

## 4 O DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA NA FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

### 4.1 Introdução

Mostra-se neste capítulo a obtenção do diagrama momento-curvatura para seções transversais em forma de duplo T assimétrico, com diversas camadas de armadura, e sujeitas a solicitações normais (a força cortante será considerada no capítulo 5). Neste diagrama será incluído o enrijecimento da armadura tracionada, com a finalidade de considerar com mais precisão a deformabilidade do elemento estrutural, mas apenas quando na seção transversal houver dois banzos distintos, um tracionado, outro comprimido.

O diagrama momento-curvatura reflete as leis tensão-deformação não-lineares do aço e do concreto, e pode ser admitido, não fosse a ação da fissura coesiva, como uma propriedade da seção transversal. Retém-se aqui a hipótese de Bernoulli. Com isto a curvatura é igual ao gradiente das deformações na seção transversal, e também igual à variação da rotação por unidade de comprimento da barra.

A hipótese usual da Teoria da Elasticidade Linear, que consiste em atribuir a cada barra seu módulo de elasticidade  $E$  e seu momento de inércia  $I$ , corresponde a uma lei momento-curvatura linear, sem qualquer limite de deformação, i. e., sem limite de curvatura na análise. A inclinação da reta que representa esta lei é dada pelo produto  $EI$ . Esta hipótese está longe de refletir a verdadeira resposta do material concreto armado, e fere também as condições de compatibilidade local (na seção) e global (na estrutura). Assim, ao invés de atribuir a cada barra seu módulo de elasticidade e seu momento de inércia, usa-se a sua lei momento-curvatura. Possibilita-se com isto a análise não-linear, que pode, então, atender, além das condições de equilíbrio, também as de compatibilidade e as leis constitutivas dos materiais.

As seguintes hipóteses são admitidas:

- (1) A seção transversal permanece plana após deformar-se (Hipótese de Bernoulli).
- (2) Na compressão e na tração antes da fissuração há aderência rígida (sem deslizamento) entre a armadura e o concreto circundante. O mesmo já não se pode afirmar na tração após a fissuração, pois há deslizamento entre os dois materiais. Entretanto, pode-se afirmar que ainda há igualdade de alongamentos *médios* do aço e do concreto, se para este último for adicionada ao seu efetivo alongamento médio a parcela da abertura da fissura, dividida pelo espaçamento das fissuras. Esta abertura é, assim, espalhada no banzo tracionado.
- (3) Consideram-se carregamentos monotônicos quase-estáticos, sem qualquer alternância ou repetição ( $d\varepsilon/dt \cong 10^{-5} / s$ ).
- (4) O efeito da fluência do concreto não é considerado.
- (5) Após a fissuração despreza-se, na seção transversal fissurada, a resistência à tração do concreto.

As seções transversais que poderão ser consideradas pelo programa desenvolvido (em Qbasic) são aquelas geradas a partir de uma seção duplo T assimétrico, conforme Fig. 4.1. Nesta figura indica-se também a convenção de sinais.

As tensões de tração no concreto logo abaixo da linha neutra (LN) e as originadas pela fissura coesiva, cf. Fig. 2.8d, poderiam, eventualmente, ser consideradas. Para isto teria de ser obtida a abertura (média) da fissura ao nível da camada de armadura de maior alongamento, decorrente da distância (média) entre fissuras e da diferença de alongamentos (médios) do aço e do concreto. Havendo só solicitações normais, as fissuras são ortogonais ao eixo da peça. Entretanto, estas tensões de tração, após a fase de formação de fissuras, só têm alguma importância nas peças fracamente armadas (taxas geométricas próximas da mínima). Além disso, se esta consideração for feita para fissuras de flexão, por coerência deve-se fazê-la também para as fissuras de flexão e de força cortante, o que torna o problema bem mais complexo.

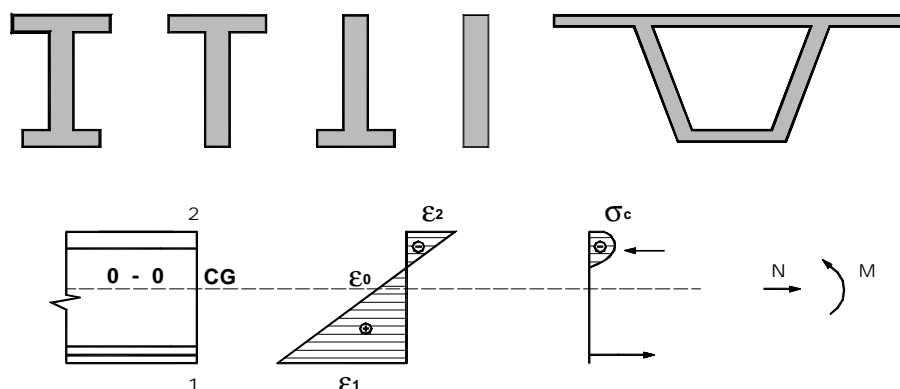


Fig. 4.1: Formas de seção e convenção de sinais.

Faz-se a seguir a distinção entre os comportamentos das estruturas isostática e hiperestática, de acordo com suas respostas ao carregamento aplicado (Fig. 4.2), i. e., de acordo com a função carga-deslocamento, através do exemplo usado por Thürlimann et al. (1989), para definir a resistência equivalente da estrutura, correspondente à capacidade portante. Ver também Bazant et al. (1991).

A lei constitutiva admitida para o concreto, neste exemplo, é a dada pela Equação (2.82):

$$\sigma_c = -f_c \frac{k\alpha - \alpha^2}{1 + (k-2)\alpha}$$

onde  $\alpha = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$ ,  $\varepsilon_{c1} = -2,2^0 /_{00}$  e  $k = 2,279$ .

Escolhendo-se uma seqüência de deslocamentos  $\delta$  obtém-se imediatamente as deformações, e destas as tensões e as forças em cada elemento estrutural. A soma destas forças dá o valor da carga  $F$  aplicada, correspondente ao deslocamento  $\delta$  escolhido. Ver a Tabela 4.1 e a Fig. 4.3.

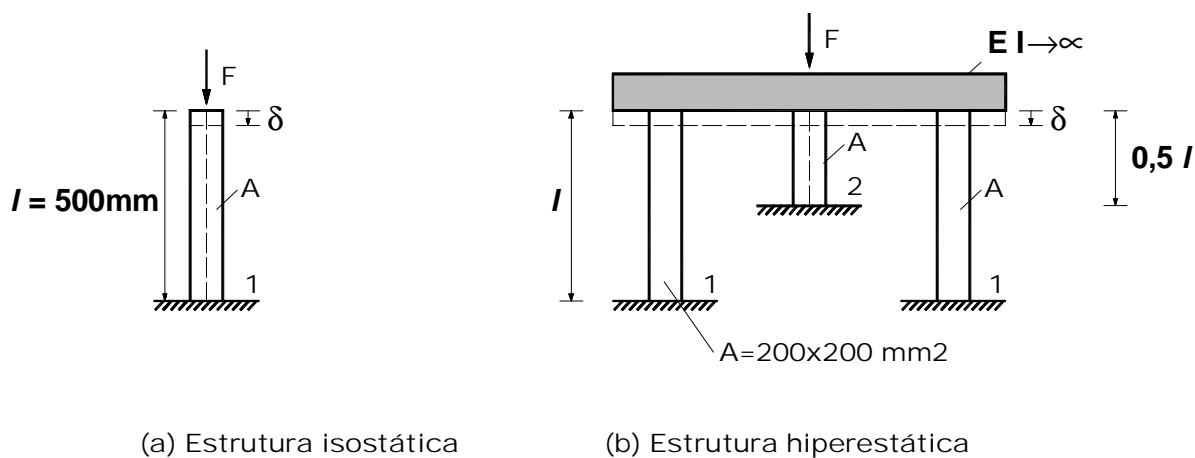
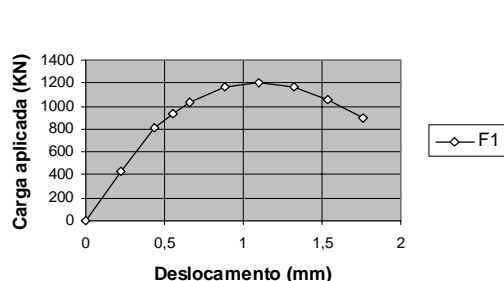


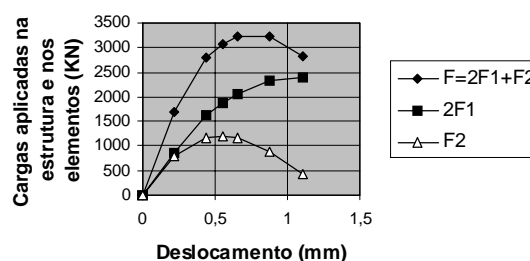
Fig. 4.2: Distinção entre estrutura isostática e hiperestática.

Tabela 4.1: Determinação da curva carga-deslocamento  $F(\delta)$ .

$\delta$ (mm)	Estrutura isostática			Estrutura hiperestática						
	$-\varepsilon_c$ ( $^{\circ}/_{00}$ )	$-\sigma_c$ (MPa)	$F$ (KN)	$-\varepsilon_c^{(1)}$ ( $^{\circ}/_{00}$ )	$-\varepsilon_c^{(2)}$ ( $^{\circ}/_{00}$ )	$-\sigma_c^{(1)}$ (MPa)	$-\sigma_c^{(2)}$ (MPa)	$F^{(1)}$ (KN)	$F^{(2)}$ (KN)	$F$ (KN)
0			0							0
0,22	0,44	10,88	435,5	0,44	0,88	10,88	20,28	435,5	811,2	1681,6
0,44	0,88	20,28	811,4	0,88	1,76	20,28	29,02	811,4	1160,8	2783,2
<b>0,55</b>	1,10	23,42	936,9	1,10	2,20	23,42	30	936,7	<b>1200</b>	3073,6
<b>0,66</b>	1,32	25,89	1035,5	<b>1,32</b>	<b>2,64</b>	25,89	29,10	1035,5	1164	<b>3235,2</b>
0,88	1,76	29,02	1160,8	1,76	3,52	29,02	22,53	1160,8	901,2	3222,8
<b>1,10</b>	2,20	30	<b>1200</b>	<b>2,20</b>	4,40	30	10,74	<b>1200</b>	429,6	2829,6
1,32	2,64	29,10	1164							
1,54	3,08	26,50	1061,9							
1,76	3,52	22,53	901,3							



(a) Estrutura isostática



(b) Estrutura hiperestática

Fig. 4.3: Capacidade de carga de estruturas isostática e hiperestática.

Destes resultados pode-se ver que:

- (1) Tanto na estrutura isostática quanto na hiperestática a máxima capacidade portante é dada pela condição

$$\frac{dF}{d\delta} = 0 \quad (4.1)$$

- (2) Na estrutura isostática a máxima força obtida corresponde à máxima resistência do material ( $\sigma_c = -f_c = -30MPa$  para  $\varepsilon_c = -2,2^0 /_{00}$ ) e a curva  $F(\delta)$  reflete a lei  $\sigma(\varepsilon)$  do material.

- (3) Na estrutura hiperestática a máxima força aplicada não resulta da soma das capacidades individuais dos elementos estruturais isoladamente (que seria igual a  $3600KN$  no exemplo), mas tem de ser obtida pela condição de compatibilidade. Isto está claramente mostrado na Fig. 4.3b, onde os máximos individuais não correspondem à carga máxima obtida. Observe-se que para  $F_{\max}$  desta figura tem-se  $\varepsilon_c^{(1)} = -1,32^0 /_{00}$  e  $\varepsilon_c^{(2)} = -2,64^0 /_{00}$ , encurtamentos bem inferiores a um possível limite imposto ao material (no caso,  $\varepsilon_{c,\text{lim}} = -3,68^0 /_{00}$ ).

- (4) Na Teoria da Plasticidade é usual definir uma resistência equivalente correspondente à carga máxima (p. ex., na alma e no banzo comprimido de peças fletidas). Ver Thürlimann et al. (1989) e Nielsen (1998). Esta resistência, na estrutura isostática igual a  $f_c$ , na estrutura hiperestática passa a ser:

$$\frac{f_{c,eq}}{f_c} = \frac{F_{\max}}{\sum A_c f_c} \quad (4.2)$$

no caso igual a:

$$\frac{f_{c,eq}}{f_c} = \frac{3235,2 \times 10^3}{3 \times 200^2 \times 30} = 0,9$$

ou seja, 90% da resistência à compressão uniaxial do concreto.

A condição de máximo, dada pela Equação (4.1), pode eventualmente ser substituída por outra que lhe é equivalente, a saber, a de mudança do sinal desta derivada, na ultrapassagem do ponto de máximo da curva carga-deslocamento. Isto pode ocorrer em estruturas que envolvam pilares esbeltos, cuja armadura tracionada entra em escoamento toda ela de uma só vez.

Estes resultados simples podem ser transpostos para vigas e pórticos de concreto armado com igual validade. Entretanto, é preciso considerar as deformações limites dos materiais, no aço seu alongamento último, no concreto seu encurtamento limite (“nominal”).

## 4.2 O Ponto de Máximo do Diagrama Momento-Curvatura

A discussão do item anterior pode ser mais bem esclarecida através de um caso simples de obtenção do ponto de máximo do diagrama momento-curvatura, que é examinado a seguir. Para facilitar a dedução, introduzem-se as seguintes grandezas adimensionais, todas elas positivas (Fig. 4.4 e Fig. 4.5):

$$\xi = \frac{x}{d} \quad \text{profundidade relativa da LN} \quad (4.3)$$

$$\mu = \frac{M}{bd^2 f_c} \quad \text{momento relativo} \quad (4.4)$$

$$v_c = \frac{R_c}{bdf_c} \quad \text{força normal relativa do concreto} \quad (4.5)$$

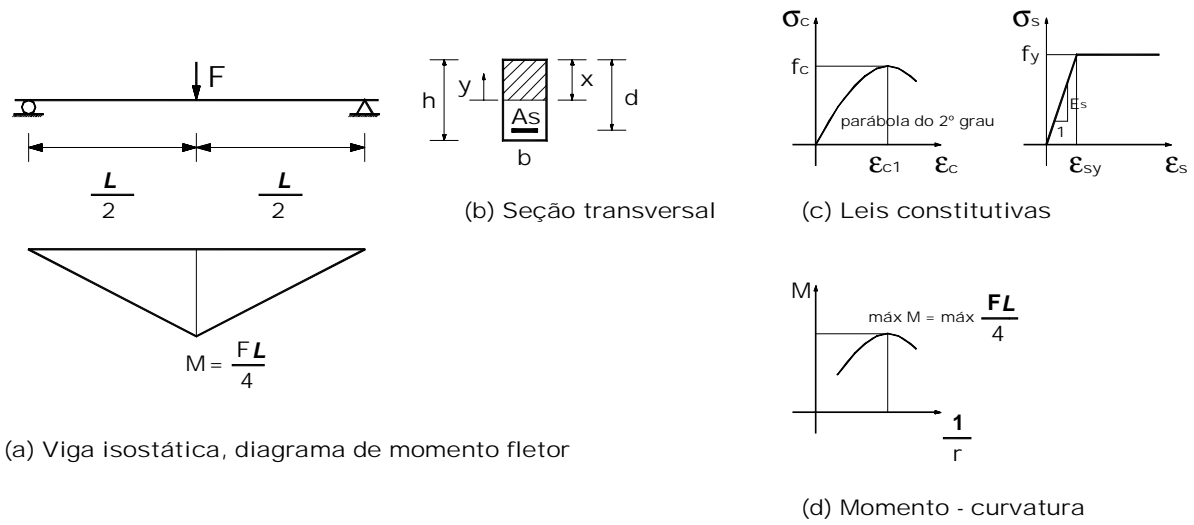


Fig. 4.4: Dados para a determinação do ponto de máximo da curva  $M(1/r)$ .

$$\omega = \frac{A_s f_y}{b d f_c} \quad \text{taxa mecânica da armadura} \quad (4.6)$$

$$\frac{a}{d} \quad \text{distância relativa da força } v_c \text{ à LN} \quad (4.7)$$

$$\zeta = \frac{y}{d} \quad \text{variável de integração} \quad (4.8)$$

$$\frac{z}{d} = 1 - \xi + \frac{a}{d} \quad \text{braço de alavanca das forças internas} \quad (4.9)$$

$$\rho = \frac{10^3 d}{r} \quad \text{curvatura relativa} \quad (4.10)$$

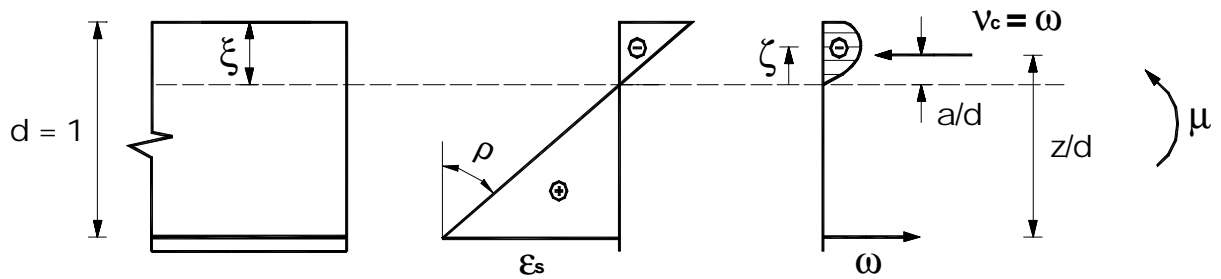


Fig. 4.5

Supondo a armadura já em escoamento, as forças no concreto e no aço, iguais entre si, são constantes. Mas o braço de alavanca é variável com a curvatura. Disto resulta que a variação do momento fletor resistente com a curvatura deve-se exclusivamente àquela variação. Portanto, o momento fletor será máximo quando o braço de alavanca o for.

A força no concreto é dada por (com  $\bar{\varepsilon} = 10^3 \varepsilon$ ):

$$v_c = \frac{\rho \xi^2}{\varepsilon_{c1}} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\rho \xi}{\varepsilon_{c1}}\right) = \omega \quad (4.11)$$

e sua distância relativa à LN é:

$$\frac{a}{d} = \frac{\xi^2}{12\omega} \left[8 \frac{\rho \xi}{\varepsilon_{c1}} - 3 \left(\frac{\rho \xi}{\varepsilon_{c1}}\right)^2\right] \quad (4.12)$$

Em (4.11) põe-se  $\rho$  em função de  $\xi$ :

$$\rho^2 - 3 \frac{\bar{\varepsilon}_{c1}}{\xi} \rho + 3 \bar{\varepsilon}_{c1}^{-2} \frac{\omega}{\xi^3} = 0 \quad (4.13)$$

donde a raiz:



$$\rho = \frac{3\bar{\varepsilon}_{c1}}{2\xi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\omega}{\xi}}\right) \quad (4.14)$$

Nesta equação só vale o sinal negativo, pois a outra raiz conduz a uma impossibilidade. Tirando-se desta equação  $\rho\xi/\bar{\varepsilon}_{c1}$  e substituindo-se o resultado em (4.12) e em (4.9), obtém-se a expressão do braço de alavanca em função da profundidade relativa da LN:

$$\frac{z}{d} = 1 - \frac{\xi}{4} - \frac{\xi^2}{8\omega} + \frac{\omega}{8} \sqrt{\frac{\xi}{\omega} - \frac{4}{3}} \quad (4.15)$$

A derivada desta função igualada a zero leva a uma equação do 3º grau em  $\xi$ , de raiz igual a:

$$\xi = 1,3447\omega \quad (4.16)$$

donde

$$\left(\frac{z}{d}\right)_{\max} = 1 - 0,5489\omega \quad (4.17)$$

e portanto:

$$\mu_{\max} = \omega \left(\frac{z}{d}\right)_{\max} = \omega (1 - 0,5489\omega) \cong \omega(1 - 0,55\omega) \quad (4.18)$$

Se fossem usados os blocos retangulares de tensões da NBR 6118, 2000 e do ACI, cf. Park e Paulay (1975), seriam obtidos respectivamente 0,5 e 0,59 no lugar de 0,55.

A equação inversa de (4.18), usada para dimensionamento, é:

$$\omega = 0,91 \times (1 - \sqrt{1 - 2,20\mu}) \quad (4.19)$$

A curvatura correspondente ao momento resistente máximo decorre da substituição de (4.16) em (4.14), e é inversamente proporcional à taxa mecânica da armadura:

$$\rho = 1,013 \frac{\bar{\varepsilon}_{c1}}{\omega} \quad (4.20)$$

A deformação da armadura, para a mesma condição, é:

$$\bar{\varepsilon}_s = \rho(1 - \xi) = 1,013 \frac{\bar{\varepsilon}_{c1}}{\omega} (1 - 1,345\omega) \geq \bar{\varepsilon}_{sy} \quad (4.21)$$

e deve ser inferior à deformação de ruptura  $\bar{\varepsilon}_{su}$  e superior à deformação de escoamento, como pressuposto. Para uma dada deformação  $\varepsilon_{c1}$  correspondente à tensão de pico  $f_c$  resulta:

$$\omega \leq \frac{1,013 \bar{\varepsilon}_{c1}}{1,362 \bar{\varepsilon}_{c1} + \bar{\varepsilon}_{sy}} \quad (4.22)$$

onde o segundo membro desta desigualdade é o limite da taxa mecânica da armadura para haver escoamento, e é igual a 0,423 para  $\varepsilon_{c1} = 2^0 /_{00}$  e  $\varepsilon_{sy} = 2,07^0 /_{00}$ .

O encurtamento máximo do concreto, na borda da seção transversal, decorre de:

$$\bar{\varepsilon}_{c\max} = \rho \xi = 1,013 \frac{\bar{\varepsilon}_{c1}}{\omega} \times 1,3447\omega = 1,362 \bar{\varepsilon}_{c1} \quad (4.23)$$

Como se vê, este encurtamento só depende de  $\varepsilon_{c1}$ , e vale  $2,72^0 /_{00}$  e  $3^0 /_{00}$ , para  $\varepsilon_{c1} = 2^0 /_{00}$  e  $2,2^0 /_{00}$ , respectivamente. Não cabe estranhar estes valores, e tampouco o fato de serem constantes. O ACI 318-95, item 10.2.3, adota um valor constante e igual a  $3^0 /_{00}$ .

Na situação de cálculo basta trocar nas equações anteriores  $f_c$  por  $0,85f_{cd}$ ,  $f_y$  por  $f_{yd}$ ,  $\varepsilon_{sy}$  por  $\varepsilon_{syd}$ ,  $\mu$  por  $\mu_d = M_d / (0,85f_{cd}bd^2)$ . Portanto, a taxa mecânica será  $\omega_d = A_s f_{yd} / (0,85f_{cd}bd)$ .

Mostra-se na Tabela 4.2 a comparação do presente cálculo com o obtido utilizando-se o diagrama parábola-retângulo e os domínios de deformação da NBR 6118, 2000, na situação de cálculo, para aço CA-50 e  $\varepsilon_{cl} = 2^0 /_{00}$ . Neste último caso faz-se uso das equações deduzidas por Nascimento (1988), as quais, na flexão simples, ligam o momento fletor diretamente à taxa mecânica da armadura.

Tabela 4.2: Comparação entre o presente cálculo e o obtido com as hipóteses da NBR 6118, 2000, para o ELU Flexão.

$\omega_d$	Presente cálculo				Parábola-retângulo (NBR 6118)			
	$\mu_d$	$\xi$	$\bar{\varepsilon}_s$	$\rho$	$\mu_d$	$\xi$	$\bar{\varepsilon}_s$	$\rho$
0,052	0,051	0,070	36,23	38,96	0,050	0,108	10	11,21
0,111	0,104	0,149	15,53	18,25	0,104	0,167	10	12
0,152	0,139	0,204	10,61	13,33	0,140	0,205	10	12,58
0,201	0,179	0,270	7,36	10,08	0,180	0,251	10	13,35
0,266	0,227	0,358	4,89	7,62	0,230	0,329	7,13	10,63
0,324	0,266	0,436	3,53	6,25	0,270	0,400	5,25	8,75
0,355	0,286	0,477	2,98	5,71	0,290	0,438	4,48	7,98
0,404	0,314	0,543	2,29	5,01	0,320	0,499	3,52	7,02
0,423	0,325	0,568	2,07	4,79	0,333	0,522	2,66	5,57

Desta comparação podem ser tiradas várias conclusões:

- (1) As diferenças na *resistência* entre os dois cálculos é irrelevante, e a lei parabólica aqui admitida para o concreto não é restritiva. Sob este aspecto outras leis poderiam ser admitidas, com resultados igualmente aceitáveis, como é permitido em diferentes normas. O presente cálculo não fez qualquer uso dos domínios de deformação, mas reteve a hipótese de Bernoulli, através da qual se pode determinar as condições de compatibilidade local. Na determinação da superfície de plastificação (*yielding surface*) ou diagrama de interação, a Teoria da Plasticidade, em coerência com o Teorema Estático, só retém as condições de equilíbrio

e de resistência (equivalente, cf. item anterior), e *descarta qualquer condição de compatibilidade de deformações*. Ver Heyman (1971). Como confirmação disto, vê-se que as diferenças nas deformações da armadura são grandes para momentos quase iguais. Note-se nesta tabela que: (a) para baixas taxas mecânicas da armadura a ruptura da seção pode dar-se pela ruptura (fratura) da armadura, pois teria de haver alongamento ilimitado do aço para que houvesse sempre esmagamento do concreto; (b) o fim do escoamento da armadura dá-se, no caso, para a profundidade da LN ocupando 56,8% da altura útil  $d$  da seção, menor, portanto, que o valor correspondente à transição entre os domínios 3 e 4, igual a 62,8% .

- (2) A questão principal que se deseja colocar aqui não é a da resistência, mas a da deformabilidade. Na Tabela 4.2 vê-se que também na curvatura há grandes diferenças entre os dois cálculos. Entretanto permanece ainda o problema da deformação limite em peças fletidas, uma questão ligada ao ramo descendente da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ , onde intervêm conceitos da Mecânica da Fratura, por causa da localização das deformações, como se mostrou na compressão uniaxial. Esse ramo depende da forma e do tamanho da seção, do grau de confinamento do concreto pelos estribos, da armadura longitudinal, cf. Bazant et al. (1991), e ainda da profundidade da LN. Quanto ao encurtamento limite do concreto, cf. Sigrist (1995), pode-se partir de um encurtamento nominal de ruptura igual a  $5^0 /_{00}$ , com base em resultados experimentais de Bachmann e Thürlimann (1965), e de Sigrist e Marti (1993). Este mesmo limite é usado nos trabalhos de Langer (1987) e de Longfei (1995), que adotam como lei constitutiva do concreto o diagrama parábola-retângulo. Longfei observa que a deformação limite do concreto,  $3,5^0 /_{00}$ , baseia-se nos trabalhos de Rüschi, de Rasch e de Rüschi e Stöckl, nos quais tomou-se como base de medida de encurtamento do concreto um comprimento de  $300mm$ , na borda da zona comprimida de vigas em flexão. Na seção transversal este limite

(um valor médio) é muito conservativo. A consequência de um aumento neste limite é evidente: aumenta-se a ductilidade do concreto, *enquanto o momento resistente permanece praticamente o mesmo*.

- (3) O ponto de máximo da lei momento-curvatura,  $M(1/r)$ , na viga isostática da Fig. 4.4 corresponde realmente à máxima capacidade portante, e para este valor da carga há ruína da viga. Mas numa estrutura hiperestática a ultrapassagem deste ponto não significa necessariamente ruína da estrutura. Pode significar apenas que a seção crítica em questão está transferindo solicitações para outras regiões da estrutura superabundantes em resistência. A ruína ocorre quando se forma um mecanismo (pelas rótulas plásticas), cf. Equação (4.1), ou quando é atingida uma deformação limite no concreto ou no aço, na seção mais crítica. Em vários trabalhos experimentais do CEB 218 (1993) é tomado como referência, no ramo descendente da curva momento-*rotação*, o valor correspondente a 90% ou 95% do momento máximo dessa curva. No trabalho de Eligehausen e Fabritius, publicado nesse boletim, constata-se que há aumentos de 40% a 100% na rotação plástica se se chegar a  $0,95M_{\max}$  no ramo descendente da mencionada curva, em comparação com a rotação plástica obtida somente pelo valor de pico,  $M_{\max}$ , dessa curva.

Destas observações fica evidente que uma vez estabelecida a lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  do concreto, em especial o seu ramo descendente, a ser usada em cálculos não-lineares, a definição de uma deformação limite torna-se dispensável, conforme mostrado no exemplo do item 4.1. Este tema é atualmente objeto de pesquisa na área da Mecânica da Fratura. Como nos trabalhos de Langer (1987), Kreller (1989), Sigrist (1995) e Longfei (1995), adota-se aqui também uma deformação limite do concreto, cf. a Tabela 2.5 ou outro valor confirmado experimentalmente.

### 4.3 Obtenção do Diagrama Momento-Curvatura

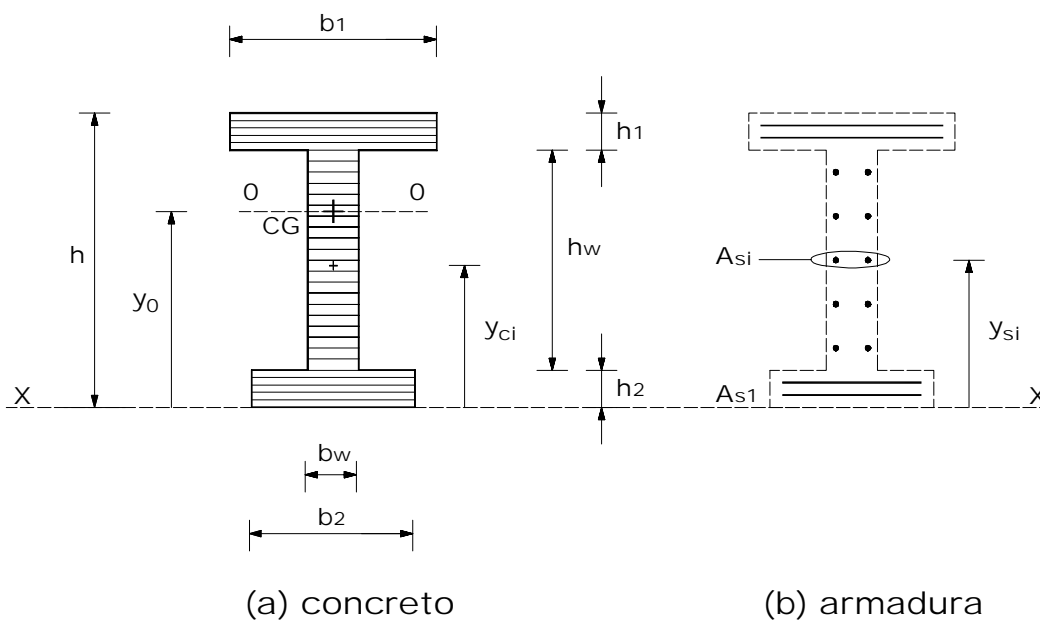


Fig. 4.6: Discretização das seções de concreto e de aço.

A seção considerada neste trabalho é um duplo T, com pelo menos um plano de simetria, o vertical passante pelo centro de gravidade da seção, onde atuam os esforços solicitantes  $(M, N)$ . A seção é discretizada em  $j_c$  ( $= 40$ ) camadas de concreto e  $j_s$  ( $\leq 20$ ) camadas de armadura, Fig. 4.6. A área da seção transversal e a distância entre o eixo X, passante pela base da seção, e o CG são iguais a:

$$A_0 = b_2 h_2 + b_w h_w + b_1 h_1 \quad (4.24)$$

$$y_0 = \frac{0,5b_2 h_2^2 + b_w h_w (h_2 + 0,5h_w) + b_1 h_1 (h - 0,5h_1)}{A_0} \quad (4.25)$$

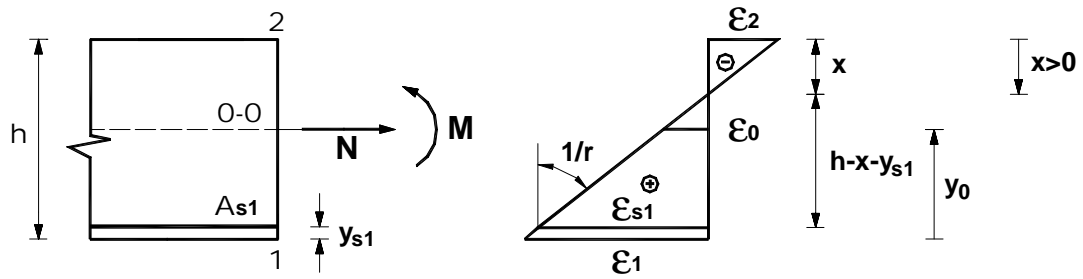


Fig. 4.7

Conforme a Fig. 4.6, definem-se os dados para o concreto na Tabela 4.3. Para as  $j_s$  camadas de armadura são dadas as distâncias  $y_{si}$  e as áreas  $A_{si}$ .

Tabela 4.3: Dados da seção de concreto.

	Número de Camadas	Espess. da camada	Larg. da camada	Distância do CG da camada ao Eixo X (base da seção)
Flange inferior	$j_{c2}$	$e_2 = h_2 / j_{c2}$	$b_2$	$y_{ci} = e_2 (i - 0,5)$ $1 \leq i \leq j_{c2}$
Alma	$j_{cw}$	$e_w = h_w / j_{cw}$	$b_w$	$y_{ci} = h_2 + e_w (i - 0,5 - j_{c2})$ $j_{c2} \leq i \leq j_{c2} + j_{cw}$
Flange superior	$j_{c1}$	$e_1 = h_1 / j_{c1}$	$b_1$	$y_{ci} = h_2 + h_w + e_1 (i - 0,5 - j_{c2} - j_{cw})$ $j_{c2} + j_{cw} \leq i \leq j_c$
Total	$j_c = j_{c1} + j_{cw} + j_{c2}$			

As equações de compatibilidade decorrem da hipótese de Bernoulli, cf. Fig. 4.7. A curvatura da seção é dada pelo gradiente  $d\varepsilon/dy$ , donde:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\varepsilon_2}{x} = \frac{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_2}{h - y_{s1}} = \frac{\varepsilon_{s1}}{h - x - y_{s1}} = \frac{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_0}{y_0 - y_{s1}} \quad (4.26)$$

Adimensionalmente tem-se, pondo  $\bar{\varepsilon} = 10^3 \varepsilon$ :

$$\rho = \frac{10^3 h}{r} = -\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\xi} = \frac{\bar{\varepsilon}_{s1} - \bar{\varepsilon}_2}{1 - y_{s1}/h} = \frac{\bar{\varepsilon}_{s1}}{1 - \xi - y_{s1}/h} = \frac{\bar{\varepsilon}_{s1} - \bar{\varepsilon}_0}{y_0/h - y_{s1}/h} \quad (4.27)$$

sendo a profundidade relativa da LN dada por:

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (4.28)$$

Escolhem-se como incógnitas básicas a deformação no centro de gravidade da seção e a curvatura. Logo, a deformação da armadura da primeira camada é:

$$\bar{\varepsilon}_{s1} = \bar{\varepsilon}_0 + \frac{y_0 - y_{s1}}{h} \rho \quad (4.29)$$

Com esta deformação obtém-se a da borda mais comprimida (ou menos tracionada):

$$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_{s1} - \left(1 - \frac{y_{s1}}{h}\right) \rho \quad (4.30)$$

assim como a da borda mais tracionada (ou menos comprimida):

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_{s1} + \frac{y_{s1}}{h} \rho \quad (4.31)$$

e numa ordenada  $y_i$  ( $y_{ci}$  ou  $y_{si}$ ):

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_{s1} + \left(\frac{y_{s1}}{h} - \frac{y_i}{h}\right) \rho = \bar{\varepsilon}_0 + \left(\frac{y_0}{h} - \frac{y_i}{h}\right) \rho \quad (4.32)$$



Das deformações  $\varepsilon_{ci}$  e  $\varepsilon_{si}$  decorrem as tensões nas camadas de concreto,  $\sigma_{ci}$ , e da armadura,  $\sigma_{si}$ , através das leis constitutivas dadas. Os esforços resistentes do concreto e do aço são:

$$R_c = \sum_1^{j_c} b_i e_i \sigma_{ci} = b_2 e_2 \sum_1^{j_{c2}} \sigma_{ci} + b_w e_w \sum_{j_{c2}+1}^{j_{c2}+j_{cw}} \sigma_{ci} + b_1 e_1 \sum_{j_{c2}+j_{cw}+1}^{j_c} \sigma_{ci} \quad (4.33)$$

$$M_c = R_c y_0 - \sum_1^{j_c} b_i e_i \sigma_{ci} y_{ci} = R_c y_0 - [b_2 e_2 \sum_1^{j_{c2}} \sigma_{ci} y_{ci} + b_w e_w \sum_{j_{c2}+1}^{j_{c2}+j_{cw}} \sigma_{ci} y_{ci} + b_1 e_1 \sum_{j_{c2}+j_{cw}+1}^{j_c} \sigma_{ci} y_{ci}] \quad (4.34)$$

$$R_s = \sum_1^{j_s} A_{si} \sigma_{si} \quad (4.35)$$

$$M_s = R_s y_0 - \sum_1^{j_s} A_{si} \sigma_{si} y_{si} \quad (4.36)$$

Os momentos referem-se ao eixo 0-0, passante pelo CG da seção, onde, por hipótese, são aplicados os esforços solicitantes. Os esforços resistentes totais são dados pelas seguintes somas:

$$N = R_c + R_s \quad (4.37)$$

$$M = M_c + M_s \quad (4.38)$$

e adimensionalmente:

$$v = \frac{N}{A_0 f_{cm}} = \frac{R_c}{A_0 f_{cm}} + \frac{R_s}{A_0 f_{cm}} = v_c + v_s \quad (4.39)$$

$$\mu = \frac{M}{A_0 h f_{cm}} = \frac{M_c}{A_0 h f_{cm}} + \frac{M_s}{A_0 h f_{cm}} = \mu_c + \mu_s \quad (4.40)$$

Na determinação dos esforços resistentes do concreto não se fez o desconto da área ocupada pela armadura. Nestas equações  $f_{cm}$  é a resistência média do concreto em compressão, e também a tensão de pico da lei constitutiva do concreto.

Delimita-se o intervalo da força normal de modo a ter-se no concreto, na tração pura, a tensão correspondente à resistência  $f_{ctm}$ , e na compressão pura a tensão pouco inferior à de pico, a saber,  $-0,95f_{cm}$ . Com esta restrição tem-se no pior caso um encurtamento igual a  $-2,03^0 /_{00}$ , no diagrama parábola-linear para  $f_{ck} = 50MPa$ . Supõe-se também que na tração pura haja uma armadura total mínima (distribuída em pelo menos duas camadas) suficiente para resistir à força  $A_0 f_{ct95\%} = 1,33A_0 f_{ctm}$ , donde:

$$A_{tot} f_y \geq \frac{4}{3} A_0 f_{ctm}$$

com o que a taxa mecânica total da armadura (só na tração pura) é limitada inferiormente a:

$$\omega_{tot} = \frac{A_{tot} f_y}{A_0 f_{cm}} \geq \frac{4}{3} \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} \quad (4.41)$$

Na flexo-compressão a armadura deve ser tal que não atinja o escoamento no Estádio II nu, assim que o momento fletor igualar o de fissuração. Com estas restrições, não há fissuração da seção nem escoamento da armadura ( $\varepsilon_{sy} \geq 2,5^0 /_{00} > \alpha_{95} ABS(\varepsilon_{c1}) = 0,7764 ABS(\varepsilon_{c1})$ , ver a seguir) ao iniciar-se o diagrama momento-curvatura, situação em que já está presente a força normal.

Para efeito do programa, o intervalo da força normal é dado por:

$$\lambda_{inf} N_{inf} = \lambda_{inf} [-A_0 (0,95 f_{cm}) + A_{tot} \sigma_s (\varepsilon_s = \alpha_{95} \varepsilon_{c1})] < N < \lambda_{sup} N_{sup} = \lambda_{sup} (A_0 f_{cm} + \alpha_s A_{tot} f_{ctm}) \quad (4.42a)$$

$$\lambda_{\text{inf}} v_{\text{inf}} = \lambda_{\text{inf}} \left[ -0,95 + \omega_{\text{tot}} \frac{\sigma_s (\varepsilon_s = \alpha_{95} \varepsilon_{c1})}{f_y} \right] < v = \frac{N}{A_0 f_{cm}} < \lambda_{\text{sup}} v_{\text{sup}} = \lambda_{\text{sup}} \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} (1 + \alpha_s \rho_{\text{stot}}) \quad (4.42b)$$

com  $\alpha_s = E_s / E_{ci}$ ,  $\rho_{\text{stot}} = A_{\text{stot}} / A_0$  e ainda  $\sigma_s (\varepsilon_s = \alpha_{95} \varepsilon_{c1}) / f_y = \alpha_{95} \varepsilon_{c1} / \varepsilon_{sy}$ . Para o diagrama de Grasser, Equação (2.82), obtém-se:

$$\alpha_{95} = \frac{0,05k + 1,90 - \sqrt{(0,05k + 1,90)^2 - 3,80}}{2} \quad (4.43a)$$

e para o diagrama parábola-linear ( $k = 2$ ) decorre desta equação:

$$\alpha_{95} = 0,7764 \quad (4.43b)$$

Os coeficientes  $\lambda$  de (4.42), ambos inferiores a 1, foram fixados iguais a  $\lambda_{\text{sup}} = 0,95$  e  $\lambda_{\text{inf}} = 0,90$ , para facilitar a convergência da solução.

O ponto inicial da função  $\mu(\rho)$  corresponde ao valor nulo da curvatura, e há na seção um estado uniforme de deformação, nulo ou não. O momento resistente,  $\mu_0$ , em relação ao CG da seção e correspondente a  $\rho = 0$ , decorre de (4.40), após determinar-se a deformação inicial  $\varepsilon_{in}$ . Se a força normal for nula, esta deformação também é nula, do contrário ela tem o sinal da força normal. Na tração pura, pela hipótese adotada, não há fissuração, e a deformação  $\varepsilon_{in}$  decorre da equação de equilíbrio da força normal:

$$-\varepsilon_{in} = \frac{10^3 f_{cm}}{E_{ci}} \frac{1}{1 + \alpha_s \rho_{\text{stot}}} v \quad (4.44)$$

válida para  $0 \leq v < v_{\text{sup}}$ .

Na compressão pura, obtém-se:

$$N = A_0 \sigma_c + A_{\text{stot}} \sigma_s$$

De acordo com a lei de Grasser tem-se:

$$\sigma_c = -f_{cm} \frac{k\alpha - \alpha^2}{1 + (k-2)\alpha}$$

Com  $\alpha_{in} = \bar{\varepsilon}_{in} / \bar{\varepsilon}_{c1}$  e estando a armadura aquém do escoamento, resulta da equação de equilíbrio da força normal:

$$\alpha_{in} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (4.45)$$

onde:

$$A = -\frac{\rho_{stot} E_s \bar{\varepsilon}_{c1}}{10^3 f_{cm}} (> 0) \quad (4.46a)$$

$$b = \frac{A + k + (k-2)v}{A(k-2) - 1} \quad (4.46b)$$

$$c = \frac{v}{A(k-2) - 1} \quad (4.46c)$$

Esta solução é também válida para o diagrama parábola-linear, bastando nela fazer  $k = 2$  e tirar  $\varepsilon_{c1}$  da Equação (2.79).

Conhecida esta deformação inicial, resulta da Equação (4.40) o momento resistente  $\mu_0$  ou  $M_0$ , para curvatura nula, em relação ao CG da seção, o qual só será nulo se a força normal o for, ou se a seção tiver dupla simetria, inclusive da armadura.

Para construir a curva  $\mu(\rho)$  por pontos, supõe-se a força normal presente desde o início desta curva, como se disse. Escolhe-se uma seqüência crescente de curvaturas relativas a partir do valor nulo, e para cada  $\rho$  determina-se, iterativamente, na Equação (4.39) da força normal, a deformação  $\bar{\varepsilon}_0$  no CG da

seção, e de (4.32) as deformações em qualquer outro ponto da seção. De (4.40) resulta o momento correspondente.

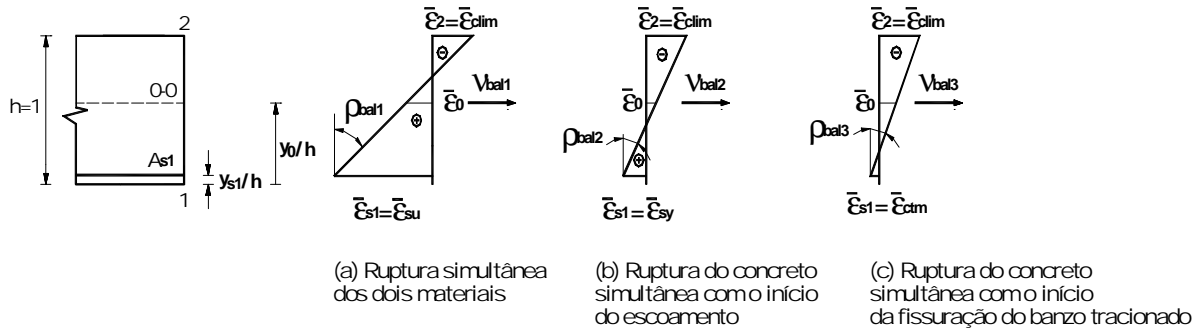


Fig. 4.8

Um dos objetivos da construção deste diagrama é obter seus pontos principais, a partir dos quais o diagrama pode ser substituído por segmentos de reta, dos quais decorrem as rigidezes à flexão nos diferentes trechos do diagrama. O primeiro deles, a origem do diagrama, já foi determinado. Os seguintes são comentados a seguir.

Considere-se os três estados de deformação mostrados na Fig. 4.8, em que pelo menos uma deformação limite ocorre. No primeiro deles (Fig. 4.8a) há ruptura simultânea dos dois materiais, e como a curvatura e a deformação no CG são conhecidas e dadas por:

$$\rho_{bal1} = \frac{\bar{\varepsilon}_{su} - \bar{\varepsilon}_{clim}}{1 - y_{s1}/h} \quad (4.47)$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_{su} - \rho_{bal1} \left( \frac{y_0 - y_{s1}}{h} \right) \quad (4.48)$$

determina-se, sem qualquer iteração, a força normal correspondente,  $v_{bal1}$ , da Equação (4.39). Compara-se a força normal efetivamente atuante na seção com

este valor. Se ocorrer  $v > v_{bal1}$ , há ruptura da armadura com  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{su}$ , mas não há ruptura do concreto. E se  $v < v_{bal1}$ , há ruptura apenas do concreto com  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{c\lim}$ .

No segundo estado, Fig. 4.8b, tem-se a ruptura do concreto simultânea com o início do escoamento da primeira camada de armadura (a de maior alongamento), e:

$$\rho_{bal2} = \frac{\bar{\varepsilon}_{sy} - \bar{\varepsilon}_{c\lim}}{1 - y_{s1}/h} \quad (4.49)$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_{sy} - \rho_{bal2} \left( \frac{y_0 - y_{s1}}{h} \right) \quad (4.50)$$

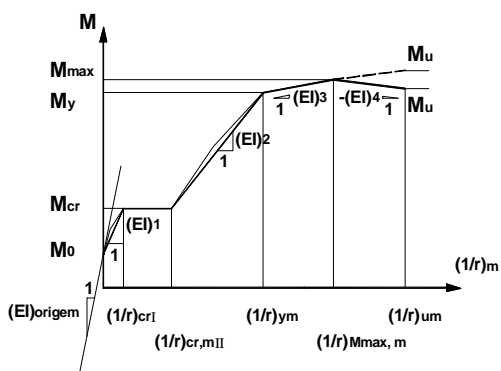
Com estes valores obtém-se, analogamente ao caso anterior, a força normal  $v_{bal2}$ . Se ocorrer  $v < v_{bal2}$ , não há escoamento, em tração, da armadura em ponto algum da curva  $\mu(\rho)$ , pois o concreto atinge antes sua deformação limite. Do contrário, i. e., se  $v \geq v_{bal2}$ , há escoamento da armadura tracionada.

O terceiro estado de deformação dá uma condição para saber de antemão se haverá fissuração da seção. Conforme explicado no item 3.4, a respeito da Equação (3.67), considera-se que a fissuração ocorre para a deformação no banzo tracionado (primeira camada) igual a  $\varepsilon_{ctm}$ . Com isto tem-se:

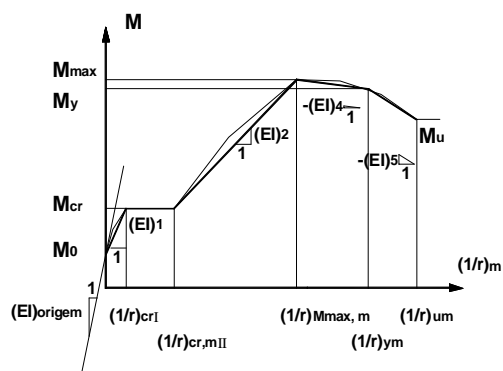
$$\rho_{bal3} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ctm} - \bar{\varepsilon}_{c\lim}}{1 - y_{s1}/h} \quad (4.51)$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_{ctm} - \rho_{bal3} \frac{y_0 - y_{s1}}{h} \quad (4.52)$$

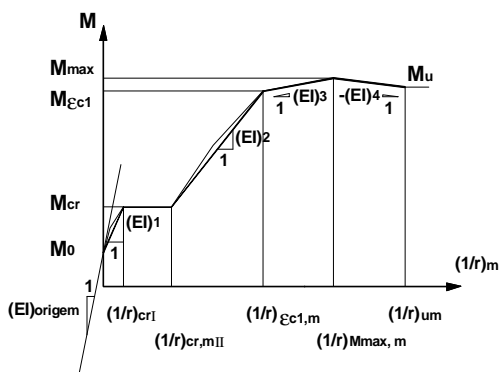
Se ocorrer  $v \leq v_{bal3}$ , não há fissuração da seção: o concreto esmaga antes. Mas esta condição apenas não basta para garantir que não haverá fissuração da seção, porque esta se dá pela ocorrência simultânea das duas condições seguintes:  $v > v_{bal3}$  e  $\mu_{cr} < \mu_{\max}$ , onde  $\mu_{cr}$  é o momento relativo de fissuração, a ser determinado adiante.



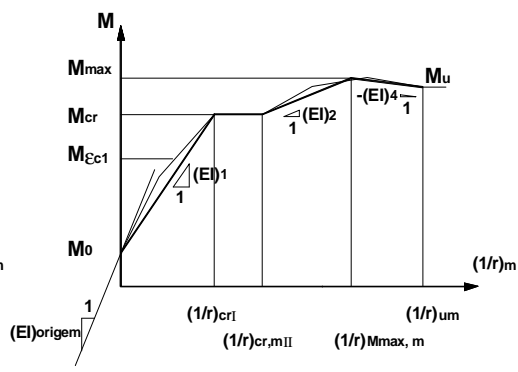
(a) Escoamento em tração antes do momento máximo  
 $N \geq N_{bal2}$



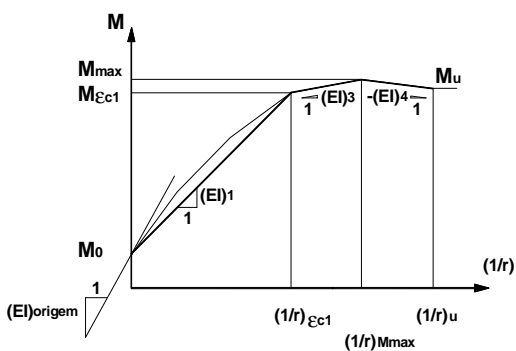
(b) Escoamento em tração após o momento máximo  
 $N \geq N_{bal2}$



(c) Fissuração sem escoamento em tração  
 $N_{bal3} < N < N_{bal2}$  e  $M_{cr} < M_{\epsilon c1}$



(d) Fissuração sem escoamento em tração  
 $N_{bal3} < N < N_{bal2}$  e  $M_{cr} > M_{\epsilon c1}$



(e) Sem fissuração  
 $N \leq N_{bal3}$

Fig. 4.9: Tipos de diagramas momento-curvatura.

Com o conhecimento prévio destas três forças normais e do momento de fissuração, obtêm-se os diferentes tipos de curva  $M(1/r)$  indicados na Fig. 4.9, bem como as correspondentes rigidezes dos trechos linearizados. Nesta figura indica-se por  $(1/r)_m$  a curvatura média decorrente do enrijecimento da armadura tracionada. E se não há fissuração tem-se  $(1/r)_m = 1/r$ . Na Fig. 4.9c representou-se o momento de fissuração abaixo do momento  $M_{\varepsilon_{c1}}$  para o qual ocorre na borda superior a deformação  $\varepsilon_{c1}$  correspondente à tensão de pico  $f_{cm}$ . Entretanto, estes dois momentos podem trocar de posição, Fig. 4.9d, devendo-se então alterar adequadamente a definição das rigidezes.

Se ocorrer  $M_{cr} > M_{\max}$ , as rigidezes são calculadas como indicado na Fig. 4.9e.

O momento máximo pode corresponder à condição  $dM/d(1/r) = 0$  ou a uma deformação limite, quando então  $M_{\max} = M_u$ , conforme indicado em tracejado na Fig. 4.9a. Esta derivada nula é detectada quando, para a dada seqüência de curvaturas crescentes, houver queda do momento interno, i. e., quando  $M_j < M_{j-1}$  e  $M_{j-1} > M_{j-2}$ , sendo, portanto,  $M_{\max} = M_{j-1}$ . Esta condição é dada pela inequação:

$$(M_j - M_{j-1})(M_{j-1} - M_{j-2}) < 0 \quad (4.53)$$

Os demais pontos principais da curva  $M(1/r)$ , indicados na Fig. 4.9, com exceção daqueles correspondentes ao momento de fissuração, são obtidos por interpolação linear entre dois pontos sucessivos desta curva, onde se situa a deformação em questão. Isto inclui o último ponto, o de ordenada  $M_u$ .

O acréscimo  $\Delta\rho$  na curvatura relativa  $\rho$  é escolhido igual a 0,5 para forças normais decrescentes (compressões crescentes) até  $v_{bal2}$ , e decai linearmente a 0,025 para  $v = v_{\inf}$ . Ver a Fig. 4.10. Para forças normais muito próximas de limite inferior (um caso de pouca importância) pode ser que, para haver convergência, o incremento  $\Delta\rho$  tenha de ser diminuído ainda mais.



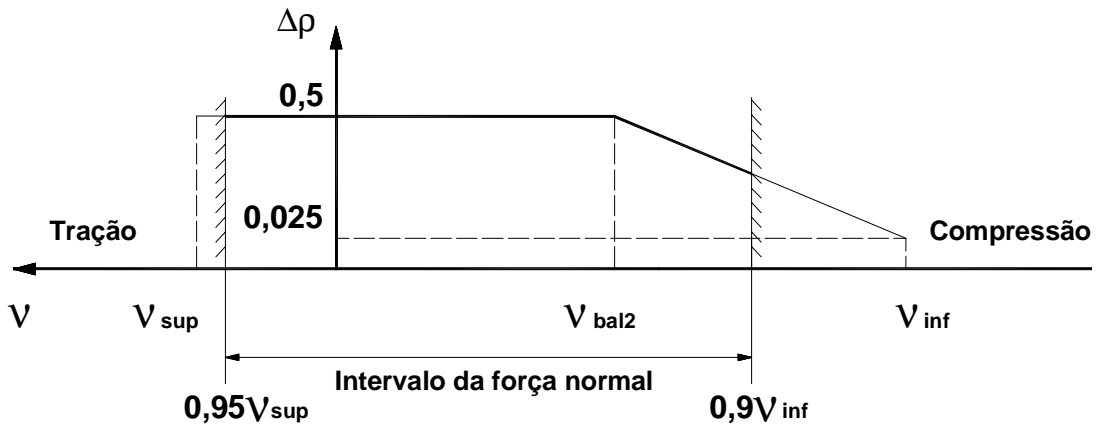


Fig. 4.10: Passo da curvatura relativa.

A determinação do momento de fissuração,  $M_{cr}$ , e das correspondentes curvaturas nos Estádios I e II,  $(1/r)_{crI}$  e  $(1/r)_{crII}$ , é feita como segue. Havendo escoamento na tração (Figs. 4.9a e b) deve-se ter obrigatoriamente  $M_{cr} < M_y$ , o que significa que a seção tem armadura mínima adequada, calculada à parte do programa elaborado para obtenção da curva  $M(1/r)$ . Esta desigualdade é uma restrição que faz parte do programa.

No Estádio I impõe-se na primeira camada da armadura  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{ctm}$ , e há a seguinte relação entre a curvatura e a deformação no CG:

$$\rho_{crI} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ctm} - \bar{\varepsilon}_0}{\frac{y_0}{h} - \frac{y_{s1}}{h}} \quad (4.54)$$

de modo que a deformação  $\bar{\varepsilon}_0$  pode ser obtida iterativamente da equação de equilíbrio da força normal (4.39). Conhecidas as grandezas  $\bar{\varepsilon}_0$  e  $\rho_{crI}$ , o momento de fissuração resulta de (4.40).

O passo seguinte consiste em determinar a curvatura no Estádio II nu (resistência à tração desprezada), para este mesmo momento. Este problema pode ser resolvido pelo método da rigidez tangente, cf. Chen e Shoraka (1975). As equações de equilíbrio podem ser reescritas da seguinte forma:

$$N = \sum_1^{j_c} A_{ci} \sigma_{ci} + \sum_1^{j_s} A_{si} \sigma_{si} \quad (4.55)$$

$$M = y_0 N - \sum_1^{j_c} A_{ci} y_{ci} \sigma_{ci} - \sum_1^{j_s} A_{si} y_{si} \sigma_{si} \quad (4.56)$$

Na forma incremental estas equações passam a ser:

$$\partial N = \sum_1^{j_c} A_{ci} \partial \sigma_{ci} + \sum_1^{j_s} A_{si} \partial \sigma_{si} \quad (4.57)$$

$$\partial M = y_0 \partial N - \sum_1^{j_c} A_{ci} y_{ci} \partial \sigma_{ci} - \sum_1^{j_s} A_{si} y_{si} \partial \sigma_{si} \quad (4.58)$$

Os incrementos de tensão são tomados nas tangentes às curvas  $\sigma(\varepsilon)$  dos materiais, ou seja:

$$\partial \sigma_{ci} = E_{cti} \partial \varepsilon_{ci} = E_{cti} [\partial \varepsilon_0 + (y_0 - y_{ci}) \partial (1/r)]$$

$$\partial \sigma_{si} = E_{sti} \partial \varepsilon_{sci} = E_{sti} [\partial \varepsilon_0 + (y_0 - y_{si}) \partial (1/r)]$$

Nestas equações usou-se a (4.32) na sua forma dimensional. As grandezas  $E_{cti}$  e  $E_{sti}$  são obtidas, para cada fibra de concreto e para cada camada de armadura, da derivada  $(\partial \sigma / \partial \varepsilon)_i$ , correspondente ao estado de deformação existente na seção, *antes de serem dados os acréscimos*  $\partial \varepsilon_0$  e  $\partial (1/r)$ . Substituindo-se  $\partial \sigma_{ci}$  e  $\partial \sigma_{si}$  em (4.57) e (4.58), bem como  $\partial N$  de (4.57) em (4.58), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \partial N \\ \partial M \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \varepsilon_0 \\ \partial (1/r) \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

ou de forma compacta:

$$\{\partial S\} = [Q]\{\partial D\}$$

onde  $[Q]$  é a matriz de rigidez tangente que une os vetores acréscimos de solicitação e de deformação,  $\{\partial S\}$  e  $\{\partial D\}$ . Esta matriz, quadrada e de ordem 2, é simétrica, pois os acréscimos de tensão foram considerados na tangente às leis constitutivas, e representa a rigidez tangente da barra de comprimento unitário, ou a rigidez tangente da seção transversal. Ela depende do estado atual de deformação a partir do qual é dado o acréscimo  $\{\partial D\}$ . Seus elementos são:

$$Q_{11} = \sum_1^{j_c} A_{ci} E_{cti} + \sum_1^{j_s} A_{si} E_{sti} \quad (4.60a)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_1^{j_c} A_{ci} (y_0 - y_{ci}) E_{cti} + \sum_1^{j_s} A_{si} (y_0 - y_{si}) E_{sti} \quad (4.61a)$$

$$Q_{22} = \sum_1^{j_c} A_{ci} (y_0 - y_{ci})^2 E_{cti} + \sum_1^{j_s} A_{si} (y_0 - y_{si})^2 E_{sti} \quad (4.62a)$$

e na forma adimensional:

$$q_{11} = \frac{Q_{11}}{10^3 A_0 f_{cm}} \quad (4.60b)$$

$$q_{12} = q_{21} = \frac{Q_{12}}{10^3 A_0 h f_{cm}} \quad (4.61b)$$

$$q_{22} = \frac{Q_{22}}{10^3 A_0 h^2 f_{cm}} \quad (4.62b)$$

Observe-se que para evitar a divisão por  $10^3$  nestes  $q_{ij}$  basta pôr os módulos tangentes  $E_{cti}$  e  $E_{sti}$  em  $GPa$  e a resistência  $f_{cm}$  em  $MPa$ . Estes módulos são definidos a partir das leis constitutivas do concreto e do aço. Para o concreto em

compressão ( $\varepsilon_{ci} \leq 0$ ), pondo-se  $\alpha_i = \varepsilon_{ci}/\varepsilon_{c1}$ , com  $\varepsilon_{c1} = -2,2^0/_{00}$ , vem, conforme a lei de Grasser:

$$E_{cti} = -\frac{f_{cm} [k - 2\alpha_i - (k-2)\alpha_i^2]}{\varepsilon_{c1} [1 + (k-2)\alpha_i]^2} \quad \text{se } 0 \leq \alpha_i \leq k \quad (4.63a)$$

$$E_{cti} = 0 \quad \text{se } \alpha_i > k \quad (4.63b)$$

Para o diagrama parábola-linear tem-se, com  $k=2$  em (4.63a), no ramo ascendente:

$$E_{cti} = -\frac{2f_{cm}}{\varepsilon_{c1}}(1-\alpha_i) \quad \text{se } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (4.64a)$$

No ramo descendente, resulta:

$$E_{cti} = E_{cD} \quad \text{se } 1 < \alpha_i \leq 1 - \frac{E_{c1}}{E_{cD}} \quad (4.64b)$$

$$E_{cti} = 0 \quad \text{se } \alpha_i > 1 - \frac{E_{c1}}{E_{cD}} \quad (4.64c)$$

Na tração ( $\varepsilon_{ci} > 0$ ), antes da fissuração, tem-se:

$$E_{cti} = E_{ci} \quad \text{se } \varepsilon_{ci} \leq \varepsilon_{ctm} = \frac{f_{ctm}}{E_{ci}} \quad (4.65a)$$

$$E_{cti} = 0 \quad \text{se } \varepsilon_{ci} > \varepsilon_{ctm} = \frac{f_{ctm}}{E_{ci}} \quad (4.65b)$$

Após a fissuração, no Estádio II nu, tem-se  $E_{cti} = 0$  para qualquer  $\varepsilon_{ci} > 0$ .

Para o aço, de diagrama bilinear com encruamento, resulta:

$$E_{sti} = E_s \quad \text{se } ABS(\varepsilon_{si}) \leq \varepsilon_{sy} \quad (4.66a)$$

$$E_{sti} = E_{sh} \quad \text{se } \varepsilon_{sy} < ABS(\varepsilon_{si}) \leq \varepsilon_{su} \quad (4.66b)$$

$$E_{sti} = 0 \quad \text{se } ABS(\varepsilon_{si}) > \varepsilon_{su} \quad (4.66c)$$

Através de (4.59) e das equações de equilíbrio podem-se resolver, passo a passo, diferentes problemas de determinação das deformações para uma dada seqüência de aplicação das solicitações, ou ainda problemas mistos de aplicação de esforços e deformações, como se pode ver na mencionada bibliografia.

A determinação do estado de deformação no Estádio II nu, correspondente ao momento de fissuração já conhecido, é feita aplicando-se inicialmente a dada força normal. Deste estado de deformação inicial, indicado pelo índice  $i = 1$ , tem-se, na forma adimensional, o vetor das deformações igual a:

$$\{d\}_{i=1} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\varepsilon}_{in} \\ 0 \end{array} \right\}_{i=1} \quad (4.67)$$

bem como a matriz  $[q]_{i=1}$  e o momento inicial  $\mu_0 = \mu_{i=1}$ . Impondo o primeiro acréscimo no momento igual a  $\partial\mu = \mu_{cr} - \mu_{i=1}$ , uma quantia finita, ao invés de infinitesimal, e  $\partial v = v - v_{i=1}$ , no caso igual a zero, têm-se, de (4.59) na forma adimensional, os acréscimos:

$$(\partial\bar{\varepsilon}_0)_{i=1} = \left[ \frac{q_{22}\partial v - q_{12}\partial\mu}{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} \right]_{i=1} \quad (4.68)$$

$$(\partial\rho)_{i=1} = \left[ \frac{q_{11}\partial\mu - q_{12}\partial v}{q_{11}q_{22} - q_{12}^2} \right]_{i=1} \quad (4.69)$$

com os quais se obtém o estado de deformação seguinte:

$$\{d\}_{i=2} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\varepsilon}_{in} \\ 0 \end{array} \right\}_{i=1} + \left\{ \begin{array}{c} \bar{\partial\varepsilon}_0 \\ \bar{\partial\rho} \end{array} \right\}_{i=1} \quad (4.70)$$

Observe-se que o momento de fissuração só seria atingido com estes acréscimos se os materiais fossem elásticos lineares, o que, em geral, não é o caso.

Do novo estado de deformação decorrem a nova matriz  $[q]_{i=2}$  e as solicitações  $\{s\}_{i=2}$ . O processo é repetido até uma tolerância no erro dos esforços relativos inferior a  $10^{-4}$ , na  $i$ -ésima iteração:

$$(\partial v^2 + \partial \mu^2)_i^{1/2} < 10^{-4} \quad (4.71)$$

com o que fica determinado o correspondente estado de deformação logo após a fissuração, e, portanto, a curvatura relativa no Estádio II,  $\rho_{crII}$ , correspondente ao momento de fissuração,  $\mu_{cr}$ .

Um outro problema que interessa resolver por este método é o da obtenção da rigidez tangente na origem da curva  $M(1/r)$ , indicada por  $(EI)_{origem}$ . Esta rigidez é importante no controle das demais rigidezes desta curva, pois é um limite superior ( $d^2\mu/d\rho^2 \leq 0$ ), e é muito útil em pilares que não sofrem fissuração, em particular em pilares esbeltos. Esta rigidez foi determinada por Buchaim (1990) para seções retangulares com dupla simetria da armadura ( $\mu_0 = 0$ ), com o que é possível obter a carga de instabilidade de pilares esbeltos bi-articulados. Indicações sobre esta rigidez também são encontradas no trabalho já mencionado de Bazant et al. (1991).

Considere-se agora o caso mais geral de seções com um só plano de simetria. Uma vez aplicada a força normal, resulta imediatamente o estado uniforme de deformação da seção, através de  $\varepsilon_{in}$ , Equação (4.44) ou (4.45). Como na origem da curva  $M(1/r)$  o aço não está em escoamento, pela hipótese aqui feita,

tem-se  $E_{sti} = E_s$ . De uma das equações (4.63) a (4.65) decorre o módulo tangente  $E_{cti}$  correspondente à deformação inicial  $\varepsilon_{in}$ . E sendo  $\partial N = 0$ , a rigidez procurada resulta de (4.69), na sua forma dimensional:

$$(EI)_{origem} = \frac{\partial M}{\partial(1/r)} = \left( \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}{Q_{11}} \right)_{i=1} \quad (4.72)$$

sem qualquer outro passo adicional. Expressando esta rigidez em função do produto do módulo de deformação do concreto  $E_{ci}$ , Equação (2.12) ou (2.80), pelo momento de inércia  $I_0$  da seção da peça, obtém-se:

$$\frac{(EI)_{origem}}{E_{ci}I_0} = \frac{1}{E_{ci}I_0} \left( \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}{Q_{11}} \right)_{i=1} \quad (4.73)$$

Como mostrado antes, o enrijecimento da armadura na tração é considerado a partir da tensão da armadura da primeira camada na seção fissurada (Estádio II nu). Da lei tensão da armadura na fissura em função de sua deformação média,  $\sigma_s(\varepsilon_{sm})$ , dada na Fig. 3.16, resulta a deformação média  $\varepsilon_{s1m}$  da armadura da primeira camada. Considerando-se que a maior contribuição à deformabilidade da peça resulta da seção fissurada, toma-se simplificada a distância da LN à primeira camada da armadura igual à da própria seção fissurada. Com isto a curvatura relativa média é dada por:

$$\rho_m = \frac{\varepsilon_{s1m}}{1 - \xi - y_{s1}/h} \quad (4.74)$$

onde  $\xi = x/h$  é a profundidade relativa da LN na seção fissurada, e  $y_{s1}$  é a distância da camada 1 à borda inferior da seção. Não havendo fissuração este cálculo é, evidentemente, desnecessário.

Em um segmento linearizado da curva  $M(1/r)$ , entre os pontos inicial  $k-1$  e final  $k$ , obtém-se a correspondente rigidez da seguinte expressão:

$$(EI)_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{\left(\frac{1}{r}\right)_{m,k} - \left(\frac{1}{r}\right)_{m,k-1}} \quad (4.75a)$$

ou adimensionalmente:

$$\frac{(EI)_k}{E_{ci}I_0} = C_3 \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\rho_{m,k} - \rho_{m,k-1}} \quad (4.75b)$$

onde a constante  $C_3$  vale (com  $f_{cm}$  em *MPa* e  $E_{ci}$  em *GPa*):

$$C_3 = \frac{A_0 h^2 f_{cm}}{E_{ci} I_0}$$

Com a teoria descrita neste item têm-se as ferramentas para obter o diagrama momento-curvatura completo, bem como seus pontos principais e as rigidezes dos trechos linearizados. No item seguinte são apresentados resultados do programa em Qbasic que incorpora esta teoria. Menciona-se, ainda, a ocorrência dos seguintes casos, que podem, talvez, parecer estranhos à primeira vista:

- (1) Na flexo-tração, se a LN estiver fora da seção ( $\xi = x/h < 0$ ), há só um banzo, formado pela seção inteira, e a teoria aqui apresentada para o cálculo da curvatura média perde em precisão, pois o enrijecimento da armadura na tração é considerado apenas na primeira camada da armadura (na mais alongada).
- (2) Em casos de altas forças normais relativas de compressão e grande concentração de armadura abaixo do eixo 0-0, a curva  $\mu(\rho)$  pode estar no quarto quadrante, sem que haja qualquer erro.

Lembre-se, também, que a seção transversal, se isto facilitar a compreensão, deve ser disposta de modo a ter-se a armadura mais tracionada, ou menos comprimida, na sua parte inferior. Assim, p. ex., uma seção T de um apoio de continuidade deve ser representada com a flange tracionada voltada para baixo.



## 4.4 Apresentação de Resultados

Mostram-se, a seguir, os resultados da teoria exposta no item anterior, começando pela comparação com o ensaio descrito por Ahmad e Shah (1980). Trata-se de um diagrama momento-curvatura *média* de uma viga bi-apoiada de seção retangular, obtido para o trecho central em flexão pura. Ver a Fig. 4.11 e a Tabela 4.4. Os dados de entrada do programa são os seguintes:

Concreto: Diagrama de Grasser

$$f_{ck} = f_{cm} = f_c' = 5,89Ksi = 40,61MPa, f_{ctm} = 0,3f_{cm}^{2/3} = 3,54MPa$$

$$\beta_t = 0,40$$

$$\text{Aço: } f_y = 66,6Ksi = 459,2MPa, f_t = f_{su} = 89,95Ksi = 619,5MPa$$

$$\varepsilon_{sy} = 2,3^0 /_{00}, \varepsilon_{sh} = 4,85^0 /_{00}, \varepsilon_{su} = 12,85^0 /_{00}, E_s = 199,82GPa$$

$$E_{sh} = 10^{-5} GPa \text{ se } \varepsilon_{sy} < \varepsilon_s < \varepsilon_{sh}, E_{sh} = 19,98GPa \text{ se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{sh}$$

$$\text{Geometria: } b_w = 101,6mm, h = 152,4mm, y_{s1} = 12,7mm \text{ (adotado),}$$

$$A_{s1} = 0,486in^2 = 313,5mm^2$$

Na Fig. 4.11 pode-se ver a boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais, particularmente com os de Desayi B. Krishnan, e em especial na fase pós-escoamento. O penúltimo ponto, obtido no programa por interpolação, corresponde a  $\varepsilon_{clim} = -3,57^0 /_{00}$  no ramo descendente, e está bastante próximo do último ponto experimental. Observe-se que a curva de Ahmad e Shah termina um pouco adiante, para a curvatura  $19,1 \times 10^{-4} rad/in$ , indicando um encurtamento da borda comprimida maior do que o do programa. Além disso, o momento resistente máximo concorda totalmente com o obtido no ensaio.

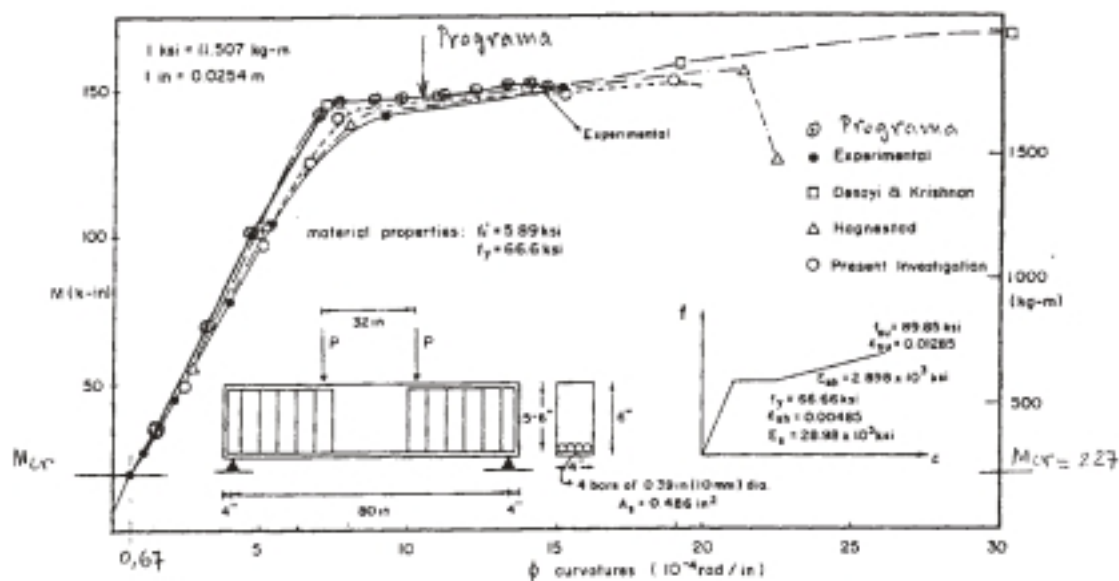


Fig. 4.11: Comparação dos resultados teóricos e experimentais da relação momento-curvatura média, cf. Ahmad e Shah (1980).

Tabela 4.4: Resultados teóricos do ensaio da Fig. 4.11.

$\rho = 10^3 \frac{h}{r}$	$\rho_m = 10^3 \left(\frac{h}{r}\right)_m$	$\mu = \frac{M}{bh^2 f_{cm}}$	$10^4 \left(\frac{1}{r}\right)_m$ (rad/in)	$M$ (Kgf m)	Observação
$\rho_{crI} = 0,278$ $\rho_{crII} = 0,542$	$\rho_{cm} = 0,40$	0,0237	0,67	227	Fissuração
1	0,86	0,0433	1,43	415	
2	1,86	0,0851	3,10	816	
3	2,85	0,1248	4,75	1196	
4	3,85	0,1619	6,42	1551	
4,41	4,24	0,1744	7,07	1671	$M = M_y$
5	4,64	0,1782	7,73	1708	
6	5,28	0,1798	8,80	1723	
7	5,94	0,1808	9,90	1733	
8	6,61	0,1813	11,02	1737	
9	7,30	0,1847	12,17	1770	
10	8,01	0,1874	13,35	1796	
<b>10,5</b>	<b>8,37</b>	<b>0,1875</b>	<b>13,95</b>	<b>1797</b>	$M = M_{max}$
10,66	8,48	0,1869	14,13	1791	$M = M_u$
11	8,74	0,1854	14,57	1777	

O exemplo seguinte refere-se aos resultados experimentais de Priestley, Park e Lu (1971), bem como aos correspondentes resultados teóricos de Collins e Mitchell, relatados no livro destes autores, *Prestressed Concrete Basics* (1987). Neste caso tem-se uma viga bi-apoiada, de seção retangular  $b \times h = 102 \times 203 \text{mm}^2$ , protendida em pré-tração, com dois fios aderentes posicionados no centro da seção, de diâmetro  $\phi_p = 7 \text{mm}$ , área  $A_p = 77 \text{mm}^2$  e pré-alongamento  $\Delta \varepsilon_p = 4,24^0 /_{00}$ . Os dados do concreto são: parábola do segundo grau,  $f_{ck} = f_{cm} = f_c' = 44,9 \text{MPa}$ ,  $\varepsilon_{c1} = -2,5^0 /_{00}$ ,  $f_{cr} = f_{ct} = 3,79 \text{MPa}$  (ao invés de  $2,90 \text{MPa}$ , cf. consta na Fig. 4.13) e  $\beta_t = 0,40$ .

Este problema pode ser resolvido considerando-se como resistente apenas metade da altura da seção transversal, com o que resulta  $h = d = 101,5 \text{mm}$ . O enrijecimento da armadura decorre do momento (fictício) de fissuração para o qual resulta, no Estádio I, na camada da armadura a deformação  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{ct} = f_{ct} / E_{ci}$ . Neste exemplo, Collins e Mitchell tratam o enrijecimento da armadura como se na seção transversal existisse uma tensão de tração uniforme e igual a  $0,5 f_{ct} = 1,45 \text{MPa}$ , na área efetiva do banzo tracionado, formada pela largura da viga e por uma altura igual a  $7,5 \phi_p$  medida no sentido da borda tracionada e, no sentido oposto, até  $7,5 \phi_p$  ou a distância da armadura até a LN, o que for menor.

Estes autores utilizam para o aço a curva modificada de Ramberg-Osgood, Fig. 4.12a, dada pela seguinte equação:

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \left\{ A + \frac{1-A}{[1 + (B \varepsilon_p)^C]^{1/C}} \right\} \leq f_{pu}$$

no caso, com a expressão:

$$\sigma_p = 200 \times 10^3 \varepsilon_p \left\{ 0,032 + \frac{0,968}{[1 + (135 \varepsilon_p)^6]^{1/6}} \right\} \leq f_{pu}$$

No programa adota-se, ao invés desta curva, a lei bilinear com encruamento, sendo  $E_{sh} = 6,4GPa$ ,  $\varepsilon_{py} = 1/B = 7,41^0 /_{00}$ ,  $f_{py} = 1482MPa$ . Mantendo-se  $E_{sh}$  constante, arbitra-se  $f_{pu} = 1860MPa$ , donde:

$$\varepsilon_{pu} = 10^{-3} \left( 7,41 + \frac{1860 - 1482}{6,4} \right) = 66,47^0 /_{00}$$

e isto não tem maior importância, uma vez que a ruptura ocorre pelo concreto.

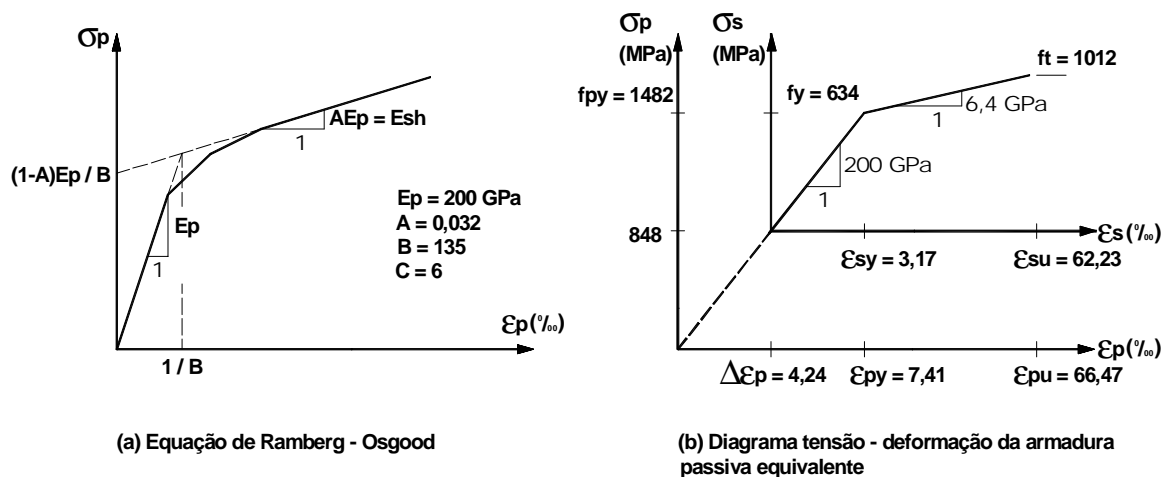


Fig. 4.12

Este exemplo vem muito a propósito, visto que permite considerar a força de protensão como uma força normal de compressão aplicada no CG da seção completa, sem que haja efeito de segunda ordem. Para isto considera-se a armadura protendida como passiva, com a lei constitutiva indicada na Fig. 4.12b, obtida daquela dada na Fig. 4.12a, após descontar a protensão. Sendo  $P$  a força de protensão, a força normal aplicada é  $N = -P = -848 \times 77 = -65296N$ .

Os resultados do programa estão dados na Tabela 4.5 e na Fig. 4.13, devendo-se observar que: (1) as curvaturas nesta figura são *valores médios* no trecho central da viga; (2) o momento resistente fornecido pelo programa inclui o momento de protensão, igual a  $65296 \times 101,5 / 2 = 3,314 \times 10^6 Nmm = 3,314KNm$ .

Assim, o momento devido ao carregamento deve ser obtido somando-se ao momento resistente esta última parcela.

Da Fig. 4.13 e da Tabela 4.5 observa-se o seguinte:

- (1) Na fase pré-escoamento, os resultados do programa dão curvaturas médias *maiores* que as observadas experimentalmente, o que significa que *a colaboração do concreto na tração*, mas não o enrijecimento da armadura, está subestimada. Como a taxa da armadura é pequena, o modelo só poderia ser melhorado se fossem consideradas as tensões na fissura coesiva, tanto mais que está disponível a metade inferior da seção transversal, aqui desprezada.
- (2) A partir do escoamento há concordância muito boa com os resultados experimentais. O momento último observado no teste é igual a  $10,50KNm$ , ao passo que o calculado (máximo) é igual a  $10,17KNm$ , 3% menor, e corresponde a uma deformação no concreto na borda superior igual a  $-3,51^0 /_{00}$ .
- (3) Para o penúltimo ponto calculado tem-se  $M_u = 10,05KNm$  e uma curvatura média  $10^3(1/r)_m = 104,48rad / m$ , valor praticamente coincidente com o observado experimentalmente. Neste caso o encurtamento limite do concreto é  $\varepsilon_{c,lim} = -4,27^0 /_{00}$ .

Tabela 4.5: Resultados teóricos para a viga protendida de Priestley, Park e Lu.

$\rho = 10^3 \frac{h}{r}$	$\rho_m = 10^3 \left(\frac{h}{r}\right)_m$	$\mu = \frac{M}{bh^2 f_{cm}}$	$10^3 \left(\frac{1}{r}\right)_m$ (rad/m)	$M_{carga}$ (KNm)	Observação
0,5973	0,5973	0,0384	5,88	5,13	Fissuração Est. I
0,6898	0,5856	0,0384	5,01	5,13	Fissuração Est. II
1	0,93	0,0484	9,16	5,60	
2	1,95	0,0732	19,21	6,77	
3	2,95	0,0947	29,06	7,78	
4	3,96	0,1148	39,01	8,73	
5	4,96	0,1336	48,87	9,62	
5,28	5,21	0,1370	51,33	9,78	$M = M_y$
6	5,75	0,1407	56,65	9,95	
7	6,47	0,1426	63,74	10,04	
8	7,21	0,1439	71,03	10,10	
9	7,95	0,1449	78,33	10,15	
10	8,69	0,1454	85,62	10,17	
10,50	9,07	0,1454	89,36	10,17	
11	9,45	0,1453	93,10	10,17	
12	10,21	0,1441	102,59	10,11	
12,51	10,60	0,1427	104,48	10,05	$M = M_u$
13	10,99	0,1402	108,28	9,93	

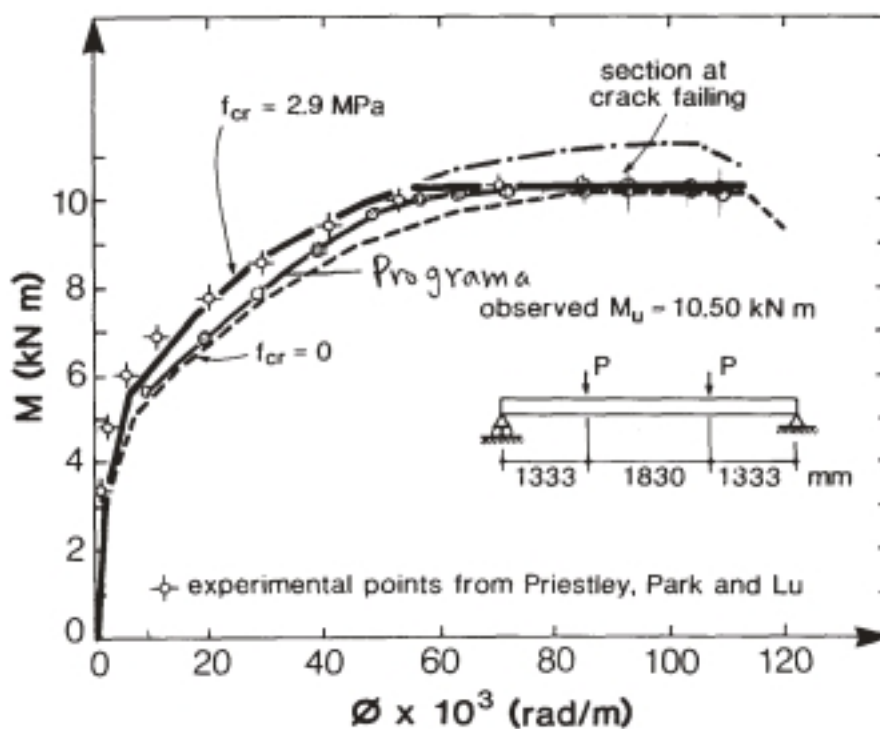


Fig. 4.13: Comparação entre as curvas momento-curvatura média teórica e experimental, cf. ensaio de Priestley, Park e Lu, apud Collins e Mitchell (1987).

Como uma terceira comparação considera-se a rigidez secante proposta por França (1991), para a verificação e o dimensionamento de pilares esbeltos, cuja obtenção está resumida na Fig. 4.14.

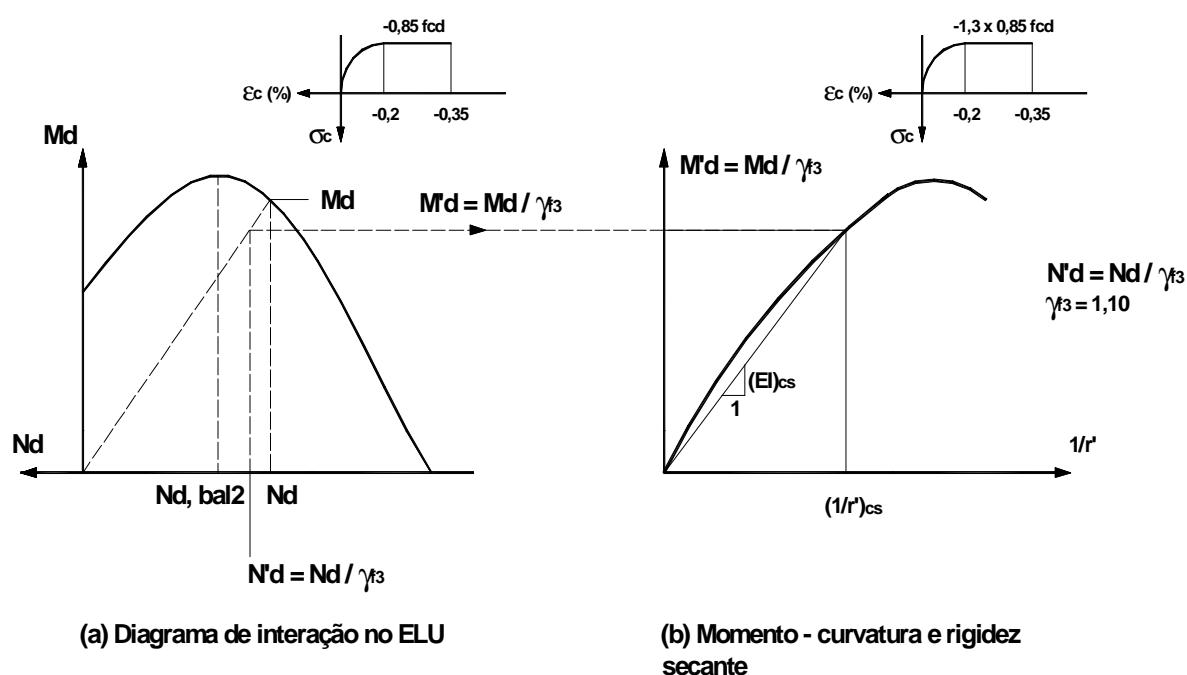


Fig. 4.14: Determinação da rigidez secante, cf. França (1991).

Segundo a NBR 8681- Ações e Segurança nas Estruturas, o coeficiente de ponderação das ações,  $\gamma_f$ , pode ser desdobrado em seus coeficientes parciais,  $\gamma_{f1}$ ,  $\psi_0$  e  $\gamma_{f3}$ , quando se considerar a não-linearidade geométrica, aplicando-se  $\gamma_{f3}$  à solicitação  $S$ , calculada com a ação característica  $F_k$  multiplicada por  $\gamma_{f1}\psi_0$ , i. e.,  $S_d = \gamma_{f3}S(\gamma_{f1}\psi_0 F_k)$ , onde  $S_d$  é a solicitação de cálculo. O coeficiente parcial  $\gamma_{f3}$  leva em conta possíveis erros de avaliação dos efeitos das ações, seja por deficiência do método de cálculo empregado, seja por problemas construtivos. O coeficiente  $\gamma_{f1}$  leva em conta a variabilidade das ações e o coeficiente  $\psi_0 (= \gamma_{f2})$  considera a baixa probabilidade de ocorrência simultânea de valores característicos de ações variáveis de naturezas distintas.

Os cálculos feitos a seguir têm duplo objetivo:

- (1) comparar os resultados do programa desenvolvido com os dados por França, e
- (2) indicar, novamente, como se alteram as leis tensão-deformação dos materiais quando são introduzidos os coeficientes de segurança parciais e as deformações especificadas em normas.

A rigidez secante  $K_{cs}$  é definida adimensionalmente pela expressão (Fig. 4.14b):

$$K_{cs} = \frac{1}{bh^3 f_{cd}} \frac{M_d / \gamma_{f3}}{(1/r')_{cs}} = \frac{(EI)_{cs}}{bh^3 f_{cd}}$$

Para efeito de comparação, escolhem-se no ábaco B05 de França a taxa mecânica total (Fig. 4.15a):

$$\omega_t = \frac{4Af_{yd}}{bhf_{cd}} = 0,9$$

e as resistências de cálculo  $f_{cd} = 20MPa$  e  $f_{yd} = 500/1,15 MPa$ , para a seção indicada na Fig. 4.15b.

A transformação da distribuição da armadura da Fig. 4.15a naquela da Fig. 4.15b deve considerar que a seção tem áreas de armadura iguais por face. Escolhendo barras de mesmo diâmetro com nove espaçamentos iguais por face, têm-se nas primeira e última camadas 10 barras, e 2x8 barras nas 8 camadas intermediárias. Logo, as áreas da primeira e da última camada são iguais a  $(10/36) \times 414 = 0,2778 \times 414 = 115mm^2$  (e não  $0,25 \times 414mm^2$ ). Em cada uma das 8 camadas intermediárias tem-se  $(2/36) \times 414 = 23mm^2$ . As distâncias das camadas à borda inferior são 5, 15, ..., 95 mm.

O cálculo é feito em duas etapas: na primeira comprova-se o diagrama de interação, e na segunda, a rigidez secante.



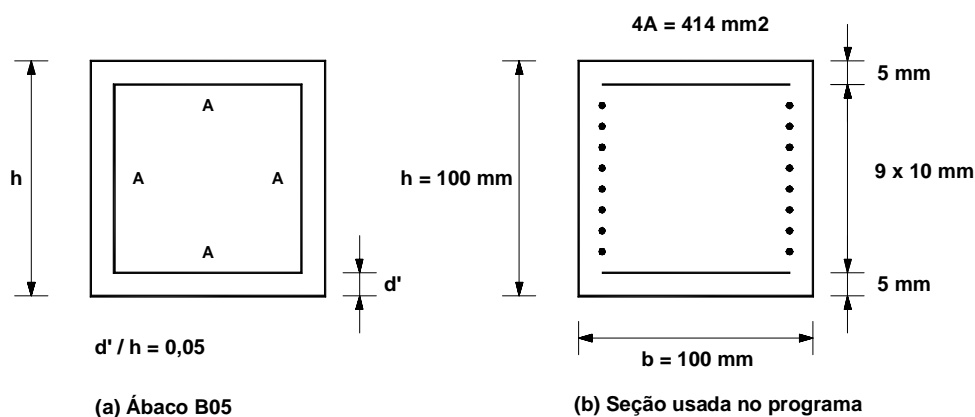


Fig. 4.15: Dados da seção transversal.

## 1ª. Etapa: Diagrama de interação no ELU.

No programa usa-se o diagrama parábola-linear, transformado em parábola-retângulo, pondo-se para o concreto:  $f_{cm} = 0,85f_{cd} = 17MPa$ ,  $\varepsilon_{c1} = -2^0 /_{00}$ ,  $\varepsilon_{clim} = -3,5^0 /_{00}$ ,  $E_{cD} = 10^{-5} GPa$ . Para o aço faz-se:  $f_y = f_{yd} = 434,78MPa$ ,  $f_t = 435MPa$ ,  $E_s = 210GPa$  e  $\varepsilon_{su} = 10^0 /_{00}$ . Ver os resultados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: ELU, comparação entre valores de França e do programa.

$-V_d = -\frac{N_d}{bhf_{cd}}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	
$\mu_d = \frac{M_d}{bh^2 f_{cd}}$	0,385	0,389	0,363	0,315	0,263	França
$-N_d (KN)$	40	80	120	160	200	
$M_d (KNm)$	<b>7,70</b>	<b>7,78</b>	<b>7,26</b>	<b>6,30</b>	<b>5,26</b>	
$\mu_d = \frac{M_d}{bh^2 f_{cm}}$	0,4524	0,4584	0,4254	0,3687	0,3085	Programa
$M_d = 17\mu_d (KNm)$	<b>7,69y</b>	<b>7,79y</b>	<b>7,23</b>	<b>6,27</b>	<b>5,24</b>	

y: há escoamento da armadura tracionada

Comparando-se as linhas em negrito, confirma-se a coincidência entre ambos os momentos resistentes.

## 2ª. Etapa: Obtenção da rigidez secante $K_{cs}$

Conforme a Fig. 4.14b, ainda com  $f_{cd} = 20MPa$ , tem-se agora a tensão de pico  $f_{cm} = 1,3 \times 0,85 \times f_{cd} = 22,10MPa$ . O aço tem suas propriedades mecânicas inalteradas.

Pondo-se  $M_d' = M_d / \gamma_{f3}$  e  $(1/r')$  a curvatura correspondente a este momento e à força normal  $N_d' = N_d / \gamma_{f3}$ , pela definição da rigidez secante tem-se:

$$K_{cs} = \frac{1}{bh^3 f_{cd}} \frac{M_d'}{\left(\frac{1}{r'}\right)} = 10^3 \frac{f_{cm}}{f_{cd}} \frac{\mu'}{\rho'}$$

e como  $10^3 f_{cm} / f_{cd} = 10^3 \times 1,3 \times 0,85 = 1105$  obtém-se do programa:

$$K_{cs, progr} = 1105 \mu' / \rho'$$

Os resultados estão dados na Tabela 4.7, observando-se que: (1) o enrijecimento da armadura na tração é desprezado no trabalho de França, e é também desconsiderado aqui; (2) a curvatura  $\rho'$  é obtida por interpolação linear, para o dado momento  $\mu'$ . Das duas últimas linhas vê-se que há completa concordância entre ambas rigidezes.

A adoção de uma única rigidez para os pilares esbeltos por certo simplifica o cálculo a favor da segurança, no sentido de majorar a parcela do momento devida aos efeitos de segunda ordem, e o diagrama da Fig. 4.14b proposto por França equivale a usar para o concreto, no cálculo dos deslocamentos, uma tensão de pico igual a  $f_{ck} / 1,27$ , um valor intermediário entre o do MC-90 ( $f_{ck} / 1,20$ ) e do EC-2 ( $f_{ck} / 1,35$ ). Como na análise das estruturas não esbeltas são usadas as propriedades mecânicas *médias* (ou características, como

simplificação no projeto), conclui-se que há descontinuidade na probabilidade de ruína na transição para estruturas esbeltas, fato reconhecido no próprio MC-90, item 6.6.3.1.1.

Tabela 4.7: Comparação entre as rigidezes secantes de França e do programa.

$-N_d' = -\frac{N_d}{\gamma_{f3}} \text{ (KN)}$	36,36	72,73	109,09	145,45	181,82
$M_d' = \frac{M_d}{\gamma_{f3}} \text{ (KNm)}$	6,99	7,08	6,57	5,70	4,76
$\mu' = \frac{M_d'}{bh^2 f_{cm}}$	0,316	0,320	0,297	0,258	0,215
$\rho' = \frac{10^3 h}{r}$	4,41	4,04	3,51	2,78	2,15
$K_{cs,progr} = 1105 \mu' / \rho'$	<b>79,2</b>	<b>87,5</b>	<b>93,6</b>	<b>102,5</b>	<b>110,5</b>
$K_{cs,FRANÇA}$	<b>80</b>	<b>87,5</b>	<b>94</b>	<b>103</b>	<b>111,2</b>

Como um efeito secundário na determinação da rigidez, decorrente deste procedimento, pode-se notar o seguinte: com os dados da Fig. 4.14a, se  $ABS(N_d) > ABS(N_d / \gamma_{f3}) > ABS(N_{dbal2})$ , tem-se para esta força normal dividida por  $\gamma_{f3}$ , um momento resistente maior. O contrário ocorre se  $ABS(N_d / \gamma_{f3}) < ABS(N_d) < ABS(N_{dbal2})$ . Isto quer dizer que se estima a rigidez secante *a maior* nos pilares em que não há escoamento da armadura mais tracionada ou menos comprimida, *nas condições do ELU*, Fig. 4.14a, e *a menor* nos pilares com maior capacidade de redistribuição de esforços, pois há maior escoamento da armadura tracionada. Deve-se notar, ainda, como se comenta adiante, que os pilares têm em geral momento de fissuração bem maior que o das vigas, por causa da força de compressão, e com isto apresentam rigidez no Estádio I,  $(EI)_1$ , Fig. 4.9, em boa parte de sua altura, se houver fissuração. Também pode ser considerado o enrijecimento da armadura na tração, especialmente nos pilares em que a força normal for inferior em módulo a  $ABS(N_{bal2})$ , i. e., naqueles em que

há escoamento da armadura tracionada, embora este efeito seja menor do que nas vigas.

Na seqüência da apresentação de resultados, mostram-se na Fig. 4.16 as curvas  $M(1/r)$  para uma seção retangular com diversas taxas geométricas da armadura. Os dados desta figura são os seguintes:

Concreto:  $f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28MPa$ ,  $f_{cm} = 2,21MPa$ ,  $E_{ci} = 30,366GPa$

Diagrama de Grasser:  $\varepsilon_{cl} = -2,2^0 / 00$ ,  $\varepsilon_{clim} = -4,256^0 / 00$

Aço:  $f_y / f_t = 500 / 550MPa$ ,  $\varepsilon_{sy} = 2,5^0 / 00$ ,  $\varepsilon_{su} = 82,5^0 / 00$ .

Áreas das armaduras: 500, 1000, 1890 e 3000mm<sup>2</sup>

Aderência:  $\beta_t = 0,40$

Geometria:  $b / h / d = 200mm / 550mm /$  variável

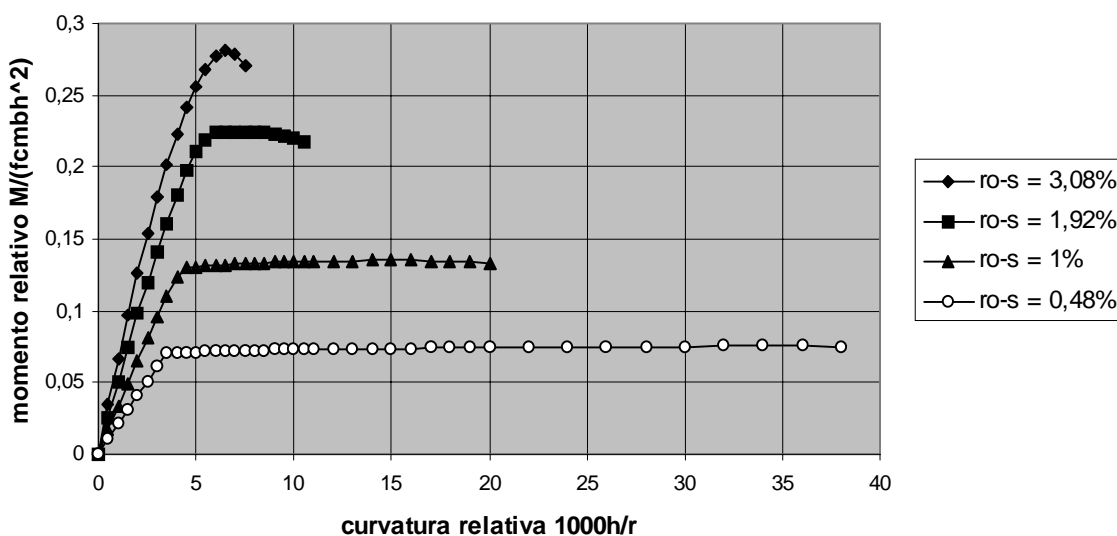


Fig. 4.16: Diagramas momento-curvatura relativos, flexão simples, armadura simples, CA-50.

Na Tabela 4.8 estão reunidos alguns resultados do programa. Desta tabela e da Fig. 4.16 conclui-se que:

- (1) A ductilidade da seção (ou sua capacidade de dissipação de energia), dada aproximadamente e a menos de uma constante pelo produto da

taxa da armadura pela diferença entre a curvatura última e a curvatura do início do escoamento, decai com o aumento da taxa geométrica da armadura. Note-se também a rápida queda dos quocientes entre as curvaturas última e do início do escoamento, com e sem o enrijecimento da armadura, para aumento da mesma variável.

- (2) A rigidez  $(EI)_2$  do Estádio II, no trecho entre os momentos de fissuração e de escoamento, depende fortemente da taxa geométrica. Esta rigidez pouco difere daquela obtida ligando-se o ponto de coordenadas  $[(1/r)_{ym}, M_y]$  à origem, a saber,  $(EI)_y$ . Também indicam-se na Tabela 4.8 as rigidezes dos demais segmentos das curvas  $M(1/r)$ . Observar que, para a maior taxa geométrica, o momento de escoamento dá-se após o ponto de máximo dessa curva. Ver a Fig. 4.9b.

Tabela 4.8: Seção retangular, flexão simples, CA-50.

$\rho_s = A_s/bd$ (%)	0,48	1	1,92	3,08
$\mu_{cr}$	0,0162	0,0175	0,0197	0,0223
$\mu_{\max} = M_{\max}/(A_0 h f_{cm})$	0,0752	0,1348	0,2248	0,2808
$\rho_{um}/\rho_{ym}$	6,90	2,97	1,88	$\cong 1$
$\rho_u/\rho_y$	10,80	3,78	2,17	1,13
$(EI)_{origem}/(E_{ci} I_0)$	1,0679	1,1144	1,1924	1,2766
$(EI)_1/(E_{ci} I_0)$	1,0550	1,0999	1,1752	1,2558
$(EI)_2/(E_{ci} I_0)$	<b>0,2201</b>	<b>0,3407</b>	<b>0,4690</b>	<b>0,4651</b>
$(EI)_3/(E_{ci} I_0)$	0,0030	0,0170	0,1279	não há
$(EI)_4/(E_{ci} I_0)$	-0,0008	-0,0055	-0,0313	-0,0691
$(EI)_5/(E_{ci} I_0)$	-	-	-	-0,1279
$(EI)_y/(E_{ci} I_0) = C_3 \mu_y/\rho_{ym}$	<b>0,2408</b>	<b>0,3595</b>	<b>0,4975</b>	<b>0,4825</b>

Nas Figs. 4.17a e b estão dados os resultados obtidos para uma seção retangular, adotando-se para o concreto as leis de Grasser e parábola-

linear, na flexo-compressão. A seção tem dimensões  $b \times h = 400 \times 1000 \text{mm}^2$ , e as mesmas resistências do caso anterior. As áreas da armadura são iguais a  $4000 \text{mm}^2$  por face menor. Como se vê nestas figuras, as diferenças entre ambas as curvas são pequenas, aumentam com o aumento da força normal de compressão, e se acentuam no ramo descendente. Estas diferenças ficam mais visíveis comparando-se as rigidezes dos diversos segmentos das curvas  $M(1/r)$ , Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Dados referentes à Fig. 4.17.

$-v = -N/(bhf_{cm})$	0,4 Grasser	0,4 Parábola -linear	0,8 Grasser	0,8 Parábola -linear
$\mu_{cr}$	0,1010	0,1031	0,1713	0,1714
$\mu_{\max} = M_{\max}/(A_0hf_{cm})$	0,2734	0,2703	0,1914	0,1849
$\varepsilon_{c2}(0/00)$	-3,11	-3,15	-3,00	-2,83
$(EI)_{origem}/(E_{ci}I_0)$	1,0680	1,1419	0,8020	0,9006
$(EI)_1/(E_{ci}I_0)$	1,0558	1,1277	0,7415	0,8369
$(EI)_2/(E_{ci}I_0)$	<b>0,3928</b>	<b>0,4003</b>	<b>0,6767</b>	<b>0,6091</b>
$(EI)_3/(E_{ci}I_0)$	0,1110	0,1042	0,1950	0,1923
$(EI)_4/(E_{ci}I_0)$	-0,0855	-0,0796	-0,2663	-0,2522
$(EI)_y/(E_{ci}I_0) = C_3 \mu_y / \rho_{ym}$	<b>0,5208</b>	<b>0,5395</b>	-	-

Desta Tabela 4.9 vê-se que:

- (1) Para a menor força de compressão, i. e., havendo escoamento da armadura, não se pode desprezar o momento de fissuração no cálculo da rigidez no Estádio II. Compare-se  $(EI)_2$  com  $(EI)_y$ .
- (2) Para a maior força de compressão, o momento de fissuração está muito próximo do momento máximo, e isto significa que no elemento estrutural predomina a rigidez do Estádio I,  $(EI)_1$ , em grande parte, senão na totalidade de sua extensão.

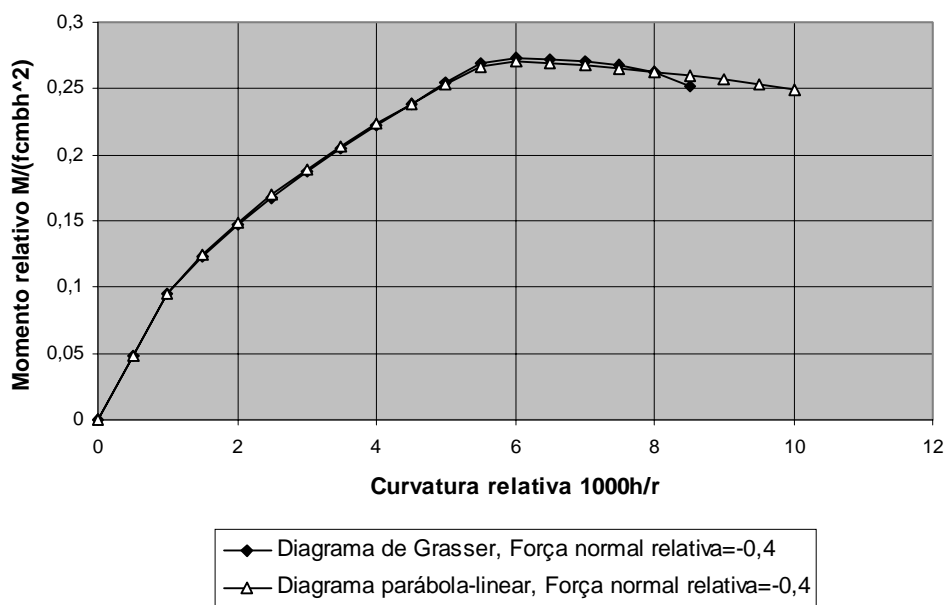


Fig. 4.17a: Comparação entre as curvas  $M(1/r)$  para força normal relativa igual a  $-0,4$ .

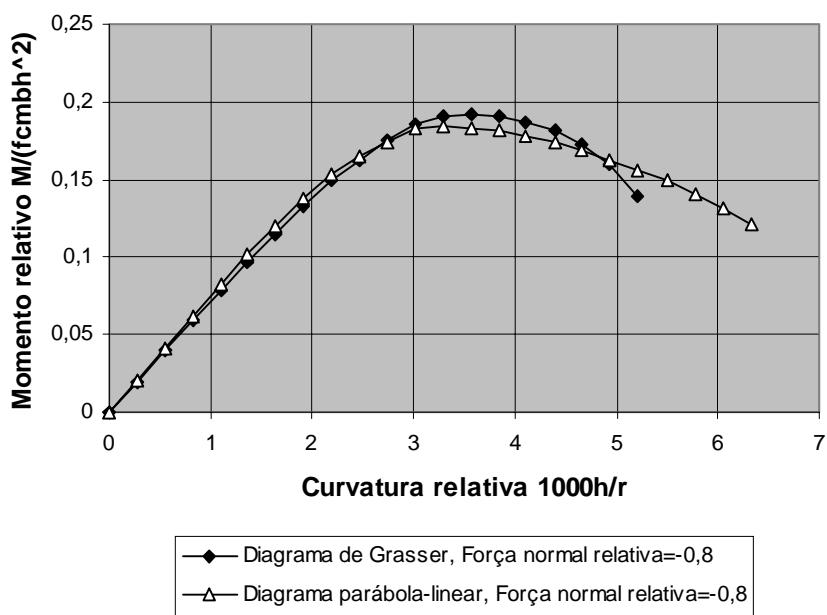


Fig. 4.17b: Comparação entre as curvas  $M(1/r)$  para força normal relativa igual a  $-0,8$ .

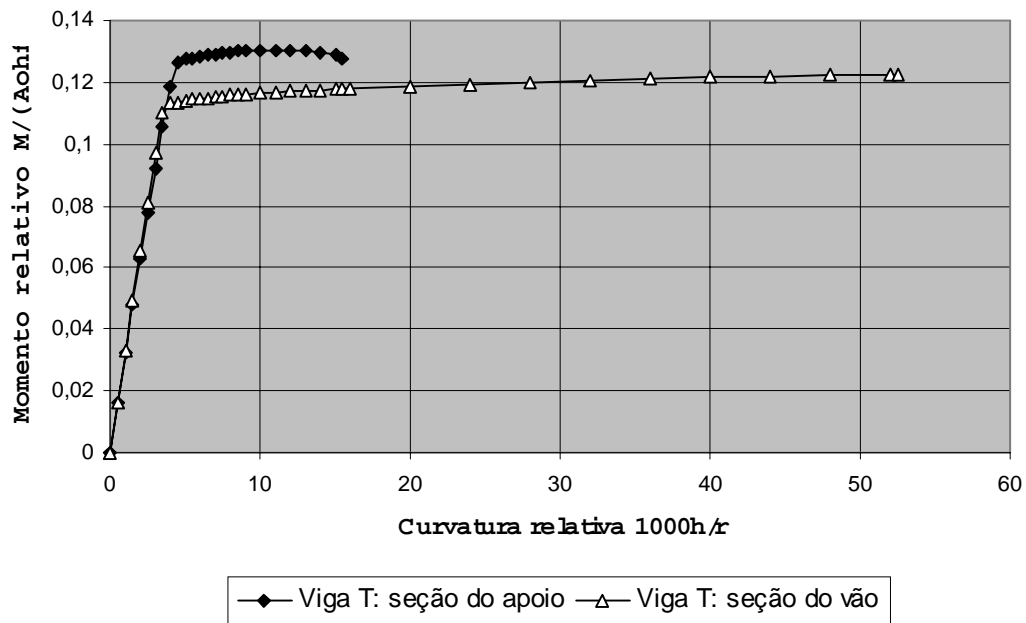


Fig. 4.18: Viga T: Momento-curvatura relativos, seções do vão e do apoio, CA-50,  $f_{ck}/f_{cm} = 20/28MPa$ .

A Fig. 4.18 representa as curvas  $M(1/r)$  de duas seções T de uma viga contínua, a do apoio de continuidade e a do vão, de mesma geometria e momentos resistentes aproximadamente iguais. Os dados comuns às duas seções são os seguintes:

Concreto:  $f_{ck}/f_{cm} = 20/28MPa$ ,  $f_{ctm} = 2,21MPa$ ,  $E_{ci} = 30,366GPa$

Diagrama de Grasser:  $\epsilon_{cl} = -2,2^0/_{00}$ ,  $\epsilon_{clim} = -4,256^0/_{00}$

Aço:  $f_y/f_t = 500/550MPa$ ,  $\epsilon_{sy} = 2,5^0/_{00}$ ,  $\epsilon_{su} = 82,5^0/_{00}$ .

Áreas das armaduras:  $A_s = 7\phi 16 = 1400mm^2$  (apoió)

$A_s = 6\phi 16 = 1200mm^2$  (vão)

Aderência:  $\beta_t = 0,40$

Geometria:  $b_w/h = 200/600mm$ ,  $b_{flange}/h_{flange} = 600/100mm$



Os resultados do programa estão dados na Tabela 4.10. Destes resultados e da Fig. 4.18 pode-se ver que:

- (1) As rigidezes tangentes na origem e as da fase pré-fissuração (Estádio I) das duas seções são muito próximas entre si, como tem de ser.
- (2) As rigidezes do Estádio II, no segmento entre os momentos de fissuração e de escoamento, também são bastante próximas entre si. Se fosse desprezado o momento de fissuração seriam obtidas as rigidezes 0,3005 e 0,3258 para as seções do apoio e do vão, respectivamente. Estes valores são cerca de 9% e 6% maiores que os respectivos valores anteriores.
- (3) Na seção do apoio o momento passa por um máximo antes da deformação limite do concreto, para curvatura relativa igual a 11 e encurtamento na borda comprimida igual a  $\varepsilon_{c2} = -3^0 /_{00}$ . Da mesma forma, o momento da seção do vão também passa por um máximo, mas para uma curvatura relativa bem maior, igual a 52, com  $\varepsilon_{c2} = -4,23^0 /_{00}$ , valor próximo do encurtamento limite  $-4,256^0 /_{00}$ .

Tabela 4.10: Viga T, seções do apoio e do vão.

	Seção do apoio	Seção do vão
$M_{cr} (KNm)$	67,12	43,77
$\mu_{max} = M_{max} / (A_0 h f_{cm})$	0,1305	0,1223
$M_{max} (KNm)$	350,78	328,74
$(EI)_{origem} / (E_{ci} I_0)$	1,0646	1,1291
$(EI)_1 / (E_{ci} I_0)$	1,0396	1,1206
$(EI)_2 / (E_{ci} I_0)$	0,2749	0,3087
$(EI)_3 / (E_{ci} I_0)$	0,0171	0,0048
$(EI)_4 / (E_{ci} I_0)$	-0,0077	-0,0001
$(EI)_y / (E_{ci} I_0)$	0,3005	0,3258

Observe-se que, quando há fissuração destas seções T, há uma queda de aproximadamente 70% na rigidez. Como, em geral, estas duas seções de uma mesma viga contínua, ou de um pórtico, não atingem o momento de fissuração simultaneamente, é forçoso haver transferência de solicitações das zonas mais fracas (as que fissuram primeiro e em maior extensão) para aquelas de maior resistência, *antes mesmo do escoamento da armadura*.

Em todos estes exemplos o programa fornece as curvaturas médias dos pontos principais e com isto os intervalos das curvaturas médias correspondentes às rigidezes mostradas. Têm-se, então, todos os segmentos linearizados da curva  $M(1/r)$ , como mostrado na Fig. 4.9.

No exemplo da Tabela 4.8 e Fig. 4.16 já se pôde notar que, para as vigas com força normal nula e fissuração estabilizada, o segmento mais importante da curva  $M(1/r)$  é o situado entre os momentos de fissuração e de escoamento, representado pela rigidez  $(EI)_2$ . Esta rigidez, como se disse, pouco difere daquela dada pela inclinação da reta ligando-se à origem o ponto de coordenadas  $[(1/r)_{ym}, M_y]$ , ou seja,  $(EI)_y$ . Dão-se na Tabela 4.11 e na Fig. 4.19 os valores da rigidez relativa  $(EI)_y / (E_{ci} I_0)$  em função da taxa mecânica da armadura inferior, para vigas de seção retangular com armaduras simples e dupla. As Tabelas 4.12a e b, por outro lado, referem-se a pilares, para os quais são dadas as grandezas que permitem usar os dois primeiros segmentos da curva  $M(1/r)$ , representados pelas rigidezes  $(EI)_1$  e  $(EI)_2$ . Para os pilares que não fissuram (Fig. 4.9e) é fornecida a rigidez  $(EI)_1$ . Nestas tabelas adotam-se os seguintes dados:

Concreto: parábola do segundo grau

$$\varepsilon_{c1} = -2^0 / 00, f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28MPa, E_{ci} = -2 f_{cm} / \varepsilon_{c1} = 28GPa$$

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3} = 2,21MPa$$

Aço: CA-50,  $f_y = f_{yk} = 500MPa, E_s = 200GPa$

Aderência:  $\beta_t = 0,40$

Geometria: Posição da camada inferior da armadura:  $y_{s1}/h = 1/11$

Posição da camada superior da armadura:  $y_{s2}/h = 1/1,1$

$$A_{s2}/A_{s1} = 0/0,25/.../1$$

$$\text{Momento de inércia: } I_0 = \frac{bh^3}{12}$$

Tabela 4.11: Rigidez de vigas no Estádio II,  $(EI)_y / (E_{ci}I_0)$ . Seção retangular, flexão simples, armaduras simples e dupla.  $f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28MPa$ , CA-50.

$\omega_1 = \frac{A_{s1} f_{yk}}{bd f_{cm}}$	.025	.05	.075	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	
$A_{s2}/A_{s1} =$	0	.111	.162	.214	.259	.345	.410	.467	.510	.536	.537	-	-
	0,25	.111	.162	.216	.264	.353	.426	.495	.551	.604	.647	.685	.713
	0,50	.111	.163	.217	.265	.358	.440	.514	.589	.649	.710	.772	.823
	0,75	.112	.164	.219	.268	.363	.454	.532	.610	.691	.759	.826	.895
	1	.112	.164	.221	.271	.368	.465	.549	.631	.714	.798	.879	.953

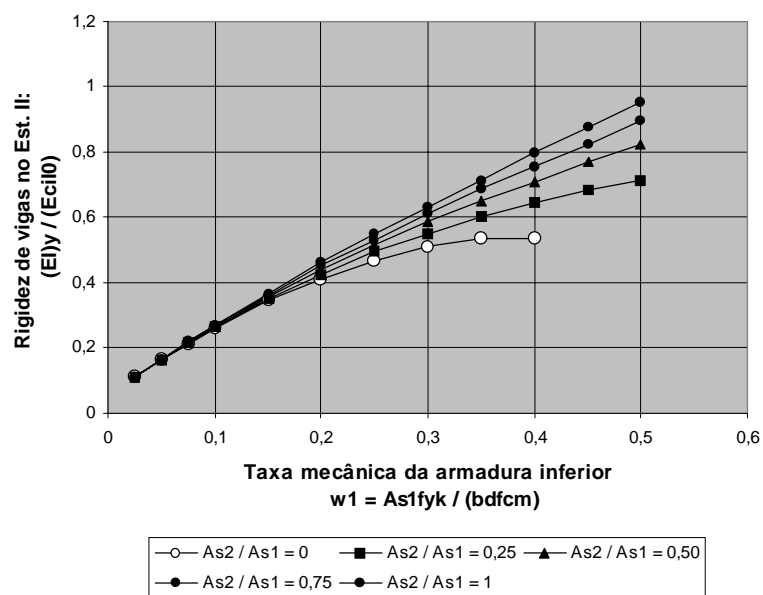


Fig. 4.19: Rigidez de vigas no Estádio II, armadura dupla. Dados cf. Tabela 4.11.

Tabela 4.12a: Pilares: Dados para o primeiro segmento do diagrama momento-curvatura. Seção retangular, flexo-compressão normal, armadura simétrica  $A_{s1} = A_{s2} = A_{stot} / 2$ , CA-50,

$$f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28 \text{MPa}.$$

$$\text{Adimensionais: } \omega_{tot} = (A_{stot} f_{yk}) / (b h f_{cm}) \text{ e } \nu = N / (b h f_{cm})$$

-V	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
$\omega_{tot}=0,2$	1,063	0,956	0,833	0,686	
	1,056	0,934	0,767	0,623	
	0,061	0,100	0,134	sem fissuras	
	0,691	1,289	2,103	-	
$\omega_{tot}=0,4$	1,231	1,133	1,024	0,900	0,749
	1,224	1,116	0,981	0,772	0,705
	0,066	0,110	0,151	0,184	sem fissuras
	0,651	1,183	1,847	2,869	-
$\omega_{tot}=0,6$	1,398	1,308	1,210	1,100	0,975
	1,392	1,294	1,178	1,025	0,928
	0,072	0,118	0,164	0,206	sem fissuras
	0,617	1,098	1,668	2,414	-
$\omega_{tot}=0,8$	1,564	1,481	1,391	1,293	1,184
	1,558	1,469	1,366	1,241	1,066
	0,076	0,126	0,174	0,222	0,266
	0,588	1,028	1,533	2,146	3,000
$\omega_{tot}=1,0$	1,729	1,652	1,569	1,480	1,383
	1,724	1,642	1,549	1,441	1,306
	0,081	0,132	0,184	0,235	0,284
	0,563	0,969	1,424	1,954	2,614

Para cada taxa mecânica: 1ª. linha:  $(EI)_{origem} / (E_{ci} I_0)$ , 2ª. linha:  $(EI)_1 / (E_{ci} I_0)$ ,

3ª. linha:  $\mu_{cr} = M_{cr} / (b h^2 f_{cm})$ , 4ª. linha:  $\rho_{cr1} = 10^3 (h / r)_{cr1}$ .

As hipóteses aqui adotadas para gerar estas tabelas diferem daquelas dadas por Kordina e Quast no Beton-Kalender, vol. 1, (1997), para pilares de seções retangulares e circulares. Nesse trabalho são admitidas as leis parábola-retângulo para o concreto ( $\varepsilon_{c \text{ lim}} = -3,5^0 / 00$ ) e bilinear sem encruamento para o aço ( $\varepsilon_{su} = 5^0 / 00$ ), ambas com resistências *características*. A resistência à tração, em geral, é desconsiderada, e só aparece no cálculo da rigidez no Estádio I (pré-fissuração), usada para obter a carga de flambagem de um pilar carregado centricamente. Isto quer dizer que a rigidez  $(EI)_{origem}$  é aproximada, a favor da segurança, pela rigidez do Estádio I,  $(EI)_1$ . Ver a Tabela 4.12a. As curvas  $M(1/r)$  são classificadas em dois tipos, com e sem fissuração, conforme a intensidade da

força normal (esta separação não está quantificada explicitamente), e nelas está pressuposto momento inicial nulo,  $M_0 = 0$ , pois trata-se de seções com dupla simetria. O enrijecimento da armadura tracionada não está considerado.

Tabela 4.12b: Pilares: Dados para o segundo segmento do diagrama momento-curvatura. Seção retangular, flexo-compressão normal, armadura simétrica  $A_{s1} = A_{s2} = A_{stot} / 2$ , CA-50,

$$f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28 \text{MPa}.$$

$$\text{Adimensionais: } \omega_{tot} = (A_{stot} f_{yk}) / (b h f_{cm}) \text{ e } \nu = N / (b h f_{cm})$$

$-v$	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
$\omega_{tot} = 0,2$	0,267	0,294	0,218		
	0,149(*)	0,156(**)	0,139(**)		
	4,621(*)	3,396(**)	2,032(**)		
	0,666	1,136	1,775		
$\omega_{tot} = 0,4$	0,452	0,458	0,403	0,180	
	0,228(*)	0,204(**)	0,182(**)	(***)	
	4,909(*)	3,531(**)	2,499(**)	-	
	0,621	1,053	1,587	2,383	
$\omega_{tot} = 0,6$	0,621	0,624	0,578	0,408	
	0,302(*)	0,255(**)	0,226(**)	(***)	
	5,036(*)	3,617(**)	2,751(**)	-	
	0,588	0,988	1,458	2,051	
$\omega_{tot} = 0,8$	0,787	0,790	0,748	0,573	0,258
	0,377(*)	0,306(**)	0,272(**)	0,235(**)	(***)
	5,151(*)	3,677(**)	2,928(**)	2,131(**)	-
	0,561	0,934	1,358	1,858	2,530
$\omega_{tot} = 1,0$	0,954	0,957	0,917	0,781	0,640
	0,457(*)	0,358(**)	0,320(**)	0,281(**)	(***)
	5,269(*)	3,721(**)	3,062(**)	2,429(**)	-
	0,539	0,888	1,277	1,718	2,251

Para cada taxa mecânica: 1ª. linha:  $(EI)_2 / (E_{ci} I_0)$ , 2ª. linha: (\*)  $\mu_y = M_y / (b h^2 f_{cm})$  ou (\*\*)  $\mu_{\varepsilon_{c1}} = M_{\varepsilon_{c1}} / (b h^2 f_{cm})$ , 3ª. linha: (\*)  $\rho_{ym} = 10^3 (h/r)_{ym}$  ou (\*\*)  $\rho_{\varepsilon_{c1,m}} = 10^3 (h/r)_{\varepsilon_{c1,m}}$ , 4ª. linha:  $\rho_{crrII} = 10^3 (h/r)_{crrII}$ . (\*\*\*) Momento  $\mu_{\varepsilon_{c1}}$  inferior ao de fissuração  $\mu_{cr}$ , já dado na Tabela 4.12a.

Para obter a rigidez à flexão, o diagrama momento-curvatura é linearizado da seguinte maneira: tendo já sido calculada toda a curva  $M(1/r)$ , fica conhecido o momento último,  $M_u$ , correspondente a uma deformação limite num

dos dois materiais. Nessa curva determina-se o ponto de ordenada  $0,5M_u$ , e este é o primeiro ponto de apoio da reta equivalente com a qual o diagrama é linearizado. Havendo fissuração e escoamento na tração, toma-se como segundo ponto aquele correspondente ao início do escoamento da armadura tracionada. Em caso contrário, i. e., não havendo escoamento em tração, toma-se aquele correspondente *ao início do escoamento da armadura comprimida* (uma hipótese desnecessariamente desfavorável). A união dos primeiro e segundo pontos determina a reta procurada. Esta reta na ordenada  $M_u$  define uma curvatura (fictícia)  $k_u$ , a qual delimita o fim do (único) segmento ascendente da lei  $M(1/r)$ . A inclinação deste segmento dá a rigidez  $(EI) = \partial M / \partial (1/r)$ , válida para curvaturas  $0 \leq k \leq k_u$ . Neste procedimento adotado pelos mencionados autores reside um ponto que chama a atenção: a relação momento-curvatura toma como base a rigidez assim obtida, *mesmo que a reta não passe pela origem*, como de fato ocorre para as seções consideradas, pois, alegam os autores, é pequeno o erro que se comete no cálculo dos deslocamentos, decorrente do erro da rigidez adotada para os segmentos da peça com momentos pequenos. Assim, p. ex., a rigidez  $(EI)_2$  não seria substituída pela rigidez  $(EI)_y$ , como se fez na Tabela 4.11. Mas, por outro lado, com o aumento da força normal de compressão, o momento de fissuração  $M_{cr}$  cresce, e chega a ser comparável aos momentos  $M_y$  e  $M_{\epsilon_{c1}}$ , determinando assim uma grande extensão da peça sem fissuração. Observe-se que no momento de fissuração não está considerada a resistência da fissura coesiva (resistência à tração na flexão, ver o item 2.4). É razoável, então, considerar na análise de peças comprimidas (especialmente nos pilares) o momento de fissuração como não nulo pela mesma razão com que se considera o enrijecimento da armadura tracionada. Em ambos os casos confia-se na resistência à tração do concreto, pois o que se tem em vista, de imediato, é o cálculo de deslocamentos, e não a verificação da segurança de seções críticas. Note-se também que a análise elástica usualmente pressupõe a rigidez à flexão da seção *íntegra*, mesmo havendo fissuração. Entretanto, interessa aqui *distinguir* as rigidezes das diferentes peças da estrutura, *conforme seu comportamento*, com o que o cálculo dos deslocamentos e das solicitações resulta mais preciso. Ver o item 4.5.

Para completar as informações sobre a rigidez à flexão de vigas, dá-se a seguir, como alternativa, a expressão da rigidez relativa no Estádio II para seção retangular em flexão simples, com armadura simples,  $(EI)_y / (E_{ci} I_0)$ , deduzida no trabalho de Buchaim (1997), agora incluindo nela o enrijecimento da armadura na tração, representado pelo fator  $\varepsilon_{sy} / \varepsilon_{sym}$ . Esta expressão é:

$$\frac{(EI)_y}{(E_{ci} I_0)} = 6\beta \left(\frac{d}{h}\right)^3 F(\xi) \frac{\varepsilon_{sy}}{\varepsilon_{sym}} \quad (4.76)$$

onde

$$F(\xi) = (1 - \xi)^2 + \frac{1}{12\beta} \xi^3 \left(8 - 3\frac{\omega}{\beta} \frac{\xi}{1 - \xi}\right) \quad (4.77)$$

e a profundidade relativa da LN,  $\xi = x/d$ , resulta da seguinte equação cúbica:

$$\left(1 + \frac{\omega}{3\beta}\right) \xi^3 - (1 - \beta) \xi^2 - 2\beta \xi + \beta = 0 \quad (4.78)$$

com

$$\omega = \frac{A_s f_{yk}}{bd f_{cm}} \quad (4.79)$$

$$\beta = \omega \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{sy}} \quad (4.80)$$

tomando-se nestas equações  $\varepsilon_{c1}$  em valor absoluto. Ver a Tabela 4.13, onde está dado o fator  $F(\xi)$  em função da taxa mecânica da armadura, Equação (4.79).

Tabela 4.13: Valores de  $F(\xi)$  para aço CA-50,  $\varepsilon_{sy} = 2,5^0 /_{00}$ ,  $f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28MPa$ ,  $\varepsilon_{c1} = 2^0 /_{00}$ , seção retangular, armadura simples.

$\omega = \frac{A_s f_{yk}}{b d f_{cm}}$	.025	.05	.075	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.4254
$\xi = x/d$	.136	.189	.230	.263	.319	.365	.408	.447	.488	.534	.584
$F(\xi)$	.824	.758	.709	.669	.605	.551	.504	.460	.415	.364	.306

O mencionado fator do enrijecimento da armadura na tração pode ser obtido da equação (3.51) ou (3.52). Esta última leva à seguinte expressão para o *inverso* desse fator:

$$\frac{\varepsilon_{sym}}{\varepsilon_{sy}} = 1 - 1,2 \frac{\tau_{bm} s_{rm}}{f_{yk} \phi_s} \leq 1 \quad (4.81a)$$

onde a tensão média de aderência (em MPa), cf. Equação (3.53), para carga de curta duração, é igual a:

$$\tau_{bm} = 2,25 f_{ctm} = 0,675 f_{ck}^{2/3}$$

valor que corresponde a  $\beta_t = 0,40$ , e que deve ser multiplicado por 0,625 para  $\beta_t = 0,25$ , quando se considera carga de longa duração ou repetida. Em (4.81a) o fator que representa o espaçamento médio das fissuras dividido pelo diâmetro da armadura e multiplicado por 1,2, cf. Equação (3.47), pode ser posto igual a:

$$1,2 \frac{s_{rm}}{\phi_s} = 1,2 \times \frac{0,15}{\rho_{sef}} = \frac{0,18}{\rho_{sef}}$$

de modo que (4.81a) passa a ser:

$$\frac{\varepsilon_{sym}}{\varepsilon_{sy}} = 1 - \frac{0,18 \tau_{bm}}{\rho_{sef} f_{yk}} \leq 1 \quad (4.81b)$$



e a taxa geométrica efetiva,  $\rho_{sef}$ , decorre da Fig. 3.12. O fator que deve ser posto em (4.76) é então igual a:

$$\frac{\varepsilon_{sy}}{\varepsilon_{sym}} = \frac{1}{1 - \frac{0,18 \tau_{bm}}{\rho_{sef} f_{yk}}} \geq 1 \quad (4.82)$$

Os resultados obtidos com estas equações, sem que se tenha calculado o momento de fissuração, praticamente coincidem com aqueles do programa momento-curvatura, p. ex., com os dados na Tabela 4.11, na linha correspondente a  $A_{s2}/A_{s1} = 0$ . O fator do enrijecimento da armadura na tração decorre da consideração nas curvas  $M(1/r)$  e  $M[(1/r)_m]$  dos pontos de ordenada  $M_{yk}$  (a mesma em ambas) e da igualdade (aproximada) das profundidades da LN para as duas leis constitutivas da armadura, uma com, a outra sem o enrijecimento na tração. A rigidez de vigas, assim determinada, facilita a aplicação em casos mais simples, uma vez que dispensa a determinação da curva  $M(1/r)$  e do momento de fissuração.

O diagrama momento-curvatura e a rigidez elástica na flexão simples de vigas fissuradas e de seção retangular foram determinados por Franco (1957), considerando-se para o concreto um diagrama parábola-retângulo e para o aço uma lei bilinear. Nesse trabalho, de notável antecipação (quase simultâneo com o de Baker (1956) e anterior ao de Macchi (1972)), já é obtida, através de exemplos simples de vigas hiperestáticas com armadura unilateral, a redistribuição de momentos fletores na ruptura em relação à solução elástica, concluindo-se que esta pode chegar, para os aços da época, a 20% para baixas taxas geométricas da armadura, e a cerca de 12% para taxas geométricas usuais, em torno de 1%, decrescendo rapidamente com o crescimento desta taxa.

## 4.5 Pilares no Estado Limite Último

Procura-se neste item detalhar melhor duas questões relacionadas com pilares no ELU por solicitações normais. A primeira delas refere-se à determinação da capacidade resistente, na situação de cálculo, decorrente do ponto de máximo da correspondente curva  $M(1/r)$ . Isto foi feito analiticamente no item 4.2, para vigas de seção retangular na flexão simples, conforme as hipóteses dadas na Fig. 4.4. Como referência, esta mesma capacidade resistente também é determinada, para o presente caso de pilares, de acordo com as hipóteses da NBR 6118, 2000, item 17.1, onde se usa para o concreto a lei parábola-retângulo, com tensão de pico igual a  $0,85f_{cd}$ , e encurtamento limite igual a  $-3,5^0/_{00}$ ; para o aço tem-se uma lei bilinear sem encruamento, com tensão  $f_{yd}$  no patamar de escoamento, e deformação última  $\varepsilon_{su} = 10^0/_{00}$ , sendo ainda  $E_s = 210GPa$ . Neste caso (e na questão seguinte), as curvas de interação no ELU,  $\mu_d(v_d)$ , são obtidas das tabelas dadas no trabalho de Buchaim (1979). Para determinar o ponto de máximo da curva  $M(1/r)$ , adotam-se para o aço estes mesmos dados. Mas, para o concreto, escolhe-se a parábola do segundo grau, com a mesma tensão de pico,  $0,85f_{cd}$ , conforme particularização da lei de Grasser com  $k = 2$ , dada no item 2.7. O encurtamento correspondente a este ponto de máximo é inferior ao valor limite dado pela Equação (2.83).

As curvas de interação no ELU, resultantes destes dois caminhos muito distintos, estão mostradas na Fig. 4.20. Conforme se pode ver nesta figura, os resultados para as três taxas mecânicas consideradas mostram o seguinte:

- (1) Para forças normais entre 0 e  $v_{d,bal2}$  (definida na Fig. 4.14a), quando há escoamento da armadura tracionada, a diferença entre as duas curvas é muito pequena e independente da taxa mecânica da armadura.
- (2) Nos ramos descendentes das curvas de interação  $\mu_d(v_d)$ , para taxas mecânicas próximas da mínima, esta diferença pode variar de 10% a

13% . Para maiores taxas mecânicas, a diferença entre as duas curvas diminui, e chega a 6% na curva de parâmetro  $\omega_{tot} = 1$ .

- (3) As curvas de interação  $\mu_d(v_d)$  obtidas pelo ponto de máximo do diagrama momento-curvatura estão a favor da segurança, como esperado.

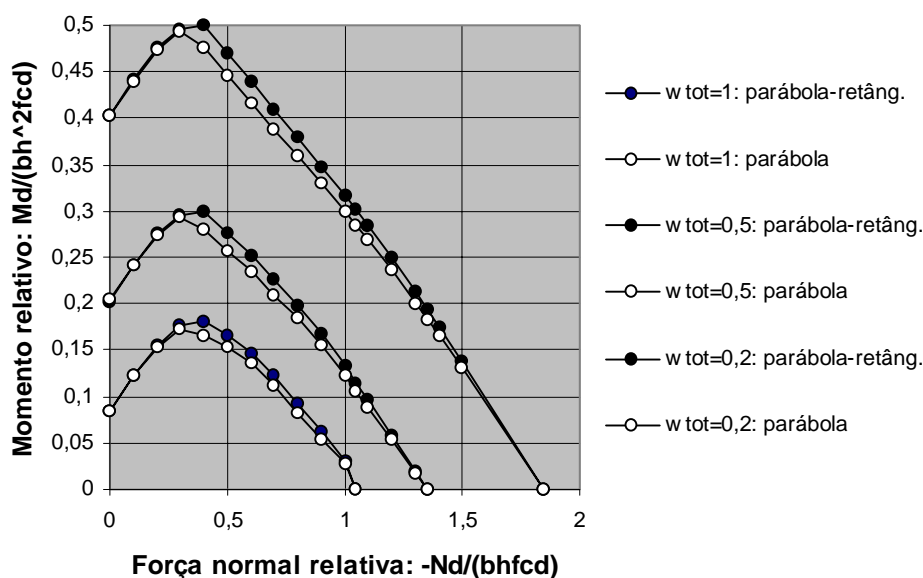


Fig. 4.20: Comparação das curvas de interação no ELU, flexo-compressão. Lei parábola-retângulo, cf. NBR 6118, 2000, e parábola do segundo grau, com momento último obtido do ponto de máximo do diagrama momento-curvatura. Armadura simétrica,  $y_{s1}/h = 0,10$  e  $y_{s2}/h = 0,90$ . Aço CA-50,

$$\varepsilon_{su} = 10^0 /_{00}.$$

Se fosse usada a lei de Grasser ou a parábola-linear, ambas dadas no item 2.7, seriam obtidos resultados igualmente próximos aos das curvas  $\mu_d(v_d)$  derivadas das hipóteses da referida norma. Ver, também, as Figuras 4.17a e b.

Note-se que, por este caminho, não é relevante fixar a deformação última do aço em  $10^0 /_{00}$ , como se fez, pois o ponto de máximo é, em geral, condicionado pela lei constitutiva do concreto.

Assim evidencia-se, também na flexo-compressão, que as curvas  $M(1/r)$  podem ser usadas tanto para a obtenção da resistência da seção, seja num

ensaio, como mostrado antes, seja no dimensionamento no ELU, quanto para mostrar a deformabilidade dessa mesma seção.

A segunda questão, tratada a seguir, refere-se à rigidez equivalente de pilares a usar na análise da estrutura no ELU. Neste caso, a força normal decorrente das ações características,  $F_k$ , majoradas pelo coeficiente de segurança parcial,  $\gamma_f$ , é por consequência a de cálculo, i. e.,  $N = N_d = N(\gamma_f F_k)$ . Se forem utilizadas no ELU as Tabelas 4.12a e 4.12b, deve-se lá considerar esta mesma força, tudo o mais permanecendo igual (restrição feita aos pilares esbeltos, como indicado a seguir).

A dedução seguinte da rigidez equivalente pressupõe, em princípio, pilares não esbeltos. Para obter esta rigidez é necessário separar, no ELU, os pilares para os quais há fissuração daqueles que não sofrem fissuração. Consegue-se, assim, uma transição satisfatória na determinação desta rigidez na passagem de vigas para pilares, como se comenta adiante. Além disso, visa-se evitar erros grandes na rigidez e, por consequência, também nos deslocamentos - principalmente nestes - e nas solicitações da estrutura. Isto tem também especial importância na determinação da demanda de rotação plástica nas seções críticas das vigas do pórtico. Tenha-se em mente que, na fissuração estabilizada, a rigidez das vigas é determinada com maior precisão do que a dos pilares, uma vez que esta rigidez praticamente independe do momento de fissuração, é influenciada predominantemente pela armadura, e pouco influenciada pela resistência do concreto. Ver a Fig. 4.19 e a Tabela 4.11.

No que segue tem-se em vista principalmente os pilares de pórticos planos, fletidos em curvatura dupla. Para tanto, considere-se um pilar em balanço, engastado na sua base. Ao longo de sua altura admitem-se constantes a seção transversal, a armadura e as forças normal e cortante de cálculo nele atuantes. Como se pressupõe pilar não esbelto, o momento fletor de cálculo distribui-se linearmente em sua altura, de zero no seu topo, correspondente ao ponto de momento nulo no pilar fletido em curvatura dupla, a um valor máximo no engaste. As seguintes hipóteses adicionais são admitidas:

- (1) Despreza-se a dimensão de um eventual nó que, no pórtico plano, dá o engaste parcial ao pilar.

- (2) Supõe-se que, na seção do engaste, *o momento solicitante de cálculo, advindo da análise, seja exatamente igual ao momento resistente último de cálculo*, decorrente das resistências de cálculo dos materiais. Esta hipótese viabiliza os cálculos subseqüentes.
- (3) O momento de fissuração,  $M_{cr}$ , dependente da força de compressão  $N_d$  e da quantia e disposição da armadura na seção transversal, é determinado com a resistência  $f_{ct,5\%}$ , correspondente ao quantil de 5%, cf. Equação (2.25a). Admite-se que a fissuração ocorre quando a tensão no concreto igualar-se a esta resistência, na fibra da camada da armadura mais alongada, como se fez anteriormente.
- (4) Na consideração do enrijecimento da armadura tracionada adota-se  $\beta_t = 0,25$ . Este efeito, de qualquer modo, é menor em pilares.

Note-se que estas quatro últimas hipóteses levam a uma menor rigidez equivalente do pilar, especialmente se houver fissuração.

Para a variação paramétrica considerada adiante nos resultados obtidos na Fig. 4.21 e na Tabela 4.14, verifica-se que o momento resistente último de cálculo,  $M_{ud}$ , dependente da força normal de cálculo e decorrente do dimensionamento, é inferior, *em todos os casos*, aos momentos  $M_y$  e  $M_{\epsilon_{c1}}$ . Estes dois momentos são calculados com as resistências  $f_{cm}$  e  $f_{yk}$ . Isto facilita a escolha das rigidezes, cf. a Fig. 4.9, pois só serão consideradas, no máximo, as rigidezes dos primeiro e segundo segmentos das curvas  $M(1/r)$  linearizadas. O momento de fissuração,  $M_{cr}(N_d)$ , também calculado com estas resistências e com  $f_{ct,5\%}$  - cf. a hipótese (3) anterior - deve ser comparado com o momento máximo, no caso admitido igual a  $M_{ud}(N_d)$ , para decidir se há ou não fissuração do pilar. Assim, se ocorrer  $M_{cr}(N_d) < M_{ud}(N_d)$  há fissuração, e a rigidez equivalente do pilar depende das rigidezes  $(EI)_1$ , do trecho sem fissuras, e de  $(EI)_2$ , do trecho onde há fissuras. Esta rigidez decorre igualando-se os deslocamentos horizontais no topo do pilar obtidos num caso com  $(EI)_{eq}$ , e noutro através da integração dupla da curvatura, considerando-se no trecho não fissurado a curvatura  $M/(EI)_1$ , e no trecho com

fissuras a curvatura média correspondente a momentos linearmente distribuídos entre  $M_{cr}$  e  $M_{ud}$ . Conforme a Equação (4.75a), tem-se neste segundo trecho uma reta de inclinação  $1:(EI)_2$ , que não passa pela origem da curva  $M(1/r)$ . A rigidez equivalente é dada pela seguinte equação, pondo-se  $\psi = M_{cr}/M_{ud}$  e  $\rho_{02}$  a curvatura relativa decorrente da interseção da reta de inclinação  $1:(EI)_2$  com o eixo das abscissas:

$$\frac{1}{(EI)_{eq}} = \frac{\psi^3}{(EI)_1} + \frac{1}{2(EI)_2} \left[ 2 - 3\psi + \psi^3 + \frac{3\psi(1-\psi^2)}{\left(1 - \frac{\rho_{02}}{\rho_{cr,mII}}\right)} \right] \quad (4.83)$$

Nesta equação deve-se ter  $0 \leq \psi \leq 1$ . Note-se que para estes extremos tem-se, respectivamente,  $(EI)_{eq} = (EI)_2$  e  $(EI)_{eq} = (EI)_1$ . Se ocorrer  $M_{cr}(N_d) \geq M_{ud}(N_d)$  não há fissuração no ELU, donde  $(EI)_{eq} = (EI)_1$ .

As Figuras 4.21a, b e c e a Tabela 4.14 baseiam-se nos seguintes dados:

Geometria: seção retangular:  $b \times h$ , momento de inércia  $I_0 = bh^3/12$

armadura simétrica:  $y_{s1}/h = 0,10$  e  $y_{s2}/h = 0,90$

Concreto: parábola do segundo grau, com tensão de pico  $f_{cm} = 28MPa$ ,

$$\varepsilon_{cl} = -2^0 /_{00}, \varepsilon_{clim} = -3,414^0 /_{00}, E_{ci} = 10^3 \times f_{cm} = 28GPa$$

$$f_{ck} = 20MPa, f_{ct,5\%} = 1,47MPa$$

Aderência:  $\beta_t = 0,25$

Aço: lei bilinear sem encruamento,  $f_{yk} = 500MPa$ ,  $E_s = 200GPa$

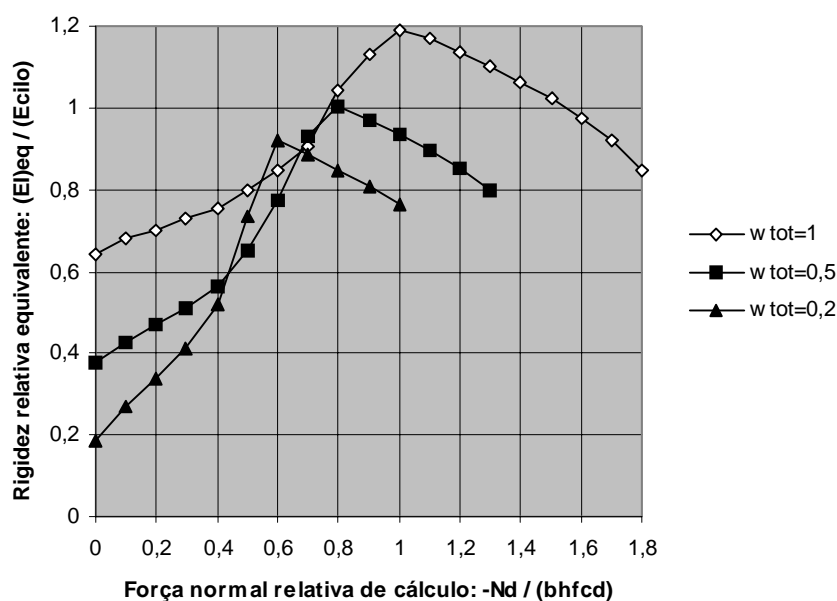


Fig. 4.21a: Curvas completas da rigidez relativa equivalente em função da força normal relativa de cálculo, para três taxas mecânicas da armadura total. Dados cf. Tabela 4.14.

Na Fig. 4.21a mostra-se a rigidez equivalente, dividida pelo produto  $E_{ci}I_0$ , considerando-se, para melhor visualização, apenas três valores da taxa mecânica total. Como se vê nesta figura, a rigidez  $(EI)_{eq}$  é crescente com a intensidade da força normal de compressão enquanto houver fissuração. Quando esta inexistir, a rigidez decresce com a força normal, conforme transparece nas curvas superiores, onde se tem  $(EI)_{eq} = (EI)_1$ . A taxa mecânica total tem influência considerável, com ou sem fissuração, especialmente enquanto houver escoamento da armadura tracionada. Estas curvas são separadas daquelas das Figuras 4.21b e c, conforme haja ou não fissuração, para uma variação mais extensa da taxa mecânica. Ver também a Tabela 4.14. Os resultados da Fig. 4.21b para  $v_d = 0$  fornecem valores próximos da rigidez  $(EI)_2$ , mas não iguais, pois aqui  $M_{cr} \neq 0$ . Esta rigidez, para vigas com armadura simétrica (e nas mesmas condições desta figura), pouco difere da rigidez definida para estas,  $(EI)_y$ , como já observado.

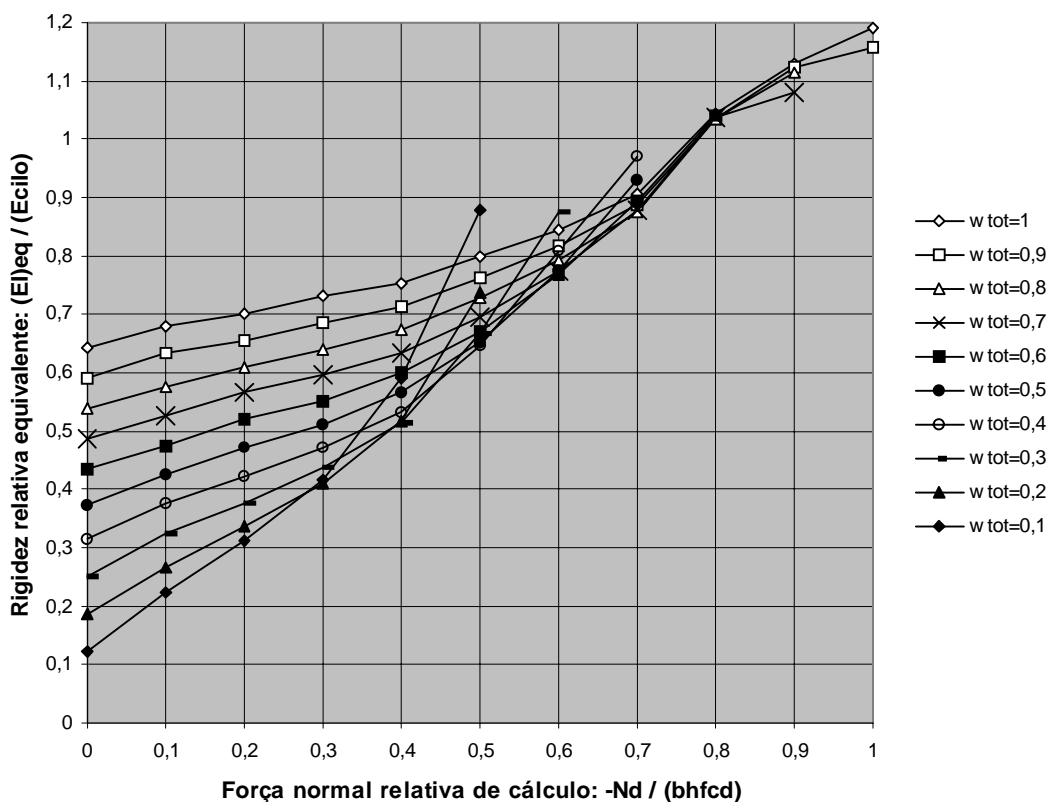


Fig. 4.21b: Pilares com fissuração:  $M_{cr}(N_d) < M_{du}(N_d)$  e  $(EI)_{eq}$  cf. Equação (4.83).

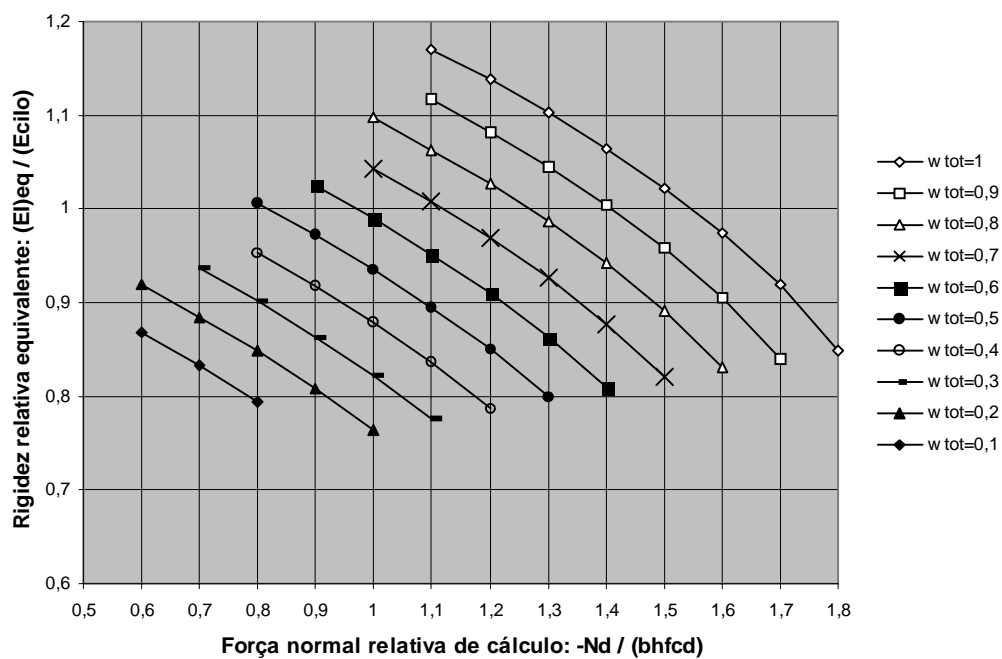


Fig. 4.21c: Pilares sem fissuração:  $M_{cr}(N_d) \geq M_{du}(N_d)$  e  $(EI)_{eq} = (EI)_1$ .

Fig. 4.21: Rigidez equivalente de pilares não esbeltos em flexão composta normal. Seção retangular, armadura simétrica. Dados cf. Tabela 4.14.



Tabela 4.14: Rigidez relativa equivalente,  $(EI)_{eq} / (E_{ci} I_0)$ , de pilares não esbeltos em flexão composta normal. Seção retangular, armadura simétrica,  $A_{s1} = A_{s2} = A_{stot} / 2$ ,  $y_{s1} / h = 0,10$  e  $y_{s2} / h = 0,90$ . Aço CA-50,  $f_{ck} / f_{cm} = 20 / 28 \text{MPa}$ ,  $f_{ct,5\%} = 1,47 \text{MPa}$ ,  $E_{ci} = 28 \text{GPa}$ ,  $I_0 = bh^3 / 12$ ,  $v_d = N_d / (bh f_{cd})$ ,  $\omega_{tot} = A_{stot} f_{yd} / (bh f_{cd})$ . Área sombreada: não há fissuração.

$\omega_{tot}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
- $V_d$	0	0,123	0,188	0,252	0,314	0,375	0,436	0,488	0,540	0,592	0,644
	0,1	0,225	0,267	0,323	0,376	0,426	0,476	0,528	0,576	0,634	0,679
	0,2	0,311	0,336	0,376	0,422	0,471	0,521	0,565	0,610	0,655	0,701
	0,3	0,416	0,411	0,438	0,472	0,511	0,552	0,596	0,641	0,687	0,732
	0,4	0,590	0,517	0,513	0,533	0,565	0,599	0,635	0,673	0,712	0,753
	0,5	0,880	0,737	0,666	0,646	0,653	0,671	0,696	0,728	0,763	0,799
	0,6	0,868	0,919	0,874	0,808	0,775	0,769	0,776	0,793	0,817	0,845
	0,7	0,833	0,885	0,936	0,971	0,930	0,893	0,878	0,877	0,888	0,907
	0,8	0,794	0,848	0,901	0,954	1,006	1,041	1,039	1,034	1,034	1,043
	0,9		0,808	0,864	0,918	0,972	1,024	1,081	1,114	1,123	1,130
	1,0		0,764	0,822	0,879	0,935	0,989	1,044	1,097	1,156	1,190
	1,1			0,776	0,836	0,895	0,952	1,008	1,063	1,117	1,171
	1,2				0,787	0,850	0,910	0,969	1,026	1,082	1,138
	1,3					0,799	0,864	0,926	0,986	1,045	1,102
	1,4						0,810	0,878	0,942	1,004	1,064
	1,5							0,820	0,891	0,958	1,022
	1,6								0,830	0,905	0,974
	1,7									0,840	0,919
1,8										0,849	

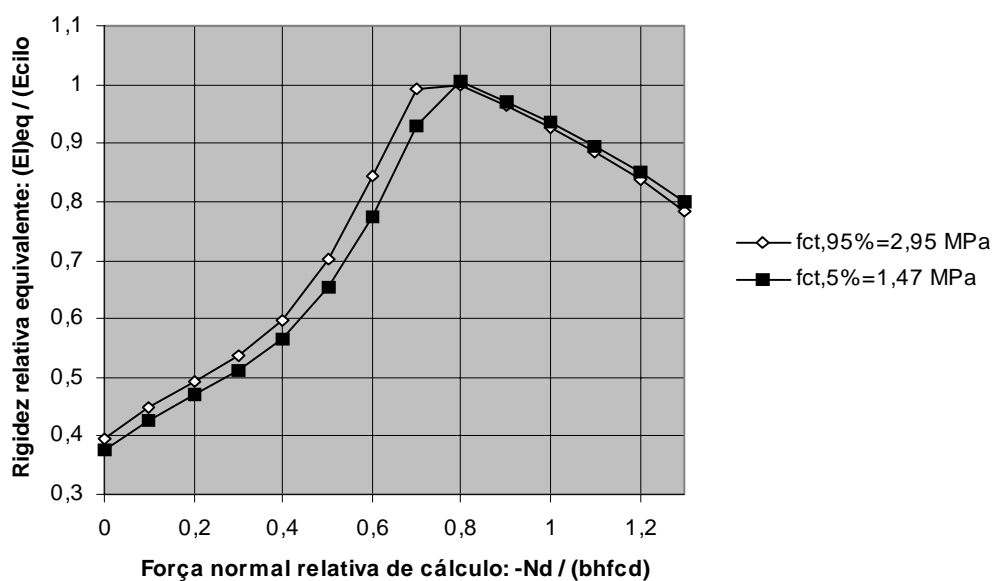


Fig. 4.22: Rigidez relativa equivalente para resistências à tração características superior e inferior,  $\omega_{tot} = 0,5$ . Demais dados cf. Tabela 4.14.

É interessante notar, na Fig. 4.22, a influência relativamente pequena do quantil adotado para a resistência à tração do concreto na rigidez equivalente do pilar. Isto se explica pela influência favorável da força normal de compressão sobre o momento de fissuração, diferentemente da flexão simples.

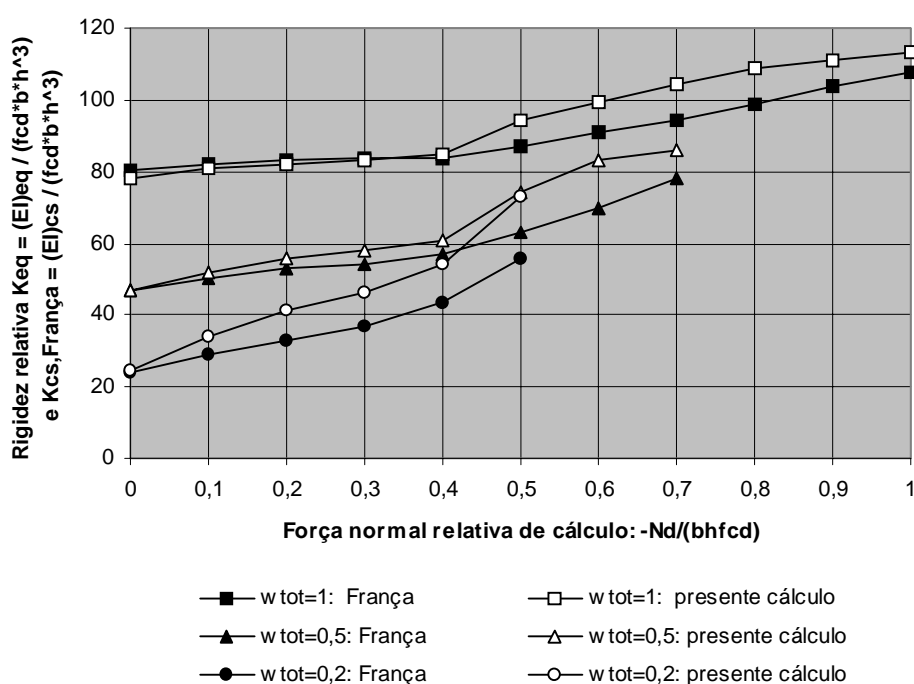


Fig. 4.23: Comparação da rigidez equivalente, cf. Equação (4.83), e rigidez secante, cf. França, para tensões de pico  $f_{ck}/1,27$  e  $f_{yk}/1,15$ . Seção retangular, armadura simétrica,

$$A_{s1} = A_{s2} = A_{stot} / 2, \quad y_{s1}/h = 0,15 \text{ e } y_{s2}/h = 0,85. \text{ Aço CA-50, } f_{ck} = 20MPa, \\ f_{ct,d} = 1,26MPa, \quad E_{ci} = 10^3 \times (f_{ck}/1,27) = 15,75GPa, \quad I_0 = bh^3/12. \text{ Adimensionais:} \\ v_d = N_d/(bhf_{cd}), \quad \omega_{tot} = A_{stot} f_{yd}/(bhf_{cd}).$$

Na Fig. 4.23 mostra-se a comparação da rigidez equivalente, cf. Equação (4.83), e rigidez secante, cf. ábaco A15 de França (1991), considerando-se as tensões de pico  $f_{ck}/1,27$  e  $f_{yk}/1,15$  para o concreto e o aço, respectivamente. Por coerência, a resistência à tração do concreto é tomada com um coeficiente de segurança igual a  $(1,27)^{2/3} = 1,17$ . Pode-se ver nesta figura que os resultados são relativamente próximos, e seguem a mesma tendência no caso de fissuração. A

maior diferença encontrada ocorre para a menor taxa mecânica total  $\omega_{tot} = 0,2$  e força normal relativa de cálculo  $-v_d = 0,5$ , com  $K_{cs,França} / K_{eq} = 56/73 = 0,77$ .

Não se pretende aqui estender irrestritamente estes resultados aos pilares esbeltos. Para estes, a determinação da rigidez equivalente teria de considerar, além da própria deformabilidade do pilar, também a rotação do nó que dá o engaste parcial. Além disso, como mostrado na Fig. 4.23, há a questão da rigidez (principalmente) do concreto, representada pela sua lei constitutiva adotada, e obtida com uma tensão de pico menor que  $f_{cm}$ , i. e.,  $f_{ck} / 1,27$ , conforme a proposta de França, intermediária entre a do EC-2 e do MC-90. Entretanto, destes resultados é possível tirar conclusões para os pilares esbeltos pelo menos qualitativas. Se o momento solicitante de cálculo na seção de engaste decorrer de uma análise que inclua os efeitos de segunda ordem, então o erro que se comete na Equação (4.83) está apenas na variação linear adotada para a distribuição do momento fletor, uma vez que a rotação nodal está implícita na análise. Supõe-se, nesta consideração, que os efeitos da força normal e da esbeltez sejam suficientemente moderados, de modo que o máximo momento ocorra no engaste. A variação não-linear do momento poderia ser considerada, adotando-se uma distribuição plausível, ou aquela decorrente da análise não-linear com efeito de segunda ordem, se o pilar, em pórticos mais simples, for suficientemente discretizado. Com isto, diminui-se o erro na estimativa da rigidez equivalente. Note-se, porém, que, se o momento de fissuração for maior que o máximo momento solicitante de cálculo, praticamente não há erro algum em adotar a rigidez equivalente igual a  $(EI)_1$ , na dependência apenas da tensão de pico considerada para o concreto. A introdução desta resistência, significativamente menor que o valor médio, reduz muito a rigidez do pilar, particularmente quando não houver escoamento em tração da armadura, e tem a intenção de garantir uma segurança maior para os pilares esbeltos. Assim, p. ex., para  $\omega_{tot} = 1$  e  $-v_d = 1$  tem-se da Fig. 4.23:  $(EI)_{eq} = 112 \times (20/1,4) \times bh^3 = 1600 \times bh^3$ ; e da Tabela 4.14:  $(EI)_{eq} = 1,19 \times 28 \times 10^3 \times (bh^3/12) = 2777 \times bh^3$ , donde uma redução na rigidez equivalente igual a  $(1 - 1600/2777) \times 100 = 42\%$ . Se esta redução for igual a 50%, os deslocamentos mais do que dobram e, por conseqüência, mais do que dobram também as parcelas do momento fletor devidas ao efeito de segunda ordem

(parcelas  $P\Delta$ ). Há, assim, uma dupla majoração no efeito de segunda ordem: uma advinda da majoração das cargas, outra decorrente da minoração das rigidezes, (Menegotto (1995)).

Observe-se, além disso, que, se os efeitos de segunda ordem forem inexistentes ou mesmo pequenos, há preponderância do momento de primeira ordem, com o que interessaria majorar as rigidezes dos pilares, em face das rigidezes das vigas. Conforme afirma MacGregor (1993): "...uma vez que os deslocamentos laterais decorrentes da análise do pórtico são afetados pelas rigidezes de todos os elementos da estrutura, os valores de  $(EI)$  usados nesta análise devem se aproximar dos *valores médios dos elementos individuais*". Somente na verificação da estabilidade de cada elemento isolado deve-se introduzir um limite inferior e seguro de sua rigidez. Assim, do ponto de vista de análise global, a rigidez equivalente aqui obtida preenche esta condição, a menos da distribuição linear adotada. Note-se, ainda, que as rigidezes aproximadas indicadas na NBR 6118, 2000, item 15.6.2, para a análise global de segunda ordem, a saber:

$$\text{vigas: } (EI)_{\text{sec}} = 0,4E_c I_c \text{ se } A_{s1} \neq A_{s2}, \text{ e } (EI)_{\text{sec}} = 0,5E_c I_c \text{ se } A_{s1} = A_{s2}$$

$$\text{pilares: } (EI)_{\text{sec}} = 0,8E_c I_c$$

são valores muito próximos dos indicados por Kordina e Hage, conforme consta no trabalho de MacGregor (1993). Estes valores têm, justamente, a intenção de reproduzir uma estimativa média daqueles obtidos na Fig. 4.21 ou na Tabela 4.14.

Como já se disse antes, a análise (seja de primeira, seja de segunda ordem) e o dimensionamento são necessariamente iterativos. Entretanto, como se depreende dos trabalhos de França (1991) e de Oliveira e França (2000), só isto não basta. É preciso um passo *essencial* a mais, que é a determinação das rigidezes à flexão das vigas e dos pilares do pórtico plano, *subseqüentemente ao dimensionamento*. Embora isto represente um trabalho adicional, que pode, aliás, fazer parte de uma sub-rotina extra, ganha-se muito em clareza e precisão, especialmente quando são considerados os efeitos de segunda ordem.

Antes de decidir se um pórtico é esbelto, é preciso realizar uma análise de primeira ordem, seguida do dimensionamento e da determinação das rigidezes (para estas, de forma análoga à que se fez na Tabela 4.14). Concluída

esta primeira etapa, faz-se uma análise de segunda ordem, *com as mesmas rigidezes anteriores*. Se os esforços solicitantes, especialmente os momentos fletores das seções críticas, decorrentes destas duas análises não diferirem entre si em mais de 10%, a estrutura como um todo é considerada não esbelta. Este critério está dado na NBR 6118, 2000, item 15.1. Bastaria, então, verificar localmente os pilares cujos efeitos simultâneos da força normal e da esbelteza levam a um momento fletor máximo fora das seções extremas do pilar. Por outro lado, se este critério não se verificar, faz-se, da mesma forma, uma análise de segunda ordem e os subsequentes dimensionamento e determinação das rigidezes. Neste caso, pode-se também indicar, pelo menos como uma primeira aproximação, a rigidez equivalente aqui obtida, pois a despeito da distribuição não-linear do momento fletor ao longo do pilar, foram feitas na sua determinação várias hipóteses a favor da segurança. Note-se, ainda, que no mencionado trabalho de Kordina e Quast, é definida uma (única) rigidez (do tipo tangente), semelhante a  $(EI)_2$ , independente, portanto, da distribuição do momento fletor. Assim, restaria, novamente, verificar apenas se os máximos momentos ocorrem nos extremos do pilar, ou fora deles. Nesta análise local *como pilar isolado*, num caso e noutro, caberia considerar as rigidezes decorrentes das resistências minoradas  $f_{ck} / 1,27$  e  $f_{yk} / 1,15$ .

Claro está que, nas decisões de projeto, deve-se sempre ser conservativo. As considerações aqui feitas, bem como os resultados apresentados, embora não pretendam ser definitivos, podem auxiliar nestas decisões.

No trabalho de MacGregor (1977) encontram-se enumeradas as várias influências na rigidez à flexão de pilares (*“o principal problema em qualquer análise de segunda ordem ou de estabilidade de estruturas de concreto”*), que devem ser consideradas na análise. Para uma dada forma da seção transversal, estas são: “a quantia e a disposição da armadura, a extensão da fissuração, a carga axial, a fluência do concreto, os comportamentos não-lineares do concreto e do aço”, e, por último, “a variação da rigidez ao longo de todo o comprimento da barra em questão, considerando-se os trechos fissurados e os não fissurados. A rigidez deve ser representativa de toda a peça em questão, não apenas da seção mais crítica”. Assim, com exceção da fluência do concreto e da esbelteza do pilar, todas estas influências estão consideradas na presente estimativa da rigidez de pilares no ELU. Para a consideração da fluência do concreto ver MacGregor (1993). A dedução da

excentricidade da força normal proveniente da fluência do concreto está mostrada no trabalho de Buchaim (1979). Além disso, no presente trabalho, está dada a rigidez tangente na origem,  $(EI)_{origem}$ , cf. Equações (4.72) e (4.73), a qual permite obter a carga de instabilidade de pilares esbeltos bi-articulados. Também nesta rigidez cabe escolher resistências minoradas, i. e.,  $f_{ck} / 1,27$  ou  $f_{ck} / 1,20$  e  $f_{yk} / 1,15$ .

Ressalte-se, novamente, que a determinação mais precisa das rigidezes do pórtico no ELU visa não somente assegurar a determinação dos efeitos de primeira ou de segunda ordem nos pilares, *mas igualmente a demanda de rotação plástica das vigas*. A determinação da capacidade de rotação plástica é tratada a seguir.