

JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA

**APLICAÇÃO DA TEORIA QUALITATIVA  
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS À  
PROBLEMAS DE SINCRONISMO DE FASE**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Doutor  
em Engenharia Elétrica, sob orientação do  
Prof. Dr. Jocelyn Freitas Bennaton.

São Paulo  
1987

DA. 11.06.1987

JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA

**APLICAÇÃO DA TEORIA QUALITATIVA  
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A  
PROBLEMAS DE SINCRONISMO DE FASE**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Doutor  
em Engenharia Elétrica, sob orientação do  
Prof. Dr. Jocelyn Freitas Bennaton.

## **AGRADECIMENTOS**

**À Elebra-Telecon,  
pela iniciativa no desenvolvimento deste  
trabalho e pelo suporte financeiro.**

**Ao Prof. Dr. Jocelyn Freitas Bennaton,  
pela orientação, incentivo e amizade.**

**Ao colega Eng. Leiser Antônio Mateus Silva,  
pelas sugestões valiosas.**

**Ao Eng. Cláudio Dascal,  
pela confiança e apoio.**

## RESUMO

Aplica-se a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais aos problemas de sincronismo de fase, associando às diversas regiões do espaço de parâmetros os tipos de atratores esperados.

Três casos básicos são estudados:

- i) Malha de Sincronismo de Fase Autônoma de 2ª Ordem
- ii) Modulação em Frequência Acidental em Malha de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem
- iii) Malha de Sincronismo de Fase Autônoma de 3ª Ordem

No caso (i), usando resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos, discutem-se os pontos de equilíbrio e os ciclos limite.

No caso (ii), usando o método de Melnikov propõem-se critérios para previsão de aparecimento de atratores caóticos.

No caso (iii), usando o teorema de bifurcações de Hopf, a estabilidade dos pontos de equilíbrio e a formação dos ciclos limite são analisadas.

## ABSTRACT

The Qualitative Theory of Differential Equations is applied to the phaselock problems, and the several parameters space regions are associated to the expected attractors.

Three basic cases are studied:

- i) Autonomous Second Order Phaselock Loop
- ii) Accidental Frequency Modulation on Second Order Phaselock Loop
- iii) Autonomous Third Order Phaselock Loop

In case i), using classical results of dynamical systems theory, the equilibrium points and limit cycles are analysed.

In case ii), the Melnikov technique gives some criteria for chaotic attractors.

In case iii), Hopf bifurcation theorem provides propositions about equilibrium points and limit cycles.

# SUMÁRIO

## Lista de Símbolos e Abreviaturas

INTRODUÇÃO .....	9
<b>I — TEORIA QUALITATIVA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	
1. Sistemas Dinâmicos .....	16
2. Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais .....	20
3. Estabilidade de Pontos de Equilíbrio .....	29
4. Atratores e Variedades Invariantes .....	34
5. Equivalência Topológica e Bifurcações .....	42
6. Sistemas Autônomos de 2ª Ordem .....	44
7. Caos em Sistemas Hamiltonianos Perturbados — O Método de Melnikov ....	57
8. Sistemas Autônomos de Ordem $n \geq 3$ .....	81
<b>II — MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE</b>	
1. Modelo Matemático .....	93
2. Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag" .....	100
3. Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag-Lead" .....	112
4. Malhas de Sincronismo de Fase de 3ª Ordem com Filtros de Sallen e Key .....	127
5. Sistemas com Superfícies de Fase Cilíndricas .....	135
<b>III — MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE AUTÔNOMAS DE 2ª ORDEM</b>	
1. Malhas com Filtros "Lag" e $\theta_i = \text{constante}$ .....	139
2. Malhas com Filtros "Lag" e $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .....	148
3. Malhas com Filtros "Lag-Lead" e $\theta_i = \text{constante}$ .....	164
4. Malhas com Filtros "Lag-Lead" e $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .....	180

**IV — MODULAÇÃO EM FREQUÊNCIA ACIDENTAL EM MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 2ª ORDEM**

1. Modulação em Frequência Acidental em Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag" ..... 204
2. Modulação em Frequência Acidental em Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag-Lead" ..... 231

**V — MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE AUTÔNOMAS DE 3ª ORDEM**

1. Malhas com Filtros de Sallen e Key e  $\theta_i = \text{constante}$  ..... 240
2. Malhas com Filtros de Sallen e Key e  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  ..... 261

**VI — CONCLUSÕES**

1. Resumo dos Resultados ..... 286
2. Propostas de Trabalhos Futuros ..... 286

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** ..... 289

"Experiment is the sole source of truth. It alone can teach us something new; it alone can give us certainty. These are two points that cannot be questioned. But then, if experiment is everything, what place is left for mathematical physics? What can experimental physics do with such an auxiliary — an auxiliary, moreover, which seems useless, and even may be dangerous?"

However, mathematical physics exists. It has rendered undeniable service, and that is a fact which has to be explained. It is not sufficient merely to observe; we must use our observations, and for that purpose we must generalise. This is what has always been done, only as the recollection of past errors has made man more and more circumspect, he has observed more and more and generalised less and less. Every age has scoffed at its predecessor, accusing it of having generalised too boldly and too naively".

**H. Poincaré**

LISTA DE SIMBOLOS E ABREVIATURAS

$Z_+$	conjunto dos números inteiros positivos
$R_+$	conjunto dos números reais positivos
$R^n$	$\underbrace{R \times R \times R \dots \times R}_{n \text{ vezes}}$
$C$	conjunto dos números complexos
$Re[\lambda]$	parte real do número complexo $\lambda$
$Im[\lambda]$	parte imaginária do número complexo $\lambda$
$\triangleq$	é igual, por definição
$\bar{\Phi}$	quase todos os pontos ("almost everywhere")
$\emptyset$	conjunto vazio
$V(\cdot)$	vizinhança de um certo conjunto
$\ x\ $	norma do vetor $x$
$L(R^m, R^n)$	espaço das transformações lineares de $R^m$ em $R^n$
$f: X \rightarrow Y$	aplicação do conjunto $X$ no conjunto $Y$
$f^{-1}$	aplicação inversa de $f$
$\{t_n\}$	seqüência de números reais $t_1, t_2 \dots t_n$
$f \wedge g$	produto exterior de $f$ por $g$
$\oint_C$	integral de linha sobre a curva fechada $C$
$\iint_S$	integral de superfície sobre a superfície $S$
$\dot{x}$	derivada de $x$ em relação ao tempo
$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$	derivada parcial da função $f_i$ , relativamente à variável $x_j$
$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right _{x_0}$	derivada parcial da função $f_i$ , relativamente à variável $x_j$ , calculada no ponto $x_0$
$\sup \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	supremo do conjunto $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$
FSK	modulação "frequency shift keying"
PSK	modulação "phase shift keying"

## INTRODUÇÃO

A questão do sincronismo de fase constitui um problema pertinente aos mais diversos ramos da ciência [C-1 e C-9]. Um problema dessa classe é aquele relativo às **Malhas de Sincronismo de Fase** (PLL), que aparecem em sistemas de controle e telecomunicações, quando sub-sistemas de filtração com frequência central variável, de acordo com o sinal de entrada, são necessários [C-6].

Essencialmente, a Malha de Sincronismo de Fase é fechada e constituída por três elementos: um detetor de fase, um filtro e um oscilador controlado por tensão. O filtro utilizado na malha é, em geral, linear de 1ª ou 2ª ordem [C-6], implicando que a dinâmica da malha seja descrita por uma equação diferencial não linear de 2ª ou 3ª ordem, respectivamente [C-1, C-2 e C-6].

Várias ferramentas podem ser empregadas na solução do problema, mas todas elas esbarram na dificuldade imposta pela não linearidade do sistema. Opta-se, em geral, por uma linearização e posterior análise no domínio da frequência, complementada por trabalhos de laboratório [C-2, C-4 e C-5].

Uma ferramenta de grande utilidade e força tem sido, entretanto, esquecida no trato deste problema: A **Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais**, que permite a identificação dos diversos tipos de comportamento das soluções de uma Equação Diferencial, em função de seus parâmetros [B-4, B-5 e B-6].

Assim, obtém-se informações importantes a respeito dos sistemas modelados pelas equações diferenciais através da observação de seus atratores, que podem ser: pontos de equilíbrio, ciclos limite e atratores

estranhos ou caóticos. Diagramas de bifurcações associando regiões do espaço de parâmetros a cada tipo de atrator podem ser traçados, tanto por via numérica como analítica [C-8 e C-9].

Ligar os problemas de sincronismo de fase à Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais foi o objetivo primeiro deste trabalho procurando, pela via analítica, resultados de interesse prático na engenharia, ainda não obtidos pelas vias usuais de estudo do problema.

Os primeiros passos importantes na aplicação da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais a problemas físicos foram dados por Poincaré [B-25], no estudo de problemas de Mecânica Celeste, desenvolvendo os chamados Teoremas de Índice, para identificação de soluções periódicas. Os resultados obtidos por Poincaré foram complementados por Andronov, estando bastante discutidos em [B-15 e B-18].

Posteriormente, o estudo das equações de Van der Pol de 2ª ordem com termo forçante mostrou a existência, de acordo com os parâmetros da equação, de comportamentos caóticos.

Em primeira instância, afirma-se que o comportamento de um dado sistema dinâmico é caótico quando seu atrator é semelhante a ruído, isto é, tem densidade espectral de potência constante em toda a gama de frequências, sem que haja no sistema nenhuma fonte convencional de ruído.

Existem, do ponto de vista teórico, várias maneiras de se encarar essa estocasticidade natural de alguns sistemas dinâmicos não lineares [Capítulo 2, (Parte 1), D-2].

Por exemplo, a partir do trabalho de Melnikov [D-6], Chow, Hale e Mallet [D-7], Chirikov [D-9], Holmes e Marsden [D-8, D-10 e D-11] desen-

volveram uma ferramenta analítica para a detecção de comportamentos caóticos em Sistemas Hamiltonianos de 2ª Ordem, excitados com sinais periódicos.

Essa ferramenta analítica se constrói a partir da medida da separação entre as variedades estável e instável do Mapeamento de Poincaré, associado a pontos de trajetórias homoclínicas, que ligam pontos de sela de sistemas Hamiltonianos.

Paralelamente, Landau e Lifshitz [B-27] conjecturaram, a partir dos trabalhos de Hopf [D-19, D-20, D-21, D-22, D-23 e D-24], a possibilidade de aparecimento de caos em sistemas não lineares autônomos de ordem maior que dois, devido a variação de parâmetros. Essas conjecturas se originaram da observação de regimes turbulentos em campos de velocidade em escoamentos de fluidos.

Ruelle e Takens [D-21] formalizaram as conjecturas de Landau e Lifshitz, utilizando os auto-valores do Mapeamento de Poincaré [D-23 e D-24], apresentando as condições de duplicação de período e caos em sistemas autônomos de ordem  $n \geq 3$ .

Outra linha de trabalho, utilizada mais recentemente, prevê a caracterização dos atratores caóticos através de mudanças dos chamados expoentes de Liapunov do atrator [D-1 e Capítulo 8, (Parte 1), D-2].

No Capítulo I deste trabalho apresenta-se a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, voltada para a resolução de três tipos de problemas:

- Sistemas Autônomos de 2ª Ordem (Poincaré e Andronov)
- Sistemas não Autônomos de 2ª Ordem (Holmes e Marsden)
- Problemas Autônomos de Ordem  $n \geq 3$  (Hopf)

A seguir, o Capítulo II procura estabelecer a formulação dos seguintes problemas de sincronismo de fase:

- Malha de Sincronismo de 2ª Ordem com filtro "Lag"
- Malha de Sincronismo de 2ª Ordem com filtro "Lag-Lead"
- Malha de Sincronismo de 3ª Ordem com filtro de Sallen e Key

Além disso, apresentam-se as condições de existência e unicidade de soluções para os três problemas e a solução dos problemas de 2ª ordem pela via Hamiltoniana, que auxiliará o trabalho analítico do Capítulo IV.

O Capítulo III é dedicado aos problemas da Malha de Sincronismo de Fase Autônoma de 2ª Ordem, utilizando as idéias de Poincaré e Andronov. Vários resultados de importância relativos a pontos de equilíbrio e ciclos limite são obtidos, servindo de apoio ao engenheiro de sistemas que identificará regiões do espaço de parâmetros permitidas ou proibidas, em seus projetos particulares.

O Capítulo IV enfoca o problema de modulação em frequência acidental ("jitter" de fase) em malhas de sincronismo de 2ª ordem, comum em demodulação de sinais em presença de ruídos, distorções e comportamentos indesejáveis [C-13]. O caso em questão é de um problema de 2ª ordem não autônomo e o método de Melnikov, na versão proposta por Holmes e Marsden, produz resultados originais, úteis para a orientação do trabalho de projeto.

A Malha de Sincronismo de Fase Autônoma de 3ª Ordem é analisada no Capítulo V, à luz do Teorema de Hopf, caracterizando-se as faixas de retenção e captura desse tipo de malha. Além disso, proporciona-se abertura para que os trabalhos de Ruelle e Takens sejam utilizados nesta classe de problemas de engenharia.

O Capítulo VI apresenta um resumo das proposições e uma série de su gestões de problemas, que permitirão a continuidade deste trabalho e a extensão das idéias aqui apresentadas.

Todos os resultados obtidos neste trabalho são apresentados sob a forma de **Proposições**, com suas respectivas provas.

A contribuição apresentada é de natureza teórica, obtida pelo racioci nio analítico. A verificação de algumas proposições aqui logradas, usando do simulação numérica, foi feita pelo autor e orientador, sendo apresentada em [C-9].

A via numérica foi preterida, pois nos sistemas tratados, pequenas variações dos parâmetros produzem grandes variações nas respostas. Como conseqüência, quando aparece um dado comportamento notável na resposta do sistema, fica a dúvida se ele apareceu por variação dos parâmetros da equação ou por ajuste inadequado do método numérico [B-22, D-16, D-17 e D-18].

Trabalhos experimentais de montagens de circuitos e verificação dos resultados teóricos devem ser feitos, podendo ser objeto de pesquisas futuras.

Por se tratar de um estudo de natureza interdisciplinar, a bibliografia é apresentada por assunto, visando facilitar novas pesquisas no mesmo campo.

## CAPÍTULO I

### TEORIA QUALITATIVA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. Sistemas Dinâmicos
2. Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais
3. Estabilidade de Pontos de Equilíbrio
4. Atratores e Variedades Invariantes
5. Equivalência Topológica e Bifurcações
6. Sistemas Autônomos de 2ª Ordem
7. Caos em Sistemas Hamiltonianos Perturbados  
— O Método de Melnikov
8. Sistemas Autônomos de Ordem  $n \geq 3$

Neste capítulo apresentam-se as bases da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, que procura obter conclusões a respeito de soluções através da análise de determinados conjuntos denominados atratores.

Assim, a teoria em questão proporcionará ferramentas para que se possa, no espaço de parâmetros, delimitar regiões com pontos de equilíbrio, soluções periódicas, atratores estranhos e comportamentos caóticos, para um dado sistema dinâmico.

Na secção 1, têm-se definições gerais de sistemas dinâmicos e pontos de equilíbrio, discutindo-se, na secção 2, condições de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais ordinárias.

A secção 3 versa sobre estabilidade de pontos de equilíbrio e, na secção 4 define-se o conceito de atrator e estabelece-se o Teorema das Variedades Invariantes.

A secção 5 é dedicada à discussão do conceito de equivalência topológica e das definições básicas de Teoria de Bifurcações.

Seguem-se a secção 6 sobre sistemas autônomos de 2ª ordem, abordados classicamente e a secção 7, onde as técnicas de medida de caos em sistemas Hamiltonianos perturbados são estabelecidas.

Na secção 8 discutem-se os sistemas autônomos de ordem  $n \geq 3$ , sob a óptica do Teorema de Bifurcação de Hopf e do trabalho de Ruelle e Takens.

Nada do que está apresentado neste capítulo é original, excessão feita à definição de atrator caótico, procurando-se apenas fazer um apanhado organizado da teoria matemática necessária no decurso do trabalho.

## 1. SISTEMAS DINÂMICOS <sup>1</sup>

**Definição 1** — Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Diz-se que  $f$  é diferenciável em  $p \in U$  se existe uma transformação linear  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$f(p + v) = f(p) + T(v) + R(v) \quad \text{com} \quad \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0$$

**Definição 2** — Relativamente à definição 1, diz-se que  $T$  é a derivada de  $f$  em  $p$  e indica-se por  $df(p)$  ou  $Df(p)$ .

**Definição 3** — Se  $f$  é diferenciável para  $\forall p \in U$ , define-se a aplicação  $df: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  que, a cada  $p \in U$ , associa a derivada de  $f$  em  $p$ .

Tendo definido  $df$  em 3 pode-se, utilizando a definição 1, definir

$$d^2f, d^3f, \dots$$

<sup>1</sup> [B-1, B-2, B-3, B-4, B-6, B-7, B-8, B-9, B-15, B-17, B-18, B-19 e B-22]

**Definição 4** —  $f$  é de classe  $C^k$  se  $d^k f$  é contínua.

**Definição 5** — Um sistema dinâmico é dito de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), quando for descrito por  $n$  equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{array} \right.$$

Chamando  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$  e

$$f(\cdot) = \left( f_1(\cdot); f_2(\cdot); \dots; f_n(\cdot) \right)$$

uma função vetorial de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$ , simplifica-se a notação para:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Definição 6** — Um conjunto de  $n$  funções de classe  $C^1$ ,

$$\left\{ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \right\}$$

é uma solução para um sistema de ordem  $n$ , se satisfaz às  $n$  equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem da definição 5.

**Definição 7** — Um sistema dinâmico é dito autônomo de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), quando puder ser descrito por  $n$  equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, da forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Chamando  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$  e

$$f(\cdot) = (f_1(\cdot); f_2(\cdot); \dots; f_n(\cdot))$$

uma função vetorial de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , simplifica-se a notação para:

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Definição 8** — Um conjunto de  $n$  funções de classe  $C^1$ ,

$$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$$

é uma solução para um sistema autônomo de ordem  $n$ , se satisfaz às  $n$  equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem da definição 7.

**Definição 9** — Um ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  é dito um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico da definição 5, no instante  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  se:

$$f_i(t, x) = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Deve-se notar na definição 9 que, se  $x \in \mathbb{R}^n$  é ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico no instante  $t_0$ , então  $x$  também será ponto de equilíbrio do sistema dinâmico para todos os instantes  $t \geq t_0$ .

**Definição 10** — Um ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  é dito ponto de equilíbrio do sistema dinâmico autônomo da definição 7 se  $f_i(x) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se  $x = c$  é um ponto de equilíbrio do sistema autônomo da definição 7, as funções  $x_i(t) = C_i$  definem uma solução trivial do sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, conforme a definição 8.

## 2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS<sup>1</sup>

As definições e propriedades das normas em  $\mathbb{R}^n$  a serem utilizadas constam em textos conhecidos de Análise Funcional [A-3, A-4 e A-5] e não serão apresentadas durante a exposição.

Considerando um sistema dinâmico de acordo com a definição 5 e re estabelecendo a notação vetorial:

$$\underline{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

com  $f(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por:

$$f(x,t) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup> [A-3, A-4, A-5, B-1, B-2, B-3, B-4, B-6, B-7, B-8, B-15, B-16 e B-17]

As equações da definição 5 podem ser reescritas na forma vetorial, como:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

**Teorema 1** — (Existência e Unicidade Global)

Seja a equação diferencial que descreve o sistema da definição 5  $\dot{x} = f(x, t)$  e seja  $x_0$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$ .

Se para cada  $T \in [0, \infty) \exists k_T > 0$  e  $h_T > 0$  tais que:

$$i) \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_T \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$ii) \quad \|f(t, x_0)\| \leq h_T \quad \forall t \in [0, T]$$

Então, a equação  $\dot{x} = f(x, t)$  tem uma e só uma solução em  $[0, T]$ ,  $\forall T \in [0, \infty)$  tal que  $x(0) = x_0$

**Prova:** Páginas 82, 83, 84 e 85 de [B-15].

A condição (i) do Teorema 1 é chamada "Condição de Lipschitz".

**Teorema 2** — (Equivalência de Normas)

Sejam  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_b$  duas dadas normas de  $\mathbf{R}^n$ . Para cada  $T$  finito, as condições i) e ii) abaixo são equivalentes.

$$i) \exists k_{aT} > 0 \text{ finito} \quad \left| \quad \left\| f(t,x) - f(t,y) \right\|_a \leq k_{aT} \|x-y\|_a ; \right.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n ; \quad \forall t \in [0,T]$$

$$ii) \exists k_{bT} > 0 \text{ finito} \quad \left| \quad \left\| f(t,x) - f(t,y) \right\|_b \leq k_{bT} \|x-y\|_b ; \right.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n ; \quad \forall t \in [0,T]$$

**Prova:** Para se provar o Teorema 2 utiliza-se o resultado abaixo, que se encontra na página 58 de [B-15].

"Dadas  $\|\cdot\|_\alpha$  e  $\|\cdot\|_\beta$  normas de  $\mathbf{R}^n$ , existem constantes positivas  $k_1$  e  $k_2$  tais que:

$$k_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq k_2 \|x\|_\alpha, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n "$$

Usando esse resultado prova-se que  $i) \Rightarrow ii)$  e a prova que  $ii) \Rightarrow i)$  se faz "mutatis mutandis".

Do resultado enunciado,  $\exists$  constantes positivas  $k_1, k_2, k'_1$  e  $k'_2$  tais que:

$$k_1 \|f(t,x) - f(t,y)\|_b \leq \|f(t,x) - f(t,y)\|_a \leq k_2 \|f(t,x) - f(t,y)\|_b \quad (I)$$

$$k'_1 \|x-y\|_b \leq \|x-y\|_a \leq k'_2 \|x-y\|_b \quad (II)$$

Combinando-se (I) e (II) com i)

$$k_1 \|f(t,x) - f(t,y)\|_b \leq k_{aT} k'_2 \|x-y\|_b$$

Chamando  $k_{bT} = \frac{k_{aT} k'_2}{k_1}$

$\|f(t,x) - f(t,y)\|_b \leq k_{bT} \|x-y\|_b$ ,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \in [0,T]$ , o que completa a prova que i)  $\Rightarrow$  ii).

O Teorema 2 mostra, em outras palavras, que se uma certa função vetorial satisfaz a condição de Lipschitz para uma dada norma de  $\mathbb{R}^n$ , satisfaz para qualquer norma de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3** — Seja  $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e continuamente diferenciável no segundo argumento.

Para cada  $T \in [0, \infty)$ , as condições i) e ii) abaixo são equivalentes:

i)  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz.

ii)  $\exists k_T > 0$  finito tal que  $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k_T ; \forall x \in \mathbb{R}^n ; \forall t \in [0, T],$

para

$$i, j = \{1, 2, \dots, n\}$$

**Prova**

ii)  $\Rightarrow$  i)

A prova desta parte do Teorema 3 utilizará a  $\|\cdot\|_1$ , definida como segue:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

e, devido ao Teorema 2, será desnecessário discutir o caso de outras normas.

Do Teorema do Valor Médio, a todo  $x^* \in \mathbb{R}^n$  correspondem  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $z \in \mathbb{R}^n$  tais que:

$$f_i(y) - f_i(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (y_j - z_j) \text{ para } i = \{1, 2, \dots, n\}$$

sendo que  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  deve ser calculada em  $x = x^*$ .

Aplicando-se a desigualdade triangular:

$$|f_i(y) - f_i(z)| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| |y_j - z_j|$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |f_i(y) - f_i(z)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| |y_j - z_j|$$

Como

$$\|f(y) - f(z)\|_1 = \sum_{i=1}^n |f_i(y) - f_i(z)|$$

$$\|y - z\|_1 = \sum_{j=1}^n |y_j - z_j|$$

e supondo a condição ii) verdadeira:

$$\|f(y) - f(z)\|_1 \leq \sum_{i=1}^n k_T \|y - z\|_1$$

$$\Rightarrow \|f(y) - f(z)\|_1 \leq n k_T \|y - z\|_1$$

portanto,  $f$  satisfaz a condição de Lipshitz com constante  $n k_T$ .

**i)  $\Rightarrow$  ii)**

Durante esta parte da prova do Teorema 3, será utilizada a  $\|\cdot\|_\infty$ , definida como segue:

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{i = \{1, 2, \dots, n\}} |x_i|$$

e, devido ao Teorema 2, será desnecessário discutir o caso de outras normas.

Considere-se  $y \in \mathbf{R}^n$  e  $z \in \mathbf{R}^n$  tal que apenas a coordenada  $j$  de  $y$  seja diferente de  $z$ .

Assim  $y - z = (0, 0, \dots, y_j - z_j, 0 \dots 0)$ . Escolhendo  $x = x^*$  convenientemente, pode-se, pelo Teorema do Valor Médio, escrever:

$$f_i(y) - f_i(z) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (y_j - z_j) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

sendo que  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  deve ser calculada em  $x = x^*$ .

$$\Rightarrow |f_i(y) - f_i(z)| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| |y_j - z_j| \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \sup_i |f_i(y) - f_i(z)| = |y_j - z_j| \sup_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$$

Mas:  $\sup_i |f_i(y) - f_i(z)| = \|f(y) - f(z)\|_{\infty}$

$$|y_j - z_j| = \|y - z\|_{\infty}$$

Levando em conta esses fatos e a condição i), segue que:

$$\|y-z\|_{\infty} \sup_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k_T \|y-z\|_{\infty} \Rightarrow \sup_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k_T, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Variando a coordenada  $j$  no conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  e repetindo o raciocínio:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k_T, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Teorema 4** — (Existência e Unicidade Local)

Seja a equação diferencial que descreve o sistema da Definição 5,  $\dot{x} = f(x, t)$  e seja  $x_0$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$ . Se para cada

$$T \in [0, \infty) \exists k_T, h_T \text{ e } r_T$$

tais que:

$$i) \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_T \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in B \times B, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$ii) \quad \|f(t, x_0)\| \leq h_T, \quad \forall t \in [0, T]$$

onde  $B$  é uma bola de  $\mathbb{R}^n$  da forma:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r_T\}$$

Então, a equação  $\dot{x} = f(x,t)$  tem uma e uma só solução num intervalo  $[0, \delta]$  onde:

$$h_T \delta \exp(k_T \delta) < r_T \quad \text{e} \quad \delta < \min\left(T, \frac{\rho}{k_T}, \frac{r_T}{h_T + k_T r_T}\right)$$

para alguma constante  $0 < \rho < 1$

**Prova:** Páginas 80 e 81 de [B-15].

A condição (i) do Teorema 4 é chamada "Condição de Lipschitz Local" e sua verificação corresponde à verificação da condição de limitação em norma das derivadas parciais

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{e} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{em } B$$

fato que pode ser provado com pequenas modificações na demonstração do Teorema 3.

### 3. ESTABILIDADE DE PONTOS DE EQUILÍBRIO<sup>1</sup>

**Definição 11** — Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio no instante  $t_0$  para o sistema dinâmico descrito por  $\dot{x} = f(x, t)$ , com  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f$  satisfazendo as condições do Teorema 1.

O equilíbrio de  $x_0$ , no instante  $t_0$ , é dito estável se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$  tal que:

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0$$

Além disso, o mesmo equilíbrio será dito uniformemente estável no intervalo  $[t_0, \infty)$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que:

$$\|x(t_1) - x_0\| < \delta(\epsilon), \quad t_1 > t_0 \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \epsilon, \quad \forall t > t_1$$

**Definição 12** — Nas condições da definição 11, o equilíbrio de  $x_0$ , no instante  $t_0$ , é dito instável se não for estável.

<sup>1</sup> [B-1, B-2, B-3, B-4, B-6, B-7, B-8, B-15, B-18, B-19, B-20 e D-3]

**Definição 13** — Nas condições da definição 11, o equilíbrio de  $x_0$ , no instante  $t_0$ , é dito assintoticamente estável se:

i) for estável

ii) existir um número  $\delta_1(t_0) > 0$  tal que:

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta_1(t_0) \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

**Definição 14** — Seja um sistema dinâmico descrito pela equação  $\dot{x} = f(x, t)$ , com  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$  relativamente ao primeiro argumento e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Define-se matriz Jacobiana associada ao sistema dinâmico e ao ponto  $x_0$  por:

$$J(f, x_0) \triangleq \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x_0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{x_0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x_0} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{x_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x_0} \end{bmatrix}$$

Não é difícil demonstrar que  $J(f, x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  sendo, de acordo com as definições 1, 2 e 3, a derivada de  $f$  relativamente a  $x$ , calculada em  $x = x_0$ , para cada instante  $t$ .

**Definição 15** — Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  que define uma transformação em  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Define-se espectro de  $A$  ao conjunto  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  dos autovalores de  $A$ .

Isto é,  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  é definido por:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$$

**Teorema 5** — (Estabilidade Linearizada de Liapunov)

Sejam as seguintes hipóteses:

- H-1)  $\dot{x} = f(x, \mu)$  com  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  descreve um sistema dinâmico autônomo parametrizado em  $\mu$
- H-2)  $f$  é continuamente diferenciável relativamente ao primeiro argumento
- H-3)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é ponto de equilíbrio para o sistema dinâmico autônomo quando  $\mu = \mu_0$

H-4)  $J_0 = J(f, x_0, \mu_0)$  é a matriz Jacobiana do sistema, calculada em  $x = x_0$  para  $\mu = \mu_0$

Sob as hipóteses H-1, H-2, H-3 e H-4 são válidas as seguintes afirmativas:

$$T-1) \quad \left\{ \forall \lambda \in \sigma(J_0) \Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda] < 0 \right\} \Rightarrow x_0$$

é assintoticamente estável.

$$T-2) \quad \left\{ \exists \lambda \in \sigma(J_0) \mid \operatorname{Re}[\lambda] > 0 \right\} \Rightarrow x_0$$

é instável.

### Prova

Seja a solução de  $\dot{x} = f(x, \mu)$  escrita como  $x(t) = u(t) + x_0$ , onde  $u(t)$  é uma perturbação a partir do ponto de equilíbrio.

De  $\dot{x} = f(x, \mu_0)$  tem-se:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(u + x_0, \mu_0) = f(x_0, \mu_0) + J_0 u + O(|u|^2)$$

$$\Rightarrow \dot{u} = J_0 u + O(|u|^2)$$

Desprezando-se o termo  $O(|u|^2)$ , obtém-se a equação linear

$$\dot{u} = J_0 u$$

cuja solução é

$$u(t) = e^{tJ_0} u_0$$

Essa solução tende a zero quando o espectro de  $J_0$  está totalmente contido no semi-plano esquerdo de  $\mathbf{C}$ , crescendo exponencialmente se algum elemento do espectro de  $J_0$  tiver parte real positiva. Ficando assim provado o Teorema 5.

Conforme se pôde observar, o Teorema da Estabilidade de Liapunov, embora seja de grande utilidade, não resolve o caso em que algum elemento de  $\sigma(J_0)$  tenha parte real nula. Nesse caso, deve-se olhar o efeito dos termos não lineares para determinar o comportamento do sistema, conforme discutir-se-á nas próximas secções.

**Definição 16** — Para um sistema dinâmico autônomo, como o da Definição 7, um ponto de equilíbrio  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  é dito hiperbólico se:

$$\lambda \in \sigma(J_0) \Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda] \neq 0$$

onde

$$J_0 = J(f, x_0)$$

**Teorema 6** — Todo ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema dinâmico autônomo ou é instável ou é assintoticamente estável.

**Prova** — Resulta de maneira imediata do Teorema 5 e da Definição 16.

#### 4. ATRADORES E VARIEDADES INVARIANTES<sup>1</sup>

**Definição 17** — Dado um conjunto  $X$ , uma família de sub-conjuntos de  $X$ ,  $T = \{G_i \subset X \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$  é uma topologia, se são verificados os seguintes axiomas:

$$i) \emptyset \in T \quad \text{e} \quad X \in T$$

$$ii) \forall J \subset \mathbb{Z}_+, \quad J \neq \emptyset, \quad \left( \bigcup_{j \in J} G_j \right) \in T$$

$$iii) \forall i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad G_i \cap G_j \in T$$

**Definição 18** — Nas condições da Definição 17, o par  $(X, T)$  recebe o nome de espaço topológico e os elementos de  $T$  de abertos do espaço topológico  $(X, T)$ .

**Definição 19** — Uma aplicação  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ , sendo  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, é denominada campo vetor se  $f$  for de classe  $C^1$  no domínio  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup> [A-3, A-4, A-5, A-7, A-8, A-9, B-2, B-4, B-5, B-6, B-7, B-8, B-9, B-15, B-16, B-17, B-18 e D-4]

**Definição 20** — Sejam  $(X, T)$  e  $(X', T')$  dois espaços topológicos.  $f: X \rightarrow X'$  é um homeomorfismo de  $(X, T)$  em  $(X', T')$  se:

i)  $f$  é bijetora

ii)  $f(T) = T'$

**Definição 21** — Uma bijeção  $f: X \rightarrow Y$  onde  $X$  e  $Y$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  de  $X$  sobre  $Y$  se  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

**Definição 22** — Um grupo de transformações a um parâmetro  $\{g^t\}$  denomina-se grupo de difeomorfismos ou fluxo liso, se a transformação  $g^t$  for um difeomorfismo, continuamente diferenciável em  $t$ .

**Definição 23** — Denomina-se mapeamento de um espaço topológico  $M$  qual quer homeomorfismo  $\varphi: W \rightarrow X$  de um aberto  $W$  de  $M$  sobre um aberto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 24** — Os mapeamentos  $\varphi_i: W_i \rightarrow X_i$ ,  $\varphi_j: W_j \rightarrow X_j$  dizem-se  $C^k$  compatíveis, se  $W_i \cap W_j = \emptyset$  ou se  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$  e as aplicações  $\varphi_{ij}$  e  $\varphi_{ji}$  são difeomorfismos de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

**Definição 25** — Denomina-se atlas  $C^k$  do espaço topológico  $M$ , a todo conjunto de mapeamentos de  $M$ ,  $C^k$  compatíveis dois a dois,  $k \geq 1$ .

**Definição 26** — Denomina-se variedade diferenciável de classe  $C^k$  a todo espaço topológico  $M$ , munido de uma classe de equivalência de atlas  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

### Teorema 7

Sejam as hipóteses relativas a um sistema dinâmico descrito por

$$\dot{x} = f(x, t)$$

com

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

H-1)  $f: (X \subset \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$  é um campo vetor no espaço topológico  $X$ , para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ , satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.

H-2)  $g^t(x_0): \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  é um mapeamento que associa a cada ponto  $x_0 \in X$ , em cada instante  $t$ , o ponto  $x(t)$ , solução do sistema de finido em 6, a partir da condição inicial  $x(0) = x_0$ .

Sob as hipóteses H-1 e H-2 pode-se afirmar que:

T-1)  $g^t(x_0)$  é um fluxo liso.

T-2)  $g^0(x_0) = x_0$

T-3)  $g^s(g^t(x_0)) = g^{s+t}(x_0)$

### Prova

As provas de T-1 e T-2 são simples e podem ser obtidas a partir da Definição 22 e do fato do sistema admitir solução única em  $X$ .

A propriedade de semi-grupo T-3 é uma condição de consistência e diz que, começar em  $x_0$  seguindo o fluxo durante um intervalo de tempo  $t$  e depois durante um intervalo de tempo  $s$ , conduz ao mesmo resultado que começar em  $x_0$  e seguir o fluxo durante o intervalo  $t + s$ .

**Definição 27** — Nas condições do Teorema 7, o conjunto de pontos

$$\{x \in X \mid x = g^t(x_0) ; t \in [0, \infty)\}$$

é denominado trajetória do sistema dinâmico, a partir da condição inicial  $x_0$ .

**Definição 28** — Nas condições do Teorema 7, o conjunto

$$\omega(x_0) = \left\{x \in X \mid \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty, g^{t_n}(x_0) \rightarrow x\right\}$$

é denominado conjunto limite associado à condição inicial  $x_0$ .

**Definição 29** — Nas condições do Teorema 7, denomina-se atrator a todo conjunto compacto  $A \subset X$  tal que:

$$\forall x \in \mathbf{V}(A) \Rightarrow \omega(x) = A$$

A expressão  $\forall x \in \mathbf{V}(A)$  significa: quase todo  $x$  pertencente à vizinhança de  $A$ , isto é, a vizinhança de  $A$  menos uma reunião enumerável de pontos.

Os conjuntos atratores definidos em 29, são muito importantes no estudo do comportamento global de um sistema dinâmico. São exemplos de atratores os pontos de equilíbrio e as curvas fechadas, correspondentes a soluções periódicas isoladas, que serão chamadas neste trabalho de **ciclos limite**.

**Teorema 8** — (Variedades Invariantes)

Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ , que define uma transformação em

$$L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$$

Dada uma partição  $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$  do espectro de  $A$ , compatível com a conjugação (isto é,  $\lambda \in \sigma_i \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma_i$ ) existe uma decomposição do  $\mathbf{R}^n$  como a soma direta de dois sub-espacos  $E_1$  e  $E_2$ .

$$\mathbf{R}^n = E_1 \oplus E_2$$

tal que  $E_i$  é invariante por  $A$  e o espectro  $A|E_i$  é  $\sigma_i$ .

**Prova** — Página 96 de [B-7].

**Definição 30** — Dado um campo vetor  $f$ , que representa um sistema dinâmico, diz-se que ele é hiperbólico em torno de  $x_0$ , se o espectro de  $J(f, x_0)$  não contém pontos com parte real nula.

Dado um campo hiperbólico em torno de um certo ponto  $x_0$ , existe uma partição natural em

$$\sigma [J(f, x_0)] \quad , \quad \sigma [J(f, x_0)] = \sigma^u [J(f, x_0)] \cup \sigma^s [J(f, x_0)]$$

onde

$$\sigma^u [J(f, x_0)] = \left\{ \lambda \in \sigma [J(f, x_0)] \mid \operatorname{Re} \lambda > 0 \right\}$$

$$\sigma^s [J(f, x_0)] = \left\{ \lambda \in \sigma [J(f, x_0)] \mid \operatorname{Re} \lambda < 0 \right\}$$

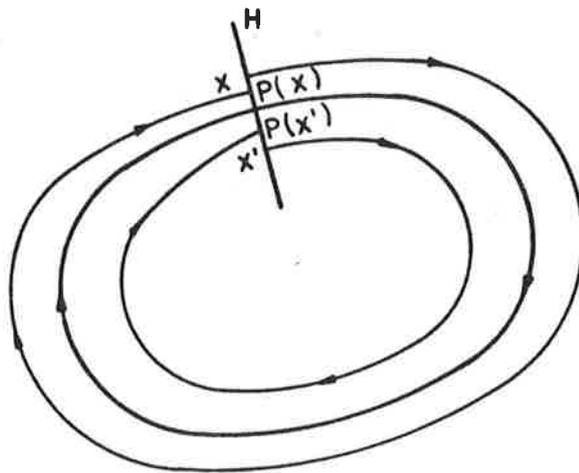
Aplicando-se o Teorema 8 a essa partição de  $\sigma [J(f, x_0)]$ , obtém-se

$$\mathbf{R}^n = E^u \oplus E^s$$

**Definição 31** — Nas condições da Definição 30,  $E^u$  e  $E^s$  são chamadas variedades invariantes.  $E^u$  é a instável e  $E^s$  é a estável.

**Definição 32** — (Transformação de Poincaré)

Seja  $\dot{x} = f(x,t)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  e  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  a equação que representa um sistema dinâmico, com  $f \in C^1$ . Seja  $\Gamma$  uma trajetória periódica do sistema e  $x_0 \in \Gamma$ . Se  $H$  é um hiperplano por  $x_0$ , transversal ao campo nesse ponto, chamamos transformação de Poincaré de  $\Gamma$  (relativa a  $x_0$  e  $H$ ) à aplicação  $P$  que a cada  $x$  numa vizinhança de  $x_0$  em  $H$  associa o primeiro ponto  $P(x)$  em que a trajetória por  $x$  volta a bater em  $H$  perto de  $x_0$ . (Figura 1).



**Fig. 1** — Ilustração da Transformação de Poincaré

**Definição 33** — Se um atrator não é um conjunto finito de pontos e não é seccionalmente diferenciável [A-4 e B-9], é dito atrator estranho [D-4].

**Definição 34** — (Proposta de Definição para Atrator Caótico)

Um atrator  $A$  de um campo vetor hiperbólico é dito caótico, se as seguintes condições forem satisfeitas:

i)  $A$  não é finito

ii)  $\exists A' \subset A$ ,  $A'$  não finito  $\mid \forall x \in A' \Rightarrow \{P(x); P^2(x); P^3(x) \dots\}$   
é tal que  $\forall n \geq 1$  o subconjunto

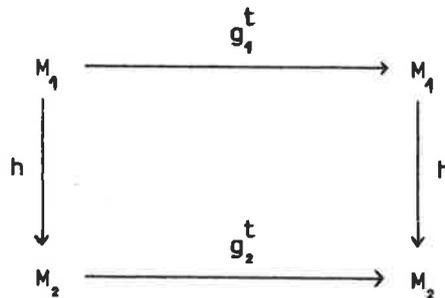
$$\{P^n(x), P^{n+1}(x), \dots, P^{n+m}(x)\}$$

contém pontos em  $E^U$  e  $E^S$ , para algum  $m > 1$ .

## 5. EQUIVALÊNCIA TOPOLÓGICA E BIFURCAÇÕES <sup>1</sup>

**Definição 35** — Dois sistemas dinâmicos descritos pelos campos vetores  $f_1 : M_1 \rightarrow M_1$  e  $f_2 : M_2 \rightarrow M_2$ , onde  $M_1$  e  $M_2$  são variedades compactas de  $\mathbb{R}^n$ , são ditos topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo de  $M_1$  sobre  $M_2$ , incluindo a troca do primeiro pelo segundo.

Isto é, chamando  $g_1^t$  e  $g_2^t$  os fluxos associados a  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente, o diagrama:



é comutativo.

**Definição 36** — Dado um sistema dinâmico descrito por  $\dot{x} = f(x, t, \mu)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetor em  $X \in \mathbb{R}^n$ , parametrizado por  $\mu$ ,

<sup>1</sup> [A-3, A-4, A-5, A-7, A-8, A-9, B-5, B-9, B-16, B-17, B-18, D-1, D-2 e D-5]

diz-se que,  $\mu_0$  é um valor ordinário do parâmetro  $\mu$ , relativo a  $f$ , se

$$\forall \mu \in V(\mu_0) \Rightarrow f(x, t, \mu_0) \quad \text{e} \quad f(x, t, \mu)$$

são topologicamente equivalentes.

**Definição 37** — Dado um sistema dinâmico descrito por  $\dot{x} = f(x, t, \mu)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetor em  $X \subset \mathbb{R}^n$ , parametrizado por  $\mu$ , diz-se que  $\mu_0$  é um valor de bifurcação do parâmetro  $\mu$ , relativo a  $f$ , se  $\mu_0$  não for um valor ordinário do parâmetro  $\mu$ , relativo a  $f$ .

## 6. SISTEMAS AUTÔNOMOS DE 2ª ORDEM<sup>1</sup>

Nesta secção discutem-se alguns resultados clássicos relativos a sistemas autônomos de 2ª ordem, descritos por  $\dot{x} = f(x)$  com  $x \in \mathbb{R}^2$  sendo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetor em  $\mathbb{R}^2$ .

Para esse tipo de sistema não se constata a presença de atratores estranhos ou caóticos [D-19] e, por isso, somente resultados sobre pontos de equilíbrio e ciclos limite serão tratados.

### 6.1 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Considerando-se um sistema dinâmico autônomo de 2ª ordem, descrito por

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{com} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

sendo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetor em  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$f(x_1, x_2) = \left( f_1(x_1, x_2) ; f_2(x_1, x_2) \right) \quad e$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$$

um ponto de equilíbrio do sistema, aplica-se o Teorema 5 na discussão da estabilidade  $x_0$ .

---

<sup>1</sup> [A-1, A-2, A-6, A-10, B-1, B-2, B-3, B-8, B-10, B-12, B-13, B-14, B-18, B-19, B-20, B-22, B-23, B-24 e B-26]

Além disso, consultando-se [B-1, B-2, B-15 e B-18] e chamando  $J_0 = J(f, x_0)$ , contrói-se a Tabela 1, com critérios para classificação do ponto de equilíbrio  $x_0$ .

Autovalores de $J_0$	Sistema Linear	Sistema não Linear
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais, $\lambda_1 < 0$ , $\lambda_2 < 0$	Nó Estável	Nó Estável
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais, $\lambda_1 > 0$ , $\lambda_2 > 0$	Nó Instável	Nó Instável
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Sela	Sela
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ complexos conjugados, $\text{Re} [\lambda_1] > 0$	Foco Instável	Foco Instável
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ complexos conjugados, $\text{Re} [\lambda_1] < 0$	Foco Estável	Foco Estável
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ imaginários	Centro	Indeterminado

Tabela 1 — Tipos de Equilíbrio - Sistema de 2ª Ordem

## 6.2 Pesquisa de Ciclos Limite

### Teorema 9 — (Green)

Seja  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetor em  $D$  de componentes  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  e  $D$  um domínio simplesmente conexo [A-1 e A-2].

Então:

$$\oint_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_S \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

onde  $C$  é uma curva suave por trechos [A-1 e A-2] em  $D$  e  $S$  a superfície por ela delimitada.

**Prova** — Páginas 21, 22 e 23 de [A-10].

**Teorema 10** — (Bendixon)

Seja o sistema autônomo descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

com  $f_1$  e  $f_2$  de classe  $C^1$  e  $D$  um domínio simplesmente conexo de  $\mathbf{R}^2$ . Uma condição necessária para que  $D$  contenha um ciclo limite do sistema é que  $\nabla f(x_1, x_2)$ , não identicamente nulo, definido por:

$$\nabla f(x_1, x_2) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2)$$

assuma tanto valores positivos como negativos nesse domínio.

**Prova**

Seja  $C \subset D$  um ciclo limite do sistema e  $S$  a região por ele delimitada.

Do Teorema 10 (Green), segue que:

$$\oint_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_S \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

mas,

$$f_1 = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{dx_2}{dt} \Rightarrow \oint_C \frac{dx_1}{dt} dx_2 - \frac{dx_2}{dt} dx_1 = 0$$

se o ciclo limite  $C$  é percorrido uma vez.

Logo

$$\iint_S \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

não sendo identicamente nulo, deve assumir tanto valores positivos como negativos em  $S \subset D$ .

**Teorema 11** — (Dulac)

Um sistema dinâmico de 2ª ordem descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

com  $f_1$  e  $f_2$  de classe  $C^1$  em uma região anular  $D \subset \mathbb{R}^2$ , não apresenta mais do que um ciclo limite em  $D$ , se a expressão:

$$d(x_1, x_2) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_1} (g f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g f_2), \quad \text{não identicamente nula,}$$

não mudar de sinal em  $D$ , sendo  $g(x_1, x_2)$  uma função de classe  $C^1$  em  $D$ .

**Prova**

Será feita por absurdo, considerando-se dois ciclos limite (caminhos fechados):  $abca$  e  $a_1 b_1 c_1 a_1$  em  $D$  (Figura 2).

Para o contorno  $abca$ ,  $a_1 c_1 b_1 a_1$  tem-se:

$$\oint g (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = 0$$

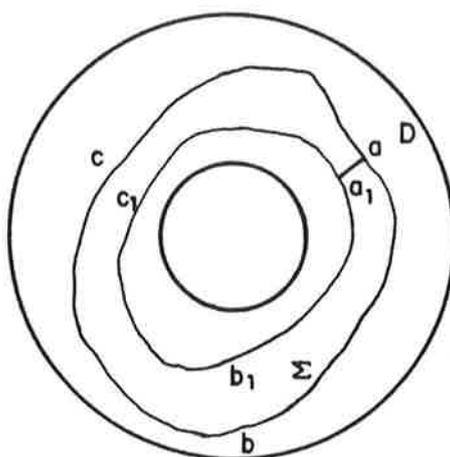


Fig. 2 - Trajetórias fechadas em regiões anulares

De acordo com o Teorema 9 (Green):

$$\oint g (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (g f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g f_2) \right] dx_1 dx_2$$

sendo  $\Sigma$  a região entre as curvas  $abca$  e  $a_1b_1c_1a_1$ .

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (g f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g f_2) \right] dx dy = 0$$

o que contradiz a hipótese que o integrando, não sendo identicamente nulo, tem sinal constante na região ( $\Sigma$ ), que é parte da região  $D$ .

$\Rightarrow$  A região  $D$  não apresenta mais do que uma trajetória fechada.

### 6.3 Formulação Hamiltoniana para Sistemas de 2ª Ordem

Para um sistema dinâmico qualquer, o traçado geométrico das trajetórias em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , de acordo com a Definição 27, denomina-se superfície de estado.

No caso particular de um sistema de 2ª ordem, a denominação superfície de estado é, muitas vezes, substituída por superfície de fase. Uma secção transversal da superfície de fase para  $t$  constante, denomina-se plano de fase.

Uma ferramenta bastante útil na pesquisa de comportamentos de sistemas dinâmicos de ordem par, lineares ou não, é a formulação Hamiltoniana. Tendo como base as idéias de conservação de energia, fornece um método que trabalha com grandezas escalares e permite tirar conclusões a respeito de características geométricas do campo vetor, no plano de fase.

#### 6.3.1 Formulação Hamiltoniana para Sistemas Conservativos

**Definição 38** — Um sistema dinâmico autônomo de 2ª ordem será dito Hamiltoniano se puder ser descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1) \end{cases}$$

sendo  $f$  de classe  $C^1$  para  $x_1 \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 12**

Para um sistema Hamiltoniano, curvas do tipo:

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - \int f(x_1) dx_1 = H_0$$

são trajetórias, sendo  $H_0$  uma constante que depende apenas das condições iniciais.

**Prova**

Nos pontos onde  $f(x_1) \neq 0$  pode-se escrever:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{f(x_1)} \Rightarrow \int_{x_0}^x x_2 dx_2 = \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1$$

Sendo o estado inicial  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  e o estado num instante arbitrário (t) dado por

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$$

pode-se escrever:

$$\frac{1}{2} x_2^2 - \left[ \int f(x_1) dx_1 \right]_{x_1(t)} = \frac{1}{2} (x_2^0)^2 - \left[ \int f(x_1) dx_1 \right]_{x_1^0}$$

Chamando

$$\frac{1}{2} (x_2^0)^2 - \left[ \int f(x_1) dx_1 \right]_{x_1^0} = H_0$$

obtém-se

$$\frac{1}{2} x_2^2 - \int f(x_1) dx_1 = H_0$$

sendo  $H_0$  constante dependente apenas de

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0) \quad \text{para} \quad \forall t \geq 0$$

**Definição 39** — Nas condições da Definição 38 e do Teorema 12, define-se:

i) Energia Cinética do Sistema:

$$T \triangleq \frac{1}{2} x_2^2$$

ii) Energia Potencial do Sistema:

$$V \triangleq - \int_{\bar{x}_1}^{x_1} f(x_1) dx_1$$

sendo  $\bar{x}_1$  a coordenada de uma situação arbitrária de referência.

iii) Função Hamiltoniana do Sistema:

$$H \triangleq T + V$$

**Teorema 13**

O sistema de equações da Definição 38 pode ser reescrito como:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \text{com} \quad H(x_1, x_2)$$

da Definição 39 e do Teorema 12.

**Prova** — Como

$$H = \frac{1}{2} x_2^2 - \int f(x_1) dx_1$$

tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} = -f(x_1)$$

e o teorema fica, portanto, demonstrado.

As Definições 38 e 39 e os Teoremas 12 e 13 permitem a construção de trajetórias no plano de fase para sistemas conservativos, isto é, para sistemas em que a função **Hamiltoniana**  $H$  permaneça constante.

A formulação Hamiltoniana, para sistemas de 2ª ordem acima apresentada, poderia ser obtida, de uma maneira mais geral, a partir da formulação Lagrangeana.

Do princípio da ação mínima, a função Lagrangeana  $L(q, \dot{q})$ , onde  $q$  é uma coordenada generalizada, satisfaz às equações de Lagrange, que são do tipo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1)$$

mas

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left( \frac{d}{dt} \dot{q} \right) + \dot{q} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} L = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) = 0 \end{aligned}$$

Logo, o termo

$$H(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \quad (3)$$

é uma constante.

Como  $L \triangleq T - V$ :

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \int f(x_1) dx_1$$

Logo:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 = \dot{x}_1^2$$

Substituindo  $L$  e  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}$  em (3)

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 - \int f(x_1) dx_1 = H_0$$

e, portanto, a formulação das Definições 38 e 39 e dos Teoremas 12 e 13, é equivalente à formulação obtida a partir das equações de Lagrange.

### 6.3.2 Formulação Hamiltoniana para Sistemas não Conservativos

Este caso difere do anterior por levar em conta forças que não admitem um potencial associado. Introduzindo as forças generalizadas ( $f$ ) nas equações de Lagrange, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - f = 0 \quad (4)$$

sendo a força generalizada  $f$  uma função de  $q$  e  $\dot{q}$ .

Multiplicando (4) por  $\dot{q}$ :

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \dot{q} - f \dot{q} = 0 \quad (5)$$

Mas:

$$\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \quad (6)$$

pois

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q}$$

Substituindo (6) em (5), segue:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \frac{dL}{dt} - f \dot{q} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{dL}{dt} - f \dot{q} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) - f \dot{q} = 0 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = H \Rightarrow \frac{dH}{dt} - f \dot{q} = 0 \quad (7)$$

que é a equação que representa a formulação Hamiltoniana para sistemas não conservativos, isto é, sistemas em que a função Hamiltoniana  $H$  não é constante.

## 7. CAOS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS PERTURBADOS — O MÉTODO DE MELNIKOV<sup>1</sup>

Caos se refere à obtenção de trajetórias aparentemente aleatórias em sistemas dinâmicos não lineares, descritos por equações diferenciais.

Em [D-16, D-17 e D-18], trabalhos experimentais foram desenvolvidos no sentido de mostrar a existência de comportamentos caóticos em pêndulos e junções de Josephson, excitados com sinais do tipo  $A + B \sin \omega t$ , com  $A$ ,  $B$  e  $\omega$  constantes. Em [D-6, D-7, D-8, D-9, D-10, D-11, D-12, D-13, D-14 e D-15] foram desenvolvidas ferramentas analíticas, que permitem a comprovação dos resultados experimentais, podendo-se, através delas, analisar sistemas Hamiltonianos perturbados, construindo a chamada **Medida de Melnikov**.

Nesta secção colocam-se os fundamentos teóricos gerais dessas técnicas, apresentando-se o conceito de estabilidade estrutural seguido da discussão do mapeamento em ferradura de Smale.

Finalizando, trata-se o método de Melnikov para sistemas Hamiltonianos de 2ª ordem, excitados por sinais periódicos no tempo.

---

<sup>1</sup> [B-4, B-5, B-21, D-2, D-6, D-7, D-8, D-9, D-10, D-11, D-12, D-13, D-14, D-15, D-16, D-17 e D-18]

### 7.1 Caos, Mapeamento em Ferradura e Difusão de Arnold

Os comportamentos caóticos em sistemas dinâmicos determinísticos não lineares foram observados pela primeira vez em equações de Van der Pol de 2ª ordem, com termo forçante. Posteriormente, Smale obteve um mapeamento chamado **mapeamento em ferradura** que, geometricamente, exhibe a dinâmica complicada de um movimento aleatório.

Ulteriormente, ficou estabelecido que uma ferradura se encontra densamente embebida em certos sistemas dinâmicos que apresentam comportamento caótico e, sendo a ferradura estruturalmente estável, pode-se concluir nesses casos que o caos sobrevive a perturbações suficientemente pequenas.

É certo que o aparecimento de caos é um fenômeno mais geral do que o aparecimento das ferraduras de Smale; entretanto, estas estão envolvidas na formação de atratores caóticos. É nisso que se fundamenta o Método de Melnikov que é uma técnica para medir a presença de caos em certos sistemas dinâmicos de 2ª ordem, com termos forçantes periódicos.

Em 1964, Arnold anunciou que em certos sistemas de ordem par e maior que dois, havia transferência de energia de uma parte para a outra de modo caótico gerando, como consequência, outro tipo de movimento complicado. A esse fenômeno deu-se, posteriormente, o nome de **Difusão de Arnold**.

Caos e Difusão de Arnold são resultado de certas características qualitativas dos retratos de fase do sistema, que podem aparecer sob certas perturbações ou mudanças de parâmetros, pertencendo portanto ao campo da **Teoria das Bifurcações**.

## 7.2 Estabilidade Estrutural

A idéia de estabilidade estrutural de um sistema está ligada a não variação da estrutura topológica de seu espaço de fase, quando o sistema é submetido a pequenas perturbações.

**Definição 40** — Um sistema é estruturalmente estável se permanece topologicamente equivalente a si próprio quando se produzem pequenas variações no campo vetor que descreve sua dinâmica.

**Definição 41** — Seja  $M$  uma variedade compacta e  $f$  um campo vetor que pertence ao espaço de difeomorfismos de  $M$  sobre  $M$ . Então,  $p \in M$  é um ponto errante de  $f$  se e existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ , tal que:

$$\bigcup_{|m| > 0} f^m(V) \cap V = \emptyset$$

Caso contrário,  $p$  é dito não errante.

**Definição 42** — Seja  $M$  uma variedade compacta e  $g^t$  um fluxo liso. Um ponto  $q \in M$  é um ponto errante para o fluxo  $g^t$  se existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $M$ , tal que:

$$\bigcup_{|t| > t_0} g^t(V) \cap V = \emptyset \quad \text{para algum } t_0 > 0$$

Caso contrário,  $q$  é dito não errante.

**Teorema 14<sup>1</sup>** — (Peixoto)

Seja  $f : M \rightarrow M$  um campo vetor na variedade bidimensional  $M$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e seja  $\Omega$  o conjunto de seus pontos não errantes.

Nesse caso,  $f$  será estruturalmente estável se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (1) o número de pontos fixos e órbitas periódicas é finito e cada um de les é hiperbólico;
- (2) não há trajetórias unindo pontos de sela; e
- (3)  $\Omega$  é constituído somente por pontos fixos e órbitas periódicas.

Smale tentou estender esse teorema para dimensões maiores do que dois, considerando um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , sobre a variedade compacta  $M$ , substituindo sua condição (2), pela condição de transversalidade.

**Definição 43** — Um sistema descrito por um campo vetor  $f \in \text{diff}^k(M)$  sobre uma variedade compacta  $M$ , é um sistema Morse-Smale (MS) se satisfaz as seguintes condições:

- (1) os pontos periódicos de  $f$  são hiperbólicos;
- (2) o conjunto  $\Omega$  dos pontos não errantes de  $f$  é finito;

<sup>1</sup> Ver dados sobre a prova do Teorema na página 98 de [B-5].

- (3) condição de transversalidade:  $\forall p \in \Omega$  e  $q \in \Omega$  a variedade estável  $E^S(p)$  e a variedade instável  $E^U(q)$  se interceptam transversalmente.

Pensava-se inicialmente que os sistemas M-S eram uma extensão lógica ao Teorema de Peixoto e, desta forma, as seguintes conjecturas foram anunciadas:

— **Conjectura 1**

Um sistema é estruturalmente estável  $\Leftrightarrow$  é um sistema M-S.

— **Conjectura 2**

Os sistemas M-S constituem um conjunto denso em  $\text{diff}^k(M)$ . ( $k \geq 1$ ).

— **Conjectura 3**

Os sistemas estruturalmente estáveis constituem um conjunto denso em  $\text{diff}^k(M)$ . ( $k \geq 1$ ).

A Conjectura (1) é parcialmente verdadeira. Palis provou que sistemas M-S constituem um conjunto aberto em  $\text{diff}^1(M)$ . Palis e Smale provaram que um sistema M-S é estruturalmente estável, não sendo verdadeira a afirmação recíproca.

As Conjecturas (2) e (3) também se mostraram incorretas.

As falhas das Conjecturas (1) e (2) sugeriram a existência de comportamentos mais complicados dos até então conhecidos que, além disso, podiam ser estruturalmente estáveis. Um exemplo clássico para mostrar que as Conjecturas (1) e (2) são falsas é o do **Mapeamento em Ferradura de Smale**, descrito a seguir.

### 7.3 Mapeamento em Ferradura de Smale

Seja  $Q$  o quadrado  $[-1,1] \times [-1,1]$  em  $\mathbb{R}^2$ . Considerando a vizinhança aberta  $(-1-\epsilon, 1+\epsilon) \times (-1-\epsilon, 1+\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  e adaptando semi-círculos em ambos os extremos, como mostra a Figura 3, denomina-se o domínio aberto resultante de  $Q^+$ .

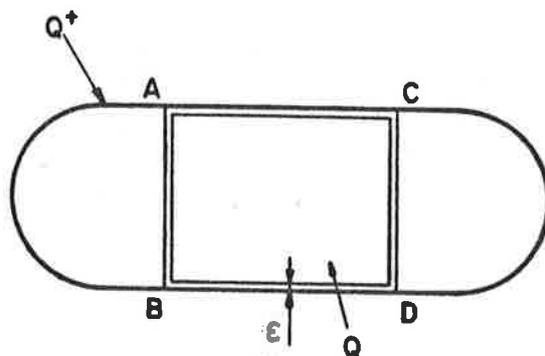


Fig. 3 - Domínio do Mapeamento em Ferradura

Definindo um mapeamento  $T$  pelas seguintes operações geométricas:

- a) compressão horizontal de  $Q^+$  — Figura 4, (a)
- b) dobra ao meio, obtendo a forma de ferradura — Figura 4, (b)
- c) superposição da ferradura resultante com o domínio  $Q^+$  — Figura 4, (c)

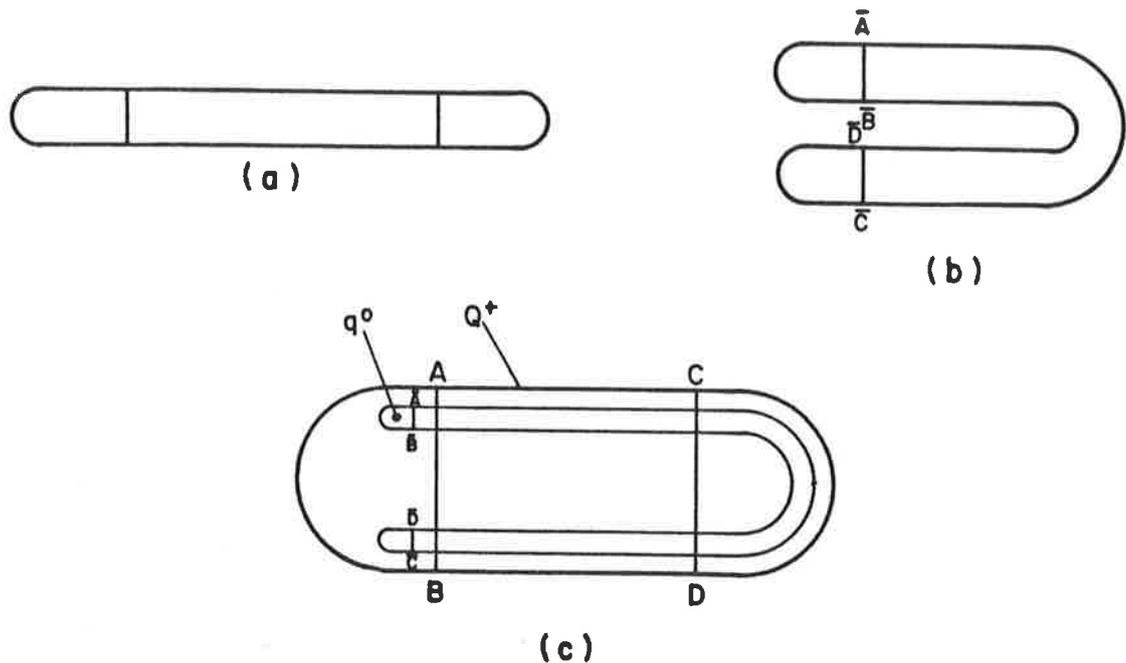


Fig. 4 - O mapeamento  $T$

Demonstra-se que as operações geométricas descritas anteriormente podem ser realizadas através de um mapeamento  $T$ , biunívoco, mas não sobrejetor.

Deve-se notar que existe um ponto atrator fixo  $q^0$  (Figura 4, (c)), e que a imagem das tiras verticais  $\Delta_0$  e  $\Delta_1$  são as tiras horizontais

$$\bar{\Delta}_0 = T(\Delta_0) \quad \text{e} \quad \bar{\Delta}_1 = T(\Delta_1)$$

conforme mostra a Figura 5.

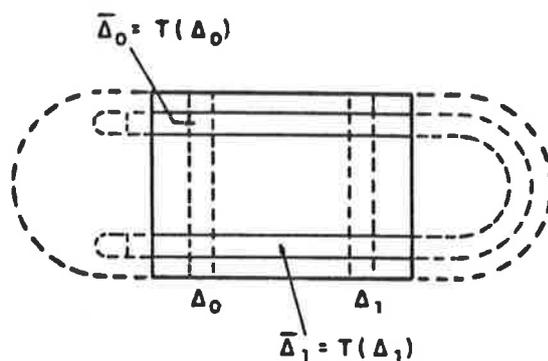


Fig. 5 - Imagens das Tiras Verticais num Mapeamento em Ferradura

Assim, no quadrado  $Q$ , pode-se considerar o efeito de  $T$  como o mesmo dos seguintes mapas linearizados:

i)

$$T_x^0 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} x + \gamma^0$$

O mapeamento  $T_x^0$  é o mapeamento  $T$ , restrito ao domínio  $\Delta_0$ . Isto é,  $x \in \Delta_0$  sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, tais que  $\alpha > 1 > \beta > 0$  e  $\gamma^0$  é um vetor constante.

ii)

$$T_y^1 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} y + \gamma^1$$

O mapeamento  $\bar{T}_y^1$  é o mapeamento  $T$ , restrito ao domínio  $\Delta_1$ . Isto é,  $y \in \Delta_1$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, tais que  $\alpha > 1 > \beta > 0$  e  $\gamma^1$  é um vetor constante.

Um candidato a domínio de atração do ponto fixo  $q^0$  é o domínio  $Q^+$  menos as duas tiras verticais  $\Delta_0$  e  $\Delta_1$ . (Região hachurada da Figura 6).

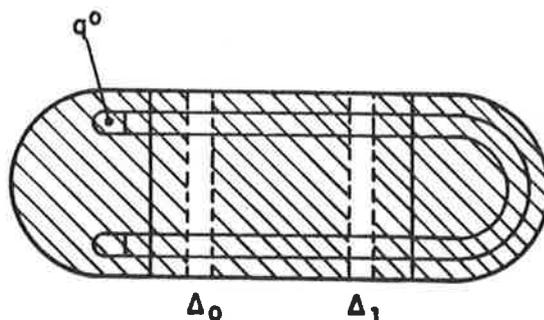


Fig. 6 - Domínio de Atração do Ponto Fixo  $q_0$  do Mapeamento em Ferradura

Considerando o mapeamento  $T^2 = T.T$  em  $Q^+$  com sua imagem superposta a  $Q^+$ , conforme a Figura 7 e a seguinte intersecção:

$$Q \cap T(Q^+) \cap T(T(Q^+)) \cap T(T(T(Q^+))) \cap \dots$$

que é igual a

$$Q \cap T(Q^+) \cap T^2(Q^+) \cap T^3(Q^+) \cap \dots$$

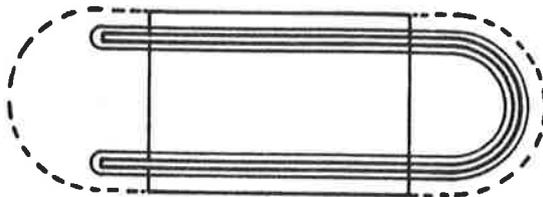


Fig. 7 - Imagem de  $T.T$  em  $Q^+$   
superposta com  $Q^+$

Pode ser demonstrado que a intersecção em questão, é o conjunto  $I \times \underline{C}$  onde  $\underline{C}$  é um homeomorfismo do conjunto de Cantor e  $I$  é o intervalo  $[-1,1]$ . (Figura 8).

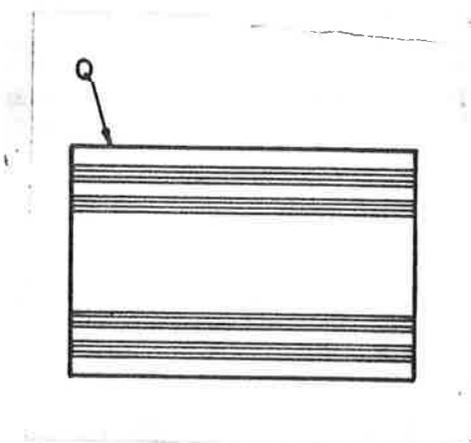


Fig. 8

$$Q \cap T(Q^+) \cap T^2(Q^+) \cap T^3(Q^+) \cap \dots$$

Similarmente, para o mapeamento inverso  $T^{-1}$ , pode ser demonstrado que:

$$Q \cap T^{-1}(Q^+) \cap T^{-2}(Q^+) \cap \dots = \underline{C} \times I$$

e, portanto, o conjunto não errante de  $T$  que será denotado por  $\Omega$ , é da do por:

$$\Omega = (I \times \underline{C}) \cap (\underline{C} \times I) = \underline{C} \times \underline{C}$$

sendo homeomórfico a um conjunto de Cantor.

Assim, como o conjunto de Cantor é fechado e contém um número infinito de pontos, o conjunto não errante  $\Omega$  de  $T$  também o é, sendo, além disso, hiperbólico (basta examinar  $\bar{T}_x^0$  e  $\bar{T}_y^1$ ) e os pontos periódicos são densos em  $\Omega$ .

Assim,  $T$  não representa um sistema Morse-Smale, embora represente um sistema estruturalmente estável.

O mapeamento em ferradura assim descrito, exibe uma dinâmica de comportamento estatístico e será útil para a compreensão das trajetórias de sistemas que apresentam esse tipo de comportamento complicado.

#### 7.4 Caos e suas Técnicas de Medida

No item anterior, apresentou-se um exemplo de comportamento complicado, estruturalmente estável, em sistemas dinâmicos. É de interesse, todavia, determinar as condições para que um sistema dinâmico possua tal comportamento complicado.

Toda a discussão estará voltada a problemas de caos homoclínico, cujo significado físico demonstrar-se-á a seguir.

#### 7.4.1 Significado Físico

Para sistemas dinâmicos com órbitas caóticas deve existir uma região  $X$  no espaço de fase tal que, ao longo do tempo, a separação entre os pontos de  $X$  aumente exponencialmente. Isto quer dizer que existem pontos em  $X$  que têm destinos totalmente diferentes, não importando que  $X$  seja pequeno.

As intersecções transversais das variedades estável e instável de um ponto de sela, apontam a presença de tais comportamentos. Isto é, a presença de pontos homoclínicos na intersecção transversal das variedades do mapeamento induzido de Poincaré, que é responsável pelo caos, conforme a Definição 34.

A existência de pontos homoclínicos nas intersecções supra-citadas implica em uma estrutura em ferradura embebida em volta de tais pontos. Como o mapeamento em ferradura é estruturalmente estável, conclui-se que o caos pode sobreviver a pequenas perturbações.

#### 7.4.2 Técnica de Melnikov

Existem várias maneiras ligeiramente diferentes de se testar a presença de caos em um dado sistema dinâmico. O método básico é devido a Melnikov [D-6], Holmes e Marsden [D-8, D-10 e D-11] e Chow [D-7].

Holmes e Marsden [D-11], desenvolveram uma versão do método de Melnikov para sistemas Hamiltonianos de 2ª ordem, compostos por um sistema que possui uma órbita homoclínica (trajetória que conecta um ponto de sela a si próprio), e um oscilador não linear. É essa versão que será utilizada neste trabalho e que será discutida a seguir.

**Teorema 15** — (Krylov e Bogoliubov)

Seja um sistema dinâmico descrito pela equação

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon) \quad (8)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ,  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^r$  e periódica relativamente ao argumento  $t$ , com um certo período  $T > 0$  e  $r \geq 1$ .

Seja a equação autônoma associada definida como:

$$\dot{x} = \epsilon f_0(x) \quad (9)$$

Então, por uma mudança regular de coordenadas, (8) pode ser escrita como:

$$\dot{x} = \epsilon f_0(x) + \epsilon f_1(t, x, \epsilon) \quad (10)$$

onde  $f_1(t, x, \epsilon) \rightarrow 0$  para  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $f_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é periódica em  $t$ .

Além disso, se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto fixo hiperbólico de (9), então existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que,  $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , (8) possui uma órbita hiperbólica periódica  $x_\epsilon(t)$  que é única em alguma vizinhança de  $x_0$ , dependendo continuamente de  $\epsilon$  e tendo o mesmo tipo de estabilidade que  $x_0$ .

Em (9) e (10)

$$f_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt$$

Prova

Páginas 66 e 67 de [D-8] ou, mais detalhadamente, nas páginas 187 a 192 de [B-2].

Em vista do Teorema 15, para sistemas de 2ª ordem, trabalha-se com as equações:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \varepsilon p_0(u, v) + \varepsilon p_1(u, v, \theta, \varepsilon) \\ \ddot{v} = \varepsilon q_0(u, v) + \varepsilon q_1(u, v, \theta, \varepsilon) \\ \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \quad (11)$$

ou:

$$\ddot{x} = \varepsilon f_0(x) + \varepsilon f_1(x, t, \varepsilon) \quad (12)$$

onde  $p_1$  e  $q_1$  são  $O(|\varepsilon|)$  para  $\varepsilon$  pequeno.

Correspondentemente ao sistema dado por (11) ou (12), tem-se o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \dot{u} = \varepsilon p_0(u, v) \\ \dot{v} = \varepsilon q_0(u, v) \\ \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \quad (13)$$

ou:

$$\dot{x} = \varepsilon f_0(x) \quad (14)$$

e, (11) e (12) podem ser encarados como uma pequena perturbação de (13) e (14), considerando  $\varepsilon \ll 1$ .

Sejam as seguintes hipóteses:

(H-1) as equações (13) e (14) possuem dois pontos hiperbólicos de sela  $x'_0(u'_0, v'_0)$  e  $x''_0(u''_0, v''_0)$  em alguma vizinhança  $D \subset \mathbb{R}^2$  da origem, que são conectados por uma trajetória  $\Gamma_0$ , isto é, se  $x_0 \in \Gamma_0$  então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x'_0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x''_0$$

Deve-se observar que a utilização do Teorema 8 a este caso, permite escrever que:

$$\Gamma_0 = E^U(x'_0) \cap E^S(x''_0)$$

(H-2) as funções  $p_0, q_0, p_1, q_1$  são de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e  $p_1$  e  $q_1$  são  $2\pi$  periódicas em  $\theta$  e da ordem de  $\epsilon$ , para  $\epsilon$  pequeno.

(H-3) soluções de (13) e (14) existem e são definidas em alguma região compacta  $D \subset \mathbb{R}^2$  contendo  $x'_0, x''_0$  e  $\Gamma_0$ . Em particular, a trajetória  $\Gamma_0$  é dada por

$$x_0(t) = (u_0(t), v_0(t))$$

**Lema 1** — Sob as hipóteses (H-1), (H-2) e (H-3), pode-se afirmar que

i) soluções de (11) e (12) existem e são únicas em uma região

$$\tilde{D} \subset D \times [0, 2\pi/T) \subset \mathbb{R}^2 \times S^1 \quad \text{para} \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

ii) (11) e (12) possuem duas órbitas hiperbólicas fechadas de sela  $\gamma'$  e  $\gamma''$  cujas variedades estável e instável

$$E^S(\gamma'), E^U(\gamma'), E^S(\gamma'') \quad \text{e} \quad E^U(\gamma'')$$

com secção transversal

$$\Sigma_{t_0} = \left\{ (u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid \theta = t_0 \right\}$$

são e fechadas a  $E^U(x'_0)$  e  $E^S(x''_0)$  em  $\Sigma_{t_0}$  no sentido que

$P^n(p)$  para  $p \in E^U(x')$  ou  $p \in E^S(x'')$

pode ser tomado arbitrariamente próximo de

$$\Gamma_0 = E^U(x'_0) \cap E^S(x''_0)$$

para  $\epsilon > 0$  pequeno e  $|n| < \infty$

Prova — Página 69 de [D-8].

Levando em conta o Lema 1 e o fato de  $p_0$  e  $q_0$ ,  $p_1$  e  $q_1$  serem de classe  $C^r$  em  $D$ , Melnikov provou em [D-6] que a solução de (12) pode ser expandida em série de potência de  $\epsilon$ , para  $\epsilon \ll 1$ , como segue:

$$x(t) = x_0(t) + \sum_k \epsilon^k x_k(t) \quad (15)$$

Assim, as soluções que aparecem nas variedades estável e instável  $E^S(\gamma'')$ ,  $E^U(\gamma')$  em  $\tilde{D}$  podem ser expressas por:

$$x_\epsilon^S(t) = x_0(t) + \epsilon x_1^S(t) + O(\epsilon^2) \quad (16)$$

$$x_\epsilon^U(t) = x_0(t) + \epsilon x_1^U(t) + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

onde  $x_0(t)$  é a órbita não perturbada  $\Gamma_0$ .

Deve-se notar que  $x_0(t)$  é uma órbita hiperbólica homoclínica e  $x_\epsilon^S(t)$  e  $x_\epsilon^U(t)$  correspondem, respectivamente, a uma órbita estável perturbada e a uma órbita instável perturbada. (Figura 9).

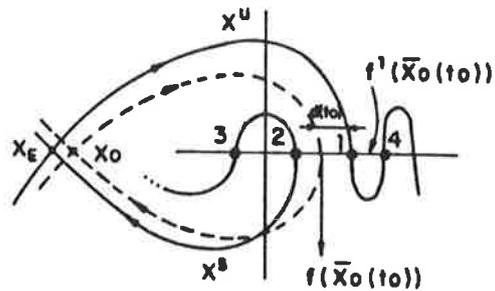


Fig. 9 - Perturbação da Órbita Homoclínica

O método de Melnikov, fundamentalmente, avalia a distância entre  $x_\epsilon^u(t, t_0)$  e  $x_\epsilon^s(t, t_0)$  pois, se elas se interceptam uma vez, se interceptam uma infinidade de vezes (Figura 10), formando a chamada **Ferradura de Smale** na dinâmica da transformação de Poincaré, com um conjunto enumerável de órbitas instáveis de diferentes períodos, como se fossem órbitas não periódicas recorrentes.

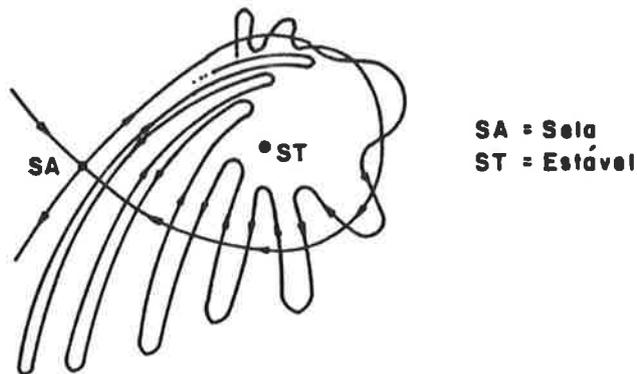


Fig. 10 - Transformação de Poincaré de uma Órbita Homoclínica Perturbada

Isto significa que este tipo de comportamento aparecerá, caso a medida da separação entre  $x_\epsilon^u(t, t_0)$  e  $x_\epsilon^s(t, t_0)$ , que será chamada de  $d_\epsilon(t_0) = \Delta M(t_0)$  — Figura 9 —, tenha zeros transversais, isto é,  $\exists \tilde{t}_0$  tal que:

$$\Delta(\tilde{t}_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\Delta}{dt_0}(\tilde{t}_0) \neq 0$$

#### 7.4.3 Construção da Integral de Melnikov

Escolhendo um ponto  $x_0(0) = (u_0(0), v_0(0)) \in \Gamma_0$  e lembrando que  $\Gamma_0 = E^s(x_0'') \cap E^u(x_0')$  é a curva invariante de  $P_a$  conectando os pontos de sela  $x_0'$  e  $x_0''$  de  $P_a$ , definida em alguma secção

$$\Sigma_{t_0} = \left\{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid \theta = t_0 \in [0, T) \right\}$$

escreve-se a função do tempo:

$$\Delta(t, t_0) = f_0 \left( x_0(t - t_0) \right) \wedge \left( x^s(t, t_0) - x^u(t, t_0) \right) \quad (18)$$

Ao se definir a quantidade:

$$\Delta(t_0) \triangleq \Delta(t_0, t_0) = f_0 \left( x_0(0) \right) \wedge \left( x^s(t_0) - x^u(t_0) \right) \quad (19)$$

percebe-se que  $\Delta(t_0)$  depende somente de  $t_0$ , que é o instante (ou ângulo de fase), selecionado para a secção de Poincaré.

Para  $f_0 = (p_0, q_0)$  e  $x = (u, v)$ , define-se

$$f_0 \wedge x = p_0 v - q_0 u$$

e, portanto,  $\Delta(t_0)$  mede a área de um paralelogramo de lados  $f_0(x_0(0))$  e  $(x^S(t_0) - x^U(t_0))$ .

Aqui,  $x_0(t-t_0) = (u_0(t-t_0), v_0(t-t_0))$  é a solução do sistema não perturbado dado em (13) ou (14), com a condição inicial  $x_0(0) \in \Gamma_0$ . As órbitas  $x^S(t, t_0)$  e  $x^U(t, t_0)$  são soluções do sistema perturbado dado em (11) ou (12), situadas em  $E^S(\gamma'')$  e  $E^U(\gamma')$ , a partir de  $x^S(t_0)$  e  $x^U(t_0)$  na secção  $\Sigma_{t_0}$ .

Como  $x^S(t_0)$  e  $x^U(t_0)$  pertencem a uma  $\epsilon$ -vizinhança de  $x_0(t_0)$  e como as variedades  $E^U(x_0')$  e  $E^S(x_0'')$  são  $C^r$  fechadas relativamente a  $E^U(x_0')$  e  $E^S(x_0'')$ , a quantidade  $\Delta(t_0)$  caracteriza corretamente a distância entre  $E^U(\gamma')$  e  $E^S(\gamma'')$  na secção  $\Sigma_{t_0}$ . Em particular, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno,  $f_0 \wedge (x_S - x_U)$  só será zero se  $E^U(\gamma')$  e  $E^S(\gamma'')$  interceptarem-se em  $\Sigma_{t_0}$ , próximo a  $x_0$ , uma vez que ambas as variedades são  $\epsilon$  fechadas, relativamente a  $\Gamma_0$ .

Para prosseguir com segurança, deve-se observar que o Lema 1 garante que  $\Delta(t, t_0)$  e  $\Delta(t_0)$  são bem definidas para  $x^U$  e  $x^S \in \tilde{D}$ .

Caso  $t_0$  seja variável, a secção  $\Sigma_{t_0}$  onde  $P_b$  é definida varia em  $S^1$ , de  $t_0$  a  $t_0 + \Gamma$ . Mantendo  $x_0(0)$  e, portanto  $f_0(x_0(0))$ , fixados em  $\Sigma_{t_0}$ , esse procedimento de variação de  $t$  é equivalente a fazer a fase do termo forçante  $f_1(x, t)$  variar de 0 a  $2\pi$ .

Em geral, as intersecções de  $E^U(\gamma')$  e  $E^S(\gamma'')$  com  $\Sigma_{t_0}$  movem-se relativamente a  $x_0(0)$  e então  $\Delta(t_0)$  varia. Se  $\Delta(t_0)$  assume um valor nulo em  $t_0 = \tau$ , então  $E^S(x'')$  e  $E^U(x')$  interceptam-se próximos de  $x_0$ , no plano  $\Sigma_\tau$  e, uma vez que  $E^S(x'')$  e  $E^U(x')$  são invariantes pela transformação  $P_b$ , observa-se que a existência de uma intersecção implica na existência de uma infinidade de outras.

**Lema 2** — Se  $\Delta(\tau) = 0$  e  $\left. \frac{d\Delta(t_0)}{dt_0} \right|_{t_0 = \tau} \neq 0$

então, as intersecções de  $E^S$  e  $E^U$  são transversais.

**Prova** — Como  $\left. \frac{d\Delta(t_0)}{dt_0} \right|_{t_0 = \tau} \neq 0$ ,

$\Delta(t_0)$  muda de sinal em  $\tau$  e escreve-se  $\Delta(t_0) = C(t_0 - \tau) \dots$ ;  $C \neq 0$ .

Logo,  $x^S(t_0) - x^U(t_0)$  devem também mudar de sinal fazendo com que  $E^U(x')$  e  $E^S(x'')$  se interceptem em  $x^S(\tau) = x^U(\tau) \triangleq p$ .

Mas  $p$  pertence a uma órbita da equação diferencial e, pela continuidade das soluções,  $E^U(x')$  e  $E^S(x'')$  interceptam-se em todas as secções  $\Sigma_{t_0}$ ,  $t_0 \in [0, T]$ , em uma órbita passando por  $p$ .

Do exposto até aqui observa-se que pode-se pesquisar sobre a existência de atratores caóticos em sistemas dinâmicos utilizando a função  $\Delta(t_0)$ . O que ocorre, na prática, é que  $\Delta(t_0)$  é difícil de construir. Por isso, são utilizados métodos aproximados, desenvolvidos a seguir.

Em vista de (16), (17), (18) e (19), segue-se:

$$\Delta(t, t_0) = \Delta_1(t, t_0) + O(\epsilon^2) \quad (20)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_1(t, t_0) = f_0(x_0(t-t_0)) \wedge [x_1^S(t, t_0) - x_1^U(t, t_0)] \underline{\Delta} \Delta_1^S(t, t_0) - \\ - \Delta_1^U(t, t_0) \end{aligned} \quad (21)$$

Considerando, primeiramente,  $\Delta_1^S$  que será obtida através do cálculo de  $x_1^S(t, t_0)$ , como segue.

Substituindo (16) em (11) ou (12), removendo o fator comum  $\epsilon$  à direita pela mudança de escala de tempo  $t \rightarrow \epsilon t$ . Igualando os termos de ordem um em  $\epsilon$  e lembrando que  $f_1 = (p_1, q_1)$  é  $O(\epsilon)$ :

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0) \quad (22)$$

$$\dot{x}_1^S = J(f_0, x_0) x_1^S + \frac{1}{\epsilon} f_1(x_0; t) \quad (23)$$

Retomando (21), derivando em relação a  $t$ , com  $t_0$  fixo e deixando de explicitar o argumento  $(t, t_0)$ , tem-se:

$$\dot{\Delta}_1^S = \dot{f}_0 \wedge x_1^S - f_0 \wedge \dot{x}_1^S = J(f_0, x_0) \dot{x}_0 \wedge x_1^S - f_0 \wedge \dot{x}_1^S \quad (24)$$

Usando (22) e (23) em (24):

$$\dot{\Delta}_1^S = J(f_0, x_0) \dot{f}_0 \wedge x_1^S - f_0 \wedge \left[ J(f_0, x_0) x_1^S + \frac{1}{\epsilon} f_1 \right] \quad (25)$$

$$\Rightarrow \dot{\Delta}_1^S = \left( \text{traço } J(f_0, x_0) \right) \Delta_1^S - \frac{1}{\epsilon} f_0(x_0) \wedge f_1(x_0; t) \quad (26)$$

Integrando (26) e usando o fato que  $x_0 \rightarrow x_0^\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\Delta_1^S(\infty, t_0) = f_0(x_0(\infty)) \wedge x_1^S(\infty, t_0) = 0$$

tem-se:

$$\Delta_1^S(t_0, t_0) = \Delta_1^S(t_0) = -\frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{\infty} \left\{ f_0(x_0(t-t_0)) \wedge f_1(x_0(t-t_0); t) \cdot \exp \left[ - \int_0^{t-t_0} \text{traço } J(f_0, x_0(s)) ds \right] \right\} dt \quad (27)$$

Um cálculo similar, substituindo (17) em (12) leva à expressão de  $\Delta_1^u(t_0)$  e, usando (20) e (21), segue que:

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_0(x_0(t-t_0)) \wedge f_1(x_0(t-t_0); t) \cdot \exp \left[ - \int_0^{t-t_0} \text{traço } J(f_0, x_0(s)) ds \right] \right\} dt + O(\epsilon^2) \quad (28)$$

Caso o sistema não perturbado de (13) ou (14) seja Hamiltoniano:

$$p_0 = \frac{\partial H_0}{\partial v} \quad e \quad q_0 = - \frac{\partial H_0}{\partial u}$$

e, portanto, o expoente em (28) se anula, fazendo com que (28) se reduza a:

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 \wedge f_1) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \{ p_0 q_1 - p_1 q_0 \} dt + O(\epsilon^2) \quad (29)$$

que será a expressão de  $\Delta(t_0)$  utilizada em cálculos de condições de existência de comportamentos caóticos, que serão efetuados no Capítulo IV.

## 8. SISTEMAS AUTÔNOMOS DE ORDEM $n \geq 3$ <sup>1</sup>

Nesta secção serão discutidos os mecanismos de turbulência para sistemas dinâmicos autônomos de ordem  $n \geq 3$ , originários de bifurcações sucessivas de uma solução de equilíbrio.

Os sistemas estudados serão aqueles descritos por  $\dot{x} = f(x, \mu)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) e  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetor não linear, parametrizado por  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Supõem-se que  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  é uma solução de equilíbrio do sistema, cuja estabilidade pode ser discutida através do Teorema 5, quando o espectro de  $J(f, x_0)$  não contém elementos com parte real nula.

Caso o espectro de  $J(f, x_0)$  contenha números imaginários puros, embora a equação linearizada tenha solução periódica, não se pode, em princípio, nada afirmar a respeito da solução da equação não linear.

Inicia-se com o Teorema de Hopf, que oferece condições suficientes para existência de soluções periódicas; segue-se a discussão do trabalho de Ruelle e Takens, relativo às bifurcações sucessivas da solução periódica obtida no Teorema de Hopf.

<sup>1</sup> [B-2, B-6, B-8, B-16, B-18, B-21, B-25, B-27, D-1, D-2, D-5, D-19, D-20, D-21, D-22, D-23 e D-24]

## 8.1 Teorema de Hopf

### Teorema 16 — (Bifurcação de Hopf)<sup>1</sup>

Seja  $f(x, \mu)$  um campo vetor de  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) parametrizado por  $\mu \in \mathbf{R}$  e de classe  $C^k$  ( $k \geq 4$ ) em  $x \in \mathbf{R}^n$  e  $\mu \in \mathbf{R}$ . Suponha que  $f(\mu, \hat{x}(\mu)) = 0$  para um ponto isolado  $\hat{x}(\mu)$ , e será chamado  $J^\mu$  o Jacobiano  $J(f, \hat{x}(\mu), \mu)$ .

A respeito do campo vetor descrito, sejam as hipóteses:

H-1)  $J^\mu$  possui um par de autovalores complexos conjugados

$$\lambda(\mu) \quad \text{e} \quad \bar{\lambda}(\mu)$$

para os quais  $\text{Re}[\lambda(\mu)] = 0$  em  $\mu = \mu_0$ , e:

$$\frac{d}{d\mu} \text{Re}[\lambda(\mu)] > 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}[\lambda(\mu)] > 0 \quad \text{para} \quad \mu = \mu_0$$

H-2) Todo autovalor  $v(\mu)$  de  $J^\mu$  exceto  $\lambda(\mu)$  e  $\bar{\lambda}(\mu)$  satisfaz:

$$\text{Re}[v(\mu_0)] \neq 0.$$

<sup>1</sup> O Teorema de Bifurcação de Hopf, conforme aqui exposto, foi enunciado e provado por Marsden e McCracken em 1976.

H-3)  $\text{Re}[\psi]$ , dada por (30) abaixo é diferente de zero.

Então, pode-se afirmar que:

T-1) Há uma faixa de valores, tanto positivos como negativos de  $\Delta\mu = \mu - \mu_0$ , onde a cada valor de  $\mu$  corresponde um único ciclo limite a uma distância  $O(|\Delta\mu|^{\frac{1}{2}})$  de  $\hat{x}(\mu)$ , com período

$$\frac{2\pi}{\text{Im}[\lambda(\mu_0)]} + O(\Delta\mu).$$

T-2) Se  $\text{Re}[\psi] < 0$  e  $\text{Re}[v(\mu_0)] < 0 \quad \forall v$ , o ciclo limite é estável enquanto que, se

$$\text{Re}[\psi] > 0 \quad \text{e} \quad \text{Re}[v(\mu_0)] > 0 \quad \forall v,$$

o ciclo limite é instável.

O coeficiente de curvatura é  $\text{Re}[\psi]$  onde  $\psi$  (Poore, 1975) é dado por:

$$\psi = a_p b_j b_k \bar{b}_l \left\{ f_{jk1}^p - 2f_{jm}^p J_{mq}^{-1} f_{k1}^q - f_{1m}^p (J - 2i\omega)^{-1}_{mq} f_{jk}^q \right\} \quad (30)$$

onde  $J = J^{\mu_0}$ ,  $a^T$  e  $b$  são respectivamente os autovetores esquerdo e direito de  $J$ , pertencentes a  $\lambda(\mu_0)$ , normalizados de tal maneira que  $a^T b = 1$ .

Os índices repetidos implicam em somatórias de 1 a  $n$  e  $f_{jk}^P$  significa

$$\frac{\partial^2 f^P}{\partial x_j \partial x_k}, \text{ calculada em } x = \hat{x}(\mu_0).$$

**Prova** — Capítulo 6 de [B-17]

Deve-se observar que as hipóteses H-1 e H-2 do teorema 16 são relativamente simples de serem verificadas, para um sistema dinâmico proveniente da modelagem de algum sistema físico. Entretanto, a hipótese H-3 causa uma grande dificuldade, pois é necessário calcular  $n^4$  terceiras derivadas e  $n^3$  segundas derivadas para se calcular  $\psi$ .

Isso é realmente inevitável, uma vez que o Teorema de Hopf é destinado aos casos em que o comportamento do sistema não fica determinado pelo conhecimento das primeiras derivadas.

Adicionalmente observa-se que, para verificar a hipótese H-1 do teorema 16 em modelos de sistemas físicos de ordem superior a dois, o teorema da função implícita se constitui em uma ferramenta de grande utilidade e, por isso, apresenta-se seu enunciado a seguir.

**Teorema 17** — (Função Implícita)

Sejam as hipóteses:

$$H-1) \quad F(\mu, \epsilon) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid F(\mu_0, \epsilon_0) = 0$$

H-2)  $F$  é continuamente diferenciável em alguma região aberta contendo o ponto  $(\mu_0, \epsilon_0)$  do plano  $(\mu, \epsilon)$

$$H-3) \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right|_{\mu_0, \epsilon_0} \neq 0$$

Então existem  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que:

T-1)  $F(\mu, \epsilon) = 0$  tem uma única solução  $\epsilon = \epsilon(\mu)$  quando  $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$  tal que  $\epsilon_0 - \beta < \epsilon < \epsilon_0 + \beta$ .

T-2) A função  $\epsilon(\cdot)$  é continuamente diferenciável quando  $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$ .

$$T-3) \quad \frac{d \epsilon(\mu)}{d \mu} = - \frac{\frac{\partial F(\mu, \epsilon(\mu))}{\partial \mu}}{\frac{\partial F(\mu, \epsilon(\mu))}{\partial \epsilon}}$$

**Prova** — Páginas 225 a 230 do volume 2, de [A-1].

## 8.2 Bifurcações de Soluções Periódicas em Toros Invariantes

As soluções periódicas provenientes da bifurcação de Hopf podem gerar novas bifurcações, a medida que o parâmetro de bifurcação varia além da fronteira entre as regiões de estabilidade e instabilidade.

Essas novas bifurcações podem gerar duplicações de período e quebras de simetria, ficando assim estabelecido um caminho para o surgimento de atratores estranhos e caóticos.

As primeiras conjecturas teóricas a respeito deste tipo de problema foram feitas por Landau e Lifshitz (capítulo 3, [B-27]) ao tratar de comportamentos turbulentos em fluídos. Em seguida, Ruelle e Takens [D-21] propuseram um tratamento teórico mais rigoroso do problema, estendendo os trabalhos de Hopf.

O trabalho de Ruelle e Takens foi completado por Lanford [D-24], permitindo generalizações interessantes, válidas para sistemas autônomos de ordem maior ou igual a três.

Neste item procura-se apresentar os resultados desses três trabalhos, escrevendo-os de uma forma mais geral, sem limitá-los aos problemas de mecânica dos fluídos.

### 8.2.1 O Mecanismo da Turbulência em Sistemas Autônomos

Considere-se inicialmente um sistema dinâmico autônomo descrito pela equação:

$\dot{x} = f(x)$ , sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^k$ , com uma solução periódica, dada no espaço de fase pela curva fechada  $\Gamma$ . Seja  $\Sigma$  uma superfície de dimensão  $n-1$ , transversal a  $\Gamma$  em um certo ponto  $p \in \Gamma$ . Nessas condições, o mapeamento de Poincaré  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  de acordo com a Definição 32, nas vizinhanças de  $p$ , pode fornecer informações a respeito das soluções da equação original, em vizinhanças do ponto  $p$ .

Interessa, em particular, a utilização do Mapeamento de Poincaré para verificar a persistência de soluções periódicas provenientes da bifurcação de Hopf, quando perturbadas por variações dos parâmetros da equação diferencial original.

Para tanto, escreve-se a equação diferencial do sistema original como:

$\dot{x} = f(x, \mu)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetor, parametrizado por  $\mu$ .

Considera-se inicialmente que todos os autovalores da matriz Jacobiana  $J$ , para um certo  $\mu_0$ , tenham parte real estritamente negativa para  $x = x_0$  e, como consequência,  $x_0$  seja hiperbólico e assintoticamente estável.

Como o determinante da matriz Jacobiana  $J(x_0)$  é diferente de zero existe, pelo Teorema 17 (Função Implícita),  $\varepsilon(\mu)$  dependendo continuamente de  $\mu$ , tal que:

$$f(\mu, \varepsilon(\mu)) = 0$$

$\epsilon(\mu)$  é chamado de estado estacionário e discute-se, a seguir, o que acontece com  $\epsilon(\mu)$ , a medida que  $\mu$  aumenta, a partir de  $\mu_0$ .

Assumindo que quando  $\mu$  aumenta, a partir de  $\mu_0$ , pares sucessivos de autovalores complexos conjugados de  $J(f, x_0)$  cruzam o eixo imaginário para  $\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ , quando  $\mu > \mu_1$ ,  $\epsilon(\mu)$  não será mais hiperbólico e assintoticamente estável.

O Teorema 16 (Hopf) garante que, quando um par de autovalores complexos conjugados cruza o eixo imaginário para  $\mu = \mu_j$ , existe uma família parametrizada de soluções periódicas da equação diferencial, em uma vizinhança de  $(\epsilon(\mu_j), \mu_j)$ .

Quando  $\mu$  passa pelo valor  $\mu_j$  não se fala mais em pontos fixos atratores mas em órbitas fechadas atratoras, que podem ser interpretadas como movimentos periódicos, com amplitude crescente em  $\mu$ .

A análise de condições para que tais casos apareçam pode ser feita através da pesquisa das características do mapeamento de Poincaré  $P_\mu$  associado ao campo vetor  $f(x, \mu)$  conforme discussão a seguir.

### 8.2.2 Bifurcações de uma Órbita Fechada

Sabe-se como um ponto fixo atrator de  $f_\mu$  pode ser substituído por uma órbita fechada  $\Gamma_\mu$  quando o parâmetro cruza o valor  $\mu_1$  (Bifurcação de Hopf). Considere-se agora, em detalhes, a próxima bifurcação, assumin-

do que ela ocorra para o valor  $\mu'$  do parâmetro e que  $\lim_{\mu \rightarrow \mu'} \Gamma_\mu$  é uma órbita fechada  $\Gamma_{\mu'}$  de  $f_\mu$ .

Caso o mapeamento de Poincaré  $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$  admita alguma vizinhança  $V$  de um ponto  $p$  da órbita fechada, tal que, todo  $q \in V$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(q) = p$  tem-se, como consequência, que  $p$  é um ponto fixo assintoticamente estável de  $P$ . Isto resultará na estabilidade orbital assintótica da trajetória que contém  $p$ .

Uma maneira de verificar se  $p$  é estável é tomar o mapeamento  $dP$ , que é a derivada de  $P$  no ponto fixo  $p$  e consiste numa transformação linear do espaço tangente a  $\Sigma$  por  $p$ , sobre si mesmo.

Interessa, neste trabalho, somente o caso em que a solução periódica proveniente da bifurcação de Hopf é estável e, nesse caso, o raio espectral de  $dP$  é 1, isto é, todos os autovalores de  $dP$  têm módulo menor do que 1.

### **Teorema 18** (Ruelle e Takens)

Sejam as hipóteses:

H-1)  $\dot{x} = f(x, \mu)$  é a equação diferencial de um sistema dinâmico, parametrizada em  $\mu$ .

H-2)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio estável para  $\mu < \mu'$  e instável para  $\mu > \mu'$ .

- H-3)  $\Gamma_{\mu'}$  é a curva fechada, correspondente à solução periódica devida à Bifurcação de Hopf em  $\mu = \mu'$ .
- H-4)  $P_{\mu'} \in \Gamma_{\mu'}$
- H-5)  $\Gamma_{\mu'}$  é estável, isto é, o raio espectral de  $dP$  é 1, em volta do ponto  $P_{\mu'}$ .

Nessas condições têm-se três casos a considerar relativamente ao conjunto  $E$  dos autovalores de  $dP$ .

- T-1)  $E = \{-1\} \Rightarrow \nexists$  atrator de  $f(x, \mu)$  próximo de  $\Gamma_{\mu'}$ .
- T-2)  $E = \{1\} \Rightarrow \exists$  órbita fechada de  $f(x, \mu)$  próxima de  $\Gamma_{\mu'}$ , mas com período duplicado.
- T-3)  $E = \{\alpha, \bar{\alpha}\} \Rightarrow$  para  $\mu > \mu'$  aparece um atrator caótico, implicando na existência de um toro atrator e invariante  $T^2$ , para  $f(x, \mu)$ .

**Prova** — [D-21], [D-23] e [D-24].

## **CAPÍTULO II**

### **MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE**

- 1. Modelo Matemático**
- 2. Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag"**
- 3. Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag-Lead"**
- 4. Malhas de Sincronismo de Fase de 3ª Ordem com Filtros de Sallen e Key**
- 5. Sistemas com Superfícies de Fases Cilíndricas**

Neste capítulo formulam-se os problemas relativos às malhas de sincronismo de fase (PLL), que serão tratados nos Capítulos III, IV e V, tendo como base a teoria matemática desenvolvida no Capítulo I.

A secção 1 apresenta o modelo matemático geral de uma malha de sincronismo de fase, bem como as definições de faixa de retenção e de faixa de captura, parâmetros essenciais para a discussão de aspectos práticos de engenharia.

Em seguida, na secção 2, o modelo matemático geral é particularizado para malhas de 2ª ordem, com filtros lineares do tipo "lag". Aspectos relativos à existência e unicidade de soluções e à formulação de problemas autônomos também são abordados.

Prossegue-se estudando a formulação Hamiltoniana dos problemas e a proposição do problema de modulação em frequência acidental ("jitter" de fase), para as malhas em apreço.

Na secção 3 repete-se o trabalho realizado na secção 2, mas enfocando as malhas de 2ª ordem, com filtros lineares do tipo "lag-lead".

A secção 4 é dedicada ao modelo matemático das malhas de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, discutindo-se a existência e unicidade de soluções e analisando-se os casos autônomos.

Na secção 5 define-se deslização de ciclo e observa-se a natureza cilíndrica das superfícies de fase, para as malhas de sincronismo aqui estudadas.

## 1. MODELO MATEMÁTICO<sup>1</sup>

Essencialmente, uma "Malha de Sincronismo de Fase" (PLL) é formada por três elementos básicos: um detetor de fase, um filtro e um oscilador controlado por tensão (VCO), interligados conforme mostra a Figura 1.

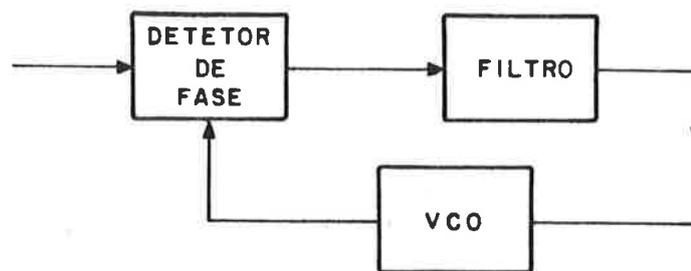


Fig. 1 — Diagrama em blocos simplificado das PLL

A configuração básica dada na Figura 1 pode ser utilizada para diversas funções, tais como: sincronização, demodulação linear e demodulação de fase, ou frequência para sinais analógicos ou digitais.

A Figura 2 mostra o diagrama em blocos representativo do modelo matemático para as PLL.

<sup>1</sup> [C-1, C-2, C-4 e C-5]

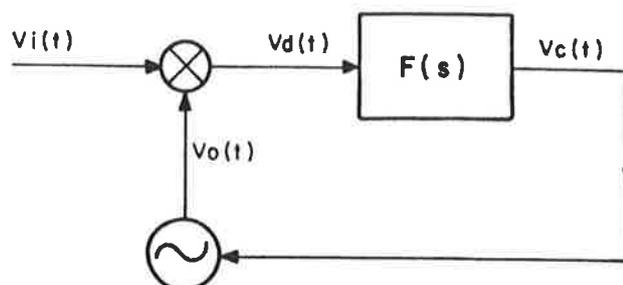


Fig. 2 — Modelo Matemático para as PLL

Considera-se o detetor de fase como sendo um multiplicador com duas entradas:  $v_i(t)$  e  $v_o(t)$ , sendo  $F(s)$  a transformada de Laplace da resposta ao impulso  $(f(t))$  do filtro.

A entrada da PLL é dada pela expressão:

$$v_i(t) = V_i(t) \text{ sen } [\omega_0 t + \theta_i(t)] \quad (1)$$

A saída do VCO é dada pela expressão:

$$v_o(t) = V_o \text{ cos } [\omega_0 t + \theta_o(t)] \quad (2)$$

Deve-se observar que  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  é a frequência constante do sinal de saída do VCO, quando o sinal de controle  $v_c(t)$  é nulo.

A fase  $\theta_0(t)$  é a estimativa da malha para a fase  $\theta_i(t)$ , enquanto que  $\dot{\theta}_0(t)$  é a estimativa da malha para a frequência  $\dot{\theta}_i(t)$ . Dessa forma, pode-se definir em cada instante, o erro de fase  $\varphi(t)$  e o erro de frequência  $\dot{\varphi}(t)$ , como segue:

$$\varphi(t) \triangleq \theta_i(t) - \theta_0(t) \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}(t) \triangleq \dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_0(t) \quad (4)$$

Chamando  $K_m$  o fator de multiplicação do detetor de fase (medido em volts<sup>-1</sup>):

$$v_d(t) = K_m v_i(t) v_o(t) = K_m V_i V_o \left[ \sin(\omega_0 t + \theta_i(t)) \cos(\omega_0 t + \theta_0(t)) \right] \quad (5)$$

Desenvolvendo o termo entre colchetes da equação (5):

$$\sin(\omega_i t + \theta_i) \cos(\omega_i t + \theta_0) = (\sin \omega_i t \cos \theta_i + \cos \omega_i t \sin \theta_i) \cdot$$

$$\cdot (\cos \omega_i t \cos \theta_0 - \sin \omega_i t \sin \theta_0) = (\sin \omega_i t \cos \omega_i t \cos \theta_i \cos \theta_0 -$$

$$- \sin^2 \omega_i t \cos \theta_i \sin \theta_0 + \cos^2 \omega_i t \sin \theta_i \cos \theta_0 -$$

$$- \cos \omega_i t \sin \omega_i t \sin \theta_i \sin \theta_0) = \frac{1}{2} (\sin 2\omega_i t \cos \theta_i \cos \theta_0 -$$

$$- \sin 2\omega_i t \sin \theta_i \sin \theta_0 - \cos \theta_i \sin \theta_0 + \cos 2\omega_i t \cos \theta_i \sin \theta_0 +$$

$$+ \cos 2\omega_i t \sin \theta_i \cos \theta_0 + \sin \theta_i \cos \theta_0) = \frac{1}{2} \left[ \sin 2\omega_i t (\cos \theta_i \cos \theta_0 -$$

$$\begin{aligned}
& - \text{sen } \theta_i \text{ sen } \theta_o) + \cos 2\omega_i t (\cos \theta_i \text{ sen } \theta_o + \text{sen } \theta_i \cos \theta_o) - \\
& - \cos \theta_i \text{ sen } \theta_o + \text{sen } \theta_i \cos \theta_o] = \frac{1}{2} \left[ \text{sen } 2\omega_i t \cos (\theta_i + \theta_o) + \right. \\
& + \cos 2\omega_i t \text{ sen } (\theta_i + \theta_o) + \text{sen } (\theta_i - \theta_o) \left. \right] = \frac{1}{2} \left[ \text{sen } (2\omega_i t + \theta_i + \theta_o) + \right. \\
& + \text{sen } (\theta_i - \theta_o) \left. \right] \tag{5.a}
\end{aligned}$$

Substituindo (5.a) em (5) e considerando que os termos de frequência dupla sejam eliminados:

$$v_d(t) = \frac{1}{2} K_m V_i(t) V_o \text{ sen } [\theta_i(t) - \theta_o(t)] \tag{6}$$

Convém observar que, no Capítulo 6 de [C-2], as técnicas para eliminação dos termos de frequência dupla são discutidas.

Usando (3) e definindo  $K_d \triangleq \frac{1}{2} K_m V_o$ :

$$v_d(t) = K_d V_i(t) \text{ sen } \varphi(t) \tag{7}$$

O sinal  $v_d(t)$ , chamado na prática de erro de fase dinâmico, alimenta o filtro produzindo em sua saída o erro de fase estático  $v_c(t)$ , que controla a fase do sinal de saída do VCO.

Os erros de fase estático e dinâmico estão relacionados por:

$$v_c(t) = \int_{-\infty}^t f(t-\lambda) v_d(\lambda) d\lambda \Rightarrow v_c(t) = K_d \int_{-\infty}^t f(t-\lambda) V_i(\lambda) \sin \varphi(\lambda) d\lambda \quad (8)$$

A taxa de variação da fase  $\theta_0(t)$  é proporcional ao sinal de controle  $v_c(t)$ . Isto é:

$$\dot{\theta}_0(t) = K_o v_c(t) \quad (9)$$

Utilizando (4) e (8) em (9):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i(t) - \dot{\varphi}(t) &= K_o K_d \int_{-\infty}^t f(t-\lambda) V_i(\lambda) \sin \varphi(\lambda) d\lambda \\ \Rightarrow \dot{\varphi}(t) &= \dot{\theta}_i(t) - K_o K_d \int_{-\infty}^t f(t-\lambda) V_i(\lambda) \sin \varphi(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (10)$$

A resolução da equação (10) para entradas determinísticas ou não, constitui o problema central do estudo das PLL e a sua resolução permite responder questões do tipo:

- que filtros utilizar para cada uma das aplicações das PLL (Ver [C-6]);
- como otimizar a performance de uma PLL (Ver, por exemplo, [C-4, C-5 e C-12]);
- as oscilações do VCO entrarão ou não em sincronismo com as oscilações da entrada? Isto é,  $\varphi$  tenderá ou não a zero? (Ver, por exemplo, [C-7 e C-9]);

- no caso da resposta à questão anterior ser afirmativa, quanto tempo le vará para que o sincronismo seja obtido?

Observando-se (10) percebe-se que, de acordo com a resposta ao impulso  $f(t)$  do filtro, têm-se um tipo de equação diferencial para as malhas de sincronismo de fase.

Neste trabalho analisa-se o caso de três tipos de filtro:

- i) Passa-baixa do tipo "lag" de 1ª ordem [C-6]
- ii) Passa-baixa do tipo "lag-lead" de 1ª ordem [C-6]
- iii) Passa-baixa de Sallen e Key de 2ª ordem [C-6 e E-4].

Nos dois primeiros casos obtém-se, para as PLL, equações diferenciais de 2ª ordem e no terceiro caso, equações de 3ª ordem, descrevendo a dinâmica da malha através de seu erro de fase  $\varphi(t)$ .

Em todos os casos citados, dois parâmetros importantes, definidos a seguir, serão analisados.

**Definição 1** — Uma PLL está em estado de retenção se está operando em seu ponto de equilíbrio que deve ser assintoticamente estável.

**Definição 2** — Faixa de retenção de uma PLL é o conjunto de valores de de parâmetros da excitação e da equação diferencial, que rege seu comportamento dinâmico, que faz com que ela te nha um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

**Definição 3** — Faixa de captura de uma PLL é o conjunto de valores de parâmetros e condições iniciais da equação diferencial, que rege seu comportamento dinâmico, tal que a trajetória tenda ao ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

## 2. MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 2ª ORDEM COM FILTROS "LAG"<sup>1</sup>

Nesta secção formulam-se problemas a respeito do comportamento das PLLs, tomando como ponto de partida a equação 10 e trabalhando com um filtro de 1ª ordem, do tipo "lag".

### 2.1 O Filtro e a Equação Diferencial da PLL

Em [C-6] as PLLs de diversas ordens são analisadas, em função da ordem do filtro.

Considera-se aqui, somente PLLs de segunda ordem e supõem-se o filtro de primeira ordem, do tipo mostrado na Figura 3, que será chamado de filtro "Lag".

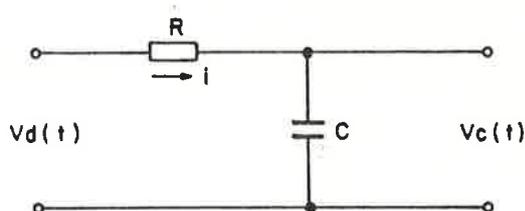


Fig. 3 — Filtro "Lag" para PLL

Biblioteca da Escola Politécnica  
São Paulo

<sup>1</sup>[B-10, B-12, B-13, B-14, C-6, C-7, C-9, C-10, C-11 e C-12].

O filtro da Figura 3 é um sistema linear com entrada  $v_d(t)$  e saída igual ao estado  $v_c(t)$  podendo, portanto, ser descrito pela forma canônica:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz + Du \end{cases} \quad (11)$$

Como  $u = v_d(t)$  e  $z = y = v_c(t)$  têm-se  $C = 1$  e  $D = 0$ . Os valores de  $A$  e  $B$  podem ser determinados analisando-se o circuito da Figura 3, pois:

$$\begin{aligned} z &= u - Ri & e & \quad z = \frac{1}{C} \int i dt \\ \Rightarrow z &= u - RC\dot{z} & \Rightarrow \dot{z} &= -\frac{1}{RC}z + \frac{1}{RC}u \\ \Rightarrow A &= -\frac{1}{RC} & e & \quad B = \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

Assim, a resposta ao impulso do filtro pode ser escrita como sendo:

$$f(t) = e^{At} B \quad (12)$$

$$\text{com } A = -\frac{1}{RC} \quad e \quad B = \frac{1}{RC}$$

Para obter-se a equação diferencial da PLL, retoma-se a equação (9) levando em conta (8) e (12):

$$\dot{\theta}_0(t) = K_0 K_d \int_{-\infty}^t e^{A(t-\lambda)} B V_i(\lambda) \sin \varphi(\lambda) d\lambda,$$

considerando  $V_i(\lambda)$  constante, segue:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0(t) &= K_0 K_d e^{At} B V_i \int_{-\infty}^t e^{-A\lambda} \sin \varphi(\lambda) d\lambda \Rightarrow \ddot{\theta}_0(t) = \\ &= K_0 K_d A e^{At} B V_i \int_{-\infty}^t e^{-A\lambda} \sin \varphi(\lambda) d\lambda + K_0 K_d e^{At} B V_i e^{-At} \sin \varphi(t) \\ \Rightarrow \ddot{\theta}_0(t) &= A \dot{\theta}_0(t) + K_0 K_d B V_i \sin \varphi(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Retomando a equação (10), derivando-a em relação ao tempo, levando (13) em conta e retirando da notação, por comodidade, a dependência do tempo:

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}_i - A \dot{\theta}_0 - K_0 K_d B V_i \sin \varphi \quad (14)$$

Somando e subtraindo  $A \dot{\theta}_i$  no segundo membro de (14):

$$\ddot{\varphi} - A \dot{\varphi} + K_0 K_d B V_i \sin \varphi = \ddot{\theta}_i - A \dot{\theta}_i \quad (15)$$

Chamando  $\mu_1 \triangleq \frac{1}{RC}$ ,  $\mu_2 \triangleq K_0 K_d V_i$  e  $g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) \triangleq \ddot{\theta}_i + \mu_1 \dot{\theta}_i$

a equação (15) fica:

$$\ddot{\varphi} + \mu_1 \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \sin \varphi = g(\ddot{\theta}_j, \ddot{\theta}_j) \quad (16)$$

A equação (16) é um dos pontos centrais deste trabalho, tendo a mesma forma das equações de pêndulo e junções de Josephson estudadas em [D-10, D-12, D-13, D-14, D-15, D-16, D-17 e D-18].

Escolhendo como variáveis de estado  $x_1 = \varphi$  e  $x_2 = \dot{\varphi}$ , a equação (16) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(\ddot{\theta}_j, \ddot{\theta}_j) - \mu_1 \mu_2 \sin x_1 - \mu_1 x_2 \end{cases} \quad (17)$$

## 2.2 Condições de Existência e Unicidade de Soluções

### Proposição 1

— Uma condição suficiente para que a equação (17) admita solução única para  $\forall x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^2$  é que  $g(\ddot{\theta}_j, \ddot{\theta}_j)$  seja limitada.

Prova

i) Verificação da condição ii) do Teorema (I.1)

Chamando

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \quad \text{tem-se:}$$

$$\|f(t, x_0)\|_1 = \left| -\mu_1 \mu_2 \sin x_1^0 - \mu_1 x_2^0 + g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) \right| + |x_2^0| \leq \mu_1 \mu_2 |\sin x_1^0| + \mu_1 |x_2^0| + |g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| + |x_2^0|$$

Como  $g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)$  é limitada,  $\exists M \in \mathbb{R}_+$   $|g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| \leq M$ .

Como  $x_2^0$  é bem determinado, escolhendo:

$$h_T = \mu_1 \mu_2 + |x_2^0| (1 + \mu_1) + M \Rightarrow h_T > 0 \quad \text{e} \quad \|f(t, x_0)\|_1 \leq h_T$$

ii) Verificação da condição i (Lipschitz) do Teorema I.1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\mu_1 \mu_2 \cos x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\mu_1$$

$\Rightarrow$  Escolhendo  $k_T = \sup \{1, \mu_1, \mu_1 \mu_2\} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k_T, \forall i \in \{1, 2\}$  e  $\forall j \in \{1, 2\}$

$\Rightarrow$  A condição de Lipschitz está satisfeita, o que completa a prova da Proposição 1.

### 2.3 Casos Autônomos

O modelo das PLL representado pelas equações (16) e (17) admite duas versões autônomas de interesse, possíveis de serem investigadas analiticamente.

Uma delas é aquela relativa a processos de modulação FSK e PSK, onde a taxa  $\dot{\theta}_i$  assume valores elevados apenas em intervalos de tempo muito curtos, anulando-se, em contrapartida, no restante da escala temporal. É importante, assim, conhecer-se o comportamento das equações (16) e (17) no caso em que  $\ddot{\theta}_i = \dot{\theta}_i = 0$ .

Outra é a relativa a sinais modulados em FSK, onde ocorre uma diferença de frequência entre o oscilador de transmissão e o VCO. Essa assincronia equivale a considerar a fase do sinal de entrada na PLL variando segundo a lei:

$$\theta_i = \Omega t + \Phi \quad (18)$$

onde  $\Omega$  representa a frequência correspondente ao dígito binário transmitido [C-3, C-9 e C-11].

#### 2.3.1 Caso $\theta_i = \text{constante}$

Nesse caso a equação (16) se reduz a:

$$\ddot{\varphi} + \mu_1 \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \text{sen } \varphi = 0 \quad (19)$$

e as equações (17) se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - \mu_1 x_2 \end{cases} \quad (20)$$

### 2.3.2 Caso $\theta_j = \Omega t + \Phi$

Nesse caso a equação (16) se reduz a:

$$\ddot{\varphi} + \mu_1 \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} \varphi = \mu_1 \Omega \quad (21)$$

e as equações (17) se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_1 \Omega \end{cases} \quad (22)$$

Estudar as equações de estado (20) e (22), utilizando as idéias desenvolvidas por Poincaré e Andronov, será um dos trabalhos a serem executados no Capítulo III.

## 2.4 Formulação Hamiltoniana dos Casos Autônomos

### 2.4.1 Caso $\theta_j = \text{constante}$

Para as PLL modeladas pelas equações (20), constrói-se a função Hamiltoniana, como se segue:

Da primeira equação de estado:

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} x_2^2 + g_1(x_1) \quad (23)$$

Da segunda equação de estado:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 \Rightarrow H = -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 + g_2(x_2) \quad (24)$$

Comparando (23) e (24) e considerando como nula a energia potencial na posição de referência:

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - \mu_1 \mu_2 \cos x_1 \quad (25)$$

Fazendo uso da equação (I.7) de (I.6.3.2) e da equação (25) acima, obtém-se a equação:

$$\frac{dH}{dt} + \mu_1 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 0 \quad (26)$$

pois, a força generalizada, neste caso, é dada por  $f = -\mu_1 \dot{\varphi}$

## Proposição 2

— As trajetórias no plano de fase para as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag" excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$ , são dadas pelas equações:

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \ddot{\varphi} d\varphi = \text{constante}$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^2 dt = \text{constante}$$

**Prova**

Reescrevendo a equação (26)

$$\frac{dH}{dt} = -\mu_1 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \int_{H_0}^H dH = -\mu_1 \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^2 dt \Rightarrow H - H_0 = -\mu_1 \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^2 dt$$

Retomando (25) e lembrando que  $x_1 = \varphi$  e  $x_2 = \dot{\varphi}$ :

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 + \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 = -\mu_1 \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^2 dt = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 \quad (27)$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \dot{\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 \quad (28)$$

O segundo membro das equações (27) e (28) é uma constante que depende exclusivamente das condições iniciais e de parâmetros que caracterizam a PLL, ficando assim provada a Proposição 2.

#### 2.4.2 Caso $\theta_i = \Omega t + \Phi$

No caso das PLLs modeladas pelas equações (22), a função Hamiltoniana também é dada pela equação (25).

Fazendo uso da equação (1.7) de (1.6.3.2) e da equação (25) obtém-se a equação:

$$\frac{dH}{dt} + \mu_1 (\ddot{\varphi} - \Omega) \dot{\varphi} = 0 \quad (29)$$

pois a força generalizada, neste caso, é dada por:  $f = -\mu_1 \ddot{\varphi} + \mu_1 \Omega$ .

#### Proposição 3

— As trajetórias no plano de fase para as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega = \text{constante}$   $\Phi = \text{constante}$ , são dadas pelas equações:

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \ddot{\varphi} d\varphi = \text{constante}$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t \ddot{\varphi}^2 dt = \text{constante}$$

## Prova

Reescrevendo a equação (29):

$$\frac{dH}{dt} = -\mu_1 (\ddot{\varphi} - \Omega) \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\mu_1 \ddot{\varphi}^2 + \mu_1 \Omega \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \int_{H_0}^H dH = -\mu_1 \int_{t_0}^t \ddot{\varphi}^2 dt + \mu_1 \Omega \int_{t_0}^t \dot{\varphi} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 + \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 = -\mu_1 \int_{t_0}^t \ddot{\varphi}^2 dt + \mu_1 \Omega \varphi - \mu_1 \Omega \varphi_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t \ddot{\varphi}^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 - \mu_1 \Omega \varphi_0 \quad (30)$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 - \mu_1 \Omega \varphi_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \dot{\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 - \mu_1 \Omega \varphi_0 \quad (31)$$

O segundo membro das equações (30) e (31) é uma constante que depende exclusivamente das condições iniciais, dos parâmetros que caracterizam a PLL e da excitação, estando assim provada a Proposição 3.

## 2.5 Modulação em Frequência Acidental

Em muitas situações práticas de transmissão de sinais digitais, o sinal de entrada na PLL é submetido a uma modulação em frequência acidental. A esse fenômeno dá-se o nome de "jitter", sendo que sua manifestação aparece como uma oscilação da fase do sinal de entrada na PLL, lenta relativamente à taxa de transmissão de informação [C-13].

Considera-se neste trabalho que, nas situações de demodulação FSK em presença de "jitter", a fase do sinal de entrada  $v_i(t)$  dado na equação (1) é composta de dois termos, um linear relativo à modulação FSK e outro senoidal, com frequência pequena em relação à taxa de transmissão de informação. Assim, escreve-se:

$$\theta_i(t) = \Omega t + \Phi + A \sin \omega t \quad (32)$$

A substituição de (32) em (17) produz as equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \omega^2 A \sin \omega t \end{cases} \quad (33)$$

Produz-se, portanto, um sistema não linear, excitado por um sinal periódico e, de acordo com o exposto no item (I.7) escolhas de  $\Omega$ ,  $A$  e  $\omega$  em (32) podem, dependendo dos parâmetros da PLL, produzir comportamentos indesejáveis de vários tipos, obtendo-se inclusive caos.

Aplicar a técnica de Melnikov desenvolvida em (I.7) para obter as condições para o aparecimento de atratores caóticos no sistema descrito por (33), é um dos objetivos do Capítulo IV deste trabalho.

### 3. MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 2ª ORDEM COM FILTROS "LAG-LEAD"<sup>1</sup>

Nas malhas de sincronismo de fase existentes na prática utilizam-se, muitas vezes, filtros "lag-lead" [C-2 e C-6].

Nesta secção formulam-se problemas a respeito do comportamento das PLLs, tomando como ponto de partida a equação (10) e trabalhando com um filtro de primeira ordem, do tipo "lag-lead".

#### 3.1 O Filtro e a Equação Diferencial da PLL

Considerando o modelo matemático desenvolvido em 1, retomando suas equações (7) e (9) e supondo que o filtro seja implementado conforme mostra a figura 4, para obter-se a equação diferencial da PLL, adota-se o procedimento que se segue:

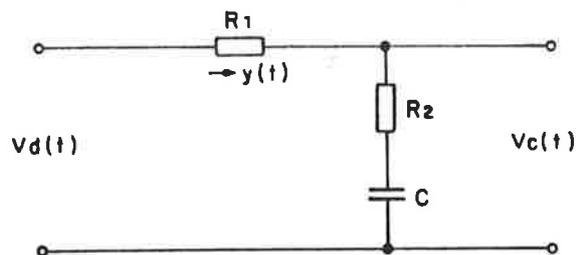


Fig. 4 - Filtro para a PLL, do "Lag-Lead"

<sup>1</sup> [B-10, B-12, B-13, B-14, C-6, C-7, C-9, C-10, C-11 e C-12].

$$v_c = R_2 y + \frac{1}{C} \int y dt \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_c = R_2 \dot{y} + \frac{1}{C} y \quad (34)$$

Mas

$$v_d = R_1 y + v_c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{R_1} v_d - \frac{1}{R_1} v_c \quad (35)$$

Substituindo (34) em (35):

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \frac{R_2}{R_1} \dot{v}_d - \frac{R_2}{R_1} \dot{v}_c + \frac{1}{R_1 C} v_d - \frac{1}{R_1 C} v_c \\ \dot{v}_c \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) &= - \frac{1}{R_1 C} v_c + \frac{1}{R_1 C} v_d + \frac{R_2}{R_1} \dot{v}_d \end{aligned} \quad (36)$$

Substituindo (7) e (9) em (36) e considerando  $V_i(t)$  constante:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\theta}_0}{K_0} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) &= - \frac{1}{R_1 C} \cdot \frac{1}{K_0} \dot{\theta}_0 + \frac{1}{R_1 C} K_d V_i \sin \varphi + \frac{R_2}{R_1} K_d V_i \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \Rightarrow - \frac{\ddot{\theta}_i}{K_0} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{\ddot{\theta}_0}{K_0} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_1 C} \frac{1}{K_0} \dot{\theta}_0 - \frac{1}{R_1 C} \frac{1}{K_0} \dot{\theta}_0 + \\ + \frac{1}{R_1 C} K_d V_i \sin \varphi + \frac{R_2}{R_1} K_d V_i \dot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{R_1 C} \frac{1}{K_0} \dot{\theta}_i - \\ - \frac{1}{K_0} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \ddot{\theta}_i & \end{aligned} \quad (37)$$

Fazendo uso das equações (3) e (4) em (37):

$$\begin{aligned}
 - \frac{R_1 + R_2}{K_0 R_1} \ddot{\varphi} &= \frac{1}{K_0 R_1 C} \dot{\varphi} + \frac{K_d V_i}{R_1 C} \operatorname{sen} \varphi + \frac{R_2 K_d V_i}{R_1} \dot{\varphi} \cos \varphi = \\
 - \frac{1}{K_0 R_1 C} \ddot{\theta}_i - \frac{R_1 + R_2}{K_0 R_1} \ddot{\theta}_i &\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \dot{\varphi} + \frac{R_2 K_0 K_d V_i}{(R_1 + R_2)} \cos \varphi \dot{\varphi} + \\
 + \frac{K_0 K_d V_i}{(R_1 + R_2)C} \operatorname{sen} \varphi &= \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \ddot{\theta}_i + \ddot{\theta}_i \quad (38)
 \end{aligned}$$

Chamando  $\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \triangleq \mu_1$   $\mu_2 \triangleq K_0 K_d V_i$

$\mu_3 \triangleq R_2 C$  e  $g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) \triangleq \ddot{\theta}_i + \mu_1 \dot{\theta}_i$

$$\frac{R_2 K_0 K_d V_i}{(R_1 + R_2)} = \mu_1 \mu_2 \mu_3$$

$$\frac{K_0 K_d V_i}{(R_1 + R_2)C} = \mu_1 \mu_2$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} \varphi = g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) \quad (39)$$

Comparando-se a equação (39) com a equação (16), observam-se vários pontos em comum:

- os segundos membros das duas equações são idênticos uma vez que, em ambos os casos, o termo  $\ddot{\theta}_i$  está multiplicado pela constante de tempo do filtro.
- o termo  $\sin \varphi$  em ambos os casos, está multiplicado pela constante de tempo do filtro e por  $\mu_2$ .
- É no termo em  $\dot{\varphi}$  que reside a diferença entre (39) e (16) pois, em (39) o termo  $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi)$  é somado à constante de tempo do circuito e essa soma multiplica  $\dot{\varphi}$ .

Estudar o comportamento das soluções da equação (39) para os diversos tipos de  $g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)$ , usuais em transmissão de sinais em redes de comunicação, é um dos objetivos deste trabalho.

Conforme se pode observar, a equação (39) é equivalente à equação que descreve uma oscilação não linear, não conservativa. Entretanto, como o termo  $(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi)$  pode mudar de sinal, de acordo com o valor de  $\varphi$  pode-se ter um sistema que dissipa ou acumula energia [B-19 e B-20].

Escolhendo como variáveis de estado  $x_1 = \varphi$  e  $x_2 = \dot{\varphi}$ , a equação (39) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) - \mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2 \end{cases} \quad (40)$$

### 3.2 Condições de Existência e Unicidade de Soluções

#### Proposição 4

— Uma condição suficiente para que a equação (40) admita solução única num certo intervalo  $[0, \delta]$ ,  $\forall x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^2$  é que  $g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)$  seja limitada.

#### Prova

i) Verificação da condição ii) do Teorema (I.4).

Chamando  $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$  tem-se:

$$\begin{aligned} \|f(t, x_0)\|_1 &= |-\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1^0 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1^0) x_2^0| + \\ &+ |g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| + |x_2^0| \leq \mu_1 \mu_2 |\operatorname{sen} x_1^0| + \mu_1 |x_2^0| + \mu_1 \mu_2 \mu_3 |\cos x_1^0| |x_2^0| + \\ &+ |g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| + |x_2^0| \end{aligned}$$

Como  $g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)$  é limitada,  $\exists M \in \mathbb{R}_+$  tal que  $|g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| \leq M$

Como  $x_2^0$  é bem determinado, escolhendo:

$$h_T = \mu_1 \mu_2 + (1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1) |x_2^0| + M$$

$$\Rightarrow h_T > 0 \quad \text{e} \quad \|f(t, x_0)\|_1 \leq h_T$$

ii) Verificação da condição i (Lipschitz Local) do Teorema (I.4).

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \operatorname{sen} x_1 x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1)$$

Observa-se, portanto, que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

são limitadas para  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ .

Por outro lado:

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right| = | -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \operatorname{sen} x_1 x_2 | \leq \mu_1 \mu_2 |\cos x_1| +$$

$$+ \mu_1 \mu_2 \mu_3 |\operatorname{sen} x_1| |x_2| \leq \mu_1 \mu_2 (1 + \mu_3 |x_2|)$$

Logo, a cada bola do tipo:  $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x - x_0\| \leq r_T\}$  corresponde um intervalo  $[0, \delta]$  onde a equação tem solução única. O aumento progressivo do raio  $r_T$  da bola, sem que ela alcance o valor infinito, permite o prolongamento da solução única para intervalos de tempo cada vez maiores [B-4, item 7.7, páginas 53, 54, 55 e 56].

### 3.3 Casos Autônomos

Pelas razões expostas em 2.3, o modelo matemático das PLLs dado pelas equações (39) e (40), admite dois casos autônomos de interesse a, saber:

i)  $\theta_i = \text{constante}$

ii)  $\theta_i$  dado por (18).

### 3.3.1 Caso $\theta_i = \text{constante}$

Neste caso, a equação (39) se reduz a:

$$\ddot{\varphi} + (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \sin \varphi = 0 \quad (41)$$

e as equações (40) se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2 \end{cases} \quad (42)$$

### 3.3.2 Caso $\theta_i = \Omega t + \Phi$

Neste caso, a equação (39) se reduz a:

$$\ddot{\varphi} + (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \sin \varphi = \mu_1 \Omega \quad (43)$$

e as equações (40) se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu_1 \Omega - \mu_1 \mu_2 \sin x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2 \end{cases} \quad (44)$$

Estudar as equações de estado (42) e (44), utilizando as idéias desenvolvidas por Poincaré e Andronov, será um dos trabalhos a serem executados no Capítulo III.

### 3.4 Formulação Hamiltoniana dos Casos Autônomos

#### 3.4.1 Caso $\theta_i = \text{constante}$

Para as PLLs modeladas pelas equações (42) pode-se construir o Hamiltoniano como se segue:

Da primeira equação de estado:

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = x_2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} x_2^2 + g_1(x_1) \quad (45)$$

Da segunda equação de estado:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \mu_1 \mu_2 \text{sen } x_1 \Rightarrow H = -\mu_1 \mu_2 \text{cos } x_1 + g_2(x_2) \quad (46)$$

Comparando (45) e (46) e assumindo como nula a energia potencial na posição de referência:

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - \mu_1 \mu_2 \text{cos } x_1 \quad (47)$$

Fazendo uso da equação (I.7) de (I.6.3.2) e da equação (47) acima:

$$\frac{dH}{dt} - f \dot{q} = 0 \quad \text{e como} \quad f = -(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \text{cos } \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} + \mu_1 \ddot{\varphi} \dot{\varphi} + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \ddot{\varphi} \dot{\varphi} = 0 \quad (48)$$

### Proposição 5

— As trajetórias no plano de fase para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas por sinais tais que  $\Theta_i = \text{constante}$ , são dadas pelas equações:

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} d\varphi = \text{constante}$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 dt = \text{constante}$$

Prova

Da equação (48):

$$\frac{dH}{dt} = -\mu_1 \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \dot{\varphi}^2 \Rightarrow dH = (-\mu_1 \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \dot{\varphi}^2) dt$$

$$\Rightarrow \int_{H_0}^H dH = -\mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 dt$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H - H_0 &= -\mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \ddot{\varphi}^2 dt \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 + \\
+ \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 &= -\mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \ddot{\varphi}^2 dt \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \ddot{\varphi}^2 dt &= \\
= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 & \quad (49)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt &= \\
= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 & \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} d\varphi &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \\
- \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 & \quad (50)
\end{aligned}$$

O segundo membro das equações (49) e (50) é uma constante que depende exclusivamente das condições iniciais e de parâmetros que caracterizam a PLL, estando assim provada a Proposição 5.

### 3.4.2 Caso $\theta_1 = \Omega t + \Phi$

Para as PLLs modeladas pelas equações (44) constrói-se a função Hamiltoniana da mesma maneira que em (3.4.1), obtendo:

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi \quad (51)$$

Fazendo uso da equação (I.7) de (I.6.3.2) e da equação (51), obtém-se a equação:

$$\frac{dH}{dt} + \mu_1 \dot{\varphi}^2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \Omega \dot{\varphi} = 0 \quad (52)$$

pois a força generalizada, neste caso, é dada por:

$$f = - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} + \mu_1 \Omega$$

#### Proposição 6

— As trajetórias no plano de fase para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas por sinais tais que  $\theta_1 = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega =$  constante e  $\Phi =$  constante, são dadas pelas equações:

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 dt = \text{constante}$$

ou

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} d\varphi = \text{constante}$$

### Prova

Tomando a equação (52) tem-se:

$$\frac{dH}{dt} = -\mu_1 (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \mu_1 \Omega \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow dH = \left[ -\mu_1 (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \mu_1 \Omega \dot{\varphi} \right] dt$$

$$\int_{H_0}^H dH = -\mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 dt + \int_{t_0}^t \mu_1 \Omega \dot{\varphi} dt$$

$$\Rightarrow H - H_0 = -\mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 dt + \mu_1 \Omega \varphi - \mu_1 \Omega \varphi_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{t_0}^t (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 - \mu_1 \Omega \varphi_0$$

(53)

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi - \mu_1 \Omega \varphi + \mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} (1 + \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} \, d\varphi = \\ = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 - \mu_1 \Omega \varphi_0 \end{aligned} \quad (54)$$

O segundo membro das equações (53) e (54) é uma constante que depende exclusivamente das condições iniciais, dos parâmetros que caracterizam a PLL e da excitação, estando provada a Proposição 6.

### 3.5 Modulação em Frequência Acidental

Pelas razões expostas em (2.5) interessa, do ponto de vista prático, estudar as PLLs descritas pelas equações de estado (40), excitadas por sinais onde  $\theta_i$  seja dado por (32).

A substituição de (32) em (40) produz as equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2 + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \omega^2 A \sin \omega t \end{cases} \quad (55)$$

Produz-se, portanto, um sistema não linear, excitado por um sinal periódico e, de acordo com o exposto em (I.7), escolhas de  $\Omega$ ,  $A$  e  $\omega$  em (32) podem, dependendo dos parâmetros da PLL, produzir comportamentos indesejáveis de vários tipos, obtendo-se inclusive caos.

Aplicar a técnica de Melnikov desenvolvida em (I.7) para obter as condições para o aparecimento de atratores caóticos no sistema descrito por (55), é um dos objetivos do Capítulo IV deste trabalho.

#### 4. MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 3ª ORDEM COM FILTROS DE SALLEN E KEY<sup>1</sup>

Em sistemas de comunicação, existe a necessidade de utilizar filtros para separação do espectro relativo ao sinal modulado, do espectro dos sinais interferentes, para detectar sinais modulados em ângulo. Além disso, é interessante que, na transmissão, o espectro seja limitado entre valores muito bem determinados.

Assim, a frequência central dos filtros em apreço deve ser variável, para que o espectro global possa ser deslocado, como resultado de mudanças de sintonia, fazendo-se com que o espectro interferente permaneça o mesmo.

As PLLs são uma solução natural para esse tipo de questão, sendo que a 2ª ordem é normalmente escolhida por sua estabilidade inerente e pela sua faixa de retenção e captura, conforme será discutido nos Capítulos III e IV. Entretanto, em algumas ocasiões, necessita-se de uma atenuação maior na faixa de corte ou características transitórias mais rígidas, obrigando a escolha de PLLs de ordem superior.

Escolhendo PLLs de 3ª ordem, apesar das vantagens supra-citadas, podem surgir sérios problemas de instabilidade, ciclos-limite indesejáveis e caos, mesmo no caso autônomo.

---

<sup>1</sup> [B-10, B-12, B-13, B-14, C-6, C-7, C-9, C-10, C-11, C-12 e E-4].

Nesta secção formulam-se os problemas relativos a PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key [E-4], dando-se ênfase aos casos autônomos em que  $\theta_i$  é constante ou evolui linearmente no tempo.

#### 4.1 O Filtro e a Equação Diferencial da PLL

Considerando modelo matemático desenvolvido em 1, retomando as equações (7) e (9) e supondo que o filtro seja implementado conforme mostra a Figura 5, conhecido como circuito de Sallen e Key, obtém-se a seguinte função de transferência:

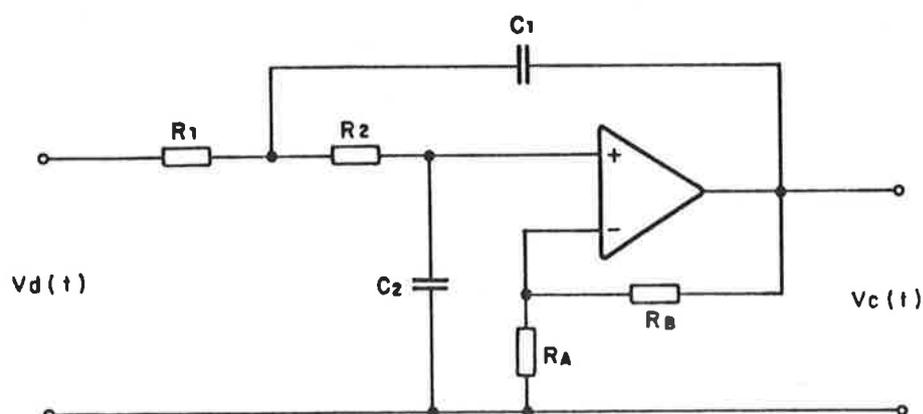


Fig. 5 — Filtro de 2ª Ordem para PLL

$$\frac{V_c(s)}{V_d(s)} = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (56)$$

sendo:

$$\omega_0^2 \triangleq \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}, \quad K \triangleq 1 + \frac{R_B}{R_A} \quad \text{e} \quad Q \triangleq \frac{1}{C_2(R_1 + R_2) + R_1 C_1(1 - K)}$$

Para facilitar o raciocínio analítico trabalha-se, neste caso, com a frequência de corte normalizada, isto é, escolhendo  $R_1 = R_2 = 1$  e  $C_1 = C_2 = 1$  e obtendo, portanto:

$$\frac{V_c(s)}{V_d(s)} = \frac{K}{s^2 + (3 - K)s + 1} \Rightarrow K V_d(s) = [s^2 + (3 - K)s + 1] V_c(s)$$

$$\Rightarrow K v_d = \ddot{v}_c + (3 - K) \dot{v}_c + v_c \quad (57)$$

Substituindo (7) e (9) em (57):

$$K K_d V_i \sin \varphi = \frac{\ddot{\theta}_0}{K_0} + \frac{(3 - K)}{K_0} \dot{\theta}_0 + \frac{\theta_0}{K_0}$$

$$K \underbrace{K_0 K_d V_i}_{\mu_2} \sin \varphi = \ddot{\theta}_0 + (3 - K) \dot{\theta}_0 + \theta_0$$

$$K \mu_2 \operatorname{sen} \varphi - \ddot{\theta}_i - (3 - K) \ddot{\theta}_i - \dot{\theta}_i = -\ddot{\varphi} - (3 - K) \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + (3 - K) \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + K \mu_2 \operatorname{sen} \varphi = \ddot{\theta}_i + (3 - K) \ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i \quad (58)$$

Chamando

$$g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) \triangleq \ddot{\theta}_i + (3 - K) \ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i$$

e escolhendo como variáveis de estado  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$  e  $x_3 = \ddot{\varphi}$ , escreve-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) - K \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - x_2 - (3 - K) x_3 \end{cases} \quad (59)$$

Estudar a resolução da equação (59) para os diversos tipos de  $\theta_i(t)$ , usuais em transmissão de sinais em redes de comunicação, é um dos objetivos deste trabalho.

Conforme observa-se, a equação (59) é equivalente à equação que descreve uma oscilação não linear, forçada de um sistema dissipativo.

## 4.2 Condições para Existência e Unicidade de Soluções

### Proposição 7

— Uma condição suficiente para que a equação

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \ddot{\theta}_i + (3 - K) \ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i - K \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - x_2 - (3 - K) x_3 \end{cases} \quad (59)$$

admita solução única para  $\forall x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^3$  é que  $g(\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i) = \ddot{\theta}_i + (3 - K) \ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i$  seja limitada.

### Prova

i) Verificação da condição ii) do Teorema I.1

Chamando  $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$  tem-se:

$$\begin{aligned}
\|f(t, x_0)\|_1 &= |-K\mu_2 \sin x_1^0 - x_2^0 - (3-K)x_3^0 + g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| + \\
&+ |x_2^0| + |x_3^0| \leq K\mu_2 |\sin x_1^0| + |x_2^0| + |3-K| |x_3^0| + |g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| + \\
&+ |x_2^0| + |x_3^0|
\end{aligned}$$

Como  $g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)$  é limitada,  $\exists M \in \mathbb{R}_+$  tal que  $|g(\ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)| \leq M$ . e, como  $x_0$  é bem determinado, escolhendo:

$$h_T = K\mu_2 + 2|x_2^0| + (|3-K| + 1)|x_3^0| + M$$

têm-se:

$$h_T > 0 \quad \text{e} \quad \|f(t, x_0)\|_1 \leq h_T$$

ii) Verificação da condição i (Lipschitz) do Teorema (I.1).

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -K\mu_2 \cos x_1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -(3-K)$$

Escolhendo

$$k_T = \sup \{1, K\mu_2, |3-K|\} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k_T,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

Logo, a condição de Lipschitz está satisfeita, o que completa a prova da Proposição 7.

### 4.3 Casos Autônomos

Pelas razões expostas em (2.3), o modelo matemático das PLLs dado pela equação (59), admite duas versões autônomas de interesse. A saber:

- i)  $\theta_i = \text{constante}$
- ii)  $\theta_i$  dado por (18)

#### 4.3.1 Caso $\theta_i = \text{constante}$

Neste caso, as equações (59) se reduzem a:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{x}_3 = -K \mu_2 \text{sen } x_1 - x_2 - (3 - K) x_3 \end{cases} \quad (60)$$

#### 4.3.2 Caso $\theta_i = \Omega t + \phi$

Neste caso, as equações (59) se reduzem a:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{x}_3 = \Omega - K \mu_2 \text{sen } x_1 - x_2 - (3 - K) x_3 \end{cases} \quad (61)$$

A finalidade do Capítulo V deste trabalho é estudar as equações (60) e (61), catalogando os diversos tipos de comportamento do sistema, bem como verificando as condições para aparecimento de comportamentos indesejáveis.

## 5. SISTEMAS COM SUPERFÍCIES DE FASE CILÍNDRICAS<sup>1</sup>

Antes de iniciar o estudo dos problemas propostos neste capítulo de ve-se observar que, em todos os casos, pontos cujas abscissas diferem de múltiplos inteiros de  $2\pi$  representam o mesmo estado e, portanto, ao utilizar-se o sistema cartesiano como superfície de fase tem-se uma correspondência entre um estado e uma infinidade de pontos do plano.

Em casos como este costuma-se utilizar uma superfície cilíndrica como superfície de fase e restringir o estudo do problema para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ . O problema é semelhante ao do movimento de um pêndulo, cujo estado pode ser determinado por um ângulo de desvio em relação à posição de equilíbrio e uma velocidade, existindo portanto dois tipos de movimentos qualitativamente diferentes: as oscilações em torno do estado de equilíbrio e os movimentos envolvendo revoluções em torno do eixo.

No caso das PLLs de segunda ordem com filtros "lag" ou "lag-lead" a situação é idêntica, pois existem trajetórias em torno do ponto de equilíbrio estável  $(0, 0)$  e trajetórias que tendem a se estabilizar em torno dos pontos de equilíbrio estável da forma  $(n\pi, 0)$ , com  $n$  par.

A Figura 6 ilustra esse fato, a partir de um diagrama de fase apresentado em [B-3], que mostra as separatrizes grifadas.

Uma condição inicial com  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ , com  $\dot{\varphi}$  "dentro" da separatriz, levará a movimentos em torno do ponto de equilíbrio estável  $(0, 0)$ . Caso  $\dot{\varphi}$  fique "fora" da separatriz têm-se trajetórias que tenderão a se estabilizar em torno de pontos da forma  $(n\pi, 0)$ , com  $n$  par.

<sup>1</sup> [B-3, B-18, C-2 e C-10]

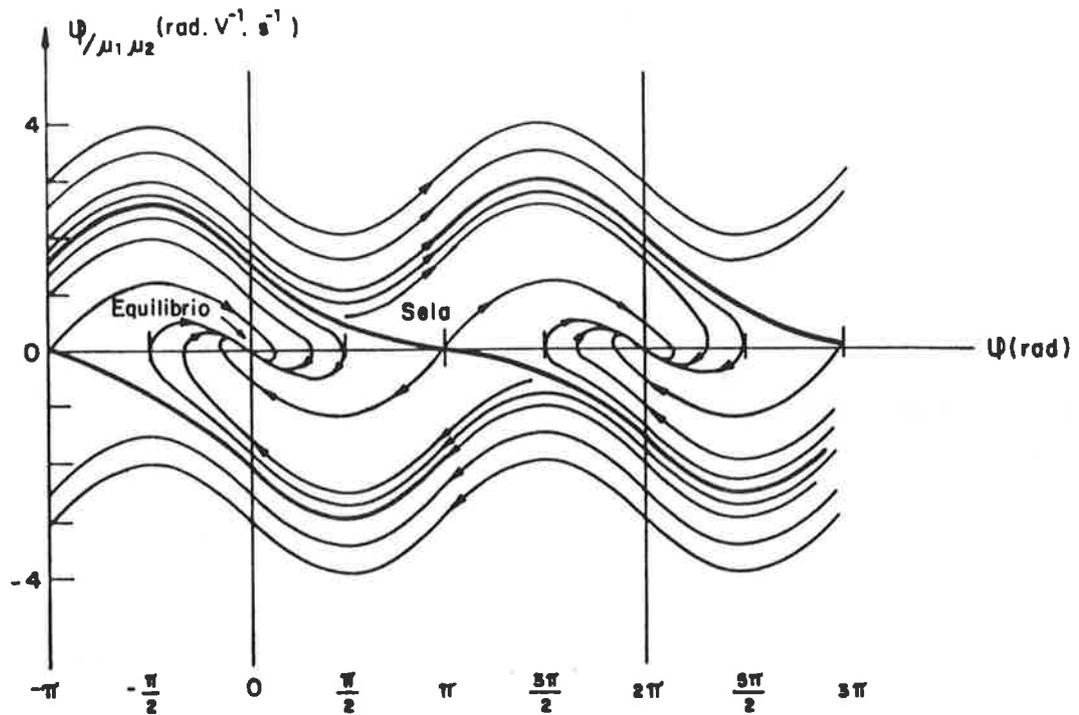


Fig. 6 — Diagrama de fase de uma PLL autônoma de 2ª ordem

**Definição 4** — Para um sistema dinâmico da Definição (1.5) separatrizes são as trajetórias que passam pelos pontos de sela.

**Definição 5** — Diz-se que uma PLL sofre um deslizamento de ciclo de ordem  $\frac{n}{2}$ , se as suas trajetórias tendem a se estabilizar em torno dos pontos de equilíbrio estável da forma  $(n\pi, 0)$ , com  $n$  par.

## CAPÍTULO III

### MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE AUTÔNOMAS DE 2ª ORDEM

1. Malhas com Filtros "Lag" e  $\theta_i = \text{constante}$
2. Malhas com Filtros "Lag" e  $\theta_i = \Omega t + \phi$
3. Malhas com Filtros "Lag-Lead" e  $\theta_i = \text{constante}$
4. Malhas com Filtros "Lag-Lead" e  $\theta_i = \Omega t + \phi$

Neste capítulo analisam-se as malhas de sincronismo de fase de 2ª ordem, com filtros "lag", excitadas com sinais dados pela equação (II.1) com  $\theta_i = \text{constante}$  e com  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .

Conforme foi discutido na secção (II.2.3), a entrada  $\theta_i = \text{constante}$  produz, neste caso, um sistema descrito pelas equações de estado (II.20) e a entrada  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  produz um sistema descrito pelas equações de estado (II.22).

Além disso, analisam-se as malhas de sincronismo de fase de 2ª ordem, com filtros "lag-lead", excitadas com sinais dados pela equação (II.1) com  $\theta_i = \text{constante}$  com  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .

Conforme foi discutido na secção (II.3.3), a entrada  $\theta_i = \text{constante}$  produz, neste caso, um sistema descrito pelas equações de estado (II.42) e a entrada  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  produz um sistema descrito pelas equações de estado (II.44).

As equações (II.20), (II.22), (II.42) e (II.44) são autônomas de 2ª ordem, não havendo, portanto, a possibilidade da obtenção de atratores estranhos ou caóticos [D-1, D-2 e D-19].

Assim, para as equações em questão, estudam-se somente dois tipos de atratores: ciclos limite e pontos de equilíbrio.

Nas secções 1 e 2 estudam-se os ciclos limite e pontos de equilíbrio para as PLLs descritas por (II.20) e (II.22), respectivamente, estabelecendo suas faixas de retenção e captura.

Nas secções 3 e 4 repete-se o trabalho das secções (1) e (2) para PLLs descritas por (II.42) e (II.44), respectivamente.

Em todos os casos estudados neste capítulo a superfície de fase é cilíndrica [ver secção (II.5)] e, portanto, o erro de fase  $\varphi$  será discutido restrito ao intervalo  $[-\pi, \pi)$ .

## 1. MALHAS COM FILTROS "LAG"

$$E \quad \theta_j = \text{constante}$$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.20), que representa uma PLL de 2ª ordem com filtro "lag" excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_j = \text{constante}$ .

### 1.1 Pontos de Equilíbrio

#### Proposição 1

— As PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_j = \text{constante}$  e  $V_j > 0$ , apresentam dois pontos de equilíbrio para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ :

$$\text{i) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}) = (0, 0) \quad \text{que é nó ou foco estável}$$

$$\text{ii) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}) = (-\pi, 0) \quad \text{que é de sela}$$

#### Prova

Como  $V_j > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0$ , fato que será utilizado nesta prova.

### – Obtenção dos Pontos de Equilíbrio

Aplicando a definição (I.10) às equações de estado (II.20):

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0 \Rightarrow -\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 = 0 \quad \text{com} \quad \mu_1 > 0 \quad \text{e}$$

$$\mu_2 > 0 \quad \therefore \operatorname{sen} x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 \in [-\pi, \pi) \Rightarrow x_1 = -\pi \quad \text{ou} \quad x_1 = 0$$

Logo, no intervalo  $\varphi \in [-\pi, \pi)$  os pontos de equilíbrio de (II.20), são:

i)  $(0, 0)$  e

ii)  $(-\pi, 0)$

### – Classificação dos Pontos de Equilíbrio

Será feita pelos critérios estabelecidos na secção (I.6.1), com a construção de  $J(f, \bar{x})$ , de acordo com a Definição I.14.

$$J(f, \bar{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

i)  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ , chamando  $J(f, \bar{x}) = J_0$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 & -\mu_1 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 & -\mu_1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J_0 - \lambda I) = \lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_1 \mu_2$$

Os autovalores de  $J_0$  se determinam resolvendo-se:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_1 \mu_2 = 0$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_2}}{2} \quad (1)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_2}}{2} \quad (2)$$

Como  $\mu_1 > 0$  e  $\mu_2 > 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados em (1) e (2) são:

- reais e negativos se  $\mu_1 > 4\mu_2 \Rightarrow (0,0)$  é nó estável.
- complexos conjugados, com parte real negativa se  $\mu_1 < 4\mu_2 \Rightarrow (0,0)$  é foco estável.

ii)  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-\pi, 0)$ , chamando  $J(f, \bar{x}) = J_\pi$

$$J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_\pi - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu_1 \mu_2 & -\mu_2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J_\pi - \lambda I) = \lambda^2 + \mu_1 \lambda - \mu_1 \mu_2$$

Os autovalores de  $J_\pi$  se determinam resolvendo-se:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda - \mu_1 \mu_2 = 0$$

cujas raízes são:

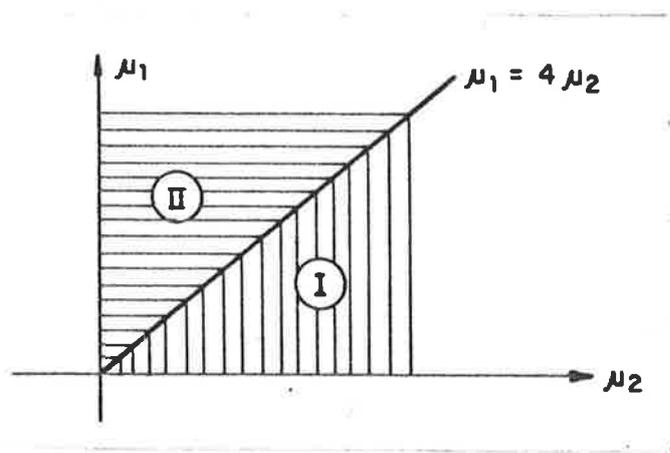
$$\lambda_1 = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_1 \mu_2}}{2} \quad (3)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_1\mu_2}}{2} \quad (4)$$

Como  $\mu_1 > 0$  e  $\mu_2 > 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados em (3) e (4) são reais, e de sinais opostos  $\Rightarrow (-\pi, 0)$  é ponto de sela.

### Proposição 2

- De acordo com as Definições (I.36) e (I.37), constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 1, para o ponto de equilíbrio  $(0,0)$ , tendo como base a Proposição 1.



**Fig. 1** - Diagrama de bifurcações para o ponto de equilíbrio  $(0,0)$ , de acordo com a Proposição 1.

Para os pontos da região I,  $(0, 0)$  é um foco estável. Para os pontos da reta  $\mu_1 = 4\mu_2$  e da região II,  $(0, 0)$  é um nó estável.

### Proposição 3

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas com sinais, tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , o ponto  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

### Prova

Da prova da Proposição 1, os autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto  $(0, 0)$ , são reais negativos ou complexos conjugados, com parte real negativa.

Definição  $\xrightarrow{\text{I.16}}$   $(0, 0)$  é ponto hiperbólico  $\xrightarrow{\text{Teorema I.6}}$   $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

mente estável.

### Proposição 4

- Para PLLs de 2ª ordem, com filtros "lag", excitadas por sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , a faixa de retenção é dada por  $\mu_2 > 0$ .

**Prova** — Resulta de maneira imediata da Proposição 3 e da Definição (II.2).

### Proposição 5

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", se  $V_i = 0$  o equilíbrio será do tipo degenerado ( página 125 de [B-3] ).

#### Prova

$V_i = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow$  as equações de estado se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 x_2 \end{cases} \quad (5)$$

As trajetórias no plano de fase podem ser obtidas por:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\mu_1 \Rightarrow x_2 = -\mu_1 x_1 + C$$

e, portanto, as trajetórias são conforme a Figura 2, o que completa a prova.

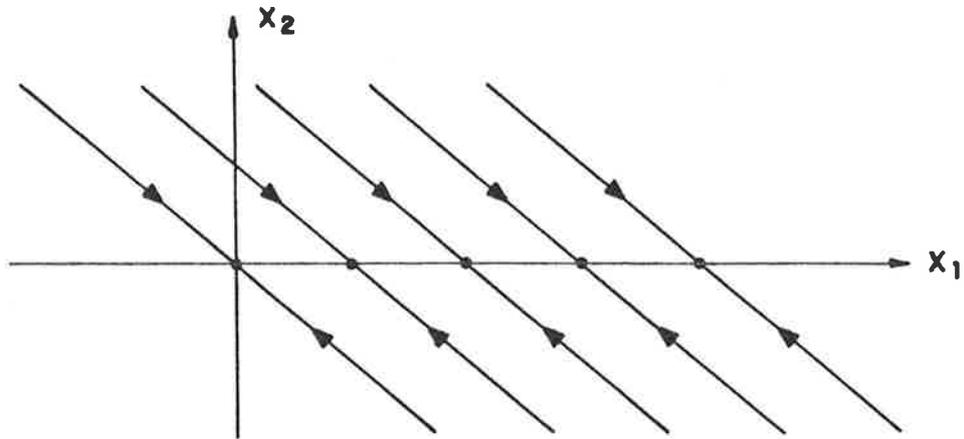


Fig. 2 - Trajetórias no plano de fase para  $v_i = 0$

## 1.2 Pesquisas de Ciclos Limite

### Proposição 6

- As PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas com sinais, tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $v_i > 0$ , não apresentam ciclos limite.

### Prova

Tomando as equações de estado (II.20):

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \quad \text{e} \quad f_2(x_1, x_2) = -\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - \mu_1 x_2$$

$$\text{Construindo } \nabla f(x_1, x_2) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (-\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - \mu_1 x_2)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = -\mu_1$$

Como  $\mu_1 > 0 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema (I.10) (Bendixon), as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas com sinais, tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam ci clos limite.

### Proposição 7

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas por sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$ , a faixa de captura é dada por:

i)  $\mu_2 > 0$

ii)  $\varphi(0) \neq (2n + 1)\pi$ , com  $n \in \mathbb{Z}$

**Prova** — Resulta de maneira imediata das Proposições 1 e 6 e da Definição (II.3).

## 2. MALHAS COM FILTROS "LAG"

$$E \quad \theta_i = \Omega t + \phi$$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.22), que representa uma PLL de 2ª ordem, com filtro "lag", excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_i = \Omega t + \phi$ .

### 2.1 Pontos de Equilíbrio

Neste item, limita-se o estudo ao caso em que  $\mu_2 > 0$ , pois o exame das equações de estado (II.22) mostra que, caso  $\mu_2 = 0$ , a existência de pontos de equilíbrio implica em  $\Omega = 0$ , recaindo-se no caso analisado na Proposição 5.

### Proposição 8

— Relativamente aos pontos de equilíbrio para as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag", excitadas com sinais do tipo  $\theta_i = \Omega t + \phi$  com  $\Omega$  e  $\phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , consideram-se três casos:

#### . Caso 1

$\Omega > \mu_2 \Rightarrow \nexists$  pontos de equilíbrio

• **Caso 2**

$$\Omega = \mu_2 \Rightarrow \exists \text{ um \u00fanico ponto de equil\u00edbrio: } (\pi/2, 0)$$

• **Caso 3**

$\Omega < \mu_2 \Rightarrow \exists$  dois pontos de equil\u00edbrio, dados por:  $(\varphi_1, 0)$  e  $(\varphi_2, 0)$   
sendo  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$  e

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2}; \quad \operatorname{cos} \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}; \quad \operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu_2}$$

e

$$\operatorname{cos} \varphi_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

**Prova**

Aplicando a Defini\u00e7\u00e3o (I.10) \u00e0s equa\u00e7\u00f5es de estado (II.22):

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0 \Rightarrow -\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 + \mu_1 \Omega = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\Omega}{\mu_2}$$

e, portanto, tr\u00eas casos devem ser considerados com  $x_1 \in [-\pi, \pi)$ :

• **Caso 1**

$$\Omega > \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\mu_2} > 1 \Rightarrow \cancel{\neq} \text{ pontos de equilíbrio}$$

• **Caso 2**

$$\Omega = \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\mu_2} = 1$$

$\Rightarrow \exists$  um único ponto de equilíbrio, dado por:  $(\pi/2, 0)$ , no intervalo  $x_1 \in [-\pi, \pi)$ .

• **Caso 3**

$$\Omega < \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\mu_2} < 1 \Rightarrow \text{sen } x_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \text{cos } x_1 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

e, portanto, para  $x_1 \in [-\pi, \pi)$  existem dois pontos de equilíbrio da dos por:

$$(\varphi_1, 0) \quad \text{e} \quad (\varphi_2, 0) \quad \text{sendo} \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \quad \text{e}$$

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2}; \quad \text{cos } \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}; \quad \text{sen } \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e}$$

$$\text{cos } \varphi_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

## Proposição 9

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag", excitadas com sinais, tais que  $\theta_1 = \Omega t + \phi$  com  $\Omega$  e  $\phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , se  $\Omega < \mu_2$ , os seguintes fatos são válidos para os pontos de equilíbrio:

i) O ponto da forma  $(\varphi_1, 0)$  com

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

é nó ou foco estável.

ii) O ponto da forma  $(\varphi_2, 0)$  com

$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \varphi_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

é de sela.

## Prova

Inicialmente constrói-se a matriz Jacobiana de acordo com a Definição (I.14), cujos autovalores permitirão a classificação dos pontos de equilíbrio, conforme critérios estabelecidos na secção (I.6.1).

Examinando as equações de estado (II.22), com  $x \in \mathbb{R}^2$ , de coordenadas  $(x_1, x_2)$ :

$$J(f, x) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

i)  $x = (\varphi_1, 0)$ . Chamando  $J_{\varphi_1} = J(f, x)$ :

$$J_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(J_{\varphi_1} - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} & -\lambda - \mu_1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda + \mu_1) + \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

E, portanto, segue a equação característica:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} = 0$$

cujas raízes são:

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}}}{2} \quad (6)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}}}{2} \quad (7)$$

Como  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ ,  $\Omega > 0$  e  $\Omega < \mu_2$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados em (6) e (7) são:

— reais e negativos se

$$\mu_1 \geq 4\mu_2 \quad \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

$\Rightarrow (\varphi_1, 0)$  é nó estável

— complexos conjugados com parte real negativa se

$$\mu_1 < 4\mu_2 \quad \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

$\Rightarrow (\varphi_1, 0)$  é foco estável

ii)  $x = (\varphi_2, 0)$ . Chamando  $J_{\varphi_2} = J(f, x)$ :

$$J_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (J_{\varphi_2} - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} & -\lambda - \mu_1 \end{bmatrix}$$

E, portanto, segue a equação característica:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda - \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}}}{2} \quad (8)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 + 4\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}}}{2} \quad (9)$$

Como  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ ,  $\Omega > 0$  e  $\Omega < \mu_2$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados em (8) e (9) são reais e de sinais opostos  $\Rightarrow (\varphi_2, 0)$  é ponto de sela.

## Proposição 10

- De acordo com as Definições (I.36) e (I.37), tendo como base a Proposição 9, constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 3, relativamente aos pontos de equilíbrio do tipo  $(\varphi_1, 0)$ , sendo

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

com  $\frac{\Omega}{\mu_2} < 1$ .

Para os pontos da região I do diagrama da Figura 3, os pontos de equilíbrio do tipo  $(\varphi_1, 0)$  são focos estáveis. Para os pontos da curva  $\alpha$  e da região II do diagrama da Figura 3, os pontos de equilíbrio do tipo  $(\varphi_1, 0)$  são nós estáveis sendo que, na região III o sistema não apresenta pontos de equilíbrio. Os pontos da curva  $(\alpha)$  satisfazem à equação

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 4 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

## Proposição 11

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , se  $\Omega = \mu_2$  o ponto de equilíbrio  $(\pi/2; 0)$  é não hiperbólico.

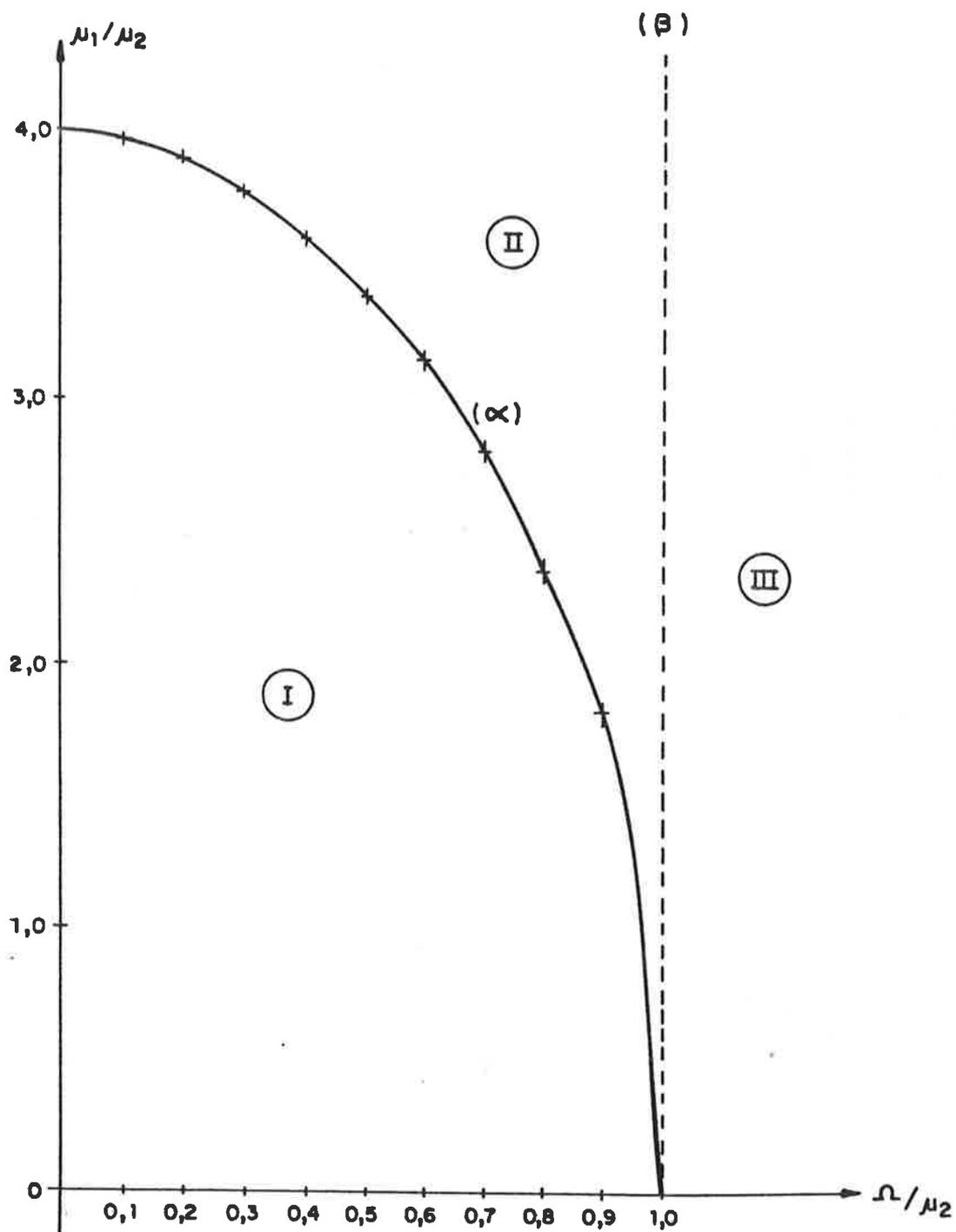


Fig. 3 - Diagrama de bifurcações dos pontos de equilíbrio da forma  $(\varphi_1, 0)$

### Prova

Escrevendo a matriz Jacobiana do sistema no ponto  $x = (\pi/2, 0)$  e chamando  $J_{\pi/2} = J(f, x)$ :

$$J_{\pi/2} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(J_{\pi/2} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda - \mu_1 \end{bmatrix}$$

E, portanto, segue a equação característica:

$$\lambda(\lambda + \mu_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ e \\ \lambda_2 = -\mu_1 \end{cases}$$

o que permite a conclusão que o ponto de equilíbrio  $(\pi/2, 0)$  quando  $\Omega/\mu_2 = 1$  não é hiperbólico.

### Proposição 12

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_1 = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , se  $\Omega < \mu_2$  o ponto de equilíbrio da forma  $(\varphi_1, 0)$  com

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

é assintoticamente estável.

### Prova

Da prova da Proposição 9, os autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto  $(\varphi_1, 0)$  são reais negativos ou complexos conjugados com parte real negativa.

Definição  $\xrightarrow{\text{I.16}}$   $(\varphi_1, 0)$  é ponto hiperbólico  $\xrightarrow{\text{Teorema I.6}}$   $(\varphi_1, 0)$  é assintoticamente estável.

## Proposição 13

— Com base nas Definições (I.36) e (I.37) e nas Proposições (8), (9) e (11), constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 4, para as soluções de  $f(x) = 0$  (soluções de equilíbrio) relativas às equações de estado (II.22). Representa-se  $x_1$  em função de  $\Omega/\mu_2$  e observa-se que:

- para  $\Omega/\mu_2 > 1$ ,  $\nexists x_1 \mid f(x_1, x_2) = 0$ .
- para  $\Omega/\mu_2 = 1$ ,  $f(x_1, x_2) = 0$  tem uma única solução que resulta num ponto de equilíbrio não hiperbólico.
- para  $\Omega/\mu_2 < 1$ ,  $f(x_1, x_2) = 0$  tem duas soluções, uma que resulta num ponto de equilíbrio assintoticamente estável (linha cheia) e outra que resulta num ponto de equilíbrio de sela (linha tracejada).

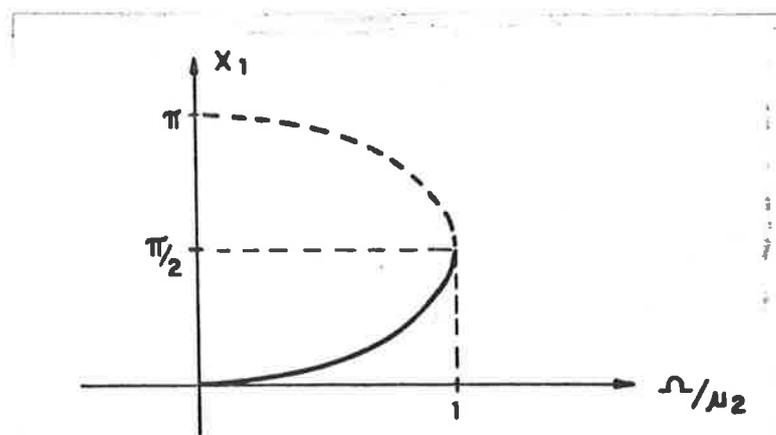


Fig. 4 — Diagrama de bifurcações de  $f(x_1, x_2) = 0$

**Proposição 14**

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_j = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes, a faixa de retenção é dada por:

i)  $\mu_2 > 0$  e  $\Omega > 0$

ii)  $\Omega/\mu_2 < 1$

**Prova** — Resulta de maneira imediata das Proposições (8), (9) e (11) e da Definição (II.2).

**2.2 Pesquisa de Ciclos Limite****Proposição 15**

— As PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_j = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $V_j > 0$ , não apresentam ciclos limite.

**Prova**

Tomando as equações de estado (II.22):

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \quad \text{e} \quad f_2(x_1, x_2) = -\mu_1 \mu_2 \sin x_1 -$$

$$\mu_1 x_2 + \mu_1 \Omega$$

Construindo

$$\nabla f(x_1, x_2) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2)$$

$$\therefore \nabla f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (-\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - \mu_1 x_2 + \mu_1 \Omega)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = -\mu_1$$

Como  $\mu_1 > 0 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) < 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema (I.10) (Bendixon), as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite.

#### Proposição 16

— Para PLLs de 2ª ordem, excitadas por sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes, a faixa de captura é dada por:

$$\text{i) } \mu_2 > 0 \quad \text{e} \quad \Omega > 0$$

$$\text{ii) } \varphi(0) \in [-\pi, \pi) \quad \text{e} \quad \varphi(0) \neq \arccos \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right)$$

$$\text{iii) } \Omega/\mu_2 < 1$$

**Prova** — Resulta de maneira imediata das proposições (8), (9), (11) e (15) da Definição (II.3).

### 3. MALHAS COM FILTROS "LAG-LEAD"

$$E \quad \theta_i = \text{CONSTANTE}$$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.42), que representa uma PLL de 2ª ordem, com filtro "lag-lead", excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_i = \text{constante}$ .

#### 3.1 Pontos de Equilíbrio

#### Proposição 17

— As PLLs de 2ª ordem com filtro do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , apresentam dois pontos de equilíbrio para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ :

i)  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}) = (0, 0)$  que é nó ou foco estável

ii)  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}) = (-\pi, 0)$  que é de sela.

#### Prova

Como  $V_i > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0$ , fato que será utilizado nesta prova.

### . Obtenção dos Pontos de Equilíbrio

Aplicando a Definição (I.10) às equações de estado (II.42):

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \quad \therefore \quad x_2 = 0 \qquad f_2(x_1, x_2) = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0$$

$$\therefore -\mu_1 \mu_2 \sin x_1 = 0 \quad \text{com} \quad \mu_1 > 0 \quad \text{e} \quad \mu_2 > 0$$

$$\Rightarrow \sin x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 \in [-\pi, \pi) \quad \therefore \quad x_1 = -\pi \quad \text{ou} \quad x_1 = 0$$

Logo, no intervalo  $\varphi \in [-\pi, \pi)$  os pontos de equilíbrio são:

i)  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$

ii)  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-\pi, 0)$

### . Classificação dos Pontos de Equilíbrio:

Será feita pelos critérios estabelecidos na secção (I.6.1), com a construção de  $J(f, \bar{x})$ , de acordo com a Definição (I.14).

$$J(f, \bar{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-\mu_1 \mu_2 \cos x_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 x_2 \sin x_1) & -(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) \end{bmatrix}$$

i)  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ . Chamando  $J(f, \bar{x}) = J_0$ :

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(J_0 - \lambda I) = \lambda^2 + (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3)\lambda + \mu_1 \mu_2$$

Os autovalores de  $J_0$  se determinam resolvendo-se:

$$\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3)\lambda + \mu_1 \mu_2 = 0, \text{ cujas raízes são:}$$

$$\lambda_1 = \frac{-(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3) + \sqrt{(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3)^2 - 4\mu_1 \mu_2}}{2} \quad (10)$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3) - \sqrt{(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3)^2 - 4\mu_1 \mu_2}}{2} \quad (11)$$

Como  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$  e  $\mu_3 > 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados em (10) e (11) são:

- reais e negativos se  $\mu_1 (1 + \mu_2 \mu_3)^2 \geq 4\mu_2 \Rightarrow (0, 0)$  é nó estável.
- complexos conjugados, com parte real negativa se  $\mu_1 (1 + \mu_2 \mu_3)^2 < 4\mu_2 \Rightarrow (0, 0)$  é foco estável.

ii)  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-\pi, 0)$ . Chamando  $J(f, \bar{x}) = J_\pi$

$$J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 \mu_2 & -\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \end{bmatrix}$$



## Proposição 18

— De acordo com as Definições (I.36) e (I.37), constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 5, para o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , tendo como base a Proposição 17 e supondo  $\mu_3$  fixo.

Para os pontos da região I,  $(0, 0)$  é um foco estável. Para os pontos da curva  $\mu_1 = 4\mu_2(1 + \mu_2\mu_3)^{-2}$  e da região II,  $(0, 0)$  é um nó estável.

Indica-se, a seguir, o procedimento utilizado para a construção da curva  $\mu_1 = 4\mu_2(1 + \mu_2\mu_3)^{-2}$ , com  $\mu_3$  fixo.

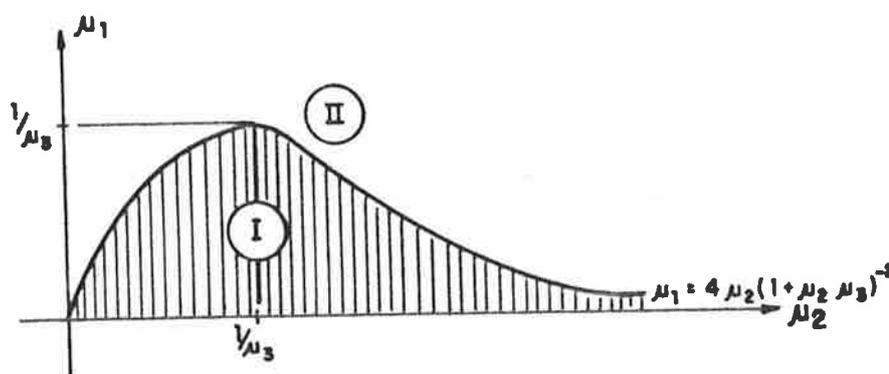


Fig. 5 - Diagrama de bifurcações para o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , de acordo com a Proposição 17.

$$h(\mu_2) = \frac{4\mu_2}{(1 + \mu_2\mu_3)^2}, \quad \text{para } \mu_2 \geq 0$$

Sendo  $\mu_3 > 0$  e constante, para  $\mu_2 \geq 0$ :

$$-\mu_2 = 0 \Rightarrow h(\mu_2) = 0$$

$$- \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} h(\mu_2) = \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \frac{4\mu_2}{\left[ \mu_2 \left( \frac{1}{\mu_2} + \mu_3 \right) \right]^2} = \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \frac{4}{\mu_2 \left( \frac{1}{\mu_2} + \mu_3 \right)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} h(\mu_2) = 0$$

$$- \frac{d}{d\mu_2} h(\mu_2) = \frac{4(1 + \mu_2 \mu_3)(1 - \mu_2 \mu_3)}{(1 + \mu_2 \mu_3)^3} \Rightarrow h(\mu_2)$$

terá extremo para

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu_3}$$

e o ponto será de máximo pois:

$$\bullet \quad 0 < \mu_2 < \frac{1}{\mu_3} \Rightarrow \frac{d}{d\mu_2} h(\mu_2) > 0$$

$$\bullet \quad \mu_2 > \frac{1}{\mu_3} \Rightarrow \frac{d}{d\mu_2} h(\mu_2) < 0$$

$$-\mu_2 = \frac{1}{\mu_3} \Rightarrow h(\mu_2) = \frac{1}{\mu_3}$$

### Proposição 19

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , o ponto  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

#### Prova

Da prova da Proposição 17, os autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto  $(0, 0)$ , são reais negativos ou complexos conjugados, com parte real negativa.

Definição  $\xrightarrow{\text{I.16}}$   $(0,0)$  é ponto hiperbólico  $\xrightarrow{\text{Teorema I.6}}$   $(0,0)$  é assintoticamente estável.

### Proposição 20

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead" excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$ , a faixa de retenção é dada por  $\mu_2 > 0$ .

**Prova** — Resulta de maneira imediata da Proposição 19 e da Definição II.2.

### Proposição 21

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", se  $V_i = 0$  o equilíbrio será do tipo degenerado (página 125, de [B-3]).

**Prova**

$V_i = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$  .\*. as equações de estado (II.42) se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 x_2 \end{cases} \quad (14)$$

As trajetórias no plano de fase podem ser obtidas como se segue:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\mu_1 \Rightarrow x_2 = -\mu_1 x_1 + C$$

e, portanto, as trajetórias são conforme a Figura 6, o que completa a prova.

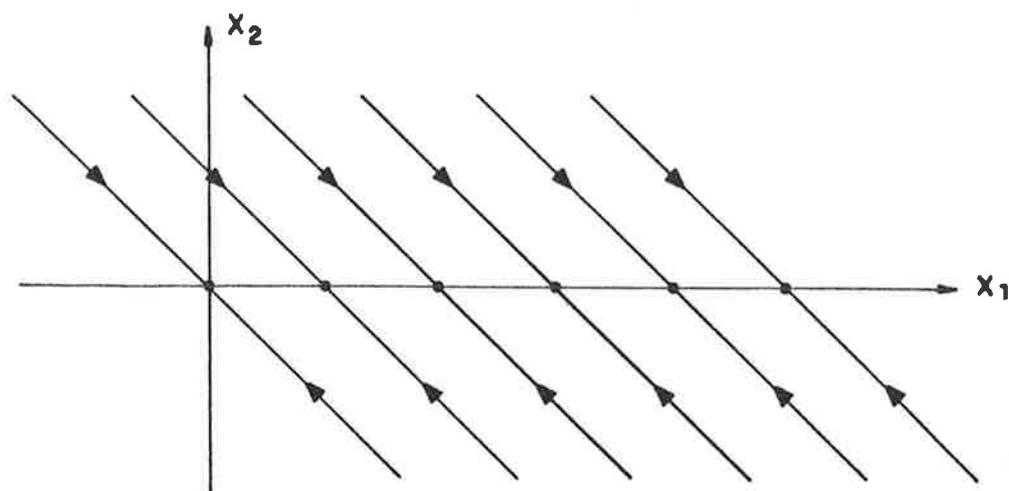


Fig. 6 - Trajetórias no plano de fase para  $V_i = 0$

### 3.2 Pesquisa de Ciclos Limite

#### Proposição 22

- Se  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite.

#### Prova

Tomando as equações de estado (II.42):

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \quad \text{e} \quad f_2(x_1, x_2) = -\mu_1 \mu_2 \text{sen } x_1 -$$

$$- (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2$$

Construindo

$$\nabla f(x_1, x_2) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} [-\mu_1 \mu_2 \sin x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2]$$

$$\therefore \nabla f(x_1, x_2) = -\mu_1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = -\mu_1 (1 + \mu_2 \mu_3 \cos x_1) \quad (15)$$

Se  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$ , o termo entre parênteses de (15) não é identicamente nulo e não muda de sinal para  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema I.10 (Bendixon), as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite se  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$ .

### Proposição 23

— Se  $\mu_2 \mu_3 > 1$  as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam

ciclo limite para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right) \right]$$

### Prova

Retomando a equação (15) como  $\mu_1 > 0$ , e analisando o comportamento do termo  $\mu_2\mu_3 \cos x_1$ :

$$\bullet \quad \mu_2\mu_3 \cos x_1 > -1 \Rightarrow \cos x_1 > -\frac{1}{\mu_2\mu_3} \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) < 0$$

$$\bullet \quad \mu_2\mu_3 \cos x_1 = -1 \Rightarrow \cos x_1 = -\frac{1}{\mu_2\mu_3} \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = 0$$

$$\bullet \quad \mu_2\mu_3 \cos x_1 < -1 \Rightarrow \cos x_1 < -\frac{1}{\mu_2\mu_3} \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) > 0$$

A Figura 7 ilustra o procedimento descrito, levando à prova da Proposição.

Logo, para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right) \right] \Rightarrow \mu_2\mu_3 \cos x_1 \geq -1$$

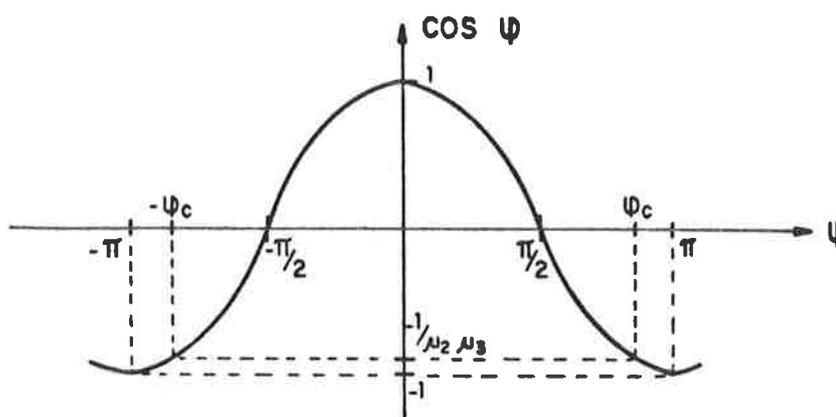


Fig. 7 - Gráfico de  $\cos \varphi$  indicando os pontos de mudança de sinal de  $\nabla f(x_1, x_2)$

$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow$  Pelo Teorema (I.10) (Bendixon), as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right],$$

caso  $\mu_2 \mu_3 > 1$ .

#### Proposição 24

— Se  $\mu_2 \mu_3 > 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam mais que um ciclo limite.

Caso o ciclo limite exista, estará compreendido na região anular definida pelos intervalos

$$\left[ -\pi, -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right) \right) \quad \text{e} \quad \left( \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right), \pi \right)$$

### Prova

- i) da Proposição 23 conclui-se a não existência de ciclos limite para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2\mu_3}\right) \right]$$

- ii) escolhendo  $g(x_1, x_2) = 1$ , constrói-se

$$d(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) \Rightarrow d(x_1, x_2) =$$

$$= \nabla f(x_1, x_2) = -\mu_1(1 + \mu_2\mu_3 \cos x_1)$$

Como  $d(x_1, x_2) \geq 0$  para

$$\varphi \in \left[ -\pi, -\arccos \left( -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \right) \right) \cup \left( \arccos \left( -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \right), \pi \right)$$

utilizando o Teorema (I.11) (Dulac), conclui-se que, nessa região, não existe mais do que um ciclo limite.

De i) e ii) segue que, caso  $\mu_2 \mu_3 > 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , não apresentam mais do que um ciclo limite. Caso o ciclo limite exista, estará compreendido na região definida por:

$$\varphi \in \left\{ \left[ -\pi, -\arccos \left( -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \right) \right) \cup \left( \arccos \left( -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \right), \pi \right) \right\}$$

### Proposição 25

— Para PLLs de 2ª ordem, com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$ , consideram-se dois casos para a faixa de captura.

**Caso 1)**  $0 < \mu_2 \mu_3 < 1$

Neste caso, a faixa de captura é dada por:

i)  $\mu_2 > 0$

ii)  $\varphi(0) \in (-\pi, \pi)$

**Caso 2)**  $\mu_2 \mu_3 > 1$

Neste caso, a faixa de captura é dada por:

i)  $\mu_2 > 0$

ii)  $\varphi(0) \in [-\pi, \pi)$

iii)  $\varphi(0) \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right]$

**Prova** — Segue de maneira imediata das Proposições (22), (23) e (24) e da Definição (II.3).

#### 4. MALHAS COM FILTROS "LAG-LEAD" E

$$\theta_i = \Omega t + \Phi$$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.44), que representa uma PLL de 2ª ordem, com filtro "lag-lead", excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .

##### 4.1 Pontos de Equilíbrio

Neste item limita-se o estudo ao caso em que  $\mu_2 > 0$ , pois o exame das equações de estado (II.44) mostra que, caso  $\mu_2 = 0$ , a existência de pontos de equilíbrio implica em  $\Omega = 0$ , recaindo-se no caso analisado na Proposição 21.

##### Proposição 26

— Relativamente aos pontos de equilíbrio para PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais do tipo  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , consideram-se três casos:

##### Caso 1)

$\Omega > \mu_2 \Rightarrow \nexists$  pontos de equilíbrio.

**Caso 2)**

$\Omega = \mu_2 \Rightarrow \exists$  um único ponto de equilíbrio:  $(\pi/2, 0)$

**Caso 3)**

$\Omega < \mu_2 \Rightarrow \exists$  dois pontos de equilíbrios, dados por  $(\varphi_1, 0)$  e  $(\varphi_2, 0)$

sendo

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi \quad \text{e} \quad \text{sen } \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2}; \quad \text{cos } \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2};$$

$$\text{sen } \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu_2}; \quad \text{cos } \varphi_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

**Prova**

Aplicando a Definição (I.10) às equações de estado (II.44):

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 \Omega - \mu_1 \mu_2 \text{sen } x_1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x_1 = \frac{\Omega}{\mu_2}$$

e, portanto, três casos devem ser considerados com  $x_1 \in [-\pi, \pi)$ :

**Caso 1)**

$$\Omega > \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\mu_2} > 1 \Rightarrow \nexists \text{ pontos de equilíbrio.}$$

**Caso 2)**

$$\Omega = \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\mu_2} = 1 \Rightarrow \exists \text{ um \u00fanico ponto de equil\u00b1brio, dado por:}$$

$$(\pi/2, 0), \text{ no intervalo } x_1 \in [-\pi, \pi).$$

**Caso 3)**

$$\Omega < \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\mu_2} < 1 \Rightarrow \text{sen } x_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \text{ e } \text{cos } x_1 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

e, portanto, para  $x_1 \in [-\pi, \pi)$  existem dois pontos de equil\u00b1brio dados por:  $(\varphi_1, 0)$  e  $(\varphi_2, 0)$  sendo  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$  e

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2}; \quad \text{cos } \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}; \quad \text{sen } \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e}$$

$$\text{cos } \varphi_2 = - \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

## Proposição 27

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_j = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , se  $\Omega < \mu_2$  os seguintes fatos são válidos para os pontos de equilíbrio:

i) o ponto da forma  $(\varphi_1, 0)$  com

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

é nó ou foco estável.

ii) o ponto da forma  $(\varphi_2, 0)$  com

$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \varphi_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

é de sela.

## Prova

Inicialmente constrói-se a matriz Jacobiana de acordo com a Definição (I.14), cujos autovalores permitirão a classificação dos pontos de e-

quilíbrio, conforme critérios estabelecidos na secção (I.6.1).

Examinando as equações de estado (II.44), com  $x \in \mathbb{R}^2$  de coordenadas  $(x_1, x_2)$ :

$$J(f, x) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-\mu_1 \mu_2 \cos x_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 x_2 \sin x_1) & -(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) \end{bmatrix}$$

i)  $x_1 = (\varphi_1, 0)$ . Chamando  $J_{\varphi_1} = J(f, x_1)$

$$J_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} & -\left(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}\right) \end{bmatrix}$$

$$(J_{\varphi_1} - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} & -\left(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}\right) - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \det(J_{\varphi_1} - \lambda I) &= \lambda \left[ \left(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}\right) + \lambda \right] + \\ &+ \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2} \end{aligned}$$

Logo, os autovalores de  $J_{\varphi_1}$  se determinam resolvendo-se:

$$\lambda^2 + \mu_1 \left( 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) \lambda + \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} = 0$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{-\mu_1 \left( 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) + \sqrt{\mu_1^2 \left[ 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right]^2 - 4 \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}}}{2} \quad (16)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_1 \left( 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) - \sqrt{\mu_1^2 \left[ 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right]^2 - 4 \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}}}{2} \quad (17)$$

Como  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ ,  $\mu_3 > 0$ ,  $\Omega > 0$  e  $\Omega < \mu_2$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados em (16) e (17) são:

• reais e negativos se:

$$\mu_1 \left[ 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right]^2 \geq 4 \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}$$

$\Rightarrow (\varphi_1, 0)$  é nó estável.

• complexos conjugados com parte real negativa se:

$$\mu_1 \left[ 1 + \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right]^2 < 4 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}$$

$\Rightarrow (\varphi_1, 0)$  é foco estável.

ii)  $x = (\varphi_2, 0)$ . Chamando  $J_{\varphi_2} = J(f, x)$ :

$$J_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} & - \left( \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$J_{\varphi_2} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} & - \left( \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det (J_{\varphi_2} - \lambda I) = \lambda \left[ \left( \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) + \lambda \right] -$$

$$- \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}$$

Logo, os autovalores de  $J(\varphi_2, 0)$  se determinam resolvendo-se:

$$\lambda^2 + \mu_1 \left( 1 - \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) \lambda - \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} = 0,$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{-\mu_1 \left( 1 - \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) + \sqrt{\mu_1^2 \left( 1 - \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right)^2 + 4 \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}}}{2} \quad (18)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_1 \left( 1 - \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right) - \sqrt{\mu_1^2 \left( 1 - \mu_2 \mu_3 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right)^2 + 4 \mu_1 \mu_2 \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2}}}{2} \quad (19)$$

Como  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ ,  $\mu_3 > 0$ ,  $\Omega > 0$  e  $\Omega < \mu_2$ , os autovalores dados em (18) e (19) são reais e de sinais opostos.

$\Rightarrow (\varphi_2, 0)$  é ponto de sela.

### Proposição 28

— De acordo com as Definições (I.36) e (I.37), tendo como base a Proposição 27, constróem-se os diagramas de bifurcações das Figuras 8a, 8b e 8c, relativamente aos pontos de equilíbrio do tipo  $(\varphi_1, 0)$  sendo

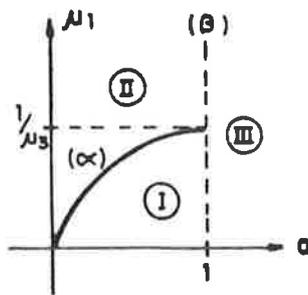
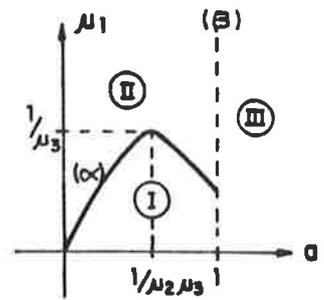
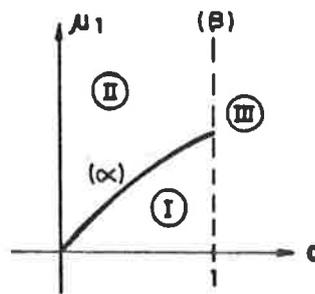
$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

com  $\frac{\Omega}{\mu_2} < 1$

Para a construção dos diagramas em apreço utilizam-se os parâmetros

$$\mu_1 \quad \text{e} \quad a \triangleq \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

Para os pontos da região I dos diagramas das Figuras 8a, 8b e 8c, os pontos de equilíbrio são focos estáveis. Para os pontos da curva  $(\alpha)$  e da região II dos diagramas das Figuras 8a, 8b e 8c, os pontos de equilíbrio do tipo  $(\varphi_1, 0)$  são nós estáveis, sendo que, na região III o sistema não apresenta pontos de equilíbrio.

8a. -  $\mu_2 \mu_3 = 1$ 8b. -  $\mu_2 \mu_3 > 1$ 8c. -  $\mu_2 \mu_3 < 1$ Fig. 8 - Diagramas de bifurcações dos pontos de equilíbrio da forma  $(\varphi_1, 0)$ 

A curva  $(\alpha)$ , nos três casos, satisfaz à equação:

$$\mu_1 = \frac{4 \mu_2 a}{(1 + \mu_2 \mu_3 a)^2}$$

que apresenta um máximo para

$$a = \frac{1}{\mu_2 \mu_3}$$

e, nesse ponto

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu_3}$$

### Proposição 29

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \phi$  com  $\Omega$  e  $\phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , se  $\Omega = \mu_2$  o ponto de equilíbrio  $(\pi/2; 0)$  é não hiperbólico.

### Prova

Escrevendo a matriz Jacobiana do sistema no ponto  $x = (\pi/2, 0)$  e chamando  $J_{\pi/2} = J(f, x)$ :

$$J_{\pi/2} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det (J_{\pi/2} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda - \mu_1 \end{bmatrix}$$

E, portanto, tem-se a equação característica:

$$\lambda (\lambda + \mu_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\mu_1,$$

e, conclui-se, portanto, que o ponto de equilíbrio  $(\pi/2, 0)$ , quando  $\Omega/\mu_2 = 1$  é não hiperbólico.

### Proposição 30

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , se  $\Omega < \mu_2$  o ponto de equilíbrio da forma  $(\varphi_1, 0)$  com

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{\Omega}{\mu_2} \quad \text{e} \quad \text{cos } \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}$$

é assintoticamente estável.

### Prova

Da prova da Proposição 27, os autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto  $(\varphi_1, 0)$  são reais negativos ou complexos conjugados com parte real negativa.

Definição  $\xrightarrow{\text{I.16}}$   $(\varphi_1, 0)$  é ponto hiperbólico  $\xrightarrow{\text{Teorema I.6}}$   $(\varphi_1, 0)$  é assintoticamente estável.

mente estável.

### Proposição 31

— Com base nas Definições (I.36) e (I.37) e nas Proposições 26, 27 e 29, constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 9, para as soluções de  $f(x) = 0$  (soluções de equilíbrio), relativas às equações de estado (II.44). Representa-se  $x_1$  em função de  $\Omega/\mu_2$  e observa-se que:

- para  $\Omega/\mu_2 > 1$   $\nexists x_1 \mid f(x_1, x_2) = 0$
- para  $\Omega/\mu_2 = 1$ ,  $f(x_1, x_2) = 0$  tem uma única solução que resulta num ponto de equilíbrio não hiperbólico.
- para  $\Omega/\mu_2 < 1$ ,  $f(x_1, x_2) = 0$  tem duas soluções, uma que resulta num ponto de equilíbrio assintoticamente estável (linha cheia) e outra que resulta num ponto de equilíbrio de sela (linha tracejada).

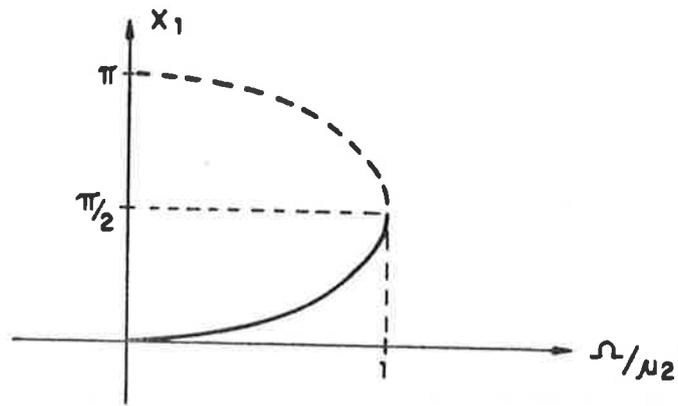


Fig. 9 - Diagrama de bifurcações de  $f(x_1, x_2) = 0$

### Proposição 32

— Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead" excitadas com sinais tais que  $\theta_j = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes, a faixa de retenção é dada por:

i)  $\mu_2 > 0$  e  $\Omega > 0$

ii)  $\Omega/\mu_2 < 1$

**Prova** — Resulta de maneira imediata das Proposições 26, 27 e 29 e da Definição (II.2).

## 4.2 Pesquisa de Ciclos Limite

### Proposição 33

- Se  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros do tipo "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes,  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite.

#### Prova

Tomando as equações de estado (II.44):

$$f_1(x_1, x_2) = x_2$$

e

$$f_2(x_1, x_2) = \mu_1 \Omega - \mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2$$

Construindo

$$\nabla f(x_1, x_2) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}[\mu_1 \Omega - \mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2]$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = -\mu_1 (1 + \mu_2 \mu_3 \cos x_1) \quad (20)$$

Se  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$ , o termo entre parênteses de (20) não é identicamente nulo e não muda de sinal para  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema (I.10) (Bendixon), as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes,  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite se  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$ .

#### Proposição 34

— Se  $\mu_2 \mu_3 > 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega =$  constante e  $\Phi =$  constante,  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right]$$

#### Prova

Retomando a equação (20), como  $\mu_1 > 0$ , e analisando o comportamento do termo  $\mu_2 \mu_3 \cos x_1$ :

—  $\mu_2 \mu_3 \cos x_1 > -1 \Rightarrow \cos x_1 > -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) < 0$

$$- \quad \mu_2 \mu_3 \cos x_1 = -1 \Rightarrow \cos x_1 = -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = 0$$

$$- \quad \mu_2 \mu_3 \cos x_1 < -1 \Rightarrow \cos x_1 < -\frac{1}{\mu_2 \mu_3} \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) > 0$$

A Figura 7 novamente ilustra o procedimento descrito, levando à prova do resultado, pois, para:

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_2 \mu_3 \cos x_1 \geq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Pelo Teorema (I.10) (Bendixon), as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes,  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , não apresentam ciclos limite para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right]$$

caso  $\mu_2 \mu_3 > 1$ .

## Proposição 35

- Se  $\mu_2 \mu_3 > 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega = \text{constante}$ ,  $\Phi = \text{constante}$   $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , não apresentam mais que um ciclo limite.

Caso o ciclo limite exista, estará compreendido na região anular definida pelos intervalos

$$\left[ -\pi, -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right) \quad \text{e} \quad \left( \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \pi \right)$$

## Prova

- i) Da Proposição (34) conclui-se a não existência de ciclos limite para

$$\varphi \in \left[ -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right]$$

- ii) Escolhendo  $g(x_1, x_2) = 1$ , constrói-se

$$d(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) \Rightarrow d(x_1, x_2) = \nabla f(x_1, x_2) =$$

$$-\mu_1(1 + \mu_2 \mu_3 \cos x_1)$$

Como  $d(x_1, x_2) \geq 0$  para

$$\varphi \in \left[ -\pi, -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right) \cup \left( \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \pi \right]$$

utilizando o Teorema (I.11) (Dulac), conclui-se que, nessa região não existe mais do que um ciclo limite.

De i) e ii) segue que, caso  $\mu_2 \mu_3 > 1$ , as PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega =$  constante,  $\Phi =$  constante,  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , não apresentam mais do que um ciclo limite. Caso o ciclo limite exista, estará compreendido na região definida por:

$$\varphi \in \left\{ \left[ -\pi, -\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right) \right) \cup \left( \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \pi \right] \right\}$$

### Proposição 36

- Para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead", excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , consideram-se dois casos para a faixa de captura:

**Caso 1)**  $0 < \mu_2 \mu_3 \leq 1$

Neste caso, a faixa de captura é dada por:

i)  $\mu_2 > 0, \quad \Omega > 0$

ii)  $\Omega/\mu_2 < 1$

iii)  $\varphi(0) \in [-\pi, \pi)$  e  $\varphi(0) \neq \arccos\left(-\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu_2}\right)^2}\right)$

**Caso 2)**  $\mu_2 \mu_3 > 1$

Neste caso, a faixa de captura é dada por:

i)  $\mu_2 > 0, \quad \Omega > 0$

ii)  $\Omega/\mu_2 < 1$

iii)  $\varphi(0) \in [-\pi, \pi)$

iv)  $\varphi(0) \in \left[-\arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right), \arccos\left(-\frac{1}{\mu_2 \mu_3}\right)\right]$

$$v) \quad \varphi(0) \neq \arccos \left( - \sqrt{1 - \left( \frac{\Omega}{\mu_2} \right)^2} \right)$$

Prova — Resulta de maneira imediata das Proposições (26), (27), (32), (33), (34) e (35) e da Definição (II.3).

## **CAPÍTULO IV**

### **MODULAÇÃO EM FREQUÊNCIA ACIDENTAL EM MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 2ª ORDEM**

- 1. Modulação em Frequência Acidental em Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag"**
- 2. Modulação em Frequência Acidental em Malhas de Sincronismo de Fase de 2ª Ordem com Filtros "Lag-Lead"**

O fenômeno da modulação em frequência acidental, descrito na secção (II.2.5), em malhas de sincronismo de fase de 2ª ordem com filtros "lag", produz um sistema dinâmico descrito pelas equações de estado (II.33). Caso os filtros sejam do tipo "lag-lead", o sistema dinâmico obtido será descrito pelas equações de estado (II.55).

Tanto as equações (II.33) como (II.55) representam sistemas dissipativos de 2ª ordem, excitados por sinais periódicos no tempo e, conforme já foi exposto anteriormente, escolhas de  $\Omega$ ,  $A$  e  $\omega$  em (II.33) e (II.55) podem, de acordo com os parâmetros das malhas, gerar comportamentos indesejáveis, formando-se atratores caóticos [secções (II.2.5) e (II.3.5)].

A formação de atratores caóticos, neste caso, está ligada a perdas de sincronismo nas malhas sendo, portanto, de grande utilidade para engenheiros de projeto, a delimitação de regiões nos espaços de parâmetros onde tais comportamentos podem ocorrer.

É com esse intuito que o trabalho deste capítulo foi desenvolvido. A pesquisa de [D-6, D-7, D-8, D-9, D-10, D-11, D-12, D-13, D-14 e D-15] indicou que as equações (II.33) e (II.55) poderiam ser tratadas com sucesso pela técnica de Melnikov [secção (I.7.4.2)], por representarem sistemas dinâmicos semelhantes aos das referências em questão.

Na secção 1 deste capítulo aplica-se a técnica de Melnikov ao sistema descrito pelas equações de estado (II.33), apresentando condições suficientes para o aparecimento de caos homoclínico [secção (I.7.4)].

A secção 2 será uma repetição da secção 1, analisando-se as equações de estado (II.55).

## 1. MODULAÇÃO EM FREQUÊNCIA ACIDENTAL EM MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 2ª ORDEM COM FILTROS "LAG"

Nesta secção aplica-se a técnica de Melnikov [secção (I.7.4.2)] à pesquisa de caos homoclínico [secção (I.7.4)] em PLLs de 2ª ordem, com filtros "lag", sujeitos a modulação em frequência accidental.

O caso em questão é o da análise das equações de estado (II.33), feita a seguir.

### 1.1 Equações de Estado e Preparação para o Método de Melnikov

As equações de estado (II.33) se identificam com as equações (I.10) e (I.11) e pode-se, portanto, construir as funções:

$$p_0(x_1, x_2) = x_2 \quad (1)$$

$$p_1(x_1, x_2) = 0 \quad (2)$$

$$q_0(x_1, x_2) = -\mu_1 \mu_2 \text{ sen } x_1 \quad (3)$$

$$q_1(x_1, x_2) = -\mu_1 x_2 + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \omega^2 A \text{ sen } \omega t \quad (4)$$

Assim, seguindo o modelo apresentado nas equações (I.13) e (I.14), constroem-se as equações de estado de um sistema Hamiltoniano não perturbado, extraído de (II.33), como segue:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = -\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1 \end{cases} \quad (5)$$

## 1.2 Verificação das Condições de Aplicabilidade do Método de Melnikov

Para que o Método de Melnikov possa ser aplicado ao sistema dinâmico descrito pelas equações (II.33), é necessário verificar se as hipóteses do Lema (I.1) estão satisfeitas:

i) verificação da condição (I.H-1)

O sistema descrito pelas equações (5) apresenta situações de equilíbrio para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ , tal que,  $(x_1, x_2) = (n\pi, 0)$  com  $n \in \mathbf{Z}$ .

Escrevendo a matriz Jacobiana relativa ao sistema em discussão, isto é, ao sistema Hamiltoniano não perturbado:

$$J_0(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} & \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_0}{\partial x_1} & \frac{\partial q_0}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando  $J_0$  calculada nos pontos de equilíbrio, escreve-se:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \cos(n\pi) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n-1} \mu_1 \mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico  $P(\lambda)$ , relativo a  $J_0$  dado por

$$P(\lambda) = \det (J_0 - \lambda I)$$

ficará:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (-1)^n \mu_1 \mu_2 \quad (6)$$

com  $n \in \mathbf{Z}$ .

A observação da equação (6) revela que:

- se  $n \in \mathbf{Z}$  é par  $\Rightarrow P(\lambda) = 0$  tem duas raízes imaginárias puras, dadas por:

$$\lambda_1 = \sqrt{\mu_1 \mu_2} i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\sqrt{\mu_1 \mu_2} i$$

- se  $n \in \mathbf{Z}$  é ímpar  $\Rightarrow P(\lambda) = 0$  tem duas raízes reais, de sinais opostos, dadas por:

$$\lambda_1 = \sqrt{\mu_1 \mu_2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\sqrt{\mu_1 \mu_2}$$

Logo, todos os pontos de equilíbrio da forma  $(n\pi, 0)$  com  $n$  ímpar, serão de sela, relativamente ao sistema descrito pelas equações (5).

Considerando-se, por exemplo, uma vizinhança  $D$  de  $(0,0)$  de raio maior que  $\pi$ ,  $D$  contém os pontos de sela  $(-\pi, 0)$  e  $(\pi, 0)$  e a trajetória homoclínica  $\Gamma_0$  que os une, será determinada em 1.3.

ii) Verificação da Condição (I.H-2)

É imediata, pois  $p_0, q_0, p_1$  e  $q_1$  são de classe  $C^\infty$ , sendo que  $p_1$  é identicamente nula e  $q_1$  é uma soma de uma função senoidal com uma cossenoidal, ambas de mesma frequência.

iii) Verificação da Condição (I.H-3)

Aplica-se para isso o Teorema (I.1), verificando inicialmente sua condição ii), como segue:

Chamando

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

tem-se, para o sistema dado em (5):

$$\|f(t, x_0)\|_1 = |\mu_1 \mu_2 \operatorname{sen} x_1^0| + |x_2^0| \leq \mu_1 \mu_2 |\operatorname{sen} x_1^0| + |x_2^0|$$

Como  $|x_2^0|$  é bem determinado, escolhendo:

$$h_T = \mu_1 \mu_2 + |x_2^0| \Rightarrow h_T > 0 \quad \text{e} \quad \|f(t, x_0)\|_1 \leq h_T$$

- A verificação da condição i) do Teorema (I.1) (Condição de Lipschitz) será feita através da condição equivalente, dada no Teorema (I.3).

De fato, calculando-se as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\mu_1 \mu_2 \cos x_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

observa-se que todas elas são limitadas,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

- Logo, de acordo com o Teorema (I.1), as equações (5) têm solução única em  $[0, T]$ ,  $\forall T \in [0, \infty)$ , tal que  $x(0) = x_0$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2$ .

### 1.3 Obtenção das Órbitas Homoclínicas do Sistema Hamiltoniano não Perturbado

Para a aplicação do método de Melnikov é necessário obter-se, inicialmente, as trajetórias homoclínicas  $\Gamma_0$  ligando os pontos de sela  $(-\pi, 0)$  e  $(\pi, 0)$ .

Para isso utiliza-se a expressão (II.28), obtida na Proposição (II.2) colocando a condição de que o sistema é não perturbado, isto é:

$$\mu_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \ddot{\varphi} d\varphi = 0 \quad (7)$$

Substituindo (7) em (II.28) obtém-se, para o sistema descrito pelas equações (5), a equação das trajetórias no plano de fase:

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_0 \quad (8)$$

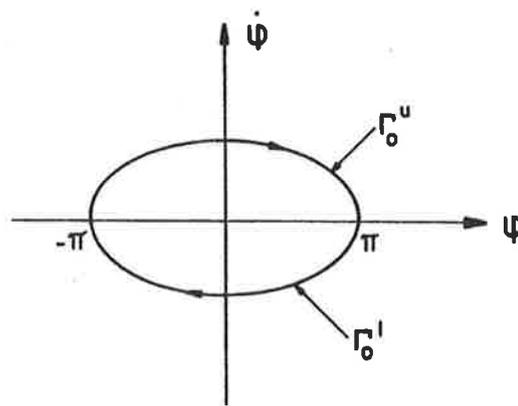
Como a equação (8) representa um sistema conservativo, e como a trajetória homoclínica deve passar pelo ponto  $(\pi, 0)$ , pode-se particularizar (8) para:

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \mu_1 \mu_2 \cos \varphi = \mu_1 \mu_2 \quad (9)$$

Logo, a equação das trajetórias homoclínicas no plano de fase, para o sistema não perturbado, fica:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2\mu_1\mu_2(1 + \cos\varphi)} \quad (10)$$

O sinal positivo no segundo membro de (10) representa a trajetória homoclínica  $\Gamma_0^u$  enquanto que o sinal negativo representa a trajetória homoclínica  $\Gamma_0^l$ , unindo os pontos de sela  $(-\pi, 0)$  e  $(\pi, 0)$ , conforme mostra a Figura 1.



**Fig. 1** - Esboço das Trajetórias Homoclínicas do Sistema não Perturbado

A integração da equação (10) permite explicitar  $\varphi$  e  $\dot{\varphi}$  em função do tempo e, para isso, parte-se da condição inicial:

$$\varphi(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}(t_0) = 2\sqrt{\mu_1\mu_2}$$

uma vez que, para as trajetórias em estudo, a função Hamiltoniana deve ser constante e igual a  $\mu_1\mu_2$ .

Assim, retomando (10):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{2\mu_1\mu_2(1 + \cos\varphi)} \Rightarrow \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{2\mu_1\mu_2(1 + \cos\varphi)}} = dt \quad (11)$$

Integrando (11) entre o instante inicial  $t_0$  e um instante genérico  $t$ :

$$\pm \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t-t_0)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\mu_1\mu_2(1 + \cos\varphi)}} = \int_{t_0}^t dt$$

$$\Rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{2\mu_1\mu_2}} \int_0^{\varphi(t-t_0)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos\varphi}} = (t - t_0)$$

Consultando a tabela de integrais da página 576 de [E-1], escreve-se:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2\mu_1\mu_2}} \sqrt{2} \left[ \ln \tan \left( \frac{\varphi + \pi}{4} \right) \right]_0^{\varphi(t-t_0)} = t - t_0$$

$$\therefore \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \ln \tan \left[ \frac{\varphi(t-t_0) + \pi}{4} \right] = t - t_0$$

$$\therefore \tan \left[ \frac{\varphi(t-t_0) + \pi}{4} \right] = \pm e^{\sqrt{\mu_1\mu_2}(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \varphi(t-t_0) + \pi = \pm 4 \arctan \left[ e^{\sqrt{\mu_1\mu_2}(t-t_0)} \right]$$

$$\Rightarrow \varphi(t-t_0) = \pm 4 \arctan \left( e^{\sqrt{\mu_1\mu_2}(t-t_0)} \right) - \pi \quad (12)$$

Derivando (12) em relação ao tempo:

$$\dot{\varphi}(t-t_0) = \frac{d\varphi}{dt} = \pm 4 \frac{1}{1 + e^{2\sqrt{\mu_1\mu_2}(t-t_0)}} \cdot e^{\sqrt{\mu_1\mu_2}(t-t_0)} \cdot \sqrt{\mu_1\mu_2}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(t - t_0) = \pm \frac{4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \cdot e^{\sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0)}}{\left(1 + e^{2\sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0)}\right)} \quad (13)$$

As equações (12) e (13) são as equações de  $\varphi$  e  $\dot{\varphi}$  em função do tempo, para o sistema Hamiltoniano não perturbado, permitindo a construção da integral de Melnikov para o problema em estudo.

A expressão de  $\dot{\varphi}$  dada em (13) será muito utilizada no trabalho a ser realizado em seguida e, por isso, será simplificada como segue.

$$\dot{\varphi}(t - t_0) = \pm \frac{2 \cdot 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} e^{\sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0)}}{e^{\sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0)} \left( e^{-\sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0)} + e^{\sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0)} \right)}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(t - t_0) = \pm 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right] \quad (14)$$

#### 1.4 Construção da Integral de Melnikov

Para o sistema representado pelas equações de estado (II.33) e levando em conta as equações (1), (2), (3) e (4), constrói-se a função integral de Melnikov, conforme indicado na equação (I.29).

Assim,  $\Delta(t_0)$  pode, neste caso, ser escrito como:

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} x_2 (-\mu_1 x_2 + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \omega^2 A \sin \omega t) dt +$$

$$+ O(\epsilon^2) \quad (15)$$

Desprezando os termos  $O(\epsilon^2)$  e substituindo  $x_2 = \dot{\varphi}$  pela expressão dada em (14):

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} (-\mu_1 \dot{\varphi} + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \omega^2 A \sin \omega t) dt$$

donde:

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \Omega \dot{\varphi} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \dot{\varphi}^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} \mu_1 \omega A \cos \omega t dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} \omega^2 A \sin \omega t dt \quad (16.a)$$

Mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} dt = \int_{\mp \pi}^{\pm \pi} d\varphi = \pm 2\pi$$

$$\Rightarrow \Delta(t_0) = \mp \mu_1 \Omega 2\pi + \mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \pm 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right) \right]^2 dt +$$

$$- \mu_1 \omega A \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \pm 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right) \right] \cos \omega t dt +$$

$$+ \omega^2 A \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \pm 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right) \right] \sin \omega t dt$$

$$\Rightarrow \Delta(t_0) = \mp \mu_1 \Omega 2\pi + 4 \mu_1^2 \mu_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right) \right]^2 dt \mp$$

$$\mp 2 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \omega A \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right) \cos \omega t dt +$$

$$\pm 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \omega^2 A \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} (t - t_0) \right) \sin \omega t dt$$

Utilizando a mudança de variável  $t' = t - t_0$ , escreve-se:

$$\begin{aligned} \Delta(t_0) = & \mp \mu_1 \Omega 2\pi + 4\mu_1^2 \mu_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \right]^2 dt'}_{(1)} \mp \\ & \mp 2\mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \omega A \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \cos \omega(t' + t_0) dt'}_{(2)} + \\ & \pm 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \omega^2 A \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{sen} \omega(t' + t_0) dt'}_{(3)} \end{aligned} \quad (16)$$

De acordo com o Lema (I.2), pesquisar condições para existência de comportamentos caóticos para o sistema descrito pelas equações de estado (II.33), é procurar zeros transversais na função  $\Delta(t_0)$ , dada em (16).

Para isso, deve-se calcular, inicialmente, os termos indicados nas chaves (1), (2) e (3) da equação (16).

— Cálculo da integral indicada na chave ① da equação (16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{sech} \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right]^2 dt' = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{sech} (u) \right]^2 du,$$

chamando  $u = \sqrt{\mu_1 \mu_2} t'$ . Como  $\operatorname{sech} (u)$  é uma função par, a integral da chave ① de (16) se reduz a:

$$\textcircled{1} = \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \int_0^{\infty} \left[ \operatorname{sech} (u) \right]^2 du = \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} [\tanh u]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} = \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \quad (16.b)$$

— Cálculo da integral indicada na chave ② da equação (16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \cos \omega (t' + t_0) dt' =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \left[ \cos \omega t' \cos \omega t_0 - \operatorname{sen} \omega t' \operatorname{sen} \omega t_0 \right] \right\} dt'$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} = \cos \omega t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \cos \omega t' dt' -$$

$$- \operatorname{sen} \omega t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{sen} \omega t' dt'$$

Como  $\operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{sen} \omega t'$  é uma função ímpar, sua integral entre  $-\infty$  e  $+\infty$  é nula. Como  $\operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \cos \omega t'$  é uma função par, a integral da chave  $\textcircled{2}$  de (16) fica:

$$\textcircled{2} = 2 \cos \omega t_0 \int_0^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \cos \omega t' dt'$$

e, portanto:

$$\textcircled{2} = 2 \cos \omega t_0 \frac{\pi}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \operatorname{sech} \frac{\omega \pi}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \Rightarrow$$

$$\textcircled{2} = \frac{\cos(\omega t_0) \cdot \pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \operatorname{sech} \left( \frac{\omega \pi}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right) \quad (16.c)$$

— Cálculo da integral indicada na chave  $\textcircled{3}$   
da equação (16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{sen} \omega (t' + t_0) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \left[ \operatorname{sen} \omega t' \cos \omega t_0 + \operatorname{sen} \omega t_0 \cos \omega t' \right] \right\} dt'$$

$$\textcircled{3} = \cos \omega t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{sen} \omega t' dt' +$$

$$+ \operatorname{sen} \omega t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \cos \omega t' dt'$$

Como

$$\operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{sen} \omega t'$$

é uma função ímpar, sua integral entre  $-\infty$  e  $+\infty$  é nula. Como

$$\operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{cos} \omega t'$$

é uma função par, a integral da chave ③ de (16) fica:

$$\textcircled{3} = 2 \operatorname{sen} \omega t_0 \int_0^{\infty} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\mu_1 \mu_2} t' \right) \operatorname{cos} \omega t' dt'$$

e, portanto:

$$\textcircled{3} = \cancel{2} \operatorname{sen} \omega t_0 \frac{\pi}{\cancel{2} \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \operatorname{sech} \frac{\omega \pi}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \Rightarrow$$

$$\textcircled{3} = \frac{\operatorname{sen} (\omega t_0) \cdot \pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \operatorname{sech} \left( \frac{\omega \pi}{2 \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right) \quad (16.d)$$

Pode-se agora, substituindo as expressões (16.b), (16.c) e (16.d) em (16), obter a expressão da função integral de Melnikov para a órbita homoclínica superior ( $\Gamma_0^u$ ), como se segue.

$$\Delta^u(t_0) = \mu_1 \Omega 2\pi + 4\mu_1^2 \mu_2 \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} +$$

$$+ 2\mu_1 \frac{\omega A}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{\cos(\omega t_0)\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \operatorname{sech} \left( \frac{\omega\pi}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right) +$$

$$- 2\mu_1 \frac{\omega^2 A}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{\sin(\omega t_0)\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \operatorname{sech} \left( \frac{\omega\pi}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right)$$

$$\text{Chamando } R(\omega, \mu_1, \mu_2) = \operatorname{sech} \left( \frac{\omega\pi}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \right)$$

reescreve-se  $\Delta^u(t_0)$  como:

$$\Delta^u(t_0) = 2 \left[ \mu_1 \Omega \pi + 4\mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} + \mu_1 \omega A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2) \cos(\omega t_0) - \right.$$

$$- \omega^2 A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2) \operatorname{sen}(\omega t_0) \Big] \quad (17)$$

De maneira análoga, substituindo as expressões (16.b), (16.c) e (16.d) em (16), pode-se obter a expressão da função integral de Melnikov, para a órbita homoclínica inferior ( $\Gamma_0^1$ ), dada por:

$$\Delta^1(t_0) = 2 \left[ -\mu_1 \Omega \pi + 4 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} - \mu_1 \omega A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2) \cos(\omega t_0) + \right. \\ \left. + \omega^2 A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2) \operatorname{sen}(\omega t_0) \right] \quad (18)$$

### 1.5 Condições para Aparecimento de Comportamentos Caóticos

#### Proposição 1

- Uma condição suficiente para que o sistema descrito pelas equações (II.33) apresente comportamento caótico nas proximidades da trajetória homoclínica  $\Gamma_0^1$ , dada pela equação (10), relativa ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5) é que:

$$\left| -\Omega\pi + 4\sqrt{\mu_1\mu_2} \right| < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \quad (19)$$

sendo

$$R'(\omega, \mu_1, \mu_2) = \omega A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

### Prova

Considerando a função de Melnikov inferior dada pela equação (18), substituindo

$$R'(\omega, \mu_1, \mu_2) = \omega A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2),$$

examine-se a condição para que

$$\Delta^1(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\Delta^1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} \neq 0$$

O conteúdo entre colchetes da equação (18) pode ser reescrito como:

$$-\mu_1 \Omega \pi + 4 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} + \Gamma(t_0),$$

onde

$$\Gamma(t_0) = -\mu_1 R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \cos(\omega t_0) + \omega R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \sin(\omega t_0)$$

Assim, se

$$\left| -\mu_1 \Omega \pi + 4 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right| \leq \max_{t_0} |\Gamma(t_0)|$$

pode-se ter  $\Delta^1(t_0) = 0$ , para algum  $t_0$ .

Mas

$$\max_{t_0} |\Gamma(t_0)| = \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2} R'(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

Logo, se

$$\left| -\mu_1 \Omega \pi + 4 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right| \leq \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2} R'(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

então:

$$\Delta(t_0) = 0, \text{ para algum } t_0.$$

Entretanto:

$$\left| -\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right| = \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \left. \frac{d\Delta^1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} = 0$$

$$\left| -\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right| < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \left. \frac{d\Delta^1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} \neq 0$$

Assim, utilizando o Lema (I.2) constrói-se o seguinte raciocínio:

$$\left| -\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right| < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \exists t_0 \mid \Delta^1(t_0) = 0$$

e

$$\left. \frac{d\Delta^1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} \neq 0 \Rightarrow \text{As variedades } E^u \text{ e } E^s \text{ relativas a } \Gamma_0^1$$

se interceptam transversalmente  $\Rightarrow$  o sistema descrito por (II.33) apresenta comportamento caótico nas proximidades da trajetória homoclínica  $\Gamma_0^1$ , dada pela equação (10), relativa ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5).

### Proposição 2

- Uma condição suficiente para que o sistema descrito pelas equações (II.33) apresente comportamento caótico nas proximidades das trajetórias homoclínicas  $\Gamma_0^u$  e  $\Gamma_0^l$ , dadas pela equação (10), relativas ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5) é que:

$$\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R^1(\omega, \mu_1, \mu_2) \quad (20)$$

sendo

$$R^1(\omega, \mu_1, \mu_2) = \omega A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

**Prova**

$$\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} \leq \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \Delta^u(t_0)$$

dado por (17), se anula para algum  $t_0$ , pois o termo componente da parcela entre colchetes de (17), dado por

$$\mu_1 R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \cos(\omega t_0) - \omega R'(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

tem seu máximo módulo dado por

$$\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2} R'(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

Entretanto:

$$\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} = \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \Delta^u(t_0) = 0$$

e

$$\left. \frac{d\Delta^u(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} = 0$$

$$\Omega\pi + 4\sqrt{\mu_1\mu_2} < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \Delta^u(t_0) = 0$$

e

$$\left. \frac{d\Delta^u(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} \neq 0$$

Assim, utilizando o Lema (I.2) pode-se construir o seguinte raciocínio:

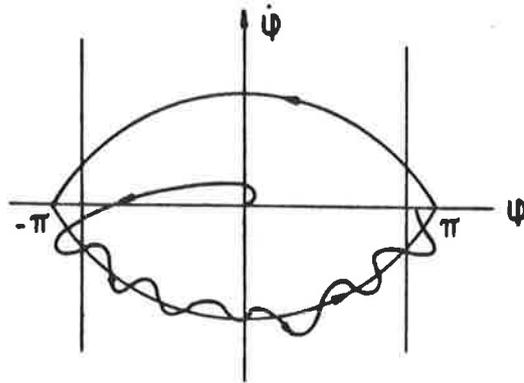
$$\Omega\pi + 4\sqrt{\mu_1\mu_2} < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \Rightarrow \Delta^u(t_0) = 0$$

$$\left. \frac{d\Delta^u(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_0} \neq 0 \Rightarrow$$

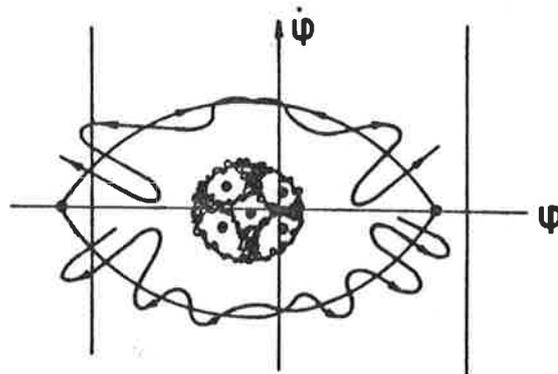
as variedades  $E^u$  e  $E^s$  relativas a  $\Gamma_0^u$  se interceptam transversalmente  $\Rightarrow$  o sistema descrito por (II.33) apresenta comportamento caótico nas proximidades da trajetória homoclínica  $\Gamma_0^u$ , dada pela equação (10), relativa ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5).

Além disso, caso a desigualdade (20) se verifique, a desigualdade (19) também se verificará e, portanto, o sistema descrito por (II.33) apresenta comportamento caótico nas proximidades da trajetória homoclínica  $\Gamma_0^l$ , dada pela equação (10), relativa ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5).

As Proposições (1) e (2) indicam que quando a desigualdade (19) é satisfeita e a (20) não é satisfeita, o Mapeamento de Poincaré do sistema descrito por (II.33) fica como se mostra na Figura 2.a. Caso a desigualdade (20) seja satisfeita, o Mapeamento de Poincaré do sistema descrito por (II.33), fica como se mostra na Figura 2.b.



2.a - Desigualdade (19)



2.b - Desigualdade (20)

Fig. 2 - Mapeamento de Poincaré para o sistema descrito por (II.33).

## 2. MODULAÇÃO EM FREQUÊNCIA ACIDENTAL EM MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE DE 2ª ORDEM COM FILTROS "LAG-LEAD"

Nesta secção aplica-se a técnica de Melnikov [secção (I.7.4.2)] à pesquisa de caos homoclínico [secção (I.7.4)] em PLLs de 2ª ordem, com filtros "lag-lead", sujeitos a modulação em frequência accidental.

O caso em questão é o da análise das equações de estado (II.55), feita a seguir.

### 2.1 Equações de Estado e Preparação para o Método de Melnikov

As equações de estado (II.55) se identificam com as equações (I.10) e (I.11) e pode-se, portanto, construir as funções:

$$p_0(x_1, x_2) = x_2 \quad (21)$$

$$p_1(x_1, x_2) = 0 \quad (22)$$

$$q_0(x_1, x_2) = -\mu_1 \mu_2 \text{sen } x_1 \quad (23)$$

$$q_1(x_1, x_2) = -(\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2 + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \omega^2 A \text{sen } \omega t \quad (24)$$

Assim, seguindo o modelo apresentado nas equações (I.13) e (I.14), constroem-se as equações de estado de um sistema Hamiltoniano não perturbado, extraído de (II.55), idênticas às dadas em (5).

## 2.2 Verificação das Condições de Aplicabilidade do Método de Melnikov

Para que o método de Melnikov possa ser aplicado ao sistema dinâmico descrito pelas equações (II.55), é necessário verificar se as hipóteses do Lema (I.1) estão satisfeitas.

### i) Verificação da Condição (I.H-1)

É imediata, uma vez que o sistema Hamiltoniano não perturbado extraído de (II.55) é idêntico ao dado em (5), cuja adequação foi verificada em (1.2).

### ii) Verificação da Condição (I.H-2)

É imediata pois  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $p_1$  e  $q_1$  são de classe  $C^\infty$ , sendo que  $p_1$  é identicamente nula e  $q_1$  é uma soma de uma função senoidal com uma cossenoidal, ambas de mesma frequência.

### iii) Verificação da Condição (I.H-3)

É imediata, uma vez que o sistema Hamiltoniano não perturbado extraído de (II.55) é idêntico ao dado em (5), cuja adequação foi verificada em (1.2).

## 2.3 Obtenção das Órbitas Homoclínicas do Sistema Hamiltoniano não Perturbado

As trajetórias homoclínicas  $\Gamma_0^u$  e  $\Gamma_0^l$  ligando os pontos de sela  $(-\pi, 0)$  e  $(\pi, 0)$  são as mesmas dadas pela equação (10), sendo explicitadas em função do tempo segundo as equações (12) e (14), uma vez que o sistema Hamiltoniano não perturbado, retirado de (II.55), é também expresso pelas equações de estado (5).

## 2.4 Construção da Integral de Melnikov

Para o sistema representado pelas equações de estado (II.55) e levando em conta as equações (21), (22), (23) e (24), constrói-se a Integral de Melnikov, conforme indicado (I.29).

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left[ - (\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos x_1) x_2 + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \right]$$

$$- \omega^2 A \text{sen } \omega t)] dt + O(\epsilon^2) \quad (25)$$

Desprezando os termos  $O(\epsilon^2)$  e substituindo  $x_1 = \varphi$  e  $x_2 = \dot{\varphi}$ , pelas expressões dadas em (12) e (14):

$$\Delta(t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} \left[ (-\mu_1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi) \dot{\varphi} + \mu_1 \Omega + \mu_1 \omega A \cos \omega t - \right.$$

$$\left. \omega^2 A \text{sen } \omega t \right] dt$$

donde:

$$\Delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \dot{\varphi}^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \dot{\varphi} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \Omega \dot{\varphi} dt -$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} \mu_1 \omega A \cos \omega t dt + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi} \omega^2 A \text{sen } \omega t dt \quad (26)$$

Analisando a expressão da Integral de Melnikov para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag" dada em (16.a) e para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead" dada em (26), observa-se que diferem somente pelo termo que contém a integral de  $(\cos \varphi \dot{\varphi})$ , que aparece em (26) e que é calculado abaixo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \dot{\varphi} dt = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \varphi \dot{\varphi} dt = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cos \varphi \dot{\varphi} dt = 0 \quad (27)$$

A expressão (27) permite, portanto, concluir que todos os resultados desenvolvidos na secção 1, válidos para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag", são também válidos para PLLs de 2ª ordem com filtros "lag-lead". Isso se deve ao fato da igualdade dos sistemas Hamiltonianos não perturbados e da função integral de Melnikov, em ambos os casos.

## 2.5 Condições para Aparecimento de Comportamentos Caóticos

### Proposição 3

— Uma condição suficiente para que o sistema descrito pelas equações

(II.55) apresente comportamento caótico nas proximidades da trajetória homoclínica  $\Gamma_0^1$ , dada pela equação (10), relativa ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5) é que:

$$\left| -\Omega\pi + 4\sqrt{\mu_1\mu_2} \right| < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \quad (19)$$

sendo

$$R'(\omega, \mu_1, \mu_2) = \omega A \pi R(\omega, \mu_1, \mu_2)$$

### Prova

Segue de maneira imediata da Proposição 1 e do arrazoado apresentado em (2.4).

### Proposição 4

- Uma condição suficiente para que o sistema descrito pelas equações (II.55) apresente comportamento caótico nas proximidades das trajetórias homoclínicas  $\Gamma_0^u$  e  $\Gamma_0^l$ , dadas pela equação (10), relativas ao sistema não perturbado descrito pelas equações (5) é que:

$$\Omega \pi + 4 \sqrt{\mu_1 \mu_2} < \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2}}{\mu_1} R'(\omega, \mu_1, \mu_2) \quad (20)$$

**Prova** — Segue de maneira imediata da Proposição 2 e do arrazoado apresentado em 2.4.

As Proposições (3) e (4) indicam que, quando a desigualdade (19) é satisfeita e a (20) não é satisfeita, o Mapeamento de Poincaré do sistema descrito por (II.55) fica como se mostra na Figura 2.a. Caso a desigualdade (20) seja satisfeita, o Mapeamento de Poincaré do sistema descrito por (II.55) fica como se mostra na Figura 2.b.

## CAPÍTULO V

### MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE AUTÔNOMAS DE 3ª ORDEM

1. Malhas com Filtros de Sallen e Key e  
 $\theta_i = \text{constante}$
2. Malhas com Filtros de Sallen e Key e  
 $\theta_i = \Omega t + \Phi$

Neste capítulo estudam-se as malhas de sincronismo de fase de 3ª ordem, que apresentam características transitórias mais rígidas que as de 2ª ordem. Entretanto, ciclos limite e comportamentos caóticos aparecem com mais facilidade.

A análise estará limitada aos casos autônomos e, ainda assim, situações indesejáveis aparecerão.

Na secção 1 o sistema descrito pelas equações de estado (II.60) será analisado, tratando-se de uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_i = \text{constante}$ . A estabilidade dos pontos de equilíbrio e a existência de ciclos limite serão analisadas, estabelecendo-se as faixas de retenção e captura.

Na secção 2, o trabalho da secção 1 será repetido para o sistema descrito pelas equações de estado (II.61), tratando-se de uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .

Tanto para o sistema descrito em (II.60) como para o descrito em (II.61), a superfície de fase é cilíndrica (secção [II.5]) e, por isso, o erro de fase  $\varphi$  será considerado no intervalo  $[-\pi, \pi)$ .

## 1. MALHAS COM FILTROS DE SALLEN-KEY

E  $\theta_i = \text{constante}$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.60), relativo a uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada com  $\theta_i = \text{constante}$ .

### 1.1 Pontos de Equilíbrio

#### Proposição 1

— As PLLs de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , apresentam dois pontos de equilíbrio para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ :

$$\text{i) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}, \bar{\ddot{\varphi}}) = (0, 0, 0)$$

$$\text{ii) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}, \bar{\ddot{\varphi}}) = (-\pi, 0, 0)$$

#### Prova

Analisando as equações de estado (II.60):

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = 0 \Rightarrow \text{sen } x_1 = 0$$

Logo, para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$  os pontos de equilíbrio são:

$$\text{i) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0, 0)$$

$$\text{ii) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-\pi, 0, 0)$$

### Proposição 2

— As PLLs de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , apresentam os seguintes comportamentos possíveis para o ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)$ .

i) se  $1 \leq K < 3$  e  $K < \frac{3}{1+\mu_2} \Rightarrow (0, 0, 0)$  é hiperbólico e assintoticamente estável

ii) se  $1 \leq K < 3$  e  $K = \frac{3}{1+\mu_2} \Rightarrow (0, 0, 0)$  é não hiperbólico

iii) se  $1 \leq K < 3$  e  $K > \frac{3}{1+\mu_2} \Rightarrow (0,0,0)$  é hiperbólico e instável

iv) se  $K \geq 3 \Rightarrow (0,0,0)$  é hiperbólico e instável

### Prova

Inicialmente, constrói-se a matriz Jacobiana, cujos autovalores permitirão a classificação do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ , de acordo com o critério dado no Teorema (I.5).

Como  $V_i > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0$  e tem-se, como consequência, para as equações de estado (II.60) com  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ :

$$J(f,x) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K\mu_2 \cos x_1 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

Chamando  $J_0 = J(0,0,0)$  escreve-se:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K\mu_2 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

$$J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -K\mu_2 & -1 & -[\lambda+(3-K)] \end{bmatrix}$$

Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$  fica determinada pela resolução da equação característica:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + K\mu_2 = 0 \quad (1)$$

As raízes da equação (1) serão analisadas, do ponto de vista da estabilidade do equilíbrio do ponto  $(0,0,0)$ , utilizando o critério de Routh e Hurwitz, conforme descrito em [B-11].

Construindo a matriz  $R_0$  para a aplicação do critério em questão:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3-K & K\mu_2 \\ \frac{3-K-K\mu_2}{3-K} & 0 \\ K\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

A análise das eventuais mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R_0$  permitirá conclusões a respeito das raízes de (1). Assim, consideram-se três casos:

— **Caso 1)**  $1 < K < 3$

Neste caso, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$  será governada pelo sinal do numerador do termo  $R_0(3; 1)$ , a saber:

. **Sub-caso 1.1)**

Se

$$1 \leq K < 3 \quad \text{e} \quad K < \frac{3}{1 + \mu_2} \Rightarrow 3 - K - K\mu_2 > 0$$

$$P_{\varphi_1}(\lambda, \mu_2) = \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} \quad (10)$$

i) Verificação da hipótese (I.H-1) do Teorema (I.16)

— Fazendo  $\mu_2 = \mu_2^0$  em (10) e procurando suas raízes:

$$\lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + (3-K) = 0 \quad (11)$$

Por inspeção verifica-se que (+i) e (-i) são raízes da equação (11).

— Além disso, usando o Teorema (I.17) (Função Implícita):

$$\frac{d}{d\mu_2} \lambda(\mu_2) = - \frac{\frac{\partial P_0}{\partial \mu_2}}{\frac{\partial P_0}{\partial \lambda}} = - \frac{K \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}}{3\lambda^2 + 2(3-K)\lambda + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\mu_2} \left[ \lambda(\mu_2) \right]_{\mu_2 = \mu_2^0} = - \frac{\frac{(3-K)}{\mu_2^0}}{-3 + 2(3-K)i + 1}$$

$$= \frac{3 - K}{2\mu_2^0} \frac{1}{[1 - (3 - K)i]}$$

e, pertanto:

$$\frac{d}{d\mu_2} \left[ \lambda(\mu_2) \right]_{\mu_2 = \mu_2^0} = \frac{(3 - K)}{2\mu_2^0} \frac{[1 + (3 - K)i]}{[1 + (3 - K)^2]}$$

Logo:

$$\frac{d}{d\mu_2} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \lambda(\mu_2) \right] \right\}_{\mu_2 = \mu_2^0} = \frac{(3 - K)}{2\mu_2^0 [1 + (3 - K)^2]} > 0$$

e

$$\operatorname{Im} \left[ \lambda(\mu_2) \right] = 1 > 0$$

**ii) Verificação da hipótese (I.H-2) do Teorema (I.16)**

Igual a ii) da Proposição 6, pois a equação (4) é idêntica à equação (11).

**iii) Verificação da hipótese (I.H-3) do Teorema (I.16)**

Igual a iii) da Proposição 6, pois

$$K\mu_2^0 \cos \varphi_1 = (3 - K)$$

Assim, como as hipóteses (I.H-1), (I.H-2) e (I.H-3) do Teorema (I.16) estão satisfeitas e como  $\text{Re}[\lambda_3] < 0$  e  $\text{Re}[\psi] < 0$ , a Proposição (15) fica demonstrada.

**Proposição 16**

— Para PLLs de 3ª ordem com filtros de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , a faixa de captura é dada por:

$$\text{i) } (\Omega, \mu_2, K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [1, 3) \text{ e } \mu_2 \neq 0$$

$$\text{ii) } \Omega < K\mu_2$$

$$\text{iii) } (3 - K) > K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}$$

$$\text{iv) } \varphi(0) \in [-\pi, \pi)$$

$$\text{v) } \varphi(0) \neq \arccos \left[ - \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} \right]$$

**Prova** — Resulta de maneira imediata das Proposições (8), (9) e (15) e da Definição (II.3).

## CAPÍTULO V

### MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE AUTÔNOMAS DE 3ª ORDEM

1. Malhas com Filtros de Sallen e Key e  
 $\theta_i = \text{constante}$
2. Malhas com Filtros de Sallen e Key e  
 $\theta_i = \Omega t + \phi$

Neste capítulo estudam-se as malhas de sincronismo de fase de 3ª ordem, que apresentam características transitórias mais rígidas que as de 2ª ordem. Entretanto, ciclos limite e comportamentos caóticos aparecem com mais facilidade.

A análise estará limitada aos casos autônomos e, ainda assim, situações indesejáveis aparecerão.

Na secção 1 o sistema descrito pelas equações de estado (II.60) será analisado, tratando-se de uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_j = \text{constante}$ . A estabilidade dos pontos de equilíbrio e a existência de ciclos limite serão analisadas, estabelecendo-se as faixas de retenção e captura.

Na secção 2, o trabalho da secção 1 será repetido para o sistema descrito pelas equações de estado (II.61), tratando-se de uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada por sinais dados pela equação (II.1), com  $\theta_j = \Omega t + \phi$ .

Tanto para o sistema descrito em (II.60) como para o descrito em (II.61), a superfície de fase é cilíndrica (secção [II.5]) e, por isso, o erro de fase  $\varphi$  será considerado no intervalo  $[-\pi, \pi)$ .

## 1. MALHAS COM FILTROS DE SALLEN-KEY

E  $\theta_i = \text{constante}$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.60), relativo a uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada com  $\theta_i = \text{constante}$ .

### 1.1 Pontos de Equilíbrio

#### Proposição 1

— As PLLs de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , apresentam dois pontos de equilíbrio para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ :

$$\text{i) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}, \bar{\ddot{\varphi}}) = (0, 0, 0)$$

$$\text{ii) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\bar{\varphi}, \bar{\dot{\varphi}}, \bar{\ddot{\varphi}}) = (-\pi, 0, 0)$$

**Prova**

Analisando as equações de estado (II.60):

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = 0 \Rightarrow \text{sen } x_1 = 0$$

Logo, para  $\varphi \in [-\pi, \pi)$  os pontos de equilíbrio são:

$$\text{i) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0, 0)$$

$$\text{ii) } (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-\pi, 0, 0)$$

### Proposição 2

— As PLLs de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , apresentam os seguintes comportamentos possíveis para o ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ .

i) se  $1 \leq K < 3$  e  $K < \frac{3}{1+\mu_2} \Rightarrow (0,0,0)$  é hiperbólico e assintoticamente estável

ii) se  $1 \leq K < 3$  e  $K = \frac{3}{1+\mu_2} \Rightarrow (0,0,0)$  é não hiperbólico

iii) se  $1 \leq K < 3$  e  $K > \frac{3}{1+\mu_2} \Rightarrow (0,0,0)$  é hiperbólico e instável

iv) se  $K \geq 3 \Rightarrow (0,0,0)$  é hiperbólico e instável

### Prova

Inicialmente, constrói-se a matriz Jacobiana, cujos autovalores permitirão a classificação do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ , de acordo com o critério dado no Teorema (I.5).

Como  $V_i > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0$  e tem-se, como consequência, para as equações de estado (II.60) com  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ :

$$J(f,x) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K\mu_2 \cos x_1 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

Chamando  $J_0 = J(0,0,0)$  escreve-se:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K\mu_2 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

$$J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -K\mu_2 & -1 & -[\lambda+(3-K)] \end{bmatrix}$$

Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$  fica determinada pela resolução da equação característica:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + K\mu_2 = 0 \quad (1)$$

As raízes da equação (1) serão analisadas, do ponto de vista da estabilidade do equilíbrio do ponto  $(0,0,0)$ , utilizando o critério de Routh e Hurwitz, conforme descrito em [B-11].

Construindo a matriz  $R_0$  para a aplicação do critério em questão:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3-K & K\mu_2 \\ \frac{3-K-K\mu_2}{3-K} & 0 \\ K\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

A análise das eventuais mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R_0$  permitirá conclusões a respeito das raízes de (1). Assim, consideram-se três casos:

— **Caso 1)**  $1 < K < 3$

Neste caso, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$  será governada pelo sinal do numerador do termo  $R_0(3; 1)$ , a saber:

. **Sub-caso 1.1)**

Se

$$1 \leq K < 3 \quad \text{e} \quad K < \frac{3}{1 + \mu_2} \Rightarrow 3 - K - K\mu_2 > 0$$

e, nessas condições, não haverá nenhuma mudança de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R_0$ .

Assim, a equação (1) não terá nenhuma raiz com parte real positiva ou nula, e o ponto  $(0,0,0)$  será hiperbólico e assintoticamente estável, ficando provada a parte (i) da Proposição 2.

**. Sub-caso 1.2)**

Se

$$1 \leq K < 3 \quad \text{e} \quad K > \frac{3}{1 + \mu_2} \Rightarrow 3 - K - K\mu_2 < 0$$

e, nessas condições, haverá duas mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R_0$ .

Assim, a equação (1) terá duas raízes com parte real positiva e o ponto  $(0,0,0)$  será hiperbólico e instável, ficando provada a parte (iii) da Proposição 2.

**. Sub-caso 1.3)**

Se

$$1 \leq K < 3 \quad \text{e} \quad K = \frac{3}{1 + \mu_2} \Rightarrow 3 - K - K\mu_2 = 0$$

implicando que a equação (1) tenha duas raízes imaginárias puras, conjugadas e o ponto  $(0,0,0)$  será não hiperbólico, ficando provada a parte (ii) da Proposição 2.

— **Caso 2)**  $K > 3$

Neste caso  $R_0(1,1)$  é positivo,  $R_0(2,1)$  é negativo e  $R_0(4,1)$  é positivo. Assim, para qualquer  $\mu_2 > 0$  têm-se duas mudanças de sinal nos termos da primeira coluna de  $R_0$  e, portanto, a equação (1) tem duas raízes com parte real positiva.

Os fatos expostos levam à conclusão, neste caso, que  $(0,0,0)$  é hiperbólico e instável.

— **Caso 3)**  $K = 3$

A análise deste caso é problemática, pois o termo  $R_0(2,1)$  se reduz a zero. Entretanto, seguindo procedimento sugerido em [B-11], escolhe-se  $\epsilon > 0$  e escreve-se  $\tilde{R}_0$  como segue:

$$\tilde{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & K\mu_2 \\ \frac{\epsilon - K\mu_2}{\epsilon} & 0 \\ K\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $\epsilon$  é positivo e arbitrariamente pequeno, ocorrem duas mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $\tilde{R}_0$  e, portanto, a equação (1) possui duas raízes com parte real positiva.

Do exposto conclui-se que, neste caso,  $(0,0,0)$  é hiperbólico e instável.

A análise dos Casos 2 e 3 acima exposta demonstra a parte (iv) da Proposição 2 completando, assim, a prova.

### Proposição 3

- As PLLs de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \text{constante}$  e  $V_i > 0$ , apresentem um ponto de equilíbrio  $(-\pi, 0, 0)$  que é sempre instável para qualquer  $K \geq 1$ .

### Prova

Aproveitando a matriz Jacobiana determinada na prova da Proposição 2 e especializando-a para o ponto  $(-\pi, 0, 0)$ , verifica-se a estabilidade do ponto em questão, através de seus autovalores, segundo o critério dado no Teorema (I.5).

Como  $V_i > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0$ , chamando  $J_\pi = J(-\pi, 0, 0)$ :

$$J_{\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K\mu_2 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

$$J_{\pi} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ K\mu_2 & -1 & -[\lambda + (3-K)] \end{bmatrix}$$

Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(-\pi, 0, 0)$  fica determinada pela resolução da equação característica:

$$\det(J_{\pi} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda - K\mu_2 = 0 \quad (2)$$

Analisam-se as raízes da equação (2), do ponto de vista da estabilidade do equilíbrio do ponto  $(-\pi, 0, 0)$ , utilizando o critério de Routh e Hurwitz, conforme descrito em [B-11].

Construindo a matriz  $R_{\pi}$  para aplicação do critério em questão:

$$R_{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3-K & -K\mu_2 \\ \frac{3-K+K\mu_2}{3-K} & 0 \\ -K\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $R_{\pi}(1,1) = 1$  e, dentro das hipóteses,  $R_{\pi}(4,1) < 0$ , os termos da primeira coluna de  $R_{\pi}$  têm pelo menos uma mudança de sinal e, portanto, (2) tem pelo menos uma raiz com parte real positiva.

Assim, o ponto de equilíbrio  $(-\pi, 0, 0)$  é instável, o que demonstra a Proposição 3.

#### Proposição 4

— Para PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, excitadas com sinais, tais que  $\theta_i = \text{constante}$ , a faixa de retenção é dada por:

- i)  $\mu_2 > 0$
- ii)  $1 \leq K < 3$
- iii)  $K < \frac{3}{1 + \mu_2}$

### Prova

Resulta, de maneira imediata, da Proposição 2 e da Definição (II.2).

### Proposição 5

- De acordo com as Definições (I.36) e (I.37), contrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 1, para o ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ , com base na Proposição 2.

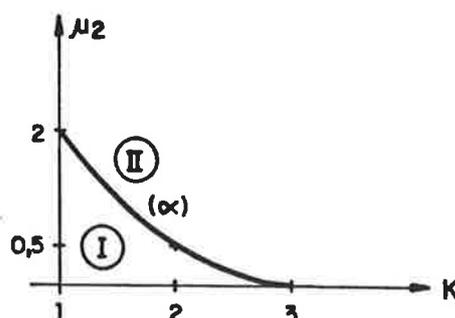


Fig. 1 - Diagrama de bifurcações para o ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$ , de acordo com a Proposição 2

Para os pontos da região **I** do diagrama da Figura 1, o ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$  é hiperbólico e assintoticamente estável. Para os pontos da curva  $(\alpha)$ , à exceção do ponto  $(3,0)$ , o ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$  é não hiperbólico.

Para os pontos da região (II) e para o ponto (3,0), o equilíbrio de (0,0,0) é hiperbólico e instável. Os pontos da curva ( $\alpha$ ) satisfazem à equação:

$$\mu_2 = \frac{3-K}{K}$$

## 1.2 Pesquisa de Ciclos Limite

Neste item, pesquisa-se o eventual aparecimento de ciclos limite para PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen-Key. Para isso, combinam-se as Proposições 2 e 5 com a versão do Teorema de Hopf, enunciada neste trabalho como Teorema (I.16).

### Proposição 6

— Sejam as seguintes hipóteses, a respeito de uma PLL de 3ª ordem, com filtros de Sallen-Key:

H-1) O sistema é descrito pelas equações de estado (II.59)

H-2) A fase do sinal de entrada  $\theta_i(t)$  é constante e igual a um certo valor  $\Phi$

H-3) O sistema autônomo resultante é descrito pelas equações de estado (II.60)

H-4) O parâmetro  $K$  é mantido constante no intervalo  $[1,3)$

Nestas condições, pode-se concluir que:

T-1) Para  $\mu_2^0 = \frac{3-K}{K}$ ,  $\exists \epsilon > 0$ , tal que, quando  $\mu_2$  satisfaz

$$|\mu_2 - \mu_2^0| = |\Delta\mu| < \epsilon$$

a PLL de 3ª ordem com filtro de Sallen-Key apresenta um ciclo limite a uma distância  $O(|\Delta\mu|^{\frac{1}{2}})$  do ponto de equilíbrio  $(0,0,0)$

T-2) O ciclo limite supra referido é estável e tem período  $2\pi + O(\Delta\mu)$

### Prova

A prova desta proposição consiste na verificação das hipóteses do Teorema (I.16) — Teorema de Bifurcação de Hopf —, que é feita em seguida.

Para tanto, escreve-se inicialmente a matriz Jacobiana  $J_0^{\mu_2}$  e seu polinômio característico  $P_0(\lambda, \mu_2)$ , para o sistema descrito pelas equações de estado (II.60), com

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$$

e  $K$  constante:

$$J_0^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K\mu_2 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

$$P_0(\lambda, \mu_2) = \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + K\mu_2 \quad (3)$$

i) **Verificação da hipótese (I.H-1) do Teorema (I.16)**

— Se  $\mu_2 = \mu_2^0$  em (3), suas raízes se determinam por:

$$\lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + (3-K) = 0 \quad (4)$$

Por inspeção verifica-se que (+i) e (-i) são raízes da equação (4).

— Além disso, usando o Teorema (I.17) — Função Implícita:

$$\frac{d}{d\mu_2} \lambda(\mu_2) = - \frac{\frac{\partial P_0}{\partial \mu_2}}{\frac{\partial P_0}{\partial \lambda}} = - \frac{K}{3\lambda^2 + 2(3-K)\lambda + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\mu_2} \left[ \lambda(\mu_2) \right]_{\mu_2 = \mu_2^0} = - \frac{K}{-3+2(3-K)i+1} = \frac{K}{2} \cdot \frac{1}{[1-(3-K)i]}$$

e, pertanto:

$$\frac{d}{d\mu_2} \left[ \lambda(\mu_2) \right]_{\mu_2 = \mu_2^0} = \frac{K}{2} \frac{[1+(3-K)i]}{[1+(3-K)^2]}$$

Logo

$$\frac{d}{d\mu_2} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \lambda(\mu_2) \right] \right\}_{\mu_2 = \mu_2^0} = \frac{K}{2[1+(3-K)^2]} > 0$$

e

$$\operatorname{Im} \left[ \lambda(\mu_2) \right]_{\mu_2 = \mu_2^0} = 1 > 0$$

ii) **Verificação da hipótese (I.H-2) do Teorema (I.16)**

— Cálculo da terceira raiz de (4)

$$\begin{array}{r}
 \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + (3-K) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda - i \\ \lambda^2 + (3-K+i)\lambda + (3-K)i \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \lambda + i \\ \lambda + (3-K) \end{array} \right. \\
 - \lambda^3 + i\lambda^2 \\
 \hline
 (3-K+i)\lambda^2 + \lambda + (3-K) \quad - \lambda^2 - i\lambda \\
 \hline
 -(3-K+i)\lambda^2 + [-1+(3-K)i]\lambda \quad (3-K)\lambda + (3-K)i \\
 \hline
 \quad (3-K)i\lambda + (3-K) \quad - (3-K)\lambda - (3-K)i \\
 \hline
 \quad \quad - (3-K)i\lambda - (3-K) \quad \quad \quad 0 \\
 \hline
 \quad 0 \\
 \quad 0
 \end{array}$$

Logo, (4)

$$\Rightarrow (\lambda + i)(\lambda - i) [\lambda + (3-K)] = 0$$

e, portanto, a terceira raiz de (4) é  $\lambda_3 = -(3-K)$  que, dentro das hipóteses da Proposição 6, é um número real negativo.

iii) **Verificação da hipótese (I.H-3) do Teorema (I.16)**

— Cálculo de  $\frac{\partial^3 f_p}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$

A análise das equações de estado (II.60) leva às conclusões:

$$\frac{\partial^3 f_p}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 0, \forall p \in \{1,2\}, \forall i,j \text{ e } k \in \{1,2,3\}$$

$$\frac{\partial^3 f_3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 0, \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{2,3\}, \forall k \in \{1,2,3\}$$

$$\frac{\partial^3 f_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1} = K \mu_2 \cos x_1 \Rightarrow \left. \frac{\partial^3 f_3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right|_{\substack{x=0 \\ \mu_2 = \mu_2^0}} = (3-K)$$

— Cálculo de  $\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_j}$

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \forall p \in \{1,2\}, \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \forall i \in \{2,3\}, \forall j \in \{1,2,3\}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_1} = K \mu_2 \operatorname{sen} x_1 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_1} \right|_{\substack{x=0 \\ \mu_2 = \mu_2^0}} = 0$$

Portanto, a expressão de  $\psi$  dada em (I.30), se reduz a:

$$\psi = a_3^* b_1^* b_1^* \overline{b_1^*} \left\{ \underbrace{f_{1,1,1}^3}_{(3-K)} - 2 \underbrace{f_{1,1}^3}_{\begin{smallmatrix} 11 \\ 0 \end{smallmatrix}} J_{13}^{-1} f_{1,1}^3 - f_{11}^3 (J - 2i\omega)_{13}^{-1} f_{11}^3 \right\} \quad (5)$$

— Cálculo dos autovetores de  $J_0^H$ , correspondentes ao autovalor  $\lambda = + i$

. Autovetor à direita:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(3-K) & -1 & -(3-K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ib_1 \\ ib_2 \\ ib_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_2 = i b_1 \\ b_3 = i b_2 \\ -(3-K) b_1 - b_2 - (3-K) b_3 = i b_3 \end{cases} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$$

. Autovetor à esquerda:

$$[a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(3-K) & -1 & -(3-K) \end{bmatrix} = [i a_1 \ i a_2 \ i a_3]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(3-K) a_3 = i a_1 \\ a_1 - a_3 = i a_2 \\ a_2 - (3-K) a_3 = i a_3 \end{cases} \quad a = [a_1 \ a_2 \ a_3] = C_2 \left[ 1 \left( \frac{1}{3-K} - i \right) - \frac{i}{(3-K)} \right]$$

. Condição de normalização ( $a \cdot b = 1$ )

$$\Rightarrow C_1 C_2 \left[ 1 + \frac{1}{3-K} i + 1 + \frac{1}{3-K} i \right] = 1$$

$$\Rightarrow 2 C_1 C_2 \left[ 1 + \frac{1}{(3-K)} i \right] = 1$$

Escolhendo  $C_1 = \frac{1}{2}$  tem-se

$$C_2 \left[ 1 + \frac{1}{(3-K)} i \right] = (C_2' + C_2'' i) \left[ 1 + \frac{1}{(3-K)} i \right] = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2' - \frac{C_2''}{(3-K)} = 1 \\ C_2'' + \frac{C_2'}{(3-K)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = \frac{[(3-K)^2]}{[(3-K)^2 + 1]} \\ C_2'' = -\frac{[(3-K)]}{[(3-K)^2 + 1]} \end{cases}$$

Chamando  $\gamma = \frac{3-K}{(3-K)^2 + 1} > 0$ , dentro das hipóteses da Proposição 6:

$$C_2 = \gamma [(3-K) - i]$$

Logo:

$$a_3^* = \gamma [(3-K) - i] \cdot \left[ \frac{-i}{(3-K)} \right] = -\frac{\gamma}{(3-K)} - \gamma i$$

$$b_1^* = \frac{1}{2}$$

Substituindo  $a_3^*$  e  $b_1^*$  em (5), segue que:

$$\psi = \frac{1}{8} \left[ -\frac{\gamma}{(3-K)} - \gamma i \right] (3-K)$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{8} \left[ -\gamma - \gamma (3-K) i \right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \psi = -\frac{\gamma}{8} < 0$$

Assim, como as hipóteses (I.H-1), (I.H-2) e (I.H-3) do Teorema (I.16) estão satisfeitas e como

$$\operatorname{Re} [\lambda_3] < 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} [\psi] < 0$$

a Proposição 6 fica demonstrada.

### Proposição 7

— Para PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, excitadas por sinais, tais que  $\theta_i = \text{constante}$ , a faixa de captura é dada por:

- i)  $\mu_2 > 0$
- ii)  $1 \leq K < 3$
- iii)  $K < \frac{3}{1+\mu_2}$
- iv)  $\varphi(0) \in (-\pi, \pi)$

### Prova

Resulta de maneira imediata das Proposições 2 e 6 e da Definição (II.3).

## 2. MALHAS COM FILTROS DE SALLEN-KEY

$$E \quad \theta_i = \Omega t + \Phi$$

Estuda-se, nesta secção, o sistema descrito pelas equações de estado (II.61), relativo a uma malha de sincronismo de fase de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada com  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ .

### 2.1 Pontos de Equilíbrio

#### Proposição 8

— Relativamente aos pontos de equilíbrio para PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, excitadas com sinais do tipo  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes,  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , consideram-se os seguintes casos:

— **Caso 1)**  $\Omega > K\mu_2 \Rightarrow \nexists$  pontos de equilíbrio

— **Caso 2)**  $\Omega = K\mu_2 \Rightarrow \exists$  um único ponto de equilíbrio:

$$(\pi/2, 0, 0)$$

— **Caso 3)**  $\Omega < K\mu_2 \Rightarrow \exists$  dois pontos de equilíbrio, dados por

$(\varphi_1, 0, 0)$  e  $(\varphi_2, 0, 0)$  sendo  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$  e

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{\Omega}{K\mu_2}; \quad \text{cos } \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2};$$

$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{\Omega}{K \mu_2} \quad ; \quad \cos \varphi_2 = - \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K \mu_2}\right)^2}$$

### Prova

Aplicando a Definição (I.10) às equações de estado (II.61):

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Omega - K \mu_2 \operatorname{sen} x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x_1 = \frac{\Omega}{K \mu_2}$$

e, portanto, três casos devem ser considerados se  $x_1 \in [-\pi, \pi)$ :

- **Caso 1)**  $\Omega > K \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{K \mu_2} > 1 \Rightarrow \not\exists$  pontos de equilíbrio
- **Caso 2)**  $\Omega = K \mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{K \mu_2} = 1 \Rightarrow \exists$  um único ponto de equilíbrio, dado por:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right), \quad \text{para } x_1 \in [-\pi, \pi)$$

$$\text{— Caso 3)} \quad \Omega < K\mu_2 \Rightarrow \frac{\Omega}{K\mu_2} < 1 \Rightarrow \text{sen } x_1 = \frac{\Omega}{K\mu_2} \quad \text{e}$$

$$\text{cos } x_1 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}$$

e, portanto,  $\exists$  dois pontos de equilíbrio dados por:

$$(\varphi_1, 0, 0) \quad \text{e} \quad (\varphi_2, 0, 0)$$

$$\text{sendo} \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \pi \quad \text{e}$$

$$\text{sen } \varphi_1 = \text{sen } \varphi_2 = \frac{\Omega}{K\mu_2} \quad ; \quad \text{cos } \varphi_1 = -\text{cos } \varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}$$

### Proposição 9

— Para uma PLL de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada com sinais, tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes,  $\Omega \in \mathbb{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , os seguintes comportamentos são possíveis para o ponto de equilíbrio  $(\varphi_1, 0, 0)$ , objeto do Caso 3 da Proposição 8, com  $\Omega < K\mu_2$ .

i) Se  $1 \leq K < 3$  e

$$3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} > 0 \Rightarrow (\varphi_1, 0, 0)$$

é hiperbólico e assintoticamente estável.

ii) Se  $1 < K < 3$  e

$$3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} = 0 \Rightarrow (\varphi_1, 0, 0)$$

é não hiperbólico.

iii) Se  $1 < K < 3$  e

$$3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} < 0 \Rightarrow (\varphi_1, 0, 0)$$

é hiperbólico e instável.

iv) Se  $K > 3 \Rightarrow (\varphi_1, 0, 0)$  é hiperbólico e instável.

### Prova

Inicialmente, contrói-se a matriz Jacobiana, cujos autovalores permitirão a classificação do ponto de equilíbrio  $(\varphi_1, 0, 0)$ , de acordo com o critério apresentado no Teorema (I.5).

Como  $V_1 > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0$  e tem-se, como consequência, para as equações de estado (II.61)

$$J \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K \mu_2 \cos x_1 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

Chamando  $J_{\varphi_1} = J(\varphi_1, 0, 0)$ :

$$J_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K \mu_2}\right)^2} & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

$$J_{\varphi_1} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -K \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K \mu_2}\right)^2} & -1 & -[\lambda + (3-K)] \end{bmatrix}$$

Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(\varphi_1, 0, 0)$  fica determinada pela resolução da equação característica:

$$\det (J_{\varphi_1} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} = 0 \quad (6)$$

As raízes da equação (6) serão analisadas, do ponto de vista da estabilidade do equilíbrio do ponto  $(\varphi_1, 0, 0)$ , utilizando o critério de Routh e Hurwitz, conforme descrito em [B-11].

Construindo a matriz  $R_{\varphi_1}$  para a aplicação do critério em questão:

$$R_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3-K & K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} \\ \frac{3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}}{3 - K} & 0 \\ K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

A análise das eventuais mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R\varphi_1$  permitirá conclusões a respeito das raízes de (6). Assim, consideram-se três casos:

— **Caso 1)**  $1 \leq K < 3$

Neste caso, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(\varphi_1, 0, 0)$  será governada pelo sinal do numerador do termo  $R\varphi_1(3;1)$ , a saber:

. **Sub-caso 1.1)**

Se  $1 \leq K < 3$  e

$$3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} > 0$$

o termo  $R\varphi_1(3;1) > 0$  e, nessas condições, não haverá nenhuma mudança de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R\varphi_1$

Assim, a equação (6) não terá nenhuma raiz com parte real positiva ou nula e o ponto  $(\varphi_1, 0, 0)$  será hiperbólico e assintoticamente estável, ficando provada a parte (i) da Proposição 9.

. **Sub-caso 1.2)**

Se  $1 \leq K < 3$  e

$$3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} < 0$$

o termo  $R\varphi_1(3;1) < 0$  e, nessas condições, haverá duas mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $R\varphi_1$ .

Assim, a equação (6) terá duas raízes com parte real positiva e o ponto  $(\varphi_1, 0, 0)$  será hiperbólico e instável, ficando provada a parte (iii) da Proposição 9.

. **Sub-caso 1.3)**

Se  $1 \leq K < 3$  e

$$3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} = 0$$

o termo  $R\varphi_1(3;1) = 0$ , implicando que a equação (6) tenha duas raízes imaginárias puras, conjugadas e o ponto  $(\varphi_1, 0, 0)$  será não hiperbólico, ficando provada a parte (ii) da Proposição 9.

— **Caso 2)  $K > 3$**

Neste caso,

$$R\varphi_1(1;1) > 0 ; R\varphi_1(2;1) < 0 \quad \text{e} \quad R\varphi_1(4;1) > 0$$

Assim,

$$\forall (\mu_2, \Omega, K) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times (3, \infty)$$

implica em duas mudanças de sinal nos termos da primeira coluna de  $R\varphi_1$  e, portanto, a equação (6) tem duas raízes com parte real positiva.

Os fatos expostos levam à conclusão, neste caso, que  $(\varphi_1, 0, 0)$  é hiperbólico e instável.

— **Caso 3)**  $K = 3$

A análise deste caso é problemática, pois o termo  $R\varphi_1(2;1)$  se reduz a zero. Entretanto, seguindo procedimento sugerido em [B-11], escolhendo  $\epsilon > 0$  e escrevendo  $\tilde{R}\varphi_1$  como segue:

$$\tilde{R}\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} \\ \frac{\epsilon - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}}{\epsilon} & 0 \\ K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $\epsilon$  é positivo e arbitrariamente pequeno, ocorrerão duas mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna de  $\tilde{R}\varphi_1$  e, portanto, a equação (6) possui duas raízes com parte real positiva.

Do exposto conclui-se que, neste caso,  $(\varphi_1, 0, 0)$  é hiperbólico e instável.

A análise dos Casos 2 e 3 feita acima, demonstra a parte (iv) da Proposição 9, completando a prova.

### Proposição 10

- Para uma PLL de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada com sinais, tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes e  $V_i > 0$ ,  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , o ponto de equilíbrio  $(\varphi_2, 0, 0)$  objeto do Caso 3 da Proposição 8, é instável para qualquer

$$(\mu_2, \Omega, K) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times [1, \infty) \mid \Omega < K\mu_2$$

### Prova

Aproveitando a matriz Jacobiana determinada na Prova da Proposição 9 e especializando para o ponto  $(\varphi_2, 0, 0)$ , verifica-se a estabilidade do ponto em questão através de seus autovalores, segundo o critério estabelecido no Teorema (I.5).

Chamando  $J\varphi_2 = J(\varphi_2, 0, 0)$ :

$$J\varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

$$J\varphi_2 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} & -1 & -[\lambda + (3-K)] \end{bmatrix}$$

Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(\varphi_2, 0, 0)$  fica determinada pela resolução da equação característica:

$$\det (J_{\varphi_2} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} = 0 \quad (7)$$

As raízes da equação (7) serão analisadas, do ponto de vista da estabilidade do equilíbrio do ponto  $(\varphi_2, 0, 0)$ , utilizando o critério de Routh e Hurwitz, conforme o descrito em [B-11].

Construindo a matriz  $R\varphi_2$  para a aplicação do critério em questão:

$$R\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3-K & -K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} \\ \frac{3 - K + K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}}{3 - K} & 0 \\ -K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $R\varphi_2(1;1) = 1$  e, dentro das hipóteses,  $R\varphi_2(4;1) < 0$ , os termos da primeira coluna de  $R\varphi_2$  têm, pelo menos, uma mudança de sinal e, portanto, (7) tem pelo menos uma raiz com parte real positiva.

Assim, o ponto de equilíbrio  $(\varphi_2, 0, 0)$  é instável, o que demonstra a Proposição 10.

## Proposição 11

- Para uma PLL de 3ª ordem, com filtro de Sallen e Key, excitada com sinais, tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$  com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes,  $\Omega \in \mathbf{R}_+$ , e  $V_i > 0$ , o ponto de equilíbrio  $(\pi/2, 0, 0)$ , objeto do Caso 2 da Proposição 8, é não hiperbólico

$$\forall (\mu_2, \Omega, K) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times [1, \infty) \quad \Big| \quad \Omega = K \mu_2$$

## Prova

Aproveitando a matriz Jacobiana determinada na prova da Proposição 9 e especializando para o ponto  $(\pi/2, 0, 0)$ , verifica-se a natureza do ponto em questão, através de seus autovalores, segundo critério estabelecido no Teorema (I.5).

Chamando  $J_{\pi/2} = J(\pi/2, 0, 0)$ :

$$J_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -(3-K) \end{bmatrix}$$

e

$$J_{\pi/2} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -[\lambda + (3-K)] \end{bmatrix}$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $(\pi/2; 0; 0)$  fica determinado pela resolução da equação característica:

$$\det(J_{\pi/2} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda = 0 \quad (8)$$

Como  $\lambda = 0$  é raiz de (8), o ponto  $(\pi/2; 0; 0)$  é não hiperbólico, o que demonstra a Proposição 11.

### Proposição 12

- Para PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, excitadas com sinais, tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes, a faixa de retenção é dada por:

$$i) (\Omega, \mu_2, K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [1, 3) \quad \text{e} \quad \mu_2 \neq 0$$

$$ii) \Omega < K\mu_2$$

$$iii) 3 - K - K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} > 0$$

### Prova

Resulta de maneira imediata das Proposições 8 e 9 e da Definição (II.2).

### Proposição 13

— Com base nas Definições (I.36) e (I.37) e nas Proposições 8, 9, 10 e 11 constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 2, para os pontos de equilíbrio de uma PLL de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, excitada com um sinal do tipo  $\theta_1 = \Omega t + \Phi$ , com  $\Omega$  e  $\Phi$  constantes.

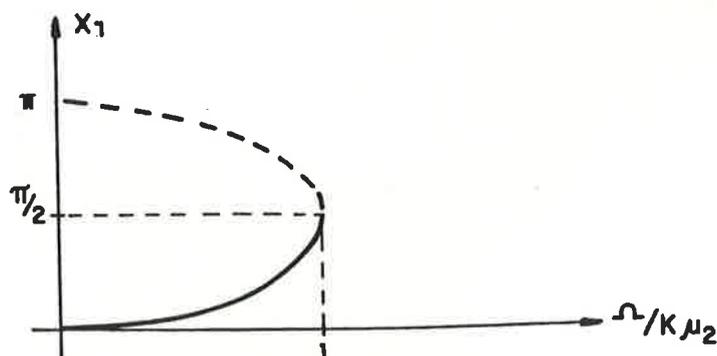


Fig. 2 — Diagrama de bifurcações para os pontos de equilíbrio de uma PLL de 3ª ordem

— para  $\frac{\Omega}{K\mu_2} > 1$ ,  $\nexists$  pontos de equilíbrio

— para  $\frac{\Omega}{K\mu_2} = 1$ ,  $\exists$  um único ponto de equilíbrio

$(\pi/2; 0; 0)$ , não hiperbólico.

— para  $\frac{\Omega}{K\mu_2} < 1$ ,  $\exists$  duas soluções de equilíbrio, uma instável

$(\varphi_2; 0; 0)$  (linha tracejada), e outra  $(\varphi_1; 0; 0)$ , estável ou instável, de acordo com a Proposição 9 (linha cheia).

#### Proposição 14

— De acordo com as Definições (I.36) e (I.37), constrói-se o diagrama de bifurcações da Figura 3, para o ponto de equilíbrio  $(\varphi_1; 0; 0)$ , relativo ao Caso 3 da Proposição 9, para cada  $K \in [1, 3)$ :

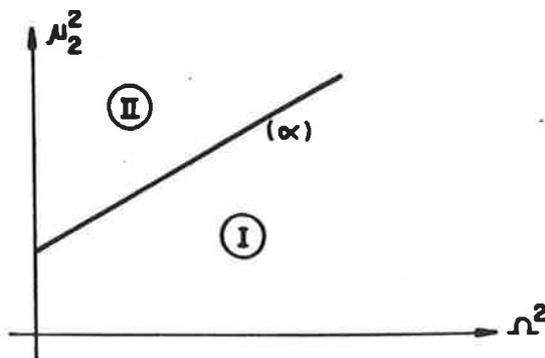


Fig. 3 — Diagrama de bifurcações para o ponto de equilíbrio  $(\varphi_1; 0; 0)$ , de acordo com a Proposição 9

- para os pontos da região **I** do diagrama da Figura 3, o ponto  $(\varphi_1; 0; 0)$  é hiperbólico e assintoticamente estável.
- para os pontos da reta  $(\alpha)$ , o ponto  $(\varphi_1; 0; 0)$  é não hiperbólico.
- para os pontos da região **II**, o ponto  $(\varphi_1; 0; 0)$  é hiperbólico e instável

### Observações

- i) os pontos da reta  $(\alpha)$  satisfazem à equação:

$$\mu_2^2 = \frac{1}{K^2} \Omega^2 + \frac{1}{K^2} (9 - 6K + K^2) \quad (9)$$

- ii) A equação (9) provém do item (ii) da Proposição 9.

## 2.2 Pesquisa de Ciclos Limite

Neste item, pesquisa-se o eventual aparecimento de ciclos limite para PLLs de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key, excitadas por sinais, tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ . Para isso, combinam-se as Proposições 9 e 14, com a versão do Teorema de Hopf, enunciada neste trabalho como Teorema (I.16).

## Proposição 15

— Sejam as seguintes hipóteses a respeito de uma PLL de 3ª ordem, com filtros de Sallen e Key:

H-1) o sistema é descrito pelas equações de estado (II.59)

H-2) a fase do sinal de entrada é dada por:

$$\theta_i = \Omega t + \Phi \quad \text{com} \quad (\Omega, \Phi) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$$

H-3) o sistema autônomo resultante é descrito pelas equações de estado (II.61)

H-4) o parâmetro  $K$  é mantido constante no intervalo  $[1,3)$  e

$$\frac{\Omega}{K\mu_2} < 1$$

Nessas condições, pode-se afirmar que:

T-1) Para  $\mu_2^0$  e  $\Omega_0$  tais que

$$3 - K = K \mu_2^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_0}{K\mu_2^0}\right)^2}$$

com  $\Omega_0$  fixo,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que, quando  $\mu_2$  satisfaz

$|\mu_2 - \mu_2^0| = |\Delta\mu| < \epsilon$ , a PLL de 3ª ordem com filtro de Sallen e Key apresenta um ciclo limite a uma distância de  $O(|\Delta\mu|^{\frac{1}{2}})$  do ponto de equilíbrio  $(\varphi_1, 0, 0)$ .

T-2) o ciclo limite supra referido é estável e tem período  $2\pi + O(\Delta\mu)$ .

### Prova

A prova desta proposição consiste na verificação das hipóteses do Teorema (I.16) — Teorema de Bifurcação de Hopf —, que é feita em seguida.

Para tanto, escreve-se inicialmente a matriz Jacobiana  $J_{\varphi_1}^{\mu_2}$  e seu polinômio característico  $P_{\varphi_1}(\lambda, \mu_2)$ , para o sistema descrito pelas equações de estado (II.61), com  $(x_1, x_2, x_3) = (\varphi_1; 0; 0)$ .

$$J_{\varphi_1}^{\mu_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K\mu_2 & \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} & -1 \\ & & - (3-K) \end{bmatrix}$$

$$P_{\varphi_1}(\lambda, \mu_2) = \lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + K\mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2} \quad (10)$$

i) Verificação da hipótese (I.H-1) do Teorema (I.16)

— Fazendo  $\mu_2 = \mu_2^0$  em (10) e procurando suas raízes:

$$\lambda^3 + (3-K)\lambda^2 + \lambda + (3-K) = 0 \quad (11)$$

Por inspeção verifica-se que (+i) e (-i) são raízes da equação (11).

— Além disso, usando o Teorema (I.17) (Função Implícita):

$$\frac{d}{d\mu_2} \lambda(\mu_2) = - \frac{\frac{\partial P_0}{\partial \mu_2}}{\frac{\partial P_0}{\partial \lambda}} = - \frac{K \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}}{3\lambda^2 + 2(3-K)\lambda + 1}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\mu_2} [\lambda(\mu_2)] \right|_{\mu_2 = \mu_2^0} = - \frac{\frac{(3-K)}{\mu_2^0}}{-3 + 2(3-K)i + 1}$$

$$= \frac{3 - K}{2\mu_2^0} \frac{1}{[1 - (3 - K)i]}$$

e, pertanto:

$$\frac{d}{d\mu_2} \left[ \lambda(\mu_2) \right]_{\mu_2 = \mu_2^0} = \frac{(3 - K)}{2\mu_2^0} \frac{[1 + (3 - K)i]}{[1 + (3 - K)^2]}$$

Logo:

$$\frac{d}{d\mu_2} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \lambda(\mu_2) \right] \right\}_{\mu_2 = \mu_2^0} = \frac{(3 - K)}{2\mu_2^0 [1 + (3 - K)^2]} > 0$$

e

$$\operatorname{Im} \left[ \lambda(\mu_2) \right] = 1 > 0$$

**ii) Verificação da hipótese (I.H-2) do Teorema (I.16)**

Igual a ii) da Proposição 6, pois a equação (4) é idêntica à equação (11).

**iii) Verificação da hipótese (I.H-3) do Teorema (I.16)**

Igual a iii) da Proposição 6, pois

$$K\mu_2^0 \cos \varphi_1 = (3 - K)$$

Assim, como as hipóteses (I.H-1), (I.H-2) e (I.H-3) do Teorema (I.16) estão satisfeitas e como  $\text{Re}[\lambda_3] < 0$  e  $\text{Re}[\psi] < 0$ , a Proposição (15) fica demonstrada.

**Proposição 16**

— Para PLLs de 3ª ordem com filtros de Sallen e Key, excitadas com sinais tais que  $\theta_i = \Omega t + \Phi$ , a faixa de captura é dada por:

$$i) \quad (\Omega, \mu_2, K) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times [1, 3) \quad \text{e} \quad \mu_2 \neq 0$$

$$ii) \quad \Omega < K\mu_2$$

$$iii) \quad (3 - K) > K\mu_2 \quad \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}$$

$$iv) \quad \varphi(0) \in [-\pi, \pi)$$

$$v) \quad \varphi(0) \neq \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{K\mu_2}\right)^2}$$

**Prova** — Resulta de maneira imediata das Proposições (8), (9) e (15) e da Definição (II.3).

## **CAPÍTULO VI**

### **CONCLUSÕES**

- 1.** Resumo dos Resultados
- 2.** Propostas de Trabalhos Futuros

A Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais foi aplicada aos problemas de sincronismo de fase, produzindo alguns resultados originais, de interesse para a engenharia de controle e comunicações.

Na secção 1, tais resultados são catalogados e na secção 2, uma série de trabalhos são propostos a respeito do mesmo tema, visando a continuidade e possíveis extensões das idéias trabalhadas.

## 1. RESUMO DOS RESULTADOS

A Tabela 1 apresenta os resultados de maior interesse obtidos ao longo do trabalho, catalogados por ordem das PLL, tipo de filtro, fase do sinal de entrada e natureza da proposição.

## 2. PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Propõem-se, como extensão deste trabalho, alguns problemas de interesse prático, a saber:

- i) verificação experimental das proposições obtidas no Capítulo III, relativas a pontos de equilíbrio e ciclos limite das malhas de sincronismo de fase de 2ª ordem;
- ii) complementação, por via analítica, numérica ou experimental das Proposições (III.24) e (III.35), relativas aos ciclos limite em malhas de sincronismo de fase de 2ª ordem, com filtros "lag-lead";
- iii) verificação numérica e experimental das Proposições (IV.1), (IV.2), (IV.3) e (IV.4), relativos à modulação em frequência acidental em malhas de sincronismo de fase de 2ª ordem.

- iv) utilização dos expoentes de Liapunov [D-2, Capítulo 8, (Parte 1)], para a caracterização dos atratores caóticos discutidos no Capítulo IV;
  
- v) utilização do Teorema de Ruelle e Takens [Teorema (I.18) da secção (I.8.2)] para, a partir das bifurcações de Hopf tratadas no Capítulo V, estudar a formação de atratores estranhos e caóticos em malhas de sincronismo de fase autônomas de 3ª ordem;
  
- vi) trabalho experimental ou por simulação numérica do efeito da variação do par  $(\mu_2, K)$ , constatando a eventual formação de atratores estranhos e caóticos, em malhas de sincronismo de fase autônomas de 3ª ordem;
  
- vii) modelagem do sistema constituído por dois osciladores remotos, ligados por uma linha de transmissão [C-14] e, usando as ferramentas aqui desenvolvidas, discutir os atratores possíveis, delimitando as diversas regiões dos espaços de parâmetros.

Ordem de PLL	Tipo de Filtro	Fase do Sinal de Entrada	Natureza da Proposição	Relação de Proposições
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \text{constante}$	Pontos de Equilíbrio	(III.1), (III.3), (III.5)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \text{constante}$	Bifurcação do Equilíbrio	(III.2)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \text{constante}$	Ciclos Limite	(III.6)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Pontos de Equilíbrio	(III.8), (III.9), (III.11), (III.12)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Bifurcação do Equilíbrio	(III.10), (III.13)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Ciclos Limite	(III.15)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \Omega t + \phi + A \text{ sen } \omega t$	Caos devido ao "jitter" de Fase	(IV.1), (IV.2)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \text{constante}$	Pontos de Equilíbrio	(III.17), (III.19), (III.21)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \text{constante}$	Bifurcação do Equilíbrio	(III.18)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \text{constante}$	Ciclos Limite	(III.22), (III.23), (III.24)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Pontos de Equilíbrio	(III.26), (III.27), (III.29), (III.30)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Bifurcação do Equilíbrio	(III.28), (III.31)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Ciclos Limite	(III.33), (III.34), (III.35)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \Omega t + \phi + A \text{ sen } \omega t$	Caos devido ao "jitter" de Fase	(IV.3), (IV.4)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \text{constante}$	Faixas de Retenção e Captura	(III.4), (III.7)
2ª	"LAG"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Faixas de Retenção e Captura	(III.14), (IV.16)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \text{constante}$	Faixas de Retenção e Captura	(III.20), (III.25)
2ª	"LAG-LEAD"	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Faixas de Retenção e Captura	(III.32), (III.36)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \text{constante}$	Pontos de Equilíbrio	(V.1), (V.2), (V.3)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \text{constante}$	Bifurcação do Equilíbrio	(V.5)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \text{constante}$	Ciclos Limite	(V.6)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Pontos de Equilíbrio	(V.8), (V.9), (V.10), (V.11)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Bifurcação do Equilíbrio	(V.13), (V.14)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Ciclos Limite	(V.15)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \text{constante}$	Faixas de Retenção e Captura	(V.4), (V.7)
3ª	SALLEN E KEY	$\theta_1 = \Omega t + \phi$	Faixas de Retenção e Captura	(V.12), (V.16)

TABELA 1 — Catalogação dos Resultados do Trabalho

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS****A — Cálculo, Análise e Topologia**

- [ 1 ] COURANT, R. and JOHN, F. "Introduction to Calculus and Analysis". John Wiley and Sons, 1974.
- [ 2 ] PISKOUNOV, N. "Calcul Différentiel et Intégral." Éditions MIR - Moscou, 1969.
- [ 3 ] ALIPRANTIS, C. D. and BURKINSHAW, O. "Principles of Real Analysis". Edward Arnold, 1981.
- [ 4 ] HOFFMAN, K. "Analysis in Euclidian Space". Prentice-Hall, INC., 1975.
- [ 5 ] KOLMOGOROV, A.N. & FOMIN, S.V. "Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional". MIR, 1982.
- [ 6 ] GOLDSTEIN, A. A. "Constructive Real Analysis". Harper and Row, 1967.
- [ 7 ] DIXMIER, J. "General Topology". Springer-Verlag, 1984.
- [ 8 ] HORVÁTH, J. "Introducción a la Topologia General". Secretaria Geral da OEA, 1969.

- [ 9] MARRERO, M.G. & ROIG, J.M. "Topologia". Editora Alhambra S.A., 1975.
- [10] BUTKOV, E. "Física Matemática". Guanabara Dois, 1978.

**B — Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos e Mecânica**

- [ 1 ] PONTRIAGUINE, L. "Équations Différentielles Ordinaires". MIR-Moscou, 1969.
- [ 2 ] HALE, J.K. "Ordinary Differential Equations". Wiley-Interscience, 1969.
- [ 3 ] BIRKHOFF, G. & ROTA, Gian-Carlo. "Ordinary Differential Equations". John Wiley and Sons, 1978.
- [ 4 ] ARNOLD, V.I. "Ordinary Differential Equations". MIT Press, 1973.
- [ 5 ] ARNOLD, V.I. "Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires". Éditions MIR - Moscou, 1980.
- [ 6 ] SOTOMAYOR, J. "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias". IMPA, 1979.
- [ 7 ] MELO, A.A.H. & BARONE JR., M. "Equações Diferenciais - Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos". IME-USP, 1979.
- [ 8 ] HIRSCH, M.W. and SMALE, S. "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra". Academic Press, New York, 1974.
- [ 9 ] PALIS JR., J. & MELO, W. de. "Introdução aos Sistemas Dinâmicos". Editora Edgar Blücher Ltda., 1978.
- [ 10 ] ORSINI, L.Q. "Introdução aos Sistemas Dinâmicos". EPUSP, 1984.

- [11] OGATA, K. "Engenharia de Controle Moderno". Prentice-Hall do Brasil. Rio de Janeiro, 1982.
- [12] PADULO, L. and ARBIB, M.A. "System Theory". W.B. Saunders Company, 1974.
- [13] CHEN, Chi-Tsong. "Linear System Theory and Design". Holt - Saunders International Editions, 1984.
- [14] KAILATH, T. "Linear Systems". Prentice-Hall, INC, 1980.
- [15] VIDYASAGAR, M. "Nonlinear Systems Analysis". Prentice-Hall, INC., 1978.
- [16] GUCKENHEIMER, J. "Toolkit for Nonlinear Dynamics". IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-30, nº 8, August, 1983.
- [17] MEES, A.I. "Dynamics of Feedback Systems". John Wiley & Sons, 1981.
- [18] ANDRONOV, A.A.; VITT, A.A. and KHAIKIN, S.E. "Theory of Oscillators". Addison-Wesley, 1966.
- [19] MIGULIN, V.; MEDVEDEV, V.; MUSTEL, E. and PARYGIN, V. "Basic Theory of Oscillations". Mir Publishers, Moscou, 1983.
- [20] HAGEDORN, P. "Oscilações não Lineares". Editora Edgard Blücher Ltda., 1984.

- [21] BOGOLIUBOV, N.N. and MITROPOLSKY, Y.A. "Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations". Hindustan Publishing Corpn. (Índia) Delhi, 6-1961.
- [22] GOLDSTEIN, H. "Classical Mechanics". Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [23] LANDAU, L. & LIFSHITZ, E. "Mecânica". Hemus Livraria Editora Ltda., 1972.
- [24] LEECH, J.W. "Mecânica Analítica". EDUSP, 1971.
- [25] POINCARÉ, H. "Les Méthodes Nouvelles de La Mécanique Céleste". Dover, 1957.
- [26] ARNOLD, V.I. "Méthodes Mathématiques de La Mécanique Classique". Éditions Mir - Moscou, 1976.
- [27] LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M. "Fluid Mechanics". Course of of Theoretical Physics. Vol. 6. Pergamon International Library, 1984.

**C — Sincronismo de Fase**

- [ 1 ] LINDSEY, W.C. "Synchronization Systems in Communication and Control". Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [ 2 ] GARDNER, F.M. "Phaselock Techniques". John Wiley and Sons, INC., 1979.
- [ 3 ] VAN TREES, H.L. "Detection, Estimation, and Modulation Theory - Part II - Nonlinear Modulation Theory". John Wiley and Sons, INC., 1971.
- [ 4 ] STOLFI, G. "Malha de Sincronismo de Fase". Apostila EPUSP de PEL 429, 1985.
- [ 5 ] FÉRIS, E.B.R. "Phaselock Loop - Teoria e Aplicações". CPqD - Telebrás, 1985.
- [ 6 ] BLINCHIKOFF, H.J. and VAUGHAN, G.R. "All-Pole Phase-Locked Tracking Filters". IEEE Transactions on Communications. Vol. COM-30, nº 10, October, 1982.
- [ 7 ] GREEN, D.N. "Lock-In, Tracking and Acquisition of AGC - Aided Phase-Locked Loops". IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, nº 6, June, 1985.
- [ 8 ] JING, Zhu-Jun. "Application of Qualitative Methods of Differential Equations to Study Phase-Locked Loops". SIAM J. Appl. Math., Vol. 43, nº 6, December, 1983.
- [ 9 ] BENNATON, J.F.; PIQUEIRA, J.R.C. e GONÇALVES NETO, Luís. "Métodos Numéricos Aplicados à Resolução de Problemas de Sincronismo de Fase". Seminário Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia. EESC-USP, 1986.

- [10] ASCHEID, G. and MEYR, H. "Cycle Slips in Phase Locked Loops: A Tutorial Survey". IEEE Transactions on Communications, Vol. COM-30, nº 10, October, 1982.
  
- [11] OSBORNE, H.C. "A Generalized 'Polarity Type' Costas Loop for Tracking MPSK Signals". IEEE Transactions on Communications. Vol. COM-30, nº 10, October, 1982.
  
- [12] HEIMAN, A. and BAR-NESS, Y. "Optimal Design of PLL with Two Separate Phase Detectors". IEEE Transactions on Communications, Vol. COM-29, February, 1981.
  
- [13] LUCKY, R.W.; SALZ, J. and WELDON JR., E.J. "Principles of Data Communication". McGraw-Hill Book Company, 1968.
  
- [14] LINDSEY, W.C. and DESSOUKY, Khaled. "Phase and Frequency Transfer Between Mutually Synchronized Oscillators". IEEE Transactions on Communication, Vol. COM-32, nº 2, February, 1984.

**D — Bifurcações, Turbulência e Caos**

- [ 1 ] IOOSS, G. and JOSEPH, D.D. "Elementary Stability and Bifurcation Theory". Springer-Verlag, New York, INC., 1980.
  
- [ 2 ] BAI-LIN, H. "Chaos". World Scientific Press, 1984.
  
- [ 3 ] SATTINGER, D.H. "Six Lectures on the Transition to Instability". Lecture Notes in Mathematics - 322 - Springer - Verlag - Seattle, 1972.
  
- [ 4 ] GREBOGI, C.; OTT, E.; PELIKAN, S. and YORK, J.A. "Strange Attractors that are Not Chaotic". Physica 13D, 1984, 261-268.
  
- [ 5 ] MEES, A.I. "A Plain Man's Guide to Bifurcations". IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol. CAS-30, nº 8, August, 1983.
  
- [ 6 ] MEL'NIKOV, V.K. "On the Stability of the Center for Time-Periodic Perturbations". Trans. Mosc. Math. Soc. 12:1-57, 1963.
  
- [ 7 ] CHOW, Shui-Nee.; HALE, J.K. and MALLET-PARET, J. "An Example of Bifurcation to Homoclinic Orbits". Journal of Differential Equations 37:351-373, 1980.
  
- [ 8 ] HOLMES, P.J. "Averaging and Chaotic Motions in Forced Oscillations". SIAM - J.Appl.Math., Vol. 38, nº 1, February, 1980.
  
- [ 9 ] CHIRIKOV, B.V. "A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems". Physics Reports 52:(5):263-379, 1979.

- [10] HOLMES, P.J. and MARSDEN, J.E. "Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems". J. Math. Phys., April, 1982.
- [11] HOLMES, P.J. and MARSDEN, J.E. "Horseshoes in Perturbations of Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom". Commun. Math. Phys. 82:523-544, 1982.
- [12] ODYNEC, M. "Josephson - Junction Circuit Analysis Via Integral Manifolds". IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-30, n<sup>o</sup> 5, May, 1983.
- [13] SALAM, F.M.A.; MARSDEN, J.E. and VARAYA, P.P. "Chaos and Arnold Diffusion in Dynamical Systems". IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol. CAS-30, n<sup>o</sup> 9, September, 1983.
- [14] SALAM, F.M.A. and SASTRY, S.S. "Dynamics of the Forced Josephson Junctions Circuit: The Regions of Chaos". IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol. CAS-32, n<sup>o</sup> 8, August, 1985.
- [15] GENCHEV, Z.D.; ZDRAVKO, IVANOV, G. and TODOROV, B.N. "Effect of Periodic Perturbation on Radio Frequency Model of Josephson Junction". IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol. CAS-30, n<sup>o</sup> 9, September, 1983.
- [16] HUBERMAN, B.A.; CRUTCHFIELD, J.P. and PACKARD, N.H. "Noise phenomena in Josephson junctions". Appl. Phys. Lett. 37(8):15, October, 1980.
- [17] PEDERSEN, N.F. and DAVIDSON, A. "Chaos and Noise in Josephson junctions". Appl. Phys. Lett. 39(10), 15<sup>th</sup> November, 1981.
- [18] D'HUMIERS, D.; BEASLEY, M.R.; HUBERMAN, B.A. and LIBCHABER, A. "Chaotic States and routes to chaos in the forced pendulum". Physical Review A. Vol. 26, Number 6, December, 1982.

- [19] FREIRE, E.; FRANQUELO, L.G. and ARACIL, J. "Periodicity and Chaos in an Autonomous Eletronic System". IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vol. CAS-31, nº 3. March, 1984.
- [20] SINAY, L. "Introdução à Teoria das Bifurcações". 7ª Escola de Matemática Aplicada. LCC-CNPq. Rio de Janeiro, Julho, 1985.
- [21] RUELE, D. and TAKENS, F. "On the Nature of Turbulence". Commun. Math. Phys. 20:167-192, 1971.
- [22] BERNFELD, S.R. "A Neighborhood of the Hopf Singularity". Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations, edited by V. Lakshmikanthan - Marcel Dekker, INC., 1984.
- [23] BRUNOVSKY, P. "One - parameter families of diffeomorphisms." Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems. Warwick, 1968-69.
- [24] LANFORD, O.E. "Bifurcation of Periodic Solutions into Invariant Tori: The Work of Ruelle e Takens". Lecture Notes in Mathematics - 322 - Springer - Verlag. Seatle, 1972.

**E — Manuais e Formulários**

- [1] "Handbook of Tables of Mathematics". CRC Press, Inc. Fourth Edition, 1975.
  
- [2] "The CCITT Red Book - Recommendation V. 23" VIII<sup>th</sup> Plenary Assembly. Malaga - Torremolinos, 8-19. October, 1984.
  
- [3] "Manual de Descrição e Manutenção". Modem Elebra DA 1201/1". São Paulo, Setembro, 1985.
  
- [4] VAN VALKENBURG, M.E. "Analog Filter Design". Holt, Rinehart and Wiston, 1982.