

JOSÉ ROBERTO CARDOSO

Engenheiro Eletricista, Escola Politécnica da USP, 1974
Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da USP, 1979

**PROBLEMAS DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS ESTÁTICOS E DINÂMICOS:
UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tese de Doutorado apresentada à
Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do Títu
lo de "Doutor em Engenharia Elétri
ca".

Orientador: Prof. Dr. ORLANDO SILVIO LOBOSCO (PEL)

São Paulo, 1985

Para Jandira, minha mulher, sem cujo amor e presença esta tese acabaria sendo escrita alguns anos depois.

Para Roberta e Marcos, meus filhos, sem cujo amor e presenças esta tese acabaria sendo escrita alguns anos antes.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho contou com a colaboração, direta ou indireta, de muitas pessoas para chegar a seu termo. Na impossibilidade de citá-las todas, desejaria expressar meus agradecimentos através daqueles que, às vezes, até mesmo com sacrifício de suas horas de lazer, jamais negaram suas valiosas contribuições. Ao Prof. Dr. Rubens Guedes Jordão pelo incentivo durante a fase inicial deste projeto. Ao Prof. Dr. Orlando Silvio Lobosco, meu orientador, que sempre manteve seu estímulo para a concretização deste trabalho. Ao Prof. M. Drigas, por ter sugerido este estudo e indicado as primeiras referências bibliográficas. Ao Prof. Dr. Dimetri Ivanoff, que através de sua pessoa permitiu o contato com o Prof. J.C. Sabonnadiere do Institut National Polytechnique de Grenoble, cujos préstimos em uma fase importante do trabalho, foram de extrema utilidade. Ao Dr. Artur Portela do LNEC-Lisboa, pelas discussões e orientação nas pesquisas bibliográficas. Ao politécnico Willian Y. Akaishi, meu ex-aluno, um agradecimento especial, não só pelo trabalho incansável desenvolvido, como também pela extrema capacidade de suportar com tenacidade os inúmeros problemas encontrados durante a fase de elaboração dos programas computacionais. Aos politécnicos Toshio Okamoto e Kalenin Pock Branco pelas sugestões apresentadas quanto a otimização na confecção dos programas. À srt^a Stela Regina Rosa e ao jovem Marcos Augusto Rosa que desenvolveram excelentes trabalhos de datilografia e desenhos, sem os quais este texto não seria completado no prazo exigido. Ao Sr. J.R. Cumprido que, embora com eficiência questionável, teve a infinita paciência de elaborar esse texto em inúmeros fins de semana, muitos dos quais com jogos do Corinthians.

R E S U M O

A idéia de realizar este trabalho surgiu durante o curso de pós-graduação, ministrado pelo Prof. Dr. M. Drigas, "Tópicos Especiais sobre Máquinas Elétricas", realizado no 2º semestre de 1980 na EPUSP, onde foi observada a necessidade do conhecimento das distribuições de campos magnéticos em dispositivos eletromecânicos com o objetivo de se prever seu desempenho na fase de projeto.

Nesta época, já havia sido apresentada a tese do Prof. Janiszewski*, o primeiro trabalho, de nosso conhecimento realizado no Brasil nesta área, onde foi desenvolvida a técnica de resolução de problemas de Campos Magnéticos em Regime Estacionário, que, evidentemente, não pode ser aplicada na resolução de problemas onde a variável tempo está envolvida; baseado nesta tese, em 1982 o Prof. Luiz Lebensztajn, reproduziu o trabalho do Dr. Janiszewski o qual foi aplicado para verificar a consistência dos resultados práticos na tese de Livre Docência do Prof. Dr. Aurio Gilberto Falcone.

As formulações mais freqüentes do Método dos Elementos Finitos (MEF), publicada nos periódicos internacionais, são baseadas no Cálculo Variacional, onde o sistema de equações algébricas não linear resultante, é derivado a partir da obtenção

* JANISZEWSKI, J.M. Método dos elementos finitos aplicado a problemas de campos eletromagnéticos estáticos. São Paulo, 1978 - Tese de doutoramento, EPUSP, 207 p.

do extremo de uma funcional que em algumas situações não pode ser obtida, limitando assim sua aplicação.

Em decorrência deste fato, o primeiro objetivo deste trabalho foi organizar os procedimentos para obtenção do sistema de equações do MEF aplicado à resolução de problemas de campo descritos por equações diferenciais não lineares, sem a necessidade de se conhecer uma eventual funcional aplicada ao problema. Algumas contribuições interessantes são encontradas no Capítulo II, referente à formulação do MEF para problemas de campo descrito por operadores diferenciais não auto-adjuntos.

No Capítulo III são apresentadas as técnicas de montagem das matrizes, bem como aquelas de introdução das condições de contorno, originárias deste método, que muito embora sejam técnicas de aplicação corriqueiras, ajudarão em muito o pesquisador iniciante nesta área, sem a necessidade de recorrer a outro texto.

No Capítulo IV são apresentadas as formulações necessárias para a solução de problemas de campos eletromagnéticos estáticos, para elementos de quatro lados retos (e curvos) assim como a técnica utilizada na obtenção da relutividade em meios não lineares.

No Capítulo V são tratados os problemas de campo, onde a variável tempo está envolvida, permitindo assim a resolução de uma série enorme de problemas referentes aos campos de natureza eletromagnética, tais como os fenômenos transitórios e o Regime Permanente Senoidal.

Os aspectos computacionais ligados ao trabalho es
tão expostos no Capítulo VI, onde são apresentadas as rotinas de
resolução do sistema de equações resultante adaptadas às parti-
cularidades do problema, e as rotinas de integração numérica de
problemas descritos por equações diferenciais dependentes do tem-
po de primeira e segunda ordem.

Algumas técnicas apresentadas nestes Capítulos,
são aplicadas especificamente para a obtenção da distribuição de
campo magnético no Capítulo VII deste trabalho, com o objetivo
de analisar o desempenho de um transformador em regime transitó-
rio, onde é confirmada a consistência do método.

A B S T R A C T

The idea of making this work came during a graduation course, "Special Topics on Electric Machines", lectured by Prof. Dr. M. Drigas during the 2nd semester of 1980 at EPUSP, when the need of knowing the distribution of magnetic fields in electromechanics devices was noticed, in order to foresee its performance during design.

At that time, the first work about this subject realized made in Brazil was presented in Prof. Janiszewski's thesis, where a technique was developed to solve Steady-State Magnetic Fields. However, it is clear that when the time variable is considered, this technique cannot be applied.

The usual formulations of the Finite Element Method, published in international journals, was based on Variational Calculations, where the resulting non-linear algebraic equations system is derived from the extreme of a functional, which sometimes cannot be obtained, limiting in this way its application.

Consequently, the first aim of this work is to organize procedures to obtain the Finite Method equations system, in order solve non-linear differential equations of fields, without the need of a previous functional for the problem. In Chapter II, one will find some interesting contributions referred to the Finite Element Method formulation, in the description of field problems by the use of non self-adjacent differentials operations.

Matrix building techniques are presented in Chapter III, as well as the introduction of boundary conditions in this method. In spite of being an ordinary technique, it will help the beginners a lot, eliminating the need of other sources.

Chapter IV presents the necessary formulations, which solve static eletromagnetic fields for elementos of four square (and curved) sides, and the technique used in the determination of non-linear media reluctivity.

In Chapter V, the time variable of eletromagnetic fields is treated, making possible the solution of problems of this nature, such as transient phenomena and senusoidal steady-state.

Computer aspects of the work are shown in Chapter VI, presenting resolution routines of the equation system fitted to the problem, and numeric integration routines described by first and second order differential equations, which depend on the time.

Some techniques showed in those previous Chapters are specifically used in Chapter VII to obtain the magnetic field distribution, which analyses transformer performance during transients. The coherence of the method is also confirmed.

Í N D I C E

CAPÍTULO I - FORMULAÇÃO GERAL DOS PROBLEMAS DE CAMPO01
1. GENERALIDADES01
2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS03
3. FORMULAÇÃO RESIDUAL DOS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO08
CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS13
1. GENERALIDADES13
2. DISCRETIZAÇÃO E ESCOLHA DA FORMA DO ELEMENTO15
3. SELEÇÃO DA TÉCNICA DE APROXIMAÇÃO17
3.1 - Técnica de Galerkin18
3.2 - Técnica dos Mínimos Quadrados25
3.3 - Técnica Híbrida28
4. TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO32
4.1 - Interpolação em Termos de Coordenadas Generali zadas33
4.2 - Interpolação em Termos de Funções de Forma40
4.2.1 - Coordenadas naturais42
4.3 - Elementos Finitos com Interpolação em Termos de Função de Forma48
4.3.1 - Família dos elementos triangulares e te traédricos49
4.3.2 - Família de elementos retangulares52
4.4 - Elementos com Lados Curvos61

CAPÍTULO III - GERAÇÃO DAS MATRIZES DOS ELEMENTOS65

1.	INTRODUÇÃO.65
2.	ELEMENTO TRIANGULAR DE PRIMEIRA ORDEM66
3.	ELEMENTOS DE QUATRO LADOS68
4.	GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS73
5.	INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO78

**CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS ESTÁTICOS
COM ELEMENTOS DE QUATRO LADOS80**

1.	GENERALIDADES80
2.	FORMULAÇÃO RESIDUAL - FORMA "FRACA"82
3.	ELEMENTOS CURVOS - APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA86
	3.1 - Introdução86
	3.2 - Elementos do Jacobiano90
4.	ELEMENTOS DE QUATRO LADOS - APROXIMAÇÃO LINEAR93
5.	AValiação DA RELUTIVIDADE NOS PROBLEMAS NÃO-LINEARES.95
6.	DETERMINAÇÃO DE GRANDEZAS SECUNDÁRIAS101
	6.1 - Energia Magnética Armazenada101
	6.2 - Indutâncias Próprias102

**CAPÍTULO V - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS
DINÂMICOS**

1.	INTRODUÇÃO104
2.	REGIME TRANSITÓRIO - FORMULAÇÃO PELO MEF105
3.	CORRENTE INDUZIDA109
4.	REGIME PERMANENTE SENOIDAL - FORMULAÇÃO PELO MEF109
5.	REGIME RAPIDAMENTE VARIÁVEL113
6.	INTEGRAÇÃO NO TEMPO117

CAPÍTULO VI - ASPECTOS COMPUTACIONAIS121

1. INTRODUÇÃO121
2. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES122
 2.1 - O Método da Eliminação de Gauss123
 2.2 - Implementação Computacional126
3. REFINAMENTO DA SOLUÇÃO128
4. FLUXOGRAMA130

CAPÍTULO VII - ALGUMAS APLICAÇÕES EM TRANSFORMADORES133

1. INTRODUÇÃO133
2. REGIME LENTAMENTE VARIÁVEL133
3. CONCLUSÕES141

**APÊNDICE - FORMULAÇÃO DO MEF A PARTIR DA SEGUNDA EQUAÇÃO
DE MAXWELL PARA ELEMENTOS TRIANGULARES142**

1. INTRODUÇÃO142
2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA142
3. DISTRIBUIÇÃO DO VETOR POTENCIAL MAGNÉTICO NO INTERIOR
DO ELEMENTO145
4. CAMPO MAGNÉTICO NO INTERIOR DO ELEMENTO148
5. CIRCUITAÇÃO PARCIAL NO INTERIOR DO ELEMENTO148
6. CORRENTE CONCATENADA150
7. GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS151

BIBLIOGRAFIA153

ELENCO DE VARIÁVEIS

- A - Vetor Potencial Magnético (Wb/m)
- B - Vetor Campo Magnético (Wb/m²)
- H - Vetor Intensidade Magnética (A/m)
- J - Vetor Densidade de Corrente (A/m²)
- L - Indutância (H)
- N - função de forma
- R - Resíduo
- S - fronteira
- W - função peso
- a - coordenada generalizada
- i, j, k - índices locais
- u, v - velocidade (m/s)
- $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ - vetores unitários nas direções x, y e z
- α - coeficientes generalizados
- θ - variável de campo
- Δ - domínio
- ∇ - operador Gradiente
- ϵ - permissividade dielétrica do meio (F/m)
- μ - permeabilidade (H/m)
- ν - relutividade (mH⁻¹)
- σ - condutividade (S/m)
- ρ - densidade volumétrica de cargas (c/m³)
- ϕ, ψ - função potencial (V)

CAPÍTULO I - FORMULAÇÃO GERAL DOS PROBLEMAS DE CAMPO

1. GENERALIDADES

Com o desenvolvimento dos modernos sistemas de potência, têm-se solicitado geração e transmissão de grandes quantidades de energia elétrica.

Em vista disso, os equipamentos eletromecânicos foram solicitados a operar com elevadas densidades volumétricas de potência, de modo eficiente, econômico e de alta confiabilidade, necessitando-se, portanto, projetá-los com um alto grau de otimização.

Para concluir com êxito um projeto com essas características, como também prever com precisão o comportamento desse dispositivo no estágio de projeto, é essencial conhecer claramente a distribuição de campo magnético nas diferentes partes do equipamento para uma avaliação correta do estado de saturação, das perdas no ferro, do aquecimento e das forças de origem magnética.

Os métodos analíticos tradicionais mostram-se ineficientes para tal refinamento, na medida em que as variáveis de campo são continuamente distribuídas em todo o domínio do problema. Salvo raras exceções, que são em geral problemas acadêmicos, é extremamente difícil ou praticamente impossível determinar a solução exata dos modelos contínuos, em virtude da complexidade do domínio do problema em estudo, adicionado à não-linearidade dos meios magnéticos. Embora os métodos analíticos continuem a ter a virtude da "elegância" matemática, pode-se afirmar que o esforço atual concentra-se principalmente na formulação dos chamados modelos discretos, na medida em que são esses

os que permitem tirar partido dos meios computacionais hoje disponíveis.

A complexidade aparente no tratamento de todos os parâmetros envolvidos num problema de campo dá origem à descrição matemática de um problema equivalente, no qual intervêm apenas as componentes dos vetores de campo e as características fundamentais do meio. Tal descrição matemática é feita através de um sistema de equações diferenciais derivadas das Equações de Maxwell. Deste modo, as equações diferenciais aparecem com importância fundamental na formulação dos problemas de campo.

A formulação diferencial deste problema estabelece-se, com base nas relações fundamentais entre os campos, na compatibilidade e nas relações constitutivas sobre um elemento diferencial genérico. Em geral, a compatibilidade verifica-se automaticamente, visto que as variáveis de campo se distribuem continuamente no domínio do problema.

Assim, lança-se mão dos modelos discretos com o auxílio de hipóteses simplificativas que, introduzidas nos modelos contínuos, permitem exprimir as variáveis de campo em termos de um número finito de parâmetros.

Os métodos que conduzem à determinação da solução aproximada são os numéricos e de aproximação.

Tais métodos permitem, em última análise, substituir o problema da resolução de um sistema de equações diferenciais e respectivas condições de contorno, pelo problema equivalente da resolução de um Sistema de Equações Algébricas, cuja solução se obtém com o auxílio de computadores.

Exceto em casos bem particulares, os problemas eletromagnéticos podem ser analisados numa visão bidimensional,

e, com algumas correções, o meio pode ser considerado isotrópico.

2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Os estudos dos Campos Eletromagnéticos, que interessam ao engenheiro eletricitista, podem ser classificados em três tipos, de acordo com a equação diferencial que os descreve.

Inicialmente, temos o Regime Estacionário, onde a variável-tempo não afeta as amplitudes dos vetores de campo. Na formulação bidimensional, a equação diferencial que rege o comportamento dos campos em Regime Estacionário é a equação geral da dispersão tipo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.1)$$

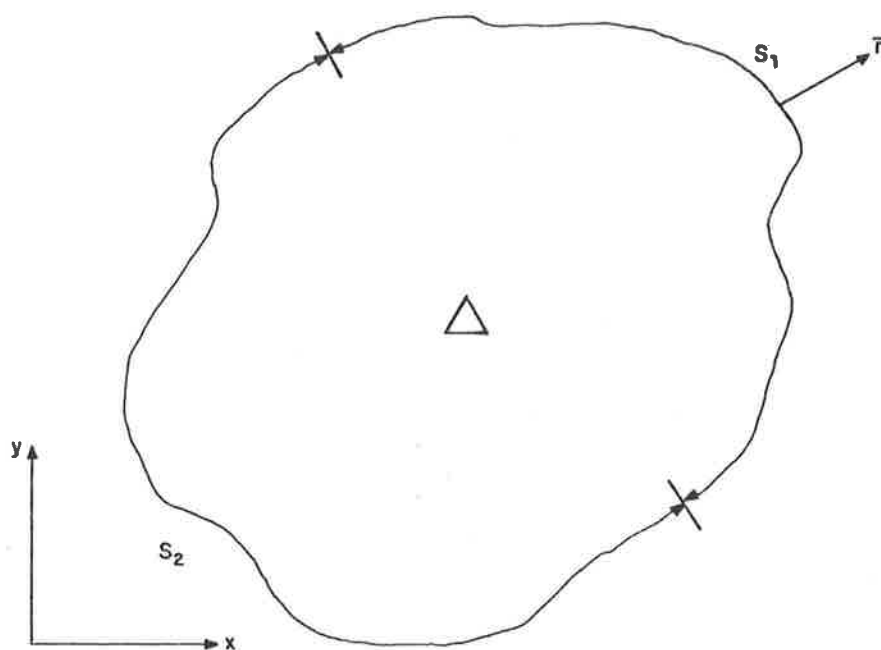
com as condições de contorno:

$$\theta_0 = \bar{\theta} \text{ em } S_1 \quad (1.2)$$

$$k_x \frac{\partial \theta_0}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta_0}{\partial y} n_y = \bar{g} \text{ em } S_2 \quad (1.3)$$

onde n_x e n_y são os cossenos diretores da normal à fronteira, ou seja, as componentes do versor \vec{n} no referencial (x, y) , que é normal e dirigido para fora da fronteira S que delimita Δ .

A figura I.1 mostra o domínio em estudo.



Δ - DOMÍNIO $S=S_1+S_2$ - FRONTEIRA

Figura I.1 - Domínio em estudo e respectiva fronteira

Três estudos importantes podem ser efetuados no Regime Estacionário:

- a.) Campo Eletrostático
- b.) Campo de Correntes Estacionárias
- c.) Campo Magnetostático.

No Campo Eletrostático, a equação diferencial que o descreve é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \rho = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.4)$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \bar{\phi} \text{ em } S_1 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em } S_2 \quad (1.6)$$

Neste estudo, podemos determinar a distribuição de Campo Elétrico em todo o domínio, facilitando em muito as análises de isolamento em equipamentos de alta tensão, bem como a determinação de capacitâncias de sistemas irregulares.

No Campo de Correntes Estacionárias, a equação respectiva é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.7)$$

com as condições de contorno:

$$\psi = \bar{\psi} \text{ em } S_1 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ em } S_2 \quad (1.9)$$

Destaca-se, neste caso, os estudos referentes à determinação de resistências ôhmicas de condutores irregulares, resistência de aterramento e resistências de isolamento.

Finalmente, no Campo Magnetostático, a equação que descreve o problema é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.10)$$

com as condições de contorno:

$$A = \bar{A} \text{ em } S_1 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \text{ em } S_2 \quad (1.12)$$

No estudo do Campo Magnetostático, podemos determinar a distribuição de Campo Magnético em todo o domínio, fornecendo-nos condições para a obtenção das indutâncias próprias e mútuas do sistema, como também fornecer subsídios para a obtenção das perdas no ferro.

Um segundo estudo importante refere-se ao Regime Lentamente Variável. Neste caso em particular, a variação temporal dos vetores de campo é tal, que a densidade corrente de deslocamento pode ser desprezada, ou seja, $\partial \vec{D} / \partial t \ll \vec{J}$. Na formulação bidimensional, a equação diferencial que rege o comportamento dos campos em Regime Lentamente Variável é a equação geral da difusão, descrita por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right) + Q(x, y, t) - \alpha \frac{d\theta_0}{dt} = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.13)$$

com as condições de contorno expressas em (1.2) e (1.3), adicionada, ainda, as condições iniciais dada por:

$$\theta_0(t_0) = \bar{\theta}_0 \quad (1.14)$$

No Eletromagnetismo, tem particular interesse o problema Magnetodinâmico, descrito pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J(x, y, t) - \sigma \frac{dA}{dt} = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.15)$$

com as condições de contorno expressas em (1.11) e (1.12) e as condições iniciais:

$$A(t_0) = \bar{A}_0 \quad (1.16)$$

Finalmente, existe um terceiro estudo relativo ao Regime Rapidamente Variável. Neste caso o modelo matemático é dito "de propagação" ou "vibratório", e sua equação representativa é denominada "Equação de Onda" e expressa por:

$$\nabla^2 \vec{A} + \mu \vec{J} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.17)$$

para o vetor potencial magnético e

$$\nabla^2 \phi - \frac{\rho}{\epsilon} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.18)$$

para a função potencial. Em ambos os casos considerou-se o meio linear.

O Regime Lentamente Variável apresenta especial interesse na Eletrotécnica, particularmente no estudo do Regime Permanente Senoidal à frequência reduzida, ao passo que o Regime Rapidamente Variável é aplicado com precisão nos estudos de propagação.

Concluindo, podemos afirmar que, em qualquer problema que envolva a resolução de um sistema de equações a derivadas parciais, três questões fundamentais se apresentam, quais sejam:

- I. Existência da solução, isto é, que a solução exista.
- II. Unicidade de solução, isto é, que a solução seja única.
- III. Estabilidade da solução, isto é, que a solução dependa continuamente das condições definidas, de modo que

às pequenas variações dessas correspondam pequenas variações da solução.

3. FORMULAÇÃO RESIDUAL DOS MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Uma vez estabelecido o modelo contínuo correspondente ao fenômeno em estudo, formula-se um modelo discreto, cuja resolução permitirá determinar uma solução aproximada do sistema de equações diferenciais que constituem o referido modelo contínuo. A escolha de um determinado método de aproximação é um aspecto importante, na medida em que afeta a precisão dos resultados e a economia da solução.

Deve-se ter sempre como objetivo transformar a resolução de um sistema de equações diferenciais e respectivas condições de contorno, na resolução de um sistema de equações algébricas.

O ponto de partida de todo o processo é a Equação Geral dos Resíduos Pesados (ou Ponderados), que é definida como segue:

Seja Δ um domínio com fronteira S , subdividida em S_1 e S_2 , tal que $S = S_1 + S_2$, como mostra a figura I.1.

Consideraremos definida a equação diferencial:

$$Lu_0 - g = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.19)$$

com as condições de contorno:

$$Cu_0 - h = 0 \text{ em } S_1 \quad (1.20)$$

$$Du_0 - \ell = 0 \text{ em } S_2 \quad (1.21)$$

onde u_0 é a solução exata, L , C e D são operadores diferenciais e g , h e ℓ são funções de valor prescrito.

Considerando-se que as equações (1.19) a (1.21) se anulam respectivamente em cada ponto do domínio Δ e dos trechos S_1 e S_2 da fronteira S , verifica-se sempre que:

$$\int_{\Delta} (Lu_0 - g) W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1} (Cu_0 - h) W_{S_1} dS + \int_{S_2} (Du_0 - \ell) W_{S_2} dS = 0 \quad (1.22)$$

onde W_{Δ} , W_{S_1} e W_{S_2} são funções arbitrárias denominadas funções-peso, das quais exige-se apenas que sejam tais que qualquer uma delas possa ser calculada, isto é, que tenham valor finito diferente de zero. Esta equação é o ponto de partida para a Equação Geral dos Resíduos Pesados.

Através do Método dos Elementos Finitos, vamos de terminar uma solução aproximada $u \approx u_0$, caracterizada pela técnica da discretização, isto é, subdividindo-se o domínio e a fronteira do problema em subdomínios, ou elementos sobre os quais são definidas funções de aproximação u e as funções de peso arbitrárias W .

As funções de aproximação u são definidas num conjunto completo de funções conhecidas linearmente independentes ϕ_i , do tipo:

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad (1.23)$$

onde os α_i 's são os coeficientes generalizados a serem determina

dos e que são iguais a u_i no caso de se referirem aos pontos nodais, isto é, aos pontos em que se pretende determinar o valor da função u .

Devem ser satisfeitas as condições de completida para que se possa permitir uma boa aproximação, isto é, a mesma deve ser tal que se verifique:

$$\|u_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i\| < \epsilon \quad (1.24)$$

onde ϵ é um valor suficientemente pequeno, e $\|\cdot\|$ representa a norma ou medida da função u .

Entenda-se por norma ou medida de uma função $f(x)$ a raiz quadrada do autoproduto escalar, isto é:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot f(x) dx} \quad (1.25)$$

Da mesma forma, definem-se as funções de peso arbitrárias W , num conjunto de funções conhecidas ψ_i do tipo:

$$W = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \dots = \sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i \quad (1.26)$$

onde os β_i 's são coeficientes arbitrários que são iguais a W_i no caso de se referirem aos pontos nodais.

Assim sendo, se substituirmos u_0 por u nas expressões (1.19), (1.20) e (1.21) obteremos as seguintes relações:

$$R_\Delta = Lu - g \neq 0 \text{ em } \Delta \quad (1.27)$$

$$R_{S_1} = Cu - h \neq 0 \text{ em } S_1 \quad (1.28)$$

$$R_{S_2} = Du - \ell \neq 0 \text{ em } S_2 \quad (1.29)$$

que são denominadas "resíduos" ou "funções-erro de aproximação", definidas no domínio e na fronteira. Resulta, portanto, que:

$$\int_{\Delta} R_{\Delta} W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1} R_{S_1} W_{S_1} dS + \int_{S_2} R_{S_2} W_{S_2} dS \neq 0 \quad (1.30)$$

Considerando-se que, quanto menores forem os resíduos, tanto melhor a aproximação feita, força-se o anulamento dos resíduos em sentido médio, distribuindo-os no domínio e na fronteira do problema, de acordo com as funções de peso arbitrárias, isto é, considera-se que:

$$\int_{\Delta} R_{\Delta} W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1} R_{S_1} W_{S_1} dS + \int_{S_2} R_{S_2} W_{S_2} dS = 0 \quad (1.31)$$

A equação anterior é denominada Equação Geral dos Resíduos Pesados e estabelece a ortogonalidade dos resíduos às funções de peso, cuja escolha dá origem a diferentes métodos de aproximação.

Como exemplo, considere-se a Equação Geral da dispersão citada em (1.1).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ em } \Delta \quad (1.32)$$

com as condições de contorno:

$$\theta_0 = \bar{\theta} \text{ em } S_1 \quad (1.33)$$

$$k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y = \bar{g} \text{ em } S_2 \quad (1.34)$$

Substituindo-se θ_0 por uma solução aproximada θ , obteremos os seguintes resíduos de aproximação:

$$R_\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + Q \text{ em } \Delta \quad (1.35)$$

$$R_{S1} = \theta - \bar{\theta} \text{ em } S_1 \quad (1.36)$$

$$R_{S2} = k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y - \bar{g} \text{ em } S_2 \quad (1.37)$$

o que resulta na seguinte equação dos resíduos pesados:

$$\int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + Q \right| W_\Delta d\Delta + \int_{S1} (\theta - \bar{\theta}) W_{S1} dS + \int_{S2} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y - \bar{g} \right| W_{S2} dS = 0 \quad (1.38)$$

onde W_Δ , W_{S1} e W_{S2} são funções de peso arbitrárias.

A escolha adequada das funções de peso da Equação dos Resíduos Pesados é a base para a formulação das diversas técnicas de aproximação do Método dos Elementos Finitos, que será objeto de estudos nos próximos capítulos.

CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

1. GENERALIDADES

Atualmente, o Método dos Elementos Finitos é a mais poderosa ferramenta matemática para a solução aproximada de equações diferenciais, que governam fenômenos físicos mais diversos.

Sua formulação data de aproximadamente há 25 anos e foi utilizada pela primeira vez na Análise Estrutural no Campo da Engenharia Civil, tendo sua primeira aplicação na Engenharia de Eletricidade marcada pelo artigo "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problem"*. Desde então, sua utilização tem sido cada vez mais intensa na solução de problemas de Eletricidade.

No Método dos Elementos Finitos, são utilizadas funções de aproximação, que satisfazem com plenitude a apenas uma das condições de contorno, sendo a outra satisfeita de forma aproximada.

Supondo-se que a função de aproximação escolhida satisfaça exatamente à condição de contorno em S_1 , a Equação dos Resíduos Pesados é escrita como se segue:

$$\int_{\Delta} R_{\Delta} W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_2} R_{S_2} W_{S_2} dS = 0 \quad (2.1)$$

* Silvester P, Chari, M.V.K. - IEEE Trans. on PAS, Vol. 89, nº 7, September/October, 1970, pp. 1642-1651.

Verifica-se que, neste caso, torna-se necessário discretizar o domínio Δ e a fronteira S_2 .

Alguns cuidados deverão ser tomados na escolha das funções de aproximação u e das funções de peso W , em particular no que se refere às condições de admissibilidade, que são as restrições relativas ao grau de continuidade das mesmas, como também de suas derivadas que aparecem na Equação Geral dos Resíduos Pesados.

Estas funções devem ser tais, que a derivada de maior ordem que aparece na Equação dos Resíduos Pesados faça com que as integrais tenham valor finito diferente de zero.

Chamando-se de C^k a classe de funções que tenham as k primeiras derivadas contínuas, podemos afirmar que, se na equação dos resíduos pesados aparecerem derivadas de maior ordem n da função u , e derivadas de maior ordem m da função W , as funções escolhidas para u e W devem ser tais que, respectivamente as $n-1$ e as $m-1$ primeiras derivadas sejam contínuas, ou seja, as mesmas deverão ter classes C^{n-1} e C^{m-1} .

Como exemplo, vamos analisar um caso em que se escolhe para u uma função contínua, mas com primeira derivada descontínua, como mostra a figura II.1.

Verifica-se que, embora a primeira derivada de u não seja definida em A , ela pode ser integrada; quanto a segunda, observa-se que esta tende ao infinito, não podendo, pois ser integrada.

Resulta, portanto, que esta função satisfaz às condições de admissibilidade, apenas se, em qualquer das integrais da equação residual, não aparecerem derivadas de u de ordem superior à primeira, e, e neste caso, diz-se que a função u representada na figura II.1 tem continuidade C^0 .

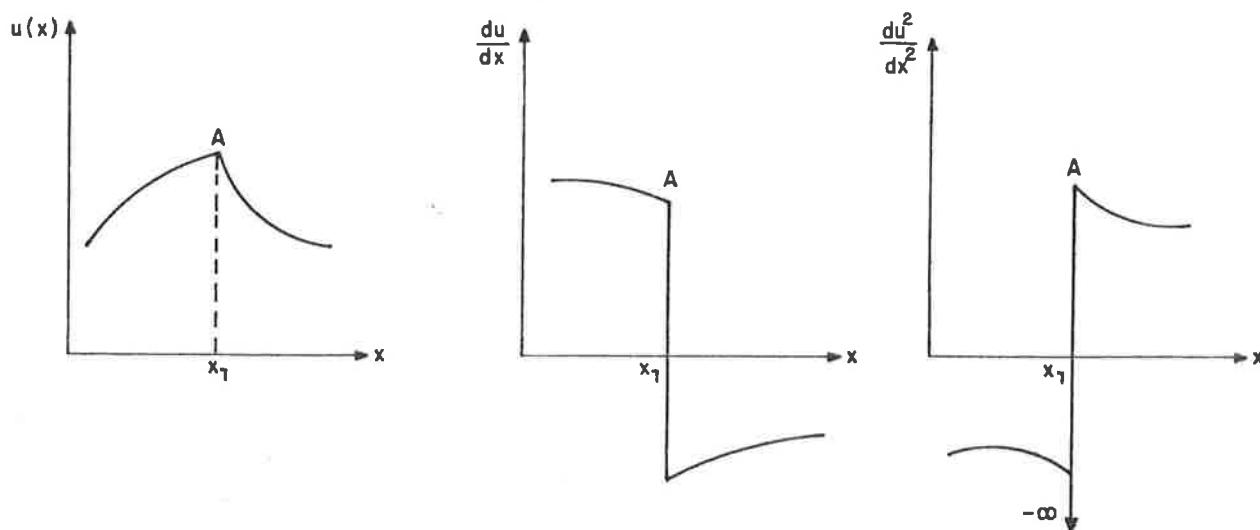


Figura II.1 - Função com descontinuidade C^0

Em vista disso, a Equação dos Resíduos Pesados (1.38), na forma em que ela se apresenta, a maior derivada é a de segunda ordem, resultando, portanto, que a função de aproximação a ser escolhida para θ deverá ter continuidade C^1 , enquanto, que, para as funções de peso W_Δ , W_{S1} e W_{S2} que não têm derivadas em nenhuma das integrais, as mesmas poderão ser escolhidas arbitrariamente.

A seguir são apresentados os passos a serem seguidos na solução dos problemas pelo Método dos Elementos Finitos.

2. DISCRETIZAÇÃO E ESCOLHA DA FORMA DO ELEMENTO

Este passo envolve a subdivisão do domínio em uma quantidade adequada de "pequenos" domínios, denominados "elementos finitos". A intersecção dos lados dos elementos são o que chamamos de pontos nodais ou simplesmente nós.

Várias questões nesse ponto se apresentam, sendo

as primeiras delas: Qual deve ser o tamanho do elemento? Qual a quantidade adequada de elementos?

Isso depende de vários fatores, e, basicamente, o fundamental é a experiência do usuário.

Em primeiro lugar, não há necessidade dos elementos serem do mesmo tamanho, nem tampouco possuírem a mesma geometria, podendo inclusive possuir lados curvos para se adequar à geometria do domínio.

Deve-se a princípio locar uma quantidade maior de elementos nas regiões onde se espera uma maior variação do campo; em hipótese alguma, pode-se afirmar que uma grande quantidade de elementos leva a uma solução mais aproximada. Claro está que o meio de cada elemento deve ser único.

O conhecimento qualitativo da geometria das linhas de campo facilita em muito a discretização, com a redução do número de iterações para se atingir a convergência. As figuras II.2 dão uma boa orientação a ser seguida no processo de discretização.

A figura II.3 mostra um domínio discretizado em elementos finitos triangulares, onde se observa que tal procedimento resulta automaticamente na discretização da fronteira; esta operação será simbolicamente representada por:

$$\Delta = \sum_e \Delta^e \quad \text{para o domínio}$$

$$S = \sum_e S^e \quad \text{para a fronteira}$$

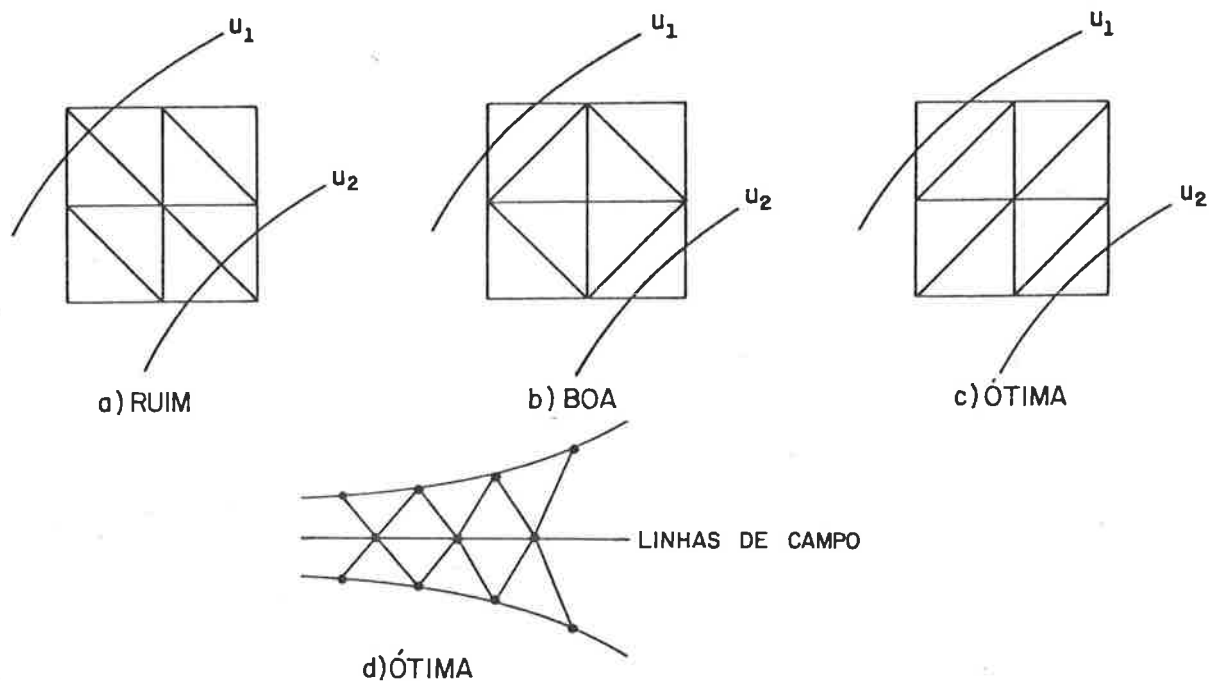


Figura II.2 - Técnicas de otimização da malha

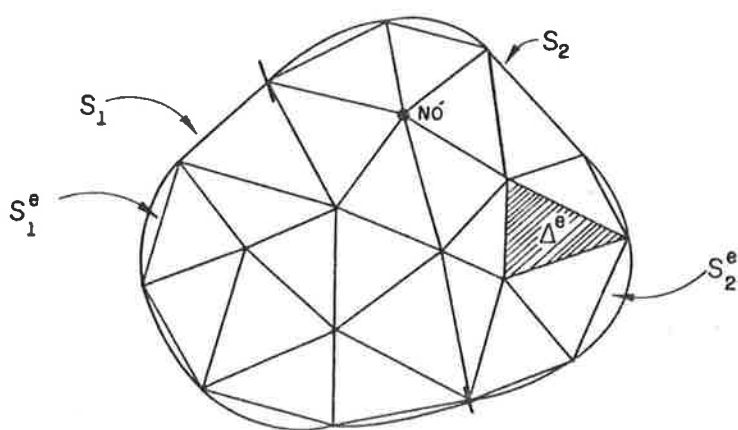


Figura II.3 - Discretização do domínio e da fronteira

3. SELEÇÃO DA TÉCNICA DE APROXIMAÇÃO

Após a discretização do domínio em elementos finitos, sobre os quais se definem as funções de aproximação, passaremos à próxima etapa, que se refere à escolha da técnica de aproximação.

A escolha das funções-peso define a técnica de aproximação do método dos elementos finitos e deve ser orientada de modo a se obter a maior economia possível na análise numérica.

Em geral, escolhem-se técnicas que não exijam elevadas condições de continuidade entre os elementos, e ainda conduzam a matrizes simétricas.

As técnicas mais populares para a determinação da solução aproximada pelo método dos elementos finitos são as técnicas de Galerkin e a dos Mínimos Quadrados.

A técnica de Galerkin é adequadamente aplicada após uma manipulação criteriosa da Equação dos Resíduos Pesados, que é denominada forma "fraca" da Equação dos Resíduos Pesados, dando origem a matrizes simétricas somente para operadores diferenciais auto-adjuntos; reconhece-se um operador auto-adjunto pela ausência de derivadas de ordem ímpar.

A técnica dos Mínimos Quadrados parte da forma original da Equação dos Resíduos Pesados, fornecendo incondicionalmente matrizes simétricas, exigindo, no entanto, condições de continuidade superiores para as funções de aproximação.

3.1 - Técnica de Galerkin

Como já explicitamos, no Método dos Elementos Finitos, a função de aproximação escolhida deve satisfazer à condição de contorno em uma das fronteiras, devendo-se escolhê-la de tal forma que a condição satisfeita seja exatamente a da fronteira S_1 . A Equação dos Resíduos Pesados (1.38) pode ser escrita como se segue:

$$\int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right| W_{\Delta} d\Delta + \int_{\Delta} Q W_{\Delta} d\Delta$$

$$\int_{S_2} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y - \bar{g} \right| W_{S_2} dS = 0 \quad (2.2)$$

A primeira integral da equação (2.2) pode ser integrada por partes, a partir da utilização da fórmula de Green*, resultando no que é denominada forma "fraca" da Equação dos Resíduos Pesados.

A fórmula de Green estabelece que, para quaisquer funções diferenciáveis α e β , podemos escrever as seguintes identidades:

$$\int_{\Delta} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} dx dy = - \int_{\Delta} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta dx dy + \int_S \alpha \beta n_x dS \quad (2.3)$$

$$\int_{\Delta} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy = - \int_{\Delta} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta dx dy + \int_S \alpha \beta n_y dS \quad (2.4)$$

Assim sendo, a primeira integral da eq. (2.2) pode ser escrita como:

* A demonstração desta fórmula é apresentada em: O.C. Zienkiewicz - Apêndice 3 - The Finite Element Method, 3ª ed., McGraw-Hill, p. 787.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right| W_{\Delta} d\Delta = \\
& - \int_{\Delta} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right| d\Delta + \\
& \int_{S_1+S_2} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right| W_{\Delta} dS \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Introduzindo (2.5) em (2.2) resulta:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Delta} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right| d\Delta + \int_{\Delta} Q W_{\Delta} d\Delta + \\
& \int_{S_1+S_2} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right| W_{\Delta} dS + \\
& \int_{S_2} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} - \bar{g} \right| W_{S_2} dS = 0 \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Como as condições de fronteira em S_1 são satisfeitas exatamente, temos:

$$W_{\Delta} = 0 \text{ em } S_1 \tag{2.7}$$

E como as funções de peso são arbitrárias, podemos ainda escolher:

$$W_{S2} = -W_{\Delta} \quad (2.8)$$

resultando finalmente na equação:

$$\int_{\Delta} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right| d\Delta - \int_{\Delta} QW_{\Delta} d\Delta - \int_{S2} \bar{g} W_{\Delta} dS = 0 \quad (2.9)$$

que é denominada forma "fraca" da Equação dos Resíduos Pesados.

Note-se que a integração por partes baixou as condições de admissibilidade da função de aproximação u de C^1 para C^0 , enquanto que as condições de admissibilidade da função-peso W_{Δ} foram elevadas para C^0 .

Resulta, portanto, que, na forma fraca da Equação dos Resíduos Pesados, exigem-se as mesmas condições de admissibilidade para as funções u e W .

Após a discretização, a eq. (2.9) pode ser aplicada a cada elemento finito do domínio, obtendo-se:

$$\int_{\Delta^e} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right| d\Delta - \int_{\Delta^e} QW_{\Delta} d\Delta - \int_{S_2^e} \bar{g} W_{\Delta} dS = 0 \quad (2.10)$$

Estabelecidas, assim, as condições de compatibilidade ao longo das fronteiras entre elementos, que exigem que as funções de interpolação sejam contínuas ao longo da fronteira entre os mesmos, e as condições de completude, que exigem que a

função de interpolação seja contínua no interior do elemento, podemos definir as funções de aproximação em cada elemento finito Δ^e , como:

$$\theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \text{ em } \Delta^e \quad (2.11)$$

onde n é o número de nós, θ_i são os valores nodais da variável de campo e N_i são as funções de interpolação que serão objetos de estudo no próximo capítulo, e devem ser tais que a função θ satisfaça às condições de compatibilidade e completude.

Na técnica de Galerkin escolhe-se para função de peso W_Δ , em cada elemento finito, uma variação arbitrária da função de aproximação θ , relativamente às variáveis nodais, como se segue:

$$W_\Delta = \delta\theta = \sum_{j=1}^n N_j \delta\theta_j \text{ em } \Delta^e \quad (2.12)$$

Deste modo, θ e W_Δ utilizam-se das mesmas funções de interpolação, o que, no caso de operadores auto-adjuntos, dá origem a matrizes simétricas.

Substituindo-se (2.11) e (2.12) em (2.10) obtemos um sistema de equações algébricas para cada elemento cuja equação básica é dada por:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Delta^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Delta \right] \delta\theta_i^e - \int_{\Delta^e} Q N_j d\Delta - \int_{S_2^e} \bar{g} N_j dS \delta\theta_j^e = 0 \quad (2.13)$$

onde os índices i e j variam de 1 até n , sendo n o número de nós do elemento. Considerando-se que o termo $\delta\theta_j^e$ seja uma variação arbitrária do coeficiente nodal da eq. (2.13), resulta em:

$$\int_{\Delta^e} \left| k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| d\Delta \theta_i^e = \int_{\Delta^e} QN_j d\Delta + \int_{S_2^e} \bar{g} N_j dS \quad (2.14)$$

que representada matricialmente dá origem às matrizes do elemento finito Δ^e ,

$$\underline{K}^e \underline{\theta}^e = \underline{P}^e \quad (2.15)$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \left| k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| d\Delta \quad (2.16)$$

$$P_j^e = \int_{S_2^e} \bar{g} N_j dS + \int_{\Delta^e} QN_j d\Delta \quad (2.17)$$

A matriz \underline{K}^e tem dimensões $(n \times n)$ e os vetores $\underline{\theta}^e$ e \underline{P}^e têm dimensão (n) .

As integrais contidas em (2.16) e (2.17) podem ser determinadas por integração exata, no caso em que o elemento finito é triangular, ou por integração numérica, quando o mesmo não acontece. Os aspectos relacionados com a integração exata e a integração numérica serão expostos no próximo capítulo.

As equações (2.15) traduzem o equilíbrio de um elemento finito genérico Δ^e . O equilíbrio global do sistema discretizado é obtido efetuando-se a montagem das matrizes de todos os elementos finitos, o que dá origem ao sistema de equações globais do tipo:

$$\underline{K} \underline{\theta} = \underline{P} \quad (2.18)$$

Convém salientar que, antes de se resolver o sistema de equações (2.18), são introduzidas as condições de contorno da fronteira S_1 , $\theta = \bar{\theta}$, de modo que, após sua resolução, as variáveis nodais situadas sobre a fronteira S_1 verifiquem-se exatamente naquelas condições, o que permite assumir, a priori, que o resíduo R_{S_1} é nulo.

Vejamos, agora, a aplicação da técnica de Galerkin em uma equação diferencial, cujo operador não é auto-adjunto.

Consideremos a seguinte equação de difusão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta_o}{\partial y} \right) - u \frac{\partial \theta_o}{\partial x} - v \frac{\partial \theta_o}{\partial y} + Q = 0 \text{ em } \Delta \quad (2.19)$$

Com as condições de fronteira:

$$\theta_o = \bar{\theta} \text{ em } S_1 \quad (2.20)$$

$$k_x \frac{\partial \theta_o}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta_o}{\partial y} n_y = \bar{g} \text{ em } S_2 \quad (2.21)$$

onde θ_o é a variável de campo, k_x e k_y são os coeficientes de difusão característicos do meio e u e v representam as componentes de um campo de velocidades. No eletromagnetismo, esta equação é a que descreve o equilíbrio de meios em movimento, sendo, portanto, de importância fundamental para o estudo das máquinas elétricas lineares.

O desenvolvimento é em todo semelhante ao realizado no exemplo anterior, resultando, para o elemento finito genérico, o sistema:

$$\underline{K}^e \underline{\theta}^e = \underline{P}^e \quad (2.22)$$

com

$$\begin{aligned} K_{ij}^e = & \int_{\Delta^e} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Delta + \\ & \int_{\Delta^e} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + v \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \right] d\Delta \end{aligned} \quad (2.23)$$

e P_j^e dada por (2.17).

Nota-se claramente que a matriz dos coeficientes não é simétrica, pois:

$$K_{ij}^e \neq K_{ji}^e \quad (2.24)$$

3.2 - Técnica dos Mínimos Quadrados

A Técnica dos Mínimos Quadrados parte da forma original da Equação dos Resíduos Pesados, escolhendo as funções de peso arbitrárias W como uma variação arbitrária dos resíduos relativamente às variáveis nodais.

Com o objetivo de generalizar o processo, vamos trabalhar com a Equação Geral da Difusão exposta em (2.19), lembrando

do-se que, nos sistemas estáticos, as componentes u e v do campo de velocidades são nulas.

Visto que na técnica dos Mínimos Quadrados não se constroi a forma "fraca" da Equação dos Resíduos Pesados, exigem-se condições de admissibilidade diferentes para as funções de aproximação, e para as funções de peso.

Considerando-se a equação da difusão (2.19), a Equação dos Resíduos Pesados para um elemento finito genérico é escrita como se segue:

$$\int_{\Delta^e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] W_{\Delta} d\Delta + \int_{\Delta^e} Q W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_2^e} \left[k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y - \bar{g} \right] W_{S_2} dS = 0 \quad (2.25)$$

Nota-se, portanto, que a função de aproximação deve ter a continuidade C^1 na fronteira entre elementos e a continuidade C^2 no interior de cada elemento.

Definindo-se em cada elemento a função de aproximação:

$$\theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (2.26)$$

que satisfaça às condições de compatibilidade e completude já expostas, escolhemos para as funções de peso arbitrarias o seguinte:

$$W_{\Delta} = \delta R_{\Delta} \quad (2.27)$$

$$W_{S2} = \delta R_{S2} \quad (2.28)$$

relativamente às variáveis nodais, resultando:

$$W_{\Delta} = \delta \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} + Q \right| =$$

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - u \frac{\partial N_j}{\partial x} - v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| \delta \theta_j \text{ em } \Delta^e \quad (2.29)$$

$$W_{S2} = \delta \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y - \bar{g} \right| =$$

$$\sum_{j=1}^n \left| k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y - \bar{g} \right| \delta \theta_j \text{ em } S_2^e \quad (2.30)$$

que, substituindo-se em (2.25), dá origem às matrizes de um elemento finito genérico Δ^e :

$$\underline{K}^e \underline{\theta}^e = \underline{P}^e \quad (2.31)$$

em que:

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) - u \frac{\partial N_i}{\partial x} - v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right| \cdot$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - u \frac{\partial N_j}{\partial x} - v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| d\Delta \quad (2.32)$$

e

$$P_j^e = \int_{S_2^e} \left| k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} n_y - \bar{g} \right| \left| k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y - \bar{g} \right| dS -$$

$$\int_{\Delta^e} Q \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - u \frac{\partial N_j}{\partial x} - v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| d\Delta \quad (2.33)$$

Nota-se, portanto, que a matriz dos coeficientes é simétrica, pois:

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e \quad (2.34)$$

Comparando-se a técnica de Galerkin com a dos Mínimos Quadrados, no caso da equação de dispersão, observa-se que:

	Simetria	Compatibilidade	Completude
Galerkin	Não	C ⁰	C ¹
Mínimos Quadrados	Sim	C ¹	C ²

Tabela 3.1 - Comparação entre a técnica de Galerkin e a dos Mínimos Quadrados

3.3 - Técnica Híbrida

Considerando-se que o processo de difusão pode ser decomposto num processo de dispersão sobreposto a um processo de advecção, podemos representá-lo matematicamente como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ em } \Delta \quad (2.35)$$

$$-u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ em } \Delta \quad (2.36)$$

com as condições de contorno:

$$\theta = \bar{\theta} \text{ em } S_1 \quad (2.37)$$

$$k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y = \bar{g} \text{ em } S_2 \quad (2.38)$$

Escolhendo-se a função de aproximação de modo que as condições de fronteira em S_1 sejam satisfeitas exatamente, a Equação dos Resíduos Pesados pode ser escrita como se segue:

$$\int_{\Delta} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] W_{\Delta}^A d\Delta + \int_{\Delta} Q W_{\Delta}^A d\Delta +$$

$$\int_{\Delta} \left[-u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] W_{\Delta}^B d\Delta + \int_{S_2} \left[k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y - \bar{g} \right] W_{S_2} dS \quad (2.39)$$

A primeira integral da eq. (2.39) pode ser integrada por partes, usando-se a fórmula de Green e escolhendo-se também a função de peso:

$$W_{S_2} = -W_{\Delta}^A \quad (2.40)$$

resulta que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}^A}{\partial x} + k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}^A}{\partial y} \right| d\Delta - \int_{\Delta} Q W_{\Delta}^A d\Delta + \\
& \int_{S1} \left| k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right| W_{\Delta}^A dS - \int_{S2} \bar{g} W_{\Delta}^A dS - \\
& \int_{S2} \left| -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| W_{\Delta}^B d\Delta = 0 \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Considerando-se que as funções de peso W_{Δ}^A e W_{Δ}^B são arbitrárias, aplica-se a Técnica de Galerkin para a escolha de W_{Δ}^A , e a Técnica dos Mínimos Quadrados para a escolha de W_{Δ}^B , ou seja:

Se:

$$\theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \text{ em } \Delta^e \tag{2.42}$$

escolhe-se:

$$W_{\Delta}^A = \delta \theta = \sum_{i=1}^n N_j \delta \theta_j \text{ em } \Delta^e \tag{2.43}$$

e:

$$W_{\Delta}^B = \delta R_{\Delta}^B = \delta \left| -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| = \sum_{j=1}^n \left(-u \frac{\partial N_j}{\partial x} - v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \delta \theta_j \text{ em } \Delta^e \tag{2.44}$$

Como a eq. (2.41) também é escrita para cada elemento finito Δ^e , a substituição de (2.42) a (2.44) na equação dos Resíduos Pesados de cada elemento dá origem ao sistema de equações:

$$\underline{K}^e \underline{\theta}^e = \underline{P}^e \quad (2.45)$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} - \left(-u \frac{\partial N_i}{\partial x} - v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(-u \frac{\partial N_j}{\partial x} - v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] d\Delta \quad (2.46)$$

$$P_j^e = \int_{\Delta^e} Q N_j d\Delta + \int_{S_2^e} \bar{g} N_j dS \quad (2.47)$$

Enfim, observa-se claramente que a matriz dos coeficientes é simétrica, facilitando em muito a análise numérica. Note-se que as condições de compatibilidade e de completude exigem continuidade C^0 e C^1 , respectivamente na fronteira entre elementos, e no interior de cada elemento, que são as condições de continuidade exigidas na técnica de Galerkin.

4. TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO

O problema da interpolação consiste em se determinar uma função $\theta(x)$ que em dada posição x_i assume os valores θ_i , ou seja:

$$\theta(x_i) = \theta_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.48)$$

São três os tipos de interpolação existentes:

I. Interpolação Simples ou de Lagrange

Nesta técnica $\theta(x)$ é tal que:

$$\theta(x_i) = \theta_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.49)$$

não se impondo mais nenhuma condição.

II. Interpolação Osculatória ou de Hermite

Nesta técnica, a função da interpolação $\theta(x)$ é tal que:

$$\theta(x_i) = \theta_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.50)$$

e

$$\theta'(x_i) = \theta'_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.51)$$

onde $\theta'(x_i)$ representa a derivada de $\theta(x)$ em x_i .

III. Interpolação Ortogonal ou dos Resíduos Pesados

Nesta técnica, $\theta(x)$ é tal que:

$$\int_{x_1}^{x_m} [\theta(x_i) - \theta_i] W_i dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.52)$$

onde o intervalo $|x_1, x_m|$ representa o domínio do problema, e W_i é um conjunto de funções arbitrárias.

Sendo o elemento finito um subdomínio fechado, as socia-se a este elemento uma função de interinterpolação construída num espaço linear de funções definidas neste domínio.

Existem dois métodos de escolha das funções de interinterpolação:

- i. Coordenadas Generalizadas
- ii. Funções de Forma.

Sendo que a segunda opção é a mais utilizada, em vista da simplicidade obtida na formulação do problema.

4.1 - Interinterpolação em Termos de Coordenadas Generalizadas

Nesta formulação, escolhe-se um conjunto de n polinômios do tipo:

$$\phi^e = [1, x, x^2, \dots, x^{n-1}] \quad (2.53)$$

Define-se a função de interinterpolação através de n parâmetros a como se segue:

$$\theta(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} \quad \text{em } \Delta^e \quad (2.54)$$

ou matricialmente:

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \text{ em } \Delta^e \quad (2.55)$$

com

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Aos parâmetros a_i 's dá-se o nome de coordenadas generalizadas, em vista de os mesmos não se identificarem diretamente com as grandezas interpoladas θ_i .

Apresenta-se a seguir diversas funções de interpolação comumente utilizadas:

Interpolação Unidimensional

$$\text{Linear: } \theta(x) = a_1 + a_2x \quad (2.57)$$

$$\text{Quadrática: } \theta(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

Interpolação Bidimensional

$$\text{Linear: } \theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.58)$$

$$\text{Quadrática: } \theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

Interpolação Tridimensional

$$\text{Linear: } \theta(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (2.59)$$

$$\text{Quadrática: } \theta(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6xy + a_7y^2 + a_8xz + a_9z^2$$

A escolha do grau de interpolação está diretamente ligada ao grau da derivada de maior ordem que aparece na Equ

ção dos Resíduos Pesados. Sendo n a ordem da derivada de maior ordem que aparece na Equação dos Resíduos Pesados, a completada de fica satisfeita desde que o polinômio contenha pelo menos um termo de cada grau inferior a n e no mínimo um termo de grau n .

Uma condição importante que a função de aproximação deve satisfazer é a chamada isotropia geométrica, que consiste no fato de a mesma ser independente da orientação do referencial. Um processo para assegurar a isotropia geométrica está em escolher os termos do polinômio da função de aproximação através do triângulo de Pascal representado na figura II.4. A função de interpolação não deve incluir nenhum dos termos de um dos lados do eixo de simetria, sem incluir também o termo correspondente ao outro lado do eixo. A três dimensões, este processo pode seguir-se através da Pirâmide de Pascal.

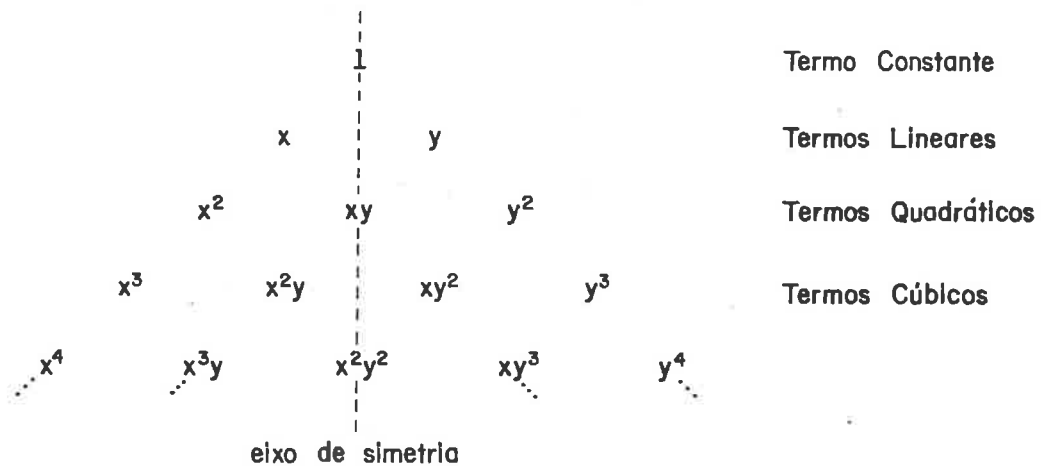


Figura II.4 - Triângulo de Pascal

Apresenta-se a seguir alguns elementos finitos bi dimensionais com interpolação em termos de coordenadas generalizadas.

I. Elementos Triangulares da Classe C^0

a.) Funções de Interpolação Lineares

A função $\theta(x, y)$ interpola os valores fixados de θ nos vértices:

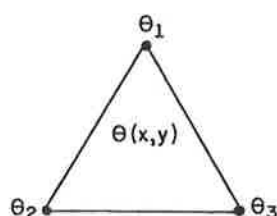


Figura II.5 - Elemento triangular

$$\theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.60)$$

Neste caso, a função de interpolação possui três coordenadas generalizadas (a_1 , a_2 e a_3) que são obtidas das três grandezas interpoladas (θ_1 , θ_2 e θ_3).

b.) Funções Quadráticas

A função $\theta(x, y)$ interpola os valores fixados nos vértices e no meio dos lados:

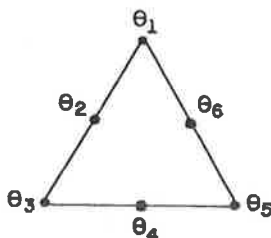


Figura II.6 - Elemento triangular

$$\theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (2.61)$$

Neste caso, a função de interpolação possui seis coordenadas generalizadas (a_1 a a_6) que são obtidas das seis grandezas interpoladas (θ_1 a θ_6).

II. Elemento Triangular da Classe C^1

As funções de interpolação são cúbicas e interpolam os valores fixados de θ e de suas respectivas derivadas nos vértices:

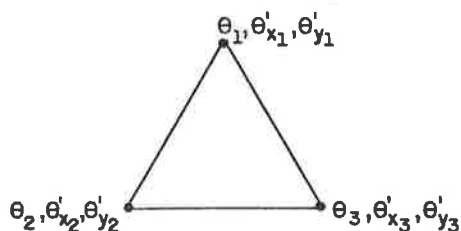


Figura II.7 - Elemento triangular

$$\theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2 \quad (2.62)$$

A função de interpolação no elemento triangular da classe C^1 possui 9 coordenadas generalizadas que são obtidas das nove grandezas interpoladas.

III. Elemento Retangular da Classe C^0

a.) Funções que interpolam os valores de θ nos vértices:

$$\theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (2.63)$$

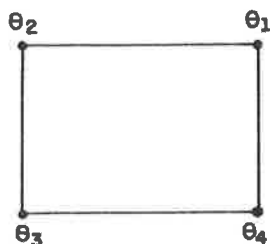


Figura II.8 - Elemento retangular

4 coordenadas generalizadas

4 grandezas interpoladas

b.) Funções que interpolam os valores fixados de θ nos vértices e a meio dos lados:

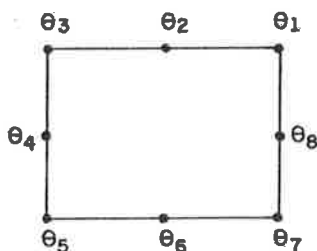


Figura II.9 - Elemento retangular

$$\theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 \quad (2.64)$$

8 coordenadas generalizadas

8 grandezas interpoladas

III. Elementos Retangulares da Classe C^1

Interpolação dos valores fixados de $\theta(x, y)$ e respectivas derivadas nos vértices:

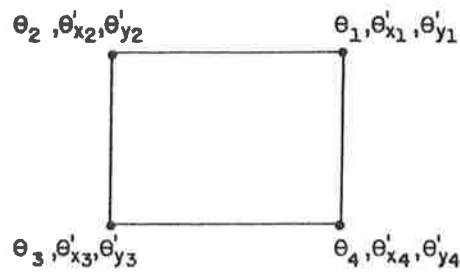


Figura II.10 - Elemento retangular

$$\theta(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (2.65)$$

12 coordenadas generalizadas

12 grandezas interpoladas

IV. Elementos Tetraédricos da Classe C^0

a.) Funções lineares

A função $\theta(x, y, z)$ interpola os valores fixados de θ nos vértices:

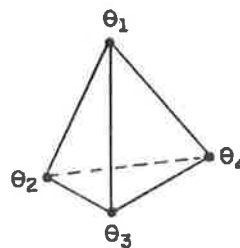


Figura II.11 - Elemento tetraédrico

$$\theta(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \quad (2.66)$$

4 coordenadas generalizadas

4 grandezas interpoladas

b.) Funções quadráticas

A função $\theta(x, y, z)$ interpola os valores fixados de θ nos vértices e a meio dos lados:

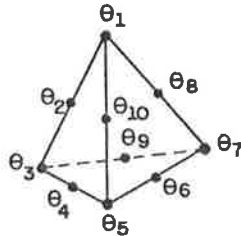


Figura II.12 - Elemento tetraédrico

$$\theta(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6xy + a_7y^2 + a_8xz + a_9z^2 + a_{10}yz \quad (2.67)$$

10 coordenadas generalizadas

10 grandezas interpoladas

4.2 - Interpolação em Termos de Funções de Forma

Na interpolação em termos de coordenadas generalizadas, escolheu-se um conjunto de polinômios do tipo:

$$\underline{\phi}^e = [1, x, \dots, x^{n-1}] \quad (2.68)$$

cujos coeficientes representavam as coordenadas generalizadas do sistema. Nota-se, portanto, que neste tipo de interpolação, os valores das grandezas nodais não aparecem explicitamente na função, sendo utilizada apenas na formação do sistema de equações, que permitem calcular as coordenadas generalizadas.

Para se conseguir uma função de interpolação, onde as grandezas nodais são os coeficientes dos polinômios a serem

escolhidos, a mesma deve ser tal que, em um dado ponto nodal, todos os polinômios sejam nulos, exceto aquele correspondente ao ponto nodal considerado, onde o mesmo deve ser igual à unidade.

Assim sendo, a função de interpolação a ser obtida deverá ser tal que:

$$\theta(x) = \tilde{N}^e \tilde{\theta}^e \text{ em } \Delta^e \quad (2.69)$$

onde

$$\tilde{\theta}^e = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

representa o vetor das grandezas interpoladas e

$$\tilde{N}^e = [N_1, N_2 \dots N_n] \quad (2.71)$$

é o vetor-linha em que cada elemento tem a seguinte particularidade:

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}, \text{ ou seja, } N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (2.72)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker, que assume o valor unitário para $i = j$ e o valor nulo para $i \neq j$.

Um conjunto de polinômios cujos elementos satisfazem (2.72) são os polinômios de Lagrange:

$$\tilde{L}^e = [L_1, L_2 \dots L_n] \quad (2.73)$$

cujos elementos são polinômios de grau $n-1$ dados por:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (2.74)$$

onde se verifica facilmente que:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.75)$$

Nota-se portanto a grande vantagem da utilização dos Polinômios de Lagrange, visto que a construção da função de interpolação é imediata.

Evidentemente, na interpolação em termos de funções de forma, escolheremos:

$$\tilde{N}^e = \tilde{L}^e \quad (2.76)$$

Muito embora os polinômios de Lagrange evidentemente não apresentem nenhum significado físico evidente, veremos em seguida como podemos interpretá-los fisicamente através da introdução das coordenadas naturais do elemento, o que facilitará sobremaneira a formulação do problema pelo Método dos Elementos Finitos, em particular para situações com mais de uma dimensão e com interpolação linear.

4.2.1 - Coordenadas naturais

As coordenadas naturais correspondem àquelas coordenadas de um dado ponto do elemento em relação a um sistema de coordenadas locais aplicado neste elemento.

Neste sistema de coordenadas locais, as referên

cias são convenientemente locadas de modo que um ponto dentro do elemento é caracterizado por um conjunto de grandezas adimensionais, cujos valores variam entre (0) e (+1) ou entre (-1) e (+1), sendo os valores extremos atingidos nos nós. O sistema de coordenadas locais é relacionado através de um sistema de equações com o sistema de coordenadas-global que se refere a todo o domínio.

I. Coordenadas de Comprimento

A figura II.13 mostra um elemento finito unidimensional, de comprimento l . Definimos nela duas coordenadas locais dependentes, L_1 e L_2 , de modo que no extremo esquerdo do elemento tenhamos $L_1 = 1$ e $L_2 = 0$, ao passo que no outro extremo $L_1 = 0$ e $L_2 = 1$. É fácil observar que, para tal devemos ter:

$$L_1 = \frac{l_1}{l} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{l_2}{l} \quad (2.77)$$

com

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (2.78)$$

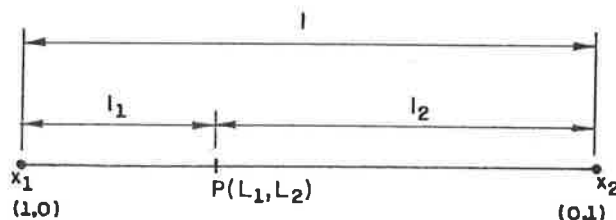


Figura II.13 - Elemento finito unidimensional

A relação entre as coordenadas naturais (L_1, L_2) , está ligada à coordenada cartesiana x , como se segue:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} \quad (2.79)$$

inversamente, pode-se escrever:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ x \end{vmatrix} \quad (2.80)$$

Identifique-se este resultado com o polinômio de Lagrange exposto em (2.74).

II. Coordenadas de Área

A figura II.14 mostra um elemento finito bidimensional triangular, onde vamos definir um sistema de coordenadas locais definidas por (L_1, L_2, L_3) onde apenas duas são independentes.

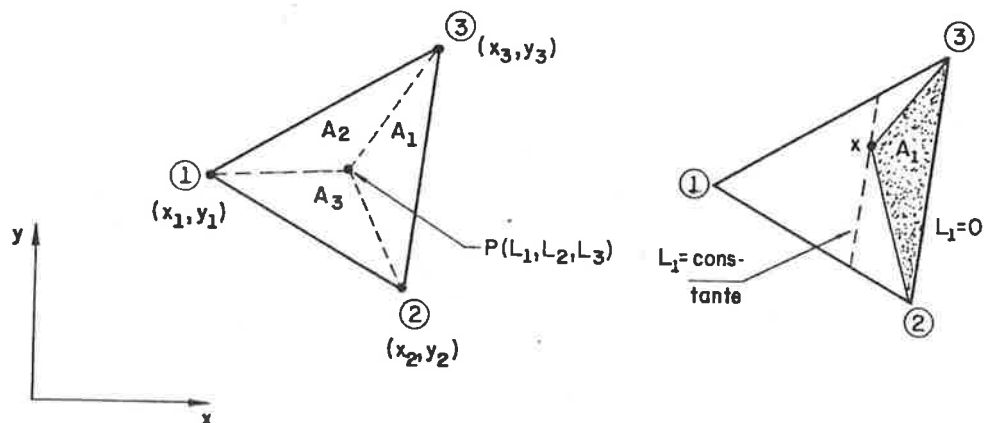


Figura II.14 - Elemento finito bidimensional triangular

No elemento finito bidimensional triangular, as coordenadas locais são obtidas a partir de uma relação entre áreas. Assim, para a coordenada L_1 , adota-se o lado oposto ao vértice

tice 1 como referência, ou seja, impõe-se nesse segmento $L_1 = 0$; então qualquer ponto em um segmento paralelo a este no interior do triângulo definirá a coordenada L_1 através da relação:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad (2.81)$$

A_1 = área do triângulo formado pelo ponto x e o segmento 2-3

A = área do elemento

As demais coordenadas são definidas de modo semelhante, resultando genericamente na relação:

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad (2.82)$$

É óbvio que, qualquer ponto P do elemento terá três coordenadas naturais, embora apenas duas sejam independentes, pois:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (2.83)$$

A relação entre as coordenadas cartesianas globais (x, y) e as coordenadas locais (L_1, L_2, L_3) é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} \quad (2.84)$$

e a relação inversa:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ y \end{vmatrix} \quad (2.85)$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= x_3 - x_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & a_1 &= 2A_{23} \\ c_2 &= x_1 - x_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & a_2 &= 2A_{31} \\ c_3 &= x_2 - x_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & a_3 &= 2A_{12} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$2A = c_1 b_3 - c_3 b_1 = c_2 b_1 - c_1 b_2 = c_3 b_2 - c_2 b_3 \quad (2.87)$$

$$2A_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \quad (2.88)$$

A_{ij} = Área do triângulo formado pelo lado (i, j) e a origem do sistema de coordenadas cartesianas

A = Área do elemento

III. Coordenadas de Volume

A figura II.15 mostra um sistema de coordenadas naturais para um elemento finito tetraédrico.

Qualquer ponto P no interior do elemento terá quatro coordenadas naturais tais que:

$$L_i = \frac{V_i}{V} \quad (2.89)$$

com

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \quad (2.90)$$

e

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (2.91)$$

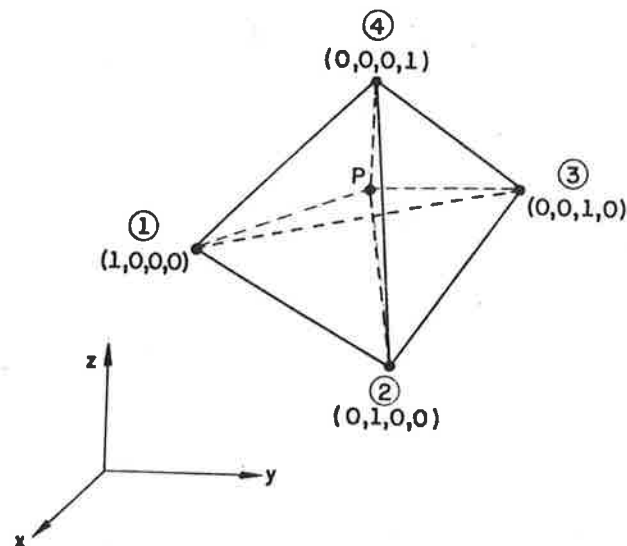


Figura II.15 - Elemento finito tridimensional tetraédrico

Os lugares geométricos de $L_i = \text{constante}$ são planos paralelos aos lados do tetraedro.

A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas (L_1, L_2, L_3, L_4) é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

cuja relação inversa fornece:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} V_{234} & a_1 & b_1 & c_1 \\ V_{341} & a_2 & b_2 & c_2 \\ V_{412} & a_3 & b_3 & c_3 \\ V_{123} & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad (2.93)$$

onde a_i , b_i e c_i são as áreas das projeções da face i sobre os planos coordenados, e V_{ijk} é o volume do tetraedro definido pela face (i, j, k) e a origem do referencial global.

Uma propriedade importante dos sistemas de coordenadas locais até agora estudados, refere-se a integrais de polinômios. Assim, demonstra-se que:

$$\int_{\Omega} L_1^p L_2^q L_3^r L_4^s d\Omega = \frac{p! q! r! s!}{(p + q + r + s + n)} n! \Omega \quad (2.94)$$

onde

$$n = \begin{cases} 1 & \text{para elementos unidimensionais} & (\Omega = l) \\ 2 & \text{para elementos bidimensionais triangulares} & (\Omega = A) \\ 3 & \text{para elementos tridimensionais tetraédricos} & (\Omega = V) \end{cases}$$

4.3 - Elementos Finitos com Interpolação em Termos de Função de Forma

Apresentamos a seguir, os elementos finitos de uso mais freqüente com interpolação em termos de função de forma, do tipo:

$$\theta(x) = \underline{N}(x) \underline{e}^e \quad (2.95)$$

onde

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.96)$$

4.3.1 - Família de elementos triangulares e tetraédricos

I. Funções lineares

Neste caso, as funções de forma assumem sua estrutura mais simples, coincidindo com as próprias coordenadas naturais, resultando pois:

$$N_i = L_i \quad (2.97)$$

Para comprovar a simplicidade de determinação das funções de forma, considere-se o caso de um triângulo com vértices nos pontos i , j e k . Para se determinar um polinômio de Lagrange, que resolva o problema de interpolação $N_i(x_j) = \delta_{ij}$, basta estabelecer a equação de um plano que passa pelos pontos $(x_i, y_i, 1)$, $(x_j, y_j, 0)$ e $(x_k, y_k, 0)$.

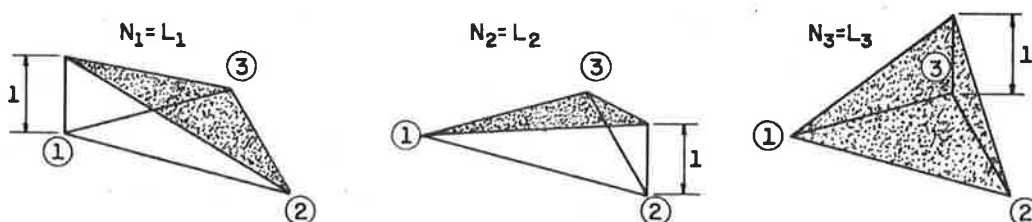


Figura II.16 - Funções de forma do elemento triangular

A equação do plano que passa pelos pontos indicados é dado por:

$$N_i = \frac{1 - \frac{y - y_k}{y_j - y_k} - \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}{1 - \frac{y_i - y_k}{y_j - y_k} - \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}} = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) = L_i \quad (2.98)$$

onde a_i , b_i e c_i estão definidos em (2.86).

II. Funções quadráticas

As funções de interpolação quadráticas para elementos triangulares ou tetraédricos interpolam, além das grandezas nodais do vértice, as grandezas dos nós no meio dos lados, como mostra a figura II.17.

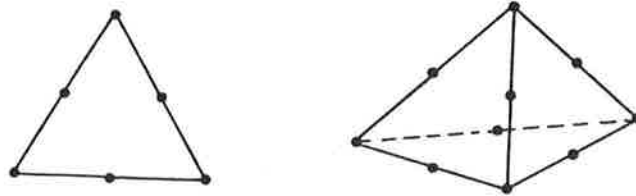


Figura II.17 - Elementos triangulares e tetraédricos

Interpolação Quadrática

As funções de interpolação, neste caso, são dadas por:

$$N_i = \begin{cases} L_i(2L_i - 1) & \text{para os vértices} \\ 4L_jL_k & \text{para os nós do meio dos lados} \end{cases} \quad (2.99)$$

Na expressão (2.99), j e k são os dois nós extremos do lado que contém o nó intermediário i .

A figura II.18 dá uma idéia espacial das funções de forma do elemento triangular quadrático.

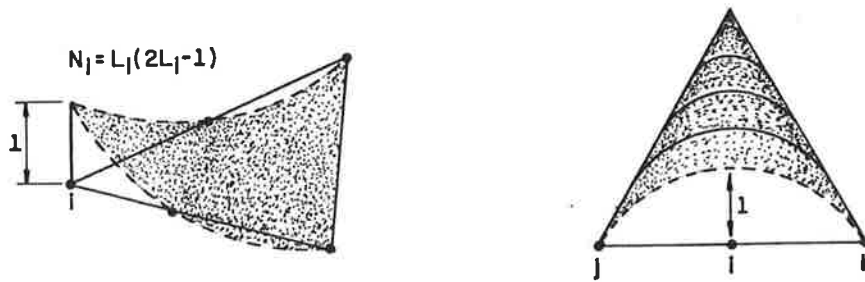


Figura II.18 - Funções de forma do elemento triangular quadrático

III. Funções Cúbicas

As funções de interpolação cúbicas para os elementos triangulares e tetraédricos, interpolam, além das grandezas nodais, duas outras grandezas em cada lado (ou aresta), além de um nó interior, como mostra a figura II.19.



Figura II.19 - Elementos triangulares e tetraédricos

Interpolação Cúbica

As funções de interpolação, neste caso, são da
das por:

$$N_i = \begin{cases} \frac{L_i}{2} (3L_i - 1)(3L_i - 2) & \text{para os v\u00e9rtices} \\ \frac{9}{2} L_j L_k (3L_j - 1) & \text{para os n\u00f3s a 1/3 dos lados} \\ 27 L_i L_j L_k & \text{para o n\u00f3 interno da face} \end{cases} \quad (2.100)$$

4.3.2 - Fam\u00edlia de elementos retangulares

Uma forma poss\u00edvel de se obter fun\u00e7\u00f5es de interpo-
la\u00e7\u00e3o em termos de fun\u00e7\u00f5es de forma para um elemento retangular
consiste em se montar inicialmente a fun\u00e7\u00e3o de interpola\u00e7\u00e3o se-
gundo as coordenadas generalizadas, baseando-se na escala do Tri-
\u00e2ngulo de Pascal, j\u00e1 citada anteriormente.

Assim, para um elemento finito retangular, em ter-
mos de coordenadas generalizadas, podemos escrever:

$$\underline{\varrho} = \underline{\varphi}^e \underline{a} \quad (2.101)$$

onde $\underline{\varphi}$ e \underline{a} s\u00e3o dadas por (2.53) e (2.56) respectivamente.

Particularizando-se (2.101) para as coordenadas
nodais do elemento, resulta que:

$$\underline{\varrho}^e = \underline{A}^e \underline{a} \quad (2.102)$$

fornecendo-nos:

$$\underline{a} = \underline{A}^{e-1} \underline{\varrho} \quad (2.103)$$

Substituindo-se (2.103) em (2.101), obteremos uma
fun\u00e7\u00e3o de interpola\u00e7\u00e3o em termos da fun\u00e7\u00e3o de forma, como se se-
gue:

$$\underline{\vartheta} = \underline{\varnothing}^e \underline{A}^{e-1} \underline{\vartheta}^e \quad (2.104)$$

ou ainda,

$$\underline{\vartheta} = \underline{N} \underline{\vartheta}^e \quad (2.105)$$

onde

$$\underline{N} = \underline{\varnothing}^e \underline{A}^{e-1} \quad (2.106)$$

Note-se que $N_i = \delta_{ij}$, constituem-se, portanto, na função de forma procurada.

Este procedimento, causa o inconveniente da inversão da matriz A^e , que ocasionalmente poderá não existir, impedindo, assim, a determinação das funções procuradas, e estando ainda totalmente despojadas de qualquer significado físico.

Existem dois processos de montagem por inspeção das funções de forma do elemento retangular, mais comumente utilizados. São eles:

- Elementos da Família de Lagrange
- Elementos da Família Serendipity

O primeiro deles é adequado para interpolação de ordem reduzida com elementos que possuam nós internos, enquanto que o segundo permite-nos a interpolação em ordem elevada em elementos com nós apenas em suas arestas.

Em ambos os casos, no entanto, é utilizado um sistema de coordenadas local normalizado, de modo que, nas arestas do retângulo, os valores das coordenadas valem ± 1 .

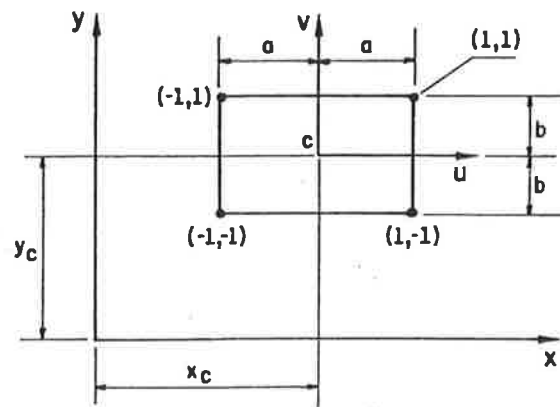


Figura II.20 - Coordenadas normalizadas para o retângulo

A figura II.20 mostra um elemento retangular, com suas arestas paralelas aos eixos coordenados.

Um sistema de referência local \$(u, v)\$ é locado no centro do elemento. Para que possamos obter $u = +1$ para as arestas paralelas a y e $v = +1$ para as arestas paralelas a x_1 devemos ter:

$$u = \frac{(x - x_c)}{a}, \quad d_u = \frac{dx}{a}, \quad x_c - a \leq x \leq x_c + a$$

$$v = \frac{y - y_c}{b}, \quad d_v = \frac{dy}{a}, \quad y_c - b \leq y \leq y_c + b$$
(2.107)

Na figura II.20, o elemento retangular foi colocado na posição indicada por conveniência, evidentemente, relações semelhantes serão obtidas com o elemento situado em qualquer em relação aos eixos coordenados.

I. Elemento Retangular de Lagrange

Nos elementos finitos retangulares, com interpolação Lagrangiana, as funções de forma são construídas através de polinômios de Lagrange nas direções u e v , respectivamente, isto

é, para os pontos de v constante, o polinômio de interpolação é dado por:

$$L_i(u) = \frac{(u - u_0) \dots (u - u_{i-1})(u - u_{i+1}) \dots (u - u_n)}{(u_i - u_0) \dots (u_i - u_{i-1})(u_i - u_{i+1}) \dots (u_i - u_n)} \quad (2.108)$$

e para os pontos de u constante:

$$L_i(v) = \frac{(v - v_0) \dots (v - v_{i-1})(v - v_{i+1}) \dots (v - v_m)}{(v_i - v_0) \dots (v_i - v_{i-1})(v_i - v_{i+1}) \dots (v_i - v_m)} \quad (2.109)$$

Resultando para o elemento as funções de interpolação:

$$N_i(u, v) = L_i(u) \cdot L_i(v) \quad (2.110)$$

A figura II.21 mostra os três elementos de Lagrange mais utilizados.

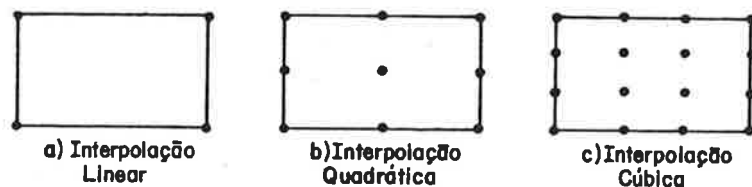


Figura II.21 - Elementos de Lagrange

Como exemplo, são mostradas a seguir as funções de interpolação para o elemento de Lagrange com interpolação quadrática.

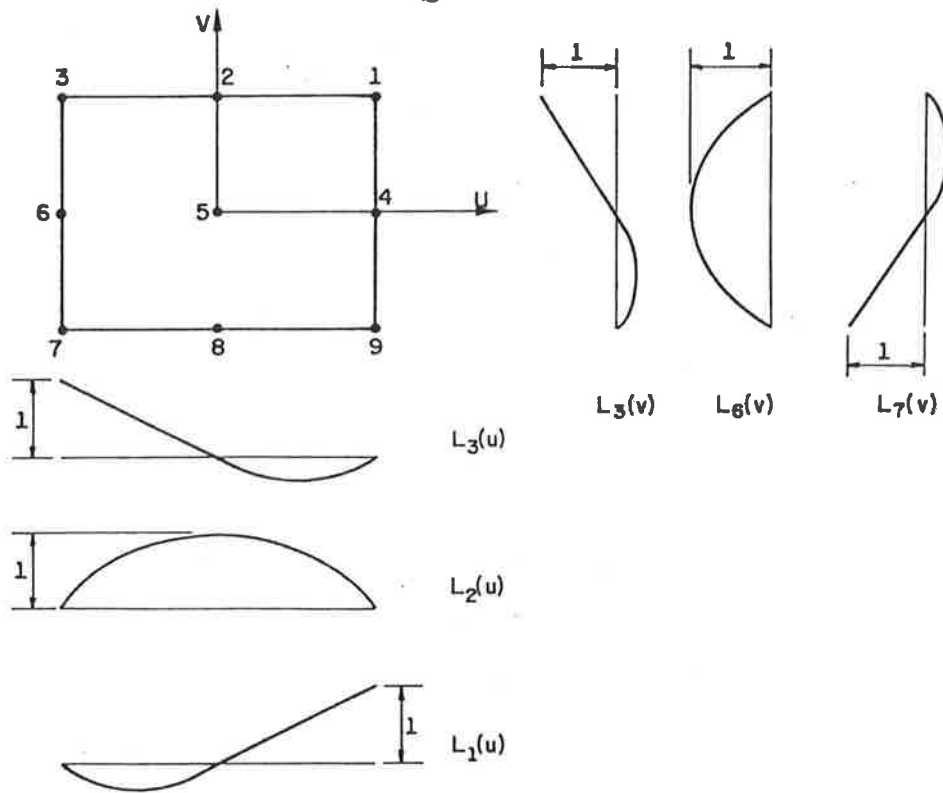


Figura II.22 - Elemento de Lagrange - Interpolação quadrática

Seguindo então o procedimento indicado, podemos escrever:

$$L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{2} (u^2 + u)$$

$$L_4 = L_5 = L_6 = 1 - u^2 \quad (2.111)$$

$$L_7 = L_8 = L_9 = \frac{1}{2} (u^2 - u)$$

$$L_1 = L_4 = L_9 = \frac{1}{2} (v^2 + v)$$

$$L_2 = L_5 = L_8 = 1 - v^2 \quad (2.112)$$

$$L_3 = L_6 = L_7 = \frac{1}{2} (v^2 - v)$$

Resultando, portanto, as funções de forma do elemento:

$$N_1(u, v) = N_1(u) = \frac{1}{4} (v^2 + v)(u^2 + u)$$

$$N_2(u, v) = N_2(u) N_2(v) = (1 - u^2)(1 - v^2)$$

$$\vdots$$

$$N_9(u, v) = N_9(u) N_9(v) = \frac{1}{4} (v^2 - v)(u^2 + u)$$

(2.113)

II. Elemento de Quatro Lados da Família "Serendipity"

As propriedades da função de interpolação em termos das funções de forma do Elemento de Quatro Lados da Família Serendipity são as mesmas impostas às funções de forma anteriores, ou seja, a um elemento com K nós, devemos associar K funções tais que as mesmas assumam o valor unitário no nó correspondente e seja nula nos demais, isto é:

$$N_i(u_j, v_j) = \delta_{ij} \quad (2.114)$$

Neste caso, as funções de interpolação são construídas de forma sistemática, por inspeção. Como exemplo, consideremos o elemento retangular da figura II.23 no qual vamos construir uma função de interpolação quadrática.

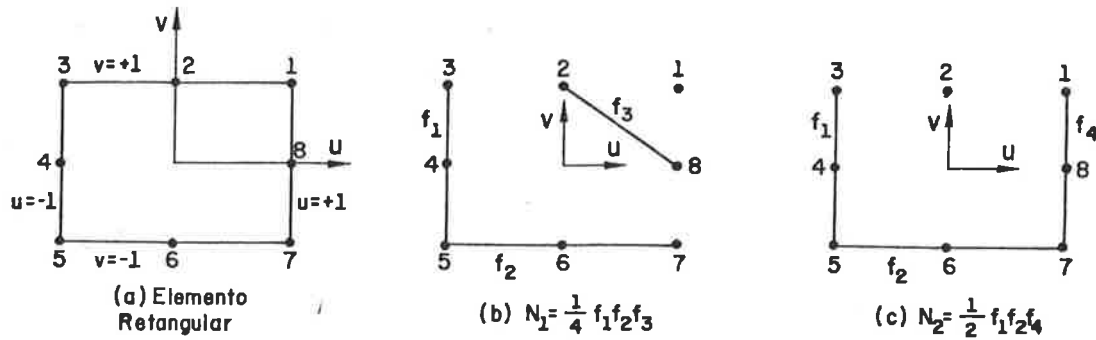


Figura II.23 - Elemento retangular Serendipity - Interpolação quadrática

A função:

$$f_1 = u + 1 \quad (2.115)$$

é nula ao longo da linha que une os nós 3, 4 e 5; da mesma forma, a função:

$$f_2 = v + 1 \quad (2.116)$$

será nula nos nós 5, 6 e 7 e, finalmente, a função:

$$f_3 = (u + v - 1) \quad (2.117)$$

será nula nos nós 2 e 8.

É claro que o polinômio:

$$N_1 = \frac{1}{4} f_1 f_2 f_3 = \frac{1}{4} (u + 1)(v - 1)(u + v - 1) \quad (2.118)$$

resultará nulo nos pontos nodais indicados na figura II.23b; a divisão por 4 é necessária para que no nó 1 tenhamos $N_1 = 1$.

Da mesma forma, o polinômio cujos zeros são os pontos nodais indicados na figura II.23c é tal que:

$$N_2 = \frac{1}{2} f_1 f_2 f_4 = \frac{1}{2} (1 - u^2)(1 + v) \quad (2.119)$$

onde:

$$f_4 = u - 1 \quad (2.120)$$

Novamente, a divisão por dois é necessária para que no nó 2 tenhamos $N_2 = 1$, o que pode ser verificado por simples substituição.

Para a obtenção das demais funções segue-se um processo análogo. Muito embora as funções de aproximação obtidas apresentem termos cúbicos, não podemos classificá-las como tais, visto que as mesmas não contêm todos os elementos da forma cúbica completa.

Resumindo, para os Elementos Retangulares da família Serendipity podemos escrever:

I. Função Linear

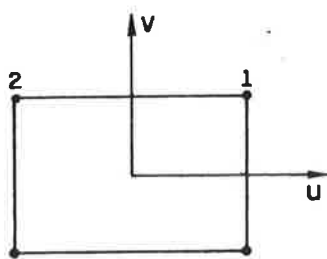


Figura II.24 - Interpolação linear

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + uu_i)(1 + vv_i) \quad (2.121)$$

II. Função Quadrática

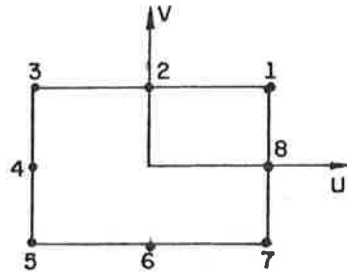


Figura II.25 - Interpolação quadrática

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + uu_i)(1 + vv_i)(uu_i + vv_i - 1) & \text{para } i = 1, 3, 5 \text{ e } 7 \\ \frac{1}{2} (1 - u^2)(1 + vv_i) & \text{para } u_i = 0 (i = 2 \text{ e } 6) \\ \frac{1}{2} (1 + uu_i)(1 - v^2) & \text{para } v_i = 0 (i = 4 \text{ e } 8) \end{cases} \quad (2.122)$$

III. Função Cúbica

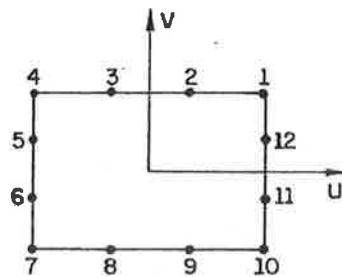


Figura II.26 - Interpolação cúbica

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{32} (1 + uu_1)(1 + vv_1) [9(u^2 + v^2) - 10] & \text{para } i = 1, 4, 7 \text{ e } 10 \\ \frac{9}{32} (1 - u^2)(1 + 9uu_1)(1 + vv_1) & \text{para } i = 2, 3, 8 \text{ e } 9 \\ \frac{9}{32} (1 - v^2)(1 + 9vv_1)(1 + uu_1) & \text{para } i = 5, 6, 11 \text{ e } 12 \end{cases} \quad (2.123)$$

4.4 - Elementos com Lados Curvos

Até agora, referimo-nos apenas a elementos finitos com lados retilíneos. Verifica-se, no entanto, que surgem dificuldades em se discretizar um domínio com fronteira curva, usando elementos finitos de lados retilíneos, sem utilizarmos um número exagerado de elementos.

Na presença de um domínio com fronteira curva, a solução mais adequada consiste em se usar elementos finitos de lados curvos.

A análise é efetuada através de uma transformação de coordenadas dos elementos de lados retos, como é mostrado na figura II.27.

A forma mais conveniente de se efetuar esta transformação, consiste na transformação paramétrica onde a relação entre as coordenadas locais (u, v) e as coordenadas globais (x, y) são escritas utilizando-se as mesmas funções de interpolação da Família Serendipity usadas nas funções de aproximação.

Assim, se $N_i(u, v)$ representa a forma padrão das funções de forma do elemento para um elemento de K nós, a relação entre as coordenadas para cada elemento será dada por:

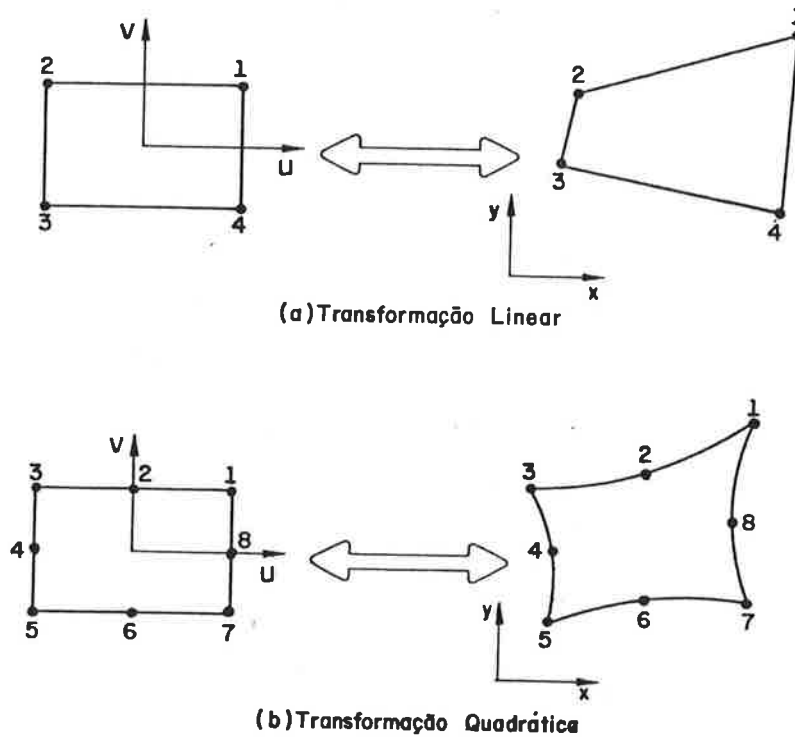


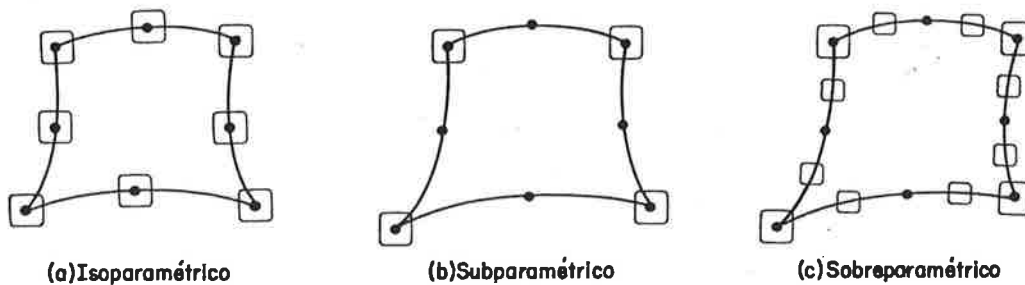
Figura II.27 - Transformação de coordenadas

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^k N_i x_i & \text{ou} & & x &= \tilde{N} \underline{x}^e \\
 y &= \sum_{i=1}^k N_i y_i & \text{ou} & & y &= \tilde{N} \underline{y}^e
 \end{aligned}
 \tag{1.124}$$

Nesta situação, onde se utilizam as mesmas funções de aproximação para as relações entre as coordenadas locais e as coordenadas globais e para as funções de aproximação, denomina-se o elemento "isoparamétrico".

Podemos também definir os elementos subparamétricos e os elementos sobreparamétricos. Nos subparamétricos, a geometria do elemento é definida com um número menor de nós em relação aos utilizados na função de aproximação, enquanto que nos so

breparamétricos a geometria é definida com um número maior de nós em relação àqueles usados para se definir a função de aproximação. A figura II.28 é esclarecedora.



- Definição da função
- Definição da geometria

Figura II.28 - Elementos finitos paramétricos

Cuidados evidentes devem ser tomados nas construções dos elementos de quatro lados e no posicionamento dos nós:

- i - Não utilizar elementos com ângulos internos superiores a 180° , como mostra a figura II.29.

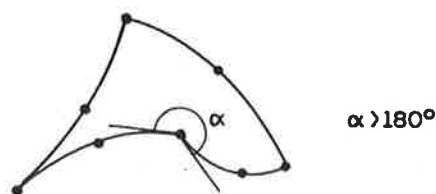


Figura II.29 - Elemento inadequado

- ii - A distância entre o nó central e o nó do vértice não deve ser menor que um terço do comprimento do lado do quadrilátero, como mostra a figura II.30.

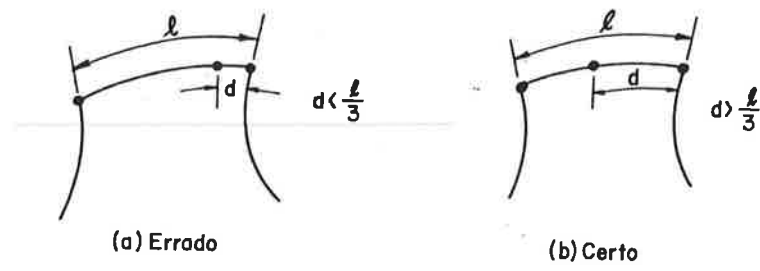


Figura II.30 - Distribuição adequada dos nós

CAPÍTULO III - GERAÇÃO DAS MATRIZES DOS ELEMENTOS

1. INTRODUÇÃO

Após a discretização do domínio em Elementos Finitos e a escolha das funções de aproximação, obtém-se todos os elementos das Matrizes dos Elementos e do Vetor das Ações a partir da análise da Equação dos Resíduos Pesados na sua forma completa, ou na sua "forma fraca" de acordo com a técnica de aproximação escolhida (Galerkin ou Mínimos Quadrados).

Portanto, para cada elemento finito são geradas as respectivas matrizes que traduzem as relações entre as grandezas de campo no elemento.

Neste capítulo, vamos apresentar os algoritmos de montagem das matrizes dos elementos para o caso bidimensional da Equação Geral da Dispersão (1.1), em relação aos elementos de maior interesse, a saber:

- a.) Triangulares de primeira ordem;
- b.) Quadriláteros de lados retos;
- c.) Quadriláteros de lados curvos.

Como os estudos a serem desenvolvidos nos próximos capítulos são traduzidos por operadores diferenciais auto-adjuntos, a técnica de aproximação a ser escolhida é a técnica de Galerkin, que, como já foi mencionado no Capítulo II, resulta em operações de integração e diferenciação mais simples, gerando ainda matrizes simétricas.

A equação matricial para cada elemento finito de

um problema descrito pela Equação Geral da Dispersão, é dada por:

$$\tilde{K}^e \cdot \tilde{e}^e = \tilde{P}^e \quad (3.1)$$

onde:

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \left| k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| d\Delta \quad (3.2)$$

$$P_j^e = \int_{S_2^e} \bar{q} N_j dS + \int_{\Delta^e} Q N_j d\Delta \quad (3.3)$$

A ordem dessas matrizes é igual ao número de nós do elemento escolhido.

2. ELEMENTO TRIANGULAR DE PRIMEIRA ORDEM

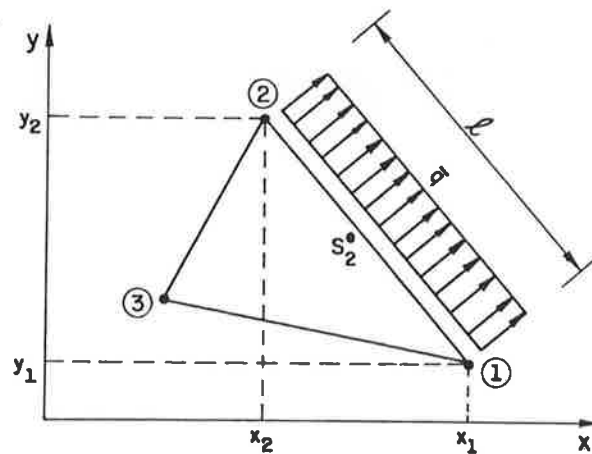


Figura III.1 - Elemento triangular linear

As funções de interpolação para o elemento triangular de primeira ordem, que levam a maior simplicidade na formulação, são aquelas de forma do elemento expressas por (2.85).

Assim, devemos escolher:

$$N_i = L_i \quad (3.4)$$

Desta forma, podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{2\Delta} \cdot \frac{\partial}{\partial L_i} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{2\Delta} \cdot \frac{\partial}{\partial L_i} \quad (3.6)$$

$$\int_{\Delta} L_1^p L_2^q L_3^r d\Delta = \frac{p! q! r!}{(p + q + r + 2)!} 2\Delta \quad (3.7)$$

Aplicando-se estes resultados na expressão (3.2), resulta:

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta} [k_x b_i b_j + k_y c_i c_j] \quad (3.8)$$

Para a determinação dos elementos do vetor das ações P^e , admitiremos que o elemento Δ^e tem, por exemplo, o lado (1)/(2) na fronteira S_2 .

Admitiremos, ainda, para maior simplicidade, que \bar{q} é constante neste lado, como está indicado na figura III.1 e que Q é constante no interior do elemento.

De acordo com (3.3), o elemento do vetor das ações é composto de duas parcelas, podendo, portanto, ser escrito:

$$P_j^e = P_{j1}^e + P_{j2}^e \quad (3.9)$$

que, em vista das simplificações impostas e da relação (3.7), resulta em:

$$P_{j1}^e = \int_{\Delta^e} Q N_j d\Delta = \frac{Q\Delta}{3} \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

$$P_{j2}^e = \int_{S_2^e} \bar{q} N_j dS = \frac{\bar{q}l}{2} \quad j = 1, 2 \quad (3.11)$$

Temos, então, para cada elemento, a seguinte equação matricial:

$$\frac{1}{4\Delta} \begin{vmatrix} k_x b_1 b_1 + k_y c_1 c_1 & k_x b_1 b_2 + k_y c_1 c_2 & k_x b_1 b_3 + k_y c_1 c_3 \\ k_x b_2 b_2 + k_y c_2 c_2 & k_x b_2 b_3 + k_y c_2 c_3 \\ k_x b_3 b_3 + k_y c_3 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{Q\Delta}{3} + \frac{\bar{q}l}{2} \\ \frac{Q\Delta}{3} + \frac{\bar{q}l}{2} \\ \frac{Q\Delta}{3} \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Simetria

3. ELEMENTOS DE QUATRO LADOS

Os cálculos necessários para a obtenção dos elementos das Matrizes dos Elementos quando são utilizados elemen

tos de quatro lados são mais complexos que os utilizados quando o elemento é triangular de primeira ordem, razão pela qual a sua utilização na discretização do domínio é mais popular que as de mais formas.

A grande vantagem dos elementos de quatro lados, em relação ao elemento triangular de primeira ordem, reside no fato de que, para se obter uma solução de boa precisão, não é necessário uma quantidade exagerada de elementos, o que gera, portanto, sistemas de ordem bem menores, pois as funções de aproximação utilizadas são mais eficientes.

Para os elementos de quatro lados, as funções de aproximação que melhor se adaptam à formulação pelo Método dos Elementos Finitos são as funções de aproximação da família "Seriendipity". Isto pôde ser constatado através dos diversos contatos com pesquisadores da área, no Brasil e no exterior.

Na geração dos elementos das matrizes dos elementos, para elementos finitos de quatro lados, freqüentemente é necessário calcular integrais da forma:

$$I = \int_{\Delta^e} f(\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}) dx dy \quad (3.13)$$

quando o domínio em análise é bidimensional.

O cálculo de integrais deste tipo, quando a função de aproximação é expressa em termos de suas coordenadas generalizadas, é extremamente difícil, pois é necessário efetuar normalizações para se utilizar os Métodos Numéricos de Integração mais eficientes.

Este inconveniente não se apresenta quando a função de aproximação utilizada é expressa em termos de coordenadas naturais (u, v), como o são as da família "Serendipity", pois, neste caso, em relação às coordenadas naturais, o elemento não está deformado, e os limites de integração estão compreendidos entre (-1) e $(+1)$, possibilitando assim explorar todas as vantagens do algoritmo de integração numérica "Gaus Quadratura", (que é o algoritmo utilizado neste trabalho).

Como as expressões dos elementos das matrizes dos elementos são expressas em termos de coordenadas globais (x, y), apresentamos a seguir as operações necessárias para expressá-los em termos de coordenadas locais (u, v).

Para o elemento finito de quatro lados (retos ou curvos), podemos escrever:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad (3.14)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

O elemento de área ($dx dy$) em termos de coordenadas locais é dada por:

$$dx dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv \quad (3.15)$$

Como o elemento utilizado é "isoparamétrico", a variável de campo é expressa em termos de variáveis nodais pelas mesmas funções de aproximação, de modo que:

$$\theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (3.16)$$

Desta forma, podemos escrever:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_i \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_i$$

cujos termos $\partial N_i / \partial x$ e $\partial N_i / \partial y$ são obtidos a partir das seguintes relações:

$$\frac{\partial N_i}{\partial u} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial v} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

ou matricialmente:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

onde \mathbf{J} é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

Da relação inversa de (3.19) obtemos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

Verifica-se facilmente que a expressão (3.15) pode ser expressa como:

$$dx dy = \det \mathbf{J} du dv \quad (3.21)$$

onde $\det \mathbf{J}$ é o determinante do Jacobiano.

Estas relações são suficientes para transformar as integrais do tipo (3.13) em:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(u, v) du dv \quad (3.22)$$

que são agora realizadas utilizando-se o Método de Gauss Quadratura, que, pela literatura pertinente [46], é o que melhor se adapta para a solução de problemas desse tipo.

As duas dimensões, a integração pelo Método de Gauss é realizada como:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(u, v) du dv = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j G(u_i, v_j) \quad (3.23)$$

onde $G(u_i, v_j)$ é o valor da função nos pontos de Gauss, e as constantes W 's são os pesos de integração.

Segundo os professores Silvester e Rafinejad*, este método de integração produz resultados com excelente precisão, quando são utilizados quatro pontos para integração, na solução de integrais a duas dimensões.

Assim sendo, continuando os procedimentos aqui expostos, os elementos das matrizes dos elementos são dados por:

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{f}(u, v) \, dudv \quad (3.24)$$

$$P_j^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{g}(u, v) \, dudv$$

que, integrados pelo Método de Gauss-Quadratura, fornecem os diversos elementos das Matrizes dos Elementos.

4. GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS

Uma vez obtidas as matrizes de cada elemento finito, devemos somá-las criteriosamente para estabelecer as ações entre os elementos, gerando, assim, a Matriz Global de todo o domínio.

Para uma melhor visualização do processo de montagem da Matriz Global, consideremos a malha da figura III.2, cons

* Silvester, P.; Rafinejad, P. - Curvilinear Finite Elements for Two-Dimensional Saturable Magnetic Fields, IEEE Trans. on PAS 97(6):1861-70, Nov./Dec. 1974.

tituída por quatro elementos triangulares. Evidentemente, este algoritmo independe da forma do elemento.

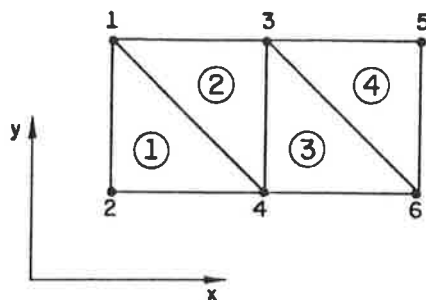


Figura III.2 - Domínio em estudo

Para um elemento genérico do domínio, numeramos seus vértices de 1 a 3, começando por qualquer nó e percorrendo-o no sentido anti-horário, como mostra a figura III.3.

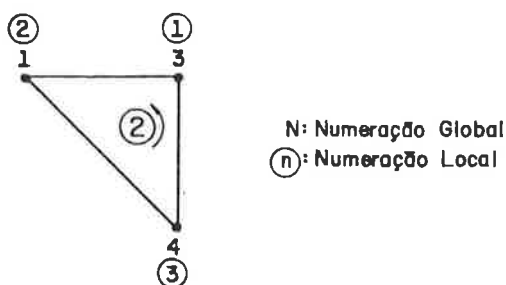


Figura III.3 - Numeração local do elemento 2

A correspondência entre as numerações local e global no elemento 2 está indicada na tabela III.1.

Numeração local	1	2	3
Numeração global	3	1	4

Tabela III.1 - Correspondência entre numerações no elemento 2

Na numeração local as matrizes do elemento 2 são dadas por:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Enquanto que, na numeração global, as mesmas matrizes são escritas como segue:

$$\begin{array}{l} \text{Local} \text{---} 2 \quad 1 \quad 3 \\ \text{Global} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} K_{22}^2 & 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^2 & 0 & K_{11}^2 & K_{13}^2 & 0 & 0 \\ K_{32}^2 & 0 & K_{31}^2 & K_{33}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2^2 \\ 0 \\ P_1^2 \\ P_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

analogamente, para o elemento 4, temos:

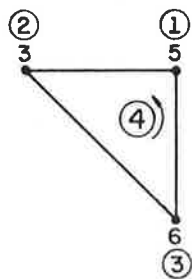


Figura III.4 - Numeração local do elemento 4

Numeração local	1	2	3
Numeração global	5	3	6

Tabela III.2 - Correspondência entre numerações no elemento 4

Na numeração local, as matrizes do elemento 4 são dadas por:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^4 & K_{12}^4 & K_{13}^4 \\ K_{21}^4 & K_{22}^4 & K_{23}^4 \\ K_{31}^4 & K_{32}^4 & K_{33}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^4 \\ P_2^4 \\ P_3^4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

enquanto que, na numeração global, são dadas por:

Local		2		1		3													
	Global	1	2	3	4	5	6												
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	K_{22}^4	0	K_{21}^4	K_{23}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	0	0	K_{12}^4	0	K_{11}^4	K_{13}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	6	0	0	K_{32}^4	0	K_{31}^4	K_{33}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_2^4 \\ 0 \\ P_1^4 \\ P_3^4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Assim procedendo para todos os elementos do domínio, as matrizes globais de toda a malha de elementos finitos são obtidas a partir da soma das matrizes globais de cada elemento; resultando, para o exemplo em análise, nas matrizes globais da figura III.5.

		LB						
Global		1	2	3	4	5	6	
1	XO	X	O	XO	O	O	θ_1	XO
2	X	X	O	X	O	O	θ_2	X
3	O	O	O□Δ	O□	Δ	□Δ	θ_3	O□Δ
4	XO	X	O□	XO□	O	□	θ_4	XO□
5	O	O	Δ	O	Δ	Δ	θ_5	Δ
6	O	O	□Δ	□	Δ	□Δ	θ_6	Δ□

Figura III.5 - Processo de montagem de matriz global

Na figura III.5, as contribuições de cada elemento na montagem das Matrizes Globais são tais que:

SÍMBOLO	ELEMENTO
X	1
O	2
□	3
Δ	4

Nota-se, por inspeção, que a Matriz Global dos coeficientes é esparsa, simétrica e tem a característica de banda, propriedades tais que devem ser exploradas pelo Método de Resolução do Sistema.

A largura da semibanda da Matriz dos Coeficientes, é dada por*:

$$LB = N_v (M_{dif} + 1) \quad (3.30)$$

onde

N_v : número de variáveis associada a cada nó

M_{dif} : maior diferença da numeração global dos nós do elemento.

5. INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

No Método dos Elementos Finitos, admite-se, a priori, que a função de aproximação satisfaz exatamente uma das condições de fronteira impostas, razão pela qual a equação dos Resíduos Pesados não contém nenhuma parcela referente a essa fronteira.

No desenvolvimento da formulação pelo Método dos Elementos Finitos que ora apresentamos, considerou-se que a função de aproximação satisfaz exatamente as condições da fronteira S_1 .

Para que a função de aproximação satisfaça exatamente a condição de fronteira $\theta = \bar{\theta}$ em S_1 , é necessário impor no sistema de equações, que as variáveis nodais θ_1 , situadas na fronteira S_1 , assumam após a resolução do sistema os valores fixados.

* Bathe, K.J. and Wilson, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis. Englewood Cliffs - New Jersey, Prentice Hall, 1976 - 527 p.

No caso de um problema de obtenção da distribuição de Campo Magnético, a introdução das condições de fronteira consiste em impor nos trechos do contorno o valor do Vetor Potencial Magnético (A), nos nós situados nessa fronteira.

Seja, por exemplo, $\theta_i = \bar{\theta}$ a variável nodal que se pretende impor no sistema de equações: A imposição desta condição consiste em se modificar a linha i da Matriz dos Coeficientes, tornando:

$$\begin{aligned} K_{ii} &= 1 \\ K_{ij} &= 0 \quad \text{para } i \neq j \\ P_i &= \bar{\theta} \end{aligned}$$

Como esta modificação torna a Matriz dos Coeficientes assimétrica, levanta-se essa assimetria somando a cada linha do vetor das ações, exceto à linha i , o termo $(-K_{ji} \bar{\theta})$, e fazendo-se em seguida $K_{ji} = 0$ ($j \neq i$), na coluna da Matriz dos Coeficientes.

CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS ESTÁTICOS COM ELEMENTOS DE QUATRO LADOS

1. GENERALIDADES

Na grande maioria dos problemas de Campos Eletromagnéticos, a estrutura magnética tem dimensões tais que a análise bidimensional do problema é adequada para a solução do mesmo.

Em vista desta aproximação, a corrente elétrica será unidirecional, e vamos considerá-la perpendicular ao plano da figura IV.1, isto é:

$$\vec{J} = J(x, y) \vec{u}_z \quad (4.1)$$

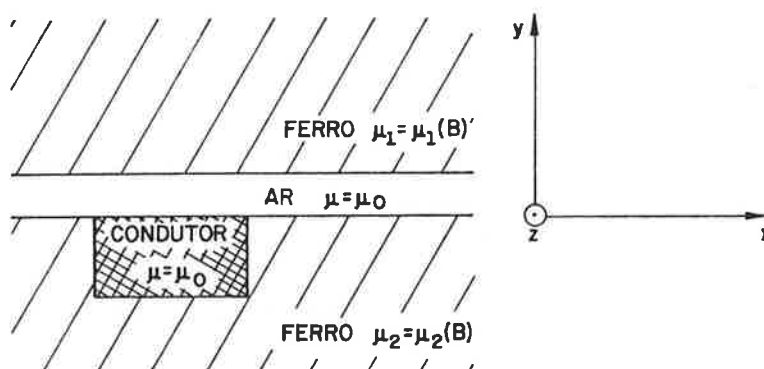


Figura IV.1 - Geometria geral do domínio

Esta simetria também é transferida para o Vetor Potencial Magnético (\vec{A}), de modo que podemos escrever:

$$\vec{A} = A(x, y) \vec{u}_z \quad (4.2)$$

Da Segunda Equação de Maxwell na forma diferencial, para o regime estacionário temos:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.3)$$

Lembrando que:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu} \quad (4.4)$$

Resultando finalmente:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J} \quad (4.5)$$

a qual é válida para μ não-uniforme, porém isotrópico.

Definindo a **relutividade**,

$$v = \frac{1}{\mu} \quad (4.6)$$

e, seguindo o sistema de referência da figura IV.1, segue-se que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_y \quad (4.7)$$

e

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \vec{u}_z \quad (4.8)$$

Assim, substituindo-se (4.8) e (4.10) em (4.5), resulta a relação escalar bidimensional.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J = 0 \quad (4.9)$$

que é válida em todo o domínio em estudo.

Acrescente-se ainda à equação (4.9) as condições de contorno:

i - Condições Naturais do Domínio, ou de Dirichlet:

$$A = \bar{A} \text{ em } S_1 \quad (4.10)$$

ii - Condições de Simetria, ou Neumann:

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \text{ em } S_2 \quad (4.11)$$

Comparando-se a equação (4.9) com a equação geral da dispersão (1.1), observaremos as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned} \theta &= A \\ k_x &= k_y = v \\ Q &= J \\ \bar{q} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

2. FORMULAÇÃO RESIDUAL - FORMA "FRACA"

Seguindo-se o procedimento detalhado no Capítulo I, a Equação dos Resíduos Pesados para o problema do Campo Eléctromagnético Estático se reduz a:

$$\int_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] W_{\Delta} d\Delta + \int_{\Delta} J W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1} (A - \bar{A}) W_{S1} dS + \int_{S_2} \frac{\partial A}{\partial n} W_{S2} dS = 0 \quad (4.13)$$

Integrando-se por partes a primeira integral da equação (4.13), utilizando-se a fórmula de Green, obtemos*:

$$- \int_{\Delta} v \left[\frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right] d\Delta + \int_{\Delta} J W_{\Delta} d\Delta + \int_{S_1+S_2} \frac{\partial A}{\partial n} W_{\Delta} dS + \int_{S_2} \frac{\partial A}{\partial n} W_{S2} dS = 0 \quad (4.14)$$

Tal como no Método dos Elementos Finitos, as condições de fronteira em S_1 são satisfeitas exatamente, e temos:

$$W_{\Delta} = 0 \text{ em } S_1 \quad (4.15)$$

E como as funções de peso são arbitrárias, escolhemos:

$$W_{S2} = -W_{\Delta} \quad (4.16)$$

* Em (4.14) aplicamos a seguinte identidade: $\frac{\partial A}{\partial x} n_x + \frac{\partial A}{\partial y} n_y = \frac{\partial A}{\partial n}$

resultando, a forma "fraca" da Equação dos Resíduos Pesados.

$$\int_{\Delta} v \left| \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right| d\Delta - \int_{\Delta} J W_{\Delta} d\Delta = 0 \quad (4.17)$$

Discretizando-se o domínio em elementos finitos, operação que é matematicamente simbolizada por:

$$\Delta = \sum_{\Delta^e} \Delta^e \quad (4.18)$$

podemos escrever para cada elemento,

$$\int_{\Delta^e} v \left| \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_{\Delta}}{\partial y} \right| d\Delta - \int_{\Delta^e} J W_{\Delta} d\Delta = 0 \quad (4.19)$$

Escolhemos agora as funções de aproximação em termos das funções de forma do elemento, de modo que:

$$A = \sum_{i=1}^n N_i A_i \quad (4.20)$$

onde n é o número de nós do elemento e os A_i 's são os valores nodais da componente z do Vetor Potencial Magnético.

Assim sendo, podemos escrever:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} A_i \quad (4.22)$$

Como o operador diferencial da equação (4.13) é auto-adjunto, como já foi discutido, a técnica de aproximação adequada é a de Galerkin, a qual permite o estabelecimento da forma fraca da Equação de Resíduos Pesados e ainda a escolha da função-peso W_Δ , como uma variação arbitrária da variável nodal, relativamente aos seus coeficientes, isto é:

$$W_\Delta = \delta A = \sum_{i=1}^n N_j \delta A_j \quad (4.23)$$

resultando para cada elemento finito,

$$\int_{\Delta^e} v \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] A_i \delta A_j d\Delta - \int_{\Delta^e} J N_j \delta A_j d\Delta = 0 \quad (4.24)$$

Como δA_j é uma variação arbitrária da variável nodal, a expressão (4.24) gera um sistema de equações para o elemento, cujo termo geral é expresso por:

$$\int_{\Delta^e} v \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] A_i d\Delta - \int_{\Delta^e} J N_j d\Delta = 0 \quad (4.25)$$

que pode ser representado matricialmente por:

$$\underline{K}^e \cdot \underline{A}^e = \underline{P}^e \quad (4.26)$$

onde:

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} v \left| \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right| d\Delta \quad (4.27)$$

$$P_j^e = \int_{\Delta^e} J N_j d\Delta \quad (4.28)$$

Observa-se facilmente que:

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e \quad (4.29)$$

3. ELEMENTOS CURVOS - APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA

3.1 - Introdução

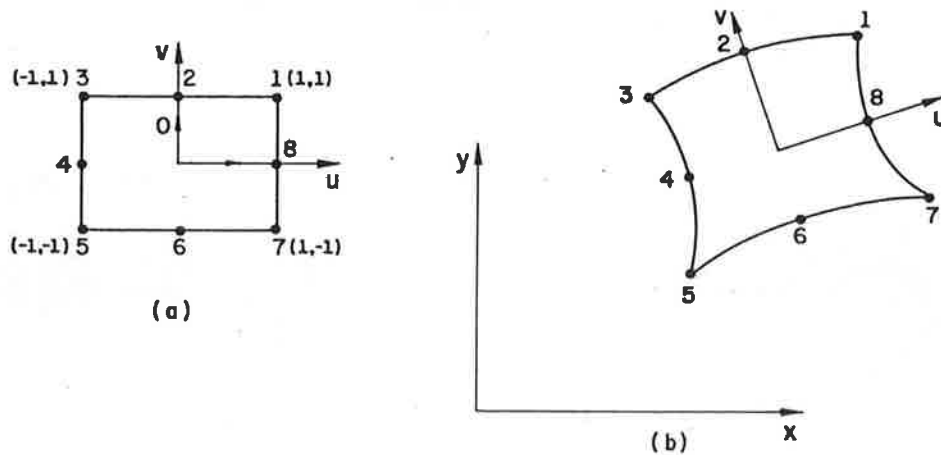


Figura IV.2 - Elemento finito de lado curvo
 a.) Elemento normalizado em coordenadas locais
 b.) Elemento real em coordenadas globais

A figura IV.2 mostra um elemento finito isoparamétrico de lado curvo com oito nós, sobre o qual será aplicada uma função de interpolação Quadrática da Família Serendipity de modo que podemos escrever:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad (4.30)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad (4.31)$$

onde $N_i = N_i(u, v)$ representa a função de interpolação correspondente ao nó i (numeração local) do elemento, e é tal que:

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + u_i u)(1 + v_i v)(u_i u + v_i v - 1) & \text{para } i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{2} (1 - u^2)(1 + v_i v) & \text{para } i = 2 \text{ e } 6 \\ \frac{1}{2} (1 + u_i u)(1 - v^2) & \text{para } i = 4 \text{ e } 8 \end{cases} \quad (4.32)$$

Seguindo-se o procedimento indicado no Capítulo III, os elementos da matriz do elemento são determinados por integração numérica, após a transformação das variáveis de integração de (x, y) para (u, v) das integrais (4.27) e (4.28).

O primeiro passo consiste em expressarmos os termos $\partial N_i / \partial x$ e $\partial N_i / \partial y$ em função das coordenadas locais (u, v) , a partir das relações:

$$\frac{\partial N_i}{\partial u} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial v} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \quad (4.34)$$

ou matricialmente:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (4.35)$$

onde \mathbf{J} é o Jacobiano da matriz da transformação de coordenadas.

Resulta, portanto, que:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (4.36)$$

A relação entre as variáveis de integração é da por:

$$d\Delta = dx dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv$$

ou ainda,

$$d\Delta = dx dy = \det \mathbf{J} du dv \quad (4.38)$$

Definindo-se as matrizes:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

nota-se que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_{xy} \quad (4.40)$$

Lembrando-se que:

$$\nabla N_i \cdot \nabla N_j = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (4.41)$$

ou matricialmente,

$$\nabla N_i \cdot \nabla N_j = \mathbf{D}_{xy}^T N_i \mathbf{D}_{xy} N_j \quad (4.42)$$

e que, substituindo-se em (4.27), resulta:

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \mathbf{D}^T N_i \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D} N_j \det \mathbf{J} \, dudv \quad (4.43)$$

que, por substituição de (4.37) em (4.28), o elemento do vetor das ações é escrito como se segue:

$$P_j^e = \int_{\Delta^e} \mathbf{J} N_j \det \mathbf{J} \, dudv \quad (4.44)$$

Resta, portanto, avaliarmos os termos do Jacobiano e a relatividade em termos das coordenadas locais, para que possamos definir completamente os elementos das matrizes do elemento nestas coordenadas.

3.2 - Elementos do Jacobiano

O Jacobiano é definido por:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (4.45)$$

cujos elementos são obtidos a partir das funções de forma do elemento finito, lembrando-se que:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad (4.46)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i$$

Podemos escrever:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial u} x_i \quad (4.47)$$

com relações semelhantes para $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$ e $\partial y/\partial v$.

As derivadas parciais das funções de aproximação, em relação as coordenadas locais, são obtidas a partir de (4.32), resultando:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial u} &= \frac{1}{4} (1 + v)(2u + v) & \frac{\partial N_1}{\partial v} &= \frac{1}{4} (1 + u)(2v + u) \\
\frac{\partial N_2}{\partial u} &= -u(1 + v) & \frac{\partial N_2}{\partial v} &= \frac{1}{2} (1 - u^2) \\
\frac{\partial N_3}{\partial u} &= \frac{1}{4} (1 + v)(2u - v) & \frac{\partial N_3}{\partial v} &= \frac{1}{4} (1 - u)(2v - u) \\
\frac{\partial N_4}{\partial u} &= -\frac{1}{2} (1 - v^2) & \frac{\partial N_4}{\partial v} &= -v(1 - u) \\
\frac{\partial N_5}{\partial u} &= \frac{1}{4} (1 - v)(2u + v) & \frac{\partial N_5}{\partial v} &= \frac{1}{4} (1 - u)(2v + u) \\
\frac{\partial N_6}{\partial u} &= -u(1 - v) & \frac{\partial N_6}{\partial v} &= -\frac{1}{2} (1 - u^2) \\
\frac{\partial N_7}{\partial u} &= \frac{1}{4} (1 - v)(2u - v) & \frac{\partial N_7}{\partial v} &= \frac{1}{4} (1 + u)(2v - u) \\
\frac{\partial N_8}{\partial u} &= \frac{1}{2} (1 - u^2) & \frac{\partial N_8}{\partial v} &= -v(1 + u)
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

Substituindo esses resultados em (4.47) resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= k_{1x} v^2 + k_{2x} uv + k_{3x} v + k_{4x} u + k_{5x} \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= k_{1y} v^2 + k_{2y} uv + k_{3y} v + k_{4y} u + k_{5y} \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= k_{6x} u^2 + k_{7x} uv + k_{8x} v + k_{9x} u + k_{10x} \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= k_{6y} u^2 + k_{7y} uv + k_{8y} v + k_{9y} u + k_{10y}
\end{aligned}
\tag{4.49}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 k_{1x} &= 0,25x_1 - 0,25x_3 + 0,5x_4 - 0,25x_5 + 0,25x_7 - 0,5x_8 \\
 k_{1y} &= 0,25y_1 - 0,25y_3 + 0,5y_4 - 0,25y_5 + 0,25y_7 - 0,5y_8 \\
 k_{2x} &= 0,5x_1 - x_2 + 0,5x_3 - 0,5x_5 - 0,5x_7 \\
 k_{2y} &= 0,5y_1 - y_2 + 0,5y_3 - 0,5y_5 - 0,5y_7 \\
 k_{3x} &= 0,25x_1 - 0,25x_3 + 0,25x_5 - x_6 - 0,25x_7 \\
 k_{3y} &= 0,25y_1 - 0,25y_3 + 0,25y_5 - y_6 - 0,25y_7 \\
 k_{4x} &= 0,5x_1 - x_2 + 0,5x_3 + 0,5x_5 - x_6 + 0,5x_7 \\
 k_{4y} &= 0,5y_1 - y_2 + 0,5y_3 + 0,5y_5 - y_6 + 0,5y_7 \\
 k_{5x} &= -0,5x_4 + 0,5x_8 \\
 k_{5y} &= -0,5y_4 + 0,5y_8 \\
 k_{6x} &= 0,25x_1 - 0,5x_2 + 0,25x_3 - 0,25x_5 + 0,5x_6 - 0,25x_7 \\
 k_{6y} &= 0,25y_1 - 0,5y_2 + 0,25y_3 - 0,25y_5 + 0,5y_6 - 0,25y_7 \\
 k_{7x} &= 0,5x_1 - 0,5x_3 + x_4 - 0,5x_5 + 0,5x_7 - x_8 \\
 k_{7y} &= 0,5y_1 - 0,5y_3 + y_4 - 0,5y_5 + 0,5y_7 - y_8 \\
 k_{8x} &= 0,5x_1 + 0,5x_3 - x_4 + 0,5x_5 + 0,5x_7 - x_8 \\
 k_{8y} &= 0,5y_1 + 0,5y_3 - y_4 + 0,5y_5 + 0,5y_7 - y_8 \\
 k_{9x} &= 0,25x_1 - 0,25x_3 + 0,25x_5 - 0,25x_7 \\
 k_{9y} &= 0,25y_1 - 0,25y_3 + 0,25y_5 - 0,25y_7 \\
 k_{10x} &= 0,5x_2 - 0,5x_6 \\
 k_{10y} &= 0,5y_2 - 0,5y_6
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Definindo-se:

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{\partial x}{\partial u} & A_y &= \frac{\partial y}{\partial u} \\
 B_x &= \frac{\partial x}{\partial v} & B_y &= \frac{\partial y}{\partial v}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

podemos escrever:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

Cuja inversa é dada por:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{vmatrix} B_y & -A_y \\ -B_x & A_x \end{vmatrix} \quad (4.53)$$

onde:

$$\det \mathbf{J} = A_x B_y - A_y B_x \quad (4.54)$$

4. ELEMENTO DE QUATRO LADOS - APROXIMAÇÃO LINEAR

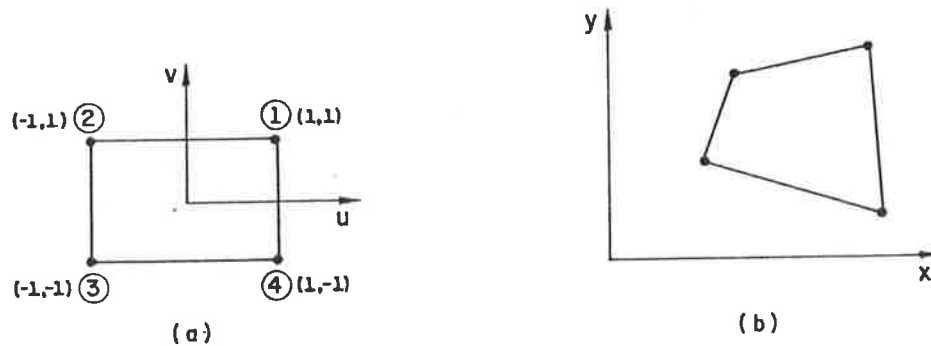


Figura IV.3 - Elemento retangular

- a.) Elemento normalizado em coordenadas locais
 b.) Elemento real em coordenadas globais

Nesta formulação, temos uma simplificação do caso anterior, onde as funções de interpolação são escritas como:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} (1 + u)(1 + v) \\
 N_2 &= \frac{1}{4} (1 - u)(1 + v) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} (1 - u)(1 - v) \\
 N_4 &= \frac{1}{4} (1 + u)(1 - v)
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

cujas derivadas parciais em relação às coordenadas locais são da das por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial u} &= \frac{1}{4} (1 + v) & \frac{\partial N_1}{\partial v} &= \frac{1}{4} (1 + u) \\
 \frac{\partial N_2}{\partial u} &= -\frac{1}{4} (1 + v) & \frac{\partial N_2}{\partial v} &= \frac{1}{4} (1 - u) \\
 \frac{\partial N_3}{\partial u} &= -\frac{1}{4} (1 - v) & \frac{\partial N_3}{\partial v} &= -\frac{1}{4} (1 - u) \\
 \frac{\partial N_4}{\partial u} &= \frac{1}{4} (1 - v) & \frac{\partial N_4}{\partial v} &= -\frac{1}{4} (1 + u)
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

substituindo-se estes resultados em (4.47), obteremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial u} &= k_{1x} v + k_{2x} \\
 \frac{\partial y}{\partial u} &= k_{1y} v + k_{2y} \\
 \frac{\partial x}{\partial v} &= k_{3x} u + k_{4x} \\
 \frac{\partial y}{\partial v} &= k_{3y} u + k_{4y}
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

onde:

$$k_{1x} = 0,25 (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$k_{1y} = 0,25 (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$$

$$k_{2x} = 0,25 (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

$$k_{2y} = 0,25 (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)$$

$$k_{3x} = 0,25 (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$k_{3y} = 0,25 (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)$$

$$k_{4x} = 0,25 (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

$$k_{4y} = 0,25 (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)$$

Com esses valores, determinamos a matriz do Jaco-
biano, bem como sua inversa, através das equações (4.51) a (4.54).
Obtidos esses resultados, podemos calcular as matrizes do ele-
mento finito por intermédio de (4.43) e (4.44).

5. AVALIAÇÃO DA RELUTIVIDADE NOS PROBLEMAS NÃO-LINEARES

A avaliação da relutividade nos meios ferromagné-
ticos é o que mais tem preocupado os pesquisados no desenvolvi-
mento de técnicas para a aplicação do Método os Elementos Fini-
tos, pois todos os métodos iterativos requerem uma obtenção re-
petida da mesma.

Como sabemos, a relutividade (inverso da permea-
bilidade) de um meio ferromagnético esta em função do Campo Mag-
nético, resultando, portanto, que, sua determinação precisa, só
é possível após a solução do problema.

No Método dos Elementos Finitos, isto é facilmen-
te contornado com a utilização adequada de processos iterativos.

A determinação do Campo Magnético no interior de um elemento é obtida em função dos valores nodais do Vetor Potencial Magnético, a partir da expressão (4.7), como se segue:

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_y \quad (4.59)$$

considerando-se que:

$$A = \sum_{i=1}^n N_i A_i \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} A_i \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i$$

Como nos interessa apenas a amplitude do campo magnético, segue-se que:

$$B^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \quad (4.62)$$

cujos termos são obtidos a partir das relações (4.61), o que resultará em:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} A_i A_j$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} A_i A_j \quad (4.63)$$

de modo que:

$$B^2 = \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) A_i A_j \quad (4.64)$$

ou ainda:

$$B^2 = \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} \nabla N_i \cdot \nabla N_j A_i A_j \quad (4.65)$$

No processo de integração numérica, é conveniente expressarmos B^2 em termos de coordenadas locais (u, v) , utilizando resultados obtidos em (4.40) e (4.42), resultando:

$$B^2 = \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} \mathbf{D}^T \mathbf{J}^{-T} N_i \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D} N_j A_i A_j \quad (4.66)$$

O procedimento clássico para a obtenção da relatividade requer a cada passo, no processo de computação, o seguinte:

- i - Determinar a amplitude do Campo Magnético elevada ao quadrado, a partir de (4.66).
- ii - Extrair sua raiz quadrada.
- iii - Determinar H através de um processo de interpolação adequado.
- iv - Dividir H por B para determinar a relatividade.

Este processo é muito ineficiente, especialmente do ponto de vista de alto custo das muitas operações de extração da raiz quadrada no processo iterativo.

No entanto, se o material ferromagnético for caracterizado com a relutividade do meio como uma função do Campo Magnético elevado ao quadrado, este trabalho é grandemente facilitado.

Foi esta característica que nos levou a escolher a técnica de interpolação desenvolvida por Silvester, Cabayan e Browne*, com vistas a redução do tempo de processamento.

Este processo consiste em expressar a relutividade através de uma curva polinomial cúbica, sobre um intervalo de densidade de fluxo bem definido.

Assim, sejam B_1 e B_2 os valores do campo magnético nos extremos deste intervalo, vamos escrever:

$$x = \frac{B^2 - B_1^2}{B_2^2 - B_1^2} \quad (4.67)$$

Deste modo, o problema pode ser analisado como uma aproximação da relutividade em função de x , no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Neste método de interpolação expressa-se a relutividade através de uma função cúbica de x , como se segue:

$$v(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1) v(0) + (-2x^3 + 3x^2) v(1) + (x^3 - 2x^2 + x) v'(0) + (x^3 - x^2) v'(1) \quad (4.68)$$

* Silvester, P., Cabayan H.S., Browne, B.T. - Efficient Techniques for Finite Element Analysis of Electric Machines - IEEE Trans. on PAS, vol. 92, nº 4, July 1973, pp. 1274-1281

onde $v(0)$ e $v(1)$ são os valores da relutividade nos extremos do intervalo, e $v'(0)$ e $v'(1)$ são os valores da derivada da relutividade em relação a B^2 nestes pontos.

Os valores característicos, indicados nos extremos do intervalo, são obtidos a partir da construção gráfica da característica $v \times B^2$, a qual é subdividida em intervalos em cujos extremos são obtidos os valores da relutividade e de suas derivadas.

Este procedimento, exige a observação de algumas propriedades, a saber:

- 1.) as derivadas devem ser contínuas para todos extremos do segmento, isto é, deve-se verificar se a derivada no extremo direito de um segmento é igual à derivada obtida no extremo esquerdo do segmento contíguo, isto é devido a expressão:

$$\frac{dv}{d(B^2)} = (6x^2 - 6x) v(0) + (-6x^2 + 6x) v(1) + (3x^2 - 4x + 1) v'(0) + (3x^2 - 2x) v'(1) \quad (4.69)$$

- 2.) A curva deve ser contínua em todos os extremos do segmento, isto é, através da expressão:

$$\frac{d^2 v}{d(B^2)^2} = (12x - 6) v(0) + (-12x + 6) v(1) + (6x - 4) v'(0) + (6x - 2) v'(1) \quad (4.70)$$

calculada no extremo direito de um segmento, resulta no mesmo valor, quando avaliada no extremo esquerdo do segmento contíguo.

- 3.) A derivada em $B = 0$ deve ser nula.

- 4.) No segmento mais a direita (saturação) a derivada é constante.

Neste trabalho, a característica de magnetização do material ferromagnético utilizada é a mostrada na fig. IV.4.

Após a construção da curva $v \times B^2$, a mesma foi segmentada e 5 intervalos, resultando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 260 \text{ para } 0 \leq B^2 < 0,6 \\
 v_2 &= 168x^3 - 173x^2 + 75x + 280 \text{ para } 0,6 \leq B^2 < 1,2 \\
 v_3 &= 486x^3 - 429x^2 + 233x + 350 \text{ para } 1,2 \leq B^2 < 1,8 \\
 v_4 &= 716x^3 - 899x^2 + 833x + 640 \text{ para } 1,8 \leq B^2 < 2,4 \\
 v_5 &= 1183,3 B^2 - 1550 \text{ para } B^2 \geq 2,4
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

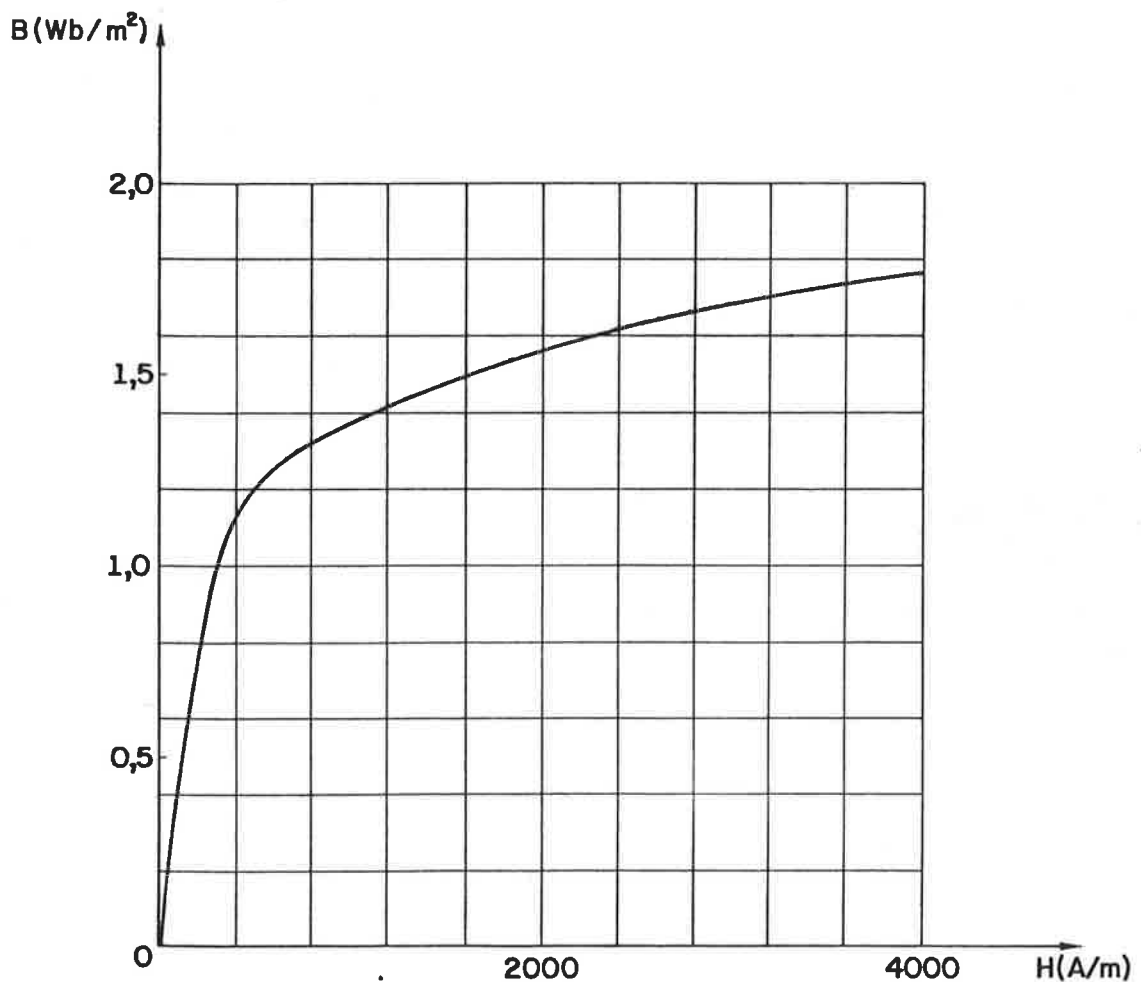


Figura IV.4 - Característica de magnetização
Material: Ferro-Silício

6. DETERMINAÇÃO DE GRANDEZAS SECUNDÁRIAS

Uma série de grandezas secundárias pode ser obtida após a convergência do processo iterativo, sendo de maior interesse:

- i - Energia Magnética Armazenada
- ii - Indutâncias Próprias

6.1 - Energia Magnética Armazenada

A densidade volumétrica de energia magnética armazenada é dada por:

$$W_m = \frac{1}{2} \nu B^e \text{ (J/m}^3\text{)} \quad (4.72)$$

A integração volumétrica desta densidade sobre o volume de um elemento nos fornecerá a energia magnética armazenada no mesmo.

A somatória das energias armazenadas por todos os elementos resultará na energia magnética total armazenada no domínio.

A seguir, são apresentadas as expressões para a determinação da energia magnética armazenada nos diversos tipos de elementos de interesse.

I - Elemento Triangular

Em elementos triangulares (prismáticos), demonstra-se que o campo magnético no interior do elemento é constante (Apêndice), resultando para a energia magnética armazenada:

$$E^e = \frac{1}{2} v^e B^2 A L \quad (4.73)$$

onde:

A - área do elemento

L - Altura do elemento

II - Elementos de Quatro Lados (Retos ou Curvos)

Em elementos de quatro lados retilíneos ou curvos, o campo magnético bem como a relutividade em seu interior são funções de ponto de modo que para se determinar a energia magnética armazenada no elemento deve-se lançar mão de uma integração numérica sobre a área do elemento em termos de suas coordenadas locais.

Nesses casos, a energia magnética armazenada no elemento é dada por:

$$E^e = \frac{L}{2} \int_{\Delta^e} v(u, v) B^2(u, v) d\Delta \quad (4.74)$$

O algoritmo de integração numérica adequado para esta operação é o mesmo utilizado na determinação dos elementos da Matriz dos Elementos, ou seja, utiliza-se o Método de Gauss Quadratura já citado.

6.2 - Indutâncias Próprias

Uma vez obtidas as energias magnéticas armazenadas em todos os elementos, obtém-se a energia magnética total armazenada no domínio:

$$E_{\text{total}} = \sum_{R=1}^{NE} E^e \quad (4.75)$$

onde NE é o número de elementos do domínio.

Lembre-se que a energia magnética armazenada é expressa em função da indutância como segue:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.76)$$

Assim, obtém-se diretamente a indutância por comparação entre (4.75) e (4.76).

CAPÍTULO V - SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS DINÂMICOS

1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento dos campos eletromagnéticos variáveis no tempo de real interesse para a Eletrotécnica restringe-se ao Regime Lentamente Variável.

Neste caso, podemos dividir a análise do problema em duas partes, quais sejam:

- i - Regime Permanente Senoidal
- ii - Regime Transitório

Na primeira, a solução do problema pode ser simplificada com a utilização da técnica fasorial, desde que a reatância do meio seja constante. Nota-se, portanto, que a aplicação desta técnica a estudos de problemas que envolvem meios ferromagnéticos é bem restrita.

No Regime Transitório, o tempo é discretizado em intervalos adequados, onde são determinadas as distribuições espaciais do Vetor Potencial Magnético, bem como do Vetor Campo Magnético, nos diversos instantes de interesse, isto é, são obtidas "fotografias" das distribuições de campo nos instantes desejados.

Isto tem particular interesse no estudo de transitórios eletromagnéticos das máquinas elétricas rotativas e estacionárias, com o objetivo de se determinar seus parâmetros transitórios, bem como os esforços oriundos das elevadas correntes induzidas em seus enrolamentos.

A Equação Geral que descreve o comportamento do Vetor Potencial Magnético em Regime Lentamente Variável é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J - \sigma \frac{dA}{dt} = 0 \text{ em } \Delta \quad (5.1)$$

Acrescida das condições de contorno:

$$A = \bar{A} \text{ em } S_1$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \text{ em } S_2$$

Devendo ser consideradas ainda, as condições iniciais:

$$A(t_0) = A_0$$

2. REGIME TRANSITÓRIO - FORMULAÇÃO PELO MEF

A formulação matemática do problema é em todo semelhante àquela aplicada na solução de problemas de campos eletromagnéticos estacionários, dispensando-se, portanto, a necessidade de se indicar os detalhes dedutivos.

Na forma-padrão, a equação (5.1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \bar{J} = 0 \quad (5.2)$$

onde:

$$\bar{J} = J - \sigma \frac{dA}{dt}$$

Claro está que, em um dado instante a solução do problema é obtida de forma idêntica ao do caso estacionário.

Aplicando-se, então, os resultados obtidos no Capítulo II, para cada elemento obteremos o seguinte sistema de equações algébricas.

$$\underline{K}^e \underline{A}^e = \underline{P}^e \quad (5.3)$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Delta \quad (5.4)$$

$$P_j^e = \int_{\Delta^e} J N_j d\Delta - \int_{\Delta^e} \sigma \frac{dA}{dt} N_j d\Delta \quad (5.5)$$

Expressando-se o Vetor Potencial Magnético em termos das funções de aproximação,

$$A = \sum_{i=1}^n N_i A_i \quad (5.6)$$

resulta

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n N_i \frac{dA_i}{dt} \quad (5.7)$$

Desta forma, o vetor das ações será escrito como

$$\bar{P}_j^e = \int_{\Delta^e} J N_j d\Delta - \int_{\Delta^e} \sigma N_i N_j \frac{dA_i}{dt} d\Delta \quad (5.8)$$

Substituindo este resultado em (5.3), obteremos o seguinte sistema de equações para o elemento:

$$\tilde{K}^e \tilde{A}^e + \tilde{C}^e \dot{\tilde{A}}^e = \tilde{\bar{P}}^e \quad (5.9)$$

onde

$$C_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \sigma N_i N_j d\Delta \quad (5.10)$$

$$\bar{P}_j^e = \int_{\Delta^e} J N_j d\Delta \quad (5.11)$$

A seguir, montam-se as matrizes globais, seguindo-se o mesmo algoritmo descrito no Capítulo III, resultando, então, o sistema:

$$\tilde{K} \tilde{A} + \tilde{C} \dot{\tilde{A}} = \tilde{\bar{P}} \quad (5.12)$$

A solução deste sistema é obtida, com a introdução da seguinte aproximação:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (5.13)$$

Aplicando-se a técnica conhecida como a de integração passo a passo, o sistema (5.12) é escrito como se segue:

$$\underline{K} \underline{A}(t + \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} [\underline{A}(t + \Delta t) - \underline{A}(t)] = \underline{P}(t + \Delta t) \quad (5.14)$$

ou ainda,

$$\underline{K} \underline{A}(t + \Delta t) = \underline{P}^* \quad (5.15)$$

onde

$$\underline{K} = \underline{K} + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \quad (5.16)$$

$$\underline{P}^* = \underline{P}(t + \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \underline{C} \underline{A}(t)$$

A integração no tempo é iniciada impondo-se as condições naturais de contorno e adotando-se, no primeiro passo, $A(t_0) = A_0 = 0$.

Como a densidade de corrente impressa em função do tempo é conhecida, o vetor $\underline{P}(t + \Delta t)$ é determinado, o que permite, assim, obtermos $A(t + \Delta t)$ em função de $A(t)$.

É importante observar que, a cada passo de integração, as condições de contorno devem ser impostas, pois as mesmas são invariantes no tempo.

Uma vez determinado o Vetor Potencial Magnético em um dado instante, determina-se o campo magnético através da expressão (4.66), permitindo-se, assim, analisar a difusão do Campo Magnético com o decorrer do tempo.

3. CORRENTE INDUZIDA

Uma grandeza importante, que é possível ser de terminada na análise do Problema Transitório, é a corrente Induzida nos meios condutores constituintes do domínio.

Lembrando-se que o campo elétrico induzido é da do por:

$$E_{\text{ind}} = - \frac{dA}{dt} \quad (5.17)$$

podemos escrever:

$$E_{\text{ind}} = - \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (5.18)$$

e sendo:

$$J_{\text{ind}} = \sigma E_{\text{ind}} = -\sigma \frac{dA}{dt} \quad (5.19)$$

resulta que:

$$J_{\text{ind}} = -\sigma \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (5.20)$$

4. REGIME PERMANENTE SENOIDAL - FORMULAÇÃO PELO MEF

O estudo do comportamento dos campos eletromagnéticos senoidalmente variáveis no tempo, em Regime Permanente, é extremamente facilitado com a utilização da técnica fasorial, quando os meios consituintes do domínio forem lineares.

Quando tal não acontece, a solução do problema é prejudicada com a utilização da técnica a ser apresentada.

Durante a fase de pesquisa, foi publicado um trabalho muito interessante no periódico IEEE Transactions on Magnetics*, onde os autores sugerem um método para linearização da relutividade em meios ferromagnéticos, sob Regime Permanente Senoidal.

Neste artigo, os autores determinam uma relutividade eficaz (v_{ef}) definida como o valor eficaz de v sobre meio período, como se segue:

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} v^2(t) dt} \quad (5.21)$$

Utilizando-se a notação complexa, podemos escrever:

$$A(t) = A_m \cos(\omega t + \theta) = \text{Re} \{ \hat{A} e^{j\omega t} \} \quad ** \quad (5.22)$$

onde

$$\hat{A} = A_m e^{j\theta}$$

de modo que, reescrevendo-se (5.12) e utilizando-se esta notação, obtemos:

$$\underline{K} \cdot \hat{A} + j\omega \underline{C} \cdot \hat{A} = \hat{\underline{P}} \quad (5.23)$$

* Du Terrail Y., Sabonnadiere J.C., Masse P., Coulomb J.L. Non Linear Complex Finite Elements Analysis of Electromagnetic Field in Steady-State AC Devices - IEEE Trans. on Magnetics, 20(4): 549-52, July 1984

** Re[.]: parte real de [.]

ou ainda:

$$\hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{A}} = \hat{\underline{P}} \quad (5.24)$$

onde

$$\hat{\underline{S}} = \underline{K} + j\omega \underline{C} \quad (5.25)$$

A solução deste sistema é tal, que satisfaz a condição:

$$\hat{\underline{A}} = \hat{\underline{S}}^{-1} \cdot \hat{\underline{P}} \quad (5.26)$$

É importante observar o grau de dificuldade que resultará no cálculo do campo magnético elevado ao quadrado (B^2) devido ao fato de que, agora, o Vetor Potencial Magnético (A) está expresso sob a forma fasorial, implicando em tempos de processamento exageradamente elevados quando o domínio é discretizado em elementos de quatro lados:

Sugere-se, portanto, que na determinação da distribuição espacial de campo magnético em Regime Permanente Senoidal, a discretização do domínio seja realizada com elementos triangulares de primeira ordem, razão pela qual apresentamos as expressões necessárias para o cálculo dos elementos das diversas matrizes envolvidas na solução do problema.

O termo genérico da matriz dos elementos (\underline{K}^e) é obtido a partir de (3.8), fazendo-se:

$$k_x = k_y = v_{ef}$$

o que resulta em:

$$K_{ij}^e = \frac{v_{ef}}{4\Delta} [b_i b_j + c_i c_j] \quad (5.27)$$

O termo genérico da matriz dos elementos (C^e) é calculado com o auxílio da fórmula de integração (3.7):

$$C_{ij}^e = \begin{cases} \frac{\sigma\Delta}{12} & \text{para } i \neq j \\ \frac{\sigma\Delta}{6} & \text{para } i = j \end{cases} \quad (5.28)$$

Finalmente, o elemento genérico do vetor das ações para o elemento (\bar{P}^e) é obtida a partir da expressão (3.10), isto é:

$$Q = \hat{J}$$

obtendo-se:

$$\hat{P}_j^e = \frac{\hat{J}\Delta}{3} \quad (5.29)$$

Após a solução do sistema de equações, teremos a densidade de corrente induzida no elemento, através da expressão:

$$\hat{J}_{ind} = -j\omega\sigma\hat{A} \quad (5.30)$$

que é suficiente para a obtenção das perdas Joule, bem como a resistência efetiva devido ao efeito pelicular.

5. REGIME RAPIDAMENTE VARIÁVEL

No estudo dos modelos de propagação, a equação (5.1) não é suficiente, pois, nesses casos, a corrente de deslocamento é fundamental.

Muito embora a utilização de modelos de propagação na eletrotécnica tenha uso restrito, apresentaremos uma formulação pelo Método dos Elementos Finitos desse modelo, com o objetivo de abrir espaço para pesquisas futuras no estudo de transitórios em Linhas de Transmissão, que é um dos problemas mais importantes da área de sistemas de Potência.

Para problemas bidimensionais, a equação característica que o descreve é do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + Q(x, y, t) - \alpha \frac{d\theta}{dt} - \beta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \text{ em } \Delta \quad (5.31)$$

Com as condições já citadas, as derivadas de , em relação ao tempo, são funções de valor prescrito, ou seja, são funções apenas das coordenadas espaciais. Nesse instante, a equação (5.31) é escrita como se segue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \bar{Q}(x, y) = 0 \quad (5.32)$$

onde

$$\bar{Q} = Q - \alpha \frac{d\theta}{dt} - \beta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (5.33)$$

no instante considerado.

Aplicando-se a Técnica de Galerkin, descrita no Capítulo II, obteremos as matrizes dos elementos e, finalmente, as matrizes globais que são da forma:

$$\underline{K} \underline{\theta} = \underline{P} \quad (5.34)$$

com a diferença que os termos do vetor das ações \underline{P} é de acordo com (2.17), dados por:

$$P_j^e = \int_{S_2^e} \bar{q} N_j dS + \int_{\Delta^e} \bar{Q} N_j d\Delta \quad (5.35)$$

Substituindo-se \bar{Q} por (5.33), a expressão anterior se escreve:

$$P_j^e = \int_{S_2^e} \bar{q} N_j dS + \int_{\Delta^e} N_j \left(Q - \alpha \frac{d\theta}{dt} - \beta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) d\Delta \quad (5.36)$$

Lembrando ainda que:

$$\theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (5.37)$$

a expressão (5.36) é reescrita como se segue:

$$P_j^e = \int_{S_2^e} \bar{q} N_j dS + \int_{\Delta^e} Q N_j d\Delta - \int_{\Delta^e} \alpha N_i N_j d\Delta \frac{d\theta_i}{dt} - \int_{\Delta^e} \beta N_i N_j d\Delta \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} \quad (5.38)$$

Assim, introduzindo-se (5.38) em (5.34) obtemos a seguinte equação matricial:

$$\underline{K} \underline{\theta} + \underline{C} \dot{\underline{\theta}} + \underline{M} \ddot{\underline{\theta}} = \underline{\bar{P}}(t) \quad (5.39)$$

onde os termos de \underline{K} e de $\underline{\bar{P}}$ são dados respectivamente por (2.26) e (2.17), e os termos de \underline{C} e \underline{M} por:

$$C_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \alpha N_i N_j d\Delta \quad (5.40)$$

$$M_{ij}^e = \int_{\Delta^e} \beta N_i N_j d\Delta \quad (5.41)$$

A equação (5.39) tem como casos particulares os modelos de difusão ($\beta = 0$) e os modelos de propagação ($\alpha = 0$).

Finalmente, para a resolução do sistema de equações (5.39), é necessário fornecer as condições iniciais de θ e $\dot{\theta}$ em todo o domínio.

No Eletromagnetismo, este procedimento é aplicado na solução da Equação de Onda, que na Análise Bidimensional é escrita como se segue:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \mu J_t - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 A}{dt^2} = 0 \text{ em } \Delta \quad (5.42)$$

Em meios condutores, J_t pode ser descrito da seguinte forma:

$$J_t = J + J_{ind} \quad (5.43)$$

onde, J é a densidade de corrente impressa e J_{ind} é a densidade de corrente induzida expressa por (5.19).

Assim, substituindo-se (5.43) em (5.42) obtemos:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \mu J - \sigma \frac{dA}{dt} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 A}{dt^2} = 0 \text{ em } \Delta \quad (5.44)$$

ou ainda,

$$v \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + J - v\sigma \frac{dA}{dt} - \frac{v}{v^2} \frac{d^2 A}{dt^2} = 0 \text{ em } \Delta \quad (5.45)$$

que identificada com (5.31) fornece:

$$k_x = k_y = v$$

$$Q = J$$

$$\alpha = v\sigma$$

$$\beta = v/v^2$$

6. INTEGRAÇÃO NO TEMPO

A integração de (5.39) é realizada usando-se um procedimento do tipo "passo a passo", cujos métodos mais utilizados são:

- i - Método da Diferença Central
- ii - Método de Houbolt
- iii - Método de Wilson e
- iv - Método de Newmark
- v - Método de Crank-Nicholson
- vi - Método do Acoplamento

A escolha do Método de Integração adequado para um determinado problema é muito trabalhosa, na medida em que é necessário resolver o problema aplicando-se todos os métodos conhecidos e selecionando-se aquele que nos leva à solução mais precisa no menor tempo, o que muitas vezes não é possível devido a uma série de razões.

Nesse caso, a escolha do método adequado deve recair naquele em que a precisão seja a desejada e a estabilidade garantida. Assim, o método em que tais condições se apresenta é o de Newmark, razão pela qual passaremos a descrevê-lo.

Nesse método, são usadas as seguintes considerações*:

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t} = \dot{\theta}^t + [(1 - \delta)\ddot{\theta}^t + \delta\ddot{\theta}^{t+\Delta t}]\Delta t \quad (5.46)$$

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t + \dot{\theta}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{\theta}^t + \alpha\ddot{\theta}^{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \quad (5.47)$$

* Newmark, N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics - Jour. of Mech. Div. Proc. ASCE, 85(3): 67-94, July 1959.

onde α e δ são parâmetros determinados em função da precisão e da estabilidade da solução.

Segundo Newmark, os valores: $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$ são os que conduzem a uma estabilidade incondicional, e nesse caso, ele é denominado "regra trapezoidal", em vista dos resultados apresentados na figura V.1.

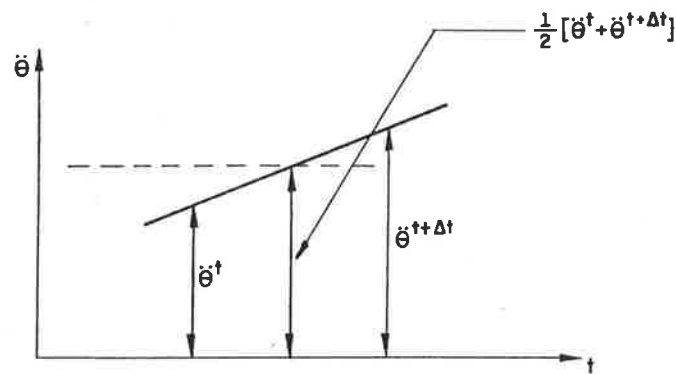


Figura V.1 - Regra trapezoidal - Newmark

No instante $t + \Delta t$, a equação de equilíbrio (5.39) pode ser considerada como:

$$\underline{K} \underline{\theta}^{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{\theta}}^{t+\Delta t} + \underline{M} \ddot{\underline{\theta}}^{t+\Delta t} = \underline{P}^{t+\Delta t} \quad (5.48)$$

Isolando-se $\ddot{\theta}^{t+\Delta t}$ de (5.47) e substituindo-o em (5.46) obteremos as equações para $\dot{\theta}^{t+\Delta t}$ em função de $\theta^{t+\Delta t}$. Essas duas relações são substituídas em (5.48), obtendo-se, assim, a solução para $\theta^{t+\Delta t}$, que, uma vez obtida, torna possível determinar $\dot{\theta}^{t+\Delta t}$ e $\ddot{\theta}^{t+\Delta t}$ das relações anteriores.

O algoritmo completo do Método de Newmark, proposto por Bathe*, é apresentado a seguir:

* Bathe, K.J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis: Englewoods Cliffs. N.J., Prentice Hall, 1982, 735 p.

A. Cálculos Iniciais

- 1.) Obter as matrizes \underline{K} , \underline{C} e \underline{M}
- 2.) Atribuir as condições iniciais θ^0 , $\dot{\theta}^0$ e $\ddot{\theta}^0$
- 3.) Escolher o intervalo de tempo Δt , o os parâmetros α e δ , e calcular as seguintes constantes de integração:

$$\delta > 0,5; \quad \alpha > 0,25(0,5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta);$$

$$a_7 = \delta \Delta t$$

- 4.) Obter a matriz: $\hat{\underline{K}} = \underline{K} + a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}$
- 5.) Triangularizar $\hat{\underline{K}}$: $\hat{\underline{K}} = \underline{LDL}^T$

B. Cálculos em cada Instante

- 1.) Determinar o vetor de ações efetivo em $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{p}}^{t+\Delta t} = & \underline{P}^{t+\Delta t} + \underline{M}(a_0 \theta^t + a_2 \dot{\theta}^t + a_3 \ddot{\theta}^t) + \\ & \underline{C}(a_1 \theta^t + a_4 \dot{\theta}^t + a_5 \ddot{\theta}^t) \end{aligned} \quad (5.49)$$

- 2.) Resolver em $t + \Delta t$ o sistema:

$$\underline{LDL}^T \theta^{t+\Delta t} = \hat{\underline{p}}^{t+\Delta t} \quad (5.50)$$

3.) Déterminez $\ddot{\theta}^{t+\Delta t}$ et $\dot{\theta}^{t+\Delta t}$ à partir de:

$$\ddot{\theta}^{t+\Delta t} = a_0(\theta^{t+\Delta t} - \theta^t) - a_2\dot{\theta}^t - a_3\ddot{\theta}^t \quad (5.51)$$

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t} = \dot{\theta}^t + a_6\ddot{\theta}^t + a_7\ddot{\theta}^{t+\Delta t} \quad (5.52)$$

CAPÍTULO VI - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

1. INTRODUÇÃO

A fase mais difícil na implementação do Método dos Elementos Finitos consiste na elaboração dos programas computacionais, visto que a mesma deve ser dotada de técnicas especiais de otimização, devido à grande quantidade de operações realizadas.

As numerosas informações a serem armazenadas exigem uma boa gestão da memória, que é obtida explorando-se as particularidades da matriz dos coeficientes e escolhendo-se um algoritmo de resolução do sistema adaptado a essas particularidades.

Existem vários métodos de armazenamento da Matriz dos coeficientes que exploram adequadamente as propriedades da mesma, sendo que o método escolhido neste trabalho é o mais simples, pois só é armazenada a semi-banda da matriz dos coeficientes por ser simétrica. O método de resolução do Sistema é o da Eliminação de Gauss, já adaptado a este tipo de armazenamento.

Uma preocupação que se apresentou durante a fase de pesquisas foi a de avaliar o grau de confiabilidade da solução obtida, o que nos levou a procurar um Método de refinamento da solução. A aplicação do critério de refinamento da solução exposto no item 3 permitiu assegurar a consistência dos resultados obtidos, pois foram efetuadas exaustivas comparações em sistemas com solução analítica conhecida.

Verificou-se também a estabilidade do método de

resolução, efetuando-se pequenas variações nos dados de entrada, particularmente nas densidades de correntes impressas, e observando-se pequenas variações na solução.

2. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Após a introdução das Condições de Contorno, o próximo passo a seguir, no programa computacional, consiste na resolução do sistema de equações resultante, que, na sua forma geral, é expresso por:

$$\underline{K} \underline{\theta} = \underline{P} \quad (6.1)$$

cuja solução é tal que satisfaz a equação:

$$\underline{\theta} = \underline{K}^{-1} \underline{P} \quad (6.2)$$

São duas as classes de métodos de solução do Sistema de equações (6.1); os métodos diretos e os métodos iterativos.

Os métodos diretos são os que resolvem (6.1) a partir de um número de passos e operações pré-determinados, dentre os quais podendo-se citar:

- i - Eliminação de Gauss
- ii - Fatoração de Choleski
- iii - Fatoração de Gauss-Choleski

Por outro lado, nos métodos iterativos o mesmo não acontece, sendo os mais representativos:

- i - Método de Gauss-Seidel
- ii - Método de Newton-Raphson
- iii - Método da Sobre-Relaxação

Apesar de cada um dos métodos acima citados terem suas vantagens, aqueles mais utilizados na solução de problemas de campo pelo Método dos Elementos Finitos são os Métodos diretos, e, dentre eles, o da Eliminação de Gauss é o que parece ser mais adequado, pois permite a escolha de procedimentos que levam a resultados precisos, aliado à simplicidade de sua formulação, razão pela qual foi o método escolhido neste trabalho.

2.1 - O Método da Eliminação de Gauss

Este método consiste em reduzir a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular superior, onde as incógnitas são determinadas por retro substituição. O que será feito agora é formalizar matematicamente a solução, através do uso apropriado de operações com matrizes, e em seguida implementá-lo em computador.

A redução da matriz \tilde{K} a uma matriz triangular superior proposta por Bathe*, pode ser escrita como se segue:

$$L_{n-1}^{-1} \dots L_2^{-1} L_1^{-1} \tilde{K} = \tilde{S} \quad (6.3)$$

onde n é a ordem da matriz \tilde{K} e \tilde{S} é a matriz triangularizada.

A matriz L_i^{-1} é tal que:

* ob. cit.

O aspecto da matriz \underline{L} é o seguinte:

$$\underline{L} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} \quad (6.9)$$

cujos elementos são determinados por (6.5).

Sendo a matriz \underline{S} uma matriz triangular superior, a mesma pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underline{S} = \underline{D} \underline{\bar{S}} \quad (6.10)$$

onde \underline{D} é a matriz diagonal, cujos elementos são dados por:

$$d_{ii} = S_{ii} \quad (6.11)$$

Como a matriz \underline{K} é simétrica e a decomposição é única, demonstra-se que:

$$\underline{\bar{S}} = \underline{L}^T \quad (6.12)$$

Substituindo-se esses resultados em (6.7), resulta:

$$\underline{K} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad (6.13)$$

Escrevendo,

$$\underline{L} \underline{V} = \underline{P} \quad (6.14)$$

onde \underline{v} é um vetor-coluna a ser determinado; a equação (6.1) pode ser expressa como se segue:

$$\underline{D} \underline{L}^T \underline{e} = \underline{v} \quad (6.15)$$

sendo que:

$$\underline{v} = \underline{L}_{n-1}^{-1} \dots \underline{L}_2^{-1} \underline{L}_1^{-1} \underline{p} \quad (6.16)$$

O vetor-solução \underline{e} é agora obtido por retro substituição a partir de:

$$\underline{L}^T \underline{e} = \underline{D}^{-1} \underline{v} \quad (6.17)$$

2.2 - Implementação Computacional

A fatoração de \underline{K} no produto $\underline{L} \underline{D} \underline{L}^T$ é realizada coluna por coluna. Inicia-se o processo impondo-se $d_{11} = K_{11}$ e seguindo o seguinte procedimento para a determinação dos elementos l_{ij} e d_{jj} da j -ésima coluna, $j = 2, \dots, n$.

$$g_{mj,j} = K_{mj,j} \quad (6.18)$$

$$g_{i,j} = K_{ij} - \sum_{r=m_m}^{i-1} l_{ri} g_{rj}$$

com $i = m_{j+1}, \dots, j-1$

e m_j é o número da linha do primeiro elemento não nulo na coluna j e $m_k = \max\{m_i, m_j\}$.

Nota-se que os valores m_i ($i = 1, \dots, n$), mostram o perfil útil da matriz dos coeficientes e o valor ($i = m_i$) é a altura da coluna i .

Uma vez determinados os elementos g 's a partir de (6.18), obteremos os elementos de \underline{L}^T e \underline{D} como se segue:

$$l_{ij} = \frac{g_{ij}}{d_{ii}} \quad i = m_j, \dots, j-1 \quad (6.19)$$

$$d_{jj} = K_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} g_{rj} \quad (6.20)$$

Observe-se que, com este procedimento, os limites indicados nas somatórias não envolve multiplicação por elementos nulos fora do perfil útil da matriz dos coeficientes, explorando, então, uma propriedade que resulta em uma redução ao mínimo o tempo de processamento.

Devido às características desse processo, uma boa gestão da memória é obtida quando o elemento l_{ij} calculado em (6.19) for imediatamente armazenado na posição do elemento g_{ij} anteriormente calculado, e o elemento d_{jj} ocupar a mesma posição do elemento K_{jj} e finalmente l_{rj} é armazenado na posição anteriormente ocupada por K_{rj} , $j > r$.

Simultaneamente ao processo de fatoração da matriz \underline{K} , desenvolve-se o processo de redução do vetor \underline{P} ao vetor \underline{V} . O procedimento é semelhante àquele utilizado na determinação dos elementos da matriz \underline{D} , isto é, impor $V_1 = P_1$ e calcular para $i = 2, \dots, n$,

$$V_i = P_i - \sum_{r=m_i}^{i-1} l_{ri} V_r \quad (6.21)$$

Cabe lembrar que, uma vez calculados, os elementos V_i 's, os mesmos devem ser armazenados nas posições reservadas para os elementos P_i 's correspondentes.

A retro substituição é realizada de modo a obter sucessivamente $\theta_n, \theta_{n-1}, \dots, \theta_1$, determinando-se de início o vetor \bar{V}^n , tal que:

$$\bar{V}^n = D^{-1} y \quad (6.22)$$

Este procedimento resulta em:

$$\theta_n = \bar{V}_n^n$$

Em seguida, para $i = n, \dots, 2$ determinamos:

$$\bar{V}_r^{i-1} = \bar{V}_r^i - l_{ri} \theta_i; \quad r = m_i, \dots, i-1 \quad (6.23)$$

$$\theta_{i-1} = \bar{V}_{i-1}^{i-1}$$

Completando, é conveniente salientar que o elemento \bar{V}_k^j para qualquer vetor de j , é armazenado na posição reservada para V_k , isto é, a posição que originalmente era ocupada por P_k .

3. REFINAMENTO DA SOLUÇÃO

Trabalhos recentes sobre técnicas computacionais aplicadas ao Método dos Elementos Finitos tem mostrado preocupações no que se refere à confiabilidade dos resultados obtidos.

Muito embora os métodos de resolução do sistema de equações sejam adequados, os erros de truncamento introduzido no processo computacional podem gerar propagações que levam a soluções indevidas.

Este fato se apresenta na medida em que é acrescido o número de elementos e, como consequência, o número de nós do domínio, como ocorre em sistemas de ordens elevadas; cabe colocar também, que esta evidência não se apresenta da mesma forma nos diferentes tipos de computadores, um trabalho é interessante sobre esse tema é o de Salvagni*.

Suponhamos então que na resolução do sistema de equações $\underline{K} \underline{\theta} = \underline{P}$, seja encontrada a solução $\underline{\theta}^{(1)}$, que é uma solução aproximada do sistema, de modo que podemos escrever:

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}^{(1)} + \underline{\theta}_e \quad (6.24)$$

onde $\underline{\theta}_e$ é o erro numérico cometido.

Podemos então escrever:

$$\underline{K}(\underline{\theta}^{(1)} + \underline{\theta}_e) = \underline{P}$$

ou ainda

$$\underline{K} \underline{\theta}_e = \underline{P} - \underline{K} \underline{\theta}^{(1)} \quad (6.26)$$

$$\underline{K} \underline{\theta}_e = \underline{P}' \quad (6.27)$$

Observando-se (6.27), nota-se que o vetor erro $\underline{\theta}_e$ é obtido usando-se o mesmo sistema de resolução utilizado para a obtenção de $\underline{\theta}^{(1)}$, resultando:

$$\underline{\theta}^{(2)} = \underline{\theta}^{(1)} + \underline{\theta}_e \quad (6.28)$$

* Salvagni, R.B. Análise Estrutural: O Método dos Elementos Finitos é Confiável? Revista Politécnica. (187):893-8, Abr. 1985.

onde $\bar{\theta}^{(2)}$ é uma solução refinada que substituída em (6.26) permite-nos realizar um processo iterativo de refinamento da solução.

O processo iterativo é terminado quando o elemento θ_{ei} atingir valor tal que:

$$\max \theta_{ei} \leq \epsilon \quad (6.29)$$

No trabalho ora desenvolvido, o refinamento da solução em uma única iteração com precisão dupla, foi considerada satisfatória na medida em que a ordem da matriz obtida é modesta, permitindo, no entanto, expansões quando do acréscimo da mesma.

4. FLUXOGRAMA

A consistência do trabalho foi analisada através da implantação de dois programas no computador Burroughs B6900 do CCE-USP, sendo um deles desenvolvido para a análise de Campos Magnéticos em Regime Estacionário, e o outro desenvolvido para a análise de Campos Magnéticos Variáveis no Tempo em Regime Lente Variável.

Os programas foram testados exaustivamente em estruturas magnéticas de solução analítica conhecida, no intuito de constatar a validade dos mesmos.

Foram também desenvolvidos programas para Micro computador EBC e Apple, onde se verificou a impraticabilidade dos mesmos em problemas não lineares, devido ao excessivo tempo de processamento, proveniente da necessidade de se acessar arquivos frequentemente; no entanto, para sistemas lineares (μ constante), e com elementos triangulares, consegue-se resolver problemas interessantes, com saída gráfica adequando-se perfeitamente a aplicações didáticas.

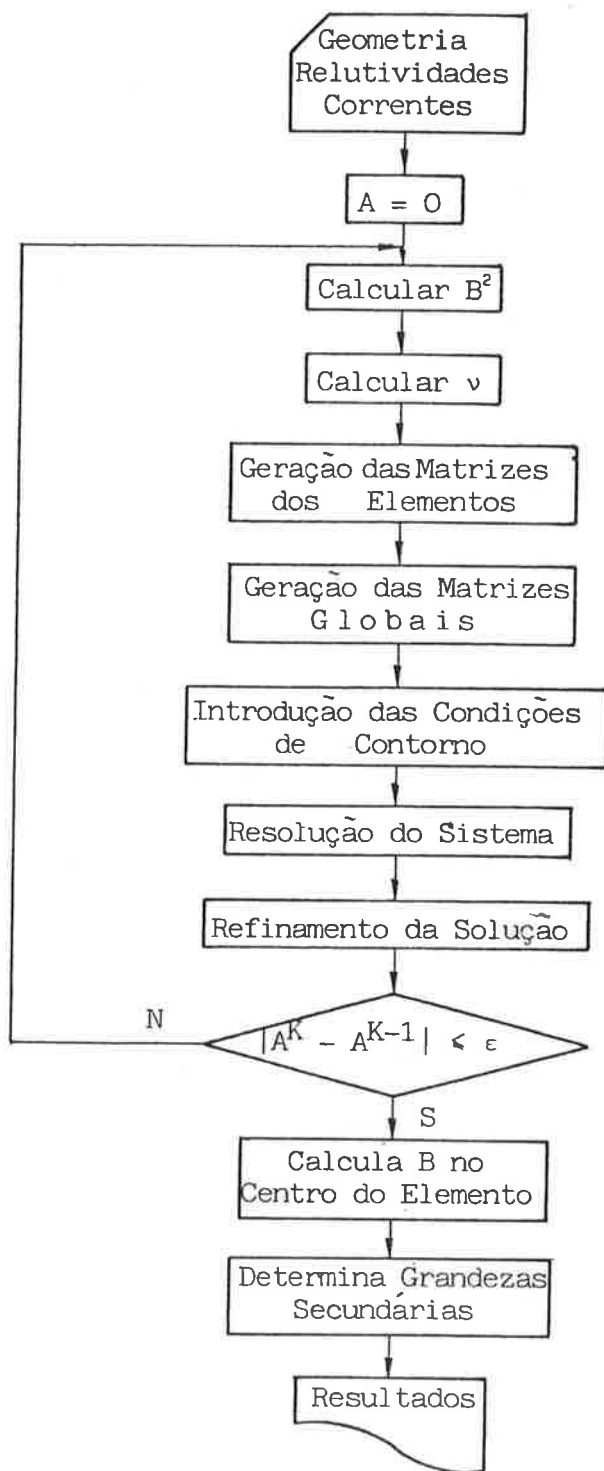


Figura VI.1 - Fluxograma para campos magnéticos estáticos

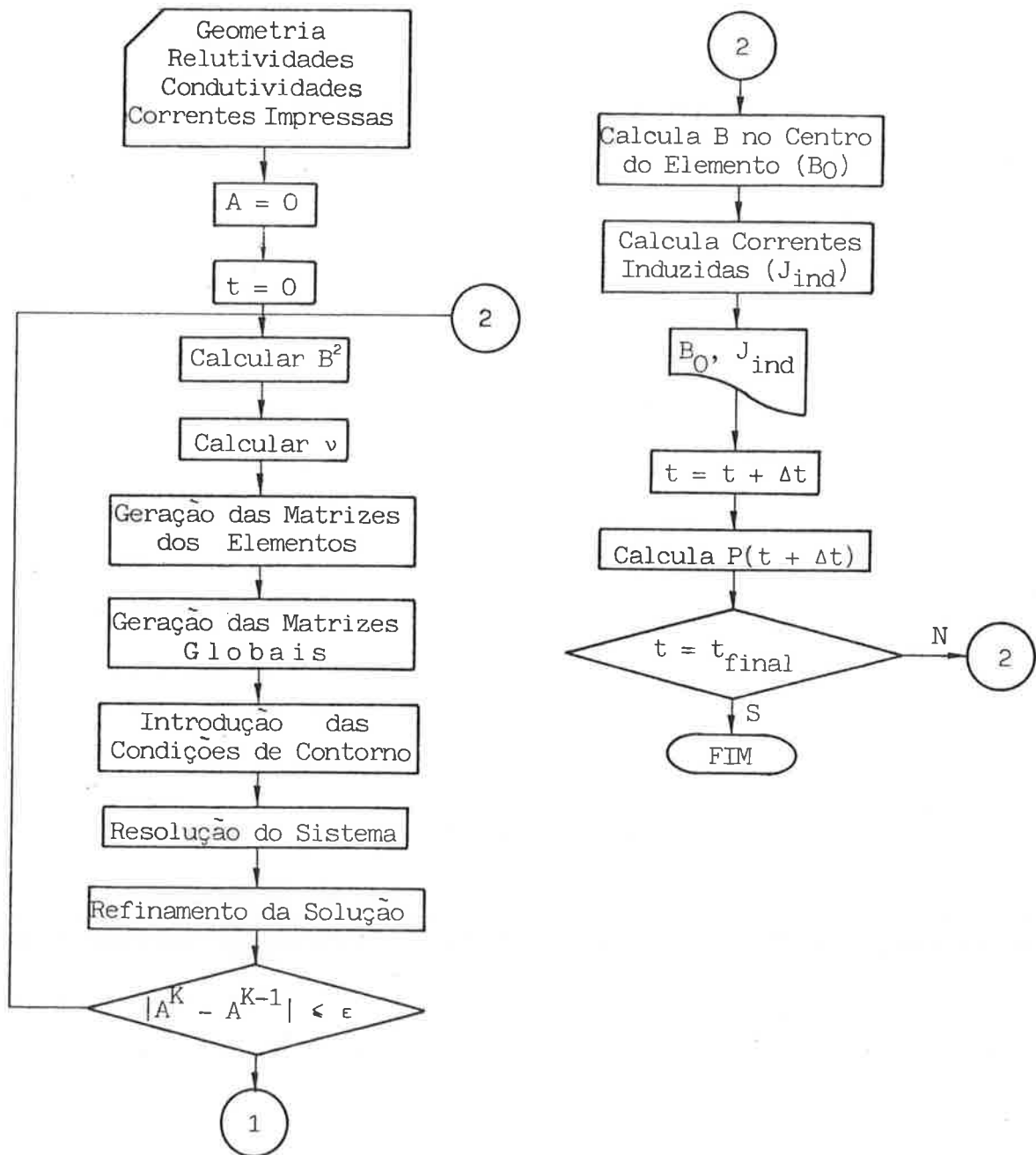


Figura VI.2 - Fluxograma para campos magnéticos variáveis no tempo
Regime lentamente variável

CAPÍTULO VII - ALGUMAS APLICAÇÕES EM TRANSFORMADORES

1. INTRODUÇÃO

O programa para a obtenção das distribuições de Campo Magnético em Regime Lentamente Variável, implantado no B-6900 do CCE-USP, foi utilizado para se obter as distribuições de campo magnético em um transformador, cujos resultados são a seguir apresentados.

2. REGIME LENTAMENTE VARIÁVEL

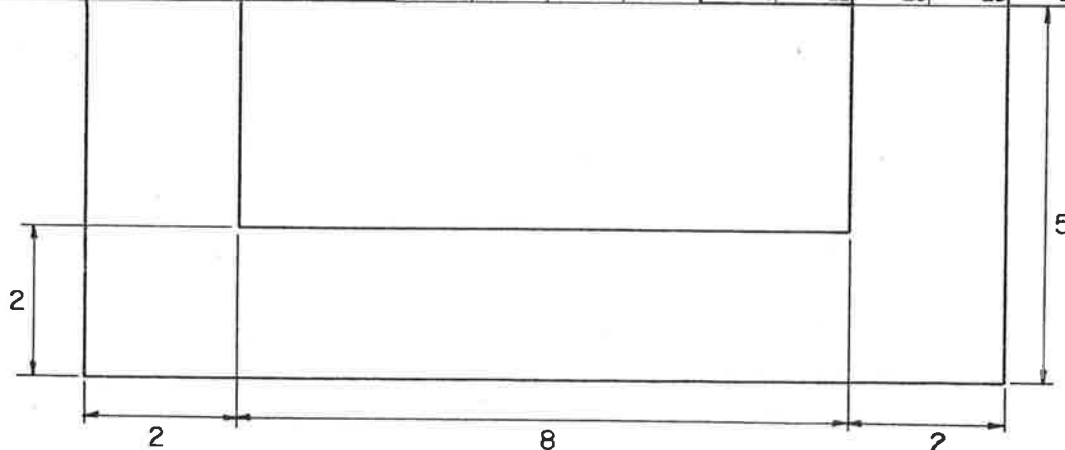
O programa para a obtenção da distribuição do campo magnético em Regime Lentamente Variável foi aplicado a um transformador, com o intuito de se conseguir "fotografias" das distribuições do campo magnético em diversos instantes, quando à bobina do primário é aplicado um degrau de corrente impressa, com a bobina do secundário em curto-circuito.

O transformador em questão é o mostrado na Figura V.1, que, em vista da simetria existente, foi discretizado apenas na metade do mesmo.

Para os elementos 12, 13, 14, 19, 20 e 21 foi impressa uma densidade de corrente $J(t) = 2 \times 10^6 H(t)$ (A/m²), ao passo que nos elementos 40, 41, 42, 47, 48 e 49 a densidade de corrente impressa foi $J(t) = -2 \times 10^6 H(t)$ (A/m²), com $\sigma = 100$ S/m.

Os resultados a seguir apresentados mostram a evolução da distribuição de campo magnético no domínio, em intervalos

1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89	97	5	13	21	29	37	45
2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90	98	6	14	22	30	38	46
3	11	19	27	35	43	51	59	67	75	83	91	99	7	15	23	31	39	47
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	8	16	24	32	40	48
5	13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93	1	9	17	25	33	41	49
6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94	2	10	18	26	34	42	50
7	15	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	3	11	19	27	35	43	51
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	4	12	20	28	36	44	52



Obs.: Dimensões em cm

Figura V.1 - Transformador em estudo

los de tempo de 2 ms, com t variando de 0 a 16 ms.

Para uma melhor avaliação dos resultados, são mostrados nas figuras V.2 e V.3 o comportamento do campo magnético em função do tempo no centro do elemento 28 e a densidade de corrente induzida no nó 135 (secundário) em função do tempo.

Observe-se que o valor do Campo Magnético em Regime Permanente é da ordem de $2,05 \text{ Wb/m}^2$, que comparado ao valor

obtido do circuito magnético, que é de $1,9 \text{ Wb/m}^2$, confirma a consistência do método.

A densidade de corrente induzida tende a zero em Regime Permanente, o que é facilmente observado. Na figura V.3 estão indicadas as curvas da densidade de corrente induzida em dois nós (134 e 135), revelando o efeito de adensamento não-uniforme de corrente induzida, característica do efeito pelicular.

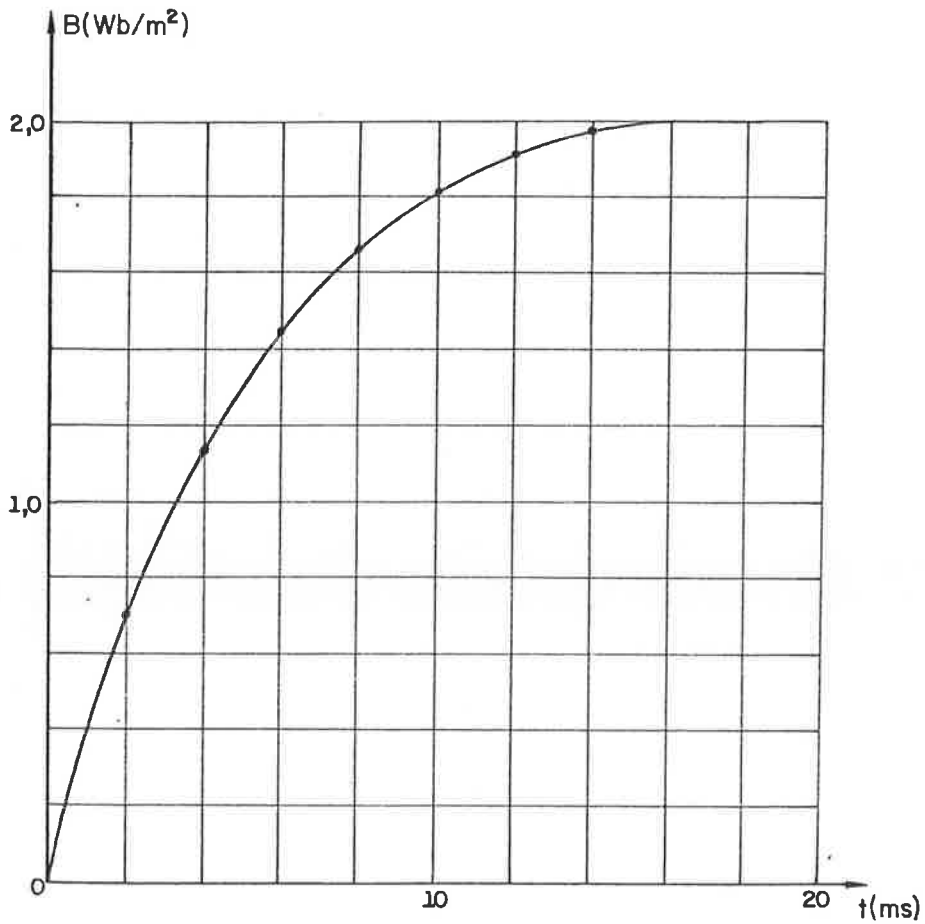


Figura V.2 - B no centro do elemento 28

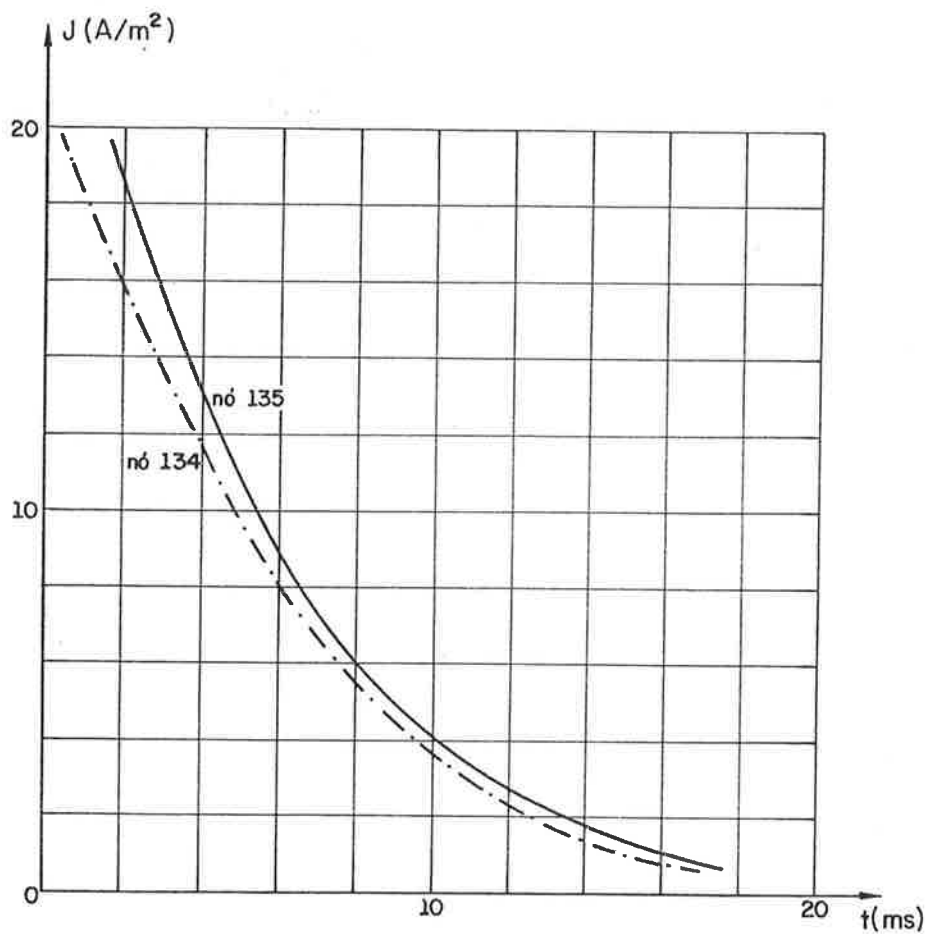


Figura V.3 - Corrente induzida

ELEM	MAT	B(2 MS)	B(4 MS)	B(6 MS)	R(8 MS)	B(10 MS)	B(12 MS)	B(14 MS)	B(16 MS)
1	AR	.259E-03	.236E-03	.221E-03	.210E-03	.203E-03	.198E-03	.195E-03	.193E-03
2	AR	.771E-03	.712E-03	.672E-03	.644E-03	.625E-03	.613E-03	.604E-03	.598E-03
3	AR	.149E-02	.140E-02	.134E-02	.129E-02	.127E-02	.125E-02	.123E-02	.122E-02
4	AR	.241E-02	.223E-02	.219E-02	.213E-02	.209E-02	.206E-02	.204E-02	.203E-02
5	AR	.349E-02	.331E-02	.320E-02	.312E-02	.306E-02	.303E-02	.300E-02	.298E-02
6	AR	.417E-02	.399E-02	.377E-02	.375E-02	.372E-02	.368E-02	.366E-02	.364E-02
7	AR	.406E-02	.389E-02	.377E-02	.369E-02	.364E-02	.360E-02	.357E-02	.356E-02
8	AR	.445E-03	.409E-03	.369E-03	.347E-03	.333E-03	.323E-03	.316E-03	.311E-03
9	AR	.955E-03	.789E-03	.744E-03	.713E-03	.692E-03	.678E-03	.668E-03	.662E-03
10	AR	.115E-02	.107E-02	.101E-02	.979E-03	.953E-03	.936E-03	.925E-03	.917E-03
11	AR	.125E-02	.116E-02	.110E-02	.106E-02	.103E-02	.101E-02	.100E-02	.100E-02
12	COBRE	.201E-02	.190E-02	.183E-02	.178E-02	.175E-02	.172E-02	.171E-02	.170E-02
13	COBRE	.250E-02	.235E-02	.224E-02	.217E-02	.212E-02	.209E-02	.206E-02	.205E-02
14	COBRE	.301E-02	.284E-02	.271E-02	.263E-02	.257E-02	.253E-02	.251E-02	.249E-02
15	AR	.449E-03	.366E-03	.343E-03	.315E-03	.295E-03	.282E-03	.274E-03	.268E-03
16	AR	.952E-03	.792E-03	.751E-03	.725E-03	.707E-03	.695E-03	.686E-03	.682E-03
17	AR	.151E-02	.142E-02	.135E-02	.131E-02	.128E-02	.126E-02	.125E-02	.124E-02
18	AR	.199E-02	.188E-02	.181E-02	.176E-02	.173E-02	.171E-02	.169E-02	.168E-02
19	COBRE	.184E-02	.175E-02	.169E-02	.165E-02	.163E-02	.162E-02	.161E-02	.160E-02
20	COBRE	.995E-03	.877E-03	.805E-03	.763E-03	.738E-03	.723E-03	.714E-03	.708E-03
21	COBRE	.766E-03	.575E-03	.445E-03	.359E-03	.302E-03	.264E-03	.240E-03	.233E-03
22	AR	.302E-03	.223E-03	.176E-03	.151E-03	.140E-03	.135E-03	.134E-03	.133E-03
23	AR	.530E-03	.632E-03	.638E-03	.544E-03	.649E-03	.654E-03	.657E-03	.659E-03
24	ASILI	.227E+00	.384E+00	.459E+00	.561E+00	.610E+00	.643E+00	.666E+00	.681E+00
25	ASILI	.411E+00	.687E+00	.875E+00	.100E+01	.109E+01	.115E+01	.119E+01	.122E+01
26	ASILI	.573E+00	.955E+00	.122E+01	.140E+01	.152E+01	.150E+01	.166E+01	.170E+01
27	ASILI	.588E+00	.115E+01	.147E+01	.168E+01	.183E+01	.193E+01	.199E+01	.204E+01
28	ASILI	.589E+00	.115E+01	.147E+01	.158E+01	.163E+01	.193E+01	.199E+01	.204E+01
29	AR	.155E-03	.173E-03	.224E-03	.266E-03	.295E-03	.316E-03	.333E-03	.343E-03
30	AR	.302E-03	.413E-03	.452E-03	.547E-03	.534E-03	.610E-03	.626E-03	.640E-03
31	ASILI	.408E+00	.635E+00	.873E+00	.100E+01	.109E+01	.115E+01	.119E+01	.122E+01
32	ASILI	.587E+00	.115E+01	.147E+01	.165E+01	.183E+01	.193E+01	.205E+01	.205E+01
33	ASILI	.582E+00	.137E+01	.175E+01	.201E+01	.213E+01	.239E+01	.238E+01	.243E+01
34	ASILI	.593E+00	.115E+01	.147E+01	.168E+01	.183E+01	.193E+01	.199E+01	.204E+01
35	ASILI	.689E+00	.115E+01	.147E+01	.168E+01	.183E+01	.193E+01	.199E+01	.204E+01
36	AR	.144E-03	.268E-03	.337E-03	.454E-03	.500E-03	.531E-03	.552E-03	.566E-03
37	AR	.241E-03	.400E-03	.512E-03	.589E-03	.641E-03	.677E-03	.701E-03	.718E-03
38	ASILI	.569E+00	.955E+00	.122E+01	.140E+01	.152E+01	.160E+01	.166E+01	.169E+01
39	ASILI	.613E+00	.137E+01	.175E+01	.200E+01	.213E+01	.230E+01	.236E+01	.243E+01
40	COBRE	.515E-03	.739E-03	.950E-03	.111E-02	.122E-02	.129E-02	.134E-02	.138E-02

ELEM	MAT	B(2 MS)	B(4 MS)	B(6 MS)	B(8 MS)	B(10 MS)	B(12 MS)	B(14 MS)	B(16 MS)
41	COBRE	.517E-03	.537E-03	.591E-03	.543E-03	.682E-03	.712E-03	.733E-03	.747E-03
42	COBRE	.449E-03	.343E-03	.279E-03	.245E-03	.228E-03	.220E-03	.216E-03	.215E-03
43	AR	.221E-03	.395E-03	.513E-03	.544E-03	.648E-03	.686E-03	.711E-03	.728E-03
44	AR	.267E-03	.445E-03	.567E-03	.550E-03	.706E-03	.744E-03	.771E-03	.768E-03
45	ASILI	.583E+00	.115E+01	.146E+01	.163E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
46	ASILI	.584E+00	.115E+01	.145E+01	.168E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
47	COBRE	.189E-02	.193E-02	.196E-02	.198E-02	.200E-02	.201E-02	.202E-02	.203E-02
48	COBRE	.193E-02	.199E-02	.203E-02	.206E-02	.208E-02	.209E-02	.210E-02	.211E-02
49	COBRE	.197E-02	.204E-02	.208E-02	.211E-02	.213E-02	.214E-02	.215E-02	.216E-02
50	AR	.252E-03	.448E-03	.575E-03	.651E-03	.719E-03	.759E-03	.766E-03	.805E-03
51	AR	.291E-03	.494E-03	.632E-03	.725E-03	.789E-03	.833E-03	.862E-03	.862E-03
52	ASILI	.602E+00	.115E+01	.146E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
53	ASILI	.602E+00	.115E+01	.146E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
54	AR	.266E-02	.289E-02	.287E-02	.295E-02	.300E-02	.303E-02	.305E-02	.306E-02
55	AR	.265E-02	.276E-02	.284E-02	.289E-02	.292E-02	.295E-02	.297E-02	.298E-02
56	AR	.256E-02	.278E-02	.268E-02	.291E-02	.294E-02	.297E-02	.298E-02	.299E-02
57	AR	.231E-03	.477E-03	.610E-03	.701E-03	.752E-03	.804E-03	.833E-03	.852E-03
58	AR	.292E-03	.490E-03	.625E-03	.717E-03	.790E-03	.823E-03	.851E-03	.871E-03
59	ASILI	.581E+00	.114E+01	.146E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
60	ASILI	.581E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
61	AR	.255E-02	.260E-02	.264E-02	.257E-02	.269E-02	.270E-02	.271E-02	.272E-02
62	AR	.256E-02	.262E-02	.265E-02	.268E-02	.269E-02	.270E-02	.271E-02	.272E-02
63	AR	.255E-02	.259E-02	.262E-02	.263E-02	.265E-02	.265E-02	.266E-02	.266E-02
64	AR	.285E-03	.481E-03	.614E-03	.705E-03	.766E-03	.808E-03	.837E-03	.856E-03
65	AR	.290E-03	.489E-03	.624E-03	.716E-03	.779E-03	.821E-03	.850E-03	.870E-03
66	ASILI	.590E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
67	ASILI	.590E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
68	AR	.246E-02	.248E-02	.249E-02	.250E-02	.250E-02	.251E-02	.251E-02	.251E-02
69	AR	.245E-02	.243E-02	.241E-02	.240E-02	.239E-02	.239E-02	.239E-02	.239E-02
70	AR	.245E-02	.243E-02	.240E-02	.239E-02	.238E-02	.237E-02	.237E-02	.236E-02
71	AR	.272E-03	.458E-03	.584E-03	.671E-03	.729E-03	.769E-03	.796E-03	.815E-03
72	AR	.297E-03	.509E-03	.638E-03	.732E-03	.796E-03	.839E-03	.869E-03	.889E-03
73	ASILI	.679E+00	.114E+01	.146E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
74	ASILI	.679E+00	.114E+01	.146E+01	.167E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.203E+01
75	AR	.236E-02	.239E-02	.225E-02	.224E-02	.222E-02	.221E-02	.221E-02	.221E-02
76	AR	.236E-02	.223E-02	.225E-02	.224E-02	.222E-02	.221E-02	.221E-02	.221E-02
77	AR	.234E-02	.224E-02	.222E-02	.219E-02	.216E-02	.215E-02	.213E-02	.213E-02
78	AR	.254E-03	.423E-03	.546E-03	.627E-03	.691E-03	.718E-03	.744E-03	.761E-03
79	AR	.252E-03	.441E-03	.563E-03	.646E-03	.703E-03	.741E-03	.767E-03	.785E-03
80	ASILI	.673E+00	.114E+01	.146E+01	.167E+01	.182E+01	.191E+01	.199E+01	.203E+01

ELEM	MAT	BC (2 MS)	BC (4 MS)	BC (6 MS)	BC (8 MS)	BC (10 MS)	BC (12 MS)	BC (14 MS)	BC (16 MS)
81	ASILI	.677E+00	.114E+01	.146E+01	.167E+01	.132E+01	.191E+01	.198E+01	.203E+01
82	COBRE	.169E-02	.192E-02	.195E-02	.197E-02	.199E-02	.200E-02	.201E-02	.202E-02
83	COBRE	.184E-02	.184E-02	.184E-02	.184E-02	.184E-02	.185E-02	.185E-02	.185E-02
84	COBRE	.179E-02	.173E-02	.170E-02	.167E-02	.165E-02	.164E-02	.163E-02	.163E-02
85	AR	.211E-03	.355E-03	.453E-03	.520E-03	.566E-03	.597E-03	.618E-03	.632E-03
86	AR	.247E-03	.416E-03	.530E-03	.608E-03	.661E-03	.698E-03	.722E-03	.739E-03
87	ASILI	.564E+00	.950E+00	.121E+01	.139E+01	.151E+01	.159E+01	.165E+01	.169E+01
88	ASILI	.809E+00	.136E+01	.174E+01	.195E+01	.217E+01	.229E+01	.237E+01	.242E+01
89	COBRE	.107E-02	.142E-02	.167E-02	.194E-02	.196E-02	.203E-02	.209E-02	.213E-02
90	COBRE	.830E-03	.100E-02	.112E-02	.121E-02	.126E-02	.130E-02	.133E-02	.135E-02
91	COBRE	.805E-03	.932E-03	.102E-02	.108E-02	.112E-02	.114E-02	.116E-02	.117E-02
92	AR	.169E-03	.284E-03	.362E-03	.416E-03	.452E-03	.477E-03	.494E-03	.505E-03
93	AR	.134E-03	.310E-03	.395E-03	.454E-03	.494E-03	.521E-03	.539E-03	.552E-03
94	ASILI	.405E+00	.681E+00	.870E+00	.998E+00	.109E+01	.114E+01	.118E+01	.121E+01
95	ASILI	.680E+00	.114E+01	.146E+01	.168E+01	.182E+01	.192E+01	.199E+01	.204E+01
96	ASILI	.909E+00	.136E+01	.174E+01	.197E+01	.217E+01	.229E+01	.237E+01	.242E+01
97	ASILI	.677E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.181E+01	.191E+01	.198E+01	.203E+01
98	ASILI	.677E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.182E+01	.191E+01	.198E+01	.203E+01
99	AR	.129E-03	.216E-03	.276E-03	.317E-03	.345E-03	.353E-03	.376E-03	.385E-03
100	AR	.110E-03	.185E-03	.236E-03	.271E-03	.294E-03	.311E-03	.321E-03	.329E-03
101	ASILI	.227E+00	.382E+00	.487E+00	.559E+00	.608E+00	.641E+00	.664E+00	.679E+00
102	ASILI	.495E+00	.651E+00	.869E+00	.993E+00	.108E+01	.114E+01	.118E+01	.121E+01
103	ASILI	.564E+00	.947E+00	.121E+01	.135E+01	.151E+01	.159E+01	.165E+01	.169E+01
104	ASILI	.677E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.181E+01	.191E+01	.198E+01	.203E+01
105	ASILI	.677E+00	.114E+01	.145E+01	.167E+01	.181E+01	.191E+01	.198E+01	.203E+01
106	AR	.862E-04	.145E-03	.185E-03	.212E-03	.231E-03	.244E-03	.252E-03	.258E-03
107	AR	.101E-03	.170E-03	.217E-03	.249E-03	.271E-03	.286E-03	.296E-03	.302E-03
108	AR	.141E-03	.238E-03	.304E-03	.348E-03	.372E-03	.399E-03	.413E-03	.423E-03
109	AR	.208E-03	.351E-03	.448E-03	.514E-03	.559E-03	.589E-03	.610E-03	.624E-03
110	COBRE	.250E-03	.421E-03	.537E-03	.677E-03	.707E-03	.732E-03	.759E-03	.775E-03
111	COBRE	.259E-03	.435E-03	.556E-03	.632E-03	.694E-03	.732E-03	.759E-03	.775E-03
112	COBRE	.234E-03	.478E-03	.610E-03	.700E-03	.751E-03	.803E-03	.831E-03	.850E-03
113	AR	.568E-04	.956E-04	.122E-03	.140E-03	.152E-03	.151E-03	.166E-03	.170E-03
114	AR	.302E-04	.135E-03	.172E-03	.193E-03	.215E-03	.227E-03	.235E-03	.240E-03
115	AR	.121E-03	.203E-03	.262E-03	.308E-03	.324E-03	.342E-03	.354E-03	.362E-03
116	AR	.160E-03	.270E-03	.345E-03	.396E-03	.430E-03	.454E-03	.470E-03	.480E-03
117	COBRE	.193E-03	.335E-03	.427E-03	.490E-03	.533E-03	.552E-03	.562E-03	.555E-03
118	COBRE	.234E-03	.374E-03	.503E-03	.577E-03	.627E-03	.651E-03	.685E-03	.700E-03
119	COBRE	.244E-03	.410E-03	.523E-03	.601E-03	.653E-03	.689E-03	.713E-03	.729E-03
120	AR	.267E-04	.449E-04	.573E-04	.657E-04	.715E-04	.754E-04	.780E-04	.758E-04

```
*****  
* ELEM * MAT * B( 2 MS) * B( 4 MS) * B( 8 MS) * B(10 MS) * B(12 MS) * B(14 MS) * A(16 MS) *  
*****  
* 121 * AR * .623E-04 * .105E-03 * .134E-03 * .154E-03 * .157E-03 * .176E-03 * .182E-03 * .187E-03 *  
* 122 * AR * .102E-03 * .172E-03 * .220E-03 * .252E-03 * .274E-03 * .269E-03 * .299E-03 * .299E-03 * .306E-03 *  
* 123 * AR * .145E-03 * .244E-03 * .311E-03 * .357E-03 * .389E-03 * .409E-03 * .424E-03 * .424E-03 * .434E-03 *  
* 124 * AR * .194E-03 * .309E-03 * .395E-03 * .453E-03 * .493E-03 * .520E-03 * .538E-03 * .538E-03 * .550E-03 *  
* 125 * AR * .211E-03 * .356E-03 * .454E-03 * .521E-03 * .567E-03 * .598E-03 * .619E-03 * .619E-03 * .633E-03 *  
* 126 * AR * .228E-03 * .305E-03 * .491E-03 * .563E-03 * .613E-03 * .646E-03 * .669E-03 * .669E-03 * .684E-03 *  
*****
```


3. CONCLUSÕES

O Método dos Elementos Finitos apresenta-se a alguns anos como um dos mais poderosos processos utilizados na resolução de problemas de Campos em geral. Suas aplicações são numerosas na Eletricidade, e dentro em pouco estará implantado em praticamente todas as empresas fabricantes de equipamentos eletromecânicos.

No trabalho ora desenvolvido, a atenção foi fixada apenas quanto à obtenção da distribuição de campo magnético, com o objetivo de determinar alguns parâmetros importantes na análise do desempenho elétrico do equipamento. No entanto podemos expandí-lo de modo a permitir a determinação dos esforços mecânicos, das perdas no ferro, das resistências efetivas etc.

Deve-se observar, contudo, a grande dificuldade para se confeccionar manualmente a malha o que exige, portanto, pesquisas no sentido de se elaborar sistemas que permitam uma geração automática de elementos. Outra dificuldade evidente é a análise dos resultados em vista da elevada quantidade de valores de saída, necessitando-se, assim, elaborar sistemas computacionais gráficos que apresentem os resultados mediante o traçado das linhas de campo, bem como uma possível coloração adequada de cada elemento graduada segundo a intensidade do campo magnético em seu interior. Evidentemente, tais trabalhos só poderão ser desenvolvidos com estações gráficas como aquelas existentes nos modernos sistemas CAD que, no momento, e não são disponíveis na Universidade.

APÊNDICE – FORMULAÇÃO DO MEF A PARTIR DA SEGUNDA EQUAÇÃO DE MAXWELL PARA ELEMENTOS TRIANGULARES

1. INTRODUÇÃO

Durante a fase de pesquisa deste trabalho, ocorreu-nos a preocupação de como apresentar o MEF a alunos de graduação, não só devido a sua grande importância atual, mas também para introduzir uma técnica numérica moderna na resolução de problemas de campos eletromagnéticos não lineares, visto que todas as formulações existentes na literatura pertinente exibem um complexo matemático baseado no Cálculo Variacional ou na Formulação Residual, a que o aluno de graduação não consegue acompanhar, por serem essas técnicas apresentadas apenas em alguns cursos de pós-graduação.

O trabalho apresentado neste Apêndice procura resolver esse problema, pois é mostrada uma formulação do MEF para elementos triangulares baseada na aplicação direta da 2ª Equação de Maxwell em Regime Estacionário, sendo, portanto, facilmente absorvida pelos alunos de graduação e serve, também, como um ponto de partida "suave" para quem se interessar por esta técnica moderna, atualmente implantada em todas as grandes empresas pelos modernos sistemas CAD/CAM.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A figura A.1 mostra um domínio genérico bidimensional discretizado em elementos triangulares.

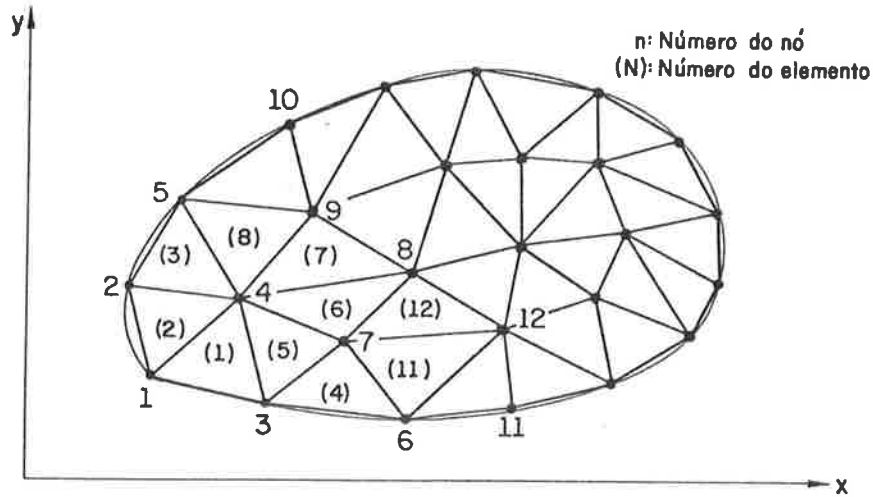


Figura A.1 - Domínio bidimensional, dividido em elementos triangulares

Nesta formulação, a 2ª Equação de Maxwell é aplicada a contornos poligonais, cujas arestas passam pelos meios dos lados do elemento e se cruzam no centro do mesmo, como mostra a figura A.2.

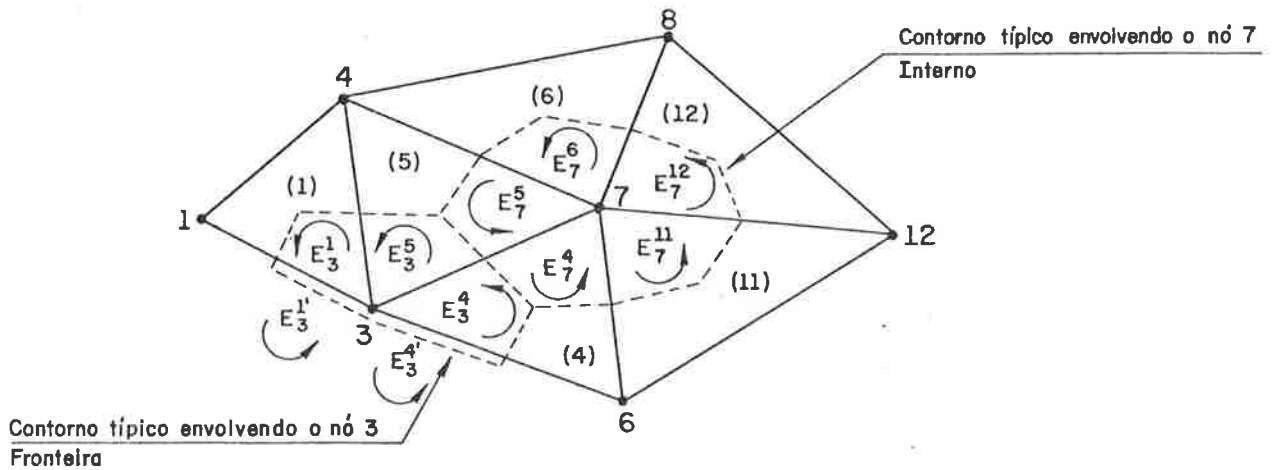


Figura A.2 - Contornos típicos envolvendo os nós

Na figura A.3, mostramos um elemento genérico, onde o ponto O é o seu centro, e os pontos P, S e G são os pontos médios dos lados.

Os segmentos $\overline{P\bar{O}}$ e \overline{OS} são partes do contorno que envolve o nó i , $\overline{P\bar{O}}$ e \overline{OG} são partes do contorno que envolve o nó j e os segmentos $\overline{S\bar{O}}$ e \overline{OG} são partes do contorno que envolve o nó k .

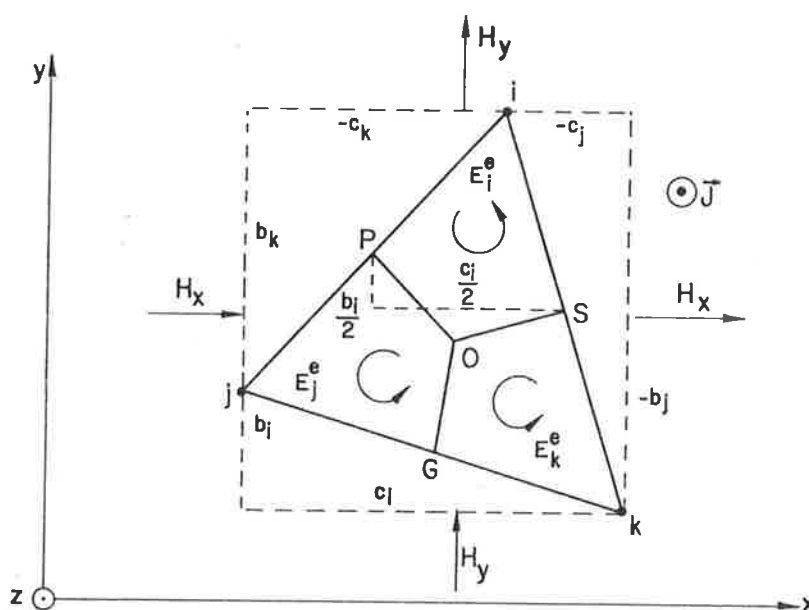


Figura A.3 - Partes do contorno internas ao elemento

Nessa figura o termo E_i^e representará a integral de linha do vetor intensidade magnética (\vec{H}) nos segmentos $\overline{P\bar{O}}$ e \overline{OS} , ou seja:

$$E_i^e = \int_{\overline{POS}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (\text{A.1})$$

da mesma forma são definidos os termos E_j^e e E_k^e .

Deste modo, para os contornos mostrados na figura A.2, podemos escrever:

$$E_7^5 + E_7^4 + E_7^{11} + E_7^{12} + E_7^6 = \oint_{C_7} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (\text{A.2})$$

para o contorno envolvendo o nó 7 (C_7), e

$$E_3^1 + E_3^4 + E_3^5 + E_3^{1'} + E_3^{4'} = \oint_{C_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (A.3)$$

para o contorno envolvendo o nó 3 (C_3).

3. DISTRIBUIÇÃO DO VETOR POTENCIAL MAGNÉTICO NO INTERIOR DO ELEMENTO

Os vértices dos elementos são identificados por i , j e k , partindo de um vértice qualquer e seguindo o sentido anti-horário, como mostra a figura A.3.

Sejam A_i , A_j e A_k os valores das componentes na direção z do Vetor Potencial Magnético nos vértices i , j e k respectivamente. Como a variação de A no domínio está bem comportada, no interior do elemento, podemos representá-lo por uma função polinomial do tipo:

$$A(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (A.4)$$

As constantes α_1 , α_2 e α_3 são determinadas a partir de (A.4) pela substituição dos Potenciais Magnéticos e Coordenadas Nodais, como se segue:

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ A_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ A_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{aligned} \quad (A.5)$$

A solução do sistema (A.5) nos fornece:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i A_i + a_j A_j + a_k A_k) \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k) \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k)
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_i &= x_j y_k - x_k y_j & a_j &= x_k y_i - x_i y_k & a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\
 b_i &= y_j - y_k & b_j &= y_k - y_i & b_k &= y_i - y_j \\
 c_i &= x_k - x_j & c_j &= x_i - x_k & c_k &= x_j - x_i
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

e o determinante:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \tag{A.8}$$

é a área do elemento.

Substituindo-se (A.6) em (A.4), obtemos a expressão da distribuição do Vetor Potencial Magnético dentro do elemento:

$$A(x, y) = N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k \tag{A.8}$$

onde as funções N_i , N_j e N_k são as funções de forma do elemento já citadas no Capítulo II.

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \quad (\text{A.9})$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y)$$

As figuras A.4a e A.4b apresentam uma interpretação geométrica para esta aproximação.

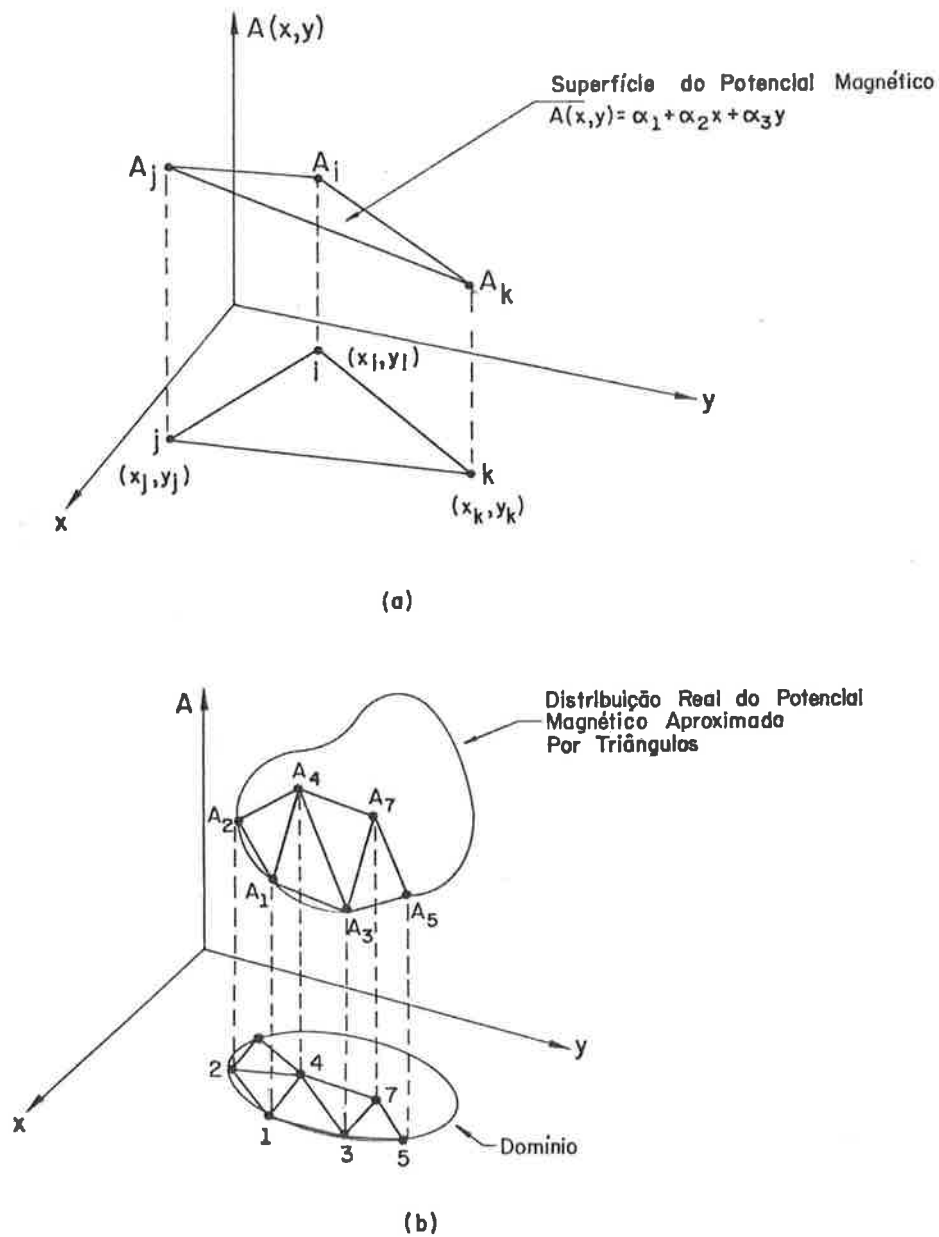


Figura A.4 - Interpretação geométrica

4. CAMPO MAGNÉTICO NO INTERIOR DO ELEMENTO

Sabemos que:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (\text{A.10})$$

Sendo $A = A(x, y) \vec{u}_z$, resulta que:

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_y \quad (\text{A.11})$$

Temos então:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} [c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k] \\ B_y &= \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} [b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Observa-se, portanto, que este tipo de aproximação implica em se ter B constante no interior do elemento. Assim sendo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} H_x &= \nu B_x = \frac{\nu}{2\Delta} [c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k] \\ H_y &= \nu B_y = \frac{\nu}{2\Delta} [b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

5. CIRCUITAÇÃO PARCIAL NO INTERIOR DO ELEMENTO

Para um contorno genérico envolvendo um nó, vamos calcular a contribuição à circuitação devida a um elemento.

Sendo E_i^e a parcela da circuitação em torno do nó i , podemos escrever:

$$E_i^e = H_x(x_s - x_p) + H_y(y_s - y_p)$$

Substituindo-se H_x e H_y por seus valores, resulta:

$$E_i^e = \frac{v}{2\Delta} [c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k] \frac{(x_k - x_j)}{2} +$$

$$\frac{v}{2\Delta} [b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k] \frac{(y_j - y_k)}{2}$$

ou, ainda:

$$E_i^e = \frac{v}{4\Delta} [(c_i c_i + b_i b_i) A_i + (c_i c_j + b_i b_j) A_j + (c_i c_k + b_i b_k) A_k] \quad (A.14)$$

Analogamente obtemos E_j^e , que corresponde à parcela da circuitação em torno do nó j , como se segue:

$$E_j^e = H_x(x_p - x_g) + H_y(y_p - y_g)$$

Substituindo-se H_x e H_y por seus valores, temos:

$$E_j^e = \frac{v}{2\Delta} [c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k] \frac{(x_i - x_k)}{2} +$$

$$\frac{v}{2\Delta} [b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k] \frac{(x_k - y_i)}{2}$$

ou ainda,

$$E_j^e = \frac{v}{4\Delta} [(c_j c_i + b_j b_i) A_i + (c_j c_j + b_j b_j) A_j + (c_j c_k + b_j b_k) A_k] \quad (\text{A.15})$$

Para a parcela de circuitação em torno do nó k , obtemos do mesmo modo:

$$E_k^e = \frac{v}{4\Delta} [(c_k c_i + b_k b_i) A_i + (c_k c_j + b_k b_j) A_j + (c_k c_k + b_k b_k) A_k] \quad (\text{A.16})$$

Matricialmente, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{v}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i + b_i b_i & c_i c_j + b_i b_j & c_i c_k + b_i b_k \\ & c_j c_j + b_j b_j & c_j c_k + b_j b_k \\ \text{simétrica} & & c_k c_k + b_k b_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

ou, ainda,

$$[E^e] = [S^e][A^e] \quad (\text{A.18})$$

6. CORRENTE CONCATENADA

Em cada elemento temos contribuições para a corrente concatenada de três contornos diferentes. Admitindo-se uma densidade de corrente uniforme no interior do mesmo, essas contribuições são tais que:

$$I_i^e = I_j^e = I_k^e = J^e \frac{\Delta}{3}$$

ou, matricialmente:

$$[I^e] = \begin{bmatrix} I_i^e \\ I_j^e \\ I_k^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^e \frac{\Delta}{3} \\ J^e \frac{\Delta}{3} \\ J^e \frac{\Delta}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

7. GERAÇÃO DAS MATRIZES GLOBAIS

Uma vez elaborada as matrizes de todos os elementos, conforme expostas em (A.17) e (A.19), as mesmas são expandidas em sua forma global, seguindo-se o algoritmo já citado no Capítulo III.

A obtenção das Matrizes Globais de todo o domínio é consequência direta da 2ª Equação de Maxwell, pois aplicando-a a um contorno envolvendo o nó n obtemos:

$$\sum_{e=1}^{NE} E_n^e = \sum_{e=1}^{NE} I_n^e \quad (\text{A.20})$$

Deste modo, para todos os nós do domínio podemos escrever:

$$\left| \begin{array}{c} \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \\ \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \\ \vdots \\ \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \\ \vdots \\ \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \end{array} \right| \begin{array}{c} E_1^e \\ \\ \\ E_n^e \\ \\ \\ E_{NE}^e \end{array} = \left| \begin{array}{c} \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \\ \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \\ \vdots \\ \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \\ \vdots \\ \text{NE} \\ \Sigma \\ e=1 \end{array} \right| \begin{array}{c} I_1^e \\ \\ \\ I_n^e \\ \\ \\ I_{NE}^e \end{array} \tag{A.21}$$

resultando as Matrizes Globais já mencionadas.

A introdução das condições de contorno e a reso
lução do sistema dispensa maiores comentários.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDERSEN, O.W. Finite element solution of complex potential electric fields. IEEE Trans. on PAS. 96(4): 1156 - 61, Jul./Aug. 1977.
- [2] ASHTIANI, C.N. & LOWTHER, D.A. Simulation on the steady state reactances of a large water - wheel generator by finite elements. IEEE Trans. on PAS. 103(7): 1781 - 7, Jul. 1984.
- [3] BARTON, R.K. et al. Finite element post processing direct current machines. IEEE Trans. on MAG. 20(5): 1798-800, Sep. 1984.
- [4] BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewoods Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1982. 735p.
- [5] BATHE, K.J. & WILSON, E.L. Numerical methods in finite element analysis. Englewoods Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1976. 527p.
- [6] CAMPBELL, P. et al. Finite element field analysis in 2-D and 3-D on a personal computer. IEEE Trans. on MAG. 20(5): 1903-5, Sep. 1984.
- [7] CHARI, M.V.K. Finite element solution of the Eddy-current problem in magnetic structures. IEEE Trans. on PAS. 93(1):62-71, Jan./Feb. 1974.
- [8] CHARI, M.V.K. et al. Load characteristics of synchronous generators by finite element method. IEEE Trans. on PAS. 100(1):1-13, Jan. 1981.

- [9] CHARI, M.V.K. et al. Three component, two dimensional analysis of Eddy current diffusion problem. IEEE Trans. on MAG. 20(5):1989-91, Sep. 1984.
- [10] CHIAMPI, M. & COZZA, T. Il metodo degli elementi finiti nella risoluzione di campi magnetostatici piani. L'Energia Elettrica. 54(9):398-405, 1977.
- [11] COULOMB, J.L. & MEUNIER, G. Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation. IEEE Trans. on MAG. 20(5):1894-6, Sep. 1984.
- [12] DAVEY, K.R. & KING, E.I. A three dimensional scalar potential field solution and its application to the turbine generator end region. IEEE Trans. on PAS. 100(5):2302-10, May 1981.
- [13] DEMERDASH, N.A. & NEHL, T.W. An evaluation of the methods of finite elements and finite differences in the solution of non linear electromagnetic fields in electrical machines. IEEE Trans. on PAS. 98(1): 74-87, Jan./Feb. 1979.
- [14] DEMERDASH, N.A. & MOHAMED, O.A. Solution of Eddy current problems using three dimensional finite element complex magnetic vector potential. IEEE Trans. on PAS. 101(11): 4222-9, Nov. 1982.
- [15] DEMERDASH, N.A. et al. Analysis of the magnetic field in rotating armature electronically commutated DC machines by finite elements. IEEE Trans. on PAS. 103(7):1829-36, Jul. 1984.

- [16] DESAI, C.S. Elementary finite element method. Englewoods Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1979. 433p.
- [17] DOUGHERTY, J.W. & MINNICH, S.H. Operational inductances of turbine generators; test data versus finite element calculation. IEEE Trans. on PAS. 102(10):3393-404, Oct. 1983.
- [18] DU TERRAIL, Y. et al Nonlinear complex finite elements analysis of electromagnetic field in steady-state AC devices. IEEE Trans. on MAG. 20(4):549-52, Jul. 1984.
- [19] FINLAYSON, B.A. The method of weighted residuals variational principles. London, Academic Press, 1972, 412p.
- [20] FOGGIA, A.; SABONNADIÈRE, J.C.; SILVESTER, P. Finite element of saturated travelling magnetic field problems. IEEE Trans. on PAS. 94(3):866-7, May/June. 1975.
- [21] HANNALLA, A.Y. & MACDONALD, D.C. Numerical analysis of transient field problems in electrical machines. Proc. IEEE. 123(9):893-8, Sep. 1976.
- [22] HANALLA, A.Y., MACDONALD, D.C. A nodal method for the numerical solution on of transient field problem in electrical machines. IEEE Trans. on MAG. 11(5): 1544-6, Sep. 1975.
- [23] HANNALLA, A.Y. & MACDONALD, D.C. Steady state short circuit characteristics of turbine generations from design data using field calculations. IEEE Trans. on PAS. 99(5):1805-9, Sep./Oct. 1980.

- [24] HAYHURST, D.R. & BROWN, P.R. Teaching of finite element method for use in component analysis and design. Int. J. Mech. Eng. Educ. 11(4):263-84, Oct. 1983.
- [25] HOBURY, J.F. & DAVIS, J.L. A student oriented finite element programa of electrostatic potencial problems. IEEE Trans. on Educ. 26(4):138-42, Nov. 1983.
- [26] HUGHES, T.J.R., et al. Finite element methods for nonlinear elastodinamics which conserve energy. Trans. on the ASME. 45:366-70, Jun. 1978.
- [27] HUGHES, T.J.R. & RIO, W.K. Implicit-explicit finite element in transient analysis: implementation and numerical examples. J. Applied Mechanics. 45:375-8, Jun. 1978.
- [28] HILDEBRAND, F.B. Methods of applied mathematics. 2nd. ed. Englewoods Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1965. 362p.
- [29] JANISZEWSKI, J.M. Método dos elementos finitos aplicados a problemas de campos eletromagnéticos. São Paulo, 1978. Tese de doutoramento. Escola Politécnica da USP. 207p.
- [30] JORDÃO, R.G. Máquinas síncronas. Rio de Janeiro, LTC. São Paulo, EDUSP, 1980. 215p.
- [31] KANTOROVICH, L.V. & KRYLOV, V.I. Approximate methods of higher analysis. New York, Interscience Publishers, 1964. 681p.
- [32] LUCAS, R. & TALUKDAR, S. Advances in finite element techniques for calculating cable resistances and inductances. IEEE Trans. on PAS. 97(3):875, May/Jun. 1978.

- [33] MASSÉ, P. Modelling of continuous media methodology and CAD of finite element process. IEEE Trans. on MAG. 20(5): 1885:90, Sep. 1984.
- [34] MINNICH, S.H.; TANDON, S.C. & ATKINSON, D.R. Comparison of two methods for modeling large signal alternating magnetic fields using finite elements. IEEE Trans. on PAS. 103(10):2953-9, Oct. 1984.
- [35] MOHAMED, O.A. et al. Validity by of finite element formulation and solution of three dimensional magnetostatic problems in electrical devices with applications to transformers and reactors. IEEE Trans. on PAS. 103(7): 1846-53, Jul. 1984.
- [36] NEWMARK, N.M. A method of computation for structural dynamics. J. Mech. Div. Proc. ASCE. 85(3): 67-94 Jul. 1959.
- [37] POLOUJADOFF, M. & EL KASHAB, H. A finite difference model of linear induction motors, taking into account the length of iron. IEEE Trans. on PAS. 101(8):2966-74, Aug. 1982.
- [38] RAJANATHAN, C.B., et al. Finite element analysis of the Xi-core levitator. IEE Proc.-A. 131(1):62-6, Jan. 1984.
- [39] RODGER, D. Finite element method for calculating power frequency 3-dimensional electromagnetic field distributions. Proc. IEE-A. 130(5):233-8, Jul. 1983.
- [40] SALON, S.J. & PENG, J.P. Three dimensional Eddy current using a four component finite element formulation. IEEE Trans. on MAG. 20(5):1992-4, Sep. 1984.

- [41] SALVAGNI, R.B. Análise estrutural: o método dos elementos finitos é confiável? Revista Politécnica (187): 893-8, Abr. 1985.
- [42] SILVESTER, P. & CHARI, M.V.K. Finite solution of saturable magnetic field problems. IEEE Trans. on PAS. 89(7):1642-50, Sep./Oct. 1970.
- [43] SILVESTER, P. & CHARI, M.V.K. Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements. IEEE Trans. on PAS. 90(2):454-64, Mar./Apr. 1971.
- [44] SILVESTER, P. & CHARI, M.V.K. Finite element analysis of magnetically saturated DC-machines. IEEE Trans. on PAS. 90(5):2362-72, Set./Oct. 1971.
- [45] SILVESTER, P.; CABAYAN, H.S.; BROWNE, B.T. Efficient techniques for finite element analysis of electric machines. IEEE Trans. on PAS. 92(4):1274-81, Jul./Aug.. 1973.
- [46] SILVESTER, P. & RAFINEJAD, P. Curvilinear finite elements for two dimensional saturable magnetic field. IEEE Trans. on PAS. 93(6):1861-70, Nov./Dec. 1974.
- [47] SILVESTER, P.P. & FERRARI, R.L. Finite element for electrical engineers. Cambridge, University Press, 1983. 207p.
- [48] TANDON, S.C. & CHARI, M.V.K. Transient solution of the diffusion equation by the finite element method. J.Appl. Phys. 52(3):2431-2, Mar. 1981.

- [49] TANDON, S.C.; ARMOR, A.F.; CHARI, M.V.K. Nonlinear transient finite element field computation for electrical machines and devices. IEEE Trans. on PAS. 102(5): 1089-96, May 1983.
- [50] WEISS, J. & STEPHENS, C.M. Finite elements for three dimensional magnetostatic fields and its application to turbine-generation end regions. IEEE Trans. on PAS. 100(4):1591-6, Apr. 1981.
- [51] WEISS, J. & CSENDES, Z.J. A one step finite element method for multiconductor skin effect problems. IEEE Trans. on PAS. 101(10):3796-803, Oct. 1982.
- [52] YAMADA, H. Solid salient pole synchronous motor calculation using finite element method. IEEE Trans. on PAS. 103(10):1355-62, Jun. 1984.
- [53] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3rd. ed. Swansea, U.K., McGraw-Hill, 1977. 787p.
- [54] ZIENKIEWICZ, O.C. & MORGAN, K. Finite element and approximation. Swansea, U.K., Jon Wiley, 1982. 328p.