

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

Bruno Toledo de Vasconcelos

Modelagem numérica do processo de fissuração no CRFA
através de elementos finitos com descontinuidade incorporada

São Paulo
2023

BRUNO TOLEDO DE VASCONCELOS

Modelagem numérica do processo de fissuração no CRFA
através de elementos finitos com descontinuidade incorporada

Versão Corrigida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

São Paulo
2023

BRUNO TOLEDO DE VASCONCELOS

Modelagem numérica do processo de fissuração no CRFA
através de elementos finitos com descontinuidade incorporada

Versão Corrigida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães
Bitencourt Júnior

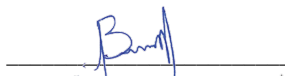
São Paulo
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 26 de agosto de 2023

Assinatura do autor:



Assinatura do orientador:



Catálogo-na-publicação

de Vasconcelos, Bruno Toledo

Modelagem numérica do processo de fissuração no CRFA através de elementos finitos com descontinuidade incorporada / B. T. de Vasconcelos -- versão corr. -- São Paulo, 2023.

131 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes 2.Fibras de aço
3.Elementos Finitos de Acoplamento 4.Impl-Ex I.Universidade de São Paulo.
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica
Il.t.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por me dar forças, resiliência e a tranquilidade necessária para seguir em frente nos momentos mais difíceis durante a realização deste trabalho.

Aos meus amados pais, Mário de Vasconcelos e Selma Pereira Toledo de Vasconcelos, por estarem do meu lado nos momentos bons e ruins, e por terem me dado o suporte necessário durante toda a minha vida para que eu conseguisse alcançar todos os meus objetivos.

À minha noiva e futura esposa, Maria Carolina Gusmão Pezzo, pela paciência e compreensão em diversos momentos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães Bitencourt Jr., por todo conhecimento compartilhado, auxílio, disponibilidade e tempo despendido, que foram fatores essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço também os meus companheiros de trabalho e superiores, MSc. Sander David Cardoso Júnior e André Correia, e à empresa Protendit Construções e Comércio Ltda., pela compreensão e pela flexibilidade concedida durante todo o período do mestrado, que permitiram que eu realizasse este trabalho com êxito, em período parcial.

Por fim, agradeço aos meus queridos professores e amigos, Msc. Januário Pellegrino Neto, Dr. Fábio Selleio Prado e Dr. Pedro Henrique Cerento de Lyra, que despertaram em mim o interesse pela área de engenharia de estruturas e me incentivaram a ingressar no mestrado, tendo assim grande influência na obtenção desse título.

Resumo

Neste trabalho é proposta uma abordagem eficaz do ponto de vista computacional, buscando representar a propagação de fissuras em elementos de concreto simples e concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). A Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) é aplicada utilizando um enriquecimento elementar (*E-FEM*) para simular a propagação de fissuras na matriz de concreto. As fibras de aço são representadas por elementos finitos unidimensionais com dois nós (elementos de treliça), cujo comportamento é descrito por um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional. As fibras são posicionadas considerando um efeito parede, através de uma distribuição randômica uniforme e isotrópica. O aço e o concreto são discretizados em malhas de elementos finitos independentes. Em seguida, elementos finitos de acoplamento (EFA) são inseridos para realizar as conexões entre os elementos de aço e concreto, cuja interação é descrita através de um modelo constitutivo de dano contínuo apropriado. As fissuras na matriz de concreto são modeladas com base em um modelo de dano contínuo à tração, o qual é integrado através de um esquema implícito-explícito (Impl-Ex), para evitar problemas de convergência. A propagação das fissuras através dos elementos de concreto é feita por meio de um algoritmo de propagação local de fissuras. Análises numéricas são realizadas para comprovar a viabilidade da metodologia. Primeiramente, são analisadas estruturas de concreto simples, buscando investigar a influência dos parâmetros adotados para a matriz de concreto e para o modelo constitutivo utilizado na representação das regiões de falha. Sequencialmente, alguns exemplos são avaliados com a adição de fibras de aço nas regiões de falha, a fim de verificar a influência desses reforços no comportamento mecânico do compósito. Os resultados demonstram que a metodologia proposta é promissora e consegue descrever apropriadamente a propagação de fissuras em estruturas de CRFA.

Palavras-chave: *descontinuidade forte; ACDF; propagação de fissuras; fibras de aço; elementos finitos de acoplamento; Impl-Ex.*

Abstract

This work proposes an effective approach from a computational point of view, seeking to represent the propagation of cracks in plain concrete and steel fiber reinforced concrete (SFRC) members. The Continuum Strong Discontinuity Approach (CSDA) is applied with an elemental enrichment (E-FEM) to simulate the crack propagation in concrete matrix. Steel fibers are represented by one-dimensional finite elements with two nodes (truss elements), which behavior is described by a one-dimensional elastoplastic constitutive model. The fibers are positioned considering a wall effect through a uniform and isotropic random distribution. Steel and concrete are discretized into independent finite element meshes. Then, coupling finite elements (CFE) are inserted to make the connections between the steel and the concrete elements, which interaction is described through an appropriate continuous damage constitutive model. The cracks in the concrete matrix are modeled based on a tensile continuous damage model, integrated through an implicit-explicit scheme (Impl-Ex), to avoid convergence problems. The propagation of cracks through the concrete elements is performed by means of a local tracking algorithm. Numerical analyses are performed to assess the viability of the methodology. First, simple concrete structures are numerically simulated, seeking to investigate the influence of the parameters adopted for the concrete matrix and the constitutive model used to represent the failure regions. Sequentially, some examples are evaluated with the addition of steel fibers in the failure regions to verify these reinforcements influence on the composite's mechanical behavior. The results demonstrate that the proposed methodology is promising and is able to properly describe the propagation of cracks in SFRC structural members.

Keywords: *strong discontinuity; CSDA; crack propagation; steel fibers; coupling finite elements; Impl-Ex.*

Lista de Figuras

1.1	Fibras de aço “costurando” a fratura (< https://www.ipt.br/ >, acessado em março de 2020).	25
1.2	Etapas da análise numérica - plataforma computacional.	29
2.1	Processo de fratura - diferentes estágios (adaptado de Oliver e Huespe (2004)).	35
2.2	Elemento sólido com a representação de uma descontinuidade forte: (a) condições de contorno e indicação da descontinuidade que intercepta o elemento destacado; (b) elemento destacado dividido pela descontinuidade em Ω_e^+ e Ω_e^- . (adaptado de Manzoli (2008)).	37
2.3	Decomposição do campo de deslocamentos: (a) elemento finito triangular de três nós com a indicação do segmento de reta, S_e , e do vetor normal à descontinuidade, \mathbf{n}_e ; (b) elemento finito dividido pela descontinuidade com a indicação dos vetores de deslocamentos totais; (c) indicação da parte contínua dos vetores de deslocamentos; (d) indicação da parte associada ao movimento de corpo rígido dos vetores de deslocamentos.	38
2.4	Elemento triangular de três nós com fissura incorporada.	40
3.1	Representação da trajetória de uma fissura, S , em um corpo, Ω : (a) corpo Ω , com a representação de parte da malha de elementos finitos, indicando o caminho da descontinuidade e destacando o elemento que será analisado; (b) elemento finito destacado, com a representação dos vetores e pontos utilizados na determinação do segmento da descontinuidade que se propaga nesse elemento. (adaptado de Oliver et al. (2002b)).	46
3.2	Principais vetores e dados de entrada utilizados no controle do ângulo da fissura.	48

3.3	Influência do ângulo α na escolha da direção da fissura: (a) situação em que $\alpha \leq \alpha_{MÁX}$; (b) situação em que $\alpha > \alpha_{MÁX}$	49
3.4	Ajuste da fissura em direção ao ponto médio da aresta.	49
4.1	Comportamentos distintos considerados para tração e compressão em um elemento de concreto.	51
4.2	Corpo sólido degradado (adaptado de Maedo (2015)).	54
4.3	Condições de carga e descarga (adaptado de Maedo (2015)).	58
4.4	Configuração do modelo uniaxial submetido à compressão e à tração uniformes.	60
4.5	Respostas numéricas para a localização dos deslocamentos na barra no momento do deslocamento máximo imposto de tração.	61
4.6	Curva que descreve o modelo constitutivo para a matriz de concreto (deslocamento imposto x reações de apoio): (a) respostas do modelo constitutivo para compressão e tração do concreto; (b) destaque para a resposta do concreto quando submetido à tração uniforme.	62
4.7	Elemento finito de dois nós com eixos locais e os vetores de forças internas.	63
4.8	Curva típica tensão-deformação para o modelo constitutivo elasto-plástico unidimensional (adaptado de Bitencourt Jr. (2015)).	67
5.1	Representação do acoplamento entre a matriz de concreto e as fibras de aço: (a) representação de um elemento finito de três nós (matriz de concreto) com os possíveis nós de acoplamento; (b) sobreposição das fibras de aço sobre o elemento triangular; (c) elemento finito triangular (matriz de concreto) sobreposto por três elementos finitos de acoplamento, cada qual contendo os nós 1, 2 e 3, mais um nó adicional, sendo estes os nós 4, 5 e 6 os nós adicionais para cada elemento finito de acoplamento.	70
5.2	Comprimento de influência para um nó de acoplamento em um elemento de aço (adaptado de Bitencourt Jr. (2015)).	73
5.3	Modelo de aderência adotado para a interface fibra/matriz (adaptado de Bitencourt Jr. (2015)).	75
5.4	Extrapolação da variável interna r (adaptado de Oliver et al. (2008)).	78

6.1	Configuração da viga com entalhe submetida à flexão em três pontos: (a) malha de elementos finitos e condições de contorno; (b) destaque para a visualização da região do entalhe; (c) destaque para a visualização da posição da semente utilizada para o início da descontinuidade.	81
6.2	Comparação dos resultados numéricos para diferentes ângulos máximos de fratura ($\alpha_{MÁX}$).	82
6.3	Representação gráfica da descontinuidade e do eventual travamento de tensões para cada ângulo máximo ($\alpha_{MÁX}$).	83
6.4	Comparação entre os resultados experimentais com a resposta obtida para $\alpha_{MÁX} = 30^{\circ}$	84
6.5	Configuração do painel em L submetido a um carregamento vertical P.	85
6.6	Curvas de Deslocamento vertical x Força - P para diferentes passos de carga.	86
6.7	Comparação entre os resultados experimentais e numéricos apresentados por outros pesquisadores com a resposta obtida para 2.500 passos de carga.	87
6.8	Propagação da descontinuidade: Painel em L (a) representação do caminho da descontinuidade, comparando com o caminho obtido por Winkler et al. (2001). (b) representação da abertura da descontinuidade deformada.	87
6.9	Configuração do ensaio EN submetido a um carregamento vertical P.	88
6.10	Malhas de elementos finitos para os três volumes de fibras estudados. a) $V_f = 15kg/m^3$, b) $V_f = 30kg/m^3$ e c) $V_f = 45kg/m^3$	89
6.11	Configuração para as três malhas de elementos finitos, com a representação da descontinuidade provocada pela carga P: a) malha fina, b) malha média e c) malha grossa.	90
6.12	Comparação de resultados (CMOD x Força - P) para as três malhas ilustradas na Figura 6.11.	91
6.13	Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - $V_f = 15kg/m^3$. . .	92
6.14	Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - $V_f = 30kg/m^3$. . .	93
6.15	Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - $V_f = 45kg/m^3$. . .	94
6.16	Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - ACDF.	95
6.17	Fibras tensionadas para os três volumes de fibras estudados; itens a), b) e c). Representações das descontinuidades; itens d), e) e f).	96
6.18	Configuração do ensaio de tração direta com entalhes.	97

6.19	Malhas de elementos finitos para os três volumes estudados. a) $V_f = 0,5\%$, b) $V_f = 1,0\%$ e c) $V_f = 1,5\%$	98
6.20	Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - $V_f = 0,5\%$	99
6.21	Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - $V_f = 1,0\%$	100
6.22	Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - $V_f = 1,5\%$	101
6.23	Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - ACDF.	102
6.24	Fibras tensionadas para os três volumes de fibras estudados; itens a), b) e c). Representações das descontinuidades; itens d), e) e f).	103
6.25	Configuração para a viga submetida à flexão por três pontos com entalhe excêntrico.	104
6.26	Malhas de elementos finitos na região da descontinuidade para os dois volumes de fibras estudados: a) $V_f = 0,25\%$, b) $V_f = 0,50\%$	105
6.27	Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - concreto simples.	106
6.28	Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - $V_f = 0,25\%$	107
6.29	Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - $V_f = 0,50\%$	108
6.30	Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - ACDF.	109
6.31	Fibras tensionadas para os dois volumes de fibras estudados; itens a) e b). Representações das descontinuidades; itens c) e d).	110
6.32	Configuração para a viga levemente armada submetida à flexão por três pontos - seção retangular: a) 1 Ø 3,215 mm. b) 2 Ø 3,215 mm.	111
6.33	Configuração para a viga levemente armada submetida à flexão por três pontos - seção T: a) 1 Ø 3,215 mm. b) 2 Ø 3,215 mm.	111
6.34	Configuração do modelo de <i>pullout</i> utilizado para a calibração do modelo de aderência: (a) representação física do modelo numérico utilizado para o ensaio de <i>pullout</i> ; (b) <i>setup</i> para o modelo de <i>pullout</i> utilizado na calibração da curva de aderência; (c) tensões normais nos elementos de concreto (corpo deformado).	113

6.35	Curva de calibração para o modelo de aderência (deslizamento x tensão de aderência).	115
6.36	Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VR - 1 barra.	116
6.37	Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VR - 2 barras.	117
6.38	Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VT - 1 barra.	118
6.39	Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VT - 2 barras.	119
6.40	Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - ACDF.	120
6.41	Representação das descontinuidades para as vigas de seção retangular (a) e seção T (b).	120

Lista de Tabelas

4.1	Esquema modificado de integração Impl-Ex para o modelo de dano à tração.	59
4.2	Propriedades mecânicas adotadas para o concreto no estudo de caso.	60
5.1	Esquema de integração Impl-Ex do modelo contínuo de dano.	77
6.1	Propriedades mecânicas adotadas para a matriz de concreto no modelo numérico da viga submetida à flexão por três pontos com entalhe.	81
6.2	Propriedades mecânicas adotadas para o concreto utilizado no modelo numérico para o painel L.	85
6.3	Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto no modelo numérico do ensaio EN.	88
6.4	Propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço no modelo numérico do ensaio EN.	89
6.5	Características das malhas de elementos finitos para os três volumes de fibras estudados.	90
6.6	Características das três malhas apresentadas na Figura 6.11.	91
6.7	Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto no modelo numérico para o ensaio de tração direta.	97
6.8	Propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço no modelo numérico para o ensaio de tração direta.	97
6.9	Características das malhas de elementos finitos para os modelos numéricos do ensaio de tração direta.	98
6.10	Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto nos modelos numéricos para a flexão por três pontos com entalhe excêntrico.	104
6.11	Propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço nos modelos numéricos para a flexão por três pontos com entalhe excêntrico.	104

6.12	Características das malhas de elementos finitos para a flexão por três pontos com entalhe excêntrico.	105
6.13	Características das malhas de elementos finitos para os modelo numéricos das vigas levemente armadas submetidas à flexão por três pontos.	112
6.14	Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto nos modelos numéricos para as vigas de seções retangular e T.	112
6.15	Propriedades mecânicas adotadas para as barras de arame recozido nos modelos numéricos para as vigas de seções retangular e T.	112
6.16	Características da malha de elementos finitos para o modelo utilizado para o <i>pullout</i>	114

Lista de símbolos

Letras gregas

α	ângulo entre o vetor diretor da fissura original do elemento atual e o vetor diretor médio do elemento anterior
α_a	parâmetro de calibração da lei de aderência entre o concreto e o aço
α^f	deformação plástica equivalente
$\alpha_{M\acute{A}X}$	ângulo máximo permitido entre o vetor diretor da fissura original do elemento atual e o vetor diretor médio do elemento anterior
$\hat{\gamma}_{xy}$	distorção escalar do vetor de deformações
Γ	superfície (total) de um sólido
Γ_p	região da superfície de um sólido na qual as forças de superfície são prescritas
Γ_u	região da superfície de um sólido na qual os deslocamentos são prescritos
$[\partial\epsilon]$	operador diferencial
δs	delta de Dirac
δ	deslocamento imposto
δu_x^e	deslocamento virtual em um elemento de treliça
δW_{int}^e	trabalho virtual interno para uma barra de treliça
$\Delta\epsilon^{m,d}$	incremento do tensor inelástico de deformações
Δr_n	incremento da variável interna de deformações
Δt	incremento de tempo
ϵ^m	deformação axial em um elemento de concreto
ϵ_x^e	aproximação das deformações para um elemento finito de dois nós

$\dot{\epsilon}^f$	variação no tempo da deformação total para a fibra de aço
$\dot{\epsilon}_p^f$	variação no tempo da deformação plástica para a fibra de aço
$\dot{\epsilon}_e^f$	variação no tempo da deformação elástica para a fibra de aço
ϵ^m	tensor de deformações da matriz de concreto
$\epsilon^{m,d}$	tensor inelástico de deformações da matriz de concreto (implícito)
$\tilde{\epsilon}^{m,d}$	extrapolação linear do tensor inelástico de deformações (explícito)
$\epsilon_{h,e}$	aproximação do campo de deformações totais em um elemento finito
$\tilde{\epsilon}_{h,e}$	aproximação da parte contínua do campo de deformações em um elemento finito
$\hat{\epsilon}_{h,e}$	aproximação da parte descontínua do campo de deformações em um elemento finito
$\hat{\epsilon}_x$	componente escalar x do vetor $\hat{\epsilon}_{h,e}$
$\hat{\epsilon}_y$	componente escalar y do vetor $\hat{\epsilon}_{h,e}$
$\epsilon_{S,e}$	campo de deformações associado à banda de localização no domínio do elemento finito
$\epsilon_{\Omega,e}$	campo de deformações associado à parte contínua no domínio do elemento finito
$\dot{\lambda}^f$	multiplicador plástico
ν^m	coeficiente de Poisson da matriz de concreto
Σ^S	representação de um modelo constitutivo qualquer associado à banda de localização
Σ^Ω	representação de um modelo constitutivo qualquer associado à região contínua
σ_x^e	tensão axial na barra de treliça
$\dot{\sigma}^f$	variação no tempo do vetor de tensão axial em uma fibra de aço
σ_y^f	tensão de fluência em uma fibra de aço
$\sigma_{h,e}$	aproximação para o campo contínuo de tensões em um elemento finito
$\sigma_{S,e}$	campo de tensões associado à banda de localização no domínio do elemento finito

$\sigma_{\Omega,e}$	campo de tensões associado à parte contínua no domínio do elemento finito
$\bar{\sigma}_e^m$	tensor de tensões efetivas no elemento finito
$\bar{\sigma}_e^{m+}$	parte positiva do tensor de tensões principais efetivas no elemento finito
$\bar{\sigma}_e^{m-}$	parte negativa do tensor de tensões principais efetivas no elemento finito
σ^m	tensor de tensões nominais na matriz de concreto
$\tilde{\sigma}^m$	tensor de tensões nominais (explícito) na matriz de concreto
σ^m	tensão nominal na matriz de concreto
$\bar{\sigma}^m$	tensão efetiva na matriz de concreto
τ	tensão de cisalhamento entre a fibra e o concreto (lei de aderência)
$\tilde{\tau}$	tensão de cisalhamento entre a fibra e o concreto (explícita)
$\bar{\tau}$	tensão de cisalhamento efetiva entre a fibra e o concreto
τ_{bf}	tensão mínima de aderência entre o concreto e o aço
τ_{max}	tensão máxima de aderência entre o concreto e o aço
$\bar{\tau}^{m+}$	norma da tensão de tração efetiva equivalente na matriz de concreto
ϕ	função de fluência
Ω	domínio de um corpo qualquer
Ω_e	domínio de um elemento finito qualquer
Ω_e^+	parte positiva do domínio de um elemento finito
Ω_e^-	parte negativa do domínio de um elemento finito

Letras romanas

A	área total da seção transversal de um prisma
A^+	parâmetro de abrandamento regularizado utilizado no modelo de dano à tração
\bar{A}^+	parâmetro de abrandamento intrínseco utilizado no modelo de dano à tração
A_C^+	parâmetro de abrandamento utilizado no modelo de dano de Cervera
A_D	área degradada da seção transversal de um prisma

A^f	área da seção transversal da fibra de aço
A_{ef}	área efetiva da seção transversal de um prisma
A_e	área do elemento finito
$\bar{\mathbf{b}}$	forças de volume
\mathbf{B}^e	matriz usual do MEF que relaciona deslocamentos e deformações para um elemento finito de dois nós
\mathbf{B}_e	matriz usual do MEF que relaciona deslocamentos e deformações
$\mathbf{B}_{1,e}$	matriz usual do MEF que relaciona deslocamentos e deformações associada ao nó isolado
C_n	nó de acoplamento
C_v	coeficiente de rigidez de acoplamento na direção axial da fibra
\tilde{C}_v^{tg-ef}	operador tangente algorítmico efetivo
C_w	coeficiente de rigidez de acoplamento na direção transversal da fibra
\tilde{C}	constante elástica
\mathbf{C}_{tg}	operador tangente da relação constitutiva entre as forças de reação e os deslocamentos relativos
\mathbf{C}	matriz de constantes elásticas em um elemento finito de acoplamento
d	variável escalar de dano utilizada no modelo de dano do elemento finito de acoplamento
\tilde{d}	variável escalar de dano utilizada no modelo de dano do elemento finito de acoplamento (explícita)
d^t	variável escalar de dano à tração
\dot{d}^t	variação no tempo da variável escalar de dano à tração
\mathbf{d}_x^e	vetor de deslocamentos nodais local de um elemento finito de dois nós
\mathbf{D}^e	vetor de deslocamentos nodais global de um elemento finito de dois nós
\mathbf{D}_e	vetor de deslocamentos totais dos nós de um elemento finito
$\tilde{\mathbf{D}}_e$	parte contínua do vetor de deslocamentos dos nós de um elemento finito
$\hat{\mathbf{D}}_e$	parte descontínua do vetor de deslocamentos dos nós de um elemento finito

D_i	deslocamentos nodais em um elemento finito
\mathbb{E}_σ	domínio elástico para um elemento de aço
E^m	módulo de elasticidade da matriz de concreto
E^f	módulo de elasticidade da fibra de aço
E_{tg}^f	módulo de elasticidade tangente da fibra de aço
\mathbf{E}^f	tensor de constantes elásticas da fibra de aço
\mathbf{E}^m	tensor de constantes elásticas da matriz de concreto
$\mathbf{E}^{m,tg}$	matriz constitutiva tangente discreta na interface da banda de localização
$\tilde{\mathbf{E}}^{m,tg-eff}$	operador tangente algorítmico efetivo
\mathbf{f}	força local no nó de acoplamento de um elemento finito de acoplamento
\mathbf{f}_e^{int}	vetor de forças internas em um elemento finito
\mathbf{f}_{int}^e	vetor de forças internas local em um elemento de treliça
f_t^m	resistência à tração da matriz de concreto
f_{vj}	força de interação entre a fibra e o concreto na direção axial da fibra
f_{wj}	força de interação entre a fibra e o concreto na direção transversal da fibra
\mathbf{F}_e^{int}	vetor de forças internas global em um elemento finito de acoplamento
\mathbf{F}_{int}^e	vetor de forças internas global em um elemento de treliça
F	força escalar de tração
G_f	energia de fratura
G_f^m	energia de fratura para a matriz de concreto
h	largura da banda de localização
$\bar{\mathbf{h}}_i$	funções de forma para um elemento finito de acoplamento
\mathbf{h}_i^e	funções de forma para um elemento finito de dois nós
H^f	módulo de abrandamento/endurecimento para o aço
H^+	módulo de abrandamento
\mathbf{H}_e	matriz das funções de forma em um elemento finito

$I_{Se,1}$	ponto inicial do início da descontinuidade no problema global
$I_{Se,i}$	ponto inicial da descontinuidade no elemento finito atual
\mathbf{I}	matriz identidade de 2 ^a ordem para problemas 2D
k	parâmetro de regularização
k_a	constante de rigidez elástica
\mathbf{k}^e	matriz de rigidez local para uma barra de treliça
\mathbf{K}^e	matriz de rigidez global para uma barra de treliça
\mathbf{K}_e	matriz de rigidez condensada não simétrica
\mathbf{K}_{ea}	matriz de rigidez tangente para um elemento finito de acoplamento
l^e	comprimento da barra de treliça
l_e	comprimento característico do elemento finito
l_{hc}	comprimento característico utilizado no modelo de dano de Cervera et. al. (2006)
L_j	comprimento de influência do nó acoplado
\bar{m}	coeficiente que fornece a direção do escoamento plástico
\mathbf{m}_e	vetor perpendicular à aresta que se opõe ao nó isolado no domínio do elemento finito
m_x	componente x do vetor \mathbf{m}_e
m_y	componente y do vetor \mathbf{m}_e
\mathbf{M}_e	matriz associada ao vetor \mathbf{m}_e
\mathbf{n}_e	vetor perpendicular à linha de descontinuidade no domínio do elemento finito
n_x	componente x do vetor \mathbf{n}_e
n_y	componente y do vetor \mathbf{n}_e
nn	numero de nós em um elemento finito
\mathbf{N}_e	matriz associada ao vetor \mathbf{n}_e
O	erro embutido no modelo Impl-Ex
$O_{Se,i}$	ponto final da descontinuidade no elemento finito atual

$O_{S_e, i-1}$	ponto final da descontinuidade no elemento finito anterior
$\bar{\mathbf{p}}$	forças de superfície
P	perímetro da fibra
\mathbf{P}_e	matriz que projeta as componentes do salto de deslocamentos nos nós do elemento finito
q	lei de endurecimento/abradamento no modelo constitutivo
\tilde{q}	lei de endurecimento/abradamento no modelo constitutivo (explícita)
q^f	variável interna de abrandamento/endurecimento para uma fibra de aço
q^{m+}	lei de evolução da variável interna de dano efetiva na matriz de concreto
r	variável interna de deformação
\dot{r}	variação no tempo da variável interna de deformação
\tilde{r}	variável interna de deformação (explícita)
r_0^{m+}	variável interna de dano efetiva inicial na matriz de concreto
r^{m+}	variável interna de dano efetiva na matriz de concreto
\mathbf{R}	matriz de rotação ortogonal entre os sistemas de referência global e local
s	deslocamento relativo na interface de um elemento finito de acoplamento
s_1	limite de deslizamento entre o concreto e a fibra em que a tensão de aderência atinge τ_{max}
s_2	limite de deslizamento entre o concreto e a fibra em que a tensão de aderência atinge τ_{bf}
\bar{s}	coeficiente plástico
S	superfície de uma descontinuidade forte
S_e	superfície de uma descontinuidade forte no domínio de um elemento finito
\mathbf{T}^e	matriz de transformação
$\mathbf{T}_{e,i}$	vetor diretor da descontinuidade no elemento finito atual
$\bar{\mathbf{T}}_{e,i-1}$	vetor diretor médio da descontinuidade no elemento finito (i-1)
$\bar{\mathbf{T}}_{e,i-2}$	vetor diretor médio da descontinuidade no elemento finito (i-2)

u_x^e	aproximação dos deslocamentos para um elemento finito de dois nós
\mathbf{u}_e	campo de deslocamentos totais em um elemento finito
$\mathbf{u}_{h,e}$	aproximação do campo de deslocamentos totais em um elemento finito
$\tilde{\mathbf{u}}_e$	parte contínua do campo de deslocamentos em um elemento finito
$\tilde{\mathbf{u}}_{h,e}$	aproximação da parte contínua do campo de deslocamentos em um elemento finito
$\hat{\mathbf{u}}_e$	campo de deslocamentos associado ao movimento de corpo rígido
$\hat{\mathbf{u}}_{h,e}$	aproximação do campo de deslocamentos associado ao movimento de corpo rígido
$[[\mathbf{u}]]_e$	salto no campo de deslocamentos em um elemento finito
$[[u_v]]$	deslocamento relativo entre a fibra e o concreto na direção axial da fibra
$[[u_{vj}]]$	deslocamento relativo entre a fibra e o concreto na direção axial da fibra no nó de acoplamento
$[[u_{wj}]]$	deslocamento relativo entre a fibra e o concreto na direção transversal da fibra no nó de acoplamento
$[[u]]_x$	componente x do vetor $[[\mathbf{u}]]_e$
$[[u]]_y$	componente y do vetor $[[\mathbf{u}]]_e$
\bar{U}	deslocamentos em qualquer ponto do domínio do elemento finito
$[[U]]$	deslocamentos relativo entre os materiais acoplados
\mathbf{X}	conjunto de pontos materiais em um elemento finito
\mathbf{X}_c	ponto material aonde se encontra o nó de acoplamento

Sumário

1	Introdução	24
1.1	Aspectos gerais e motivação	24
1.2	Metodologia numérica adotada	27
1.2.1	Plataforma computacional	28
1.3	Objetivos	30
1.4	Conteúdo	30
2	Aspectos relevantes para a Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF)	32
2.1	Contexto histórico	32
2.1.1	Inserção ao processo de formação de fraturas	34
2.2	Elementos finitos com descontinuidade incorporada	35
2.2.1	Formulação para um elemento finito triangular de três nós com descontinuidade incorporada	36
2.2.1.1	Representação cinemática das descontinuidades fortes - aproximação por elementos finitos	36
2.2.1.2	Formulação não simétrica elementar (<i>E-FEM</i>)	39
2.2.1.3	Acoplamento entre o campo de tensões contínuas e a interface descontínua: garantia da consistência estática	41
3	Construção da trajetória de fissuras (<i>crack path</i>)	43
3.1	Trajетória local de fissuras (<i>local tracking</i>)	45
3.1.1	Algoritmo utilizado para a trajetória local de fissuras	45
3.1.1.1	Controle do ângulo e ajuste da trajetória da fissura	47
4	Descrição dos modelos constitutivos	50
4.1	Introdução	50

4.2	Representação da matriz de concreto através da mecânica do dano contínuo	52
4.2.1	Modelo constitutivo de dano à tração	53
4.2.1.1	Conceitos fundamentais	53
4.2.1.2	Critério de degradação	55
4.2.1.3	Lei de evolução da variável de dano	56
4.2.1.4	Condição de carga e descarga	57
4.2.1.5	Esquema modificado de integração implícita-explicita (Impl-Ex)	58
4.2.1.6	Estudo de caso: Elemento prismático submetido à carregamentos uniformes de tração e compressão	60
4.3	Representação dos elementos de aço	62
4.3.1	Elemento finito de treliça de dois nós - Caso 2D	62
4.3.1.1	Definições básicas	63
4.3.1.2	Vetor de forças internas e matriz de rigidez para um elemento de treliça	64
4.3.2	Modelo constitutivo elastoplástico unidimensional	65
4.3.2.1	Definições básicas	65
4.3.2.2	Critério de falha	66
4.3.2.3	Matriz constitutiva tangente	67
5	Descrição da interação fibra/matriz	69
5.1	Elemento finito de acoplamento	69
5.1.1	Acoplamento rígido (aderência perfeita)	71
5.1.2	Acoplamento não-rígido (aderência parcial)	72
5.1.2.1	Modelo de <i>bond-slip</i> (perda de aderência)	73
5.1.3	Modelo contínuo de dano para descrever a lei de aderência	74
5.1.4	Integração implícita-explicita do modelo contínuo de dano para descrever o <i>bond-slip</i>	76
6	Análises numéricas	79
6.1	Exemplo 01: Viga com entalhe submetida à flexão em três pontos	80
6.2	Exemplo 02: Painel em L	84
6.3	Exemplo 03: Ensaio de flexão em três pontos com entalhe	88
6.4	Exemplo 04: Ensaio de tração direta com entalhes	96

6.5	Exemplo 05: Viga submetida à flexão por três pontos com entalhe excêntrico	103
6.6	Exemplo 06: Vigas levemente armadas submetidas à flexão por três pontos	110
7	Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	121
7.1	Conclusões	121
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	124
	Referências Bibliográficas	125

1 Introdução

1.1 Aspectos gerais e motivação

O concreto é o material mais utilizado na engenharia civil, sendo este caracterizado por apresentar um comportamento quase frágil, com baixas resistência à tração e capacidade de deformação. Para superar esses inconvenientes, costuma-se utilizar vergalhões de aço aderidos ao concreto (concreto armado) em grande parte dos elementos estruturais, devido à ampla literatura existente e conseqüentemente, à maior facilidade de obter parâmetros satisfatórios para o dimensionamento de estruturas de Concreto Armado (CA), dentro de níveis de segurança estipulados por normas vigentes.

Como alternativa, passou-se a estudar a adição de fibras de aço descontínuas ao concreto, podendo substituir parcialmente ou totalmente os vergalhões de aço, denominando o Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA).

Sabe-se que a adição de um pequeno volume de fibras pode aumentar consideravelmente a ductilidade e a tenacidade das matrizes cimentícias (Bentur e Mindess, 2007). Conforme descrito por Voo e Foster (2003), para o concreto simples, após a fissuração da matriz, as tensões de tração diminuem imediatamente. No entanto, após o reforço da matriz cimentícia, é possível manter uma certa capacidade de carga, evitando uma falha abrupta do compósito. Portanto, os principais benefícios do reforço com fibras de aço em matrizes cimentícias estão diretamente relacionados à sua capacidade de transferir tensões entre as fissuras, conforme ilustra a Figura 1.1.

A complexidade e a variabilidade dos fatores que compõem o CRFA proporcionam uma difícil previsão do comportamento mecânico e do nível de segurança das estruturas compostas por estes materiais. Neste sentido, há uma necessidade crescente de métodos adequados para fornecer informações mais precisas, no que diz respeito à previsão do comportamento de estruturas reforçadas com fibras.



Figura 1.1: Fibras de aço “costurando” a fratura (<<https://www.ipt.br/>>, acessado em março de 2020).

Atualmente, o crescimento da capacidade dos sistemas computacionais, proporciona dentro do contexto da engenharia civil, diversas possibilidades para previsão de comportamentos estruturais através da modelagem numérica. O Método dos Elementos Finitos (MEF), representa uma metodologia eficiente para prever a capacidade estrutural de estruturas com geometrias arbitrárias e sujeitas a condições de cargas severas, e pode ser aplicado para diferentes materiais, como concreto armado, estruturas metálicas, compósitos, entre outros (ASCE, 1982, 1985).

Segundo Manzoli (2008), para analisar a formação e propagação de fissuras nas estruturas de concreto via MEF, costuma-se utilizar modelos discretos ou distribuídos de fissura.

A representação de fissuras por meio de modelos discretos foi introduzida por Ngo e Scordelis (1967), com a propagação da fissura pelas arestas dos elementos finitos, através da imposição de descontinuidades de deslocamentos. Essa forma inicial de representar fissuras com modelos discretos não proporciona uma boa representatividade para estruturas de CA e CRFA, já que a presença dos reforços deve provocar o surgimento de múltiplas fissuras, tornando inviável as necessárias e repetidas reconstruções de malha. Assim, esse método é adequado apenas nos casos em que o comportamento estrutural é predominantemente influenciado por microfissuras, de

preferência com o caminho da fissura previamente conhecido.

Dadas as limitações mencionadas para os modelos discretos iniciais, Rashid (1968) introduziu o estudo de modelos distribuídos de fissura, que passou a ser adotado em problemas envolvendo fissuras. Nesse tipo de abordagem, o material fissurado é tratado como um meio contínuo equivalente, cujo comportamento é descrito por um modelo constitutivo adequado, baseado por exemplo, na teoria da plasticidade ou na mecânica do dano contínuo. Ou seja, o problema é tratado no âmbito da mecânica do contínuo, sendo este modelo de fácil implementação computacional. No entanto, a abordagem de fissuras distribuídas não deixa de ter suas desvantagens. Conforme já observado por Rots (1988) e por Lotfi e Shing (1991), as soluções numéricas obtidas com essa aproximação são muito sensíveis ao tamanho e à orientação dos elementos finitos, pois o abrandamento do material tende a produzir a localização das deformações dentro da largura de banda de um elemento, provocando o efeito de travamento de tensões (*stress locking*) por transferência de tensões espúrias através de uma fissura já aberta.

Com as limitações dos métodos de análise existentes, procurou-se estudar uma nova forma de representar fissuras, que aproveitasse as boas características dos métodos conhecidos até então e eliminasse os seus inconvenientes. Desse forma, Droz (1987) realizou a primeira tentativa de considerar uma descrição cinemática na abertura de fissuras em elementos finitos, possibilitando que a fissura fosse incorporada dentro do domínio do elemento. Porém, o trabalho de Droz (1987) é aplicável apenas para estruturas perfeitamente frágeis, onde a tensão é levada a zero imediatamente após a abertura da fissura. Contudo, este trabalho inspirou outros pesquisadores como Dvorkin et al. (1990), Lotfi e Shing (1995) e Oliver (1996), possibilitando um desenvolvimento amplo das formulações de elementos finitos com fissuras incorporadas, tratando-as como uma Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF). Nesse tipo de aproximação, a fissura é incorporada no domínio do elemento, introduzindo funções de forma com descontinuidade no campo de deslocamentos, sem limitar o campo de deformações ao longo da linha de descontinuidade.

De acordo com Manzoli (2008), essa nova classe de aproximações tem como ponto de partida o modelo de fissura distribuída, mas de certa forma é semelhante ao modelo discreto. Como no modelo discreto, a formação de fissuras é descrita por uma relação constitutiva discreta entre tensão e deslocamento relativo dos lábios da fissura. No entanto, como a fissura é incorporada ao domínio do elemento, nenhuma técnica de reconstrução de malha ou alterações das conectividades nodais são necessárias

para representar a sua propagação. Isso torna essa abordagem mais atraente para a análise de estruturas de concreto do que os modelos iniciais de fissura discreta.

Além disso, a formulação de elementos finitos com fissuras incorporadas não apresenta fortes dependências do refinamento e da direção da malha de elementos finitos, devido ao caráter distribucional apresentado pelo módulo de abrandamento regularizado utilizado no modelo constitutivo da banda de localização e à continuidade da fissura entre os elementos finitos, imposta pela utilização de um algoritmo de propagação adequado, apresentando vantagens em relação aos modelos de fissuras distribuídas.

Em Jirásek (2000), é possível encontrar as diferentes variações nas formulações de elementos finitos com descontinuidade incorporada para o elemento finito triangular de deformações constantes (*Constant-Strain Triangle - CST*). As formulações apresentadas por Jirásek (2000) são diferentes em muitos aspectos, como o tipo de descontinuidade (fraca ou forte), os princípios variacionais utilizados da derivação das equações básicas de equilíbrio do sistema estrutural, os modelos constitutivos utilizados, as condições de equilíbrio interno e principalmente as considerações cinemáticas.

1.2 Metodologia numérica adotada

A metodologia numérica empregada neste trabalho para a representação de fissuras é baseada nos estudos iniciados por Dvorkin et al. (1990), Lotfi e Shing (1995) e Oliver (1996), com a representação de fissuras realizada por meio da técnica de descontinuidades incorporadas e do conceito da Aproximação Continua de Descontinuidades Fortes (ACDF). Em conjunto, de acordo com estudos realizados por Bitencourt Jr. (2015) e Bitencourt Jr. et al. (2015), utiliza-se elementos finitos de acoplamento para realizar a interação entre a matriz de concreto e as fibras de aço nos modelos numéricos propostos para o CRFA. As formulações descritas de forma sucinta nos Capítulos 2, 3, 4 e 5 são caracterizadas por:

- Aplicar na representação da banda de localização um modelo de dano contínuo, integrado através de um esquema de integração implícito-explicito (Impl-Ex), para evitar problemas de convergência.
- Utilizar um enriquecimento elementar (*E-FEM*) no campo de deslocamentos, para descrever a cinemática do problema.

- Aplicar um algoritmo capaz de realizar a propagação de fissuras (*crack path*) produzida no domínio de elementos triangulares de deformações constantes (*CST*), representativos da matriz de concreto.
- Utilizar relações constitutivas de dano contínuo compatíveis com o campo de deformações. Para isso, utiliza-se um módulo de abrandamento com caráter distribucional, relacionando-o com a energia consumida na formação da unidade de superfície de descontinuidade, representada por G_f no contexto da mecânica da fratura não linear.
- Representar as fibras de aço por elementos finitos de dois nós, implementados com um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional. Acoplando-as à matriz de concreto por meio dos elementos finitos de acoplamento, desenvolvidos por Bitencourt Jr. (2015) e Bitencourt Jr. et al. (2015).

1.2.1 Plataforma computacional

Neste trabalho, para atingir os resultados obtidos, foi utilizada a plataforma computacional descrita na Figura 1.2, que está dividida em três partes principais: pré-processamento, processamento (*solver*) e pós-processamento.

A plataforma é composta pela utilização de um *solver* de elementos finitos, desenvolvido em MATLAB©, e um pré e pós-processador, GiD©, desenvolvido pelo CIMNE - “*International Center for Numerical Methods in Engineering*” da “*Universitat Politècnica de Catalunya*” (Barcelona - Espanha).

Inicialmente, o *software* GiD© é utilizado para criar as geometrias dos modelos físicos, definir as propriedades físicas e condições de contorno dos exemplos estudados, assim como para gerar a discretização das malhas dos elementos finitos representativos do concreto nos modelos.

Nos modelos estudados em concreto simples, pode-se gerar um arquivo de extensão *.mfl de forma direta, e utilizá-lo como arquivo de entrada no *solver* de elementos finitos. Já nos exemplos estudados em CRFA, é necessário realizar uma etapa adicional antes de gerar o arquivo de entrada. Pela presença dos elementos de aço, é necessário ainda na etapa de pré-processamento, gerar as malhas e distribuir os elementos de aço dentro da malha de concreto. A distribuição das fibras em um volume de concreto é realizada por meio de um algoritmo desenvolvido em MATLAB©, que a promove de forma randômica uniforme e isotrópica, para que então, seja realizado

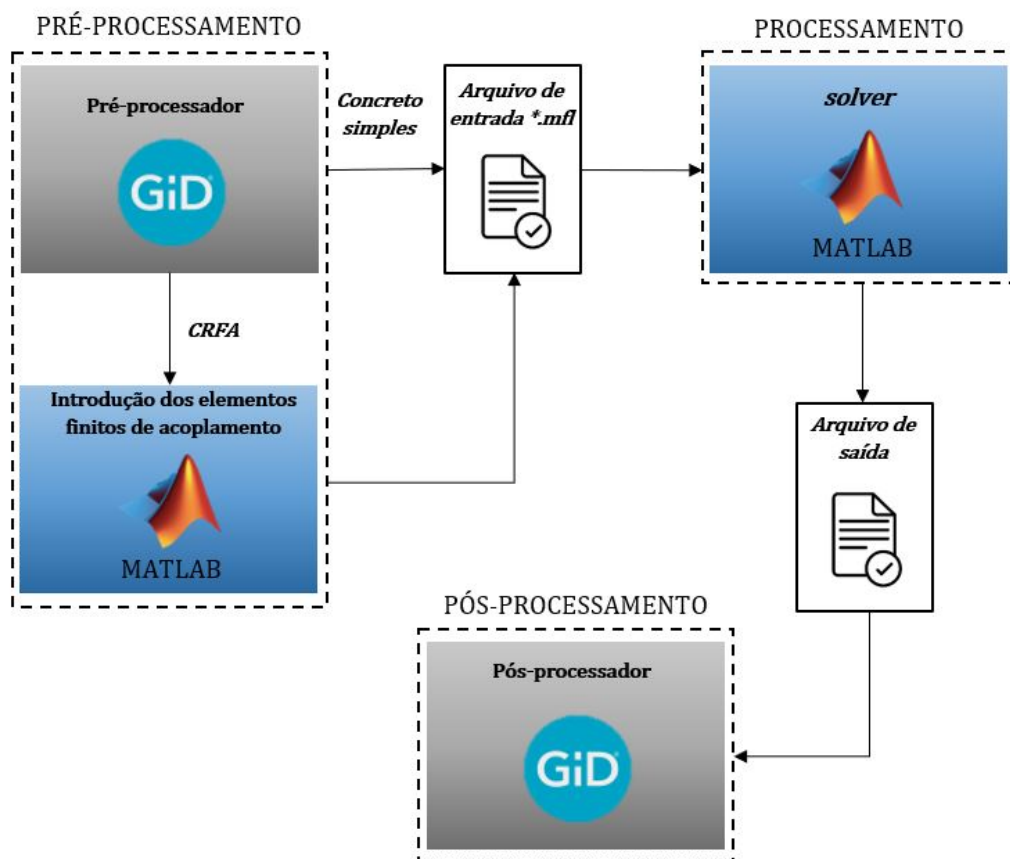


Figura 1.2: Etapas da análise numérica - plataforma computacional.

o acoplamento das malhas de elementos finitos independentes, por meio dos EFA. Assim, extrai-se desse modelo o arquivo de entrada *.mfl, com as malhas do concreto e do aço acopladas para o processamento no *solver*. Após a resolução dos sistemas de elementos finitos realizada dentro do *solver*, utiliza-se novamente o software GiD© como pós-processador, para visualizar os resultados obtidos.

Vale ressaltar que o *solver* utilizado vem sendo desenvolvido há algum tempo por outros pesquisadores. Sendo assim, este já possuía toda a formulação referente ao MEF para elementos convencionais, solucionando inclusive sistemas de equações não lineares. Nessa pesquisa, foi implementado dentro do *solver* a formulação para um elemento finito com descontinuidade incorporada, assim como o algoritmo utilizado na propagação de fissuras.

1.3 Objetivos

Neste trabalho, pretende-se contribuir com o desenvolvimento de modelos numéricos utilizados para avaliar o processo de formação e propagação de fissuras em estruturas de CRFA, utilizando para isso a técnica de aproximação contínua de descontinuidades fortes, com a representação explícita das fibras de aço, ou seja, com uma malha de elementos finitos independente da malha dos elementos de concreto, utilizando elementos finitos de acoplamento para realizar a interação entre as malhas independentes.

Procura-se utilizar elementos finitos triangulares de deformações constantes (*CST*) na representação da matriz de concreto, com o intuito de simplificar ao máximo as formulações no contexto da ACDF. A opção pelo elemento *CST* torna este trabalho ainda mais desafiador, pois, embora este seja um elemento mais simples dentro do contexto da formulação, ele é também um elemento muito pobre, por apresentar funções de forma com interpolações lineares. Isso dificulta algumas aplicações para esse elemento finito, principalmente quando utilizado na solução de problemas complexos, com muitas variáveis.

Para o algoritmo de propagação de fissuras no domínio dos elementos finitos, optou-se pela utilização de um modelo local de fissuras. Porém, algumas análises numéricas podem apresentar desvios significativos na trajetória da fissura, decorrentes de tensões de flexão, fazendo com que o modelo tenha problemas com travamento de tensões. Dessa forma, é proposto um novo algoritmo que auxilia no controle da direção da fissura em modelos de fissura local, por meio da limitação da variação máxima do ângulo entre os segmentos de reta subsequentes que configuram a fissura no domínio dos elementos finitos.

Tais contribuições, têm como objetivo, melhorar a compreensão do comportamento da propagação de fissuras em estruturas de CRFA, amadurecendo alguns métodos de análise numérica existentes, que poderão auxiliar futuramente no avanço da modelagem de estruturas de CRFA, e conseqüentemente, na melhor predição do comportamento de problemas práticos.

1.4 Conteúdo

Esta dissertação está dividida em 7 capítulos principais. Os aspectos relevantes na formulação utilizada para representar a Aproximação Contínua de Descontinuidades

des Fortes (ACDF) são explorados no Capítulo 2. No Capítulo 3 é apresentada a formulação para o algoritmo utilizado na construção da trajetória de fissuras (*crack path*). No Capítulo 4, apresenta-se os modelos constitutivos utilizados na representação da matriz de concreto e das fibras de aço, assim como, os modelos responsáveis pelo efeito do abrandamento nas bandas de localização e na interação descrita entre os elementos de aço e concreto. No Capítulo 5 é explorada a formulação dos elementos finitos de acoplamento, abordando aspectos importantes da técnica de acoplamento para malhas de elementos finitos não conformes. No Capítulo 6 são realizadas algumas análises numéricas para validar a abordagem proposta, contrastando os resultados obtidos com alguns resultados experimentais encontrados na literatura. Finalmente, as conclusões e observações são apresentadas no Capítulo 7.

2 Aspectos relevantes para a Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF)

2.1 Contexto histórico

Com a utilização do MEF na obtenção de soluções numéricas equivalentes aos problemas físicos, foram propostos diversos modelos para a representação de fissuras em materiais frágeis.

O modelo de fissura discreta introduzido por Ngo e Scordelis (1967), caracteriza-se pela representação da fissura através da introdução de descontinuidades de deslocamentos em elementos finitos convencionais, propagando a fissura pelas arestas dos elementos quando a força no nó subsequente à fissura atinge um critério de falha preestabelecido. Esse modelo discreto inicial funciona de forma satisfatória na representação de macrofissuras, com a direção da fissura previamente conhecida, porém, apresenta dificuldade na representação de elementos estruturais que apresentam múltiplas fissuras, em diferentes direções, muitas vezes tornando inviável a utilização de técnicas de reconstruções automáticas de malha, como a desenvolvida por Ingraffea e Saouma (1985).

Com o passar dos anos, foram criados modelos discretos com elementos de interface, capazes de representar múltiplas fissuras sem a necessidade de utilizar onerosas técnicas de reconstrução da malha de elementos finitos, como os modelos de fragmentação de malhas propostos por Manzoli et al. (2016).

Contudo, mediante às características apresentadas pelos modelos iniciais de fissura discreta, passaram a ser estudados também os modelos de fissuras distribuídas, introduzidos primeiramente por Rashid (1968). Esses modelos caracterizam-se por tratar o problema dentro do âmbito da mecânica dos meios contínuos, apresentando

conceitos mais simples e fáceis de serem implementados. Porém, esse método proporciona soluções muito sensíveis ao tamanho dos elementos finitos, uma vez que a banda de localização de deformações ocorre na largura de um elemento.

Segundo Manzoli (2008), o problema gerado pelos modelos de fissuras distribuídas pôde ser resolvido parcialmente através de técnicas de regularização, que tornaram possível gerar soluções independentes da discretização da malha de elementos finitos. Entre essas formulações, pode-se destacar as seguintes:

- Formulação baseada na energia da fratura (Bazant e Oh, 1983).
- Emprego de meios contínuos não locais (Cabot e Bazant, 1987).
- Emprego de meios contínuos de Cosserat (Mühlhaus e Vardoulakis, 1987; Borst, 1991).
- Emprego de meios contínuos de ordem superior (Borst e Mühlhaus, 1992).
- Emprego de meios viscoplásticos (Sluys e Borst, 1992).

Porém, além dos modelos de fissuras distribuídas apresentarem alto custo computacional para fornecerem bons resultados, pela necessidade de um grande refinamento da malha, eles são muito sensíveis à orientação dos elementos finitos, podendo apresentar travamento de tensões (*stress locking*) (Rots, 1988; Lotfi e Shing, 1991). Até então, uma solução adotada por Shing et al. (1993), era a de modelar separadamente as regiões que apresentam macrofissuras com um modelo discreto, e as regiões que apresentam múltiplas fissuras com um modelo distribuído de fissuras, porém, esse método exige um bom conhecimento prévio do problema em análise, característica que não possibilita grandes aplicações para tal abordagem.

Alternativamente, Dvorkin et al. (1990) iniciou o desenvolvimento de novas formulações com fissuras incorporadas, para representar fissuras em estruturas de concreto. O trabalho iniciado por Dvorkin et al. (1990) foi aprofundado por diversos pesquisadores, sendo os mais relevantes para a utilização da ACDF, os trabalhos de Simo e Oliver (1994), Lotfi e Shing (1995) e Oliver (1996). Nessas formulações, uma vez que a banda de localização está incorporada dentro do domínio do elemento finito, não são necessárias técnicas de reconstrução de malha e nem mudança das conectividades nodais.

As considerações cinemáticas são a diferença mais significativa entre as formulações, sendo os três principais tipos: formulação simétrica estaticamente (*Statically Optimal Symmetric - SOS*), formulação simétrica cinematicamente (*Kinematically*

Optimal Symmetric - KOS) e formulação não-simétrica estática e cinematicamente (*Statically and kinematically optimal nonsymmetric - SKON*) (Jirásek, 2000).

A formulação *SOS* não consegue representar apropriadamente a cinemática do problema, mas atende à condição de continuidade e equilíbrio nos lábios da banda da fissura. A formulação *KOS* descreve a cinemática do problema de forma satisfatória, mas apresenta problemas para representar o equilíbrio na linha de descontinuidade. Já a formulação *SKON*, aplicada na formulação adotada nesse trabalho, combina as características das outras duas, tendo como único impasse a perda de simetria da matriz de rigidez tangente do problema, proporcionando um maior custo computacional. Alguns resultados apresentados na literatura (Jirásek e Zimmermann, 2001a,b), mostram que a formulação *SKON* pode ser utilizada com sucesso na simulação de fissuras localizadas.

2.1.1 Inserção ao processo de formação de fraturas

Segundo Oliver e Huespe (2004), a formação de uma fratura em materiais quase-frágeis passa por um processo de transição através de diferentes fases. Ele pode iniciar muitas vezes devido à presença das não linearidades geométricas da estrutura, ou então devido à presença de não linearidades físicas, inerentes à coalescência de micro fissuras dentro do corpo em análise.

Assim, a região onde inicia-se uma fratura pode ser dividida em três estágios principais, de acordo com a Figura 2.1:

- Estágio 1 (Falha difusa): onde se inicia a dissipação de energia, com o acréscimo da concentração de deformações. Porém, aqui o campo de deslocamentos permanece contínuo.
- Estágio 2 (Descontinuidade fraca): nesse ponto, ocorre a descontinuidade no campo de deformações através de uma banda estreita, porém o campo de deslocamentos ainda permanece contínuo.
- Estágio 3 (Descontinuidade forte): nessa região, a descontinuidade fraca se desenvolve e a largura da banda de deformações fica cada vez mais próxima de zero, até atingir o colapso, tendendo ao infinito. Dessa forma, o campo de deslocamentos se torna descontínuo.

Assim, pode-se interpretar uma descontinuidade forte por um salto no campo de deslocamentos, experimentados pelos sólidos durante o processo de deformação. Dentro

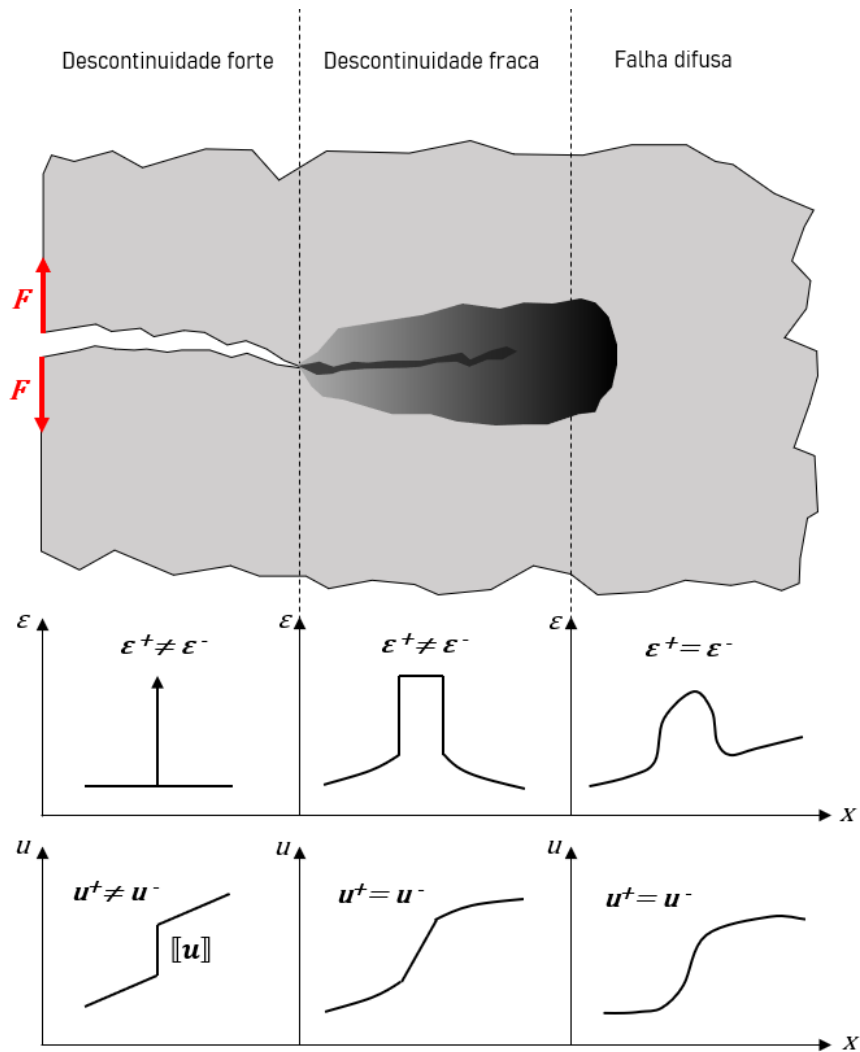


Figura 2.1: Processo de fratura - diferentes estágios (adaptado de Oliver e Huespe (2004)).

deste contexto, busca-se neste trabalho representar esse tipo de descontinuidade dentro do contexto da mecnica do contínuo, por meio da Aproximação Contínuo de Descontinuidades Fortes (ACDF).

2.2 Elementos finitos com descontinuidade incorporada

Com o desenvolvimento histórico das formulaoes dos diferentes modelos aplicados durante as últimas décadas para a representação de descontinuidades fortes dentro

do MEF, é possível notar os benefícios que a ACDF pode trazer, principalmente no que diz respeito aos aspectos computacionais. Em essência, eles permitem capturar os efeitos dissipativos de volume e superfície, ocorridos durante o processo de fraturamento, utilizando um formato contínuo para o modelo constitutivo.

2.2.1 Formulação para um elemento finito triangular de três nós com descontinuidade incorporada

Para que os elementos finitos com descontinuidade incorporada possam ser considerados consistentes do ponto de vista computacional, devem ser garantidas as consistências cinemática e estática na formulação do elemento.

A consistência cinemática pode ser garantida com a diferenciação do campo cinemático relacionado à parte contínua, do campo cinemático relacionado ao movimento de corpo rígido, proporcionado pela descontinuidade forte. Já a consistência estática, é garantida através da imposição da continuidade de tensões ao longo da superfície de descontinuidade, com o acoplamento entre a parte contínua e a banda de localização.

Dessa forma, parte-se das premissas principais citadas acima para detalhar a formulação de um elemento finito de três nós com descontinuidade incorporada.

2.2.1.1 Representação cinemática das descontinuidades fortes - aproximação por elementos finitos

Para a análise do problema, inicialmente avalia-se o corpo Ω , disposto na Figura 2.2 (a). O sólido está submetido à forças de superfícies prescritas, $\bar{\mathbf{p}}$, localizadas no contorno, Γ_p , e forças de volume, $\bar{\mathbf{b}}$, distribuídas pelo corpo sólido, Ω . Além disso, apresenta sobre o contorno, Γ_u , um conjunto de deslocamentos prescritos, onde $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ e $\Gamma_p \cap \Gamma_u = \emptyset$.

Contudo, o sólido apresentado na Figura 2.2 (b) possui uma superfície de descontinuidade forte, S , responsável por dividir o corpo em duas partes. Conseqüentemente, o segmento de reta S_e , que pertence ao elemento finito destacado na Figura 2.2 (a) e está contido na linha de descontinuidade forte S , divide o elemento em duas regiões, Ω_e^+ e Ω_e^- , com a indicação do vetor \mathbf{n}_e , que é perpendicular ao segmento de reta S_e , e aponta para o sentido de Ω_e^+ .

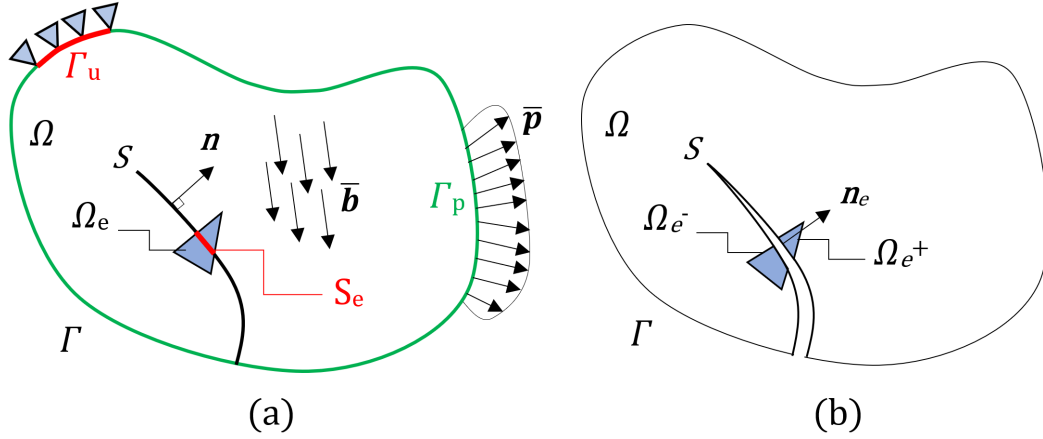


Figura 2.2: Elemento sólido com a representação de uma descontinuidade forte: (a) condições de contorno e indicação da descontinuidade que intercepta o elemento destacado; (b) elemento destacado dividido pela descontinuidade em Ω_e^+ e Ω_e^- . (adaptado de Manzoli (2008)).

De acordo com a Figura 2.3, o campo de deslocamentos, \mathbf{u}_e , pode ser decomposto em duas componentes, uma associada à deformação da parte contínua, $\tilde{\mathbf{u}}_e$, e outra associada ao movimento de corpo rígido, $\hat{\mathbf{u}}_e$. Onde, suas respectivas aproximações por elementos finitos podem ser representadas por $\tilde{\mathbf{u}}_{h,e}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{h,e}$.

A aproximação contínua dos campos de deslocamentos e deformações podem ser descritos por meio de funções de forma, \mathbf{H}_e , usuais do MEF, de acordo com a Equação 2.1 e a Equação 2.2.

$$\mathbf{u}_{h,e} = \mathbf{H}_e \mathbf{D}_e \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{h,e} = [\partial\boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{u}_{h,e} = [\partial\boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{H}_e \mathbf{D}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (2.2)$$

onde \mathbf{D}_e é o vetor de deslocamentos nodais totais e $\mathbf{B}_e = [\partial\boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{H}_e$ é a matriz usual do MEF, a qual relaciona deslocamentos e deformações.

A aproximação contínua do campo de deslocamentos associada ao salto devido à presença de uma descontinuidade pode ser construída de forma similar, levando à:

$$\hat{\mathbf{u}}_{h,e} = \mathbf{H}_e \hat{\mathbf{D}}_e = \mathbf{H}_e \mathbf{P}_e \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \quad (2.3)$$

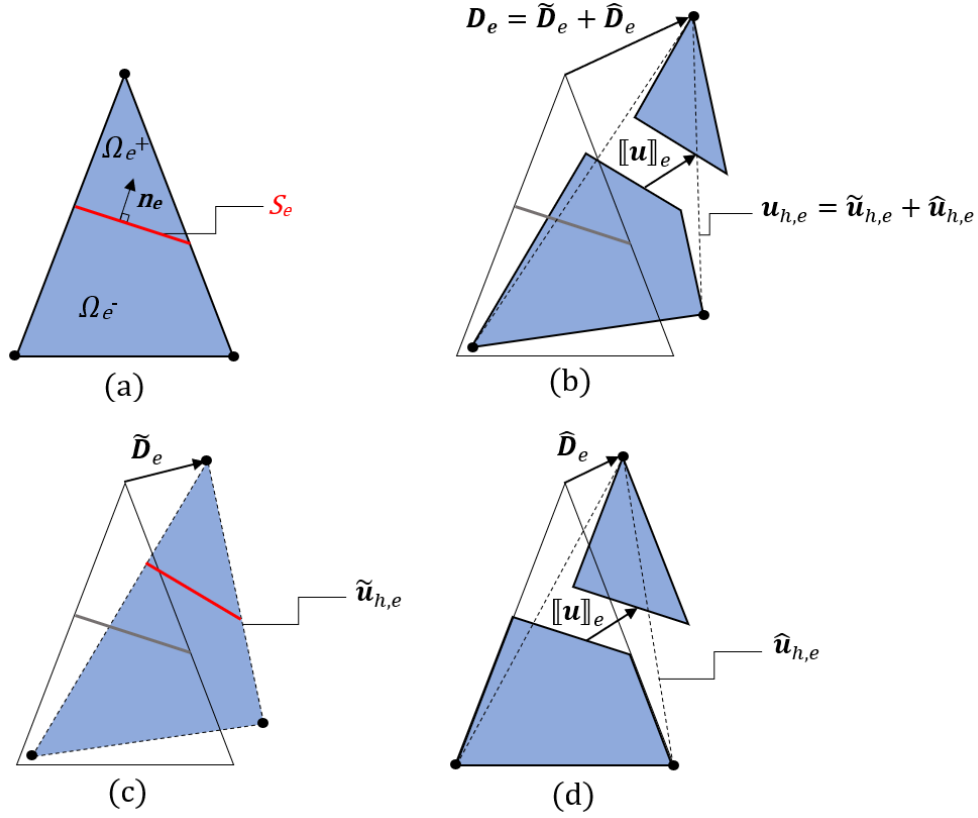


Figura 2.3: Decomposição do campo de deslocamentos: (a) elemento finito triangular de três nós com a indicação do segmento de reta, S_e , e do vetor normal à descontinuidade, \mathbf{n}_e ; (b) elemento finito dividido pela descontinuidade com a indicação dos vetores de deslocamentos totais; (c) indicação da parte contínua dos vetores de deslocamentos; (d) indicação da parte associada ao movimento de corpo rígido dos vetores de deslocamentos.

$$\mathbf{P}_e = \begin{bmatrix} H_{S_e}(x_1) & 0 \\ 0 & H_{S_e}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ H_{S_e}(x_{n_{en}}) & 0 \\ 0 & H_{S_e}(x_{n_{en}}) \end{bmatrix} \quad \text{com, } (H_{S_e} = 0 \text{ em } \Omega_e^- \text{ e } H_{S_e} = 1 \text{ em } \Omega_e^+)$$

(2.4)

sendo $\hat{\mathbf{D}}$, o vetor que armazena os deslocamentos do salto $[[\mathbf{u}]]$, nos nós de um elemento, e a matriz \mathbf{P} definida na Equação 2.4 para cada elemento atravessado pela descontinuidade, responsável por projetar as componentes do salto de deslocamentos

nas componentes dos deslocamentos nodais.

Então, respeitando a consistência cinemática do problema, a parte contínua dos campos de deslocamentos e deformações, e o campo de tensões equivalente, são dados respectivamente pela Equação 2.5, Equação 2.6 e Equação 2.7.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{h,e} = \mathbf{u}_{h,e} - \hat{\mathbf{u}}_{h,e} \quad (2.5)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e} = \mathbf{B}_e \tilde{\mathbf{u}}_{h,e} = \mathbf{B}_e (\mathbf{D}_e - \mathbf{P}_e \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e) = \boldsymbol{\varepsilon}_{h,e} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e} \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{h,e} = \mathbf{E}^m \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e} = \mathbf{E}^m (\boldsymbol{\varepsilon}_{h,e} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}) \quad (2.7)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}$ é o campo contínuo de deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}_{h,e}$ é o campo total de deformações e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}$ é a componente de deformações relativa ao movimento de corpo rígido, com \mathbf{E}^m sendo a matriz de constantes elásticas.

2.2.1.2 Formulação não simétrica elementar (E-FEM)

A seguir apresenta-se aspectos referentes à formulação não-simétrica para elementos finitos triangulares de três nós com fissura incorporada, baseando-se no conceito de consistências estática e cinemática.

Dentro da ACDF o enriquecimento é realizado no domínio do elemento finito (E-FEM) e não nos nós, como ocorre nos modelos X-FEM.

A Figura 2.4 ilustra um elemento triangular com domínio Ω_e , comprimento característico l_e , e uma banda de localização de deformações S_e , com uma largura de banda igual a k . A linha de descontinuidade S_e divide o elemento em duas partes, induzindo um salto no campo de deslocamentos, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$, separando o nó isolado **1** dos nós **2** e **3**.

O salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$ provoca um deslocamento relativo no nó isolado, que pode ser identificado na Figura 2.4 por $\hat{\mathbf{D}}_{1,e} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$. Os nós 2 e 3, apresentam respectivamente, deslocamentos $\hat{\mathbf{D}}_{2,e} = \mathbf{0}$ e $\hat{\mathbf{D}}_{3,e} = \mathbf{0}$ devido ao salto no campo de deslocamentos.

Dessa forma, sendo o vetor unitário, $\mathbf{n}_e = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix}^T$, perpendicular à face da banda de localização, S_e , e o vetor unitário, $\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} m_x & m_y \end{bmatrix}^T$, perpendicular à aresta do

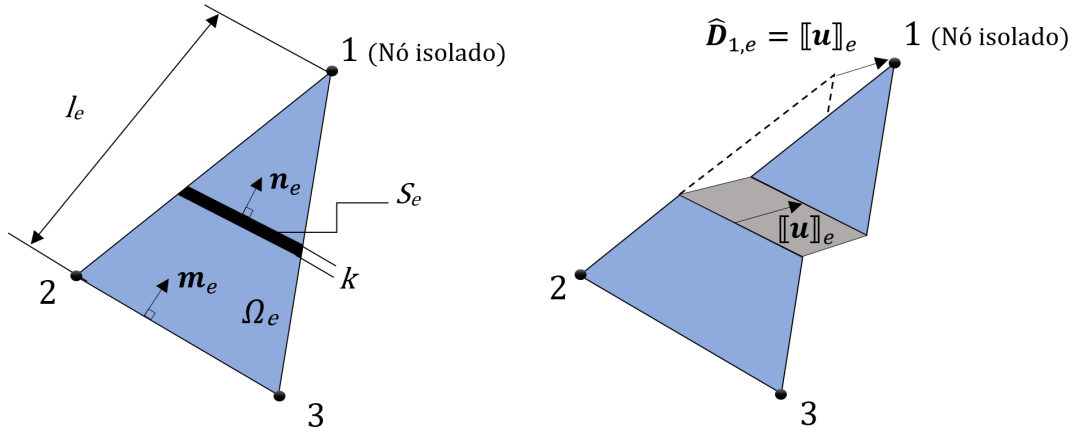


Figura 2.4: Elemento triangular de três nós com fissura incorporada.

elemento que se opõe ao nó isolado, as deformações devido ao salto no campo de deslocamentos podem ser escritas de acordo com a seguinte equação:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{1,e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u \rrbracket_x \\ \llbracket u \rrbracket_y \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \quad (2.8)$$

O correspondente campo de tensões na região contínua pode ser escrito por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega,e} = \boldsymbol{\Sigma}^\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega,e}) = \boldsymbol{\Sigma}^\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}_{h,e} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{h,e}) = \boldsymbol{\Sigma}^\Omega \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) \quad (2.9)$$

onde \mathbf{D}_e agrupa os vetores de deslocamentos nodais totais de todos os nós ($\mathbf{D}_{1,e}$, $\mathbf{D}_{2,e}$, $\mathbf{D}_{3,e}$) e $\boldsymbol{\Sigma}^\Omega$ representa o modelo constitutivo da região contínua. Dentro do conceito da ACDF, o campo de deformações totais dentro da superfície de descontinuidade, $\boldsymbol{\varepsilon}_{S,e}$, pode ser definido de acordo com a Equação 2.10, onde ele representa a soma das deformações contínuas presentes no elemento finito, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega,e}$, com as deformações induzidas pela descontinuidade calculadas por $\frac{\mathbf{N}_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{S,e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega,e} + \frac{\mathbf{N}_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e + \frac{\mathbf{N}_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \quad (2.10)$$

A matriz \mathbf{N}_e é construída pelas componentes do vetor \mathbf{n}_e , sendo ela responsável por transformar as componentes de tensão na superfície de descontinuidade, referidas a um sistema ortogonal (x, y) , para um vetor $\boldsymbol{\sigma}_{S,e}$, atuante na linha de descontinui-

dade. Para problemas 2D, a matriz \mathbf{N}_e , é definida como:

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Assim, o campo de tensões na região de localização de deformações pode ser escrito conforme a Equação 2.12:

$$\boldsymbol{\sigma}_{S,e} = \boldsymbol{\Sigma}^S(\boldsymbol{\varepsilon}_{S,e}) = \boldsymbol{\Sigma}^S \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e + \frac{\mathbf{N}_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) \quad (2.12)$$

onde k representa a largura da banda de deformações e $\boldsymbol{\Sigma}^S$ representa a relação constitutiva na região de localização. Neste trabalho, $\boldsymbol{\Sigma}^S$ é representado por um modelo de dano à tração.

2.2.1.3 Acoplamento entre o campo de tensões contínuas e a interface descontínua: garantia da consistência estática

A introdução do salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$ na formulação de elementos com fissuras incorporadas, corresponde ao acréscimo de um grau de liberdade no problema de equilíbrio.

Dessa forma, para garantir a consistência estática, deve ser respeitado o equilíbrio entre as tensões na banda de localização de deformações, $\boldsymbol{\sigma}_{S,e}$, e as tensões nas regiões contínuas no entorno, $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega,e}$, de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{N}_e^T (\boldsymbol{\sigma}_{S,e} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega,e}) = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e) = \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\Sigma}^S \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e + \frac{\mathbf{N}_e}{k} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) - \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\Sigma}^\Omega \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) = 0 \quad (2.14)$$

O salto de deslocamentos no elemento, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$, pode ser obtido através da solução da Equação 2.14. Nesse trabalho, para resolver essa equação, opta-se pelo método iterativo de Newton-Raphson, o qual aproxima o vetor salto de deslocamentos, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e$, a cada passo de carga, utilizando a resposta do passo anterior. Dessa forma, o

equilíbrio passa a ser resolvido por meio das equações recursivas a seguir:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e^{i+1} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e^i - \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e^i)}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e^i} \right]^{-1} \mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e^i) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e} = \mathbf{N}_e^T \left(\Sigma^{S'} \left(\frac{\mathbf{N}_e}{k} - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \right) + \Sigma^{\Omega'} \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \right) \quad (2.16)$$

onde $\Sigma^{S'} = \partial \Sigma^S / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\Sigma^{\Omega'} = \partial \Sigma^\Omega / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ são respectivamente, a matriz constitutiva tangente do modelo de dano à tração, e a matriz constitutiva tangente do modelo elástico linear, que no presente trabalho trata-se da própria matriz de constantes elásticas, \mathbf{E}^m .

Assim, as forças nodais internas, \mathbf{f}_e^{int} , e a matriz de rigidez condensada não simétrica, \mathbf{K}_e , os quais devem ser utilizados para o cálculo dos deslocamentos atualizados na próxima iteração, $\mathbf{D}_e^{n,i+1}$, podem ser calculados respectivamente pela Equação 2.17 e pela Equação 2.18:

$$\mathbf{f}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{E}^m \left(\mathbf{B}_e \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e \right) A_e = \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_\Omega A_e \quad (2.17)$$

$$\mathbf{K}_e = \left[\mathbf{B}_e^T \mathbf{E}^m \mathbf{B}_e - \frac{1}{l_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E}^m \mathbf{M}_e \left(\mathbf{E}^{m,tg} + \mathbf{N}_e^T \mathbf{E}^m \frac{\mathbf{M}_e}{l_e} \right)^{-1} \mathbf{N}_e^T \mathbf{E}^m \mathbf{B}_e \right] A_e \quad (2.18)$$

onde, A_e é a área do elemento finito e $\mathbf{E}^{m,tg}$ é a matriz constitutiva tangente discreta na interface da banda de localização.

O conjunto completo de equações de elementos finitos para a solução do problema global está descrito na Equação 2.19.

$$\Lambda_{e=1}^{nel} \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{D}_e, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \Lambda_{e=1}^{nel} \mathbf{f}_e^{ext} = 0 \quad (2.19)$$

3 Construção da trajetória de fissuras (*crack path*)

Para realizar a propagação de fissuras dentro do contexto da ACDF, é necessária a utilização de um algoritmo que permita identificar o caminho percorrido pela descontinuidade entre os elementos finitos durante a simulação numérica. Basicamente, como a fissura está incorporada no domínio do elemento finito, o algoritmo deve identificar o momento de “ativação” do elemento, ou seja, o momento no qual o elemento finito atinge um critério de falha pré-definido, para capturar a direção da fissura, segundo um outro critério também preestabelecido.

De acordo com Cervera et al. (2010), o algoritmo de propagação pode beneficiar a solução numérica de três maneiras principais:

1. Minimizando o número de possíveis soluções, uma vez que o algoritmo permite que cada fissura percorra um único caminho.
2. Proporcionando soluções mais precisas do caminho da fissura, principalmente em problemas de fissuras mistas com direções curvas.
3. Evitando a dissipação mecânica de energia fora do caminho de propagação da fissura.

Segundo Cervera et al. (2010), a construção da trajetória da fissura costuma ser definida por três métodos principais: (a) trajetória local de fissura (*local tracking*), (b) trajetória não-local de fissura (*non-local tracking*) e (c) trajetória global de fissura (*global tracking*).

A trajetória local de fissura, consiste em promover a propagação da fissura de um elemento ativo para um elemento vizinho através de um critério de falha local, sendo normalmente utilizada a tensão principal máxima no elemento finito em análise como critério de falha, tomando como direção da fissura a direção perpendicular ao vetor referente à tensão máxima principal, fornecendo assim o sentido de propagação em direção à aresta do elemento vizinho (Saloustros et al., 2018).

A utilização da trajetória local para a representação de fissuras tridimensionais pode ser realizada por meio da construção espacial de superfícies planas ligando cada elemento finito, o que é uma tarefa muito complicada, pois deve ser garantida a continuidade entre as superfícies no espaço, e não somente de ponto para ponto, como nos modelos bidimensionais.

A trajetória não-local de fissuras é uma estratégia que busca determinar o caminho da fissura fazendo referência aos elementos vizinhos do elemento em análise, ou seja, não utiliza informações no nível local do elemento (Feist e Hofstetter, 2005; Gasser e Holzapfel, 2005). Algumas abordagens utilizam a média de um conjunto de elementos que envolvem o elemento ativo, ou buscam determinar uma região de influência por meio de algum critério preestabelecido. Esse método proporciona resultados regulares, porém apresenta uma complexidade elevada na sua implementação computacional.

Por último, a trajetória global de fissuras proposta por Oliver et al. (2004) e Oliver e Huespe (2004) aborda o problema de propagação de fissuras como um problema separado, não envolvendo as variáveis locais no nível do elemento. Nessa abordagem, a trajetória da fissura é determinada através da solução de um problema escalar, utilizando as equações de Laplace para solucionar um problema de condução térmica equivalente, de modo que superfícies de isovalores que compõem um campo escalar sejam superfícies potenciais de descontinuidade, segundo um critério de falha definido para o problema. De acordo com Jäger et al. (2008), a necessidade de uma solução térmica equivalente, adicional ao problema para cada passo de carga, proporciona um custo e um esforço computacional elevados, apesar de alguns trabalhos já terem apresentado técnicas que buscam reduzir o custo computacional dessa metodologia, como o trabalho de Theiner e Hofstetter (2009).

Embora o algoritmo de trajetória global de fissuras proporcione resultados consistentes e estáveis, devido à sua complexidade na implementação e à necessidade de maiores esforços computacionais, nesse trabalho optou-se por utilizar o algoritmo local de fissuras, que é capaz de representar de forma satisfatória as fissuras de elementos estruturais modelados no campo 2D, conforme demonstrado por Manzoli et al. (1999).

3.1 Trajetória local de fissuras (*local tracking*)

Os algoritmos existentes para trajetória local de fissuras apresentam como característica comum a construção de uma trajetória contínua para a fissura. As abordagens locais foram as primeiras a serem utilizadas na propagação de fissuras dentro do MEF, apresentando diversas formulações na literatura, contendo diferenças, dependendo principalmente da estratégia de interpolação utilizada e do procedimento adotado para identificar os pontos de entrada e saída de cada segmento de fissura que liga um elemento ao outro, principalmente de acordo com o formato do elemento finito (triangular, quadrilateral, hexagonal, etc.).

De acordo com Saloustros et al. (2018), os primeiros algoritmos propostos para a propagação local de fissuras foram utilizados dentro de modelos discretos de fissura, e consistem em definir a direção e o tamanho do novo segmento da fissura, para então utilizar técnicas de fragmentação e reconstrução de malha em uma nova simulação (Ingraffea e Heuze, 1980; Saouma e Zatz, 1984), ou então com a utilização de elementos coesivos de interface (Ingraffea e Saouma, 1985). Já os algoritmos de propagação local, dentro de modelos distribuídos de fissura, tiveram suas primeiras aplicações em Clemente (2006), Clemente et al. (2008), Pelà (2009) e Cervera et al. (2010). Nessa abordagem utiliza-se um modelo contínuo de dano no caminho de propagação, mantendo um modelo elástico para os demais elementos que não são influenciados pela fissura.

A aplicação desses algoritmos na representação das trajetórias de fissuras dentro de modelos de elementos com fissura incorporada, estudada nesse trabalho por meio da ACDF, é importante por proporcionar uma trajetória contínua para o caminho da fissura. Dessa forma, é possível reduzir o aparecimento do travamento de tensões causados por tensões espúrias em elementos finitos com descontinuidade incorporada, já estudados anteriormente (Oliver, 1996; Belytschko e Black, 1999; Moës et al., 1999; Alfaiate et al., 2002; Dias da Costa et al., 2009; Linder e Armero, 2009; Manzoli, 2011).

3.1.1 Algoritmo utilizado para a trajetória local de fissuras

Para introduzir o algoritmo utilizado na representação da trajetória local de fissuras em elementos finitos com descontinuidade incorporada, baseado no trabalho de Manzoli et al. (1999), avalia-se inicialmente o corpo Ω , disposto na Figura 3.1 (a).

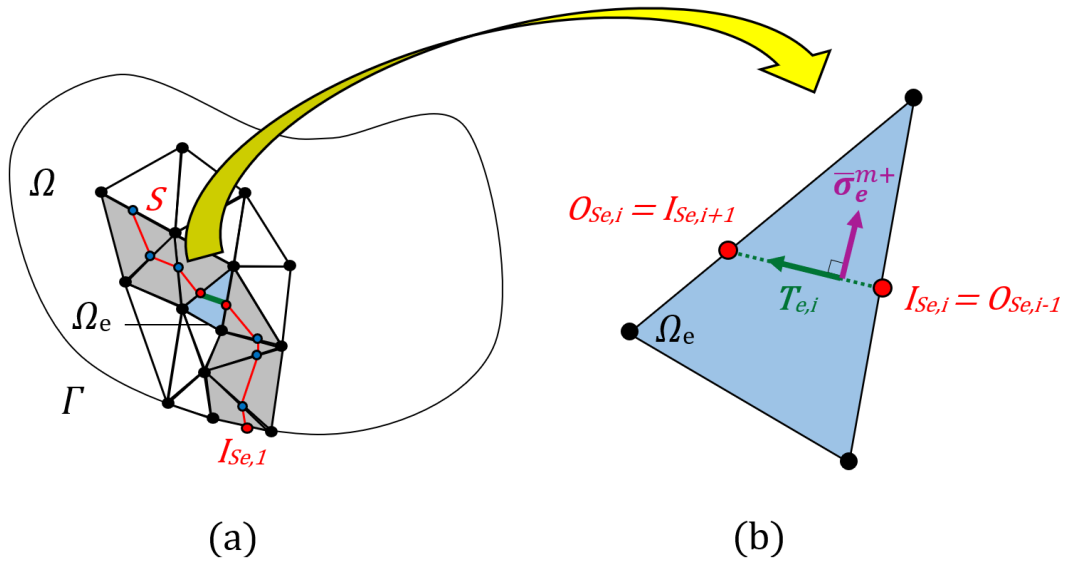


Figura 3.1: Representação da trajetória de uma fissura, S , em um corpo, Ω : (a) corpo Ω , com a representação de parte da malha de elementos finitos, indicando o caminho da descontinuidade e destacando o elemento que será analisado; (b) elemento finito destacado, com a representação dos vetores e pontos utilizados na determinação do segmento da descontinuidade que se propaga nesse elemento. (adaptado de Oliver et al. (2002b)).

Analisando a Figura 3.1 (a), observa-se uma possível trajetória para uma fissura S , em um corpo Ω , qualquer. A fissura se inicia no contorno Γ , em um ponto inicial $I_{Se,1}$ (“semente”), que deve ser informado como um parâmetro de entrada na análise de elementos finitos.

A propagação da fissura de um elemento ativo para um elemento vizinho se dá por meio de um critério de falha local preestabelecido. Um elemento ativo é um elemento que não se encontra mais no regime elástico, já tendo atingido o critério de falha em passos de carga anteriores.

Dessa forma, considera-se o elemento finito da Figura 3.1 (b) o próximo elemento por onde a fissura deve propagar-se. O ponto inicial da fissura no elemento, $I_{Se,i}$, é um dado de entrada no algoritmo de trajetória de fissuras, que coincide com o ponto final do elemento anterior, $O_{Se,i-1}$. No passo de carga em que o elemento em destaque atingir o critério de falha, a fissura se propaga em direção ao ponto $O_{Se,i}$, seguindo a direção do vetor $T_{e,i}$, perpendicular à parte positiva do vetor de tensões principais no elemento finito, $\bar{\sigma}_e^{m+}$.

Uma vez que o elemento se torna ativo, a trajetória de descontinuidade no elemento é considerada consolidada e não deve ser recalculada para outros níveis de

tensão, fixando a direção da fissura no elemento, e conseqüentemente o vetor \mathbf{n}_e , perpendicular à descontinuidade. Dessa maneira é possível garantir a continuidade da trajetória da fissura.

A estratégia apresentada é simples e já se mostrou robusta e confiável quando aplicada em elementos com uma única linha de descontinuidade, perdendo muita robustez quando tem de lidar com múltiplas fissuras (Oliver et al., 1999; Oliver, 1996; Oliver et al., 2002a).

3.1.1.1 Controle do ângulo e ajuste da trajetória da fissura

Alguns modelos estruturais que utilizam o modelo local de fissuras podem apresentar desvios grandes na trajetória da fissura, decorrentes de tensões de flexão. Dependendo da magnitude desse desvio, o problema pode apresentar problemas com o surgimento de tensões espúrias, acarretando no travamento de tensões e inviabilizando o modelo numérico.

A fim de reduzir a incidência dos travamentos de tensões, propõe-se a seguir uma correção no ângulo da trajetória da fissura, similar ao critério de curvatura máxima proposto por Cervera et al. (2010).

Observando os elementos em destaque na Figura 3.2, os parâmetros considerados são:

- $\bar{\sigma}_e^{m+}$: parte positiva do vetor de tensões principais no elemento atual (i).
- $\mathbf{T}_{e,i}$: vetor diretor da fissura original no elemento atual (i), perpendicular ao vetor $\bar{\sigma}_e^{m+}$.
- $\bar{\mathbf{T}}_{e,i-1}$: vetor diretor médio no elemento (i-1), sendo este a média decorrente da análise descrita na Figura 3.3 (a) e (b), para o passo em que o elemento (i-1) for ativado.
- $\bar{\mathbf{T}}_{e,i-2}$: vetor diretor médio no elemento (i-2), sendo este a média decorrente da análise descrita na imagem Figura 3.3 (a) e (b), para o passo em que o elemento (i-2) for ativado.
- α : ângulo entre o vetor diretor da fissura original do elemento atual, $\mathbf{T}_{e,i}$, e o vetor diretor médio no elemento anterior, $\bar{\mathbf{T}}_{e,i-1}$.

Dessa forma, buscando reduzir os desvios na trajetória, ocorridos durante a simulação numérica, compara-se o vetor diretor da fissura original no elemento atual (i)

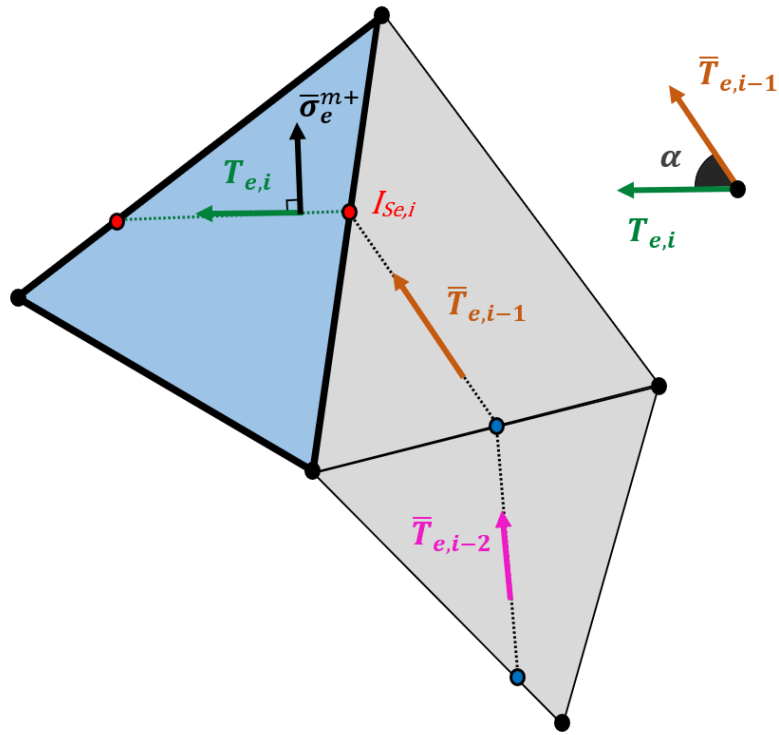


Figura 3.2: Principais vetores e dados de entrada utilizados no controle do ângulo da fissura.

com o vetor diretor médio no elemento anterior (i-1) por meio do ângulo α entre esses dois vetores e o ângulo $\alpha_{M\acute{A}X}$, informado como dado de entrada do problema.

Se o ângulo α for menor ou igual ao ângulo $\alpha_{M\acute{A}X}$, prossegue-se com o vetor diretor médio do elemento atual $\bar{T}_{e,i}$, com esse sendo a média entre os outros 2 vetores que formam o ângulo α , conforme mostra a Figura 3.3 (a). Caso o ângulo α seja maior do que o ângulo $\alpha_{M\acute{A}X}$, utiliza-se como vetor diretor médio para o elemento atual (i) o vetor diretor médio do elemento (i-2), de acordo com a Figura 3.3 (b).

Em alguns casos particulares, o vetor diretor médio do elemento atual, $\bar{T}_{e,i}$, direciona a fissura para um ponto de saída, $O_{Se,i}$, muito próximo de um nó do elemento, como ilustra a Figura 3.3 (b). Quando isso ocorre, devido à proximidade ao nó compartilhado com o próximo elemento, o novo segmento da fissura poderá desviar para um elemento que não é adequado para a sua trajetória.

Assim, realiza-se um novo ajuste para o vetor $\bar{T}_{e,i}$, direcionando-o à média entre o ponto $O_{Se,i}$ anterior e o meio da aresta atingida pelo próprio ponto, $\bar{A}\bar{B}$, conforme ilustrado na Figura 3.4.

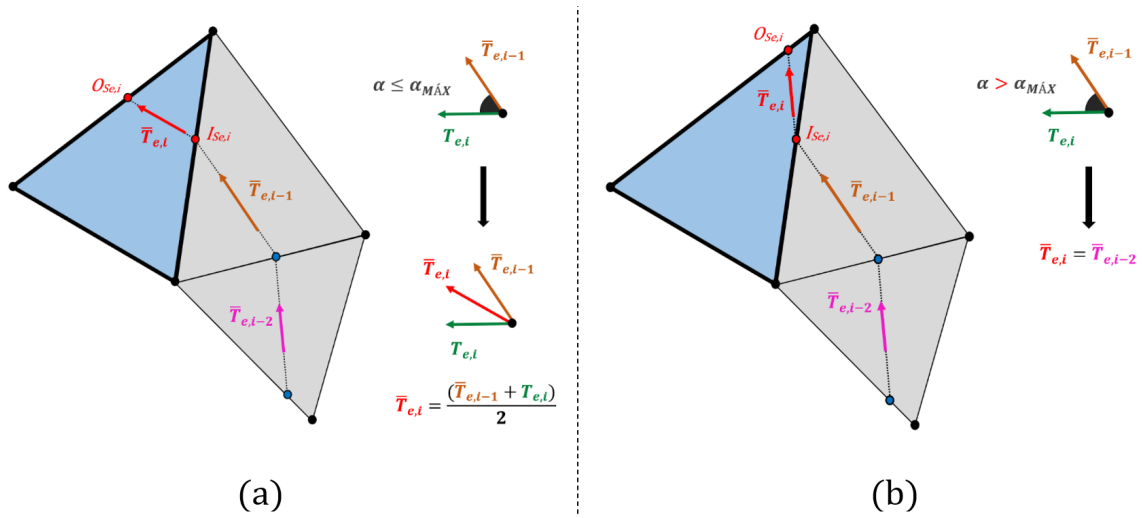


Figura 3.3: Influência do ângulo α na escolha da direção da fissura: (a) situação em que $\alpha \leq \alpha_{M\acute{A}X}$; (b) situação em que $\alpha > \alpha_{M\acute{A}X}$.

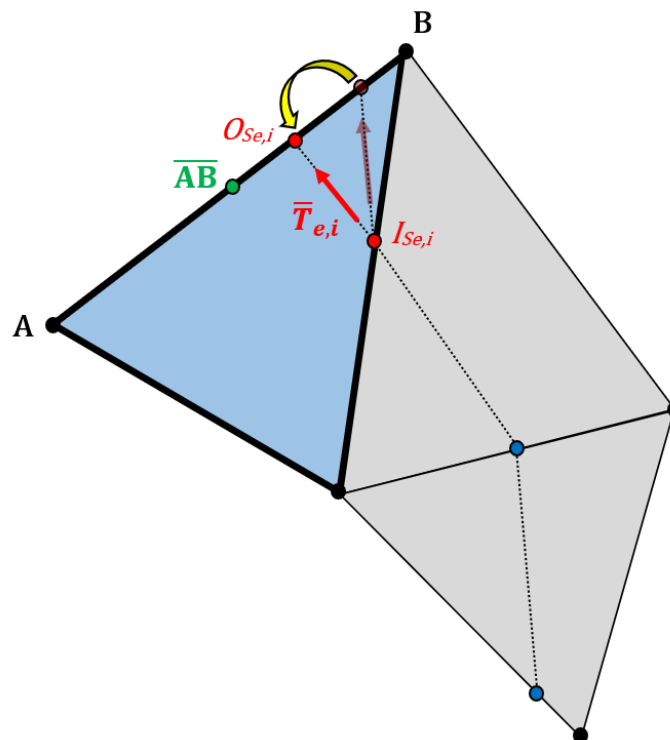


Figura 3.4: Ajuste da fissura em direção ao ponto médio da aresta.

4 Descrição dos modelos constitutivos

4.1 Introdução

O grande número de variáveis que influenciam na produção do concreto, tornam a modelagem e a representação deste material tarefas difíceis de serem realizadas, por meio de modelos numéricos ou analíticos.

Sendo um dos materiais mais disseminados dentro da engenharia civil, devido a sua fácil moldagem e boa resistência, as características do concreto simples são bem conhecidas, sendo este reconhecido por ser um material quase-frágil, que apresenta diferentes comportamentos quando submetido a esforços de tração e compressão.

Buscando avaliar da melhor forma essas características, é necessária a utilização de modelos constitutivos robustos e estáveis, capazes de representar o comportamento não linear desse material, além do regime elástico.

Conforme já consolidado por diversos pesquisadores ao longo dos anos, sabe-se que o comportamento não linear de materiais quase-frágeis caracteriza-se principalmente pela propagação de fissuras nas regiões submetidas à tensões de tração, sendo usual a utilização de vergalhões de aço aderidos ao concreto, com a intenção de impedir a localização de deformações, distribuindo as tensões e as fissuras, tornando o elemento estrutural menos frágil. Também vem sendo muito estudada nos últimos anos a utilização de fibras de aço junto ao concreto, em substituição total ou parcial aos vergalhões. Porém, o concreto também pode apresentar um comportamento não linear nas regiões submetidas a tensões de compressão, embora este seja mais difícil de ser observado nas estruturas, já que os limites de tensão necessários para que este material apresente um comportamento não linear devido à compressão são consideravelmente mais elevados do que os limites aplicados para a tração. Assim, é

4.1 Introdução

possível estabelecer relações distintas, capazes de representar as características desse material quando submetidos aos diferentes níveis de tensão.

Nesse trabalho será utilizado um modelo elástico linear para representar as regiões comprimidas do concreto (Figura 4.1), buscando simplificar o modelo, uma vez que a resposta para os elementos estruturais que serão estudados não sofrem influencia significativa das não linearidades decorrentes das regiões comprimidas.

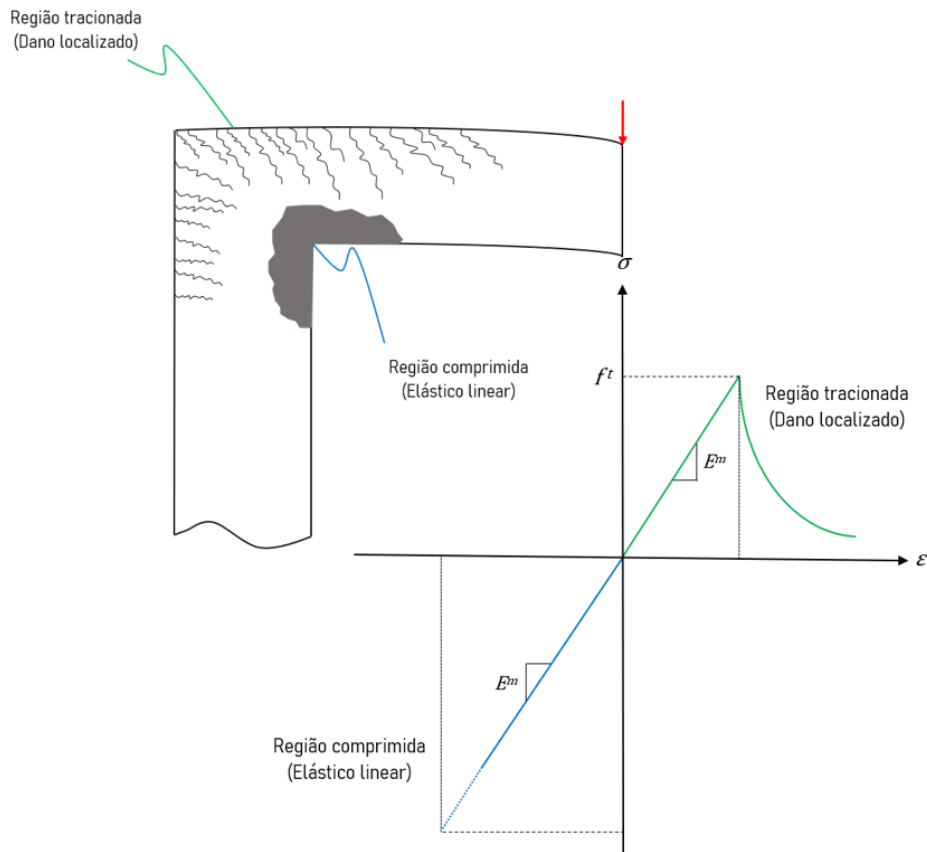


Figura 4.1: Comportamentos distintos considerados para tração e compressão em um elemento de concreto.

Dessa forma, alguns pesquisadores já propuseram diversos modelos constitutivos, buscando representar as não linearidades proporcionadas pelas alterações microestruturais apresentadas nos materiais quase-frágeis. Os modelos propostos foram baseados em diversas teorias, dentre as principais, destacam-se as teorias da plasticidade e a mecânica do dano contínuo, que, apesar de conseguirem representar por muitas vezes a resposta mecânica do material, podem apresentar algumas complexidades do ponto de vista da solução numérica.

Segundo Lemaitre (1992), a teoria da plasticidade é capaz de representar as deformações plásticas induzidas pelas microfissuras, porém apresenta dificuldades para simular a degradação dos materiais quase-frágeis, assim como a recuperação da rigidez no caso da inversão de carregamentos. Assim, pode-se destacar a mecânica do dano contínuo como uma teoria capaz de representar essas particularidades, com o nível de degradação medido e controlado por uma única variável escalar de dano, no caso do modelo de dano à tração, podendo apresentar duas variáveis quando o modelo busca representar também as não linearidades das regiões comprimidas do elemento estrutural.

4.2 Representação da matriz de concreto através da mecânica do dano contínuo

Kachanov (1958) introduziu o conceito de tensões efetivas (sem dano), que forneceu a base para a teoria da mecânica do dano contínuo, formalizada posteriormente por Lemaitre e Chaboche (1990) na teoria dos processos irreversíveis. A teoria da mecânica do dano contínuo tem sido amplamente utilizada para representar a degradação de materiais quase-frágeis, devido à sua consistência e simplicidade.

Segundo Lemaitre (1992), a presença de microdefeitos, tais como microfissuras e microvazios contribuem para o comportamento não linear pós-pico dos materiais, correspondendo em uma macroescala por perdas de rigidez e resistência.

O processo de degradação altera as propriedades iniciais do material, que se encontram no regime elástico, diminuindo sua área efetiva resistente. A perda de área efetiva ocorre em geral devido ao crescimento das fissuras e vazios, sendo que em materiais frágeis como o concreto, estes podem aparecer antes mesmo de desenvolverem mecanismos plásticos (Oller, 2001).

Para representação do comportamento distinto do concreto à tração e compressão, modelos baseados na mecânica do dano contínuo, com duas variáveis independentes de dano têm sido propostos, como por exemplo, o modelo desenvolvido por Cervera et al. (1996).

4.2.1 Modelo constitutivo de dano à tração

O modelo de dano proposto por Cervera et al. (1996) é caracterizado pela representação distinta da resposta à tração e compressão do material. Assim, duas variáveis de dano com leis distintas, são empregadas para danificar as parcelas positiva e negativa do tensor das tensões. Neste trabalho, apenas a parcela positiva (de tração) do tensor das tensões é danificada, com a evolução de dano representada por um comportamento exponencial, buscando representar as não linearidades apresentadas nas bandas de localização dos elementos triangulares de três nós, implementados com fissuras incorporadas.

4.2.1.1 Conceitos fundamentais

Para a definição de um modelo de dano à tração, as falhas possuem um comportamento regido por uma variável escalar de dano à tração, d^t , que pode ser definida como uma grandeza física que avalia o nível de integridade de um corpo. Na Figura 4.2 pode-se visualizar um elemento estrutural prismático qualquer, submetido à um carregamento uniaxial de tração, F , apresentando a seção transversal íntegra na Figura 4.2 (a), e a seção equivalente danificada na Figura 4.2 (b). A primeira, não apresenta tensões de tração superiores do que f_t^m , conforme o gráfico na Figura 4.1, já a seção danificada apresenta tensões de tração superiores ao limite resistido pelo material, apresentando portanto um valor para a variável de dano a tração, $d^t > 0$.

Enquanto a seção transversal apresenta-se íntegra, pode-se considerar a área total, A , no cálculo das tensões. Após a ocorrência do dano, apresentam-se alguns pontos vazios na seção transversal. Dessa forma, a seção transversal efetiva, A_{ef} , que resiste aos esforços, passa a ser calculada pela subtração da área degradada, A_D , da área total, A , conforme a Equação 4.1.

$$A_{ef} = A - A_D \tag{4.1}$$

Assim, considerando a definição da variável escalar de dano à tração referida na Equação 4.2, e às definições de tensão nominal e tensão efetiva definidas respectivamente na Equação 4.3 e na Equação 4.4, é possível manipulá-las para obter a

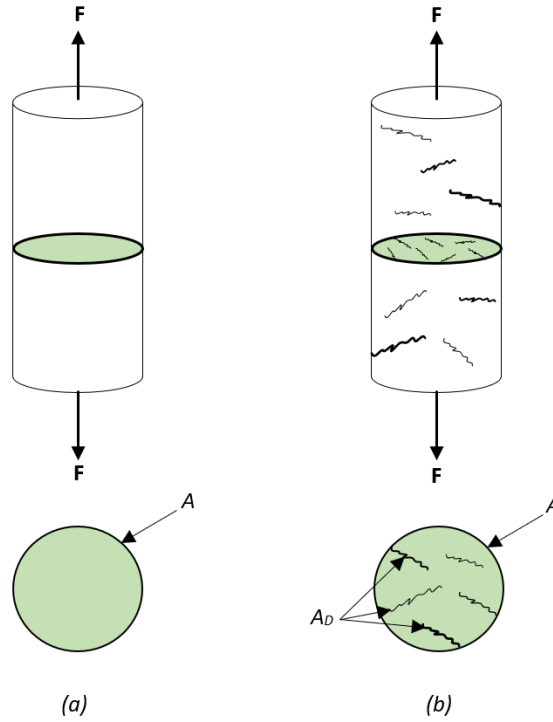


Figura 4.2: Corpo sólido degradado (adaptado de Maedo (2015)).

relação constitutiva expressada na Equação 4.5.

$$d^t = \frac{A_D}{A} \quad (4.2)$$

$$\sigma^m = \frac{F}{A} \quad (4.3)$$

$$\bar{\sigma}^m = \frac{F}{A_{ef}} \quad (4.4)$$

Saindo do problema escalar e analisando-o em termos tensoriais, o tensor de tensões efetivas, $\bar{\sigma}^m$, é separado em duas componentes, uma positiva ($\bar{\sigma}^{m+}$), e uma negativa ($\bar{\sigma}^{m-}$), por meio da solução de um problema de autovalores e autovetores. Com isso, é possível aplicar o dano apenas na parte positiva do tensor de tensões, conforme é descrito na equação abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma}^m = (1 - d^t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{m+} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{m-} \quad (4.5)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^m$ representa o campo de tensões nominal da matriz de concreto na banda de localização, sendo este equivalente ao tensor de tensões, $\boldsymbol{\sigma}_{S,e}$, definido no nível do elemento finito e descrito na Equação 2.12.

4.2.1.2 Critério de degradação

O critério de degradação é responsável por avaliar quando o material ultrapassa o nível de tensões suportado dentro do regime elástico, passando a partir deste ponto a sofrer um processo de degradação, dentro da teoria da mecânica do dano contínuo.

A princípio, optou-se por trabalhar com um critério de degradação limitado pela tensão equivalente, apresentado na Equação 4.7, definindo-o em função da norma da tensão de tração efetiva equivalente, $\bar{\tau}^{m+}$, caracterizada na Equação 4.6, e da variável interna de dano inicial, r_0^{m+} , que é constante e definida no espaço de tensões efetivas pela Equação 4.8.

$$\bar{\tau}^{m+} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{m+} : (\mathbf{E}^m)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{m+}} \quad (4.6)$$

$$F(\bar{\tau}^{m+}, r^{m+}) = \bar{\tau}^{m+} - r^{m+} \leq 0 \quad (4.7)$$

$$r^{m+} |_{t=0} = r_0^{m+} = \frac{f_t^m}{\sqrt{E^m}} \quad (4.8)$$

Buscando estabelecer um limite para o domínio elástico, o valor para o limite inicial da variável interna de dano é definido por r_0^{m+} , demonstrado na Equação 4.8 em termos da tensão de pico de tração, f_t^m , que pode ser visualizada claramente na Figura 4.1, e do módulo de elasticidade do concreto, E^m .

4.2.1.3 Lei de evolução da variável de dano

Diferentes materiais apresentam diferentes comportamentos após atingir o limite elástico, e podem ser representados por diferentes leis de evolução do dano. Conforme descrito no início da Subseção 4.2.1, neste trabalho será utilizada uma lei de evolução do dano equivalente à utilizada no modelo de dano de Cervera, para a região tracionada.

O modelo à tração de Cervera, utilizado dentro de modelos convencionais, é controlado basicamente por um parâmetro de abrandamento, A_C^+ , definido por meio da Equação 4.10, na qual, l_{hc} é um comprimento característico do elemento em análise, definido pela raiz quadrada da área do elemento, A_e , conforme a Equação 4.9, e H^+ é o módulo de abrandamento.

$$l_{hc} = \sqrt{A_e} \quad (4.9)$$

$$A_C^+ = \frac{1}{\left(\frac{1}{2H^+} \left(\frac{1}{l_{hc}} - H^+\right)\right)} \quad (4.10)$$

Neste trabalho, o modelo de dano está sendo utilizado dentro da ACDF, para representar o abrandamento dentro do elemento finito degradado. De forma sucinta, a principal diferença em relação aos modelos convencionais, é a utilização de uma relação constitutiva regularizada, que leva em consideração o efeito da escala refinada, apresentado dentro da banda de localizações.

Segundo Manzoli (2008), devido à regularização, o módulo de abrandamento deve ter caráter distribucional, devendo ser substituído por sua forma regularizada (Equação 4.12). Para tal, considera-se um parâmetro de regularização, k , sendo este de valor igual à largura da banda de localização, h , bastando para efeitos práticos assumir valores consideravelmente inferiores ao domínio do problema.

$$\bar{A}^+ = \frac{f_t^{m2}}{2E^m G_f^m} \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{A^+} = \delta_s \frac{1}{\bar{A}^+} \rightarrow A^+ = k\bar{A}^+ \quad (4.12)$$

onde \bar{A}^+ é o módulo de abrandamento intrínseco, e G_f^m trata-se da energia de fratura para a matriz de concreto, definidos em detalhe em Maedo (2015).

Dessa forma, para o processo de carregamento em tração é possível definir as variáveis internas de dano, r^{m+} e q^{m+} , e a variável de dano escalar, d^t , de acordo com as equações a seguir:

$$r^{m+} = \max_{SE(0,t)} \left(r_0^{m+}, \bar{r}^{m+} \right) \quad (4.13)$$

$$q^{m+} = r_0^{m+} e^{\left(A^+ \left(1 - \frac{r^{m+}}{r_0^{m+}} \right) \right)} \quad (4.14)$$

$$d^t = 1 - \frac{q^{m+}(r^{m+})}{r^{m+}} \quad (4.15)$$

4.2.1.4 Condição de carga e descarga

Buscando demonstrar melhor a evolução do dano, utiliza-se das relações de Kuhn-Tucker descritas na Equação 4.16 para definir as condições de carga e descarga, sendo estas fundamentais para o desenvolvimento do modelo constitutivo.

$$\begin{aligned} \dot{d}^t &\geq 0 \\ F(\bar{\sigma}^{m+}) &\leq 0 \\ \dot{d}^t \cdot F(\bar{\sigma}^{m+}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dentro dessas relações, é possível avaliar as condições de carga e descarga de acordo com a Figura 4.3.

O trecho inicial **AB**, corresponde ao regime elástico linear, onde a função $F(\bar{\sigma}^{m+}) < 0$ e não há evolução da variável de dano, $\dot{d}^t = 0$, inclusive com o valor da variável de dano até este momento também igual a zero. No trecho **BC**, apresenta-se um valor diferente de zero para a variável escalar de dano, d^t , e tem-se a função $F(\bar{\sigma}^{m+}) > 0$, com evolução da variável escalar de dano, $\dot{d}^t > 0$, caracterizando um trecho de carregamento. Finalmente, os trechos **AC** e **CA** correspondem, respectivamente, às situações de recarga e descarga, com $\dot{d}^t = 0$ em ambas situações. Além disso, nos

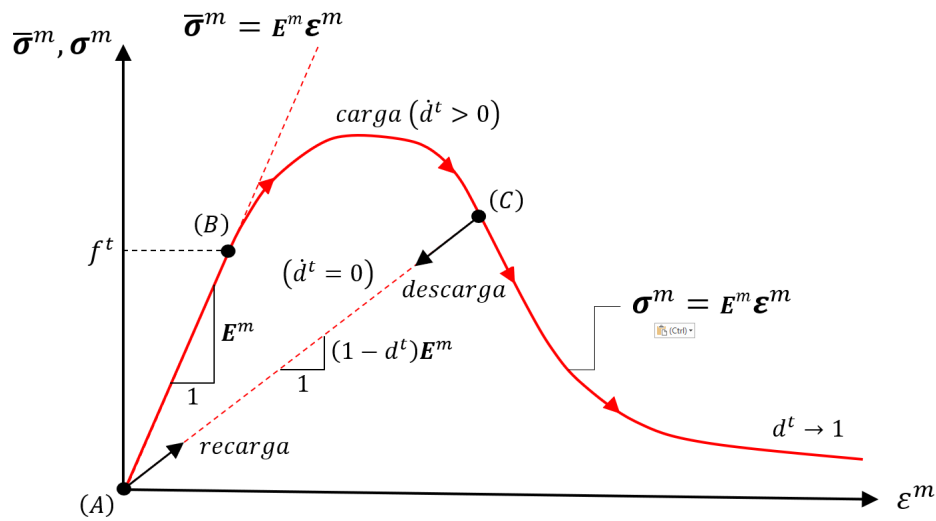


Figura 4.3: Condições de carga e descarga (adaptado de Maedo (2015)).

trechos de descarga e recarga a seção de concreto já está danificada, apresentando uma rigidez inferior, dada nesses trechos por $(1 - d^t) \mathbf{E}^m > 0$.

4.2.1.5 Esquema modificado de integração implícita-explícita (Impl-Ex)

Neste trabalho, para a integração do modelo constitutivo de dano à tração, é utilizada uma versão modificada por Bitencourt Jr. et al. (2019), do esquema de integração implícito-explícito (Impl-Ex), proposto inicialmente por Oliver et al. (2006) e Oliver et al. (2008). Este método é utilizado buscando atingir a robustez necessária para lidar com as não linearidades impostas após o regime elástico, de forma a não aumentar consideravelmente o custo computacional.

A modificação realizada por Bitencourt Jr. et al. (2019) apresenta como principal diferença em relação ao modelo inicial a escolha das variáveis internas que serão atualizadas, ou seja, escolhe-se atualizar as componentes do tensor de deformações, $\boldsymbol{\epsilon}^m$, ao invés de atualizar a variável interna limite de dano, r^{m+} .

Dessa forma, o esquema modificado utiliza como extrapolação linear do tensor inelástico (danificado) das deformações, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{m,d}$, o disposto na Equação 4.17.

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{m,d} = \boldsymbol{\epsilon}_n^{m,d} + \frac{\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{m,d}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (4.17)$$

O algoritmo do esquema modificado do Impl-Ex está detalhado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Esquema modificado de integração Impl-Ex para o modelo de dano à tração.

<p>Dados de entrada: $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^m, \boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d}, r_n^{m+}$</p> <p>(i) Calcular o tensor de tensões efetivo - (Implícito)</p> $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^m = \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^m$ <p>(ii) Separar $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^m$ em uma parte positiva $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m+}$ e uma parte negativa $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m-}$</p> <p>(iii) Checar as condições de carga/descarga</p> <p>se $\bar{F}_{n+1}^+(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m+}) < 0$, então</p> <p style="padding-left: 40px;">atualiza a variável interna limite de dano positiva: $r_{n+1}^{m+} = r_n^{m+}$</p> <p>senão $\bar{F}_{n+1}^+(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m+}) > 0$, então</p> <p style="padding-left: 40px;">atualiza a variável limite de dano positiva: $r_{n+1}^{m+} = \bar{r}_{n+1}^{m+} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m+} : (\mathbf{E}^m)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m+}}$</p> <p>(iv) Atualizar a variável interna de dano</p> $q_{n+1}^{m+}(r_{n+1}^{m+})$ <p>(v) Atualizar a variável escalar de dano</p> $d_{n+1}^+(r_{n+1}^+) = 1 - \frac{q_{n+1}^+(r_{n+1}^+)}{r_{n+1}^+}$ <p>(vi) Calcular o tensor das tensões de Cauchy - (Implícito)</p> $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^m = (1 - d_{n+1}^+) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m+} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{m-}$ <p>(vii) Calcular o tensor das deformações inelásticas (danificadas) e o seu incremento - (Implícito)</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{m,d} = (\mathbf{E}^m)^{-1} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^m - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^m) \text{ e } \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{m,d} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{m,d} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d}$ <p>(viii) Calcular a extrapolação linear do tensor inelástico das deformações - (Explícito)</p> $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{m,d} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d} + \frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d} + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{m,d})}{(t_n - t_{n-1})} (t_{n+1} - t_n) = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{m,d}$ <p>(ix) Calcular o tensor das tensões - (Explícito)</p> $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^m = \mathbf{E}^m (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^m - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{m,d})$ <p>Dados de saída: $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^m, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{m,d}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{m,d}, r_{n+1}^{m+}$</p> <p>Calcular o operador tangente algorítmico efetivo</p> $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1}^{m,tg-eff} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^m}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^m} = \mathbf{E}^m$

4.2.1.6 Estudo de caso: Elemento prismático submetido à carregamentos uniformes de tração e compressão

Para ilustrar o comportamento dos elementos finitos com fissura incorporada e o comportamento não linear apresentado nas bandas de localização de deformações, é analisado um modelo uniaxial submetido à esforços de tração e compressão. A Figura 4.4 ilustra as condições de contorno para o modelo utilizado, assim como a malha de elementos finitos, composta por 4 elementos finitos triangulares de três nós de deformações constantes (*CST*), submetidos à um estado plano de tensões, com uma espessura fora do plano de 100 mm. A banda de localização foi posicionada atravessando os elementos 3 e 4 em uma posição aleatória, uma vez que não há a necessidade da exatidão na localização da fissura, por estarmos trabalhando com um elemento finito de deformações constantes.

Os parâmetros adotados para a matriz de concreto estão descritos na Tabela 4.2.

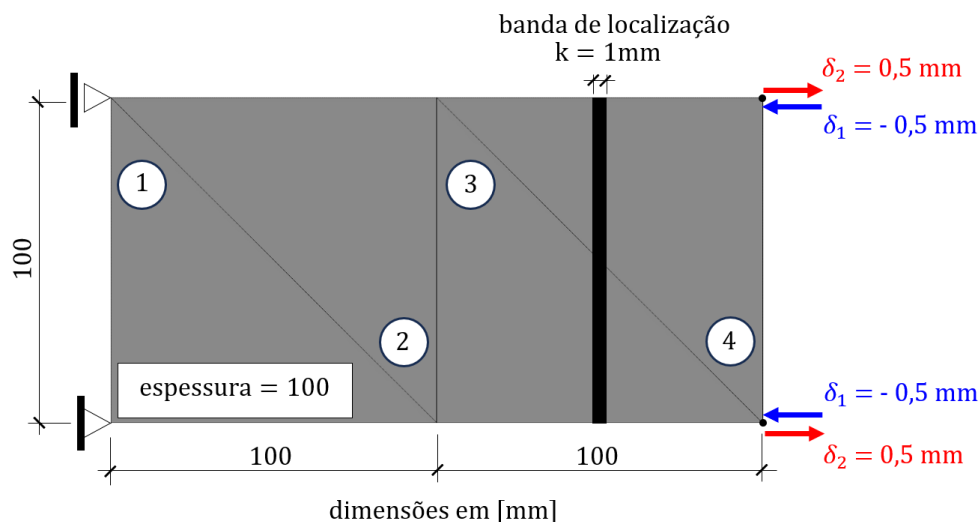


Figura 4.4: Configuração do modelo uniaxial submetido à compressão e à tração uniformes.

Tabela 4.2: Propriedades mecânicas adotadas para o concreto no estudo de caso.

Resistência à tração f_t^m	2,35 MPa
Módulo de elasticidade E^m	35.000 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,2
Energia de fratura G_f^m	0,1 N/mm

Para descrever o comportamento da banda de localização, inicialmente foram impos-

tos deslocamentos horizontais divididos em 2.500 passos decrescentes até $-0,5mm$, e em seguida foram impostos 5.000 passos crescentes até o valor de $0,5mm$, atingindo a completa degradação do material. A localização da banda foi imposta de forma manual, e encontra-se na posição descrita na Figura 4.4.

Assim, na Figura 4.5 é possível notar que os deslocamentos se localizam quase totalmente nos elementos que contém a banda de localização no momento de tração e degradação máximas, conforme esperado.

Na Figura 4.6 pode-se ilustrar o resultado obtido de acordo com o modelo constitutivo utilizado para a matriz de concreto. A banda de localização, que é descrita por este modelo, apresenta um abrandamento exponencial, com a abertura da fissura e relaxamento das tensões a partir da carga de pico (23,5 kN), enquanto a resposta durante a fase comprimida permanece no regime elástico, mesmo sob altos níveis de tensão.

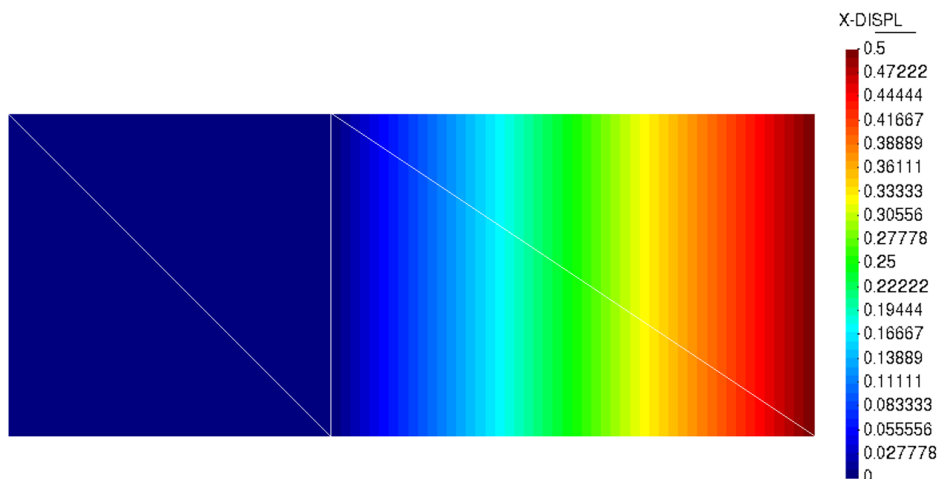


Figura 4.5: Respostas numéricas para a localização dos deslocamentos na barra no momento do deslocamento máximo imposto de tração.

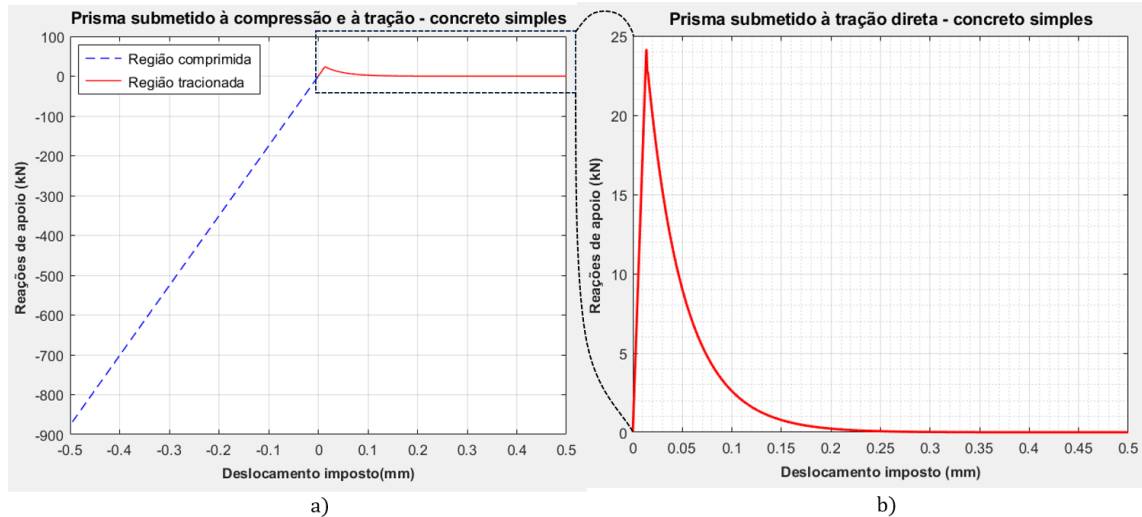


Figura 4.6: Curva que descreve o modelo constitutivo para a matriz de concreto (deslocamento imposto x reações de apoio): (a) respostas do modelo constitutivo para compressão e tração do concreto; (b) destaque para a resposta do concreto quando submetido à tração uniforme.

4.3 Representação dos elementos de aço

Procura-se utilizar uma porcentagem de fibras de aço na composição do concreto para auxiliar na capacidade de resistir aos esforços de tração na matriz cimentícia, obtendo o CRFA. O comportamento do composto concreto-aço depende veementemente das características de cada material e do tipo de interação entre eles.

Nesta pesquisa, serão utilizados elementos de treliça de dois nós para representar as fibras de aço nas simulações numéricas (Figura 4.7), descritos por um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional.

4.3.1 Elemento finito de treliça de dois nós - Caso 2D

A formulação aqui apresentada é detalhada de forma integral por diferentes autores (Fish e Belytschko, 2007; Bucalem e Bathe, 2011; Bathe, 2014). Aqui apresenta-se de forma sucinta os aspectos principais para a formulação de um elemento finito de treliça de dois nós.

4.3.1.1 Definições básicas

Um elemento finito linear de dois nós, com área de seção transversal da barra de aço, A^f , e módulo de elasticidade, E^f , é mostrado na Figura 4.7, para o caso 2D.

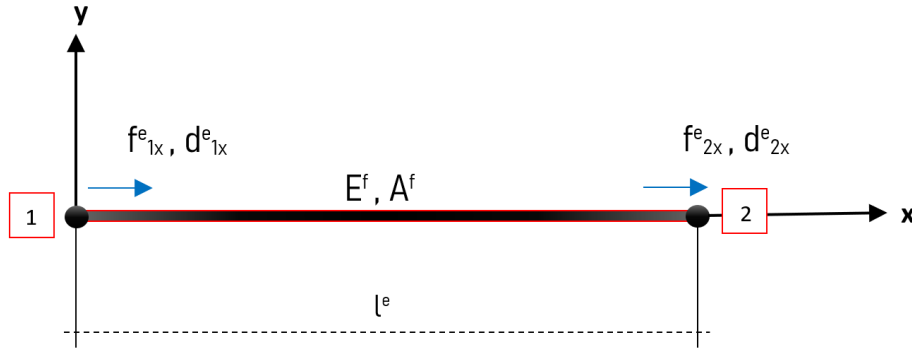


Figura 4.7: Elemento finito de dois nós com eixos locais e os vetores de forças internas.

Segundo Fish e Belytschko (2007), as funções de forma para um elemento de dois nós, $\mathbf{h}_i^e(x)$, e a matriz que relaciona deformações e deslocamentos, $\mathbf{B}_i^e(x)$, são dadas por:

$$\mathbf{h}^e(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^e(x) & \mathbf{h}_2^e(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-x_2^e}{x_1^e-x_2^e} & \frac{x-x_1^e}{x_2^e-x_1^e} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} (x_2^e - x) & (x - x_1^e) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B}^e(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{h}^e(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^e} & \frac{1}{l^e} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

O vetor de deslocamentos nodais local definido por $\mathbf{d}_x^e = \begin{bmatrix} d_{1x}^e & d_{2x}^e \end{bmatrix}$, armazena as componentes de deslocamentos axiais locais e pode ser calculada através dos deslocamentos nodais globais, $\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} D_{1X}^e & D_{1Y}^e & D_{2X}^e & D_{2Y}^e \end{bmatrix}$, por:

$$\mathbf{d}_x^e = \mathbf{T}^e \mathbf{D}^e \quad (4.20)$$

onde \mathbf{T}^e , é a matriz de transformação, responsável por transformar deslocamentos e forças globais, em locais, quando estes não se confundem. Uma definição mais detalhada para a matriz \mathbf{T}^e pode ser encontrada em Bucelem e Bathe (2011).

Dessa forma, é possível obter os deslocamentos e deformações axiais em qualquer

ponto do elemento finito por meio da Equação 4.21 e da Equação 4.22.

$$u_x^e = \mathbf{h}^e(x) \mathbf{d}_x^e \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_x^e = \mathbf{B}^e(x) \mathbf{d}_x^e \quad (4.22)$$

4.3.1.2 Vetor de forças internas e matriz de rigidez para um elemento de treliça

Partindo do princípio dos trabalhos virtuais, define-se o trabalho virtual interno para uma barra de treliça como:

$$\delta W_{int}^e = \int_{\Omega_e} \delta \varepsilon_x^{eT} \sigma_x^e d\Omega^e = A^f l^e \mathbf{B}^{eT} \sigma_x^e \delta \mathbf{d}_x^{eT} \quad (4.23)$$

na qual, $\delta \varepsilon_x^{eT} = \mathbf{B}^e \delta \mathbf{d}_x^{eT}$ é um campo de de deformação virtual devido a um campo arbitrário de deslocamento virtual. Dessa forma, o vetor de forças internas local e global para um elemento de treliça pode se expressado respectivamente pela Equação 4.24 e pela Equação 4.25.

$$\mathbf{f}_{int}^e = A^f l^e \mathbf{B}^{eT} \sigma_x^e \quad (4.24)$$

$$\mathbf{F}_{int}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{f}_{int}^e \quad (4.25)$$

A matriz de rigidez local para uma barra de treliça é então definida pela Equação 4.26 a seguir:

$$\mathbf{k}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \mathbf{B}^{eT} A^f E_{tg}^f \mathbf{B}^e dx = \frac{A^f E_{tg}^f}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

onde E_{tg}^f é o módulo de elasticidade tangente que representa o comportamento não linear das fibras de aço.

Dessa forma, a matriz de rigidez definida em termos dos eixos globais do sistema é

dada pela Equação 4.27.

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{T}^e \quad (4.27)$$

4.3.2 Modelo constitutivo elastoplástico unidimensional

4.3.2.1 Definições básicas

Neste trabalho, o comportamento axial das fibras de aço é descrito por um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional. Uma explicação detalhada da teoria clássica da elastoplasticidade pode ser encontrada em Simó e Hughes (1998) ou em Souza Neto et al. (2008). Um resumo específico para essa formulação é apresentada a seguir:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^f = \mathbf{E}^f (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^f - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^f) = \mathbf{E}^f \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^f \quad (4.28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^f = \dot{\lambda}^f \bar{\mathbf{m}} \quad (\text{lei do escoamento plástico}) \quad (4.29)$$

onde \mathbf{E}^f é a matriz constitutiva elástica linear das fibras de aço e $\boldsymbol{\varepsilon}^f$ é o tensor de deformações totais das fibras, na qual $\boldsymbol{\varepsilon}_p^f$ é a parte plástica (permanente) e $\boldsymbol{\varepsilon}_e^f$ é a parte elástica (reversível).

Analisando a Equação 4.29, $\bar{\mathbf{m}}$ fornece a direção do escoamento plástico de acordo com a Equação 4.34, e $\dot{\lambda}^f$ é um multiplicador plástico, o qual define a magnitude da deformação.

Neste trabalho os elementos de aço são discretizados em elementos finitos de treliça, conforme descrito na Subseção 4.3.1. Dessa forma, pode-se considerar esforços apenas na direção axial das barras, permitindo que se trabalhe com valores escalares ao invés de tensores. Assim, a matriz constitutiva elástica linear, \mathbf{E}^f , passa a se apresentar nas formulações apenas como o módulo de elasticidade axial dos elementos de aço, E^f , e as tensões e deformações passam a ser trabalhadas apenas com valores escalares, σ^f e ε^f .

4.3.2.2 Critério de falha

Há um limite no qual o aço passa do regime elástico para o regime plástico, definido neste trabalho pelas seguintes equações:

$$\mathbb{E}_\sigma = \left\{ \sigma^f \mid \phi(\sigma^f, q^f) < 0 \right\} \text{ (domínio elástico)}, \quad (4.30)$$

$$\phi(\sigma^f, q^f) = |\sigma^f| - (\sigma_y^f + q^f) \leq 0 \text{ (função de fluência)}, \quad (4.31)$$

$$\dot{q}^f = -H^f \dot{\alpha}^f \text{ (lei de amolecimento)} \quad (4.32)$$

$$\dot{\alpha}^f = \dot{\lambda}^f \bar{s} \text{ (lei de evolução da variável interna de deformações)} \quad (4.33)$$

Nas expressões acima, σ_y^f é o campo de tensões de fluência, q^f é a variável interna de abrandamento/endurecimento, α^f é a deformação plástica equivalente e H^f é o módulo de abrandamento/endurecimento, o qual define o comportamento elastoplástico do material de acordo com o seu sinal, conforme mostrado na Figura 4.8.

Considerando um caso particular de plasticidade associativa, onde $\bar{\phi} = \phi$, define-se \bar{m} e \bar{s} pelas seguintes relações:

$$\bar{m} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma^f} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^f} = \text{sinal}(\sigma) \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\bar{s} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial q^f} = 1 \quad (4.35)$$

Assim, as taxas de variação da parcela de deformação plástica, $\dot{\epsilon}_p^f$, e da deformação plástica equivalente, são definidas por:

$$\dot{\epsilon}_p^f = \dot{\lambda} \text{sinal}(\sigma) \quad (4.36)$$

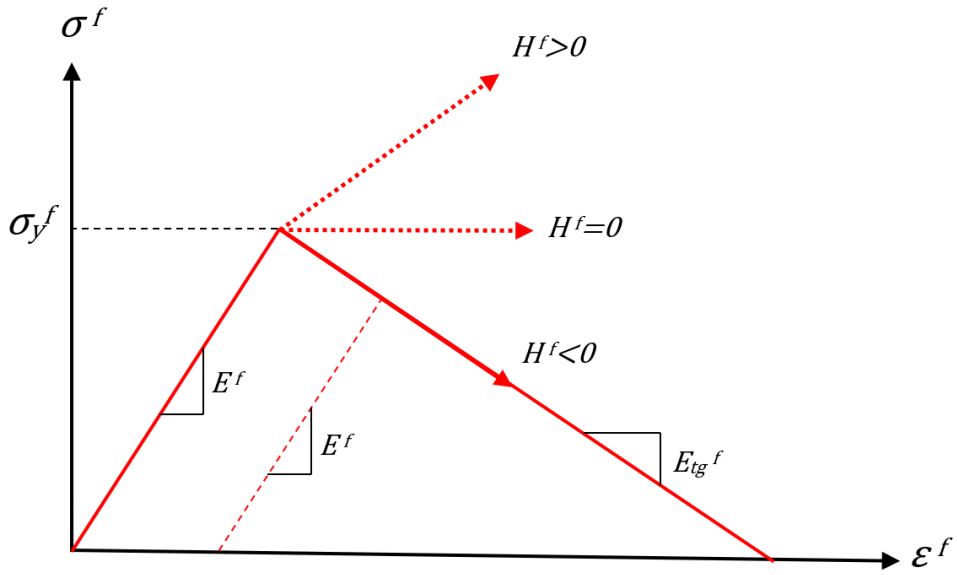


Figura 4.8: Curva típica tensão-deformação para o modelo constitutivo elastoplástico unidimensional (adaptado de Bitencourt Jr. (2015)).

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \quad (4.37)$$

As condições de carga e descarga são definidas pelas condições de Kuhn-Tucker, segundo relações expressadas na Equação 4.38:

$$\phi(\sigma^f, q^f) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} \phi(\sigma^f, q^f) = 0 \quad (4.38)$$

4.3.2.3 Matriz constitutiva tangente

Rescrevendo a Equação 4.28 em termos do módulo de elasticidade tangente, E_{tg}^f , tem-se:

$$\dot{\sigma}^f = E_{tg}^f \dot{\epsilon}^f \quad (4.39)$$

onde o módulo de elasticidade tangente, E_{tg}^f , depende se as fibras de aço estão submetidas às condições de carregamento ou descarregamento, fornecendo as seguintes equações para cada caso:

$$E_{tg}^f = E^f \text{ (elástico/d Descarregamento)} \quad (4.40)$$

$$E_{tg}^f = \frac{E^f H^f}{E^f + H^f} \text{ (carregamento)} \quad (4.41)$$

5 Descrição da interação fibra/matriz

Uma vez definidos os modelos constitutivos e a malha de elementos finitos que definem o problema para elementos de concreto reforçado com fibras de aço, é necessário descrever a interação entre as fibras de aço e a matriz de concreto. Para isso, utiliza-se os elementos finitos de acoplamento (EFA) desenvolvidos por Bitencourt Jr. (2015) e Bitencourt Jr. et al. (2015).

5.1 Elemento finito de acoplamento

Neste trabalho, a técnica proposta por Bitencourt Jr. (2015) e Bitencourt Jr. et al. (2015), é aplicada para acoplar as malhas não conformes da matriz de concreto e de uma nuvem de fibras de aço.

Parte-se de um elemento finito inicial com domínio Ω_e , que possui um número de nós igual a nn , e funções de forma $\bar{h}_i(\mathbf{X})(i = 1, nn)$, as quais são definidas pelos pontos materiais $\mathbf{X}_e \in \Omega_e$, onde os deslocamentos, \bar{U} , em qualquer ponto do domínio do elemento podem ser aproximados em termos dos deslocamentos nodais, $D_i(i = 1, nn)$, de acordo com a Equação 5.1.

$$\bar{U}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{nn} \bar{h}_i(\mathbf{X}) D_i \quad (5.1)$$

Conforme definido por Bitencourt Jr. (2015), o EFA é um elemento finito que possui todos os nós contemplados pela Equação 5.1, e ainda possui um nó adicional, chamado nó de acoplamento (C_n), situado no ponto material $\mathbf{X}_c \in \Omega_e$, que pode estar contido dentro do elemento ou nas arestas do mesmo, conforme ilustrado na Figura 5.1 para um elemento triangular de três nós. Na Figura 5.1 (a), o nó adicional é o nó do elemento de barra representativo da fibra de aço, que pertence ao respectivo domínio Ω_e do elemento triangular da matriz de concreto.

5.1 Elemento finito de acoplamento

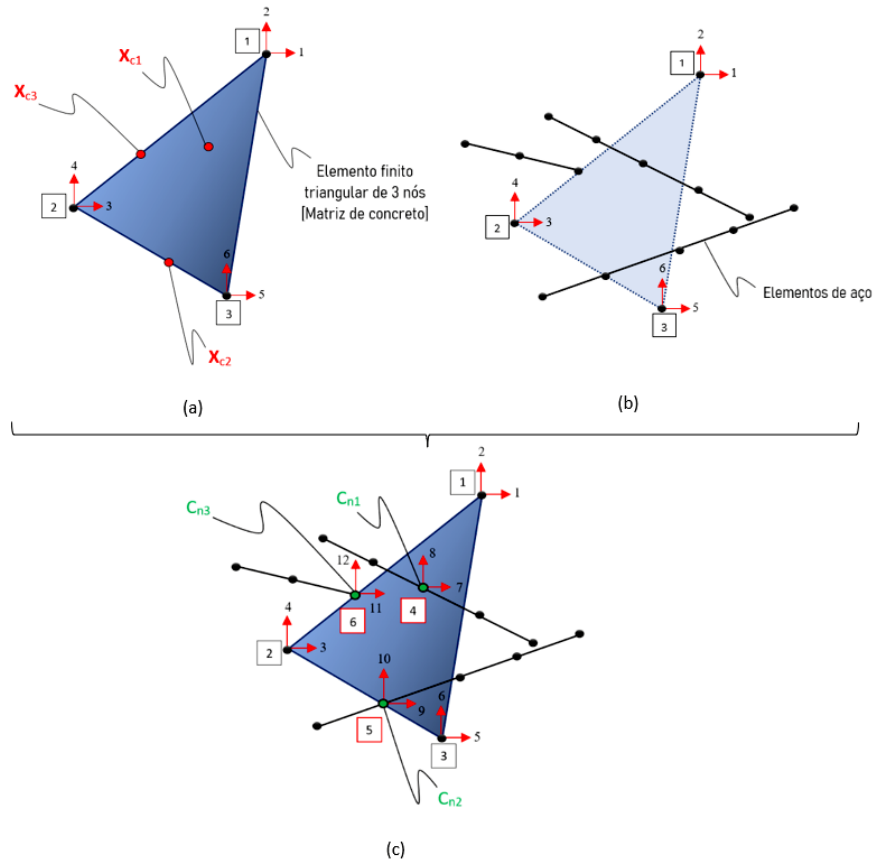


Figura 5.1: Representação do acoplamento entre a matriz de concreto e as fibras de aço: (a) representação de um elemento finito de três nós (matriz de concreto) com os possíveis nós de acoplamento; (b) sobreposição das fibras de aço sobre o elemento triangular; (c) elemento finito triangular (matriz de concreto) sobreposto por três elementos finitos de acoplamento, cada qual contendo os nós 1, 2 e 3, mais um nó adicional, sendo estes os nós 4, 5 e 6 os nós adicionais para cada elemento finito de acoplamento.

Dessa forma, a interação entre os materiais acoplados é relacionada através dos deslocamentos relativos, $[[U]]$, definido como a diferença entre o deslocamento do nó C_n e o deslocamento do ponto material X_c , e pode ser determinado através das funções de forma do elemento inicial da matriz de concreto, $\bar{h}_i(X_c)$ ($i = 1, nn$), de acordo com as seguintes equações:

$$[[U]] = D_{nn+1} - \bar{U}(X_c) = D_{nn+1} - \sum_{i=1}^{nn} \bar{h}_i(X_c) D_i = B_e D_e \quad (5.2)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} -\bar{h}_1(X_c) & -\bar{h}_2(X_c) & \dots & -\bar{h}_{nn}(X_c) & I \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{D}_e^T = \{ \mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \dots \quad \mathbf{D}_{nm+1} \} \quad (5.4)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de 2^a ordem para problemas 2D, e \mathbf{D}_e é o tensor que armazena as componentes de deslocamento do EFA.

Então, utilizando a mesma aproximação para os deslocamentos virtuais relativos, o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente dos EFA, podem ser expressados de acordo com a Equação 5.5 e com a Equação 5.6.

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{K}_{ea} = \frac{\partial \mathbf{F}_e^{int}}{\partial \mathbf{D}_e} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_{tg} \mathbf{B}_e \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{C}_{tg} = \partial \mathbf{F}(\llbracket \mathbf{U} \rrbracket) / \partial \llbracket \mathbf{U} \rrbracket$ é o operador tangente da relação constitutiva entre as forças de reação e os deslocamentos relativos, nos quais neste trabalho são definidos baseados em um modelo de *bond-slip*, descrito por um modelo de dano contínuo para representar a perda de aderência entre a matriz de concreto e as fibras de aço.

Para representar corretamente a interação entre as fibras de aço e o concreto, é necessário utilizar um modelo de acoplamento adequado, considerando a devida perda da aderência, de acordo com as características de cada material. A seguir são descritos os modelos para representação de aderência perfeita e perda de aderência entre concreto e reforços.

5.1.1 Acoplamento rígido (aderência perfeita)

É possível representar um acoplamento rígido, que equivale a uma aderência perfeita entre a matriz de concreto e os elementos de aço, utilizando um modelo elástico linear, com uma matriz de constantes elásticas, \mathbf{C} , usada para descrever a relação entre as forças de reação e os deslocamentos relativos, $\llbracket \mathbf{U} \rrbracket$. Dessa forma, é possível reescrever as equações Equação 5.5 e Equação 5.6 da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{K}_{ea} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e. \quad (5.8)$$

Assim, assumindo uma matriz de constantes elásticas com valores elevados para a rigidez elástica, \tilde{C} , garante-se que os deslocamentos relativos, $[[\mathbf{U}]]$, devem tender a zero, devido às condições de equilíbrio que tornam limitadas as forças de interação entre o aço e o concreto. A matriz de constantes elásticas para os modelos 2D pode ser definida conforme a Equação 5.9.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.2 Acoplamento não-rígido (aderência parcial)

A formulação utilizada na definição do acoplamento rígido é estendida para considerar um acoplamento não-rígido entre as malhas não conformes das fibras de aço e da matriz de concreto, permitindo dessa forma deslocamentos relativos entre os domínios durante o processo de carregamento.

Então, um acoplamento não-rígido pode ser considerado assumindo diferentes valores para as constantes elásticas, de acordo com o sistema de coordenadas local, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) , demonstrado na Figura 5.2. Dessa forma, obtém-se uma matriz de constantes elásticas definida por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{bmatrix} \quad C_v \ll \tilde{C} \quad (5.10)$$

Como pode ser visualizado na Figura 5.2, o eixo axial da barra é representado pela coordenada local \mathbf{v} , onde é aplicado um acoplamento não-rígido, representado por $C_v \ll \tilde{C}$. Então, os deslocamentos relativos e as forças de reação correspondentes podem ser expressados respectivamente por:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{R} [[\mathbf{U}]] \quad (5.11)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} \mathbf{F} \quad (5.12)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação ortogonal entre os sistemas de referência global e local.

5.1.2.1 Modelo de *bond-slip* (perda de aderência)

Existem diversos modelos capazes descrever o comportamento de perda de aderência apresentado entre a matriz de concreto e as fibras de aço. De uma forma geral, a maioria desses modelos são descritos pela relação entre a tensão local (cisalhante), τ , e o deslocamento relativo na interface, s . O EFA introduz no problema uma força de

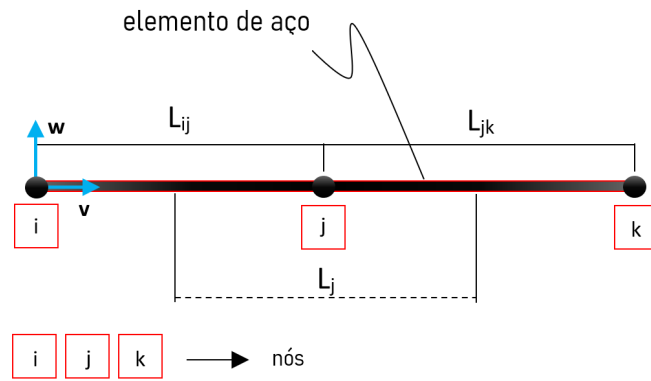


Figura 5.2: Comprimento de influência para um nó de acoplamento em um elemento de aço (adaptado de Bitencourt Jr. (2015)).

interação entre a matriz de concreto e os elementos de aço, com ponto de aplicação no nó de acoplamento. Assumindo que as tensões de cisalhamento são constantes no comprimento de influência referido ao nó de acoplamento, e que o tamanho desse comprimento que contribui para a força resultante em um nó específico corresponde à média das distâncias entre o nó j e os nós adjacentes da barra, i e k , conforme a Figura 5.2. A força de interação pode ser expressada por:

$$f_{vj} = \tau ([u_{vj}]) PL_j \quad (5.13)$$

onde $L_j = (L_{ij} + L_{jk})/2$ é o comprimento de influência e P é o perímetro da seção transversal da fibra, desde que os esforços cisalhantes calculados por meio da Equação 5.13 contribuam apenas para a componente da força da direção v . A outra componente transversal apresentada na direção v pode ser expressada pela seguinte equação:

$$f_{wj} = \tilde{C} [u_{wj}] PL_j \quad (5.14)$$

assumindo um valor elevado para a constante elástica, \tilde{C} , entre 10^6 e 10^9 (MPa/mm), conforme sugerido por Bitencourt Jr. (2015).

5.1.3 Modelo contínuo de dano para descrever a lei de aderência

Para descrever a lei de aderência parcial por uma relação constitutiva entre as tensões de cisalhamento no entorno do elemento de aço e os deslocamentos relativos entre o concreto e as fibras, pode ser utilizado um modelo contínuo de dano, descrito pelas seguintes equações:

$$\tau = (1 - d) \bar{\tau} \quad (\text{relação constitutiva}) \quad (5.15)$$

$$\bar{\tau} = k_a \llbracket u_v \rrbracket \quad (\text{tensão de cisalhamento efetiva}) \quad (5.16)$$

$$\bar{\phi} = \|\bar{\tau}\| - r \leq 0 \quad (\text{critério de dano}) \quad (5.17)$$

$$r = \max |\bar{\tau}| \quad (\text{lei de evolução da variável interna de deformação}) \quad (5.18)$$

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (\text{evolução da tvariável de dano}) \quad (5.19)$$

onde k_a é a constante de rigidez elástica, $d \in [0, 1]$ é a variável escalar de dano e r é a variável interna de deformação. A função $q(r)$ representa a lei de endurecimento/abrandamento do modelo constitutivo, e pode ser ajustada para qualquer lei de aderência que seja apropriada, $\tau(s)$, assumindo que $q(r) = \tau(r/k_a)$.

Para obtenção dos parâmetros de entrada da lei de aderência, $\tau(s)$, utilizada para representar a interface fibra/matriz no EFA, aproveita-se de alguns resultados de ensaios de arrancamento experimentais apresentados na literatura.

Utiliza-se a curva simplificada, admitindo-se $\tau_{b2} = \tau_{bf}$ e $s_2 = s_3 = s_4$, de forma a se obter a lei de aderência apresentada na Equação 5.20 e ilustrada na Figura 5.3,

a qual foi baseada nos estudos de Cunha (2010).

$$\tau(s) = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha_a} & \text{para } s \leq s_1 \\ \tau_{max} - \frac{(\tau_{max} - \tau_{bf})(s - s_1)}{s_2 - s_1} & \text{para } s_1 \leq s \leq s_2 \\ \tau_{bf} & \text{para } s > s_2 \end{cases} \quad (5.20)$$

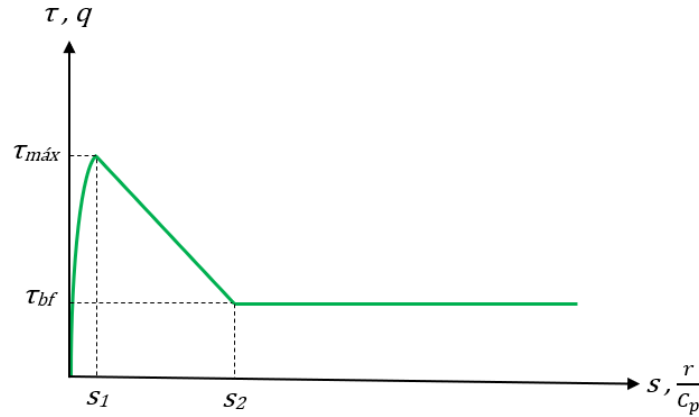


Figura 5.3: Modelo de aderência adotado para a interface fibra/matriz (adaptado de Bitencourt Jr. (2015)).

A lei de aderência apresentada acima pode ser considerada equivalente à função de endurecimento/amolecimento, $q(r)$, em termos da variável interna de deformação, r , e da constante elástica, C_v , podendo ser também representada por:

$$q(r) = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{r/C_v}{s_1}\right)^{\alpha_a} & \text{para } r/C_v \leq s_1 \\ \tau_{max} - \frac{(\tau_{max} - \tau_{bf})(r/C_v - s_1)}{s_2 - s_1} & \text{para } s_1 \leq r/C_v \leq s_2 \\ \tau_{bf} & \text{para } r/C_v > s_2 \end{cases} \quad (5.21)$$

De acordo com o modelo CEB-FIP 90 (1993), os parâmetros α_a , τ_{max} (tensão máxima de aderência entre o concreto e o aço), τ_{bf} (tensão mínima de aderência entre o concreto e o aço, após a degradação da aderência e escoamento da fibra de aço), s_1 (limite de deslizamento entre o concreto e a fibra em que a tensão de aderência atinge τ_{max}) e s_2 (limite de deslizamento entre o concreto e a fibra em que a tensão de aderência atinge τ_{bf}), que definem a lei de aderência na Figura 5.3, são parâmetros dependentes da resistência do concreto, geometria da fibra, situação de confinamento e aderência entre a fibra e o concreto.

5.1.4 Integração implícita-explicita do modelo contínuo de dano para descrever o *bond-slip*

Na modelagem numérica, a integração do modelo contínuo de dano é realizada através do método implícito-explicito (Impl-Ex) proposto inicialmente por Oliver et al. (2006) e Oliver et al. (2008). Este método trata-se de uma combinação dos métodos de integração implícitos e explícitos, explorando as vantagens de ambos. Os métodos explícitos são mais estáveis, porém apresentam algoritmos de resolução mais caros em relação aos métodos implícitos, que por sua vez, proporcionam resultados mais precisos, apresentando por muitas vezes um alto grau de instabilidade numérica, principalmente quando utilizados para tratar problemas mais complexos, de cunho prático.

Assim, o Impl-Ex une as características principais dos métodos anteriores, calculando as tensões do passo atual de forma explícita, $\tilde{\tau}_{n+1}$, utilizando para isso uma projeção linear explícita da variável interna, \tilde{r}_{n+1} , do pseudo tempo atual, calculada em função dos valores implícitos dos passos anteriores, r_n e r_{n-1} . Uma grande vantagem dessa metodologia é garantir a convergência em apenas dois passos de iteração.

A Tabela 5.1 mostra um esquema do algoritmo de integração para o modelo constitutivo utilizado para a lei de aderência.

Tabela 5.1: Esquema de integração Impl-Ex do modelo contínuo de dano.

<p>Dados de entrada: $\llbracket u_{v_{n+1}} \rrbracket, r_n, \Delta r_n$</p> <p>(i) Calcular o tensor de tensões efetivo</p> $\bar{\tau}_{n+1} = C_v \llbracket u_{v_{n+1}} \rrbracket$ <p>(ii) Verificar as condições de carga e descarga</p> <p>se $\ \bar{\tau}_{n+1}\ - r_n \leq 0$, então $r_{n+1} = r_n$</p> <p>senão $r_{n+1} = \ \bar{\tau}_{n+1}\$</p> <p>(iii) Calcular o incremento da variável interna implicitamente</p> $\Delta r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$ <p>(iv) Calcular a extrapolação linear da variável interna explicitamente</p> $\tilde{r}_{n+1} = r_n + \frac{\Delta r_n}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} = r_n + \Delta r_n$ $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n; \Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ <p>(v) Atualizar a variável escalar de dano explicitamente</p> $\tilde{d}_{n+1}(\tilde{r}_{n+1}) = 1 - \frac{\tilde{q}_{n+1}(\tilde{r}_{n+1})}{\tilde{r}_{n+1}}$ <p>(vi) Calcular a tensão de aderência explicitamente</p> $\tilde{\tau}_{n+1} = (1 - \tilde{d}_{n+1})\bar{\tau}$ <p>Dados de saída: $\tilde{\tau}_{n+1}, \tilde{d}_{n+1}, r_{n+1}, \Delta r_{n+1}$</p> <p>Calcular o operador tangente algorítmico efetivo</p> $\tilde{C}_{v_{n+1}}^{tg-eff} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{n+1}}{\partial \llbracket u_{v_{n+1}} \rrbracket} = (1 - \tilde{d}_{n+1})C_v$
--

Assim, utiliza-se como dados de entrada no algoritmo, três variáveis principais: o deslocamento relativo na direção axial da fibra no passo de pseudo tempo atual, $\llbracket u_{v_{n+1}} \rrbracket$, o valor da variável interna, r_n , e o incremento da variável interna, Δr_n , referentes ao pseudo tempo anterior.

Inicialmente é calculado o tensor de tensões efetivo do pseudo tempo atual, $\bar{\tau}_{n+1}$, e verificada as condições de carga e descarga para este valor. A partir do valor de r_{n+1} adotado no item (ii), calcula-se implicitamente em (iii) o incremento da variável

interna, Δr_{n+1} , para ser utilizada no pseudo tempo t_{n+2} . Dessa forma, calcula-se de forma explícita a variável interna, \tilde{r}_{n+1} , e a variável escalar de dano, $\tilde{d}_{n+1}(\tilde{r}_{n+1})$, referentes ao pseudo tempo t_{n+1} , de acordo com (iv) e (v). Assim, em (vi) calcula-se o valor da tensão de aderência de forma explícita, $\tilde{\tau}_{n+1}$, para que a partir dela seja determinado o operador tangente algorítmico efetivo, $\tilde{C}_{v_{n+1}}^{tg-eff}$.

Na Figura 5.4 apresenta-se a aproximação da variável interna, \tilde{r}_{n+1} , que pode ser considerada como uma aproximação de primeira ordem para uma expansão de Taylor da variável implícita, r_{n+1} , com erro igual a $\mathcal{O}(\Delta t_{n+1}^2)$, de acordo com a Equação 5.22. É possível notar ainda que a variável interna, r , é uma função crescente, o que a torna ideal para extrapolações de baixo erro, permitindo que a utilização de aproximações lineares forneçam resultados satisfatórios, sem elevar muito o custo computacional.

$$r_{n+1} = r_n + \dot{r}_n \Delta t_{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t_{n+1}^2) = \tilde{r}_{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t_{n+1}^2) \quad (5.22)$$

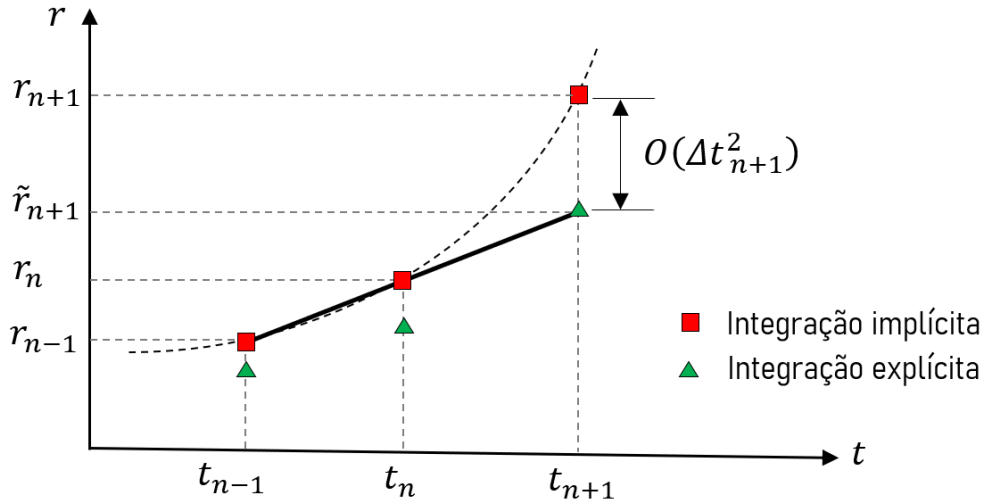


Figura 5.4: Extrapolação da variável interna r (adaptado de Oliver et al. (2008)).

6 Análises numéricas

Para verificar a eficácia da metodologia descrita nos capítulos anteriores, são analisados computacionalmente seis ensaios experimentais já estudados por outros pesquisadores. Dessa forma, busca-se comparar os resultados obtidos, com os resultados experimentais já apresentados em outros trabalhos, promovendo quando conveniente, comparações para diferentes malhas, passos de carga, ângulo máximo utilizado para a construção do *crack path*, teores de fibras ou número de barras:

- No primeiro exemplo, é analisada uma viga submetida à flexão em três pontos com entalhe em concreto simples e com falha em modo I, tendo os resultados numéricos comparados com os obtidos experimentalmente por Peterson (1981). Também é realizada uma análise da variação do ângulo máximo adotado para a construção do *crack path*, demonstrando a influência da escolha correta do ângulo para que não ocorra o travamento de tensões.
- Um painel em L em concreto simples e falha modo I é estudado no segundo exemplo. Nesse exemplo é realizada uma análise do número de passos, buscando determinar um número ideal de convergência para a curva de equilíbrio do modelo Impl-Ex. As curvas de carregamento x deslocamento obtidas são comparadas com os resultados experimentais de Winkler et al. (2001).
- Na sequência, é analisada uma viga submetida à flexão por três pontos com entalhe (flexão em três pontos), em concreto simples e em CRFA, com falha em modo I. Busca-se inicialmente realizar um estudo de malha para a viga em concreto simples, para avaliar a influência do refinamento nos resultados. Em seguida, é analisada a variação nos resultados para diferentes volumes de fibras, buscando a comparação com os resultados experimentais apresentados por Trindade et al. (2020).
- No quarto exemplo, é estudado um elemento prismático com entalhe submetido à tração uniaxial uniforme, em concreto simples e em CRFA, com falha em modo I. É realizado um estudo da variação da porcentagem de fibras na re-

gião da descontinuidade, comparando os resultados obtidos com os resultados experimentais obtidos por Baez (2014).

- No quinto exemplo, é analisada uma viga submetida à flexão por três pontos com entalhe, com carregamento excêntrico ao eixo do entalhe, provocando uma falha em modo misto. Busca-se avaliar o comportamento estrutural do elemento, tanto em concreto simples quanto em CRFA, comparando os resultados obtidos com os resultados experimentais apresentados por Carpinteri e Brighenti (2010).
- Por fim, são analisadas duas vigas levemente armadas com arame recozido, uma com seção retangular e outra com seção T. É feita a variação da quantidade de barras e os resultados são comparados com os resultados experimentais apresentados por Melo (2011).

6.1 Exemplo 01: Viga com entalhe submetida à flexão em três pontos

Neste primeiro exemplo é analisada uma viga em concreto simples com entalhe submetida à flexão em três pontos, estudada inicialmente por Peterson (1981). As propriedades geométricas, condições de contorno, a malha de elementos finitos e a posição inicial fornecida da descontinuidade (“semente”) estão descritas na Figura 6.1.

No modelo numérico foi utilizado um estado plano de tensões com uma espessura fora do plano de 50 mm. Uma força P incremental foi aplicada no topo da viga com 2.500 passos, após análise prévia de convergência para o esquema de integração Impl-Ex.

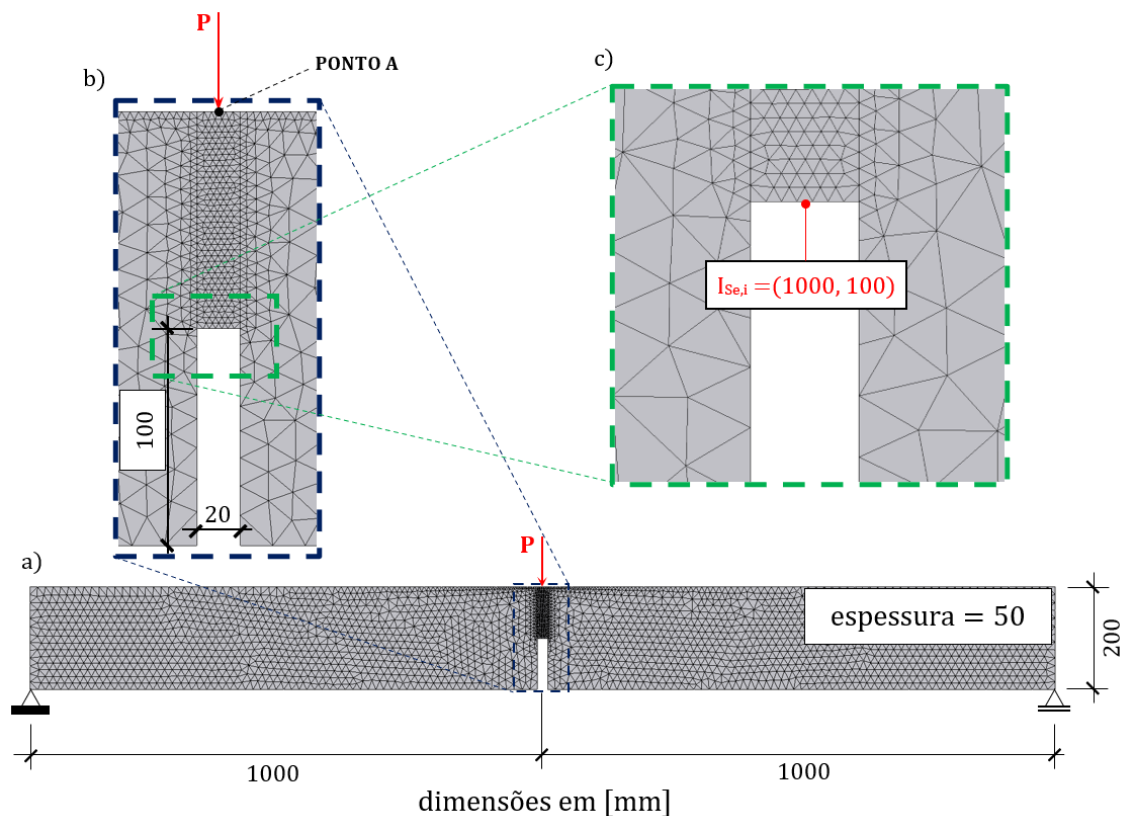


Figura 6.1: Configuração da viga com entalhe submetida à flexão em três pontos: (a) malha de elementos finitos e condições de contorno; (b) destaque para a visualização da região do entalhe; (c) destaque para a visualização da posição da semente utilizada para o início da descontinuidade.

O concreto é representado por elementos finitos triangulares de três nós, de deformação constante (*CST* - “*Constant Strain Triangle*”), com um refinamento da malha apenas na região em que é esperada a propagação da descontinuidade, totalizando 4.554 elementos. As propriedades utilizadas para o concreto são as mesmas obtidas experimentalmente por Peterson (1981), e estão descritas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Propriedades mecânicas adotadas para a matriz de concreto no modelo numérico da viga submetida à flexão por três pontos com entalhe.

Resistência à tração f_t^m	3,33 MPa
Módulo de elasticidade E^m	30.000 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,2
Energia de fratura G_f^m	0,124 N/mm

Neste exemplo tem-se o objetivo de avaliar a importância da escolha do ângulo

6.1 Exemplo 01: Viga com entalhe submetida à flexão em três pontos

máximo ($\alpha_{MÁX}$) na construção da trajetória da descontinuidade, buscando evitar o surgimento de tensões espúrias e o conseqüente travamento de tensões.

A Figura 6.2 ilustra a variação dos resultados pela mudança do ângulo máximo permitido para a construção da trajetória da descontinuidade. A representação gráfica das trajetórias e dos eventuais travamentos de tensões obtidos para cada ângulo estão ilustradas na Figura 6.3.

O caminho percorrido pela descontinuidade foi diferente para cada ângulo máximo, apresentando travamento de tensões para os ângulos de 60° , 70° e 80° . Para os ângulos de 30° , 40° e 50° a viga não apresentou travamento de tensões, proporcionando uma abertura suave da descontinuidade localizada .

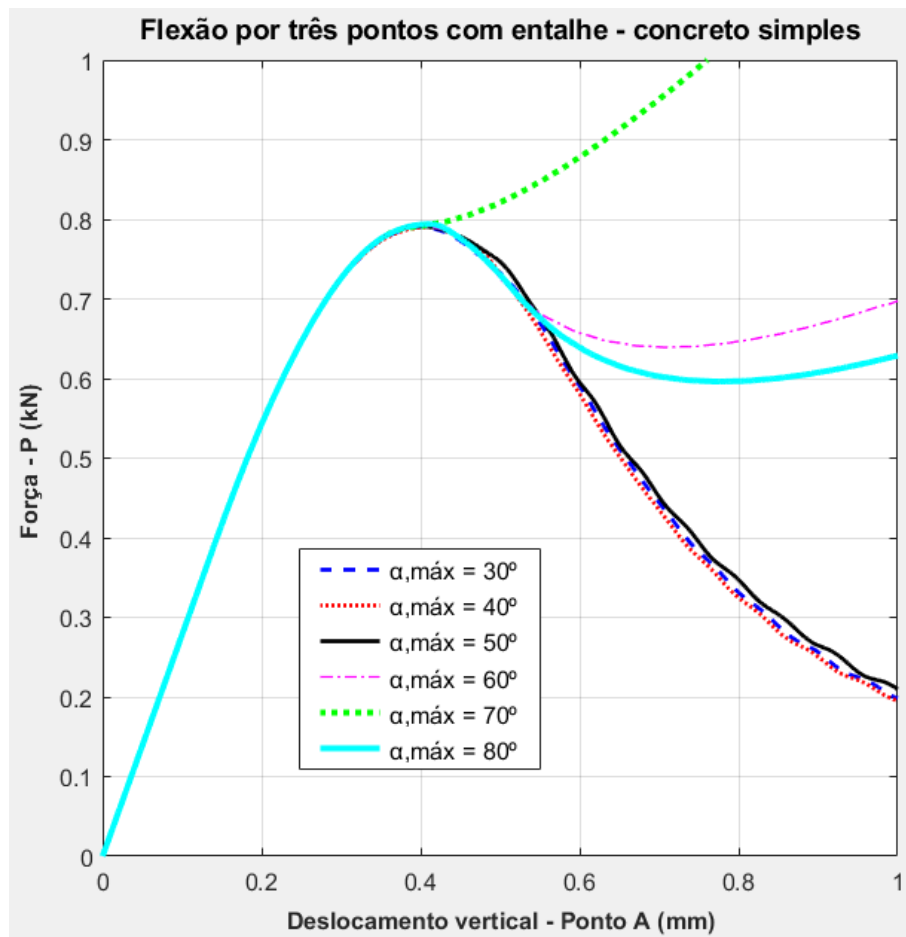


Figura 6.2: Comparação dos resultados numéricos para diferentes ângulos máximos de fratura ($\alpha_{MÁX}$).

6.1 Exemplo 01: Viga com entalhe submetida à flexão em três pontos

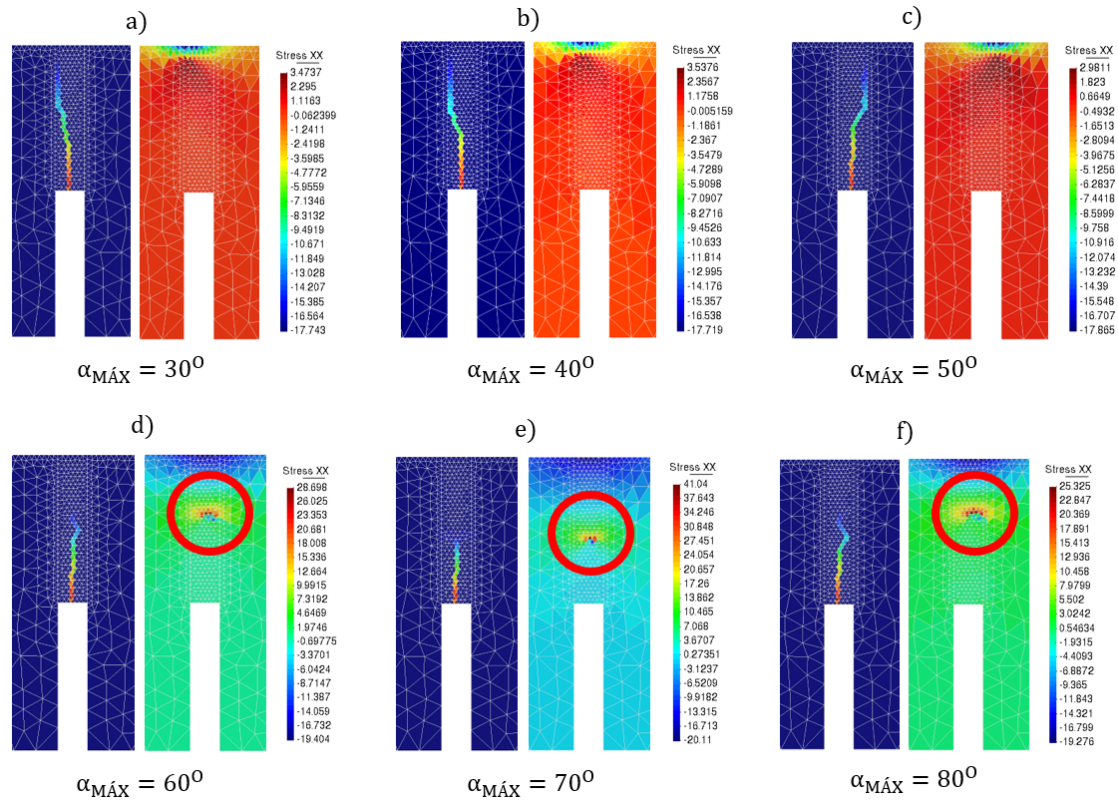


Figura 6.3: Representação gráfica da descontinuidade e do eventual travamento de tensões para cada ângulo máximo ($\alpha_{MÁX}$).

Na Figura 6.4 é possível visualizar a comparação dos resultados numéricos obtidos, com os resultados experimentais apresentados por Peterson (1981), podendo se constatar que a resposta produzida para o ângulo máximo da descontinuidade de 30° apresentou um resultado adequado.

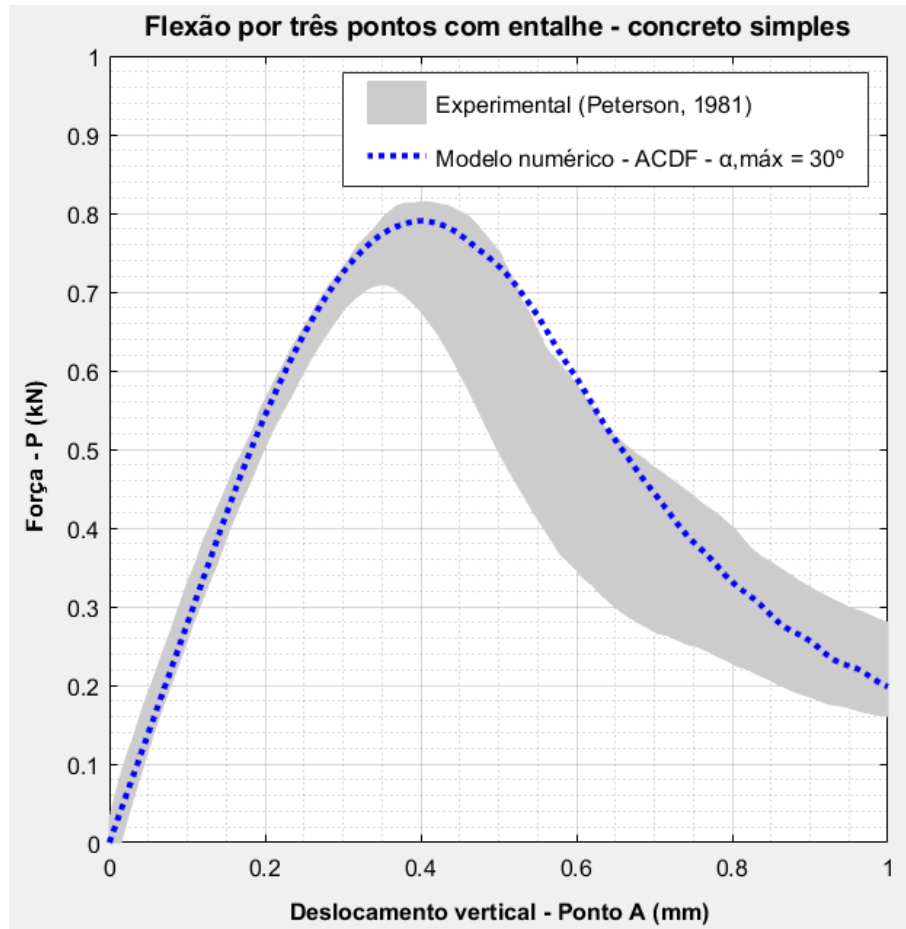


Figura 6.4: Comparação entre os resultados experimentais com a resposta obtida para $\alpha_{MÁX} = 30^\circ$.

6.2 Exemplo 02: Painel em L

Este segundo exemplo explora os painéis em formato L, testados experimentalmente por Winkler et al. (2001), comparando seus resultados com os resultados numéricos obtidos utilizando a ACDF.

A Figura 6.5 apresenta as propriedades geométricas, condições de contorno, a malha de elementos finitos e a posição inicial fornecida da descontinuidade, aplicados no modelo 2D do painel em L submetido a um estado plano de tensões, com uma espessura fora do plano de 100 mm.

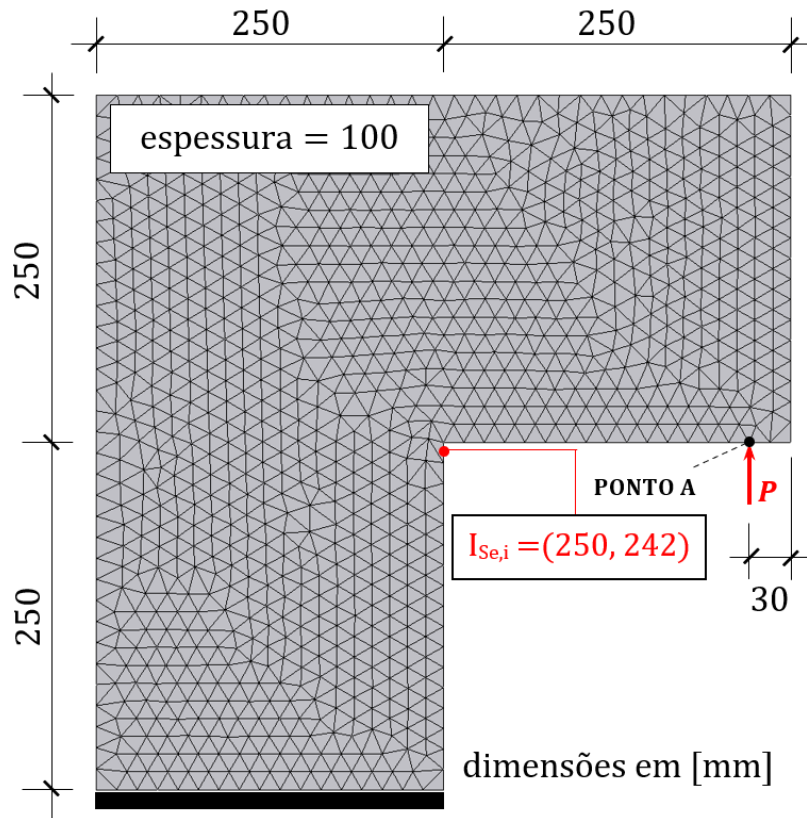


Figura 6.5: Configuração do painel em L submetido a um carregamento vertical P .

Um total de 1.876 elementos finitos triangulares (CST) foram utilizados na malha apresentada na Figura 6.5, representativa do concreto. Na Tabela 6.2 encontram-se os parâmetros adotados para o modelo de dano utilizado dentro da banda de localização da descontinuidade.

Tabela 6.2: Propriedades mecânicas adotadas para o concreto utilizado no modelo numérico para o painel L.

Resistência à tração f_t^m	2,65 MPa
Módulo de elasticidade E^m	20.000 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,18
Energia de fratura G_f^m	0,13 N/mm

Na Figura 6.6 são apresentados os resultados para 250, 500, 1.000, 2.500 e 5.000 passos de carga, escolhidos para avaliar a convergência do esquema de integração Impl-Ex utilizado no modelo de dano do concreto. Espera-se que quanto maior a quantidade de passos de carga, mais precisa deve ser a convergência para a resposta

do problema. Dessa forma, é possível notar que o melhor resultado foi obtido com um total de 5.000 passos, porém, com 2.500 passos já foi possível obter uma convergência satisfatória da resposta, reduzindo o custo computacional em relação ao modelo de 5.000 passos.

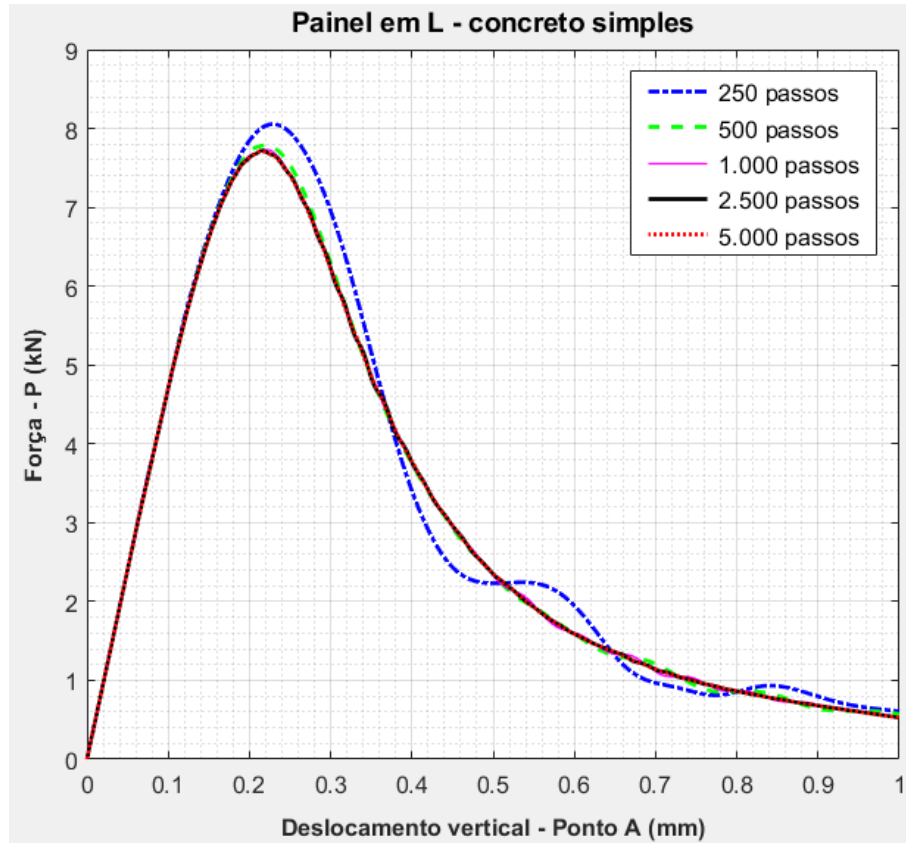


Figura 6.6: Curvas de Deslocamento vertical x Força - P para diferentes passos de carga.

É possível perceber que a solução obtida para um total de 2.500 passos convergiu para um resultado adequado, quando comparada com os resultados experimentais apresentados por Winkler et al. (2001), ilustrados na Figura 6.7.

Na Figura 6.8 (a) pode-se comparar a direção da descontinuidade obtida com a direção média apresentada no experimentos de Winkler et al. (2001).

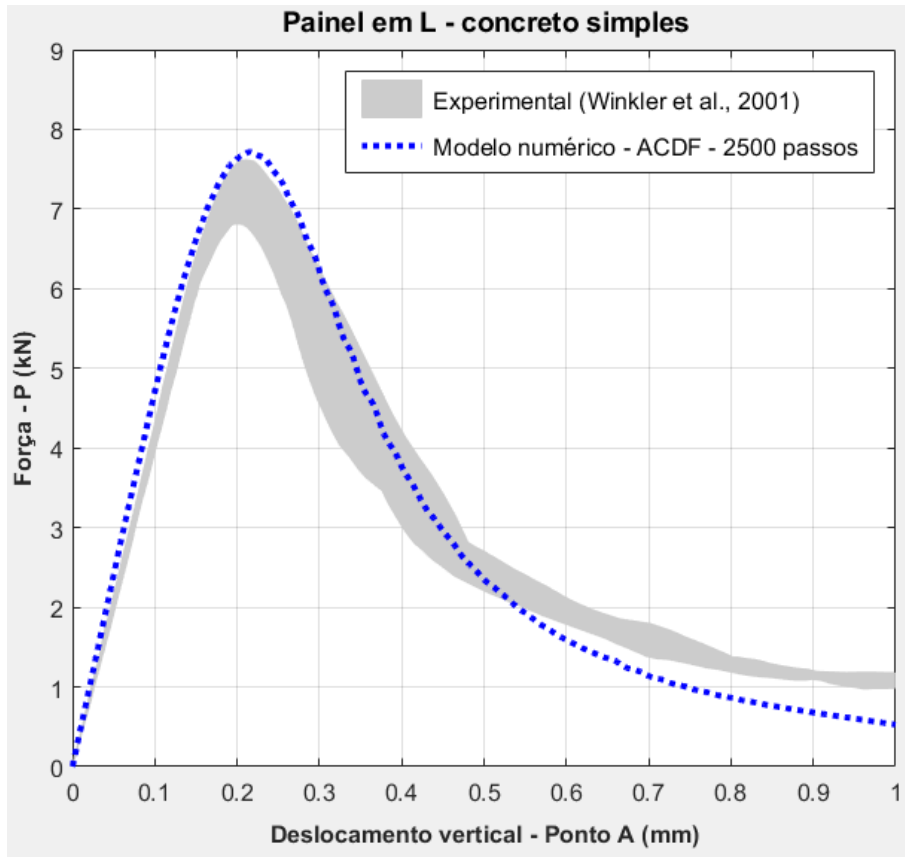


Figura 6.7: Comparação entre os resultados experimentais e numéricos apresentados por outros pesquisadores com a resposta obtida para 2.500 passos de carga.

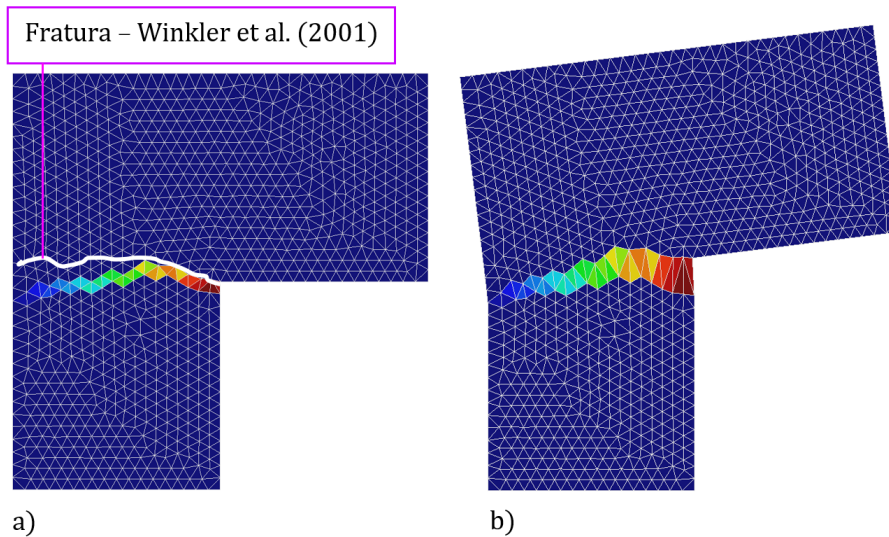


Figura 6.8: Propagação da descontinuidade: Painel em L (a) representação do caminho da descontinuidade, comparando com o caminho obtido por Winkler et al. (2001). (b) representação da abertura da descontinuidade deformada.

6.3 Exemplo 03: Ensaio de flexão em três pontos com entalhe

O ensaio de flexão por três pontos com entalhe (conforme EN 14657) ilustrado na Figura 6.9 foi simulado numericamente a fim de se investigar a capacidade da abordagem numérica utilizada, e obter respostas para o concreto simples e CRFA. As propriedades mecânicas adotadas nos modelos para a matriz de concreto e para as fibras de aço estão descritas respectivamente, pela Tabela 6.3 e Tabela 6.4.

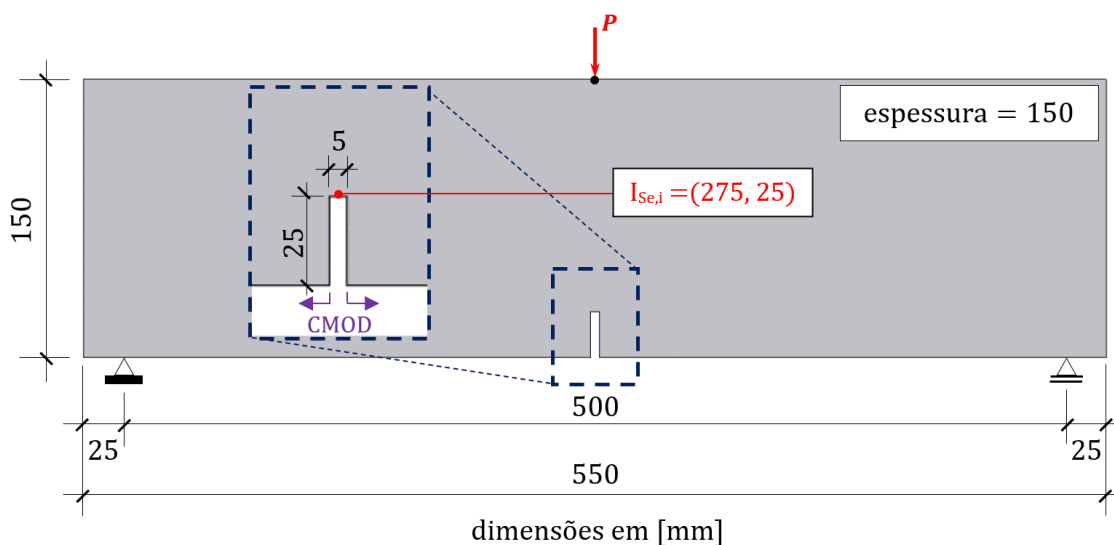


Figura 6.9: Configuração do ensaio EN submetido a um carregamento vertical P.

Tabela 6.3: Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto no modelo numérico do ensaio EN.

Resistência à tração f_t^m	2,35 MPa
Módulo de elasticidade E^m	35.000 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,2
Energia de fratura G_f^m	0,15 N/mm

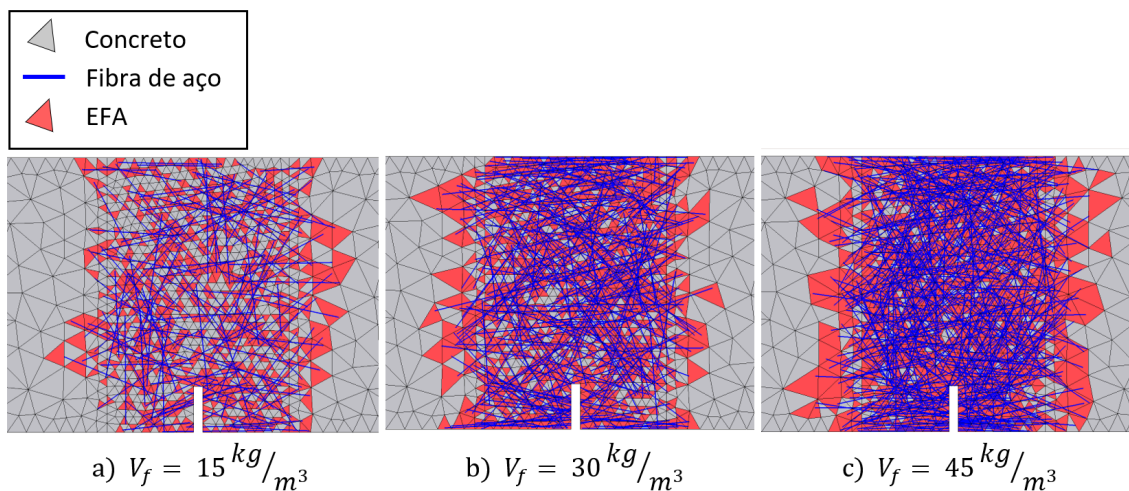
As fibras foram descritas por elementos finitos de treliça de dois nós, onde cada fibra foi representada por 6 elementos. O acoplamento entre as malhas independentes da matriz de concreto e das fibras de aço foram realizadas por meio de elementos finitos de acoplamento (EFA) de 4 nós, utilizando um acoplamento não rígido. Para este exemplo foram adotados os mesmos parâmetros de aderência utilizados nos

Tabela 6.4: Propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço no modelo numérico do ensaio EN.

Comprimento das fibras l^f	60 mm
Diâmetro das fibras d^f	0,75 mm
Módulo de elasticidade E^f	210.000 MPa
Resistência à tração σ^f	1.225 MPa

modelos numéricos produzidos por Trindade et al. (2020): $\tau_{max} = 8,5MPa$ ou $\tau_{max} = 12,5MPa$, $\tau_f = 4,5MPa$, $\alpha = 0,4$, $s_1 = 0,01mm$, $s_2 = 6,5mm$, $k = 10^3MPa/mm$, e $C_s = 10^6MPa/mm$.

A Figura 6.10 ilustra as malhas de elementos finitos para os três volumes de fibras estudados na análise das vigas em CRFA, com a descrição da quantidade de elementos apresentada na Tabela 6.5.

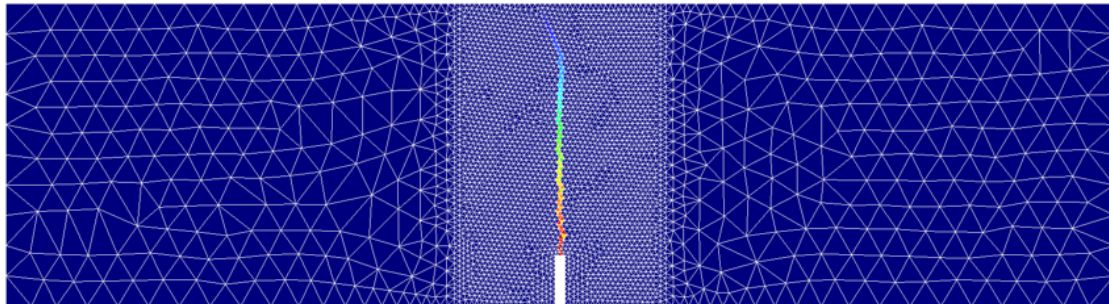
**Figura 6.10:** Malhas de elementos finitos para os três volumes de fibras estudados. a) $V_f = 15 \text{ kg/m}^3$, b) $V_f = 30 \text{ kg/m}^3$ e c) $V_f = 45 \text{ kg/m}^3$.

Primeiramente foi realizada uma análise comparativa para os resultados de três refinamentos de malha distintos, conforme ilustrado na Figura 6.11. As quantidades de elementos triangulares utilizados para o refinamento de cada malha estão descritas na Tabela 6.6.

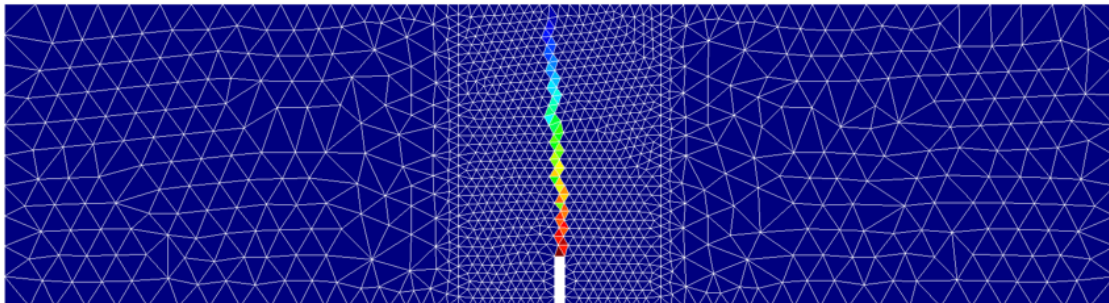
Tabela 6.5: Características das malhas de elementos finitos para os três volumes de fibras estudados.

Volume de fibras V_f	Elementos de treliça de dois nós	Elementos triangulares de três nós	Elementos triangulares de acoplamento de quatro nós (EFA)	Número total de elementos
15 kg/m ³	948	2.223	1.105	4.276
30 kg/m ³	2.016	2.223	2.351	6.590
45 kg/m ³	3.114	2.223	3.627	8.964

a) Malha 1 – fina



b) Malha 2 – média



c) Malha 3 – grossa

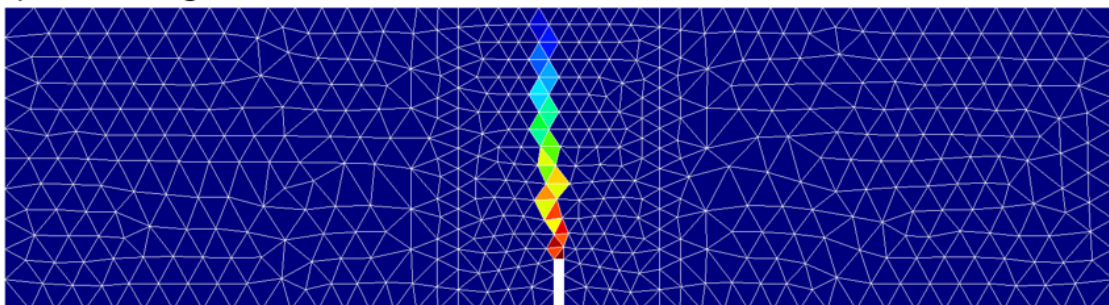
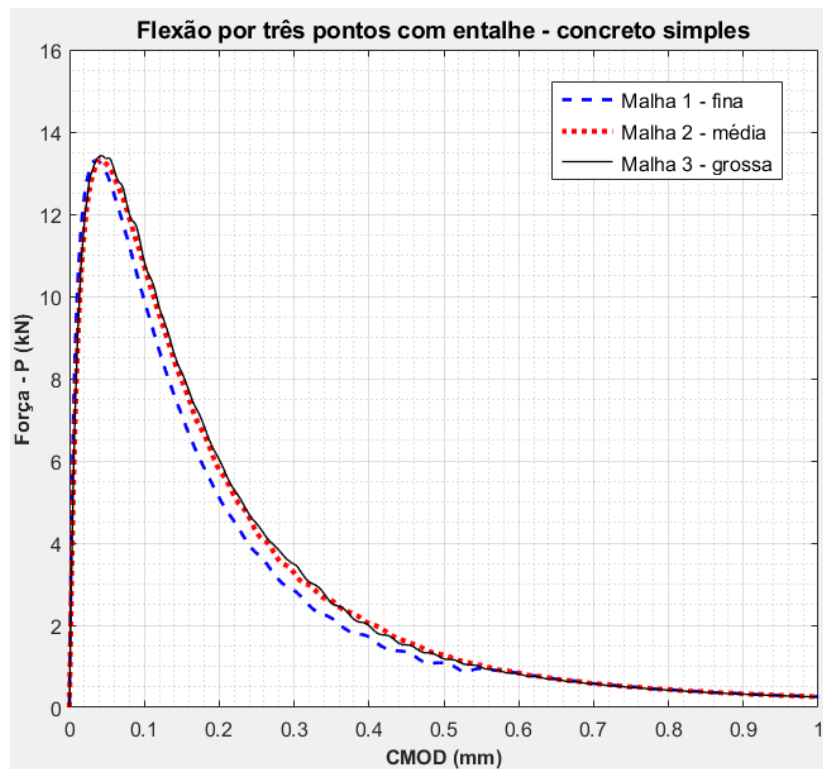
**Figura 6.11:** Configuração para as três malhas de elementos finitos, com a representação da descontinuidade provocada pela carga P: a) malha fina, b) malha média e c) malha grossa.

Tabela 6.6: Características das três malhas apresentadas na Figura 6.11.

Malha	Número de elementos finitos triangulares de três nós
Malha 1 - fina	6.659 elementos
Malha 2 - média	2.223 elementos
Malha 3 - grossa	1.031 elementos

Analisando a Figura 6.12, comparativa das respostas para as três malhas de elementos finitos, pode-se perceber que as três malhas apresentaram resultados muito parecidos, com um pouco de instabilidade no final do trecho não linear da curva representativa da malha mais refinada (malha 1) e um pouco de instabilidade próximo a carga de pico da malha grossa (malha 3). Dessa forma, para os modelos subsequentes optou-se por trabalhar com a malha 2, que apresenta um refinamento médio.

Tanto os modelos analisados em concreto simples, quanto os modelos em CRFA tiveram aplicação da carga dividida em 5.000 passos.

**Figura 6.12:** Comparação de resultados (CMOD x Força - P) para as três malhas ilustradas na Figura 6.11.

6.3 Exemplo 03: Ensaio de flexão em três pontos com entalhe

Os resultados obtidos com a utilização da ACDF são comparados com os resultados experimentais obtidos por Trindade et al. (2020), e estão descritos nas Figura 6.13, Figura 6.14 e Figura 6.15.

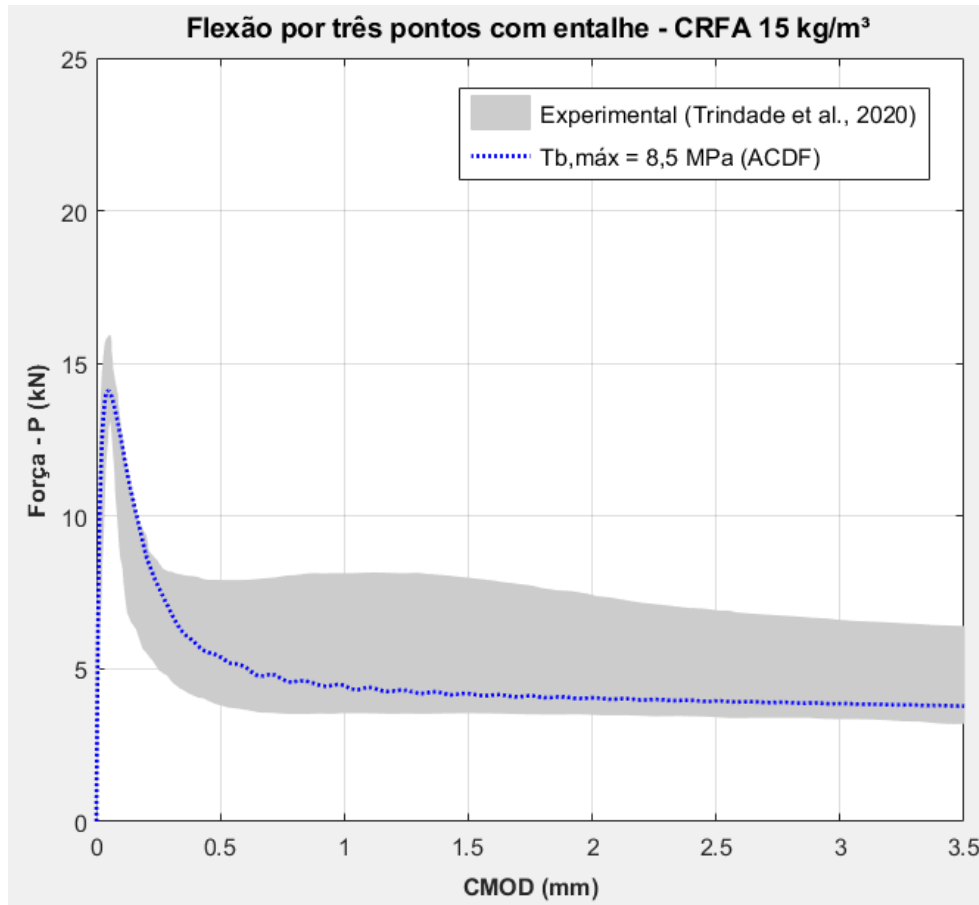


Figura 6.13: Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - $V_f = 15kg/m^3$.

6.3 Exemplo 03: Ensaio de flexão em três pontos com entalhe

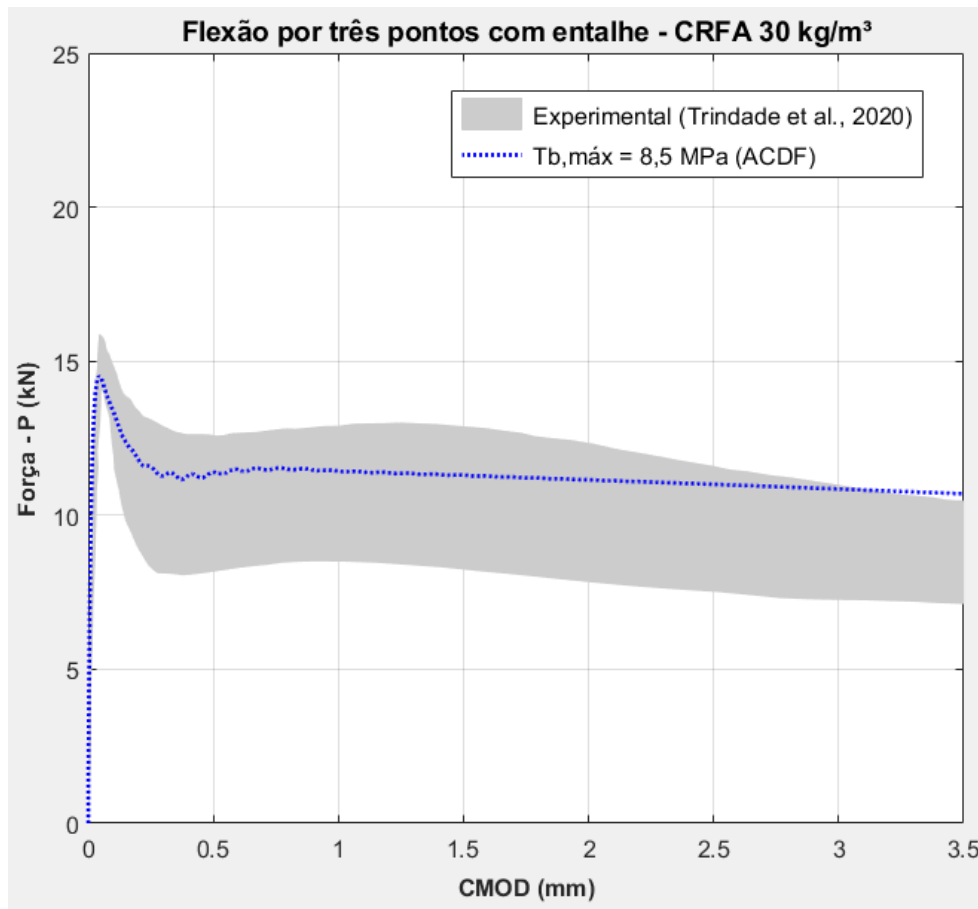
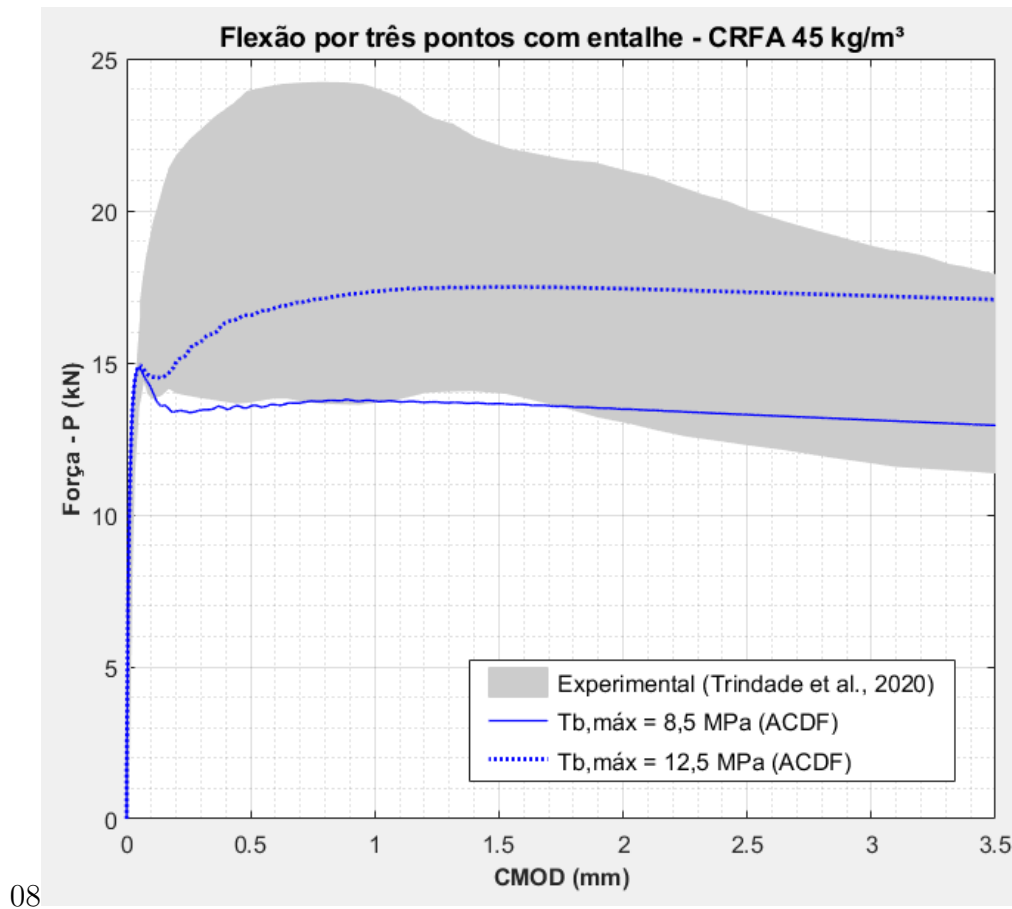
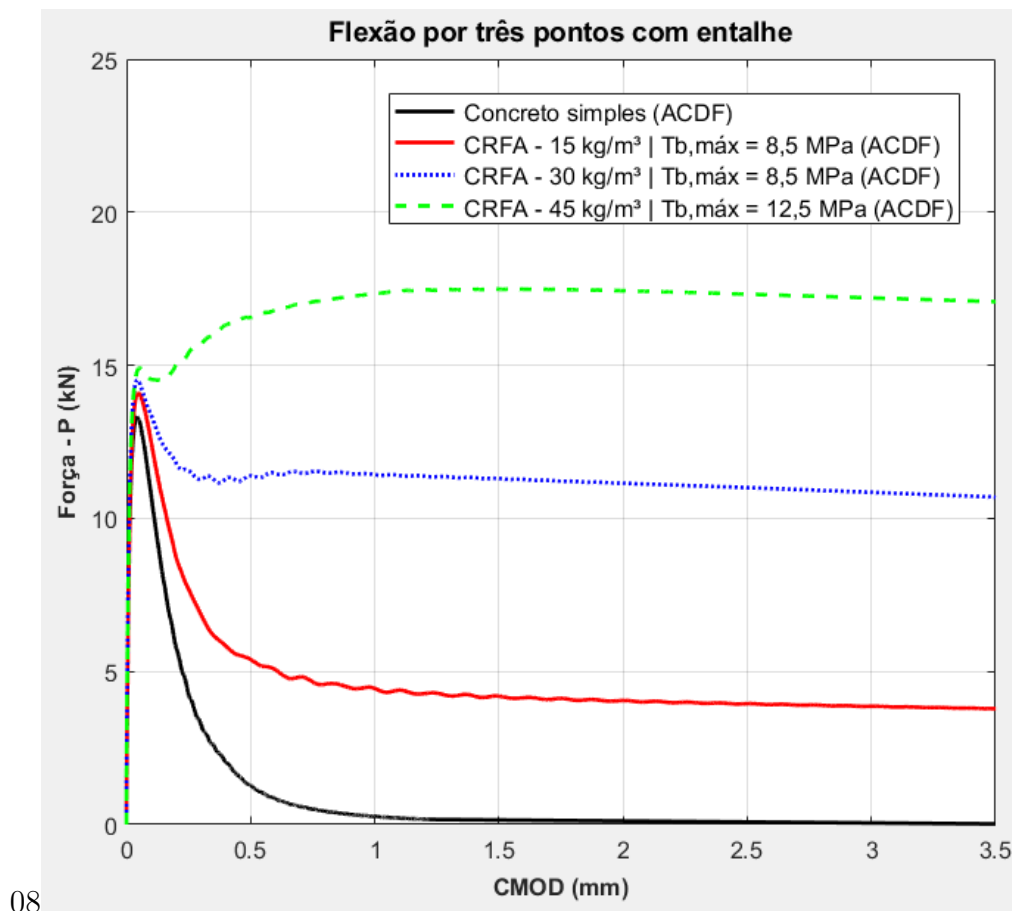


Figura 6.14: Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - $V_f = 30\text{kg}/\text{m}^3$.



08 **Figura 6.15:** Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - $V_f = 45\text{kg}/\text{m}^3$.



08 **Figura 6.16:** Comparação de resultados (CMOD x Força - P) - ACDF.

Os modelos numéricos analisados com a utilização da ACDF apresentaram bons resultados, quando comparados com os resultados experimentais apresentados por Trindade et al. (2020). As curvas obtidas para os volumes de fibras de 15 kg/m^3 e 30 kg/m^3 ficaram dentro dos limites dos resultados experimentais, com a utilização da tensão de aderência máxima, $\tau_{max} = 8,5 MPa$. Já para a resposta referente ao volume de fibras de 45 kg/m^3 , a utilização de $\tau_{max} = 8,5 MPa$ proporcionou uma resposta que subestimou o resultado, quando comparada com a variação obtida nos resultados experimentais. Dessa forma, para o volume de fibras de 45 kg/m^3 , foi utilizada uma nova tensão máxima de aderência de $\tau_{max} = 12,5 MPa$, com o objetivo de buscar uma resposta que represente melhor o que foi obtido nos experimentos, conforme pode ser verificado na Figura 6.15.

Na Figura 6.16, comparativa entre os modelos produzidos apenas com a utilização da ACDF, é possível notar que as respostas estão condizentes com o esperado, uma vez que, com o acréscimo do volume de fibras, ocorre o aumento da capacidade de

6.4 Exemplo 04: Ensaio de tração direta com entalhes

carga da viga em análise para o ensaio de flexão por três pontos com entalhe (EN), tanto com o aumento da carga de pico, quando com o aumento da capacidade de carga pós-pico.

Por fim, na Figura 6.17 é possível ver as fibras tensionadas para os três volumes estudados nos itens a), b) e c), e as respectivas representações das discontinuidades nos itens d), e) e f).

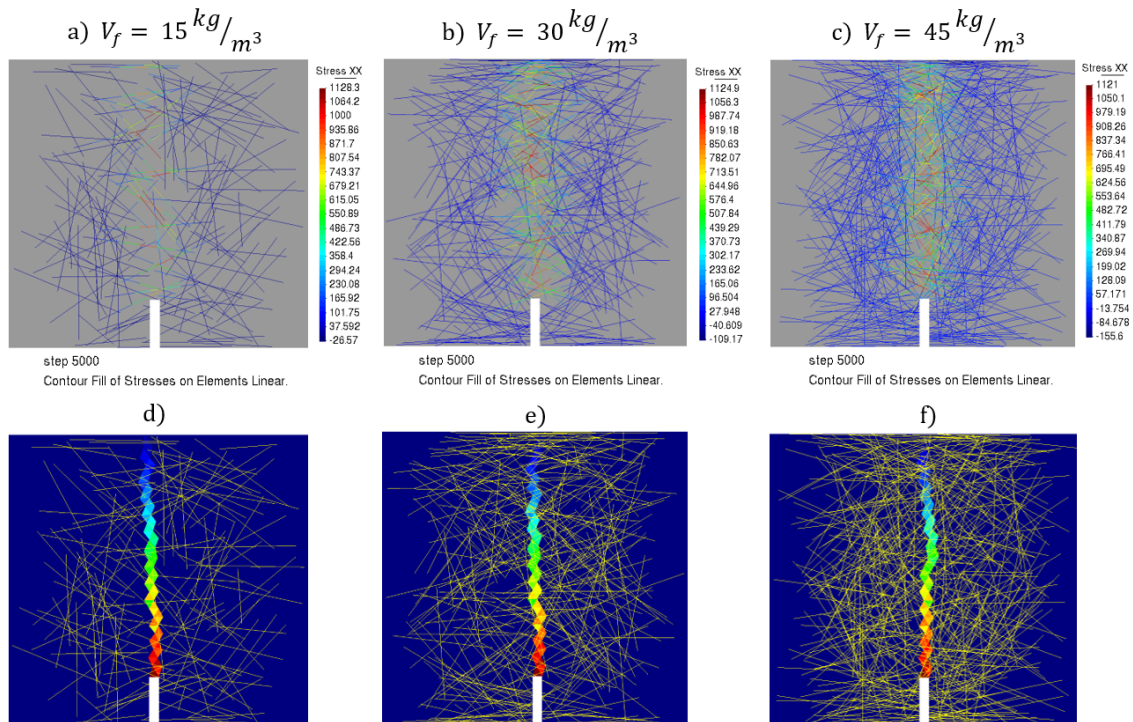


Figura 6.17: Fibras tensionadas para os três volumes de fibras estudados; itens a), b) e c). Representações das discontinuidades; itens d), e) e f).

6.4 Exemplo 04: Ensaio de tração direta com entalhes

No quarto exemplo, são avaliados os efeitos de diferentes volumes de fibras em uma representação numérica para o ensaio de tração direta com entalhes. A Figura 6.18 detalha o *setup* do modelo numérico, onde é possível observar as propriedades geométricas, a malha de elementos finitos, os pontos informados para o início da discontinuidade e as condições de contorno do modelo adotado. Na Tabela 6.7 pode-se obter as propriedades da matriz de concreto e na Tabela 6.8 apresenta-se as

propriedades das fibras de aço.

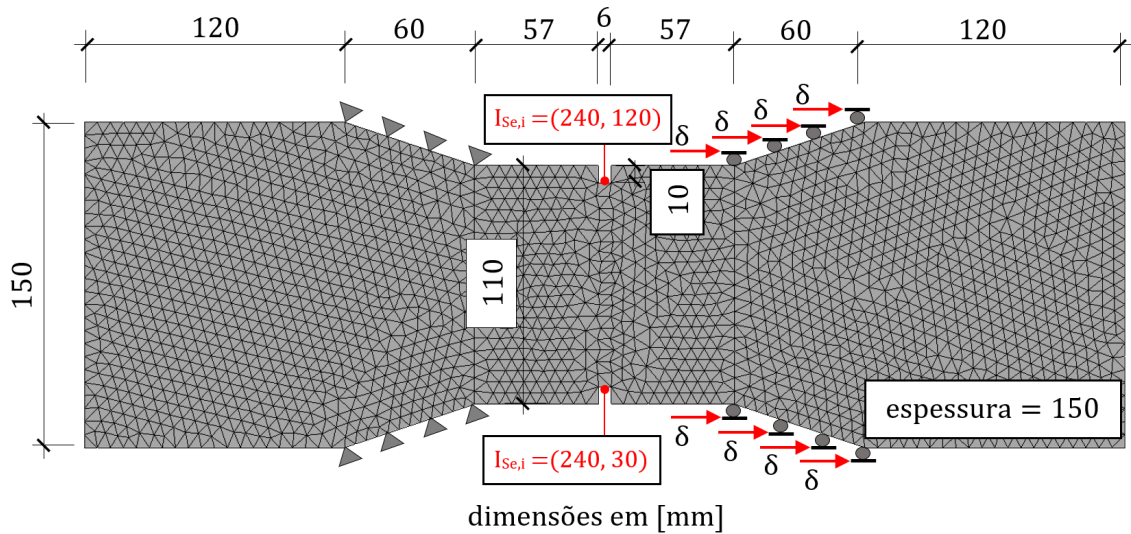


Figura 6.18: Configuração do ensaio de tração direta com entalhes.

Tabela 6.7: Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto no modelo numérico para o ensaio de tração direta.

Resistência à tração f_t^m	1,72 MPa
Módulo de elasticidade E^m	18.101 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,23
Energia de fratura G_f^m	0,1 N/mm

Tabela 6.8: Propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço no modelo numérico para o ensaio de tração direta.

Comprimento das fibras l^f	50 mm
Diâmetro das fibras d^f	1,05 mm
Módulo de elasticidade E^f	200.000 MPa
Resistência à tração σ^f	520 MPa

Na Figura 6.19 são ilustradas as malhas de elementos finitos para os três volumes de fibras estudados na análise dos modelos em CRFA, com o detalhamento da quantidade de elementos descrito na Tabela 6.9.

Neste exemplo o deslocamento imposto foi dividido em 5.000 passos. Cada fibra foi representada por 5 elementos finitos de dois nós, com a interação entre as malhas independentes da matriz de concreto e das fibras de aço realizada novamente por

6.4 Exemplo 04: Ensaio de tração direta com entalhes

meio da utilização de elementos finitos de acoplamento (EFA) de 4 nós, aplicando um acoplamento não rígido. Para este exemplo foram adotados os seguintes parâmetros de aderência entre o concreto e as fibras: $\tau_{max} = 6,5MPa$, $\tau_f = 1,5MPa$, $\alpha = 0,4$, $s_1 = 0,01mm$, $s_2 = 0,01mm$, $s_3 = 7,0mm$, $k = 10^3MPa/mm$, e $C_s = 10^9MPa/mm$.

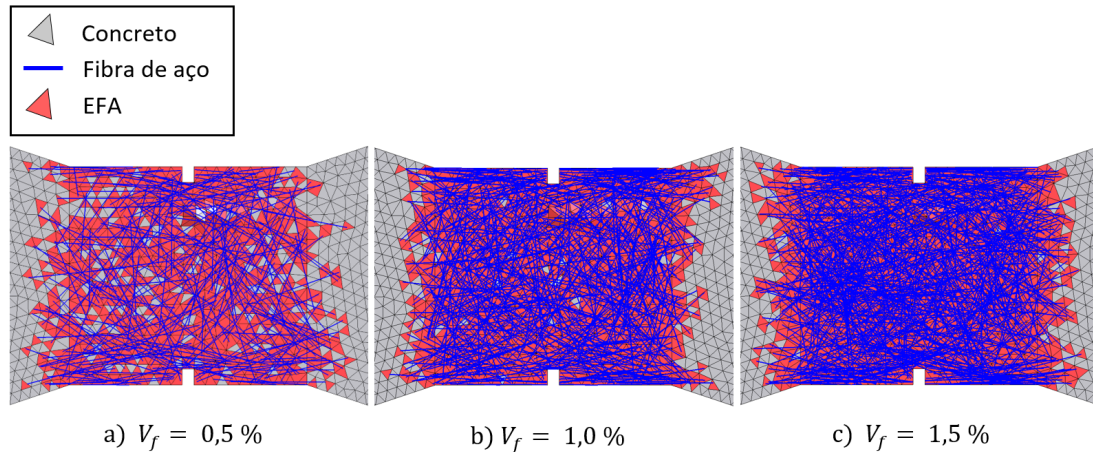


Figura 6.19: Malhas de elementos finitos para os três volumes estudados. a) $V_f = 0,5\%$, b) $V_f = 1,0\%$ e c) $V_f = 1,5\%$.

Tabela 6.9: Características das malhas de elementos finitos para os modelos numéricos do ensaio de tração direta.

Volume de fibras V_f	Elementos de treliça de dois nós	Elementos triangulares de três nós	Elementos triangulares de acoplamento de quatro nós (EFA)	Número total de elementos
0,5 %	1.495	4.032	1.794	7.321
1,0 %	3.090	4.032	3.708	10.830
1,5 %	4.490	4.032	5.388	13.910

A Figura 6.20, Figura 6.21 e Figura 6.22 mostram as comparações dos resultados experimentais de Baez (2014), com os resultados obtidos com a utilização da ACDF para os três volumes de fibras descritos na Figura 6.19.

Pode-se perceber que para o volume de 0,5% de fibras o modelo analisado com a ACDF subestimou a carga de pico na resposta da curva (deslocamento imposto x reações de apoio), quando comparada com os resultados experimentais. Porém,

a curva apresentou características similares com o obtido experimentalmente, com um formato do gráfico bem parecido e com uma resposta pós-pico bem próxima dos experimentos, principalmente no trecho aonde praticamente apenas as fibras passam a trabalhar (deslocamentos de 0,3mm a 2,5mm).

Para o volume de 1,0% de fibras a carga de pico ficou condizente com o obtido nos resultados experimentais, enquanto a resposta pós-pico novamente apresentou resultados coerentes com os resultados de Baez (2014), com um leve ganho na força de aderência entre os pontos de deslocamento de 1,8mm a 2,5mm.

O modelo com 1,5% de volume de fibras analisado com a utilização da ACDF superestimou um pouco os resultados experimentais, tanto no valor da carga de pico, quanto em toda a resposta pós-pico. Porém, pode-se considerar que o resultado foi adequado, mediante a variabilidade que a distribuição das fibras no modelo numérico pode causar.

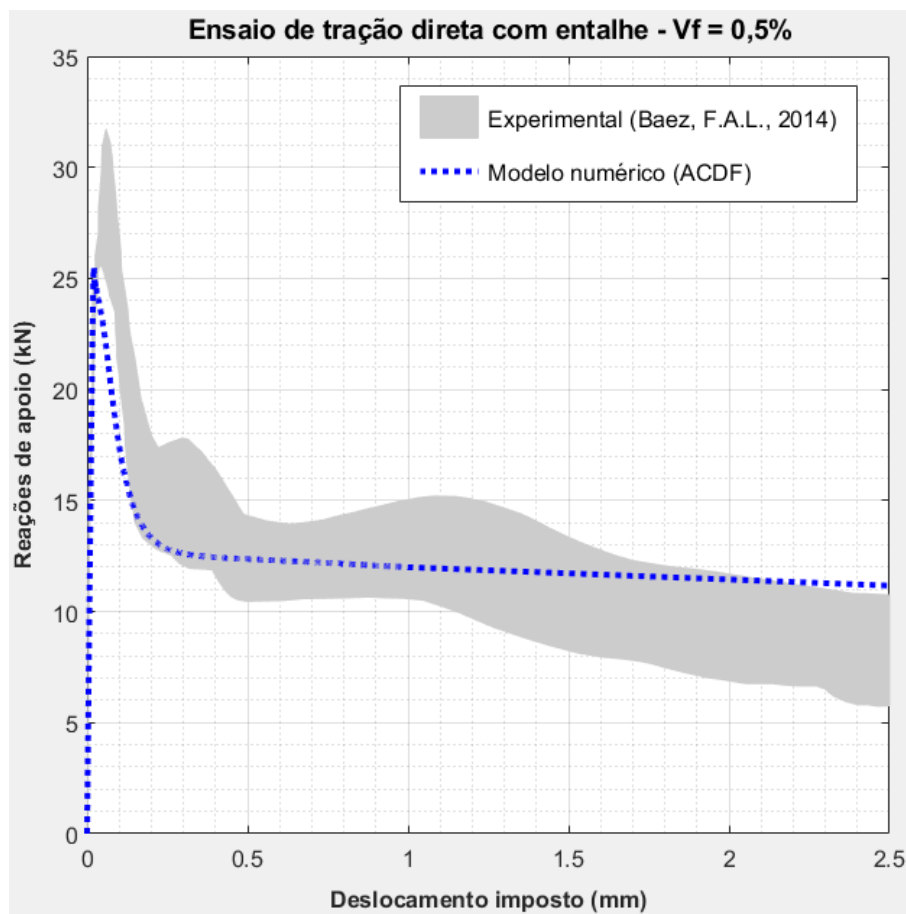


Figura 6.20: Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - $V_f = 0,5\%$.

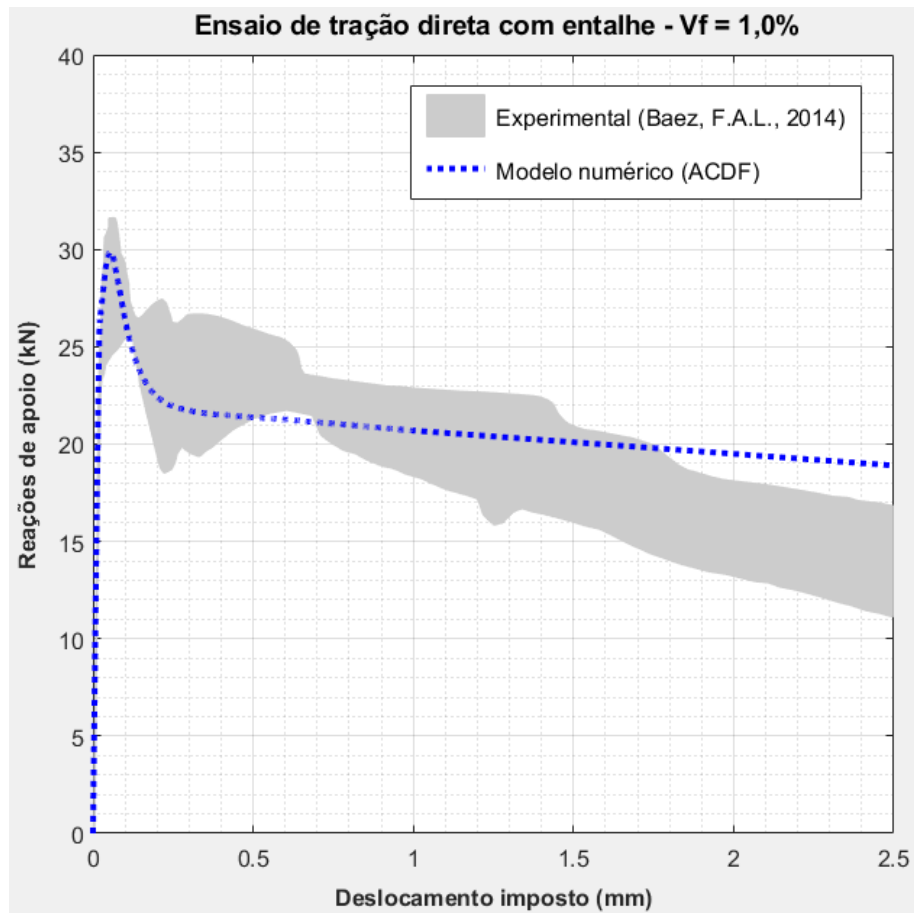


Figura 6.21: Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - $V_f = 1,0\%$.

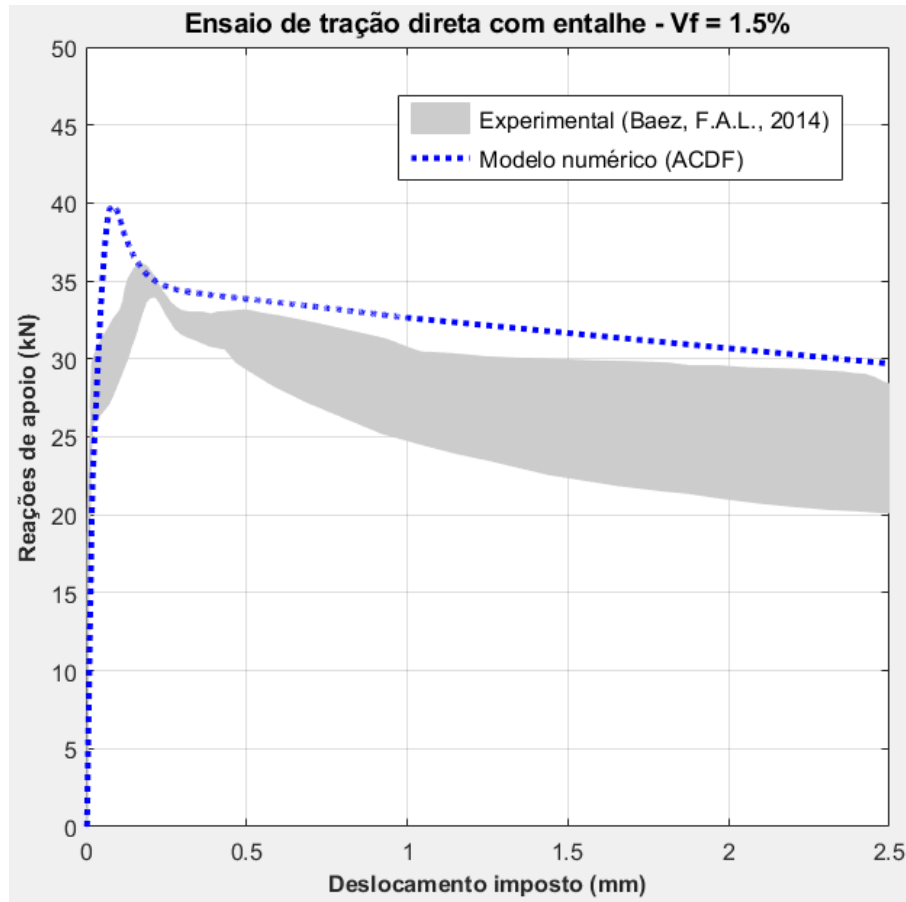


Figura 6.22: Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - $V_f = 1,5\%$.

Na Figura 6.23 é possível comparar os resultados obtidos com a utilização da ACDF para o concreto simples e para os três volumes de fibras estudados, e pode-se constatar que as respostas estão condizentes com o esperado. Com o acréscimo do volume de fibras ocorre o aumento da capacidade de carga de pico da viga em análise, assim como é possível notar que os modelos em CRFA apresentam uma capacidade de absorver esforços consideravelmente maior quando comparados com o modelo em concreto simples, que apresenta uma queda abrupta após atingir a carga de pico.

É possível visualizar as fibras tensionadas nos itens a), b) e c) da Figura 6.24, assim como a localização das descontinuidades nos itens d), e) e f).

6.4 Exemplo 04: Ensaio de tração direta com entalhes

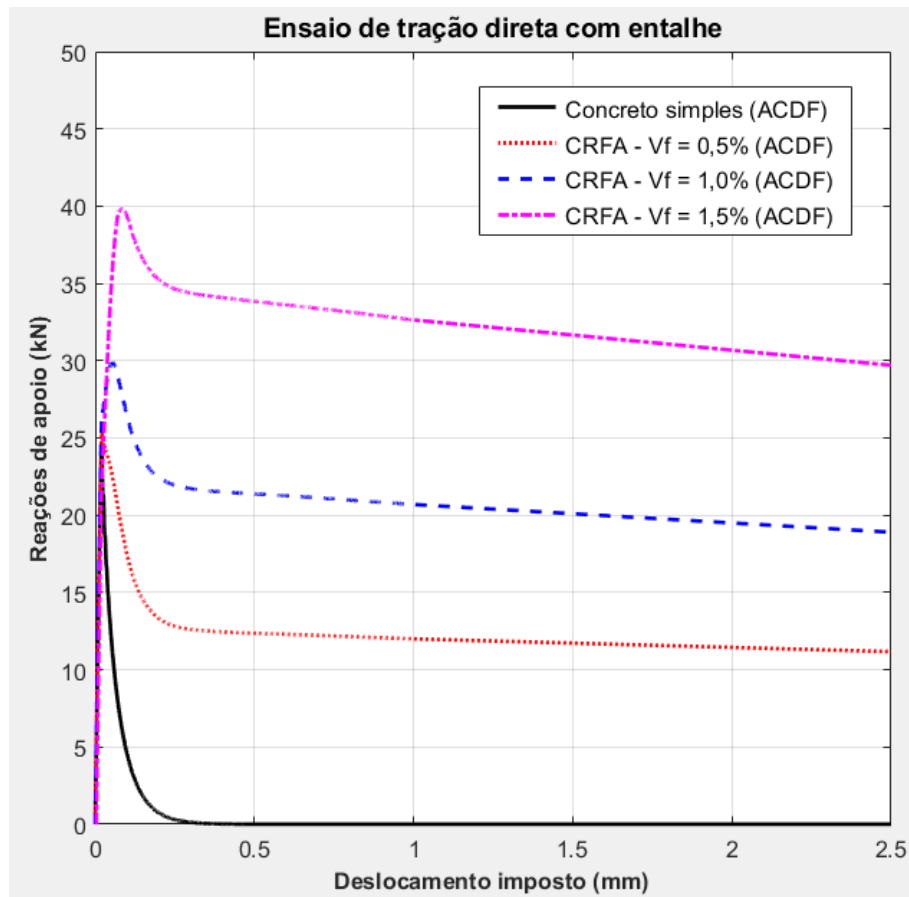


Figura 6.23: Comparação de resultados para o ensaio de tração direta (deslocamento imposto x reações de apoio) - ACDF.

6.5 Exemplo 05: Viga submetida à flexão por três pontos com entalhe excêntrico

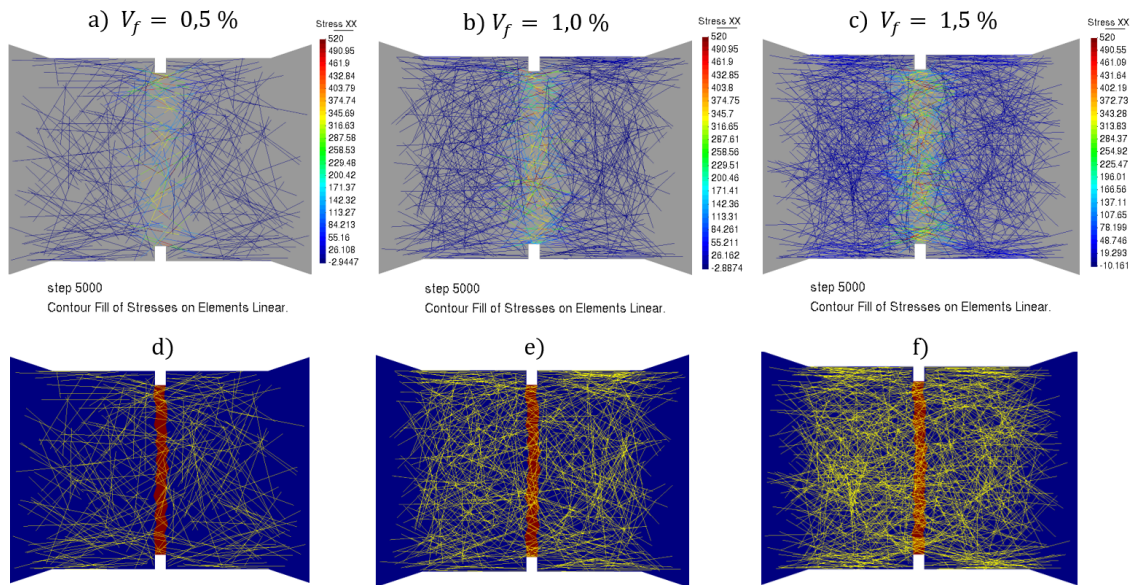


Figura 6.24: Fibras tensionadas para os três volumes de fibras estudados; itens a), b) e c). Representações das discontinuidades; itens d), e) e f).

6.5 Exemplo 05: Viga submetida à flexão por três pontos com entalhe excêntrico

Uma viga submetida à flexão por três pontos, com entalhe excêntrico definindo a posição de início da descontinuidade, é estudada no exemplo cinco. Foram avaliadas as vigas em concreto simples e CRFA, com volumes de fibras de 0,25% e 0,50%.

As propriedades geométricas, a malha de elementos finitos, o ponto informado para o início da descontinuidade e as condições de contorno podem ser visualizados na Figura 6.25. As propriedades mecânicas adotadas para a matriz de concreto nos exemplos estão definidas na Tabela 6.10, e na Tabela 6.11 encontram-se as propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço.

Após análise prévia para a convergência do esquema de integração Impl-Ex, foi aplicada uma carga P no topo da viga com um total de 10.000 passos para todos os modelos numéricos estudados. As análises foram feitas utilizando um estado plano de tensões, com uma espessura fora do plano de 50 mm.

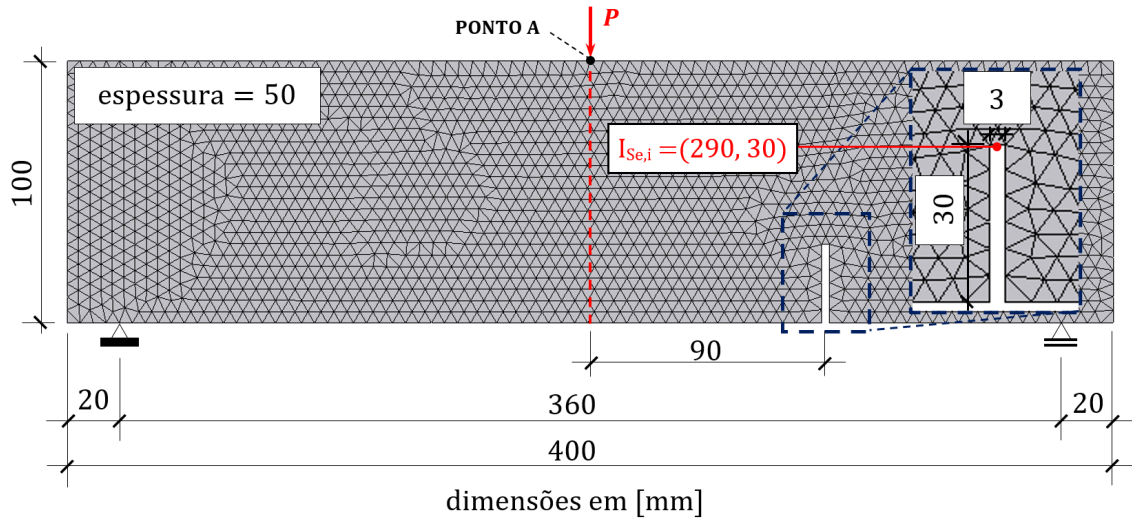


Figura 6.25: Configuração para a viga submetida à flexão por três pontos com entalhe excêntrico.

Tabela 6.10: Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto nos modelos numéricos para a flexão por três pontos com entalhe excêntrico.

Resistência à tração f_t^m	2,6 MPa
Módulo de elasticidade E^m	31.300 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,2
Energia de fratura G_f^m	0,08 N/mm

Tabela 6.11: Propriedades mecânicas adotadas para as fibras de aço nos modelos numéricos para a flexão por três pontos com entalhe excêntrico.

Comprimento das fibras l^f	44 mm
Diâmetro das fibras d^f	0,979 mm
Módulo de elasticidade E^f	210.000 MPa
Resistência à tração σ^f	800 MPa

As malhas de elementos finitos utilizadas nos modelos em CRFA para os dois volumes de fibras analisados podem ser visualizadas na Figura 6.26. A separação e a quantidade de elementos que compõem a malha de elementos finitos podem ser vistos na Tabela 6.12.

Cada fibra foi representada por 8 elementos finitos de dois nós, com o acoplamento entre as malhas independentes da matriz de concreto e das fibras de aço realizado por meio da utilização de elementos finitos de acoplamento (EFA) de 4 nós, aplicando um

6.5 Exemplo 05: Viga submetida à flexão por três pontos com entalhe excêntrico

acoplamento não rígido. Para este exemplo foram adotados os seguintes parâmetros de aderência entre o concreto e as fibras: $\tau_{max} = 6,5MPa$, $\tau_f = 1,5MPa$, $\alpha = 0,4$, $s_1 = 0,01mm$, $s_2 = 4,0mm$, $k = 10^3MPa/mm$, e $C_s = 10^9MPa/mm$.

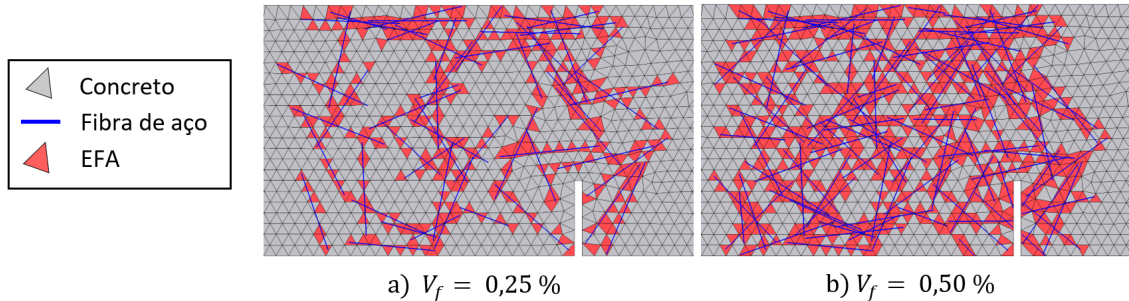


Figura 6.26: Malhas de elementos finitos na região da descontinuidade para os dois volumes de fibras estudados: a) $V_f = 0,25\%$, b) $V_f = 0,50\%$.

Tabela 6.12: Características das malhas de elementos finitos para a flexão por três pontos com entalhe excêntrico.

Volume de fibras V_f	Elementos de treliça de dois nós	Elementos triangulares de três nós	Elementos triangulares de acoplamento de quatro nós (EFA)	Número total de elementos
0,25 %	380	3.589	434	4.403
0,50 %	872	3.589	981	5.442

Na Figura 6.27 é possível visualizar a comparação dos resultados experimentais de Carpinteri e Brighenti (2010), com os resultados obtidos com a utilização da ACDF para o modelo em concreto simples. Já nas figuras Figura 6.28 e Figura 6.29 é possível ver a mesma comparação para os modelos em CRFA, para os volumes de 0,25% e 0,50%. A Figura 6.30 mostra o efeito da adição das fibras ao concreto no comportamento pós-pico, comparando os modelos numéricos analisados com a ACDF.

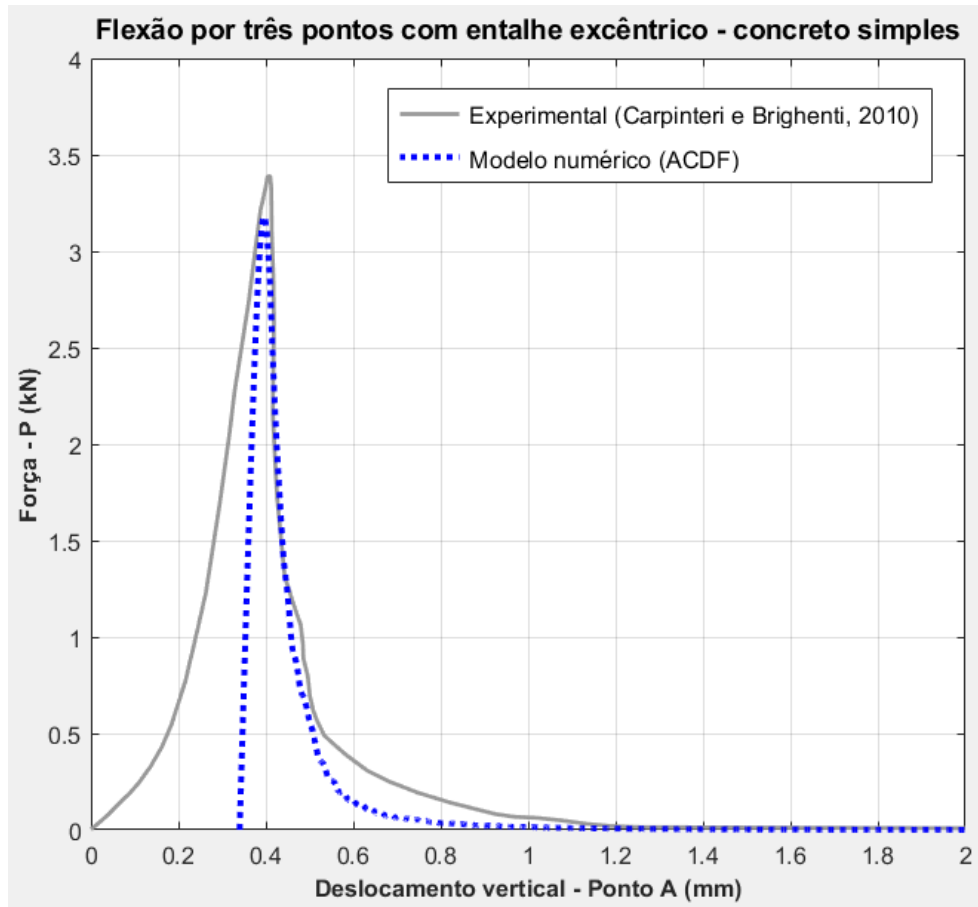


Figura 6.27: Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - concreto simples.

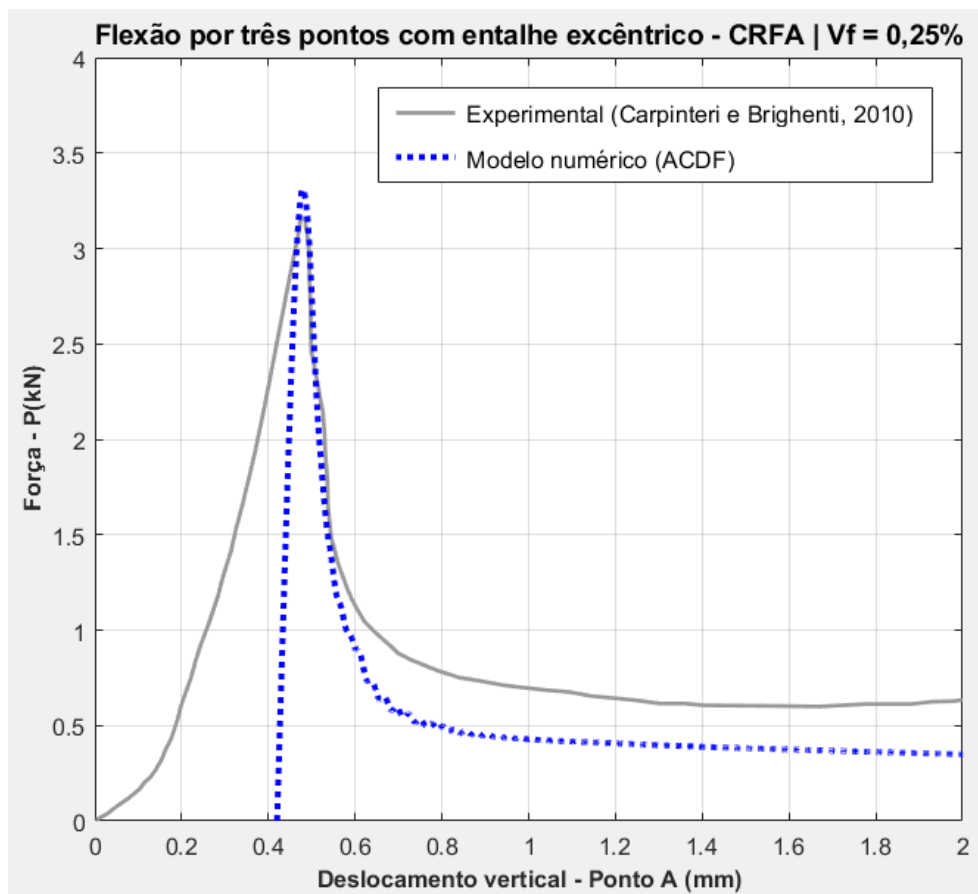


Figura 6.28: Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - $V_f = 0,25\%$.

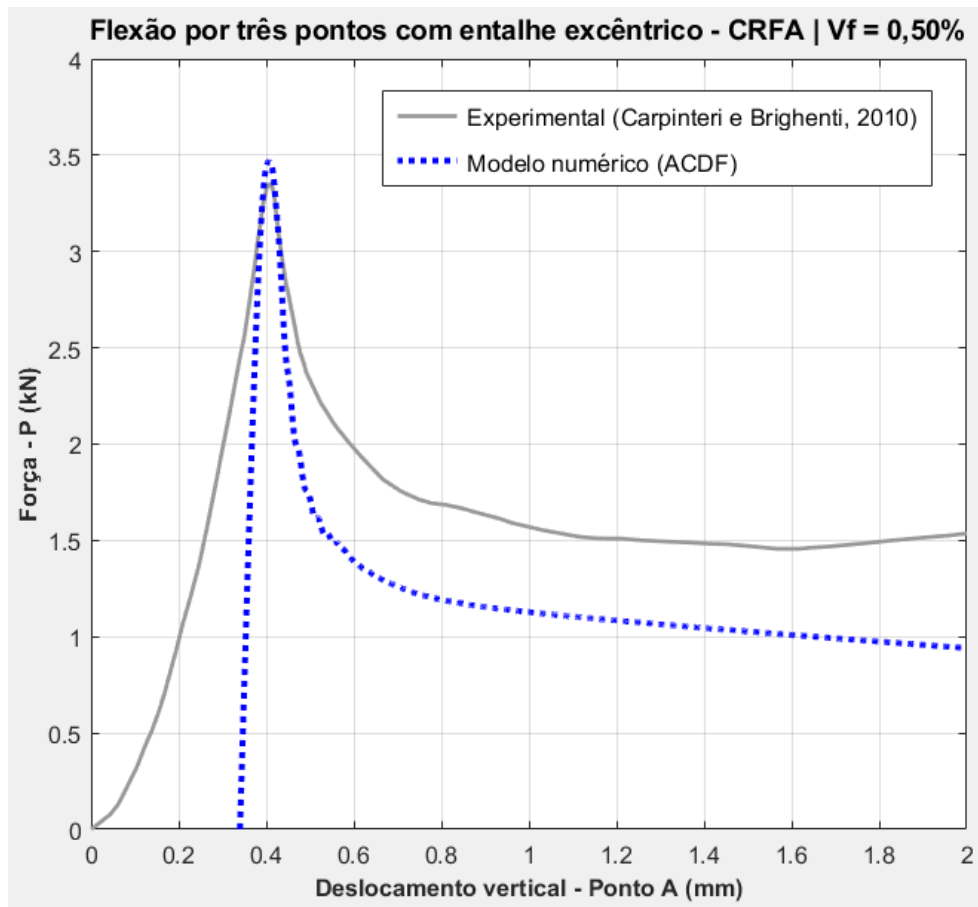


Figura 6.29: Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - $V_f = 0,50\%$.

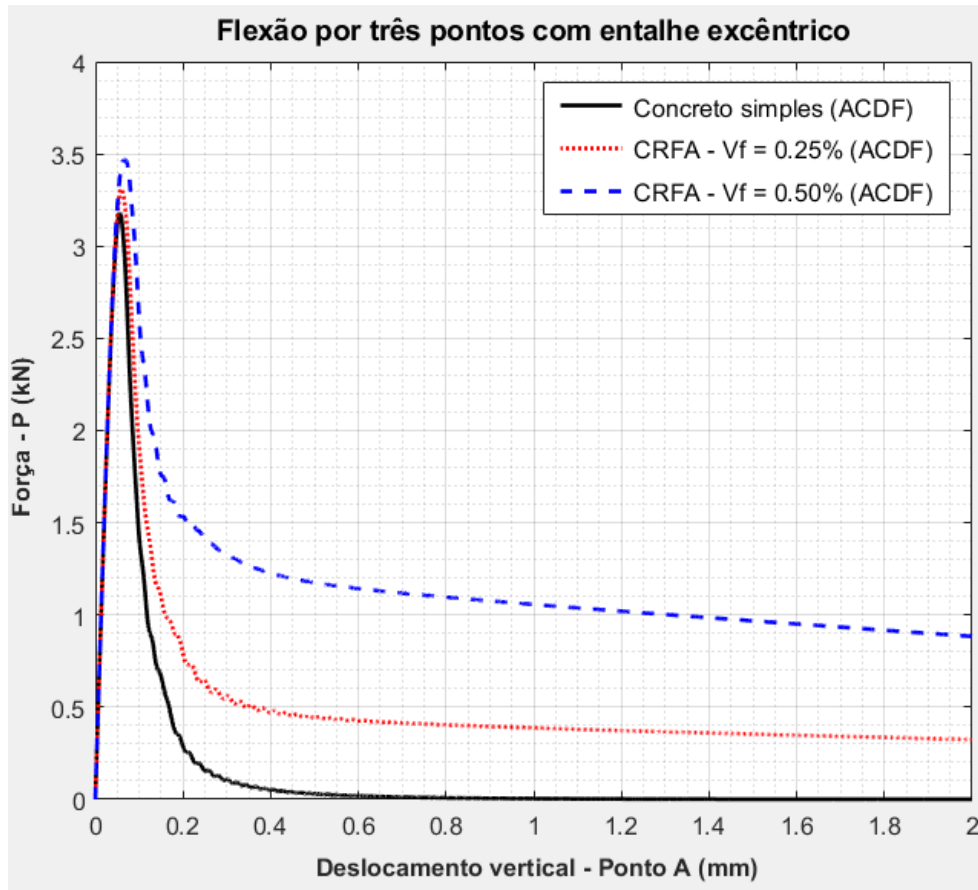


Figura 6.30: Comparação de resultados para o modelo de flexão por três pontos com entalhe excêntrico. (deslocamento x força) - ACDF.

Os resultados experimentais apresentam uma acomodação inicial da curva, que torna difícil a análise e comparação completa com os resultados numéricos. Dessa forma, para facilitar a visualização da comparação das soluções numéricas com os resultados experimentais da região pós-pico, as curvas dos resultados numéricos foram deslocadas, com os valores das cargas de pico colocados na mesma abscissa do gráfico.

Assim, analisando as respostas, é possível notar que os modelos numéricos apresentaram valores para as cargas de pico muito próximos aos valores obtidos experimentalmente por Carpinteri e Brighenti (2010), subestimando um pouco apenas para o caso em concreto simples. Em relação às respostas pós-pico, todos os resultados numéricos obtidos por meio da ACDF subestimaram a capacidade de carga, principalmente para as vigas em CRFA, o que pode ser justificado pelo baixo volume de fibras presente nas vigas, onde, dependendo da distribuição adotada, a resposta pode ser muito influenciada pela quantidade de fibras que cruzam a descontinuidade.

6.6 Exemplo 06: Vigas levemente armadas submetidas à flexão por três pontos

Na Figura 6.31 estão ilustradas as fibras trabalhando tensionadas nos itens a) e b), assim como é possível visualizar o caminho percorrido pelas descontinuidades nos itens c) e d), caracterizando fraturas em modo misto em ambos os casos.

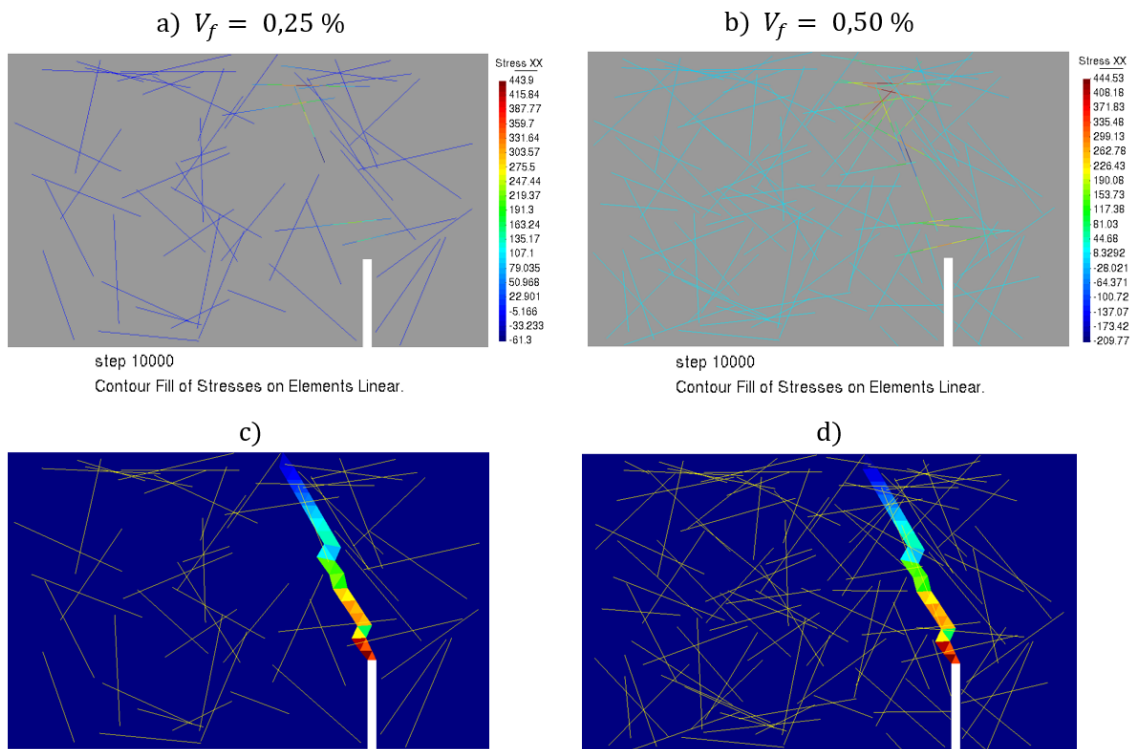


Figura 6.31: Fibras tensionadas para os dois volumes de fibras estudados; itens a) e b). Representações das descontinuidades; itens c) e d).

6.6 Exemplo 06: Vigas levemente armadas submetidas à flexão por três pontos

No exemplo 06 são estudadas duas vigas levemente armadas com arame recozido, submetidas à flexão por três pontos. A Figura 6.32 apresenta a malha de elementos finitos adotada nas análises das vigas de seção retangular, assim como as condições de contorno, dimensões, posição adotada para o início da descontinuidade e as seções com as posições das barras para as duas taxas de armaduras avaliadas (item a): VR - 1 Ø 3,215mm e item b): VR - 2 Ø 3,215mm). A Figura 6.33 ilustra as mesmas características para as vigas estudadas de seção T (item a): VT - 1 Ø 3,215mm e item b): VT - 2 Ø 3,215mm).

6.6 Exemplo 06: Vigas levemente armadas submetidas à flexão por três pontos

As quantidades e separações de elementos que compõem a malha dos modelos analisados estão descritas na Tabela 6.13.

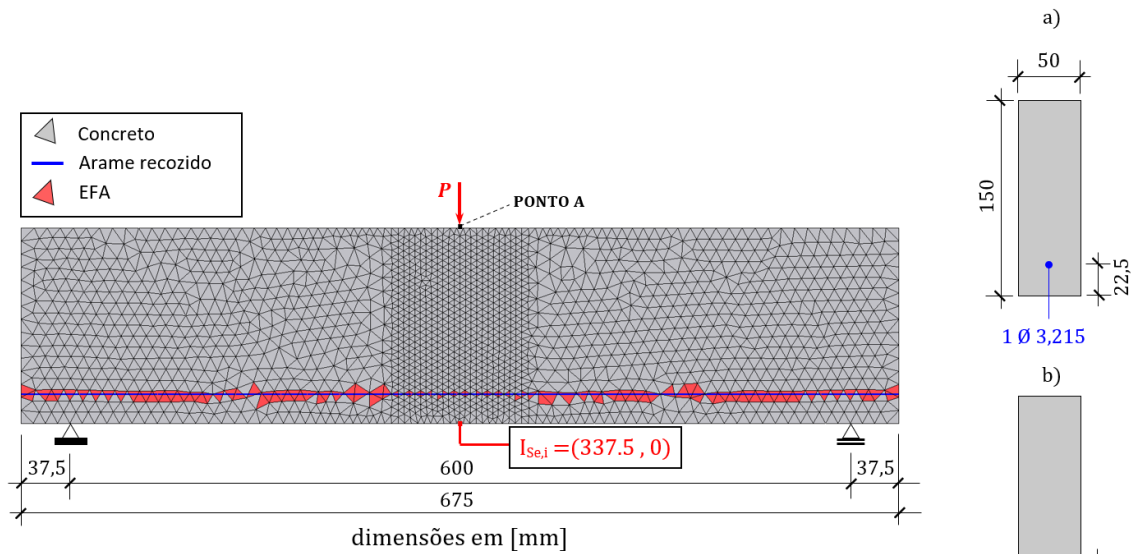


Figura 6.32: Configuração para a viga levemente armada submetida à flexão por três pontos - seção retangular: a) 1 Ø 3,215 mm. b) 2 Ø 3,215 mm.

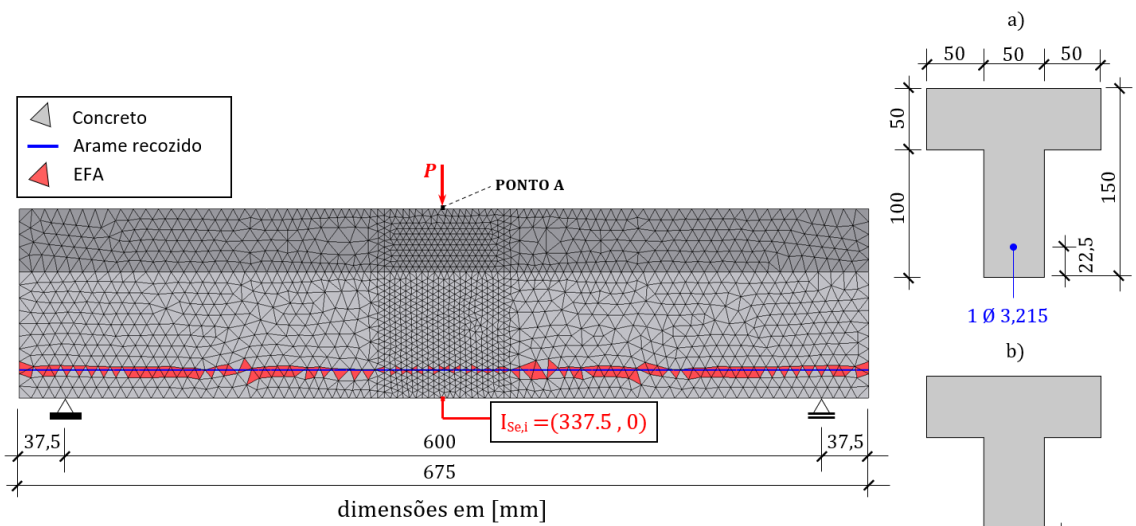


Figura 6.33: Configuração para a viga levemente armada submetida à flexão por três pontos - seção T: a) 1 Ø 3,215 mm. b) 2 Ø 3,215 mm.

Tabela 6.13: Características das malhas de elementos finitos para os modelo numéricos das vigas levemente armadas submetidas à flexão por três pontos.

Seção de viga e armação	Elementos de treliça de dois nós	Elementos triangulares de três nós	Elementos triangulares de acoplamento de quatro nós (EFA)	Número total de elementos
VR - 1 barra	135	3.424	136	3.695
VR - 2 barras	135	3.424	136	3.695
VT - 1 barra	135	3.436	136	3.707
VT - 2 barras	135	3.436	136	3.707

A Tabela 6.14 indica as propriedades mecânicas adotadas para a matriz de concreto nos exemplos, enquanto a Tabela 6.15 apresenta as propriedades mecânicas adotadas para as barras de arame recozido com nervura.

Uma carga P foi aplicada no topo das vigas com um total de 10.000 passos para todos os modelos numéricos estudados. As análises foram feitas utilizando um estado plano de tensões, com uma espessura fora do plano de 50 mm.

Tabela 6.14: Propriedades mecânicas utilizadas para o concreto nos modelos numéricos para as vigas de seções retangular e T.

Resistência à tração f_t^m	4,4 MPa
Módulo de elasticidade E^m	26.950 MPa
Coefficiente de Poisson ν^m	0,2
Energia de fratura G_f^m	0,13 N/mm

Tabela 6.15: Propriedades mecânicas adotadas para as barras de arame recozido nos modelos numéricos para as vigas de seções retangular e T.

Diâmetro das barras d^b	3,215 mm
Módulo de elasticidade E^b	114.770 MPa
Resistência ao escoamento σ^b	346 MPa

As barras de arame recozido foram divididas em 135 elementos finitos de dois nós, e diferente dos outros exemplos, o acoplamento das barras à matriz de concreto teve de ser calibrado com os resultados experimentais do ensaio de *pullout* obtidos por Melo (2011).

As Figura 6.34 (a) e (b) mostram o *setup* para o modelo do ensaio de *pullout* utilizado na calibração da curva de aderência, ilustrando as condições de contorno e a malha de elementos finitos, composta por um total de 1.853 elementos, detalhados na Tabela 6.16. Para a análise do modelo, a carga F foi dividida em um total de 1.000 passos de carga, sendo que na Figura 6.34 (c) é possível visualizar as tensões normais nos elementos de concreto com o corpo de prova deformado, quando atingido o último passo de carga.

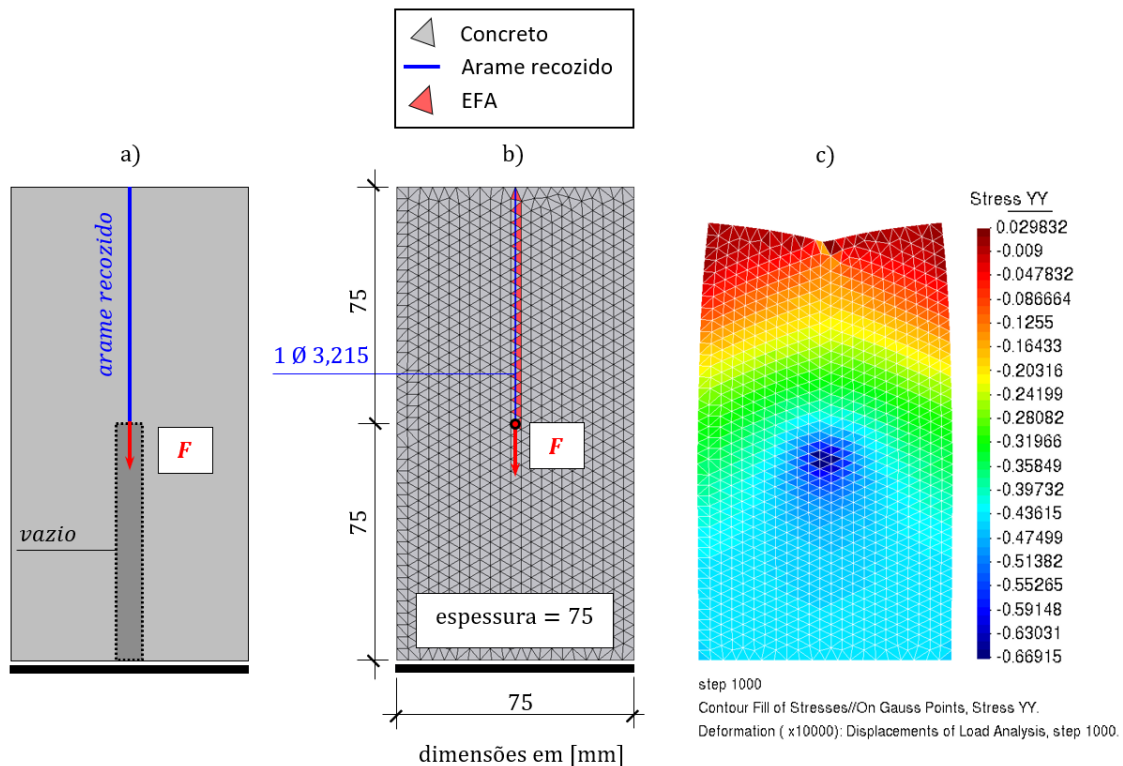


Figura 6.34: Configuração do modelo de *pullout* utilizado para a calibração do modelo de aderência: (a) representação física do modelo numérico utilizado para o ensaio de *pullout*; (b) *setup* para o modelo de *pullout* utilizado na calibração da curva de aderência; (c) tensões normais nos elementos de concreto (corpo deformado).

Os elementos de concreto foram representados por um modelo de dano à tração, enquanto o arame recozido foi representado por um modelo elastoplástico unidimensional, assim como eram representadas as fibras de aço nos exemplos anteriores. Porém, para os elementos finitos de acoplamento (EFA) de 4 nós foi utilizado um acoplamento não rígido, com a curva segmentada em seis segmentos de reta. Para este exemplo foram adotados os seguintes parâmetros de aderência entre o concreto

Tabela 6.16: Características da malha de elementos finitos para o modelo utilizado para o *pullout*.

Ensaio	Elementos de treliça de dois nós	Elementos triangulares de três nós	Elementos triangulares de acoplamento de quatro nós (EFA)	Número total de elementos
<i>Pullout</i>	20	1.812	21	1.853

e as barras: $\tau_{b1} = 0,90MPa$, $\tau_{b2} = 2,40MPa$, $\tau_{b3} = 2,80MPa$, $\tau_{b4} = 3,16MPa$, $\tau_{b5} = 3,30MPa$, $s_1 = 0,02mm$, $s_2 = 0,09mm$, $s_3 = 0,15mm$, $s_4 = 0,24mm$, $s_5 = 0,35mm$, $k = 10^3MPa/mm$, e $C_s = 10^6MPa/mm$.

A Figura 6.35 mostra a curva de calibração em comparação com o resultado experimental obtido por Melo (2011). É possível perceber que há uma interrupção na curva experimental por volta de 0,36 mm de deslizamento da barra, pois, durante os ensaios o arame recozido rompeu antes de ocorrer a ruptura por aderência, ou seja, sem a ocorrência do deslizamento total do arame.

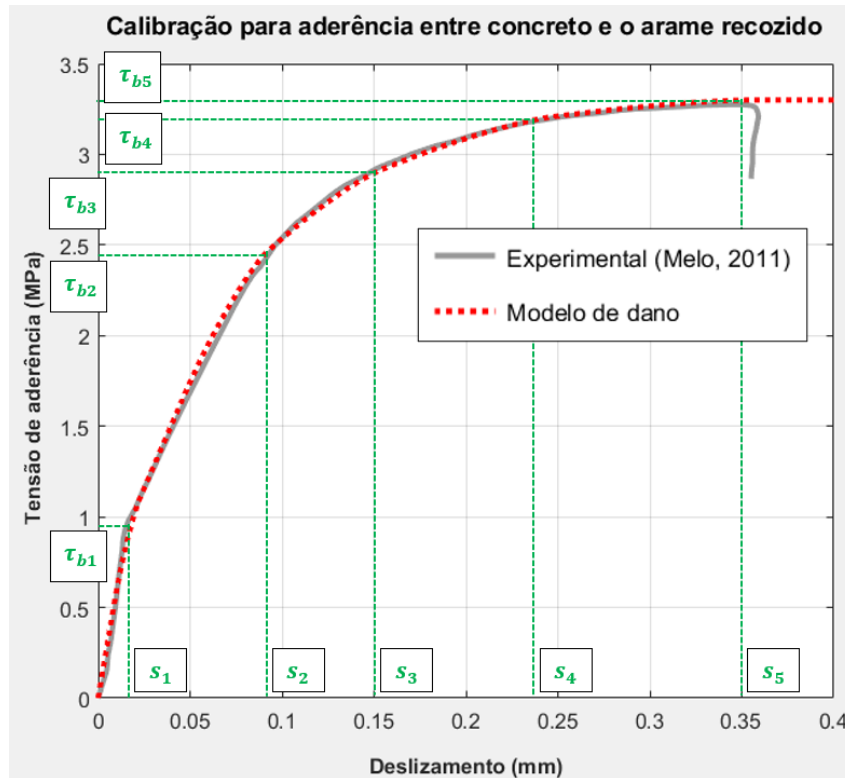


Figura 6.35: Curva de calibração para o modelo de aderência (deslizamento x tensão de aderência).

As comparações dos resultados obtidos com a aplicação da ACDF para as vigas se seções R e T, para 1 e 2 barras, estão detalhados nas Figura 6.36, Figura 6.37, Figura 6.38 e Figura 6.39. De maneira geral, os resultados obtidos com a utilização da ACDF mostraram proximidade com os obtidos experimentalmente por Melo (2011), subestimando levemente a carga de pico obtida nas respostas em comparação, enquanto as respostas pós-pico ficaram bem próximas do resultados experimentais.

Na Figura 6.40 é possível ver o efeito da adição de uma barra no comportamento pós-pico, tanto para a viga de seção retangular quando para a viga de seção T. E também é possível notar o aumento da rigidez pré-pico, da carga de pico e dos níveis de tensão pós-pico atingidos pela seção T, quando comparada com a seção retangular.

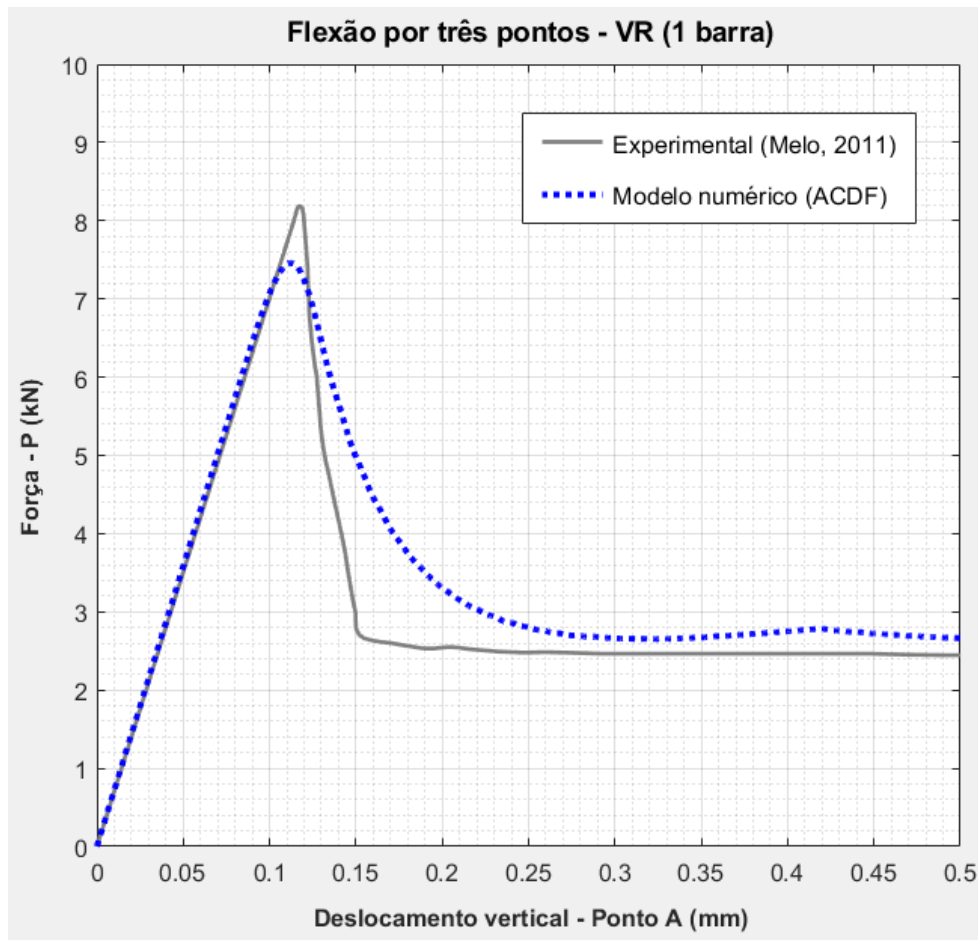


Figura 6.36: Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VR - 1 barra.

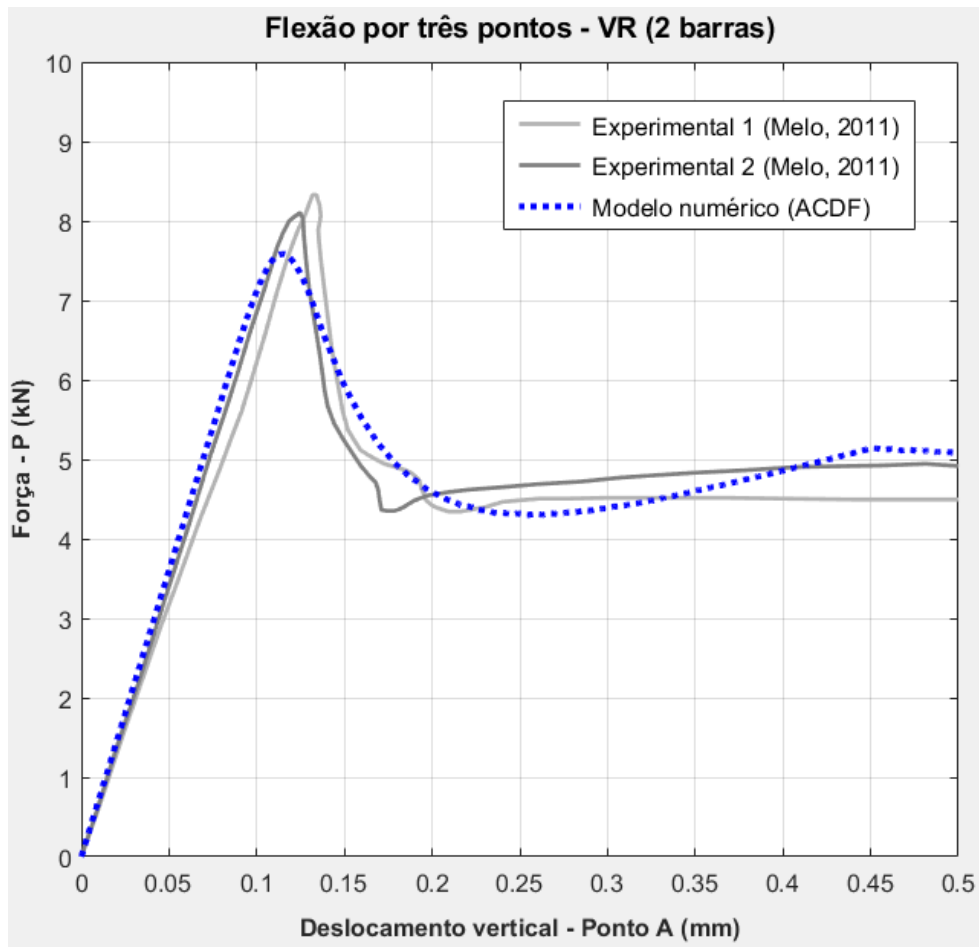


Figura 6.37: Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VR - 2 barras.

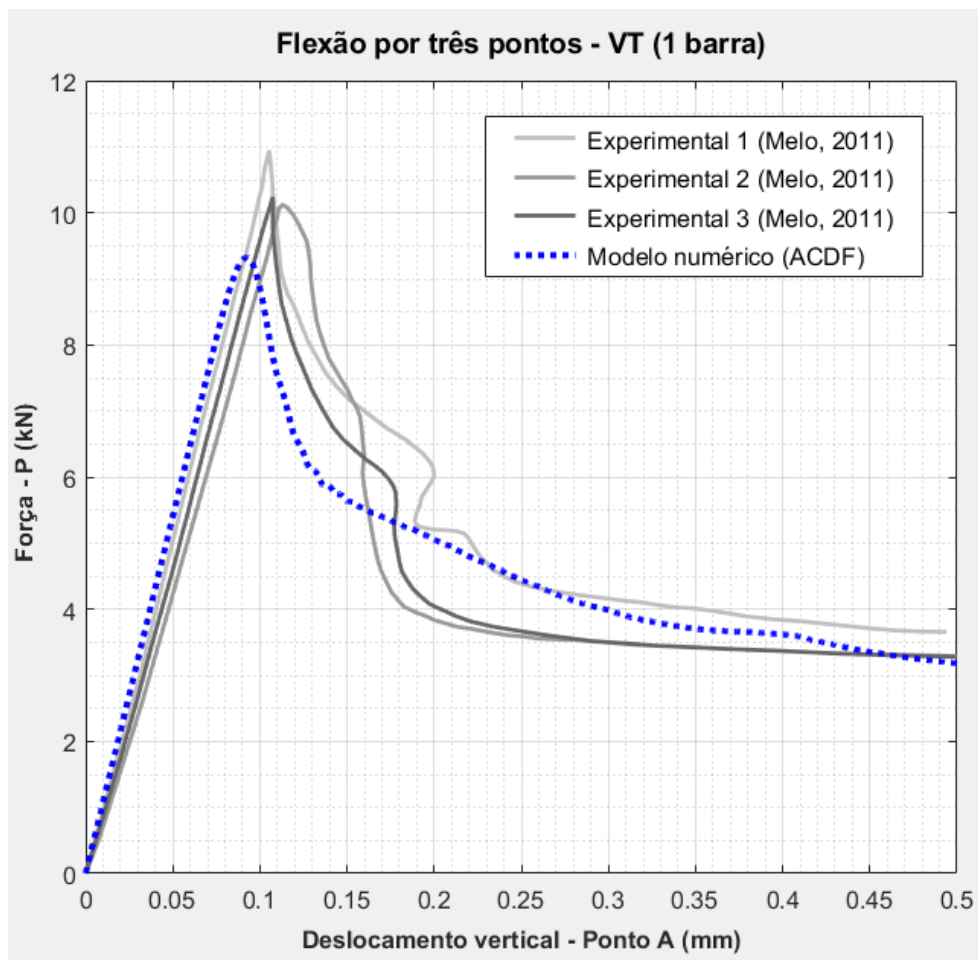


Figura 6.38: Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VT - 1 barra.

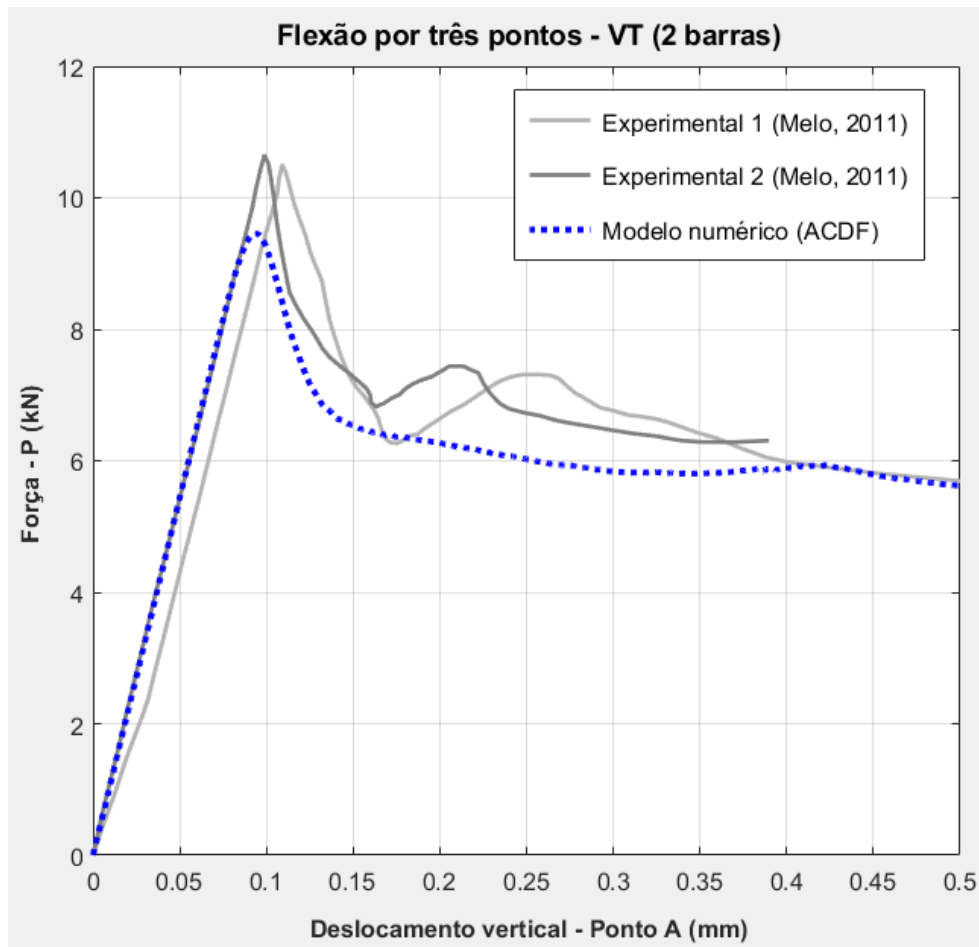


Figura 6.39: Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - VT - 2 barras.

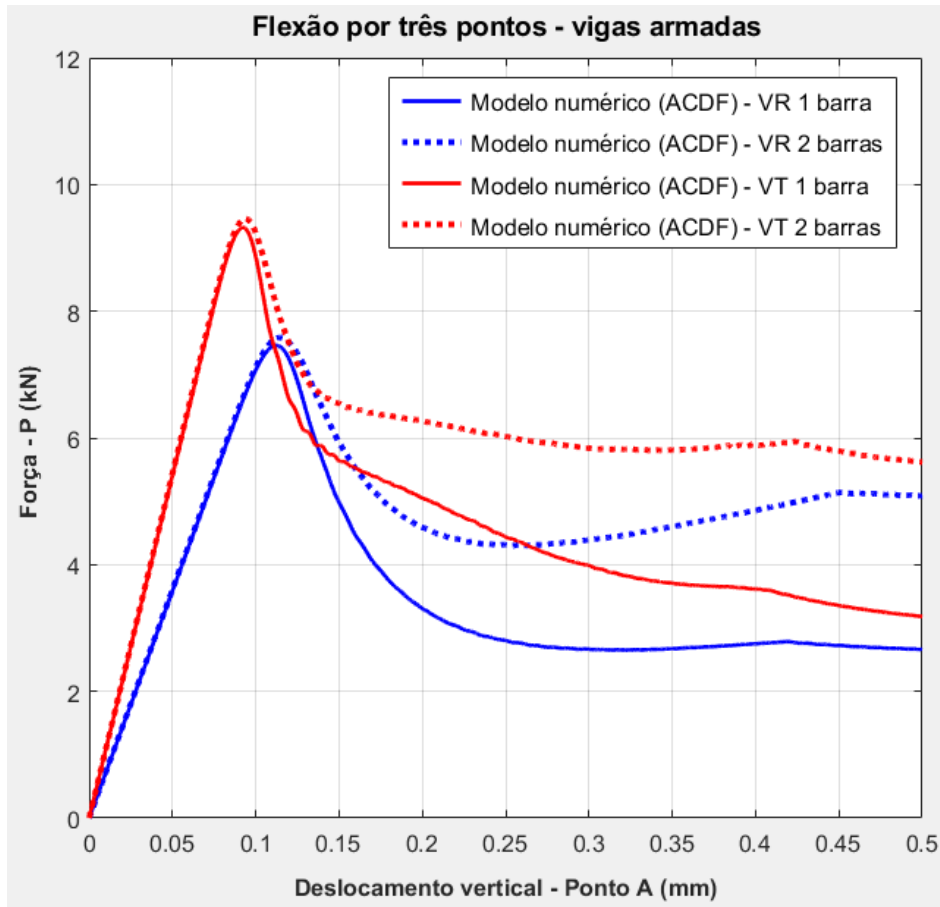


Figura 6.40: Comparação de resultados para o modelo da viga levemente armada submetida à flexão por três pontos. (deslocamento vertical x força) - ACDF.

Na Figura 6.41 estão ilustrados os caminhos percorridos pelas descontinuidades para as seções retangulares e T.

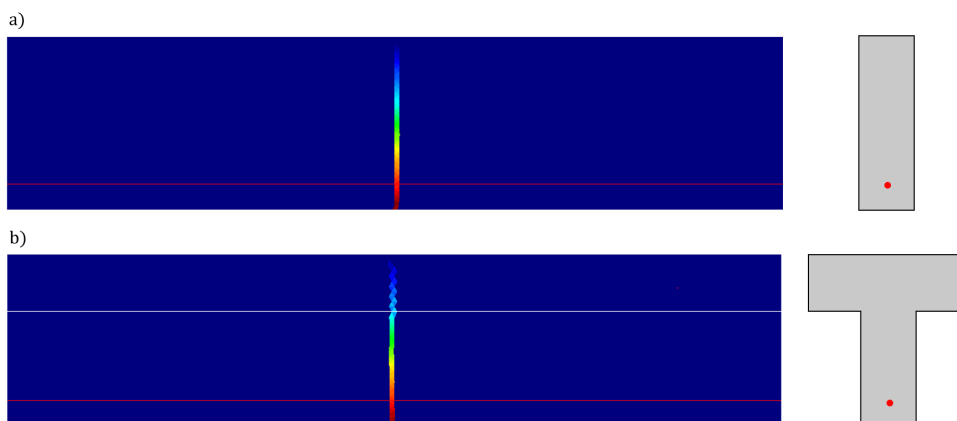


Figura 6.41: Representação das descontinuidades para as vigas de seção retangular (a) e seção T (b).

7 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

7.1 Conclusões

O presente trabalho buscou contribuir principalmente com o desenvolvimento de modelos numéricos bidimensionais, capazes de representar de forma eficaz os mecanismos de falha em estruturas de CRFA submetidas a carregamentos que proporcionam um trabalho fora do regime elástico. Para isso, foi proposta uma nova maneira para representar a propagação de fissuras em elementos de CRFA, utilizando a técnica de aproximação contínua de descontinuidades fortes, com a representação explícita das fibras de aço.

A principal vantagem dessa metodologia utilizada para a representação de fissuras em estruturas de CRFA consiste na utilização de um modelo contínuo para a representação de descontinuidades no campo de deslocamentos (descontinuidades fortes), utilizando para isso a técnica de descontinuidades incorporadas dentro do domínio do elemento, com a aplicação de um modelo de dano à tração de simples implementação, para representar a degradação dentro da banda de localização do elemento finito. Além disso, com a representação explícita das fibras de aço, é possível considerar alguns dos principais fatores que compõem o CRFA, como a distribuição aleatória das fibras, a interação entre as fibras e o concreto, e as propriedades mecânicas do concreto e do aço, que são caracterizadas de forma separada dentro do modelo numérico.

Para representar o caminho da descontinuidade em modelos com descontinuidade incorporada, é necessário um algoritmo de propagação adequado. Neste trabalho optou-se pela utilização de um algoritmo de propagação local de fissuras, com a proposição de um ajuste adicional no algoritmo de propagação, limitando a variação máxima do ângulo entre os segmentos de reta subsequentes que descrevem a fissura

no domínio dos elementos finitos, buscando reduzir o surgimento de travamento de tensões.

No primeiro exemplo estudado, pôde-se verificar a importância do ajuste do ângulo da descontinuidade para evitar o travamento de tensões. Ao permitir desvios maiores, de 60° , 70° e 80° entre os segmentos da descontinuidade, ocorreram grandes tendências de desvio na trajetória, provocando o surgimento de tensões espúrias. Enquanto para ângulos máximos da descontinuidade abaixo de 50° , as propagações ocorreram sem que surgisse o fenômeno de travamento de tensões.

No Painel em L, estudado no segundo exemplo, foi apresentado um estudo para avaliar a convergência do esquema de integração Impl-Ex, utilizado no modelo de dano da banda de localização presente no domínio de cada elemento interceptado pela descontinuidade. Dessa forma, constatou-se que quanto maior o número de passos de carga, mais precisa é a convergência para a resposta do problema numérico, conforme sugere o esquema de integração Impl-Ex. Ainda é possível constatar, que tanto o modelo numérico do primeiro exemplo, quanto o modelo do segundo exemplo, foram capazes de representar de forma adequada a resposta do elemento estrutural em concreto simples, quando comparados com as respostas dos experimentos realizados por outros pesquisadores.

O ensaio de flexão por três pontos, estudado no exemplo três, foi utilizado primeiramente em concreto simples, para mostrar a baixa dependência do refinamento da malha de elementos finitos com a resposta do problema. Pôde-se notar que as curvas para as malhas fina, média e grossa apresentaram respostas muito próximas entre si, com uma pequena instabilidade da malha grossa no trecho não linear da curva. Essa proximidade de resultados já era esperada com a técnica de ACDF, devido ao caráter distribucional apresentado pelo módulo de abrandamento regularizado, utilizado no modelo constitutivo da banda de localização.

Dessa forma, optou-se pela utilização da malha média para a avaliação das respostas nas vigas reforçadas com diferentes volumes de fibras de aço no exemplo três. De forma geral, os modelos numéricos apresentaram respostas adequadas quando comparadas com os resultados experimentais. Além disso, quando comparados entre si, os modelos mostraram coerência, com o aumento significativo da capacidade de carga pós-pico conforme o aumento do volume de fibras na região da descontinuidade.

No quarto exemplo, foi feito um estudo com a variação do volume de fibras na região da descontinuidade em estruturas submetidas à tração direta com entalhes.

Novamente, os resultados numéricos se mostraram coerentes com os resultados experimentais, superestimando um pouco a carga de pico e a resposta pós-pico para o volume de 1,5% de fibras. Quando comparados, os modelos numéricos mostraram o resultado esperado, com o aumento significativo da carga de pico, pois, diferente do exemplo três, no modelo de tração direta, a seção inteira da descontinuidade está submetida à esforços de tração, fazendo com que todas as fibras presentes na região contribuam com o acréscimo da resistência à tração direta, contudo, também ocorre um aumento da capacidade de carga pós-pico com o aumento do volume de fibras.

Com o exemplo cinco, foi possível mostrar a capacidade de representar fraturas em modo misto por meio da metodologia utilizada. Os modelos analisados foram comparados com os resultados experimentais e apresentaram respostas pós-pico condizentes com o esperado, com valores de carga de pico muito próximas das obtidas experimentalmente. Os modelos em CRFA subestimaram a capacidade de carga pós-pico. Cabe observar nestes modelos, que dependendo da distribuição das fibras na viga de concreto, a resposta deve ser muito influenciada com a quantidade de fibras que são atravessadas nas fissuras. Porém, quando comparados entre si, os resultados numéricos mostraram-se condizentes com o esperado, com um ganho efetivo na capacidade de carga pós-pico.

Um fator que provavelmente influenciou as respostas dos modelos estudados em CRFA foi a utilização de um estado plano de tensões nos modelos numéricos. A utilização de modelos bidimensionais despreza alguns efeitos das fibras fora do plano, o que pode proporcionar capacidades menores de carga em alguns casos, como ocorrido no quinto exemplo.

Por fim, com o exemplo seis buscou-se apresentar uma outra aplicação para a metodologia utilizada, diferente do CRFA. Foram estudadas duas vigas levemente armadas com arame recozido, submetidas à flexão em três pontos.

Nesse exemplo, houve a necessidade de realizar uma calibração do modelo de aderência através no ensaio de arrancamento (*pullout*) apresentado por Melo (2011). O modelo de aderência foi construído por meio de segmentos de retas, representando de forma adequada o resultado experimental.

As vigas com seções retangular e T, apresentaram bons resultados, tanto para os elementos com uma barra, quanto para os elementos com duas barras de arame, com respostas pós-pico adequadas e cargas de pico bem próximas dos valores obtidos experimentalmente.

Dessa forma, conclui-se que a metodologia proposta é capaz de representar de forma adequada elementos estruturais em concreto simples e CRFA, assim como elementos de concreto reforçados com barras de arame recozido ou aço (concreto armado).

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Apesar dos bons resultados obtidos nesse trabalho para representar descontinuidades em CRFA por meio da aplicação da ACDF, com a representação explícita das fibras de aço, algumas propostas para trabalhos futuros são listadas a seguir:

- Considerar para a banda de localização, um modelo de dano contínuo que danifica tanto a parte positiva quanto à parte negativa do tensor de tensões.
- Utilizar um algoritmo global para realizar a propagação de fissuras.
- Aplicar a mesma metodologia para diversas estruturas em concreto armado, buscando validar a mesma para diferentes modelos estruturais.
- Estender as aplicações apresentadas nesse trabalho para problemas 3D.
- Realizar um trabalho comparativo entre a representação de descontinuidades por meio da ACDF e das técnicas de fragmentação de malha, apresentadas por Sánchez et al. (2014) e Manzoli et al. (2016).
- Propor outros métodos para evitar o travamento de tensões em algoritmos de propagação local de fissuras.
- Realizar um trabalho comparativo da aplicação da ACDF. Comparando a representação explícita das fibras de aço adotada nesse trabalho, com a representação implícita das fibras utilizada por outros pesquisadores, como por exemplo o modelo micromórfico, apresentado por Oliver et al. (2012).

Referências Bibliográficas

- CEB-FIP model code 1990. CEB-FIP Comité Euro-International du Bèton. London, 1993.
- Alfaiate, J.; Wells, G. N.; Sluys, L. J. On the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-i and mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002.
- ASCE. *Finite element analysis of reinforced concrete: state-of-art*. ASCE, New York, 1982.
- ASCE. *Finite element analysis of reinforced concrete*. ASCE, New York, 1985.
- Baez, F. A. L. *Modelo numerico del comportamiento inelastico del concreto reforzado con fibras cortas de acero*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2014.
- Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*. Waterntown, MA, 2 edition, 2014.
- Bazant, Z. P.; Oh, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*, 93(16):155 – 177, 1983.
- Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1999.
- Bentur, A.; Mindess, S. *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. Modern Concrete Technology Series, 2007. ISBN 9780415250481.
- Bitencourt Jr., L. A. G. *Numerical Modeling of Failure Processes in Steel Fiber Reinforced Cementitious Materials*. PhD thesis, Polytechnic School at the University of Sao Paulo, University of Sao Paulo, Brazil, 2015.
- Bitencourt Jr., L. A. G.; Manzoli, O. L.; Prazeres, P. G. C.; Rodrigues, E. A.; Bittencourt, T. N. A coupling technique for non-matching finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290:19 – 44, 2015. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2015.02.025. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.02.025>.

- Bitencourt Jr., L. A. G.; Manzoli, O. L.; Bittencourt, T. N.; Vecchio, F. J. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. *International Journal of Solids and Structures*, 159:171 – 190, 2019. ISSN 0020-7683. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.028. URL <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.028>.
- Borst, R. D. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engr. Comp.*, 8:317–332, 1991.
- Borst, R. D.; Mühlhaus, H. B. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35:521–539, 1992.
- Bucalem, M. L.; Bathe, K.-J. *The Mechanics os Solids and Structures - Hierarquical Modeling and the Finite Element Solution*. Springer, 2011.
- Cabot, G. P.; Bazant, Z. P. Nonlocal damage theory. *Jour. Engng. Mech, A.S.C.E.*, 1987.
- Carpinteri, A.; Brighenti, R. Fracture behaviour of plain and fiber-reinforced concrete with different water content under mixed mode loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2010.
- Cervera, M.; Oliver, J.; Manzoli, O. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(9):987–1010, 1996. ISSN 1096-9845. doi: {10.1002/(SICI)1096-9845(199609)25:9<987::AID-EQE599>3.0.CO;2-X}. URL [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199609\)25:9<987::AID-EQE599>3.0.CO;2-X](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199609)25:9<987::AID-EQE599>3.0.CO;2-X).
- Cervera, M.; Pelà, L.; Clemente, R.; Roca, P. A crack-tracking technique for localized damage in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010.
- Clemente, R. *Análisis estructural de edificios históricos mediante modelos localizados de fisuración*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC-BarcelonaTech), 2006.
- Clemente, R.; Cervera, M.; Roca, P. Localized damage model applied to the analysis of masonry structures. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2008.
- Cunha, V. *Steel fiber reinforced self-compacting concrete - from micromechanics to composite behavior*. PhD thesis, Department os Civil Engineering, University of Minho, Portugal, 2010.

- Dias da Costa, D.; Alfaiate, J.; Sluys, L. J.; Júlio, E. Towards a generalization of a discrete strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009.
- Droz, P. *Modele numerique du comportement non-lineaire d'ouvrages massifs en beton non armé*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology at Lausanne (EPFL), 1987.
- Dvorkin, E. N.; Cuitino, A. M.; Gioia, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 30:541–564, 1990.
- Feist, C.; Hofstetter, G. An embedded strong discontinuity model for cracking of plain concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- Fish, J.; Belytschko, T. *A First Course in Finite Elements*. Wiley, 2007.
- Gasser, T. C.; Holzapfel, G. A. 3d crack propagation in unreinforced concrete. a two-step algorithm for tracking 3d crack paths. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- Ingraffea, A. R.; Heuze, F. Finite element models for rock fracture mechanics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1980.
- Ingraffea, A. R.; Saouma, V. *Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*. In: *Fracture mechanics of concrete: structural application and numerical calculation*, chapter 4, pages 171–225. Springer, Dordrecht, 1985.
- Jirásek, M.; Zimmermann, T. Embedded crack model: I. basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001a.
- Jirásek, M.; Zimmermann, T. Embedded crack model. part ii: Combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001b.
- Jirásek, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1-3):307–330, 2000. ISSN 0045-7825. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00154-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00154-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599001541>.
- Jäger, P.; Steinmann, P.; Kuhl, E. Modeling three-dimensional crack propagation – a

- comparison of crack path tracking strategies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008.
- Kachanov, L. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk*, 1958.
- Lemaitre, J. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, 1992.
- Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- Linder, C.; Armero, F. Finite elements with embedded branching. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2009.
- Lotfi, H. R.; Shing, P. B. An appraisal of smeared crack models for masonry shear wall analysis. *Computers and Structures*, 41(3):413–425, 1991.
- Lotfi, H. R.; Shing, P. B. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38:1307–1325, 1995.
- Maedo, M. A. Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação de malha. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista, 2015.
- Manzoli, O.; Oliver, J.; Cervera, M. *Localización de deformaciones: Analisis y simulación numérica de discontinuidades en la mecánica de sólidos*. Centro Int. de Métodos Num. en Ingeniería (CIMNE), Monografía N. 44, Barcelona - Spain, 1999.
- Manzoli, O. L. Predição de propagação de fissuras através de modelos constitutivos locais e técnica de construção progressiva da trajetória de descontinuidade. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2011.
- Manzoli, O. L.; Maedo, M. A.; Bitencourt Jr., L. A. G.; Rodrigues, E. A. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016.
- Manzoli, O. L. *Contribuições à simulação numérica de descontinuidades fortes*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP, 2008.
- Melo, L. R. T. Monitoração de modelos físicos reduzidos para investigação do comportamento de estruturas em escala real. Master's thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.
- Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1999.

- Mühlhaus, H. B.; Vardoulakis, I. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 37:271–283, 1987.
- Ngo, D.; Scordelis, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal of the American Concrete Institute*, 1967.
- Oliver, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3601–3623, 1996.
- Oliver, J.; Huespe, A. E. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 28: 609–632, 2004.
- Oliver, J.; Cervera, M.; Manzoli, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: The strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 1999.
- Oliver, J.; Huespe, A.; Pulido, M.; Chaves, E. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture mechanics*, 2002a.
- Oliver, J.; Huespe, A. E.; Samaniego, E.; Chaves, E. W. V. On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics. In *In: H.A. Mang, F.G. Rammer-storfer, J. Eberhardsteiner, (Eds.), Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, 2002b.
- Oliver, J.; Huespe, A. E.; Samaniego, E.; Chaves, E. W. V. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2004.
- Oliver, J.; Huespe, A.; Blanco, S.; Linero, D. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7093–7114, 2006. ISSN 0045-7825. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.04.018>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505003920>. Computational Modelling of Concrete.
- Oliver, J.; Huespe, A.; Cante, J. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1865–1889, 2008. ISSN 0045-7825. doi: [10.1016/j.cma.2007.11.027](http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.11.027). URL <http://doi.org/10.1016/j.cma.2007.11.027>.

- Oliver, J.; Mora, D. F.; Huespe, A. E.; Weyler, R. A micromorphic model for steel fiber reinforced concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 2012.
- Oller, S. *Fractura mecánica. Un enfoque global*. Barcelona, España: Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingenieria, 2001.
- Pelà, L. *Continuum damage model for nonlinear analysis of masonry structures*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC-BarcelonaTech), 2009.
- Peterson. Crack growth and development of fractures zones in plain concrete and similar materials. Technical report, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, 1981.
- Rashid, Y. R. Analysis of reinforced concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 1968.
- Rots, J. G. *Computational Modeling of Concrete Fracture*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands., 1988.
- Saloustros, S.; Cervera, M.; Pelà, L. Challenges, tools and applications of tracking algorithms in the numerical modelling of cracks in concrete and masonry structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018.
- Saouma, V. E.; Zatz, I. J. An automated finite element procedure for fatigue crack propagation analyses. *Engineering Fracture Mechanics*, 1984.
- Shing, P. B.; Brunner, J. D.; Lotfi, H. R. Evaluation of shear strength of reinforced masonry. *The masonry Society Journal*, 12(1):61–75, 1993.
- Simó, J. C.; Hughes, T. J. R. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.
- Simo, J.; Oliver, J. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, 1994.
- Sluys, L. J.; Borst, R. D. Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium: Model formulation and one-dimensional examples. *Int. J. Solids Struct.*, 29:2945–2958, 1992.
- Souza Neto, E.; Perić, D.; Owen, D. R. J. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. Wiley, 2008. ISBN 9780470694527.
- Sánchez, M.; Manzoli, O. L.; Guimarães, L. J. N. Modeling 3-D desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. *Computers and Geotechnics*, 2014.

- Theiner, Y.; Hofstetter, G. Numerical prediction of crack propagation and crack widths in concrete structures. *Engineering Structures*, 2009.
- Trindade, Y. T.; Bitencourt Jr., L. A. G.; Monte, R.; de Figueiredo, A. D.; Manzoli, O. L. Design of sfrc members aided by a multiscale model: Part i – predicting the post-cracking parameters. *Composite Structures*, 2020.
- Voo, J.; Foster, S. J. Variable engagement model for fibre reinforced concrete in tension. Technical Report R-420, School of Civil and Environmental Engineering, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 2003.
- Winkler, B.; Hofstetter, G.; Niederwanger, G. Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking. *Journal of Materials Design and Applications*, 2001.