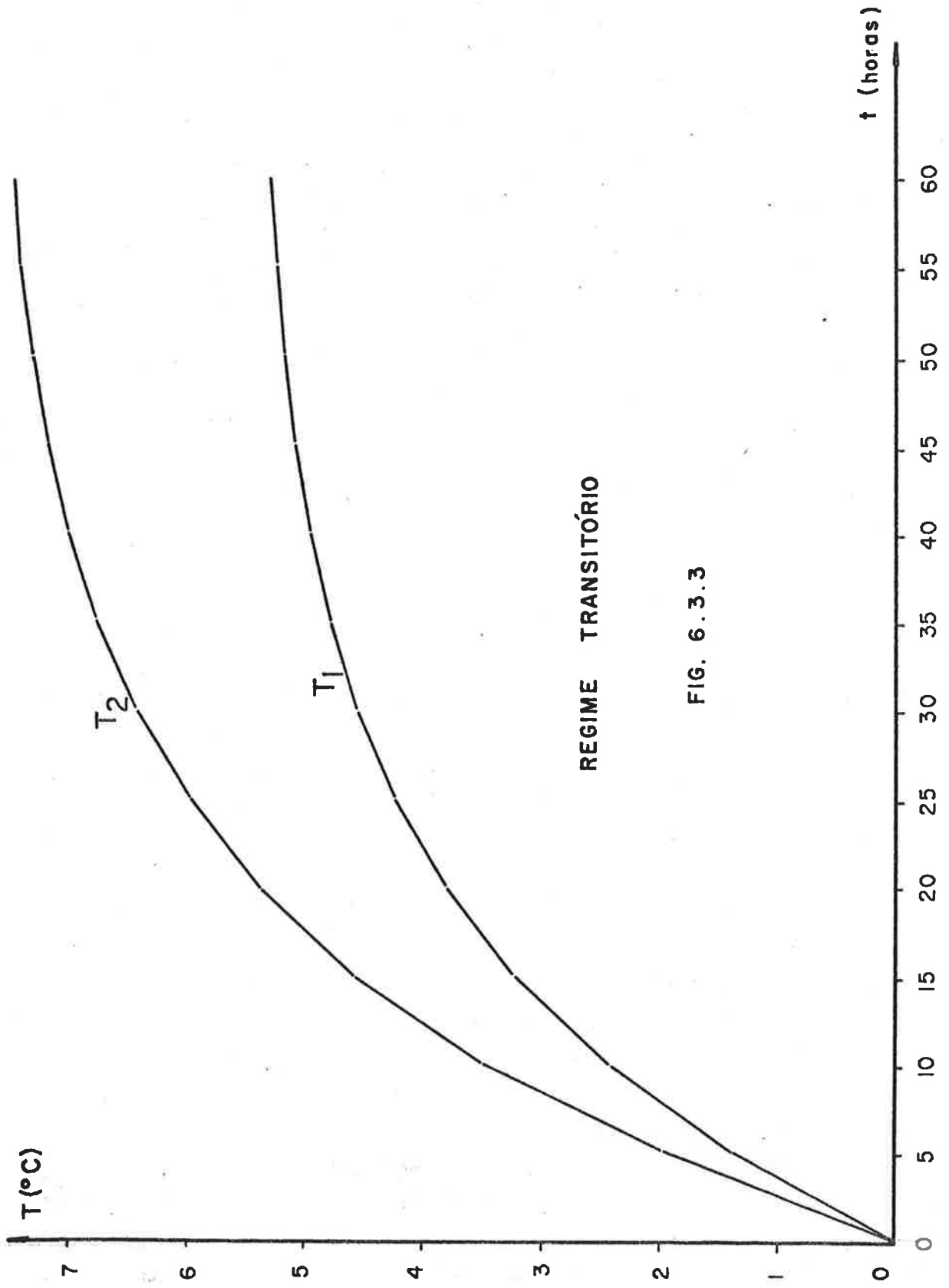


FIG. 6.3.2

quele obtido no regime permanente, como era de se esperar.

A figura 6.3.3 mostra a variação, com o tempo, das temperaturas no dais  $T_1$  e  $T_2$ . Pode-se nela perceber o caráter assintótico da tendência ao regime permanente.



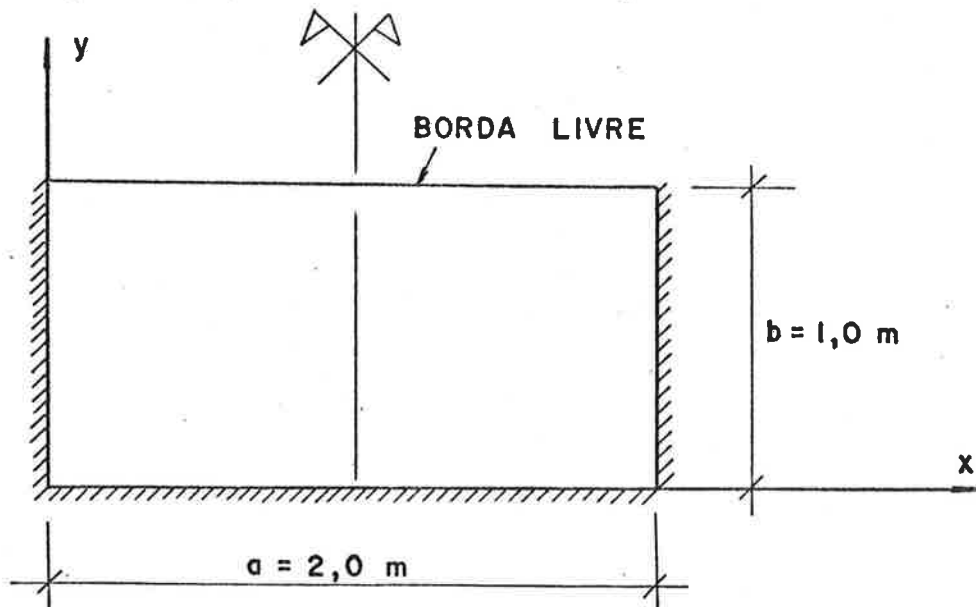
REGIME TRANSITÓRIO

FIG. 6.3.3

## 7. EXEMPLO: TENSÕES DE ORIGEM TÉRMICA

Neste capítulo serão determinadas, com o Método dos Elementos Finitos, as tensões devidas ao campo de temperaturas obtido no caso do regime permanente do item 6.2.

Será suposto tratar-se de estado plano de deformação, e que a vinculação no plano x-y é a indicada na figura abaixo:



Adotar-se-ão:

$$E = 3 \cdot 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$\nu = 0$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

7.1 - Campo de Deslocamentos

Considerar-se-á a mesma discretização utilizada no capítulo anterior, continuando a tirar vantagem da simetria que existe no problema:

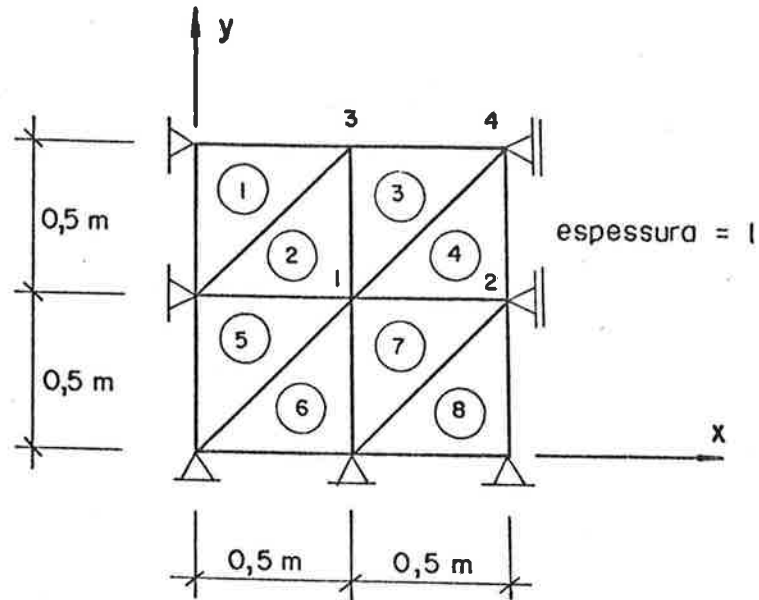


Figura 7.1.1.

Será admitido que, além do carregamento térmico, não atue nenhuma outra sollicitação na estrutura, isto é:

$$X = Y = \bar{X} = \bar{Y} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{u} = \bar{v} = 0$$

Supõe-se que a estrutura foi vinculada, da maneira indicada na figura 7.1.1, a uma temperatura uniforme de  $0^{\circ}\text{C}$ , e desejam-se conhecer as tensões que nela aparecem após instalado o campo de temperaturas no regime permanente (v. Tabela 6.2.4).

Quanto às condições de contorno, têm-se:

### 7.3

- a) Nos lados esquerdo e inferior há condições de contorno essenciais do tipo (3.1.6) e (3.1.7):

$$u = 0 \quad e \quad v = 0$$

Trata-se, portanto, de regiões do tipo  $C_d$  e, como os deslocamentos impostos são nulos, têm-se:

$$\phi_u = \phi_v = 0$$

- b) No lado superior as tensões são conhecidas, e valem: zero na direção  $x$  e  $\alpha TE$  na direção  $y$  (basta fazer  $l = 0$  em (3.1.8) e  $m = 1$  em (3.1.9)). Trata-se de uma região do tipo  $C_\sigma$ , onde atua uma condição de contorno natural.
- c) No lado direito atua uma condição de contorno mista: na direção  $x$ , têm-se deslocamentos impostos ( $u = 0$ ), e na direção  $y$ , têm-se tensões impostas, que no caso são nulas, pois  $m = 0$ : vide equação (3.1.9).

Quanto às forças de volume, elas valem, de acordo com as equações (3.1.4) e (3.1.5):

$$- \alpha E \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{na direção } x$$

$$- \alpha E \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{na direção } y$$

Em seguida, será visto como se pode tratar a condição de contorno mista. O sistema de equações é dado por:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc}
 \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \underline{K}_{13} & \underline{K}_{14} \\
 \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} & \underline{K}_{23} & \underline{K}_{24} \\
 \underline{K}_{31} & \underline{K}_{32} & \underline{K}_{33} & \underline{K}_{34} \\
 \underline{K}_{41} & \underline{K}_{42} & \underline{K}_{43} & \underline{K}_{44}
 \end{array} \right| \\
 (8 \times 8)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c}
 \underline{d}_1 \\
 \underline{d}_2 \\
 \underline{d}_3 \\
 \underline{d}_4
 \end{array} \right| \\
 (8 \times 1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c}
 \underline{f}_1 \\
 \underline{f}_2 \\
 \underline{f}_3 \\
 \underline{f}_4
 \end{array} \right| \\
 (8 \times 1)
 \end{array}$$

Como  $u_2 = u_4 = 0$ , podem-se simplesmente eliminar as linhas e colunas correspondentes da matriz  $\underline{K}$ , assim como os elementos correspondentes dos vetores  $\underline{d}$  e  $\underline{f}$ , como mostrado na figura 7.1.2. A matriz  $\underline{K}$  resultante será de ordem 6, ainda simétrica.

No capítulo anterior determinaram-se as funções de forma  $\phi_1$  (figura 6.2.4 e tabela 6.2.1) e  $\phi_2$  (figura 6.2.5 e tabela 6.2.2).

As funções de forma  $\phi_3$  e  $\phi_4$  serão determinadas em seguida (v. figura 6.2.3):

a) função de forma  $\phi_3$

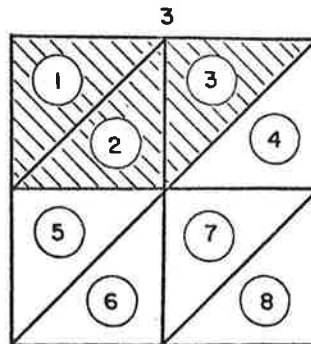


Figura 7.1.3

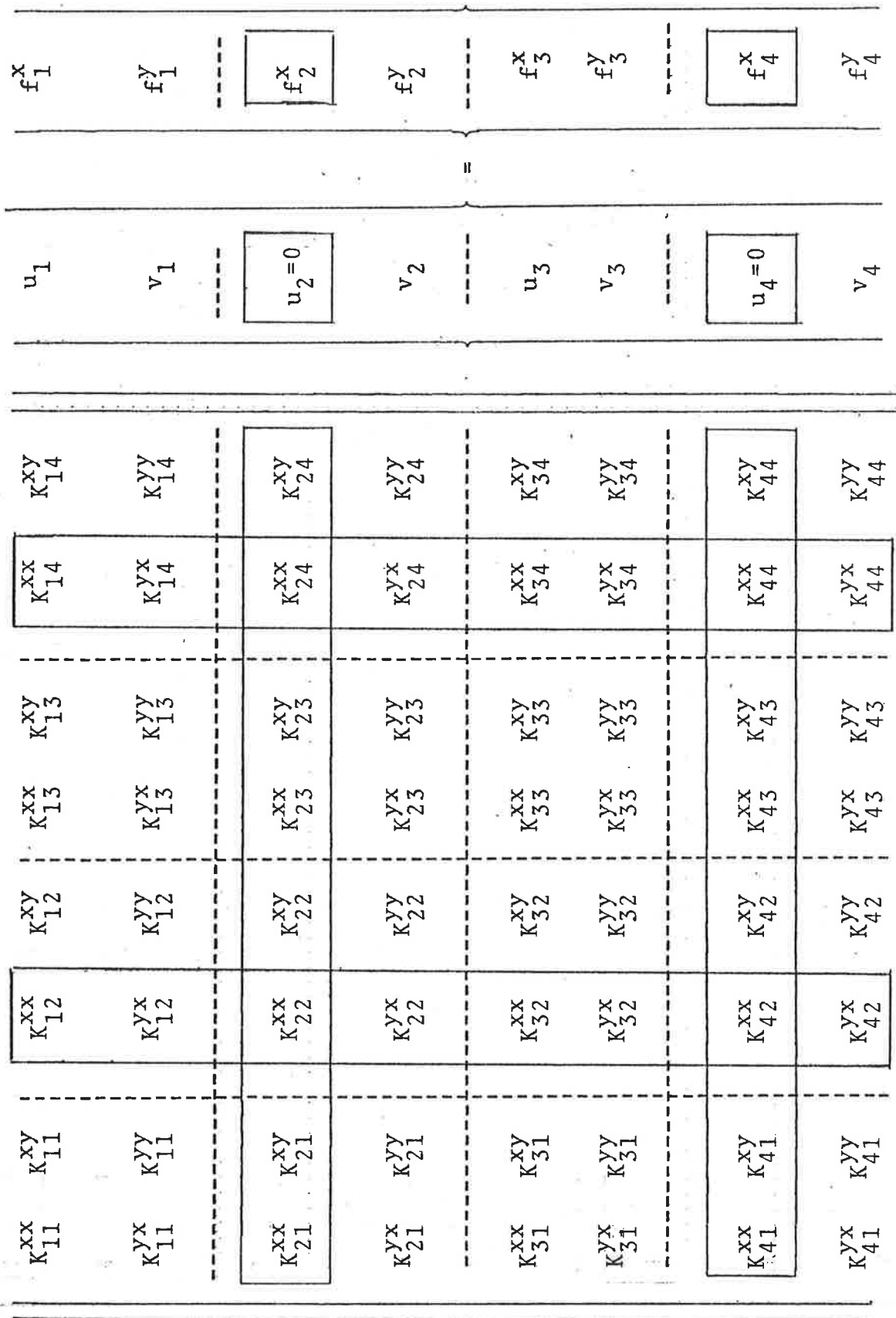


Figure 7.1.2



$\phi_3$  é diferente de zero nos elementos hachurados, valendo a unidade no ponto 3 e zero nos demais pontos nodais:

Elemento	$\phi_3$	$\frac{\partial \phi_3}{\partial x}$	$\frac{\partial \phi_3}{\partial y}$
1( $\phi_3 = \phi_p$ )	$2x$	2	0
2( $\phi_3 = \phi_p$ )	$-1 + 2y$	0	2
3( $\phi_3 = \phi_r$ )	$-2x + 2y$	-2	2

TABELA 7.1.1

b) função de forma  $\phi_4$

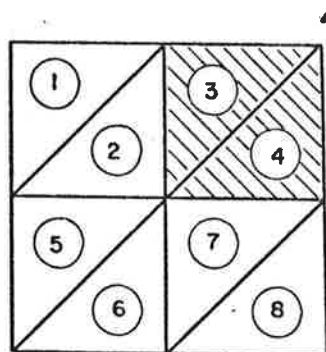


Figura 7.1.4

$\phi_4$  é diferente de zero nos elementos hachurados, valendo a unidade no ponto nodal 4 e zero nos demais pontos nodais.

Elemento	$\phi_4$	$\frac{\partial \phi_4}{\partial x}$	$\frac{\partial \phi_4}{\partial y}$
3( $\phi_4 = \phi_p$ )	$-1 + 2x$	2	0
4( $\phi_4 = \phi_p$ )	$-1 + 2y$	0	2

TABELA 7.1.2

- Matriz K

Considerando que  $\nu = 0$ , as fórmulas (3.3.5) a (3.3.8) se reduzem a:

$$K_{ij}^{xx} = \frac{E}{2} \int_{\Omega} \left( 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$K_{ij}^{xy} = \frac{E}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega$$

$$K_{ij}^{yx} = \frac{E}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} d\Omega$$

$$K_{ij}^{yy} = \frac{E}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

Os resultados serão colocados em forma de tabela. Não serão calculados os coeficientes de rigidez relativos às linhas e colunas eliminadas (v. figura 7.1.2). Da mesma forma, pelo fato de K ser simétrica, determinar-se-ão apenas os coeficientes pertencentes à diagonal principal, e os acima dela.

Submatriz de $\underline{K}$	Elementos onde se deve fazer a integração	Coefficiente de rigidez (tf/m)
$\underline{K}_{11}$	2,3,4,5,6 e 7	$K_{11}^{xx} = 9 \cdot 10^6$
		$K_{11}^{xy} = -1,5 \cdot 10^6$
		$K_{11}^{yy} = 9 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{12}$	4 e 7	$K_{12}^{xy} = 0,75 \cdot 10^6$
		$K_{12}^{yy} = -1,5 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{13}$	2 e 3	$K_{13}^{xx} = -1,5 \cdot 10^6$
		$K_{13}^{xy} = 0,75 \cdot 10^6$
		$K_{13}^{yx} = 0,75 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{14}$	3 e 4	$K_{13}^{yy} = -3 \cdot 10^6$
		$K_{14}^{xy} = -0,75 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{22}$	4,7 e 8	$K_{14}^{yy} = 0$
		$K_{22}^{yy} = 4,5 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{23}$		$K_{23}^{yx} = 0$
		$K_{23}^{yy} = 0$
$\underline{K}_{24}$	4	$K_{24}^{yy} = -1,5 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{33}$	1,2 e 3	$K_{33}^{xx} = 4,5 \cdot 10^6$
		$K_{33}^{xy} = -0,75 \cdot 10^6$
		$K_{33}^{yy} = 4,5 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{34}$	3	$K_{34}^{xy} = 0,75 \cdot 10^6$
		$K_{34}^{yy} = -0,75 \cdot 10^6$
$\underline{K}_{44}$	3 e 4	$K_{44}^{yy} = 2,25 \cdot 10^6$

TABELA 7.1.3

A matriz  $\underline{K}$ , portanto, será:

$$\underline{K} = 10^6 \begin{vmatrix} 9 & -1,5 & 0,75 & -1,5 & 0,75 & -0,75 \\ & 9 & -1,5 & 0,75 & -3 & 0 \\ & & 4,5 & 0 & 0 & -1,5 \\ & & & 4,5 & -0,75 & 0,75 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & & 4,5 & -0,75 \\ & & & & & 2,25 \end{vmatrix}$$

Unid.: tf/m

Confirmam-se aqui algumas das afirmações feitas no item 2.3, quando se tratou da formulação matricial: os elementos da diagonal principal de  $\underline{K}$  são positivos e, além disso, são os seus maiores elementos, em módulo. Deve-se também registrar, entretanto, que a matriz  $\underline{K}$  obtida não é de banda, e isto porque o número de elementos finitos utilizados não é grande o suficiente para que o caráter localizado das funções de interpolação, em conjunto com uma adequada numeração dos nós, possa produzir uma matriz de rigidez francamente bandeada, como costumam acontecer nos problemas da prática.

- Vetor  $\underline{f}$

Considerando que:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ X = Y = \bar{X} = \bar{Y} = 0 \\ \phi_u = \phi_v = 0 \end{array} \right.$$

as fórmulas (3.3.9) e (3.3.10) se reduzem a:

$$f_i^x = \int_{C_\sigma} \phi_i \ell \alpha TE dC - \int_{\Omega} \phi_i \alpha E \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega$$

$$f_i^y = \int_{C_\sigma} \phi_i m \alpha TE dC - \int_{\Omega} \phi_i \alpha E \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega$$

Considerando que:  $\alpha E = 30 \text{ tf/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

e que num elemento qualquer, onde  $\phi_i \neq 0$ , tem-se:

$$\int_{\Omega} \phi_i d\Omega = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,5 \cdot 0,5}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 0,125$$

(isto corresponde ao volume de uma pirâmide cuja área da base é  $0,125 \text{ m}^2$  e cuja altura é unitária:  $\frac{1}{3} \cdot A \cdot h$ ), calculam-se então os coeficientes do vetor  $\underline{f}$ :

- Coeficiente  $f_1^x$

$$f_1^x = \alpha E \int_{C_\sigma} \phi_1 \ell T dC - \alpha E \int_{\Omega} \phi_1 \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega$$

A primeira integral é nula, pois  $\phi_1 = 0$  em  $C_\sigma$ .

A integração sobre a região  $\Omega$  deve ser feita nos elementos 2,3,4, 5,6 e 7, onde se tem:  $\phi_1 \neq 0$ .

Logo:

$$f_1^x = - 30 \cdot \frac{0,125}{3} (10,94+11,72+4,52+10,94+4,52) = - 53,3\text{tf}$$

- Coefficiente  $f_1^Y$ 

Analogamente ao coeficiente  $f_1^X$ , vem:

$$f_1^Y = - 30 \cdot \frac{0,125}{3} (2 \cdot 17,34 + 2 \cdot 10,94 + 24,54) = - 101,375 \text{ tf}$$

- Coefficiente  $f_2^Y$ 

$$f_2^Y = \alpha E \int_{C_\sigma} \phi_2 m T dC - \alpha E \int_{\Omega} \phi_2 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega$$

A primeira integral é nula, pois  $m = 0$  no lado direito da estrutura, e  $\phi_2 = 0$  no lado superior. A integração sobre  $\Omega$  deve ser feita onde  $\phi_2 \neq 0$ , ou seja, nos elementos 4, 7 e 8:

$$f_2^Y = - 30 \cdot \frac{0,125}{3} (24,54 + 10,94 + 15,46) = - 63,675 \text{ tf}$$

- Coefficiente  $f_3^X$ 

$$f_3^X = \alpha E \int_{C_\sigma} \phi_3 \ell T dC - \alpha E \int_{\Omega} \phi_3 \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega$$

A primeira integral é nula, pois  $\ell = 0$  no lado superior e  $\phi_3 = 0$  no lado direito da estrutura. A segunda integral deve ser desenvolvida nos elementos 1, 2 e 3, onde  $\phi_3 \neq 0$ :

$$f_3^X = - 30 \cdot \frac{0,125}{3} (28,28 + 10,94 + 11,72) = - 63,675 \text{ tf}$$

- Coeficiente  $f_3^y$

$$f_3^y = \alpha E \int_{C_\sigma} \phi_3 m T dC - \alpha E \int_{\Omega} \phi_3 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega$$

a) cálculo da integral  $\alpha E \int_{C_\sigma} \phi_3 m T dC$

A integração será feita apenas no lado superior, pois  $\phi_3 = 0$  no lado direito. Portanto:

$$dC = dx \quad e \quad m = 1$$

No elemento 1, com  $y = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \phi_3 = 2x \\ T = 28,28x \end{array} \right\}$$

No elemento 3, com  $y = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \phi_3 = 2 - 2x \\ T = 8,28 + 11,72x \end{array} \right\}$$

Portanto:  $\alpha E \int_{C_\sigma} \phi_3 m T dC =$

$$= 30 \left[ \int_0^{0,5} 2x \cdot 28,28x dx + \int_{0,5}^{1,0} (2-2x)(8,28+11,72x) dx \right] =$$

$$= 191,4 \text{ tf}$$

b) cálculo da integral  $-\alpha E \int_{\Omega} \phi_3 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega$

Integração nos elementos 1, 2 e 3:

$$-\alpha E \int_{\Omega} \phi_3 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega = -30 \cdot \frac{0,125}{3} (17,34 + 17,34) =$$

$$= -43,35 \text{ tf}$$

Portanto:  $f_3^y = 191,4 - 43,35 = 148,05 \text{ tf}$

- Coefficiente  $f_4^y$

$$f_4^y = \alpha E \int_{C_{\sigma}} \phi_4 m T dC - \alpha E \int_{\Omega} \phi_4 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega$$

a) cálculo da integral  $\alpha E \int_{C_{\sigma}} \phi_4 m T dC$

Como  $m = 0$  no lado direito da estrutura, a integração será feita ao longo do lado superior, no elemento 3. Portanto:  $dC = dx$  e  $m = 1$ .

No elemento 3, com  $y = 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_4 = -1 + 2x \\ T = 8,28 + 11,72x \end{array} \right.$$

Portanto:  $\alpha E \int_{C_{\sigma}} \phi_4 m T dC =$

$$= 30 \int_{0,5}^{1,0} (-1 + 2x)(8,28 + 11,72x) dx = 135,35 \text{ tf}$$



b) cálculo da integral  $-\alpha E \int_{\Omega} \phi_4 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega$

Integração nos elementos 3 e 4:

$$\begin{aligned} -\alpha E \int_{\Omega} \phi_4 \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega &= -30 \cdot \frac{0,125}{3} [17,34 + 24,54] = \\ &= -52,35 \text{ tf} \end{aligned}$$

Logo:  $f_4^y = 135,35 - 52,35 = 83 \text{ tf}$

Portanto, o vetor  $\underline{f}$  será:

$$\underline{f} = \left\{ \begin{array}{c} -53,3 \\ -101,375 \\ -63,675 \\ -63,675 \\ 148,05 \\ 83 \end{array} \right\} \quad \text{Unid.: tf}$$

#### - Resolução do Sistema de Equações

Foi feita manualmente, usando o algoritmo de Gauss da triangulação com retro-substituição em seguida. Resultaram os deslocamentos nodais:

$$u_1 = -7,7414 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$v_1 = 5,9198 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$v_2 = 10,117 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_3 = -20,687 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$v_3 = 45,191 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$v_4 = 63,013 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

### - Campo de deslocamentos

As fórmulas (3.3.1), com  $\phi_u = \phi_v = 0$ , fornecem:

$$u = u_1 \phi_1 + u_3 \phi_3$$

$$v = v_1 \phi_1 + v_2 \phi_2 + v_3 \phi_3 + v_4 \phi_4$$

### 7.2 - Campo de Deformações

É dado por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + u_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = v_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial y} + v_4 \frac{\partial \phi_4}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial y} +$$

$$+ v_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + v_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + v_4 \frac{\partial \phi_4}{\partial x}$$

Vê-se que as deformações são constantes dentro de cada elemento, o que justifica a sigla de CST dada a este tipo de elemento finito (na língua inglesa: "constant strain triangle").

Portanto, ao contrário do que acontece com os deslocamentos, as deformações serão descontínuas ao longo da região do problema.

### 7.3 - Campo de Tensões

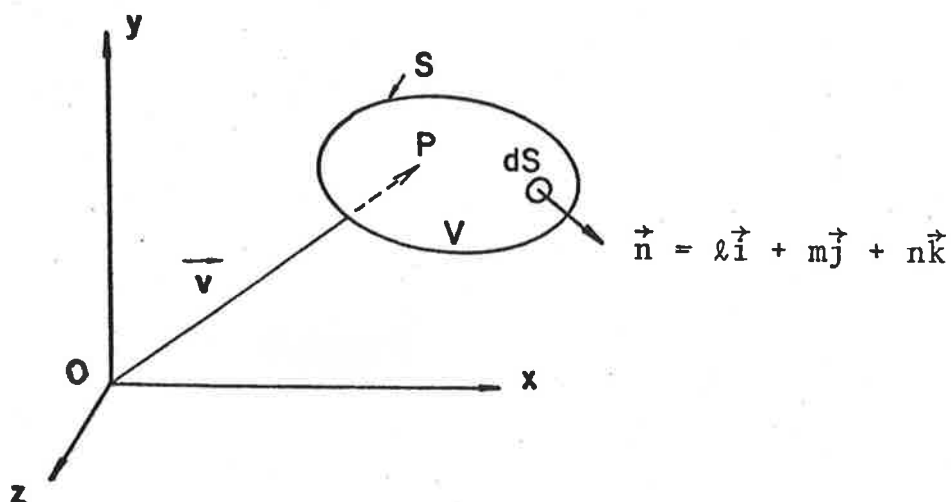
De acordo com o que foi visto no item 3.1, e considerando que  $v=0$ , têm-se:

$$\sigma_x = E \epsilon_x - \alpha TE$$

$$\sigma_y = E \epsilon_y - \alpha TE$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2} \gamma_{xy}$$

As tensões também serão descontínuas, pois apesar de a temperatura ser contínua, as deformações não o são. Assim, num mesmo vértice, as tensões terão vários valores, dependendo do elemento que se utilize no seu cálculo. É costume, por causa disso, definir o campo de tensões numérico através dos seus valores calculados no centro de gravidade de cada elemento.

ANEXO A - TEOREMA DO DIVERGENTE

Seja  $v = v(P)$  uma função de ponto contínua e derivável em V. A função  $v$  pode ser escrita em forma vetorial:

$$\vec{v} = P - O = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

Demonstra-se que:

$$\int_V \frac{\partial v_1}{\partial x} dV = \int_S v_1 \cdot l dS$$

$$\int_V \frac{\partial v_2}{\partial y} dV = \int_S v_2 \cdot m dS$$

$$\int_V \frac{\partial v_3}{\partial z} dV = \int_S v_3 \cdot n dS$$

Somando membro a membro as expressões acima, vem:

$$\int_V \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dV = \int_S (v_1 \cdot l + v_2 \cdot m + v_3 \cdot n) dS$$

ou seja:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \int_S \vec{v} \times \vec{n} \, dS$$

que é a expressão do Teorema do Divergente, cuja interpretação é dada por: "a integral da divergência de um campo vetorial, estendida a um certo volume, é igual ao fluxo do vetor através da superfície que limita este volume".

Para deduzir as expressões que representam a integração por partes, basta supor que:

$$v = \alpha \cdot \beta$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são funções contínuas e deriváveis em  $V$ . Portanto:

$$v_1 = \alpha_1 \beta_1 \qquad v_2 = \alpha_2 \beta_2 \qquad v_3 = \alpha_3 \beta_3$$

Assim:

$$\int_V \left( \alpha_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \beta_1 \right) dV = \int_S \alpha_1 \beta_1 \, l \, dS$$

$$\int_V \left( \alpha_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \beta_2 \right) dV = \int_S \alpha_2 \beta_2 \, m \, dS$$

$$\int_V \left( \alpha_3 \frac{\partial \beta_3}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \beta_3 \right) dV = \int_S \alpha_3 \beta_3 \, n \, dS$$

ou ainda:

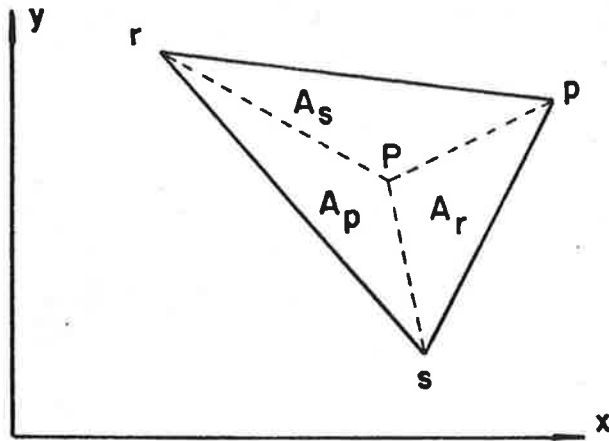
$$\int_V \alpha_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} dV = - \int_V \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \beta_1 dV + \int_S \alpha_1 \beta_1 \cdot l dS$$

$$\int_V \alpha_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial y} dV = - \int_V \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \beta_2 dV + \int_S \alpha_2 \beta_2 \cdot m dS$$

$$\int_V \alpha_3 \frac{\partial \beta_3}{\partial z} dV = - \int_V \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \beta_3 dV + \int_S \alpha_3 \beta_3 \cdot n dS$$

As expressões acima representam a integração por partes em três di mensões.

ANEXO B - INTEGRAÇÃO EXATA SOBRE REGIÕES TRIANGULARES USANDO CO-  
ORDENADAS NATURAIS (OU DE ÁREA)



$$A = A_p + A_r + A_s$$

O ponto P no interior do triângulo tem coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . Suas coordenadas naturais (ou de área) são:

$$\alpha = \frac{A_p}{A} \quad \beta = \frac{A_r}{A} \quad \gamma = \frac{A_s}{A}$$

Portanto:  $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Isto é, as coordenadas naturais não são independentes. Duas quaisquer delas definem a terceira (como não poderia deixar de ser, já que um ponto no plano tem apenas dois graus de liberdade).

A relação entre as coordenadas cartesianas e as naturais é dada pela equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_p & x_r & x_s \\ y_p & y_r & y_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

que pode ser desdobrada nas seguintes equações:

$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$x = \alpha x_p + \beta x_r + \gamma x_s$$

$$y = \alpha y_p + \beta y_r + \gamma y_s$$

Note-se que as funções de forma do triângulo de deformação constante já estudado, são as próprias coordenadas naturais:

$$\phi_p = \alpha \qquad \phi_r = \beta \qquad \phi_s = \gamma$$

Demonstra-se que:

$$\int_{\Omega} \alpha^a \beta^b \gamma^c d\Omega = 2A \frac{a! b! c!}{(2 + a + b + c)!}$$

Esta fórmula é muito útil na integração sobre uma região  $\Omega$  triangular.

Pode-se eliminar  $\gamma$  (por exemplo). Fica simplesmente:

$$\int_{\Omega} \alpha^a \beta^b d\Omega = 2A \frac{a! b!}{(2 + a + b)!}$$



BIBLIOGRAFIA

- [1] Barros, I.Q. "Introdução ao Cálculo Numérico". Unicamp, 1970.
- [2] Cook, R.D. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis". John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [3] Fung, Y.C. "Foundations of Solid Mechanics". Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1965.
- [4] Gallagher, R.H. "Finite Element Analysis: Fundamentals". Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1975.
- [5] Kreith, F. "Principles of Heat Transfer". International Textbook Company, 1965.
- [6] Pechi, W. "Sobre as Variações de Temperatura e as Tensões de Origem Térmica nas Estruturas de Concreto Massa". Dissertação de Mestrado apresentada à E.P.U.S.P., sob a orientação do Prof. Dr. Victor M. de Souza Lima - 1979.
- [7] Piskunov, N. "Cálculo Diferencial e Integral". Editorial Mir, Moscou, 1969.
- [8] Sá, J.I.N. "Sobre a Formulação Básica dos Problemas Termo-Elasticos e a Solução Numérica por meio de Elementos Finitos". Dissertação de Mestrado apresentada à E.P.U.S.P., sob a orientação do Prof. Dr. Victor M. de Souza Lima - 1982.

- [9] Souza Lima, V.M., Zagottis, D.L., André, J.C. "As Tensões de Origem Térmica nas Barragens e o Comportamento Viscoelástico do Concreto". XI Seminário Nacional de Grandes Barragens. Fortaleza, Ceará, 1976.
- [10] Souza Lima, V.M. "Método dos Elementos Finitos". Notas de Aulas, E.P.U.S.P., 1980.
- [11] Szabo, B.A., Lee, G.C. "Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method". Int. Journal of Num. Methods in Engineering, vol. 1, pp 301-310, 1969.
- [12] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. "Theory of Elasticity". McGraw-Hill. Kogakusha Ltd., Tokyo, 1970.
- [13] Zagottis, D.L. "Formulação Matricial do Método dos Elementos Finitos". E.P.U.S.P., 1981.
- [14] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method". McGraw-Hill Book Company, London, 1977.