

## 5 DETERMINAÇÃO DA CAPACIDADE DE ROTAÇÃO PLÁSTICA

### 5.1 Introdução

O presente capítulo trata da determinação da capacidade de rotação plástica de elementos unidimensionais de concreto armado que apresentam escoamento em tração da armadura longitudinal. Procura-se também mostrar o aumento dessa capacidade em pilares cintados. Para estes, mais do que um possível aumento na resistência, busca-se um aumento na sua deformabilidade, e neste caso o cintamento é necessário apenas numa região limitada do pilar, aproximadamente igual à altura de sua seção transversal, onde ocorrem as deformações anelásticas.

A determinação da capacidade de rotação plástica em peças de concreto armado ganhou grande impulso com os trabalhos quase simultâneos de Dilger (1966) e de Bachmann (1967). No deste último já são levantadas as principais questões envolvidas no problema, especialmente a do enrijecimento da armadura tracionada, pela ação da aderência (móvel, deslizante) entre os dois materiais, não apenas antes, mas principalmente, para o que interessa aqui, após a plastificação da armadura. Mais recentemente este problema foi investigado por Langer (1987), Kreller (1989), Longfei (1995) e Sigrist (1995), entre outros. Do trabalho de Kreller resultou a lei tensão da armadura na fissura associada à sua deformação média,  $\sigma_s(\varepsilon_{sm})$ , da qual foi retida no MC-90 somente o trecho pós-escoamento. Para determinar essa lei simplificada foi utilizada uma lei tensão de aderência-deslizamento,  $\tau_b(s)$ , aproximadamente igual à dada nesse código. A solução de Langer utiliza o diagrama momento-curvatura acoplado à solução numérica da equação diferencial tensão de aderência-deslizamento, e usa também a mesma lei  $\tau_b(s)$  mencionada e o conceito de viga equivalente.

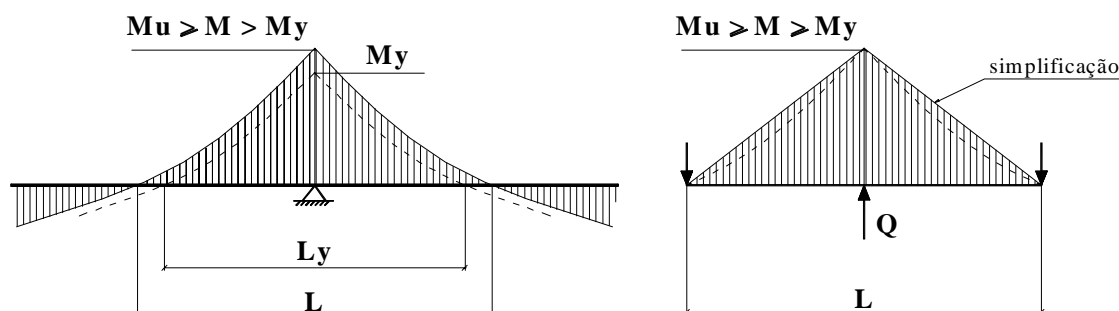


Fig. 5.1: Viga equivalente na região de apoio de continuidade.

A viga equivalente, na configuração de colapso, é o segmento da peça entre dois pontos sucessivos de momentos nulos, onde se situa a seção crítica (Fig. 5.1). Nela são aplicadas duas cargas, em duas etapas distintas. Na primeira, aplica-se a carga  $Q_u$  correspondente a uma deformação última (no aço ou no concreto) na seção crítica. Através do espaçamento médio das fissuras delimitam-se os subelementos de concreto entre duas fissuras sucessivas, ao longo dos quais obtém-se a curvatura. Uma vez conhecido todo o diagrama momento-curvatura (desprezando-se a resistência à tração do concreto) têm-se imediatamente as deformações  $\varepsilon_s$  do banzo tracionado e as distâncias da LN a este banzo,  $(d - x)$ , correspondentes ao conjunto de pontos do diagrama. Ao determinar a deformação  $\varepsilon_s$  de um dado ponto *dentro do subelemento* na solução da equação diferencial tensão de aderência-deslizamento, procura-se esta deformação dentre aquelas já calculadas no diagrama e a respectiva distância da LN ao banzo tracionado, com o que resulta, para este ponto, a curvatura  $\varepsilon_s / (d - x)$ . Isto é feito para todos os pontos do subelemento, bem como para todos os subelementos. Assim, fica determinada a distribuição da curvatura ao longo da peça. Da integral da curvatura em toda a viga equivalente obtém-se a rotação total entre as duas seções extremas correspondente à carga última. O mesmo cálculo é repetido para a carga  $Q_y$  para a qual tem-se na seção crítica o início do escoamento da armadura. Da subtração das rotações totais destas duas etapas decorre, segundo Langer, a capacidade de rotação plástica.

Este processo equivale a calcular, em cada etapa, as rotações de cada fissura ao longo de todo o vão da viga equivalente.

A solução de Longfei aplica a teoria de Bachmann para as rotações de cada fissura em todo o vão, em vigas de concreto protendido com armadura mista, na flexão simples. Novamente, como na solução de Langer, são calculadas as rotações totais para as cargas  $Q_u$  e  $Q_y$ , e destas a capacidade de rotação plástica.

A solução de Sigrist (1995) utiliza uma lei tensão de aderência-deslizamento do tipo rígido-plástica, segundo sua proposta, com dois níveis de tensão de aderência. Na viga equivalente (ou no sistema estrutural) calculam-se em duas etapas as rotações *apenas nas seções fissuradas onde há plastificação da armadura para a carga última*. A soma das rotações da primeira etapa, subtraída da soma das rotações da segunda etapa, resulta igual à capacidade de rotação plástica, que se verifica quando a carga aumenta de  $Q_y$  a  $Q_u$ .

As soluções que seguem usam o conceito de viga equivalente. Na solução simplificada utiliza-se a lei  $\sigma_s(\epsilon_{sm})$  de Kreller, na mais rigorosa determinam-se as rotações somente nas fissuras com plastificação da armadura, como no trabalho de Sigrist, mas adota-se a lei tensão de aderência-deslizamento dada no MC-90. Também há diferenças na consideração da força cortante. Com isso, estas soluções distinguem-se das anteriores e seguem as linhas gerais do MC-90.

O MC-90, item 3.7, define a rotação plástica pela seguinte integral:

$$\theta_{pl} = \int_{a=0}^{l_{pl}} \frac{1}{d - x_{LN}(a)} [\epsilon_{sm}(a) - \epsilon_{smy}] da \quad (5.1a)$$

no trecho plastificado de extensão  $l_{pl}$ , onde:

$\epsilon_{sm}(a)$  é a deformação média da armadura no trecho plastificado da peça, para momento na seção crítica igual a  $M_u$ , correspondente a uma deformação limite num dos dois materiais.

$\epsilon_{smy}$  é a deformação média da armadura para tensão na fissura igual a  $f_{yk}$ .

$a$  é a abscissa contada a partir da posição da deformação  $\varepsilon_{sm}$ . (Adiante substitui-se a notação  $a$  por  $x$ ).

$x_{LN}$  é a profundidade da linha neutra, e pode ser tomada conservativamente igual ao valor da seção crítica, pois a plastificação geralmente ocorre num trecho pequeno da peça.

$d$  é a altura útil da seção.

A partir da definição anterior, aplicando-se a lei  $\sigma_s(\varepsilon_{sm})$  obtida por Kreller, cf. Equação (3.67) e Fig. 3.16, decorre esta outra:

$$\theta_{pl} = \int_0^{l_{pl}} \frac{\delta}{d - x_{LN}} \left(1 - \frac{\sigma_{sr1}}{f_{yk}}\right) (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{sy}) dx \quad (5.1b)$$

onde, como já se viu antes no item 3.4:

$\delta$  é um coeficiente, igual a 0,8, que leva em consideração a resistência  $f_{yk}$  e o quociente  $(f_t/f_y)_k$  entre as resistências à ruptura e ao escoamento do aço. O valor 0,8 é válido para o aço tipo A desse código e  $f_{yk} = 500$  MPa. Supõe-se, como aproximação, que este valor seja válido também para os aços nacionais CA-50 e CA-60.

$\sigma_{sr1}$  é a tensão da armadura na fissura, obtida com as solicitações que levam a seção à fissuração por tensões normais, o que se dá para a tensão na borda do banzo tracionado igual à resistência à tração do concreto,  $f_{ct5\%}$ . (Lembra-se aqui que no capítulo 4 foi adotado o valor médio desta resistência, e a tensão  $\sigma_{sr1}$  foi obtida impondo-se  $f_{ctm}$  na primeira camada da armadura).

$\varepsilon_{s2}$  e  $\varepsilon_{sy}$  são, respectivamente, as deformações da armadura na fissura e de escoamento.

$l_{pl}$  é o comprimento do trecho plastificado, a rigor igual à distância entre as posições da deformação  $\varepsilon_{sy}$ , em cada lado da seção crítica. No método simplificado esta distância corresponde à posição da força do início do escoamento da armadura,  $R_{sy} = A_{s1} f_{yk}$ , onde  $A_{s1}$  é a área da armadura do banzo tracionado, distante  $z_s$  do CG da seção (Fig. 5.3).

Nesta equação a única variável é a deformação  $\varepsilon_{s2}$  do banzo tracionado, e sua variação ao longo do vão decorre da variação da força neste mesmo banzo. Observe-se que, quando se impõe na seção crítica uma deformação limite num dos dois materiais, resulta destas definições o valor máximo da rotação plástica, que é a capacidade de rotação plástica. Para saber de antemão qual a forma de ruptura que ocorre em uma dada seção transversal, impõe-se o estado de deformação correspondente à ocorrência simultânea da deformação limite do concreto na borda comprimida e da deformação última do aço no banzo tracionado. Deste estado decorre a força normal (positiva, se tração), chamada no item 4.3  $N_{ball}$  ou  $v_{ball}$ , Fig. 4.8a, a ser comparada com a efetivamente atuante na seção. Se esta for superior àquela (maior tração ou menor compressão) há ruptura (fratura) do aço, em caso contrário (menor tração ou maior compressão) há esmagamento do concreto.

A rotação total da viga equivalente, ou a rotação relativa entre duas seções quaisquer, decorre das rotações que se verificam em cada fissura do trecho considerado, conforme a teoria de Bachmann. Observando-se a Fig. 5.2, num quadro de fissuração estabilizada tem-se numa fissura a rotação e o deslocamento vertical relativos das suas faces respectivamente iguais a:

$$\theta_i = \frac{w_{mi}}{d - x_i} \quad (5.2)$$

$$\delta_{mi} = \frac{\theta_i}{\text{tg } \nu_{ri}} (d - x_i) \quad (5.3)$$

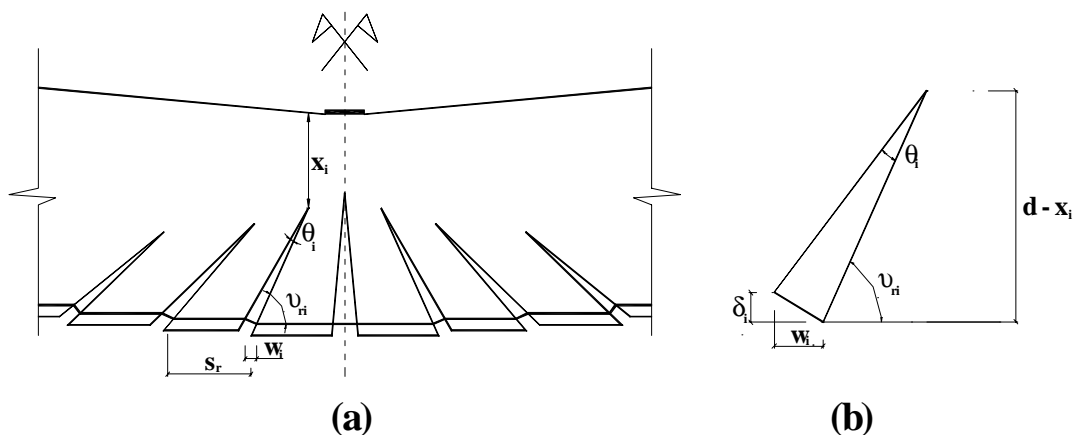


Fig. 5.2: Deslocamentos relativos das faces da fissura.

Este último deslocamento é nulo para fissuras verticais. Nestas equações,  $w_{mi}$  é a abertura média da fissura, a qual independe de sua inclinação  $v_{ri}$  em relação ao eixo longitudinal da peça,  $s_{rm}$  é o espaçamento médio das fissuras e  $x_i$  é a profundidade da LN. A rotação total relativa das duas seções consideradas é igual à soma das rotações das  $n$  fissuras que ocorrem entre elas:

$$\theta = \sum_1^n \theta_i \quad (5.4)$$

devendo-se observar que em cada fissura há descontinuidade da tangente à deformada, exatamente como numa rótula, plástica ( $M \neq 0$ ) ou não ( $M = 0$ ).

No trabalho de Bachmann as rótulas plásticas são classificadas, cf. Fig. 1.1, em dois tipos: as de flexão e as de flexão e força cortante. Nas primeiras só há uma ou algumas poucas fissuras verticais, onde há plastificação da armadura tracionada, e por isso a capacidade de rotação plástica *pode* ser pequena. Nas segundas há influência da força cortante, quando esta tem um valor apreciável, com o que as fissuras são inclinadas e em maior número. Como se sabe, a força cortante aumenta a força do banzo tracionado e, por conseqüência, espraia a plastificação da armadura em uma extensão maior do que no caso anterior. Por esta razão, no projeto deve-se dar preferência às rótulas de flexão e de força cortante, pelo menos

em vigas. A influência da força cortante e a obtenção da força do banzo tracionado são tratadas a seguir.

## 5.2 Consideração da Força Cortante e Obtenção da Força do Banzo Tracionado

Em uma estrutura sujeita a um dado carregamento, conforme o Teorema Estático da Plasticidade, é possível determinar campos de tensão descontínuos, estáveis (resistências dos materiais não ultrapassadas) e admissíveis (condições de equilíbrio e de contorno estáticas preenchidas), de tal modo que o dado carregamento é inferior ou no máximo igual ao de ruína. Assim, na viga da Fig. 5.3, sujeita à ação de solicitações normais ( $M$ ,  $N$ ) e tangencial ( $V$ ), assimilam-se as forças longitudinais resistentes nos banzos ao concreto da zona comprimida e à armadura longitudinal tracionada. Na alma desta viga atribuem-se aos estribos campos de tração na sua direção, e ao concreto campos de compressão inclinados. Subdividindo-se esta viga em zonas B e D, é possível demonstrar, somente por equilíbrio, que as forças nos banzos variam linearmente nas primeiras e parabolicamente nas segundas. Ver Thürlimann et al. (1989), e Sigrist et al. (1995). Conhecida a inclinação  $\nu$  do campo de compressão das zonas B, as forças nos banzos são obtidas como segue. Como na região B a inclinação do campo de compressão é constante (e, por isso, a distribuição das tensões tangenciais também é constante ao longo da altura da seção resistente à força cortante), a força inclinada deste campo atua a meia distância dos banzos. Como os esforços solicitantes são supostos atuantes no CG (eixo 0-0) da seção, distante  $y_0$  da sua base, deve-se considerar nesta região os esforços:

$$N + V \cot \nu$$

$$M + V \cot \nu (z_s - 0,5z)$$

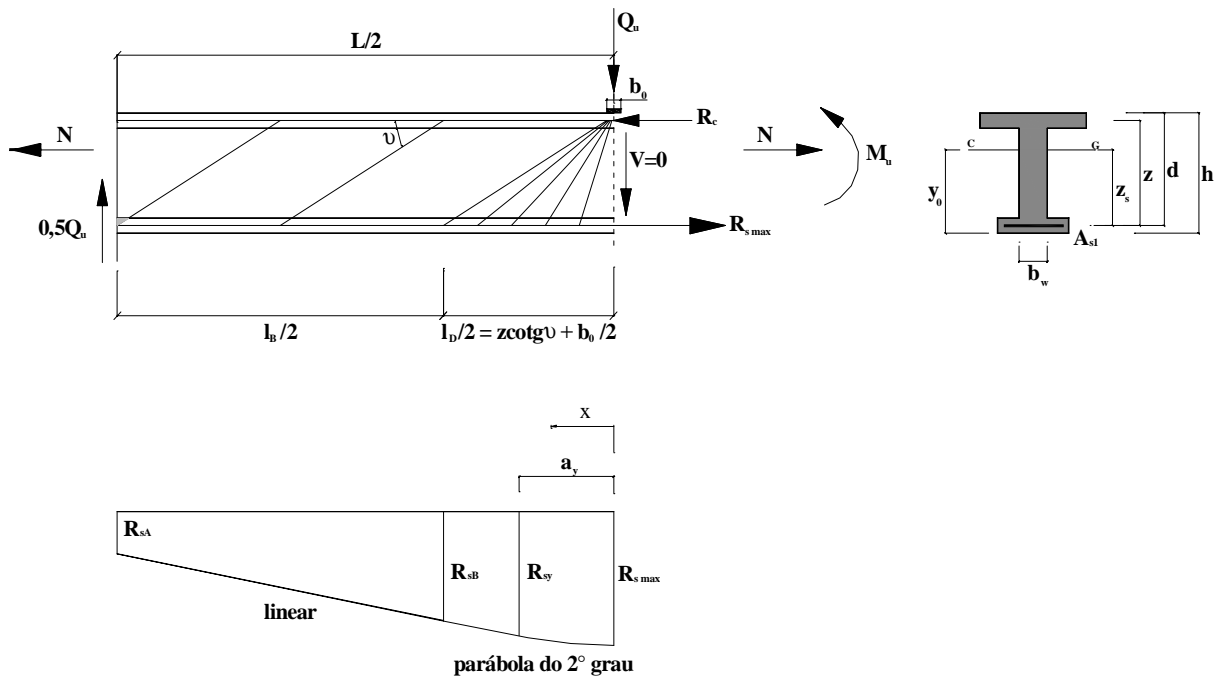


Fig. 5.3: Viga equivalente: geometria, campos de tensão descontínuos, força no banzo tracionado.

com o que as forças nos banzos são iguais a:

$$R_c = -\frac{M}{z} + N \frac{z_s}{z} + 0,5V \cot \nu \quad (5.5)$$

$$R_s = \frac{M}{z} + N \left(1 - \frac{z_s}{z}\right) + 0,5V \cot \nu \quad (5.6)$$

onde as grandezas envolvidas estão indicadas na Fig. 5.3.  $M$  e  $V$  são positivos e  $N$  é positiva se tração.

O ângulo  $\nu$  da inclinação do campo de compressão é estabelecido conforme as *FIP Recommendations* (1999), e decorre da inclinação  $\nu_r$  da fissura ( $40^\circ$  na flexão simples), pela seguinte equação, válida para forças normais nula e de compressão e para estribos verticais (ver Kirmair (1985)):



$$\cot v = \cot v_r \frac{1}{1 - \frac{\tau_{c,M+N-}}{\tau_0}} \leq \frac{(L - b_0)}{2z} \quad (5.7)$$

$$\cot v_r = 1,2 - 0,30 \frac{N}{A_0 f_{ctm}} \quad (5.8)$$

onde  $\tau_0 = V/b_w z$  deve ser maior que  $\tau_{c,M+N-}$ ,  $z$  é a distância entre os banzos,  $b_0$  é a largura da placa de apoio,  $A_0$  é a área da seção transversal,  $f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$ , em MPa, e

$$\frac{\tau_{c,M+N-}}{\tau_{c,M}} = 1,429 \times \left(1 - \frac{\cot v_r}{4}\right) \quad (5.9a)$$

$$\tau_{c,M} = 0,04 f_{ck} \quad (5.9b)$$

Tabela 5.1: Valores de  $v_r$  e de  $\frac{\tau_{c,M+N-}}{\tau_{c,M}}$  para  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$ .

$\frac{N}{(A_0 f_{ck})}$	$\frac{N}{(A_0 f_{ck})} \frac{f_{ck}}{f_{ctm}}$	$v_r$ (Inclinação da fissura)	$\frac{\tau_{c,M+N-}}{\tau_{c,M}}$
0	0	$39,8^0 \cong 40^0$	1
0,10	1,09	$33,2^0$	0,875
0,20	2,18	$28,3^0$	0,759
0,30	3,27	$24,6^0$	0,643
0,40	4,36	$21,7^0$	0,527
0,50	5,45	$19,4^0$	0,411

A inclinação do campo de compressão, como se vê, é menor do que a da fissura, pois há tensões de atrito transmitidas nas faces da fissura, e forças cortantes transmitidas no banzo comprimido e por corte da armadura longitudinal.

Aplicando-se as equações (5.8) e (5.9a) para  $f_{ck} = 35MPa$  e  $f_{ctm} = 3,21MPa$  obtêm-se os resultados da Tabela 5.1. Como se vê nesta tabela, a presença da força normal de compressão diminui a inclinação da fissura e, por conseqüência, a do campo de compressão. Simultaneamente diminui a fração  $\tau_{c,M+N-} / \tau_{c,M}$ , isto porque a força de compressão aumenta a profundidade da LN, mas a tensão tangencial  $\tau_{c,M+N-}$ , em boa parte devida ao atrito na fissura, continua sendo “espalhada” na seção resistente à força cortante, de altura  $z$ .

Observe-se na Equação (5.7) que o limite geométrico aqui imposto limita a região D à própria viga equivalente.

Para decidir se há fissuras inclinadas na alma da viga, o MC-90, item 3.7, dá o valor da força cortante que causa a fissuração inclinada, obtida experimentalmente (sem a separação das três parcelas mencionadas). Em um quadro de fissuração inclinada *totalmente desenvolvido* a tensão tangencial correspondente é igual a:

$$\tau_{r1} = \frac{2V_{rd1}}{b_w d} = 0,24\zeta (100\rho_{sl} f_{ck})^{1/3} \quad (5.10)$$

com  $f_{ck}$  em MPa, não superior a  $50MPa$ , e

$$\zeta = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad \text{fator de tamanho, } d \text{ em mm}$$

$$\rho_{sl} = \frac{A_{sl}}{b_w d} \quad \text{taxa geométrica da armadura longitudinal}$$

A multiplicação do valor de cálculo desta tensão tangencial por 2, ao invés de  $\gamma_c = 1,5$ , pode ser explicada pela correspondência ao quantil de 95% dos resultados experimentais (fissuração inclinada já existente, com 95% de probabilidade). Logo, a fissuração inclinada pode já estar presente para  $0,75\tau_{r1}$ , correspondente ao quantil de 5%, pois  $V_{rd1}$  é igual a  $V_{r1,5\%}$  dividido por  $\gamma_c = 1,5$ .

Uma vez estabelecido o ângulo da inclinação do campo de compressão (que para fissuras verticais é inferior a  $90^\circ$ , donde no limite  $\cot v = 0$ , e desaparece a influência da força cortante, Equações (5.5) e (5.6)), obtêm-se as forças do banzo tracionado, bem como a posição da força  $R_{sy}$  através das seguintes equações:

$$R_s(x) = R_{s\max} - 4(R_{s\max} - R_{sB})\left(\frac{x}{l_D}\right)^2 \quad \text{se } x \leq \frac{l_D}{2} \quad (5.11a)$$

$$R_s(x) = R_{sA} + \frac{R_{sB} - R_{sA}}{l_B}(L - 2x) \quad \text{se } \frac{L}{2} \geq x \geq \frac{l_D}{2} \quad (5.11b)$$

sendo  $l_D = b_0 + 2z \cot v$  e  $l_B = L - l_D$ . As forças na extremidade da viga e no limite das regiões B e D (leque) são respectivamente iguais a:

$$R_{sA} = N\left(1 - \frac{z_s}{z}\right) + 0,5V \cot v \quad (5.12a)$$

$$R_{sB} = \frac{Vl_B}{2z} + R_{sA} \quad (5.12b)$$

A obtenção do trecho plastificado usa a Equação (5.11a), se a força  $R_{sy} = A_{s1}f_{yk}$  for superior a  $R_{sB}$ , com o que a zona plastificada está dentro do leque, ou da Equação (5.11b), em caso contrário. Assim, tem-se:

$$a_y = \frac{l_{pl}}{2} = 0,5l_D \sqrt{\frac{R_{s\max} - R_{sy}}{R_{s\max} - R_{sB}}} \quad \text{se } R_{sy} \geq R_{sB} \quad (5.13a)$$

$$a_y = \frac{l_{pl}}{2} = 0,5(L - l_B) \frac{R_{sy} - R_{sA}}{R_{sB} - R_{sA}} \quad \text{se } R_{sy} \leq R_{sB} \quad (5.13b)$$

Estas equações foram deduzidas para as grandezas  $b_0$  (largura da placa) e  $\cot\psi$  não simultaneamente nulas, e serão utilizadas tanto no método simplificado, quanto no mais rigoroso, para a determinação da capacidade de rotação plástica.

### 5.3 Determinação Simplificada da Capacidade de Rotação Plástica

Estabelecida a extensão  $l_{pl} = 2a_y$  da zona plastificada e admitindo-se a lei constitutiva do aço como bilinear com encruamento, de inclinações dadas pelos módulos de elasticidade  $E_s (= 200GPa)$  no trecho elástico e de encruamento  $E_{sh}$  no trecho plástico, de valor

$$E_{sh} = \frac{f_t - f_y}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}} \quad (5.14)$$

resulta, com  $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_s(x)$  e  $\sigma_{s2} = \sigma_s(x)$ :

$$\varepsilon_s(x) - \varepsilon_{sy} = \frac{\sigma_s(x) - f_{yk}}{E_{sh}} = \frac{R_s(x) - R_{sy}}{A_{s1} E_{sh}} \quad (5.15)$$

Da Equação (5.1b), após integrar, decorre a capacidade de rotação plástica:

$$\theta_{pl} = \frac{2\delta}{3(d - x_u)} \left(1 - \frac{\sigma_{sr1}}{f_{yk}}\right) \frac{l_D}{A_{s1} E_{sh}} \sqrt{\frac{(R_{s\max} - R_{sy})^3}{R_{s\max} - R_{sB}}} \quad \text{se } R_{sy} \geq R_{sB} \quad (5.16a)$$

e se  $R_{sy} \leq R_{sB}$

$$\theta_{pl} = \frac{\delta}{d - x_u} \left(1 - \frac{\sigma_{sr1}}{f_{yk}}\right) \frac{1}{A_{s1} E_{sh}} \left[ \frac{l_D}{3} (2R_{s\max} - 3R_{sy} + R_{sB}) + \frac{l_B}{2} \frac{(R_{sB} - R_{sy})^2}{(R_{sB} - R_{sA})} \right] \quad (5.16b)$$

Do diagrama momento-curvatura obtém-se a tensão  $\sigma_{sr1}$ , o valor  $x_u$  da profundidade da LN e a distância  $z$  entre os banzos comprimido e tracionado, a força  $R_{s,max}$  e o correspondente momento último,  $M_u$ , na seção central da viga equivalente. De  $M_u$  decorre a carga última aplicada na viga,  $Q_u$ , e desta a força cortante  $V_u = 0,5Q_u$ :

$$Q_u = \frac{4M_u}{L} \frac{1}{\left(1 - \frac{b_0}{2L}\right)} \quad \text{e} \quad V_u = \frac{2M_u}{L} \frac{1}{\left(1 - \frac{b_0}{2L}\right)} \quad (5.17a) \text{ e } (5.17b)$$

Deve-se ter em mente que a extensão plastificada da viga ( $l_{pl} = 2a_y$ ) é, a rigor, aproximada, pois a posição da força do início do escoamento não corresponde à posição da deformação de escoamento. Isto só ocorreria se, por acaso, a distância  $a_y$  fosse um múltiplo do espaçamento médio das fissuras,  $s_{rm}$ . No item seguinte esta solução será comparada com a solução mais rigorosa.

Pode-se obter uma expressão ainda mais simples para a capacidade de rotação plástica nos casos em que são desprezíveis a largura da placa de apoio bem como o efeito da força cortante (i. e.,  $b_0 = 0$  e  $\cot v = 0$ ). Conforme a Fig. 5.4, o comprimento do trecho plastificado na metade do vão resulta igual a:

$$a_y = \frac{l_{pl}}{2} = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{M_y}{M_u}\right) \quad (5.18)$$

e a capacidade de rotação plástica, conforme a Fig. 5.4c, é dada por:

$$\theta_{pl} = a_y \left[ \left(\frac{1}{r}\right)_{um} - \left(\frac{1}{r}\right)_{ym} \right] \quad (5.19a)$$

e, de acordo com a Fig. 5.4b, tem-se finalmente:

$$\theta_{pl} = a_y \frac{M_u - M_y}{(EI)_{pl}} = \frac{L}{2(EI)_{pl}} \frac{(M_u - M_y)^2}{M_u} \quad (5.19b)$$

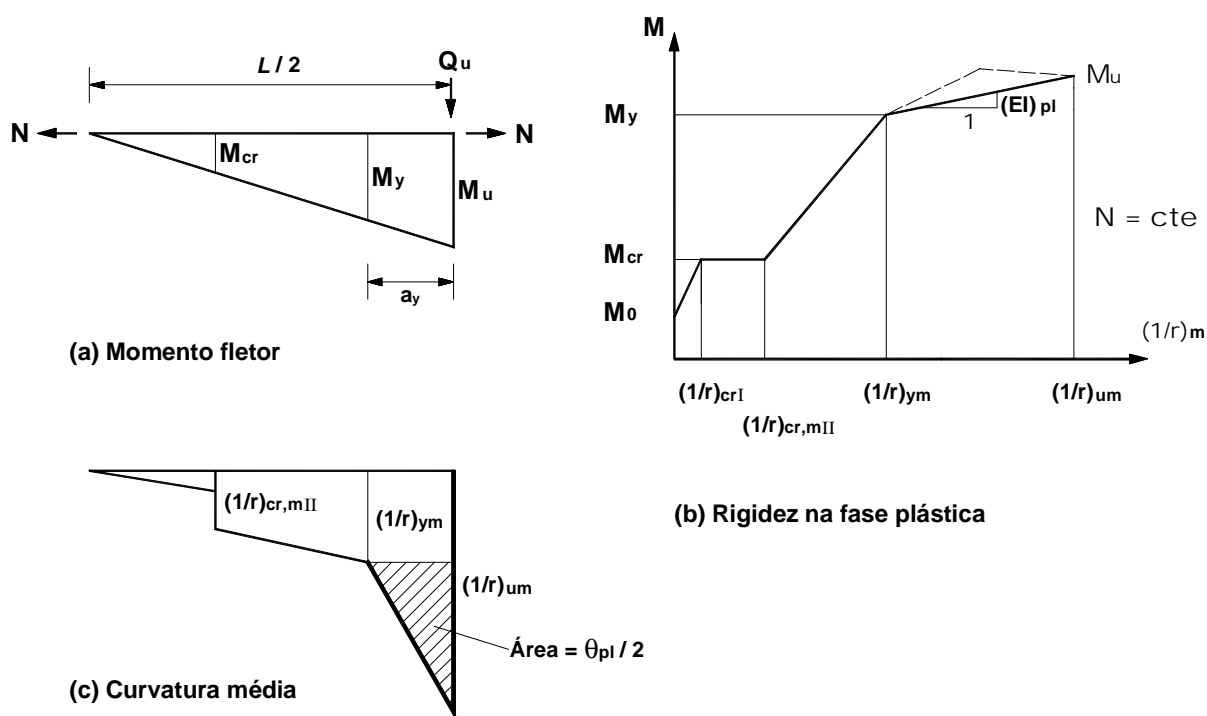


Fig. 5.4: Determinação simplificada da capacidade de rotação plástica.

As grandezas  $M_u$ ,  $M_y$  e  $(EI)_{pl}$  são obtidas do programa momento-curvatura. Embora nesta Fig. 5.4 tenha sido pressuposto escoamento da armadura tracionada, as equações anteriores podem ser usadas para os casos em que isto não ocorre, especialmente nos pilares cintados (como se mostra adiante), substituindo-se o momento do início do escoamento,  $M_y$ , por aquele correspondente à deformação  $\varepsilon_{c1}$  (ou  $\varepsilon_{cc1}$ ) na borda mais comprimida, i. e.,  $M_{\varepsilon_{c1}}$  (ou  $M_{\varepsilon_{cc1}}$ ).

## 5.4 Determinação Rigorosa da Capacidade de Rotação Plástica

A lei tensão de aderência-deslizamento,  $\tau_b(s)$ , descrita com mais detalhes no item 3.1.1 do MC-90, foi dada no item 3.2, pelas equações (3.8), a

seguir repetidas. Neste texto só se consideram barras nervuradas e concreto sem confinamento (ruptura por fissuração longitudinal à barra):

$$\tau_b = \tau_{b\max} \left(\frac{s}{s_1}\right)^\alpha \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (5.20a)$$

$$\tau_b = \tau_{b\max} - (\tau_{b\max} - \tau_{bf}) \left(\frac{s - s_1}{s_3 - s_1}\right) \quad s_1 \leq s \leq s_3 \quad (5.20b)$$

$$\tau_b = \tau_{bf} \quad s \geq s_3 \quad (5.20c)$$

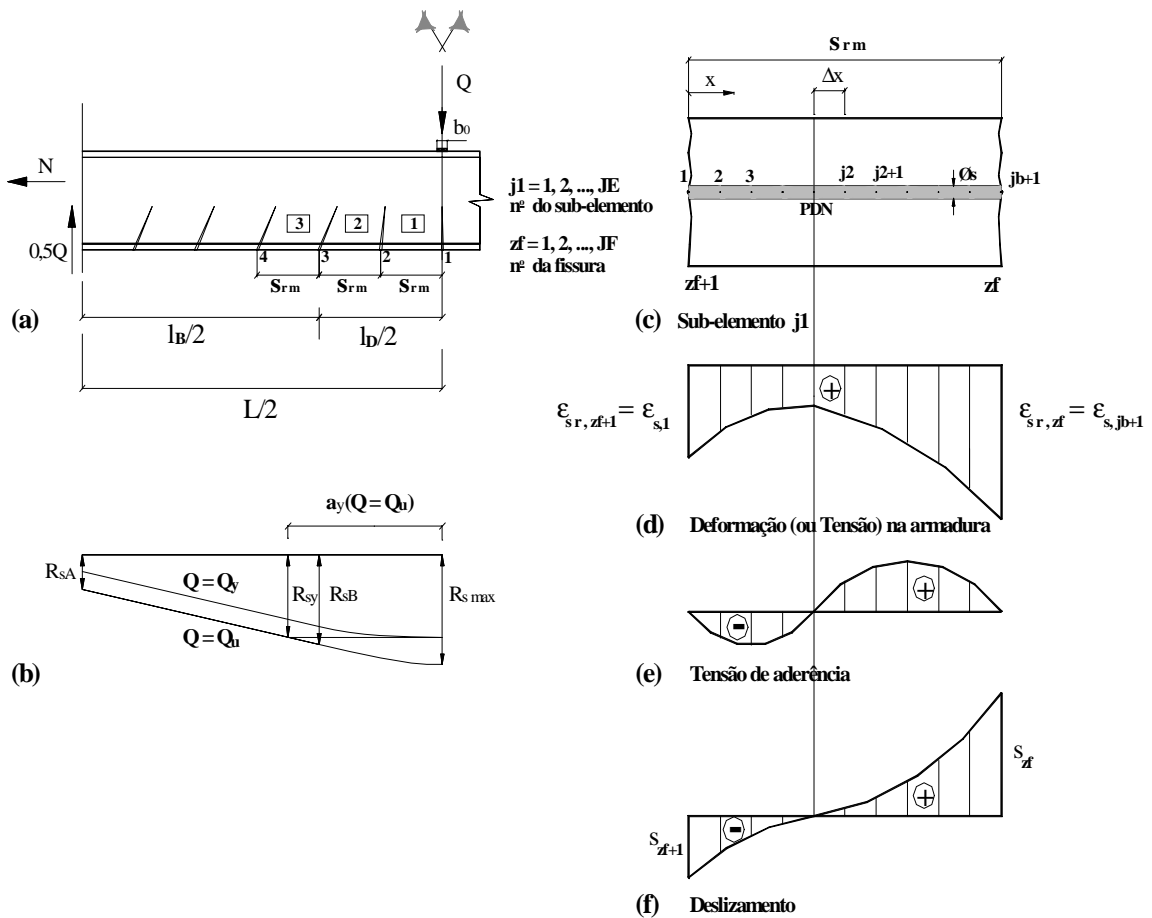
onde  $\alpha = 0,4$ ,  $s_1 = 0,6mm$  e  $\tau_{bf} = 0,15\tau_{b\max}$ . Para zonas de boa aderência  $s_3 = 1mm$ ,  $\tau_{b\max} = 2\sqrt{f_{ck}}$ , para as demais zonas  $s_3 = 2,5mm$ ,  $\tau_{b\max} = \sqrt{f_{ck}}$ , com  $f_{ck}$  em MPa. As grandezas referentes ao deslizamento,  $s_1$  e  $s_3$ , e as referentes à resistência,  $\tau_{b\max}$  e  $\tau_{bf}$ , devem ainda ser multiplicadas pelo fator definido pela Equação (5.31).

Para a formulação do problema, considere-se a viga equivalente da Fig. 5.5, sujeita à carga  $Q$  no centro do vão. Dados o espaçamento médio das fissuras e o diagrama da força no banzo tracionado para  $Q = Q_u$ , obtém-se a distância  $a_y$  correspondente à posição da força  $R_{sy}$  através de uma das Equações (5.13).

O número de fissuras,  $J_F$ , em cada metade da viga, incluída a central, e o número de subelementos,  $J_E$ , a examinar são dados por:

$$J_F = INT\left(\frac{a_y}{s_m}\right) + 2 \quad (5.21)$$

$$J_E = J_F - 1 \quad (5.22)$$



Em cada fissura  $z_f = 1, 2, \dots, J_F$  são calculadas a tensão e a deformação da armadura,  $\sigma_{sr,z_f}$  e  $\epsilon_{sr,z_f}$ , a partir da força  $R_s$  e da lei constitutiva do aço, para duas etapas:  $Q(i=1) = Q_u$ , e  $Q(i=2) = Q_y$ .

Cada subelemento  $j_1 = 1, 2, \dots, J_E$  é subdividido em segmentos de mesmo comprimento  $\Delta x = s_{rm} / j_b$ , sendo  $j_b$  o número de segmentos (30 a 40), os quais determinam os pontos onde se calculam as grandezas em questão (Figs. 5d, e, f).

Considerando-se no subelemento dois pontos sucessivos,  $j_2$  e  $j_2 + 1$ , do equilíbrio deste trecho resulta o acréscimo de tensão na armadura, cf. Equação (3.5):



$$\Delta\sigma_{sj2,j2+1} = 4 \frac{\Delta x}{\phi_s} \tau_{bj2,j2+1} \quad (5.23)$$

onde  $\tau_{bj2,j2+1}$  é a tensão média de aderência entre estes dois pontos:

$$\tau_{bj2,j2+1} = \frac{\tau_{bj2} + \tau_{bj2+1}}{2} \quad (5.24)$$

e este valor tem de ser estimado de início.

Observe-se que são negativos o deslizamento e a correspondente tensão de aderência à esquerda do ponto de deslizamento nulo (PDN), Figs. 5e, f.

A tensão na armadura no ponto  $j_2 + 1$  é igual a:

$$\sigma_{sj2+1} = \sigma_{sj2} + \Delta\sigma_{sj2,j2+1} = \sigma_{sj2} + 4 \frac{\Delta x}{\phi_s} \tau_{bj2,j2+1} \quad (5.25)$$

valor que permite obter a deformação neste ponto pela lei constitutiva do aço:

$$\varepsilon_{sj2+1} = \varepsilon_s(\sigma_{sj2+1}) \quad (5.26)$$

O acréscimo no deslizamento entre os mesmos pontos é dado por:

$$\Delta s_{j2,j2+1} = \frac{\varepsilon_{sj2} + \varepsilon_{sj2+1}}{2} \Delta x \quad (5.27)$$

com o que se obtém o deslizamento no ponto  $j_2 + 1$ :

$$s_{j2+1} = s_{j2} + \Delta s_{j2,j2+1} = s_{j2} + \frac{\varepsilon_{sj2} + \varepsilon_{sj2+1}}{2} \Delta x \quad (5.28)$$

e deste valor, através da lei  $\tau_b(s)$ , a tensão de aderência no ponto  $j_2 + 1$ :

$$\tau_{bj_{2+1}} = \text{SGN}(s_{j_{2+1}})\tau_b[\text{ABS}(s_{j_{2+1}})] \quad (5.29)$$

Logo, o novo valor da tensão média de aderência entre os pontos  $j_2$  e  $j_2 + 1$  é:

$$\text{NOVO}\tau_{bj_2, j_2+1} = \frac{\tau_{bj_2} + \tau_{bj_2+1}}{2}$$

e deve ser comparado com o anterior, até a seguinte tolerância:

$$\text{ABS}(\text{NOVO}\tau_{bj_2, j_2+1} - \text{ANTIGO}\tau_{bj_2, j_2+1}) \leq \tau_{b \max} / 10^6 \quad (5.30)$$

Para esta tolerância a convergência é conseguida rapidamente, com 2 a 4 iterações.

Como se disse antes, os parâmetros de resistência e de deslizamento que aparecem na lei  $\tau_b(s)$  são afetados pelo fator:

$$\beta_{dj_2} = 0,2 \frac{d_{j_2}}{\phi_s} \leq 1 \quad (5.31)$$

onde  $d_{j_2}$  é a distância do ponto considerado à fissura correspondente. Para pontos  $j_2$  à esquerda e à direita do PDN, respectivamente, têm-se:

$$d_{j_2} = (j_2 - 1) \frac{s_{rm}}{j_b} \quad \text{e} \quad d_{j_2} = s_{rm} - \frac{(j_2 - 1)}{j_b} s_{rm} = (1 - \frac{j_2 - 1}{j_b}) s_{rm} \quad (5.32a) \text{ e } (5.32b)$$

Os parâmetros mencionados passam a ser  $\beta_{dj_2}\tau_{b \max}$ ,  $\beta_{dj_2}\tau_{bf}$ ,  $\beta_{dj_2}s_1$  e  $\beta_{dj_2}s_3$ .

Para atender às condições de contorno do subelemento considerado, observe-se que a tensão de aderência no ponto 1 é nula, e que a deformação na fissura  $z_f + 1$ ,  $\varepsilon_{sr, z_f + 1}$ , a mesma do ponto 1, é dada. Com isto a deformação do último ponto do subelemento, a mesma na fissura  $z_f$ , à direita do PDN, é posta em função do deslizamento  $s_{z_f + 1}$  do primeiro ponto do subelemento,

na fissura à esquerda do PDN, ou seja,  $F(s_{z_f+1}) = \varepsilon_{s,j_b+1}$ . O deslizamento  $s_{z_f+1}$  procurado é aquele para o qual a deformação deste último ponto do subelemento iguala-se à deformação conhecida na fissura,  $\varepsilon_{sr,z_f}$ . A função F pode então ser alterada para a seguinte:

$$F(s_{z_f+1}) = \varepsilon_{s,j_b+1} - \varepsilon_{sr,z_f} \quad (5.33)$$

A raiz desta função é determinada pelo Método Modificado da Falsa Posição, ou *Regula Falsi*. Ver Conte e Boor (1981). Admite-se como tolerância uma das duas condições seguintes, a que se der primeiro ( $\varepsilon$  já multiplicado por 1000, e  $m$  é o número da iteração):

$$ABS[F(s_{z_f+1})] < \varepsilon_{sr,z_f} / 10^4 \quad (5.34a)$$

$$ABS(\varepsilon_{s,j_b+1}^{m+1} - \varepsilon_{s,j_b+1}^m) < 5/10^5 \quad (5.34b)$$

Atendida uma destas tolerâncias ficam determinadas as grandezas do subelemento considerado, a saber,  $\varepsilon_s(x)$ ,  $\sigma_s(x)$ ,  $\tau_b(x)$  e  $s(x)$ . O número de iterações, para as tolerâncias acima, é grande (cerca de 5 a 25).

Este cálculo é feito para as duas etapas mencionadas, i. e., para  $i=1$  faz-se  $Q(1) = Q_u$ , e para  $i=2$  faz-se  $Q(2) = Q_y$ . Conhecidos os deslizamentos  $s$  em cada extremo de um subelemento, resulta a rotação em cada fissura. Na central tem-se a rotação:

$$\theta(i,1) = \frac{2 \times s(i,1, j_b + 1)}{d - x(i)} \quad (5.35)$$

e nas demais fissuras, onde há plastificação da armadura para a primeira etapa, resulta:

$$\theta(i, j_1) = \frac{-s(i, j_1 - 1, 1) + s(i, j_1, j_b + 1)}{d - x(i)} \quad (5.36)$$

Nestas equações o numerador é a abertura da fissura considerada, ao nível da armadura, cf. Equação (5.2). A soma destas rotações é :

$$\theta(i) = \theta(i, 1) + 2 \sum_{j_1=2}^{j_c-1} \theta(i, j_1) \quad (5.37)$$

e a capacidade de rotação plástica resulta igual a:

$$\theta_{pl} = \theta(1) - \theta(2) \quad (5.38)$$

Nas Equações (5.35) e (5.36)  $x(i)$  é a profundidade da LN na seção central, e assume os valores correspondentes a  $Q_u$  para  $i=1$  e a  $Q_y$  para  $i=2$ . Observe-se que, em geral, a inclinação  $v$  do campo de compressão (mas não a das fissuras, supostas já estabilizadas) é distinta para estes dois carregamentos.

Pressupõe-se neste item, como no anterior, que a peça esteja adequadamente dimensionada à força cortante. Também admite-se que as armaduras longitudinal e transversal (estribos verticais) - esta última se houver - sejam constantes em todo o vão da viga equivalente. A influência do espaçamento dos estribos sobre o espaçamento médio das fissuras, *não necessariamente iguais*, não está considerada (ver o item 3.3).

A Fig. 5.6 mostra as curvas da capacidade de rotação plástica em função da taxa mecânica da armadura do banzo tracionado  $\omega_1 = A_{s1} f_y / (b h f_{cm})$ , para uma viga de seção retangular, obtidas com os métodos rigoroso e simplificado descritos. Os dados básicos desta figura são os seguintes: Geometria:  $b/h/d = 300/600/540mm$ ,  $L/d = 6$ ,  $b_0 = 150mm$ ,  $\cot v = 1,20$ ; Concreto: lei parábola-retângulo,  $\varepsilon_{c1} = -0,2\%$  e  $\varepsilon_{c,lim} = -0,5\%$ ,  $f_{cm} = 43MPa$  (tensão de pico),  $f_{ck} = 35MPa$ ,  $f_{ct,5\%} = 2,14MPa$ ; Aço: lei bilinear com encruamento,  $\varepsilon_{su} = 8\%$  e  $f_t/f_y = 1,1$ ,

$f_y = 500MPa$ . Os diâmetros da armadura são crescentes com a taxa mecânica de forma escalonada, e variam de 8 a 25 mm.

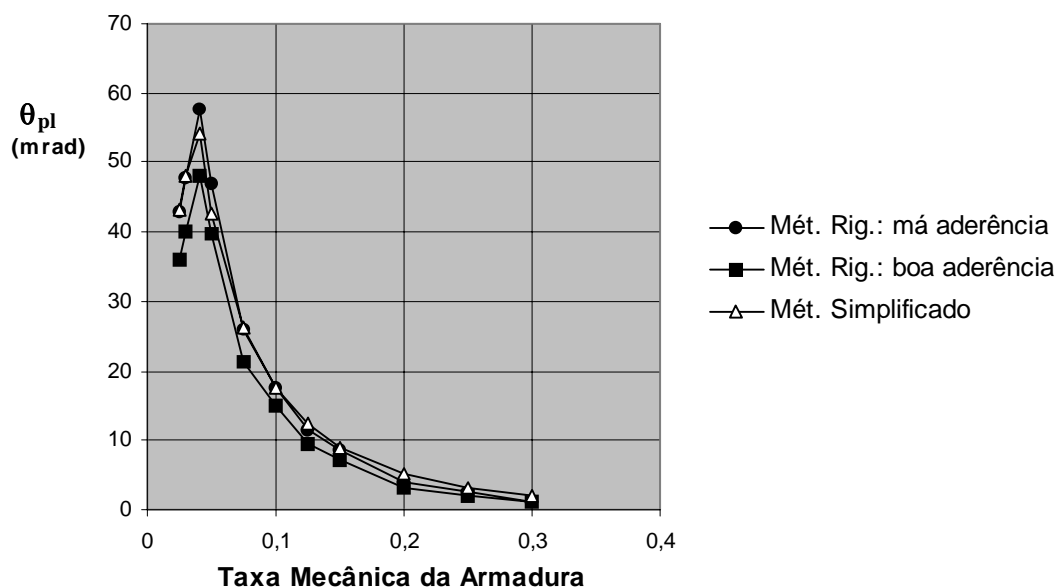


Fig. 5.6: Curvas  $\theta_{pl}(\omega_1)$  obtidas pelos métodos rigoroso e simplificado. Flexão simples, armadura simples, CA-50.

Como se vê na Fig. 5.6, esta comparação vem muito a favor do método simplificado, que dá resultados próximos daqueles do método rigoroso, considerando-se má aderência, até  $\omega_1 \cong 0,15$ . A partir deste valor as diferenças são irrelevantes. Não é de se estranhar que ambos os métodos sejam quase coincidentes, pois a lei  $\sigma_s(\varepsilon_{sm})$  deduzida por Kreller decorre da lei  $\tau_b(s)$  aproximadamente igual à do MC-90. Destes resultados também se pode notar a surpreendentemente pequena diferença entre as curvas de boa e de má aderência. Esta diferença não ultrapassa 18% para o caso examinado nesta figura.

A função  $\theta_{pl}(\omega_1)$  obtida tem o aspecto em forma de tenda, usualmente encontrado nos textos da área. Entretanto, nesta figura a inclinação do campo de compressão foi admitida constante, independente da tensão tangencial e igual à inclinação das fissuras ( $\cot v = 1,20$ ,  $v = v_r = 40^\circ$ ). Quando nesta função é considerada a influência da força cortante, crescente com a taxa mecânica ( $v$

constante e igual a  $90^\circ$  para fissuras verticais, e  $v$  crescente a partir da taxa correspondente a  $\tau_{r1}$ ), obtêm-se resultados diferentes.

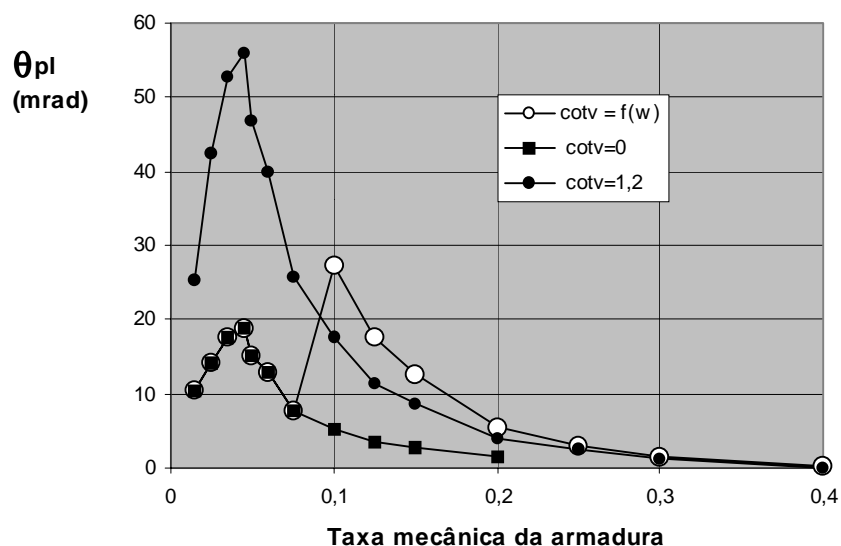


Fig. 5.7: Capacidade de rotação plástica cf. método rigoroso, para  $\cot v$  função da taxa mecânica da armadura. (Indicam-se também as curvas de  $v = 90^\circ$  ou  $\cot v = 0$  e  $v = 40^\circ$  ou  $\cot v = 1,2$ ).

Tabela 5.2: Resultados do programa para comparação entre os métodos rigoroso e simplificado, má aderência,  $\cot v = \text{função}(\omega_1)$ .

$\omega_1 / \phi_s$	$\tau_{r1} / \tau_0$ (MPa)	$\epsilon_{sr,1}$ ( $^\circ / 00$ )	$2a_y / L$	Núm. fiss. plastif.	$\cot v_u$	$\theta_{pl}$ (mrad) Mét. rigor.	$\theta_{pl}$ (mrad) Mét. simpl.
0,015 / 8	0,661 / 0,266	80	0,103	1	0	10,39	7,90
0,025 / 10	0,784 / 0,446	80	0,107	3	0	14,05	14,61
0,035 / 10	0,876 / 0,625	80	0,109	3	0	17,54	17,68
0,045 / 10	0,953 / 0,801	76,40	0,106	3	0	18,82	18,19
0,050 / 12,5	0,987 / 0,879	64,73	0,094	3	0	15,22	14,38
0,060 / 12,5	<b>1,049 / 1,045</b>	57,29	0,086	3	0	12,77	12,38
0,075 / 12,5	1,130 / 1,285	44,35	0,071	3	0	7,67	8,47
<b>0,10 / 16</b>	<b>1,244 / 1,691</b>	<b>32,80</b>	<b>0,271</b>	<b>9</b>	<b>3,040</b>	<b>27,21</b>	<b>26,90</b>
0,125 / 16	1,340 / 2,096	25,55	0,237	9	3,085	17,57	19,01
0,15 / 20	1,424 / 2,499	20,60	0,198	7	2,728	12,67	13,10
0,20 / 20	1,567 / 3,314	14,09	0,138	5	2,078	5,34	6,50
0,25 / 25	1,688 / 4,116	10,45	0,106	5	1,819	2,87	3,77
0,30 / 25	1,794 / 4,924	7,93	0,083	3	1,677	1,51	2,25
0,40 / 25	1,974 / 6,540	4,71	0,049	3	1,527	0,15	0,69

Na Fig. 5.7 representam-se as curvas  $\theta_{pl}(\omega_1)$ , conforme o método rigoroso, escolhendo-se a inclinação do campo de compressão em função da taxa mecânica. Na Tabela 5.2 dão-se os correspondentes resultados do programa, incluídos os do método simplificado. Até um certo valor de  $\omega_1$ , determinado adiante na Fig. 5.9, têm-se somente fissuras verticais, e a capacidade de rotação plástica segue a curva correspondente a  $\cot v = 0$ . Acima desse valor a tensão tangencial (última),  $\tau_0$ , supera o valor  $\tau_{r1}$ , Equação (5.10), correspondente a um quadro de fissuração inclinada totalmente desenvolvido, e há um salto na curva. Este salto é aqui considerado para valores de  $\tau_0 > \tau_{c,M+N_-}$ . Nesta figura indica-se novamente a curva  $\theta_{pl}(\omega_1)$  da Fig. 5.6 para  $\cot v = 1,2$ , com o que fica visível a diferença entre ambos resultados.

Os resultados, considerando-se a inclinação do campo de compressão em função da taxa mecânica da armadura, i. e.,  $\cot v = \text{função}(\omega_1)$ , mostram concordância com a representação qualitativa de Bachmann (1967), dada na Fig. 5.8. Observe-se antes que a um aumento da taxa mecânica corresponde um aumento da carga aplicada  $Q_u$  e, portanto, da tensão tangencial (última),  $\tau_0$ . Nesta figura  $\tau_1$  é o valor da tensão tangencial a partir do qual surgem as fissuras inclinadas. Ver a Tabela 5.3 ( $\beta_w$  é a resistência cúbica do concreto). Bachmann indica também as várias formas de ruptura que podem afetar a capacidade de rotação plástica, a saber:

- (1) nos banzos, esmagamento do concreto ou ruptura da armadura,
- (2) na alma, esmagamento do concreto ou ruptura do estribo, e
- (3) perda de aderência da armadura longitudinal.

Tabela 5.3: Valores de  $\tau_1/f_c$ , cf. Bachmann (1967).

$$(f_c \cong 0,87\beta_w)$$

$\beta_w$ (MPa)	20	30	40	$\geq 50$
$\tau_1$ (MPa)	0,8	1	1,2	1,4
$\tau_1/f_c$	0,046	0,038	0,035	0,032

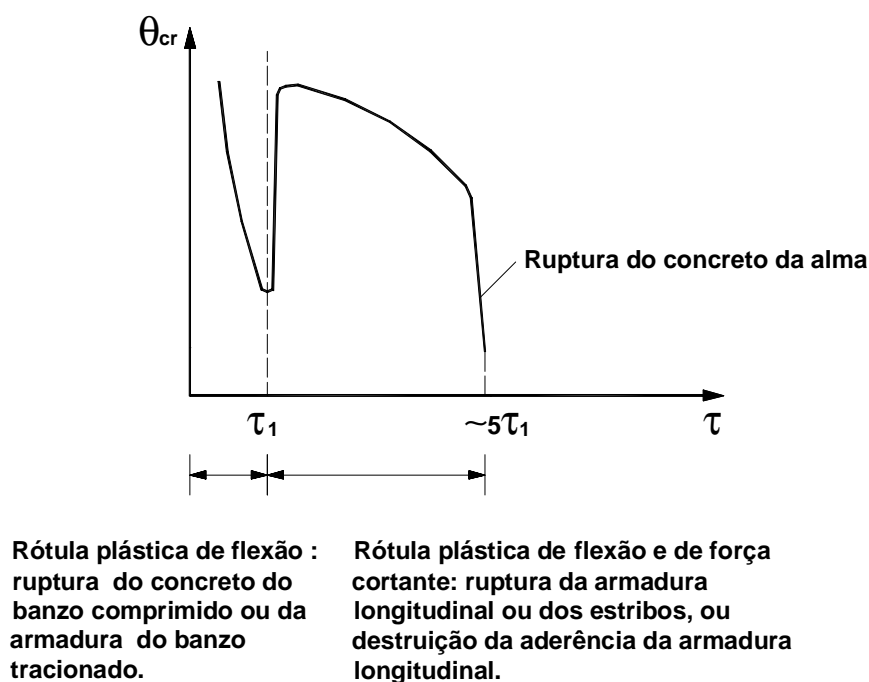


Fig. 5.8: Representação qualitativa do ângulo crítico da rótula plástica em função da tensão de cisalhamento em rótulas de flexão e de flexão e força cortante, cf. Bachmann (1967).

A sua explicação para a Fig. 5.8 é a seguinte:

“...conforme o valor de  $\tau$  formam-se rótulas de flexão ou de flexão e de força cortante. Nas de flexão as deformações plásticas concentram-se tanto mais em uma zona pequena quanto maior for  $\tau$ . De acordo com isso diminui a rotação crítica ao romper a armadura ou o concreto. Se a tensão tangencial for suficientemente grande para gerar fissuras inclinadas, então as deformações plásticas estendem-se a uma zona significativamente maior. Apesar da variação mais rápida do momento solicitante, desenvolvem-se deformações plásticas em um número maior de fissuras, com o que a rotação da rótula pode crescer consideravelmente, até a ocorrência de uma dentre as várias formas de ruptura”.

A Fig. 5.9 mostra as funções  $\tau_0(\omega_1)$  e  $\tau_{r1}(\omega_1)$ , bem como  $0,75\tau_{r1}(\omega_1)$ . Através das interseções destas duas últimas curvas com a primeira



determinam-se as taxas mecânicas para as quais há, respectivamente, 95% e 5% de probabilidade de fissuração inclinada. Para uma taxa mecânica situada neste intervalo as fissuras inclinadas podem ou não estar presentes. Como a tensão tangencial para a qual há fissuração inclinada está sujeita a dispersão, possivelmente o melhor a fazer no projeto, pelo menos em vigas, é limitar inferiormente a taxa mecânica de modo a corresponder a  $\tau_{r1}$ , com o que nas seções críticas examinadas resultam obrigatoriamente somente rótulas de flexão e de força cortante, quer dizer, rótulas com fissuras inclinadas.

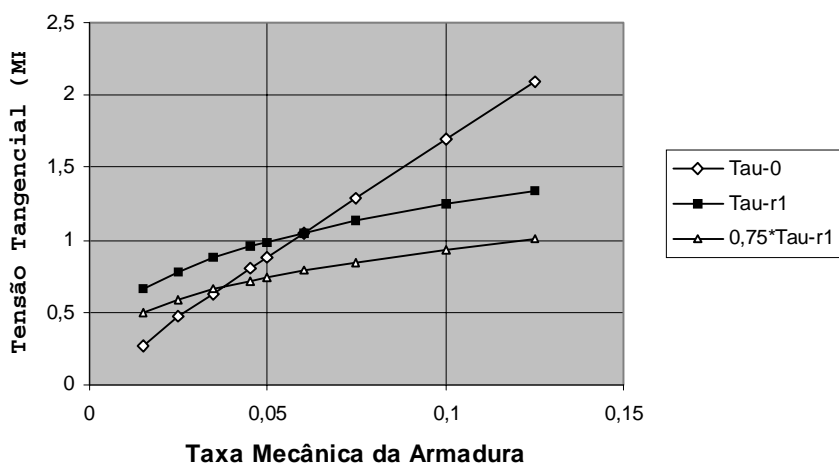


Fig. 5.9: Determinação das taxas mecânicas correspondentes a  $0,75\tau_{r1}$  e a  $\tau_{r1}$ .

Observa-se que há maiores discrepâncias entre ambos os métodos para baixas taxas mecânicas (detectadas em outro caso até  $\omega_1 \cong 0,045$ ), e para baixos quocientes  $f_t/f_y$  (p. ex., 1,05), pois então o número de fissuras com plastificação da armadura é pequeno, por vezes igual a 1. O problema aqui está na distância  $a_y$  que dá a posição de  $R_{yy}$ , mas não corresponde à extensão plastificada (na realidade, menor que  $2a_y$ ), e esta distância cai com  $f_t/f_y$ .

## 5.5 Variação Paramétrica

Mostra-se a seguir a influência dos parâmetros mais importantes na capacidade de rotação plástica, através do modelo rigoroso desenvolvido no item anterior, com o que se pretende deixar mais visíveis os seus efeitos. Toma-se como referência os dados básicos da viga da Fig. 5.6, com alterações indicadas nas demais figuras. Note-se, entretanto, que para facilitar o trabalho do calculista as normas representam  $\theta_{pl}$  em função da profundidade relativa da LN no ELU,  $x/d$ , para o que bastaria transformar a taxa mecânica aqui utilizada naquela do ELU, igual a  $\omega_{1d} = A_{s1}f_{yd}/(0,85f_{cd}bd)$  para seção retangular, valor do qual decorre  $x/d$ . Com os dados da Fig. 5.6 tem-se  $\omega_{1d} = 1,96\omega_1$  e, *grosso modo*,  $x/d \cong 2,5\omega_1$ . Ver o item 5.8, Equações (5.50) a (5.52).

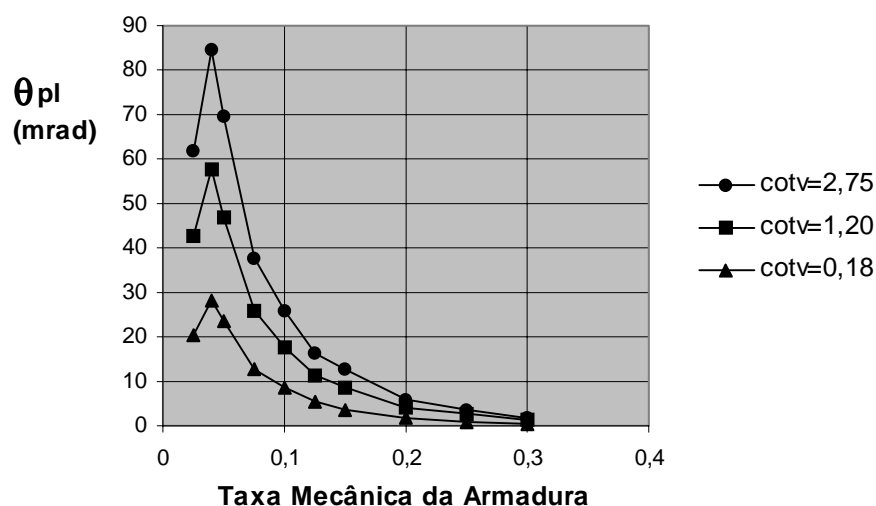


Fig. 5.10: Influência da inclinação do campo de compressão na capacidade de rotação plástica.

Na Fig. 5.10 está representada a função  $\theta_{pl}(\omega_1)$  para três valores do ângulo de inclinação do campo de compressão, independentemente do valor da tensão tangencial, como foi feito na Fig. 5.6. Estes valores são iguais a  $\nu = 20^\circ, 40^\circ$

e  $80^\circ$ , correspondentes a  $\cot v = 2,75$ ,  $1,20$  e  $0,18$ , respectivamente. Nesta figura fica ainda mais evidente a regularidade das curvas  $\theta_{pl}(\omega_1)$ , se o ângulo  $v$  for constante e desacoplado do nível da solitação tangencial  $\tau_0 = V/b_w z$ . O ramo ascendente é praticamente linear, e nele o aço atinge sua deformação última. A ascendência pode ocorrer porque: (1) A posição da força  $R_{sy}$ , dada por  $2a_y/L$ , é quase constante; (2) O espaçamento médio das fissuras decai com a taxa mecânica. Este espaçamento pode ser calculado pela expressão do EC-2, Equação (3.49). Logo, o número de fissuras com plastificação da armadura *no mesmo segmento*  $a_y$  pode aumentar; (3) Mais importante que isto, e mesmo que este número não aumente (como se vê na Tabela 5.2), há aumento da curvatura com  $\omega_1$ , porquanto na seção central é constante a deformação na armadura até que seja atingida a deformação limite do concreto, com o que cresce a rotação plástica. O ponto de máximo da função  $\theta_{pl}(\omega_1)$  corresponde à máxima curvatura possível na seção central, quando ambos materiais atingem simultaneamente suas deformações últimas. A partir deste máximo  $\theta_{pl}(\omega_1)$  decai (quase) hiperbolicamente, e há ruptura do concreto. Ainda quanto ao trecho desta curva correspondente à ruptura do aço, observa-se que este pode se apresentar na forma de um patamar, ao invés de uma curva ascendente, conforme se mostra adiante nas Figuras 5.14, 5.31 e 5.32,. Ver o item 5.9.

A influência da deformação limite (ou nominal) do concreto sobre a capacidade de rotação plástica está mostrada na Fig. 5.11, para  $\varepsilon_{c\lim} = -0,35\%$ ,  $-0,5\%$  e  $-0,7\%$ . Observe-se que os ramos ascendentes seguem a mesma evolução para as três deformações, pois o aço rompe antes do concreto, e há aumento em  $\theta_{pl}$  para maiores encurtamentos do concreto. O encurtamento  $-0,5\%$  é freqüentemente mencionado por diversos pesquisadores, como já dito no item 4.2 (3), e produz rotações plásticas bem maiores que  $-0,35\%$ , um valor muito conservativo para efeito de deformabilidade do concreto em peças hiperestáticas. Qualitativamente, o valor  $-0,7\%$  (ou outro maior em módulo) pode representar o confinamento do concreto por estribos fechados, ou pode, ainda, mostrar o efeito da fluência do concreto sobre a rotação plástica, embora a fluência não-linear nas

proximidades da ruína seja pouco conhecida e tampouco a carga permanente *realmente* aumenta 40% ou 50% seu valor característico, para este efeito.

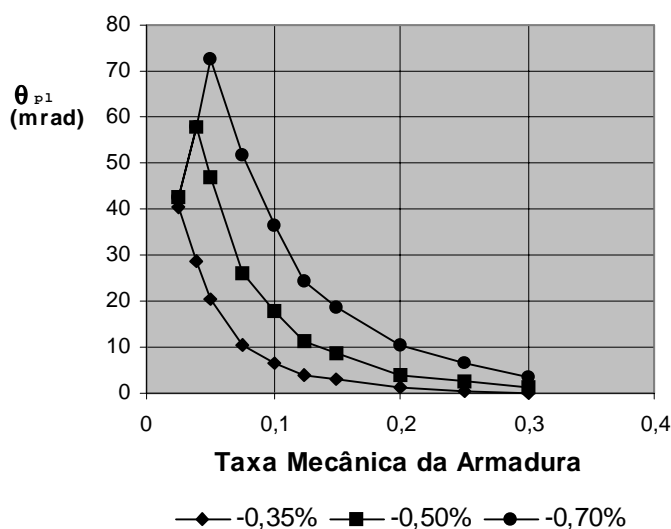


Fig. 5.11: Influência da deformação limite do concreto na capacidade de rotação plástica.

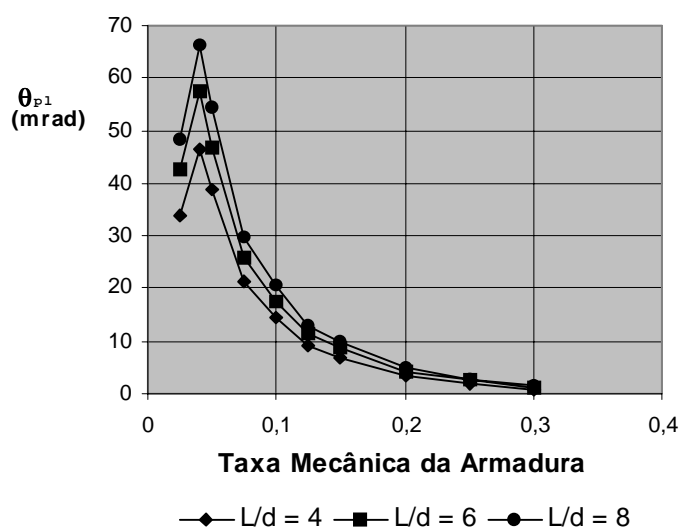


Fig. 5.12: Influência da esbelteza sobre  $\theta_{pl}$ , altura útil  $d = cte$ .

A influência da esbelteza,  $L/d$ , sobre  $\theta_{pl}(\omega_1)$  está mostrada na Fig. 5.12, novamente considerando-se constante a inclinação do campo de compressão, igual a  $40^\circ$ . Nesta figura manteve-se a altura útil da viga e variou-se o vão. Quanto

maior este, maior é a extensão plastificada, pois  $M_u$  e  $M_y$  são os mesmos para uma mesma taxa mecânica, donde maiores rotações plásticas.

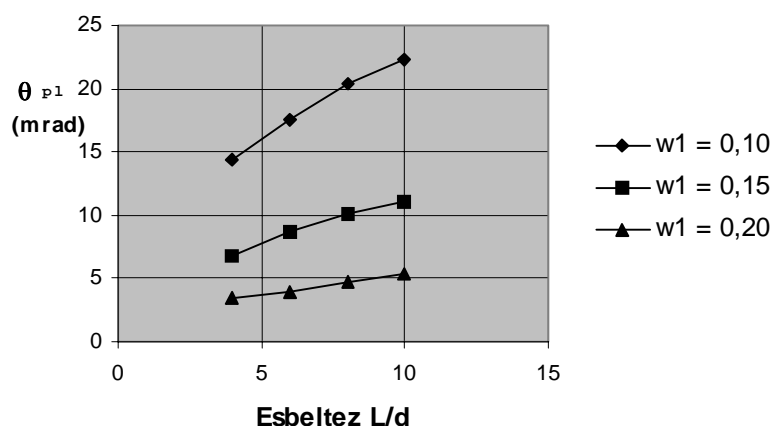


Fig. 5.13: Capacidade de rotação plástica em função da esbelteza.

Na Fig. 5.13 está mostrada a função  $\theta_{pl}(L/d)$  para taxas mecânicas crescentes, e nela se vê um desenvolvimento quase linear. Não se mostra nesta figura a aproximação recomendada pelo MC-90 para o cálculo da capacidade de rotação plástica a partir daquela obtida com  $L/d = 6$ , a saber,  $\theta_{pl} = \theta_{pl,L/d=6} \sqrt{L/(6d)}$ , pois ela é praticamente coincidente com as curvas indicadas. Entretanto, esta simplificação é válida no ramo descendente, para taxas mecânicas acima daquela correspondente a  $\tau_{r1}$ , e não deve, em princípio, ser generalizada, especialmente se a inclinação do campo de compressão  $\nu$  for considerada variável com  $\omega_1$ .

Na Fig. 5.14 estão mostradas as influências do espaçamento médio das fissuras,  $s_m$ , e do diâmetro  $\phi_s$  da armadura do banzo tracionado, aqui mantidos constantes e independentes da taxa mecânica. A aderência mobilizada pela armadura entre duas fissuras sucessivas é afetada pelo fator  $4/\phi_s$ , Equações (3.5) e (5.23). Assim, *um aumento no diâmetro da armadura equivale a uma queda da aderência*, com o que resultam no banzo tracionado deformações médias maiores, e com isso maiores rotações. O mesmo ocorre se houver queda do espaçamento

médio das fissuras. (Igual efeito também têm as barras lisas, não consideradas aqui). Note-se, ainda, o erro que se pode cometer na deformabilidade da peça ao confundir-se o espaçamento médio das fissuras (p. ex.,  $s_{rm} = 150mm$ ) com o espaçamento dos estribos (p. ex., igual a  $300mm$ ).

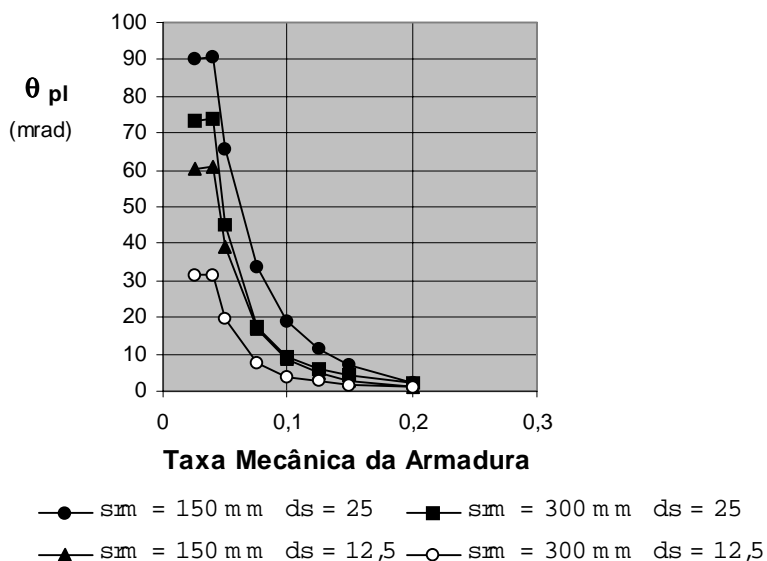


Fig. 5.14: Influências do espaçamento médio das fissuras e do diâmetro da barra em  $\theta_{pl}$ .

Para mostrar de forma mais clara a influência da resistência do concreto sobre  $\theta_{pl}$ , escolhe-se na Fig. 5.15 a taxa *geométrica* da armadura,  $\rho_s = A_{s1}/bd$ , como variável, para os dois concretos aí indicados. Em igualdade de taxas geométricas, as taxas mecânicas têm a seguinte relação:  $\omega_{1,f_{cm}=28} / \omega_{1,f_{cm}=58} \cong 2$ , com o que as profundidades das LNs também mantêm, aproximadamente, esta relação. Logo, no ramo hiperbólico, sendo a deformação limite do concreto a mesma para ambas resistências, têm-se menores curvaturas ( $1/r = -\varepsilon_{c\lim}/x$ ) para o de menor resistência, e com isso menores rotações plásticas.

Na Fig. 5.16 esta *mesma capacidade* é posta em função da taxa mecânica da armadura. Fica evidente que esta variável é muito adequada para representar  $\theta_{pl}$ , e que um concreto de resistência  $f_{ck} = 35$  MPa pode substituir com

boa aproximação todos os concretos na faixa 20 a 50 MPa, pelo menos no ramo descendente.

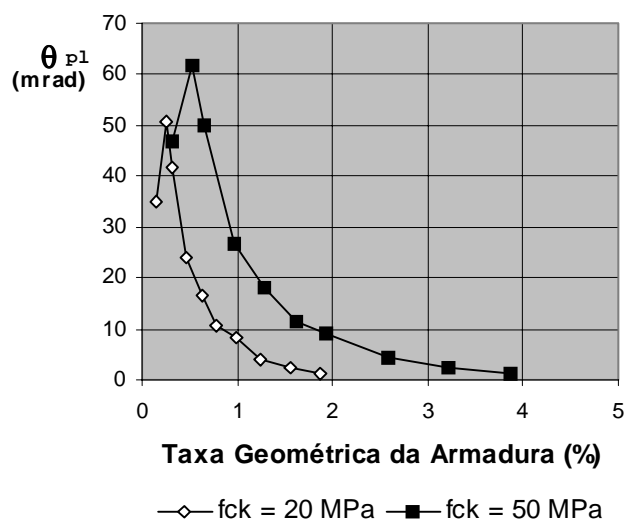


Fig. 5.15: Capacidade de rotação plástica em função de  $\rho_s$  para  $f_{ck}=20$  e 50 MPa.

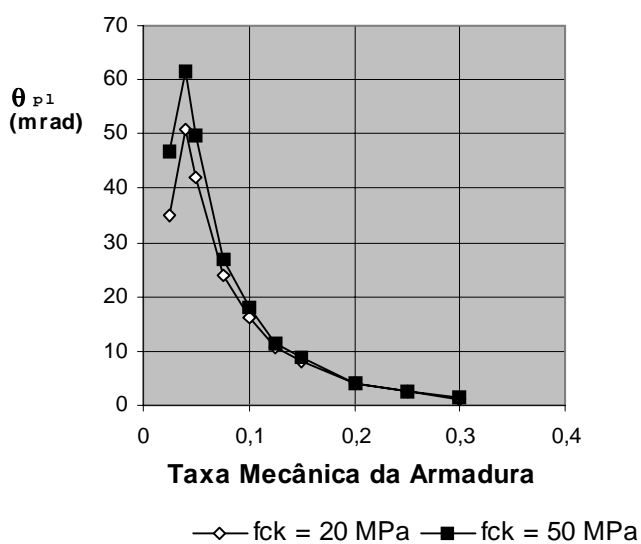


Fig. 5.16: Capacidade de rotação plástica em função de  $\omega_1$  para  $f_{ck}=20$  e 50 MPa.

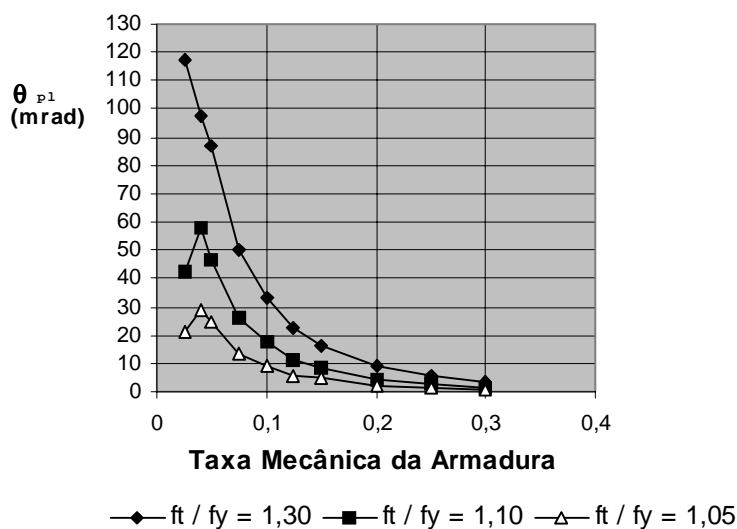


Fig. 5.17: Capacidade de rotação plástica para  $f_t/f_y$  variável,  $\epsilon_{su}$  e  $f_y$  ctes.

Um parâmetro que exerce grande influência sobre a rotação plástica é o dado pelo quociente  $f_t/f_y$ , que juntamente com a deformação última  $\epsilon_{su}$  e a resistência  $f_y$  ao escoamento do aço, representam o grau de encruamento da armadura e sua ductilidade (capacidade de dissipação de energia). As normas fixam os valores característicos (quantil de 5%) destas grandezas para uso no projeto. Mas geralmente têm-se nas estruturas valores superiores de  $f_t/f_y$ , o que corresponde a resistências e deformabilidades excedentes em relação às previstas no projeto. Isto está mostrado qualitativamente na Fig. 5.17. Mantendo-se constantes  $\epsilon_{su}$  e  $f_y$ , o momento e a força cortante últimos crescem com  $f_t$ , com o que se tem zona plastificada de maior extensão. Assim, p. ex., para o aço CA-50 a NBR 7480/1996 específica  $(f_t/f_y)_k = 1,1$  e, indiretamente,  $\epsilon_{su} = 8,275\%$  (igual à deformação plástica medida em  $10\phi_s$  após a fratura da barra, 8%, somada à parcela elástica  $f_t/E_s$ , cf. Tabela 2.3). Se na realidade este quociente for 1,3, p. ex., a capacidade de rotação plástica aumenta muito. Na mesma figura, considerando-se este quociente igual a 1,05, um valor que pode representar, como aproximação, os aços com patamar de escoamento (embora na seqüência deste haja um trecho curvo com encruamento),



têm-se não apenas extensões plastificadas menores, como menores também são as deformações médias da peça. Quer dizer, a plastificação avança pouco dentro do subelemento. Com isto, tem-se menor capacidade de rotação plástica, como mostrado nesta figura.

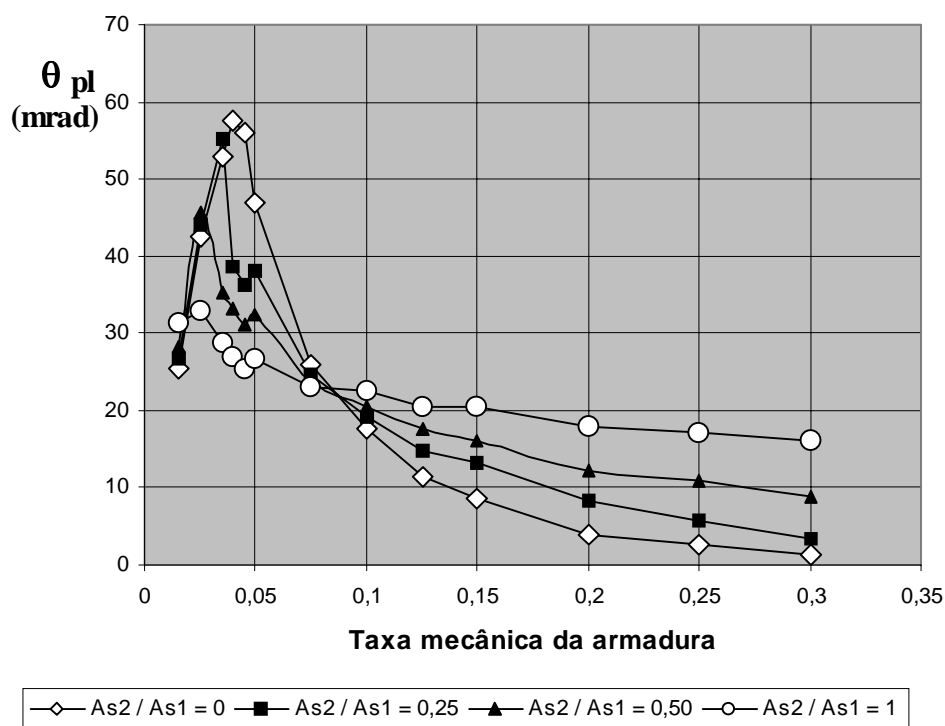


Fig. 5.18: Influência da armadura dupla sobre a capacidade de rotação plástica.

Na Fig. 5.18 mostra-se o efeito *parcialmente* favorável da armadura *dupla*. Dada uma seção transversal, com resistências e armaduras definidas, tem-se *na ruptura* uma correspondência biunívoca entre a profundidade da LN e a taxa mecânica da armadura. Assim, existe um valor da taxa mecânica da armadura para o qual a profundidade relativa da LN é exatamente igual à profundidade relativa da armadura superior. Com isso a deformação nessa armadura *na ruptura* é nula, e é, então, indiferente sua presença ou ausência na seção transversal. Na Fig. 5.18 esta taxa é determinada pelo ponto por onde passa o feixe de curvas  $\theta_{pl}(\omega_1)$  de parâmetros  $A_{s2}/A_{s1}$ , sendo  $A_{s2}$  a área da armadura superior. Acima desta taxa a armadura superior está comprimida e seu efeito sobre a capacidade de rotação

plástica é favorável, como se vê no exemplo pelo seu expressivo aumento para  $\omega_1 > 0,125$ . Para valores abaixo da mencionada taxa a armadura superior está tracionada e, em relação à curva de armadura simples, diminui a deformação da armadura inferior, com o que há queda na rotação plástica (com exceção de taxas muito pequenas). Um resultado semelhante está dado no trabalho de Graubner (1988). Ver também o Boletim 239 do CEB (1997). Entretanto, nesse trabalho é considerada no lugar da capacidade de rotação plástica a curvatura máxima na seção transversal em função da taxa mecânica.

A influência desfavorável da força normal de compressão na capacidade de rotação plástica está mostrada na Fig. 5.19, para três forças normais relativas, a saber,  $\nu = N/(A_0 f_{cm}) = 0, -0,10$  e  $-0,20$ . Os dados desta figura são os mesmos da Fig. 5.6, mas aqui a armadura é simétrica, de posições  $y_{s1}/h = 0,1$  e  $y_{s2}/h = 0,9$ . Nesta figura usou-se o método rigoroso, considerando-se  $\cot \nu = \text{função}(\omega_1)$ , como na Fig. 5.18.

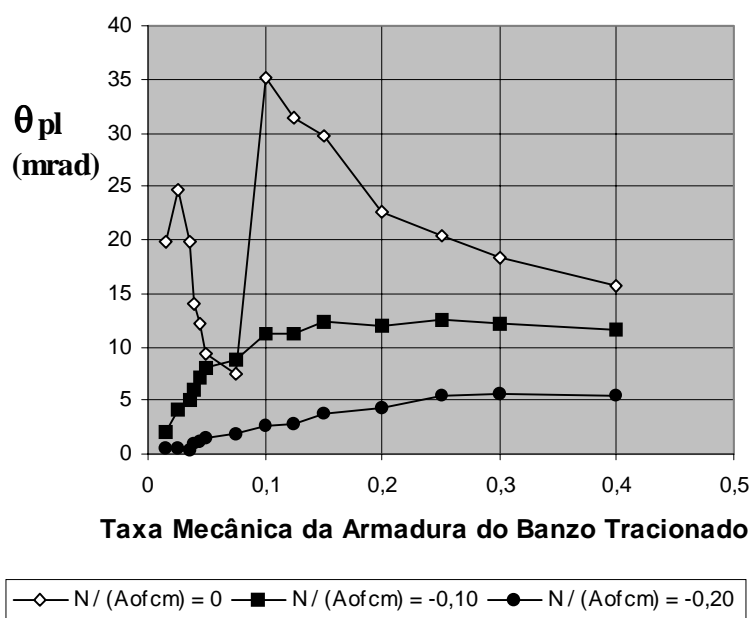


Fig. 5.19: Influência da força normal de compressão na capacidade de rotação plástica, para armadura simétrica.

Em presença de uma força de compressão há *alteração na forma de ruptura*, já para baixas taxas de armadura. Ao invés de romper a armadura, o concreto atinge antes seu encurtamento limite. Simultaneamente há queda do alongamento da armadura e da curvatura. A força cortante aumenta, pois há aumento do momento resistente (até a força normal  $v_{bal2}$ , Fig. 4.8b), mas seu efeito só aparece com mais intensidade quando há fissuras inclinadas. O efeito conjunto das forças normal de compressão e cortante leva a uma diminuição da distância  $a_y$ . As quedas na curvatura e na extensão plastificada reduzem a capacidade de rotação plástica. Deve-se notar ainda que, a partir de um certo valor da taxa mecânica, as forças nas duas camadas da armadura são praticamente iguais, com o que o concreto resiste quase que a toda a força normal aplicada. Disto resulta que a profundidade da LN também é quase constante. Sendo fixa a deformação limite (a do concreto), tem-se capacidade de rotação plástica aproximadamente constante, como se pode ver na Fig. 5.19. Conforme explicado adiante, na Fig. 5.29, em caso de análise no ELU, a força normal a usar na determinação de  $\theta_{pl}$  é a mesma do dimensionamento,  $N_d$ , mas as resistências correspondem aos valores médios (ou característicos). Com isso, a Fig. 5.19 representa praticamente todos os pilares em questão, cuja armadura sofre escoamento e têm capacidade de rotação plástica significativa, compatível com a das vigas de um mesmo pórtico, se a taxa mecânica for escolhida adequadamente.

Neste problema foi observada uma discrepância relativamente maior entre os métodos rigoroso e simplificado, por causa da queda na distância  $a_y$  em relação ao caso de força normal nula.

Como a influência da força normal de compressão faz com que a deformação limite atingida seja a do concreto, só se consegue aumentar a ductilidade da peça através do cintamento do concreto. Ver o item 5.7.

Menciona-se, por fim, a influência da placa de apoio. Conforme a Tabela 5.2, calculada com  $b_0 = 150mm$ , tem-se a rotação  $18,82mrad$  para a taxa  $\omega_1 = 0,045$ . Esta rotação passa a ser  $25,73mrad$ , se a largura da placa dobrar. Há, com isso, um aumento de quase 40% na capacidade de rotação plástica para esta taxa. Aumentos de mesma ordem de grandeza ocorrem, neste exemplo, em todos

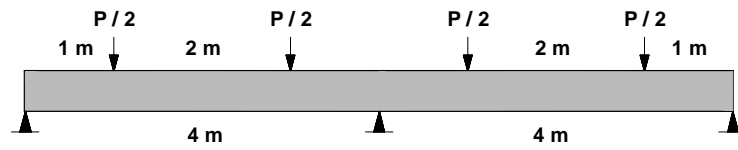
os casos em que não há fissuração diagonal. Nesta mesma tabela, para taxas mecânicas  $\omega_1 \geq 0,10$ , quando a fissuração diagonal está presente, a capacidade de rotação plástica praticamente não se altera.

## 5.6 Comparação entre Resultados Teóricos e Experimentais

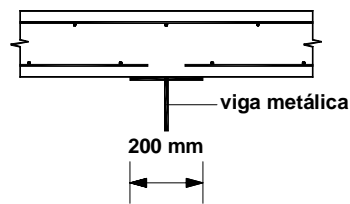
Mostra-se a seguir a comparação entre os resultados teóricos e experimentais obtidos em três séries de ensaios. Na primeira, consideram-se cinco dentre sete resultados decorrentes de ensaios de lajes contínuas, realizados por Eligehausen e Fabritius, CEB 218 (1993). A segunda série de ensaios, realizados por Sigrist e Marti (1993), refere-se a quatro vigas I (T1 a T4) de concreto armado (das quais só se examinam aqui as três primeiras) de um total de seis (duas protendidas, T5 e T6). Na terceira série, têm-se os ensaios de Bosco e Debernardi, CEB 218 (1993), em vigas isostáticas de seção retangular, das quais só se consideram as de altura  $h = 400mm$  e sujeitas a uma única carga concentrada.

Os mencionados ensaios de Eligehausen e Fabritius, cf. a Fig. 5.20, referem-se a lajes contínuas de dois vãos, carregadas simetricamente com duas cargas concentradas por vão, e armadas com telas soldadas, de mesma área nos vãos e no apoio interno ( $\rho_s = A_s/bd = 0,3\%$ ).

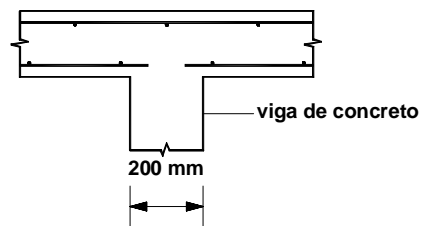
Como se vê nesta figura, todos os testes têm como apoio central uma viga I metálica, com exceção do teste 4.1, no qual a laje apoia-se numa viga transversal de concreto, de largura 200 mm. São dadas a distância entre pontos de momentos nulos ( $L/d = 11$ ) e as características da armadura (Tabela 5.4). O concreto tem resistência  $f_{cm} = 65,1MPa$ . No cálculo adota-se o diagrama parábola-retângulo e fixa-se  $\varepsilon_{clim} = -0,4\%$ ; além disso, admite-se boa aderência. As inclinações das fissuras (verticais) e do campo de compressão valem  $\nu = \nu_r = 90^\circ$ . O espaçamento médio das fissuras ( $s_{m} = 123,8mm$ ), utilizando-se a expressão do EC-2, Equação (3.49), é quase igual à metade do espaçamento da armadura transversal que compõe a tela ( $125mm$ ).



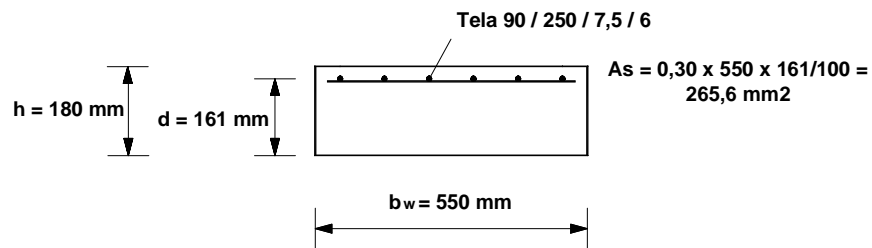
(a) Geometria e carregamento



(b) Apoio central T1.1, T2.0, T2.1, T6.1



(c) Apoio central T4.1



(d) Seção do apoio central

Fig. 5.20: Dados dos ensaios de Eligehausen e Fabritius, CEB 218 (1993).

Tabela 5.4: Dados da armadura do apoio central.

Teste	1.1	2.0	2.1	4.1	6.1
$f_y$ (MPa)	508	602	594	598	615
$f_t$ (MPa)	555	639	642	644	650
$f_t/f_y$	1,093	1,061	1,080	1,077	1,057
$A_G$ ( $^{\circ}/_{00}$ )	49	42	33	35	34
$A_{10}$ ( $^{\circ}/_{00}$ )	120	109	96	91	93
$0,5 \times (A_G + A_{10})$ ( $^{\circ}/_{00}$ )	84,5	74,5	64,5	63	63,5
$\omega = A_s f_y / (b d f_{cm})$	0,0234	0,0277	0,0274	0,0276	0,0283

Toma-se como deformação última do aço a média entre  $A_g$  e  $A_{10}$  (a primeira é a deformação plástica correspondente ao pico da curva carga-deformação da barra nua ensaiada, a segunda é a deformação plástica residual medida na distância igual a  $10\phi_s$ , após a ruptura). A taxa mecânica, dada na Tabela 5.4, é muito baixa e varia entre 0,0234 e 0,0283, de modo que a ruptura da seção crítica ocorre pelo aço. Para efeito de comparação toma-se a média das rotações plásticas medidas, correspondentes ao colapso da laje ( $\theta_{pl,f}$ ) e a 95% do máximo momento fletor no apoio, no ramo descendente da curva  $M(\theta)$ , ( $\theta_{pl,95\%}$ ). Os resultados dados na Tabela 5.5 referem-se à seção do apoio central. Dela conclui-se que há concordância muito boa entre a teoria e os experimentos, exceto no teste 4.1, isto porque no apoio central formaram-se duas fissuras com plastificação da armadura, uma em cada interface laje-viga de concreto, ao passo que a teoria acusou plastificação em uma só fissura, na central, *o que também ocorreu nos demais testes.*

Tabela 5.5: Resultados teóricos e experimentais (Eligehausen e Fabritius, CEB 218 (1993)).

Teste	$M_{u,teor}$ (KNm)	$M_{utest,Pmax}$ (KNm)	$\frac{M_{u,teor}}{M_{utest,Pmax}}$	$\theta_{pl,teor}$ (mrad)	$\theta_{pl,u} = \frac{(\theta_{pl,95\%} + \theta_{pl,f})}{2}$ (mrad)	$\frac{\theta_{pl,teor}}{\theta_{pl,u}}$
1.1	23,10	22,6	1,022	23,25	$0,5 \times (18,8 + 30,1) = 24,45$	0,95
2.0	26,53	30,2	0,878	18,76	$0,5 \times (20,0 + 22,2) = 21,10$	0,89
2.1	26,61	27,3	0,975	18,16	$0,5 \times (15,5 + 15,9) = 15,75$	1,15
4.1	26,71	28,6	0,934	17,15	$0,5 \times (21,8 + 28,3) = 25,05$	0,68
6.1	26,95	25,3	1,065	15,26	$0,5 \times (15,8 + 20,6) = 18,20$	0,84

Nestes ensaios é interessante mencionar as seguintes conclusões dos autores:

- (1) A pretendida redistribuição de momentos fletores (28,5%) em relação à solução elástica foi conseguida.

- (2) A redistribuição de momentos deveu-se a duas parcelas distintas: a primeira, cerca de 60% , refere-se à fissuração mais pronunciada sobre o apoio central comparada com a do vão; a segunda provém do alongamento plástico da armadura. Com isso fica evidente também experimentalmente que a redistribuição de solicitações é um problema de rigidez relativa e de plastificação, como não pode deixar de ser.
- (3) Como já mencionado no item 4.2 (3), a rotação  $\theta_{pl,95\%}$  é cerca de 40 a 100% maior do que a rotação plástica correspondente ao pico da curva experimental  $M(\theta)$ .

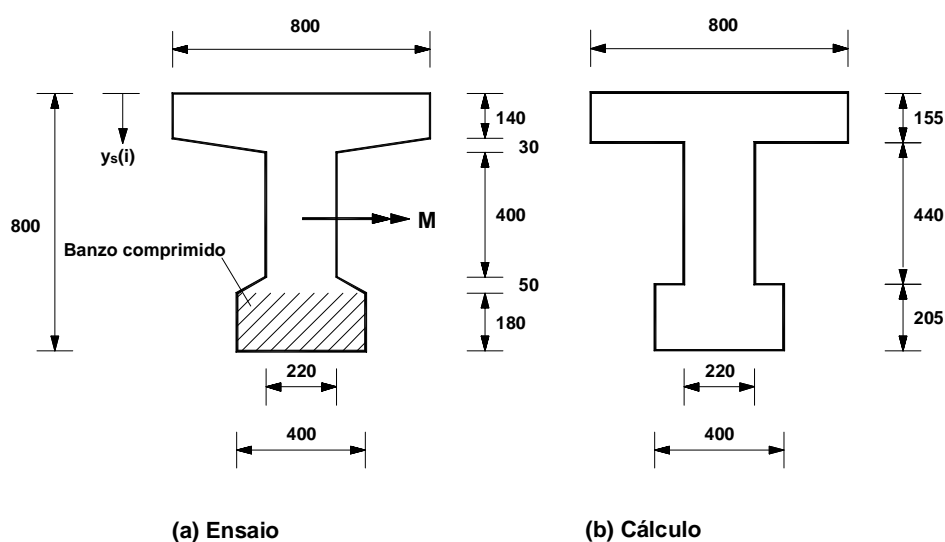


Fig. 5.21: Seção transversal das vigas ensaiadas por Sigrist e Marti (1993) e seção adotada no cálculo.

Nos ensaios de Sigrist e Marti têm-se vigas isostáticas com dois vãos, um interno ( $9,60m$ ) carregado com carga uniformemente distribuída, e outro em balanço ( $3,50m$ ), com uma carga concentrada na sua ponta. Todas as vigas têm mesma seção transversal (Fig. 5.21).

A capacidade de rotação plástica é determinada na seção crítica do apoio vizinho ao balanço, através de uma viga bi-apoiada equivalente, de esbeltez  $l/d = 8$ , com  $d = 725mm$ . O talão comprimido (inferior) tem armadura transversal

igual a  $\phi 10c/100mm$ , mais os estribos da alma, de diâmetro  $12mm$  e espaçamentos iguais a  $100mm$  (T1),  $200mm$  (T2 e T4) e  $300mm$  (T3). As armaduras longitudinais estão indicadas na Tabela 5.6.

A largura da placa de apoio é igual a  $240mm$ . O banzo tracionado contém barras de diferentes diâmetros, mas mantém o número total de barras, igual a 16. Por isso, toma-se o diâmetro equivalente igual a

$$\phi_{s,eq} = \sqrt{\frac{A_{s1}}{4\pi}}$$

para o cálculo do espaçamento médio das fissuras, através da expressão do EC-2. A área efetiva de concreto é igual à área do talão tracionado ( $800 \times 155mm^2$ ). A resistência do concreto é  $f_c = 45MPa$ , e as deformações limites admitidas no cálculo são iguais a  $-8^0/_{00}$  (mesmo valor adotado na comparação teórica feita por Sigrist (1995)) e  $-9,5^0/_{00}$ . Estes encurtamentos são elevados por causa do forte cintamento do talão comprimido. Além disso, na T3 o destacamento do cobrimento de concreto desse banzo deu-se para o encurtamento  $-9,2^0/_{00}$ . Para o aço têm-se  $f_t/f_y = 600/500MPa$  e  $\epsilon_{su} = 100^0/_{00}$ .

Tabela 5.6: Dados da armadura e espaçamento médio das fissuras.

Viga	Banzo tracionado (superior)					Banzo comprimido (inferior)					
	$A_{s1}$ ( $mm^2$ )	$y_{s1}$ ( $mm$ )	$\phi_{s,eq}$ ( $mm$ )	$s_m$ ( $mm$ ) (teoria)	$s_m$ ( $mm$ ) (teste)	$A_{s2}$ ( $mm^2$ )	$y_{s2}$ ( $mm$ )	$A_{s3}$ ( $mm^2$ )	$y_{s3}$ ( $mm$ )	$A_{s4}$ ( $mm^2$ )	$y_{s4}$ ( $mm$ )
1,2	7025	75	23,6	91,7	100	308	588	308	645	616	762
3	3645	75	17	107,8	100						

Nessas vigas a taxa mecânica da armadura do banzo tracionado (0,14 na T3 e 0,269 nas T1, 2 e 4) é tal que há influência da força cortante (fissuras inclinadas), e a ruptura dar-se-ia pelo concreto do banzo comprimido, se a força cortante fosse desconsiderada. Nas T2 e T4 o esmagamento do concreto da alma



precedeu o do banzo comprimido, mas esta última forma de ruptura, na T2, estava prestes a ocorrer. Com isso, exclui-se desta comparação também a T4. Os resultados teóricos, admitindo-se boa aderência, estão dados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Resultados teóricos para encurtamentos limites iguais a  $-8^0 /_{00}$  e  $-9,5^0 /_{00}$  (em parênteses).

Viga	$Q_u$ (KN)	$\theta_{pl}$ (mrad)	$v_u$	Número de fissuras plastificadas
1,2	1637 (1649,8)	20,3 (28,3)	30° (30°)	11 (13)
3	958,2 (971,2)	65,9 (88,9)	20,3° (20,7°)	17 (19)

Como se vê nesta tabela, as inclinações do campo de compressão da teoria, para fissuras com inclinação  $v_r = 40^\circ$ , indicaram  $30^\circ$  nas T1 e 2 e  $20,3^\circ$  na T3. A média destes ângulos,  $25^\circ$ , é exatamente o valor considerado por Sigrist.

Tabela 5.8: Resultados teóricos e experimentais (Sigrist e Marti (1993)).

Ensaio	$Q_{u,teor}$ (KN)	$Q_{u,test}$ (KN)	$\frac{Q_{u,teor}}{Q_{u,test}}$	$\theta_{pl,teor}$ (mrad)	$\theta_{pl,test}$ (mrad)	$\frac{\theta_{pl,teor}}{\theta_{pl,test}}$
T1	1643	1602	1,03	28,3	40	0,71
T2	1643	1560	1,05	28,3	23	1,23
T3	965	962	1,00	88,9	95	0,94

A Tabela 5.8 mostra lado a lado os resultados teóricos e experimentais da carga última e da capacidade de rotação plástica. Para a primeira grandeza tomou-se a média dos valores da Tabela 5.7 e para a rotação os valores correspondentes ao maior encurtamento. Por esta comparação, vê-se que a concordância entre a teoria e os testes pode ser considerada satisfatória,

especialmente porque aqui há influência da força cortante, ao contrário da primeira série, em que as fissuras são praticamente verticais. Como no caso predomina a ruptura do concreto, a capacidade de rotação plástica mostra-se bastante sensível ao encurtamento limite adotado.

Na terceira série de ensaios, os autores Bosco e Debernardi registraram os resultados de 44 vigas, dos quais só se examinam aqui os relativos à seção  $b \times h = 200 \times 400 \text{ mm}^2$  e com uma única carga concentrada (no centro do vão). A esbelteza da viga  $L/h$  é igual a 10. Para a largura da placa adota-se  $b_0 = 100 \text{ mm}$ . São considerados dois tipos de aço, denominados A (alta ductilidade) e B (ductilidade normal). As vigas têm denominação T4 a T7, seguida das letras A ou B conforme o aço, e do número 1, o que indica tratar-se de ensaios com uma única carga no vão. As armaduras usadas estão resumidas na Tabela 5.9. Observe-se que o diâmetro da armadura do banzo tracionado é o mesmo para todas as oito vigas. A armadura transversal é igual a  $\phi 6c / 200 \text{ mm}$ .

Tabela 5.9: Dados da armadura.

Vigas	Armadura tracionada		Armadura comprimida		$\rho_s = \frac{A_{s1}}{bh}$ (%)	$A_{s1}$ ( $\text{mm}^2$ )
	$A_{s1}$	$y_{s1}$ ( $\text{mm}$ )	$A_{s2}$	$y_{s2}$ ( $\text{mm}$ )		
T4A1 e B1	2 $\phi$ 12	35	2 $\phi$ 10	355	0,28	226
T5A1 e B1	4 $\phi$ 12	35	2 $\phi$ 10	355	0,57	452
T6A1 e B1	8 $\phi$ 12	40	2 $\phi$ 10	355	1,13	904
T7A1 e B1	12 $\phi$ 12	50	2 $\phi$ 12	355	1,70	1360

As rotações plásticas foram determinadas, nos ensaios, de três maneiras distintas:

$\theta_{pm}$  é a rotação plástica correspondente ao pico da curva  $M(\theta_p)$ , e decorre da integral da diferença das curvaturas médias  $(1/r_m - 1/r_{ym})$  no trecho plastificado, medidas no ensaio.

$\theta_{pu}$  é a rotação plástica última, correspondente a 90% do máximo momento, medida no ramo descendente da curva  $M(\theta_p)$ , antes da ruptura. Quando esta ocorrer primeiro, usa-se a rotação correspondente.

$\theta_{pf} = 4(\delta_{f_{tot}} - \delta_y)/L$  é a rotação plástica calculada a partir da diferença das flechas medidas no centro do vão, entre o início do escoamento da armadura e a ruptura da viga.

Estas duas últimas rotações diferem pouco entre si. Na comparação feita adotou-se a menor delas. A primeira rotação é bem menor que  $\theta_{pu}$  e  $\theta_{pf}$ , exceto nas vigas T4A1 e T5A1.

Tabela 5.10: Resultados experimentais e teóricos, aço A.

Viga	Ensaio				Teoria				$Q_{u,exp}/Q_{u,teor}$
	$Q_{u,exp}$ (KN)	$\theta_{pm}$ (mrad)	$\theta_{pu}$ (mrad)	$\theta_{pf}$ (mrad)	$Q_{u,teor}$ (KN)	$\theta_{pl,teor}$ (mrad)	Núm. fiss. plastif.	$v_u$	
T4A1	58,07	148,2	179	165	54,53	52,63	5	90°	1,065
T5A1	108,23	124,5	146,5	144	100,64	27,53	5	90°	1,075
T6A1	201,55	17,6	41	48	178,89	40,85	15	9,9°	1,127
T7A1	223,32	2	7,4	10	240,75	6,43	7	21°	0,928

Tabela 5.11: Resultados experimentais e teóricos, aço B.

Viga	Ensaio				Teoria				$Q_{u,exp}/Q_{u,teor}$
	$Q_{u,exp}$ (KN)	$\theta_{pm}$ (mrad)	$\theta_{pu}$ (mrad)	$\theta_{pf}$ (mrad)	$Q_{u,teor}$ (KN)	$\theta_{pl,teor}$ (mrad)	Núm. fiss. plastif.	$v_u$	
T4B1	53,79	22,3	31,2	35	51,96	14,80	3	90°	1,035
T5B1	107,70	30,2	47,8	51	99,46	17,38	3	90°	1,083
T6B1	199,84	26,5	54,5	50	179,87	33,33	13	10°	1,111
T7B1	239,72	3,7	5,5	8	242,67	4,96	7	21°	0,988

Os parâmetros do aço A são os seguintes:  $f_t/f_y = 672,2MPa/587,3MPa = 1,15$ ,  $\varepsilon_{su} = 66,5^0/_{00}$ , e os do aço B são iguais a:  $f_t/f_y = 641MPa/595,6MPa = 1,076$  e  $\varepsilon_{su} = 43,3^0/_{00}$ . Para o concreto tem-se  $f_c = 27,8MPa$ , encurtamento limite igual a  $-8^0/_{00}$  (Sigrist considera dois encurtamentos limites,  $-6^0/_{00}$  e  $-8^0/_{00}$ ), e boa aderência. O vão da viga é igual a  $4m$ . Ver as Tabelas 5.10 e 5.11, e as Figuras 5.22 e 5.23.

Nestas tabelas e figuras pode-se observar que:

- (1) A relação entre as cargas experimental e teórica,  $Q_{u,exp}/Q_{u,teor}$ , mostra concordância muito boa.
- (2) Nas vigas 6 e 7 com fissuras (teoricamente) inclinadas, há concordância relativamente boa entre as rotações plásticas teórica e experimental. Desvio maior ocorre na viga 6B1, mas sua rotação plástica calculada situa-se entre  $\theta_{pm}$  e  $\theta_{pf}$ .
- (3) Nas vigas com baixas taxas geométricas de armadura (T4 e T5), entretanto, há diferenças consideráveis entre as rotações plásticas experimental e teórica. Como aqui há predominância de grandes deformações no aço, isto sugere que seus parâmetros não estão bem representados na teoria. O mesmo ocorre com a deformação limite do concreto. Além disso, uma alteração no número de fissuras com plastificação, relativamente menor do que nas vigas 6 e 7, produz uma significativa alteração na rotação plástica. Também uma simples alteração na inclinação do campo de compressão (de  $90^\circ$  para  $60^\circ$ , p. ex.) aumenta a rotação plástica teórica, e aproxima os resultados.
- (4) Note-se um fato interessante captado pelo modelo teórico nas vigas 4 e 5 (duas e quatro barras), a saber: o sinal da derivada da rotação plástica em relação à taxa geométrica,  $d\theta_{pl}/dp_s$ , é o mesmo na teoria e no ensaio, negativo para o aço A, e positivo para o aço B.

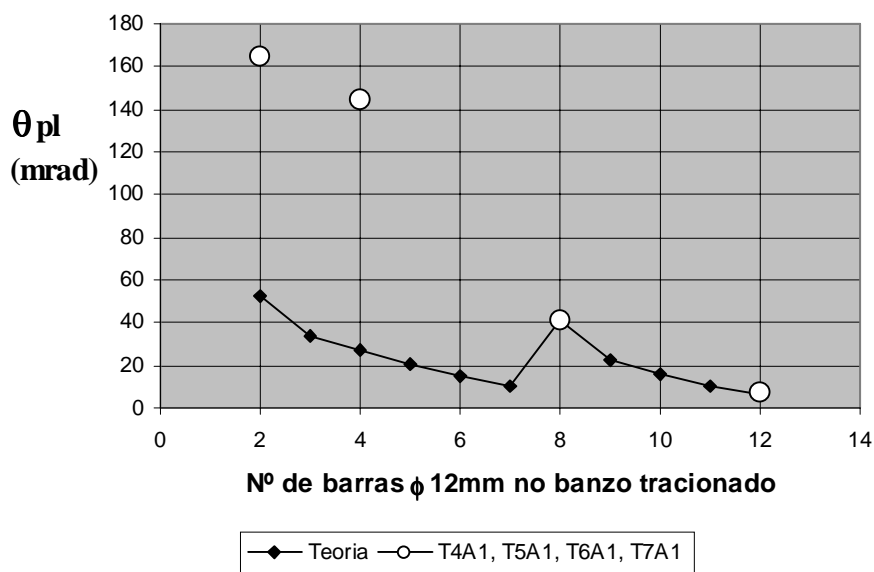


Fig. 5.22: Resultados teóricos e experimentais, aço A, ensaios de Bosco e Debernardi, CEB 218 (1993).

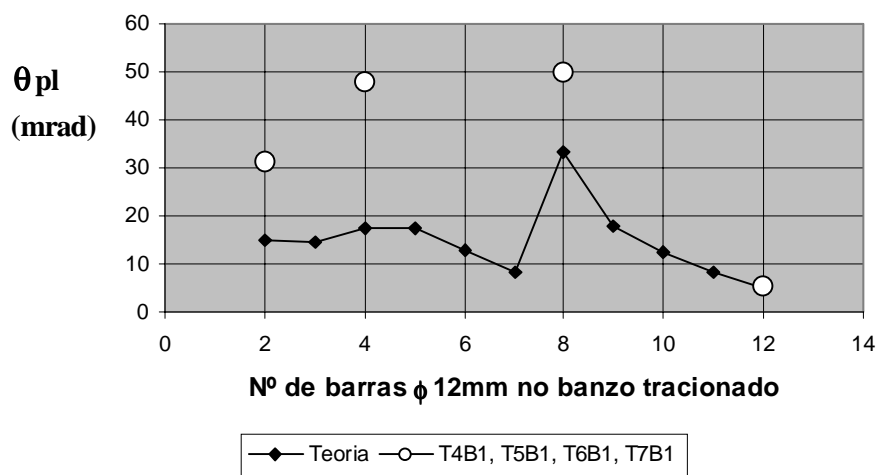


Fig. 5.23: Resultados teóricos e experimentais, aço B, ensaios de Bosco e Debernardi, CEB 218 (1993).

Destas comparações destacam-se dois pontos importantes: o primeiro refere-se à necessidade de uma representação precisa das leis constitutivas dos materiais, o segundo diz respeito à necessidade de uma definição

*convencional* da capacidade de rotação plástica a partir de ensaios, especialmente nas estruturas hiperestáticas.

## 5.7 Capacidade de Rotação Plástica de Pilar Cintado

O critério de plastificação Mohr-Coulomb, mostrado no item 2.5, do qual resultaram a resistência e a correspondente deformação do concreto confinado, dadas pelas Equações (2.55) e (2.56) respectivamente, pressupõe tensões de confinamento constantes ao longo da superfície lateral do corpo de concreto nas duas direções principais e ortogonais à direção da carga aplicada. Isso dificilmente se consegue nas peças lineares de concreto, em particular nos pilares. O confinamento lateral do concreto axialmente comprimido é obtido através de estribos fechados nas seções retangulares, e de estribos circulares ou de espiras nas seções circulares.

Além de confinar o concreto com um certo grau de eficiência a armadura transversal nos pilares tem outras funções, a saber:

- (1) resistir à força cortante,
- (2) impedir a flambagem das barras longitudinais da armadura comprimida, e
- (3) estruturar o esqueleto da armadura para permitir seu correto posicionamento nas formas durante a concretagem.

No que segue estima-se a capacidade de rotação plástica de pilares cintados, tomando-se como exemplo uma seção transversal quadrada. Para isso é essencial obter a lei constitutiva do concreto confinado e sua deformação limite.

Como mostrado na Fig. 2.2, para tensões acima de  $(0,75a0,80)f_c$ , o concreto comprimido axialmente sofre uma expansão lateral suficientemente grande para levar a armadura transversal à plastificação. As forças transmitidas pelos estribos ao concreto têm distribuição espacial em forma de arco (uma parábola do segundo grau), tanto em planta, ao nível do estribo, quanto em elevação, entre dois estribos sucessivos. Ver a Fig. 5.24.

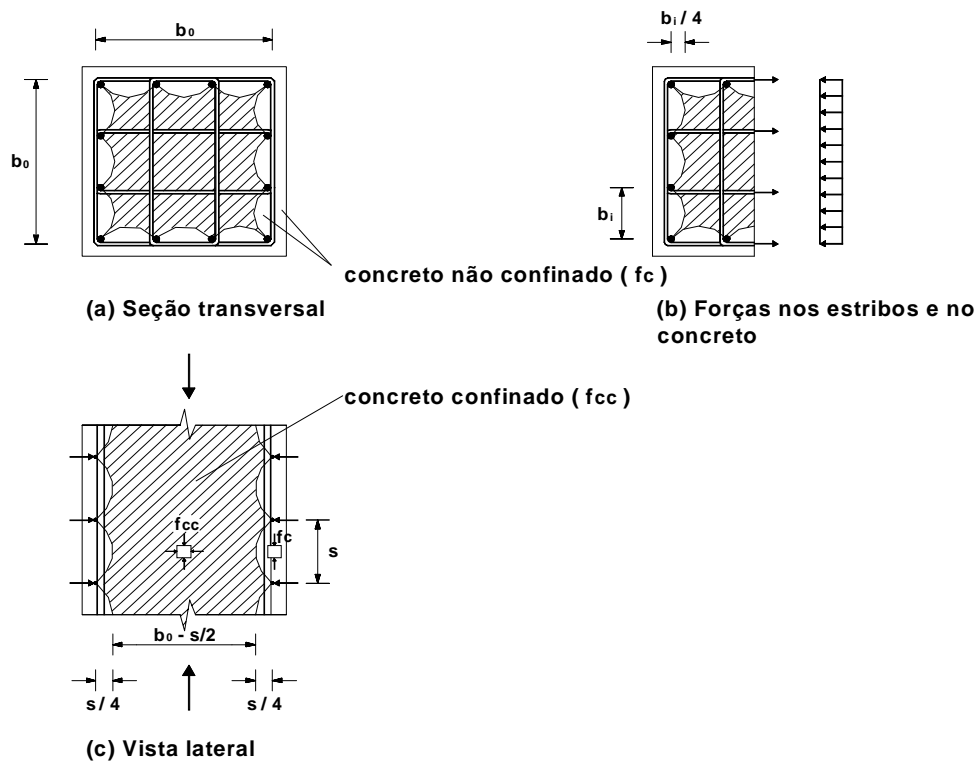


Fig. 5.24: Efeito do cintamento em pilar de seção quadrada.

Considerando-se em planta a distância  $b_0$  entre eixos extremos dos estribos, a área do núcleo de concreto é, cf. Fig. 5.24,  $A_{c0} = b_0^2$ . Ao nível do estribo tem-se a área de concreto efetivamente confinado igual a

$$A_{c0} - \frac{1}{6} \sum_1^n b_i^2$$

onde  $n$  é o número de arcos ( $\geq 4$ ) em planta, igual ao número de barras longitudinais. A área relativa efetivamente confinada em planta é dada pelo fator:

$$\alpha_n = \frac{A_{c0} - \frac{1}{6} \sum_1^n b_i^2}{A_{c0}} = 1 - \frac{8}{3n} \quad (5.39)$$

onde as distâncias  $b_i$  foram admitidas constantes e iguais a  $4b_0/n$ .

Desprezando-se no cálculo da área efetivamente confinada em elevação a redução de  $A_{c0}$  ao nível do estribo, resulta à meia distância entre dois estribos sucessivos a seguinte área relativa efetivamente confinada em elevação:

$$\alpha_s = \frac{(b_0 - \frac{s}{2})^2}{A_{c0}} = (1 - \frac{s}{2b_0})^2 \quad (5.40)$$

A área final efetivamente confinada, considerados os dois efeitos, é igual a:

$$A_{cc} = \alpha_n \alpha_s A_{c0} \quad (5.41)$$

com o que a seção mais fraca do pilar é a situada à meia distância entre dois estribos sucessivos. Pondo-se a resistência equivalente da seção de área  $A_{c0}$  igual a  $K_s f_c$ , tem-se:

$$A_{c0} K_s f_c = (A_{c0} - A_{cc}) f_c + A_{cc} f_{cc}$$

ou, usando-se (5.41):

$$K_s = 1 + \alpha_n \alpha_s \left( \frac{f_{cc}}{f_c} - 1 \right) \quad (5.42)$$

onde a segunda parcela representa o ganho de resistência devido ao confinamento. O fator  $K_s$ , conforme Sheikh e Uzumeri (1982), é dado por:

$$K_s = 1 + \frac{\alpha_n \alpha_s \sqrt{\rho_{stV} f_y}}{0,14 f_c} \quad (5.43)$$



onde as resistências estão em MPa, e  $\rho_{stV}$  é a relação entre os volumes do estribo e do núcleo de concreto entre dois estribos sucessivos, igual a (Fig. 5.24):

$$\rho_{stV} = \frac{28 A_{st1}}{3 b_0 s} \quad (5.44)$$

sendo  $A_{st1}$  a área de uma barra transversal.

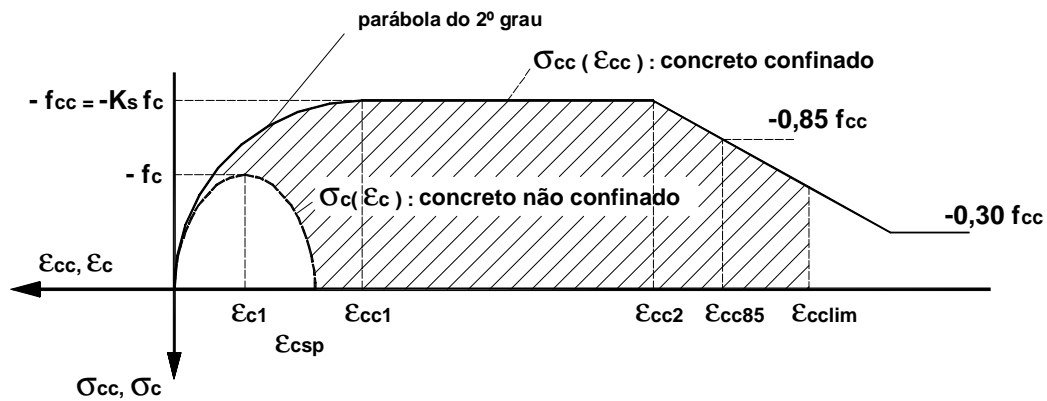


Fig. 5.25: Lei tensão-deformação do concreto confinado, cf. Sheikh e Uzumeri (1982).

O diagrama  $\sigma_{cc}(\epsilon_{cc})$  do concreto confinado proposto por Sheikh e Uzumeri é o da Fig. 5.25, e para construí-lo são necessários quatro parâmetros:  $K_s$  de (5.43),  $\epsilon_{cc1}$ ,  $\epsilon_{cc2}$ ,  $\epsilon_{cc85}$ . As três deformações indicadas nessa figura são dadas por:

$$\epsilon_{cc1} = -80 \times 10^{-6} \times K_s f_c \quad (5.45)$$

$$\epsilon_{cc2} = \epsilon_{c1} \left[ 1 + \frac{248}{b_i} \left( 1 - 5 \frac{s^2}{b_0^2} \right) \right] \frac{\rho_{stV} f_y}{\sqrt{f_c}} \quad (5.46)$$

$$\epsilon_{cc85} = - \left[ 0,225 \rho_{stV} \sqrt{\frac{b_0}{s}} - \epsilon_{cc2} \right] \quad (5.47)$$

com  $b_i$  em  $mm$ , tensões em  $MPa$  e  $\varepsilon < 0$ .

Para o cálculo da rotação plástica é preciso conhecer ainda a deformação limite do concreto confinado. Esta é determinada, conforme Mander et al. (1988), por uma igualdade de energia no instante em que há a primeira fratura do estribo. O aumento de energia de deformação por unidade de volume na ruptura (área hachurada da Fig. 5.25) só pode provir da capacidade de energia de deformação da armadura de confinamento. Igualando-se a energia de deformação última da armadura transversal por unidade de volume do núcleo confinado de concreto,  $U_{sh}$ , à diferença de áreas sob as curvas  $\sigma_{cc}(\varepsilon_{cc})$  e  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  dos concretos confinado e não-confinado,  $U_{cc} - U_{c0}$ , somada à energia necessária para manter plastificada a armadura longitudinal comprimida,  $U_{sl}$ , obtém-se a seguinte equação, onde a única incógnita é a deformação limite  $\varepsilon_{cc\lim}$ :

$$U_{sh} = U_{cc} - U_{c0} + U_{sl}$$

ou

$$\rho_{slV} A_{c0} \int_0^{\varepsilon_{sh}} \sigma_s d\varepsilon_s = A_{c0} \int_0^{\varepsilon_{cc\lim}} \sigma_{cc} d\varepsilon_{cc} - A_{c0} \int_0^{\varepsilon_{c,sp}} \sigma_c d\varepsilon_c + \rho_{slV} A_{c0} \int_0^{\varepsilon_{cc\lim}} \sigma_s d\varepsilon_s \quad (5.48)$$

sendo  $\rho_{slV}$  o quociente entre o volume da armadura longitudinal e o volume do concreto do núcleo:

$$\rho_{slV} = \frac{nA_{sl1}}{A_{c0}} \quad (5.49)$$

onde  $A_{sl1}$  é a área de uma barra longitudinal,  $\varepsilon_{c,sp}$  é a deformação correspondente à destruição do cobrimento da armadura, tomada simplificada igual a  $2\varepsilon_{c1}$ .

A seguir estas equações são aplicadas à seção transversal da Fig. 5.24, com os seguintes dados:

Concreto:  $f_c = 25MPa$ ,  $\varepsilon_{c1} = -2,2^0 /_{00}$

Aço bilinear com encruamento:  $f_t/f_y = 550/500MPa$ ,  $\varepsilon_{sy} = 2,5^0 /_{00}$ ,

$$\varepsilon_{su} = 80^0 /_{00}$$

Armadura transversal: Estribos  $\phi 10c/100mm$ ,  $A_{st1} = 80mm^2$

Armadura longitudinal:  $A_{st} = 12\phi 25 = 6000mm^2$ ,  $n = 12$ ,  $A_{st1} = 500mm^2$

Das equações (5.39), (5.40), (5.43) e (5.44) resultam respectivamente:  $\alpha_n = 0,778$ ,  $\alpha_s = 0,81$ ,  $K_s = 1,492$  e  $\rho_{stV} = 1,493\%$ . Portanto, a resistência do concreto confinado é igual a  $f_{cc} = K_s f_c = 1,492 \times 25 = 37,3MPa$ . De (5.49) resulta  $\rho_{stV} = 6000/500^2 = 2,4\%$ . As deformações que compõem a lei  $\sigma_{cc}(\varepsilon_{cc})$ , cf. equações (5.45) a (5.47), são iguais a  $\varepsilon_{cc1} = -3^0 /_{00}$ ,  $\varepsilon_{cc2} = -7,2^0 /_{00}$  e  $\varepsilon_{cc85} = -14,7^0 /_{00}$ . O valor da deformação correspondente à tensão de pico do concreto não-confinado,  $\varepsilon_{c1} = -2,2^0 /_{00}$ , está dado no trabalho de Sheikh e Uzumeri. Para este concreto admite-se uma parábola do segundo grau, donde  $\varepsilon_{c,sp} = 2\varepsilon_{c1} = -4,4^0 /_{00}$ .

Nas integrais que seguem tomam-se as tensões e deformações em valor absoluto, e estas últimas multiplicadas por mil:

$$10^3 \rho_{stV} \int_0^{\varepsilon_{sy}} \sigma_s d\varepsilon_s = \rho_{stV} \left[ \frac{f_y \varepsilon_{sy}}{2} + \frac{f_t + f_y}{2} (\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}) \right] = 616,8 \times 10^9 \frac{J}{m^3}$$

$$10^3 \int_0^{\varepsilon_{cc\lim}} \sigma_{cc} d\varepsilon_{cc} = K_s f_c \left[ \frac{2}{3} \varepsilon_{cc1} + (\varepsilon_{cc\lim} - \varepsilon_{cc1}) - \frac{0,15}{\varepsilon_{cc85} - \varepsilon_{cc2}} \frac{(\varepsilon_{cc\lim} - \varepsilon_{cc2})^2}{2} \right] =$$

$$= [-37,3 + 37,3\varepsilon_{cc\lim} - 0,373(\varepsilon_{cc\lim} - 7,2)^2] \times 10^9 \frac{J}{m^3}$$

$$10^3 \int_0^{\varepsilon_{c,sp}} \sigma_c d\varepsilon_c = \frac{2}{3} f_c \varepsilon_{c,sp} = 73,3 \times 10^9 \frac{J}{m^3}$$

$$10^3 \rho_{sIV} \int_0^{\epsilon_{cc\lim}} \sigma_s d\epsilon_s = \rho_{sIV} \left[ \frac{f_y \epsilon_{sy}}{2} + f_y (\epsilon_{cc\lim} - \epsilon_{sy}) + 10^{-3} \frac{E_{sh}}{2} (\epsilon_{cc\lim} - \epsilon_{sy})^2 \right] =$$

$$= [-15 + 12\epsilon_{cc\lim} + 0,00774(\epsilon_{cc\lim} - 2,5)^2] \times 10^9 \frac{J}{m^3}$$

Estes resultados substituídos em (5.48) levam à solução  $\epsilon_{cc\lim} = -15,56^0 /_{00} \cong -15^0 /_{00}$ .

Fixada a lei constitutiva  $\sigma_{cc}(\epsilon_{cc})$  obtém-se o diagrama momento-curvatura tão logo seja dada força normal. Para simplificar o problema despreza-se o cobrimento da seção. Conforme a Fig. 5.24, têm-se quatro camadas de armadura com os seguintes dados:

i	$y_{si}$ (mm)	$A_{si}$ (mm <sup>2</sup> )
1	17,5	2000
2	184,2	1000
3	315,8	1000
4	482,5	2000

Para esta seção transversal não há escoamento da armadura em tração a partir de  $N_{bal2} = -8221,3KN$ , ou  $v_{bal2} = \frac{N_{bal2}}{b_0^2 K_s f_c} = -0,882$ . Com os dados da Fig. 5.26 e escolhendo-se  $N = -8392,5KN$ , obtêm-se do programa momento-curvatura os seguintes resultados (Ver a Fig. 5.4):

$$(EI)_{pl} = 9,83 \times 10^{12} Nmm^2$$

$$\mu_u = \frac{M_u}{b_0^3 K_s f_c} = 0,1809, \quad \frac{x_u}{h} = 0,8376 \quad \text{e} \quad \rho_u = \left( \frac{10^3 h}{r} \right)_u = 17,91$$

$$\mu_{\epsilon_{cc1}} = \frac{M_{\epsilon_{cc1}}}{b_0^3 K_s f_c} = 0,1180, \quad \frac{x_{\epsilon_{cc1}}}{h} = 1,0758 \quad \text{e} \quad \rho_{\epsilon_{cc1}} = \left( \frac{10^3 h}{r} \right)_{\epsilon_{cc1}} = 2,79$$

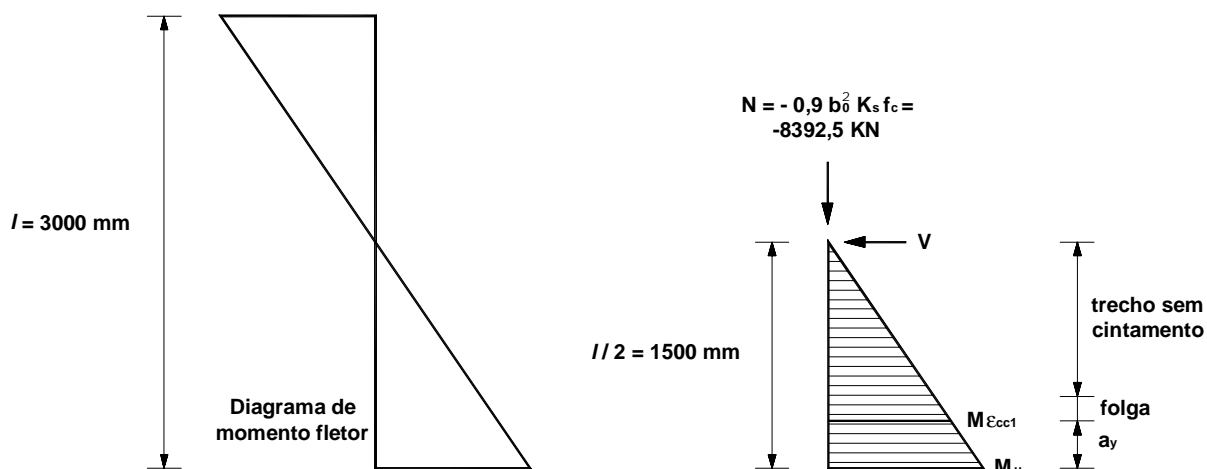


Fig. 5.26: Pilar cintado.

O trecho plastificado do pilar, cf. Fig. 5.26, é igual a ( com  $L \equiv l$  ):

$$a_y = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{M_{\epsilon_{cc1}}}{M_u} \right) = 1500 \times \left( 1 - \frac{0,1180}{0,1809} \right) = 0,348 \times 1500 = 521,6 \text{ mm}$$

valor aproximadamente igual à altura da seção. Aplicando-se a Equação (5.19b), obtém-se a capacidade de rotação plástica do pilar:

$$\theta_{pl} = \frac{a_y}{2} \frac{(M_u - M_{\epsilon_{cc1}})}{(EI)_{pl}} = \frac{521,6}{2} \frac{(0,1809 - 0,1180)}{9,83 \times 10^{12}} \times 500^3 \times 37,3 = 7,8 \times 10^{-3} \text{ rad} = 7,8 \text{ mrad}$$

ou de outro modo, através da Equação (5.19a):

$$\theta_{pl} = \frac{a_y}{2h} \left[ \left( \frac{10^3 h}{r} \right)_u - \left( \frac{10^3 h}{r} \right)_{\epsilon_{cc1}} \right] \times 10^{-3} = \frac{521,6}{2 \times 500} (17,91 - 2,79) \times 10^{-3} = 7,9 \times 10^{-3} \text{ rad} = 7,9 \text{ mrad}$$

No trabalho de Watson et al. (1994) é dada uma expressão do comprimento equivalente do trecho plastificado. Este comprimento, igual a

$$L_p = 0,08L_0 + 6\phi_{sl}$$

é o lado do retângulo de altura e área iguais à do triângulo hachurado da Fig. 5.4. Logo,  $L_p = a_y/2$ . No caso tem-se, com  $L_0 = l/2$  e  $\phi_{sl} = 25mm$ :

$$L_p = 0,08 \times 1500 + 6 \times 25 = 270mm \cong \frac{a_y}{2} = 261mm$$

O valor da capacidade de rotação plástica, obtido neste exemplo para uma força de compressão bastante alta, mostra a eficiência do cintamento em aumentar a ductilidade de um pilar, e tem a mesma ordem de grandeza das rotações que ocorrem nas vigas (nestas tem-se aproximadamente o dobro). Note-se ainda que o cintamento não é necessário em toda altura do pilar (ver a Fig. 5.26). No trecho sem cintamento, o pilar, agora com a seção completa, deve ter momento resistente superior a  $M_{\epsilon_{c1}}$ , e não deve apresentar encurtamentos superiores a  $\epsilon_{c1}$  ( $-2,2^0/_{00}$  no exemplo). Isso pode ser conseguido ajustando-se as dimensões externas da seção do pilar. Observe-se, por fim, que o presente exemplo só cuidou da determinação da capacidade de rotação plástica, sem examinar o dimensionamento do pilar cintado.

## 5.8 Considerações Adicionais

Comentam-se neste item alguns aspectos relacionados com a determinação da capacidade de rotação plástica, os quais complementam a teoria exposta nos itens anteriores.

Na determinação da rotação plástica admitiu-se uma viga equivalente simétrica, e isso não é o que ocorre em geral. A seguir indica-se como obter a capacidade de rotação plástica nos casos de pórticos planos e de vigas equivalentes assimétricas. A Fig. 5.27 mostra o trecho extremo de uma viga contínua de um pórtico plano.

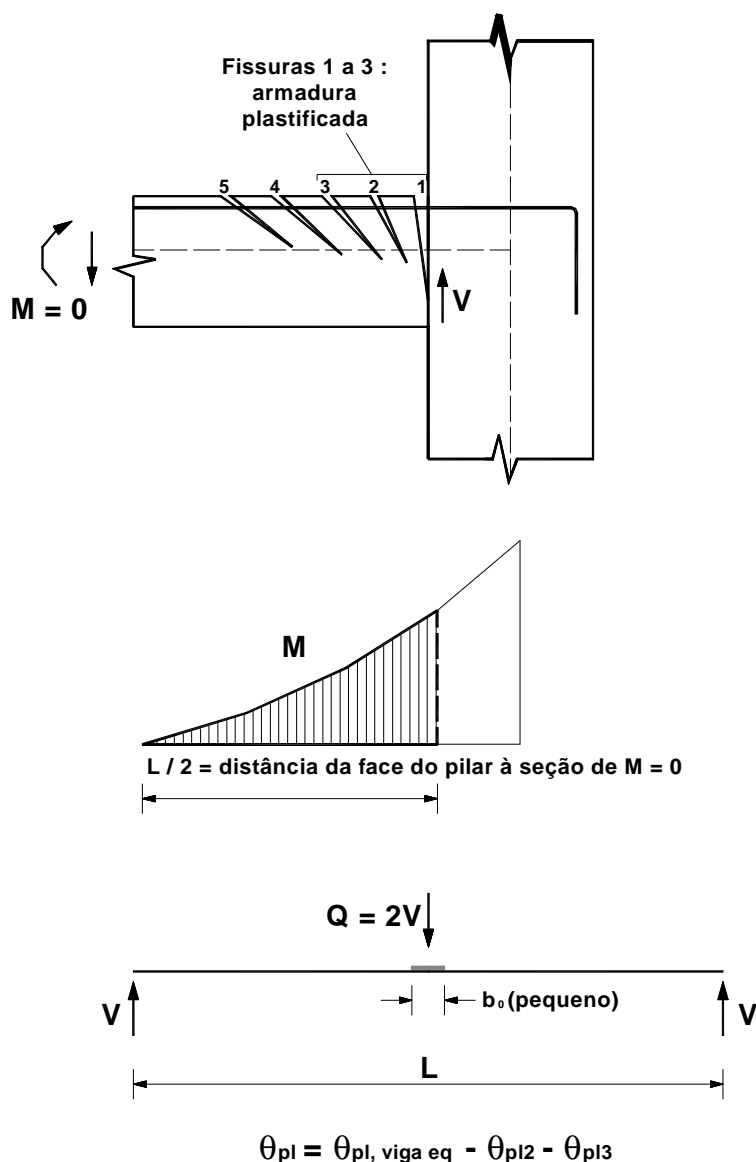


Fig. 5.27: Capacidade de rotação plástica para o caso de pórtico plano. Exemplo com três fissuras plastificadas.

O programa elaborado para determinar a capacidade de rotação plástica calcula esta grandeza a partir das rotações de cada fissura com plastificação da armadura. Quer dizer, tem-se como resultado deste cálculo a rotação de cada fissura nos dois estágios de solicitação na seção crítica,  $M_u$  e  $M_y$ , e, por conseqüência, os acréscimos de rotações que ocorrem quando o momento aumenta de  $M_y$  a  $M_u$ . Este fato permite estender a solução para outros casos que não o da viga equivalente simétrica. Conforme se vê nesta figura, a seção de momento

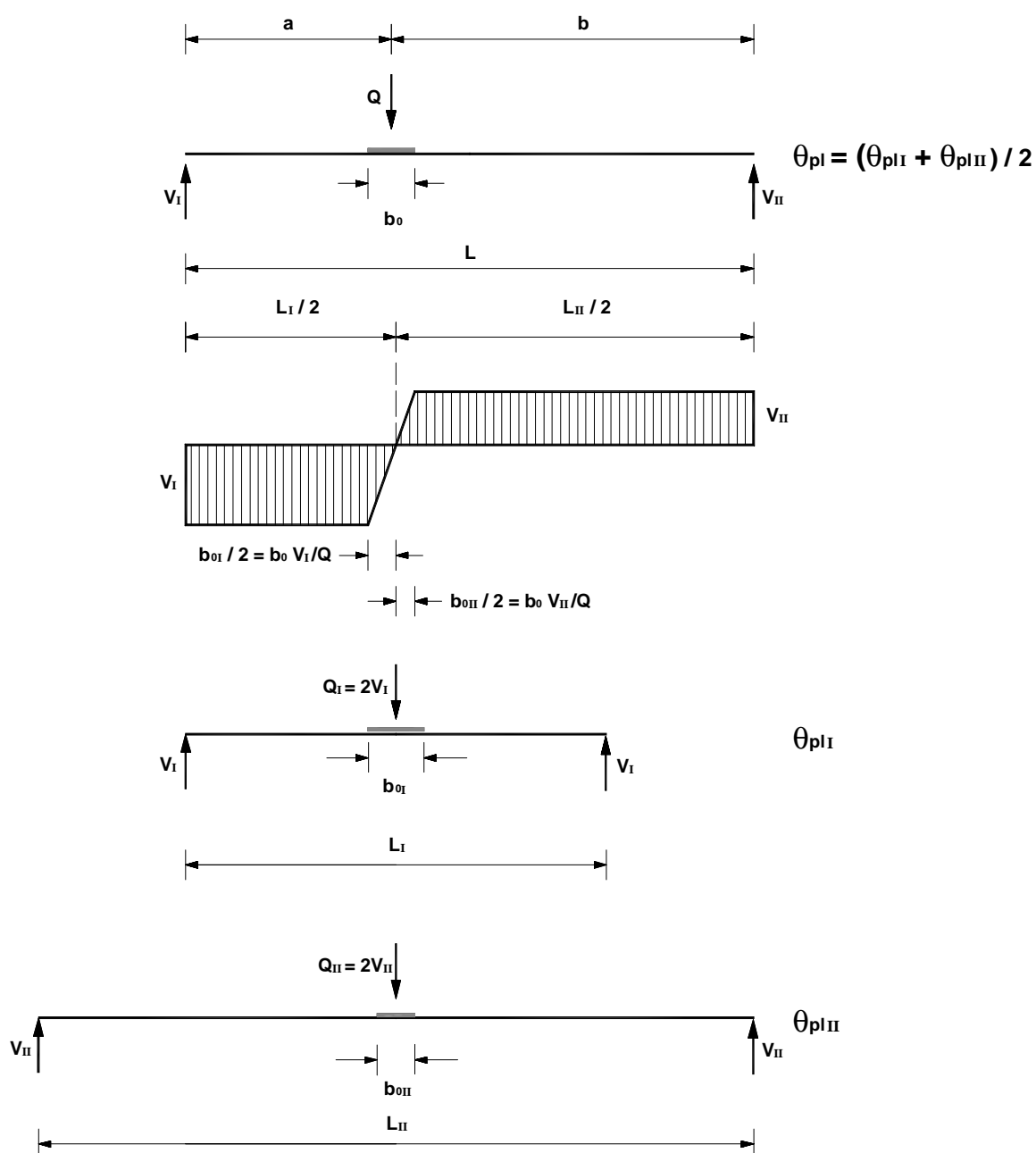


Fig. 5.28: Capacidade de rotação plástica em viga equivalente assimétrica.

máximo considerada é a da interface viga-pilar, e o vão da viga equivalente é o dobro da distância desta seção ao ponto de momento nulo. Com este vão e com a carga no centro igual ao dobro da força cortante máxima fica definida uma viga equivalente, para a qual obtém-se a capacidade de rotação plástica e as rotações



plásticas nas fissuras vizinhas àquela da seção crítica. Isso permite obter a capacidade de rotação plástica da viga de extremidade pela subtração indicada na Fig. 5. 27. Esse procedimento pode ser também aplicado nos trechos internos da viga contínua, com o que são necessários dois cálculos como o anterior, um para cada segmento da viga em cada lado do pilar.

Na Fig. 5.28 mostra-se o roteiro para o cálculo da rotação plástica quando há assimetria da viga equivalente. Conhecidas as forças cortantes nas seções de momento nulo, em cada lado da placa de apoio, ficam definidas duas vigas equivalentes simétricas. A rotação plástica procurada é a semi-soma das rotações plásticas de cada uma destas vigas equivalentes.

Note-se, ainda com relação à Fig. 5.27, que a análise deve considerar, por coerência, uma rótula plástica por lado do pilar, em cada interface com a viga. Estas rótulas ligam-se ao eixo vertical do pilar por pequenas barras horizontais de grande rigidez. Como a demanda e a oferta de rotação plástica referem-se ao mesmo segmento da estrutura, não cabe aqui dividir ou multiplicar por 2 o que quer que seja. Mas se a capacidade de rotação plástica, para um trecho da viga como o da Fig. 5.27, for lida nas curvas dadas em normas, e em seguida dividida por 2 para considerar meia viga equivalente (ao invés de ser calculada como indicado na Fig. 5.27), fica-se do lado da segurança. Isso porque, assim procedendo, a rotação plástica da fissura de maior alongamento (a de número 1 na Fig. 5.27) terá sido considerada não integralmente, mas pela metade.

Um segundo aspecto, que se comenta a seguir, refere-se à variável usualmente escolhida para representar a capacidade de rotação plástica. Esta variável é a profundidade relativa da LN,  $\xi = x/d$ , no ELU por flexão simples, com o que resulta a função  $\theta_{pl}(x/d)$  tal como dada nas normas, inclusive na NBR 6118, 2000. Para conseguir isso é preciso dar um passo a mais em relação à representação dos itens anteriores, e que é, evidentemente, a determinação da profundidade relativa da LN. Uma vez conhecidas a seção transversal, a armadura e as resistências dos materiais, a grandeza  $\xi = x/d$  no ELU é uma propriedade da seção. Para uma seção retangular em flexão simples, a profundidade relativa da LN pode ser posta em função da taxa mecânica da armadura, conforme as hipóteses da NBR 6118, 2000, item 17.1, e as equações seguintes, cf. Nascimento (1988):

$$\text{Sub-domínio 2a: } \omega_d = \frac{5}{3} \left( \frac{\xi}{1-\xi} \right)^2 (3-8\xi) \quad \text{se } 0 \leq \omega_d \leq 1/9 \quad (5.50)$$

$$\text{Sub-domínio 2b: } \omega_d = \frac{16\xi - 1}{15} \quad \text{se } 1/9 \leq \omega_d \leq 17/81 \quad (5.51)$$

$$\text{Domínio 3: } \omega_d = \frac{17}{21} \xi \quad \text{se } 17/81 \leq \omega_d \leq \frac{17}{21} \left( \frac{3,5}{3,5 + 1000\varepsilon_{yd}} \right) \quad (5.52)$$

onde os adimensionais são iguais a:

$$\omega_d = \frac{A_s}{bd} \frac{f_{yd}}{0,85 f_{cd}} \quad (5.53)$$

$$\xi = \frac{x}{d} \quad (5.54)$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (5.55)$$

Note-se que a variável  $\xi = x/d$  do ELU não é adequada para os casos de pilares, conforme explicado na Fig. 5.19.

Do que foi exposto até aqui, fica evidente que o controle da demanda de rotação plástica de uma determinada seção crítica, decorrente da análise da estrutura sob ação das cargas majoradas (pelo coeficiente de segurança parcial  $\gamma_f$ ), é feito em dois níveis distintos. Num primeiro nível testa-se a segurança da seção crítica comparando-se a solicitação resistente, obtida a partir das resistências de cálculo (resistências características divididas pelos coeficientes  $\gamma_s$  e  $\gamma_c$ , a do concreto afetada ainda pelo fator 0,85), com a solicitação decorrente das cargas de cálculo. Num segundo nível, calcula-se a capacidade de rotação plástica com as resistências médias (ou características, como simplificação no projeto) dos materiais. Ver a Fig. 5.29, onde se representa o diagrama trilinear idealizado da

função momento-rotação da viga equivalente. Conforme esta figura e o MC-90, item 5.4.1.2, entre os dois níveis de verificação é admitida a existência de uma afinidade, quer dizer, o ramo  $M_d(\theta)$  do Estádio 3, obtido com os valores de cálculo das resistências, é *paralelo* e de *mesma extensão* que o correspondente ramo  $M_k(\theta)$ , obtido com os valores característicos das resistências.

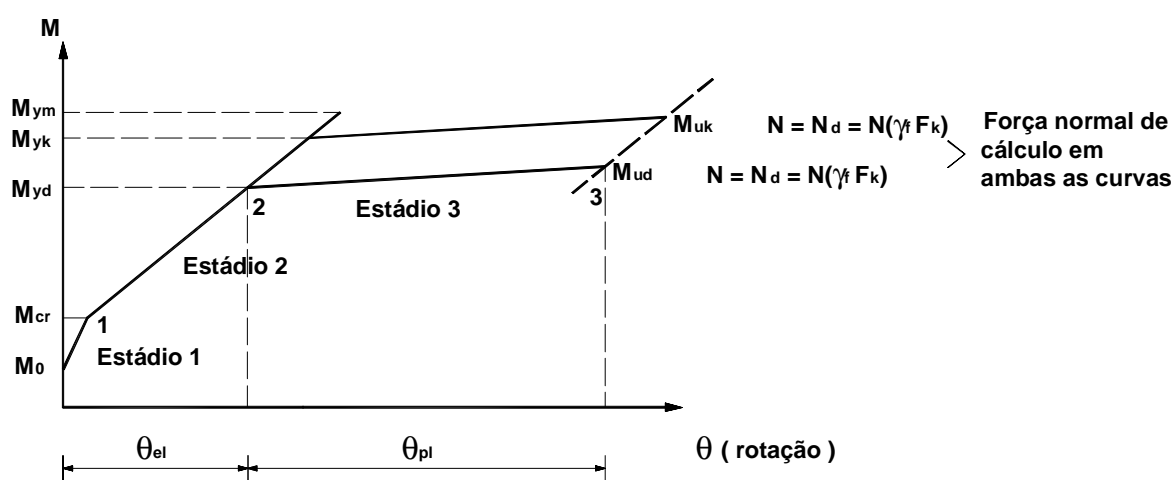


Fig. 5.29: Diagrama momento-rotação da viga equivalente.

É de se notar ainda que, em caso de flexão composta e de análise da estrutura no ELU, a força normal deve ser a mesma para ambas as curvas, e igual ao valor de cálculo, conforme indicado nesta figura. Com esta informação conclui-se, adicionalmente, que no ELU não há fissuração em pilares se  $N_d < N_{bal3}$ , com  $N_{bal3}$  conforme a Fig. 4.8c, ou em caso contrário, se  $M_{cr} > M_{ud}$ .

Observe-se também que o conhecimento adicional da capacidade de rotação plástica determina o terceiro segmento da curva  $M_k(\theta)$ , e com isso a sua inclinação. Assim, pode-se melhorar a análise estrutural, introduzindo-se na seção crítica uma mola que só é ativada quando se inicia a plastificação. A rigidez desta mola, infinita para momentos inferiores ou iguais ao do início do escoamento, é (aproximadamente) constante e igual a:

$$k = \frac{M_{uk} - M_{yk}}{\theta_{pl}} = \frac{M_{ud} - M_{yd}}{\theta_{pl}} \quad (5.56)$$

para momentos superiores ao do início do escoamento. Usualmente esta rigidez é feita igual a zero para simplificar a análise, isso quando não se dispõe da inclinação da mencionada reta, o que não é mais o caso.

No item anterior mencionou-se o comprimento equivalente da zona plastificada em pilares. No que segue, este comprimento, agora aplicado a vigas, entra em jogo com o intuito de obter uma estimativa mais simples da capacidade de rotação plástica. Ver Sigrist e Marti (1994) e também o CEB 189 (1988). Assim, a capacidade de rotação plástica é por vezes determinada como segue. De um lado, toma-se a diferença entre as curvaturas médias da seção crítica correspondentes, respectivamente, a uma deformação limite (no aço ou no concreto) e ao início do escoamento da armadura tracionada; e de outro, o comprimento *equivalente* da extensão plastificada é igualado à altura útil  $d$  da seção considerada.

Esta capacidade de rotação é, então, igual ao menor dos dois valores seguintes (deformação em valor absoluto):

$$\theta_{pl,s} = d \left[ \left( \frac{1}{r} \right)_{sum} - \left( \frac{1}{r} \right)_{ym} \right] = d \left( \frac{\varepsilon_{sum}}{d - x_u} - \frac{\varepsilon_{sym}}{d - x_y} \right) \quad (5.57a)$$

se houver ruptura do aço, ou

$$\theta_{pl,c} = d \left[ \left( \frac{1}{r} \right)_{cum} - \left( \frac{1}{r} \right)_{ym} \right] = d \left( \frac{\varepsilon_{cum}}{x_u} - \frac{\varepsilon_{sym}}{d - x_y} \right) \quad (5.58a)$$

se houver esmagamento do concreto.

Nestas equações:

$\varepsilon_{sum}$  é a deformação média última associada à deformação última  $\varepsilon_{su}$  na fissura ( $\varepsilon_{su} = 5\%$  para o aço A do MC-90, p. ex.).

$\varepsilon_{sym}$  é a deformação média associada ao início do escoamento da armadura tracionada na fissura ( $\cong (0,80a0,95) f_{yk} / E_s$ ).

$\varepsilon_{cum}$  é a deformação média última (ou nominal) do concreto, o mesmo que  $\varepsilon_{c\lim}$  deste texto, e geralmente igualada a 0,35% nestas simplificações.

$x_u$  e  $x_y$  são as profundidades da LN na seção crítica correspondentes a uma deformação limite, conforme o tipo de ruptura, e à deformação  $\varepsilon_{sy}$ , respectivamente.

Pondo-se  $\rho = \frac{10^3 d}{r}$ , as duas equações anteriores transformam-se

nas seguintes:

$$10^3 \theta_{pl,s} = \rho_{sum} - \rho_{sym} \quad (5.57b)$$

$$10^3 \theta_{pl,c} = \rho_{cum} - \rho_{sym} \quad (5.58b)$$

quer dizer, a capacidade de rotação plástica, em *mrad*, vem a ser simplesmente igual a uma diferença de curvaturas relativas médias de dois estados de deformação distintos na seção crítica. A rigor a extensão plastificada equivalente não pode ser tomada como constante e igual à altura útil. Esta extensão equivalente pode ser calculada a partir da resposta do problema resolvido neste capítulo. Ver também Riva e Cohn (1990).

Como observações finais deste item, menciona-se que:

- (1) não se deve utilizar as emendas por transpasse (ou qualquer outro tipo de emenda) nas rótulas plásticas das seções críticas previstas no projeto, uma vez que nelas a deformação da armadura decai e sua determinação é incerta, e

- (2) a armadura longitudinal, nas regiões de apoio de continuidade, deve preferivelmente ser constante, pois esta hipótese foi adotada na viga equivalente.

## 5.9 A Capacidade de Rotação Plástica Segundo Normas

Comenta-se neste item a determinação da capacidade de rotação plástica tal como dada no MC-90, no EC-2 e na NBR 6118, 2000 para uso em projeto. Além disso, esta capacidade é examinada introduzindo-se uma segurança na deformabilidade da viga equivalente, resultando daí uma proposta para o aço CA-50.

No item 5.5 foram mostradas as várias influências na capacidade de rotação plástica. Delas fica visível a grande sensibilidade desta capacidade aos diferentes parâmetros escolhidos. Isso dificulta a comparação entre os vários métodos teóricos. As curvas do MC-90, item 5.4.1.2, da capacidade de rotação plástica em função da profundidade relativa da LN no ELU por flexão simples são a seguir tomadas como referência para comparação com aquelas obtidas pelo método rigoroso descrito no item 5.4. Estas curvas foram determinadas com os seguintes dados, cf. Elgehausen e Fabritius (1991):

- (1) Seção retangular (viga ou laje) com altura  $h = 300mm$ , em flexão simples e armadura unilateral.
- (2) Esbeltez da viga equivalente:  $L/h = 6$ .
- (3) Resistência do concreto  $f_{ck} = 35MPa$ , tanto para a tensão de pico da curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ , quanto para a resistência de aderência, presumidamente. Não é informado o encurtamento limite do concreto.
- (4) É admitida má aderência, para reproduzir as condições dos apoios de continuidade.
- (5) A influência da força cortante é considerada a partir da fissuração inclinada. Supõe-se aqui que esta ocorre para a condição

$\tau_0 > \tau_{c,M} = 0,04 f_{ck}$ , Equação (5.9b), aproximadamente a mesma usada por Langer.

- (6) Os aços S, A e B do MC-90 têm as características dadas na Tabela 2.3. Entretanto, é admitida a mesma resistência  $f_{yk} = 500MPa$  para todos eles.

Para completar as informações que faltam, algumas são tiradas do trabalho de Langer (1987), outras são admitidas aqui. Na obtenção das curvas pelo método rigoroso, adotam-se os seguintes dados:

Geometria da viga equivalente:  $b/h/d = 540/300/270mm$

$$L = 6d = 1620mm$$

$$b_{0pl} = 0 \text{ (largura da placa de apoio)}$$

Concreto: diagrama parábola-retângulo

$$f_{ck} = 35MPa \text{ (para aderência e para o ELU)}$$

$$f_{cm} = 43MPa \text{ e } \varepsilon_{c,lim} = -5^0/00 \text{ (para a curva } \sigma_c(\varepsilon_c))$$

má aderência

Inclinação do campo de compressão:  $\cot v = 0,5$  se  $\tau_0 \leq \tau_{c,M} = 0,04 f_{ck}$

$$\cot v = 1,2 \text{ se } \tau_0 > \tau_{c,M} = 0,04 f_{ck}$$

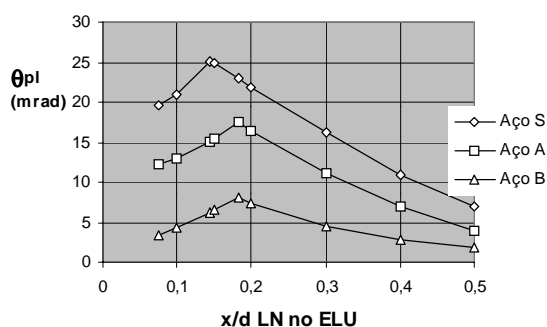
Diâmetro da armadura:  $\phi_s = 10mm$  (constante)

Espaçamento médio das fissuras: cf. Equação (3.49) do EC-2

A profundidade relativa da LN no ELU,  $x/d$ , é escolhida entre 0,075 e 0,50. Para cada  $x/d$  obtém-se a taxa mecânica da armadura  $\omega_d$ , na situação de cálculo, através das Equações (5.50) a (5.52). Do valor desta taxa resulta a correspondente área da armadura  $A_s = \omega_d b d \frac{0,85 f_{cd}}{f_{yd}}$ , sendo  $f_{cd} = f_{ck}/1,5$  e  $f_{yd} = f_{yk}/1,15$ , com  $f_{ck} = 35MPa$  e  $f_{yk} = 500MPa$ . Conhecida esta área, e com os demais dados, obtém-se a capacidade de rotação plástica pelo método rigoroso.

Note-se que o diâmetro adotado independe da taxa da armadura, e seu valor baixo maximiza o efeito da aderência, conforme explicado na Fig. 5.14. O

ângulo da inclinação do campo de compressão, aqui adotado igual a  $63,4^\circ$  antes da fissuração inclinada, equivale a deslocar o diagrama de momento fletor de uma quantia igual a  $0,25z$ , cf. Equação (5.6). Havendo força cortante não nula, este ângulo não pode ser  $90^\circ$ . Seu efeito é pequeno, mas não desprezível. Para o caso de fissuração inclinada adotou-se a inclinação do campo de compressão igual à das fissuras na flexão simples ( $40^\circ$ ). A passagem de um caso para outro dá-se para  $x/d$  pouco acima de 0,20, para os três aços nas curvas da Fig. 5.30. Por essa razão, e a favor da segurança, não se considerou o ponto correspondente a  $x/d = 0,25$ .



(a) Capacidade de rotação plástica, cf. MC-90

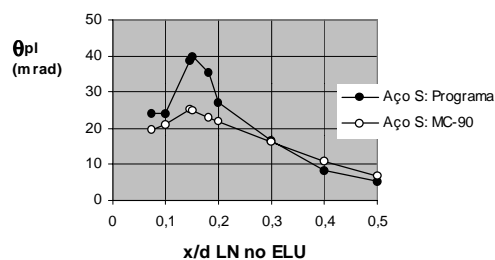
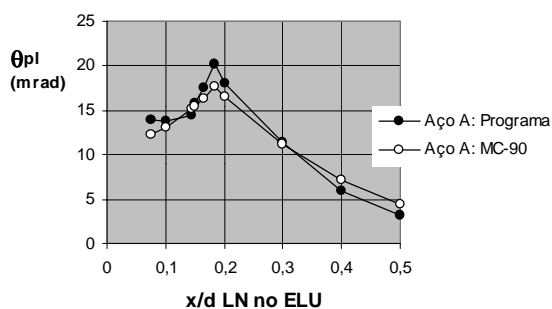
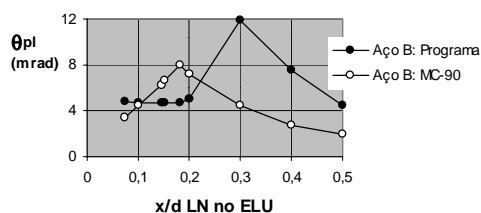
(b) Aço S:  $(f_t/f_y)_k = 1,15$ ,  $\varepsilon_{suk} = 60^0/_{00}$ (c) Aço A:  $(f_t/f_y)_k = 1,08$ ,  $\varepsilon_{suk} = 50^0/_{00}$ (d) Aço B:  $(f_t/f_y)_k = 1,05$ ,  $\varepsilon_{suk} = 25^0/_{00}$ 

Fig. 5.30: Comparação entre as capacidades de rotação plástica do MC-90 e do método rigoroso. Flexão simples, armadura simples,  $f_{yk} = 500MPa$  para os três aços.



Conforme se vê nesta figura, a melhor concordância é obtida para o aço A, Fig. 5.30c. Na Fig. 5.30d, onde se representam os resultados do aço B, observa-se que os picos das curvas ocorrem para valores muito diferentes de  $x/d$ , enquanto nas curvas do MC-90, Fig. 5.30a, esta variável é a mesma para os aços A e B. Este resultado do MC-90 não está coerente, pois o aço B tem uma deformação última igual à metade da do aço A. Como o encurtamento limite do concreto é o mesmo em todos os casos, a passagem do ramo ascendente para o descendente tem de ocorrer para uma profundidade da LN do aço B maior que a do aço A, equivalente a uma taxa mecânica maior. Em outras palavras, quanto menor for a deformação última do aço, tanto mais este pico desloca-se para a direita. Este fato está considerado no EC-2, Anexo 2, item A.2.2, para aços de ductilidade alta (A) e normal (B). Ver a Tabela 2.3. Nesse código, no lugar dos ramos ascendentes têm-se patamares. Os ramos descendentes destes dois aços são coincidentes, o que está aproximadamente em acordo com os resultados aqui obtidos. Ver também Sigrist e Marti (1994).

As maiores diferenças ocorrem para o aço S, conforme se vê na Fig. 5.30b, especialmente na faixa  $x/d = 0,10$  a  $0,20$ . Uma razão para as discrepâncias destas curvas pode estar nas leis constitutivas dos aços. No presente trabalho adotou-se a lei bilinear com encruamento, enquanto nas curvas do MC-90 é adotada uma lei do tipo Ramberg-Osgood (presume-se a partir do mencionado trabalho de Langer). Para esta última lei, cf. Equação (2.63), a deformação *convencional* do início do escoamento é  $2^0 /_{00}$  maior do que na primeira. Outra possível razão está nas inclinações aqui adotadas para o campo de compressão. Discrepâncias semelhantes aparecem também em outros modelos, conforme se pode ver no Boletim 242 do CEB (1998). De qualquer modo, as curvas do MC-90 estão a favor da segurança, conforme observado nos diferentes trabalhos desse mesmo Boletim.

Observa-se, ainda, que a equação dada na NBR 6118, 2000, a saber,  $10^3 \theta_{pl} = 3,5 / (x/d)$ , concorda no ramo descendente com a curva do aço A do MC-90, que por sua vez concorda, no mesmo ramo, com a do EC-2 para aço de alta ductilidade.

A questão que se coloca a seguir diz respeito a uma possível necessidade de impor segurança no cálculo da capacidade de rotação plástica.

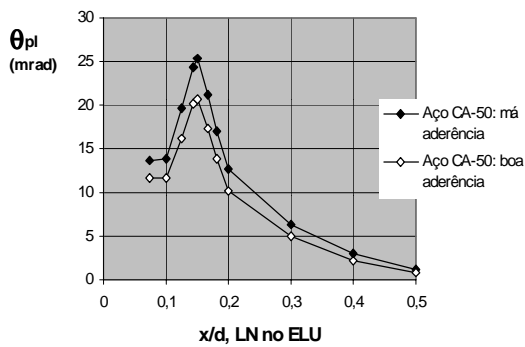
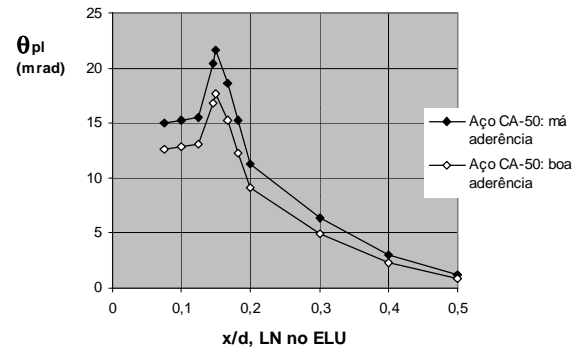
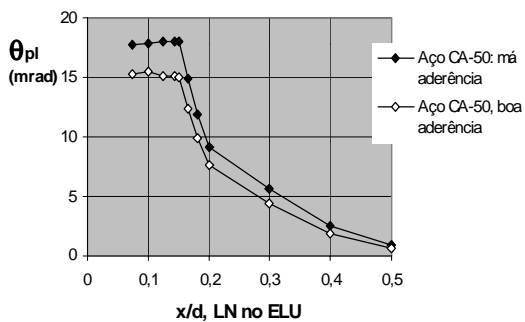
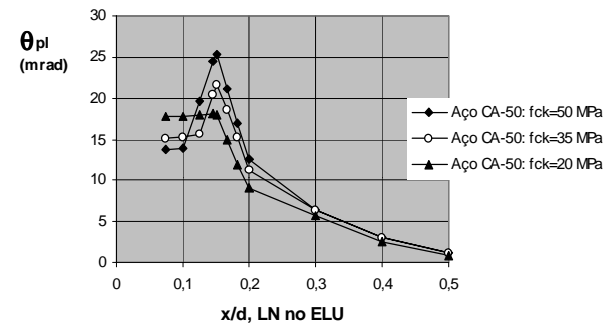
(a)  $f_{ck} = 50MPa$ (b)  $f_{ck} = 35MPa$ (c)  $f_{ck} = 20MPa$ (d)  $f_{ck} = 50/35/20MPa$ , má aderência

Fig. 5.31: Capacidade de rotação plástica para três classes de concreto e aço CA-50, calculada pelo método rigoroso com resistências  $f_{cd} = f_{ck}/1,2$ ,  $f_{yd} = f_{yk}/1,15$ ,  $f_{td} = 1,1f_{yd}$  e deformações limites  $\varepsilon_{clim} = -5^0/_{00}$ ,  $\varepsilon_{su} = 50^0/_{00}$ . Flexão simples, armadura simples, esbeltez  $L/d = 6$ .

Isso está em desacordo com os resultados do MC-90 e do EC-2, que adotam para as leis constitutivas do concreto e do aço, representativas da deformabilidade dos materiais, tensões de pico sem segurança alguma, como se viu. O problema aqui é quase o mesmo da verificação *local* de pilares esbeltos, discutido no item 4.5. Como o comprimento da viga equivalente, que contém a seção crítica onde se determina a capacidade de rotação plástica, é pequeno, se comparado com os vãos da peça em questão, então é razoável reduzir as resistências dos materiais a valores de cálculo, na determinação segura da capacidade de rotação plástica. Assim, a presente questão é posta como sugestão, e não pretende ser definitiva. Os resultados obtidos a seguir para o aço CA-50, têm por base os mesmos dados anteriores, mas com as

seguintes alterações: a tensão de pico da curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  do concreto é igualada a  $f_{ck}/1,2$ , e para o aço faz-se  $f_{yd} = f_{yk}/1,15$  e  $f_{td} = (f_t/f_y)_k \times f_{yd}$ , com  $(f_t/f_y)_k = 1,1$ . Para o ELU adota-se  $\gamma_c = 1,4$ . Ver as Fig. 5.31 e 5.32.

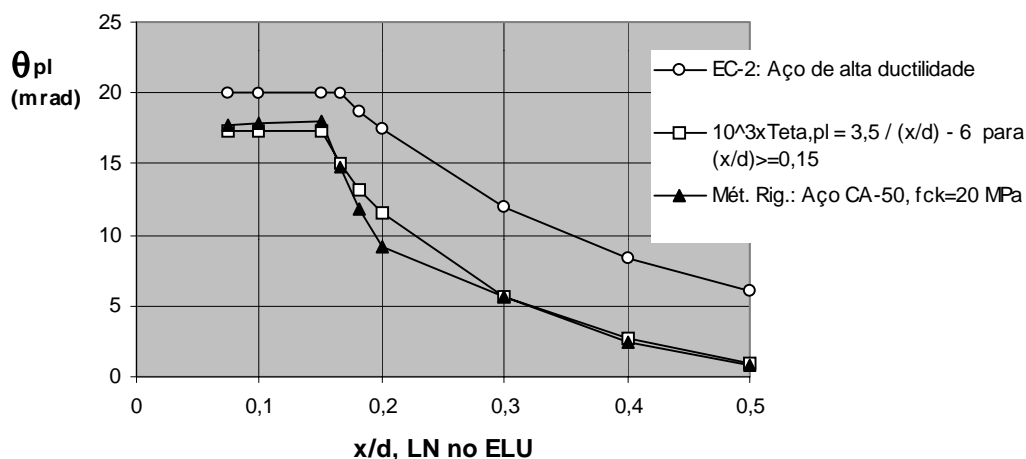


Fig. 5.32: Capacidade de rotação plástica,  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e aço CA-50, método rigoroso com resistências  $f_{cd} = f_{ck}/1,2$ ,  $f_{yd} = f_{yk}/1,15$ ,  $f_{td} = 1,1 f_{yd}$  e deformações limites  $\varepsilon_{c\text{lim}} = -5^0/_{00}$  e  $\varepsilon_{su} = 50^0/_{00}$ , má aderência. Indicam-se as curvas do EC-2 e da equação aproximada proposta. Flexão simples, armadura simples, esbeltez  $L/d = 6$ .

As Figuras 5.31a, b e c mostram a capacidade de rotação plástica para três classes de concreto, considerando-se as duas qualidades da aderência. A Fig. 5.31d representa as curvas destas três classes para má aderência. Nesta última figura fica visível que, no ramo descendente, a menor capacidade de rotação plástica resulta para o concreto de resistência  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ , como esperado. Nos ramos onde há ruptura do aço, o patamar correspondente à curva de  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  situa-se aproximadamente no meio das curvas de  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$  e  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$ . Note-se nestas curvas que a tendência de um patamar já existe para  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$ . Esta tendência acentua-se para  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$  e aparece por completo para  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ . Isso se explica como segue. No segmento da curva onde se rompe o aço, para uma mesma profundidade da LN no ELU, tem-se menor área de aço para o concreto de

menor resistência. Embora a extensão plastificada seja quase constante e o espaçamento médio das fissuras diminua com  $x/d$ , há só uma fissura com plastificação da armadura em todo o patamar, para  $f_{ck} = 20MPa$ . Como a profundidade da LN, calculada com as leis constitutivas adotadas, é pequena, resultam curvatura e rotação plástica na seção crítica praticamente constantes.

Na Fig. 5.32 repete-se a curva obtida para  $f_{ck} = 20MPa$ , na condição de má aderência, bem como a do EC-2 que não contém coeficientes de segurança nas leis constitutivas. Indica-se, também, a curva decorrente da equação aqui proposta para representar a primeira delas, a saber:

$$10^3 \times \theta_{pl} = \frac{3,5}{(x/d)} - 6 \quad \text{se } x/d \geq 0,15 \quad (5.59a)$$

$$\theta_{pl} = 17,33mrad \quad \text{se } x/d \leq 0,15 \quad (5.59b)$$

Para uma alternativa um pouco mais segura, troca-se o limite 0,15 de separação destas duas equações por 0,167, com o que em (5.59b) resulta  $\theta_{pl} = 15mrad$ .

É interessante notar que no trabalho de Levi et al. (1995) há uma proposta de redução da capacidade de rotação plástica do EC-2 quase coincidente com a presente, mas à qual se chega por outras razões. Nessa proposta subtrai-se  $5mrad$  da curva do EC-2, pretendendo-se com isso controlar melhor não só a maior dispersão das características do concreto no ramo descendente, mas também o perigo de escoamento da armadura tracionada na seção crítica, *na combinação rara das ações em serviço*. Além disso, esta redução visa obter uma melhor concordância com o coeficiente  $\delta$  da análise linear com redistribuição, para o qual é dada uma nova equação. A estas considerações pode-se acrescentar ainda que, na capacidade de rotação plástica assim proposta para projeto, é menor o risco de ocorrência de outras formas de ruptura, particularmente por força cortante ou por insuficiência de ancoragem das barras da armadura longitudinal, uma vez que as resistências dos materiais usadas na deformabilidade do elemento estrutural são exploradas com uma margem de segurança.