

DANIEL RIBEIRO GOMES

Proposta de circuito equivalente para motores  
lineares de indução com secundário ranhurado

Versão Corrigida

Tese apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para  
obtenção do título de Doutor em  
Ciências

São Paulo  
2023

Nome: GOMES, Daniel Ribeiro

Título: Proposta de circuito equivalente para motores lineares de indução com secundário ranhurado

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ivan Eduardo Chabu Instituição: EP - USP  
Julgamento: Aprovado Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Júlio Carlos Teixeira Instituição: UFABC - Externo  
Julgamento: Aprovado Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Luiz Lebensztajn Instituição: EP - USP  
Julgamento: Aprovado Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Richard Magdalena Stephan Instituição: UFRJ - Externo  
Julgamento: Aprovado Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Nelson Sadowski Instituição: UFSC - Externo  
Julgamento: Aprovado Assinatura: \_\_\_\_\_

DANIEL RIBEIRO GOMES

# Proposta de circuito equivalente para motores lineares de indução com secundário ranhurado

Versão Corrigida

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências

Área de Concentração: Sistemas de Potência

Orientador: Prof. Dr. Ivan Eduardo Chabu

São Paulo  
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

### Catologação-na-publicação

Gomes, Daniel Ribeiro

Proposta de circuito equivalente para motores lineares de indução com secundário ranhurado / D. R. Gomes -- versão corr. -- São Paulo, 2023.  
124 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.  
Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1.Máquinas elétricas de corrente alternada 2.Máquinas lineares  
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de  
Engenharia de Energia e Automação Elétricas II.t.

Aos meus pais, os quais me inculcaram os valores necessários para a longa caminhada até o presente momento.

## AGRADECIMENTOS

Ao Deus Trino, pela vocação e capacitação, bem como pela providência ao longo do tempo.

À minha esposa Suzana, pelo amor, companheirismo, apoio e compreensão.

Ao Prof. Ivan Chabu, não somente orientador, mas companheiro de profissão, pela supervisão, indiscutível paciência e envolvimento nos momentos necessários.

À Equacional Elétrica e Mecânica, pelo espaço, maquinário cedido e financiamento do protótipo, sem os quais a parte experimental deste trabalho seria impossível.

## RESUMO

GOMES, D. R. **Proposta de circuito equivalente para motores lineares de indução com secundário ranhurado**. 2023. 123 f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Motores de indução lineares de primário único geralmente aparecem em sistemas de transporte de levitação magnética. Desde o princípio de tais desenvolvimentos, os efeitos de borda representam um dos grandes desafios a serem superados na modelagem analítica. Por quase quatro décadas, a fim de simplificar o tratamento matemático dos efeitos de borda, a maioria dos modelos analíticos não considerou o fluxo de dispersão secundário adequadamente. Embora concisas e precisas na maioria dos casos, tais abordagens apresentam deficiências em secundários ranhurados. Este trabalho apresenta um circuito analítico equivalente que considera a reatância secundária para ambos os efeitos de borda, ou seja, lado de entrada e lado de saída. A abordagem proposta utiliza um circuito RLC análogo que descreve o comportamento das ondas magnetizante (saída) e desmagnetizante (entrada), bem como fatores de correção adaptados para efeitos transversais. Por meio de um protótipo de 8 pólos e força nominal de 175 N, as forças de tração e verticais medidas validam notavelmente o modelo para frequências iguais ou superiores a 60 Hz, dependendo dos valores das razões entre parâmetros secundários. O protótipo ainda conta com um secundário contínuo de alumínio, o qual foi testado para fins de comparação dos modelos.

Palavras-chave: Circuito equivalente, motor de indução linear de primário único, fluxo de dispersão em secundário ranhurado, efeitos de borda longitudinais.

## ABSTRACT

GOMES, D. R. **A novel analytical equivalent circuit for single-sided linear induction motors considering secondary reactance.** 2023. 123 f. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Single-sided linear induction motors usually appear in magnetic levitation systems of transportation. Since the beginning of such developments, edge effects represent one of the great challenges to overcome in analytical modelling. For almost four decades, in order to simplify the mathematical treatment of border effects, most analytical models have not considered the secondary leakage flux properly. Although concise and accurate in most cases, such approaches have deficiencies in slotted secondaries. This paper presents an analytical equivalent circuit that considers the secondary reactance for both edge effects, i.e., entry and exit sides. The proposed approach uses an analogical RLC circuit which describes the behavior of magnetizing (exit) and demagnetizing (entry) waves, as well as adapted correction factors for transverse effects. By means of an 8 pole / 175 N prototype, the measured thrust and vertical forces remarkably validate the model for frequencies equal or higher than 60Hz, depending on the values of secondary parameters. The prototype still has a continuous aluminum secondary, which was tested for model comparison purposes.

Keywords: Equivalent circuit, single-sided linear induction motor, slotted secondary leakage flux, longitudinal end effects.

## Lista de Símbolos

$C_{ent}, C_{saída}$	Capacitâncias análogas para simulação do comportamento das ondas de força magnetomotriz de reação nas bordas de entrada e de saída [F]
$d$	Espessura da lâmina condutora secundária acima do núcleo magnético (secundário maciço) ou altura da barra condutora (secundário ranhurado) [m]
$D, D'$	Comprimento longitudinal do primário (total e equivalente) [m]
$f_1$	Frequência do primário [Hz]
$F_{tr}$	Força de tração [N]
$F_v$	Força vertical total [N]
$F_{v_{atr}}$	Componente de atração da força vertical [N]
$F_{v_{rep}}$	Componente de repulsão da força vertical [N]
$h_{12}$	Distância entre os centros dos condutores primários e secundários [m]
$h_{ov}$	Comprimento lateral da saliência da lâmina secundária (secundário maciço) ou da barra de curto circuito (secundário ranhurado) [m]
$I'_2$	Componente secundária de escorregamento referida ao primário [A]
$I_m$	Corrente de magnetização primária [A]
$I'_{2m}$	Componente de reação resultante secundária aos efeitos longitudinais, referida ao primário, valor eficaz [A]
$i'_{2m_{ent}}, i'_{2m_{saída}}$	Componentes de reação secundária ao efeito longitudinal de entrada e de saída, respectivamente, referidas ao primário, valores instantâneos [A]
$k, k'$	Parâmetros adimensionais assumidos para a resolução dos transitórios nas bordas de entrada e saída
$k_{e1}$	Fator de enrolamento do primário

$k_m, k'_m, k''_m$	Coeficientes de correção da indutância de magnetização para os casos de super, sub e crítico amortecimento, respectivamente
$k_p, k'_p, k''_p$	Coeficientes de correção das perdas parasitas totais para os casos de super, sub e crítico amortecimento, respectivamente
$k_v, k'_v, k''_v$	Coeficientes de correção da força vertical para os casos de super, sub e crítico amortecimento, respectivamente
$k_r$	Constante de proporcionalidade da componente de repulsão da força vertical
$k_{RN_h}$	Fator simplificado de correção de Russell e Norsworthy para o efeito transversal de borda, harmônica h
$L_1, L'_2$	Indutâncias de dispersão primária e secundária
$L_m$	Indutância de magnetização
$\ell_g$	Comprimento do entreferro [m]
$\ell_{z1}, \ell_{z2}$	Larguras do primário e do secundário [m]
$m_1$	Nº de fases do primário
$N_1$	Nº de espiras por fase do primário
$p$	Nº de pares de polos
$P_1$	Potência ativa absorvida no primário [W]
$q_1$	Nº de ranhuras por polo e por fase do primário
$Q, Q_\ell$	Comprimentos normalizados do primário nas bases $T_2$ e $T_{2\ell}$ , respectivamente [pu]
$R_1, R_2$	Resistências ôhmicas por fase dos enrolamentos primário e secundário [ $\Omega/f$ ]
$s$	Escorregamento [pu]

$t_{ov}$	<i>Espessura total da lâmina condutora secundária (secundário maciço) ou altura total da barra condutora soldada à de curto-circuito (secundário ranhurado) [m]</i>
$T_2$	<i>Constante de tempo de decaimento da onda desmagnetizante na borda de entrada [s]</i>
$T_{2\ell}$	<i>Constante de tempo de subida da onda desmagnetizante na borda de entrada e de subida e decaimento da onda magnetizante na borda de saída [s]</i>
$T_v$	<i>Tempo necessário para se percorrer o comprimento do primário [s]</i>
$v$	<i>Velocidade do motor linear [m/s]</i>
$V_1$	<i>Tensão de linha do primário [V]</i>
$v_s$	<i>Velocidade síncrona da onda trafegante no entreferro [m/s]</i>
$x$	<i>Tempo normalizado [pu]</i>
$y_1$	<i>Abertura de passo do enrolamento primário</i>
$Z_1, Z'_1$	<i>Nº de ranhuras do primário (total e equivalente)</i>
$Z_2, Z'_2$	<i>Nº de ranhuras do secundário sob influência do primário (total e equivalente)</i>
$\tau_p$	<i>Passo polar [m]</i>

## Lista de Figuras

Figura 1 - Telégrafo de impressão de Wheatstone, 1841.....	21
Figura 2 - Patente de Zehden, com seu primário duplo .....	22
Figura 3 - Motores lineares de primários (a) curto, (b) longo e (c) duplo.....	22
Figura 4 - (a) Pista do “Electropult” e (b) seu primário.....	23
Figura 5 - Pista experimental em Manchester, década de 50.....	24
Figura 6 - O LIMRV da Garrett Co., capaz de atingir até 400 km/h .....	25
Figura 7 - “Atividade” mundial em máquinas elétricas lineares, em função do tempo .....	25
Figura 8 - “Atividade” em números mais recentes (IEEE XPLORE, 2023).....	26
Figura 9 - Transrapid 05 (a) e o Birmingham Maglev (b) .....	27
Figura 10 - Transrapid 08 em Emsland (a) e o sistema M-Bahn (b).....	27
Figura 11 - Linha Linimo com tecnologia HSST (a) e a pista de testes em Yamanashi (b).....	28
Figura 12 - Maglev Cobra na pista de 200 m, UFRJ.....	29
Figura 13 - Diferença entre secundário maciço, “ladder-slit” e ranhurados .....	31
Figura 14 - Circuito equivalente do motor linear de indução com correções no ramo magnetizante.....	34
Figura 15 - Circuito equivalente considerando o efeito de borda longitudinal pela impedância $Z_e$ .....	34
Figura 16 - Comportamento genérico da reação secundária ao longo do tempo....	41
Figura 17 - Comportamento da reação secundária ao se desprezar $L'_2$ .....	43
Figura 18 - Representação do efeito de borda longitudinal desmagnetizante no circuito equivalente .....	44
Figura 19 - Circuito equivalente para secundário maciço .....	45
Figura 20 - Efeito de preenchimento parcial de ranhuras em motor de 6 polos .....	47

Figura 21 – Circuito análogo auxiliar que corresponde à reação secundária nos efeitos longitudinais.....	50
Figura 22 – Comparação entre reações longitudinais, variando-se a dispersão secundária.....	50
Figura 23 – Representação dos efeitos longitudinais de borda no circuito equivalente para secundário ranhurado .....	57
Figura 24 – Circuito equivalente para secundário ranhurado (superamortecido: $k_p$ e $k_m$ ; subamortecido: $k'_p$ e $k'_m$ ; criticamente amortecido: $k''_p$ e $k''_m$ ) .....	60
Figura 25 – Vista frontal do motor linear de indução com secundário maciço .....	60
Figura 26 – Vista frontal do motor linear de indução com secundário ranhurados	61
Figura 27 – Número de ranhuras e comprimento referentes ao preenchimento parcial de ranhuras.....	62
Figura 28 – Sensibilidade da Força de Tração em relação à frequência de alimentação, com indutância secundária constante .....	65
Figura 29 – Sensibilidade da Força Vertical de Atração em relação à frequência de alimentação, com indutância secundária constante .....	66
Figura 30 – Sensibilidade da Força de Tração em relação à indutância secundária, com frequência constante .....	67
Figura 31 – Sensibilidade da força de atração em relação à indutância secundária, com frequência constante .....	67
Figura 32 – Desenho de conjunto do protótipo fabricado.....	70
Figura 33 – Primário no estágio de montagem do núcleo magnético.....	70
Figura 34 – Cubo do secundário duplo .....	71
Figura 35 – Lâmina do núcleo secundário ranhurado .....	71
Figura 36 – Secundário ranhurado no estágio da montagem da gaiola em cobre....	72
Figura 37 – Primário no estágio de bobinamento .....	72
Figura 38 – Bancada de testes do protótipo.....	74

Figura 39 - Comparação da força de tração através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,4 mm (efetivo)	76
Figura 40 - Comparação da força vertical através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,4 mm (efetivo)	76
Figura 41 - Comparação da força de tração através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso superamortecido. Entreferro médio de 2,23 mm (efetivo)	77
Figura 42 - Comparação da força vertical através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso superamortecido. Entreferro médio de 2,23 mm (efetivo)	77
Figura 43 - Detalhe do secundário maciço	78
Figura 44 - Circuito do ensaio em vazio	79
Figura 45 - Circuito do ensaio com secundário bloqueado	79
Figura 46 - Valores para o ensaio em vazio a 30 Hz (secundário maciço)	80
Figura 47 - Valores para o ensaio com secundário bloqueado a 30 Hz (secundário maciço)	81
Figura 48 - Comparação da força de tração através da variação de frequência para secundário maciço, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,01 mm	82
Figura 49 - Comparação da força vertical através da variação de frequência para secundário maciço, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,01 mm	83
Figura 50 - Ondas de FMM de reação secundária para alguns dos casos estudados. O valor de base é a FMM de magnetização primária.	83
Figura 51 - Condições de borda para a onda de fluxo na coroa	95
Figura 52 - Seção transversal do motor linear de indução utilizado como exemplo	97
Figura 53 - (a) Primário e (b) secundário do motor linear	97
Figura 54 - Densidade de fluxo na coroa em 16 instantes de tempo, conforme a aproximação analítica	98

Figura 55 – Densidade de fluxo na coroa secundária de acordo com a aproximação analítica.....	99
Figura 56 – Simulações magnetostáticas espaçadas de 30° elétricos com relação às correntes primárias.....	100
Figura 57 – Esquema do arranjo experimental, com o primário abaixo e o secundário acima, sem a gaiola .....	101
Figura 58 – Comparação dos resultados analíticos e experimentais, com as indicações dos pontos A, B e C das simulações numéricas .....	101
Figura 59 – Desenho das bobinas e do arranjo de condutores na ranhura (medidas em mm).....	105
Figura 60 – Vista em corte dos secundários (à esquerda, o ranhurado; à direita, o maciço).....	106
Figura 61 – Ranhuras do secundário ranhurado sob influência do primário .....	106
Figura 62 – Perfil das ranhuras do primário (esquerda) e secundário ranhurado (direita).....	110
Figura 63 – Dimensões referenciadas nas expressões de dispersão da ranhura .....	111
Figura 64 – Dimensões para dispersão de cabeça de bobina.....	112

## Lista de Tabelas

Tabela 1 - Parâmetros do motor linear do artigo de referência.....	65
Tabela 2 - Dados nominais ao longo da frequência e construtivos do protótipo de teste (secundário ranhurado) .....	73
Tabela 3 - Indutâncias calculadas de acordo com a variação do entreferro .....	75
Tabela 4 - Ensaios de vazio e secundário bloqueado (maciço) .....	80
Tabela 5 - Dados nominais para o motor, considerando entreferro de 12 mm .....	98
Tabela 6 - Fatores de permeância para máquinas assíncronas.....	112

## Sumário

<b>1</b>	<b><i>Objetivo e Justificativa</i></b> .....	<b>19</b>
<b>2</b>	<b><i>Introdução – Breve Histórico dos Motores Lineares</i></b> .....	<b>21</b>
<b>3</b>	<b><i>Revisão Bibliográfica Resumida</i></b> .....	<b>32</b>
<b>4</b>	<b><i>Modelo Existente Mais Utilizado e o Proposto</i></b> .....	<b>38</b>
4.1	<i>Efeitos de Borda</i> .....	39
4.2	<i>Modelo Existente Mais Utilizado</i> .....	40
4.2.1	<i>Efeitos Longitudinais</i> .....	40
4.2.2	<i>Efeitos Transversais</i> .....	47
4.2.3	<i>Preenchimento Parcial das Ranhuras</i> .....	47
4.2.4	<i>Forças Verticais</i> .....	48
4.3	<i>Modelo Proposto</i> .....	49
4.3.1	<i>Efeitos Longitudinais</i> .....	49
4.3.2	<i>Efeitos Transversais</i> .....	60
4.3.3	<i>Preenchimento Parcial das Ranhuras</i> .....	61
4.3.4	<i>Forças Verticais</i> .....	62
4.4	<i>Teste de Sensibilidade</i> .....	64
4.4.1	<i>Variação da Frequência</i> .....	65
4.4.2	<i>Variação da Dispersão Secundária</i> .....	66
<b>5</b>	<b><i>Testes Experimentais e Discussões</i></b> .....	<b>69</b>
5.1	<i>Fabricação</i> .....	69
5.2	<i>Levantamento das Curvas Características e Comparações (Secundário Ranhurado)</i> ....	75
5.3	<i>Levantamento das Curvas Características e Comparações (Secundário Maciço)</i> .....	78

<i>6 Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros.....</i>	<i>84</i>
<i>Referências.....</i>	<i>85</i>
<i>ANEXO A – Análise da Modulação da Densidade de Fluxo Magnético na Coroa do Motor Linear de Indução.....</i>	<i>93</i>
A.1 Abordagem Analítica.....	94
A.2 Aplicação em Caso Real.....	96
A.3 Comparação com Simulações e Medidas Experimentais.....	99
<i>ANEXO B – Cálculo dos Parâmetros do Protótipo Fabricado.....</i>	<i>103</i>
B.1 Resistências Ôhmicas .....	105
B.1.1. Primário .....	105
B.1.2. Secundário.....	105
B.1.2.1. RANHURADO.....	106
B.1.2.2. MACIÇO .....	107
B.2 Indutâncias.....	108
B.2.1. Magnetização.....	108
B.2.2. Dispersão no Primário e Secundário .....	108
B.2.2.1. Entreferro (Campo Harmônico) .....	108
B.2.2.2. Ranhura .....	109
B.2.2.3. Cabeça do Dente .....	111
B.2.2.4. Cabeça de Bobina .....	112
B.2.3. Dispersões Finais.....	113
<i>ANEXO C – Demonstração de Expressões.....</i>	<i>114</i>

## 1 Objetivo e Justificativa

Em uma frase, o principal objetivo é estabelecer um circuito equivalente para o motor linear de indução com o secundário ranhurado, mais abrangente do que o circuito para secundário maciço que se tem utilizado largamente na literatura conhecida.

Desde a primeira publicação de peso sobre motores lineares de indução (LAITHWAITE, 1957), seguiu-se intensa investigação sobre as forças normais e de tração nesse tipo de máquina (NASAR, 1969). A característica externa do motor linear de indução depende fortemente do comportamento da onda eletromagnética trafegante em seu entreferro, o que moveu a investigação científica também a concentrar esforços nos chamados efeitos de borda, decorrentes do inevitável circuito magnético aberto da referida configuração (LAITHWAITE, 1968).

Alguns esforços, dignos de nota, contribuíram para a mitigação, porém não eliminação, dos efeitos de borda, especialmente em aplicações de altas velocidades, onde tais efeitos aumentam apreciavelmente (YAMAMURA, 1972). Paralelamente, os modelos de circuitos equivalentes buscaram incorporar os efeitos de circuito magnético aberto por meio de fatores de correção (PAI, 1988). A partir daí alguns avanços se deram em modelos de parâmetros dinâmicos (ZHANG, 1993), otimização do enrolamento primário com vistas ao melhor desempenho de tração (HOFMANN, 2001) e circuitos equivalentes incluindo efeitos das ranhuras primárias parcialmente preenchidas (WORONOWICZ, 2014).

Há uma lacuna na bibliografia disponível, salvo melhor juízo. Todos os trabalhos citados abordaram a questão considerando um secundário sem ranhuras, ou formado inteiramente de material não ferroso ou constituído de lâmina não ferrosa, em geral alumínio, com uma coroa ferromagnética. Poucas publicações consideraram um secundário ranhurado na investigação, sendo algumas na análise

das forças normais e de tração na citada configuração (KOSEKI, 1993) e outras na relevância da resistência de contato existente na gaiola soldada (PARK, 2003). Particularmente em uma publicação sobre otimização de projeto considerando um secundário ranhurado, eventualmente denominado apenas de “ladder”, considerou um circuito para secundários maciços (RAVANJI, 2015).

No âmbito do conhecimento do autor, não há qualquer proposta de circuito equivalente que compreenda o efeito de dispersão secundária em ambos os efeitos de borda (entrada e saída).

Ao longo do presente trabalho, a expressão “secundário ranhurado” se referirá à estrutura ranhurada tradicional em forma de gaiola, e não ao secundário chamado “ladder-slit”, que consiste na placa condutora ranhurada, o qual ganhou atenção a partir da década de 90 (KOSEKI, 1992) (YAMAGUCHI, 1997).

Levando-se em conta que a configuração ranhurada aparece em um projeto nacional de destaque (SOTELO, 2013), (MATTOS, 2016), considera-se relevante tal avanço no modelamento.

Por fim, pretende-se também estabelecer um estudo comparativo entre as configurações de secundário comumente utilizadas em motores lineares de indução, além de discutir a validade da proposta de um teste em carga estático para motores lineares de indução.

## 2 Introdução – Breve Histórico dos Motores Lineares

O primeiro relato do uso de motores lineares data de 1841, quando o cientista inglês Charles Wheatstone patenteou o primeiro telégrafo de impressão de tipos. O primeiro motor linear tinha sua velocidade controlada por um reostato desenvolvido pelo próprio Wheatstone (ROBERTS, 2012). Os conceitos de primário e secundário, porém, nem sequer se nomeavam, e o funcionamento refletia o que se conhecia na época sobre motores de corrente contínua.

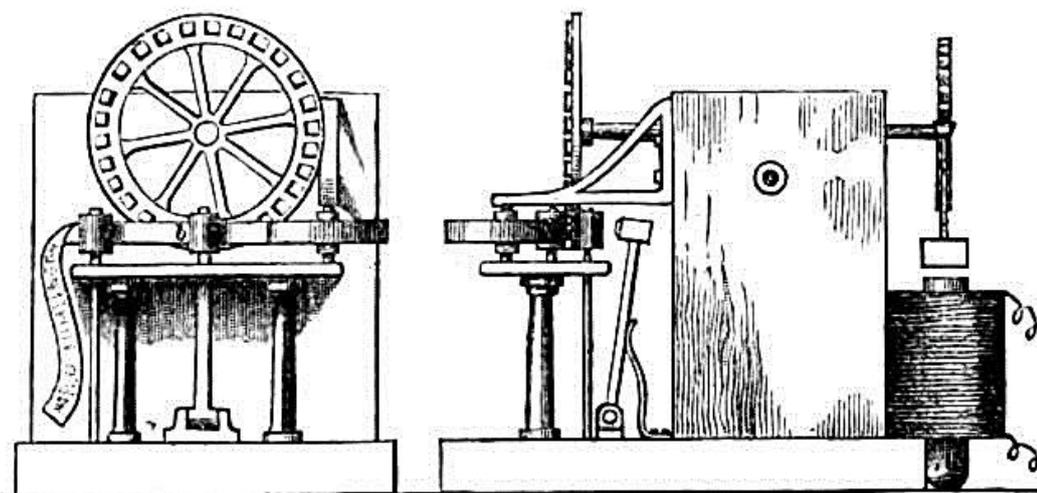


Figura 1 – Telégrafo de impressão de Wheatstone, 1841

Já a ideia de se utilizar motores lineares de indução para tração de trens remonta ao ano de 1905 (LAITHWAITE, 1969). Uma das propostas era utilizar um enrolamento primário como trilho. Percebeu-se que o custo resultaria proibitivo, de tal forma que se propôs seções curtas do primário espaçadas ao longo da via (WILSON, 1905). Outra proposta foi de um primário duplo montado no veículo, algo que, pode-se dizer, estava ao menos meio século à frente de seu tempo (ZEHN DEN, 1905). Os conceitos de primário e secundário, ainda que embrionários, estavam mais claros.

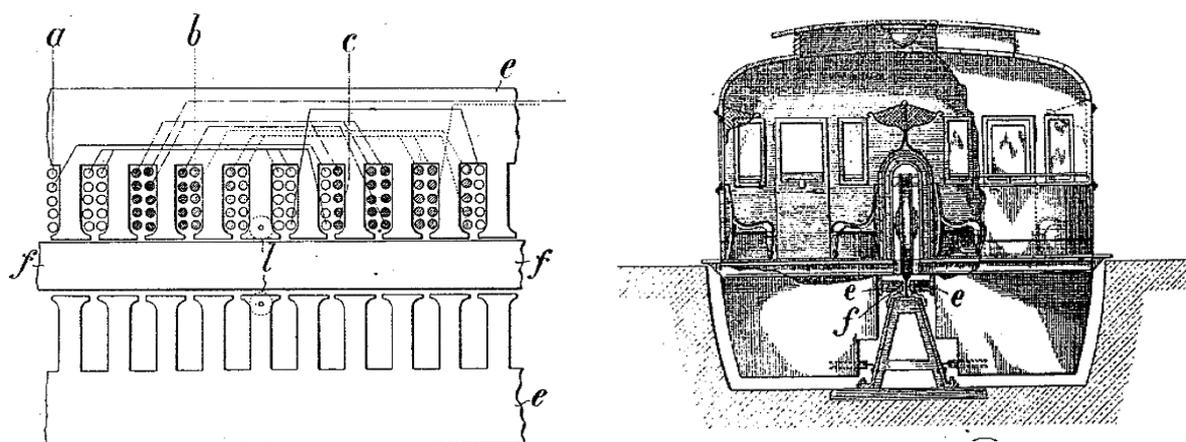


Figura 2 - Patente de Zehden, com seu primário duplo

Fonte: (ZEHDEN, 1905)

Como breve parêntese objetivando uma melhor contextualização do leitor, a Figura 3 apresenta motores lineares de primário curto, longo e duplo. O termo “primário” se refere ao núcleo bobinado com tensão aplicada, ao passo que o “secundário”, ao com tensão induzida. A expressão “back iron” refere-se a uma placa ferromagnética solidária a um secundário maciço, a qual pode existir ou não, dependendo do projeto.

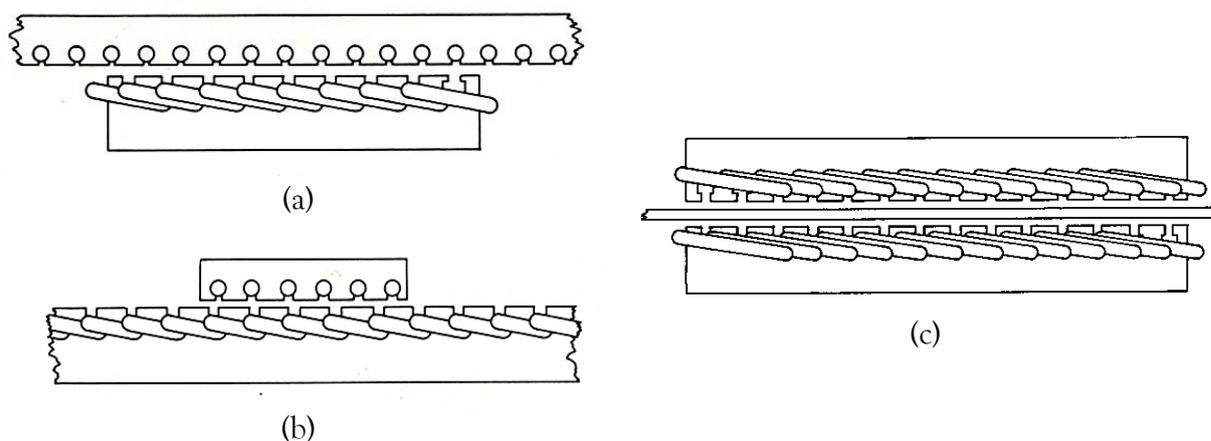
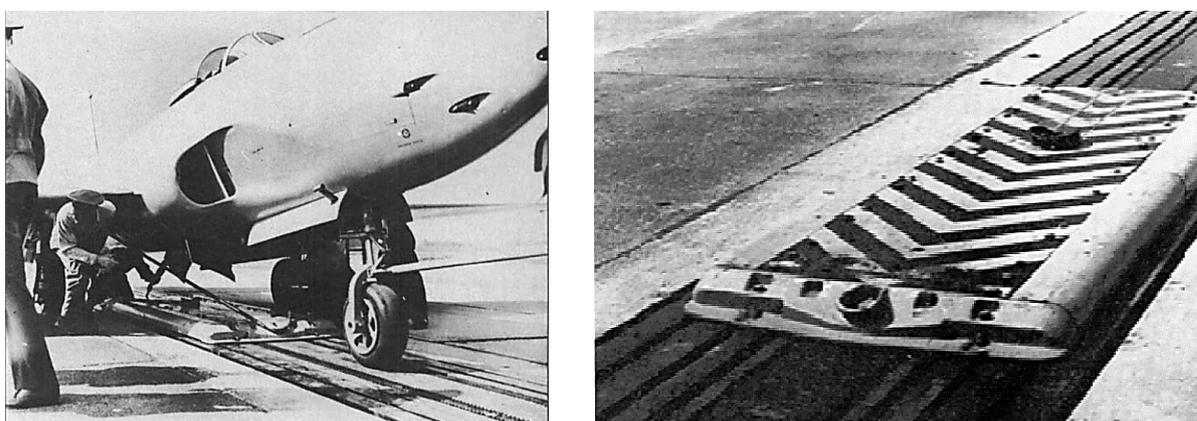


Figura 3 - Motores lineares de primários (a) curto, (b) longo e (c) duplo

Fonte: (LAITHWAITE, 1970)

O primeiro grande desenvolvimento de motores lineares, entretanto, foi sem dúvida o lançador de aviões “Electropult” da Westinghouse, fabricado em 1945 (WESTINGHOUSE, 1946). Nessa máquina, o enrolamento primário ficava no veículo, de tal forma que toda a porção energizada da máquina podia ser usada continuamente, às custas de contatos deslizantes e condutores contínuos ao longo da pista. A força de tração na partida atingia algo em torno de 75 kN e a máxima velocidade, 360 km/h. O projeto foi finalmente abandonado devido a seus altos custos.



(a)

(b)

Figura 4 – (a) Pista do “Electropult” e (b) seu primário

Fontes: (LAITHWAITE, 1986) e (COX, 2012)

Na década de 50, a Universidade de Manchester, através de um grupo liderado por Eric Laithwaite, retomou o estudo de secundários maciços e, em parceria com a British Railways, conduziu testes em uma pista de 90 m (Figura 4), onde a velocidade máxima atingida foi de aproximadamente 48 km/h e o fator de qualidade era por volta de 4. Conseqüentemente os efeitos transitórios de borda foram fortemente amortecidos (LAITHWAITE, 1965).

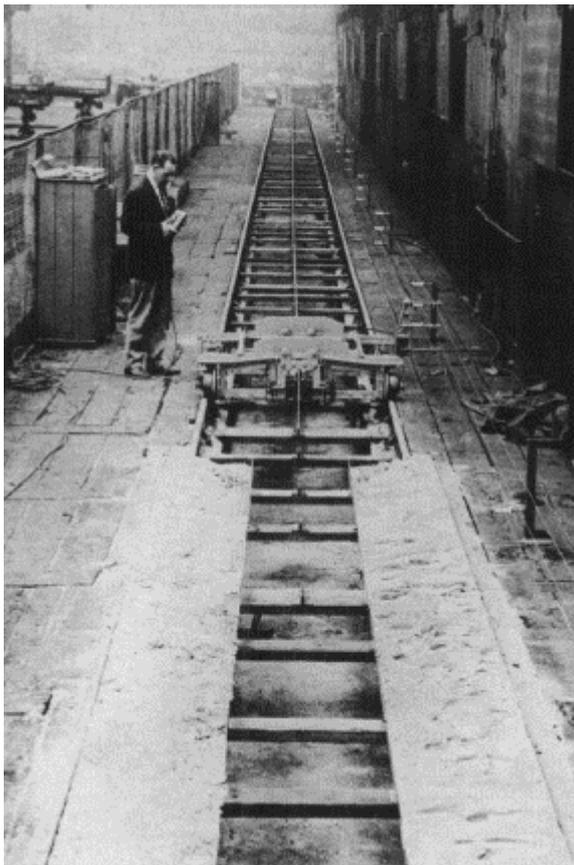


Figura 5 – Pista experimental em Manchester, década de 50

Fonte: (LAITHWAITE, 1986)

No início da década de 70, a Garrett Corporation construiu um protótipo de trem de alta velocidade propulsionado por um motor linear de indução, o LIMRV (“Linear Induction Motor Research Vehicle”). O projeto foi promovido pelo Departamento de Transportes dos Estados Unidos e rendeu avanços na pesquisa em motores lineares (LEE, 1979). O projeto acabou sendo deixado de lado por questões de segurança.



Figura 6 - O LIMRV da Garrett Co., capaz de atingir até 400 km/h

Fonte: (LEE, 1979)

O avanço das pesquisas em motores lineares foi notado pelo próprio Laithwaite como algo com crescimento exponencial (LAITHWAITE, 1975), conforme seu gráfico mostrado a seguir (Figura 7). A “atividade” foi considerada como número de artigos técnicos publicados por mês. Para simples comparação, a Figura 8 apresenta números mais recentes, ainda que por certo haja diferenças entre os portais consultados. Vê-se que houve, de fato, algum crescimento exponencial.

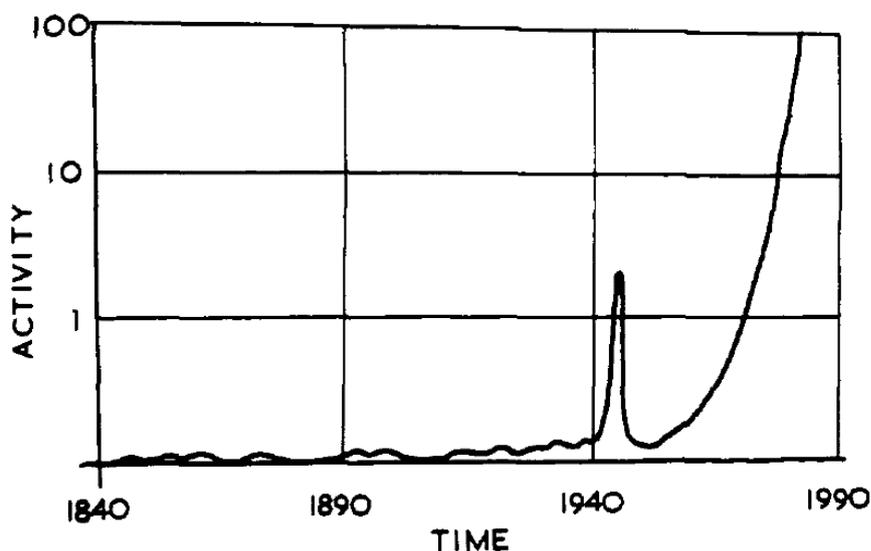
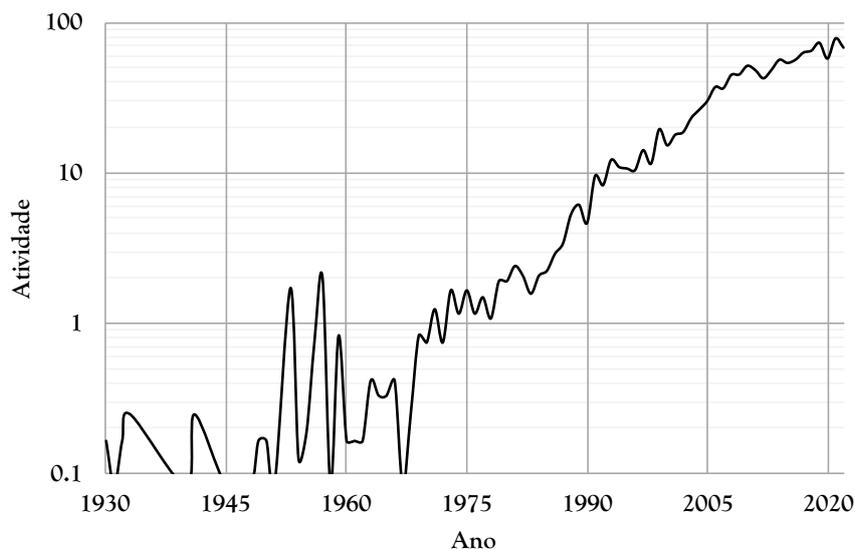


Figura 7 - “Atividade” mundial em máquinas elétricas lineares, em função do tempo

Fonte: (LAITHWAITE, 1975)



**Figura 8 – “Atividade” em números mais recentes**

Fonte: (IEEE XPLORE, 2023)

A partir daí muito esforço se direcionou ao uso do motor linear na tração elétrica associada à levitação magnética (maglev), podendo-se citar aqui o Transrapid 05, em Hamburgo, na Alemanha, primeiro trem com licença para transporte de passageiros utilizando tecnologia maglev. A tração era feita por um motor linear síncrono de estator longo, atingindo 90 km/h no trajeto de 900 m. O secundário era composto de ímãs permanentes na parte inferior do veículo (LEONHARD, 1978). Algum tempo depois, o primeiro sistema maglev comercial de fato foi o Birmingham Maglev, transportando passageiros entre a estação de trem e o aeroporto internacional da mesma cidade entre 1984 e 1995. Tratava-se de um trajeto de 625 metros, onde o carro atingia 48 km/h em uma altura de levitação equivalente a 15 mm (ALSCHER, 1984).



(a) (b)  
 Figura 9 – Transrapid 05 (a) e o Birmingham Maglev (b)

A mesma empresa Transrapid conduziu testes em Emsland no período de 1984 a 2011. O percurso de 31,8 km foi palco para testes dos trens Transrapid 06 (1983-1989), Transrapid 07 (1989-1999) e Transrapid 08 (1999-2006). Esse último ficou destruído após um acidente que envolveu a morte de 23 pessoas. A máxima velocidade de testes atingida foi de 450 km/h. A tração continuou sendo através de motor linear síncrono de estator longo (ALSCHER, 1984). O segundo sistema maglev comercial foi o M-Bahn (1989-1991), em Berlim, com um trajeto de 1,6 km e três estações. O sistema apareceu para preencher uma lacuna no transporte público devido ao muro de Berlim. A tração também foi feita por um motor linear síncrono de estator longo, sendo o secundário composto de ímãs permanentes. A velocidade atingida era de 50 km/h (YOSHIDA, 1987).



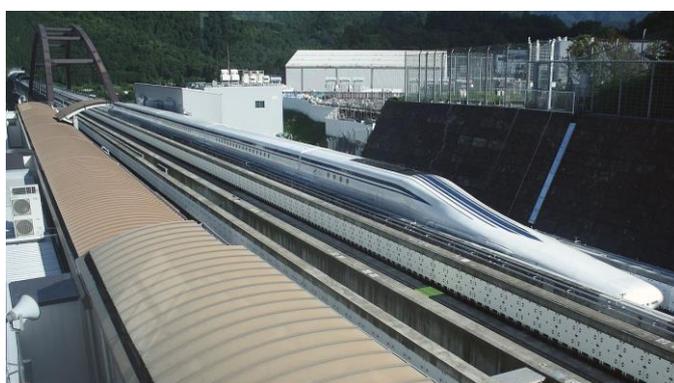
(a) (b)  
 Figura 10 – Transrapid 08 em Emsland (a) e o sistema M-Bahn (b)

A Transrapid também implementou uma linha na China, entre 2001 e 2004, o Xangai Transrapid. Trata-se da terceira linha comercial utilizando maglev no mundo e primeira a operar em alta velocidade. Apesar de operar com uma velocidade máxima de 431 km/h, atingiu 501 km/h em testes prévios à inauguração. A linha perfaz o trecho compreendido entre a estação Longyang Road e o aeroporto internacional de Xangai, com aproximadamente 30 km de extensão (LUGUANG, 2006).

No Japão, duas linhas independentes de desenvolvimento avançaram na área desde a década de 70. Uma foi a HSST (“High Speed Surface Transport”), tendo como principais acionistas a Japan Airlines e Nagoya Railroad Co. O motor de tração foi um linear de indução com estator curto simples. Logo no primeiro veículo, a velocidade atingida foi de 307,8 km/h (HICASA, 1980). Um produto dessa linha de pesquisa é a linha “Linimo”, quarto sistema maglev comercial no mundo, uma alternativa ao metrô local. A outra linha de pesquisa é a SCMaglev, desenvolvida pela Central Japan Railway Company e pelo Railway Technical Research Institute. O sistema utiliza motores lineares síncronos de estator longo e ímãs supercondutores no trem. A diferença é que as bobinas de tração (armadura) ficam nas laterais dos trilhos (ONO, 2002). Em 2015 o trem de testes atingiu 603 km/h na pista de testes em Yamanashi. A tecnologia será utilizada no Chuo Shinkansen, que fará o trecho Tokyo - Osaka até 2045.



(a)



(b)

Figura 11 – Linha Linimo com tecnologia HSST (a) e a pista de testes em Yamanashi (b)

No Brasil, a produção acadêmica na área começou com maior relevância na década de 90, através de publicações sobre motores lineares síncronos supercondutores para transportes urbanos (PINATTI, 1995) e técnicas de análise do motor linear de indução por elementos finitos (CARDOSO, 1995).

O uso do motor linear associado à levitação magnética teve início com o projeto Maglev Cobra, conduzido pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). O diferencial fica não no motor de tração, mas na técnica de levitação magnética supercondutora. Os exemplos citados anteriormente contam com levitação eletrodinâmica e eletromagnética. No início do projeto, o protótipo em pequena escala utilizava tração por meio de um motor linear síncrono de estator longo (STEPHAN, 2003), que depois foi substituído por um linear de indução com estator curto (SOTELO, 2013).



**Figura 12 – Maglev Cobra na pista de 200 m, UFRJ**

Fonte: (MATTOS, 2016)

Os testes mais recentes contam com uma pista de 200 m na UFRJ, percorrida por um veículo protótipo composto de 4 módulos com 1,5 m de comprimento cada. A velocidade atingida foi de 7 km/h, pois os testes visavam apenas verificar o comportamento da levitação e possíveis oscilações. Digno de nota nesse projeto é o uso da força de atração entre primário e secundário para compensar o peso do veículo (MATTOS, 2016).

Deve-se apontar novamente aqui que, à parte do exemplo brasileiro citado – Maglev Cobra, a maioria absoluta das aplicações em tração se utiliza de secundários maciços. Maior atenção tem sido dada à tração elétrica por parte da academia e da indústria, porém há outras aplicações em que se encontra o motor linear de indução, tais como: sistemas de transporte horizontal de placas na indústria de tratamento superficial (CHOI, 2008); sistemas de movimentação de bagagens (LAITHWAITE, 1975); sistemas elevatórios verticais (NAGE, 2016); bombeamento de metais líquidos (AUSTIN, 1985), (SHAMSUDDEEN, 2008); e sistemas eletromagnéticos de lançamento de aeronaves (MEEKER, 2009), uma evolução do “Electropult”.

Um bom exemplo de aplicação de motores lineares de indução com secundário ranhurado é o das máquinas operatrizes. As necessidades de precisão, boa resposta de força e pequeno entreferro contribuem para que o secundário ranhurado seja utilizado (BOLDEA, 1997). Uma grande desvantagem persiste no caso do secundário ranhurado: o alto custo de produção em relação ao secundário maciço. Dessa forma, tal configuração não se aplica a grandes distâncias de deslocamento.

Recentemente, objetivando menor intensidade dos efeitos de borda e menor custo, tem sido proposto um secundário tipo “ladder-slit” (Figura 13), ou seja, uma placa de alumínio ranhurada, mantendo-se o núcleo secundário maciço, onde se possibilita um melhor desempenho em relação ao secundário maciço e um custo reduzido em relação ao ranhurado (LV, 2018). Tal configuração, nas últimas publicações, vem sendo considerada para transporte ferroviário urbano (LV, 2018).

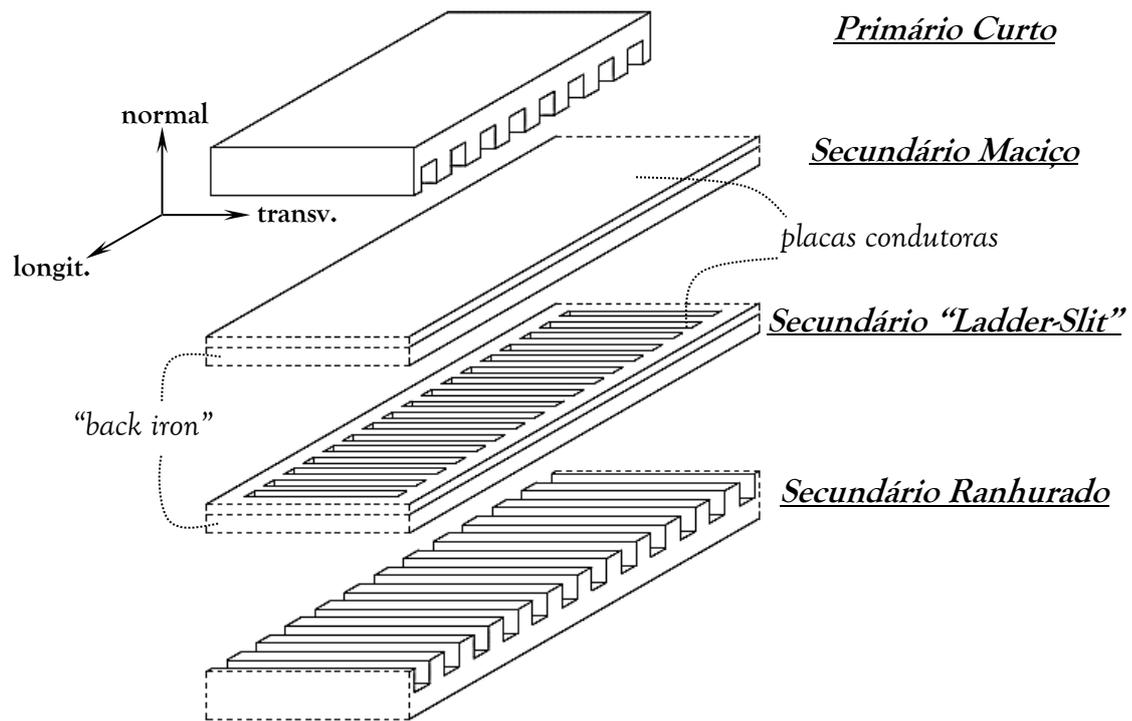


Figura 13 – Diferença entre secundário maciço, "ladder-slit" e ranhurados

### 3 Revisão Bibliográfica Resumida

Como já citado anteriormente, o motor linear de indução foi introduzido primeiramente por Eric Laithwaite (LAITHWAITE, 1957), cuja publicação focava principalmente nas diferenças entre os motores lineares de indução e os convencionais rotativos. Explorou-se o efeito das descontinuidades magnéticas, as quais envolvem condições transitórias mesmo sob velocidade constante. Ainda que tenha se desenvolvido, considerando secundários ranhurados, algumas expressões para corrente em função dos parâmetros, nenhum circuito equivalente foi proposto. Foram abordados aspectos da distribuição de fluxo em configurações como primário curto, secundário curto, duplo primário e motores tubulares, além de explicar as possíveis aplicações para a época. Fez-se também uma série de considerações de projeto.

Cerca de uma década depois, Eric Laithwaite publicou um trabalho versando a respeito de máquinas com circuito magnético aberto, tais como o transformador de núcleo aberto e o motor linear de indução (LAITHWAITE, 1968). Na abordagem desse último, o autor propôs o equacionamento de forças verticais e de tração, com um circuito equivalente contendo resistores que modelassem tais forças, considerando um secundário tipo lâmina sem núcleo magnético. O “fator de qualidade”, introduzido pelo mesmo autor em um trabalho anterior (LAITHWAITE, 1965), foi utilizado como parâmetro para a análise das várias configurações. O modelamento tomava mais corpo, porém ainda lhe faltava um circuito equivalente mais robusto.

Mais tarde, a Universidade de Tóquio avançou no modelamento de motores lineares de indução com estator duplo, focando no equacionamento dos efeitos de borda (YAMAMURA, 1972). O foco não foi desenvolver um circuito representativo, mas propor expressões mais precisas para força de tração, potência de saída, corrente de linha, eficiência e fator de potência, tendo em conta os efeitos de borda. Além

disso, o citado trabalho propôs um enrolamento compensador localizado na borda de entrada, com o objetivo de atenuar os efeitos indesejáveis.

Até então, as abordagens se estabeleciam de forma bidimensional. No final da década de 70, começou-se a utilizar modelos matemáticos quasi-tridimensionais (uma análise bidimensional com correções compensadoras para a terceira dimensão). O trabalho conduzido com tal tratativa tinha em foco um motor linear de duplo primário e secundário maciço (LEE, 1979), porém também aplicável a casos de primário simples, considerando-se um secundário maciço com núcleo magnético associado (“back iron”) infinitamente laminado. Os efeitos de borda transversais e longitudinais foram considerados aplicando-se a Lei Circuital de Ampère em duas direções, bem como os efeitos decorrentes do enrolamento escalonado, isto é, com ranhuras parcialmente preenchidas nas extremidades do primário, considerando-se duas lâminas de corrente deslocadas. Um singelo circuito equivalente foi apresentado, porém apenas para consideração da potência secundária e tensões induzidas (neste caso consideradas balanceadas, mesmo reconhecendo-se o desbalanceamento decorrente de efeitos longitudinais de borda).

Na década seguinte, um importante artigo foi publicado, fazendo uma analogia direta com o circuito equivalente do motor de indução rotativo (DUNCAN, 1983). O foco esteve nas correções decorrentes dos efeitos de borda com relação ao ramo magnetizante, conforme se vê na Figura 14. Tal publicação teve considerável peso em publicações posteriores, sendo utilizado até hoje. No presente trabalho, tal artigo tem característica seminal, e serve de fundamento para a contribuição desenvolvida.

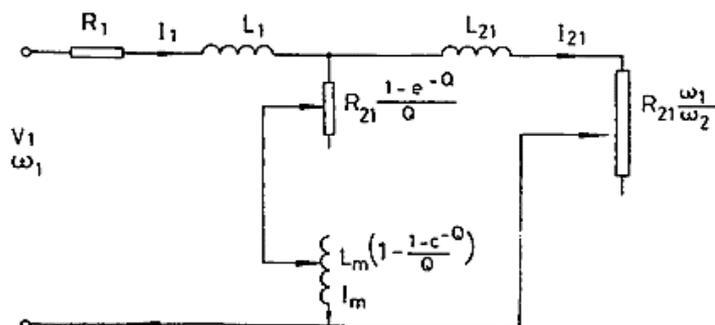


Figura 14 – Circuito equivalente do motor linear de indução com correções no ramo magnetizante

Fonte: (DUNCAN, 1983)

Posteriormente, o efeito de borda longitudinal de entrada foi incorporado no circuito equivalente por meio de um fator de correção na força eletromotriz de entreferro (GIERAS, 1987) – Figura 15. O modelo se tornou reconhecidamente aplicável para médias e altas velocidades, já que em baixas o citado efeito se torna desprezível.

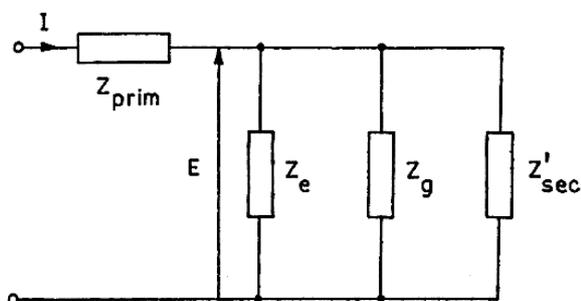


Figura 15 – Circuito equivalente considerando o efeito de borda longitudinal pela impedância  $Z_e$

Fonte: (GIERAS, 1987)

O tipo de motor linear de indução considerado foi o de primário simples e secundário maciço com “back iron”. O circuito apresentado era consideravelmente mais simples e melhor de se trabalhar do que alguns previamente propostos (MATSUMIYA, 1971) (HIRASA, 1980) (NONAKA, 1982). Apenas o efeito

longitudinal de entrada foi considerado, já que afeta o desempenho da máquina de forma bem mais acentuada do que o efeito de saída.

Um circuito equivalente mais completo foi publicado no ano seguinte (PAI, 1988), incorporando não só o efeito longitudinal de borda, mas também o transversal, a difusão de campo no secundário (ou efeito pelicular) e a saturação do núcleo secundário (“back iron”). O secundário considerado foi o tipo lâmina. Os autores basicamente segregaram o resistor de potência mecânica do resistor de perdas secundárias, o que possibilitou a incorporação do efeito longitudinal. Os efeitos transversal e pelicular e a saturação do núcleo secundário foram incluídos por meio de coeficientes em separado. Entretanto, ainda não se abordara o secundário ranhurado com sua dispersão de fluxo característica.

Investigações em secundários ranhurados apareceram na década de 90 (KOSEKI, 1993), sendo o trabalho citado uma abordagem da configuração ranhurada por meio de formulação do vetor potencial. Objetivando a otimização do projeto, a publicação propôs um método numérico dedicado à estrutura secundária em forma de gaiola, utilizando representações visuais da distribuição de campo. Um circuito equivalente consolidado, porém, não foi proposto.

Dentre as poucas contribuições para secundários ranhurados, destaca-se também o estudo da influência da resistência de contato entre as barras secundárias e as barras laterais nas forças de tração e normais e nas correntes primárias e secundárias (PARK, 2003). Constatou-se, por meio da técnica de elementos finitos, que a resistência de contato decorrente do processo de soldagem tem efeitos não desprezíveis nas forças de tração e normal, sendo essa última a mais afetada.

Uma recente investigação em motores lineares de indução com primário curto simples fez um interessante comparativo entre diferentes estruturas de secundários, tanto em lâmina quanto ranhurados (LEE, 2009). Um circuito equivalente foi apresentado, porém sem considerações de efeitos de borda. Além disso, os parâmetros foram calculados a partir de possíveis ensaios e não por dados construtivos. Os

resultados apresentados foram apenas de simulações e não de testes em modelos reais. Apesar disso, o artigo traz uma boa perspectiva de comparação entre os diferentes secundários no tocante a distribuições de fluxo, forças normais e de tração e corrente elétrica.

Outros esforços mais recentes (XU, 2010) (ZARE-BAZGHALEH, 2015) concentraram suas atenções em secundários do tipo lâmina maciça, eventualmente com assimetria lateral no secundário (LV, 2021), propondo testes para obtenção de parâmetros (HIRAHARA, 2022) ou otimização da largura da placa (LAN, 2020). Alguns dos avanços obtidos nos citados trabalhos serão aproveitados aqui. Mais uma vez, entretanto, salienta-se que tais publicações não consideraram o efeito da dispersão secundária, quando essa se assemelha em magnitude à do primário, nas ondas desmagnetizante e magnetizante nas bordas de entrada e saída, respectivamente.

Um caminho intermediário proposto entre o secundário totalmente maciço e o ranhurado, como já citado brevemente nas seções anteriores, foi a configuração tipo “ladder-slit”, através de publicações de universidades japonesas (KOSEKI, 1992) (YAMAGUCHI, 1997). Com uma placa de alumínio ranhurada, percebeu-se que havia aumento na força de tração resultante e diminuição no custo do material. Recentemente, alguma atenção tem sido dada à otimização no projeto de tal configuração - (LV, 2018).

O leitor encontrará pequenas semelhanças entre o presente trabalho e (WORONOWICZ, 2014), no que diz respeito à consideração da dispersão secundária nos efeitos longitudinais. Entretanto, a publicação citada se limita apenas à desmagnetização na borda de entrada, não considerando o efeito magnetizante na borda de saída, nem sequer a influência de ambos nas perdas adicionais parasitárias.

Longe de pretender preencher a lacuna completamente, o presente trabalho se propõe a ser um amparo ao projetista o qual, tendo em mãos os dados construtivos do motor linear, possa determinar os parâmetros do circuito equivalente e, com os fatores de correção propostos, chegar a resultados satisfatórios quanto ao desempenho

das forças longitudinais e verticais, além de poder comparar respostas de forças, rendimento e fator de potência em relação às alternativas de configuração do secundário.

## 4 Modelo Existente Mais Utilizado e o Proposto

Nesta seção, objetiva-se salientar a contribuição do presente trabalho. Em comparação com o modelo analítico mais presente na literatura – (DUNCAN, 1983), o proposto acrescenta o efeito da dispersão de fluxo secundária, outrora desprezado. Dessa forma, a onda desmagnetizante na entrada terá seu perfil afetado. Além disso, a onda magnetizante de saída será contabilizada no circuito, o que antes não acontecia.

Em secundários maciços (contínuos ou “ladder-slit”), o fluxo disperso secundário é, de fato, substancialmente mais baixo do que o primário. Em secundários ranhurados, entretanto, tais valores tornam-se semelhantes. Por isso, o modelo proposto terá maior peso nesses últimos casos. Ainda assim, conforme se apresenta no item 4.4, poderá haver considerável contribuição para secundários contínuos, dependendo da situação.

Assim sendo, cabem apenas algumas considerações com relação à configuração “ladder-slit” antes de se seguir adiante. Nessa configuração, os efeitos de borda transversais são reduzidos através de canais transversais na placa condutora secundária. Muitos projetos chegam a inclinar as ranhuras para diminuir a ondulação de campo.

As componentes de corrente secundária na direção transversal são as que produzem força de tração. Com os canais no secundário “ladder-slit”, as componentes de corrente longitudinais ficam confinadas a uma região praticamente inativa quanto ao fluxo mútuo (LV, 2018). Dessa forma, a distorção do campo no entreferro é menor, e o desempenho tende a melhorar.

Até o presente momento, também não há um circuito equivalente específico para tal configuração, haja vista o fato de haver um aumento da dispersão secundária decorrente dos canais. Pretende-se também contribuir nesse sentido, já que o circuito a ser proposto nas próximas seções é mais genérico do que o proposto em (DUNCAN, 1983).

Nos modelos apresentados a seguir, será considerado o motor linear de indução com primário curto. As perdas no ferro serão desprezadas, e os estudos de caso serão todos considerados com coroa (“back iron”).

Antes, porém, considera-se válido rerepresentar resumidamente os efeitos de borda que se manifestam no motor linear.

#### 4.1 *Efeitos de Borda*

Motores lineares de indução, em especial os de primário simples curto, são basicamente derivados do motor de indução rotativo. O primário seria o correspondente ao estator, mesmo aquele sendo agora a parte móvel; e o secundário ao rotor, que no caso dos motores lineares pode ter uma construção com lâmina maciça (somada ou não a um núcleo magnético), tipo “ladder-slit” ou ranhurada tradicionalmente com barras condutoras curto-circuitadas. Essa última configuração é a abordada neste trabalho.

No tocante ao desempenho, o torque no motor rotativo se torna força de tração no linear, o que, a princípio, pode ser previsto por meio de um circuito equivalente por fase. Entretanto, os princípios para o levantamento do circuito equivalente que se aplicavam com base na geometria simétrica por polo no motor rotativo já não estão presentes completamente no motor linear. Há três razões principais para tal fato (XU, 2010):

1. EFEITOS LONGITUDINAIS DE BORDA - o fluxo magnético no entreferro tem uma forte assimetria com relação aos lados de entrada e de saída do primário (respectivamente, as bordas dianteira e traseira no sentido do movimento). Na borda de entrada, há um “aparecimento” súbito, enquanto que na de saída há um “desaparecimento” súbito de fluxo. De tais fenômenos decorrem correntes parasitas no secundário, mais acentuadas nas citadas regiões, e, conseqüentemente, aumento das perdas Joule e

diminuição da indutância mútua. Logo, a força de tração se atenua à medida que tais efeitos se acentuam no aumento da velocidade;

2. EFEITOS TRANSVERSAIS DE BORDA - a diferença entre as larguras dos núcleos primário e secundário acarreta não-uniformidade na distribuição transversal do fluxo no entreferro, o que pode aumentar a resistência equivalente do secundário;
3. RANHURAS PARCIALMENTE PREENCHIDAS - geralmente as ranhuras nas bordas são parcialmente preenchidas, dado o fato de que para um melhor aproveitamento de espaço nas ranhuras, bobinas pré-moldadas são preferíveis, do que decorre um enrolamento de dupla camada. Logo, há assimetria na força magnetomotriz distribuída e, conseqüentemente, correntes assimétricas no primário, ainda que a alimentação seja simétrica. Como consequência, há alterações nos fluxos mútuo e de dispersão, bem como na resistência secundária equivalente.

#### *4.2 Modelo Existente Mais Utilizado*

Nesta seção o modelo analítico existente mais utilizado será brevemente exposto, já que serve de base para os avanços propostos. Apresenta-se o equacionamento para os três efeitos supramencionados, bem como para as forças verticais.

##### **4.2.1 Efeitos Longitudinais**

Segundo (DUNCAN, 1983), a principal diferença entre os motores de indução rotativos e lineares é que nesses últimos, à medida que o primário se move, o secundário continuamente apresenta material condutor “novo” na borda de entrada, o qual se oporá ao aumento súbito de fluxo. De forma semelhante, na saída, haverá uma oposição no secundário à diminuição súbita de fluxo.

Tais fenômenos afetam principalmente a distribuição de fluxo no entreferro, o que justificaria um modelo com fatores de correção no ramo magnetizante, conforme

a fonte citada. A corrente secundária referida ao primário correspondente às reações de entrada/saída ( $I'_{2m}$ ) estará em oposição/concordância de fase com a corrente de magnetização  $I_m$ , ou seja, deslocada temporalmente de aproximadamente  $90^\circ$  elétricos em relação a  $I'_2$ , a componente secundária de carga. Essa condição se assemelha à partida do motor rotativo, onde o rotor se opõe ao aumento de fluxo no entreferro (DUNCAN, 1983).

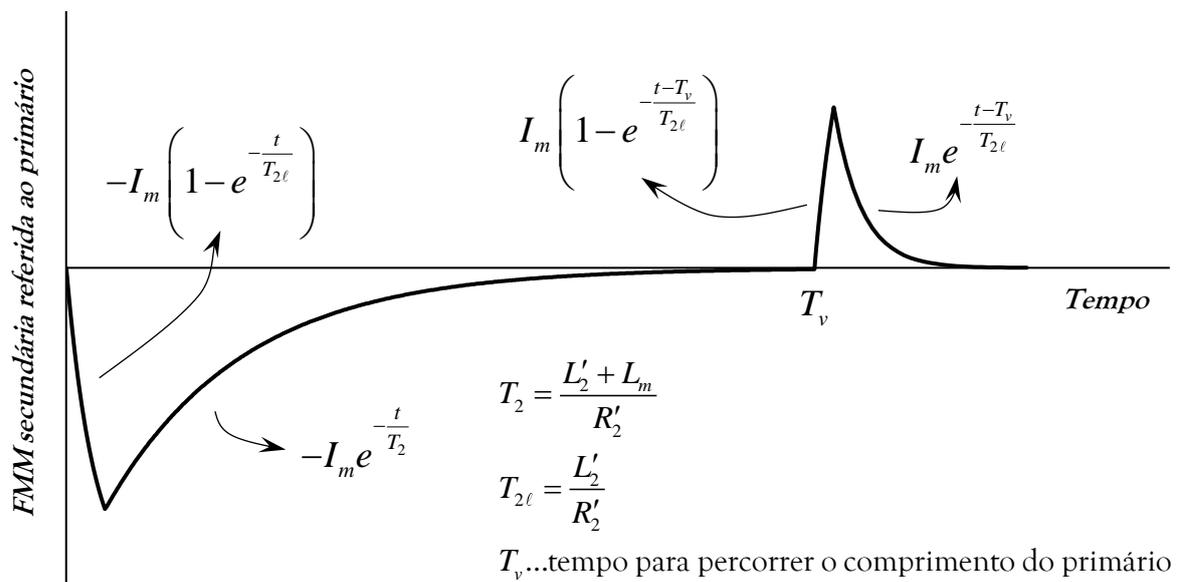


Figura 16 – Comportamento genérico da reação secundária ao longo do tempo

A Figura 16 ilustra as ondas de força magnetomotriz secundárias à medida que o primário se move da esquerda para a direita (considerar o observador posicionado no secundário, estático). A onda à esquerda é a de entrada (desmagnetizante), e a onda à direita, a de saída (magnetizante). Via de regra, o efeito desmagnetizante é preponderante, o que acaba por aumentar a corrente de magnetização primária, em sua busca de manter o fluxo médio no entreferro.

Os efeitos de borda longitudinais na entrada e na saída dependem de constantes de tempo que envolvem indutâncias secundária ( $L'_2$ ) e de magnetização ( $L_m$ ), e a resistência ôhmica secundária ( $R'_2$ ). Tais constantes de tempo definem tempos de

subida e descida da reação de armadura nas bordas. A distribuição espacial resultante de fluxo ao longo do entreferro dependerá também da velocidade de deslocamento.

No tempo zero, a corrente de reação secundária na borda de entrada referida ao primário tenderá a anular a corrente de magnetização primária, quase se igualando a essa em módulo. Seu aumento será rápido, pois na interface de entrada a única indutância a retardá-lo será a de dispersão secundária, já que os circuitos primário e secundário do material “novo” ainda não se encontram concatenados.

Em seguida, o decaimento da onda desmagnetizante já não será tão rápido, pois agora a constante de tempo contempla fluxo mútuo entre as partes, além da dispersão secundária. A Figura 16 ilustra o comportamento genérico da força magnetomotriz secundária nesse efeito desmagnetizante a uma velocidade constante  $v$ , considerando, ainda, as ranhuras totalmente preenchidas nas extremidades.

Se não houver saturação magnética, o perfil da força magnetomotriz corresponderá ao da densidade de fluxo magnético. Para uma discussão sobre saturação magnética localizada nas coroas primária e secundária, ver ANEXO A.

Segundo (DUNCAN, 1983), apesar do valor da reação secundária variar ao longo do comprimento do motor, sua reflexão ao enrolamento primário pode ser considerada como uma corrente média em oposição de fase à corrente de magnetização. Considerando as forças magnetomotrizes já em valores eficazes e desprezando a dispersão secundária, ou seja,  $L'_2/R'_2 = T_{2\ell} \approx 0$ , teria-se:

$$I'_{2m} = \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} -I_m e^{-\frac{t}{T_2}} dt \quad (1)$$

O trabalho seminal (DUNCAN, 1983), ao desprezar o efeito do fluxo disperso secundário, considera a curva apresentada na Figura 17 para o desenvolvimento analítico. O aumento da componente desmagnetizante na entrada é aproximadamente instantâneo ( $L'_2/R'_2 = T_{2\ell} \approx 0$ ), enquanto seu decaimento se

caracterizará pela constante  $T_2 = (L'_2 + L_m)/R'_2 \approx L_m/R'_2$ . Na borda de saída, a onda magnetizante passa a ser desprezível. A escala de tempo na Figura 17 já se encontra adimensional, como será explicado adiante.

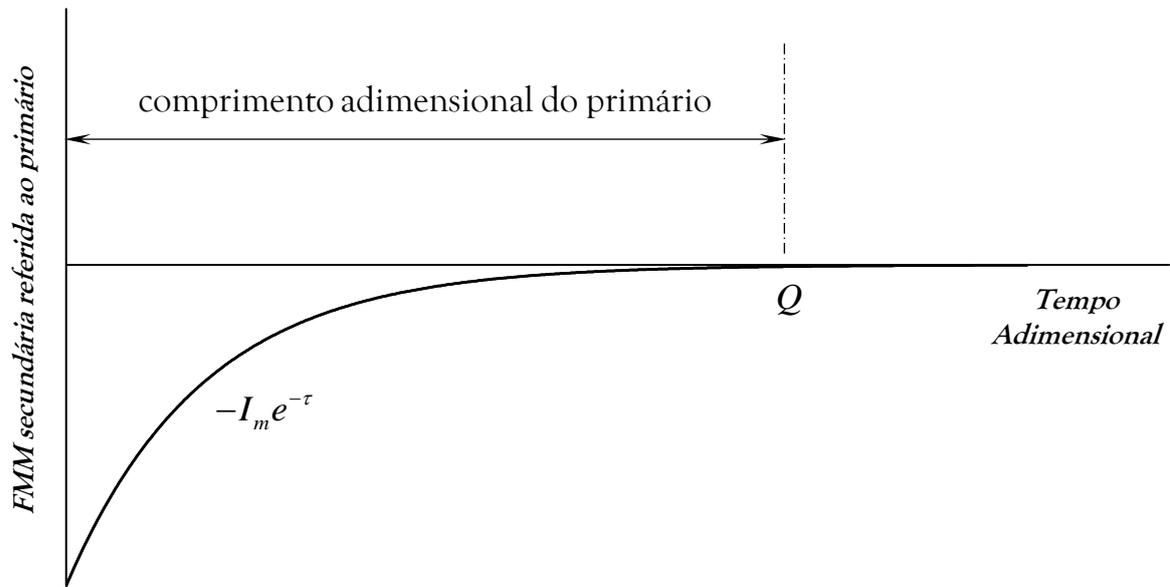


Figura 17 - Comportamento da reação secundária ao se desprezar  $L'_2$

Entende-se que (DUNCAN, 1983) utilize em seu desenvolvimento uma escala de tempo adimensional com o objetivo de condensar as expressões. Sendo o comprimento do primário  $D$  e sua velocidade  $v$ , tem-se  $\tau = t/T_2$  e um comprimento também adimensional  $Q = T_v/T_2 = (D/v)/((L'_2 + L_m)/R'_2)$ . Segue-se que

$$I'_{2m} = \frac{1}{Q} \int_0^Q -I_m e^{-\tau} d\tau = -I_m \frac{1 - e^{-Q}}{Q}, \quad (2)$$

Como  $T_v$  é o tempo necessário para se percorrer o comprimento primário a uma determinada velocidade constante  $v$ , segue-se que  $Q = D/(vT_2)$  também corresponderá a um comprimento adimensional desse primário com relação a uma base que depende da velocidade.

O efeito desmagnetizante pode ser representado por uma indutância em paralelo com  $L_m$ , drenando a corrente  $I'_{2m}$ . Conforme (DUNCAN, 1983), pode-se simplificar o ramo conforme o ilustrado na Figura 18. A reação secundária referida ao primário, na prática, aumentaria a corrente no ramo central. Tal efeito é contabilizado diminuindo-se a indutância equivalente pelo fator  $1 - \frac{1 - e^{-Q}}{Q}$ . Caso a velocidade seja zero,  $Q \rightarrow \infty$  e  $1 - \frac{1 - e^{-Q}}{Q} \rightarrow 1$ , o que implica na nulidade desse efeito longitudinal.

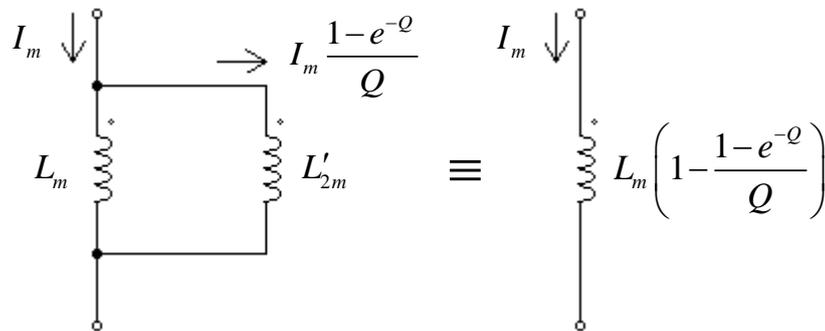


Figura 18 – Representação do efeito de borda longitudinal desmagnetizante no circuito equivalente

Fonte: (DUNCAN, 1983)

Conforme já dito, a onda magnetizante na borda de saída foi desprezada por (DUNCAN, 1983) em decorrência da dispersão secundária aproximadamente nula.

Além dos efeitos magnéticos, haverá o aumento de perdas parasitas por conta do caminho percorrido pelas correntes da reação secundária, tanto na borda de entrada quanto na de saída.

Na borda de entrada, as perdas decorrentes da componente principal resultam, levando-se em conta seu valor eficaz (DUNCAN, 1983),

$$R'_2 \left[ \sqrt{\frac{1}{Q} \int_0^Q (I_m e^{-\tau})^2 d\tau} \right]^2 \underset{\substack{u=-2\tau \\ du=-2d\tau}}{=} \frac{R'_2 I_m^2}{Q} \int_0^{-2Q} -\frac{e^u}{2} du = -\frac{R'_2 I_m^2}{2Q} e^u \Big|_0^{-2Q} = R'_2 I_m^2 \frac{1-e^{-2Q}}{2Q} \quad (3)$$

Na interface da borda de saída, a energia magnética armazenada é dissipada no secundário. Como  $\tau = Q$ , a corrente será  $I_m - I'_{2m} = I_m - I_m e^{-Q} = I_m (1 - e^{-Q})$ . A perda dissipada por tal fenômeno resulta, utilizando a relação citada anteriormente

$$Q = \frac{T_v}{T_2} = \frac{\frac{D}{v}}{\frac{L'_2 + L_m}{R'_2}} \rightarrow \frac{L'_2 + L_m}{D} = \frac{L'_2 + L_m}{T_v} = \frac{R'_2}{Q}, \text{ em}$$

$$\frac{1}{2} (L'_2 + L_m) [I_m (1 - e^{-Q})]^2 \frac{1}{T_v} = R'_2 I_m^2 \frac{(1 - e^{-Q})^2}{2Q} \quad (4)$$

Somando-se os resultados das equações (3) e (4), as perdas parasitas totais por fase pelo efeito longitudinal ficam

$$R'_2 I_m^2 \frac{1 - e^{-2Q}}{2Q} + R'_2 I_m^2 \frac{(1 - e^{-Q})^2}{2Q} = R'_2 I_m^2 \frac{1 - e^{-2Q} + 1 - 2e^{-Q} + e^{-2Q}}{2Q} = R'_2 I_m^2 \frac{1 - e^{-Q}}{Q} \quad (5)$$

Conforme (DUNCAN, 1983), o circuito, por ora, ficaria conforme a Figura 19:

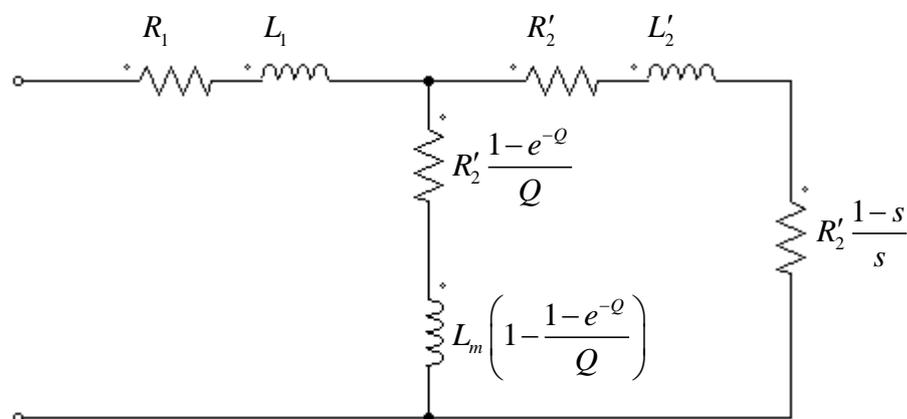


Figura 19 - Circuito equivalente para secundário maciço

Fonte: (DUNCAN, 1983)

O comprimento adimensional  $Q$ , segundo (DUNCAN, 1983), seria o inverso do fator de qualidade definido por (LAITHWAITE, 1965), indicando a “habilidade” do motor em resistir à perda de potência devido aos efeitos de borda.

Na referência citada, Eric Laithwaite introduz o conceito de fator de qualidade de uma máquina como sendo algo que expresse suas qualidades elétrica e magnética num só número. Para tanto, deve ser proporcional ao inverso do produto da

resistência elétrica pela relutância magnética, i.e.,  $\frac{1}{R_e \mathfrak{R}_m} = \frac{1}{\frac{\ell_e}{\sigma A_e} \frac{\ell_m}{\mu A_m}}$ , o que

apresenta uma dimensão de tempo. Para se trabalhar com um índice adimensional, Laithwaite diz ser a “escolha natural” para máquinas de corrente alternada a multiplicação da razão acima pela frequência angular  $\omega$ . Com as devidas adaptações ao caso em questão, poderia-se escrever:

$$G = \frac{I'_2 \lambda_m v}{E'_2 I_m D} = \frac{L_m}{R'_2} \frac{1}{T_v} \quad (6)$$

sendo  $G$  o fator de qualidade,  $E'_2$  e  $I'_2$  tensão e corrente secundárias referidas ao primário,  $\lambda_m$  e  $I_m$  o fluxo concatenado e a corrente de magnetização. Assim, pode-se escrever também

$$Q = \frac{T_v}{T_2} = \frac{R'_2}{L'_2 + L_m} T_v \approx \frac{R'_2}{L_m} T_v = \frac{1}{G} \quad (7)$$

Logo, a afirmação de (DUNCAN, 1983) é coerente com a definição de fator de qualidade de Laithwaite.

Ainda se pode explicitar a relação do comprimento adimensional  $Q$  com o escorregamento:

$$Q = \frac{T_v}{T_2} = \frac{v}{T_2} = \frac{\frac{D}{p} f_1 (1-s)}{T_2} = \frac{p}{T_2 f_1 (1-s)} \quad (8)$$

Até aqui, percebe-se que na velocidade nula ( $s=1$ ) o circuito equivalente retorna ao de um motor de indução rotativo, sem efeitos de borda - o comprimento normalizado tende ao infinito.

#### 4.2.2 Efeitos Transversais

A publicação de referência - (DUNCAN, 1983) - não utilizou nenhuma correção no circuito para os efeitos transversais. Os desenvolvimentos posteriores, além da análise numérica, trouxeram abordagens analíticas e chegaram a fatores de correção complexos para a resistência ôhmica do secundário - ver (XU, 2010) e (LU, 2013). Tais desenvolvimentos, com as devidas modificações para secundários ranhurados, serão aproveitados oportunamente.

#### 4.2.3 Preenchimento Parcial das Ranhuras

A abordagem de (DUNCAN, 1983) sobre preenchimento parcial de ranhuras é mais breve, simplesmente considerando o comprimento físico total do primário curto como sendo  $(2p + 2/3)\tau_p$  e o comprimento efetivo,  $(2p + 1/3)\tau_p$  - ver exemplo na Figura 20 a seguir.

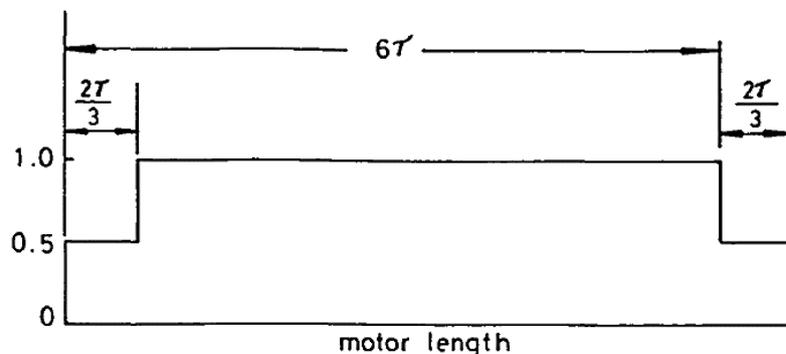


Figura 20 - Efeito de preenchimento parcial de ranhuras em motor de 6 polos

Fonte: (DUNCAN, 1983)

Segundo o autor citado, motores com velocidades mais altas do que 20 m/s ou número menor de polos deverão receber tratamento mais detalhado.

A consideração para o modelo proposto será exposta na seção 4.4.3.

#### 4.2.4 Forças Verticais

Seguindo a abordagem de (DUNCAN, 1983), as forças verticais podem ser consideradas em 2 componentes: atração decorrente do fluxo mútuo e repulsão decorrente do escorregamento secundário.

A componente de atração é proporcional ao produto entre a corrente de magnetização eficaz ao quadrado e a indutância de magnetização. A expressão conhecida  $F_{atr} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$  aparece a seguir multiplicada pelo fator 3 pelo fato do motor considerado ser trifásico:

$$\begin{aligned} F_{v_{atr}} &= \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \frac{1}{Q} \int_0^{\varrho} (1 - e^{-\tau})^2 d\tau = \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \frac{1}{Q} \left[ \tau - \frac{e^{-2\tau}}{2} + 2e^{-\tau} \right]_0^{\varrho} = \\ &= \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \left[ \frac{2Q - e^{-2\varrho} + 4e^{-\varrho} - 3}{2Q} \right] = \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \left[ 1 - \frac{(1 - e^{-\varrho})(3 - e^{-\varrho})}{2Q} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

A componente de repulsão depende da corrente secundária de escorregamento referida ao primário. Partindo da expressão bem conhecida  $F = (\mu_0 i_1 i_2 L) / (2\pi d)$  para força de repulsão entre condutores paralelos de comprimento  $L$  com correntes opostas  $i_1$  e  $i_2$  e distanciamento  $d$ , considera-se as correntes  $I_2$  (corrente de carga no condutor secundário) e  $I'_2$  (reflexão de  $I_2$  ao primário) como as componentes responsáveis pelo fenômeno da repulsão, podendo-se chegar a

$$F_{v_{rep}} = k_r \frac{I_2'^2}{d} \quad (10)$$

O autor (DUNCAN, 1983) indica alternativas de testes estáticos com diferentes frequências para o levantamento mais preciso da constante  $k_r$ . O termo  $d$  se refere à distância média entre os condutores primários e secundários.

A força vertical total fica

$$F_{v_{tot}} = F_{v_{atr}} - F_{v_{rep}} = \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \left[ 1 - \frac{(1 - e^{-\varrho})(3 - e^{-\varrho})}{2Q} \right] - k_r \frac{I_2^2}{d} \quad (11)$$

### 4.3 Modelo Proposto

#### 4.3.1 Efeitos Longitudinais

No modelo ora proposto, a indutância de dispersão secundária será considerada nos efeitos de entrada e saída, já que em secundários ranhurados não se deve desprezar tal efeito. Tomando por base a argumentação de (DUNCAN, 1983) apresentada no item 4.2.1, a subida da corrente de reação à magnetização na borda de entrada, por depender da dispersão secundária, deverá, agora, constar no cálculo. Ainda, a componente que se opõe à desmagnetização na borda de saída também deverá ser considerada.

As cristas das ondas de entrada e saída apresentadas na Figura 16 não correspondem, obviamente, à realidade, dadas suas descontinuidades. Cristas arredondadas são mais coerentes – ver Figura 22. Portanto, para descrever analiticamente o comportamento das ondas, propõe-se um circuito análogo (não equivalente!) RLC – Figura 21, cuja resposta transitória propõe-se a corresponder ao perfil das ondas desmagnetizante e magnetizante. No ramo à direita, correspondente à borda de saída, outra resistência secundária foi adicionada para adequar o caso de amortecimento crítico, o único mais aderente ao perfil de decaimento proposto na Figura 16. No caso de (DUNCAN, 1983),  $L'_2 \approx 0$ . As capacitâncias análogas são funções das resistências e indutâncias.

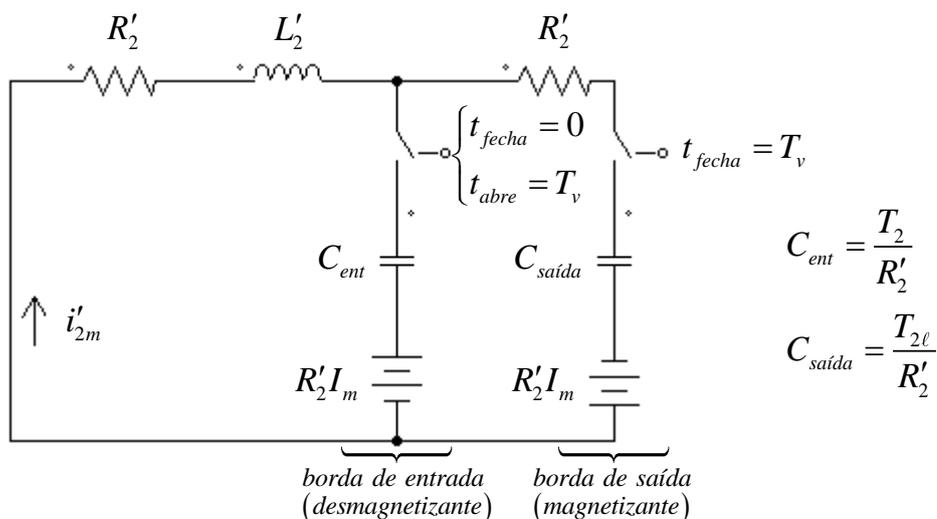


Figura 21 – Circuito análogo auxiliar que corresponde à reação secundária nos efeitos longitudinais

Na Figura 16, as curvas foram plotadas com dispersão secundária baixa. Na Figura 22 a seguir, pode-se perceber a influência de  $L'_2$  quando seus valores se aproximam dos de  $L_m$ .

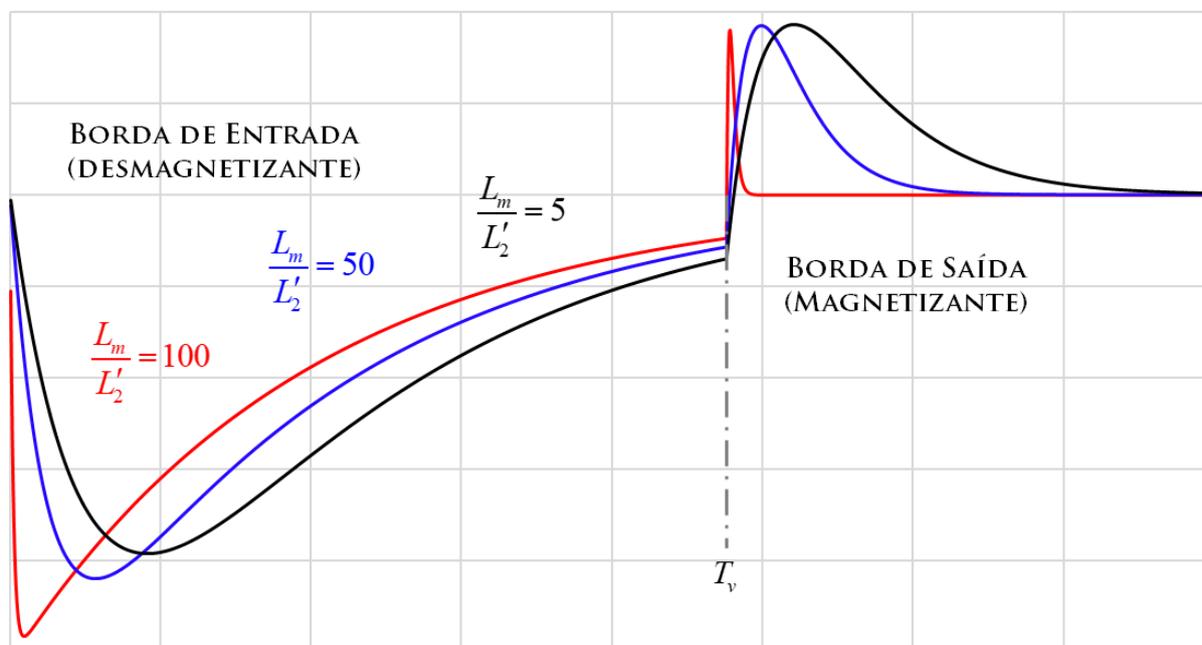


Figura 22 – Comparação entre reações longitudinais, variando-se a dispersão secundária

Apenas com o gráfico em mãos, percebe-se que, à medida que a dispersão secundária aumenta, o efeito de borda longitudinal desmagnetizante pode ser maior. Por outro lado, a componente magnetizante na borda de saída deixa de ser desprezível.

A resolução do problema compreende duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$R'_2 i'_{2m_{ent}}(t) + L'_2 \frac{di'_{2m_{ent}}(t)}{dt} + \frac{1}{C_{ent}} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt = -R'_2 I_m \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 i'_{2m_{ent}}(t)}{dt^2} + \frac{R'_2}{L'_2} \frac{di'_{2m_{ent}}(t)}{dt} + \frac{1}{L'_2 C_{ent}} i'_{2m_{ent}}(t) = 0 \quad (10)$$

$$2R'_2 i'_{2m_{saída}}(t) + L'_2 \frac{di'_{2m_{saída}}(t)}{dt} + \frac{1}{C_{saída}} \int i'_{2m_{saída}}(t) dt = R'_2 I_m \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 i'_{2m_{saída}}(t)}{dt^2} + \frac{2R'_2}{L'_2} \frac{di'_{2m_{saída}}(t)}{dt} + \frac{1}{L'_2 C_{saída}} i'_{2m_{saída}}(t) = 0 \quad (11)$$

Trata-se de dois circuitos série RLC, com capacitâncias distintas.

No caso da onda de entrada, a análise do amortecimento (MIT, 1947) depende das magnitudes de  $\left(\frac{R'_2}{2L'_2}\right)^2$  e  $\frac{1}{L'_2 C_{ent}}$ . Já na saída, não haverá variação no amortecimento, conforme será mostrado. Para os dois casos, substituindo os valores das capacitâncias,

$$\frac{1}{L_2' C_{ent}} = \frac{1}{L_2' \frac{T_2}{R_2'}} = \frac{1}{L_2' \frac{L_m + L_2'}{R_2'}} = \frac{R_2'^2}{L_2' (L_m + L_2')} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{R_2'}{2L_2'}\right)^2 > \frac{1}{L_2' C_{ent}} = \frac{R_2'^2}{L_2'^2 + L_2' L_m}, \text{ se } L_m > 3L_2' \\ \text{(superamortecido)} \\ \left(\frac{R_2'}{2L_2'}\right)^2 < \frac{1}{L_2' C_{ent}} = \frac{R_2'^2}{L_2'^2 + L_2' L_m}, \text{ se } L_m < 3L_2' \\ \text{(subamortecido)} \\ \left(\frac{R_2'}{2L_2'}\right)^2 = \frac{1}{L_2' C_{ent}} = \frac{R_2'^2}{L_2'^2 + L_2' L_m}, \text{ se } L_m = 3L_2' \\ \text{(criticamente amortecido)} \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{1}{L_2' C_{saída}} = \frac{1}{L_2' \frac{T_{2\ell}}{R_2'}} = \frac{1}{L_2' \frac{L_2'}{R_2'}} \Rightarrow \left(\frac{2R_2'}{2L_2'}\right)^2 = \frac{1}{L_2' C_{saída}} = \frac{R_2'^2}{L_2'^2} \quad \text{(criticamente amortecido)} \quad (13)$$

No caso da borda de entrada, deverá se considerar a solução em cada caso. Em aplicações com entreferrros relativamente grandes, é possível se ter  $L_m < 3L_2'$ . Para a borda de saída, fica evidente o caso de amortecimento crítico, independente dos valores.

Primeiramente, aplicando-se a solução geral para os transitórios possíveis de entrada, considerando condições iniciais  $i'_{2m_{ent}}(0) = 0$  e  $v_{C_{ent}}(0) = 0$ , ou seja,

$$\frac{di'_{2m}(0)}{dt} = -\frac{R_2' I_m}{L_2'}, \text{ chega-se a:}$$

$$\text{(superamortecido)} \\ i'_{2m_{ent}}(t) = -\frac{I_m}{k} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}, \quad \begin{cases} k = \sqrt{0,25 - T_{2\ell}/T_2} \\ T_{2\ell} = \frac{L_2'}{R_2'} \text{ e } T_2 = \frac{L_2' + L_m}{R_2'} \end{cases} \quad (14)$$

(subamortecido)

$$i'_{2m_{ent}}(t) = -\frac{I_m}{k'} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}, \quad k' = \sqrt{T_{2\ell}/T_2 - 0,25} \quad (15)$$

(criticamente amortecido)

$$i'_{2m_{ent}}(t) = -\frac{I_m}{T_{2\ell}} t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} \quad (16)$$

Nas soluções acima, é fácil perceber que na interface de amortecimento crítico, ou seja,  $L_m = 3L'_2$  e  $k = k' = 0$ , tem-se:

$$\lim_{k \rightarrow 0} -\frac{I_m}{k} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} = \lim_{k' \rightarrow 0} -\frac{I_m}{k} \sin\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} = -\frac{I_m}{T_{2\ell}} t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} \quad (17)$$

No caso de secundários maciços, caso se faça a aproximação  $L'_2 \rightarrow 0$  (situação de superamortecimento, apenas), então  $T_{2\ell} \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0,5$  e

$$i'_{2m_{ent}}(t) = \lim_{L'_2 \rightarrow 0} -\frac{I_m}{k} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} = -I_m e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (18)$$

Em (DUNCAN, 1983), a expressão acima é a utilizada para a onda desmagnetizante na borda de entrada.

Depois, com relação ao transitório criticamente amortecido na borda de saída, as condições iniciais são  $i'_{2m_{saída}}(T_v +) \approx 0$  e  $v_{C_{saída}}(T_v) = 0$ , ou seja,  $\frac{di'_{2m}(0)}{dt} = \frac{R'_2 I_m}{L'_2}$ . A

solução fica como se segue:

$$i'_{2m_{saída}}(t) = \frac{I_m}{T_{2\ell}} (t - T_v) e^{-\frac{t - T_v}{T_{2\ell}}} \quad (19)$$

Se  $L'_2 \rightarrow 0$ , então  $T_{2\ell} \rightarrow 0$  e

$$i'_{2m_{saída}}(t) = \lim_{T_{2\ell} \rightarrow 0} \frac{I_m}{T_{2\ell}} (t - T_v) e^{-\frac{t-T_v}{T_{2\ell}}} = 0, \text{ se } t - T_v > 0 \quad (20)$$

Logo, percebe-se também que para  $L'_2 \approx 0$  não há consideração sobre o efeito magnetizante na borda de saída, como, de fato, é feito em (DUNCAN, 1983).

Para a corrente  $I'_{2m}$  referida ao primário em oposição de fase à componente de magnetização  $I_m$ , basta somar os valores médios de cada componente. A partir daqui os valores positivos serão considerados, para futura incorporação no ramo magnetizante:

$$I'_{2m} = \frac{1}{T_v} \left[ \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{T_v}^{\tau} i'_{2m_{saída}}(t) dt \right] \quad (21)$$

Objetivando uma maior concisão no texto, serão apresentados aqui os resultados finais das expressões para cada caso (ramo de magnetização, perdas adicionais e forças verticais), sendo sua demonstração indicada no ANEXO C. As numerações das equações serão mantidas no referido anexo.

Na borda de entrada, para o caso de **superamortecimento**, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt &= \frac{I_m}{T_v k} \int_0^{T_v} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt \\ &= I_m \frac{2T_{2\ell}}{T_v} \frac{e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k \cosh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) \right] - 2k}{k(4k^2 - 1)} \end{aligned} \quad (22)$$

Para o caso de **subamortecimento**, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt &= \frac{I_m}{T_v k'} \int_0^{T_v} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt \\
&= I_m \frac{2T_{2\ell}}{T_v} \frac{2k' - e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k' \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) \right]}{k'(4k'^2 + 1)}
\end{aligned} \tag{23}$$

E para o **criticamente amortecido**:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt &= \frac{I_m}{T_v T_{2\ell}} \int_0^{T_v} t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt \\
&= I_m \frac{2}{T_v} \left[ 2T_{2\ell} - e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} (T_v + 2T_{2\ell}) \right]
\end{aligned} \tag{24}$$

Na borda de saída, caso invariável de **amortecimento crítico**, tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} i'_{2m_{saida}}(t) dt &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} \frac{I_m}{T_{2\ell}} (t - T_v) e^{-\frac{t-T_v}{T_{2\ell}}} dt \\
&= I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v}
\end{aligned} \tag{25}$$

De ora em diante, haverá uma consideração também utilizada em (DUNCAN, 1983), aqui expandida, com o objetivo de condensar as expressões. O comprimento do primário adimensional em escalas de tempo normalizadas  $T_2$  e  $T_{2\ell}$  pode ser entendido como o número necessário das constantes de tempo para se percorrer o primário efetivo:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{T_v}{T_2} \text{ e } Q_\ell = \frac{T_v}{T_{2\ell}} \\
(k &= \sqrt{0,25 - Q/Q_\ell} \text{ e } k' = \sqrt{Q/Q_\ell - 0,25})
\end{aligned} \tag{26}$$

Tem-se, então, para **superamortecimento** na entrada:

$$\begin{aligned}
I'_{2m} &= I'_{2m_{ent}} - I'_{2m_{saida}} = I_m \frac{2T_{2\ell}}{T_v} \frac{e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k \cosh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) \right] - 2k}{k(4k^2 - 1)} - I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v} \\
&= I_m \frac{2k - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left[ \sinh(kQ_\ell) + 2k \cosh(kQ_\ell) \right]}{2Qk} - I_m \frac{1}{Q_\ell} \\
&= I_m \left[ \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_\ell} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sinh(kQ_\ell)}{2Qk} + \frac{\cosh(kQ_\ell)}{Q} \right) \right] \\
&= I_m k_m
\end{aligned} \tag{27}$$

Para **subamortecimento** na entrada:

$$\begin{aligned}
I'_{2m} &= I'_{2m_{ent}} - I'_{2m_{saida}} = I_m \frac{2T_{2\ell}}{T_v} \frac{2k' - e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k' \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) \right]}{k'(4k'^2 + 1)} - I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v} \\
&= I_m \frac{2k' - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left[ \sin(k'Q_\ell) + 2k' \cosh(kQ_\ell) \right]}{2Qk'} - I_m \frac{1}{Q_\ell} \\
&= I_m \left[ \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_\ell} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sin(k'Q_\ell)}{2Qk} + \frac{\cos(k'Q_\ell)}{Q} \right) \right] \\
&= I_m k'_m
\end{aligned} \tag{28}$$

E para **amortecimento crítico** na entrada:

$$\begin{aligned}
I'_{2m} &= I'_{2m_{ent}} - I'_{2m_{saida}} = I_m \frac{2}{T_v} \left[ 2T_{2\ell} - e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} (T_v + 2T_{2\ell}) \right] - I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v} \\
&= I_m \left[ \frac{3}{Q_\ell} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( 2 + \frac{4}{Q_\ell} \right) \right] \\
&= I_m k''_m
\end{aligned} \tag{29}$$

No que diz respeito à magnetização, analogamente ao que ilustra a Figura 18, a indutância resulta conforme Figura 23.

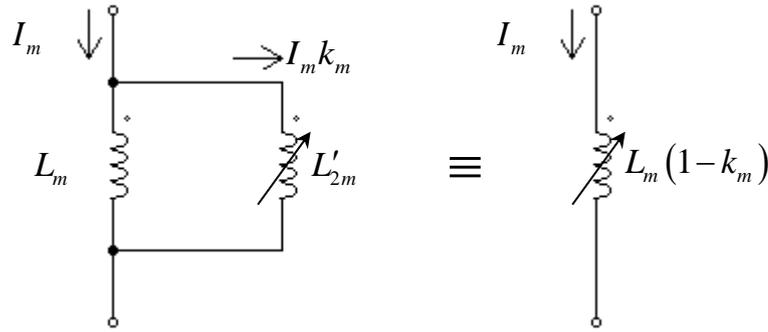


Figura 23 – Representação dos efeitos longitudinais de borda no circuito equivalente para secundário ranhurado

De modo semelhante, há de se corrigir as perdas parasitas por conta do caminho percorrido pelas correntes da reação secundária. Primeiramente, considerando as parcelas das ondas de entrada e saída:

$$R'_2 \left[ \sqrt{\frac{1}{T_v} \left[ \int_0^{T_v} i_{2m_{ent}}'^2(t) dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{T_v}^{\tau} i_{2m_{saída}}'^2(t) dt \right]} \right]^2 \quad (30)$$

Mais uma vez, tratando as integrais separadamente, para **superamortecimento** na entrada:

(Para os desenvolvimentos, consultar ANEXO C)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i_{2m_{ent}}'^2(t) dt &= \frac{I_m^2}{T_v k^2} \int_0^{T_v} \sinh^2\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\ &= I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ_\ell) - 1}{8k^2Q} \right) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

Para o caso de **subamortecimento**, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i_{2m_{ent}}'^2(t) dt &= \frac{I_m^2}{T_v k'^2} \int_0^{T_v} \sin^2\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\ &= I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\cos(2k'Q_\ell) - 1}{8k'^2Q} \right) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

E para o **criticamente amortecido**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i_{2m_{ent}}^2(t) dt &= \frac{I_m^2}{T_v T_{2\ell}^2} \int_0^{T_v} t^2 e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\ &= I_m^2 \left[ \frac{2}{Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} \right) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Na borda de saída, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} i_{2m_{saída}}^2(t) dt &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} \left( \frac{I_m}{T_{2\ell}} \right)^2 (t - T_v)^2 e^{-\frac{2(t-T_v)}{T_{2\ell}}} dt \\ &= I_m^2 \frac{1}{4Q_\ell} \end{aligned} \quad (34)$$

Em segundo lugar, deve-se levar em conta a componente correspondente à energia armazenada que se dissipa no ponto de saída, considerando-se o valor de corrente de magnetização nesta borda:

$$\frac{1}{2} (L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2_{ent}}(T_v) \right]^2 \frac{v}{D} \quad (35)$$

Novamente, cada caso da borda de entrada deverá ser tratado. Para **superamortecimento**:

$$\frac{1}{2} (L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2_{ent}}(T_v) \right]^2 \frac{v}{D} = R'_2 I_m^2 \frac{1}{2Q} \left[ 1 - \frac{1}{k} \sinh(kQ_\ell) e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right]^2 \quad (36)$$

Para **subamortecimento**:

$$\frac{1}{2} (L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2_{ent}}(T_v) \right]^2 \frac{v}{D} = R'_2 I_m^2 \frac{1}{2Q} \left[ 1 - \frac{1}{k'} \sin(k'Q_\ell) e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right]^2 \quad (37)$$

E **amortecimento crítico**:

$$\frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2ent} (T_v) \right]^2 \frac{v}{D} = R'_2 I_m^2 \frac{1}{2Q} \left( 1 - Q_\ell e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right)^2 \quad (38)$$

E as perdas parasitas totais por fase pelo efeito longitudinal, no novo modelo, ficam, para **superamortecimento**:

$$R'_2 I_m^2 \left[ \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell) + 4e^{\frac{Q_\ell}{2}} \sinh(kQ_\ell)}{4kQ} - \frac{\sinh^2(kQ_\ell)}{4k^2Q} \right) \right] \quad (39)$$

$$= R'_2 k_p I_m^2$$

Para **subamortecimento**:

$$R'_2 I_m^2 \left[ \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell) + 4e^{\frac{Q_\ell}{2}} \sin(k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\sin^2(k'Q_\ell)}{4k'^2Q} \right) \right] \quad (40)$$

$$= R'_2 k'_p I_m^2$$

E **amortecimento crítico**:

$$R'_2 I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{9}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} + \frac{Q_\ell}{2Q} \left( 2e^{\frac{Q_\ell}{2}} - Q_\ell \right) \right) \right] \quad (41)$$

$$= R'_2 k''_p I_m^2$$

O novo circuito equivalente resultará:

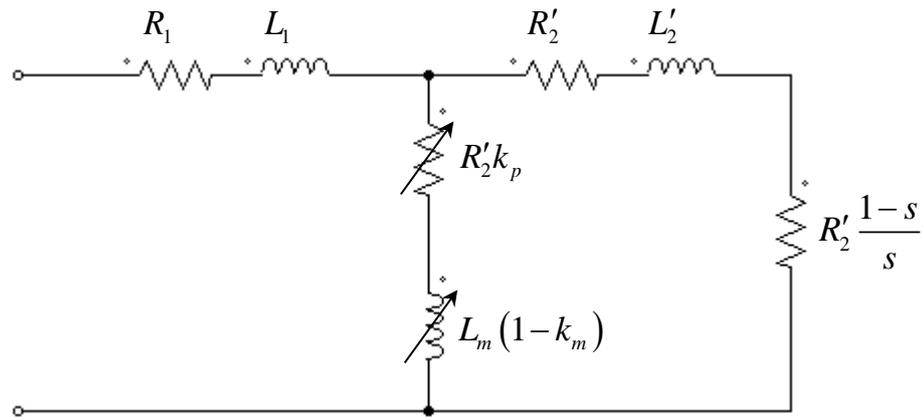


Figura 24 – Circuito equivalente para secundário ranhurado (superamortecido:  $k_p$  e  $k_m$ ; subamortecido:  $k'_p$  e  $k'_m$ ; criticamente amortecido:  $k''_p$  e  $k''_m$ )

#### 4.3.2 Efeitos Transversais

Para secundários maciços com largura superior à do primário, existe o fator simplificado de Russell e Norsworthy, modificado por (GIERAS, 1986), considerando a harmônica  $h$  :

$$k_{RN_h} = 1 - \frac{\tanh\left(h \frac{\pi \ell_{z2}}{2\tau_p}\right)}{h \frac{\pi \ell_{z2}}{2\tau_p} \left[ 1 + \left(1 + 1.3 \frac{t_{ov} - d}{d}\right) \tanh\left(h \frac{\pi \ell_{z2}}{2\tau_p}\right) \tanh\left(h \frac{\pi h_{ov}}{\tau_p}\right) \right]} \quad (42)$$

Tal fator multiplica a condutividade do secundário, alterando  $R'_2$ . A Figura 25 ilustra as medidas utilizadas nesse fator.

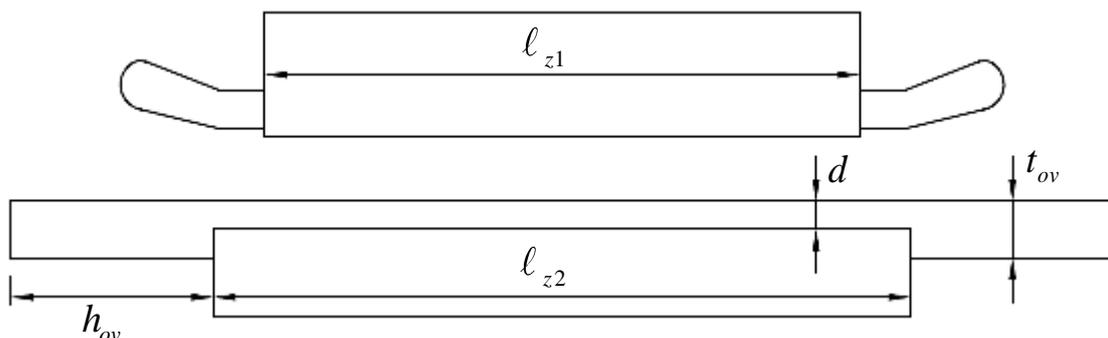


Figura 25 – Vista frontal do motor linear de indução com secundário maciço

A principal diferença do secundário ranhurado, no que diz respeito aos efeitos transversais, é que não há a extensão lateral de uma placa condutora, mas sim das barras de curto-circuito da gaiola. É razoável assumir que tal efeito será menos intenso no secundário ranhurado – ver Figura 26.

A equação (42) serve para secundários maciços. Considerando as adaptações a seguir, ela poderá ser utilizada no caso dos ranhurados.

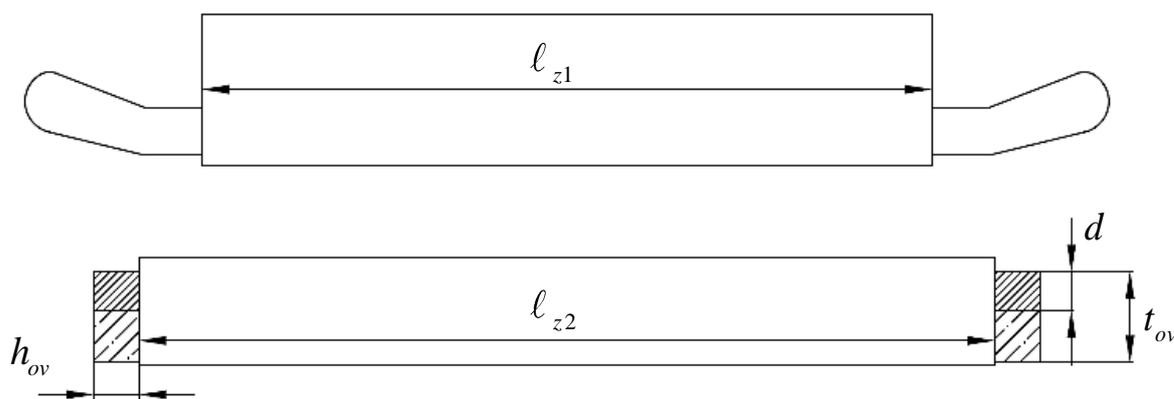


Figura 26 – Vista frontal do motor linear de indução com secundário ranhurados

Conforme já citado, tal fator será considerado no cálculo dos parâmetros, ANEXO B, aplicando-se apenas a correção na resistividade das barras de curto-circuito.

#### 4.3.3 Preenchimento Parcial das Ranhuras

As ranhuras das pontas do primário, quando enrolado com dupla camada, inevitavelmente ficam preenchidas pela metade. A distribuição das forças magnetomotrizes primárias fica afetada e, conseqüentemente, o ramo magnetizante e os parâmetros secundários referidos ao primário (LV, 2018).

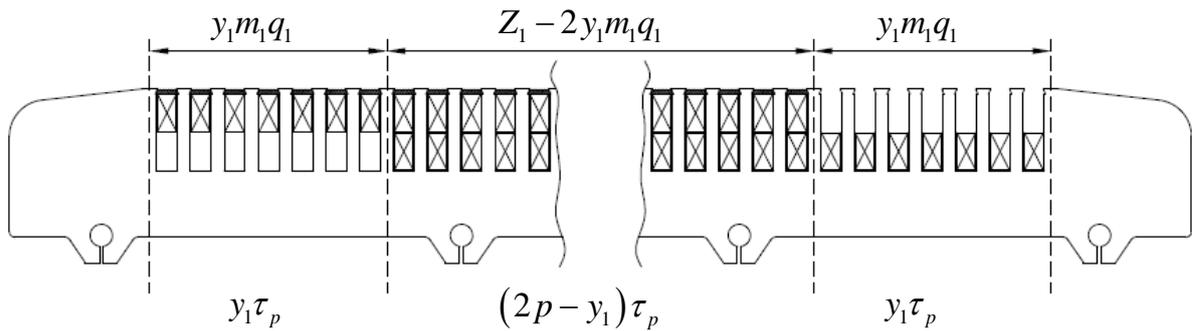


Figura 27 – Número de ranhuras e comprimento referentes ao preenchimento parcial de ranhuras

Fonte: (LV, 2018)

A distribuição de FMM primária fica aproximadamente pela metade nas duas seções onde há preenchimento parcial das ranhuras, de forma que o número de ranhuras e o comprimento equivalente podem ser escritos, com base na Figura 27, por

$$Z'_1 = Z_1 - 2y_1 m_1 q_1 + y_1 m_1 q_1 = Z_1 - y_1 m_1 q_1 \quad (43)$$

$$D' = (2p - y_1) \tau_p + y_1 \tau_p = 2p \tau_p = Z'_1 \tau_{s1} \quad (44)$$

A equação (44) é útil para determinar passo polar efetivo. Tais considerações impactarão os cálculos dos parâmetros para o estudo de caso - ANEXO B.

#### 4.3.4 Forças Verticais

Aplicando, agora, a nova abordagem às forças verticais citadas na seção 4.2.4, calcula-se o valor eficaz da corrente de magnetização efetiva, lembrando da proporcionalidade existente na principal parcela em relação à energia armazenada:

$$F_{v_{air}} = \frac{3}{2\ell_g} L_m \left[ \sqrt{\frac{1}{T_v} \left[ \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{T_v}^{\tau} i'^2_{2m_{saída}}(t) dt \right]} \right]^2 \quad (45)$$

Tem-se para **superamortecimento** na borda de entrada:

(Para os desenvolvimentos, consultar ANEXO C)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt &= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \left( 1 - \frac{\sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{k} \right)^2 dt \\ &= I_m^2 \left\{ 1 - \frac{5}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ_\ell) - 1}{8k^2Q} - e^{\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sinh(kQ_\ell)}{kQ} + \frac{2\cosh(kQ_\ell)}{Q} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

Para subamortecimento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt &= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \left( 1 - \frac{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{k'} \right)^2 dt \\ &= I_m^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\cos(2k'Q_\ell) - 1}{8k'^2Q} - e^{\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sin(k'Q_\ell)}{k'Q} + \frac{2\cos(k'Q_\ell)}{Q} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

E amortecimento crítico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt &= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \left( 1 - \frac{1}{T_{2\ell}} t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} \right)^2 dt \\ &= I_m^2 \left[ 1 - \frac{6}{Q_\ell} + 4e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( 1 + \frac{2}{Q_\ell} \right) - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} \right) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

Para a borda de saída, tem-se situação idêntica à da equação (34):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_0^{\tau} i'^2_{2m_{saida}}(t) dt = I_m^2 \frac{T_{2\ell}}{4T_v} = I_m^2 \frac{1}{4Q_\ell}$$

E componente de atração fica, para **superamortecimento** na entrada:

$$\begin{aligned}
F_{v_{arr}} &= \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \left[ 1 + \frac{1}{4Q_\ell} - \frac{3}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ_\ell) - 1}{8k^2Q} - e^{\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sinh(kQ_\ell)}{kQ} + \frac{2\cosh(kQ_\ell)}{Q} \right) \right] \right] \\
&= \frac{3}{2\ell_g} k_v L_m I_m^2
\end{aligned} \quad (49)$$

Para subamortecimento:

$$\begin{aligned}
F_{v_{arr}} &= \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \left[ 1 + \frac{1}{4Q_\ell} - \frac{3}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\cos(2k'Q_\ell) - 1}{8k'^2Q} - e^{\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sin(k'Q_\ell)}{k'Q} + \frac{2\cos(k'Q_\ell)}{Q} \right) \right] \right] \\
&= \frac{3}{2\ell_g} k'_v L_m I_m^2
\end{aligned} \quad (50)$$

E amortecimento crítico:

$$\begin{aligned}
F_{v_{arr}} &= \frac{3}{2\ell_g} L_m I_m^2 \left[ 1 + \frac{1}{4Q_\ell} - \frac{6}{Q_\ell} + 4e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( 1 + \frac{2}{Q_\ell} \right) - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} \right) \right] \\
&= \frac{3}{2\ell_g} k''_v L_m I_m^2
\end{aligned} \quad (51)$$

Quanto à componente de repulsão, a princípio permanece a expressão segundo (DUNCAN, 1983):

$$F_{v_{rep}} = k_r \frac{I_2^2}{h_{12}} \quad (52)$$

O comprimento  $h_{12}$ , agora, corresponde à distância entre os centros dos condutores primários e secundários. A constante  $k_r$  deverá ser determinada a partir de testes estáticos. Mais à frente os valores encontrados serão explicitados.

#### 4.4 Teste de Sensibilidade

Antes dos dados experimentais, com a finalidade de comparar previamente os modelos de (DUNCAN, 1983) e o proposto, são aproveitados os valores do motor linear de 6 polos apresentado em (DUNCAN, 1983), de secundário sólido e coroa magnética. Perceber na Tabela 1 o valor consideravelmente baixo da indutância de dispersão secundária.

Tabela 1 – Parâmetros do motor linear do artigo de referência

MEDIDA	mm	PARÂMETRO	por fase
Comprimento do Primário	1900	$R_1$	0.038 $\Omega$
Larguras Primário/Secundário	216/240	$L_1$	0.00104 H
Entreferro	17.1	$R'_2$	0.109 $\Omega$
Passo Polar	287	$L'_2$	0.0002 H
Espessura da Lâmina Secundária	4.5	$L_m$	0.00449 H

Fonte: (DUNCAN, 1983)

#### 4.4.1 Variação da Frequência

Para se testar a sensibilidade quanto à alimentação, variou-se tensão e frequência em um primeiro momento – Figuras 28 e 29, mantendo-se a dispersão secundária original. A princípio, a resistência secundária não foi corrigida por efeito pelicular, haja vista a falta de dados geométricos do protótipo.

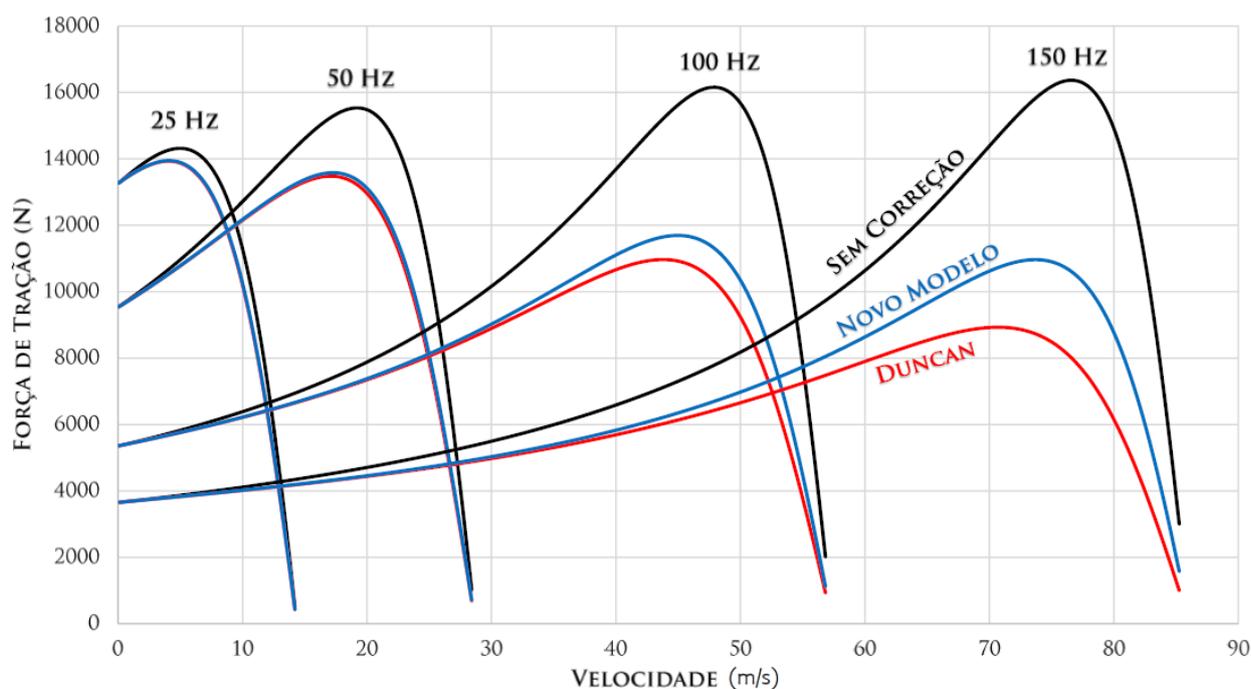


Figura 28 – Sensibilidade da Força de Tração em relação à frequência de alimentação, com indutância secundária constante

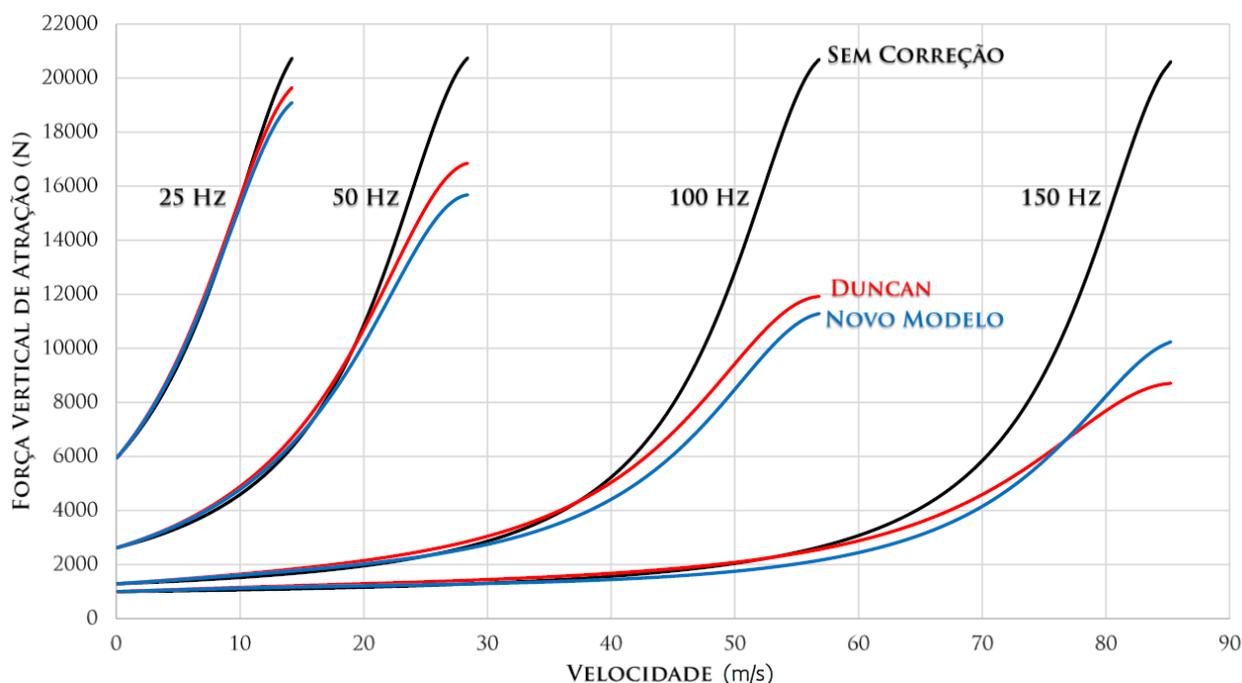


Figura 29 – Sensibilidade da Força Vertical de Atração em relação à frequência de alimentação, com indutância secundária constante

As curvas legendadas por “Sem Correção” correspondem ao circuito equivalente básico do motor de indução, sem quaisquer fatores de correção para os efeitos de borda.

As curvas das Figuras 28 e 29 mostram uma possível contribuição do novo modelo, mesmo para secundários sólidos, para frequências acima de 60 Hz. As curvas em sequência consideraram alteração na dispersão secundária em relação ao valor original de (DUNCAN, 1983).

#### 4.4.2 Variação da Dispersão Secundária

Já as curvas das Figuras 30 e 31, mantendo-se frequência fixa em 100 Hz, alterou-se  $L'_2$  de forma a se obterem as relações indicadas nos corpos dos diagramas, mantendo-se constantes os outros parâmetros. A referência de valor máximo foi  $L_m/L'_2 = 22,45$ , relação encontrada nos parâmetros da Tabela 1 (DUNCAN, 1983).

O objetivo aqui é enxergar a sensibilidade do modelo proposto quanto à dispersão secundária. Os três pontos propostos (22,45/10/3,5) se mantêm no caso

superamortecido, sendo escolhidos apenas para se observar o comportamento ao longo da variação.

O eixo das abscissas vai de zero à velocidade síncrona por três vezes repetidas.

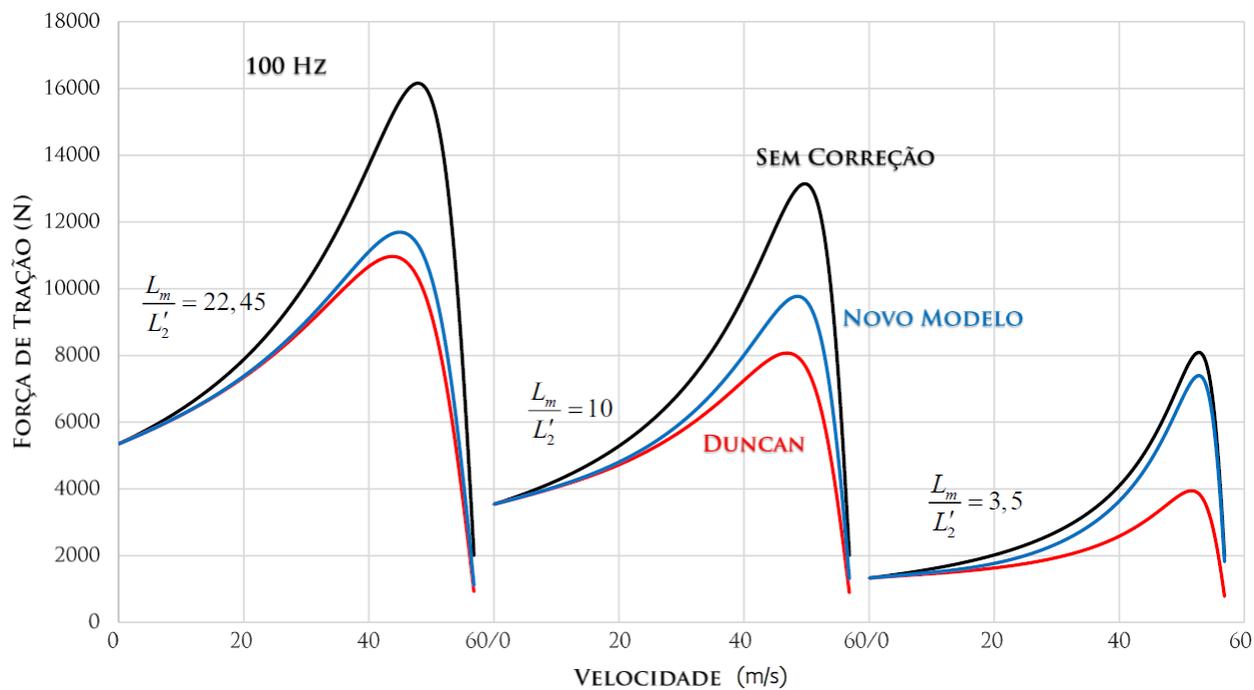


Figura 30 – Sensibilidade da Força de Tração em relação à indutância secundária, com frequência constante

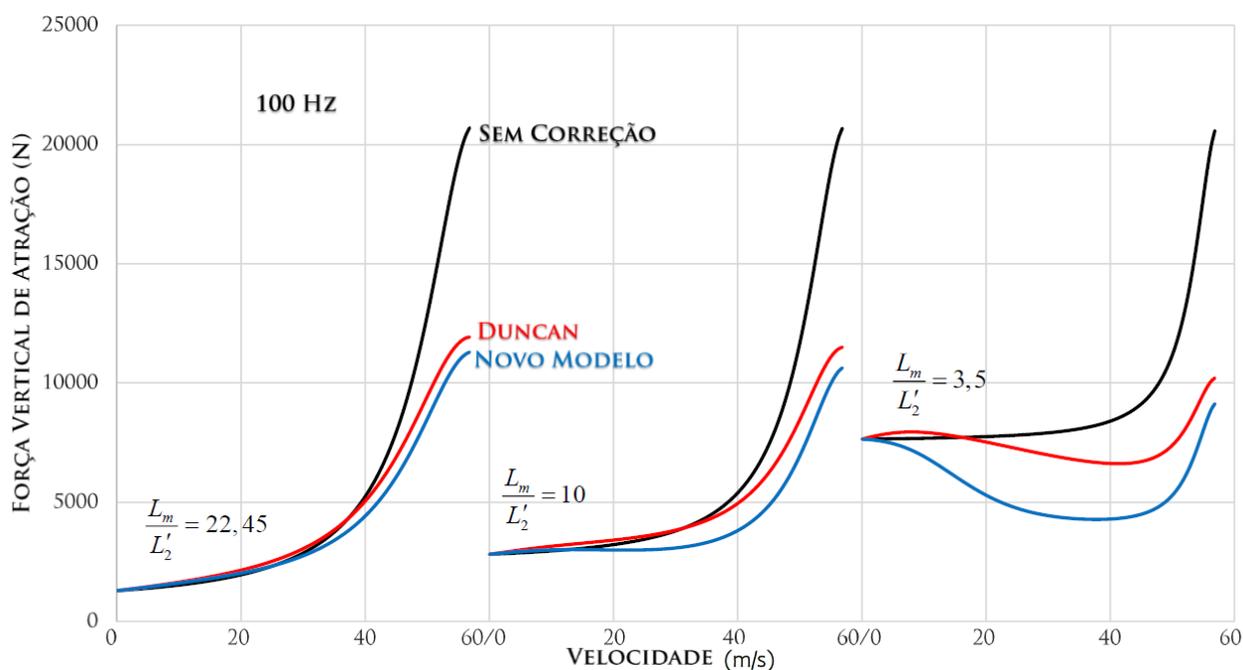


Figura 31 – Sensibilidade da força de atração em relação à indutância secundária, com frequência constante

Observa-se uma sensibilidade maior em relação à dispersão secundária, ainda que a força de tração se distinga bem na variação da frequência.

## 5 Testes Experimentais e Discussões

O projeto de um protótipo de motor linear para testes envolve certas dificuldades, principalmente no que diz respeito à medição de forças de tração e verticais. No caso do presente trabalho, optou-se por uma construção do primário em forma de setor circular, conforme será mostrado a seguir. Os secundários foram fabricados em forma circular.

### 5.1 Fabricação

Para fins de comparação entre os modelos, construiu-se um secundário duplo: ranhurado e maciço. O desenho de conjunto encontra-se na Figura 32.

O primário curto foi feito de tal forma a poder se deslocar lateralmente, ora acoplando com o secundário ranhurado, ora com o maciço. Além disso, eixos verticais nas laterais, guiados por mancais lineares, possibilitaram a medição de forças verticais.

A máquina foi concebida e construída nas instalações da empresa Equacional Elétrica e Mecânica, e as Figuras 33 a 37 ilustram o processo construtivo.

A concentricidade dos raios primário e secundários se dá com entreferro igual a 2 mm (5 mm no caso do secundário maciço, considerando a espessura da lâmina condutora em alumínio). Qualquer valor distinto desse resulta em entreferros diferentes ao longo do primário. Dessa forma, foram considerados valores médios nos pontos experimentais.

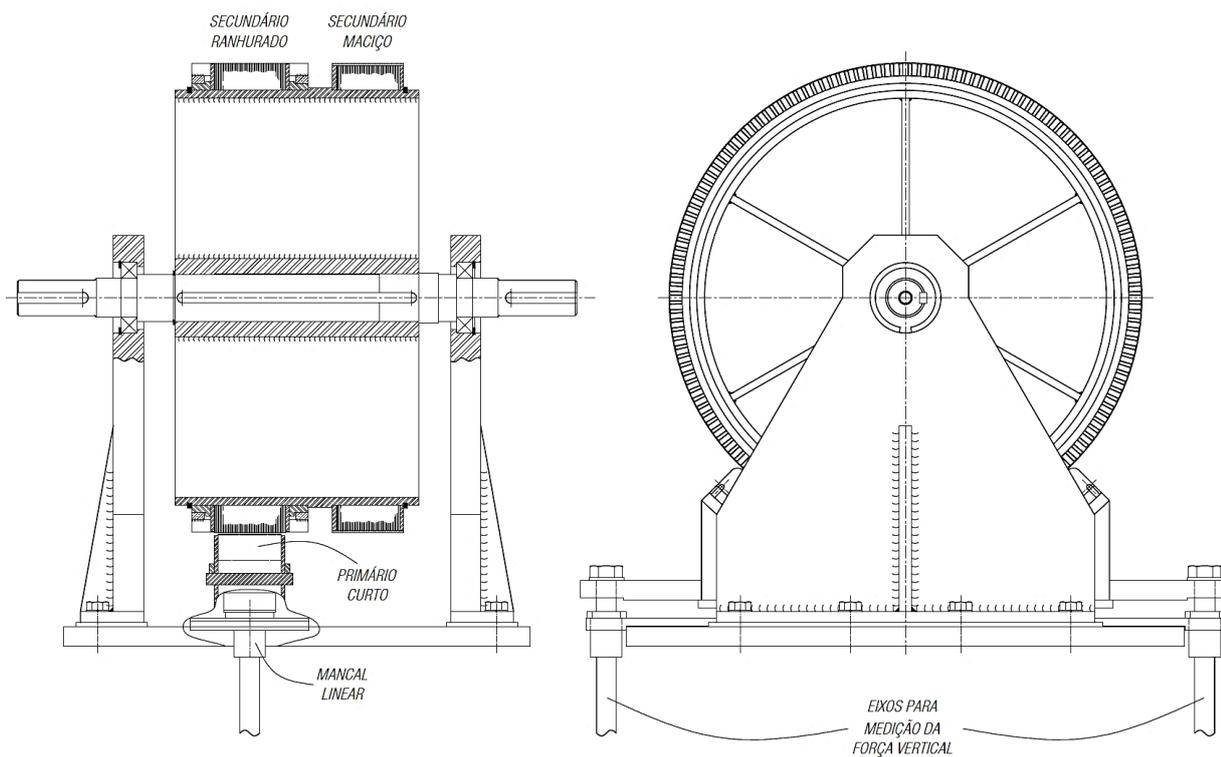


Figura 32 – Desenho de conjunto do protótipo fabricado

Em seguida, algumas fotografias do processo construtivo:



Figura 33 – Primário no estágio de montagem do núcleo magnético



Figura 34 – Cubo do secundário duplo



Figura 35 – Lâmina do núcleo secundário ranhurado



Figura 36 – Secundário ranhurado no estágio da montagem da gaiola em cobre

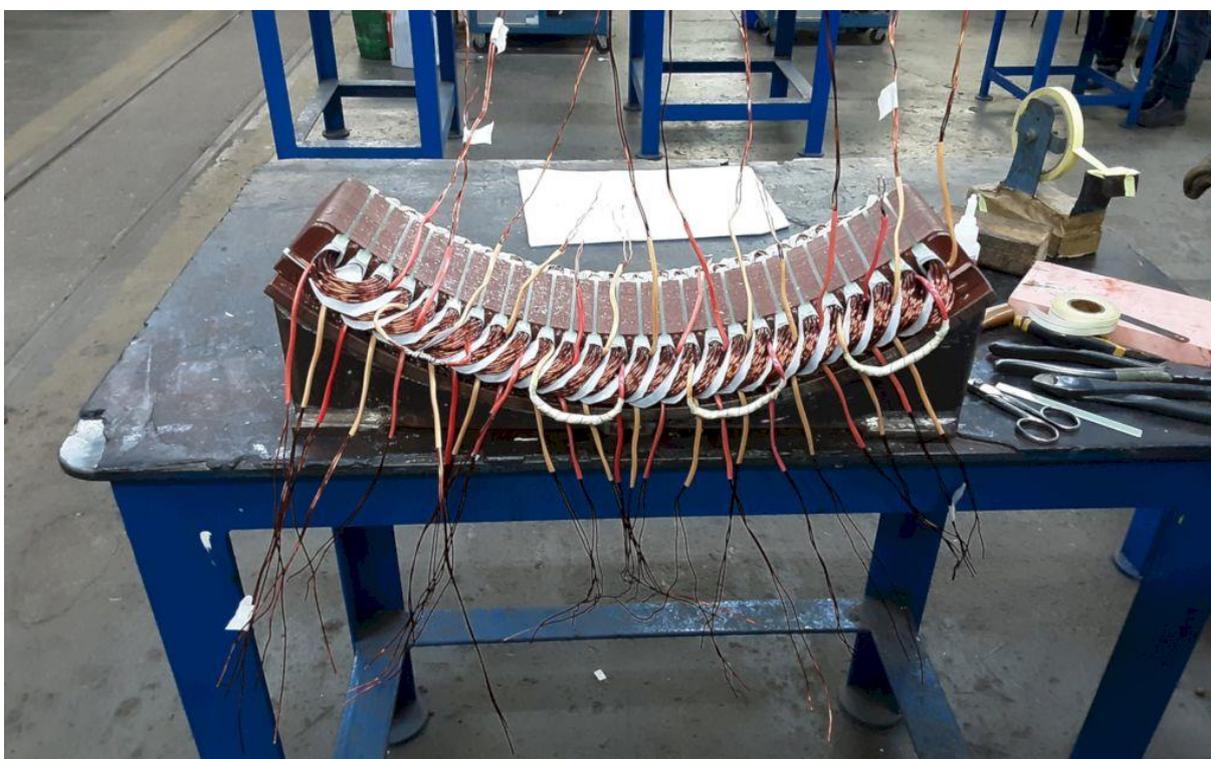


Figura 37 – Primário no estágio de bobinamento

Os dados nominais e construtivos do motor (secundário ranhurado) encontram-se na Tabela 2. O secundário maciço será tratado em seção posterior. Os valores de resistência estão considerados a 20°C.

**Tabela 2 – Dados nominais ao longo da frequência e construtivos do protótipo de teste (secundário ranhurado)**

$f_1$ [Hz]	30 - 150	$\ell_g$ [mm]	2 a 5	$q_1$	1
$V_1$ [V]	87,5 - 437,5	$Z_1/Z'_1$	26/24	$y_1$	2
$F_{tr}$ [N]	120 - 175	$Z_2/Z'_2$	38/35	$N_1$	256
$v_{s_{nom}}$ [m/s]	3,1 - 15,5	$\ell_{z_1}$ [mm]	80	$D$ [mm]	455
$m_1$	3	$\ell_{z_2}$ [mm]	90	$D'$ [mm]	412
$2p$	8	$k_{e1}$	0,866	$R_1$ [ $\Omega/f$ ]	0,646
$\tau_p$ [mm]	51,5	$k_{RN_1}$	0,844	$R'_2$ [ $\Omega/f$ ]	0,628

A bancada de testes com seus componentes segue ilustrada na Figura 38.

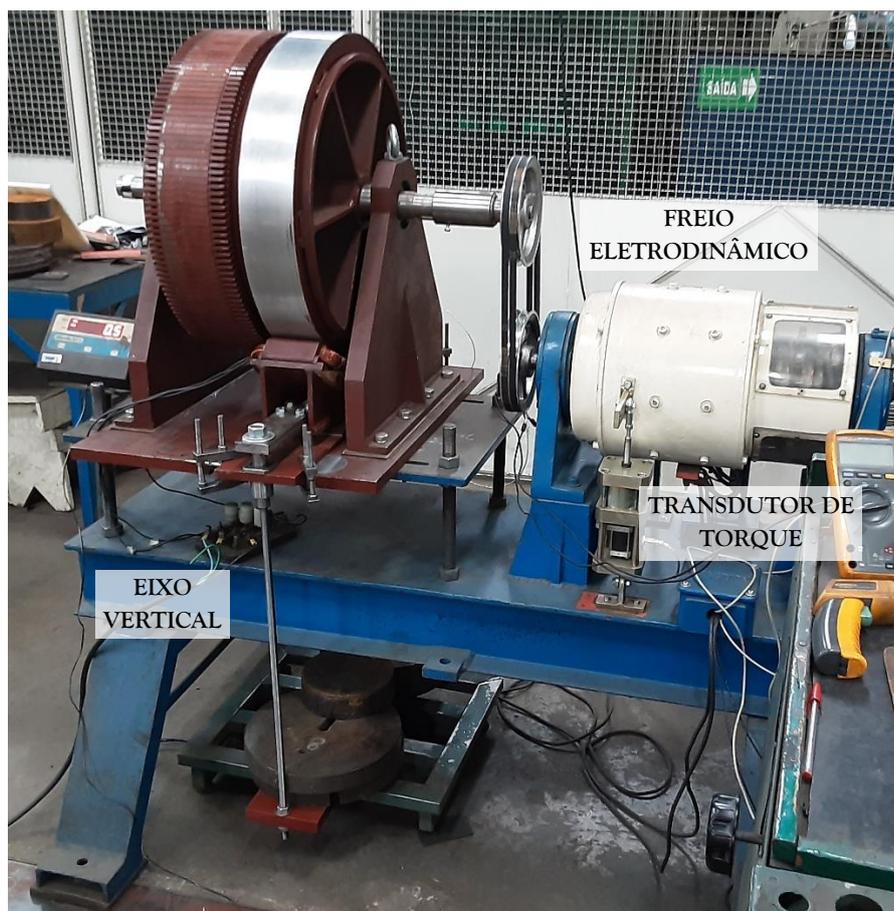


Figura 38 – Bancada de testes do protótipo

A partir dos dados da Tabela 2 e outros adicionais (enrolamentos e geometria de ranhuras), chega-se aos valores de indutâncias da Tabela 3. Os valores apresentados não consideram correções por efeito pelicular. As tais foram contabilizadas de acordo com cada caso e ponto de carga.

O ANEXO B contém um memorial de cálculo dos parâmetros primários e secundários (apenas secundário ranhurados), utilizando as correções necessárias concernentes ao efeito transversal de borda e o preenchimento parcial das ranhuras, conforme exposto no capítulo anterior.

Percebe-se na Tabela 3 que, já a partir do entreferro acima de 3 mm, o caso subamortecido se aplica ( $L_m/L'_2 < 3$ ). Para o protótipo, o caso de amortecimento crítico ( $L_m/L'_2 = 3$ ) se dá por volta do entreferro de 3,1 mm. Os entreferros aqui

tratados serão os valores sem as correções usuais de Carter. Tais fatores foram devidamente considerados nos cálculos do ANEXO B.

Tabela 3 – Indutâncias calculadas de acordo com a variação do entreferro

$L_m [mH/f]$	$L_1 [mH/f]$	$L'_2 [mH/f]$	$L_m/L'_2$	$\ell_g [mm]$
18,2	7,58	3,87	4,70	2
12,4	7,39	4,03	3,08	3
9,36	7,35	4,16	2,25	4
7,55	7,36	4,26	1,77	5

## 5.2 Levantamento das Curvas Características e Comparações (Secundário Ranhurado)

Em posse dos valores acima calculados, pode-se levantar as curvas das forças de tração e vertical resultante em função da velocidade para diferentes frequências, entreferros e modelos.

As comparações são basicamente entre

- i. o modelo sem considerar o efeito de borda longitudinal, ou seja, o circuito equivalente utilizado para máquinas rotativas, porém com as correções do efeito transversal adaptado (item 4.3.2, referente ao fator  $k_{RN}$ ) e do preenchimento parcial das ranhuras;
- ii. o modelo de (DUNCAN, 1983), com a adaptação do fator de efeito transversal;
- iii. o modelo proposto.

Junto às curvas teóricas, os pontos experimentais foram plotados. Conforme já foi dito, o secundário maciço será considerado em seção posterior.

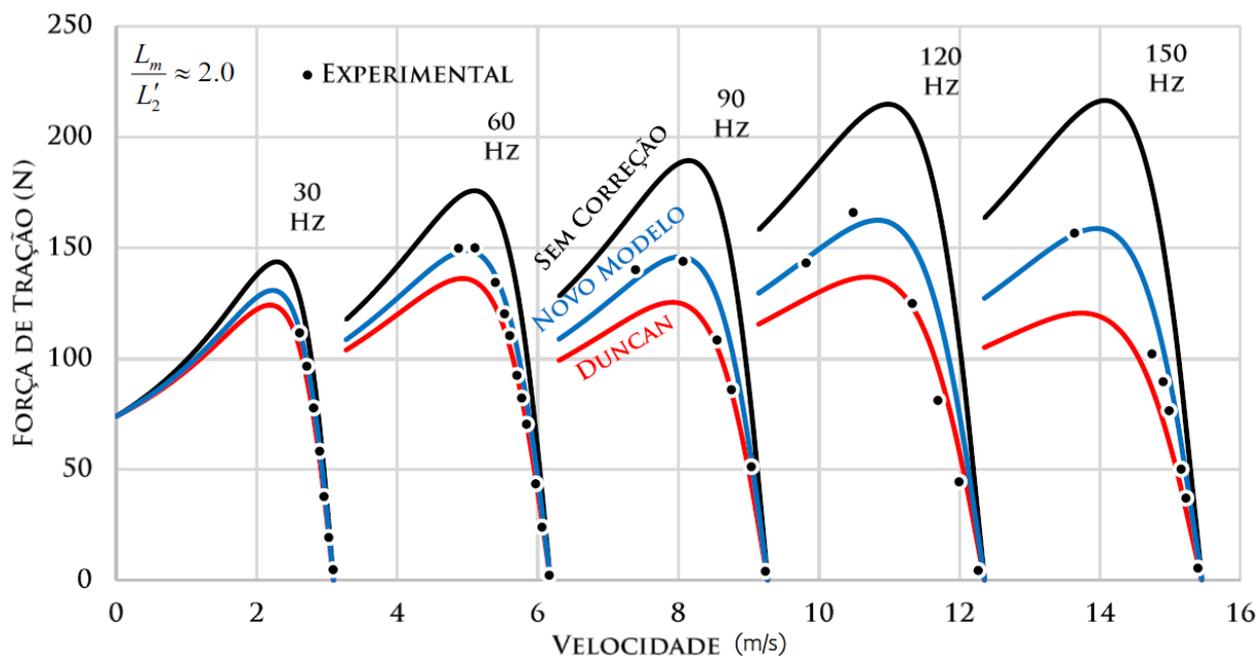


Figura 39 – Comparação da força de tração através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,4 mm (efetivo)

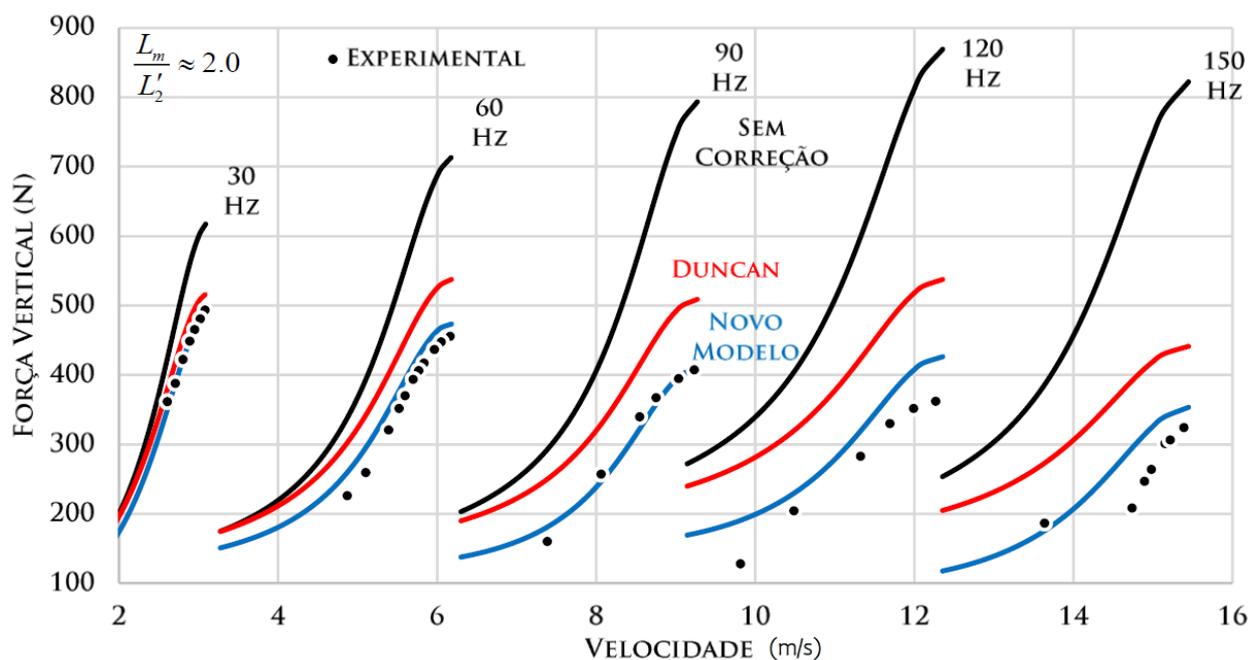


Figura 40 – Comparação da força vertical através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,4 mm (efetivo)

A variação nos valores dos entreferrros se deu por conta das alterações das forças verticais. Na concepção do protótipo, o primário permanece sustentado sobre a

balança por meio dos eixos verticais e mancais lineares. Dessa forma, as diferentes forças verticais ao longo dos ensaios proporcionam flexões diferentes nas peças mais longas, alterando levemente a distância entre primário e secundário. Essa é uma debilidade do protótipo, a ser mitigada em estudos posteriores.

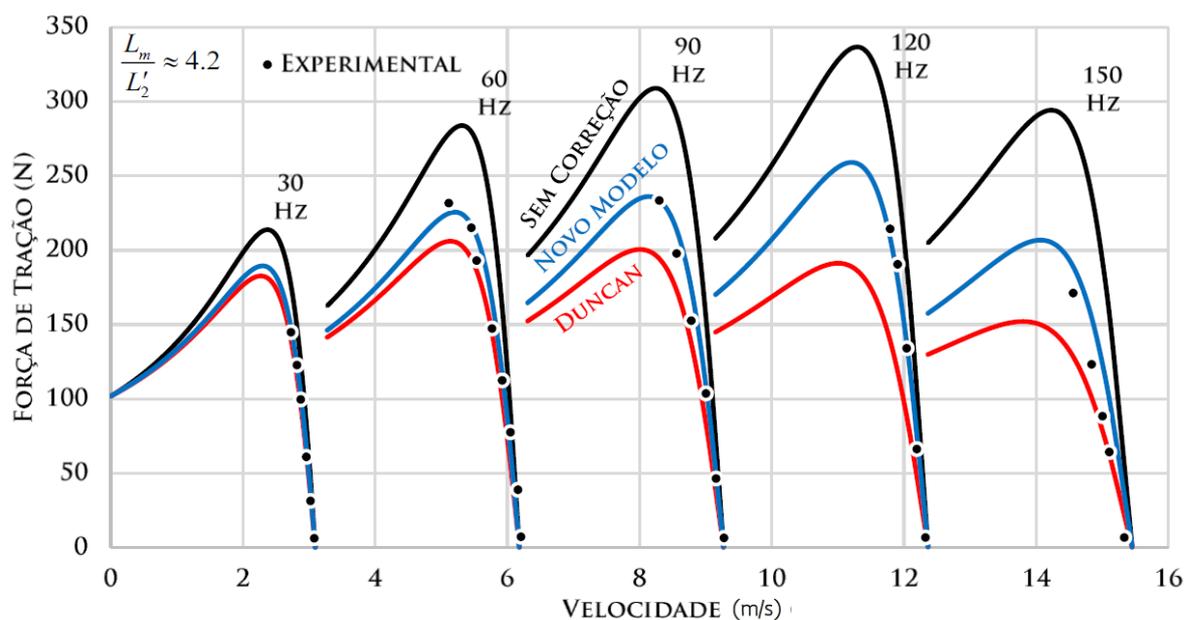


Figura 41 – Comparação da força de tração através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso superamortecido. Entreferro médio de 2,23 mm (efetivo)

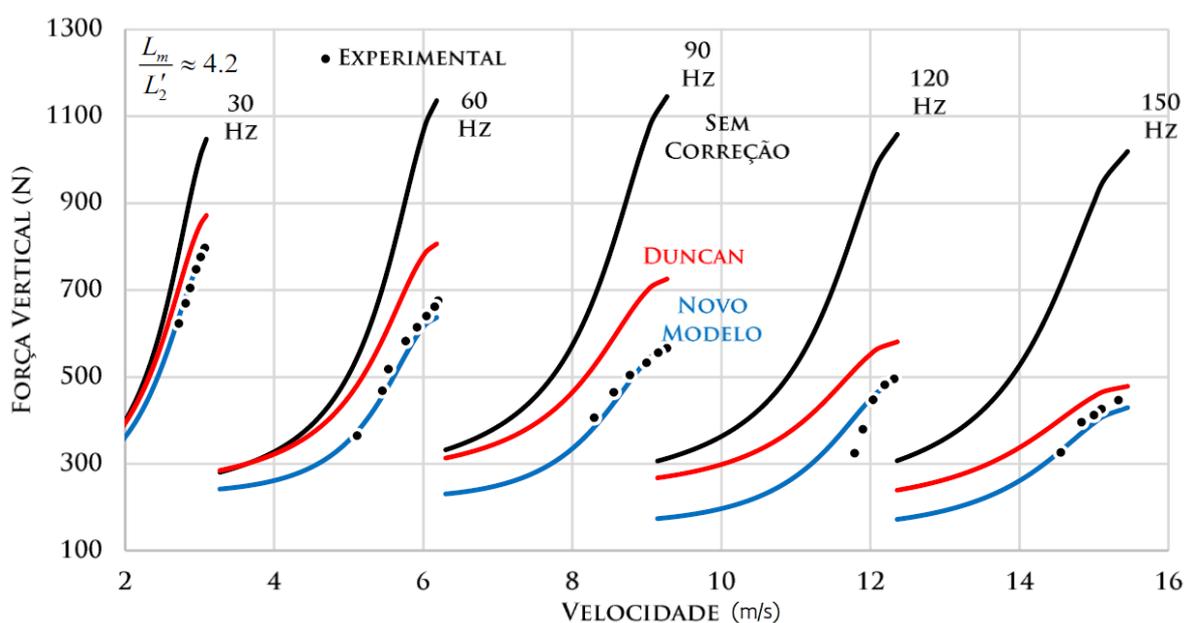


Figura 42 – Comparação da força vertical através da variação de frequência para secundário ranhurado, caso superamortecido. Entreferro médio de 2,23 mm (efetivo)

### 5.3 Levantamento das Curvas Características e Comparações (Secundário Maciço)

No caso do secundário maciço, pelo fato da dispersão ser substancialmente menor, quando comparada à do ranhurado, o caso superamortecido é predominante. Ainda que os entreferros sejam maiores, dada a lâmina de alumínio, o que faz diminuir  $L_m$ , a relação  $L_m/L'_2$  é quase sempre maior do que 3 (ver cálculos mais adiante).

Para este caso em especial, os parâmetros do secundário foram obtidos via ensaios de vazio e rotor bloqueado, já que o cálculo analítico não possui substancial precisão, nem se trata do foco deste trabalho. Os parâmetros do primário, bem como a indutância de magnetização, foram calculados analiticamente.

Detalhes do secundário maciço são ilustrados na Figura 43.

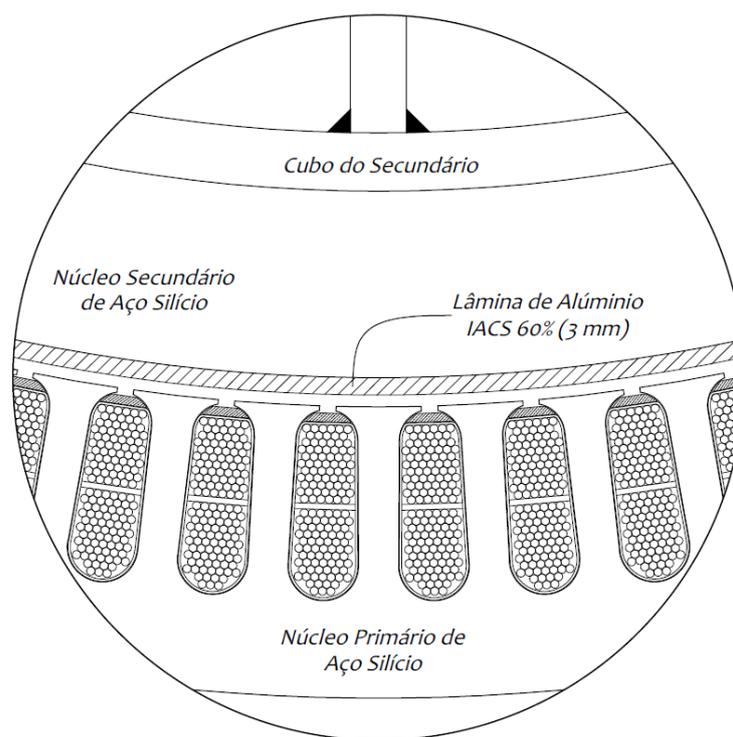


Figura 43 – Detalhe do secundário maciço

Para o levantamento experimental de  $L'_2$  e  $R'_2$ , preferiram-se os testes em  $30\text{ Hz}$ , já que o efeito pelicular seria muito pequeno. Os circuitos equivalentes para vazio e secundário bloqueado são ilustrados nas Figuras 44 a 47.

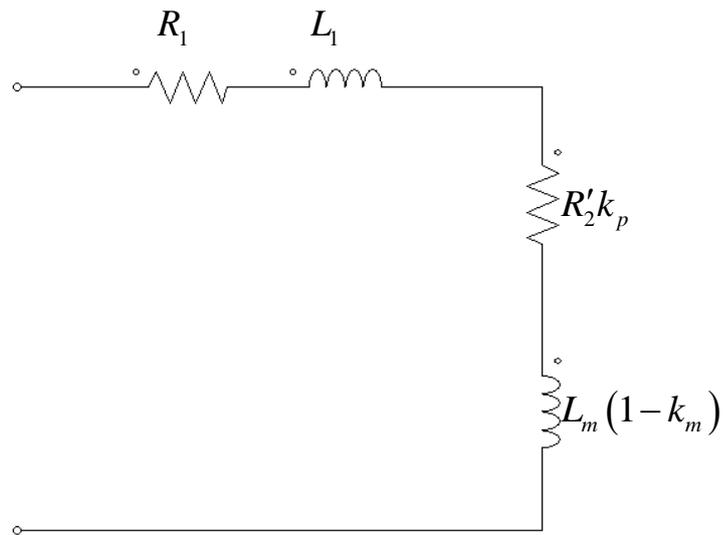


Figura 44 - Circuito do ensaio em vazio

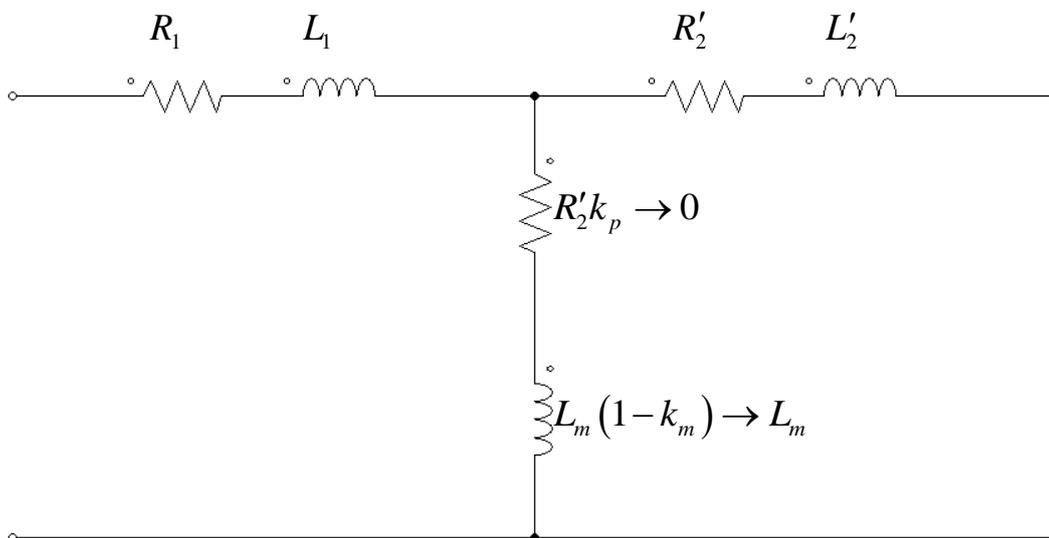


Figura 45 - Circuito do ensaio com secundário bloqueado

Resultados dos ensaios:

Tabela 4 – Ensaio de vazio e secundário bloqueado (maciço)

$s$	$f_1$ [Hz]	$V_1$ [V]	$I_1$ [A]	$P_1$ [W]	$F_{tr}$ [N]	$F_v$ [N]	$\ell_g$ [mm]
0	30	87,5	15,4	650	0	442	4,05
1	30	87,5	16,4	1150	140	330	4,05

Os parâmetros calculados de antemão são:

$$R_1 = 0,646 @ 20^\circ\text{C} \ \Omega/\text{fase} \quad L_1 = 7,35 \text{ mH}/\text{fase} \quad L_m = 9,20 \text{ mH}/\text{fase}$$

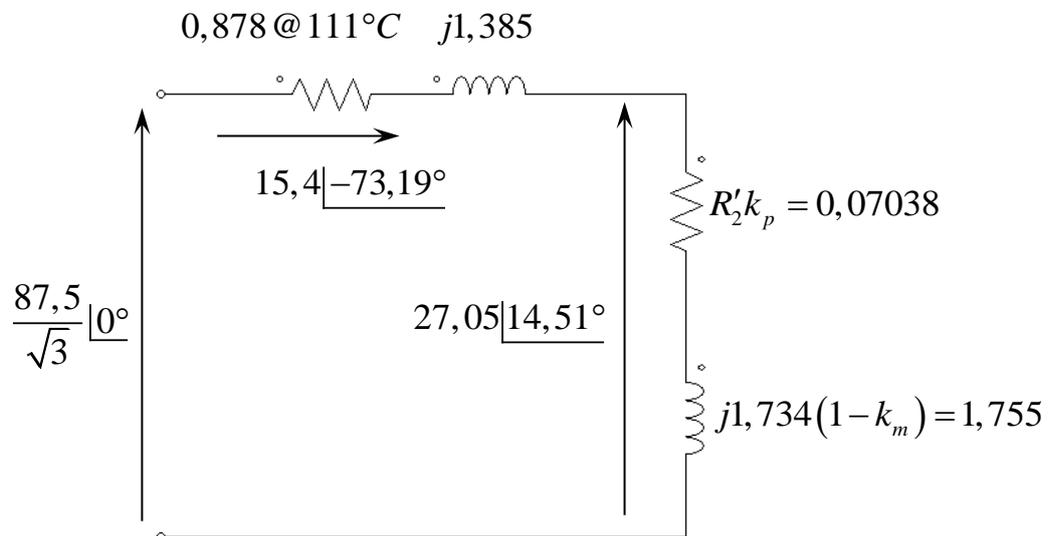


Figura 46 – Valores para o ensaio em vazio a 30 Hz (secundário maciço)

As equações 53 (inclusa na equação 27) e 54 (inclusa na equação 39) são aqui colocadas por razões de conveniência. As expressões na equação 55 são para o caso particular de vazio ( $s = 0$ ):

$$k_m = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_\ell} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sinh(kQ_\ell)}{2Qk} + \frac{\cosh(kQ_\ell)}{Q} \right) \quad (53)$$

$$k_p = \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell) + 4e^{\frac{Q_\ell}{2}} \sinh(kQ_\ell)}{4kQ} - \frac{\sinh^2(kQ_\ell)}{4k^2Q} \right) \quad (54)$$

$$Q = \frac{pR'_2}{f_1(L_m + L'_2)} \quad Q_\ell = \frac{pR'_2}{f_1L'_2} \quad k = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L'_2}{L_m + L'_2}} \quad (55)$$

Com  $L_m$  conhecido, restam apenas duas incógnitas, as quais resultaram em:

$$R'_2 = 2,84 \text{ } \Omega / \text{fase} \quad L'_2 = 70,0 \text{ } \mu\text{H} / \text{fase}$$

De maneira semelhante, pode-se calcular  $R'_2$  e  $L'_2$  para o ensaio de secundário bloqueado:

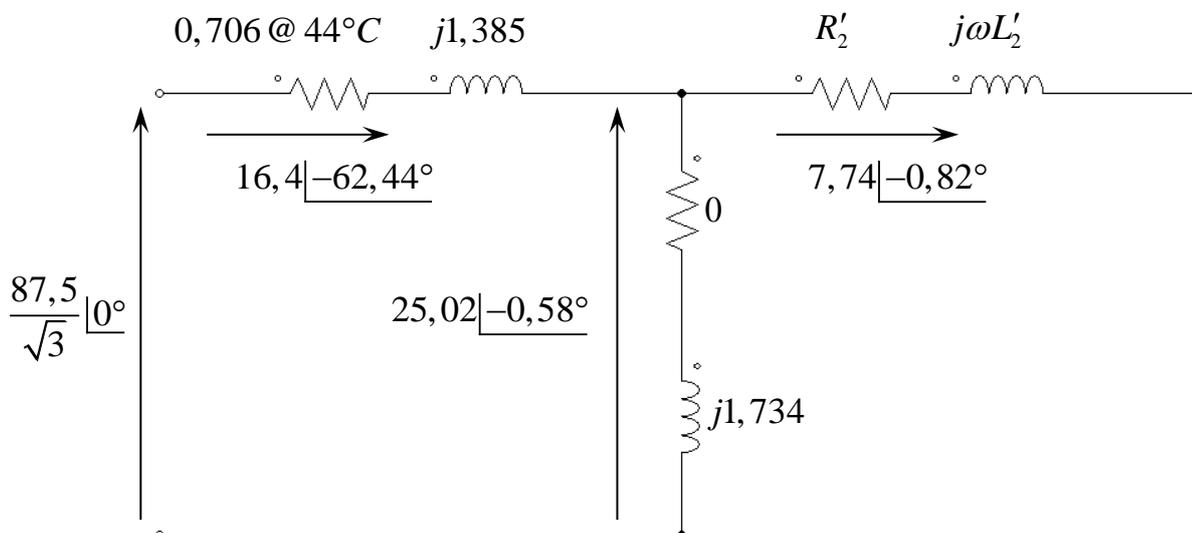


Figura 47 - Valores para o ensaio com secundário bloqueado a 30 Hz (secundário maciço)

Como  $L'_2$  é muito pequeno e resulta da subtração de valores bem maiores, o maior número de casas decimais é preferível neste cálculo. No caso de secundário bloqueado, os valores resultantes foram:

$$R'_2 = 3,23 \text{ } \Omega / \text{fase} \quad L'_2 = 69,1 \text{ } \mu\text{H} / \text{fase}$$

Pouca diferença houve entre os valores obtidos pelos 2 ensaios. Fatores como temperatura e efeito pelicular, por menor que este último seja, podem influenciar. Para a comparação com os pontos experimentais, optou-se pelos valores médios:

$$R'_2 = 3,04 \text{ } \Omega/\text{fase} \quad L'_2 = 69,6 \text{ } \mu\text{H}/\text{fase} \quad \rightarrow \quad L_m/L'_2 = 132$$

As Figuras 48 e 49 mostram as comparações teóricas e experimentais para forças de tração e verticais. Neste caso, as curvas em vermelho (DUNCAN) estão superpostas pelas em azul (NOVO MODELO). A causa mais provável é que a resistência secundária é muito alta, proporcionalmente, de forma a diminuir muito as constantes de tempo das ondas de entrada e saída, além do baixíssimo valor da reatância de dispersão secundária.

Os entreferros informados já consideram a espessura da placa secundária maciça (3 mm).

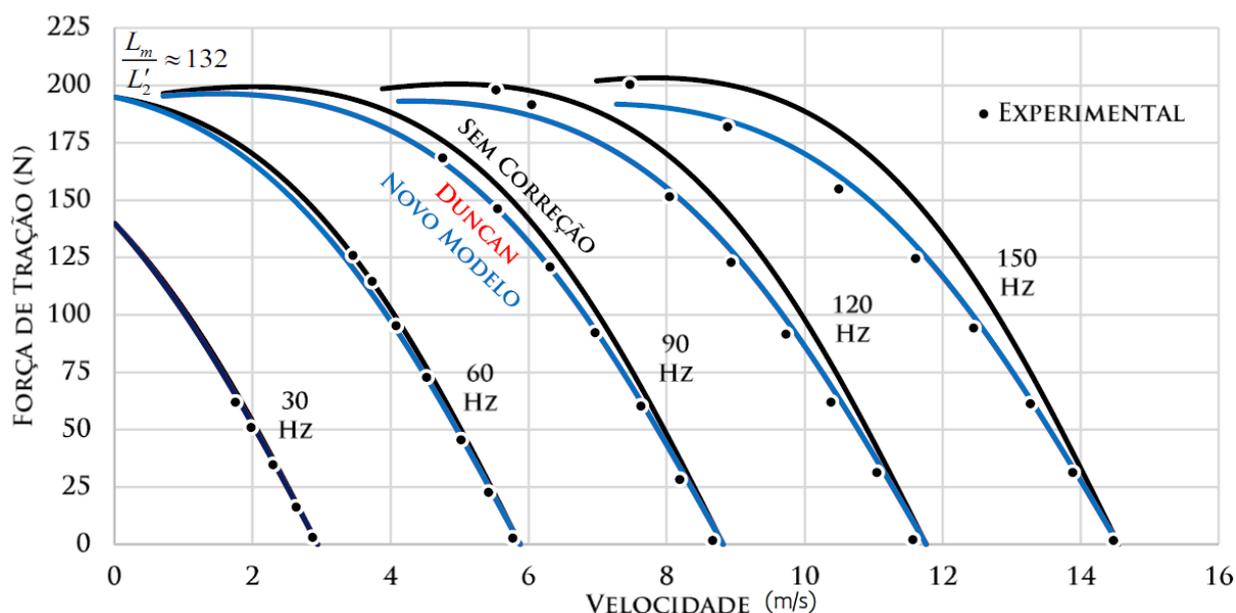


Figura 48 – Comparação da força de tração através da variação de frequência para secundário maciço, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,01 mm

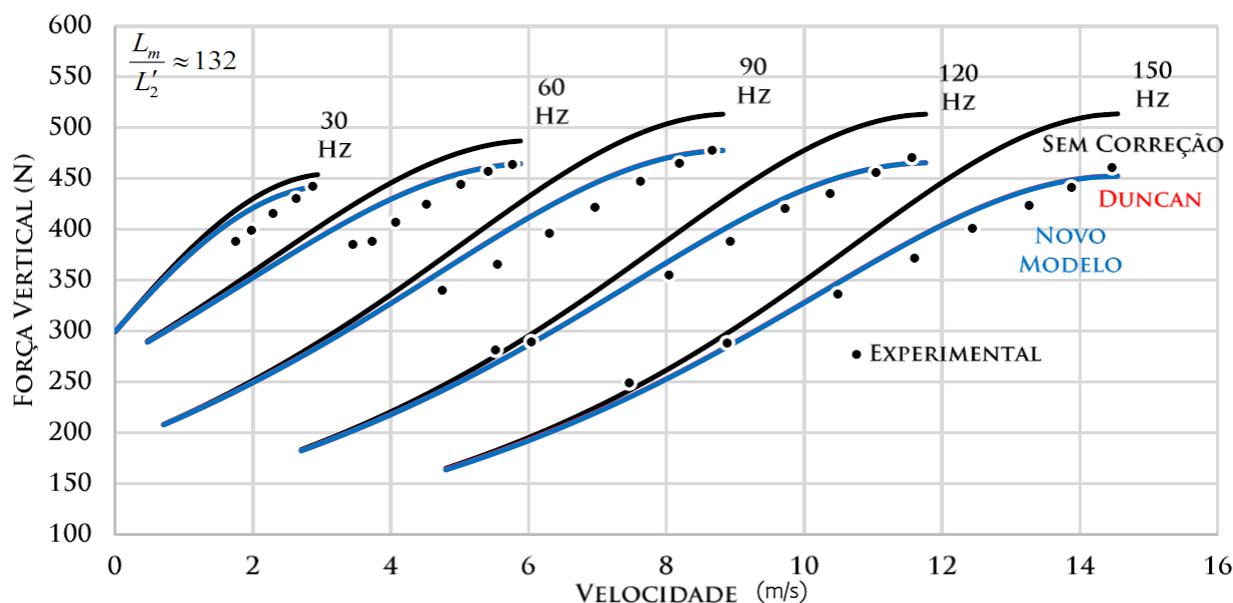


Figura 49 – Comparação da força vertical através da variação de frequência para secundário maciço, caso subamortecido. Entreferro médio de 4,01 mm

A Figura 50 esclarece melhor porque não houve substancial diferença entre o modelo (DUNCAN, 1983) e o proposto no secundário maciço. Adicionalmente, o caso simulado na seção 4.5 também aparece, para fins de comparação. Tais ondas foram calculadas para 60 Hz e  $s = 20\%$ .

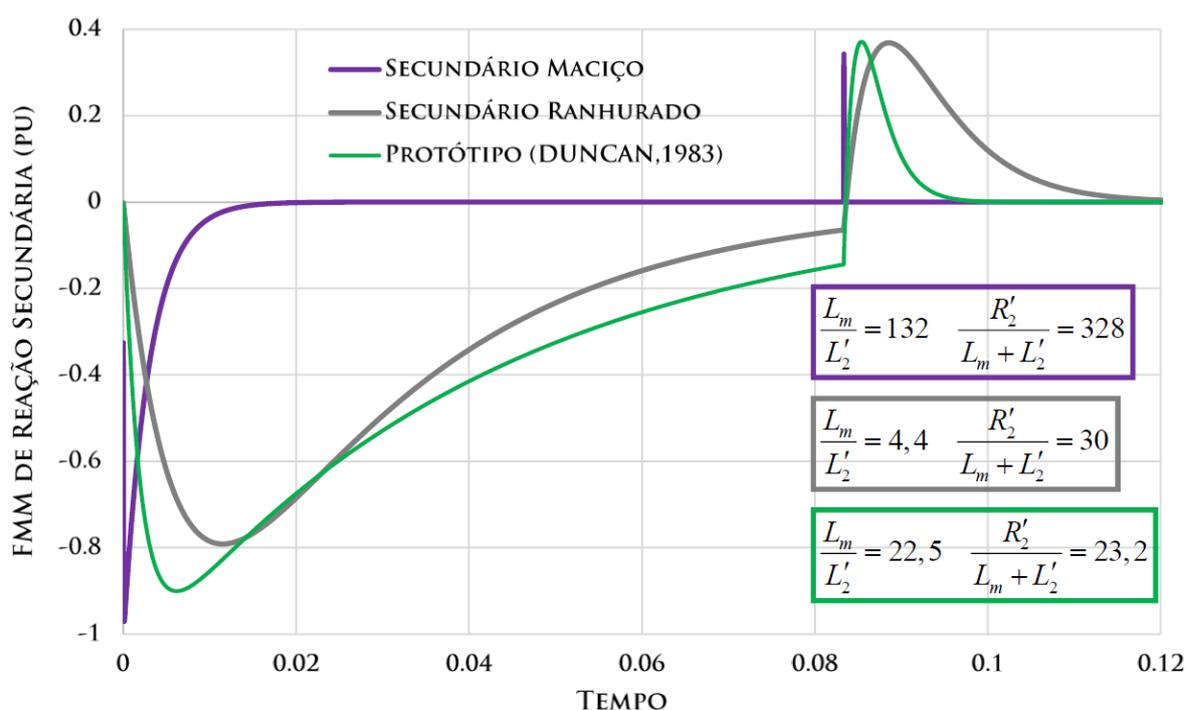


Figura 50 – Ondas de FMM de reação secundária para alguns dos casos estudados. O valor de base é a FMM de magnetização primária.

## 6 Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros

Fica claro, através dos resultados, que as razões  $L_m/L'_2$  e  $R'_2/(L_m + L'_2)$ , caso apresentem valores razoavelmente altos, acabam por superpor os resultados do modelo proposto ao de (DUNCAN, 1983).

Assim, o modelo proposto e desenvolvido se provou útil principalmente em secundários ranhurados, onde os casos de super e subamortecimento são aplicáveis. A previsão de forças de tração e verticais ficam prejudicadas pelo modelo (DUNCAN, 1983) quando a dispersão secundária aumenta ( $L_m/L'_2 \approx 3$ ), bem como nos casos de resistência secundária não muito alta ( $R'_2/(L_m + L'_2) \approx 30$ ). O modelo proposto cobre satisfatoriamente tais casos.

Além disso, à medida que a frequência aumenta, o tempo necessário para se percorrer o comprimento efetivo do primário ( $T_v$ ) diminuirá, acentuando os efeitos desmagnetizante (entrada) e magnetizante (saída). Entretanto, ao mesmo tempo, o aumento da frequência também acentuará o efeito pelicular, de forma a elevar a razão  $R'_2/(L_m + L'_2)$ . Dependendo do caso, haverá um intervalo de frequências onde o modelo se mostrará mais distante de (DUNCAN, 1983) - ver novamente as Figuras 41 e 42, onde os modelos se aproximam após 120 Hz .

Ademais, o trabalho abre caminho para alguns estudos futuros, tais como: (i) a otimização do protótipo quanto à influência dos dispositivos de medição na medida do entreferro, bem como no dimensionamento do secundário maciço, (ii) melhor desenvolvimento de um método para levantamento do circuito equivalente a partir de ensaios e (iii) aplicação do modelo para outros tipos de motores lineares de indução, como por exemplo o de primário duplo e/ou secundário segmentado sem coroa magnética.

## Referências

ALSCHER, H., BOLDEA, I. F., EASTHAM, A. R., IGUCHI, M.: “Propelling Passengers Faster Than a Speeding Bullet: As Maglev Urban Railways Get Tracking, Lines in West Germany, Japan, And Canada Are Expected to Follow England's Commercial Lead”, *IEE Spectrum*, v. 21, n. 8, p. 57 – 64, August 1984.

AUSTIN, P. R., EASTHAM, A. R.: “Helically Wound Linear Induction Pump for Molten Nonferrous Metals”, *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. IA-21, n. 3, p. 738 – 748, May 1985.

BOLDEA, I., NASAR, S. A.: “Linear Electric Actuators and Generators”, *IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record*, May 1997.

CARDOSO, J. R., BENITES, P. A.: “Finite Element Method With BiCG Solver Applied to Moving Linear Induction Motors”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 31, n. 3, p. 1888 – 1891, May 1995.

CHOI, J. S., BAEK, Y. S.: “Magnetically-Levitated Steel-Plate Conveyance System Using Electromagnets and a Linear Induction Motor”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 44, n. 11, p. 4171 – 4174, November 2008.

COX, T.: “Air Power: Achievements and Challenges in Electromagnetic Aircraft Launch”, *UK Magnetics Society Extreme Machines Seminar*, April 2012.

DUNCAN, J.: “Linear Induction Motor – Equivalent Circuit Model”, *IEE Proceedings B – Electrical Power Applications*, v. 130, n. 1, p. 51–57, January 1983.

GIERAS, J. F., DAWSON, G. E., EASTHAM, A. R.: “A New Longitudinal End Effect Factor for Linear Induction Motors”, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. EC-2, n. 1, p. 152 - 159, March 1987.

HICASA, Y., TAKEUCHI, Y.: “Detail and Experimental Results of Ferromagnetic Levitation System of Japan Air Lines HSST-01/-02 Vehicles”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 29, n. 1, p. 35 - 41, February 1980.

HIRASA, T., ISHIKAWA, S., YAMAMURO, T.: “Equivalent Circuit of Linear Induction Motors with End Effect Taken Into Account”, *Electrical Engineering in Japan*, v. 100, n. 2, p. 65 - 71, 1980.

HOFMANN, R., BINDER, A., PFEIFFER, R.: “Investigations on a Linear Induction Machine for Railway Applications”, *IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, June 2001.

IEEE

XPLORE,

<https://ieeexplore.ieee.org/search/searchresult.jsp?newsearch=true&queryText=linear%20motors>, acesso em 20/06/23.

KOSEKI, T., SONE, S., YOKOI, T., EBIHARA, D.: “Analysis of secondary eddy current path of a linear induction motor,” *Proceedings of Linear Drive Symposium*, IEE Japan, LD-92-100, p.21-29, 1992.

KOSEKI, T., SONE, S., YOKOI, T., EBIHARA, D., OSAWA, S.: “Investigation on Secondary Slot Pitches of a Cage-type Linear Induction Motor”, *IEEE International Magnetism Conference (INTERMAG)*, April 1993.

LAITHWAITE, E. R.: “Linear Induction Motors”, *Proceedings of the IEE - Part A: Power Engineering*, v. 104, n. 18, p. 461 - 470, December 1957.

LAITHWAITE, E. R.: “The Goodness of a Machine”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 112, n. 3, p. 538 - 541, March 1965.

LAITHWAITE, E. R.: “Some Aspects of Electrical Machines With Open Magnetic Circuits”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 115, n. 9, p. 1275 - 1283, September 1968.

LAITHWAITE, E. R., BARWELL, F. T.: “Application of Linear Induction Motors to High-speed Transport Systems”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 116, n. 5, p. 713 - 724, May 1969.

LAITHWAITE, E. R.: “Propulsion Without Wheels”, *The English University Press LTD*, Great Britain 1972.

LAITHWAITE, E. R., BARWELL, F. T.: “Linear Electric Machines - A Personal View”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 63, n. 2, p. 250 - 290, February 1975.

LAITHWAITE, E. R.: “Máquinas de Inducción Especiales”, *Editorial Labor*, Barcelona 1976.

LAITHWAITE, E. R.: “Linear Induction Motors: A New Species Takes Root”, *Electronics and Power*, v. 32, n. 5, p. 355 – 360, May 1986.

LEE, C. H., CHIN, C. Y.: “A Theoretical Analysis of Linear Induction Motors”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-98, n. 2, p. 679 – 688, March 1979.

LEE, B., KOO, D.: “Investigation of Linear Induction Motor According to Secondary Conductor Structure”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 45, n. 6, p. 2839 – 2842, June 2009.

LEONHARD, W., RHODES, R. G., RAKELS, J. H.: “Technical Alternatives For a Maglev System”, *Electronics and Power*, v. 24, n. 4, p. 293 – 296, April 1978.

LONG, X.: “Theory And Magnetic Design Method of Linear Induction Motor”, *Beijing, China: Science*, 2006.

LU, Q., LI, Y., YE, Y., ZHU, Z.: “Investigation of Forces in Linear Induction Motor Under Different Slip Frequency for Low-Speed Maglev Application”, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 28, n. 1, p. 145 – 153, March 2013.

LUGUANG, Y.: “Progress of the Maglev Transportation in China”, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 16, n. 2, p. 1138 – 1141, June 2006.

LV, G., ZHOU, T., ZENG, D.: “Design of Ladder-Slit Secondaries and Performance Improvement of Linear Induction Motors for Urban Rail Transit”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 65, n. 2, p. 1187 – 1195, February 2018.

MATSUMIYA, T., TAKAGI, K.: “End Effect and Equivalent Circuit of Linear Induction Machines”, *Electrical Engineering in Japan*, v. 21, n. 1, p. 117 - 127, 1971.

MATTOS, L. S., RODRIGUEZ, E., COSTA, F., SOTELO, G. G., ANDRADE, Jr. R. de, STEPHAN, R. M.: “MagLev-Cobra Operational Tests”, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 26, n. 3, Article Seq. nº 3600704, February 2016.

MEEKER, D. C., NEWMAN, M. J.: “Indirect Vector Control of a Redundant Linear Induction Motor for Aircraft Launch”, *Proceedings of the IEEE*, v. 97, n. 11, p. 1768 - 1776, November 2009.

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY: “Electric Circuits - A First Course in Circuit Analysis for Electrical Engineers”, Ed. John Wiley & Sons, 1ª Edição, 1947.

NAGE, V. W., SHINDE, S. M.: “An elevator driven by Single-Sided Linear Induction Motor (SLIM)”, *International Conference on Advanced Communication Control and Computing Technologies (ICACCCT)*, May 2016.

NASAR, S. A.: “Electromagnetic Fields and Forces in a Linear Induction Motor, Taking Into Account Edge Effects”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 116, n. 4, p. 605 - 608, April 1969.

NONAKA, S., HIGUSHI, T.: “Approximate Equations for Calculations of Characteristics of Single-Sided Linear Induction Motors”, *Electrical Engineering in Japan*, v. 102, n. 5, p. 18 - 25, 1982.

PAI, R. M., BOLDEA, I., NASAR, S. A.: “A Complete Equivalent Circuit of a Linear Induction Motor With Sheet Secondary”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 24, n. 1, p. 639 – 654, January 1988.

PARK, S. C., KIM, B. T.: “Effect of Contact Resistance Between Side-bar and Secondary Conductors in a Linear Induction Motor With a Cage-type Secondary”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 39, n. 3, p. 1562 – 1565, May 2003.

PINATTI, D. G., SOUZA, T. M., SHIGUE, C. Y.: “Superconducting Linear Synchronous Motor For Urban Transport System”, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 5, n. 2, p. 453 – 456, June 1995.

PYRHÖNEN, J., JOKINEN, T., HRABOVCOVÁ, V.: “Design of Rotating Electrical Machines”, *Ed. John Wiley & Sons*, 2<sup>nd</sup> Edition, 2014.

ONO, M., KOGA, S., OHTSUKI, H.: “Japan's Superconducting Maglev Train”, *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, v. 5, n. 1, p. 9 – 15, March 2002.

RAVANJI, M. H., NASIRI-GHEIDARI, Z.: “Design Optimization of a Ladder Secondary Single-Sided Linear Induction Motor for Improved Performance”, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 30, n. 4, p. 1595 – 1603, December 2015.

ROBERTS, S.: “A History of The Telegraph Companies in Britain Between 1838 and 1868”, ©Steven Roberts, 2012.

SHAMSUDDEEN, N., ASHOK, A., RAJENDRAKUMAR, J., KRISHNA, V., JAYASHANKAR, V.: “Design and Analysis of Annular Linear Induction Pump (ALIP)”, *Power System Technology and IEEE Power India Conference*, October 2008.

SOTELO, G. G., ANDRADE, Jr. R. de, DIAS, D. H. N., FERREIRA, A. C., COSTA, F., MACHADO, O. J., OLIVEIRA, R. A. H. de, SANTOS, M. D. A., STEPHAN, R. M.: “Tests With One Module of the Brazilian Maglev-Cobra Vehicle”, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 23, n. 3, Article Seq. n° 3601204, June 2013.

STEPHAN, R. M., FERREIRA, A. C., ANDRADE, Jr. R. de, NEVES, M. A., MOREIRA, M. A. C., ROSARIO, M. A. P., MACHADO, O. J., NICOLSKY, R.: “A Superconducting Levitated Small Scale Vehicle With Linear Synchronous Motor”, *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, June 2003.

WESTINGHOUSE ENGR.: “A Wound Rotor Motor 1400 ft Long”, v. 6, p. 160 - 162, 1946.

WILSON, H. W.: “Electrification of Railways”, *Trans. Liverpool Engng. Soc.*, v. 26, p. 218 - 229, 1905.

WORONOWICZ, K., SAFAEE, A.: “A Novel Linear Induction Motor Equivalent-Circuit With Optimized End Effect Model”, *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*, v. 37, n. 1, p. 34 - 41, May 2014.

XU, W., ZHU, J. G., ZHANG, Y., LI, Y., WANG, Y., GUO, Y.: “An Improved Equivalent Circuit Model of a Single-Sided Linear Induction Motor”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 59, n. 5, p. 2277 - 2289, June 2010.

YAMAGUCHI, T., ITO, M., MATSUI, K.: "Improvement of thrust of linear induction motor using modified ladder slits", *Proceedings of Power Conversion Conference*, v. 2, p. 563 - 566, 1997.

YAMAMURA, S., ITO, H., ISHULAWA, Y.: "Theories of the Linear, Induction Motor and Compensated Linear Induction Motor", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-91, n. 4, p. 1700 - 1710, July 1972.

YOSHIDA, K., UMINO, T.: "Dynamics of The Propulsion And Levitation Systems in The Controlled-PM LSM Maglev Vehicle", *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 23, n. 5, p. 2353 - 2355, September 1987.

ZARE-BAZGHALEH, A., MESHKATODDINI, M. Z., FALLAH-CHOOOLABI, E.: "Derivation of Equivalent Circuit Parameters for Single-Sided Linear Induction Motors", *Plasma Science IEEE Transactions on*, v. 44, n. 10, p. 3637 - 3644, October 2015.

ZEHNDEN, A.: "Electric Traction Apparatus", *US Patent n° 782312*, February 1905.

ZHANG, Z., EASTHAM, T. R., DAWSON, G. E.: "LIM Dynamic Performance Assessment From Parameter Identification", *Conference Record of the IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, October 1993.

## **ANEXO A – Análise da Modulação da Densidade de Fluxo Magnético na Coroa do Motor Linear de Indução**

Um motor linear de indução pode ser visto como uma planificação do motor rotativo, partindo de um “corte” radial na coroa circular. Entretanto, as principais preocupações para o projetista desse tipo de máquina estão justamente nesse “corte”, já que o tal introduz uma abertura no previamente fechado circuito magnético, de onde também decorrem os conhecidos efeitos de borda.

O projeto de motores lineares de indução tem avançado expressivamente nas últimas décadas, porém o circuito magnético aberto permanece como uma de suas principais dificuldades. Tendo em vista o aprimoramento dos princípios de projeto, este anexo fornece uma análise da modulação magnética que ocorre na coroa do núcleo (primário e/ou secundário), a qual decorre justamente do circuito magnético aberto.

A modulação da densidade de fluxo foi prevista por Eric Laithwaite (LAITHWAITE, 1976), e a formulação foi aplicada a um caso particular existente – o motor linear de indução com primário curto e secundário ranhurado aplicado no projeto Maglev Cobra, da UFRJ (MATTOS, 2016). A simulação numérica, ainda que feita por software livre de magnetostática 2D (FEMM), adere à formulação apresentada.

Na parte final, são apresentados resultados experimentais que evidenciam a modulação da densidade de fluxo magnético na coroa. Ainda que tais máquinas, em geral, operem com grandes entreferros, a saturação magnética localizada que resulta de tal modulação apresenta riscos à performance desejada da máquina.

### A.1 Abordagem Analítica

Os símbolos utilizados nesta seção estão descritos a seguir:

$b_g(x, t)$  Densidade de fluxo magnético instantânea no entreferro em função da posição longitudinal [T]

$B_g$  Densidade de fluxo magnético máxima no entreferro, considerada constante ao longo da seção longitudinal [T]

$b_{y2}(x, t)$  Densidade de fluxo magnético instantânea na coroa secundária em função da posição longitudinal [T]

$B_{y2}(x)$  Densidade de fluxo magnético máxima na coroa secundária em função da posição longitudinal [T]

$h_{y2}$  Altura da coroa secundária [m]

$k_{st}$  Fator de empilhamento

$L_1$  Comprimento longitudinal do núcleo primário [m]

$\tau_p$  Passo polar [m]

Seguindo a formulação inicial supramencionada (LAITHWAITE, 1976), onde assumiu-se uma lâmina contínua de corrente no primário, a onda de densidade de fluxo magnético no entreferro fica, para primário curto,

$$b_g(x, t) = B_g \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau_p}\right) + K$$

onde a constante  $K$  depende das condições impostas para o circuito magnético. No caso de se assumir, por metro de espessura de núcleo,

$$\int_0^{L_1} b_g dx = 0,$$

então

$$K = -\frac{2B_g \tau_p}{\pi L_1} \sin\left(\frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right), \text{ e}$$

$$b_g(x, t) = B_g \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau_p}\right) - \frac{2B_g \tau_p}{\pi L_1} \sin\left(\frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right)$$

Para reproduzir as condições de circuito magnético aberto presentes no motor linear, considera-se uma barreira intransponível de fluxo na coroa da máquina rotativa, conforme a Figura 51.

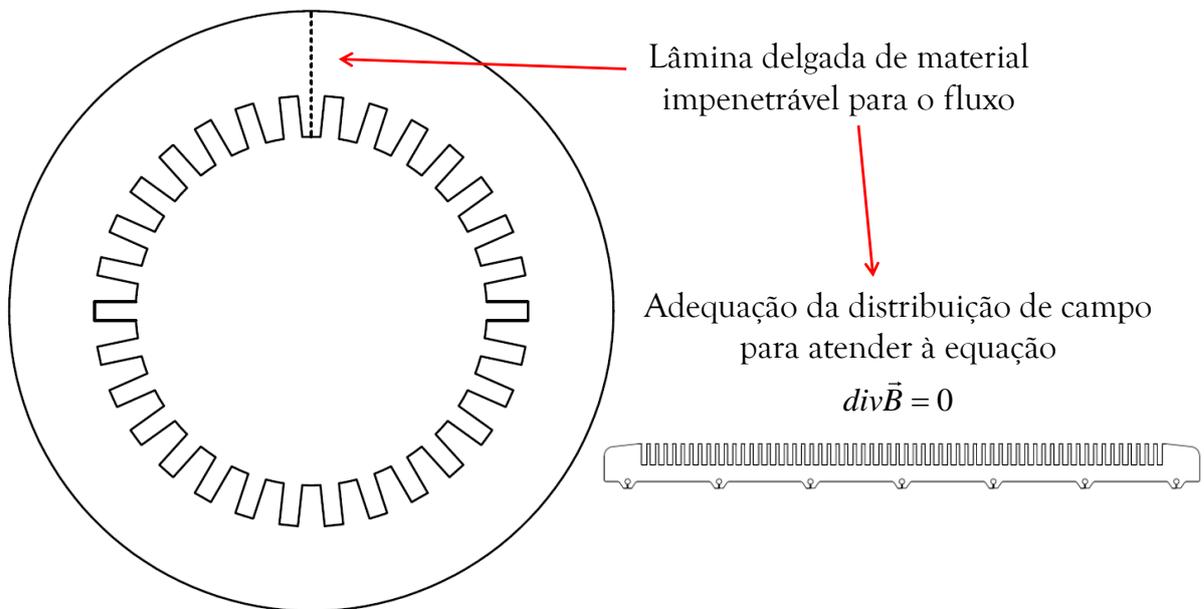


Figura 51 – Condições de borda para a onda de fluxo na coroa

A onda de densidade de fluxo magnético na coroa secundária, considerando uma lâmina delgada de material impermeável para o fluxo na máquina rotativa, também por metro de espessura de núcleo, ficaria

$$b_{y2} = \frac{1}{h_{y2} k_{st}} \int_0^{L_1} b_g dx,$$

e assumindo  $b_{y2}(0, t) = 0$ , chega-se a

$$b_{y2}(x,t) = \frac{2\tau_p B_g}{h_{y2} k_{st} \pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{2\tau_p}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi x}{2\tau_p}\right) - \frac{x}{L_1} \sin\left(\frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right) \right]$$

Pode-se obter a expressão para a densidade de fluxo máxima ao longo da coroa secundária, considerando aplicáveis apenas os valores positivos, fazendo

$$\frac{\partial b_{y2}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \omega t = \pm \arctan \left( 2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2\tau_p}\right) - \frac{x}{L_1} \sin^2\left(\frac{\pi L_1}{2\tau_p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{\tau_p}\right) - \frac{x}{L_1} \sin\left(\frac{\pi L_1}{\tau_p}\right)} \right) = \pm \alpha, \text{ onde}$$

$$\begin{cases} +\alpha, & 2n\tau_p < x < (2n+1)\tau_p \\ -\alpha, & (2n+1)\tau_p < x < (2n+2)n\tau_p \end{cases}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

E finalmente

$$B_y(x) = \frac{2\tau_p B_g}{h_y k_{st} \pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{2\tau_p}\right) \cos\left(\pm\alpha - \frac{\pi x}{2\tau_p}\right) - \frac{x}{L} \sin\left(\frac{\pi L}{2\tau_p}\right) \cos\left(\pm\alpha - \frac{\pi L}{2\tau_p}\right) \right]$$

## A.2 Aplicação em Caso Real

O motor linear de indução utilizado para estudo de caso tem as características descritas nas Figuras 52 e 53, bem como na tabela 5.

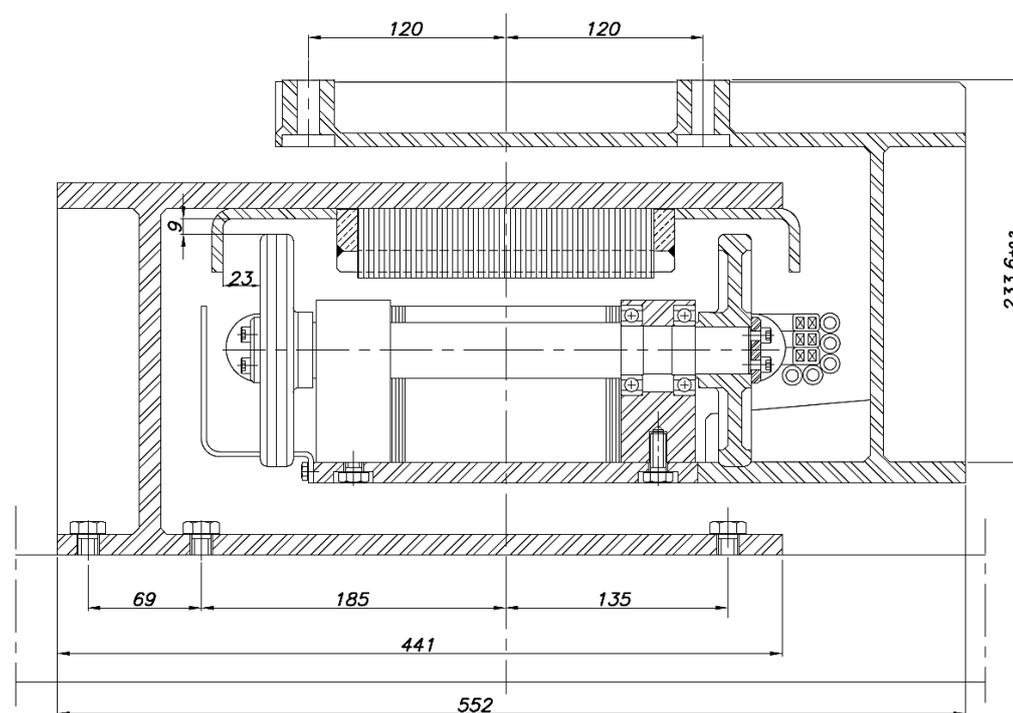
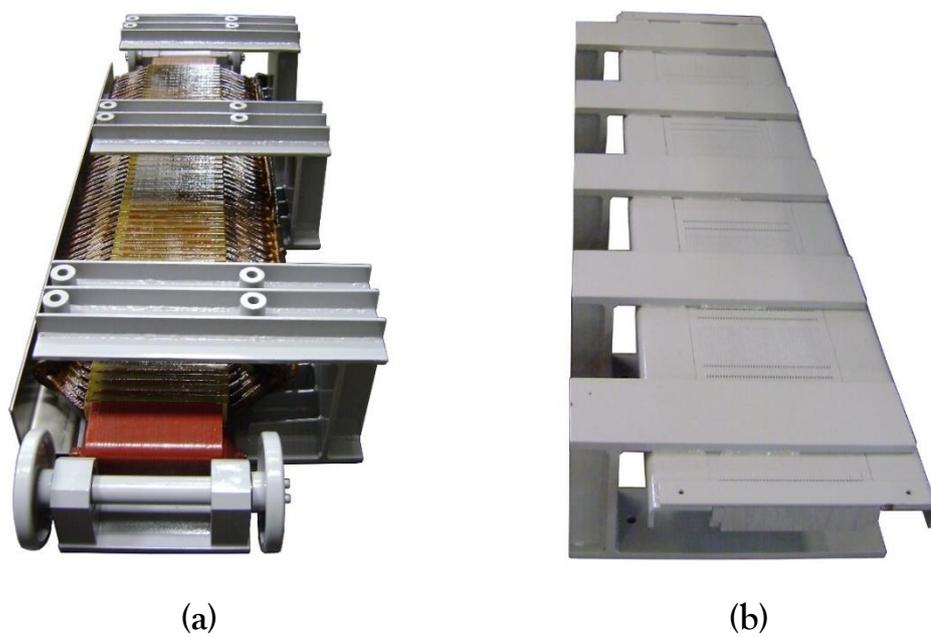


Figura 52 – Seção transversal do motor linear de indução utilizado como exemplo



(a)

(b)

Figura 53 – (a) Primário e (b) secundário do motor linear

Tabela 5 – Dados nominais para o motor, considerando entreferro de 12 mm

Força (N)	900
Tensão de Linha (V)	420
Corrente de Linha (A)	53
Frequência (Hz)	25
Nº de Polos	6
Nº de Fases	3
Nº de Ranhuras (Prim.)	61
Velocidade (m/s)	7.8

Com a expressão genérica da densidade de fluxo na coroa  $B_y(x)$ , tomando 16 instantes distintos, porém igualmente espaçados, chega-se à plotagem apresentada na Figura 54.

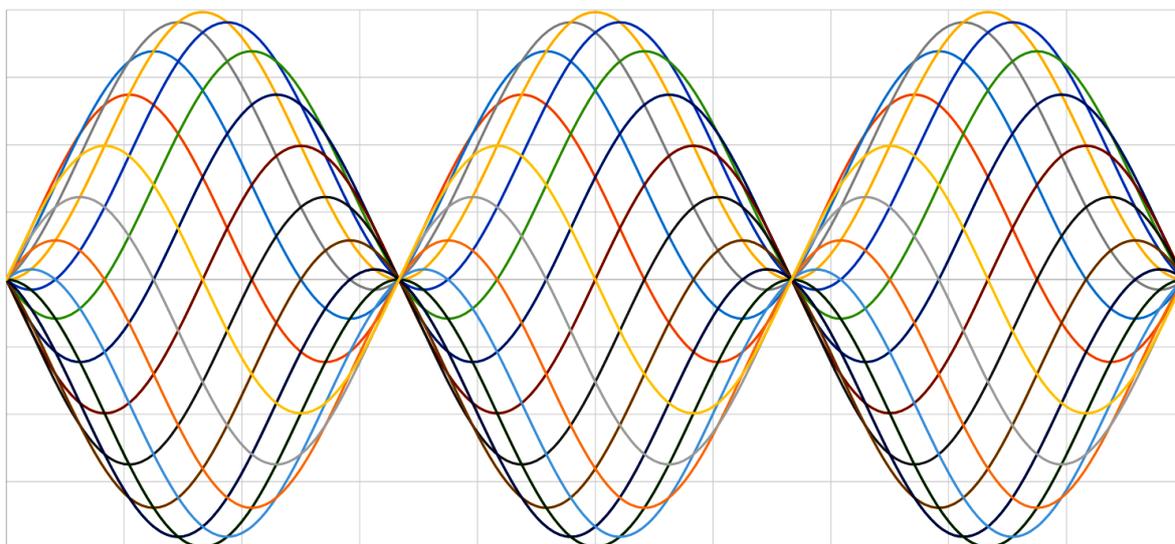


Figura 54 – Densidade de fluxo na coroa em 16 instantes de tempo, conforme a aproximação analítica

Em seguida, aplicando-se a expressão para os valores máximos a tal motor, o resultado para as densidades de fluxo na coroa primária mostra-se na Figura 55.

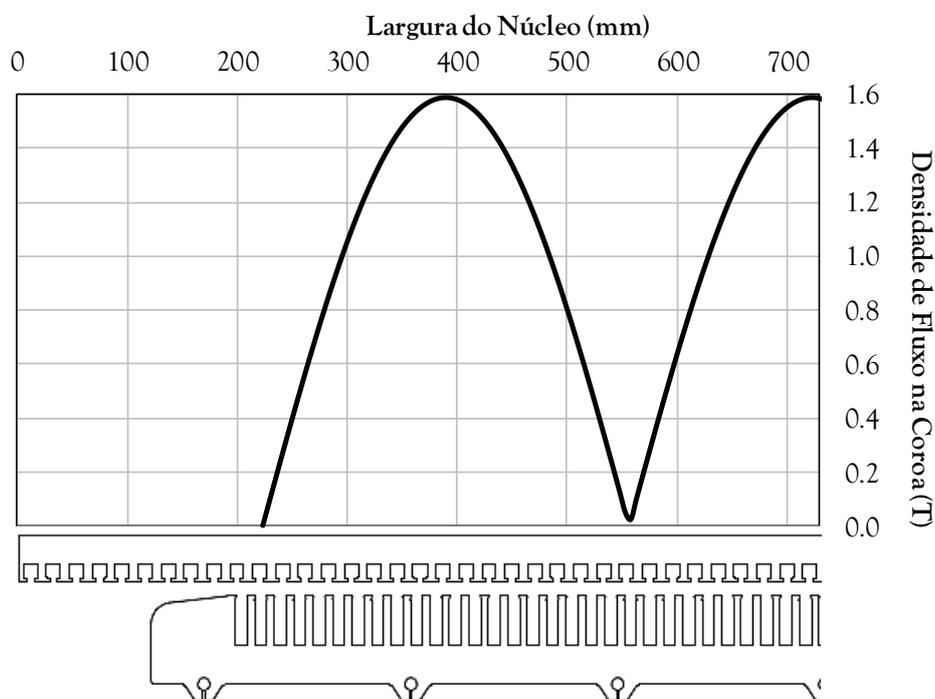


Figura 55 – Densidade de fluxo na coroa secundária de acordo com a aproximação analítica

### A.3 Comparação com Simulações e Medidas Experimentais

Com o objetivo de comparação, algumas simulações numéricas foram realizadas. As simulações tomaram lugar no software livre FEMM, em 6 instantes distintos com relação às correntes primárias, espaçados entre si de  $30^\circ$  elétricos, de forma a se ter um semiciclo. Os resultados podem ser vistos na Figura 56.

As amplitudes das correntes foram tomadas em referência ao valor medido no ensaio a vazio com entreferro de 12 mm. Notar as 3 regiões destacadas A, B e C, cujas pulsações possuem valores de pico bem distintos (as tais são referenciadas na Figura 58).

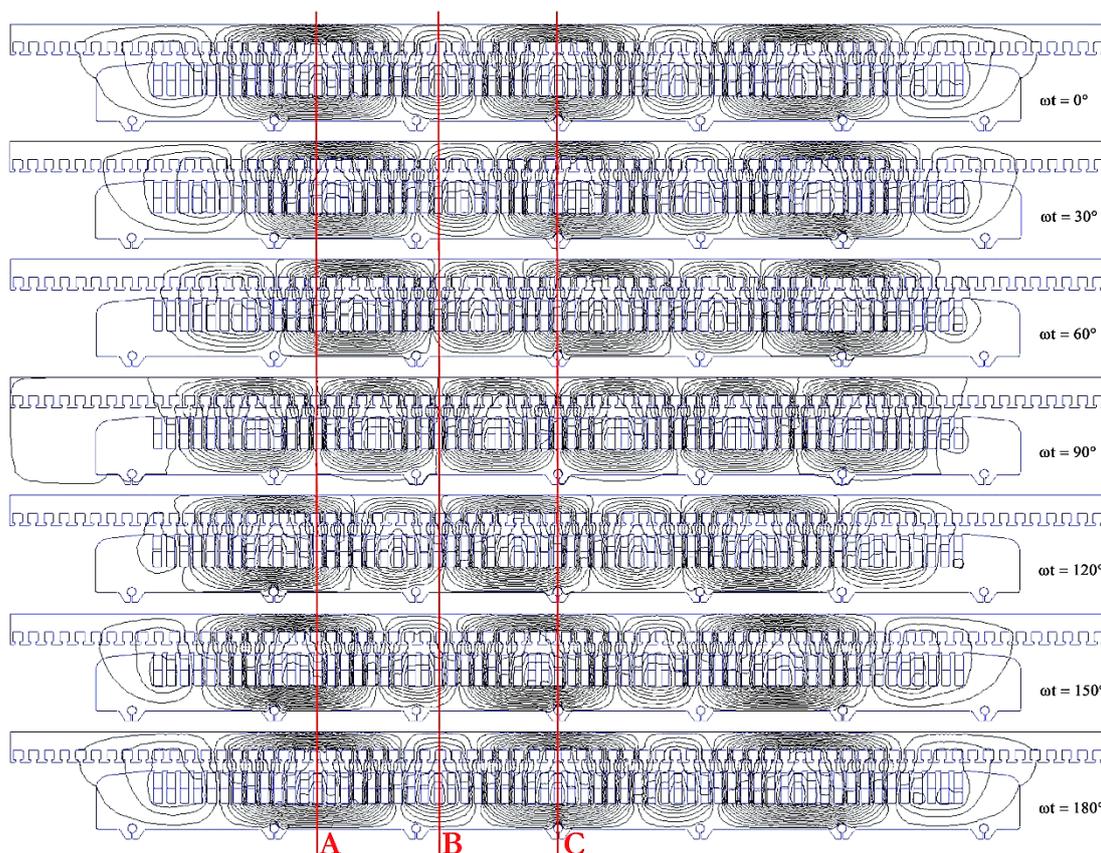


Figura 56 – Simulações magnetostáticas espaçadas de 30° elétricos com relação às correntes primárias

Nesse caso, as regiões A e C são de máxima densidade de fluxo de pico, e a região B, de mínima de pico.

Para as medições experimentais, bastou alocar uma série de bobinas exploratrizes ao longo da coroa secundária em um núcleo sem condutores, entre a superfície externa e o fundo das ranhuras. Com o primário alimentado por tensão nominal de linha, as tensões induzidas nas bobinas permitiram o cálculo das densidades de fluxo de pico, conhecidos o número de espiras e as dimensões do núcleo. O jogo de bobinas era limitado, logo foi necessário deslocar longitudinalmente o secundário, tomando o cuidado de, a cada medição, realizar o espaçamento de um passo de ranhura secundária. O entreferro foi mantido constante por meio de um espaçador não magnético calibrado.

O arranjo experimental está ilustrado no esquema da Figura 57.

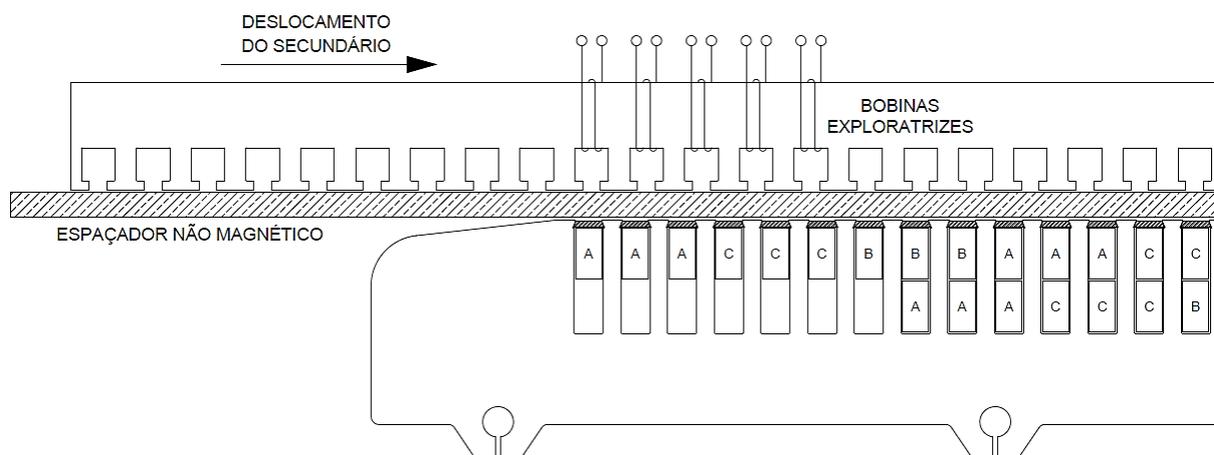


Figura 57 – Esquema do arranjo experimental, com o primário abaixo e o secundário acima, sem a gaiola

Os resultados medidos foram plotados sobre a modulação prevista analiticamente, conforme se vê no gráfico da Figura 58.

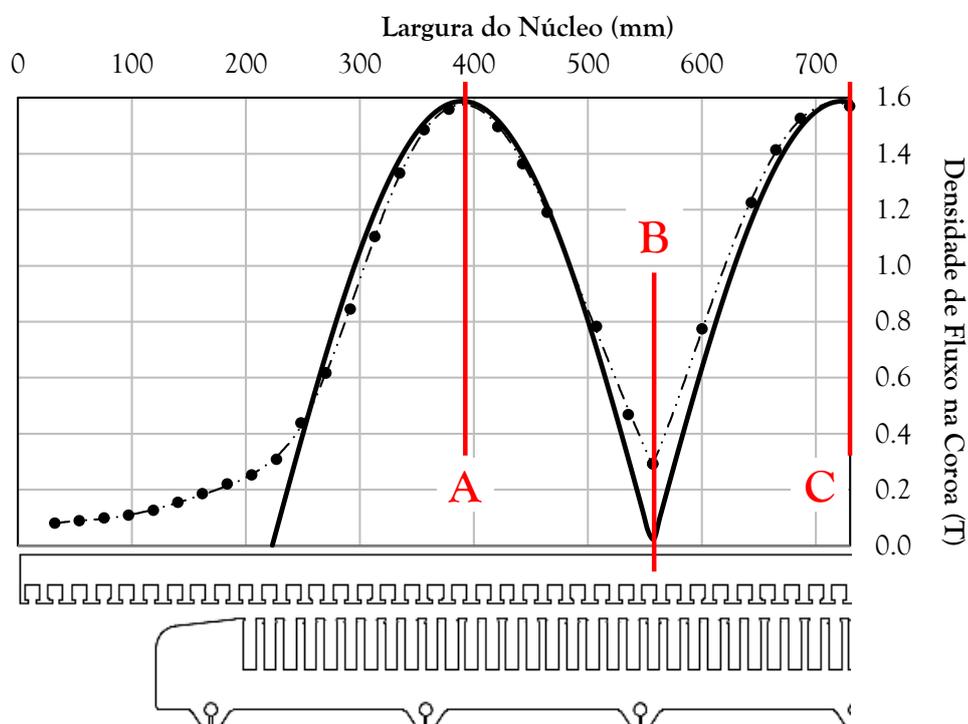


Figura 58 – Comparação dos resultados analíticos e experimentais, com as indicações dos pontos A, B e C das simulações numéricas

O mapeamento experimental do campo na coroa deixa claro que há de fato uma modulação, havendo um decaimento exponencial à medida que a borda do primário de aproxima. A diferença entre as densidades de pico máxima e mínima - 1,6 e 0,3 T, respectivamente - mostram que o risco da saturação da coroa é digno de atenção, considerando que na fase de projeto as predições de desempenho possam ser afetadas razoavelmente.

## ANEXO B – Cálculo dos Parâmetros do Protótipo Fabricado

Conforme citado na seção 5.1, além dos parâmetros do primário, apenas os do secundário ranhurado foram calculados. Os parâmetros do secundário maciço foram obtidos através de ensaios, conforme seção 5.3.

### Lista de Símbolos

$A_{bar}$	Área da barra condutora, secundário ranhurado [m <sup>2</sup> ]
$A_c$	Área do condutor primário [m <sup>2</sup> ]
$A_{cto}$	Área da barra de curto circuito, secundário ranhurado [m <sup>2</sup> ]
$b, h$	Larguras e alturas, respectivamente, de ranhuras
$h_4$	Altura da barra condutora, secundário ranhurado [m]
$h_{ov}$	Comprimento lateral da saliência da lâmina secundária (secundário maciço) ou da barra de curto circuito (secundário ranhurado) [m]
$k_{C_1}, k_{C_2}$	Fatores de Carter para primário e secundário ranhurados, respectivamente
$k_{e1}$	Fator de enrolamento do primário
$k_R, k_L$	Coeficientes de correção de resistência e indutância de dispersão secundária, respectivamente, conforme o efeito pelicular
$k_{RN_h}$	Fator simplificado de correção de Russell e Norsworthy para o efeito transversal de borda, harmônica h
$k_{st}$	Fator de empilhamento
$L_1, L'_2$	Indutâncias de dispersão primária e secundária
$L_m$	Indutância de magnetização
$l_{bar}$	Comprimento da barra condutora, secundário ranhurado [m]

$l_{cto}$	Comprimento da barra de curto circuito, considerado no passo de ranhura secundário [m]
$l_g$	Comprimento do entreferro [m]
$l_m$	Comprimento da espira média, enrolamento primário [m]
$l_{z1}, l_{z2}$	Larguras do primário e do secundário [m]
$m_1$	Nº de fases do primário
$N_1$	Nº de espiras por fase do primário
$p$	Nº de pares de polos
$q_1$	Nº de ranhuras por polo e por fase do primário
$Z_1, Z'_1$	Nº de ranhuras do primário (total e equivalente)
$Z_2, Z'_2$	Nº de ranhuras do secundário sob influência do primário (total e equivalente)
$R_1, R_2$	Resistências ôhmicas por fase dos enrolamentos primário e secundário [ $\Omega/f$ ]
$S$	Escorregamento [pu]
$t_{ov}$	Espessura total da lâmina condutora secundária (secundário maciço) ou altura total da barra condutora soldada à de curto-circuito (secundário ranhurado) [m]
$y_1$	Abertura de passo do enrolamento primário
$\epsilon_{sp}$	Encurtamento de passo, em número de ranhuras
$\lambda$	Permeâncias relativas
$\rho_1, \rho_2$	Resistividades dos condutores primário e secundário, respectivamente [ $\Omega.m$ ]
$\tau_p$	Passo polar [m]
$\tau_{s1}, \tau_{s2}$	Passos de ranhura primário e secundário, respectivamente [m]

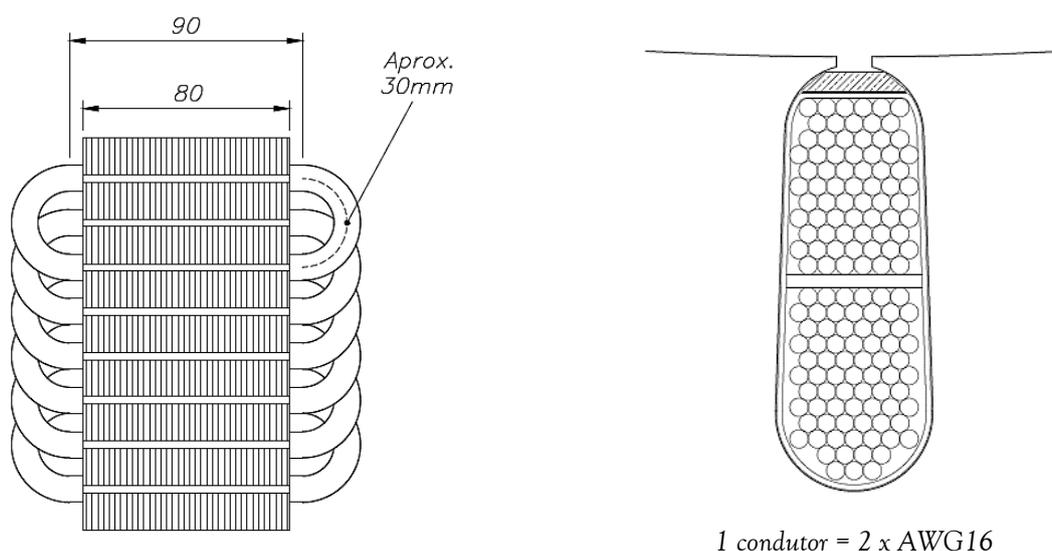
$\omega_1$ 

Frequência angular primária [rad/s]

## B.1 Resistências Ôhmicas

### B.1.1.Primário

Considerando o enrolamento primário conforme o esquema, o valor da resistência ôhmica por fase fica:



24 grupos de 1 bobina com 32 espiras cada, passo 1 a 3, ligação Y série

Figura 59 – Desenho das bobinas e do arranjo de condutores na ranhura (medidas em mm)

$$R_1 = N_1 \frac{\rho_1 \ell_m}{A_c} = 256 \frac{17,241 \cdot 10^{-9} \cdot 0,24}{2,62 \cdot 10^{-6}} = 0,404 \text{ } \Omega / \text{ fase @ } 20^\circ C$$

### B.1.2.Secundário

Conforme citado no corpo do texto principal, o “rotor” foi fabricado com 2 secundários: um ranhurado e um maciço. A Figura 60 mostra uma vista em corte.

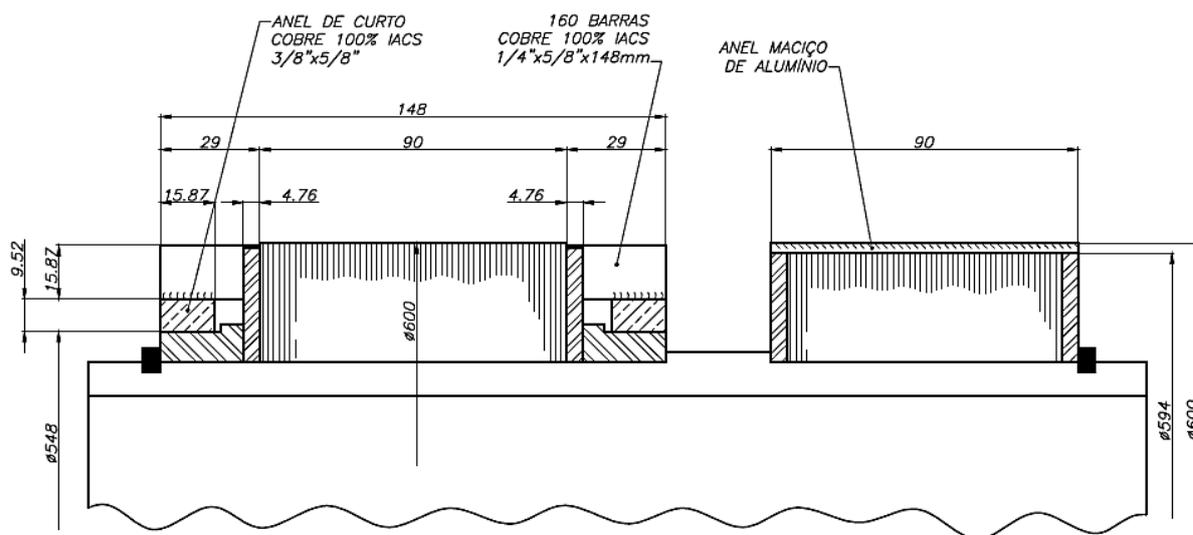


Figura 60 – Vista em corte dos secundários (à esquerda, o ranhurado; à direita, o maciço)

### B.1.2.1. RANHURADO

Considerando o secundário ranhurado em gaiola conforme as Figuras 60 e 61, e aplicando as correções de ranhuras totais e equivalentes apresentadas no item 4.3.3, bem como a correção da resistividade conforme 4.3.2, a resistência por fase fica:

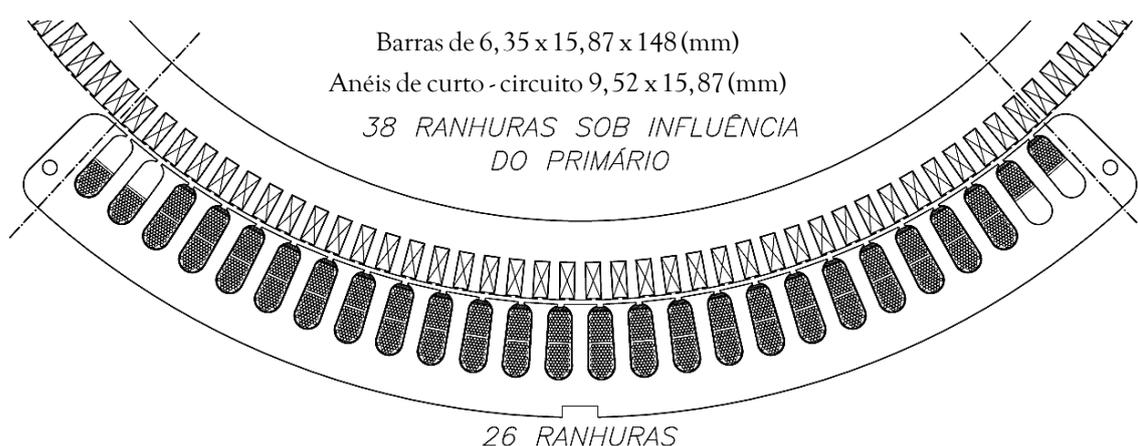


Figura 61 – Ranhuras do secundário ranhurado sob influência do primário

$$Z_1 = 26 \quad Z'_1 = 24 \quad Z_2 = 38 \quad Z'_2 = \frac{24}{26} 38 \simeq 35 \quad \tau_p = \frac{Q'_1 \tau_{s1}}{2p} = \frac{24 \cdot 0,01729}{8} = 0,05187 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
R'_2 &= \left( \frac{\frac{\rho_2 \ell_{bar}}{A_{bar}} + \frac{\frac{\rho_2 \ell_{cto}}{k_{RN}}}{2 \text{sen}^2 \frac{\pi p}{Z'_2}}}{\frac{4m_1}{Z'_2} (N_1 k_{e1})^2} \right) \\
&= \left( \frac{\frac{17,241 \cdot 10^{-9} \cdot 0,148}{6,35 \cdot 15,87 \cdot 10^{-6}} + \frac{\frac{17,241 \cdot 10^{-9} \cdot 0,00572}{0,8627}}{9,52 \cdot 15,87 \cdot 10^{-6}}}{2 \text{sen}^2 \frac{\pi 4}{35}} \right) \frac{4,3}{35} \underbrace{(256 \cdot 0,866)^2}_{16852} \\
&= 0,530 \text{ } \Omega / f \text{ @ } 20^\circ C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{RN_1} &= 1 - \frac{\tanh\left(\frac{\pi \ell_{z2}}{2\tau_p}\right)}{\frac{\pi \ell_{z2}}{2\tau_p} \left[ 1 + \left( 1 + 1,3 \frac{t_{ov} - d}{d} \right) \tanh\left(\frac{\pi \ell_{z2}}{2\tau_p}\right) \tanh\left(\frac{\pi h_{ov}}{\tau_p}\right) \right]} \\
&= 1 - \frac{\tanh\left(\frac{\pi 90}{2,51,87}\right)}{\frac{\pi 90}{2,51,87} \left[ 1 + \left( 1 + 1,3 \frac{25,4 - 15,87}{15,87} \right) \tanh\left(\frac{\pi 90}{2,51,87}\right) \tanh\left(\frac{\pi 28}{51,87}\right) \right]} = 0,8627
\end{aligned}$$

O efeito pelicular na resistência da gaiola será oportunamente considerado, de acordo com o escorregamento, da seguinte forma:

$$R'_{2_{corr}} = k_R R'_2, \text{ onde } k_R = \xi \left( \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \right) \text{ e } \xi = h_4 \sqrt{\frac{s\omega_1 \mu_0}{\rho_2} \frac{b_c}{2b_4}}$$

### B.1.2.2. MACIÇO

O secundário maciço consiste de uma lâmina com espessura de 3 mm. Seus parâmetros foram extraídos de ensaios, seção 5.3

## B.2 Indutâncias

### B.2.1. Magnetização

Com base na equação (9) e considerando a variação do entreferro de 2 a 5 mm e os respectivos fatores de Carter, chega-se a:

$$L_m = \frac{2\mu_0 m_1 (N_1 k_{e1})^2 \tau_p \ell_{z1}}{\pi^2 p \ell_g k_{C1} k_{C2}} = \frac{2.4\pi 10^{-7} . 3 . (256.0,866)^2 . 0,05187.0,08}{\pi^2 . 4 . \ell_g k_{C1} k_{C2}}$$

$$= \begin{cases} 18,15 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} & (k_{C1} . k_{C2} = 1,073) \\ 12,35 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} & (k_{C1} . k_{C2} = 1,051) \\ 9,363 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} & (k_{C1} . k_{C2} = 1,040) \\ 7,549 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} & (k_{C1} . k_{C2} = 1,032) \end{cases}$$

### B.2.2. Dispersão no Primário e Secundário

As parcelas da dispersão serão consideradas as seguintes:

$$L = L_{sq} + L_g + L_s + L_d + L_w \begin{cases} L_{sq} \dots \text{inclinação das ranhuras} \\ L_g \dots \text{entreferro (campo harmônico)} \\ L_s \dots \text{ranhura} \\ L_d \dots \text{cabeça do dente} \\ L_w \dots \text{cabeça de bobina} \end{cases}$$

As parcelas referentes à inclinação de ranhuras serão nulas pelo fato de primário e secundário possuírem ranhuras retas.

#### B.2.2.1. ENTREFERRO (CAMPO HARMÔNICO)

Para o primário tem-se:

$$L_{g1} = \Delta_2 \sigma_{g1} L_m = \begin{cases} 1,509 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} \\ 1,027 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} \\ 0,779 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} \\ 0,628 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\sigma_{g1} = \sum_{\substack{\nu \rightarrow +\infty \\ \nu \rightarrow -\infty \\ \nu \neq 1}} \left( \frac{k_{e\nu}}{\nu k_{e1}} \right)^2 = \frac{2\pi^2}{9k_{e1}^2} \frac{5q_1^2 + 1 + \frac{\epsilon_{sp}^3}{4q_1} - \frac{3\epsilon_{sp}^2}{2} - \frac{\epsilon_{sp}}{4q_1}}{12q_1^2} - 1$$

$$= \frac{2\pi^2}{9.0,866^2} \frac{5.1^2 + 1 + \frac{1^3}{4.1} - \frac{3.1^2}{2} - \frac{1}{4.1}}{12.1^2} - 1 = 0,09669$$

$$\Delta_2 \approx 1 - \frac{1}{\sigma_{g1}} \sum_{\nu=5}^{\nu \rightarrow +\infty} \left( \frac{k_{e\nu}}{\nu k_{e1}} \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi p}{Q'_2}\right)}{\frac{\nu\pi p}{Q'_2}} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{0,09669} 0,01353 = 0,8601$$

Para o secundário ranhurado, já referindo ao circuito primário:

$$L'_{g2} = \sigma_{g2} L_m = \left[ \left( \frac{\frac{p\pi}{Z'_2}}{\sin\left(\frac{p\pi}{Z'_2}\right)} \right)^2 - 1 \right] L_m = \left[ \left( \frac{\frac{4\pi}{35}}{\sin\left(\frac{4\pi}{35}\right)} \right)^2 - 1 \right] L_m$$

$$= \begin{cases} 0,396 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} \\ 0,269 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} \\ 0,204 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} \\ 0,165 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

#### B.2.2.2. RANHURA

As ranhuras primária e secundária estão representadas na Figura 62. As dimensões de referência encontram-se na Figura 63. Para o primário tem-se que:

$$L_{s1} = \frac{4m_1}{Q'_1} \mu_0 \ell_{z1} k_{st} N_1^2 \lambda_{s1} = \frac{4.3}{24} \mu_0 \cdot 0,08 \cdot 0,95 \cdot 256^2 \cdot 1,258 = 3,937 \text{ mH}$$

$$\lambda_{s1} = k_1 \frac{h_4 - h'}{3b_4} + k_2 \left( \frac{h_1}{b_1} + 0,66 \right) + \frac{h'}{4b_4}; \quad k_1 = 1 - \frac{9}{16} \varepsilon \quad k_2 = 1 - \frac{3}{4} \varepsilon$$

$$\lambda_{s1} = \left( 1 - \frac{9}{16 \cdot 3} \right) \frac{21,5 - 0,4}{3 \cdot 10,6} + \left( 1 - \frac{3}{4 \cdot 3} \right) \left( \frac{0,8}{2,8} + 0,66 \right) + \frac{0,4}{4 \cdot 10,6} = 1,258$$

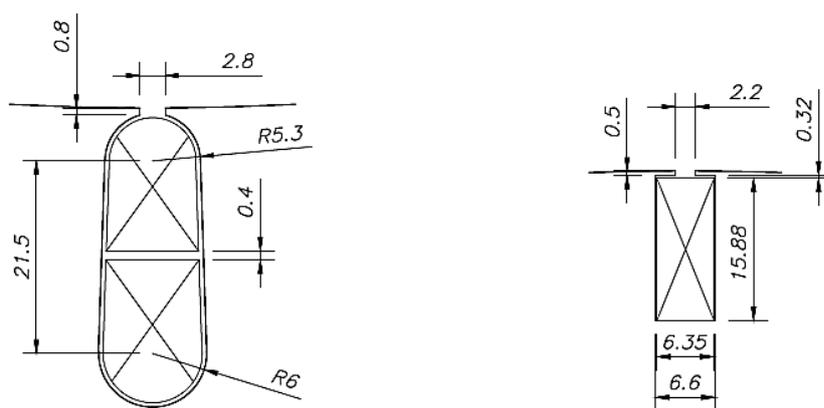


Figura 62 - Perfil das ranhuras do primário (esquerda) e secundário ranhurado (direita)

E para o secundário, referindo ao primário:

$$L'_{s2} = \mu_0 \ell_{z2} k_{st} \lambda_{s2} \frac{4m_1}{Z'_2} (N_1 k_{e1})^2 = \mu_0 \cdot 0,09 \cdot 0,95 \cdot 1,08 \cdot 16852 = 1,95 \text{ mH}$$

$$\lambda_{s2} = \frac{h_4}{3b_4} + \frac{h_3}{b_4} + \frac{h_1}{b_1} = \frac{15,88}{3 \cdot 6,6} + \frac{0,32}{6,6} + \frac{0,5}{2,2} = 1,08$$

O efeito pelicular nessa parcela de dispersão da gaiola será oportunamente considerado, de acordo com o escorregamento, da seguinte forma:

$$\lambda_{s2_{corr}} = k_L \frac{h_4}{3b_4} + \frac{h_3}{b_4} + \frac{h_1}{b_1}, \text{ onde } k_L = \frac{3}{2\xi} \left( \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \right) \text{ e } \xi = h_4 \sqrt{\frac{s\omega_1 \mu_0}{\rho_2} \frac{b_c}{2b_4}}$$

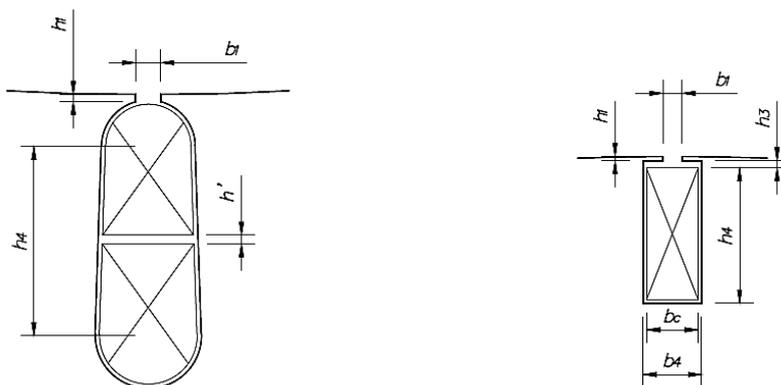


Figura 63 - Dimensões referenciadas nas expressões de dispersão da ranhura

### B.2.2.3. CABEÇA DO DENTE

Utilizando a Figura 63, para o primário a dispersão na cabeça do dente fica:

$$L_{d1} = \frac{4m}{Z'_1} \mu_0 \ell_{z1} k_{st} N_1^2 \lambda_{d1} = \frac{4.3}{24} \mu_0 \cdot 0,08 \cdot 0,95 \cdot 256^2 \cdot \lambda_{d1} = \begin{cases} 1,067 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} \\ 1,355 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} \\ 1,565 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} \\ 1,724 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\lambda_{d1} = k_2 \frac{5 \left( \frac{\ell_g}{b_1} \right)}{5 + 4 \left( \frac{\ell_g}{b_1} \right)} = \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) \frac{5 \left( \frac{\ell_g}{2,8} \right)}{5 + 4 \left( \frac{\ell_g}{2,8} \right)} = \begin{cases} 0,341 (\ell_g = 2 \text{ mm}) \\ 0,433 (\ell_g = 3 \text{ mm}) \\ 0,500 (\ell_g = 4 \text{ mm}) \\ 0,551 (\ell_g = 5 \text{ mm}) \end{cases}$$

E para o secundário, referindo ao primário:

$$L'_{d2} = \mu_0 \ell_{z2} k_{st} \lambda_{d2} \frac{4m_1}{Z'_2} (N_1 k_{e1})^2 = \mu_0 \cdot 0,09 \cdot 0,95 \cdot \lambda_{d2} \cdot 16852 = \begin{cases} 0,952 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} \\ 1,181 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} \\ 1,341 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} \\ 1,459 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\lambda_{d2} = \frac{5 \left( \frac{\ell_g}{2,2} \right)}{5 + 4 \left( \frac{\ell_g}{2,2} \right)} = \begin{cases} 0,526 (\ell_g = 2 \text{ mm}) \\ 0,652 (\ell_g = 3 \text{ mm}) \\ 0,741 (\ell_g = 4 \text{ mm}) \\ 0,806 (\ell_g = 5 \text{ mm}) \end{cases}$$

### B.2.2.4. CABEÇA DE BOBINA

Utilizando as Figuras 59 e 64 e a tabela 6, a dispersão na cabeça da bobina primária fica:

$$L_{w1} = \frac{2}{p} N_1^2 \mu_0 \ell_w \lambda_w = \frac{2}{4} 256^2 \mu_0 0,026 = 1,07 \text{ mH}$$

$$\ell_w \lambda_w = 2\ell_{ew} \lambda_{\ell ew} + W_{ew} \lambda_{Wew} = 2 \cdot 0,02 \cdot 0,5 + 0,03 \cdot 0,2 = 0,026$$

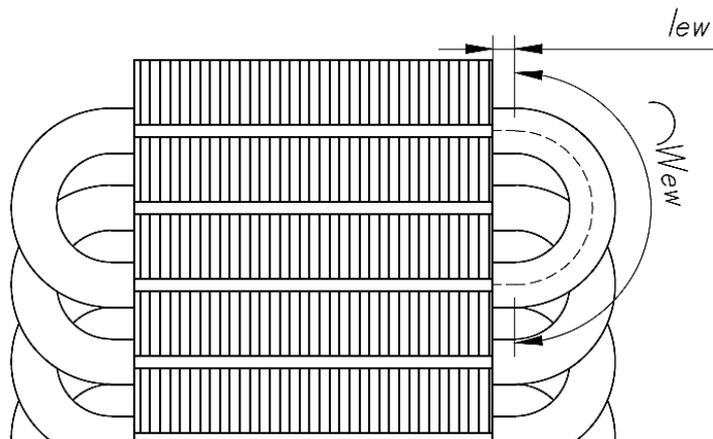


Figura 64 – Dimensões para dispersão de cabeça de bobina

Tabela 6 – Fatores de permeância para máquinas assíncronas

Tipo de Enrolamento – Estator	Tipo de Enrolamento – Rotor	$\lambda_{\ell ew}$	$\lambda_{Wew}$
Trifásico, 3 planos	Trifásico, 3 planos	0,40	0,30
Trifásico, 3 planos	Barramento/Pré-moldado	0,34	0,34
Trifásico, 3 planos	Gaiola	0,34	0,24
Trifásico, 2 planos	Trifásico, 2 planos	0,55	0,35
Trifásico, 2 planos	Barramento/Pré-moldado	0,55	0,25
Trifásico, 2 planos	Gaiola	0,50	0,20
Pré-moldado	Barramento/Pré-moldado	0,26	0,36
Pré-moldado	Gaiola	0,50	0,20
Monofásico	Gaiola	0,23	0,13

Fonte: (PYRHÖNEN, 2014)

E no secundário, referindo ao primário, adequando ao caso de secundário linear:

$$L'_{w2} = \mu_0 \frac{Z'_2}{2p^2 m_1} \left[ \frac{2}{3} (\ell_{bar} - \ell_{z2} k_{st}) + 0,18 \tau_p \right] \frac{4m_1}{Z'_2} (N_1 k_{e1})^2$$

$$= \mu_0 \frac{35}{2.4^2 .3} \left[ \frac{2}{3} (0,148 - 0,09.0,95) + 0,18.0,05187 \right] 16852 = 0,394 \text{ mH}$$

### B.2.3. Dispersões Finais

A indutância de dispersão total do primário resulta em:

$$L_1 = L_{g1} + L_{s1} + L_{d1} + L_{w1} = \begin{cases} 1,509 + 3,937 + 1,067 + 1,07 = 7,583 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} \\ 1,027 + 3,937 + 1,355 + 1,07 = 7,389 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} \\ 0,779 + 3,937 + 1,565 + 1,07 = 7,351 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} \\ 0,628 + 3,937 + 1,724 + 1,07 = 7,359 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

E para o secundário:

$$L'_2 = L'_{g2} + L'_{s2} + L'_{d2} + L'_{w2} = \begin{cases} 0,396 + 1,95 + 0,952 + 0,394 = 3,87 \text{ mH}, \ell_g = 2 \text{ mm} \\ 0,269 + 1,95 + 1,181 + 0,394 = 4,03 \text{ mH}, \ell_g = 3 \text{ mm} \\ 0,204 + 1,95 + 1,341 + 0,394 = 4,16 \text{ mH}, \ell_g = 4 \text{ mm} \\ 0,165 + 1,95 + 1,459 + 0,394 = 4,26 \text{ mH}, \ell_g = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

## ANEXO C – Demonstração de Expressões

Conforme já dito na seção 4.3, segue-se separadamente a demonstração das expressões resultantes para o modelo proposto. Para consulta de símbolos, ver “Lista de Símbolos”, no início do trabalho. A numeração das equações abaixo corresponde à do texto principal.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt &= \frac{I_m}{T_v k} \int_0^{T_v} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt = \frac{I_m}{2T_v k} \int_0^{T_v} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} \left( e^{\frac{k}{T_{2\ell}} t} - e^{-\frac{k}{T_{2\ell}} t} \right) dt \\
&= \frac{I_m}{2T_v k} \int_0^{T_v} \left( e^{\frac{2k-1}{2T_{2\ell}} t} - e^{-\frac{2k+1}{2T_{2\ell}} t} \right) dt = \frac{I_m}{2T_v k} \left[ \frac{2T_{2\ell}}{2k-1} \int_0^{T_v \frac{2k-1}{2T_{2\ell}}} e^u du + \frac{2T_{2\ell}}{2k+1} \int_0^{-T_v \frac{2k+1}{2T_{2\ell}}} e^v dv \right] \\
&\quad \begin{array}{l} u = \frac{2k-1}{2T_{2\ell}} t; du = \frac{2k-1}{2T_{2\ell}} dt \\ v = -\frac{2k+1}{2T_{2\ell}} t; dv = -\frac{2k+1}{2T_{2\ell}} dt \end{array} \\
&= \frac{I_m}{2T_v k} \left[ \frac{2T_{2\ell}}{2k-1} e^u \Big|_0^{T_v \frac{2k-1}{2T_{2\ell}}} + \frac{2T_{2\ell}}{2k+1} e^v \Big|_0^{-T_v \frac{2k+1}{2T_{2\ell}}} \right] = \frac{I_m T_{2\ell}}{T_v k} \left[ \frac{e^{T_v \frac{2k-1}{2T_{2\ell}}} - 1}{2k-1} + \frac{e^{-T_v \frac{2k+1}{2T_{2\ell}}} - 1}{2k+1} \right] \\
&= I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v k} \frac{(2k+1) \left( e^{\frac{k}{T_{2\ell}} T_v} e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - 1 \right) + (2k-1) \left( e^{-\frac{k}{T_{2\ell}} T_v} e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - 1 \right)}{4k^2 - 1} \\
&= I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v k} \frac{e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ e^{\frac{k}{T_{2\ell}} T_v} - e^{-\frac{k}{T_{2\ell}} T_v} + 2k \left( e^{\frac{k}{T_{2\ell}} T_v} + e^{-\frac{k}{T_{2\ell}} T_v} \right) \right] - 2k}{4k^2 - 1} \\
&= I_m \frac{2T_{2\ell}}{T_v} \frac{e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k \cosh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) \right] - 2k}{k(4k^2 - 1)}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{em}}(t) dt &= \frac{I_m}{T_v k'} \int_0^{T_v} \underbrace{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}_{\int fdg = fg - \int gdf; f = \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right), dg = e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}} dt}} dt \\
&\quad \underbrace{\cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right)}_{df = k' \frac{\cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right)}{T_{2\ell}} dt, g = -2T_{2\ell} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}} \\
&= -\frac{I_m}{T_v k'} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) 2T_{2\ell} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} \Big|_0^{T_v} + \frac{I_m}{T_v k'} \int_0^{T_v} \underbrace{2T_{2\ell} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} k' \frac{\cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right)}{T_{2\ell}}}_{\int fdg = fg - \int gdf; f = \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right), dg = e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}} dt}} dt \\
&\quad \underbrace{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right)}_{df = -k' \frac{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right)}{T_{2\ell}} dt, g = -2T_{2\ell} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}} \\
&= -\frac{2T_{2\ell} I_m}{T_v k'} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - \frac{2I_m}{T_v} \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) 2T_{2\ell} e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \Big|_0^{T_v} - \frac{2I_m}{T_v} \int_0^{T_v} 2T_{2\ell} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} k' \frac{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right)}{T_{2\ell}} dt \\
&= -\frac{2T_{2\ell} I_m}{T_v k'} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - \frac{4T_{2\ell} I_m}{T_v} \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} + \frac{4T_{2\ell} I_m}{T_v} - \frac{4k' I_m}{T_v} \int_0^{T_v} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt \tag{23}
\end{aligned}$$

Somando  $\frac{4k' I_m}{T_v} \int_0^{T_v} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt$  nos dois lados:

$$I_m \left( \frac{4k'}{T_v} + \frac{1}{T_v k'} \right) \int_0^{T_v} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt = \frac{-2T_{2\ell} I_m \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - 4k' T_{2\ell} I_m \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} + 4k' T_{2\ell} I_m}{T_v k'}$$

Dividindo os dois lados por  $T_v k' \left( \frac{4k'}{T_v} + \frac{1}{T_v k'} \right)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{I_m}{T_v k'} \int_0^{T_v} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt &= 2T_{2\ell} I_m \frac{-\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - 2k' \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} + 2k'}{(T_v k')^2 \left( \frac{4k'}{T_v} + \frac{1}{T_v k'} \right)} \\
&= I_m \frac{2T_{2\ell}}{T_v} \frac{2k' - e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \left[ \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k' \cos\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) \right]}{k' (4k'^2 + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt &= \frac{I_m}{T_v T_{2\ell}} \int_0^{T_v} \underbrace{te^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}_{\substack{\int fdg = fg - \int gdf \\ f=t, dg=e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt \\ df=dt, g=-2T_{2\ell}e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}} dt = -\frac{2I_m t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{T_v} \Big|_0^{T_v} + \frac{2I_m}{T_v} \int_0^{T_v} e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt \\
&= -2I_m e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - \frac{4I_m T_{2\ell}}{T_v} e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \Big|_0^{T_v} = -2I_m e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} - \frac{4I_m T_{2\ell}}{T_v} e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} + \frac{4I_m T_{2\ell}}{T_v} \\
&= I_m \frac{2}{T_v} \left[ 2T_{2\ell} - e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} (T_v + 2T_{2\ell}) \right]
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} i'_{2m_{saida}}(t) dt &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} \underbrace{\frac{I_m}{T_v T_{2\ell}} (t - T_v) e^{-\frac{t-T_v}{T_{2\ell}}}}_{\text{ver equação 24}} dt \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ -\frac{I_m (t - T_v) e^{-\frac{t-T_v}{T_{2\ell}}}}{T_v} - \frac{I_m T_{2\ell}}{T_v} e^{-\frac{t-T_v}{T_{2\ell}}} \right]_{T_v}^{\tau} \\
&= I_m \frac{T_{2\ell}}{T_v}
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i_{2m_{ent}}'^2(t) dt &= \frac{I_m^2}{T_v k^2} \int_0^{T_v} \sinh^2\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt = \frac{I_m^2}{4T_v k^2} \int_0^{T_v} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} \left( e^{\frac{k}{T_{2\ell}} t} - e^{-\frac{k}{T_{2\ell}} t} \right)^2 dt \\
&= \frac{I_m^2}{4T_v k^2} \int_0^{T_v} \left( e^{\frac{2k}{T_{2\ell}} t - \frac{t}{T_{2\ell}}} - 2e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} + e^{-\frac{2k}{T_{2\ell}} t - \frac{t}{T_{2\ell}}} \right) dt = \frac{I_m^2}{4T_v k^2} \int_0^{T_v} \left( e^{\frac{2k-1}{T_{2\ell}} t} - 2e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} + e^{-\frac{2k+1}{T_{2\ell}} t} \right) dt \\
&= \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{2T_v k^2} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} \Big|_0^{T_v} + \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{4T_v k^2 (2k-1)} e^{\frac{2k-1}{T_{2\ell}} t} \Big|_0^{T_v} - \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{4T_v k^2 (2k+1)} e^{-\frac{2k+1}{T_{2\ell}} t} \Big|_0^{T_v} \\
&= \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{2T_v k^2} \underbrace{\left( e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - 1 \right)}_{e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}}} + \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{4T_v k^2 (2k-1)} \underbrace{\left( e^{\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v} e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - 1 \right)}_{e^{\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v} e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}}} - \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{4T_v k^2 (2k+1)} \underbrace{\left( e^{-\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v} e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - 1 \right)}_{e^{-\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v} e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}}} \\
&= \frac{I_m^2 T_{2\ell}}{2T_v k^2 (4k^2 - 1)} \left[ (4k^2 - 1) \left( 1 - e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} \right) + \frac{2k+1}{2} \left( e^{\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v} - e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} \right) - \frac{2k-1}{2} \left( e^{-\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v} - e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} \right) \right] \\
&= I_m^2 \frac{e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} \left[ -4k^2 \left( e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - 1 \right) + 2k \sinh\left(\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v\right) + \cosh\left(\frac{2k}{T_{2\ell}} T_v\right) - 1 \right]}{2k^2 \frac{T_v}{T_{2\ell}} (4k^2 - 1)} \\
&\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{Q_\ell = \frac{T_v}{T_{2\ell}}; k = \sqrt{\frac{1-Q}{4-Q}} \Rightarrow \frac{T_v}{T_{2\ell}} (4k^2 - 1) = -4Q} \\
&= I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ) - 1}{8k^2 Q} \right) \right]
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i'_{2m_{ent}}(t) dt &= \frac{I_m^2}{T_v k'^2} \int_0^{T_v} \sin^2\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt = \frac{I_m^2}{2T_v k'^2} \int_0^{T_v} \left[1 - \cos\left(\frac{2k'}{T_{2\ell}} t\right)\right] e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\
&= \frac{I_m^2}{2T_v k'^2} \underbrace{\int_0^{T_v} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt}_{u = -\frac{t}{T_{2\ell}}, du = -\frac{1}{T_{2\ell}} dt} - \frac{I_m^2}{2T_v k'^2} \underbrace{\int_0^{T_v} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} \cos\left(\frac{2k'}{T_{2\ell}} t\right) dt}_{\int e^{\alpha t} \cos(\beta t) dt = \frac{e^{\alpha t} [\alpha \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t)]}{\alpha^2 + \beta^2}} \\
&= -\frac{T_{2\ell} I_m^2}{2T_v k'^2} \int_0^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} e^u du - \frac{I_m^2}{2T_v k'^2} \frac{e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} \left[ -\frac{1}{T_{2\ell}} \cos\left(\frac{2k'}{T_{2\ell}} t\right) + \frac{2k'}{T_{2\ell}} \sin\left(\frac{2k'}{T_{2\ell}} t\right) \right]}{\frac{1+4k'^2}{T_{2\ell}^2}} \Bigg|_0^{T_v} \\
&= -\frac{T_{2\ell} I_m^2}{2T_v k'^2} \underbrace{\left( e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - 1 \right)}_{e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} - e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} e^{\frac{T_v}{T_{2\ell}}}} - \frac{T_{2\ell} I_m^2}{2T_v k'^2} \frac{e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} \left[ -\cos\left(\frac{2k'}{T_{2\ell}} T_v\right) + 2k' \sin\left(\frac{2k'}{T_{2\ell}} T_v\right) \right] + 1}{4k'^2 + 1} \\
&\quad \underbrace{Q_\ell = \frac{T_v}{T_{2\ell}}; k' = \sqrt{\frac{Q}{Q_\ell} - \frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_v}{T_{2\ell}} (4k'^2 + 1) = 4Q}_{\substack{Q_\ell = \frac{T_v}{T_{2\ell}}; k' = \sqrt{\frac{Q}{Q_\ell} - \frac{1}{4}} \\ \Rightarrow \frac{T_v}{T_{2\ell}} (4k'^2 + 1) = 4Q}} \\
&= \frac{I_m^2 e^{-Q_\ell}}{8k'^2 Q} \left[ 4k'^2 (e^{Q_\ell} - 1) - 2k' \sin(2k' Q_\ell) + \cos(2k' Q_\ell) - 1 \right] \\
&= I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k' Q_\ell)}{4k' Q} - \frac{\cos(2k' Q_\ell) - 1}{8k'^2 Q} \right) \right]
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} i_{2m_{ent}}^2(t) dt &= \frac{I_m^2}{T_v T_{2\ell}^2} \int_0^{T_v} t^2 e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt = -I_m^2 \frac{t^2 T_{2\ell} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}}}{T_v T_{2\ell}^2} \Bigg|_0^{T_v} + I_m^2 \frac{2T_{2\ell}}{T_v T_{2\ell}^2} \int_0^{T_v} t e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\
&\quad \underbrace{\int f dg = fg - \int g df}_{\substack{f=t^2, dg=e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\ df=2t dt, g=-T_{2\ell} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}}}} \quad \underbrace{\int f dg = fg - \int g df}_{\substack{f=t, dg=e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt \\ df=dt, g=-T_{2\ell} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}}}} \\
&= -I_m^2 \frac{T_v e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}}}{T_{2\ell}} - I_m^2 \frac{2t e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}}}{T_v} \Bigg|_0^{T_v} + I_m^2 \frac{2}{T_v} \int_0^{T_v} e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}} dt = -I_m^2 \frac{T_v e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}}}{T_{2\ell}} - I_m^2 2e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} + I_m^2 \frac{2}{T_v} T_{2\ell} \left(1 - e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}}\right) \quad (33) \\
&= \frac{I_m^2}{T_v T_{2\ell}} \left[ 2T_{2\ell}^2 - e^{-\frac{T_v}{T_{2\ell}}} (T_v^2 + 2T_{2\ell} (T_v + T_{2\ell})) \right] \\
&= I_m^2 \left[ \frac{2}{Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} i_{2m_{saida}}^2(t) dt &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T_v} \int_{T_v}^{\tau} \underbrace{\left( \frac{I_m}{T_{2\ell}} \right)^2}_{\text{ver equação 33}} (t - T_v)^2 e^{-\frac{2(t-T_v)}{T_{2\ell}}} dt \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( -I_m^2 \frac{(t - T_v)^2 T_{2\ell} e^{-\frac{2(t-T_v)}{T_{2\ell}}}}{2T_v T_{2\ell}^2} - I_m^2 \frac{(t - T_v) e^{-\frac{2(t-T_v)}{T_{2\ell}}}}{2T_v} - I_m^2 \frac{e^{-\frac{2(t-T_v)}{T_{2\ell}}}}{4T_v} \right) \Bigg|_{T_v}^{\tau} = I_m^2 \frac{T_{2\ell}}{4T_v} \quad (34) \\
&= I_m^2 \frac{1}{4Q_\ell}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2_{ent}}(T_v) \right]^2 \frac{v}{D} \\
&= \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m - \frac{I_m}{k} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \right]^2 \frac{v}{D} \\
&= \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m - \frac{I_m}{k} \sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \right]^2 \frac{R'_2}{(L_m + L'_2)Q} \\
&= R'_2 I_m^2 \frac{1}{2Q} \left[ 1 - \frac{1}{k} \sinh(kQ_\ell) e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right]^2
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2_{ent}}(T_v) \right]^2 \frac{v}{D} \\
&= \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m - \frac{I_m}{k'} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \right]^2 \frac{v}{D} \\
&= \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m - \frac{I_m}{k'} \sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} T_v\right) e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \right]^2 \frac{R'_2}{(L_m + L'_2)Q} \\
&= R'_2 I_m^2 \frac{1}{2Q} \left[ 1 - \frac{1}{k'} \sin(k'Q_\ell) e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right]^2
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left[ I_m + i'_{m2_{ent}}(T_v) \right]^2 \frac{v}{D} \\
&= \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left( I_m - \frac{I_m}{T_{2\ell}} T_v e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \right)^2 \frac{v}{D} \\
&= \frac{1}{2}(L_m + L'_2) \left( I_m - \frac{I_m}{T_{2\ell}} T_v e^{-\frac{T_v}{2T_{2\ell}}} \right)^2 \frac{R'_2}{(L_m + L'_2)Q} \\
&= R'_2 I_m^2 \frac{1}{2Q} \left( 1 - Q_\ell e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right)^2
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
& R_2' I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ_\ell) - 1}{8k^2Q} \right) + \frac{1}{4Q_\ell} + \frac{\left( 1 - \frac{\sinh(kQ_\ell) e^{-\frac{Q_\ell}{2}}}{k} \right)^2}{2Q} \right] = \\
& = R_2' I_m^2 \left[ \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell) + 4e^{\frac{Q_\ell}{2}} \sinh(kQ_\ell)}{4kQ} - \frac{\sinh^2(kQ_\ell)}{4k^2Q} \right) \right] \\
& = R_2' k_p I_m^2
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
& R_2' I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\cos(2k'Q_\ell) - 1}{8k'^2Q} \right) + \frac{1}{4Q_\ell} + \frac{\left( 1 - \frac{\sin(k'Q_\ell) e^{-\frac{Q_\ell}{2}}}{k'} \right)^2}{2Q} \right] = \\
& = R_2' I_m^2 \left[ \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell) + 4e^{\frac{Q_\ell}{2}} \sin(k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\sin^2(k'Q_\ell)}{4k'^2Q} \right) \right] \\
& = R_2' k'_p I_m^2
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
& R_2' I_m^2 \left[ \frac{2}{Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} \right) + \frac{1}{4Q_\ell} + \frac{1}{2Q} \left( 1 - Q_\ell e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \right)^2 \right] = \\
& = R_2' I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{9}{4Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left( Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell} + \frac{Q_\ell}{2Q} \left( 2e^{\frac{Q_\ell}{2}} - Q_\ell \right) \right) \right] \\
& = R_2' k''_p I_m^2
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt &= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \left( 1 - \frac{\sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{k} \right)^2 dt \\
&= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} 1 dt - \frac{2I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \frac{\sinh\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{k} dt + \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \frac{\sinh^2\left(\frac{k}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}}}{k^2} dt \\
&\quad \text{ver equações 22 e 27} \qquad \qquad \qquad \text{ver equação 31} \\
&= I_m^2 - 2I_m^2 \left[ \frac{1}{Q} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sinh(kQ_\ell)}{2Qk} + \frac{\cosh(kQ_\ell)}{Q} \right) \right] + \\
&\quad + I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ_\ell) - 1}{8k^2Q} \right) \right] \\
&= I_m^2 \left\{ 1 - \frac{5}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{\sinh(2kQ_\ell)}{4kQ} + \frac{\cosh(2kQ_\ell) - 1}{8k^2Q} - e^{\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sinh(kQ_\ell)}{kQ} + \frac{2\cosh(kQ_\ell)}{Q} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt &= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \left( 1 - \frac{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{k'} \right)^2 dt \\
&= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} 1 dt - \frac{2I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \frac{\sin\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}}{k'} dt + \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \frac{\sin^2\left(\frac{k'}{T_{2\ell}} t\right) e^{-\frac{t}{T_{2\ell}}}}{k'^2} dt \\
&\quad \text{ver equações 23 e 28} \qquad \qquad \qquad \text{ver equação 32} \\
&= I_m^2 - 2I_m^2 \left[ \frac{1}{Q} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sin(k'Q_\ell)}{2Qk} + \frac{\cos(k'Q_\ell)}{Q} \right) \right] + \\
&\quad + I_m^2 \left[ \frac{1}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left( \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\cos(2k'Q_\ell) - 1}{8k'^2Q} \right) \right] \\
&= I_m^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2Q} - e^{-Q_\ell} \left[ \frac{1}{2Q} + \frac{\sin(2k'Q_\ell)}{4k'Q} - \frac{\cos(2k'Q_\ell) - 1}{8k'^2Q} - e^{\frac{Q_\ell}{2}} \left( \frac{\sin(k'Q_\ell)}{k'Q} + \frac{2\cos(k'Q_\ell)}{Q} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} (I_m + i'_{2m_{ent}}(t))^2 dt &= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \left(1 - \frac{1}{T_{2\ell}} t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}}\right)^2 dt \\
&= \frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} 1 dt - \underbrace{\frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \frac{2}{T_{2\ell}} t e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt}_{\text{ver equações 24 e 29}} + \underbrace{\frac{I_m^2}{T_v} \int_0^{T_v} \frac{1}{T_{2\ell}^2} t^2 e^{-\frac{t}{2T_{2\ell}}} dt}_{\text{ver equação 33}} \\
&= I_m^2 - 2I_m^2 \left[ \frac{4}{Q_\ell} - e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left(2 + \frac{4}{Q_\ell}\right) \right] + I_m^2 \left[ \frac{2}{Q_\ell} - e^{-Q_\ell} \left(Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell}\right) \right] \\
&= I_m^2 \left[ 1 - \frac{6}{Q_\ell} + 4e^{-\frac{Q_\ell}{2}} \left(1 + \frac{2}{Q_\ell}\right) - e^{-Q_\ell} \left(Q_\ell + 2 + \frac{2}{Q_\ell}\right) \right]
\end{aligned} \tag{48}$$