

FERNANDO REBOUÇAS STUCCHI  
ENGENHEIRO CIVIL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 1975

**SOBRE O COMPORTAMENTO ESTRUTURAL  
DAS PONTES CELULARES**



DISSERTAÇÃO APRESENTADA À  
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE  
SÃO PAULO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA

ORIENTADOR: PROF. DR. DECIO DE ZAGOTTIS  
PROFESSOR TITULAR DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES  
DA EPUSP

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Decio Leal de Zagottis, pelo incentivo, pela orientação e pela amizade dispensados ao longo não só da elaboração desta Dissertação mas também de toda a minha atividade profissional.

Ao Engenheiro Luciano Afonso Borges, amigo e companheiro de trabalho, pelo estímulo, pelas sugestões e pela constante colaboração.

À Srta. Angela Schneider Loyola, pela composição e datilografia e ao Sr. Rinaldo Lorenzi, pela elaboração das figuras.

À Maubertec Engenharia e Projetos, pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

O presente trabalho estuda o comportamento estrutural das pontes celulares executadas em concreto protendido, na fase elástica, sobretudo no que diz respeito à deformação da seção transversal.

Na primeira parte, apresenta-se a Analogia da Viga sobre Apoio Elástico (AVAE), aplicada às seções unicelulares. Introduzem-se as idéias e conceitos parceladamente, em meio a exemplos, de forma a satisfazer objetivos didáticos.

Esses exemplos chamam a atenção para os efeitos da deformação da seção transversal ao nível não só da flexão transversal e das tensões normais, mas também das tensões de cisalhamento. O problema da disposição das transversinas também é abordado.

De maneira a possibilitar aplicação prática em projeto, apresentam-se também soluções aproximadas e critérios de dimensionamento. Um exemplo é desenvolvido em detalhe, ilustrando essa aplicação.

Na segunda parte, analisam-se as pontes de duas vigas unicelulares ligadas pela laje superior. Essa análise é feita considerando a deformação das células de acordo com as conclusões da AVAE.

De forma a julgar a importância da deformação das células, foram desenvolvidos quatro exemplos comparando as soluções onde essa deformação é considerada com aquelas onde ela é desprezada.

## SUMMARY

The present paper studies the structural behavior of prestressed concrete box girder bridges, in the elastic phase, mainly concerning the cross section deformation.

In the first part of the paper, the Beam on Elastic Foundation Analogy (BEF Analogy, here named AVAE), for single cell girders, is presented.

Ideas and concepts are introduced gradually, with examples to illustrate them, in order to satisfy didactic purposes.

These examples call attention to the effects of the cross section deformation, not only transverse flexure and normal stresses, but also shear stresses. The problem of the transverse diaphragm is also studied.

In order to permit practical design application, approximate solutions and some design criteria are presented. One example is developed in detail, illustrating this application.

In the second part of the paper, two single cell girder bridges, connected by their slab, are studied. The analysis is carried out considering the cell deformation according to the conclusions of the BEF Analogy.

In order to judge the importance of cell deformation, four examples are developed, comparing the solutions that consider such deformation with those which neglect it.



## INDICE

	página
INTRODUÇÃO	1
NOMENCLATURA	N.1
1. PONTES DE SEÇÃO UNICELULAR	1.1
1.1. Geometria e Nomenclatura	1.1.
1.2. Decomposição do Carregamento de uma Viga Unicelular segundo seus Mecanismos Portantes	1.3
1.3. Solução de cada uma das Parcelas do Carregamento Tipo	1.7
1.3.1. Carregamento Simétrico	1.7
1.3.2. Carregamento Antimétrico	1.10
1.3.2.1. Carregamento de Torção	1.10
1.3.2.1.1. Torção Uniforme	1.10
1.3.2.1.2. Torção Não-Uniforme	1.12
1.3.2.2. Carregamento de Distorção	1.15
1.4. Solução de Knittel para o Carregamento de Distorção	1.15
1.5. Solução de Steinle para o Carregamento de Distorção	1.24
1.5.1. Solução da Teoria das Estruturas Plissadas	1.24
1.5.1.1. Definição Geométrica da Distorção	1.26
1.5.1.2. Definição da Forma do Diagrama de Tensões Normais	1.27
1.5.1.3. Analogias	1.30
1.5.1.4. O Carregamento de Distorção e as Tensões de Cisalhamento	1.33
1.5.2. Solução de Steinle	1.44
1.5.3. Analogia da Viga sobre Apoio Elástico	1.46
1.5.4. Caso de Carga Concentrada	1.48
1.6. Exemplo 1	1.50
1.6.1. Cálculo das Características Geométricas	1.51
1.6.2. Solução do Caso 1	1.52
1.6.3. Solução do Caso 2	1.53
1.6.4. Diagramas de Tensões Normais	1.55
1.6.5. Diagramas de Momentos Fletores Transversais	1.57
1.7. Problemas Particulares	1.61
1.7.1. A Eficiência das Transversinas Intermediárias	1.61
1.7.2. Análise das Cargas Próximas do Apoio. Força Cortante	1.66
1.7.2.1. Cálculo da Máxima Tensão de Cisalhamento	1.66
1.7.2.2. A Tensão Média e a Resultante de Cisalhamento em cada Alma	1.68
1.7.2.3. Comentários	1.69
1.8. Estudo do Caso Genérico de Carga	1.70
1.8.1. Caso Geral da Carga Linear Uniforme	1.70
1.8.2. Caso Geral da Carga Concentrada	1.71
1.8.3. Caso Genérico de Carga	1.73
1.8.4. Solicitações Transversais Devidas a cada uma das Parcelas do Carregamento Externo	1.74
1.8.4.1. Parcela I	1.74
1.8.4.2. Parcela II	1.74
1.8.4.3. Parcela III	1.75
1.8.4.4. Parcela IV	1.78
1.8.5. Solução da Viga sobre Apoio Elástico	1.84

	página
1.8.6. Comentários	1.87
1.9. Exemplo 2	1.88
1.9.1. Carregamento 1a	1.91
1.9.1.1. Características Geométricas	1.91
1.9.1.2. Esforços de Engastamento	1.91
1.9.1.3. Decomposição do Carregamento Variável em Simétrico e Antimétrico	1.93
1.9.1.4. Cálculo dos Esforços Solicitantes	1.94
1.9.1.5. Cálculo das Tensões Normais	1.96
1.9.2. Carregamento 1b	1.97
1.9.2.1. Cálculo dos Esforços de Engastamento para a Nova Posição do Trem Tipo	1.97
1.9.2.2. Decomposição do Carregamento Variável em Simétrico e Antimétrico	1.99
1.9.2.3. Cálculo dos Esforços Solicitantes	1.100
1.9.2.4. Cálculo das Tensões Normais	1.100
1.9.3. Carregamento 2	1.101
1.9.3.1. Caso de Todo Tabuleiro Carregado	1.101
1.9.3.2. Caso de Meio Tabuleiro Carregado	1.104
1.9.4. Carregamento 3	1.107
1.9.4.1. Cálculo dos Esforços de Engastamento das Lajes nas Almas	1.107
1.9.4.2. Decomposição do Carregamento em Simétrico e Antimétrico	1.108
1.9.4.3. Esforços Solicitantes Transversais	1.109
1.9.5. Comentários	1.110
1.9.6. Transversinas de Apoio	1.112
2. PONTES DE DUAS VIGAS UNICELULARES LIGADAS PELA LAJE SUPERIOR	2.1
2.1. Apresentação do Problema	2.1
2.2. Geometria, Nomenclatura e Hipóteses Adotadas	2.2
2.3. Carregamento Tipo e sua Decomposição	2.4
2.4. Deformação da Viga da Seção Celular	2.7
2.4.1. Deformação de Flexão Longitudinal	2.7
2.4.2. Deformação de Torção	2.8
2.4.3. Deformação de Distorção	2.9
2.4.4. Deformação de Flexão Transversal	2.10
2.4.5. Resumo das Equações Relacionando Deslocamentos e Esforços	2.10
2.5. Desenvolvimento das Cargas em Séries de Fourier	2.13
2.6. Solução do Carregamento Simétrico — Equação que fornece $m_i$	2.15
2.7. Solução do Carregamento Antimétrico — Equação que fornece $v_i$	2.17
2.8. Linhas de Influência	2.19
2.8.1. Cálculo dos Esforços Transversais Resultantes	2.20
2.8.2. Linhas de Influência Transversais	2.22
2.8.3. Esforços Solicitantes Longitudinais	2.24

	página
2.9. Extensão para o Caso de Vigas Contínuas	2.27
2.10. Exemplos	2.27
2.10.1. Exemplo 1	2.27
2.10.1.1. Características Geométricas da Seção Celular	2.28
2.10.1.2. Linhas de Influência Transversais	2.29
2.10.2. Exemplo 2	2.32
2.10.2.1. Características Geométricas da Seção Celular	2.33
2.10.2.2. Linhas de Influência Transversais	2.33
2.10.3. Exemplo 3	2.37
2.10.3.1. Características Geométricas da Seção Celular	2.37
2.10.3.2. Linhas de Influência Transversais	2.38
2.10.4. Exemplo 4	2.41
2.10.4.1. Características Geométricas da Seção Celular	2.41
2.10.4.2. Linhas de Influência Transversais	2.41
2.10.5. Comentários	2.44
3. CONCLUSÕES	3.1
BIBLIOGRAFIA	B.1

## ÍNDICE DAS FIGURAS

Fig.		página
1a	- Seções Unicelulares	3
	1. Ponte de Oleron (França). Vão de 79 m.	3
	2. Trevo de Quiririm sobre a Via Dutra. Vão de 46 m.	3
	3. Ponte de Felsenau (Suíça). Vão de 144 m.	3
	4. Ponte no Vale da Musle (Praga, Tchecoslováquia) Vão de 116 m.	3
1b	- Seções Unicelulares Ligadas pela Laje	4
	1. Ponte de Blois (França). Vão de 91 m.	4
	2. Ponte na Periferia de Paris (França). Vão de 90 m.	4
	3. Ponte Rio-Niterói. Vão de 80 m.	4
1c	- Seções Multicelulares	4
	Ponte de Saint-Cloud (Paris, França). Vão de 70 m, raio de 350 m.	4
1-1	- Viga Adotada - Simplesmente Apoiada, com Transversinas nos Apoios	1.2
1-2	- Seção Transversal	1.3
1-3	- Carregamento Tipo e Referenciais	1.4
1-4	- Elemento de Viga	1.4
1-5	- Decomposição do Carregamento Tipo	1.5
	1. Flexão Longitudinal.	1.5
	2. Torção.	1.5
	3. Flexão Transversal + Empenamento.	1.5
1-6	- Carregamento de Distorção e Deformação Correspondente	1.6
1-7	- Carregamento Antimétrico que não provoca Distorção	1.7
1-8	- Diagrama de Tensões Normais	1.8
	1. Diagrama $\sigma$ para Seção Estreita.	1.8
	2. Diagrama $\sigma$ para Seção Larga.	1.8
1-9	- Diagrama de Tensões de Cisalhamento	1.9
	1. Diagrama $\tau$ para Seção Estreita	1.9
	2. Diagrama $\tau$ para Seção Larga	1.10
1-10	- Perfil I sob Torção	1.12
1-11	- Tensões na Torção do Perfil I	1.13
	Sistema 1 - Torção Uniforme	1.13
	Sistema 2 - Flexo-torção	1.13
1-12	- Tensões na Flexo-Torção de uma Seção Retangular Vazada	1.14
1-13	- Carregamento de Distorção	1.16
1-14	- Diagrama M e Deformada do Quadro Devidos a Distorção	1.17
1-15	- Compatibilização das Lajes e Almas na Distorção	1.18
1-16a	- Forças Transversais Subentendidas pela Distorção	1.20
1-16b	- Forças Paralelas às Paredes Subentendidas pela Distorção	1.20

Fig.		página
1-17	- Diagrama $\gamma$ para Carga p Uniforme	1.23
1-18	- Caso de Carga Concentrada	1.23
1-19	- Recuperação da Compatibilidade através da Flexão Longitudinal das Paredes como Chapas	1.25
1-20	- Distorção da Seção com Arestas Articuladas	1.26
1-21	- Diagrama $\sigma$ Admitido	1.26
1-22	- Diagrama $\sigma$ - Esforços Resultantes	1.28
1-23	- Diagrama $\omega$	1.30
1-24	- Diagrama $\frac{\omega}{\omega_a}$	1.32
1-25	- Caixa Assimétrica Solicitada por Força Cortante	1.34
1-26	- Diagrama ( $M_{S\omega} - \bar{\phi}_0$ )	1.39
1-27	- Auto-Equilíbrio do Carregamento de Distorção	1.41
1-28	- Equilíbrio do Quadro Transversal na Solução de Steinle	1.45
1-29	- Viga sobre Apoio Elástico	1.46
1-30	- Decomposição do Carregamento Concentrado	1.49
1-31	- Viga sobre Apoio Elástico Análoga	1.49
1-32	- Ponte Rodoviária em Viga Caixa Unicelular	1.50
1-33	- Viga sobre Apoio Elástico Análoga	1.52
1-34	- Diagramas de Tensões Normais	1.55
1-35	- Diagramas B(x) (tfm <sup>2</sup> )	1.57
1-36	- Momentos Fletores Transversais	1.58
1-37	- Diagramas $\gamma(x)$ (rad)	1.59
1-38	- Diferença entre Steinle e Knittel para o Caso 1	1.60
1-39	- Esquemas para Processamento	1.61
	Estrutura E1 - sem Transversinas Intermediárias	1.61
	Estrutura E2 - com uma Transversina Central	1.61
	Estrutura E3 - com duas Transversinas Intermediárias	1.61
	Estrutura E4 - com três Transversinas Intermediárias	1.61
1-40	- Diagramas $\gamma$ (Distorção) (rad)	1.63
1-41	- Diagramas B (Bimomento) (tfm <sup>2</sup> )	1.64
1-42	- Carga Próxima do Apoio	1.66
1-43	- Carga Linear no Balanço	1.70
1-44	- Carga Linear na Laje Superior	1.71
1-45	- Distribuição dos Momentos de Engastamento do Balanço sob Carga Concentrada	1.72
1-46	- Viga em Balanço Equivalente	1.72
1-47	- Viga Biengastada Equivalente	1.73
1-48	- Parcela I	1.74



Fig.		página
1-49	- Parcela II	1.74
1-50	- Diagrama M e Deformada do Quadro Devidos ã Flexão Transversal Simétrica	1.75
1-51	- Diagrama M e Deformada do Quadro Devidos ã Flexão Transversal Antimétrica	1.78
1-52	- Reações de Apoio do Quadro com Nós Fixos	1.81
1-53	- Decomposição da Parcela IV	1.81
1-54	- Carregamento de Torção Adicional	1.82
1-55	- Carregamento de Distorção Adicional	1.83
1-56	- Diagramas de Distorção $\gamma$	1.85
	a. Distorção devida a P.	1.85
	b. Distorção devida a $p_{eq}$ .	1.85
1-57	- Linha de Influência de Bimomento	1.86
1-58	- Linha de Influência de Distorção	1.86
1-59	- Geometria da Ponte Considerada	1.88
1-60	- Carregamentos	1.90
	a. Posição Transversal do Trem-Tipo.	1.90
	b. Posição Longitudinal do Trem-Tipo.	1.90
1-61	- Roda do TB36	1.92
1-62	- Resumo do Carregamento Variável	1.93
1-63	- Decomposição do Carregamento Variável	1.94
1-64	- Linha de Influência de Flexão Longitudinal	1.94
1-65	- Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análoga	1.95
1-66	- Cálculo do Bimomento Máximo	1.95
1-67	- Diagrama $\sigma$ (tf/m <sup>2</sup> )	1.97
1-68	- Resumo do Carregamento Variável	1.99
	Alma Esquerda	1.99
	Alma Direita	1.99
1-69	- Decomposição do Carregamento Variável	1.99
1-70	- Cálculo do Bimomento Máximo	1.100
1-71	- Cálculo do Momento de Torção e da Força Cortante Máxima	1.102
1-72	- Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análoga	1.102
1-73	- Resumo do Carregamento Variável	1.105
1-74	- Decomposição do Carregamento Variável	1.105
1-75	- Cálculo do Momento de Torção Máximo e da Força Cortante	1.106
1-76	- Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análoga	1.106
1-77	- Resumo do Carregamento Variável	1.108
1-78	- Decomposição do Carregamento Total (Permanente e Variável)	1.108



Fig.		página
1-79	- Composição da Força Cortante com a Flexão Transversal	1.111
1-80	- Reações de Apoio no Carregamento 2	1.113
1-81	- Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análoga	1.113
2-1	- Superestrutura com Duas Vigas Unicelulares	2.2
2-2	- Carregamento Tipo e sua Decomposição em Simétrico e Antimétrico	2.4
2-3	- Incôgnitas Hiperestáticas	2.5
2-4	- Deformadas Correspondentes aos Carregamentos Simétrico e Antimétrico	2.6
	a. Deformadas Longitudinais	2.6
	b. Deformadas Transversais para Caixaão Indeformável	2.6
	c. Deformadas Transversais do Caixaão Deformável	2.6
2-5	- Deformação por Flexão	2.8
2-6	- Deformação por Torção	2.8
2-7	- Parcelas da Deformação da Viga de Seção Celular	2.10
	a. Flexão Longitudinal e Torção	2.10
	b. Flexão Transversal Simétrica	2.10
	c. Flexão Transversal Antimétrica	2.10
	d. Distorção	2.10
2-8	- Carregamentos mais Comuns e sua Representação em Série de Fourier	2.14
	a. Carga Uniformemente Distribuída	2.14
	b. Carga Parcialmente Distribuída	2.14
	c. Carga Concentrada	2.14
2-9	- Carregamento Simétrico	2.15
2-10	- Carregamento Antimétrico	2.17
2-11	- Momentos Fletores na Laje de Ligação	2.20
2-12	- Flexão Transversal das Almas	2.21
2-13	- Cargas Efetivas	2.22
2-14	- Linhas de Influência Transversais Determinadas por Pontos	2.23
2-15	- Esforços Longitudinais numa das Vigas Celulares	2.25
2-16	- Caso Particular, onde $p(x)$ é Uniforme e $v(x)$ , Senoidal	2.26
2-17	- Ponte de Choisy-le-Roi	2.28
2-18	- Linhas de Influência	2.31
2-19	- Ponte Rio-Niterói	2.32
2-20	- Linhas de Influência	2.36
2-21	- Estrutura do Exemplo 3	2.37
2-22	- Linhas de Influência	2.40

Fig.		página
2-23	- Estrutura do Exemplo 4	2.41
2-24	- Linhas de Influência	2.43
2-25	- Cálculo Transversal. Solução Alternativa	2.45
Abaco 1		1.116
Abaco 2		1.117

## INTRODUÇÃO

As seções celulares vêm sendo muito utilizadas em obras civis, principalmente nas pontes e viadutos, devido às suas excelentes qualidades *estruturais* e *estéticas*.

As suas qualidades estruturais, isto é, uma eficiente capacidade de distribuição transversal de cargas excêntricas, um bom desempenho em pontes curvas e uma grande resistência a momentos fletores positivos e negativos, são determinadas principalmente pela sua *alta rigidez à torção* e pela existência não só de uma *mesa de compressão superior*, mas também de uma *inferior*.

Com o objetivo de simplificar o projeto da estrutura, usavam-se diafragmas transversais, as transversinas, suficientemente próximas para que se pudesse considerar a *seção transversal indeformável* e a superestrutura como uma *simples viga*.

Com o advento de modernos métodos construtivos, como consolos sucessivos, formas deslizantes, lançamento por incrementos, tornou-se conveniente eliminar as transversinas, pois elas quebravam a continuidade do processo construtivo.

Eliminadas as transversinas do vão, pode-se ou não manter as transversinas dos apoios; não é mais possível admitir a *seção transversal indeformável*. O carregamento que antes solicitava as transversinas atuará agora na *seção celular*, deformando-a.

Para o cálculo elástico dessa nova estrutura existem já alguns métodos: o Método dos Elementos Finitos, o Método das Coordenadas Generalizadas, o Método das Estruturas Prismáticas Laminares, a Analogia da Viga sobre Apoio Elástico, entre outros.

A presente dissertação tem por objetivo estudar a *Analogia da Viga sobre Apoio Elástico (AVAE)* e sua aplicação às *pontes retas de seção transversal unicelular*.

O trabalho restringiu-se às seções unicelulares porque, modernamente, sua aplicação tende a ser dominante.

As obras de largura até 15 m , ou mesmo 18 m, sejam retas, sejam curvas, são em geral projetadas com seção unicelular (ver exemplos Fig. 1a).

As obras de maior largura, quando retas, são em geral projetadas com duas seções unicelulares, unidas pela laje superior (ver exemplos Fig. 1b).

As seções multicelulares ficam restritas a casos especiais e às obras curvas de grande largura (ver exemplo Fig. 1c).

O problema da escolha da seção transversal mais conveniente é considerado em (B-1), (B-2), (B-3), (B-4), (B-5), (B-6) e (B-7).

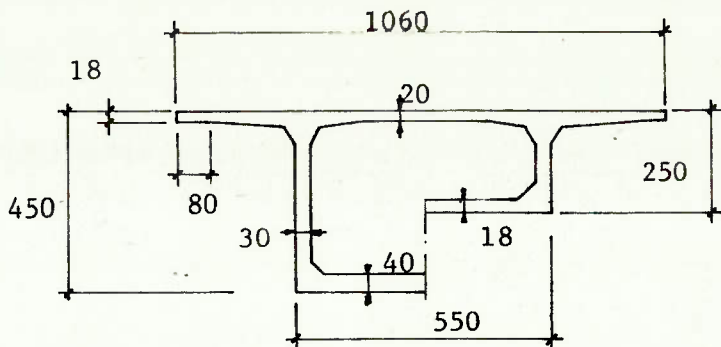
De qualquer forma, a AVAE pode ser estendida às seções multicelulares, como foi feito em (B-5), (B-6) e (B-8).

As seções multicelulares apresentam, entretanto, um problema mais complexo, a solução completa só podendo ser obtida considerando a deformação por cisalhamento. A solução simplificada, na qual se despreza essa deformação, fornece aproximações mais grosseiras, que diminuem um pouco a precisão dos resultados (ver (B-6)).

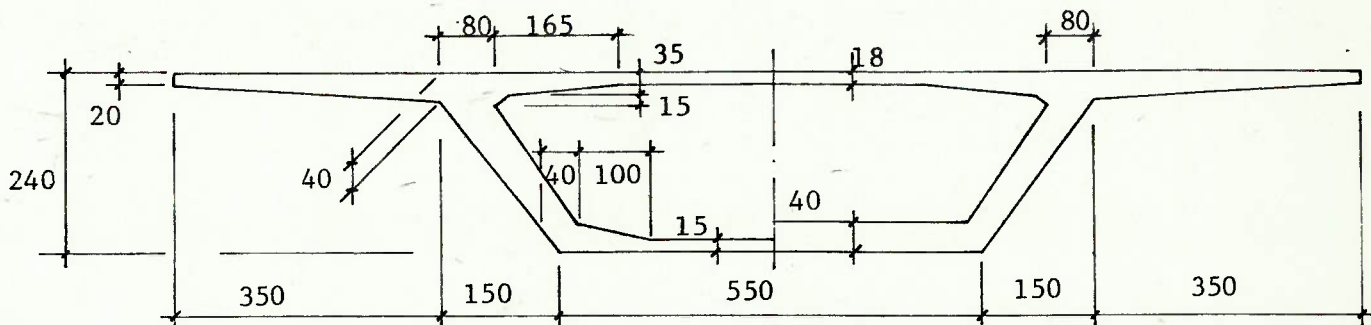
Por outro lado, restringiu-se o problema às pontes executadas em *concreto protendido*. Isto, por duas razões: em primeiro lugar, porque a espessura das paredes é suficientemente grande para que se desprezem os efeitos de segunda ordem e, em segundo lugar, porque a protensão confere ao concreto, ao menos nas condições de utilização, um comportamento próximo do elástico.

Para tornar a apresentação mais simples e didática, ela será dividida em duas partes. A primeira analisa as seções unicelulares e a segunda, as seções de duas vigas unicelulares ligadas pela laje superior.

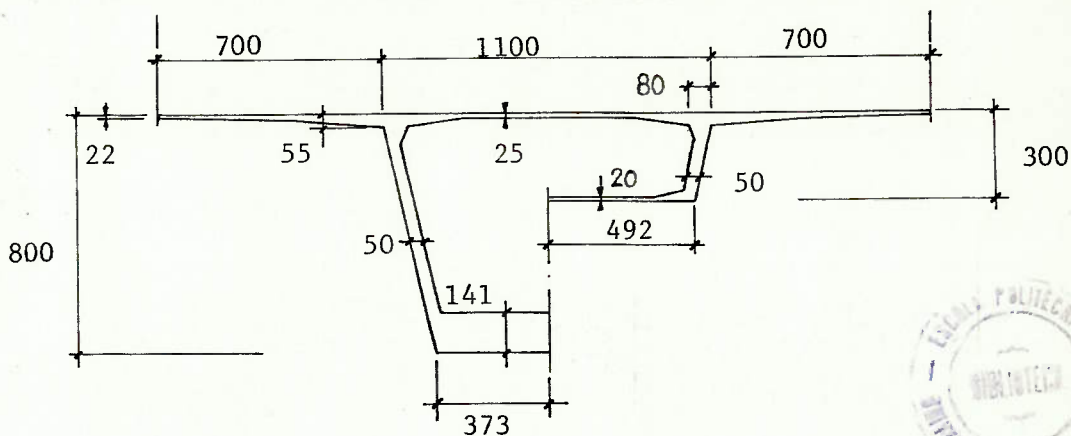
Finalmente, numa terceira parte, apresentar-se-ão as conclusões.



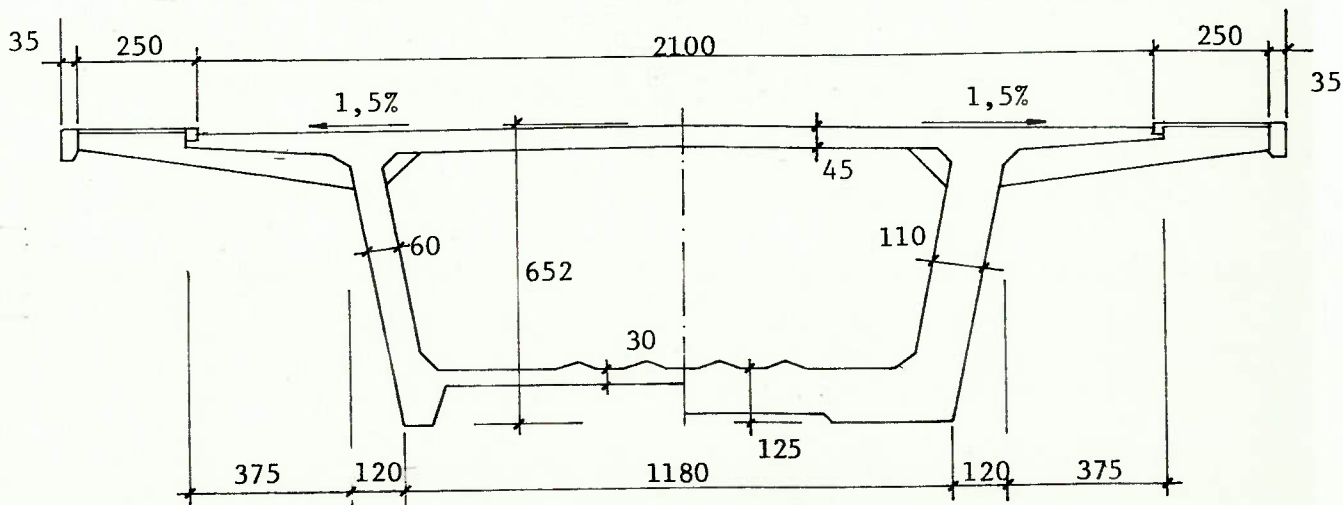
1. Ponte de Oleron (França). Vão de 79 m.



2. Trevó de Quiririm sobre a Via Dutra. Vão de 46 m.

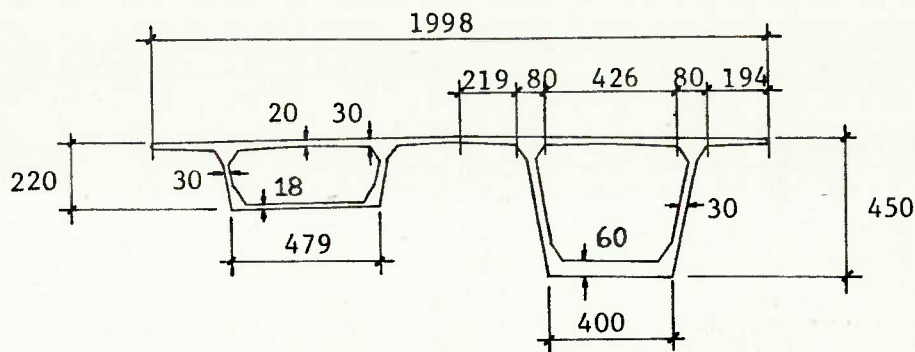


3. Ponte de Felsenau (Suíça). Vão de 144 m.

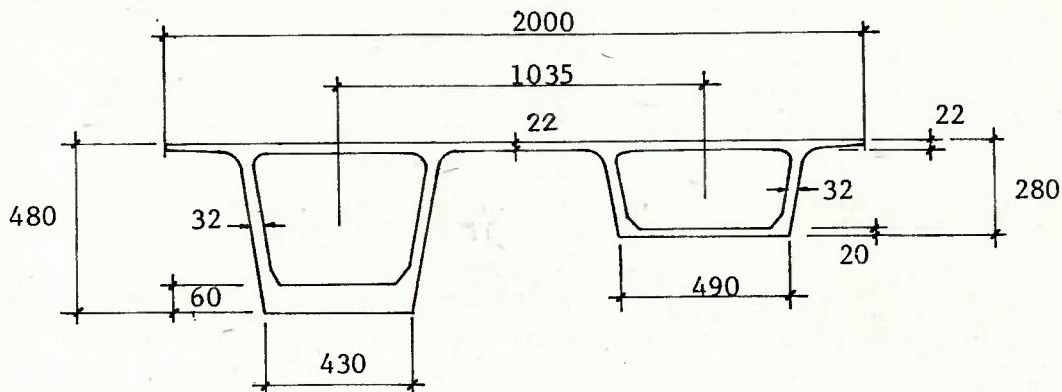


4. Ponte no vale da Musle (Praga, Tcheco-eslováquia). Vão de 116 m

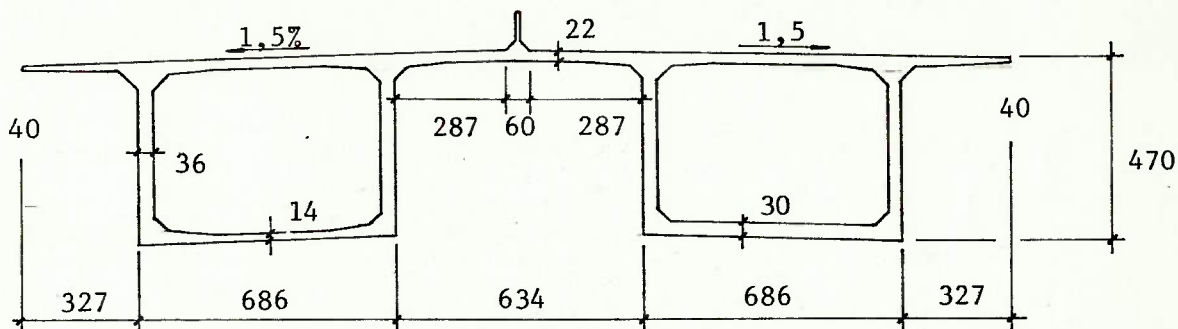
Fig. 1a - Seções Unicelulares (medidas em cm)



1. Ponte de Blois (França). Vão de 91 m.

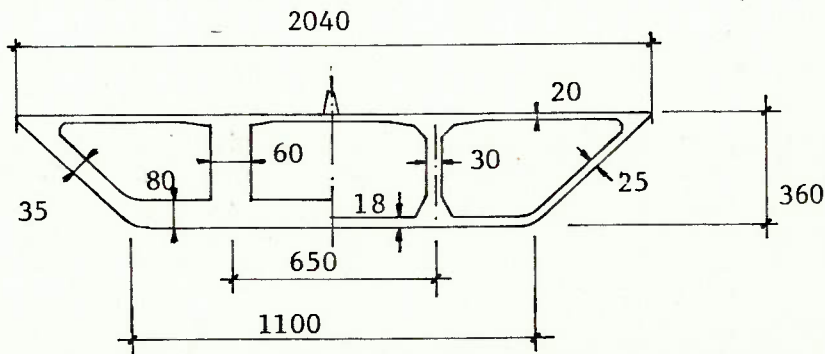


2. Ponte na Periférica de Paris (França). Vão de 90 m.



3. Ponte Rio-Niterói. Vão de 80 m.

Fig. 1b - Seções Unicelulares ligadas pela Laje (cm)



Ponte de Saint-Cloud (Paris, França). Vão de 70 m, Raio de 350 m.

Fig. 1c - Seções Multicelulares (cm)



NOMENCLATURA

## PARTE I

Geometria da Seção

$l$	vão
$h$	altura
$b$	largura do tabuleiro
$b_i$	largura da laje inferior
$b_s$	largura da laje superior (entre almas)
$b_a$	dimensão transversal da alma
$t_i$	espessura da laje inferior
$t_s$	espessura da laje superior
$t_a$	espessura da alma
$x, y, z, G$	sistema de referência global
$G$	centro de gravidade
$x, s, n$	sistema de referência local

Compressão, Flexão e Torção

$p$	carga distribuída
$P$	carga concentrada
$g$	carga permanente
$q$	carga variável
$S$	área da seção transversal
$I_z$	momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo $z$
$M_{\bar{S}z}$	momento estático da seção $\bar{S}$ em relação ao eixo $z$
$N$	força normal
$M_z$	momento fletor na direção do eixo $z$
$V_y$	força cortante na direção do eixo $y$
$\phi_0$	fluxo de cisalhamento devido à força cortante
$\sigma$	tensão normal
$\tau$	tensão tangencial
$\epsilon$	deformação linear
$\gamma$	deformação angular
$E$	módulo de elasticidade
$G$	módulo de elasticidade transversal
$\nu$	coeficiente de Poisson
$A$	área interna da célula
$I_t$	momento de inércia à torção
$M_t$	momento de torção

$\phi$	fluxo de torção
$\theta$	rotação de torção
$u$	deslocamento na direção x
$\omega_t$	função empenamento na torção
$J_{\omega t}$	momento de inércia à flexo-torção

### Distorção - Quadro

$\gamma$	deformação angular ou distorção de perfil
$F_i$	resultante de cisalhamento na laje inferior
$F_s$	resultante de cisalhamento na laje superior
$F_a$	resultante de cisalhamento na alma
$\phi_i, \phi_s, \phi_{ai}, \phi_{as}$	rotações de flexão transversal das placas
$M_a, M_b, M_c, M_d$	momentos fletores transversais de distorção nos nós do quadro
$I_i, I_s, I_a$	momentos de inércia à flexão transversal das placas
$\alpha_0, \alpha$	ângulo formado pela alma e pela laje superior
$\eta$	momento fletor transversal reduzido em B
$\epsilon$	coeficiente de inclinação das almas ou deformação linear
$\rho_i, \rho_s$	coeficientes de rigidez relativa das placas
$I_Q$	momento de inércia à distorção do quadro

### Distorção - Estrutura Plissada

$n_i, n_s, n_{ai}, n_{as}$	deslocamentos transversais normais às chapas
$s_i, s_s, s_a$	deslocamentos transversais na direção das chapas
$m_i, m_s, m_a, n_a$	esforços solicitantes nas chapas
$J_i, J_s, J_a$	momentos de inércia à flexão longitudinal das chapas
$\beta$	tensão normal reduzida em B
$\delta$	coeficiente de influência do balanço
$\psi_i, \psi_s$	proporções geométricas
$B$	bimomento de distorção
$\omega, \omega_a$	função empenamento na distorção, seu valor no ponto A em módulo
$J_\omega$	momento de inércia à distorção da estrutura plissada
$A_i, A_s, A_a$	área da seção transversal das chapas
$A_0$	área fictícia (b h)
$M_{S\omega}$	momento estático da seção $\bar{S}$ em relação à função $\omega$
$CT$	centro de torção
$\bar{\phi}_0$	correção do momento estático
$L$	comprimento elástico ( $1/\lambda$ )
$k$	coeficiente de rigidez do apoio elástico

Distorção - Solicitação Genérica

$m, p$	resultados da teoria das placas para carga no balanço
$m', m'', p', p''$	resultados da teoria das placas para carga na laje superior
$m_1$	carregamento de flexão transversal simétrica
$m_2$	carregamento de flexão transversal antimétrica
$M_{as}$	momento fletor transversal em A, na laje superior
$M_{aa}$	momento fletor transversal em A, na alma
$\delta_1, \lambda_1$	momentos fletores transversais reduzidos, caso simétrico
$\delta_2, \lambda_2$	momentos fletores transversais reduzidos, caso antimétrico
$\alpha$	coeficiente de equivalência entre carga e momento de distorção

## PARTE 2

$m(x), v(x), n(x)$	esforços solicitantes no meio da laje de ligação
$c$	comprimento do balanço transversal
$d$	semivão da laje de ligação
$P_1, P_2, P_3, P_4$	esforços de engastamento das lajes nas almas (ponte de duas vigas)
$M_1, M_2, M_3, M_4$	
$p_1, p_2, m_1, m_2$	carregamento simétrico (ponte de duas vigas)
$p_3, p_4, m_3, m_4$	carregamento antimétrico (ponte de duas vigas)
$y$	deslocamento de flexão na direção $y$
$\alpha$	rotação de flexão ou coeficiente de equivalência
$y_t$	deslocamento de torção na direção $y$
$\theta$	rotação de torção
$y_p$	deslocamento de flexão na placa de ligação
$\theta_p$	rotação de flexão na placa de ligação
$\theta_1$	rotação na flexão transversal simétrica
$\theta_2$	rotação na flexão transversal antimétrica
$\theta_3$	rotação global de distorção
$\theta_4$	rotação local de distorção
$m_t$	carregamento de torção distribuído
$p_{eq}$	carregamento de distorção equivalente
$V_m$	força cortante no meio da laje de ligação
$M_m$	momento fletor no meio da laje de ligação
$M_{ll}$	momento fletor na ligação da laje com o caixão
$M_{ai}^s, M_{ai}^u$	momentos fletores simétrico e antimétrico na alma interna
$M_{ae}^s, M_{ae}^u$	momentos fletores simétrico e antimétrico na alma externa
$p^*, m_t^*$	carregamentos de flexão e torção efetivos numa das vigas

## 1. PONTES DE SEÇÃO UNICELULAR

### 1.1. Geometria e Nomenclatura

As seções unicelulares atualmente utilizadas têm formas variadas, desde almas verticais de espessura constante até almas inclinadas de espessura variável.

De forma a ser abrangente, optou-se por estudar o caso das *almas inclinadas*. **Essa inclinação tem grande valor estético e inclusive econômico, uma vez** que a laje inferior pode ser reduzida ao mínimo necessário. Por outro lado, essa inclinação altera de forma não-desprezível o trabalho transversal da seção.

De maneira a diminuir a complicação algébrica do problema, optou-se por considerar as *placas com espessura constante*.

Em geral a espessura média é aceitável, mas pode-se também trabalhar com a placa de espessura constante e rigidez equivalente. É importante lembrar que essa equivalência de rigidez pode ser estudada separadamente, no que diz respeito ao trabalho como placa (quadro transversal) e como chapa (estrutura plissada).

Nessas condições, o modelo adotado para a ponte de seção unicelular é o indicado na Fig. 1-1.

Objetivando simplificar didaticamente o problema, considerar-se-á uma *viga simplesmente apoiada com transversinas de apoio*.

As transversinas de apoio podem, entretanto, ser eliminadas. Isso pode ser interessante construtivamente, no caso de obras executadas com formas deslizantes ou pelo método de lançamento por incrementos, e necessário funcionalmente, no caso de se usar o caixão como túnel, por exemplo, ferroviário (ver ponte sobre o vale da Musle, em Praga (Fig. 1a)).

É importante frisar, ainda, que a solução é aplicável às *vigas contínuas*, não se limitando ao exemplo escolhido, de viga simplesmente apoiada.

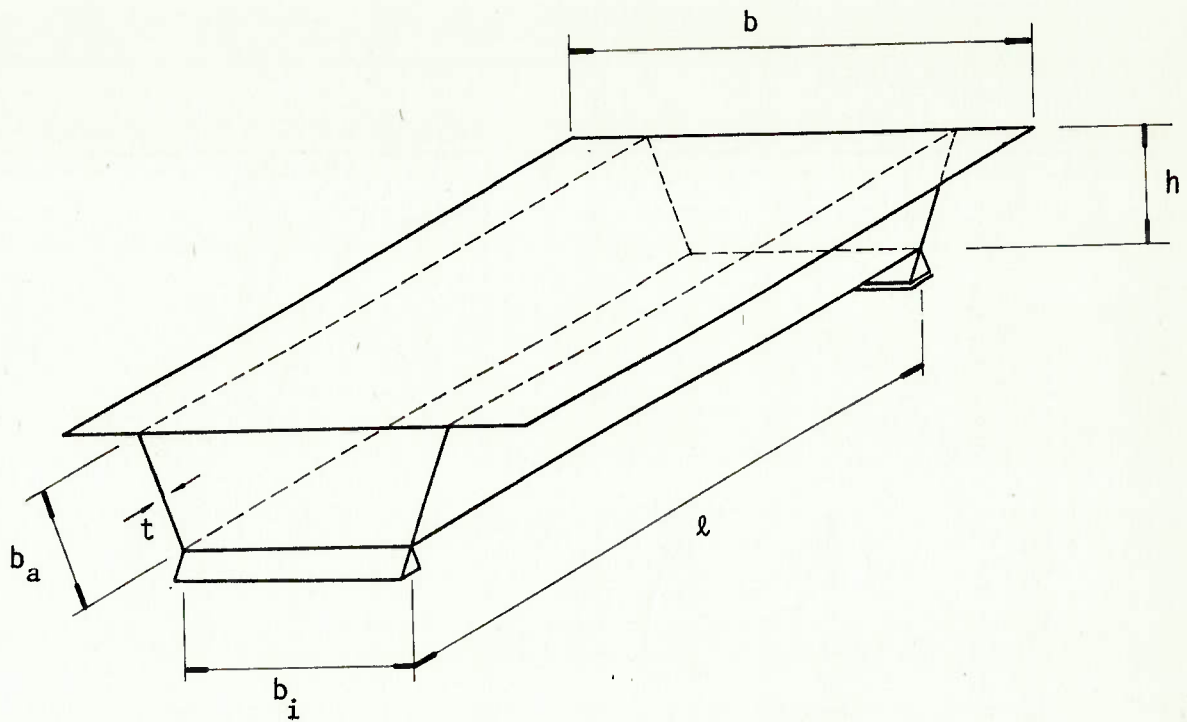


Fig. 1-1 - Viga Adotada - Simplesmente Apoiada, com Transversinas nos Apoios

As hipóteses adotadas no decorrer do trabalho exigem, ainda, limitações nas proporções geométricas.

Para que a estrutura seja considerada como uma *viga*, é preciso que:

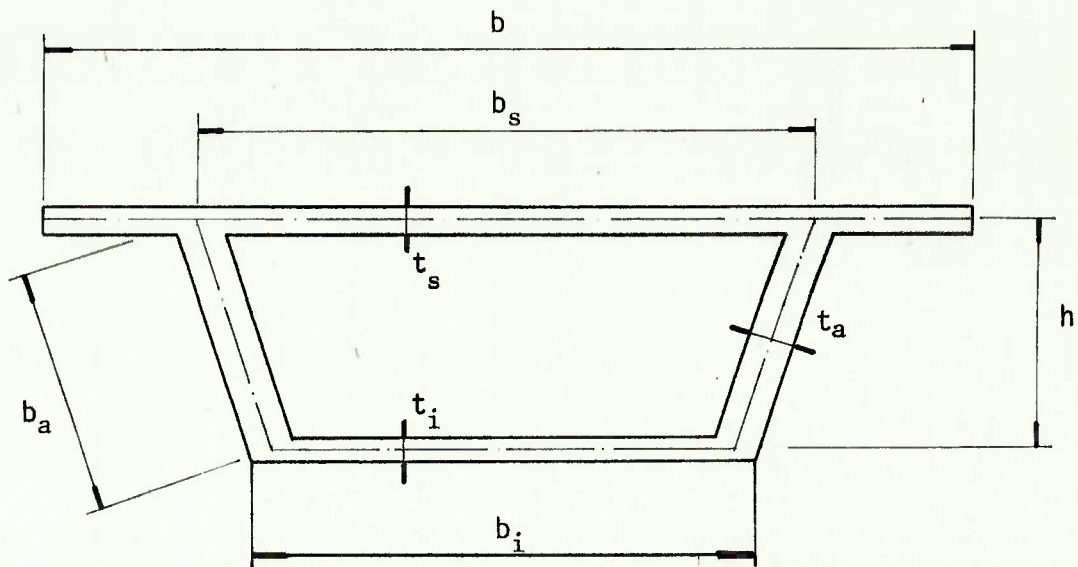
$$\frac{l}{b} > 2 \quad \text{e} \quad \frac{l}{h} > 2 \quad \text{para vigas sobre dois apoios}$$

$$\frac{l}{b} > 2,5 \quad \text{e} \quad \frac{l}{h} > 2,5 \quad \text{para vigas contínuas.}$$

Para que a seção unicelular possa ser tratada como tendo *paredes finas*, é preciso que:

$$\frac{b_a}{t_{\text{máx}}} > 6 \quad , \quad \frac{b_i}{t_{\text{máx}}} > 6 \quad \text{e} \quad \frac{b_s}{t_{\text{máx}}} > 6$$

A Fig. 1-2 mostra o esquema adotado para a seção unicelular, e a nomenclatura correspondente.



$t_s$  = espessura da laje superior e do balanço

$t_a$  = espessura da alma

$t_i$  = espessura da laje inferior

Fig. 1-2 - Seção Transversal

## 1.2. Decomposição do Carregamento de uma Viga Unicelular segundo seus Mecanismos Portantes

Na apresentação do problema de distorção de perfil, adotar-se-á um carregamento particular — carga linear uniformemente distribuída sobre uma das almas — chamado *carregamento tipo*. Esse procedimento em nada invalida os resultados obtidos. A análise do caso geral será feita no item 1.8.

A Fig. 1-3 mostra o carregamento tipo e os sistemas de referência adotados:

Sistema global =  $x, y, z, G$

Sistema local =  $x, s, n$

(um por parede da célula)



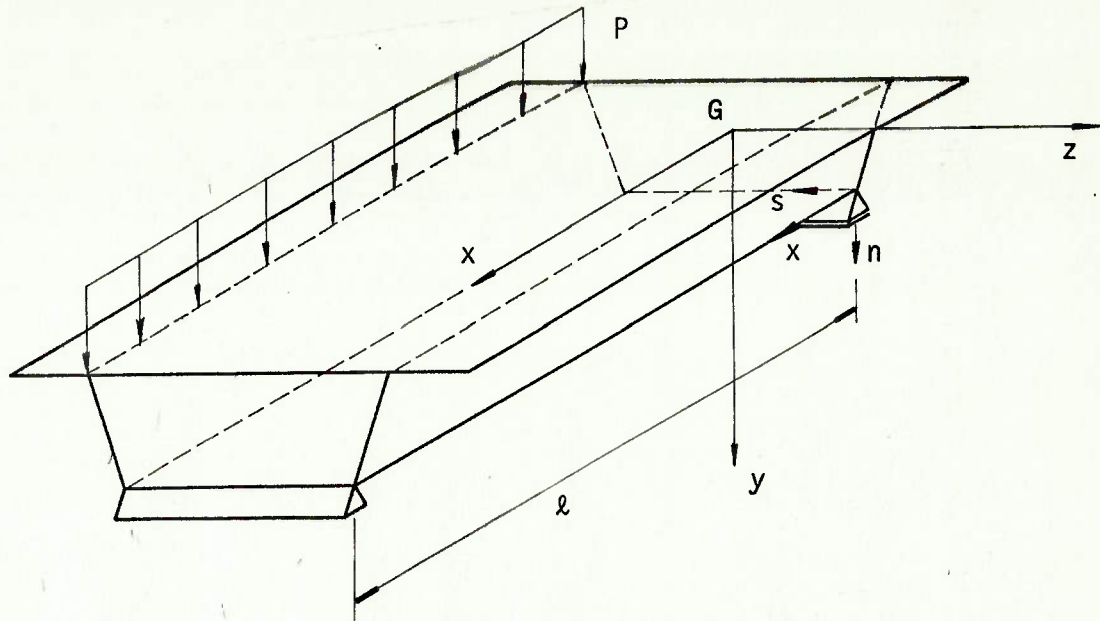


Fig. 1-3 - Carregamento Tipo e Referenciais

Para decompor o carregamento tipo segundo os mecanismos portantes, considerar-se-á um trecho de viga de comprimento infinitesimal  $dx$ .

A Fig. 1-4 mostra esse elemento de viga carregado conforme o carregamento tipo.

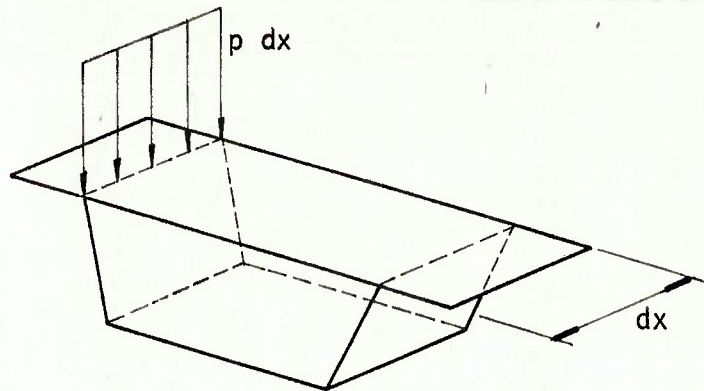
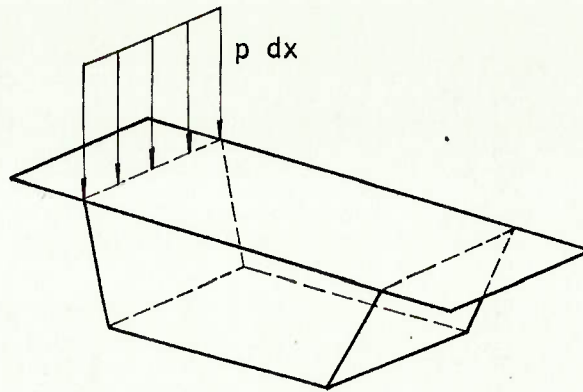
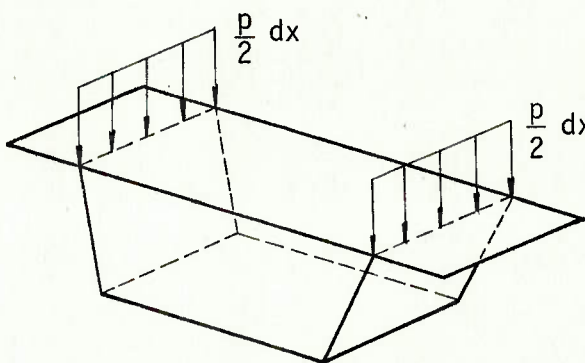


Fig. 1-4 - Elemento de Viga

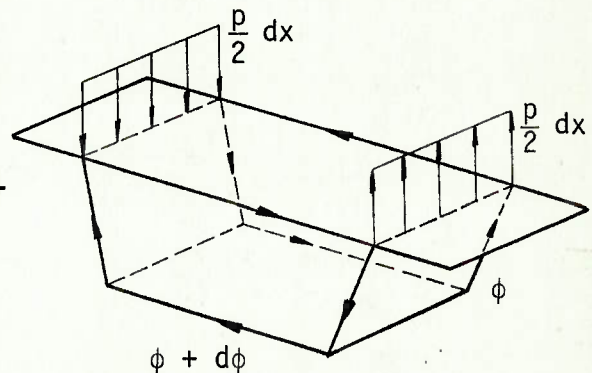
A Fig. 1-5 representa a decomposição desse carregamento tipo em função dos mecanismos portantes. O *carregamento simétrico*, centrado portanto, provoca apenas flexão longitudinal. O *carregamento antissimétrico* provoca torção e distorção.



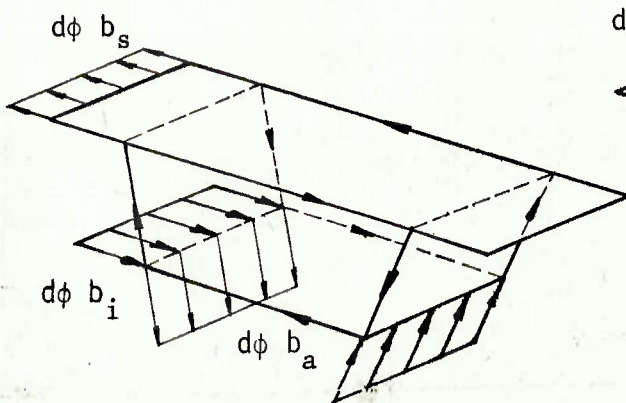
Carregamento Tipo



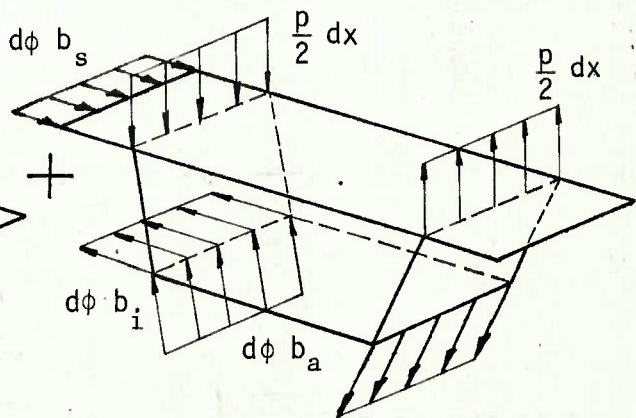
Carregamento Simétrico  
1 Flexão longitudinal



Carregamento antissimétrico  
Torção + Distorção  
( $\phi$  = fluxo de torção segundo Bredt)



Carregamento de torção  
2 Torção



Carregamento de distorção  
3 Flexão Transversal + Empenamento

Fig. 1-5 - Decomposição do Carregamento Tipo

O carregamento de torção corresponde à aplicação do momento de torção  $dMt = \frac{P}{2} dx b_s$  conforme as características resistentes da seção, isto é, conforme o fluxo de torção de Bredt.

O carregamento de distorção corresponde à diferença entre o carregamento antissimétrico e o de torção. Como ambos têm resultante  $dMt$ , a diferença entre eles, o carregamento de distorção, tem resultante nula, é autoequilibrado.

A Fig. 1-6 simplifica o carregamento de distorção decompondo as cargas externas nas direções das almas e da laje superior. Nesta figura eliminou-se o diferencial ( $dx$ ) dividindo-se todas as cargas por  $dx$ , e  $\phi' = d\phi/dx$  representa a derivada do fluxo de torção  $\phi$  em relação a  $x$ . Assim, passa-se a considerar um elemento de barra de comprimento unitário, o que trará simplificações algébricas.

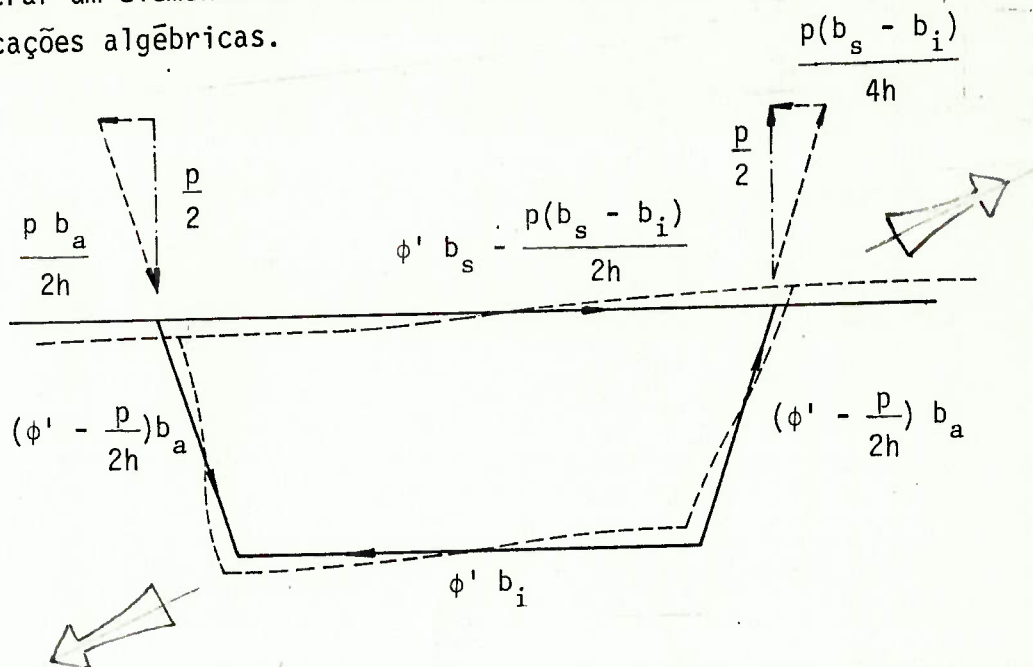


Fig. 1-6 - Carregamento de Distorção e Deformação Correspondente

Esse carregamento de distorção, que, nas seções celulares indeformáveis, solicitava as transversinas, atuará agora no próprio caixão, que se deformará.

Conforme a Fig. 1-5, o carregamento de distorção nada mais é que a diferença entre o carregamento antissimétrico e o carregamento de torção, isto é, se o carregamento antissimétrico tiver uma forma conveniente, essa diferença será nula e não haverá distorção do perfil. A Fig. 1-7 mostra como seria esse carregamento.

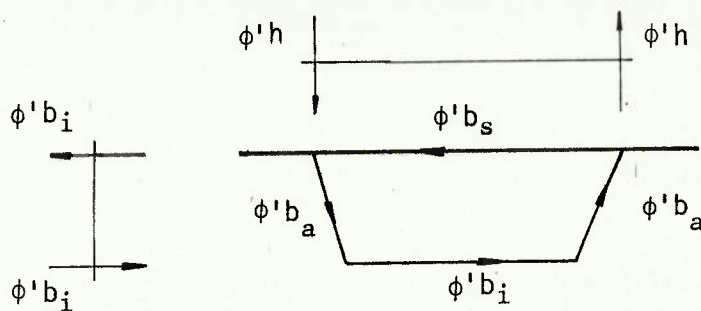


Fig. 1-7 - Carregamento Antimétrico que não provoca Distorção

Disso se conclui que a distorção é um *problema de introdução de carga*, ou seja, ela só aparece se as cargas não são introduzidas da forma ideal.

### 1.3. Solução de cada uma das Parcelas do Carregamento Tipo

#### 1.3.1. Carregamento Simétrico

O carregamento simétrico provoca apenas flexão no plano  $xy$ , flexão essa que pode ser resolvida pela Resistência dos Materiais. As hipóteses adotadas nessa solução são:

- a. o material é elástico linear;
- b. as seções permanecem planas após deformação, ou seja, a deformação por cisalhamento é desprezada;
- c. a viga é reta;
- d.  $G$   $yz$  são os eixos centrais de inércia da seção transversal.

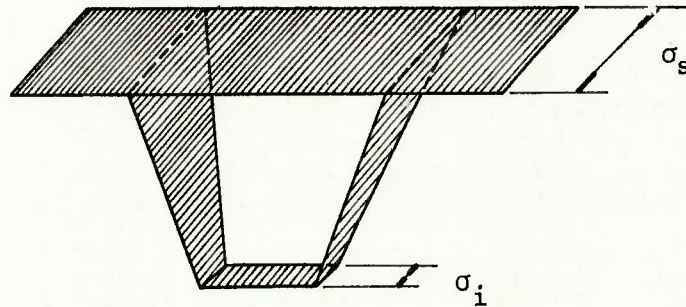
#### A. Tensões Normais

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y \quad (1.1)$$

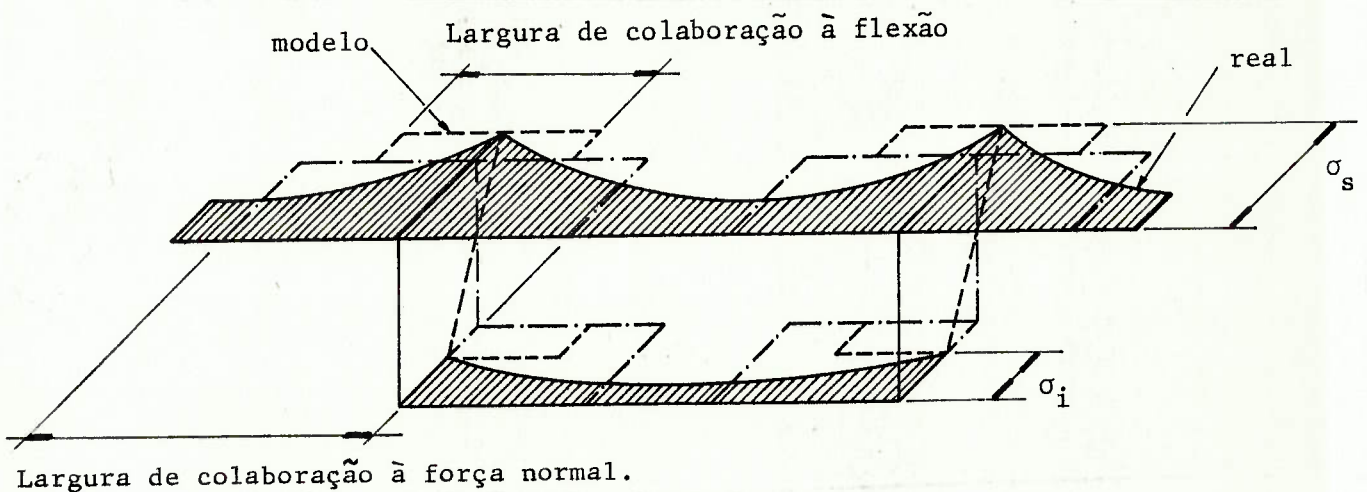
Como a Resistência dos Materiais despreza a deformação provocada por cisalhamento (hipótese b), nas seções de grande largura é preciso cuidado na determinação de  $S$  e  $I_z$ , isto é, no seu cálculo deve-se considerar, das mesas, apenas a parte útil (*largura*

colaborante). Note-se que a largura colaborante sob força normal pode ser diferente daquela sob momento fletor.

Tabelas que fornecem essas larguras colaborantes podem ser encontradas em (B-9), (B-10), (B-11) e (B-12).



1. Diagrama  $\sigma$  para Seção Estreita



2. Diagrama  $\sigma$  para Seção Larga

Fig. 1-8 - Diagrama de Tensões Normais

Note-se que a utilização de larguras colaborantes leva a um diagrama  $\sigma$  que só fornece valores razoáveis para as almas.



## B. Tensões de Cisalhamento

Admitindo seção e força normal constantes, as tensões de cisalhamento podem ser calculadas por

$$\tau = \frac{V}{t} \frac{M_{\bar{S}z}}{I_z} + \frac{\phi_0}{t} \quad (1.2)$$

O momento estático  $M_{\bar{S}z}$  da seção  $\bar{S}$  relativamente a  $z$  é calculado para a seção aberta correspondente ao caixão com um corte longitudinal (ver Fig. 1-9).

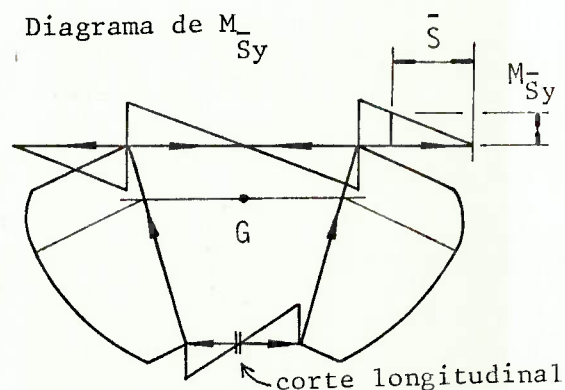
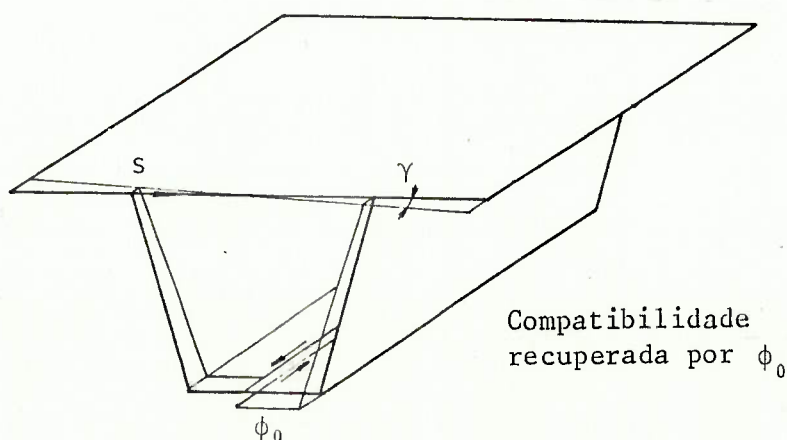
A constante  $\phi_0$  é o fluxo de cisalhamento que, aplicado ao corte longitudinal, evita os deslocamentos relativos no mesmo, isto é, promove a compatibilidade das duas faces do corte. A equação de compatibilidade necessária para o cálculo de  $\phi_0$  é:

$$\oint_c \gamma \, ds = 0 \quad (1.3)$$

Como  $\gamma = \tau/G$  e  $G$  é constante diferente de zero, pode-se escrever a mesma equação sob a forma:

$$\oint_c \tau \, ds = 0 \quad (1.4)$$

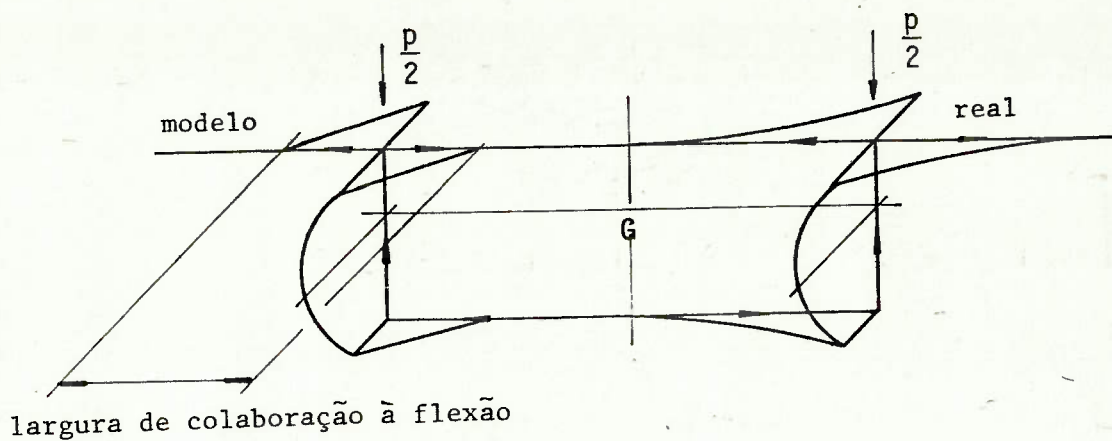
A seção considerada é, como na maioria das aplicações, simétrica, e por isso, fazendo-se o corte no eixo de simetria, o valor  $\phi_0$  resultará certamente nulo, e a tensão de cisalhamento  $\tau$  será calculada pelo 1º termo da expressão (1.2).



1. Diagrama  $\tau$  para Seção Estreita

Fig. 1-9 - Diagrama de Tensões de Cisalhamento





## 2. Diagrama $\tau$ para Seção Larga

Fig. 1-9 - Diagrama de Tensões de Cisalhamento

A análise das tensões de cisalhamento nas seções celulares pode ser encontrada em (B-6) e (B-13).

### 1.3.2. Carregamento Antimétrico

#### 1.3.2.1. Carregamento de Torção

##### 1.3.2.1.1. Torção Uniforme

Admitindo que as restrições ao empenamento não tenham efeitos importantes, o que normalmente acontece nas obras celulares de concreto, pode-se resolver o carregamento de torção pela Teoria da Torção Uniforme de Saint Venant, que, adaptada às seções celulares através da hipótese 7, corresponde à Torção de Bredt.

A Torção de Bredt baseia-se nas seguintes hipóteses:

- 1) A Teoria da Elasticidade é aplicável.
- 2) A seção transversal é indeformável.
- 3) O momento de torção é constante.
- 4) As extremidades são livres para se empenarem.
- 5)  $d\theta/dx = \theta' = \text{constante}$ , onde  $\theta$  é a rotação em torno do eixo  $x$ .

- 6)  $u = \theta' \omega_t(x, y)$ , onde  $u$  é o deslocamento na direção  $x$  e  $\omega_t$  é a função empenamento.
- 7) A tensão de cisalhamento provocada pela torção é constante ao longo da espessura da parede.

Partindo destas hipóteses (considere-se a seção unicelular da Fig. 1-2 e despreze-se a contribuição de balanço), Bredt conclui:

- a) que o fluxo de cisalhamento  $\phi = \tau t$  é constante ao longo do contorno de toda a seção;
- b) a chamada primeira fórmula de Bredt,

$$M_t = 2 \int_A \phi \, dA = 2\phi A, \quad (1.5)$$

onde  $A$  é a área limitada pelos eixos das paredes da seção celular;

- c) a chamada segunda fórmula de Bredt;

$$\oint_C \tau \, ds = 2A G \theta'; \quad (1.6)$$

- d) que o momento de inércia à torção da seção celular é dado por:

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint_C \frac{1}{t} \, ds}. \quad (1.7)$$

Aplicando-se estas conclusões ao carregamento de torção, pode-se resolvê-lo.

O carregamento de torção uniformemente aplicado vale:

$$M'_t = \frac{dM_t}{dx} = \frac{pb_s}{2}.$$

Pela primeira fórmula de Bredt; tem-se que

$$M_t = 2A \phi \rightarrow M'_t = 2A \phi'.$$

Logo,

$$\phi' = \frac{M'_t}{2A} = \frac{pb_s}{4A}.$$

Como  $A = (b_s + b_i) \frac{h}{2}$ ,

$$\phi' = \frac{pb_s}{2h(b_s + b_i)} \quad (1.8)$$

Esse valor de  $\phi'$  corresponde ao carregamento por metro linear que se deve aplicar às paredes da seção para se obter apenas torção de Bredt (ver Fig. 1-5).

A análise da torção uniforme é feita em detalhe em (B-14), (B-15), (B-16) e (B-17).

#### 1.3.2.1.2. Torção Não-Uniforme

Embora a torção não-uniforme não seja importante para seções celulares de concreto, far-se-á uma descrição intuitiva do fenômeno, não só para justificar esse fato, mas também porque existe uma semelhança entre a flexo-torção e a distorção.

Quando o momento de torção não é constante, ou quando existem condições de contorno que restringem o empenamento da seção, aparecem tensões normais nas seções transversais, não valendo mais a Teoria da Torção Uniforme.

Observe-se, por exemplo, o perfil I da Fig. 1-10, solicitado a torção.

Na realidade, existem dois sistemas portantes que podem resistir à torção.

O primeiro deles (sistema 1) é o da *torção uniforme*, apresentado no item 1.3.2.1.1.

O segundo deles (sistema 2) é o correspondente à *flexão longitudinal* (em plano horizontal) das mesas do perfil I — a *flexo-torção*.

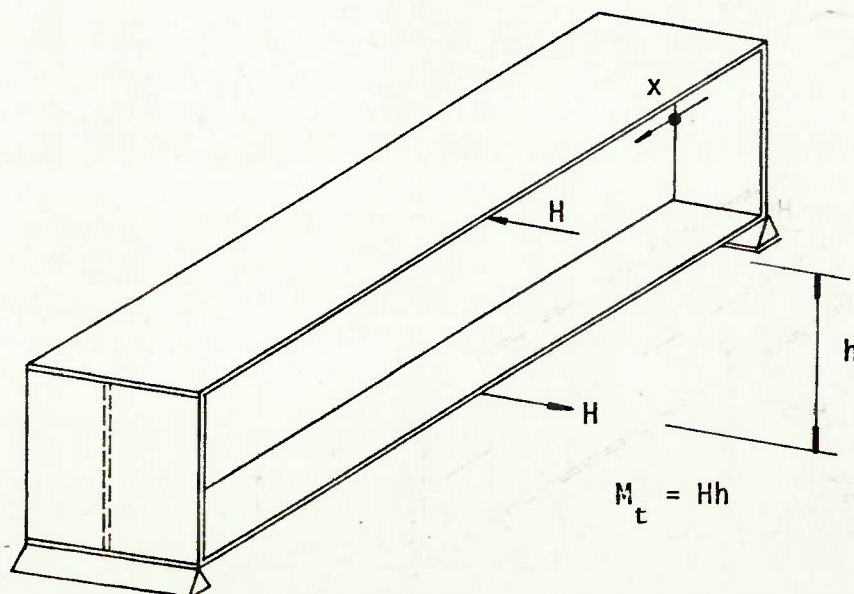


Fig. 1-10 - Perfil I sob torção

A Fig. 1-11 mostra as tensões correspondentes a cada um dos sistemas portantes.

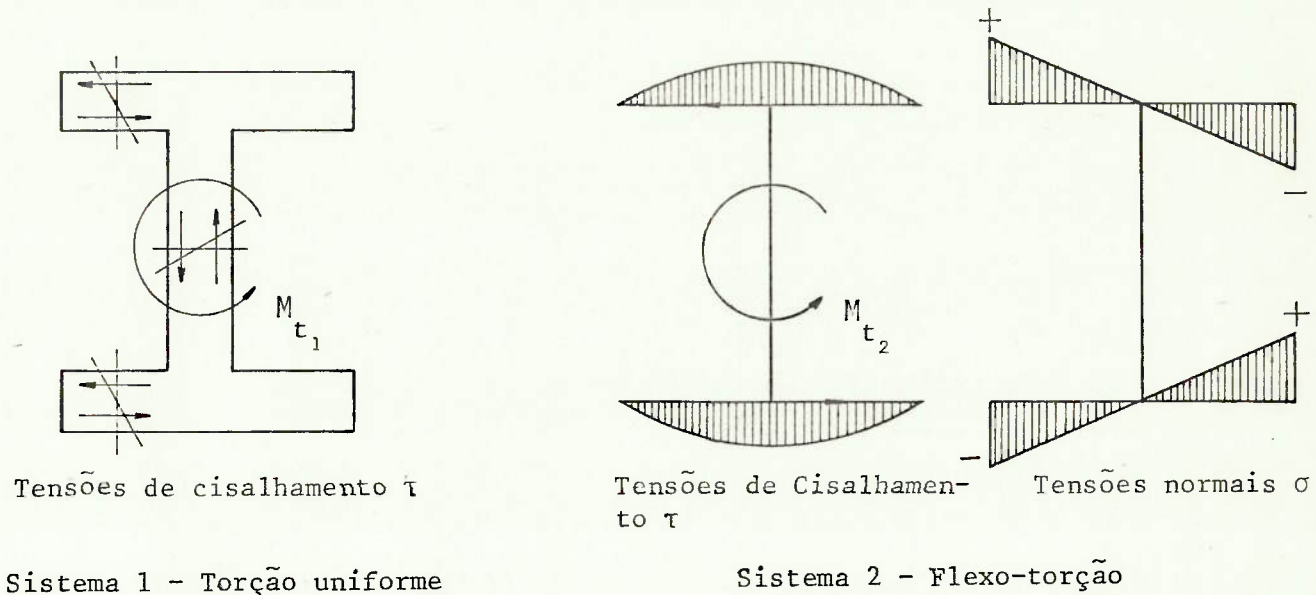


Fig. 1-11 - Tensões na Torção do Perfil I

A torção representa agora um problema hiperestático. A sua solução não é entretanto complicada, bastando considerar as equações abaixo.

Em cada seção  $x$ , parcialmente o sistema 1 e parcialmente o sistema 2 resistem ao momento de torção. Assim, o equilíbrio em cada seção  $x$  exige que:

$$M_t(x) = M_{t_1}(x) + M_{t_2}(x) \quad .$$

Como os dois sistemas resistentes existem dentro da mesma estrutura, eles estão compatibilizados em todas as seções.

Assim, a compatibilidade exige que

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) \quad .$$

Essas duas equações são suficientes para resolver o problema.

Embora esta solução não seja formalmente muito simples, o fenômeno o é. Portanto, uma análise qualitativa é possível e importante. Ela pode ser feita através da comparação da rigidez dos dois sistemas portantes; o

mais rígrado transportará mais carga.

Sejam  $R_1 = f_1(G I_t)$  → rigidez do sistema 1

$R_2 = f_2(EJ_{\omega_t})$  → rigidez do sistema 2

onde  $E$  = módulo de elasticidade

$G$  = módulo de elasticidade transversal

$I_t$  = momento de inércia à torção

$J_{\omega_t}$  = momento de inércia à flexão longitudinal das chapas.

Se  $R_1 \ll R_2$ , o sistema 2 transporta quase toda a carga, sendo desprezível o trabalho do sistema 1, ou seja, a torção uniforme. Este é o caso de perfis metálicos abertos e com chapas muito finas.

Se  $R_1 \gg R_2$ , o sistema 1 transporta quase toda a carga, ou seja, a flexo-torção é desprezível. Este é o caso das seções celulares de concreto. Nessas seções,  $R_1 \gg R_2$ , porque  $I_t$  é muito grande (fato já bem conhecido), e  $J_{\omega_t}$  é relativamente pequeno.

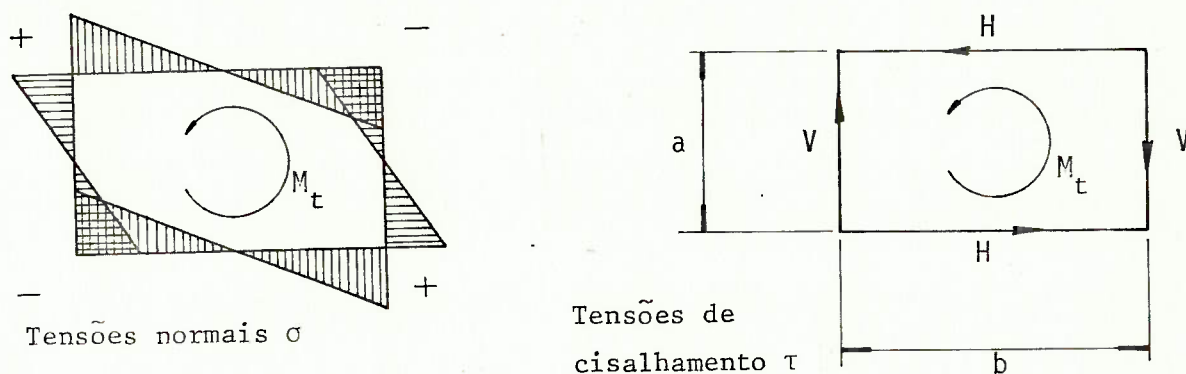


Fig. 1-12 - Tensões na Flexo-Torção de uma Seção Retangular Vazada

De (B-29) obtêm-se o diagrama  $\sigma$  e as direções das  $\tau$ , correspondentes à flexo-torção de uma seção retangular vazada com dois eixos de simetria.

Observando a Fig. 1-12, vê-se que as almas trabalham no sentido inverso ao das lajes, de modo que a parcela de momento de torção, transportada por flexo-torção, é dada por  $M_t = Ha - Vb$  e a eficiência da flexo-torção nas seções celulares cai muito, traduzindo-se numa diminuição sensível de



$$J_{\omega_t}$$

No caso limite, em que  $a = b$  (com  $t_a = t_b$ ), o valor de  $J_{\omega_t}$  se anula.

Encontram-se comentários sobre a importância da flexo-torção de seções celulares em (B-18), (B-20), (B-22), (B-24), (B-27) e (B-28).

O estudo da flexo-torção de seções vazadas pode ser encontrado em (B-6), (B-18), (B-29), (B-30), (B-31) e (B-32).

#### 1.3.2.2. Carregamento de Distorção

A análise do carregamento de distorção é o objetivo primeiro desta Dissertação, seja porque ela completa a caracterização do comportamento estrutural das seções celulares, possibilitando ao estudioso uma compreensão ampla do problema, seja porque ela possibilita ao projetista de pontes o desenvolvimento de soluções mais realistas, mais modernas.

Essa análise será feita em duas etapas: uma, em que se apresenta a solução de Knittel; outra, a de Steinle.

#### 1.4. Solução de Knittel para o Carregamento de Distorção

A solução de Knittel, a mais simples das duas, admite que *a viga de seção celular seja formada por uma série de faixas transversais, que trabalham transversalmente como quadros independentes*. Cada uma dessas faixas é como aquela representada na Fig. 1-5. (B-35).

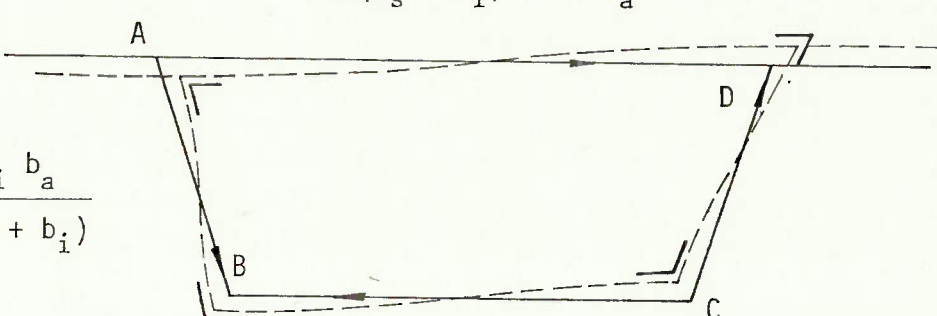
Dessa forma, o problema se resume em resolver o quadro correspondente àquela mesma Fig. 1-5, sob o carregamento de distorção.

Knittel admite, portanto, que a distorção  $\bar{\omega}$  provoca solicitações transversais.

A Fig. 1-13 reproduz o carregamento de distorção da Fig. 1-6, levando em conta o valor de  $\phi'$  calculado na equação (1.8).



$$F_s = \frac{pb_i^2}{2h(b_s + b_i)} = F_a \frac{b_i}{b_a}$$

$$F_a = \frac{p b_i b_a}{2h(b_s + b_i)}$$


$$F_i = \frac{p b_i b_s}{2h(b_s + b_i)} = F_a \frac{b_s}{b_a}$$

Fig. 1-13 - Carregamento de Distorção

Embora esse quadro tenha grau de hiperestaticidade igual a 3, devido à antimetria do carregamento e à simetria da estrutura, pode-se dizer que  $|M_a| = |M_d|$  e  $|M_b| = |M_c|$ , o que reduz o número de incógnitas hiperestáticas a uma.

Por isso é conveniente resolver o quadro pelo processo dos esforços (desprezam-se as deformações devidas a N e V).

A incógnita hiperestática  $M_b$  será levantada por uma equação de compatibilidade e a incógnita estática  $M_a$  será calculada pelas condições de equilíbrio.

O quadro será calculado partindo-se da estrutura hipostática obtida após a criação de articulações internas nos quatro nós.

Considerando a deformação de distorção, compatibilizar-se-ão os deslocamentos das quatro barras biarticuladas desse mecanismo.

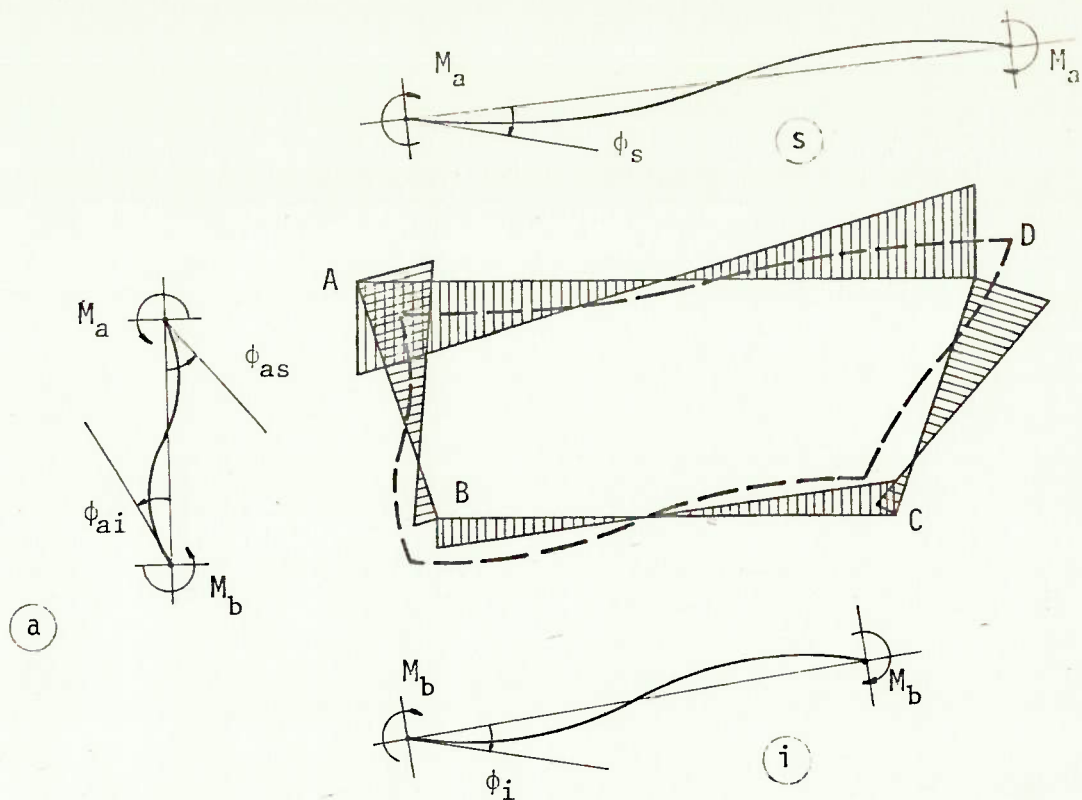


Fig. 1-14 - Diagrama M e Deformada do Quadro Devidos a Distorção

A Fig. 1-14 mostra a distorção do quadro e as correspondentes deformadas de suas barras, identificando-se as duas incógnitas  $M_a$  e  $M_b$  (momentos nos nós A, D e B, C, respectivamente).

Nessas condições:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_i &= M_b \frac{b_i}{3E I_i} - M_b \frac{b_i}{6E I_i} = M_b \frac{b_i}{6E I_i} \\
 \phi_s &= M_a \frac{b_s}{6E I_s} \\
 \phi_{ai} &= M_b \frac{b_a}{3E I_a} - M_a \frac{b_a}{6E I_a} = (2M_b - M_a) \frac{b_a}{6E I_a} \\
 \phi_{as} &= (2M_a - M_b) \frac{b_a}{6E I_a}
 \end{aligned} \right\} (1.9)$$

onde

$$I_a = \frac{t_a^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$I_s = \frac{t_s^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$$I_i = \frac{t_i^3}{12(1 - \nu^2)}$$

são os momentos de inércia das paredes da célula, trabalhando como placa no sentido transversal.

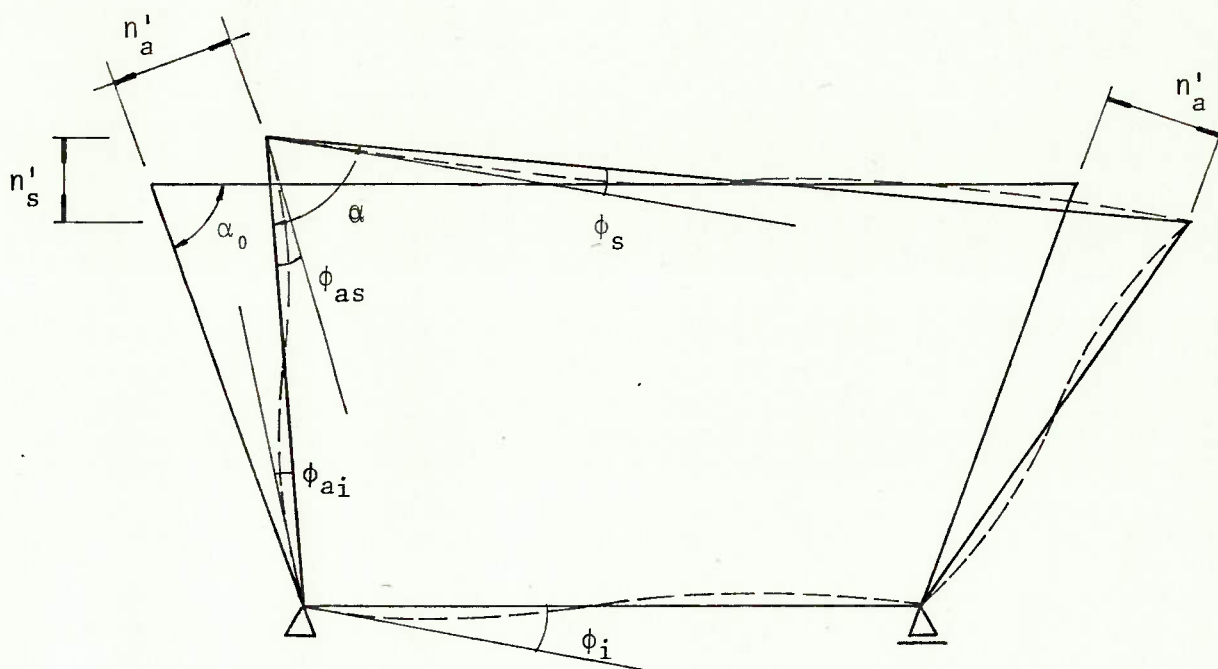


Fig. 1-15 - Compatibilização das Lajes e Almas na Distorção

A Fig. 1-15 sugere a condição que garante a compatibilidade do quadro. A correspondente equação de compatibilidade é dada por:

$$n'_s = 2 n'_a \cos \alpha_0 = 2 n'_a \frac{b_s - b_i}{2b_a},$$

com

$$n'_a = b_a (\phi_i + \phi_{ai})$$

$$n'_s = b_s (\phi_i + \phi_{ai} - \phi_{as} - \phi_s).$$

Esta equação garante que, montando-se o quadro através da união seqüencial das barras, de forma compatível, o mesmo se fechará no último nó, compatibilizado.

Desenvolvendo essa equação, tem-se:

$$b_s \left( M_b \frac{b_i}{6E I_i} + (2M_b - M_a) \frac{b_a}{6E I_a} - (2M_a - M_b) \frac{b_a}{6E I_a} - M_a \frac{b_s}{6E I_s} \right) =$$

$$= b_a \frac{b_s - b_i}{b_a} \left( M_b \frac{b_i}{6E I_i} + (2M_b - M_a) \frac{b_a}{6E I_a} \right)$$

Sejam

$$\eta = \frac{M_b}{M_a} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{b_i}{b_s}, \quad (1.10)$$

$$\eta \left( \frac{b_i}{6E I_i} + \frac{b_a}{2E I_a} - \frac{b_i(1-\xi)}{6E I_i} - \frac{b_a(1-\xi)}{3E I_a} \right) = \left( \frac{b_s}{6E I_s} + \frac{b_a}{2E I_a} - \frac{b_a(1-\xi)}{3E I_a} \right)$$

Sejam

$$\rho_i = \frac{b_i I_a}{b_a I_i} \quad \text{e} \quad \rho_s = \frac{b_s I_a}{b_a I_s} \quad (1.11)$$

Logo,

$$\eta = \frac{\rho_s + \xi + 2}{\rho_i \xi + 2\xi + 1} \quad (1.12)$$

Obtendo  $\eta$ , relação  $M_b/M_a$ , fica definida a forma do diagrama  $M$ ; resta definir a constante  $M_a$  através do equilíbrio.

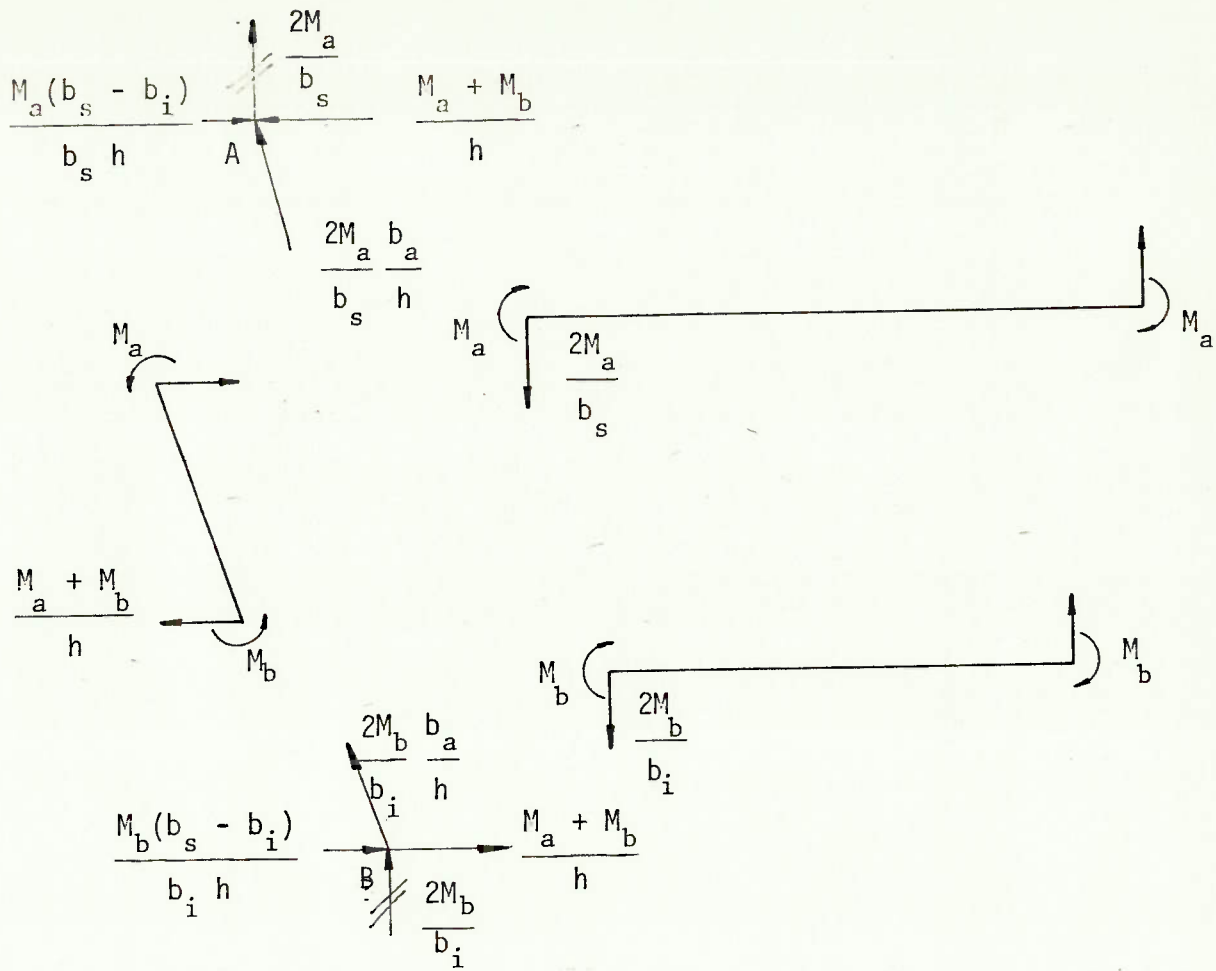


Fig. 1-16a - Forças Transversais Subentendidas pela Distorção

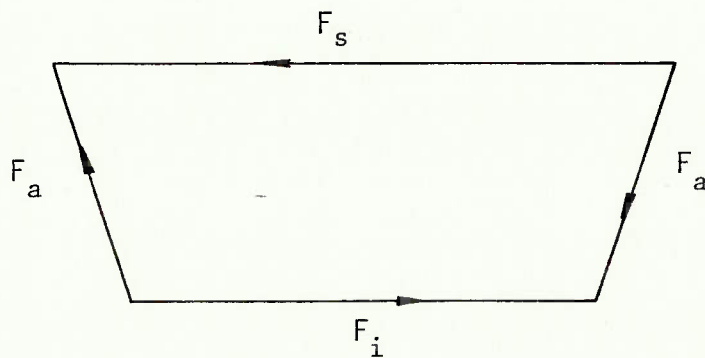


Fig. 1-16b - Forças Paralelas às Paredes Subentendidas pela Distorção

$$\left. \begin{aligned}
 F_i &= \frac{2M_a(b_i + \eta b_s)}{b_i h} = \frac{2M_a(\xi + \eta)b_s}{b_i h} = F_a \frac{b_s}{b_a} \\
 F_a &= \frac{2M_a(\xi + \eta)b_a}{b_i h} \\
 F_s &= \frac{2M_a(b_i + \eta b_s)}{b_s h} = \frac{2M_a(\xi + \eta)b_i}{b_i h} = F_a \frac{b_i}{b_a}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Na Fig. 1-16, calculam-se as resultantes nas direções das paredes da seção, necessárias para solicitar o quadro a flexão transversal.

O equilíbrio que se procura é aquele que existe entre as forças  $F$  decorrentes dos esforços internos no quadro distorcido (Fig. 1-16) e os esforços externos do carregamento de distorção (Fig. 1-13).

Como a proporção entre as forças  $F$  é a mesma nas duas figuras, essa equação de equilíbrio é dada por:

$$F_a \left\{ \begin{array}{l} \text{esforços internos} \\ \text{no quadro} \\ \text{Fig. 1-16} \end{array} \right\} = F_a \left\{ \begin{array}{l} \text{esforços externos} \\ \text{Fig. 1-13} \end{array} \right\}$$

Assim:

$$\frac{2M_a(\xi + \eta)b_a}{b_i h} = \frac{p b_i b_a}{2h(b_s + b_i)}$$

$$M_a = \frac{p b_i^2}{4(\xi + \eta)(b_s + b_i)} \quad (1.14)$$

As equações (1.12) e (1.14) definem completamente o diagrama  $M$ . Para completar a solução do quadro, resta apenas calcular os deslocamentos.

Como a forma do diagrama  $M$  é definida independentemente do carregamento (note-se que  $\eta$  é uma característica geométrica da seção), basta escolher um único deslocamento que meça o grau de distorção da seção.

Define-se como distorção do perfil o ângulo  $\gamma$  dado por (ver Fig. 1-15):



$$\gamma = \alpha - \alpha_0 \quad (1.15)$$

Como  $\alpha = \alpha_0 + \phi_{as} + \phi_s$ ,

$$\gamma = \phi_{as} + \phi_s.$$

Considerando os valores de  $\phi_{as}$  e  $\phi_s$ , tem-se:

$$\gamma = (2M_a - M_b) \frac{b_a}{6E I_a} + M_a \frac{b_s}{6E I_s} = \frac{M_a b_a}{6E I_a} (2 + \rho_s - \eta) \quad (1.16)$$

Substituindo (1.14) em (1.16), tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{p b_i^2 b_a}{24E I_a} \frac{2 + \rho_s - \eta}{(\xi + \eta)(b_s + b_i)} = \frac{p b_i b_s}{2(b_s + b_i)} \frac{b_i b_a (2 + \rho_s - \eta)}{12E b_s I_a (\xi + \eta)} = \\ &= \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)} \frac{1}{E I_Q}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde  $E I_Q$  representa a rigidez do quadro à distorção e  $I_Q$  é dado por:

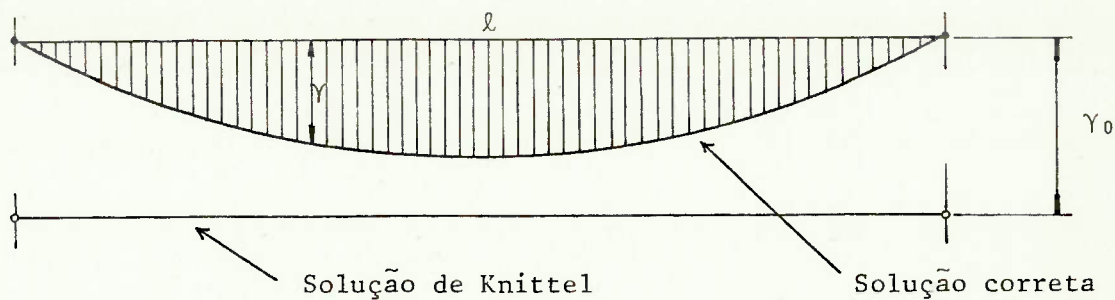
$$I_Q = \frac{12I_a(\xi + \eta)}{b_a \xi (2 + \rho_s - \eta)} \quad (1.18)$$

Com as equações (1.9) a (1.18), dado o carregamento  $p$ , é possível calcular os momentos  $M_a$ ,  $M_b$  e a distorção  $\gamma$ ; é possível, portanto, resolver o carregamento de distorção dentro das hipóteses de Knittel.

A esta altura, convém fazer uma análise crítica da Solução de Knittel.

Ao desprezar a interação faixa a faixa, a Solução de Knittel não consegue garantir a completa compatibilidade do conjunto nos casos de  $p$  variável, cargas concentradas ou junto às transversinas.

Observe-se, por exemplo, a Fig. 1-3: a Solução de Knittel fornece, para todo o vão, a mesma distorção  $\gamma_0$  definida pelo valor da carga excêntrica  $p$ , enquanto sobre os apoios, devido à existência das transversinas, não haverá distorção e  $\gamma$  será nulo, aparecendo, portanto, uma descontinuidade junto ao apoio, onde  $\gamma$  salta de zero para  $\gamma_0$  (ver Fig. 1-17).

Fig. 1-17 - Diagrama  $\gamma$  para Carga  $p$  Uniforme

Considere-se, agora, o caso em que a viga da Fig. 1-3 seja carregada com uma carga concentrada excêntrica no meio do vão (ver Fig. 1-18).

Nesse caso, além do problema da *descontinuidade* (bastante clara na Fig. 1-18), a Solução de Knittel não propõe critério para a determinação da *largura colaborante*  $b$ , a ser considerada na solução do quadro.

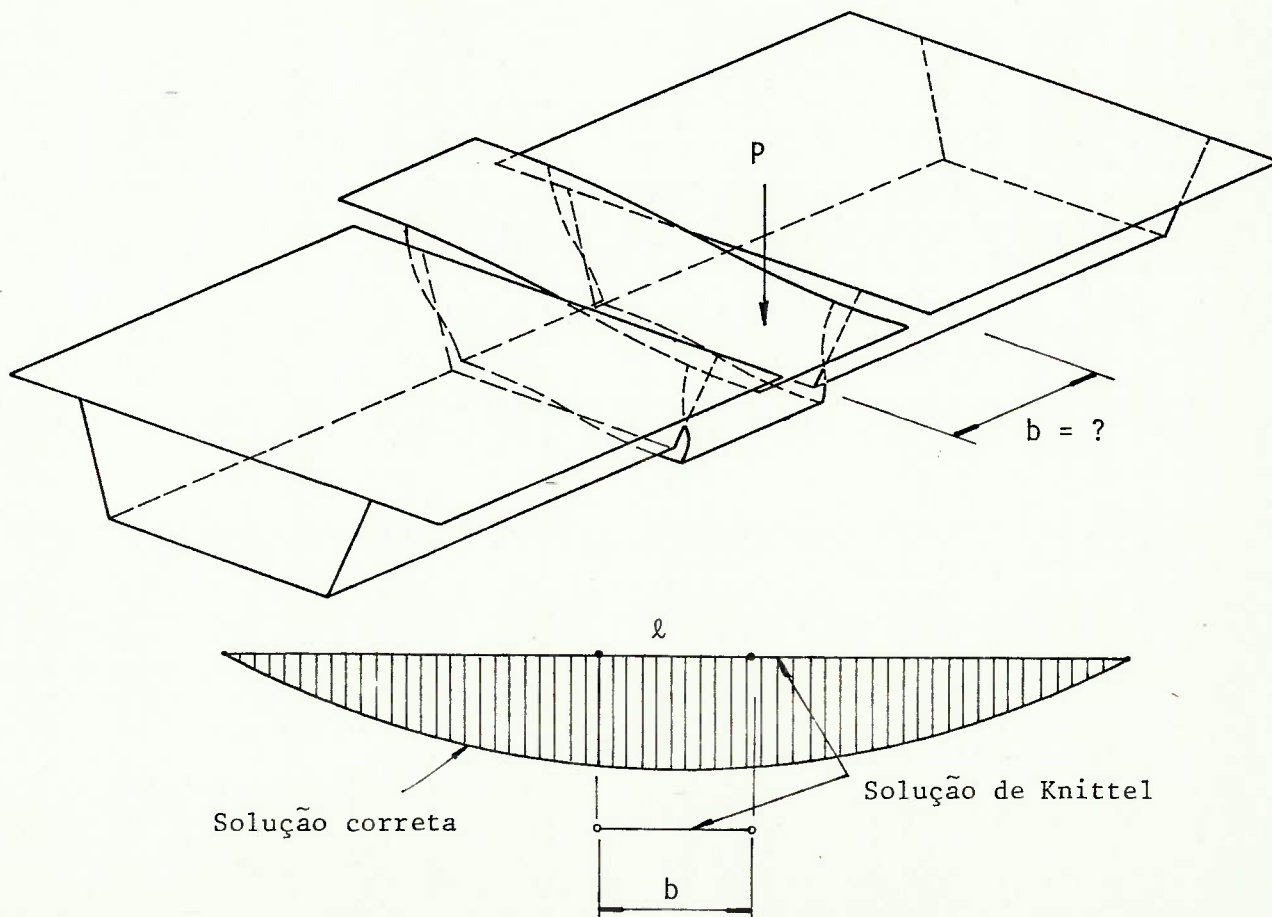


Fig. 1-18 - Caso de Carga Concentrada

Nos próximos itens, desenvolver-se-ão soluções que procuram resolver esses problemas apresentados pela Solução de Knittel.

### 1.5. Solução de Steinle para o Carregamento de Distorção

Para corrigir esses erros que a Solução de Knittel apresenta, Steinle considerou a *flexão longitudinal das paredes da seção, como chapas*. Esta solução encontra-se desenvolvida em muitos trabalhos, tais como (B-18), (B-19), (B-20) e (B-23). Foi proposta pela primeira vez por Vlassov em (B-41), sendo mais profundamente analisada por Steinle em (B-18).

Observe-se a Fig. 1-19. As tensões de cisalhamento correspondentes a essa flexão adicional distorcerão as partes da viga antes não distorcidas, e diminuirão a distorção do quadro de largura  $b$ , de forma a promover a compatibilidade que faltava.

A flexão longitudinal das paredes corresponde, na realidade, a um novo sistema capaz de resistir ao carregamento de distorção.

É possível isolar esse novo sistema do anterior (quadro transversal) através da articulação das arestas longitudinais, o que significa tornar hipostático o quadro transversal, eliminar sua capacidade portante. Observe-se que a estrutura resultante precisa das transversinas de apoio, porque sem elas fica também hipostática (ver Fig. 1-20).

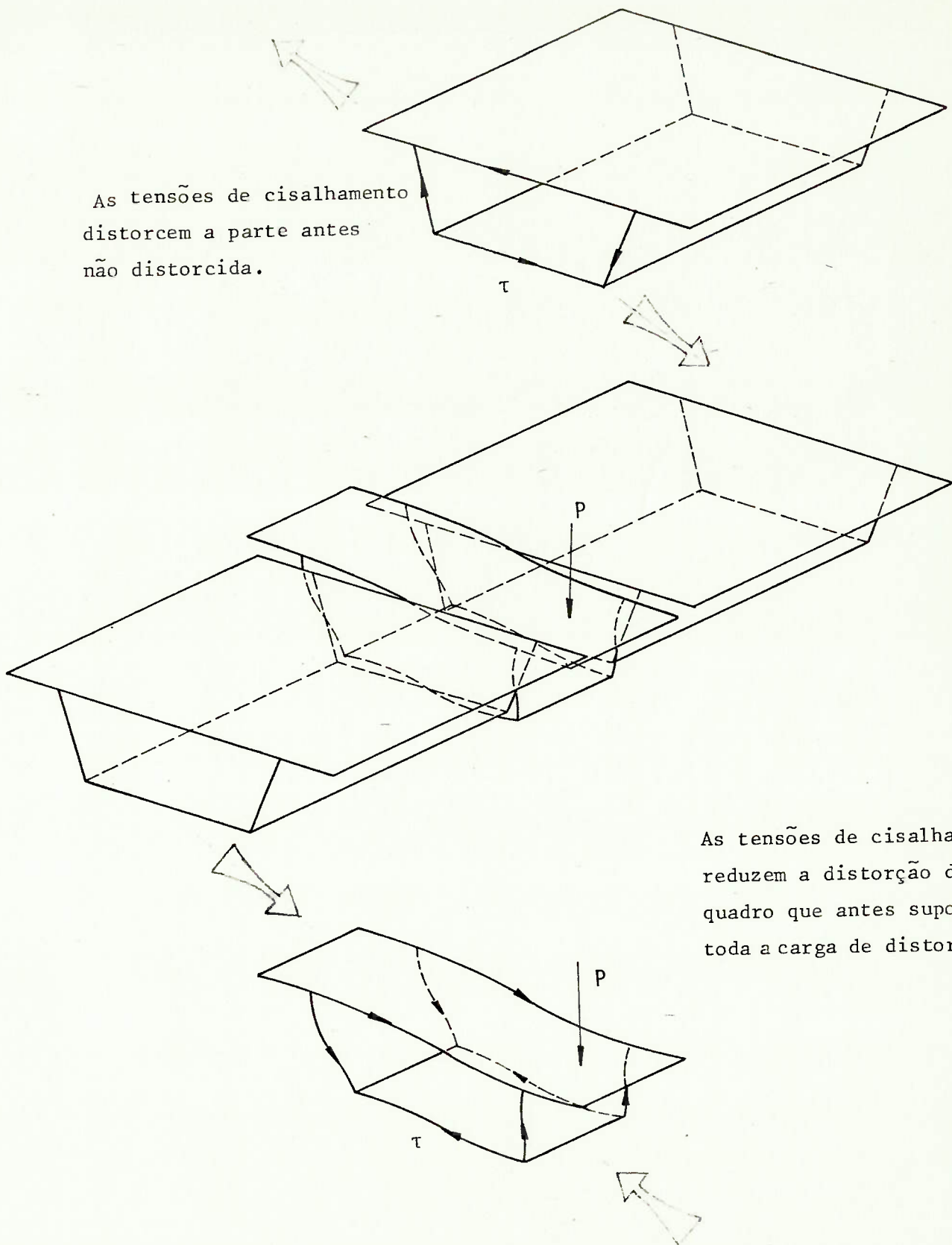
A *Teoria das Estruturas Plissadas* estuda exatamente este tipo de estrutura.

#### 1.5.1. Solução da Teoria das Estruturas Plissadas

São as seguintes suas hipóteses básicas:

- a) *As arestas longitudinais são articuladas, como descrito acima.*
- b) *As tensões normais na seção transversal variam linearmente ao longo das paredes (como na Resistência dos Materiais), e de tal forma que há compatibilidade nas arestas, (ver Fig. 1-21). Esta hipótese corresponde a desprezar a deformação por cisalhamento.*

As tensões de cisalhamento distorcem a parte antes não distorcida.



As tensões de cisalhamento reduzem a distorção do quadro que antes suportava toda a carga de distorção.

Fig. 1-19 - Recuperação da Compatibilidade através da Flexão Longitudinal das Paredes como Chapas

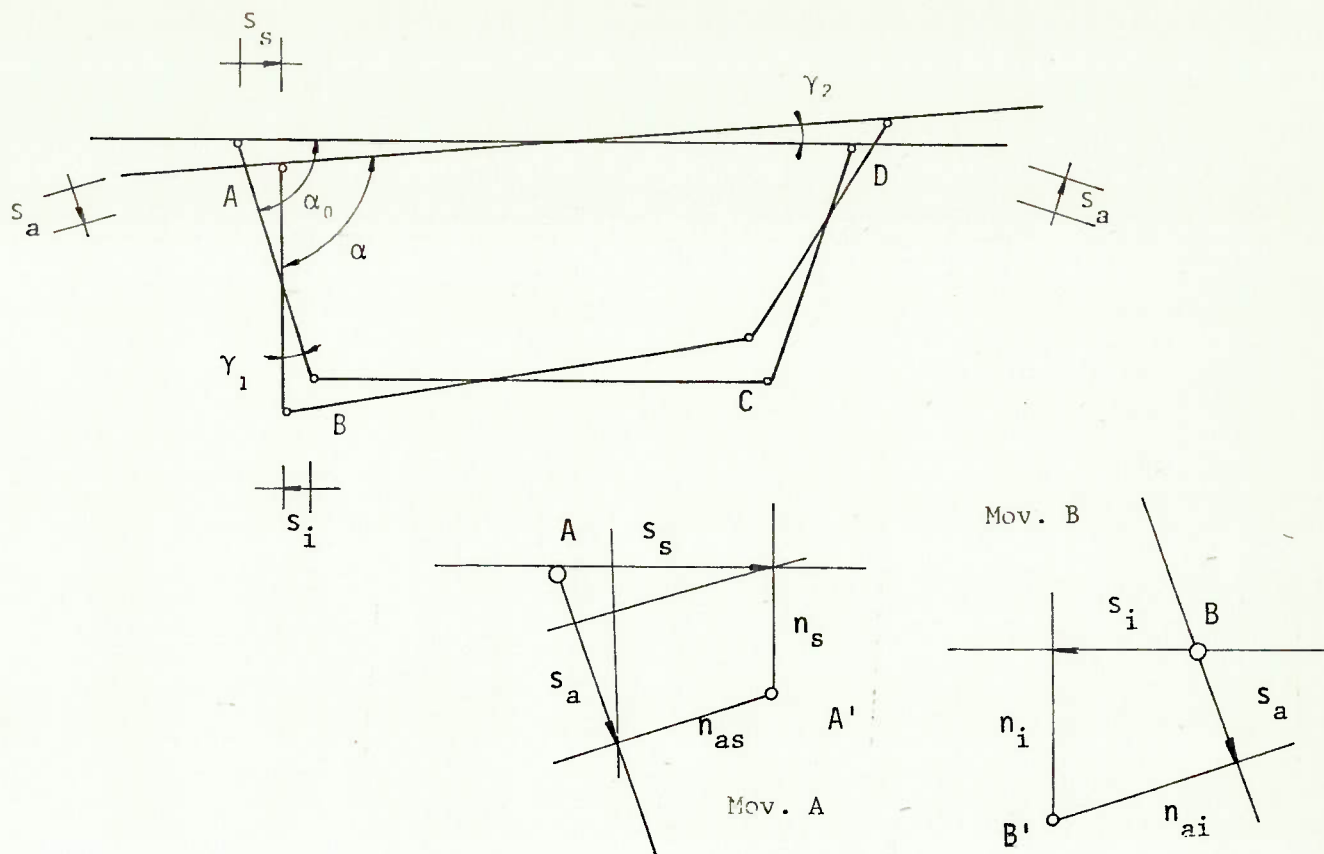
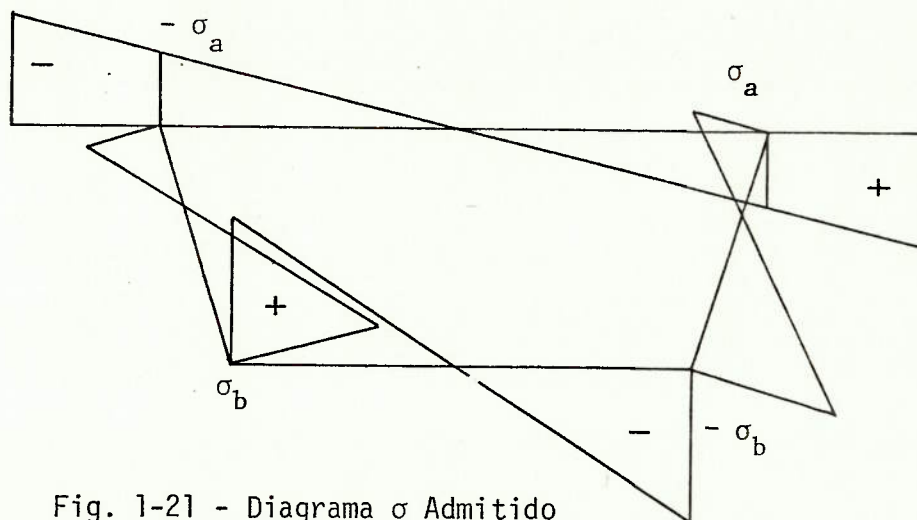


Fig. 1-20 - Distorção da Seção com Arestas Articuladas

Fig. 1-21 - Diagrama  $\sigma$  Admitido

#### 1.5.1.1. Definição Geométrica da Distorção

Da mesma forma que na equação (1.15),

$$\gamma = \alpha - \alpha_0.$$

Da Fig. 1-20:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Para o cálculo de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , observe-se o movimento dos nós A e B na Fig. 1-20.

Assim:

$$\gamma_2 = \frac{2n_s}{b_s} \quad \gamma_1 = \frac{n_{as} + n_{ai}}{b_a} .$$

Como:

$$\cos\alpha_0 = \frac{(b_s - b_i)}{2b_a}$$

$$\sin\alpha_0 = \frac{h}{b_a} ,$$

tem-se que:

$$n_s = \frac{(s_a - s_s \cos\alpha_0)}{\sin\alpha_0} = \left( s_a - \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_s \right) \frac{b_a}{h}$$

$$n_{as} = \frac{(s_s - s_a \cos\alpha_0)}{\sin\alpha_0} = \left( s_s - \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_a \right) \frac{b_a}{h}$$

$$n_{ai} = \frac{(s_i + s_a \cos\alpha_0)}{\sin\alpha_0} = \left( s_i + \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_a \right) \frac{b_a}{h}$$

de onde:

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = & \left( s_a - \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_s \right) \frac{2b_a}{hb_s} + \left( s_s - \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_a \right) \frac{b_a}{hb_a} + \\ & + \left( s_i + \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_a \right) \frac{b_a}{hb_a} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{2b_a}{hb_s} s_a + \frac{b_i}{hb_s} s_s + \frac{1}{h} s_i \quad (1.19)$$

A equação (1.19) relaciona a distorção  $\gamma$  aos deslocamentos das paredes, consideradas como chapas —  $s_a$ ,  $s_s$ ,  $s_i$ .

#### 1.5.1.2. Definição da Forma do Diagrama de Tensões Normais

Como o carregamento de distorção (ver Fig. 1-13) é auto-equilibrado na seção, as tensões por ele provocadas também serão auto-equilibradas, de modo que os esforços solicitantes resultantes serão nulos:

$$N = M_y = M_z = V_y = V_z = M_t = 0$$



As equações  $N = M_z = 0$  são satisfeitas pelo diagrama  $\sigma$  da Fig. 1-21.

As equações  $V_y = V_z = M_t = 0$  serão verificadas no cálculo das tensões de cisalhamento  $\tau$ .

A equação  $M_y = 0$  deve ser imposta.

Para o cálculo de  $M_y$ , considere-se o diagrama  $\sigma$  da Fig. 1-21 e a Fig. 1-22.

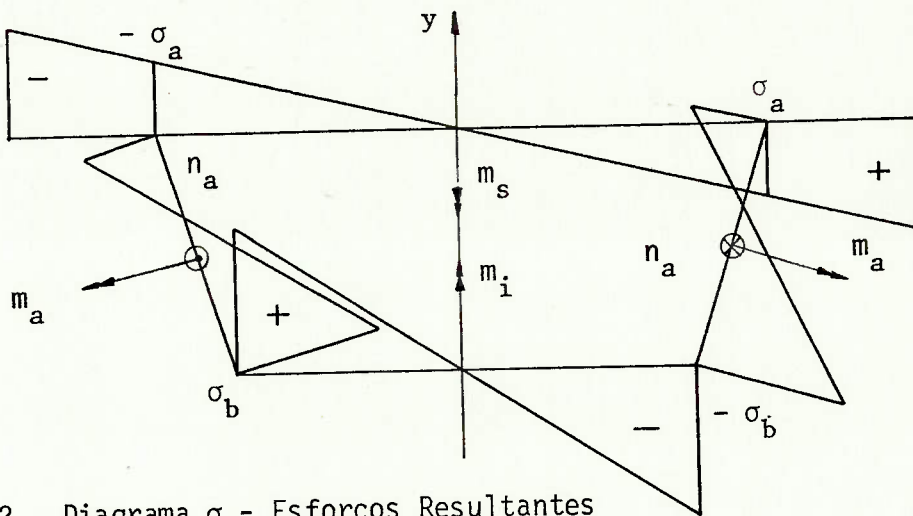


Fig. 1-22 - Diagrama  $\sigma$  - Esforços Resultantes

$$M_y = m_i - m_s - 2m_a \cos\alpha_0 + n_a \frac{b_s + b_i}{2} = 0 \quad (1.20)$$

onde

- $m_i$  = momento fletor na laje inferior
- $m_s$  = momento fletor na laje superior
- $m_a$  = momento fletor na alma
- $n_a$  = força normal na alma.

Das flexões indicadas na Fig. 1-22:

$$m_i = 2 \frac{\sigma_b J_i}{b_i}$$

$$m_s = 2 \frac{\sigma_a J_s}{b_s}$$

$$m_a = 2 \frac{(\sigma_a + \sigma_b) J_a}{2b_a}$$

$$n_a = \frac{\sigma_b - \sigma_a}{2} A_a = \frac{6(\sigma_b - \sigma_a) J_a}{b_a^2}$$

onde:

$$J_i = \frac{t_i b_i^3}{12}$$

$$J_s = \frac{t_s b_s^3}{12}$$

$$J_a = \frac{t_a b_a^3}{12}$$

são os momentos de inércia das paredes da célula trabalhando como chapa no sentido longitudinal.

Substituindo estas equações na expressão de  $M_y$ , tem-se:

$$M_y = \frac{2\sigma_b J_i}{b_i} - \frac{2\sigma_a J_s}{b_s} - \frac{2(\sigma_a + \sigma_b) J_a}{b_a} \frac{b_s - b_i}{2b_a} + \frac{6(\sigma_b - \sigma_a) J_a}{b_a^2} \cdot \frac{b_s + b_i}{2} = 0$$

$$\sigma_b \left( \frac{2J_i}{b_i} + \frac{2J_a b_s}{b_a^2} + \frac{4J_a b_i}{b_a^2} \right) = \sigma_a \left( \frac{2J_s}{b_s} + \frac{2J_a b_i}{b_a^2} + \frac{4J_a b_s}{b_a^2} \right)$$

Definindo:

$$\beta = \frac{\sigma_b}{\sigma_a}$$

$$\xi = \frac{b_i}{b_s} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{b}{b_s}$$

(1.21)

$$\psi_s = \frac{J_s b_a^2}{J_a b_s^2} = \frac{b t_s}{b_a t_a} \delta^2$$

$$\psi_i = \frac{J_i b_a^2}{J_a b_i^2} = \frac{b_i t_i}{b_a t_a}$$

(1.22)

tem-se que

$$\beta = \frac{\frac{J_s}{b_s} + \frac{J_a b_i}{b_a^2} + \frac{2J_a b_s}{b_a^2}}{\frac{J_i}{b_i} + \frac{J_a b_s}{b_a^2} + \frac{2J_a b_i}{b_a^2}} = \frac{\psi_s + \xi + 2}{1 + \xi(2 + \psi_i)} \quad (1.23)$$

O valor de  $\beta$  dado por (1.23) define a forma do diagrama  $\sigma$ ; falta a constante  $\sigma_a$ , a ser definida pelo carregamento de distorção (ver item 1.5.1.4).

### 1.5.1.3. Analogias

De forma a simplificar as expressões, definir-se-ão, por analogia com a expressão da flexão  $\sigma = \frac{M_z}{J_z} y$ , as tensões normais provocadas pela distorção de perfil por:

$$\sigma = \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (1.24)$$

$\omega$  = chamada função empenamento na distorção, é definida como sendo uma função  $\omega(y, z)$ , com a mesma forma do diagrama  $\sigma$ . O diagrama  $\omega$  é mostrado na Fig. 1-23.

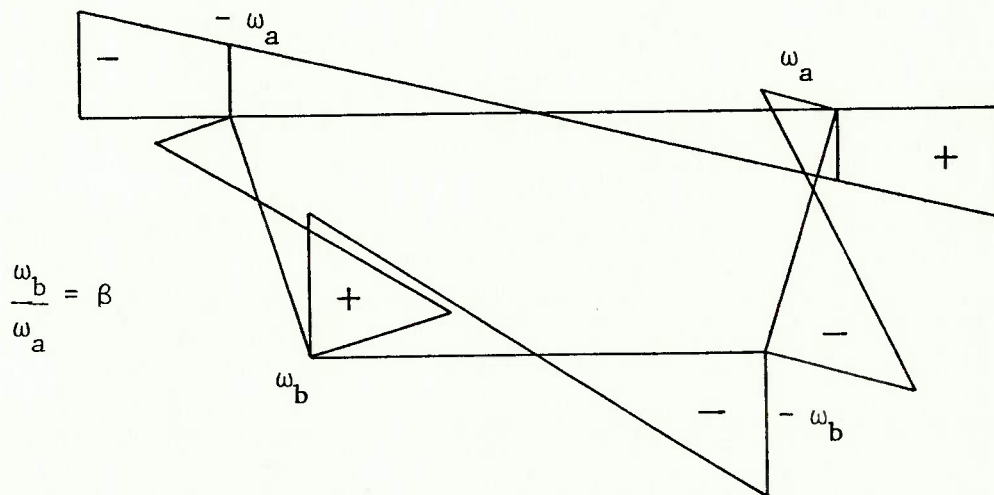


Fig. 1-23 - Diagrama  $\omega$

$B$  = chamado bimomento de distorção, é um esforço solicitante, definido como sendo uma função  $B(x)$  dada por:

$$B = \int_S \sigma \omega \, dS \quad (1.25)$$

Dessa forma,  $B$  é constante na seção.

$J_\omega$  = chamado momento de inércia à distorção, é uma característica da seção (portanto, constante na seção) e resulta igual a:

$$\begin{aligned} B &= \int_S \sigma \omega \, dS = \frac{B}{J_\omega} \int_S \omega^2 \, dS \\ J_\omega &= \int_S \omega^2 \, dS \end{aligned} \quad (1.26)$$

De posse dessas definições, procurar-se-á desenvolver uma expressão que relacione  $\gamma$  com  $B$ .

Da flexão de cada uma das chapas, tem-se que:

$$\begin{aligned} s_s'' &= -\frac{m_s}{E J_s} = -\frac{2\sigma_a J_s}{E J_s b_s} = -\frac{2}{b_s} \frac{B}{E J_\omega} \omega_a \\ s_i'' &= -\frac{m_i}{E J_i} = -\frac{2\sigma_b J_i}{E J_i b_i} = -\frac{2}{b_i} \frac{B}{E J_\omega} \omega_b = -\frac{2\beta}{b_i} \frac{B}{E J_\omega} \omega_a \\ s_a'' &= -\frac{m_a}{E J_a} = -\frac{(\sigma_a + \sigma_b) J_a}{E J_a b_a} = -\frac{(1 + \beta)}{b_a} \frac{B}{E J_\omega} \omega_a \end{aligned}$$

Derivando duas vezes a equação (1.19), e substituindo, na expressão resultante, as equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \frac{2b_a}{hb_s} s_a'' + \frac{b_i}{hb_s} s_s'' + \frac{1}{h} s_i'' \\ \gamma'' &= -\frac{B}{E J_\omega} \omega_a \left( \frac{2(1 + \beta)}{hb_s} + \frac{2\xi}{hb_s} + \frac{2\beta}{hb_i} \right) \end{aligned}$$

Como o valor  $\omega_a$  ainda não foi definido, podemos fazê-lo agora, de forma que:

$$\gamma'' = -\frac{B}{E J_\omega} \quad (1.27)$$

(note-se analogia com a flexão, onde  $y'' = -\frac{M}{EJ}$ ). Para isso é preciso que:

$$\omega_a = \frac{\frac{hb_s}{2}}{1 + \xi + \beta(1 + \frac{1}{\xi})} \quad (1.28)$$

Definido o valor de  $\omega_a$  pela equação (1.28), torna-se possível calcular  $J_\omega$

$$J_\omega = \int_S \omega^2 dS = \omega_a^2 \int_S \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 dS$$

O diagrama  $\frac{\omega}{\omega_a}$  é mostrado na Fig. 1-24.

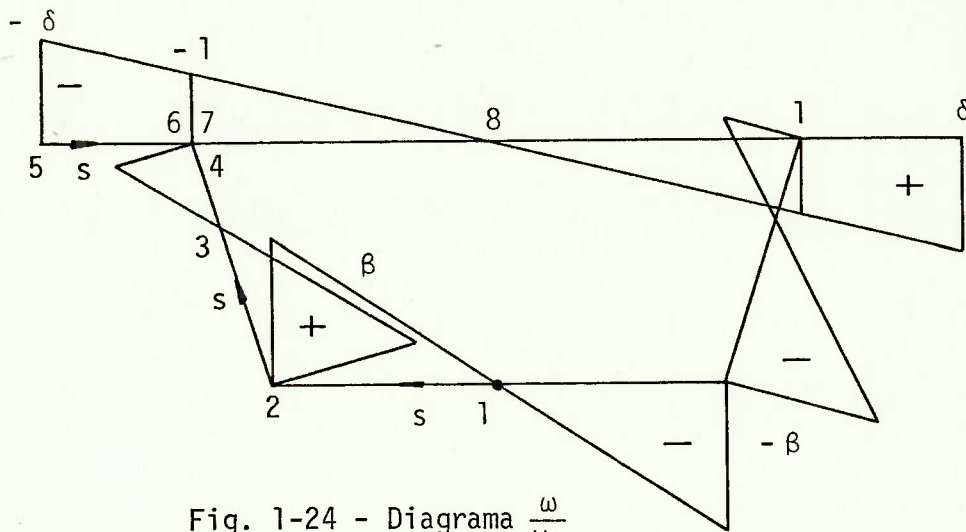


Fig. 1-24 - Diagrama  $\frac{\omega}{\omega_a}$

A função  $\frac{\omega}{\omega_a}$  pode ser descrita pelas expressões:

a) laje inferior:

$$\frac{\omega}{\omega_a} = \frac{2\beta}{b_i} s \quad (1.29a)$$

b) alma:

$$\frac{\omega}{\omega_a} = \beta - \frac{(1 + \beta)}{b_a} s \quad (1.29b)$$

c) laje superior:

$$\frac{\omega}{\omega_a} = -\delta + \frac{2\delta}{b} s \quad (1.29c)$$

$$\begin{aligned}
\int_S \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 dS &= \int_S \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 t ds = 2 \left[ t_i \int_0^{b_i/2} \left(\frac{2\beta}{b_i} s\right)^2 ds + t_a \int_0^{b_a} \left(\beta - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(1+\beta)}{b_a} s\right)^2 ds + t_s \int_0^{b/2} \left(\delta - \frac{2\delta}{b} s\right)^2 ds \right] = \\
&= 2 \left[ t_i \left(\frac{4\beta^2}{b_i^2} \frac{s^3}{3}\right) \Big|_0^{b_i/2} + t_a \left(\beta^2 s - 2\beta \frac{(1+\beta)}{b_a} \frac{s^2}{2} + \frac{(1+\beta)^2}{b_a^2} \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{s^3}{3}\right) \Big|_0^{b_a} + t_s \left(\delta^2 s - \frac{4\delta^2}{b} \frac{s^2}{2} + \frac{4\delta^2}{b^2} \frac{s^3}{3}\right) \Big|_0^{b/2} \right] = \\
&= \frac{b_i t_i}{3} \beta^2 + b_a t_a 2 \left[ \beta^2 - \beta(1+\beta) + \frac{(1+\beta)^2}{3} \right] + \\
&+ b t_s \left(\delta^2 - \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^2\right) = \frac{b_i t_i}{3} \beta^2 + \frac{b_a t_a}{3} \cdot (2 - 2\beta + 2\beta^2) + \\
&+ \frac{b t_s}{3} \delta^2 = \frac{b_a t_a}{3} \left[ \beta^2 \psi_i + 2(\beta^2 - \beta + 1) + \psi_s \right]
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
J_\omega &= \omega_a^2 \int_S \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 dS, \\
J_\omega &= \frac{A_0^2 A_a}{12} \frac{\beta^2 \psi_i + 2(\beta^2 - \beta + 1) + \psi_s}{\left[1 + \xi + \beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\right]^2} \quad (1.30)
\end{aligned}$$

onde:

$$A_0 = b_s h \quad e \quad A_a = b_a t_a. \quad (1.31)$$

#### 1.5.1.4. O Carregamento de Distorção e as Tensões de Cisalhamento

Para completar a solução do problema, falta relacionar as tensões  $\tau$  ao carregamento de distorção.



A. Cálculo das Tensões  $\tau$ 

Da analogia com a flexão pode-se tirar que:

$$\tau = - \frac{B' M_{S\omega}}{t J_{\omega}} + \frac{\phi_0}{t}, \quad (1.32)$$

onde:  $M_{S\omega}$  é o momento estático em relação à função  $\omega$ :  $M_{S\omega} = \int_S \omega d\bar{S}$   
 $\phi_0$  é um fluxo de cisalhamento, uma constante a determinar.

Para determinar  $\phi_0$  podem-se usar tanto *equações de equilíbrio* como *de compatibilidade*.

Das equações de equilíbrio, as que ainda não foram consideradas são

$$V_z = V_y = M_t = 0.$$

$V_z = V_y = 0$  são identicamente nulas para as  $\omega$  admitidas; resta considerar  $M_t = 0$ .

Uma alternativa é a equação de compatibilidade que garante que a seção permaneça fechada após a deformação, é a equação (1.3):

$$\oint_C \tau ds = 0.$$

As duas equações,  $M_t = 0$  (de equilíbrio) e  $\oint_C \tau ds = 0$  (de compatibilidade), que são conceitualmente diferentes, acabam sendo equivalentes para efeito do cálculo de  $\phi_0$ .

Na realidade, este fato relativamente estranho tem explicação. Considere-se uma seção unicelular assimétrica como a da Fig. 1-25.

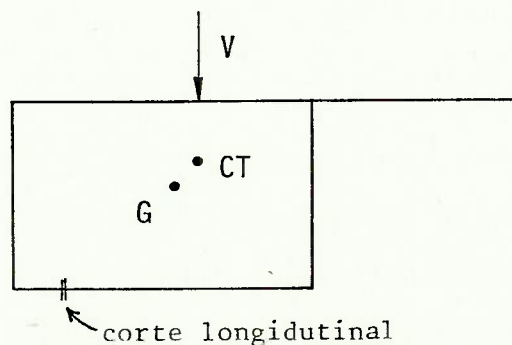


Fig. 1-25 - Caixa Assimétrica Solicitada por Força Cortante

Considere-se ainda a sollicitação correspondente a uma força cortante  $V$  passando pelo centro de torção  $CT$ .

Para determinar as tensões de cisalhamento  $\tau$  devidas a  $V$ , usa-se o procedimento indicado no item 1.3.1.B.

$$\tau = \frac{V}{t} \frac{M_z}{I_z} + \frac{\phi_0}{t}$$

A primeira parcela da expressão (1.2), reproduzida acima, corresponde às tensões  $\tau$  numa seção aberta obtida do caixão através de um corte longitudinal, como indica a Fig. 1-25.

A segunda parcela corresponde ao fluxo necessário para recuperar a compatibilidade no corte. Essa segunda parcela, de acordo com 1.3.1.B, deve ser determinada pela equação de compatibilidade

$$\oint_c \tau ds = 0.$$

Existe, entretanto, um outro caminho. Conhecida a posição do centro de torção  $CT$ , pode-se calcular  $\phi_0$  anulando o momento das tensões  $\tau$  em relação a  $CT$ :  $M_t = 0$ .

As duas equações são, portanto, equivalentes para cálculo de  $\phi_0$ .

Isso acontece porque existe uma ligação entre as duas equações. De fato, o valor do momento de torção ( $M_t$ ) depende da equação de compatibilidade ( $\oint_c \tau ds = 0$ ) porque é essa equação que determina o centro de torção.<sup>c</sup>

Mais precisamente, a equação de compatibilidade determina o centro de cisalhamento que coincide com o centro de torção por exigência do Teorema de Maxwell.

No caso de  $V \neq 0$ , não é possível usar a equação  $M_t = 0$  sem conhecer o centro de torção, ou seja, sem ter usado antes a equação de compatibilidade ou a Teoria da Flexo-Torção.

No caso de  $V = 0$ , pode-se usar a equação  $M_t = 0$  sem conhecer o centro de torção  $CT$  porque basta escrever  $M_0 = 0$  para um ponto  $O$  qualquer.

De fato,

$$\vec{M}_t = \vec{M}_c = \vec{M}_0 + (0 - c) \wedge \vec{V} = \vec{M}_0 = \vec{0} .$$

Adotar-se-á, entre esses dois caminhos, o do equilíbrio:  $M_t = 0$ .

Como o sistema de forças correspondentes às tensões  $\tau$  tem resultante nula, para garantir  $M_t = 0$  (calculado em relação ao centro de torção) basta impor  $M_0 = 0$  para qualquer ponto 0.

#### A.1. Cálculo de $M_{S\omega}$

Considere-se a Fig. 1-24.

$$M_{S\omega}^- = \omega_a \int_0^s \left( \frac{\omega}{\omega_a} \right) t \, ds \quad (1.33)$$

Calculando pelas áreas do diagrama  $\frac{\omega}{\omega_a}$ , tem-se:

a) Laje inferior:

$$\frac{M_{S\omega}^-}{\omega_a} = \int_0^s \frac{2\beta}{b_i} s \, t_i \, ds = \frac{\beta t_i}{b_i} s^2$$

$$\text{para: } s = \frac{b_i}{2} \rightarrow \frac{M_{S\omega_2}^-}{\omega_a} = \frac{\beta b_i t_i}{4}$$

b) Alma:

$$\begin{aligned} \frac{M_{S\omega}^-}{\omega_a} &= \frac{\beta b_i t_i}{4} + \int_0^s \left( \beta - \frac{1 + \beta}{b_a} s \right) t_a \, ds = \frac{\beta b_i t_i}{4} + \beta t_a s - \\ &\quad - \frac{1 + \beta}{2b_a} t_a s^2 \end{aligned}$$

$$\text{para: } s = b_a \rightarrow \frac{M_{S\omega_4}^-}{\omega_a} = \frac{\beta b_i t_i}{4} + \frac{b_a t_a}{2} (\beta - 1)$$

c) Laje em balanço:

$$\frac{M_{S\omega}^-}{\omega_a} = \int_0^s \left( -\delta + \frac{2\delta}{b} s \right) t_s \, ds = -\delta t_s s + \frac{\delta t_s}{b} s^2$$

$$\text{para } s = (\delta - 1) \frac{b_s}{2}$$

$$\frac{M_{S\omega_6}^-}{\omega_a} = - (\delta^2 - \delta) \frac{b_s t_s}{2} + \delta(\delta - 1)^2 \frac{b_s^2 t_s}{4b} = \frac{b_s t_s}{4} (1 - \delta^2)$$

d) Laje superior interna:

$$\frac{M_{S\omega}^-}{\omega_a} = \frac{M_{S\omega_4}^-}{\omega_a} + \frac{M_{S\omega_6}^-}{\omega_a} + \int_0^s \left(-1 + \frac{2}{b_s} s\right) t_s ds$$

Observe-se que  $s$  inicia no  $\bar{n}0$  A.

$$\frac{M_{S\omega}^-}{\omega_a} = \frac{M_{S\omega_4}^-}{\omega_a} + \frac{M_{S\omega_6}^-}{\omega_a} - t_s s + \frac{t_s}{b_s} s^2$$

$$\text{para } s = \frac{b_s}{2} \rightarrow \frac{M_{S\omega_8}^-}{\omega_a} = \frac{M_{S\omega_4}^-}{\omega_a} + \frac{M_{S\omega_6}^-}{\omega_a} - \frac{b_s t_s}{4}$$

Concluindo, tem-se:

$$M_{S\omega_1}^- = 0$$

$$M_{S\omega_2}^- = \omega_a \frac{\beta A_i}{4}$$

$$M_{S\omega_3}^- = \omega_a \left( \frac{\beta A_i}{4} + \frac{\beta A_a}{2} \frac{\beta}{\beta + 1} \right)$$

$$M_{S\omega_4}^- = \omega_a \left( \frac{\beta A_i}{4} + \frac{A_a}{2} (\beta - 1) \right)$$

$$M_{S\omega_5}^- = 0$$

$$M_{S\omega_6}^- = \omega_a \frac{A_s}{4} (1 - \delta^2)$$

$$M_{S\omega_7}^- = M_{S\omega_4}^- + M_{S\omega_6}^-$$

$$M_{S\omega_8}^- = M_{S\omega_4}^- - \omega_a \frac{A_s}{4} \delta^2$$



A.2. Cálculo de  $\phi_0$ 

Considere-se o ponto B:

$$M_B = \int_S \tau t r ds \quad (1.34)$$

$$\tau = - \frac{B' M_{S\omega}}{t J_\omega} + \frac{\phi_0}{t}$$

$$\tau t = - \frac{B'}{J_\omega} (M_{S\omega} - \bar{\phi}_0) \quad , \quad (1.35)$$

onde:

$$\bar{\phi}_0 = \phi_0 \frac{J_\omega}{B'} \quad (1.36)$$

Assim:

$$M_B = \int_S - \frac{B'}{J_\omega} (M_{S\omega} - \bar{\phi}_0) r ds = - \frac{B'}{J_\omega} \left( \int_S M_{S\omega} r ds - \bar{\phi}_0 \int_S r ds \right) = 0$$

$$\bar{\phi}_0 = \frac{\int_S M_{S\omega} r ds}{\int_S r ds}$$

Para o ponto B tem-se que:

laje inferior  $\rightarrow r = 0$

alma esquerda  $\rightarrow r = 0$

laje superior  $\rightarrow r = h$

alma direita  $\rightarrow r = b_i \operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{b_i h}{b_a}$

Laje superior:

$$\int_{LS} \frac{M_{S\omega}}{\omega_a} r ds = 2 \int_0^{\frac{b_s}{2}} \underbrace{(\delta - 1) \frac{b_s}{2} \left( -\delta t_s s + \frac{\delta t_s}{b} s^2 \right) h ds}_{\text{balanço}} +$$

$$+ \int_0^{b_s} \underbrace{\left( \frac{M_{S\omega}}{\omega_a} - t_s s + \frac{t_s}{b_s} s^2 \right) h ds}_{\text{laje superior interna}} =$$

$$= \frac{\beta b_i t_i b_s h}{4} + (\beta - 1) \frac{b_a t_a b_s h}{2} - \frac{b_s t_s b_s h}{6} \delta^3$$

$$\int_0^{b_s} r ds = b_s h$$

Alma direita:

$$\int_A \frac{M_{S\omega}^-}{\omega_a} r ds = \int_0^{b_a} \left( \frac{\beta b_i t_i}{4} + \beta t_a s - \frac{1+\beta}{2b_a} t_a s^2 \right) \frac{b_i h}{b_a} ds =$$

$$= \frac{\beta b_i t_i b_i h}{4 b_a} + \frac{\beta b_a t_a b_i h}{2} - \frac{(1+\beta) b_a t_a b_i h}{6}$$

$$\int_0^{b_a} r ds = b_i h$$

Logo:

$$\int_S M_{S\omega}^- r ds = \frac{A_0 A_a \omega_a}{12} \left\{ 3\beta \psi_i + 6(\beta - 1) - 2\psi_s + \right.$$

$$\left. + 3\beta \psi_i \xi + 6\beta \xi - 2(1 + \beta) \xi \right\}$$

$$\int_S r ds = A_0(1 + \xi)$$

$$\bar{\phi}_0 = \frac{A_a \omega_a}{12} \left\{ 6(\beta - 1) + 3\beta \psi_i + \frac{2\xi(2 - \beta) - 2\psi_s}{(1 + \xi)} \right\} \quad (1.37)$$

Para chegar à expressão (1.37), é preciso somar e subtrair  $6\xi$  dentro dos colchetes do numerador da expressão anterior.

De posse de  $M_{S\omega}^-$  e  $\bar{\phi}_0$  pode-se traçar o diagrama  $(M_{S\omega}^- - \bar{\phi}_0)$ , ou seja, o diagrama  $\tau$  a menos do fator  $\frac{-B'}{t J_\omega}$  (ver Fig. 1-26).

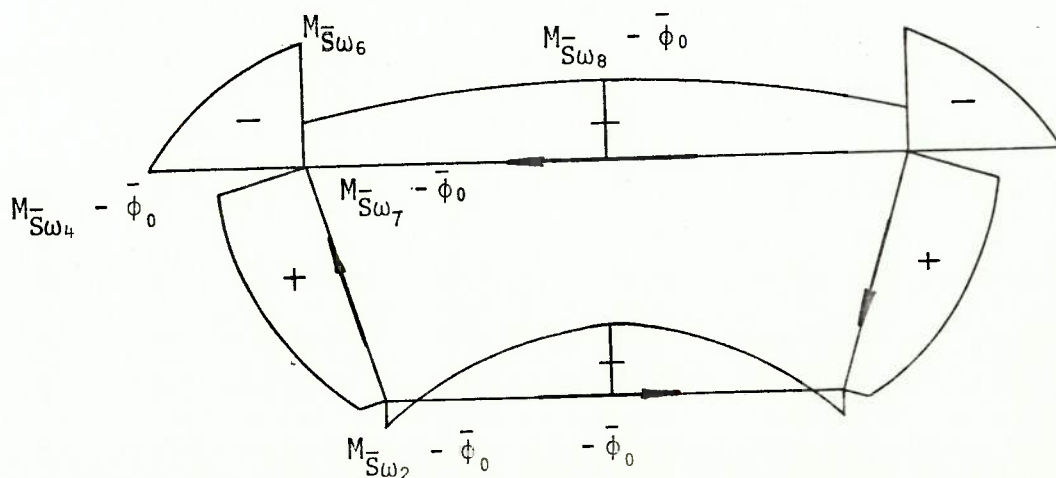


Fig. 1-26 - Diagrama  $(M_{S\omega}^- - \bar{\phi}_0)$



B. Equação Diferencial que Descreve o Comportamento da Estrutura Plissada

Determinar-se-ão as resultantes de cisalhamento em cada chapa, integrando o diagrama da Fig. 1-26.

$$F = \int \tau t \, ds$$

Força resultante da alma:

$$\begin{aligned} F_a &= \int \tau t \, ds = \int_0^{b_a} \left[ \left( \frac{\beta b_i t_i}{4} + \beta t_a s - \frac{\beta + 1}{2b_a} t_a s^2 \right) \omega_a - \bar{\phi}_0 \right] \cdot \frac{-B'}{J_\omega} \, ds = \\ &= \frac{-B'}{J_\omega} \left[ \frac{\beta b_i t_i}{4} \omega_a b_a + \beta t_a \omega_a \frac{b_a^2}{2} - \frac{\beta + 1}{2b_a} t_a \omega_a \frac{b_a^3}{3} - \frac{A_a b_a \omega_a}{12} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( 6(\beta - 1) + 3\beta \psi_i + \frac{2\xi(2 - \beta) - 2\psi_s}{(1 + \xi)} \right) \right] = \frac{-B'}{J_\omega} \frac{A_a b_a \omega_a}{12} \left[ 3\beta \psi_i + \right. \\ &\quad \left. + 6\beta - 2(\beta + 1) - 6\beta + 6 - 3\beta \psi_i - \frac{2\xi(2 - \beta) - 2\psi_s}{(1 + \xi)} \right] = \frac{-B'}{J_\omega} \\ &\quad \frac{A_a b_a \omega_a}{6(1 + \xi)} \left[ -(\beta + 1)(1 + \xi) + 3(1 + \xi) - \xi(2 - \beta) + \psi_s \right] = \\ &= \frac{-B'}{J_\omega} \frac{A_a b_a \omega_a}{6(1 + \xi)} (\psi_s + 2 - \beta) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} F_a &= - \frac{B'}{J_\omega} \frac{A_a b_a \omega_a}{6(1 + \xi)} (\psi_s + 2 - \beta) \\ F_s &= F_a \frac{b_i}{b_a} \qquad F_i = F_a \frac{b_s}{b_a} \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Da mesma forma que no quadro (ver Fig. 1-16), as forças  $F$  são proporcionais ao carregamento de distorção.

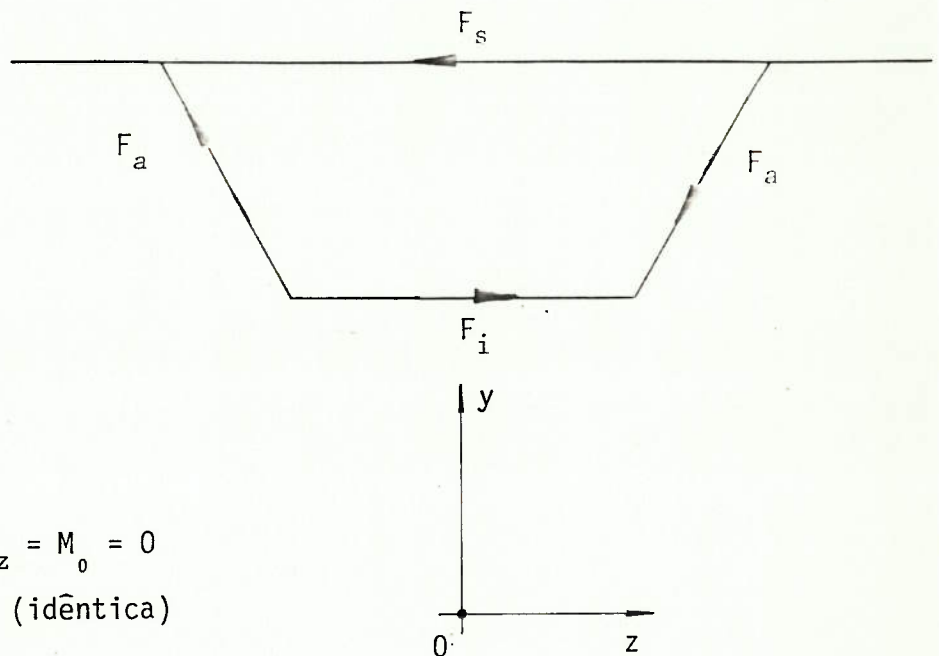
A equação diferencial da estrutura plissada, que se procura, corresponde ao equilíbrio entre as forças decorrentes dos esforços internos à estrutura plissada e os esforços externos correspondentes ao carregamento de distorção.

$$F_a \left[ \begin{array}{l} \text{esforços internos na} \\ \text{estrutura plissada} \end{array} \right] = F_a \left[ \begin{array}{l} \text{(esforços externos)} \end{array} \right]$$

(equação 1.38)

(Fig. 1-13)

É interessante observar que essa proporcionalidade não é coincidência, mas uma exigência das condições de auto-equilíbrio do fenômeno de distorção (ver Fig. 1-27).



Do equilíbrio:

$$V_y = V_z = M_0 = 0$$

$$V_y = 0 \text{ (idêntica)}$$

Fig. 1-27 - Auto-Equilíbrio do Carregamento de Distorção

$$\left. \begin{aligned} V_z = 2F_a \frac{b_s - b_i}{2b_a} + F_s - F_i &= 0 \\ M_0 = F_i k b_i - F_s k b_s &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dessas duas equações resulta:

$$F_s = F_a \frac{b_i}{b_a} \quad \text{e} \quad F_i = F_a \frac{b_s}{b_a}$$

Desenvolvendo a relação das  $F$ , tem-se:

$$- \frac{B''}{J_\omega} \frac{A_a b_a \omega_a}{6(1 + \xi)} (\psi_s + 2 - \beta) = \frac{p b_i b_a}{2h(b_s + b_i)}$$

$$- B'' \frac{1}{J_\omega} \frac{A_a b_s h \omega_a}{6(1 + \xi)} (\psi_s + 2 - \beta) = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)}$$

É possível mostrar que (ver item 1.5.1.4.C, adiante):

$$J_{\omega} = \frac{A_a A_0 \omega_a}{6(1 + \xi)} (\psi_s + 2 - \beta), \quad (1.39)$$

de modo que:

$$- B'' = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)}. \quad (1.40)$$

Da equação (1.27),

$$B'' = - \gamma^{IV} E J_{\omega}$$

$$\gamma^{IV} E J_{\omega} = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)}. \quad (1.41)$$

A equação (1.41) é a equação diferencial da estrutura plissada.

As condições de contorno para solução desta equação são (no caso presente):

$$\gamma = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = l, \text{ devido às transversinas}$$

$$\gamma'' = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = l, \text{ pois } \sigma \text{ e } B \text{ são nulos nos extremos.}$$

Resolvida a equação (1.41), pode-se calcular também  $\sigma$  e  $\tau$ , de modo que o problema fica resolvido (dentro das hipóteses da Teoria das Estruturas Plissadas).

- C. Demonstração da Identidade entre a Definição do Momento de Inércia à Distorção ( $J_{\omega_1}$ ), Equação (1.30) e a Expressão Resultante da Equação da Estrutura Plissada ( $J_{\omega_2}$ ), Equação (1.39)

$$J_{\omega_1} = \frac{A_0^2 A_a}{12} \frac{\beta^2 \psi_i + 2(\beta^2 - \beta + 1) + \psi_s}{\left(1 + \xi + \beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\right)^2}$$

$$J_{\omega_2} = \frac{A_0^2 A_a}{12} \frac{\psi_s + 2 - \beta}{(1 + \xi) \left(1 + \xi + \beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\right)}$$

Dividindo ambas as expressões por:

$$X = \frac{A_0^2 A_a}{12} \frac{1}{\left(1 + \xi + \beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\right)^2},$$

tem-se:

$$X_1 = \beta^2 \psi_i + 2(\beta^2 - \beta + 1) + \psi_s$$

$$X_2 = (\psi_s + 2 - \beta) \frac{1 + \xi + \beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{1 + \xi}.$$

Desenvolvendo  $X_2$ , tem-se:

$$X_2 = (\psi_s + 2 - \beta) \frac{1 + \xi + \beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{1 + \xi} = (\psi_s + 2 - \beta) \left( 1 + \frac{\beta\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{1 + \xi} \right)$$

$$\frac{1 + \frac{1}{\xi}}{1 + \xi} = \frac{1}{1 + \xi} + \frac{1}{\xi(1 + \xi)} = \frac{\xi + 1}{\xi(1 + \xi)} = \frac{1}{\xi}$$

$$X_2 = (\psi_s + 2 - \beta) \left(1 + \frac{\beta}{\xi}\right) = \psi_s + 2 - \beta + \psi_s \frac{\beta}{\xi} + \frac{2\beta}{\xi} - \frac{\beta^2}{\xi}$$

Calculando  $X_1 - X_2$ , tem-se:

$$X_1 - X_2 = \beta^2 \psi_i + 2\beta^2 - 2\beta + \beta - \psi_s \frac{\beta}{\xi} - \frac{2\beta}{\xi} + \frac{\beta^2}{\xi} =$$

$$= \beta \left( \beta \psi_i + 2\beta - 1 + \frac{1}{\xi} (-\psi_s - 2 + \beta) \right)$$

$$\frac{X_1 - X_2}{\beta} = \beta\left(\psi_i + 2 + \frac{1}{\xi}\right) - 1 - \frac{\psi_s}{\xi} - \frac{2}{\xi}$$

Substituindo  $\beta$  pelo seu valor, equação (1.23):

$$\frac{X_1 - X_2}{\beta} = \frac{\psi_s + \xi + 2}{1 + \xi(2 + \psi_i)} \left(\psi_i + 2 + \frac{1}{\xi}\right) - 1 - \frac{\psi_s}{\xi} - \frac{2}{\xi}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_1 - X_2}{\beta} \left( 1 + \xi(2 + \psi_i) \right) &= (\psi_s + \xi + 2) \left( \psi_i + 2 + \frac{1}{\xi} \right) - \\ &- \left( 1 + \frac{\psi_s}{\xi} + \frac{2}{\xi} \right) (1 + 2\xi + \xi \psi_i) = \\ &= \left[ \psi_s \psi_i + \psi_s \left( 2 + \frac{1}{\xi} \right) + \psi_i (2 + \xi) + 2\xi + \frac{2}{\xi} + 5 \right] - \\ &- \left[ \psi_s \psi_i + \psi_s \left( 2 + \frac{1}{\xi} \right) + \psi_i (2 + \xi) + 2\xi + \frac{2}{\xi} + 5 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow X_1 - X_2 = 0 \quad \text{ou} \quad X_1 = X_2 \quad \text{pois } \beta \neq 0$$

$$\rightarrow J_{\omega_1} = J_{\omega_2} \quad \text{pois } X \neq 0$$

Com isso as duas expressões são idênticas, mas  $J_{\omega_2}$  é mais simples, mais prática.

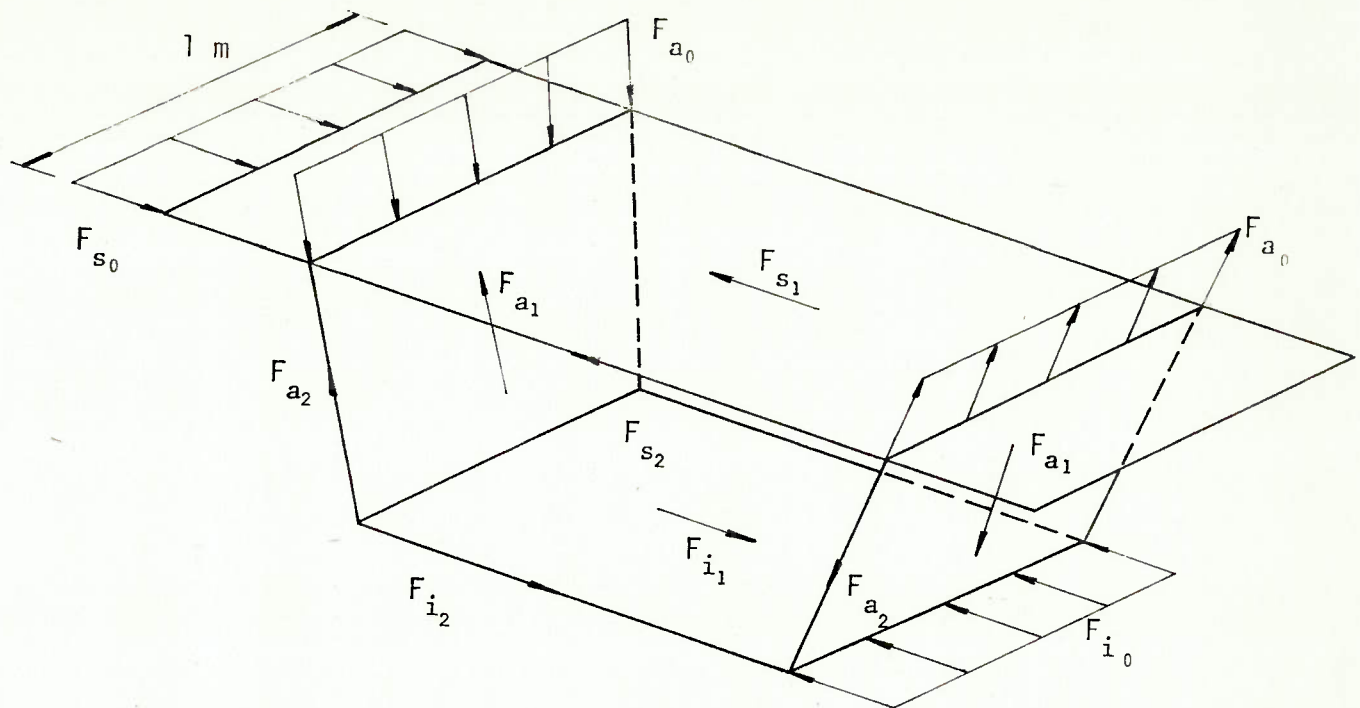
### 1.5.2. Solução de Steinle

Apresentados os dois sistemas resistentes: *sistema de placas em flexão transversal (quadro)* e *sistema de chapas em flexão longitudinal (estrutura plissada)*, pode-se apresentar a solução de Steinle (B-18).

Essa solução considera os dois sistemas (de forma semelhante à torção não-uniforme) trabalhando em conjunto, o que significa admitir uma estrutura plissada com arestas monolíticas em vez de articuladas.

Para resolver este problema basta garantir o equilíbrio entre a soma das cargas suportadas por cada um dos sistemas e a carga externa de distorção, e ainda a compatibilidade dos dois sistemas.

A Fig. 1-28 representa o equilíbrio entre as forças  $F$  decorrentes dos esforços internos aos dois sistemas e os esforços externos da distorção.



- 0 (esforços externos)  
 1 (quadro, esforços internos ao )  
 2 (estrutura plissada, esforços internos  $\bar{a}$ )

Fig. 1-28 - Equilíbrio do Quadro Transversal na Solução de Steinle

A. Equação de Equilíbrio

$$F_{a_0} = F_{a_1} + F_{a_2} \quad (1.42)$$

B. Equação de Compatibilidade

A compatibilidade dos dois sistemas estará garantida se o  $\gamma$  do quadro for coerente com o  $\gamma^{IV}$  da estrutura plissada. Isso ocorre naturalmente ao se substituírem  $F_{a_1}$  e  $F_{a_2}$  por funções de  $\gamma$  e  $\gamma^{IV}$ , obtendo-se uma equação diferencial de 4a. ordem em  $\gamma$ .

Da equação (1.17), quando  $F_{a_1} = F_{a_0}$ ,

$$\gamma EI_Q = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)}$$



$$F_{a_1} = \frac{p b_i b_a}{2h(b_s + b_i)} = \gamma EI_Q \frac{b_a}{b_s h}$$

Da equação (1.41), quando  $F_{a_2} = F_{a_0}$ ,

$$\gamma^{IV} EJ_{\omega} = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)}$$

$$F_{a_2} = \frac{p b_i b_a}{2h(b_s + b_i)} = \gamma^{IV} EJ_{\omega} \frac{b_a}{b_s h} \dots$$

Substituindo-se, na equação (1.42),

$$\begin{aligned} \gamma EI_Q \frac{b_a}{b_s h} + \gamma^{IV} EJ_{\omega} \frac{b_a}{b_s h} &= \frac{p b_i b_a}{2h(b_s + b_i)} \\ \gamma EI_Q + \gamma^{IV} EJ_{\omega} &= \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)} \end{aligned} \quad (1.43)$$

A equação (1.43) é a equação diferencial correspondente à solução de Steinle.

### 1.5.3. Analogia da Viga sobre Apoio Elástico

Observando a equação da viga sobre apoio elástico dada em (1.44), verifica-se que ela é inteiramente análoga à equação (1.43).

$$yk + y^{IV} EJ = p \quad (1.44)$$

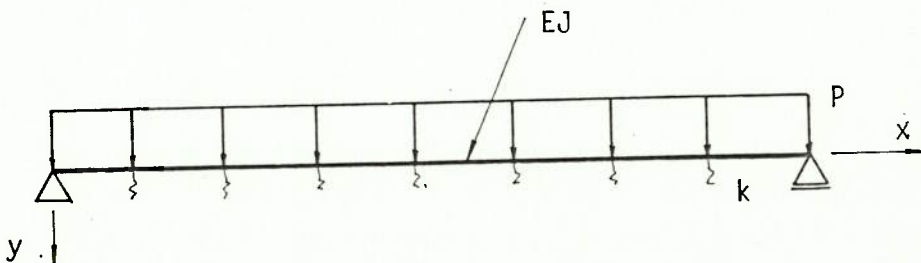


Fig. 1-29 - Viga sobre Apoio Elástico

Isso significa que, da mesma forma que a viga (EJ) se apóia sobre o meio elástico (k), a estrutura plissada ( $EJ_{\omega}$ ) se apóia sobre o quadro ( $EI_Q$ ).

Esquema da analogia:

<u>Viga sobre Apoio Elástico</u>	<u>Distorção do Perfil</u>
Rigidez a flexão $EJ$ (tfm <sup>2</sup> )	Rigidez da estrutura plissada $EJ_{\omega}$ (tfm <sup>4</sup> )
Coefficiente elástico $k$ (tf/m <sup>2</sup> )	Rigidez do quadro $EI_Q$ (tf)
Carga linear $p$ (tf/m)	Carregamento de distorção $p b_s b_i / 2(b_s + b_i)$ (tf)
Flecha $y$ (m)	Distorção $\gamma$ (rad.)
Momento fletor $M$ (tfm)	Bimomento de distorção $B$ (tfm <sup>2</sup> )
Força cortante $V$ (tf)	- $B'$ (tfm)
Apoio	Transversina

Como consequência dessa analogia, é possível definir um comprimento elástico para o problema da distorção do perfil.

Viga sobre apoio elástico (VAE):

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (\text{m}^{-1})$$

$$L = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{m})$$

Distorção do perfil (DP):

$$\bar{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{EI_Q}{4EJ_{\omega}}} \quad (\text{m}^{-1})$$

$$\bar{L} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad (\text{m})$$

A utilidade dessa analogia é muito grande, uma vez que se podem aplicar as soluções da VAE aos problemas da DP. Em (B-43), encontra-se um exaustivo conjunto dessas soluções.

Os conceitos ligados ao comprimento elástico permanecem válidos; por exemplo, numa viga em caixão com transversinas espaçadas de  $\ell$ , tem-se que:

- se  $\ell < \bar{\ell} \rightarrow$  o sistema Estrutura Plissada fica muito rígido, pegando toda a carga às custas de baixas tensões (uma vez que  $\ell$  é pequeno). Neste caso a seção pode ser considerada indeformável;
- se  $\ell > 3\bar{\ell} \rightarrow$  o sistema Estrutura Plissada fica muito flexível, as transversinas não têm influência sobre a região central entre elas, de modo que nessa região trabalha muito o Quadro. No caso de carga linear uniforme  $p$ , a solução de Knittel, que considera apenas o sistema Quadro, fornece para aquela região uma solução praticamente correta (o erro diminui com a relação  $\bar{\ell}/\ell$  (ver Fig. 1-17).

A equação (1.43) pode ser escrita na sua forma mais conhecida:

$$\gamma^{IV} + \gamma \bar{\lambda}^4 = \frac{\bar{p}}{EJ} \quad (1.45)$$

$$\bar{p} = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)} \quad \overline{EJ} = EJ_{\omega}$$

#### 1.5.4. Caso de Carga Concentrada

A analogia foi apresentada para um carregamento particular, mas ela permanece válida para outros carregamentos.

Considere-se, por exemplo, o caso de uma carga concentrada sobre uma alma, no meio do vão (ver Fig. 1-18).

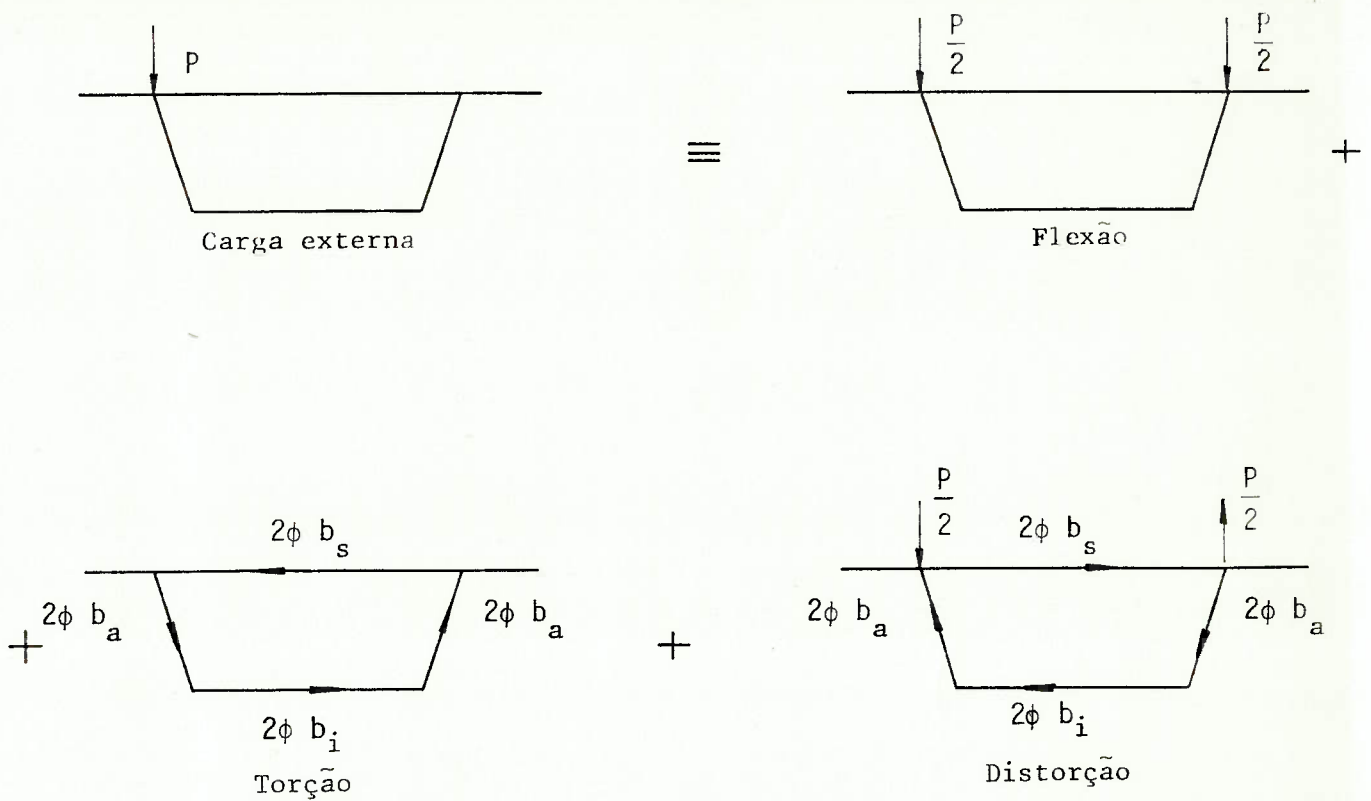


Fig. 1-30 - Decomposição do Carregamento Concentrado

A flexão e a torção são resolvidas conforme os itens 1.3.1 e 1.3.2.1.

A distorção pode ser facilmente resolvida pela analogia da Fig. 1-31.

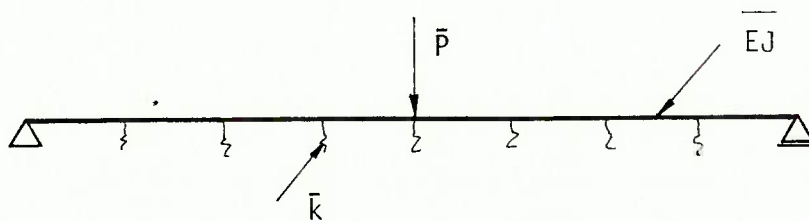


Fig. 1-31 - Viga sobre Apoio Elástico Análoga

onde:

$$\bar{k} = EI_Q$$

$$\bar{EJ} = EJ_\omega$$

$$\bar{p} = \frac{P b_s b_i}{2(b_s + b_i)}$$

### 1.6. Exemplo 1

Neste exemplo analisar-se-ão os efeitos de casos simples de carga.

Considere-se o esquema da Fig. 1-32.

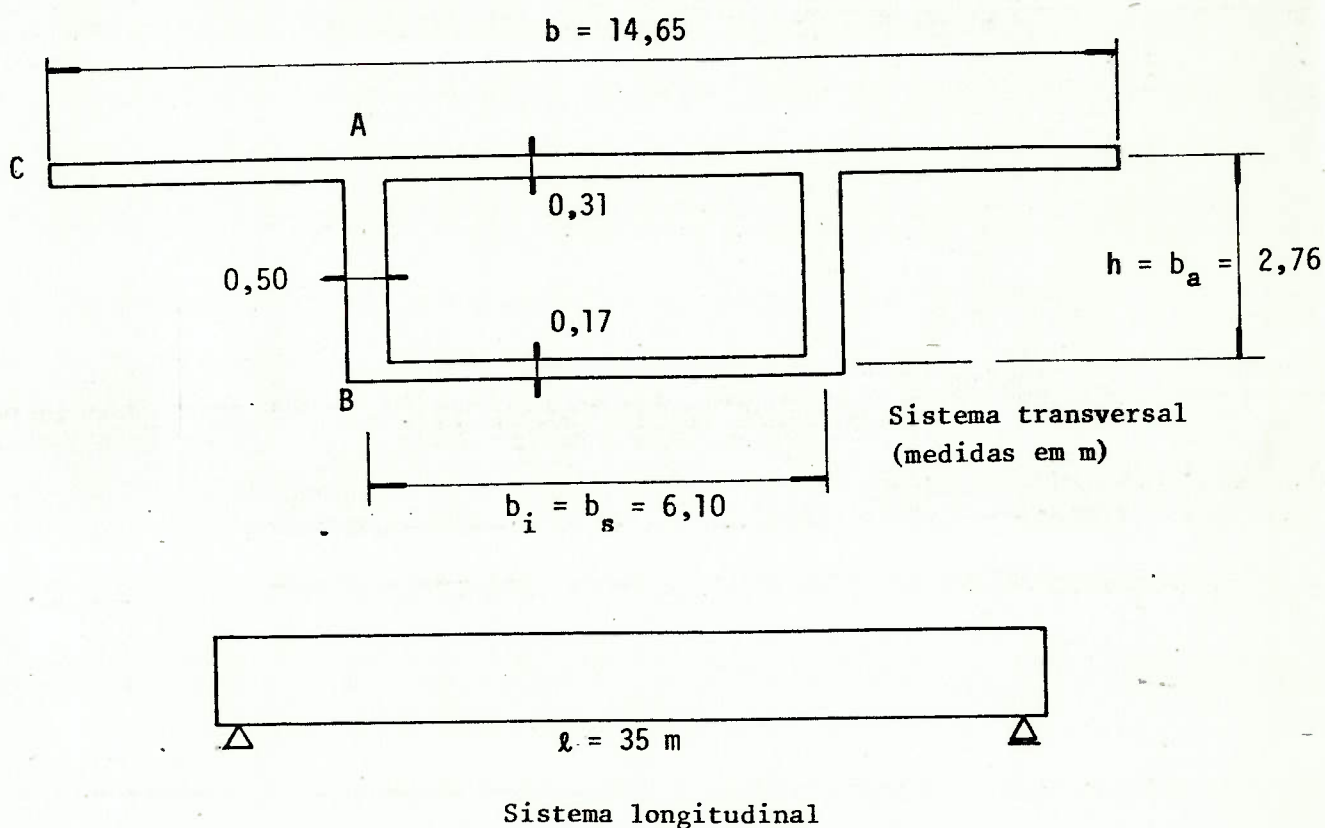


Fig. 1-32 - Ponte Rodoviária em Viga Caixão Unicelular

Determinar-se-ão as tensões normais na seção transversal e os momentos fletores transversais para dois casos de carga.

Caso 1: carga de 1 tf/m sobre uma das almas.

Caso 2: carga de 10 tf no meio do vão e sobre uma das almas.

### 1.6.1. Cálculo das Características Geométricas

#### A. Flexão

$$S = 8,339 \text{ m}^2 \quad Y_{iG} = 1,960 \text{ m} \quad I_z = 9,610 \text{ m}^4$$

#### B. Torção

Não será verificada.

#### C. Distorção

Adotando  $\nu = 0,2$  para o concreto,

$$I_a = 0,01085 \text{ m}^3 \quad I_i = 0,0004264 \text{ m}^3 \quad I_s = 0,002586 \text{ m}^3$$

$$\rho_s = 9,273 \quad \rho_i = 56,24$$

$$\eta = 0,2072 \quad \xi = 1$$

$$\underline{I_Q = 0,005146 \text{ m}^2}$$

$$\psi_i = 0,7514 \quad \psi_s = 18,99 \quad (\delta = 2,402)$$

$$\beta = 5,861$$

$$\omega_A = 0,6135 \text{ m}^2$$

$$A_o = 16,84 \text{ m}^2 \quad A_a = 1,38 \text{ m}^2$$

$$\underline{J_\omega = 17,98 \text{ m}^6}$$



$$\bar{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{I_Q}{4J_\omega}} = 0,09195 \text{ m}^{-1}$$

### 1.6.2. Solução do Caso 1

#### A. Flexão

$$M_z = \frac{p\ell^2}{8} = 153,1 \text{ tfm}$$

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \begin{cases} \sigma_s = 12,75 \text{ tf/m}^2 \\ \sigma_i = 31,28 \text{ tf/m}^2 \end{cases}$$

#### B. Distorção

- Equação correspondente:

$$\gamma^{IV} + 4 \bar{\lambda}^4 \gamma = \frac{\bar{p}}{EJ}$$

$$\bar{p} = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = 1,525 \text{ tf}$$

$$E = 2.100.000 \text{ tf/m}^2 \text{ (concreto)}$$

- Viga sobre apoio elástico análoga:

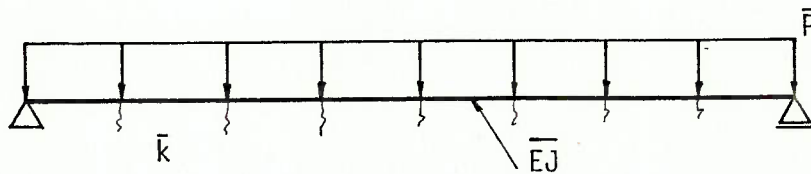


Fig. 1-33 - Viga Sobre Apoio Elástico Análoga

$$\bar{p} = 1,525 \text{ tf}$$

$$\bar{\lambda} = 0,09195 \text{ m}^{-1}$$

Solução:

$$\bar{y}_{\text{máx}} = \gamma_{\text{máx}} = \frac{\bar{p}}{\bar{k}} \left( 1 - \frac{2 \cosh \frac{\bar{\lambda} \ell}{2} \cos \frac{\bar{\lambda} \ell}{2}}{\cosh \bar{\lambda} \ell + \cos \bar{\lambda} \ell} \right)$$

$$\bar{M}_{\text{máx}} = B_{\text{máx}} \approx \frac{\bar{p}}{\bar{\lambda}^2} \frac{\sinh \frac{\bar{\lambda} \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{\bar{\lambda} \ell}{2}}{\cosh \bar{\lambda} \ell + \cos \bar{\lambda} \ell}$$

$$\bar{k} = EI_Q = 10.810 \text{ tf}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 0,0001411 \text{ rad.}$$

$$B_{\text{máx}} = 37,57 \text{ tfm}^2$$

- Tensões normais:

$$\sigma = \frac{B}{J_{\omega}} \omega$$

$$- \omega_A = - 0,6135 \text{ m}^2 \rightarrow \sigma_A = - 1,28 \text{ tf/m}^2$$

$$- \omega_B = 3,593 \text{ m}^2 \rightarrow \sigma_B = 7,51 \text{ tf/m}^2$$

$$- \omega_C = - 1,474 \text{ m}^2 \rightarrow \sigma_C = - 3,08 \text{ tf/m}^2$$

- Momentos transversais:

$$M_A = \frac{\gamma 6EI_a}{b_a (2 + \rho_s - \eta)} \quad (\text{de (1.16)})$$

$$M_{A_{\text{máx}}} = 0,642 \text{ tfm/m}$$

$$M_{B_{\text{máx}}} = \eta M_{A_{\text{máx}}} = 0,133 \text{ tfm/m}$$

### 1.6.3. Solução do Caso 2

#### A. Flexão

$$M_z = \frac{P\ell}{4} = 87,5 \text{ tfm}$$

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = 7,28 \text{ tf/m}^2 \\ \sigma_i = 17,85 \text{ tf/m}^2 \end{array} \right.$$

### B. Distorção

- Viga sobre apoio elástico, análoga (ver Fig. 7-31):

$$\bar{p} = \frac{P b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = 15,25 \text{ tfm}$$

$$\bar{\lambda} = 0,09195 \text{ m}^{-1}$$

$$E = 2.100.000 \text{ tf/m}^2 \text{ (concreto)}$$

Solução:

$$\bar{y}_{\text{máx}} = \gamma_{\text{máx}} = \frac{\bar{p}\bar{\lambda}}{2\bar{k}} \frac{\sinh \bar{\lambda}l - \text{sen } \bar{\lambda}l}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l}$$

$$\bar{M}_{\text{máx}} = B_{\text{máx}} = \frac{\bar{p}}{4\bar{\lambda}} \frac{\sinh \bar{\lambda}l + \text{sen } \bar{\lambda}l}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 0,0000706 \text{ rad.} \quad B_{\text{máx}} = 44,65 \text{ tfm}^2$$

- Tensões normais:

$$\sigma = \frac{B}{J_\omega} \omega$$

$$\sigma_A = - 1,52 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_B = 8,92 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_C = - 3,66 \text{ tf/m}^2$$

- Momentos transversais:

$$M_{A_{\text{máx}}} = 0,316 \text{ tfm/m}$$

$$M_{B_{\text{máx}}} = 0,065 \text{ tfm/m}$$

## 1.6.4. Diagramas de Tensões Normais

Para efeito de análise da eficiência transversal do caixão, prepararam-se os diagramas da Fig. 1-34.

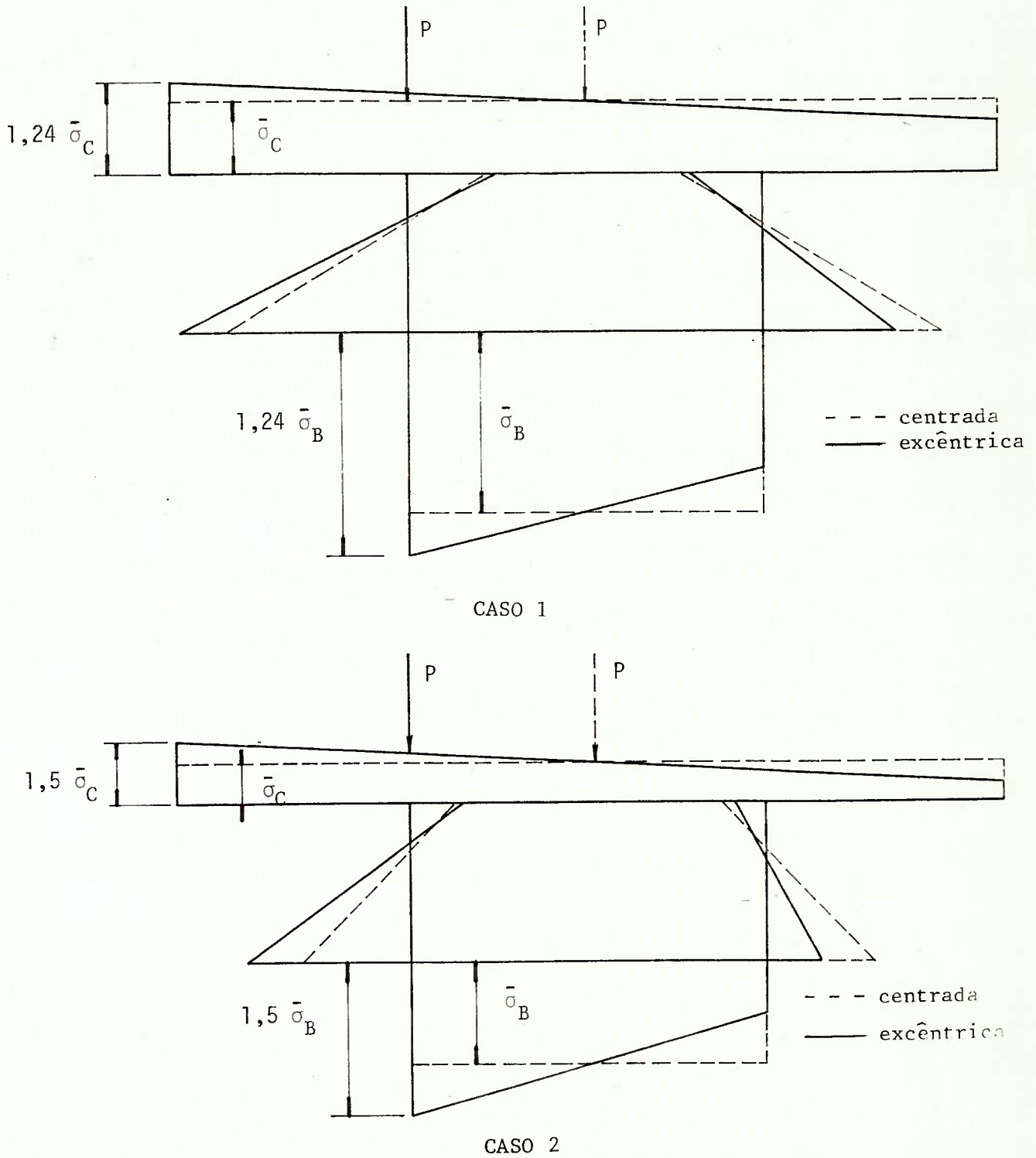


Fig. 1-34 - Diagramas de Tensões Normais

Da Fig. 1-34, verifica-se que, em relação à solução da RM ( $\bar{\sigma}$ ), a solução da AVAE ( $\alpha\bar{\sigma}$ ) fornece tensões maiores com  $\alpha$  variando de 1,24 para carga uniforme  $p$  a 1,50 para carga concentrada  $P$ .

Essa ineficiência aparente resulta dos carregamentos considerados. Ao se considerar, entretanto, o peso próprio da estrutura (que é centrado) e o efeito de cargas distribuídas na superfície do tabuleiro, o valor de  $\alpha$  para o carregamento total será bem menor, da ordem de 1,05 para as pontes rodoviárias, isto é, as tensões corretas são 5% maiores que as dadas pela RM.

Como, pela equação (1.24),  $\sigma$  varia com  $x$  do mesmo modo que  $B$ , mostram-se, na Fig. 1-35, os diagramas  $B(x)$ :

Caso 1 (origem no apoio):

$$B(x) = \bar{M}(x) = \frac{\bar{p}}{2\bar{\lambda}^2} \frac{\sinh \bar{\lambda}x \sen \bar{\lambda}x' + \sinh \bar{\lambda}x' \sen \bar{\lambda}x}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l}$$

$$x = 11,67 \text{ m} \quad , \quad x' = 23,33 \text{ m} \quad \rightarrow \quad B = 37,48 \text{ tfm}^2$$

$$x = 5,835 \text{ m} \quad , \quad x' = 29,17 \text{ m} \quad \rightarrow \quad B = 31,08 \text{ tfm}^2$$

Caso 2 (origem no meio do vão):

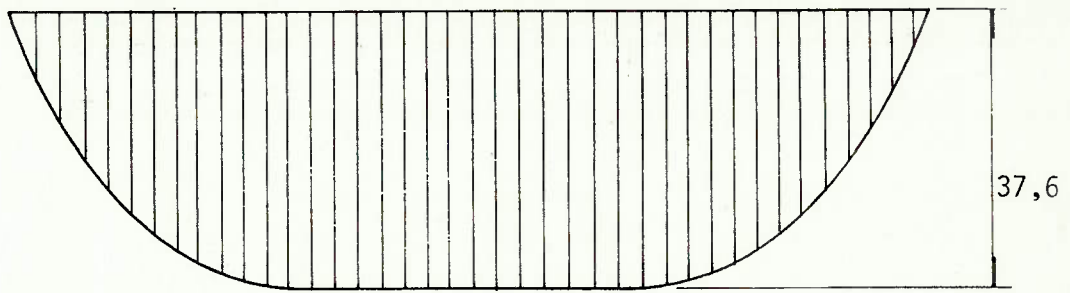
$$B(x) = \bar{M}(x) = \frac{\bar{p}}{4\bar{\lambda}} \frac{1}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l} (\cosh \bar{\lambda}x \sen \bar{\lambda}x' -$$

$$- \sinh \bar{\lambda}x \cos \bar{\lambda}x' + \cos \bar{\lambda}x \sinh \bar{\lambda}x' -$$

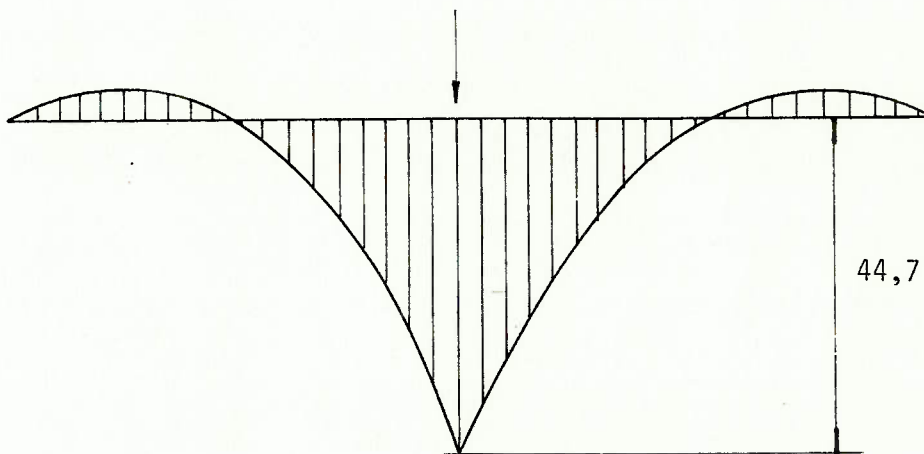
$$- \sen \bar{\lambda}x \cosh \bar{\lambda}x')$$

$$x = 11,67 \text{ m} \quad , \quad x' = 23,33 \text{ m} \quad \rightarrow \quad B = -4,048 \text{ tfm}^2$$

$$x = 5,835 \text{ m} \quad , \quad x' = 29,17 \text{ m} \quad \rightarrow \quad B = 9,014 \text{ tfm}^2$$



CASO 1



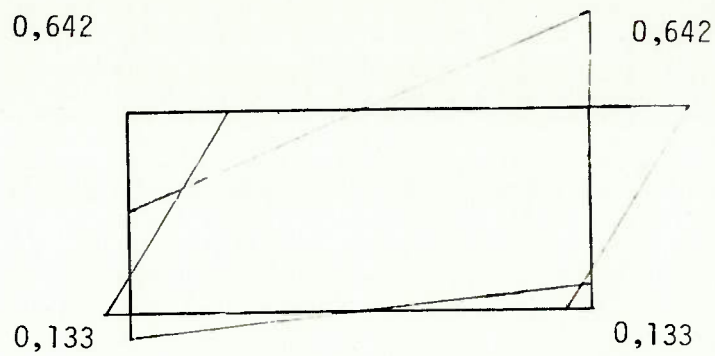
CASO 2

Fig. 1-35 - Diagramas  $B(x)$  ( $\text{tfm}^2$ )

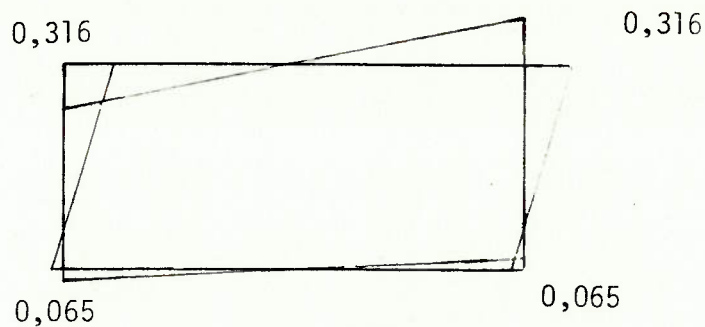
#### 1.6.5. Diagramas de Momentos Fletores Transversais

A Fig. 1-36 mostra esses diagramas (para o meio do vão,  $x = \frac{l}{2} = 17,5 \text{ m}$ ).





CASO 1



CASO 2

Fig. 1-36 - Momentos Fletores Transversais (tfm/m)

Como, pela equação (1.16),  $M_A$  e  $M_B$  variam com  $x$  do mesmo modo que  $\gamma$ , mostra-se, na Fig. 1-37, o diagrama  $\gamma(x)$ .

Caso 1 (origem no apoio):

$$\gamma(x) = \bar{\gamma}(x) = \frac{\bar{p}}{\bar{k}} \left( 1 - \frac{\cosh \bar{\lambda}x \cos \bar{\lambda}x' + \cosh \bar{\lambda}x' \cos \bar{\lambda}x}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l} \right)$$

$$x = 11,67 \text{ m} \quad , \quad x' = 23,33 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \gamma = 0,0001266 \text{ rad.}$$

$$x = 5,835 \text{ m} \quad , \quad x' = 29,17 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \gamma = 0,0000763 \text{ rad.}$$

Caso 2 (origem no meio do vão):

$$\gamma(x) = \bar{y}(x) = \frac{\bar{P}\bar{\lambda}}{2\bar{k}} \frac{1}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l} (\cos \bar{\lambda}x \sinh \bar{\lambda}x' -$$

$$- \cosh \bar{\lambda}x \sin \bar{\lambda}x' + \sin \bar{\lambda}x \cosh \bar{\lambda}x' -$$

$$- \sinh \bar{\lambda}x \cos \bar{\lambda}x')$$

$$x = 11,67 \text{ m} \quad , \quad x' = 23,33 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \gamma = 0,0000210 \text{ rad.}$$

$$x = 5,835 \text{ m} \quad , \quad x' = 29,17 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \gamma = 0,0000506 \text{ rad.}$$

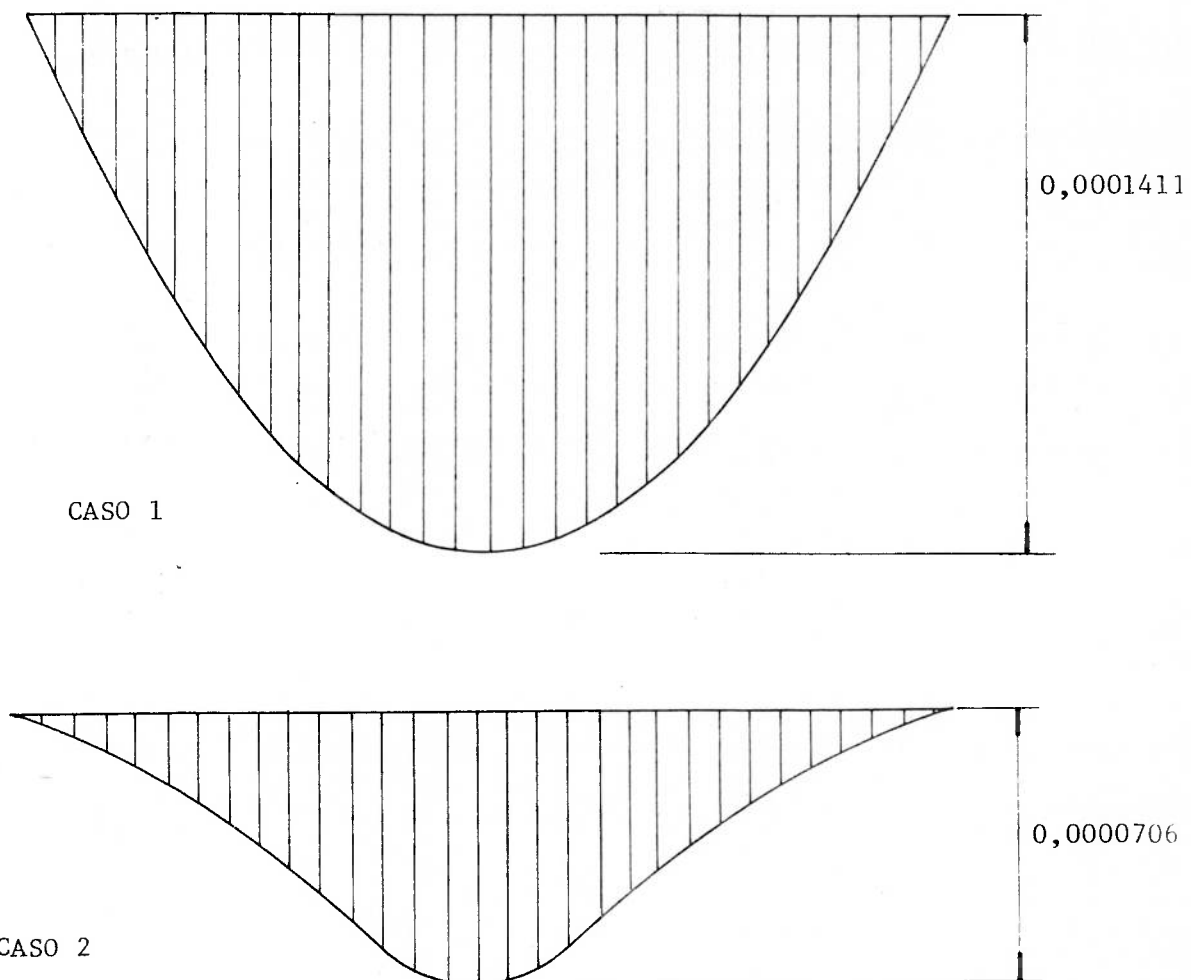


Fig. 1-37 - Diagramas  $\gamma(x)$  (rad)

Considere-se o Caso 1 da Fig. 1-37.

A solução de Knittel, pela equação (1.17), levaria, nesse Caso 1, a  $\gamma = 0,0001411$ , valor equivalente ao encontrado por Steinle. Isso acontece porque  $\ell = 35 \text{ m} > 3\bar{\ell} = 32,63 \text{ m}$  (ver item 1.5.3).

Por outro lado, como Knittel s̄o considera o trabalho do Quadro, a diferença entre a solução de Knittel e a de Steinle ao longo do eixo x corresponde ao trabalho da Estrutura Plissada (ver Fig. 1-38).

Observando a equação (1.17), verifica-se ainda que  $\gamma$  é proporcional à carga p e, portanto, à carga de distorção  $F_a = p b_i b_a / 2h(b_s + b_i)$ . Da mesma forma, na solução completa (Steinle), a parcela do carregamento de distorção suportada pelo Quadro é proporcional a  $\gamma$ . Assim:

$$\frac{\gamma}{\gamma^*} = \frac{F_{a1}}{F_{a2}}$$

onde:  $F_{a1}$  = parcela do carregamento de distorção suportada pelo Quadro

$F_{a2}$  = parcela do carregamento de distorção suportada pela Estrutura Plissada.

$\gamma$  = distorção na solução de Steinle

$\gamma^*$  = diferença de distorção entre Knittel e Steinle (ver Fig. 1-38).

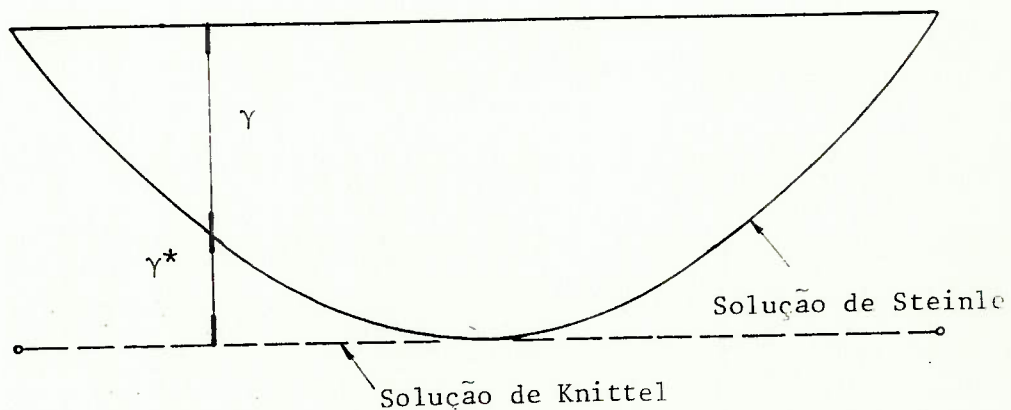


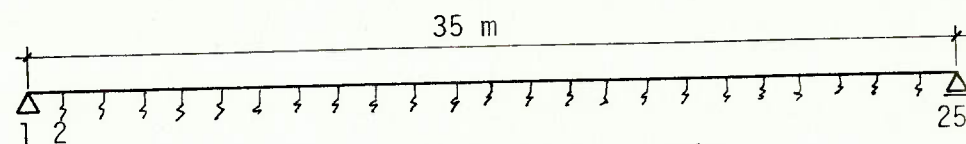
Fig. 1-38 - Diferença entre Steinle e Knittel para o Caso 1

Em outras palavras, a relação  $\gamma/\gamma^*$  mede a proporção das parcelas do carregamento de distorção suportadas pelo Quadro e pela Estrutura Plissada.

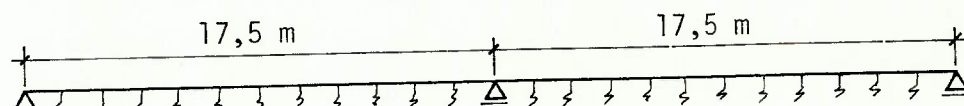
## 1.7. Problemas Particulares

### 1.7.1. A Eficiência das Transversinas Intermediárias

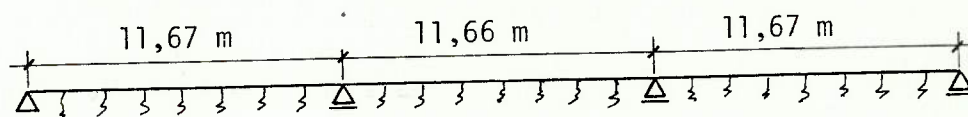
De forma a avaliarmos a eficiência, estudar-se-á a estrutura do Exemplo 1, item 1.6, com uma, duas e três transversinas intermediárias. Como a solução analítica desses problemas é relativamente complicada, utilizar-se-á um programa de computador. Os esquemas para processamento estão abaixo, na Fig. 1-39.



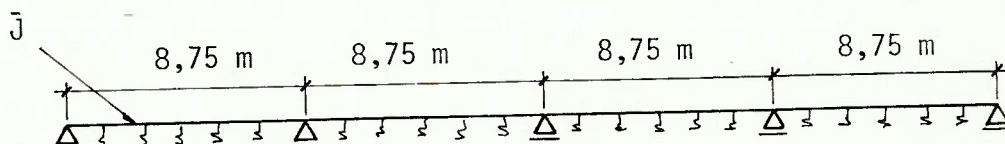
Estrutura E1 - sem transversinas intermediárias



Estrutura E2 - com uma transversina central



Estrutura E3 - com duas transversinas intermediárias



Estrutura E4 - com três transversinas intermediárias

Fig. 1-39 - Esquemas para Processamento

Elementos para Processamento

- Características geométricas da seção celular:

$$J_{\omega} = 17,98 \text{ m}^6$$

$$I_Q = 0,005146 \text{ m}^2$$

$$EI_Q = 0,005146 \cdot 2.100.000 = 10.807 \text{ tf}$$

- Características geométricas da viga e do apoio elástico:

$$\bar{J} = 17,98 \text{ m}^4$$

$$\bar{k} = 10.807 \text{ tf/m}^2$$

$$\bar{K} = 10.807 \cdot 1,4583 = 15.759 \text{ tf/m}$$

- Carregamentos:

Caso 1: Carga uniformemente distribuída sobre uma das almas  $p = 1 \text{ tf/m}$ .  
Carga equivalente na viga sobre apoio elástico.

$$\bar{p} = \frac{p b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = 1,525 \text{ tf} \rightarrow 1,525 \text{ tf/m}$$

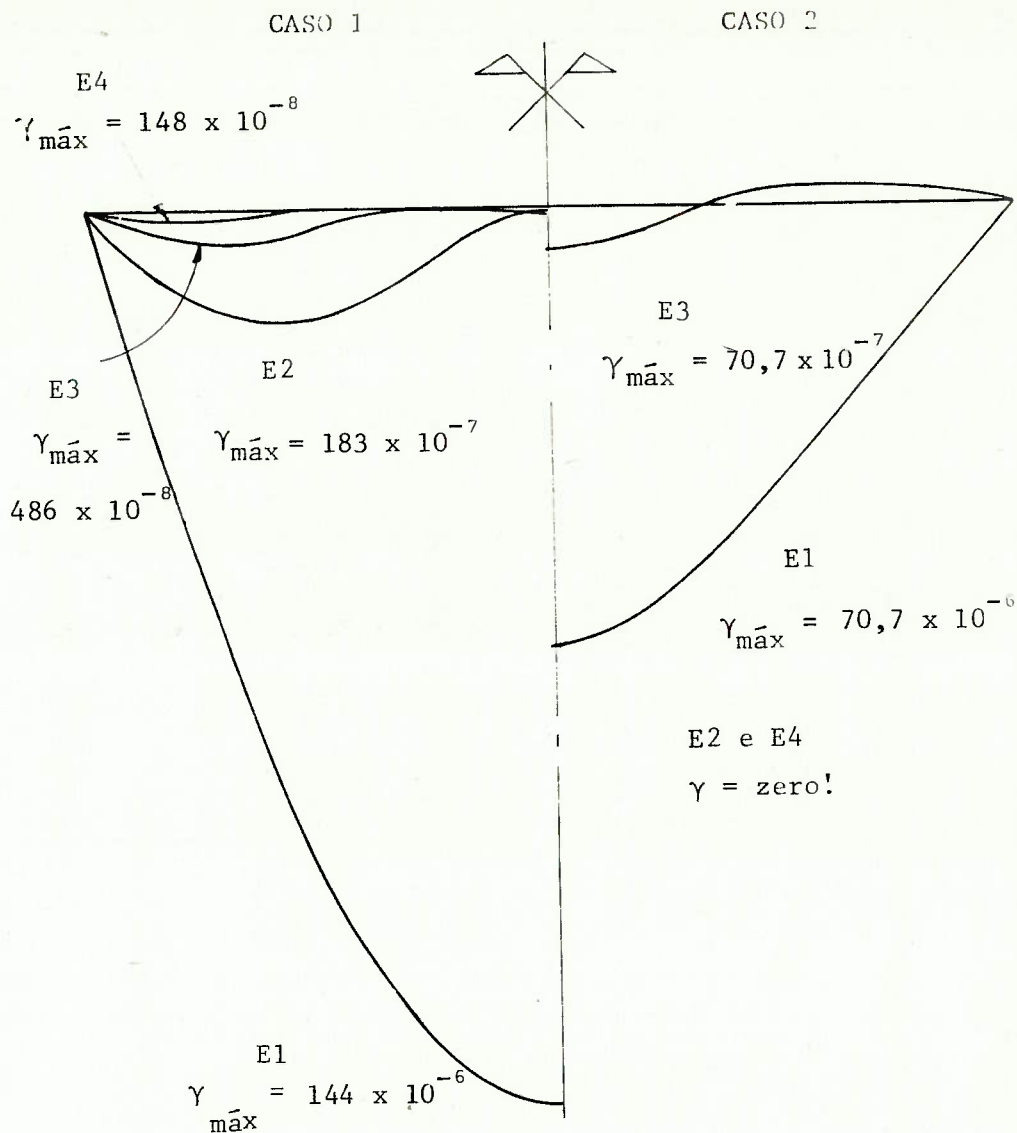
Caso 2: Carga concentrada sobre uma das almas no meio do vão  $P = 10 \text{ tf}$ .  
Carga equivalente na viga sobre apoio elástico.

$$\bar{p} = \frac{P b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = 15,25 \text{ tfm} \rightarrow 15,25 \text{ tf}$$

Os resultados obtidos são os seguintes:

A. Distorção  $\gamma$

A distorção  $\gamma$  corresponde ao deslocamento transversal  $y$  na viga sobre apoio elástico (ver Fig. 1-40). Note-se que os momentos transversais são proporcionais a  $\gamma$ .

Fig. 1-40 - Diagramas  $\gamma$  (Distorção) (rad)B. Bimomento B

O bimomento B corresponde ao momento fletor na viga sobre apoio elástico (ver Fig. 1-41). Note-se que as tensões normais na seção transversal são proporcionais a B.

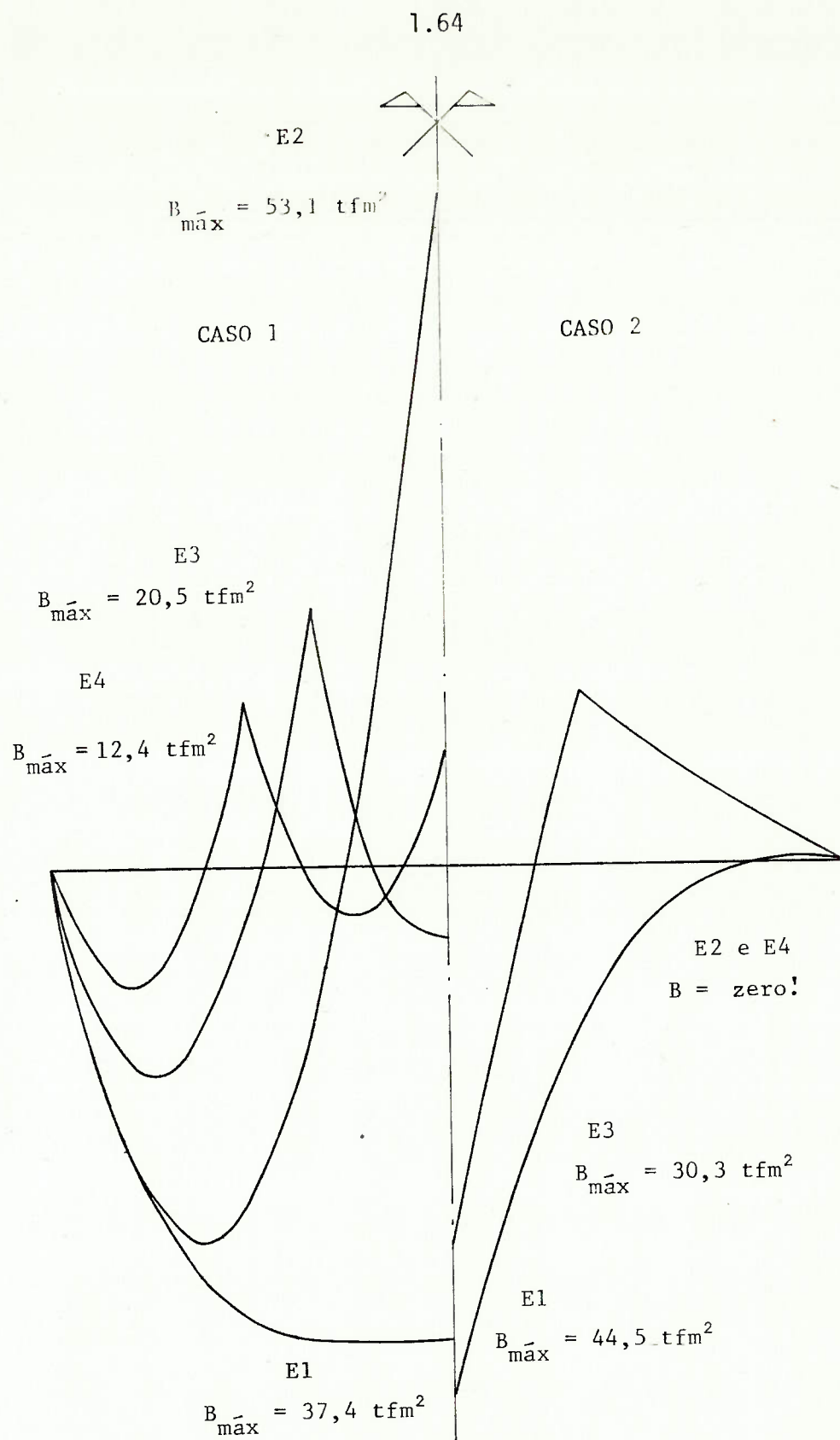


Fig. 1-41 - Diagramas B (Bimomento) ( $\text{tfm}^2$ )

Analisando a fig. 1-40, verifica-se que as transversinas intermediárias são eficazes na diminuição da distorção.



Se a distância entre as transversinas  $\ell$  é maior que  $3\bar{L}$  (caso E1), a solução de Knittel coincide com a de Steinle no meio do vão  $\ell$ , ou seja, as transversinas não influem na distorção da região central entre elas. A estrutura plissada fica muito flexível de forma que, nessa região o Quadro suporta a totalidade da carga de distorção.

Se, por outro lado,  $\ell$  é menor que  $\bar{L}$  (caso E4), praticamente não existe distorção. A estrutura plissada, enrijecida pelas transversinas, suporta toda a carga de distorção.

Já pela Fig. 1-41, o mesmo não pode ser dito a respeito do bímomento. A relativa ineficiência é, no entanto, explicável.

Por um lado, as transversinas, ao enrijecerem a estrutura plissada, obrigam-na a transportar mais carga, ou seja, induzem um aumento nos bímomentos.

Por outro lado, a diminuição do espaçamento das transversinas diminui o vão da estrutura plissada e, por isso, tende a diminuir os bímomentos.

A redução real dos bímomentos, resultante da soma dessas duas tendências antagônicas, é bem lenta.

Como conclusão, pode-se dizer que *as transversinas intermediárias só reduzem significativamente a distorção, e isso para espaçamento ( $\ell$ ) menor que o comprimento elástico ( $\bar{L}$ ). Os bímomentos, estes sempre persistem.*

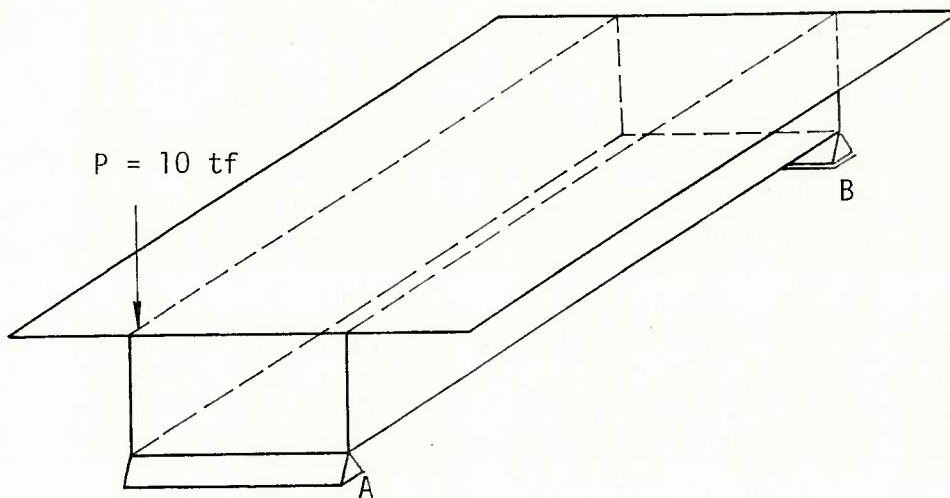
Através de exemplos, ver-se-á que, nas pontes em concreto, o efeito do bímomento é, em geral, desprezível e o efeito da distorção, aceitável, de forma que as transversinas intermediárias são desnecessárias e sua eliminação, aconselhada pela simplicidade executiva.

*As transversinas de apoio, sim, são mais interessantes por eliminarem uma forte concentração de bímomento e distorção junto ao apoio, determinada pela introdução das reações de apoio, e, ainda, por facilitarem a disposição e a troca dos aparelhos de apoio.*

Outros comentários sobre o trabalho das transversinas podem ser encontrados em (B-24), (B-27) e (B-44).

### 1.7.2. Análise de Cargas Próximas do Apoio. Força Cortante

Considere-se novamente a estrutura do Exemplo 1, item 1.6, sob o carregamento esquematizado abaixo, na Fig. 1-42. A esse carregamento correspondem fortes solicitações de cisalhamento junto ao apoio A.



Decompondo esse carregamento, tem-se:

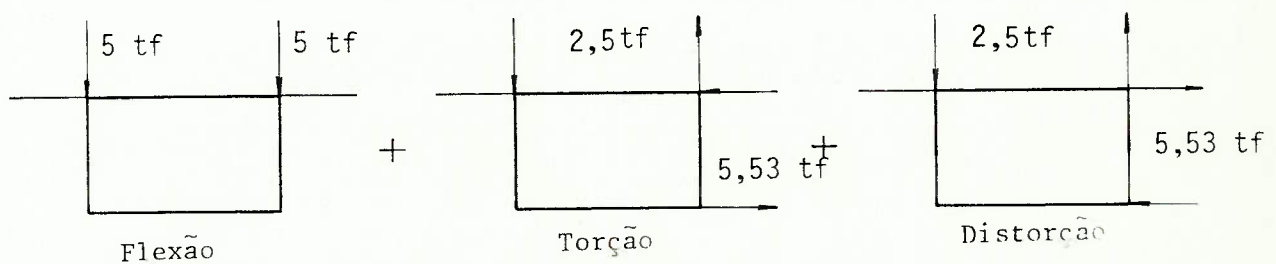


Fig. 1-42 - Carga Próxima do Apoio

#### 1.7.2.1. Cálculo da Máxima Tensão de Cisalhamento

O ponto crítico para efeito de cisalhamento situa-se junto ao apoio A, ao nível do centro de gravidade.

A. Flexão

$$y_{iG} = 1,960 \text{ m}$$

$$I_z = 9,610 \text{ m}^4$$

$$M_{SG}^- = 0,17 \cdot 6,1 \cdot 1,96 + 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1,96^2}{2} = 3,95 \text{ m}^3$$

$$V = \underline{10} \text{ tf}$$

$$\tau_G^1 = V \frac{M_{SG}^-}{tI_z} = 10 \frac{3,95}{1,0 \cdot 9,61} = \underline{4,11} \text{ tf/m}^2$$

B. Torção

$$A = 2,76 \cdot 6,10 = 16,84 \text{ m}^2$$

$$M_t = 10 \cdot 3,05 = \underline{30,5} \text{ tfm}$$

$$M_t = 2\phi A \rightarrow \phi = \frac{M_t}{2A} = \frac{30,5}{2 \cdot 16,84} = 0,9056 \text{ tf/m}$$

$$\tau_G^2 = \frac{\phi}{t} = \frac{0,9056}{0,5} = \underline{1,81} \text{ tf/m}^2$$

C. Distorção

$$\bar{p} = p \frac{b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = 15,25 \text{ tfm}$$

Como a carga concentrada  $\bar{p}$  está muito próxima do apoio, o apoio elástico (quadro) não é solicitado, ficando toda a carga na viga (estrutura plissada). Assim:

$$B' = \bar{V} = \underline{15,25} \text{ tfm}$$

$$J_\omega = 17,98 \text{ m}^6$$

$$M_{S\omega G} - \bar{\phi}_0 = \omega_a \left\{ \frac{\beta A_i}{4} + \frac{y_i A_a}{2h} \left( 2\beta - \beta \frac{\frac{y_i}{h}}{\beta} \right) \right\} -$$

$$- \frac{A_a \omega_a}{12} \left\{ 6(\beta - 1) + 3\beta \psi_i + \frac{2\xi(2 - \beta) - 2\psi_s}{(1 + \xi)} \right\}$$

$$M_{S\omega G}' = 0,6135 \left\{ \frac{5,861 \cdot 6,1 \cdot 0,17}{4} + \frac{1,96 \cdot 0,5}{2} (2 \cdot 5,861 - \right.$$

$$\left. - \frac{1,96}{2,76} 6,861) \right\} - \frac{1,38 \cdot 0,6135}{12} \left\{ 6 \cdot 4,861 + 3 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot 5,861 \cdot 0,7514 + \frac{2 \cdot (2 - 5,861) - 2 \cdot 18,99}{1 + 1} \right\} =$$

$$= 2,991 - 1,378 = 1,613 \text{ m}^4$$

$$\tau_G^3 = B' \frac{M_{S\omega G}'}{t J_\omega} = 15,25 \cdot \frac{1,613}{0,5 \cdot 17,98} = \underline{2,74} \text{ tf/m}^2$$

Compondo as solicitações de flexão, torção e distorção, tem-se (para a alma esquerda):

$$\tau_G = 4,11 + 1,81 + 2,74 = 8,66 \text{ tf/m}^2$$

Desprezando a distorção:

$$\tau_G^1 = 4,11 + 1,81 = 5,92 \text{ tf/m}^2$$

erra-se em 32%.

#### 1.7.2.2. A Tensão Média e a Resultante de Cisalhamento em cada Alma

A. Flexão

$$\bar{\tau}_1 = \frac{V}{2A_a} = \frac{10}{2 \cdot 0,5 \cdot 2,76} = 3,62 \text{ tf/m}^2$$

B. Torção

$$\bar{\tau}_2 = \frac{\phi}{t} = 1,81 \text{ tf/m}^2$$

C. Distorção

$$\bar{\tau}_3 = \frac{F_a}{A_a} = \frac{B'}{J_\omega} \frac{b_a \omega_a}{6(1 + \xi)} (\psi_s + 2 - \beta) = \frac{15,25}{17,98} \frac{2,76 \cdot 0,6135}{6(1 + 1)} \cdot (18,99 + 2 - 5,861) = 1,81 \text{ tf/m}^2 .$$

Compondo as solicitações, tem-se:

- Para a alma esquerda:

$$\bar{\tau} = 3,62 + 1,81 + 1,81 = 7,24 \text{ tf/m}^2$$

A resultante na alma vale

$$V = 7,24 \cdot 0,5 \cdot 2,76 = 10 \text{ tf}$$

- Para a alma direita:

$$\bar{\tau} = 3,62 - 1,81 - 1,81 = 0$$

A resultante na alma também é nula,

$$V = 0.$$

1.7.2.3. Comentários

Do exposto, pode-se concluir que a distorção altera a distribuição das tensões de cisalhamento de forma não desprezível. O erro de 32% é certamente um limitante superior, pois corresponde ao caso crítico. Nos casos práticos, esse erro é bem menor, da ordem de 5% nas pontes rodoviárias comuns.

No que diz respeito às cargas muito próximas do apoio e aplicadas sobre uma das almas, verificou-se que a carga desce ao apoio, integralmente, pela alma carregada. A outra alma fica completamente descarregada, o que se explica, uma vez que representa um caminho muito mais longo para a carga, na sua procura do apoio.

*Esse acréscimo de tensões de cisalhamento devido à distorção, é necessário salientar, assumirá grande importância nas obras sem transversinas de apoio, da mesma forma que o acréscimo de tensões normais e de momentos fletores transversais.*

### 1.8. Estudo do Caso Genérico de Carga

Antes de analisar o problema do caso genérico de carga, considerar-se-ão dois casos particulares, o de carga linear uniforme e o de carga concentrada, ambos fora da alma.

#### 1.8.1. Caso Geral da Carga Linear Uniforme

##### Caso A - Carga no Balanço

A Fig. 1-43 mostra a decomposição desse carregamento.

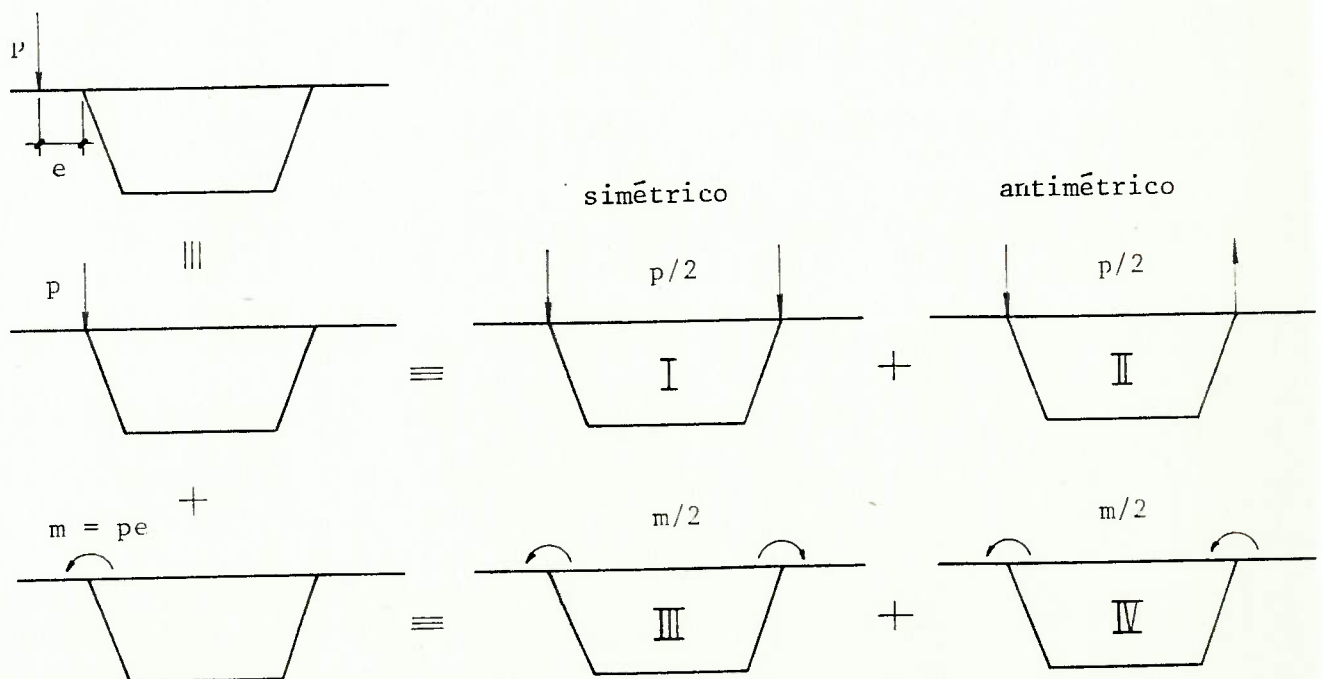


Fig. 1-43 - Carga Linear no Balanço

As soluções das parcelas I e II são conhecidas, resta estudar as III e IV.

### Caso B - Carga no Meio da Laje Superior

A Fig. 1-44 mostra a decomposição desse carregamento.

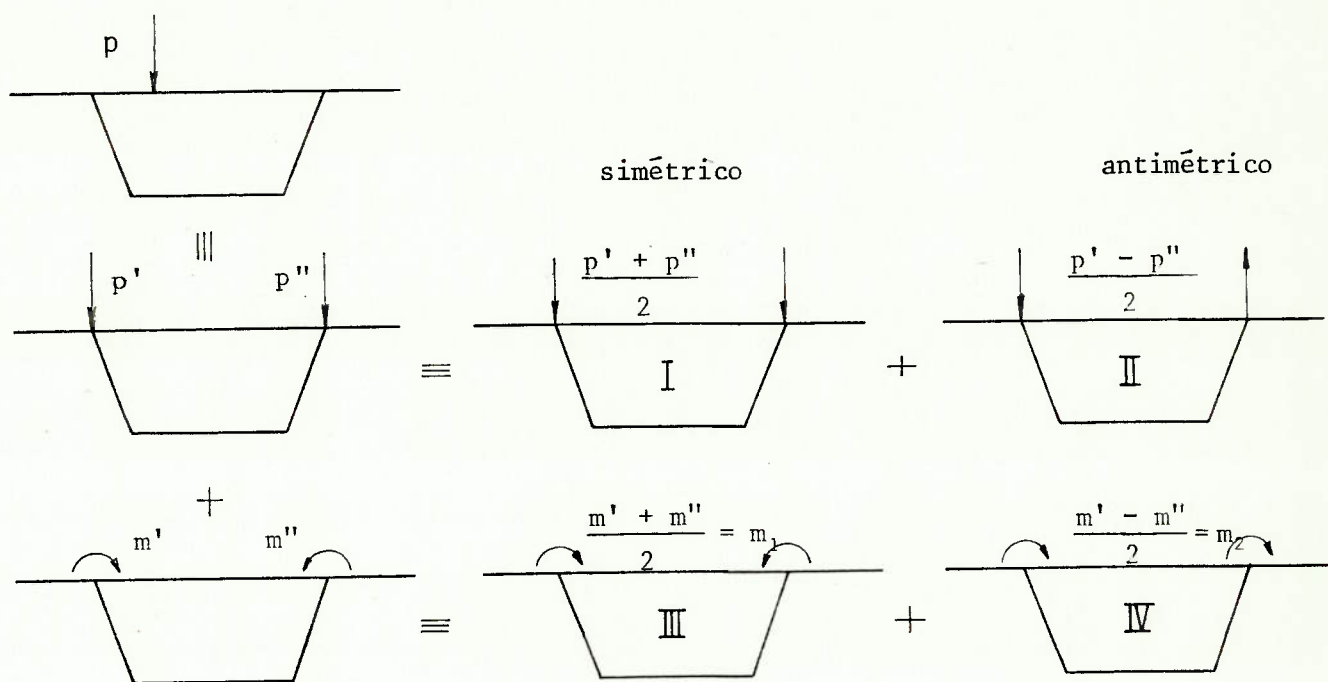


Fig. 1-44 - Carga Linear na Laje Superior

As parcelas I e II já foram estudadas, resta estudar as III e IV.

Os valores  $p'$ ,  $p''$ ,  $m'$  e  $m''$  são os resultados da placa superior biengastada sob carga  $p$ . Equivalem ao resultado da viga biengastada, uma vez que  $p$  é uniformemente distribuída no sentido longitudinal.

### 1.8.2. Caso Geral da Carga Concentrada

No caso da carga concentrada, seja no balanço, seja na laje superior, o procedimento a seguir é o mesmo indicado no item 1.8.1. O único problema é a não-uniformidade das reações e momentos de engastamento.

Através dos abacos ou tabelas da Teoria das Placas, é possível determinar os picos de  $m$ ,  $m'$  e  $m''$  (ver, por exemplo, (B-45), (B-46), (B-47)).

Raramente, entretanto, encontram-se suas distribuições, ou ainda quaisquer



elementos sobre as funções  $p$ ,  $p'$  e  $p''$ .

Considere-se, assim mesmo, a distribuição dos momentos de engastamento do balanço devidos à carga concentrada aplicada sobre ele.

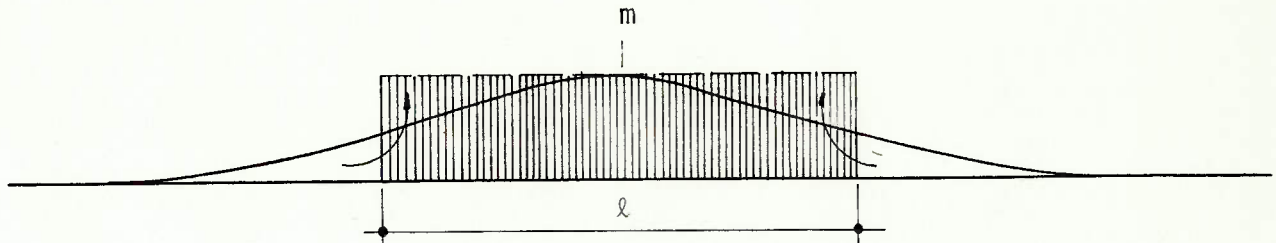


Fig. 1-45 - Distribuição dos Momentos de Engastamento do Balanço sob Carga Concentrada

Em lugar de trabalhar com a curva real, pode-se usar uma aproximação simples, que é a *distribuição parcialmente uniforme*, de valor igual ao pico da curva real, e de mesma resultante.

Uma estimativa dessa resultante pode ser obtida pelo resultado da viga de mesmo vão, sob o mesmo carregamento.

Assim, da Teoria das Placas obtêm-se o pico da curva real,  $m$ .

Do cálculo da viga em balanço correspondente obtêm-se as resultantes:

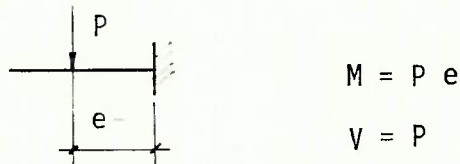


Fig. 1-46 - Viga em Balanço Equivalente

Pode-se, então, determinar o comprimento  $l$  da carga parcial uniforme:

$$l = \frac{M}{m} \quad (1.46)$$

e a cortante na placa :

$$p = \frac{V}{\ell} \quad (1.47)$$

O mesmo procedimento pode ser utilizado no caso da laje superior, através do resultado da viga biengastada.

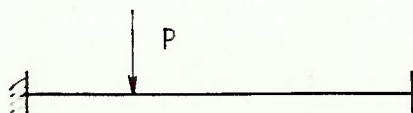


Fig. 1-47 - Viga Biengastada Equivalente

$$\left. \begin{array}{ll} M' & M'' \\ V' & V'' \end{array} \right\} \text{Viga} \quad \left. \begin{array}{l} \ell' = \frac{M'}{m'} \\ \ell'' = \frac{M''}{m''} \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{ll} m' & m'' \end{array} \right\} \text{Placa} \quad \left. \begin{array}{l} p' = \frac{V'}{\ell'} \\ p'' = \frac{V''}{\ell''} \end{array} \right\} \quad (1.48)$$

A solução mais precisa, que corresponde a usar a distribuição da Teoria das Placas, não é aqui apresentada por não ser prática para o cálculo manual ou com microcomputadores.

No caso de se dispor de computador, essa solução é aconselhável, tendo sido utilizada em (B-54).

### 1.8.3. Caso Genérico de Carga

O procedimento apresentado para a carga concentrada pode ser estendido ao caso genérico de carga. A solução assim obtida é prática em termos de cálculo e, ao mesmo tempo, suficientemente precisa.

Outras soluções aproximadas encontram-se descritas em (B-2) e (B-5).

#### 1.8.4. Solicitações Transversais Devidas a cada uma das Parcelas do Carregamento Externo

##### 1.8.4.1. Parcela I (ver Fig. 1-43 e 1-44)

Parcela responsável pela *flexão longitudinal*.



Fig. 1-48 - Parcela I

Essa parcela é equilibrada pelo cisalhamento dado pela Resistência dos Materiais. As solicitações transversais se reduzem a esforços normais de pouca importância. Junto a cargas concentradas muito importantes eles podem ser consideráveis, por exemplo, reações de apoio em caixão sem transversina de apoio.

##### 1.8.4.2. Parcela II (ver Fig. 1-43 e 1-44)

Parcela responsável por *parte da torção e da distorção*.

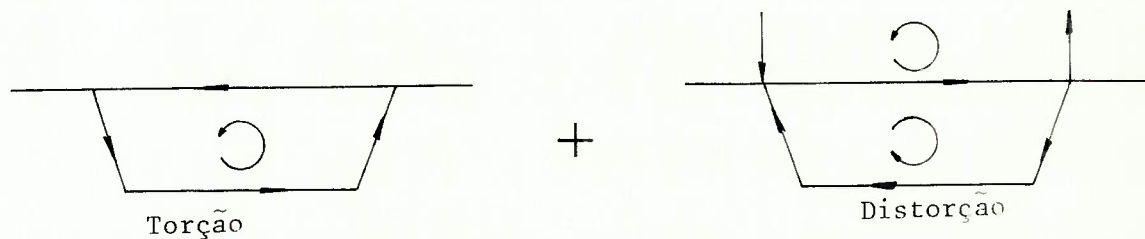


Fig. 1-49 - Parcela II

O carregamento de torção já foi estudado, correspondendo praticamente à torção de Bredt.

O carregamento de distorção está resolvido pela analogia da viga sobre apoio elástico.

Os esforços normais transversais devidos ao carregamento de distorção são pequenos, podendo, em geral, ser desprezados.

#### 1.8.4.3. Parcela III (ver Fig. 1-43 e 1-44)

Parcela responsável pela *flexão transversal simétrica*. Não provoca nenhuma flexão longitudinal, torção ou distorção.

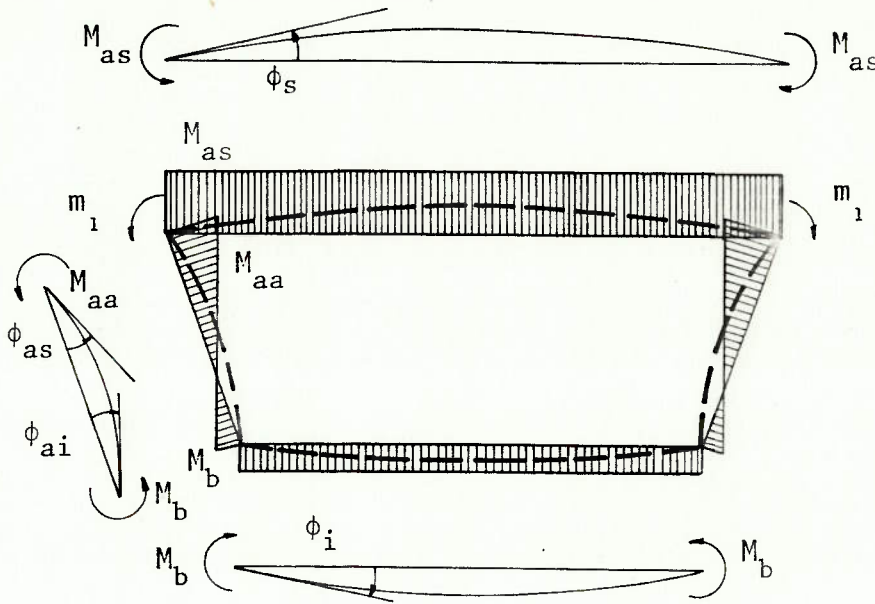


Fig. 1-50 - Diagrama M e Deformada do Quadro Devidos à Flexão Transversal Simétrica

Como o Quadro é simétrico e o carregamento também, tem-se um problema a nós fixos e com apenas duas incógnitas hiperestáticas.

Adotando como isostática fundamental a estrutura a nós fixos com articulações internas nos quatro nós do Quadro, a solução se obtém compatibilizando as deformadas das quatro vigas simplesmente apoiadas obtidas. Da Fig. 1-50:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_s &= \frac{M_{as} b_s}{2EI_s} \\
 \phi_i &= \frac{M_b b_i}{2EI_i} \\
 \phi_{as} &= \left[ (m_1 - M_{as}) - \frac{M_b}{2} \right] \frac{b_a}{3EI_a} \\
 \phi_{ai} &= \left[ (m_1 - M_{as}) \frac{l}{2} - M_b \right] \frac{b_a}{3EI_a}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

O equilíbrio está implícito em  $M_{aa} = m_1 - M_{as}$ .

A compatibilidade fica garantida por:

$$\phi_s = \phi_{as} \quad \text{e} \quad \phi_i = \phi_{ai} \quad (1.50)$$

Sistema de duas equações a duas incógnitas  $M_{as}$  e  $M_b$ .

$$\begin{cases} \frac{M_{as} b_s}{2EI_s} = \frac{(m_1 - M_{as})b_a}{3EI_a} - \frac{M_b b_a}{6EI_a} \\ \frac{M_b b_i}{2EI_i} = \frac{(m_1 - M_{as})b_a}{6EI_a} - \frac{M_b b_a}{3EI_a} \end{cases} \quad (1.51)$$



(1.52)

De (1.52):

$$M_b \left( \frac{b_i}{2EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a} \right) = (m_1 - M_{as}) \frac{b_a}{6EI_a}$$

Substituindo em (1.51):

$$M_{as} \left( \frac{b_s}{2EI_s} + \frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left(\frac{b_a}{6EI_a}\right)^2}{\frac{b_i}{2EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}} \right) = m_1 \left( \frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left(\frac{b_a}{6EI_a}\right)^2}{\frac{b_i}{2EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}} \right)$$

$$\delta_1 = \frac{M_{as}}{m_1} = \frac{\frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left(\frac{b_a}{6EI_a}\right)^2}{\frac{b_i}{2EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}}}{\frac{b_s}{2EI_s} + \frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left(\frac{b_a}{6EI_a}\right)^2}{\frac{b_i}{2EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}}} = \frac{2 - \frac{1}{(3\rho_i + 2)}}{3\rho_s + 2 - \frac{1}{(3\rho_i + 2)}} =$$

$$= \frac{\frac{(6\rho_i + 4 - 1)}{(3\rho_i + 2)}}{(9\rho_s\rho_i + 6\rho_s + 6\rho_i + 4 - 1)} = \frac{2\rho_i + 1}{3\rho_s\rho_i + 2\rho_s + 2\rho_i + 1} \quad (1.53)$$

$$M_b = (m_1 - M_{as}) \frac{\frac{b_a}{6EI_a}}{\frac{b_i}{2EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}}$$

$$\lambda_1 = \frac{M_b}{m_1} = (1 - \delta_1) \frac{1}{3\rho_i + 2} = \frac{\rho_s}{3\rho_s\rho_i + 2\rho_s + 2\rho_i + 1} \quad (1.54)$$

Através dos coeficientes  $\delta_1$  e  $\lambda_1$ , pode-se determinar o diagrama de momentos no quadro.

Nesse carregamento, nem sempre os esforços normais são desprezíveis, principalmente a tração na laje inferior, devida a carregamento na laje superior.

Assim:

$$N_s = \frac{M_{aa} + M_b}{h} = + (1 - \delta_1 + \lambda_1) \frac{m_1}{h} \quad (1.55)$$

$$N_i = - (1 - \delta_1 + \lambda_1) \frac{m_1}{h}$$

A solução dessa parcela III pode ser usada para calcular o efeito do peso próprio da laje inferior, desde que se invertam os índices  $s$  e  $i$ .

Ela pode, também, ser aproveitada para cálculo do hiperestático de protensão transversal, desde que se despreze o efeito da deformação por força normal, o que é, em geral, aceitável.

A análise dos efeitos transversais da protensão longitudinal, importante sobretudo para seções multicelulares, pode ser encontrada em (B-36) e (B-5).

#### 1.8.4.4. Parcela IV (Fig. 1-43 e 1-44)

Parcela responsável pela *flexão transversal antimétrica* (quadro com n̄s fixos) e mais parcelas adicionais de torção e distorção.

Como esse carregamento é antimétrico, a deformação do quadro também o será, observando-se deslocamento dos n̄s, ou seja, distorção.

De forma a separar os fenômenos, resolver-se-á o quadro com n̄s fixos, o que corresponde à flexão transversal antimétrica. Verificar-se-á, em seguida, que os esforços necessários para se manterem fixos os n̄s correspondem a parcelas adicionais de torção e distorção.

#### A. Quadro com N̄s Fixos - Flexão Transversal Antimétrica

Esse quadro com n̄s fixos, sob carga antimétrica, é um problema com duas incógnitas hiperestáticas, que pode ser resolvido da mesma maneira que a Parcela III.

Adotada como isostática fundamental a estrutura a n̄s fixos com articulações internas nos quatro n̄s do quadro, a solução se obtém compatibilizando as deformadas das quatro vigas simplesmente apoiadas assim obtidas.

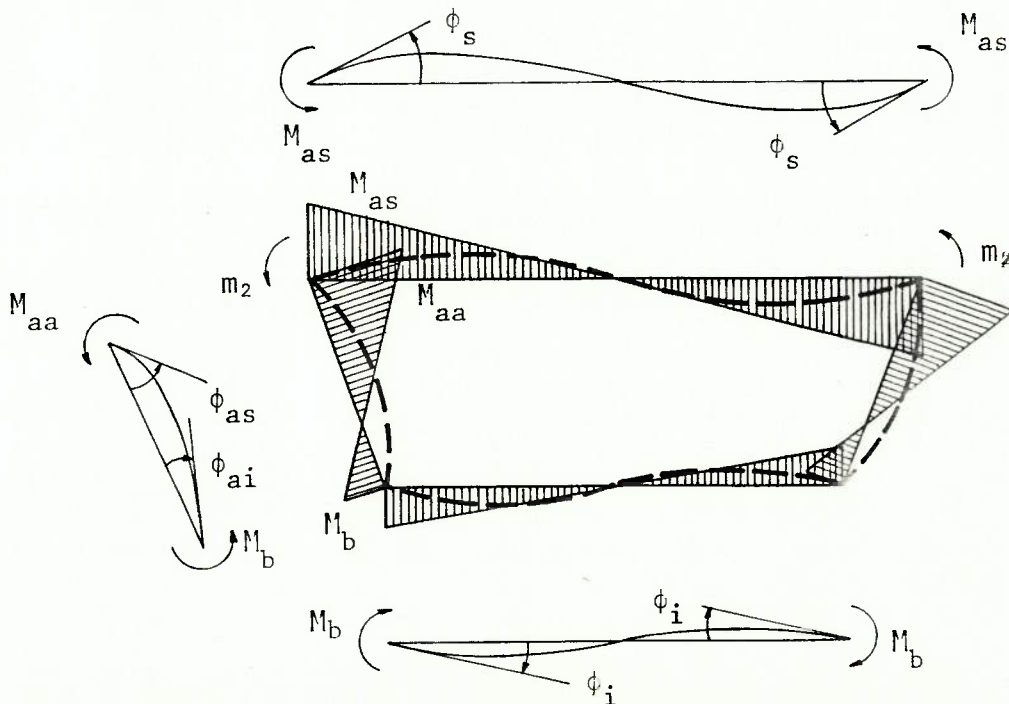


Fig. 1-51 - Diagrama M e Deformada do Quadro Devidos à Flexão Transversal Antimétrica



Da Fig. 1-51:

$$\left. \begin{aligned} \phi_s &= \frac{M_{as} b_s}{6EI_s} \\ \phi_i &= \frac{M_b b_i}{6EI_i} \\ \phi_{as} &= \left( (m_2 - M_{as}) - \frac{M_b}{2} \right) \frac{b_a}{3EI_a} \\ \phi_{ai} &= \left( (m_2 - M_{as}) \frac{1}{2} - M_b \right) \frac{b_a}{3EI_a} \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

O equilíbrio está implícito em  $M_{aa} = m_2 - M_{as}$ .

A compatibilidade fica garantida por:

$$\phi_s = \phi_{as} \quad e \quad \phi_i = \phi_{ai} \quad (1.57)$$

Sistema de duas equações com duas incógnitas  $M_{as}$  e  $M_b$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M_{as} b_s}{6EI_s} &= \frac{(m_2 - M_{as})b_a}{3EI_a} - \frac{M_b b_a}{6EI_a} \end{aligned} \right. \quad (1.58)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M_b b_i}{6EI_i} &= \frac{(m_2 - M_{as})b_a}{6EI_a} - \frac{M_b b_a}{3EI_a} \end{aligned} \right. \quad (1.59)$$

De (1.59),

$$M_b \left( \frac{b_i}{6EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a} \right) = (m_2 - M_{as}) \frac{b_a}{6EI_a}$$

Substituindo em (1.58),

$$M_{as} \left[ \frac{b_s}{6EI_s} + \frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left( \frac{b_a}{6EI_a} \right)^2}{\frac{b_i}{6EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}} \right] = m_2 \left[ \frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left( \frac{b_a}{6EI_a} \right)^2}{\frac{b_i}{6EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \delta_2 = \frac{M_{as}}{m_2} &= \frac{\frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left(\frac{b_a}{6EI_a}\right)^2}{\frac{b_i}{6EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}}}{\frac{b_s}{6EI_s} + \frac{b_a}{3EI_a} - \frac{\left(\frac{b_a}{6EI_a}\right)^2}{\frac{b_i}{6EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}}} = \frac{1 - \frac{1}{(2\rho_i + 4)}}{\frac{\rho_s}{2} + 1 - \frac{1}{(2\rho_i + 4)}} = \\
 &= \frac{\frac{(2\rho_i + 3)}{(2\rho_i + 4)}}{\frac{(\rho_i\rho_s + 2\rho_s + 2\rho_i + 3)}{(2\rho_i + 4)}} = \frac{2\rho_i + 3}{\rho_s\rho_i + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} \quad (1.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_b &= (m_2 - M_{as}) \frac{\frac{b_a}{6EI_a}}{\frac{b_i}{6EI_i} + \frac{b_a}{3EI_a}} \\
 \lambda_2 = \frac{M_b}{m_2} &= (1 - \delta_2) \frac{1}{\rho_i + 2} = \frac{\rho_s}{\rho_s\rho_i + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} \quad (1.61)
 \end{aligned}$$

Através dos coeficientes  $\delta_2$  e  $\lambda_2$  pode-se determinar o diagrama de momentos no quadro. Os esforços normais correspondentes a essa parcela são, em geral, desprezíveis.

Como, neste primeiro passo, o quadro foi admitido "com nós fixos", é preciso conhecer as reações nos nós. Na Fig. 1-52 calculam-se essas reações.

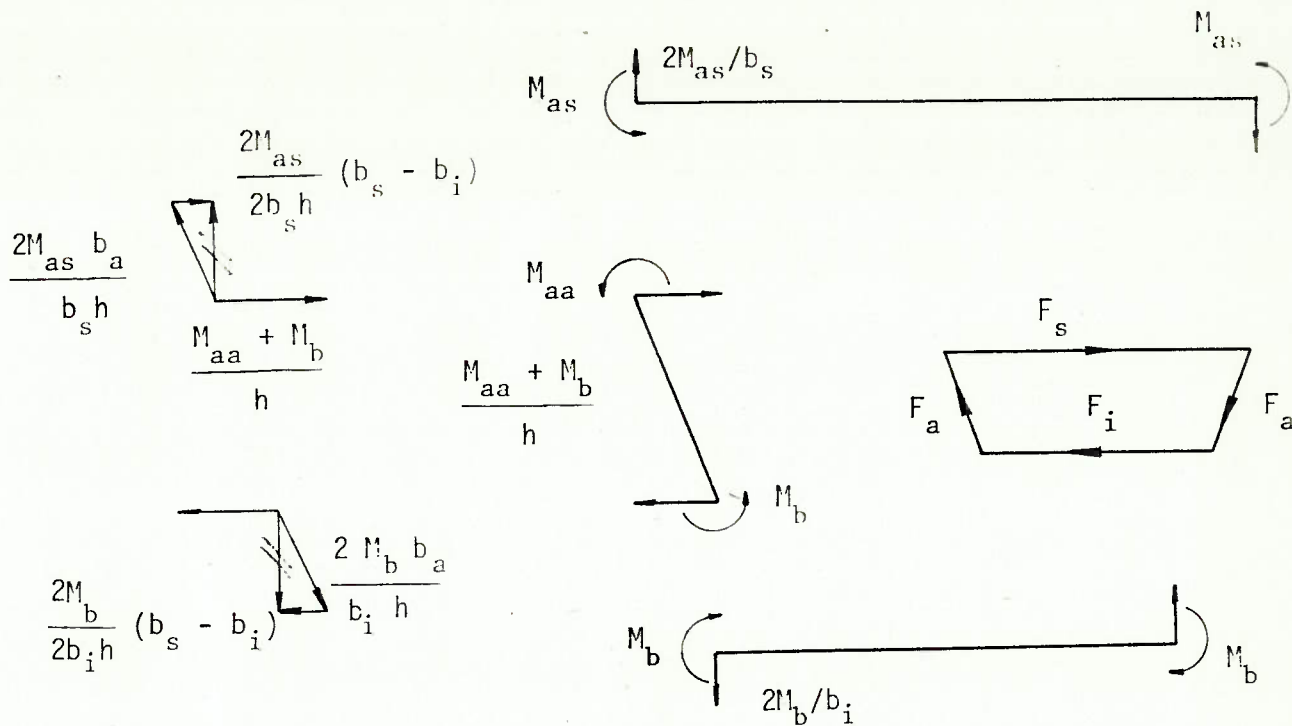


Fig. 1-52 - Reações de Apoio do Quadro com Nões Fixos

$$\begin{aligned}
 F_s &= m_2 \left( 2 \frac{(1 - \delta_2 + \lambda_2)}{h} + 2\delta_2 \frac{(b_s - b_i)}{b_s h} \right) \\
 F_i &= m_2 \left( 2 \frac{(1 - \delta_2 + \lambda_2)}{h} + 2\lambda_2 \frac{(b_s - b_i)}{b_i h} \right) \\
 F_a &= m_2 \left( \frac{2\delta_2 b_a}{b_s h} - \frac{2\lambda_2 b_a}{b_i h} \right)
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

A solução ora obtida é a solução do quadro com nós fixos, e as forças acima são as cargas externas necessárias à fixação dos nós. Ao se liberarem os nós, essas forças serão devolvidas à estrutura com sentido invertido. Elas constituirão um novo carregamento, que provocará o deslocamento dos nós (ver Fig. 1-53).

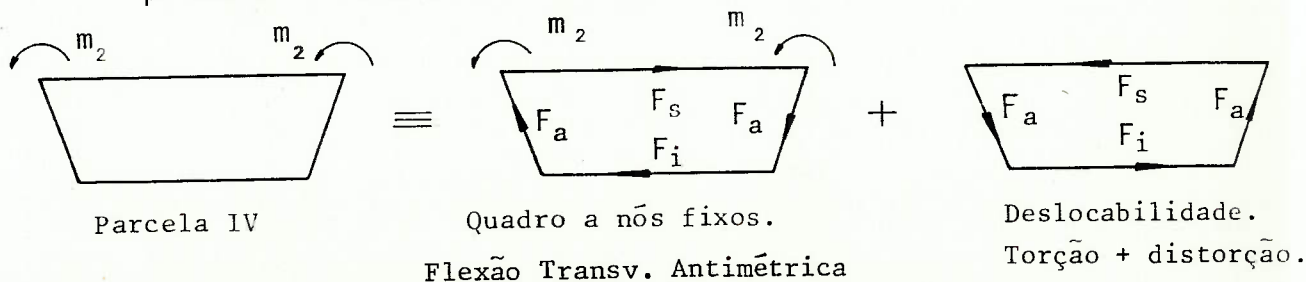


Fig. 1-53 - Decomposição da Parcela IV

## B. Efeito da Deslocabilidade dos Nós

Esse novo carregamento responsável pelo deslocamento dos nós tem, como resultante, um momento de torção distribuído dado por  $2m_2$ , mas não corresponde exatamente à torção de Bredt. A diferença entre esse carregamento e a torção de Bredt é o carregamento de distorção.

### B.1. Torção de Bredt

A parcela adicional de torção é a correspondente a  $M'_t = 2m_2$ , dada por:

$$\phi' = \frac{M'_t}{2A} = \frac{2m_2}{2(b_s + b_i)h}$$

$$\left. \begin{aligned} F_s^t &= \phi' b_s = m_2 \frac{2b_s}{(b_s + b_i)h} \\ F_i^t &= \phi' b_i = m_2 \frac{2b_i}{(b_s + b_i)h} \\ F_a^t &= \phi' b_a = m_2 \frac{2b_a}{(b_s + b_i)h} \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

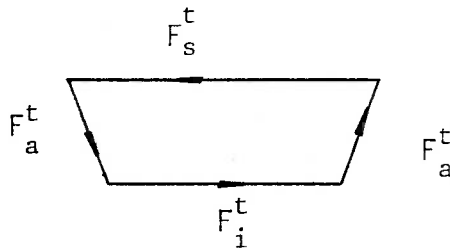


Fig. 1-54 - Carregamento de Torção Adicional

### B.2. Distorção

A parcela adicional de distorção é dada pela diferença entre o carregamento responsável pelo deslocamento dos nós e a torção de Bredt.

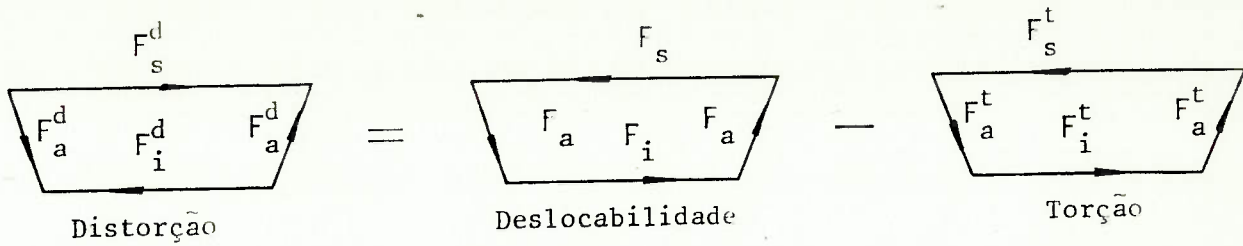


Fig. 1-55 - Carregamento de Distorção Adicional

$$\begin{aligned}
 F_s^d &= -F_s - (-F_s^t) = m_2 \left[ 2 \frac{(\delta_2 - \lambda_2 - 1)}{h} + 2\delta_2 \frac{(b_i - b_s)}{b_s h} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2b_s}{(b_s + b_i)h} \right] \\
 F_i^d &= -F_i - (-F_i^t) = m_2 \left[ 2 \frac{(\delta_2 - \lambda_2 - 1)}{h} + 2\lambda_2 \frac{(b_i - b_s)}{b_i h} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2b_i}{(b_s + b_i)h} \right] \\
 F_a^d &= F_a - F_a^t = m_2 \left[ \frac{2\delta_2 b_a}{b_s h} - \frac{2\lambda_2 b_a}{b_i h} - \frac{2b_a}{(b_s + b_i)h} \right]
 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Satisfazendo o equilíbrio, é fácil verificar, tem-se:

$$F_i^d = F_a^d \frac{b_s}{b_a} \quad \text{e} \quad F_s^d = F_a^d \frac{b_i}{b_a}$$

A parcela adicional de distorção provocada por  $m_2$  pode ser calculada diretamente por  $F_a^d$  ou, o que é mais prático, através de  $p_{eq}$ , carga equivalente a  $m_2$  no que diz respeito à distorção.

$$F_a(p_{eq}) = \frac{p_{eq} b_i b_a}{2h(b_s + b_i)}$$

$$F_a(p_{eq}) = F_a^d$$

$$\frac{p_{eq} b_i b_a}{2h(b_s + b_i)} = m_2 \frac{2b_a}{h} \left( \frac{\delta_2}{b_s} - \frac{\lambda_2}{b_i} - \frac{1}{b_s + b_i} \right)$$

$$p_{eq} = m_2 \frac{4}{b_i} \left( \frac{b_s + b_i}{b_s} \delta_2 - \frac{b_s + b_i}{b_i} \lambda_2 - 1 \right) =$$

$$= m_2 \frac{4}{b_i} \left[ (1 + \xi) \delta_2 - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \lambda_2 - 1 \right]$$

Substituindo  $\lambda_2$  e  $\delta_2$  pelos respectivos valores:

$$p_{eq} = m_2 \frac{4}{b_i} \left[ (1 + \xi) \frac{2\rho_i + 3}{\rho_i \rho_s + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_i \rho_s + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} - 1 \right] = m_2 \frac{4}{b_i} \cdot$$

$$\frac{(1 + \xi)(2\rho_i + 3) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)\rho_s - \rho_i \rho_s - 2\rho_s - 2\rho_i - 3}{\rho_i \rho_s + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} =$$

$$= m_2 \frac{4}{b_i} \left[ \frac{-\rho_i \rho_s - \rho_s \left(3 + \frac{1}{\xi}\right) + 2\rho_i \xi + 3\xi}{\rho_i \rho_s + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} \right] = \alpha m_2$$

para  $\alpha = \frac{4}{b_i} \left[ \frac{-\rho_i \rho_s - \rho_s \left(3 + \frac{1}{\xi}\right) + 2\rho_i \xi + 3\xi}{\rho_i \rho_s + 2\rho_s + 2\rho_i + 3} \right] \quad (1.65)$

### 1.8.5. Solução da Viga sobre Apoio Elástico

Na análise do caso genérico de carga, a única coisa que resta comentar é a solução da viga sobre apoio elástico.

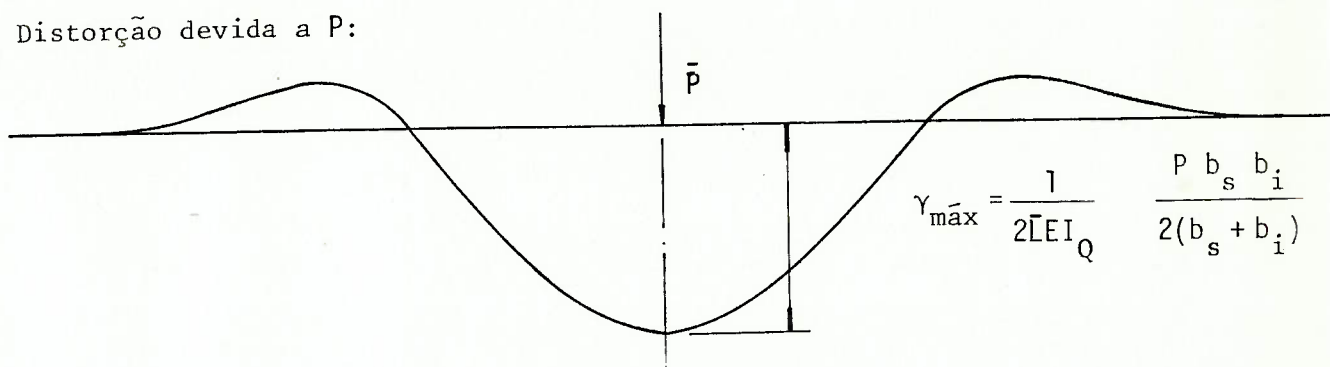
O estudo das Parcelas II e IV levou à determinação do carregamento dessa viga. Ele, segundo as hipóteses já formuladas, deve compor-se de cargas uniformes, integral ou parcialmente distribuídas, e de cargas concentradas.

A solução analítica desse problema é algumas vezes encontrada na literatura, (B-43) e (B-71), especialmente nos casos de cargas uniformes e condições de contorno simples.

O caso geral, incluindo inércia variável, pode ser resolvido no computador, de forma simples e prática. Existem, por outro lado, soluções aproximadas que devem ser comentadas.

Elas são aplicáveis no caso de transversinas bastante espaçadas ( $l \geq 3\bar{L}$ ), de forma que a região central entre elas funciona como uma viga longa sobre apoio elástico. Quando se está interessado apenas na flexão transversal (efeito mais importante da distorção nas estruturas de concreto), podem-se calcular as solicitações devidas a uma carga concentrada  $P$ , através de uma carga uniformemente distribuída  $p_{eq}$  equivalente. A carga  $p_{eq}$  é calculada de forma que produza distorção igual à máxima devida a  $P$  (ver Fig. 1-56).

a. Distorção devida a  $P$ :



b. Distorção devida a  $p_{eq}$ :

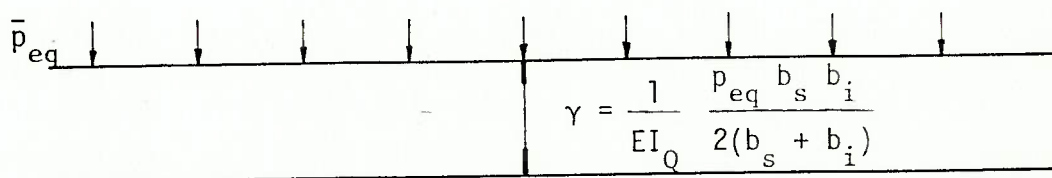


Fig. 1-56 - Diagramas de Distorção  $\gamma$

Igualando  $\gamma(p_{eq})$  e  $\gamma_{máx}(P)$ , tem-se:

$$p_{eq} = \frac{P}{2\bar{L}} \quad (1.66)$$



Quando não se está interessado somente na flexão transversal, ou quando a carga não é concentrada, mas parcialmente distribuída, uma solução simples consiste na utilização das linhas de influência da viga longa sobre apoio elástico: a linha de influência de distorção (deslocamento) e a linha de influência de bimomento (momento fletor).

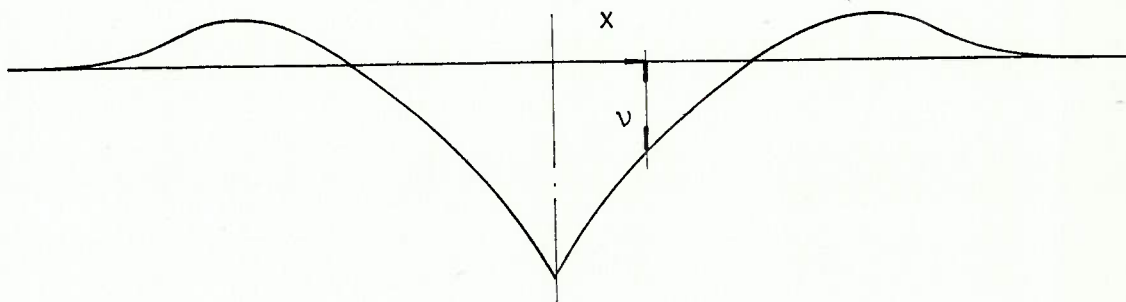


Fig. 1-57 - Linha de Influência de Bimomento

$$v = e^{-\bar{\lambda}x}(\cos\bar{\lambda}x - \text{sen}\bar{\lambda}x) \frac{1}{4\bar{\lambda}} \quad (1.67)$$

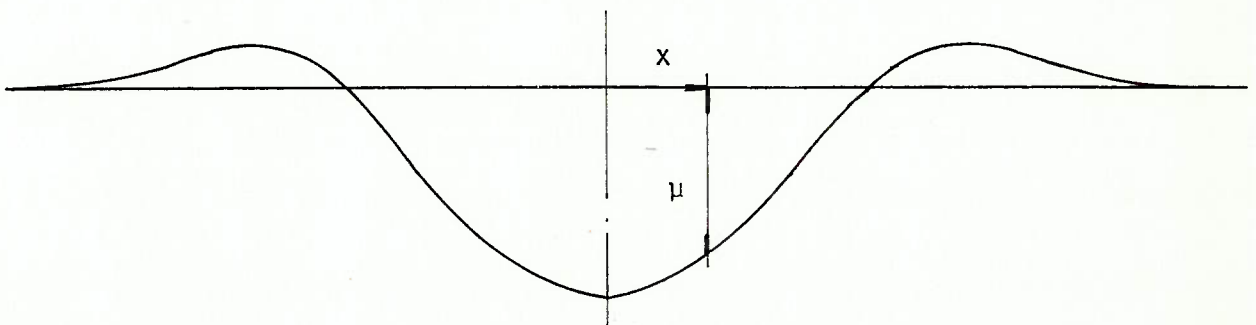


Fig. 1-58 - Linha de Influência de Distorção

$$\mu = e^{-\bar{\lambda}x}(\cos\bar{\lambda}x + \text{sen}\bar{\lambda}x) \frac{\bar{\lambda}}{2EI_Q} \quad (1.68)$$

Carregando estas linhas de influência, obtêm-se  $B$  (bimomento) e  $\gamma$  (distorção) respectivamente, e podem-se calcular  $\sigma$  (tensões de empenamento) e  $M$  (flexão transversal).

#### 1.8.6. Comentários

No Item 1.8, desenvolveu-se a AVAE para o caso genérico de carga, completando a descrição do método de cálculo e possibilitando a solução dos problemas de projeto de forma prática.

Como existem métodos alternativos, procurar-se-á enumerar os mais importantes deles, fornecendo as referências bibliográficas.

Em (B-48), por exemplo, foi feita uma revisão de toda a literatura relacionada às seções celulares. Os métodos alternativos foram sucintamente descritos e seus resultados comentados.

O Método dos Elementos Finitos e o das Faixas Finitas encontram-se descritos em (B-49), (B-50) e (B-53).

O Método das Coordenadas Generalizadas é apresentado em (B-41), (B-51) e (B-52).

O Método das Estruturas Prismáticas Laminares adaptado a seções celulares pode ser encontrado em (B-53), (B-54) e (B-56).

O Método das Placas Ortótropas também já foi adaptado às seções celulares, veja-se (B-58).

Nenhum desses métodos é, entretanto, tão simples e prático quanto a AVAE. Essa simplicidade exige uma certa perda de precisão em relação aos métodos mais sofisticados, mas que é aceitável sobretudo para seções uncelulares.

Cálculos comparativos já foram feitos muitas vezes, e os resultados sempre se apresentaram bons. Em (B-20), encontra-se uma grande série de exemplos. Em (B-27), foi feita uma interessante análise experimental, em que os resultados experimentais são comparados aos obtidos pela AVAE. Os resultados são muito bons.

### 1.9. Exemplo 2

Este segundo exemplo tem por objetivo analisar os esforços internos numa ponte de seção celular, provocados pelo trem tipo TB36, servindo, portanto, como *orientação de projeto*.

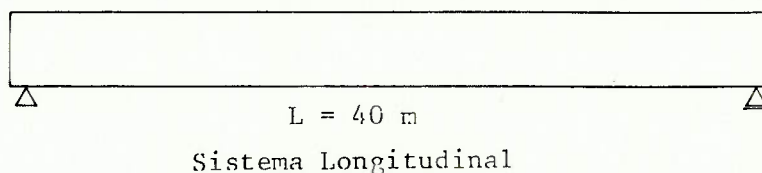
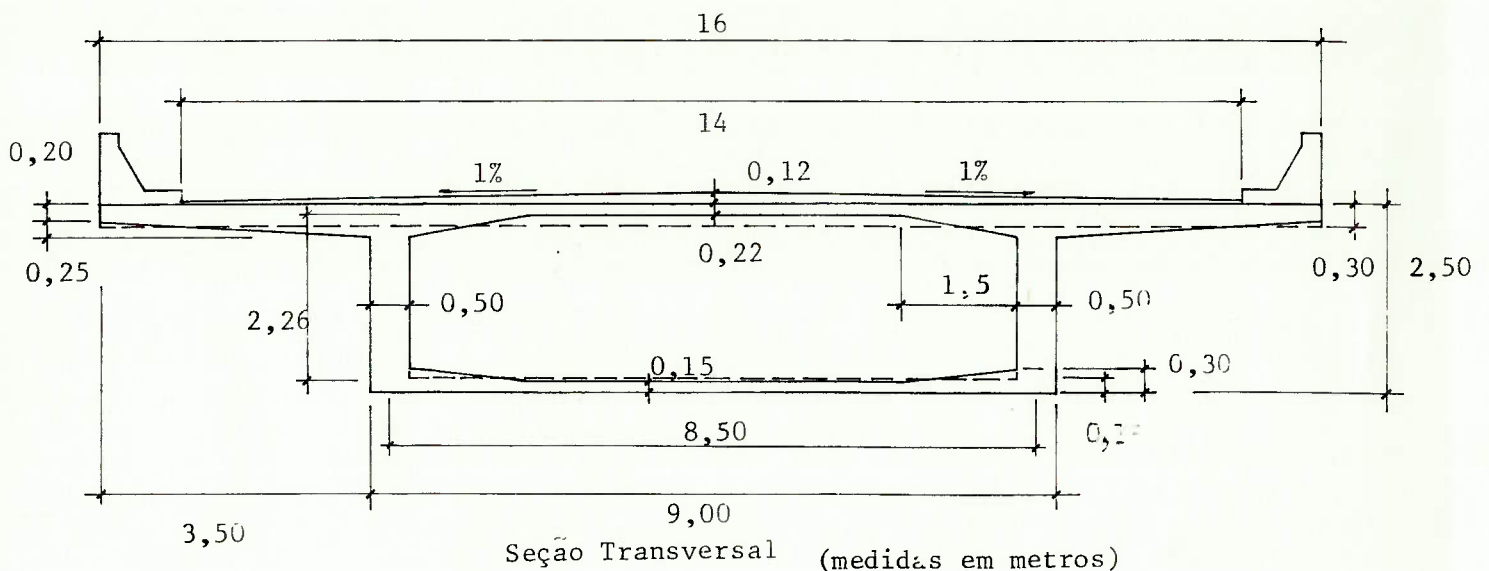


Fig. 1-59 - Geometria da Ponte Considerada

Considere-se a estrutura da Fig. 1-59, uma obra unicelular, simplesmente apoiada, com vão de 40 m e largura de 16 m.

A Fig. 1-59 representa a seção transversal real e a modelizada, isto é, com placas de espessura constante. A consideração da espessura média leva a grandes simplificações de cálculo, sem comprometer significativamente a precisão.

Considerar-se-á apenas no cálculo das *características geométricas de flexão longitudinal* e dos *momentos de engastamento das lajes*, o *efeito das mīsulas*.

Poder-se-ia levar em conta a existência das mīsulas na solução da distorção do perfil, considerando, para cada deformada do *quadro* (simétrica e antimétrica), as *placas* de espessura constante equivalentes e, para a *estrutura plissada*, as *chapas* de espessura constante equivalentes.

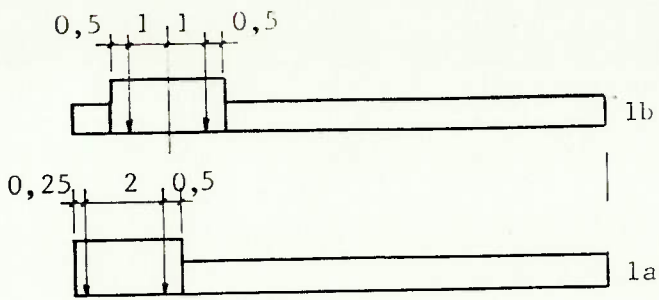
Essa precisão não é normalmente necessária, constituindo a espessura média uma boa aproximação.

Mesmo na determinação das *características geométricas de flexão longitudinal* e dos *esforços de engastamento das lajes*, a consideração da espessura média leva a erros pequenos, limitados normalmente a 5% e 10%, respectivamente.

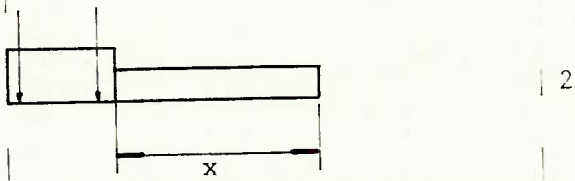
A análise da estrutura será feita através dos esforços internos mais significativos, devidos às cargas permanentes e variáveis.

As cargas permanentes correspondem ao peso próprio (21,0 tf/m), à pavimentação (2,60 tf/m) e a dois guarda-corpos intransponíveis (2,00 tf/m).

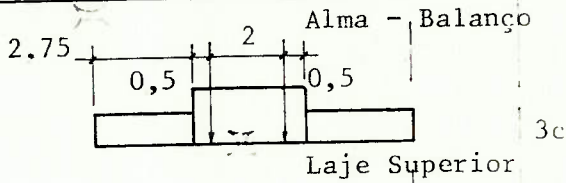
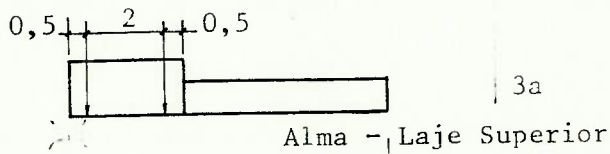
As cargas variáveis correspondem ao TB36 da NB6/60, relativamente ao qual serão considerados os carregamentos da Fig. 1-60.



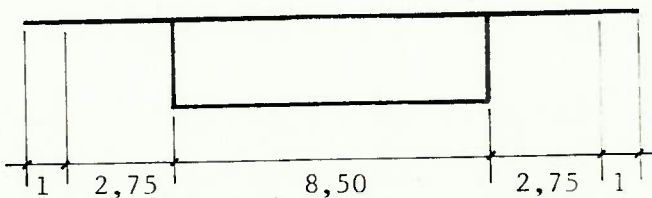
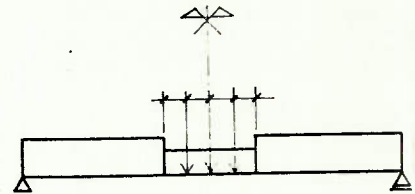
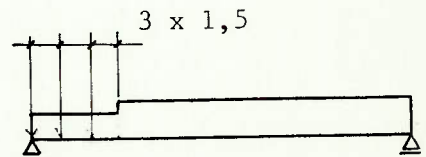
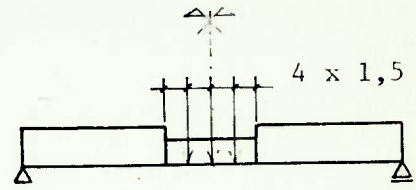
1. Máxima Flexão Longitudinal



2. Máxima Tensão de Cisalhamento



3. Flexões Transversais Críticas



A. Posição Transversal do Trem Tipo

B. Posição Longitudinal do Trem Tipo

Fig. 1-60 - Carregamentos

1.9.1. Carregamento la

1.9.1.1. O cálculo deve começar pela determinação das características geométricas, o que pode ser feito através das expressões apresentadas ao longo da Dissertação.

Neste exemplo, a relação largura/vão permite considerar toda a seção colaborante.

$b = 16,0 \text{ m}$	$S = 8,305 \text{ m}^2$	$I_a = 0,0109 \text{ m}^3$	$\beta = 4,146$
$h = 2,26 \text{ m}$	$y_i = 1,629 \text{ m}$	$I_s = 0,00234 \text{ m}^3$	$\omega_a = 0,933 \text{ m}^2$
$t_s = 0,30 \text{ m}$	$y_s = 0,871 \text{ m}$	$I_i = 0,000506 \text{ m}^3$	$J_\omega = 21,79 \text{ m}^6$
$b_s = 8,50 \text{ m}$	$I_z = 7,304 \text{ m}^4$	$\rho_i = 80,61$	$\lambda = 0,0809 \text{ m}^{-1}$
$t_a = 0,50 \text{ m}$	$W_i = 4,485 \text{ m}^3$	$\rho_s = 17,41$	$\delta_1 = 0,0368$
$b_a = 2,26 \text{ m}$	$W_s = 8,383 \text{ m}^3$	$\xi = 1$	$\lambda_1 = 0,00395$
$t_i = 0,18 \text{ m}$	$A = 19,21 \text{ m}^2$	$\eta = 0,244$	$\delta_2 = 0,102$
$b_i = 8,50 \text{ m}$	$I_t = 17,45 \text{ m}^4$	$I_Q = 0,00374 \text{ m}^2$	$\lambda_2 = 0,0109$
$v = 0,2$			$\alpha = -0,384$

1.9.1.2. A seguir, é preciso calcular os esforços de engastamento das lajes nas almas.

Quando as lajes têm mísulas importantes, é conveniente considerá-las no cálculo dos esforços de engastamento. Para isso, os âbacos (B-46) e (B-47) são muito práticos.

A. Cargas Permanentes

$$\begin{aligned}
 m_{\text{balanço}} &= - \underbrace{\frac{0,50 \cdot 3,75^2}{2} - \frac{0,63 \cdot 3,75^2}{6}}_{\text{pp}} - \underbrace{\frac{0,19 \cdot 2,75^2}{2}}_{\text{pav.}} - \underbrace{1 \cdot 3,50}_{\text{g.corpo}} = \\
 &= - 9,21 \text{ tfm/m} \\
 m_{\text{vão sup.}} &= - \underbrace{(0,0993 \cdot 0,73 + 0,0092 \cdot 0,58)}_{\text{vão}} \overbrace{8,5^2}^{\text{mísula}} = - 5,64 \text{ tfm/m}
 \end{aligned}$$

$$m_{\text{vão inf.}} = - \underbrace{(0,0993 + 0,0092)}_{\text{vão}} \underbrace{0,38}_{\text{mísula}} \cdot \overline{8,5^2} = - 2,98 \text{ tfm/m}$$

### B. Cargas Variáveis (TB36)

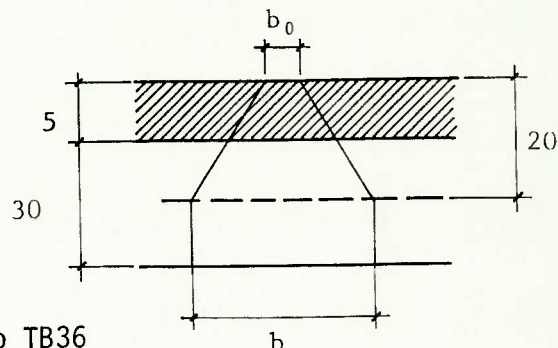


Fig. 1-61 - Roda do TB36

- Dimensões da roda ao nível da superfície média:

$$\text{largura} = 45 + 40 = 95 \text{ cm}$$

$$\text{comprimento} = 20 + 40 = 60 \text{ cm}$$

- Coeficiente de impacto (NB2/60):

$$\phi = 1,4 - 0,007 \ell$$

$$\phi_{\text{long.}} \cong 1,4 - 0,007 \cdot 40 = 1,12$$

$$\phi_{\text{trans.}} \cong 1,4 - 0,007 \cdot 8 = 1,35$$

- Esforços no balanço:

- junto ao trem tipo (ver âbaco 1 (B-46), pág. 1.116:

$$m_{\text{bal.esq.}} = - 1,35 (6 \cdot 1,56 + 0,5 \cdot 0,48) = - 13,0 \text{ tfm/m}$$

$$M_{\text{bal.esq.}} (\text{trem tipo}) = - 1,35 (3 \cdot 6 \cdot 2,53 + 3 \cdot 6 \cdot 0,53) = - 74,4 \text{ tfm}$$

$$\ell = \frac{74,4}{13,0} \cong 6,0 \text{ m}$$

$$q_{\text{bal.esq.}} = 1,35 \cdot 6 \cdot \frac{6}{6} = 8,10 \text{ tf/m}$$



• longe do trem tipo:

$$m_{\text{bal.esq.}} = -1,35 \cdot 0,5 \cdot \frac{2,75^2}{2} = -2,55 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{bal.esq.}} = 1,35 \cdot 0,5 \cdot 2,75 = 1,86 \text{ tf/m}$$

$$m_{\text{bal.dir.}} = -1,53 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{bal.dir.}} = 1,11 \text{ tf/m}$$



- Esforços no vão:

$$m_{\text{vão sup.}} = -1,35 \cdot 0,3 \cdot 8,5^2 \cdot 0,0993 = -2,93 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{vão sup.}} = 1,35 \cdot 0,3 \cdot 4,25 = 1,72 \text{ tf/m}$$

$$m = 13,0 - 2,93 = 10,1 \text{ tfm/m}$$

$$p = 8,10 + 1,72 = 9,82 \text{ tf/m}$$

$$m = 2,55 - 2,93 = -0,38 \text{ tfm/m}$$

$$p = 1,86 + 1,72 = 3,58 \text{ tf/m}$$

$$m = 2,93 - 1,53 = 1,40 \text{ tfm/m}$$

$$p = 1,72 + 1,11 = 2,83 \text{ tf/m}$$

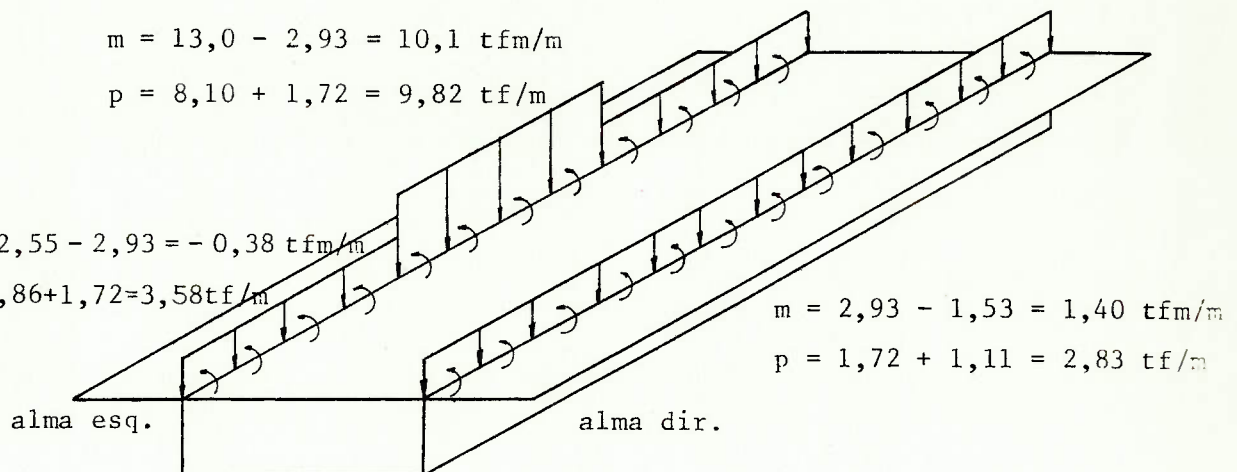


Fig. 1-62 - Resumo do Carregamento Variável

### 1.9.1.3. Decomposição do Carregamento Variável em Simétrico e Antimétrico

Note-se que, sendo o carregamento permanente simétrico, ele não provoca distorção.

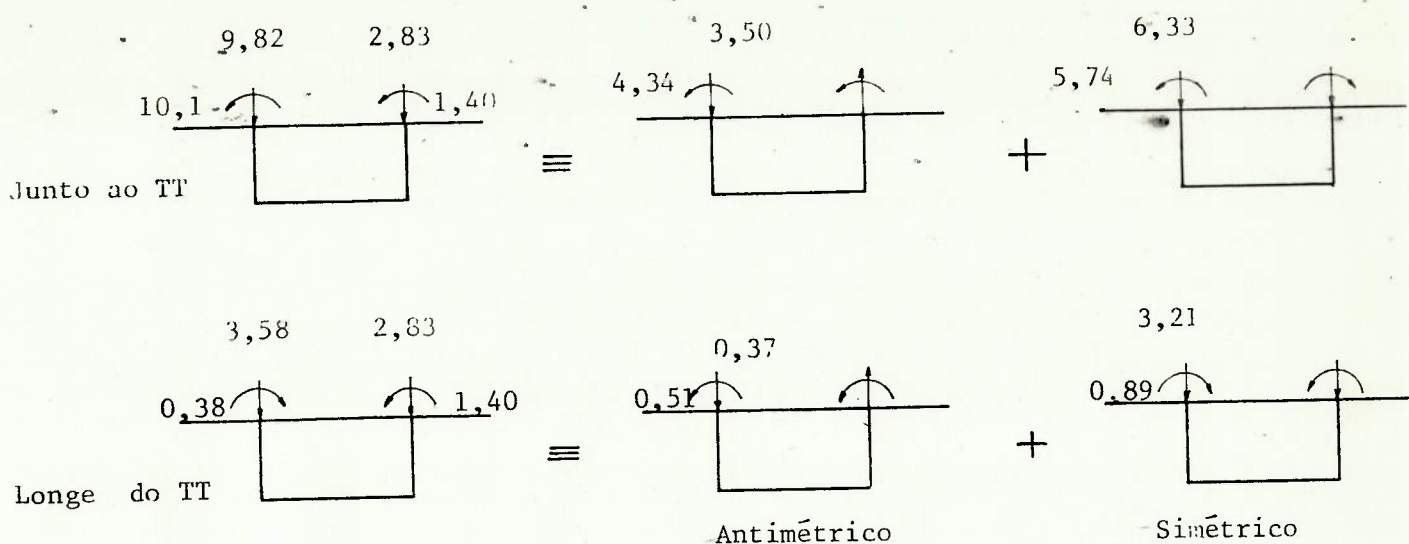


Fig. 1-63 - Decomposição do Cárregamento Variável

1.9.1.4. Cálculo dos Esforços Solicitantes

A. Flexão - cálculo do momento fletor no meio do vão.

Trem tipo uniformizado de flexão

Carga concentrada =  $1,12 \cdot 4,5 \cdot 2 = 10,1 \text{ tf}$

Carga distribuída =  $1,12(0,5 \cdot 2,75 + 0,3 \cdot 11,25) = 5,33 \text{ tf/m}$

$$M_{\text{máx}} = 25,6 \frac{40^2}{8} + 5,33 \frac{40^2}{8} + 10,1(10 + 2 \cdot 9,25) =$$

$$= 5120 + 1066 + 288 \approx 6500 \text{ tfm}$$

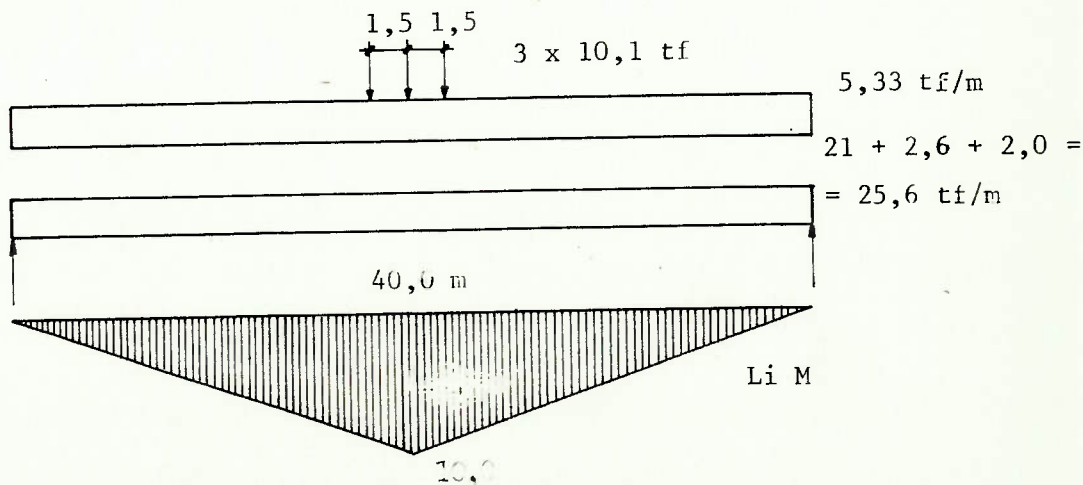


Fig. 1-64 - Linha de Influência de Flexão Longitudinal

B. Distorção - cálculo do bimomento no meio do vão

- Junto ao trem tipo:

$$\bar{p} = (p + \alpha m_2) \frac{b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = (2 \cdot 3,50 - 0,384 \cdot 4,33) \frac{8,5^2}{34} = 11,2 \text{ tf}$$

- Longe do trem tipo:

$$\bar{p} = (p + \alpha m_2) \frac{b_s b_i}{2(b_s + b_i)} = (2 \cdot 0,37 - 0,384 \cdot 0,51) \frac{8,5^2}{34} = 1,16 \text{ tf}$$

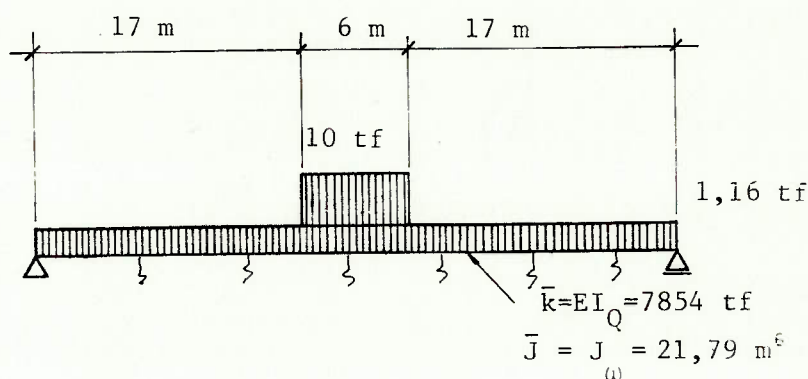


Fig. 1-65 - Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análogo

Como o vão (40 m) é longo em relação ao comprimento elástico ( $\frac{1}{\bar{\lambda}} = 12,4 \text{ m}$ ), pode-se calcular o bimomento pela linha de influência da viga infinita (ver Fig. 1-57).

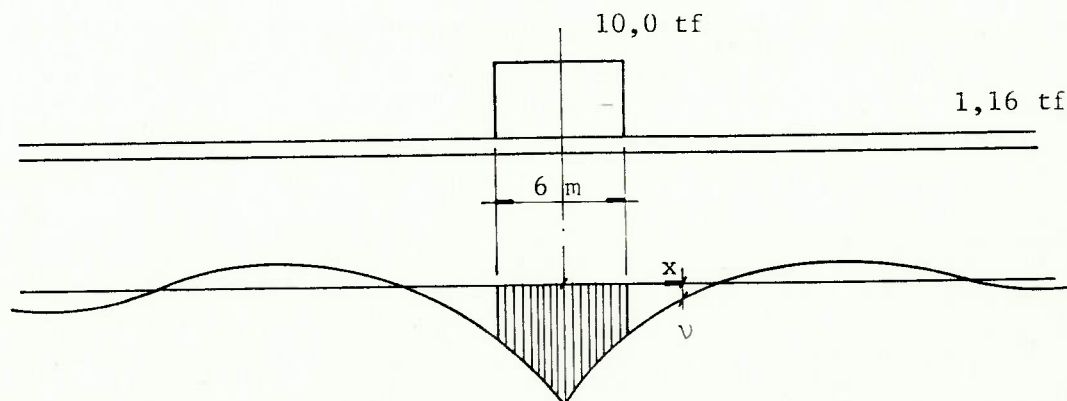


Fig. 1-66 - Cálculo do Bimomento Máximo

$$v = e^{-\bar{\lambda}x} (\cos \bar{\lambda}x - \operatorname{sen} \bar{\lambda}x) \frac{1}{4\bar{\lambda}} \quad \left| \begin{array}{l} x = 3 \text{ m} \quad v = 2,414 \text{ m} \\ x = 0 \quad v = 3,090 \text{ m} \\ x = -3 \text{ m} \quad v = 2,414 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$B(\text{TT}) = 10,0 \cdot 6 \cdot 2,75 = 165 \text{ tfm}^2$$

$$B(\text{Multidão}) = \frac{\bar{p}}{\bar{\lambda}^2} \frac{\operatorname{senh} \frac{\bar{\lambda}l}{2} \operatorname{sen} \frac{\bar{\lambda}l}{2}}{\cosh \bar{\lambda}l + \cos \bar{\lambda}l} = \frac{1,16}{0,0809^2} \frac{2,42 \cdot 0,999}{12,74 - 0,996} =$$

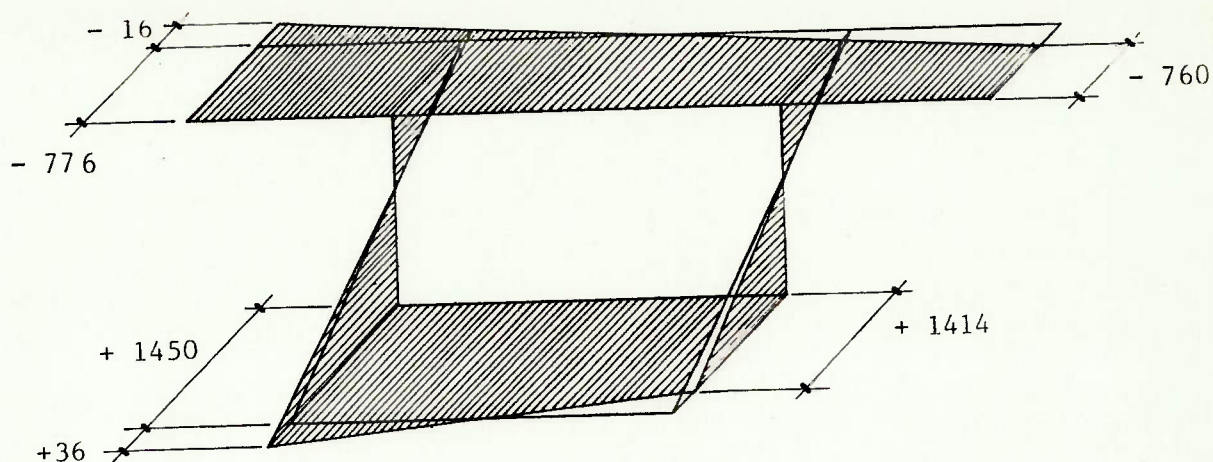
$$= 36,5 \text{ tfm}^2$$

$$B(\text{Total}) = 165 + 36,5 \cong 202 \text{ tfm}^2$$

#### 1.9.1.5. Cálculo das Tensões Normais

$$\sigma \text{ flexão} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sup} = -\frac{M}{W_s} = -\frac{6500}{8,38} = -776 \text{ tf/m}^2 \\ \text{inf} = \frac{M}{W_i} = \frac{6500}{4,49} = 1450 \text{ tf/m}^2 \end{array} \right.$$

$$\sigma \text{ distorção} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sup} = \pm \frac{B}{J_\omega} \omega = \pm \frac{202}{21,79} 0,933 \cdot 1,89 = \pm 16,3 \text{ tf/m}^2 \\ \text{inf} = \pm \frac{B}{J_\omega} \omega = \pm \frac{202}{21,79} 0,933 \cdot 4,15 = \pm 35,9 \text{ tf/m}^2 \end{array} \right.$$

Fig. 1-67 - Diagrama  $\sigma$  (tf/m<sup>2</sup>)

1.9.1.6. As tensões de cisalhamento e a flexão transversal não são críticas nesse caso.

### 1.9.2. Carregamento lb

#### 1.9.2.1. Cálculo dos Esforços de Engastamento para a Nova Posição do Trem Tipo

Considere-se a posição do trem tipo em que os momentos de engastamento do balanço e da laje superior sejam iguais. Essa posição corresponde, aproximadamente, ao trem tipo centrado na alma esquerda.

#### A. Esforço no Balanço

- Junto ao trem tipo (ver abaco 1 (B-46), pág. 1.116):

$$m_{\text{bal. esq.}} = -1,35(6 \cdot 0,66 + 0,3 \cdot 2,66) \cong -6,50 \text{ tfm/m}$$

$$M_{\text{bal. esq.}} (\text{trem tipo}) = 1,35(3 \cdot 6 \cdot 1) = -24,3 \text{ tfm}$$

$$l = \frac{24,3}{6,50} = 3,73 \text{ m}$$

$$q_{\text{bal. esq.}} = \left( \frac{1,35 \cdot 3 \cdot 6}{3,73} \right) + 1,35 \cdot 0,3 \cdot 1,25 = 7,0 \text{ tf/m}$$

- Longe do trem tipo:

$$m_{\text{bal. esq.}} = - 1,35(0,3 \frac{2,75^2}{2} + 0,2 \frac{1,5^2}{2}) = - 1,85 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{bal. esq.}} = 1,35(0,3 \cdot 2,75 + 0,2 \cdot 1,5) = 1,52 \text{ tf/m}$$

$$m_{\text{bal. dir.}} = - 1,53 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{bal. dir.}} = 1,11 \text{ tf/m}$$

### B. Esforços no Vão

- Junto do trem tipo (ver ābaco 2 (B-46), pāg. 1.117):

$$m_{\text{vão esq.}} = - 1,35(6 \cdot 0,54 + 0,3 \cdot 5,5) \cong - 6,50 \text{ tfm/m}$$

$$M_{\text{vão esq.}}(\text{trem tipo}) = - 1,35(3 \cdot 6 \cdot 0,78) = - 19,0 \text{ tfm}$$

$$l = \frac{19}{6,5} = 2,92 \text{ m}$$

$$q_{\text{vão esq.}} = \left( \frac{1,35 \cdot 3 \cdot 6}{2,92} \right) + 1,35 \cdot 0,3 \cdot 2,8 = 9,46 \text{ tf/m}$$

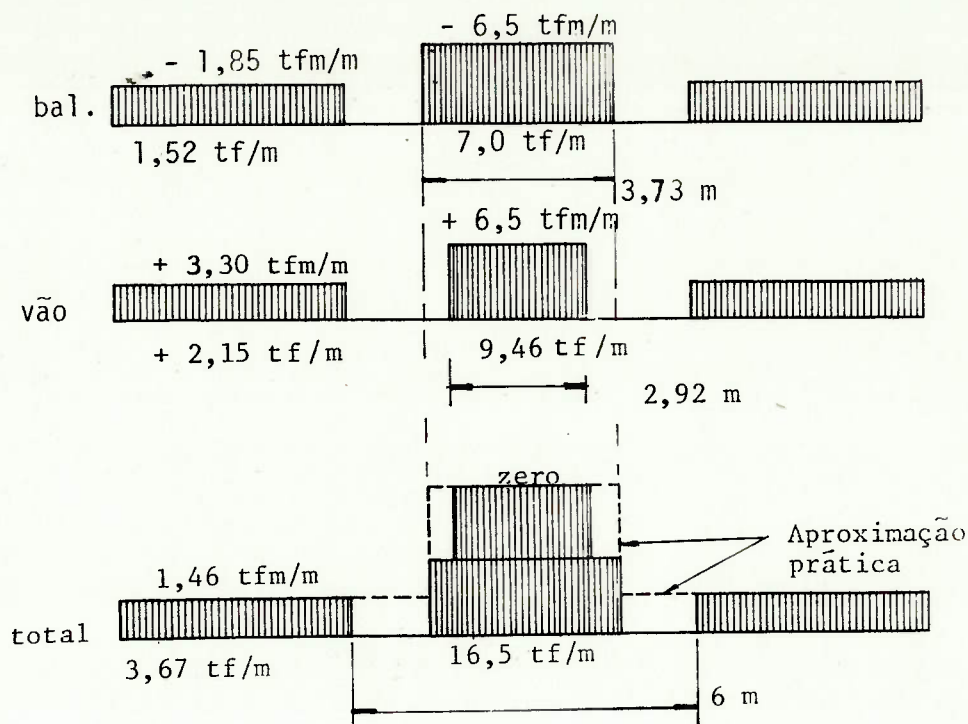
$$m_{\text{vão dir.}} = - 1,35(6 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 7,0) = - 3,08 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{vão dir.}} = 1,35 \cdot 0,3 \cdot 4,2 = 1,70 \text{ tf/m}$$

- Longe do trem tipo:

$$m_{\text{vão esq.}} = - 1,35(0,5 \cdot 1,6 + 0,3 \cdot 5,5) = - 3,31 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{vão esq.}} = 1,35(0,5 \cdot 1,5 + 0,3 \cdot 2,8) = 2,15 \text{ tf/m}$$



ALMA ESQUERDA



$$- 1,53 + 3,08 = 1,55 \text{ tfm/m}$$

ALMA DIREITA

$$1,11 + 1,70 = 2,81 \text{ tf /m}$$

Fig. 1-68 - Resumo do Carregamento Variável

1.9.2.2. Decomposição do Carregamento Variável em Simétrico e Antimétrico

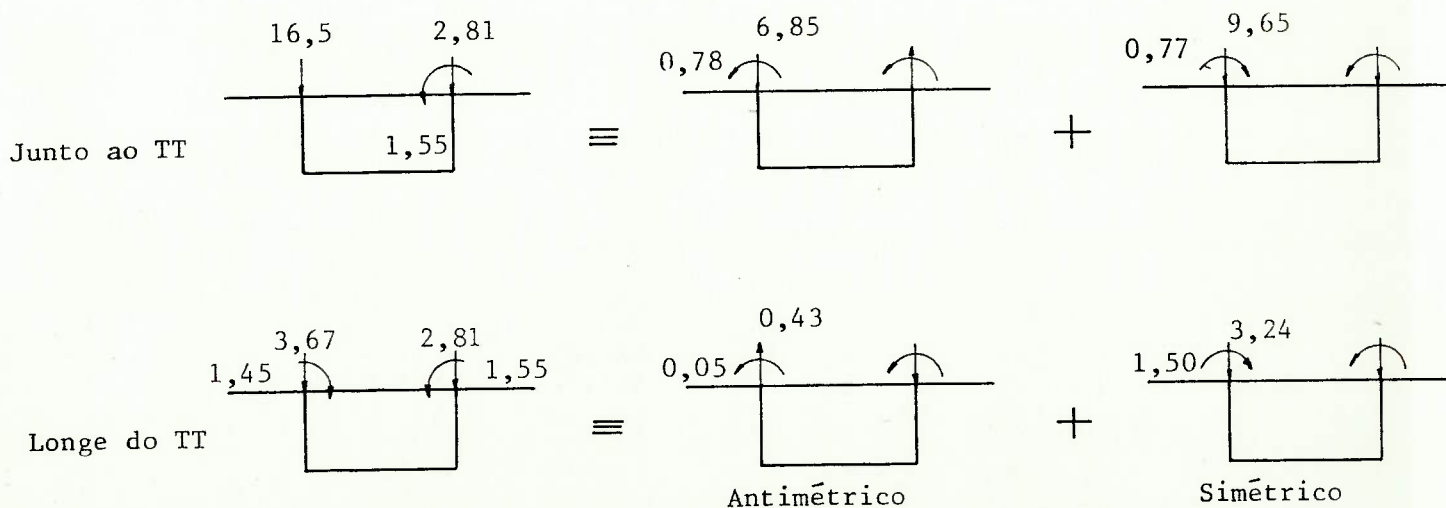


Fig. 1-69 - Decomposição do Carregamento Variável



1.9.2.3. Cálculo dos Esforços SolicitantesA. Flexão

$$M_{\text{máx}} \cong 6500 \text{ tfm}$$

B. Distorção

- Junto ao trem tipo:

$$\bar{p} = (2 \cdot 6,85 - 0,384 \cdot 0,78) \frac{8,5^2}{34} = 28,5 \text{ tf}$$

- Longe do trem tipo:

$$\bar{p} = (2 \cdot 0,43 - 0,384 \cdot 0,05) = 0,85 \text{ tf}$$

27,7 tf

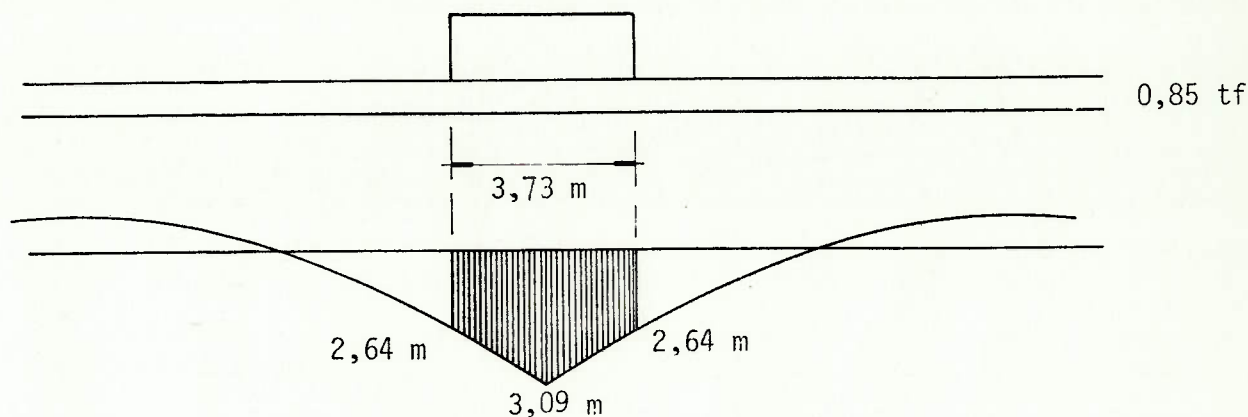


Fig. 1-70 - Cálculo do Bimomento Máximo

$$B(\text{TT}) = 27,7 \cdot 3,73 \cdot 2,87 = 296 \text{ tfm}^2$$

$$B(\text{Multidão}) = \frac{0,85}{1,16} \cdot 36,5 \cong 27,0 \text{ tfm}^2$$

$$B(\text{Total}) = 296 + 27,0 = 323 \text{ tfm}^2$$

1.9.2.4. Cálculo das Tensões Normais

$$\sigma \text{ flexão} \begin{cases} \text{sup} = - 776 \text{ tf/m}^2 \\ \text{inf} = 1450 \text{ tf/m}^2 \end{cases}$$

$$\sigma \text{ distorção} \begin{cases} \text{sup} = \pm 16,3 \frac{323}{202} = \pm 26,0 \text{ tf/m}^2 \\ \text{inf} = \pm 35,9 \frac{323}{202} = \pm 57,0 \text{ tf/m}^2 \end{cases}$$

No carregamento lb, as tensões de distorção são maiores que no la, mas ainda pequenas em relação às de flexão, representando 4% do total.

### 1.9.3. Carregamento 2

A análise das tensões de cisalhamento leva, a rigor, ao estudo da largura crítica de carga (x).

Kristek fornece, em (B-24), critério para cálculo dessa largura crítica.

É, entretanto, razoável usar o critério corrente, que consiste em fazer duas verificações, uma para todo o tabuleiro carregado, outra para meio tabuleiro carregado. Tomar-se-á este caminho.

#### 1.9.3.1. Caso de Todo Tabuleiro Carregado

##### A. Flexão longitudinal

Trem tipo uniformizado de flexão (do Item 1.9.1).

##### B. Torção

Trem tipo uniformizado de torção.

$$\text{Momento concentrado} = 1,12 \cdot 4,5(6,78 + 4,78) = 58,3 \text{ tfm}$$

$$\text{Momento distribuído} = 1,12 \cdot 0,2 \cdot 2,75 \cdot 5,63 = 3,47 \text{ tfm/m}$$

##### C. Distorção

Trem tipo de distorção (do Item 1.9.1).

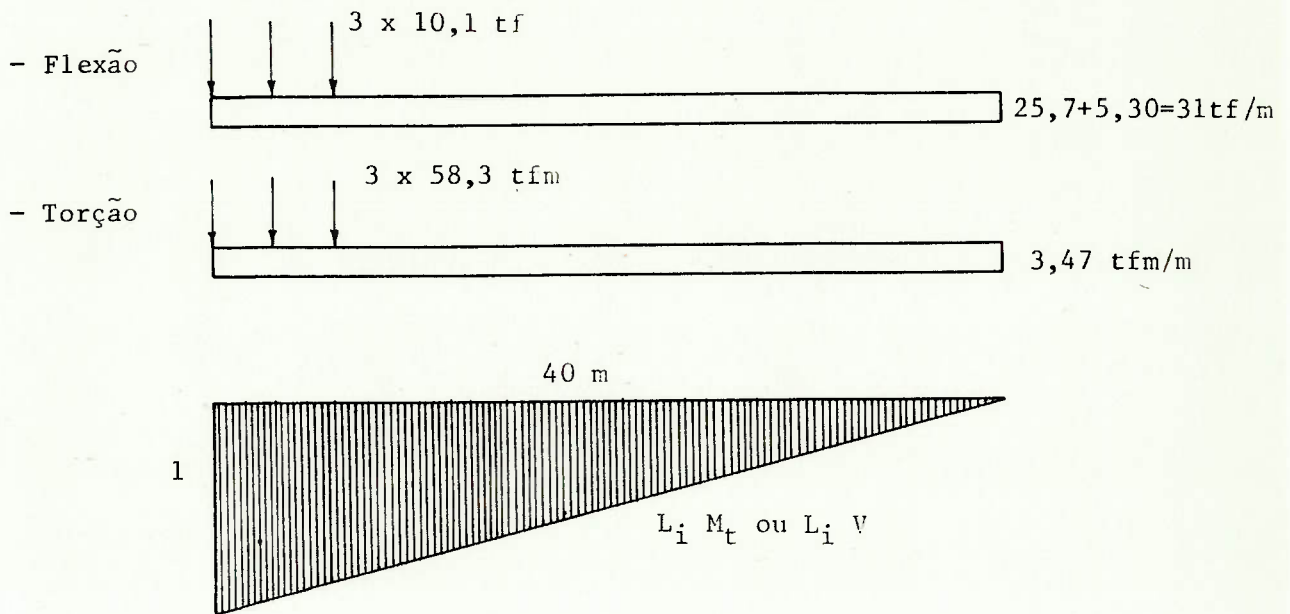
D. Esforços Solicitantes Críticos

Fig. 1-71 - Cálculo do Momento de Torção e da Força Cortante Máxima

$$M_t \text{ conc.} = 58,3 \left( 1 + \frac{38,5}{40} + \frac{37,0}{40} \right) + 3,47 \cdot 20 = 238 \text{ tfm}$$

$$V_{\text{máx.}} = 10,1 \left( 1 + \frac{38,5}{40} + \frac{37,0}{40} \right) + 31,0 \cdot 20 = 649 \text{ tf}$$

- Distorção:

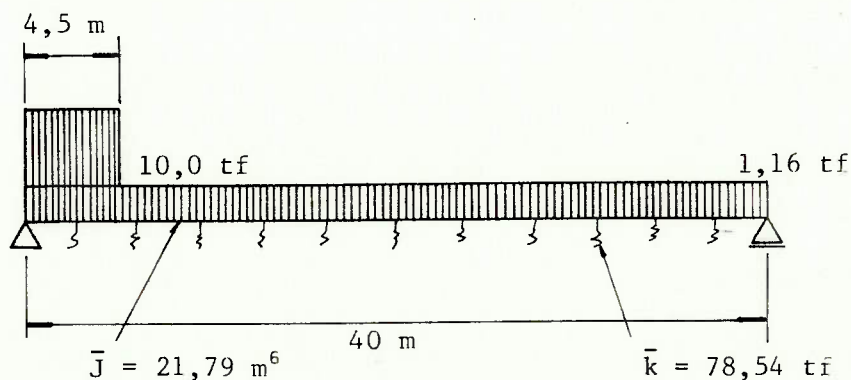


Fig. 1-72 - Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análoga

Solução por computador:

$$B'_{\text{conc.}} = 45,70 \text{ tfm}$$

E. Tensões de Cisalhamento

- Flexão:

$$y_i = 1,629 \text{ m} \quad I_z = 7,304 \text{ m}^4$$

$$M_{SG}^- = 0,18 \cdot 8 \cdot 1,54 + \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 1,63^2}{2} = 3,54 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{máx}} = 649 \text{ tf}$$

$$\tau_G^1 = \frac{VM_{SG}^-}{t I_z} = \frac{649 \cdot 3,54}{1 \cdot 7,304} = 315 \text{ tf/m}^2$$

- Torção:

$$A = 19,21 \text{ m}^2 \quad M_{t_{\text{conc.}}} = 238 \text{ tfm}$$

$$\tau_G^2 = \frac{M_t}{2At} = \frac{238}{2 \cdot 19,21 \cdot 0,5} = 12,4 \text{ tf/m}^2$$

- Distorção:

$$J_\omega = 21,79 \text{ m}^6 \quad B'_{\text{conc.}} = 45,70 \text{ tfm}$$

$$M_{SwG}^1 = \omega_A \left\{ \frac{\beta b_i t_i}{4} + \frac{y_i b_a t_a}{2h} \left[ 2\beta - \beta \frac{\frac{y_i}{h}}{\beta} \right] \right\} -$$

$$- \frac{A_a \omega_a}{12} \left( 6(\beta - 1) + 3\beta \psi_i + \frac{2\xi(2-\beta) - 2\psi_s}{1+\xi} \right) =$$

$$= 0,933 \left( \frac{4,146 \cdot 8,5 \cdot 0,18}{4} + \frac{1,553 \cdot 2,26}{4 \cdot 2,26} (2 \cdot 4,146 -$$

$$- \frac{1,553}{2,26} 5,146) \right) - \frac{1,13 \cdot 0,933}{12} (6 \cdot 3,146 + 3 \cdot$$

$$\cdot 4,146 \cdot 1,354 + \frac{2(-2,146) - 2 \cdot 15,05}{2}) = 1,575 \text{ m}^4$$

$$\tau_G^3 = \frac{B' M_{SwG}^1}{t J_\omega} = \frac{45,70 \cdot 1,575}{0,5 \cdot 21,59} = 6,70 \text{ tf/m}^2$$

Compondo as três solicitações, tem-se:

$$\tau_G = 315 + 12,4 + 6,70 = 334 \text{ tf/m}^2$$

### 1.9.3.2. Caso de Meio Tabuleiro Carregado

#### A. Flexão Longitudinal

Trem tipo uniformizado de flexão.

Carga concentrada = 10,1 tf

Carga distribuída =  $1,12(7 \cdot 0,3 + 2,75 \cdot 0,2) = 2,97 \text{ tf/m}$

#### B. Torção

Trem tipo uniformizado de torção.

Momento concentrado = 58,3 tfm

Momento distribuído =  $1,12(7 \cdot 3,5 \cdot 0,3 + 2,75 \cdot 5,63 \cdot 0,2) =$   
 $= 11,7 \text{ tfm/m}$

#### C. Distorção

##### a. Esforços de engastamento das lajes

Para o balanço valem os valores do Item 1.9.1.

Para o vão, agora tem-se apenas meio vão carregado, e obtêm-se:

$$m_{\text{vão esq.}} = 1,35 \cdot 0,3 \cdot 5,30 = 2,15 \text{ tfm/m}$$

$$m_{\text{vão dir.}} = 1,35 \cdot 0,3 \cdot 1,90 = 0,75 \text{ tfm/m}$$

$$q_{\text{vão esq.}} = 1,35 \cdot 0,3 \cdot 4,25 \frac{3}{4} + \frac{1,4}{8,5} = 1,47 \text{ tf/m}$$

$$q_{\text{vão dir.}} = 1,35 \cdot 0,3 \cdot 4,25 \frac{1}{4} - \frac{1,4}{8,5} = 0,25 \text{ tf/m}$$

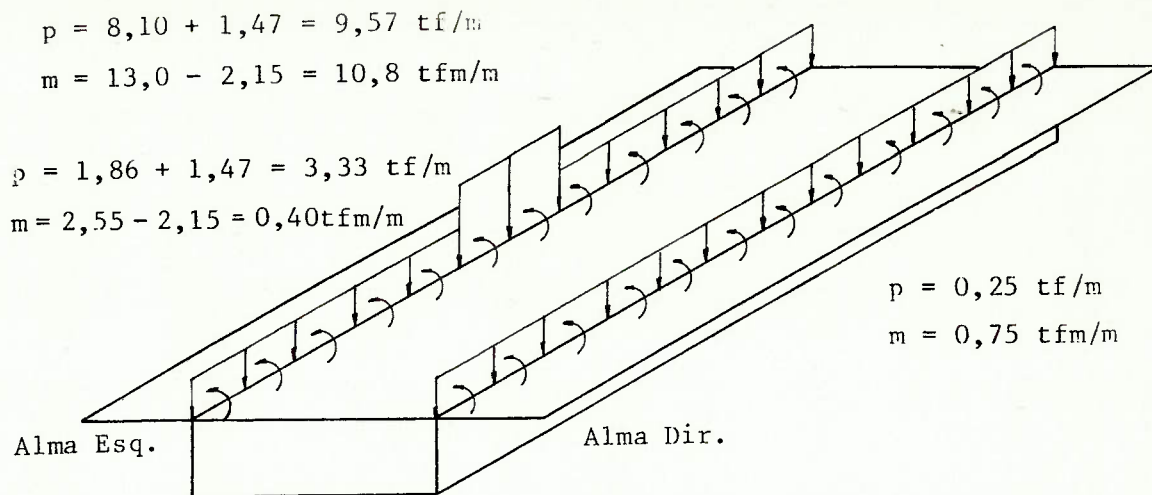


Fig. 1-73 - Resumo do Carregamento Variável

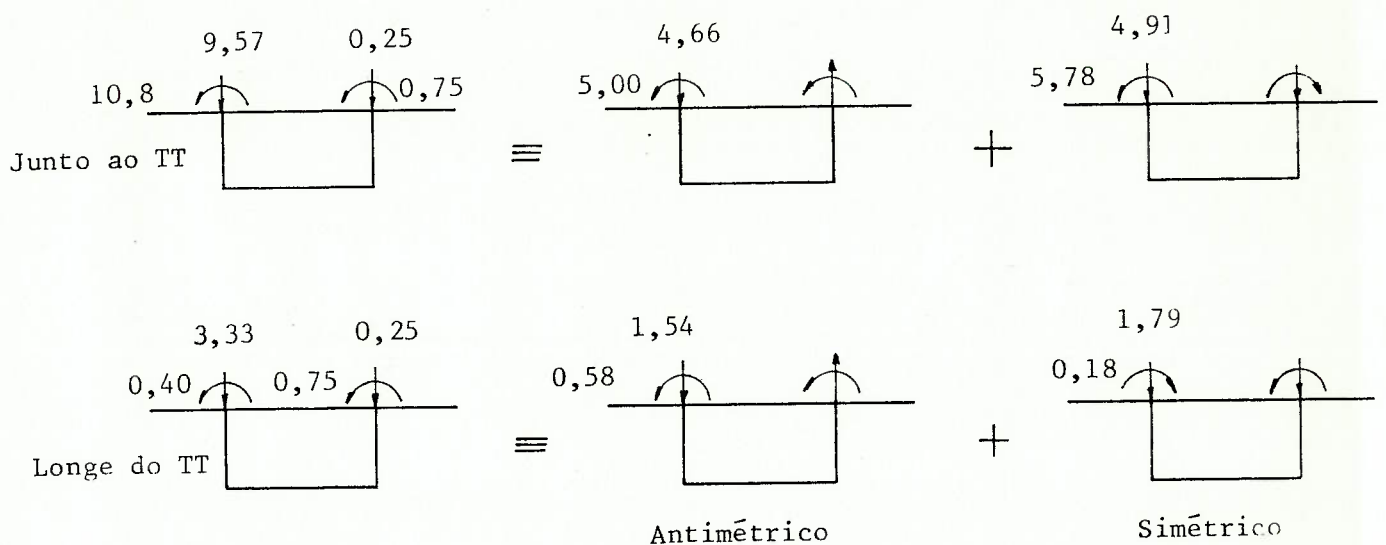


Fig. 1-74 - Decomposição do Carregamento Variável

b. Carregamento de distorção

- junto ao trem tipo:

$$\bar{p} = (2 \cdot 4,66 - 0,384 \cdot 5,00) \frac{8,5^2}{34} = 15,7 \text{ tf}$$

- longe do trem tipo:

$$\bar{p} = (2 \cdot 1,54 - 0,384 \cdot 0,58) \frac{8,5^2}{34} = 6,10 \text{ tf}$$

### D. Esforços Solicitantes Críticos

- Flexão e torção:

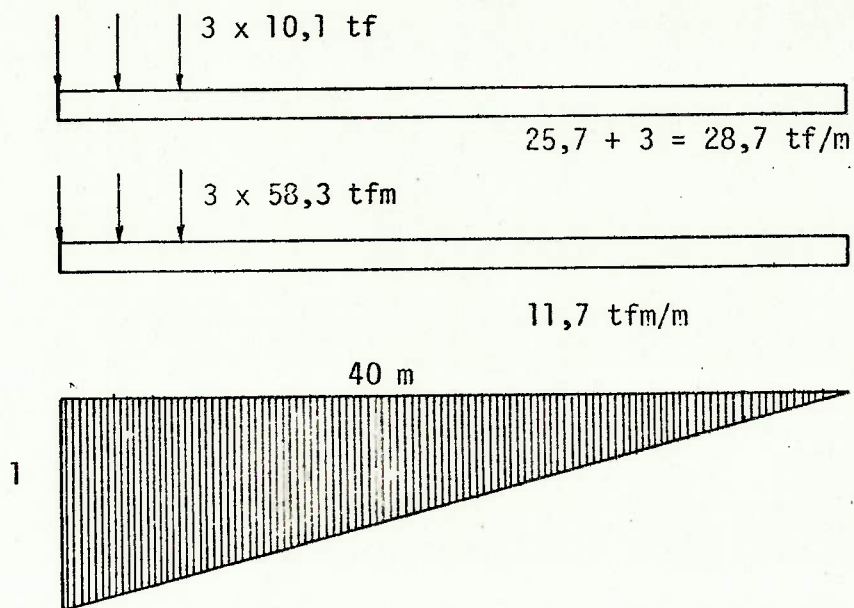


Fig. 1-75 - Cálculo do Momento de Torção Máximo e da Força Cortante

$$M_{t \text{ máx.}} = 58,3 \left( 1 + \frac{38,5}{40} + \frac{37}{40} \right) + 11,7 \cdot 20 = 402 \text{ tfm}$$

$$V_{\text{conc.}} = 10,1 \left( 1 + \frac{38,5}{40} + \frac{37}{40} \right) + 28,7 \cdot 20 = 603 \text{ tf}$$

- Distorção:

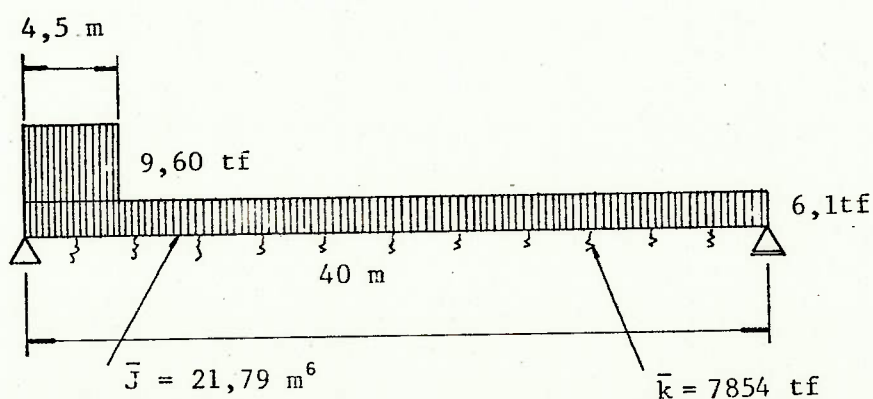


Fig. 1-76 - Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análogo



Solução por computador:

$$B'_{\text{conc.}} = 77,2 \text{ tfm}$$

### E. Tensões de Cisalhamento

- Flexão:

$$\tau_G^1 = \frac{603}{649} \cdot 315 = 293 \text{ tf/m}^2$$

- Torção:

$$\tau_G^2 = \frac{402}{238} \cdot 12,4 = 20,9 \text{ tf/m}^2$$

- Distorção:

$$\tau_G^3 = \frac{77,2}{45,7} \cdot 6,7 = 11,3 \text{ tf/m}^2$$

Compondo as três solicitações, tem-se:

$$\tau_G = 293 + 20,9 + 11,3 = 325 \text{ tf/m}^2$$

Desprezando a distorção,

$$\tau_G^1 = 314 \text{ tf/m}^2$$

erra-se em 3,5%.

### 1.9.4. Carregamento 3

Procurando exemplificar o cálculo da flexão transversal, analisar-se-á o carregamento 3b. Este é um carregamento importante porque corresponde às máximas flexões transversais, e a distorção aumenta ainda mais essas flexões.

#### 1.9.4.1. Cálculo dos Esforços de Engastamento das Lajes nas Almas

##### A. Esforços no Balanço

Do Item 1.9.1.

- Junto ao trem tipo:

$$m_{bal. esq.} = - 13,0 \text{ tfm/m}$$

$$q_{bal. esq.} = 8,10 \text{ tf/m}$$

- Longe do trem tipo:

$$m_{bal. esq.} = - 2,55 \text{ tfm/m}$$

$$q_{bal. esq.} = 1,86 \text{ tf/m}$$

$$m = 2,55 \text{ tfm/m}$$

$$q = 1,86 \text{ tf/m}$$

$$m = 13,0 \text{ tfm/m}$$

$$q = 8,1 \text{ tf/m}$$

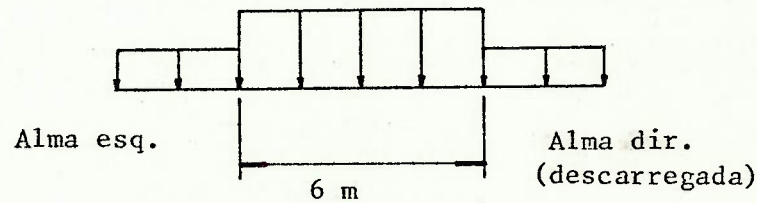


Fig. 1-77 - Resumo do Carregamento Variável

1.9.4.2. Decomposição do Carregamento em Simétrico e Antimétrico

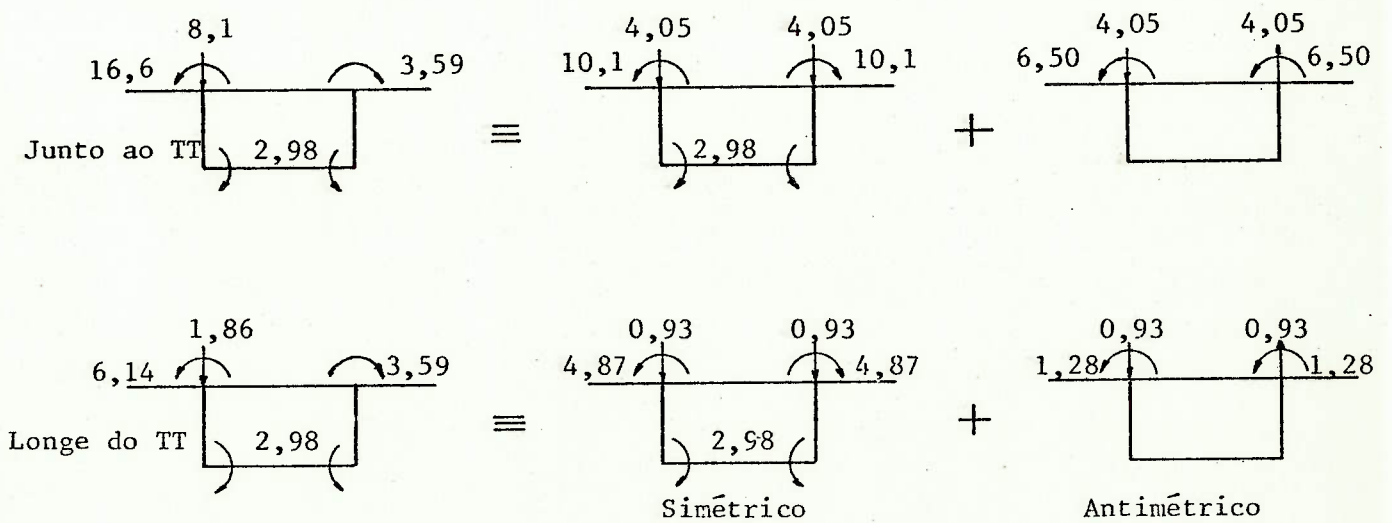


Fig. 1-78 - Decomposição do Carregamento Total (Permanente e Variável)

1.9.4.3. Esforços Solicitantes Transversais

Para calcular os momentos fletores transversais, é preciso superpor todas as solicitações do quadro, simétricas e anti-simétricas. Assim:

$$M_{aa} = \underbrace{(1 - \delta_1)m_1}_{\text{flexão trans-}} + \underbrace{(1 - \delta_2)m_2}_{\text{versal simé-}} + \underbrace{M_a}_{\text{trica}} - \underbrace{\lambda_1' m_1'}_{\substack{\text{Distor} \\ \text{ção} \\ \text{Peso próprio} \\ \text{da laje infe} \\ \text{rior}}}$$

$$M_{ba} = -\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \eta M_a - (1 - \delta_1') m_1'$$

$$M_{as} = -\delta_1 m_1 - \delta_2 m_2 + M_a - \lambda_1' m_1' - m_{os}$$

$$M_{bi} = -\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \eta M_a - (1 - \delta_1') m_1'$$

onde:

$\delta_1' \lambda_1'$  correspondem aos coeficientes de distribuição do esforço de engastamento  $m_1'$  da laje inferior nas almas.

$$\delta_1' = 0,00813 \quad \lambda_1' = 0,0183$$

$m_{os}$  corresponde ao esforço de engastamento da laje superior na alma.

Para calcular o momento  $M_a$  devido à distorção, como a estrutura é longa, basta considerar a solução de Knittel (1.14) para a carga equivalente, uniformemente distribuída.

$$p_{eq} = p + \frac{P}{2L} + \alpha m_2 + \alpha \frac{M_2}{2L}$$

$$p_{eq} = (1,86 + \frac{6,24 \cdot 6}{2} \cdot 0,0809 - 0,384 \cdot 1,28 - 0,384 \frac{5,22 \cdot 6}{2} \cdot 0,0809) = 2,40 \text{ tf/m}$$

$$M_a = \frac{p_{eq} b_i^2}{4(\xi + \eta)(b_s + b_i)} = \frac{2,40 \cdot 8,5^2}{4(1,244)(2 \cdot 8,5)} = 2,08 \text{ tfm/m}$$

Como o carregamento 3b é crítico para a alma, calcular-se-á apenas o momento fletor resultante na alma ao nível da laje superior ( $M_{aa}$ ).

$$M_{aa} = (1 - 0,0368) 10,1 + (1 - 0,102) 6,50 + 2,08 - 0,0183 \cdot 2,98 = 17,6 \text{ tfm/m}$$

Desprezando a distorção:

$$M'_{aa} = 15,5 \text{ tfm/m}$$

erra-se em 12%.

Da mesma forma que se analisou o carregamento 3b, podem-se analisar os carregamentos 3a e 3c.

#### 1.9.5. Comentários

Este exemplo serviu para mostrar como se pode projetar uma ponte em viga unicelular levando em conta a deformabilidade da seção transversal.

Mas algumas conclusões de caráter geral ainda se podem tirar dele:

- 1) *A eliminação das transversinas intermediárias não tem maiores consequências.*

A variação das tensões normais e tangenciais na seção transversal devida à distorção é, em geral, desprezível.

Já a variação da flexão transversal do quadro não é desprezível, mas pode perfeitamente ser suportada, bastando dimensionar as placas para tal.

O efeito da distorção sobre as tensões normais e tangenciais na seção transversal deixa de ser desprezível, em alguns casos especiais, como quando se *eliminam as transversinas de apoio* (ver Item 1.9.6) ou quando existem *fortes assimetrias de carga permanente*, determinando uma distorção permanente importante, ou ainda quando as obras são *esconsas ou curvas*.

- 2) O dimensionamento das placas a flexão transversal deve levar em conta as solicitações tangenciais, devidas à força cortante e ao momento de torção, concomitantes.

Um critério de dimensionamento considerando essa composição encontra-se descrito em (B-3) (página 82). Ele corresponde ao dimensionamento da alma a flexocompressão, a compressão correspondendo à força cortante distribuída num comprimento igual ao braço de alavanca da viga principal (resultado determinado na hipótese das bielas se inclinarem de  $45^\circ$ ) (Fig. 1-79).

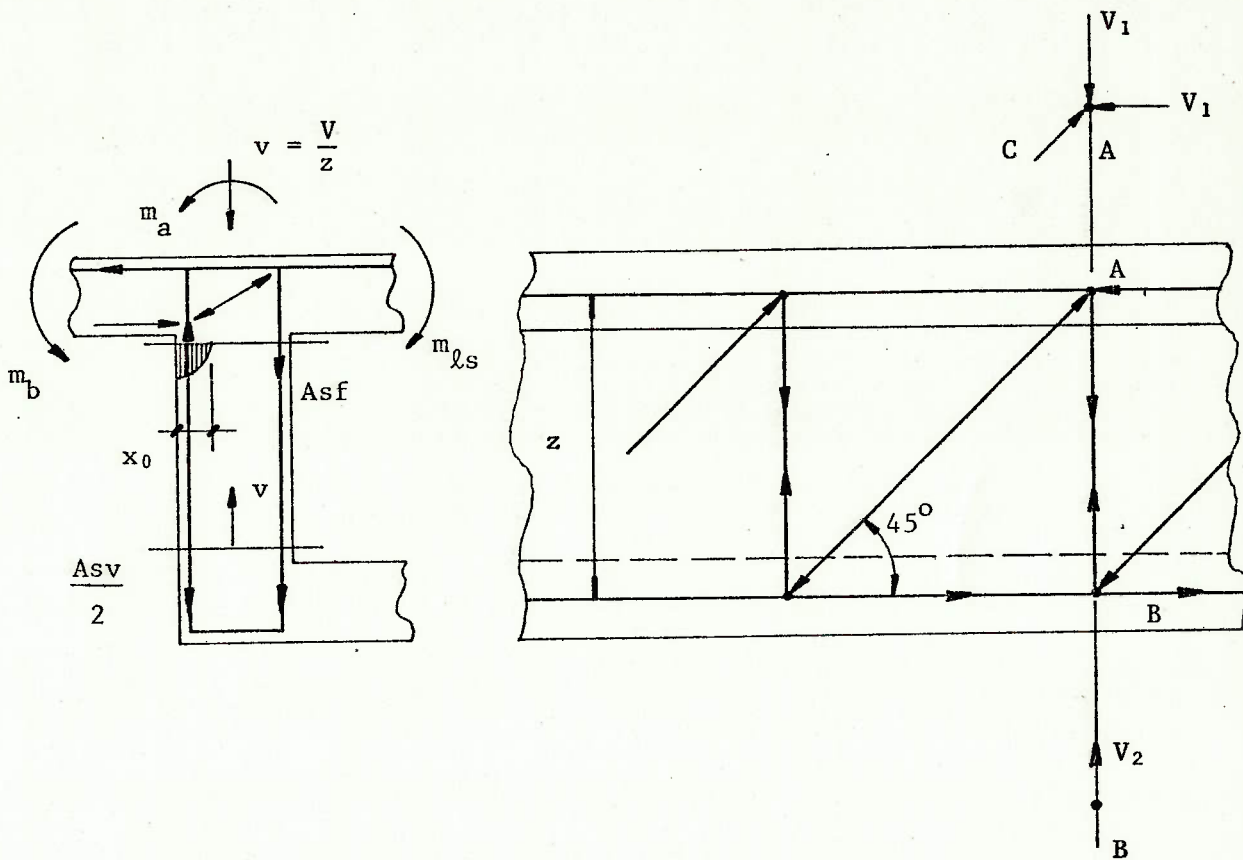


Fig. 1-79 - Composição da Força Cortante com a Flexão Transversal

A componente vertical  $V_1 = V$  da compressão na biela C se compõe com a flexão transversal, exigindo, essa flexão composta, a armadura  $Asf$ .

A componente vertical  $V_2 = V$  de tração nos estribos exige a armadura  $Asv$ .

No caso do estribo de dois ramos, deve-se prever armadura igual à soma de  $Asf$  e  $\frac{Asv}{2}$ .

A verificação da compressão na biela deve ser feita considerando-se para a alma largura  $0,8 x_0$ , valor que pode ser menor que  $t_a$ .

Através desse critério de dimensionamento verifica-se porque, em geral, os esforços normais no quadro são desprezados: eles são pequenos, comparados à força cortante.

O estudo cuidadoso dos *detalhes de armadura junto ao "nó do pórtico"* constituído pela ligação alma-laje superior é sempre conveniente.

Recomendações podem ser encontradas em (B-3), (B-4), (B-7), (B-62).

#### 1.9.6. Transversinas de Apoio

Considerar-se-á agora o caso em que se eliminam as transversinas de apoio muito embora esse seja um problema especial. O objetivo é apresentar um exemplo onde a distorção é importante.

Eliminando as transversinas do exemplo anterior, não haverá alterações nos resultados dos carregamentos 1 e 3, uma vez que a viga pode ser considerada longa. Alterações importantes haverá no carregamento 2, em especial no caso de meio tabuleiro carregado.

Como foram retiradas as transversinas de apoio, é preciso considerar a distorção provocada pelas reações de apoio.

#### A. Cálculo das Reações de Apoio

- Apoio esquerdo:

$$M_{t_{\max}} = 402 \text{ tfm}$$

$$V_{\text{conc.}} = 603 \text{ tf}$$

$$R_e = \frac{V}{2} + \frac{M_t}{b_i} = \frac{603}{2} + \frac{402}{8,5} = 349 \text{ tf}$$

$$R_d = \frac{V}{2} - \frac{M_t}{b_i} = 254 \text{ tf}$$

Admite-se que os aparelhos de apoio estejam centrados nas almas, e despreza-se o efeito da distorção sobre as reações de apoio.



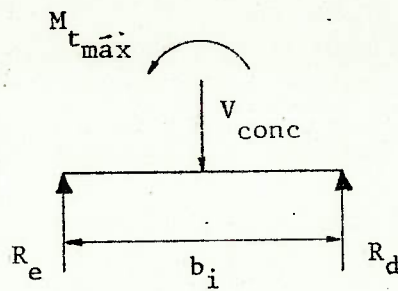


Fig. 1-80 - Reações de Apoio no Carregamento 2

Como a viga é longa, o que acontece numa extremidade não influi na outra; assim, não é preciso conhecer as reações no apoio direito.

### B. Cálculo da Distorção

Carregamento de distorção devido à reação de apoio excêntrica:

$$\bar{P} = (349 - 254) \frac{8,5^2}{34} = 202 \text{ tfm}$$

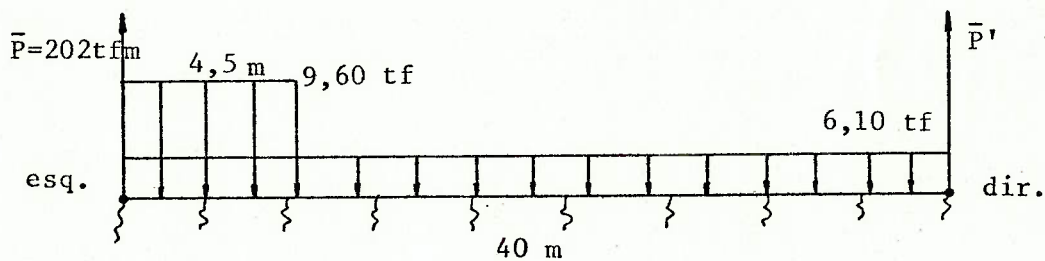


Fig. 1-81 - Esquema da Viga sobre Apoio Elástico Análogo

A Fig. 1-81 indica o esquema análogo da viga sobre apoio elástico. Este esquema difere daquele na Fig. 1-76 apenas pelo valor da reação de apoio que cresceu de 77,2 tfm para 202 tfm. Assim, para obter o resultado deste esquema, basta adicionar ao resultado daquele o da carga concentrada de 123 tfm aplicada no extremo de uma viga infinita.

$$y_e = \gamma_e = \frac{2\bar{P}\lambda}{k} = \frac{2 \cdot 123 \cdot 0,0809}{7854} = 0,00253 \text{ rad}$$



$$V_e = B'_e = 123 \text{ tfm}$$

C. Tensões de Cisalhamento

$$\tau_G^3 \text{ (distorção)} = \frac{202}{77,2} \cdot 11,3 \approx 30,0 \text{ tf/m}^2$$

$$\tau_G = 293 + 20,9 + 30,0 = 344 \text{ tf/m}^2$$

O cisalhamento devido à distorção atinge 9% do total, não podendo ser desprezado.

D. Flexão Transversal

Conhecida a distorção  $\gamma_e$ , é fácil determinar a flexão transversal correspondente através da expressão (1.16):

$$M_A = \frac{\gamma \cdot 6 \cdot EI_a}{b_a (2 + \rho_s - \eta)} = \frac{0,00253 \cdot 6 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0109}{2,26(2 + 17,41 - 0,244)} =$$

$$= 8,04 \text{ tfm/m}$$

Convém lembrar que o carregamento correspondente à Fig. 1-76 não distorce a seção no apoio.

A flexão transversal devida à distorção atinge 50% da máxima flexão transversal no quadro, isto é, do momento no balanço, não podendo absolutamente ser desprezada.

O momento  $M_{bi}$  na laje inferior atinge, por exemplo:

$$M_{bi} = -\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \eta M_a - (1 - \delta'_1) m'_1 =$$

$$= -0,0368 \cdot 5,78 - 0,102 \cdot 5,00 - 0,244 \cdot 8,04 -$$

$$- (1 - 0,00813) \cdot 2,98 = -5,64 \text{ tfm/m,}$$

praticamente o dobro do momento devido ao peso próprio.

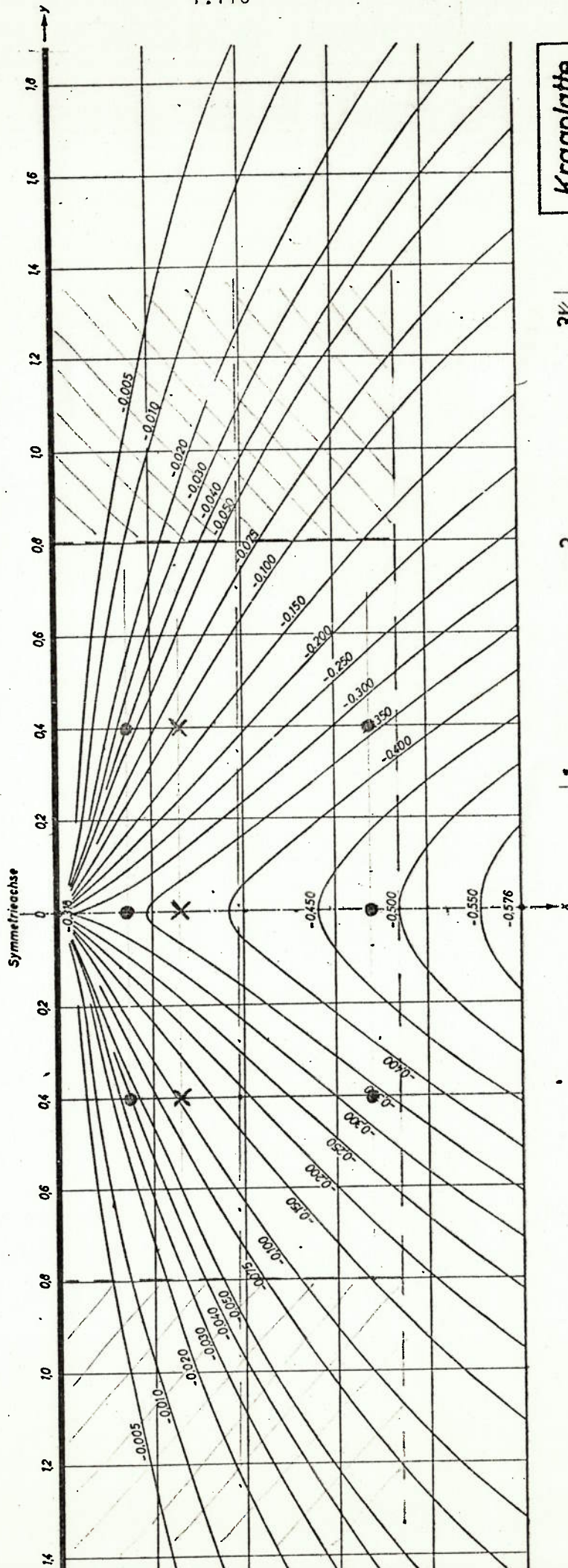
E. Tensões Normais

Esse carregamento não é crítico relativamente às tensões normais.

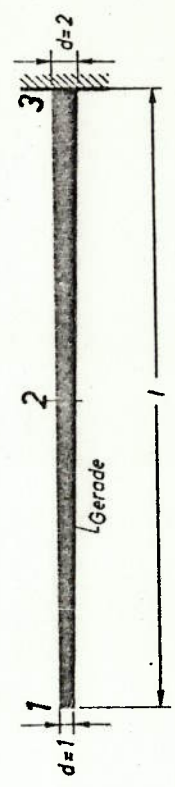
Dois comentários finais ainda se fazem necessários:

- 1º *Se a obra for contínua, a eliminação das transversinas de apoio levará também a fortes binomentos, que determinam o aparecimento de tensões normais que atingem com frequência 200 tf/m<sup>2</sup>.*
- 2º *Se a seção tiver almas inclinadas, o efeito da eliminação das transversinas de apoio se agrava bastante, por duas razões:*
  - a) o braço de alavanca para resistir à torção diminui, uma vez que os aparelhos de apoio se aproximam, aumentando o carregamento assimétrico.
  - b) o carregamento de distorção devido a cargas aplicadas por baixo nas almas é maior que aquele que apareceria se as cargas fossem aplicadas por cima.

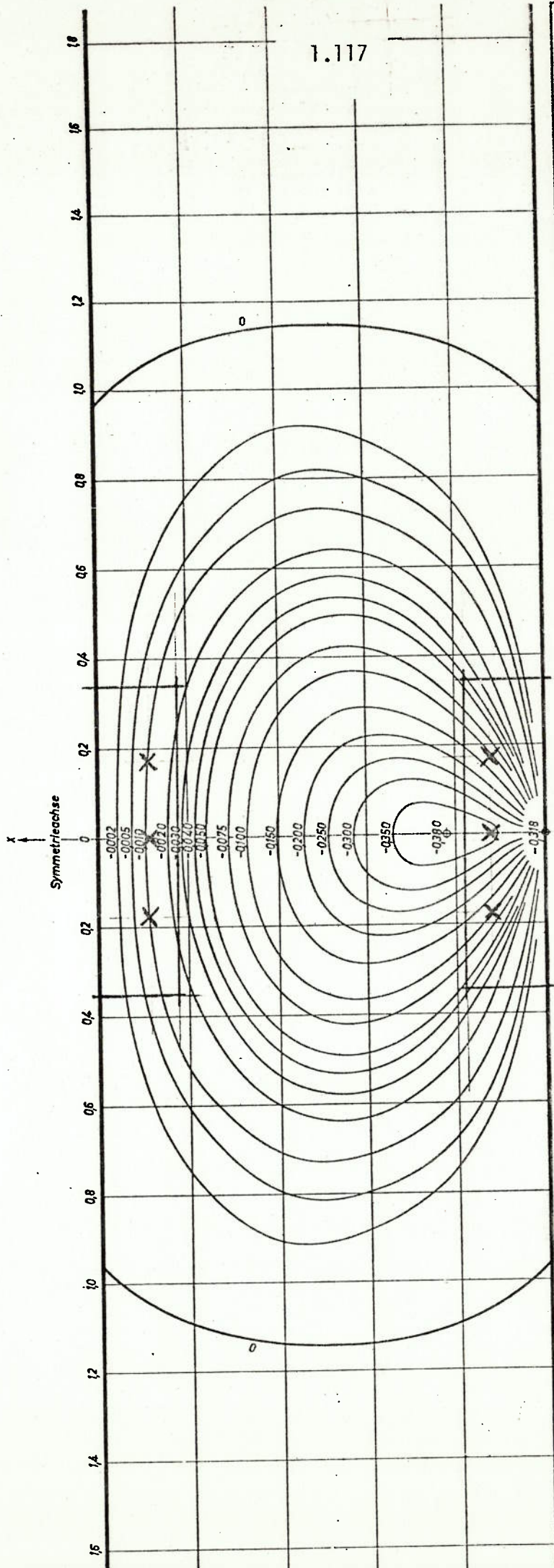
Exemplos como esses, analisados em detalhe, podem ser encontrados em (B-5).



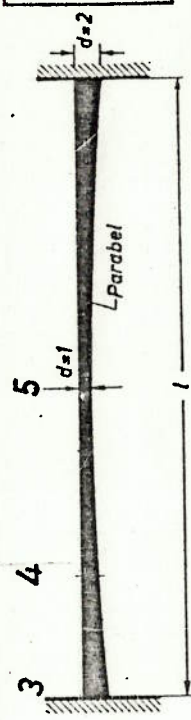
Kragplatte  
1:2  
m 3,x







Eingesspannte Platte  
 1:2  
 m 3,x



## 2. PONTES DE DUAS VIGAS UNICELULARES LIGADAS PELA LAJE SUPERIOR

### 2.1. Apresentação do Problema

A idéia da superestrutura com duas vigas ligadas pela laje, sem transversinas, foi inicialmente proposta para as pontes de vigas cheias, sobretudo no caso de execução por formas deslizantes.

Um processo de cálculo, bastante prático, dessas estruturas encontra-se exposto em (B-12), (B-59), (B-60) e (B-61).

A facilidade construtiva trazida pela eliminação das transversinas, sem dúvida atraente, acabou determinando a extensão da idéia às pontes de várias vigas (ver (B-62)). De fato, já se substituem as grelhas por um conjunto de vigas longitudinais, pré-moldadas ou não, ligadas transversalmente apenas pela laje.

É interessante observar que a estrutura assim obtida apresenta uma capacidade de distribuição transversal equivalente à das grelhas. Relativamente às cargas excêntricas, ela tem até vantagens. De fato, a grande rigidez à flexão das transversinas acaba determinando o levantamento de uma viga extrema quando se carrega a outra, levantamento esse eliminado pela relativa flexibilidade da laje (ver (B-62)).

A extensão da idéia às pontes de duas vigas celulares apresentava, entretanto, um problema: *seria a deformação da seção transversal condicionante?*

A solução que se tem adotado em projeto consiste em calcular a estrutura desprezando a deformação transversal e depois verificar se essa deformação é realmente pequena.

É objetivo deste trabalho verificar se a deformação transversal é efetivamente condicionante.

Se essa deformação for desprezível, os ábacos apresentados em (B-12) e (B-59) serão de grande utilidade também para as seções celulares.

Caso essa deformação seja considerável, será preciso propor solução para o problema de projeto.

Essa deformação transversal já foi considerada na análise de estruturas desse tipo em (B-6) e (B-63).

## 2.2. Geometria, Nomenclatura e Hipóteses Adotadas

A forma da seção transversal adotada para a superestrutura com duas vigas unicelulares unidas pela laje está indicada na Fig. 2-1.

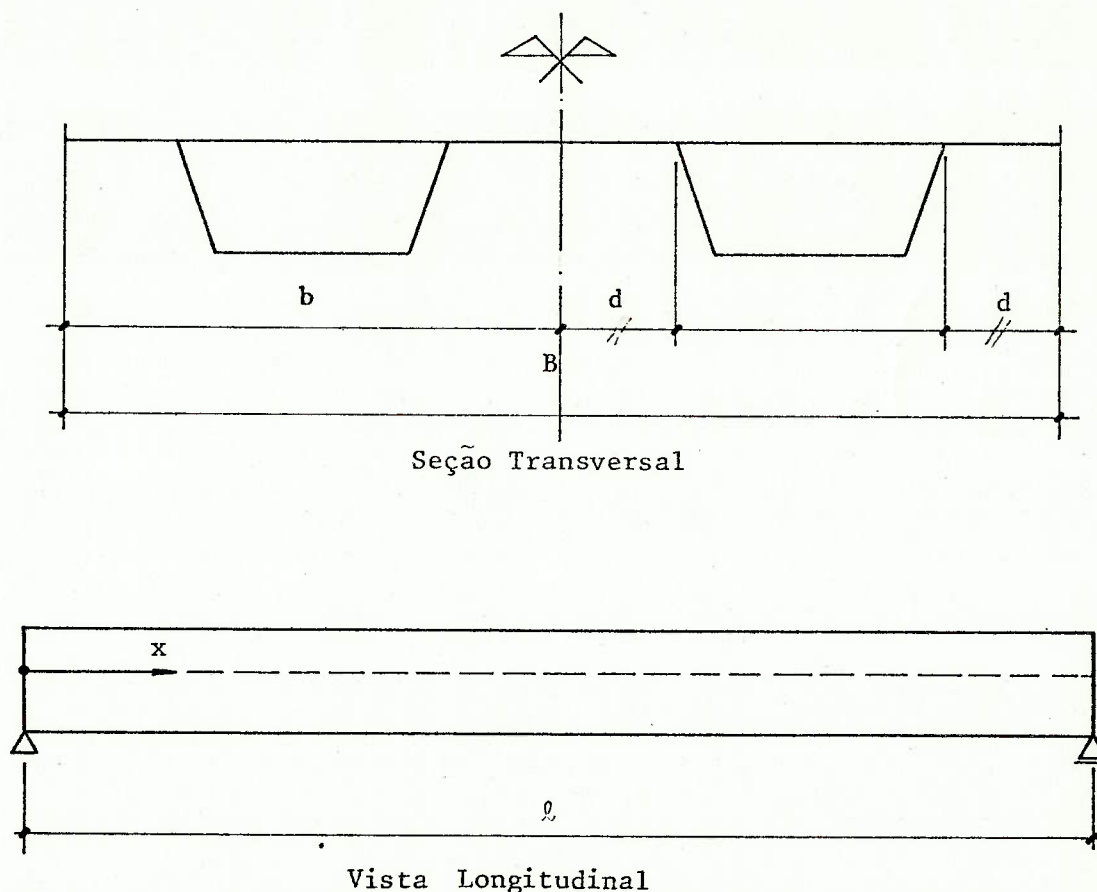


Fig. 2-1 - Superestrutura com Duas Vigas Unicelulares

Para analisar esse tipo de estrutura serão adotadas as hipóteses abaixo relacionadas:

1. As vigas são simplesmente apoiadas e de seção constante.

Uma extensão para vigas de seção variável e outras condições de contorno é feita no Item 2.9.

2. *As vigas são fixas à torção nos apoios.*
3. *A laje de ligação é considerada como uma série de faixas transversais justapostas, engastadas elasticamente nas vigas principais e, certamente, trabalhando independentemente.*
4. *Não existem transversinas no vão, podendo ou não existir nos apoios.*

Essas quatro hipóteses são as normalmente adotadas no caso de vigas cheias. A consideração das vigas celulares exige mais duas hipóteses.

5. *A resistência à distorção da seção celular é fornecida apenas pelo quadro, desprezando-se a estrutura plissada, isto é, adota-se a solução de Knittel. As descontinuidades longitudinais serão eliminadas pelo desenvolvimento em série.*
6. *Desprezam-se os movimentos laterais da laje superior provocados por torção ou distorção. A laje superior, o tabuleiro, tem normalmente dimensão muito superior às lajes inferiores e almas, de forma que seus deslocamentos como chapa são relativamente pequenos, justificando esta hipótese.*

Com respeito às transversinas de apoio que, nas pontes com vigas cheias, ajudam a fixá-las à torção, não são mais úteis para as pontes de seção celular. Basta prever, nos apoios, diafragmas internos às células, evitando aí uma concentração de distorção.

Uma solução considerando transversinas inclusive no vão é apresentada em (B-64). Elas não parecem, entretanto, necessárias, do ponto de vista da concepção estrutural e estética, sendo, sem dúvida, um entrave do ponto de vista executivo.



### 2.3. Carregamento Tipo e sua Decomposição

Considere-se, agindo sobre o tabuleiro da Fig. 2-1, uma carga distribuída ao longo de uma linha reta longitudinal, de variação definida por  $p(x)$  (Fig. 2-2).

O cálculo dessa estrutura pode ser desenvolvido cortando-a pelo meio da laje de ligação de forma a separar as duas vigas celulares. Nesse corte agem, de acordo com a hipótese 3, três incógnitas hiperestáticas: um momento fletor  $m(x)$ , uma força cortante  $v(x)$  e uma força normal  $n(x)$  (Fig. 2-3).

Uma vez que, pela hipótese 6, desprezam-se os movimentos laterais da laje superior, a força normal  $n(x)$  será nula ao longo de todo o vão.

Resta apenas determinar  $m(x)$  e  $v(x)$ .

Uma maneira simples de fazê-lo é aquela em que se decompõe o carregamento externo em simétrico e antissimétrico. A Fig. 2-2 indica essa decomposição.

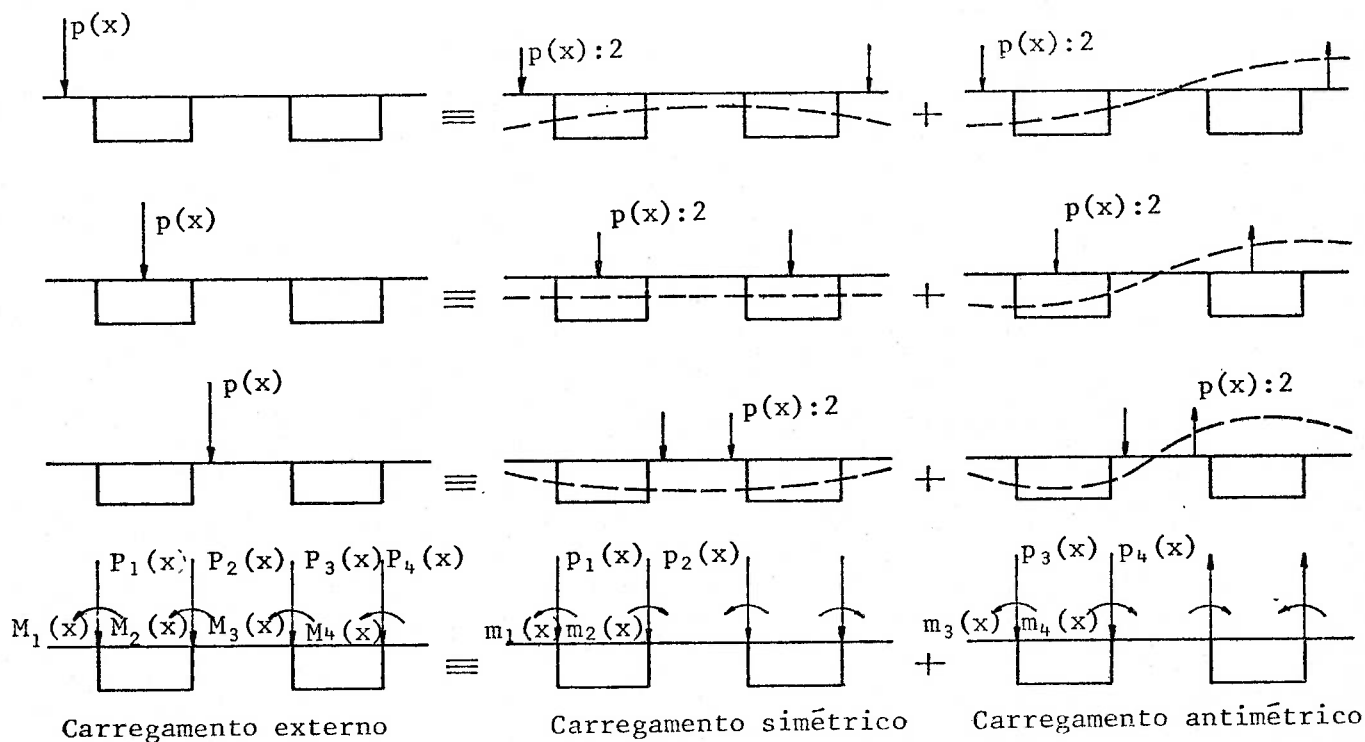


Fig. 2-2 - Carregamento Tipo e sua Decomposição em Simétrico e Antissimétrico

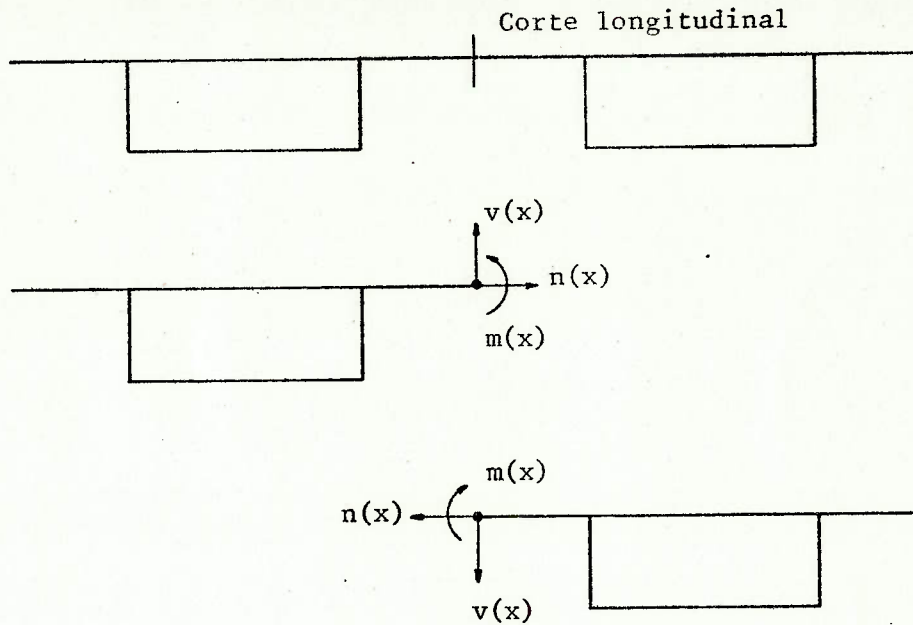


Fig. 2-3 - Incôgnitas Hiperestáticas

A Fig. 2-2 indica também a representação do carregamento tipo em função dos esforços de engastamento das lajes nas almas, calculados conforme o Item 1.8.

Desenvolver-se-á todo o cálculo da superestrutura com duas vigas celulares usando essa representação do carregamento tipo. Ela tem, entre outras, a vantagem de possibilitar a análise da concentração de flexão transversal junto ao trem tipo.

Trabalhando com os esforços de engastamento, não será inclusive necessário, ao longo do desenvolvimento teórico, fixar a posição transversal da carga  $p(x)$ .

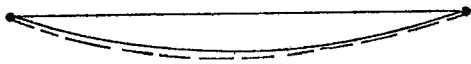
Dos esforços de engastamento do carregamento externo  $P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$ , podem-se determinar os carregamentos simétrico e antissimétrico.

Carregamento simétrico:

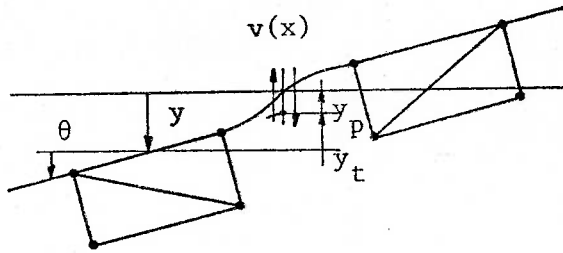
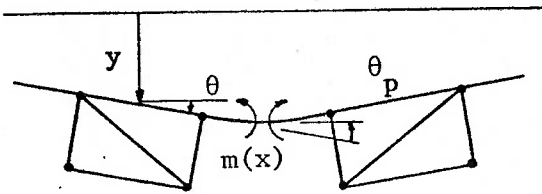
$$p_1 = \frac{P_1 + P_4}{2} \quad m_1 = \frac{M_1 - M_4}{2} \quad p_2 = \frac{P_2 + P_3}{2} \quad m_2 = \frac{-M_2 + M_3}{2} \quad (2.1)$$

Carregamento Simétrico

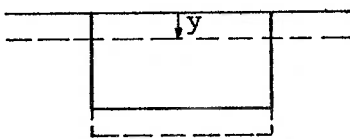
Carregamento Antimétrico



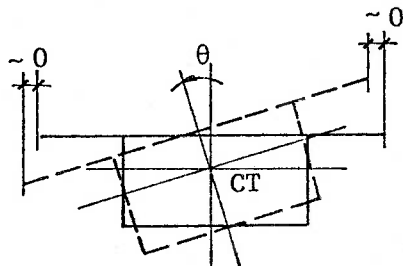
a. Deformadas Longitudinais



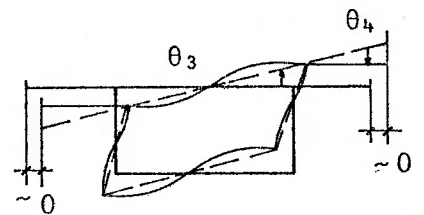
b. Deformadas Transversais para Caixa Indeformável



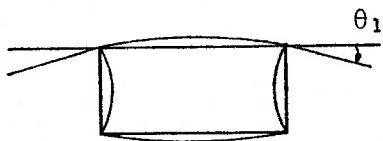
Flexão Longitudinal



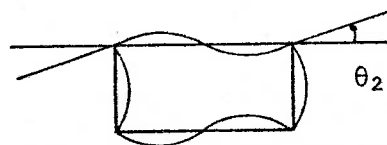
Torção



Distorção



Flexão Transversal Simétrica



Flexão Transversal Antimétrica

c. Deformadas Transversais do Caixa Deformável

Fig. 2-4 - Deformadas Correspondentes aos Carregamentos Simétrico e Antimétrico

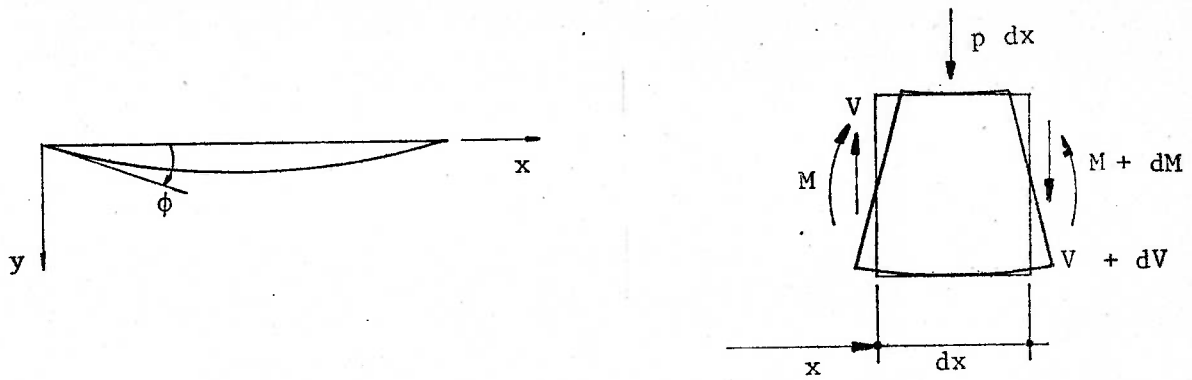


Fig. 2-5 - Deformação por Flexão

2.4.2. Deformação de Torção

Fixadas as convenções da Fig. 2-6.e as hipóteses da Teoria da Torção Uniforme (ver Item 1.3.2.1), tem-se que:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{GI_t}$$

como

$$m_t = - \frac{dM_t}{dx}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = - \frac{\bar{m}_t}{GI_t} \tag{2.4}$$

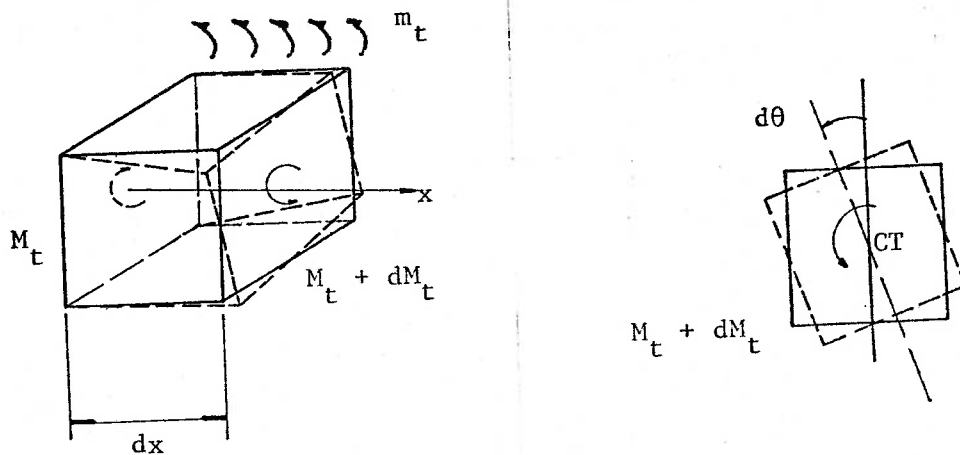


Fig. 2-6 - Deformação por Torção

### 2.4.3. Deformação de Distorção

Adotada, de acordo com a hipótese 5, a solução de Knittel para a distorção do perfil, a deformada da seção transversal fica definida pela expressão (1.17):

$$\gamma = \frac{p_{eq} b_s b_i}{2(b_s + b_i)} \frac{1}{EI_Q}$$

Não fica, entretanto, definida, pela solução de Knittel, a posição dessa seção deformada no espaço. Essa dificuldade pode ser superada lançando-se mão do AVAE.

Da análise da estrutura plissada (ver dedução da expressão (1.27)), tem-se que:

$$s_s'' = - \frac{2\omega_a}{b_s E J_\omega} B \quad s_i'' = - \frac{2\beta\omega_a}{b_i E J_\omega} B \quad s_a'' = - \frac{(1 + \beta)\omega_a}{b_a E J_\omega} B$$

e

$$\gamma'' = - \frac{B}{E J_\omega}$$

Assim:

$$s_s'' = \frac{2\omega_a}{b_s} \gamma'', \quad s_i'' = \frac{2\beta\omega_a}{b_i} \gamma'', \quad s_a'' = \frac{(1 + \beta)\omega_a}{b_a} \gamma''$$

Como as condições de contorno para integração de  $s_s''$ ,  $s_i''$  e  $s_a''$  são exatamente aquelas para integração de  $\gamma''$ , isto é,  $\gamma(x=0) = \gamma(x=l) = 0$ , tem-se que, partindo de

$$s'' = K \gamma''$$

obtem-se, por dupla integração:

$$s = K \gamma + C_1 x + C_2$$

Das condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} s(0) = \gamma(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ s(l) = \gamma(l) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right\} s = K \gamma$$

De onde:

$$s_s = \frac{2\omega_a}{b_s} \gamma, \quad s_i = \frac{2\beta\omega_a}{b_i} \gamma, \quad s_a = \frac{(1 + \beta)\omega_a}{b_a} \gamma \quad (2.5)$$

A solução mais precisa, que consistiria em usar a solução da AVAE, seria muito trabalhosa, uma vez que exigiria o desenvolvimento em série de Fourier da solução da VAE.

Como normalmente os vãos são grandes relativamente ao comprimento elástico, a solução de Knittel é muito próxima da realidade no meio do vão.

#### 2.4.4. Deformação de Flexão Transversal

As deformadas de flexão transversal, simétrica e antimétrica, estão completamente definidas no Item 1.8.4.

#### 2.4.5. Resumo das Equações Relacionando Deslocamentos e Esforços

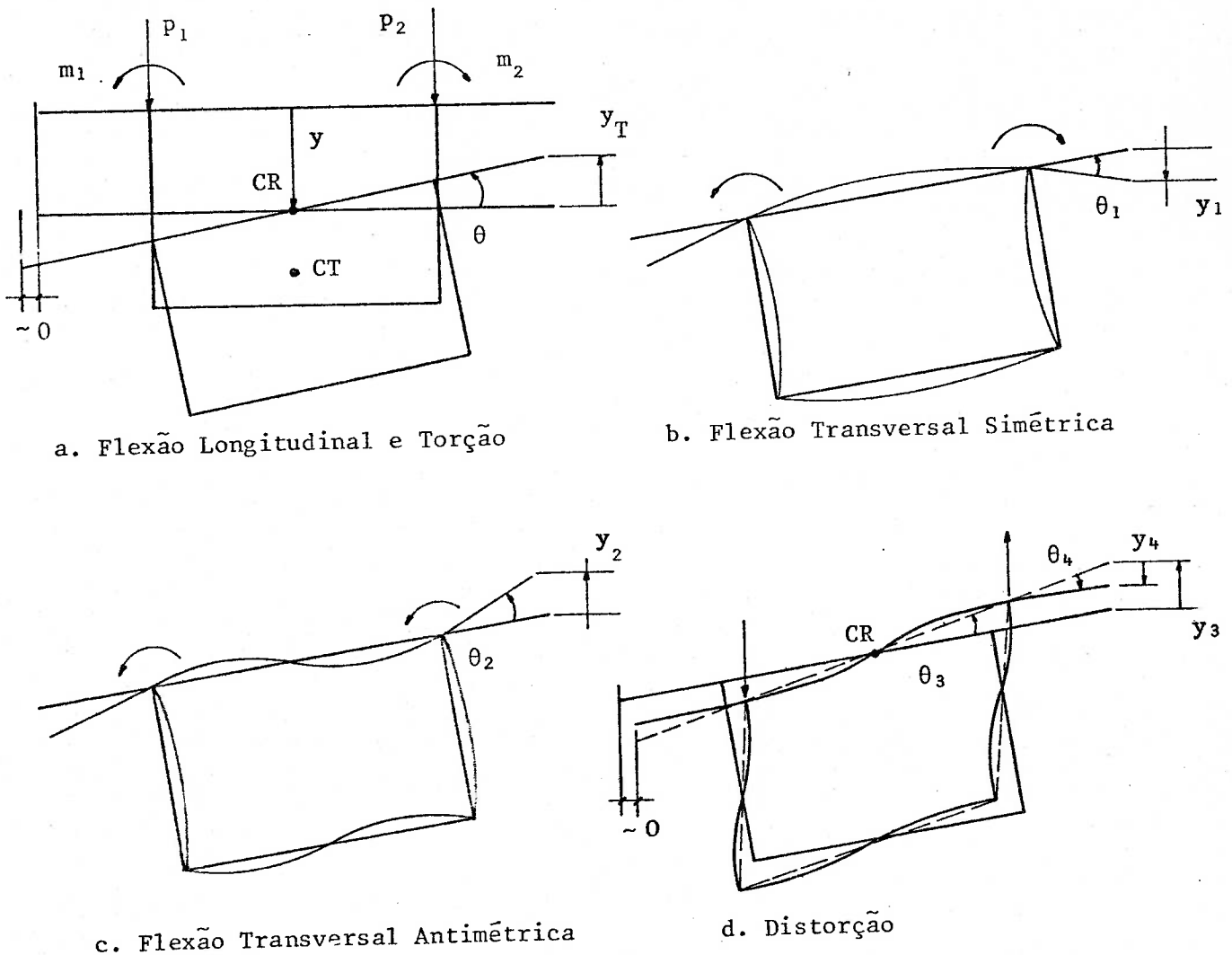


Fig. 2-7 - Parcelas da Deformação da Viga de Seção Celular

A Fig. 2-7 indica as parcelas da deformação da viga celular.

Cada um dos deslocamentos indicados pode ser calculado como se segue.

A. Deslocamento de Flexão Longitudinal

Da equação (2.3):

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p_1 + p_2}{EI_z} \quad (2.6)$$

B. Deslocamento de Torção

Desprezar os deslocamentos laterais da laje superior corresponde a adotar como centro de rotação da viga o ponto médio da laje superior CR no lugar do centro de torção CT.

Essa mudança do centro de rotação modifica as características da flexotorção da viga, mas, mesmo assim, a torção uniforme continua preponderante, podendo-se desprezar a flexotorção. Assim, da equação (2.4):

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = - \frac{m_1 - m_2 + (p_1 - p_2) \frac{b_s}{2}}{GI_t} \quad (2.7)$$

C. Deslocamento de Flexão Transversal Simétrica

Das equações (1.49) e (1.53):

$$\theta_1 = \frac{b_s}{2EI_s} \delta_1 \left( \frac{m_1 + m_2}{2} \right) \quad (2.8)$$

D. Deslocamento de Flexão Transversal Antimétrica

Das equações (1.56) e (1.60):

$$\theta_2 = \frac{b_s}{6EI_s} \delta_2 \left( \frac{m_1 - m_2}{2} \right) \quad (2.9)$$

E. Deslocamentos de Distorção

Desprezar os deslocamentos laterais da laje superior corresponde a adotar, como centro de rotação da mesma, seu ponto médio CR.



Da dedução da equação (1.19), tem-se que:

$$n_s = \left( s_a - \frac{b_s - b_i}{2b_a} s_s \right) \frac{b_a}{h}$$

como

$$s'_s \cong 0 \quad \text{ou} \quad s_s \ll s_a$$

$$n_s \cong s_a \frac{b_a}{h}$$

assim, a rotação global da distorção  $\theta_3$  é dada por

$$\theta_3 = \frac{n_s}{\frac{b_s}{2}} = \frac{2(1 + \beta)\omega_a}{h b_s} \gamma$$

com

$$\gamma = \frac{p_{eq} b_s b_i}{2(b_s + b_i)} \frac{1}{EI_Q}$$

$$p_{eq} = (p_1 - p_2) + \alpha \left( \frac{m_1 - m_2}{2} \right) \quad (2.11)$$

Quando houver cargas concentradas ou parcialmente distribuídas, é conveniente usar, para cálculo de  $p_{eq}$ , o critério exposto em 1.8.5 e usado em 1.9.4.

A rotação local da distorção pode ser calculada com auxílio das expressões (1.9) e (1.14):

$$\theta_4 = \frac{b_s}{6EI_s} \frac{p_{eq} b_i^2}{4(\xi + \eta)(b_s + b_i)} \quad (2.12)$$

As equações de (2.6) a (2.12) foram desenvolvidas para o carregamento simétrico, representado por  $(p_1, p_2, m_1, m_2)$ ; mas elas podem ser analogamente escritas para o carregamento antissimétrico, representado por  $(p_3, p_4, m_3, m_4)$ ,

### 2.5. Desenvolvimento das Cargas em Sêries de Fourier

Feito o corte longitudinal indicado na Fig. 2-3, o problema se resolverá através da equação de compatibilidade das duas vigas ao longo de todo esse corte.

De forma a transformar esse problema espacial num problema plano, desenvolver-se-ão as cargas e, por consequência, os deslocamentos e os esforços transversais, em sêries de Fourier.

Como essas sêries devem respeitar as condições de contorno dos deslocamentos nos apoios, isto é, a nulidade dos deslocamentos de flexão, torção e distorção; elas devem ser senoidais.

Adotando para as cargas as sêries de senos:

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= \sum_1^{\infty} p_{1i} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell} & m_1(x) &= \sum_1^{\infty} m_{1i} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \\ p_2(x) &= \sum_1^{\infty} p_{2i} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell} & m_2(x) &= \sum_1^{\infty} m_{2i} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

obtêm-se, para os deslocamentos de flexão:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p_1 + p_2}{EI_z} = \frac{1}{EI_z} \sum_1^{\infty} (p_{1i} + p_{2i}) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell}$$

que, integrado quatro vezes, fornece:

$$y(x) = \frac{1}{EI_z} \sum_1^{\infty} (p_{1i} + p_{2i}) \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell}$$

ou

$$y_i = \frac{p_{1i} + p_{2i}}{EI_z} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^4 \quad (2.14)$$

Obtêm-se ainda, para os deslocamentos de torção:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = - \frac{m_1 - m_2 + (p_1 - p_2) \frac{b_s}{2}}{GI_t} = - \frac{1}{GI_t} \sum_1^{\infty} \left( m_{1i} - m_{2i} + (p_{1i} - p_{2i}) \frac{b_s}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell}$$

que, integrado duas vezes, fornece:

$$\theta(x) = \frac{1}{GI_t} \sum_1^{\infty} \left[ m_{1i} - m_{2i} + (p_{1i} - p_{2i}) \frac{b_s}{2} \right] \left( \frac{\ell}{i\pi} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{\ell}$$

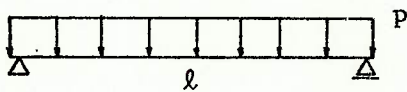
ou

$$\theta_i = \frac{m_{1i} - m_{2i} + (p_{1i} - p_{2i}) \frac{b_s}{2}}{GI_t} \left( \frac{\ell}{i\pi} \right)^2 \quad (2.15)$$

As expressões de  $\theta_{1i}$ ,  $\theta_{2i}$ ,  $\theta_{3i}$  e  $\theta_{4i}$  são imediatas, bastando substituir em (2.8), (2.9) e (2.11)  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $m_1$ , e  $m_2$  por  $p_{1i}$ ,  $p_{2i}$ ,  $m_{1i}$  e  $m_{2i}$ .

É conveniente fornecer aqui os valores de  $p_i$  para os carregamentos mais comuns (ver Fig. 2-8).

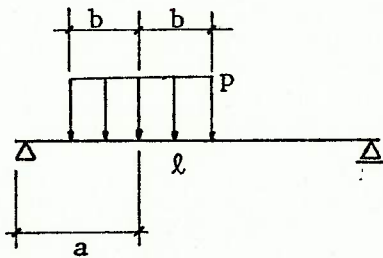
a. Carga Uniformemente Distribuída



$$p_i = \frac{4p}{i\pi} \quad \text{para } i \text{ ímpar}$$

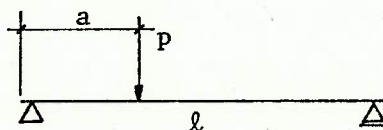
$$p_i = 0 \quad \text{para } i \text{ par}$$

b. Carga Parcialmente Distribuída



$$p_i = \frac{4p}{i\pi} \operatorname{sen} \frac{i\pi a}{\ell} \operatorname{sen} \frac{i\pi b}{\ell}$$

c. Carga Concentrada



$$p_i = \frac{2P}{\ell} \operatorname{sen} \frac{i\pi a}{\ell}$$

Fig. 2-8 - Carregamentos mais Comuns e sua Representação em Série de Fourier

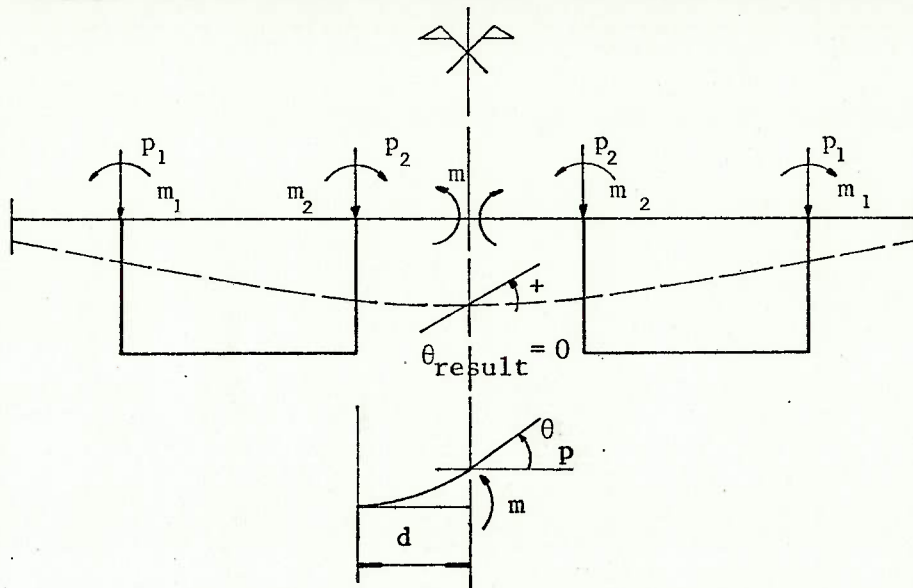
2.6. Solução do Carregamento Simétrico — Equação que fornece  $m_i$ 

Fig. 2-9 - Carregamento Simétrico

Observe-se a Fig. 2-9. A equação de compatibilidade para o carregamento simétrico corresponde a:

$$\theta_{\text{result}}(x) = 0 \quad \forall x$$

Considerando-se o desenvolvimento em série de Fourier, essa equação corresponde a:

$$\theta_{\text{result}_i} = 0 \quad \forall i$$

Desenvolvendo  $\theta_{\text{result}_i}$ , tem-se (ver também Fig. 2-7):

$$\theta_{\text{result}_i} = \theta_i - \theta_{1i} + \theta_{2i} + \theta_{3i} - \theta_{4i} + \theta_{pi} = 0 \quad (2.16)$$

onde:

- $\theta_i$  = rotação de torção
- $\theta_{1i}$  = rotação de flexão transversal simétrica
- $\theta_{2i}$  = rotação de flexão transversal antissimétrica
- $\theta_{3i}$  = rotação global de distorção
- $\theta_{4i}$  = rotação local de distorção
- $\theta_{pi}$  = rotação própria da placa de ligação

Todas essas rotações são conhecidas, salvo  $\theta_{pi}$ , rotação própria da placa de ligação, dada por:

$$\theta_{pi} = \frac{m_i d}{EI'_s} \quad (2.17)$$

onde  $I'_s$  é o momento de inércia da placa de ligação:

$$I'_s = \frac{t_s^{13}}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.18)$$

Substituindo as rotações  $\theta$ , na equação de compatibilidade, por seus valores, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{m_{1i} - \overline{m_{2i}} + (p_{1i} - p_{2i}) \frac{b_s}{2}}{GI_t} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^2 - \frac{m_{1i} + \overline{m_{2i}}}{2} \frac{b_s \delta_1}{2EI_s} + \frac{m_{1i} - \overline{m_{2i}}}{2} \\ & \cdot \frac{b_s \delta_2}{6EI_s} + \left[ (p_{1i} - p_{2i}) + \alpha \left(\frac{m_{1i} - \overline{m_{2i}}}{2}\right) \right] \cdot \\ & \cdot \left( \frac{2(1+\beta)\omega_a b_i}{2h(b_s + b_i)EI_Q} - \frac{b_i^2}{4(\xi + \eta)(b_s + b_i)} \frac{b_s}{6EI_s} \right) + \frac{m_i d}{EI'_s} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{onde } \overline{m_{2i}} = m_{2i} - m_i. \quad (2.19)$$

Essa equação desenvolvida fornece  $m_i$ :

$$\begin{aligned} m_i = & \left\{ \frac{(m_{1i} - m_{2i}) + (p_{1i} - p_{2i}) \frac{b_s}{2}}{GI_t} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^2 - (m_{1i} + m_{2i}) \frac{b_s \delta_1}{4EI_s} + \right. \\ & + (m_{1i} - m_{2i}) \frac{b_s \delta_2}{12EI_s} + \left. \left[ (p_{1i} - p_{2i}) + \alpha \left(\frac{m_{1i} - m_{2i}}{2}\right) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left( \frac{\xi(1+\beta)\omega_a}{h(1+\xi)EI_Q} - \frac{b_i^2}{24(\xi + \eta)(1+\xi)EI_s} \right) \right\} \div \left\{ - \frac{1}{GI_t} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^2 - \right. \\ & - \frac{b_s}{EI_s} \left( \frac{\delta_2}{12} + \frac{\delta_1}{4} \right) - \frac{\alpha\xi(1+\beta)\omega_a}{2h(1+\xi)EI_Q} + \frac{\alpha b_i^2}{48(\xi + \eta)(1+\xi)EI_s} - \\ & \left. - \frac{d}{EI'_s} \right\} \quad \forall i \quad (2.20) \end{aligned}$$

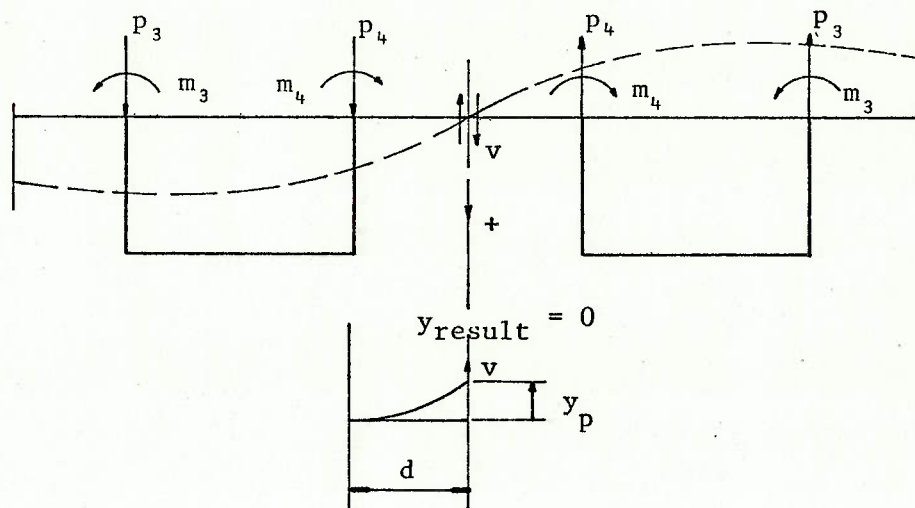
2.7. Solução do Carregamento Antimétrico — Equação que fornece  $v_i$ 

Fig. 2-10 - Carregamento Antimétrico

Observe-se a Fig. 2-10. A equação de compatibilidade para o carregamento antimétrico corresponde a:

$$y_{\text{result}}(x) = 0 \quad \forall x$$

Considerando-se o desenvolvimento em série de Fourier, essa equação corresponde a:

$$y_{\text{result}_i} = 0 \quad \forall i$$

Desenvolvendo  $y_{\text{result}_i}$ , tem-se (ver também Fig. 2-7):

$$y_{\text{result}_i} = y_i - y_{ti} + y_{1i} - y_{2i} - y_{3i} + y_{4i} - y_{pi}$$

onde:

- $y_i$  = deslocamento de flexão longitudinal
- $y_{ti}$  = deslocamento de torção
- $y_{1i}$  = deslocamento de flexão transversal simétrica
- $y_{2i}$  = deslocamento de flexão transversal antimétrica
- $y_{3i}$  = deslocamento global de distorção

$y_{4i}$  = deslocamento local de distorção

$y_{pi}$  = deslocamento próprio da placa de ligação

$$y_{\text{result}_i} = y_i - (\theta_i + \theta_{3i}) \frac{b}{2} + (\theta_{1i} - \theta_{2i} + \theta_{4i})d - y_{pi} = 0$$

Todos esses deslocamentos são conhecidos, a menos de  $y_{pi}$ , deslocamento próprio da placa de ligação, dado por:

$$y_{pi} = \frac{v_i d^3}{3EI'_s} \quad (2.22)$$

Substituindo os deslocamentos  $y$  e as rotações  $\theta$ , na equação de compatibilidade, por seus valores, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{p_{3i} + \overline{p_{4i}}}{EI_z} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^4 - \frac{m_{3i} - \overline{m_{4i}} + (p_{3i} - \overline{p_{4i}}) \frac{b_s}{2}}{GI_t} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^2 \frac{b}{2} - \\ & - \frac{2(1 + \beta)\omega_a b_i}{2h(b_s + b_i)EI_Q} \left\{ (p_{3i} - \overline{p_{4i}}) + \alpha \left(\frac{m_{3i} - \overline{m_{4i}}}{2}\right) \right\} \frac{b}{2} + \\ & + \left\{ \frac{b_s \delta_1}{2EI_s} \left(\frac{m_{3i} + \overline{m_{4i}}}{2}\right) - \frac{b_s \delta_2}{6EI_s} \left(\frac{m_{3i} - \overline{m_{4i}}}{2}\right) \right\} + \\ & + \frac{b_i^2}{24(\xi + \eta)(1 + \xi)EI_s} \left\{ (p_{3i} - \overline{p_{4i}}) + \alpha \left(\frac{m_{3i} - \overline{m_{4i}}}{2}\right) \right\} d - \\ & - \frac{v_i d^3}{3EI'_s} = 0 \end{aligned}$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} \overline{m_{4i}} &= m_{4i} - v_i d \\ \overline{p_{4i}} &= p_{4i} - v_i \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Essa equação desenvolvida fornece  $v_i$ :



$$\begin{aligned}
v_i = & \left\{ \frac{p_{3i} + p_{4i}}{EI_z} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^4 - \frac{m_{3i} - m_{4i} + (p_{3i} - p_{4i}) \frac{b_s}{2}}{GI_t} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^2 \frac{b}{2} - \right. \\
& - \left. \left[ (p_{3i} - p_{4i}) + \alpha \left(\frac{m_{3i} - m_{4i}}{2}\right) \right] \frac{\xi(1 + \beta)\omega_a b}{h(1 + \xi)EI_Q} \frac{b}{2} - \right. \\
& - \frac{b_i^2 d}{24(\xi + \eta)(1 + \xi)EI_s} + (m_{3i} + m_{4i}) \frac{b_s \delta_1 d}{4EI_s} - \\
& - (m_{3i} - m_{4i}) \frac{b_s \delta_2 d}{12EI_s} \left. \right\} \div \left\{ \frac{1}{EI_z} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^4 + \frac{(d + \frac{b_s}{2})}{GI_t} \left(\frac{\ell}{i\pi}\right)^2 \cdot \right. \\
& \cdot \frac{b}{2} + (1 + \alpha \frac{d}{2}) \left( \frac{\xi(1 + \beta)\omega_a b}{2h(1 + \xi)EI_Q} - \frac{b_i^2 d}{24(1 + \xi)(\eta + \xi)EI_s} \right) + \\
& \left. + \frac{b_s d^2}{EI_s} \left( \frac{\delta_2}{12} + \frac{\delta_1}{4} \right) + \frac{d^3}{3EI'_s} \right\} \quad \forall i \quad (2.24)
\end{aligned}$$

## 2.8. Linhas de Influência

Estabelecidas as equações (2.20) e (2.24), pode-se calcular a superestrutura de duas vigas celulares para um carregamento qualquer, representado pelos esforços de engastamento das lajes nas almas.

A precisão do resultado dependerá do número de termos adotados para a série. Normalmente o primeiro termo da série já fornece um resultado satisfatório.

Essas equações possibilitam, por outro lado, o traçado das linhas de influência transversais, muito práticas, que possibilitam o cálculo completo da estrutura (ver (B-12) e (B-59)).

Para determinar essas linhas de influência transversais, será necessário calcular os esforços transversais resultantes da composição dos carregamentos simétrico e antissimétrico com os esforços correspondentes às lajes biengastadas (nós bloqueados).

### 2.8.1. Cálculo dos Esforços Transversais Resultantes

Os esforços transversais resultantes podem ser calculados através da superposição de três esforços conhecidos:

- esforços correspondentes às lajes biengastadas;
- esforços correspondentes ao carregamento simétrico;
- esforços correspondentes ao carregamento antissimétrico.

#### A. Momentos Fletores na Laje de Ligação

A Fig. 2-11 representa graficamente essa superposição, no que se refere à laje de ligação. Assim, podem-se calcular os esforços resultantes nos apoios e no meio da laje de ligação.

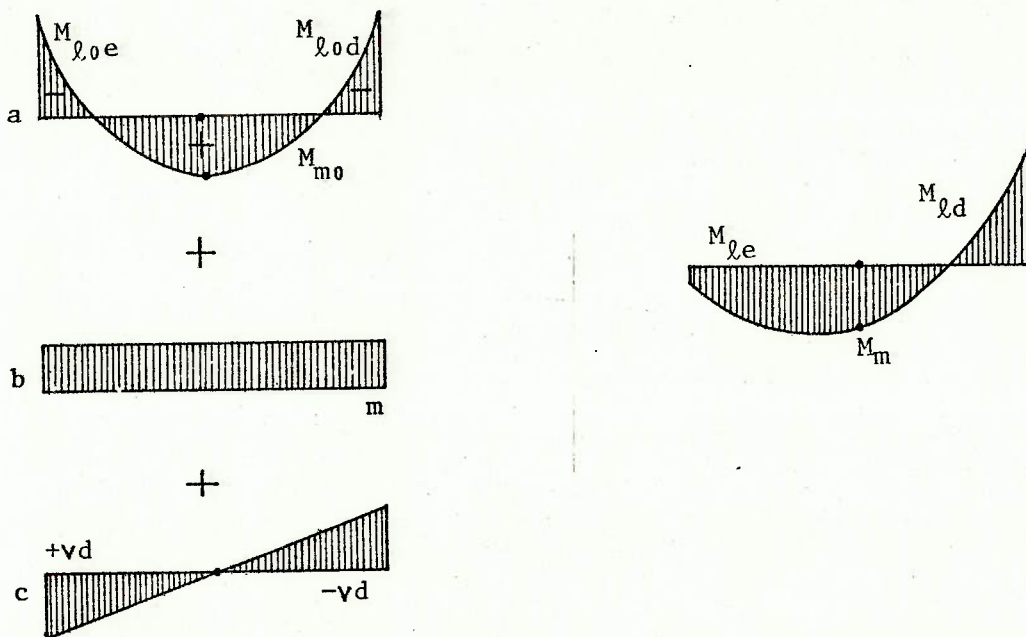


Fig. 2-11 - Momentos Fletores na Laje de Ligação

$$\left. \begin{aligned} M_m &= M_{m0} + m \\ M_{le} &= M_{l0e} + m + vd \\ M_{ld} &= M_{l0d} + m - vd \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

onde:

$M_m$  = momento fletor no meio da laje de ligação;

$M_{\ell_0}$  = momento fletor na ligação da laje com o caixão;

$M_{m_0}, M_{\ell_0}$  = momentos fletores correspondentes à laje de ligação biengastada, calculados pela teoria das placas.

### B. Momentos Fletores nas Almas

No caso das almas, a superposição acima se reduz a compor os esforços b e c, uma vez que as almas não ficam solicitadas quando os nós estão bloqueados (a). Assim:

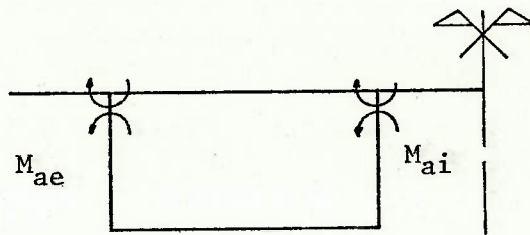


Fig. 2-12 - Flexão Transversal das Almas

$$M_{ai} = M_{ai}^s \pm M_{ai}^a \quad (2.26)$$

$$M_{ai}^s = \underbrace{\frac{b_i^2 p_{eqs}}{4(\eta + \xi)(b_s + b_i)}}_{\text{distorção}} - \underbrace{(1 - \delta_1) \left( \frac{m_1 + \bar{m}_2}{2} \right)}_{\text{flexão transversal simétrica}} + \underbrace{(1 - \delta_2) \left( \frac{m_1 - \bar{m}_2}{2} \right)}_{\text{flexão transversal antimétrica}} \quad (2.27)$$

$M_{ai}^a$  = expressão análoga,  $p_{eqs}$ ,  $m_1$  e  $\bar{m}_2$  substituídos por  $p_{eqa}$ ,  $m_3$  e  $\bar{m}_4$ .

$$M_{ae} = M_{ae}^s \pm M_{ae}^a \quad (2.28)$$

$$M_{ae}^s = \frac{b_i^2 p_{eqs}}{4(\eta + \xi)(b_s + b_i)} + (1 - \delta_1) \left( \frac{m_1 + \bar{m}_2}{2} \right) + (1 - \delta_2) \left( \frac{m_1 - \bar{m}_2}{2} \right) \quad (2.29)$$

$M_{ae}^a$  = expressão análoga.

Os sinais variáveis nas equações (2.26) e (2.28) existem devido à antimetria do carregamento c;  $M_{ai}^a$  ou  $M_{ae}^a$  tem sinais diferentes à esquerda ou à direita do eixo de simetria.

As convenções consideradas para  $M_{ai}$  e  $M_{ae}$  estão indicadas na Fig. 2-12.

### C. Cargas Efetivas numa Viga

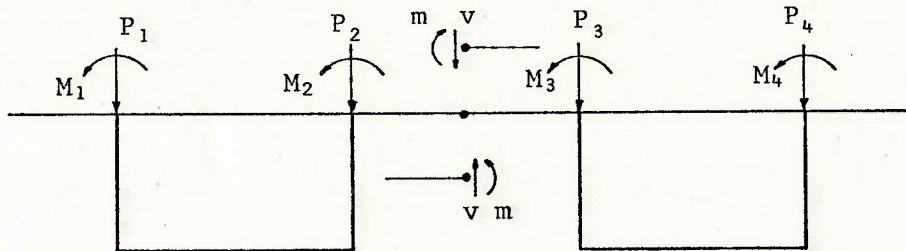


Fig. 2-13 - Cargas Efetivas

A Fig. 2-13 representa o carregamento externo pelos esforços de engastamento e os esforços hiperestáticos  $v$  e  $m$ .

Dessa figura observa-se que o carregamento efetivo de uma viga corresponde ao carregamento externo (esforços de engastamento), aliviado pelos esforços hiperestáticos  $v$  e  $m$ .

Assim:

$$\begin{aligned}
 p_{\text{esq}}^* &= P_1 + P_2 - v \\
 m_{\text{t esq}}^* &= M_1 + M_2 + (P_1 - P_2) \frac{b_s}{2} + m + vd \\
 p_{\text{dir}}^* &= P_3 + P_4 + v \\
 m_{\text{t dir}}^* &= M_3 + M_4 + (P_3 - P_4) \frac{b_s}{2} - m + vd
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

onde  $p^*$  e  $m_{\text{t}}^*$  são, respectivamente, a carga efetiva e o momento de torção efetivo, distribuídos numa viga.

#### 2.8.2. Linhas de Influência Transversais

Como as lajes superior interna e inferior funcionam praticamente como engastadas nas almas, as linhas de influência que mais nos interessam

são as relativas à flexão da laje de ligação ( $M_m, M_l$ ), à flexão das almas ( $M_{ai}, M_{ae}$ ) e às cargas efetivas numa viga ( $p^*, m_t^*$ ), além, sem dúvida, dos hiperestáticos ( $v, m$ ).

As expressões para cálculo desses esforços foram apresentadas, bastando determinar a variação das mesmas com a posição transversal da carga.

Essas linhas de influência são normalmente determinadas, considerando apenas o primeiro termo da série, para uma carga  $p_i$  unitária. Assim, elas devem ser carregadas com as cargas desenvolvidas em série.

É prático e suficientemente preciso levantar essas linhas por pontos, adotando, por exemplo, os nove indicados na Fig. 2-14.

Apresentam-se também os correspondentes esforços de engastamento, dados de entrada para a definição das linhas de influência.

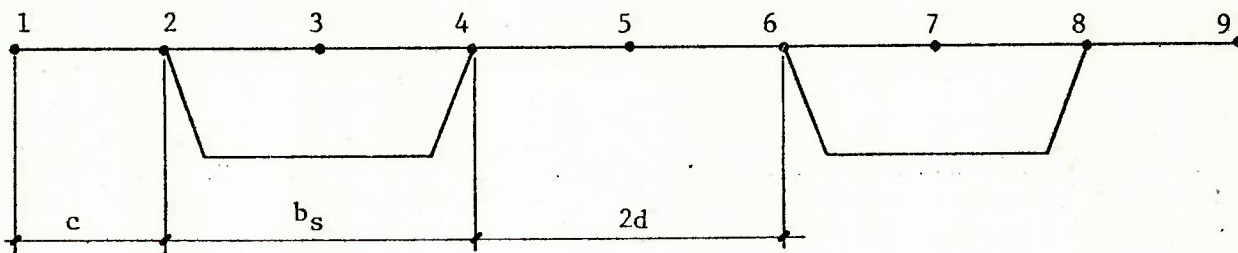


Fig. 2-14 - Linhas de Influência Transversais Determinadas por Pontos

Os exemplos apresentados no Item 2.10 foram resolvidos por este caminho, com auxílio de uma calculadora programável.

A Fig. 2-14 indica uma seção formada por duas vigas unicelulares assimétricas ( $c \neq d$ ). Esse problema não pode, teoricamente, ser resolvido pela solução proposta, que admite seções celulares simétricas. Considera-se, entretanto, que a solução admitindo a seção simétrica de mesma mesa superior ( $b = c + b_s + d$ ) é satisfatória.



Esforços de engastamento correspondentes aos nove pontos indicados na Fig. 2-14.

TABELA 2.1

Ponto	M <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	P <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	P <sub>4</sub>	M <sub>ℓ<sub>0</sub></sub>	M <sub>m<sub>0</sub></sub>
1	c	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$-\frac{b_s}{8}$	0,5	$\frac{b_s}{8}$	0,5	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	$-\frac{d}{4}$	0,5	$\frac{d}{4}$	0,5	0	0	$-\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}$
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	$-\frac{b_s}{8}$	0,5	$\frac{b_s}{8}$	0,5	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	-c	1	0	0

### 2.8.3. Esforços Solicitantes Longitudinais

Obtidas as linhas de influência transversais que definem a carga e o momento de torção efetivos por viga, poder-se-iam determinar os esforços solicitantes longitudinais — momentos fletores, forças cortantes e momentos de torção — usando procedimento análogo ao correntemente usado no cálculo de grelhas.

Segundo esse procedimento, carregam-se as linhas de influência transversais com o TB36 e determinam-se os "trens tipo" de flexão e torção das vigas, que, por sua vez, aplicados às vigas, fornecem os esforços solicitantes longitudinais.

Tal procedimento não é, entretanto, correto, pois admite que a capacidade de distribuição transversal da superestrutura é constante ao longo de todo o vão, quando, na realidade, os valores calculados só valem na região central da viga, diminuindo na direção dos apoios, onde, inclusive, se anulam.

Uma solução melhor se obtém calculando cada viga celular isoladamente, considerando as cargas externas que lhe são diretamente aplicadas (na sua forma real, não desenvolvida em série) aliviadas pelos esforços internos aplicados ao longo do corte longitudinal da Fig. 2-3 (esses sim desenvolvidos em série, usando, por exemplo, o primeiro termo). A Fig. 2-15 representa graficamente esta idéia.

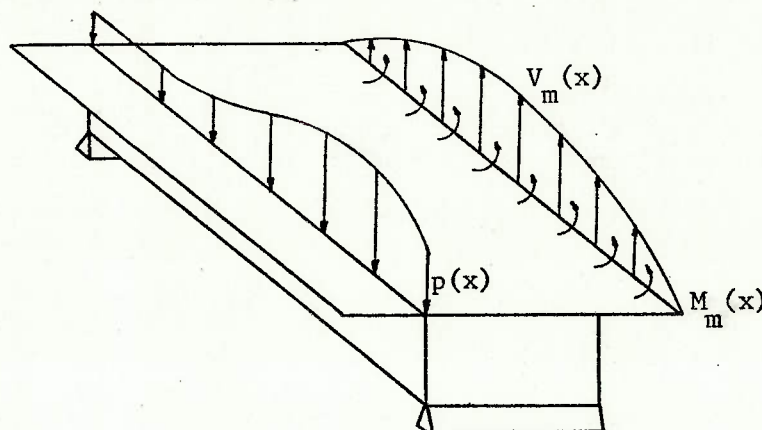


Fig. 2-15 - Esforços Longitudinais numa das Vigas Celulares

Nessa figura,

$p(x)$  representa a carga real externa;

$M_m(x)$ , o momento fletor no meio da laje de ligação;

$V_m(x)$ , a força cortante no meio da laje de ligação.

Analogamente às equações (2.25), tem-se que:

$$V_m(x) = V_{m_0}(x) + v(x). \quad (2.31)$$

onde  $V_{m_0}(x)$  é a força cortante no meio da laje de ligação biengastada. Quando o carregamento dessa laje é simétrico,  $V_{m_0}(x)$  é nula.

Esse procedimento é usado em (B-12) e (B-59), onde todas as linhas de influência transversais são traçadas em abacos adimensionais para  $p(x)$  uniforme.

É interessante observar que, usando o primeiro termo da série e considerando  $p(x)$  uniforme, é fácil determinar essa redução de distribuição transversal. Observe-se a Fig. 2-16.



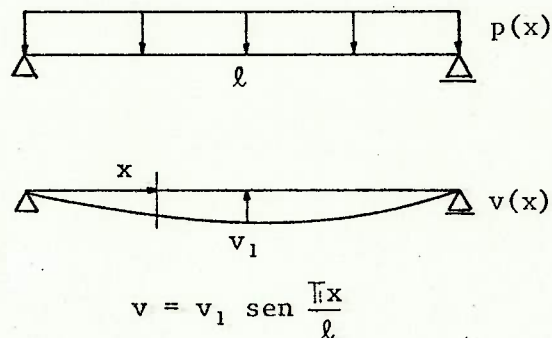


Fig. 2-16 - Caso Particular, onde  $p(x)$  é Uniforme e  $v(x)$ , senoidal

Sendo  $v_1$  o valor da cortante na laje de ligação, no meio do vão, tem-se que:

$$v_1 = K_v p_1 = K_v \frac{4p}{\pi}$$

$$M_{\max} = \frac{p\ell^2}{8} - \int_0^{\ell/2} K_v \frac{4p}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} x \, dx = \frac{p\ell^2}{8} - K_v \frac{4p}{\pi} \left( \frac{\ell^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - x \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \right) \Big|_0^{\ell/2} = \frac{p\ell^2}{8} - K_v \frac{4p}{\pi} \frac{\ell^2}{8} \frac{8}{\pi^2} = \frac{p\ell^2}{8} \left( 1 - K_v \frac{8}{\pi^2} \frac{4}{\pi} \right)$$

de onde:

$$K_M \frac{4}{\pi} = K_v \frac{8}{\pi^2} \frac{4}{\pi} = (K_v 0,81) \frac{4}{\pi} \quad K_M \cong 0,81 K_v$$

$$V_{\max} = \frac{p\ell}{2} - \int_0^{\ell/2} K_v \frac{4p}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \, dx = \frac{p\ell}{2} + K_v \frac{4p}{\pi} \left( \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \right) \Big|_0^{\ell/2} = \frac{p\ell}{2} - K_v \frac{4p}{\pi} \frac{\ell}{2} \frac{2}{\pi} = \frac{p\ell}{2} \left( 1 - K_v \frac{2}{\pi} \frac{4}{\pi} \right)$$

de onde

$$K_V \frac{4}{\pi} = K_v \frac{2}{\pi} \frac{4}{\pi} = (K_v 0,64) \frac{4}{\pi} \quad K_V \cong 0,64 K_v$$

Isso quer dizer que, relativamente à capacidade de distribuição transversal no meio do vão ( $K_v$ ), a distribuição transversal cai 19% para momentos fletores longitudinais e 36% para forças cortantes e momentos de torção.

Como as cargas do TB36 não são uniformemente distribuídas, o uso direto desses coeficientes leva apenas a resultados aproximados.

## 2.9. Extensão para o Caso de Vigas Contínuas

A solução proposta para pontes simplesmente apoiadas pode ser estendida para pontes contínuas, inclusive com inércia variável.

*Como a distribuição transversal depende fundamentalmente dos deslocamentos de flexão e torção no meio do vão, pode-se determinar essa distribuição para obras contínuas de inércia variável usando um vão simplesmente apoiado equivalente. Essa equivalência pode ser definida pela igualdade de deslocamentos no meio do vão para cargas verticais e de torção uniformes.*

Obtidas as linhas de influência transversais, os cálculos dos esforços transversais e longitudinais se fariam da mesma forma que para a ponte simplesmente apoiada (ver Fig. 2-15).

## 2.10. Exemplos

Objetivando julgar a importância da deformabilidade da seção transversal na definição dos esforços solicitantes, resolver-se-ão quatro exemplos em que se comparam as soluções onde ela é considerada com aquelas onde ela é desprezada.

### 2.10.1. Exemplo 1

Como primeiro exemplo, considerar-se-á uma ponte relativamente estreita (13,53 m), com células pequenas, como a ponte de Choisy-le-Roi sobre o Sena.

A Fig. 2-17 representa essa ponte através do perfil longitudinal e da seção transversal.

É também apresentada a seção transversal modelizada, onde se consideram as espessuras médias das lajes, que será utilizada na determinação das linhas de influência.

Calcular-se-ão inicialmente as características geométricas de uma célula (adotando para cada uma a largura de 6,76 m) e, em seguida, determinar-se-ão as linhas de influência transversais, considerando num caso e desprezando noutro a deformabilidade da seção celular.

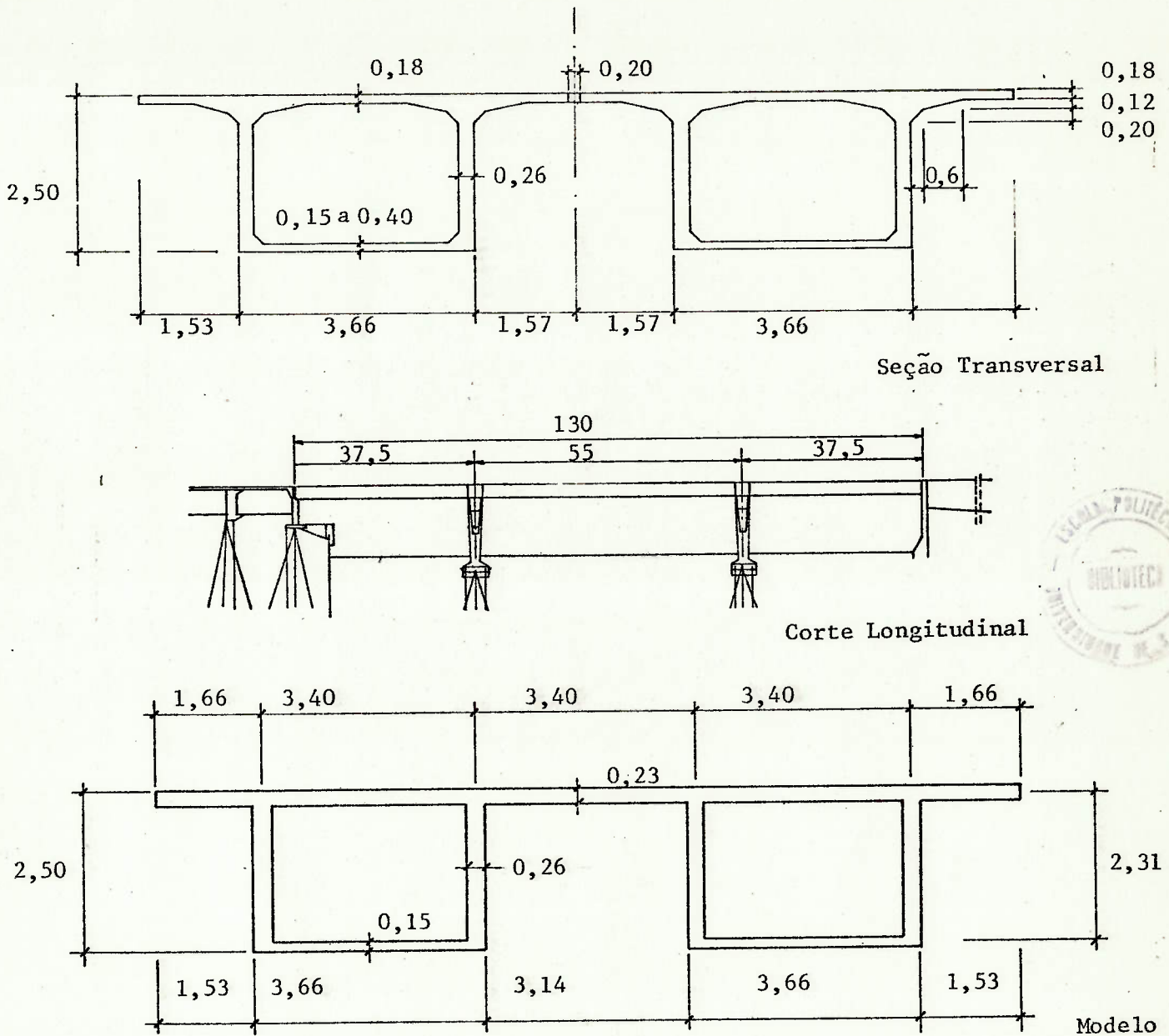


Fig. 2-17 - Ponte de Choisy-le-Roi

## 2.10.1.1. Características Geométricas da Seção Celular

$h = 2,31 \text{ m}$	$S = 3,206 \text{ m}^2$	$I_a = 0,001527 \text{ m}^3$	$\beta = 3,438$
$b = 6,76 \text{ m}$	$y_i = 1,517 \text{ m}$	$I_s = 0,001056 \text{ m}^3$	$\omega_a = 0,4424 \text{ m}^2$
$t_s = 0,23 \text{ m}$	$y_s = 0,793 \text{ m}$	$I_i = 0,0002930 \text{ m}^3$	$J_\omega = 1,530 \text{ m}^6$
$b_s = 3,40 \text{ m}$	$I_z = 2,794 \text{ m}^4$	$\rho_i = 7,665$	$\lambda = 0,1514 \text{ m}^{-1}$
$t_a = 0,26 \text{ m}$	$W_i = 1,712 \text{ m}^3$	$\rho_s = 2,126$	$\delta_1 = 0,2351$
$b_a = 2,31 \text{ m}$	$W_s = 3,220 \text{ m}^3$	$\xi = 1$	$\lambda_1 = 0,03060$
$t_i = 0,15 \text{ m}$	$A = 7,854 \text{ m}^2$	$\eta = 0,4807$	$\delta_2 = 0,4715$
$b_i = 3,40 \text{ m}$	$I_t = 4,468 \text{ m}^4$	$I_Q = 0,003219 \text{ m}^2$	$\lambda_2 = 0,05469$
$v = 0,20$			$\alpha = -0,1958$

### 2.10.1.2. Linhas de Influência Transversais

Estudar-se-ão as linhas de influência relativas ao vão central, de 55,00 m, que se apoia em pilares constituídos por duas paredes afastadas de 3 m uma da outra.

Devido à grande rigidez à flexão desses pilares, considerar-se-á o vão central engastado nas suas extremidades e calcular-se-á o vão *simplesmente apoiado equivalente* ( $l_{eq}$ ).

A flecha no vão central, para carga uniforme, é dada por:

$$f_{real} = \frac{pl^4}{384EI_z}$$

A flecha no vão equivalente, para a mesma carga, é dada por:

$$f_{eq} = \frac{5pl_{eq}^4}{384EI_z}$$

A igualdade das flechas real e equivalente exige:

$$l^4 = 5 l_{eq}^4 \quad \text{ou} \quad l_{eq} = \frac{l}{\sqrt[4]{5}} = 36,78 \text{ m}$$

Obtido o vão equivalente, é preciso determinar o momento de inércia à torção equivalente ( $I_{t eq}$ ).

A rotação no vão central, para carregamento de torção uniformemente distribuído, é dada por:

$$\theta_{real} = \frac{m_t l^2}{8GI_t}$$

A rotação no vão equivalente para a mesma carga é dada por:

$$\theta_{eq} = \frac{m_t l_{eq}^2}{8GI_{teq}}$$

A igualdade das rotações real e equivalente exige:

$$\frac{l^2}{I_t} = \frac{l_{eq}^2}{I_{teq}} \quad \text{ou} \quad I_{teq} = I_t \left(\frac{l_{eq}}{l}\right)^2 = 0,4472 I_t = 1,998 \text{ m}^4$$

Conhecidos  $l_{eq}$  e  $I_{teq}$ , podem-se determinar as linhas de influência procuradas.

TABELA 2.2 - LINHAS DE INFLUÊNCIA

Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$M_{\ell_1}$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
1	- 0,1029	0,2053	- 0,1029	0,2461	0,2553	1,337	0,7947	3,955
2	- 0,0616	0,2494	- 0,0616	0,3223	0,5827	0,3056	0,7506	2,486
3	- 0,0384	0,3157	- 0,0384	0,4983	0,7240	- 0,3074	0,6843	1,035
4	0,0616	0,3821	0,0616	0,7111	0,2626	- 0,2814	0,6179	- 0,3392
5	0,1596	-	0,5846	- 0,2654	- 0,3077	- 0,1047	0,5000	- 1,115
6	0,0616	- 0,3821	0,0616	- 0,5879	- 0,4733	- 0,0237	0,3821	- 1,238
7	- 0,0384	- 0,3157	- 0,0384	- 0,5751	- 0,4464	- 0,0064	0,3157	- 1,112
8	- 0,0616	- 0,2494	- 0,0616	- 0,4856	- 0,3720	- 0,0005	0,2494	- 0,9096
9	- 0,1029	- 0,2053	- 0,1029	- 0,4519	- 0,3385	0,0072	0,2053	- 0,8009
Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$M_{\ell_1}$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
1	- 0,1559	0,2387	- 0,1559	0,2499	0,2673	1,346	0,7613	4,016
2	- 0,0788	0,2842	- 0,0788	0,4042	0,6186	0,3095	0,7158	2,587
3	-	0,3307	-	0,5622	0,7678	- 0,3124	0,6693	1,124
4	0,0788	0,3772	0,0788	0,7201	0,2667	- 0,2841	0,6228	- 0,3386
5	0,1183	-	0,5433	- 0,3067	- 0,3333	- 0,0986	0,5000	- 1,157
6	0,0788	- 0,3772	0,0788	- 0,5624	- 0,4562	- 0,0260	0,3772	- 1,204
7	-	- 0,3307	-	- 0,5622	- 0,4427	- 0,0127	0,3307	- 1,124
8	- 0,0788	- 0,2842	- 0,0788	- 0,5619	- 0,4292	0,0007	0,2842	- 1,045
9	- 0,1559	- 0,2387	- 0,1559	- 0,5617	- 0,4160	0,0137	0,2387	- 0,9675



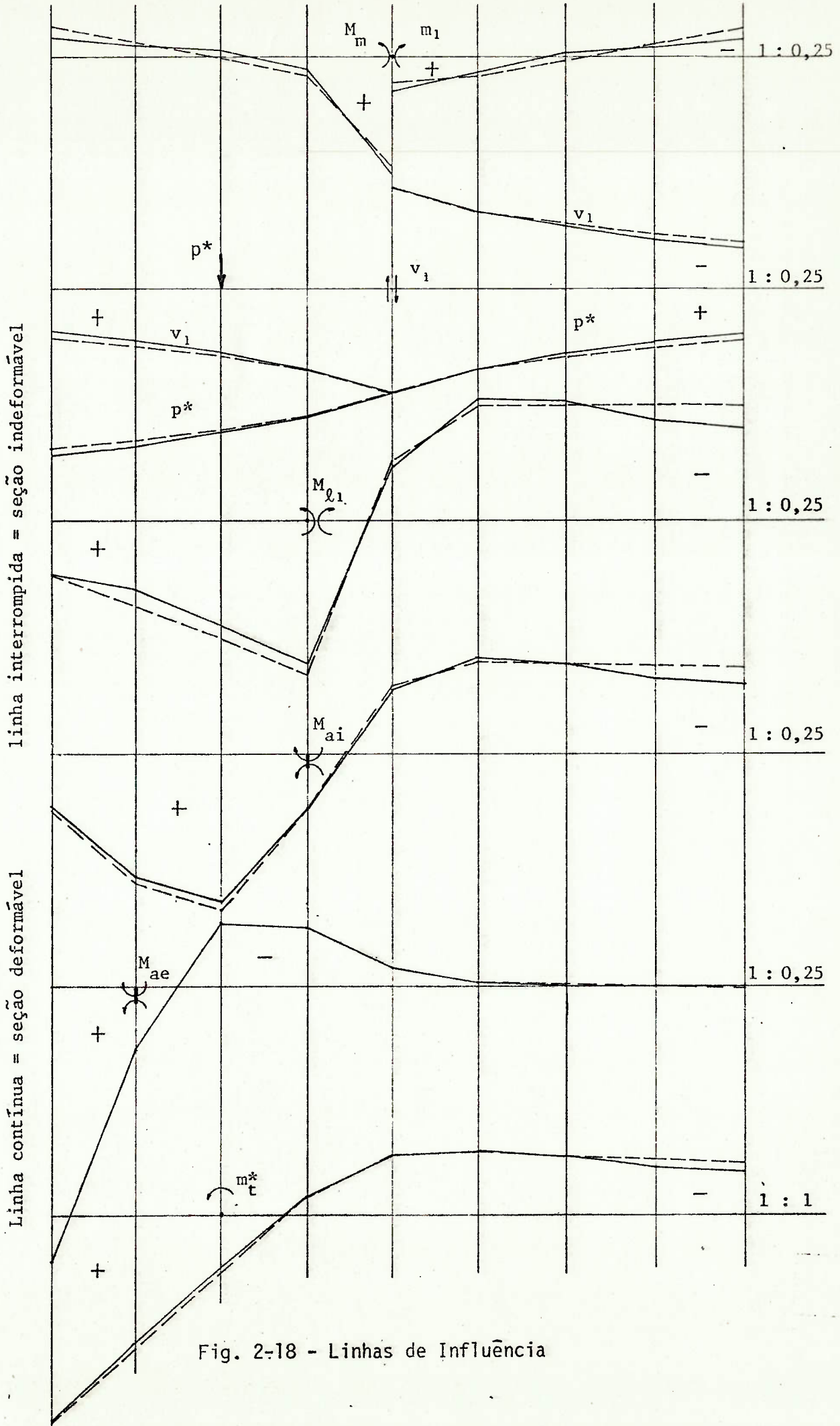


Fig. 2-18 - Linhas de Influência

## 2.10.2. Exemplo 2

Considere-se agora, em oposição ao Exemplo 1, uma obra muito larga (26,60 m), com células bastante grandes, como a ponte Rio-Niterói.

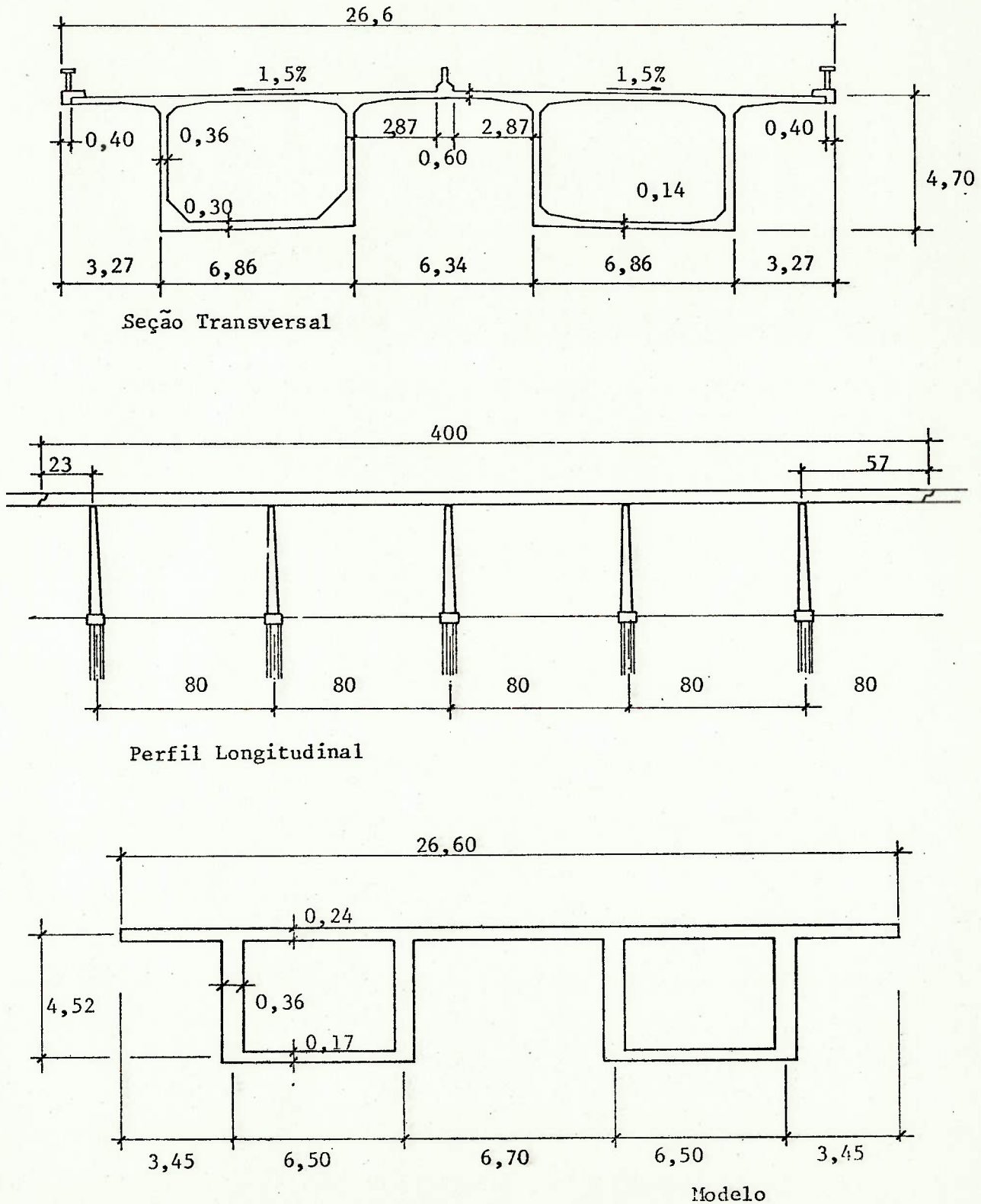


Fig. 2-19 - Ponte Rio-Niterói



A Fig. 2-19 apresenta a forma real da ponte Rio-Niterói e a seção transversal modelizada, com placas de espessura constante, que será usada nos cálculos.

O procedimento de cálculo será idêntico ao adotado no Exemplo 1.

### 2.10.2.1. Características Geométricas da Seção Celular

$h = 4,52 \text{ m}$	$S = 7,465 \text{ m}^2$	$I_a = 0,004050 \text{ m}^3$	$\beta = 3,048$
$b = 13,30 \text{ m}$	$y_i = 2,877 \text{ m}$	$I_s = 0,001200 \text{ m}^3$	$\omega_a = 1,815 \text{ m}^2$
$t_s = 0,24 \text{ m}$	$y_s = 1,643 \text{ m}$	$I_i = 0,0004265 \text{ m}^3$	$J_\omega = 51,80 \text{ m}^6$
$b_s = 6,50 \text{ m}$	$I_z = 24,22 \text{ m}^4$	$\rho_i = 13,66$	$\lambda = 0,05881 \text{ m}^{-1}$
$t_a = 0,36 \text{ m}$	$W_i = 8,082 \text{ m}^3$	$\rho_s = 4,853$	$\delta_1 = 0,1185$
$b_a = 4,52 \text{ m}$	$W_s = 14,02 \text{ m}^3$	$\xi = 1$	$\lambda_1 = 0,02049$
$t_i = 0,17 \text{ m}$	$A = 29,38 \text{ m}^2$	$\eta = 0,4715$	$\delta_2 = 0,2852$
$b_i = 6,50 \text{ m}$	$I_t = 38,18 \text{ m}^4$	$I_Q = 0,002479 \text{ m}^2$	$\lambda_2 = 0,04566$
$v = 0,20$			$\alpha = -0,3206$

### 2.10.2.2. Linhas de Influência Transversais

Determinar-se-ão as linhas de influências para um vão intermediário de 80,00 m.

É necessário determinar, inicialmente, o vão isostático equivalente:

$$f_{\text{real}} = \frac{3p\ell^4}{384EI_z} \quad f_{\text{eq}} = \frac{5p\ell_{\text{eq}}^4}{384EI_z}$$

$$\ell_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5}} \ell = 70,41 \text{ m}$$

$$I_{t \text{ eq}} = \left(\frac{\ell_{\text{eq}}}{\ell}\right)^2 I_t = 0,7746 I_t = 29,57 \text{ m}^4$$

Para determinar o vão equivalente, considerou-se a flecha correspondente ao momento máximo no vão, isto é, a viga contínua carregada alternadamente.

Nesse caso, como as flechas de flexão estão maximizadas, a distribuição transversal também estará.

Para analisar os momentos m̄nimos nos apoios, seria interessante considerar a flecha correspondente a viga carregada integralmente. As flechas seriam, assim, menores, e a distribuiçãõ transversal também.

TABELA 2.3 - LINHAS DE INFLUÊNCIA

Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$M\ell_1$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
1	- 0,0131	0,1543	- 0,0131	0,5375	0,4330	2,998	0,8357	7,771
2	0,0061	0,1789	0,0061	0,6052	1,080	0,5472	0,8211	4,437
3	- 0,0417	0,2193	- 0,0417	0,6930	1,329	- 0,7130	0,7804	1,406
4	- 0,0061	0,2598	- 0,0061	0,8642	0,2041	- 0,5568	0,7402	- 1,541
5	0,0893	-	0,9268	- 0,7482	- 0,8067	- 0,1479	0,5000	- 2,373
6	- 0,0061	- 0,2598	- 0,0061	- 0,8763	- 0,7649	0,0067	0,2598	- 1,721
7	- 0,0417	- 0,2193	- 0,0417	- 0,7764	- 0,6717	0,0119	0,2193	- 1,491
8	0,0061	- 0,1789	0,0061	- 0,5931	- 0,5193	0,0028	0,1789	- 1,175
9	- 0,0131	- 0,1643	- 0,0131	- 0,5636	- 0,4904	0,0006	0,1643	- 1,097
Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$M\ell_1$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
1	- 0,0482	0,1899	- 0,0482	0,5879	0,4828	3,003	0,8101	7,905
2	- 0,0233	0,2105	- 0,0233	0,6819	1,152	0,5515	0,7895	4,616
3	-	0,2300	-	0,7704	1,389	- 0,7204	0,7700	1,518
4	0,0233	0,2494	0,0233	0,8589	0,1947	- 0,5616	0,7506	- 1,581
5	0,0354	-	0,8729	- 0,8021	- 0,8448	- 0,1387	0,5000	- 2,427
6	0,0233	- 0,2494	0,2333	- 0,8122	- 0,7136	0,0014	0,2494	- 1,669
7	-	- 0,2300	-	- 0,7704	- 0,6733	0,0050	0,2300	- 1,518
8	- 0,0233	- 0,2105	- 0,0233	- 0,7286	- 0,6329	0,0085	0,2105	- 1,413
9	- 0,0482	- 0,1899	- 0,0482	- 0,6843	- 0,5901	0,0124	0,1899	- 1,302

Linha interrompida = seção indeformável

Linha contínua = seção deformável

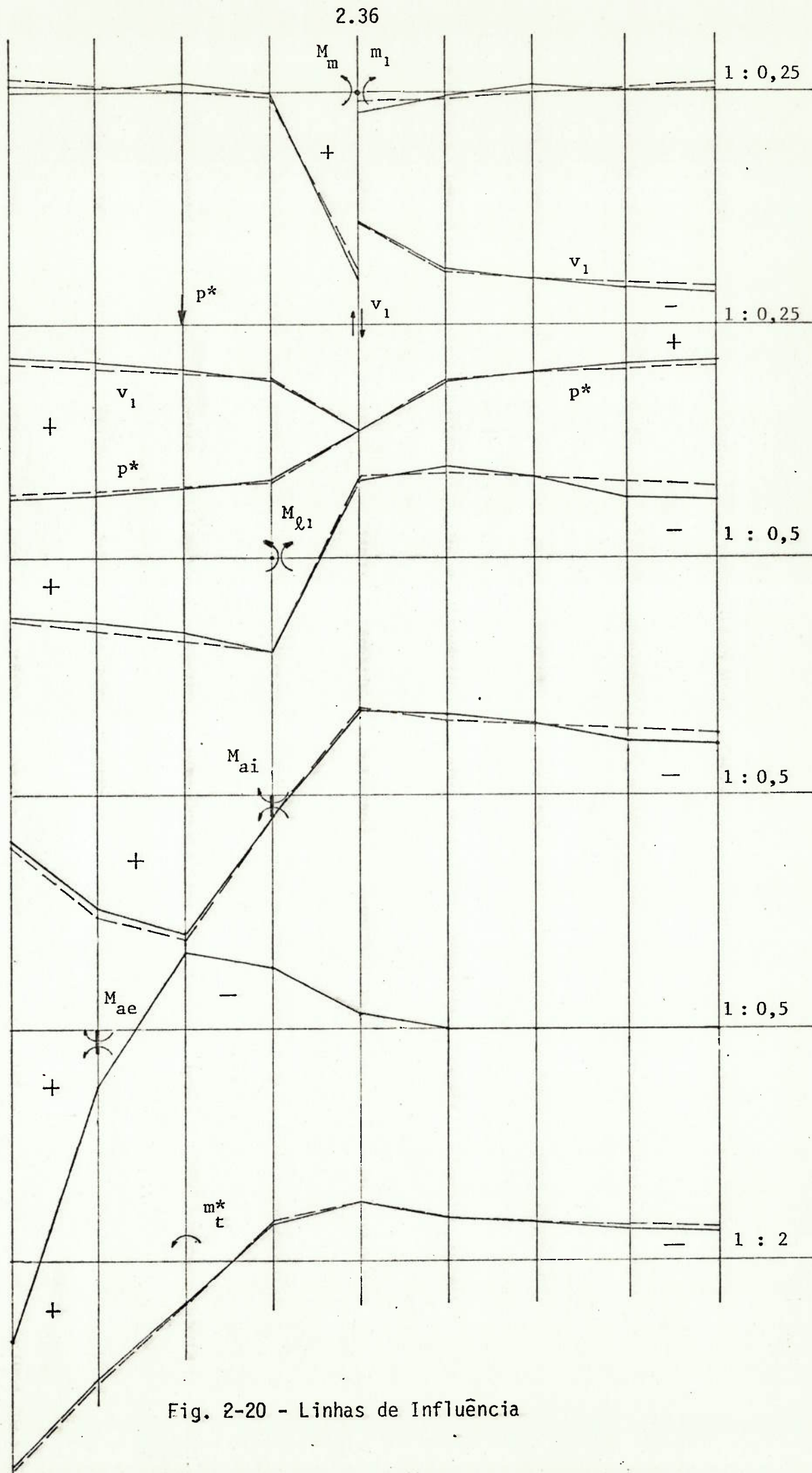


Fig. 2-20 - Linhas de Influência

### 2.10.3. Exemplo 3

De forma a maximizar o efeito da deformabilidade da seção transversal, considerar-se-ã um terceiro exemplo, onde a rigidez ã torçã das vigas e a rigidez da placa de ligaçã sejam grandes relativamente ã rigidez dos quadros transversais.

Isso serã possível atravẽs de duas grandes cẽlulas, com paredes bastante finas, ligadas por placa relativamente estreita.

A Fig. 2-21 representa a seãõ transversal modelizada dessa estrutura, usada para vencer um vãõ de 80 m.

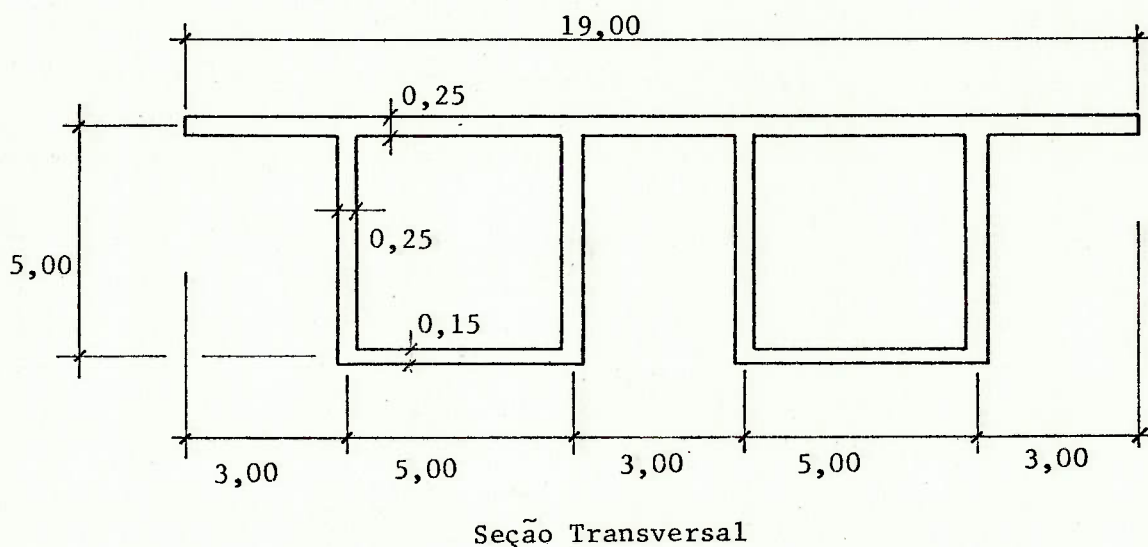


Fig. 2-21 - Estrutura do Exemplo 3

#### 2.10.3.1. Características Geométricas da Seção Celular

$h = 5,00 \text{ m}$	$S = 5,563 \text{ m}^2$	$I_a = 0,001356 \text{ m}^3$	$\beta = 2,739$
$b = 9,50 \text{ m}$	$y_i = 3,208 \text{ m}$	$I_s = 0,001356 \text{ m}^3$	$\omega_a = 1,672 \text{ m}^2$
$t_s = 0,25 \text{ m}$	$y_s = 1,792 \text{ m}$	$I_i = 0,0002930 \text{ m}^3$	$J_\omega = 26,65 \text{ m}^6$
$b_s = 5,00 \text{ m}$	$I_z = 21,57 \text{ m}^4$	$\rho_i = 4,630$	$\lambda = 0,06585 \text{ m}^{-1}$
$t_a = 0,25 \text{ m}$	$W_i = 6,472 \text{ m}^3$	$\rho_s = 1$	$\delta_1 = 0,3924$
$b_a = 5,00 \text{ m}$	$W_s = 11,56 \text{ m}^3$	$\xi = 1$	$\lambda_1 = 0,03824$

$$\begin{array}{llll} t_i = 0,15 \text{ m} & A = 25,00 \text{ m}^2 & \eta = 0,5243 & \delta_2 = 0,6490 \\ b_i = 5,00 \text{ m} & I_t = 26,79 \text{ m}^4 & I_Q = 0,002004 \text{ m}^2 & \lambda_2 = 0,05294 \\ v = 0,20 & & & \alpha = 0,1537 \end{array}$$

### 2.10.3.2. Linhas de Influência Transversais

Como a ponte considerada é simplesmente apoiada nos extremos, a teoria apresentada se aplica diretamente, sem necessidade de adaptações.



TABELA 2.4 - LINHAS DE INFLUÊNCIA

Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$Ml_1$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
1	0,0269	0,3538	0,0269	0,5577	0,5496	2,034	0,6462	6,942
2	- 0,0593	0,3781	- 0,0593	0,5079	0,8245	0,5159	0,6219	3,953
3	- 0,1306	0,4250	- 0,1306	0,5069	0,8130	- 0,2546	0,5750	1,549
4	0,0593	0,4720	0,0593	0,7672	0,1754	- 0,2908	0,5280	- 0,5527
5	0,1945	-	0,5695	- 0,1805	- 0,2972	- 0,1875	0,5000	- 1,431
6	0,0593	- 0,4720	0,0593	- 0,6487	- 0,5249	- 0,1307	0,4720	- 1,829
7	- 0,1306	- 0,4250	- 0,1306	- 0,7682	- 0,5667	- 0,0999	0,4250	- 1,831
8	- 0,0593	- 0,3781	- 0,0593	- 0,6265	- 0,4750	- 0,0944	0,3781	- 1,572
9	0,0269	- 0,3538	0,0269	- 0,5038	- 0,4024	- 0,0963	0,3538	- 1,388

Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$Ml_1$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
1	- 0,1372	0,4194	- 0,1372	0,4918	0,5429	2,067	0,5806	7,040
2	- 0,0623	0,4388	- 0,0623	0,5958	0,8943	0,5323	0,5612	4,193
3	-	0,4549	-	0,6823	0,9148	- 0,2593	0,5451	1,820
4	0,0623	0,4710	- 0,0623	0,7688	0,1758	- 0,2914	0,5290	- 0,5536
5	0,0811	-	0,4561	- 0,2939	- 0,3552	- 0,1766	0,5000	- 1,544
6	0,0623	- 0,4710	0,0623	- 0,6441	- 0,5221	- 0,1308	0,4710	- 1,822
7	-	- 0,4549	-	- 0,6823	- 0,5350	- 0,1205	0,4549	- 1,820
8	- 0,0623	- 0,4388	- 0,0623	- 0,7205	- 0,5480	- 0,1102	0,4388	- 1,818
9	- 0,1372	0,4194	- 0,1372	- 0,7664	- 0,5635	- 0,0978	0,4194	- 1,815

SEÇÃO DEFORMÁVEL

SEÇÃO INDEFORMÁVEL



Linha interrompida = seção indeformável

Linha contínua = seção deformável

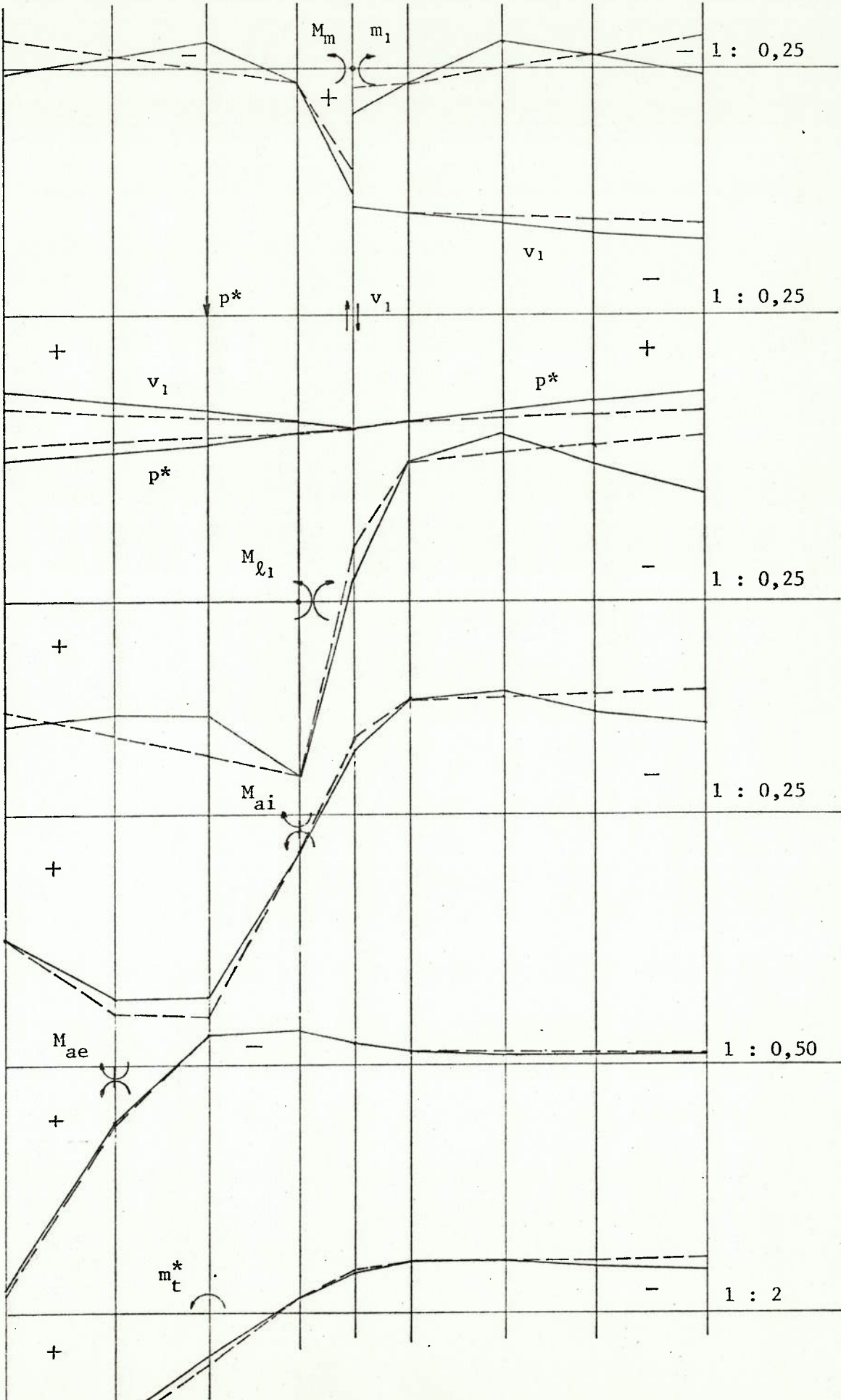


Fig. 2-22 - Linhas de Influência

## 2.10.4. Exemplo 4

Por fim, considerar-se-á o caso de uma obra bastante larga, vencendo vãos não muito grandes, comuns nas vias expressas urbanas. É o caso do exemplo utilizado em (B-6) e reproduzido na Fig. 2-23 — uma obra de 26 m de largura e 50 m de vão.

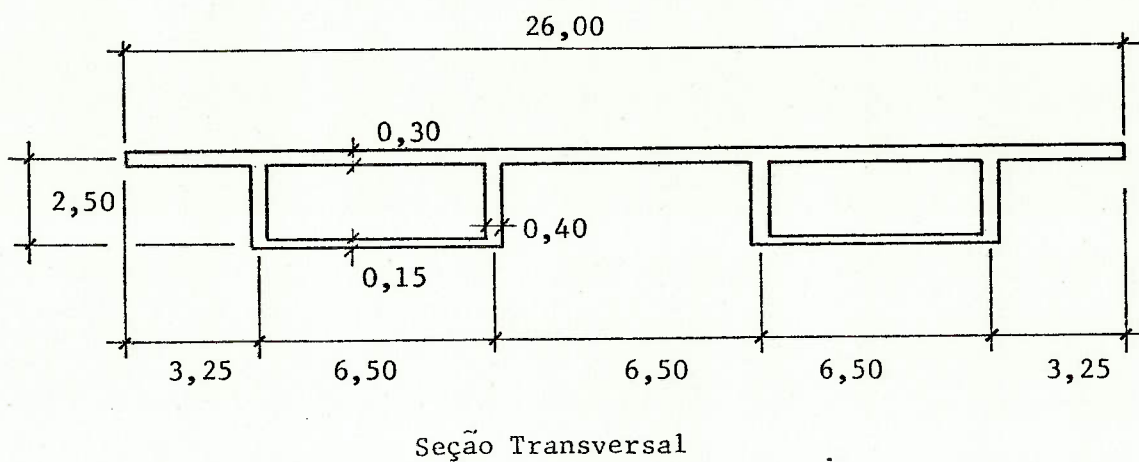


Fig. 2-23 - Estrutura do Exemplo 4

## 2.10.4.1. Características Geométricas da Seção Celular

$h = 2,50 \text{ m}$	$S = 6,755 \text{ m}^2$	$I_a = 0,00555 \text{ m}^3$	$\beta = 4,679$
$b = 13,00 \text{ m}$	$y_i = 1,770 \text{ m}$	$I_s = 0,00234 \text{ m}^3$	$\omega_a = 0,715 \text{ m}^2$
$t_s = 0,30 \text{ m}$	$y_s = 0,730 \text{ m}$	$I_i = 0,000293 \text{ m}^3$	$J_\omega = 12,51 \text{ m}^6$
$b_s = 6,50 \text{ m}$	$I_z = 6,664 \text{ m}^4$	$\rho_i = 49,30$	$\lambda = 0,0941 \text{ m}^{-1}$
$t_a = 0,40 \text{ m}$	$W_i = 3,470 \text{ m}^3$	$\rho_s = 6,163$	$\delta_1 = 0,0973$
$b_a = 2,50 \text{ m}$	$W_s = 8,282 \text{ m}^3$	$\xi = 1,00$	$\lambda_1 = 0,00602$
$t_i = 0,15 \text{ m}$	$A = 16,25 \text{ m}^2$	$\eta = 0,175$	$\delta_2 = 0,243$
$b_i = 6,50 \text{ m}$	$I_t = 13,63 \text{ m}^4$	$I_Q = 0,00392 \text{ m}^2$	$\lambda_2 = 0,0148$
$v = 0,20$			$\alpha = -0,334$

## 2.10.4.2. Linhas de Influência Transversais

Como a ponte em questão é simplesmente apoiada nos extremos, a teoria apresentada se aplica diretamente, sem necessidade de adaptações.

TABELA 2.5 - LINHAS DE INFLUÊNCIA

SEÇÃO DEFORMÁVEL	Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$M\lambda_1$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
	1	- 0,0641	0,219	- 0,0641	0,648	0,6935	3,042	0,781	7,860
	2	- 0,0103	0,243	- 0,0103	0,779	1,416	0,7124	0,757	4,820
	3	- 0,0348	0,286	- 0,0348	0,896	1,571	- 0,7043	0,714	1,820
	4	0,0103	0,330	0,0103	1,083	0,3103	- 0,6673	0,670	- 1,090
	5	0,1070	-	0,9190	- 0,706	- 0,8497	- 0,2127	0,500	- 2,330
	6	0,0103	- 0,330	0,0103	- 1,062	- 0,9869	- 0,0280	0,330	- 2,130
	7	- 0,0348	- 0,286	- 0,0348	- 0,966	- 0,8878	- 0,0160	0,286	- 1,890
	8	- 0,0103	- 0,243	- 0,0103	- 0,800	- 0,7389	- 0,0172	0,243	- 1,680
	9	- 0,0641	- 0,219	- 0,0641	- 0,777	- 0,7062	- 0,0052	0,219	- 1,490
SEÇÃO INDEFORMÁVEL	Ponto	$m_1$	$v_1$	$M_m$	$M\lambda_1$	$M_{ai}$	$M_{ae}$	$p^*$	$m_t^*$
	1	- 0,1010	0,236	- 0,1010	0,666	0,7177	3,050	0,764	7,930
	2	- 0,0505	0,265	- 0,0505	0,810	1,453	0,7218	0,735	4,920
	3	-	0,293	-	0,954	1,618	- 0,7103	0,707	1,900
	4	0,0505	0,322	0,0505	1,098	0,3154	- 0,6755	0,678	- 1,110
	5	0,0758	-	0,888	- 0,737	- 0,8718	- 0,2068	0,500	- 2,360
	6	0,0505	- 0,322	0,0505	- 0,997	- 0,9346	- 0,0349	0,322	- 2,040
	7	-	- 0,293	-	- 0,954	- 0,8842	- 0,0232	0,293	- 1,900
	8	- 0,0505	- 0,265	- 0,0505	- 0,911	- 0,8338	- 0,0113	0,265	- 1,770
	9	- 0,1010	- 0,236	- 0,1010	- 0,868	- 0,7833	0,0005	0,236	- 1,630

linha interrompida = seção indeformável

linha contínua = seção deformável

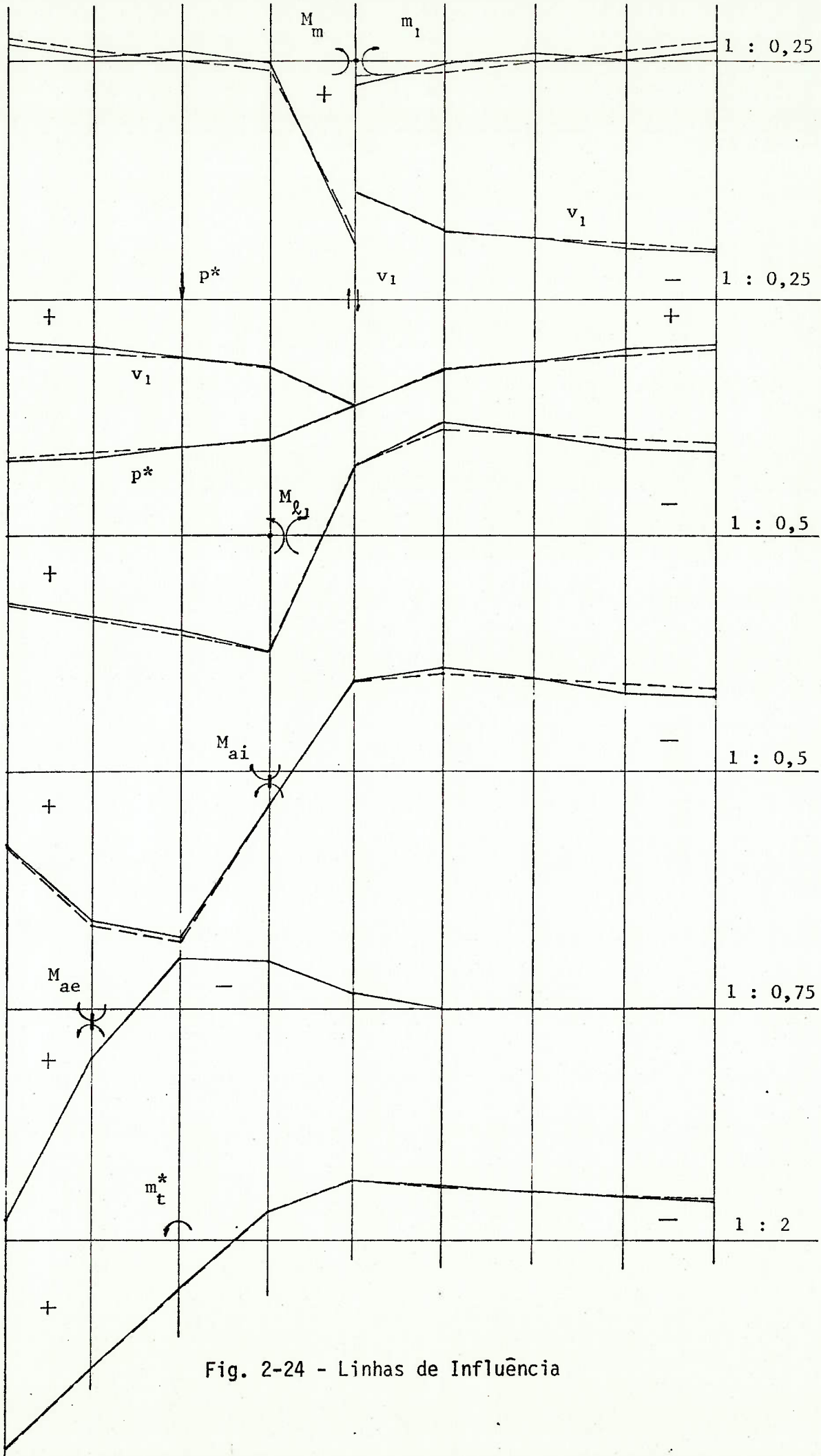


Fig. 2-24 - Linhas de Influência

2.10.5. Comentários

Da observação desses quatro exemplos, podem-se tirar algumas conclusões úteis:

- a) *Duas vigas unicelulares ligadas pela laje superior, sem transversinas, constituem um tabuleiro de ótima capacidade de distribuição transversal.*

As transversinas intermediárias são realmente desnecessárias do ponto de vista da concepção estrutural, e certamente inconvenientes do ponto de vista construtivo.

- b) *A deformabilidade da seção transversal não se mostrou condicionante da distribuição transversal.*

A deformabilidade da seção transversal, por diminuir a rigidez transversal da estrutura, diminui sua capacidade de distribuição transversal. Essa redução não é, entretanto, muito importante.

Observando a Fig. 2-7, verifica-se que as quatro rotações  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ , devidas à deformação transversal, nunca se somam —  $\theta_3$  tem sempre o sinal inverso ao de  $\theta_4$ . No caso crítico de carga no extremo do balanço, por exemplo,  $\theta_1$  e  $\theta_4$  têm sinais opostos a  $\theta_2$  e  $\theta_3$ .

Nos casos normais, como os Exemplos 1, 2 e 4, os erros devidos à hipótese da indeformabilidade da seção transversal são pequenos.

No cálculo longitudinal, onde intervêm  $p^*$  e  $m_t^*$ , esses erros estão contra a segurança, mas são inferiores a 5%. Como as cargas variáveis não representam mais que 40% da totalidade das cargas, esses erros estão limitados a 2% do total, o que é aceitável.

Em casos especiais, como o Exemplo 3, é preciso cuidado. Os erros atingiram 11%.

- c) *Já no cálculo transversal, onde intervêm  $M_m$ ,  $M_\ell$ ,  $M_{ai}$  e  $M_{ae}$ , os erros devidos àquela hipótese não são pequenos.*

Para os esforços  $M_\ell$ ,  $M_{ai}$  e  $M_{ae}$ , esses erros estão a favor da segurança, variando desde 20%, nos Exemplos 1, 2 e 4, até 50%, no Exemplo 3.

Para o esforço  $M_m$ , esses erros estão contra a segurança, variando desde 10%, nos Exemplos 1, 2 e 4, até 20%, no Exemplo 3.

Como para esses esforços solicitantes transversais as parcelas devidas às cargas variáveis representam praticamente a totalidade dos mesmos, não parece razoável desprezar a deformabilidade da seção transversal.

Para considerá-la, uma vez que esses esforços são críticos junto às cargas concentradas (rodas do TB36), será necessário usar uma solução mais completa que o 1º termo da série. A concentração da deformação transversal junto às cargas concentradas não pode ser representada pelo 1º termo.

Como essa solução seria trabalhosa, propor-se-á uma solução alternativa, bastante precisa ao mesmo tempo que simples.

Essa solução alternativa corresponde a calcular os valores de  $p^*$  e  $m_t^*$  desprezando a deformabilidade da seção, e depois resolver o quadro transversal resultante.

Admite-se, portanto, que a deformabilidade da seção transversal só influi localmente, nos esforços transversais, não influenciando significativamente no trabalho global da estrutura.

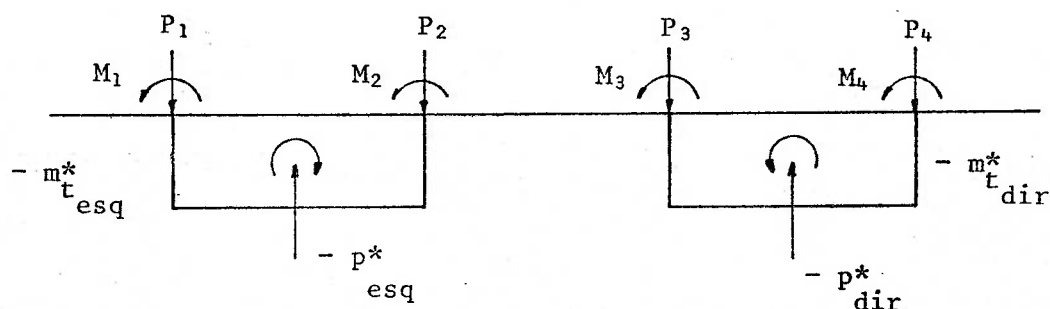


Fig. 2-25 - Cálculo Transversal. Solução Alternativa

A Fig. 2-25 representa esse quadro resultante. Nela, os esforços  $P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  representam os esforços de engastamento calculados conforme o item 2.1.8, e ainda  $p^*$  e  $m_t^*$

( $\bar{a}$  esquerda e  $\bar{a}$  direita) são calculados carregando as linhas de influência transversais diretamente com o carregamento externo ( $P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$ ) sem desenvolvê-lo em série. Dessa forma,  $p^*$  e  $m_t^*$  equilibrarão as cargas externas.

A solução desse quadro pode ser obtida por equações análogas a (2.20) e (2.24), onde os deslocamentos de flexão e torção ( $y_{esq}, \theta_{esq}, y_{dir}, \theta_{dir}$ ) são conhecidos, e as cargas externas não estão desenvolvidas em série.

Do ponto de vista do cálculo, é mais prático determinar primeiramente  $m$  e  $v$  para deslocamentos nulos de flexão e torção, e depois adicionar  $m_i$  e  $v_i$  calculados na hipótese da seção transversal indeformável.

Nessas condições, os esforços transversais resultantes serão calculados através da superposição de três esforços conhecidos:

- 1) esforços correspondentes às lajes biengastadas;
  - 2) esforços correspondentes à estrutura com vigas de seção transversal indeformável (carregamento simétrico e antissimétrico);
  - 3) esforços correspondentes à deformação da seção transversal (carregamento simétrico e antissimétrico).
- d) *Desse conjunto de comentários pode-se concluir que os ábacos encontrados em (B-12) e (B-59) podem ser usados para o cálculo de pontes de duas vigas unicelulares desde que se corrija os esforços solicitantes transversais.*



### 3. CONCLUSÕES

Terminado este trabalho, pode-se reunir algumas conclusões que, seja do ponto de vista didático, seja do prático, terão sua utilidade.

Ao longo do estudo das seções unicelulares, foi possível completar a analogia entre a Distorção de Perfil e a Viga sobre Apoio Elástico, através de conveniente definição do momento de inércia à distorção  $J_{\omega}$  (ver equação (1.26)).

Essa definição, completamente análoga à dada na Teoria da Flexão ou da Flexo-Torção, associada à completa separação das contribuições da Viga e do Apoio Elástico (Estrutura Plissada e Quadro, respectivamente), vem tornar mais clara a apresentação do fenômeno físico da Distorção de Perfil.

Através dos exemplos, mostrou-se como projetar uma ponte celular usando o AVAE, tendo-se chamado a atenção não só para a flexão transversal e as tensões normais, mas também para as tensões tangenciais.

Com respeito às transversinas, esses exemplos mostram também que sua má disposição pode não levar às vantagens desejadas, além de ter efeitos nocivos.

A análise elástica foi apresentada sobretudo para a verificação de Estados Limites de Utilização, isto é, da fissuração, das flechas, etc; mas pode ser estendida à verificação de Estados Limites Últimos.

O uso do resultado elástico para o dimensionamento na ruptura é razoável, uma vez que, respeitando o Teorema Estático, pode ser adotado como configuração de ruína. A acomodação plástica necessária para isso não é conhecida, não se podendo garantir que seja admissível. A experiência mostra, entretanto, que ela tem sido sempre pequena e aceitável.

Trabalhos experimentais sobre modelos de concreto ou equivalente são da maior importância para o esclarecimento dessas dúvidas. Algum trabalho já foi feito nesse sentido, como, por exemplo, (B-67).

A extensão desses resultados elásticos às obras curvas e esconsas já foi feita (ver (B-5), (B-6), (B-22), (B-25)), mas há ainda o que desenvolver; por exemplo, programa para computador baseado nas idéias desta Dissertação, isto é, algo semelhante ao "Nodal Section Method" proposto em (B-54).

A propósito das pontes de duas vigas ligadas pela laje superior, foi desenvolvida solução aproximada que considera toda a deformabilidade das células, inclusive a distorção.

Os exemplos desenvolvidos mostraram, entretanto, que, nos casos normais, essa deformabilidade não altera de forma importante a capacidade de distribuição transversal da estrutura.

Nesse caso, onde se tem uma proporção adequada de peças, ela pode ser desprezada, tendo-se sugerido apenas alguma correção no cálculo das flexões transversais máximas.

Nos casos excepcionais, de células muito flexíveis e laje de ligação rígida, ela pode ser importante, e a utilização da solução apresentada, aconselhável.

Novamente, tanto a extensão da solução às pontes curvas e esconsas quanto a sua verificação em modelos de laboratório constituem trabalhos importantes. Ressalte-se aqui a importância da verificação dos efeitos da fissuração sobre a rigidez à torção das vigas e, por consequência, sobre a capacidade de distribuição transversal da estrutura.

## BIBLIOGRAFIA

- (B-1) SWANN, R. A.  
"A Feature Survey of Concrete Box Spine-Beam Bridges"  
Technical Report, Cement and Concrete Association - C&CA, London,  
June, 1972.
- (B-2) GUYON, M. Y.  
"Problèmes Relatifs à la Torsion et à la Continuité Transversale  
dans la Construction des Ponts en Caissons"  
Publication ABEM, Bruxelles, Bulletin nº 41, 1969.
- (B-3) LEONHARDT, F., e MONNIG, E.  
"Construções de Concreto"  
Editora Interciência Ltda., Rio de Janeiro, 1977, vol. 6.
- (B-4) MATHIVAT, J.  
"Procédés de Construction"  
Centre de Hautes Études de la Construction - CHEC, Paris, 1978,  
vol. 1, 2, 3.
- (B-5) BORGES, L. A.  
"Vigas de Ponte em Seção Celular"  
em preparação.
- (B-6) PIMENTA, P. M.  
"Seções Celulares de Pontes em Concreto Protendido"  
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1978.
- (B-7) GUYON, Y.  
"Béton Précontraint"  
CHEC, Paris, vol. 1, 1966; vol. 2, 1968.
- (B-8) KUPFER, H.  
"Kastenträger mit elastisch ausgesteiften Querschnitt unter Linien  
und Einzellasten"  
Stahlbetonbau, Festschrift Rüsck, München, W. Ernst & Sohn, pp. 251-263.
- (B-9) STIGLAT, K, e WIPPEL, H.  
"Platten"  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- (B-10) BRENDEL, G.  
"Die mitwirkende Plattenbreite nach Theorie und Versuch"  
Beton und Stahlbetonbau, Heft 8, 1960, pp. 177.
- (B-11) BETON-KALENDER 1974  
"Richtlinien für die Bemessung und Ausführung massiver Brücken"  
Fassung August 1973, pp. 1284.

- (B-12) BORGES, L. A.  
"Superestrutura de Pontes em Duas Vigas sem Transversinas Intermediárias"  
Maubertec Engenharia e Projetos Ltda., São Paulo, 1977.
- (B-13) O'CONNOR, C.  
"Pontes — Superestruturas"  
Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1975, vol. 1 e 2.
- (B-14) KOLLBRUNNER, C. F., e BASLER, K.  
"Torsion in Structures"  
Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- (B-15) TIMOSHENKO, S. P., e GOODIER, J. N.  
"Theory of Elasticity"  
McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1970.
- (B-16) ZAGOTTIS, D.  
"Torção Uniforme"  
Apostila do Curso de Pontes e Grandes Estruturas, Vol. 1, EPUSP, 1976.
- (B-17) BORGES, L. A.  
"Dimensionamento de Peças de Concreto Armado com Solicitações de Torção"  
Escola de Engenharia de Lins, 1973.
- (B-18) STEINLE, A.  
"Torsion und Profilverformung. Berechnung eines in Feldmitte durch ein Torsionsmoment belasteten Trägers, mit einem verformbaren biegesteifen Recheckastenprofil mit auskragenden Gurten"  
Dissertation, Stuttgart, 1967.
- (B-19) STEINLE, A.  
"Torsion und Profilverformung beim einzelligen Kastenträger"  
Beton und Stahlbeton, Heft 9, 1970, pp. 215-222  
"Praktische Berechnung eines durch Verkehlasten unsymmetrisch belasteten Kastenträgers am Beispiel der Henschbachtalbrücke"  
Heft 10, 1970, pp. 249-253  
"Zuschriften"  
Heft 6, 1972, pp. 143-144.
- (B-20) WRIGHT, R. N., ABDEL-SAMAD, S. R., e ROBINSON, A. R.  
"BEF Analogy for Analysis of Box-Girders"  
Journal of the Structural Division, Proc. of the American Society of Civil Engineers - ASCE, ST7, July, 1969, pp. 1719-1943.
- (B-21) WRIGHT, R. N.  
"Design of Box Girders of Deformable Cross Section"  
Highway Research Record Bridges, No. 295, Washington, D.C., 1969.

- (B-22) DABROWSKI, R.  
"Curved Thin-Walled Girders"  
Translation No. 144, C & CA Library, London, 1972.
- (B-23) DABROWSKI, R.  
"Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil"  
Der Bauingenieur, 40, Heft 11, 1965, pp. 444-449.
- (B-24) KRISTER, V.  
"Theory and Research on Thinwalled Prestressed Concrete Beams"  
Congresso da Federation Internationale de la Précontrainte - FIP, Praga, 1970.
- (B-25) KRISTER, V.  
"Irregular Supports and Skew Diaphragms of Box Girders"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST5, May, 1975, pp. 917-931.
- (B-26) KRISTER, V.  
"Tapered Box Girders of Deformable Cross Section"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST8, August, 1970, pp. 1761-1797.
- (B-27) MYERS, D. E., e COOPER, P. B.  
"Box Girders Model Studies"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST12, December, 1969, pp. 2845-2861.
- (B-28) HEINS, C. P., BONAKDARDORER, B., e BELL, L. C.  
"Multicell Curved Girder Model Studies"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST4, April, 1972, pp. 831-843.
- (B-29) LANGENDONCK, T. VAN  
"Resistência dos Materiais - Deformações II"  
Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1968.
- (B-30) BENSCOTER, S. U.  
"A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams"  
Journal of Applied Mechanics, March, 1954, pp. 25-34.
- (B-31) HEILIG, R.  
"Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform"  
Der Stahlbau, Heft 11, 1961, pp. 333-350.
- (B-32) KOLLBRUNNER, C. F., e HAJDIN, B.  
"Dünnwandige Stäbe"  
Springer Verlag, Berlin, Band 1 - 1972; Band 2 - 1975.

- (B-33) FEODOSSIEV, V.  
"Resistance des Matériaux"  
Editions Mir, Moscou, 1976.
- (B-34) COIN, A.  
"Plaques et Coques"  
CHEC, Paris, 1975.
- (B-35) KNITTEL, G.  
"Zur Berechnung der dünnwandigen Kastenträgers mit gleichbeibenden  
symmetrischen Querschnitt"  
Beton und Stahlbetonbau, Heft 9, 1965.
- (B-36) LIPPOTH, W.  
"Zur Beanspruchung mehrzellige Hohlkastenquerschnitte quer zur  
Längsachse aus Umlenkkraften der Längsvorspannung"  
Beton und Stahlbetonbau, Heft 12, 1970, pp. 279-285.
- (B-37) TUNG, D. H. H.  
"Torsional Analysis of Single Thinwalled Trapezoidal Concrete  
Box-Girder Bridges"  
First Symposium in Concrete Bridge Design, ACI-Publication, SP 23,  
paper SP-23-12, Detroit, 1969.
- (B-38) MROTZEK, M.  
"Berechnung von Hohlkastenträgern ohne Querschotte"  
Beton und Stahlbetonbau, Heft 12, 1971, pp. 281-285.
- (B-39) ZAGOTTIS, D.  
"Seções Celulares"  
Anotações de aula do curso de Pontes e Grandes Estruturas, EPUSP, 1975.
- (B-40) LIPPOTH, W.  
"Berechnungs methoden Massivbrücken"  
Universität Stuttgart, Institut für Massivbau, 1979.
- (B-41) VLASSOV, B. Z.  
"Pièces Longues en Voiles Mincees"  
Editions Eyrolles, Paris, 1962.
- (B-42) STUCCHI, F.  
"Análise Elástica de Vigas Retas de Seção Unicelular, em Concreto  
Protendido, sem Transversinas Intermediárias"  
Seminário apresentado à EPUSP, 1978.
- (B-43) HETÉNYI, M.  
"Beams on Elastic Foundations"  
The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1976.

- (B-44) OLEINIK, J. C., e HEINS JR., C. P.  
"Diaphragms for Curved Box Beam Bridges"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST10, Oct., 1975, pp. 2161-2178.
- (B-45) RUSCH, H.  
"Tabelas para o Cálculo de Lajes de Ponte"  
DLP, EPUSP, São Paulo, 1975.
- (B-46) HOMBERG, H., e ROPERS, W.  
"Fahbahnplatten mit veränderlich Dicke"  
Springer-Verlag, Berlin, 1965, Band I und II.
- (B-47) PUCHER, A.  
"Einflussfelder elastischer Platten"  
Springer-Verlag, Wien, 1970.
- (B-48) MAISEL, B. I., ROWE, R. E., e SWANN, R. A.  
"Concrete Box Girder Bridges"  
The Structural Engineer, No. 10, Vol. 51, Oct., 1973, pp. 363-376.
- (B-49) GHALI, A.  
"Le Calcul des Tabliers de Ponts par des Méthodes Numériques"  
Annales de l'Institut Technique du Batiment et des  
Travaux Publics - ITBTP, TMC/145, Dec., 1971.
- (B-50) CHEUNG, Y.  
"Folded Plate Structures by Finite Strip Method"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST12, Dec., 1969, pp. 2963-2979.
- (B-51) ABDEL-SAMAD, S. R., WRIGHT, R. N., e ROBINSON, A. R.  
"Analysis of Box-Girders with Diaphragms"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST10, Oct., 1968, pp. 2231-2256.
- (B-52) BAZANT, Z. P.  
"Pièces Longues à Voiles Epais et Calcul des Poutres à Section  
Déformable"  
Annales des Ponts et Chaussées, 1968-III, pp. 155-169.
- (B-53) SCORDELIS, A. C.  
"Analytical Solutions for Box-Girder Bridges; Developments in  
Bridge Design and Construction"  
Rockey, Bannister and Evans, Editors, London, 1979, pp. 200-216.
- (B-54) ROCKEY, K. C., and EVANS, H. R.  
"The Nodal Sections Method for the Analysis of Box Girders"  
University College, Cardiff, Technical Report, 1974.



- (B-55) DE-FRIES-SKENE, A., e SCORDELIS, A. C.  
"Direct Stiffness Solution for Folded Plates"  
Journal of the Structural Division, ASCE, ST4, August, 1964, pp. 15-47.
- (B-56) RICHMOND, B.  
"Twisting of Thin-Walled Box Girders"  
The Institution of Civil Engineers, Proc. 33, April, 1966, pp. 659-675.
- (B-57) RICHMOND, B.  
"Trapezoidal Boxes with Continuous Diaphragms"  
Institution of Civil Engineers; Proc. 43(8), August, 1969, pp. 641-650.
- (B-58) CUSENS, A. R., e PAMA, R. P.  
"Bridge Deck Analysis"  
John Wiley & Sons, London, 1975.
- (B-59) BIEGER, K. W.  
"Vorberechnung zweistegiger Plattenbalken"  
"Beton un Stahlbetonbau, Heft 8, 1962, pp. 188-195.
- (B-60) FAUCHART, J.  
"Exemples d'Etude de Tabliers de Ponts Courants en Béton Précontraint  
Coulés sur Cintre"  
Annales de l'ITBTP, TMC-94, Mai, 1969.
- (B-61) FAUCHART, J.  
"Tablier à Poutres-Caisson non Entretoisées"  
CHEC, Paris, 1970.
- (B-62) FAUCHART, J.  
"Béton Précontraint"  
CHEC, Paris, 1970.
- (B-63) KLIMINSKI, S.  
"Structures en Poutres Caissons Reliées par des Dalles"  
Association Internationale de Ponts et Charpentes - AIPC, Mémoires,  
35-I, Zurich, 1975, pp. 115-148.
- (B-64) MASON, J.  
"Pontes em Concreto Armado e Protendido"  
Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1977.
- (B-65) COSTE, J. F., ARSENE-HENRY, L., e MATHIVAT, J.  
"Boulevard Péripherique - Francissement de la Seine - Pont Aval"  
"Annales de l'ITBTP, TP/122, Oct. 1968.

- (B-66) PFEIL, W.  
"Ponte Presidente Costa e Silva (Rio-Niterói)"  
Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1975.
- (B-67) SPENCE, R. J. S., e MORLEY, C. T.  
"The Strength of Single Cell Concrete Box-Girders of Deformable  
Cross-Section"  
Proc. Inst. of Civil Engineers, Part 2, 59, Dec., 1975, pp. 743-761.
- (B-68) ROBINSON, J. R.  
"Béton Armé"  
Tome I, CHEC, 1976.
- (B-69) LACROIX, R.  
"Le Projet de Béton Précontraint"  
Eyrolles, Paris, 1979.
- (B-70) KRISTEK, W.  
"Theory of Box Girders"  
John Wiley & Sons, Praga, 1979.
- (B-71) TERAMOTO, R.  
"Linhas de Influência para Vigas Finitas sobre Apoio Elástico com  
Diversas Condições de Extremidade"  
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1981.
- (B-72) "Tables et Graphiques pour le Calcul des Poutres à Grossets"  
CHEC, Paris, 1978.