

## **2 LEIS CONSTITUTIVAS**

### **2.1 Introdução**

Descrevem-se a seguir as leis constitutivas do concreto e do aço. Mostra-se a obtenção destas leis para o concreto na compressão e na tração uniaxiais, através de conceitos da Mecânica da Fratura, seguindo-se principalmente o trabalho de Sigrist (1995). Expõe-se a solução dada por Sigrist para a obtenção da resistência à tração na flexão simples, assim como uma alteração dessa solução. Ambas soluções são comparadas com aquela dada no MC-90. Descrevem-se também os critérios mais usuais de resistência do concreto. Para os aços, atualmente classificados de acordo com sua ductilidade, são dadas as características mecânicas, conforme as normas brasileiras vigentes, as quais permitem determinar, de forma simplificada, as correspondentes leis constitutivas. Mostram-se ainda as características de aderência exigidas pela NBR 7480/1997 e procura-se explicar o ensaio de tirante da NBR 7477/1982 do qual decorre o coeficiente de conformação superficial e seus valores mínimos exigidos na primeira dessas normas. Descrevem-se por fim as equações das leis constitutivas do concreto na flexão utilizadas neste trabalho.

### **2.2 Concreto em Compressão Uniaxial**

O concreto é um material heterogêneo, composto de duas fases, o agregado gráúdo e a matriz (ou pasta) de cimento e areia. Essas duas fases têm isoladamente um comportamento frágil e de resposta linear. Atuando em conjunto o material heterogêneo tem resposta não-linear e mostra, na compressão uniaxial, um comportamento dúctil (Fig. 2.1).

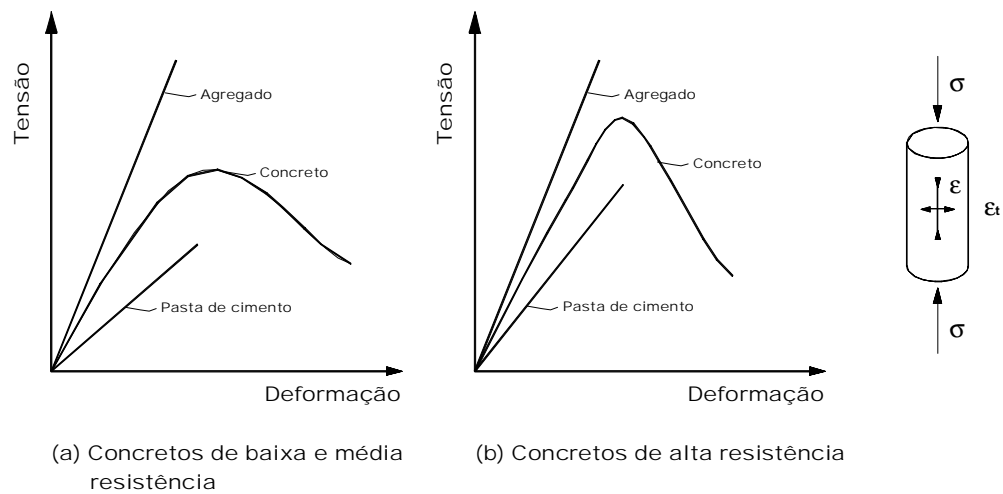


Fig. 2.1: Leis tensão-deformação do agregado, da pasta de cimento e do concreto (cf. FIP/CEB, Bull. 197 (1990)).

A diferença evidente entre os comportamentos lineares das duas fases e não-linear do material composto deve-se à concentração de tensões nas zonas de contato entre elas. Nestas há microfissuras, de abertura inferior a  $10\mu\text{m}$  e comprimento entre 3 e 13 mm, antes mesmo da aplicação da carga. Após a aplicação da carga, a microfissuração ocorre gradualmente no interior do concreto como resultado da alteração de distribuição de tensões entre as duas fases, e se dá pela ausência ou perda progressiva da aderência nas zonas de contato, cf. McGregor (1997). Segundo este autor, no processo de carregamento, os materiais frágeis tendem a desenvolver fraturas perpendicularmente à direção do encurtamento principal. Na compressão uniaxial do concreto até a ruptura a microfissuração transforma-se em macrofissuração (fissuras visíveis), e nesse processo distinguem-se quatro etapas, descritas a seguir.

A retração da pasta durante a hidratação e secagem do concreto é impedida pelo agregado e gera tensões internas auto-equilibradas, já antes do carregamento do concreto. As trações na interface agregado-matriz de cimento e areia levam a fissuras de aderência as quais têm pouca influência no

comportamento do concreto, e sua curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  é praticamente linear até cerca de 30% da resistência à compressão  $f_c$ .

No segundo estágio, para tensões aplicadas ao corpo de prova maiores que  $(0,3 \text{ a } 0,4) f_c$ , as tensões na interface agregado-matriz de cimento e areia excedem a sua resistência à tração e ao cisalhamento, e há formação de novas fissuras, chamadas *fissuras de aderência*, as quais são estáveis, e só se propagam se houver aumento de carga. Qualquer tensão interna adicional tem de ser transmitida pelas zonas das interfaces ainda sem perda de aderência. Esta alteração na distribuição de tensões tem como efeito um acentuamento da resposta não-linear da curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ .

No terceiro estágio, para tensões aplicadas no corpo de prova acima de  $(0,5 \text{ a } 0,6) f_c$ , desenvolvem-se fissuras localizadas na argamassa entre as fissuras de aderência. A propagação das fissuras é estável, i. e., não há progressão delas sob carga constante. A fissuração dá-se paralelamente à direção da carga, e este estágio é chamado *limite de descontinuidade*.

No quarto estágio, para tensões aplicadas na faixa  $(0,75 \text{ a } 0,80) f_c$ , cresce o número de fissuras na pasta as quais se coalescem, e com isso aumentam o dano na estrutura do concreto. Disso resulta um maior acentuamento da não-linearidade da curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ . Este estágio é chamado de *tensão crítica*.

Estes estágios estão indicados na Fig. 2.2, incluindo-se a deformação volumétrica,  $\varepsilon_v = \Delta V/V$ , que mede a variação de volume do corpo de prova em relação ao volume original, bem como o efeito Poisson, através de  $\nu = -\varepsilon_3/\varepsilon_1$ , onde  $\varepsilon_1$  é o encurtamento principal paralelo à carga, e  $\varepsilon_3$  é alongamento principal na direção ortogonal à mesma. No quarto estágio, observa-se o crescimento muito rápido do encurtamento axial, com a propagação instável da fissuração, levando o corpo de prova à ruptura. Também se vê nesta figura a reversão da deformação volumétrica que passa de contração a expansão.

No ramo descendente há aumento de encurtamento simultaneamente com queda da carga aplicada. Nesse ramo, possível de ser detectado em ensaios de deformação controlada com máquinas de alta precisão

hoje em dia existentes, há, na realidade, uma localização de deformação em uma zona bem definida de dano da estrutura do material.

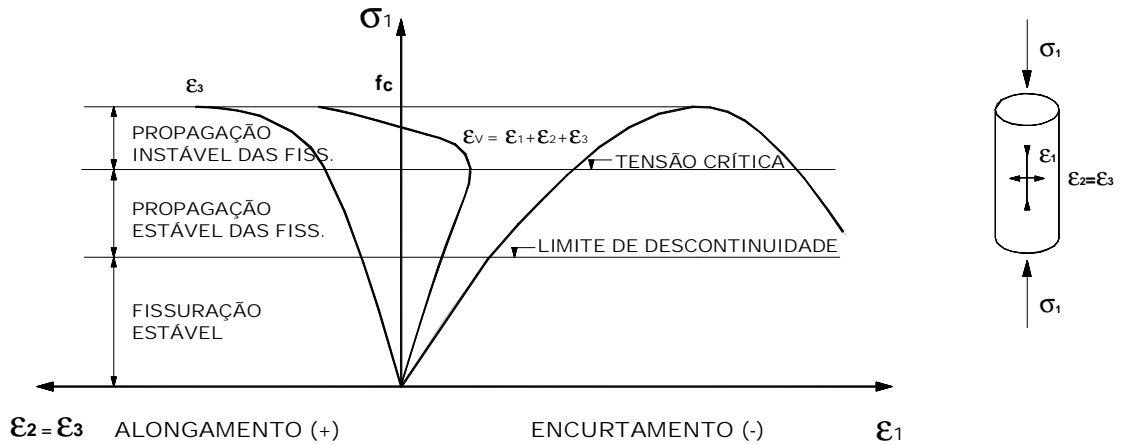


Fig. 2.2: Lei tensão-deformação do concreto em compressão uniaxial, deformação volumétrica e efeito Poisson, cf. McGregor (1997).

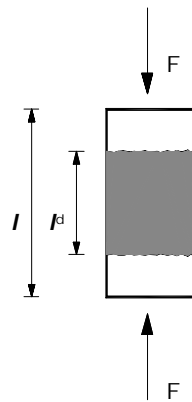


Fig. 2.3: Zona de dano no corpo de prova cilíndrico.

A representação do ramo descendente da Fig. 2.2 corresponde à transformação do descontínuo em contínuo equivalente. Para essa transformação, o que se deve medir é o encurtamento axial  $\Delta l$  do corpo de prova em função da carga aplicada, e em seguida obter a tensão média,  $F/A$ , decorrente da força aplicada dividida pela área da seção transversal do corpo de prova, e a *deformação média equivalente*, considerando-se os comportamentos distintos das partes de comprimentos respectivamente iguais a  $l_d$  e  $l - l_d$ , onde  $l_d$  corresponde à zona de

dano e  $l$  é a altura do corpo de prova. Ver a Fig. 2.3. O fato de a ruptura do corpo de prova, no ensaio de deformação controlada, não se dar bruscamente é explicado pela ação de forças de atrito e de engrenamento nas interfaces das lamelas da zona danificada.

*A importância do ramo descendente está em sua aplicação às peças com gradiente de deformação.* Nessas reduz-se muito a propagação instável das fissuras, porque à medida que as fissuras da argamassa amolecem o concreto com encurtamentos maiores, há transferência de carga para zonas comprimidas mais rígidas e mais estáveis (encurtamentos menores), mais próximas da linha neutra. Com isso as peças com gradiente de deformação têm uma lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  que pode entrar na região de amolecimento (*strain-softening*). No ramo ascendente dessa curva há pouca influência de um gradiente de deformação, como comprovado experimentalmente.

Para obter o ramo descendente da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  é necessário introduzir conceitos da Mecânica da Fratura. A explicação que segue baseia-se no trabalho de Sigrist (1995), Fig. 2.4. Considere-se o sistema máquina de ensaio-corpo de prova mostrado nesta figura, representado por três molas em série. A da máquina tem coeficiente de flexibilidade  $c_M = 1/k_M$ , onde  $k_M$  é a sua rigidez, geralmente fornecida pelo fabricante. O corpo de prova é cilíndrico, de comprimento  $l$ , diâmetro  $\phi$  e área  $A$ . Após o pico da curva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ , forma-se no corpo de prova uma nítida região (II) de localização de deformação, cujo comportamento é distinto das demais regiões (I) as quais sofrem no descarregamento uma queda de encurtamento (alongamento elástico). Para quantificar isso, considere-se o estado de equilíbrio referente ao ponto A da Fig. 2.4, nas curvas  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  das partes (I) e (II) do cilindro de prova. A um aumento do encurtamento  $\partial(\Delta l) < 0$  corresponde uma queda de compressão  $\partial\sigma > 0$  no sistema, do que resultam alongamentos das zonas (I), de módulo de elasticidade  $E$ , e da mola. A região (II) tem rigidez negativa, representada por  $E_d$ . Considerando-se as três componentes deste sistema, pode-se escrever para o acréscimo de encurtamento:

$$\partial(\Delta l) = \partial(\Delta l)_I + \partial(\Delta l)_{II} + \partial(\Delta l)_M \quad (2.1)$$

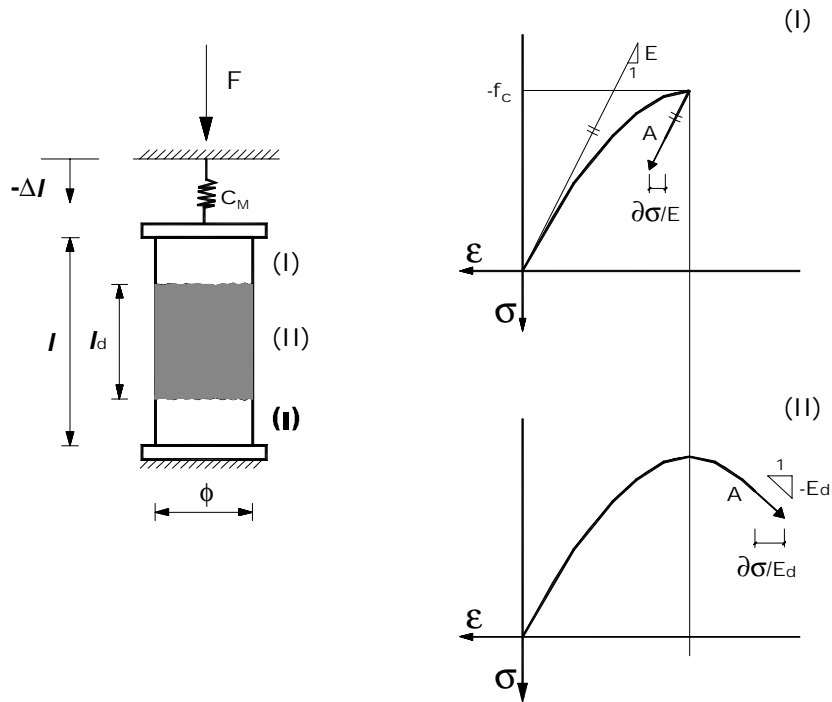


Fig. 2.4: Amolecimento do corpo de prova de concreto em compressão uniaxial, cf. Sigrist (1995).

$$\partial(\Delta l) = \partial\sigma \left( \frac{l-l_d}{E} + \frac{l_d}{E_d} + A c_M \right) \quad (2.2)$$

Em decorrência dos sinais diferentes dos acréscimos do encurtamento total e da correspondente tensão, a expressão entre parênteses deve ser negativa. Disso decorre o limite inferior de  $l_d$ , e como  $l_d \leq l$  resulta:

$$l \geq l_d > \frac{l + E A c_M}{1 - \frac{E}{E_d}} \quad (2.3)$$

Esta inequação dá, de outra forma, a condição de estabilidade para a obtenção do ramo descendente da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  do concreto e dela decorre o limite do comprimento  $l_d$  da zona de ruptura para que o ensaio seja estável. Se ocorrer

$$l_d \leq \frac{l + EA c_M}{1 - \frac{E}{E_d}} \quad (2.4)$$

o processo de descarga é instável. Para uma máquina de ensaio muito rígida ( $c_M \cong 0$ ), obtém-se a condição de estabilidade do ensaio:

$$l_d > \frac{l}{1 - \frac{E}{E_d}} \quad (2.5)$$

sendo  $E_d < 0$ . De ensaios próprios em cilindros de esbeltez  $l/\phi = 3$ , com  $\phi = 60, 120$  e  $180$  mm, Sigrist constatou que o comprimento da zona de dano  $l_d$  é aproximadamente igual a  $2\phi$ . Em decorrência disso, é possível obter a tensão média no corpo de prova em função do encurtamento  $\Delta l_{II}$  da zona de dano,  $\sigma(\Delta l_{II})$ . Ver a Fig. 2.5. Da área do diagrama da Fig. 2.5b resulta a energia de fratura necessária para destruir completamente o corpo de prova. Como se trata de energia dissipada no volume da região (II), indicada por  $U_{cF}$ , é necessário dividir a energia de fratura por unidade de área do corpo de prova,  $G_{cF}$ , pelo comprimento  $l_d$ , com o que se obtém:

$$U_{cF} = \frac{G_{cF}}{l_d} \quad (2.6)$$

valor que varia entre 60 e 120  $KJ/m^3$  ( $1KJ/m^3 = 10^{-3} Nmm/mm^3$ ). Se forem desprezadas as influências da resistência do concreto e da dispersão do tamanho do agregado, esta grandeza pode ser considerada aproximadamente constante para os concretos de construções usuais, de resistências entre 20 e 60 MPa.

O ramo ascendente pode ser representado com boa aproximação pela seguinte parábola do segundo grau:

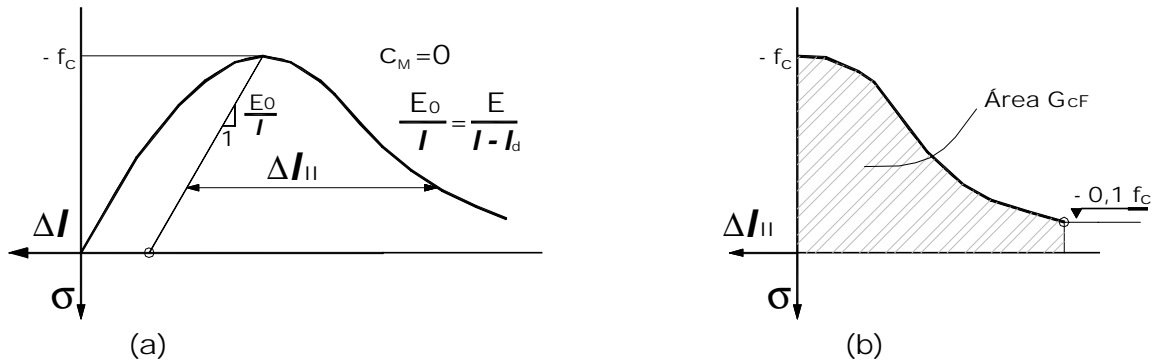


Fig. 2.5: Obtenção da energia de ruptura por unidade de área  $G_{cF}$  do concreto em compressão uniaxial, cf. Sigrist (1995).

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = -\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \left( 2 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) \quad (2.7)$$

onde  $\varepsilon_{c1}$  é a deformação correspondente à tensão de pico  $f_c$  e pode ser obtida da seguinte equação, dada no trabalho de Sigrist:

$$-\varepsilon_{c1} = \frac{f_c}{60} + 1,5 \quad (2.8)$$

com  $f_c$  em MPa, e  $\varepsilon_{c1}$  em  $^0/_{00}$ . Na faixa  $f_c = 20$  a  $60$  MPa este encurtamento varia de  $1,83^0/_{00}$  a  $2,5^0/_{00}$ .

Aproximando-se o ramo descendente por uma reta e admitindo-se a energia dissipada por unidade de volume como constante, pode-se obter o módulo de amolecimento como segue (Fig. 2.6). Desta figura obtém-se:

$$U_{cF} \frac{l_d}{l} = \left[ -\frac{f_c(l-l_d)}{El} - \frac{c_M f_c A}{l} + \frac{f_c}{E_{cD}} \right] \times \frac{(-f_c)}{2}$$

ou



$$E_{cD} = \frac{-f_c^2 El}{2U_{cF} El_d - (l-l_d) f_c^2 - c_M A E f_c^2} \quad (2.9)$$

de onde se vê que para obter este módulo (negativo) é preciso conhecer o coeficiente de flexibilidade da máquina de ensaio,  $c_M$ , e a energia de ruptura,  $U_{cF}$ .

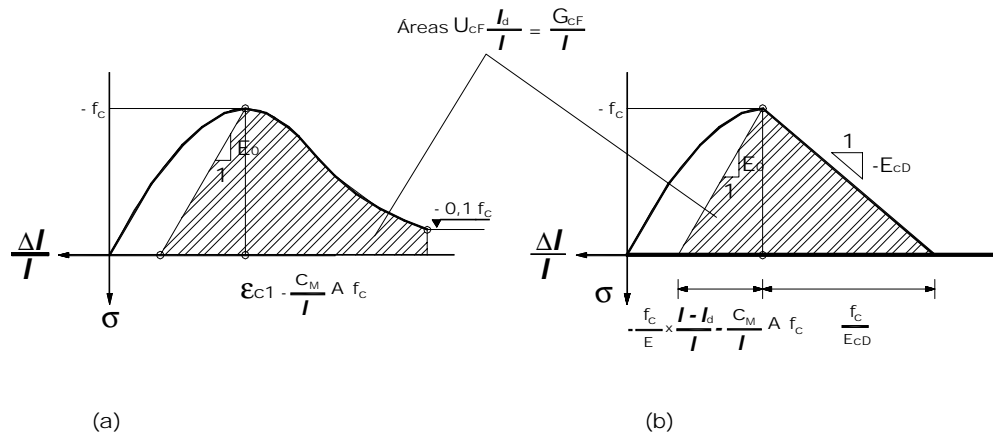


Fig. 2.6: Obtenção simplificada do módulo de amolecimento.

O módulo de elasticidade do sistema,  $E_0$ , na descarga a partir da tensão de pico é obtido desta expressão pondo-se  $U_{cF} = 0$ :

$$E_0 = \frac{El}{l-l_d + E c_M A} \quad (2.10a)$$

Eliminando-se a influência da máquina de ensaio ( $c_M = 0$ ) resulta, conforme indicado na Fig. 2.5a:

$$\frac{E_0}{l} = \frac{E}{l-l_d} \quad (2.10b)$$

onde o módulo de elasticidade  $E$  do concreto, o mesmo da origem, pode ser tomado, cf. Sigrist, igual a:

$$E = 18000 + 400f_c \quad (\text{em MPa}) \quad (2.11)$$

Esta expressão é muito próxima daquela dada no MC-90:

$$E = E_{ci} = 10^4 \times (f_c)^{1/3} \quad (\text{em MPa}) \quad (2.12)$$

Com as expressões apresentadas, e com a hipótese feita para a altura da zona de dano, pode-se obter todo o diagrama  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  do concreto em compressão uniaxial, em função da esbeltez do corpo de prova,  $l/\phi$ , ( Fig. 2.7). Como se mostrou, o ramo descendente da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  não é uma propriedade apenas do material, mas do sistema máquina de ensaio-corpo de prova.

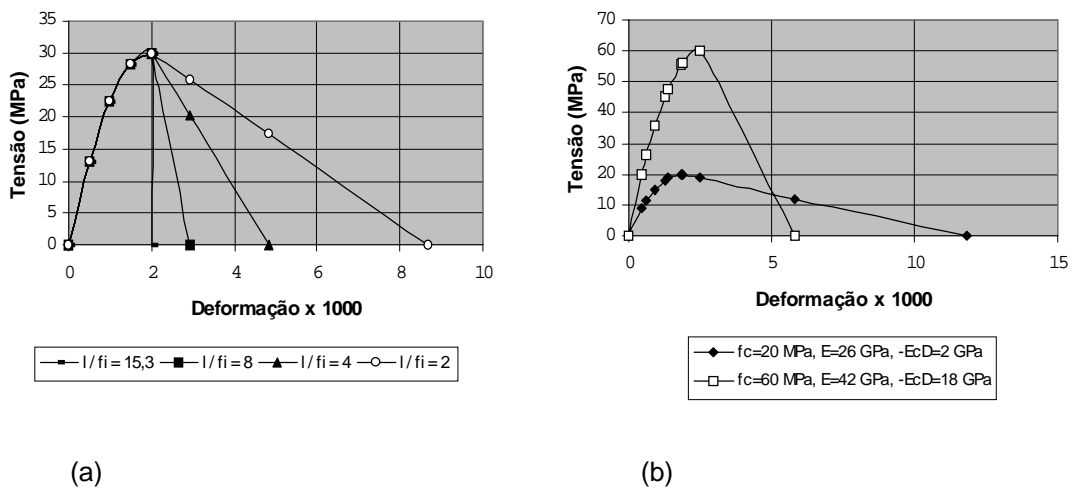


Fig. 2.7: Leis tensão-deformação para concreto em compressão uniaxial, cf. Sigrist (1995). (a): Lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  em função da esbeltez  $l/\phi$  do corpo de prova, para  $f_c = 30\text{MPa}$ ,  $c_M = 0$ ,  $E = 30\text{GPa}$ ,  $-\varepsilon_{c1} = 2^0 / 00$  e  $U_{cF} = 100\text{KJ} / \text{m}^3$ ; (b): Lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  para  $f_c = 20$  e  $60\text{MPa}$ , esbeltez  $l/\phi = 2$  e  $U_{cF} = 100\text{KJ} / \text{m}^3$ .

Para que os resultados sejam fiéis é necessário conhecer o coeficiente de flexibilidade da máquina de ensaio. A título de informação reproduzem-se os seguintes valores do coeficiente de rigidez  $k_M$ , extraídos do catálogo da MTS Teststar II:  $2,6 \times 10^8 N/m$ ,  $4,3 \times 10^8 N/m$  e  $7,5 \times 10^8 N/m$ , para capacidades respectivamente iguais a  $100KN$ ,  $250KN$  e  $500KN$ .

Observe-se ainda que na expressão de  $E_{cD}$  há um comprimento crítico do corpo de prova que anula o denominador, a saber:

$$l_{cr} = l_d \left(1 + \frac{2EU_{cF}}{f_c^2}\right) - A_{cM}E \quad (2.13)$$

Para esse valor o ensaio é instável e não pode ser controlado. Na Fig. 2.7a isso ocorre para  $l_{cr} = 15,3\phi$ , e o ramo descendente é vertical.

### 2.3 Concreto em Tração Uniaxial

A resistência à tração do concreto é uma característica mecânica que intervém em diferentes fenômenos do concreto estrutural, p. ex., na formação de fissuras, na aderência entre o concreto e as barras da armadura, na conseqüente ancoragem dessas barras, na resistência à força cortante e à torção, especialmente nas lajes, nos deslocamentos da estrutura, etc. Sem a consideração dessa resistência “seria virtualmente impossível construir estruturas de concreto”, cf. Hillerborg (1985). A descrição completa do comportamento do concreto à tração é feita também por meio de conceitos da Mecânica da Fratura, e o modelo físico deve-se a Hillerborg et al. Esse modelo é chamado Modelo da Fissura Coesiva ou Fictícia. Nele empregam-se *duas leis constitutivas* na descrição do comportamento mecânico do concreto: uma lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  que descreve o comportamento elástico e eventual encruamento antes da fissuração até a sua resistência à tração  $f_{ct}$ , incluindo descarregamento nesta fase, e outra lei  $\sigma(w)$  que relaciona a tensão aplicada e a

abertura da fissura coesiva até o valor último desta abertura,  $w_u$ , para o qual há completa separação do material. Ver a Fig. 2.8. A fissuração do concreto em peças fletidas, cf. Fig. 2.8d, apresenta uma zona de comprimento  $a$  onde há completa separação do material, sem qualquer transmissão de tensões nas faces da fissura, e outra de comprimento  $a_d$ , adiante da verdadeira fissura, onde há dano e microfissuração. Esta é a chamada zona de processo, onde o material é “parcialmente suturado por inclusões, pelos agregados, e eventualmente por fibras”, cf. Carpinteri (1997), e por isso mesmo nela há transmissão de tensões.

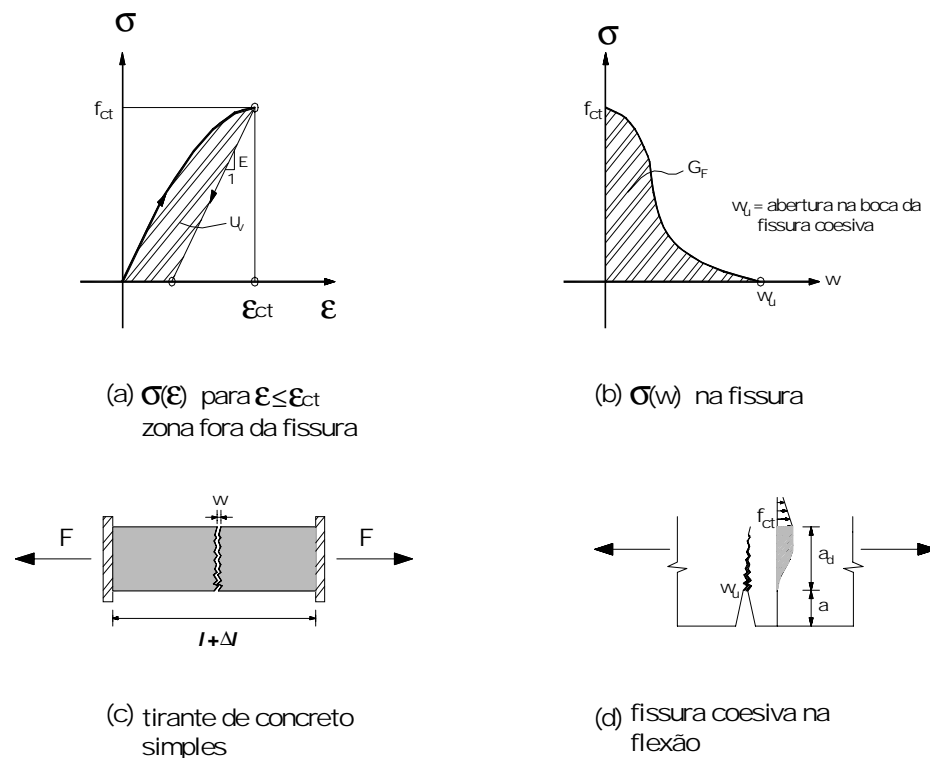


Fig. 2.8: Leis constitutivas do concreto e modelo da fissura coesiva.

Havendo encruamento, a energia fornecida ao elemento estrutural (tirante da Fig. 2.8c) é dissipada tanto no volume do material não fissurado, quanto na superfície da fissura. A energia dissipada por unidade de volume,  $U_v$ , é dada pela área da Fig. 2.8a, e a energia dissipada por unidade de área da fissura,  $G_F$ , é dada pela área da Fig. 2.8b. A energia total dissipada no volume da barra resulta da

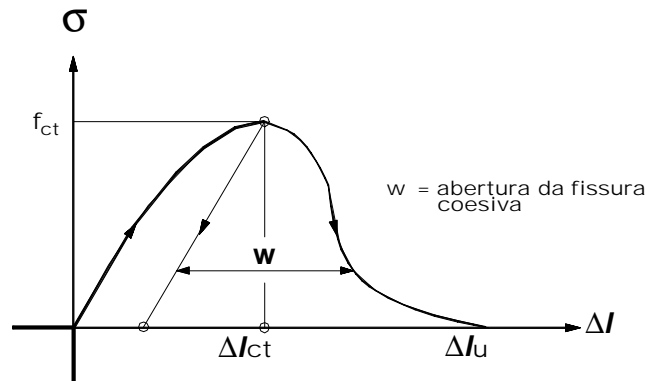


Fig. 2.9: Lei  $\sigma_c(\Delta l)$  para concreto em tração uniaxial.

soma  $U_V \Delta l + G_F A$ , onde  $A$  é a área da seção transversal do tirante e  $l$  o seu comprimento. Se o material for elástico linear, como se pode admitir para o concreto em tração no ramo ascendente de sua lei, então  $U_V = 0$  e toda energia dissipada no tirante reduz-se à parcela referente à fissura. Assim, o ensaio do tirante até a completa separação (ou fratura) do corpo de prova deve ser feito medindo-se a tensão média,  $\sigma = F/A$ , em função do alongamento  $\Delta l$ , e não em função da deformação  $\Delta l/l$ , Fig. 2.9.

Quando o alongamento  $\Delta l$  ultrapassa aquele correspondente à resistência  $f_{ct}$ , a saber,  $\Delta l_{ct}$ , as partes adjacentes à fissura coesiva descarregam-se elasticamente, de modo que ao fim  $\Delta l$  é quase que totalmente igual à abertura da fissura coesiva. A energia específica de fratura,  $G_F$ , decorrente do ramo descendente da lei  $\sigma(w)$  pode ser considerada independente das dimensões do corpo de prova e é, portanto, uma característica do material. Essa energia é obtida experimentalmente (Ver Hillerborg (1985)) e depende principalmente da resistência à tração do concreto e do diâmetro do agregado graúdo. Para diâmetros entre 16 e 32 mm,  $G_F$  varia entre 80 e 140 J/m<sup>2</sup> ( $1\text{J}/\text{m}^2 = 10^{-3}\text{Nmm}/\text{mm}^2$ ).

Os modelos para o cálculo numérico são os dados na Fig. 2.10. Utilizando-se o modelo de Sigrist (1995) é possível reunir as duas leis numa só, dependente porém do comprimento  $l$  do corpo de prova, como se mostra a seguir.

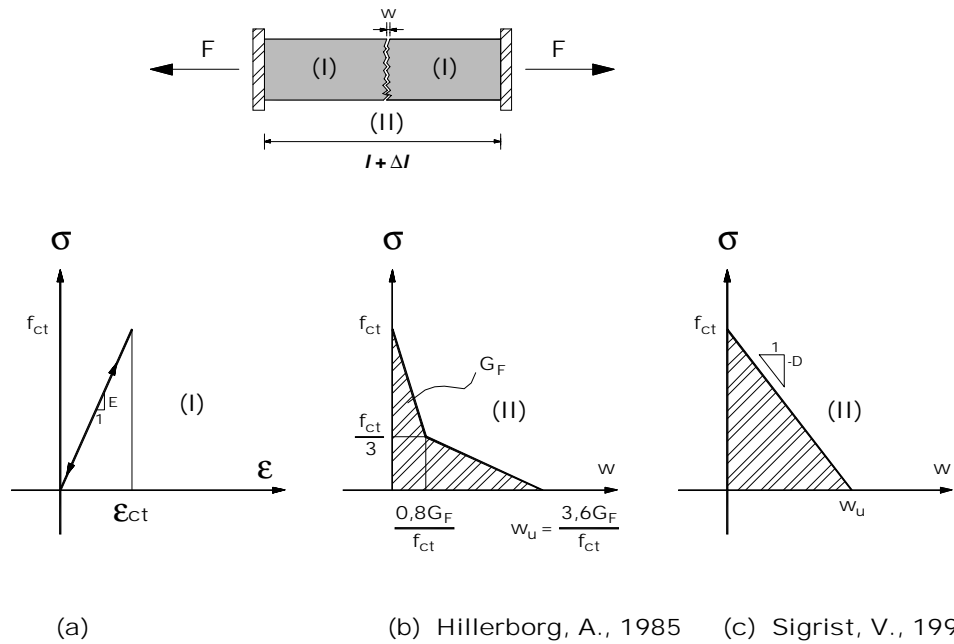


Fig. 2.10: Leis  $\sigma_c(\epsilon_c)$  e  $\sigma_c(w)$  simplificadas.

Da Fig. 2.10c obtém-se:

$$\sigma_c = f_{ct} \left(1 - \frac{w}{w_u}\right) \quad (2.14)$$

e portanto

$$D = \frac{d\sigma}{dw} = -\frac{f_{ct}}{w_u} \quad (2.15)$$

Como

$$G_F = \frac{f_{ct} w_u}{2} \quad (2.16)$$

resulta para  $D$ , grandeza que caracteriza o ramo descendente da lei  $\sigma_c(\Delta l)$ , cf. Fig. 2.11a:

$$D = -\frac{f_{ct}^2}{2G_F} \quad (2.17)$$

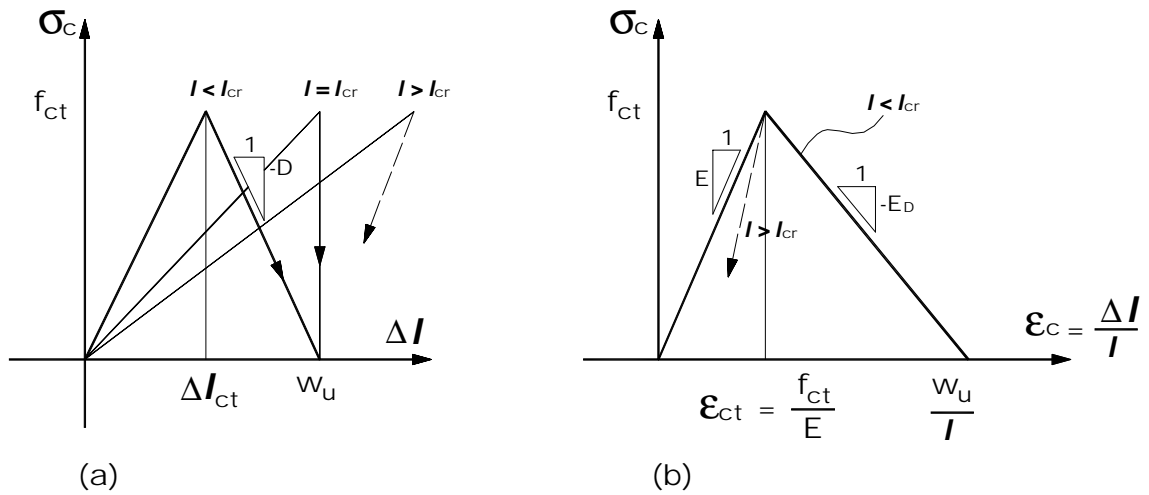


Fig. 2.11: Influência do comprimento do corpo de prova nos ramos descendentes das leis  $\sigma_c(\Delta l)$  e  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ , cf. Sigrist (1995).

Na Fig. 2.11b, para  $\varepsilon_c > \varepsilon_{ct}$  tem-se:

$$\sigma_c = \frac{f_{ct}}{\frac{f_{ct}}{E} - \frac{w_u}{l}} \left( \varepsilon_c - \frac{w_u}{l} \right) \quad (2.18)$$

$$E_D = \frac{d\sigma_c}{d\varepsilon_c} = \frac{f_{ct}El}{f_{ct}l - w_uE} \quad (2.19)$$

Usando-se (2.16) e (2.17) resulta o módulo de amolecimento na tração:

$$E_D = \frac{EDl}{Dl + E} = -\frac{Elf_{ct}^2}{2EG_F - lf_{ct}^2} \quad (2.20)$$

grandeza que caracteriza o ramo descendente da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ . Observe-se, novamente, que  $E_D$  depende do comprimento  $l$  do tirante e é, portanto, uma característica do sistema (da estrutura) e não apenas do material.

O denominador de (2.20) anula-se para o comprimento crítico dado por:

$$l_{cr} = \frac{2EG_F}{f_{ct}^2} = -\frac{E}{D} \quad (2.21)$$

resultado que também pode ser obtido igualando-se a energia elástica acumulada na barra,  $W_e = Alf_{ct}^2/(2E)$ , com a dissipada na fissura coesiva,  $W_p = AG_F$ . Se  $l < l_{cr}$  a energia elástica acumulada na barra pode ser dissipada na fissura coesiva; em caso contrário esta energia supera a dissipável na fissura coesiva, e assim que o carregamento levar a uma tensão  $\sigma_c = f_{ct}$  ocorre um descarregamento instável, fenômeno chamado *snap-back*. Ver a Fig. 2.11. Para os seguintes valores:  $E = 30GPa$ ,  $G_F = 100J/m^2 = 0,1Nmm/mm^2$ ,  $f_{ct} = 3$  a  $4MPa$ , tem-se  $l_{cr} = 350$  a  $650mm$ .

No MC-90, item 2.1.3.3.2, encontram-se valores da energia de fratura  $G_F$  em função do diâmetro máximo do agregado e da resistência característica do concreto. Ver também Hilsdorf e Brameshuber (1991).

## 2.4 Resistência à Tração do Concreto na Flexão Simples

A resistência à tração do concreto na flexão é, como se sabe, maior do que a sua resistência à tração simples. Para uma seção retangular de dimensões  $b \times h$ , esta resistência é definida formalmente pela equação:

$$f_{ct,fl} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} \quad (2.22)$$



onde  $M_{\max}$  é o máximo momento que a peça de concreto simples pode resistir antes de romper-se.

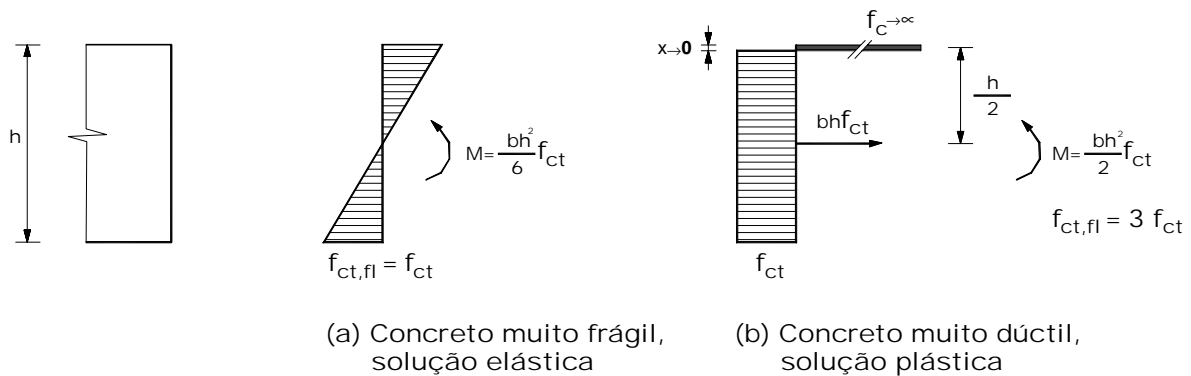


Fig. 2.12: Valores extremos da resistência do concreto à tração na flexão.

No que segue mostra-se a solução analítica desenvolvida por Sigrist (1995) para obter esta resistência, usando-se o Modelo da Fissura Coesiva, dado no item 2.3. Esta solução será alterada adiante, para incluir uma condição de contorno geométrica.

Já se pode adiantar o intervalo de variação de  $f_{ct,fl}$ , considerando-se dois concretos de comportamentos extremos: um muito frágil, outro muito dúctil (Fig. 2.12). Desta figura vê-se que a resistência do concreto na flexão varia na faixa (1 a 3)  $f_{ct}$ . O Eurocódigo 2, item 3.1.2.3, adota exatamente o valor médio desses extremos, através da expressão:

$$f_{ct,fl} = 2f_{ct,ax} \quad (2.23)$$

onde  $f_{ct,ax}$  é a resistência à tração simples (axial), obtida da resistência de separação em duas metades,  $f_{ct,sp}$ , de corpos de prova cilíndricos sujeitos à compressão diametral, conforme ensaio idealizado por Carneiro, F. L. L., com a seguinte conversão:  $f_{ct,ax} = 0,9f_{ct,sp}$ . A NBR 6118, 2000, item 7.1.5, adota um valor

mais preciso que o da Equação (2.23), a saber,  $f_{ct,fl} = (1/0,7)f_{ct} = 1,43f_{ct}$ , como se pode ver na Fig. 2.14 ou na Tabela 2.1, para  $B = 1$  e  $B = 0,3$ .

Na tração o concreto apresenta uma dispersão maior de sua resistência do que na compressão. O valor médio dessa resistência é dado, tanto no EC-2 quanto no MC-90 e na NBR 6118, 2000, pela expressão, em MPa:

$$f_{ctm} = 0,3f_{ck}^{2/3} \quad (2.24)$$

Considerando-se, para essa resistência, uma distribuição normal, de coeficiente de variação  $\delta = S_c / f_{ctm} = 0,20$ , onde  $S_c$  é o desvio padrão, têm-se as resistências características correspondentes aos quantis de 5% e 95% respectivamente iguais a  $f_{ct,5\%} = 0,67f_{ctm}$  e  $f_{ct,95\%} = 1,33f_{ctm}$ . Usando-se (2.24) vem:

$$f_{ct,5\%} = 0,2f_{ck}^{2/3} \quad \text{e} \quad f_{ct,95\%} = 0,4f_{ck}^{2/3} \quad (2.25a) \text{ e } (2.25b)$$

A mencionada solução de Sigrist para a obtenção da resistência à tração na flexão simples tem como base as seguintes hipóteses. Ver também a Fig. 2.13.

- (1) A seção permanece plana após fletir.
- (2) Não se consideram as influências da força cortante, da dispersão das propriedades mecânicas do concreto e do aparato de ensaio.
- (3) O concreto, na compressão e na tração até  $\varepsilon_c = \varepsilon_{ct}$ , tem comportamento elástico linear.
- (4) A máxima flecha  $\delta$  no centro do vão é obtida com a rigidez da seção de altura  $(h - a_d)$ , sendo  $a_d$  a altura da fissura coesiva, e a variação da curvatura ao longo da viga é afim com a variação do momento fletor.

Conforme a Fig. 2.13d pode-se escrever:

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{N}{b(h - a_d)} - 6\frac{M_1}{b(h - a_d)^2}$$

$$f_{ct} = -\frac{N}{b(h-a_d)} + 6\frac{M_1}{b(h-a_d)^2}$$

Destas equações resultam:

$$\sigma_{\text{sup}} = -(\sigma_{\text{inf}} + f_{ct})\frac{a_d}{h-a_d} = -(\sigma_{\text{inf}} + f_{ct})\frac{\eta}{1-\eta} \quad (2.26)$$

$$\eta = \frac{a_d}{h} \quad (2.27)$$

$$M_1 = \frac{b(h-a_d)^2}{6}\left[f_{ct} + \frac{N}{b(h-a_d)}\right]$$

Pondo-se:

$$\zeta = \frac{\sigma_{\text{inf}}}{f_{ct}} \quad (2.29)$$

decorre, usando-se a igualdade  $N = 0,5(\sigma_{\text{inf}} + f_{ct})ba_d$ :

$$M_1 = \frac{bh^2 f_{ct}}{12}(2-\eta+\eta\zeta)(1-\eta) \quad (2.30)$$

Considerando-se que os esforços das seções parciais 1 e 2 da Fig. 2.13d são estaticamente equivalentes ao momento  $M$  aplicado, vem:

$$M = N\left(\frac{h-a_d}{2} + \frac{a_d}{3} \times \frac{2\zeta+1}{\zeta+1}\right) + M_1$$

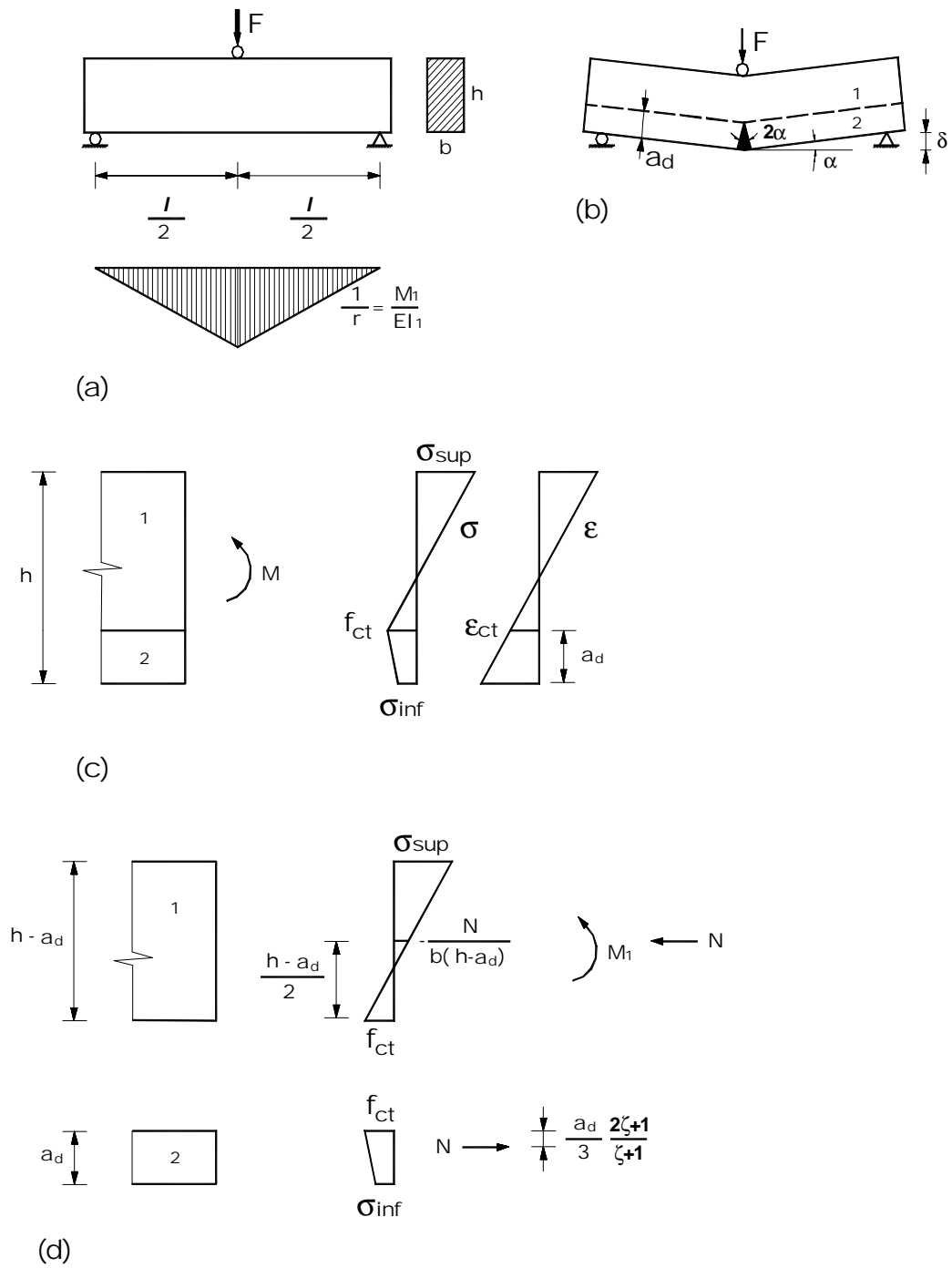


Fig. 2.13: Dados para o cálculo da resistência do concreto à tração na flexão, cf. Sigrist (1995).

Após simplificar obtém-se:

$$m = \frac{6M}{bh^2 f_{ct}} = 1 + 2\eta\zeta \quad (2.31)$$

Da Fig. 2.13a decorre a relação entre a flecha  $\delta$  no centro do vão e a correspondente curvatura  $1/r$ :

$$\delta = \frac{l^2}{12} \times \frac{1}{r} = \frac{l^2}{12} \times \frac{M_1}{EI_1}$$

Substituindo-se nesta equação  $M_1$  de (2.30) e pondo-se  $I_1 = b(h - a_d)^3/12$  vem:

$$\delta = \frac{f_{ct} l^2 (2 + \eta \zeta - \eta)}{12 E h (1 - \eta)^2} \quad (2.32a)$$

Introduzindo-se (2.31) resulta:

$$\delta = \frac{f_{ct} l^2 (3 + m - 2\eta)}{24 E h (1 - \eta)^2} \quad (2.32b)$$

Na borda inferior da seção central a abertura da fissura coesiva é dada aproximadamente pela seguinte relação cinemática (Fig. 2.13b):

$$w_{\text{inf}} = \frac{4\delta}{l} a_d = \frac{f_{ct} l \eta (2 + \eta \zeta - \eta)}{3E(1 - \eta)^2} \quad (2.33)$$

Da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  do ramo descendente, cf. Fig. 2.10c e Equações (2.16), (2.17) e (2.18), obtém-se:

$$w_{\text{inf}} = \frac{\sigma_{\text{inf}} - f_{ct}}{D} = \frac{f_{ct}}{D} (\zeta - 1) \quad (2.34)$$

Igualando-se (2.33) e (2.34), após introduzir  $m$  de (2.31), resulta finalmente:

$$m = 1 + 2\eta \left[ \frac{3 - 2(3 + B)\eta + (3 + B)\eta^2}{3 - 6\eta + (3 + B)\eta^2} \right] \quad (2.35)$$

Observe-se que a fração entre colchetes é exatamente  $\zeta$ , Equação (2.29). A constante  $B$  é uma característica do sistema estrutural que representa sua fragilidade, e é dada por:

$$B = -\frac{Dl}{E} = \frac{f_{ct}^2 l}{2G_F E} = \frac{l}{l_{cr}} = \left(\frac{l}{h}\right) \frac{h}{l_{cr}} \quad (2.36)$$

Este índice, como se vê, depende do vão  $l$  da viga e da constante característica  $D$  do ramo descendente da função  $\sigma_c(\Delta l)$ , Fig. 2.11a, e é proporcional à relação entre a energia elástica acumulada no corpo,  $W_e = bhf_{ct}^2 l / (9E)$ , e a energia de ruptura,  $W_p = bhG_F$ . Mostra, ainda, que a fragilidade do sistema cresce com o vão  $l$  da viga, pois  $l_{cr}$ , Equação (2.21), para um dado concreto, é uma propriedade do material. Vê-se também que, para uma esbeltez  $(l/h)$  constante, a fragilidade cresce com a altura da seção.

Observe-se na Fig. 2.13a que, sendo  $M = Fl/4$ , a máxima capacidade de carga desta viga de concreto simples é obtida da condição

$$\frac{dF}{d\delta} = \frac{4}{l} \frac{dM}{d\delta} = 0 \quad (2.37)$$

equivalente ao máximo da função  $M(\delta)$ , pois a viga é isostática.

Sigrist examina a solução numérica deste problema para uma viga com a seguinte geometria:  $l = 200mm$ ,  $b \times h = 50 \times 50mm^2$ , e resistência  $f_{ct} = 3,5MPa$ , para três valores do índice de fragilidade, a saber: (1) pasta de cimento:  $B = 1,0$  e  $E = 28GPa$ ; (2) concreto de resistência normal:  $B = 0,3$  e  $E = 35GPa$ ; (3) concreto com 1% de fibra metálica:  $B = 0,01$  e  $E = 30GPa$ . Quanto ao concreto dotado de fibras metálicas na proporção de 1%, i. e., cerca de  $25kg$  de fibras por  $m^3$  de concreto, este dado coincide com a informação de Franco (1997). Nesse trabalho é dito explicitamente que “não se trata de promover um aumento da resistência à tração do concreto” (o que foi coincidentemente considerado nos três exemplos de

Sigrist, ao manter-se  $f_{ct} = cte$ ), mas de obter com a inclusão de fibras metálicas “a segurança de uma ruptura dúctil à tração”. O aumento na ductilidade do concreto decorre, com o uso de fibras metálicas, do aumento da energia de fratura por unidade de área da fissura,  $G_F$ . Com isso, consegue-se também um aumento da resistência à tração *na flexão*, como se mostra a seguir.

A obtenção do momento resistente é feita através das Equações (2.35) e (2.32b). Em cada passo fixa-se um valor de  $\eta = a_d/h$ , iniciando-se com  $\eta = 0$ , quando a viga é inteiramente elástica, e prosseguindo-se com  $\eta$  crescente até obter-se  $\zeta = 0$ , i. e.,  $\sigma_{inf} = 0$ , ou até verificar-se a condição (2.37). Para cada  $\eta$  obtém-se  $m$  de (2.35),  $\zeta$  de (2.31) e  $\delta$  de (2.32b). Ver na Fig. 2.14 e na Tabela 2.1 as funções  $m(\eta)$  para os três índices B mencionados. Para o valor máximo de  $m$  lido nesta tabela obtém-se:

$$M_{\max} = m_{\max} \frac{bh^2 f_{ct}}{6}$$

Comparando esta equação com a (2.22) resulta:

$$f_{ct,fl} = m_{\max} f_{ct} \quad (2.38)$$

Logo, o máximo momento relativo é precisamente o fator com o qual se multiplica a resistência à tração simples para obter aquela da flexão simples. Nos três exemplos tem-se:  $f_{ct,fl}/f_{ct} = 1,37$  ; 1,65 e 2,40 para  $B = 1$  ; 0,3 e 0,01, respectivamente.

Note-se que a inclusão de 1% de fibras metálicas por  $m^3$  de concreto, distribuídas homogeneamente na argamassa, aumenta em 45% a resistência à flexão da viga, além de causar um grande aumento na sua ductilidade (o deslocamento  $\delta$  no centro do vão, correspondente ao ponto de máximo, aumenta 9 vezes, quando  $B$  cai de 0,3 a 0,01).

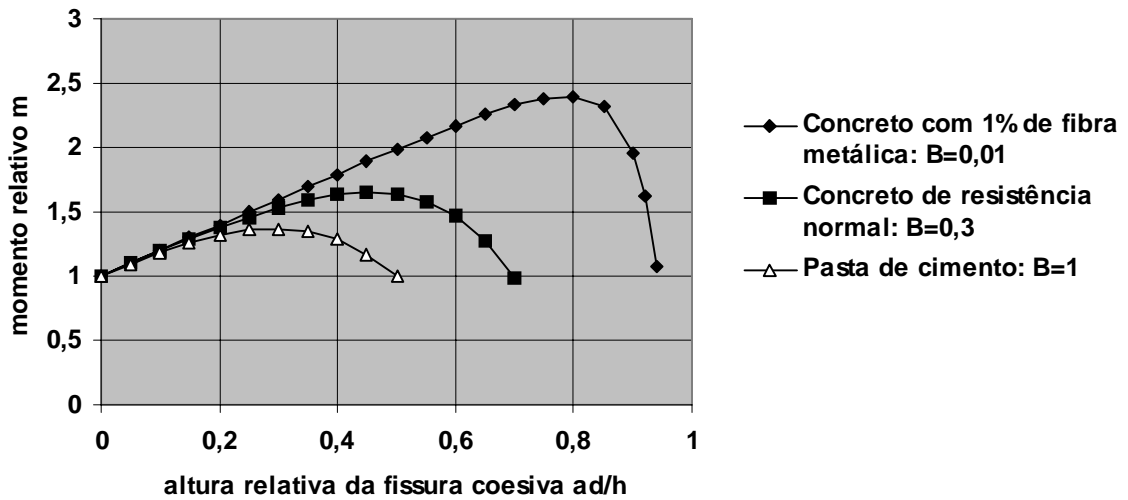


Fig. 2.14: Momento relativo em função da altura relativa da fissura coesiva, cf. Sigrist (1995)

Tabela 2.1: Obtenção das curvas  $m$  para três índices de fragilidade

Pasta de cimento: B=1				Concreto de resistência normal: B=0,3				Concreto com 1% de fibra metálica: B=0,01			
$\eta = a_d/h$	$m$	$\zeta$	$\delta(mm)$	$\eta = a_d/h$	$m$	$\zeta$	$\delta(mm)$	$\eta = a_d/h$	$m$	$\zeta$	$\delta(mm)$
0	1	1	0,017	0	1	1	0,013	0	1	1	0,016
0,1	1,184	0,918	0,020	0,1	1,195	0,975	0,016	0,1	1,200	0,999	0,019
0,2	1,318	0,796	0,026	0,2	1,375	0,938	0,021	0,2	1,399	0,998	0,024
<b>0,3</b>	<b>1,369</b>	<b>0,615</b>	<b>0,033</b>	0,3	1,528	0,880	0,027	0,4	1,794	0,993	0,043
0,4	1,284	0,355	0,040	0,4	1,630	0,787	0,036	0,6	2,170	0,975	0,097
0,5	1	0	0,050	<b>0,45</b>	<b>1,649</b>	<b>0,721</b>	<b>0,042</b>	0,65	2,255	0,965	0,126
				0,5	1,636	0,636	0,050	0,7	2,329	0,949	0,170
				0,6	1,465	0,388	0,070	0,75	2,383	0,922	0,242
				0,7	0,990	0	0,101	<b>0,8</b>	<b>2,397</b>	<b>0,873</b>	<b>0,370</b>
								0,85	2,313	0,772	0,626
								0,90	1,950	0,528	1,228
								0,92	1,616	0,335	1,692
								0,94	1,080	0,043	2,384

A solução de Sigrist pode ser melhorada através de uma nova relação cinemática entre a abertura da fissura coesiva  $w_{inf}$  e o deslocamento  $\delta$  no centro do vão.

A rotação  $2\alpha$  concentrada na seção central pode ser considerada como uma rotação decorrente da plastificação, numa certa extensão da viga, da zona da fissura coesiva, de altura  $a_d$ . Assim, a abertura da fissura deve inexistir até



$\delta$  atingir a flecha elástica  $\delta_{el}$ , para a qual se tem na borda inferior da seção central a tensão normal igual à resistência  $f_{ct}$ , donde  $\zeta = \sigma_{inf}/f_{ct} = 1$  e  $\eta = a_d/h = 0$ . Ver a Fig. 2.15. Esta flecha elástica decorre de (2.32b) com  $m = 1$  e  $\eta = 0$ , e vale:

$$\delta_{el} = \frac{f_{ct} l^2}{6Eh} \quad (2.39)$$

Considerando-se o que foi dito, a Equação (2.33) deve ser alterada como se mostra a seguir. Conforme a Fig. 2.15, sendo agora

$$w_{inf} = \frac{4}{l} (\delta - \delta_{el}) a_d \quad (2.40)$$

$$\delta - \delta_{el} = \frac{f_{ct} l^2}{24Eh} \frac{(3 + m - 2\eta)}{(1 - \eta)^2} - \frac{f_{ct} l^2}{6Eh} \quad (2.41)$$

resulta, inserindo (2.41) em (2.40):

$$w_{inf} = \frac{f_{ct} l}{6E} \eta \frac{(m + 6\eta - 4\eta^2 - 1)}{(1 - \eta)^2} \quad (2.42)$$

De (2.34), com  $\zeta = (m - 1)/(2\eta)$  de (2.31), tem-se:

$$w_{inf} = \frac{f_{ct}}{D} \left( \frac{m - 1}{2\eta} - 1 \right) \quad (2.43)$$

Igualando-se estas duas últimas equações obtém-se a nova expressão do momento relativo, a qual substitui a (2.35):

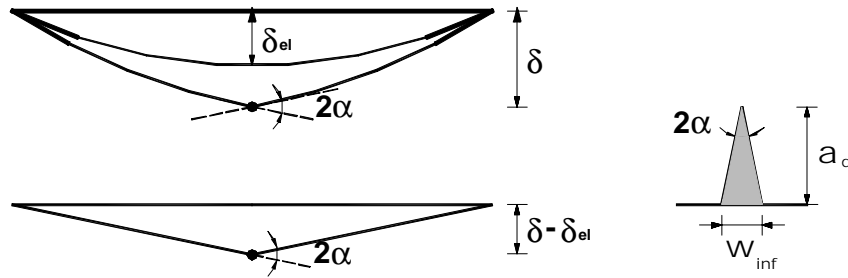


Fig. 2.15: Relação cinemática.

$$m = 1 + 2\eta \left[ \frac{3 - 6\eta + 3(1 - B)\eta^2 + 2B\eta^3}{3 - 6\eta + (B + 3)\eta^2} \right] \quad (2.44)$$

Observe-se, novamente, que a expressão entre colchetes desta equação é igual a  $\zeta = \sigma_{\text{inf}} / f_{ct}$ . O máximo momento relativo obtém-se da condição  $dm/d\eta = 0$ , da qual resulta a equação:

$$\sum_{k=5}^{k=0} a_k \eta^k = 0 \quad (2.45)$$

com  $a_5 = 4B(B + 3)$ ,  $a_4 = 3[(1 - B)(3 + B) - 12B]$ ,  $a_3 = 12(5B - 3)$ ,  $a_2 = 6(9 - 5B)$ ,  $a_1 = -36$  e  $a_0 = 9$ .

Recalculando-se os três exemplos dados, obtém-se:

$$B = 1 \quad f_{ct,fl} = 1,497 f_{ct} \quad (9,4\% \text{ maior})$$

$$B = 0,3 \quad f_{ct,fl} = 1,731 f_{ct} \quad (5\% \text{ maior})$$

$$B = 0,01 \quad f_{ct,fl} = 2,406 f_{ct} \quad (\text{coincidente})$$

Desses resultados vê-se que as diferenças entre as Equações (2.44) e (2.35) crescem com o índice de fragilidade  $B$ . Pode-se constatar que ambas equações aproximam-se bastante da solução de Hillerborg, dada no trabalho de

Sigrist, e obtida por elementos finitos, empregando-se a lei bilinear  $\sigma(w)$  da Fig. 2.10b.

Comparam-se a seguir, na Tabela 2.2, as duas soluções dadas com a resistência à tração na flexão do MC-90, item 2.1.3.3.1, para os seguintes dados: esbeltezes  $l/h = 4$  e  $10$ ,  $G_F = 0,0875 Nmm/mm^2$ ,  $f_{ct} = 3,5 MPa$ ,  $E_c = 35000 MPa$ . Fica evidente desta tabela a maior proximidade dos resultados da Equação (2.44) com aqueles da equação do MC-90, particularmente para maiores esbeltezes. Neste exemplo, a diferença máxima entre a presente solução e a de Sigrist é igual a 13%. Note-se, também, que as peças com altura maior que  $800mm$  e esbeltez usual já podem ser consideradas frágeis na tração, já que  $f_{ct,fl}$  tende a  $f_{ct}$  para  $h$  crescente.

Esta solução pode ser estendida à flexo-compressão normal, com o que seriam incluídas as peças protendidas, e mesmo os pilares medianamente comprimidos.

Tabela 2.2: Comparação entre resistências à tração na flexão, Equações (2.44), (2.35) e MC-90

$h(mm)$	$m_{max} = f_{ct,fl} / f_{ct}$				$\frac{f_{ct,fl}}{f_{ct}} = \frac{1 + 1,5(0,01h)^{0,7}}{1,5(0,01h)^{0,7}}$ MC-90
	Equação (2.44), Sigrist melhorado		Equação (2.35), Sigrist		
	$l/h = 4$	$l/h = 10$	$l/h = 4$	$l/h = 10$	
100	1,537	1,384	1,413	1,240	1,667
200	1,418	1,291	1,278	1,144	1,410
400	1,318	1,216	1,171	1,081	1,253
600	1,269	1,181	1,123	1,056	1,190
800	1,238	1,159	1,097	1,043	1,156

## 2.5 Critérios de Resistência do Concreto

Um dos critérios mais simples de resistência do concreto em estados múltiplos de tensão é o de Mohr-Coulomb truncado na tração, que consta no plano  $(\sigma, \tau)$ , Fig. 2.16, de duas retas inclinadas que tangenciam os círculos de Mohr de raios máximos, definidas por dois parâmetros materiais (positivos), a saber, a

coesão  $c$  e o ângulo de atrito interno  $\phi$ . E, adicionalmente, pela reta vertical  $\sigma = f_{ct}$ , onde  $f_{ct}$  é a resistência à tração simples do concreto. É, portanto, um critério de três parâmetros, e para determiná-los são necessários três ensaios distintos. Usualmente esses ensaios são os de compressão, tração e cisalhamento simples, mas também os de compressão triaxial.

Segundo a hipótese de Coulomb há ruptura do material quando a tensão de cisalhamento num determinado plano vence a resistência a deslizamento originada de duas parcelas: uma proveniente da referida coesão do material, outra vinda da fração  $\mu$  da tensão normal atuante nesse mesmo plano, onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito, igual a  $\tan\phi$ . Esta condição de deslizamento é dada por:

$$\tau = c - \mu\sigma \quad (2.45)$$

Como já se mostrou, na tração simples verifica-se um modo de ruptura diferente, caracterizada pela fratura ou separação do material num plano ortogonal à direção da carga. Observe-se que se trata aqui de ensaios em material virgem, e uma ruptura por separação do corpo de prova não significa necessariamente uma ruptura do elemento estrutural, visto que geralmente há neste armaduras colaborando na sua resistência.

Os dois tipos de ruptura estão mostrados nas Figs. 2.16b e c. A condição de separação, desprezando-se as tensões na fissura coesiva, é dada por:

$$\sigma = f_{ct} \quad (2.46)$$

e é necessário obter a transição entre esses dois modos de ruptura, o que se consegue determinando-se o círculo de raio máximo que passa pelo ponto de coordenadas  $(f_{ct}, 0)$  e tangencia as duas retas de Coulomb.

No triângulo retângulo OAB da Fig. 2.16a, a projeção da hipotenusa OB sobre o cateto OA é igual ao raio do círculo de Mohr:

$$\left(-\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + c \cot\phi\right) \sin\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

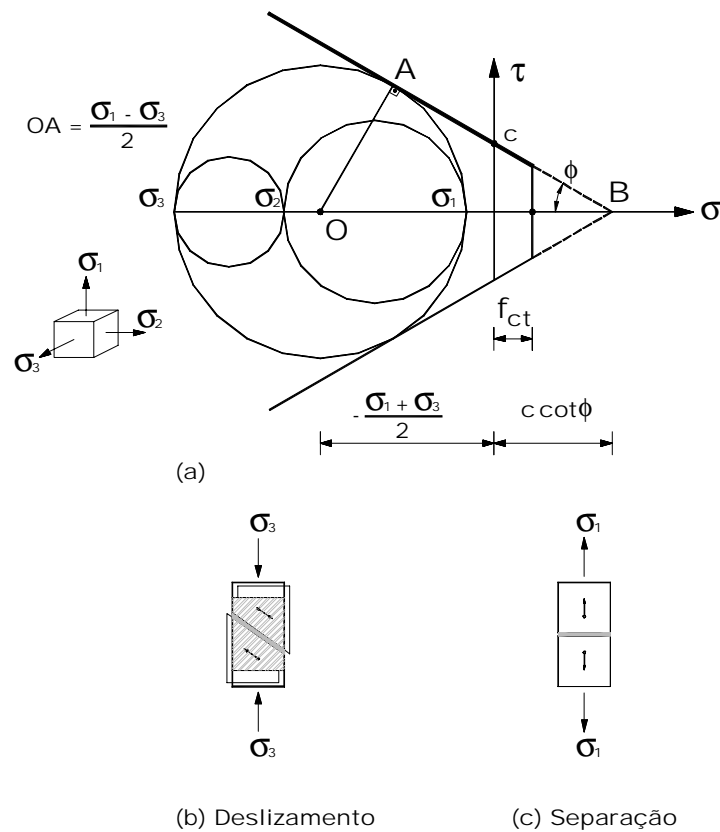


Fig. 2.16: Critério de Mohr-Coulomb e formas de ruptura.

Simplificando esta expressão obtém-se:

$$k\sigma_1 - \sigma_3 = 2c\sqrt{k} \quad (2.47)$$

onde

$$k = (\mu + \sqrt{1 + \mu^2})^2 \quad (2.48)$$

e a Equação (2.47) representa a condição de deslizamento em termos de tensões principais. Nela se vê que a tensão principal intermediária  $\sigma_2$  não aparece, e isso significa que este critério não contempla sua influência na resistência do concreto.

O ensaio de compressão simples (Fig. 2.17) sempre envolve deslizamento na zona de dano, e nele se tem  $\sigma_3 = -f_c$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , sendo  $f_c$  a

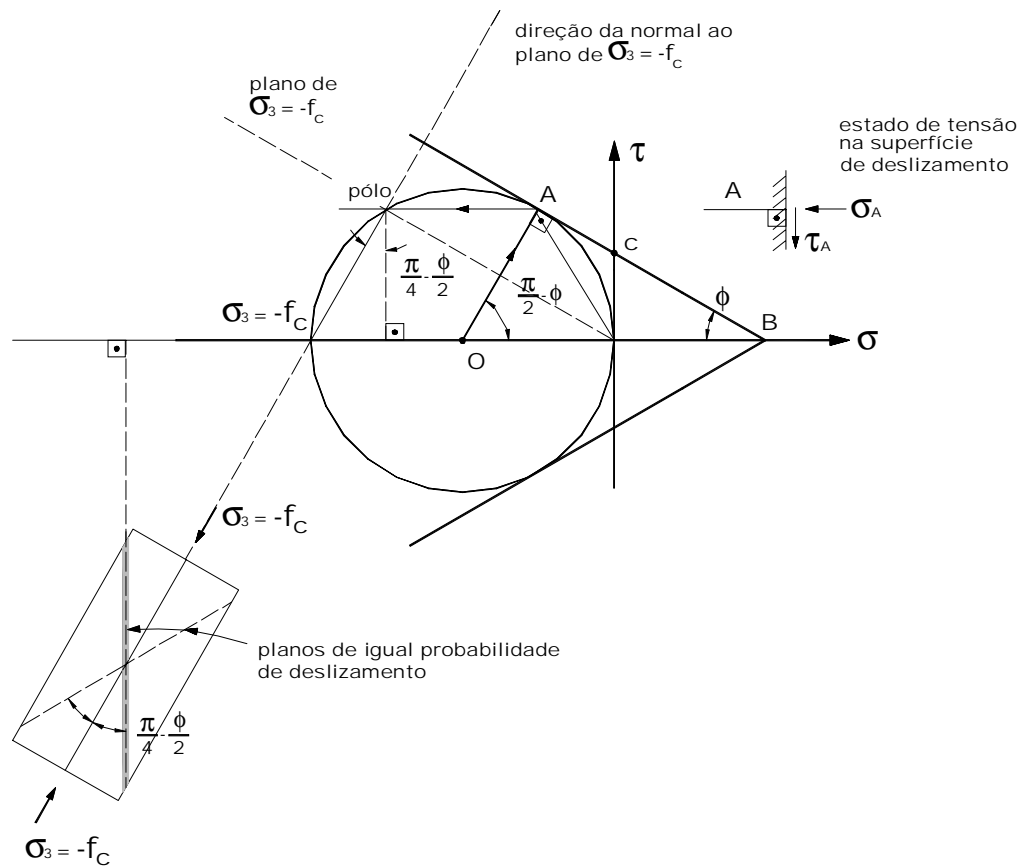


Fig. 2.17: Ensaio de compressão simples.

resistência do concreto na compressão uniaxial. De (2.47) resulta:

$$f_c = 2c\sqrt{k} \quad (2.49)$$

No ensaio de cisalhamento simples (Fig. 2.18) a resistência  $f_v$  ao cisalhamento é igual à resistência à tração simples, e a ruptura dá-se por separação:

$$f_v = f_{ct} \quad (2.50)$$

Ainda, de resultados experimentais obtém-se o ângulo de atrito interno  $\phi$  constante e aproximadamente igual a  $37^\circ$ , de modo que resultam  $\mu = \text{tg}\phi = 0,75$ ,  $k = 4$  e  $c = 0,25f_c$ .

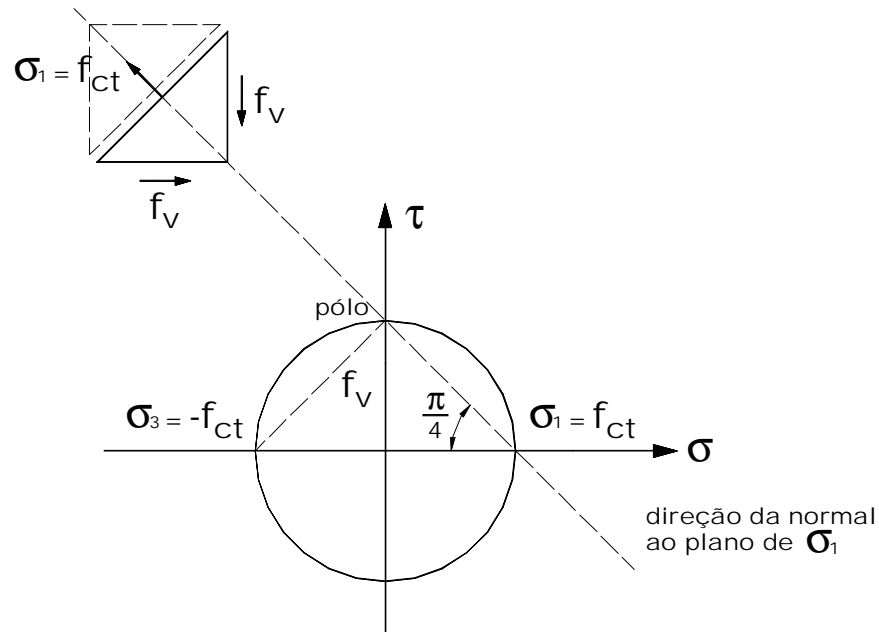


Fig. 2.18: Ensaio de cisalhamento simples.

Na compressão triaxial (Fig. 2.19, reproduzida de Sigrist (1995)), obtém-se, pelo impedimento das deformações laterais,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , um considerável aumento tanto na resistência à compressão,  $\sigma_3$ , quanto no encurtamento,  $\varepsilon_3$ , correspondente à carga axial máxima. Com isso a ductilidade do concreto aumenta, o que se explica pela inibição do processo de microfissuração, conseguida pela compressão lateral. Como a ruptura ocorre por deslizamento, a reta de Coulomb representa bem estes estados de compressão triaxial, como se vê na Fig. 2.19.

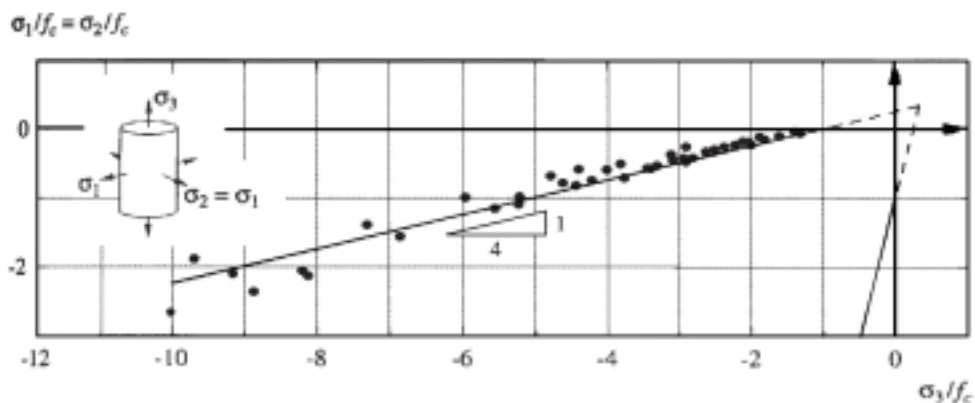


Fig. 2.19: Compressão triaxial, comparação entre resultados experimentais e o critério de Mohr-Coulomb, cf. Menne, apud Sigrist (1995).

A representação adimensional do presente critério de resistência no plano definido pelas duas tensões principais extremas (a seguir denominadas  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$ ), divididas por  $f_c$ , está dada na Fig. 2.20. Na Fig. 2.21 este mesmo critério é representado no plano  $(\sigma/f_c, \tau/f_c)$ . Conforme esta figura, o raio do máximo círculo de Mohr que passa no ponto de abscissa  $f_{ct}/f_c$  e tangencia as retas de Coulomb é dado por:

$$r_{D/S} = \frac{1}{\text{sen } \phi} \left( \frac{c}{f_c} \cos \phi - \frac{f_{ct}}{f_c} \text{sen } \phi \right) \quad (2.51)$$

Para  $\phi = \text{arctg}0,75$  e  $c = 0,25f_c$  resulta:

$$r_{D/S} = \frac{1}{2} \left( 1 - 3 \frac{f_{ct}}{f_c} \right) \quad (2.52)$$

Na Fig. 2.20, o ponto D/S que separa as duas formas de ruptura tem abscissa  $\sigma_I/f_c = f_{ct}/f_c$  e ordenada  $\sigma_{II}/f_c = kf_{ct}/f_c - 1$ . Com  $k = 4$ , e, p. ex.,  $f_{ct}/f_c \cong 0,1$ , resulta  $\sigma_{II}/f_c = -0,60$ . Se  $\sigma_I/f_c = 0,5 f_{ct}/f_c$  resulta ainda  $\sigma_{II}/f_c = -0,80$ . Esses resultados simples mostram que esse critério dá uma boa indicação da resistência à compressão do concreto em estado duplo compressão-tração, que ocorre, p. ex., na alma das vigas sujeitas à ação simultânea de força cortante e de momento fletor. Após completar o quadro de fissuração, a tração no concreto da alma deve-se à aderência entre a armadura transversal tracionada e o concreto, e ao atrito entre as faces da fissura. Essa tração é necessariamente inferior a  $f_{ct}$ . Assim, pondo-se  $\sigma_{II}/f_c = -0,70$ , i. e., a média dos valores calculados há pouco, pode-se deduzir a resistência à compressão do concreto da alma como segue. Esta é afetada por dois fatores: o primeiro, igual a 0,85, considera principalmente o efeito Rüschi; o segundo fator, igual a  $(1 - f_c/140)$ , com  $f_c$  em MPa, é tal que, multiplicado pelo fator 0,7 dado acima, compõe o chamado coeficiente de efetividade  $\nu$  da resistência do concreto armado e fissurado, cf. Nielsen (1998):





não considera o fator 0,85. Já no MC-90 e na nova NB1, tem-se 250 nas expressões (2.53) e (2.54) no lugar de 140.

Retomando-se o concreto em compressão triaxial (confinado por pressões hidrostáticas laterais), tem-se a seguinte expressão para a sua resistência (substituindo-se  $\sigma_I \equiv \sigma_3$  por  $-f_{cc}$ , e  $\sigma_{II}$  por  $\sigma_1$  na reta da Fig. 2.20):

$$\frac{f_{cc}}{f_c} = 1 - 4 \frac{\sigma_1}{f_c} \geq 1 \quad (2.55)$$

onde a segunda parcela (positiva, pois  $\sigma_1 < 0$ ) representa o ganho de resistência conseguido pelo confinamento lateral.

A deformação  $\varepsilon_{cc}$  correspondente à tensão de pico  $f_{cc}$  do concreto confinado cresce muito mais rapidamente do que a resistência e pode ser estimada pela seguinte expressão (pondo-se  $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_3$ ):

$$\frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{c1}} = 1 - 5 \left( 4 \frac{\sigma_1}{f_c} \right) = 1 + 5 \left( \frac{f_{cc}}{f_c} - 1 \right) \geq 1 \quad (2.56)$$

onde  $\varepsilon_{c1}$  é a deformação correspondente à tensão de pico  $f_c$  do concreto não-confinado, Equação (2.8).

O confinamento do concreto é usado, por vezes, em pilares, e isso é conseguido através de armadura transversal de cintamento (estribos fechados ou espiras). Esse efeito só é ativado para valores altos da tensão no concreto, cerca de  $(0,8 \text{ a } 0,9) f_c$ , de modo que o pilar cintado pouco difere do não-cintado, no que diz respeito à maior parte do ramo ascendente da lei  $\sigma_c(\varepsilon_c)$ . A fração  $\sigma_1/f_c$ , conseguida por essa armadura, usualmente não é muito grande. Mas, mesmo assim, há um considerável aumento na resistência e, sobretudo, na deformação  $\varepsilon_{cc}$ . Além disso, os ramos descendentes das curvas do concreto confinado têm um amolecimento muito menos acentuado do que o do concreto simples, e apresentam quase que uma espécie de um longo patamar de escoamento, refletindo com isso sua grande ductilidade.

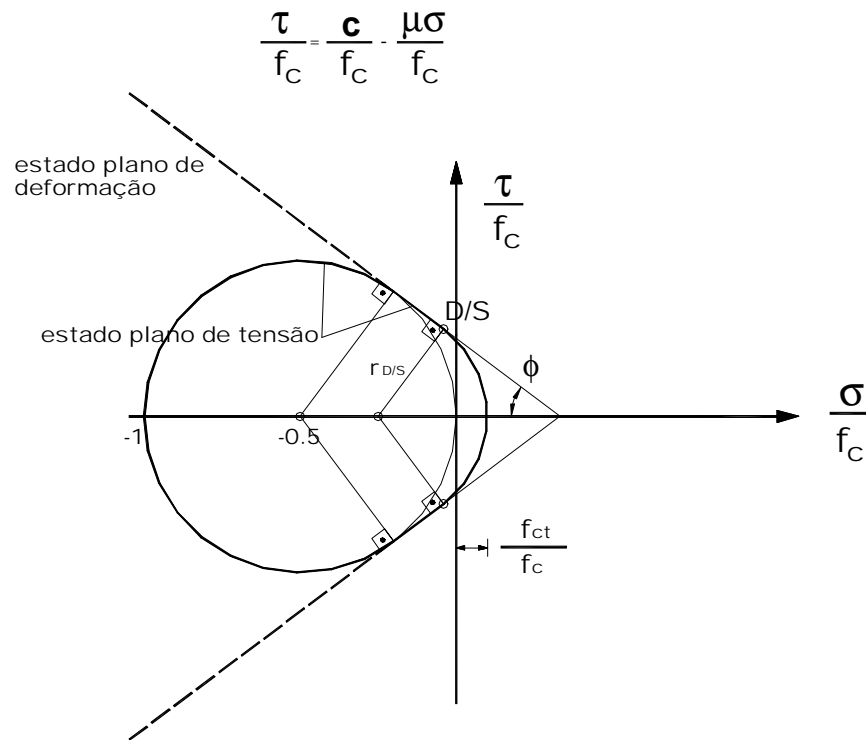


Fig. 2.21: Critério de Mohr-Coulomb no plano  $(\sigma/f_c, \tau/f_c)$ .

Outro critério de resistência mais preciso do que o anterior, freqüentemente referido na literatura específica, é o estabelecido por Kupfer, Hilsdorf, e Rüsç (1969), para concreto em estado duplo de tensão. Esse critério está reproduzido no MC-90. Os ensaios foram realizados em 240 espécimes (chapas) de dimensões  $200 \times 200 \times 50 \text{ mm}^3$ , 28 dias após a concretagem e com velocidade de deformação quase-estática (20 min. até atingir a carga máxima). As resistências na compressão uniaxial são iguais a 19, 31,5 e 59 MPa. Neles foram registradas as cargas nas duas direções principais, e as deformações nas três direções principais. As Figs. 2.22 e 2.23 dão a resistência e a forma de ruptura, respectivamente. As equações da resistência do concreto, cf. Fig. 2.22, estabelecidas por Kupfer (1973), são as seguintes:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{2.57}$$

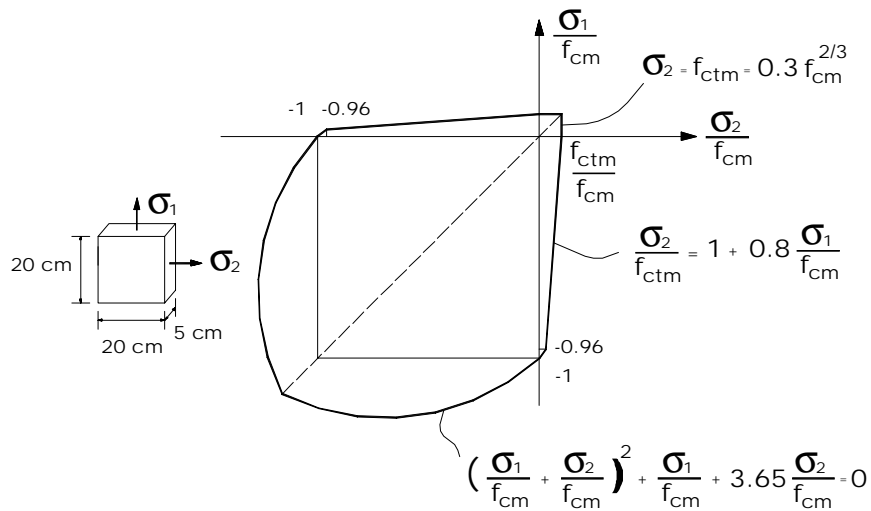


Fig. 2.22: Resistência do concreto em estado duplo de tensão, cf. Kupfer, Hilsdorf e Rüschi (1969).

Região compressão-compressão (deslizamento):

$$\frac{\sigma_1}{f_{cm}} = -\frac{1 + 3,65\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad \text{se } \frac{\sigma_1}{f_{cm}} \leq -0,96 \quad (2.58)$$

Região compressão-tração (separação):

$$\frac{\sigma_2}{f_{ctm}} = 1 + 0,8 \frac{\sigma_1}{f_{cm}} \quad (2.59)$$

Região tração-tração (separação):

$$\sigma_2 = f_{ctm} = 0,3 f_{cm}^{2/3} = cte \quad (2.60)$$

Nessas equações substituiu-se a resistência prismática  $\beta_p$  por  $f_{cm}$ , cf. MC-90. Na primeira equação o fator 3,65 foi substituído por 3,80 no MC-90 e o seu limite de validade (-0,96) está dado somente no MC-90.

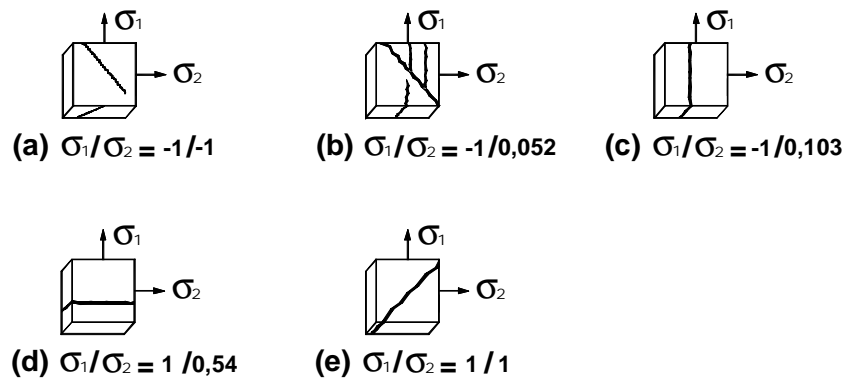


Fig. 2.23: Modos de ruptura dos espécimes em estado duplo de tensão, idem.

Da Fig. 2.23 vê-se que há deslizamento na compressão biaxial (Fig. 2.23a) e uma transição entre deslizamento e separação (Fig. 2.23b) para compressão e pequena tração, prevalecendo para maiores trações a separação (Figs. 2.23c e d). Também há separação a 45° para iguais tensões principais de tração (Fig. 2.23e).

Observe-se que este critério engloba o anterior na região compressão-compressão e mostra valores maiores de resistência do concreto. Por exemplo, para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0,5$  tem-se, respectivamente,  $\sigma_1/f_{cm} = -1,16$  e  $\sigma_1/f_{cm} = -1,26$ , ou seja, na compressão biaxial com iguais tensões principais a resistência do concreto aumenta 16%, e para uma tensão principal igual à metade da outra há um aumento de 26% nessa resistência.

Na compressão-tração o critério modificado de Mohr-Coulomb está ligeiramente contra a segurança. Na região tração-tração há coincidência de resultados entre os dois critérios, e a resistência assume um valor constante, igual ao da tração simples. Note-se a diferença das definições da resistência média à tração dadas pelas Equações (2.60) e (2.24).

Quanto ao coeficiente de Poisson foram observados os seguintes valores:

- na compressão biaxial  $\nu = 0,20$   
na tração biaxial  $\nu = 0,18$   
na compressão-tração  $\nu = 0,18$  a  $0,20$

Para baixas tensões o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são independentes da fração  $\alpha$  entre as tensões principais.

## 2.6 Leis Constitutivas dos Aços para Armaduras de Concreto

Os aços para armaduras de concreto são atualmente classificados pela característica de ductilidade, que é a capacidade de dissipação de energia por deformações plásticas até a ruptura. Esta energia dissipável por unidade de volume é dada pela área sob a curva  $\sigma_s(\epsilon_s)$  até a ruptura (fratura) da barra ensaiada, descontada a parcela elástica (recuperável). É, então, evidente que quanto maior for essa área maior é a ductilidade do aço.

Na tabela seguinte dão-se as condições exigidas na classificação dos aços segundo sua ductilidade, de acordo com a NBR 7480/1996, o Eurocódigo 2 e o MC-90, respectivamente.

Tabela 2.3: Classificação dos aços conforme sua ductilidade

NBR 7480/1996				Eurocódigo 2			MC-90		
Categoria	$\left(\frac{f_t}{f_y}\right)_k$	Along. em 10 diâmetros	$\epsilon_{suk}$	Ductilidade	$\left(\frac{f_t}{f_y}\right)_k$	$\epsilon_{suk}$	Classe	$\left(\frac{f_t}{f_y}\right)_k$	$\epsilon_{suk}$
CA-50	$\geq 1,10$	$\geq 8\%$	$\geq 8,275\%$	Alta	$>1,08$	$>5\%$	A	$\geq 1,08$	$\geq 5\%$
CA-60	$\geq 1,05$	$\geq 5\%$	$\geq 5,33\%$	Normal	$>1,05$	$>2,5\%$	B	$\geq 1,05$	$\geq 2,5\%$
CA-25	$\geq 1,20$	$\geq 18\%$	$\geq 18,15\%$				S	$\geq 1,15$	$\geq 6\%$

Nesta tabela definem-se:

$(f_t/f_y)_k$ : valor característico, quantil de 5%, da relação entre as resistências de ruptura e de escoamento.

$\varepsilon_{suk}$ : alongamento característico, idem, sob força máxima, i. e., sob força de ruptura.

O alongamento em 10 diâmetros é o alongamento plástico (residual) medido em um comprimento igual a 10 vezes o diâmetro nominal da barra, após a ruptura e fora da zona de estricção. Para obter a correspondente deformação última deve-se somar a esse alongamento a parcela elástica, recuperada após a ruptura, igual a  $f_{tk}/E_s$ , onde  $f_{tk}$  é a resistência característica na ruptura, quantil de 5%, e  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço, igual na carga e na descarga. Observe-se que a definição do alongamento último do aço na NBR 7480/1996 é diferente da definição do Eurocódigo 2 e do MC-90.

A NBR 7480/1996 define  $f_t (= f_{st})$  como sendo a resistência convencional à ruptura, ou resistência convencional à tração, mas não menciona o seu quantil, porque este já está pressuposto pela fração  $(f_t/f_y)_k$ , e pelo valor característico  $f_{yk}$ , devendo-se entender como mínimo exigível para  $f_{tk}$  o produto desses valores, para qualquer barra dos lotes que compõem qualquer partida fornecida a uma obra. Observe-se, entretanto, que esta resistência  $f_t$  pode chegar a  $1,5f_y$ .

Se for admitido para esses aços um diagrama bilinear, as áreas sob as curvas  $\sigma_s(\varepsilon_s)$  do CA-60 e do aço Classe A do MC-90 são quase iguais. Com isso o CA-60 poderia ser classificado como um aço de ductilidade alta. Já o aço CA-50 tem essa área quase 30% superior à do aço Classe S do MC-90, e seria portanto de ductilidade muito alta. Estes aços S são utilizados em obras sujeitas a abalos sísmicos. A discrepância nesta classificação vem, possivelmente, das definições diferentes do alongamento de ruptura. Para os aços de ductilidade muito alta, pode-se aplicar a Teoria da Plasticidade, sem qualquer verificação das deformações

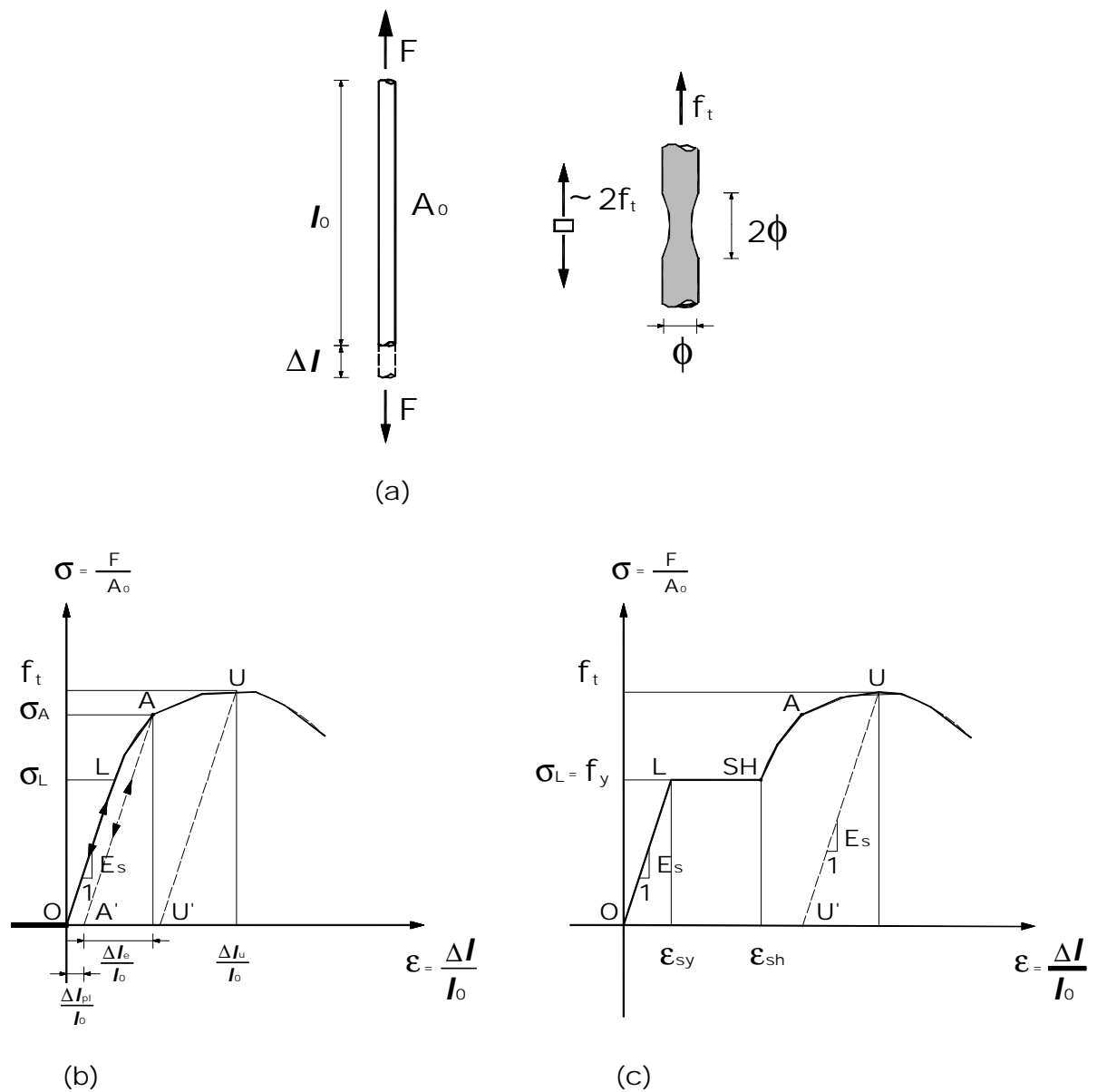


Fig. 2.24: Ensaio de tração e tipos de diagramas tensão-deformação dos aços.

(rotações plásticas), desde que a taxa mecânica da armadura seja escolhida adequadamente. O mesmo não se pode dizer, com a devida certeza, do aço CA-60, utilizado, p. ex., em lajes na forma de telas soldadas. Para este aço, a NBR 7480/1996 exige uma resistência à ruptura não inferior a 660 MPa, e uma resistência característica de escoamento igual a 600 MPa. Assim, considerando-se também a comparação anterior, parece possível alterar o quociente  $(f_t/f_y)_k$  de 1,05 para outro maior, talvez 1,08 ou 1,10, aparentemente sem ônus para o processo de fabricação.



Descreve-se, a seguir, o ensaio de tração sob deformação controlada de uma barra de comprimento inicial  $l_0$  e área  $A_0$  (Fig. 2.24). Verifica-se que até a ruptura desta barra as deformações ocorrem praticamente sem redução de volume, de modo que a sua área é constante em todo o processo de carregamento.

Conforme o processo de fabricação das barras e dos fios de aço, o diagrama obtido pode ser de dois tipos, um sem, outro com patamar de escoamento bem definido (Figs. 2.24b e c). Nessas curvas há um trecho inicial OL nitidamente linear, em que há completa recuperação, na descarga, da energia aplicada. Se a barra for carregada até o ponto A, e descarregada em seguida, há um alongamento residual  $\Delta l_{pl}$ , e parte da energia aplicada é dissipada (área OAA', Fig. 2.24b). Recarregando-se a barra até o ponto A, atinge-se o escoamento, agora para uma tensão  $\sigma_A > \sigma_L$ . Este é o fenômeno de encruamento, e isso quer dizer que o material virgem escoar para uma tensão inferior à do material já carregado além do escoamento inicial e descarregado em seguida. O processo de encruamento dá-se uniformemente ao longo de toda a barra, e pressupõe deslizamento uniforme entre a cadeia de cristais que formam a estrutura do aço. O ponto U corresponde à formação, na seção mais fraca da barra, de uma região de estrangulamento de comprimento igual a  $2\phi$ , aproximadamente, e tensão cerca do dobro da resistência à tração  $f_t$ , e a barra rompe-se bruscamente. A máxima energia dissipada por unidade de volume é dada pela área OAUU', e a deformação correspondente é igual a:

$$\varepsilon_{su} = \varepsilon_{pl,u} + \frac{f_t}{E_s} \quad (2.61)$$

onde  $\varepsilon_{pl,u} = \Delta l_u / l_0 - f_t / E_s$  é a deformação plástica (residual) medida fora da zona de estrangulamento. Embora esta parcela seja bem maior do que a deformação elástica (recuperada)  $f_t / E_s$ , ela não se confunde com a deformação última  $\varepsilon_{su}$ .

Nos aços com patamar de escoamento definido (Fig. 2.24c), tão logo seja atingida a tensão  $\sigma_L$  do fim do trecho elástico, há um súbito aumento da deformação sem aumento da carga. No trecho L-SH (*strain-hardening*) o processo

de deformação ao longo da barra não é uniforme. O comprimento  $l_0$  subdivide-se em dois trechos: um deles, de comprimento  $l_d$  crescente, onde há dano na estrutura dos cristais, e nele a deformação é igual a  $\varepsilon_{sh}$ ; e outro complementar, de comprimento  $(l_0 - l_d)$  decrescente, com deformação igual à do início do escoamento,  $\varepsilon_{sy}$ . Assim, pondo-se  $\xi = l_d/l_0$ , o alongamento da barra medido num ponto do patamar é igual a:

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta l}{l_0} = (1 - \xi)\varepsilon_{sy} + \xi\varepsilon_{sh} \quad (2.62)$$

sendo  $\varepsilon_{sh}$  a deformação correspondente ao ponto SH. Esse valor é igual a 8 a 15 vezes a deformação do início do escoamento  $\varepsilon_{sy}$ , sendo 12 um valor usual, cf. Chen (1982). Estas considerações têm implicação, p. ex., na deformação crítica correspondente à tensão  $\sigma_s = f_y$  com que se dá a flambagem das barras comprimidas, particularmente em pilares cintados. Fica evidente destas considerações que o módulo de deformação do aço no patamar de escoamento não é nulo e que a resposta do material depende do comprimento da barra.

Para efeito de projeto, é difícil antecipar qual a curva real  $\sigma_s(\varepsilon_s)$  dos aços a serem utilizados, pois só são exigidos os valores mínimos das características mecânicas da Tabela 2.3. Para os casos em que um conhecimento mais preciso desta curva seja necessário, pode-se representá-la pelas seguintes funções, cf. Cosenza et al., CEB 218 (1993):

Aços sem patamar de escoamento:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0,002\left(\frac{\sigma_s}{f_y}\right)^n \quad (2.63)$$

onde

$$n = \frac{\ln(\varepsilon_{pl,u}/0,002)}{\ln(f_t/f_y)} \quad (2.64)$$

e  $\varepsilon_{pl,u}$  decorre de (2.61). Esta é a expressão de Ramberg-Osgood, válida também no trecho linear. Ela contém a definição da deformação convencional de escoamento, a qual resulta substituindo-se  $\sigma_s$  por  $f_y$  em (2.63).

Para os aços com patamar de escoamento tem-se a seguinte lei, devida a Shima, Chou e Okamura, cf. consta no trabalho dos autores acima:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \quad (2.65a)$$

$$\sigma_s = f_y \quad \text{se } \varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh} \quad (2.65b)$$

$$\sigma_s = f_y + (f_t - f_y) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}}{k}\right) \right] \times 1,01 \quad \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{sh}, \text{ e} \quad (2.65c)$$

$$k = 0,028 \frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}}{0,16 - \varepsilon_{sh}} \quad (2.66)$$

Usualmente no projeto são feitas as idealizações das leis  $\sigma_s(\varepsilon_s)$  mostradas na Fig. 2.25, dependendo do grau de refinamento da análise.

Além da curva  $\sigma_s(\varepsilon_s)$ , é necessário conhecer também as características de aderência das armaduras. O anexo A da NBR 7480/1996 define as condições necessárias da configuração geométrica referentes às nervuras que por sua vez condicionam as propriedades de aderência. Através delas é possível saber qual é a área relativa mínima das nervuras, dada a seguir pela grandeza  $f_R$ , imposta por esta norma (Fig. 2.26).

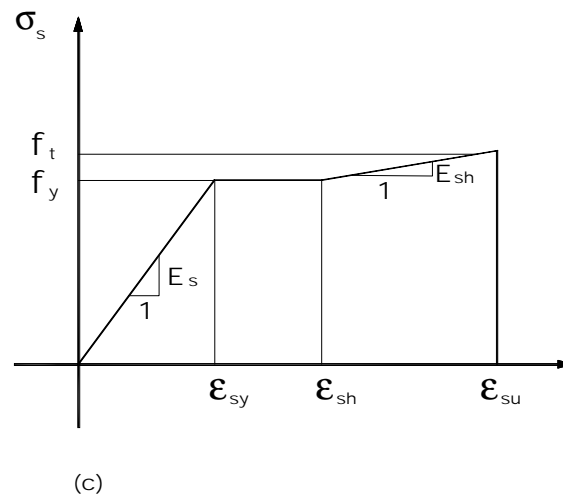
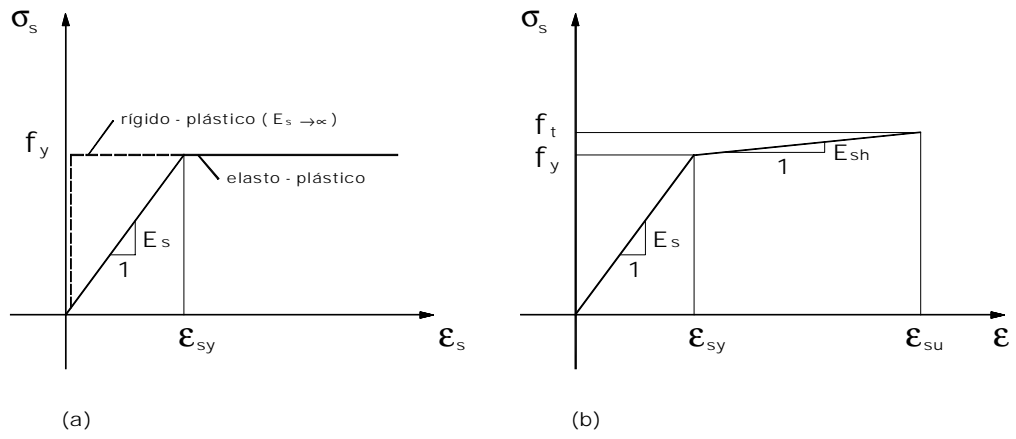


Fig. 2.25: Leis tensão-deformação simplificadas.

A área relativa  $f_R$  resulta da seguinte expressão:

$$f_R = \frac{\pi(\phi + a)a}{\pi(\phi + 2a)b} \quad (2.67)$$

onde  $\phi$  é o diâmetro da barra,  $a$  é a altura da nervura e  $b$  é a distância entre as nervuras, transversais ou oblíquas.

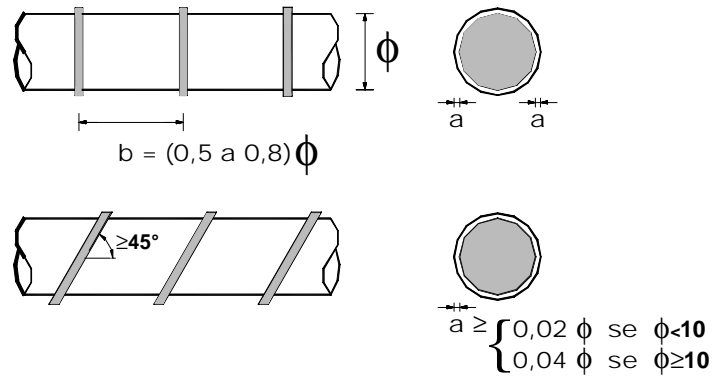


Fig. 2.26: Configuração geométrica das nervuras, cf. NBR 7480/1996.

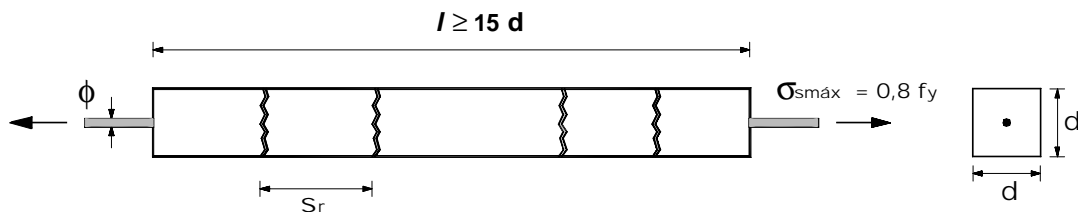


Fig. 2.27: Ensaio de tirante armado, cf. NBR 7477/1982, para obtenção do coeficiente de conformação superficial.

Além das condições dadas na Fig. 2.26, as nervuras devem abranger pelo menos 85% do perímetro nominal da barra. Com todas estas condições, a área relativa das nervuras assume os seguintes valores mínimos:  $f_R \geq 0,040$  a  $0,065$  para  $\phi \geq 10\text{mm}$ , e  $f_R \geq 0,020$  a  $0,033$ , em caso contrário.

Na tabela 2 desta mesma norma são exigidos os valores mínimos do coeficiente de conformação superficial  $\eta$  para diâmetros não inferiores a 10 mm, a saber:  $\eta \geq 1$  para CA-25 e  $\eta \geq 1,5$  para CA-50 e CA-60. Este coeficiente resulta do ensaio de tirante armado, cf. NBR 7477/1982, e é calculado pela expressão:

$$\eta = \frac{2,25d}{s_{rm}} \quad (2.68)$$

onde  $d = \sqrt{\pi\phi(0,25\phi + 7)}$ , em cm, é o lado da seção transversal (quadrada) do tirante e  $s_{rm}$  é o espaçamento médio das fissuras, consideradas as quatro faces. Ver a Fig. 2.27.

Procura-se, a seguir, esclarecer qual é o objetivo da NBR 7480/1996 ao fixar os mencionados valores mínimos do coeficiente  $\eta$ . Da expressão do lado da seção do tirante obtém-se a taxa geométrica da armadura:

$$\rho_s = \frac{\pi\phi^2}{4d^2} = 1 - 7\pi \frac{\phi}{d} \quad (2.69)$$

Conforme a Fig. 2.28, a tensão mínima na armadura, no ponto médio entre duas fissuras sucessivas, é igual a  $\sigma_{s \min} = \sigma_{s \max} - 2\tau_{b1} \frac{s_{rm}}{\phi}$ . Portanto, a tensão e a deformação médias da armadura resultam da seguinte equação:

$$\sigma_{sm} = \frac{\sigma_{s \max} + \sigma_{s \min}}{2} = \sigma_{s \max} - \tau_{b1} \frac{s_{rm}}{\phi} = E_s \varepsilon_{sm} \quad (2.70)$$

onde  $\tau_{b1} = 0,6 \times (f_c)^{2/3}$ , em MPa, é a tensão média de aderência antes do escoamento da armadura, para um quadro de fissuração estabilizada (a ser vista no capítulo 3), Equação (3.54), com  $\tau_{b1} \equiv \tau_{bm}$ .

Desprezando-se o alongamento do concreto, a abertura média da fissura no tirante e seu valor máximo (característico) são dados por:

$$w_m = \varepsilon_{sm} s_{rm} \quad (2.71)$$

$$w_k = 1,5w_m \quad (2.72)$$

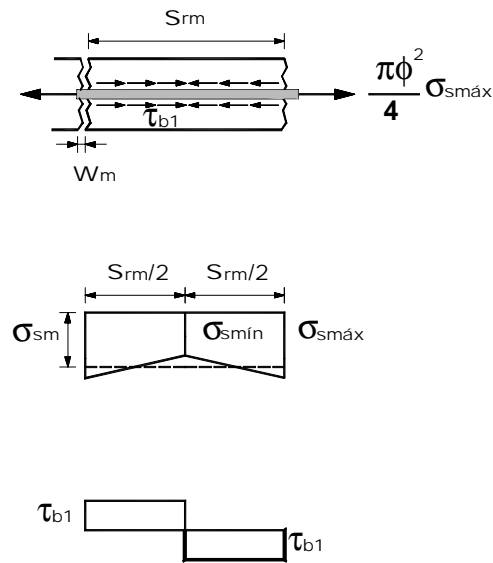


Fig. 2.28: Determinação da deformação média da armadura na fissuração estabilizada.

Na Tabela 2.4 estão dados os resultados do presente ensaio, para as seguintes grandezas:  $f_y = 550MPa$ ,  $\sigma_{s\max} = 0,8f_y = 440MPa$ ,  $E_s = 200GPa$ ,  $f_c = 30MPa$ ,  $\tau_{b1} = 5,8MPa$ ,  $\phi = 10; 16; 25$  e  $\eta = 1,2; 1,5; 1,8$ .

Tabela 2.4: Determinação da abertura máxima da fissura, conforme ensaio de tirante, NBR 7477/1982

$\phi$	$d(cm)$	$\rho_s (%)$	$s_m (mm)$			$10^3 \epsilon_{sm}$			$w_k (mm)$		
			$\eta = 1,2$	1,5	1,8	1,2	1,5	1,8	1,2	1,5	1,8
10	4,77	3,45	89,4	71,6	59,6	1,94	1,99	2,03	0,27	0,21	0,18
16	6,10	5,41	114,4	91,5	76,2	1,99	2,03	2,06	0,34	0,27	0,23
25	7,74	8,20	145,1	116,1	96,7	2,03	2,07	2,09	0,44	0,34	0,28

Destes resultados observa-se que a deformação média no aço é praticamente constante e igual a 0,2%, e que o objetivo da referida norma, ao impor os valores mínimos do coeficiente de conformação superficial, é limitar a abertura máxima da fissura em serviço entre 0,2 e 0,4 mm, aproximadamente, mesmo em condições extremas (tensão muito alta na armadura). Além disso, vê-se que para  $\eta$  crescente resultam espaçamentos médios das fissuras e aberturas características

decrecentes. Evidentemente, há uma relação implícita entre os coeficientes  $\eta$  e  $f_R$ , uma vez que um aumento da área relativa  $f_R$  das nervuras reflete-se em um aumento da tensão média de aderência e, portanto, numa queda da deformação média do aço e da abertura máxima das fissuras. Isso equivale a aumentar  $\eta$ . Note-se desde já que um aumento na mobilização da aderência entre a barra e o concreto circundante equivale também a uma localização maior de deformações plásticas nas proximidades da fissura. Isso reduz a capacidade de rotação plástica das vigas e das lajes, conforme será visto no capítulo 5. Por essa razão não é necessário, nem desejável aumentar o coeficiente  $\eta$  de conformação superficial além dos valores mínimos estabelecidos na NBR 7480/1996.

## 2.7 Leis Constitutivas do Concreto na Flexão

A lei constitutiva  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  do concreto na flexão é atualmente objeto de pesquisa da área da Mecânica da Fratura. Como se viu na descrição da compressão uniaxial, há uma região de localização de deformação que influencia o ramo descendente desta lei. Diferentemente da tração axial, este problema depende da distribuição espacial de deformações, associada à expansão volumétrica da zona comprimida onde há localização de deformação. Depende ainda da forma e altura da seção transversal, da profundidade da LN, da eventual armadura (estribos) de confinamento. Hillerborg (1989) dá as indicações iniciais para a obtenção desta lei.

Devido à presente dificuldade de estabelecer uma lei mais precisa que considere os mencionados fatores, adotam-se para o que segue duas leis constitutivas para o concreto em flexão, ambas truncadas no ramo descendente no ponto correspondente à metade da tensão de pico. A primeira é a lei parábola-linear dada no item 2.2, cf. Sigrist, que pode ser descrita como segue:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = -\alpha(2 - \alpha) \quad (2.73)$$



onde  $\alpha = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} \leq 1$ , e

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = -\left[\frac{E_{cD}}{E_{c1}}(\alpha - 1) + 1\right] \quad (2.74)$$

com  $1 \leq \alpha = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} \leq \alpha_{lim}$

$$\alpha_{lim} = \frac{\varepsilon_{c1lim}}{\varepsilon_{c1}} = 1 - \frac{E_{c1}}{2E_{cD}} \quad (2.75)$$

$$E_{c1} = -\frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}} \quad (2.76)$$

$$E_{cD} = -\frac{f_{cm}^2}{2U_{cF}}, \text{ e } U_{cF} = 0,1Nmm/mm^3 \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{c1} = -\left(\frac{f_{cm}}{60} + 1,5\right), \text{ em } MPa \text{ e } ^0/_{00} \quad (2.79)$$

Na expressão (2.78) adotou-se o valor médio da energia dissipada por unidade de volume e esbeltez do corpo de prova  $l/\phi = 2$ , conforme a Fig. 2.7b. Observe-se ainda que esta lei contém o diagrama parábola-retângulo, bastando por  $E_{cD} = 0$ , e atribuir a  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{c1lim}$  os valores apropriados.

Na tração ( $\varepsilon > 0$ ) considera-se o mesmo módulo de elasticidade tangente na origem da compressão, dado por:

$$E_{ci} = -2\frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}} = 2E_{c1} \quad (2.80)$$

donde

$$\sigma_c = E_{ci}\varepsilon_c \leq f_{ctm} \quad (2.81)$$

Também considera-se a lei de Grasser, cf. o MC-90, item 2.1.4.4, a qual consta no EC-2 e na NBR 7187. Esta lei é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = -\frac{k\alpha - \alpha^2}{1 + (k-2)\alpha} \quad (2.82)$$

onde

$$\alpha = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \leq \alpha_{\text{lim}}$$

$\varepsilon_{c1} = -2,2^0 /_{00}$ : deformação correspondente à tensão de pico  $f_{cm}$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}}$$

$E_{ci} = 10^4 \times (f_{cm})^{1/3}$ : módulo tangente na origem, em *MPa*, Equação (2.12)

$$E_{c1} = -\frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}}$$

$$\alpha_{\text{lim}} = \frac{\varepsilon_{c\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{2} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (2.83)$$

Na tração é válida a Equação (2.81), usando-se porém  $E_{ci}$  de (2.12).

Observe-se que esta lei, para  $k = 2$ , reduz-se a uma parábola do segundo grau.

O MC-90, item 2.1.4.2, admite no projeto a seguinte relação entre as resistências média e característica do concreto em compressão, em *MPa*:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad (2.84)$$

Ver também o item 7.1.4 da NBR 6118, 2000.

Representam-se na Fig. 2.29 as duas leis constitutivas tratadas aqui, para  $f_{ck} / f_{cm} = 20/28MPa$ . Na Tabela 2.5 mostra-se para estas duas leis a deformação limite, correspondente no ramo descendente à metade da tensão de pico. Como observado no MC-90, item 2.1.4.4.1, esta deformação limite não tem outro significado além do de limitar a aplicabilidade da lei (2.82). Esta limitação foi aqui estendida também à lei parábola-linear, como se disse. Ver nas Figuras 4.17a e 4.17b as comparações destas duas leis, aplicadas ao diagrama momento-curvatura na flexo-compressão.

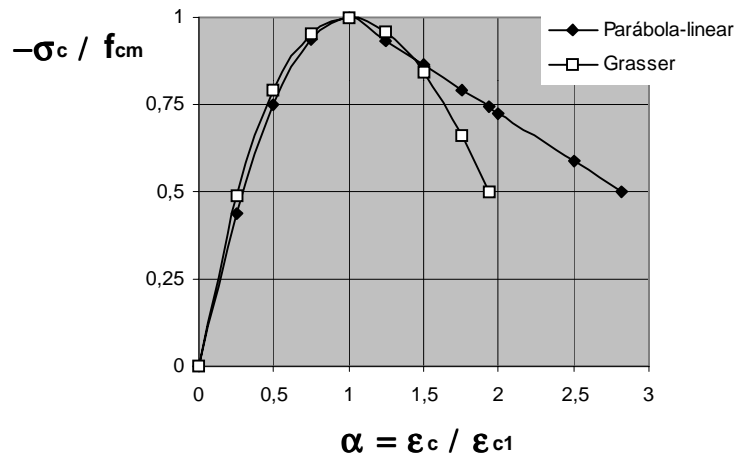


Fig. 2.29: Leis constitutivas  $\sigma_c(\epsilon_c)$  na flexo-compressão para  $f_{ck} / f_{cm} = 20/28MPa$ . Parábola-linear:  $\epsilon_{c1} = -1,967^0 /_{00}$ ,  $\alpha_{lim} = 2,816$ ,  $E_{ci} = 28,475GPa$ ,  $E_{c1} = 14,237GPa$ ,  $E_{cD} = -3,920GPa$ . Grasser:  $\epsilon_{c1} = -2,2^0 /_{00}$ ,  $\alpha_{lim} = 1,934$ ,  $E_{ci} = 30,366GPa$ ,  $E_{c1} = 12,727GPa$ ,  $k = 2,386$ .

Tabela 2.5: Deformação limite do concreto em compressão, Equações (2.75) e (2.83).

$f_{ck}$ (MPa)	20	30	40	50	Observação
$f_{cm} = f_{ck} + 8$ (MPa)	28	38	48	58	
$\alpha_{lim} = \frac{\epsilon_{c\lim}}{\epsilon_{c1}}$	1,934	1,675	1,5	1,769	Eq. (2.83)
	2,816	2,234	1,906	1,699	Eq. (2.75)
$\epsilon_{c\lim} (^0 /_{00})$	-4,26	-3,68	-3,3	-3	Grasser
	-5,54	-4,76	-4,38	-4,19	Sigrist