

São Paulo
1999



Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo como parte
dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

OBSERVADORES DERIVATIVOS E EXPONENCIAIS NUMA COLUNA DE DESTILAÇÃO BINÁRIA

JOSE HERNANDEZ LOPEZ

São Paulo
1999

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo como parte dos re-
quisitos para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

OBSERVADORES DERIVATIVOS E EXPONENCIAIS NUMA COLUNA DE DESTILAÇÃO BINÁRIA

JOSE HERNÁNDEZ LÓPEZ

Impressão

OBSERVADORES DERIVATIVOS E EXPONENCIAIS NUMA COLUNA DE DESTILAÇÃO BINÁRIA

JOSE HERNÁNDEZ LÓPEZ

19 marzo

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo como parte dos re-
quisitos para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de concentração:

Engenharia de Sistemas

Orientador:

Claudio Garcia

São Paulo
1999

*Aos meus pais Pepe e Adelaida, e a minha
irmã Maura, pelo amor e carinho.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior)

Ao meu orientador Prof. Dr. Claudio Garcia pelos imprescindíveis e valiosas sugestões, pela sua amizade e presença constante.

Contou também com o apoio do Departamento de Física da Universidade do Oriente em Santiago de Cuba e aos meus companheiros de trabalho.

Ao prof. Dr. José Jaime da Cruz pela sua amizade.

Aos Professores Ricardo Paulino Marques ("El sr. MATLAB"), Felipe Miguel Pait, José Roberto Castillo Piquera, Fuad Kassab Júnior, Paulo Sérgio Pereira da Silva e em geral a todos os professores do LAC que muito me ajudaram com seus ensinamentos e conselhos.

A Carmen por sua ajuda na correção do texto.

Aos meus colegas do LAC, em especial a Rosi, Julio, José, Oscar, Pablo, Susett, Frank, Osmel e Vaidya.

Aos meus amigos de Oriente, Igor, Alexander, Oscarito, Daniel e Puro.

Aos meus companheiros de Havana.

Ao Instituto Mineiro Metalúrgico de Moa, em especial a Rafael Trujillo, Angel Co-lumbié e Daniel Guzman ("un gordito ilustre").

A Rosa Lúcia Gomes Garcia e família pelo apoio e carinho.

A minha família pelo carinho, paciência e incentivo, os quais estão sempre presentes em minha vida.

A meu País. Em especial ao povo mais importante de Cuba : Antilla.

Resumo

No presente trabalho realiza-se um estudo do processo de destilação binária em colunas associada ao problema da estimação de seus estados dinâmicos. Se descrevem os principais modelos fenomenológicos de colunas de destilação binárias assim como as aproximações nos que foram construídos. Também se estuda o problema da estimação linear e não-linear para o caso específico dos observadores : filtro de Kalman, filtro de Kalman Estendido. Se constroem dois tipos especiais de observadores para colunas de destilação binárias : Derivativos e Exponenciais tipo filtro Estendido de Kalman. Seu desempenho é avaliado e são feitas comparações dentro os dois. Finalmente, é apresentada a conclusão do trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

Abstract

In this work it is performed a study about the process of binary distillation in columns associated to the problem of estimation of its dynamic states. The main phenomenological models of binary distillation columns are described, as well as the approximations in the ones that were built. It is also studied the problem of linear and non-linear estimation for the specific case of observers: Kalman filter and Extended Kalman filter. Two special types of observers for binary distillation columns are built: Derivatives and Exponential of the kind Extended Kalman filter. Its performance is evaluated and comparisons are made between the two observers. Finally, it is presented the conclusion of the work, besides suggestions for future works.

Sumário

Capítulo 1 - Introdução

1.1	Motivação.....	1
1.2	Justificativa.....	4
1.3	Objetivos.....	5
1.4	Estrutura da dissertação.....	5

Capítulo 2 - Modelagem das Plantas de Destilação Binárias

2.1	A planta.....	6
2.2	Modelos Rigorosos de Colunas.....	7
2.3	Principais Simplificações.....	8
2.3.1	Simplificações na Dinâmica do Vapor.....	8
2.3.1.1	Retenção de vapor assumida como desprezível.....	8
2.3.1.2	Pressão fixa e retenção de vapor desprezada.....	9
2.3.1.3	Pressão fixa mas com retenção incluída.....	9
2.3.2	Simplificações no balanço de energia.....	9
2.3.2.1	Retenção de energia constante.....	9
2.3.2.2	Não se consideram as mudanças na entalpia líquida.....	9
2.3.2.3	Fluxos de vapor ascendentes iguais.....	9
2.3.3	Simplificações na fluidodinâmica da fase líquida.....	10
2.4	Coluna Ideal de Destilação Binária.....	10
2.5	Propriedades Fundamentais dos modelos de Colunas.....	12

Capítulo 3 - O Problema da Estimagaão

3.1	Introdução.....	16
3.2	O Filtro de Kalman.....	19

5.1	Preparação das Simulações	56
5.1.1	A Planta	56
5.1.2	Observadores Derivativos	57
5.1.3	Observador Exponencial	59
5.2	Os Estados da Coluna de Destilação Binária	64
5.3	Observador Derivativo	65
5.3.1	Simulações.....	65
5.3.2	Perturbações	68
5.4	Observador Exponencial	71
5.4.1	Simulações.....	71
5.4.2	Estados Estimados.....	72
5.4.3	Perturbações	75
5.4.4	ZF é uma Constante Desconhecida	78

Capítulo 5 - Implementação e Simulações

4.1	Observadores Derivativos	31
4.2	Observadores Exponenciais	35
4.2.1	Caso Autônomo.....	36
4.2.2	Caso Controlado	38
4.2.3	Sistemas não-lineares MIMO.....	43
4.3	O Observador de F. Viel.....	46
4.4	Aplicações nas Colunas de Destilação Binárias.....	50
4.4.1	ZF é Medido	50
4.4.2	ZF é uma Constante Desconhecida	53

Capítulo 4 - Observadores

3.2.1	O Filtro Discreto de Kalman	20
3.2.2	O Filtro Contínuo de Kalman	23
3.3	Estimção Não-Linear	24
3.3.1	O Filtro Estendido de Kalman.....	24

Capítulo 6 - Considerações finais

6.1	Introdução.....	80
6.2	Contribuições deste trabalho.....	80
6.3	Conclusões.....	81
6.4	Trabalhos Propostos.....	82
	Referências Bibliográficas.....	83

Lista de figuras

Figura 3-1: Processo de estimação.....	17
Figura 4-1: Esquema de retroalimentação dinâmica de estado.....	32
Figura 4-2: Esquema estrutural do observador Derivativo.....	33
Figura 5-1: Esquema da implementação do Modelo da Coluna de Destilação Binária.....	57
Figura 5-2: Esquema de Estimação dos Observadores Derivativos.....	58
Figura 5-3: Esquema do Observador Derivativo nos Pratos 2, 3.....	59
Figura 5-4: Esquema de Perturbações para a Coluna Transformada (L).....	59
Figura 5-5: Os estados da Coluna de Destilação Binária.....	65
Figura 5-6: Erro de observação no segundo prato.....	66
Figura 5-7: Erro de observação no terceiro prato.....	66
Figura 5-8: Erro de observação no quarto prato.....	67
Figura 5-9: Erro de observação no quinto prato.....	68
Figura 5-10: Perturbação no fluxo de vapor (V) : Pratos 1, 2, 3, 4, 5.....	69
Figura 5-11: Perturbação no fluxo de vapor (V): Prato 2.....	69
Figura 5-12: Perturbação no fluxo de vapor (V): Prato 3.....	70
Figura 5-13: Perturbação no fluxo de vapor (V) : Prato 4.....	70
Figura 5-14: Perturbação no fluxo de vapor (V) : Prato 5.....	71
Figura 5-15: Estados após a Transformação Não-linear.....	72
Figura 5-16: Estados estimados, com ruído.....	73
Figura 5-17: Estados estimados, com ruído.....	73

74	Estados estimados, com ruído.....	Figura 5-18:
74	Estados estimados, com ruído.....	Figura 5-19:
75	Estados da coluna, perturbada (minuto 100) no fluxo líquido (L).....	Figura 5-20:
76	Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.....	Figura 5-21:
76	Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.....	Figura 5-22:
77	Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.....	Figura 5-23:
77	Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.....	Figura 5-24:
78	Composição de alimentação (ZF) estimada.....	Figura 5-25:
79	Composição de alimentação (ZF) estimada.....	Figura 5-26:

Lista de Tabelas

Tabela 3-1:	Modelos Lineares Contínuos e Discretos de Planta e Medição	18
Tabela 3-2:	Equações do Filtro Discreto de Kalman.....	23
Tabela 5-1:	Constantes de Simulação.....	64

Lista dos principais Símbolos

α	volatilidade relativa
x_n	composição líquida no n-ésimo prato da coluna
y_n	composição de vapor no n-ésimo prato da coluna
β	constante hidráulica de tempo
M_n	retenção líquida no prato N
L_n	vazão de corrente líquida no prato N
V	vazão de corrente de vapor
x	estado do sistema
u	vetor das entradas
w	vetor das perturbações
y_i	vetor das saídas
U^{A^p}	conjunto das entradas físicas
Ω_x	espaço de estado da coluna
V_0	função de Lyapunov
K_i	matriz de ganho de Kalman
$P^{i(+)}$	matriz de covariância
J_i	função de custo
\hat{x}	estimativa do estado verdadeiro
Σ	sistema
Σ_{Obs}	observador
ϵ	erro
$\ x\ _{R^i}$	norma Euclidiana em R^i

$\ x\ $	norma euclidiana em R^n
θ	parâmetro positivo
r	sistema
Z^c	sistema transformado
B^*	Jacobiano de B
ψ	mudança não-linear de coordenadas
Ξ^{COL}	observador de Viel para a coluna de destilação binária
$\Xi^{ZF\ COL}$	observador de Viel para a coluna de destilação binária estendida

Capítulo I

Introdução

1.1 Motivação

Nos últimos 30 anos tem-se dedicado um grande esforço ao desenvolvimento de técnicas de controle que contribuam para o aumento da produtividade de processos industriais, ao mesmo tempo que façam frente a condições de mercado cada vez mais exigentes e variáveis (Quintero, 1996). As indústrias petroquímicas precisam satisfazer os seguintes critérios de funcionamento (Garcia *et al.*, 1989):

- i) **Segurança e proteção ambiental** : Determinadas variáveis do processo não devem violar limites específicos por razões de segurança do pessoal, dos equipamentos e proteção ambiental.
- ii) **Equipamento** : O sistema de controle não deve levar o processo fora das limitações físicas do equipamento.
- iii) **Qualidade do produto** : As especificações físicas, de composição e qualidade exigidas pelos usuários, devem ser satisfeitas.
- iv) **Econômico** : O objetivo de uma planta industrial é gerar lucro, sem entretanto violar os critérios de segurança e qualidade citados acima.

V) **Monitoração e diagnóstico** : As plantas, além do controle automático, requerem ser monitoradas e diagnosticadas por pessoas. Os sistemas de controle devem facilitar o trabalho do técnico no reconhecimento das falhas e na sua intervenção para levar o funcionamento da planta a níveis aceitáveis de operação.

Com a redução nos custos dos computadores é muito menos custosa a instalação de sistemas de controle computadorizados das plantas de destilação, do que manter equipamentos de controle convencionais. Na atualidade, os sistemas de controle computadorizados são normalmente aceitos pelas indústrias (George and Cornell, 1991).

Sabe-se que até 40% do custo da energia consumida em uma planta química é atribuído ao equipamento de destilação (Weischedel and McAvey, 1980). É a coluna de destilação que quase sempre determina a qualidade dos produtos fabricados pelas indústrias e em muitos casos limita as taxas dos processos de produção. Um melhor desempenho no controle de destilação pode representar grandes ganhos econômicos para a indústria química. Os maiores desses ganhos são (Gokhale *et al.*, 1994):

- i) Redução no consumo da energia.
- ii) Redução na variabilidade do produto.
- iii) Aumento das taxas de processamento.

Também se sabe que o controle de uma coluna de destilação é um campo muito complexo pelas seguintes características (Gokhale *et al.*, 1994):

- i) A não-linearidade da dinâmica das colunas de destilação.
- ii) Variações nos ganhos do processo devido às mudanças nas condições de operação.
- iii) Grandes variações na vazão do fluxo de alimentação e na composição de seus componentes.

Independentemente das dificuldades antes mencionadas, as colunas de destilação constituem um dos processos tecnológicos da indústria química que mais tem sido estudado, particularmente em relação ao controle das composições que se obtêm ao final do processo. Quando se projetam estes controladores se perseguem fundamentalmente dois objetivos:

- i) Manter a qualidade dos produtos das colunas nos seus respectivos valores de referência, inclusive ante a presença de perturbações.
- ii) Os algoritmos de controle têm que ser capazes de executar modificações nos valores de referência e conduzir a coluna a novos valores com um razoável comportamento transitório.

As exigências de desempenho (i, ii) para o controlador se conhecem como 'Disturbance rejection' e 'Set point tracking'.

Para lograr os objetivos de desempenho citados anteriormente, a comunidade de controle tem implementado diversas filosofias de controle aplicadas às colunas de destilação. Poderíamos mencionar as mais significativas : **Single loop control** (Balchen, 1990), **Robust control** (Skogestad and Lundstrom, 1990; Sandelin *et al.*, 1991), **Multivariable Control** (Viel *et al.*, 1997; Patwardhan and Edgar, 1991), **Non linear control** (Park *et al.*, 1996; Castro *et al.*, 1990; Levine and Rouchon, 1991) e **Controle adaptativo** (Kim *et al.*, 1989; Wainet *et al.*, 1991) entre outros. Estes artigos representam uma amostragem das diferentes direções em que nesta década se tentou abordar os problemas associados ao controle das colunas de destilação mencionados anteriormente. A nós em particular nos chamou a atenção os trabalhos dos professores Viel *et al.*, (1997), e Castro *et al.*, (1990). Nestes trabalhos se propõem solucionar o controle de uma coluna de destilação binária empregando duas técnicas não-lineares de natureza diferente : " a non-linear feedback controller using Liapunov functions" (Viel *et al.*, 1997) e " non-linear disturbance decoupling control" (Castro *et al.*, 1990). Quando estudamos detalhadamente ambos enfoques percebemos que, apesar dos algoritmos de controle se sustentarem em

Fundamentos teóricos distintos entre si, precisavam em suas etapas de cálculo dos estados que em nenhum dos casos estava disponível: isto equivale a dizer que estas técnicas de controle não seriam realidade sem a presença, entre seus componentes estruturais, dos observadores.

Até agora não encontramos na literatura um estudo dos observadores usados por (Castro et al; 1990) e por (Viet et al; 1997) no que se refere à eficiência dos mesmos reproduzirem os estados que o controle precisa. Cremos que nosso estudo permitirá ter uma idéia mais exata do desempenho destes algoritmos, como componentes e etapas indispensáveis no processo de controle das colunas de destilação binárias.

1.2 Justificativa

É muito importante estabelecer uma ponte entre os resultados puramente teóricos que condicionam a síntese dos observadores investigados, e o processo da implementação computacional dos mesmos. Nosso plano de pesquisa busca avaliar as qualidades de desempenho de dois observadores construídos na última década: o mais antigo (Castro *et al.*, 1989) o batizamos como derivativo, devido a sua estrutura funcional; enquanto que o mais recente (Viet *et al.*, 1997) já é conhecido como observador exponencial.

Podemos ainda agregar a afirmação de S. Skogestad, (1997): “Distillation is probably the most studied unit operation in terms of control. However, most papers use distillation as an example to study their control algorithm, and do not really consider the best way to control a given distillation column..... Because of these issues there still are a lot of issues which need to be studied further within the area of distillation control”.

Espera-se que este trabalho contribua na compreensão das dificuldades no difícil caminho da estimação dos estados dos modelos não-lineares que reproduzam o comportamento das colunas de destilação binárias.

1.3 Objetivos

O objetivo que nosso trabalho se propõe a atingir é :

Estudar a fundamentação teórica e a metodologia de projeto dos observadores derivativos e exponenciais para colunas de destilação binárias, assim como implementar as realizações numéricas destes observadores e o modelo da planta de destilação binária.

1.4 Estrutura da dissertação

Nosso trabalho está dividido em seis capítulos, os quais são descritos sumariamente a seguir :

- i) **Capítulo 1** - Nele explicamos a motivação que nos levou a fazer este estudo, assim como a justificativa e importância que acreditamos terem o mesmo.
- ii) **Capítulo 2** - Neste capítulo descrevemos as diferentes aproximações que constituem hoje os modelos físico-matemáticos mais importantes de colunas de destilação binárias, assim como suas propriedades fundamentais.
- iii) **Capítulo 3** - Aqui falamos do problema da estimação linear e não-linear, tomamos especial atenção no filtro de Kalman e no filtro estendido de Kalman.
- iv) **Capítulo 4** - Neste capítulo são descritos os observadores derivativos e exponenciais para colunas de destilação binárias; escrevemos suas versões para um tipo particular de coluna.
- v) **Capítulo 5** - Neste capítulo explicamos como conseguimos implementar estes observadores e a coluna no computador, e mostramos resultados de interesse nas simulações.
- vi) **Capítulo 6** - Aqui falamos das contribuições do trabalho e fazemos as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelagem das Plantas de Destilação Binárias

2.1 A planta

O primeiro passo em nosso trabalho foi realizar uma revisão bibliográfica sobre os modelos matemáticos existentes para colunas de destilação binárias, pretendendo em uma primeira etapa compreender tanto a dinâmica destas plantas como definir nossa proposta de planta. Descobrimos primeiramente que avançou-se bastante na modelagem das colunas, a ponto de se ter atualmente um conjunto amplo de modelos, podendo-se escolhê-los em função do grau de aproximação desejado (Skogestad, 1997). Além disso, existem duas grandes tendências na abordagem dos problemas de controle em colunas : a primeira é a busca de controladores cada vez mais sofisticados, cuja prova de eficiência se realiza com as plantas de maior simplicidade; a outra direção é aumentar ao máximo o grau de fidelidade da planta, com relação às condições de operação e, por técnicas menos sofisticadas, tentar o controle. Existe uma grande diversidade de aproximações na hora de fazer com que os modelos teóricos rigorosos de colunas sejam levados ao processo da

simulação computacional, o que se traduz em uma extraordinária variedade de modelos físico-matemáticos disponíveis e estudados pela comunidade científica.

2.2 Modelos Rigorosos de Colunas

O termo **modelo rigoroso** de uma coluna de destilação usualmente refere-se a um modelo de etapas que inclui balanços de energia e massa em cada uma delas; inclui um modelo de fluidodinâmica líquida (mudanças nas retenções líquidas), e leva ainda em conta um modelo dinâmico da pressão. Pode ainda conter modelos para condensador e retervedor. Porém, em tais modelos rigorosos tem-se incluído um grande número de simplificações. Por exemplo, consideram-se as duas fases misturadas perfeitamente em todas as etapas, assim como um equilíbrio térmico e termodinâmico entre elas. Nestas condições bem gerais para as colunas deduzem-se os modelos conhecidos como rigorosos (Skogestad, 1997). Em cada etapa as equações diferenciais podem ser formuladas da seguinte forma:

Balanco Material de Componentes (Dinâmica de Composição):

$$\frac{dN_i}{dt} = L_{i+1} \cdot x_{i+1} + V_{i-1} \cdot y_{i-1} - L_i \cdot x_i - V_i \cdot y_i \quad (2.1)$$

onde: $N_i = M^{L_i} x_i + M^{V_i} y_i$

Balanco de Material (Fluidodinâmica):

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{d}{dt}(M^{L_i} + M^{V_i}) = L_{i+1} + V_{i-1} - L_i - V_i \quad (2.2)$$

onde:

M^{L_i} é a retenção do líquido no prato i ;

M^{V_i} é a retenção do vapor no prato i ;

L_i é a vazão de corrente líquida no prato i ;

V_i é a vazão de corrente de vapor no prato i ;

Balanco de Energia :

$$\frac{dU_i}{dt} = L_{i+1}^{L_i} \cdot h_{L_i, i+1} + V_{i-1}^{L_i} \cdot h_{V, i-1} - L_i^{L_i} \cdot h_{L_i} - V_i^{L_i} \cdot h_{V_i} \quad (2.3)$$

onde : $U_i = M_{L_i}^{L_i} u_{L_i} + M_{V_i}^{L_i} u_{V_i}$

u_{L_i} é a energia da fase líquida.

u_{V_i} é a energia da fase de vapor.

Em adição existem relações algébricas para a hidráulica dos pratos e para a queda de pressão :

$$L_i = f^1(M_{L_i}^{L_i}, V_i, \Delta p_i) \quad (2.4)$$

$$V_i = f^2(M_{L_i}^{L_i}, \Delta p_i) \quad (2.5)$$

e equações algébricas termodinâmicas para o equilíbrio de líquido-vapor entre as fases em cada etapa. Estes detalhes podem ser encontrados em (Gani et al, 1986; Ruiz e Gani, 1986; Lockett, 1986).

2.3 Principais Simplificações

Segundo S. Skogestad até o ano de 1997 não se havia reportado na literatura uma solução numérica de algum modelo rigoroso. De modo que o mais comum é encontrar simplificações ou aproximações que tornem estes modelos tratáveis do ponto de vista da implementação.

2.3.1 Simplificações na Dinâmica do Vapor

2.3.1.1 Retenção de vapor assumida como desprezível

Usualmente a retenção na fase de vapor é desprezada $M_{V_i}^{L_i} = 0$. Esta aproximação é válida quando a retenção da fase de vapor é desprezível perante a fase líquida; mas a aproximação pode ser inadequada para colunas com alta pressão e para separações onde a densidade do líquido obtida seja baixa (Kinoshita, 1986). É recomendado incluir a retenção de vapor (Choe e Luyben, 1987) quando ela é aproximadamente 20% maior do que a retenção da fase líquida. Comumente, o volume de vapor é 10 vezes maior do que o volume líquido. Quando não se leva em conta a retenção de vapor, isso implica que a mudança no fluxo de vapor numa parte extrema da coluna vai influir instantaneamente em qualquer outra, por mais distante que ela se encontre; o que não é verdade na prática

industrial.

2.3.1.2 Pressão fixa e retenção de vapor desprezada

Esta é uma aproximação muito comum e é justificada porque a pressão nos processos de destilação na indústria é controlada com extremo cuidado. Como a pressão é conhecida, então temos uma incógnita a menos no sistema de equações; mas de qualquer forma, o número de equações diferenciais ordinárias (EDO) se mantém o mesmo.

2.3.1.3 Pressão fixa mas com retenção incluída

Esta aproximação corresponde a admitir a retenção de vapor, M_V , constante (Choe e Luyben, 1987).

2.3.2 Simplificações no balanço de energia

Ao tratar as equações de energia sempre se despreza a retenção de vapor: $M_V = 0$; e usa-se a aproximação $h^{Li} \approx u^{Li}$, que funciona para líquidos. Então a parte esquerda da equação do balanço de energia transforma-se:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d(M_i h^{Li})}{dt} = M_i \cdot \frac{dh^{Li}}{dt} + h^{Li} \cdot \frac{dM_i}{dt} \quad (2.6)$$

2.3.2.1 Retenção de energia constante

A retenção de energia constante, $\frac{dU_i}{dt} = 0$, é comumente usada porque conduz diretamente a um balanço algébrico de energia. No entanto, esta aproximação é falsa quando h^{Li} ou $\frac{dM_i}{dt}$ não são idênticamente iguais a zero, e portanto não deve ser usada, pois pode conduzir a grandes erros (arbitrários) no balanço de energia (Skogestad, 1997).

2.3.2.2 Não se consideram as mudanças na entalpia líquida

Esta simplificação, $\frac{dh^{Li}}{dt} \approx 0$, conduz a um balanço algébrico da energia (Berber e Karadurmus, 1989). Só para casos com capacidades de calor muito diferentes dos componentes, com grandes calores de mistura, ou com mudanças bruscas na pressão da coluna, esta simplificação não funciona bem.

2.3.2.3 Fluxos de vapor ascendentes iguais

O balanço de energia pode ser mais simplificado ao assumir-se que $h^{Li} = 0$ em todas as etapas. O balanço de energia transforma-se em (Skogestad, 1997):

$$0 = V^{i-1} (h_{V^{i-1}} - h^L) - V^i (h_{V^i} - h^L) \quad (2.7)$$

Este é o comumente usado 'equimolar overflow' ou 'constant molar flows'. Esta simplificação deriva-se ao assumir que os componentes possuem o mesmo calor de vaporização h_{vap} (Skogestad, 1997). Então $h_{V_i} = h_{vap}$ e os balanços de energia e material transformam-se em :

$$V_i = V_{i-1} \quad (2.8)$$

$$\frac{dM_{L_i}}{dt} = L_{i+1} - L_i \quad (2.9)$$

Isto equivale a dizer que o fluxo de vapor ascendente na coluna é igual em todos os pratos (com exceção dos lugares que têm alimentação de vapor ou extração do vapor). No estado estacionário tem-se que $L_i = L_{i+1}$; mas dinamicamente eles não são iguais porque a retenção líquida, M_{L_i} , varia. Devemos destacar que esta aproximação se conhece na literatura através da sigla CMO (Constant Molar Overflow).

2.3.3 Simplificações na fluidodinâmica da fase líquida

A mais comum simplificação é considerar constante a retenção líquida, $\frac{dM_{L_i}}{dt} = 0$. Esta aproximação é usada com bastante regularidade na prática da simulação de colunas, e é parcialmente justificada pelo fato de que a dinâmica da composição é muito mais lenta do que a dinâmica do fluido líquido na coluna; e poucas vezes afetada por esta última (Levy et al, 1969). Também é geralmente aceita uma linearização da dinâmica líquida; sempre que o propósito seja o controle por realimentação (Rademarker et al, 1975).

2.4 Coluna Ideal de Destilação Binária

O modelamento de uma coluna de destilação baseia-se no balanço de massa por componente, de energia, de quantidade de movimento, de relações de equilíbrio ou de transferência de massa, cálculo de propriedades, relações hidroquímicas, equações de cinética de reação quando existem reações químicas (Quintero, 1996). Visto que grande parte destas equações é não-linear o modelo completo será não-linear.

Em uma coluna de destilação binária a mistura líquida de alimentação é introduzida na torre de destilação que se encontra a menor pressão; como resultado da maior temperatura e menor pressão na torre, o material forma duas correntes com direções opostas : uma corrente de fase vapor e uma corrente de fase líquida. A composição dessas correntes pode

ser determinada através de relações de equilíbrio, estudadas e conhecidas experimentalmente. Ambas correntes saem da torre para ser processadas de novo, o vapor sai pelo topo em direção ao condensador e o líquido sai pelo fundo.

As seguintes considerações são feitas para o desenvolvimento do modelo matemático da coluna de destilação binária :

- i) não ha reações químicas;
- ii) uma única alimentação sem retiradas laterais;
- iii) misturas ideais;
- iv) coluna adiabática;
- v) retenção da fase de vapor inexistente (a dinâmica é muito rápida).

Neste modelo simplificado da coluna de destilação binária assume-se a volatilidade relativa constante através da coluna e além disso, consideram-se pratos 100% eficientes : o vapor está em equilíbrio com a fase líquida no prato. Isso significa que podemos usar a relação simples de equilíbrio vapor-líquido:

$$y_n = \frac{\alpha \cdot x_n}{1 + (\alpha - 1) \cdot x_n} \quad (2.10)$$

onde:

x_n = composição líquida no n-ésimo prato (fração molar do componente mais volátil)

y_n = composição de vapor no n-ésimo prato (fração molar do componente mais volátil)

α = volatilidade relativa

Com estas simplificações podemos escrever as equações que descrevem a coluna de destilação binária (Luyben, 1989).

$$\frac{dM_n}{dt} = L_{n+1} - L_n \quad (2.11)$$

$$\frac{d(M_n \cdot x_n)}{dt} = L_{n+1} \cdot x_{n+1} \cdot V + L_n \cdot \gamma_n \cdot x_n - V \cdot \gamma_n \cdot y_n \quad (2.12)$$

$$y_n = \frac{\alpha \cdot x_n}{1 + (\alpha - 1) \cdot x_n} \quad (2.13)$$

(2.14)

$$L_n = \bar{L}_n + \frac{M_n - \bar{M}_n}{\beta}$$

onde:

 M_n é a retenção líquida no prato N L_n é a vazão de corrente líquida no prato N V é a vazão de corrente de vapor (constante e igual em cada prato) \bar{M}_n é o valor de retenção líquida que fixa o ponto de operação no prato N \bar{L}_n é o valor da corrente líquida que fixa o ponto de operação da coluna no prato N

Este modelo matemático possui duas equações diferenciais ordinárias em cada prato e duas equações algébricas por prato (a relação de equilíbrio vapor-líquido e a relação líquida-hidráulica). O parâmetro β é uma constante hidráulica de tempo, aproximadamente 3 s em cada prato.

O modelo, adotado por Luyben (1989) considera a dinâmica das retenções líquidas nos pratos da coluna, através da equação linear que relaciona o nível com as entradas de corrente líquida nos pratos. Quando se considera a mesma fluidodinâmica em cada prato, significa que se supõe que os níveis de líquido permanecem constantes e com magnitudes iguais, correspondendo então ao modelo mais simplificado de coluna que se pode obter (Castro et al, 1991; Viel et al, 1997). Portanto o modelo de Luyben é o sucessor natural, com respeito à complexidade, do modelo de Castro e Viel. É oportuno ressaltar que o modelo de Luyben, apesar de encontrar-se entre os modelos mais simples de colunas de destilação binárias, mantém-se inexplorado com relação aos algoritmos observáveis que são estudados neste trabalho.

2.5 Propriedades Fundamentais dos modelos de Colunas

Neste trabalho participaram três tipos de plantas muito estudadas nos últimos anos. A primeira (Castro et al, 1990; Takamatsu et al, 1979) conduz a um modelo matemático que

leva em conta apenas o balanço do material (concentrações) nas diferentes etapas da coluna, com uma configuração (MIMO) de duas entradas, duas saídas e duas perturbações. A segunda (Park and D. Odloak, 1996) é uma planta (MIMO) com quatro entradas, quatro saídas e quatro perturbações, que inclui, além do balanço de material, pressão variável entre as etapas, balanços de retenção de líquidos ('holdup') e balanços de entalpia, o que se traduz em um incremento na complexidade da dinâmica. A terceira planta (MIMO) (Viel et al, 1997) é uma configuração similar à de Castro, só que o coeficiente de volatilidade relativa é constante ao longo de toda a coluna. Na primeira planta considera-se que o coeficiente de volatilidade relativa é constante em cada prato, mas varia de prato a prato. De modo que a terceira é a mais simples das três.

Devido a sua simplicidade, optou-se por trabalhar com a planta menos complexa à nossa disposição, a qual é conhecida na literatura como CMO.

Os modelos não-lineares das plantas mencionadas anteriormente podem ser escritos de modo geral da seguinte forma :

$$x = \phi(x, u, w)$$

onde x é o estado do sistema, u é o vetor das entradas e w são as perturbações. Os principais modelos de colunas de destilação binárias possuem uma estrutura específica para a função vetorial $\phi(x, u, w)$.

$$\phi(x, u, w) = f(x) + \sum_{m=1}^p g^m(x) \cdot u^m + \sum_{j=1}^d p^j(x) \cdot w^j \quad (2.15)$$

com as condições iniciais :

$$x_0 = x(0)$$

e as saídas $y^j = h^j(x)$, de modo que ($i=1, 2, \dots, m$) e ($j=1, 2, \dots, d$).

Neste modelo geral o estado possui n componentes $x \in U$ e U é um subconjunto aberto de R^n . Também temos m entradas $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ e d componentes das perturbações

w_1, w_2, \dots, w_p . Há m componentes das saídas, y_1, y_2, \dots, y_m . Todas estas funções são reais.

É importante destacar que nas plantas (Viel et al, 1997; Castro et al, 1990) que só contém balanço de material, seu modelo geral possui a propriedade $f(x) = 0$; ao passo que a inclusão de equações para o balanço de entalpia e retenção de líquidos (holdup), assim como considerar a pressão variável, leva a que $f(x) \neq 0$ (Park and Odloak, 1996). Quando levamos o modelo geral ao caso CMO obtemos o modelo mais simples de coluna para balanço de material :

$$x = \phi(x, u, w) = \tilde{g}(x, w) + g_1(x) \cdot L + \tilde{g}_2(x) \cdot V \quad (2.16)$$

Neste caso, se observarmos a expressão geral, vemos que como $f(x) = 0$ resulta:

$$\tilde{g}(x, w) = \sum_p^{j=1} \tilde{d}_j(x) \cdot w_j \quad (2.17)$$

Então finalmente, podemos escrever o sistema como (Viel et al, 1997):

$$x = \tilde{g}_1(x) \cdot L + \tilde{g}_2(x) \cdot V + \sum_p^{j=1} \tilde{d}_j(x) \cdot w_j \quad (2.18)$$

Aqui as variáveis de controle são a vazão de refluxo L e a vazão de vapor V . Os distúrbios são w_1 (vazão de alimentação) e w_2 (composição da alimentação). Então a planta possui duas entradas, (L e V), e duas saídas :

$$y = h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e duas perturbações } w_1, w_2 \cdot$$

O conjunto das entradas físicas define-se (Deza et al, 1992) como :

$$U^{Ad} = \{u = (L, V) : \infty > L > \lambda > 0, \infty > V - L > \phi > 0\}$$

onde λ e ϕ são constantes arbitrariamente positivas; por razões físicas consideramos que :

$$w_1 > V - L$$

O que significa que as quantidades w_1, V, L são tomadas positivas com limites arbitrariamente pequenos (Deza et al, 1992). O vetor das entradas da coluna :

$$u = (L, V) \in U^{Ad} \text{ é dado.}$$

É importante ressaltar as seguintes propriedades do modelo em malha aberta:

Propriedade 1: Se as entradas pertencem ao conjunto U^{Ad} , então o estado da coluna que representamos :

$$\Omega_x = [0,1]^n$$

é invariante com relação à dinâmica do modelo, o que significa que qualquer trajetória que comece neste hiper-cubo n -dimensional compacto mantém-se nele para tempos positivos. A demonstração encontra-se em (Viel et al, 1997).

Propriedade 2: O modelo é assintoticamente estável para valores suficientemente grandes de tempo. Podemos usar Ω_x para representar nosso conjunto invariante no x -espaço. Então existe um ponto único $x^* \in \Omega_x$, conhecido como ponto de equilíbrio, que satisfaz : $\phi(x^*, u, w) = 0$.

É demonstrado (Rosenbrock, 1962) que a função :

$$V_0(x, u, w) = \sum_{k=1}^n |\phi^k(x, u, w)| \quad (2.19)$$

é a função de Lyapunov no Ω_x : o que significa que V_0 é uma matriz positiva definida (Rouche et al, 1977) e sua derivada a direita através de qualquer trajetória é negativa ou nula. A função $V_0(x, u, w)$ é contínua e Lipschitz no Ω_x , mas não é diferenciável (Viel et al, 1997). Este importante resultado se deve a (Rosenbrock, 1962).

Propriedade 3: É possível reconstruir formalmente os estados da coluna de destilação binária tendo as saídas y_1, y_2 e suas derivadas. Essa propriedade aplica-se sempre que seja possível medir a composição da alimentação (ZF) e as entradas da coluna. Esta propriedade é equivalente a dizer que o modelo é observável para qualquer entrada $u \in U^{Ad}$ e para cada saída y_1, y_2 . O caso mais interessante e difícil é considerar ZF como uma constante desconhecida. Em tal caso podemos expressar x e ZF como funções de x_1, x_n , de suas derivadas e das entradas $u \in U^{Ad}$. Então quando ZF não é medido o estado estendido (x, ZF) é também observável. Os detalhes das demonstrações destes resultados podem ser encontrados em (Deza et al, 1992; Deza et al, 1993).

Capítulo 3

O Problema da Estimação

3.1 Introdução

A estimação é o processo de determinação do valor de uma quantidade de interesse, usando para isso observações indiretas, inexatas e imprecisas. São muito numerosas as linhas de investigação que conduzem a problemas de estimação. Para exemplificar mencionamos algumas :

- i) Determinação das órbitas planetárias (provavelmente foi o primeiro problema de estimação, estudado por Laplace, Legendre e Gauss).
- ii) Controle de uma planta em presença de ruído com parâmetros desconhecidos (identificação de parâmetros e controle estocástico).
- iii) Determinação dos parâmetros do modelo para a predição do estado de um sistema físico, econômico ou de outra área.

Falando mais rigorosamente, a estimação pode ser vista como o processo de seleção de um ponto especial a partir de um espaço contínuo. Para a Teoria de Controle o conceito de filtragem significa estimar o estado atual de um sistema dinâmico. O termo filtro é usado também no sentido de eliminação de um sinal indesejado do sinal principal, que nor-

malmente é o ruído. Em sistemas de controle os sinais são filtrados para obter uma estimativa do estado do sistema dinâmico, necessária para o controlador.

Um estimador ótimo é um algoritmo computacional que processa as observações (medições) para oferecer uma estimação da variável de interesse, otimizando um determinado critério definido. De modo geral podemos classificar as variáveis a estimar nas seguintes categorias :

- i) Um parâmetro : correspondente a uma quantidade invariante no tempo (escalar, vetor ou matriz).
- ii) O estado de um sistema dinâmico (usualmente um vetor).

Se a representamos num diagrama de blocos, a visão matemática do processo de estimação resulta na seguinte disposição :

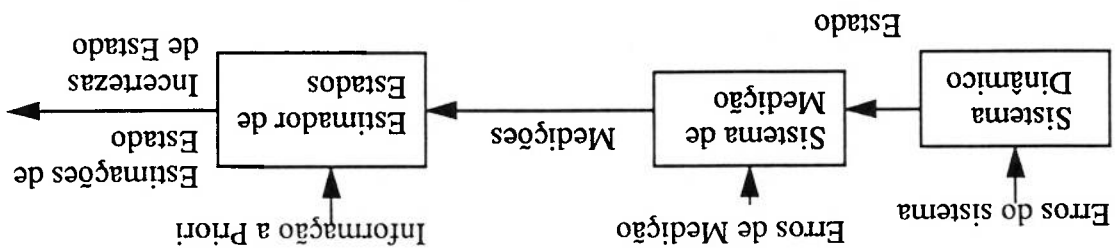


Figura 3-1: Processo de estimação

Nesta figura, os dois primeiros blocos são “caixas pretas” pois não houve acesso às variáveis dentro deles. O estimador só tem acesso às medições, as quais são afetadas pelos tipos distintos de erros em forma de ruído. O estimador usa os seguintes conhecimentos:

- i) A evolução das variáveis da dinâmica do sistema.
- ii) A caracterização probabilística dos fatores aleatórios que intervêm no processo (perturbações).
- iii) Informação a priori.

Os estimadores ótimos têm a vantagem de fazer uma melhor utilização dos dados e do conhecimento do sistema. A desvantagem principal, como em qualquer outra técnica ótima, é a possível sensibilidade com relação a erros de modelagem. Outra desvantagem é que podem ser excessivamente custosos sob o ponto de vista computacional.

Esta classe especial de filtros aparece como resultado da estimação do vetor de estados a partir das medições de dados alterados pelo ruído. Os estimadores ótimos que minimizam um erro de estimação, em um sentido estatístico definido, são de particular interesse. Su-pomos sistemas estocásticos que podem representar plantas e instrumentos de medição, para o caso contínuo e discreto, mostrados na tabela 3.1.

Modelos	Tempo Contínuo	Tempo Discreto
Planta	$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + w(t)$	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1}$
Medições	$z(t) = H(t)x(t) + v(t)$	$z_k = H_k x_k + v_k$
Ruído na Planta	$E\langle w(t) \rangle = 0$ $E\langle w(t)w^T(s) \rangle = \delta(t-s)Q(t)$	$E\langle w_k \rangle = 0$ $E\langle w_k w_k^T \rangle = \Delta(k-k)Q_k$
Ruído na Observações	$E\langle v(t) \rangle = 0$ $E\langle v(t)v^T(s) \rangle = \delta(t-s)R(t)$	$E\langle v_k \rangle = 0$ $E\langle v_k v_k^T \rangle = \Delta(k-k)R_k$

Tabela 3-1: Modelos Lineares Contínuos e Discretos de Planta e Medição

Os símbolos $\delta(t-s)$ e $\Delta(k-l)$ são a função generalizada delta de Dirac e o delta de Kro-necker, respectivamente. O ruído nas medições $v(t)$ e na planta $w(t)$ são assumidos como seqüências gaussianas com média nula; além disso estas seqüências de ruído são assumi-das como não correlacionadas.

O objetivo é encontrar uma estimativa dos n estados do vetor x_k , representada por \hat{x}_k , uma função linear das medições z_1, \dots, z_k , que minimiza o seguinte erro com peso:

$$(3.1) \quad E[x_k - \hat{x}_k]^T M [x_k - \hat{x}_k]$$

onde M é uma matriz simétrica positiva definida.

A solução do problema proposto é a forma matemática de um estimador linear ótimo para sistemas estocásticos, que se conhece como 'Linear quadratic Gaussian' (LQG). O sistema dinâmico é linear, a função de custo é quadrática e o processo aleatório é gaussiano.

3.2 O Filtro de Kalman

Antes de chegar ao filtro de Kalman devemos definir o importante conceito de filtro recursivo : um filtro que não possui a necessidade de armazenar as medições anteriores com o propósito de computar as estimações presentes. Consideremos um sistema discreto cujo estado no tempo t_k seja designado por $x(t_k)$, onde w_k é uma sequência de ruído gaussiano com média nula e covariância Q_k , então esse sistema pode ser representado por :

$$x(t_k) = \Phi_{k-1} x_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.2)$$

As medições são tomadas como combinações lineares das variáveis de estado do sistema, corrompidas por ruído não-correlacionado. Estas equações de medição, escritas em notação vetorial, podem ser escritas como:

$$z_k = H^k x_k + v_k \quad (3.3)$$

onde v_k é uma sequência de ruído com as mesmas propriedades que w_k e covariância R_k . O vetor z_k é um conjunto de l -medições no tempo t_k , com a seguinte representação na forma vetorial:

$$z_k = \begin{bmatrix} z_{1k} \\ z_{2k} \\ \vdots \\ z_{lk} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

H^k é a matriz de medição no tempo t_k ; ela descreve as combinações lineares das variáveis de estado que geram z_k na ausência de ruído. A matriz de medição possui dimensão $l \times n$, correspondente às l -medições dos n -estados. Dado um vetor estimado de estado do sistema no tempo t_k , denotado por $\hat{x}_k(-)$, agora podemos melhorar essa estimativa, a posteriori, $\hat{x}_k(+)$ usando para isso as medições z_k . Para evitar o crescimento da memória do filtro essa estimativa é construída de forma linear e recursiva :

$$\hat{x}_k(+) = K^k z_k + K'^k \hat{x}_k(-) \quad (3.5)$$

onde K'^k e K^k são matrizes de ponderação variantes no tempo que ainda não foram especificadas. Foi construído um filtro recursivo linear de etapa simples, com isso resol-

vemos um problema geral. Se w_k e v_k são gaussianos, então o filtro que encontramos é ótimo e de multi-estágio. Em outros casos simplesmente temos um filtro ótimo linear recursivo.

3.2.1 O Filtro Discreto de Kalman

É possível otimizar a forma do estimador linear proposto na equação (3.5) e obter um filtro de Kalman discreto. Sabemos que os erros de estimação definem-se como :

$$\tilde{x}_k(+)=\hat{x}_k(+)-x_k \quad (3.6)$$

$$\tilde{x}_k(-)=\hat{x}_k(-)-x_k \quad (3.7)$$

onde os símbolos $+$ e $-$ significam duas etapas de cálculo 'a posteriori' e 'a priori' no algoritmo de estimação. Se combinamos a forma recursiva do estimador linear com o modelo das medições obtemos a equação da estimação do erro (Gelb, 1977):

$$\tilde{x}_k(+)= [K_k' + K_k^r H_k - I]x_k + K_k^r \tilde{x}_k(-) + K_k^r v_k \quad (3.8)$$

Por definição $E[v_k] = 0$. Também se $E[\tilde{x}_k(-)] = 0$, o estimador será não-polarizado, $E[\tilde{x}_k(+)] = 0$, para qualquer vetor de estado x_k , caso o termo entre colchetes seja nulo. Então precisamos que :

$$K_k' = I - K_k^r H_k \quad (3.9)$$

e o estimador toma a forma:

$$\hat{x}_k(+)= (I - K_k^r H_k)\hat{x}_k(-) + K_k^r z_k \quad (3.10)$$

Também poderíamos representar alternativamente o estimador da seguinte maneira:

$$\hat{x}_k(+)= \hat{x}_k(-) + K_k^r [z_k - H_k \hat{x}_k(-)] \quad (3.11)$$

A estimação do erro fica :

$$\tilde{x}_k(+)= (I - K_k^r H_k)\tilde{x}_k(-) + K_k^r v_k \quad (3.12)$$

Usando esta última expressão podemos deduzir uma expressão para a troca da matriz de covariância. Por definição :

(3.13)

$$P^k(+)=E[\tilde{x}^k(+)\tilde{x}^k(+)^T]$$

Substituindo a equação para a estimação do erro temos :

(3.14)

$$P^k(+)=E[(I-K^kH^k)(\tilde{x}^k(-))^T(I-K^kH^k)^T+V^kK^k]^T+K^kV^k[\tilde{x}^k(-)]^T(I-K^kH^k)^T+V^kK^k]$$

Por definição :

$$E[\tilde{x}^k(-)\tilde{x}^k(-)^T]=P^k(-) \text{ e } E[V^kV^k]^T=R^k; \text{ além disso como o resultado dos erros das me-}$$

dições são não-correlacionados :

$$E[\tilde{x}^k(-)V^k]^T=E[V^k\tilde{x}^k(-)^T]=0;$$

então finalmente :

(3.15)

$$P^k(+)=(I-K^kH^k)P^k(-)(I-K^kH^k)^T+K^kR^kK^k$$

Agora devemos selecionar K^k segundo algum critério ótimo. Isto se consegue minimizar-

do a soma escalar ponderada dos elementos diagonais da matriz covariante de erro $P^k(+)$.

Então a função de custo selecionada, (Gelb, 1977) é :

(3.16)

$$J^k=E[\tilde{x}^k(+)^TS\tilde{x}^k(+)]$$

onde S é uma matriz positiva semidefinida. É um fato conhecido (Gelb, 1977) que o esti-

mador ótimo é independente de S ; então podemos tomar $S=I$, fazendo:

(3.17)

$$J^k=trago[P^k(+)]$$

Isto é equivalente a minimizar a distância do vetor de estimação de erro. Para encontrar o valor de K^k que proporciona o mínimo, é necessário tomar a derivada parcial de J^k e

igualar a zero. Se utilizarmos a propriedade :

(3.18)

$$\frac{\partial}{\partial A}[trago(ABA^T)]=2AB$$

combinando a equação para a matriz de covariância $P^k(+)$ e a função de custo J^k obte-

mos a expressão :

$$K_k = P_k(-)H_k^T[H_k^T P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.19)$$

a qual é conhecida como a matriz de ganho de Kalman. Os valores desta matriz mínimos-amaz J_k . Agora podemos substituir a matriz de ganho de Kalman na expressão da matriz de covariância e depois de algumas manipulações fica:

$$P_k(+) = P_k(-) - P_k(-)H_k^T[H_k^T P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}H_k P_k(-) = [I - K_k H_k] P_k(-) \quad (3.20)$$

Esta equação fornece o valor otimizado da matriz covariante de estimação de erros.

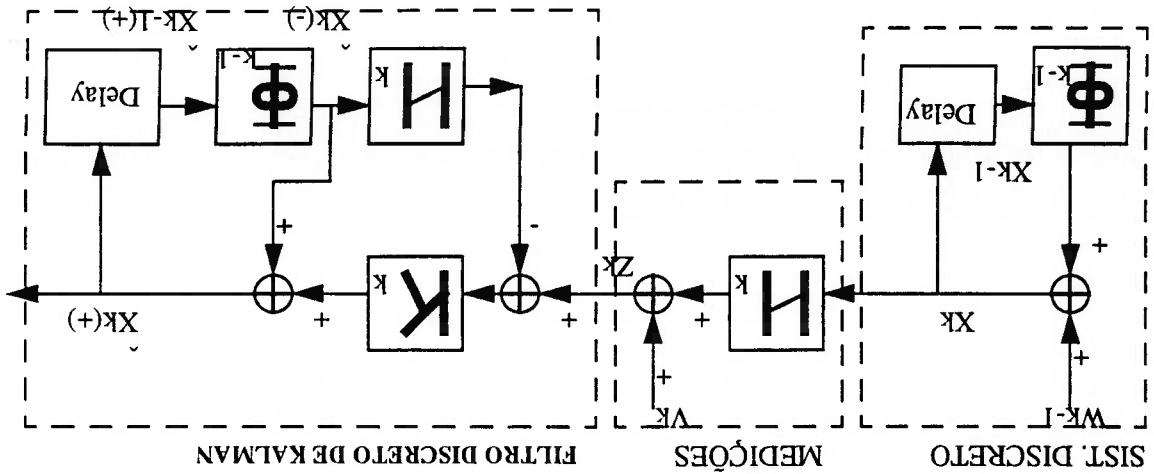
Agora falta apenas extrapolar essas quantidades através das medições :

$$\hat{x}_k(-) = \Phi^{k-1} \hat{x}_{k-1}(+) \quad (3.21)$$

$$P_k(-) = \Phi^{k-1} P_{k-1}(+) \Phi^{k-1T} + Q_{k-1} \quad (3.22)$$

No filtro de Kalman discreto e recursivo, os cálculos da covariância permitem dar uma estimativa da matriz de ganho de Kalman K_k ; a qual é usada no cálculo dos valores principais do filtro \hat{x}_k . Não existe retroalimentação das equações de estado sob as equações de covariância. O filtro de Kalman gera sua própria análise de erros, o que se reflete diretamente no cálculo de P_k , que proporciona a precisão da estimativa.

Vejamos o diagrama temporal das parcelas envolvidas no filtro discreto de Kalman.



Na tabela 3.2 mostramos um sumário das equações do filtro discreto de Kalman.

Modelo do Sistema	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1}, w_{k-1} \sim N(0, Q_k)$ $z_k = H_k x_k + v_k, v_k \sim N(0, R_k)$
Condições Iniciais Outras hipóteses	$E[x(0)] = \hat{x}_0, E[(x(0) - \hat{x}_0)(x(0) - \hat{x}_0)^T] = 0$ $E[w_k^j v_k^j] = 0, \text{ para todos } j, k.$
Extrapolação da estimação de estado Extrapolação do erro de covariância	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}(+)$ $P_k(-) = \Phi_{k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$
Atualização da estimação do estado Atualização da covariância de erro Matriz de ganho de Kalman	$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$ $P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$ $K_k = P_k(-) H_k^T [H_k P_k(-) H_k^T + R_k]^{-1}$

Tabela 3-2: Equações do Filtro Discreto de Kalman

3.2.2 O Filtro Contínuo de Kalman

É perfeitamente possível obter uma versão contínua do filtro de Kalman a partir do filtro discreto do mesmo nome; para isso escrevem-se as equações de diferenças anteriormente descritas e observa-se seu comportamento no limite $\Delta t \rightarrow 0$. Existe uma versão rigorosa e clássica deste processo (Kalman and Bucy, 1961). A partir da aplicação do processo mencionado à matriz de propagação covariante do erro de estado, obtemos no tempo contínuo a equação matricial de Riccati :

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T - PH^T R^{-1} H P \quad (3.23)$$

O termo $FP + PF^T$ resulta do comportamento do sistema homogêneo, não forçado, sem medições; GQG^T é obtido pelo incremento das incertezas devido ao processo de ruído (positivo semidefinido); e $-PH^T R^{-1} H P$ representa o decréscimo da incerteza como resultado das medições. Para a equação do estimador contínuo de Kalman, após aplicar um

procedimento similar, temos :

$$\hat{x} = F\hat{x} + PH^T R^{-1} [z - H\hat{x}] \quad (3.24)$$

a qual é conhecida como filtro contínuo de Kalman. Neste caso P é computado em correspondência com a equação (3.23). É possível obter uma equação diferencial para o erro na estimativa de estado \tilde{x} (Gelb, 1977):

$$\dot{\tilde{x}} = (F - KH)\tilde{x} - Gw + Kv \quad (3.25)$$

Da mesma forma que para o estimador discreto, tem-se que $E[\hat{x}(t)\tilde{x}(t)^T] = 0$.

Quando observamos as equações de Riccati percebemos que o efeito das perturbações no crescimento da propagação dos erros é o mesmo que o observado quando as medições não estão disponíveis.

3.3 Estimação Não-Linear

É importante entender a discussão da estimação linear ótima, de sistemas lineares para sistemas mais gerais descritos pela equação diferencial estocástica não-linear :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + w(t) \quad (3.26)$$

O vetor f é uma função não-linear de estado e $w(t)$ é um ruído de média nula gaussiano com matriz de densidade espectral $Q(t)$. Podemos investigar o problema da estimação de $x(t)$ para as medições não-lineares na forma:

$$z_k = h_k(x(t_k)) + v_k, \text{ onde } k=1,2,3,\dots \quad (3.27)$$

Nesta expressão h_k depende do índice k e do estado de cada tempo em processo, e v_k é uma sequência de ruído branco gaussiano (zero mean) com a matriz associada de covariância R_k . Esta exposição faz parte de uma classe de problemas de estimação para sistemas não-lineares que têm dinâmica contínua e medições de tempo discretas.

3.3.1 O Filtro Estendido de Kalman

Dadas as equações do movimento e medições (3.26, 3.27) é possível construir um algoritmo para calcular uma estimação do estado, $x(t)$, de variância mínima, como função do

tempo e da acumulação das medições. Suponha que medimos no tempo t_{k-1} e processamos esta medição de modo que o valor correspondente ao estado $\hat{x}(t_{k-1})$ seja conhecido. Entre os tempos t_{k-1} e t_k não se tomam as medições e portanto o estado propaga-se de acordo com a equação (3.26); se integramos formalmente esta última expressão temos:

$$x(t) = x(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t f(x(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_{k-1}}^t w(\tau) d\tau \quad (3.28)$$

Aplicando a integral do valor esperado a ambas partes de (3.28), condicionando que todas as medições sejam tomadas até o tempo t_{k-1} , e trocando a ordem da expectativa e da integral, e finalmente diferenciando temos:

$$\frac{d}{dt} E[x(t)] = E[f(x(t), t)] \quad , \text{ no intervalo } t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (3.29)$$

com a condição inicial: $E[x(t_{k-1})] = \hat{x}(t_{k-1})$.

Portanto no intervalo $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ a média condicional de $x(t)$ é a solução da equação (3.29); a qual pode ser escrita na forma compacta:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(x(t), t) \quad , \text{ no intervalo } t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (3.30)$$

O símbolo ' $\hat{\cdot}$ ' representa a operação de expectativa ($E[\cdot]$). Da mesma forma podemos obter uma equação diferencial para a matriz covariante de estimação dos erros:

$$P(t) = E\{[\hat{x}(t) - x(t)][\hat{x}(t) - x(t)]^T\} \quad (3.31)$$

que é a derivada da substituição em $x(t)$ pela equação (3.28), trocando as ordens da expectativa, integrando e diferenciando. O resultado, sem explicitar as dependências:

$$P(t) = \underbrace{x f^T - \hat{x} \hat{f}^T + f x^T - \hat{f} \hat{x}^T}_{\hat{Q}(t)} + \hat{Q}(t) \quad (3.32)$$

As equações (3.30, 3.32) são generalizações das equações de propagação para o problema da estimação linear (3.23, 3.24). Caso possam ser calculados $\hat{x}(t)$ e $P(t)$, eles nos proporcionam uma estimativa do vetor de estado entre os tempos de medição, assim como uma medida de precisão da estimativa. É bom recordar que para sistemas lineares do tipo $f(x(t), t) = F(t)x(t)$, a equação (3.30) reduz-se a:

ou seja, $\hat{x}(t)$ depende apenas de $F(t)$ e $\hat{x}(t)$. Se substituímos a forma linear de f na equação (3.32) segue que $P(t)$ depende apenas de $F(t)$, $P(t)$ e $Q(t)$. Portanto a equação diferencial para as estimativas e sua matriz de covariância podem ser realmente integradas. No entanto, no caso não-linear geral temos :

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) p(x, t) dx_1 dx_2 \dots dx_n \neq f(\hat{x}, t) \quad (3.34)$$

Não conseguimos necessariamente cumprir (3.34). Na prática, para obter algoritmos de estimação são necessários métodos que calculem a matriz principal de covariância e que não dependam do conhecimento da função de densidade de probabilidade $p(x, t)$. Uma técnica muito usada é expandir $f(x, t)$ em funções de Taylor com relação a um vetor conhecido $\hat{x}(t)$ que esteja na vizinhança de $x(t)$. Em particular se $f(x, t)$ é expandido em relação ao vetor estimado de estado, então :

$$\hat{x}(t) = x(t), \text{ e}$$

$$f(x, t) = f(\hat{x}, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x}) + \dots \quad (3.35)$$

onde admitimos que as derivadas parciais requeridas existem. Se tomamos a expectativa das duas partes de (3.35) temos:

$$\hat{f}(x, t) = f(\hat{x}, t) + 0 + \dots \quad (3.36)$$

Nesta desprezamos todos os termos de ordem superior e obtemos uma aproximação de primeira ordem em série de potências de f . Substituindo na equação (3.30) temos:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}(t), t) \quad \text{no intervalo} \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (3.37)$$

Da mesma maneira podemos obter uma equação diferencial aproximada para o erro estimado da matriz de covariância, substituindo os primeiros dois termos da expansão para f na equação (3.32), aplicando as operações de expectativa e a combinação de termos. O resultado torna-se :

para o mesmo intervalo de tempo que nos casos anteriores. Aqui $F(\hat{x}(t), t)$ é uma matriz cujos elementos f_{ij}^{th} são dados por:

$$P(t) = F(\hat{x}(t), t)P(t) + P(t)F^T(\hat{x}(t), t) + Q(t) \quad (3.38)$$

$$f_{ij}^{th}(\hat{x}(t), t) = \frac{\partial x_j^{th}(t)}{\partial x_i^{th}(t)} f_i^{th}(x(t), t) \Big|_{x(t) = \hat{x}(t)} \quad (3.39)$$

As equações (3.37, 3.38) são expressões aproximadas para a propagação da média condicional de estado e sua matriz de covariância associada. Esta é uma estrutura muito similiar às equações de propagação do Filtro de Kalman para sistemas lineares. Estas equações são conhecidas como 'Extended Kalman Filter Propagation Equations'. Podemos obter aproximações de ordem superior mais exatas para o filtro ótimo não-linear, sendo necessário apenas empregar outros termos da expansão da série de Taylor para as não-linearidades.

Para obter o algoritmo completo do Filtro é preciso atualizar as equações com a formação proveniente das medições. Suponha que a estimativa de $x(t)$ e sua matriz de covariância associada se propaguem segundo as equações (3.37, 3.38), e designe as soluções no tempo t_k por $\hat{x}^k(-)$ e $P^k(-)$. Quando as medições z_k são tomadas usamos um estado estimado a priori. Motivados pelo problema de estimação linear discutido anteriormente, desejamos que a estimativa atualizada seja uma função linear das medições :

$$\hat{x}^k(+) = a_k + K^k z_k \quad (3.40)$$

onde devemos determinar o vetor a_k e a matriz de ganho K^k . Seguindo a mesma metodologia do filtro linear e definindo os erros de estimação antes e depois da atualização para reconstruir a equação do erro da estimação, resulta :

$$\tilde{x}^k(+) = a_k + K^k h^k(x^k) + K^k v_k + \tilde{x}^k(-) - \hat{x}^k(-) \quad (3.41)$$

Uma condição importante é que o valor esperado do erro da estimativa seja zero $E[\tilde{x}^k(+)] = 0$. Aplicando o requisito anterior a (3.41) e considerando que $E[v_k] = 0$, obtemos :

$$a_k + K^k h^k(x^k) - \hat{x}^k(-) = 0 \quad (3.42)$$

Resolvendo (3.42) com relação a a_k e substituindo o resultado em (3.40):

$$\hat{x}_k^{(+)} = \hat{x}_k^{(-)} + K_k [z_k - h_k(x_k)] \quad (3.43)$$

Agora podemos combinar as equações (3.41, 3.42) para expressar o erro de estimação na

forma:

$$\hat{x}_k^{(+)} = \hat{x}_k^{(-)} + K_k [h_k(x_k) - h_k(x_k)] + K_k v_k \quad (3.44)$$

Para obter a matriz de ganho K_k , aplicamos o mesmo procedimento usado para o problema

da estimação linear. Aplicamos a definição :

$$P_k^{(+)} = E[\hat{x}_k^{(+)} \hat{x}_k^{(+)}]^T, \text{ e considerando que } v_k \text{ é não-correlacionada com } \hat{x}_k^{(-)} \text{ e } x_k;$$

usando as relações :

$$P_k^{(-)} = E[\hat{x}_k^{(-)} \hat{x}_k^{(-)}]^T$$

$$R_k = E[v_k v_k^T]$$

e admitindo que $P_k^{(+)}$ é independente de z_k , obtemos:

$$P_k^{(+)} = P_k^{(+)} + K_k E[h_k(x_k) - h_k(x_k)] [K_k^T]^T + K_k^T [K_k^T]^T$$

$$+ E[\hat{x}_k^{(-)} [h_k(x_k) - h_k(x_k)]^T] [K_k^T + K_k E[h_k(x_k) - h_k(x_k)] \bar{x}_k^{(-)}]^T + K_k R_k K_k^T \quad (3.45)$$

O estimador é de variância mínima, o que significa minimizar a classe de funções:

$$J_k = E[\hat{x}_k^{(+)} S \hat{x}_k^{(+)}]$$

para qualquer matriz S semipositiva. Portanto tomando $S=I$, podemos escrever :

$$J_k = E[\hat{x}_k^{(+)} \hat{x}_k^{(+)}]^T = \text{trace}[P_k^{(+)}] \quad (3.46)$$

Tomando o traço das partes de (3.45) e substituindo o resultado em (3.46), e resol-

vendo a equação:

$$\frac{\partial J_k}{\partial K_k} = 0 \quad (3.47)$$

para K_k , conduz à matriz ótima de ganho desejada :

$$K_k = -E[\tilde{x}_k(-)][h_k(x_k) - \hat{h}_k(x_k)]^T \cdot \{E[h_k(x_k)] - \hat{h}_k(x_k)\}^{-1} + R_k\}^{-1} \quad (3.48)$$

Substituindo (3.48) em (3.45) e após algumas manipulações temos :

$$P_k(+)= P_k(-) + K_k \cdot E[h_k(x_k) - \hat{h}_k(x_k)][\tilde{x}_k(-)]^T \quad (3.49)$$

As equações (3.43, 3.48, 3.49) nos fornecem um algoritmo atualizado quando as medições são tomadas para estimar o vetor de estado. Do ponto de vista da implementação é muito difícil sua realização na prática porque necessitamos da função densidade de probabilidade para $x(t)$, se desejamos calcular h_k . Podemos simplificar os cálculos expandindo $h_k(x_k)$ em séries de potências com relação a $\tilde{x}_k(-)$, como segue:

$$h_k(x_k) = h_k(\tilde{x}_k(-)) + H_k(\tilde{x}_k(-))(x_k - \tilde{x}_k(-)) + \dots \quad (3.50)$$

onde

$$H_k(\tilde{x}_k(-)) = \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x = \tilde{x}_k(-)} \quad (3.51)$$

Truncando a partir dos dois primeiros termos da série, substituindo o resultado das aproximações nas equações (3.43, 3.48, 3.49) e levando em consideração as operações de expectativa, temos como resultado as equações atualizadas no que se refere às medições do Filtro Estendido de Kalman :

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - h_k(x_k(-))] \quad (3.52)$$

$$K_k = P_k(-)H_k^T(\tilde{x}_k(-)) \cdot [H_k(\tilde{x}_k(-))P_k(-)H_k^T(\tilde{x}_k(-)) + R_k]^{-1} \quad (3.53)$$

$$P_k(+) = [I - K_k H_k(\tilde{x}_k(-))]P_k(-) \quad (3.54)$$

As equações (3.37, 3.38, 3.52, 3.53, 3.54) constituem o algoritmo do Filtro Estendido de Kalman para sistemas não-lineares com medições discretas. Existem importantes diferenças com relação à variante linear : o ganho K_k corresponde a variáveis aleatórias que dependem do estimado $\hat{x}(t)$ através das matrizes $F(\hat{x}(t), t)$ e $H_k(\hat{x}_k(-))$, as quais resultam da linearização de f e h_k com relação à estimativa de estado. Portanto a sequência K_k deve ser computada em tempo real. Como a matriz P_k é uma aproximação da verdadeira matriz de covariância, não existe garantia que as estimativas atuais obtidas pelo algoritmo

estendido de Kalman, sejam próximas aos verdadeiros estimados ótimos. Afortunadamente o Filtro Estendido de Kalman tem demonstrado sua capacidade de oferecer resultados precisos em um grande número de aplicações. Devido a essa experiência e a sua similaridade com o Filtro convencional de Kalman, este algoritmo é um dos mais importantes métodos da atualidade para resolver problemas de filtragem não-linear.

Capítulo 4

Observadores

4.1 Observadores Derivativos

Em muitas situações, todas as variáveis necessárias tanto para ter uma descrição completa do estado do sistema, como para implementar um controle por realimentação, estão disponíveis; mas em outros não. Para modelar matematicamente esta limitação adicionamos na descrição do sistema uma função de medição : uma função dos estados , com valor vetorial ou escalar que contém em si toda a informação que é disponível para o algoritmo de controle.

Dado um sistema Σ , um observador é outro sistema Σ_{obs} para o qual as entradas são as entradas e as saídas do sistema Σ . A saída do observador, Σ_{obs} , é uma estimativa \hat{x} do estado verdadeiro x do sistema Σ . Usualmente se requer que alguma distância $d(\hat{x}, x)$ convinja a zero quando o tempo vai para infinito: $t \rightarrow \infty$.

As estruturas de controle propostas em (Castro et al, 1990; Park and Odloak, 1996; Viel et al, 1997) empregam, para conseguir estabilizar as saídas da coluna em um valor de referência dado, um esquema de retroalimentação dinâmica de estado, tal como se mostra na figura 4.1 (Sontag, 1990).

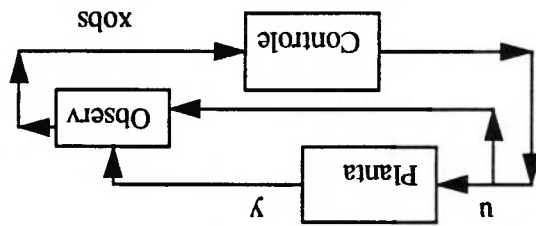


Figura 4-1: Esquema de retroalimentação dinâmica de estado

O modo de atuação é o seguinte: primeiro se sintetiza o controlador por alguma técnica, em função dos estados disponíveis e dos estados que o mesmo precise para agir sobre as entradas. Para o caso particular que estudamos, isto é, a coluna (CMO), as saídas disponíveis são as concentrações do elemento mais volátil. Temos um total de l variáveis de estado $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{l0}, x_{l1})$ e só dispomos de x_1 e x_{l1} , pois são as concentrações do elemento mais volátil medidas no topo e no fundo da coluna.

No trabalho de Castro e Alvares, 1990 se usa uma técnica de controle que atua sobre as entradas empregando os seguintes estados:

$$\begin{bmatrix} L \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi(x_1, x_2, x_3, x_{n-1}, x_n, w_1) \\ \Upsilon(x_n, x_{n-1}, x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Então é necessário um observador para os estados não disponíveis (x_2, x_3, x_{n-1}) que o algoritmo de controle precisa. A solução proposta a este problema por Castro e Alvares, 1990, se baseou nas idéias introduzidas por Hermann e Krener (1977) acerca da observabilidade dos sistemas não-lineares. Eles conseguiram, diferenciando a saída y , ter a sua disposição expressões algébricas dos estados a estimar (x_2, x_3, x_{n-1}) .

Vejam como funciona a idéia deste observador. Sabemos que o vetor de saída é:

$$y = h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$$

Quando diferenciamos a saída obtemos:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H}{H} x_{n-1} - x_n \cdot L + \frac{H}{H} \cdot (x_n - M^n x_n) \cdot V + \frac{H}{H} \cdot (\hat{x}_{n-1} - x_n) \cdot w_1 \\ \frac{H}{H} \cdot (M^2 \hat{x}_2 - x_1) \cdot V \\ \frac{H}{H} \cdot x_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Na figure 4.2 mostramos o esquema de estimação para o observador derivativo.

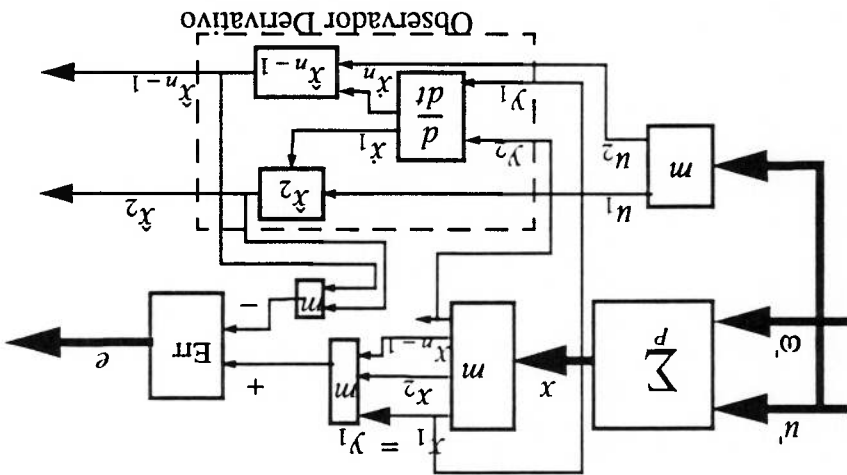


Figura 4-2: Esquema estrutural do observador Derivativo

Como as saídas estão disponíveis, é perfeitamente lícito deriva-las e obter relações algébricas que permitam calcular os estados não disponíveis a partir das saídas e de suas derivadas e das entradas; empregando os resultados da propriedade 3. Estes algoritmos de observação são os mais simples que se podem obter para colunas de destilação binárias. No entanto, a diferenciação tende a ser uma operação indesejável (Sontag, 1990), visto encontrar a derivada c da função $\xi(t) = ct$, onde c é uma constante desconhecida. Assumamos que os dados disponíveis consistam em medições de $\xi(t)$ afetadas de um ruído aditivo :

$$y(t) = \xi(t) + \eta(t) \quad (4.3)$$

onde $\eta(t)$ é da forma :

d e w são constantes desconhecidas, sendo w suficientemente grande. Esta aproximação é realista pois o ruído tende a ser de frequência alta quando comparado com os sinais; mas nas aplicações reais o ruído não pode ser modelado como uma sinal determinístico de frequência constante; com certeza se precisaria de uma descrição probabilística de $\eta(t)$ para uma análise mais apurada. Diferenciando obtem-se :

$$\eta(t) = d \sin(wt) \quad (4.4)$$

$$\dot{y}(t) = c + dw \cos(wt) \quad (4.5)$$

O valor de $y(t)$ na equação (4.5) pode se afastar do valor desejado c , se w é grande. Uma alternativa é usar o fato de que o valor médio do ruído $\eta(t)$ tende a zero em intervalos grandes; então podemos cancelar este efeito usando a integração :

$$\int_t^0 y(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

Multiplicandose o resultado de (4.6) por $\frac{t}{2}$, obtemos :

$$c - \frac{2d}{wt^2}(1 - \cos(wt)) \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) converge a c quando $t \rightarrow \infty$, e portanto nos proporciona uma estimativa assintoticamente precisa da derivada desejada.

Quando as observações estão sujeitas a ruído, a velocidade com que podemos estimar as variáveis não disponíveis, e portanto quanto rápido podemos efetuar o controle, é limitada pela grandeza do ruído. Por exemplo, a convergência da expressão (4.7) é mais lenta quando d é grande (ruído com grande intensidade), ou também é mais lenta quando w é pequeno (ruído com grande largura de faixa).

Portanto é muito importante estudar os observadores que, para obter as estimativas das variáveis do sistema a partir das medições, empreguem só a integração, ou no caso discreto a somatória. De modo geral estes últimos observadores constituem sistemas

diferenciais, pilotados pelas observações, que calculam as estimativas necessárias.

4.2 Observadores Exponenciais

A construção de observadores para sistemas não-lineares em geral é muito interessante e são disponíveis diversos métodos. Estas construções requerem algumas propriedades de observabilidade, porque quando um sistema linear é observável, o é independentemente da entrada do sistema $u^*(t)$. Para os sistemas não-lineares isto não é verdade (Gauthier et al, 1992).

De modo geral os sistemas não-lineares possuem entradas singulares que tornam o sistema não-observável; portanto quando as entradas possuem essa característica a observação é impossível, e quando as entradas estão 'muito perto' dessas singularidades a observação se torna mais e mais difícil. Então é importante contar com a propriedade 3 para os modelos de colunas de destilação binárias. As linhas de trabalho para a construção de observadores para modelos não-lineares são as seguintes :

- i) Transformar, com uma mudança de coordenadas não-linear, o sistema não-linear em um sistema linear (Levine and Marino, 1983). Nesses casos pequenas variações dos observadores lineares (Luenberger, Linear Kalman Filter) dão a solução.
- ii) Transformar com uma mudança de coordenadas, o sistema em um sistema bilinear. Já se construíram diversos observadores para sistemas bilineares (Grasselli et al, 1977; Hammouri et al, 1988).
- iii) Transformar com uma mudança não-linear de coordenadas que leve em conta a propriedade de observabilidade e leve o modelo à forma canônica de observabilidade (Gauthier and Bornard, 1981; Gauthier et al, 1992; Deza et al, 1992; Viel et al, 1997).

Para construir os observadores exponenciais no caso particular de colunas de destilação binárias se emprega a última proposta citada acima: simplificar a estrutura do modelo da coluna com uma transformação não-linear de coordenadas $w = \phi(x)$, que transforme o modelo na forma canônica de observabilidade já mencionada anteriormente, conforme (Viel et al, 1997).

4.2.1 Caso Autônomo

Seja um sistema de saída simples e analítico da forma :

$$\Sigma \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

no qual $x \in R^n$, e além disso temos em consideração um subespaço físico $\Omega \subset R^n$, onde estamos interessados no problema de observação. De modo geral nos casos práticos, Ω será um subconjunto aberto e compacto e conectado relativamente (Gauthier et al, 1992) em R^n ; e em casos ideais, Ω será invariante positivo frente à dinâmica do sistema Σ . Assumir que Σ é observável em Ω , significa dizer que os dados da saída $y(t)$ em qualquer intervalo finito $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$ determinam completamente o estado inicial $x(t_0)$. O fato de Σ ser observável é equivalente a requerer que um conjunto de funções, chamadas espaço de observação de Σ , $\theta(\Sigma) = \{h, L^f h, \dots, L^{f^i} h, \dots, |i \geq 0\}$ separe os pontos de Ω , o que significa dizer que $\forall x_1, x_2 \in \Omega, \exists i$, implicando que $L^i h(x_1) \neq L^i h(x_2)$; onde L denota o operador de derivação de Lie. Quando Σ é observável o mapeamento :

$$F_\Sigma: R^n \rightarrow R^n: x \mapsto \begin{bmatrix} h(x) \\ L^f h(x) \\ \vdots \\ L^{f^{n-1}} h(x) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

é regular para qualquer ponto (Gauthier and Bornard, 1981). Então podemos estabelecer que :

H1 : F_Σ é um difeomorfismo de Ω em $F_\Sigma(\Omega)$.

Desta assunção segue que o sistema Σ pode ser escrito no novo sistema coordenado definido por F_Σ , como :

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \\ \phi(x) \end{bmatrix} = F'(x)$$

Também assumimos :

H2 : podemos estender ϕ desde Ω por todo R^n como uma função C^∞ que cumpre a condição de Lipschitz globalmente em R^n (para qualquer norma).

Definição 4.1: Sempre que **H1** e **H2** forem satisfeitas (Gauthier et al, 1992) diz-se que Σ é uniformemente observável em Ω , ou Σ é uniformemente observável em R^n .

A observabilidade uniforme significa que o estado inicial pode ser reconstruído na base dos dados formados pelas saídas e suas $(n - 1)$ primeiras derivadas. No entanto, pode-se dizer que as hipóteses **H1** e **H2** :

- i) Em casos práticos são sempre satisfeitas.
- ii) São satisfeitas pelo menos localmente em todos os pontos.
- iii) Qualquer sistema não linear pode ser inserido em outro de maior dimensão tal que **H1** seja satisfeita; e **H2** também se o espaço de estados é compacto (Gauthier, Kupka, 1994).

Teorema 4.2: Consideremos o sistema $\dot{\hat{x}} = F'(\hat{x}) - S_\infty^{-1} C^T (C\hat{x} - y)$ onde $\hat{x} \in R^n$ e $C = (1, 0, \dots, 0), S_\infty$ é a solução de $0 = -\theta S_\infty - A^T S_\infty - S_\infty A + C^T C$, com θ sendo um parâmetro suficientemente grande, e o operador anti-deslocamento $A: R^n \rightarrow R^n, A_{ij} = \delta_{i, j-1}$. Este sistema do teorema é um observador para Σ em R^n ,

com o erro :

$$\|x(t) - x(t)\| \leq K \exp(-\theta t/3) \|x_0 - x_0\|$$

Este observador é simples devido a que é só uma cópia de Σ' , junto com um termo corretivo que não depende do sistema Σ' , só da dimensão do espaço de estados n . A demonstração deste teorema será feita para um caso mais geral : o caso controlado.

4.2.2 Caso Controlado

A questão da síntese dos observadores é dificultosa devido à presença de entradas que tornam o sistema não-linear não-observável. Portanto aqui trataremos os sistemas que são observáveis para qualquer entrada. Consideremos o sistema não-linear SISO em R^n :

$$\Gamma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.10)$$

Assume-se que :

H3 : O sistema sem controle:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.11)$$

é uniformemente observável no sentido explicado anteriormente.

H4 : Γ é observável para qualquer entrada, em qualquer tempo finito no intervalo $[0, T]$; para qualquer entrada medida $u(t)$ definida no intervalo $[0, T]$, sendo que o estado inicial é determinado de forma única com base na saída $y(t)$ e na entrada $u(t)$.

Definição 4.3: Quando Γ satisfaz H3 e H4, dizemos que Γ é uniformemente observável para qualquer entrada.

Estes sistemas estão caracterizados (Gauthier et al, 1992). Para outros sistemas essa caracterização já havia sido realizada :

i) Para sistemas bilineares em (Williamson, 1977).

ii) Para sistemas não-lineares em (Gauthier et al, 1981).

Teorema 4.4: Γ é uniformemente observável para qualquer entrada se Γ é difeomórfica a um sistema da forma:

$$\Gamma: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \\ \phi(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \cdot \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\ y = x_1 = Cx \end{cases} \quad u = F'(x) + G'(x)u \quad (4.12)$$

A prova do Teorema (4.4) é encontrada em (Gauthier et al, 1992). Vejamos as novas hipóteses a seguir :

H5 : Denotemos por \tilde{x}_i o vetor :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \end{pmatrix}$$

É requerido que cada mapeamento g_i cumpra globalmente a condição de Lipschitz e satisfaga em Γ :

$$g_i: \begin{cases} R^i \rightarrow R \\ \tilde{x}_i \mapsto g_i(\tilde{x}_i) \end{cases}$$

Quando Ω é um conjunto relativamente compacto e simples (uma bola aberta como g_i é C^∞ na clausura de Ω), então g_i pode ser modificado fora de Ω de modo que **H5** seja satisfeito.

Teorema 4.5: Assumamos que Γ seja uniformemente observável para qualquer entrada, e assumamos **H5**. Consideremos o sistema :

$$\dot{\hat{x}} = F'(\hat{x}) + G'(\hat{x})u - S_{\infty}^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \quad (4.13)$$

onde S_{∞} é a mesma matriz do **Teorema 4.2**. Então, para as entradas u uniformemente acotadas por um $u_0 \geq 0$: (4.13) é um observador para Γ em R^n ; significa que para θ suficientemente grande se cumpre :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq K(\theta) \exp(-\theta t/3) \|\hat{x}_0 - x_0\| \quad (4.14)$$

São importantes as seguintes considerações :

- i) O observador é muito simples. É só uma cópia do sistema Γ com um termo corretivo que não depende do sistema Γ , mas só da dimensão do sistema e da velocidade desejada θ .

ii) É claro que o **Teorema 4.5** contém o **Teorema 4.2**. Eles foram tratados em separado buscando mais clareza na compreensão do material, e para justificar cada uma das aproximações realizadas até aqui (Gauthier et al, 1992). A demonstração dos dois teoremas será feita a seguir.

Prova (4.5, 4.2) (Gauthier et al, 1992) :

A demonstração se fundamenta nos argumentos de Lyapunov. Primeiramente vejamos, $S_{\infty}(\theta)$, a solução estacionária de $\dot{S}'(\theta) = -\theta S'(\theta) - A^T S'(\theta) - S'(\theta)A + C^T C$, onde $S_{\infty}(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} S'_t(\theta) \in \Sigma^+$, o cone de matrizes simétricas positivas definidas.

É conhecida a solução :

$$S'_t(\theta) = \exp(-\theta t) \exp(A^T t) S_0(\theta) \exp(-A t) +$$

$$+ \int_0^t \exp(-\theta(t-s)) \exp(-A^T(t-s)) C^T C \exp(-A(t-s)) ds \quad (4.15)$$

Si $S_0(\theta)$ é simétrica positiva definida, então $S'_t(\theta)$ também é. Além disso :

$$S'_t(\theta) \geq \int_t^{t-\alpha} \exp(-\theta(t-s)) \exp(-A^T(t-s)) C^T C \exp(-A(t-s)) ds \text{ para qualquer } \alpha > 0 \text{ para } t > \alpha.$$

$$S'_t(\theta) \geq \int_0^{-\alpha} \exp(-\theta u) \exp(-A^T u) C^T C \exp(A u) du$$

$$\geq \exp(-\theta \alpha) \int_0^{-\alpha} \exp(-A^T u) C^T C \exp(A u) du \quad (4.16)$$

Devido à observabilidade do par linear (C, A) , resulta que $S'_t(\theta) \geq \delta I$ para $\delta > 0$. Então $S_\infty(\theta) \geq \delta I$.

Computando explicitamente (Gauthier, et al, 1992) é possível demonstrar que para qualquer $\theta > 0$, $S'_t(\theta)$ tem limite $S_\infty(\theta)$, que satisfaz:

$$(S_\infty(\theta))_{i,j} = (S_\infty(1))_{i,j} \cdot \frac{\theta^{i+j-1}}{1} \quad (4.17)$$

Agora, consideremos o erro $\varepsilon = \hat{x} - x$ e a equação do erro:

$$\dot{\varepsilon} = (A - S_\infty^{-1}(\theta) C^T C) \varepsilon + \begin{bmatrix} \varphi(\hat{x}) - \varphi(x) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + (G(\hat{x}) - G(x)) n(t) \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon^T S_\infty(\theta) \varepsilon = \varepsilon^T S_\infty(\theta) \dot{\varepsilon} = 2\varepsilon^T S_\infty(\theta) A \varepsilon - 2\varepsilon^T C^T S_\infty(\theta) (K(\hat{x}, n) - K(x, n)) \quad (4.19)$$

onde:

$$K(x, n) = \begin{pmatrix} K_n(\hat{x}_n, n) \\ \cdot \\ \cdot \\ K_1(\hat{x}_1, n) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$e^{K^i(\bar{x}_p, n)}: R^i \rightarrow R$ cumpre a condição de Lipschitz com respeito a \bar{x}_i . Devido a que $S_\infty(\theta)$ é a solução estacionária de (4.9), temos que :

$$\frac{d}{dt} e^{T S_\infty(\theta)} \varepsilon = -e^{T S_\infty(\theta)} \varepsilon - (C \varepsilon)^2 + 2 \varepsilon^T S_\infty(\theta) (K(\bar{x}, n) - K(x, n)) \quad (4.21)$$

Denotemos $\|x\|_S$ para $(x^T S x)^{\frac{1}{2}}$ e usando a desigualdade de Schwarz nos dá :

$$\frac{d}{dt} e^{T S_\infty(\theta)} \varepsilon \leq -\theta \varepsilon^T S_\infty(\theta) \varepsilon + 2 \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)} \|K(\bar{x}, n) - K(x, n)\|_{S_\infty(\theta)} \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt} (\|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)}) \leq -\theta \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)} + 2 \left\{ \sum_{i,j} S_\infty(\theta)_{i,j} (K^i(\bar{x}_p, n) - K^i(\bar{x}_p, n)) (K^j(\bar{x}_p, n) - K^j(\bar{x}_p, n)) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Usando (4.11) e colocando que $k = \sup_i d_{i,j} |S_\infty(1)_{i,j}|$, temos :

$$\frac{d}{dt} (\|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)}) \leq -\frac{\theta}{2} \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)} + \left\{ k^2 \sum_{i,j} |S_\infty(1)_{i,j}| \|\varepsilon_i\|_{R^i} \|\varepsilon_j\|_{R^j} \cdot \frac{\theta}{1 + \theta^{i+j-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt} (\|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)}) \leq -\frac{\theta}{2} \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)} + \left\{ k^2 S \theta \sum_{i,j} \frac{\theta^i}{1} \|\varepsilon_i\|_{R^i} \|\varepsilon_j\|_{R^j} \cdot \frac{\theta}{1 + \theta^{i+j-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

seja $\xi_i = \left(\frac{\theta^i}{1}\right)$. Claramente ocorre que :

$$\left\| \frac{1}{1} \xi_i \right\|_{R^i} \leq \|\xi_i\|_{R^i} \leq \|\xi_i\|_{R^n} \quad \text{para } \theta \geq 1.$$

Na expressão anterior $\|x\|_{R^i}$ denota a norma Euclidiana em R^i , e $\|x\|$ denota a norma euclidiana em R^n . Então podemos, usando o resultado anterior ainda acotar mais (4.18) :

$$\frac{d}{dt} (\|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)}) \leq -\frac{\theta}{2} \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)} + \left\{ k^2 n^2 S \theta \|\xi\|_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

mas $\|\xi\|_2 \leq C_1 \|\xi\|_{S_\infty(1)}$, e $\|\xi\|_{S_\infty(1)} \leq \frac{\theta}{1} \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)}$, então

$$(4.26) \quad \frac{d}{dt} \|e\|_{S_\infty(\theta)} \leq -\frac{\theta}{2} \|e\|_{S_\infty(\theta)} + C_1 k n \sqrt{5} \|e\|_{S_\infty(\theta)}$$

Podemos agora fazer que θ seja suficientemente grande para que :

$$(4.27) \quad \frac{d}{dt} (\|e\|_{S_\infty(\theta)}) \leq -\gamma \cdot \|e\|_{S_\infty(\theta)}, \text{ para todo } \gamma > 0.$$

Este resultado foi aplicado com sucesso na observação de bioreatores (Gauthier et al, 1992).

4.2.3 Sistemas não-lineares MIMO

No capítulo anterior se propôs um observador exponencial não-linear para sistemas MISO observáveis para qualquer entrada. Este resultado já foi levado (Deza, 1991) a sistemas MIMO não-lineares observáveis para qualquer saída tomada separadamente. Aqui estenderemos estes observadores exponenciais convergentes para uma classe maior de sistemas não-lineares MIMO que representamos a seguir :

$$(4.28) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u) = A(x, u)x + B(x, u) \\ x &\in R^n, u \in R^m \\ y &= (x_1, \dots, x_{p_1+\dots+p_{l-1}+1}) = Cx \\ y &\in R^p, \sum_{i=1}^l p_i = n \end{aligned} \right\} \mathcal{Y}$$

onde $A(x, u) = \text{diag}(A^1(x, u), \dots, A^l(x, u))$ é uma matriz diagonal, e $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $A^i(x, u)$ é uma matriz de dimensão $p_i \times p_i$ com $\forall j, k \in \{1, \dots, p_i\}$, $A^i_{j,k}(x, u) = \delta_{j+1,k} \cdot d^i_{j,k}(x, u)$ e $d^i_{j,k}(x, u) = d^i_{j,k}(x_{p_1+\dots+p_{i-1}+1}, \dots, x_{p_1+\dots+p_{i-1}+p_i}, \dots, x_{p_1+\dots+p_{i-1}+p_i+n})$ é um vetor, e $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $B^i(x, u)$ é um vetor de dimensão p_i com $\forall j \in \{1, \dots, p_i\}$, $B^i_{j,k}(x, u) = B^i_{j,k}(x_{p_1+\dots+p_{i-1}+1}, \dots, x_{p_1+\dots+p_{i-1}+p_i}, \dots, x_{p_1+\dots+p_{i-1}+p_i+n})$.

Esta estrutura inclui o sistema não-linear de controle afim MISO observável para qualquer entrada (Gauthier and Bornard, 1981; Gauthier et al, 1992); e o sistema não-linear mais geral, MIMO, de controle afim fortemente observável para qualquer entrada

e para qualquer saída tratada separadamente (Deza, 1991). Além disso, muitos modelos físicos que não são observáveis para cada saída tomada separadamente podem ser colocados em forma similar : uma parte linear observável mais uma parte não-linear estruturada. Assumimos que :

F1 : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall j \in \{1, \dots, p_i\}$, $\exists v_j^i$ e w_j^i tal que $\forall x \in R^n, \forall u \in R^m, 0 < v_j^i < a_j^i(x, u) < w_j^i$.

F2 : $A(x, u)$ e $B(x, u)$ cumprem a condição de Lipschitz globalmente com respeito a x e uniformemente com respeito a u .

F3 : O estado x é acotado.

Seja θ um parâmetro positivo. Tomemos $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_p)$ como uma matriz diagonal em bloco, na qual cada bloco Δ_i é uma matriz $p_i \times p_i$ definida por $\Delta_i = \theta^{p_i-1} \text{diag}\left(1, \frac{\theta}{1}, \dots, \frac{\theta^{p_i-1}}{1}\right)$. Consideremos \tilde{Q} como uma matriz $n \times n$ simétrica definida positiva e R como uma matriz $p \times p$ simétrica definida positiva. Denotemos

$$\tilde{Q}_\theta = \theta \Delta^{-1} \tilde{Q} \Delta^{-1}, e R_\theta = \text{diag}\left(\frac{\theta^{p_1-1/2}}{1}, \dots, \frac{\theta^{p_p-1/2}}{1}\right) R \cdot \text{diag}\left(\frac{\theta^{p_1-1/2}}{1}, \dots, \frac{\theta^{p_p-1/2}}{1}\right). \text{ Então}$$

um resultado importante é o seguinte teorema (Deza, et al, 1993):

Teorema 4.6: Para θ suficientemente grande, o seguinte filtro estendido de Kalman :

$$(4.29) \quad \left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x} &= f(\hat{x}, u) - PC^T R^{-1} (C\hat{x} - y) \\ \frac{dP}{dt} &= \tilde{Q}_\theta - PC^T R_\theta C^{-1} P + P f^*(\hat{x}, u)^T + f^*(\hat{x}, u) P \end{aligned} \right\} EKF$$

é um observador exponencial para o sistema Υ .

Prova 4.6 (Deza et al, 1993):

Seja $\varepsilon = \hat{x} - x$. Na demonstração usamos a função de Lyapunov $\varepsilon^T S \varepsilon$. Seja :

$$\Upsilon = f(\hat{x}, u) - f(x, u) - f^*(\hat{x}, u) \varepsilon$$

$$(4.30) \quad = B(\hat{x}, u) - B(x, u) - B^*(\hat{x}, u) \varepsilon + (A(\hat{x}, u) - A(x, u))x - (A(\hat{x}, u) \varepsilon)$$

Seja também :

$$z = \Delta \bar{z}, \bar{z} = \Delta^{-1} P^{-1} \Delta^{-1}, e \delta_n(t, \theta) = \frac{\theta}{1} \Delta (f^*(\hat{x}, u) - f(\hat{x}, u)) \Delta^{-1}$$

Temos então o seguinte :

$$(4.31) \quad \frac{d}{dt} (z^T \bar{z}) = -\theta z^T \bar{z} \bar{Q} \bar{z} + 2z^T \bar{z} \Delta \Gamma - \theta (R^{-1/2} C z)^2$$

$$(4.32) \quad \frac{d}{dt} \bar{z} = \theta (-\bar{z} \bar{Q} \bar{z} - (A(\hat{x}, u) + \delta_n(t, \theta))^T \bar{z} - \bar{z} (A(\hat{x}, u) + \delta_n(t, \theta))) + C^T R^{-1} C$$

Devido à estrutura de bloco inferior de Γ e às hipóteses F1, F2 e F3, temos :

$$(4.33) \quad |z^T \bar{z} \Delta \Gamma| \leq B(\bar{z}) P^n (1/\theta) z^T \bar{z}$$

onde P^n é um polinômio e $B(\bar{z})$ é o número condicional de \bar{z} , isto é, a raiz quadrada da relação entre o maior e o menor autovalor de \bar{z} . Então

$$(4.34) \quad \frac{d}{dt} (z^T \bar{z}) \leq -\theta z^T \bar{z} \bar{Q} \bar{z} + 2B(\bar{z}) P^n (1/\theta) z^T \bar{z}$$

Agora acotamos a partir de $B(\bar{z})$. Seja, $\bar{s}(t) = \bar{s}(t/\theta)$. Obtemos :

$$(4.35) \quad \frac{d}{dt} \bar{s} = -\bar{s} \bar{Q} \bar{s} - (A(\hat{x}, u) + \delta_n(t, \theta))^T \bar{s} - \bar{s} (A(\hat{x}, u) + \delta_n(t, \theta)) + C^T R^{-1} C$$

Como $f^*(\hat{x}, u) - A(\hat{x}, u)$ é triangular de bloco inferior, $\delta_n(t, \theta)$ converge uniformemente a zero, com respeito a t , quando θ tende a infinito. Devido a F1 e os resultados conhecidos de acotamento das soluções de Riccati (Jazwinski, 1970), temos o seguinte :

$$E \Gamma \leq 0, E \theta_0 > 0, E \beta > 0, \text{ tal que } \forall \theta \geq \theta_0, \forall t \geq T, \text{ então } \alpha I \leq \bar{s}(t) \leq \beta I.$$

Se denotamos B por $(\beta/\alpha)^{1/2}$, temos $\forall t \geq T, B(\bar{s}(t)) \leq B$.

Por outro lado $E \lambda > 0$, tal que $\forall \theta \geq \theta_0, \forall t \geq T, \lambda \bar{s}(t) \leq \bar{s}(t) \bar{Q} \bar{s}(t)$. Então usando estas últimas acotações e trabalhando com (4.28) temos o seguinte :

$$(4.36) \quad \forall t \geq T, (z^T \bar{z} z) \leq e^{-(\lambda \theta - 2B P^n (1/\theta)) (t-T)} (z^T \bar{z} z)(T)$$

Resulta :

finalmente :

$$\forall t \geq T, \|z(t)\| \leq B e^{-\lambda_0 t - 2B P_n(1/\theta)} \frac{2}{(t-T)} \|z(T)\| \quad (4.37)$$

$$\forall t \geq T, \|\Delta \varepsilon(t)\| \leq B e^{-\lambda_0 t - 2B P_n(1/\theta)} \frac{2}{(t-T)} L(\theta)^{1/2} \quad (4.38)$$

onde $L(\theta) = \varepsilon^T(T) \Delta^2 \varepsilon(T)$.

A estabilidade deste observador resulta do fato do modelo ter sido escrito como uma parte linear observável mais uma parte não-linear estruturada. Esta parte não-linear pode considerar-se como uma perturbação estruturada da parte linear. Este filtro obtido no teorema 4.6 (Deza, et al, 1993) foi o primeiro resultado na direção destes sistemas MIMO, que tentava construir estes observadores exponenciais sem transformações de coordenadas baseadas em derivadas sucessivas de Lie das saídas (Deza, et al, 1992); mais tarde foi comprovado (Viel, 1997) que seu verdadeiro valor é criar um método com o intento de obter uma resposta na nova direção, que seja correta do ponto de vista formal. Infelizmente esta técnica (Deza, et al, 1992) tem severas limitações na prática devido a que a matriz jacobiana da transformação não-linear de coordenadas deve ser invertida, o que leva a uma grande perda de tempo de cálculo para muitos sistemas físicos. Foi devido a essa limitação que se estendeu o resultado anterior (Deza, et al, 1992, 1993) para uma família de formas canônicas observáveis de maior generalidade, evitando no projeto do observador as derivadas sucessivas de Lie das medições nas saídas; o que era necessário para obter as formas canônicas mais limitadas obtidas anteriormente (Deza, et al, 1992). Este último resultado se deve a Viel (1997) e é precisamente o que veremos a seguir.

4.3 O Observador de F. Viel

Consideremos a seguinte forma canônica observável (Viel, 1997):

$$\Sigma^c: \begin{cases} \dot{X} = A(X, u)X + B(X, u) \\ Y = CX = (X^1, \dots, X^p) \end{cases} \quad (4.39)$$

onde :

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$$

$$X_i = (X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^{d_i}), 1 \leq i \leq d$$

$$dim(X) = n, dim(X_i) = d_i, \sum_{i=1}^d d_i = u, d < u$$

onde :

$$A(X, n) = \begin{bmatrix} A_1(X_1, n) \\ A_2(X_2, n) \\ \dots \\ A_d(X_d, n) \end{bmatrix}$$

e

$$dim(A(X, n)) = n \times n$$

mas temos que :

com dimensão :

$$A^i(X^i, n) = \begin{bmatrix} 0 & a_1^i(X_1^i, n) & & & \\ & 0 & a_2^i(X_1^i, X_2^i, n) & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \dots & a_{p_i-1}^i(X_1^i, X_2^i, \dots, X_{p_i-1}^i, n) \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim(A^i(X^i, n)) = p_i \times p_i$$

$$B(X, n) = (B^1(X, n), B^2(X, n), \dots, B^p(X, n)), \dim(B(X, n)) = n$$

$$B^i(X, n) = \begin{bmatrix} B_1^i(X_1^i, n) \\ B_2^i(X_1^i, X_2^i, n) \\ \vdots \\ B_{p_i-1}^i(X_1^i, X_2^i, \dots, X_{p_i-1}^i, n) \\ B_{p_i}^i(X, n) \end{bmatrix}, \dim(B^i(X, n)) = p_i$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_p \end{bmatrix}, \dim(C) = p \times n$$

$$C^t = [1 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0], \dim(C^t) = 1 \times p_i$$

Estas formas canônicas de observabilidade são mais gerais do que as consideradas

por Deza et al (1992): o fato é que os a_j^i das matrizes A^i dependem do substrato X^i . O

filtro de F. Viel se baseia nas seguintes hipóteses:

i) **V1**: As funções $a_j^i(X^i, u)$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p_i - 1$, são globalmente Lipschitz com

respeito a X^i e uniformes com respeito à entradas u .

ii) **V2**: $A^i, A^j, E(\gamma_1, \gamma_2): A^i X^i \in R^p, A^j u \in R^m, 0 < \gamma_1 \leq a_j^i(X^i, u) \leq \gamma_2$.

iii) **V3**: As funções $B^i(X, u)$ são globalmente Lipschitz com respeito a X e uniformes

com respeito às entradas u .

iv) **V4**: O estado X é acotado. Significa que estamos interessados só nas trajetórias do

sistema atual para as quais é conhecido a priori que são acotadas.

A hipótese **V4** é satisfeita pelas trajetórias da coluna de destilação binária. É geralmente

satisfeita pelos sistemas físicos: o estado X se mantém para tempos positivos dentro de um

conjunto compacto Ω . Se as demais hipóteses **V1**, **V2**, **V3** são válidas no conjunto compacto

Ω , então podemos prolongar estas funções fora do espaço de estados Ω de tal modo que **V1**,

V2 e **V3** sejam satisfeitas globalmente.

Seja $\bar{Q} > 0$ e $R = \text{diag}(r_i)$, $r_i > 0$ duas matrizes de dimensões $n \times n$ e $p \times p$. Estas

matrizes podem ser formalmente comparadas com a matriz covariante do ruído de estado, e a

matriz covariante de ruído nas medições do filtro estendido de Kalman. Definamos as matrizes:

$$\bar{Q}_\theta = \theta \Delta^{-1} \bar{Q} \Delta^{-1} \quad (4.40)$$

$$\Delta^{-1} C^T R^{-1} C \Delta^{-1} = \theta C^T R^{-1} C \quad (4.41)$$

onde

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \Delta_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \\ & & & & \Delta_p \end{bmatrix}, \dim(\Delta) = n \times n$$

e também :

$$\Delta'_i = \begin{bmatrix} \theta_{p_i-1} \\ \theta_{p_i-2} \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \dim(\Delta'_i) = p_i \times p_i$$

onde θ é um parâmetro estritamente positivo. O principal resultado de F. Viel (1997) é o seguinte teorema :

Teorema 4.7: Sob as hipóteses mencionadas o observador tipo Kalman estendido :

$$\Xi \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{X} &= A(\hat{X}, u) \hat{X} + B(\hat{X}, u) - PC^T R_\theta^{-1} (C \hat{X} - Y) \\ \frac{dP}{dt} &= \hat{Q} - PC^T R_\theta^{-1} CP + P(A(\hat{X}, u) + B^*(\hat{X}, u))^T + (A(\hat{X}, u) + B^*(\hat{X}, u))P \end{aligned} \right.$$

(4.42)

é um observador exponencial para o sistema Σ_c . As seguintes desigualdades se aplicam

$$ET > 0, E(K > 0, B > 0, \lambda > 0) \text{ tal que } \forall t \geq T, \forall P(0) > 0, \forall \epsilon(0) > 0, \forall \theta > 1 \text{ se}$$

cumpra a seguinte acotação do erro:

$$\|\epsilon(t)\| \leq \theta^{-1} \sqrt{B} \|\epsilon(T)\| \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda\theta - 2BK)(t-T)\right)$$

(4.43)

onde $\epsilon = \hat{X} - X$ é o erro de estimação.

Os detalhes da demonstração deste teorema (Viel, 1994) são similares, do ponto de vista metodológico, à do Teorema 4.6. B^* denota o jacobiano de B .

4.4 Aplicações nas Colunas de Destilação Binárias

Em correspondência com a propriedade 3 do capítulo 2, já sabemos que os modelos fenomenológicos de colunas considerados neste trabalho são observáveis a partir das saídas medidas x_1 e x_n , inclusive no caso em que a composição da alimentação não é medida. Agora aplicaremos a metodologia de projeto na solução do problema da estimação (estimação do conjunto das composições líquidas do componente mais volátil em cada prato) em

Sabemos, da propriedade 1, que X é acotado: o mais exato $X \in \psi([0;1]^n)$. Podemos facilmente prolongar a lei não-linear de equilíbrio líquido-vapor fora de $[0;1]$, de modo que nossas hipóteses sejam válidas globalmente. Agora empregando o Teorema 4.7, podemos escrever o observador para o caso específico em estudo :

$$\Xi_{COL} \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(X, F, L, V)X + B(X, F, ZF, L, V) - PC^T R_0^{-1} (CX - Y) \\ \frac{dP}{dt} &= Q_0 - PC^T R_0^{-1} CP + P(A(X, F, L, V) + B^*(X, F, ZF, L, V)) \\ &+ (A(X, F, L, V) + B^*(X, F, ZF, L, V))P \end{aligned} \right.$$

As matrizes Q_0 e R_0 já foram definidas anteriormente.

4.4.2 ZF é uma Constante Desconhecida

Em correspondência com a propriedade 3, o estado estendido (x, ZF) é observável a partir do vetor das saídas $Y = (x_1, x_n)^T$. Quando aplicamos a mudança de coordenadas não-linear $X = (X_1, X_2) = \psi(x, ZF)$, definida por :

$$(4.46) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= (X_1 = x_1, X_2 = k(x_2), \dots, X_{f-1} = k(x_{f-1}))^T \\ X_2 &= (X_2 = x_n, X_2 = x_{n-1}, \dots, X_{n-f+1} = x_f, X_{n-f+2} = ZF)^T \end{aligned} \right.$$

o modelo pode ser escrito da seguinte forma :

$$(4.47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(X, F, L, V)X + B(X, F, L, V) \\ Y &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = CX \end{aligned} \right.$$

onde A_1 é :

A matriz B^1 é :

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_1}{V} & & & \\ 0 & \frac{H_2}{V} k(k^{-1}(X_1^2)) & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \frac{H}{V} k(k^{-1}(X_1^{f-2})) & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

A matriz B^2 é :

$$B^1 = \begin{bmatrix} \frac{H}{V} X_1^1 & & & & \\ k(k^{-1}(X_1^2)) \frac{H_2}{L(X_1^1 - k^{-1}(X_1^2)) - V X_1^2} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{H_{f-2}}{L(X_1^{f-2}) - V X_1^{f-2}} & & & & \\ k(k^{-1}(X_1^{f-1})) \frac{H_{f-1}}{L(X_1^{f-1}) - k^{-1}(X_1^{f-1}) + V(k X_1^{n-f+1}) - X_1^{f-1}} & & & & \end{bmatrix}$$

A matriz $A^2 \in B^2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_n}{F+L} & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \frac{H_{n-1}}{F+L} & & & \\ \frac{H_{f+1}}{F+L} & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \frac{H_f}{F} & 0 & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} (F + L) X_2^1 + V (X_2^1 - k(X_2^1)) \\ \frac{1}{1} (F + L) X_2^2 + V (X_2^2 - k(X_2^2)) \\ \vdots \\ \frac{1}{1} (F + L) X_2^{n-f+1} + V (X_2^{n-f+1} - k(X_2^{n-f+1})) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este novo sistema é diferente mas não difere muito da forma canônica Σ^c , a única diferença é a ocorrência do termo de acoplamento X_1^{f-1} em B_2^{n-f+1} . A prova da convergência exponencial do observador do Teorema 4.7 não se diferencia muito neste caso particular. No entanto derivou-se um observador modificado para o qual a propriedade da convergência exponencial se mantém válida. Só se modificou a matriz Δ . As matrizes Q_θ e R_θ são definidas como no caso anterior:

$$Q_\theta = \theta \Delta^{-1} \bar{Q} \Delta^{-1} e \Delta^{-1} C^T R_\theta^{-1} C \Delta^{-1} = \theta C^T R^{-1} C, \text{ mas a matriz } \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta_2 & \\ & & & & \Delta_1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ é tal que:}$$

Então para θ suficientemente grande o observador dado por:

$$\Xi_{ZF}^{COL} = \begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{X} = A(\hat{X}, F, L, V) \hat{X} + B(\hat{X}, F, L, V) - P C^T R_\theta^{-1} (C \hat{X} - Y) \\ \frac{dP}{dt} = Q_\theta - P C^T R_\theta^{-1} C P + P (A(\hat{X}, F, L, V) + B^*(\hat{X}, F, L, V))^T + (A(\hat{X}, F, L, V) + B^*(\hat{X}, F, L, V)) P \end{cases} \quad (4.48)$$

é um observador exponencial convergente (Viel, 1994) para ZF desconhecido e assumido constante.

Capítulo 5

Implementação e Simulações

5.1 Preparação das Simulações

5.1.1 A Planta

Para implementar o modelo matemático da coluna de destilação binária foi empregado o MATLAB 5.2 em sua versão para 'work stations'. O MATLAB possui um subsistema chamado SIMULINK onde é possível implementar e representar os modelos em blocos funcionais, com as respectivas interconexões entre os mesmos. Nós simulamos no SIMULINK o modelo da coluna de destilação binária, o qual faz o papel de planta em nosso trabalho. Das possíveis metodologias que conduzem ao mesmo resultado, selecionamos aquela que integra no SIMULINK e realiza os cálculos da parte direita das equações no ambiente externo, isto é, no MATLAB. Na figura 5.1 podemos ver uma representação esquemática do processo de cálculo que conduz à solução do modelo da coluna. Somente estão ativos os estados da primeira fase da coluna que seriam os estimados com o observador derivativo. Neste esquema de cálculo, o vetor de estados se move como um todo em cada instante de tempo ao passar pelo integrador. A parte direita das equações é calculada externamente por uma função em MATLAB 5.2, cujo código escrevemos a seguir :

function[out]=coluna(x)

v=(x(2)/40);

l=(x(1)/10);

f=((x(3)+x(1))/10);

out(1)=v*(2*x(6)/(1+x(6)))-v*x(5);

out(2)=l*(x(5)-x(6))+4*v*(2*x(7)/(1+x(7)))-4*v*(2*x(6)/(1+x(6)));

out(3)=l*(x(6)-x(7))+4*v*(2*x(8)/(1+x(8)))-4*v*(2*x(7)/(1+x(7)));

out(4)=l*(x(7)-x(8))+4*v*(2*x(9)/(1+x(9)))-4*v*(2*x(8)/(1+x(8)));

out(5)=l*(x(8)-x(9))+4*v*(2*x(10)/(1+x(10)))-4*v*(2*x(9)/(1+x(9)));

out(6)=((x(3)/10)*x(4)-x(10))+1*(x(9)-x(10))+4*v*(2*x(11)/(1+x(11)))-4*v*(2*x(10)/(1+x(10)));

out(7)=f*(x(10)-x(11))+4*v*(2*x(12)/(1+x(12)))-4*v*(2*x(11)/(1+x(11)));

out(8)=f*(x(11)-x(12))+4*v*(2*x(13)/(1+x(13)))-4*v*(2*x(12)/(1+x(12)));

out(9)=f*(x(12)-x(13))+4*v*(2*x(14)/(1+x(14)))-4*v*(2*x(13)/(1+x(13)));

out(10)=f*(x(13)-x(14))+4*v*(2*x(15)/(1+x(15)))-4*v*(2*x(14)/(1+x(14)));

out(11)=(f/8)*x(14)-x(15)+0.5*v*x(15)-0.5*v*(2*x(15)/(1+x(15)));

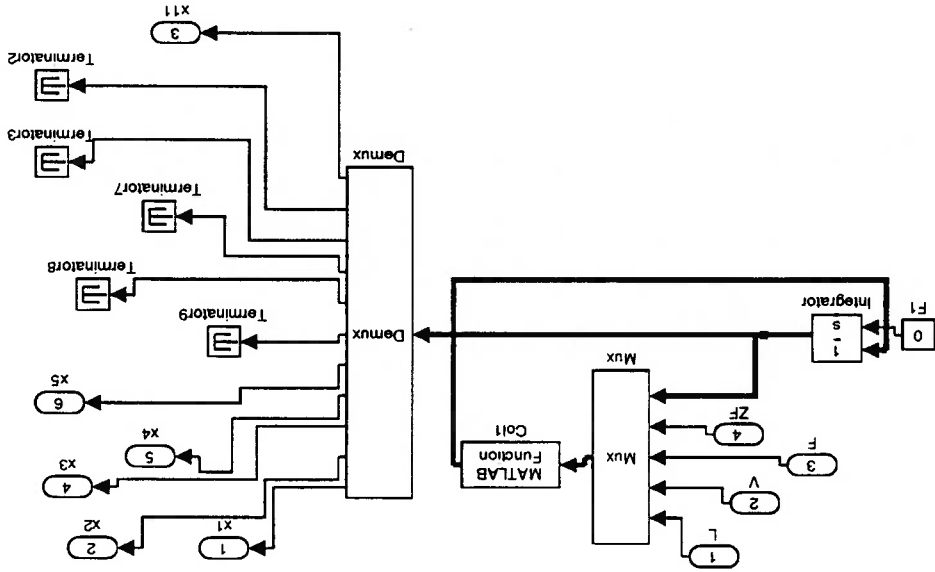


Figura 5-1 : Esquema da implementação do Modelo da Coluna de Destilação Binária.

5.1.2 Observadores Derivativos

O esquema que se usou para processar simultaneamente no SIMULINK tanto o modelo da coluna quanto os observadores derivativos para os estados x_2, x_3, x_4, x_5 , é mostrado na figura 5.2. Neste esquema as soluções tanto dos observadores derivativos para os estados

anteriormente mencionados, como para o modelo da coluna, se resolvem simultaneamente. Isto permite calcular a dinâmica dos erros de estimação até atingir o estado estacionário e ante as perturbações que acontecem nas plantas de destilação.

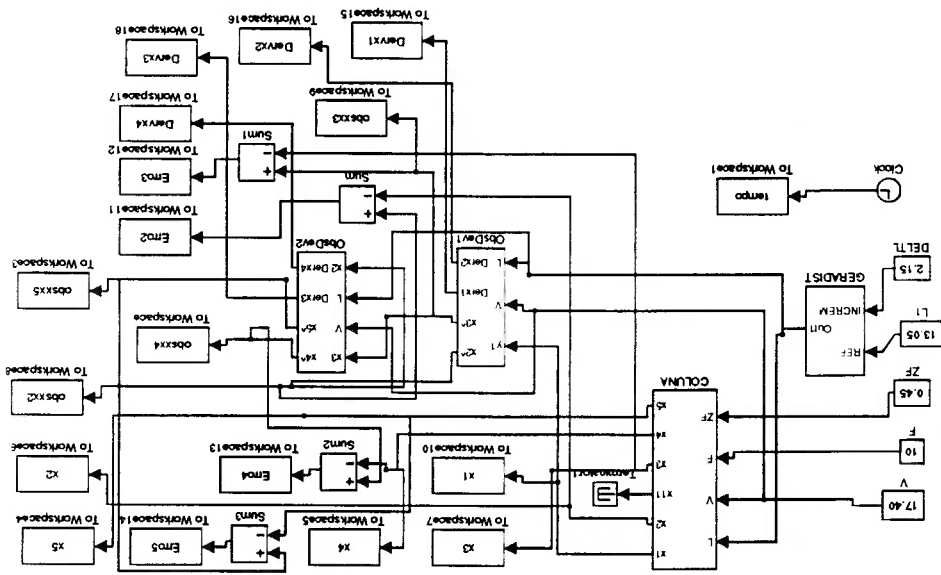


Figura 5-2: Esquema de Estimação dos Observadores Derivativos.

O esquema de cálculo do observador derivativo que estima os estados x_2, x_3 é mostrado na figura 5.3. A função que se calcula externamente no MATLAB é escrita a seguir :

```
function[out]=ObsDx2(x)
v=x(3)/40;
out(1)=(v*x(2)+x(1))/(2*v-x(1)-(v*x(2)));
delta=((x(5)*(1+x(6))-((x(4)/10)*(1+x(6)))*(x(2)-x(6)))+(x(3)/5)*x(6));
out(2)=(5*delta)/(x(3)*(1+x(6))-5*delta);
```

O algoritmo de derivação empregado foi tomado do próprio MATLAB e está disponível na biblioteca do SIMULINK. Esse mesmo esquema se repete para os estados x_4, x_5 da primeira etapa, e para os outros estados da parte inferior da coluna, que como estruturalmente representam o mesmo tipo de cálculo, não os incluímos em nosso estudo.

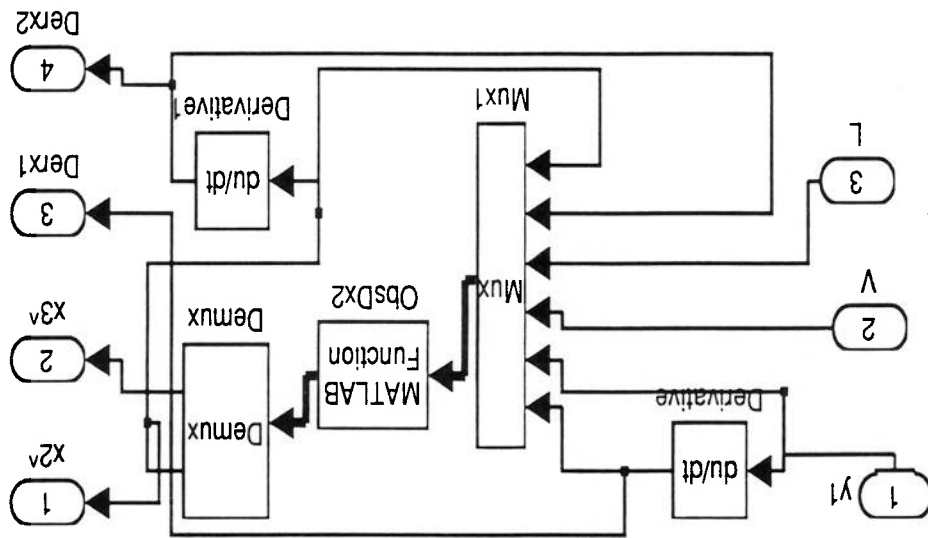


Figura 5-3: Esquema do Observador Derivativo nos Pratos 2, 3.

5.1.3 Observador Exponencial

O esquema para gerar as perturbações na planta com ruído aditivo nas saídas é mostrado

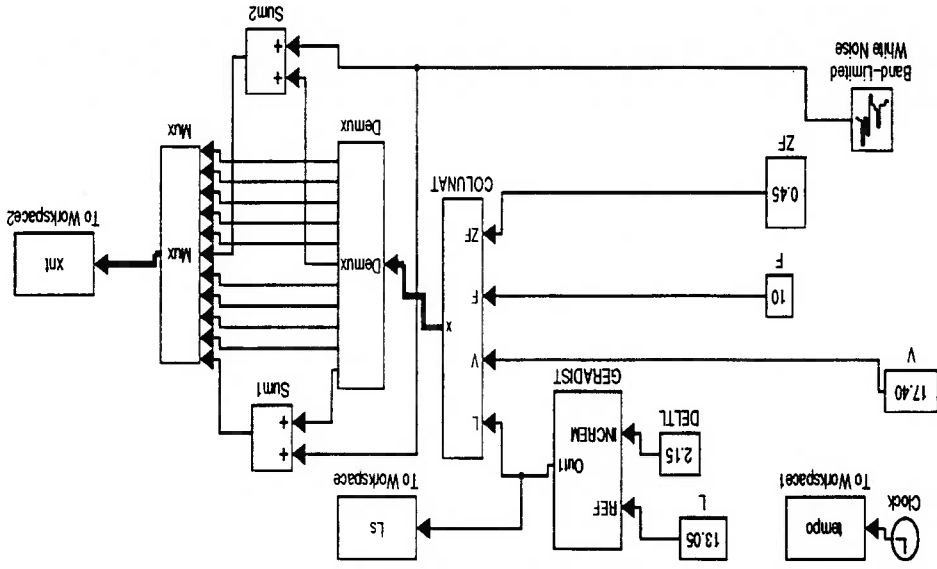


Figura 5-4: Esquema de Perturbações para a Coluna Transformada (L).

5.2 Os Estados da Coluna de Destilação Binária

Para as simulações consideramos a coluna de destilação com as características mostradas na tabela 5.1. Esta coluna de destilação binária que faz o papel de planta em nosso estudo foi considerada por vários autores nos últimos tempos (Viel et al, 1997; Takamatsu et al, 1979; Cingara e Jovanovic, 1990).

kkk=[TOR' ana];

n	11	Número de Pratos
I	6	Numero do Prato de Alimentação
F	10	Alimentação
H_1	40	Nível Líquido do Condensador
H_n	80	Nível líquido no destilador
H_i	10	Nível líquido nos outros Pratos
α	2	Volatilidade Relativa
ZF	0,45	Composição na Alimentação
L	13,05	Fluxo de Líquido
V	17,40	Fluxo de Vapor
x_1	0,90	Concentração estacionária no Condensador
x_n	0,104	Concentração estacionária no Reversador

Tabela 5-1: Constantes de Simulação.

O processo transitório a partir do instante zero, início da simulação, até que se estabeleçam os estados estacionários em todos os 11 pratos é mostrado na figura 5.1.

5.3 Observador Derivativo

5.3.1 Simulações

Na figura 5.2 descrevemos o esquema empregado para avaliar o desempenho do observador derivativo. Devido ao caráter estatístico do algoritmo destes observadores, nos pareceu mais adequado avaliar os erros de observação $\hat{x} - x$ nos diferentes pratos. Na figura 5.6 se mostra o erro de observação no segundo prato. É possível perceber que o mesmo é pequeno, e diminui com o tempo.

É importante comprovar que os estados estacionários fornecidos na literatura (Viel, 1997) são devidamente alcançados para o produto no topo e no refervedor. Também do ponto de vista da estabilidade em malha aberta comprovamos que o estado da coluna após a modelagem obedece as limitações ('constraints') físicas, isto é, está confinado no espaço de estados $\Omega_x = [0, 1]^n$, denominado o cubo das composições; e portanto para qualquer constante física das entradas, existe um ponto único de equilíbrio, que é globalmente assintoticamente estável.

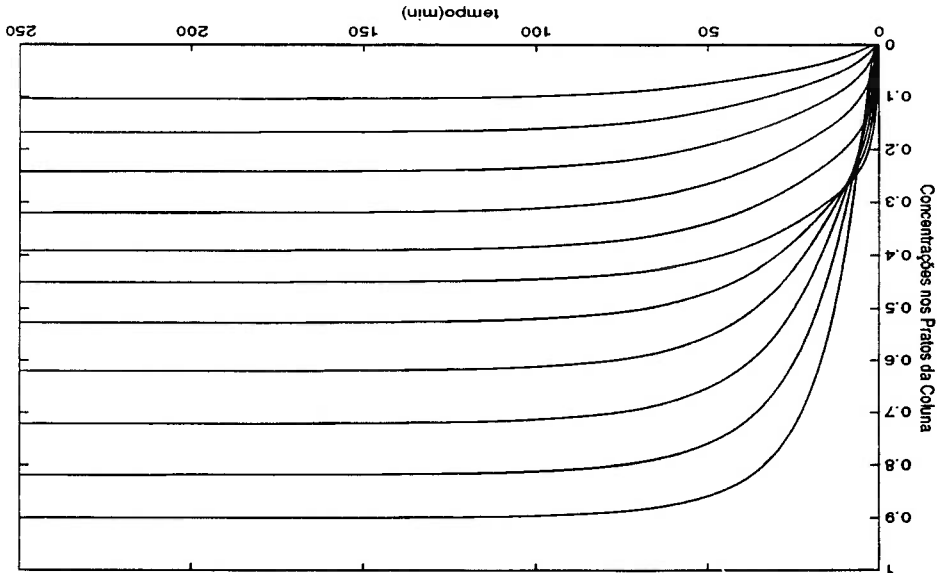


Figura 5-5: Os estados da Coluna de Destilação Binária.

Figura 5-6: Erro de observação no segundo prato.

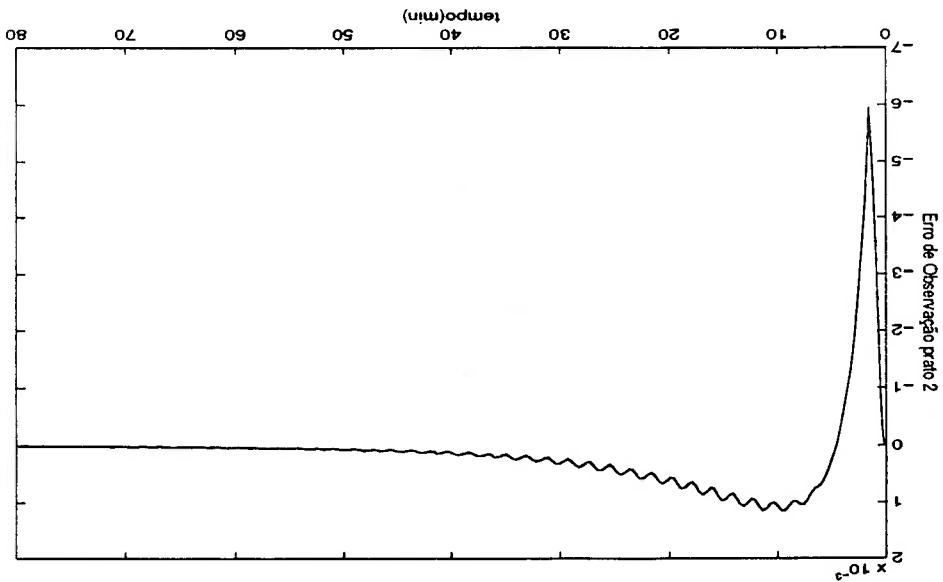
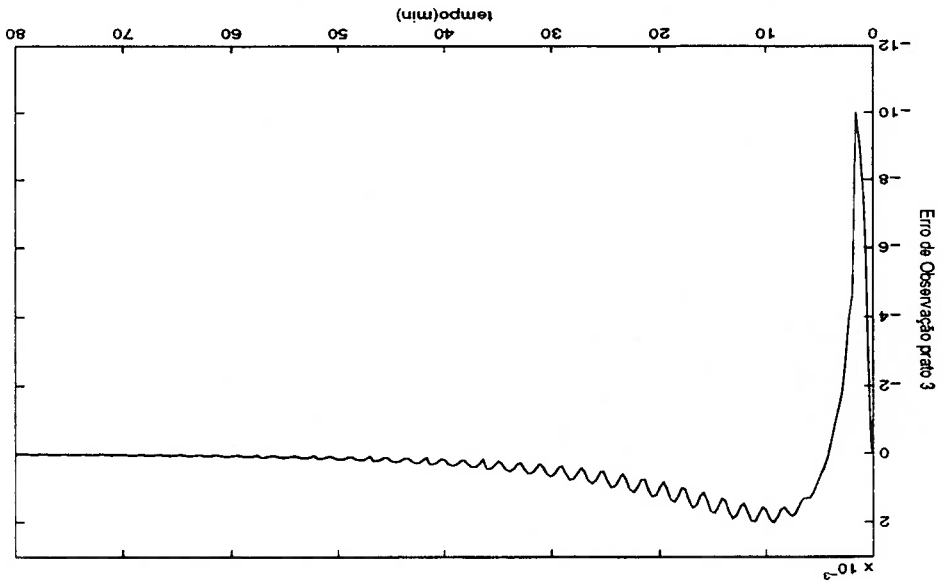


Figura 5-7: Erro de observação no terceiro prato.



Quando observamos o erro no terceiro prato, figura 5.7, vemos que o esforço de observa-

ção se incrementou, independentemente de que o erro continue sendo pequeno.

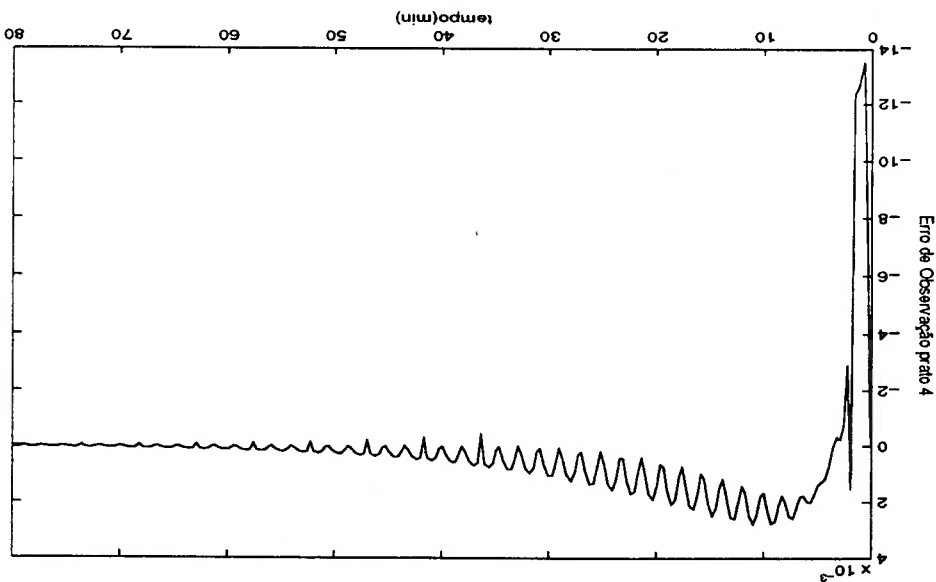


Figura 5-8: Erro de observação no quarto prato.

O pico negativo do erro cresceu com relação ao da figura 5.6. Já no quarto prato, figura 5.8, o pico negativo continua crescendo e as oscilações do erro são mais consistentes. Muito em bora o erro, como nos casos anteriores, continue pequeno. No quinto prato o erro sofre um incremento de ordem, o que denota um maior esforço para conseguir calcular o verdadeiro valor da concentração no prato. Neste caso os picos oscilam em ambas as direções, positivo e negativo, e as oscilações são mais sustentadas. De modo geral como a estrutura destes estimadores não se modifica para as duas partes da coluna, o comportamento qualitativo dos processos de estimação nos primeiros e nos últimos pratos não se modifica. A natureza estática do cálculo permite estes pequenos erros, em tempos assintoticamente pequenos para o caso da coluna em estudo. É importante repetir que a medida que nos afastamos do estado medido (saída) o erro de estimação se incrementa.

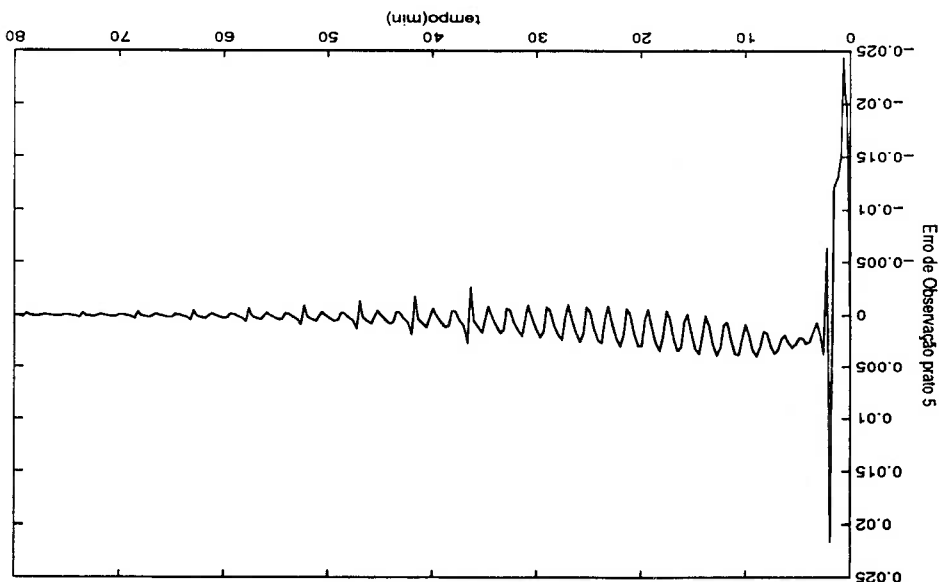


Figura 5-9: Erro de observação no quinto prato.

5.3.2 Perturbações

É um fato conhecido que nas colunas de destilação binárias acontecem perturbações onde se modifica bruscamente uma magnitude fundamental da coluna. Uma magnitude importante submetida a este tipo de modificação (Skogestad et al, 1987) é o fluxo de vapor na coluna (V). Na figura 5.10 estão representados os primeiros 5 estados e seus comportamentos quando submetidos a uma perturbação no fluxo de vapor (V) no minuto 20, uma vez atingido o estado estacionário. Na figura 5.11 é mostrado o comportamento da concentração no segundo prato (.....), assim como o cálculo feito pelo observador derivativo (---) alguns minutos depois da perturbação.

Figura 5-10: Perturbação no fluxo de vapor (V) : Pratos 1, 2, 3, 4, 5.

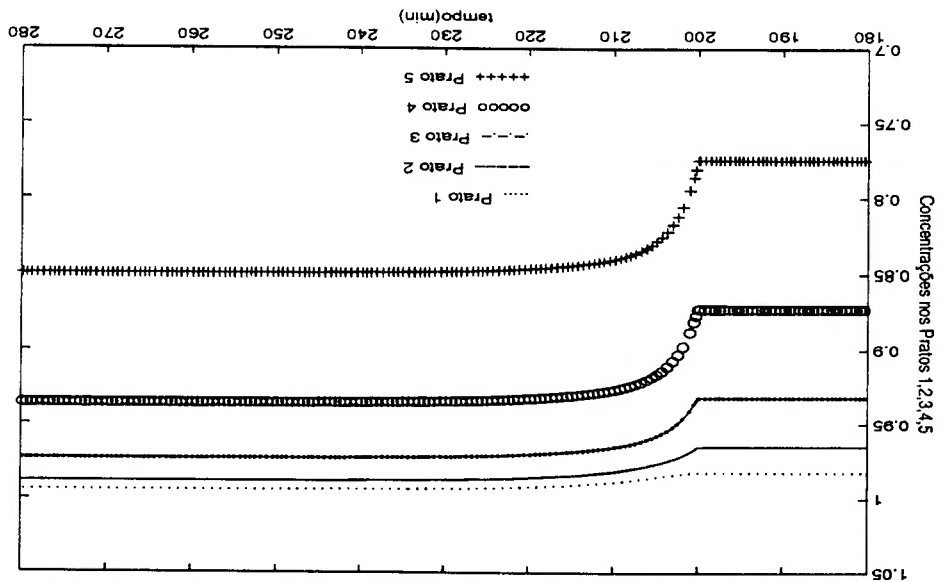
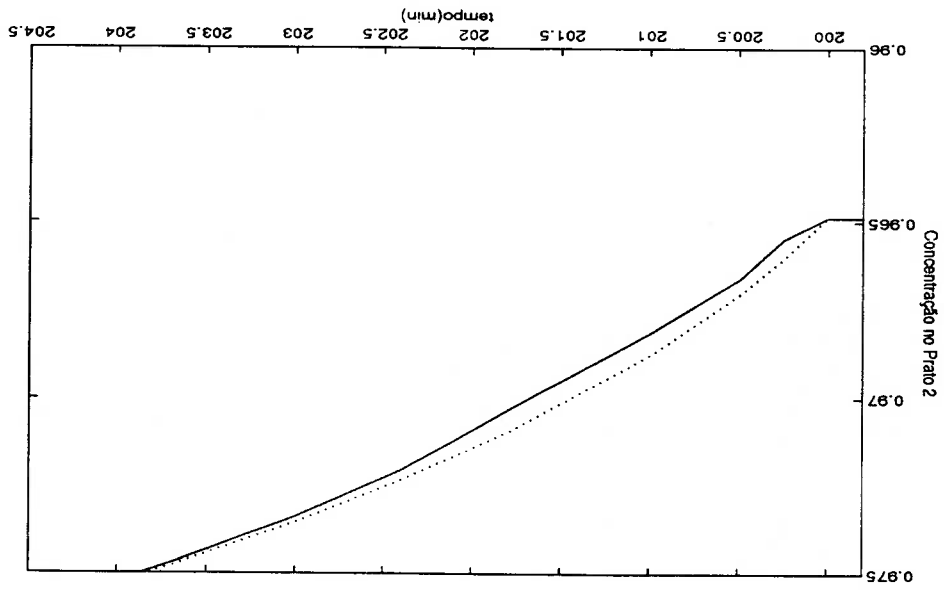


Figura 5-11: Perturbação no fluxo de vapor (V): Prato 2.



O observador consegue em pouco tempo seguir o valor da concentração no segundo prato.

Figura 5-12: Perturbação no fluxo de vapor (V): Prato 3.

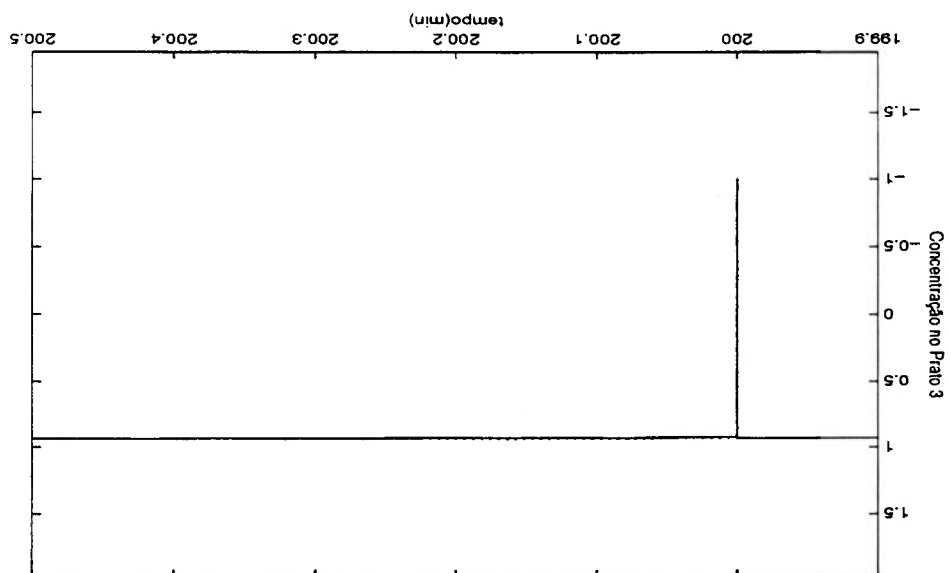
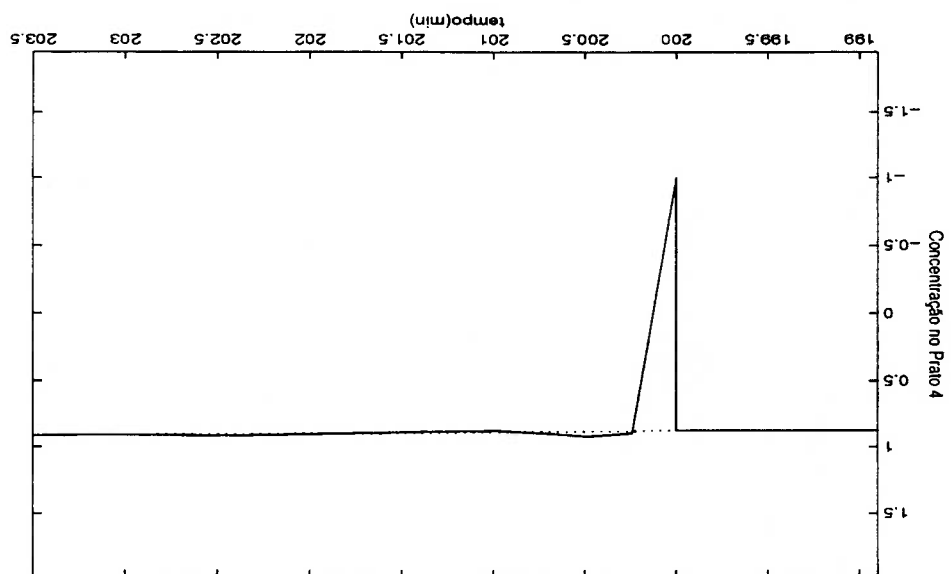


Figura 5-13: Perturbação no fluxo de vapor (V): Prato 4.



Na figura 5.12, onde representamos o processo da estimação no terceiro prato, vemos que

o algoritmo de estimação tem uma descontinuidade e afasta-se da região física das concentrações (hipercubo), propondo valores de concentrações nesse sentido físico. Esta situação se repete no quarto prato, figura 5.13, e no quinto prato, figura 5.14. Nos dois casos os estados propostos pelo observador derivativo saem da faixa física das concentrações, e conseguem com esforço crescente estimar em poucos minutos o estado da concentração no prato em estudo.

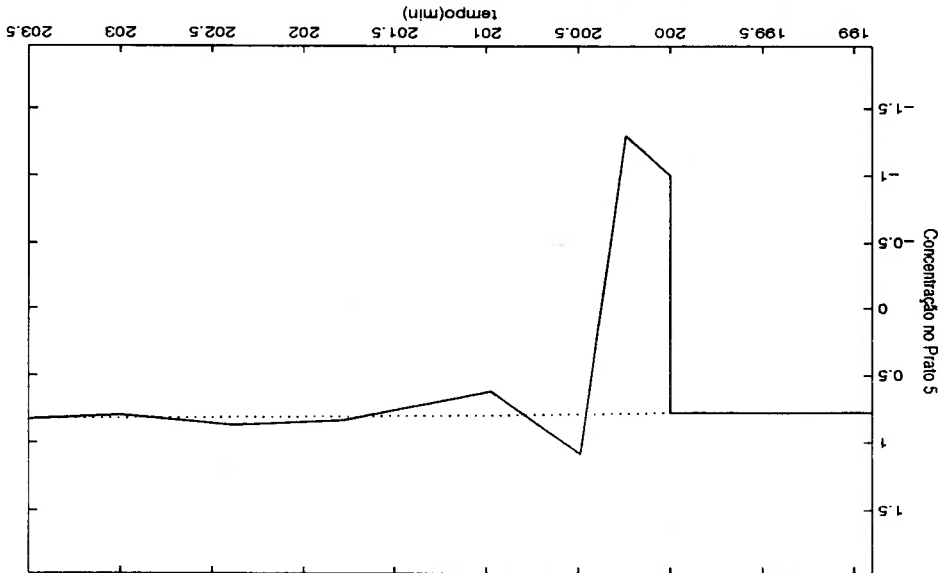


Figura 5-14: Perturbação no fluxo de vapor (V) : Prato 5.

À medida que aumentam as etapas de derivação do algoritmo se deforma mais o processo de cálculo perante modificações bruscas em magnitudes constantes do modelo da coluna. É claro que um algoritmo de controle que necessita destes estados estimados para estabelecer sua política de regulação vai ter problemas, se ele não considerar que ante perturbações as propostas do estimador podem escapar dos valores verdadeiros.

5.4 Observador Exponencial

5.4.1 Simulações

O observador exponencial tipo filtro estendido de Kalman fundamenta o processo de es-

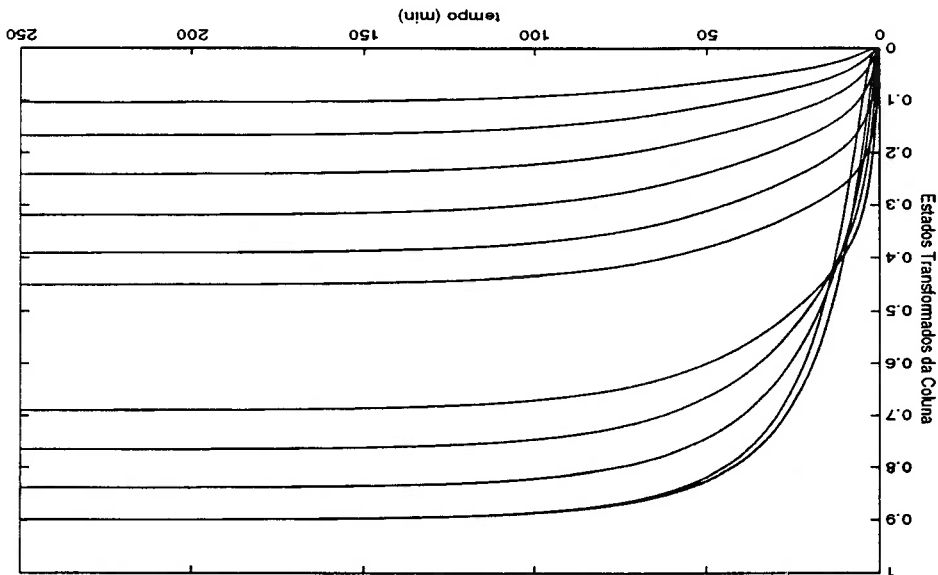


Figura 5-15: Estados após a Transformação Não-linear.

imagem dos estados da coluna de destilação binária, numa transformação não-linear dos estados. O comportamento dos estados transformados da coluna é mostrado na figura 5.15. Se compararmos a figura 5.15 com a figura 5.5 vemos que existem diferenças notáveis entre os estados transformados e os originais. Um passo obrigatório em nossas simulações foi comprovar a existência de uma correspondência biunívoca entre estes estados.

5.4.2 Estados Estimados

Na figura 5.16 mostram-se os estados estimados pelo observador exponencial, no primeiro prato e no segundo prato da coluna de destilação binária. Nestas simulações adicionou-se ruído branco nas saídas. Podemos perceber que o esforço de estimação nos primeiros pratos (2, 3, 4, 5), nas figuras 5.16 e 5.17, se incrementa à medida que se aprofunda em relação ao primeiro prato onde se realiza a medição. Não se distinguem diferenças significativas entre os pratos com relação ao tempo que o observador exponencial necessita para alcançar o estado em cada prato.

Nas figuras 5.18 e 5.19 se mostram os estados estimados pelo observador exponencial, nos pratos 10, 9, 8, e 7 da coluna de destilação binária. Nestes experimentos adicionou-se

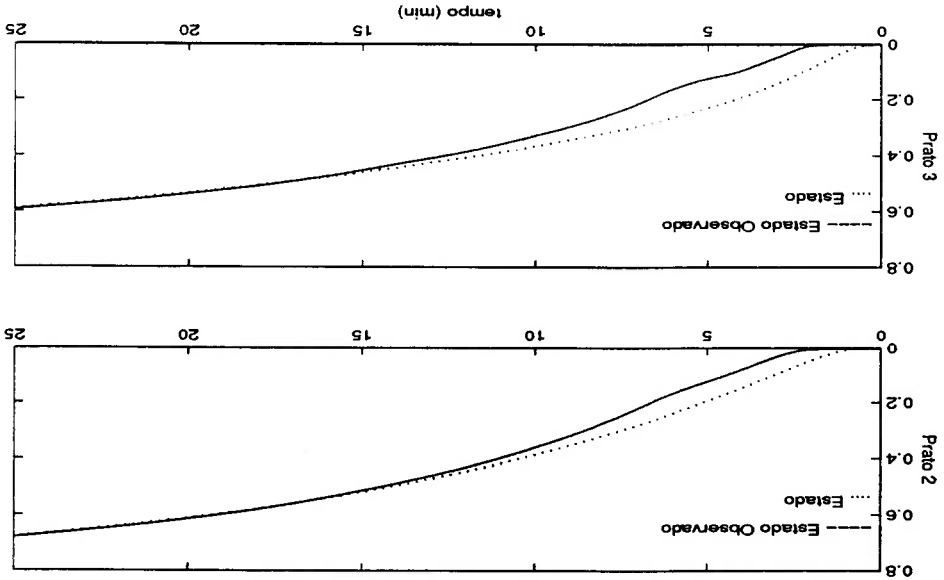


Figura 5-16: Estados estimados, com ruído.

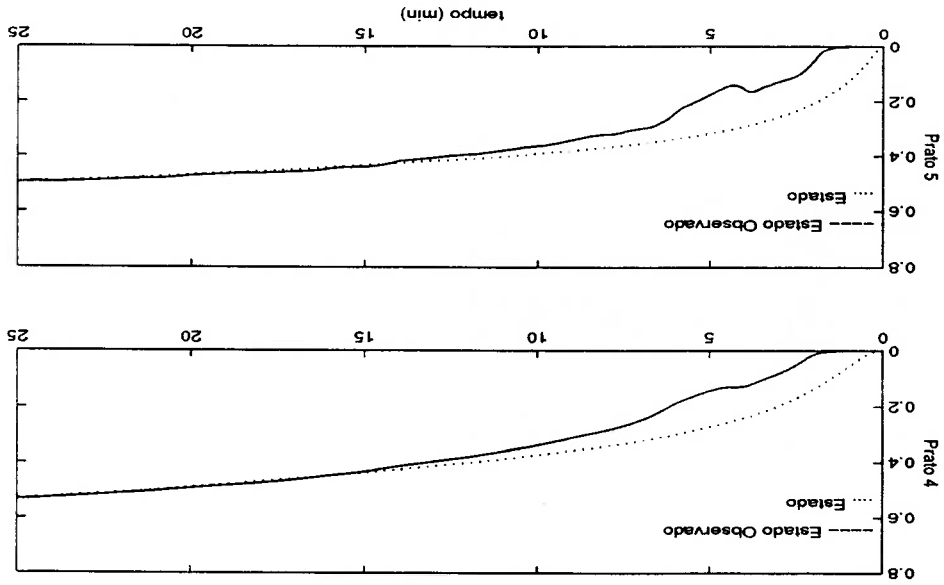


Figura 5-17: Estados estimados, com ruído.

ruído branco nas saídas. Podemos observar que existe uma determinada sensibilidade

Figura 5-18: Estados estimados, com ruído.

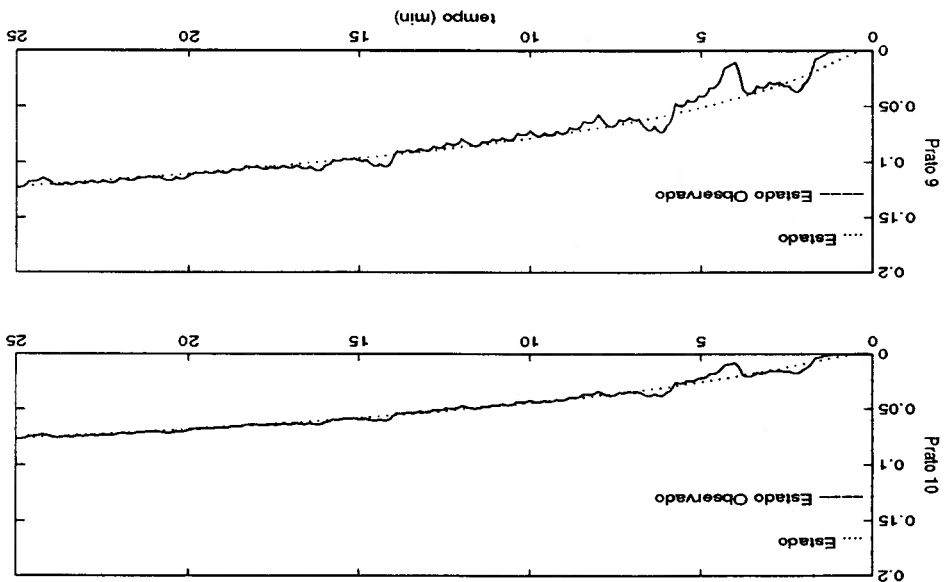
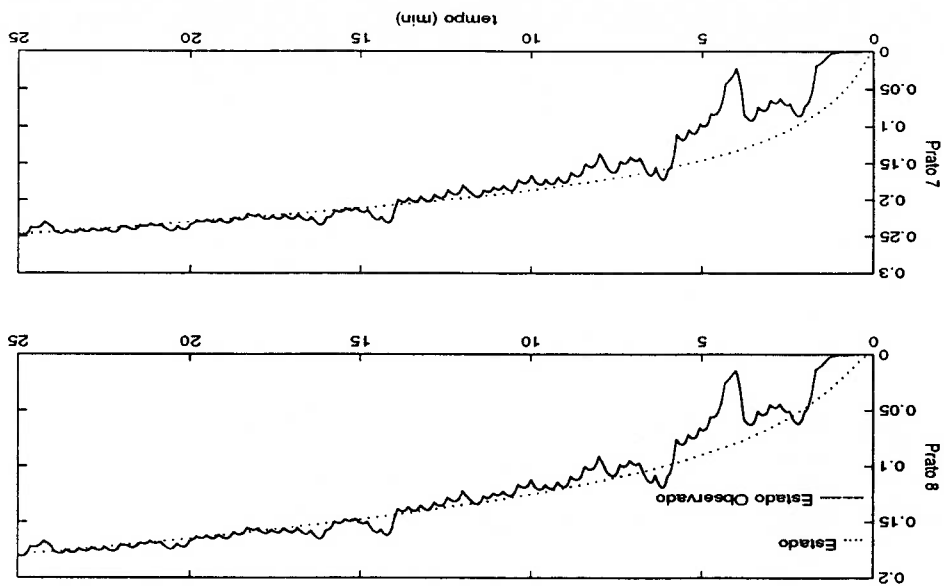


Figura 5-19: Estados estimados, com ruído.



ao ruído nos pratos inferiores da coluna. Apesar do algoritmo de cálculo (Observador) conseguir alcançar os estados da planta, surgem alguns picos nos estados mais afastados da saída medida; e percebemos uma espécie de amplificação, nesta etapa do observador, do ruído. Este fato foi notado por outros autores (Gauthier and Kupka, 1994) e é considerado uma deficiência deste observador.

5.4.3 Perturbações

Na figura 5.20 está representado o comportamento dos pratos da coluna no momento (minuto 100) em que acontece uma perturbação no fluxo líquido da coluna (L). É possível apreciar uma queda brusca nas concentrações dos pratos da coluna diante deste tipo de perturbação.

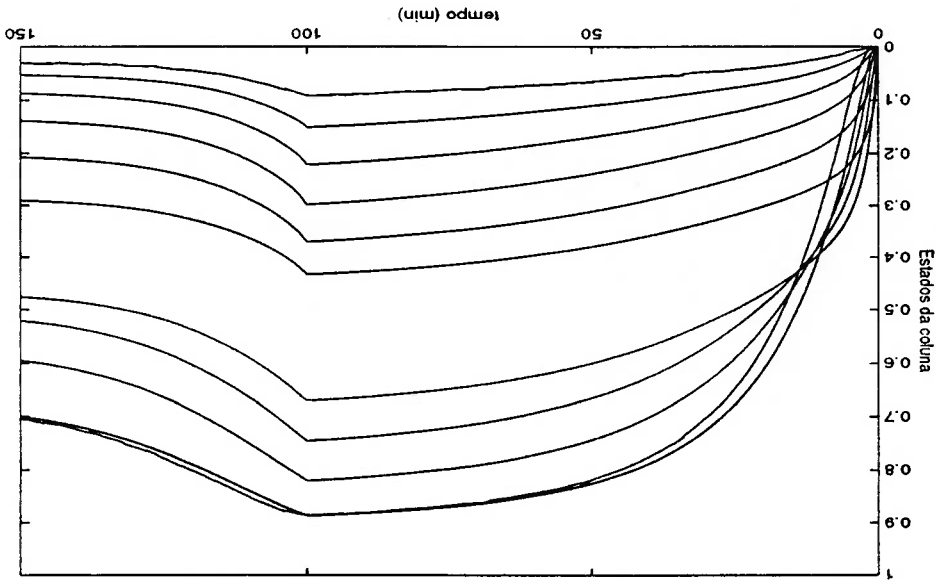


Figura 5-20: Estados da coluna, perturbada (minuto 100) no fluxo líquido (L).

Na figura 5.21 vemos que o observador consegue, mesmo com a perturbação, estimar no regime transitório a concentração no segundo e terceiro pratos. Um fato importante é que a medida que avançamos nos pratos afastados da saída, figura 5.22, a estimativa começa a deteriorar-se, mas mesmo assim a estimação ocorre, ainda que de forma precária.

Figura 5-22: Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.

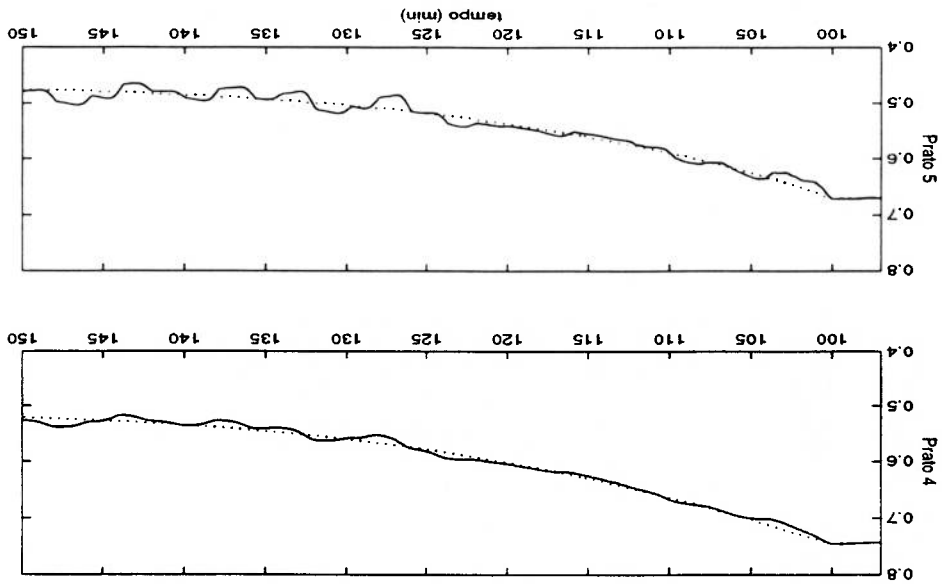
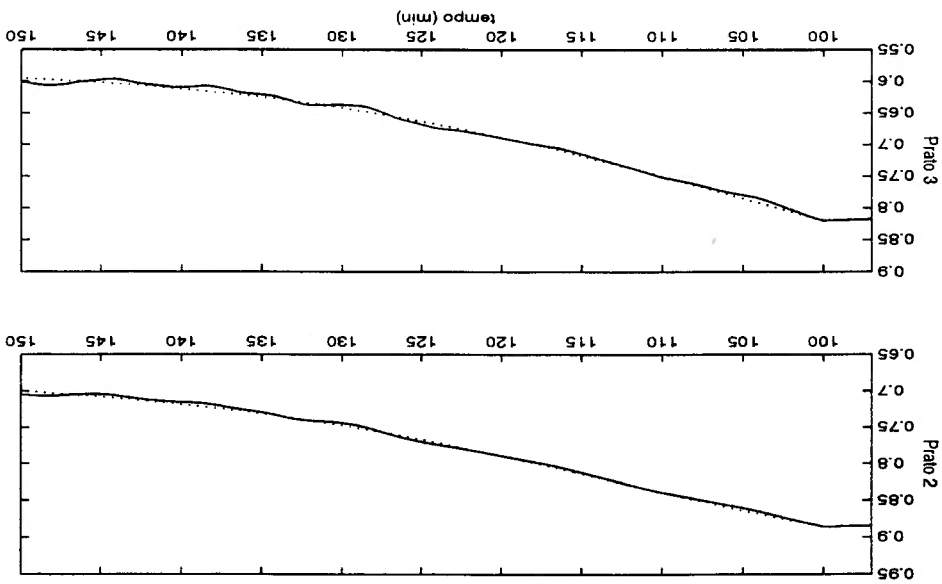


Figura 5-21: Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.



Nos pratos baixos da coluna, figuras 5.23 e 5.24, o processo de amplificação do ruído é

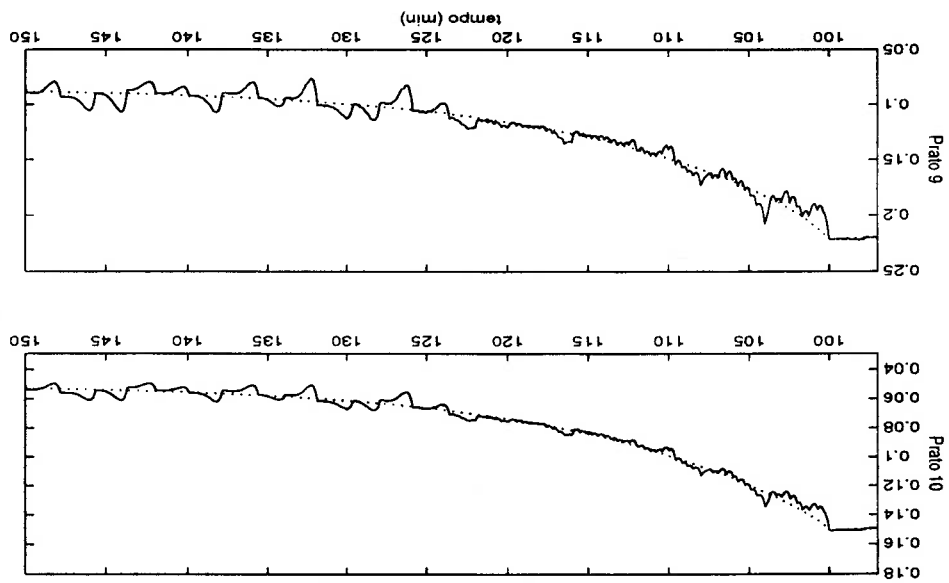


Figura 5-23: Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.

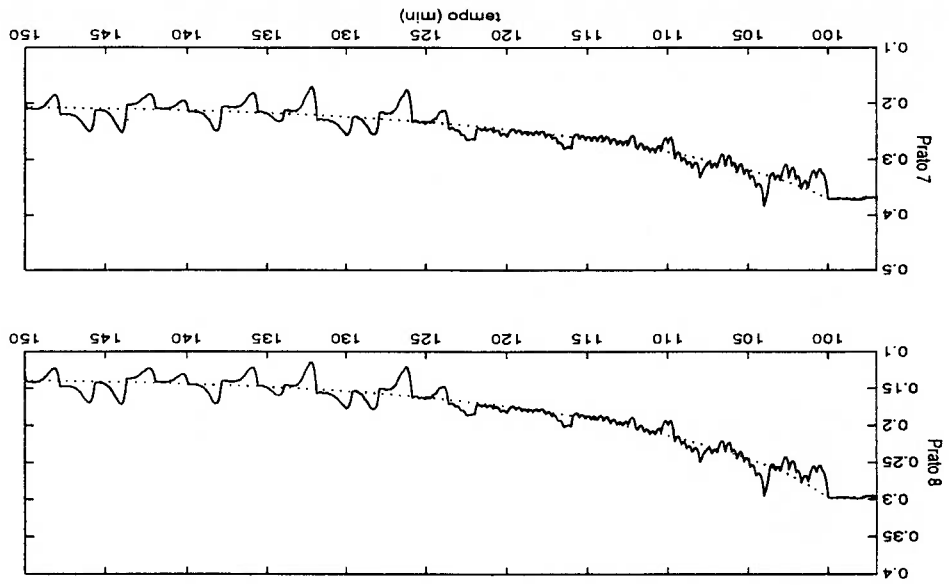
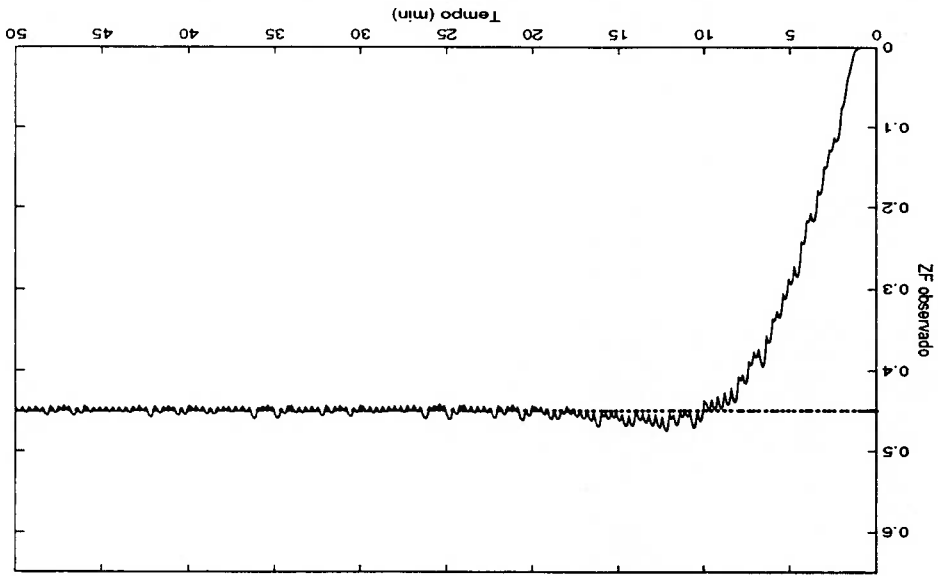


Figura 5-24: Estados estimados, com ruído, na perturbação no fluxo de líquido.

maior. Devemos ressaltar que encontramos uma assimetria no que diz respeito à influência do ruído neste observador exponencial, tipo filtro estendido de Kalman para colunas de destilação binárias. Os estados baixos da coluna são mais suscetíveis ao ruído do que os estados altos. Esta característica deste observador não tem sido reportada na literatura pois as poucas estimativas que estão registradas (Viel et al, 1997; Deza et al, 1992) apenas limitam-se aos estados seguintes das saídas, e não apresentam um estudo que contemple os estados restantes.

5.4.4 ZF é uma Constante Desconhecida

A principal virtude do observador exponencial estendido de Kalman é que além de conseguir estimar todos os estados da coluna de destilação binária, é capaz de estimar a composição na alimentação (ZF), quando a consideramos como uma constante desconhecida (Capítulo 4.4.2). Na figura 5.25 mostramos o processo de estimação da composição de alimentação pelo estado estendido no observador exponencial. Como pode ser notado este



último estado do observador sente a presença do ruído adicionado nas saídas. Necessita

um pouco menos que 20 minutos para atingir o regime estacionário no valor verdadeiro da concentração de alimentação. Na figura 5.26 temos decréscimo na planta no minuto

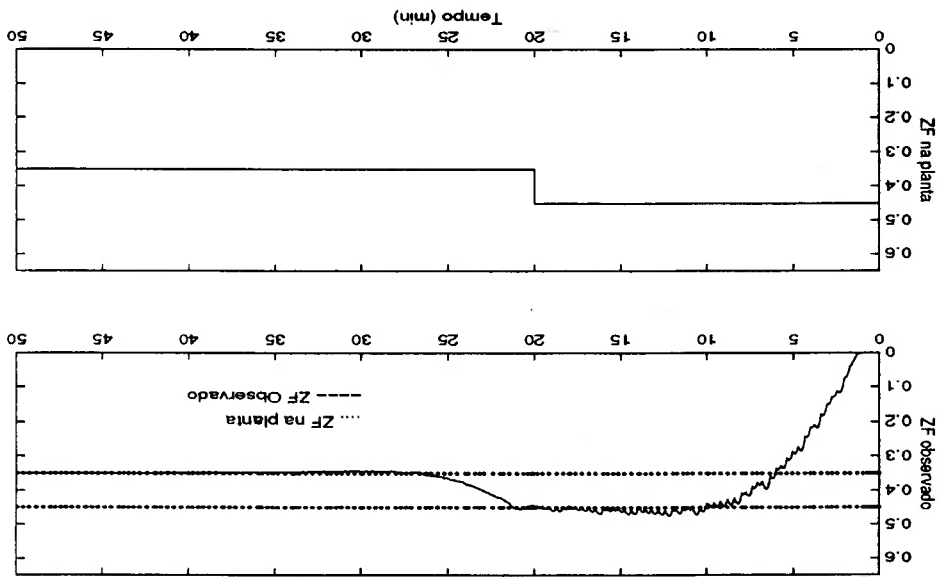


Figura 5-26: Composição de alimentação (ZF) estimada.

20, o valor da concentração de alimentação de $ZF=0,45$ até $ZF=0,35$. Não é difícil perceber que o observador em menos de 15 minutos prevê o novo valor da concentração de alimentação.

Capítulo 6

Considerações finais

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se as principais contribuições deste trabalho, assim como as conclusões a que chegamos a partir das simulações e das formulações teóricas desenvolvidas. Propõem-se assuntos para trabalhos futuros tendo em conta, aspectos que não puderam por falta de tempo, ser implementados.

6.2 Contribuições deste trabalho

As contribuições mais importantes deste trabalho são :

i) Foi feita uma revisão do problema de modelagem, simulação e estimação em colonas de destilação binárias.

ii) Foram realizadas várias simulações com a coluna de destilação binária e o observador derivativo estudado neste trabalho, e obteve-se um comportamento para o erro de estimação nos pratos que confirma as características esperadas deste observador. Além disso, encontrou-se um tipo de singularidade no processo de estimação, submetido a perturbações que reduz a eficiência deste observador como

6.3 Conclusões

Estas conclusões são baseadas no estudo dos resultados das simulações, assim como das expectativas geradas pela teoria. Elas estão divididas em conclusões relativas ao observador derivativo e ao observador exponencial tipo filtro estendido de Kalman.

Quanto ao Observador Derivativo

- i) É um observador que implementam-se com facilidade e possui pequenos erros de estimação. Também permite selecionar os estados a estimar (ordem reduzida).
- ii) O mecanismo de estimação do mesmo é estático, e portanto responde quase instantaneamente a modificações nos estados da coluna. Os tempos de resposta são bem pequenos.
- iii) Uma conclusão importante é que ante perturbações que mudam bruscamente em pequenos lapsos de tempo os estados da planta, o observador derivativo se mostra incapaz de manter-se dentro do espaço físico em que as variáveis do processo teriam sentido. Julgamos que esta ineficiência do tipo singular, o inabilita como fornecedor de estados estimados para algoritmos de controle ante tais perturbações. Isto contradiz o uso que se faz dele no trabalho de Castro (1990).
- iv) Apesar do observador derivativo não ser robusto ao ruído por sua simplicidade, continua sendo uma opção mais próxima da prática industrial do que outros observadores, cuja implementação é muito cara sob o ponto de vista dos recursos computacionais.

Quanto ao Observador Exponencial tipo filtro estendido de Kalman

- i) É um observador complicado de entender e difícil de implementar. É um observador de ordem total.
- ii) Possui pequenos erros de estimação. O mecanismo de estimação é dinâmico (re-

6.4 Trabalhos Propostos

- solve-se um sistema acoplado de equações diferenciais não-lineares (Riccati)). Os tempos de resposta são pequenos.
- iii) É mais robusto ao ruído do que o observador derivativo, mas a medida que a estimativa se afasta da variável observada (saída) o observador exponencial torna-se mais sensível e suas estimativas se deterioram em alguma medida.
- iv) Uma vez alcançadas as estimativas do estado estacionário da coluna, as perturbações na planta não conseguem deteriorar o desempenho deste observador.
- v) Possui uma grande desvantagem : o tempo de cálculo. Como seu cálculo para uma planta de 11 estados, baseia-se na solução das equações de Riccati (121) mais o modelo da planta (11), é necessário resolver simultaneamente um sistema de 132 equações diferenciais não-lineares para obter as estimativas dos estados. A solução numérica deste sistema de equações diferenciais não-lineares consome um tempo muito grande de processamento, e portanto para um número maior de pratos da coluna, a possibilidade de aplicar este observador em aplicações industriais pode ser limitada pelos custos do equipamento de cálculo.
- i) Uma direção seria aprofundar-se nas características estatísticas dos tipos de ruídos que atenuem, substituindo ou sofisticando o algoritmo de derivação, os picos ante perturbações bruscas; e com as mesmas melhoras o observador derivativo.
- ii) Desenvolver modelos reduzidos de colunas que permitam construir variantes de observadores estendidos de Kalman sub-ótimos, onde estime-se apenas um número reduzido de estados : aqueles de importância para a indústria.
- iii) Um passo importante no futuro seria construir um observador exponencial estendido de Kalman, para uma planta mais sofisticada (Luyben, 1989) do que a estudada neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVARES, Jm. B. CASTILLO and R. CASTRO, 1987, Nonlinear state space estimation and control of a binary distillation column. In Hamza, M. H. (Ed), **Proc. IAESTED Int. Symposium on Application of Control and Identification**, ACT'86, p. 161-177. ACTA, Anaheim, CA.
- [2] BALCHEN, J. G., 1990. The Stability of 2x2 multivariable control system. **Modelling Identification and Control**, v. 11, p. 97-108.
- [3] BERBER, R. and KARADURMUS, E., 1989, Dynamic simulation of a distillation column separating a multicomponent mixture. **Chem. Eng. Comm.**, 84, p. 113-127.
- [4] CASTRO, R., J. ALVARES, and J. ALVARES, 1990, Nonlinear Disturbance decoupling control of e binary distillation column. **Automatica**, v. 26, p. 567-572.
- [5] CASTRO, R. and Jm. ALVARES, 1987, Disturbance decoupling output tracking and

- state estimation for a class of nonlinear systems. *26th Conference on Decision and Control*, December 1987, Los Angeles, CA.
- [6] CHOE, Y. S. and LUYBEN, W. L., 1987. Rigorous dynamic models of distillation column-*Ind. Eng. Chem. Res.*, 26, p. 2158-2161.
- [7] CINGARA, A., and JOVANOVIĆ, M., 1990. Analytical first-order dynamic model of binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, 45, p. 3585-3592.
- [8] DEZA, F., 1991, Contribution to the synthesis of exponential observers. *Ph. D. thesis*, INSA, Rouen, France (in French).
- [9] DEZA F., BUSVELLE E., and GAUTHIER, J. P., 1992a, Exponentially converging observers and internal stability using dynamic output feedback for distillation column. *Chemical Engineering Science*, v. 47, p. 3935-3941.
- [10] DEZA F., BUSVELLE E., and GAUTHIER, J. P. and J. P. RAKOTOPARA, 1992b, High-gain estimation for non-linear systems. *Systems and Control Letters*, v. 18, p. 295-299.
- [11] DEZA F., BOSSANNE D., BUSVELLE E., GAUTHIER, J. P., 1993, Exponential observers for non-linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, p. 875-880.
- [12] GANI, R. RUIZ, C. A. and CAMERON, I. T., 1986, A generalized model for distillation column-I. Model description and applications. *Comput. Chem. Engng.*, 10, p. 181-198.

- [13] GAUTHIER J. P. and G. BORNARD, 1981, Observability for any $u(t)$ of a class of bilinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, p. 922-926.
- [14] GAUTHIER, J. P., HAMMOURI H. and OTHMAN S., 1992, A simple observer for non-linear systems, application for bioreactors. *IEEE Transactions of Automatic Control*, v. 37, p. 875-880.
- [15] GAUTHIER, J. P. and KUPKA I., 1994, Observability and observers for non-linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 32, p. 975-994.
- [16] GRASSELLI O. and A. ISIDORI, 1977, Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear control processes, in *Proc. Joint Automat. Contr. Conf., San Francisco, CA*, p. 1423-1427.
- [17] GELB ARTUR et al, 1977, *Applied Optimal Estimation*, Third printing, **The M. I. T. Press**, Massachusetts, Institute of Technology.
- [18] GARCIA C. E., PRETT D. M., MORARI M., 1989, *Model Predictive control : Theory and practice-a survey*. *Automatica*, v. 25, n. 3, p. 335-348.
- [19] GEORGE C. E., CORNELL D., 1991, A predictive control algorithm for continuous distillations columns. In: *CONGRESS ADVANCED CONTROL OF CHEMICAL PROCESSES, Zurich*. *Proceedings. IFAC, Zurich*, p. 581-586.
- [20] GOKHALE V., MUNSIH H., RIGGS J. B., 1994, Comparison of advanced distillation control techniques, In: *CONGRESS ADVANCED CONTROL OF CHEMICAL PROCESSES, Kyoto*. *Proceedings. IFAC, Zurich*, p. 351-356.

- [21] HAMMOURI H. and J. P. GAUTHIER., 1988, Bilinearization up to output injection, *Systems and Control Letters*, vol 11, p. 139-149.
- [22] HERNAN, R. and A. J. KRENER, 1977, Nonlinear Controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, p. 728-740.
- [23] JAZWINSKI A., 1970, Stochastic Processes and Filtering Theory (New York: Academic Press).
- [24] KALMAN R. E. and BUCY, R., 1961, New Results in Linear Filtering and Prediction, *Journal of Basic Engineering (ASME)*, vol. 83D, p. 95-108.
- [25] KIM Y., KIM S. Y. and KIM J. B., 1989, Adaptive control of a binary distillation column using quadratic programming. *Korean J. Chem. Engng*, v. 6, p. 306-312.
- [26] KINOSHITA, M., 1986, Simple Model for dynamic simulation of stage separation processes with very volatile components. *AIChE Journal*, 32, p. 872-874.
- [27] LEVINE J. and R. MARINO, 1983, Nonlinear systems immersion, observers and finite dimensional filters, *Systems Control Letters*, v.3, p. 47-52.
- [28] LEVINE J. and ROUCHON P., 1991, Quality control of binary distillation column via nonlinear aggregated models. *Automática*, v. 27, p. 463-480.
- [29] LEVY, R. S., FOSS, A. S. and GRENS, E. A., 1969, Response models of a binary distillation column. *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, 8, p. 765-776.
- [30] LOCKETT, J. M., 1986, Distillation tray fundamentals, Cambridge University Press.

- [31] LUYBEN, W. L., 1989, *Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. Second Edition. McGraw-Hill, New York. .
- [32] PARK, S. W. and ODLOAK D., 1996, Controle nao-linear geométrico da coluna de destilação, *I Ino Congresso Brasileiro de Engenharia Química*, ABEQ, p. 505-510.
- [33] PATWARDHAN, A. and EDGAR, T., 1991. Nonlinear predictive control of packed distillation column. *Proc. American Control Conference*, Boston, p. 767-772.
- [34] QUINTERO J. R., 1996, Controle Predictivo Generalizado Aplicado a uma coluna de destilação. *Dissertação de Mestrado*. Escola Politécnica. EPUSP. Sao Paulo.
- [35] RADEMAKER, O. J., RIJNSDORP, J. E., and MARLEVELD, A., 1975, *Dynamics and Control of continuous distillation columns*, Elsevier, Amsterdam.
- [36] ROSENBRACK H. H., 1962, A Liapunov function with application to some non-linear physical systems. *Automática*, v. 1, p. 31-53.
- [37] RUIZ, C. A. and GANI, R., 1986, Simulation and design of distillation columns part I : Hydraulic model and dynamic behavior. *Lat. Am. J. Chem. Eng. Appl. Chem.*, p. 277-205.
- [38] SANDELIN P., TOIVONEN H. T., OSTERAS M. and WALLER K. V., 1991, Robust Multiojective linear quadratic control of distillation using low-order controllers. *Chemical Engineering Science*, v. 46, p. 2815-2827.
- [39] SKOGESTAD S., 1997, *Dynamics and Control of distillation columns- a critical survey*, *Modelling, Identification and Control*, vol. 18, no. 3, p. 177-217.

- [40] SKOGESTAD, S. and LUDSTROM, P., 1990, Mu-optimal LV-Control of destillation column. *Computational Chemical Engineering*, v. 14, 4/5, p. 401-413.
- [41] SONTAG E. D., 1990, *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, New York.
- [42] TAKAMATSU, T., HASHIMOTO, I., and NAKAI, Y., 1979, A geometric approach to multivariable control system design of a distillation column. *Automática*, 15, p. 178-202.
- [43] VIEL, F. E. BUSVELLE, and J. P. GAUTHIER, 1997, A stable control structure for binary distillation columns, *International Journal of Control*, v. 67, no. 4, p. 475-505.
- [44] VIEL, F., 1994, Output feedback estabilization of non-linear systems. Application to polymerization reactors and distillations columns. *Ph.D. thesis*, University of Rouen, France (in French).
- [45] VIEL, F. BOUSVELLE E. and GAUTHIER J. P., 1995, Estabilization of polymerization reactors using I/O linearization and high-gain observer. *Automática*, v. 31, p. 971-984.
- [46] WELSCHDEL K., MCAVOY T. J., 1980, Feasibility of decoupling in conventional controlled distillation columns. *Industrial and Ingeniering Chemistry Fundamentals*, v. 19, n. 4, p. 379-384.
- [47] WILLIAMSOM D., 1977, Observability of bilinear systems, with applications to biological control, *Automática*, vol 13, p. 243-254.

- [48] WOINET R., THOMAS G. and BORDET J., 1991, Adaptive control based on pole placement: An experimental test on binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, v. 46, p. 949-957.