

**RAFAEL ALVES DA COSTA**

**CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE ESPECTRAL DE  
SINAIS CAÓTICOS COM APLICAÇÕES EM  
COMUNICAÇÕES**

São Paulo  
2023

**RAFAEL ALVES DA COSTA**

**CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE ESPECTRAL DE  
SINAIS CAÓTICOS COM APLICAÇÕES EM  
COMUNICAÇÕES**

**Versão Original**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Doutor em Ciências.

São Paulo  
2023

**RAFAEL ALVES DA COSTA**

**CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE ESPECTRAL DE  
SINAIS CAÓTICOS COM APLICAÇÕES EM  
COMUNICAÇÕES**

**Versão Original**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração:

Sistemas Eletrônicos

Orientador:

Marcio Eisencraft

São Paulo  
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

#### Catálogo-na-publicação

Costa, Rafael Alves da  
Contribuições à análise espectral de sinais caóticos com aplicações em comunicações / R. A. Costa -- São Paulo, 2023.  
186 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.  
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1.CAOS (SISTEMAS DINÂMICOS) 2.PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS 3.TELECOMUNICAÇÕES I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por mais uma etapa concluída na minha vida.

Ao Prof. Dr. Marcio Eisencraft, meu orientador, pela sua colaboração, paciência e incentivo na elaboração deste trabalho.

Aos professores Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP) e Dr. Luiz H. A. Monteiro (USP) pelos valiosos comentários e sugestões no exame de qualificação.

Aos meus pais, Joaquim e Maria, agradeço por proporcionarem as condições necessárias para os meus estudos desde a educação infantil e por sempre me incentivarem.

Aos meus irmãos Lilian, Matheus e Joaquim Júnior e família pelo contínuo incentivo.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, por ter possibilitado a realização deste doutorado, assim como à Universidade Federal do ABC, por ter me proporcionado a formação de mestre.

Aos professores que, tanto em sala de aula quanto por meio de livros, tiveram uma influência significativa em minha trajetória ao longo dos anos.

Aos meus colegas que, direta ou indiretamente, colaboraram neste trabalho.

Ao povo brasileiro.

*“Deus quer, o homem sonha, a obra nasce.”*

-- Fernando Pessoa

*“There are times when I feel like I’m in a big forest and don’t know where I’m going. But then somehow I come to the top of a hill and can see everything more clearly. When that happens, it’s really exciting”*

-- Maryam Mirzakhani

*“Perhaps I could best describe my experience of doing mathematics in terms of entering a dark mansion. You go into the first room and it’s dark, completely dark. You stumble around, bumping into the furniture. Gradually, you learn where each piece of furniture is. And finally, after six months or so, you find the light switch and turn it on. Suddenly, it’s all illuminated and you can see exactly where you were. Then you enter the next dark room ...”*

-- Andrew John Wiles

# Resumo

Desde o início da década de 1990, diversos trabalhos foram publicados propondo a codificação de mensagens em sinais caóticos. Entretanto, os sistemas de comunicação baseados em caos ainda necessitam de mais estudos para que sua aplicação em sistemas comerciais viabilize-se. Nesse contexto, a caracterização espectral desses sinais passa a ser um problema fundamental. Como todo canal físico possui banda limitada, é relevante determinar e, preferencialmente, controlar a faixa de frequência ocupada pelos sinais caóticos envolvidos. Nessa tese, investigam-se as características da sequência de autocorrelação e da Densidade Espectral de Potência (DEP) de sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais lineares por partes com um número arbitrário de segmentos, generalizando-se resultados anteriores da literatura. Propõem-se também um método alternativo para obtenção da DEP explorando uma representação linear de sinais caóticos. A partir destes resultados, obteve-se fórmulas fechadas para DEP da modulação *Chaos Shift Keying* (CSK). Estes resultados analíticos foram validados por meio de simulações computacionais e de implementações em *hardware*, incluindo a experimentação em um canal de comunicação real. Do ponto de vista da Engenharia de Telecomunicações, os resultados obtidos são relevantes, pois possibilitam o surgimento de novas ideias de aplicações de sinais caóticos em sistemas de comunicação digital.

**Palavras-Chave** – sinais caóticos, mapas lineares por partes, densidade espectral de potência, representação linear, modulações digitais com sinais caóticos.

# Abstract

Since the early 1990s, several papers have been published proposing to encode messages in chaotic signals. However, chaos-based communication systems still require further studies to make their application in commercial systems feasible. In this context, the spectral characterization of these signals becomes a fundamental problem. Since each physical channel has a limited bandwidth, it is relevant to determine and preferably control the frequency range occupied by the chaotic signals involved. In this thesis, we investigate the characteristics of the autocorrelation sequence and the Power Spectral Density (PSD) of chaotic signals generated by piecewise linear one-dimensional maps with an arbitrary number of segments, generalizing previous results from the literature. An alternative method for obtaining the PSD using a linear representation of chaotic signals is also proposed. To analyze the nature of chaotic signals transmitted by communication systems, closed-form expressions are obtained for the PSD of Chaos Shift Keying (CSK) modulation, and the theoretical results are validated by computer simulations and hardware implementations, including experiments in a real communication channel. From the point of view of Telecommunications Engineering, the results obtained are relevant as they allow the emergence of new ideas for applications of chaotic signals in digital communication systems.

**Keywords** – chaotic signals, piecewise linear maps, power spectral density, linear representation of chaos, chaos-based digital modulations.



# Lista de figuras

2.1	Órbitas e histogramas do mapa tenda inclinada com $\alpha = 0.2$ , (a) $s(0) = 0.1$ e (b) $s(0) = -0.3$ . . . . .	10
2.2	Evolução da densidade para o mapa tenda inclinada com $\alpha = 0.1$ . . . . .	13
2.3	(a) Mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$ para $\alpha = 0.2$ e (b) trecho de uma órbita desse mapa, $s(n)$ , com $s(0) = -0.3$ . . . . .	14
2.4	A contra-imagem do intervalo $[-1, s]$ do mapa tenda inclinada é dada por $[-1, s_1] \cup [s_2, 1]$ . . . . .	15
2.5	Expoente de Lyapunov para o mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$ para $\alpha$ no intervalo $(-1, 1)$ . . . . .	16
3.1	(a) Trecho de $s(n) = \sin\left(\frac{\pi}{10}n\right)$ , (b) SAC e (c) DEP deste sinal. . . . .	21
3.2	(a) SAC e (b) DEP de uma função-amostra do processo ruído branco gaussiano e (c) SAC e (d) DEP de um processo ruído branco gaussiano contendo $10^4$ funções-amostras. . . . .	22
3.3	Exemplo de construção do mapa $f_I^k(\cdot)$ para $\alpha = 0.2$ . (a) $f_I(x)$ ; (b) $f_I^2(x)$ ; (c) $f_I^3(x)$ ; (d) $f_I^k(x)$ . . . . .	24
3.4	(a) Trecho do mapa $f_I^k(x)$ e (b) trecho do mapa após uma iteração $f_I^{k+1}(x)$ . . . . .	26
3.5	(a) SAC e (b) DEP para o mapa $f_I(\cdot)$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	27
4.1	(a) O mapa $f_L(\cdot)$ com $r = 6$ e (b) duas órbitas com $s(0) = 0.6$ (linha sólida) e $s(0) = 0.6 + 10^{-9}$ (linha tracejada). . . . .	30
4.2	A contra-imagem do intervalo $[-1, s]$ pelo mapa $f_L(\cdot)$ . . . . .	31
4.3	(a) Trecho genérico de $f^k(x)$ e (b) $f^{k+1}(x)$ . . . . .	34
4.4	DEP de $f_L(\cdot)$ para $r = 2$ e $\alpha \in (-1, 1)$ . . . . .	36
4.5	DEP de $f_L(\cdot)$ com $r = 3$ e $\alpha \in (0, 1)$ . . . . .	37
4.6	DEP de $f_L(\cdot)$ com $r = 4$ e $\alpha \in (0, 1)$ . . . . .	38

4.7	(a) Mapa $f_I(\cdot)$ e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais $s(0) = 0.2$ (linha sólida), $s(0) = 0.2 + 10^{-9}$ (linha tracejada) e o parâmetro $\alpha = 0.6$ . . . . .	40
4.8	(a) Mapa $f_F(\cdot)$ e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais $s(0) = 0.3$ (linha sólida), $s(0) = 0.3 + 10^{-9}$ (linha tracejada) e o parâmetro $\alpha = 0.6$ . . . . .	41
4.9	(a) SAC e (b) DEP para o mapa $f_F(\cdot)$ . . . . .	41
4.10	(a) Mapa $f_B(\cdot)$ e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais $s(0) = 0.3$ (linha sólida), $s(0) = 0.3 + 10^{-9}$ (linha tracejada). . . . .	42
4.11	(a) SAC e (b) DEP do mapa $f_B(\cdot)$ com $r = 2$ segmentos. . . . .	43
4.12	(a) SAC e (b) DEP do mapa $f_B(\cdot)$ com $r$ segmentos com inclinações positivas. . . . .	44
4.13	(a) Mapa $f_\Lambda(\cdot)$ e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais $s(0) = -0.7$ (linha sólida), $s(0) = -0.7 - 10^{-9}$ (linha tracejada) e vetor $\alpha = [-0.5 \ -0.1 \ 0.5 \ 1]^T$ . . . . .	44
4.14	(a) SAC e (b) DEP do mapa $f_\Lambda(\cdot)$ com $\Lambda = 2$ . . . . .	45
4.15	(a) Mapa $f_S(\cdot)$ e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais $s(0) = -0.8$ (linha sólida), $s(0) = -0.8 - 10^{-9}$ (linha tracejada) e vetor $\alpha = [-0.5 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.7 \ 1]^T$ . . . . .	45
4.16	(a) SAC e (b) DEP do mapa $f_S(\cdot)$ com $r$ segmento com inclinações negativas. . . . .	46
5.1	(a) O mapa $f_\xi(\cdot)$ com $r = -3$ e (b) duas órbitas com condições iniciais próximas. . . . .	49
5.2	Exemplos de (a) $d_n$ , (b) $v(n)$ e (c) $s(n)$ e $\widehat{s}(n)$ para $s(0) = \frac{2}{\pi} - 1$ e $r = -3$ . . . . .	53
5.3	Função erro $\varepsilon(n)$ e o limitante superior. . . . .	55
5.4	Esquematização do cálculo da SAC e da DEP do sistema proposto no Algoritmo 1. . . . .	55
5.5	(a) SAC e DEP de $v(n)$ , (b) SAC e DEP de $x_\ell(n)$ , (c) SAC e DEP de $\widehat{s}(n)$ para $r = -3$ . . . . .	58
5.6	DEP de (5.37) para diferentes valores de $r$ . . . . .	58
6.1	DEP de $m(n)$ para diferentes valores de $N_b$ . . . . .	62

6.2	Exemplo de sinal CSK: (a) sinal caótico gerado usando $f_I(\cdot)$ e (b) sua DEP; (c) a mensagem a ser transmitida e (d) sua DEP; (e) o sinal CSK $y(n) = m(n)s(n)$ e (f) sua DEP. . . . .	63
6.3	Exemplo do sinal COOK: (a) sinal caótico gerado usando $f_I(\cdot)$ e (b) sua DEP; (c) a mensagem a ser transmitida e (d) sua DEP; (e) sinal COOK $y(n) = m(n)s(n)$ e (f) sua DEP. . . . .	64
6.4	(a) Trecho de sinal caótico gerado pelo mapa $f_I(\cdot)$ ; (b) Trecho do sinal de (a) com atraso de $N_L = 10$ ; (c) sinal mensagem $m(n)$ e (d) sinal DCSK. . .	65
6.5	(a) DEP do CSK e (b) DEP do COOK usando o mapa $f_I(\cdot)$ com intervalo de bit $N_b = 4$ para diferentes valores de $\alpha$ . Linhas tracejadas para $\alpha < 0$ e linhas sólidas para $\alpha \geq 0$ . . . . .	67
6.6	DEP do CSK para diferentes valores de intervalo de simbolo $N_b$ com (a) $\alpha = -0.9$ e (b) $\alpha = 0.9$ . . . . .	68
6.7	DEP do COOK para diferentes valores de intervalo de simbolo $N_b$ com (a) $\alpha = -0.9$ e (b) $\alpha = 0.9$ . . . . .	69
6.8	Montagem experimental para validação dos sinais transmitidos pelo CSK. .	70
6.9	Diagrama de blocos do transmissor implementado com o programa GNU Radio. . . . .	71
6.10	Diagrama de blocos do receptor utilizando o programa de análise de sinais SDRAngel. . . . .	72
6.11	DEPs normalizadas experimental e teórica do CSK com $N_b = 10$ e $f_c = 2.404$ GHz. . . . .	72
6.12	DEPs normalizadas experimental e teórica do COOK com $N_b = 10$ e $f_c = 2.404$ GHz. . . . .	73
7.1	(a) Mapa $f_Q(\cdot)$ com $a_Q = 4$ e (b) suas órbitas. . . . .	76
7.2	DEP normalizada do mapa $f_Q(\cdot)$ para $3.835 < a_Q \leq 4.000$ . . . . .	76
7.3	Mapa de Hénon para $a_H = 1.4$ e $b_H = 0.3$ : (a) e (b) são órbitas $\mathbf{s}(n)$ com condição inicial $\mathbf{s}(0) = [0 \ 0]^T$ ; (c) o mapa. . . . .	77
7.4	DEP normalizada do mapa $f_H(\cdot)$ para $b_H = 0.3$ e $1.2 < a_H \leq 1.4$ . . . . .	78
7.5	Imagem encriptada utilizando o método proposto. . . . .	79

## Lista de abreviaturas

bit	<i>Binary Digit</i>
COOK	<i>Chaos on-off Keying</i> (Comutação liga-desliga caótica)
CSK	<i>Chaos Shift Keying</i> (Comutação caótica)
DCSK	<i>Differential Chaos Shift Keying</i> (Comutação caótica diferencial)
DEP	Densidade Espectral de Potência
DSCI	Dependência Sensível às Condições Iniciais
FPGA	<i>Field-Programmable Gate Array</i> (Arranjo de Porta Programável em Campo)
SAC	Sequência de Autocorrelação
SCBC	Sistemas de Comunicação Baseado em Caos
SDR	<i>Software Defined Radio</i> (Rádio Definido por <i>Software</i> )
TFD	Transformada de Fourier Discreta
TFTD	Transformada de Fourier de Tempo Discreto
USB	<i>Universal Serial Bus</i> (Porta Serial Universal)
USRP	<i>Universal Software Radio Peripheral</i> (Periférico de Rádio por Software Universal)
WBAN	<i>Wireless Body Area Networks</i> (Redes corporais sem fio)

# Lista de símbolos

## Símbolos gerais

$\mathbb{E}[\cdot]$	operador esperança matemática
$n$	índice de tempo discreto
$f^n(\cdot)$	$n$ -ésima aplicação sucessiva de $f(\cdot)$
$f'(\cdot)$	derivada de $f(\cdot)$
$f^{-1}(\Delta)$	contra-imagem do intervalo $\Delta$ sob a operação de $f(\cdot)$
$I_\Delta(\cdot)$	função indicadora para o conjunto $\Delta$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais (inteiros não-negativos)
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} - \{0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$N_\delta(p)$	intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ em torno do ponto $p$
$p(\cdot)$	função densidade de probabilidade
$\delta(\cdot)$	função impulso unitário
$U$	intervalo contido em $\mathbb{R}$
$U_i$	$i$ -ésimo intervalo de $U$

## Sinais e sistemas caóticos

$f(\cdot)$	mapa unidimensional
$f_L(\cdot)$	mapa linear por partes
$f_I(\cdot)$	mapa tenda inclinada
$f_B(\cdot)$	mapa de Bernoulli com $r$ segmentos com inclinações positivas
$f_F(\cdot)$	mapa linear por partes com 3 segmentos
$f_\Lambda(\cdot)$	mapa tenda multimodal
$f_S(\cdot)$	mapa com $r$ segmentos com inclinações negativas
$f_Q(\cdot)$	mapa quadrático
$f_H(\cdot)$	mapa de Hénon
$r$	número de segmentos do mapa $f_L(\cdot)$
$h(s_0)$	expoente de Lyapunov de $s(n, s_0)$
$h_I$	expoente de Lyapunov de $f_I(\cdot)$
$h_H$	maior expoente de Lyapunov de $f_H(\cdot)$
$L(s_0)$	número de Lyapunov de $s(n, s_0)$

$p$	ponto fixo ou periódico
$p_*(\cdot)$	função densidade invariante
$a_Q$	parâmetro do mapa quadrático $f_Q(\cdot)$
$a_H, b_H$	parâmetros do mapa de Hénon $f_H(\cdot)$
$\mathcal{P}(\cdot)$	operador de Frobenius-Perron
$s_0$ ou $s(0)$	condição inicial
$s(n)$	órbita de um sistema dinâmico
$s(n, s_0)$	órbita com condição inicial $s_0$
$T_{s_0}$	trajetória de $s(n, s_0)$
$\alpha$	parâmetro de $f(\cdot)$

### Propriedades temporais e espectrais

$B$	banda essencial
$\mathcal{S}_m$	potência média de $s(n)$
$\mathbb{F}[\cdot]$	transformada de Fourier de tempo discreto
$\mathcal{S}(\omega)$	densidade espectral de potência de $s(n)$
$k$	atraso na sequência de autocorrelação
$R(k)$	sequência de autocorrelação de $s(n)$
$\bar{m}_s$	valor médio de $s(n)$
$\sigma^2$	variância de $s(n)$
$p(x, y)$	densidade conjunta

### Representação linear de sinais caóticos

$f_1(\cdot)$	transformação linear do domínio $[-1, 1[$ para $[0, 1[$
$f_2(\cdot)$	mapa linear por partes no domínio $[0, 1[$
$f_3(\cdot)$	transformação linear do domínio $[0, 1[$ para $[-1, 1[$
$f_\xi(\cdot)$	mapa linear por partes no domínio $[-1, 1[$
$\lfloor \cdot \rfloor$	função piso
$d_i$	$i$ -ésimo dígito na base $ r $
$\varepsilon(n)$	função erro
$H(\omega)$	função de transferência de um sistema
$\bar{m}_v$	valor médio de $v(n)$
$\sigma_v^2$	variância de $v(n)$
$\hat{s}(n)$	estimativa de $s(n)$
$R_v(k)$	sequência de autocorrelação do sinal $v(n)$
$R_x(k)$	sequência de autocorrelação do sinal $x_\ell(n)$
$R_s(k)$	sequência de autocorrelação do sinal $\hat{s}(n)$

$V(\omega)$	densidade espectral de potência de $v(n)$
$X_\ell(\omega)$	densidade espectral de potência de $x_\ell(n)$
$\widehat{S}(\omega)$	densidade espectral de potência de $\widehat{s}(n)$

### **Modulação digital utilizando sinais caóticos**

$N_b$	comprimento das sequências utilizadas para representar cada símbolo
$N_L$	$N_b/2$
$c, d$	Amplitudes dos pulsos usados em um sinal digital com $c > d$
$m(n)$	mensagem a ser transmitida
$y(n)$	sinal modulado
$\Pi(n)$	função porta
$R_m(k)$	sequência de autocorrelação da mensagem $m(n)$
$R_y(k)$	sequência de autocorrelação do sinal $y(n)$
$\mathcal{M}(\omega)$	densidade espectral de potência de $m(n)$
$\mathcal{Y}(\omega)$	densidade espectral de potência de $y(n)$
$f_c$	frequência central em Hz
$f$	frequência em Hz

# Sumário

<b>Lista de figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de abreviaturas</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contribuições . . . . .	3
1.2 Estrutura da tese . . . . .	4
<b>2 Sistemas dinâmicos unidimensionais de tempo discreto</b>	<b>5</b>
2.1 Conceitos básicos e notações . . . . .	5
2.2 Expoente de Lyapunov . . . . .	7
2.3 Sinais caóticos de tempo discreto . . . . .	8
2.4 Densidade invariante . . . . .	9
2.5 Exemplo: o mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$ . . . . .	14
2.6 Considerações finais . . . . .	17
<b>3 Densidade espectral de potência de sinais caóticos</b>	<b>18</b>
3.1 DEP de sinais deterministas e aleatórios . . . . .	19
3.2 Exemplo: DEP de sinais caóticos gerados pelo mapa $f_I(\cdot)$ . . . . .	23
3.3 Considerações finais . . . . .	27
<b>4 Resultados principais I: DEP para o mapa linear por partes</b>	<b>29</b>
4.1 O mapa linear por partes $f_L(\cdot)$ proposto e suas propriedades . . . . .	29
4.2 Caracterização temporal e espectral das órbitas do mapa $f_L(\cdot)$ . . . . .	32



4.3	Exemplos numéricos . . . . .	35
4.3.1	Mapa com $r = 2$ segmentos . . . . .	36
4.3.2	Mapa com $r = 3$ segmentos . . . . .	36
4.3.3	Mapa com $r = 4$ segmentos . . . . .	37
4.4	Casos particulares do mapa $f_L(\cdot)$ na literatura . . . . .	38
4.5	Considerações finais . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Resultados principais II: uma representação linear com entradas aleatórias para sinais caóticos</b>	<b>48</b>
5.1	Mapa considerado . . . . .	49
5.2	Representação linear com entradas aleatórias de sinais caóticos . . . . .	50
5.3	DEP de sinais caóticos utilizando-se da teoria de sistemas lineares . . . . .	55
5.4	Considerações finais . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Resultados principais III: DEP para modulações digitais que utilizam sinais caóticos</b>	<b>60</b>
6.1	Modulações CSK e DCSK . . . . .	60
6.1.1	DEP do CSK . . . . .	65
6.1.1.1	CSK com o mapa $f_I(\cdot)$ . . . . .	66
6.1.1.2	COOK com o mapa $f_I(\cdot)$ . . . . .	68
6.2	Validação experimental em um canal Bluetooth <sup>®</sup> . . . . .	69
6.2.1	Arranjo experimental . . . . .	69
6.2.1.1	Experimentação I: DEP do CSK . . . . .	71
6.2.1.2	Experimentação II: DEP do COOK . . . . .	72
6.3	Considerações finais . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>74</b>
7.1	Contribuições . . . . .	75
7.2	Outros resultados obtidos ao longo do doutorado . . . . .	75

7.2.1	DEP para o mapa $f_Q(\cdot)$ . . . . .	75
7.2.2	DEP para o mapa $f_H(\cdot)$ . . . . .	76
7.2.3	Encriptação de imagem usando sinais caóticos . . . . .	78
7.3	Publicações detalhadas . . . . .	79
7.4	Trabalhos futuros . . . . .	84
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>
	<b>Apêndice A - Publicações</b>	<b>91</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um sinal caótico apresenta aperiodicidade, limitação em amplitude e dependência sensível às condições iniciais [1]. Essa última propriedade significa que duas condições iniciais arbitrariamente próximas geram sinais que assumem valores muito diferentes depois de algumas iterações [1].

Atualmente existe um grande número de áreas desenvolvendo pesquisas envolvendo sinais caóticos. Diversos exemplos podem ser encontrados em [2–5]. Na Engenharia de Telecomunicações, o artigo [6], sobre sincronização de sistemas caóticos, é considerado o ponto de partida da pesquisa nessa área [7]. Desde a publicação desse trabalho, vêm surgindo diversas possibilidades de aplicações como em modulação analógica e digital, criptografia e criptografia entre outras [8–13].

Em Sistemas de Comunicação Baseado em Caos (SCBC) digitais, em geral, a informação digital é codificada e transportada em um sinal caótico. Destacam-se as modulações digitais como a *Chaos Shift Keying* (CSK) e a *Differential Chaos Shift Keying* (DCSK) [14, 15]. Essas modulações têm recebido aprimoramentos sucessivos nos últimos anos como pode-se verificar nas referências [16–19]. Embora essas modulações tendam a apresentar taxas de erros de símbolo mais elevadas em comparação com sistemas de modulações digitais convencionais [20], essa desvantagem pode ser equilibrada pelo aumento na segurança [11, 12] e pela característica geral de os sinais caóticos serem de banda larga, conferindo-lhes propriedades comuns aos sistemas de espalhamento espectral [21].

Apesar de SCBC ainda demandarem muita pesquisa para tornarem-se competitivos comercialmente, algumas aplicações práticas têm sido apresentadas nos últimos anos. Por exemplo, um enlace de 120 km de fibras na região metropolitana de Atenas, na Grécia, que transmitiu na faixa de gigabits por segundo usando portadoras caóticas, foi descrito em [22]. Recentemente, L. Wang et al. [23] demonstraram uma sincronização de caos a laser de longo alcance em um link de fibra de 1040 km. Além disso, o padrão internacional para *Wireless Body Area Networks* (WBAN) já tem incluso modulação com sinais caóticos [24,

---

25]. Patentes também têm sido propostas, como a que trata de um método de transmissão segura baseado em detecção coerente de alta velocidade com portadoras caóticas em um canal óptico [26], e a que detalha um sistema de comunicação baseado na modulação DCSK com índices híbridos [27].

No projeto de sistemas de comunicação é primordial conhecer a Densidade Espectral de Potência (DEP) e a largura de banda ocupada pelos sinais utilizados na transmissão de mensagens [28]. Quando deseja-se utilizar sinais caóticos nessa função, surge o problema de determinar com precisão as características espectrais desses sinais.

Na literatura, sinais caóticos já foram caracterizados como sendo banda larga e com Sequência de Autocorrelação (SAC) impulsiva [21, 29, 30]. Entretanto, na última década resultados tem indicado que esses sinais podem apresentar uma caracterização espectral diversificada, isto é, sinais que apresentam características de alta ou de baixa frequência. Portanto, estudos mais aprofundados tornam-se necessários, principalmente, quando se pensa em aplicações práticas. Nos últimos anos houve algum progresso na determinação da DEP de sinais caóticos gerados por alguns mapas unidimensionais [31–37], porém, resultados mais gerais ainda precisam ser encontrados.

Em 2010, inspirado no trabalho de Sakay e Tokumaru [38], Eisencraft et al. [31] obtiveram uma expressão analítica para a DEP dos sinais caóticos gerados por um mapa linear por partes específico, o mapa tenda inclinada. Em 2014, Feltekh et al. propuseram um mapa linear por partes com três segmentos e calcularam a DEP das órbitas geradas [32]. Durante seu mestrado, o autor desta tese determinou a DEP para o mapa de Bernoulli com 2 segmentos em 2015 [39]. Já em sua fase de doutoramento, publicou uma generalização desse resultado para  $r$  segmentos com inclinações positivas em 2017 [34]. Em 2018, Sahnoune e Berkani [35] obtiveram a DEP para um mapa com múltiplas tendas. Um dos resultados da presente tese é propor um mapa linear por partes mais geral, de modo que todos esses resultados anteriores sejam casos particulares dele, permitindo também outras configurações de DEP.

Em uma nova abordagem, Drake e Williams [40] em 2007, apresentaram uma forma distinta para a representação de sinais caóticos em tempo discreto. Eles demonstraram que, ao invés de recorrer a mapas não lineares, pode-se gerar esses sinais utilizando filtros lineares alimentados por sequências aleatórias. Este resultado surpreendente tem potencial para auxiliar na determinação da DEP desses sinais. Nesta tese não apenas investigou esses resultados, mas também contribuiu-se com avanços ao estender a representação linear e calcular a DEP por uma abordagem alternativa.

Embora haja muitos estudos sobre modulações digitais que empregam sinais caóticos, até onde o autor sabe, não se encontram trabalhos que abordem a obtenção analítica da DEP dos sinais transmitidos. Diante disso, explorou-se o conhecimento da DEP dos mapas lineares por partes para se realizar uma investigação analítica da DEP das modulações digitais que utilizam sinais caóticos. Além disso, validam-se os resultados obtidos em um canal de comunicação real utilizando-se o *Universal Software Radio Peripheral* (USRP) que é um Rádio Definido por *Software* (SDR) [41].

Em resumo, o objetivo maior desta tese é avançar o conhecimento sobre fórmulas analíticas para a DEP de sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais, visando, sobretudo, aplicações em sistemas de comunicação.

No restante desta Introdução, destacam-se as contribuições obtidas e as publicações associadas. Também detalha-se a estrutura da tese.

## 1.1 Contribuições

As principais contribuições alcançadas nesta tese são:

**A. Determinação da expressão analítica da DEP de um mapa linear por partes com um número arbitrário de segmentos, generalizando resultados anteriores da literatura.**

Obteve-se uma expressão analítica para DEP de sinais caóticos gerados por um mapa linear por partes mais geral do que outros propostos anteriormente [31, 32, 34, 35, 37, 39]. Utilizando-se conceitos aplicados no tratamento de sinais aleatórios, como os vistos no Capítulo 3, e as ideias propostas em [42] pôde-se definir e calcular a DEP do conjunto de sinais caóticos definidos pelo mapa linear por partes proposto [36, 43, 44].

**B. Uma representação linear com entradas aleatórias de sinais caóticos foi estendida, incluindo mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas.**

Em [40] propôs-se uma representação linear de sinais caóticos gerados por mapas lineares por partes constituído por segmentos com inclinações positivas. Estendeu-se esse resultado para mapas com inclinações de sinal arbitrário. Também deduziu-se um limitante superior para o erro que o uso do sistema linear gera em relação ao uso do mapa não linear por partes original. Esta representação foi utilizada para

se obter de forma alternativa a DEP dos sinais caóticos gerados. Esses resultados estão descritos no Capítulo 5 e foram publicados em [45–47].

### **C. Obtenção de fórmulas fechadas para DEP de sinais transmitidos pela modulação CSK.**

Obteve-se fórmulas fechadas da DEP dos sinais transmitidos pela modulação CSK que utiliza-se do mapa linear por partes estudado nesta tese. Os resultados obtidos estão descritos no Capítulo 6 e foi publicado em [48–50].

## **1.2 Estrutura da tese**

Esta tese está estruturada em sete capítulos e um apêndice.

No Capítulo 2 revisita-se alguns conceitos de sistemas dinâmicos e sinais caóticos de tempo discreto. Estes conceitos servem de base para os capítulos seguintes.

No Capítulo 3 são apresentadas técnicas para a caracterização temporal e espectral de sinais que são utilizadas nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 4, deduz-se a SAC e a DEP para um mapa linear por partes que generaliza resultados anteriores da literatura. São estudados diversos casos particulares, mostrando-se as possibilidades de formatação espectral de sinais caóticos. Esse capítulo está associado à Contribuição **A**.

No Capítulo 5, estende-se a representação linear de sinais caóticos proposta em [40] para incluir mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas. Além disso, propõem-se um método de cálculo de forma direta da DEP desse mapa utilizando-se da teoria de sistemas lineares. Esse capítulo está associado à Contribuição **B**.

No Capítulo 6, obtêm-se fórmulas fechadas para DEP de sinais transmitidos por modulações caóticas utilizando-se dos mapas estudados nos capítulos anteriores. Além disso, relatam-se experimentos que validam os resultados obtidos considerando-se um canal de comunicação real. Esse capítulo está associado à Contribuição **C**.

No Capítulo 7, apresentam-se as conclusões da tese e retoma-se as suas contribuições. Além disso, elencam-se contribuições laterais, as publicações associadas à tese e possíveis trabalhos futuros.

Por fim, no Apêndice A encontram-se as cópias dos trabalhos resultantes dessa tese já publicados e em vias de submissão.

## Capítulo 2

# Sistemas dinâmicos unidimensionais de tempo discreto

Neste capítulo revisitam-se conceitos de sistemas dinâmicos unidimensionais de tempo discreto. Nele apresentam-se definições e notações que são utilizadas nos capítulos subsequentes. As principais referências empregadas neste capítulo são [1, 28, 51–53].

Na seção 2.1, apresentam-se conceitos básicos e notações de sistemas dinâmicos unidimensionais de tempo discreto que servem de referência para o restante do trabalho. Em seguida, na Seção 2.2, o expoente de Lyapunov é definido. Esse conceito é fundamental para a definição de sinais caóticos que é dada na Seção 2.3. Na Seção 2.4, o conceito de densidade invariante é introduzido. Na Seção 2.5, revisita-se o mapa tenda inclinada, exemplificando-se suas propriedades de densidade invariante e expoente de Lyapunov.

### 2.1 Conceitos básicos e notações

Um *sistema dinâmico* de tempo discreto consiste em um conjunto de possíveis estados com uma regra que determina o estado no instante  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , em função do estado  $n - 1$ . Nomeia-se essa regra em sistemas de tempo discreto como *mapa* [1].

Um mapa  $f(\cdot)$  unidimensional é uma função com domínio  $U \subset \mathbb{R}$  igual ao contradomínio,  $f(\cdot) : U \rightarrow U$ . Assim, uma equação de diferenças dada por

$$s(n + 1) = f(s(n)), \quad (2.1)$$

com  $n \in \mathbb{N}$  e  $s(0) = s_0 \in U$ , representa um mapa ou *sistema dinâmico de tempo discreto* [1].

Uma *órbita* ou *sinál*  $s(n)$  gerado por uma dada condição inicial  $s(0) = s_0 \in U$  é definido por

$$s(n) = f^n(s_0), \quad (2.2)$$

em que  $f^n(\cdot)$  representa a  $n$ -ésima iteração do mapa e  $f^0(s_0) = s_0$ . Quando a condição inicial for relevante, a órbita é indicada por  $s(n, s_0)$ . A *trajetória* da órbita  $s(n, s_0)$  de  $f(\cdot)$  é o conjunto  $T_{s_0} = \{s(n, s_0), n \in \mathbb{N}\}$ .

Um ponto  $p$  é dito *ponto fixo*, quando a iteração do mapa a partir dele resulta no mesmo valor, ou seja,

$$f(p) = p. \quad (2.3)$$

Se existir um  $\delta > 0$  tal que para todo  $s_0$  dentro da vizinhança  $N_\delta(p) \triangleq (p - \delta, p + \delta)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(s_0) = p$ , então  $p$  é dito *assintoticamente estável*. Se existir um  $\delta > 0$  tal que para cada  $s_0 \in N_\delta(p)$ , exceto  $s_0 = p$ , eventualmente  $f^k(s_0) \notin N_\delta(p)$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , então  $p$  é *instável* [1].

Se  $f(\cdot)$  é diferenciável em  $p$  a verificação da estabilidade do ponto fixo pode ser feita por meio da derivada de  $f(\cdot)$  calculada em  $p$ ,  $f'(p)$ . Para um ponto  $s$  próximo de  $p$ , pela expansão de Taylor de  $f(s)$  em torno de  $p$ , obtém-se

$$f(s) \approx f(p) + f'(p)(s - p) \Rightarrow f(s) - f(p) \approx f'(p)(s - p) \Rightarrow |f(s) - p| \approx |f'(p)| |s - p|. \quad (2.4)$$

Se  $|f'(p)| < 1$ , a cada iteração do mapa,  $f(s)$  e  $f(p) = p$  se aproximam com uma taxa de aproximadamente  $|f'(s)|$  e  $p$  é assintoticamente estável. Se  $|f'(p)| > 1$ , as órbitas divergem com uma taxa de aproximadamente  $|f'(s)|$  e  $p$  é instável. Se  $|f'(p)| = 1$ , nada se pode afirmar sobre a estabilidade do ponto fixo baseando-se apenas em  $f'(p)$ .

Alguns mapas podem gerar órbitas periódicas, ou seja, os pontos que compõem sua trajetória assumem apenas um número finito de valores diferentes que se repetem ao longo das iterações. Por exemplo, se  $f(p_1) = p_2$  e  $f(p_2) = p_1$ , então tem-se uma órbita periódica de período 2, cuja trajetória  $T_{p_1}$  é composta pelos pontos  $\{p_1, p_2, p_1, p_2, \dots\}$ . Dessa forma, se

$$f^k(p) = p, \quad (2.5)$$

então  $p$  é um *ponto periódico* de período  $k$ , sendo  $k$  o menor inteiro para o qual (2.5) é válida. Note-se que  $p$  é um ponto fixo de  $f^k(\cdot)$  [1].

Da mesma forma que para um ponto fixo do mapa  $f(\cdot)$ , os pontos próximos de uma órbita periódica podem ser atraídos ou repelidos pela órbita. Seja  $f(\cdot)$  um mapa e  $p$  um ponto periódico de período  $k$  desse mapa. A órbita periódica de período  $k$  é assintoticamente estável se  $p$  é um ponto fixo assintoticamente estável para o mapa  $f^k(\cdot)$  e instável se  $p$  é um ponto fixo instável para o mapa  $f^k(\cdot)$ .



Seja uma órbita de período  $k$  composta pelos pontos  $T_{p_1} = \{p_1, p_2, \dots, p_k, p_1, p_2, \dots\}$ . Aplicando a regra da cadeia, tem-se

$$\begin{aligned} (f^k)'(p_1) &= (f(f^{k-1}))'(p_1) = f'(f^{k-1}(p_1))(f^{k-1})'(p_1) = f'(f^{k-1}(p_1))f'(f^{k-2}(p_1)) \dots f'(p_1) \\ &= f'(p_k)f'(p_{k-1}) \dots f'(p_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim, com o mesmo raciocínio da estabilidade do ponto fixo, se  $|f'(p_1)f'(p_2) \dots f'(p_k)| < 1$ , uma órbita, cuja a condição inicial esta próxima de  $p_1$ , converge para a órbita  $s(n, p_1)$  a uma taxa de aproximadamente  $|(f^k)'(p_1)|$  a cada  $k$  iterações, ou seja, a uma taxa  $|(f^k)'(p_1)|^{\frac{1}{k}}$  por iteração e  $s(n, p_1)$  é assintoticamente estável. Se  $|f'(p_1)f'(p_2) \dots f'(p_k)| > 1$ , as órbitas próximas divergem e a órbita  $s(n, p_1)$  é instável. Se  $|f'(p_1)f'(p_2) \dots f'(p_k)| = 1$ , nada pode se afirmar sobre a estabilidade da órbita periódica apenas a partir das derivadas calculadas nos pontos da órbita [1].

Esses conceitos de estabilidade e divergência podem ser estendidos para órbitas não necessariamente periódicas por meio do expoente de Lyapunov, discutido a seguir.

## 2.2 Expoente de Lyapunov

Um conceito fundamental para o estudo de sinais caóticos é a Dependência Sensível às Condições Iniciais (DSCI). A DSCI implica que, sinais gerados com condições iniciais arbitrariamente próximas vão divergir exponencialmente, a cada iteração do mapa, tornando-se totalmente distintos. Após algumas iterações, o módulo da diferença entre os sinais pode ser da ordem de grandeza dos próprios sinais. Assim, diz-se que a órbita  $s(n, s_0)$  tem DSCI se existe  $d > 0$  tal que qualquer vizinhança  $N_\delta(s_0)$  contém um ponto  $s$  tal que  $|f^k(s) - f^k(s_0)| \geq d$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  [1].

O *número de Lyapunov*  $L(s_0)$  fornece uma forma operacional de verificar a DSCI das órbitas. Ele mede a taxa de divergência média entre duas órbitas próximas.

Dessa forma como na verificação da estabilidade de órbitas periódicas, discutida anteriormente, o cálculo de  $L(s_0)$  é feito por meio do produtório do módulo das derivadas da função  $f(\cdot)$  nos pontos que constituem a trajetória [1].

O número de Lyapunov para uma órbita com condição inicial  $s_0$  é definido por

$$L(s_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{n=0}^{N-1} |f'(s(n))| \right)^{\frac{1}{N}}, \quad (2.7)$$

se o limite existir [1].

Desse modo, se  $L(s_0) > 1$ , órbitas próximas divergem com uma taxa aproximada de  $L(s_0)$  a cada iteração e a órbita  $s(n, s_0)$  possui DSCI [1].

O expoente de Lyapunov  $h(s_0)$  é definido por

$$h(s_0) = \ln(L(s_0)), \quad (2.8)$$

se  $L(s_0)$  existir. Assim, se  $h(s_0) > 0$ , a órbita com condição inicial  $s_0$  possui DSCI.

Para as simulações computacionais realizadas neste trabalho, o uso de (2.7) seguido por (2.8) não é adequado devido a limitação de precisão numérica. Isso acontece, pois, o produto de  $N$  termos pode levar a um número muito grande ou muito pequeno. Para contornar essa limitação, pode-se substituir (2.7) em (2.8), obtendo-se

$$h(s_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln(|f'(s(n))|) \right), \quad (2.9)$$

em que é calculada uma média aritmética dos logaritmos naturais do módulo da derivada da função em cada ponto, que resulta em números que exigem menor precisão.

Se a órbita  $s(n, p_1)$  do mapa  $f(\cdot)$ , cuja trajetória é descrita por  $T_{p_1} = \{p_1, p_2 \dots\}$ , satisfaz  $f'(p_i) \neq 0$  para todo  $i$  e é assintoticamente periódica convergindo para órbita periódica  $s(n, y_1)$ , composta pelos pontos  $T_{y_1} = \{y_1, y_2 \dots\}$ , então as duas órbitas possuem o mesmo expoente de Lyapunov, caso existam, como é demonstrado em [1]. Assim, em geral, a probabilidade de se obter computacionalmente uma órbita limitada com expoente de Lyapunov positivo e que seja periódica ou que convirja para uma órbita periódica é zero, já que, nesse caso, a órbita periódica seria instável. Assim, esse sinal com  $h(s_0) > 0$  é quase sempre aperiódico [1].

Com os conceitos descritos nestas seções é possível definir um sinal caótico, o que é feito a seguir.

## 2.3 Sinais caóticos de tempo discreto

Sinais caóticos não possuem uma definição única e universalmente aceita [1, 53, 54]. Neste trabalho utiliza-se a definição dada em [1]. Por ela, um sinal limitado em amplitude  $s(n)$  é caótico se

1. for aperiódico e

2. se o seu expoente de Lyapunov  $h$  for positivo.

Pelo fato de os sinais caóticos serem aperiódicos, os mesmos não convergem para pontos fixos ou para órbitas periódicas.

Além disso, possuindo a DSCI, representada por  $h > 0$ , órbitas com condições iniciais próximas divergem após poucas iterações do mapa. Sendo assim, é sempre possível encontrar um ponto suficientemente próximo da condição inicial  $s_0$  cuja órbita relacionada está relativamente distante de  $s(n, s_0)$  após algumas iterações.

Ainda pela característica da DSCI, pode-se dizer que os sinais caóticos são de difícil previsão. Em um sistema prático, não se conhecendo exatamente a condição inicial com total precisão, não é possível prever o comportamento do sistema após um curto tempo.

Nos mapas geradores de sinais caóticos tratados no presente trabalho, apenas um conjunto de medida nula de condições iniciais gera órbitas periódicas. Nesse caso, a possibilidade de se escolher ao acaso uma condição inicial no domínio  $U$  que gere órbitas periódicas ou que convirja para uma é zero. Por este motivo, numericamente, considera-se aqui que  $h > 0$  é o suficiente para afirmar que o sinal é caótico.

## 2.4 Densidade invariante

Outra propriedade importante que pode ser utilizada para caracterizar sinais caóticos é a *densidade invariante*. Visto que os sinais caóticos apresentam DSCI, caso não se conheça a condição inicial exatamente, não é possível determinar o valor assumido pelo sinal após um curto intervalo de tempo [2]. Portanto, para sistemas práticos, é interessante estudar esses sinais como um processo estocástico, por meio de médias, variâncias e correlações entre os sinais [42, 55]. Sendo assim, é importante conhecer a probabilidade de ocorrência de cada ponto, ou seja, saber a densidade invariante do sinal no domínio  $U$ .

Órbitas caóticas de um determinado mapa com diferentes condições iniciais, apresentam comportamentos distintos ao longo do tempo. Por outro lado, os pontos que constituem cada trajetória estão distribuídos no domínio  $U$  aproximadamente da mesma forma [42]. Isso pode ser observado construindo histogramas para órbitas com diferentes condições iniciais e para média de diversas órbitas.

Num histograma ilustra-se a frequência de ocorrência dos valores que constituem a trajetória ao longo do domínio  $U$ . Divide-se o domínio  $U$  em  $N_u$  intervalos disjuntos de mesmo comprimento. Assim, para  $U = [-1, 1]$ , o  $i$ -ésimo intervalo (negligenciando o ponto  $+1$ )

é dado por

$$U_i = \left[ \frac{2(i-1)}{N_u} - 1, \frac{2i}{N_u} - 1 \right), i = 1, \dots, N_u. \quad (2.10)$$

Uma barra é colocada sobre cada intervalo, cuja altura representa a fração de valores observados naquele intervalo, descrevendo a *função densidade* do mapa. A área total do histograma é normalizada de forma a ser sempre unitária podendo assim ser interpretada como uma densidade de probabilidade [42]. A densidade invariante permite que se estude os sinais caóticos como sendo funções-amostras de um processo estocástico, por meio da distribuição dos pontos no domínio  $U$  ao longo de iterações [42, 51].

Na Figura 2.1 é ilustrado o conceito de densidade invariante para o mapa tenda inclinada  $f_I : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  definido por

$$f_I(s) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha+1}s + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}, & -1 \leq s < \alpha \\ \frac{2}{\alpha-1}s - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}, & \alpha \leq s \leq 1 \end{cases}, \quad (2.11)$$

com  $\alpha = 0.2$ .

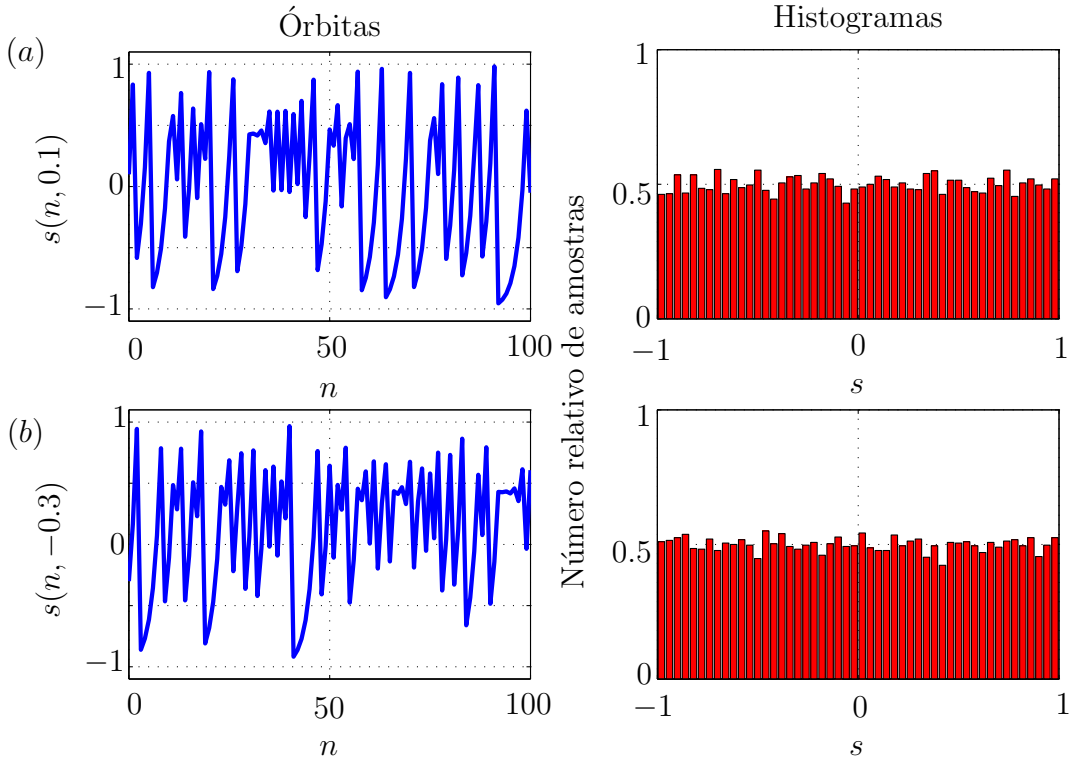


Figura 2.1: Órbitas e histogramas do mapa tenda inclinada com  $\alpha = 0.2$ , (a)  $s(0) = 0.1$  e (b)  $s(0) = -0.3$ .

Nestas simulações foram realizadas  $N = 10000$  iterações do mapa para cada uma das condições iniciais e o domínio  $U$  foi dividido em 50 intervalos adjacentes de mesmo

comprimento. Para distintas condições iniciais os sinais apresentam comportamentos diferentes no tempo, como pode ser visto nas duas órbitas da Figura 2.1. Porém, os pontos que formam as órbitas apresentam distribuições semelhantes no domínio  $U$ , como é ilustrado nos histogramas. Nesse caso, percebe-se claramente uma aproximação da densidade uniforme em  $U$ .

Tomando-se  $K$  condições iniciais no domínio  $U$  e fazendo uma iteração de um determinado mapa  $f(\cdot)$  para cada um desses valores,  $K$  novos pontos são obtidos. Para determinar a densidade inicial e final desses pontos, é interessante utilizar a *função indicadora* de um conjunto  $\Delta \subset U$  definida por [42]

$$I_{\Delta}(s) = \begin{cases} 1, & s \in \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (2.12)$$

Considerando um intervalo qualquer  $\Delta_0 \subset U$  e um conjunto de  $K$  condições iniciais  $s_{01}, s_{02} \dots s_{0K}$ , a função densidade destes pontos  $p_0(u)$  é estimada por

$$\int_{\Delta_0} p_0(u) du \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{\Delta_0}(s_{0k}) \quad (2.13)$$

e para os valores obtidos após uma iteração  $s_{11}, s_{12} \dots s_{1K}$  é estimada por

$$\int_{\Delta_1} p_1(u) du \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{\Delta_1}(s_{1k}) \quad (2.14)$$

para um  $\Delta_1 \subset U$  qualquer [42].

Para se obter uma relação entre  $p_0(\cdot)$  e  $p_1(\cdot)$ , é necessário introduzir o conceito de *contra-imagem de um intervalo*  $\Delta \subset U$  sob operação do mapa  $f(\cdot)$ . A contra-imagem de um intervalo,  $f^{-1}(\Delta)$ , é o conjunto de pontos pertencente a  $\Delta$  após uma aplicação de  $f(\cdot)$ , isto é [42],

$$f^{-1}(\Delta) = \{s | f(s) \in \Delta\}. \quad (2.15)$$

Desta maneira, para qualquer  $\Delta \subset U$

$$s_{1k} \in \Delta \Leftrightarrow s_{0k} \in f^{-1}(\Delta) \quad (2.16)$$

e tem-se a relação

$$I_{\Delta}(f(s)) = I_{f^{-1}(\Delta)}(s). \quad (2.17)$$

Pode-se então reescrever (2.14) como

$$\int_{\Delta_1} p_1(u) du \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{f^{-1}(\Delta_1)}(s_{0k}). \quad (2.18)$$

Dada a arbitrariedade de  $\Delta_0$  e  $\Delta_1$ , pode-se tomar  $\Delta_0 = f^{-1}(\Delta_1)$  e igualar (2.14) e (2.18), obtendo-se

$$\int_{\Delta_1} p_1(u) du = \int_{f^{-1}(\Delta_1)} p_0(u) du. \quad (2.19)$$

Esta equação relaciona  $p_1(\cdot)$  e  $p_0(\cdot)$ , em que  $p_1(\cdot)$  representa a densidade  $p_0(\cdot)$  transformada pelo mapa  $f(\cdot)$  [42].

Sendo  $\Delta_1 \subset U$  um intervalo, com  $\Delta_1 = [a, s]$ , obtém-se uma representação explícita para  $p_1(\cdot)$ . Nesse caso, a expressão (2.19) torna-se

$$\int_a^s p_1(u) du = \int_{f^{-1}([a,s])} p_0(u) du \quad (2.20)$$

e diferenciando-se em relação a  $s$ , tem-se

$$p_1(s) = \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([a,s])} p_0(u) du. \quad (2.21)$$

Fica claro que  $p_1(\cdot)$  é dependente de  $p_0(\cdot)$ , o que é indicado por  $p_1(\cdot) = \mathcal{P}(p_0(\cdot))$ :

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([a,s])} p(u) du. \quad (2.22)$$

A equação (2.22) define o *operador de Frobenius-Perron*  $\mathcal{P}(\cdot)$  que corresponde à transformação  $f(\cdot)$ . Este operador é muito utilizado no estudo da evolução de densidades que podem se aproximar de uma densidade limite e invariante  $p_*(s)$  [42].

Na Figura 2.2 ilustra-se a evolução das densidades a partir da densidade  $p(s) = \frac{3}{2}s^2$  numericamente, por (2.11) com  $\alpha = 0.1$ . Nota-se que após algumas iterações à convergência para  $p_*(s)$  como esperado para o histograma da Figura 2.1.

Pode-se introduzir valores esperados de uma função de teste integrável arbitrária  $Q(s)$  com respeito a densidade invariante  $p_*(s)$  [51]. Assim,

$$\mathbb{E}[Q] = \int_U p_*(s) Q(s) ds, \quad (2.23)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador esperança matemática,  $U$  é o domínio da função e  $\mathbb{E}[Q]$  é chamado de *média do conjunto* do observável  $Q$ .

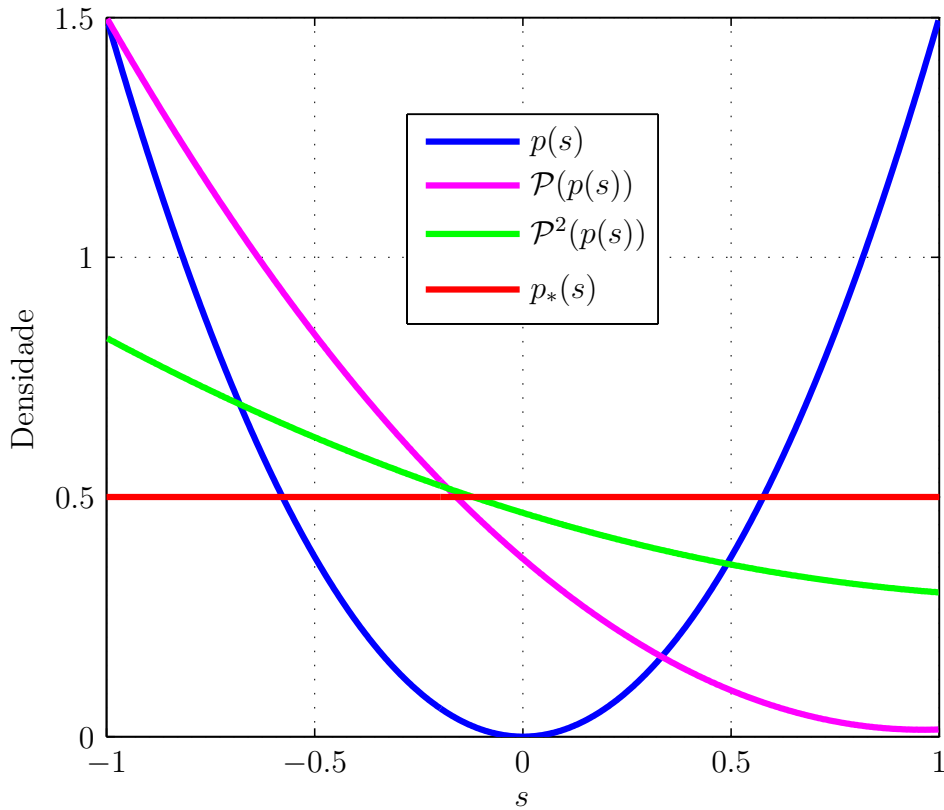


Figura 2.2: Evolução da densidade para o mapa tenda inclinada com  $\alpha = 0.1$ .

Definindo-se a média temporal de  $Q(s)$  como

$$\tilde{Q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q(s(n, s_0)), \quad (2.24)$$

um mapa é dito *ergódico* se

$$\tilde{Q} = \mathbb{E}[Q], \quad (2.25)$$

para qualquer  $Q(s)$ . A ergodicidade significa que a distribuição dos pontos no domínio  $U$  não depende da condição inicial  $s(0)$  [51].

O conceito de densidade invariante leva a uma forma alternativa de se calcular o expoente de Lyapunov em relação a (2.9) quando o mapa  $f(\cdot)$  é ergódico. Tomando-se  $Q(s) = \ln(|f'(s)|)$  e utilizando-se (2.23)-(2.25) obtém-se [51]

$$h(s_0) = \int_U \ln |f'(s(n, s_0))| p_*(s) ds. \quad (2.26)$$

A seguir, revisita-se o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$ , com exemplificações de sua densidade invariante e do expoente de Lyapunov.

## 2.5 Exemplo: o mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$

O mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  é constituído por dois segmentos lineares com inclinações de sinais opostos. O ponto onde estes segmentos se encontram configura o ápice da tenda, e sua abscissa  $\alpha$  é o parâmetro que define o mapa.

Tomando-se como domínio o intervalo  $U = [-1, 1]$ , o mapa pode ser expresso por

$$s(n+1) = f_I(s(n)), \quad (2.27)$$

em que de (2.11) tem-se que a equação do mapa que é dada por

$$f_I(s) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha+1}s + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}, & -1 \leq s < \alpha \\ \frac{2}{\alpha-1}s - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}, & \alpha \leq s \leq 1 \end{cases},$$

sendo  $\alpha \in (-1, 1)$ .

Na Figura 2.3(a) é mostrado um gráfico de  $f_I(\cdot)$  para  $\alpha = 0.2$  e na Figura 2.3(b) é ilustrado um trecho da órbita para esse  $\alpha$  com condição inicial  $s(0) = -0.3$ .

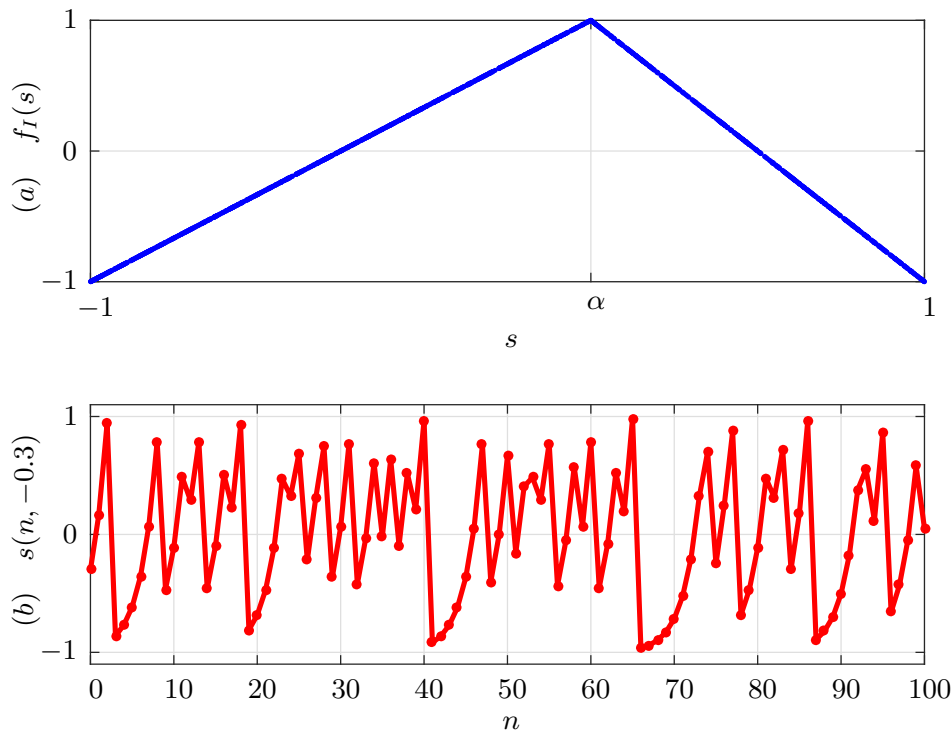


Figura 2.3: (a) Mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  para  $\alpha = 0.2$  e (b) trecho de uma órbita desse mapa,  $s(n)$ , com  $s(0) = -0.3$ .



**Exemplo 2.1 (Densidade invariante do mapa  $f_I(\cdot)$ ).** Para calcular a densidade invariante do mapa  $f_I(\cdot)$  e ilustrar o conceito do operador de Frobenius-Perron, toma-se um intervalo  $[-1, s] \subset U$  com contra-imagem dada por

$$f_I^{-1}([-1, s]) = [-1, s_1] \cup [s_2, 1], \quad (2.28)$$

com

$$s_1 = \frac{(\alpha + 1)s + (\alpha - 1)}{2} \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{(\alpha - 1)s + (\alpha + 1)}{2} \quad (2.29)$$

como ilustrado na Figura 2.4.

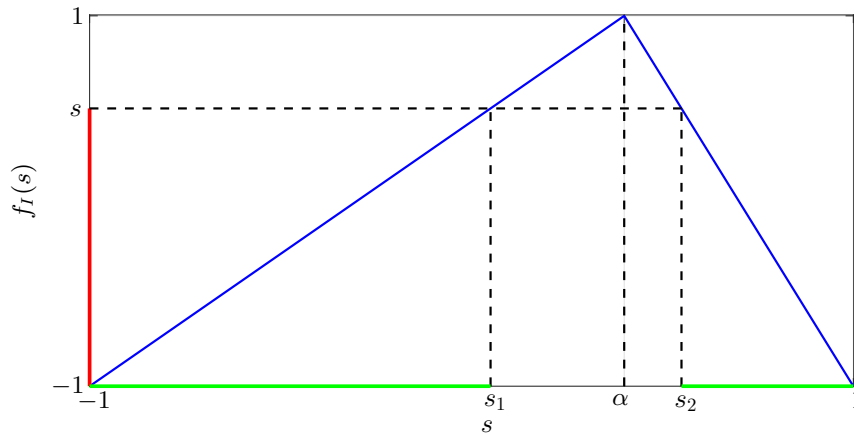


Figura 2.4: A contra-imagem do intervalo  $[-1, s]$  do mapa tenda inclinada é dada por  $[-1, s_1] \cup [s_2, 1]$ .

Assim, utilizando-se (2.22), o operador de Frobenius-Perron sobre uma densidade  $p(s)$ , para o mapa tenda inclinada resulta em

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{d}{ds} \left( \int_{-1}^{s_1} p(u) du + \int_{s_2}^1 p(u) du \right) = \frac{dQ(s_1)}{ds} - \frac{dQ(s_2)}{ds}, \quad (2.30)$$

em que  $\int p(u) du = Q(u)$ . Substituindo-se (2.29) em (2.30) obtém-se

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{[(\alpha + 1)p(s_1) + (1 - \alpha)p(s_2)]}{2}. \quad (2.31)$$

De (2.31), note que para  $p(s) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{P}(p(s)) = \frac{1}{2} [(\alpha + 1)\frac{1}{2} + (1 - \alpha)\frac{1}{2}] = \frac{1}{2} = p(s)$ . Assim,

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad \text{para} \quad -1 \leq s \leq 1, \quad (2.32)$$

é a densidade invariante para o mapa  $f_I(\cdot)$ .

A seguir exemplifica-se a obtenção de uma expressão analítica para o expoente de Lyapunov do mapa  $f_I(\cdot)$ .

**Exemplo 2.2 (Expoente de Lyapunov do mapa  $f_I(\cdot)$ ).** O conceito de densidade invariante leva a uma forma alternativa de se calcular o expoente de Lyapunov em que considera-se a ergodicidade do mapa, vide (2.26).

Assim, usando-se (2.32) pode-se calcular o expoente de Lyapunov  $h_I$  de quase todas as órbitas do mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  como

$$\begin{aligned} h_I &= \int_{-1}^1 \ln |f_I'(s(n, s_0))| p_*(s) ds \\ &= \int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{2}{\alpha + 1} \right| \right) ds + \int_{\alpha}^1 \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{2}{\alpha - 1} \right| \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\alpha + 1) \ln \left( \frac{2}{\alpha + 1} \right) + (1 - \alpha) \ln \left( \frac{2}{1 - \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Na Figura 2.5 é mostrado um gráfico de  $h_I$  em função de  $\alpha$ . Observa-se que, no intervalo  $(-1, 1)$  para  $\alpha$ , o expoente de Lyapunov  $h_I$  é sempre positivo, indicando que o mapa gera sinais caóticos para qualquer valor válido de  $\alpha$ . Para  $\alpha = 0$ ,  $h_I$  atinge seu valor máximo de  $\ln 2$ .

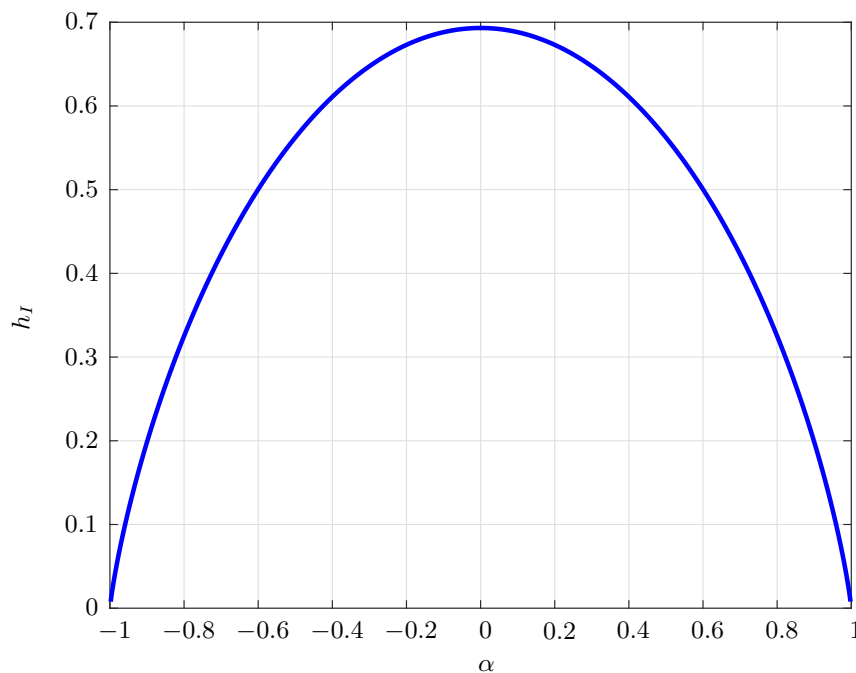


Figura 2.5: Expoente de Lyapunov para o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  para  $\alpha$  no intervalo  $(-1, 1)$ .

## 2.6 Considerações finais

Neste capítulo, apresentaram-se conceitos básicos e notações relacionados a sistemas dinâmicos unidimensionais de tempo discreto, os quais são necessários para o desenvolvimento dos resultados nos capítulos subsequentes. Destaca-se a definição do expoente de Lyapunov na Seção 2.2 que é um dos conceitos utilizados para definir sinais caóticos na Seção 2.3. Outro conceito importante é o de densidade invariante apresentado na Seção 2.4, que trata da forma como os pontos dos sinais gerados pelo mapa distribuem-se no intervalo  $U$ . Na Seção 2.5, revisita-se o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$ , e exemplificam-se tanto sua densidade invariante quanto seu expoente de Lyapunov.

Os estudos realizados tem o intuito de servir como base para deduções e expansões para outros mapas nos capítulos subsequentes.

## Capítulo 3

# Densidade espectral de potência de sinais caóticos

Neste capítulo apresentam-se as definições da DEP para sinais deterministas e aleatórios. Além disso, mostra-se como utilizar o conceito de ergodicidade associado à mapas para obter a DEP de sinais caóticos.

Obter a DEP de sinais é fundamental, pois possibilita a extração de informações sobre a distribuição de potência no domínio da frequência. Esse tipo de informação é crucial para análises e tem aplicações em diversas áreas. No monitoramento de vibrações, o conteúdo espectral dos sinais medidos fornece informações sobre o desgaste e outras características das peças mecânicas em estudo [56]. Em economia, meteorologia, astronomia e vários outros campos, a análise espectral pode revelar periodicidades ocultas nos dados estudados, que devem ser associados a comportamentos cíclicos ou processos recorrentes. Em sistemas de radar e sonar, os conteúdos espectrais dos sinais recebidos fornecem informações sobre a localização das fontes (ou alvos) situadas no campo de visão [56]. Na medicina, a análise espectral de vários sinais medidos de um paciente, como sinais eletrocardiograma (ECG) ou eletroencefalograma (EEG), pode fornecer material útil para diagnóstico. Em sismologia, a análise espectral dos sinais registrados antes e durante um evento sísmico (como uma erupção vulcânica ou um terremoto) fornece informações úteis sobre o movimento do solo associado a tais eventos e pode ajudar em sua previsão [56].

Na Seção 3.1 as definições da DEP tanto para sinais deterministas quanto para sinais aleatórios são introduzidas, e apresentam-se os conceitos necessários para obtenção da DEP de sinais caóticos. Passa-se então, na Seção 3.2, a revisar o cálculo da DEP de um mapa unidimensional utilizando-se como exemplo o mapa tenda inclinada. Na Seção 3.3 tecem-se as considerações finais.

### 3.1 DEP de sinais deterministas e aleatórios

Um sinal  $s(n)$  é considerado de potência quando sua potência média  $\mathcal{S}_m$ , definida pelo valor quadrático médio de  $s(n)$ , é finita e pertence ao intervalo  $0 < \mathcal{S}_m < \infty$ . Considere-se um sinal de potência  $s(n)$  determinista e real, não nulo apenas para  $n \geq 0$  e que  $s(n) = 0$  para  $n < 0$ . Define-se a Sequência de Autocorrelação (SAC)  $R(k)$  como [28]

$$R(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n-k). \quad (3.1)$$

Pode-se se mostrar [56], que a Densidade Espectral de Potência (DEP)  $\mathcal{S}(\omega)$  desse sinal pode ser dada pela Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de  $R(k)$ , ou seja,

$$\mathcal{S}(\omega) \triangleq \mathbb{F}[R(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k)e^{-j\omega k}, \quad (3.2)$$

em que  $\mathbb{F}[\cdot]$  é o operador TFTD.

Para se fazer a análise de um sinal por meio de simulações computacionais, no lugar da TFTD, que resulta em um sinal de tempo contínuo, aplica-se a Transformada de Fourier Discreta (TFD). A TFD é a discretização da TFTD, com frequência de amostragem  $\frac{2\pi}{N}$ , em que  $N$  é o número de pontos utilizados na TFD [57].

Para simplificar a notação neste trabalho, as transformadas obtidas de uma SAC de um sinal  $s(n)$  são representadas por  $\mathcal{S}(\omega)$ , devendo-se lembrar que  $\omega$  assume apenas valores discretos da forma  $\frac{2\pi}{N}l$ , em que  $0 \leq l \leq N-1$ .

Um ruído pode ser modelado como uma sequência aleatória, que consiste num conjunto de possíveis realizações em que cada uma delas possui uma densidade de probabilidade [56]. Essas sequências constituem um *processo estocástico* ou *aleatório*, em que o estudo é baseado em probabilidade e cada sequência  $s(n)$  é uma função-amostra do processo.

As funções-amostras nem sempre são absolutamente somáveis, conseqüentemente, uma TFTD direta não existe [56]. Em geral, os sinais aleatórios possuem uma potência média finita e podem ser caracterizados por uma DEP  $\mathcal{S}(\omega)$  [56].

A média de um processo aleatório é tomada sobre todas as funções-amostras do conjunto. No caso em que qualquer função-amostra é capaz caracterizar o conjunto, ou seja, as médias temporais coincidem com as médias amostrais para qualquer função-amostra, o processo estocástico é chamado de *ergódico* [55]. Note que esse conceito é semelhante

ao apresentado para mapas na Seção 2.4.

Para processos aleatórios a SAC é definida como a média das SACs de todas as funções-amostras, ou seja,

$$R(k) \triangleq \mathbb{E}[R(k)] = \mathbb{E} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n-k) \right], \quad (3.3)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é a esperança matemática tomada sobre todas as funções-amostras. Novamente a DEP do processo pode ser obtida por (3.2).

Para exemplificar essas definições tomam-se dois exemplos de DEP de sinais conhecidos e realizam-se simulações computacionais de forma a validar as técnicas usadas. Para isso utilizou-se dois exemplos com espectros bastante conhecidos, isto é, uma senoide e um processo ruído branco gaussiano.

Considere o sinal determinista  $s(n)$  que é uma função senoidal e não é nulo para  $n \geq 0$ . Ele é dado por

$$s(n) = \sin(\omega_0 n). \quad (3.4)$$

A SAC de  $s(n)$  é dada por

$$\begin{aligned} R(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n-k) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_0 n) \sin(\omega_0(n-k)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 - \omega_0(n-k)) - \cos(\omega_0 n + \omega_0(n-k))] \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} [\cos(\omega_0 k) - \cos(\omega_0(2n-k))] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0 k) - \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0(2n-k)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos(\omega_0 k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sendo a DEP de  $s(n)$  a TFTD da SAC, obtém-se [57]

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (3.6)$$

em que  $\delta(\cdot)$  é a função delta de Dirac.

Na Figura 3.1(a) é ilustrado um trecho da senoide  $s(n) = \sin(\omega_0 n)$  com  $\omega_0 = \frac{\pi}{10}$  e

período de 20 amostras. Na Figura 3.1(b) é mostrado o gráfico da SAC obtido numericamente utilizando-se (3.1). Observa-se que é uma cossenoide, como dado em (3.5). Na Figura 3.1(c) é mostrada a DEP do sinal obtida a partir de (3.2). Para essas simulações foram utilizados  $N = 10^4$  pontos. Nota-se que, como esperado, para  $\omega > 0$ , a DEP resultou em um impulso em  $\omega = \frac{\pi}{10}$ .

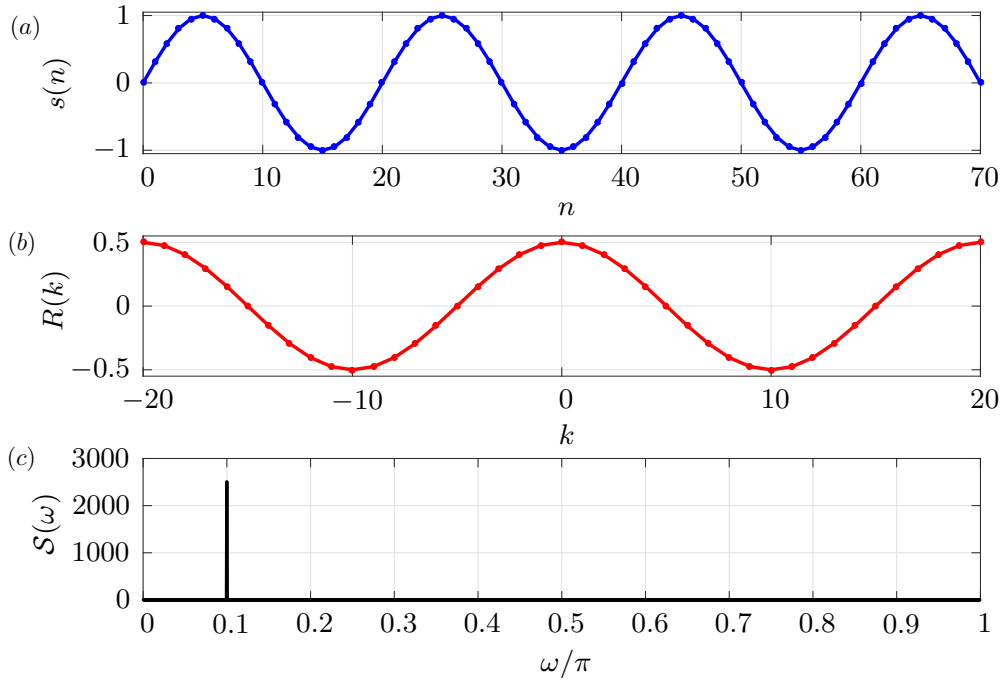


Figura 3.1: (a) Trecho de  $s(n) = \sin\left(\frac{\pi}{10}n\right)$ , (b) SAC e (c) DEP deste sinal.

O ruído branco gaussiano é um processo tal que suas funções-amostras são compostas por variáveis aleatórias gaussianas independentes com média nula e variância  $\sigma^2$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 R(k) &= \mathbb{E} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n-k) \right] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[s(n)s(n-k)] \\
 &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, a SAC de um processo ruído branco gaussiano é

$$R(k) = \sigma^2 \delta(k) \tag{3.8}$$

e pelo fato da DEP ser a TFTD da SAC, tem-se

$$\mathcal{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^2 \delta(k) e^{-j\omega k} = \sigma^2. \quad (3.9)$$

Nas Figuras 3.2(a) e (b) são ilustradas a SAC e a DEP obtidas numericamente a partir de uma função-amostra contendo  $N = 10^6$  pontos de um processo ruído branco gaussiano, com  $\sigma^2 = 1$ , utilizando-se (3.1) e (3.2). Observa-se que a DEP ocupa uma larga faixa de frequência e a SAC é da forma impulsiva.

Nas Figuras 3.2(c) e (d) são ilustradas a SAC e a DEP de um processo ruído branco gaussiano, tomando-se uma média de  $10^4$  funções-amostras, cada uma com  $N = 10^4$  pontos e  $\sigma^2 = 1$ , calculados utilizando-se (3.3) e (3.2). Como esperado, obteve-se espectro plano e SAC impulsiva. A partir da média de conjuntos obteve-se uma DEP mais suave em relação a da Figura 3.2(b).

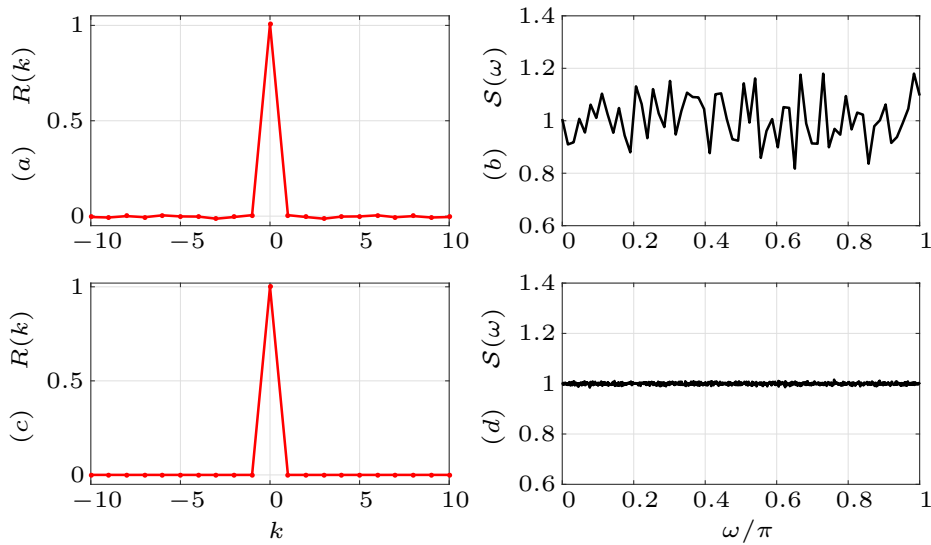


Figura 3.2: (a) SAC e (b) DEP de uma função-amostra do processo ruído branco gaussiano e (c) SAC e (d) DEP de um processo ruído branco gaussiano contendo  $10^4$  funções-amostras.

Na seção seguinte, é mostrado um resultado da literatura relativo à SAC e a DEP de um mapa linear por partes específico, o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$ .



## 3.2 Exemplo: DEP de sinais caóticos gerados pelo mapa $f_I(\cdot)$

Em muitos casos, sinais caóticos gerados por um mapa unidimensional  $f(\cdot)$  podem ser considerados como funções-amostras de um processo estocástico ergódico [42]. Cada função-amostra pode ser associada com uma condição inicial  $s_0$  que gera uma órbita por iterações do mapa  $f(\cdot)$ . Utilizando-se conceitos aplicados no tratamento de sinais aleatórios, vistos na seção anterior, e as ideias propostas em [42] pode-se definir e calcular a DEP do conjunto de sinais caóticos definidos por um mapa.

O desenvolvimento empregado para deduzir a SAC  $R(k)$  é inspirado no trabalho do Sakai e Tokumaru [38]. Dessa forma, define-se a SAC das órbitas de um mapa  $f(\cdot)$  ergódico como

$$R(k) \triangleq \mathbb{E}[s(n)s(n+k)], \quad (3.10)$$

sendo  $k$  um número inteiro e  $\mathbb{E}[\cdot]$  é a esperança matemática tomada sobre todas as condições iniciais que geram sinais caóticos.

Assim, considere-se para o mapa  $f_I(\cdot)$

$$x = s(n), \quad \text{e} \quad y = s(n+k) = f_I^k(x). \quad (3.11)$$

Pode-se determinar  $y$  completamente por  $x$ . Então, a função densidade invariante conjunta de  $x$  e  $y$ ,  $p(x, y)$ , pode ser escrita como

$$p(x, y) = p_*(x)p(y|x) = p_*(x)\delta(y - f_I^k(x)) \quad (3.12)$$

sendo que  $\delta(\cdot)$  é a função delta de Dirac. Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.10) e usando  $p_*(x) = 1/2$  que é a densidade invariante do mapa  $f_I(\cdot)$ , como visto na Seção 2.5, tem-se

$$\begin{aligned} R(k) &= \mathbb{E}[xy] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x, y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp_*(x)\delta(y - f_I^k(x))dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_I^k(x) dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

O mapa  $f_I(\cdot)$  constitui-se de dois segmentos de reta de inclinações de sinais opostos. A imagem de cada um desses segmentos é igual ao domínio  $U$  do mapa. Conseqüentemente, o gráfico  $f_I^k(s)$  consiste de  $2^k$  segmentos. Na Figura 3.3, é apresentada uma ilustração da construção de  $f_I^k(\cdot)$ . Na Figura 3.3(a) é ilustrado o mapa  $f_I(x)$  para  $\alpha = 0.2$  e na Figura 3.3(b), o mesmo mapa após uma iteração,  $f_I^2(x)$ . Na Figura 3.3(c) é apresentado

o gráfico de  $f_I^3(x)$  e na Figura 3.3(d) é mostrado um trecho do gráfico de  $f_I^k(x)$  para um  $k$  genérico [38]. Representa-se a  $m$ -ésima solução da equação  $f_I^k(x) = 1$  por  $a_{k,m}$  e por  $b_{k,m}$  as soluções da equação  $f_I^k(x) = -1$ , em que  $1 \leq m \leq 2^{k-1}$ .

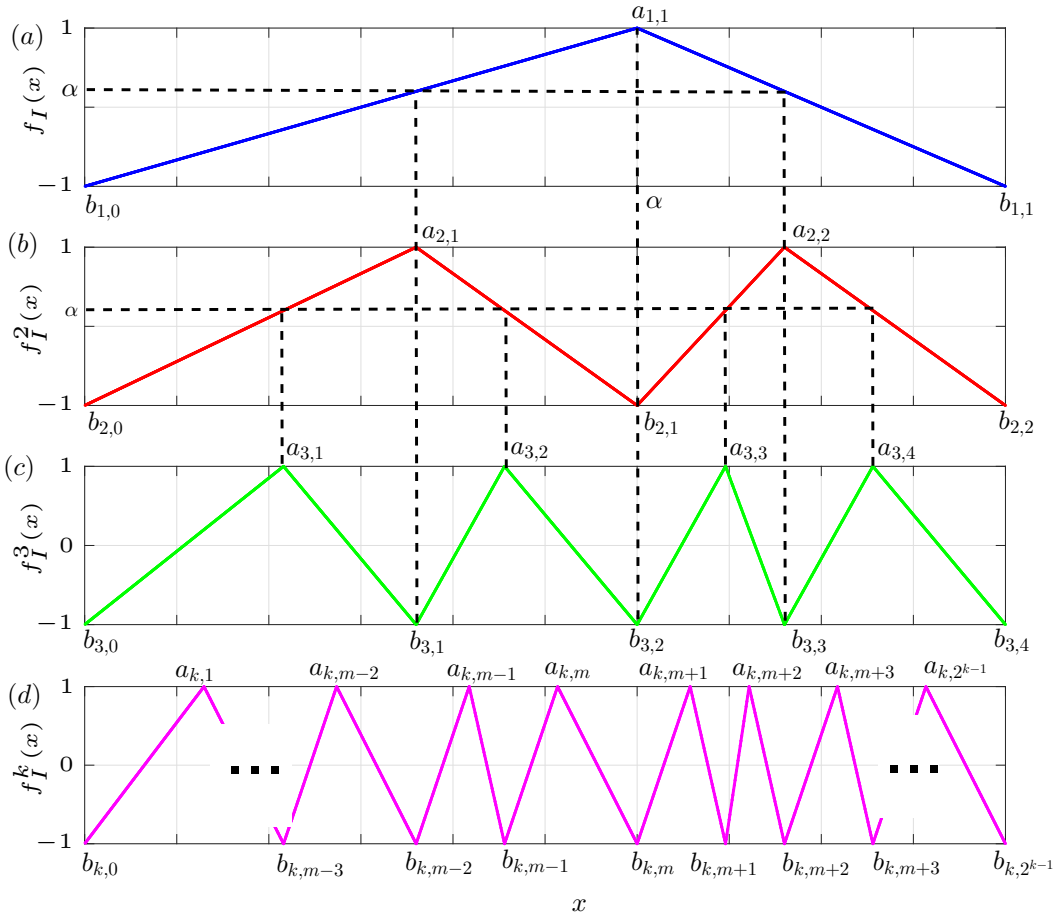


Figura 3.3: Exemplo de construção do mapa  $f_I^k(\cdot)$  para  $\alpha = 0.2$ . (a)  $f_I(x)$ ; (b)  $f_I^2(x)$ ; (c)  $f_I^3(x)$ ; (d)  $f_I^k(x)$ .

Os segmentos que compõem o mapa  $f_I^k(x)$  são descritos pelas equações:

- Segmento que passa por  $(b_{k,m-1}, -1)$  e  $(a_{k,m}, 1)$ :

$$y = \frac{2x - a_{k,m} - b_{k,m-1}}{a_{k,m} - b_{k,m-1}}. \quad (3.14)$$

- Segmento que passa por  $(a_{k,m}, 1)$  e  $(b_{k,m}, -1)$ :

$$y = \frac{2x - a_{k,m} - b_{k,m}}{a_{k,m} - b_{k,m}}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14)-(3.15) em (3.13), tem-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \underbrace{\int_{b_{k,m-1}}^{a_{k,m}} x \left( \frac{2x - a_{k,m} - b_{k,m-1}}{a_{k,m} - b_{k,m-1}} \right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{a_{k,m}}^{b_{k,m}} x \left( \frac{2x - a_{k,m} - b_{k,m}}{a_{k,m} - b_{k,m}} \right) dx}_{I_2}. \quad (3.16)$$

Calculando-se as integrais de (3.16) separadamente, obtém-se

$$I_1 = \frac{(a_{k,m} - b_{k,m-1})^2}{6} \quad \text{e} \quad I_2 = -\frac{(a_{k,m} - b_{k,m})^2}{6}. \quad (3.17)$$

Assim,

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_{k,m} - b_{k,m-1})^2 - (a_{k,m} - b_{k,m})^2]. \quad (3.18)$$

Para tornar a fórmula  $R(k)$  mais simples, busca-se uma forma recursiva para  $R(k+1)$  em função de  $R(k)$ . Calculando-se  $R(k+1)$  a partir de (3.18), obtém-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^k} [(a_{k+1,m} - b_{k+1,m-1})^2 - (a_{k+1,m} - b_{k+1,m})^2]. \quad (3.19)$$

Separando-se as parcelas de índices pares e ímpares, tem-se

$$R(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_{k+1,2m} - b_{k+1,2m-1})^2 - (a_{k+1,2m} - b_{k+1,2m})^2 + (a_{k+1,2m-1} - b_{k+1,2m-2})^2 - (a_{k+1,2m-1} - b_{k+1,2m-1})^2]. \quad (3.20)$$

Ao iterar uma vez o mapa, passa-se de  $f_I^k(x)$  para  $f_I^{k+1}(x)$ , como mostrado nas Figuras 3.4(a) e 3.4(b), em que  $w_1$  e  $w_2$  são raízes da equação  $f_I^k(x) = \alpha$ .

Dos gráficos da Figura 3.4, observa-se que

$$b_{k+1,2m-2} = b_{k,m-1}, \quad (3.21)$$

$$a_{k+1,2m-1} = w_1, \quad (3.22)$$

$$b_{k+1,2m-1} = a_{k,m}, \quad (3.23)$$

$$a_{k+1,2m} = w_2, \quad (3.24)$$

$$b_{k+1,2m} = b_{k,m}. \quad (3.25)$$

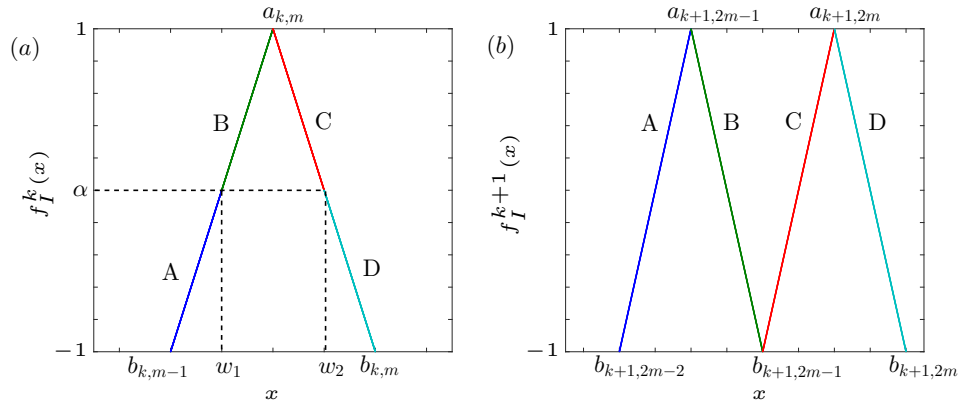


Figura 3.4: (a) Trecho do mapa  $f_I^k(x)$  e (b) trecho do mapa após uma iteração  $f_I^{k+1}(x)$ .

Para determinar  $w_1$  e  $w_2$ , substitui-se  $y$  por  $\alpha$  em (3.14) e (3.15), respectivamente e isola-se  $x$ . Desta forma, obtém-se

$$w_1 = \frac{\alpha + 1}{2} (a_{k,m} - b_{k,m-1}) + b_{k,m-1} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{\alpha + 1}{2} (a_{k,m} - b_{k,m}) + b_{k,m}. \quad (3.26)$$

Ao substituir as equações (3.21)-(3.26) em (3.20) e após algumas manipulações tem-se

$$\begin{aligned} R(k+1) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \left\{ \left[ \frac{\alpha + 1}{2} (a_{k,m} - b_{k,m}) + b_{k,m} - a_{k,m} \right]^2 - \left[ \frac{\alpha + 1}{2} (a_{k,m} - b_{k,m}) \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\alpha + 1}{2} (a_{k,m} - b_{k,m-1}) \right]^2 - \left[ \frac{\alpha + 1}{2} (a_{k,m} - b_{k,m-1}) + b_{k,m-1} - a_{k,m} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ao expandir os termos quadráticos do somatório e agrupar os termos semelhantes, chega-se a

$$R(k+1) = \frac{\alpha}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_{k,m} - b_{k,m-1})^2 - (a_{k,m} - b_{k,m})^2]. \quad (3.28)$$

Comparando (3.18) e (3.28), observa-se que

$$R(k+1) = \alpha R(k). \quad (3.29)$$

Usando o fato de que a densidade invariante do mapa  $f_I(\cdot)$  é uniforme no intervalo  $U = [-1, 1]$  e dada por  $p_*(s) = 1/2$ , veja (2.32), conclui-se que quase todas as órbitas possuem média nula e potência média  $\mathcal{S}_m$

$$\mathcal{S}_m = \mathbb{E} [s(n)^2] = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{3}, \quad (3.30)$$

para qualquer valor de  $\alpha$ .

Assim, a condição inicial dessa equação de diferenças é  $R(0) = \mathbb{E}[s(n)^2] = \mathcal{S}_m$ . Resolvendo-se (3.29) tem-se

$$R(k) = \frac{1}{3}\alpha^{|k|}. \quad (3.31)$$

Como visto na Seção 3.2, a DEP é obtida calculando-se a TFTD de  $R(k)$ , considerando-se  $k$  a variável temporal.

Neste caso,

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-k} e^{-j\omega k} \right] = \frac{1 - \alpha^2}{3(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega))}. \quad (3.32)$$

Nas Figuras 3.5(a) e (b) são ilustrados gráficos da SAC e DEP para alguns valores de  $\alpha$ . Nota-se que quando  $\alpha$  é positivo os sinais são passa-baixa. Consequentemente, a SAC decai monotonicamente com  $|k|$  e a DEP é concentrada nas baixas frequências. Quando  $\alpha$  é negativo os sinais gerados são passa-altas, nesse caso, a SAC oscila e a DEP é concentrada nas alta-frequências. Quando  $\alpha = 0$  têm-se uma DEP similar a um ruído branco.

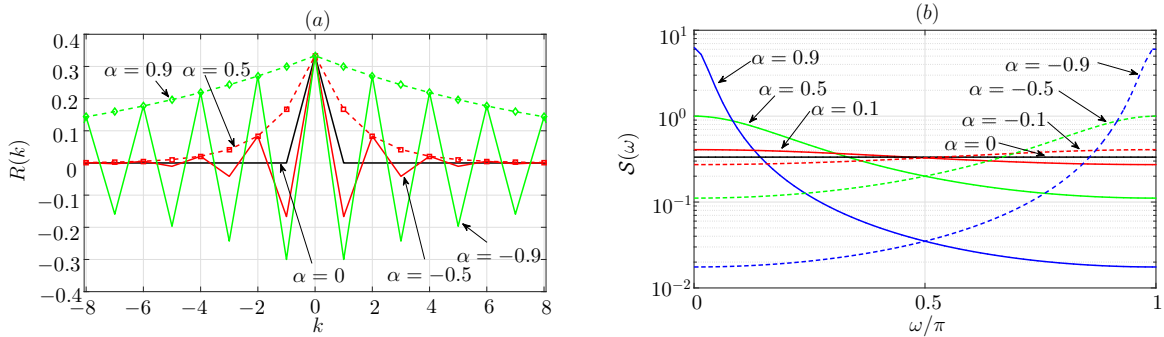


Figura 3.5: (a) SAC e (b) DEP para o mapa  $f_I(\cdot)$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

### 3.3 Considerações finais

Neste capítulo, foram apresentadas definições da DEP para sinais deterministas, aleatórios e caóticos. Também foram apresentados resultados da DEP provenientes da literatura, relacionados a sinais caóticos gerados por mapas lineares por partes, especificamente, o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$ . Esses resultados demonstraram a possibilidade de obtenção de sinais caóticos com características de alta e baixa frequência, incluindo sinais de banda larga.

Os resultados obtidos aqui servem de base para o estudo do mapa linear por partes mais geral explorado no capítulo seguinte.

# Capítulo 4

## Resultados principais I: DEP para o mapa linear por partes

No capítulo anterior, revisitou-se a literatura relacionada à caracterização espectral de sinais caóticos gerados por mapas lineares por partes [31, 32, 34, 35, 39]. Obtiveram-se expressões analíticas para a sequência de autocorrelação (SAC) e densidade espectral de potência (DEP) desses sinais. Adicionalmente, investigou-se numericamente a SAC e a DEP dos mapas quadrático e de Hénon.

Nesse capítulo propõem-se a expressão analítica da SAC e DEP para um mapa linear por partes com  $r$  segmentos com inclinações positivas ou negativas  $f_L(\cdot)$ , considera-se esse resultado uma generalização que possui os mapas lineares por parte do capítulo anterior como casos particulares, sendo esta uma contribuição original deste trabalho. Espera-se assim preencher uma lacuna referente a estudos analíticos de espectro de sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais.

Na Seção 4.2 são obtidos resultados analíticos da SAC e DEP. Os casos particulares para  $r = 2$ ,  $r = 3$  e  $r = 4$  segmentos são apresentados na Seção 4.3. Por fim, discute-se os resultados e possíveis trabalhos futuros na Seção 4.5.

### 4.1 O mapa linear por partes $f_L(\cdot)$ proposto e suas propriedades

Nesta seção apresenta-se o mapa linear por partes  $f_L(\cdot)$  analisado nessa tese de doutoramento. Além disso, mostra-se alguns mapas que são casos particulares de  $f_L(\cdot)$ .

O mapa  $f_L : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  é definido por  $s(n + 1) = f(s(n))$ , em que, para um

ponto  $s \in [\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell]$ ,  $1 \leq \ell \leq r$ ,

$$f_L(s) = \beta_\ell \left[ \frac{2s - (\alpha_\ell + \alpha_{\ell-1})}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}} \right], \quad (4.1)$$

$n \in \mathbb{N}$ ,  $s(0) \in [-1, 1[$ , com  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$ . A cada  $\alpha_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq r$  associa-se um  $\beta_\ell \in \{-1, 1\}$ . Para facilitar a notação, define-se os vetores coluna  $r$ -dimensionais  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  e  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_r]^T$ .

Na Figura 4.1(a) é mostrado um exemplo de  $f_L(\cdot)$  para  $r = 6$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [-0.3 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.8 \ 1]^T$  e  $\boldsymbol{\beta} = [-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$ . Na Figura 4.1(b) mostra-se dois trechos de sinal desse mapa com condições iniciais próximas,  $s(0) = 0.6$  e  $s(0) = 0.6 + 10^{-9}$ , deixando-se explícita a DSCI.

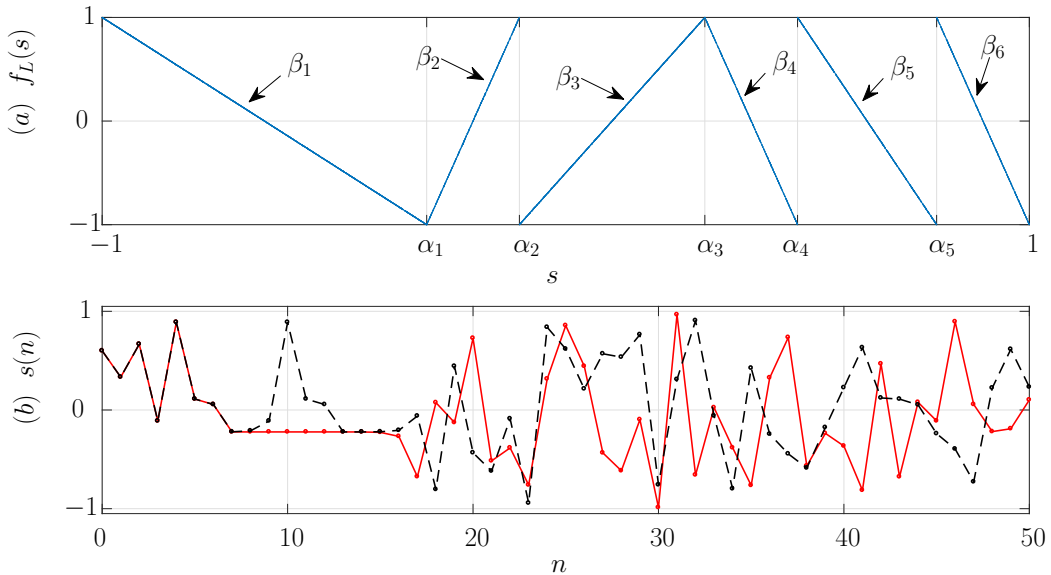


Figura 4.1: (a) O mapa  $f_L(\cdot)$  com  $r = 6$  e (b) duas órbitas com  $s(0) = 0.6$  (linha sólida) e  $s(0) = 0.6 + 10^{-9}$  (linha tracejada).

Com relação à densidade invariante de  $f_L(\cdot)$ , pode-se enunciar o Teorema 1 a seguir.

**Teorema 1.** *A densidade invariante para o mapa  $f_L(\cdot)$  é uniforme e vale  $p_*(s) = \frac{1}{2}$ ,  $s \in U$ .*

*Demonstração.* Para calcular a densidade invariante, toma-se um intervalo  $[-1, s] \subset U$  com contra-imagem dada por

$$f_L^{-1}([-1, s]) = [-1, s_1] \cup [s_2, \alpha_2] \cup \dots \cup [s_{r-1}, \alpha_{r-1}] \cup [s_r, 1], \quad (4.2)$$

como ilustrada na Figura 4.2.



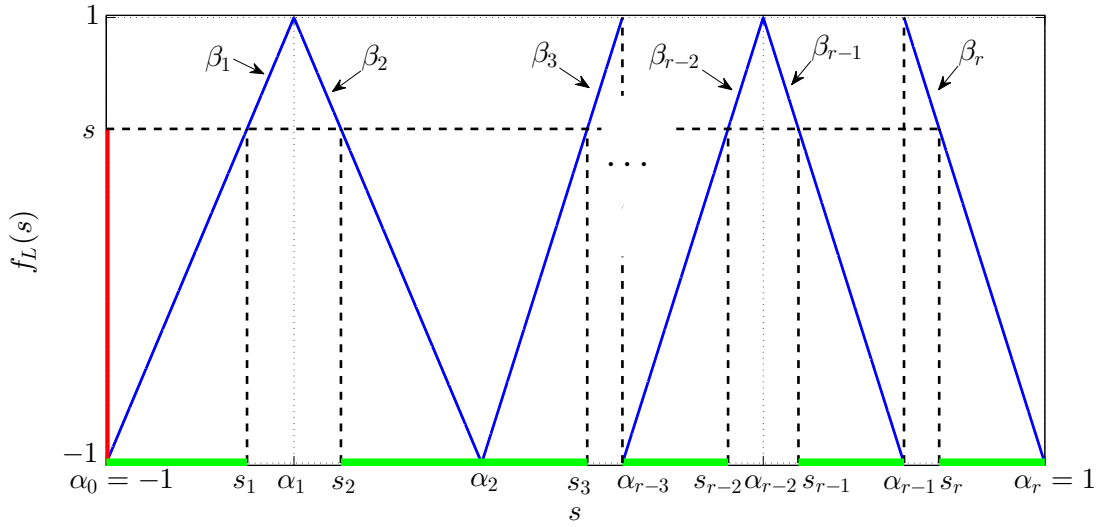


Figura 4.2: A contra-imagem do intervalo  $[-1, s]$  pelo mapa  $f_L(\cdot)$ .

Os valores  $s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r$  podem ser encontrados por meio das equações de reta que compõem o mapa  $f_L(s_\ell) = s$ . Assim,

$$s = \beta_\ell \left[ \frac{2s_\ell - (\alpha_\ell + \alpha_{\ell-1})}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}} \right] \Rightarrow s_\ell = \frac{\beta_\ell (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}) s + (\alpha_\ell + \alpha_{\ell-1})}{2} \quad \text{para } 1 \leq \ell \leq r. \quad (4.3)$$

Dessa forma, o operador de Frobenius-Perron  $\mathcal{P}(\cdot)$  aplicado sobre uma densidade  $p(s)$ , para o mapa  $f_L(\cdot)$  é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p(s)) &= \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([-1, s])} p(u) du \\ &= \frac{d}{ds} \left( \int_{-1}^{s_1} p(u) du + \int_{s_2}^{\alpha_2} p(u) du + \dots + \int_{s_{r-1}}^{\alpha_{r-1}} p(u) du + \int_{s_r}^1 p(u) du \right) \\ &= \frac{d[Q(s_1) - Q(-1)]}{ds} + \frac{d[Q(\alpha_2) - Q(s_2)]}{ds} + \dots + \frac{d[Q(\alpha_{r-1}) - Q(s_{r-1})]}{ds} + \frac{d[Q(1) - Q(s_r)]}{ds} \\ &= \frac{dQ(s_1)}{ds} - \frac{dQ(-1)}{ds} + \frac{dQ(\alpha_2)}{ds} - \frac{dQ(s_2)}{ds} + \dots + \frac{dQ(\alpha_{r-1})}{ds} - \frac{dQ(s_{r-1})}{ds} + \frac{dQ(1)}{ds} - \frac{dQ(s_r)}{ds}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que  $\int p(u) du = Q(u)$ . Substituindo-se (4.3) em (4.4) e eliminando-se as primitivas que resultam em zero obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p(s)) &= \frac{d}{ds} Q \left( \frac{\beta_1(\alpha_1 + 1)s + (\alpha_1 - 1)}{2} \right) - \frac{d}{ds} Q \left( \frac{\beta_2(\alpha_2 - \alpha_1)s + (\alpha_2 + \alpha_1)}{2} \right) \\ &+ \dots - \frac{d}{ds} Q \left( \frac{\beta_{r-1}(\alpha_{r-1} - \alpha_{r-2})s + (\alpha_{r-1} + \alpha_{r-2})}{2} \right) - \frac{d}{ds} Q \left( \frac{\beta_r(1 - \alpha_{r-1})s + (\alpha_{r-1} + 1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1)p(s_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)p(s_2) + (\alpha_{r-1} - \alpha_{r-2})p(s_{r-1}) + \dots + (1 - \alpha_{r-1})p(s_r)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De (4.5), note que para  $p(s) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{P}(p(s)) = \frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1)\frac{1}{2} + \dots + (1 - \alpha_{r-1})\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$ . Assim, a densidade invariante para o mapa  $f_L(\cdot)$  é

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad \text{para } -1 \leq s \leq 1. \quad (4.6)$$

e o teorema está demonstrado.  $\square$

O valor esperado das órbitas geradas pelo mapa  $f_L(\cdot)$  é

$$\bar{m}_s = \mathbb{E}[s] = \int_{-1}^1 s p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s ds = 0, \quad (4.7)$$

e sua potência média

$$\mathcal{S}_m = \mathbb{E}[s^2] = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}, \quad (4.8)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador esperança matemática [55].

O expoente de Lyapunov  $h$  pode ser calculado para o mapa  $f_L(\cdot)$  usando-se (2.26) e (4.6) [51],

$$\begin{aligned} h &= \int_{-1}^1 \ln |f'_L(s(n, s_0))| p_*(s) ds, \\ &= \int_{-1}^{\alpha_1} \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{2}{\alpha_1 + 1} \right| \right) ds + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{2}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \right) ds + \dots + \int_{\alpha_{r-1}}^1 \frac{1}{2} \ln \left( \left| \frac{2}{1 - \alpha_{r-1}} \right| \right) ds \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\alpha_1 + 1} \right| \right] s \Big|_{-1}^{\alpha_1} + \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \right] s \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \dots + \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{1 - \alpha_{r-1}} \right| \right] s \Big|_{\alpha_{r-1}}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{\ell=1}^r (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}) \ln \left( \frac{2}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}} \right) \right] > 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que  $\alpha_0 = -1$  e  $\alpha_r = 1$ .

## 4.2 Caracterização temporal e espectral das órbitas do mapa $f_L(\cdot)$

Assim, considere-se

$$x = s(n), \quad \text{e} \quad y = s(n+k) = f_L^k(x). \quad (4.10)$$

Então, substituindo (4.10) em (3.10) que é a definição para  $R(k)$ , de forma análoga ao que foi feito para calcular a SAC do mapa  $f_I(\cdot)$  tem-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_L^k(x) dx \quad (4.11)$$

Para encontrar  $R(k)$  é necessário obter uma expressão para  $f_L^k(x)$ .

O desenvolvimento de (4.11) depende da obtenção da expressão para  $f^k(x)$ , isto é, a  $k$ -ésima iteração de  $f_L(\cdot)$ . O mapa  $f_L(\cdot)$  é composto por  $r$  segmentos lineares com inclinações positivas ou negativas. A imagem de cada um desses segmentos é o domínio  $U = [-1, 1[$ . Dessa maneira, quando se itera  $f_L(\cdot)$ , o número de segmentos lineares é multiplicado por  $r$ , i.e.,  $f_L^k(\cdot)$  é formado por  $r^k$  segmentos. A  $m$ -ésima extremidade dos segmentos de  $f_L^k(\cdot)$  é representada por  $a_{k,m}$  e o sinal que representa a inclinação desse segmento é dada por  $\widehat{b}_{k,m}$ , para  $1 \leq m \leq r^k$  e  $k = 1, 2, \dots$

O  $m$ -ésimo segmento que forma  $f_L^k(\cdot)$  tem equação

$$f_L^k(x) = \widehat{b}_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{a_{k,m} - a_{k,m-1}}, \quad a_{k,m-1} \leq x < a_{k,m}, \quad (4.12)$$

com  $\widehat{b}_{k,m} \in \{-1, 1\}$ . Substituindo (4.12) em (4.11) obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^k} \underbrace{\int_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} x \left( \widehat{b}_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{a_{k,m} - a_{k,m-1}} \right) dx}_I. \quad (4.13)$$

Solucionando a integral  $I$ ,

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{2x^3 \widehat{b}_{k,m}}{3(a_{k,m} - a_{k,m-1})} - \frac{(a_{k,m} + a_{k,m-1}) x^2 \widehat{b}_{k,m}}{2(a_{k,m} - a_{k,m-1})} \right]_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} \\ &= \widehat{b}_{k,m} \frac{a_{k,m}^3 - 3a_{k,m}^2 a_{k,m-1} + 3a_{k,m} a_{k,m-1}^2 - a_{k,m-1}^3}{6(a_{k,m} - a_{k,m-1})} \\ &= \widehat{b}_{k,m} \frac{(a_{k,m} - a_{k,m-1})^2}{6}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.13),

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \widehat{b}_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2. \quad (4.15)$$

Calculando-se  $R(k+1)$  a partir de (4.15), obtém-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k+1}} \widehat{b}_{k+1,m} (a_{k+1,m} - a_{k+1,m-1})^2. \quad (4.16)$$

Ao iterar uma vez o mapa, cada segmento é transformado em  $r$  novos segmentos. Por exemplo, o segmento no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$  associado à inclinação  $\widehat{b}_{k,m}$  mostrado na Figura 4.3(a) é transformado nos  $r$  segmentos com os limites e inclinações mostrados na Figura 4.3(b).

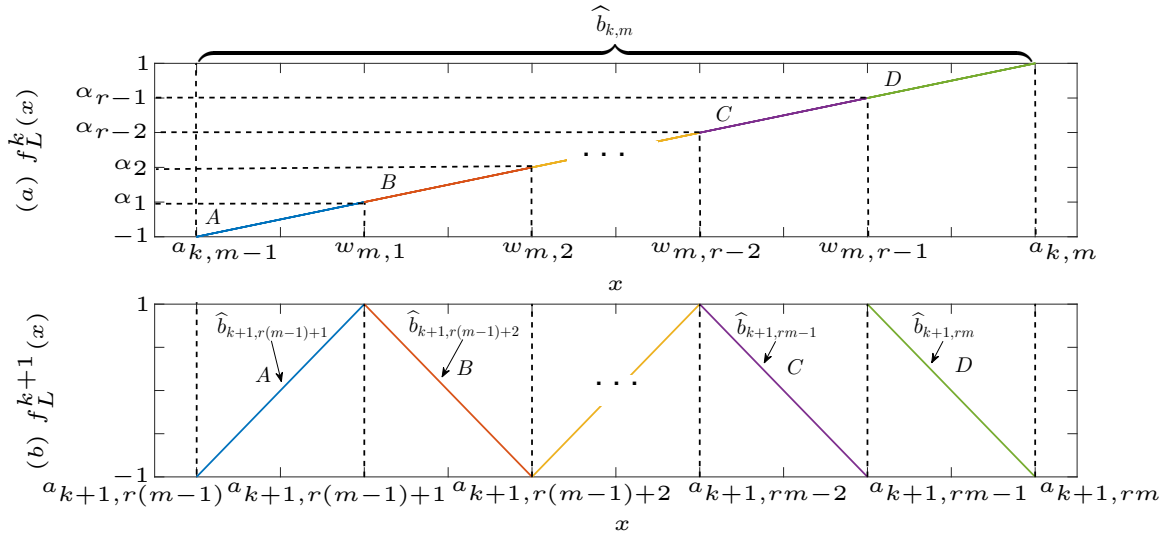


Figura 4.3: (a) Trecho genérico de  $f^k(x)$  e (b)  $f^{k+1}(x)$ .

Definem-se  $w_{m,\ell}$ ,  $0 \leq \ell \leq r$  tais que  $f_L^k(w_{m,\ell}) = \alpha_\ell$  no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$ . Usando (4.12),

$$w_{m,\ell} = \frac{\widehat{b}_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1}) \alpha_\ell + (a_{k,m} + a_{k,m-1})}{2}. \quad (4.17)$$

As abscissas  $w_{m,\ell}$  são os pontos extremos dos  $r$  segmentos que compõem  $f^{k+1}(x)$  no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$ . Assim, comparando as Figuras 4.3(a) e (b),

$$\begin{cases} a_{k+1,r(m-1)+\ell} = w_{m,\ell} & 0 \leq \ell \leq r \\ \widehat{b}_{k+1,r(m-1)+\ell} = \widehat{b}_{k,m} \beta_\ell & 1 \leq \ell \leq r \end{cases}. \quad (4.18)$$

Rescrevendo-se (4.16) como uma somatória de  $r^k$  somas de  $r$  parcelas e usando (4.17)-

(4.18) tem-se

$$\begin{aligned}
R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{\ell=1}^r \widehat{b}_{k+1, r(m-1)+\ell} (a_{k+1, r(m-1)+\ell} - a_{k+1, r(m-1)+\ell-1})^2 \\
&= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{\ell=1}^r \widehat{b}_{k,m} \beta_\ell (w_{m,\ell} - w_{m,\ell-1})^2 \\
&= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{\ell=1}^r \widehat{b}_{k,m} \beta_\ell \left( \frac{\widehat{b}_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1}) (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1})}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \widehat{b}_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \sum_{\ell=1}^r \beta_\ell \left( \frac{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \widehat{b}_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

em que  $\widehat{b}_{k,m}^2 = 1$  e define-se

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r \beta_\ell (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1})^2. \tag{4.20}$$

Comparando (4.15) e (4.19)

$$R(k+1) = \psi R(k). \tag{4.21}$$

Usando-se (4.8) como condição inicial em (4.21) obtém-se a SAC

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}. \tag{4.22}$$

Calculando-se a TFTD de (4.22), finalmente obtém-se a DEP  $\mathcal{S}(\omega)$

$$\boxed{\mathcal{S}(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 - 2 \cos(\omega) \psi + \psi^2)}}. \tag{4.23}$$

Essa equação é uma generalização dos resultados apresentados na literatura [31, 32, 34, 35, 37, 39]. Sendo assim, o espectro associado pode apresentar comportamento diversos, que serão explorados nos exemplos numéricos e casos particulares exemplificados nas próxima seções.

### 4.3 Exemplos numéricos

Nessa seção estuda-se analiticamente alguns casos particulares da expressão (4.23). Em particular, considera-se os casos  $r = 2$ ,  $r = 3$  e  $r = 4$  segmentos.

### 4.3.1 Mapa com $r = 2$ segmentos

Considere-se  $\alpha_1 = \alpha$ . Nesse caso, há quatro possíveis  $\beta$ , e suas DEPs são mostradas na Figura 4.4. O caso  $\beta = [1 \ 1]^T$  corresponde ao mapa de Bernoulli estudado em [34, 39]. Nesse caso, a DEP é concentrada na baixa frequência para todos os valores do parâmetro  $\alpha$ . Já no caso,  $\beta = [1 \ -1]^T$  é o mapa tenda inclinada analisado em [31]. Mostra-se aqui que é possível obter sinais caóticos com características de baixa e alta frequência dependendo do valor de  $\alpha$ .

Os resultados numéricos mostram que quando os segmentos possuem inclinações positivas a potência concentra-se nas baixas frequências como ilustrado na Figura 4.4(a). Quando as inclinações são negativas a potência concentra-se nas altas frequências como mostrado na Figura 4.4(d). Quando os segmentos possuem inclinações com sinais opostos, o segmento com maior comprimento prevalece. Assim, quando os comprimento dos segmentos são iguais a DEP equivale-se à um ruído branco como pode se verificar nas Figuras 4.4(b) e (c) para  $\alpha = 0$ .

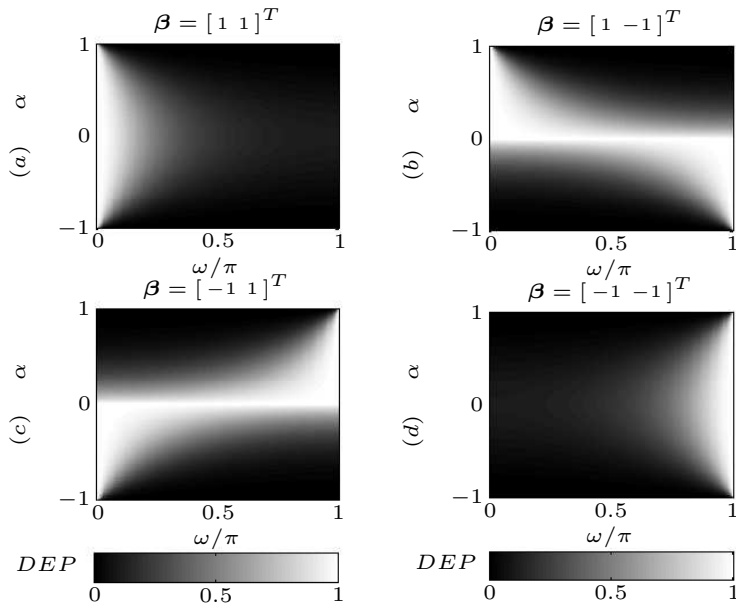


Figura 4.4: DEP de  $f_L(\cdot)$  para  $r = 2$  e  $\alpha \in (-1, 1)$ .

### 4.3.2 Mapa com $r = 3$ segmentos

Na Figura 4.5 mostra-se a DEP como função de  $\alpha$  para oito possíveis  $\beta$ . Nas Figuras 4.5(a), (b) e (e) a DEP constitui-se preponderantemente concentrada nas baixas frequências ( $\beta = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\beta = [1 \ 1 \ -1]^T$  e  $\beta = [1 \ -1 \ -1]^T$ , respectivamente). Já para  $\beta = [-1 \ -1 \ -1]^T$ ,  $\beta = [1 \ -1 \ -1]^T$  e  $\beta = [-1 \ -1 \ 1]^T$  a DEP concentra-se nas altas frequências

para qualquer valor de  $\alpha$  como mostrado nas Figuras 4.5(d), (g) e (h), respectivamente. Nos casos restantes,  $\beta = [1 \ -1 \ 1]^T$  e  $\beta = [-1 \ 1 \ -1]^T$  a DEP concentra-se nas baixas ou nas altas frequências dependendo do valor de  $\alpha$ , como pode se verificar nas Figuras 4.5(c) e (f). Nesses casos, para  $\alpha = \sqrt{2} - 1$ ,  $\psi = 0$  em (4.20) e obtém-se um espectro branco.

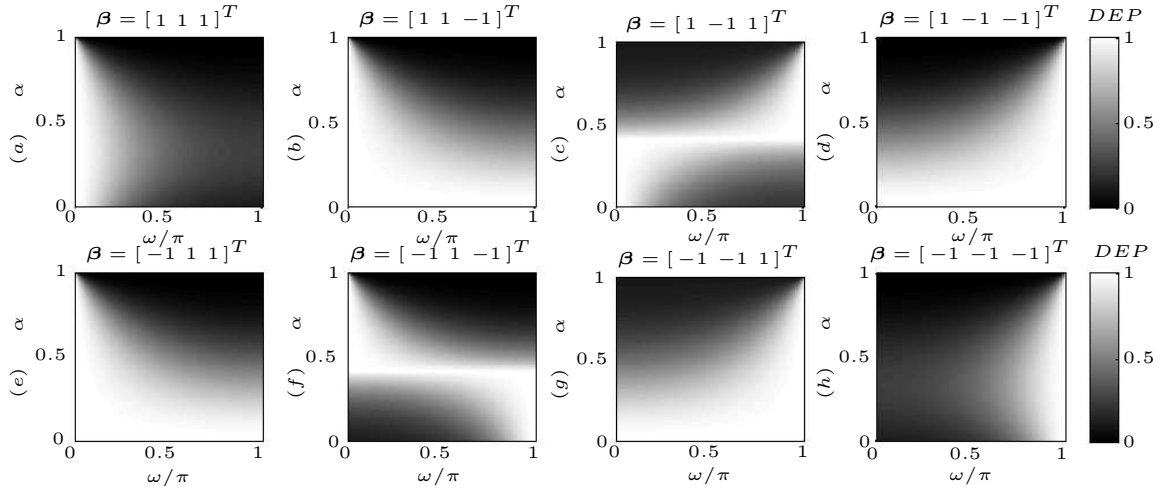


Figura 4.5: DEP de  $f_L(\cdot)$  com  $r = 3$  e  $\alpha \in (0, 1)$ .

### 4.3.3 Mapa com $r = 4$ segmentos

Considere-se  $\alpha_1 = -\alpha$ ,  $\alpha_2 = 0$  e  $\alpha_3 = \alpha$  para  $\alpha \in (0, 1)$ . Na Figura 4.6 mostra-se a DEP para 16 possíveis  $\beta$ . Nota-se simetria nas diferentes possibilidades de  $\beta$  e verifica-se que quando  $\beta_2 = -\beta_3$  e  $\beta_1 = -\beta_4$ , a DEP é equivalente ao espectro branco para todos os valores de  $\alpha$ , como ilustrado nas Figuras 4.6(d), (f), (l) e (n). Nos casos restantes é possível observar diferentes características espectrais como função de  $\alpha$ .

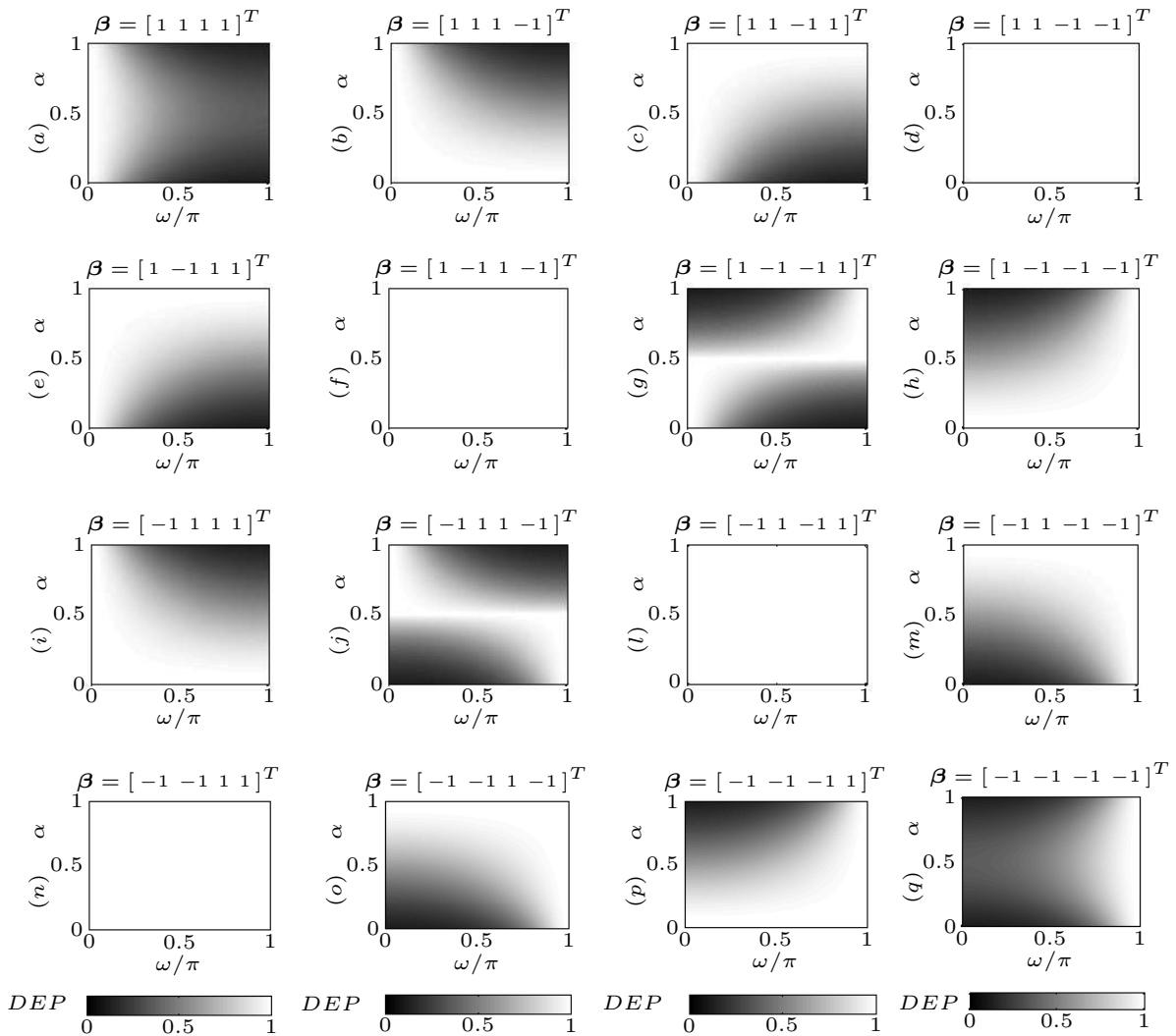


Figura 4.6: DEP de  $f_L(\cdot)$  com  $r = 4$  e  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 4.4 Casos particulares do mapa $f_L(\cdot)$ na literatura

Nesta seção, é derivada a expressão analítica para a SAC e DEP de alguns casos particulares do mapa  $f_L(\cdot)$  presentes na literatura. A Tabela 4.1 lista esses casos particulares do mapa  $f_L(\cdot)$  junto com seus respectivos expoentes de Lyapunov  $h$  obtidos de (4.9). Note que todos esses expoentes são positivos.



Tabela 4.1: Parâmetros e expoente de Lyapunov  $h$  para casos particulares do mapa  $f_L(\cdot)$ .

Mapas	Referências	$\beta$	$\alpha$	$h$
Mapa tenda inclinada $f_T(\cdot)$	Eisencraft et al. [31]	$[1 \ -1]^T$	$[\alpha \ 1]^T$	$\frac{1}{2} [(\alpha + 1) \ln(\frac{2}{\alpha+1}) + (1 - \alpha) \ln(\frac{2}{1-\alpha})]$
Mapa com 3 segmentos $f_F(\cdot)$	Feltekhh et al. [32]	$[1 \ -1 \ 1]^T$	$[-\alpha \ \alpha \ 1]^T$	$[(1 - \alpha) \ln(\frac{2}{1-\alpha}) + \alpha \ln(\frac{1}{\alpha})]$
Mapa com 2 segmentos $f_B(\cdot)$	Costa et al. [39]	$[1 \ 1]^T$	$[\alpha \ 1]^T$	$\frac{1}{2} [(\alpha + 1) \ln(\frac{2}{\alpha+1}) + (1 - \alpha) \ln(\frac{2}{1-\alpha})]$
Mapa com $r$ segmentos $f_B(\cdot)$	Costa et al. [34]	$[1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]_{r \times 1}^T$	$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{r-1} \ 1]^T$	$\frac{1}{2} \left[ \sum_{\ell=1}^r (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}) \ln\left(\frac{2}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}}\right) \right]$
Mapa multimodal $f_\Lambda(\cdot)$	Sahnoune e Berkani [35]	$[1 \ -1 \ \dots \ 1 \ -1]_{r \times 1}^T$	$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{r-1} \ 1]^T$	$\frac{1}{2} \left[ \sum_{\ell=1}^r (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}) \ln\left(\frac{2}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}}\right) \right]$
Mapa com $r$ segmentos $f_S(\cdot)$	Sahnoune e Berkani [37]	$[-1 \ -1 \ \dots \ -1 \ -1]_{r \times 1}^T$	$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{r-1} \ 1]^T$	$\frac{1}{2} \left[ \sum_{\ell=1}^r (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}) \ln\left(\frac{2}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}}\right) \right]$

### 4.4.1 Mapa tenda inclinada $f_I(\cdot)$

O mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  é composto por dois segmentos lineares com inclinações distintas, como visto na Tabela 4.1, em que  $\alpha_1 = \alpha$  com  $\alpha \in (-1, 1)$ . Esse parâmetro determina o pico da tenda e define a família de mapas [31]. Na Figura 4.7(a) tem-se o mapa  $f_I(\cdot)$  com  $\alpha = 0.6$  e duas órbitas com condições iniciais próximas  $s(0) = 0.2$  (linha sólida) e  $s(0) = 0.2 + 10^{-9}$  (linha tracejada) na Figura 4.7(b). Nota-se claramente a DSCI.

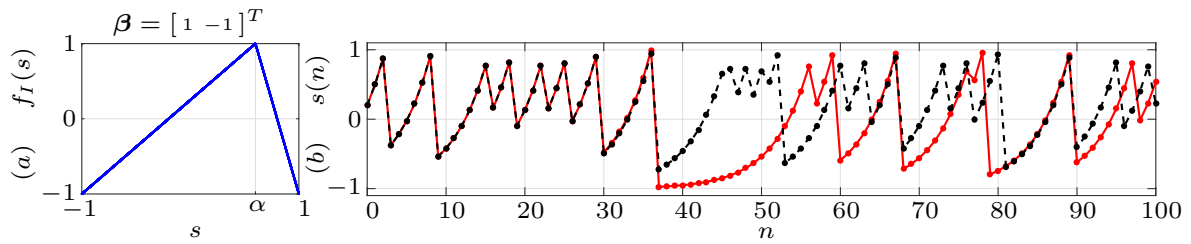


Figura 4.7: (a) Mapa  $f_I(\cdot)$  e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais  $s(0) = 0.2$  (linha sólida),  $s(0) = 0.2 + 10^{-9}$  (linha tracejada) e o parâmetro  $\alpha = 0.6$ .

A SAC e a DEP de  $f_I(\cdot)$  podem ser obtidas utilizando-se de (4.22) e (4.23). De (4.20),

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^2 \beta_{\ell} (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})^2 = \frac{1}{4} (\beta_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2) \\ &= \frac{1}{4} ((\alpha + 1)^2 - (1 - \alpha)^2) = \alpha. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Assim, a SAC é

$$R(k) = \frac{1}{3} \alpha^{|k|} \quad (4.25)$$

e sua DEP é dada por

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{1 - \alpha^2}{3(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega))}. \quad (4.26)$$

A SAC e a DEP obtidas são equivalentes as mostradas na Figura 3.5, como esperado, vide Seção 3.2.

### 4.4.2 Mapa com 3 segmentos $f_F(\cdot)$

Feltek et al. [32] propuseram o mapa  $f_F(\cdot)$  esse mapa possui três segmentos lineares sendo que o segmento central é o único com inclinação negativa seus parâmetros são dados na Tabela 4.1 em que  $\alpha_1 = -\alpha$  e  $\alpha_2 = \alpha$  para o qual  $\alpha \in (0, 1)$  é o parâmetro que define o pico e o vale desse mapa. Na Figura 4.8(a) mostra-se o mapa  $f_F(\cdot)$  com  $\alpha = 0.6$  e suas respectivas órbitas com  $s(0) = 0.3$  (linha sólida) e  $s(0) = 0.3 + 10^{-9}$  (linha tracejada),

como ilustrado na Figura 4.8(b).

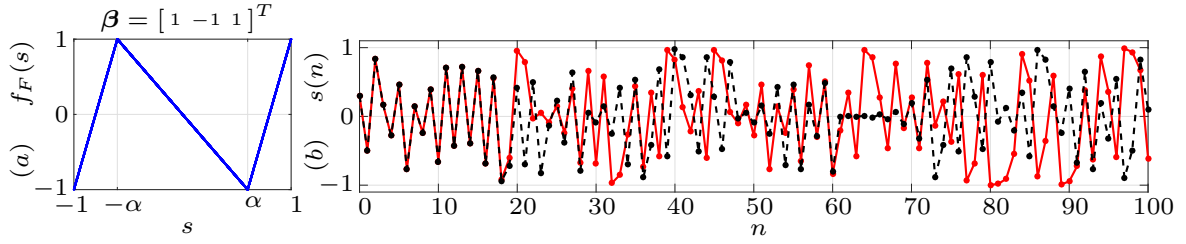


Figura 4.8: (a) Mapa  $f_F(\cdot)$  e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais  $s(0) = 0.3$  (linha sólida),  $s(0) = 0.3 + 10^{-9}$  (linha tracejada) e o parâmetro  $\alpha = 0.6$ .

Considere-se  $r = 3$ , com  $\alpha_1 = -\alpha$  e  $\alpha_2 = \alpha$  equivalente ao realizado por [32].

Feltechk et al. [32] analisou o caso em que  $\beta = [1 \ -1 \ 1]^T$ . Assim, toma-se (4.20),

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^3 \beta_{\ell} (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})^2 = \frac{1}{4} (\beta_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \beta_3 (\alpha_3 - \alpha_2)^2) \\ &= \frac{1}{4} ((-\alpha + 1)^2 - (2\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2) = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Então, usando-se (4.22),

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{2} \right)^{|k|} \quad (4.28)$$

e

$$\mathcal{S}(\omega) = -\frac{-3 - 4\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4}{5 - 4 \cos(\omega) + 4(2 \cos(\omega) - 1)\alpha + 2(2 \cos(\omega) + 1)\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4}. \quad (4.29)$$

Essas equações concordam com obtido em [32].

Na Figura 4.9(a) e (b) são mostrados gráficos da SAC e da DEP para alguns valores de  $\alpha$ . Os sinais gerados por esse mapa possuem características de passa-alta, passa-baixa e banda larga quando  $\alpha = \sqrt{2} - 1$ .

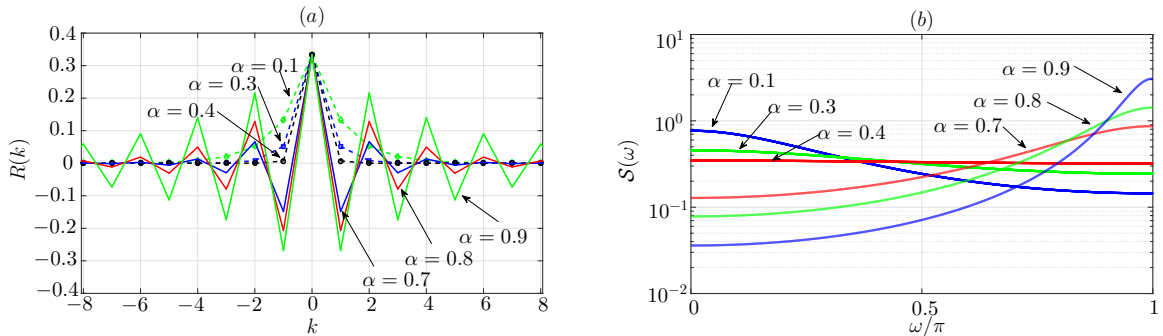


Figura 4.9: (a) SAC e (b) DEP para o mapa  $f_F(\cdot)$ .

### 4.4.3 Mapa com $r$ segmentos com inclinações positivas $f_B(\cdot)$

O mapa  $f_B(\cdot)$  analisado em [34] e definido na Tabela 4.1 possui todos seus  $r$  segmentos com inclinações positivas em que  $r \geq 2$ . Na Figura 4.10(a) é mostrado um exemplo do mapa de Bernoulli com  $r = 7$  segmentos em que  $\alpha = [-0.5 \ -0.3 \ -0.1 \ 0.2 \ 0.7 \ 0.8 \ 1]^T$  e na Figura 4.10(b) trechos de sinal desse mapa com condições iniciais próximas  $s(0) = 0.3$  (linha sólida) e  $s(0) = 0.3 + 10^{-9}$  (linha tracejada). Esse mapa possui o mapa de Bernoulli  $f_B(\cdot)$  com  $\beta = [1 \ 1]^T$  e  $\alpha = [\alpha \ 1]^T$  estudado detalhadamente em [39], como caso particular.

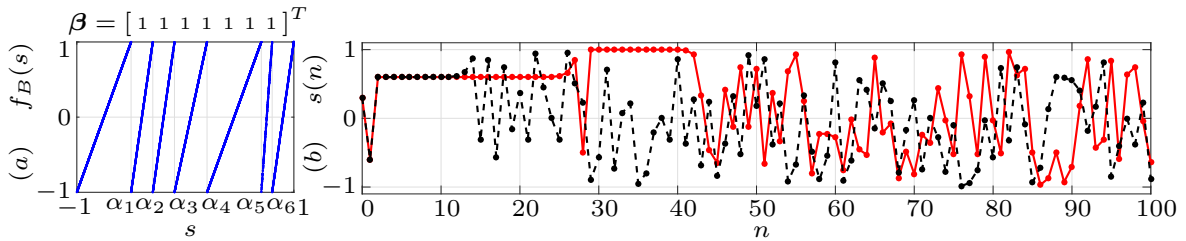


Figura 4.10: (a) Mapa  $f_B(\cdot)$  e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais  $s(0) = 0.3$  (linha sólida),  $s(0) = 0.3 + 10^{-9}$  (linha tracejada).

O mapa  $f_B(\cdot)$  tem  $r \geq 2$  segmentos com inclinações positivas, conforme descrito em [34]. Os vetores  $\beta$  e  $\alpha$  estão listados na Tabela 4.1. A seguir, são analisadas analiticamente as características temporais e espectrais de alguns casos particulares do mapa  $f_B(\cdot)$ .

Inicialmente é explorado o mapa de Bernoulli  $f_B(\cdot)$  com  $r = 2$  segmentos [34, 39], considera-se nesse caso  $\alpha_1 = \alpha$ .

A partir da expressão (4.20), tem-se

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^2 \beta_{\ell} (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})^2 = \frac{1}{4} (\beta_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2) \\ &= \frac{1}{4} ((\alpha + 1)^2 + (1 - \alpha)^2) = \frac{1 + \alpha^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando-se (4.30) em (4.22), tem-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{1 + \alpha^2}{2} \right)^{|k|}. \quad (4.31)$$

Observa-se que a expressão derivada da SAC é equivalente à encontrada em [39]. Dessa forma pode-se concluir que a DEP é

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{3 - 2\alpha^2 - \alpha^4}{3(5 + 2\alpha^2 - 4(\alpha^2 + 1)\cos(\omega) + \alpha^4)}. \quad (4.32)$$

Nas Figuras 4.11(a) e (b) são ilustradas a SAC e a DEP para sinais do mapa  $f_B(\cdot)$  com

$r = 2$  segmentos para alguns valores de  $\alpha$ . Nota-se que a SAC decai monotonicamente com  $|k|$  mais rapidamente para  $\alpha \approx 0$  e mais lentamente para  $|\alpha| = 0.9$ . A DEP preponderantemente concentra-se nas frequências baixas. Conclui-se que o mapa  $f_B(\cdot)$  com  $r$  segmentos possui o mapa  $f_B(\cdot)$  com 2 segmentos estudado em [39] como caso particular.

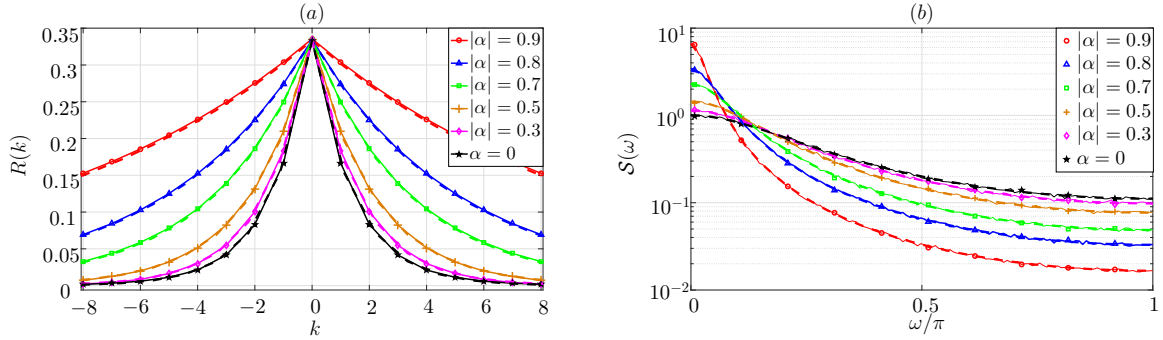


Figura 4.11: (a) SAC e (b) DEP do mapa  $f_B(\cdot)$  com  $r = 2$  segmentos.

Ao estudar o caso com  $r$  inclinações iguais, observa-se que os comprimentos que distanciam os parâmetros do vetor  $\alpha$  no domínio  $U$  possuem a mesma magnitude. Dessa forma,

$$\alpha_\ell = -1 + \frac{2}{r}\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, r. \quad (4.33)$$

Para calcular a SAC utiliza-se (4.33) em (4.20) obtendo-se

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r \beta_\ell (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1})^2 = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r \left( \left( -1 + \frac{2}{r}\ell \right) - \left( -1 - \frac{2}{r} + \frac{2}{r}\ell \right) \right)^2 = \frac{1}{r}, \quad (4.34)$$

e com (4.22) tem-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r} \right)^{|k|}. \quad (4.35)$$

Substituindo (4.34) em (4.23) obtêm-se

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}. \quad (4.36)$$

Nas Figuras 4.12(a) e (b) são ilustradas a SAC e a DEP para sinais do mapa  $f_B(\cdot)$  para alguns valores de  $r$ .

Com relação a SAC, observa-se que para  $r \geq 2$ ,  $R(k)$  decai monotonicamente com  $|k|$ . Nota-se que para  $r \rightarrow \infty$  a SAC aproxima-se da forma impulsiva. Já para a DEP do mapa  $f_B(\cdot)$  constata-se que os sinais gerados concentram-se nas frequências baixas.

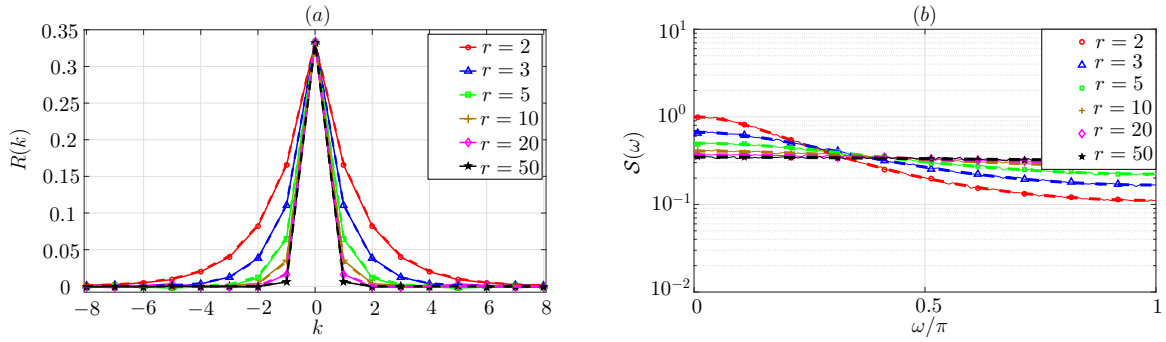


Figura 4.12: (a) SAC e (b) DEP do mapa  $f_B(\cdot)$  com  $r$  segmentos com inclinações positivas.

#### 4.4.4 Mapa tenda inclinada multimodal $f_\Lambda(\cdot)$

O mapa tenda inclinada multimodal  $f_\Lambda(\cdot)$  é estudado em [35] e esta é definido conforme Tabela 4.1. Neste mapa,  $\Lambda$  (com  $\Lambda \in \mathbb{N}^*$ ) representa o número de tendas inclinadas. Como consequência, o número total de segmentos, denotado por  $r$ , é definido por  $r = 2^\Lambda$ . Na Figura 4.13(a) é mostrado um exemplo desse mapa  $f_\Lambda(\cdot)$  com  $\Lambda = 2$  em que  $\boldsymbol{\alpha} = [-0.5 \ -0.1 \ 0.5 \ 1]^T$  e na Figura 4.13(b) trechos de sinal desse mapa com  $s(0) = -0.7$  (linha sólida) e  $s(0) = -0.7 - 10^{-9}$  (linha tracejada).

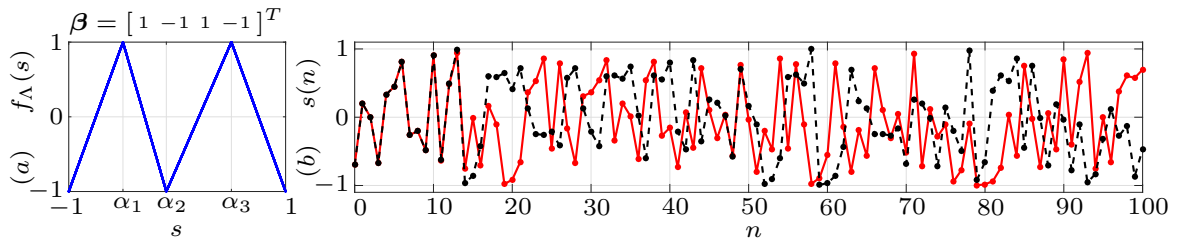


Figura 4.13: (a) Mapa  $f_\Lambda(\cdot)$  e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais  $s(0) = -0.7$  (linha sólida),  $s(0) = -0.7 - 10^{-9}$  (linha tracejada) e vetor  $\boldsymbol{\alpha} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$ .

Nesse trabalho [35], os autores calcularam a SAC do mapa bimodal ( $\Lambda = 2$ ) com  $\boldsymbol{\beta} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [-\alpha_1 \ 0 \ \alpha_3 \ 1]^T$  para  $\alpha_1, \alpha_3 \in [0, 1]$  e  $\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ . Assim, de (4.20), tem-se,

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^4 \beta_\ell (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1})^2 \\
 &= \frac{1}{4} (\beta_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \beta_3 (\alpha_3 - \alpha_2)^2 + \beta_4 (\alpha_4 - \alpha_3)^2) \\
 &= \frac{1}{4} ((1 - \alpha_1)^2 - \alpha_1^2 + \alpha_3^2 - (1 - \alpha_3)^2) = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}, \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

e a SAC resulta em

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \right)^{|k|}. \tag{4.38}$$

Consequentemente, a DEP é dada por

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{2 + 2\alpha_3\alpha_1 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2}{3(2 - 2\alpha_3\alpha_1 + \alpha_3^2 + \alpha_1^2 - 4(\alpha_3 - \alpha_1)\cos(\omega))}. \quad (4.39)$$

Na Figura 4.14(a) tem-se a SAC (4.38) para diferentes valores da diferença entre os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$ , observa-se decaimento monotônico com e sem oscilações e a forma impulsiva dependendo do valor da diferença entre os parâmetros  $\alpha_3 - \alpha_1$ . Consequentemente, a sua DEP admite sinais com características de alta, baixa frequência e espectro plano, como mostrado na Figura 4.14(b). Nota-se que o padrão da SAC e da DEP desse mapa é similar ao dos mapas  $f_I(\cdot)$  e  $f_F(\cdot)$ .

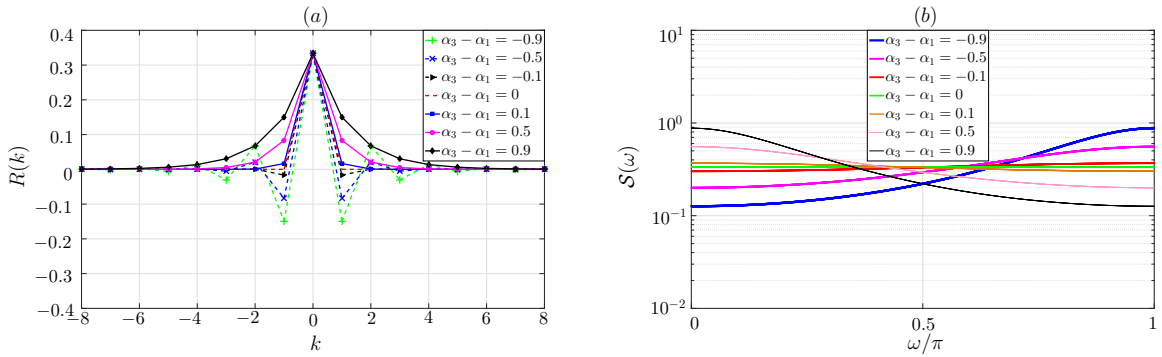


Figura 4.14: (a) SAC e (b) DEP do mapa  $f_\Lambda(\cdot)$  com  $\Lambda = 2$ .

#### 4.4.5 Mapa com $r$ segmentos com inclinações negativas $f_S(\cdot)$

Recentemente, Sahnoune e Berkani propuseram o mapa  $f_S(\cdot)$  em [37]. Este mapa é caracterizado por possuir  $r$  segmentos com inclinações negativas, e seus parâmetros estão detalhados na Tabela 4.1. A Figura 4.15(a) ilustra um exemplo desse mapa  $f_S(\cdot)$  com  $\alpha = [-0.5 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.7 \ 1]^T$ . Já a Figura 4.15(b) exibe trechos de sinal desse mapa tendo as condições iniciais  $s(0) = -0.8$  (linha sólida) e  $s(0) = -0.8 - 10^{-9}$  (linha tracejada).

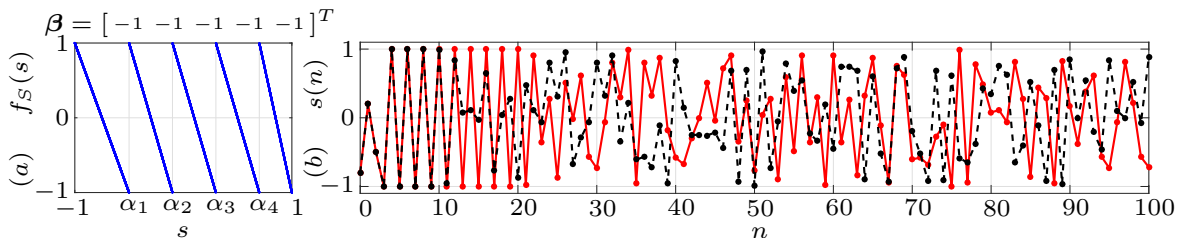


Figura 4.15: (a) Mapa  $f_S(\cdot)$  e (b) exemplo de órbitas com condições iniciais  $s(0) = -0.8$  (linha sólida),  $s(0) = -0.8 - 10^{-9}$  (linha tracejada) e vetor  $\alpha = [-0.5 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.7 \ 1]^T$ .

O mapa  $f_S(\cdot)$  é semelhante ao  $f_B(\cdot)$ , com a particularidade de que todos os elementos do vetor  $\beta$  serem negativos. Considerando o caso em que os elementos do vetor  $\alpha$  no

domínio  $U$  têm a mesma magnitude, conforme expresso (4.33). Pode-se demonstrar a partir de (4.20),

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r \beta_{\ell} (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})^2 = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r - \left( \left( -1 + \frac{2}{r} \ell \right) - \left( -1 - \frac{2}{r} + \frac{2}{r} \ell \right) \right)^2 = -\frac{1}{r}. \quad (4.40)$$

De (4.40), a SAC é dada por

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{r} \right)^{|k|}, \quad (4.41)$$

e a DEP

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(r^2 + 1 + 2r \cos(\omega))}. \quad (4.42)$$

Na Figura 4.16(a) tem-se a SAC (4.41) para alguns valores de  $r$ . Nota-se que a SAC oscila aproximando-se de um impulso a medida que o parâmetro  $r$  cresce. Consequentemente, a sua DEP admite apenas sinais com características de alta frequência, como mostrado na Figura 4.16(b). Nota-se que o padrão da SAC e da DEP desse mapa é o oposto do mapa  $f_B(\cdot)$  apresentado na Figura 4.12.

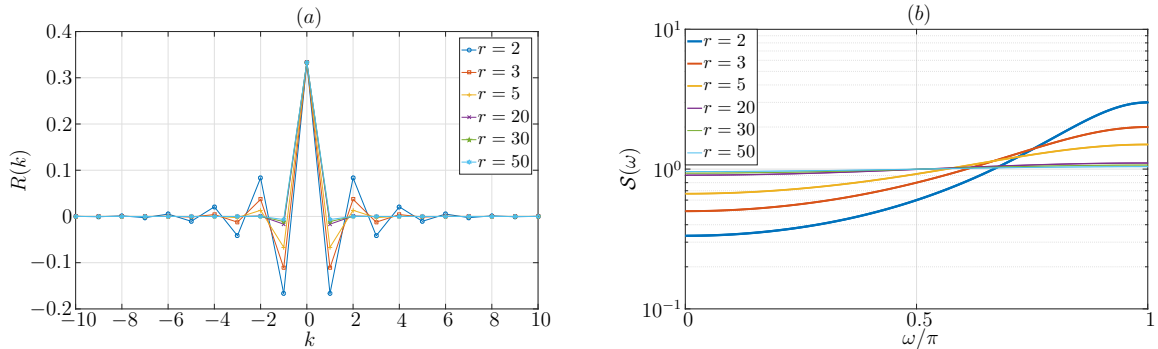


Figura 4.16: (a) SAC e (b) DEP do mapa  $f_S(\cdot)$  com  $r$  segmento com inclinações negativas.

Todos os resultados dessa seção são casos particulares do mapa  $f_L(\cdot)$ . Na seção seguinte tecem-se as considerações finais.

## 4.5 Considerações finais

Neste capítulo, deduziu-se uma expressão analítica para a DEP de um mapa linear por partes com  $r$  segmentos, possuindo inclinações positivas ou negativas. Resultados numéricos são apresentados para ilustrar a variedade espectral gerada por esse mapa. Adicionalmente, derivam-se analiticamente a SAC e a DEP para alguns de seus casos



particulares. Considera-se que os resultados apresentados nesse capítulo são contribuições originais dessa tese, incorporando alguns resultados da literatura como casos particulares.

Quando se pensa em sistemas de comunicação baseado em caos é importante conhecer e controlar a DEP dos sinais caóticos envolvidos. Assim, vislumbram-se aplicações futuras desses resultados, como por exemplo, na obtenção de equações para modulações que utilizam sinais caóticos como CSK e DCSK [15, 24, 58, 59]. A questão sobre obter essas equações será retomada e explorada com mais profundidade em capítulos subsequentes.

No capítulo seguinte generaliza-se uma representação linear de sinais caóticos e deriva-se sua DEP por meio da teoria de sistemas lineares.

## Capítulo 5

# Resultados principais II: uma representação linear com entradas aleatórias para sinais caóticos

No capítulo anterior derivou-se expressões analíticas para a SAC e DEP de sinais caóticos gerados pelo mapa  $f_L(\cdot)$ , sendo isso uma contribuição original do autor [36].

Nesse capítulo, um caso particular de  $f_L(\cdot)$  é explorado, isto é, quando os segmentos lineares possuem inclinações iguais. Drake e Willians demonstraram em [40] que a saída de filtros lineares alimentados por uma entrada aleatória pode produzir sinais indistinguíveis das saídas geradas por geradores de sinais caóticos sob certas condições iniciais. Eles estudaram uma mapa que pode ser considerado uma modificação do mapa  $f_L(\cdot)$  estudado aqui. Este intrigante resultado serviu como base para a investigação proposta neste capítulo. Dessa forma, busca-se obter utilizando-se da representação linear com entradas aleatórias para sinais caóticos algumas contribuições.

Na Seção 5.1 apresenta-se o mapa considerado  $f_\xi(\cdot)$ . Na seção 5.2, estende-se a representação linear proposta em [40] para uma classe de mapas lineares por partes com inclinações positivas ou negativas. Além disso, propõe-se o Algoritmo 1 que gera uma estimativa do sinal  $s(n)$  utilizando-se de um filtro linear, e demonstra-se o Teorema 2 que trata do módulo da diferença entre o sinal gerado pelo mapa  $f_\xi(\cdot)$  e a estimativa gerada pelo Algoritmo 1. Em seguida, utiliza-se da representação linear para derivar a DEP de sinais caóticos de forma direta na Seção 5.3. Finalmente, na Seção 5.4, as considerações finais são delineadas e algumas observações sobre os resultados são apresentadas.

## 5.1 Mapa considerado

Seja  $f_\xi : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  definido como

$$f_\xi(s) = 2\xi\left(r\frac{s+1}{2}\right) - 1, \quad (5.1)$$

com

$$\xi(z) = z - \lfloor z \rfloor, \quad (5.2)$$

$r$  é inteiro com  $|r| \geq 2$  e  $s(0) = s_0 \in [-1, 1[$  [46].

Considere-se o mapa

$$s(n+1) = f_\xi(s(n)), \quad (5.3)$$

com  $n \geq 0$  e  $s(0) \in [-1, 1[$ . Uma generalização do mapa dente de serra estudado em [40] permitindo  $r$  negativo e um domínio simétrico de sinais gerados com média nula.

Na Figura 5.1(a) exemplifica-se  $f_\xi(s)$  para um caso particular,  $r = -3$ . Na Figura 5.1(b) ilustram-se sinais gerados com condições iniciais  $s(0) = -0.73$  (linha sólida) e  $s(0) = -0.73000001$  (linha tracejada). Nota-se aperiódicidade, limitação em amplitude e dependência sensível às condições iniciais característica de sinais caóticos [1].

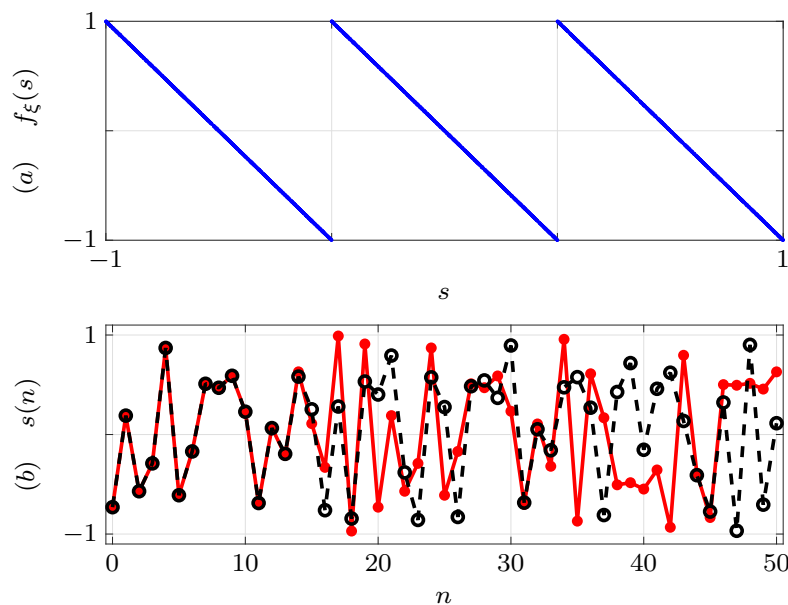


Figura 5.1: (a) O mapa  $f_\xi(\cdot)$  com  $r = -3$  e (b) duas órbitas com condições iniciais próximas.

## 5.2 Representação linear com entradas aleatórias de sinais caóticos

O mapa  $f_\xi$  pode ser decomposto em três:

- $x(n) = \frac{s(n)+1}{2} = f_1(s(n))$  - transformação linear do domínio  $[-1, 1[$  para  $[0, 1[$ ;
- $x(n+1) = \xi(rx(n)) = f_2(x(n))$ ;
- $s(n+1) = 2x(n+1) - 1 = f_3(x(n+1)) = f_1^{-1}(x(n+1))$  - transformação linear do domínio  $[0, 1[$  para  $[-1, 1[$ ;

tal que  $f_\xi = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ .

Portanto,  $f_1(\cdot)$  e  $f_3(\cdot)$  são funções inversas,

$$s(n) = f_\xi^n(s_0) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)^n(s_0) = (f_1 \circ g^n \circ f_3)(s_0). \quad (5.4)$$

Para  $r$  positivo,  $f_2(\cdot) = \xi(\cdot)$  consiste em deslocar a representação na base- $|r|$  de  $x(n)$ , i.e., se

$$x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{|r|^{k+1}} = (0, d_0 d_1 d_2 \dots)_{|r|}, \quad (5.5)$$

então  $x(1) = (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$ , com  $0 \leq d_i < |r|$ , tal que para  $r > 0$  têm-se

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{i+n}}{|r|^{i+1}}. \quad (5.6)$$

Para  $r$  negativo, quando  $n$  é par, as amostras  $x(n)$  para o mapa com parâmetros  $r$  e  $-r$  são iguais para mesma condição inicial  $x(0)$ . Dessa forma, tomando-se (5.5) e (5.6) deriva-se uma expressão de  $x(n)$  para  $r < 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{i+n}}{|r|^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{d_{2i+n}}{|r|^{2i+1}} + \frac{1}{|r|^{2i+1}} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{d_{2i-1+n}}{|r|^{2i}} - \frac{1}{|r|^{2i-1}} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-(d_{2i+n} + 1)}{r^{2i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{2i-1+n} - |r|}{r^{2i}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d'_{2i+n}}{r^{2i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d'_{2i-1+n}}{r^{2i}} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

definindo-se

$$d'_i = \begin{cases} -(d_i + 1), & i \text{ par} \\ d_i - |r|, & i \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (5.8)$$

Para  $n$  ímpar, tem-se também a operação complementar, i.e.,  $x(1) = 1 - (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$ . Então,

$$\begin{aligned}
 x(n) &= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{i+n}}{|r|^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{|r|^{2i}} - \frac{d_{2i+n}}{|r|^{2i+1}} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{|r|^{2i}} + \frac{d_{2i-1+n}}{|r|^{2i}} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{2i+n} - |r|}{r^{2i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-(d_{2i-1+n} + 1)}{r^{2i}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d'_{2i+n}}{r^{2i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d'_{2i-1+n}}{r^{2i}} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}}, \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

e, de forma geral, para  $r$  negativo tem-se

$$\boxed{x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}}.} \tag{5.10}$$

O Algoritmo 1 sistematiza a proposta de gerar uma órbita  $\widehat{s}(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  de (5.3) dado  $r$ ,  $N$  e  $s(0)$  usando um filtro linear.

Na primeira etapa, a condição inicial  $s(0) \in [-1, 1[$  é linearmente transformada em  $x(0) \in [0, 1[$  usando  $f_1(\cdot)$  em (5.12). Então  $x(0)$  é decomposto na base  $|r|$  com dígitos  $d_i$ . Usando-se  $d_i$  o Algoritmo 1 especifica a entrada  $v(n)$  para o filtro linear descrito em (5.16) em que a saída é  $x_\ell(n)$ .

Solucionando (5.16) com  $x_\ell(-1) = 0$  obtém-se [57]

$$x_\ell(n) = \sum_{\nu=0}^n \frac{v(\nu)}{r^{n-\nu+1}}. \tag{5.11}$$

Finalmente, estima-se  $\widehat{s}(n)$  para órbita com condição inicial  $s(0)$  obtendo-se (5.17) pela mudança de índices de  $x_\ell(n)$  e aplicando  $f_3(\cdot)$  em (5.16).

---

**Algoritmo 1** Obtendo-se o sinal  $\widehat{s}(n)$  usando filtro linear.

---

**Dados:**  $r, N, s(0), x_\ell(-1) = 0$ .

**Resultado:**  $\widehat{s}(n)$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

**início**

1

$$x(0) \leftarrow \frac{s(0) + 1}{2} \quad (5.12)$$

2

Decomposição de  $x(0)$  na base  $|r|$ :

$$x(0) = (0, d_0 d_1 d_2 \dots d_{N-1} \dots)_{|r|}, \quad (5.13)$$

com  $d_k \in \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

3

**para**  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  **faça**

4

**se**  $r > 0$  **então**

5

$$v(n) \leftarrow d_{N-1-n} \quad (5.14)$$

6

**senão**

7

$$v(n) \leftarrow d'_{N-1-n} = \begin{cases} -(d_{N-1-n} + 1), & \text{se } n \text{ par} \\ d_{N-1-n} - |r|, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (5.15)$$

8

$$x_\ell(n) \leftarrow \frac{1}{r} [x_\ell(n-1) + v(n)] \quad (5.16)$$

9

**para**  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  **faça**

10

$$\widehat{s}(n) \leftarrow 2x_\ell(N - 1 - n) - 1 \quad (5.17)$$


---

Para exemplificar, considere-se  $r = -3$ ,  $N = 51$  e

$$s(0) = \frac{2}{\pi} - 1. \quad (5.18)$$

Então,

$$x(0) = (s(0) + 1)/2 = 1/\pi = (0,0221210010\dots)_3. \quad (5.19)$$

Na Figura 5.2(a) é mostrado o gráfico de  $d_n$  e na Figura 5.2(b) é apresentado o gráfico do sinal  $v(n)$  na entrada do filtro linear. Já na Figura 5.2(c) tem as órbitas geradas usando o mapa  $f_\xi(\cdot)$  e o filtro linear. Nessa última Figura, observa-se uma diferença entre as amostras do sinal gerado por  $f_\xi(\cdot)$  e o Algoritmo 1. Nesse caso, propõem-se o Teorema 2 que descreve o limite superior do módulo da diferença entre os sinais.

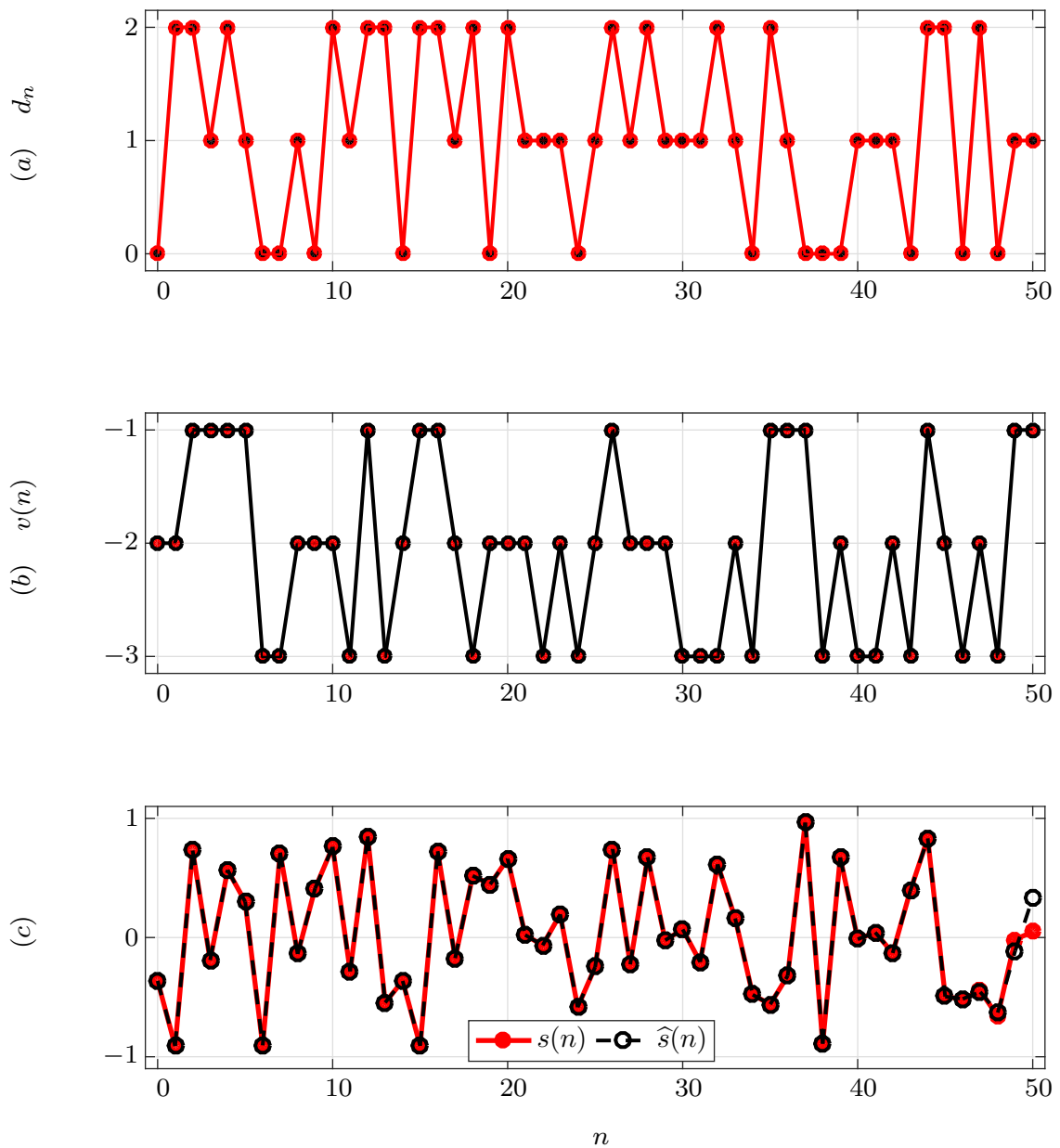


Figura 5.2: Exemplos de (a)  $d_n$ , (b)  $v(n)$  e (c)  $s(n)$  e  $\hat{s}(n)$  para  $s(0) = \frac{2}{\pi} - 1$  e  $r = -3$ .

O Teorema 2 fornece um limite superior para  $|s(n) - \hat{s}(n)|$  e é enunciado a seguir.

**Teorema 2.** *Sejam  $s(n)$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$  obtido usando (5.3) com condição inicial  $s(0)$  e  $r$  fixo, e  $\widehat{s}(n)$  gerado como mostrado no Algoritmo 1 com a mesma condição inicial e parâmetros. Então,*

$$\boxed{\varepsilon(n) = |s(n) - \widehat{s}(n)| \leq |r|^{n-N}}, \quad (5.20)$$

para  $0 \leq n \leq N - 1$ .

*Demonstração.* Divide-se a demonstração em dois casos:

A) Caso  $r \geq 2$ :

Aplicando-se  $f_1(\cdot)$  em (5.17) e usando-se (5.11) e (5.14) tem-se

$$\widehat{x}(n) = x_\ell(N - 1 - n) = \sum_{\nu=0}^{N-1-n} \frac{d_{N-1-\nu}}{r^{N-1-n-\nu+1}}. \quad (5.21)$$

Fazendo  $N - 1 - n - \nu = i$  em (5.21) tem-se

$$\widehat{x}(n) = \sum_{i=0}^{N-1-n} \frac{d_{i+n}}{r^{i+1}}. \quad (5.22)$$

De (5.6) e (5.22) e tendo-se em mente que  $d_i \leq r - 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{i+n}}{r^{i+1}} - \sum_{i=0}^{N-1-n} \frac{d_{i+n}}{r^{i+1}} \right| = \left| \sum_{i=N-n}^{\infty} \frac{d_{i+n}}{r^{i+1}} \right| \leq \left| (r-1) \sum_{i=N-n}^{\infty} r^{-(i+1)} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \frac{r^{-(N-n+1)}}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)} \right| = |r|^{n-N}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

B) Caso  $r \leq -2$ :

Aplicando-se  $f_1(\cdot)$  em (5.17) e usando-se (5.11) e (5.15) tem-se

$$\widehat{x}(n) = x_\ell(N - 1 - n) = \sum_{\nu=0}^{N-1-n} \frac{d'_{N-1-\nu}}{r^{N-1-n-\nu+1}}. \quad (5.24)$$

Fazendo  $N - 1 - n - \nu = i$  em (5.24) tem-se

$$\widehat{x}(n) = \sum_{i=0}^{N-1-n} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}}. \quad (5.25)$$

Usando-se (5.25) e (5.10), obtêm-se

$$\varepsilon(n) = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}} - \sum_{i=0}^{N-1-n} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}} \right| = \left| \sum_{i=N-n}^{\infty} \frac{d'_{i+n}}{r^{i+1}} \right|. \quad (5.26)$$



Para  $n$  par e ímpar, tem-se  $1 \leq |d'_{i+n}| \leq |r|$  em (5.26). Então,

$$\varepsilon(n) \leq \sum_{i=N-n}^{\infty} \frac{|d'_{i+n}|}{|r|^{i+1}} = \frac{|r|^{n-N}}{1 - |r|} \leq |r|^{n-N}. \quad (5.27)$$

□

Finalmente, o erro  $\varepsilon(n)$  dos sinais mostrados na Figura 5.2(c) junto com seu limite superior (5.20) são apresentados na Figura 5.3. Observe que, para  $n < 20$ ,  $\varepsilon(n)$  está abaixo da precisão de máquina ( $10^{-16}$ ) e não é exibido.

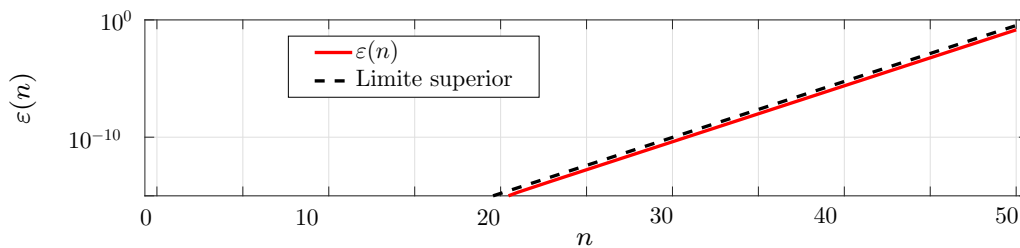


Figura 5.3: Função erro  $\varepsilon(n)$  e o limitante superior.

### 5.3 DEP de sinais caóticos utilizando-se da teoria de sistemas lineares

O sistema linear (5.16) pode ser representado pela função de transferência  $H(\omega)$ ,

$$H(\omega) = \frac{r^{-1}}{1 - r^{-1}e^{-j\omega}}, \quad \text{com } j = \sqrt{-1}. \quad (5.28)$$

Divide-se em três etapas o cálculo da SAC e da DEP do sistema proposto no Algoritmo 1. Na Figura 5.4 sistematiza-se o cálculo.

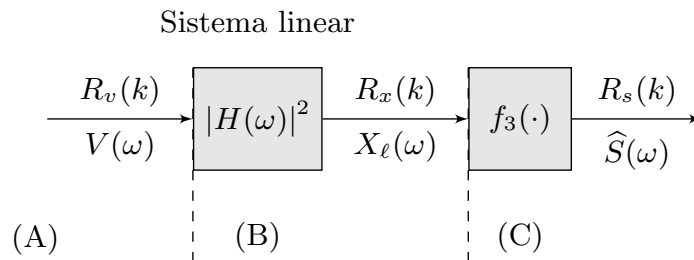


Figura 5.4: Esquematização do cálculo da SAC e da DEP do sistema proposto no Algoritmo 1.

Na primeira etapa (A), calcula-se a SAC e, em seguida, a DEP do sinal  $v(n)$  na entrada do filtro linear. Na segunda etapa (B), obtém-se a DEP e, conseqüentemente, a SAC do sinal caótico  $x_\ell(n)$  na saída do filtro recursivo. Finalmente, na terceira etapa (C), calcula-se a SAC e a DEP dos sinais caóticos  $\hat{s}(n)$  gerados na saída do Algoritmo 1.

A) A entrada  $v(n)$  do filtro linear para uma condição inicial aleatória pode ser modelada como uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Além disso, elas são equiprováveis com probabilidade  $1/|r|$ . A seqüência  $v(n)$  pertence ao conjunto  $A^{\mathbb{Z}}$  com  $A = \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$  para  $r$  positivo e  $A = \{r, \dots, -2, -1\}$  para  $r$  negativo. Sua média é  $\bar{m}_v = (r - 1)/2$  e sua variância  $\sigma_v^2$  é dada por

$$\sigma_v^2 = \frac{r^2 - 1}{12}. \quad (5.29)$$

Assim, a SAC na entrada do filtro é

$$R_v(k) = \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] \delta(k) + \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2, \quad (5.30)$$

em que  $\delta(\cdot)$  é a função impulso unitário. A DEP  $V(\omega)$  é dada pela transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) de (5.30)

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_v(k) e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] \delta(k) + \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2 \right\} e^{-j\omega k} \\ &= \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] + 2\pi \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2 \delta(\omega) \text{ para } \omega \in [-\pi, \pi[. \end{aligned} \quad (5.31)$$

B) Como a DEP da entrada e da saída de um filtro são relacionadas por [60]

$$X_\ell(\omega) = V(\omega) |H(\omega)|^2, \quad (5.32)$$

tem-se

$$\begin{aligned} X_\ell(\omega) &= \left\{ \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] + 2\pi \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2 \delta(\omega) \right\} \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega)} \\ &= \frac{r^2 - 1}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} + \frac{\pi(r - 1)^2}{2(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} \delta(\omega) \\ &= \frac{r^2 - 1}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Usando-se o par transformado

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{|k|} \Leftrightarrow \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega)} \quad (5.34)$$

em (5.33), segue que a TFTD inversa de  $X_\ell(\omega)$  resulta em

$$\begin{aligned} R_x(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_\ell(\omega) e^{-j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{r^2 - 1}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega) \right\} e^{-j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{r}\right)^{|k|} + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

C) Na implementação do Algoritmo 1 sua saída é dada pela aplicação de  $f_3(\cdot)$  em (5.16). Então, pode-se calcular a SAC de (5.17) como

$$\begin{aligned} R_s(k) &= \mathbb{E}[(2x_\ell(n) - 1)(2x_\ell(n+k) - 1)] \\ &= 4\mathbb{E}[x_\ell(n)x_\ell(n+k)] - 2\mathbb{E}[x_\ell(n)] - 2\mathbb{E}[x_\ell(n+k)] + 1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r}\right)^{|k|}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador valor esperado.

Finalmente, toma-se a TFTD de (5.36) obtendo-se a DEP na saída do Algoritmo 1,

$$\widehat{S}(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}. \quad (5.37)$$

Este resultado concorda completamente com o obtido usando-se fórmula recursiva para  $f^n(\cdot)$  em [34].

Para exemplificar, considere-se  $r = -3$  para  $N \rightarrow \infty$  e condição inicial aleatória. Então, na Figura 5.5 tem-se os gráficos resultantes para SAC e DEP como proposto na Figura 5.4. Nas Figuras 5.5(a) e (b) são mostradas a SAC e a DEP na entrada do filtro. Como esperado, a SAC é impulsiva e a DEP possui um espectro plano e componente dc. Já nas Figuras 5.5(c) e (d) são mostradas a SAC e a DEP na saída do sistema linear. Como pode se ver, a SAC oscila e decai rapidamente convergindo assintoticamente para 1/4, e a DEP concentra-se nas altas frequências. Por fim, nas Figuras 5.5(e) e (f) são mostradas a SAC e a DEP do sinal  $\widehat{s}(n)$  em (5.17). Como o sinal na saída do Algoritmo 1 é a aplicação de  $f_3(\cdot)$  sobre  $x_\ell(n)$ , conseqüentemente, o sinal resultante possui média nula.

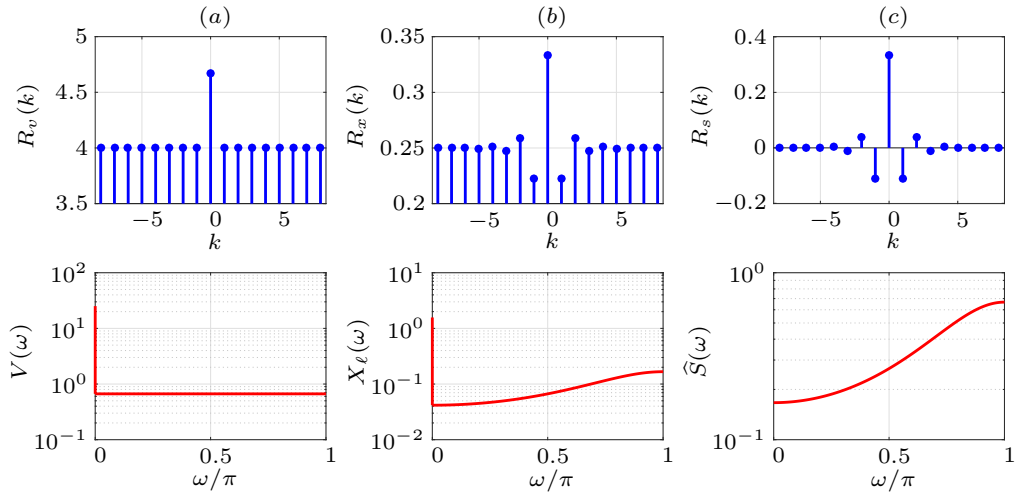


Figura 5.5: (a) SAC e DEP de  $v(n)$ , (b) SAC e DEP de  $x_\ell(n)$ , (c) SAC e DEP de  $\widehat{s}(n)$  para  $r = -3$ .

Na Figura 5.6 são mostrados gráficos da DEP de  $\widehat{S}(\omega)$  para diferentes valores de  $r$ . Quando  $r$  é positivo,  $\widehat{S}(\omega)$  tem máximo em  $\omega = 0$  e mínimo para  $\omega = \pi$ , confirmando as propriedades passa-baixas dos sinais gerados. Por outro lado, quando  $r$  é negativo,  $\widehat{S}(\omega)$  tem máximo em  $\omega = \pi$  e mínimo em  $\omega = 0$ , resultando em sinais passa alta. Nota-se a simetria entre  $r$  positivo e negativo.

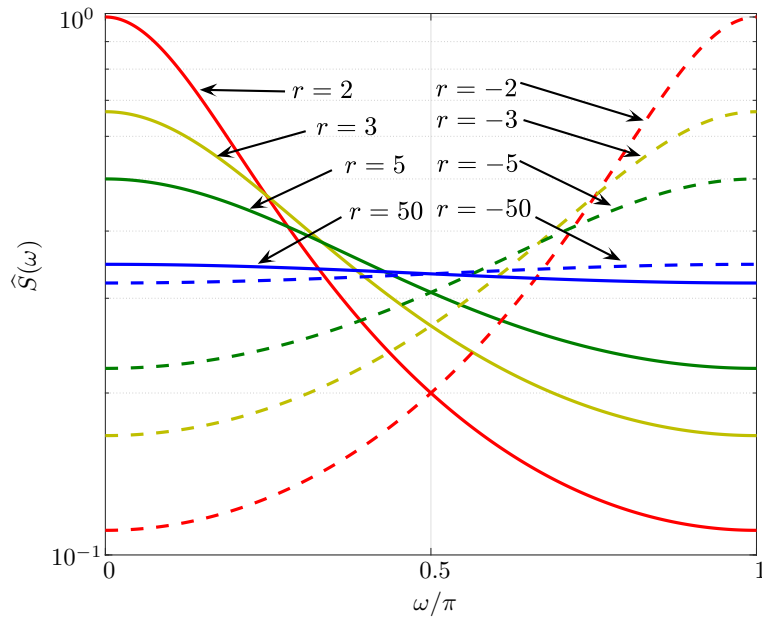


Figura 5.6: DEP de (5.37) para diferentes valores de  $r$ .

## 5.4 Considerações finais

Nesse Capítulo estendeu-se a representação linear de sinais caóticos proposta em [40] incluindo mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas. Destaca-se aqui o Algoritmo 1 proposto e a prova do Teorema 2. Além disso, obteve-se a DEP desses sinais de forma direta utilizando-se da teoria de sistemas lineares. Os resultados analíticos obtidos para DEP estão de acordo com resultados anteriores da literatura [34, 37].

No próximo capítulo, serão estudadas as modulações digitais que empregam sinais caóticos. Além disso, exploraremos os resultados obtidos até agora para determinar a DEP dos sinais transmitidos por essas modulações.

# Capítulo 6

## Resultados principais III: DEP para modulações digitais que utilizam sinais caóticos

No Capítulo anterior, estendeu-se uma representação linear com entradas aleatórias para sinais caóticos para incluir mapas lineares por partes com inclinações negativas. Além disso, a DEP desses sinais foi derivada utilizando-se da teoria de sistemas lineares, sendo estas contribuições do autor.

Nesse Capítulo, deriva-se analiticamente expressões para a DEP de sinais transmitidos pelo CSK, uma modulação digital que utiliza sinais caóticos. Além disso, valida-se os resultados experimentalmente em um canal de comunicação Bluetooth<sup>®</sup> utilizando *Universal Software Radio Peripheral* (USRP) que é um rádio definido por *software* (SDR). Esses resultados são importantes quando se pensa em aplicações práticas desses sinais em sistemas de comunicação e representa uma contribuição do autor.

Na Seção 6.1, as modulações digitais CSK e DCSK são apresentadas e em seguida deriva-se a DEP para os sinais transmitidos pela modulação CSK. Além disso, os resultados são analisados numericamente considerando o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$  como gerador de sinais caóticos. Na Seção 6.2, implementa-se o modulador CSK em SDR e valida-se experimentalmente os resultados considerando um canal de comunicação Bluetooth<sup>®</sup>. Finalmente, na Seção 6.3 tecem-se as conclusões.

### 6.1 Modulações CSK e DCSK

Em uma modulação CSK, o sinal mensagem  $m(n)$  a ser transmitido é dado por [60]

$$m(n) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \Pi(n - iN_b), \quad (6.1)$$

em que, a função porta  $\Pi(n)$  resulta em

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N_b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.2)$$

e, de forma geral, faz-se  $e_i = c$  para transmitir o bit 1 e  $e_i = d$  para transmitir o bit 0.

Pode se mostrar [60], que a SAC da mensagem  $m(n)$ , descrita em (6.1), formada por uma sequência binária equiprovável  $e_i$ , resulta em

$$R_m(k) = \lambda^2 \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \mu^2, \quad (6.3)$$

com

$$\lambda = \frac{c - d}{2}, \quad (6.4)$$

e valor médio

$$\mu = \frac{c + d}{2} \quad (6.5)$$

em que  $c$  e  $d$  são os níveis do sinal digital. Por exemplo, quando  $c = 1$  e  $d = -1$ , tem-se  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ .

Para obter a DEP de (6.3) calcula-se a TFTD de  $R_m(k)$ , resultando em

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{\lambda^2}{N_b} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\omega N_b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]^2 + 2\mu^2 \delta(\omega) \text{ para } \omega \in [-\pi, \pi[. \quad (6.6)$$

Na Figura 6.1 tem-se alguns exemplos de  $\mathcal{M}(\omega)$  para diferentes valores  $N_b$  com  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ .

No CSK binário, para um único mapa, um sinal caótico  $s(n)$  é gerado pela equação de diferenças [29, Cap. 6],

$$s(n) = f(s(n-1)) \quad (6.7)$$

com  $n \in \mathbb{N}$  e  $s(0)$  uma condição inicial arbitrária.

Nesse capítulo, considera-se um caso particular do mapa  $f_L(\cdot)$ , isto é, o mapa tenda inclinada  $f_I(\cdot)$ , como gerador de sinal caótico. A escolha decorre do fato de que esse mapa é consagrado na literatura e possui uma diversidade espectral interessante. Portanto, o sinal CSK transmitido é formado pelo produto [29],

$$y(n) = s(n)m(n). \quad (6.8)$$

Na Figura 6.2 apresenta-se um exemplo de sinal CSK. A sequência caótica  $s(n)$  na

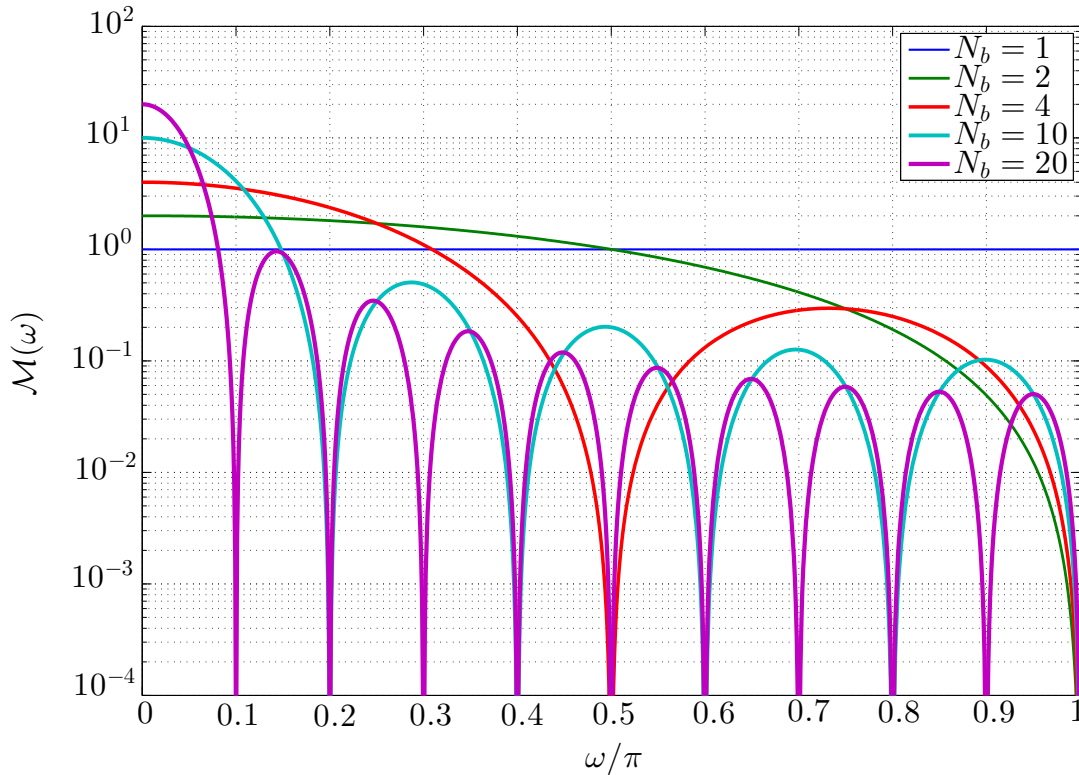


Figura 6.1: DEP de  $m(n)$  para diferentes valores de  $N_b$ .

Figura 6.2(a) foi gerada usando o mapa tenda inclinada com  $\alpha = 0.9$ . A mensagem  $m(n)$  na Figura 6.2(c) tem a forma (6.8) com  $c = 1$  e  $d = -1$  e  $N_b = 4$ . O sinal CSK correspondente é mostrado na Figura 6.2(e). As Figs 6.2(b), (d) e (f) mostram os respectivos espectros.

Um caso particular do CSK é a modulação conhecida como COOK [15] para a qual  $d = 0$ . Um exemplo de sinal COOK é apresentado na Figura 6.3 para os mesmos mapas e tempo de bits utilizados na Figura 6.2.

Com relação à demodulação, quando os dois possíveis sinais transmitidos pelo CSK não possuem mesma energia, i.e.,  $|c| \neq |d|$  é possível utilizar a demodulação não coerente em que utiliza-se o fato de que as energias dos sinais transmitidos são distintas e assim pode-se comparar as energias dos símbolos recebidos no receptor com um limiar de modo a distinguir o bit 0 e o bit 1 [29]. Caso contrário, sugere-se o uso da demodulação coerente em que pode-se utilizar técnicas de sincronização no receptor e recuperar a mensagem transmitida [29].

No DCSK, a mensagem  $m(n)$  à ser transmitida é dada por

$$m(n) = m_1(n) + m_2(n) \quad (6.9)$$



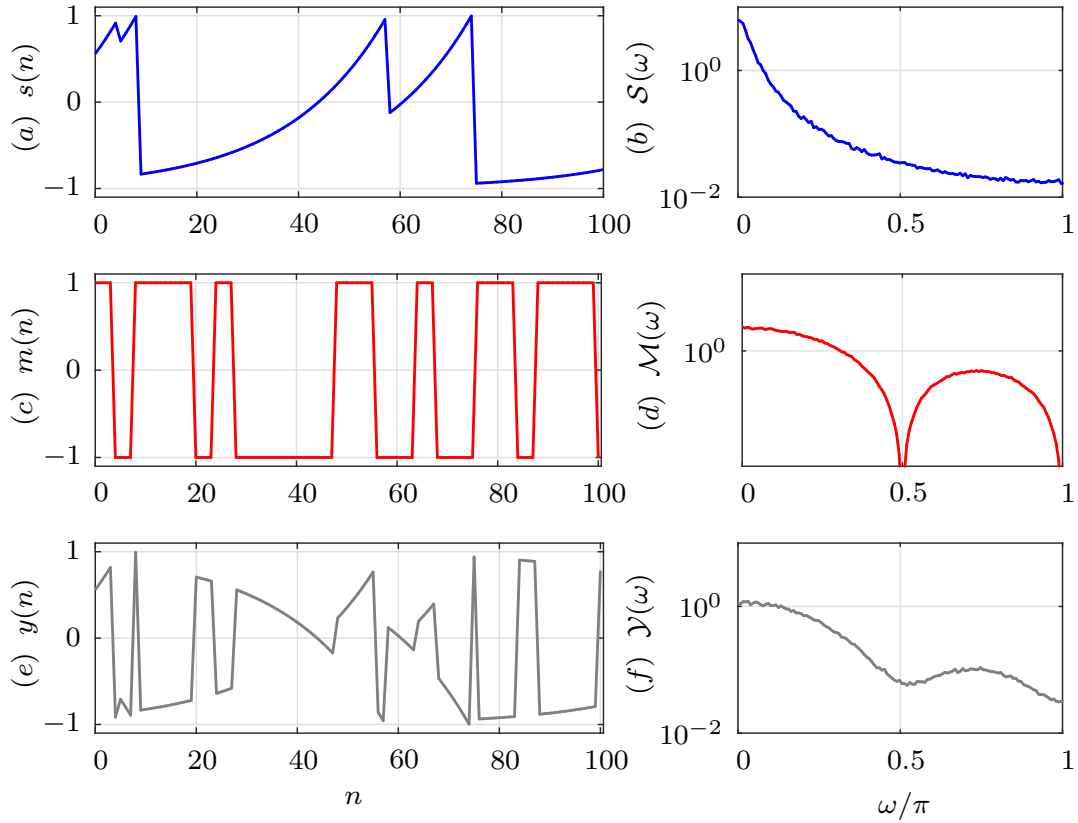


Figura 6.2: Exemplo de sinal CSK: (a) sinal caótico gerado usando  $f_I(\cdot)$  e (b) sua DEP; (c) a mensagem a ser transmitida e (d) sua DEP; (e) o sinal CSK  $y(n) = m(n)s(n)$  e (f) sua DEP.

em que

$$m_1(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi(n - 2iN), \quad (6.10)$$

e

$$m_2(n) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \Pi(n - (2i + 1)N), \quad (6.11)$$

com  $N_L = N_b/2$  e a função  $\Pi(n)$  é dada por

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N_L \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Nota-se que  $m_1(n)$  representa um trecho de sinal de referência e  $m_2(n)$  representa o trecho do sinal com informação. Assim,  $e_i = 1$  representa a transmissão do bit 1 ou  $e_i = -1$  para transmissão do bit 0.

Para obter o sinal DCSK, tomamos o produto do primeiro somatório de (6.10) com o sinal caótico  $s(n)$  e, em seguida, tomamos o produto do segundo somatório de (6.11) com

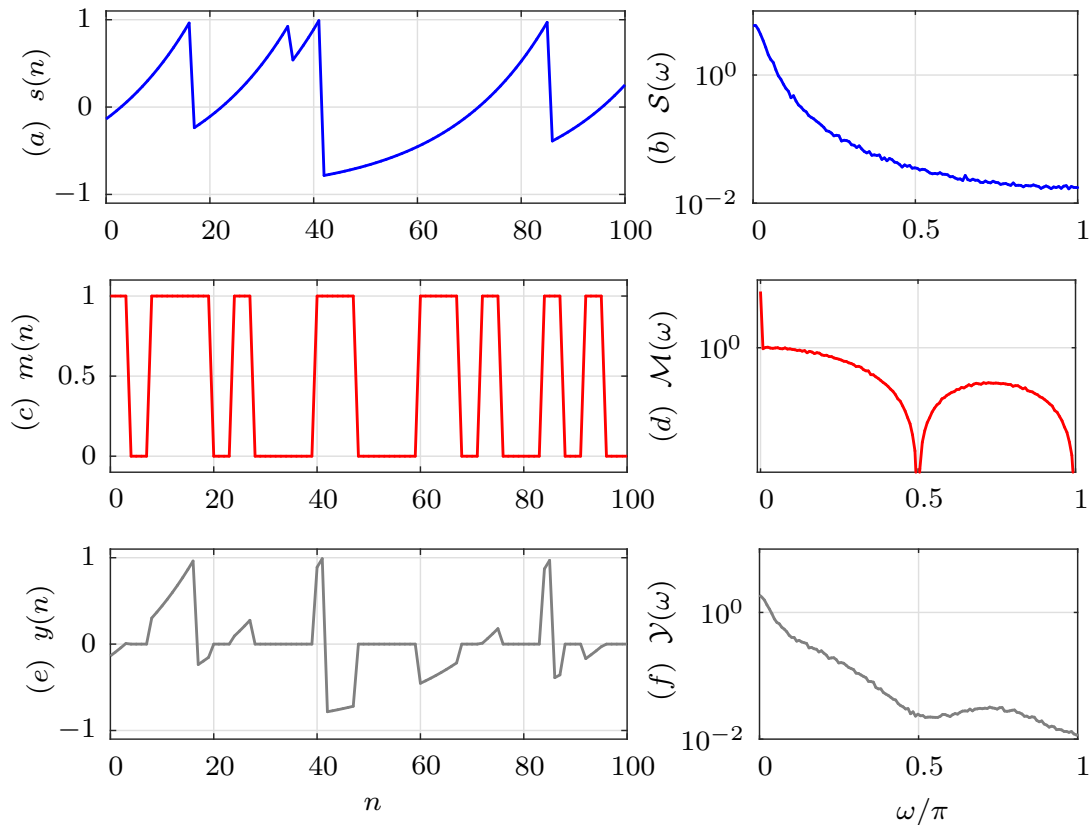


Figura 6.3: Exemplo do sinal COOK: (a) sinal caótico gerado usando  $f_I(\cdot)$  e (b) sua DEP; (c) a mensagem a ser transmitida e (d) sua DEP; (e) sinal COOK  $y(n) = m(n)s(n)$  e (f) sua DEP.

a replica do mesmo trecho de sinal caótico utilizado no produto do primeiro somatório. Em geral, tem-se

$$y(n) = s(n)m_1(n) + s(n - N)m_2(n). \quad (6.13)$$

Nota-se que  $s(n) = 0$  para  $n < 0$ .

Na Figura 6.4 resume-se graficamente a geração do sinal DCSK. Na Figura 6.4(a), tem-se um exemplo de um sinal caótico gerado pelo mapa  $f_I(\cdot)$ . Já na Figura 6.4(b) mostra-se o mesmo sinal, porém com um atraso de  $N_b = 20$ . Além disso, a Figura 6.4(c) mostra o sinal mensagem  $m(n)$  e, finalmente, o sinal DCSK, na Figura 6.4(d).

Em relação à demodulação, um sinal DCSK pode ser demodulado explorando-se o fato de que a informação é mapeada na correlação entre os trechos de referência e de informação. Assim, a demodulação pode ser executada por um receptor diferencial, além do receptor por correlação coerente [29].

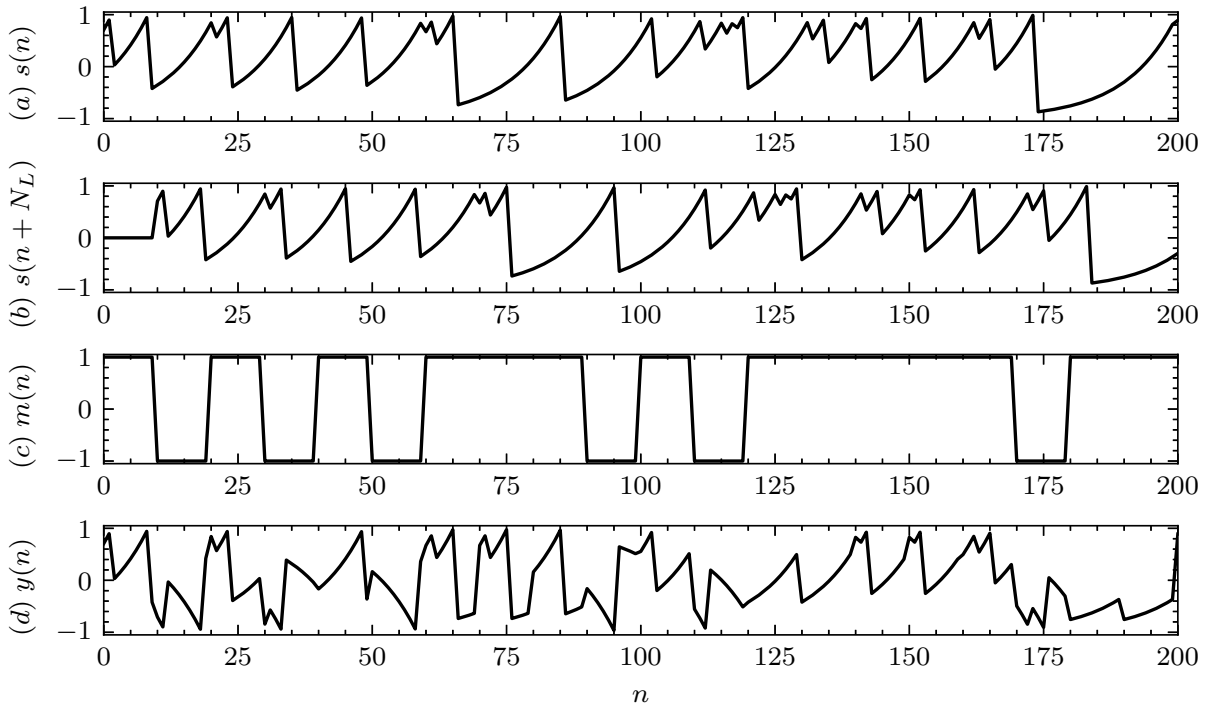


Figura 6.4: (a) Trecho de sinal caótico gerado pelo mapa  $f_I(\cdot)$ ; (b) Trecho do sinal de (a) com atraso de  $N_L = 10$ ; (c) sinal mensagem  $m(n)$  e (d) sinal DCSK.

A seguir, obtém-se uma fórmula fechada para a DEP dos sinais transmitidos pelo CSK que utiliza um único mapa. Vale destacar que o CSK é uma versão mais simples quando comparado ao DCSK.

### 6.1.1 DEP do CSK

Pode-se escrever o SAC para o sinal  $y(n)$  de (6.8) como

$$\begin{aligned} R_y(k) &= \mathbb{E}[y(n)y(n+k)] = \mathbb{E}[s(n)s(n+k)m(n)m(n+k)] \\ &= \mathbb{E}[s(n)s(n+k)] \mathbb{E}[m(n)m(n+k)] = R(k)R_m(k), \end{aligned} \quad (6.14)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o valor esperado e considera-se a independência entre os processos que caracterizam a mensagem  $m(n)$  e o sinal caótico  $s(n)$ .

Substituindo (4.22) e (6.3) em (6.14), obtém-se

$$R_y(k) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{|k|}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^{|k|}, & |k| < N_b \\ \mu^2 \frac{\psi^{|k|}}{3}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.15)$$

Toma-se a TFTD de (6.15), obtendo-se a DEP de  $y(n)$  como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_y(k) e^{-j\omega k} \\
&= \sum_{k=-(N_b-1)}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{|k|}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^{|k|} e^{-j\omega k} + \sum_{|k| \geq N_b} \mu^2 \frac{\psi^{|k|}}{3} e^{-j\omega k} \\
&= \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3} + \sum_{k=1}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^k (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) + \sum_{k=N_b}^{\infty} \frac{\mu^2}{3} \psi^k (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) \\
&= 2 \sum_{k=0}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^k \cos(k\omega) + 2 \sum_{k=N_b}^{\infty} \frac{\mu^2}{3} \psi^k \cos(k\omega) - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3}. \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Dessa maneira, definindo-se

$$g(k) \triangleq \begin{cases} \lambda^2 \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) + \mu^2, & 0 \leq k \leq N_b - 1 \\ \mu^2, & k \geq N_b \end{cases} \quad (6.17)$$

e usando-se (6.17) em (6.16), obtem-se

$$\boxed{\mathcal{Y}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \psi^k \cos(k\omega) - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3}.} \quad (6.18)$$

Considera-se esse um dos principais resultados desse capítulo. Ele mostra que a DEP da modulação depende fortemente da escolha do mapa e dos parâmetros de modulação.

Para dar uma ideia da DEP descrita por (6.18), apresentam-se em seguida alguns resultados particulares obtidos para o mapa tenda inclinada.

### 6.1.1.1 CSK com o mapa $f_I(\cdot)$

A modulação CSK é considerada com níveis  $c = 1$  e  $d = -1$ , como na Figura 6.2(c). Então, (6.4)-(6.5),  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ . Tomando-se como gerador de sinais caóticos o mapa tenda inclinada, tem-se de (3.31) que  $\psi = \alpha$ . Substituindo-se em (6.17)-(6.18), tem-se

$$\mathcal{Y}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} \quad (6.19)$$

para o CSK usando o mapa tenda inclinada.

Nota-se que quando  $N_b = 1$ , o somatório tem apenas uma parcela e então  $\mathcal{Y}(\omega) = 1/3$ , i.e., obtendo-se um espectro plano. Isto é de se esperar porque cada símbolo independente

é transmitido por apenas uma amostra independente que foi escolhida aleatoriamente a partir de uma densidade uniforme em  $[-1, 1]$ .

Quando considera-se o caso  $N_b = 4$ , tem-se de (6.19)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\omega) &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^3 \left(1 - \frac{k}{4}\right) \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\omega) + \left(\frac{\alpha^2}{3}\right) \cos(2\omega) + \left(\frac{\alpha^3}{6}\right) \cos(3\omega). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Figura 6.5(a) mostra-se (6.20) para diferentes valores de  $\alpha$ . Quando  $\alpha > 0$ , a potência concentra-se nas baixas frequências e quando  $\alpha < 0$ , a potência concentra-se nas altas frequências e obtém-se um espectro branco para  $\alpha = 0$ .

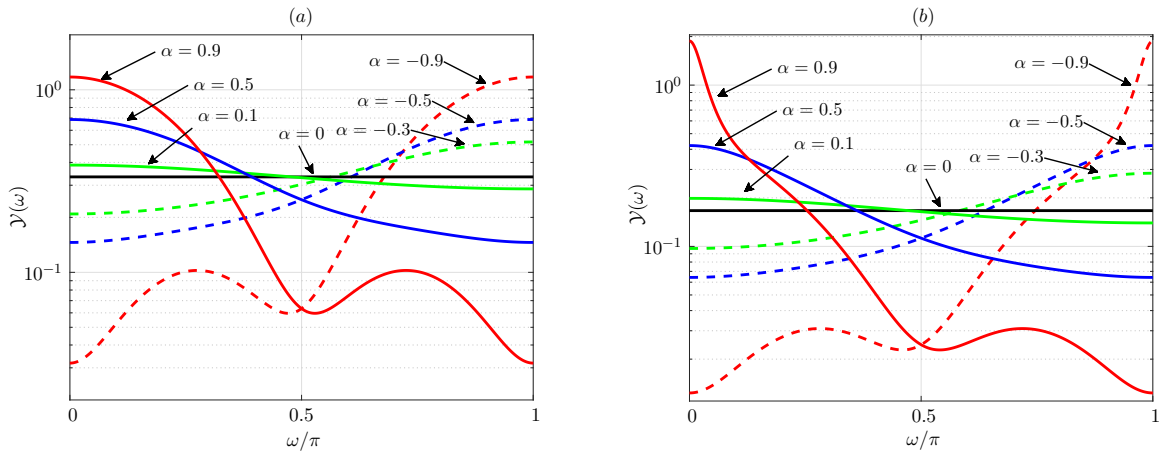


Figura 6.5: (a) DEP do CSK e (b) DEP do COOK usando o mapa  $f_I(\cdot)$  com intervalo de bit  $N_b = 4$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Linhas tracejadas para  $\alpha < 0$  e linhas sólidas para  $\alpha \geq 0$ .

Note-se que a DEP gerada numericamente e mostrada na Figura 6.2(f) com  $N_b = 4$  e  $\alpha = 0.9$  está de acordo com os resultados analíticos apresentados na Figura 6.5(a), como esperado.

No limite quando  $N_b \rightarrow \infty$ , (6.19) fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\omega) &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{j\omega k} \right) + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k} \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - 1 \right] = \frac{1 - \alpha^2}{3(1 - 2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2)}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

que é exatamente a DEP do mapa original  $f_I(\cdot)$ , como também se esperava.

A Figura 6.6(a) ilustra (6.19) com  $\alpha = -0.9$  para alguns valores do intervalo de símbolos  $N_b$ . Como esperado,  $\mathcal{Y}(\omega)$  aproxima-se de  $\mathcal{S}(\omega)$  de (4.26) para valores grandes

de  $N_b$ . Para  $N_b = 1$ , o espectro de potência é branco. A Figura 6.6(b) mostra os DEPs equivalentes para  $\alpha = 0.9$ . O sinal de  $\alpha$  define se a DEP está concentrada em frequências de tempo discreto mais baixas ou mais altas.

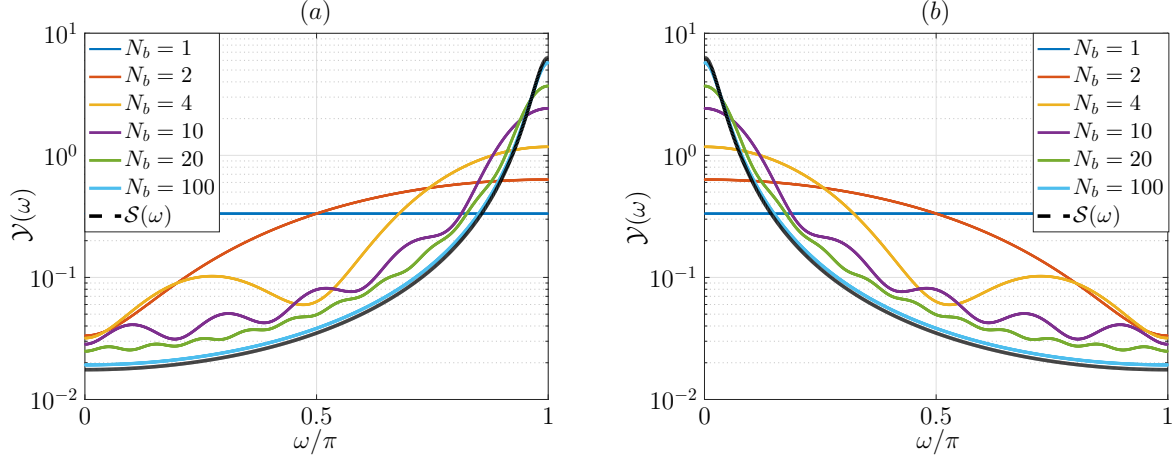


Figura 6.6: DEP do CSK para diferentes valores de intervalo de símbolo  $N_b$  com (a)  $\alpha = -0.9$  e (b)  $\alpha = 0.9$ .

### 6.1.1.2 COOK com o mapa $f_I(\cdot)$

A DEP da modulação COOK pode ser obtida como um caso particular de (6.18). Tomando,  $c = 1$  e  $d = 0$  em (6.4)-(6.5), obtemos  $\lambda = 0.5$  e  $\mu = 0.5$ . Utilizando estes valores em (6.3), obtemos o SAC resultante para o sinal da mensagem COOK como

$$R_m(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \frac{1}{4}, & |k| < N_b \\ \frac{1}{4}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.22)$$

Consequentemente, usando (6.22) e (4.26) em (6.17)-(6.18), obtém-se para o mapa  $f_I(\cdot)$

$$\mathcal{Y}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left[ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + \frac{1}{4} \right] \alpha^k \cos(k\omega) + \frac{1}{6} \sum_{k=N_b}^{\infty} \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{6}. \quad (6.23)$$

Gráficos da (6.23) para  $N_b = 4$  e diferentes valores de  $\alpha$  são ilustrados na Figura 6.5(b).

A partir de (6.23), quando  $N_b = 1$ , a DEP do COOK é equivalente a um ruído branco apenas quando  $\alpha = 0$ . As Figuras 6.7(a) e (b) ilustram (6.23) com  $\alpha = -0.9$  e  $\alpha = 0.9$ , respectivamente. Estes gráficos podem ser comparados com os da Figura 6.6 para a CSK. As PSD são sempre mais baixas devido às sequências de zeros presentes nos sinais modulados COOK.

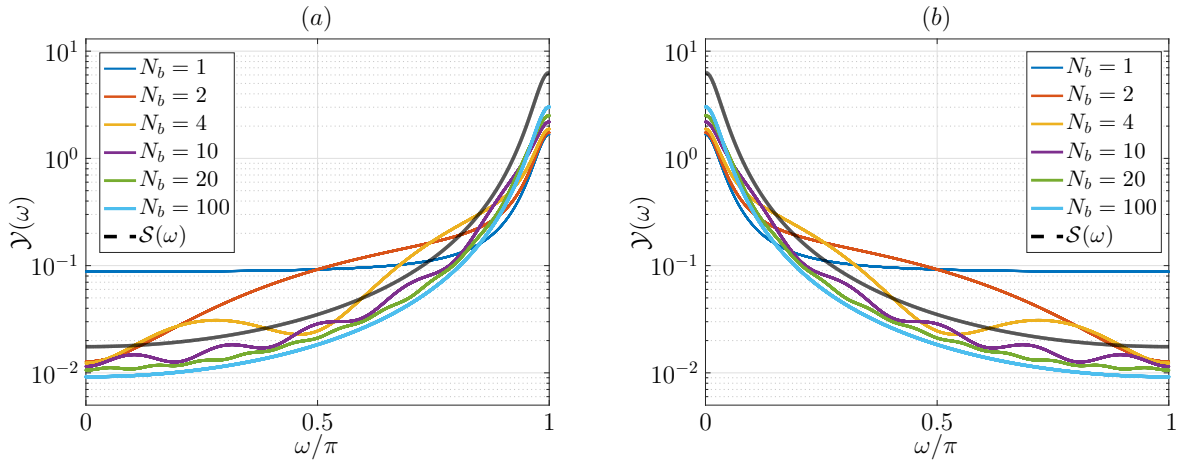


Figura 6.7: DEP do COOK para diferentes valores de intervalo de símbolo  $N_b$  com (a)  $\alpha = -0.9$  e (b)  $\alpha = 0.9$ .

## 6.2 Validação experimental em um canal Bluetooth®

O Bluetooth® é um padrão de tecnologia sem fio que permite a troca de dados entre dispositivos fixos e móveis em curtas distâncias. Utilizou-se um canal de 2 MHz, que é geralmente usado na versão Bluetooth® caracterizada por baixo consumo de energia. Utilizou-se também o USRP, que abrange a faixa de frequência usada pelos canais Bluetooth®, e transmitiu-se os sinais da modulação CSK, especificamente no canal 1. Finalmente, analisou-se o espectro dos sinais transmitidos.

A seguir, apresentamos o arranjo experimental usado para a validação dos resultados.

### 6.2.1 Arranjo experimental

Propõem-se um sistema baseado em SDR (Rádio Definido por *Software*), que consiste principalmente em (i) dois USRP-B200s e (ii) um PC hospedeiro. A arquitetura proposta para este projeto utiliza o USRP-B200, projetado pela Ettus Research<sup>1</sup>, uma plataforma de SDR disponível comercialmente no mercado. Com sua tecnologia baseada em FPGA, essa plataforma oferece uma ampla gama de interfaces de rádio que são intercambiáveis por meio de placas auxiliares, cobrindo a faixa de frequências de 70 MHz à 6 GHz com largura de banda máxima de 56 MHz.

O arranjo experimental é mostrado como um diagrama de blocos na Figura 6.8. No caminho de transmissão (TX), o PC hospedeiro sintetiza os sinais de banda base *in-phase* (I) e *quadrature* (Q) e os transmite para o USRP por meio de uma porta serial

<sup>1</sup><https://www.ettus.com/all-products/ub200-kit/>

universal (USB) que pode ser conectada via USB3.0 ou USB2.0, e então transfere essas informações para o FPGA (Xilinx Spartan 6 XC6SLX75) do dispositivo USRP para o controle TX, conforme mostrado na Figura 6.8. O FPGA pode fazer alterações nas taxas de amostragem por meio de um conversor digital interpolador (CDI) para ajustar a taxa de amostragem do fluxo de dados com a taxa de amostragem do *hardware*. Além disso, o SDR possui um conversor digital-analógico (CDA) da Analog Devices AD9364 que possui um filtro anti-imagem de terceira ordem Butterworth localizado na saída do CDA e, por último, um circuito de frequência de rádio (RF TX), composto por um oscilador local, *mixer*, amplificadores e antena. O caminho do receptor inclui um amplificador de baixo ruído e um amplificador de acionamento que amplificam o sinal de entrada, que passa por circuitos de RF (RF RX) semelhante ao do transmissor. Além disso, os dados I e Q são digitalizados pelo conversor analógico-digital (CAD) e passam pelo conversor digital-decimador (CDD), que decima o sinal para uma taxa especificada pelo usuário. Por fim, o sinal é enviado para o PC hospedeiro usando o controle RX.

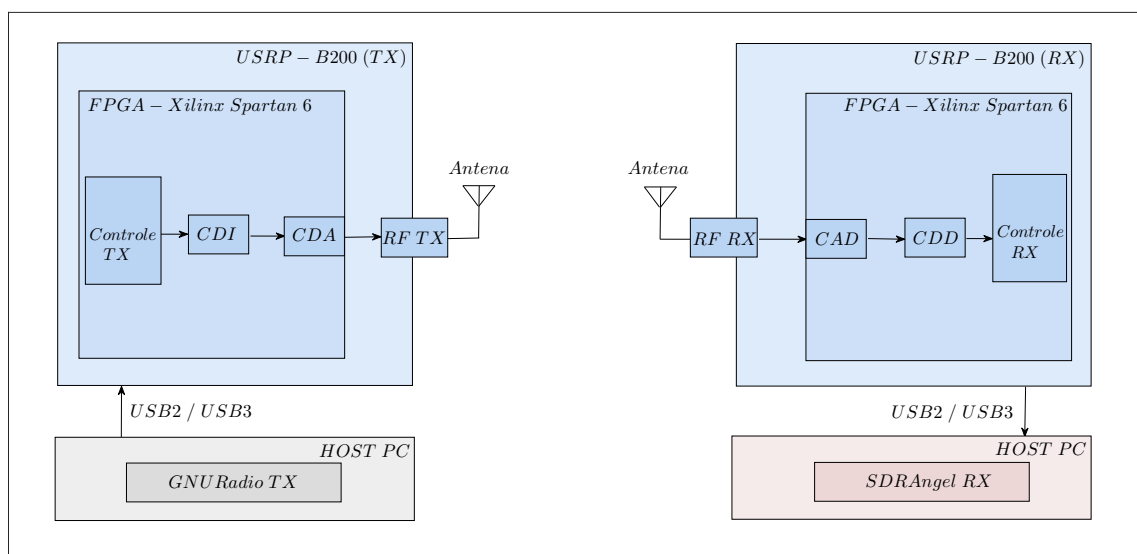


Figura 6.8: Montagem experimental para validação dos sinais transmitidos pelo CSK.

Para a implementação do SDR, utiliza-se o GNU Radio<sup>2</sup>, que é uma ferramenta de desenvolvimento de software livre e de código aberto que possui blocos de processamento de sinais.

O GNU Radio oferece uma variedade de blocos de processamento de sinais implementados em C++, permitindo o desenvolvimento de uma ampla gama de aplicações de comunicação sem fio. Esses blocos em C++ são geralmente integrados em classes Python

<sup>2</sup><https://www.gnuradio.org/>



e podem ser instanciados a partir de scripts Python ou utilizados como blocos fundamentais dentro de um fluxograma de comunicação a partir de uma interface gráfica de usuário.

A implementação do transmissor é mostrada no diagrama de blocos na Figura 6.9. Utiliza-se a programação em Python para implementá-lo usando o módulo Python do GNU Radio. Programou-se o gerador de sinal caótico com o mapa da tenda inclinada e o modulador CSK, utilizando-se a linguagem Python. O código está disponível no repositório do GitHub<sup>3</sup>. O bloco USRP Hardware Driver™ (UHD) é usado para configurar e comunicar os dados destinados para o USRP. Utilizou-se o canal 1 do Bluetooth®, que possui uma frequência central  $f_c = 2.204$  GHz, e definiu-se a largura de banda como 2 MHz.

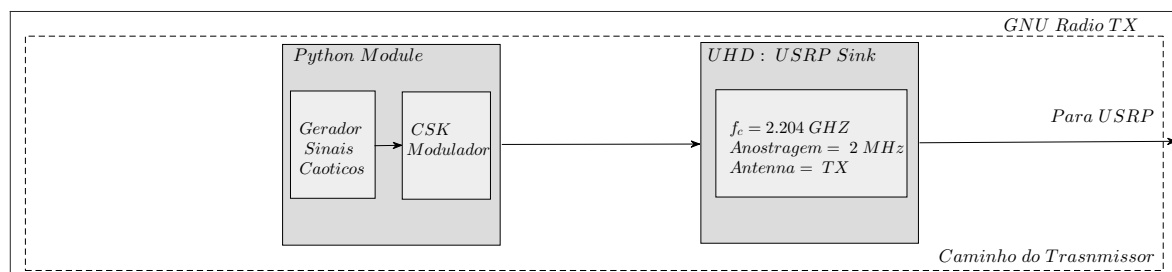


Figura 6.9: Diagrama de blocos do transmissor implementado com o programa GNU Radio.

Por outro lado, para receber e analisar os sinais transmitidos, utilizou-se outro programa especializado de código aberto e gratuito, o SDRAngel<sup>4</sup>. Ele possui um analisador de sinais que funciona em tempo real e permite salvar os dados obtidos. Portanto, configura-se a frequência central, taxa de amostragem, antena, ganho do receptor e ativa-se a função que reduz o componente DC gerado pelo USRP-B200, conforme pode ser visto na Figura 6.10. Além disso, define-se o tamanho da Transformada Rápida de Fourier (FFT) como 2048, utiliza-se uma janela retangular e realiza-se a média de 200 amostras.

### 6.2.1.1 Experimentação I: DEP do CSK

Os resultados experimentais dos sinais CSK transmitidos são apresentados na Figura 6.11. Observamos que a DEP nos extremos da banda sofre a influência do filtro passa-baixa anti-imagem característico do hardware Ettus B200 no lado da transmissão. Além

<sup>3</sup>[https://github.com/RafaExMachina/Chaos\\_Modulation.git](https://github.com/RafaExMachina/Chaos_Modulation.git) - O GitHub é uma plataforma de hospedagem de código-fonte e controle de versão que permite aos usuários colaborar em projetos de programação.

<sup>4</sup><https://www.sdrangel.org/>

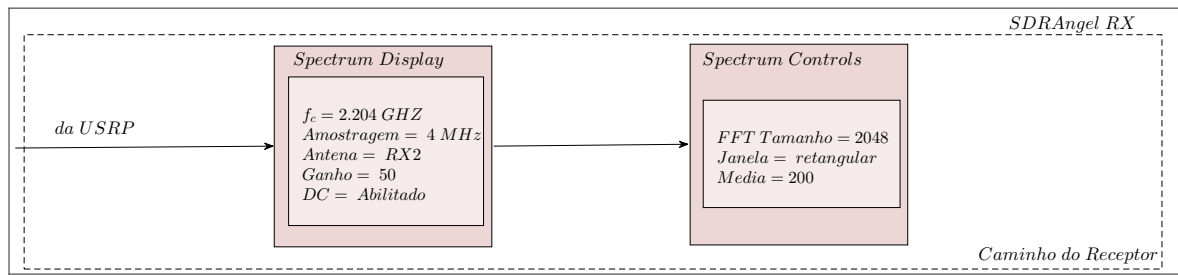


Figura 6.10: Diagrama de blocos do receptor utilizando o programa de análise de sinais SDRAngel.

disso, as DEPs das Figuras 6.11(c) e (f) estão em perfeita concordância com as das Figuras 6.6(a) e (b), respectivamente.

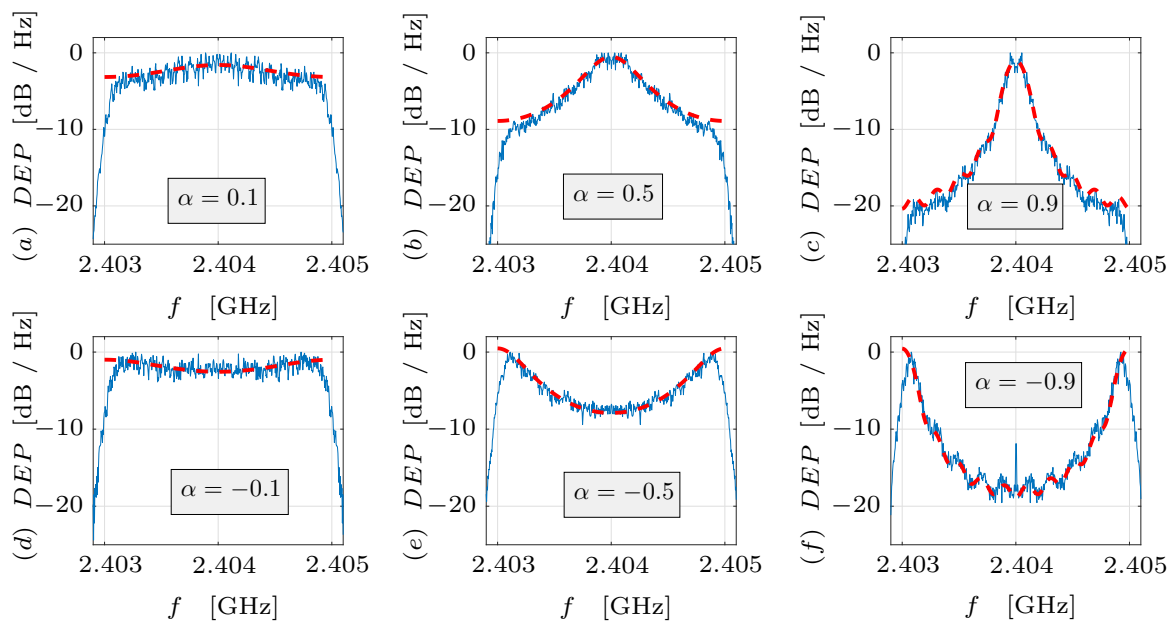


Figura 6.11: DEPs normalizadas experimental e teórica do CSK com  $N_b = 10$  e  $f_c = 2.404 \text{ GHz}$ .

### 6.2.1.2 Experimentação II: DEP do COOK

Nessa seção apresenta-se os resultados obtidos para a modulação COOK que é uma caso particular da modulação CSK.

Na Figura 6.12 temos os resultados obtidos para os sinais transmitidos pela modulação COOK. Pode-se ver que os resultados experimentais estão de acordo com (6.23), exceto pela influência da filtragem nas extremidades da banda no transmissor. Uma componente dc nas Figuras 6.12 (e) e (f) está associada ao receptor USRP.

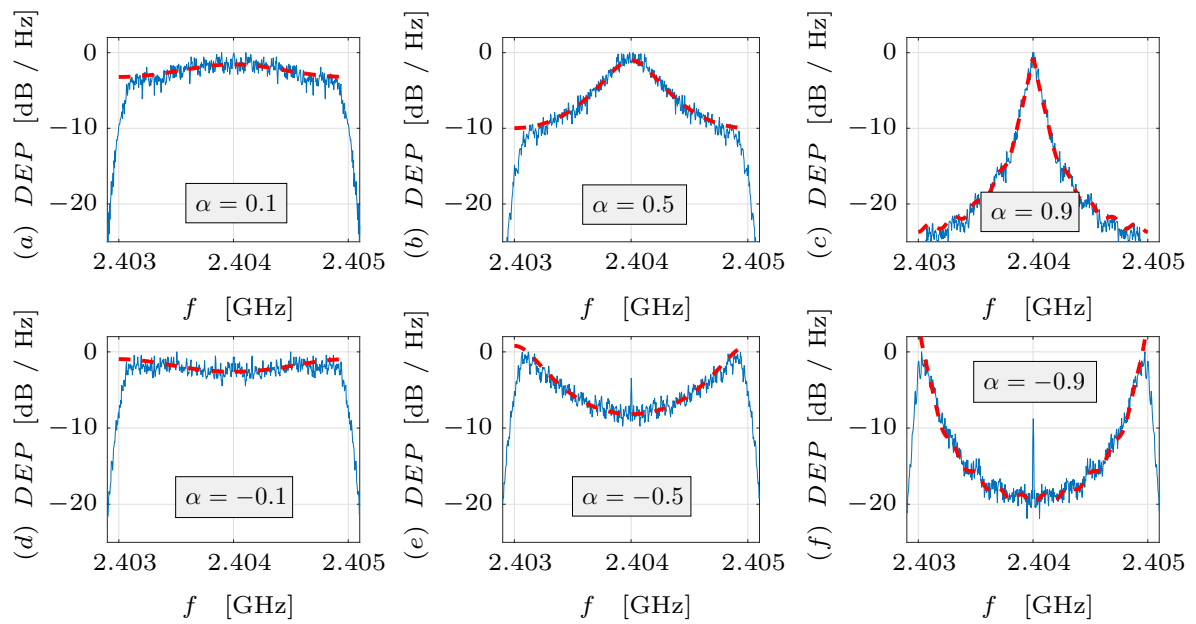


Figura 6.12: DEPs normalizadas experimental e teórica do COOK com  $N_b = 10$  e  $f_c = 2.404$  GHz.

### 6.3 Considerações finais

Neste capítulo, derivou-se a expressão analítica para DEP dos sinais transmitidos pela modulação CSK, sendo esta uma contribuição original do autor. Além disso, apresentam-se alguns resultados numéricos para casos particulares, utilizando o mapa da tenda inclinada como gerador de sinais caóticos. Em seguida, montou-se um aparato experimental utilizando o USRP e programas gratuitos para demonstrar os resultados em um canal de comunicação Bluetooth<sup>®</sup>.

No capítulo seguinte apresentam-se as conclusões desse trabalho.

# Capítulo 7

## Conclusões e trabalhos futuros

Nessa tese de doutorado buscou-se contribuir em aspectos teóricos e práticos associados a DEP de sinais caóticos gerados pelo mapa lineares por partes  $f_L(\cdot)$ . Na literatura, já foi descrito que sinais caóticos possuem características de banda larga e uma Sequência de Autocorrelação (SAC) impulsiva [21, 29, 30]. No entanto, ao longo da última década, pesquisas têm sugerido que esses sinais podem ter uma caracterização espectral mais variada, ou seja, podem apresentar propriedades de frequências altas e baixas. Por isso, torna-se essencial conduzir estudos mais detalhados, especialmente considerando suas aplicações práticas. Progressos foram feitos nos últimos anos na determinação da DEP de sinais caóticos produzidos por alguns mapas unidimensionais [31–37], no entanto, ainda é necessário descobrir resultados mais abrangentes.

Nesse sentido, mostrou-se como estender a representação linear de sinais caóticos proposta em [40] incluindo mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas. Além disso, foi proposto um método alternativo para cálculo da DEP utilizando-se a representação linear de sinais caóticos originalmente proposta em [40]. Esses resultados são interessantes e abrem um caminho para o cálculo das DEPs de mapas lineares por partes com descontinuidades que são um pouco mais complicados e que podem não ter uma densidade invariante uniforme.

Para averiguar a natureza dos sinais caóticos transmitidos por sistemas de comunicação, obteve-se fórmulas fechadas para DEP dos sinais transmitidos pela modulação CSK. Esse resultado é relevante pois como todo canal físico possui banda limitada, é relevante determinar e, preferencialmente, controlar a faixa de frequência ocupada pelos sinais caóticos envolvidos. Finalmente, validou-se os resultados teóricos por meio da implementação em *hardware* [41] e da análise espectral dos sinais transmitidos.

## 7.1 Contribuições

As principais contribuições dessa tese encontram-se nos Capítulos 4, 5 e 6.

No Capítulo 4, determinou-se uma expressão analítica para DEP do mapa linear por partes com  $r$  seguimentos com inclinações positivas ou negativas, generalizando resultados anteriores da literatura.

Na Capítulo, 5, a representação linear de sinais caóticos proposta em [40] foi estendida, incluindo mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas. Além disso, demonstrou-se o Teorema 2 que propõem um limitante superior entre o módulo da diferença entre sinais gerados pelo Algoritmo 1 e o mapa não linear. Finalmente, derivou-se a DEP do mapa não linear utilizando-se da teoria de sistemas lineares.

No Capítulo 6, Obtém-se fórmulas fechadas para DEP de sinais transmitidos pela modulação CSK e valida-se experimental os resultados em um canal de comunicação Bluetooth<sup>®</sup> utilizando SDR.

## 7.2 Outros resultados obtidos ao longo do doutorado

Nesta seção, apresentam-se alguns outros resultados obtidos durante o desenvolvimento dessa tese. Nas Seções 7.2.1 e 7.2.2 tratam-se das DEPs dos mapas quadrático e de Hénon, respectivamente. Esses resultados são interessantes porque confirmam o que foi discutido na Seção 3.2: sinais caóticos nem sempre apresentam características de sinais de banda larga. Já na Seção 7.2.3, tem-se um resultado de um estudo inicial que explora algumas propriedades do mapa  $f_L(\cdot)$  para encriptar imagens.

### 7.2.1 DEP para o mapa $f_Q(\cdot)$

Até o momento, trabalhou-se apenas com mapas constituídos por trechos lineares. O mapa quadrático descrito aqui é unidimensional e tem não linearidade quadrática. A análise teórica dele constitui um desafio. Até onde o autor conhece apenas para um caso particular quando o parâmetro do mapa  $a_Q = 4$  consta resultado analítico para densidade invariante desse mapa [61].

O mapa quadrático é uma modificação do mapa logístico [62], é definido por

$$s(n+1) = f_Q(s(n)) = -\frac{a_Q}{2}s(n)^2 + \frac{a_Q - 2}{2}, \quad (7.1)$$

sendo que  $a_Q \in [0, 4]$  um parâmetro constante e a condição inicial  $s(0) \in U = [-1, 1]$ .

Na Figura 7.1(a) é mostrado um exemplo do mapa  $f_Q(\cdot)$  com  $a_Q = 4$  e na Figura 7.1(b) duas órbitas desse mapa com  $s(0) = 0.7$  (linha sólida) e  $s(0) = 0.700000001$  (linha tracejada).

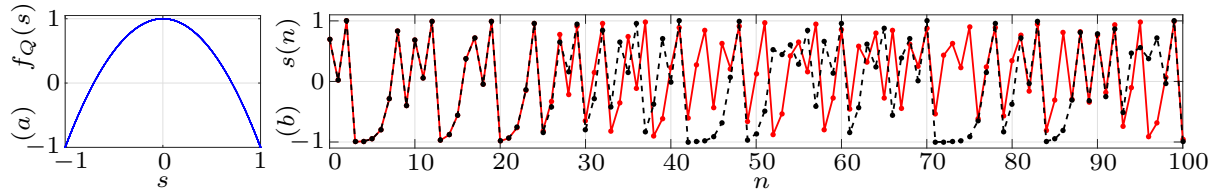


Figura 7.1: (a) Mapa  $f_Q(\cdot)$  com  $a_Q = 4$  e (b) suas órbitas.

Na Figura 7.2 é ilustrado o comportamento da DEP normalizada do mapa  $f_Q(\cdot)$  para o intervalo  $3.835 < a_Q \leq 4$ . Note-se que a componente DC não foi plotada. É notável a concentração de energia em banda estreita nas altas frequências do mapa, além de pequenas janelas periódicas que são representadas por picos.

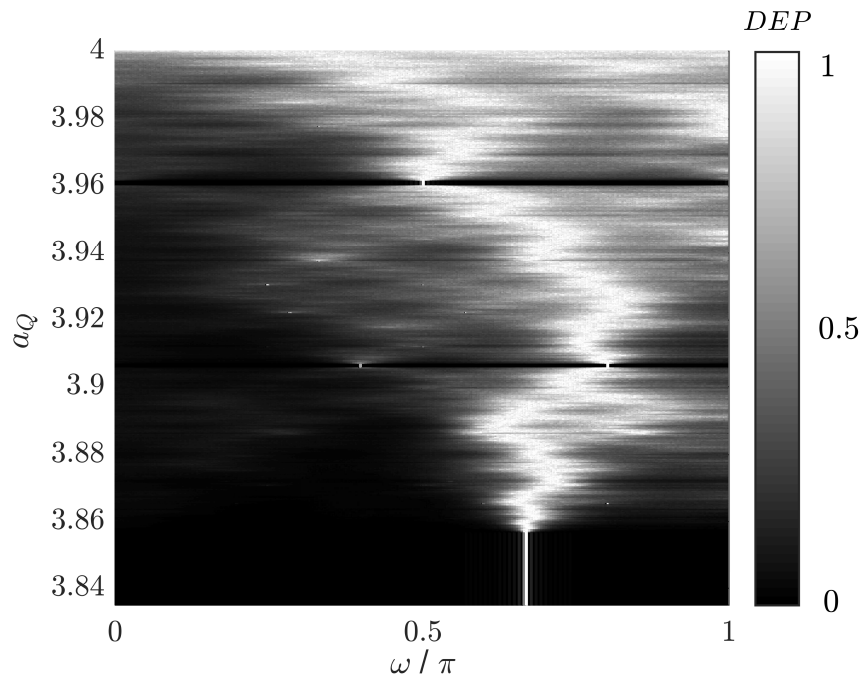


Figura 7.2: DEP normalizada do mapa  $f_Q(\cdot)$  para  $3.835 < a_Q \leq 4.000$ .

### 7.2.2 DEP para o mapa $f_H(\cdot)$

Um mapa bidimensional que pode ser considerado uma generalização do mapa  $f_Q(\cdot)$  é o mapa de Hénon  $f_H(\cdot)$ .

O mapa de Hénon  $f_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é definido como [63]

$$\mathbf{s}(n+1) = f_H(\mathbf{s}(n)) = \begin{bmatrix} s_2(n) + 1 - a_H s_1^2(n) \\ b_H s_1(n) \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

em que  $\{a_H, b_H\} \in \mathbb{R}$  são parâmetros e  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n) \ s_2(n)]^T$ .

Na Figura 7.3(a) e (b) mostra-se  $\mathbf{s}(n)$  com condição inicial  $\mathbf{s}(0) = [0 \ 0]^T$  para  $a_H = 1.4$  e  $b_H = 0.3$ . O atrator do mapa de Hénon foi obtido descartando-se as  $10^3$  primeiras iterações, ilustrado na Figura 7.3(c). O maior expoente de Lyapunov desse atrator pode ser obtido numericamente resultando em  $h_H = 0.42$  [1], confirmando a natureza caótica dos sinais.

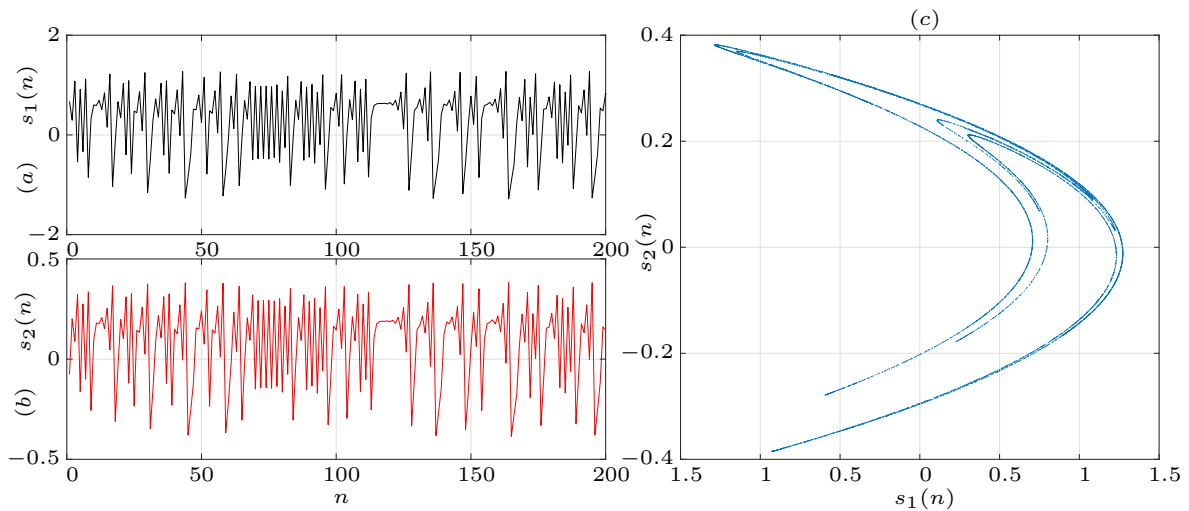


Figura 7.3: Mapa de Hénon para  $a_H = 1.4$  e  $b_H = 0.3$ : (a) e (b) são órbitas  $\mathbf{s}(n)$  com condição inicial  $\mathbf{s}(0) = [0 \ 0]^T$ ; (c) o mapa.

Na Figura 7.4, ilustra-se o comportamento normalizado da DEP do mapa  $f_H(\cdot)$  para  $b_H = 0.3$  no intervalo  $1.2 < a_H \leq 1.4$ . Note-se que a componente DC foi desconsiderada. Especificamente, pode-se ver representado a DEP nas proximidades de  $a_H \approx 1.2$ , em que a distribuição da energia concentra-se preponderantemente nas altas frequências em banda estreita. Já acima de  $a_H = 1.22 \dots$  representa-se a DEP pelo pico em  $2\pi/7$  e seus harmônicos que representam um intervalo que possui uma janela periódica de período 7. Em fim, constata-se em  $a_H = 1.4$  que a DEP é banda estreita com sinais passa-altas. O início do caos e as janelas periódicas podem ser notadas claramente. Observa-se também a concentração de energia nas altas frequências.

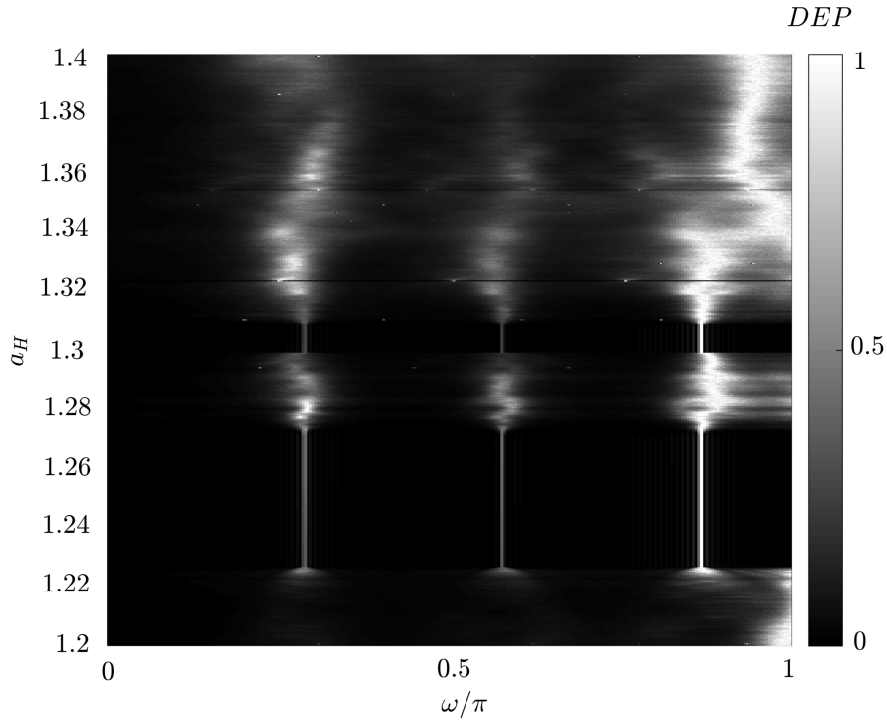


Figura 7.4: DEP normalizada do mapa  $f_H(\cdot)$  para  $b_H = 0.3$  e  $1.2 < a_H \leq 1.4$ .

### 7.2.3 Encriptação de imagem usando sinais caóticos

Nessa seção propõem-se a utilização de um gerador pseudo-aleatório que fornece uma sequência binária a partir de um mapa linear por partes  $f_L(\cdot)$  com parâmetros  $\beta = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $\alpha = [-0.5 \ 0.001 \ 0.5 \ 1]^T$ . Como visto na Seção 4.1, esse mapa é ergódico com densidade invariante uniforme dada por (4.6) e expoente de Lyapunov  $h \approx \ln 4$ .

A imagem  $I$  utilizada de tamanho  $L_M \times L_N$  pixels é representada por 3 matrizes  $L_M \times L_N$  contendo as componentes RGB. Cada elemento dessas matrizes é digitalizado utilizando-se 8 bits. Utiliza-se o mapa caótico para gerar uma órbita de comprimento  $L_M \times L_N \times 8$  bits

$$z(n) = \Theta(s(n)) = \begin{cases} 1 & \text{se } s(n) \geq 0 \\ 0 & \text{se } s(n) < 0 \end{cases}, \quad (7.3)$$

em que  $z(n)$  é a sequência de bits com  $n = 0, 1, 2, \dots, L_M \times L_N \times 8$  bits gerado pela função  $\Theta(\cdot)$  a partir do mapa  $f_L(\cdot)$ .

Descarta-se os  $10^3$  primeiros pontos gerados pelo mapa na tentativa de eliminar o comportamento transitório e gera-se uma sequência de  $L_M \times L_N \times 8$  de 0s e 1s tomando-se o sinal das amostras restantes. Realiza-se então a operação  $XOR$  entre a sequência pseudoaleatória gerada pelo mapa e cada uma das matrizes associadas com a imagem. Em seguida é reconstruído cada vetor de pixels. Na recuperação da imagem realiza-se o



processo inverso.

Na Figura 7.5 tem-se a imagem original “Lenna” com  $420 \times 420$  pixels, a imagem encriptada e a imagem recuperada utilizando o algoritmo proposto. Na simulação utilizou-se como chave os parâmetros  $\alpha = [-0.5 \ 0.001 \ 0.5 \ 1]^T$ ,  $\beta = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  e  $s(0) = 0.731579999$ .

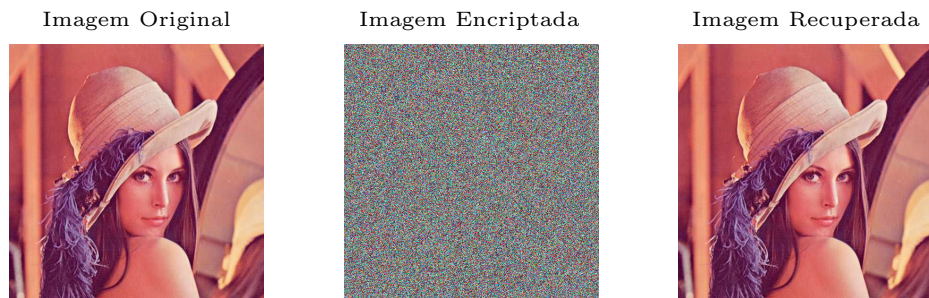


Figura 7.5: Imagem encriptada utilizando o método proposto.

Embora o algoritmo proposto tenha realizado a encriptação conforme esperado estudos sobre o efeito da precisão finita, condição inicial e parâmetros necessitam de mais profundidade. Além disso, técnicas de embaralhamento dos pixels baseados na órbita caótica gerada podem ser implementadas para tornar a encriptação mais robusta como em [10]. Pretende-se em trabalhos futuros realizar testes estatísticos na imagem encriptada e no gerador pseudo-aleatório.

## 7.3 Publicações detalhadas

A partir dos resultados obtidos nessa tese, foram publicados dois artigos em periódicos internacionais [PI], um artigo em congresso internacional [CI], um capítulo de livro [CL], três artigos em congressos nacionais [CN], quatro resumos expandidos publicados em congressos nacionais [RN] e dois resumos publicados em simpósios [RS]. Eles estão listados a seguir e os principais colocados no Apêndice A.

[PI-1] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Jun. 2019. DOI: 10.1016/j.cnsns.2019.01.002

- A DEP dos sinais transmitidos é um aspecto fundamental na avaliação de desempenho de sistemas de comunicação em geral. No contexto de sistemas de comunicação

baseados em caos, torna-se relevante obter analiticamente a DEP de geradores de sinais caóticos. Recentemente, obtiveram-se vários resultados para mapas lineares por partes. Neste trabalho, deduzimos a DEP para uma família geral desses mapas, compostos por um número arbitrário de segmentos, com inclinações positivas ou negativas. Exemplos numéricos ilustram os resultados analíticos e demonstram a diversidade de espectros alcançáveis.

[PI-2] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, Apr 2017. DOI: 10.1016/j.sigpro.2016.10.025

- Nas últimas décadas, muitos estudos com aplicações práticas de sinais caóticos em telecomunicações e processamento de sinal foram realizados. Embora a análise espectral seja relevante nestas áreas, existem poucos resultados analíticos sobre a caracterização espectral de sinais caóticos. Neste trabalho, deduzimos expressões analíticas para a SAC, DEP e banda essencial de sinais caóticos gerados por um mapa linear por partes, com múltiplos segmentos. Apresentamos simulações numéricas para confirmar os resultados teóricos.

[CI] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Chaotic signals representation and spectral characterization using linear discrete-time filters. In: *28th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2020*, 2021. DOI: 10.23919/Eusipco47968.2020.9287475

- Apresenta-se uma representação linear com entradas aleatórias de sinais caóticos que usa um filtro recursivo linear de tempo discreto. Esta abordagem permite deduzir de forma simples fórmulas analíticas para a DEP desses sinais, trazendo contribuições relevantes para sistemas de comunicação baseados em caos e processamento de sinais. Utilizamos simulações numéricas para comprovar os resultados teóricos.

[CL] M. Eisenkraft, J. V. C. Evangelista, R. A. Costa, R. T. Fontes, R. Candido, D. P. B. Chaves, C. Pimentel, and M. T. M. Silva. *New Trends in Chaos-Based Communications and Signal Processing, A Mathematical Modeling Approach from Nonlinear Dynamics to Complex Systems*. Springer International Publishing, 2019. DOI: 10.1007/978-3-319-78512-7\_7

- Nas últimas décadas, foram relatadas diversas possíveis aplicações da dinâmica não linear em sistemas de comunicação e processamento de sinais. Por outro lado, técnicas comumente empregadas pelas comunidades de processamento de sinais e sistemas de comunicação, como SAC, análise da DEP e filtros lineares, entre outras,

têm sido usadas para caracterizar sistemas dinâmicos caóticos. Este capítulo apresenta quatro trabalhos que visam utilizar ferramentas de ambos os campos para gerar resultados novos e interessantes: (1) um sistema de autenticação de mensagens baseado em impressão digital caótica; (2) um estudo das características espectrais das órbitas caóticas do mapa de Hénon; (3) uma investigação sobre a natureza caótica dos sinais gerados por um mapa de Hénon filtrado, e (4) um sistema de comunicação que apresenta equalização e um esquema de alternância entre modulações baseadas em caos e modulações convencionais.

[CN-1] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Densidade espectral de potência de sinais transmitidos pelo CSK. In: XXXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, Fortaleza. Anais do XXXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, 2021. DOI: 10.14209/sbrt.2021.1570730844

- Nesse artigo, deriva-se analiticamente expressões para a DEP de sinais transmitidos pelo CSK, uma modulação digital que utiliza sinais caóticos. Esses resultados são importantes quando se pensa em aplicações práticas desses sinais em sistemas de comunicação e processamento de sinais. Os resultados teóricos são ilustrados por meio de exemplos numéricos.

[CN-2] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Representação linear e caracterização espectral de sinais caóticos usando filtros lineares. In: XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, Florianópolis. Anais do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, 2020. DOI: 10.14209/SBRT.2020.1570658001

- Neste artigo, apresenta-se uma representação linear de um mapa linear por partes que gera sinais caóticos usando filtro recursivo em tempo discreto. Ele pode ser usado para deduzir facilmente fórmulas analíticas para a densidade espectral de potência de sinais caóticos, fornecendo resultados úteis para sistemas de comunicação baseados em caos e processamento de sinais. Simulações numéricas são usadas para validar os resultados teóricos.

[CN-3] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Análise Temporal e Espectral de Sinais Caóticos Gerados por um Mapa Tenda Generalizado. In: Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José do Rio Preto. Brazilian Society for Computational and Applied Mathematics (SBMAC), 2017. Encontra-se no Apêndice A.

- Nesse trabalho, obtém-se analiticamente a SAC e a DEP das órbitas de um mapa linear por partes que é uma generalização de diversos casos apresentados recentemente na literatura. Esse mapa é constituído por um número arbitrário de segmentos com inclinações positivas ou negativas.
- [RN-1] R. A. da Costa e M. Eisencraft. Espectro de sinais caóticos com validação experimental. In: XLII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Bonito. Anais do XLII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. 2023.
- Nesse resumo expandido, os resultados analíticos da DEP de sinais transmitidos pela modulação CSK é validado experimentalmente em um canal de comunicação real.
- [RN-2] R. A. da Costa e M. Eisencraft. Análise espectral de modulações digitais que utilizam sinais caóticos. In: XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Mato Grosso do Sul. Anais do XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. 2021.
- Nesse resumo expandido, resultados analíticos sobre a DEP de sinais transmitidos pela modulação CSK são apresentados e validados numericamente.
- [RN-3] R. A. da Costa e M. Eisencraft. Representação Linear de Sinais Caóticos Gerados por Mapas Lineares por Partes. In: XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Uberlândia. Anais do XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. 2019.
- Nesse resumo expandido, uma extensão que inclui segmentos negativos e positivos da representação linear com entradas aleatórias de sinais caóticos é apresentado e validado numericamente.
- [RN-4] R. A. da Costa e M. Eisencraft. Análise Temporal e Espectral de Sinais Gerados por um Mapa Tenda Generalizado. In: XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São José dos Campos. Anais do XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. 2017.
- Nesse resumo expandido, um mapa linear por partes com  $r$  segmentos com inclinações positivas e negativas é apresentado e validado numericamente.

[RS-1] R. A. da Costa e M. Eisencraft. Caracterização Espectral de Sinais Caóticos Usando Filtro Linear. In: Simpósio de Processamento de Sinais (SPS), São Bernado do Campo. Anais do SPS, 2017.

- Nesse resumo, uma extensão que inclui segmentos negativos e positivos da representação linear com entradas aleatórias de sinais caóticos é apresentado.

[RS-2] R. A. da Costa e M. Eisencraft. Encriptação de Imagem Utilizando Sinais Caóticos. In: Simpósio de Processamento de Sinais (SPS), São Bernado do Campo. Anais do SPS, 2017.

- Nesse resumo, um modelo de encriptação de imagens é apresentado.

Além disso, considera-se [PI-★, PI-★★] futuras publicações em periódico internacional.

[PI-★] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Spectral analysis of CSK modulations using piecewise linear maps with experimental validation. A ser publicado em periódico internacional. Encontra-se no Apêndice A.

- A Modulação CSK é uma das muitas modulações digitais promissoras que utilizam sinais caóticos. Neste artigo, derivamos a DEP dos sinais transmitidos pelo CSK quando um mapa linear por partes é usado como gerador de sinal caótico. Os resultados são relevantes ao considerar a aplicação prática do CSK. Por exemplo, eles são cruciais no projeto de controle de acesso ao meio baseado em divisão de frequência. Os resultados teórico são validados numericamente e experimentalmente em um canal de comunicação real.

[PI-★★] R. A. da Costa and M. Eisencraft. The quadratic map and its temporal and spectral properties. In: arXiv preprint arXiv:2307.16057, 2023. A ser publicado em periódico internacional. Encontra-se no Apêndice A.

- Este trabalho examina numericamente as propriedades temporais e espectrais de um mapa quadrático. O mapa quadrático descrito neste estudo possui não-linearidade quadrática, tornando sua análise teórica desafiadora. Além disso, este mapa pode ser utilizado para um valor fixo de parâmetro em sistemas de comunicação baseados em caos. Portanto, é importante compreender e, se possível, controlar a DEP gerada por seus sinais. Em sistemas de comunicação práticos, a largura de banda é limitada, tornando essencial entender a formatação espectral dos sinais empregados.

O autor dessa tese esteve apresentando os trabalhos nos congressos **CI**, **CN-1**, **CN-2**, **CN-3**, **RN-1**, **RN-2**, **RN-3**, **RN-4**, **RS-1** e **RS-2**, com auxílio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## 7.4 Trabalhos futuros

As contribuições e conclusões mencionadas anteriormente pavimentam o caminho para a proposição de novas pesquisas com base nos resultados alcançados. Entre essas possíveis investigações futuras, podemos citar:

- a) **Derivar expressões analíticas da DEP de mapas lineares por partes com descontinuidades utilizando-se das técnicas do Capítulo 4**

Considerando-se que a densidade invariante de mapas lineares por partes com descontinuidades pode ser uniforme, pode ser viável calcular a DEP desses mapas usando as técnicas apresentadas no Capítulo 4. No entanto, um obstáculo que se apresenta é descobrir a fórmula fechada para a  $n$ -ésima iteração do mapa e, por consequência, sua fórmula para a  $n+1$  iteração.

- b) **Derivar expressões analíticas da DEP de mapas lineares por partes com descontinuidades utilizando-se das técnicas do Capítulo 5**

Para mapas lineares por partes com descontinuidades, pode-se considerar a possibilidade de calcular a DEP desses mapas utilizando as técnicas propostas no Capítulo 5. Neste contexto, o desafio reside na identificação do sistema linear equivalente e, conseqüentemente, na obtenção da resposta em frequência do sistema. Conhecendo a DEP da sequência aleatória de entrada e apoiando-se na teoria de sistemas lineares, poderíamos então determinar a DEP do sinal caótico gerado.

- c) **Obter fórmulas fechadas para DEP de modulações digitais que utilizam sinais caóticos**

Inspirado nos resultados analíticos obtidos no Capítulo 6. Um caminho a seguir é tentar calcular a DEP dos sinais transmitidos por outras modulações. Como por exemplo: o DCSK. Embora essas modulações sejam conhecidas à poucos estudos com relação as expressões analíticas dos sinais transmitidos por elas.

- d) **Propor um sistema de modulação que explore as características espectrais dos sinais caóticos.**

Como apresentados no Capítulo 4 os sinais caóticos podem apresentar um diversidade espectral interessante. Eles podem concentrar-se em altas e baixas frequências e até apresentar características de um ruído branco. Poderíamos utilizar esses conhecimentos para propor uma modulação que explore essas características dos sinais caóticos.

- e) **Estabelecer um ambiente de laboratório para avaliar a implementação do SCBC em hardware.**

Com a obtenção do *hardware* (B-200) é possível avaliar o desempenho de SCBC em transmissões reais. Como exemplo, pode-se implementar e avaliar um sistema de comunicação completos como o proposto em [64]. Um problema interessante seria a averiguação de aspectos práticos que envolvem SCBCs como a precisão finita de sistemas reais. É possível obter caos nessas condições?

- f) **Investigação numérica da DEP de outros mapas com não linearidades e bidimensionais.**

Embora realizou estudos com os mapas quadrático e Hénon. Ainda há outros mapas que necessitam ter a DEP investigada numericamente. Pretende-se continuar a investigação com mapas, como por exemplo, o mapa de Ikeda [65].

- g) **Encriptação de imagem com sinais caóticos.**

Como o resultado obtido na seção 7.2.3 é apenas inicial, vislumbra-se um estudo mais profundo explorando as propriedades do mapa  $f_L(\cdot)$  na encriptação de imagens.

## Referências Bibliográficas

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- [2] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. The Perseus Books Group, January 2001.
- [3] D. Toker, F. T. Sommer, and M. D’Esposito. A simple method for detecting chaos in nature. *Communications biology*, 3(1):11, 2020.
- [4] B. Kobrin, Z. Yang, G. D. Kahanamoku-Meyer, C. T. Olund, J. E. Moore, D. Stanford, and N. Y. Yao. Many-body chaos in the sachdev-ye-kitaev model. *Physical review letters*, 126(3):030602, 2021.
- [5] Kiran, B. D. Parameshachari, and H. T. Panduranga. Medical image encryption using scan technique and chaotic tent map system. In *Recent Advances in Artificial Intelligence and Data Engineering: Select Proceedings of AIDE 2020*, pages 181–193. Springer, 2022.
- [6] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8):821–824, feb 1990.
- [7] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization of chaotic systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(9), 2015.
- [8] M. Eisenkraft and A. M. Batista. Discrete-time chaotic systems synchronization performance under additive noise. *Signal Processing*, 91(8):2127–2131, aug 2011.
- [9] M. Eisenkraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.
- [10] Y. Zhou, L. Bao, and C. L. P. Chen. A new 1d chaotic system for image encryption. *Signal processing*, 97:172–182, 2014.
- [11] M. S. Baptista. Cryptography with chaos. *Physics Letters A*, 240(1-2):50–54, mar 1998.
- [12] H-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi. Wireless communication with chaos. *Physical Review Letters*, 110(18):184101, apr 2013.
- [13] G. Kaddoum. Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey. *IEEE Access*, 4:2621–2648, 2016.
- [14] M. P. Kennedy and G. Kolumbán. Digital communications using chaos. *Signal Processing*, 80(7):1307–1320, jul 2000.



- [15] G. Kolumban, M.P. Kennedy, and L.O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos. II. chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(11):1129–1140, 1998.
- [16] X. Cai, W. Xu, S. Hong, and L. Wang. Discrete w transform based index-keying m-ary dcsk for non-coherent chaotic communications. *IEEE Communications Letters*, 25(9):3104–3108, 2021.
- [17] X. Cai, W. Xu, L. Wang, and G. Kolumbán. Design and performance analysis of a robust multi-carrier m-ary dcsk system: A noise suppression perspective. *IEEE Transactions on Communications*, 70(3):1623–1637, 2022.
- [18] Z. Chen, L. Zhang, J. Zhang, Z. Wu, and D. Luobu. An ofdm-based pre-coded chaos shift keying transceiver for reliable v2v transmission. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 71(6):6710–6715, 2022.
- [19] T. Sui, Y Feng, B. Qian, F. Liu, Q. Jiang, and X. Li. Design and analysis of a multi-carrier orthogonal double bit rate differential chaotic shift keying communication system. *Electronics*, 12(8):1785, 2023.
- [20] G. Kaddoum and F. Gagnon. Design of a high-data-rate differential chaos-shift keying system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 59(7):448–452, jul 2012.
- [21] F. C. M. Lau and C. K. Tse. *Chaos-Based Digital Communication Systems*. Springer-Verlag GmbH, Berlin, 2003.
- [22] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*, 438(7066):343–346, nov 2005.
- [23] L. Wang, J. Wang, Y. Wu, Y. Sun, S. Li, L. Yan, Y. Wang, and A. Wang. Chaos synchronization of semiconductor lasers over 1040-km fiber relay transmission with hybrid amplification. *Photonics Research*, 11(6):953–960, 2023.
- [24] C. Bai, H-P. Ren, and C. Grebogi. Experimental phase separation differential chaos shift keying wireless communication based on matched filter. *IEEE Access*, 7:25274–25287, 2019.
- [25] G. Cai, Y. Fang, J. Wen, S. Mumtaz, Y. Song, and V. Frascolla. Multi-carrier m-ary DCSK system with code index modulation: An efficient solution for chaotic communications. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2019.
- [26] L. Yan, L. Jiang, Y. Pan, Y. Anlin, and W. Pan. Coherent detection-based high-speed chaotic secure transmission method, May 5 2022. US Patent App. 17/518,650.
- [27] Y. Fang, Y. Tao, H. Ma, and H. Guojun. Differential chaos shift keying communication method and system based on hybrid index, May 9 2023. US Patent 11,646,920.

- [28] B. P. Lathi and Z. Ding. *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. Oxford University Press, 2009.
- [29] M. P. Kennedy, G. Setti, and R. Rovatti, editors. *Chaotic Electronics In Telecommunications*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2000.
- [30] P. Stavroulakis, editor. *Chaos Applications in Telecommunications*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2005.
- [31] M. Eisencraft, D.M. Kato, and L.H.A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Processing*, 90(1):385–390, jan 2010.
- [32] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, 94(0):149–157, jan 2014.
- [33] K. Feltekh, Z. B. Jemaa, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(8):2771–2784, aug 2014.
- [34] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, 133:187–191, apr 2017.
- [35] A. Sahnoune and D. Berkani. On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map. *Signal, Image and Video Processing*, 12(7):1273–1278, mar 2018.
- [36] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 72:441–448, jun 2019.
- [37] A. Sahnoune and D. Berkani. On statistical properties of chaotic signals generated by negative sawtooth maps. *Automatic control and Computer Sciences*, 56(4):356–363, 2022.
- [38] H. Sakai and H. Tokumaru. Autocorrelations of a certain chaos. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 28(5):588–590, oct 1980.
- [39] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Spectral properties of chaotic signals generated by the Bernoulli map. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 8(2):12–16, 2015.
- [40] D. F. Drake and D. B. Williams. Linear, random representations of chaos. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(4):1379–1389, apr 2007.
- [41] G. Kolumban, T. I. Krebesz, and F. C. M. Lau. Theory and application of software defined electronics: Design concepts for the next generation of telecommunications and measurement systems. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 12(2):8–34, Secondquarter 2012.

- [42] A. Lasota and M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [43] R. A. Costa and M. Eisencraft. Análise temporal e espectral de sinais gerados por um mapa tenda generalizado. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), 2018.
- [44] R. A. Costa and M. Eisencraft. Análise temporal e espectral de sinais caóticos gerados por um mapa tenda generalizado. In *Anais da Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON 2017*, pages 1–7. SBMAC, 2017.
- [45] R. A. Costa and M. Eisencraft. Representação linear de sinais caóticos gerados por mapas lineares por partes. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), 2019.
- [46] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Chaotic signals representation and spectral characterization using linear discrete-time filters. In *2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 2235–2238, 2021.
- [47] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Representação linear e caracterização espectral de sinais caóticos usando filtros lineares. In *Anais do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2020.
- [48] R. A. Costa and M. Eisencraft. Análise espectral de modulações digitais que utilizam sinais caóticos. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), 2021.
- [49] R. A. da Costa and M. Eisencraft. Densidade espectral de potência de sinais transmitidos pelo CSK. In *Anais do XXXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2021.
- [50] R. A. Costa and M. Eisencraft. Espectro de sinais caóticos com validação experimental. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 6. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), 2023.
- [51] C. Beck and F. Schögl. *Thermodynamics of chaotic systems: an introduction*. Cambridge University Press, 1995.
- [52] J. G. Proakis and D. K. Manolakis. *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Pearson, 2006.
- [53] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, 3th edition, 2011.
- [54] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley studies in nonlinearity. Westview, 2003.
- [55] P. Peebles. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2000.

- 
- [56] P. Stoica and R. L. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Prentice Hall, 2005.
- [57] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Addison Wesley Pub CO Inc, Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition, 2009.
- [58] X. Cai, W. Xu, L. Wang, and F. Xu. Design and performance analysis of differential chaos shift keying system with dual-index modulation. *IEEE Access*, 7:26867–26880, 2019.
- [59] D-P. Vuong, D-K. Le, K-K. Nguyen, and B. V. Nguyen. Correlation receiver with nonlinearity blanking for DCSK systems under pulse jamming attack. *IEEE Access*, 7:25037–25045, 2019.
- [60] S. S. Haykin. *Communication systems*. Wiley, New York, fourth edition, 2001.
- [61] B-L. Hao. *Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems*. World Scientific, 1989.
- [62] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, jun 1976. *Nature*.
- [63] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50:94–102, 1976.
- [64] R. T. Fontes and M. Eisencraft. A digital bandlimited chaos-based communication system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37:374–385, aug 2016.
- [65] K. Ikeda. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system. *Optics Communications*, 30(2):257 – 261, 1979.

## APÊNDICE A - PUBLICAÇÕES

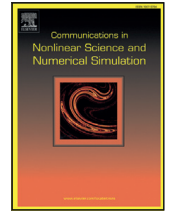
- [PI-1] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 72:441–448, Jun. 2019.
- [PI-2] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, 133:187–191, Apr 2017.
- [CI] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Chaotic signals representation and spectral characterization using linear discrete-time filters. In: *28th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2020*, 2235–2238, 2021.
- [CL] M. Eisenkraft, J. V. C. Evangelista, R. A. Costa, R. T. Fontes, R. Candido, D. P. B. Chaves, C. Pimentel, and M. T. M. Silva. *New Trends in Chaos-Based Communications and Signal Processing, A Mathematical Modeling Approach from Nonlinear Dynamics to Complex Systems*. Springer International Publishing, 2019.
- [CN-1] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Densidade espectral de potência de sinais transmitidos pelo CSK. In: XXXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, Fortaleza. Anais do XXXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, 2021.
- [CN-2] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Representação linear e caracterização espectral de sinais caóticos usando filtros lineares. In: XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, Florianópolis. Anais do XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, 2020.
- [CN-3] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Análise Temporal e Espectral de Sinais Caóticos Gerados por um Mapa Tenda Generalizado. In: Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José do Rio Preto. pp. 1–7, Brazilian Society for Computational and Applied Mathematics (SBMAC), 2017.
- [PI-★] R. A. da Costa and M. Eisenkraft. Spectral analysis of CSK modulations using piecewise linear maps with experimental validation. A ser publicado.

- [PI-\*\*] R. A. da Costa and M. Eisencraft. The quadratic map and its temporal and spectral properties. In: arXiv preprint arXiv:2307.16057, 2023.



Contents lists available at ScienceDirect

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/cnsns](http://www.elsevier.com/locate/cnsns)

Research paper

# Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator

Rafael Alves da Costa, Marcio Eisencraft\*

Telecommunication and Control Engineering Department, Escola Politécnica, University of São Paulo, Brazil



## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 2 April 2018

Revised 16 November 2018

Accepted 8 January 2019

Available online 15 January 2019

### Keywords:

Chaos

Chaotic communication

Piecewise linear maps

Spectral analysis

## ABSTRACT

The Power Spectral Density (PSD) of the transmitted signals is a fundamental aspect in the performance evaluation of general communication systems. This way, when it comes to chaos-based communication systems, it is relevant to analytically obtain the PSD of chaotic signal generators. In particular, a number of results for piecewise-linear maps were recently obtained. In the present paper, we deduce the PSD for a general family of such maps composed by an arbitrary number of segments, with positive or negative slopes. Numerical examples illustrate the analytical results and show the diversity of attainable spectra.

© 2019 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

In the last decades, chaotic signals have received increasing attention due to their properties such as aperiodicity, limited amplitude and sensitivity to small variations on initial conditions [1]. These properties have led to many attempts at proposing a practical chaos-based communication system (CBCS) [2–11]. Even some patents were issued regarding the subject, see e.g. [12–15].

One fundamental aspect in the performance evaluation of communication systems is the power spectral density (PSD) of the transmitted signals and the bandwidth they occupy. When it comes to CBCSs, the PSD of chaotic signals generated by families of one-dimensional piecewise-linear maps were recently derived. These maps have the advantage of being easily implemented in software or hardware [16,17].

Eisencraft et al. [18] obtained an analytical expression for the PSD of chaotic orbits generated by the skew tent map shown in Fig 1(a) with parameter  $\alpha \in (-1, 1)$ . Feltekh et al. [19,20] obtained similar results for the 3-segments map shown in Fig. 1(b) with  $\alpha \in (0, 1)$ . Costa et al. [21] considered maps with  $r \geq 2$  segments, all of them with positive slopes, as shown in Fig. 1(c). Recently, Sahnoune and Berkani [22] obtained a closed formula for the PSD of the multimodal skew tent map of Fig. 1(d).

In the present paper we analytically obtain the PSD of the orbits of a map defined in the interval  $[-1, 1)$  and composed by an arbitrary number of segments each of them with image  $[-1, 1]$ , as illustrated in Fig. 2(a). Thus, it generalizes the previously described maps allowing for many other interesting cases. This result constitutes a relevant step in spectrally characterize chaotic signals, with significant impact in CBCS.

\* Corresponding author.

E-mail address: [marcio@lcs.poli.usp.br](mailto:marcio@lcs.poli.usp.br) (M. Eisencraft).

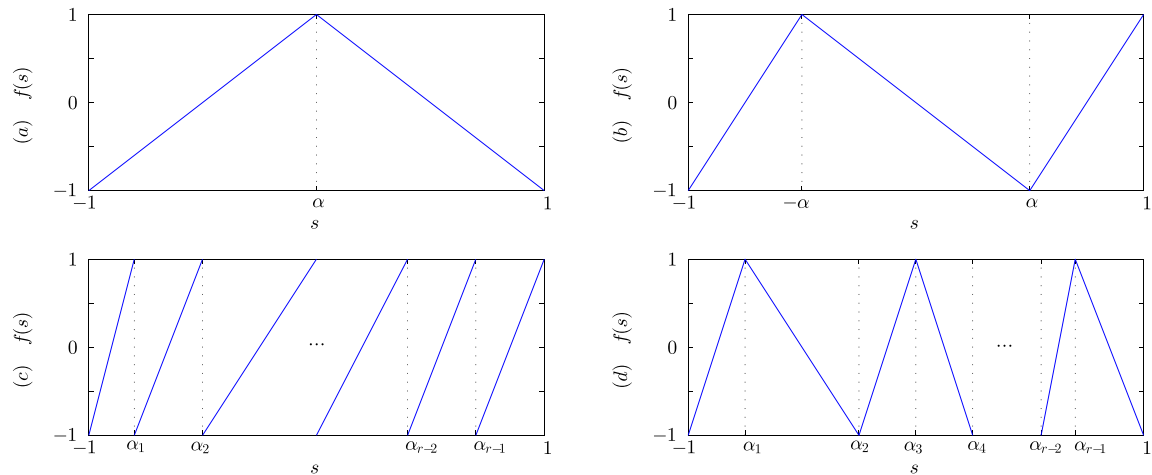


Fig. 1. (a) The skew tent map of [18], (b) 3-segments piecewise linear map of [20], (c) the Bernoulli map with  $r$  segments of [21] and (d) multimodal skew tent map of [22].

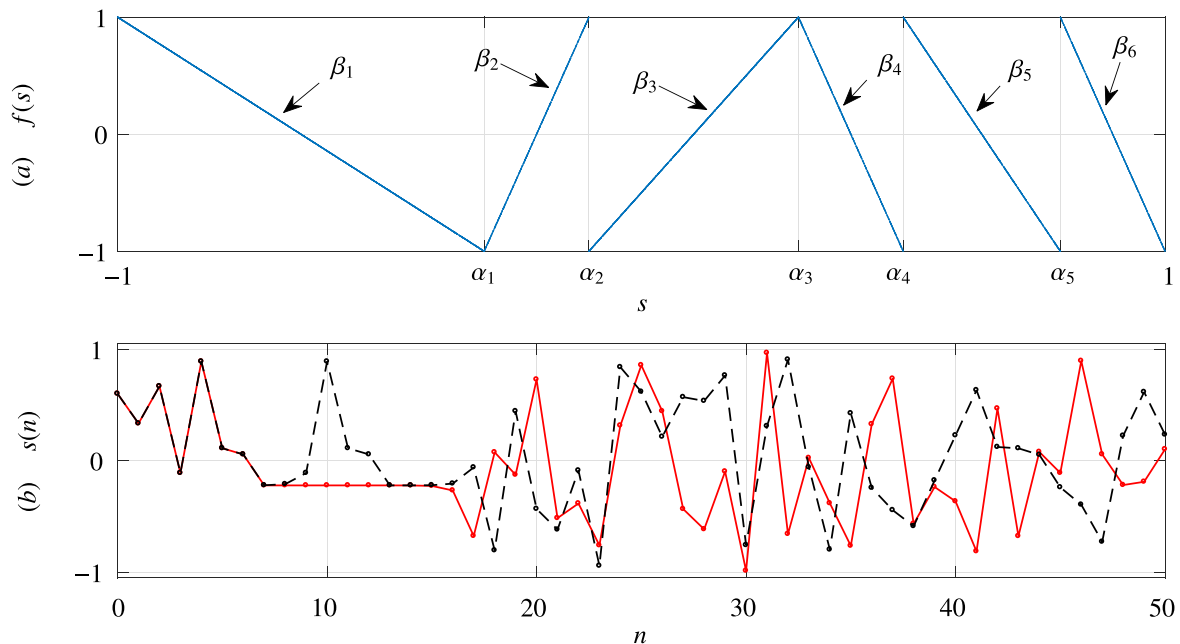


Fig. 2. (a) Example of map  $f(\cdot)$  of (1) for  $r = 6$  and (b) two orbits with  $s(0) = 0.6$  (continuous line) and  $s(0) = 0.600000001$  (dashed line) presenting aperiodicity and fast divergence between them.

The remaining of this work is organized as follows: the studied map and its major characteristics are presented in Section 2. The analytical results are deduced in Section 3. Particular relevant cases are numerically illustrated in Section 4, and Section 5 summarizes our conclusions.

**2. Considered map**

Let  $r \geq 2$  be an integer number,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$  real numbers with  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$  and  $\beta_j = \pm 1$  for  $1 \leq j \leq r$ . The considered map  $f : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  is defined as

$$f(s) = \beta_j \left[ \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right], \quad \text{for } \alpha_{j-1} \leq s < \alpha_j. \tag{1}$$

The map  $f(\cdot)$  defines the discrete-time dynamical system

$$s(n + 1) = f(s(n)), \tag{2}$$

where  $s(0) \in [-1, 1[$  is an initial condition with  $n = 0, 1, 2, \dots$ . To simplify notation, we define the  $r$ -dimensional column vectors  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T$  and  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_r]^T$ .



Fig. 2(a) illustrates  $f(\cdot)$  for  $r = 6$ ,  $\alpha = [-0.3 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.8 \ 1]^T$  and  $\beta = [-1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$ . The aperiodic behavior of the signals generated by  $f(\cdot)$  and their sensitivity to initial conditions are illustrated in Fig. 2(b) for  $s(0) = 0.6$  and  $s(0) = 0.600000001$ . In fact, following [21], it can be shown that the Lyapunov exponent  $h$  of almost every orbit of  $f(\cdot)$  is given by

$$h = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \ln \left( \frac{2}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right) \right] > 0. \tag{3}$$

Thus, almost every orbit of  $f(\cdot)$  is chaotic.

Besides, the invariant density of  $f(\cdot)$  is uniform and given by [21]

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq s < 1. \tag{4}$$

Consequently, the samples of an orbit of  $f(\cdot)$  are uniformly distributed on the interval  $(-1, 1)$ . Thus, they are zero-mean and their mean power  $P_s$  is

$$P_s = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

In the next section, we discuss how to analytically obtain the PSD for this map.

### 3. Power spectral density

To obtain a significant PSD for the orbits of (2), we use the stochastic approach to deterministic systems proposed in [23] and explored in this context in [18]. This way, the PSD is the Discrete-time Fourier Transform (DTFT) of the autocorrelation sequence (ACS) defined as

$$R(k) \triangleq E[s(n)s(n+k)], \tag{6}$$

where  $s(n)$  is a typical orbit, the expected value  $E[\cdot]$  is taken over all initial condition that generate chaos and the integer  $k$  is the correlation step [18,21,24].

Using the uniform invariant density (4), it can be shown [21] that  $R(k)$  can be written as

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f^k(x) dx. \tag{7}$$

The map  $f(\cdot)$  is composed by  $r$  segments. The image of each of these segments is the domain  $U = [-1, 1[$ . Thus, the  $k$ th iterated of  $f(\cdot)$ ,  $f^k(\cdot)$ , is composed by  $r^k$  segments. Let the  $m$ th segment,  $1 \leq m \leq r^k$ , of  $f^k(\cdot)$  be in the interval  $[a_{k,m-1}, a_{k,m}]$  with slope signal  $b_{k,m} \in \{-1, 1\}$ . This way,

$$f^k(x) = b_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{a_{k,m} - a_{k,m-1}}, \quad a_{k,m-1} \leq x < a_{k,m}. \tag{8}$$

Substituting (8) into (7), we obtain

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^k} \underbrace{\int_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} x \left( b_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{a_{k,m} - a_{k,m-1}} \right) dx}_I. \tag{9}$$

Evaluating the integral  $I$ ,

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{2x^3 b_{k,m}}{3(a_{k,m} - a_{k,m-1})} - \frac{(a_{k,m} + a_{k,m-1})x^2 b_{k,m}}{2(a_{k,m} - a_{k,m-1})} \right]_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} \\ &= b_{k,m} \frac{a_{k,m}^3 - 3a_{k,m}^2 a_{k,m-1} + 3a_{k,m} a_{k,m-1}^2 - a_{k,m-1}^3}{6(a_{k,m} - a_{k,m-1})} \\ &= b_{k,m} \frac{(a_{k,m} - a_{k,m-1})^2}{6}. \end{aligned} \tag{10}$$

Thus, substituting (10) in (9),

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2. \tag{11}$$

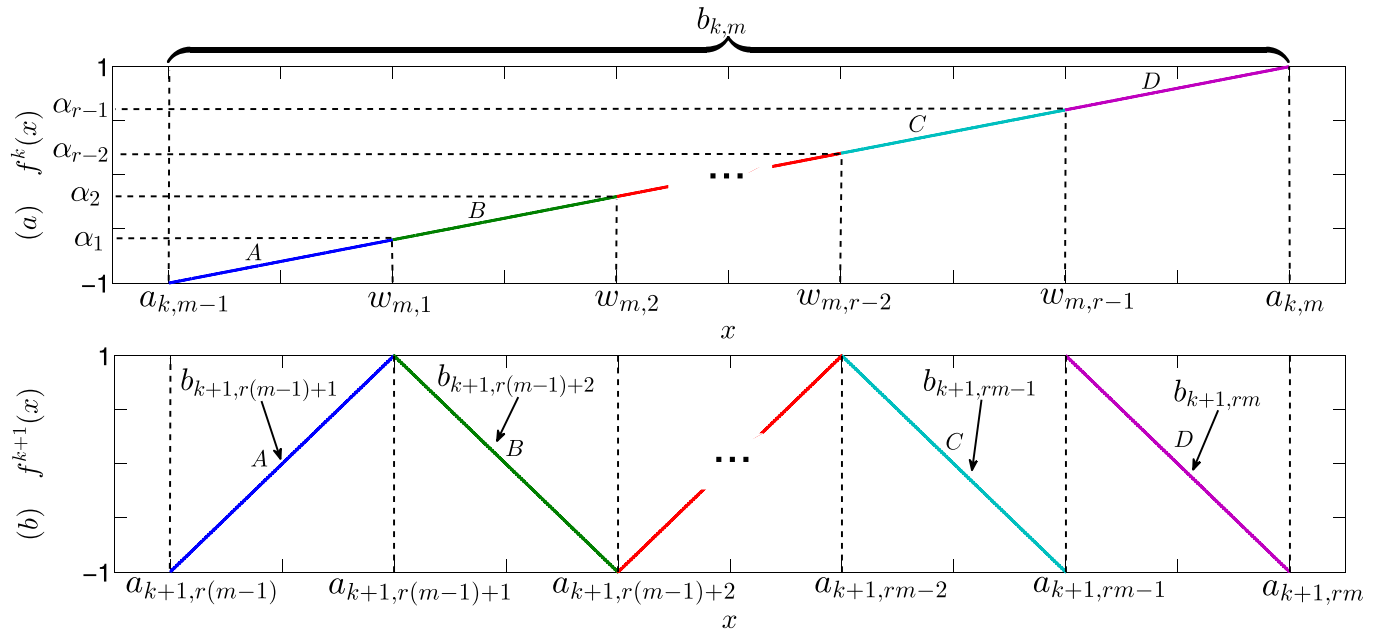


Fig. 3. (a) A segment of  $f^k(\cdot)$  and (b) the equivalent interval in  $f^{k+1}(\cdot)$ .

Therefore,  $R(k + 1)$  is given by

$$R(k + 1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k+1}} b_{k+1,m} (a_{k+1,m} - a_{k+1,m-1})^2. \tag{12}$$

When we iterate the map one time from  $f^k(\cdot)$  to  $f^{k+1}(\cdot)$  each segment is transformed into  $r$  new segments. For instance, the segment in the interval  $[a_{k,m-1}, a_{k,m}[$  with slope  $b_{k,m}$  shown in Fig. 3(a) is transformed into  $r$  segments with slopes and limits shown in Fig. 3(b).

As shown in Fig. 3(a), we define  $w_{m,j}$ ,  $0 \leq j \leq r$  in the interval  $[a_{k,m-1}, a_{k,m}[$  such that  $f^k(w_{m,j}) = \alpha_j$ . From (8)

$$w_{m,j} = \frac{b_{k,m}(a_{k,m} - a_{k,m-1})\alpha_j + (a_{k,m} + a_{k,m-1})}{2}. \tag{13}$$

Comparing Fig. 3(a) and (b),

$$\begin{cases} a_{k+1,r(m-1)+j} = w_{m,j}, & 0 \leq j \leq r \\ b_{k+1,r(m-1)+j} = b_{k,m}\beta_j, & 1 \leq j \leq r \end{cases} \tag{14}$$

Rewriting (12) as a summation of  $r^k$  sums of  $r$  terms and using (13)-(14), we obtain

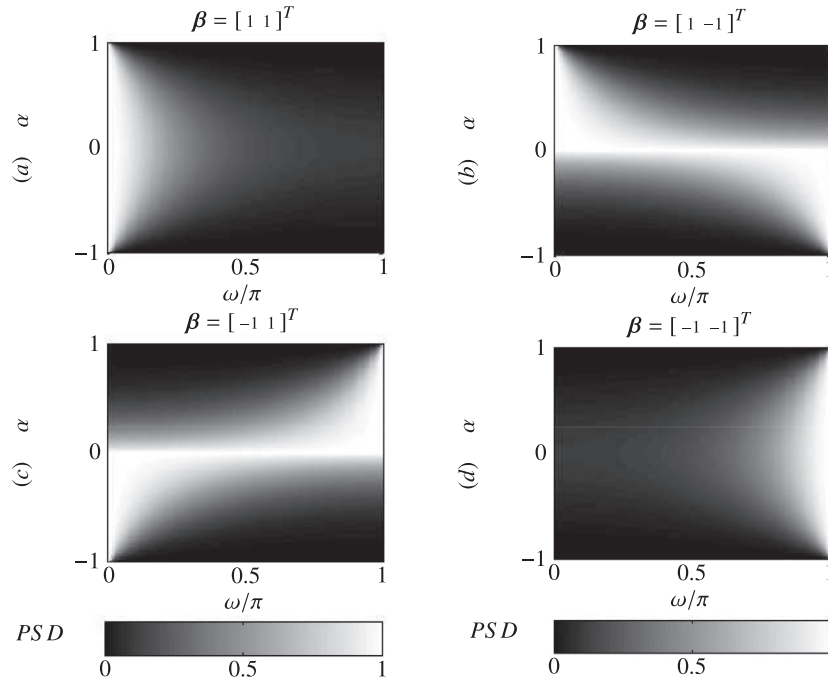
$$\begin{aligned} R(k + 1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k+1,r(m-1)+j} (a_{k+1,r(m-1)+j} - a_{k+1,r(m-1)+j-1})^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m}\beta_j (w_{m,j} - w_{m,j-1})^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m}\beta_j \left( \frac{b_{k,m}(a_{k,m} - a_{k,m-1})(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \sum_{j=1}^r \beta_j \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2, \end{aligned} \tag{15}$$

where we used the fact that  $b_{k,m}^2 = 1$  and defined

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2. \tag{16}$$

**Table 1**  
ACS and PSD for  $f(\cdot)$  with  $r = 2$  and  $\alpha_1 = \alpha$ .

$\beta$	$R(k)$	$P(\omega)$
$[1 \ 1]^T$	$\frac{1}{3} \left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{ k }$	$\frac{3-2\alpha^2-\alpha^4}{3(5-4 \cos(\omega)+2(1-2 \cos(\omega))\alpha^2+\alpha^4)}$
$[1 \ -1]^T$	$\frac{1}{3} \alpha^{ k }$	$\frac{1-\alpha^2}{3(1-2 \cos(\omega)\alpha+\alpha^2)}$
$[-1 \ 1]^T$	$\frac{1}{3} (-\alpha)^{ k }$	$\frac{1-\alpha^2}{3(1+2 \cos(\omega)\alpha+\alpha^2)}$
$[-1 \ -1]^T$	$\frac{1}{3} \left(-\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{ k }$	$\frac{3-2\alpha^2-\alpha^4}{3(5+4 \cos(\omega)+2(1+2 \cos(\omega))\alpha^2+\alpha^4)}$



**Fig. 4.** Normalized PSD of (19) for  $r = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha$  and (a)  $\beta = [1 \ 1]^T$ ; (b)  $\beta = [1 \ -1]^T$ ; (c)  $\beta = [-1 \ 1]^T$ ; (d)  $\beta = [-1 \ -1]^T$ .

Comparing (11) with (15), it follows that

$$R(k + 1) = \psi R(k). \tag{17}$$

From (5),  $R(0) = P_s = \frac{1}{3}$ . Solving (17) with this initial condition yields

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}, \tag{18}$$

for any integer  $k$ .

Calculating the DTFT of (18), we finally obtain the PSD  $P(\omega)$

$$P(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 - 2 \cos(\omega)\psi + \psi^2)}. \tag{19}$$

It is relevant to note that the PSD (19) generalizes many results previously presented in the literature as the ones in [18,20–22]. In the next section, some numerical examples illustrate how (19) applies in some particular cases.

#### 4. Numerical examples

In this section, we numerically analyse the general expression (19). In special, we consider  $r = 2$ ,  $r = 3$  and  $r = 4$ .

##### 4.1. $r = 2$ segments

Let  $\alpha_1 = \alpha$ . Table 1 shows expressions for ACS and PSD for the four possible  $\beta$ .

For  $\beta = [1 \ 1]^T$  the power concentrates in low frequencies as shown in Fig. 4(a). This is the Bernoulli map studied in [21]. When  $\beta = [-1 \ -1]^T$  the power concentrates in high frequencies as shown in Fig. 4(d).

Next, we consider segments with slopes of opposing signals. In this case, the signal of the longest segment prevails: we have low-pass signals if the longest segment has positive slope and high-pass signals if the longest segment has negative

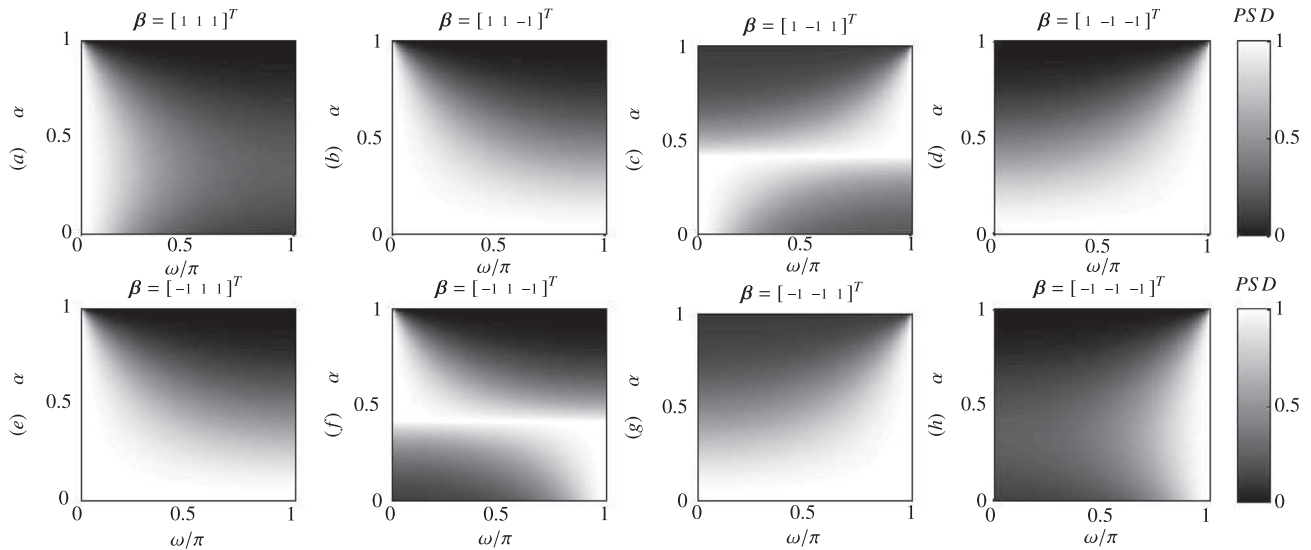


Fig. 5. Normalized PSD of (19) for  $r = 3$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$  and  $\beta$  as indicated in each graph.

slope. A white spectrum can be obtained when the segments have the same length as can be seen in Fig. 4(b) and (c) for  $\alpha = 0$ . In particular, the case  $\beta = [1 \ -1]^T$  is the skew tent map analyzed in [18] and shown in Fig. 1(a).

#### 4.2. $r = 3$ segments

Let  $\alpha_1 = -\alpha$  and  $\alpha_2 = \alpha$ . Fig. 5 shows the normalized PSD as a function of  $\alpha$  for the eight possible  $\beta$ . For  $\beta = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\beta = [1 \ 1 \ -1]^T$  and  $\beta = [-1 \ 1 \ 1]^T$  the PSD are low-pass for every  $\alpha$  as can be seen in Figs. 5(a), (b) and (e). For  $\beta = [-1 \ -1 \ -1]^T$ ,  $\beta = [1 \ -1 \ -1]^T$ ,  $\beta = [-1 \ -1 \ 1]^T$  the PSD are high-pass for every value of  $\alpha$  as shown in Fig. 5(d), (g) and (h). In the remaining cases,  $\beta = [1 \ -1 \ 1]^T$  and  $\beta = [-1 \ 1 \ -1]^T$ , the PSD are concentrated in low or high frequencies depending on the value  $\alpha$ , as shown in Fig. 5(c) and (f). In these cases, for  $\alpha = \sqrt{2} - 1$ ,  $\psi = 0$  in (20) and we obtain a white spectrum.

Particularly,  $\beta = [1 \ -1 \ 1]^T$  leads to the map considered in [20] and shown in Fig. 1(b). Using (16),

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2 = \frac{1}{4} (\beta_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \beta_3 (\alpha_3 - \alpha_2)^2) \\ &= \frac{1}{4} ((-\alpha + 1)^2 - (2\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2) = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Substituting (20) in (18) and (19), we obtain

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{2} \right)^{|k|} \tag{21}$$

and

$$P(\omega) = -\frac{-3 - 4\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4}{5 - 4 \cos(\omega) + 4(2 \cos(\omega) - 1)\alpha + 2(2 \cos(\omega) + 1)\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4}. \tag{22}$$

These results completely agree with the ones presented in [20].

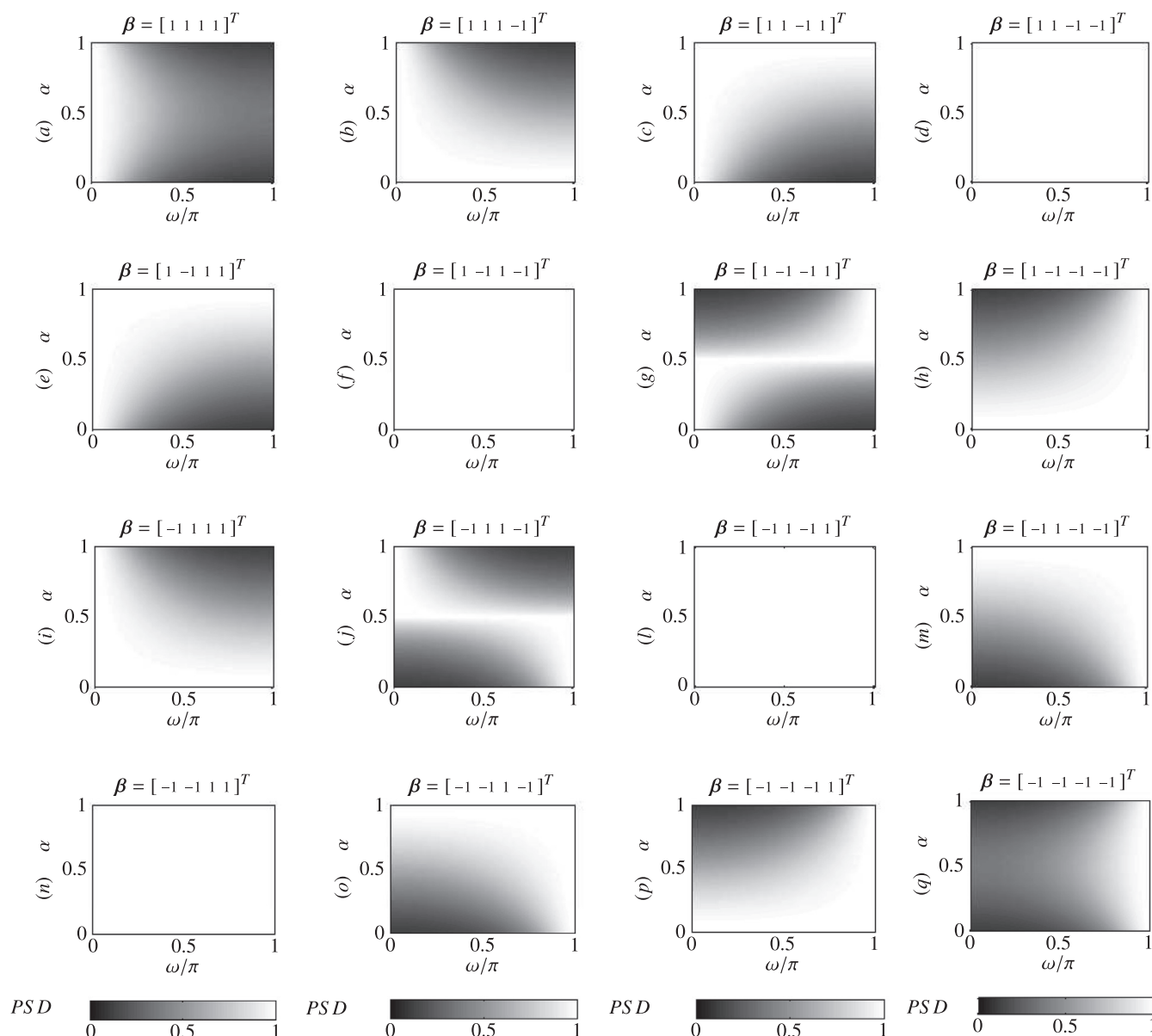
#### 4.3. $r = 4$ segments

Let  $\alpha_1 = -\alpha$ ,  $\alpha_2 = 0$  and  $\alpha_3 = \alpha$  for  $\alpha \in (0, 1)$ . Fig. 6 shows the normalized PSD as a function of  $\alpha$  for the 16 possible  $\beta$ . The symmetry in the PSD for different choices of  $\beta$  is evident.

Interestingly, we note that if  $\beta_2 = -\beta_3$  and  $\beta_1 = -\beta_4$  we have white spectrum for every value of  $\alpha$ , as illustrated in Fig. 6(d), (f), (l) and (n). In the remaining cases, it is possible to observe many different spectral characteristics as a function of  $\alpha$ .

### 5. Conclusions

In this paper we obtain closed expressions for the PSD of a one-dimensional piecewise linear family of maps. The analyzed family presents a large variety of spectral characteristics and generalize a number of previous published results. Numerical examples for some special cases are shown.



**Fig. 6.** Normalized PSD of (19) for  $r = 4$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_3 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 0$  and  $\beta$  as indicated in each graph.

The analytical expressions presented in this paper confirm the possibility of easy generation of chaotic signals with specific PSD and can be of use for CBCS using maps [7,10,11,17].

### Acknowledgments

This study was financed in part by the [Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior](#) - Brazil - Finance Code 001. M.E. was partially supported by [CNPq](#) (grant 309275/2016-4).

### References

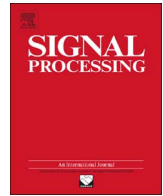
- [1] Alligood KT, Sauer TD, Yorke JA. *Chaos, textbooks in mathematical sciences*. New York: Springer; 2000.
- [2] Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems. *Phys Rev Lett* 1990;64(8):821–4. doi:10.1103/physrevlett.64.821.
- [3] Hayes S, Grebogi C, Ott E. Communicating with chaos. *Phys Rev Lett* 1993;70(20):3031–4. doi:10.1103/physrevlett.70.3031.
- [4] Cuomo KM, Oppenheim AV. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys Rev Lett* 1993;71(1):65–8. doi:10.1103/physrevlett.71.65.
- [5] Wu CW, Chua LO. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *Int J Bifurcation Chaos* 1993;03(06):1619–27. doi:10.1142/s0218127493001288.
- [6] Kennedy MP, Setti G, Rovatti R, editors. *Chaotic electronics in telecommunications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press; 2000.
- [7] Eisencraft M, Fanganiello R, Grzybowski J, Soriano D, Attux R, Batista A, Macau E, Monteiro L, Romano J, Suyama R, Yoneyama T. Chaos-based communication systems in non-ideal channels. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 2012;17(12):4707–18. doi:10.1016/j.cnsns.2011.05.030.
- [8] Eisencraft M, Attux RRF, Suyama R, editors. *Chaotic signals in digital communications (electrical engineering & applied signal processing series)*. CRC Press; 2013.

- [9] Ren H-P, Baptista MS, Grebogi C. Wireless communication with chaos. *Phys Rev Lett* 2013;110(18):184101. doi:[10.1103/physrevlett.110.184101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.110.184101).
- [10] Kaddoum G. Wireless chaos-based communication systems. In: A comprehensive survey. *IEEE Access* 4; 2016. p. 2621–48. doi:[10.1109/access.2016.2572730](https://doi.org/10.1109/access.2016.2572730).
- [11] Eisencraft M, Evangelista JVC, Costa RA, Fontes RT, Candido R, Chaves DPB, Pimentel C, Silva MTM. New trends in chaos-based communications and signal processing. In: *A Mathematical Modeling Approach from Nonlinear Dynamics to Complex Systems*. Springer International Publishing; 2018. p. 109–29.
- [12] Cuomo KM, Oppenheim AV. Communication using synchronized chaotic systems. 1994. US Patent, 5291555.
- [13] Lee S-s, Kim YH, Dmitriev AS. Method for direct chaotic communications with predetermined spectral mask. 2012. US Patent, 8116352B2.
- [14] Michaels AJ, David CB. Adaptive link communications using adaptive chaotic spread waveform. 2013. US Patent, 8369377B2.
- [15] Abarbanel HDI, Rulkov NF, Tsimring LS, Rabinovich MI. Chaotic communication apparatus and method for use with a wired or wireless transmission link. 1996. US Patent, 5923760A.
- [16] Hernandez EDM, Lee G, Farhat N. Analog realization of arbitrary one-dimensional maps. *IEEE Trans Circuits Syst I* 2003;50(12):1538–47. doi:[10.1109/TCSI.2003.819805](https://doi.org/10.1109/TCSI.2003.819805).
- [17] Kolumbán G, Krébesz T, Tse CK, Lau FCM. Basics of communications using chaos. In: Eisencraft M, Attux R, Suyama R, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications*. CRC Press, Inc.; 2013. p. 111–41. Ch. 4
- [18] Eisencraft M, Kato D, Monteiro L. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Process* 2010;90(1):385–90. doi:[10.1016/j.sigpro.2009.06.018](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.06.018).
- [19] Feltekh K, Jemaa ZB, Prunaret DF, Belghith S. Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 2014;19(8):2771–84. doi:[10.1016/j.cnsns.2013.12.029](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.12.029).
- [20] Feltekh K, Prunaret DF, Belghith S. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Process* 2014;94(0):149–57. doi:[10.1016/j.sigpro.2013.05.023](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.05.023).
- [21] Costa RA, Loiola MB, Eisencraft M. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Process* 2017;133:187–91. doi:[10.1016/j.sigpro.2016.10.025](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.10.025).
- [22] Sahnoune A, Berkani D. On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map, signal. *Image Video Process* 2018;12(7):1273–8. doi:[10.1007/s11760-018-1279-8](https://doi.org/10.1007/s11760-018-1279-8).
- [23] Lasota A, Mackey MC. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge University Press; 1985.
- [24] Sakai H, Tokumaru H. Autocorrelations of a certain chaos. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process* 1980;28(5):588–90. doi:[10.1109/tassp.1980.1163449](https://doi.org/10.1109/tassp.1980.1163449).



Contents lists available at ScienceDirect

## Signal Processing

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/sigpro](http://www.elsevier.com/locate/sigpro)

# Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments



Rafael Alves da Costa<sup>a</sup>, Murilo Bellezoni Loiola<sup>b</sup>, Marcio Eisencraft<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, Brazil

<sup>b</sup> Universidade Federal do ABC, Santo André, Brazil

## ARTICLE INFO

### Keywords:

Chaos  
Chaotic communication  
Essential bandwidth  
Piecewise linear maps  
Spectral analysis

## ABSTRACT

In recent decades, many studies with practical applications of chaotic signals in telecommunications and signal processing have been carried out. Although spectral analysis is of relevance in these areas, there are few analytical results concerning the spectral characterization of chaotic signals. In this work, we deduce analytical expressions for autocorrelation sequence, power spectral density and essential bandwidth of chaotic signals generated by a piecewise-linear map, with multiple segments. We present numerical simulations to confirm the theoretical results.

## 1. Introduction

A chaotic signal is bounded, aperiodic, deterministic and has sensitive dependence on initial conditions [1].

In telecommunications engineering, numerous possibilities of applications of chaotic signals have emerged as in analog and digital modulation, coding and encryption, among other areas [2–9].

Literature is used to characterize chaotic signals as broadband and with impulsive autocorrelation sequence (ACS) [6,5,10]. However, this characterization is not enough when considering practical applications. In the communication systems design, it is essential to the power spectral density (PSD) and the essential bandwidth of the involved signals.

In recent years, there has been some progress in determining PSD of chaotic signals generated by some families of maps. However, more general results have yet to be found.

Sakai and Tokumaru [11] have analytically obtained the ACS of signals generated by a family of piecewise linear maps with two segments, the skew tent map. This work was extended by Eisencraft et al. [12]. They have derived analytical expression for the PSD and essential bandwidth showing that it is possible to control the bandwidth of the generated chaotic signal through the family parameter.

In [13,14], Feltekh et al. deduced expressions for ACS, PSD and essential bandwidth for a continuous piecewise linear map with three slopes.

In this paper, we aim to obtain more general results considering a piecewise linear map with an arbitrary number of segments. We present general analytical expressions for ACS and PSD and deduce

the bandwidth. Moreover, we verify that analytical expressions match numerical results studying two special cases: (i) 2 segments and (ii)  $r$  segments with equal slopes.

The paper is divided into five sections. In Section 2 we present the map studied here and its main properties. Our analytical main results are presented in Section 3. Numerical results for particular cases are illustrated in Section 4. Finally, Section 5 presents our conclusions.

## 2. Bernoulli map with $r$ segments

Let  $r$  be an integer number with  $r \geq 2$  and  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$  real numbers with  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$ . The  $r$ -segments Bernoulli map  $f_B: [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  is defined as

$$f_B(s) = \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}, \quad \text{for } \alpha_{j-1} \leq s < \alpha_j. \quad (1)$$

An orbit or signal generated by  $f_B(\cdot)$  with initial condition  $s(0) \in [-1, 1[$  is given by

$$s(n+1) = f_B(s(n)), \quad (2)$$

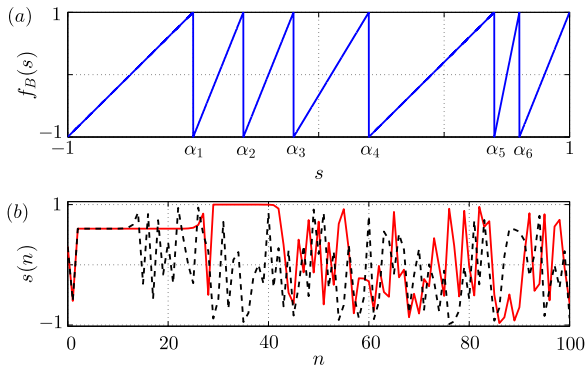
$n = 0, 1, 2, \dots$

Fig. 1(a) shows an example of  $f_B(s)$  for  $r=7$ ,  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = -0.5$ ,  $\alpha_2 = -0.3$ ,  $\alpha_3 = -0.1$ ,  $\alpha_4 = 0.2$ ,  $\alpha_5 = 0.7$ ,  $\alpha_6 = 0.8$ , and  $\alpha_7 = 1$ . In Fig. 1(b) the orbits  $s(n)$  for  $s(0) = 0.3$  and  $s(0) = 0.300000001$  in the interval  $0 \leq n \leq 100$  are depicted. Note that the generated signals present the sensitive dependence on initial conditions and lack of periodicity that characterize chaotic signals.

The invariant density of  $f_B(\cdot)$  can be obtained using the Frobenius–

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [rcosta@lcs.poli.usp.br](mailto:rcosta@lcs.poli.usp.br) (R.A.d. Costa), [murilo.loiola@ufabc.edu.br](mailto:murilo.loiola@ufabc.edu.br) (M.B. Loiola), [marcio@lcs.poli.usp.br](mailto:marcio@lcs.poli.usp.br) (M. Eisencraft).



**Fig. 1.** (a) Example of Bernoulli map, (b) orbits  $s(n)$  for  $s(0) = 0.3$  (continuous line) and  $s(0) = 0.300000001$  (dashed line) presenting sensitive dependence on initial conditions and lack of periodicity.

Perron operator  $\mathcal{P}(\cdot)$  [15]. For  $f_B(\cdot)$  it is given by

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{d}{ds} \int_{f_B^{-1}([-1, s])} p(u) du, \tag{3}$$

where  $p(\cdot)$  is an arbitrary density and  $f_B^{-1}([-1, s])$ ,  $s \in [-1, 1]$ , is the counterimage of the interval  $[-1, s[$  under  $f_B(\cdot)$  [15]. This counterimage is the union of intervals represented by the thick lines in the  $s$  domain in Fig. 2. The invariant density  $p_*(s)$  is the fixed point of  $\mathcal{P}(\cdot)$ .

From Fig. 2,

$$f_B^{-1}([-1, s]) = \bigcup_{j=1}^r [\alpha_{j-1}, s_j] \tag{4}$$

with

$$s_j = \frac{(\alpha_j - \alpha_{j-1})s + (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{2}, \quad 1 \leq j \leq r. \tag{5}$$

This way,

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{d}{ds} \int_{f_B^{-1}([-1, s])} p(u) du = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1}) p(s_j). \tag{6}$$

Note that for  $p(s) = \frac{1}{2}$ ,

$$\mathcal{P}(p(s)) = \frac{1}{4} (\alpha_1 + 1 + \alpha_2 - \alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1} - \alpha_{r-2} + 1 - \alpha_{r-1}) = \frac{1}{2} = p(s). \tag{7}$$

Thus, the invariant density for  $f_B(\cdot)$  is uniform and given by

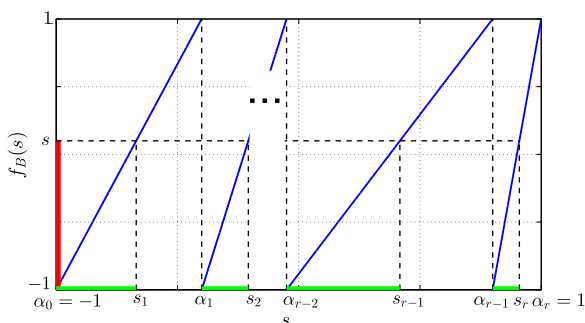
$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq s < 1. \tag{8}$$

Therefore the mean value of almost all the orbits generated by  $f_B(\cdot)$  is

$$\bar{s} = \int_{-1}^1 s p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s ds = 0 \tag{9}$$

and their average power is

$$P_s = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \tag{10}$$



**Fig. 2.** Counterimage of the interval  $[-1, s[$  under  $f_B(\cdot)$  (thick segments in the  $x$ -axis).

The Lyapunov exponent of an orbit measures the sensitivity to initial conditions [1]. A limited aperiodic orbit with positive Lyapunov exponent is chaotic. For a typical orbit of  $f_B(\cdot)$ , the Lyapunov exponent  $h_B$ , can be calculated as [16]

$$h_B = \int_{-1}^1 \ln |f'_B(s)| p_*(s) ds \tag{11}$$

where  $f'_B(s)$  is the derivative of  $f_B(s)$  with respect to  $s$ . Substituting (1) and (8) in (11), we obtain

$$h_B = \sum_{j=1}^r \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right| = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \ln \left( \frac{2}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right) \right] \tag{12}$$

for almost all initial conditions. Therefore  $h_B > 0$  and  $f_B(\cdot)$  generates chaotic signals.

In the following sections, we derive the ACS and PSD of the orbits generated by this map.

### 3. Autocorrelation sequence and power spectral density

For a stationary random process, the autocorrelation sequence is defined by

$$R(k) \equiv E[s(n)s(n+k)], \tag{13}$$

where  $s(n)$  is a sample function of the process and  $E[\cdot]$  is taken over all sample functions.

Chaotic signals generated by ergodic maps can be treated as sample functions of a stochastic process [15]. This way, (13) can be used to obtain the ACS for the orbits of  $f_B(\cdot)$  [11,12].

Let

$$x = s(n), \quad \text{and} \quad y = s(n+k) = f_B^k(x) \tag{14}$$

Thus, as  $y$  is completely determined by  $x$ , a joint invariant density function of  $x$  and  $y$ ,  $p(x, y)$ , can be written as:

$$p(x, y) = p_*(x)p(y|x) = p_*(x)\delta(y - f_B^k(x)), \tag{15}$$

where  $\delta(\cdot)$  is the Dirac unit impulse function. Substituting (14) and (15) into (13) and using (8) we obtain

$$\begin{aligned} R(k) &= E[xy] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp_*(x)\delta(y - f_B^k(x)) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_B^k(x) dx. \end{aligned} \tag{16}$$

To evaluate (16), it is necessary to obtain an expression for  $f_B^k(x)$ , the  $k$ -iteration of  $f_B(\cdot)$ .

The map  $f_B(\cdot)$  is composed of  $r$  linear segments. The image of each of these segments is the domain  $U = [-1, 1]$ . This way, when we iterate  $f_B(\cdot)$ , the number of its linear segments is multiplied by  $r$ , i.e.,  $f_B^k(x)$  is formed by  $r^k$  segments. Fig. 3 shows  $f_B(x)$ ,  $f_B^2(x)$  and  $f_B^k(x)$ , for a generic  $k$ . The  $m$ th-solution of the equation  $f_B^k(x) = -1$  is represented by  $a_k(m-1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  and  $m = 1, 2, \dots, r^k$ . We set  $a_k(r^k) = 1$ .

From Fig. 3,  $f_B^k(x)$  in the interval  $[a_k(m-1), a_k(m)[$  is given by

$$f_B^k(x) = \frac{2x - a_k(m) - a_k(m-1)}{a_k(m) - a_k(m-1)}, \quad a_k(m-1) \leq x < a_k(m). \tag{17}$$

Substituting (17) into (16), yields

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^k} \int_{a_k(m-1)}^{a_k(m)} x \frac{2x - a_k(m) - a_k(m-1)}{a_k(m) - a_k(m-1)} dx. \tag{18}$$

Solving the integral  $I$ ,



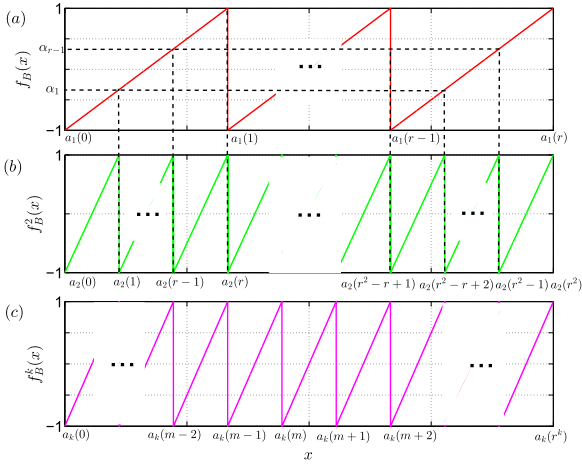


Fig. 3. Bernoulli map with  $r$  segments: (a)  $f_B^k(x)$ ; (b)  $f_B^k(x)$ ; and (c)  $f_B^k(x)$ .

$$I = \left[ \frac{2x^3}{3(a_k(m) - a_k(m-1))} - \frac{(a_k(m) + a_k(m-1))x^2}{2(a_k(m) - a_k(m-1))} \right]_{a_k(m-1)}^{a_k(m)} = \frac{a_k^3(m) - 3a_k^2(m)a_k(m-1) + 3a_k(m)a_k^2(m-1) - a_k^3(m-1)}{6(a_k(m) - a_k(m-1))} = \frac{(a_k(m) - a_k(m-1))^2}{6}. \quad (19)$$

Substituting (19) in (18)

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} (a_k(m) - a_k(m-1))^2. \quad (20)$$

This way,  $R(k+1)$  is given by

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k+1}} (a_{k+1}(m) - a_{k+1}(m-1))^2. \quad (21)$$

Now we seek for a relationship between  $R(k+1)$  and  $R(k)$ . This way, we need relationships between the  $a_{k+1}$  and  $a_k$  values. The process of obtaining  $f_B^{k+1}(x)$  from  $f_B^k(x)$  is illustrated in Fig. 4, where  $f_B^k(w_{m,j}) = \alpha_j$  in the interval  $[a_k(m-1), a_k(m)]$ ,  $0 \leq j \leq r$ . Using (17),

$$w_{m,j} = \frac{(a_k(m) - a_k(m-1))\alpha_j + a_k(m) + a_k(m-1)}{2}. \quad (22)$$

From Fig. 4

$$a_{k+1}(r(m-1) + j) = w_{m,j}, \quad (23)$$

for  $0 \leq j \leq r$ .

Rewriting (21) as a summation of  $r^k$  sums of  $r$  terms,

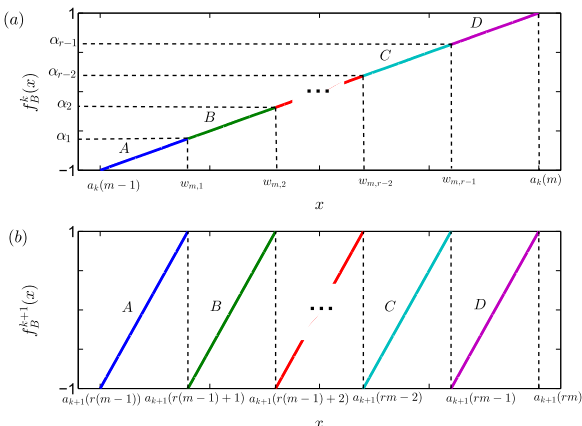


Fig. 4. (a)  $f_B^k(x)$  and (b)  $f_B^{k+1}(x)$  in the interval  $[a_k(m-1), a_k(m)]$ .

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r (a_{k+1}(r(m-1) + j) - a_{k+1}(r(m-1) + j-1))^2 \quad (24)$$

Using (23),

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r (w_{m,j} - w_{m,j-1})^2. \quad (25)$$

From (22),

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r \left( (a_k(m) - a_k(m-1)) \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} (a_k(m) - a_k(m-1))^2 \sum_{j=1}^r \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2. \quad (26)$$

Thus,  $R(k+1)$  can be written as

$$R(k+1) = \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^k} (a_k(m) - a_k(m-1))^2, \quad (27)$$

where

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2. \quad (28)$$

Comparing (20) and (27), it follows that

$$R(k+1) = \psi R(k). \quad (29)$$

Notice that  $R(0) = E[s^2(n)]$  is the average power of  $s(n)$  and is given by (10). Solving (29) with the initial condition  $R(0) = \frac{1}{3}$ , we obtain the general expression for the ACS of  $f_B(\cdot)$ :

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}, \quad (30)$$

for any integer  $k$ .

The PSD  $P(\omega)$  is the discrete-time Fourier transform (DTFT) of  $R(k)$ , considering  $k$  as the time variable. Using the transform pair [17, pp. 295–296]

$$\psi^{|k|} \Leftrightarrow \frac{1 - \psi^2}{1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega)}, \quad (31)$$

we obtain

$$P(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega))}, \quad (32)$$

which is remarkably similar to the results obtained for the skew tent map in [12].

However, differently from what happens in [12], the parameter  $\psi$  here is always positive. Consequently,  $P(\omega)$  has maximum at  $\omega = 0$  and minimum for  $\omega = \pi$  for any choice of  $r$  and  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq \alpha_{r-1}$ , resulting in lowpass signals for all the maps in the family (2).

PSD properties can be quantified by using the essential bandwidth concept. The essential bandwidth  $B$  is defined as the length of the frequency interval where  $q = 95\%$  of the signal power is concentrated [18]. This way,

$$\int_0^B P(\omega) d\omega = q \int_0^\pi P(\omega) d\omega. \quad (33)$$

By one hand, using Parseval's theorem and (10)

$$\int_0^\pi P(\omega) d\omega = \frac{\pi}{3}. \quad (34)$$

By the other hand, using (32),

$$\int_0^B P(\omega) d\omega = -\frac{2}{3} \arctan \left( \frac{(\psi + 1) \tan \left( \frac{B}{2} \right)}{\psi - 1} \right). \quad (35)$$

Thus, by substituting (35) and (34) in (33), and isolating  $B$ , we obtain

$$B = 2 \arctan \left( \tan \left( \frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \right| \right), \quad (36)$$

an expression similar to what was obtained for the skew tent map in [12].

Concluding, we have obtained closed-form expressions for the ACS, PSD and essential bandwidth for the map  $f_B(\cdot)$ . To verify this result, in the next section some particular cases are considered and compared with numerical simulations.

#### 4. Numerical results for some particular cases

In this section we analyze some particular cases of the general expressions obtained. In particular, we consider  $r=2$  and  $r$  segments with equal inclinations.

##### 4.1. Case $r=2$

In this case,  $f_B(\cdot)$  is formed by 2 segments. Setting  $\alpha_1 \triangleq \alpha$  and using (28)

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2 = \frac{1}{4} ((\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)^2) \\ &= \frac{1}{4} ((\alpha + 1)^2 + (1 - \alpha)^2) = \frac{\alpha^2 + 1}{2}. \end{aligned} \quad (37)$$

This way, by (30),

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha^2 + 1}{2} \right)^{|k|}. \quad (38)$$

Fig. 5(a) shows ACS curves for some values of  $\alpha$ . The dashed lines indicate the analytical result of (38) and the continuous lines, the results of numerical simulation. Clearly, the numerical results agree with (38). We observe that  $R(k)$  decays monotonically faster for  $|\alpha| \approx 0$  and slower for  $|\alpha| \approx 1$ .

Using (32),

$$P(\omega) = \frac{3 - \alpha^4 - 2\alpha^2}{3(5 + \alpha^4 + 2\alpha^2 - 4(\alpha^2 + 1)\cos(\omega))}. \quad (39)$$

Fig. 5(b) shows the PSD for some values of  $\alpha$ , confirming the low-pass properties of the generated signals.

From (36),

$$B = 2 \arctan \left( \tan \left( \frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 3} \right| \right). \quad (40)$$

Fig. 5(c) shows  $\frac{B}{\pi}$  as function of  $|\alpha|$ . We observe an extremely narrowband process for  $|\alpha| \approx 1$ .

These results agree with the study of this particular case published by Costa et al. [19].

##### 4.2. Case $r$ segments with equal inclinations

In this case,  $\alpha_j = -1 + \frac{2}{r}j$ , for  $j = 0, 1, \dots, r$ .

From (28)

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \left( \left( -1 + \frac{2}{r}j \right) - \left( -1 - \frac{2}{r} + \frac{2}{r}j \right) \right)^2 = \frac{1}{r}, \quad (41)$$

and with (30), we obtain

$$R(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r} \right)^{|k|}. \quad (42)$$

Substituting (41) in (32) and (36), we obtain

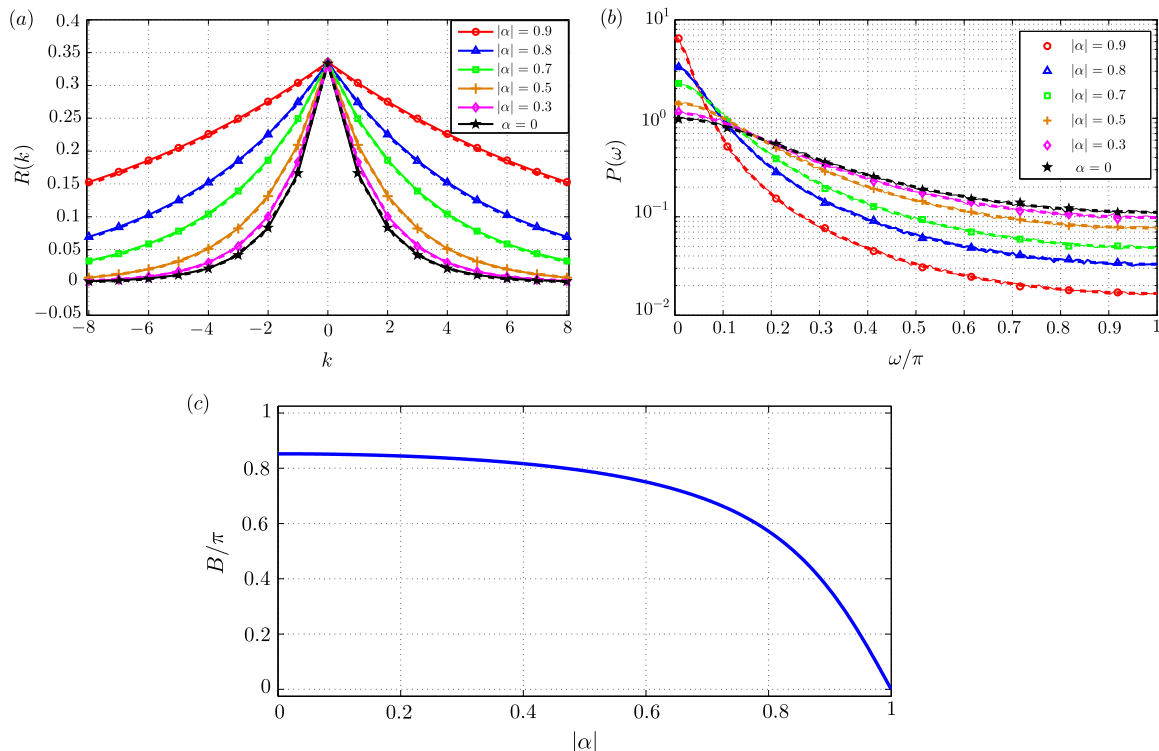
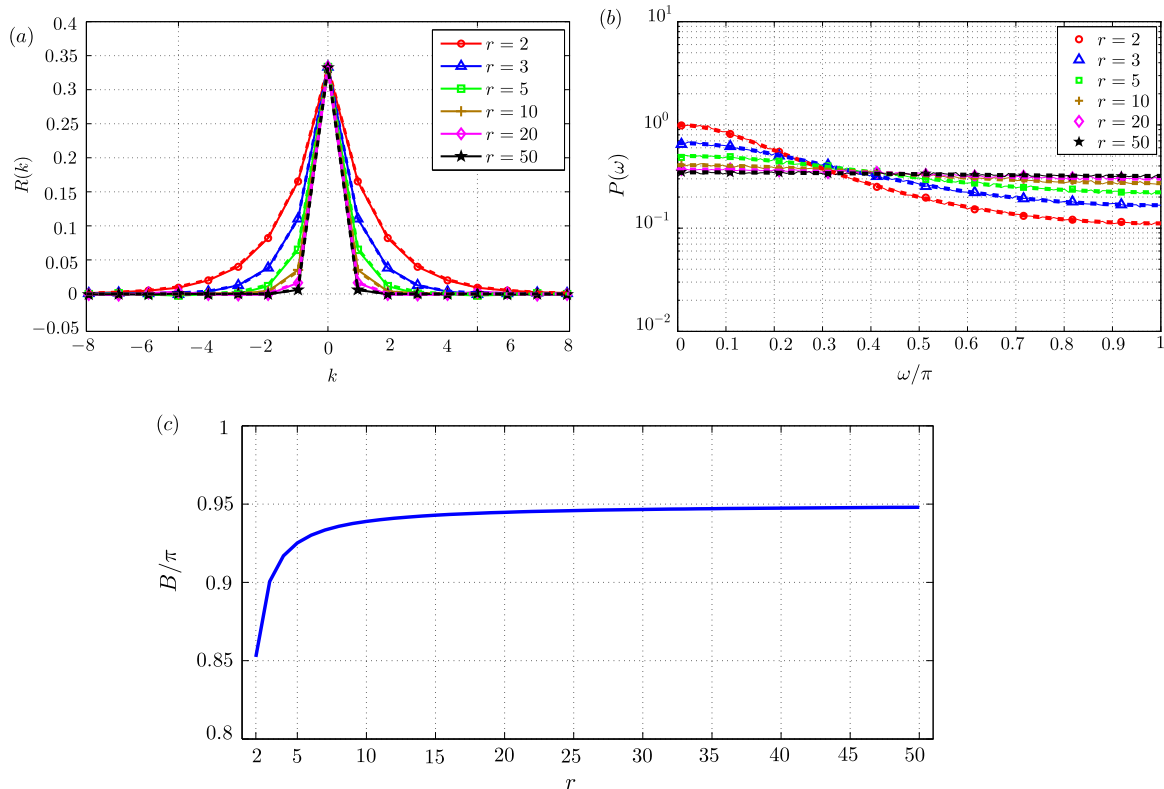


Fig. 5. (a) ACS, (b) PSD and (c) essential bandwidth of chaotic signals generated by  $f_B(\cdot)$  with  $Sr = 2S$  for different values of  $|\alpha|$ . The analytical results are shown in dashed lines and numerical simulations in continuous lines.



**Fig. 6.** (a) ACS, (b) PSD and (c) essential bandwidth of chaotic signals generated by  $f_B(\cdot)$  with  $r$  segment of equal inclinations. The analytical results are shown in dashed lines and numerical simulations in continuous lines.

$$P(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}, \quad (43)$$

and

$$B = 2 \arctan \left( \tan \left( \frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{1-r}{1+r} \right| \right), \quad (44)$$

respectively.

Fig. 6 shows curves of  $R(k)$ ,  $P(\omega)$  and  $B/\pi$  for different values of  $r$ . Note that for  $r \geq 2$ ,  $R(k)$  decays monotonically with  $|k|$ , approaching an impulsive shape for higher values of  $r$ . Again, the analytical results of (42)–(43) (dashed lines) perfectly agree with the numerical simulation (continuous lines).

### 5. Conclusions

In this paper we have analytically deduced the ACS, PSD and essential bandwidth of chaotic signals generated by a piecewise linear map with an arbitrary number of segments and parameters. We verify that analytical expressions of ACS and PSD match numerical results.

The precise temporal and spectral characterization is fundamental for practical applications involving the transmission of chaotic signals.

### Acknowledgments

M.E. was partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (grants 479901/2013-9 and 311575/2013-7).

### References

[1] K. Alligood, T. Sauer, J. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Textbooks in Mathematical Sciences*, Springer, New York, 1997.  
 [2] M. Eisencraft, R.R.F. Attux, R. Suyama (Eds.), *Chaotic Signals in Digital Communications*, CRC Press, Inc., Boca Raton, 2013.

[3] M. Baptista, *Cryptography with chaos*, Phys. Lett. A 240 (1998) 50–54. [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00086-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00086-3).  
 [4] H.-P. Ren, M.S. Baptista, C. Grebogi, *Wireless communication with chaos*, Phys. Rev. Lett. 110 (2013) 184101. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.184101>.  
 [5] M.P. Kennedy, G. Setti, R. Rovatti (Eds.), *Chaotic Electronics in Telecommunications*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2000.  
 [6] F.C.M. Lau, C.K. Tse, *Chaos-Based Digital Communication Systems*, Springer, Berlin, 2003.  
 [7] G. Kaddoum, P. Charge, D. Roviras, D. Fournier-Prunaret, *A methodology for bit error rate prediction in chaos-based communication systems*, Circuits Syst. Signal Process. 28 (6) (2009) 925–944. <http://dx.doi.org/10.1007/s00034-009-9124-5>.  
 [8] M. Eisencraft, A.M. Batista, *Discrete-time chaotic systems synchronization performance under additive noise*, Signal Process. 91 (8) (2011) 2127–2131. <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2011.01.021>.  
 [9] G. Kaddoum, D. Roviras, P. Chargé, D. Fournier-Prunaret, *Robust synchronization for asynchronous multi-user chaos-based DS-CDMA*, Signal Process. 89 (5) (2009) 807–818. <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2008.10.023>.  
 [10] P. Stavroulakis (Ed.), *Chaos Applications in Telecommunications*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2005.  
 [11] H. Sakai, H. Tokumaru, *Autocorrelations of a certain chaos*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 28 (5) (1980) 588–590.  
 [12] M. Eisencraft, D.M. Kato, L.H.A. Monteiro, *Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map*, Signal Process. 90 (1) (2010) 385–390. <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.06.018>.  
 [13] K. Feltekh, Z.B. Jemaa, D. Fournier-Prunaret, S. Belghith, *Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19 (8) (2014) 2771–2784. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.12.029>.  
 [14] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, S. Belghith, *Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes*, Signal Process. 94 (0) (2014) 149–157. <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.05.023>.  
 [15] A. Lasota, M. MacKey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.  
 [16] C. Beck, F. Schögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.  
 [17] J.G. Proakis, D.G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 3rd ed., Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.  
 [18] B.P. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 3rd ed., Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1998.  
 [19] R.A. Costa, M.B. Loiola, M. Eisencraft, *Spectral properties of chaotic signals generated by the Bernoulli map*, J. Eng. Sci. Technol. Rev. 8 (2) (2015) 12–16.

# Chaotic signals representation and spectral characterization using linear discrete-time filters

1<sup>st</sup> Rafael Alves da Costa

Telecommunication and Control Engineering Department  
Escola Politécnica, University of São Paulo  
São Paulo, Brazil  
ORCID: 0000-0002-1204-9595

2<sup>nd</sup> Marcio Eisenkraft

Telecommunication and Control Engineering Department  
Escola Politécnica, University of São Paulo  
São Paulo, Brazil  
ORCID: 0000-0001-8415-707X

**Abstract**—We present a discrete-time linear recursive filter representation for a piecewise-linear map that generates chaotic signals. It can be used to easily deduce analytical formulas for power spectral density of chaotic signals, providing useful results for chaos-based communication systems and signal processing. Numerical simulations are used to validate the theoretical results.

**Index Terms**—chaotic signals, nonlinear systems, power spectral density, recursive filters.

## I. INTRODUCTION

Discrete-time nonlinear dynamic systems that generate chaotic signals [1] have been considered in many signal processing applications, such as wireless and underwater communications [2]–[8], radar [9], image encryption [10], watermarking [11], among others. The main motivation for these applications is the fact that chaotic signals can increase security by exploring the properties of nonlinear dynamics [6], [12].

To turn these applications viable, it is fundamental to precisely obtain the power spectral density (PSD) of chaotic signals and their bandwidth. These are not easy tasks due to their nonlinear nature and the lack of closed-form expressions for their time evolution. Although some results were recently obtained [13]–[15], more general results are still under investigation.

The general idea of [13]–[15] is to obtain recursive formulas for the  $n$ -th iterate of piecewise-maps leading to expressions for the autocorrelation sequence and, consequently, for the PSD. We consider here a different approach, based on the work of Drake and Willians [16]. They have shown that it is possible to obtain chaotic signals using discrete-time recursive linear filters. More precisely, they use a filter to successfully generate chaotic orbits of the sawtooth map in the  $[0, 1[$  interval.

In the present paper, we extend this linear representation to a class of piecewise-linear maps with positive or negative slopes. Next, we use it to derive the PSD of chaotic signals directly. It is organized as follows: In Section II, the considered piecewise linear map is presented. In Section III its linear representation is deduced and exemplified. In Section IV it is used for PSD

calculation. Finally, in Section V, we draft some conclusions and point to future works.

## II. CONSIDERED MAP

Let  $f : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  be defined as

$$f(s) = 2g\left(r\frac{s+1}{2}\right) - 1, \quad (1)$$

with

$$g(y) = y - \lfloor y \rfloor \quad (2)$$

and  $r$  integer with  $|r| \geq 2$ .

We consider the map

$$s(n+1) = f(s(n)), \quad (3)$$

for  $n \geq 0$  and  $s(0) \in [-1, 1[$ . It is a generalization of the the sawtooth map used in [16], allowing for negative  $r$  and a symmetric domain with zero-mean generated signals.

Figure 1(a) shows  $f(s)$  for  $r = -3$ . Figure 1(b) presents the generated signals for  $s(0) = -0.73$  and  $s(0) = -0.73000001$ . It can be clearly observed that the orbits are bounded, aperiodic and present sensitive dependence on initial conditions, characteristics of chaotic signals [1].

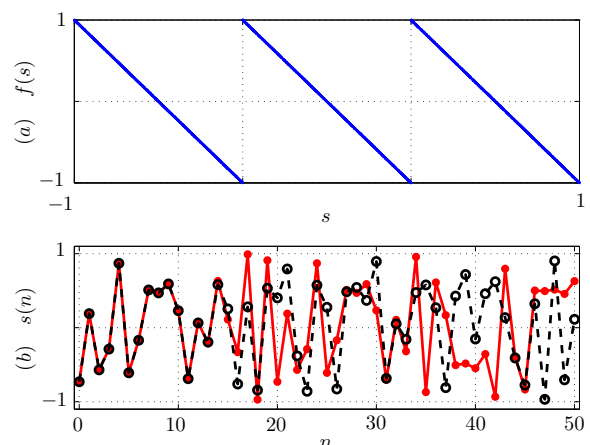


Fig. 1. (a) Graphic of  $f(s)$  (1) for  $r = -3$ . (b) Two generated signals with close initial conditions.

The map  $f$  can be decomposed in three:

- $x(n) = \frac{s(n)+1}{2} = f_1(s(n))$  - linear transformation of the domain from  $[-1, 1[$  to  $[0, 1[$ ;
- $x(n+1) = f_2(x(n)) = g(rx(n))$ ;
- $s(n+1) = 2x(n+1) - 1 = f_3(x(n+1)) = f_1^{-1}(x(n+1))$  - linear transformation from  $[0, 1[$  to  $[-1, 1[$ ;

so that  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ .

As  $f_1(\cdot)$  and  $f_3(\cdot)$  are inverse functions,

$$s(n) = f^n(s_0) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)^n(s_0) = (f_3 \circ g^n \circ f_1)(s_0). \quad (4)$$

For positive  $r$ ,  $f_2(\cdot) = g(\cdot)$  consists in a shifting in the base- $r$  representation of  $x(n)$ , i.e., if

$$x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{r^{k+1}} = (0, d_0 d_1 d_2 \dots)_{|r|}, \quad (5)$$

then  $x(1) = (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$ , with  $0 \leq d_k < |r|$ , so that

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}}, \quad (6)$$

For negative  $r$ , there is also a complementary operation, i.e.,  $x(n+1) = 1 - (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$ . Thus, for  $n$  even the samples  $x(n)$  for the map with parameter  $|r|$  or  $-|r|$  are the same. For  $n$  odd they are complements in base  $|r|$ . This way, defining

$$d'_k = \begin{cases} -(d_k + 1), & k \text{ even} \\ d_k - |r|, & k \text{ odd} \end{cases}, \quad (7)$$

it can be shown that

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (8)$$

In the next sections, we develop a linear representation for this map and use it to obtain the PSD of  $s(n)$ .

### III. LINEAR REPRESENTATION

Algorithm 1 systematizes the proposal of generating an estimate  $\hat{s}(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  of (3) of  $s(n)$  given  $r$ ,  $N$  and  $s(0)$  using a linear filter.

As a first step, the initial condition  $s(0) \in [-1, 1[$  is linearly transformed in  $x(0) \in [0, 1[$  using  $f_1(\cdot)$  (9). Then  $x(0)$  is decomposed on base  $|r|$  with digits  $d_k$ . Using  $d_k$ , the algorithm specifies an entrance  $v(n)$  for the linear filter described in (13) whose output is  $x_\ell(n)$ .

Solving (13) with  $x_\ell(-1) = 0$ , we obtain [17]

$$x_\ell(n) = \sum_{j=0}^n \frac{v(j)}{r^{n-j+1}}. \quad (15)$$

Finally, an estimate  $\hat{s}(n)$  for the orbit with initial condition  $s(0)$  is obtained in (14) by flipping  $x_\ell(n)$  and applying  $f_1^{-1}(\cdot)$  in (14).

Theorem 1 gives a higher bound for  $|s(n) - \hat{s}(n)|$ .

---

**Algorithm 1:** Obtaining the signal  $\hat{s}(n)$  using linear filter.

---

**Data:**  $r, N, s(0), x_\ell(-1) = 0$ .

**Result:**  $\hat{s}(n)$ , for  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

**begin**

```

1    $x(0) \leftarrow \frac{s(0)+1}{2}$  (9)
2   Decompose  $x(0)$  in base  $|r|$ , writing it as
     $x(0) = (0, d_0 d_1 d_2 \dots d_{N-1} \dots)_{|r|}$ , (10)
    with  $d_k \in \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .
3   for  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  do
4     if  $r > 0$  then
5        $v(n) \leftarrow d_{N-1-n}$  (11)
6     else
7        $v(n) \leftarrow d'_{N-1-n} = \begin{cases} -(d_{N-1-n} + 1), & n \text{ even} \\ d_{N-1-n} - |r|, & n \text{ odd} \end{cases}$  (12)
8      $x_\ell(n) \leftarrow \frac{1}{r} [x_\ell(n-1) + v(n)]$  (13)
9   for  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  do
10     $\hat{s}(n) \leftarrow 2x_\ell(N-1-n) - 1$  (14)

```

---

*Theorem 1 (Main result):* Let  $s(n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  obtained using (3) with initial condition  $s(0)$  and fixed  $r$  and  $\hat{s}(n)$  generated by Algorithm 1 with same parameters. Then,

$$\varepsilon(n) = |s(n) - \hat{s}(n)| \leq |r|^{n-N}, \quad (16)$$

for  $0 \leq n \leq N-1$ .

*Proof:* We divide the proof in two cases:

A)  $r \geq 2$

Applying  $f_1(\cdot)$  in (14) and using (15) and (11),

$$\hat{x}(n) = x_\ell(N-1-n) = \sum_{j=0}^{N-1-n} \frac{d_{N-1-j}}{r^{N-1-n-j+1}}. \quad (17)$$

Defining  $k = N-1-n-j$ , we get

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (18)$$

From (6) and (18) and bearing in mind that  $d_k \leq r - 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} \right| = \left| \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} r^{-(k+1)} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \frac{r^{-(N-n+1)}}{(1-\frac{1}{r})} \right| = |r|^{n-N}. \end{aligned} \quad (19)$$

B)  $r \leq -2$

Applying  $f_1(\cdot)$  in (14) and using (15) and (12)

$$\hat{x}(n) = x_\ell(N-1-n) = \sum_{j=0}^{N-1-n} \frac{d'_{N-1-j}}{r^{N-1-n-j+1}}. \quad (20)$$

Defining  $N-1-n-j = k$ , we get

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (21)$$

Using (21) and (8) we have

$$\varepsilon(n) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} \right| = \left| \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} \right|. \quad (22)$$

For  $n$  even and odd, we have  $1 \leq |d'_{k+n}| \leq |r|$  in (22). It follows that

$$\varepsilon(n) \leq \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{|d'_{k+n}|}{|r|^{k+1}} = \frac{|r|^{n-N}}{1-|r|} \leq |r|^{n-N}. \quad (23)$$

As an example, consider  $r = -3$ ,  $N = 51$  and

$$s(0) = \frac{2}{\pi} - 1. \quad (24)$$

Thus,

$$x(0) = (s(0) + 1)/2 = 1/\pi = (0,0221210010\dots)_3. \quad (25)$$

Figure 2(a) shows  $d_n$ , Figure 2(b) shows the input to the linear filter  $v(n)$ , Figure 2(c) the orbits generated using the nonlinear map and the linear filter and, finally, the error  $\varepsilon(n)$  along with its upper bound (16) are presented in Figure 2(d). Note that for  $n < 20$ ,  $\varepsilon(n)$  is under our machine precision ( $10^{-16}$ ) and is not shown.

#### IV. POWER SPECTRAL DENSITY

Analytical results for the PSD of chaotic signals generated by piecewise-linear maps have been obtained recently [13]–[15], [18]. These results have in common the obtaining of an analytical expression for the autocorrelation sequence (ACS) using the  $n$ -th iterate of these maps. Consequently, the PSD is obtained using the discrete-time Fourier transform (DTFT) of the ACS. This is not always a trivial task. Here we presented

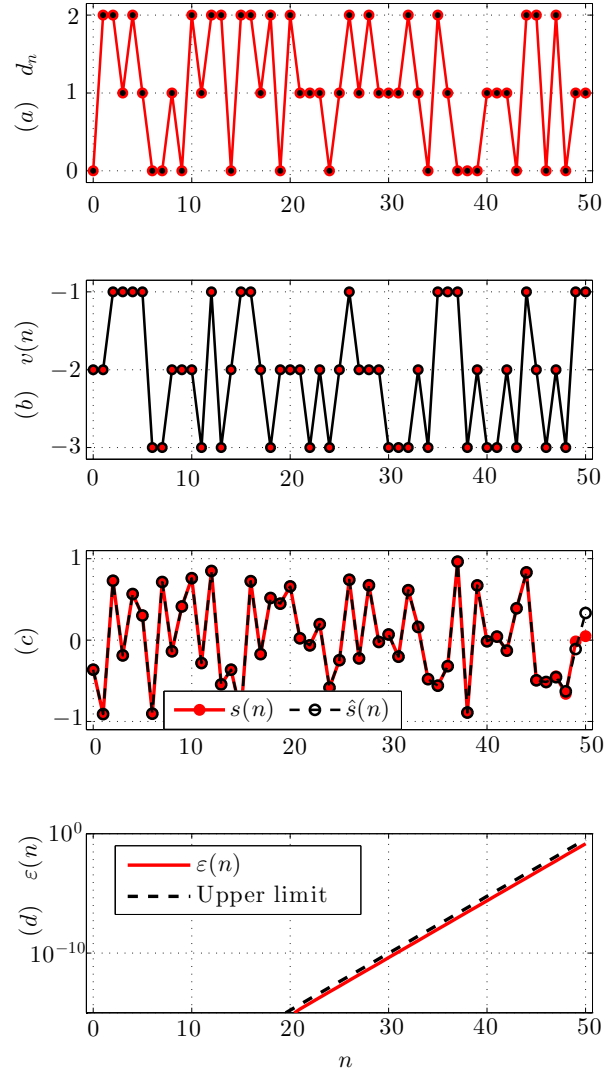


Fig. 2. (a)  $d_n$ , (b)  $v(n)$ , (c)  $s(n)$  and  $\hat{s}(n)$ , (d)  $\varepsilon(n)$  for  $s(0) = \frac{2}{\pi} - 1$ .

another way to calculate the PSD, using the linear systems theory.

The PSD of linear system (13) is given by [19, Ch. 14]

$$S_\ell(\omega) = V(\omega) |H(\omega)|^2, \quad (26)$$

where  $V(\omega)$  is the PSD of the input sequence  $v(n)$ ,  $H(\omega)$  is the frequency response of the recursive filter and  $S_\ell(\omega)$  is the PSD of chaotic signals in the output of the linear filter.

The linear system as implemented in Algorithm 1 can be thought as having an independent, identically distributed sequence as entrance with variance  $\sigma^2$  given by

$$\sigma^2 = \frac{1}{|r|} \sum_{j=0}^{|r|-1} (1 - |r| + 2j)^2 = \frac{r^2 - 1}{3}, \quad (27)$$

in which  $j = 0, 1, 2, \dots, |r| - 1$  represents all possible digits in base  $|r|$ .

So the ACS is

$$R(k) = \sigma^2 \delta(k) \quad (28)$$

where  $\delta(\cdot)$  is the Dirac unit impulse function [17].

Using (27) in (28) and taking the DTFT of (28), we obtain

$$V(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3}. \quad (29)$$

The linear system (13) can be represented by the transfer function  $H(z)$ ,

$$H(z) = \frac{r^{-1}}{1 - z^{-1}r^{-1}}. \quad (30)$$

Take the module squared from (30) and substituting  $z = e^{j\omega}$  we have

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{r^2 + 1 - 2r \cos(\omega)}. \quad (31)$$

Substituting (31) and (29) in (26) we obtain

$$S_\ell(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}. \quad (32)$$

This result completely agrees with the obtained using a recursive formula for  $f^n(\cdot)$  in [13].

Figure 3 shows the PSD for some values of  $r$ . When  $r$  is positive,  $S_\ell(\omega)$  has maximum at  $\omega = 0$  and minimum for  $\omega = \pi$ , confirming the low-pass properties of the generated signals. Otherwise, when  $r$  is negative,  $S_\ell(\omega)$  has maximum at  $\omega = \pi$  and minimum for  $\omega = 0$ , resulting in high-pass signals.

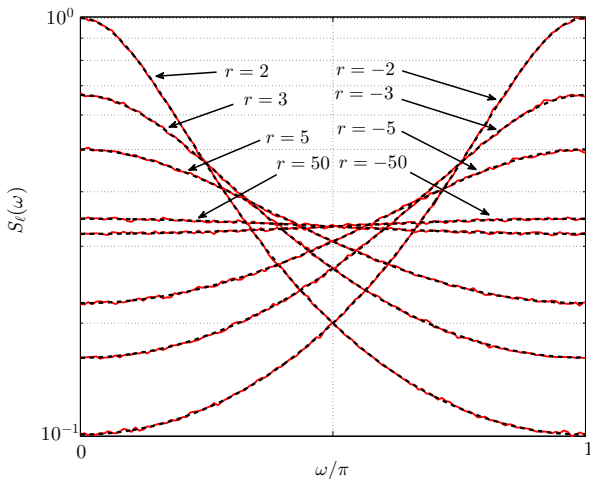


Fig. 3. PSD for some values of  $r$ . The analytical results are shown in dashed lines and numerical simulations in continuous lines.

## V. CONCLUSIONS

In this paper, we extended the linear representation of chaotic signals proposed in [16] including piecewise linear maps with negative slope segments. Besides that, we use the linear systems theory to obtain the PSD of chaotic signals in a straightforward way. Our exact results are in agreement with the numerical simulations and literature [13]. We are currently working in further extending our results to more general piecewise-linear maps.

## REFERENCES

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*, ser. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- [2] R. T. Fontes and M. Eisencraft, "Noise filtering in bandlimited digital chaos-based communication systems," in *22nd European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2014, Lisbon, Portugal, September 1-5, 2014*, 2014, pp. 406–410.
- [3] R. Candido, M. Eisencraft, and M. T. M. Silva, "Channel equalization for synchronization of Ikeda maps," in *Proc. of 21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2013)*, Marrakesh, Morocco, 2013.
- [4] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, "Digital communication systems based on three-dimensional chaotic attractors," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 10 523–10 532, 2019.
- [5] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Wireless communication with chaos," *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 18, p. 184101, apr 2013.
- [6] G. Kaddoum, "Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey," *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, 2016.
- [7] J.-L. Yao, C. Li, H.-P. Ren, and C. Grebogi, "Chaos-based wireless communication resisting multipath effects," *Physical Review E*, vol. 96, no. 3, sep 2017.
- [8] H.-P. Ren, C. Bai, Q. Kong, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "A chaotic spread spectrum system for underwater acoustic communication," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 478, pp. 77–92, jul 2017.
- [9] H. Xu, Y. Li, J. Zhang, H. Han, B. Zhang, L. Wang, Y. Wang, and A. Wang, "Ultra-wideband chaos life-detection radar with sinusoidal wave modulation," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 13, p. 1730046, dec 2017.
- [10] Y. Zhou, L. Bao, and C. P. Chen, "A new 1d chaotic system for image encryption," *Signal Processing*, vol. 97, pp. 172–182, apr 2014.
- [11] N. A. Loan, N. N. Hurrah, S. A. Parah, J. W. Lee, J. A. Sheikh, and G. M. Bhat, "Secure and robust digital image watermarking using coefficient differencing and chaotic encryption," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 19 876–19 897, 2018.
- [12] H.-P. Ren, C. Bai, J. Liu, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Experimental validation of wireless communication with chaos," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 26, no. 8, p. 083117, aug 2016.
- [13] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft, "Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments," *Signal Processing*, vol. 133, pp. 187–191, apr 2017.
- [14] A. Sahnoune and D. Berkani, "On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 12, no. 7, pp. 1273–1278, mar 2018.
- [15] R. A. da Costa and M. Eisencraft, "Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 72, pp. 441–448, jun 2019.
- [16] D. F. Drake and D. B. Williams, "Linear, random representations of chaos," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 4, pp. 1379–1389, apr 2007.
- [17] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Addison Wesley Pub CO Inc, 2009.
- [18] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft, "Spectral properties of chaotic signals generated by the Bernoulli map," *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 8, no. 2, pp. 12–16, 2015.
- [19] J. G. Proakis and D. K. Manolakis, *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Pearson, 2006.

## New Trends in Chaos-based Communications and Signal Processing

Marcio Eisencraft, João V. C. Evangelista, Rafael A. Costa, Rodrigo T. Fontes, Renato Candido, Daniel P. B. Chaves, Cecilio Pimentel and Magno T. M. Silva

**Abstract** In the last decades many possible applications of nonlinear dynamics in communication systems and signal processing have been reported. Conversely, techniques usually employed by the signal processing and communication systems communities, as correlation, power spectral density analysis and linear filters among others have been used to characterize chaotic dynamical systems. This chapter presents four works that aim to use tools from both fields to generate new and interesting results: i) a message authentication system based on chaotic fingerprint; ii) a study of the spectral characteristics of the chaotic orbits of the Hénon map; iii) an investigation of the chaotic nature of the signals generated by a filtered Hénon map and (iv) a

---

Marcio Eisencraft  
Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, Brazil e-mail: marcioft@usp.br

João V. C. Evangelista  
École de Technologie Supérieure, Montreal, Canada  
e-mail: joao-victor.de-carvalho-evangelista.1@ens.etsmtl.ca

Rafael A. Costa  
Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, Brazil  
e-mail: rcosta@lcs.poli.usp.br

Rodrigo T. Fontes  
Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, Brazil  
e-mail: rfontes@lcs.poli.usp.br

Renato Candido  
Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, Brazil  
e-mail: renatocan@lps.usp.br

Daniel P. B. Chaves  
Federal University of Pernambuco, Recife, Brazil e-mail: daniel.chaves@ufpe.br

Cecilio Pimentel  
Federal University of Pernambuco, Recife, Brazil e-mail: cecilio@ufpe.br

Magno T. M. Silva  
Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, Brazil e-mail: magno.silva@usp.br



communication system that presents equalization and a switching scheme between chaos-based and conventional modulations.

## 1 Introduction

In the last 30 years, many possible applications of chaotic signal and systems in Telecommunication Engineering and Signal Processing have been proposed [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Although no practical standard is based on chaotic signals yet, many recently published works have shown an interest in studying the behavior of chaos-based communication systems (CBCS) in practical channels [5, 7, 8, 9, 10].

In this chapter, we present four ongoing works in this line of research. In Section 2, a message authentication based in a chaotic fingerprint is succinctly described. The two-dimensional Hénon map [11] is one of the most employed when it comes to CBCS using chaotic synchronization [1, 12]. This way, knowing the spectral and dynamical characteristics of its orbits is fundamental. In Section 3, the spectral characteristics of the Hénon map as function of its parameters is numerically studied. Following, in Section 4, some simulation results on the chaotic nature of signals generated by a filtered Hénon map is accessed. Finally, in Section 5, a communication system that includes an adaptive equalizer and a switching scheme between a chaos-based modulation and a conventional one is discussed.

## 2 Chaotic Fingerprint for Physical Layer Authentication

Message authentication, which ensures that a received message comes from its acclaimed sender, is of fundamental importance for secure communication systems [13]. Traditionally, authentication methods are deployed in higher layers of the network which provide a computational secrecy to the system, meaning that algorithms running in a polynomial computer will not be able to break the secrecy in feasible time. However, exploring the stochastic nature of the wireless channel, usually saw as an undesired characteristic, is an efficient way to provide an additional security layer to the system [14]. In this context, a robust authentication method may be achieved by embedding a fingerprint in the message at the physical layer [15, 16]. The fingerprint embedding system can be deployed on top of an existing system where users employing the authentication protocol can communicate without interfering with users unaware of the authentication scheme. The fingerprints are typically generated by methods based on cryptographic hash functions [15, 16] and on the channel state information [14, 17].

In this section, it is demonstrated the viability of employing unidimensional chaotic maps for this purpose. Due to the fact that sequences generated by these maps are broadband, aperiodic, and presents noise-like behavior [18, 19], they are strong candidates for the fingerprint generation process. This section follows with a

brief description of the security requirements and the system overview, proceeding with the presentation of the fingerprint features and properties that tackle each of the security requirements.

## 2.1 System Overview and Security Requirements

The communication system model used to analyze the fingerprint generation method has three users sharing the same wireless medium:

- **Alice and Bob:** who are the legitimate users of the system meaning that they enforce the proposed authentication protocol. Alice sends message packets of length  $N$  with a superimposed fingerprint that depends on a secret key shared with Bob. Bob receives these message packets and based on the presence or not of a legitimate fingerprint he decides to accept or to reject the messages; and
- **Eve:** who is a malicious user of the system, meaning that she is aware of the authentication protocol, but do not share a legitimate key, so she is unable to generate valid fingerprints. Her goal is to disrupt the communication, either by impersonating a legitimate user or by keeping legitimate users from communicating.

In our model, the malicious user may do two things to disrupt the system:

- **Replay Attacks** which consists in recording a message sent along with its legitimate fingerprint and resending it in the future.
- **Impersonation Attacks** which consists in observing some legitimate messages along with their fingerprints and sending a message with a fraudulent fingerprint in an attempt to impersonate a legitimate user of the system.

## 2.2 The Authentication Protocol

The transmitter consists of a digital modulator (here, it is considered a binary phase shift keying (BPSK) modulator for the sake of simplicity), a chaotic signal generator based on a unidimensional discrete piecewise linear chaotic map, and an adder (to compose the message with the chaotic signal). We assume that the system operates in a slow block fading channel, so the fading gain  $h^i$  for the  $i$ -th block is constant for a block of size  $N$ , where  $h^i$  is a Rayleigh distributed random variable. The superscript  $i$  in every variable indicates the  $i$ -th block.

The system is also impaired by additive white Gaussian noise (AWGN), denoted by the vector  $\mathbf{w}^i = [w_1^i \ w_2^i \ \dots \ w_N^i]$ , where  $w_n^i$  is a zero-mean Gaussian random variable with variance  $\sigma_w^2$ . The modulated message vector is given by  $\mathbf{s}^i = [s_1^i \ s_2^i \ \dots \ s_N^i]$ , such that  $s_n^i \in \{-1, +1\}$  is a bipolar signal. The signal to noise ratio (SNR) is given by  $1/\sigma_w^2$ .

Eve does not have a valid authentication key, so she is considered unable to recognize a valid fingerprint. So the transmitted signal for the unauthentic user simply consists of a message  $\mathbf{x}^i = \mathbf{s}^i$ . Thus, for this user, the signal at the receiver is given by

$$\mathbf{y}^i = h^i \mathbf{x}^i + \mathbf{w}^i = h^i \mathbf{s}^i + \mathbf{w}^i. \quad (1)$$

In a scenario with message authentication, the output of the chaotic generator acts as the fingerprint in the system and is denoted by the row vector  $\mathbf{t}^i = [t_1^i \ t_2^i \ \dots \ t_N^i]$ , such that  $t_n^i \in [-1, +1]$  is a limited real value. Each vector element  $t_{n+1}^i$  is a function of the previous one  $t_n^i$ , according to the chaotic map and its initial condition.

The legitimate user applies the shared key, the message, and the packet number to generate the initial condition. In order to do so the domain of the map is discretized in  $2^K$  bins, where  $K$  is the number of bits of the key and the possible initial conditions are taken as the centers of the  $2^K$  bins. A specific bin is determined through a bitwise exclusive or operation of the key with the concatenation of the message and the packet number  $i$ . Thus, resending the same message and fingerprint pair at a later time would be ineffective, assigning robustness to the system against replay attacks. Due to the sensitive dependence on initial conditions (SDIC) inherent to chaotic maps [18], even two neighboring initial conditions generate an uncorrelated sequence on the long term.

In order to make the system secure to replay attacks the key goes through a bitwise exclusive or operation with the binary transmission packet number  $i$ , so every initial condition is key dependent and also message dependent, so resending the same message tag pair at a later time would be ineffective.

The message plus the fingerprint vector is given by  $\mathbf{x}_t^i = \rho_s \mathbf{s} + \rho_t \mathbf{t}$ , where  $\rho_s$  and  $\rho_t$  determine the relative energy allocation between the message and the fingerprint. In this case, the received signal is given by

$$\mathbf{y}^i = h^i \mathbf{x}_t^i + \mathbf{w}^i = h^i (\rho_s \mathbf{s}^i + \rho_t \mathbf{t}^i) + \mathbf{w}^i. \quad (2)$$

At the receiver, the message is first demodulated and subtracted from the received signal and then is correlated to a generated copy of the fingerprint. The decision variable for the  $i$ -th block is

$$\tau^i = \frac{\mathbf{y}^i - h_i \rho_s \mathbf{s}^i}{h_i \rho_t} \cdot \mathbf{t}^i, \quad (3)$$

where the operator  $\cdot$  is the inner product between two vectors. Thus,  $\tau^i$  has distinct probability density function (PDF) depending whether the fingerprint is present (hypothesis  $\mathcal{H}_1$ ) or not (hypothesis  $\mathcal{H}_0$ ). The correspondent conditional PDFs  $p_{\tau^i|\mathcal{H}_0}(\tau)$  and  $p_{\tau^i|\mathcal{H}_1}(\tau)$  are obtained from

$$\tau^i|\mathcal{H}_0 = \left( \frac{1-\rho_s}{\rho_t} \right) \mathbf{s}^i \cdot \mathbf{t}^i + \frac{\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{t}^i}{h^i \rho_t}, \quad (4)$$

$$\tau^i|\mathcal{H}_1 = |\mathbf{t}^i|^2 + \frac{\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{t}^i}{h^i \rho_t}. \quad (5)$$

For the  $i$ -th block, (4) and (5) correspond to the addition of a constant value to the zero-mean Gaussian random variable  $v^i \triangleq \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{t}^i / (h^i \rho_t)$ . Thus,  $p_{\tau^i|\mathcal{H}_0}(\tau)$  is a zero-mean Gaussian random variable (for uncorrelated vectors  $\mathbf{s}^i$  and  $\mathbf{t}^i$ ) with variance  $\sigma_{v^i}^2 = N \mathbb{E}[(t_k^i)^2] \sigma_w^2 / (\rho_t^2 |h^i|^2)$ , where  $\mathbb{E}[\cdot]$  represents the expected value of a random variable. Similarly,  $p_{\tau^i|\mathcal{H}_1}(\tau)$  has the same PDF, but with mean  $\mathbb{E}[\tau^i|\mathcal{H}_1] = |\mathbf{t}^i|^2$ . For more details see [15, 20].

The main goal in an authentication system is to detect a fraudulent message (with no fingerprint present). Specifically, to prevent deciding for  $\mathcal{H}_1$  when the correct hypothesis is actually  $\mathcal{H}_0$  (false positive). Thus, the decision criterion compares  $\tau^i$  in (3) with the  $i$ -th block decision threshold  $\tau_0^i$ , such that

$$\tau^i \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \tau_0^i, \quad (6)$$

where  $\tau_0^i$  is selected with the constraint that a safety margin  $\alpha$  must be less than a tolerable failure probability  $\eta$ . In order to determine  $\tau_0^i$ , we must limit the probability of false positive,  $\alpha = \Pr(\tau^i > \tau_0^i | \mathcal{H}_0) < \eta$ , and the attacker only obtains success if an illegitimate message ratio higher than  $\alpha$  is accepted by the receiver. As  $p_{\tau^i|\mathcal{H}_0}(\tau)$  is Gaussian distributed with zero-mean, we have that  $\tau_0^i = \arg \min Q(\tau^i / \sigma_{v^i}) < \eta$  where  $Q(\cdot)$  is the tail probability of the Gaussian PDF.

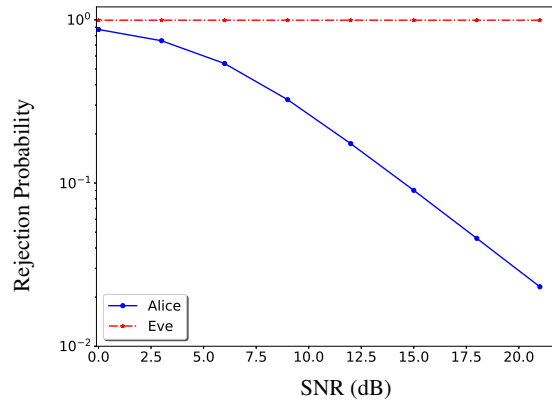
### 2.3 Results

In order to validate the proposed fingerprint generation method, a Monte Carlo simulation is performed using the tent map as the chaotic generator for SNR varying from 0 to 21 dB.

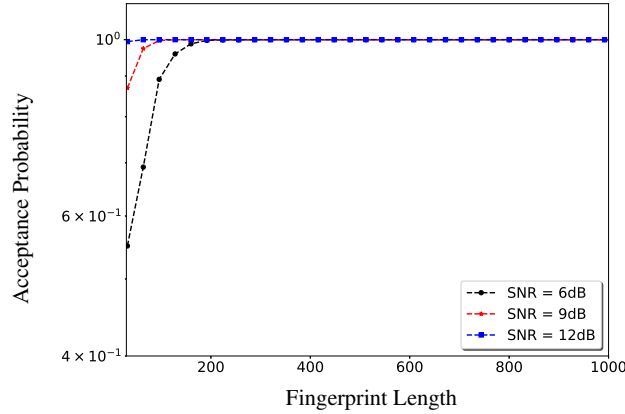
The metric used to evaluate the success of the protocol is the probability of rejection of a message. We simulate messages sent by Alice (where the fingerprint is present) and messages sent by Eve (no fingerprint). We consider in the simulations the block length  $N$  equals to 128,  $\rho_s = 0.985$ ,  $\rho_t = 0.173$ , and the safety margin at the receiver  $\eta = 0.01$ . The simulation results are shown in Figure 1. As can be observed, fingerprints generated by chaotic maps can be successfully used to authenticate messages in the physical layer. For the whole range of the SNR considered, the rejection probability of the messages sent by Eve is above 0.99 which according to the established criteria means that the attacker is unable to beat the authentication protocol. As Eve's messages cannot be authenticated, since she does not know the shared key, the proposed fingerprint generation method is secure to imper-

sonation attacks. Despite that, it is worth noting that a physical layer authentication protocol is an additional security measure to the traditional higher layer authentication protocol, thus, the illegitimate messages accepted by the receiver would not be authenticated at higher layers.

However, by increasing the fingerprint length we can increase the rate of acceptance of legitimate messages. Figure 2 shows the acceptance rate of the messages transmitted by Alice when  $\eta = 0.01$  for three different values of SNR. We can observe that, for a long enough fingerprint, the acceptance rate for Alice messages approaches 1 for all three SNR.



**Fig. 1** Probability of rejection of messages sent by Alice and sent by Eve for fingerprints generated by the tent map with  $\eta = 0.01$ .



**Fig. 2** Probability of acceptance of a message sent by Alice for three different SNR, where the fingerprint length  $N$  varies from 32 to 1000, with  $\eta = 0.01$ .

### 3 Spectral Properties of the orbits of the Hénon map

The study of spectral characteristics of chaotic signals is a relevant issue for practical communications. Since every real world communication channel is bandlimited, to characterize and control the power spectral density (PSD) of the generated chaotic signals is of paramount importance [5, 21]. Recently, many works have thoroughly analysed the PSD of signals generated by one-dimensional maps [22, 23, 24, 25, 26]. However, we are not aware of any systematic study of the PSD of signals generated by higher dimensional maps.

In this section, we report our initial studies involving the autocorrelation sequence (ACS) and PSD of signals generated by the two-dimensional Hénon map. We numerically analyse how they vary with the map parameters.

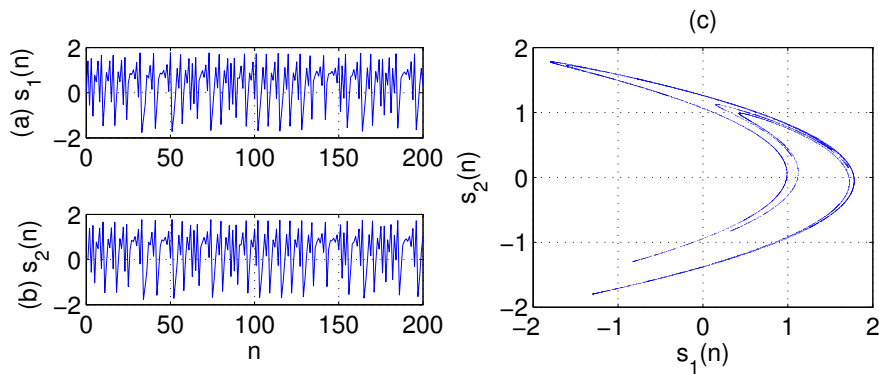
#### 3.1 The Hénon Map

The Hénon map  $f_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , is defined as [11]

$$\mathbf{s}(n+1) = \mathbf{f}_H(\mathbf{s}(n)) = \begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2(n) + 1 - as_1^2(n) \\ bs_1(n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

where  $\{a, b\} \in \mathbb{R}$  are parameters and  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n) \ s_2(n)]^T$ , with  $(\cdot)^T$  indicating transposition.

Figure 3(a) and (b) show  $\mathbf{s}(n)$  with initial condition  $\mathbf{s}(0) = [0 \ 0]^T$  for  $a = 1.4$  and  $b = 0.3$ . The attractor, obtained disregarding the first  $10^3$  iterations is presented Fig 3(c). The highest Lyapunov exponent of this attractor can be numerically obtained resulting  $h_H = 0.42$ , confirming its chaotic nature [18, p. 201].



**Fig. 3** Hénon map for  $a = 1.4$  e  $b = 0.3$ : (a) and (b) orbit  $\mathbf{s}(n)$  with initial condition  $\mathbf{s}(0) = [0 \ 0]^T$ ; (c) attractor.

The bifurcation diagram of  $s_1(n)$  and the highest Lyapunov exponent for  $b = 0.3$  and  $0 < a \leq 1.4$  are presented in Figure 4. Figure 5 shows orbits obtained for (a)  $a = 0.6$ , (b)  $a = 1.069$ , (c)  $a = 1.2$ , (d)  $a = 1.232$  and (e)  $a = 1.4$ . These values of  $a$  are signalized by dashed lines in Figure 4. In cases (a) and (d) we have periodic orbits and in (b), (c) and (e) chaotic ones.

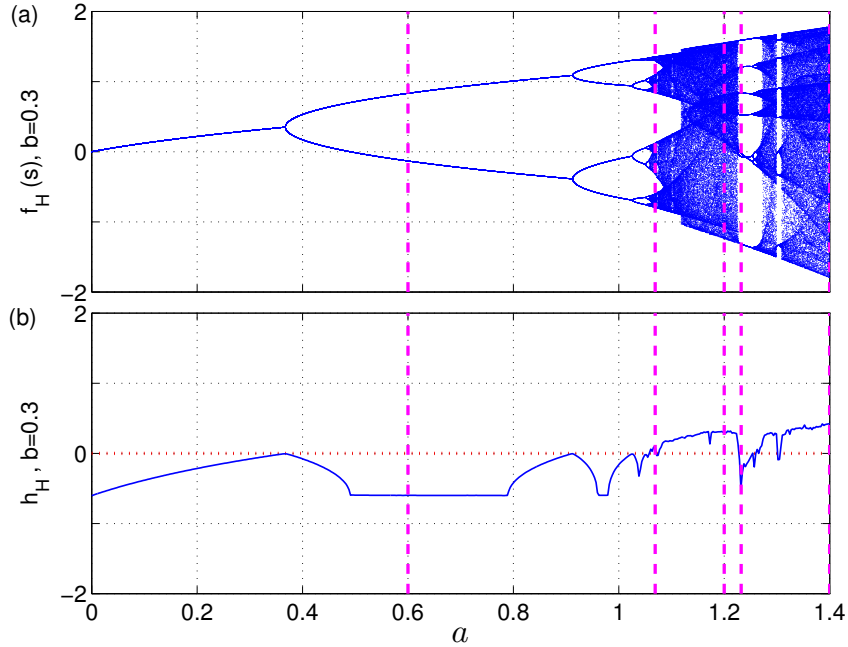
### 3.2 Autocorrelation Sequences And Power Spectral Density

Chaotic signals generated by a map can be considered as sample function of an ergodic stochastic process [27]. For the scalar component  $s_1(n)$ , the ACS  $R(k)$  for an integer  $k$  is defined as

$$R(k) \triangleq \mathbb{E}[s_1(n)s_1(n+k)], \quad k \geq 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (8)$$

The expected value  $\mathbb{E}[\cdot]$  is taken over all initial conditions that generate chaotic signals. For negative values of  $k$ , we conveniently consider

$$R(k) \equiv R(-k), \quad k < 0. \quad (9)$$



**Fig. 4** (a) Bifurcation diagram for  $s_1(n)$  and (b) highest Lyapunov exponent for the Hénon map.

The PSD  $P(\omega)$  is the discrete-time Fourier transform of  $R(k)$  [28]. As its integral is proportional to the signal power  $R(0) = \mathbb{E}[s(n)^2]$ , it represents how power is allocated in the discrete-time frequencies  $0 \leq \omega < \pi$ .

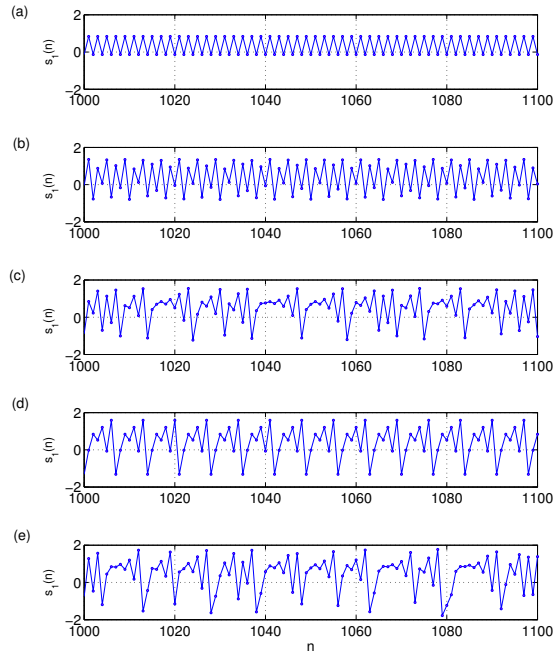
Figure 6 shows the ACS of  $s_1(n)$  in (7) for  $b = 0.3$  and the values of  $a$  considered in Figure 5. Their estimated PSD using  $6 \times 10^6$  samples are also shown.

In the periodic cases of (a)  $a = 0.6$  (period  $N = 2$ ) and (d)  $a = 1.232$  ( $N = 7$ ), it can be clearly seen the periodic nature of the ACS and the peaks at frequency  $2\pi/N$  and its harmonics. In the chaotic cases (c)  $a = 1.2$  and (e)  $a = 1.4$ , the ACS present a non-impulsive slowly decaying and oscillatory pattern that reflect in continuous peakless PSD. The power is concentrated predominantly in higher frequencies.

In the case (b)  $a = 1.069$ , we are still close to the emergence of chaos in the bifurcation diagram of Figure 5. Although positive, the highest Lyapunov number is close to zero. This is reflected in a very slowly decaying ACS and peaks in the DSP, specially at  $2\pi/4$  and its harmonics. Therefore, we have a narrowband chaotic signal.

The general behavior of the PSD for  $1.2 < a \leq 1.4$  and  $b = 0.3$  is plotted in Figure 7. The onset of chaos and periodic windows can be clearly noticed. It is also possible to note the power concentration in the high frequencies of the chaotic attractors.

Other simulations are presented in animated form at <http://www.lcs.poli.usp.br/~marcio/NSCHenon>.



**Fig. 5** Orbits of Hénon map for fixed  $b = 0.3$  and (a)  $a = 0.6$ , (b)  $a = 1.069$ , (c)  $a = 1.2$ , (d)  $a = 1.232$  and (e)  $a = 1.4$ .

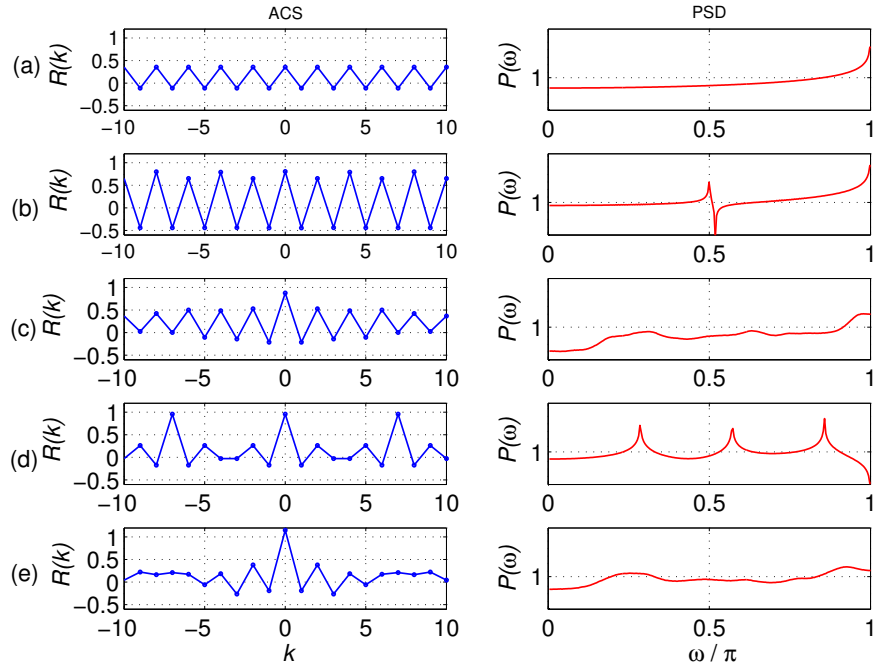


#### 4 Lyapunov Exponents of a filtered Hénon Map

One of the most interesting features of chaotic signals for communication systems is related to their SDIC. It can improve security issues involving information coding [7, 29]. This way, if the system structure or the transmitted message modifies the chaotic map, as in the system proposed in [30] and adapted to discrete-time in [12], it is necessary to determine whether the transmitted signals remain chaotic.

Chaotic signals are often broadband and the physical transmission channels are always bandlimited. Thus, the authors of [12] proposed to place linear discrete-time lowpass filters [31] in the feedback loops in order to limit the bandwidth of the chaotic transmitted signals. The synchronization conditions for this bandlimited system have been analytically determined in [6]. However, it is not clear if the transmitted signals remain chaotic. Preliminary numerical results presented in [32] show that the insertion of a finite impulse response (FIR) filter can turn originally chaotic signals into periodic or even unbounded signals depending on the filter coefficients.

In this section, we extend the results of [32], numerically accessing the effect of the filters coefficients on the nature of the transmitted signal, considering the Hénon map as chaotic generator.



**Fig. 6** ACS and PSD of orbits of the Hénon map for  $b = 0.3$  and (a)  $a = 0.6$ , (b)  $a = 1.069$ , (c)  $a = 1.2$ , (d)  $a = 1.232$  and (e)  $a = 1.4$ .

### 4.1 Hénon map with a linear filter

In the system proposed in [12], the state  $s_1(n)$  of (7) is filtered through an FIR filter with  $N_S$  coefficients before being fed back into the nonlinearity. The filtered Hénon map can then be described by

$$\mathbf{s}(n+1) = \begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \\ s_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - s_3^2(n) + bs_2(n) \\ s_1(n) \\ \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j s_1(n+1-j) \end{bmatrix} \quad (10)$$

where  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n) \ s_2(n) \ s_3(n)]^T$ , and  $c_j$ ,  $0 \leq j \leq N_S - 1$ , are the filter coefficients.

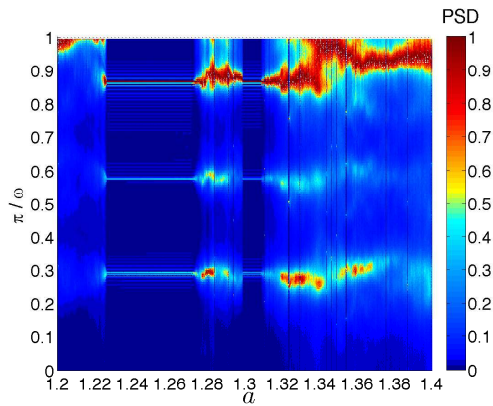
In this section we numerically analyse the cases  $N_S = 1$  and  $N_S = 2$  postponing the analysis of filters with more coefficients for a future work..

### 4.2 Lyapunov exponents for $N_S = 1$ and $N_S = 2$

For  $N_S = 1$ , (10) can be rewritten as

$$\mathbf{s}(n+1) = \begin{bmatrix} a - s_3^2(n) + bs_2(n) \\ s_1(n) \\ c_0 (a - s_3^2(n) + bs_2(n)) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

In particular, for  $c_0 = 1$ ,  $s_3(n) = s_1(n)$  and the dynamics is that of the original Hénon map (7). For the usual parameter  $b = 0.3$  [11], Figure 4 shows the largest Lyapunov exponent and the bifurcation diagram of  $s_1(n)$  for  $0 < \alpha \leq 1.4$ . We can see that after a period-doubling cascading, we have a range of values of  $a$  that generate chaotic signals. In particular for the usual  $a = 1.4$  we have chaos.



**Fig. 7** PSD of orbits of the Hénon map for  $b = 0.3$  and  $1.2 < a \leq 1.4$ .

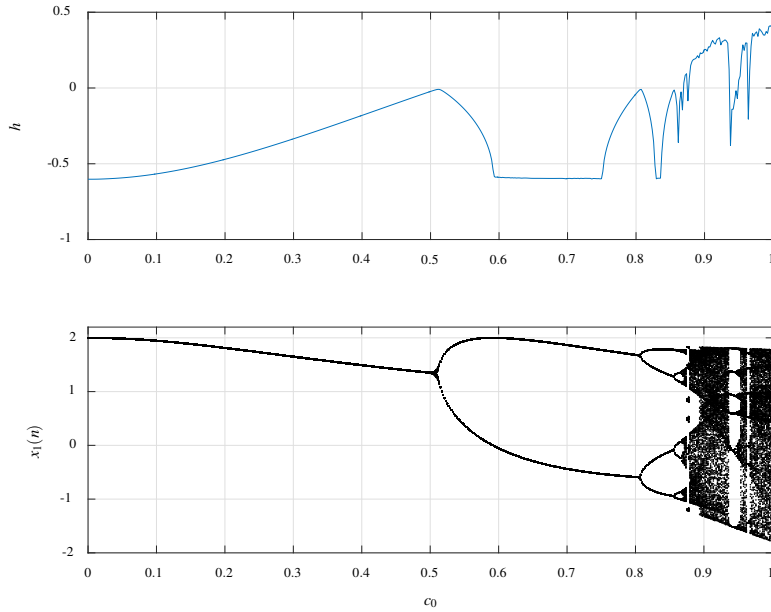
For  $0 < c_0 \leq 1$ , Figure 8 shows the largest Lyapunov exponent and the bifurcation diagram of  $x_1(n)$  as function of  $c_0$  for  $a = 1.4$  and  $b = 0.3$ . Both graphics are distorted versions of the ones in Figure 4. We clearly see that depending on the value of  $c_0$  the chaotic condition presented for  $c_0 = 1$  can vanish. It is possible to obtain chaos for  $c_0 > 0.87$ .

For  $N_S = 2$ , (10) can be rewritten as

$$\mathbf{s}(n+1) = \begin{bmatrix} a - s_3^2(n) + bs_2(n) \\ s_1(n) \\ c_0(a - s_3^2(n) + bs_2(n)) + c_1s_1(n) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Figure 9 shows regions of positive and negative largest Lyapunov exponent  $h$  in the  $c_0 \times c_1$  space. Blue (darker) regions represent  $h < 0$  and yellow (lighter) regions represent  $h > 0$ . In the blank regions the orbits diverge. For low values of  $c_0$  and  $c_1$  chaos is lost and periodic orbits are found. It is possible to obtain chaotic signals for  $c_0$  or  $c_1$  sufficiently large. However, if both are simultaneously large, the orbits can diverge as is shown by the blank area.

Analysing the area where  $0.6 \leq c_1 \leq 1$ , we note complicated patterns between chaotic and periodic regions. A little variation in the coefficient values can alter thoroughly the chaotic nature of the signals.



**Fig. 8** Lyapunov exponents and bifurcation diagram for (11) as a function of  $c_0$  with  $a = 1.4$ .

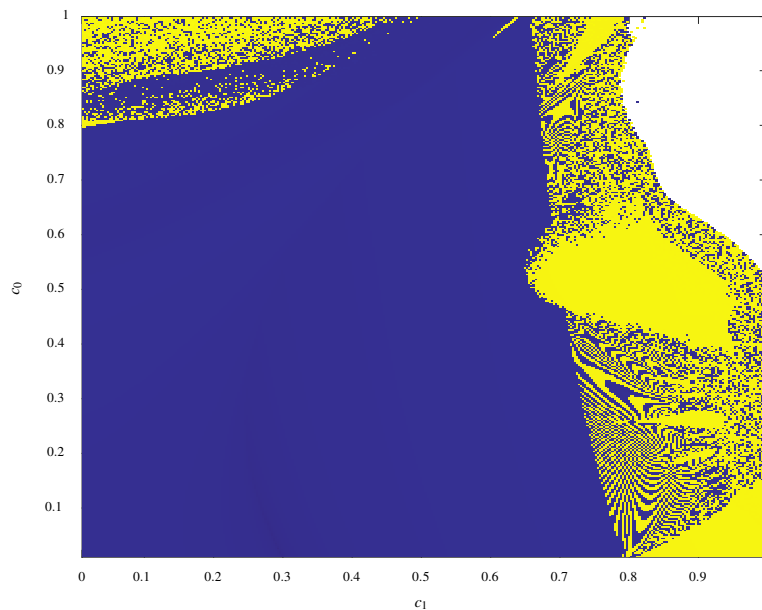
## 5 A Switching Scheme Between Conventional and Chaos-based Communication Systems

A particularly interesting discrete-time CBCS was proposed in [12], based on the one by Wu and Chua [30], in which the message is fed back into the chaotic signal generator (CSG). It was shown in [12] that under some design conditions, the message is perfectly recovered in an ideal channel. However, this CBCS presents poor performance in terms of bit error rate (BER) when channel imperfections are present [33]. Besides, as illustrated in the previous section, there is no guarantee that the transmitted signals are still chaotic.

In [34], it was proposed a CBCS using the Hénon map  $f_H(\cdot)$  in conjunction with an encoding function such that it was easy to show that the transmitted signals were chaotic. However, the performance of this system is still far from that of a conventional system without chaos.

In this section, in order to obtain better BER than before, we present two innovations:

1. a new encoding and corresponding equalization scheme for the CBCS of [34] that ensures the generation of chaotic signals for a range of parameters and



**Fig. 9** Regions of positive and negative largest Lyapunov exponent  $h$  in the  $c_0 \times c_1$  space for  $\alpha = 1.4$  and  $\beta = 0.3$  in (12). Blue (dark) regions represent  $h < 0$  and yellow (light) regions represent  $h > 0$ . In the blank regions the orbits diverge.

- presents higher immunity to intersymbol interference (ISI) and noise, thus providing lower BER for the same convergence rate;
- inspired by many conventional protocols, like IEEE 802.11 (Wi-Fi) [35], that uses modulation and coding techniques that can adapt to the channel state, we propose an algorithm to switch between chaos-based and conventional communication.

### 5.1 Problem Formulation

Figure 10 shows the CBCS under consideration [34, 36]. In the scheme, which is a discrete-time lowpass equivalent for the communication system, a binary message  $m(n) \in \{-1, +1\}$  is encoded by using the first component of the master state vector  $\mathbf{x}(n)$ , via an encoding function  $s(n) = c(x_1(n), m(n))$ , so that  $m(n)$  can be recovered using the inverse function with respect to  $m(n)$ , i.e.,  $m(n) = c^{-1}(x_1(n), s(n))$ . Then, the signal  $s(n)$  is fed back into the CSG and transmitted through a communication channel, whose model is constituted by a transfer function  $H(z)$  and AWGN. We assume an  $M$ -tap adaptive equalizer, with input regressor vector  $\mathbf{r}(n)$  and output  $\hat{s}(n) = \mathbf{r}^T(n)\mathbf{w}(n-1)$  and  $\mathbf{w}(n-1)$  is the equalizer weight vector. The equalizer must mitigate the ISI introduced by the channel and recover the encoded signal  $s(n)$  with an unavoidable delay of  $\Delta$  samples.

If transmitter and receiver identically synchronize [37], i.e., if  $\hat{\mathbf{x}}(n) \rightarrow \mathbf{x}(n)$ , then using the output of the equalizer and the estimate of  $x_1(n)$ ,  $m(n)$  can be decoded via

$$\hat{m}(n) \triangleq c^{-1}(\hat{x}_1(n), \hat{s}(n)) \rightarrow m(n), \quad (13)$$

where  $\hat{x}_1(n)$  is the first component of the slave state vector  $\hat{\mathbf{x}}(n)$ . Thus, the estimation error  $e(n) = m(n-\Delta) - \hat{m}(n)$  can be used as an equalization criterion. Once identical synchronization between master-slave is obtained,  $m(n)$  can be used to transmit information between the two systems, being  $\hat{m}(n)$  the decoded binary message. We assume that there is a training sequence  $\{m(n-\Delta)\}$ , known in advance at the re-

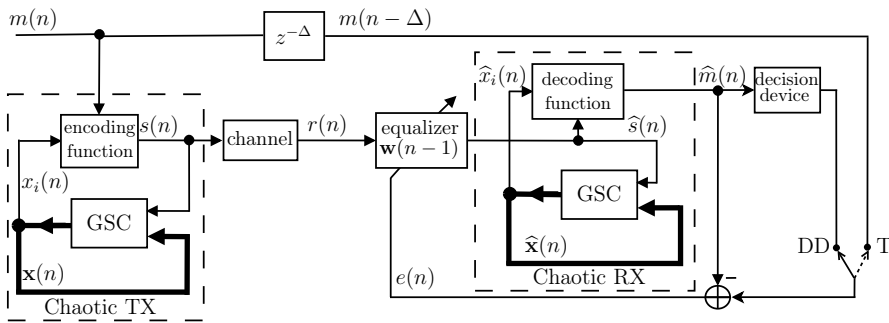


Fig. 10 CBCS with an equalizer.

ceiver. In this case, the equalizer works in the *training (T) mode* and updates its coefficients in a supervised manner, using the estimation error in conjunction with an adaptive algorithm. If we intend to transmit information using  $m(n)$ , the receiver will not have access to  $\{m(n - \Delta)\}$  and this sequence will be replaced by the output of the decision device [38, 39]. In this case, the equalizer works in the so-called *decision-directed (DD) mode*.

In this section,  $\mathbf{f}_H(\cdot)$  of (7) is used in both CSGs of Figure 10. Therefore, the equations governing the global dynamical system can be written as

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)), \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\hat{s}(n)), \quad (15)$$

where  $\mathbf{x}(n) \triangleq [x_1(n) \ x_2(n)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(n) \triangleq [\hat{x}_1(n) \ \hat{x}_2(n)]^T$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{f}(s(n)) = \begin{bmatrix} -as^2(n) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

In [12], it was shown that, under ideal channel conditions, i.e., when  $r(n) \equiv s(n)$  and the equalizer is an identity system, identical synchronization between master and slave is obtained if all the eigenvalues of  $\mathbf{A}$  are inside the unit circle. Since the eigenvalues of  $\mathbf{A}$  are  $\pm\sqrt{b}$ , we conclude that for  $|b| < 1$ , master and slave identically synchronize under ideal conditions. Therefore, from (13),  $\hat{m}(n) \rightarrow m(n)$ .

## 5.2 Message encoding

As a way to increase the parameter space where chaotic signals are generated, we propose the encoding function

$$s(n) = \eta_1 x_1(n) - \eta_2 [m(n) + 1] \text{sign}[\eta_1 x_1(n)], \quad (17)$$

where  $\text{sign}[\cdot]$  is the signal function. The idea behind (17) is to decrease the disturbance on  $x_1(n)$  caused by the message. In this case, if  $m(n) = -1$ ,  $s(n) = \eta_1 x_1(n)$  and if  $m(n) = 1$  a constant with signal opposite to  $x_1(n)$  is added to it. The corresponding decoding function is given by

$$\hat{m}(n) = \frac{\eta_1 \hat{x}_1(n) - \hat{s}(n)}{\eta_2 \text{sign}[\eta_1 \hat{x}_1(n)]} - 1. \quad (18)$$

By calculating the maximum Lyapunov exponent obtained in the transmitter it is possible to verify that the generated signal presents sensitive dependence on initial conditions for some values of  $\eta_1$  and  $\eta_2$ , considering a random equiprobable binary  $m(n) \in \{-1, 1\}$ . Specifically, we consider  $\eta_1 = 0.9$  and  $\eta_2 = 0.3$ , which ensures the generation of a chaotic signal and allows the equalizer to present a good performance.

### 5.3 Equalization and Switching Algorithm

To control the operation mode of the system, we introduce the parameters  $\gamma_1(n)$  and  $\gamma_2(n)$  in the encoding function (17), making

$$s(n) = \gamma_1(n) \{ \eta_1 x_1(n) - \eta_2 [m(n) + 1] \text{sign}[\eta_1 x_1(n)] \} + \gamma_2(n) m(n). \quad (19)$$

Thus, when  $\gamma_1(n) = 1$  and  $\gamma_2(n) = 0$ , (19) falls back to (17) and the system works just like the previously presented CBCS. However, when  $\gamma_1(n) = 0$  and  $\gamma_2(n) = 1$ ,  $s(n) = m(n)$  and, assuming  $m(n) \in \{+1, -1\}$ , a BPSK system is obtained.

To decode the message considering (19) and assuming  $\gamma_1(n)$  and  $\gamma_2(n)$  are known at the receiver,

$$\hat{m}(n) = \frac{\gamma_1(n) \{ \eta_1 \hat{x}_1(n) - \eta_2 \text{sign}[\eta_1 \hat{x}_1(n)] \} - \hat{s}(n)}{\gamma_1(n) \eta_2 \text{sign}[\eta_1 \hat{x}_1(n)] - \gamma_2(n)}. \quad (20)$$

Using a stochastic gradient algorithm to adapt the equalizer, in order to minimize the instantaneous cost-function  $\hat{J}(n) = e^2(n) = [m(n - \Delta) - \hat{m}(n)]^2$ , we arrive at the following update for the equalizer coefficient vector

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) - \frac{\tilde{\mu} \{ \gamma_1(n) \eta_2 \text{sign}[\eta_1 \hat{x}_1(n)] - \gamma_2(n) \}}{\delta + \|\mathbf{r}(n)\|^2} e(n) \mathbf{r}(n). \quad (21)$$

As it can be noticed, when  $\gamma_1(n) = 0$  and  $\gamma_2(n) = 1$ , the conventional normalized least mean squares (NLMS) algorithm [40, Chap. 7] is obtained.

When using BPSK, to maintain the mean power of  $s(n)$  equal to the power of the chaotic signal,  $\gamma_2(n)$  is adjusted as  $\sqrt{0.415}$ . To make the system practical for transmitting an actual message, besides switching between the chaotic regime and BPSK, we also consider the switching between the training (T) mode and the decision-directed (DD) mode. Thus, the system may operate in four different modes: (1) BPSK and T; (2) Chaotic and T; (3) Chaotic and DD; and (4) BPSK and DD.

The overall communication system with the switching scheme is depicted in Figure 11. For each block of  $L$  samples, the switching is triggered based on thresholds applied to the estimate of the mean square error (MSE), i.e.,

$$\text{MSE}(n_0) = \frac{1}{L} \sum_{k=n_0}^{n_0+L-1} e^2(k),$$

with  $n_0 = 0, L, 2L, \dots$ , accordingly to the flowchart shown in Figure 12. The switching algorithm prioritize the use of the chaotic regime whenever possible and falls back to BPSK when the communication channel condition is poor.

### 5.4 Numerical Simulation

In this simulation, we consider the communication system using the Hénon map (7) with parameters  $a = 1.4$  and  $b = 0.3$ . The state vectors were initialized with  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  and  $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0.1 \ -0.1]^T$ , respectively and we assume the transmission of a binary message  $m(n) \in \{-1, +1\}$  with the equalizer initialized as  $\mathbf{w}(-1) = \mathbf{0}$ .

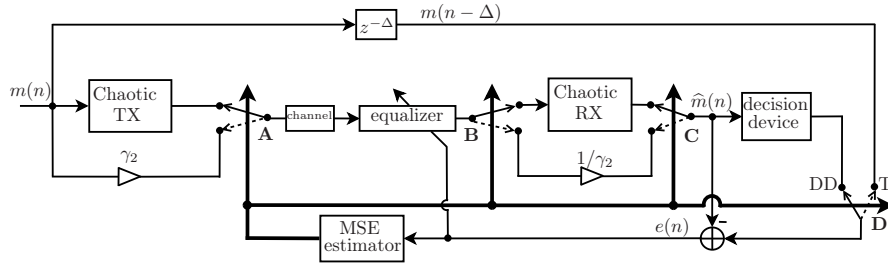
To illustrate the presented switching scheme, we first assume that the encoded sequence  $s(n)$  is initially transmitted through Channel 1, with transfer function

$$H_1(z) = -0.005 + 0.009z^{-1} - 0.024z^{-2} + 0.850z^{-3} - 0.218z^{-4} + 0.050z^{-5} - 0.016z^{-6}, \quad (22)$$

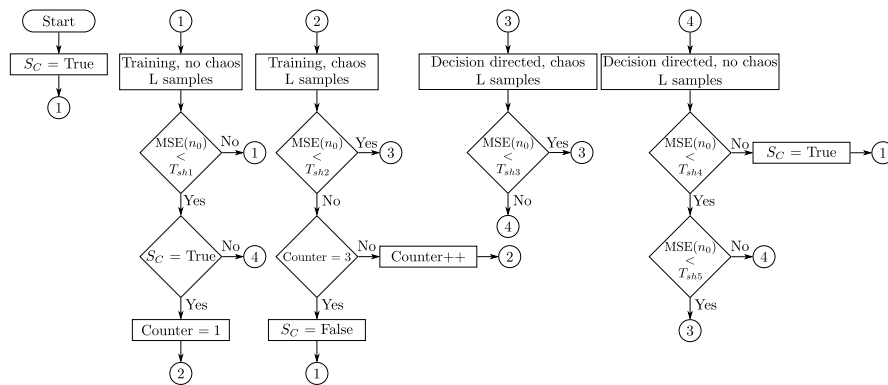
which is changed abruptly at  $n = 250 \times 10^3$  to Channel 2 with transfer function

$$H_2(z) = -0.004 + 0.030z^{-1} - 0.104z^{-2} + 0.520z^{-3} + 0.273z^{-4} - 0.074z^{-5} + 0.020z^{-6}, \quad (23)$$

in the absence of noise [34, 41]. Figure 13 shows (a) the squared error, and (b) the operation mode of the communication system. The switching is performed at each  $L = 2 \times 10^3$  iterations based on the flowchart shown in Figure 12 with thresholds  $T_{sh1} = -30$  dB,  $T_{sh2} = -40$  dB,  $T_{sh3} = -30$  dB,  $T_{sh4} = -20$  dB, and  $T_{sh5} = -35$  dB.



**Fig. 11** Communication system with an equalizer and a switching scheme between conventional and chaos-based communication.



**Fig. 12** Flowchart of the switching scheme between operation modes.  $T_{sh1} \dots T_{sh5}$  are MSE thresholds that trigger the switching between the operation modes.



For the first iterations, under Channel 1, we can observe that the system switches to chaotic modulation in decision-directed mode (number 3), after a brief transient. During this transient, there are some wrong estimations of  $m(n)$  but after the switching algorithm stabilizes in State 3, the message is recovered. After the abrupt variation to Channel 2 at  $n = 250 \times 10^3$ , the algorithm switches to BPSK modulation in decision-directed mode (State 4), after a transient period. This is due to the fact that Channel 2 inserts more ISI than Channel 1, hindering the utilization of the chaotic modulation, as we can notice by the squared error level.

## 6 Conclusions

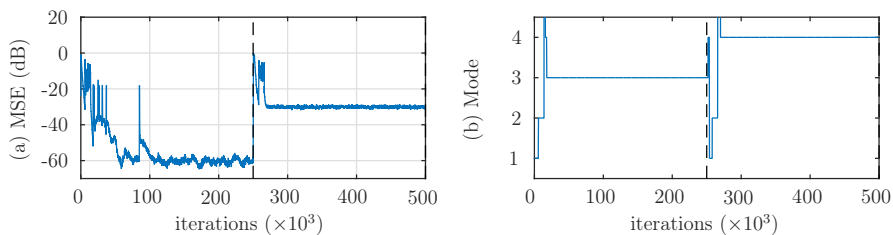
In this chapter, we presented four recent ongoing researches involving by one hand communications and signal processing and by the other hand dynamical systems.

In Section 2, we succinctly described a fingerprint generation method using chaotic maps, as part of a physical layer authentication protocol. The results are auspicious showing that this can be a practical application of chaotic systems in signal processing.

In Section 3, we analyzed through computational simulations the ACS and PSD of orbits generated by the Hénon map. The simulations suggest that the map can be used to generate narrowband and highpass chaotic signals, what can be relevant for CBCS.

The numerical simulation presented in Section 4 show that filtering a Hénon map can modify its chaotic regions. This way, bandlimited CBCS must be carefully projected to guarantee that the generated signals remain chaotic. In our present research we are studying the influence of filters with more coefficients.

In Section 5, we proposed an adaptive scheme that switches between a chaos-based and a conventional communication scheme. The switching is triggered based on a threshold applied to the MSE. Simulation results show that the switching and equalization algorithms can successfully recover a transmitted sequence.



**Fig. 13** (a) Squared error and (b) operation mode along iterations. Communication system using the Hénon map, cNLMS<sub>+</sub> ( $\tilde{\mu} = 0.01$ ;  $\delta = 10^{-2}$ ) and the switching scheme described in Section 5.3. Abrupt variation from Channel 1 to Channel 2 at  $n = 250 \times 10^3$ ;  $M = 12$ ;  $\Delta = 7$ .

Although the application of the properties of chaotic systems in Engineering and applied sciences is still in its beginning, we hope that results as the ones presented here can contribute to increase this synergy.

## References

1. L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 821–824, feb 1990.
2. E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling chaos," *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 1196–1199, mar 1990.
3. F. C. M. Lau and C. K. Tse, *Chaos-Based Digital Communication Systems*. Berlin: Springer-Verlag GmbH, 2003.
4. M. P. Kennedy, G. Setti, and R. Rovatti, eds., *Chaotic Electronics In Telecommunications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2000.
5. M. Eisencraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, eds., *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.
6. R. T. Fontes and M. Eisencraft, "A digital bandlimited chaos-based communication system," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 37, pp. 374–385, aug 2016.
7. A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore, "Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links," *Nature*, vol. 438, pp. 343–346, nov 2005.
8. H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Wireless communication with chaos," *Physical Review Letters*, vol. 110, p. 184101, apr 2013.
9. A. J. Michaels and C. Lau, "Generalized multi-carrier chaotic shift keying," in *2014 IEEE Military Communications Conference*, pp. 657–662, Oct 2014.
10. G. Kaddoum, "Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey," *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, 2016.
11. M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 50, pp. 94–102, 1976.
12. M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. A. Baccalá, "Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, pp. 1–12, 2009.
13. C. Paar and J. Pelzl, *Understanding Cryptography*. Springer, 2011.
14. E. Jorswieck, S. Tomasin, and A. Sezgin, "Broadcasting into the uncertainty: Authentication and confidentiality by physical-layer processing," *Proceedings of the IEEE*, vol. 103, pp. 1702–1724, Oct 2015.
15. P. L. Yu, J. S. Baras, and B. M. Sadler, "Physical-layer authentication," *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, vol. 3, pp. 38–51, Mar. 2008.
16. G. Verma, P. Yu, and B. M. Sadler, "Physical layer authentication via fingerprint embedding using software-defined radios," *IEEE Access*, vol. 3, pp. 81–88, 2015.
17. N. S. Goergen, W. S. Lin, K. J. R. Liu, and T. C. Clancy, "Extrinsic channel-like fingerprinting overlays using subspace embedding," *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, vol. 6, pp. 1355–1369, Dec 2011.
18. K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences, Springer, 2000.
19. S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. The Perseus Books Group, January 2001.
20. U. M. Maurer, "Authentication theory and hypothesis testing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, pp. 1350–1356, July 2000.
21. B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, 2009.

22. H. Sakai and H. Tokumaru, "Autocorrelations of a certain chaos," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 28, pp. 588–590, oct 1980.
23. M. Eisencraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro, "Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map," *Signal Processing*, vol. 90, pp. 385–390, jan 2010.
24. K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith, "Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes," *Signal Processing*, vol. 94, pp. 149–157, jan 2014.
25. R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft, "Spectral properties of chaotic signals generated by the Bernoulli map," *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 8, no. 2, pp. 12–16, 2015.
26. R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft, "Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments," *Signal Processing*, vol. 133, pp. 187–191, apr 2017.
27. A. Lasota and M. C. Mackey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, 1985.
28. J. G. Proakis and D. K. Manolakis, *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Pearson, 2006.
29. M. S. Baptista, E. E. Macau, C. Grebogi, Y.-C. Lai, and E. Rosa, "Integrated chaotic communication scheme," *Phys. Rev. E*, vol. 62, pp. 4835–4845, Oct 2000.
30. C. W. Wu and L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 03, pp. 1619–1627, dec 1993.
31. A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ, USA: Addison Wesley Pub CO Inc, 3rd ed., 2009.
32. M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. H. A. Monteiro, "Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 15, pp. 671–673, jun 2011.
33. R. T. Fontes, *Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2017.
34. R. Candido, M. Eisencraft, and M. T. M. Silva, "Channel equalization for synchronization of chaotic maps," *Digital Signal Processing*, vol. 33, pp. 42–49, oct 2014.
35. G. Holland, N. Vaidya, and P. Bahl, "A rate-adaptive mac protocol for multi-hop wireless networks," in *Proceedings of the 7th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking*, MobiCom '01, (New York, NY, USA), pp. 236–251, ACM, 2001.
36. R. Candido, M. Eisencraft, and M. T. M. Silva, "Channel equalization for chaotic communications systems," in *Chaotic Signals in Digital Communications* (M. Eisencraft, R. Attux, and R. Suyama, eds.), CRC Press, 2013.
37. L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, and J. F. Heagy, "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 7, no. 4, pp. 520–543, 1997.
38. S. Haykin and M. Moher, *Communication Systems*. John Wiley & Sons Inc., 5th ed., 2009.
39. A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. IEEE Computer Soc., 2008.
40. S. O. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 2013.
41. G. Picchi and G. Prati, "Blind equalization and carrier recovery using a "stop-and-go" decision-directed algorithm," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 35, pp. 877–887, Sept. 1987.

# Densidade espectral de potência de sinais transmitidos pelo CSK

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisenkraft

**Resumo**—Nesse artigo, deriva-se analiticamente expressões para a densidade espectral de potência de sinais transmitidos pelo *Chaos Shift Keying*, uma modulação digital que utiliza sinais caóticos. Esses resultados são importantes quando se pensa em aplicações práticas desses sinais em sistemas de comunicação e processamento de sinais. Os resultados teóricos são ilustrados por meio de exemplos numéricos.

**Palavras-Chave**—sinais caóticos, sistemas não lineares, densidade espectral de potência, modulações digitais.

**Abstract**—In this article, expressions for the power spectral density of signals transmitted by Chaos Shift Keying (CSK) are analytically derived. CSK is a digital modulation that uses chaotic signals. These results are important when considering the practical application of these signals in communication systems and signal processing. Theoretical results are illustrated using numerical examples.

**Keywords**—chaotic signals, non-linear systems, power spectral density, digital modulations.

## I. INTRODUÇÃO

Desde o trabalho pioneiro de Pecora e Carroll [1] em que mostrou-se que dois sistemas caóticos poderiam sincronizar, muitos trabalhos foram produzidos sobre sistemas de comunicação baseado em caos (SCBC) [2]–[9].

Especificamente, em implementações digitais de SCBC, a modulação por comutação caótica (CSK - *Chaos Shift Keying*) [10]–[13] é amplamente conhecida. Ela é uma modulação em que o símbolo a ser transmitido é codificado com os coeficientes de uma combinação linear de sinais caóticos gerados por um ou mais mapas, ou seja, sistemas dinâmicos de tempo discreto [14].

Para viabilizar aplicações práticas da modulação digital que utiliza sinais caóticos é de fundamental importância conhecer e controlar precisamente a densidade espectral de potência (DEP) dos sinais transmitidos.

Nesse artigo, deriva-se expressões analíticas para a DEP de versões do CSK que utilizam mapas lineares por partes. Explora-se aqui o fato de que recentemente foram obtidas expressões analíticas para a DEP de alguns geradores caóticos lineares por partes [15]–[21].

O artigo é organizado da seguinte forma: na Seção II resume-se o funcionamento da modulação CSK que utiliza mapas lineares por partes. Na Seção III deduzem-se a sequência de autocorrelação (SAC) e a DEP dessa modulação. Para alguns casos particulares são mostradas simulações que

validam os resultados teóricos na Seção IV. Por fim, na Seção V tecem-se as conclusões.

## II. MODULAÇÃO CSK

No CSK binário, para um único mapa, um sinal caótico  $x(n)$  é gerado pela equação de diferenças [10, Cap. 6],

$$x(n) = f(x(n-1)) \quad (1)$$

com  $n \in \mathbb{N}$  e  $x(0)$  uma condição inicial arbitrária.

Nesse trabalho, toma-se uma partição do intervalo  $[-1, 1[$  com  $r$  intervalos de extremidades  $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{r-1} < \alpha_r = 1$ . A cada um desses segmentos associa-se um  $\beta_\ell \in \{-1, 1\}$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, r$ .

Então, no intervalo  $\alpha_{\ell-1} \leq x < \alpha_\ell$  o mapa  $f(x)$  é definido por

$$f(x) = \beta_\ell \left\{ \frac{2x - (\alpha_\ell + \alpha_{\ell-1})}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}} \right\}. \quad (2)$$

Para facilitar a notação, define-se os vetores coluna  $r$ -dimensional  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T$  e  $\beta = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r]^T$  [21].

Na Fig. 1(a) é mostrado um gráfico de um caso particular de  $f(\cdot)$ , para  $r = 6$  com  $\alpha = [-0.3 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.8 \ 1]^T$  e  $\beta = [1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1]^T$ . Na Fig. 1(b) mostram-se dois trechos de sinal desse mapa com condições iniciais muito próximas,  $x(0) = 0.6$  e  $x(0) = 0.600000001$ , deixando-se explícita a dependência sensível às condições iniciais [14].

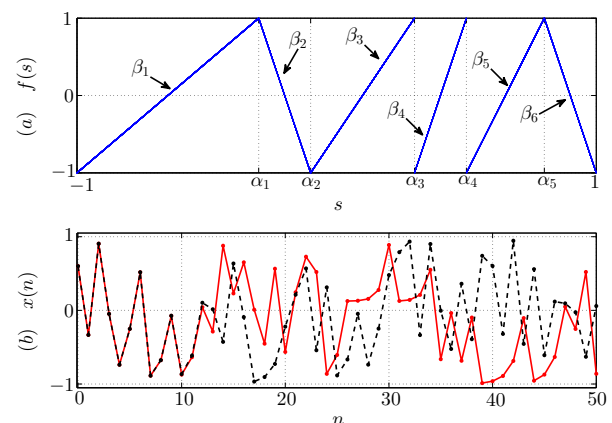


Fig. 1. (a) O mapa  $f(\cdot)$  com  $r = 6$  e (b) duas órbitas com  $x(0) = 0.6$  (linha contínua) e  $x(0) = 0.600000001$  (linha tracejada).

A mensagem  $m(n)$  a ser transmitida é dada por [22]

$$m(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Pi(n - iN_b), \quad (3)$$

em que, a função porta  $\Pi(n)$  é definida por

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N_b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

e faz-se  $a_i = c$  para transmitir o bit 1 e  $a_i = d$  para transmitir o bit 0.

Para obter o sinal CSK, toma-se o produto de (3) por um sinal caótico  $x(n)$  gerado por  $f(\cdot)$  de (1) com condição inicial aleatória uniformemente distribuída no domínio do mapa resultando em [10]

$$s(n) = x(n)m(n). \quad (5)$$

Na Fig. 2 tem-se exemplos dos sinais  $x(n)$ ,  $m(n)$  e  $s(n)$ . Na Fig. 2(a) mostra-se um sinal caótico gerado pelo mapa (2) com  $r = 2$ ,  $\alpha_1 \triangleq \alpha$  e  $\beta = [1 \ 1]^T$  e condição inicial aleatória. Na Fig. 2(b) apresenta-se um trecho da mensagem correspondente a sequência de símbolos (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1) em que  $c = 1$  e  $d = -1$  e na Fig. 2(c) o sinal CSK resultante.

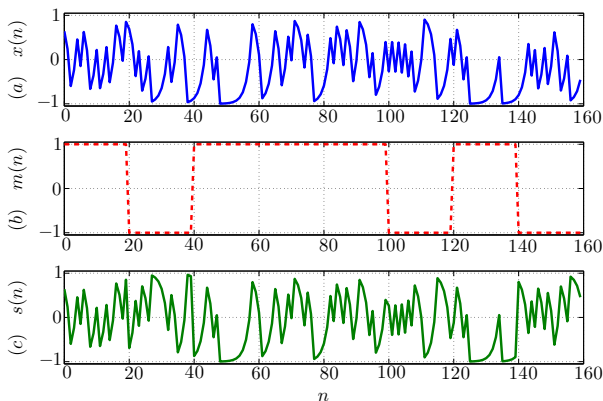


Fig. 2. (a) Sinal caótico gerado pelo mapa (2) com  $r = 2$ ,  $\alpha_1 \triangleq \alpha$  e  $\beta = [1 \ 1]^T$  com  $\alpha = 0.05$ , (b) mensagem para sequência (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1) com  $N_b = 20$  e (c) o sinal CSK resultante.

Com relação à demodulação, quando os dois possíveis sinais transmitidos pelo CSK não possuem mesma energia, i.e.,  $|c| \neq |d|$  é possível utilizar a demodulação não coerente em que utiliza-se o fato de que as energias dos sinais transmitidos são distintas e assim pode-se comparar as energias dos símbolos recebidos no receptor com um limiar de modo a distinguir o bit 0 e o bit 1 [10]. Caso contrário, sugere-se o uso da demodulação coerente em que pode-se utilizar técnicas de sincronização no receptor e recuperar a mensagem transmitida [10].

Um caso particular do CSK é a modulação por comutação liga-desliga caótica (COOK - *Chaos On-Off Keying*) para a qual  $c = 1$  e  $d = 0$  [10]. Um exemplo de modulação COOK é mostrada na Fig. 3.

Na próxima sessão deriva-se expressões analíticas para DEP da modulação CSK.

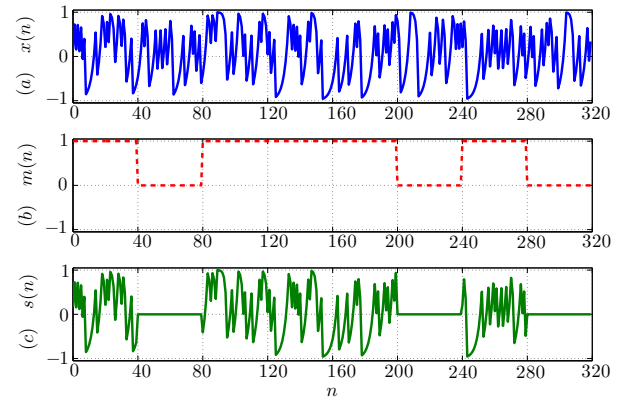


Fig. 3. (a) Sinal caótico gerado pelo mapa (2) com  $r = 2$ ,  $\alpha_1 \triangleq \alpha$  e  $\beta = [1 \ 1]^T$  com  $\alpha = 0.35$ , (b) mensagem para sequência (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0) com  $N_b = 40$  e (c) o sinal COOK resultante.

### III. DENSIDADE ESPECTRAL POTÊNCIA DO CSK

Para calcular a DEP do CSK, primeiramente, calcula-se a SAC de  $s(n)$ . Usando-se (5),

$$\begin{aligned} R_s(k) &= \mathbb{E}[s(n)s(n+k)] \\ &= \mathbb{E}[x(n)x(n+k)m(n)m(n+k)] \\ &= \mathbb{E}[x(n)x(n+k)] \mathbb{E}[m(n)m(n+k)] \\ &= R_x(k)R_m(k), \end{aligned} \quad (6)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador valor esperado e utilizou-se a independência dos processos que caracterizam a mensagem  $m(n)$  e o sinal caótico  $x(n)$ .

A SAC de  $x(n)$  é obtida por meio de uma fórmula recursiva para  $n$ -ésima iteração do mapa linear por partes e resulta em [21]

$$R_x(k) = \frac{1}{3}\psi^{|k|} \quad (7)$$

com

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r \beta_\ell (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1})^2. \quad (8)$$

Sua DEP  $\mathcal{X}(\omega)$  é dada pela transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) de (7),

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 - 2\cos(\omega)\psi + \psi^2)}. \quad (9)$$

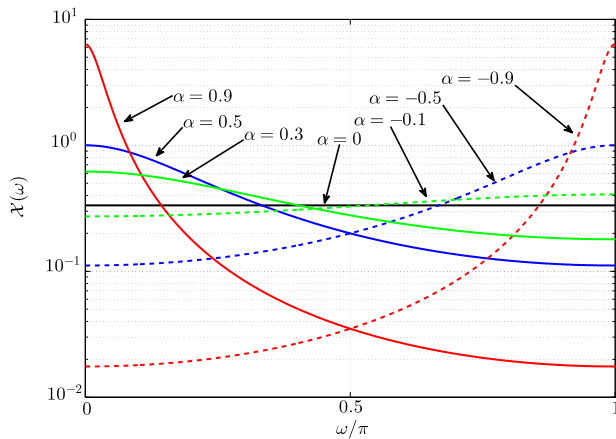
Na Fig. 4 tem-se alguns exemplos de  $\mathcal{X}(\omega)$  para o mapa  $f(\cdot)$  com parâmetros  $\alpha_1 \triangleq \alpha$ ,  $\beta = [1 \ -1]^T$  e diferentes valores  $\alpha$ . Esse mapa é conhecido como tenda inclinada [16]. Nota-se que o parâmetro  $\alpha$  do mapa controla a forma como a potência é distribuída. A potência pode concentrar-se nas altas, nas baixas frequências ou possuir característica de banda larga.

Pode se mostrar [22], que a SAC da mensagem  $m(n)$ , descrita em (3), formada por uma sequência binária equiprovável  $a_i$ , resulta em

$$R_m(k) = \lambda^2 \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \mu^2, \quad (10)$$

com

$$\lambda = \frac{c-d}{2}, \quad (11)$$


 Fig. 4. DEP dos sinais caóticos para diferentes valores de  $\alpha$  [16].

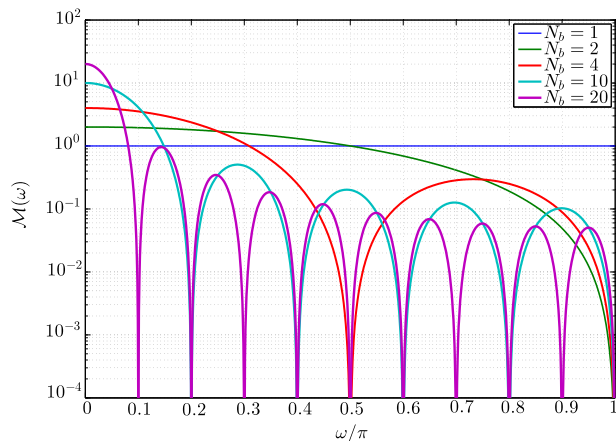
e valor médio

$$\mu = \frac{c+d}{2}. \quad (12)$$

Para obter a DEP de (10) calcula-se a TFTD de  $R_m(k)$ , resultando em

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{\lambda^2}{N_b} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\omega N_b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]^2 + 2\mu^2 \delta(\omega) \text{ para } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (13)$$

Na Fig. 5 tem-se alguns exemplos de  $\mathcal{M}(\omega)$  para diferentes valores  $N_b$  com  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ .


 Fig. 5. DEP de  $m(n)$  para diferentes valores de  $N_b$ .

Substituindo-se (7) e (10) em (6), obtém-se

$$R_s(k) = \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{|k|}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^{|k|}. \quad (14)$$

Finalmente, toma-se a TFTD de (14) para obter a DEP do

CSK

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_s(k) e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-(N_b-1)}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{|k|}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^{|k|} e^{-j\omega k} \\ &= \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3} + \sum_{k=1}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^k (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) \\ &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left[ \lambda^2 \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) + \mu^2 \right] \psi^k \cos(k\omega) - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3}. \quad (15) \end{aligned}$$

Nota-se que esta expressão é geral e possibilita uma diversidade de espectros alcançáveis para modulação CSK utilizando-se de geradores de sinais caóticos lineares por partes [15]–[21].

Na próxima seção, exemplifica-se numericamente a expressão geral (15) para alguns casos particulares.

#### IV. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção analisa-se alguns casos particulares da expressão geral da DEP para modulação CSK (15). Investigam-se os casos  $N_b = 1$ ,  $N_b = 4$ ,  $N_b \rightarrow \infty$  e o COOK. Nos casos particulares, considera-se o mapa  $f(\cdot)$  com parâmetros  $r = 2$ ,  $\alpha_1 \triangleq \alpha$  e  $\beta = [1 \ -1]^T$ , ou seja, o mapa tenda inclinada [16].

De (8), obtêm-se

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^2 \beta_{\ell} (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \beta_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (\alpha + 1)^2 - (1 - \alpha)^2 \right) = \alpha. \quad (16) \end{aligned}$$

Substituindo-se (16) em (15) tem-se

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left( 1 - \frac{k}{N_b} \right) \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3}. \quad (17)$$

Na Fig. 6 ilustra-se (17) com  $\alpha = -0.5$  para alguns valores de  $N_b$ . Nota-se que para esse valor de parâmetro, a DEP da modulação CSK aproxima-se da DEP de (9) conforme  $N_b$  cresce. Quando  $N_b = 1$ , o espectro é plano. Claramente, a DEP concentra-se nas altas frequências para valores de  $N_b \neq 1$ . Já na Fig. 7, com  $\alpha = 0.5$ , a DEP concentra-se nas baixas frequências apresentando simetria em relação à Fig. 6.

##### A. Caso: CSK com $N_b = 1$

Nesse caso a somatória (15) apresenta apenas uma parcela e

$$\mathcal{S}(\omega) = (\lambda^2 + \mu^2)/3. \quad (18)$$

Nota-se que independente dos parâmetros escolhidos para o mapa  $f(\cdot)$  a DEP da modulação CSK resulta em um espectro plano. De (18), obtém-se  $\mathcal{S}(\omega) = 1/3$ , ou seja, o sinal transmitido comporta-se em termos espectrais como um ruído branco.

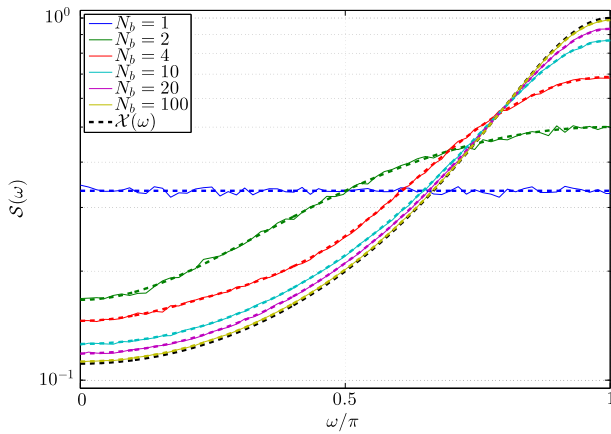


Fig. 6.  $\mathcal{S}(\omega)$  para diferentes valores de  $N_b$  com  $\alpha = -0.5$ . Em linha contínua estão as curvas obtidas via simulação numérica e curvas analíticas em linha tracejada.

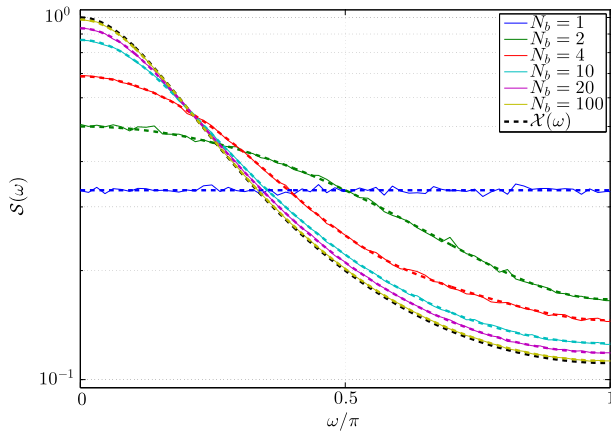


Fig. 7.  $\mathcal{S}(\omega)$  para diferentes valores de  $N_b$  com  $\alpha = 0.5$ . Em linha contínua estão as curvas obtidas via simulação numérica e curvas analíticas em linha tracejada.

### B. Caso: CSK com $N_b = 4$

De (17), para  $N_b = 4$  tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^3 \left(1 - \frac{k}{4}\right) \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\omega) + \left(\frac{\alpha^2}{3}\right) \cos(2\omega) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha^3}{6}\right) \cos(3\omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Nas Fig. 8 é apresentado a DEP de (19) para alguns valores de  $\alpha$ . Quando o parâmetro  $\alpha$  é positivo, a potência concentra-se nas baixas frequências. Quando  $\alpha$  é negativo a DEP concentra-se nas altas frequências. Nota-se que esse resultado é parecido com o exemplo da Fig. 4, entretanto,  $\mathcal{S}(\omega)$  possui uma largura de banda maior e uma tendência de sua DEP aproximar-se de  $\mathcal{M}(\omega)$  quando o parâmetro  $|\alpha| \rightarrow 1$ .

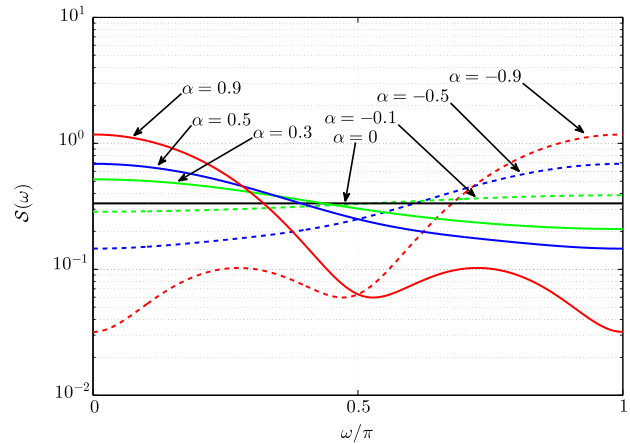


Fig. 8. DEP do CSK com  $N_b = 4$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

### C. Caso: CSK com $N_b \rightarrow \infty$

Neste caso, utilizando-se (15)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \psi^k (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k e^{j\omega k} \right) + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k e^{-j\omega k} \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 - \psi e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - \psi e^{-j\omega}} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{1 - \psi^2}{1 - \psi(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \psi^2} \\ &= \frac{1 - \psi^2}{3(1 - 2\psi \cos(\omega) + \psi^2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Comparando-se com (9), nota-se que obtém-se novamente a DEP do sinal caótico puro, como esperado. Além disso, utilizando-se (16) obtém-se a DEP do mapa tenda inclinada [16].

### D. COOK

Outro caso particular de (15) é quando o sinal digital possui  $c = 1$  e  $d = 0$ . Nesse caso, utilizando-se (10)-(12) a SAC do sinal digital da modulação COOK resulta em

$$R_m(k) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \frac{1}{4}. \quad (21)$$

Consequentemente, usando-se (21) em (15) tem-se

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left[ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + \frac{1}{4} \right] \psi^k \cos(k\omega) - \frac{1}{6}. \quad (22)$$

Nota-se que de (18), a primeira parcela em (22) é dada por  $\mathcal{S}(\omega) = 1/6$ .

Substituindo-se (16) em (22), obtém-se

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \frac{1}{4} \left[ \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + 1 \right] \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{6}. \quad (23)$$

Na Fig. 9 ilustra-se (23) com  $\alpha = -0.5$ . Nota-se que a DEP dos sinais modulados COOK são idênticas às da modulação CSK concentrando-se nas altas frequências, havendo apenas atenuação de 1/2. Já na Fig. 10, com  $\alpha = 0.5$ , a DEP concentra-se nas baixas frequências novamente apresentando simetria em relação à Fig. 9.

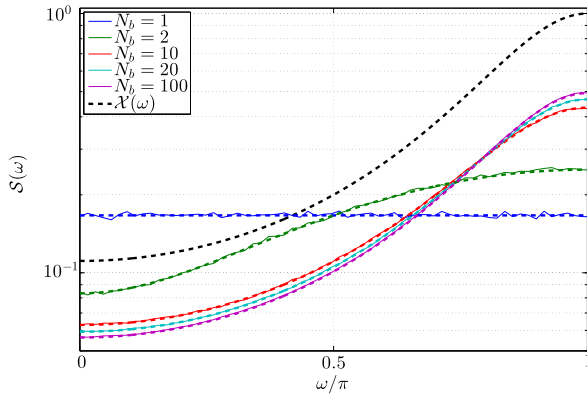


Fig. 9.  $S(\omega)$  para diferentes valores de  $N_b$  com  $\alpha = -0.5$ . Em linha contínua estão as curvas obtidas via simulação numérica e curvas analíticas em linha tracejada.

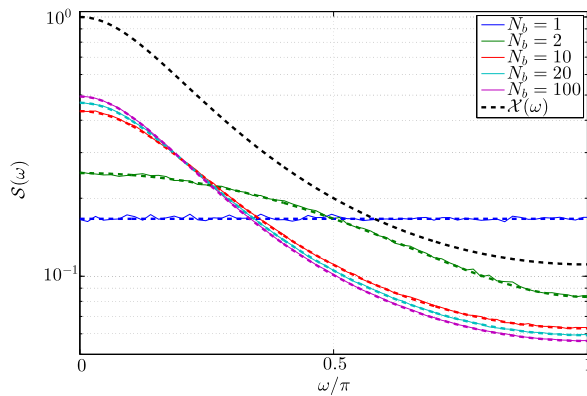


Fig. 10.  $S(\omega)$  para diferentes valores de  $N_b$  com  $\alpha = 0.5$ . Em linha contínua estão as curvas obtidas via simulação numérica e curvas analíticas em linha tracejada.

## V. CONCLUSÕES

Quando se pensa na aplicação prática da modulação CSK, na área de Telecomunicações, é de fundamental importância conhecer e controlar as características espectrais dos sinais gerados por ela. Nesse artigo, deduziu-se a SAC e a DEP da modulação CSK que utiliza-se de geradores caóticos lineares por partes. Em particular, foram analisados, teórica e numericamente, alguns casos particulares dessa modulação. Esses resultados podem ser úteis em projetos de SCBC.

Como continuação desse trabalho pretende-se estender o estudo para outras modulações digitais que utilizam sinais

caóticos, como por exemplo, a comutação caótica diferencial (DCSK - *Differential Chaos Shift Keying*) [10]. Além disso, pretende-se utilizar *Universal Software Radio Peripheral* (USRP) para desenvolver testes experimentais de SCBC [23].

## REFERÊNCIAS

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, feb 1990.
- [2] S. Hayes, C. Grebogi, and E. Ott, "Communicating with chaos," *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 20, pp. 3031–3034, may 1993.
- [3] G. Kolumban, M. Kennedy, and L. Chua, "The role of synchronization in digital communications using chaos. i . fundamentals of digital communications," vol. 44, no. 10, pp. 927–936, Oct 1997.
- [4] H. Dedieu, M. Kennedy, and M. Hasler, "Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua's circuits," *Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 40, no. 10, pp. 634–642, oct 1993. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/82.246164>
- [5] M. Eisencraft and G. Abib, "Sobre o desempenho em canal com ruído de um sistema de comunicação baseado em caos," in *Anais de XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Sociedade Brasileira de Telecomunicações. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2013.
- [6] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Wireless communication with chaos," *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 18, p. 184101, apr 2013.
- [7] G. Kaddoum, "Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey," *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, 2016.
- [8] H.-P. Ren, C. Bai, J. Liu, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Experimental validation of wireless communication with chaos," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 26, no. 8, p. 083117, aug 2016.
- [9] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, "Digital communication systems based on three-dimensional chaotic attractors," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 10523–10532, 2019.
- [10] M. P. Kennedy, G. Setti, and R. Rovatti, Eds., *Chaotic Electronics In Telecommunications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2000.
- [11] F. C. M. Lau and C. K. Tse, *Chaos-Based Digital Communication Systems*. Berlin: Springer-Verlag GmbH, 2003.
- [12] P. Stavroulakis, Ed., *Chaos Applications in Telecommunications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2005.
- [13] M. Eisencraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, Eds., *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.
- [14] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*, ser. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- [15] D. M. Kato and M. Eisencraft, "Caracterização espectral de sinais caóticos: resultados analíticos," in *Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2008, pp. 1–6.
- [16] M. Eisencraft, D. Kato, and L. Monteiro, "Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map," *Signal Processing*, vol. 90, no. 1, pp. 385–390, jan 2010.
- [17] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith, "Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes," *Signal Processing*, vol. 94, no. 0, pp. 149–157, jan 2014.
- [18] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft, "Caracterização espectral de sinais caóticos gerados pelo mapa de bernoulli com 2 e 3 segmentos," in *Anais de XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2015, pp. 1–5.
- [19] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft, "Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments," *Signal Processing*, vol. 133, pp. 187–191, apr 2017.
- [20] A. Sahnoune and D. Berkani, "On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 12, no. 7, pp. 1273–1278, mar 2018.
- [21] R. A. da Costa and M. Eisencraft, "Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 72, pp. 441–448, jun 2019.
- [22] S. S. Haykin, *Communication systems*, 4th ed. New York: Wiley, 2001.
- [23] G. Kolumban, T. I. Krebesz, and F. C. M. Lau, "Theory and application of software defined electronics: Design concepts for the next generation of telecommunications and measurement systems," *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 12, no. 2, pp. 8–34, Secondquarter 2012.



# Representação linear e caracterização espectral de sinais caóticos usando filtros lineares

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisencraft

**Resumo**— Neste artigo, apresenta-se uma representação linear de um mapa linear por partes que gera sinais caóticos usando filtro recursivo em tempo discreto. Ele pode ser usado para deduzir facilmente fórmulas analíticas para a densidade espectral de potência de sinais caóticos, fornecendo resultados úteis para sistemas de comunicação baseados em caos e processamento de sinais. Simulações numéricas são usadas para validar os resultados teóricos.

**Palavras-Chave**— sinais caóticos, sistemas não lineares, Densidade espectral de potência, filtros recursivos.

**Abstract**— In this paper, we present a discrete-time linear recursive filter representation for a piecewise-linear map that generates chaotic signals. It can be used to easily deduce analytical formulae for power spectral density of chaotic signals, providing useful results for chaos-based communication systems and signal processing. Numerical simulations are used to validate the theoretical results.

**Keywords**— chaotic signals, nonlinear systems, power spectral density, recursive filters.

## I. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos não lineares de tempo discreto que geram sinais caóticos [1] têm sido considerados em muitas aplicações de processamento de sinais tais como comunicações sem fio e subaquática [2]–[7], radar [8], encriptação de imagem [9], marca d'água [10], entre outras.

Para viabilizar essas aplicações é de fundamental importância obter precisamente a densidade espectral de potência (DEP) dos sinais caóticos envolvidos e, conseqüentemente, sua largura de banda. Isso não é uma tarefa fácil devido à natureza não linear desses sinais e à falta de fórmulas fechadas que descrevam a evolução temporal deles. Embora alguns resultados foram obtidos recentemente [11]–[15], muitos resultados estão ainda sob investigação.

A ideia geral de [11]–[15] é obter uma fórmula recursiva para a  $n$ -ésima iteração de mapas lineares por partes, levando a expressões para sequência de autocorrelação (SAC) e, conseqüentemente, para a DEP de mapas específicos. Considera-se aqui uma abordagem diferente, baseada no trabalho de Drake e Willians [16]. Eles mostraram que é possível obter sinais caóticos usando filtros lineares não causais em tempo discreto. Mais precisamente, eles usam um filtro para gerar com sucesso órbitas caóticas do mapa dente de serra no intervalo  $[0, 1]$ .

No presente artigo, estende-se essa representação linear para uma classe de mapas lineares por partes com inclinações

positivas ou negativas. Em seguida, utiliza-se da representação linear para derivar a DEP de sinais caóticos de forma direta. Organiza-se esse trabalho da seguinte forma: Na Seção II, o mapa linear por partes considerado é apresentado. Na Seção III a representação linear é deduzida e exemplificada. Em seguida, na Seção IV, utiliza-se a representação linear para calcular a DEP dos sinais caóticos gerados. Finalmente, na Seção V tecem-se as considerações finais.

## II. MAPA CONSIDERADO

Seja  $f : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  definido como

$$f(s) = 2g\left(r\frac{s+1}{2}\right) - 1, \quad (1)$$

com

$$g(y) = y - \lfloor y \rfloor, \quad (2)$$

$r$  é inteiro com  $|r| \geq 2$  e  $s(0) = s_0 \in [-1, 1[$ .

Considere-se o mapa

$$s(n+1) = f(s(n)), \quad (3)$$

com  $n \geq 0$  e  $s(0) \in [-1, 1[$ . Uma generalização do mapa dente de serra estudado em [16] permitindo  $r$  negativo e um domínio simétrico de sinais gerados com média nula.

Na Fig. 1(a) exemplifica-se  $f(s)$  para um caso particular,  $r = -3$ . Na Fig. 1(b) ilustram-se sinais gerados com condições iniciais  $s(0) = -0.73$  (linha contínua) e  $s(0) = -0.73000001$  (linha tracejada). Nota-se aperiódicidade, limitação em amplitude e dependência sensível às condições iniciais característica de sinais caóticos [1].

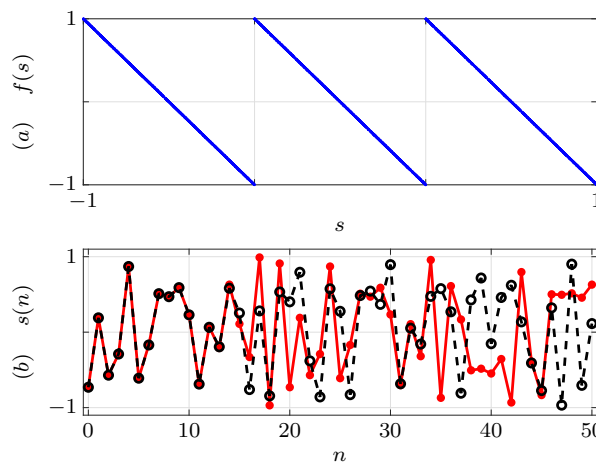


Fig. 1. (a) O mapa  $f(\cdot)$  com  $r = -3$  e (b) duas órbitas com condições iniciais próximas.

O mapa  $f$  pode ser decomposto em três:

- $x(n) = \frac{s(n)+1}{2} = f_1(s(n))$  - transformação linear do domínio  $[-1, 1[$  para  $[0, 1[$ ;
- $x(n+1) = g(rx(n)) = f_2(x(n))$ ;
- $s(n+1) = 2x(n+1) - 1 = f_3(x(n+1)) = f_1^{-1}(x(n+1))$  - transformação linear do domínio  $[0, 1[$  para  $[-1, 1[$ ;

tal que  $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ .

Portanto,  $f_1(\cdot)$  e  $f_3(\cdot)$  são funções inversas,

$$s(n) = f^n(s_0) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)^n(s_0) = (f_1 \circ g^n \circ f_3)(s_0). \quad (4)$$

Para  $r$  positivo,  $f_2(\cdot) = g(\cdot)$  consiste em deslocar a representação na base  $|r|$  de  $x(n)$ , i.e., se

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{|r|^{k+1}} = (0, d_0 d_1 d_2 \dots)_{|r|}, \quad (5)$$

então  $x(1) = (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$ , com  $0 \leq d_k < |r|$ , tal que para  $r > 0$  têm-se

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{|r|^{k+1}}. \quad (6)$$

Para  $r$  negativo, quando  $n$  é par, as amostras  $x(n)$  para o mapa com parâmetros  $r$  e  $-r$  são iguais para mesma condição inicial  $x(0)$ . Dessa forma, tomando-se (5) e (6) deriva-se uma expressão de  $x(n)$  para  $r < 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{|r|^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{d_{2k+n}}{|r|^{2k+1}} + \frac{1}{|r|^{2k+1}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{d_{2k-1+n}}{|r|^{2k}} - \frac{1}{|r|^{2k-1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(d_{2k+n} + 1)}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k-1+n} - |r|}{r^{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{2k+n}}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d'_{2k-1+n}}{r^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

definindo-se

$$d'_k = \begin{cases} -(d_k + 1), & k \text{ par} \\ d_k - |r|, & k \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (8)$$

Para  $n$  ímpar, tem-se também a operação complementar, i.e.,  $x(1) = 1 - (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$ . Então,

$$\begin{aligned} x(n) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{|r|^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{|r|^{2k}} - \frac{d_{2k+n}}{|r|^{2k+1}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{|r|^{2k}} + \frac{d_{2k-1+n}}{|r|^{2k}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{2k+n} - |r|}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(d_{2k-1+n} + 1)}{r^{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{2k+n}}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d'_{2k-1+n}}{r^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

e, de forma geral, para  $r$  negativo tem-se

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (10)$$

Nas próximas seções, desenvolve-se uma representação linear para este mapa e utiliza-se isso para calcular a DEP de  $s(n)$ .

### III. REPRESENTAÇÃO LINEAR

O Algoritmo 1 sistematiza a proposta de gerar uma órbita  $\hat{s}(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  de (3) dado  $r$ ,  $N$  e  $s(0)$  usando um filtro linear.

**Algoritmo 1:** Obtendo-se o sinal  $\hat{s}(n)$  usando filtro linear.

**Dados:**  $r$ ,  $N$ ,  $s(0)$ ,  $x_\ell(-1) = 0$ .

**Resultado:**  $\hat{s}(n)$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

**início**

```

1    $x(0) \leftarrow \frac{s(0) + 1}{2}$  (11)
2   Decompõem-se  $x(0)$  na base  $|r|$ , obtendo-se
     $x(0) = (0, d_0 d_1 d_2 \dots d_{N-1} \dots)_{|r|}$ , (12)
    com  $d_k \in \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .
3   para  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  faça
4     se  $r > 0$  então
5        $v(n) \leftarrow d_{N-1-n}$  (13)
6     senão
7        $v(n) \leftarrow d'_{N-1-n} = \begin{cases} -(d_{N-1-n} + 1), & n \text{ par} \\ d_{N-1-n} - |r|, & n \text{ ímpar} \end{cases}$  (14)
8      $x_\ell(n) \leftarrow \frac{1}{r} [x_\ell(n-1) + v(n)]$  (15)
9   para  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  faça
10     $\hat{s}(n) \leftarrow 2x_\ell(N-1-n) - 1$  (16)
fim
    
```

Na primeira etapa, a condição inicial  $s(0) \in [-1, 1[$  é linearmente transformada em  $x(0) \in [0, 1[$  usando  $f_1(\cdot)$  em (11). Então  $x(0)$  é decomposto na base  $|r|$  com dígitos  $d_k$ . Usando-se  $d_k$  o Algoritmo 1 especifica a entrada  $v(n)$  para o filtro linear descrito em (15) em que a saída é  $x_\ell(n)$ .

Solucionando (15) com  $x_\ell(-1) = 0$  obtém-se [17]

$$x_\ell(n) = \sum_{j=0}^n \frac{v(j)}{r^{n-j+1}}. \quad (17)$$

Finalmente, estima-se  $\hat{s}(n)$  para órbita com condição inicial  $s(0)$  obtendo-se (16) pela mudança de índices de  $x_\ell(n)$  e aplicando  $f_3(\cdot)$  em (15).

O Teorema 1 fornece um limite superior para  $|s(n) - \hat{s}(n)|$ .

*Teorema 1:* Sejam  $s(n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  obtido usando (3) com condição inicial  $s(0)$  e  $r$  fixo, e  $\hat{s}(n)$  gerado como mostrado no Algoritmo 1 com a mesma condição inicial e parâmetros. Então,

$$\varepsilon(n) = |s(n) - \hat{s}(n)| \leq |r|^{n-N}, \quad (18)$$

para  $0 \leq n \leq N-1$ .

*Demonstração:* Divide-se a demonstração em dois casos:

A) Caso  $r \geq 2$ :

Aplicando-se  $f_1(\cdot)$  em (16) e usando-se (17) e (13) tem-se

$$\hat{x}(n) = x_\ell(N-1-n) = \sum_{j=0}^{N-1-n} \frac{d_{N-1-j}}{r^{N-1-n-j+1}}. \quad (19)$$

Fazendo  $N-1-n-j = k$  em (19) tem-se

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (20)$$

De (6) e (20) e tendo-se em mente que  $d_k \leq r-1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} \right| = \left| \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} r^{-(k+1)} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \frac{r^{-(N-n+1)}}{(1-\frac{1}{r})} \right| = |r|^{n-N}. \end{aligned} \quad (21)$$

B) Caso  $r \leq -2$ :

Aplicando-se  $f_1(\cdot)$  em (16) e usando-se (17) e (14) tem-se

$$\hat{x}(n) = x_\ell(N-1-n) = \sum_{j=0}^{N-1-n} \frac{d'_{N-1-j}}{r^{N-1-n-j+1}}. \quad (22)$$

Fazendo  $N-1-n-j = k$  em (22) tem-se

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (23)$$

Usando-se (23) e (10), obtêm-se

$$\varepsilon(n) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} \right| = \left| \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} \right|. \quad (24)$$

Para  $n$  par e ímpar, tem-se  $1 \leq |d'_{k+n}| \leq |r|$  em (24). Então,

$$\varepsilon(n) \leq \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{|d'_{k+n}|}{|r|^{k+1}} = \frac{|r|^{n-N}}{1-|r|} \leq |r|^{n-N}. \quad (25)$$

Para exemplificar, considere-se  $r = -3$ ,  $N = 51$  e

$$s(0) = \frac{2}{\pi} - 1. \quad (26)$$

Então,

$$x(0) = (s(0) + 1)/2 = 1/\pi = (0,0221210010\dots)_3. \quad (27)$$

Na Fig. 2(a) é mostrado o gráfico de  $d_n$  e na Fig. 2(b) é apresentado o gráfico do sinal  $v(n)$  na entrada do filtro linear. Já na Fig. 2(c) tem as órbitas geradas usando o mapa não linear e o filtro linear e, finalmente, o erro  $\varepsilon(n)$  junto com seu limite superior (18) são apresentados na Fig. 2(d). Observe que, para  $n < 20$ ,  $\varepsilon(n)$  está abaixo da precisão de máquina ( $10^{-16}$ ) e não é mostrado.

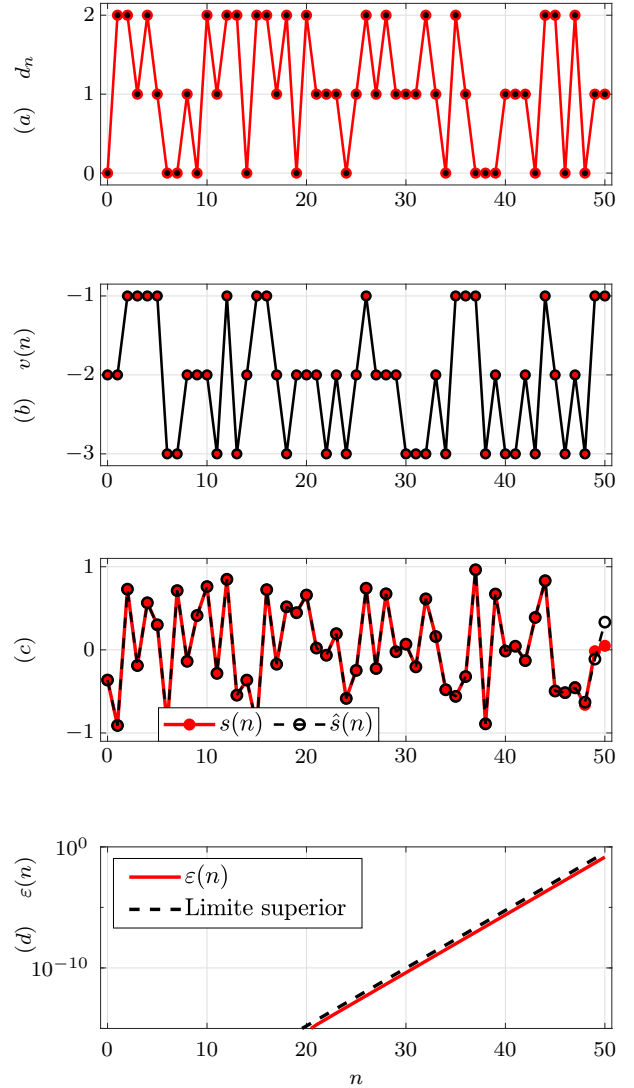


Fig. 2. (a)  $d_n$ , (b)  $v(n)$ , (c)  $s(n)$  e  $\hat{s}(n)$ , (e)  $\varepsilon(n)$  para  $s(0) = \frac{2}{\pi} - 1$ .

#### IV. DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

O sistema linear (15) pode ser representado pela função de transferência  $H(\omega)$ ,

$$H(\omega) = \frac{r^{-1}}{1 - r^{-1}e^{-i\omega}}, \quad \text{com } i = \sqrt{-1}. \quad (28)$$

Divide-se em três etapas o cálculo da SAC e da DEP do sistema proposto no Algoritmo 1. No diagrama em blocos da Fig. 3 sistematiza-se o cálculo.

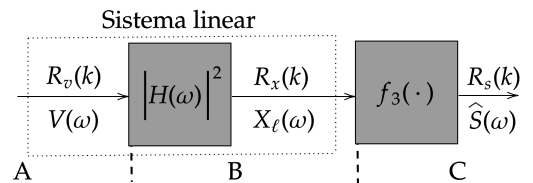


Fig. 3. Diagrama em bloco da SAC e DEP através do sistema proposto no Algoritmo 1.

Na primeira etapa (A), calcula-se a SAC e, em seguida, a DEP do sinal  $v(n)$  na entrada do filtro linear. Na segunda etapa (B), obtém-se a DEP e, conseqüentemente, a SAC do sinal caótico  $x_\ell(n)$  na saída do filtro recursivo. Finalmente, na terceira etapa (C), calcula-se a SAC e a DEP dos sinais caóticos  $\hat{s}(n)$  gerados na saída do Algoritmo 1.

A) A entrada  $v(n)$  do filtro linear para uma condição inicial aleatória pode ser modelada como uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Além disso, elas são equiprováveis com probabilidade  $1/|r|$ . A sequência  $v(n)$  pertence ao conjunto  $A^Z$  com  $A = \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$  para  $r$  positivo e  $A = \{r, \dots, -2, -1\}$  para  $r$  negativo. Sua média é  $\bar{m}_v = (r - 1)/2$  e sua variância  $\sigma^2$  é dada por

$$\sigma^2 = \frac{r^2 - 1}{12}. \quad (29)$$

Assim, a SAC na entrada do filtro é

$$R_v(k) = \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] \delta(k) + \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2, \quad (30)$$

em que  $\delta(\cdot)$  é a função impulso unitário. A DEP  $V(\omega)$  é dada pela transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) de (30)

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_v(k) e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] \delta(k) + \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2 \right\} e^{-i\omega k} \\ &= \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] + 2\pi \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2 \delta(\omega) \text{ para } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (31)$$

B) Como a DEP da entrada e da saída de um filtro são relacionadas por [18]

$$X_\ell(\omega) = V(\omega) |H(\omega)|^2, \quad (32)$$

tem-se

$$\begin{aligned} X_\ell(\omega) &= \left\{ \left[ \frac{r^2 - 1}{12} \right] + 2\pi \left[ \frac{r - 1}{2} \right]^2 \delta(\omega) \right\} \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega)} \\ &= \frac{r^2 - 1 + 6\pi (r - 1)^2 \delta(\omega)}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} \\ &= \frac{r^2 - 1}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega). \end{aligned} \quad (33)$$

Usando-se o par transformado

$$\left( \frac{1}{r} \right)^{|k|} \rightleftharpoons \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega)} \quad (34)$$

em (33), segue que a TFTD inversa de  $X_\ell(\omega)$  resulta em

$$\begin{aligned} R_x(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_\ell(\omega) e^{-i\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{r^2 - 1 + 6\pi (r - 1)^2 \delta(\omega)}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} \right\} e^{-i\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{12} \left( \frac{1}{r} \right)^{|k|} + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (35)$$

C) Na implementação do Algoritmo 1 sua saída é dada pela aplicação de  $f_3(\cdot)$  em (15). Então, pode-se calcular a SAC de (16) como

$$\begin{aligned} R_s(k) &= \mathbb{E} [(2x_\ell(n) - 1)(2x_\ell(n+k) - 1)] \\ &= 4\mathbb{E} [x_\ell(n)x_\ell(n+k)] - 2\mathbb{E} [x_\ell(n)] \\ &\quad - 2\mathbb{E} [x_\ell(n+k)] + 1 \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{r} \right)^{|k|}, \end{aligned} \quad (36)$$

em que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador valor esperado.

Finalmente, toma-se a TFTD de (36) obtendo-se a DEP na saída do Algoritmo 1,

$$\hat{S}(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}. \quad (37)$$

Este resultado concorda completamente com o obtido usando-se fórmula recursiva para  $f^n(\cdot)$  em [11].

Para exemplificar, considere-se  $r = -3$  para  $N \rightarrow \infty$  e condição inicial aleatória. Então, na Fig. 4 tem-se os gráficos resultantes para SAC e DEP como proposto na Fig. 3.

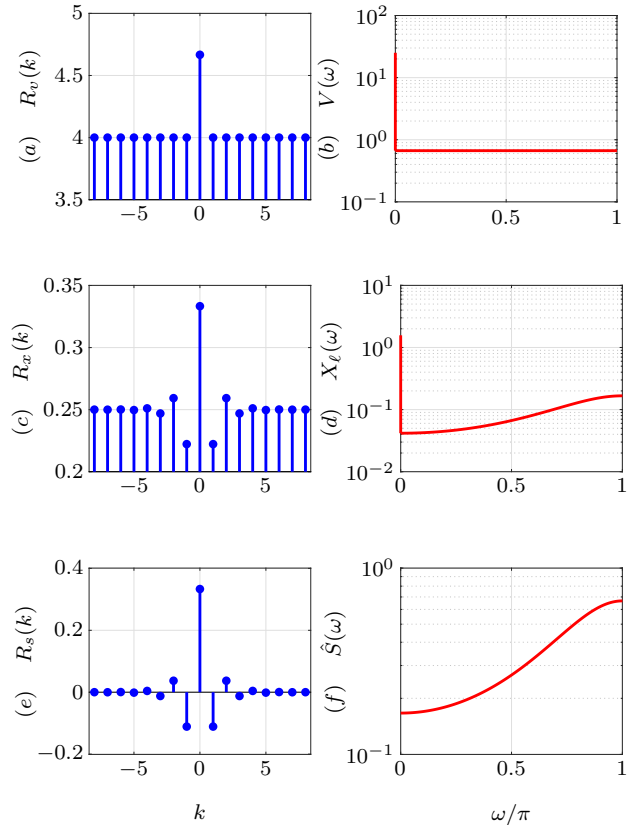


Fig. 4. (a) SAC e (b) DEP de  $v(n)$ , (c) SAC e (d) DEP de  $x_\ell(n)$ , (e) SAC e (f) DEP de  $\hat{s}(n)$  para  $r = -3$ .

Nas Figs. 4(a) e (b) são mostradas a SAC e a DEP na entrada do filtro. Como esperado, a SAC é impulsiva e a DEP possui um espectro plano e componente dc. Já nas Figs. 4(c) e (d) são mostradas a SAC e a DEP na saída do sistema linear. Como pode se ver, a SAC oscila e decai rapidamente

convergiendo assintoticamente para  $1/4$ , e a DEP concentra-se nas altas frequências. Por fim, nas Figs. 4(e) e (f) são mostradas a SAC e a DEP do sinal  $\hat{s}(n)$  em (16). Como o sinal na saída do Algoritmo 1 é a aplicação de  $f_3(\cdot)$  sobre  $x_\ell(n)$ , conseqüentemente, o sinal resultante possui média nula.

Na Fig. 5 são ilustrados gráficos da SAC  $R_s(k)$  para diferentes valores de  $r$ . Quando  $r$  é positivo  $R_s(k)$  decai monotonicamente com  $|k|$ , e quando  $r$  é negativo  $R_s(k)$  oscila. Quando  $|r| \rightarrow \infty$  a SAC aproxima-se da forma impulsiva.

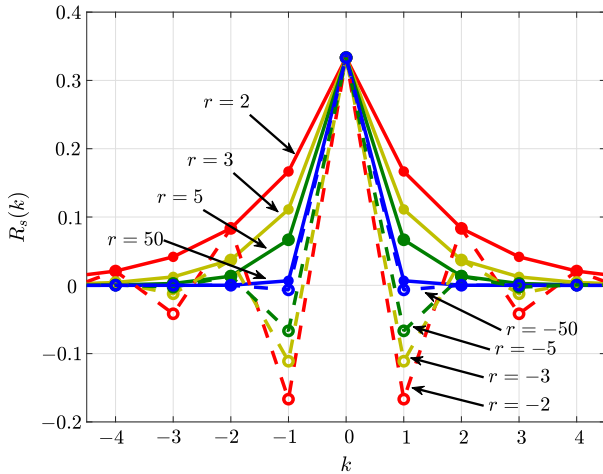


Fig. 5. SAC de (36) para diferentes valores de  $r$ .

Na Fig. 6 são mostrados gráficos da DEP de  $\hat{S}(\omega)$  para diferentes valores de  $r$ . Quando  $r$  é positivo,  $\hat{S}(\omega)$  tem máximo em  $\omega = 0$  e mínimo para  $\omega = \pi$ , confirmando as propriedades passa-baixas dos sinais gerados. Por outro lado, quando  $r$  é negativo,  $\hat{S}(\omega)$  tem máximo em  $\omega = \pi$  e mínimo em  $\omega = 0$ , resultando em sinais passa alta. Nota-se a simetria entre  $r$  positivo e negativo.

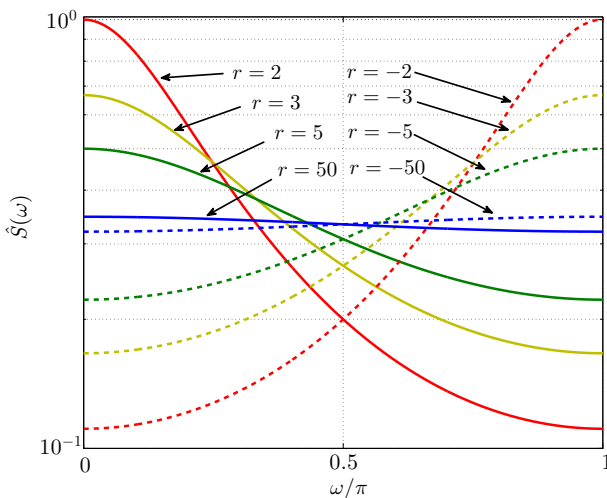


Fig. 6. DEP de (37) para diferentes valores de  $r$ .

## V. CONCLUSÃO

Nesse artigo estendeu-se a representação linear de sinais caóticos proposta em [16] incluindo mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas. Além disso, obteve-se a DEP desses sinais de forma direta utilizando-se da teoria de sistemas lineares. Os resultados analíticos obtidos foram verificados por meio de simulações numéricas e estão de acordo com resultados anteriores da literatura. Atualmente, os autores estão trabalhando na extensão dos resultados para mapas lineares por partes mais gerais.

## REFERÊNCIAS

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*, ser. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- [2] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “Wireless communication with chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 18, p. 184101, apr 2013.
- [3] G. Kaddoum, “Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey,” *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, 2016.
- [4] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, “Digital communication systems based on three-dimensional chaotic attractors,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 10 523–10 532, 2019.
- [5] M. Eisenkraft and G. Abib, “Sobre o desempenho em canal com ruído de um sistema de comunicação baseado em caos,” in *Anais de XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2013.
- [6] H.-P. Ren, C. Bai, Q. Kong, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “A chaotic spread spectrum system for underwater acoustic communication,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 478, pp. 77 – 92, 2017.
- [7] C. Li, F. Marzani, and F. Yang, “Demodulation of chaos phase modulation spread spectrum signals using machine learning methods and its evaluation for underwater acoustic communication,” *Sensors*, vol. 18, no. 12, p. 4217, 2018.
- [8] H. Xu, Y. Li, J. Zhang, H. Han, B. Zhang, L. Wang, Y. Wang, and A. Wang, “Ultra-wideband chaos life-detection radar with sinusoidal wave modulation,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 13, p. 1730046, dec 2017.
- [9] C. Pak and L. Huang, “A new color image encryption using combination of the 1d chaotic map,” *Signal Processing*, vol. 138, pp. 129–137, 2017.
- [10] N. A. Loan, N. N. Hurreh, S. A. Parah, J. W. Lee, J. A. Sheikh, and G. M. Bhat, “Secure and robust digital image watermarking using coefficient differencing and chaotic encryption,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 19 876–19 897, 2018.
- [11] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft, “Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments,” *Signal Processing*, vol. 133, pp. 187–191, apr 2017.
- [12] A. Sahnoune and D. Berkani, “On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map,” *Signal, Image and Video Processing*, vol. 12, no. 7, pp. 1273–1278, mar 2018.
- [13] R. A. da Costa and M. Eisenkraft, “Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 72, pp. 441–448, jun 2019.
- [14] D. M. Kato and M. Eisenkraft, “Caracterização espectral de sinais caóticos: resultados analíticos,” in *Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2008, pp. 1–6.
- [15] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft, “Caracterização espectral de sinais caóticos gerados pelo mapa de bernoulli com 2 e 3 segmentos,” in *Anais de XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2015, pp. 1–5.
- [16] D. F. Drake and D. B. Williams, “Linear, random representations of chaos,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 4, pp. 1379–1389, apr 2007.
- [17] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Addison Wesley Pub CO Inc, 2009.
- [18] S. S. Haykin, *Communication systems*, 4th ed. New York: Wiley, 2001.



## Análise Temporal e Espectral de Sinais Caóticos Gerados por um Mapa Tenda Generalizado

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisencraft<sup>1</sup>

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

**Resumo.** No presente trabalho, obtém-se analiticamente a SAC e a DEP das órbitas de um mapa linear por partes que é uma generalização de diversos casos apresentados recentemente na literatura. Esse mapa é constituído por um número arbitrário de segmentos com inclinações positivas ou negativas.

**Palavras-chave.** Caos, Comunicação com Caos, Análise Espectral, Sequência de Autocorrelação

### 1 Introdução

Nas últimas décadas, diversas aplicações práticas para sinais caóticos e os sistemas que os geram têm sido propostas. Dentre essas aplicações destacam-se comunicações digitais [5, 10], criptografia [2] entre outras [11].

Em algumas dessas aplicações, como em Telecomunicações e processamento de sinais, é de fundamental importância conhecer as características temporais e espectrais desses sinais. É necessário determinar e possivelmente controlar a Sequência de Autocorrelação (SAC), a densidade espectral de potência (DEP) e a banda ocupada pelos sinais a serem utilizados.

Recentemente, alguns progressos foram obtidos na determinação analítica da SAC e da DEP de sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais. No artigo [6], obteve-se expressões analíticas para SAC e DEP do mapa tenda inclinada. Feltekh et al. [7] deduziram expressões analíticas para SAC e DEP para uma família de mapas com três segmentos.

Em [3, 4] obtiveram-se resultados gerais para mapas lineares com um número arbitrário de segmentos, todos com inclinação positiva. Note-se porém que, os resultados obtidos não se aplicam, por exemplo, aos mapas estudados em [6] e [7].

---

<sup>1</sup>rcosta@lcs.poli.usp.br, marcio@lcs.poli.usp.br

Nesse contexto, o objetivo desse artigo é obter a SAC e a DEP das órbitas de um mapa para o qual os apresentados em [3, 4, 6, 7] são casos particulares. Esse mapa é constituído por  $r$  segmentos e cada um deles pode ter inclinação positiva ou negativa.

O artigo é estruturado da seguinte forma: na Seção 2 define-se o mapa estudado e na Seção 3 deduzem-se sua SAC e DEP. Na Seção 4, mostram-se resultados numéricos para alguns casos particulares. Por fim, na Seção 5 tecem-se as conclusões.

## 2 Mapa tenda generalizado

Seja  $r$  um número inteiro com  $r \geq 2$  e  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$  números reais com  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = 1$ . A cada  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq r$  associa-se um  $\beta_j \in \{-1, 1\}$ . O mapa tenda generalizado  $f : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  é definido por  $s(n+1) = f(s(n))$ , em que, para um ponto  $s \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,

$$f(s) = \beta_j \left[ \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \right], \quad (1)$$

$n \in \mathbb{N}$  e  $s(0) \in [-1, 1[$ .

Na Figura 1(a) exemplifica-se o mapa  $f(s)$  para  $r = 6$  e parâmetros  $\alpha_1 = -0,3$ ,  $\alpha_2 = -0,1$ ,  $\alpha_3 = 0,3$ ,  $\alpha_4 = 0,5$  e  $\alpha_5 = 0,8$  com  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\beta_4 = -1$ ,  $\beta_5 = -1$  e  $\beta_6 = -1$ . Na Figura 1(b) são mostradas duas órbitas geradas por esse mapa com condições iniciais  $s(0) = 0,6$  (linha contínua) e  $s(0) = 0,600000001$  (linha tracejada) deixando-se explícita a dependência sensível com as condições iniciais, característica dos sinais caóticos [1].

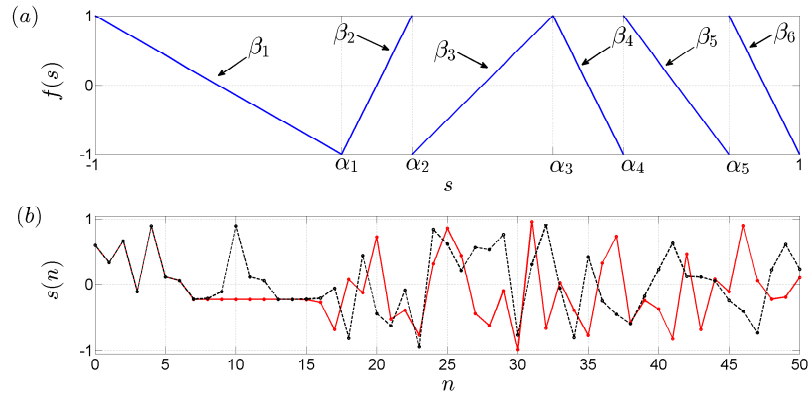


Figura 1: (a) Exemplo de mapa  $f(s)$  com  $r = 6$  inclinações; (b) órbitas para duas condições iniciais diferentes.

Usando argumentos similares aos apresentados em [4, 6] pode-se mostrar que a densidade invariante desse mapa é

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq s < 1, \quad (2)$$

independente dos parâmetros  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ . Assim, a potência média de quase todas as órbitas geradas por  $f(\cdot)$  é

$$P_s = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Usando argumentos análogos aos apresentados em [4, 6] pode-se mostrar que quase todas as órbitas geradas por  $f(\cdot)$  são caóticas.

### 3 Sequência de autocorrelação e densidade espectral de potência

Para um processo aleatório estacionário, a SAC é definida por

$$R(k) \equiv E [s(n)s(n+k)], \quad (4)$$

em que  $s(n)$  é uma função amostra do processo e  $E[\cdot]$  é a esperança matemática tomada sobre todas as funções amostras.

Sinais caóticos gerados por mapas ergódicos podem ser considerados como funções amostras de um processo estocástico [8]. A partir dessa interpretação, deduz-se a SAC utilizando-se uma técnica análoga à empregada em [4, 6].

Sejam  $x = s(n)$ , e  $y = s(n+k) = f^k(x)$ . Assim, como  $y$  é completamente determinado por  $x$ , a função densidade invariante conjunta de  $x$  e  $y$ ,  $p(x,y)$ , pode ser escrita como

$$p(x,y) = p_*(x)p(y|x) = p_*(x)\delta(y - f^k(x)), \quad (5)$$

em que  $p_*(\cdot)$  é dada por (2) e  $\delta(\cdot)$  representa a função delta de Dirac. Dessa forma, como  $U = [-1,1]$ , usando (5) e (2) em (4), tem-se para o mapa  $f(\cdot)$

$$R(k) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x,y)dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp_*(x)\delta(y - f^k(x)) dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f^k(x) dx. \quad (6)$$

O desenvolvimento de (6) depende da obtenção da expressão para  $f^k(x)$ , isto é, a  $k$ -ésima iteração de  $f(\cdot)$ . O mapa  $f(\cdot)$  é composto por  $r$  segmentos lineares com inclinações positivas ou negativas. A imagem de cada um desses segmentos é o domínio  $U = [-1,1]$ . Dessa maneira, quando se itera  $f(\cdot)$ , o número de segmentos lineares é multiplicado por  $r$ , i.e.,  $f^k(\cdot)$  é formado por  $r^k$  segmentos. A  $m$ -ésima extremidade dos segmentos de  $f^k(\cdot)$  é representada por  $a_{k,m}$  e o sinal que representa a inclinação desse segmento é dada por  $b_{k,m}$ , para  $1 \leq m \leq r^k$  e  $k = 1, 2, \dots$

O  $m$ -ésimo segmento que forma  $f^k(\cdot)$  tem então equação

$$f^k(x) = b_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{(a_{k,m} - a_{k,m-1})}, \quad a_{k,m-1} \leq x < a_{k,m}, \quad (7)$$

com  $b_{k,m} \in \{-1,1\}$ . Substituindo-se (7) em (6) obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^k} \underbrace{\int_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}} x \left( b_{k,m} \frac{2x - a_{k,m} - a_{k,m-1}}{a_{k,m} - a_{k,m-1}} \right) dx}_I. \quad (8)$$



Solucionando a integral  $I$ ,

$$I = \left[ \frac{2x^3 b_{k,m}}{3(a_{k,m} - a_{k,m-1})} - \frac{(a_{k,m} + a_{k,m-1})x^2 b_{k,m}}{2(a_{k,m} - a_{k,m-1})} \right]_{a_{k,m-1}}^{a_{k,m}}$$

$$= b_{k,m} \frac{a_{k,m}^3 - 3a_{k,m}^2 a_{k,m-1} + 3a_{k,m} a_{k,m-1}^2 - a_{k,m-1}^3}{6(a_{k,m} - a_{k,m-1})} = b_{k,m} \frac{(a_{k,m} - a_{k,m-1})^2}{6}. \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8),

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2. \quad (10)$$

Calculando-se  $R(k+1)$  a partir de (10), obtém-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k+1}} b_{k+1,m} (a_{k+1,m} - a_{k+1,m-1})^2. \quad (11)$$

Ao iterar uma vez o mapa, cada segmento é transformado em  $r$  novos segmentos. Por exemplo, o segmento no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$  associado à inclinação  $b_{k,m}$  mostrado na Figura 2(a) é transformado nos  $r$  segmentos com os limites e inclinações mostrados na Figura 2(b).

Definem-se  $w_{m,j}$ ,  $0 \leq j \leq r$  tais que  $f^k(w_{m,j}) = \alpha_j$  no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$ . Usando (7),

$$w_{m,j} = \frac{b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1}) \alpha_j + a_{k,m} + a_{k,m-1}}{2}. \quad (12)$$

As abscissas  $w_{m,j}$  são os pontos extremos dos  $r$  segmentos que compõem  $f^{k+1}(x)$  no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$ . Assim, da Figura 2(b),

$$a_{k+1,r(m-1)+j} = w_{m,j}. \quad (13)$$

A inclinação do  $j$ -ésimo segmento gerado a partir do segmento no intervalo  $[a_{k,m-1}; a_{k,m}[$  é dado pelo produto da inclinação do segmento original  $b_{k,m}$  por  $\beta_j$ , como mostrado na Figura 2. Ou seja,

$$b_{k+1,r(m-1)+j} = b_{k,m} \beta_j, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (14)$$

Reescrevendo-se (11) como uma somatória de  $r^k$  somas de  $r$  parcelas tem-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k+1,r(m-1)+j} (a_{k+1,r(m-1)+j} - a_{k+1,r(m-1)+j-1})^2. \quad (15)$$

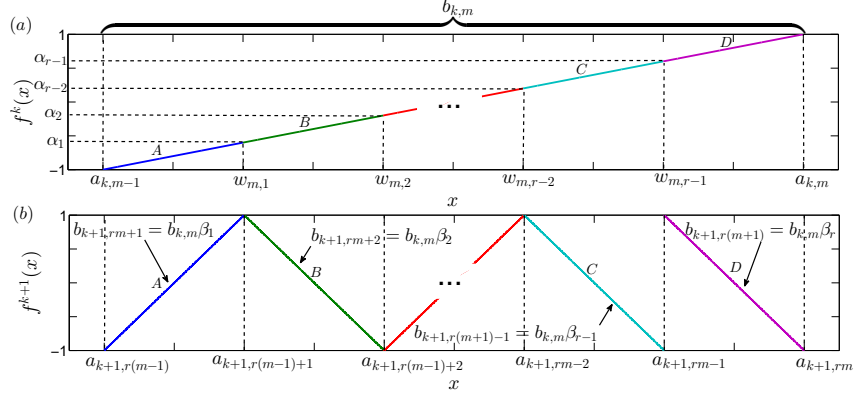


Figura 2: (a)  $f^k(x)$  e (b)  $f^{k+1}(x)$  no intervalo  $[a_k(m-1); a_k(m)]$ .

Usando-se (12), (13) e (14) em (15),

$$\begin{aligned}
 R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m} \beta_j (w_{m,j} - w_{m,j-1})^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m} \beta_j \left( \frac{b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1}) (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} \sum_{j=1}^r b_{k,m} \beta_j \underbrace{b_{k,m}^2}_{=1} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \sum_{j=1}^r \beta_j \left( \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{2} \right)^2. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Então  $R(k+1)$  pode ser escrito como

$$R(k+1) = \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^k} b_{k,m} (a_{k,m} - a_{k,m-1})^2 \tag{17}$$

em que

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j-1})^2. \tag{18}$$

Comparando (10) e (17), observa-se que  $R(k+1) = \psi R(k)$ . Resolvendo-se essa equação de diferenças com a condição inicial dada em (3), obtêm-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}. \tag{19}$$

A DEP  $P(\omega)$  é obtida calculando-se a Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de  $R(k)$ , considerando-se  $k$  a variável temporal [9]. Assim a DEP de  $f(\cdot)$ , é dada

por

$$P(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 + \psi^2 - 2\psi \cos(\omega))}. \quad (20)$$

Essa equação generaliza resultados apresentados para o mapa tenda inclinada em [6], mapa com 3 inclinações de [7] e o mapa apenas com inclinações positivas apresentado em [3,4]. Porém o mapa (1) é mais geral e o espectro associado pode apresentar comportamentos diversos, como ilustrado na próxima seção.

## 4 Resultados numéricos para alguns casos particulares

Nessa seção analisam-se numericamente alguns casos particulares da expressão (20). Em particular, considera-se  $r = 2$  com  $\alpha_1 = \alpha$ .

Na Figura 3 são apresentadas, de forma normalizada, os comportamentos gerais da DEP para os valores de  $\alpha$ , para as quatro diferentes combinações de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  possíveis. Na Figura 3(a) confirma-se a característica de baixa frequência dos sinais gerados pelo mapa dente-de-serra estudado em [4]. Já na Figura 3(b) a potência está concentrada nas altas ou baixas frequências de acordo com o estudado em [6]. Na Figura 3(c) o espectro possui semelhante diversidade de Figura 3(b) mas para diferentes valores de  $\alpha$ . E por fim, na Figura 3(d) os sinais gerados possuem características da alta frequência.

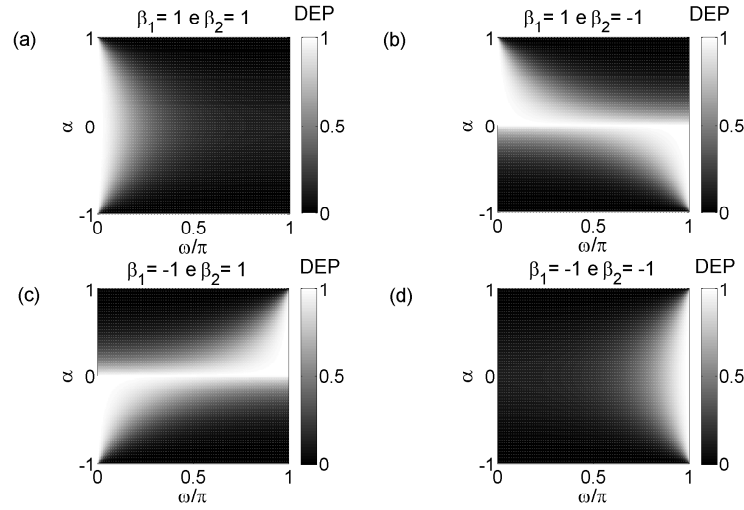


Figura 3: Comportamento geral da DEP normalizada para os valores admissíveis de  $\alpha \in (-1,1)$  para  $f(\cdot)$  com  $r = 2$ , (a)  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 1$ , (b)  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = -1$ , (c)  $\beta_1 = -1$  e  $\beta_2 = 1$  e (d)  $\beta_1 = -1$  e  $\beta_2 = -1$ .

## 5 Conclusões

Para aplicações práticas na área de Telecomunicações é fundamental conhecer e controlar as características temporais e espectrais dos sinais envolvidos. Nesse artigo, deduziram-

se a SAC e a DEP para as órbitas do mapa tenda generalizado. Diversos mapas apresentados na literatura são casos particulares do apresentado aqui. Esses resultados podem ser úteis em projetos de sistemas de comunicação baseados em caos.

## Agradecimentos

ME agradece ao suporte financeiro do CNPq, processos 479901/2013-9 e 309275/2016-4.

## Referências

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer, 2000.
- [2] M. Baptista. Cryptography with chaos. *Physics Letters A*, 240:50 – 54, 1998.
- [3] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Análise espectral de sinais caóticos gerados pelo mapa de Bernoulli com  $r$  segmentos. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2015.
- [4] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments. *Signal Processing*, 133:187–191, apr 2017.
- [5] M. Eisencraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*. CRC Press, 2013.
- [6] M. Eisencraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Processing*, 90(1):385–390, jan 2010.
- [7] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, 94(0):149–157, jan 2014.
- [8] A. Lasota and M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [9] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing (3rd Ed.): Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [10] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi. Wireless communication with chaos. *Physical Review Letters*, 110(18):184101, apr 2013.
- [11] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Group, January 2001.

# Spectral analysis of CSK modulations using piecewise linear maps with experimental validation

Rafael Alves da Costa and Marcio Eisencraft<sup>1</sup>

*Telecommunication and Control Engineering Department, Escola Politécnica, University of São Paulo*

---

## Abstract

Chaos Shift Keying (CSK) is one of many promising digital modulations that use chaotic signals. In this article, we derive the power spectral density of signals transmitted by CSK when a piecewise linear map is used as chaotic signal generator. The results are relevant when considering practical application of CSK. For instance, they are crucial in the design of media access control based in frequency division for these systems. Furthermore, we validated our results experimentally on a bluetooth communication channel.

*Keywords:* Chaos; Chaotic communication; Piecewise linear maps; Spectral analysis.

---

## 1. Introduction

Since the pioneering work of Pecora and Carroll [1] that shows that two chaotic systems can be synchronized, many proposals of chaos-based communication systems (CBCS) have appeared (see e.g. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]).

Specifically, in digital implementations of CBCS, the Chaos Shift Keying (CSK) modulation has been widely studied [10, 11]. It was first proposed in the nineties by Dedieu et al [3] using Chua's circuit. In this modulation, each symbol is transmitted using a different chunk of chaotic signal generated by one or more nonlinear dynamical systems. In a non-coherent scheme, different symbols use signals with different mean energies. Alternatively, it is possible to use chaotic synchronization to coherently demodulate the symbols [10]. Here, we are interested in discrete-time lowpass equivalents [12] of CBCS, so we consider discrete-time systems or maps as chaotic signals generators.

In almost all real-world applications, the communication channel is bandlimited. For example, in the Wi-Fi standard for 2.4 GHz the channel band is 22 MHz [13]. Another example is Bluetooth® that operates in the band 2.4 - 2.485 GHz switching between 1 MHz or up to 2 MHz channels [14]. So, to enable practical applications of digital modulations using chaotic signals it is of fundamental importance to know and precisely control the spectral formatting of the transmitted signals, especially when considering applications that depend on spectral allocation such as frequency division. Although there are many studies about CSK, to our knowledge, none deduces the power spectral density (PSD) of the transmitted signals.

In the present paper, we analytically obtain the PSD for some versions of CSK modulation that uses a piecewise linear map (PWLM). We explore the fact that closed formulae for PSD of these maps were recently obtained [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Furthermore, we implement CSK modulation in an Universal Peripheral Radio Software (USRP) [22] and validate the results experimentally on a bluetooth communication channel.

The paper is organized in five sections. Section 2 presents the family of chaotic signal generator considered here. In Section 3 the CSK baseband modulation using a PWLM is reviewed. In Section 4, the Autocorrelation Sequence (ACS) and PSD are derived for CSK modulations and some numerical examples are given. In section 5, we present an experimental hardware architecture to validate the PSD on a communication channel. Finally, we summarize our conclusion in Section 6.

---

\*Corresponding author: <sup>1</sup> marcio@lcs.poli.usp.br

## 2. The employed PWLM

Given an integer  $r \geq 2$ , a sequence of  $r + 1$  real numbers  $\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{r-1} < \alpha_r = 1$  and a sequence of  $r$  algebraic signals  $\beta_\ell \in \{-1, 1\}$ ,  $1 \leq \ell \leq r$ , we define the PWLM [19]

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (1)$$

$n \geq 0$ , for  $x(0) \in [-1, 1[$  and  $f : [-1, 1[ \rightarrow [-1, 1[$  so that

$$f(x) = \beta_\ell \left( \frac{2}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}} x - \frac{\alpha_\ell + \alpha_{\ell-1}}{\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}} \right), \quad (2)$$

for  $\alpha_{\ell-1} \leq x < \alpha_\ell$ . For simplicity, we define  $\alpha \triangleq [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T$  and  $\beta \triangleq [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r]^T$  as  $r$ -dimensional column vectors.

Fig. 1(a) exemplifies  $f(x)$  for  $r = 5$  with  $\alpha = [-0.8 \ -0.5 \ 0.1 \ 0.2 \ 1]^T$  and  $\beta = [-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$ . Fig. 1(b) presents the generated signals for  $x(0) = 0.9$  and  $x(0) = 0.9 + 10^{-9}$ . Clearly, we can observe that the orbits are bounded, aperiodic and possess sensitive dependence on initial conditions, characteristics of chaotic signals [23]. In fact, using an argument similar to the one in [18], it can be shown that the Lyapunov exponent of almost all orbits of (1) are positive for any  $r$ ,  $\alpha$  and  $\beta$ .

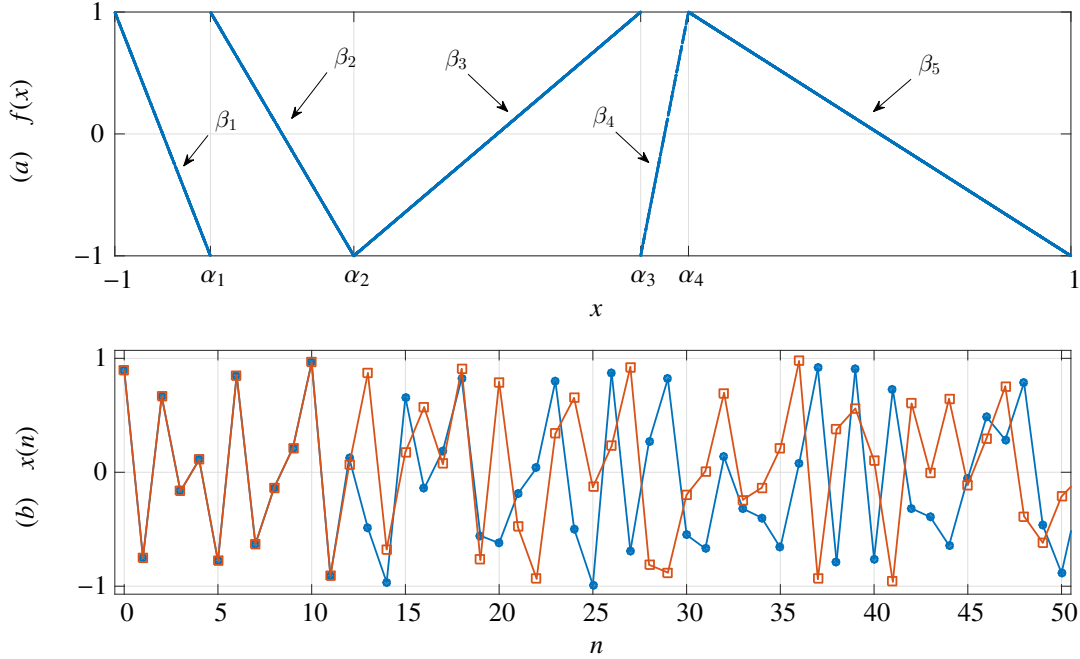


Figure 1: (a) The map  $f(\cdot)$  with  $r = 5$  and (b) orbits with  $x(0) = 0.9$  (circle marker) and  $x(0) = 0.9 + 10^{-9}$  (square marker).

In many situations, chaotic signals can be formally treated as sample functions of a stochastic process defined by the map [24]. Each sample function is associated with a particular initial condition. Specifically, the map (1) behaves like a stationary process [15, 18, 19].

Considering the set of signals generated by (1) as a random process, it was shown in [19] that its ACS is given by

$$R_x(k) = \frac{1}{3} \psi^{|k|}, \quad (3)$$

with

$$\psi = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^r \beta_\ell (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1})^2. \quad (4)$$

The power spectrum density (PSD)  $\mathcal{X}(\omega)$  of the ensemble of orbits can be readily calculated by the Discrete-Time Fourier transform (DTFT) of (3) resulting

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1 - \psi^2}{3(1 - 2 \cos(\omega)\psi + \psi^2)}. \quad (5)$$

The skew tent map [15] is a particular case of (2) that is composed by two segments, one with positive slope and the other with negative slope, i.e,  $\beta = [1 \ -1]^T$ . The peak of the tent is defined by the parameter  $\alpha_1 \triangleq \alpha$  of the map, as exemplified in Fig. 2.

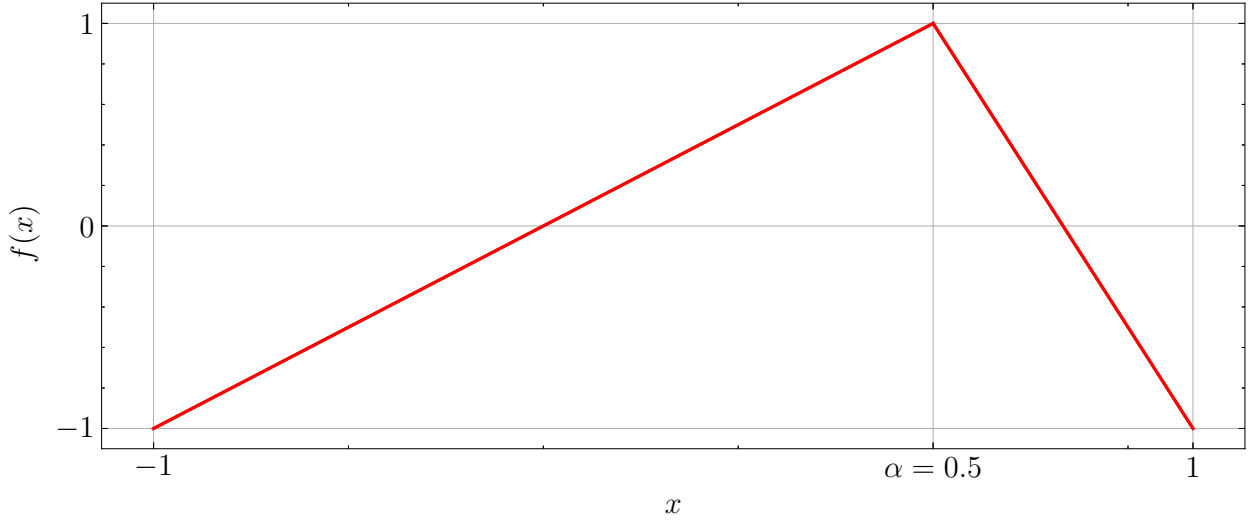


Figure 2: The skew-tent map with the parameter  $\alpha = 0.5$ .

From (4), for the skew-tent map,

$$\psi_{\text{skew}} = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^2 \beta_{\ell} (\alpha_{\ell} - \alpha_{\ell-1})^2 = \frac{1}{4} ((\alpha + 1)^2 - (1 - \alpha)^2) = \alpha, \quad (6)$$

and from (3) and (5),

$$R_{\text{skew}}(k) = \frac{1}{3} \alpha^{|k|}, \quad (7)$$

$$\mathcal{X}_{\text{skew}}(\omega) = \frac{1 - \alpha^2}{3(1 - 2 \cos(\omega)\alpha + \alpha^2)}. \quad (8)$$

The PSD of (8) concentrates towards high frequencies when  $\alpha < 0$  and towards low frequencies when  $\alpha > 0$ . It is a white spectrum for  $\alpha = 0$ . Numerical examples are presented in [15].

Following, we review the CSK modulation, and then we deduce analytical expressions for the PSD of the CSK using (1) as chaotic signal generator. For numerical examples, we consider the particular case of the skew tent map.

### 3. Review of baseband CSK modulation

For encoding a sequence of bits, we consider the message signal

$$m(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Pi(n - iN_b), \quad (9)$$

with

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N_b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

and  $N_b$  the bit time. Also  $a_i = c$  for transmitting bit 1 and  $a_i = d$  for transmitting bit 0, with  $c \neq d$ .

For equiprobable bits, it can be shown that the ACS for the ensemble of possible  $m(n)$  is [12]

$$R_m(k) = \begin{cases} \lambda^2 \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \mu^2, & |k| < N_b \\ \mu^2, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (11)$$

with

$$\lambda = \frac{c-d}{2} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{c+d}{2}. \quad (12)$$

The CSK transmitted signal is formed by the product [10]

$$s(n) = x(n)m(n), \quad (13)$$

where  $x(n)$  is a chunk of chaotic signal.

Figure 3 presents an example of CSK signal. The chaotic sequence  $x(n)$  in Fig. 3(a) was generated using the skew-tent map with  $\alpha = 0.9$ . The message  $m(n)$  in Fig. 3(c) is in the form (9) with  $c = 1$  and  $d = -1$  and  $N_b = 4$ . The corresponding CSK signal is shown in Fig. 3(e). Figures 3(b), (d) and (f) show the respective spectra.

A particular case of CSK is the modulation known as Chaotic On-Off Keying (COOK) [10] for which  $d = 0$ . An example of COOK signal is shown in Figure 4 for the same maps and bit time employed on Figure 3.

For the demodulation process, the synchronization of chaotic signals can be used to estimate  $x(n)$  in the receiver and thus recover  $m(n)$  [25]. Besides when  $|c| \neq |d|$ , different symbols will have different mean energy, so non-coherent techniques based on energy estimation can be employed, see e.g. [4, 10].

#### 4. ACS and PSD

We can write the ACS for the signal  $s(n)$  of (13) as

$$\begin{aligned} R_s(k) &= \mathbb{E}[s(n)s(n+k)] = \mathbb{E}[x(n)x(n+k)m(n)m(n+k)] \\ &= \mathbb{E}[x(n)x(n+k)] \mathbb{E}[m(n)m(n+k)] = R_x(k)R_m(k), \end{aligned} \quad (14)$$

where  $\mathbb{E}[\cdot]$  is the expected value and we consider the independence between the processes that characterize the message  $m(n)$  and the chaotic signal  $x(n)$ .

Substituting (3) and (11) in (14), we obtain

$$R_s(k) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \mu^2 \right] \psi^{|k|}, & |k| < N_b \\ \mu^2 \frac{\psi^{|k|}}{3}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

Taking the DTFT of (15), we obtain the PSD of  $s(n)$  as

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_s(k) e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-(N_b-1)}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \mu^2 \right] \psi^{|k|} e^{-j\omega k} + \sum_{|k| \geq N_b} \mu^2 \frac{\psi^{|k|}}{3} e^{-j\omega k} \\ &= \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3} + \sum_{k=1}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + \mu^2 \right] \psi^k (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) + \sum_{k=N_b}^{\infty} \frac{\mu^2}{3} \psi^k (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N_b-1} \frac{1}{3} \left[ \lambda^2 \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + \mu^2 \right] \psi^k \cos(k\omega) + 2 \sum_{k=N_b}^{\infty} \frac{\mu^2}{3} \psi^k \cos(k\omega) - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3}. \end{aligned} \quad (16)$$



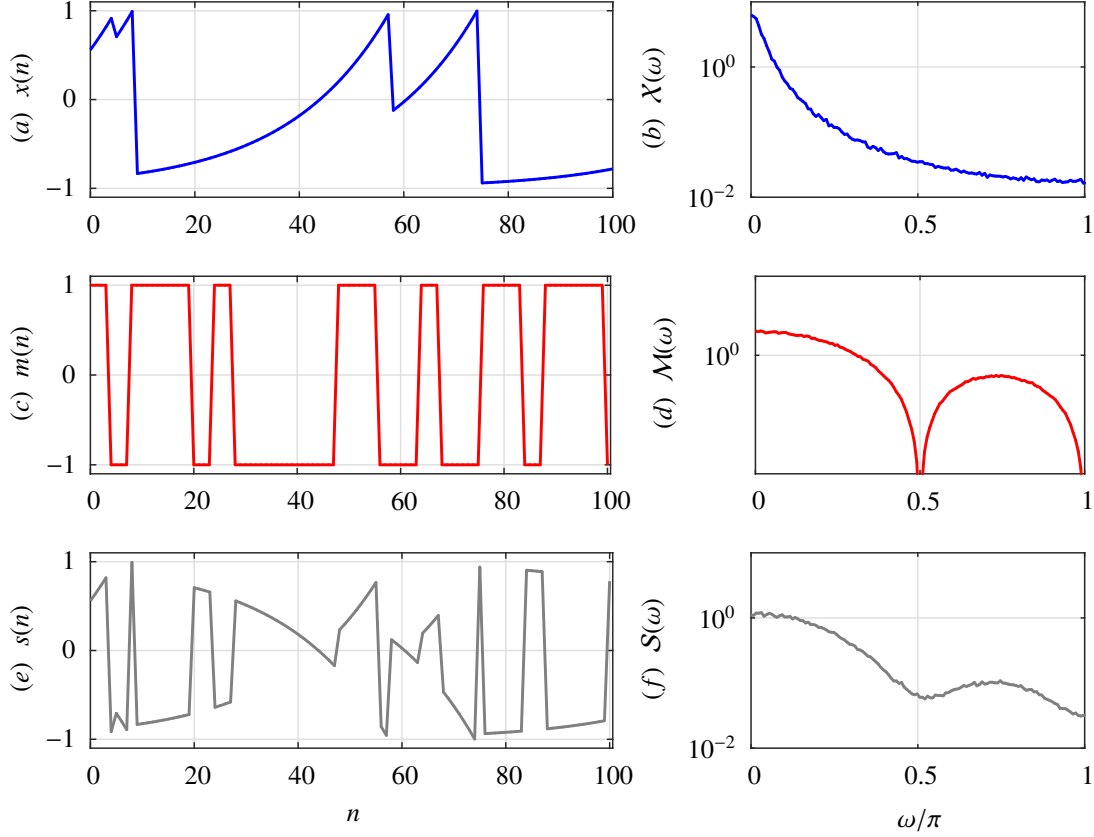


Figure 3: Example of CSK signal: (a) Chaotic signal generated using (1) and (b) its PSD ; (c) message to be transmitted and (d) its PSD; (e) CSK signal  $s(n) = m(n)x(n)$  and (f) its PSD.

This way, defining

$$g(k) \triangleq \begin{cases} \lambda^2 \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + \mu^2, & 0 \leq k \leq N_b - 1 \\ \mu^2, & k \geq N_b \end{cases} \quad (17)$$

and using (17) in (16), we obtain

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \psi^k \cos(k\omega) - \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{3}. \quad (18)$$

This is the main result of the paper and it is rather general. It shows that the modulation PSD strongly depends on the choice of the map and modulation parameters.

To provide an idea of the possible PSD described by (18), the following are some particular results obtained for the skew-tent map.

#### 4.1. CSK with skew tent map

We consider a CSK modulation with levels  $c = 1$  and  $d = -1$ , as in Figure 3. Thus, from (12),  $\lambda = 1$  and  $\mu = 0$ . Substituting these values and (6) into (17)-(18), we have

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} \quad (19)$$

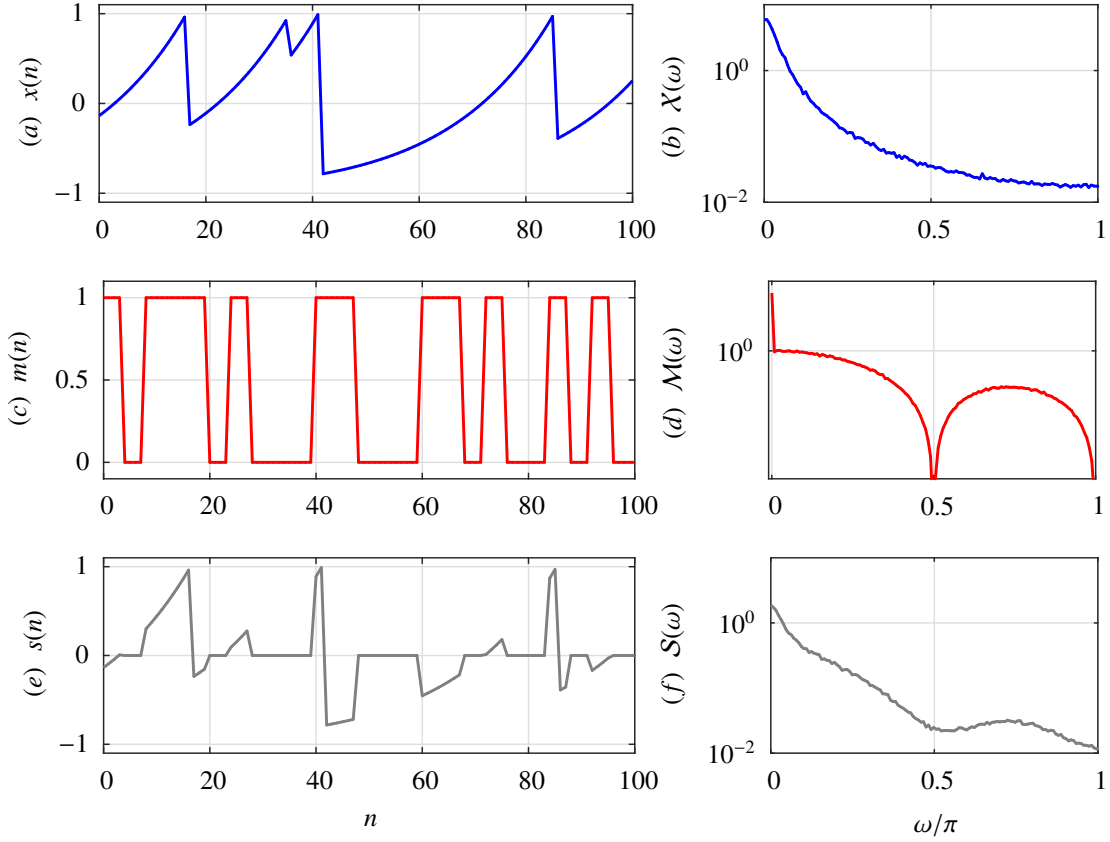


Figure 4: Example of COOK signal: (a) Chaotic signal generated using (1) and (b) its PSD; (c) message to be transmitted and (d) its PSD; (e) COOK signal  $s(n) = m(n)x(n)$  and (f) its PSD.

for the CSK using the skew-tent map.

Note that when  $N_b = 1$ , the summation has only one parcel and thus  $\mathcal{S}(\omega) = 1/3$ , i.e., we get a white spectrum. This is what one would expect because each independent symbol is transmitted by only one independent sample that was randomly chosen from a uniform density in  $[-1, 1]$ .

Considering the case  $N_b = 4$ , we obtain from (19)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^3 \left(1 - \frac{k}{4}\right) \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\omega) + \left(\frac{\alpha^2}{3}\right) \cos(2\omega) + \left(\frac{\alpha^3}{6}\right) \cos(3\omega). \end{aligned} \quad (20)$$

Fig. 5(a) shows plots of (20) for some values of  $\alpha$ . When  $\alpha > 0$ , power is concentrated toward low frequencies and when  $\alpha < 0$ , the power is concentrated toward high frequencies and we get a white spectrum to  $\alpha = 0$ .

Note that the numerically generated PSD in Figure 3(f) with  $N_b = 4$  and  $\alpha = 0.9$  agrees with the analytical results plotted in Figure 5(a), as expected.

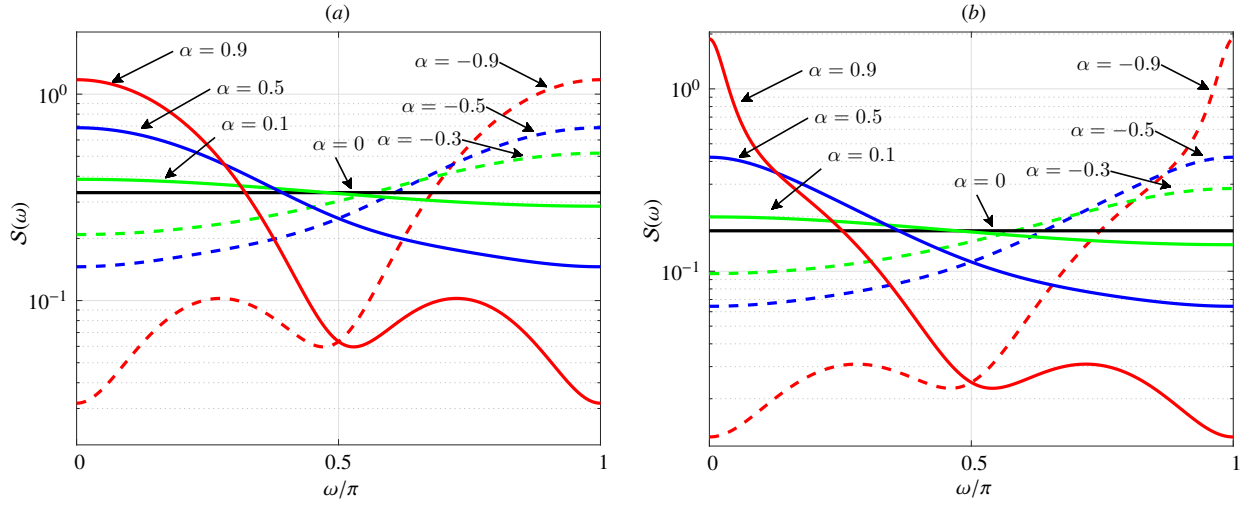


Figure 5: (a) PSD of CSK and (b) PSD of COOK using the skew tent map with bit interval  $N_b = 4$  for different values of  $\alpha$ . Dashed lines are used for  $\alpha < 0$  and solid lines for  $\alpha \geq 0$ .

In the limit  $N_b \rightarrow \infty$ , (19) gives

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\omega) &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{j\omega k} \right) + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k} \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} - 1 \right] = \frac{1 - \alpha^2}{3(1 - 2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2)}, \end{aligned} \quad (21)$$

that is exactly the PSD of the original map (8), as also expected.

Fig. 6(a) illustrates (19) with  $\alpha = -0.9$  for some values of symbol interval  $N_b$ . As expected,  $\mathcal{S}(\omega)$  approaches  $\mathcal{X}(\omega)$  of (8) for large values of  $N_b$ . For  $N_b = 1$ , the power spectrum is white. Fig. 6(b) shows the equivalent PSDs for  $\alpha = 0.9$ . The signal of  $\alpha$  defines if the PSD is concentrated toward lower or higher discrete-time frequencies.

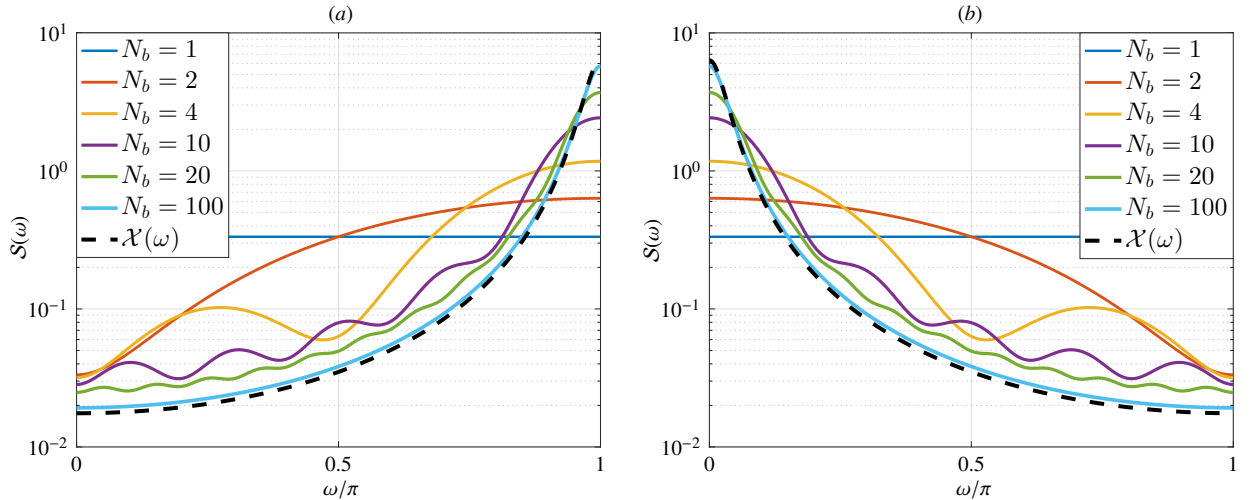


Figure 6: PSD of CSK modulation for different values of symbol interval  $N_b$  with (a)  $\alpha = -0.9$  and (b)  $\alpha = 0.9$ .

#### 4.2. COOK with the skew tent map

The PSD of the COOK modulation can be obtained as a particular case of (18). Taking,  $c = 1$  and  $d = 0$  in (12), we get  $\lambda = 0.5$  and  $\mu = 0.5$ . Using these values in (11), we obtain the resulting ACS for the COOK message signal as

$$R_m(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|k|}{N_b}\right) + \frac{1}{4}, & |k| < N_b \\ \frac{1}{4}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (22)$$

Consequently, using (22) and (6) in (17)-(18), we obtain for the skew-tent map

$$S(\omega) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{N_b-1} \left[ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{k}{N_b}\right) + \frac{1}{4} \right] \alpha^k \cos(k\omega) + \frac{1}{6} \sum_{k=N_b}^{\infty} \alpha^k \cos(k\omega) - \frac{1}{6}. \quad (23)$$

Graphics of (23) for  $N_b = 4$  and different values of  $\alpha$  are shown in Figure 5(b).

From (23), when  $N_b = 1$  the COOK PSD is white only when  $\alpha = 0$ . Figs. 7(a) and (b) illustrates (23) with  $\alpha = -0.9$  and  $\alpha = 0.9$ , respectively. These graphics can be compared with the ones in Figure 6 for the CSK. The PSD are always lower due to the sequences of zeros present in the COOK modulated signals.

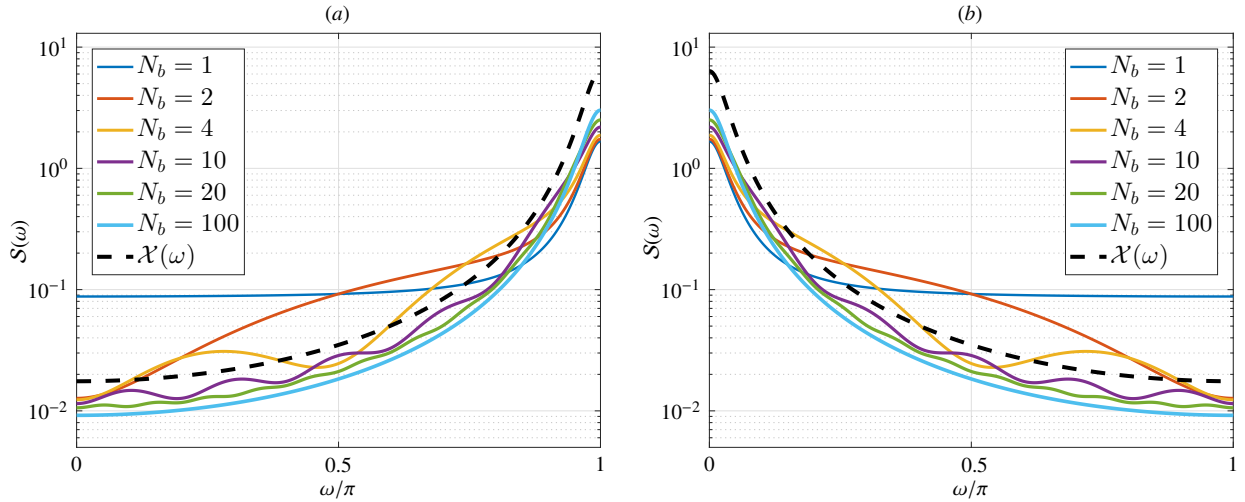


Figure 7: PSD of COOK modulation for different values of symbol interval  $N_b$  with (a)  $\alpha = -0.9$  and (b)  $\alpha = 0.9$ .

In the next session we present an experimental architecture that uses Software Defined Radio (SDR) combined with a free software to validate our results.

### 5. Experimental validation on a Bluetooth® channel

Bluetooth is a wireless technology standard that enables data exchange between fixed and mobile devices over short distances. Here we chosen a 2 MHz channel, which is typically used in the Bluetooth®<sup>1</sup> version characterized by low power consumption. We use the Universal Peripheral Radio Software (USRP), which covers the frequency range used by bluetooth channels, and consequently transmit the CSK modulation signals, specifically on channel 1. We also analyze the spectrum of the transmitted signals.

Next, we present the software and hardware architecture used for the experimental validation.

<sup>1</sup><https://www.bluetooth.com/learn-about-bluetooth/tech-overview/>

### 5.1. Hardware and software architecture

We propose a customized SDR-based system that consisting mainly of (i) two USRP-B200s and (ii) a host PC. The architecture proposed for this project utilizes the USRP-B200 designed by Ettus Research<sup>2</sup>, a SDR (Software-Defined Radio) platform commercially available in the market. With its FPGA-based technology, this platform offers a wide range of radio front-ends that are interchangeable via daughter boards, covering frequencies from 70 MHz to 6 GHz across the entire spectrum.

The experimental hardware architecture setup is shown as a block diagram in Fig. 8. On the TX path, the host PC synthesizes baseband *in-phase* (I) and *quadrature* (Q) signals and transmits the signals to the USRP via a Universal Serial Bus (USB) that can be connected by USB3.0 or USB2.0, and then transfers this information to the FPGA (Xilinx Spartan 6 XC6SLX75) of the USRP device to the TX control as shown in Fig. 8. The FPGA can make changes in the sample rates by digital upconverter (DUC) to match the stream as hardware sample rate. Furthermore, the SDR possesses a digital-to-analog converter (DAC) from Analog Devices AD9364 that has a third-order Butterworth Tx anti-imaging filter located after the DAC and, lastly, a radio frequency (RF TX) circuit, consisting of local oscillator, *mixer*, amplifiers and antenna. The receiver path includes a low-noise amplifier and a drive amplifier that amplify the input signal, which passes through RF circuitry (RF RX) similar to that of the transmitter. In addition, the I and Q data are digitized by the analog-to-digital converter (ADC) and passed to the digital downconverter (DDC), which decimates the signal to a user-specified rate. Finally, the signal is sent to Host PC using the RX control.

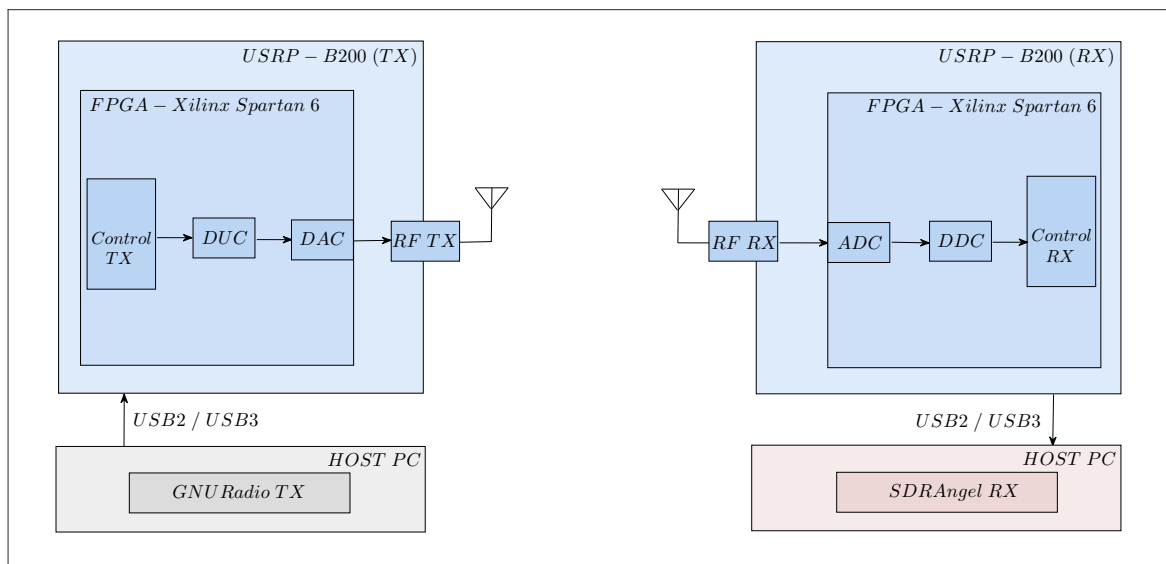


Figure 8: Experimental hardware architecture.

For the implementation of SDR, we used GNURadio<sup>3</sup>, which is a free and open source software development toolkit that has signal processing blocks.

GNURadio provides a diverse range of signal processing blocks that are implemented in C++, enabling the development of a wide array of wireless communication applications. These C++ blocks are typically integrated into Python classes and can be instantiated from Python scripts or utilized as fundamental building blocks within a communication flowgraph from a graphical user interface.

The transmitter implementation is shown in the block diagram in Fig. 9. We used Python programming to implement it using the Python module from GNURadio. This was used to develop the chaotic signal generator using the skew-tent map and the CSK modulator. The USRP Hardware Driver<sup>TM</sup> (UHD) block is used to config the sink

<sup>2</sup><https://www.ettus.com/all-products/usrp-b200-enclosure/>

<sup>3</sup><https://www.gnuradio.org/>

signal to USRP. We use Bluetooth channel 1, which has a center frequency  $f_c = 2.204$  GHz, and set the bandwidth to 2 MHz.

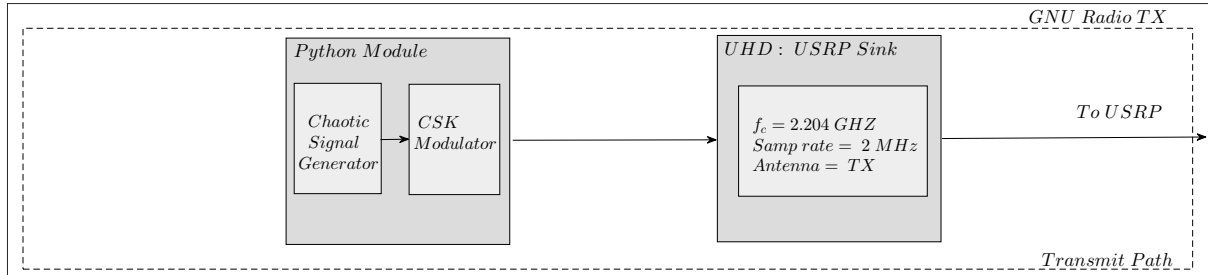


Figure 9: Block diagram of the transmitter implemented using GNU Radio software.

On the other hand, to receive and analyze the transmitted signals, we use another specialized open-source free software, the SDRAngel<sup>4</sup>. It has a signal analyzer that works in real time and allows to save the obtained data. So we set the center frequency, sample rate, antenna, receiver gain and enable the feature that reduces the dc component generated by the USRP-B200, as can be seen in the Fig. 10. We also set the Fast Fourier Transform (FFT) size to 2048, used a rectangular window, and averaged 200 samples.

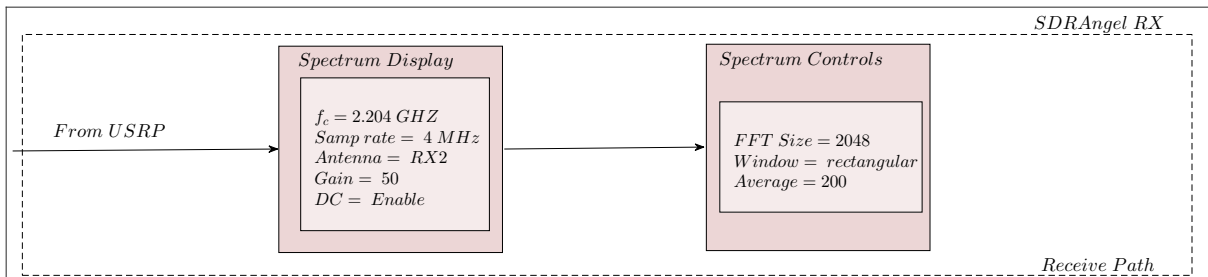


Figure 10: Block diagram of the receiver using SDRAngel signal analysis software.

The following are the results obtained from the experiment.

## 5.2. Experimental validation

The experimental results on the transmitted CSK signals are shown in Fig. 11. We note that the PSD at the extremes of the band suffers from the influence of the anti-imaging low-pass filter characteristic of the Ettus B200 hardware in the transmission side. Furthermore, the PSDs in Figs. 11(c) and (f) are in perfect agreement with those in Figs. 6(a) and (b), respectively.

In Fig. 12 we have the results obtained for the signals transmitted by COOK modulation. It can be seen that the results are in agreement. A dc component in Figs. 12 (e) and (f) are associated with the receiver USRP-B200.

## 6. Conclusions

When designing the CSK modulations, it is fundamental to know and control the spectral characteristics of the signals transmitted by the systems. In this article, the PSD was analytically deduced for the CSK modulations that use a PWLM as chaotic signal generator. The particular cases of the skew tent map with polar CSK and COOK were presented to illustrate the theoretical results.

<sup>4</sup><https://www.sdrangel.org/>

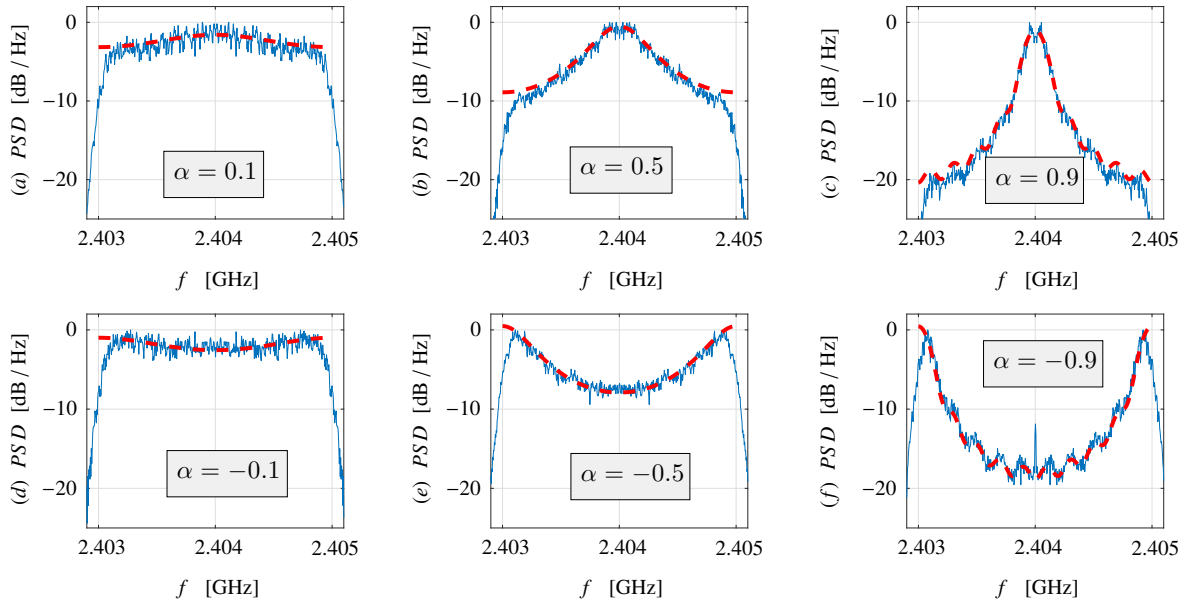


Figure 11: Experimental and theoretical normalized PSD of CSK with  $N_b = 10$  and  $f_c = 2.404$  GHz.

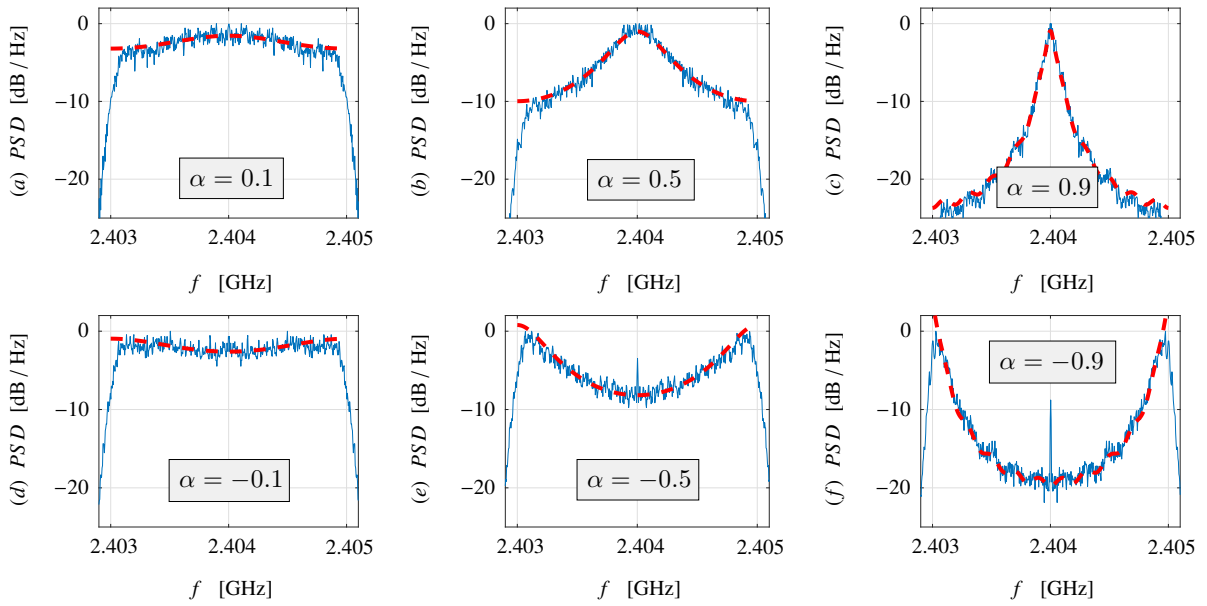


Figure 12: Experimental and theoretical normalized PSD of COOK with  $N_b = 10$  and  $f_c = 2.404$  GHz.

The obtained formula (18) shows that adequately choosing the map (defining  $\psi$ ) or modulation parameters (defining  $\lambda$  and  $\mu$ ) it is possible to obtain a plethora of PSDs for a CSK modulation, so that it can be employed in a channel with given spectral characteristics such as frequency division systems.

## Acknowledgments

This work was partially supported by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq-Brazil) (grant number 311039/2019-7) and by the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES-Brazil) (grant number 001).

## References

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters* 64 (8) (1990) 821–824. doi:10.1103/physrevlett.64.821.
- [2] S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, Communicating with chaos, *Physical Review Letters* 70 (20) (1993) 3031–3034. doi:10.1103/physrevlett.70.3031.
- [3] H. Dedieu, M. Kennedy, M. Hasler, Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua's circuits, *Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, *IEEE Transactions on* 40 (10) (1993) 634–642. doi:10.1109/82.246164.
- [4] M. P. Kennedy, G. Kolumbán, Digital communications using chaos, *Signal Processing* 80 (7) (2000) 1307–1320. doi:10.1016/s0165-1684(00)00038-4.
- [5] R. T. Fontes, M. Eisencraft, A digital bandlimited chaos-based communication system, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 37 (2016) 374–385. doi:10.1016/j.cnsns.2015.12.023.
- [6] G. Kaddoum, Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey, *IEEE Access* 4 (2016) 2621–2648. doi:10.1109/access.2016.2572730.
- [7] J. Hu, L. Chai, D. Xiong, W. Wang, A novel method of realizing stochastic chaotic secure communication by synchrosqueezed wavelet transform, *Digital Signal Processing* 82 (2018) 194–202. doi:https://doi.org/10.1016/j.dsp.2018.08.003.
- [8] S. M. Berber, Discrete time domain analysis of chaos-based wireless communication systems with imperfect sequence synchronization, *Signal Processing* 154 (2019) 198–206. doi:10.1016/j.sigpro.2018.09.010.
- [9] M. S. Baptista, Chaos for communication, *Nonlinear Dynamics* 105 (2) (2021) 1821–1841. doi:10.1007/s11071-021-06644-4.
- [10] G. Kolumban, M. Kennedy, L. Chua, The role of synchronization in digital communications using chaos. II. chaotic modulation and chaotic synchronization, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 45 (11) (1998) 1129–1140. doi:10.1109/81.735435.
- [11] M. Eisencraft, R. R. F. Attux, R. Suyama (Eds.), *Chaotic Signals in Digital Communications (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series)*, CRC Press, 2013.
- [12] B. P. Lathi, Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*, The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, 2009.
- [13] G. R. Hiertz, D. Denteneer, L. Stibor, Y. Zang, X. P. Costa, B. Walke, The IEEE 802.11 universe, *IEEE Communications Magazine* 48 (1) (2010) 62–70.
- [14] K.-H. Chang, Bluetooth: a viable solution for IoT? [industry perspectives], *IEEE Wireless Communications* 21 (6) (2014) 6–7.
- [15] M. Eisencraft, D. Kato, L. Monteiro, Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map, *Signal Processing* 90 (1) (2010) 385–390. doi:10.1016/j.sigpro.2009.06.018.
- [16] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, S. Belghith, Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes, *Signal Processing* 94 (0) (2014) 149–157. doi:10.1016/j.sigpro.2013.05.023.
- [17] K. Feltekh, Z. B. Jemaa, D. Fournier-Prunaret, S. Belghith, Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19 (8) (2014) 2771–2784. doi:10.1016/j.cnsns.2013.12.029.
- [18] R. A. Costa, M. B. Loiola, M. Eisencraft, Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments, *Signal Processing* 133 (2017) 187–191. doi:10.1016/j.sigpro.2016.10.025.
- [19] R. A. da Costa, M. Eisencraft, Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 72 (2019) 441–448. doi:10.1016/j.cnsns.2019.01.002.
- [20] A. Sahnoune, D. Berkani, On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map, *Signal, Image and Video Processing* 12 (7) (2018) 1273–1278. doi:10.1007/s11760-018-1279-8.
- [21] A. Sahnoune, D. Berkani, On statistical properties of chaotic signals generated by negative sawtooth maps, *Automatic control and Computer Sciences* 56 (4) (2022) 356–363.
- [22] G. Kolumban, T. I. Krebesz, F. C. M. Lau, Theory and application of software defined electronics: Design concepts for the next generation of telecommunications and measurement systems, *IEEE Circuits and Systems Magazine* 12 (2) (2012) 8–34. doi:10.1109/mcas.2012.2193435.
- [23] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos, Textbooks in Mathematical Sciences*, Springer New York, 2000.
- [24] A. Lasota, M. C. Mackey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, 1985.
- [25] M. P. Kennedy, G. Setti, R. Rovatti (Eds.), *Chaotic Electronics In Telecommunications*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2000.



# The quadratic map and its temporal and spectral properties

Rafael Alves da Costa<sup>1</sup> and Marcio Eisencraft

*Telecommunication and Control Engineering Department, Escola Politécnica, University of São Paulo*

---

## Abstract

This work numerically examines the temporal and spectral properties of a quadratic map. The quadratic map described in this study has quadratic non-linearity, and its theoretical analysis poses a challenge. Additionally, this map can be used for a fixed parameter value in chaos-based communication systems. Therefore, it is important to understand and, if possible, control the Power Spectral Density (PSD) generated by its signals. In practical communication systems, the bandwidth is limited, making it crucial to understand the spectral formatting of the employed signals.

*Keywords:* Chaos; quadratic map; spectral analysis; autocorrelation sequence.

---

## 1. Introduction

In this paper numerical results of the temporal and spectral characteristics of orbits generated by the quadratic map are presented. The quadratic map has quadratic nonlinearity and its theoretical analysis is challenging. Here, a numerical analysis was performed in order to obtain the Autocorrelation Sequence (ACS) and the Power Spectral Density (PSD) of this map. In Section 2, the quadratic map is defined and its main properties are described. In Section 3, the ACS and PSD of this map are obtained numerically, and in Section 4, we concisely deliver our conclusions.

## 2. The quadratic map

The quadratic map, a modification of the logistic map [1], is defined by

$$s(n+1) = f_Q(s(n)), \quad (1)$$

in which

$$f(s) = -\frac{a}{2}s^2 + \frac{a-2}{2}, \quad (2)$$

where  $a \in [0, 4]$  is a constant parameter and the initial condition  $s(0) \in U = [-1, 1]$ .

Fig. 1, we present graphs of  $f_Q(s)$  for a variety of values of  $a$ . These represent parabolas with their range in the interval from  $[-1, \frac{a-2}{2}]$ . Only for  $a = 4$  does the image equate to the domain  $[-1, 1]$ .

In Figure 2, orbits of the quadratic map  $f_Q(s)$  with initial conditions  $s(0) = -0.7$  and  $s(0) = -0.71$  are shown for different values of  $a$ . As observed in Figure 2(a) with  $a = 2.9$ , with a few iterations, the two orbits converge to a fixed point. In Figure 2(b) with  $a = 3.4$ , after several iterations, the two orbits converge to a periodic orbit of period 2. In Figure 2(c) for  $a = 3.6$ , there is evidence of chaotic behavior, that is, aperiodicity and sensitive dependence on initial conditions (SDIC). For  $a = 3.835$ , in Figure 2(d), the appearance of a periodic orbit, in this case of period 3, is noted. Finally, for  $a = 3.95$  and  $a = 4$ , further evidence of chaotic behavior is observed in Figures 2(e) and (f), respectively.

In Figure 3(a), the bifurcation diagram of (1) is presented. In these simulations,  $10^4$  values of  $a$ , equally spaced in the interval  $(2.8, 4)$ , were used. For each value of  $a$ , an orbit was generated with  $10^4$  points and an initial condition randomly chosen from the domain  $U$ . Only the final 70 points of the orbits are displayed in an attempt to eliminate

---

\*Corresponding author: <sup>1</sup>rcosta@usp.br

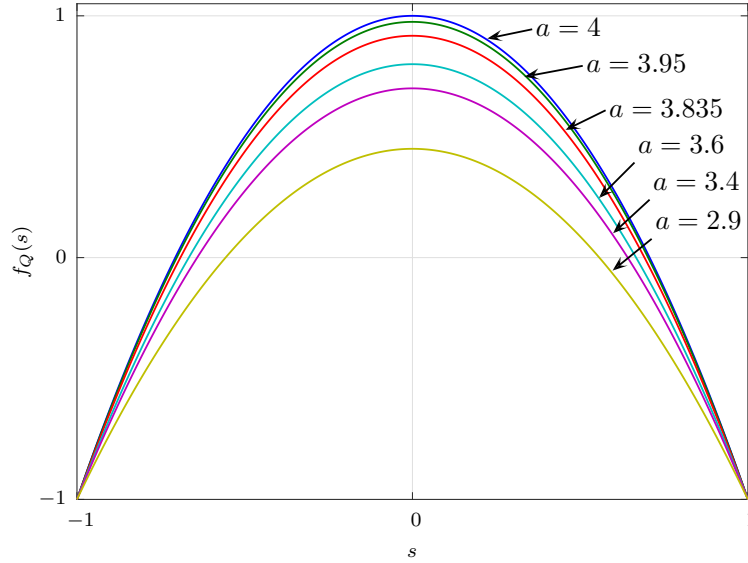


Figure 1: Quadratic map  $f_Q(s)$  for different values of  $a$ .

transient behavior and capture the asymptotic solution. The values of  $a$  used in Figure 3 are indicated. The orbits converge to a fixed point for  $0 < a < 3$ . For  $a > 3$ , a cascade of bifurcations appears with orbits of periods 2, 4, 8, ... up to  $a = 3.56995 \dots$ . From this value of  $a$  onwards, aperiodic behavior typical of chaotic signals emerges, with windows of periodicity. The largest of these, of period 3, appears in the interval  $3.8284 \dots \leq a \leq 3.8415 \dots$  [2].

As shown in the bifurcation diagram in Figure 3, the orbits of the map  $f_Q(s)$  for different values of  $a$  exhibit distinct asymptotic behaviors. Thus, the points that make up each trajectory for each  $a$  are distributed in the domain  $U$  in different ways.

In Figure 4, the invariant densities obtained through histograms for orbits of the quadratic map for different values of  $a$  are shown. The histograms were generated from the iteration of the map  $f_Q(\cdot)$  applied to a set of initial conditions uniformly distributed in the domain. For each value of  $a$ ,  $2 \times 10^6$  initial conditions were taken, uniformly distributed in the domain  $U = (-1, 1)$ , and the map was successively applied to this set of points until its distribution remained constant, that is, until its density became invariant [3].

In Figures 4(a), (b), and (d), the invariant densities for  $a = 2.9$ ,  $a = 3.4$ , and  $a = 3.835$  are presented, respectively. As expected from Figure 3, the frequency of the map's points concentrates on one point for  $a = 2.9$ , two points for  $a = 3.4$ , and three points for  $a = 3.835$ . Meanwhile, in Figures 4(c), (e), and (f) for  $a = 3.6$ ,  $a = 3.95$ , and  $a = 4$ , respectively, the distribution of the frequency of the points of  $f_Q(\cdot)$  is not uniform, splitting into two bands within the domain  $U$  for  $a = 3.835$ , into a band that does not fill the entire map domain for  $a = 3.95$ , and for  $a = 4$ , the frequency of the points extends across the entire range of the domain  $U$ .

It can be shown that for  $a = 4$  the map  $f_Q(s)$  has invariant density [4],

$$p_*(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-s^2}}, & -1 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

In Figure 5(a), the average value of an orbit of the quadratic map is shown as a function of the parameter  $a$ . In this simulation,  $10^4$  values of  $a$  were used, equally spaced in the interval  $(2.8, 4)$ , and for each  $a$  an orbit with  $10^4$  points was generated. To capture the asymptotic behavior, the first  $10^3$  points were eliminated.

Note that the signal generated by this map generally has a non-zero mean. In Figure 5(b), the variance  $\sigma^2$  and the average power  $P_m = \sigma^2 + \bar{s}^2$  for an orbit of the quadratic map are shown.

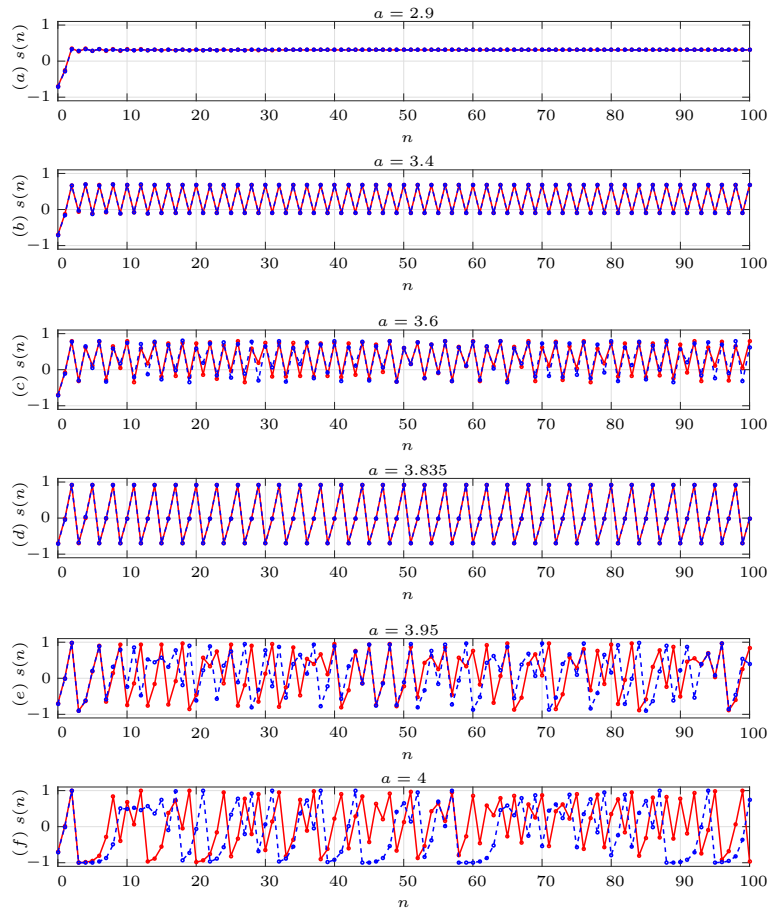


Figure 2: Orbits of the quadratic map  $f_Q(s)$  with  $s(0) = -0.7$  (solid line) and  $s(0) = -0.71$  (dashed line) for values of (a)  $a = 2.9$ , (b)  $a = 3.4$ , (c)  $a = 3.6$ , (d)  $a = 3.835$ , (e)  $a = 3.95$  and (f)  $a = 4$ .

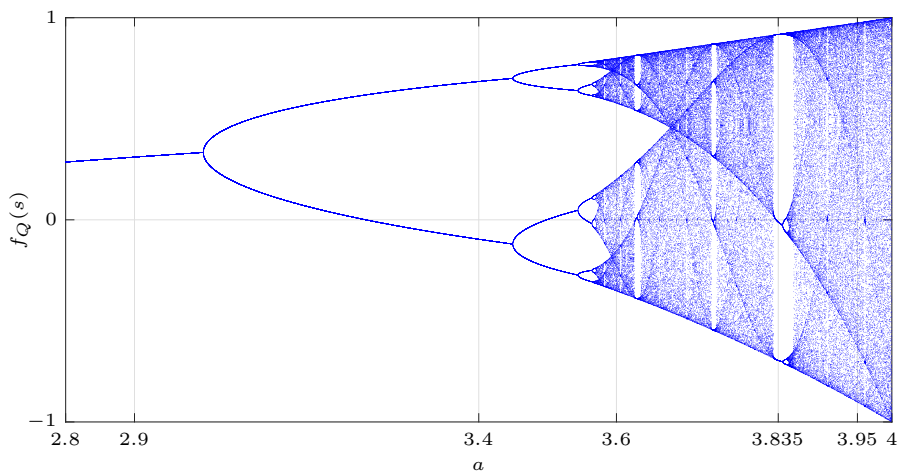


Figure 3: Bifurcation diagram of the quadratic map  $f_Q(s)$ .

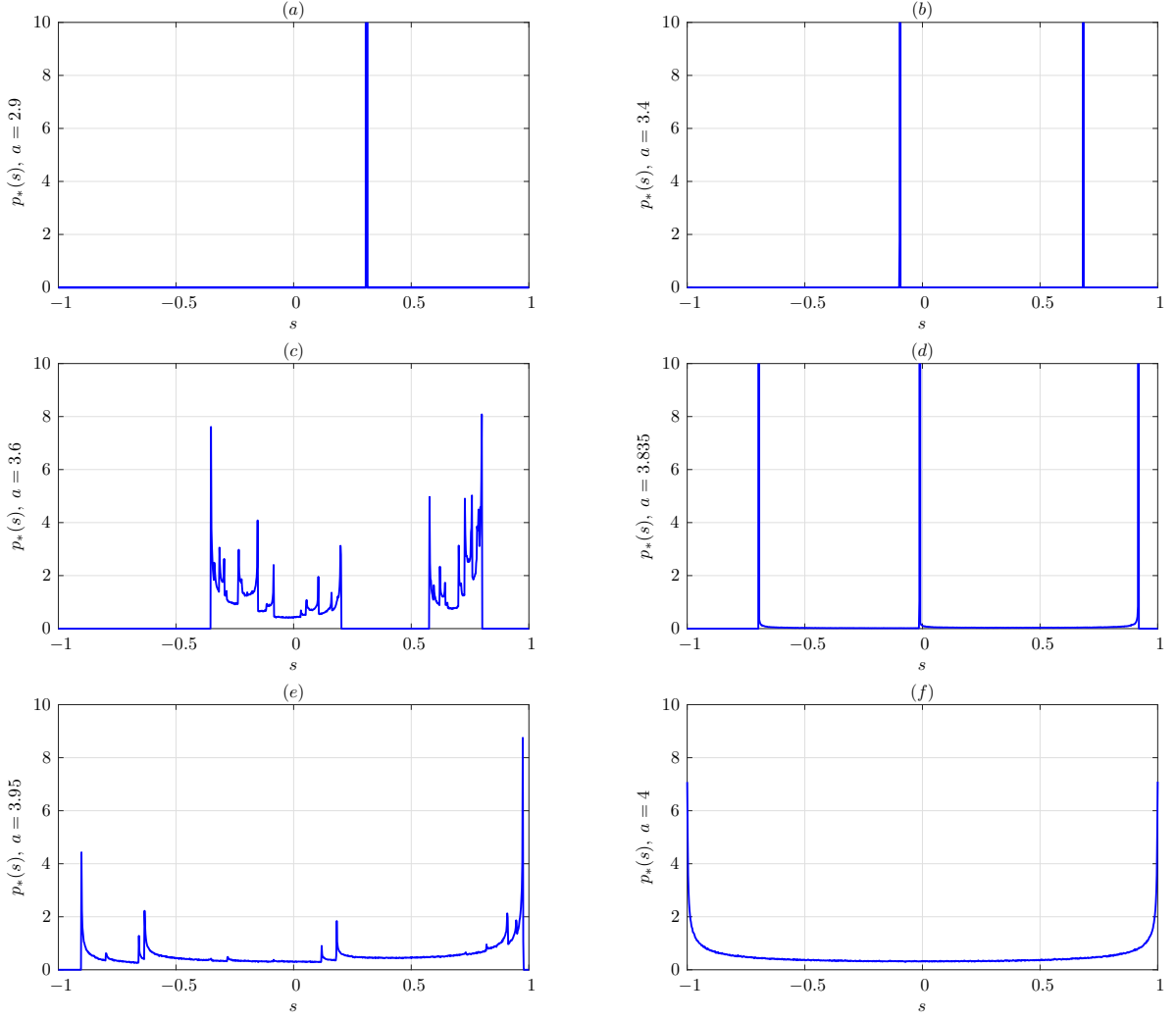


Figure 4: Invariant density for the quadratic map  $f_Q(s)$  for various values of  $a$ .

In particular, for  $a = 4$ , it is possible to analytically calculate the mean, variance, and average power of the orbits. In this case, using (3).

$$\bar{s} = \int_{-1}^1 s \frac{1}{\pi \sqrt{1-s^2}} ds = 0 \quad (4)$$

and the average power

$$P_m = \int_{-1}^1 s^2 \frac{1}{\pi \sqrt{1-s^2}} ds = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

### 3. Temporal and Spectral Characterization

In Figures 6 to 11, plots of an orbit and estimates of the ACS and PSD for various values of  $a$  are shown.

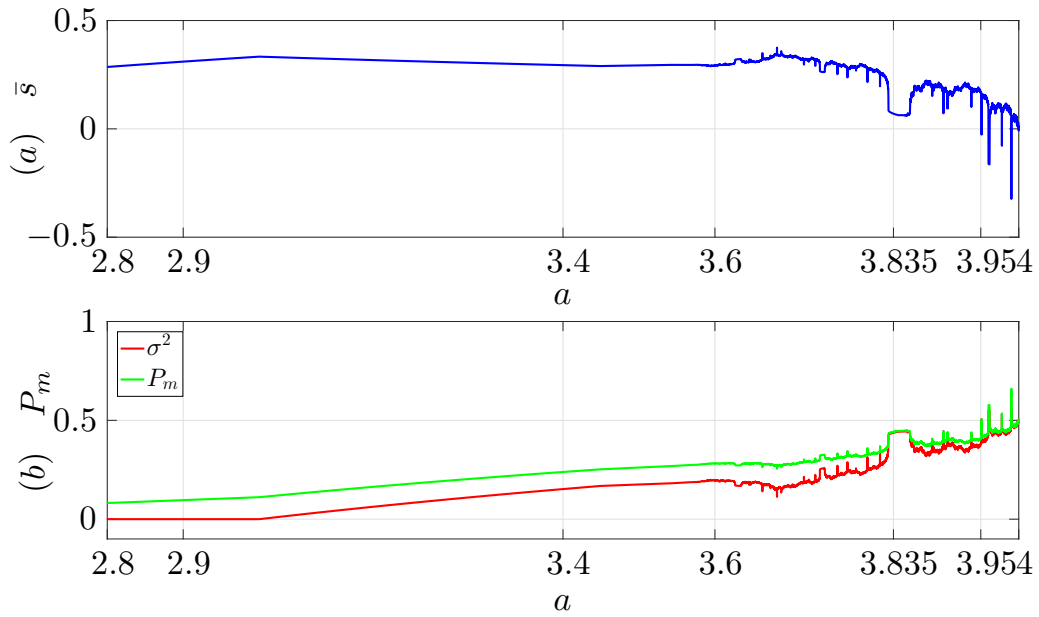


Figure 5: (a) Average value, (b) variance and average power of the signals generated by the quadratic map.

Orbits were generated for each  $a$  with  $5 \times 10^3$  points and the first  $10^3$  points were eliminated in an attempt to capture the asymptotic stretch. In the ACS and PSD simulations, the average of 500 sample functions with initial conditions uniformly distributed in the domain  $U$  was taken.

Figure 6(a) shows a section of the orbit of the map  $f_Q(s)$ , for  $a = 2.9$ . As seen in the previous section, a constant signal  $s(n) \approx 0.31$  is obtained for sufficiently large  $n$ . In addition, the ACS is also constant and the PSD has a single DC component, respectively, in Figures 6(b) and (c).

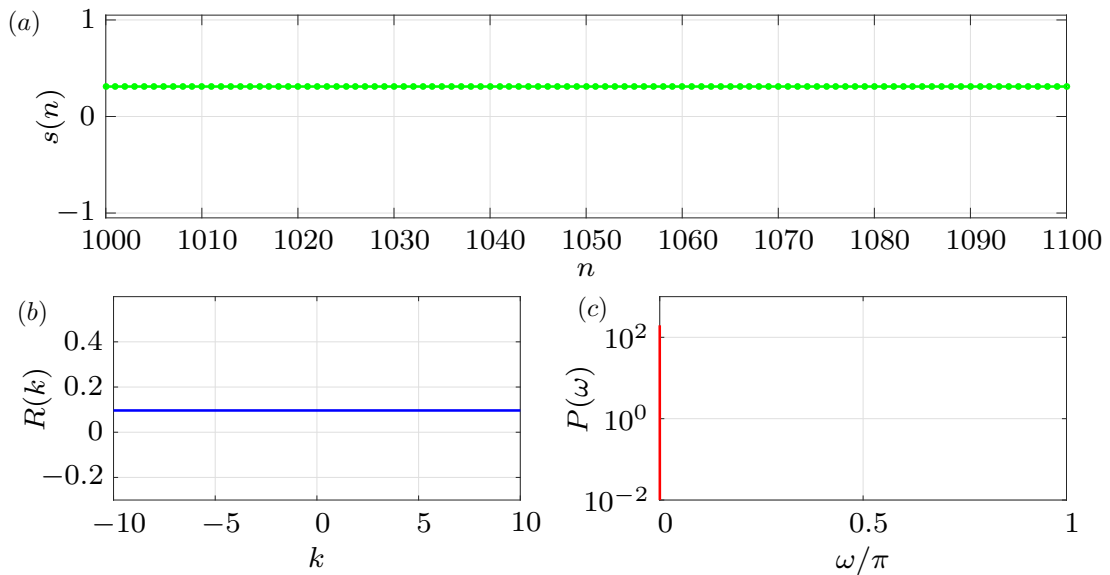


Figure 6: (a) Orbit, (b) ACS, and (c) PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $a = 2.9$ .

In Figure 7(a), a section of the quadratic map orbit is illustrated for  $a = 3.4$ . As seen in Figure 3(a), in this case, the asymptotic solution for the map is a period-2 orbit. In Figure 7(b) and (c), the ACS oscillates between two values, and the PSD has a DC component and a spectral component at  $\omega = \pi$ , which is the signal's frequency.

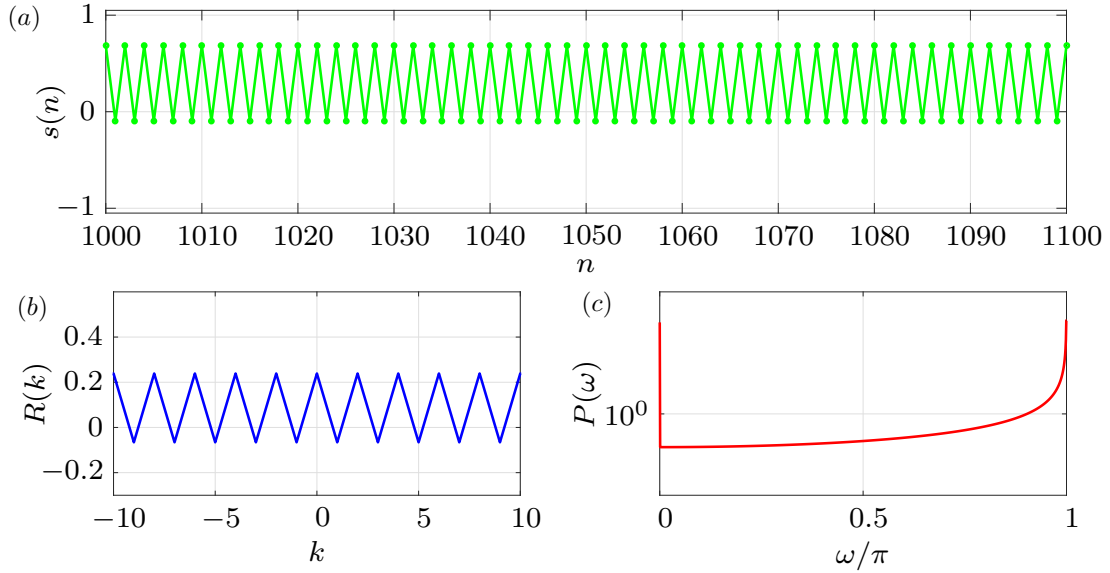


Figure 7: (a) Orbit, (b) ACS, and (c) PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $a = 3.4$ .

In Figure 8(a), the case  $a = 3.6$  is illustrated. As seen earlier, in this case, the generated orbit is chaotic but contains pronounced periodic components of period 2 and 4, which are reflected in the larger delays of the ACS at  $k = 2$  and  $k = 4$ , and in the PSD by the frequencies  $\omega = \pi$  and  $\omega = \frac{\pi}{2}$  shown in Figures 8(b) and (c), respectively.

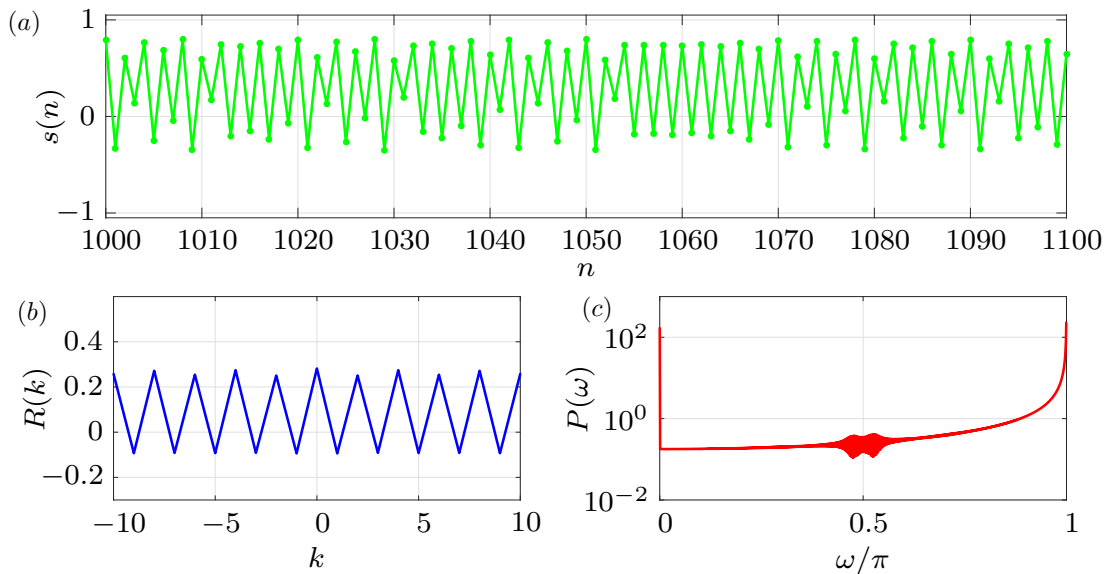


Figure 8: (a) Orbit, (b) ACS, and (c) PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $a = 3.6$ .

In Figure 9(a), for  $a = 3.835$ , a section of the period-3 orbit is shown. It can be seen in Figure 9(b) and (c) that the

ACS is periodic with period 3 and the PSD, as expected, resulted in an impulse at  $\frac{2\pi}{3}$ .

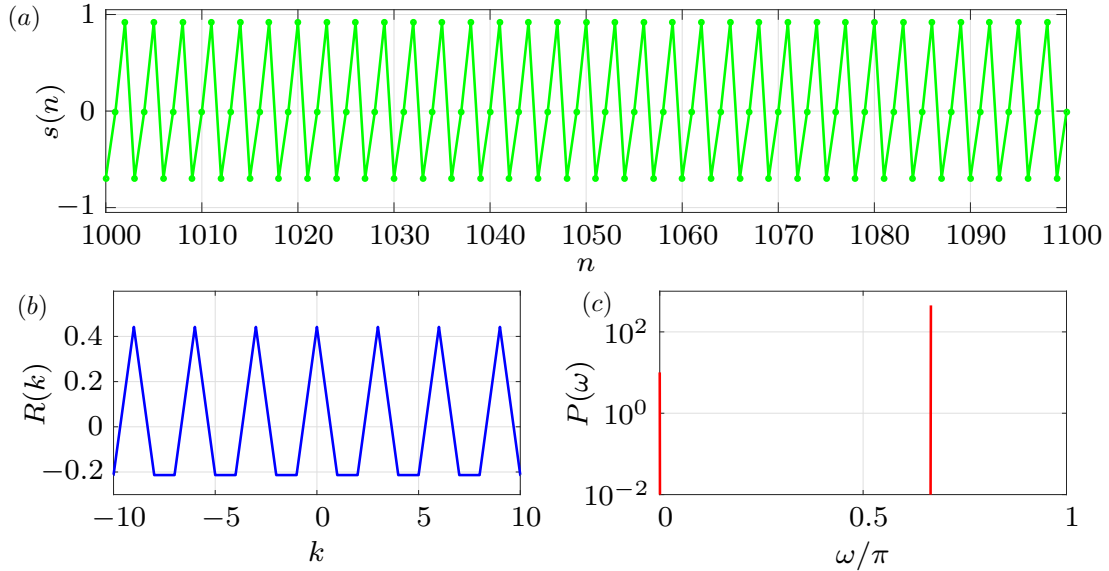


Figure 9: (a) Orbit, (b) ACS, and (c) PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $a = 3.835$ .

In Figure 10(a), a section of the chaotic signal generated for  $a = 3.95$  is shown. In Figure 10(b), the ACS has oscillations that decay with  $k$ , and in Figure 10(c), the PSD exhibits the behavior of high-pass signals, and a DC component can be observed.

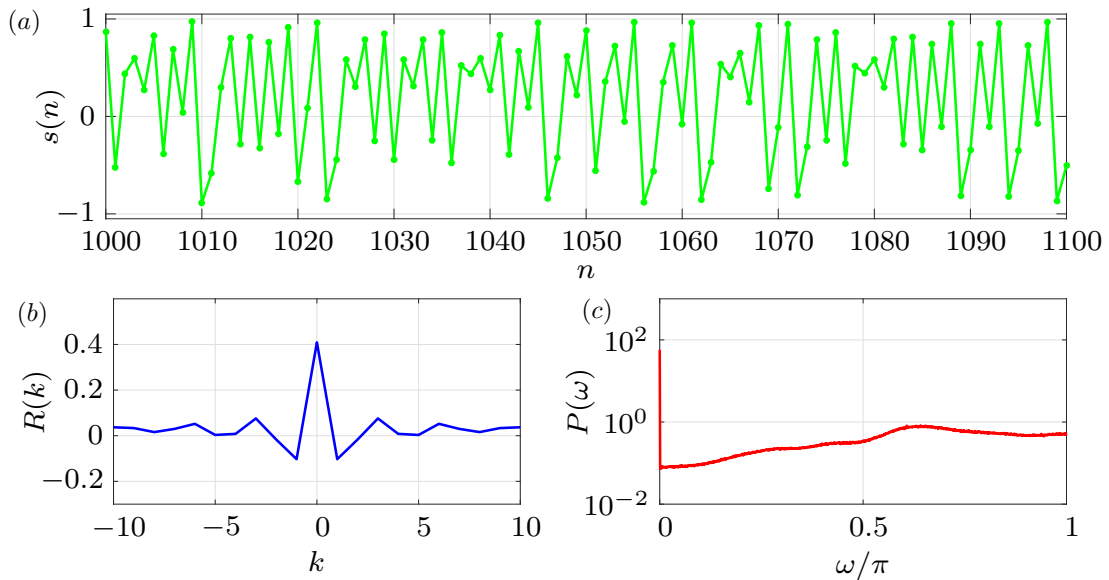


Figure 10: (a) Orbit, (b) ACS, and (c) PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $a = 3.95$ .

In Figure 11(a), a section of the orbit of the map  $f_Q(s)$  for  $a = 4$  is displayed. In Figure 11(b), an impulsive behavior of the ACS is observed. Lastly, in Figure 11(c), it is noted that the spectrum is flat, that is, the power is equally distributed across all frequencies.

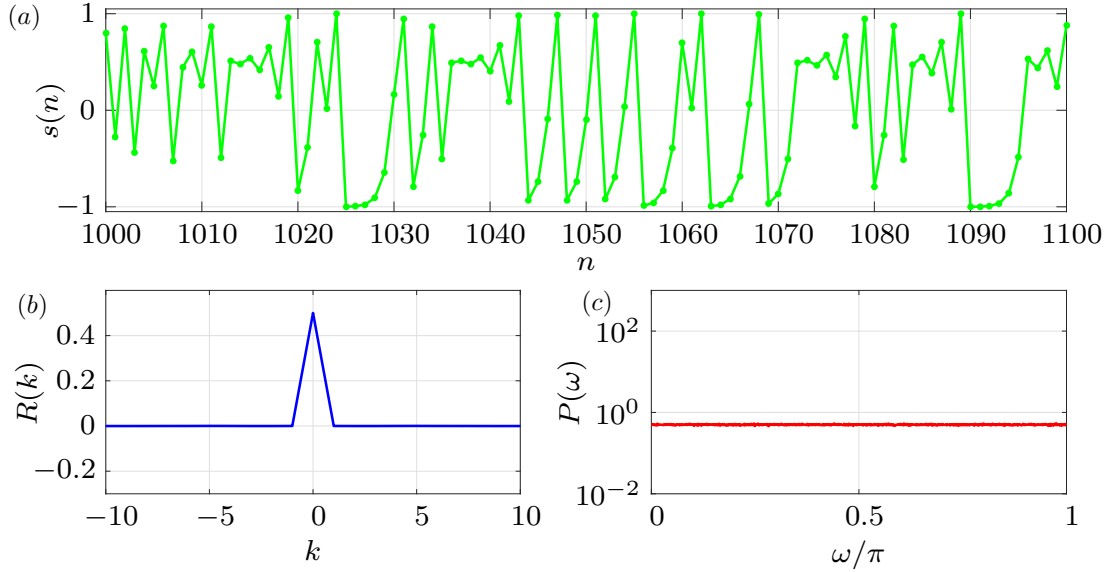


Figure 11: (a) Orbit, (b) ACS, and (c) PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $a = 4$ .

The ACS can be obtained analytically in the case of  $a = 4$ . For this value of  $a$ , it is possible to derive a closed-form for the  $n$ -th sample of  $s(n)$  [5]

$$s(n) = -\cos(2^n \arccos(-s(0))). \quad (6)$$

Unlike the maps  $f_I(\cdot)$  [6] and  $f_B(\cdot)$  [7], which have uniform invariant density  $p_*(\cdot)$ , the quadratic map for  $a = 4$  has non-uniform invariant density given by (3). Thus, for this value of  $a$ , using (3) and (6), it can be shown [7] that  $R(k)$  can be written as

$$R(k) = \int_{-1}^1 \frac{-x(\cos(2^k \arccos(-x)))}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx. \quad (7)$$

Rewriting  $\cos(2^k \arccos(-x))$  as  $\cos(2^k(\pi - \arccos(x)))$  and using the identities  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ , with  $\sin(2^k\pi) = 0$ , and Rewriting equation (8) as

$$\cos(2^k\pi) = \begin{cases} -1, & k = 0 \\ 1, & k > 0 \end{cases}, \quad (8)$$

we can infer that for  $k = 0$ , we have

$$\begin{aligned} R(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cos(\arccos(x)) p_*(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

and for  $k > 0$ ,

$$R(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{-x(\cos(2^k \arccos(x)))}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (10)$$



Note that in (10), the numerator features a product of an odd function and an even function, resulting in an odd function. The denominator, meanwhile, is an even function. Hence, the integrand as a whole is an odd function. Since the integral is calculated over a symmetric interval relative to the origin, we can conclude that its result will be zero. From the symmetry of  $R(k)$  for a real signal, we then get,

$$R(k) = \frac{1}{2}\delta(k) \quad (11)$$

and

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k)e^{-j\omega k} = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Therefore, in spectral terms, the signals generated by the quadratic map with  $a = 4$  are equivalent to sample functions of white noise.

Analytical calculations for  $a \neq 4$  are prohibitive as there are no closed-form solutions for the invariant densities, which have very complicated shapes, as seen in Figure 4. Therefore, in Figure 12 we present the PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  in the interval  $3.835 \leq a \leq 4$ , excluding the DC component. It is observed that for the parameter  $a$  in the analyzed interval, the PSD is predominantly narrowband and concentrated at high frequencies, being equivalent to white noise only when  $a = 4$ .

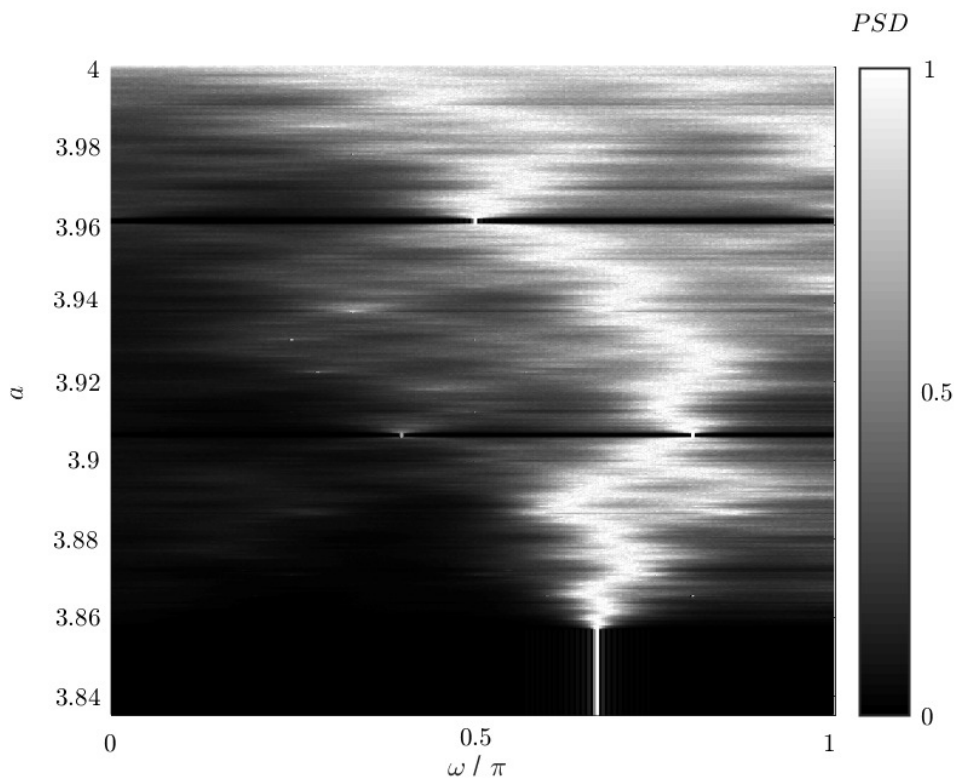


Figure 12: PSD of the map  $f_Q(\cdot)$  for  $3.835 \leq a \leq 4$ .

#### 4. Conclusions

In this work, the temporal and spectral characteristics of the quadratic map were studied numerically. For  $a \neq 4$ , obtaining the ACS and PSD analytically is more challenging compared to the analyses of previous works [6, 7, 8], due to the invariant density not being uniform and not having a closed form expression.

## Acknowledgments

This work was partially supported by the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq-Brazil) (grant number 311039/2019-7) and by the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES-Brazil) (grant number 001).

## References

- [1] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261 (5560) (1976) 459–467.
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, The Perseus Books Group, 2001.
- [3] A. Lasota, M. C. Mackey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, 1985.
- [4] B.-L. Hao, *Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems*, World Scientific, 1989.
- [5] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos, Textbooks in Mathematical Sciences*, Springer New York, 2000.
- [6] M. Eisencraft, D. Kato, L. Monteiro, Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map, *Signal Processing* 90 (1) (2010) 385–390. doi:10.1016/j.sigpro.2009.06.018.
- [7] R. A. Costa, M. B. Loiola, M. Eisencraft, Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments, *Signal Processing* 133 (2017) 187–191. doi:10.1016/j.sigpro.2016.10.025.
- [8] R. A. da Costa, M. Eisencraft, Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 72 (2019) 441–448. doi:10.1016/j.cnsns.2019.01.002.