

**LUIZ CEZAR TRINTINALIA**

**INVESTIGAÇÃO DE MÉTODOS PARA ANÁLISE  
DE SUPERFÍCIES DICRÓICAS E  
DESENVOLVIMENTO DE UM PROGRAMA  
COMPUTACIONAL EFICIENTE**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:  
Engenharia Elétrica

Orientador:  
Antonio Roberto Panicali

São Paulo  
1992

À minha noiva e futura esposa Célia, pelo estímulo que muito me ajudou na elaboração deste trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Antonio Roberto Panicali, pelas diretrizes seguras e incentivo durante todo o decorrer do trabalho.

Aos amigos Prof. Dr. Jacyntho José Angerami e Prof. Dr. Plínio F. S. Rodrigues, pelo grande apoio e estímulo.

Aos amigos do CPqD da TELEBRÁS, pela colaboração inestimável.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram na execução deste trabalho.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2 EQUACIONAMENTO .....</b>	<b>9</b>
2.1 Estrutura Periódica no Vácuo .....	11
2.2 Estrutura Periódica com Substrato e Superstrato Dielétrico .....	17
2.3 Coeficientes de Reflexão e Transmissão .....	33
<b>3 MÉTODO DOS MOMENTOS .....</b>	<b>38</b>
3.1 Aplicação ao Problema .....	41
3.2 Escolha das Funções de Base .....	45
3.2.1 Condição de Gume .....	47
3.2.2 Tiras Retangulares Isoladas .....	51
3.2.3 Tiras Retangulares não Isoladas .....	55
3.3 Conservação da Potência .....	65
<b>4 O PROBLEMA DA CONVERGÊNCIA .....</b>	<b>68</b>
4.1 Convergência Absoluta .....	68
4.2 Técnicas de Aceleração da Convergência .....	74
4.3 Convergência Relativa .....	79
<b>5 RESULTADOS OBTIDOS .....</b>	<b>83</b>
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>105</b>
<b>ANEXO A - Dedução da função de Green para estrutura sem dielétrico ....</b>	<b>108</b>
<b>ANEXO B - Cálculo da transformada da distribuição periódica de corrente .....</b>	<b>112</b>
<b>ANEXO C - Cálculo dos campos espalhado e incidente - estrutura com dielétrico .....</b>	<b>115</b>
<b>ANEXO D - Condição para convergência das somatórias .....</b>	<b>125</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>132</b>

## Lista de figuras

figura 1.1 - algumas células típicas de FSS's .....	2
figura 1.2 - antena "dual-band" .....	4
figura 2.1 - Geometria de uma FSS .....	10
figura 2.2 - Camadas dielétricas .....	10
figura 2.3 - Onda incidente .....	10
figura 2.4 - Campo espalhado .....	18
figura 2.5 - Campo incidente .....	28
figura 2.6 - Ondas refletidas e transmitidas .....	35
figura 3.1 - Distribuição da corrente próximo a um gume .....	50
figura 3.2 - Função de base para tiras retangulares .....	52
figura 3.3 - Funções de base propostas por TSAO; MITTRA(36) para dipolos cruzados .....	57
figura 3.4 - Função de base para junção (sem descontinuidade) .....	59
figura 3.5 - Resposta em frequência de FSS composta por dipolos cruzados .....	60
figura 3.6 - Diagrama das funções telhado .....	62
figura 4.1 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples, calculado para diferentes números de modos na direção longitudinal .....	72
figura 4.2 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples, calculado para diferentes números de modos na direção transversal .....	73
figura 4.3 - Erro devido ao truncamento da somatória dos modos de Floquet, com e sem a transformada de Shanks .....	77
figura 4.4 - Erro devido ao truncamento da somatória dos modos de Floquet, com e sem a transformada de Shanks, com alisamento .....	78
figura 4.5 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos cruzados, calculado pela formulação de TSAO; MITTRA(36) .....	81
figura 5.1 - Coeficiente de transmissão de estrutura formada por dipolos simples em guia de onda .....	84
figura 5.2 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples em guia de onda .....	85
figura 5.3 - Fase do coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples em guia de onda .....	86

figura 5.4 - Resposta em frequência de estrutura formada por dipolos simples ...	88
figura 5.5 - Outro exemplo de resposta em frequência de estrutura formada por dipolos simples .....	89
figura 5.6 - Resposta em frequência de estrutura formada por dipolos simples (utilizando-se SBF's) .....	90
figura 5.7 - Resposta em frequência de estrutura formada por dipolos cruzados (utilizando-se SBF's) .....	92
figura 5.8 - Coeficiente de transmissão de potência de grade condutora com suporte dielétrico - incidência TE normal .....	93
figura 5.9 - Coeficiente de transmissão de potência de grade condutora com suporte dielétrico - incidência TM .....	94
figura 5.10 - Resposta em frequência de estrutura formada por quadrados concêntricos - incidência normal .....	96
figura 5.11 - Resposta em frequência de estrutura formada por quadrados concêntricos - incidência TE-45 graus .....	97
figura 5.12 - Resposta em frequência de estrutura formada por quadrados concêntricos - incidência TM-45 graus .....	98
figura 5.13 - Resposta em frequência de estrutura formada por cruces de Jerusalém .....	100
figura 5.14 - Representação esquemática de estruturas dicróicas simples e duplas .....	101
figura 5.15 - Resposta em frequência de estruturas, simples e dupla, formadas por dipolos simples em guia de onda .....	102
figura 5.16 - Resposta em frequência de estrutura dupla formada por cruces de Jerusalém .....	103

## RESUMO

Superfícies dicróicas (ou seletoras de frequência) são estruturas formadas por elementos metálicos, ou aberturas numa superfície metálica, distribuídos periodicamente sobre uma superfície, exibindo um comportamento reflexivo numa faixa de frequência e transmissivo em outra. Devido a esse comportamento, essas estruturas possuem inúmeras aplicações, numa ampla faixa do espectro eletromagnético, tais como sub-refletores de antenas "dual-band", radomes, polarizadores e espelhos para laser.

Analisaram-se neste trabalho métodos computacionais utilizados atualmente na determinação da resposta em frequência dessas superfícies e, além disso, implementou-se um programa computacional que permite a análise de uma classe variada de estruturas. Utilizou-se nessa implementação o método de Galerkin aplicado no domínio espectral, com funções de base de domínio completo e de subdomínios.

Investigaram-se também diversos aspectos relevantes nessa formulação, como a convergência da somatória dos modos de Floquet e o fenômeno da convergência relativa. Por fim são apresentados diversos resultados que demonstram a eficiência do programa implementado e que, além disso, evidenciam algumas das aplicações para essas superfícies.

## ABSTRACT

Dichroic surfaces or frequency selective surfaces (FSSs) are structures that comprise periodically arranged metallic patch elements, or aperture elements within a metallic screen, and that exhibit a reflexive or transmissive behavior depending on the frequency of the incident electromagnetic wave. Due to that behavior, those structures find several applications, ranging over much of the electromagnetic spectrum, such as subreflectors of dual-band antennas, radomes, polarizers and mirrors for lasers.

In the work presented here, numerical methods presently used in the determination of the frequency response of those surfaces were analyzed, and a computational program for analyzing a wide range of structures was implemented. In this implementation the Galerkin method was applied in the spectral domain, using entire domain and subdomain basis functions.

Some important aspects of this formulation were also investigated, such as the convergence of the Floquet modes summation and the relative convergence phenomenon. Some results are also presented, showing not only the efficiency of the implemented program but also some possible applications.



## 1 INTRODUÇÃO

Superfícies seletoras de frequência (FSS em inglês), ou superfícies dicróicas, são estruturas formadas por elementos metálicos (ou aberturas numa superfície metálica), arranjados periodicamente sobre uma superfície, que exibem um comportamento altamente reflexivo numa faixa de frequência e altamente transmissivo em outra, funcionando portanto como um filtro para ondas eletromagnéticas que sobre ela incidam. Geometrias típicas desse tipo de estrutura estão mostradas na figura 1.1. Essas estruturas metálicas podem ter ainda um substrato ou superstrato dielétrico para sua sustentação, e podem também ser cascateadas, formando estruturas multicamadas. A determinação das bandas de reflexão e transmissão dessas estruturas é feita através da aplicação de algoritmos computacionais, que devem ser eficientes e versáteis, permitindo assim a análise de uma classe ampla de estruturas.

Historicamente, o entendimento dos princípios envolvidos no comportamento dessas superfícies evoluiu da investigação do fenômeno óptico da difração por reticulados periódicos, usados para a decomposição de um feixe de luz não monocromática em suas componentes espectrais. A descoberta desse fenômeno é relatada por RITTENHOUSE apud MITTRA et al.<sup>(26)</sup>

De uma forma qualitativa, o comportamento dessas estruturas depende tanto da configuração de cada elemento como do espaçamento entre eles. No caso das estruturas formadas por tiras metálicas, estas serão predominantemente reflexivas em frequências próximas das ressonâncias de seus elementos, ou seja, aproximadamente quando o tamanho destes for um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda, sendo a periodicidade da estrutura responsável por modificações na resposta espectral do elemento isolado.

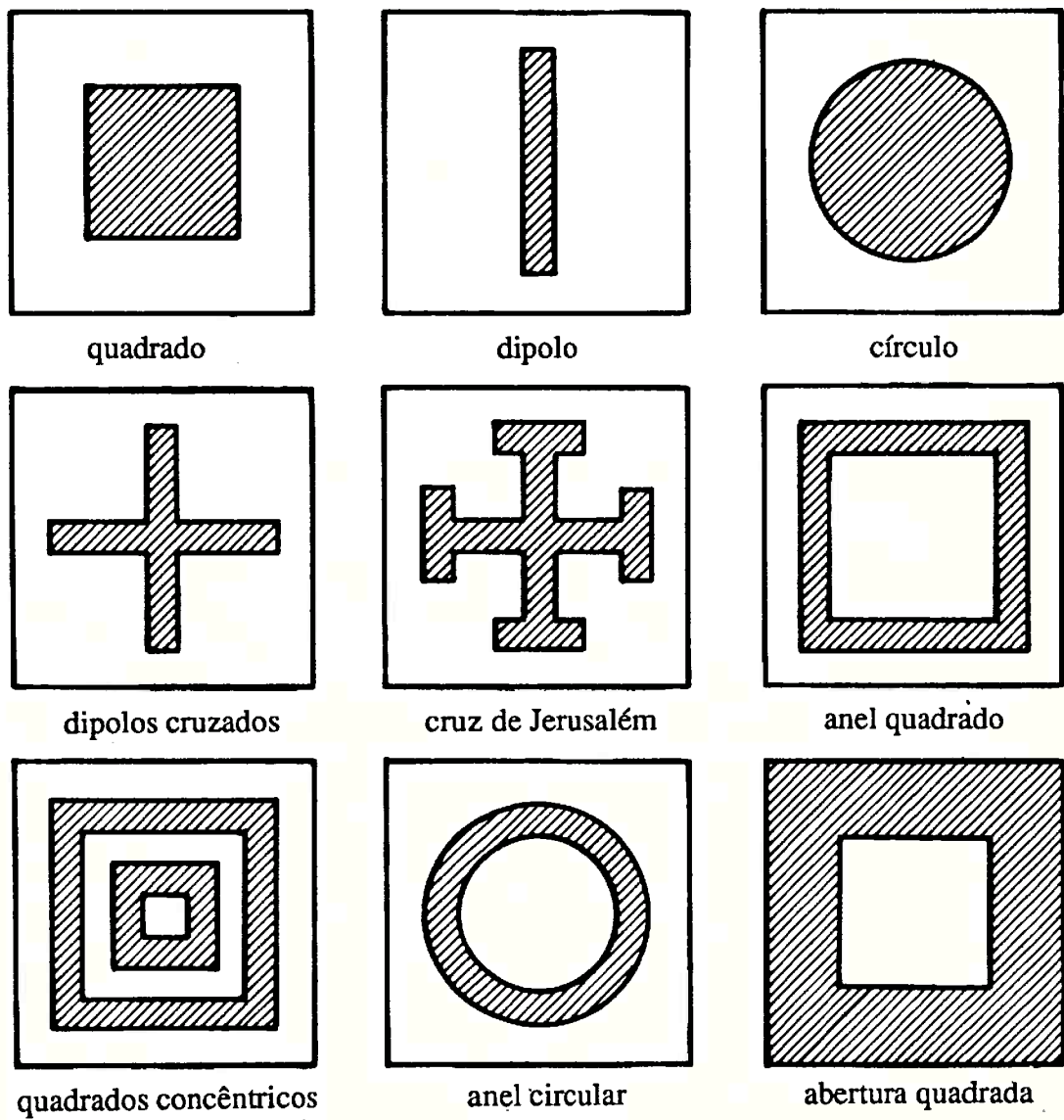


figura 1.1 - algumas células típicas de FSS's

Para comprimentos de onda maiores que o maior período da estrutura\*, uma resposta espectral diretamente associada à geometria do elemento pode ser observada. Para comprimentos de onda menores, começam a aparecer ondas eletromagnéticas difratadas em um número discreto de direções, sendo esse número cada vez maior para comprimentos de onda cada vez menores. Finalmente, quando o comprimento de onda tende a zero, a fração de potência transmitida pela estrutura aproxima-se da relação entre a área não metalizada e a área metalizada da superfície.

As aplicações das superfícies dicróicas são inúmeras, cobrindo uma ampla faixa do espectro eletromagnético. Na faixa de microondas, as propriedades dessas superfícies podem ser usadas para fazer uso mais eficiente de antenas com refletores, como mostrado na figura 1.2. Nessa aplicação, uma superfície seletora de frequência é utilizada como sub-refletor da antena, sendo altamente reflexiva na frequência de operação do alimentador Cassegrain. Um segundo alimentador, operando numa faixa de frequência diferente, é colocado no foco primário da antena, sendo o sub-refletor transparente nessa faixa. Dessa forma uma mesma antena consegue operar em duas faixas distintas de frequência, diminuindo-se assim os custos de um sistema desse tipo. AGRAWAL; IMBRIALE<sup>(2)</sup> descrevem o projeto e implementação de um sistema desse tipo, operando nas faixas de 13-15 GHz (banda Ku) e 2.0-2.3 GHz (banda S).

Um outro exemplo do uso dessas estruturas na faixa de microondas, é no projeto de radomes, como sugerido por LEE<sup>(21)</sup>. Superfícies dielétricas são muito utilizadas nesses casos, mas elas apresentam o inconveniente de não serem eletricamente transparentes, podendo às vezes diminuir drasticamente a potência transmitida. Com a utilização de uma superfície dicróica colocada entre duas camadas de dielétrico, a estrutura pode ser sintonizada na frequência de operação da antena, aumentando muito a sua eficiência de transmissão, e além disso aumentando sua resistência mecânica.

---

\*Apenas para o caso de incidência normal. Para incidência oblíqua começam a aparecer ondas difratadas em comprimentos de ondas maiores, iguais ao dobro do maior período da estrutura no caso de incidência rasante.

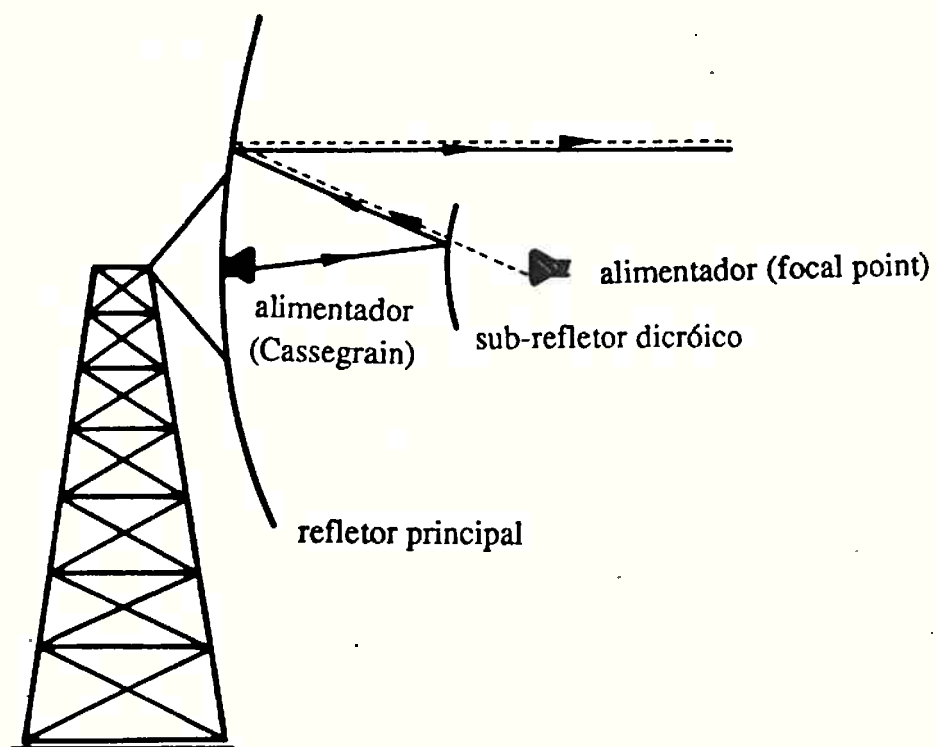


figura 1.2 - antena "dual-band"

Na faixa do infravermelho estruturas dicróicas são utilizadas como polarizadores, espelhos para aumentar a eficiência de lasers e sensores infravermelhos, dentre outras aplicações, como as relatadas por ULRICH e DURSCHLAG; DETEMPLE apud MITTRA et al.<sup>(26)</sup>. Também na faixa da luz visível e início do infravermelho superfícies seletoras de frequência foram propostas por HORWITZ<sup>(14)</sup> para aumentar a eficiência de células solares.

Além das aplicações citadas anteriormente, muitas outras podem ser encontradas na literatura (por exemplo os artigos de CAHILL; PARKER<sup>(9)</sup>, FRANCHI; MAILLOUX<sup>(9)</sup>, JOHANSSON<sup>(16)</sup>, JOHANSSON et al.<sup>(17)</sup>, SCHENNUM<sup>(32)</sup> e YOUNG et al.<sup>(39)</sup>), tornando clara a grande importância do estudo de tais estruturas, de forma a obterem-se métodos eficientes de análise e de síntese dessas superfícies. Por esse motivo, o objetivo deste trabalho foi o estudo dos métodos utilizados na análise computacional de superfícies seletoras de frequência, bem como a implementação de uma rotina que permitisse a determinação das características de reflexão e transmissão de uma dada classe de estruturas, especificamente as que possam ser decompostas em tiras metálicas retangulares.

Diversos autores têm, nos últimos anos, apresentado métodos computacionais para a análise de superfícies dicróicas, utilizando-se ou do método dos momentos ou do método iterativo do gradiente conjugado. CHEN<sup>(6)</sup> analisou o caso de tiras condutoras retangulares através do método dos momentos, utilizando funções de base senoidais (que não obedeciam à condição de gume), com a estrutura imersa no vácuo. Também MONTGOMERY<sup>(28)</sup> em 1975 utilizou uma formulação semelhante para estudar o problema de tiras retangulares sustentadas apenas por um substrato dielétrico.

LEE<sup>(21)</sup> estudou o caso de estruturas formadas por tiras metálicas, formando uma grade, e considerando-a sustentada por um substrato e/ou superstrato dielétrico e seus resultados mostraram-se bastante interessantes para o projeto de radomes. Tratando o problema no domínio espectral ele, como proposto por MITTRA<sup>(25)</sup>, adotou o critério da

convergência relativa para determinar a relação entre o número de modos a ser utilizado na expansão do campo espalhado e o número de funções de base. A validade desse critério, entretanto, permaneceu um pouco obscura durante algum tempo.

Em 1972, MEIXNER<sup>(24)</sup> descreveu em seu artigo o comportamento assintótico que os campos elétrico e magnético devem apresentar próximo a gumes (bordas das tiras condutoras, por exemplo). Com base nesse estudo BUTLER<sup>(4)</sup> em 1985 apresentou uma solução para o problema de fendas e tiras metálicas, excitadas por ondas TE e TM, em termos de polinômios de Chebyshev multiplicados por uma função que apresentava a condição de gume apropriada. Dessa forma, essas mesmas funções, ou formas similares, puderam ser utilizadas na expansão da distribuição de corrente em tiras retangulares, como feito por exemplo por UCHIDA et al.<sup>(37)</sup>, se bem que apenas para o problema bidimensional. MITTRA et al.<sup>(26)</sup> também apresentam funções similares para problemas tridimensionais.

Para geometrias mais complexas outras funções têm sido propostas, como é o caso de estruturas formadas por dipolos cruzados ou cruces de Jerusalém, para as quais TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup> propuseram a inclusão de certas funções que levassem em conta a descontinuidade da corrente na junção das tiras. Essas funções, no entanto, apresentam certos problemas quanto à convergência, como será mostrado no capítulo 4.

Também para estruturas formadas por anéis circulares finos PARKER; VARDAXOGLU<sup>(30)</sup>, em um artigo de 1985, propuseram funções com variação senoidal em função da posição angular e constantes na direção radial. Essas funções também não satisfazem à condição de gume.

No caso de estruturas mais genéricas, no entanto, torna-se necessária a decomposição da distribuição de corrente em um grande número de funções, definidas cada uma em uma pequena região de cada elemento. São as chamadas "subdomain basis functions", introduzidas no estudo de superfícies dicróicas por CWIK; MITTRA<sup>(7)</sup>, que, devido à ordem elevada do sistema obtido, utilizaram o método do gradiente conjugado

ao invés do método de Galerkin. Além disso, como forma de acelerar as somatórias que aparecem ao se tratar o problema no domínio espectral, eles propuseram a utilização do algoritmo da FFT, dada a forma que essas somatórias assumem neste caso.

Apesar dessa grande variedade de funções propostas e utilizadas, o problema de quantos modos utilizar para um certo número de funções de base só foi um pouco mais esclarecido em 1987 por JOHANSSON<sup>(15)</sup> e depois por WEBB et al.<sup>(38)</sup> em 1990, que acabaram com o mito da convergência relativa. Mesmo assim, esses autores não esclareceram totalmente por que certos problemas parecem apresentar esse fenômeno, como no caso das funções apresentadas por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup> para o problema dos dipolos cruzados.

Dessa forma tomou-se como uma segunda meta para este trabalho, estudar sob que condições as somatórias obtidas pela aplicação do método de Galerkin à análise de superfícies dicróicas apresentam convergência, e porque em alguns casos parece ocorrer a chamada convergência relativa.

Assim no trabalho a seguir, é apresentada e deduzida no capítulo 2 uma formulação que permite a análise de estruturas dicróicas infinitas, formadas por elementos condutores perfeitos, distribuídos periodicamente sobre um plano, podendo essa estrutura estar sustentada por um substrato e/ou superstrato dielétrico. Com essa análise podem ser obtidos os campos espalhados por essa estrutura quando da incidência de uma onda eletromagnética plana, bem como a distribuição de corrente em seus elementos.

No capítulo 3 é apresentado o método dos momentos, que foi utilizado para a solução da equação obtida. É discutido então o problema da escolha das funções de base adequadas, bem como é apresentado o conjunto de funções escolhido para o problema específico de tiras retangulares.

No capítulo 4 é discutido o problema da convergência das somatórias obtidas com a aplicação do método dos momentos, bem como são apresentados alguns métodos que permitem acelerar essas somatórias. Alguns resultados evidenciando esse problema são então apresentados e analisados.

No capítulo 5 são então apresentados alguns resultados obtidos com o programa implementado, comparando-os com resultados relatados por outros autores e com alguns resultados experimentais. A implementação, em linguagem de programação FORTRAN, foi feita numa estação de trabalho PROCEDA 5370 e também num computador VAX 8800.

Finalmente no capítulo 6, é apresentada a conclusão do trabalho, discutindo-se então a eficiência do método, e possíveis formas de melhorá-lo. São discutidas também as alterações necessárias para tratar outras classes de superfícies dielétricas, como por exemplo com tiras circulares, com perdas nos condutores e dielétricos, estruturas multicamada, estruturas não planas e superfícies finitas.



## 2 EQUACIONAMENTO

A estrutura a ser considerada nesta análise, e mostrada na figura 2.1, é formada por elementos condutores, de espessura infinitesimal, arrançados periodicamente segundo duas direções ( $s_1$  e  $s_2$ ), que formam um ângulo  $\Omega$  entre si, sobre um plano infinito correspondente ao plano  $z=0$  do sistema de coordenadas adotado, e repetindo-se com período  $a$  na direção  $s_1$  (que coincide com o eixo  $x$ ) e  $b$  na direção  $s_2$ .

Esses elementos condutores poderão estar soltos no espaço ou sustentados por um substrato e/ou superstrato dielétrico, de espessuras e permissividades relativas arbitrárias. A figura 2.2 mostra essa situação, onde temos o espaço dividido em 4 regiões:

\_região 1 (de  $z=0$  a  $z=d_1$ ), que corresponde ao superstrato, com permissividade relativa  $\epsilon_{r1}$ .

\_região 2 (de  $z=-d_2$  a  $z=0$ ), que corresponde ao substrato, com permissividade relativa  $\epsilon_{r2}$ .

\_região 3 (de  $z=d_1$  a  $z=\infty$ ), onde se propagam a onda incidente e as ondas refletidas, com permissividade relativa igual a 1.

\_região 4 (de  $z=-\infty$  a  $z=-d_2$ ), onde se propagam as ondas transmitidas, com permissividade relativa também igual a 1.

No tratamento utilizado será suposta a incidência de uma onda eletromagnética plana, transversal elétrica (TE) ou magnética (TM) em relação ao plano de incidência, segundo um ângulo  $\theta$  em relação à normal (eixo  $z$ ) e um ângulo  $\phi$  em relação ao eixo  $x$ , conforme mostra a figura 2.3.

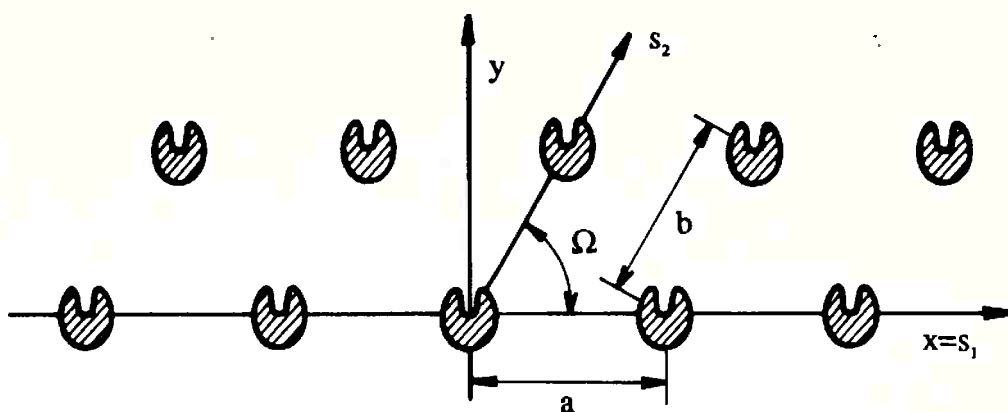


figura 2.1 - Geometria de uma FSS

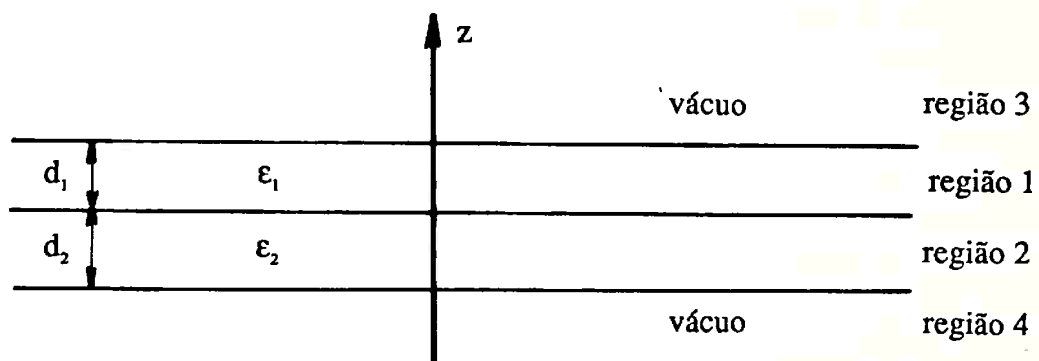


figura 2.2 - Camadas dielétricas

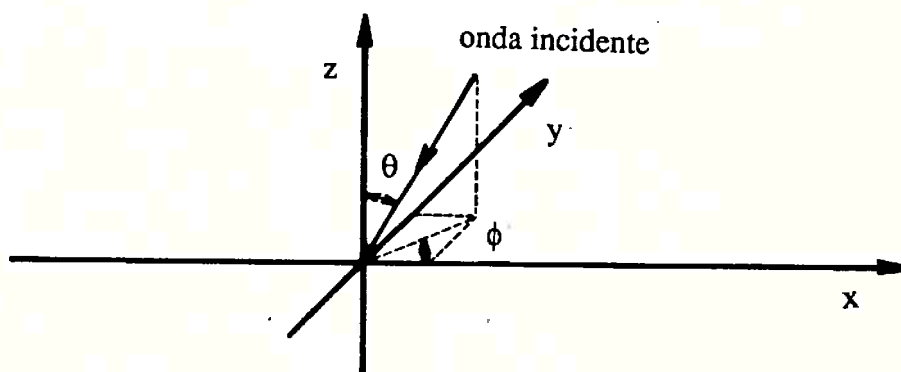


figura 2.3 - Onda incidente

Esse campo incidente pode portanto ser escrito como\*:

$$\vec{E}^i(x,y,z) = \vec{E}_0 \cdot \exp[jK_0(\text{sen}\theta \cos\phi x + \text{sen}\theta \text{sen}\phi y + \cos\theta z)] \quad (2.1a)$$

onde:

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} -\text{sen}\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y} & \text{TE} \\ \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \text{sen}\phi \hat{y} - \text{sen}\theta \hat{z} & \text{TM} \end{cases} \quad (2.1b)$$

$$K_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi f}{c} \quad \begin{array}{l} f = \text{freq. da onda} \\ c = \text{vel. de propag. no vacuo} \end{array}$$

Pretende-se, através da análise apresentada a seguir, determinar uma equação relacionando a densidade de corrente nos condutores com o campo elétrico por ela espalhado. Impondo-se então as condições de contorno adequadas chegaremos a uma equação cuja única incógnita será essa densidade de corrente. O método utilizado para a solução dessa equação será apresentado no capítulo 3. Resolvida essa equação, o campo espalhado, e portanto os coeficientes de reflexão e transmissão, podem ser determinados a partir das expressões obtidas.

## 2.1 Estrutura Periódica no Vácuo

Vamos inicialmente considerar a estrutura, formada pelos elementos condutores, imersa no vácuo, deixando a análise dos casos com substrato ou superstrato dielétrico para a seção 2.2. A incidência de uma onda plana sobre essa estrutura provoca o aparecimento de uma distribuição de corrente  $J(x,y)$  que por sua vez gera um campo

---

\*As grandezas J, E, A, etc. são todas fasoriais, com o termo e<sup>st</sup> suprimido por convenção.

eletromagnético denominado campo espalhado. Note-se que essa distribuição existe somente no plano  $z=0$  nas direções dos eixos  $x$  e/ou  $y$  e apenas sobre os elementos condutores.

O potencial vetor magnético,  $(\bar{A}^s)^*$  é dado então, de acordo com MARIOTTO<sup>(23)</sup>, por:

$$\bar{A}^s(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \int \frac{\bar{J}(\bar{x},\bar{y})}{r} e^{-jk_0 r} dS$$

$$S = \text{plano}(z = 0) \quad \bar{r} = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + z^2}$$

$\mu_0$  = permeabilidade magnética do vácuo

ou

$$\bar{A}^s(x,y,z) = \mu_0 \cdot G(x,y,z) * \bar{J}(x,y) \quad (2.2)$$

sendo "\*" o operador convolução nas variáveis  $x$  e  $y$ , e

$$G(x,y,z) = \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.3)$$

Lembrando agora que no vácuo, conforme apresentado por KRAUS; CARVER<sup>(18)</sup>, temos:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{A} \quad \nabla \times \bar{H} = j\omega \epsilon_0 \bar{E}$$

\*O superscrito "s" indica campo espalhado e o "i" campo incidente.

onde  $\omega=2\pi f$  e  $\epsilon_0 =$  permissividade do vácuo, temos que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}^s) = j\omega\epsilon_0\mu_0\vec{E}^s \quad (2.4)$$

Nesta análise trabalharemos no domínio espectral, adotando-se o seguinte par transformado de Fourier\*:

$$\vec{F}(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y) e^{-j(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (2.5a)$$

$$F(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\alpha,\beta) e^{j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.5b)$$

Dessa forma, aplicando-se o teorema da convolução, apresentado por LATHI<sup>(19)</sup>, em (2.2):

$$\vec{A}^s(\alpha,\beta,z) = \mu_0 \vec{G}(\alpha,\beta) \vec{J}(\alpha,\beta) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} \quad (2.6)$$

sendo (ver ANEXO A):

$$\vec{G}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2}} \quad (2.7)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier (2.5a) à expressão (2.4), e substituindo-se nela a expressão (2.6) obtém-se (ver ANEXO A):

$$\vec{E}^s(\alpha,\beta,z) = G_{3,2}(\alpha,\beta) \vec{J}(\alpha,\beta) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} \quad (2.8)$$

\*O superscrito - indica função transformada segundo Fourier.

onde

$$G_{3,2}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}$$

com

$$G_{xx} = \frac{K_0^2 - \alpha^2}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta) \quad G_{yy} = \frac{K_0^2 - \beta^2}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta)$$

$$G_{xy} = G_{yx} = \frac{-\alpha\beta}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta)$$

$$G_{zx} = \frac{\mp j\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2}}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta) \quad G_{zy} = \frac{\mp j\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2}}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta)$$

*sinais superiores para  $z > 0$ .*

Temos, assim, uma expressão que relaciona diretamente a distribuição de corrente na superfície com o campo espalhado.

Sendo a superfície composta por "células" que se repetem periodicamente, e supondo-se a incidência de uma onda plana, temos que as distribuições de corrente de todas as células devem ser idênticas, a menos de uma diferença de fase que depende do ângulo de incidência. Ou seja, supondo-se uma das células com distribuição de corrente  $\mathcal{J}_0(x, y)$  temos que:

$$\mathcal{J}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{J}_0(x - ma - nb \cos \Omega, y - nb \sin \Omega) e^{jk_0 \sin \theta [(ma + nb \cos \Omega) \cos \phi + (nb \sin \Omega) \sin \phi]} \}$$

ou\*\*

\* $\delta(\cdot)$  = função impulso de Dirac.

\*\*Serão omitidos os índices das somatórias de  $-\infty$  a  $+\infty$  por simplicidade de notação.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x,y) = \mathcal{J}_0(x,y) * \sum_{m,n} \{ \delta(x - ma - nb \cos \Omega) \\ \delta(y - nb \sin \Omega) e^{jK_0 \sin \theta (x \cos \phi + y \sin \phi)} \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

e portanto (ver ANEXO B):

$$\mathcal{J}(\alpha,\beta) = \mathcal{J}_0(\alpha,\beta) \cdot \left\{ \frac{4\pi^2}{ab \sin \Omega} \cdot \sum_{m,n} \delta(\alpha - \alpha_m) \cdot \delta(\beta - \beta_{mn}) \right\} \quad (2.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{2\pi m}{a} + K_0 \sin \theta \cos \phi \\ \beta_{mn} &= \frac{2\pi n}{b \sin \Omega} - \frac{2\pi m \cot \Omega}{a} + K_0 \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo-se (2.10) em (2.8):

$$\bar{E}^s(\alpha,\beta,z) = \frac{4\pi^2}{ab \sin \Omega} \sum_{m,n} G_{3,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \mathcal{J}_0(\alpha_m, \beta_{mn}) e^{-\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2 - K_0^2} |z|} \delta(\alpha - \alpha_m, \beta - \beta_{mn}) \quad (2.11a)$$

e antitransformando-se:

$$\bar{E}^s(x,y,z) = \frac{1}{ab \sin \Omega} \sum_{m,n} G_{3,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \mathcal{J}_0(\alpha_m, \beta_{mn}) e^{j(\alpha_m x + \beta_{mn} y) - \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2 - K_0^2} |z|} \quad (2.11b)$$

A cada valor de m e n nessa expressão corresponde uma onda plana. Para os casos em que  $K_0^2 \geq \alpha_m^2 + \beta_{mn}^2$ , (2.11b) corresponde a uma onda plana propagando-se com um ângulo  $\theta'$  em relação ao eixo z e um ângulo  $\phi'$  com o eixo x, afastando-se do plano  $z=0$ , onde :

$$\cos \theta' = \sqrt{1 - \frac{\alpha_m^2}{K_0^2} - \frac{\beta_{mn}^2}{K_0^2}}, \quad \cos \phi' = \frac{\alpha_m}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen} \phi' = \frac{\beta_{mn}}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2}} \quad (2.11c)$$

Para  $m=n=0$   $\theta'=\theta$  e  $\phi'=\phi$ , e portanto (2.11b) corresponde a uma onda plana na mesma direção da onda incidente para  $z<0$ , e a uma onda refletida com um ângulo igual ao de incidência para  $z>0$ .

Para  $K_0^2 < \alpha_m^2 + \beta_{mn}^2$ , teremos termos da forma:  $\exp(-\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2 - K_0^2} |z|)$ , ou seja uma onda evanescente que decai exponencialmente com  $|z|$ .

A expressão (2.11) nos permite então determinar o campo espalhado pela estrutura, conhecida a densidade de corrente em uma de suas células. Esta densidade será, portanto, a nossa incógnita, cuja determinação será feita impondo-se as condições de contorno adequadas no plano  $z=0$ .

Tomando-se então apenas a componente do campo elétrico espalhado tangencial ao plano  $z=0$ , temos:

$$\vec{E}_i^s(\alpha, \beta) = \frac{4\pi^2}{ab \text{sen} \Omega_{m,n}} \sum G_{2,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \vec{J}_0(\alpha_m, \beta_{mn}) \delta(\alpha - \alpha_m, \beta - \beta_{mn}) \quad (2.12)$$

onde  $G_{2,2}(\alpha, \beta)$  é a matriz quadrada de ordem 2 formada pelas primeiras duas linhas da matriz  $G_{3,2}(\alpha, \beta)$ .

Devemos então determinar  $\vec{J}_0(\alpha, \beta)$  tal que o campo tangencial espalhado ( $\vec{E}_i^s$ ) mais o campo incidente ( $\vec{E}_i^i$ ) seja nulo sobre os condutores, e de tal forma que essa distribuição de corrente restrinja-se apenas às áreas com condutor e obedeça à condição de gume adequada. Para isso vamos tomar a transformada de Fourier da expressão da componente tangencial ao plano  $z=0$  do campo incidente (2.1a):

$$\vec{E}_i^i(\alpha, \beta) = \vec{E}_{\alpha\gamma}^i \cdot 4\pi^2 \delta(\alpha - K_0 \text{sen} \theta \cos \phi, \beta - K_0 \text{sen} \theta \text{sen} \phi) \quad (2.13)$$



onde  $\vec{E}_{0xy}$  refere-se apenas às componentes x e y de  $\vec{E}_0$ .

Vamos definir, então, uma função  $T(x,y)$  que tenha valor unitário para pontos  $(x,y)$  sobre o material condutor da célula centrada na origem, e que seja nula em todos os outros pontos. Impor-se, então, que o campo tangencial total sobre os condutores é nulo, equivale a:

$$\vec{E}_i^i(x,y) \cdot T(x,y) = -\vec{E}_i^s(x,y) \cdot T(x,y) \quad (2.14a)$$

ou seja:

$$\vec{E}_i^i(\alpha,\beta) * \vec{T}(\alpha,\beta) = -\vec{E}_i^s(\alpha,\beta) * \vec{T}(\alpha,\beta) \quad (2.14b)$$

Esta é então a equação, que juntamente com as condições impostas à distribuição de corrente, será resolvida pelo método dos momentos apresentado no capítulo 3.

## 2.2 Estrutura Periódica com Substrato e Superstrato Dielétrico

Iremos agora analisar o caso de estruturas com substrato ou superstrato dielétrico. Vamos determinar a função que relaciona a distribuição de corrente induzida na superfície  $z=0$ , com o campo por ela espalhado. Para isso consideremos a seguinte distribuição de corrente no plano  $z=0$ :

$$\vec{J}(x,y) = e^{j(\alpha x + \beta y)} \hat{x} \quad (2.15)$$

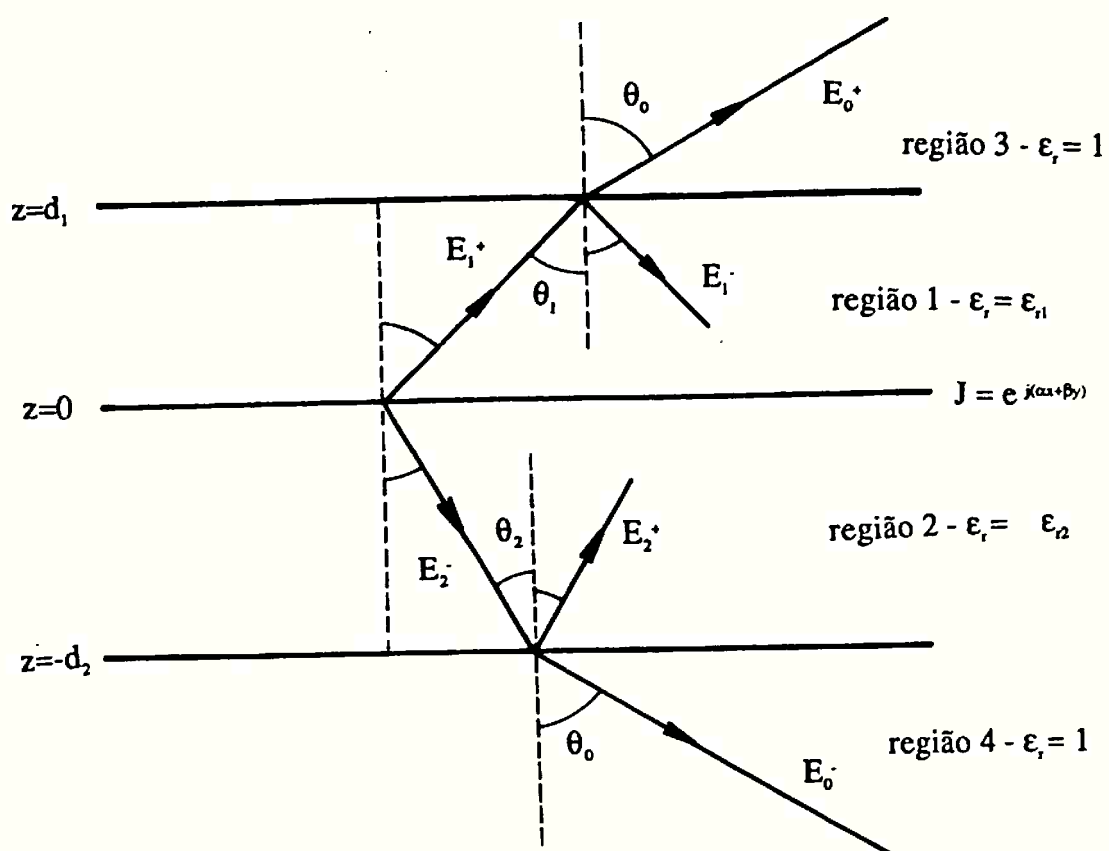


figura 2.4 - Campo espalhado

(as setas indicam os sentidos de propagação das ondas)

Referindo-nos à figura 2.4, chamaremos de  $\vec{E}_i$  o campo elétrico na região  $i$  e analogamente para o campo magnético  $\vec{H}_i$ .

A aplicação das equações de Maxwell, na forma fasorial, como apresentadas por KRAUS; CARVER<sup>(18)</sup>, conduz às seguintes equações, para meios homogêneos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_i &= 0 & \nabla \cdot \vec{H}_i &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_i &= -j\omega\mu_0\vec{H}_i & \nabla \times \vec{H}_i &= j\omega\epsilon_i\vec{E}_i\end{aligned}$$

Calculando-se o rotacional das duas últimas equações e substituindo-se os respectivos divergentes chega-se a:

$$\nabla^2 \vec{E}_i = -K_i^2 \vec{E}_i \quad e \quad \nabla^2 \vec{H}_i = -K_i^2 \vec{H}_i \quad (2.16)$$

onde

$$K_i = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_i}$$

Como as propriedades do meio não variam com  $x$  ou  $y$ , a única dependência com relação a essas variáveis é uma defasagem do tipo expresso em (2.15), de forma que para qualquer grandeza  $M$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial x} &= j\alpha M & \frac{\partial M}{\partial y} &= j\beta M \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= -\alpha^2 M & \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= -\beta^2 M\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação de (2.16) leva, para cada uma das componentes dos campos elétrico e magnético, a equações do tipo:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = (\alpha^2 + \beta^2 - K_i^2)M$$

cuja solução é dada por:

$$M = \left( M^+ e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_i^2} z} + M^- e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_i^2} z} \right) \cdot e^{j(\alpha x + \beta y)}$$

Vemos que a expressão acima é a soma de duas ondas planas propagando-se na direção  $(\theta, \phi)$  em coordenadas esféricas\*, a primeira indo no sentido positivo de  $z$ , e a segunda no negativo; com:

$$\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{sen} \phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (2.17)$$

$$\cos \theta_i = \frac{\sqrt{K_i^2 - \alpha^2 - \beta^2}}{K_i} \quad K_i^2 \geq \alpha^2 + \beta^2$$

$$\cos \theta_i = -j \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_i^2}}{K_i} \quad K_i^2 < \alpha^2 + \beta^2$$

Deveremos ter, então, para os meios 1 e 2, as seguintes expressões para o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i = & (E_{xi}^+ \hat{x} + E_{yi}^+ \hat{y} + E_{zi}^+ \hat{z}) \cdot e^{jK_i(\text{sen} \theta_i \cos \phi x + \text{sen} \theta_i \text{sen} \phi y - \cos \theta_i z)} + \\ & + (E_{xi}^- \hat{x} + E_{yi}^- \hat{y} + E_{zi}^- \hat{z}) \cdot e^{jK_i(\text{sen} \theta_i \cos \phi x + \text{sen} \theta_i \text{sen} \phi y + \cos \theta_i z)} \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$i = 1, 2$$

\*No caso de  $\alpha^2 + \beta^2 > K_i^2$ , corresponde a duas ondas evanescentes, decaindo ou crescendo exponencialmente com  $|z|$ , e a expressão para  $\cos \theta_i$  torna-se imaginária pura; sendo ainda válidos todos os resultados apresentados.

e para os meios 3 e 4, obedecendo-se à condição de radiação, já que o plano  $z=0$  é a única fonte do campo espalhado, teremos:

$$\vec{E}_3 = (E_{x0}^+ \hat{x} + E_{y0}^+ \hat{y} + E_{z0}^+ \hat{z}) \cdot e^{jK_1(\text{sen}\theta_1 \cos\phi x + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\phi y - \cos\theta_1 z)} \quad (2.18b)$$

$$\vec{E}_4 = (E_{x0}^- \hat{x} + E_{y0}^- \hat{y} + E_{z0}^- \hat{z}) \cdot e^{jK_1(\text{sen}\theta_1 \cos\phi x + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\phi y + \cos\theta_1 z)} \quad (2.18c)$$

Podemos escrever expressões análogas para os campos magnéticos, em função de coeficientes  $H_i^\pm$ .

A solução do problema de determinação do campo espalhado pela distribuição de corrente  $\mathcal{J}$ , recai, portanto, na determinação dos coeficientes  $E_i^\pm$ .

A aplicação das equações de Maxwell às expressões acima nos fornece então:

$$\nabla \cdot \vec{E}_i^{\mp} = 0 \quad (2.19a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_i^{\mp} = 0 \quad (2.19b)$$

$$\nabla \times \vec{H}_i^{\mp} = j\omega\epsilon_i \vec{E}_i^{\mp} \quad (2.19c)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i^{\mp} = -j\omega\mu_0 \vec{H}_i^{\mp} \quad (2.19d)$$

As equações anteriores não são linearmente independentes, conforme assinalado por ORSINI; CAMARGO<sup>(29)</sup>, de modo que satisfazendo-se às equações (2.19a) e (2.19d), por exemplo, as equações (2.19b) e (2.19c) estarão automaticamente satisfeitas.

As expressões para os campos elétrico e magnético nos quatro meios deve satisfazer também às condições de contorno nas interfaces entre dois meios\*:

---

\*i e j indicam os índices de meios adjacentes

$$E_{xi} = E_{xj} \quad E_{yi} = E_{yj} \quad H_{xi} = H_{xj}$$

$$H_{yi} - H_{yj} = \begin{cases} -J_x(x,y) & i=1, j=2 \\ 0 & \text{outras interfaces} \end{cases}$$

$$\epsilon_i E_{zi} = \epsilon_j E_{zj} \quad H_{zi} = H_{zj}$$

Como essas relações devem valer para todos os valores de x e y, devemos ter:

$$K_i \text{sen} \theta_i = K_j \text{sen} \theta_j$$

ou seja:

$$\frac{\text{sen} \theta_i}{\text{sen} \theta_j} = \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}}$$

É facilmente demonstrável, também, que satisfazendo-se apenas às condições de contorno das componentes x e y, e às equações (2.19a) e (2.19d), as outras condições de contorno estarão satisfeitas.

Definindo-se, então, as seguintes constantes:

$$\gamma_i = jK_i \cos \theta_i$$

$$\gamma_x = jK_i \text{sen} \theta_i \cos \phi$$

$$\gamma_y = jK_i \text{sen} \theta_i \text{sen} \phi$$

temos de (2.19a) que:

$$E_{zi}^{\pm} = \pm \frac{\gamma_x E_{xi}^{\pm} + \gamma_y E_{yi}^{\pm}}{\gamma_i} \quad (2.20)$$

e de (2.19d):

$$H_{xi}^{\pm} = \pm[(Y_i^e - Y_i^h) \text{sen} \phi \cos \phi E_{xi}^{\pm} + (Y_i^h \cos^2 \phi + Y_i^e \text{sen}^2 \phi) E_{yi}^{\pm}] \quad (2.21)$$

$$H_{yi}^{\pm} = \pm[(Y_i^h - Y_i^e) \text{sen} \phi \cos \phi E_{yi}^{\pm} - (Y_i^h \text{sen}^2 \phi + Y_i^e \cos^2 \phi) E_{xi}^{\pm}] \quad (2.22)$$

onde:

$$Y_i^e = -j\omega \frac{\epsilon_i}{\gamma_i} \quad Y_i^h = -\frac{\gamma_i}{j\omega\mu_0}$$

Das condições de contorno em  $z=0$  temos:

$$E_{x1}^+ + E_{x1}^- = E_{x2}^+ + E_{x2}^- \quad (2.23)$$

$$E_{y1}^+ + E_{y1}^- = E_{y2}^+ + E_{y2}^- \quad (2.24)$$

$$H_{x1}^+ + H_{x1}^- = H_{x2}^+ + H_{x2}^- \quad (2.25)$$

$$H_{y1}^+ + H_{y1}^- - H_{y2}^+ - H_{y2}^- = -1 \quad (2.26)$$

e substituindo-se (2.21) e (2.22) em (2.25) e (2.26):

$$\begin{aligned} & (Y_1^e - Y_1^h) \text{sen} \phi \cos \phi (E_{x1}^+ - E_{x1}^-) + (Y_1^h \cos^2 \phi + Y_1^e \text{sen}^2 \phi) (E_{y1}^+ - E_{y1}^-) - \\ & -(Y_2^e - Y_2^h) \text{sen} \phi \cos \phi (E_{x2}^+ - E_{x2}^-) - (Y_2^h \cos^2 \phi + Y_2^e \text{sen}^2 \phi) (E_{y2}^+ - E_{y2}^-) = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & (Y_1^e - Y_1^h) \text{sen} \phi \cos \phi (E_{y1}^+ - E_{y1}^-) + (Y_1^h \text{sen}^2 \phi + Y_1^e \cos^2 \phi) (E_{x1}^+ - E_{x1}^-) - \\ & -(Y_2^e - Y_2^h) \text{sen} \phi \cos \phi (E_{y2}^+ - E_{y2}^-) - (Y_2^h \text{sen}^2 \phi + Y_2^e \cos^2 \phi) (E_{x2}^+ - E_{x2}^-) = 1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Analogamente para  $z=d_1$ :

$$E_{x1}^+ e^{-\gamma_1 d_1} + E_{x1}^- e^{\gamma_1 d_1} = E_{x0}^+ e^{-\gamma_0 d_1} \quad (2.29)$$

$$E_{y1}^+ e^{-\gamma_1 d_1} + E_{y1}^- e^{\gamma_1 d_1} = E_{y0}^+ e^{-\gamma_0 d_1} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} & (Y_1^e - Y_1^h) \text{sen} \phi \cos \phi \left( E_{x1}^+ e^{-\gamma_1 d_1} - E_{x1}^- e^{\gamma_1 d_1} \right) + \\ & + (Y_1^h \cos^2 \phi + Y_1^e \text{sen}^2 \phi) \left( E_{y1}^+ e^{-\gamma_1 d_1} - E_{y1}^- e^{\gamma_1 d_1} \right) = \\ & = (Y_0^e - Y_0^h) \text{sen} \phi \cos \phi E_{x0}^+ e^{-\gamma_0 d_1} + (Y_0^h \cos^2 \phi + Y_0^e \text{sen}^2 \phi) E_{y0}^+ e^{-\gamma_0 d_1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & (Y_1^e - Y_1^h) \text{sen} \phi \cos \phi \left( E_{y1}^+ e^{-\gamma_1 d_1} - E_{y1}^- e^{\gamma_1 d_1} \right) + \\ & + (Y_1^h \text{sen}^2 \phi + Y_1^e \cos^2 \phi) \left( E_{x1}^+ e^{-\gamma_1 d_1} - E_{x1}^- e^{\gamma_1 d_1} \right) = \\ & = (Y_0^e - Y_0^h) \text{sen} \phi \cos \phi E_{y0}^+ e^{-\gamma_0 d_1} + (Y_0^h \text{sen}^2 \phi + Y_0^e \cos^2 \phi) E_{x0}^+ e^{-\gamma_0 d_1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

e para  $z=-d_2$ :

$$E_{x2}^+ e^{\gamma_2 d_2} + E_{x2}^- e^{-\gamma_2 d_2} = E_{x0}^- e^{-\gamma_0 d_2} \quad (2.33)$$

$$E_{y2}^+ e^{\gamma_2 d_2} + E_{y2}^- e^{-\gamma_2 d_2} = E_{y0}^- e^{-\gamma_0 d_2} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} & (Y_2^e - Y_2^h) \text{sen} \phi \cos \phi \left( E_{x2}^+ e^{\gamma_2 d_2} - E_{x2}^- e^{-\gamma_2 d_2} \right) + \\ & + (Y_2^h \cos^2 \phi + Y_2^e \text{sen}^2 \phi) \left( E_{y2}^+ e^{\gamma_2 d_2} - E_{y2}^- e^{-\gamma_2 d_2} \right) = \\ & = -(Y_0^e - Y_0^h) \text{sen} \phi \cos \phi E_{x0}^- e^{-\gamma_0 d_2} - (Y_0^h \cos^2 \phi + Y_0^e \text{sen}^2 \phi) E_{y0}^- e^{-\gamma_0 d_2} \end{aligned} \quad (2.35)$$



$$\begin{aligned}
& (Y_2^e - Y_2^h) \operatorname{sen} \phi \cos \phi \left( E_{y_2}^+ e^{\gamma_2 d_2} - E_{y_2}^- e^{-\gamma_2 d_2} \right) + \\
& + (Y_2^h \operatorname{sen}^2 \phi + Y_2^e \cos^2 \phi) \left( E_{x_2}^+ e^{\gamma_2 d_2} - E_{x_2}^- e^{-\gamma_2 d_2} \right) = \\
& = -(Y_0^e - Y_0^h) \operatorname{sen} \phi \cos \phi E_{y_0}^- e^{-\gamma_0 d_2} - (Y_0^h \operatorname{sen}^2 \phi + Y_0^e \cos^2 \phi) E_{x_0}^- e^{-\gamma_0 d_2} \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Temos, então, um sistema de 12 equações e 12 incógnitas, cuja solução fornece os valores desejados (ver ANEXO C). Teremos então para o campo elétrico no plano  $z=0$  as seguintes expressões:

$$E_x(z=0) = (E_{x_1}^+ + E_{x_1}^-) e^{\gamma_x x + \gamma_y y} = (Z^e \cos^2 \phi + Z^h \operatorname{sen}^2 \phi) e^{\gamma_x x + \gamma_y y}$$

$$E_y(z=0) = (E_{y_1}^+ + E_{y_1}^-) e^{\gamma_x x + \gamma_y y} = (Z^e - Z^h) \operatorname{sen} \phi \cos \phi e^{\gamma_x x + \gamma_y y}$$

onde:

$$Z^e = \frac{1}{Y^{+e} + Y^{-e}} \quad Z^h = \frac{1}{Y^{+h} + Y^{-h}}$$

$$Y^{+e,h} = Y_1^{e,h} \frac{Y_1^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_1 d_1}{Y_0^{e,h} + Y_1^{e,h} \coth \gamma_1 d_1}$$

$$Y^{-e,h} = Y_2^{e,h} \frac{Y_2^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_2 d_2}{Y_0^{e,h} + Y_2^{e,h} \coth \gamma_2 d_2}$$

Procedendo-se de maneira análoga para uma distribuição de corrente na direção  $y$ , chegaremos a expressões análogas às anteriores, que relacionam a distribuição de corrente com o campo, tangencial ao plano  $z=0$ , por ela espalhado, de forma que pode-se escrever para uma densidade de corrente do tipo:

$$(J_x \hat{x} + J_y \hat{y}) e^{j(\alpha x + \beta y)}$$

a seguinte expressão para o campo elétrico no plano  $z=0$ :

$$\begin{bmatrix} E_x(z=0) \\ E_y(z=0) \end{bmatrix} = G_{2,2}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} e^{j(\alpha x + \beta y)} \quad (2.37)$$

sendo

$$G_{2,2}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

com

$$\begin{aligned} G_{xx} &= Z^e \cos^2 \phi + Z^h \sin^2 \phi \\ G_{yy} &= Z^e \sin^2 \phi + Z^h \cos^2 \phi \\ G_{xy} &= G_{yx} = (Z^e - Z^h) \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

lembrando que:

$$\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \sin \phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Como iremos trabalhar no domínio espectral, uma distribuição de corrente qualquer,  $J(x,y)$ , pode ser escrita como:

$$J_{(x,y)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(\alpha, \beta) e^{j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

onde  $\vec{J}(\alpha, \beta)$  é a transformada de Fourier da função distribuição de corrente. Ou seja qualquer distribuição de corrente pode ser escrita como a integral de componentes espectrais da forma apresentada em (2.15).

Como os meios são lineares, o campo espalhado, no plano  $z=0$ , será dado pela integral de suas componentes espectrais, obtidas de (2.37):

$$\vec{E}_i^s(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{G}_{2,2}(\alpha, \beta) \vec{J}(\alpha, \beta) e^{j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

Ou seja

$$\vec{E}_i^s(\alpha, \beta) = \vec{G}_{2,2}(\alpha, \beta) \cdot \vec{J}(\alpha, \beta)$$

é a transformada de Fourier do campo espalhado tangencial ao plano  $z=0$ .

Sendo a distribuição de corrente periódica, temos, como em (2.12), a seguinte expressão para o campo espalhado, tangencial ao plano  $z=0$ , em função da distribuição de corrente em uma célula,  $J_0(x, y)$ :

$$\vec{E}_i^s(\alpha, \beta) = \frac{4\pi^2}{ab \text{sen} \Omega_{m,n}} \sum \vec{G}_{2,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \cdot \vec{J}_0(\alpha_m, \beta_{mn}) \cdot \delta(\alpha - \alpha_m, \beta - \beta_{mn}) \quad (2.39)$$

O equacionamento torna-se, portanto, o mesmo apresentado na seção 2.1, logicamente com uma expressão mais complexa para a matriz  $G_{2,2}$ . Deve-se notar que também o campo incidente sobre o plano  $z=0$  deve ser modificado, para levar em conta a presença dos dielétricos.

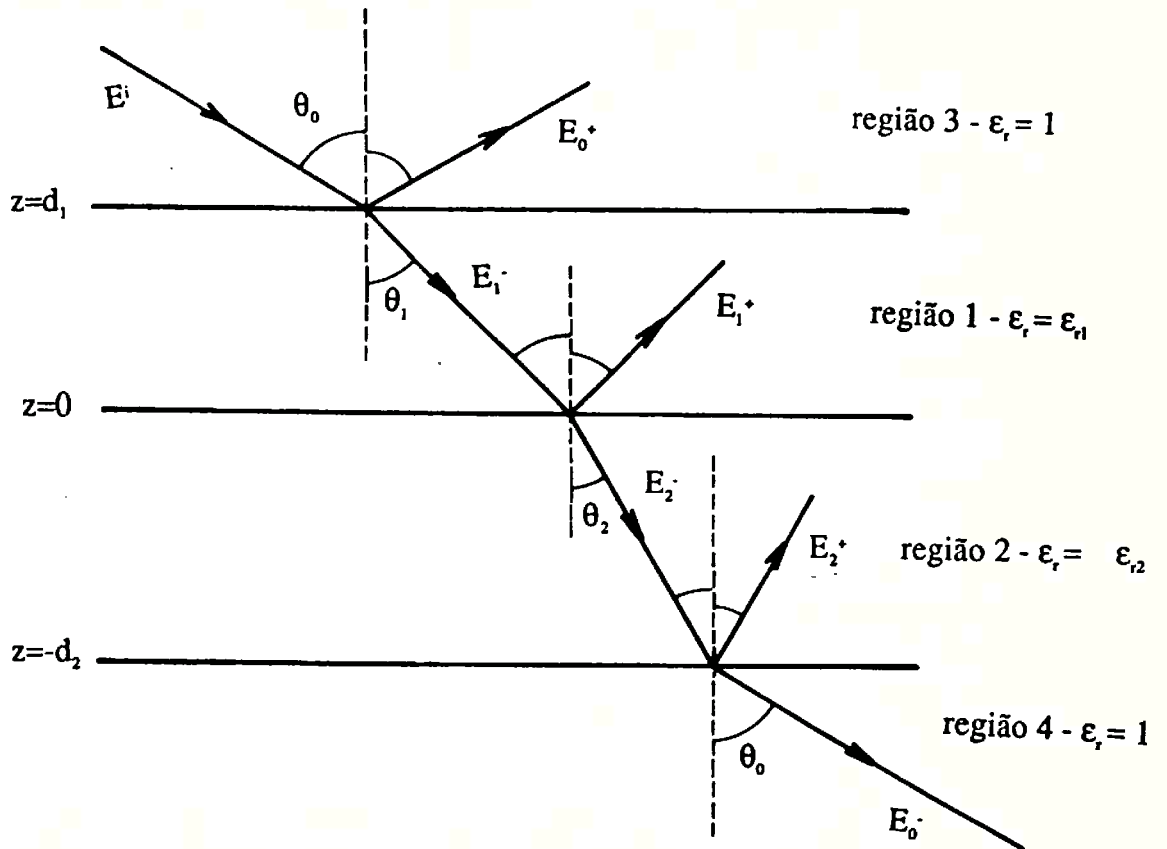


figura 2.5 - Campo incidente

(as setas indicam os sentidos de propagação das ondas)

A incidência de uma onda plana sobre a estrutura anteriormente descrita, provoca o aparecimento de um campo elétrico incidente no plano  $z=0^*$ . Esse campo incidente é o resultado de múltiplas reflexões nas interfaces entre os diversos meios, como mostrado na figura 2.5.

Consideremos, então, a incidência de uma onda plana, com campo elétrico de amplitude unitária dado pela expressão (2.1). Vamos considerar inicialmente incidência TE, com o campo elétrico na direção  $y$ .

Dessa forma a expressão para a onda incidente fica:

$$\vec{E}^i(x,y,z) = E_y^i(x,y,z)\hat{y} \quad (2.40a)$$

com

$$E_y^i(x,y,z) = e^{\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_0 z} \quad (z > d_1) \quad (2.40b)$$

Como anteriormente, aparecerão ondas nos diversos meios na forma:

$$E_{yi} = E_{0i}^+ \cdot e^{\gamma_x x + \gamma_y y - \gamma_i z} + E_{0i}^- \cdot e^{\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_i z}$$

$$i = 1,2$$

$$E_{y3} = E_{00}^+ \cdot e^{\gamma_x x + \gamma_y y - \gamma_0 z} \quad E_{y4} = E_{00}^- \cdot e^{\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_0 z}$$

com expressões análogas para o campo magnético, que terá então componentes nas direções  $y$  e  $z$ , valendo a seguinte relação, conforme demonstrou MARIOTTO<sup>(22)</sup>:

$$H_{xi}^+ = \frac{E_{yi}^+}{Z_i} \quad H_{xi}^- = -\frac{E_{yi}^-}{Z_i}$$

\*Além, é claro, do campo espalhado pela estrutura metálica, anteriormente calculado em função da corrente induzida.

onde

$$Z_i = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_i}} \cdot \sec \theta_i$$

Chamando-se de  $Z(z)$  a relação entre a componente  $y$  do campo elétrico e a componente  $x$  do campo magnético para um dado valor de  $z$ , temos que:

$$Z(-d_2) = -Z_0$$

pois na região 4 há apenas uma onda se propagando, que satisfaz a essa relação. Como deve haver continuidade das componentes tangenciais dos campos,  $Z(z)$  deve ser uma função contínua de  $z$ . Dessa forma utilizando-se as relações acima, pode-se obter facilmente o valor de  $Z(0)$ , conforme feito por MARIOTTO<sup>(23)</sup>:

$$Z(0) = -Z_2 \frac{Z(-d_2) - Z_2 \tanh(\gamma_2 d_2)}{-Z_2 + Z(-d_2) \tanh(\gamma_2 d_2)} \quad (2.41a)$$

e também de  $Z(d_1)$ :

$$Z(d_1) = -Z_1 \frac{Z(0) - Z_1 \tanh(\gamma_1 d_1)}{-Z_1 + Z(0) \tanh(\gamma_1 d_1)} \quad (2.41b)$$

definindo-se o coeficiente de reflexão na interface  $z=0$  como:

$$\Gamma_0 = \frac{E_{01}^+}{E_{01}^-} \quad (2.42a)$$

e o coeficiente de transmissão na interface  $z=d_1$  como:

$$T_1 = \frac{E_{y_1}(d_1)}{E_y^i(d_1)} \quad (2.42b)$$

é fácil mostrar, impondo-se a continuidade das componentes tangenciais dos campos, como feito também por MARIOTTO<sup>(22)</sup>, que:

$$\Gamma_0 = \frac{Z(0) + Z_1}{Z(0) - Z_1} \quad T_1 = \frac{2 \cdot Z(d_1)}{Z(d_1) - Z_0} \quad (2.43)$$

Dessa forma, substituindo-se (2.40b) e (2.42a) em (2.42b) temos:

$$T_1 \cdot e^{\gamma_0 d_1} = E_{y_1}(d_1) = E_{01}^- e^{\gamma_1 d_1} + \Gamma_0 E_{01}^- e^{-\gamma_1 d_1}$$

e então

$$E_{01}^- = \frac{T_1 e^{\gamma_0 d_1}}{e^{\gamma_1 d_1} + \Gamma_0 e^{-\gamma_1 d_1}}$$

e de (2.42a):

$$E_{01}^+ = \Gamma_0 \cdot E_{01}^-$$

Substituindo-se (2.43) nas relações anteriores chega-se a:

$$E_{01}^- = \frac{\gamma_0 e^{\gamma_0 d_1}}{D \cdot \sinh \gamma_1 d_1} [\gamma_2^2 + \gamma_0 \gamma_1 + (\gamma_0 + \gamma_1) \gamma_2 \coth \gamma_2 d_2] \quad (2.44a)$$

$$E_{01}^+ = \frac{-\gamma_0 e^{\gamma_0 d_1}}{D \cdot \sinh \gamma_1 d_1} [\gamma_2^2 - \gamma_0 \gamma_1 + (\gamma_0 - \gamma_1) \gamma_2 \coth \gamma_2 d_2] \quad (2.44b)$$

sendo D, dado por:

$$D = (\gamma_0^2 + \gamma_1^2) \gamma_2 \coth \gamma_2 d_2 + (\gamma_0^2 + \gamma_2^2) \gamma_1 \coth \gamma_1 d_1 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \gamma_0 + 2\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \coth \gamma_2 d_2 \coth \gamma_1 d_1$$

e, então, o campo elétrico incidente em  $z=0$  é dado por:

$$E_{0y}^i(z=0) = (E_{01}^+ + E_{01}^-) e^{\gamma_x x + \gamma_y y}$$

É fácil mostrar, por simples rotação de eixos, que no caso do campo elétrico, modo TE, incidir segundo um ângulo  $\phi$  em relação ao eixo  $x$ , o campo incidente em  $z=0$  será:

$$\vec{E}_i^i(z=0) = (E_{01}^+ + E_{01}^-) e^{\gamma_x x + \gamma_y y} \cdot (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \quad (2.45)$$

Aplicando-se raciocínio análogo para incidência no modo TM, chega-se a:

$$E_{01}^- = \frac{\gamma_0 e^{\gamma_0 d_1} \cos \theta_1}{D \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \sinh \gamma_1 d_1} [\bar{\gamma}_2^2 + \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + (\gamma_0 + \bar{\gamma}_1) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 d_2] \quad (2.46a)$$

$$E_{01}^+ = \frac{\gamma_0 e^{\gamma_0 d_1} \cos \theta_1}{D \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \sinh \gamma_1 d_1} [\bar{\gamma}_2^2 - \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + (\gamma_0 - \bar{\gamma}_1) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 d_2] \quad (2.46b)$$



sendo  $D$ , dado por:

$$D = (\gamma_0^2 + \bar{\gamma}_1^2)\bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 d_2 + (\gamma_0^2 + \bar{\gamma}_2^2)\bar{\gamma}_1 \coth \gamma_1 d_1 + \\ + (\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2)\gamma_0 + 2\gamma_0\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 d_2 \coth \gamma_1 d_1$$

e com

$$\bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\epsilon_{ri}}$$

tendo-se então:

$$\bar{E}_i^i(z=0) = (E_{01}^+ + E_{01}^-) e^{\gamma_i x + \gamma_i y} \cdot (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) \quad (2.47)$$

Transformando-se segundo Fourier a expressão (2.45) ou (2.47) obtém-se:

$$\bar{E}_i^i(\alpha, \beta) = \bar{E}_{\alpha y} 4\pi^2 \delta(\alpha - K_0 \sin \theta \cos \phi) \delta(\beta - K_0 \sin \theta \sin \phi) \quad (2.48)$$

Essa expressão é similar à expressão (2.13) obtida em 2.1, apenas com uma maior complexidade na expressão do vetor  $\bar{E}_{\alpha y}$ . No ANEXO C são apresentadas, também, as expressões das ondas nas regiões de vácuo, que serão utilizadas na próxima seção.

Assim, para determinar-se a distribuição de corrente na estrutura basta impor-se a condição de contorno do campo elétrico total no plano  $z=0$  (que deve ser nulo sobre os condutores) exatamente como feito na seção 2.1 com a equação (2.14), e com as mesmas restrições sobre a distribuição de corrente.

## 2.3 Coeficientes de Reflexão e Transmissão

Conhecida, então, a densidade de corrente em uma das células da estrutura, quando da incidência da onda plana especificada, deseja-se determinar os seus

coeficientes de reflexão e transmissão. Utilizando a expressão (2.11b) ou (C.16) podemos determinar a amplitude de cada uma das ondas planas radiadas\* pela estrutura nos semi-espacos  $z>0$  e  $z<0$  (ou  $z>d_1$  e  $z<-d_2$  para o caso com dielétricos). Nessas expressões temos somatórias de ondas planas propagantes, cada uma numa direção diferente especificada pelos índices  $m$  e  $n$ , ou evanescentes.

Chamaremos então de  $E_{mn}^+$  à onda propagante na região de  $z$  positivo na direção especificada pelos índices  $m$  e  $n$ , e de  $E_{mn}^-$  a onda propagante na região de  $z$  negativo.

Para  $m=n=0$  deve-se somar a onda incidente à onda gerada pela distribuição de corrente na estrutura para a determinação dos coeficientes de reflexão e transmissão, pois elas propagam-se na mesma direção e no mesmo sentido, conforme ilustra a figura 2.6. Deve-se notar que, na ausência de dielétrico, deve-se somar a contribuição da onda incidente apenas no semi-espaco  $z<0$  (onda transmitida), pois nesse caso as únicas ondas refletidas de volta ao semi-espaco  $z>0$  são as ondas geradas pela distribuição de corrente na estrutura. Já para o caso com dielétrico, há, de forma geral, uma onda refletida (para a região de  $z$  positivo) e uma onda transmitida (para a região de  $z$  negativo) produzidas apenas pela incidência da onda no dielétrico, na forma explicitada na expressão (C.28).

Dessa forma temos, para  $(m,n) \neq (0,0)$ :

$$\vec{E}_{mn}^+ = \vec{E}_{mn}^+ e^{jK_0(\text{sen}\theta \cos\phi'x + \text{sen}\theta \text{sen}\phi'y - \cos\theta z)}$$

e

$$\vec{E}_{mn}^- = \vec{E}_{mn}^- e^{jK_0(\text{sen}\theta \cos\phi'x + \text{sen}\theta \text{sen}\phi'y + \cos\theta z)}$$

---

\*Portanto estamos considerando apenas as ondas não evanescentes:  $K_y > \alpha_m^2 + \beta_n^2$

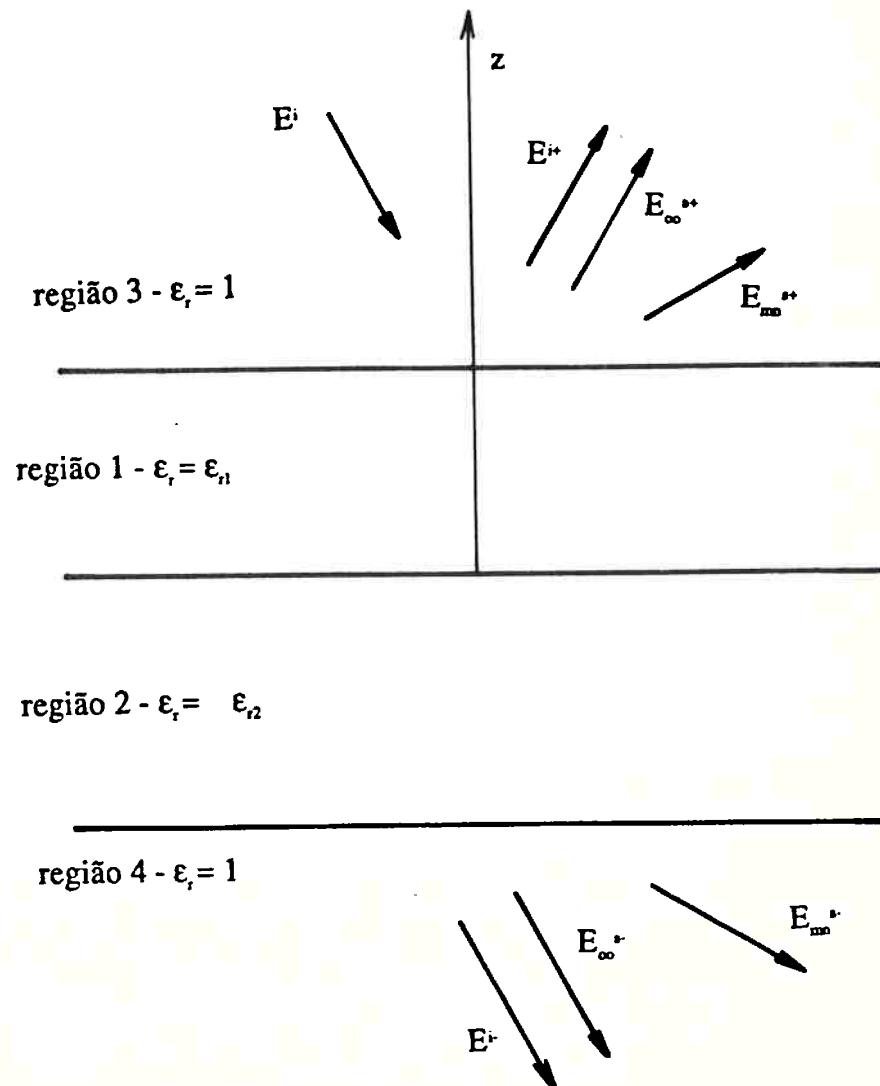


figura 2.6 - Ondas refletidas e transmitidas  
(as setas indicam os sentidos de propagação das ondas)

sendo os co-senos e senos funções de  $m$  e  $n$  dadas por (2.11c). Aqui, o superscrito  $s$  refere-se ao campo espalhado produzido pela corrente em  $z=0$ , e o subscrito  $mn$  à parcela da somatória em (2.11b) ou (C.16).

E para  $(m,n)=(0,0)$ :

$$\bar{E}_{00}^+ = (\bar{E}_{00}^{s+} + \bar{E}^{i+}) e^{jK_0(\text{sen}\theta' \cos\phi'x + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi'y - \cos\theta'z)}$$

e

$$\bar{E}_{00}^- = (\bar{E}_{00}^{s-} + \bar{E}^{i-}) e^{jK_0(\text{sen}\theta' \cos\phi'x + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi'y + \cos\theta'z)}$$

O superscrito  $i$  refere-se ao campo refletido ou transmitido devido apenas à onda incidente. Dessa forma, no caso da estrutura estar imersa no vácuo,  $\bar{E}^{i+}$  será nulo, e  $\bar{E}^{i-}$  será dado por (2.1b). No caso de haver um substrato e/ou superstrato dielétrico, as componentes de  $\bar{E}^{i+}$  têm a forma apresentada em (C.27).

Dessa forma, o coeficiente de reflexão de potência\*, na direção dada por  $(m,n)$  genérico (correspondente a uma onda propagante), será dado por:

$$||\Gamma_{mn}||^2 = ||\bar{E}_{mn}^{i+}||^2 \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \quad (2.49a)$$

e o coeficiente de transmissão:

$$||T_{mn}||^2 = ||\bar{E}_{mn}^{i-}||^2 \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \quad (2.49b)$$

---

\*Pois foi suposto um campo elétrico incidente de amplitude unitária, incidindo segundo um ângulo  $\theta$  em relação à normal ao plano  $z=0$ .

sendo  $\cos\theta'$  dado por (2.11c), e:

$$||E||^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$$

Portanto o coeficiente de reflexão de potência total seria dado por

$$||\Gamma||^2 = \sum_{mn} |\Gamma_{mn}|^2 \quad (2.50a)$$

e o de transmissão:

$$||T||^2 = \sum_{mn} |T_{mn}|^2 \quad (2.50b)$$

Logicamente para o caso sem perdas deve-se obter:

$$|T|^2 + |\Gamma|^2 = 1$$

### 3 MÉTODO DOS MOMENTOS

Vamos considerar um operador linear  $L$  que, operando sobre funções de um domínio  $D$ , gera outras funções pertencentes a uma imagem  $I$ , ou seja:

$$L(f) = g \quad f \in D \quad , \quad g \in I \quad (3.1)$$

Seja então dado o seguinte problema: determinar a função  $f$  pertencente ao domínio  $D$  tal que o operador  $L$ , aplicado a essa função, seja igual a uma dada função  $g$  pertencente à imagem de  $L$ . Se esse operador  $L$  for tal que associe a cada diferente função de seu domínio uma função diferente de sua imagem, podemos definir um outro operador,  $L^{-1}$ , que operando sobre funções pertencentes a  $I$ , gere funções em  $D$ , e tal que:

$$L^{-1}[L(f)] = f$$

Esse operador é denominado operador inverso de  $L$ . Dessa forma a solução da equação (3.1) pode ser dada por:

$$f = L^{-1}(g) \quad (3.2)$$

O problema que aparece na grande maioria dos casos em que temos que resolver uma equação do tipo (3.1) é que o operador inverso não pode ser analiticamente determinado, e portanto a solução (3.2) não pode ser diretamente obtida.

Vamos, então, supor que uma função qualquer do domínio  $D$  possa ser escrita como uma somatória de certas funções conhecidas, desse mesmo domínio,

multiplicadas por determinados coeficientes. Isso será possível se essas funções formarem uma base completa em  $D$ . Dessa forma a nossa função  $f$  pode ser escrita como:

$$f = \sum_i a_i f_i \quad (3.3)$$

sendo as funções  $f_i$  conhecidas, e os coeficientes  $a_i$  incógnitas a serem determinadas.

Como o operador  $L$  é linear temos, substituindo (3.3) em (3.1), que:

$$\sum_i a_i L(f_i) = g \quad (3.4)$$

Definindo-se um produto escalar entre duas funções de  $I$ ,  $g_1$  e  $g_2$ , com a notação  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , e escolhendo-se então um outro conjunto de funções pertencentes à imagem  $I$ , denominadas de funções peso,  $w_j$  (para  $j=1,2,\dots$ ), vamos agora efetuar o produto escalar de cada uma dessas funções pela equação (3.4), obtendo-se então:

$$\sum_i a_i \langle L(f_i), w_j \rangle = \langle g, w_j \rangle \quad (3.5)$$

Para cada  $j$  temos então uma equação nas variáveis  $a_i$ , formando-se assim um sistema de equações lineares, que pode agora ser resolvido para a obtenção desses coeficientes e, portanto, da nossa função incógnita  $f$ .

Vemos pois que o método apresentado acima permite a solução de qualquer equação integral ou diferencial, por serem esses operadores lineares, bastando para isso que se escolham um conjunto de funções de base, um conjunto de funções peso e um produto escalar adequados ao problema.

A escolha das funções de base deve ser feita de maneira que elas formem uma base completa sobre o domínio, de modo que qualquer função do domínio possa ser representada adequadamente por essas funções. Além disso elas devem ser linearmente independentes, para que o sistema de equações obtido não seja indeterminado. É aconselhável também que essas funções sejam escolhidas de maneira que a função incógnita possa ser adequadamente aproximada com um número finito (e o menor possível) de termos, pois, como pode-se perceber, para aplicações práticas a somatória (3.3) deve ser truncada em um número finito de termos, levando, de forma geral, a um erro que deve diminuir com aumento do número de funções de base utilizadas. Portanto a utilização de funções que já possuam certas características conhecidas da função incógnita pode levar a um número menor de incógnitas no sistema a ser resolvido, para uma dada precisão, tendo então como consequência a necessidade de menos memória, um menor tempo de processamento e menos erros de arredondamento.

A escolha das funções peso segue em geral duas linhas básicas: a utilização de funções do tipo delta de Dirac ou a utilização das próprias funções de base. A primeira, que corresponde a impor-se a validade da equação (3.4) sobre um conjunto discreto de pontos da imagem, leva em geral a uma formulação mais simples e garante a exata igualdade dessa equação sobre os pontos utilizados, mas pode, e isso acontece em diversos problemas, levar a erros muito grandes fora desses pontos.

A segunda escolha implica na ponderação do erro segundo a própria função de base, e dessa forma, quando a imagem coincide com o domínio, garante em geral erros menores do que no caso anterior, a custo de uma maior complexidade na formulação. Além disso, com a escolha de um produto escalar adequado, ela produz em diversos casos equações que estão intimamente ligadas à energia do sistema, dando uma interpretação física às equações obtidas. O método que utiliza as próprias funções de base como funções peso é denominado método de Galerkin.



Maiores detalhes sobre o método dos momentos são apresentados por HARRINGTON<sup>(12)</sup>, e também nas próximas seções, que exemplificam a escolha de funções de base adequadas, a utilização do método de Galerkin e a sua relação com a conservação da potência.

### 3.1 Aplicação ao Problema

A função  $J_0(x,y)$  a ser determinada pode ser escrita como uma somatória de funções de base:

$$J_0(x,y) = \sum_i c_i \bar{J}_i(x,y) \quad (3.6)$$

onde  $J_i(x,y)$  é uma função nula para  $(x,y)$  fora das tiras condutoras. Outra alternativa seria utilizar-se funções de base com suporte ilimitado\* e impor-se que a série obtida tenha suporte finito, entretanto essa opção pareceu um tanto complexa para o problema em questão.

Esse conjunto de funções a ser utilizado deve formar uma base completa sobre cada tira, e é necessário que a solução obtida satisfaça às condições de gume aplicáveis, que serão apresentadas mais adiante.

Assim, cada diferente conjunto de valores  $c_i$  define uma função diferente, mas sempre nula para  $(x,y)$  fora das tiras, e todas as funções nulas para  $(x,y)$  fora das tiras, podem ser representadas por um conjunto de valores  $c_i$ .

---

\*Função de suporte finito ou limitado é aquela que tem valor não nulo apenas sobre uma região finita (ou limitada) do domínio, ao contrário das funções de suporte ilimitado.

\*isto decorre da própria definição de base completa sobre um domínio.

Dessa forma, substituindo-se (3.6) em (2.12) ou (2.39), o campo espalhado pode ser escrito como:

$$\vec{E}_i^s(\alpha, \beta) = \frac{4\pi^2}{ab \text{sen} \Omega} \sum_i c_i \sum_{m,n} \vec{G}_{2,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \mathcal{J}_i(\alpha_m, \beta_{mn}) \cdot \delta(\alpha - \alpha_m, \beta - \beta_{mn}) \quad (3.7)$$

sendo  $\mathcal{J}_i$  a transformada de Fourier de  $J_i$ .

Definiremos o produto escalar de duas funções  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  como sendo\*:

$$\langle f, g \rangle = \int_S f^* \cdot g \, dS$$

Utilizaremos em nossa formulação o método de Galerkin, ou seja, as funções peso serão as próprias funções de base. Dessa forma, efetuando-se o produto escalar de cada uma das funções de base escolhidas, com o campo espalhado, dado por (3.7), e com o campo incidente, dado por (2.13) ou (2.48), e somando-se os resultados, temos que essa soma deve ser nula, pois o campo elétrico total tangente ao plano  $z=0$  deve ser nulo sobre os condutores, e no procedimento descrito estamos justamente multiplicando o campo total pelas funções de base, que são não nulas apenas sobre os condutores, e integrando o resultado. Teremos, portanto, um conjunto de equações lineares da forma:

$$\langle \vec{J}_j(x,y), \vec{E}_i^s(x,y) \rangle = \langle \vec{J}_j(x,y), -\vec{E}_i^i(x,y) \rangle$$

---

\*No caso de vetores e matrizes, o superscrito \* indica transposto conjugado

ou seja:

$$\int_S \vec{J}_j(x,y) \cdot \vec{E}_i^s(x,y) dS = - \int_S \vec{J}_j(x,y) \cdot \vec{E}_i^i(x,y) dS \quad (3.8a)$$

Transformada por Fourier, a equação acima passa a ser escrita como:

$$[\vec{J}_j(-\alpha, -\beta) * \vec{E}_i^s(\alpha, \beta)]_{\alpha=0, \beta=0} = -[\vec{J}_j(-\alpha, -\beta) * \vec{E}_i^i(\alpha, \beta)]_{\alpha=0, \beta=0} \quad (3.8b)$$

Substituindo-se (3.7) e (2.13) ou (2.48) em (3.8b) obtemos:

$$\frac{1}{\text{absen} \Omega_i} \sum c_i \sum_{m,n} \vec{J}_j(\alpha_m, \beta_{mn}) G_{2,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \vec{J}_i(\alpha_m, \beta_{mn}) = -\vec{J}_j(\alpha_0, \beta_{00}) \vec{E}_{\alpha\gamma} \quad (3.9)$$

que é, para cada  $j$ , uma equação linear nas incógnitas  $c_i$ . Temos assim um sistema de infinitas equações e infinitas incógnitas, cuja solução nos fornece os coeficientes  $c_i$  que, substituídos em (3.6), nos fornecem a solução exata para a distribuição de corrente no plano  $z=0^*$ .

Para a solução prática do problema, no entanto, torna-se necessário utilizar-se um número finito de funções de base, o que nos leva a uma solução aproximada para o problema proposto, porém tão mais precisa quanto maior for o número de funções utilizadas. Dessa forma obtemos uma equação matricial na forma  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , onde o vetor  $\mathbf{x}$  é o vetor das incógnitas  $c_i$ . O número de incógnitas será igual ao número  $N$  de funções de base utilizadas, e o número de equações será dado pelo número  $M$  de funções peso, onde  $M$  deve ser maior ou igual a  $N$ .

---

\*Obviamente será a solução exata apenas se as funções de base formarem uma base ortonormal completa sobre o domínio analisado.

Para o caso em que se escolhe  $M=N$  a solução de (3.9) é dada por:

$$x = A^{-1} \cdot b \quad (3.10)$$

obtendo-se assim os valores de  $c$ , desejados.

Pode-se optar porém por  $M>N$ , e, nesse caso, o sistema pode não ter solução exata. Então o vetor  $x$  pode ser escolhido de forma a minimizar-se o erro quadrático médio, onde o erro  $e$  é dado por:

$$e = b - A \cdot x$$

Dessa forma  $x$  será obtido por:

$$x = (A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^* \cdot b \quad (3.11)$$

Essa escolha de se sobredimensionar o sistema a ser resolvido pode ser interessante principalmente no caso da utilização da técnica de "point-matching", apresentada por HARRINGTON<sup>(12)</sup>, onde muitas vezes a solução obtida apresenta erros bem elevados na região entre os pontos escolhidos para o "casamento". Ela torna-se assim uma maneira de "integrarmos" o erro total, de forma a minimizá-lo. Na implementação feita neste trabalho, como optou-se pela utilização do método de Galerkin, decidiu-se não efetuar nenhum sobredimensionamento, pois esse método em si já efetua uma integração ponderada do erro total. Porém uma investigação dos efeitos do sobredimensionamento, mesmo nesse caso, deverá ser realizada futuramente.

### 3.2 Escolha das Funções de Base

O problema da determinação de um conjunto de funções de base adequado é, de forma geral, muito complexo, pois não há nenhuma regra específica a ser seguida. É indispensável que as funções escolhidas sejam linearmente independentes no domínio analisado pois, caso contrário, o sistema de equações obtido tornar-se-á indeterminado, já que nesse caso pelo menos uma das funções pode ser escrita como uma combinação linear das demais. Além disso esse conjunto deve ser completo, de forma que qualquer função desse domínio possa ser representada pela somatória de um número, mesmo que infinito, dessas funções.

Há duas grandes classes de funções de base utilizadas, as que são definidas em todo o domínio da função incógnita (entire domain basis functions - EBF) e as que são definidas, cada uma, em uma pequena região do domínio (subdomain basis functions - SBF), definidas por HARRINGTON<sup>(2)</sup>. A principal vantagem das funções definidas em todo o domínio é que o tamanho da matriz obtida pela aplicação do método dos momentos é usualmente muito menor do que com as do outro tipo. Isso implica em menor tempo de processamento e utilização de menos memória de computador. Entretanto para elementos condutores de formato arbitrário, ou com condutividade finita e não uniforme, a utilização de funções definidas sobre pequenas regiões pode se tornar a única escolha.

Como será apresentado nas próximas seções, optou-se (para a utilização como EBF's ou SBF's) por funções de base cujo suporte sejam retângulos, que podem ser aplicadas diretamente ao problema de estruturas decomponíveis em tiras metálicas retangulares, e que também permitem a aproximação de outros tipos de estruturas, desde que os elementos retangulares sejam suficientemente pequenos. Além disso, essa opção pareceu ser a mais simples para a implementação de uma rotina para a análise de FSS's. Cabe ressaltar, no entanto, que pretende-se futuramente estudar outras classes de funções que possam ser mais adequadas a determinadas estruturas, como as formadas por anéis circulares, por exemplo.

Para o tipo de estrutura que será abordado em 3.2.2, que consiste de células formadas por tiras retangulares condutoras perfeitas e isoladas, a utilização de funções definidas em todo o domínio apresenta-se como a melhor escolha. Dentro dessa classe deve-se adotar um conjunto de funções de base que, primeiramente, sejam analiticamente transformáveis por Fourier, pois, caso contrário, seria necessário calcular-se numericamente as suas transformadas (integrais duplas), o que seria tremendamente dispendioso computacionalmente.

Além disso é altamente desejável que as funções escolhidas obedeçam às condições de gume adequadas (que serão apresentadas na seção 3.2.1), pois, dessa forma, o número de funções de base necessário para representar adequadamente a distribuição de corrente obtida torna-se bem menor, pois as funções já incorporam o comportamento da solução próximo às bordas. Note-se que isso não implica que a solução final, dada por uma somatória de infinitas funções de base, irá necessariamente satisfazer às condições de gume.

Já no caso de tiras não isoladas a utilização de SBF's pode ser mais adequada, devido à grande diversidade de estruturas desse tipo, se bem que alguns casos específicos podem ser tratados com maior facilidade através de EBF's.

### 3.2.1 Condição de Gume

Na solução de problemas de difração, é sabido que próximo a gumes o campo eletromagnético pode se tornar infinito, sendo a ordem dessa singularidade sujeita à chamada condição de gume (edge condition). A condição de gume implica em que a densidade de energia eletromagnética deve ser integrável sobre um volume finito, mesmo que esse volume contenha singularidades, ou seja, em qualquer volume finito, a energia eletromagnética armazenada deve ser também finita.

MEIXNER<sup>(24)</sup>, estudou o comportamento dessas singularidades próximo a gumes dielétricos e condutores perfeitos, para os casos onde há uma tangente bem definida ao longo do gume, considerado localmente reto. Interessa-nos no momento apenas o comportamento do campo eletromagnético para gumes de condutor perfeito com abertura de  $360^\circ$  (borda de um semi-plano condutor perfeito), colocado entre dois meios com constantes dielétricas eventualmente diferentes.

Pelo que foi então demonstrado, temos que, para o caso em questão, as componentes dos campos elétrico e magnético paralelas ao gume são finitas, enquanto que as componentes ortogonais a ele tendem a infinito com uma singularidade do tipo  $r^{-1/2}$ .

Estamos interessados, porém, no comportamento da corrente superficial próximo às bordas de tiras condutoras. Para obtê-lo vamos primeiramente considerar uma espira circular de raio  $r$  com eixo coincidente com a borda de uma tira. Aplicando-se a segunda equação de Maxwell a essa espira obtemos:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \times d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times d\vec{S}$$

Adotando-se um sistema de coordenadas cilíndricas com eixo coincidente com a borda, obtemos:

$$\oint_{\Gamma} H_{\phi} dl = \iint_S \left( J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \right) dS$$

sendo S o círculo de borda  $\Gamma$ .

Como a componente  $D_z$  é finita\*, fazendo-se  $r$  tender a zero temos que a segunda parcela da segunda integral tende a zero. Sabendo-se, também, pelo que foi descrito por MEIXNER<sup>(24)</sup>, que próximo à borda  $H_{\phi}$  é dado por:

$$H_{\phi} = \beta_0 \cdot r^{-\frac{1}{2}}$$

onde  $\beta_0$  só depende de  $\phi$  e  $z$  e lembrando que só existe corrente sobre a tira ( $J_s$ ) temos que:

$$\int_0^{2\pi} H_{\phi} r d\phi = \int_0^r J_{sz} dr'$$

ou seja:

$$r^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \beta_0 d\phi = \int_0^r J_{sz} dr'$$

O que, derivando-se em relação a  $r$  nos leva a:

$$J_{sz} = f(z) r^{-\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

\*Já que ela é paralela à borda, e  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ , que de acordo com MEIXNER<sup>(24)</sup> tem componente paralela à borda finita.



Ou seja, a componente de corrente superficial paralela à borda das tiras condutoras tem um comportamento assintótico do tipo  $r^{-1/2}$ .

Para determinar-se a componente de  $J_s$  perpendicular à borda, vamos tomar um cilindro, de eixo colinear com a borda, de altura  $\Delta h$  e raio  $r$ . Nesse volume vamos aplicar a equação da continuidade:

$$\oint_{\Sigma} \mathcal{J} \times \overline{dS} = - \oint_{\Sigma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \times \overline{dS}$$

Fazendo-se o raio desse cilindro tender a zero, temos que as parcelas da integral do segundo membro sobre as bases do cilindro podem ser desprezadas, pois  $E_z$  tende a zero quando  $r$  tende a zero. Dessa forma a equação pode ser escrita na forma fasorial como:

$$\int_0^{\Delta h} J_{sr} dz + \int_0^r (J_{sz}(z = \Delta h) - J_{sz}(z = 0)) dr = -j\omega \int_0^{\Delta h} \int_0^{2\pi} D_r \cdot r d\phi dz$$

De (3.12) e do que foi demonstrado por MELXNER<sup>(24)</sup>, temos para  $r$  tendendo a zero:

$$J_{sr} = g(r)h(z) \quad J_{sz} = f(z)r^{-\frac{1}{2}} \quad D_r = \epsilon a_0(z, \phi)r^{-\frac{1}{2}}$$

que substituídos nas integrais levam a:

$$k_1 g(r) + k_2 r^{\frac{1}{2}} = k_3 r^{\frac{1}{2}}$$

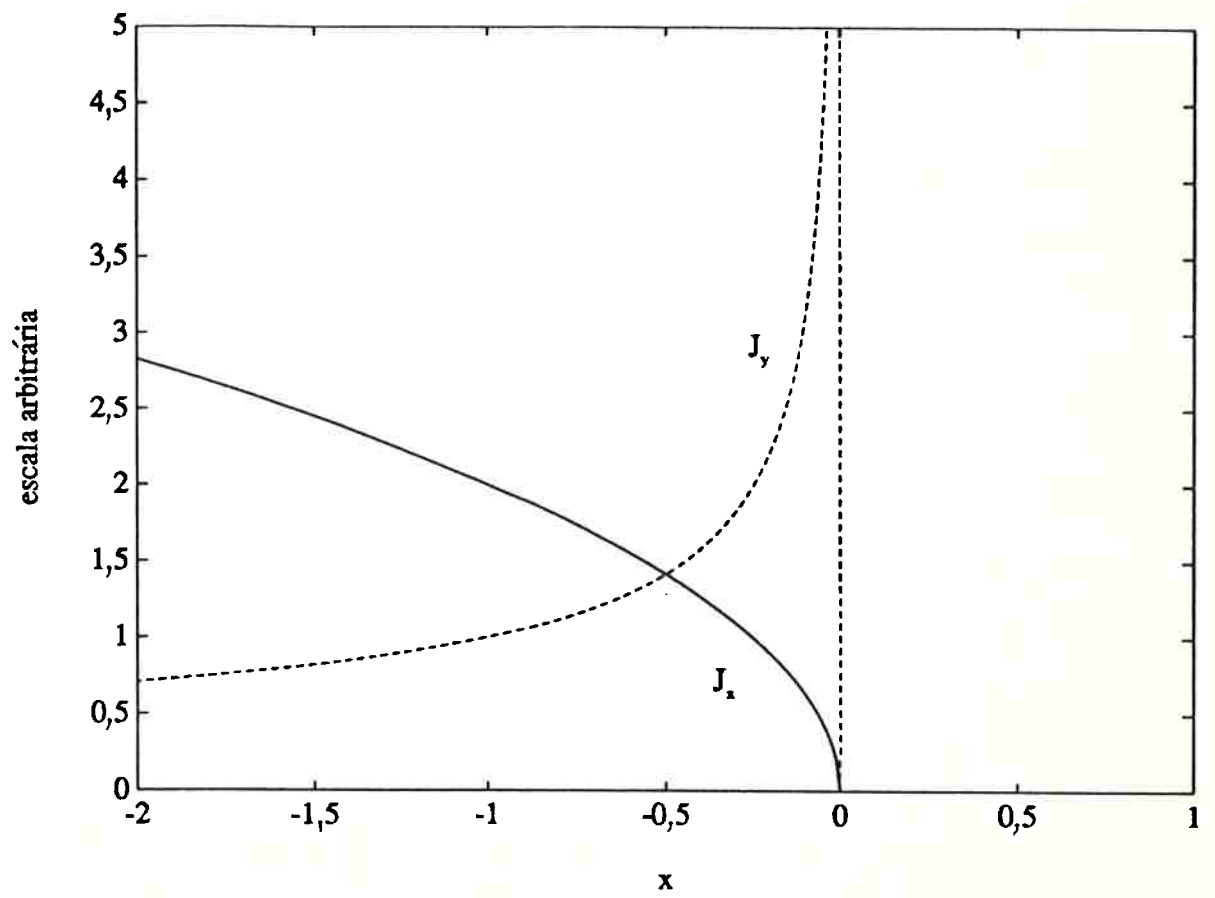


figura 3.1 - Distribuição da corrente próximo a um gume ( $x=0$ )

e portanto:

$$J_{sr} = h(z) r^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

ou seja, a componente da corrente superficial ortogonal à borda da tira condutora tem um comportamento assintótico do tipo  $r^{1/2}$  para pontos próximos da borda.

A figura 3.1 mostra graficamente o comportamento que as componentes da distribuição de corrente, a paralela (curva tracejada) e a ortogonal (curva contínua) às bordas das tiras condutoras, devem apresentar.

Dessa forma, é desejável que as funções de base escolhidas para representar a distribuição de corrente nas tiras obedçam às condições obtidas anteriormente, e é o que se propõe com as funções apresentadas na próxima seção. Note-se também que seria necessário impor-se de alguma forma que a condição de gume seja realmente satisfeita, mesmo quando o número de funções de base utilizadas seja infinito. Porém não foi encontrada na literatura nenhuma forma de se impor essa condição, ou de verificar-se se ela será realmente atendida, e nenhum dos exemplos tratados em todos os artigos pesquisados preocupou-se com essa condição, razão pela qual neste trabalho também não foi estudado esse aspecto. Esse assunto precisará, no entanto, ser profundamente analisado em trabalhos futuros.

### 3.2.2 Tiras Retangulares Isoladas

Com base na análise feita por BUTLER<sub>(4)</sub>, para a determinação da distribuição de corrente em tiras estreitas, o conjunto de funções de base escolhido para representar a distribuição de corrente numa tira retangular isolada, condutora perfeita, centrada na origem, e com os lados paralelos aos eixos  $x$  e  $y$  de dimensões  $a_0$  e  $b_0$  respectivamente, é o equacionado a seguir:

função de menor ordem

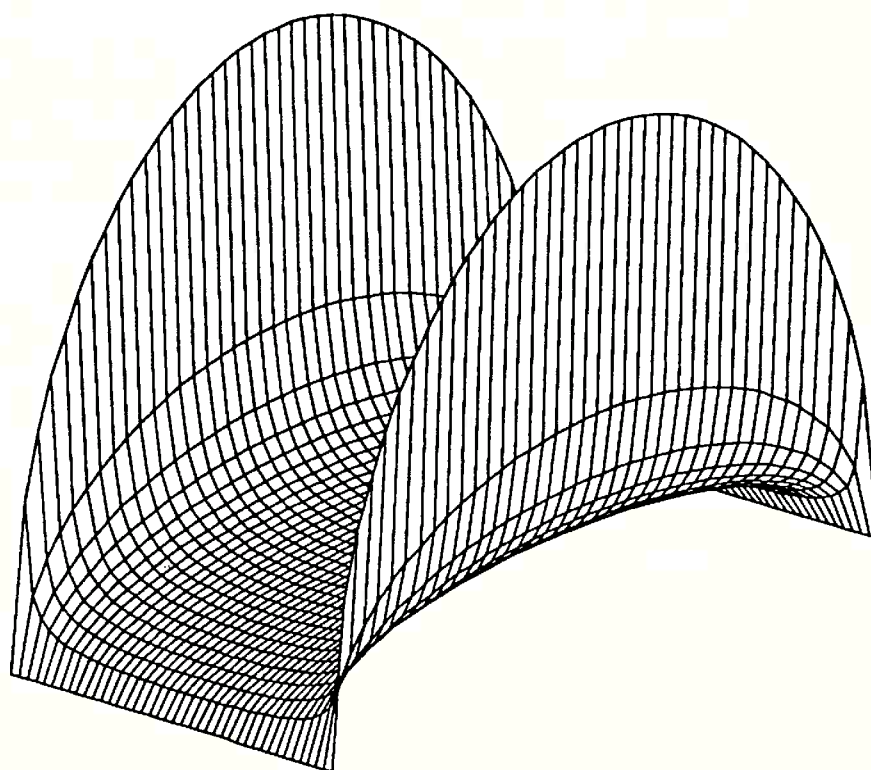


figura 3.2 - Função de base para tiras retangulares

$$J_{xi} = T_n\left(\frac{2y}{b_0}\right) \cdot U_m\left(\frac{2x}{a_0}\right) \cdot \sqrt{\frac{1 - (2x/a_0)^2}{1 - (2y/b_0)^2}} \cdot \Pi\left(\frac{x}{a_0}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{b_0}\right) \quad (3.14a)$$

$$J_{yi} = T_m\left(\frac{2x}{a_0}\right) \cdot U_n\left(\frac{2y}{b_0}\right) \cdot \sqrt{\frac{1 - (2y/b_0)^2}{1 - (2x/a_0)^2}} \cdot \Pi\left(\frac{x}{a_0}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{b_0}\right) \quad (3.14b)$$

onde  $T_n$  e  $U_n$  são os polinômios de Chebyshev de ordem  $n$ , do primeiro e segundo tipo, respectivamente, e  $\Pi(\cdot)$  é a função porta, valendo 1 para argumentos com módulo menor ou igual a 0.5 e zero caso contrário. A função de menor ordem está ilustrada na figura 3.2.

É facilmente demonstrável que as funções acima obedecem às condições de gume desejadas, e que além disso formam uma base ortonormal completa sobre o quadrilátero da tira considerada (ver por exemplo GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup> p.833 e 1024).

No caso da tira considerada estar centrada nas coordenadas  $(x_i, y_i)$  e apresentar-se inclinada de um ângulo  $\Omega_i$ , basta efetuar-se algumas substituições nas expressões acima, como segue:

$$J_{1i} = T_n\left(\frac{2v}{b_0}\right) \cdot U_m\left(\frac{2u}{a_0}\right) \cdot \sqrt{\frac{1 - (2u/a_0)^2}{1 - (2v/b_0)^2}} \cdot \Pi\left(\frac{u}{a_0}\right) \cdot \Pi\left(\frac{v}{b_0}\right) \quad (3.15a)$$

$$J_{2i} = T_m\left(\frac{2u}{a_0}\right) \cdot U_n\left(\frac{2v}{b_0}\right) \cdot \sqrt{\frac{1 - (2v/b_0)^2}{1 - (2u/a_0)^2}} \cdot \Pi\left(\frac{u}{a_0}\right) \cdot \Pi\left(\frac{v}{b_0}\right) \quad (3.15b)$$

sendo

$$u = (x - x_i) \cdot \cos \Omega_i + (y - y_i) \cdot \text{sen} \Omega_i,$$

$$v = (y - y_i) \cdot \cos \Omega_i - (x - x_i) \cdot \text{sen} \Omega_i,$$

passando a não serem mais as componentes  $x$  e  $y$  da distribuição de corrente, mas as componentes **1** e **2** que formam um ângulo  $\Omega$ , com as componentes  $x$  e  $y$ .

Como estamos trabalhando no domínio transformado, devemos determinar as transformadas de Fourier das expressões em (3.14), que podem ser então facilmente deduzidas (a partir de GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup> p.836, expr. 7.355 e p.1032 expr. 8.941,4)\*:

$$\bar{J}_{xi}(\alpha, \beta) = (-j)^{m+n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{J_{m+1}\left(\frac{\alpha a_0}{2}\right)}{\frac{\alpha a_0}{2}} \cdot J_n\left(\frac{\beta b_0}{2}\right) \quad (3.16a)$$

$$\bar{J}_{yi}(\alpha, \beta) = (-j)^{m+n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{J_{n+1}\left(\frac{\beta b_0}{2}\right)}{\frac{\beta b_0}{2}} \cdot J_m\left(\frac{\alpha a_0}{2}\right) \quad (3.16b)$$

E para as expressões em (3.15):

$$\bar{J}_{1i}(\alpha, \beta) = (-j)^{m+n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{J_{m+1}\left(\frac{\xi a_0}{2}\right)}{\frac{\xi a_0}{2}} \cdot J_n\left(\frac{\zeta b_0}{2}\right) e^{-j(\alpha x_i + \beta y_i)} \quad (3.17a)$$

$$\bar{J}_{2i}(\alpha, \beta) = (-j)^{m+n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{J_{n+1}\left(\frac{\zeta b_0}{2}\right)}{\frac{\zeta b_0}{2}} \cdot J_m\left(\frac{\xi a_0}{2}\right) e^{-j(\alpha x_i + \beta y_i)} \quad (3.17b)$$

\*As funções  $J_n(\cdot)$  apresentadas são as funções de Bessel do primeiro tipo de ordem  $n$ .

com

$$\xi = \alpha \cdot \cos \Omega_i + \beta \cdot \operatorname{sen} \Omega_i$$

$$\zeta = \beta \cdot \cos \Omega_i - \alpha \cdot \operatorname{sen} \Omega_i$$

### 3.2.3 Tiras Retangulares não Isoladas

No caso de tiras retangulares não isoladas, como por exemplo um par de dipolos cruzados, não se conseguiu encontrar funções de base que respeitassem exatamente as condições de gume aplicáveis. Na região onde ocorre a junção de duas tiras a corrente, que deve ter um comportamento assintótico proporcional a  $1/r^2$  - sendo  $r$  a distância à borda - antes de atravessar essa região, passa a não mais apresentar esse comportamento, pois a borda foi descontinuada. Além disso o valor da corrente nessa região sofre uma variação muito grande, principalmente para tiras finas.

Para esse tipo de problema duas alternativas podem ser utilizadas: a utilização das mesmas funções (3.14) somada a uma função que apresente uma grande descontinuidade ao passar pela junção (pelo menos para os casos de dipolos cruzados e estruturas afins), ou a utilização de SBF's.

TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup> propuseram a utilização de certas funções descontínuas na região da junção de duas tiras, que denominaram "junction basis functions". Essas funções seriam utilizadas, no caso da intersecção de dipolos finos, para introduzir uma descontinuidade na distribuição de corrente ao longo de cada dipolo. Assim as funções de base utilizadas por exemplo no caso de dipolos cruzados de comprimento  $L$  e largura  $W$ , alinhados com os versores  $x$  e  $y$ , seriam as seguintes:

$$\hat{x} \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \Pi\left(\frac{x}{L}\right) \Pi\left(\frac{y}{W}\right) \quad p = 1, 2, \dots$$

$$\hat{y} \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{L}\left(y + \frac{L}{2}\right)\right) \Pi\left(\frac{y}{L}\right) \Pi\left(\frac{x}{W}\right) \quad q = 1, 2, \dots$$

e mais a função de junção:

$$\begin{aligned} & \hat{x} \operatorname{sign}(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \Pi\left(\frac{x}{L}\right) \Pi\left(\frac{y}{W}\right) \\ & - \hat{y} \operatorname{sign}(y) \cos\left(\frac{\pi}{L}y\right) \Pi\left(\frac{y}{L}\right) \Pi\left(\frac{x}{W}\right) \end{aligned}$$

como mostrado na figura 3.3.

Apesar dos resultados apresentados por eles mostrarem boa concordância com outros obtidos anteriormente por PELTON; MUNK<sup>(31)</sup> e, segundo eles, diminuir drasticamente o número de funções de base necessárias, deve-se notar que a função proposta, por apresentar uma derivada de primeira ordem infinita, leva ao aparecimento de duas linhas de campo elétrico infinito, em  $(x=0, -W/2 < y < W/2)$  e em  $(-W/2 < x < W/2, y=0)$ , que não satisfazem à condição de energia finita numa região de volume finito, pois o campo cresce com  $r^{-1}$  próximo à essas linhas.



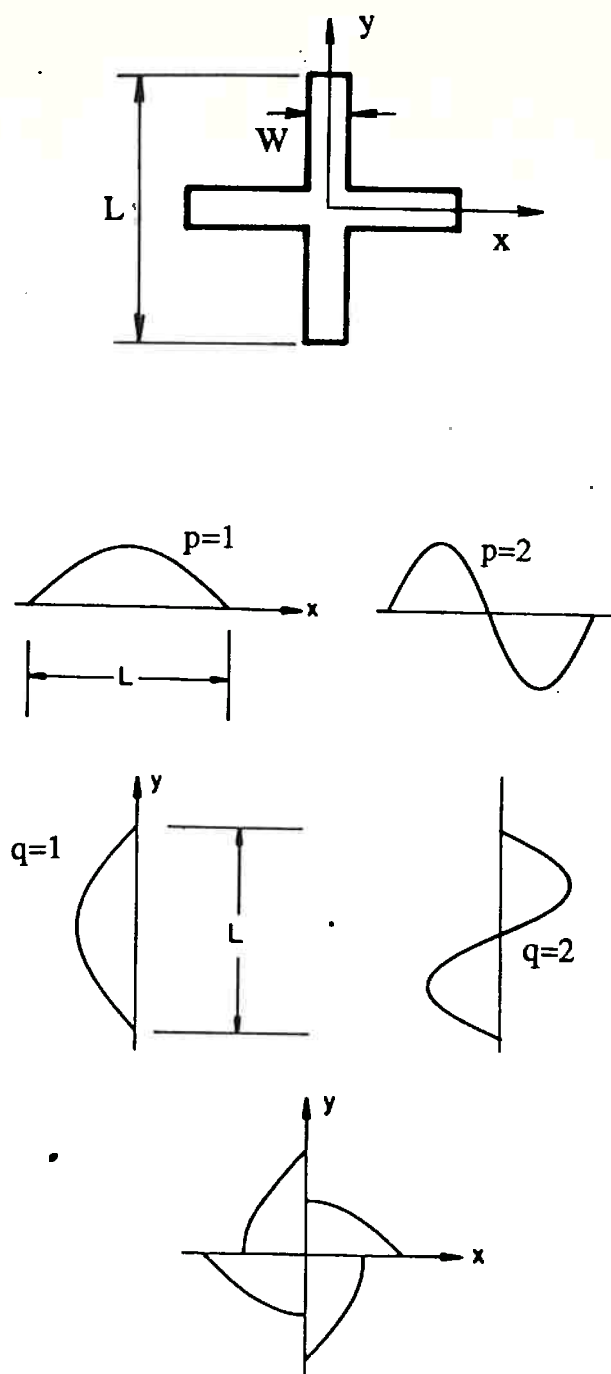


figura 3.3 - Funções de base propostas por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup> para dipolos cruzados

Tal fato não aparece nos resultados obtidos devido ao truncamento da somatória das ondas planas originadas por essa distribuição (modos de Floquet). Infelizmente o artigo não deixa claro como foi feito esse truncamento, mas deve ter sido seguido o critério da convergência relativa, estudado anteriormente por MITTRA et al.<sup>(27)</sup>. Esse aspecto será tratado no próximo capítulo. De qualquer forma pode-se constatar que os resultados foram obtidos de forma precisa e eficiente, se bem que o campo próximo à estrutura certamente não apresenta uma boa concordância com o comportamento real.

Uma alternativa para resolver esse problema seria a utilização de uma função que tenha uma grande descontinuidade, mas não infinita, no lugar da função proposta. Uma idéia analisada foi a utilização da mesma função proposta por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup>, só que utilizando-se uma interpolação linear na região de intersecção:

$$\begin{aligned} & \hat{x} \left[ \text{sign}(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \Pi\left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \Pi\left(\frac{x}{W}\right)\right) \Pi\left(\frac{y}{W}\right) + \left(2 \cos\left(\frac{\pi W}{L 2}\right) \frac{x}{W}\right) \Pi\left(\frac{x}{W}\right) \right] \\ & - \hat{y} \left[ \text{sign}(y) \cos\left(\frac{\pi}{L}y\right) \Pi\left(\frac{y}{L}\right) \left(1 - \Pi\left(\frac{y}{W}\right)\right) \Pi\left(\frac{x}{W}\right) + \left(2 \cos\left(\frac{\pi W}{L 2}\right) \frac{y}{W}\right) \Pi\left(\frac{y}{W}\right) \right] \end{aligned}$$

como mostrado na figura 3.4.

Os resultados obtidos com essa função juntamente com as funções propostas em (3.14) estão mostrados na figura 3.5, comparados com os dados obtidos por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup> para a geometria mostrada. Como pode ser observado, os dados apresentam uma concordância muito boa, mostrando que as funções escolhidas foram adequadas à geometria proposta. Foram usadas 11 funções de base em cada tira.

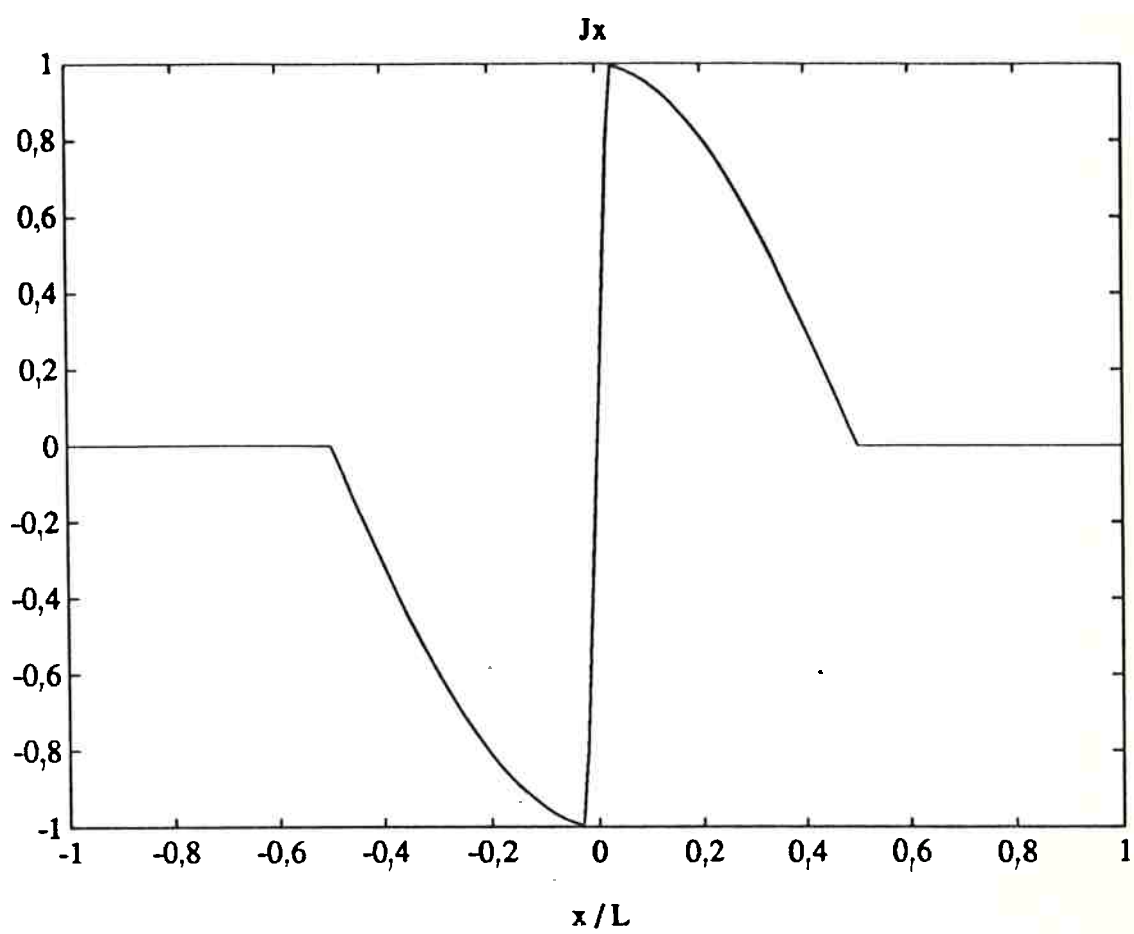
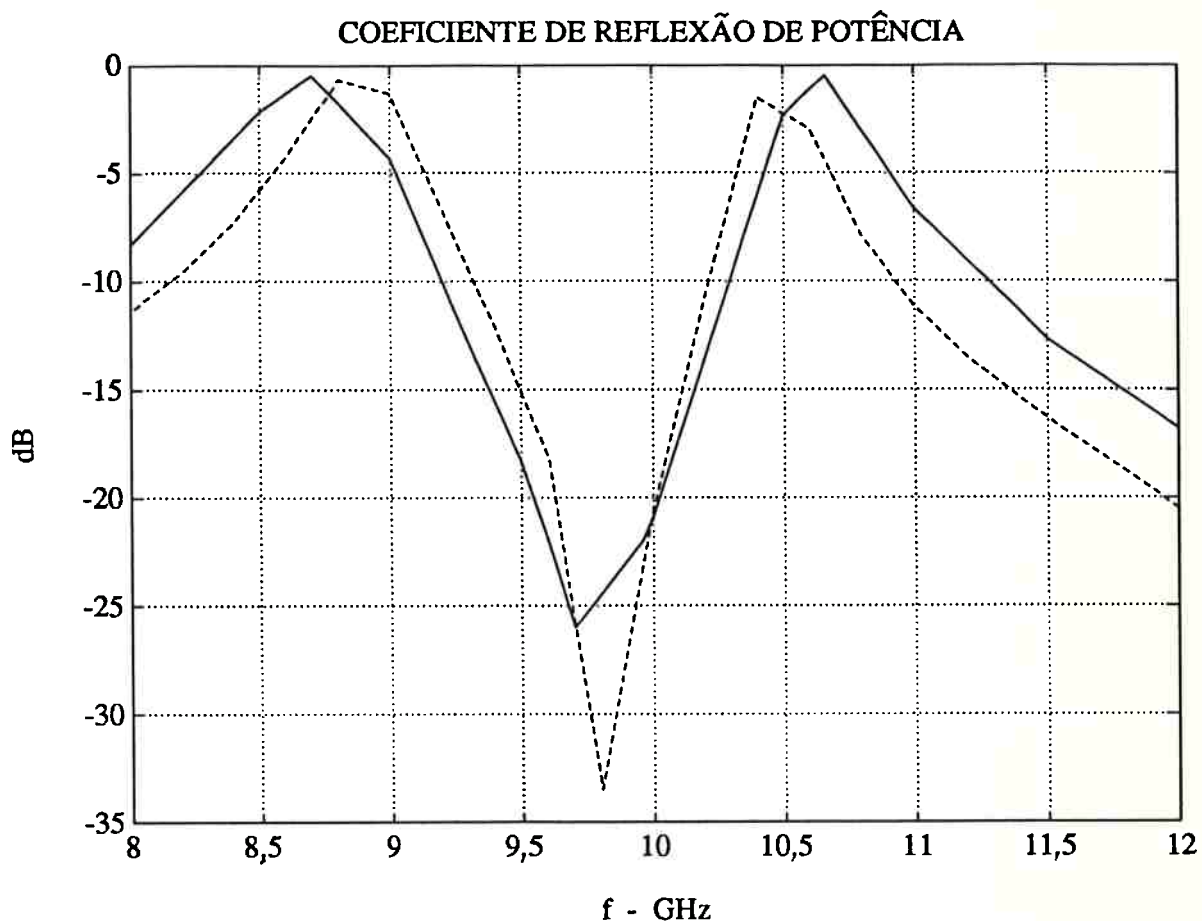
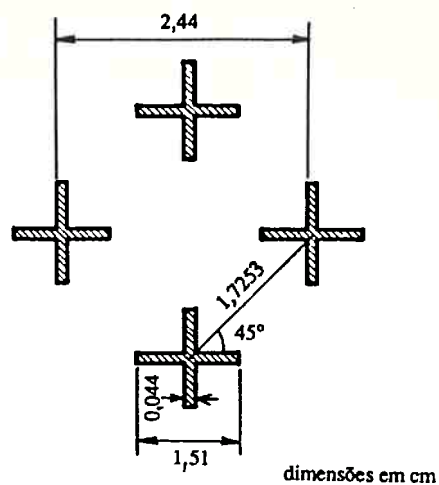


figura 3.4 - Função de base para junção (sem descontinuidade)



— dados obtidos por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup>  
 - - - dados obtidos com a presente formulação

figura 3.5 - Resposta em frequência de FSS composta por dipolos cruzados (incidência TM -  $\theta=60^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$ )

Ainda se nota um pequeno erro que pode ser diminuído aumentando-se um pouco mais o número de funções e de modos utilizados. O ponto importante a ser ressaltado é que aumentando-se o número de modos utilizado os dados variam muito pouco, mostrando que as somatórias dos termos da matriz obtida realmente convergem (foram utilizados 6561 modos).

A outra possibilidade para o estudo de estruturas com tiras cruzadas, que é a utilização das SBF's, apresenta uma grande vantagem do ponto de vista de flexibilidade, pois permite o estudo de geometrias bem diversas, e até com condutividade finita e não uniforme.

A idéia básica é subdividir cada elemento em pequenos quadrados, formando um reticulado. Sobre cada célula metálica desse reticulado coloca-se uma das funções de base, que serão iguais para todas as células, diferindo apenas nas amplitudes, que serão as nossas incógnitas. Assim procedendo, estaremos aproximando a distribuição de corrente no elemento, sendo essa aproximação tanto melhor quanto menor o tamanho das células.

Uma possível escolha para as funções de base a serem utilizadas nesse caso são as denominadas "rooftop basis functions", utilizadas por CWIK; MITTRA<sup>7)</sup>, que iremos denominar de funções telhado. A figura 3.6 mostra um diagrama dessas funções. A expressão no domínio espacial dessas funções é a que se segue:

$$R_x(x,y) = \left[ 1 - \frac{|x|}{\Delta x} \right] \Pi\left(\frac{x}{2\Delta x}\right) \Pi\left(\frac{y}{\Delta y}\right) \quad (3.18a)$$

$$R_y(x,y) = \left[ 1 - \frac{|y|}{\Delta y} \right] \Pi\left(\frac{y}{2\Delta y}\right) \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \quad (3.18b)$$

sendo a célula de dimensão  $\Delta x \times \Delta y$ .

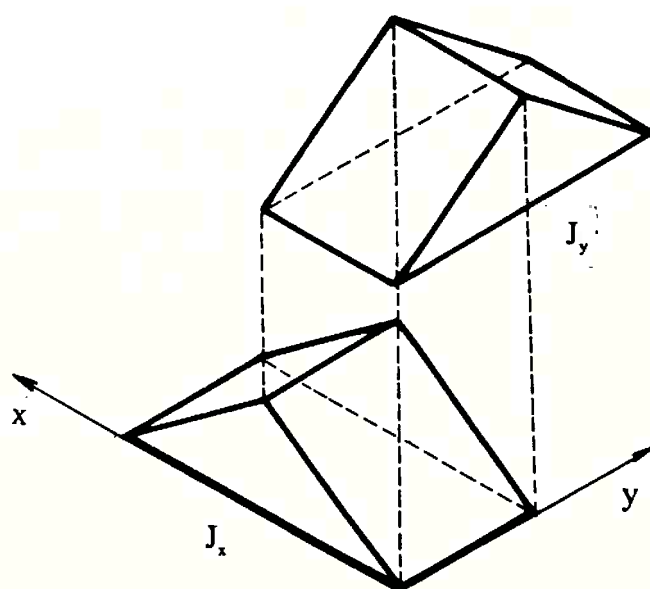
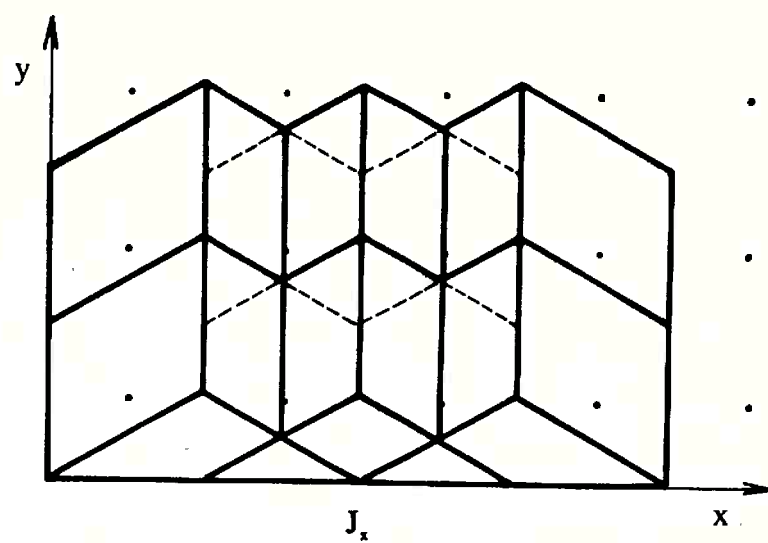


figura 3.6 - Diagrama das funções telhado

Repare que a distribuição de corrente definida estende-se além das dimensões da célula na direção da corrente. Isto é feito para garantir a continuidade da distribuição de corrente ao longo do seu percurso, que dessa forma será interpolada por segmentos de reta. No entanto, colocando-se essas funções exatamente no centro das células ocorrerá nas bordas das tiras metálicas transbordamento de corrente além da região condutora. Para evitar esse problema as funções foram alteradas, efetuando-se um deslocamento de  $\Delta/2$  na direção da corrente, e dessa forma a corrente irá a zero exatamente na borda da tira, como deve ocorrer.

Tomando-se a transformada de Fourier de (3.18), já levando em conta o deslocamento, obtemos:

$$\tilde{R}_x(\alpha, \beta) = \Delta x \Delta y \operatorname{sinc}^2\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\beta \frac{\Delta y}{2}\right) e^{-j\alpha \Delta x / 2} \quad (3.19a)$$

$$\tilde{R}_y(\alpha, \beta) = \Delta x \Delta y \operatorname{sinc}^2\left(\beta \frac{\Delta y}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) e^{-j\beta \Delta y / 2} \quad (3.19b)$$

Assim para cada célula condutora situada nas coordenadas  $(p, \Delta x, q, \Delta y)$  -  $p = -P, -P+1, \dots, P-1$  e  $q = -Q, -Q+1, \dots, Q-1$ , teremos:

$$\tilde{J}_{xpq}(\alpha, \beta) = \tilde{R}_x(\alpha, \beta) e^{-j(\Delta x \alpha p + \Delta y \beta q)} \quad (3.20a)$$

$$\tilde{J}_{ypq}(\alpha, \beta) = \tilde{R}_y(\alpha, \beta) e^{-j(\Delta x \alpha p + \Delta y \beta q)} \quad (3.20b)$$

A substituição de (3.20) em (3.9) leva, então, à equação matricial a ser resolvida, onde os termos da matriz obtida serão da forma:

$$\frac{1}{ab \operatorname{sen} \Omega_{m,n}} \sum \bar{R}^*(\alpha_m, \beta_{mn}) G_{2,2}(\alpha_m, \beta_{mn}) \bar{R}(\alpha_m, \beta_{mn}) e^{-j[\Delta x \alpha_m (p_i - p_j) + \Delta y \beta_{mn} (q_i - q_j)]} \quad (3.21)$$

No caso em que  $\Omega=90^\circ$ , a expressão acima se simplifica, podendo ser escrita na forma de uma DFT:

$$\frac{1}{ab \operatorname{sen} \Omega_{m,n}} \sum \bar{R}^*(\alpha_m, \beta_n) G_{2,2}(\alpha_m, \beta_n) \bar{R}(\alpha_m, \beta_n) e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)} \quad (3.22)$$

onde:

$$k = p_i - p_j \quad l = q_i - q_j$$

$$M = \frac{a}{\Delta x} \quad N = \frac{b}{\Delta y}$$

Essa última forma é extremamente útil, pois permite o cálculo dos termos da matriz de uma forma muito mais rápida, através da utilização do algoritmo da FFT. Deve-se notar que a grande maioria das estruturas encontradas na prática podem ser tratadas dessa forma.



Com essa última formulação chega-se, na maioria das estruturas, a sistemas de equações de dimensão relativamente elevada. Em todos os problemas apresentados neste trabalho o sistema obtido foi resolvido utilizando-se o método de eliminação de Gauss que apresentou resultados bem precisos. No caso de matrizes muito maiores que as obtidas, deve-se optar por outros métodos de solução do sistema, não somente devido a problemas com a precisão mas também por limitações de memória RAM disponível. Entre esses métodos podemos citar o método do gradiente conjugado, apresentado por HESTENES; STIEFEL<sup>(13)</sup>, que é um método iterativo para a solução de sistemas de equações lineares, e que tem sido muito utilizado na solução de sistemas de ordem elevada, obtidos pela aplicação do método dos momentos.

### 3.3 Conservação da Potência

Vamos demonstrar nesta seção que a formulação anteriormente apresentada satisfaz, quaisquer que sejam as funções de base utilizadas, à conservação de potência, ou seja, que a potência total refletida pela estrutura somada à potência total transmitida ao outro semi-espaço é igual à potência total incidente - logicamente para o caso sem perdas - e, portanto, não serve como um parâmetro para determinar-se a precisão dos resultados, a não ser, é claro, do ponto de vista de precisão numérica.

Partindo-se, então, da solução do sistema de equações (3.9), logicamente para um número finito de equações e incógnitas, obtemos o conjunto de coeficiente  $c_i$ , que determina, então, uma distribuição de corrente sobre o plano  $z=0$ . Ainda que não seja a distribuição correta fisicamente, as expressões utilizadas fornecem exatamente o campo espalhado por essa corrente, pois foram deduzidas pela aplicação das equações de

---

\*Foram obtidas matrizes de até 184 x 184 elementos complexos.

Maxwell, sem qualquer aproximação. Assim o campo espalhado satisfaz exatamente à seguinte equação, obtida multiplicando-se (3.9) pelos coeficientes  $c_j$ , e somando-se em seguida:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}^s + \vec{E}^i) \times \vec{J} \, dx \, dy = 0 \quad (3.23)$$

pois o que foi imposto em cada uma das equações (3.9) é que o campo total, incidente mais espalhado, multiplicado escalarmente pelo complexo conjugado de cada uma das funções de base e integrado em todo o plano deve ser nulo.

Aplicando-se, então, o teorema de Poynting (dado por ORSINI; CAMARGO<sup>(29)</sup>) ao volume  $\tau$  compreendido entre dois planos paralelos ao plano  $z=0$ , situados acima e abaixo deste, e tomando-se o seu valor médio no tempo, teremos:

$$\oint \vec{N}_{medio} \times d\vec{S} + \int_{z=0} \Re[\vec{J} \times \vec{E}] dS + \int_{\tau} \Re[j\omega\epsilon |\vec{E}|^2 + j\omega\mu |\vec{H}|^2] d\tau = 0 \quad (3.24)$$

onde  $\vec{N}$  é o vetor de Poynting.

Notando-se que a terceira integral é a parte real de um valor imaginário puro, e que a segunda integral foi imposta nula na nossa formulação por (3.23), temos que:

$$\oint \vec{N}_{medio} \times d\vec{S} = 0 \quad (3.25)$$

e, portanto, o fluxo de potência total que sai do volume considerado é nulo, implicando, assim, que a conservação de potência já está implicitamente imposta em nossa formulação.

Note que no equacionamento proposto as somatórias correspondentes às ondas planas espalhadas pela estrutura terão que ser truncadas, mas isso não invalida o raciocínio anterior, pois esse truncamento implica apenas que as funções de base utilizadas foram modificadas, passando a ter um espectro finito (não sendo, portanto, limitadas espacialmente como desejado), sendo o cálculo do campo exato para essas funções, e, portanto, garantindo a conservação da potência.

## 4 O PROBLEMA DA CONVERGÊNCIA

Um problema que aparece na solução de (3.9) é que cada um dos termos da matriz é obtido na forma de uma somatória de infinitas parcelas, cada uma correspondente a uma raia do espectro da distribuição de corrente, que é espacialmente periódica. Dessa forma, para a precisa determinação desses termos, é necessário, em princípio, que essa somatória resulte convergente, de forma razoavelmente rápida, e que se determine um número mínimo de termos que já garantam a precisão desejada.

Assim na próxima seção serão analisadas as condições a que devem satisfazer as funções de base escolhidas para que a somatória seja convergente, e serão apresentados métodos para determinar o menor número de parcelas a ser utilizado para a obtenção de uma dada precisão. Na seção seguinte serão mostrados alguns métodos que permitem a aceleração dessa somatória em alguns casos; e na seção 4.3 o critério de convergência relativa será apresentado, sendo analisado através de alguns dos resultados obtidos, e também de resultados obtidos por outros autores.

### 4.1 Convergência Absoluta

Da análise da expressão (3.9) vemos que cada elemento da matriz é obtido através de uma somatória de termos do tipo:

$$G_{st}(\alpha_m, \beta_{mn}) f_{sj}^*(\alpha_m, \beta_{mn}) f_{it}(\alpha_m, \beta_{mn}) \quad (4.1)$$

onde os índices s e t representam as direções x ou y. Para  $st=xx$  temos que G apresenta um comportamento assintótico do tipo:

$$G_{xx} \propto \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

e para  $st=yy$  e  $st=xy$ :

$$G_{yy} \propto \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$G_{xy} \propto \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

como mostrado no ANEXO D.

Como as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  serão calculadas em pontos discretos dependentes linearmente de  $m$  e  $n$ , temos que, conforme demonstrado no ANEXO D, para que as somatórias sejam absolutamente convergentes, a expressão (4.1) deve ter um comportamento assintótico com um decaimento com  $\alpha$  e  $\beta$  do tipo:

$$\frac{\alpha^{-p}\beta^{-q}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad p > 0, q > 0, p + q > 1$$

Além disso, se considerarmos que no caso dos elementos da diagonal principal da matriz teremos  $i=j$ , concluímos que a expressão (4.1) terá sempre a mesma fase, e daí, para a convergência da somatória torna-se necessário garantir-se a sua convergência absoluta.

Dessa forma o comportamento assintótico das funções de base deve ser no mínimo do tipo:

$$f_x(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\alpha^p \beta^q} \quad q > 0, p > 1 \text{ e } p + q > 1,5$$

valendo expressão análoga para  $f_y$ , e de forma geral para qualquer direção em que haja corrente.

Vemos, assim, que as expressões apresentadas para as funções de base em (3.17) e em (3.20), e que foram utilizadas em todo o trabalho realizado, satisfazem ao critério acima, produzindo, portanto, somatórias convergentes para os elementos da matriz, o que significa que quanto mais termos utilizarmos na somatória mais preciso será o resultado.

Um problema que ocorre, então, é o da determinação de um número mínimo de termos para obtermos uma dada precisão no cálculo da somatória. Esse é um problema de difícil solução e para o qual se sugere, como primeira alternativa, aumentar-se gradativamente o número de termos até que a solução do sistema obtido apresente variações menores do que a precisão desejada.

JOHANSSON<sup>(15)</sup> propôs uma maneira de determinar-se um número mínimo de termos a serem utilizados no cálculo da somatória. Como o truncamento da somatória é equivalente ao truncamento do espectro das funções de base utilizadas, ele apresentou, como regra geral, que soluções satisfatórias podem ser obtidas se as funções de base com espectro truncado tiverem boa correspondência com as funções originais, no domínio espacial. Dessa forma foi proposto o truncamento no primeiro zero após o maior lóbulo principal do espectro das funções de base, pelo menos no caso de funções do tipo:

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x/w)^2}} \begin{cases} \cos \\ \text{sen} \end{cases} \left( \frac{n\pi}{L} y \right) \begin{cases} \text{para } n \text{ impar} \\ \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

usadas por ele para tiras retangulares, e cujo espectro tem um comportamento assintótico do tipo:

$$\frac{1}{\alpha^{0.5}\beta^2}$$

Para outras funções, como em (3.17), essa regra pode não ser a mais adequada, pois elas têm um decaimento mais lento, necessitando de mais alguns termos para a mesma precisão. Procurou-se adotar, então, como regra, que é de certa forma equivalente à proposta, trincar o espectro das funções de base de forma que a energia da função truncada seja pelo menos 99% da energia da função original. Isso corresponde aproximadamente a trincar-se a somatória de (3.17) após o quarto zero das funções de base (funções de Bessel do primeiro tipo divididas pelo argumento).

Embora seja uma regra bastante empírica, pareceu apresentar bons resultados, como pode ser percebido na figura 4.1, que mostra o coeficiente de reflexão da geometria, sem suporte dielétrico, ilustrada na mesma figura, para incidência normal, com o campo elétrico paralelo às tiras. No gráfico são apresentados os dados obtidos com 3 funções de base, sendo o número de modos utilizado na direção  $y$  (direção da tira) igual a  $(2 \times N_{MAX} + 1)$ , com  $N_{MAX} = 5, 10$  e  $20$ ; e na direção  $x$  igual a  $(2 \times M_{MAX} + 1)$ , sendo  $M_{MAX} = 5$ .

Vemos, então, que aumentando-se  $N_{MAX}$  de 10 para 20 os resultados variam muito pouco, já de 5 para 10 a variação é maior. Pelo critério estabelecido acima, a somatória deveria ser truncada em  $N_{MAX} = 8$ , vemos assim que seguindo-se esse critério o resultado obtido é satisfatório. Logicamente que pode-se adotar condições mais restritivas para a obtenção de resultados ainda mais precisos, a custa é claro de um maior tempo de processamento.

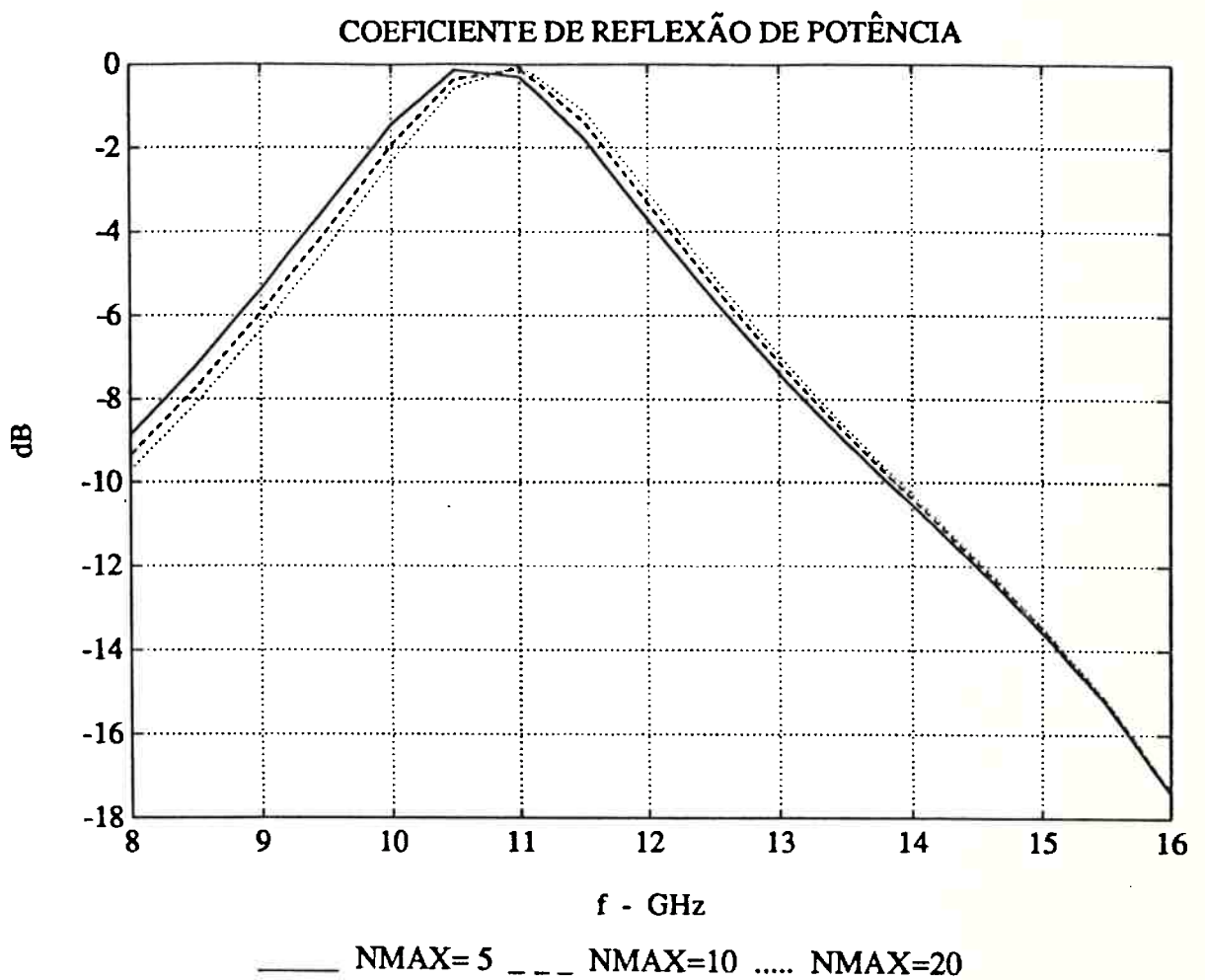
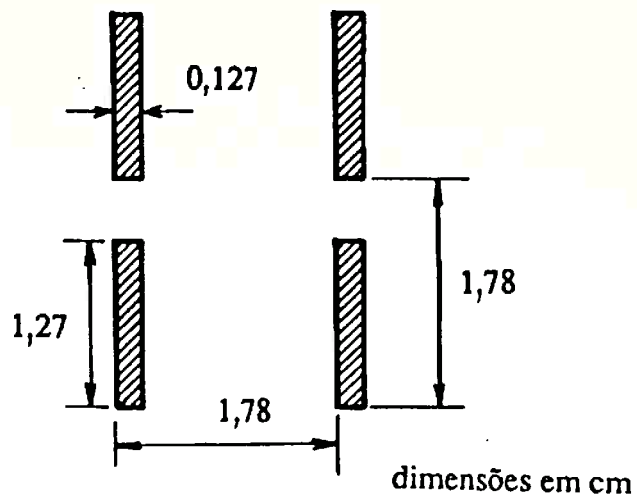


figura 4.1 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples, calculado para diferentes números de modos na direção longitudinal



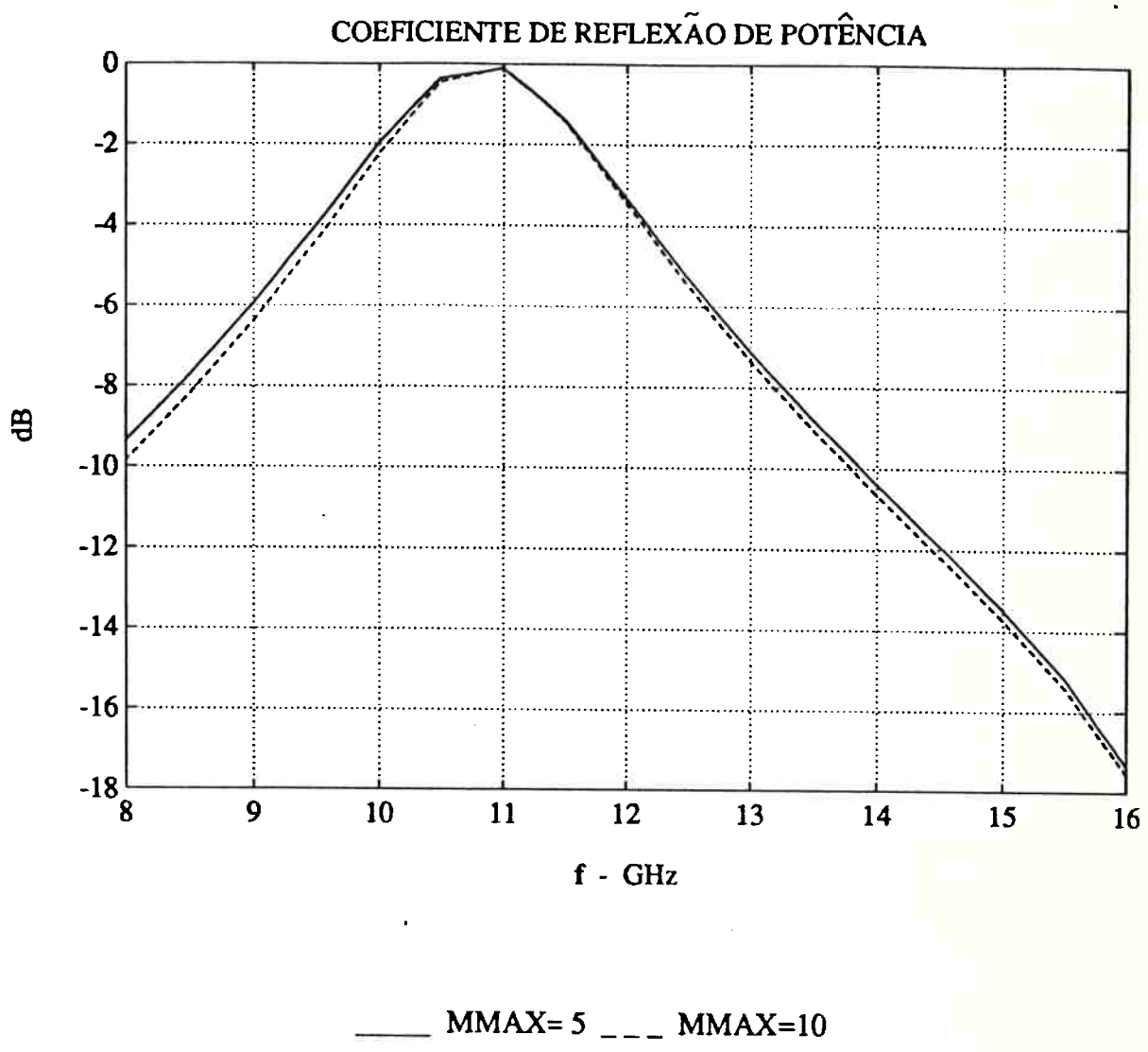
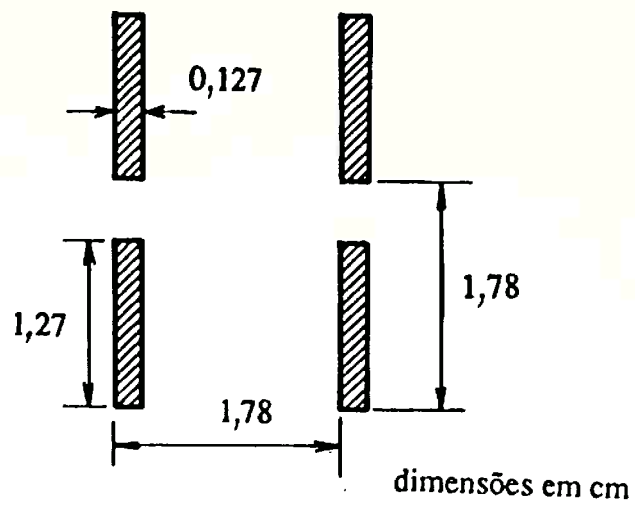


figura 4.2 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples, calculado para diferentes números de modos na direção transversal

Outro fator observado, inclusive por JOHANSSON<sup>(15)</sup>, é que no caso de tiras estreitas o resultado é pouco sensível ao comportamento transversal das funções de base, assim não é necessário ser tão restritivo quanto ao número de modos mínimo nessa direção. Na figura 4.2 vemos que aumentando-se MMAX de 5 para 10 (com NMAX=10), o resultado muda muito pouco, sendo que se utilizássemos o critério acima, deveríamos tomar MMAX pelo menos igual a 50.

É importante também ressaltar que, caso seja de interesse determinar-se a distribuição de corrente ou o campo próximo à estrutura, o número de modos a ser utilizado deve ser bem maior, como foi utilizado por exemplo por TRINTINALIA; PANICALI<sup>(35)</sup>.

## 4.2 Técnicas de Aceleração da Convergência

No caso da utilização das SBF's proposta em 3.2.3, a própria utilização do algoritmo de FFT para o cálculo das somatórias envolvidas torna-se uma técnica muito eficiente para esses casos. Porém quando se utilizam EBF's essa técnica não pode mais ser utilizada eficientemente.

SINGH et al.<sup>(34)</sup>, propuseram um método para acelerar a convergência de séries que representam a função de Green duplamente periódica do espaço livre, aplicando a ela sucessivamente três transformações: transformação de Kummer (dada em ABRAMOWITZ; STEGUN<sup>(1)</sup>), de Poisson e de SHANKS<sup>(33)</sup>. A primeira utiliza o artifício de separar a somatória original em duas outras, uma delas de convergência bem mais rápida, e outra de convergência lenta. Em geral esta última é escolhida como sendo uma somatória que possua uma representação numa forma fechada conhecida. No caso em questão, optou-se por transformar-se essa somatória lentamente convergente em outra de convergência mais rápida, através da transformação de Poisson, que consiste em efetuar-se a soma em questão no domínio transformado de Fourier.

As duas somatórias resultantes apresentam então convergência bem mais rápida que a somatória original. A elas foi ainda aplicada a transformação de Shanks, que é uma transformação não linear. Dessa forma, SINGH et al.<sup>(34)</sup> observaram reduções drásticas no número de termos necessários para obter-se uma dada precisão no cálculo da função de Green, principalmente com a aplicação da transformação de Shanks à somatória no domínio espectral.

Cogitou-se, então, aplicar-se as mesmas transformações anteriores à formulação anteriormente apresentada. Verificou-se, no entanto, que como uma das somas teria de ser efetuada no domínio espacial, isso implicaria que seus termos, ao invés de serem simplesmente algébricos como ocorre no domínio espectral, seriam obtidos através de integrais, que teriam de ser numericamente determinadas. Dessa forma, dado o aparente cálculo adicional necessário para cada termo da somatória, não chegou-se a implementar tal formulação.

Decidiu-se, então, pela aplicação direta da transformada de Shanks à somatória (3.9). Essa é uma transformação não linear que aplicada a um transiente matemático da forma:

$$S_n = S + \sum_{k=1}^K a_k q_k^n$$

consegue extrair a sua base  $S$ . Dessa forma se a somatória obtida somada até o índice  $n$  comportar-se aproximadamente como a expressão anterior, tendendo a  $S$  quando  $n$  tende a infinito, a transformação acima pode ser aplicada com sucesso, obtendo-se uma seqüência de convergência mais rápida que a original, levando a aplicação sucessiva dessa transformação a seqüências de convergência cada vez mais rápida.

Assim, sendo  $S_n$  a somatória acumulada de 0 até  $n$ , transformamos a seqüência desses  $S_n$  em uma outra, obtida como segue:

$$B_n = S_{n+1} + \frac{1}{1/(S_{n+2} - S_{n+1}) - 1/(S_{n+1} - S_n)} \quad (4.2)$$

Se a seqüência original tinha N termos, a nova seqüência tem (N-2) termos. Satisfeitas as condições acima, essa nova seqüência converge para o mesmo valor da somatória original, só que mais rapidamente. A aplicação sucessiva da transformação acima leva então a seqüências de convergência cada vez mais rápida, necessitando-se assim de um menor número de termos para obter-se o resultado desejado com uma dada precisão.

A figura 4.3 mostra o erro cometido ao truncar-se a somatória de termos do tipo encontrado em (3.9), efetuada diretamente e através da transformada de Shanks, em função do número de termos utilizado. A expressão somada foi a seguinte:

$$\sum_{m=0}^M \frac{K_0^2 - \alpha_m^2}{\sqrt{K_0^2 - \alpha_m^2 - \beta_1^2}} \left[ \frac{J_2(\alpha_m a_0/2)}{\alpha_m a_0/2} \right]^2$$

$$\alpha_m = \frac{2\pi m}{a} \quad \beta_1 = \frac{2\pi}{b}$$

$$a = b = 1,78cm \quad a_0 = 1,27cm \quad K_0 = \frac{\omega}{c} \quad \omega = 2\pi \times 11GHz$$

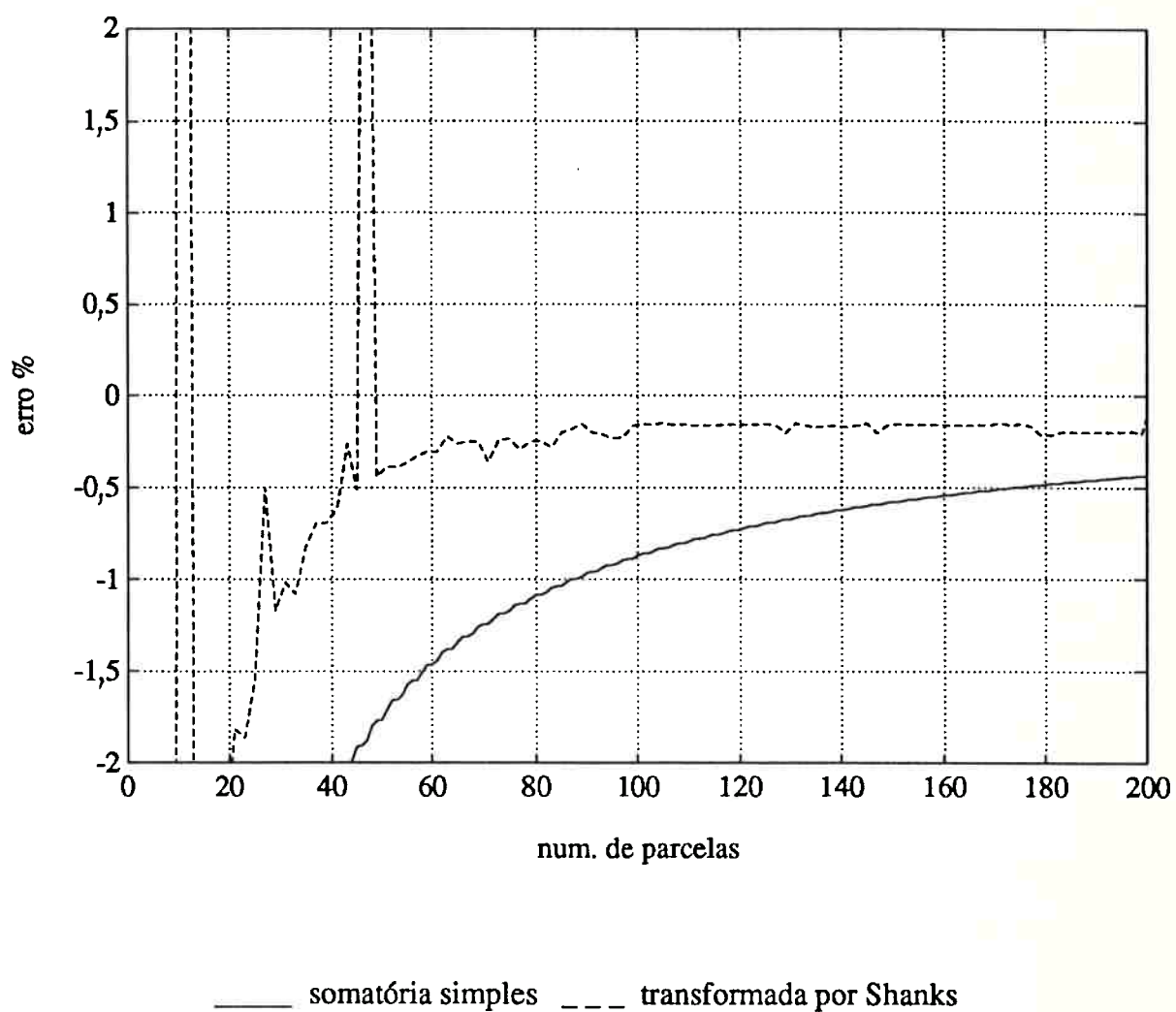
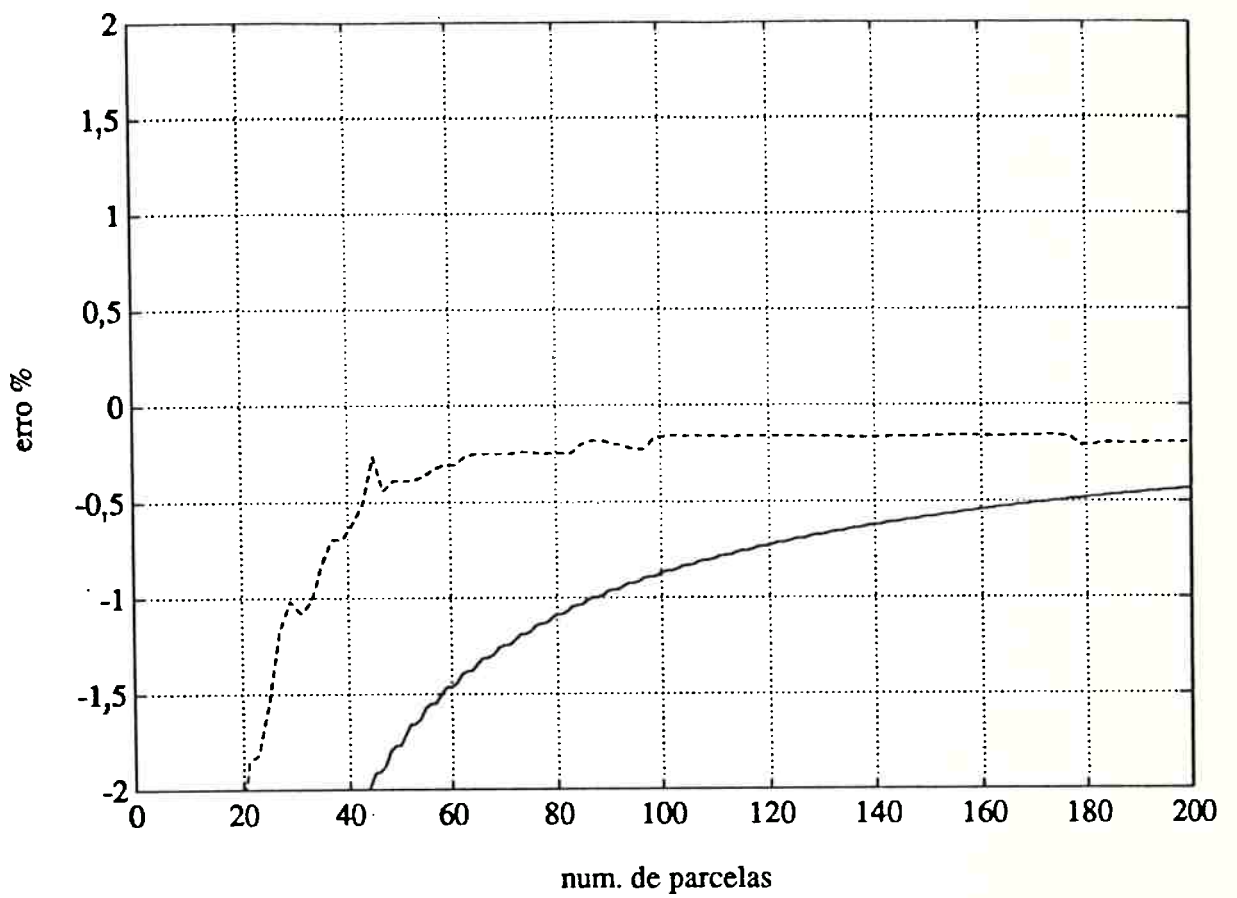


figura 4.3 - Erro devido ao truncamento da somatória dos modos de Floquet, com e sem a transformada de Shanks



— somatória simples    - - - transformada por Shanks

figura 4.4 - Erro devido ao truncamento da somatória dos modos de Floquet, com e sem a transformada de Shanks, com alisamento

Verificamos que a utilização dessa transformada acelera bastante a convergência, embora ela seja um pouco ruidosa. Vemos, por exemplo, que para obter-se um erro inferior a 0,5% seriam necessários aproximadamente 180 termos, enquanto que utilizando-se a transformada de Shanks o número necessário cai a cerca de 50. Para eliminar-se os valores ruidosos pode-se efetuar-se uma filtragem pela mediana (de cada 3 pontos elimina-se o maior e o menor), e a curva fica então bem mais comportada, mantendo ainda o seu comportamento de convergência rápida (figura 4.4).

Infelizmente não foi ainda implementada a utilização dessa transformada no programa final, de forma que dados mais positivos quanto à eficiência dessa transformação não puderam ser obtidos, mas serão futuramente investigados.

### 4.3 Convergência Relativa

O conceito de convergência relativa foi introduzido por MITTRA<sup>(25)</sup> para o caso particular de bifurcação em guias de onda, resolvido pela técnica de "mode-matching". Nesse trabalho foi mostrado que, a menos que seja escolhida a relação correta entre o número de modos utilizados nas duas regiões da porção bifurcada do guia, uma solução correta não será obtida quando o número de modos tender a infinito.

MITTRA et al.<sup>(27)</sup> analisaram o problema de uma íris em um guia de onda\*, concluindo que na resolução através do método de Galerkin deve haver uma relação entre o número de funções de base  $M$  e o número de modos  $P$  na seguinte forma:

$$\frac{M}{P} = \frac{b}{a} \quad (4.3)$$

onde  $a$  é a dimensão do guia e  $b$  a da íris.

---

\*Esse mesmo problema pode ser tratado com a formulação proposta para FSS neste trabalho, tomando-se infinitas imagens da íris no guia.

A partir dos dados apresentados, no entanto, ficou claro que dado um número de modos  $P$  a ser utilizado, o número de funções de base  $M$  não pode ser maior que o calculado por (4.3), porém, dado um número de funções de base  $M$ , um número de modos maior que o determinado por (4.3) não altera significativamente o resultado, mostrando que a somatória dos modos converge absolutamente.

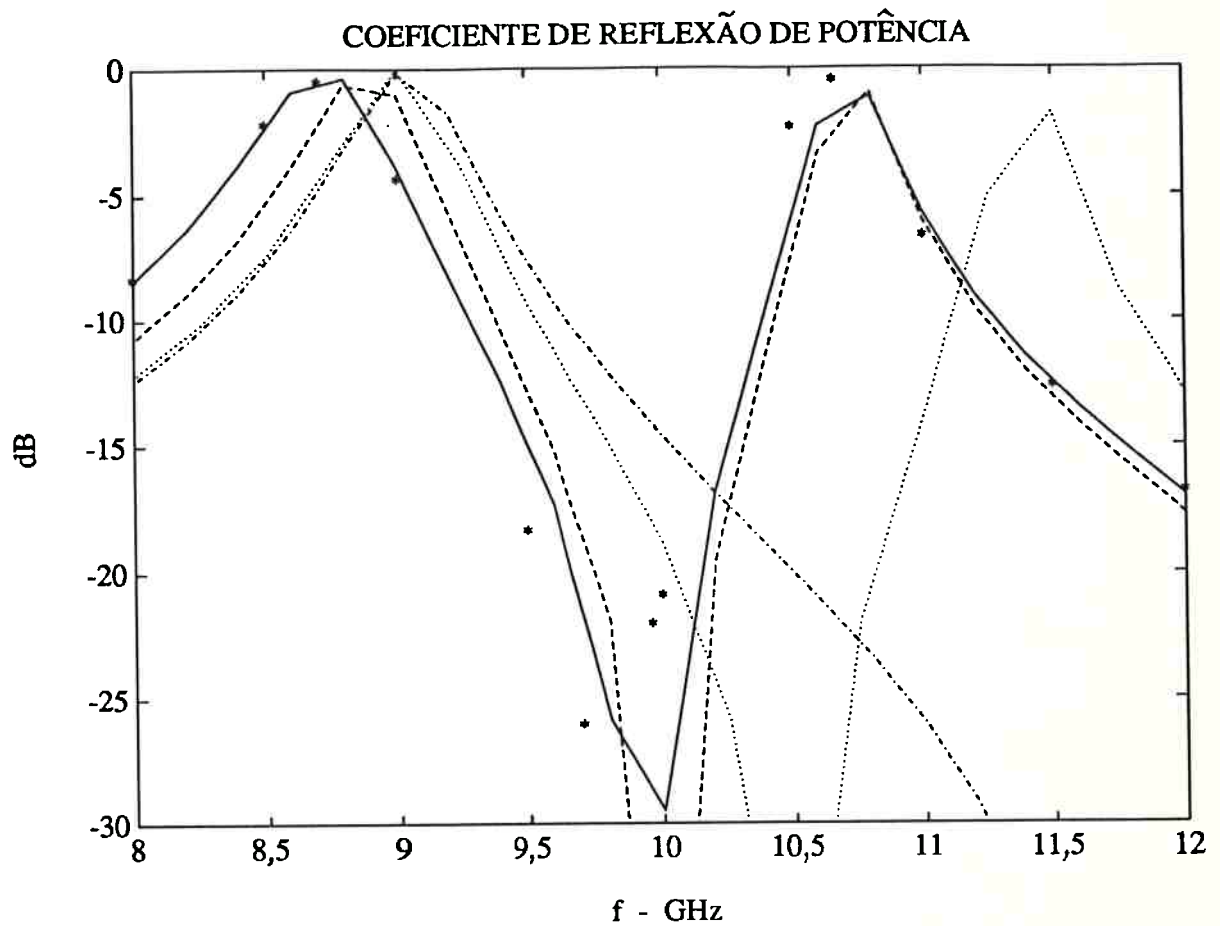
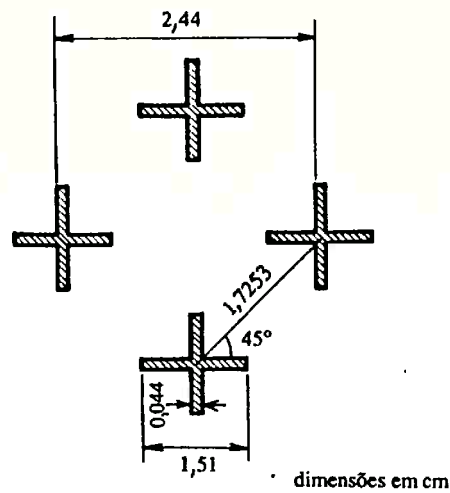
Vemos dessa forma, como foi concluído também por WEBB et al.<sup>(38)</sup>, que não há a presença do fenômeno de convergência relativa na solução de problemas de FSS pelo método de Galerkin, desde que funções de base adequadas, como as apresentadas em (3.14) e (3.18), sejam utilizadas. E verificamos ainda que resultados ainda mais precisos podem ser obtidos utilizando-se um número cada vez maior de modos, como mostrado na seção 4.2, e também por WEBB et al.<sup>(38)</sup> e JOHANSSON<sup>(15)</sup>.

Em alguns problemas, como os resolvidos por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup>, nota-se no entanto a nítida presença de um fenômeno de convergência relativa, como podemos notar na figura 4.5 onde, para a geometria mostrada (com a utilização das "junction basis functions" apresentadas na figura 3.3), vemos que para 4 funções de base ao somar-se os modos de -6 a 6 obtemos uma curva em boa concordância com a esperada. Porém, aumentando-se o número de modos a curva começa a se distanciar cada vez mais da correta.

Tal fenômeno aparece porque as funções de junção utilizadas por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup> apresentam uma descontinuidade, caracterizando então (conforme LATHI<sup>(19)</sup>) um comportamento assintótico no domínio espectral do tipo:

$$\frac{1}{\alpha}$$





——— MMAX=6    - - - MMAX=10  
 ..... MMAX=20    - · - MMAX=40  
 \* dados experimentais (PELTON; MUNK<sup>(31)</sup>)

figura 4.5 - Coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos cruzados,  
 calculado pela formulação de TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup>  
 (incidência TM -  $\theta=60^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$ )

Dessa forma, como visto na seção 4.1, a somatória obtida, pelo menos para os termos da diagonal correspondente a essa função descontínua, é uma somatória divergente, o que obriga então o truncamento do número de modos num ponto tal que os lóbulos principais das outras funções de base sejam incluídos, mas não muito além disso. É o que acontece quando somamos o número de modos até 6 apenas, no exemplo mostrado.

Seguindo-se esse critério, os resultados obtidos apresentam-se muito bons, como pode ser verificado pelos resultados apresentados por TSAO; MITTRA<sup>(36)</sup>, apesar deles não deixarem explícito qual o critério utilizado no truncamento do número de modos. Deve-se notar, no entanto, que a utilização de funções não convergentes como essas deve ser evitada, ou pelo menos um extremo cuidado deve ser tomado na sua utilização, procurando-se perceber que ao se truncar o seu espectro estamos na realidade modificando sensivelmente essas funções, eliminando assim componentes de alta frequência espacial, que definem o comportamento nas bordas da estrutura.

## 5 RESULTADOS OBTIDOS

Com a formulação apresentada anteriormente, foram implementados dois programas para o cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão de diversas estruturas. O primeiro deles utilizou EBF's do tipo descrito pela expressão (3.14), para tiras isoladas, com ou sem substrato e superstrato dielétrico. No segundo foram utilizadas as SBF's descritas por (3.20), também com ou sem dielétrico, podendo-se com este programa analisar-se uma gama maior de estruturas.

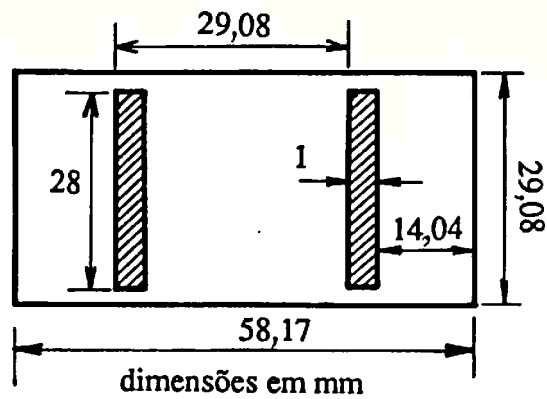
Em ambos os casos os programas foram implementados em linguagem de programação FORTRAN-77, tendo sido compilados e executados numa estação de trabalho PROCEDA-5370 (baseada no microprocessador MC68020 com co-processador aritmético MC68881 - 20 MHz). A capacidade de memória RAM total da máquina (4 Megabytes) foi explorada nessas implementações, bem como suas facilidades de saída gráfica (processador gráfico INTEL 82786 + 2 Megabytes de memória RAM própria + monitor colorido de alta resolução NEC-Multisync/plus) que possibilitaram a exibição dos gráficos das varreduras executadas, bem como a visualização das estruturas estudadas.

As figuras 5.1 a 5.3 mostram então a utilização do programa 1 para a estrutura mostrada, que inclui um substrato dielétrico de constante dielétrica 2,5 e espessura 1,575 mm. Os resultados, obtidos com a utilização de 3 funções de base e 861 modos de Floquet, e com a estrutura excitada em guia de onda\* WR-229 (58,17 x 29,08 mm<sup>2</sup>), mostram excelente concordância com resultados experimentais obtidos no laboratório de micro-ondas do CPqD-TELEBRÁS\*. Cada ponto do gráfico levou em média 35 segundos para ser calculado. Temos na figura 5.1 a curva do coeficiente de transmissão de potência e na figura 5.2 a do coeficiente de reflexão.

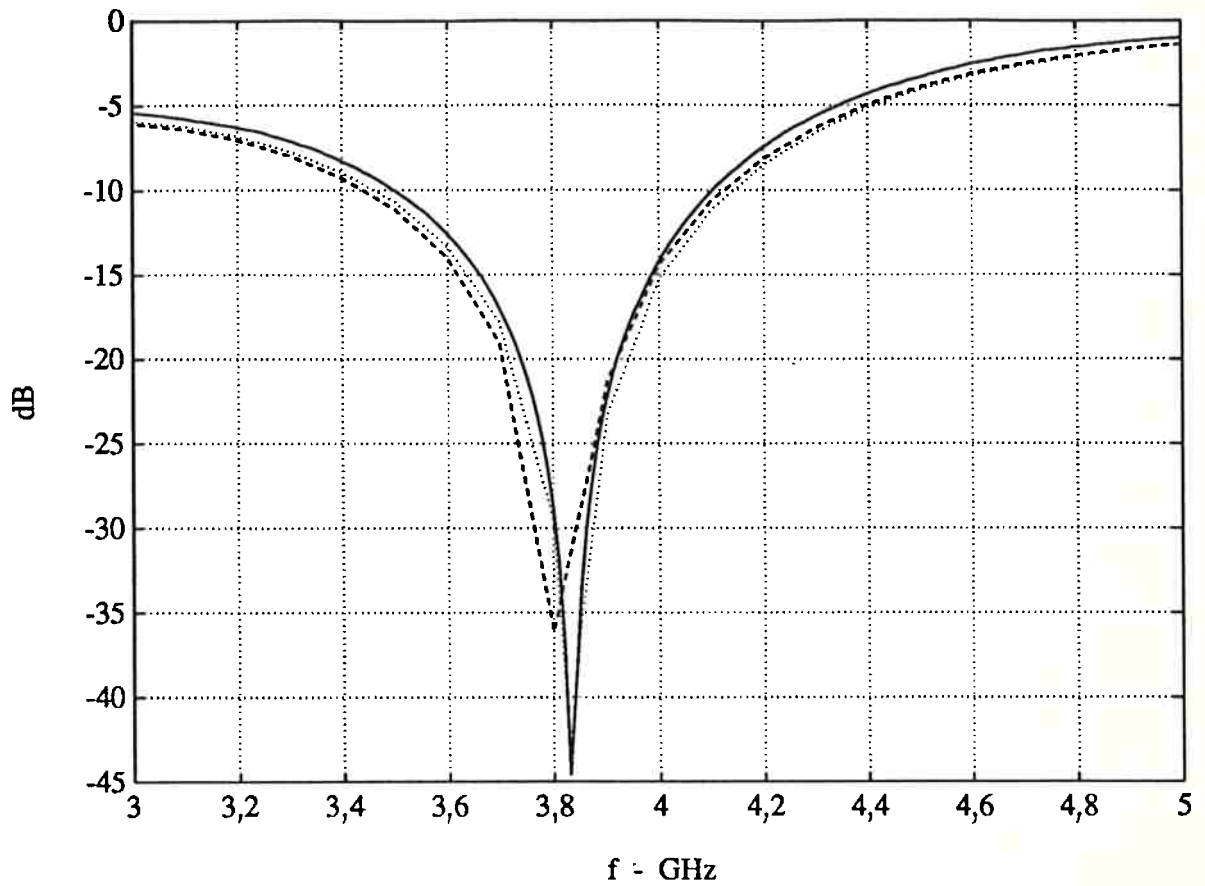
---

\*Com a aplicação do método das imagens.

\*A estrutura ensaiada era composta de duas tiras de cobre sobre uma placa de circuito impresso, com as características citadas, e as medidas foram realizadas com o "Network Analyzer" HP-8510B.

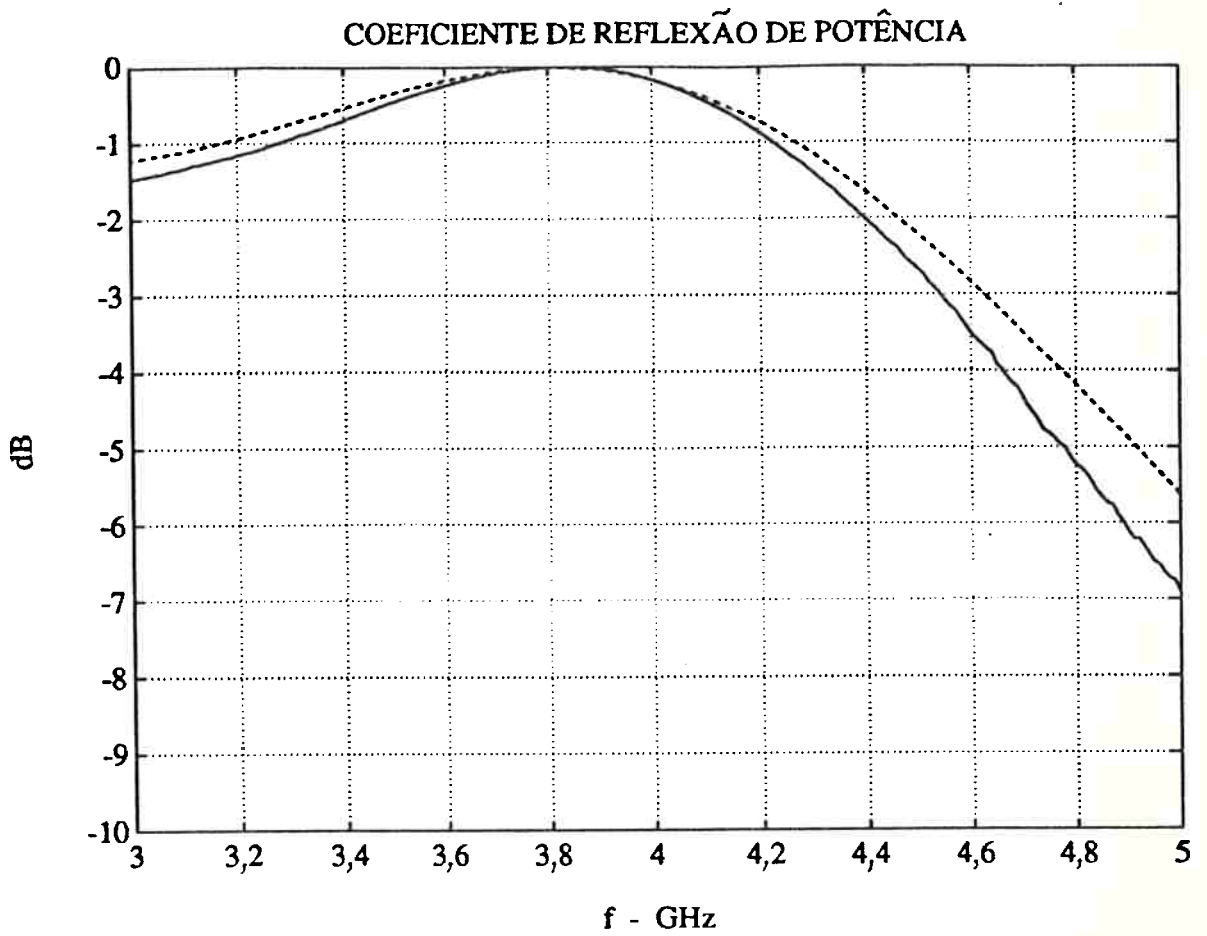
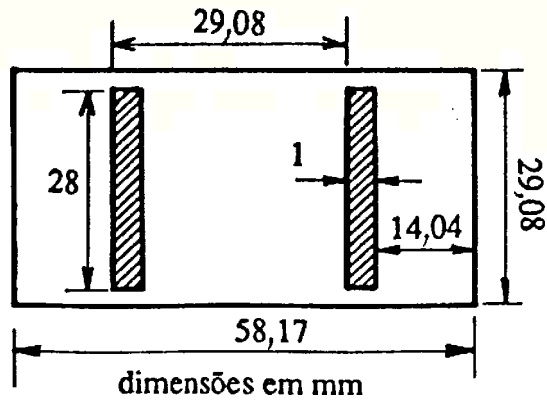


### COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DE POTENCIA

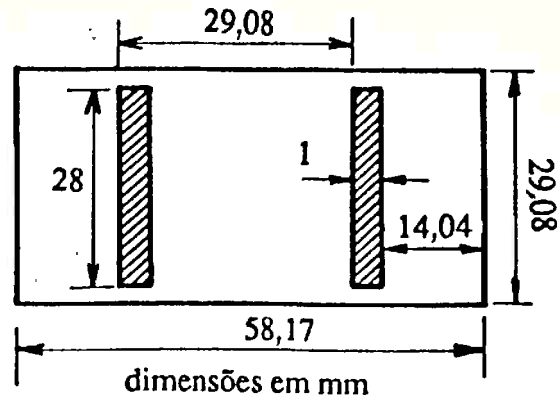


— dados experimentais    - - - dados calculados com  $\epsilon_r=2,5$   
 ..... dados calculados com  $\epsilon_r=2,46$

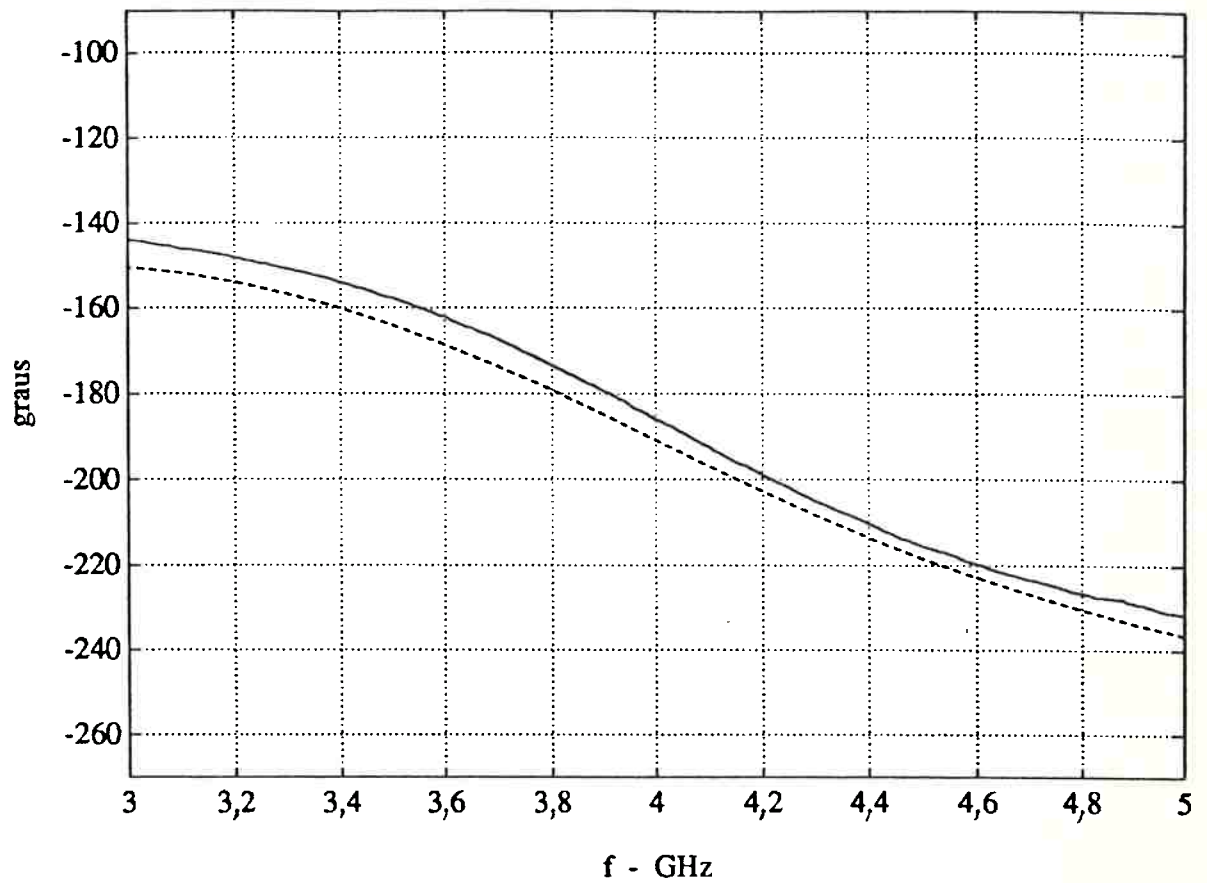
figura 5.1 - Coeficiente de transmissão de estrutura formada por dipolos simples em guia de onda, com substrato dielétrico de espessura 1,575 mm e constante dielétrica 2,5.



— dados experimentais    - - - dados calculados com  $\epsilon_r = 2,5$   
 coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples em guia de onda, com dielétrico de espessura 1,575 mm e constante dielétrica 2,5.



### FASE DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO



— dados experimentais    - - - dados calculados com  $\epsilon_r = 2,5$

figura 5.3 - Fase do coeficiente de reflexão de estrutura formada por dipolos simples em guia de onda, com substrato dielétrico de espessura 1,575 mm e constante dielétrica 2,5.

É apresentada também a curva da resposta em fase, figura 5.3, da estrutura, que também está bem próxima da obtida experimentalmente. As pequenas diferenças obtidas devem-se em parte à imprecisões do modelo ensaiado em laboratório (o valor da constante dielétrica, por exemplo, tem uma imprecisão de 1,6%) e também a erros devido aos truncamentos (número de funções de base e de modos de Floquet) realizados.

Os erros provocados pelos truncamentos aparentemente contribuíram com um desvio no máximo de mesma grandeza do provocado pela imprecisão da constante dielétrica, como pode ser observado ainda nas figuras 5.1 a 5.3, onde o cálculo computacional repetido para um valor de constante dielétrica igual a 2,46 é apresentado na curva pontilhada, tendo-se a ressonância calculada praticamente coincidindo com a medida.

Na figura 5.4 temos, para uma outra estrutura composta por tiras retangulares, desta vez sem dielétrico, a curva obtida para o coeficiente de reflexão quando da incidência normal de uma onda eletromagnética, com o campo  $E$  paralelo às tiras condutoras. Foram utilizadas 3 funções de base e 1681 modos de Floquet. Os dados obtidos estão traçados juntamente com os obtidos por CHEN<sup>(6)</sup>, que utilizou uma formulação semelhante mas com funções de base senoidais. Pode-se observar uma boa concordância entre as curvas, sendo as diferenças observadas causadas provavelmente pelos truncamentos e por imprecisões gráficas da curva mostrada por esse autor. Deve-se notar também que ele utilizou 10 funções de base.

A figura 5.5 mostra outro exemplo de tiras retangulares, também extraído do artigo de CHEN<sup>(6)</sup>, com incidência normal e campo elétrico paralelo às tiras condutoras. Valem, neste caso, os mesmos comentários anteriores. Cabe ressaltar que para as frequências acima de 11,8 GHz passamos a ter, além do modo fundamental (normal ao plano da estrutura), outros 4 modos propagantes.

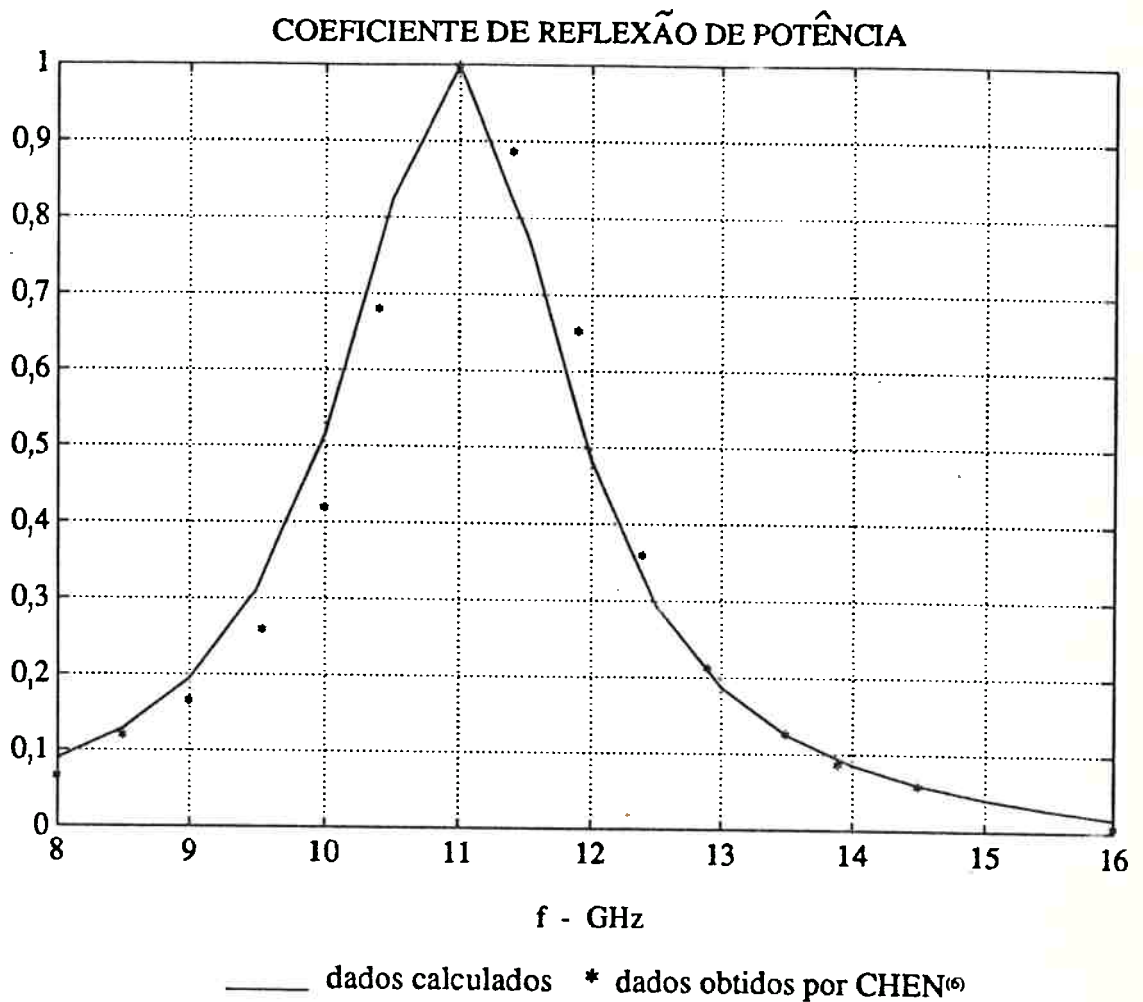
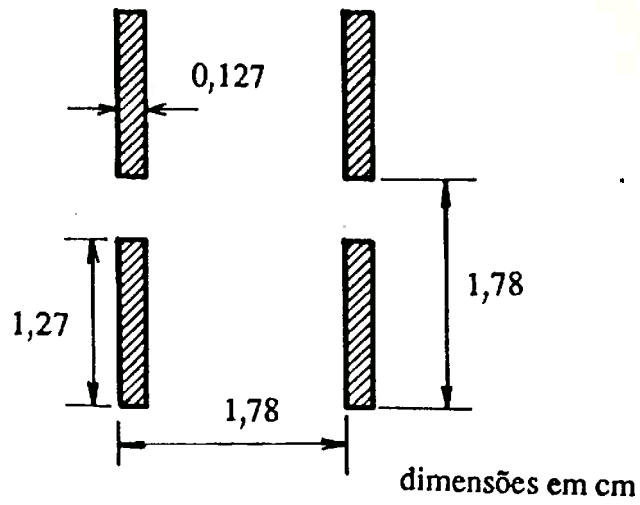
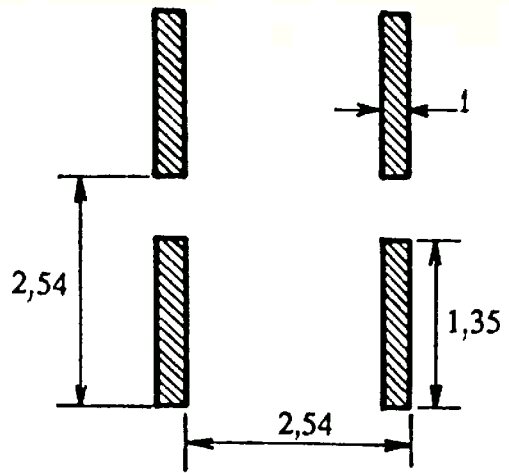


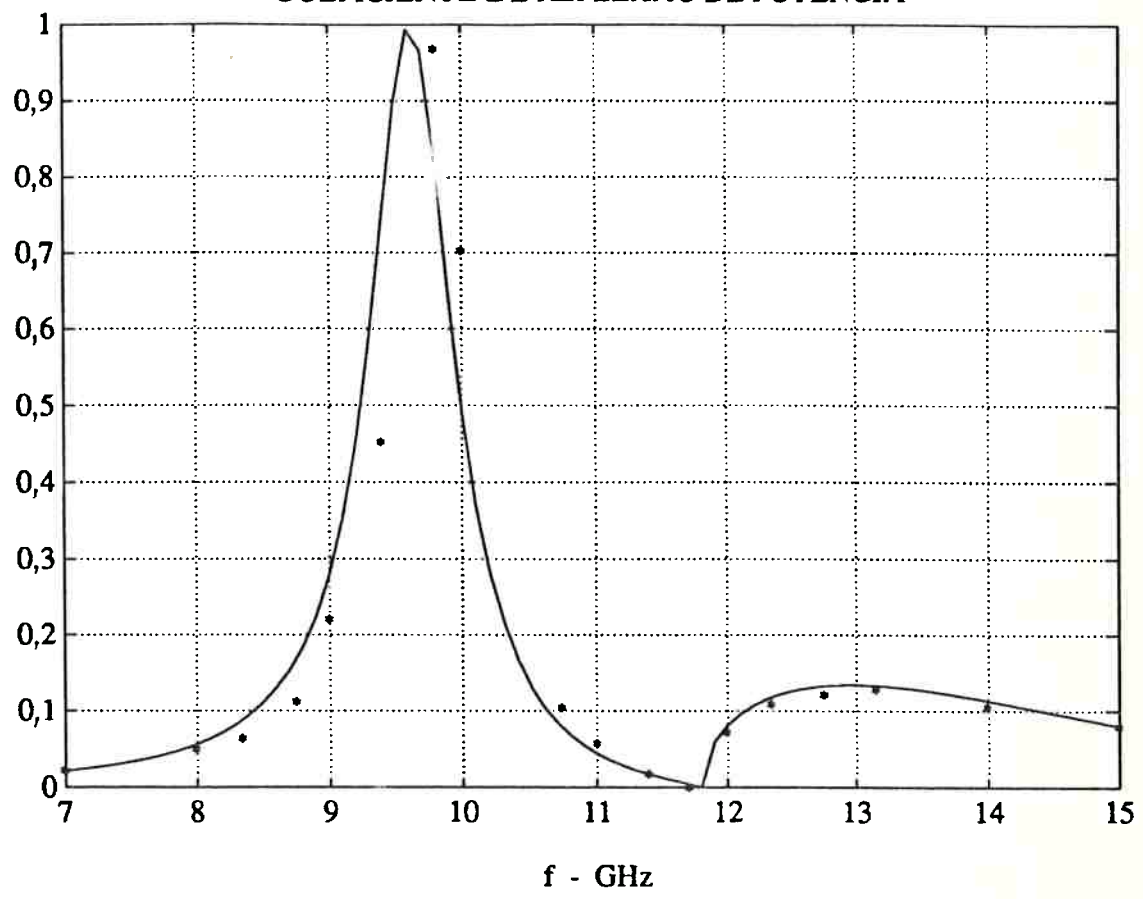
figura 5.4 - Resposta em frequência de estrutura formada por dipolos simples  $\theta=0^\circ, \phi=0^\circ$





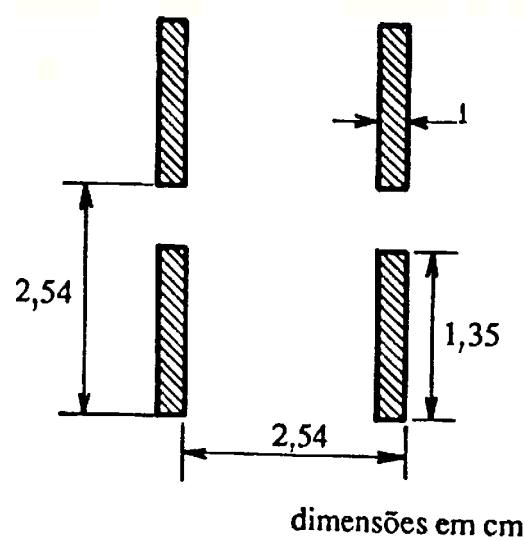
dimensões em cm

COEFICIENTE DE REFLEXÃO DE POTÊNCIA



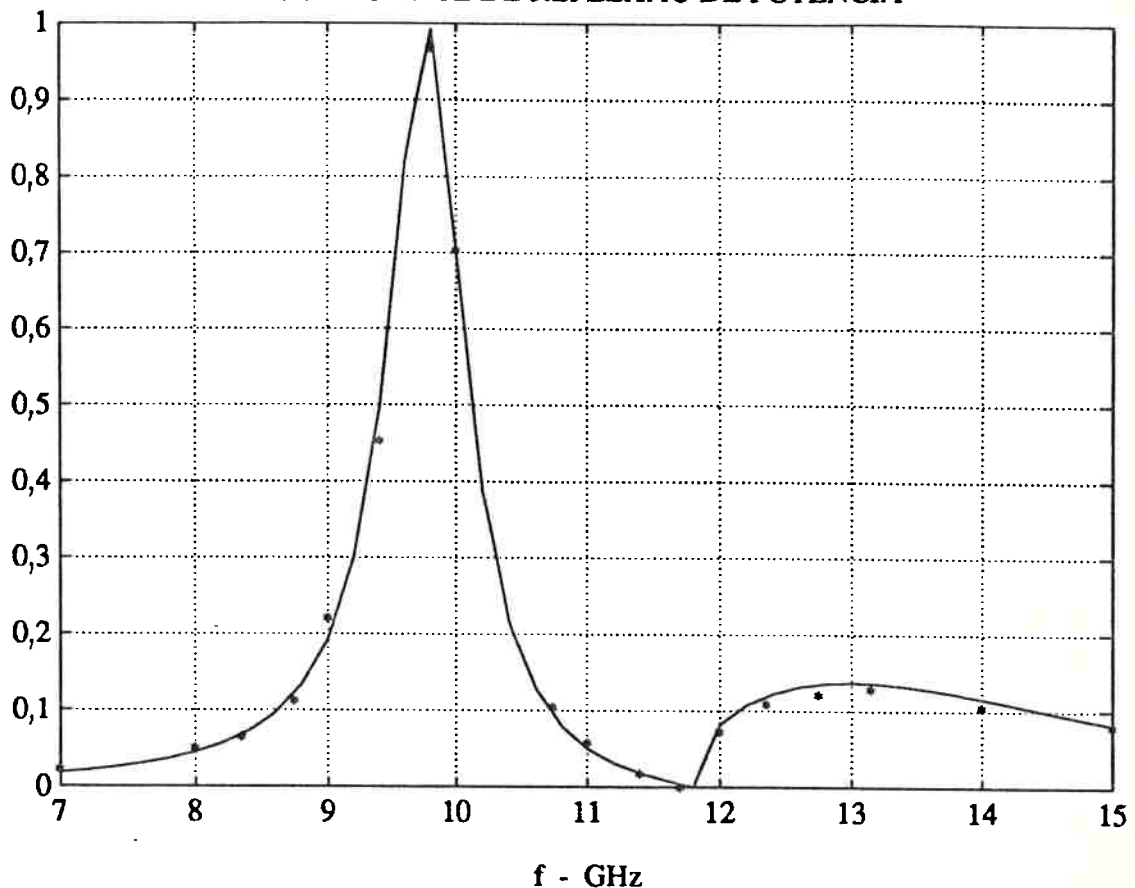
— dados calculados \* dados obtidos por CHEN<sup>(6)</sup>

figura 5.5 - Outro exemplo de resposta em frequência de estrutura formada por dipolos simples,  $\theta=0^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$



dimensões em cm

COEFICIENTE DE REFLEXÃO DE POTÊNCIA



— dados calculados \* dados obtidos por CHEN<sup>(6)</sup>

figura 5.6 - Resposta em frequência de estrutura formada por dipolos simples (utilizando-se SBF's),  $\theta=0^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$

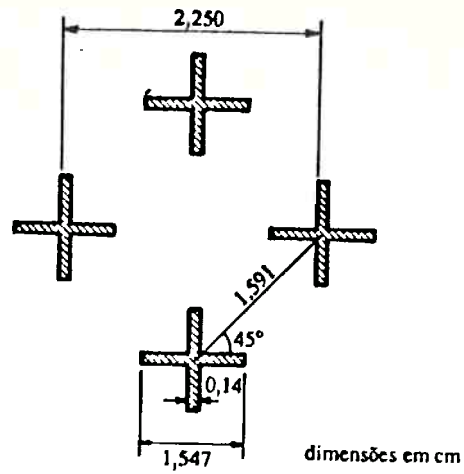
Para verificar-se a precisão dos resultados obtidos, agora com o segundo programa (SBF's), inicialmente foi analisada a mesma estrutura da figura 5.5, dividindo-se a célula básica em um reticulado de  $32 \times 32$  elementos. O número de células condutoras foi de  $2 \times 17 = 34$ , resultando em dipolos de dimensões  $0,16 \text{ cm} \times 1,35 \text{ cm}$ , sendo portanto um pouco mais largos do que os analisados anteriormente. O número de modos de Floquet utilizado foi de 4096, somados através da FFT. Vemos assim, na figura 5.6, uma concordância quase perfeita entre os dados de CHEN<sup>(6)</sup> e os obtidos com esse programa. O tempo para a obtenção de cada ponto foi de aproximadamente 35 segundos.

Outro exemplo analisado foi o dos dipolos cruzados. Referindo-nos à geometria mostrada na figura 5.7 (sem suporte dielétrico), dividiu-se a célula básica em um reticulado de  $16 \times 16$ , e considerou-se a incidência de uma onda plana TM numa direção inclinada  $30^\circ$  em relação à normal, com o campo magnético paralelo a uma das tiras. Temos traçada então a curva obtida computacionalmente para o coeficiente de reflexão, comparada com resultados obtidos por CWIK; MITTRA<sup>(7)</sup>. Observamos, mais uma vez, resultados bem coerentes, mostrando a anti-ressonância da estrutura próximo à frequência de 9,9 GHz.

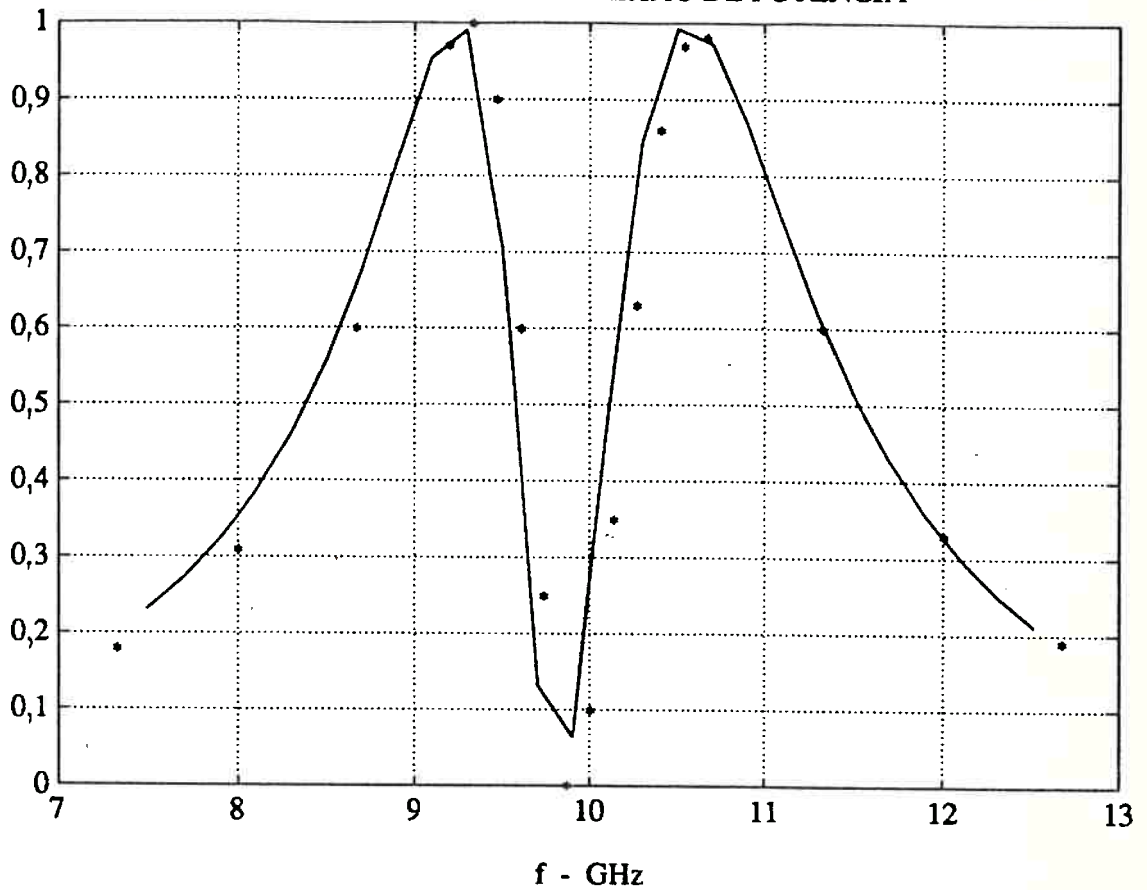
Analisamos, também com esse segundo programa, uma estrutura do tipo grade condutora, com substrato e superstrato dielétricos. As dimensões da estrutura estão mostradas na figura 5.8, sendo o substrato e o superstrato de mesma constante dielétrica, ( $\epsilon_r=2,5$ ), e mesma espessura ( $0,1 \lambda_0$ )\*. Excitando-se então a estrutura com ondas planas TE e TM, com os campos paralelos às tiras condutoras, vemos nas figuras 5.8 e 5.9 as curvas da potência transmitida em função do ângulo de incidência, para a relação entre a largura das tiras e o período da estrutura de 0% (sem tiras condutoras) 19% e 25%.

---

\*Neste exemplo a estrutura foi excitada por uma frequência fixa, variando-se apenas o ângulo de incidência.

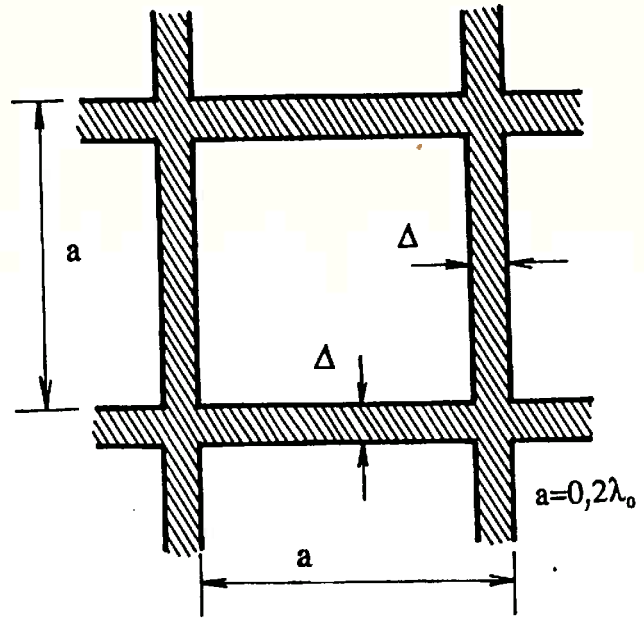


### COEFICIENTE DE REFLEXÃO DE POTÊNCIA



— dados calculados \* dados obtidos por CWIK; MITTRA<sup>(7)</sup>

figura 5.7 - Resposta em frequência de estrutura formada por dipolos cruzados (utilizando-se SBF's), incidência TM,  $\theta=30^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$ , sem dielétrico



COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

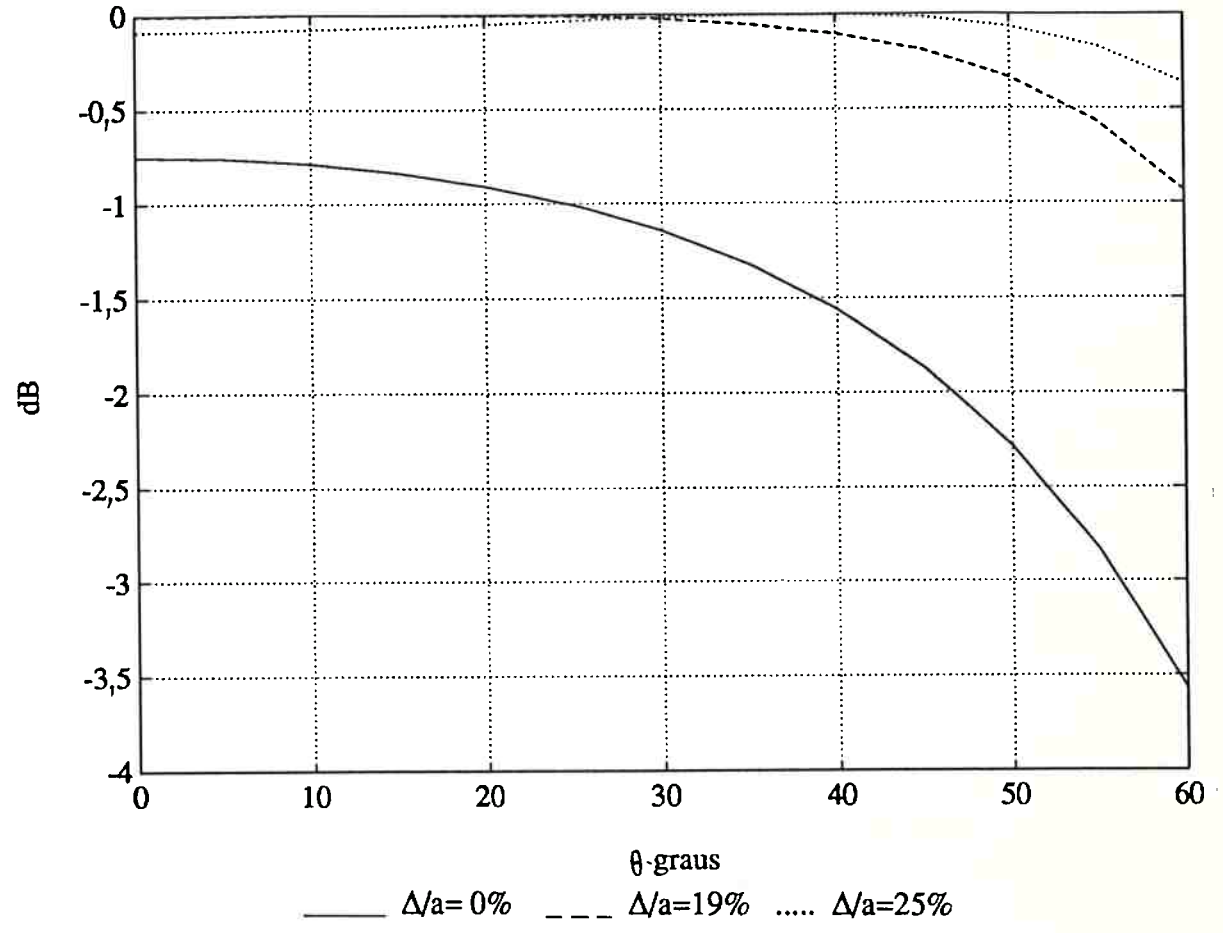
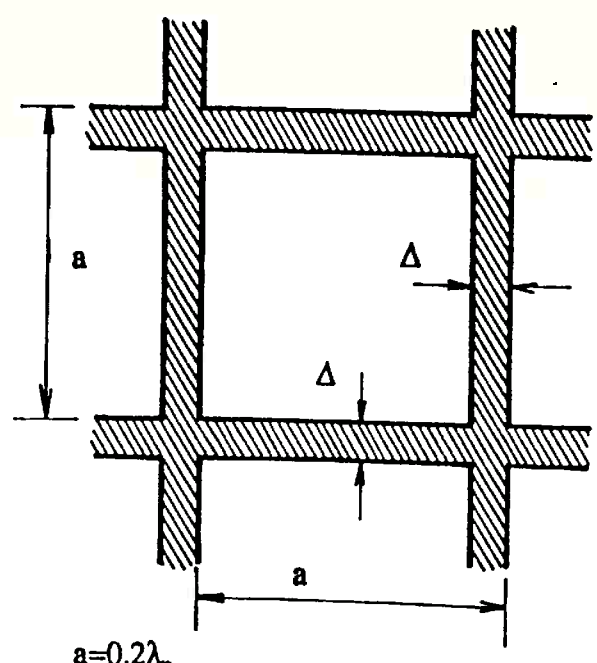


figura 5.8 - Coeficiente de transmissão de potência de grade condutora com suporte dielétrico - incidência TE,  $\phi=0^\circ$  - substrato e superstrato de espessuras  $0,1 \lambda_0$



$a=0,2\lambda_0$   
COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

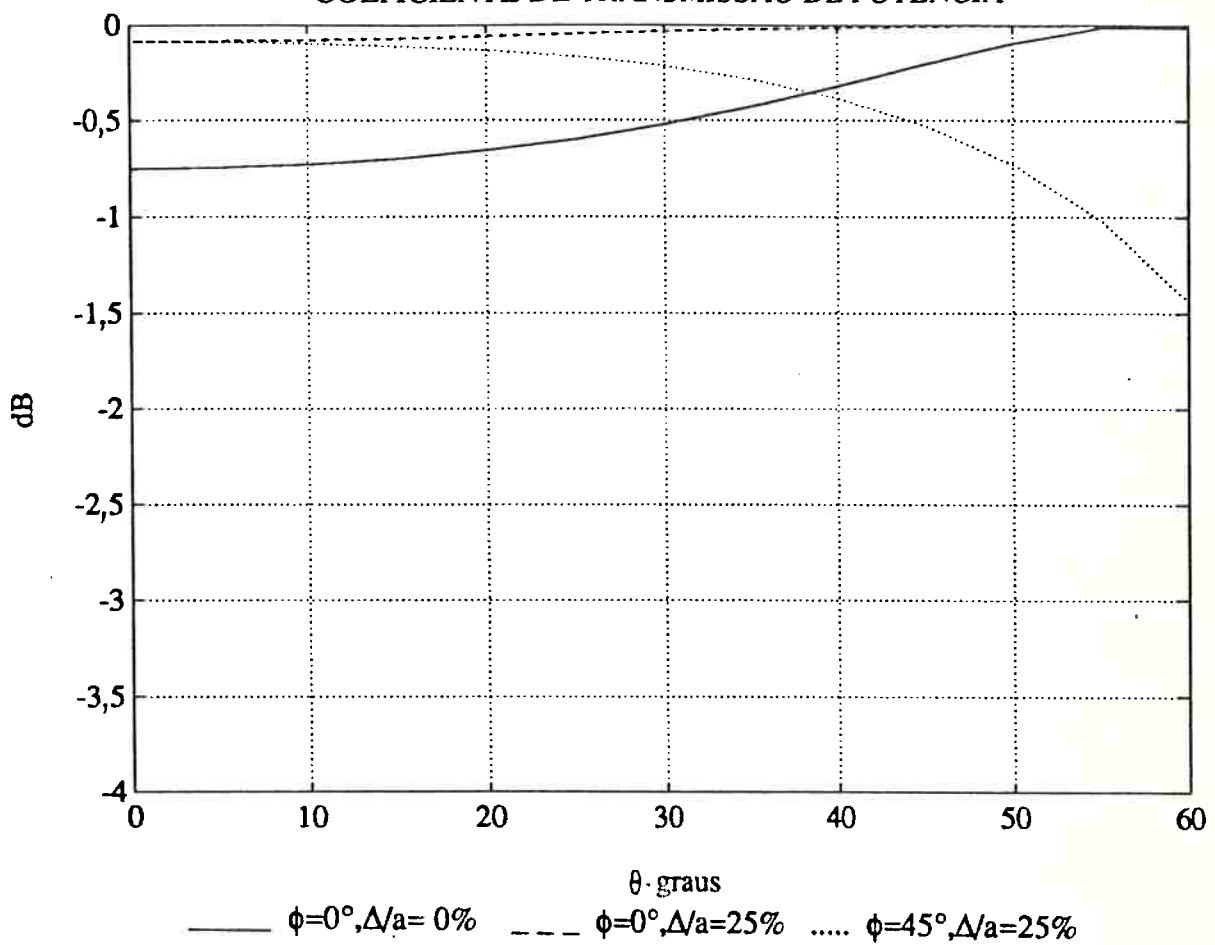
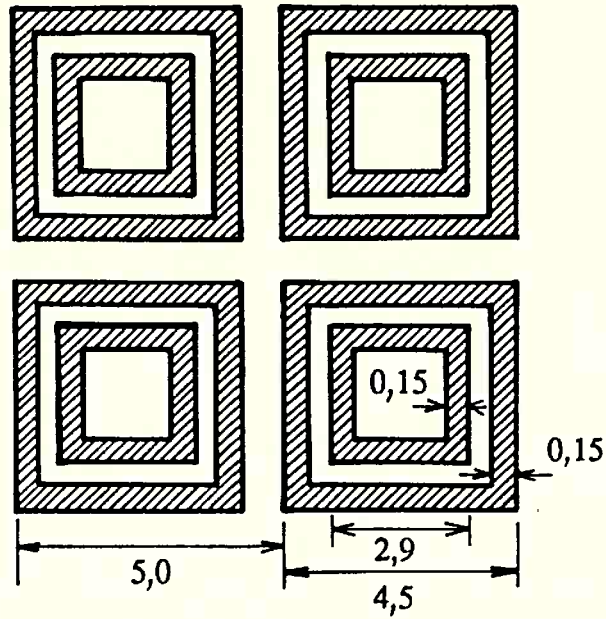


figura 5.9 - Coeficiente de transmissão de potência de grade condutora com suporte dielétrico - incidência TM - substrato e superstrato de espessuras  $0,1 \lambda_0$

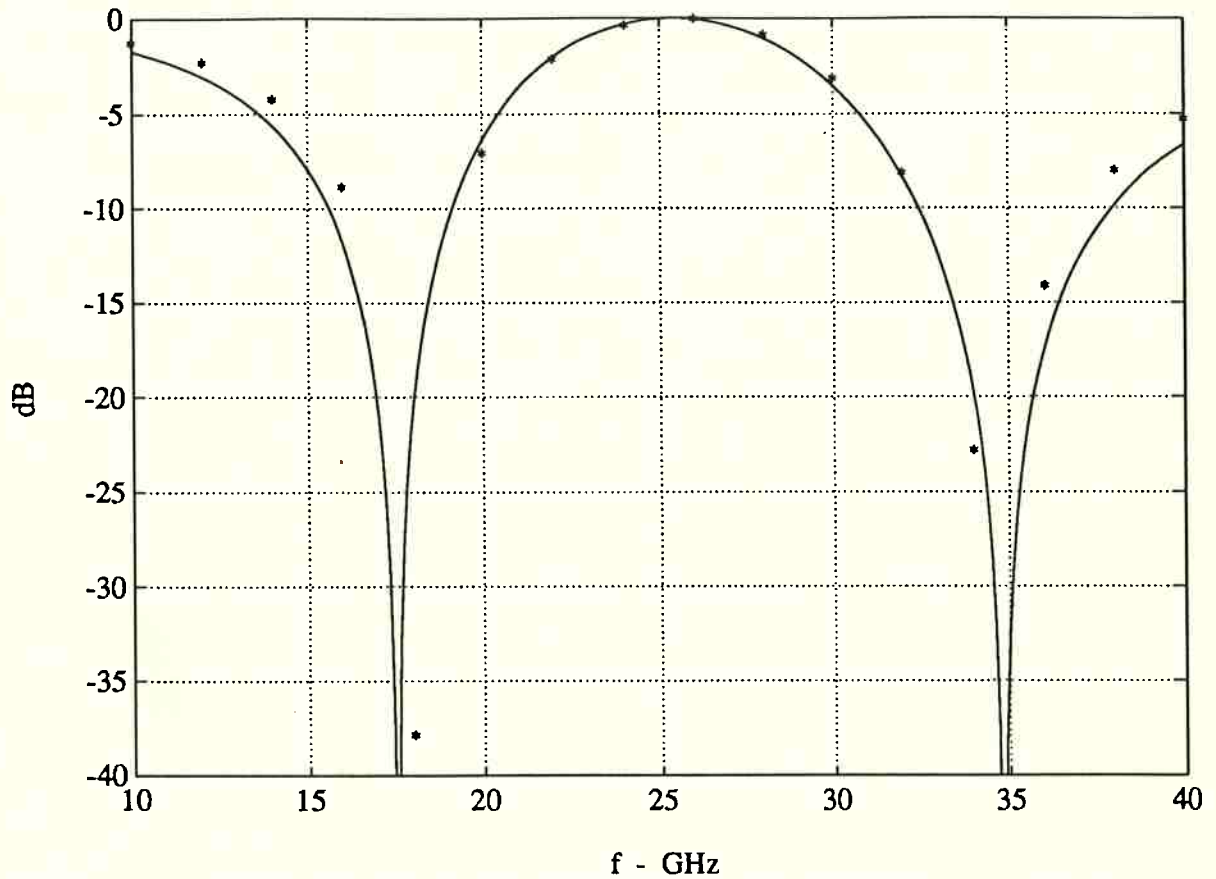
Podem ser observadas melhoras consideráveis na transmissividade da estrutura devido à presença da grade condutora, principalmente para  $\Delta/a=25\%$ , mostrando-se, então, uma atraente opção para uso em radomes, como uma forma de melhorar sua eficiência. A curva pontilhada no gráfico 5.9 foi obtida para o caso de incidência TM com o campo magnético formando um ângulo de  $45^\circ$  com as tiras condutoras, e mostra que nesse ângulo a transmissividade é um pouco pior do que nos outros casos. É bom observar que não foi feito nenhum tipo de otimização para a obtenção dos parâmetros da estrutura para máxima transmissividade, o que poderia levar a resultados ainda melhores.

Um outro exemplo interessante é o dos quadrados concêntricos, sendo mostrados nas figuras 5.10 a 5.12 as curvas de transmissividade da estrutura em função da frequência, para o caso sem dielétrico, com incidência normal e a  $45^\circ$  (TE e TM). A célula básica foi dividida num reticulado de  $32 \times 32$  quadrados, e foram utilizados 4096 modos de Floquet. A dimensão do sistema obtido foi 176, e o tempo de processamento médio para cada ponto do gráfico foi de 6 minutos e 50 segundos.

Os resultados calculados foram traçados juntamente com os dados obtidos através de uma formulação que aproxima o comportamento da estrutura por um modelo a parâmetros concentrados, dada por LEE; LANGLEY<sup>(20)</sup>. Vemos, pelas curvas apresentadas, que o cálculo realizado apresenta boa concordância com os obtidos com esse outro modelamento, especialmente para incidência normal. Para as outras incidências as discrepâncias ocorrem devido às limitações do modelo apresentado por esses autores, como pode ser visto nos dados experimentais apresentados por eles, onde vemos que realmente há uma ressonância espúria mais próxima de 30 GHz, como foi verificado pelo modelo computacional.



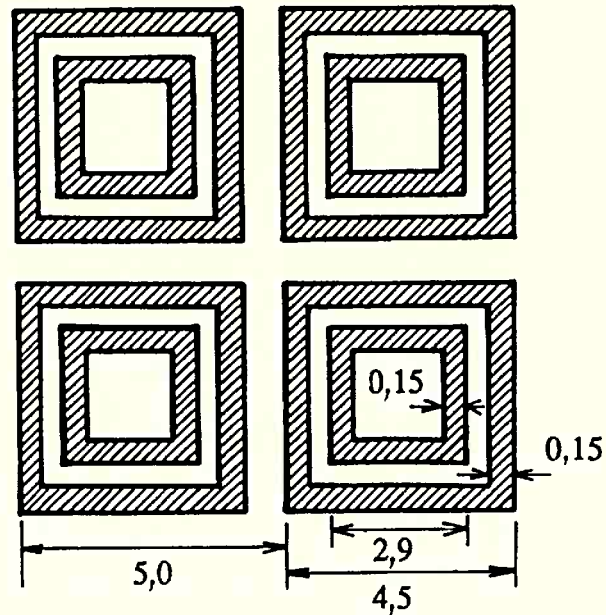
dimensões em mm.  
COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA



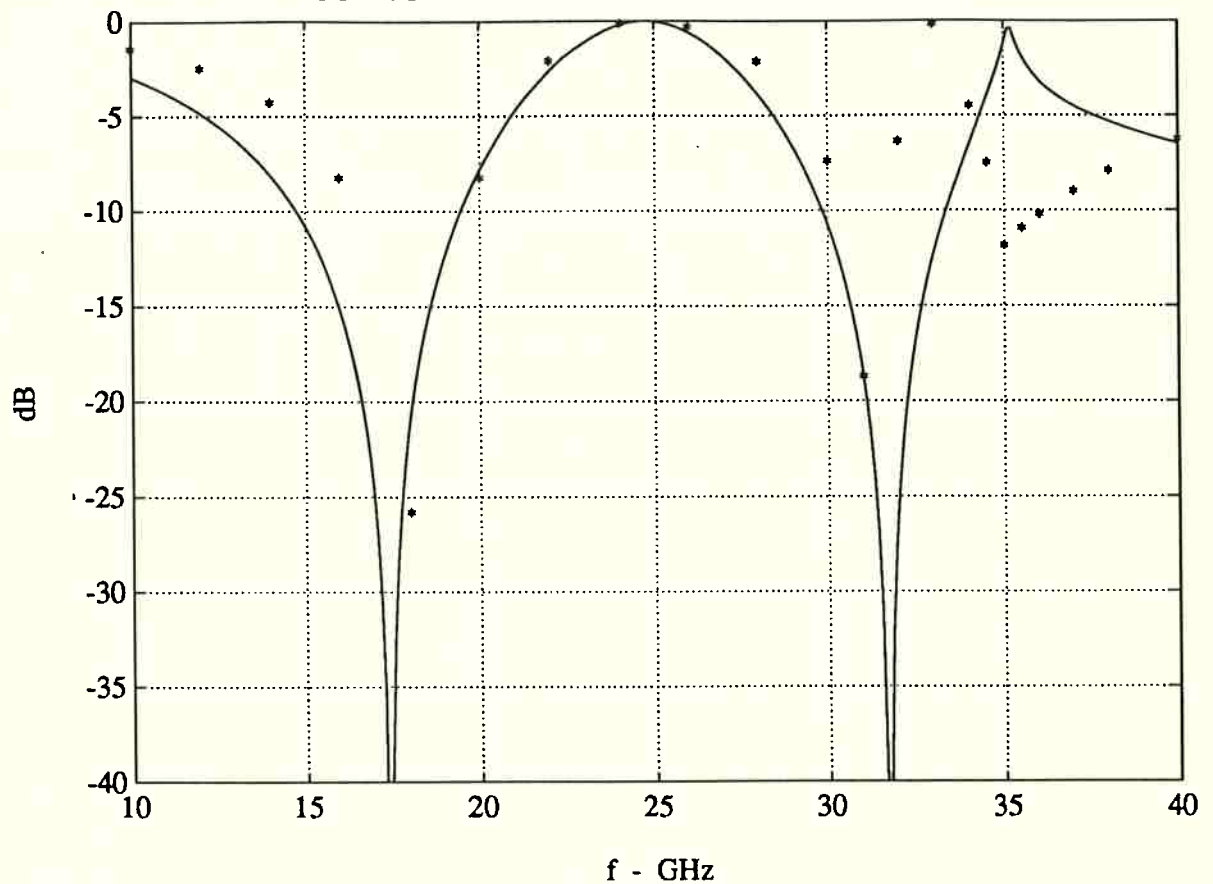
— modelo de parâmetros concentrados \* dados obtidos computacionalmente

figura 5.10 - Resposta em frequência de estrutura formada por quadrados concêntricos, sem dielétrico - incidência normal,  $\phi=0^\circ$ .



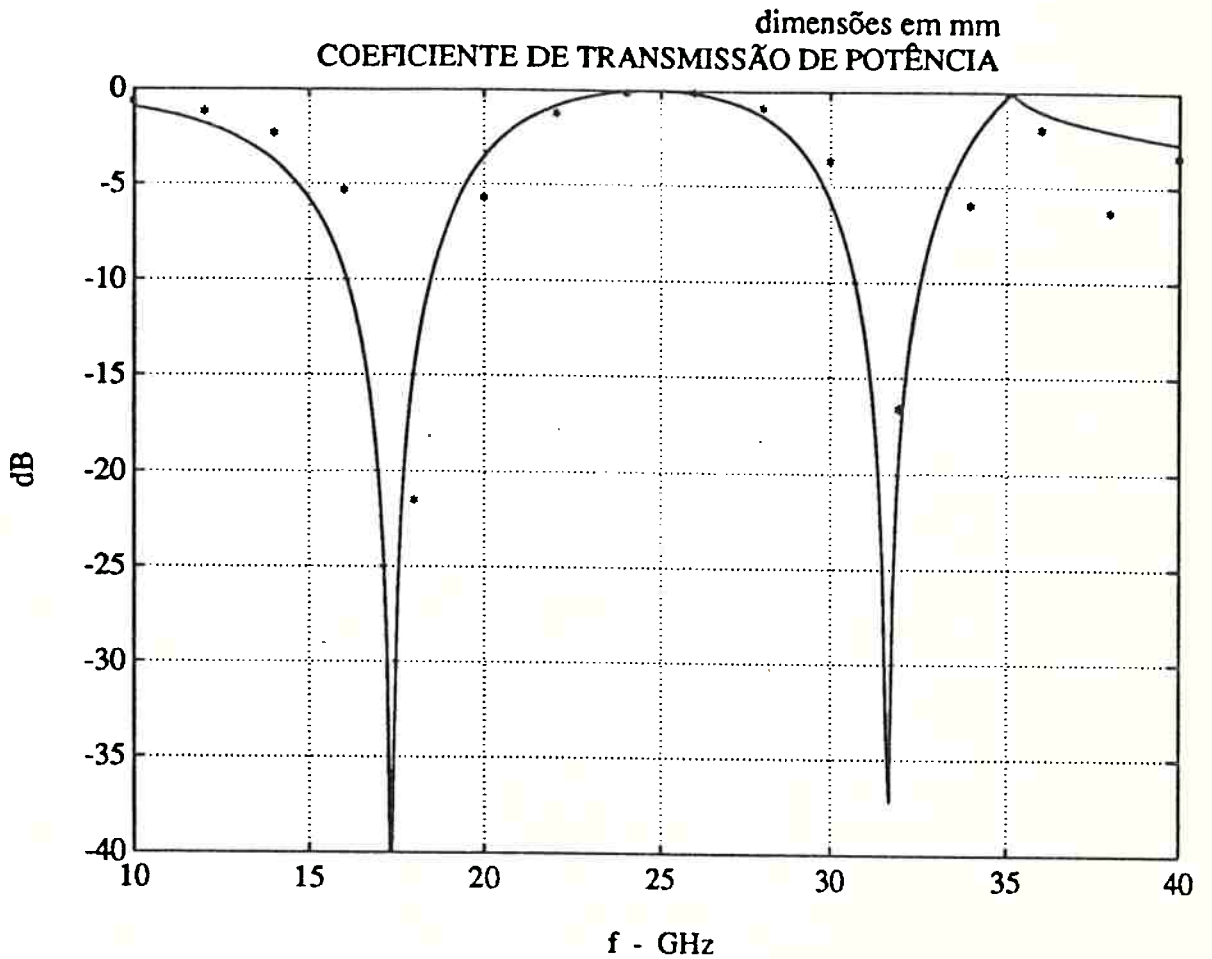
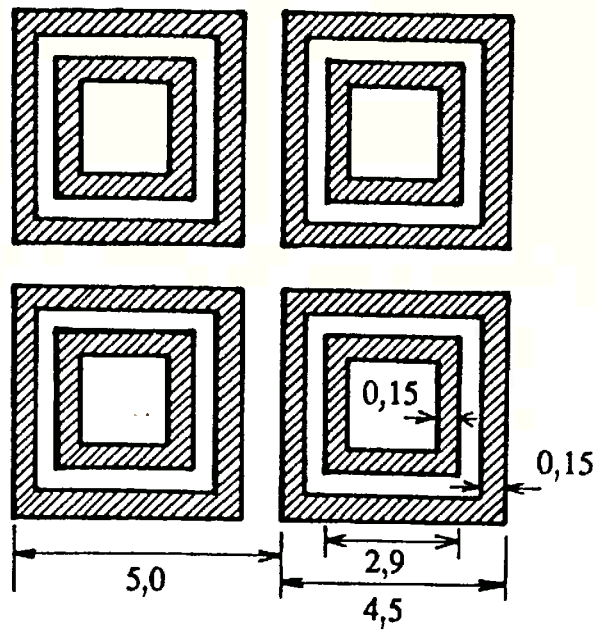


dimensões em mm  
COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA



— modelo de parâmetros concentrados \* dados obtidos computacionalmente

figura 5.11 - Resposta em frequência de estrutura formada por quadrados concêntricos, sem dielétrico - incidência TE,  $\theta=45^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$ .



\_\_\_\_\_ modelo de parâmetros concentrados \* dados obtidos computacionalmente

figura 5.12 - Resposta em frequência de estrutura formada por quadrados concêntricos - incidência TM,  $\theta=45^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$ .

Como um outro exemplo temos traçado no gráfico 5.13 a resposta em frequência de uma estrutura do tipo cruz de Jerusalém, com as dimensões mostradas. A estrutura está imersa no vácuo, e as ondas utilizadas como excitação incidiam normalmente (curva contínua), e nos modos TE-45° (curva tracejada) e TM-45° (curva pontilhada), com os campos paralelos às tiras. Vemos que para esse tipo de estrutura não há uma variação muito grande da ressonância com o ângulo de incidência, como acontecia por exemplo com os dipolos cruzados.

Esses resultados aqui apresentados servem apenas para que se possa vislumbrar a grande gama de aplicações que esses tipos de estruturas podem ter, como as citadas no capítulo 1, e também para que se perceba a utilidade da ferramenta obtida com a formulação apresentada. Apenas para uma comparação qualitativa, a figura 5.14, copiada de ARNAUD; PELLOW<sup>(3)</sup> mostra uma representação esquemática de estruturas dicróicas simples e duplas, com sua resposta em frequência e seu modelo equivalente de parâmetros concentrados, a partir dos quais pode-se escolher a estrutura mais adequada para uma dada aplicação e, então, analisá-la com os programas aqui apresentados.

Como os programas implementados permitem a obtenção do módulo e da fase dos coeficientes de reflexão e transmissão\*, pode-se facilmente obter os parâmetros de espalhamento de uma determinada estrutura e utilizá-los para o seu cascadeamento, desde que a distância entre as estruturas seja grande o suficiente para que se possa desprezar o efeito das ondas evanescentes de uma sobre a outra.

Considerando, por exemplo, a estrutura da figura 5.1, com substrato dielétrico, e cascadeando no mesmo guia de onda a uma distância de 10 cm outra estrutura idêntica, teremos a resposta em frequência do gráfico 5.15, onde a curva contínua mostra a transmissividade da estrutura simples, e a tracejada a da estrutura dupla, podendo-se notar, então, um alargamento da banda de rejeição no segundo caso.

---

\*A versão implementada computacionalmente fornece como saída apenas o módulo e fase do primeiro modo propagante, mas seria bastante simples obter-se os módulos e fases de quaisquer outros modos.

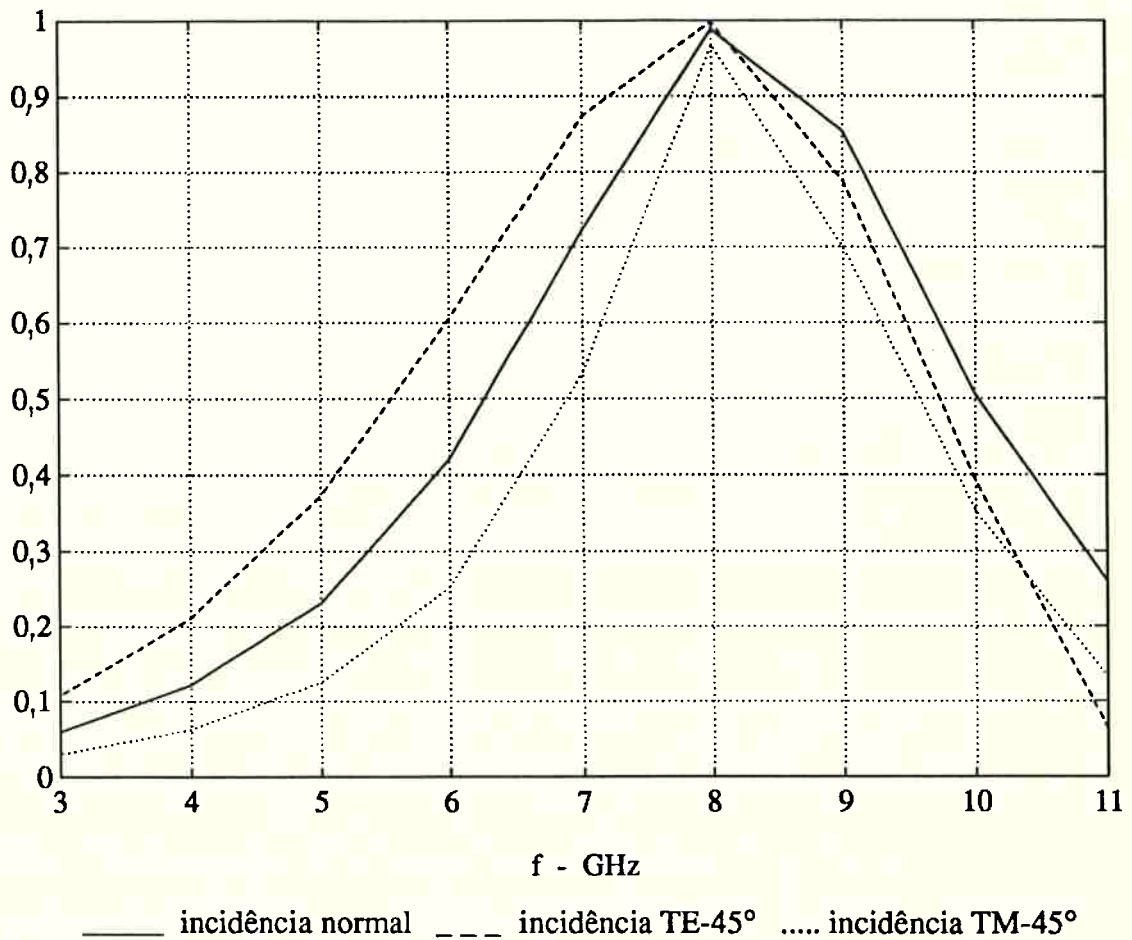
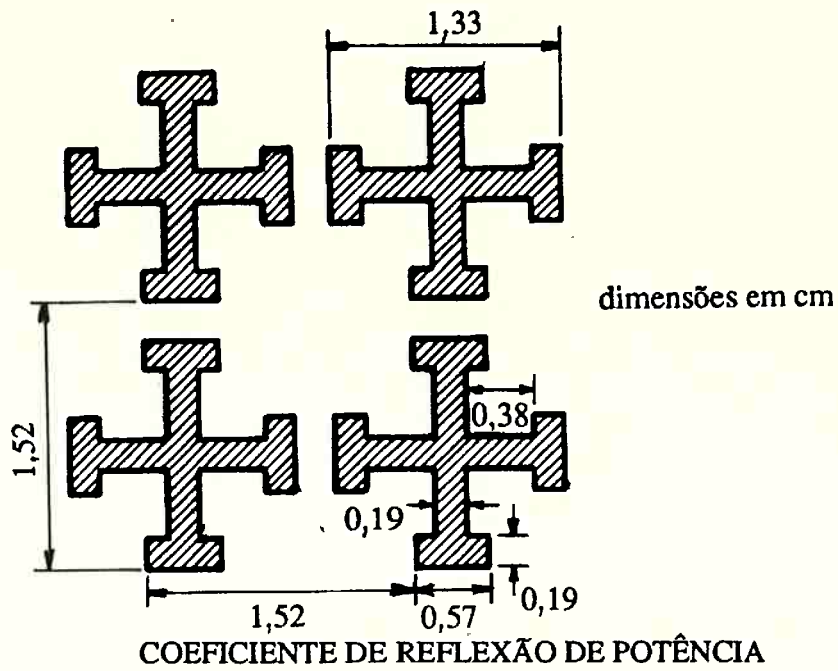


figura 5.13 - Resposta em frequência de estrutura formada por cruzes de Jerusalém,  $\phi=0^\circ$  sem dielétrico.

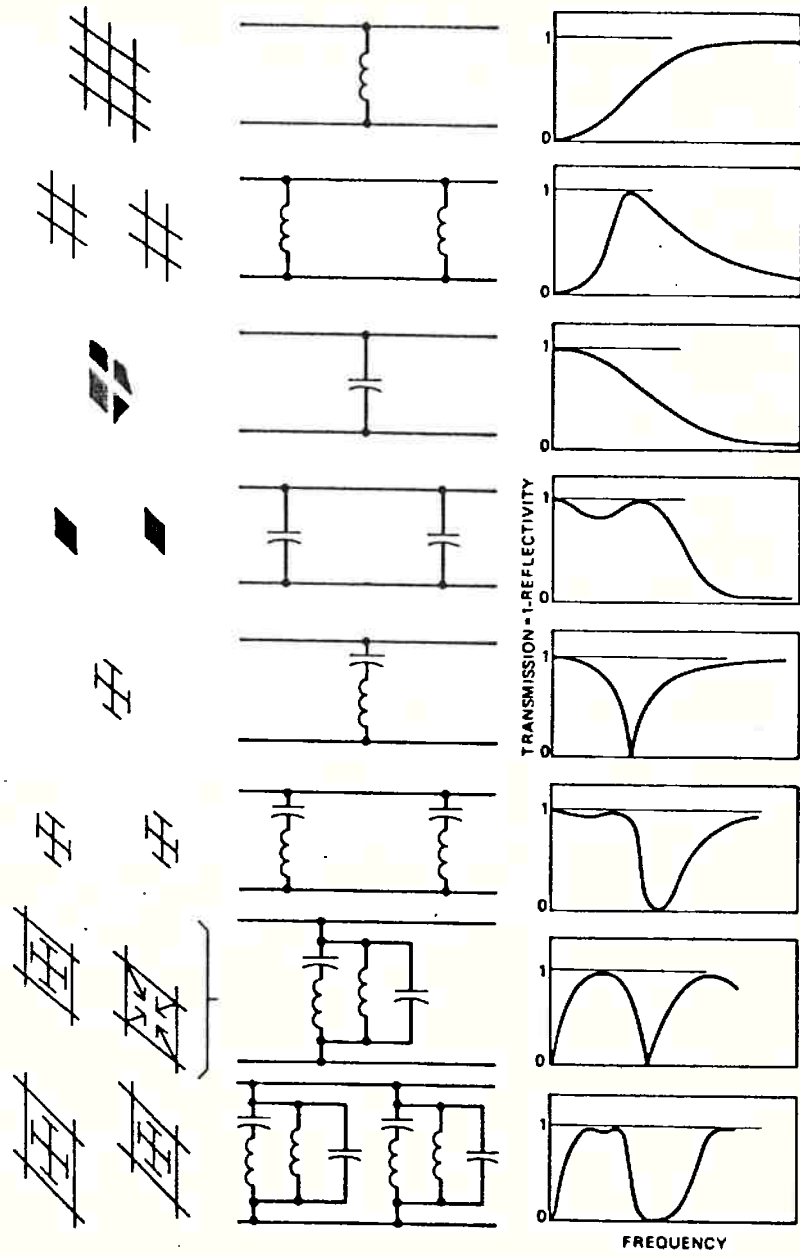


figura 5.14 - Representação esquemática de estruturas dicróicas simples e duplas, obtida de ARNAUD; PELLOW<sup>(3)</sup>.

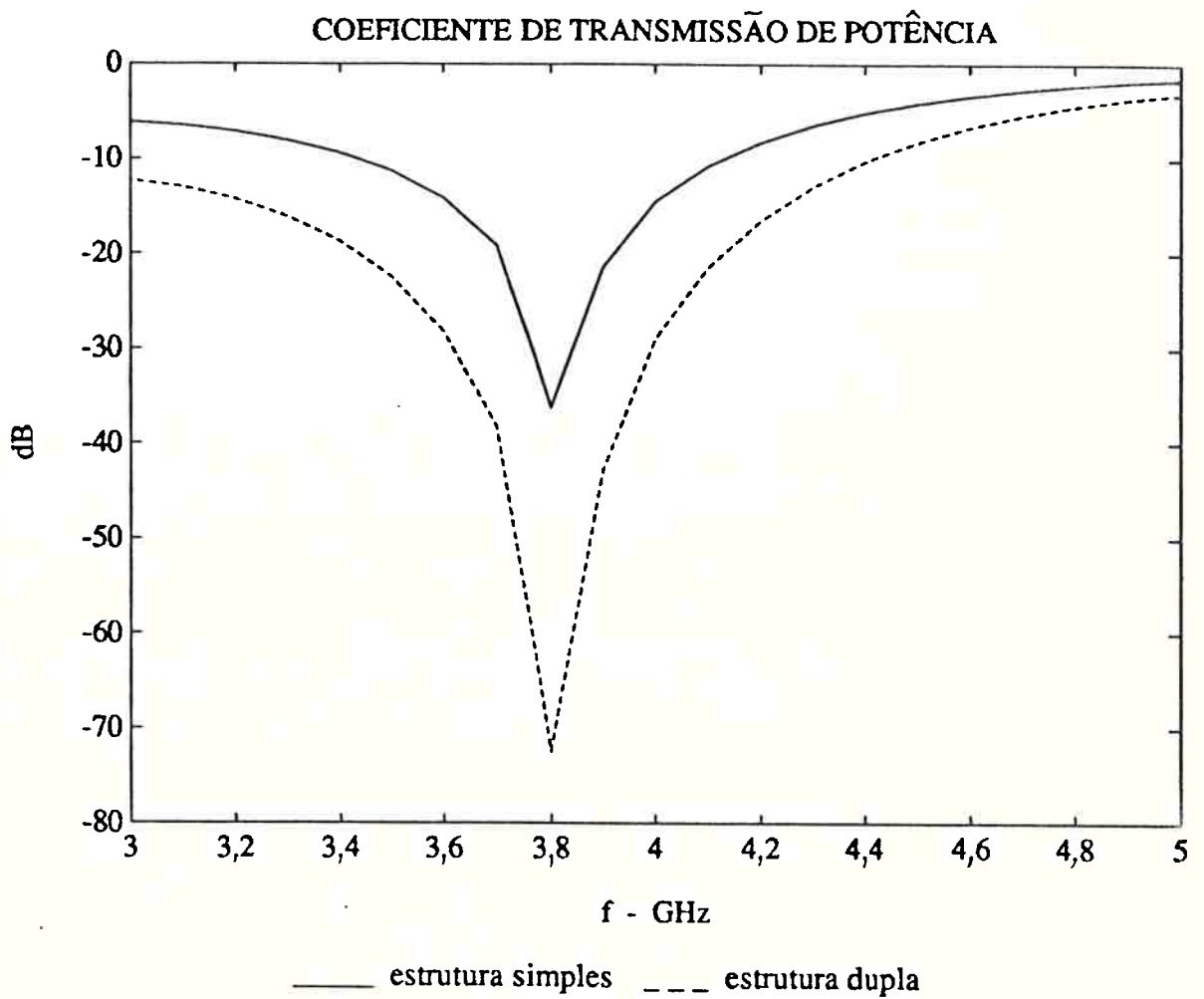
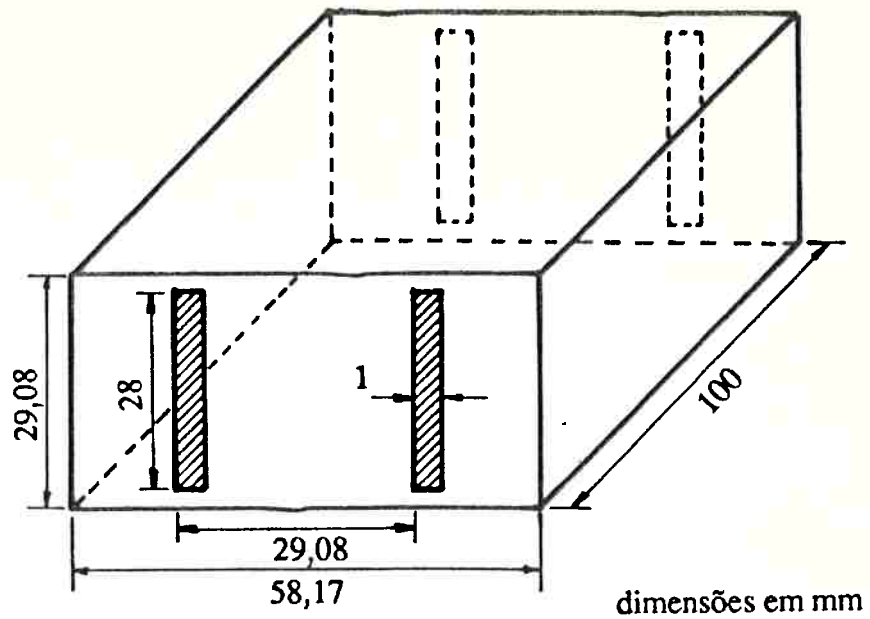


figura 5.15 - Resposta em frequência de estruturas, simples e dupla, formadas por dipolos simples em guia de onda

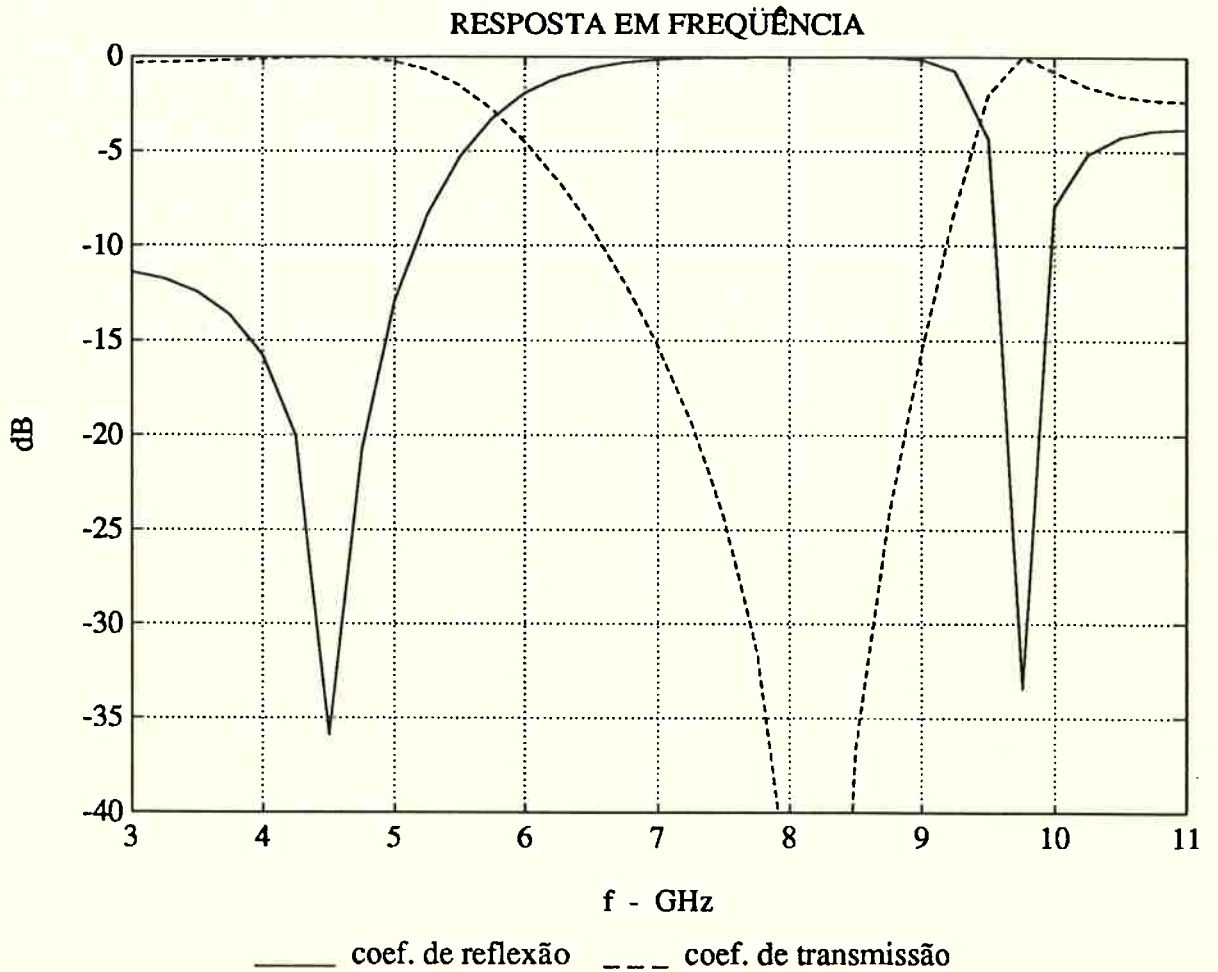
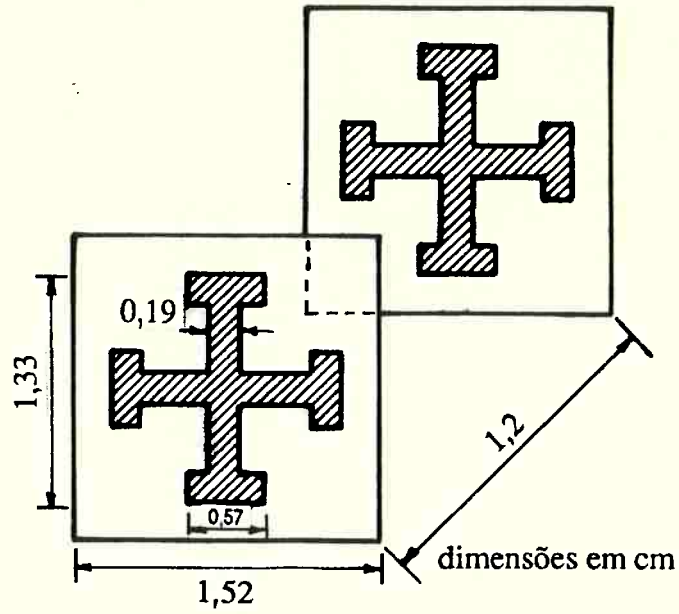


figura 5.16 - Resposta em frequência de estrutura dupla formada por cruces de Jerusalém

Finalizando, mostramos no gráfico 5.16 o cascadeamento de duas superfícies, tendo como elemento básico a cruz de Jerusalém do gráfico 5.13 e distantes entre si 1,2 cm, para o caso de incidência normal.

Pode-se ver, então, que há um alargamento da banda de reflexão em 8,2 GHz, e que passamos agora a ter uma banda de transmissão em 4,5 GHz, permitindo assim o seu uso, por exemplo, como sub-refletor de uma antena do tipo da figura 2. Note-se que o cálculo da resposta desse cascadeamento foi feito desprezando-se as ondas evanescentes, pois, mesmo para a maior frequência, a atenuação sofrida pela onda evanescente nessa distância de 1,2 cm é de cerca de 36 dB.



## 6 CONCLUSÕES

Como pode ser observado pelos dados mostrados no capítulo anterior, conseguiu-se implementar, através da formulação apresentada, rotinas eficientes para o cálculo das características de refletividade e transmissividade de estruturas dicróicas infinitas e sem perdas, com substrato e/ou superstrato dielétricos.

Um dos programas é específico para a análise de estruturas formadas por tiras retangulares, de quaisquer dimensões, sendo sua precisão limitada pelo número de funções de base e de modos de Floquet utilizados. No caso de dipolos finos ela mostrou-se bastante eficiente, pois conseguiu-se obter resultados muito bons com um número bem pequeno de funções e modos. No caso de retângulos de dimensões relativamente grandes, comparadas com o comprimento de onda da excitação, deverá ser necessário aumentar bem mais o número de funções utilizadas, porém esse não é o caso da maior parte das aplicações práticas encontradas para essas estruturas.

O número de modos mínimo a ser utilizado está diretamente relacionado com o número de funções consideradas na análise, conforme detalhado na seção 4.1. Eventualmente essa formulação poderá se tornar mais eficiente com a aplicação de técnicas de aceleração como a descrita em 4.2.

O segundo programa implementado permite a análise de estruturas bem mais complexas, como as apresentadas no capítulo anterior, só que, de forma geral, à custa de um número bem elevado de funções de base, e portanto de capacidade computacional. Nos exemplos apresentados pode-se notar que uma condição básica para a utilização desse programa é que a estrutura metálica possa ser decomposta em pequenos quadrados, e que esse não é o caso, por exemplo, de estruturas formadas por anéis metálicos circulares ou por furos circulares num plano condutor. Porém, até essas estruturas podem ser razoavelmente bem aproximadas por pequenos quadrados, como feito por CWIK; MITTRA<sup>(7)</sup>, sendo a precisão cada vez melhor quanto maior for essa

discretização. Deve-se notar, porém, que, no caso específico de anéis circulares, podem ser encontradas funções de base mais adequadas que permitam o seu estudo de forma mais eficiente, como por exemplo as apresentadas por PARKER; VARDAXOGLU<sup>(30)</sup>, e que deverão ser analisadas futuramente.

A formulação apresentada precisa ainda ser modificada para permitir o estudo de estruturas com perdas, tanto nos condutores como nos dielétricos. No primeiro caso basta proceder-se como feito por CWIK; MITTRA<sup>(7)</sup>, subtraindo-se uma parcela constante da função de Green apresentada. Para o segundo caso a formulação apresentada na seção 2.2 precisa ser um pouco modificada para levar em conta uma possível constante dielétrica complexa.

A análise de estruturas multicamada, se bem que de uma forma um pouco restrita, pode também ser encontrada na literatura, como a feita por HALL et al.<sup>(11)</sup>, que fizeram uso da matriz de espalhamento generalizada de uma camada isolada para determinar a resposta de um número maior de camadas. Pretende-se ainda implementar tal formulação e verificar sua eficiência, expandindo-a, se eventualmente for necessário.

Também os efeitos provocados por estruturas finitas e não planas precisam ser investigados. Alguns resultados já foram obtidos por CWIK; MITTRA<sup>(8)</sup>, que analisaram o problema bidimensional de forma bem precisa, comparando com algumas aproximações (distribuição de corrente localmente plana, e distribuição de corrente dos elementos fora das bordas essencialmente a mesma de uma estrutura infinita). Pode ser observado que a aproximação localmente planar levou a resultados bem precisos, enquanto que a suposição de distribuição de corrente nos elementos mais internos igual à de uma estrutura infinita pode, em alguns casos (dependendo do comprimento de onda), levar a resultados imprecisos. Esses dados podem ser muito importante no projeto de FSS's para serem utilizadas em sub-refletores de antenas "dual-band".

Assim apesar de haver ainda muito a ser estudado e modificado nas rotinas propostas para análise de superfícies seletoras de frequência, pode-se observar que os resultados até agora obtidos já permitem, com uma boa precisão, determinar-se as características de refletividade e transmissividade de uma grande parte das geometrias atualmente utilizadas. Esses resultados podem ser, portanto, extremamente úteis no projeto de estruturas para serem usadas em guia de onda retangular, e também em sub-refletores e radomes de antenas. A continuação desse trabalho deverá, então, trazer uma contribuição muito significativa para o projeto de sistemas de comunicação ainda mais eficientes, atendendo, então, às necessidades cada vez mais restritivas nessa área.

## ANEXO A - Dedução da função de Green para estrutura sem dielétrico

Temos, de (2.2), que:

$$\vec{A}^s(x,y,z) = \mu_0 \cdot G(x,y,z) * \vec{J}(x,y)$$

sendo "\*" o operador convolução nas variáveis x e y, e

$$G(x,y,z) = \frac{e^{-jK_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

A distribuição de corrente pode, de acordo com (2.5b), ser escrita como:

$$\vec{J}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}(\alpha,\beta) e^{j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (A.1)$$

que, substituída em (2.2), leva a:

$$\vec{A}^s(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}(\alpha,\beta) [G(x,y,z) * e^{j(\alpha x + \beta y)}] d\alpha d\beta \quad (A.2)$$

resolvendo-se o termo entre colchetes:

$$G(x,y,z) * e^{j(\alpha x + \beta y)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jK_0\sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + z^2}}}{4\pi\sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + z^2}} \cdot e^{j[\alpha(\underline{x} - \underline{x}) + \beta(\underline{y} - \underline{y})]} d\underline{x} d\underline{y} =$$

$$= e^{j(\alpha x + \beta y)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jK_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - j(\alpha x + \beta y)}}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy =$$

$$\alpha = \rho \cos \phi \quad \beta = \rho \sin \phi \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$= \frac{e^{j(\alpha x + \beta y)}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jK_0 \sqrt{r^2 + z^2}} r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \left[ \int_0^{2\pi} e^{-j\rho r \cos(\theta - \phi)} d\theta \right] dr =$$

por GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup>, p.482, expr. 3.915-2

$$= \frac{e^{j(\alpha x + \beta y)}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jK_0 \sqrt{r^2 + z^2}} r}{\sqrt{r^2 + z^2}} 2\pi J_0(\rho r) dr =$$

$$u^2 = r^2/z^2 + 1$$

$$= \frac{e^{j(\alpha x + \beta y)}}{2} |z| \int_1^{\infty} e^{-jK_0 |z| u} J_0(\rho |z| \sqrt{u^2 - 1}) du =$$

por GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup>, p.721, expr. 6.645-2

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{e^{j(\alpha x + \beta y)} \sqrt{|z|}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2}} K_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|) =$$

por GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup>, p.967, expr. 8.469-3

$$= e^{j(\alpha x + \beta y)} \frac{e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|}}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2}}$$

Substituindo-se agora em (A.2) temos:

$$\bar{A}^s(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0 \bar{G}(\alpha, \beta) \bar{J}(\alpha, \beta) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} e^{j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (A.3)$$

sendo  $\bar{G}(\alpha, \beta)$  dado por (2.7). E assim:

$$\bar{A}^s(\alpha, \beta, z) = \mu_0 \bar{G}(\alpha, \beta) \bar{J}(\alpha, \beta) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} \quad (A.4)$$

que é a expressão (2.6) utilizada no capítulo 2.

Utilizando-se agora a expressão (2.4) para a obtenção do campo elétrico:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}^s) = j\omega \epsilon_0 \mu_0 \bar{E}^s$$

vamos expandí-la e transformá-la por Fourier, de acordo com (2.5a):

$$\beta^2 \bar{A}_x - \alpha \beta \bar{A}_y - \frac{\partial^2 \bar{A}_x}{\partial z^2} = j\omega \epsilon_0 \mu_0 \bar{E}_x^s \quad (A.5a)$$

$$\alpha^2 \bar{A}_y - \alpha \beta \bar{A}_x - \frac{\partial^2 \bar{A}_y}{\partial z^2} = j\omega \epsilon_0 \mu_0 \bar{E}_y^s \quad (A.5b)$$

$$j\alpha \frac{\partial \tilde{A}_x}{\partial z} + j\beta \frac{\partial \tilde{A}_y}{\partial z} = j\omega\epsilon_0\mu_0 \tilde{E}_z \quad (\text{A.5c})$$

Substituindo-se então (A.4), temos as seguintes equações:

$$\tilde{E}_x^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta) [(K_0^2 - \alpha^2) \tilde{J}_x(\alpha, \beta) - \alpha\beta \tilde{J}_y(\alpha, \beta)] e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} \quad (\text{A.6a})$$

$$\tilde{E}_y^s = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta) [-\alpha\beta \tilde{J}_x(\alpha, \beta) + (K_0^2 - \beta^2) \tilde{J}_y(\alpha, \beta)] e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} \quad (\text{A.6b})$$

$$\tilde{E}_z^s = \frac{\mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2}}{\omega\epsilon_0} \tilde{G}(\alpha, \beta) [\alpha \tilde{J}_x(\alpha, \beta) + \beta \tilde{J}_y(\alpha, \beta)] e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - K_0^2} |z|} \quad (\text{A.6c})$$

sinal superior (-) para  $z > 0$

que correspondem à expressão (2.8)

## ANEXO B - Cálculo da transformada da distribuição periódica de corrente

A distribuição de corrente na estrutura é, de acordo com (2.9), dada por:

$$\mathcal{J}(x,y) = \mathcal{J}_0(x,y) * \sum_{m,n} \{ \delta(x - ma - nb \cos \Omega) \delta(y - nb \sin \Omega) e^{jk_0 \sin \theta (x \cos \phi + y \sin \phi)} \} \quad (B.1)$$

Vamos, então, inicialmente calcular a transformada da somatória para  $\theta=0$ :

$$\sum_{m,n} \{ \delta(x - ma - nb \cos \Omega) \delta(y - nb \sin \Omega) \} = \sum_n \delta(y - nb \sin \Omega) \sum_m \delta(x - ma - nb \cos \Omega) \quad (B.2)$$

por LATHI<sup>(19)</sup>, fazendo-se primeiramente a transformada (B.2) em x:

$$\sum_m \delta(x - ma - nb \cos \Omega) \leftrightarrow \frac{2\pi}{a} \sum_m \delta\left(\alpha - \frac{2\pi m}{a}\right) e^{-j\alpha nb \cos \Omega} \quad (B.3)$$

A somatória (B.2) torna-se então:

$$\frac{2\pi}{a} \sum_m \delta\left(\alpha - \frac{2\pi m}{a}\right) \sum_n \delta(y - nb \sin \Omega) e^{-j\frac{2\pi m}{a} y \cot \Omega} \quad (B.4)$$

Transformando-se, agora, (B.4) em y obtemos:

$$\sum_n \delta(y - nb \sin \Omega) \leftrightarrow \frac{2\pi}{b \sin \Omega} \sum_n \delta\left(\beta - \frac{2\pi n}{b \sin \Omega}\right) \quad (B.5)$$



$$\sum_n \delta(y - nb \operatorname{sen} \Omega) e^{-j \frac{2\pi m}{a} \cot \Omega y} \leftrightarrow \frac{2\pi}{b \operatorname{sen} \Omega} \sum_n \delta\left(\beta - \frac{2\pi n}{b \operatorname{sen} \Omega} + \frac{2\pi m}{a} \cot \Omega\right) \quad (B.6)$$

E, assim, a transformada da somatória (B.2) fica:

$$\frac{4\pi^2}{ab \operatorname{sen} \Omega} \sum_{m,n} \delta\left(\alpha - \frac{2\pi m}{a}\right) \delta\left(\beta - \frac{2\pi n}{b \operatorname{sen} \Omega} + \frac{2\pi m}{a} \cot \Omega\right) \quad (B.7)$$

Considerando agora  $\theta \neq 0$  teremos um deslocamento no domínio espectral, e a transformada da somatória em (B.1) fica então:

$$\frac{4\pi^2}{ab \operatorname{sen} \Omega} \sum_{m,n} \delta(\alpha - \alpha_m) \delta(\beta - \beta_{mn}) \quad (B.8)$$

com  $\alpha_m$  e  $\beta_{mn}$  dados por

$$\alpha_m = \frac{2\pi m}{a} + K_0 \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (B.9a)$$

$$\beta_{mn} = \frac{2\pi n}{b \operatorname{sen} \Omega} - \frac{2\pi m \cot \Omega}{a} + K_0 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (B.9b)$$

e, assim, aplicando-se a propriedade da transformada da convolução, dada por LATHI<sup>(19)</sup>, a transformada de (B.1) obtida será:

$$J(\alpha, \beta) = J_0(\alpha, \beta) \cdot \left\{ \frac{4\pi^2}{ab \operatorname{sen} \Omega} \cdot \sum_{m,n} \delta(\alpha - \alpha_m) \cdot \delta(\beta - \beta_{mn}) \right\} \quad (B.10)$$

como em (2.10).

## ANEXO C - Cálculo dos campos espalhado e incidente - estrutura com dielétrico

Resolvendo-se as equações (2.23) a (2.34), para o campo gerado por uma distribuição de corrente na direção x dada por (2.15), chegamos às seguintes expressões para as ondas no meio 1:

$$E_{x1}^+ = \frac{(Y_1^e + Y^{*e})}{2Y_1^e} Z^e \cos^2 \phi + \frac{(Y_1^h + Y^{*h})}{2Y_1^h} Z^h \text{sen}^2 \phi \quad (C.1)$$

$$E_{x1}^- = \frac{(Y_1^e - Y^{*e})}{2Y_1^e} Z^e \cos^2 \phi + \frac{(Y_1^h - Y^{*h})}{2Y_1^h} Z^h \text{sen}^2 \phi \quad (C.2)$$

$$E_{y1}^+ = \left[ \frac{(Y_1^e + Y^{*e})}{2Y_1^e} Z^e - \frac{(Y_1^h + Y^{*h})}{2Y_1^h} Z^h \right] \text{sen} \phi \cos \phi \quad (C.3)$$

$$E_{y1}^- = \left[ \frac{(Y_1^e - Y^{*e})}{2Y_1^e} Z^e - \frac{(Y_1^h - Y^{*h})}{2Y_1^h} Z^h \right] \text{sen} \phi \cos \phi \quad (C.4)$$

e portanto o campo em  $z=0$  será dado por:

$$E_x(z=0) = (E_{x1}^+ + E_{x1}^-) e^{\gamma_x x + \gamma_y y} = (Z^e \cos^2 \phi + Z^h \text{sen}^2 \phi) e^{\gamma_x x + \gamma_y y}$$

$$E_y(z=0) = (E_{y1}^+ + E_{y1}^-) e^{\gamma_x x + \gamma_y y} = (Z^e - Z^h) \text{sen} \phi \cos \phi e^{\gamma_x x + \gamma_y y}$$

como utilizado na seção 2.2.

As expressões das ondas nos outros meios são as seguintes:

$$E_{x2}^+ = \frac{(Y_2^e - Y^{-e})}{2Y_2^e} Z^e \cos^2 \phi + \frac{(Y_2^h - Y^{-h})}{2Y_2^h} Z^h \sin^2 \phi \quad (C.5)$$

$$E_{x2}^- = \frac{(Y_2^e + Y^{-e})}{2Y_2^e} Z^e \cos^2 \phi + \frac{(Y_2^h + Y^{-h})}{2Y_2^h} Z^h \sin^2 \phi \quad (C.6)$$

$$E_{y2}^+ = \left[ \frac{(Y_2^e - Y^{-e})}{2Y_2^e} Z^e - \frac{(Y_2^h - Y^{-h})}{2Y_2^h} Z^h \right] \sin \phi \cos \phi \quad (C.7)$$

$$E_{y2}^- = \left[ \frac{(Y_2^e + Y^{-e})}{2Y_2^e} Z^e - \frac{(Y_2^h + Y^{-h})}{2Y_2^h} Z^h \right] \sin \phi \cos \phi \quad (C.8)$$

$$E_{x0}^+ = \left[ \frac{Z^e Y_1^e \cos^2 \phi}{Y_1^e \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^e} + \frac{Z^h Y_1^h \sin^2 \phi}{Y_1^h \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_1}}{\sinh(\gamma_1 d_1)} \quad (C.9)$$

$$E_{y0}^+ = \left[ \frac{Z^e Y_1^e}{Y_1^e \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^e} - \frac{Z^h Y_1^h}{Y_1^h \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_1} \sin \phi \cos \phi}{\sinh(\gamma_1 d_1)} \quad (C.10)$$

$$E_{x0}^- = \left[ \frac{Z^e Y_2^e \cos^2 \phi}{Y_2^e \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^e} + \frac{Z^h Y_2^h \sin^2 \phi}{Y_2^h \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_2}}{\sinh(\gamma_2 d_2)} \quad (C.11)$$

$$E_{y0}^- = \left[ \frac{Z^e Y_2^e}{Y_2^e \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^e} - \frac{Z^h Y_2^h}{Y_2^h \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_2} \sin \phi \cos \phi}{\sinh(\gamma_2 d_2)} \quad (C.12)$$

Essas quatro últimas expressões representam as componentes do campo espalhado fora das camadas de dielétrico, e a partir delas os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser calculados. Como elas foram obtidas a partir de uma densidade de corrente apenas com componente na direção  $x$ , dada por (2.15), deveremos ter para uma corrente da forma:

$$\vec{J} = e^{j(\alpha x + \beta y)}(J_x \hat{x} + J_y \hat{y})$$

as seguintes expressões para as ondas na região  $z > d_1$ , obtidas de forma análoga às anteriores (da mesma forma que feito na seção 2.2 para o campo no plano  $z=0$ ), e utilizando, também, a expressão (2.20) para obter-se as componentes na direção  $z$ :

$$E_{x0}^+ = G_{11}^+(\alpha, \beta) J_x + G_{12}^+(\alpha, \beta) J_y$$

$$E_{y0}^+ = G_{21}^+(\alpha, \beta) J_x + G_{22}^+(\alpha, \beta) J_y$$

$$E_{z0}^+ = G_{31}^+(\alpha, \beta) J_x + G_{32}^+(\alpha, \beta) J_y$$

ou seja

$$\vec{E}_0^+ = G^+(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

sendo:

$$G_{11}^+ = \left[ \frac{Z^e Y_1^e \cos^2 \phi}{Y_1^e \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^e} + \frac{Z^h Y_1^h \sin^2 \phi}{Y_1^h \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_1}}{\sinh(\gamma_1 d_1)} \quad (C.14a)$$

$$G_{22}^+ = \left[ \frac{Z^e Y_1^e \sin^2 \phi}{Y_1^e \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^e} + \frac{Z^h Y_1^h \cos^2 \phi}{Y_1^h \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_1}}{\sinh(\gamma_1 d_1)} \quad (C.14b)$$

$$G_{12}^+ = G_{21}^+ = \left[ \frac{Z^e Y_1^e}{Y_1^e \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^e} - \frac{Z^h Y_1^h}{Y_1^h \coth(\gamma_1 d_1) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_1} \sin \phi \cos \phi}{\sinh(\gamma_1 d_1)} \quad (C.14c)$$

$$G_{31}^+ = \frac{\gamma_x G_{11}^+ + \gamma_y G_{12}^+}{\gamma_0}, \quad G_{32}^+ = \frac{\gamma_x G_{21}^+ + \gamma_y G_{22}^+}{\gamma_0} \quad (C.14d)$$

e para a região  $z < -d_2$ :

$$\vec{E}_0^- = G^-(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

sendo

$$G_{11}^- = \left[ \frac{Z^e Y_2^e \cos^2 \phi}{Y_2^e \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^e} + \frac{Z^h Y_2^h \sin^2 \phi}{Y_2^h \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_2}}{\sinh(\gamma_2 d_2)} \quad (C.15a)$$

$$G_{22}^- = \left[ \frac{Z^e Y_2^e \sin^2 \phi}{Y_2^e \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^e} + \frac{Z^h Y_2^h \cos^2 \phi}{Y_2^h \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_2}}{\sinh(\gamma_2 d_2)} \quad (C.15b)$$

$$G_{12}^- = G_{21}^- = \left[ \frac{Z^e Y_2^e}{Y_2^e \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^e} - \frac{Z^h Y_2^h}{Y_2^h \coth(\gamma_2 d_2) + Y_0^h} \right] \frac{e^{\gamma_0 d_2} \sin \phi \cos \phi}{\sinh(\gamma_2 d_2)} \quad (C.15c)$$

$$G_{31}^- = -\frac{\gamma_x G_{11}^+ + \gamma_y G_{12}^+}{\gamma_0}, \quad G_{32}^- = -\frac{\gamma_x G_{21}^+ + \gamma_y G_{22}^+}{\gamma_0} \quad (C.15d)$$

e, portanto, como feito na seção 2.1:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{ab \operatorname{sen} \Omega_{m,n}} \sum G^\pm(\alpha_m, \beta_{mn}) \vec{J}_0(\alpha_m, \beta_{mn}) e^{j(\alpha_m x + \beta_{mn} y) - \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2 - k_0^2} |z|} \quad (C.16)$$

válida para  $z \geq d_1$  (superscrito +) ou  $z \leq -d_2$  (superscrito -), e utilizada na seção 2.3.

Para as ondas resultantes apenas da onda incidente, vamos inicialmente definir as seguintes impedâncias características para os meios, considerando a incidência de uma onda plana TE ou TM, incidindo com  $\phi=0$ :

$$Z_i = \frac{E_{yi}^+}{H_{xi}^+} = -\frac{E_{yi}^-}{H_{xi}^-} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_i}} \sec \theta_i = -\frac{j\omega\mu_0}{\gamma_i} \quad TE \quad (C.17a)$$

$$Z_i = \frac{E_{xi}^+}{H_{yi}^+} = -\frac{E_{xi}^-}{H_{yi}^-} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_i}} \cos \theta_i = \frac{\gamma_i}{j\omega\epsilon_i} \quad TM \quad (C.17b)$$

Vamos definir também a impedância de onda num plano  $z$  qualquer (já que ela independe de  $x$  ou  $y$ ) como:

$$Z(z) = \begin{cases} \frac{E_x(z)}{H_y(z)} & TM \\ \frac{E_y(z)}{H_x(z)} & TE \end{cases}$$

Assim as impedâncias nos seguintes planos serão dadas, de acordo com MARIOTTO<sup>(22)</sup>, por:

$$Z(-d_2) = -Z_0 \quad (C.18a)$$

$$Z(0) = -Z_2 \frac{Z(-d_2) - Z_2 \tanh(\gamma_2 d_2)}{-Z_2 + Z(-d_2) \tanh(\gamma_2 d_2)} \quad (C.18b)$$

$$Z(d_1) = -Z_1 \frac{Z(0) - Z_1 \tanh(\gamma_1 d_1)}{-Z_1 + Z(0) \tanh(\gamma_1 d_1)} \quad (C.18c)$$

Definindo-se então os seguintes coeficientes para as componentes  $x$  ou  $y$  do campo elétrico (para incidência TM ou TE respectivamente):



$$\Gamma_0 = \frac{E_1^+(z=0)}{E_1^-(z=0)} \quad (C.19a)$$

$$T_0 = \frac{E_2(z=0)}{E_1^-(z=0)} \quad (C.19b)$$

$$\Gamma_1 = \frac{E_0^+(z=d_1)}{E_{inc}(z=d_1)} \quad (C.19c)$$

$$T_1 = \frac{E_1(z=d_1)}{E_{inc}(z=d_1)} \quad (C.19d)$$

$$\Gamma_2 = \frac{E_2^+(z=-d_2)}{E_2^-(z=-d_2)} \quad (C.19e)$$

$$T_2 = \frac{E_0(z=-d_2)}{E_2^-(z=-d_2)} \quad (C.19f)$$

sendo  $E_{inc}$  a respectiva componente (x ou y) do campo incidente, e:

$$E_i(z) = E_i^+(z) + E_i^-(z) \quad (C.20)$$

Temos, de novo de acordo com MARIOTTO<sup>(22)</sup>, as seguintes relações:

$$\Gamma_0 = \frac{Z(0) + Z_1}{Z(0) - Z_1} \quad (C.21a)$$

$$T_0 = \frac{2Z(0)}{Z(0) - Z_1} \quad (C.21b)$$

$$\Gamma_1 = \frac{Z(d_1) + Z_0}{Z(d_1) - Z_0} \quad (C.21c)$$

$$T_1 = \frac{2Z(d_1)}{Z(d_1) - Z_0} \quad (C.21d)$$

$$\Gamma_2 = \frac{Z(d_2) + Z_2}{Z(d_2) - Z_2} \quad (C.21e)$$

$$T_2 = \frac{2Z(d_2)}{Z(d_2) - Z_2} \quad (C.21f)$$

Lembrando que:

$$E_i^\pm(z) = E_i^\pm(0)e^{\mp\gamma_i z}$$

temos, utilizando as expressões (C.19d), (C.20) e (C.19a), que:

$$T_1 E_{inc}(z=0) e^{\gamma_0 d_1} = E_1^-(z=0) \left( e^{\gamma_1 d_1} + \Gamma_0 e^{-\gamma_1 d_1} \right) \quad (C.22)$$

Substituindo-se, então, as equações (C.21), (C.18) e (C.17), e lembrando que o campo incidente é dado por (2.1), temos:

$$E_1^- = \frac{\gamma_0 e^{\gamma_0 d_1}}{D \sinh(\gamma_1 d_1)} [\bar{\gamma}_2 (\gamma_0 + \bar{\gamma}_1) \coth(\gamma_2 d_2) + \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2^2] \kappa \quad (C.23)$$

$$E_1^+ = \mp \frac{\gamma_0 e^{\gamma_0 d_1}}{D \sinh(\gamma_1 d_1)} [\bar{\gamma}_2 (\gamma_0 - \bar{\gamma}_1) \coth(\gamma_2 d_2) - \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2^2] \kappa \quad (C.24)$$

sinal superior (-) para modo TE, e inferior (+) para modo TM. Sendo:

$$D = (\gamma_0^2 + \bar{\gamma}_1^2) \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 d_2 + (\gamma_0^2 + \bar{\gamma}_2^2) \bar{\gamma}_1 \coth \gamma_1 d_1 + \\ + (\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2) \gamma_0 + 2 \gamma_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \coth \gamma_2 d_2 \coth \gamma_1 d_1$$

e

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{TE} \\ \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} & \text{TM} \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_i = \begin{cases} \gamma_i & \text{TE} \\ \frac{\gamma_i}{\epsilon_1} & \text{TM} \end{cases}$$

que são as expressões (2.44) e (2.46) apresentadas no capítulo 2.

Para obter-se as expressões das ondas refletida ( $E_0^+$ ) e transmitida ( $E_0^-$ ) utilizaremos as expressões (C.19b,c,e,f) e (C.20), obtendo então:

$$E_0^+ = \pm \frac{e^{2\gamma_0 d_1}}{D} [\bar{\gamma}_1(\gamma_0^2 - \bar{\gamma}_2^2) \coth(\gamma_1 d_1) + \bar{\gamma}_2(\gamma_0^2 - \bar{\gamma}_1^2) \coth(\gamma_2 d_2) + \gamma_0(\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\gamma}_1^2)] \bar{\kappa} \quad (C.25)$$

$$E_0^- = \frac{2\gamma_0 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 e^{\gamma_0(d_1+d_2)}}{D \sinh(\gamma_1 d_1) \sinh(\gamma_2 d_2)} \bar{\kappa} \quad (C.26)$$

$$\bar{\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{TE} \\ \cos \theta_0 & \text{TM} \end{cases}$$

As expressões anteriores representam, então, as componentes x ou y do campo incidente, sendo a incidência feita em  $\phi=0$ . Para o caso genérico teremos:

$$E_{x0}^\pm = \begin{cases} -E_0^\pm \sin \phi & \text{TE} \\ E_0^\pm \cos \phi & \text{TM} \end{cases} \quad (C.27a)$$

$$E_{y0}^\pm = \begin{cases} E_0^\pm \cos \phi & \text{TE} \\ E_0^\pm \sin \phi & \text{TM} \end{cases} \quad (C.27b)$$

e no caso de incidência TM, as componentes na direção z serão dadas, a partir de (2.20), por:

$$E_{z0}^\pm = \pm \frac{\gamma_x E_{x0}^\pm + \gamma_y E_{y0}^\pm}{\gamma_0} \quad (C.27c)$$

Sendo, assim, o campo produzido apenas pela onda incidente dado por:

$$\vec{E}_{inc}^{\pm} = \begin{bmatrix} E_{x0}^{\pm} \\ E_{y0}^{\pm} \\ E_{z0}^{\pm} \end{bmatrix} \cdot e^{\gamma_x x + \gamma_y y - \gamma_d |z|} = \vec{E}^{i\pm} e^{\gamma_x x + \gamma_y y - \gamma_d |z|} \quad \begin{cases} z > d_1 \\ \text{ou} \\ z < -d_2 \end{cases} \quad (C.28)$$

## ANEXO D - Condição para convergência das somatórias

Vamos inicialmente determinar o comportamento assintótico da expressão geral de  $G_x$  dada por (2.38):

$$G_x = Z^e \cos^2 \phi + Z^h \operatorname{sen}^2 \phi$$

com

$$\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

e

$$Z^e = \frac{1}{Y^{+e} + Y^{-e}} \quad Z^h = \frac{1}{Y^{+h} + Y^{-h}}$$

$$Y^{+e,h} = Y_1^{e,h} \frac{Y_1^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_1 d_1}{Y_0^{e,h} + Y_1^{e,h} \coth \gamma_1 d_1}$$

$$Y^{-e,h} = Y_2^{e,h} \frac{Y_2^{e,h} + Y_0^{e,h} \coth \gamma_2 d_2}{Y_0^{e,h} + Y_2^{e,h} \coth \gamma_2 d_2}$$

$$Y_i^e = -j\omega \frac{\epsilon_i}{\gamma_i} \quad Y_i^h = -\frac{\gamma_i}{j\omega\mu_0}$$

$$\gamma_i = jK_i \cos \theta_i \quad \cos \theta_i = \frac{\sqrt{K_i^2 - \alpha^2 - \beta^2}}{K_i}$$

Para  $\alpha^2 + \beta^2 \gg K_i^2$  teremos:

$$\gamma_i \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (D.1)$$

$$Y_i^e \equiv -j\omega \frac{\epsilon_i}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad Y_i^h \equiv -\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{j\omega\mu_0}} \quad (D.2)$$

e para  $\alpha^2 + \beta^2 \gg 1/d_i^2$

$$\coth(\gamma_i d_i) \equiv 1 \quad (D.3)$$

Assim:

$$Y^{e,h} \equiv Y_1^{e,h} \quad Y^{e,h} \equiv Y_2^{e,h} \quad (D.4)$$

e

$$Z^e \equiv \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{-j\omega(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad Z^h \equiv \frac{-j\omega\mu_0}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (D.5)$$

e portanto:

$$G_{xx} \equiv j \frac{\alpha^2}{\omega(\epsilon_1 + \epsilon_2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - j \frac{\omega\mu_0\beta^2}{2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^3} \quad (D.6)$$

sendo, então, a parcela de (D.6) com decaimento mais lento da forma:

$$G_{xx} \sim \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (D.7)$$

Analogamente:

$$G_{yy} \sim \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad G_{xy} = G_{yx} \sim M \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (D.8)$$

Os termos da diagonal da matriz obtida, serão, então, da forma:

$$\sum_{m,n} G_{xx}(\alpha_m, \beta_{mn}) |f_{xi}|^p \quad (D.9)$$

Supondo-se que o comportamento assintótico da função de base  $f_{xi}$  seja do tipo:

$$f_{xi} \sim \alpha^{-r} \beta^{-s} \quad (D.10)$$

então as parcelas da somatória (D.9) serão da seguinte forma:

$$\frac{\alpha_m^2}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2}} \frac{1}{\alpha_m^{2r} \beta_{mn}^{2s}} = \frac{1}{\alpha_m^p \beta_{mn}^q \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_{mn}^2}} \quad (D.11)$$

E, assim, para  $|m|$  e  $|n|$  suficientemente grandes, as parcelas da somatória terão o seguinte comportamento:

$$\frac{M}{|m|^p |n|^q \sqrt{m^2 + c^2 n^2}} \quad (D.12)$$

Dessa forma, se a somatória

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^p n^q \sqrt{m^2 + n^2}} \quad (D.13)$$

for absolutamente convergente, então a somatória (D.9) também o será, pois ambas têm o mesmo comportamento assintótico.

A somatória (D.13) pode então ser escrita como:

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{m^p n^q \sqrt{m^2 + n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^p n^q \sqrt{m^2 + n^2}} \quad (D.14)$$

onde, obviamente, se a primeira parcela for convergente, a segunda também será.

Mas

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{2} m^{1+p} n^q} < \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{m^p n^q \sqrt{m^2 + n^2}} < \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{m^{1+p} n^q} \quad (D.15)$$

Assim se a somatória

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{m^{1+p} n^q} \quad (D.16)$$

convergir (divergir), (D.13) também convergirá (divergirá).

Sendo, então, a parcela de índice m dada por:



$$a_m = \frac{1}{m^{1+p}} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^q} \quad (D.17)$$

temos que:

$$m \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} - 1 \right| = \frac{(m+1)^{1+p} \left( \sum_{n=1}^m n^{-q} \right) \left( \sum_{n=1}^{m+1} n^{-q} \right) - m^{1+p}}{m^p} \quad (D.18)$$

Vamos, então, calcular o limite de (D.18) para  $m$  tendendo a infinito nos seguintes casos:

a)  $q > 1^*$ :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ m \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} - 1 \right| \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^{1+p} \cdot 1 - m^{1+p}}{m^p} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{1+p} [(1 + 1/m)^{1+p} - 1]}{m^p} = \lim_{m \rightarrow \infty} m [1 + (1+p)/m + p(1+p)/(2m^2) + \dots - 1] = \\ &= 1 + p \end{aligned} \quad (D.19)$$

b)  $q=1$  (por GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup> p.2, expr. 0.133):

$$\sum_{n=1}^m n^{-1} = C + \ln(m) + c_1/n + n_2/n^2 + \dots \quad (D.20)$$

então:

\*de acordo com GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup>, p. 7, expr. 0.233, a soma em  $n$  da expressão (D.18) tende a um número finito quando  $m$  tende a infinito

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ m \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} - 1 \right| \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^{1+p} \ln(m) / \ln(m+1) - m^{1+p}}{m^p} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \left\{ \frac{\ln(m)}{\ln(m+1)} [1 + (1+p)/m + \dots] - 1 \right\} = 1+p \end{aligned} \quad (D.21)$$

c)  $0 < q < 1$ :

$$\sum_{n=1}^m n^{-q} = m^{1-q}/(1-q) + c_1 m^{-q} + c_2 m^{-q-1} + \dots \quad (D.22)$$

assim

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ m \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} - 1 \right| \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^{1+p} \frac{m^{1-q}/(1-q)}{(m+1)^{1-q}/(1-q)} - m^{1+p}}{m^p} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m [1 + (1+p)/m + \dots] m^{1-q}/(m+1)^{1-q} - m = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{2-q} + m^{1-q}(1+p) - m(m+1)^{1-q}}{(m+1)^{1-q}} = \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{2-q} + m^{1-q}(1+p) - m^{2-q}[1 + (1-q)/m + \dots]}{m^{1-q}[1 + (1-q)/m + \dots]} &= p+q \end{aligned} \quad (D.23)$$

De acordo com GRADSHTEYN; RYZHIK<sup>(10)</sup>, p.5, expr. 0.223, a somatória (D.16) convergirá absolutamente se o limite de (D.18), para  $m$  tendendo a infinito, for maior que 1, e divergirá se for menor que 1. Assim, temos que, para que haja convergência, devemos ter:

$$p > 0, \quad q > 0 \quad e \quad p + q > 1 \quad (D.24)$$

e portanto:

$$s > 0, \quad r > 1 \quad e \quad r + s > 1,5 \quad (D.25)$$

como utilizado no capítulo 4.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A., ed. **Handbook of mathematical functions.** New York, Dover, 1965.
- (2) AGRAWAL, V.D.; IMBRIALE, W.A. Design of a dichroic Cassegrain subreflector. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.27, n.4, p.466-73, July 1979.
- (3) ARNAUD, J.A.; PELLOW, F.A. Resonant-grid quasi-optical diplexers. **The Bell System Technical Journal**, v.54, n.2, p.263-83, Feb. 1975.
- (4) BUTLER, C.M. General solutions of the narrow strip (and slot) integral equations. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.33, n.10, p.1085-90, Oct. 1985.
- (5) CAHILL, R.; PARKER, E.A. Concentric ring and Jerusalem cross arrays as frequency selective surfaces for a 45° incidence diplexer. **Electronics Letters**, v.18, n.8, p.313-4, Apr. 1982.
- (6) CHEN, C.C. Scattering by a two-dimensional periodic array of conducting plates. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.18, n.5, p.660-5, Sept. 1970.
- (7) CWIK, T.A.; MITTRA, R. Scattering from a periodic array of free standing arbitrarily shaped perfectly conducting or resistive patches. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.35, n.11, p.1226-34, Nov. 1987.
- (8) CWIK, T.A.; MITTRA, R. The effects of the truncation and curvature of periodic surfaces: a strip grating. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.36, n.5, p.612-22, May 1988.
- (9) FRANCHI, P.R.; MAILLOUX, R.J. Theoretical and experimental study of metal grid angular filters for sidelobe suppression. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.31, n.3, p.445-50, May 1983.
- (10) GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. **Table of integrals series and products.** 4.ed. New York, Academic Press, 1965.
- (11) HALL, R.C.; MITTRA, R.; MITZNER, K.M. Analysis of multilayered periodic structures using generalized scattering matrix theory. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.36, n.4, p.511-7, Apr. 1988.
- (12) HARRINGTON, R.F. **Field computation by moment methods.** New York, MacMillan, 1968.
- (13) HESTENES, M.R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v.49, n.6, p.409-36, Dec. 1952.

- (14) HORWITZ, C.M. A new solar selective surface. **Optics Communications**, v.11, n.2, p.210-2, June 1974.
- (15) JOHANSSON, F.S. Convergence phenomenon in the solution of dichroic scattering problems by Galerkin's method. **IEE Proceedings H**, v.134, n.1 p.87-92, Feb. 1987.
- (16) JOHANSSON, F.S. Frequency-scanned gratings consisting of photo-etched arrays. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.37, n.8, p.996-1002, Aug. 1989.
- (17) JOHANSSON, F.S.; JOSEFSSON, L.G.; LORENTZON, T. A novel frequency-scanned reflector antenna. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.37, n.8, p.984-9, Aug. 1989.
- (18) KRAUS, J.D.; CARVER, K.R. **Eletromagnetismo**. Trad. de Weber Figueiredo da Silva. 2.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1978.
- (19) LATHI, B.P. **Modern digital and analog communications systems**. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1983. (HRW Series in Electrical and Computer Engineering)
- (20) LEE, C.K.; LANGLEY, R.J. Equivalent-circuit models for frequency-selective surfaces at oblique angles of incidence. **IEE Proceedings H**, v.132, n.6, p.395-9, Oct. 1985.
- (21) LEE, S.W. Scattering by dielectric-loaded screen. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.19, n.5, p.656-65, Sept. 1971.
- (22) MARIOTTO, P.A. **Ondas e linhas**. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1981.
- (23) MARIOTTO, P.A. **Teoria eletrodinâmica**. São Paulo, DEE-EPUSP, 1987. /Mimeografado/
- (24) MEIXNER, J. The behavior of electromagnetic fields at edges. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.20, n.4, p.442-6, July 1972.
- (25) MITTRA, R. Relative convergence of the solution of a doubly infinite set of equations. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v.67D, n.2, p.245-54, Mar./Apr. 1963.
- (26) MITTRA, R.; CHAN, C.H.; CWIK, T. Techniques for analyzing frequency selective surfaces: a review. **Proceedings of the IEEE**, v.76, n.12, p.1593-614, Dec. 1990.
- (27) MITTRA, R.; ITOH, T.; LI, T.S. Analytical and numerical studies of the relative convergence phenomenon arising in the solution of an integral equation by moment method. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v.20, n.2, p.96-104, Feb. 1972.
- (28) MONTGOMERY, J.P. Scattering by an infinite periodic array of thin conductors on a dielectric sheet. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.23, n.1, p.70-5, Jan. 1975.

- (29) ORSINI, L.Q.; CAMARGO, J.B. **Eletrromagnetismo**. São Paulo, EPUSP, 1989.
- (30) PARKER, E.A.; VARDAXOGLU, J.C. Plane-wave illumination of concentric-ring frequency-selective surfaces. **IEE Proceedings H**, v.132, n.3, p.176-80, June 1985.
- (31) PELTON, E.L.; MUNK, B.A. Scattering from periodic arrays of crossed dipoles. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.27, n.3, p.323-30, May 1979.
- (32) SCHENNUM, G.H. Frequency-selective surfaces for multiple frequency antennas. **Microwave Journal**, v.16, n.5, p.55-57, 76 May 1973.
- (33) SHANKS, D. Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences. **Journal of Mathematics and Physics**, v.34, p.1-42, 1955.
- (34) SINGH, S.; RICHARDS, W.F.; ZINECKER, J.R. WILTON, D.R. Accelerating the convergence of series representing the free space periodic Green's function. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.38, n.12, p.1958-62, Dec. 1990.
- (35) TRINTINALIA, L.C.; PANICALI, A.R. Blindagem por grades condutoras: cálculo do campo próximo. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES, 9., São Paulo, 1991. **Anais**. São Paulo, SBT, 1991. p.12.2.1-5.
- (36) TSAO, C.H.; MITTRA, R. Spectral-domain analysis of frequency selective surfaces comprised of periodic arrays of cross dipoles and Jerusalem crosses. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.32, n.5, p.478-86, May 1984.
- (37) UCHIDA, K.; NODA, T.; MATSUNAGA, T. Spectral domain analysis of electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.35, n.1, p.46-52, Jan. 1987.
- (38) WEBB, K.J.; GROUNDS, P.W.; MITTRA, R. Convergence in the spectral domain formulation of waveguide and scattering problems. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.38, n.6, p.869-877, June 1990.
- (39) YOUNG, L.; ROBINSON, L.A.; HACKING, C.A. Meander-line polarizer. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v.21, n.3, p.376-8, May 1973.